



HAL
open science

Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique

Ahmed Esmael

► **To cite this version:**

Ahmed Esmael. Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique. Autre. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2008. Français. NNT : 2008NAN10103 . tel-01748511

HAL Id: tel-01748511

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748511>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Université Henri Poincaré – Nancy 1

UFR STMP
Ecole Doctorale EMMA
Département de formation Doctorale Mécanique – Energétique
LEMTA – UMR 7563 CNRS, NANCY - UNIVERSITE

Thèse de Doctorat

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement par

Ahmed ESMAEL

le 14 novembre 2008

Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique

jury

<i>Président</i>	Jean Pierre BRANCHER	Professeur, INPL (Nancy)
<i>Rapporteurs</i>	Jan DUŠEK	Professeur, Université Louis Pasteur (Strasbourg)
	Ian FRIGAARD	Professeur, Université de British Columbia (Canada)
<i>Examineurs</i>	Alessandro BOTTARO	Professeur, Université de Gênes (Italie)
	Chérif NOUAR	DR, CNRS, Nancy (Directeur de thèse)
	Emmanuel PLAUT José Eduardo WESFRIED	Professeur, INPL (Nancy) DR1, CRNS (ESPCI, Paris)
<i>Invité</i>	Alain LEFEVRE	Maître de Conférences HC, INPL (Nancy)

Remerciements

Le mémoire de thèse présenté ici a été effectué au sein du Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA), UMR 7563 CNRS Nancy-Université sous la direction de Monsieur Chérif Nouar, Directeur de recherche au CNRS¹. Mes remerciements s'adressent aux personnes qui ont bien voulu m'accompagner au cours de la thèse.

J'aimerais, en premier, exprimer ma profonde gratitude à Chérif Nouar directeur de recherche au CNRS pour avoir assuré la direction de cette étude, je souhaite, également, lui exprimer mes sincères remerciements. Durant ces quatre années de thèse, sa disponibilité à toute épreuve, son soutien ainsi que son envie de partager sa passion et ses connaissances m'ont permis d'avancer dans un climat de grande confiance. Je le remercie encore pour l'aide accordée durant la rédaction de ce mémoire.

J'adresse mes respectueux remerciements à Jean-Pierre Brancher, Professeur à l'ENSEM, pour son soutien et ses bons conseils. Merci pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens à remercier Ian Frigaard, Professeur de l'Université de Colombie Britannique (Canada). J'associe à ces remerciements Jan Dušek, Professeur de l'Université Louis Pasteur (Strasbourg), tous deux m'ayant fait l'honneur de rapporter mon travail.

Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à Alessandro Bottaro, Professeur de l'Université de Gênes (Italie), et à José Eduardo Wesfried, directeur de recherche classe I au CNRS (ESPCI, Paris), ainsi qu'à Emmanuel Plaut, Professeur de l'INPL (Nancy) d'avoir accepté de faire partie du jury, d'avoir jugé ce travail et communiqué leurs remarques pertinentes.

Un chaleureux remerciement aussi à Alain Lefevre, Maître de Conférences à l'ENSEM pour sa disponibilité ces multiples conseils et pour m'avoir aidé à résoudre les problèmes techniques ainsi que sa participation à la soutenance en tant qu'invité.

Je remercie les secrétaires, informaticiens et techniciens du laboratoire spécialement "Daniel Sand" pour leur gentillesse et leur disponibilité. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance aux membres du LEMTA pour l'accueil chaleureux qu'ils

¹Centre National de Recherche Scientifique

m'ont réservé.

Dans ces remerciements, je ne voudrais pas oublier mes collègues chercheurs pour leur gentillesse et les moments agréables que nous avons pu savourer ensemble. Je pense particulièrement à A. EL Shrif, R. Arieby, M. Haboussi, A. Hamami, H. Ben Trad, A. Yahia, A. Chekila et N. Rolland. Je n'oublie pas non plus mon ami de plus longue date qui sait toujours m'apporter joie, bonne humeur, soutien, écoute, partage....., il s'agit d'Imhimmad Ismail.

Un grand merci à mon épouse Mariam qui a pris l'aventure en marche et m'a accompagnée jusqu'à son terme. Je lui suis reconnaissant de ce qu'elle m'a apporté, de son soutien jusqu'au dernier moment, de sa confiance dans mon travail....

Je terminerai par ma grande famille spécialement mes enfants, Asraa, Taha, Yassin, Anfal, ma sœur "Fatma" et finalement mon petit MUHAMMAD.

Un grand MERCI à ma mère.

ESMAEL Ahmed. Nancy, Novembre 2008.

Cette étude n'a pu être réalisée que grâce au soutien financier accordé par le ministère de l'éducation, de l'enseignement supérieur de la libye.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction	1
1.1.1	Turbulence élastique	2
1.1.2	Ecoulement chaotique induit par le caractère rhéofluidifiant	5
1.1.3	Asymétrie de l'écoulement	5
1.2	Tentative d'analyse : Objectifs de la thèse	9
1.3	Transition vers la turbulence pour des fluides Newtoniens : Turbulence inertielle	12
1.4	Plan du mémoire	15
2	Analyse linéaire de stabilité	17
2.1	Introduction	17
2.2	Equations gouvernant le problème	17
2.3	Ecoulement de base	20
2.3.1	Equations adimensionnelles	21
2.4	Formulation du problème de stabilité linéaire.	26
2.5	Comportement aux temps longs de la perturbation	35
2.6	Résolution numérique	36
2.7	Analyse des résultats et discussion	39
2.7.1	Comportement aux temps longs de la perturbation	39
2.7.1.1	Perturbation unidimensionnelle $\tilde{\alpha} = m = 0$	42
2.7.1.2	Perturbation axisymétrique $m = 0$	43
2.7.1.3	Perturbation homogène dans la direction axiale $\alpha =$ 0 et $m \neq 0$	49
2.7.1.4	Perturbation oblique $\tilde{\alpha} \neq 0, m \neq 0$	50
2.7.2	Non-normalité : Pseudospectre et image numérique	55
2.7.2.1	Cas d'une perturbation axisymétrique	56
2.7.2.2	Cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale $\tilde{\alpha} = 0$	56
2.7.2.3	Cas d'une perturbation tridimensionnelle	59
2.7.3	Croissance transitoire et perturbation optimale	60
2.8	Condition de non-augmentation de l'énergie de la perturbation	71
2.8.1	Analyse des résultats et discussion	73
2.9	Conclusion	81

3	Installation expérimentale, techniques de mesures et fluides utilisés	83
3.1	Introduction	83
3.2	Installation expérimentale	84
3.3	Techniques de mesures utilisées	87
3.3.1	Mesures des pertes de charge	87
3.3.2	Mesures des débits	88
3.3.3	Contrôle de la température du fluide	88
3.3.4	Mesures des vitesses	89
3.3.5	Détermination de la position de la paroi	92
3.4	Fluides utilisés	93
3.4.1	préparation des fluides et propriétés physico-chimiques	94
3.4.1.1	préparation de la solution de Carbopol	94
3.4.1.2	préparation de la solution de CMC7M1C	97
3.5	Caractérisations rhéologiques des fluides	97
3.5.1	Viscosité effective	97
3.5.2	Première différence de contraintes normales	98
3.6	Analyse rhéologique	99
3.6.1	Solution de CMC71MC à 2%	99
3.6.2	Solution de Carbopol 940 à 0.2%	102
3.6.3	Test de fluage	106
3.6.4	Conclusion	106
4	Résultats et discussion	109
I	Régime laminaire	111
4.1	Ecoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil	113
4.2	Ecoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide rhéofluidifiant sans seuil	120
II	Régime pré-turbulent	125
4.3	Cas de la solution de Carbopol	127
4.3.1	Transition vers la turbulence pour la solution de Carbopol : Identification d'un régime pré-turbulent	127
4.3.2	Description tridimensionnelle de l'asymétrie de l'écoulement	130
4.3.3	Approche statistique	142
4.3.3.1	Fonction de densité de probabilité	142
4.3.3.2	Facteurs de dissymétrie et d'aplatissement	144
4.3.4	Fonction d'autocorrélation	147
4.3.4.1	Analyse spectrale des fluctuations de la vitesse axiale	150
4.3.4.2	Fonctions de structure	155
4.3.5	Conclusion	158
5	Conclusion générale	161
5.1	Synthèse	161
5.2	Perspectives	164

Annexe	165
A Equation de non-augmentation de l'énergie de la perturbation	165
B Détermination du nombre de Reynolds de Metzner et Reed	167
C Cas d'un fluide rhéofluidifiant sans seuil : Solution de CMC7M1C171	
Bibliographie	175

Table des figures

1.1	La fibre de polymère produite industriellement devient rugueuse au-delà d'un certain seuil de vitesse (Journal du CNRS avril 2003).	4
1.2	(Gauche) Dispositif expérimental utilisé par Groisman et Steinberg . Le disque inférieur est fixe et le disque supérieur est mis en mouvement en imposant un couple constant. Le fluide utilisé est une solution à 80 ppm de Polyacrylamide, 65% de Saccharose et 1% de NaCl. (temps de relaxation $\lambda = 3.4$ s. (Droite) Densité spectrale d'énergie des fluctuations de la vitesse azimutale. Les courbes (1) $W_i = 4.3$; (2) $W_i = 6.3$; (3) $W_i = 9.2$; (4) $W_i = 13.6$ et (5) $W_i = 20.1$	4
1.3	Profils de la vitesse axiale à différents nombres de Reynolds défini avec la viscosité pariétale. Résultats obtenus par Escudier et Presti pour une suspension de Laponite avec $\hat{\tau}_0 = 4.4$ Pa, $\hat{K} = 0.42$ Pa.s ⁿ , $n = 0.53$. La nature du régime d'écoulement est déterminée par le taux de fluctuations (rms) de la vitesse axiale mesurée à $r/R = 0.8$ rapportée à la vitesse débitante. Dans cette figure, les symboles sont les résultats expérimentaux et le trait continu est une moyenne arithmétique des mesures expérimentales de part et d'autre de l'axe de la conduite.	6
1.4	Contours instantanés de la vitesse axiale au voisinage de la paroi pour un fluide d'Herschel-Bulkley pour deux nombres de Reynolds $Re_g = 5800$ (Haut) et $Re_g = 8130$ (Bas). Les données sont extraites d'une surface latérale qui a été déroulée. La flèche désigne le sens de l'écoulement. Les stries haute vitesse sont en blanc et les stries basse vitesse sont en noir.	9
1.5	Schéma de principe d'un processus auto-entretenu proposé par Waleffe (1997)(25)	13
1.6	Champs instantanés de vitesses observées pour un fluide Newtonien en conduite cylindrique, lors de la transition laminaire turbulent. Le nombre de Reynolds augmente de gauche à droite. (haut) expérience, (bas) théorie. Dans la zone rouge, le fluide a une vitesse axiale plus grande que celle de l'écoulement de base, au contraire, dans la zone bleue, le fluide a une vitesse plus faible (Hof et al (2004)(29)).	14
2.1	Représentation schématique du système de coordonnées.	20
2.2	Écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil.	22
2.3	Profils de viscosité effective entre la paroi et l'interface pour $n = 0.5$ et différentes valeurs de $r_0 = 0.01$ ($Hb = 0.017$), 0.1 ($Hb = 0.193$), 0.5 ($Hb = 1.73$) et 0.8 ($Hb = 6.93$).	24
2.4	Profils de viscosité effective entre la paroi et l'interface pour $r_0 = 0.1$ et différentes valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.178$), 0.5 ($Hb = 0.2029$), 0.7 ($Hb = 0.2226$) et 1 ($Hb = 0.2469$).	24

2.5	Dimension de la zone isovitesse en fonction du nombre d'Herschel-Bulkley pour $n = 0.1, 0.5$ et 1	25
2.6	Dimension de la zone isovitesse en fonction du nombre d'Herschel-Bulkley pour $n = 0.1, 0.5$ et 1	25
2.7	Schéma descriptif de la viscosité tangente.	27
2.8	Carte de stabilité de l'écoulement composé Couette-Poiseuille entre deux cylindres coaxiaux où un cylindre est fixe et l'autre se déplace axialement à vitesse constante. Dans cette figure K_p est le rapport $W_{p_{max}}/W_{c_{max}}$ où $W_{p_{max}}$ et $W_{c_{max}}$ représentent la vitesse axiale maximale pour l'écoulement Poiseuille et de Couette, respectivement (Gittler (1993)(47)).	41
2.9	Evolution du taux de croissance temporel de la perturbation en fonction de αRe , pour $n = 0.5$ et deux valeurs de $r_0 : 0.05$ et 0.1	41
2.10	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 0, \tilde{Re} = 5 \times 10^3, \tilde{Hb} = 0.433, r_0 = 0.2$ et $n = 0.5$	44
2.11	a) Variation du taux d'amortissement et b) vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds, pour $\tilde{\alpha} = 1, m = 0$ et $\tilde{Hb} = 1.73$. Les lignes pointillées montrent les variations des grandeurs $\tilde{Re}^{-1/3}, \tilde{Re}^{-1/2}$ et \tilde{Re}^{-1}	45
2.12	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 0, \tilde{Re} = 5 \times 10^3, \tilde{Hb} = 0, n = 0.5$ et $r_0 = 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$	46
2.13	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 0, \tilde{Re} = 5 \times 10^3, \tilde{Hb} = 0, 6.93, r_0 = 0.8$ et $n = 0.5$	47
2.14	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 0, Re_p = 5 \times 10^3, \tilde{Hb} = 1.65, 1.73, 1.86$ et $2, r_0 = 0.5$ et $n = 0.4, 0.5, 0.7$ et 1	47
2.15	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 0, \tilde{Re} = 5 \times 10^3, \tilde{Hb} = 1.65, 1.73, 1.86$ et $2, r_0 = 0.5$ et $n = 0.4, 0.5, 0.7$ et 1	49
2.16	Spectres de valeurs propres associées aux modes de Squire pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley pour $\tilde{\alpha} = 1, m = 0$ et $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$. (cercle plein) $r_0 = 0.1, \tilde{Hb} = 0.193$; (carré plein) $r_0 = 0.5, \tilde{Hb} = 1.73$; (losange plein) $r_0 = 0.9, \tilde{Hb} = 15.59$ et (étoile) $r_0 = 0.96, \tilde{Hb} = 41.57$	50
2.17	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 0, m = 1, \tilde{Re} = 5 \times 10^3, r_0 = 0.6, n = 0.5$ et ($\tilde{Hb} = 0, 2.6$).	51
2.18	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1, m = 1, \tilde{Re} = 3 \times 10^3, r_0 = 0.1$ et $\tilde{Hb} = 0.193$	52
2.19	Structure de l'écoulement associé au mode pariétal le moins stable : $\tilde{C} = 0.3553 - 0.0395 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.	52
2.20	Structure de l'écoulement associé à un mode central : $\tilde{C} = 0.6728 - 0.4524 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.	53

2.21	Structure de l'écoulement associé au mode d'interface le moins stable : $\tilde{C} = 0.9601 - 0.04451 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.	53
2.22	Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 2$, $\tilde{Re} = 3 \times 10^3$, $r_0 = 0.1$ et $\tilde{Hb} = 0.193$	54
2.23	Structure de l'écoulement associé au mode pariétal le moins stable : $\tilde{C} = 0.36138 - 0.04632 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.	54
2.24	Portrait spectral de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour $r_0 = 0.01$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0.017$, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$. La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E}	57
2.25	Portrait spectral de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour $r_0 = 0.8$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 6.93$, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$. La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E}	57
2.26	Portrait spectral de l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ pour $r_0 = 0.01$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0.017$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$. La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E}	58
2.27	Portrait spectral de l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ pour $r_0 = 0.8$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 6.93$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$. La courbe en tirets est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E}	58
2.28	Frontières de l'image numérique et pseudospectres pour $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$, $\tilde{Re} = 5000$, $n = 0.5$ et $\tilde{\alpha} = m = 1$ (1) $r_0 = 0.01$, $\tilde{Hb} = 0.017$; (2) $r_0 = 0.8$, $\tilde{Hb} = 6.93$	59
2.29	Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$, $n = 1$, $\tilde{Re} = 3000$ et deux valeurs de r_0 : 0.01 $\tilde{Hb} = 0.02$; $r_0 = 0.2$ $\tilde{Hb} = 0.5$	63
2.30	Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$, $n = 1$, $\tilde{Re} = 3000$ et deux valeurs de r_0 : 0.01 $\tilde{Hb} = 0.02$; $r_0 = 0.2$ $\tilde{Hb} = 0.5$. Le cas Newtonien est donné par Meseguer (2000)(58)	63
2.31	Evolution du nombre d'onde axial $\tilde{\alpha}_{opt}$ en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$	64
2.32	Evolution du nombre d'onde azimutal m_{opt} en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$	64

2.33	(Gauche) Evolution du nombre d'onde axial $\tilde{\alpha}_{opt}$ en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, zoom de la figure (2.31). (Droite) Evolution du nombre d'onde azimutal m_{opt} en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, zoom de la figure (2.32).	65
2.34	(a) La projection de la perturbation optimale sur la base des modes propres. Les modes sont numérotés du moins amorti au plus amorti. (b) Spectre des valeurs propres pour $n = 0.5$, $r_0 = 0.001$, $\tilde{Hb} = 0.0017$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 2$ correspondant à la figure (a).	66
2.35	(a) La projection de la perturbation optimale sur la base des modes propres. Les modes sont numérotés du moins amorti au plus amorti. (b) Spectre des valeurs propres pour $\tilde{n} = 0.5$, $r_0 = 0.2$, $\tilde{Hb} = 0.433$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.24$ et $m = 4$ correspondant la figure (a).	67
2.36	Perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0$, 0.0017 , $r_0 = 0.001$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.1$ et $m^{opt} = 2$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 2680.78$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 104.44$. (Droite) champs de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.	68
2.37	Perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0$, 0.443 , $r_0 = 0.2$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.24$ et $m^{opt} = 4$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 1812.99$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 55.52$. (Droite) champs de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.	69
2.38	Perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0$, 1.73 , $r_0 = 0.5$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.45$ et $m^{opt} = 6$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 798.51$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 33.53$. (Droite) champs de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.	69
2.39	Variation de $\tilde{G}^{opt}/\tilde{Re}^2$ en fonction de \tilde{Hb} pour $n = 0.5$	70
2.40	Variation de $\tilde{t}^{opt}/\tilde{Re}$ en fonction de \tilde{Hb} pour $n = 0.5$	70
2.41	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{Hb} = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.001$	74
2.42	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{Hb} = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.01$	74
2.43	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{Hb} = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.1$	75
2.44	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{Hb} = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.5$	75
2.45	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{Hb} = 0$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.1$	77
2.46	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 0.193$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.1$	77
2.47	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 0.74$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.3$	78
2.48	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 1.73$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.5$	78

2.49	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 6.928$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.8$	79
2.50	Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 23.37$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.93$	79
2.51	Variation du nombre de Reynolds critique Re_{CE} en fonction du nombre de $\hat{H}b$ et $n = 0.5$	80
2.52	Evolution des nombres d'ondes axial et azimutal m_c et $\tilde{\alpha}_c$ en fonction du nombre de $\hat{H}b$ et $n = 0.5$	80
3.1	Schéma de l'installation expérimentale, profil de vitesse axiale et système de coordonnées.	85
3.2	Longueur d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite cylindrique pour $n = 0.5$ et deux valeurs de r_0 : 0.1 (courbe b) et 0.5 (courbe c). Le cas Newtonien est représenté par la courbe (a).	86
3.3	Longueur d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide en loi puissance dans une conduite cylindrique calculée par l'expression (3.6) pour différentes valeurs de n : 0.7 (courbe b) et 0.5 (courbe c) 0.3 (courbe d). Le cas Newtonien est représenté par la courbe (a).	88
3.4	Positions azimutales des différents diamètres suivant lesquels les profils de vitesse axiale ont été mesurés.	89
3.5	Mesure de vitesse par vélocimétrie laser Doppler.	90
3.6	Forme du signal résultant d'un passage de particules dans le volume de mesure : bouffée Doppler.	93
3.7	Histogrammes des vitesses instantanées montrant le repérage de la paroi.	94
3.8	Dispersion des micro-gels selon la concentration en masse de Carbopol 940.	96
3.9	Structures de la cellulose et de la carboxyméthylcellulose de Sodium.	97
3.10	Géométrie de mesure.	98
3.11	Evolution de la viscosité effective en fonction du cisaillement pour la solution de CMC à 2% en masse. Les symboles sont les données expérimentales et le trait continu est une interpolation par le modèle de Cross : ($\mu_0 = 0.253$ Pa.s, $\mu_\infty = 1.65 \times 10^{-3}$ Pa.s, $k = 3.19 \times 10^{-3}$ s).	100
3.12	Evolution de la première différence des contraintes normales en fonction de la contrainte de cisaillement pour une solution de CMC à 2% en masse.	101
3.13	Modification de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de CMC pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence.	101
3.14	Comportement rhéologique de la solution de Carbopol à 0.2% décrit par le modèle de Herschel-Bulkley avec les paramètres rhéologique ($\tau_0 = 28.1$ Pa, $K = 6.37$ Pa.s ⁿ et $n = 0.45$).	103
3.15	Evolution de la première différence des contraintes normales en fonction de la contrainte de cisaillement pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse.	104
3.16	Modification de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de Carbopol 940 pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence.	104
3.17	Essais de fluage pour une solution de Carbopol à 0.2%. La courbe 3 Pa marque la contrainte à partir de laquelle un changement de phase est observé pour un essai limité à 120 s	105

3.18	Variation de la contrainte en fonction de la déformation asymptotique.	105
4.1	Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.s ⁿ , $n = 0.46$, $Hb = 0.276$, $r_0 = 0.11$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds, $Re_p = 367$ ($\hat{W}_d = 1.657$ m/s), $Re_p = 1285$ ($\hat{W}_d = 3.584$ m/s). Les données expérimentales sont représentées par des cercles et le profil théorique est représenté en trait continu.	115
4.2	Comportement rhéologique de la solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse avec des paramètres rhéologiques ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.s ⁿ et $n = 0.46$).	115
4.3	Profils du taux de fluctuations de la vitesse axiale pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.s ⁻ⁿ , $n = 0.46$, $Hb = 0.276$, $r_0 = 0.11$, $r_1 = 0.32$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds, $Re_p = 367$ ($\hat{W}_d = 1.657$ m/s), $Re_p = 1285$ ($\hat{W}_d = 3.584$ m/s).	117
4.4	Evolution des pertes de charge en fonction du débit pour une solution de Carbopol 0.2% en masse.	118
4.5	Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale pour une solution de Carbopol à 0.2%; ($\tau_0 = 11.64$ Pa, $K = 2.84$ Pa.s ⁻ⁿ et $n = 0.49$).	119
4.6	Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds de Metzner et Reed pour une solution de Carbopol à 0.2%; ($\tau_0 = 11.64$ Pa, $K = 2.84$ Pa.s ⁻ⁿ et $n = 0.49$).	119
4.7	Profils de vitesse axiale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0204$ Pa.s, $\mu_\infty = 20.27$ mPa.s, $k = 2.84$ ms, $m' = 0.74$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds $Re_p = 635$ et $Re_p = 1455$. Les données expérimentales sont représentées par des cercles et le profil théorique est représenté en trait continu.	121
4.8	Profils du taux de fluctuations de la vitesse axiale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0204$ Pa.s, $\mu_\infty = 20.27$ mPa.s, $k = 2.84$ ms, $m' = 0.74$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds $Re_p = 635$ et $Re_p = 1455$	121
4.9	Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0405$ Pa.s, $\mu_\infty = 14.31$ mPa.s, $k = 1.46$ ms, $m' = 0.74$).	122
4.10	Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.5$, $\hat{K} = 3$ Pa s ⁿ , $\hat{\tau}_0 = 10$ Pa pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000$ s ⁻¹). Les mesures ont été effectuées le long d'un diamètre vertical à $\hat{z} = 122\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales. Le trait continu est le profil symétrique construit en prenant la moyenne arithmétique des vitesses mesurées de part et d'autre de l'axe de la conduite.	128
4.11	Fluctuations de la vitesse axiale rapportée à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition. Mêmes paramètres rhéologiques que la figure (4.10).	129
4.12	Ecart entre le profil de vitesse axiale mesurée suivant la direction verticale $\frac{3\pi}{2}$ et le profil moyen pour différents nombres de Reynolds à travers la section de la conduite.	131
4.13	Ecart entre le profil de vitesse axiale mesurée suivant la direction verticale $\frac{3\pi}{2}$ et le profil moyen pour différents nombre de Reynolds à position radiale $r = 0.7$	131

4.14 Evolution des taux de fluctuations en fonction du nombre de Reynolds à différentes positions radiales et à une position azimutale $\theta = \pi/4$. Durant la première phase, les fluctuations de la vitesse axiale dans la zone centrale (points rouges et triangles verts) restent au même niveau que le laminaire. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.5$, $\hat{K} = 3.2 \text{ Pa s}^n$ et $\hat{\tau}_0 = 10 \text{ Pa}$ 132

4.15 Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.49$, $\hat{K} = 3.72 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 13 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 1500 \text{ s}^{-1}$). Les mesures ont été effectuées dans un plan horizontal $\hat{z} = 20\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales, le trait continu est le profil symétrique. 133

4.16 Fluctuation de la vitesse axiale rapportée à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition. 134

4.17 Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.48$, $\hat{K} = 4.12 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 15.2 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 20\hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$. 134

4.18 Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.51$, $\hat{K} = 3.56 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 11.1 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 54\hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$. 135

4.19 Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.51$, $\hat{K} = 2.96 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 7.9 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 122\hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$. 135

4.20 Variation azimutale de \hat{W}_s/\hat{W}_d pour trois positions axiales : (■) $\hat{z} = 20\hat{D}$, (◀) $\hat{z} = 54\hat{D}$ et (●) $\hat{z} = 122\hat{D}$ 136

4.21 Contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour trois positions axiales $\hat{z} = 20\hat{D}$, $\hat{z} = 54\hat{D}$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et un nombre de Reynolds $Re_p = 2420$. L'écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue). Mêmes paramètres rhéologiques que les figures (4.17), (4.18) et (4.19) 137

4.22 Contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour une position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour deux nombres de Reynolds. L'écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue). 138

4.23 Perturbation optimale à $Re_p = 2425$, $\tilde{H}b = 0.19$, $r_0 = 0.1$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 1.2$ et $m^{opt} = 2$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 96.14$ atteinte à $\tilde{t}^{opt} = 8.98$. (Gauche) champs de vitesse $u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Droite) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , (rouge) valeurs positives et (bleue) valeurs négatives. 139

4.24 Perturbation sous forme de rouleaux longitudinaux. (Gauche) champs de vitesse $u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Droite) contours de la composante axiale de la vitesse (rouge) valeurs positives et (bleue) valeurs négatives $Re_p = 2425$, $Hb = 0.19$, $r_0 = 0.1$ et $n = 0.5$ 139

4.25 Contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour une position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$. L'écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue). 140

4.26	Description qualitative du processus de transition dans un diagramme de phase qui décrit le taux de dissipation d'énergie en fonction du taux d'énergie fournie au fluide. Le point (1) correspond à l'écoulement unidimensionnel laminaire, linéairement stable. Il constitue un attracteur global pour $Re \leq Re_{c1} \approx 1850$. Le point (2) représente les valeurs moyennes de D et I pour l'état non linéaire asymétrique. Le point (3) correspond à l'écoulement turbulent moyen. Les bifurcations noeud-col entre deux états sont schématisées par des croix.	141
4.27	Signaux de la vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse pour différents nombres de Reynolds dans la lère phase de transition (pré-turbulent) au voisinage du centre de la strie haute vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$) et du centre de la strie basse vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$). La tête optique du laser est à $\theta_\ell = 7\pi/4$	143
4.28	Zoom sur les signaux de vitesse de la figure (4.27) à $Re_p = 4369$ et 4610	143
4.29	Décomposition du signal $w(t)$ à $Re_p = 4369$ ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$) en deux échelles temporelles. (Gauche) grande échelle. (Droite) petite échelle. La vitesse locale moyenne est de 9.4 m/s	144
4.30	Fonction de densité de probabilité pour différentes valeurs de Re_p au voisinage du centre de la strie haute vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$). Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.52$, $\hat{K} = 2.0 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 6.97 \text{ Pa}$	145
4.31	Fonction de densité de probabilité pour différentes valeurs de Re_p au voisinage du centre de la zone basse vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$). Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.50$, $\hat{K} = 3.0 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 9.2 \text{ Pa}$	145
4.32	Facteur de dissymétrie en fonction de Re_p à $r = 0.7$ et différentes positions azimutales.	146
4.33	Facteur d'aplatissement en fonction de Re_p à $r = 0.7$ et différentes positions azimutales.	146
4.34	Illustration de l'interpolation par bloqueur.	148
4.35	Fonction d'autocorrélation pour différentes valeurs de Re_p à $r = 0.7$ et $\theta = 7\pi/4$. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.51$, $\hat{K} = 2.4 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 6.97 \text{ Pa}$	149
4.36	Fonction d'autocorrélation pour différentes valeurs de Re_p à $r = 0.7$ et $\theta = 3\pi/4$. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.48$, $\hat{K} = 3 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 9.16 \text{ Pa}$	149
4.37	Densité spectrale d'énergie à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour différentes valeurs de Re_p	152
4.38	Densité spectrale d'énergie à $r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour différentes valeurs de Re_p	152
4.39	Densité spectrale d'énergie à $\hat{z} = 122\hat{D}$ pour des valeurs de Re_p autour de 3700 et quatre positions angulaires. (a) $r = 0.8$ et $\theta = 7\pi/4$; (b) $r = 0.7$ et $\theta = 0$; (c) $r = 0.8$ et $\theta = \pi/4$; (d) $r = 0.7$ et $\theta = 3\pi/4$	153
4.40	Représentation de la fonction de structure S_3 en fonction de la fréquence à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ pour un nombre de Reynolds $Re_p = 2531$ correspondant à la courbe (a) figure (4.37).	156
4.41	Représentation des fonctions de structures $S_p^{ \delta w }$ d'ordre p ; $1 \leq p \leq 6$, pour un nombre de Reynolds $Re_p = 3918$ à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$	157
4.42	ζ_p/ζ_3 en fonction de p pour un nombre de Reynolds $Re_p = 3918$ à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$	157

-
- C.1 Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de CMC à 2% en masse, ($m' = 0.67$, $k = 7.6$ ms, $\mu_0 = 0.5164$ Pa, $\mu_\infty = 32.46$ mPa.s) pour $\hat{\gamma}_v = 0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000$ s⁻¹). Les mesures ont été effectuées le long d'un diamètre vertical à $\hat{z} = 122\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales. Le trait continu est le profil symétrique construit en prenant la moyenne arithmétique des vitesses mesurées de part et d'autre de l'axe de la conduite. 172
- C.2 Fluctuations de la vitesse axiale rapportées à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition. Mêmes paramètres rhéologiques que la figure (C.1). . . 173

Liste des tableaux

2.1	La 1 ^{ère} , 10 ^{ème} et 15 ^{ème} valeur propre pour différentes valeurs de N pour $r_0 = 0.5$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$ et $\tilde{H}b = 1.73$	38
2.2	Nombres de Reynolds critiques pour des valeurs particulières de $\tilde{H}b$ et n	76
3.1	Caractéristiques optiques et géométriques du système de vélocimétrie laser Dop- pler utilisé.	92
4.1	Tableau montrant l'évolution de l'échelle intégrale en fonction de Re_p	150

Liste des symboles

Lettres latines

\hat{K}	Consistance du fluide
\mathcal{M}	Couple imposé
\hat{Q}_v	Débit volumique
\mathcal{S}	Densité spectrale d'énergie
\hat{D}_f	Diamètre du faisceau de la vélocimétrie laser
\hat{r}, \hat{z}	Direction radiale et axiale de l'écoulement
F	Facteur d'aplatissement
S	Facteur de dissymétrie
S_p	Fonction de structure
$\mathcal{R}_{ww}(\tau)$	Fonction d'autocorrélation
F_z	Force Normale
F_D	Fréquence de la lumière diffusée par la particule
\tilde{C}	Fréquence complexe
n	Indice de structure de l'écoulement pour le modèle de Herschel-Bulkley
m'	Indice de structure de l'écoulement pour le modèle de Cross
\hat{u}_p	La composante de la vitesse perpendiculaire au plan des franges
\hat{d}	La distance entre deux faisceaux
$\hat{\ell}_p$	La distance entre deux prises de pression
\hat{L}_p	La distance focale
$\hat{\ell}_0$	La longueur d'onde de la lumière du laser Doppler
\hat{L}	Largeur totale de la conduite cylindrique
\hat{L}_e	Largeur d'établissement de l'écoulement laminaire
M	Masse moléculaire

E	Module de Young
m	Nombre d'onde azimutal
\mathcal{L}_{os}	Opérateur d'Orr-Sommerfeld
\mathcal{L}_{sq}	Opérateur de Squire
G_{max}	Amplification de l'énergie de la perturbation
G_{opt}	Perturbation optimale
N_1	Première différence des contraintes normales
\hat{R}	Rayon de la conduite
\hat{r}_v	Le fluide a un comportement visqueux pour $\hat{r}_v \leq \hat{r} \leq \hat{R}$
\hat{r}_0	Rayon apparent de la zone non cisailée
\hat{r}_f	Rayon qui délimite la zone où la viscosité est dominée par le $\hat{\tau}_0/\hat{\gamma}$ à $\hat{r}_v = \hat{r}_f$, $\hat{r}_0 = \hat{K}\hat{\gamma}_f$
k	Temps de relaxation
$\mathcal{I}(\mathbf{u})$	Terme d'inertie
$\mathcal{V}(\mathbf{u})$	Terme de dissipation visqueuse
$\mathcal{A}(\mathbf{u})$	Termes d'anisotropie
\tilde{C}_i	Taux de croissance de la perturbation
t	Variable temporelle
\mathbf{q}	Vecteur vitesse de la perturbation
\tilde{C}_r	Vitesse de phase
$\hat{W}_{\ell max}$	Vitesse maximale
\hat{W}_d	Vitesse débitante
$\hat{W}_{moyenne}$	Vitesse moyenne
C_f	Coefficient de frottement de Fanning : $f = \frac{2\hat{\tau}_p}{\rho\hat{W}_d^2}$
C	Concentration en masse du Carbopol 940
N_f	Le nombre de franges dans le volume de mesure
Hb	Nombre de Herschel-Bulkley : $Hb = \frac{\hat{\tau}_0\hat{R}^n}{\hat{K}\hat{W}_{\ell max}^n}$ (chapitre 2)
Hb	Nombre de Herschel-Bulkley : $Hb = \frac{\hat{\tau}_0\hat{R}^n}{\hat{K}\hat{W}_d^n}$ (chapitre 4)
E_k	Nombre d'Ekman

Re_g	Nombre de Reynolds généralisé $Re_g = \frac{\rho \hat{W}_d^{2-n} \hat{R}^n}{\hat{K}}$
Re_{MR}	Nombre de Reynolds selon Metzner et Reed
Re_p	Nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale : $Re_p = \frac{\rho \hat{W}_d \hat{D}}{\hat{\mu}_p}$
Re_{CE}	Nombre de Reynolds maximal au dessous duquel l'énergie cinétique de la perturbation décroît
r_0	Rayon adimensionnel de la zone iso-vitesse $r_0 = \frac{\hat{r}}{\hat{R}} = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\tau}_p}$

Lettres grecques

α_k	Angle entre l'axe de la conduite et l'axe de rotation de la terre
τ	Contrainte de cisaillement
$\hat{\tau}_p$	Contrainte pariétale
$\hat{\tau}_0$	Contrainte apparente
$\hat{\tau}_v$	Contrainte délimitant la zone visqueuse
γ	Déformation
$\hat{\delta}_x, \hat{\delta}_z$	Dimensions du volume de mesure
$\hat{\delta}_f$	Distance entre deux franges brillantes
Γ_ℓ	Echelle intégrale du temps
Γ_τ	Echelle intégrale de longueur
β	Inverse de l'indice d'écoulement $1/n$
ξ	Multiplicateur de Lagrange
ρ	Masse Volumique
α	Nombre d'onde axial
δ_f	Opérateur variationnel
$\hat{\Delta}p$	Pertes de charge
θ	Position azimutale
Λ	Rapport entre le terme d'inertie et la différence entre la dissipation visqueuse et l'anisotropie
$\hat{\gamma}$	Taux de cisaillement
$\dot{\gamma}_{ij}$	Tenseur des taux de cisaillement
$\dot{\gamma}$	Tenseur des taux de cisaillement adimensionnel
τ_{ij}	Tenseur des contraintes

τ	Tenseur des contraintes adimensionnel
$\hat{\tau}$	Tenseur des contraintes
$\hat{\gamma}$	Tenseur des taux de déformations
$\hat{\mu}$	Viscosité effective du fluide
$\hat{\mu}_p$	Viscosité effective du fluide à la paroi de la conduite
$\hat{\mu}_t$	Viscosité tangente du fluide

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

Les propriétés des liquides sous écoulement sont profondément modifiées dès que l'on y ajoute des polymères ou des particules micro-métriques qui peuvent inter-agir entre elles. Ainsi lorsqu'un polymère est soumis à un écoulement, il peut réagir aux forces de friction hydrodynamique en changeant sa conformation de pelote statistique à l'équilibre par l'intermédiaire de réorientation et de déformations. Une suspension colloïdale va réagir aux forces hydrodynamiques en modifiant la distribution spatiale des particules. Ce sont ces déformations et cette organisation spatiale des particules qui sont à l'origine des propriétés non-Newtoniennes des solutions de polymères ou de suspensions colloïdales. L'interaction non linéaire polymère-écoulement ou agrégats de particules-écoulement peut modifier de façon considérable la nature de l'écoulement. Parmi les effets remarquables de cette interaction, on cite l'effet [Toms \(1949\)\(1\)](#) où en rajoutant une quantité infime de polymère flexible (5-10 ppm : parties par million en poids) peut conduire en régime turbulent à une réduction de la puissance dissipée par plus de 80 %. On peut alors comprendre l'intérêt industriel majeur quand à la minimisation d'énergie. Les mécanismes physiques à l'origine de cette réduction de la puissance dissipée sont encore sujet à débat dans la communauté scientifique [Hadolink et Haigh \(1995\)\(2\)](#). La turbulence même, qui depuis les travaux de Reynolds est décrite par la prédominance des non linéarités associées aux effets inertiels peut être complètement modifiée lorsqu'on rajoute des polymères. On peut en effet obtenir des écoulements d'apparence chaotique sans effets inertiels prédominants. Ce sont les non linéarités élastiques qui font tout le travail de déstabilisation ([Groisman et Steinberg \(2000\)\(3\)](#)). Dans les exemples cités ci-dessus, il s'agissait

de polymères flexibles où l'élasticité caractérisée par un temps de relaxation λ joue un rôle fondamental et serait du même ordre de grandeur que le temps caractéristique de l'écoulement. Dans le cas des fluides supposés "purement" rhéofluidifiants, telles que les solutions de polymères rigides ou certaines suspensions colloïdales, on ne connaît pas d'effets aussi spectaculaires que pour les fluides viscoélastiques. Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides pour lesquels la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. Dans les solutions de polymères, on interprète cette diminution de viscosité par la séparation, puis l'alignement progressif de macromolécules enchevêtrées pendant l'écoulement. Dans le cas d'une suspension, la diminution de viscosité provient de la déstructuration des agrégats de particules solides qui se sont formés. La majorité des études existantes dans la littérature concernent le calcul des conditions critiques d'instabilité où il est montré un retard à la transition dû au caractère rhéofluidifiant (Govindarajan *et al.* (2003)(4) et Nouar *et al.* (2007)(5)). Une réduction de traînée est aussi mise en évidence en régime turbulent (Pinho et Whitelaw (1990) (6), Escudier *et al.* (1999)(7)). Il existe néanmoins deux résultats assez curieux et qui restent encore inexplicables.

- Le premier concerne une asymétrie de l'écoulement observée par Escudier et Presti (1996)(8) en étudiant la transition vers la turbulence pour un fluide rhéofluidifiant (ayant une thixotropie de contrainte seuil) en écoulement dans une conduite cylindrique.

- Le deuxième (Khayat (1996)(9), Ashrafi et Khayat (2000)(10)) met théoriquement en évidence l'apparition d'un comportement chaotique induit par le caractère rhéofluidifiant dans deux situations particulières : Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux et le problème de Rayleigh-Bénard.

Avant de fixer les objectifs de la thèse, on propose de donner d'abord une brève description des différents phénomènes décrits dans ce paragraphe.

1.1.1 Turbulence élastique

En rajoutant de longues chaînes de polymères flexibles à un fluide confère à la solution des propriétés viscoélastiques. En présence d'écoulement, les chaînes de polymère sont étirées ce qui engendre des contraintes élastiques. Celles-ci sont fonction de l'histoire du mouvement et de la déformation subies par les particules fluides le

long de leur trajectoires. Il s'ensuit une relation non linéaire entre les contraintes élastiques ainsi générées et le taux de déformation. Pour une solution diluée de polymères, les équations de conservation de quantité de mouvement diffèrent des équations de Navier-Stokes par un terme additionnel linéaire qui fait intervenir les contraintes élastiques $\boldsymbol{\tau}_p$ dues à l'étirement des chaînes de polymère par les forces de frottement hydrodynamiques.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\mu_s}{\rho} \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla \boldsymbol{\tau}_p, \quad (1.1)$$

où μ_s est la viscosité du solvant. Le degré de non linéarité des équations du mouvement peut être défini par le nombre de Reynolds $Re = \rho V L / \mu_s$, où V et L sont des échelles caractéristiques de vitesse et de longueur. Pour décrire l'évolution des contraintes élastiques, le modèle de Maxwell avec un seul temps de relaxation λ peut être utilisé :

$$\boldsymbol{\tau}_p + \lambda \frac{D\boldsymbol{\tau}_p}{Dt} = \mu_p \dot{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (1.2)$$

Une expression appropriée de la dérivée $\frac{D\boldsymbol{\tau}_p}{Dt}$ doit tenir compte du fait que les contraintes élastiques sont transportées par les particules fluides qui ont des mouvements de translation et de rotation et qui subissent des déformations. Ces caractéristiques sont prises en compte par exemple par la dérivée matérielle sur-convectée (11) :

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}_p}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_p}{\partial t} + \boldsymbol{\tau}_p \cdot (\nabla \mathbf{V}) - (\nabla \mathbf{V})^T \cdot \boldsymbol{\tau}_p. \quad (1.3)$$

Les équations (1.2) et (1.3) constituent le modèle d'Oldroyd B. Le degré de non linéarité dans ces équations est caractérisé par le paramètre adimensionnel $\lambda (V/L)$, appelé nombre de Weissenberg (rapport entre le temps de relaxation à un temps caractéristique de l'écoulement). Ce n'est qu'à la fin des années 80, (Larson (1990)(12)) que l'instabilité d'un écoulement induite par le caractère viscoélastique avec une faible inertie a été mise en évidence (il s'agit en l'occurrence de l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux). Au delà de cette instabilité un comportement chaotique (turbulence élastique) est observé (Larson (2000)(13)) et qui serait à l'origine de la rupture d'extrudat en sortie de filière comme cela est illustré par la figure (1.1). Groisman et Steinberg (2000)(3) ont conduit une étude détaillée de cette turbulence dite élastique pour une solution diluée de polymères entre deux disques

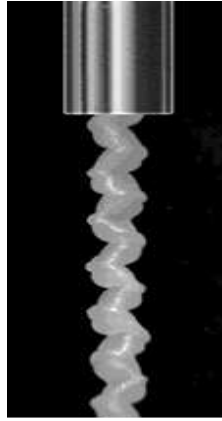


FIG. 1.1 – La fibre de polymère produite industriellement devient rugueuse au-delà d’un certain seuil de vitesse ([Journal du CNRS avril 2003](#)).

tournants (Fig. 1.2). L’écoulement chaotique observé à faible vitesse de rotation présente des caractéristiques très similaires à celles de l’écoulement turbulent d’un fluide Newtonien : (i) Augmentation de la résistance à l’écoulement (ii) le spectre d’énergie ne présente pas de fréquence particulière et s’étend sur pratiquement une décade où il présente un comportement en $f^{-\alpha}$ avec $\alpha \simeq 3.3$.

Pour le moment, on ne connaît pas l’équivalent de la cascade d’énergie en turbulence inertielle pour rendre compte des échelles spatiales et temporelles rencontrées en turbulence élastique.

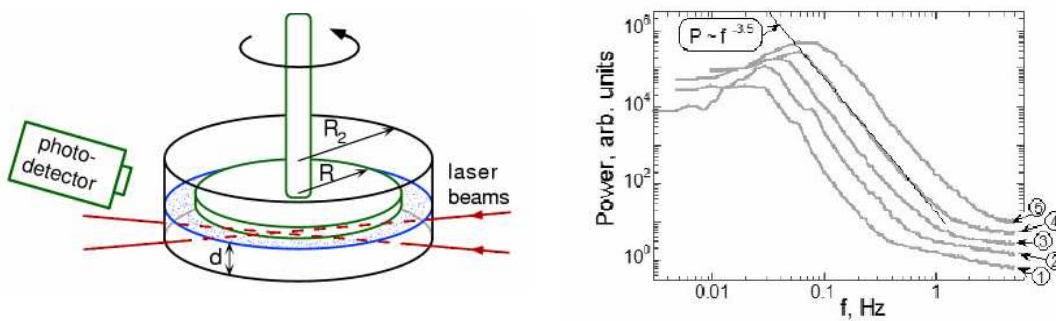


FIG. 1.2 – (Gauche) Dispositif expérimental utilisé par [Groisman](#) et [Steinberg](#). Le disque inférieur est fixe et le disque supérieur est mis en mouvement en imposant un couple constant. Le fluide utilisé est une solution à 80 ppm de Polyacrylamide, 65% de Saccharose et 1% de NaCl. (temps de relaxation $\lambda = 3.4$ s. (Droite) Densité spectrale d’énergie des fluctuations de la vitesse azimutale. Les courbes (1) $W_i = 4.3$; (2) $W_i = 6.3$; (3) $W_i = 9.2$; (4) $W_i = 13.6$ et (5) $W_i = 20.1$.

1.1.2 Écoulement chaotique induit par le caractère rhéofluidifiant

Khayat (1996)(9) et Ashrafi et Khayat (2000)(10) mettent en évidence la possibilité d'un écoulement chaotique induit par le caractère rhéofluidifiant du fluide. Dans ces deux articles (problème de Rayleigh-Bénard (9) et écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres coaxiaux (10)), le comportement rhéologique du fluide est décrit par le modèle de Carreau, (Bird *et al.* (1987)(11)), avec néanmoins une faible rhéofluidification. Dans l'approche théorique adoptée par les auteurs, les perturbations sont écrites sous forme d'une série de Fourier. En ne retenant que les modes dominants, les auteurs aboutissent à un système de Lorenz généralisé. Ce système comporte des termes cubiques provenant de la variation non linéaire $\mu(\dot{\gamma})$, qui n'existent pas dans le cas Newtonien ni dans le cas où on ne tient pas compte de la perturbation en viscosité. Les termes cubiques donnent lieu à une bifurcation de Hopf sous critique, ensuite à un écoulement chaotique par intermittence lorsque le paramètre de contrôle (nombre de Rayleigh ou nombre de Taylor) est suffisamment important. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux expérimentaux qui confirment ce résultat.

1.1.3 Asymétrie de l'écoulement

Concernant les écoulements ouverts, il n'existe aucune étude expérimentale ou théorique qui fait référence à un écoulement chaotique induit par la dépendance non linéaire de la viscosité effective en fonction du cisaillement. Il convient de noter que comparativement au cas Newtonien, la littérature relative à la stabilité et à la transition vers la turbulence en écoulements ouverts de fluides non Newtoniens est très limitée. Dans le cas par exemple d'une conduite cylindrique, nous n'avons trouvé que trois articles pertinents, qui font ressortir des résultats très intéressants et non encore expliqués. Pour les fluides utilisés (rhéofluidifiants avec ou sans contrainte seuil), à partir d'une certaine valeur du nombre de Reynolds Re , les profils de vitesse axiale présentent une asymétrie stable et croissante avec Re . Par contre, en régimes laminaire et turbulent, les profils de vitesse axiale sont parfaitement symétriques. Cette asymétrie a été soulignée la première fois par Escudier et Presti (1996)(8) dans le cas d'une suspension aqueuse de Laponite (argile synthétique) en écoulement dans une conduite cylindrique de 13.35 m de long et 100 mm de diamètre intérieur. La

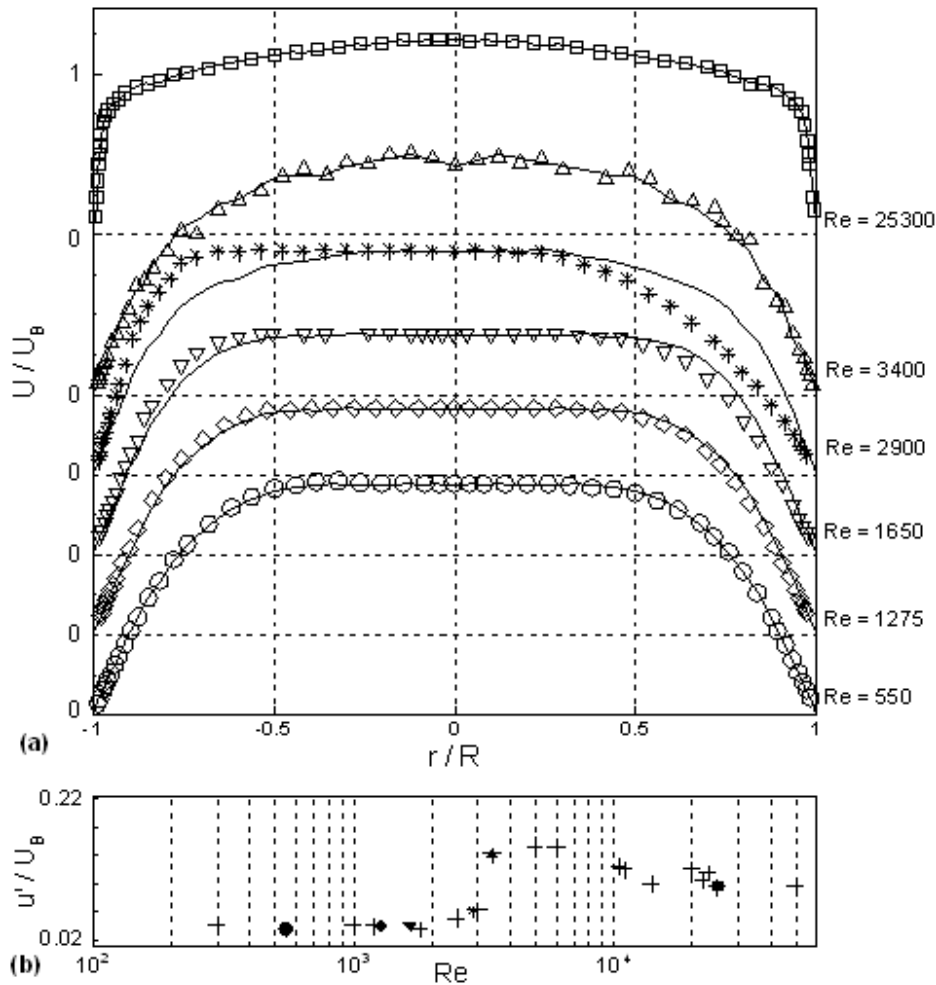


FIG. 1.3 – Profils de la vitesse axiale à différents nombres de Reynolds défini avec la viscosité pariétale. Résultats obtenus par Escudier et Presti pour une suspension de Laponite avec $\hat{\tau}_0 = 4.4$ Pa, $\hat{K} = 0.42$ Pa.sⁿ, $n = 0.53$. La nature du régime d'écoulement est déterminée par le taux de fluctuations (rms) de la vitesse axiale mesurée à $r/R = 0.8$ rapportée à la vitesse débitante. Dans cette figure, les symboles sont les résultats expérimentaux et le trait continu est une moyenne arithmétique des mesures expérimentales de part et d'autre de l'axe de la conduite.

figure (1.3) prise de l'article d'Escudier et Presti, montre des profils de vitesse axiale mesurés pour différentes valeurs du nombre de Reynolds Re_p défini avec la viscosité pariétale¹. Une asymétrie croissante est observée pour $1300 < Re_p < 3000$. Escudier et Presti (1996)(8) avaient attribué cette asymétrie à un défaut mineur dans le dispositif expérimental : “It is speculated that the asymmetry is either associated with instability or that the plug is sucked towards the pipe wall at a circumferential

¹La viscosité effective à la paroi est calculée en utilisant la loi de comportement rhéologique du fluide et la contrainte pariétale évaluée à partir de la mesure de la différence de pression entre deux positions axiales.

location fixed by a minor geometrical imperfection in the flow loop". De manière complètement indépendante et sans aucune concertation avec le group d'Escudier, Peixinho *et al.* (2005)(14) observent aussi une asymétrie croissante avec Re_p lors de la transition vers la turbulence pour une solution de Carbopol à 0.2 % en masse en écoulement dans une conduite cylindrique (longueur 5 m, diamètre intérieur 30 mm). Dans les deux cas, il s'agissait de fluides rhéofluidifiants avec une contrainte seuil. La suspension de Laponite est en plus thixotrope. Un article commun a été ensuite publié par les deux groupes (LEMETA, Escudier *et al.* (2005)(15) à l'Université de Liverpool) pour souligner ce phénomène d'asymétrie dans le cas des fluides rhéofluidifiants avec ou sans contrainte seuil. Dans cet article, des résultats ont été reportés pour onze fluides différents dont un Newtonien comme référence. Ils sont répertoriés ci-dessous :

- Fluide Newtonien : Solution de Glycérine avec une viscosité $\mu = 82 \text{ mPa.s}$.
- Fluides rhéofluidifiants décrits par le modèle de Carreau-Yasuda $\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = (1 + (\lambda\dot{\gamma})^a)^{\frac{n-1}{a}}$:
 - Solution de Carbopol à 0.1 % en masse ($\mu_0 = 5.92 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 1.65 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 13000 \text{ s}$, $n = 0.376$, $a = 7.4$).
 - Solution de CMC à 0.25 % en masse ($\mu_0 = 0.0599 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 5.51 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 0.0125 \text{ s}$, $n = 0.562$ et $a = 0.669$).
 - Mélange des solutions de CMC et Xanthan d'une concentration de 0.09 % en masse de chacune ($\mu_0 = 0.0342 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 1.93 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 6.26 \text{ s}$, $n = 0.484$ et $a = 0.656$).
 - Solution de Polyacrylamide à 0.125 % en masse ($\mu_0 = 0.253 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 2.1 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 1.12 \text{ s}$, $n = 0.572$ et $a = 0.091$).
 - Solution de Polyacrylamide à 0.2 % en masse ($\mu_0 = 2.94 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 3.55 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 11.1 \text{ s}$, $n = 0.66$ et $a = 0.201$).
 - Solution de Xanthan à 0.2 % en masse ($\mu_0 = 0.431 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 2.35 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 0.778 \text{ s}$, $n = 0.673$ et $a = 1.29$).
 - Solution de CMC à 0.6 % en masse ($\mu_0 = 0.344 \text{ Pa.s}$, $\mu_\infty = 5.45 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$, $\lambda = 0.0378 \text{ s}$, $n = 0.514$ et $a = 0.686$).
- Fluides à seuil décrits par le modèle de Herschel-Bulkley.
 - Suspension de Laponite à 1.5 % en masse ($\tau_0 = 4.42 \text{ Pa}$, $K = 0.242 \text{ Pa.s}^n$ et

$n = 0.534$).

- Solution de Carpobol à 0.2% en masse ($\tau_0 = 9.8 \text{ Pa}$, $K = 2.31 \text{ Pa.s}^n$ et $n = 0.51$).

- Solution de Ultrez 10 à 0.08% en masse ($\tau_0 = 2.39 \text{ Pa}$, $K = 3.64 \text{ Pa.s}^n$ et $n = 0.43$).

A part le cas Newtonien où aucune asymétrie n'a été observée, pour les fluides rhéofluidifiants une asymétrie à des degrés divers a été notée.

Les auteurs montrent ensuite que cette asymétrie n'est pas la conséquence de la force de Coriolis due à la rotation de la terre dans la mesure où le nombre d'Ekman défini par $E_k = \frac{\mu_p}{2\Omega\rho D^2 \sin^2\alpha_k} = \frac{\text{Force d'origine visqueuse}}{\text{Force de Coriolis}}$ est tel que $E_k \gg 1$. Dans cette dernière expression, Ω est la vitesse angulaire de rotation de la terre, D le diamètre de la conduite et α_k l'angle entre l'axe de la conduite et l'axe de rotation de terre. [Draad et Nieuwstadt \(1998\)\(16\)](#) avaient observé une asymétrie du profil de vitesse axiale dans le cas d'un écoulement laminaire d'un fluide Newtonien (eau) dans une conduite de 30 m de long avec $E_k \simeq 1$. Dans les expériences effectuées au LEMTA et par le groupe Escudier, les écarts de température entre le haut et le bas d'une section de la conduite sont trop faibles ($< 0.2^\circ\text{C}$) pour que les forces de poussée puissent jouer un rôle quelconque. Il en est de même des forces centrifuges qui seraient générées par une éventuelle courbure de la conduite. Par conséquent l'asymétrie des profils de vitesse observée pour les fluides rhéofluidifiants est la conséquence d'un mécanisme physique qui n'a pas encore identifié. Cette conclusion s'appuie particulièrement sur deux articles récents.

- Le premier est une simulation numérique directe par la méthode des éléments spectraux d'un écoulement faiblement turbulent dans une conduite cylindrique d'un fluide en loi puissance et d'un fluide de Herschel-Bulkley. Un modèle à deux viscosités est adopté pour éviter le comportement singulier de la viscosité effective sur l'axe. La figure (1.4) prise de l'article [Rudman et al. \(2004\)\(17\)](#) montre les contours de la vitesse axiale à un instant donné. Une asymétrie dans la répartition des stries est observée. Lorsque le fluide est suffisamment rhéofluidifiant. Le résultat est encore plus net pour un fluide à seuil.

- Le deuxième article est une étude expérimentale d'[Eliahou et al. \(1998\)\(18\)](#) sur les conditions critiques de transition pour un fluide Newtonien lorsqu'il est soumis

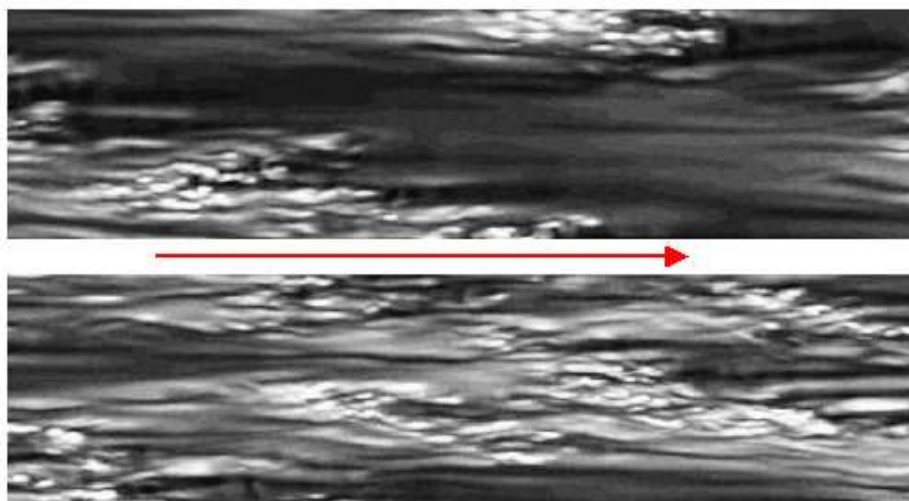


FIG. 1.4 – Contours instantanés de la vitesse axiale au voisinage de la paroi pour un fluide d’Herschel-Bulkley pour deux nombres de Reynolds $Re_g = 5800$ (Haut) et $Re_g = 8130$ (Bas). Les données sont extraites d’une surface latérale qui a été déroulée. La flèche désigne le sens de l’écoulement. Les stries haute vitesse sont en blanc et les stries basse vitesse sont en noir.

à des perturbations asymétriques. Les auteurs indiquent que le profil de vitesse axiale mesuré en aval de la conduite présente une asymétrie et que l’amplitude des perturbations asymétriques imposées est suffisamment importante.

1.2 Tentative d’analyse : Objectifs de la thèse

Dans les paragraphes précédents, nous avons indiqué brièvement comment la non linéarité de certains termes dans les équations gouvernant l’écoulement d’un fluide peuvent induire un écoulement chaotique ou turbulent. Dans le cas des fluides Newtoniens, la non linéarité provient des termes d’inertie $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$. Dans le cas des fluides viscoélastiques, la non linéarité réside dans la relation entre les contraintes élastiques et les déformations subies par les chaînes de polymères. Pour les fluides purement rhéofluidifiants où la viscosité effective dépend non linéairement du deuxième invariant du déviateur du tenseur des taux de déformations, un comportement chaotique a été mis en évidence théoriquement dans deux situations d’écoulements fermés (Rayleigh-Bénard et Taylor-Couette). A côté de cela, une asymétrie des profils de vitesse axiale est observée dans le cas d’un écoulement dans une conduite cylindrique.

L'objectif de la thèse est de fournir une description tridimensionnelle de cette asymétrie et d'examiner comment la non-linéarité de la loi de comportement d'un fluide non Newtonien (supposé purement visqueux) en écoulement dans une conduite cylindrique intervient lors de la transition vers la turbulence. On montrera expérimentalement qu'un écoulement faiblement turbulent peut être généré par le comportement rhéofluidifiant du fluide comme dans le cas des écoulements fermés.

Commençons par examiner comment le caractère non Newtonien du fluide intervient dans un écoulement chaotique (turbulence faible²). Pour cela, on va adopter la décomposition de Reynolds et on écrit les équations moyennées pour la quantité de mouvement et l'énergie cinétique. On commence par rappeler les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (1.5)$$

Le comportement rhéologique d'un fluide purement visqueux est donné par : $\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}$, où la viscosité effective μ est une fonction non linéaire du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation.

Equations moyennées : On décompose la vitesse et la pression en une grandeur moyenne et une fluctuation :

$$\mathbf{V} = \overline{\mathbf{V}} + \mathbf{V}' \quad ; \quad p = \overline{p} + p', \quad (1.6)$$

où $\overline{(\cdot)}$ désigne une moyenne temporelle et $(\cdot)'$ la quantité fluctuante.

En remplaçant \mathbf{V} et p par l'expression (1.6) dans les équations de continuité et de la quantité de mouvement, on obtient

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial t} + \overline{V}_j \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\mu \dot{\gamma}_{ij}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}} - \rho \overline{V'_i V'_j}). \quad (1.8)$$

On voit apparaître un nouveau terme $\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}}$ provenant du couplage entre les fluctuations de la viscosité et celles du cisaillement. Il a été regroupé avec les contraintes

²La turbulence faible correspond à un écoulement ayant un faible nombre de degrés de liberté. L'écoulement est régulier en espace mais irrégulier en temps

de Reynolds $-\rho \overline{V_i V_j}$.

L'équation de transport de l'énergie cinétique moyenne des fluctuations

$e \equiv \frac{1}{2} \overline{V_i' V_i'}$ est obtenu après un calcul assez fastidieux (voir [Pinho \(2003\)\(19\)](#)).

$$\begin{aligned} \rho \frac{de}{dt} = & -\rho \overline{V_i' V_j'} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} - \overline{\mu \dot{\gamma}'_{ij} \dot{\gamma}'_{ij}} - \underbrace{\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}}}_{A} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} - \underbrace{\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}{}^2}}_B - \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{V_j' p'}) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \overline{V_i' V_j' V_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\mu V_i' \dot{\gamma}'_{ij}}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\mu' V_i' \dot{\gamma}'_{ij}})}_C + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\mu' V_i' \dot{\gamma}'_{ij}})}_D. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Comparativement au cas Newtonien, quatre nouveaux termes (notés A, B, C, et D) provenant de la perturbation de la viscosité interviennent dans l'évolution de l'énergie cinétique turbulente. Une analyse d'ordre de grandeur de ces différents termes, conduite par [Pinho \(2003\)\(19\)](#) semble indiquer que le terme noté $A = \overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j}$ est le plus pertinent. En outre, on peut admettre que $\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} \approx \mu' \frac{\partial \overline{V}_z'}{\partial r} \frac{\partial \overline{V}_z}{\partial r}$, où V_z est la composante axiale de la vitesse. Lorsque $dV_z'/dr < 0$, le cisaillement total augmente en valeur absolue, puisque $d\overline{V}_z/dr < 0$, par conséquent la viscosité diminue et $\mu' < 0$ et donc $-A > 0$. On aboutit à la même conclusion, i.e., $-A > 0$, lorsque l'on considère le deuxième cas $dV_z'/dr > 0$. Finalement, la perturbation de la viscosité effective qui traduit une modification de la structure interne du fluide, donne lieu à un terme source d'énergie donné par $-\overline{\mu' \dot{\gamma}'_{ij}} \frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} > 0$. Lorsque ce terme source est suffisamment élevé, il pourrait conduire au développement des instabilités et éventuellement à un écoulement chaotique.

En s'inspirant de l'équation de Reynolds-Orr, le paramètre adimensionnel qui contrôle cet écoulement serait le rapport, noté par la suite St , entre ce terme source et la dissipation visqueuse $\overline{\mu} (d\overline{V}_z/dr)^2$. En première approximation, on écrit :

$$\mu' \approx \frac{d\mu}{d\dot{\gamma}'_{rz}} \dot{\gamma}'_{rz} = \frac{\mu - \mu_t}{\dot{\gamma}'_{rz}} \dot{\gamma}'_{rz}, \quad (1.10)$$

où $\mu_t = \partial\tau_{rz}/\partial\dot{\gamma}'_{rz}$ est la viscosité tangente. Tous calculs faits, on arrive à :

$$St = 1 - \frac{\mu_t}{\mu}. \quad (1.11)$$

Ce paramètre adimensionnel, désigne le degré de non linéarité de la loi de comportement. Cependant, ce paramètre à lui seul ne rend pas compte des observations

expérimentales. Il n'a pas été observé d'écoulement chaotique à faible nombre de Reynolds. Il est aussi nécessaire que le temps de diffusion du terme source soit plus important que le temps d'advection par l'écoulement. Ainsi, un nombre adimensionnel, qui pourrait être utilisé pour caractériser la possibilité d'avoir un écoulement chaotique par le caractère rhéofluidifiant serait un nombre de Reynolds modifié :

$$Re_{St} = Re \left(\frac{1 - St}{St} \right). \quad (1.12)$$

Re et St peuvent être évalués à partir des viscosités évaluées à la paroi, *i.e.*, pour un cisaillement égal au cisaillement pariétal.

Comme on s'intéresse à la transition vers la turbulence en conduite cylindrique, on a été amené à faire une étude bibliographique dans le cas des fluides Newtoniens. Dans ce qui suit on donne un bref aperçu des travaux les plus récents.

1.3 Transition vers la turbulence pour des fluides Newtoniens : Turbulence inertielle

Les mécanismes de transition vers la turbulence pour un fluide en écoulement dans une conduite cylindrique sont encore mal connus en dépit de nombreux travaux effectués depuis les expériences d'Osborne Reynolds en 1883. La difficulté principale réside dans le fait que l'écoulement de Hagen-Poiseuille est linéairement stable (voir à titre d'exemple l'étude effectuée par [Meseguer et Trefethen \(2003\)](#)(20) jusqu'à $Re = 10^7$). La transition est brutale et se manifeste par l'apparition de spots turbulents (appelés *puffs*). Cette transition est gouvernée par le nombre de Reynolds, Re , défini par $Re = \frac{\rho \hat{W}_d \hat{R}}{\hat{\mu}}$, où ρ est la masse volumique du fluide, \hat{W}_d la vitesse débitante, \hat{R} le rayon de la conduite et $\hat{\mu}$ la viscosité du fluide. Le nombre de Reynolds traduit en fait, le rapport entre le terme inertiel $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}$ et le terme de dissipation visqueuse $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$ dans les équations de conservation de la quantité de mouvement. Le premier terme est non linéaire, il est à l'origine des interactions qui peuvent générer des phénomènes à des échelles spatiales très différentes. Le deuxième terme est linéaire et traduit l'effet physique de la viscosité du fluide sur l'écoulement et a pour effet de contrôler tout développement d'instabilité. Pour des valeurs suffisamment élevées de Re , les termes non linéaires deviennent importants et l'écoulement est turbulent. Un des traits essentiels d'un écoulement turbulent est l'existence d'une

gamme étendue d'échelles spatiales et temporelles. Les écoulements turbulents se caractérisent aussi par une forte augmentation, par rapport au cas laminaire, des coefficients de frottement et de transfert de chaleur ou de masse. Cette augmentation traduit respectivement une plus grande résistance à l'écoulement et un mélange plus intense.

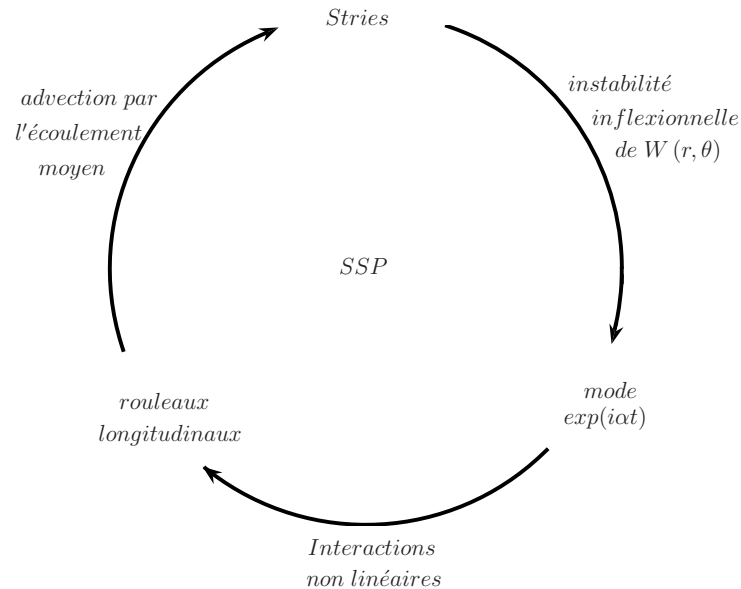


FIG. 1.5 – Schéma de principe d'un processus auto-entretenu proposé par [Waleffe \(1997\)\(25\)](#).

Le nombre de Reynolds critique à partir duquel la turbulence peut être entretenue dépend de la taille des perturbations imposées ou existantes naturellement (rugosités, bruits extérieurs). Reynolds (1883) avait obtenu deux valeurs critiques du paramètre Re : 2260 et 13000 selon qu'il prenne ou pas suffisamment de précautions dans ces expériences. [Pfenniger \(1961\)\(21\)](#) a pu maintenir un régime laminaire jusqu'à $Re = 10^5$.

En introduisant des perturbations sous forme de six jets obliques contrôlés en amplitude et en fréquence, [Hof et al. \(2003\)\(22\)](#) indique que l'amplitude nécessaire de la perturbation pour que l'écoulement de Poiseuille quitte le bassin d'attraction laminaire varie en $1/Re$. Ce comportement observé aussi numériquement ([Gavarini et al. \(2004\)\(23\)](#)) n'est bien sûr pas valable au voisinage des conditions de stabilité globale $Re \approx 1760$ ([Peixinho et Mullin \(2007\)\(24\)](#)).

Récemment, de nouvelles idées ont été proposées pour la compréhension des mécanismes de transition vers la turbulence. Elles sont basées particulièrement sur

le principe d'un processus de cycle auto-entretenu (Self Sustaining Process, SSP) proposé par [Waleffe \(1997\)\(25\)](#), illustré par la figure (1.5). Dans ce modèle, les rouleaux longitudinaux conduisent à la formation de stries qui développent des instabilités inflexionnelles, qui elles mêmes, lors de leur évolution non linéaire, formeront à nouveau des rouleaux longitudinaux, refermant ainsi le cycle. D'un point de vue pratique, une force volumique fictive est rajoutée pour générer des rouleaux longitudinaux et engendrer une instabilité, saturant pour former une onde non linéaire d'amplitude finie. L'idée est alors de voir si en suivant une procédure de continuation ([Waleffe \(2003\)\(26\)](#)), l'onde non linéaire peut être obtenue en l'absence de cette force volumique fictive. En adoptant, ce protocole, des solutions sous forme d'ondes non linéaires ont été mises en évidence par [Faisst et Eckhardt \(2003\)\(27\)](#) et [Wedin et Kerswell \(2004\)\(28\)](#). Ce sont des structures cohérentes périodiques dans la

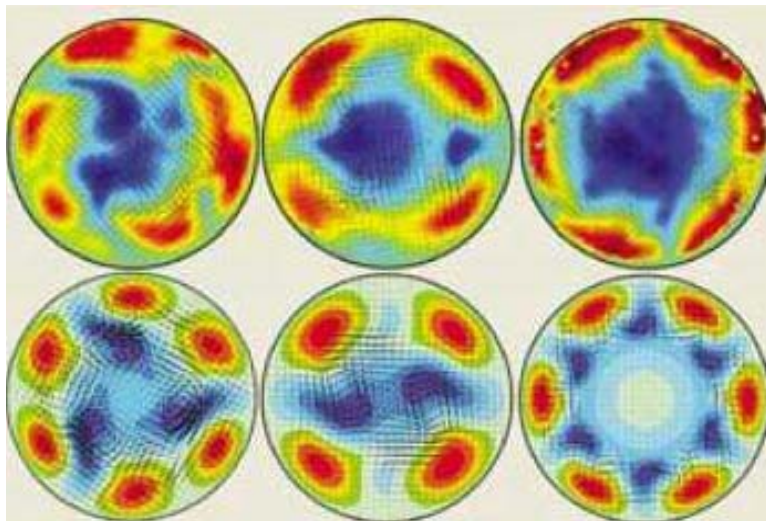


FIG. 1.6 – Champs instantanés de vitesses observées pour un fluide Newtonien en conduite cylindrique, lors de la transition laminaire turbulent. Le nombre de Reynolds augmente de gauche à droite. (haut) expérience, (bas) théorie. Dans la zone rouge, le fluide a une vitesse axiale plus grande que celle de l'écoulement de base, au contraire, dans la zone bleue, le fluide a une vitesse plus faible ([Hof et al \(2004\)\(29\)](#)).

direction axiale, en azimutal et en temps. D'après [Busse \(2004\)\(30\)](#), ces structures cohérentes formeraient "le squelette" de l'attracteur turbulent. On peut aussi noter que le mode $m = 1$, prédit par la théorie non-modale n'apparaît que pour des nombres de Reynolds beaucoup plus élevés. Cette approche s'est avérée très féconde au vu des résultats expérimentaux obtenus par [Hof et al \(2004\)\(29\)](#). Les auteurs ont réussi à l'aide de la PIV 3D à caractériser la structure interne d'un puff et à identifier

les ondes non linéaires pré-citées. L'accord entre les mesures expérimentales et les résultats théoriques indiqué par la figure (1.6), conforte l'idée d'une transition qui s'organise sur une base d'ondes non linéaires.

1.4 Plan du mémoire

- Le deuxième chapitre, présente une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley. Il s'agit en bonne partie d'une extension des travaux de [Kabouya \(2005\)\(31\)](#) au cas d'une géométrie cylindrique avec un fluide un peu plus complexe. On vérifie que l'écoulement est linéairement stable, On détermine la structure de la perturbation optimale, ainsi que les conditions suffisantes de stabilité. On fait clairement ressortir les conséquences de l'anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes liées à la perturbation. Il convient de noter que la notion de perturbation optimale semble revenir à "l'ordre du jour" dans la mesure où sa structure est très similaire à celle de l'état frontière³ (voir [Biau et al. \(2008\)\(32\)](#) et [Eckhardt et al. \(2007\)\(33\)](#)).
- Dans le troisième chapitre, on décrit le dispositif expérimental, les techniques de mesure et les fluides utilisés. On insiste en particulier sur la dégradation mécanique des solutions de polymère utilisés et la forte réduction de la première différence de contraintes normales. Ceci nous autorise à attribuer les phénomènes observés au caractère rhéofluidifiant du fluide.
- Dans le quatrième chapitre, on présente et on analyse les résultats expérimentaux. Ce chapitre est divisé en trois parties.
 - La première est relative au régime laminaire, où le profil de vitesse axiale et le coefficient de frottement peuvent être déterminés théoriquement. Le but étant de valider le dispositif expérimental et les techniques de mesure mises en œuvre.
 - La deuxième partie concerne ce que [Peixinho \(2004\)\(34\)](#) avait appelé, la première phase de transition. Une description tridimensionnelle de l'asymétrie de l'écoulement est donnée. Elle suggère l'existence d'une structure cohérente robuste caractérisée par deux rouleaux longitudinaux contra-rotatif. Cette description est suivie par une analyse statistique des fluctuations de la vitesse

³frontière entre les bassins d'attraction laminaire et turbulent

axiale.

- La troisième partie, caractérise l'intermittence entre une turbulence faible induite par la loi de comportement et la turbulence inertielle 3D.
- Le cinquième chapitre, est une synthèse des résultats obtenus et quelques perspectives.

Chapitre 2

Analyse linéaire de stabilité

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'analyse linéaire de la stabilité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil. Il est structuré comme suit : après un bref rappel au paragraphe (2.2) des équations gouvernant le problème, *i.e.*, équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que les équations constitutives, l'écoulement de base correspondant à un écoulement laminaire complètement développé est décrit au § 2.3. Les équations aux perturbations linéarisées sont ensuite données au § 2.4. Elles sont traitées par deux approches, modale et non-modale aux § 2.5 et § 2.6, respectivement. L'approche non-modale étudie la croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation ainsi que les caractéristiques de la perturbation optimale. Le paragraphe qui suit, § 2.8, détermine le nombre de Reynolds critique en dessous duquel l'énergie cinétique de toute perturbation admissible décroît de façon monotone au cours du temps. En conclusion, § 2.9, une synthèse des principaux résultats est donnée.

2.2 Equations gouvernant le problème

L'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil incompressible dans une conduite cylindrique de rayon \hat{R} est gouverné par les équations suivantes :

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \hat{t}} + \left(\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \right) \hat{\mathbf{u}} \right] = -\hat{\nabla} \hat{p} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.2)$$

Le vecteur vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ est écrit sous la forme $\hat{\mathbf{u}} = \hat{u} \mathbf{e}_r + \hat{v} \mathbf{e}_\theta + \hat{w} \mathbf{e}_z$, où \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} sont les composantes de la vitesse $\hat{\mathbf{u}}$ suivant les directions radiale, azimutale et axiale

définies par les vecteurs unitaires \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_z , respectivement. Aux précédentes équations de conservation, il faut rajouter les équations constitutives. Dans le cas qui nous intéresse, le comportement rhéologique du fluide est supposé être décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. En utilisant le critère de Von-Mises, la relation entre le déviateur $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ du tenseur des contraintes et le tenseur $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ des taux de déformations est donnée par Bird *et al.* (1983)(35) :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\tau}_{II} > \hat{\tau}_0, \quad (2.3)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_0, \quad (2.4)$$

où la viscosité effective $\hat{\mu}$ est définie par :

$$\hat{\mu} = \left[\frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\gamma}_{II}} + \hat{K} \left(\hat{\gamma}_{II} \right)^{(n-1)} \right]. \quad (2.5)$$

Dans l'équation précédente, \hat{K} est la consistance du fluide et n l'indice de structure. Le tenseur des taux de déformations $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ est défini par ses composantes $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i})$. Les deuxièmes invariants du tenseur des taux de déformation, $\hat{\gamma}_{II}$, et du déviateur du tenseur des contraintes, $\hat{\tau}_{II}$, sont définis par :

$$\hat{\gamma}_{II} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \hat{\tau}_{II} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\hat{\tau}_{ij} \hat{\tau}_{ij} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

A l'ensemble des équations (2.1 - 2.5), des conditions aux limites doivent être rajoutées :

- A la paroi, la condition de non glissement s'écrit

$$\hat{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{à} \quad \hat{r} = \hat{R}, \quad (2.7)$$

- A l'interface $\hat{r} = \hat{r}_y$, entre les phases "liquide" et "gel", le modèle de Herschel-Bulkley impose

$$\hat{\gamma}_{ij} = 0 \quad \forall i, j \quad \text{à} \quad \hat{r} = \hat{r}_y, \quad (2.8)$$

ce qui se traduit par les six conditions suivantes :

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} = \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{v}}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}}{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad \text{à} \quad \hat{r} = \hat{r}_y,$$

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{v}}{\hat{r}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{à} \quad \hat{r} = \hat{r}_y,$$

Il est important de noter que le modèle de Herschel-Bulkley suppose que la zone où $\hat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_0$ se comporte, d'un point de vue cinématique, comme un solide indéformable. En outre, dans cette zone, les contraintes sont indéterminées¹. Dans la zone où $\hat{\tau}_{II} > \hat{\tau}_0$, le fluide se comporte comme un fluide visqueux avec une viscosité effective qui varie non linéairement avec le cisaillement. Les phases cisailée et non cisailée sont séparées par une interface, ayant les propriétés suivantes :

- L'interface n'est pas une surface matérielle, sa vitesse peut être différente de celle des particules fluides au niveau de cette interface. Ceci est une différence fondamentale par rapport à l'interface séparant deux fluides non miscibles. En effet dans ce dernier cas, la vitesse de l'interface est égale à celle des particules fluide.
- Le mouvement de l'interface est contrôlé par l'état des contraintes dans la phase liquide.
- Les contraintes $\sigma_{ij} = -\hat{p}\delta_{ij} + \hat{\tau}_{ij}$ ainsi que les composantes \hat{u} , \hat{v} et \hat{w} du vecteur vitesse sont continues à travers l'interface.

Remarque :

Des modèles rhéologiques plus réalistes que le modèle de Bingham ou de Herschel-Bulkley, qui tiennent compte en particulier de l'élasticité de la phase gel ont été proposés dans la littérature. Oldroyd (1947a)(36) et (1947b)(37), suppose que la phase gel se comporte comme un solide élastique décrit par la loi de Hook. La loi constitutive s'écrirait alors :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad \iff \quad \hat{\tau}_{II} > \hat{\tau}_0, \quad (2.9)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = E \hat{\boldsymbol{\gamma}} \quad \iff \quad \hat{\tau}_{II} \leq \hat{\tau}_0, \quad (2.10)$$

où E est le module de Young. En fait, le modèle (2.9)-(2.10) n'a jamais été repris, probablement à cause des difficultés supplémentaires introduites par l'interaction entre un solide élastique et un fluide visqueux. En outre, il est indiqué dans la littérature que le module d'élasticité de la phase gel est en général faible pour les fluides à seuil et peut être négligé (Béris *et al.* (1985)(38), Coussot (1998)(39), Frigaard *et al.* (1994)(40) et Huilgol (2001)(41)).

¹Ceci constitue d'ailleurs une difficulté fondamentale pour mener une analyse nonlinéaire de stabilité.

2.3 Écoulement de base

Dans le cas d'un écoulement stationnaire et unidirectionnel suivant l'axe \hat{z} (Fig 2.1) et en régime dynamique établi, le profil de vitesse est de la forme $\hat{\mathbf{u}} = \hat{W}_\ell(\hat{r})\mathbf{e}_z$, seule la composante $\hat{\tau}_{rz} = \hat{\tau}_{zr}$ de $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ est non nulle. Les équations de conservation de la quantité de mouvement se réduisent à :

$$0 = -\frac{d\hat{p}}{d\hat{z}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{d}{d\hat{r}} (\hat{r}\hat{\tau}_{rz}) \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} = 0, \quad \frac{\partial \hat{P}}{\partial \theta} = 0 \quad (2.11)$$

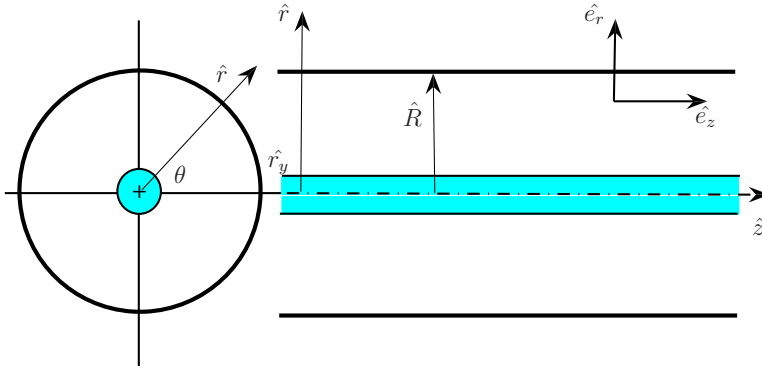


FIG. 2.1 – Représentation schématique du système de coordonnées.

soit après intégration :

$$\hat{\tau}_{rz} = \hat{\tau}_p \frac{\hat{r}}{\hat{R}}, \quad (2.12)$$

où $\hat{\tau}_p$ est la contrainte pariétale. L'équation constitutive se réduit à :

$$\hat{\tau}_{rz} = \text{sgn} \left(\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \right) \hat{\tau}_0 + \hat{K} \left| \frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \right|^{n-1} \frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\tau}_{rz}| > \hat{\tau}_0, \quad (2.13)$$

$$\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\tau}_{rz}| \leq \hat{\tau}_0, \quad (2.14)$$

où sgn est le signe de l'argument. En utilisant (2.13) et (2.14), on montre que $\hat{W}_\ell(\hat{r})$ dans la zone cisailée vérifie la relation :

$$-\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} = \left[-\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{K}} \right]^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\hat{\tau}_0}{\hat{\tau}_p} + \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (2.15)$$

L'intégration de (2.15) combinée avec la condition d'adhérence à la paroi conduit à

$$\hat{W}_\ell(\hat{r}) = \begin{cases} \hat{W}_{\ell_{max}}, & 0 \leq \hat{r} < \hat{r}_0, \\ \hat{W}_{\ell_{max}} \left[1 - \left(\frac{\hat{r} - \hat{r}_0}{\hat{R} - \hat{r}_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], & \hat{r}_0 \leq \hat{r} \leq \hat{R}, \end{cases} \quad (2.16)$$

où \hat{r}_0 est le rayon de l'interface ($\hat{r}_y = \hat{r}_0$) et $\hat{W}_{\ell_{max}}$ est donnée par

$$\hat{W}_{\ell_{max}} = \frac{n}{1+n} \left[-\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{K}} \right]^{\frac{1}{n}} \hat{R} \left[1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \right]^{\frac{1+n}{n}}.$$

Par intégration de (2.11) on a

$$\hat{p}_\ell(z) = -\frac{2\hat{\tau}_0}{\hat{r}_0} \hat{z} + \text{constante}. \quad (2.17)$$

2.3.1 Equations adimensionnelles

Les équations précédentes sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant $\hat{W}_{\ell_{max}}$, la vitesse maximale de l'écoulement de base, le rayon \hat{R} de la conduite et la quantité $(\rho \hat{W}_{\ell_{max}}^2)$, comme échelles caractéristiques de vitesse de longueur, et de pression ou de contraintes, respectivement :

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \frac{\hat{\tau}_{ij}}{\rho \hat{W}_{\ell_{max}}^2} \quad ; \quad p = \frac{\hat{p}}{\rho \hat{W}_{\ell_{max}}^2} \quad ; \quad u_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{W}_{\ell_{max}}} \quad ; \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \quad ; \quad z = \frac{\hat{z}}{\hat{R}} \quad , \\ \mu &= \frac{\hat{\mu}}{\hat{K} [\hat{W}_{\ell_{max}}/\hat{R}]^{n-1}} \quad ; \quad t = \frac{\hat{t} \hat{W}_{\ell_{max}}}{\hat{R}} \quad ; \quad r_0 = \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \quad ; \quad \nabla = \hat{R} \hat{\nabla}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sous forme adimensionnelle, les équations de conservation sont :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (2.20)$$

La loi de comportement adimensionnelle pour un fluide de Herschel-Bulkley

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{Re} \left[\frac{Hb}{\dot{\gamma}_{II}} + (\dot{\gamma}_{II})^{n-1} \right] \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_{II} > \frac{Hb}{Re} \quad (2.21)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_{II} \leq \frac{Hb}{Re} \quad (2.22)$$

Les quantités adimensionnelles Hb and Re sont les nombres de Herschel-Bulkley et de Reynolds, respectivement définis par :

$$Hb = \frac{\hat{\tau}_0}{\hat{K} [\hat{W}_{\ell_{max}}/\hat{R}]^n}, \quad (2.23)$$

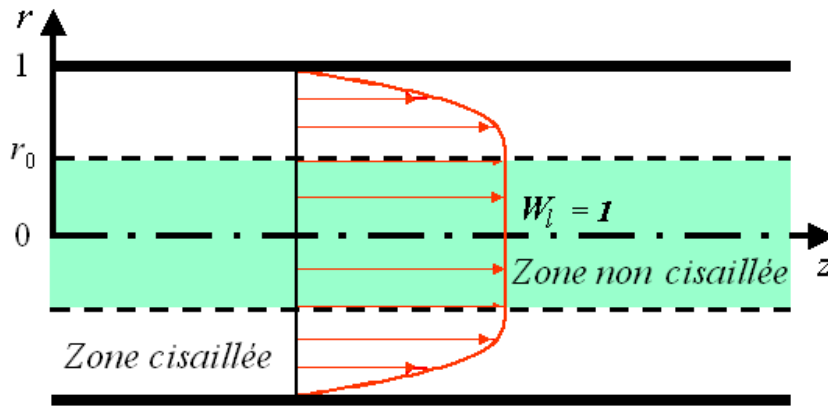


FIG. 2.2 – Écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil.

et

$$Re = \frac{\rho \hat{R}^n \hat{W}_{\ell_{max}}^{2-n}}{\hat{K}} . \quad (2.24)$$

La relation (2.24) est connue sous le nom de nombre de Reynolds généralisé. Cette définition peut être étendue à l'expression de Hb donnée par (2.23). Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 0 & \text{à} & & r &= 1, \\ \dot{\gamma}_{ij} &= 0 & \text{à} & & r &= r_y . \quad \forall i, j \end{aligned}$$

En utilisant (2.16) et les paramètres adimensionnels (2.18), le profil de vitesse adimensionnelle de l'écoulement de base est donné par :

$$W_\ell = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ 1 - \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} & ; \quad r_0 \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (2.25)$$

La pression p_ℓ est

$$p_\ell(z) = \frac{-2Hb}{Re r_0} z + \text{constante} . \quad (2.26)$$

Le profil de \hat{W}_ℓ est montré par la figure (2.2). La viscosité effective est

$$\mu(W_\ell) = \frac{1}{Re} \left[\frac{Hb}{|DW_\ell|} + |DW_\ell|^{n-1} \right] , \quad (2.27)$$

où $D \equiv \frac{d}{dr}$.

L'écoulement de base est essentiellement caractérisé par : (i) l'existence d'une zone centrale non cisailée qui se déplace comme un solide indéformable et (ii) une variation non linéaire de la viscosité effective entre la paroi et l'interface illustrée par les figures (2.3 et 2.4). On peut noter en particulier, une augmentation globale de μ lorsque r_0 ou Hb augmente et n est fixé. Dans l'autre cas, lorsqu'on fixe r_0 et on fait augmenter le caractère rhéofluidifiant via l'indice de structure n , on observe (i) une décroissance de μ au voisinage de la paroi, (ii) une augmentation de μ au voisinage de l'interface et par conséquent (iii) une stratification plus marquée de μ entre la paroi et l'interface.

La variation de r_0 en fonction de Hb et n est déterminée en utilisant l'expression de la contrainte pariétale :

$$|\tau_p| = \frac{Hb}{Re r_0}. \quad (2.28)$$

Par ailleurs, τ_p peut être déterminé en utilisant l'équation constitutive (2.21) combinée avec l'expression (2.25) de W_ℓ , soit

$$|\tau_p| = \frac{1}{Re} \left[Hb + \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \frac{1}{(1-r_0)^{1+n}} \right]. \quad (2.29)$$

En combinant les relations (2.28) et (2.29) on obtient

$$Hb(1-r_0)^{n+1} - \left(\frac{n+1}{n} \right)^n r_0 = 0, \quad (2.30)$$

on en déduit les comportements asymptotiques de r_0 pour les faibles et grandes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley :

$$r_0 \approx \left(\frac{n}{n+1} \right)^n Hb - (n+1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} Hb^2 \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow 0, \quad (2.31)$$

$$r_0 \approx 1 - \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{1}{Hb} \right)^{\frac{1}{1+n}} \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow \infty \quad (2.32)$$

La figure (2.5) représente le rayon adimensionnel r_0 de la zone non-cisailée, appelée aussi zone bouchon, en fonction de Hb pour trois valeurs de n : 0.1, 0.5 et 1. Le comportement asymptotique est représenté en trait discontinu pour $Hb \rightarrow 0$ et

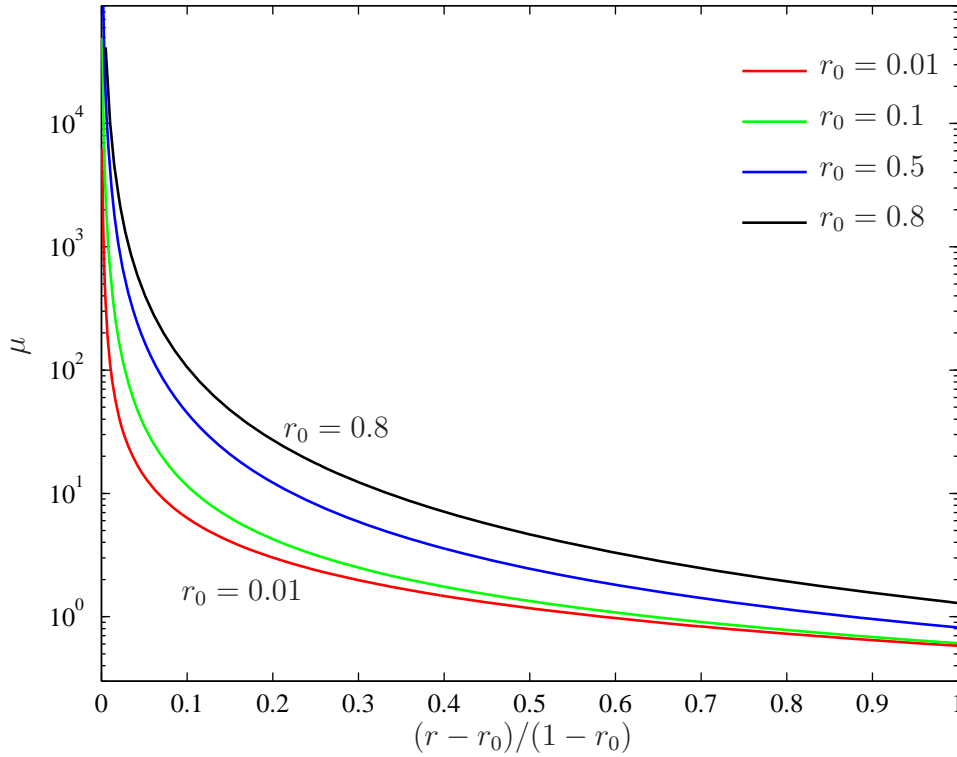


FIG. 2.3 – Profils de viscosité effective entre la paroi et l'interface pour $n = 0.5$ et différentes valeurs de $r_0 = 0.01$ ($Hb = 0.017$), 0.1 ($Hb = 0.193$), 0.5 ($Hb = 1.73$) et 0.8 ($Hb = 6.93$).

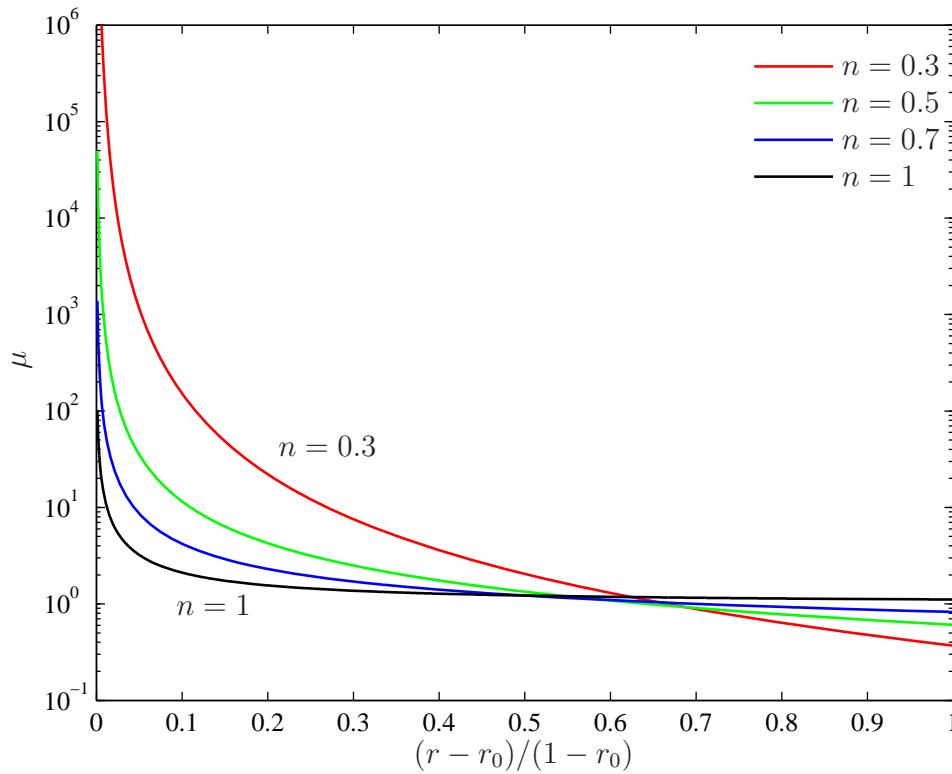


FIG. 2.4 – Profils de viscosité effective entre la paroi et l'interface pour $r_0 = 0.1$ et différentes valeurs de $n = 0.3$ ($Hb = 0.178$), 0.5 ($Hb = 0.2029$), 0.7 ($Hb = 0.2226$) et 1 ($Hb = 0.2469$).

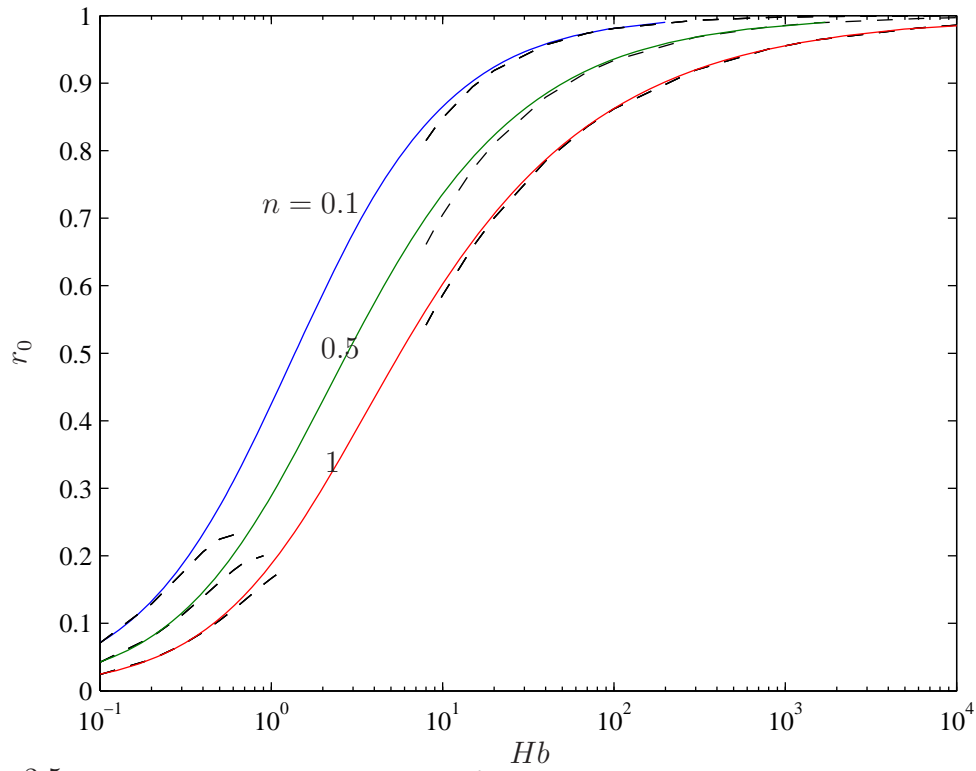


FIG. 2.5 – Dimension de la zone isovitesse en fonction du nombre d'Herschel-Bulkley pour $n = 0.1$, 0.5 et 1 .

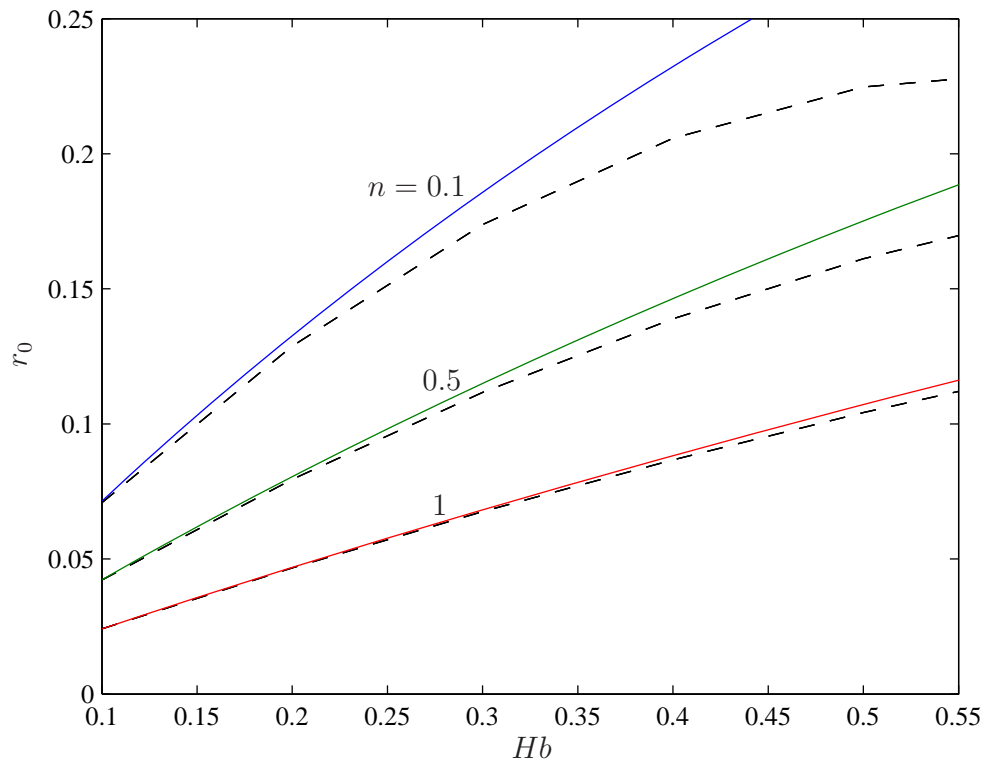


FIG. 2.6 – Dimension de la zone isovitesse en fonction du nombre d'Herschel-Bulkley pour $n = 0.1$, 0.5 et 1 .

$Hb \rightarrow \infty$. Globalement, les expressions (2.31) et (2.32) peuvent être utilisées pour ($Hb \leq 0.3$) et ($Hb \geq 30$), respectivement. Un zoom de la figure (2.5) pour les faibles valeurs de Hb , proches de celles rencontrés dans les essais expérimentaux est donné par la figure (2.6).

Finalement, l'écoulement de base dépend de deux paramètres adimensionnels, le nombre de Herschel-Bulkley et l'indice de structure n . Dans ce qui suit, on se propose d'examiner l'influence de Hb et de n sur la stabilité de l'écoulement (2.25 - 2.26) vis à vis des perturbations infinitésimales. Cette influence se manifeste à travers la modification de (i) l'épaisseur de la zone cisailée où a lieu l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation, (ii) de la viscosité effective, (iii) de la stratification de la viscosité et (iv) du gradient de vitesse (dW_ℓ/dr).

Dans l'analyse des résultats, on s'efforcera à chaque fois que cela est possible à faire ressortir séparément les quatre effets indiqués ci-dessus.

2.4 Formulation du problème de stabilité linéaire.

A l'écoulement de base, on superpose une perturbation infinitésimale notée $(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p')$, où $\epsilon \ll 1$, est un petit paramètre sans dimension. L'écoulement perturbé s'écrit formellement sous la forme :

$$\mathbf{u} = \mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}' , \quad (2.33)$$

$$p = p_\ell + \epsilon p' . \quad (2.34)$$

Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement de l'écoulement perturbé sont données par :

$$\nabla \cdot [\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}'] = 0 , \quad (2.35)$$

$$\epsilon \mathbf{u}'_t + [(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') \cdot \nabla] [\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}'] = -\nabla (p_\ell + \epsilon p') + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} (\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') . \quad (2.36)$$

En soustrayant aux équations (2.35) et (2.36), les équations relatives à l'écoulement de base et en ne retenant que les termes d'ordre 1 en ϵ , on obtient

$$\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0 , \quad (2.37)$$

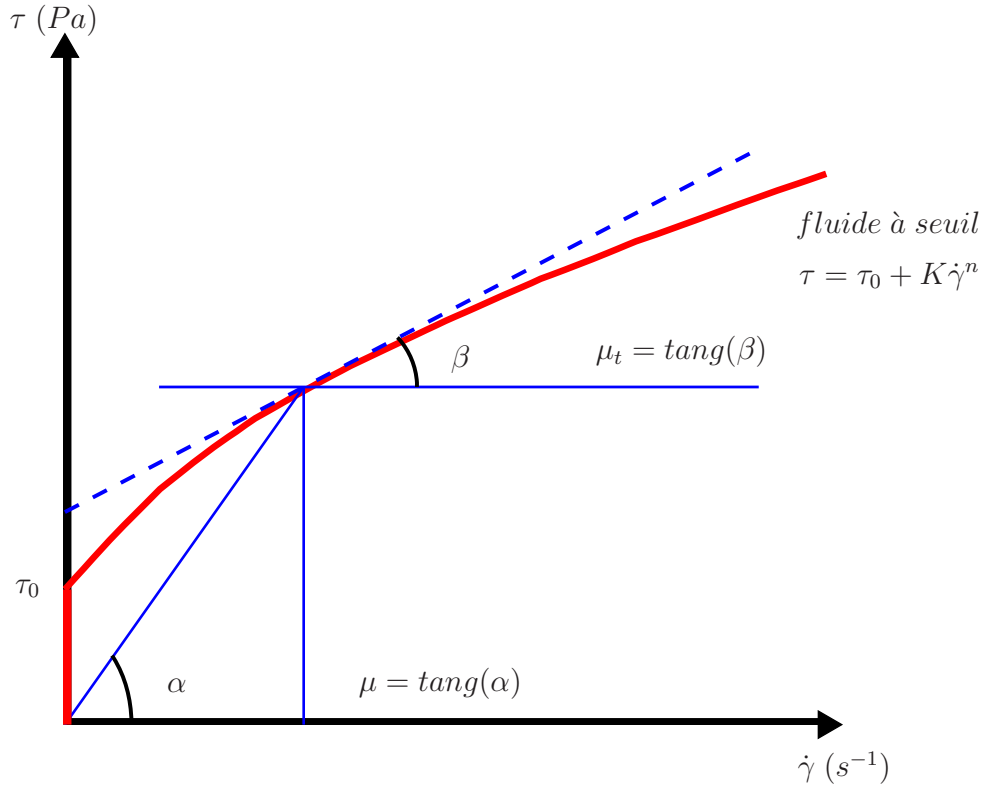


FIG. 2.7 – Schéma descriptif de la viscosité tangente.

$$\epsilon(\mathbf{u}'_t + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{W}_\ell + (\mathbf{W}_\ell \cdot \nabla) \mathbf{u}') = -\epsilon \nabla p' + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{W}_\ell)). \quad (2.38)$$

Dans la zone où la condition $\tau_{II}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') > Hb/Re$ est satisfaite, la viscosité effective de l'écoulement perturbé est déterminée à l'aide d'un développement de Taylor autour de l'écoulement de base :

$$\mu(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = \mu(\mathbf{W}_\ell) + \epsilon \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{W}_\ell) + O(\epsilon^2), \quad (2.39)$$

soit :

$$\mu(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = \mu(\mathbf{W}_\ell) + \epsilon \mu', \quad (2.40)$$

avec ,

$$\mu' = \left[\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{W}_\ell) \right]. \quad (2.41)$$

Dans le cas qui nous intéresse $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell)$ se réduit à $\dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{W}_\ell) = DW_\ell$ où $D \equiv d/dr$.

Ainsi :

$$\mu(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = \mu(\mathbf{W}_\ell) + \epsilon \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}') \frac{d\mu(\mathbf{W}_\ell)}{d(DW_\ell)} + O(\epsilon^2). \quad (2.42)$$

En utilisant (2.21) et (2.40) avec la relation $\boldsymbol{\tau} = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}$ on vérifie que le déviateur du tenseur des contraintes est linéairement perturbé :

$$\tau_{ij}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = \tau_{ij}(\mathbf{W}_\ell) + \epsilon \tau'_{ij} + O(\epsilon^2) \quad (2.43)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') &= \mu(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') \\ &= \mu(\mathbf{W}_\ell) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) + \epsilon [\mu' \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) + \mu(\mathbf{W}_\ell) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}')] \end{aligned} \quad (2.44)$$

En posant $\tau'_{ij} = \mu' \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) + \mu(\mathbf{W}_\ell) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}')$ et tenant compte du fait que $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) = 0$ lorsque $ij \neq \{rz\}$ ou $\{zr\}$, il vient :

$$\tau'_{ij} = \mu(\mathbf{W}_\ell) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') = \frac{1}{Re} \left[|DW_\ell|^{n-1} + \frac{Hb}{|DW_\ell|} \right] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}'), \quad ij \neq rz, zr \quad (2.45)$$

et

$$\tau'_{ij} = \mu_t(\mathbf{W}_\ell) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') = \frac{1}{Re} [n|DW_\ell|^{n-1}] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}'), \quad ij = rz, zr \quad (2.46)$$

où, $\mu_t = \mu(\mathbf{W}_\ell) + \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}(\mathbf{W}_\ell)$, est la viscosité tangente représentée schématiquement par le figure (2.7). Il est intéressant de noter que τ'_{rz} est indépendant de Hb . Le déviateur du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\tau}'_{ij}$ est anisotrope, ceci est une conséquence de la variation non linéaire de μ en fonction $\dot{\gamma}_{II}$. Pour ce qui est de la position de l'interface, on peut admettre qu'elle soit linéairement perturbée. En effet, sa position r_y est contrôlée uniquement par les contraintes τ_{ij} dans la phase liquide, qui sont elles mêmes perturbées linéairement :

$$r_y = r_0 + \epsilon h(\theta, z, t). \quad (2.47)$$

Dans la zone cisailée, *i.e.*, où, $\tau_{II}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') > (Hb/Re)$, les équations aux perturbations linéarisées sont obtenues en remplaçant dans (2.38) les éléments de $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}')$ par leurs expressions (2.45) et (2.46), soit :

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial u'}{\partial t} &= -W_\ell \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial p'}{\partial r} + \mu(W_\ell) \left[\Delta u' - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \theta} - \frac{u'}{r^2} \right] \\ &\quad + \frac{d\mu(W_\ell)}{dr} \dot{\gamma}'_{rr} + [\mu_t(W_\ell) - \mu(W_\ell)] \frac{\partial \dot{\gamma}'_{rz}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial v'}{\partial t} = -W_\ell \frac{\partial v'}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} + \mu(W_\ell) \left[\Delta v' + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{v'}{r^2} \right] + \frac{d\mu(W_\ell)}{dr} \dot{\gamma}'_{r\theta}, \quad (2.50)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial w'}{\partial t} = -W_\ell \frac{\partial w'}{\partial z} - u' \frac{dW_\ell}{dr} - \frac{\partial p'}{\partial z} + \mu(W_\ell) \Delta w' + \frac{d\mu(W_\ell)}{dr} \dot{\gamma}'_{rz} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (\mu_t(W_\ell) - \mu(W_\ell)) \dot{\gamma}'_{rz}], \quad (2.51)$$

avec,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.52)$$

Dans les équations précédentes, on s'est efforcé à présenter le terme de dissipation sous la forme d'une somme de trois termes : [un terme similaire au cas Newtonien, en fonction de $\mu(W_\ell)$] + [un terme qui traduit la stratification de μ , en fonction de $\frac{d\mu}{dr}(W_\ell)$] + [un terme qui traduit l'anisotropie de $\boldsymbol{\tau}'$, en fonction de $(\mu_t - \mu)(W_\ell)$]. Cette formulation présente aussi l'avantage d'être valable pour tout fluide non Newtonien purement visqueux. Les équations précédentes sont complétées par les conditions aux limites :

- à la paroi, la condition de non glissement donne

$$\mathbf{u}'(r = 1, \theta, z) = 0, \quad (2.53)$$

- à l'interface, $\tau_{II}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = Hb/Re$, ce qui implique

$$\dot{\gamma}'_{ij}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = 0 \quad \text{à} \quad r = r_0 + \epsilon h, \quad \forall i, j \quad (2.54)$$

Un développement de Taylor au premier ordre autour de r_0 conduit à :

$$\frac{\partial u'}{\partial r}(r_0, \theta, z, t) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \theta} + \frac{u'}{r} \right)(r_0, \theta, z, t) = \frac{\partial w'}{\partial z}(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \theta}(r_0, \theta, z, t) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'}{r} \right)(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z}(r_0, \theta, z, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial \theta}(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w'}{\partial r}(r_0, \theta, z, t) + \frac{\partial u'}{\partial z}(r_0, \theta, z, t) = \\ -h \frac{d^2 W_\ell}{dr^2}(r = r_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ h \frac{2}{(1 - r_0)^2} & \text{si } n = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Dans la zone non cisailée, les particules du fluide ont un mouvement d'un solide indéformable. La perturbation $(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p')$ est supposée périodique dans les directions axiale et azimutale. Par conséquent, la zone bouchon ne peut avoir qu'un mouvement de translation suivant l'axe z et/ou un mouvement de rotation autour de cet axe. On a alors

$$\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell + \epsilon \mathbf{u}') = 0 \quad (2.59)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{u}') = \frac{\partial}{\partial \theta}(\mathbf{u}') = 0 \quad (2.60)$$

Les équations (2.59), (2.60) ainsi que la relation $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{W}_\ell) = 0$ conduisent à :

$$u' = 0, \quad (2.61)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'}{r} \right) = \frac{\partial v'}{\partial \theta} = \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial r} = \frac{\partial w'}{\partial \theta} = \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (2.63)$$

Ainsi, en utilisant les conditions de continuité de vitesse à travers l'interface et de périodicité suivant θ et z , les conditions aux limites à l'interface côté liquide, deviennent :

$$u'(r_0, \theta, z, t) = \frac{\partial u'}{\partial r}(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.64)$$

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v'}{r} \right)(r_0, \theta, z, t) = \frac{\partial v'}{\partial \theta}(r_0, \theta, z, t) = \frac{\partial v'}{\partial z}(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial \theta}(r_0, \theta, z, t) = \frac{\partial w'}{\partial z}(r_0, \theta, z, t) = 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial r}(r_0, \theta, z, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ h \frac{2}{(1-r_0)^2} & \text{si } n = 1 \end{cases}, \quad (2.67)$$

Les équations (2.48)-(2.51) associées aux conditions aux limites à la paroi (2.53) et à l'interface (2.64)-(2.67), décrivent complètement l'évolution temporelle et spatiale d'une perturbation arbitraire infinitésimale dans la zone cisailée $[r_0, 1]$. Les équations sont invariantes dans les directions θ et z , il s'en suit que toute solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes

$$(u', v', w', p', h) = (u(r, t), v(r, t), w(r, t), p(r, t), h) e^{i(\alpha z + m\theta)}, \quad (2.68)$$

avec u, v, w et p des amplitudes complexes, α et m sont les nombres d'onde dans les directions axiale et azimutale. Dans ce qui suit, on considère le problème de stabilité temporelle. Le nombre d'onde axiale α est un réel positif et le nombre d'onde azimutale m est un entier positif. En remplaçant (2.68) dans (2.48)-(2.51), les équations de l'évolution linéaire de la perturbation peuvent alors s'écrire sous la forme d'un problème aux valeurs initiales

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= -i \alpha W_\ell u - Dp + \mu \left[\mathcal{L}u - \frac{2im}{r^2} v - \frac{u}{r^2} \right] \\ &\quad + 2D\mu Du + i \alpha [\mu_t - \mu] (Dw + i \alpha u), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial v}{\partial t} &= -i \alpha W_\ell v - \frac{im}{r} p + \mu \left[\mathcal{L}v + \frac{2im}{r^2} u - \frac{v}{r^2} \right] \\ &\quad + D\mu \left(Dv + \frac{im}{r} u - \frac{v}{r} \right), \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial w}{\partial t} &= -i \alpha W_\ell w - DW_\ell u - i \alpha p + \mu \mathcal{L}w + D\mu (Dw + i \alpha u) \\ &\quad + \frac{1}{r} D [r (\mu_t - \mu) (Dw + i \alpha u)], \end{aligned} \quad (2.71)$$

avec

$$D(ru) + i [mv + \alpha rw] = 0. \quad (2.72)$$

Dans les relations précédentes, l'opérateur \mathcal{L} est défini par

$$\mathcal{L} = D^2 + \frac{1}{r}D - \frac{m^2}{r^2} - \alpha^2 \quad \text{et} \quad \mu = \mu(W_\ell) = \frac{1}{Re} \left[\frac{Hb}{|DW_\ell|} + |DW_\ell|^{n-1} \right].$$

Les conditions à la paroi (2.53) et à l'interface (2.64), (2.65), (2.66) et (2.67), combinées avec (2.68) pour $\alpha \neq 0$ ou $m \neq 0$, conduisent à

$$u(1) = v(1) = w(1) = 0, \quad (2.73)$$

$$u(r_0) = v(r_0) = w(r_0) = 0, \quad (2.74)$$

$$Du(r_0) = Dv(r_0) = 0, \quad (2.75)$$

$$Dw(r_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 1 \\ h \frac{2}{(1-r_0)^2} & \text{si } n = 1 \end{cases}. \quad (2.76)$$

Les conditions initiales sont données par :

$$u(r, t = 0) = u_0(r) \quad (2.77)$$

$$v(r, t = 0) = v_0(r), \quad (2.78)$$

$$w(r, t = 0) = w_0(r). \quad (2.79)$$

Finalement, on se retrouve avec neuf conditions aux limites : trois à la paroi et six à l'interface. Le système paraît donc surdéterminé. En fait, les deux conditions de Neumann à l'interface $r = r_0$: $Du(r_0) = Dv(r_0) = 0$ sont nécessaires pour palier à la singularité de la viscosité effective au voisinage de l'interface. La condition (2.76) est aussi une condition de Neumann lorsque $n < 1$. Elle permet de faire face au comportement singulier de μ au voisinage de r_0 . Lorsque $n = 1$ (fluide de Bingham), la condition (2.76) est une condition sur h et non w . Elle permet d'évaluer la perturbation de l'interface. Les conditions aux limites de type Dirichlet $\mathbf{u}' = 0$ à $r = r_0$, indiquent que dans le cadre de la théorie linéaire, le mouvement de la zone bouchon n'est pas modifié par une perturbation infinitésimale.

Ainsi, tout se passerait comme si on avait un écoulement composé Couette-Poiseuille d'un fluide rhéofluidant entre deux cylindres coaxiaux où le cylindre extérieur est

fixe et le cylindre intérieur (zone bouchon) se déplace axialement avec une vitesse constante $W = 1$. On reviendra par la suite sur ce point. Finalement, le système d'équations (2.69 - 2.71) peut s'écrire en termes de u et v si $\alpha \neq 0$ ou en termes u et w si $m \neq 0$.

Formulation (u, v)

En supposant que $\alpha \neq 0$, on élimine w de l'équation (2.69), et la pression résultante de (2.72) est remplacée dans (2.70) et (2.71). Ces manipulations conduisent aux équations suivantes formulées en termes u et v :

$$-i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{os} & \mathcal{L}_1 \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_{sq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -\frac{L}{\alpha} & -\frac{im}{\alpha} (L + \alpha^2 - D^2) \\ -\frac{m}{\alpha r} D^+ & -i \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

où

$$L = DD^+ - \alpha^2 \quad \text{et} \quad D^+ = D + \frac{1}{r}.$$

L'équation (2.80) peut être écrite symboliquement

$$-i \mathcal{L}_{uv} (u, v)^T = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{uv} (u, v)^T \quad (2.81)$$

avec les termes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{os} &= -W_\ell L - \left(\frac{DW_\ell}{r} - D^2 W_\ell \right) - \frac{i}{\alpha} \mu \left[L^2 - \frac{m^2}{r^2} L + \frac{2m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] \\ -\frac{i}{\alpha} D\mu &\left[\left(2DL + \frac{L}{r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] - \frac{i}{\alpha} D^2 \mu [L + 2\alpha^2] - i\alpha (\mu_t - \mu) [L + 2\alpha^2] \\ &\quad - \frac{i}{\alpha} D \left(\frac{1}{r} D (r(\mu_t - \mu) [L + 2\alpha^2]) \right) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= -imW_\ell (L + \alpha^2 - D^2) - \frac{im}{r} DW_\ell + \frac{m}{\alpha} \mu \left[L^2 - L(D^2) - \frac{m^2}{r^2} (L + \alpha^2) \right] \\ + \frac{m}{\alpha} D\mu &\left[2DL + 2\alpha^2 - 2D^3 + \frac{1}{r} (L - D^2) - \frac{m^2}{r^3} \right] - \alpha m (\mu_t - \mu) [L + \alpha^2 - D^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m}{\alpha} \mu \left[\alpha^2 \left(L + \frac{2}{r^2} \right) + \frac{m^2}{r^2} \left(D^2 + \frac{2}{r^2} \right) \right] + \frac{m}{\alpha} D^2 \mu [L + \alpha^2 - D^2] \\
& + \frac{m}{\alpha} D \left(\frac{1}{r} D (r (\mu_t - \mu) (L + \alpha^2 - D^2)) \right) \tag{2.83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 = & - \frac{m}{r} W_\ell \left(D + \frac{1}{r} \right) - \frac{m}{r} D W_\ell - \frac{i m}{\alpha r} \mu \left[D L + \frac{1}{r} (L - 2\alpha^2) - \frac{m^2}{r^2} \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] \\
& - \frac{i m}{\alpha r} D \mu (L + \alpha^2) - \frac{i m}{\alpha r^2} D (r (\mu_t - \mu) (L + 2\alpha^2)) \tag{2.84}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{sq} = & -i \alpha W_\ell \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) + \mu \left[\left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \left(L - \frac{m^2}{r^2} \right) - \frac{2m^2}{r^3} \left(D - \frac{1}{r} \right) \right] \\
& + D \mu \left[\left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \left(D - \frac{1}{r} \right) \right] + \frac{m^2}{r^2} D \left[(\mu_t - \mu) \left(D - \frac{1}{r} \right) \right]. \tag{2.85}
\end{aligned}$$

On peut noter que lorsque $m = 0$, les opérateurs de couplage \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 s'annulent et les opérateurs d'Orr-sommerfeld modifié \mathcal{L}_{os} et de Squire modifié \mathcal{L}_{sq} , sont complètement découplés.

Formulation (u, w)

Le problème peut être écrit en u et w pour $m \neq 0$. On élimine v de l'équation (2.69), et la pression résultante de (2.71) est remplacée dans (2.70) et (2.72). Ces manipulations conduisent aux équations suivantes

$$\begin{aligned}
& -i \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{c1} & \mathcal{L}_{c2} \\ \mathcal{L}_{c3} & \mathcal{L}_{c4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \\
\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} m^2 - [r^2 (L + \alpha^2) + 2rD^+] & -i \alpha r^2 \left(D^+ + \frac{1}{r} \right) \\ -i \alpha r^2 D^+ & (m^2 + \alpha^2 r^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{2.86}
\end{aligned}$$

le système peut être écrit sous la forme

$$-i \mathcal{L}_{uw} (u, w)^T = \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{M}_{uw} (u, w)^T \tag{2.87}$$

avec les termes

$$\mathcal{L}_{c1} = \alpha m^2 W_\ell - \alpha D W_\ell \left[r^2 \left(D + \frac{1}{r} \right) \right] - \alpha W_\ell \left[r^2 (L + \alpha^2) + 2r \left(D + \frac{1}{r} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -i\mu \left[r^2 D^4 - m^2 (2L - \alpha^2) - L \right] - i\mu \left[6r \left(D^3 + \frac{D^2}{r} \right) - \alpha^2 r^2 \left(D^2 + \frac{3D}{r} \right) \right] \\
& -i\mu \left[2m^2 \left(\frac{D}{r} - \frac{1}{r^2} \right) - 2m^2 \left(\frac{D}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{m^4}{r^2} \right] - iD\mu \left[rL - \alpha^2 r^2 D \right] \\
& -iD\mu \left[2r^2 \left(D^3 + \frac{2D^2}{r} \right) - m^2 \left(2D - \frac{1}{r} \right) \right] - i\alpha^2 m^2 (\mu_t - \mu) \\
& -iD^2\mu \left[r^2 \left(L + \alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \tag{2.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c2} &= -i\alpha^2 W_\ell \left[r^2 \left(D + \frac{2}{r} \right) \right] - i\alpha^2 r^2 DW_\ell \\
& +\mu \left[\alpha r^2 D^3 + \alpha r \left(5D^2 + \frac{3D}{r} \right) - (\alpha^3 r^2 + \alpha m^2) \left(D + \frac{2}{r} \right) \right] \\
& +D\mu \left[\alpha r^2 \left(2D^2 + \frac{5}{r} \right) - (\alpha^3 r + \alpha m^2) \right] + D^2\mu \left[\alpha r^2 D \right] - (\mu_t - \mu) \alpha m^2 D \tag{2.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c3} &= -i\alpha^2 W_\ell (r^2 D + r) - i m^2 DW_\ell \\
& +\mu \left[\alpha r L + \alpha r^2 \left(D^3 + \frac{3D^2}{r} \right) - \alpha r^2 \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) D + \frac{\alpha m^2}{r} \right] \\
& +D\mu \left[\alpha r^2 (L + \alpha^2) \right] - \frac{\alpha m^2}{r} D [r (\mu_t - \mu)] \tag{2.90}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{c4} &= \alpha W_\ell (m^2 + \alpha^2 r^2) \\
& +i\mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) \left(L + \frac{1}{r^2} - \frac{m^2}{r^2} \right) + 2\alpha^2 r D \right] \\
& +iD\mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) D \right] + \frac{i m^2}{r} D [r (\mu_t - \mu) D] \tag{2.91}
\end{aligned}$$

2.5 Comportement aux temps longs de la perturbation

Le comportement aux temps longs de la perturbation est obtenu en cherchant des solutions sous la forme

$$(u(r, t), v(r, t), w(r, t), p(r, t), h(t)) = (u(r), v(r), w(r), p(r), h) e^{-iCt}, \tag{2.92}$$

où C est une fréquence complexe. Le rapport C_r/α est la vitesse de phase et la partie imaginaire C_i est le taux de croissance de la perturbation. La perturbation croît ou décroît exponentiellement au cours du temps selon que C_i est positif ou négatif, respectivement. Les problèmes aux valeurs initiales (2.81) et (2.87) se transforment en problèmes aux valeurs propres où C est la valeur propre. On obtient respectivement.

$$\mathcal{L}_{uv}(u, v)^T = C \mathcal{M}_{uv}(u, v)^T \quad (2.93)$$

et

$$\mathcal{L}_{uw}(u, w)^T = C \mathcal{M}_{uw}(u, w)^T \quad (2.94)$$

2.6 Résolution numérique

Comme la zone cisailée varie selon la valeur de r_0 , il est utile de faire un changement de variable pour transformer le domaine de calcul variable $[r_0, 1]$ en domaine fixe $[0, 1]$. Pour cela on pose

$$r = \tilde{r}(1 - r_0) + r_0, \quad z = \tilde{z}(1 - r_0), \quad t = \tilde{t}(1 - r_0),$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha(1 - r_0), \quad \tilde{C} = C(1 - r_0),$$

$$\tilde{R}e = Re(1 - r_0)^n, \quad \tilde{H}b = Hb(1 - r_0)^n. \quad (2.95)$$

Dans cette nouvelle formulation, le profil de vitesse axiale de l'écoulement de base est indépendant de r_0

$$W_\ell = 1 - (\tilde{r})^{1+\frac{1}{n}} \quad ; \quad \tilde{r} \in [0, 1]. \quad (2.96)$$

La méthode utilisée pour résoudre le système (2.93) ou (2.94) est basée sur une approximation spectrale (u_N, v_N) ² de la forme

$$(u_N, v_N) = \sum_{n=0}^N (a_n, b_n) T_n(x), \quad (2.97)$$

où les $T_n(x)$ sont les polynômes de Chebyshev définis par

$$T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N; \quad |x| \leq 1. \quad (2.98)$$

²Evidemment, le même raisonnement peut être fait en considérant la solution (u, w) .

Cette approximation spectrale est combinée avec une méthode de collocation, qui consiste à imposer à (u_N, v_N) de satisfaire exactement le système (2.93) en des points de collocation x_j répartis dans l'intervalle $[-1, +1]$. Dans notre cas, ces points de collocation sont les extréma du polynôme de Chebyshev $T_N(x)$. Ils sont donnés par

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.99)$$

Le système (2.93) à résoudre devient

$$\mathcal{L}_{uv}(u_N, v_N)^T |_{x=x_j} = C \mathcal{M}_{uv}(u_N, v_N)^T |_{x=x_j} \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (2.100)$$

avec les conditions aux limites

$$u_N(-1) = \tilde{D}u_N(-1) = v_N(-1) = 0, \quad (2.101)$$

$$u_N(+1) = v_N(+1) = 0. \quad (2.102)$$

En utilisant l'approximation (2.97) on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \mathcal{L}_{uv} T_n(x_j) (a_n, b_n)^T = \\ C \sum_{n=0}^N \mathcal{M}_{uv} T_n(x_j) (a_n, b_n)^T \quad \text{pour } 1 \leq j \leq (N-1) \end{aligned} \quad (2.103)$$

avec les conditions aux limites

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(-1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N b_n T_n(-1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N a_n D T_n(-1) = 0 \quad (2.104)$$

et

$$\sum_{n=0}^N a_n T_n(+1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N b_n T_n(+1) = 0; \quad \sum_{n=0}^N a_n D T_n(+1) = 0 \quad (2.105)$$

Le résultat est un problème aux valeurs propres généralisé de la forme

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

où \underline{a} et \underline{b} sont des vecteurs de la forme

$$\underline{a} = (a_0, \dots, a_N)^T, \quad \underline{b} = (b_0, \dots, b_N)^T \quad (2.107)$$

A titre d'exemple, les coefficients de la matrice A_{11} , sont donnés par

$$(A_{11})_{nj} = \mathcal{L}_{os} T_{n-1}(x_{j-1}), \quad (2.108)$$

pour

$$1 \leq j \leq (N + 1) \quad \text{et} \quad 1 \leq n \leq (N + 1) \quad (2.109)$$

Finalement, le système aux valeurs propres généralisé obtenu est résolu à l'aide de l'algorithme QZ implémenté dans le Logiciel MATLAB. De plus amples détails sont donnés par [Schmid et Henningson \(2000\)\(42\)](#).

N	no. valeur propre	\tilde{C}_r	\tilde{C}_i
41	1	0.9318931650	-0.0523156740
61	1	0.9318932667	-0.0523156946
81	1	0.9318925805	-0.0523155387
101	1	0.9318773384	-0.0523219716
121	1	0.9318639376	-0.0523220238
41	10	0.4350580890	-0.1732119513
61	10	0.4327394411	-0.1714633935
81	10	0.4327402009	-0.1714623227
101	10	0.4327300916	-0.1714670115
121	10	0.4327153276	-0.1714915539
41	15	0.4071435198	-0.1976008642
61	15	0.5765737214	-0.2426230385
81	15	0.5765683085	-0.2426343986
101	15	0.5766036942	-0.2425648280
121	15	0.5766798690	-0.2425996316

TAB. 2.1 – La 1^{ère}, 10^{ème} et 15^{ème} valeur propre pour différentes valeurs de N pour $r_0 = 0.5$, $n = 0.5$, $\tilde{R}e = 5000$ et $\tilde{H}b = 1.73$.

Remarque : Le problème aux valeurs propres pourrait être résolu en termes (u, v, w, p) , en suivant la procédure décrite par [Khorrami et al \(1989\)\(43\)](#). La taille de la matrice serait $4(N + 1) \times 4(N + 1)$ au lieu de $2(N + 1) \times 2(N + 1)$.

Les calculs ont été effectués pour $\tilde{R}e \leq 20000$, $0.017 \leq \tilde{H}b \leq 41$, $0 \leq \tilde{\alpha} \leq 4$ et $0 \leq m \leq 28$. Le nombre de points de collocation a été déterminé après étude de la convergence des quinze premières valeurs propres. Celles-ci étant ordonnées par ordre croissant de la valeur absolue de la partie imaginaire. Le tableau (2.1),

montre la convergence de la 1^{ère}, 10^{ème} et 15^{ème} valeur propre lorsque N augmente, pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$. Après plusieurs tests, pour différentes valeurs des paramètres rhéologiques, il s'est avéré que pour $N = 121$, les valeurs propres calculées sont précises à quatre décimales près pour pratiquement toutes les situations considérées dans ce chapitre.

2.7 Analyse des résultats et discussion

Comme il a été indiqué au paragraphe 2.3, on se propose d'examiner l'influence de l'indice de structure n du nombre d'Hershel-Bulkley $\tilde{H}b$ sur les conditions de stabilité de l'écoulement. Cette influence se manifeste à travers : (i) la modification de l'épaisseur de la zone cisailée, (ii) la modification globale de la viscosité et (iii) la modification du profil de la viscosité entre la paroi et l'interface. On s'efforcera par la suite à faire ressortir séparément chacun de ces effets.

Selon les valeurs des nombres d'ondes $\tilde{\alpha}$ et m , quatre situations peuvent être considérées : (i) perturbation unidimensionnelle : $\tilde{\alpha} = m = 0$; (ii) perturbation axisymétrique : $\tilde{\alpha} \neq 0$, $m = 0$; (iii) perturbation homogène dans la direction axiale : $\tilde{\alpha} = 0$, $m \neq 0$; et (iv) une perturbation oblique : $\tilde{\alpha} \neq 0$, $m \neq 0$.

2.7.1 Comportement aux temps longs de la perturbation

Au vu des conditions aux limites à la frontière de la zone bouchon, l'écoulement de Hagen-Poiseuille serait similaire à celui d'un fluide rhéofluidifiant entre deux cylindres coaxiaux où le cylindre intérieur se déplacerait axialement avec une vitesse constante $W = 1$. Ceci nous a amené à faire une revue bibliographique sur la stabilité des écoulements de fluides Newtoniens et non-Newtoniens entre deux cylindres coaxiaux où l'un est fixe et l'autre se déplaçant axialement avec une vitesse constante (écoulement composé Couette-Poiseuille). On commence par le cas limite de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide Newtonien dans une conduite annulaire. La stabilité linéaire de cet écoulement a été étudiée par [Mott et Joseph \(1968\)\(44\)](#) dans le cas d'une perturbation axisymétrique. Les résultats obtenus par les auteurs montrent une croissance monotone du nombre de Reynolds critique (basé sur l'épaisseur de l'espace annulaire et la vitesse maximale) avec la diminution du rapport des rayons \hat{R}_1/\hat{R}_2 où \hat{R}_1 et \hat{R}_2 sont respectivement les rayons des cylindres intérieur et extérieur. Plus tard [Mahadevan et Lilley \(1977\)\(45\)](#) ont montré numériquement, qu'en

fait pour un rapport de rayons $\hat{R}_1/\hat{R}_2 < 0.77$, le mode le moins stable est asymétrique. En particulier pour $0.14 < \hat{R}_1/\hat{R}_2 < 0.4$, la plus petite valeur du nombre de Reynolds critique est obtenue pour un nombre d'onde azimutal $m = 1$.

La stabilité linéaire d'un écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux, où un cylindre serait fixe et le deuxième se déplacerait axialement à une vitesse constante a été étudiée dans le cas 3D par [Preziosi et Rosso \(1990\)\(46\)](#). Les équations aux perturbations linéarisées ont été résolues numériquement pour un rapport de rayon $\hat{R}_1/\hat{R}_2 \geq 0.1$; $\alpha \leq 10$, $m \leq 5$ et pour un nombre de Reynolds (basé sur la vitesse axiale et le rayon du cylindre en déplacement) inférieur à 10^4 . Pour cette gamme de paramètres, les auteurs n'ont observé aucune instabilité. Cependant [Gittler \(1993\)\(47\)](#), moyennant la méthode asymptotique proposée par [Cowley et Smith \(1985\)\(48\)](#), (sorte de problème aux valeurs propres pour les grandes longueurs d'onde), a montré dans le cas d'une perturbation axisymétrique, que pour un rapport de rayon $\hat{R}_1/\hat{R}_2 < 0.1415$, voir figure (2.8), l'écoulement de Couette est linéairement instable à partir d'un nombre de Reynolds fini. A titre d'exemple pour $\hat{R}_1/\hat{R}_2 = 0.1$, l'auteur trouve un nombre de Reynolds critique de 8×10^5 et un nombre d'onde critique de 0.155. Le cas de l'écoulement composé Couette-Poiseuille a été étudié numériquement par [Sadeghi et Higgins \(1991\)\(49\)](#). Les résultats sont présentés pour $\hat{R}_1/\hat{R}_2 \geq 0.5$ et $m \leq 3$. Globalement, la composante Couette augmente la stabilité de l'écoulement. Les auteurs déterminent la "vitesse de coupure", *i.e.*, vitesse de déplacement du cylindre mobile à partir de laquelle l'écoulement est linéairement stable. Dans l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil, la zone bouchon se comporte d'un point de vue cinématique comme un solide indéformable qui se déplace à vitesse constante, on peut penser au vu des résultats de [Gittler \(1993\)\(47\)](#), qu'il serait possible d'avoir un Reynolds critique fini au moins pour $r_0 \leq 0.14$. En fait, il existe une différence fondamentale liée à la contrainte seuil. En effet, la contrainte seuil reste présente dans les équations du mouvement lorsqu'on travaille en coordonnées cylindriques, contrairement au cas plan, à cause des termes du type τ_{ij}/r . Si on prend pour simplifier le cas $n = 1$, le profil de vitesse axiale $W_\ell = 1 - \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0}\right)^2$ ne peut pas être écrit sous la forme de la somme d'un écoulement de Couette et d'un écoulement de Poiseuille, d'un fluide Newtonien. Par conséquent, les résultats de [Gittler](#) ne peuvent pas être utilisés directement pour notre problème. Une étude complète doit être effectuée avec la mise en œuvre de la

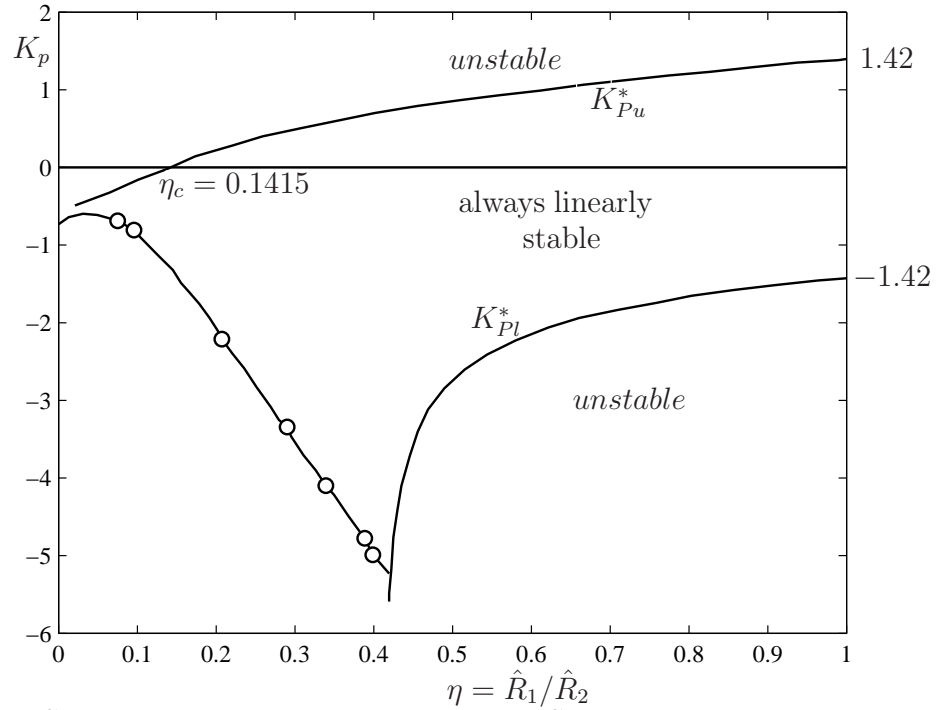


FIG. 2.8 – Carte de stabilité de l'écoulement composé Couette-Poiseuille entre deux cylindres coaxiaux où un cylindre est fixe et l'autre se déplace axialement à vitesse constante. Dans cette figure K_p est le rapport W_{pmax}/W_{cmax} où W_{pmax} et W_{cmax} représentent la vitesse axiale maximale pour l'écoulement Poiseuille et de Couette, respectivement (Gittler (1993)(47)).

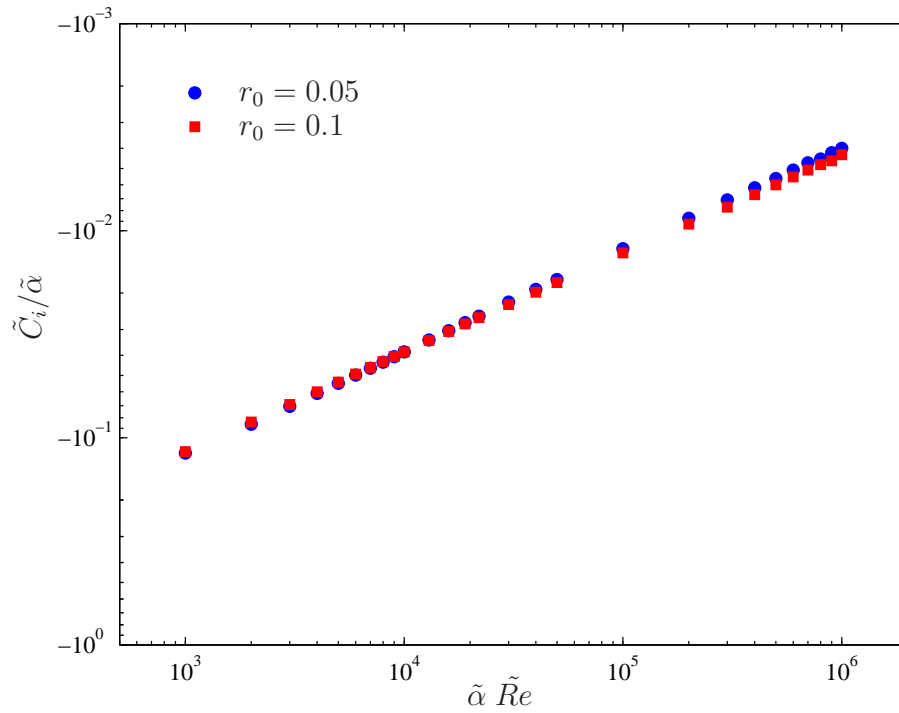


FIG. 2.9 – Evolution du taux de croissance temporel de la perturbation en fonction de αRe , pour $n = 0.5$ et deux valeurs de r_0 : 0.05 et 0.1.

méthode asymptotique de Cowley et Smith (1985)(48).

L'application de cette approche au cas d'une perturbation axisymétrique, conduit au problème aux valeurs propres suivant

$$\begin{aligned}
i \alpha \operatorname{Re} \left(W_\ell - \frac{C}{\alpha} \right) \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) + i \alpha \operatorname{Re} \left[\frac{DW_\ell}{r} - D^2 W_\ell \right] \phi \\
= F^{n-1} \left[n \phi'''' - \frac{2n}{r} \phi'''' + \frac{3n}{r^2} \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) \right] \\
+ (n-1) F^{n-1} \frac{DF}{F} \left(2n \phi'''' - \frac{3n}{r} \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) \right) \\
+ n(n-1) F^{n-1} \left((n-2) \frac{(DF)^2}{F^2} + \frac{D^2 F}{F} \right) \left(\phi'' - \frac{1}{r} \phi' \right) \quad (2.110)
\end{aligned}$$

avec $\phi = ru$ et $F = |DW_\ell|$. L'équation (2.110) a été résolue par la même procédure que celle décrite dans le paragraphe § 2.6. On a représenté sur la figure (2.9), l'évolution de $\tilde{C}_i/\tilde{\alpha}$ du mode le moins stable en fonction de $\tilde{\alpha}\tilde{R}e$. Aucune instabilité n'a été observée.

2.7.1.1 Perturbation unidimensionnelle $\tilde{\alpha} = m = 0$

L'équation de continuité (2.48) se réduit à $\frac{d}{dr}(ru) = 0$, soit $u = A/r$ où A est une constante d'intégration. Comme $u(r=1) = u(r=r_0) = 0$, alors $A = 0$, et donc $u = 0$ dans toute la section de la conduite. Il s'ensuit à partir de l'équation du mouvement suivant r (2.69) que $Dp = 0$, i.e., $p = \text{constante}$. Les équations du mouvement suivant θ et z se réduisent à

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{v}{r} \right) \right) \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.112)$$

avec,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) = \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{à} \quad r = r_0. \quad (2.113)$$

On peut d'ores et déjà noter que dans les équations (2.111) et (2.112) les termes d'inertie qui assurent l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation sont nuls. On cherche une solution sous la forme

$$(v, w) = (\hat{v}(r), \hat{w}(r)) e^{\lambda t}. \quad (2.114)$$

Les équations (2.111) et (2.112) deviennent

$$\lambda \hat{v} = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \mu \frac{d}{dr} \left(\frac{\hat{v}}{r} \right) \right) \quad (2.115)$$

$$\lambda \hat{w} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu_t \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right). \quad (2.116)$$

Si on multiplie l'équation (2.115) par \hat{v} et que l'on intègre entre r_0 et 1, on aura

$$\lambda \langle \hat{v}^2 \rangle = -\mu \left\langle \left(r \frac{d}{dr} \left(\frac{\hat{v}}{r} \right) \right)^2 \right\rangle \quad (2.117)$$

où $\langle \cdot \rangle = \int_{r_0}^1 (\cdot) r dr$.

Il est clair d'après l'équation (2.117) que $\lambda < 0$. Le même raisonnement peut être effectué avec l'équation (2.116). Par conséquent, en présence d'une perturbation unidimensionnelle, l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil reste inconditionnellement stable.

2.7.1.2 Perturbation axisymétrique $m = 0$

Dans ce cas, la formulation (u, v) est utilisée. Les deux opérateurs de couplage \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 s'annulent et le problème aux valeurs propres (2.81) se réduit à deux équations différentielles découplées :

(i) Equation d'Orr-Sommerfeld modifiée

$$\mathcal{L}_{os} u = -\frac{C}{\alpha} Lu, \quad (2.118)$$

et

(ii) Equation de Squire modifiée

$$\mathcal{L}_{sq} v = i \alpha^3 C v. \quad (2.119)$$

Ces deux dernières équations sont similaires à celles que l'on obtiendrait pour un fluide Newtonien avec des termes supplémentaires relatifs à la stratification de la viscosité.

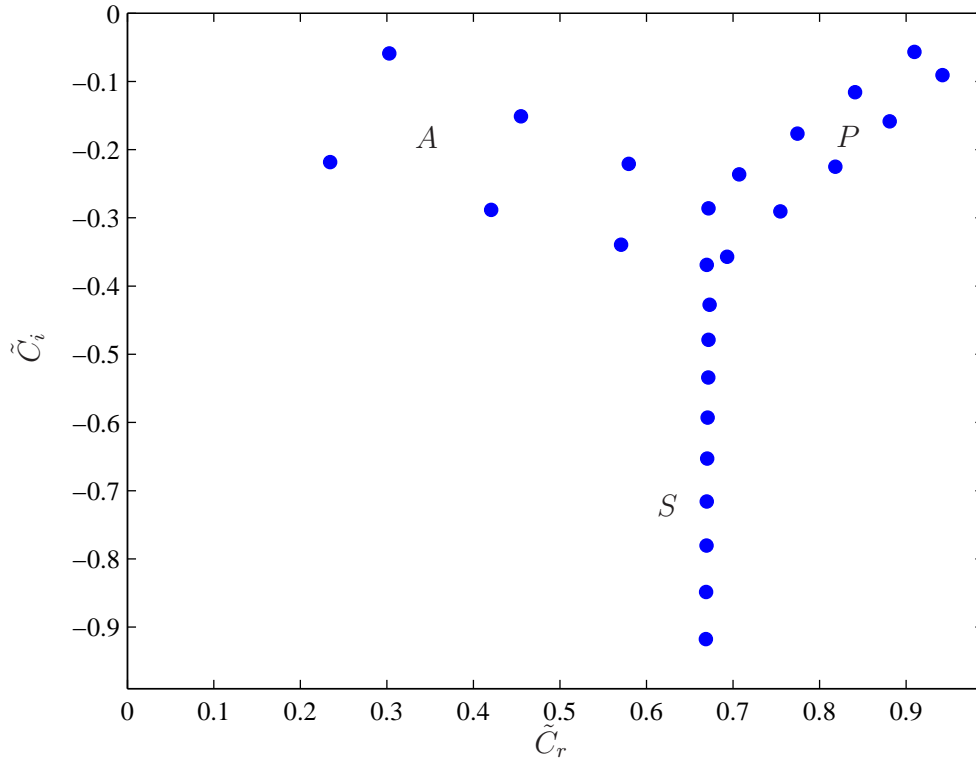


FIG. 2.10 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, $\tilde{H}b = 0.433$, $r_0 = 0.2$ et $n = 0.5$.

- **Modes d'Orr-Sommerfeld :** La figure (2.10) montre un exemple de spectre d'Orr-Sommerfeld obtenu pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$ et $\tilde{H}b = 0.433$, ($r_0 = 0.2$). De manière classique, on retrouve les branches *A*, *P* et *S* (Mack (1976)(50)), relatives respectivement aux modes pariétaux ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} \approx 0$), modes d'interface ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} \approx 1$) et modes centraux transportés par l'écoulement moyen ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} = 2/3$).

L'évolution du spectre selon la valeur de Re est examinée à travers l'étude des variations du taux d'amplification temporel \tilde{C}_i et de la vitesse de phase $\tilde{C}_r/\tilde{\alpha}$ des six premières valeurs propres en fonction de \tilde{Re} . Le résultat est donné par la figure (2.11) pour $\tilde{\alpha} = 1$ et $\tilde{H}b = 1.73$. Le suivi des modes est décrit dans (O'Sullivan et Breur (1994)(51)) voir aussi (Kabouya (2005)(31)). Globalement, cela consiste à se placer à un nombre de Reynolds suffisamment grand de telle façon que l'on puisse distinguer les modes rapides (*P*) des modes lents (*A*). Ensuite, on suit chaque couple $(\tilde{C}_r, \tilde{C}_i)$ en diminuant \tilde{Re} . Le résultat est illustré par la figure (2.11a). Comme dans le cas Newtonien, les modes pariétaux et d'interface évoluent respectivement

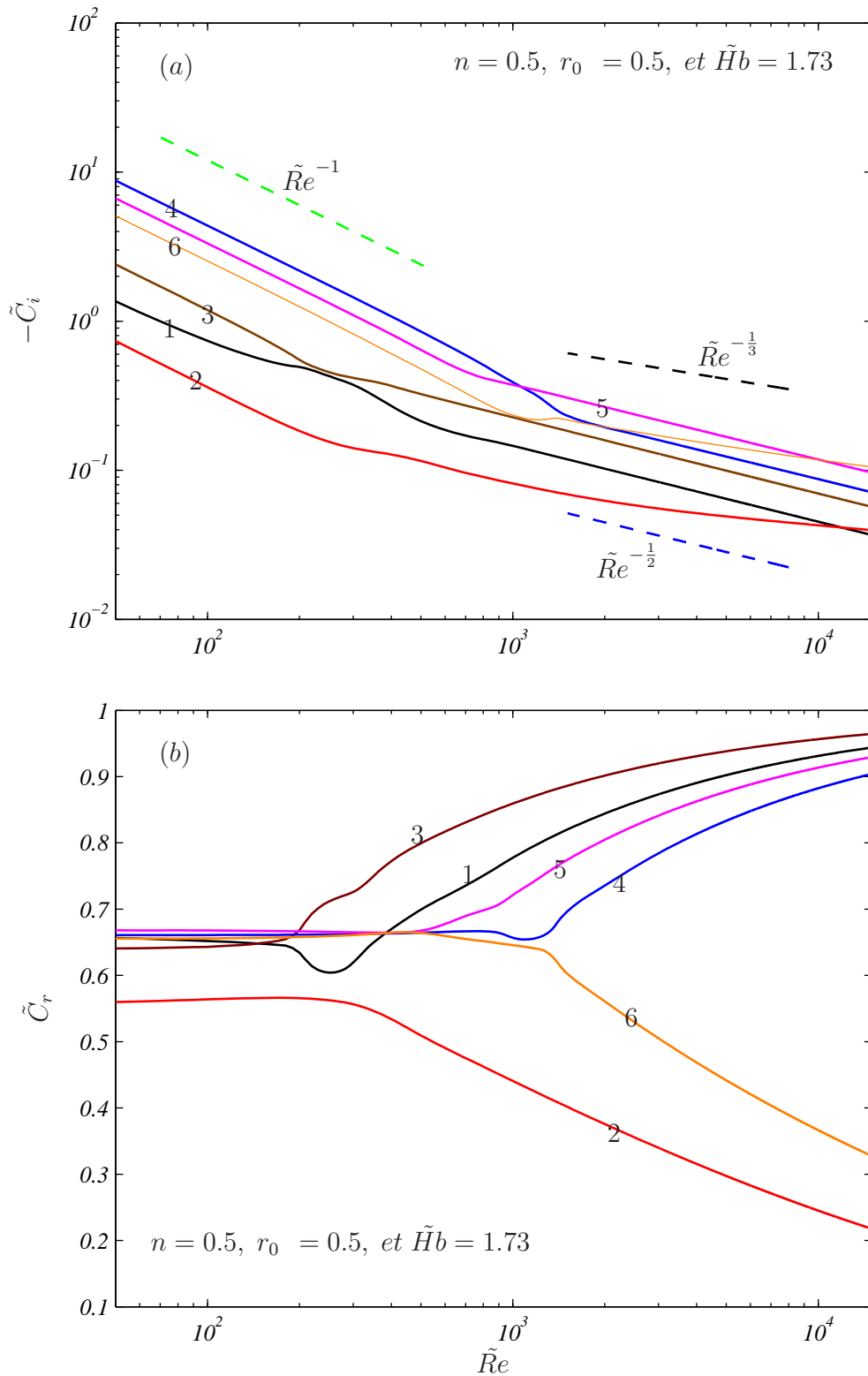


FIG. 2.11 – a) Variation du taux d’amortissement et b) vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds, pour $\tilde{\alpha} = 1, m = 0$ et $\tilde{H}b = 1.73$. Les lignes pointillées montrent les variations des grandeurs $\tilde{Re}^{-1/3}$, $\tilde{Re}^{-1/2}$ et \tilde{Re}^{-1} .

en $Re^{-\frac{1}{3}}$ et $Re^{-\frac{1}{2}}$. Pour les faibles valeurs de \tilde{Re} les modes propres évoluent en Re^{-1} .

Pour faire ressortir uniquement l'effet de r_0 , i.e., l'effet de géométrie, on fixe $n = 1$ et on annule artificiellement Hb ($\tilde{H}b = 0$) dans l'équation d'Orr-Sommerfeld. Le résultat est montré par la figure (2.12). L'écoulement est moins stable lorsque l'épaisseur de la zone cisillée diminue. Ce résultat peut être rapproché des travaux de [Mott et Joseph \(1968\)\(44\)](#) sur la stabilité de l'écoulement d'un fluide Newtonien en conduite annulaire. Il est montré que le nombre de Reynolds critique diminue lorsque \hat{R}_1/\hat{R}_2 se rapproche de 1 (faible espace annulaire).

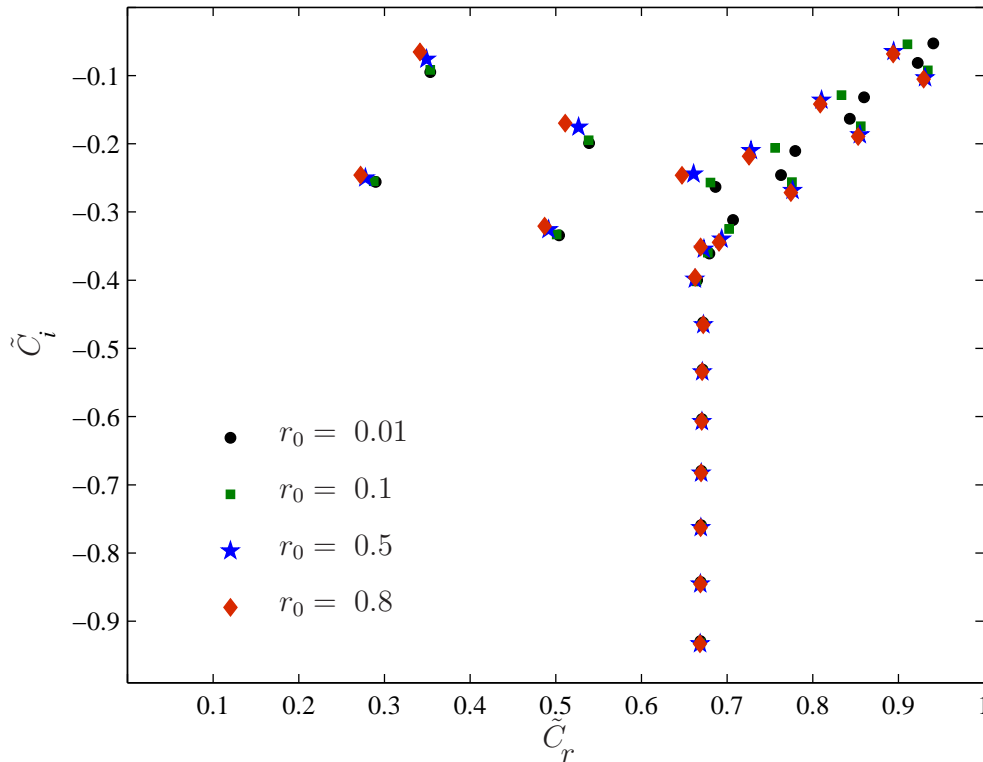


FIG. 2.12 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, " $\tilde{H}b = 0$ ", $n = 0.5$ et $r_0 = 0.01, 0.1, 0.5, 0.8$.

Lorsqu'on modifie $\tilde{H}b$, on modifie aussi la viscosité effective de manière globale dans la zone cisillée. Pour rendre compte de l'influence de $\tilde{H}b$ sur la stabilité de l'écoulement, on a fixé $n = 0.5$, $r_0 = 0.8$ et on a représenté le spectre des valeurs propres selon que l'on tienne compte ou pas des termes en $\tilde{H}b$ dans l'équation d'Orr-Sommerfeld. Le résultat est illustré par la figure (2.13). On constate que les modes pariétaux sont pratiquement insensibles aux termes en $\tilde{H}b$. En d'autres termes, la stabilité de

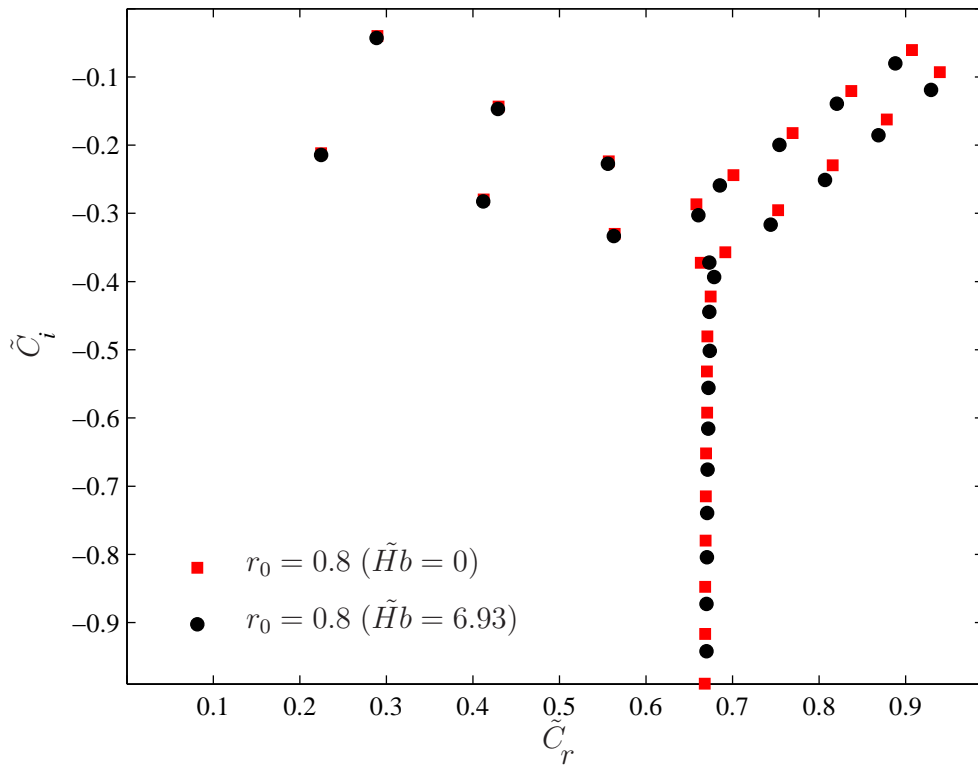


FIG. 2.13 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, $\tilde{H}b = 0, 6.93$, $r_0 = 0.8$ et $n = 0.5$.

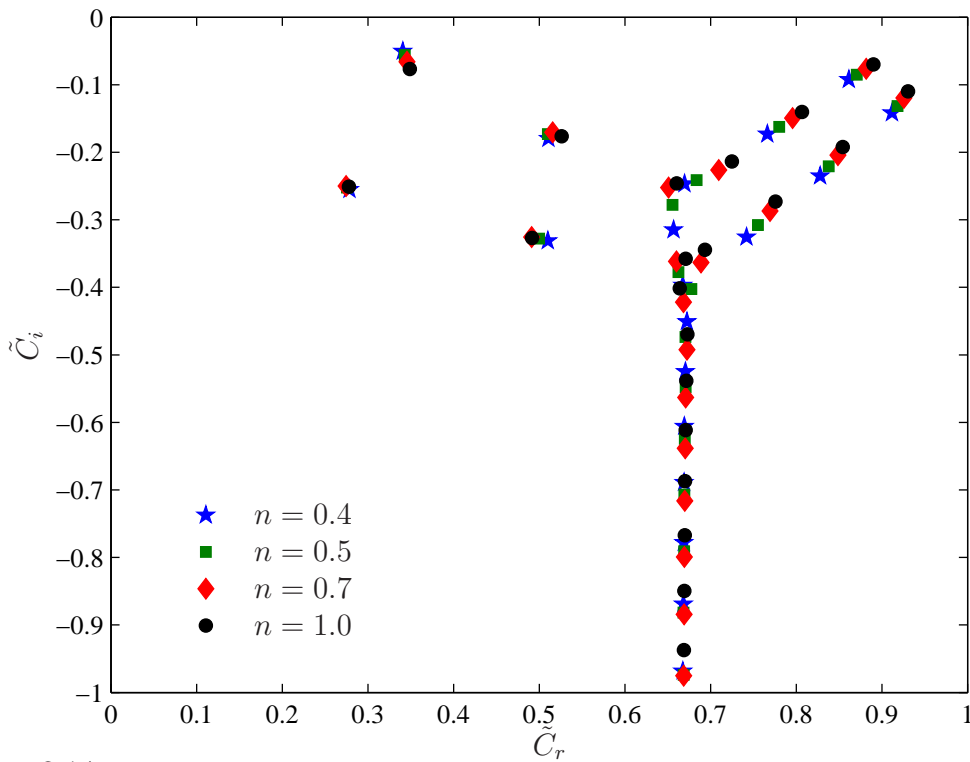


FIG. 2.14 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $Re_p = 5 \times 10^3$, $\tilde{H}b = 1.65, 1.73, 1.86$ et 2 , $r_0 = 0.5$ et $n = 0.4, 0.5, 0.7$ et 1 .

l'écoulement est insensible à $\tilde{H}b$, dans le cas d'une perturbation axisymétrique. Ceci vient du fait qu'en situation bidimensionnelle, une perturbation infinitésimale est sensible essentiellement à la viscosité tangente, (Fig. 2.7), qui ne fait pas intervenir la contrainte seuil. Au voisinage de l'interface, $|DW_\ell| \ll 1$, les termes en $\tilde{H}b/DW_\ell$ deviennent importants et le taux de croissance temporel pour les modes d'interface diminue.

Pour rendre compte de l'influence de la stratification de la viscosité, on a fixé r_0 et on a modifié l'indice de structure n . Le résultat est montré par la figure (2.14). Il semble que la rhéofluidification favorise l'instabilité de l'écoulement. Ce qui est en contradiction avec les travaux de (Nouar *et al.* (2007)(5)). Ceci est en fait lié à la définition du nombre de Reynolds généralisé utilisé (Eq. 2.24), qui fait intervenir une viscosité nominale qui ne rend pas compte de la physique du problème. Il est montré dans (Nouar *et al.* (2007)(5)) qu'il est plus approprié d'utiliser un nombre de Reynolds basé sur la viscosité tangente ou effective calculée à la paroi. Même en suivant cette procédure, on continue à observer la même tendance que dans la figure (2.15), mais de manière beaucoup plus atténuée. Ceci résulte de l'augmentation du gradient de vitesse au voisinage de la paroi lorsque n diminue, ce qui favorise l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation.

- **Modes de Squire** : Les modes de Squire sont solutions de l'équation

$$-i\alpha W_\ell v + \mu (DD^+ - \alpha^2) v + D\mu \left(D - \frac{1}{r} \right) v = -iCv.$$

En multipliant par le complexe conjugué v^* et en intégrant entre r_0 et 1, on obtient

$$C_i \langle |v|^2 \rangle = - \left\langle \mu \left[\alpha^2 |v|^2 + \left| Dv - \frac{v}{r} \right|^2 \right] \right\rangle, \quad (2.120)$$

où $\langle \cdot \rangle = \int_{r_0}^1 (\cdot) r dr$.

La relation (2.120) montre clairement que les modes de Squire sont amortis. La figure (2.16) montre des spectres de valeurs propres associées aux modes de Squire, où on note le caractère stabilisant des termes en $\tilde{H}b$. On observe aussi un déplacement de la branche verticale vers des vitesses de phase plus petites. Ce dernier point a déjà été signalé par Kabouya (2005)(31) pour un fluide de Bingham en écoulement de Poiseuille plan.

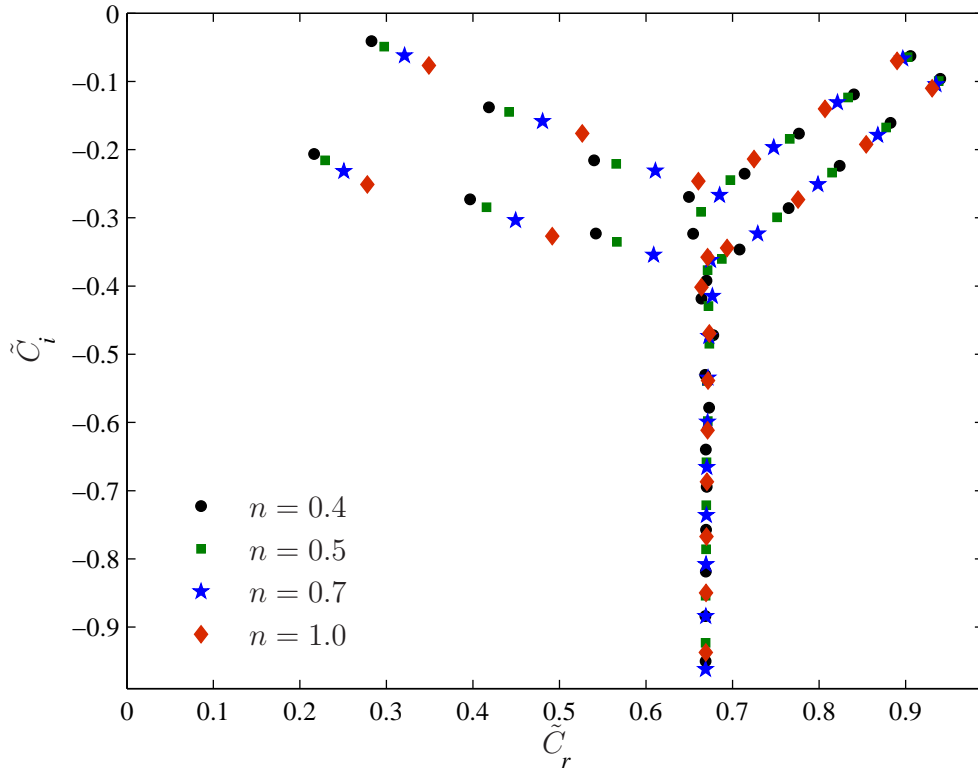


FIG. 2.15 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $Re = 5 \times 10^3$, $\tilde{H}b = 1.65, 1.73, 1.86$ et 2 , $r_0 = 0.5$ et $n = 0.4, 0.5, 0.7$ et 1 .

2.7.1.3 Perturbation homogène dans la direction axiale $\alpha = 0$ et $m \neq 0$

Dans le cas où $\alpha = 0$, la stabilité linéaire est donnée par la formulation (u, w) et se réduit à :

$$\begin{aligned}
 iC \left[(D^+u)^2 + \frac{1}{r}D^+u - \frac{m^2}{r^2}u \right] &= -\mu \left[(D^+u)^2 + \frac{1}{r}D^+u - \frac{m^2}{r^2}u \right]^2 \\
 -D\mu \left[\left(\frac{1}{r}DD^+u + 2D^3u + \frac{4D^2}{r}u - \frac{2m^2}{r^2}Du + \frac{m^2}{r^3}u \right) \right] \\
 -D^2\mu \left[DD^+u - \frac{m^2}{r^2}u \right] & \quad (2.121)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -iCw &= -DW_\ell u + \mu \left[\frac{1}{r}D(rDw) - \frac{m^2}{r^2}w \right] \\
 &+ D\mu Dw + \frac{1}{r}D[r(\mu_t - \mu)(Dw)] \quad (2.122)
 \end{aligned}$$

La famille des valeurs propres du système (2.121)-(2.122) est constituée par l'ensemble des valeurs propres de (2.121) et de (2.122) avec $u = 0$. Ces équations ne

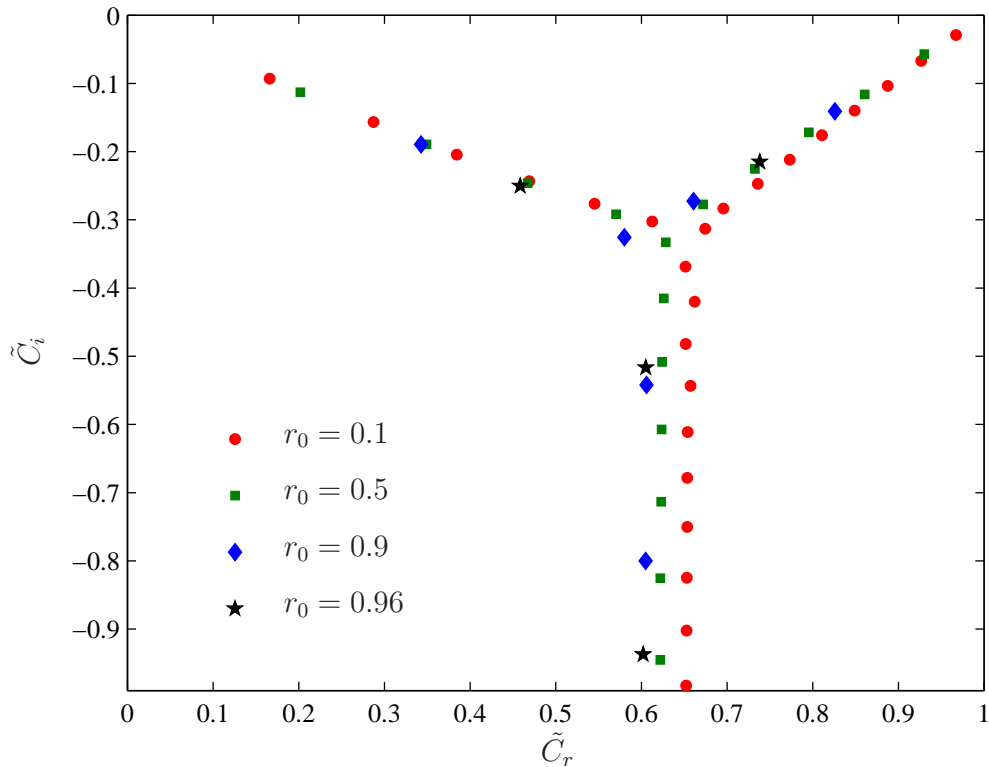


FIG. 2.16 – Spectres de valeurs propres associées aux modes de Squire pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$ et $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$. (cercle plein) $r_0 = 0.1$, $\tilde{Hb} = 0.193$; (carré plein) $r_0 = 0.5$, $\tilde{Hb} = 1.73$; (losange plein) $r_0 = 0.9$, $\tilde{Hb} = 15.59$ et (étoile) $r_0 = 0.96$, $\tilde{Hb} = 41.57$.

comportent pas de termes d'inertie qui assurent l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation, par conséquent les modes propres ne peuvent être qu'amortis, c'est ce que l'on vérifie numériquement. La forme du spectre consiste en une branche émanant de l'origine, comme le montre l'exemple de la figure (2.17). Il s'agit donc de modes qui ne se propagent pas et décroissent sur place. Contrairement au cas d'une perturbation axisymétrique, les modes propres sont fortement amortis lorsqu'on tient compte des termes en Hb .

2.7.1.4 Perturbation oblique $\tilde{\alpha} \neq 0$, $m \neq 0$

Dans cette situation, les valeurs propres sont calculés par la formulation (u, w) pour des nombres de polynômes ($N = 121$). Le spectre obtenu, est similaire à l'écoulement d'un fluide Newtonien, sauf dans le cas d'un écoulement de fluide de Herschel-Bulkley où il existe deux branches verticales séparées dont une associée au mode de Squire, présentées par les figures (2.18 et 2.22). Les figures (2.19-2.21) montrent

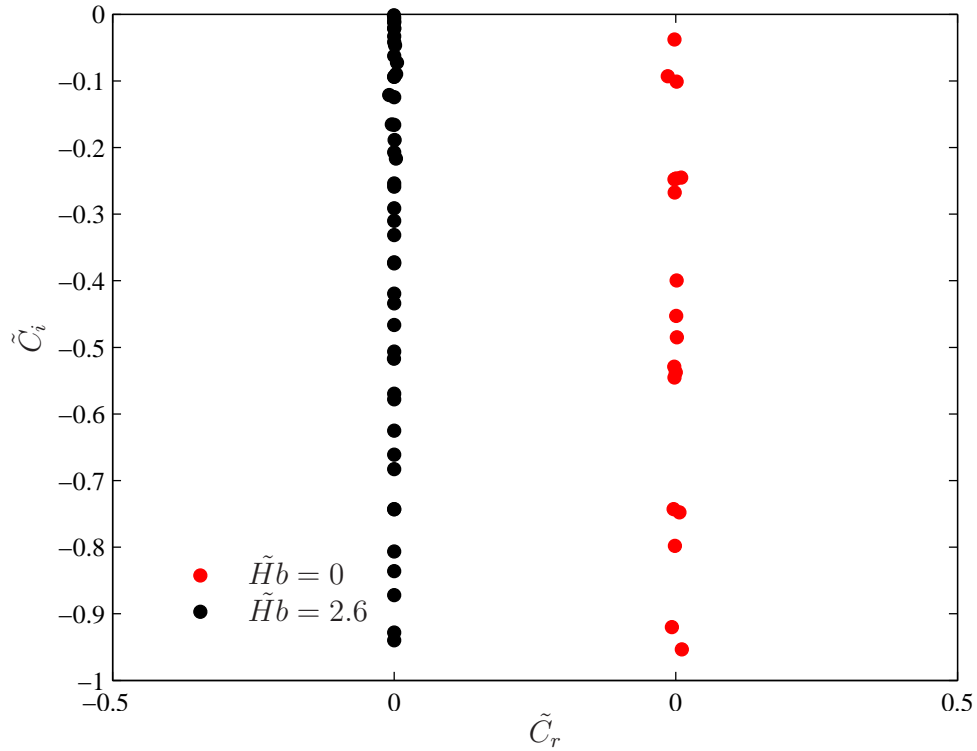


FIG. 2.17 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, $r_0 = 0.6$, $n = 0.5$ et $(\tilde{H}b = 0, 2.6)$.

la perturbation de "Swear hand" en représentant les modes les moins stables de la branche A et P pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$ avec des champs de vitesse correspondant à la partie réelle de trois vecteurs propres. Ils sont marqués par des cercles rouge sur les figures de spectre. Les vecteurs propres peuvent être aussi classés en modes pariétaux ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} \approx 0$). Ils présentent un maximum au voisinage de paroi, et s'atténuent vers l'interface. Les modes d'interface ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} \approx 1$), présentent un maximum au voisinage de l'interface et décroissent vers la paroi en modes centraux ($\tilde{C}_r/\tilde{\alpha} = 2/3$).

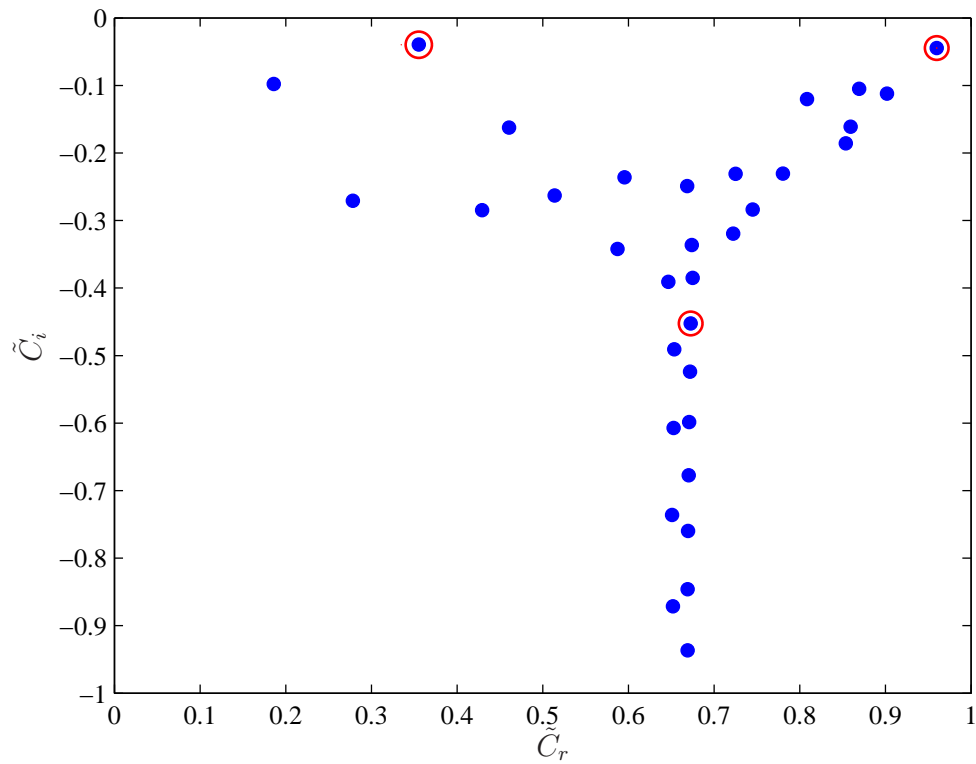


FIG. 2.18 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$, $\tilde{Re} = 3 \times 10^3$, $r_0 = 0.1$ et $\tilde{H}b = 0.193$.

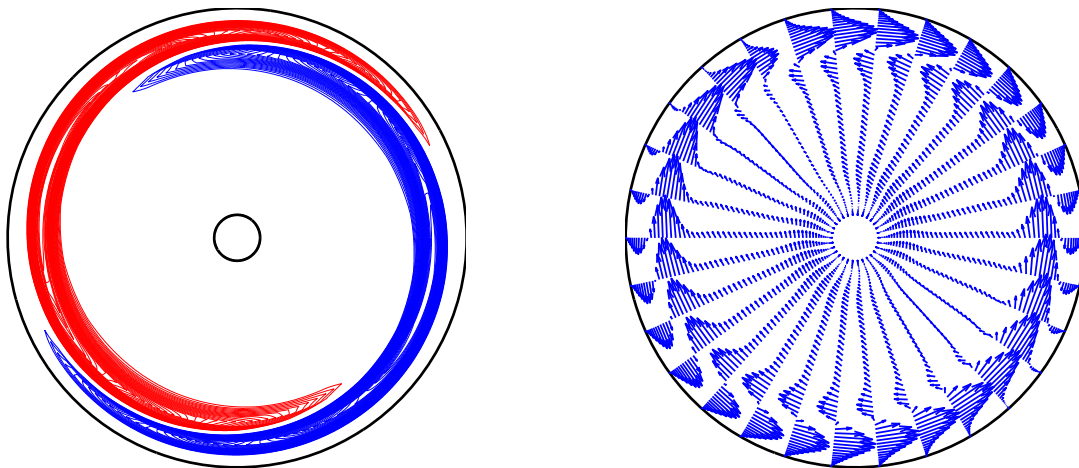


FIG. 2.19 – Structure de l'écoulement associé au mode pariétal le moins stable : $\tilde{C} = 0.3553 - 0.0395 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.

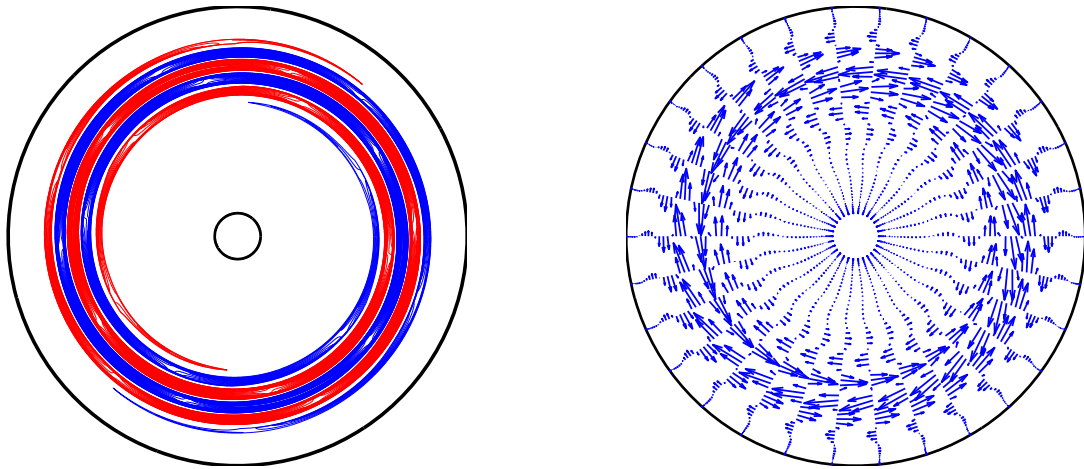


FIG. 2.20 – Structure de l'écoulement associé à un mode central : $\tilde{C} = 0.6728 - 0.4524 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleu correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.

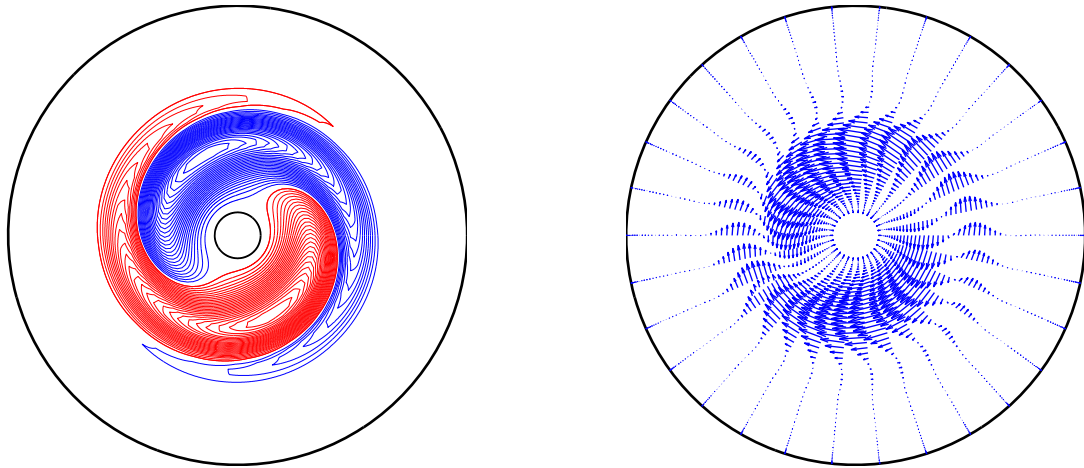


FIG. 2.21 – Structure de l'écoulement associé au mode d'interface le moins stable : $\tilde{C} = 0.9601 - 0.04451 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleu correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.

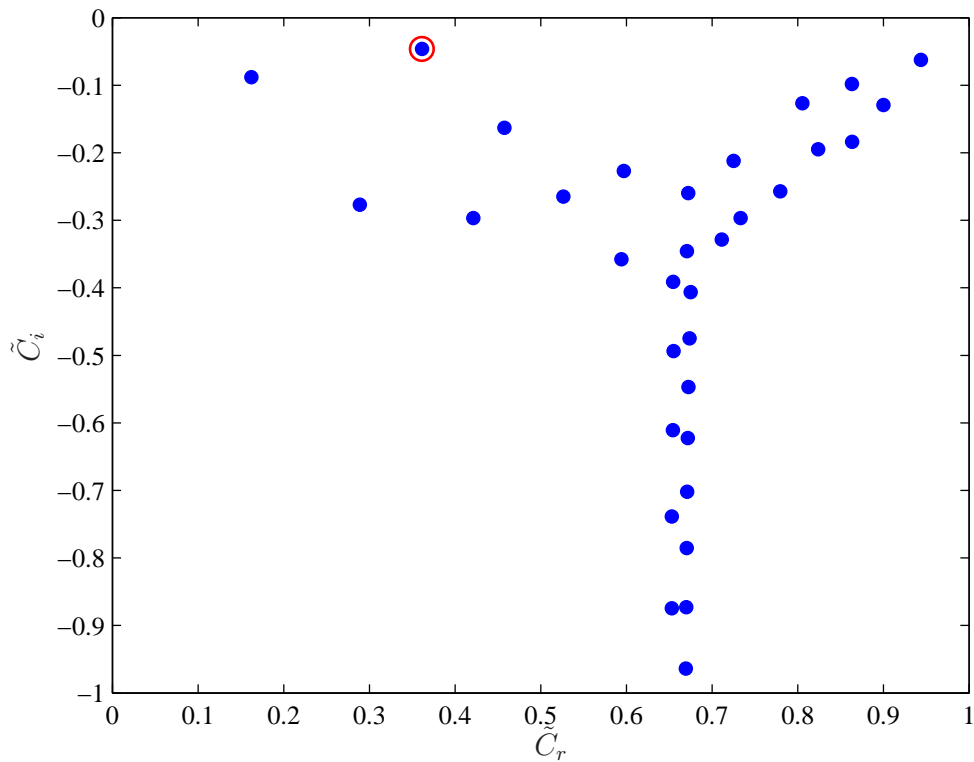


FIG. 2.22 – Spectre des valeurs propres pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 2$, $\tilde{Re} = 3 \times 10^3$, $r_0 = 0.1$ et $\tilde{H}b = 0.193$.

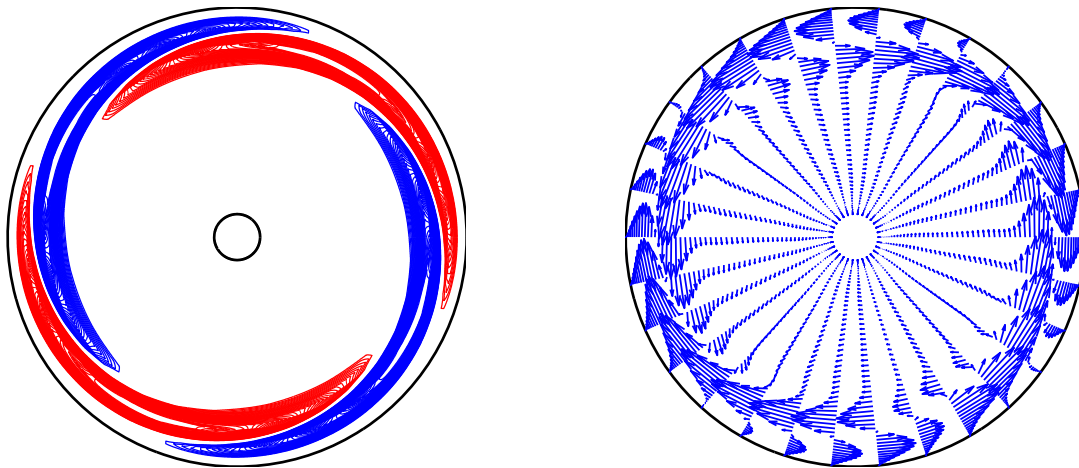


FIG. 2.23 – Structure de l'écoulement associé au mode pariétal le moins stable : $\tilde{C} = 0.36138 - 0.04632 i$. (Gauche) Contours d'iso-valeurs de la composante axiale de la vitesse w à $t = 0$ et $z = 0$. Les couleurs rouge et bleue correspondent aux valeurs positives et négatives de w . (Droite) Champ de vitesses $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ dans une section droite de la conduite.

2.7.2 Non-normalité : Pseudospectre et image numérique

Dans le paragraphe précédent, on a étudié le comportement aux temps longs d'une perturbation à partir de l'analyse du spectre des valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{L} \equiv \mathcal{M}_{uv}^{-1} \mathcal{L}_{uv}$ ou $\mathcal{M}_{uw}^{-1} \mathcal{L}_{uw}$. Cependant, du fait de la non-normalité de l'opérateur \mathcal{L} , le spectre "exact" ne permet pas à lui seul de rendre compte de toutes les propriétés de \mathcal{L} . Un opérateur \mathcal{L} est dit non normal lorsque $\mathcal{L}^+ \mathcal{L}$ est différent de $\mathcal{L} \mathcal{L}^+$ où \mathcal{L}^+ est l'opérateur adjoint déterminé en utilisant le produit scalaire défini dans L^2 . On pourrait définir un autre produit scalaire pour lequel la relation $\mathcal{L}^+ \mathcal{L} \equiv \mathcal{L} \mathcal{L}^+$ serait satisfaite (Galdi et Padula (1990)(52)), mais dans ce cas, il sera difficile de donner un sens physique à la norme associée. Ainsi pour suppléer au manque d'information contenue dans le spectre, on introduit la notion de pseudospectre. L'idée sous jacente à la définition de ces nouveaux objets, est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante de l'opérateur n'est pas définie, *i.e.* son spectre, mais également là où elle est en norme de taille significative, *i.e.*, les ensembles pseudo-spectraux qui sont définis de la manière suivante Trefethen (1997)(53) : le ϵ -pseudospectre $\sigma_\epsilon(\mathcal{L})$ d'un opérateur (\mathcal{L}) est défini pour une valeur strictement positive du paramètre ϵ comme le sous-ensemble du plan complexe.

$$\sigma_\epsilon(\mathcal{L}) = \{z \in \mathbb{C}, \|(zI - \mathcal{L})\|^{-1} \geq \frac{1}{\epsilon}\}. \quad (2.123)$$

Dans le cas d'un opérateur normal, la norme de la résolvante est très faible sauf dans le voisinage immédiat d'une valeur propre $z = C$ et évidemment au niveau de la valeur propre où elle est infinie. Dans le cas où l'opérateur est non normal, la norme décroît plus lentement lorsque l'on s'éloigne des valeurs propres, de sorte qu'à des distances relativement importantes des valeurs propres, on peut encore avoir $\|(zI - \mathcal{L})\|^{-1}$ très élevé. On introduit aussi l'image numérique d'un opérateur \mathcal{L} défini par l'ensemble des nombres complexes $(\mathcal{L}\mathbf{q}, \mathbf{q})$ où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire associé à la norme énergie et \mathbf{q} est un vecteur de norme unité. D'après le théorème de Hille-Yosida (1993)(54) un opérateur non-normal asymptotiquement stable peut induire une croissance transitoire de l'énergie si et seulement si son image numérique s'étend dans le demi-plan instable. Dans ce qui suit, on analyse l'influence de $\tilde{H}b$ et n sur les pseudo-spectres en situation 2D (axisymétrique) et 3D.

2.7.2.1 Cas d'une perturbation axisymétrique

Dans le cas axisymétrique ($m = 0$), les opérateurs \mathcal{L}_{os} et \mathcal{L}_{sq} Eq. (2.80) sont découplés. L'opérateur \mathcal{L}_{sq} est auto-adjoint, et les valeurs propres associées sont dans le demi-plan inférieur. Par conséquent, il n'introduit pas de croissance transitoire de l'énergie. L'opérateur d'Orr-sommerfeld est non-normal. La non normalité se situe au niveau du terme d'advection $W_\ell \left(D^2 + \frac{1}{r}D \right)$ où se produit le couplage entre l'écoulement de base et la perturbation. Les opérateurs associés à la dissipation visqueuse à travers μ ou μ_t sont auto-adjoints. Les figures (2.24) et (2.25) donnent le portrait spectral de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$ et pour deux valeurs de r_0 : 0.01 ($\tilde{Hb} = 0.017$) et 0.8 ($\tilde{Hb} = 6.93$). Les contours d'iso valeurs de ϵ sont les frontières du ϵ -pseudospectre. L'image numérique associée à \mathcal{L}_{os} est représentée en pointillés. Il est intéressant de noter qu'en dépit d'une forte augmentation de μ à travers \tilde{Hb} , les pseudo-spectres sont faiblement modifiés. Ceci vient du fait qu'en situation $2D$, la perturbation est sensible essentiellement à la viscosité tangente μ_t qui est indépendante de \tilde{Hb} . Dans l'équation (2.82) μ_t fait intervenir un terme en D^4u alors que μ fait intervenir des termes en D^2u .

2.7.2.2 Cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale $\tilde{\alpha} = 0$

Dans ce cas, la perturbation se présente sous forme de rouleaux longitudinaux. La non-normalité de $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ provient du terme $(-im^2DW_\ell)$ de l'équation (2.90). Les figures (2.26) et (2.27) sont des pseudospectres de l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ calculés pour $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$ et pour deux valeurs de r_0 : 0.01 ($\tilde{Hb} = 0.017$) et 0.8 ($\tilde{Hb} = 6.93$). L'image numérique associée à l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ est représentée en pointillés. Contrairement au cas précédent, l'augmentation de \tilde{Hb} réduit de manière significative l'extension des pseudo-spectres dans le demi-plan positif. A titre d'exemple, pour $r_0 = 0.01$ ($\tilde{Hb} = 0.02$), la perturbation nécessaire pour que le pseudospectre passe au demi-plan supérieur est $\epsilon = 3.4 \times 10^{-6}$, par contre pour $r_0 = 0.8$ ($\tilde{Hb} = 6.93$), la perturbation nécessaire doit être plus intense $\epsilon = 3.2 \times 10^{-3}$.

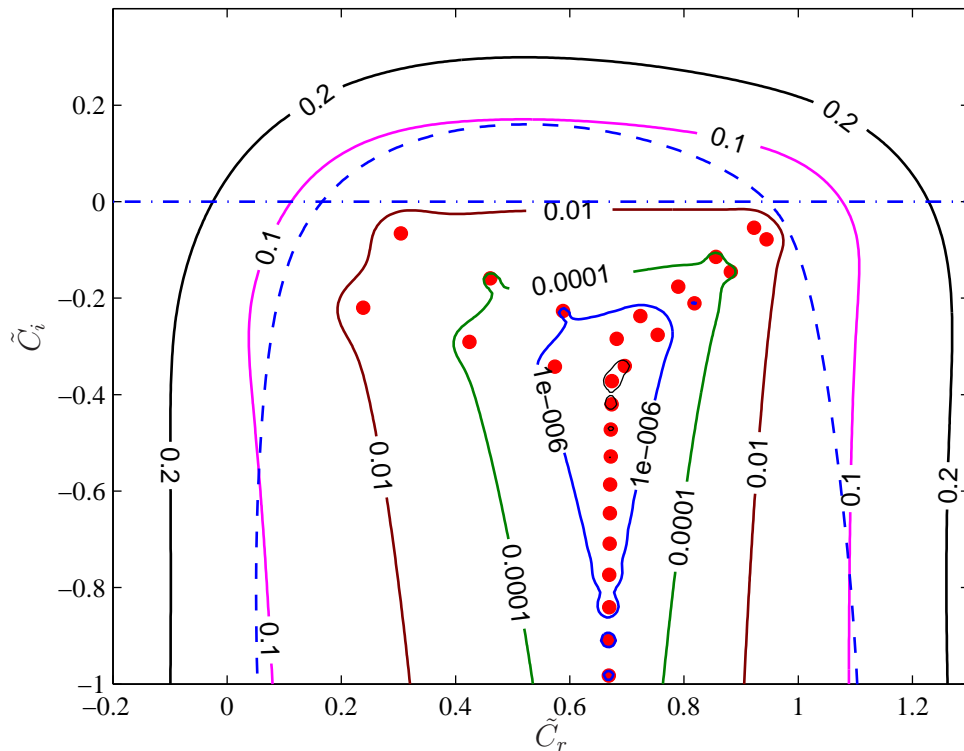


FIG. 2.24 – Portrait spectral de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour $r_0 = 0.01$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0.017$, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$. La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E} .

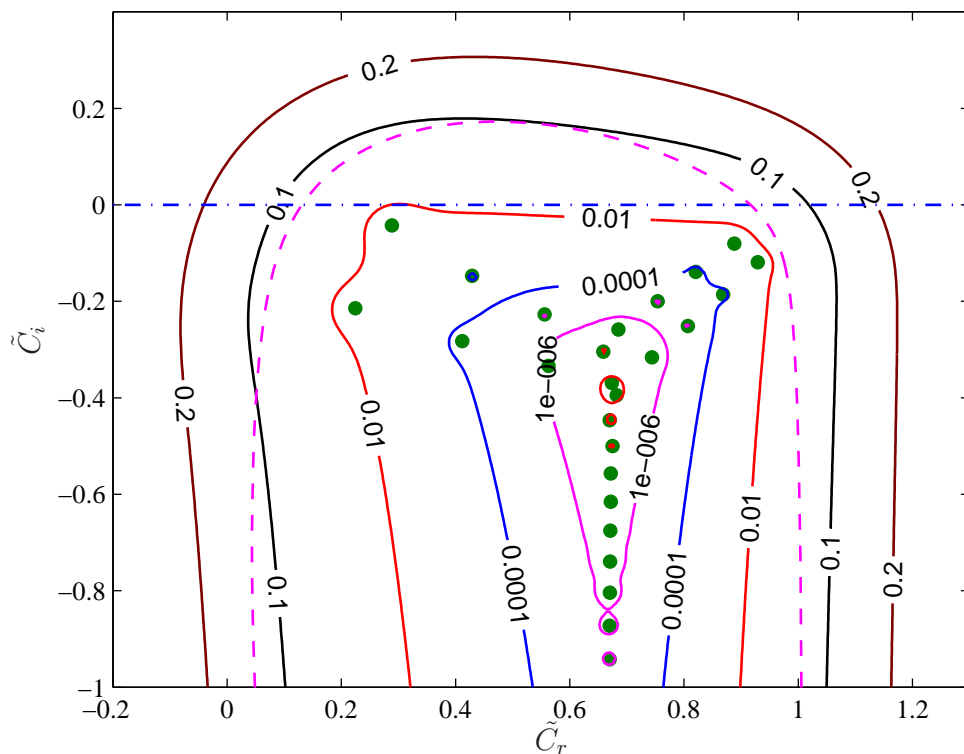


FIG. 2.25 – Portrait spectral de l'opérateur d'Orr-sommerfeld modifié pour $r_0 = 0.8$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 6.93$, $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 0$). La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de \mathcal{E} .

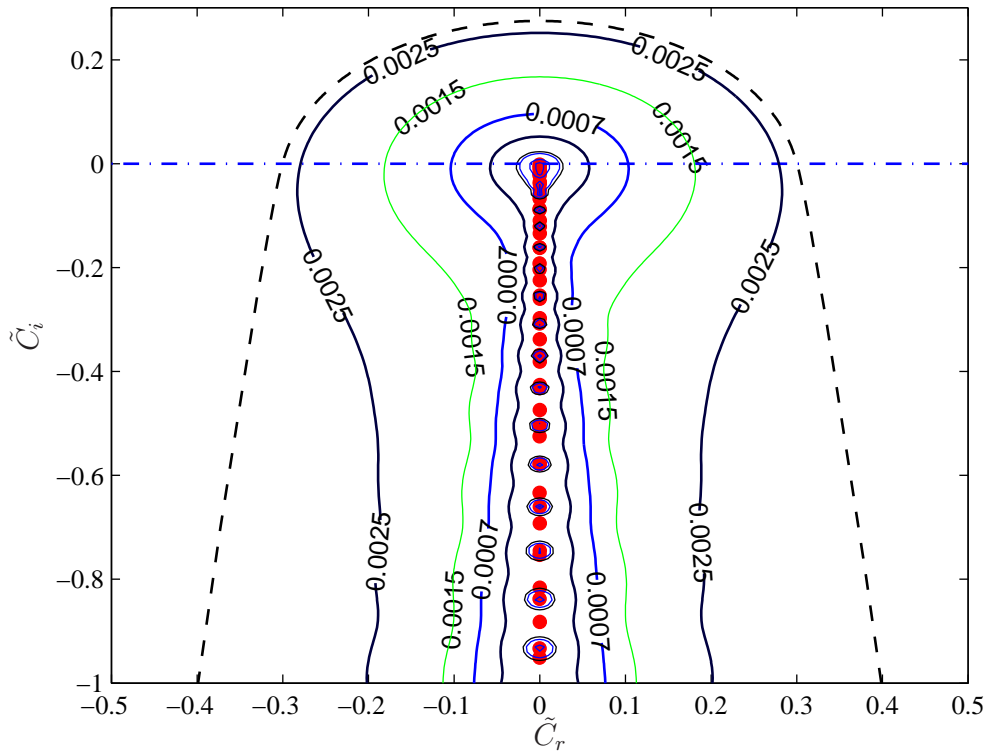


FIG. 2.26 – Portrait spectral de l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ pour $r_0 = 0.01$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 0.017$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$. La courbe en pointillés est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de ϵ .

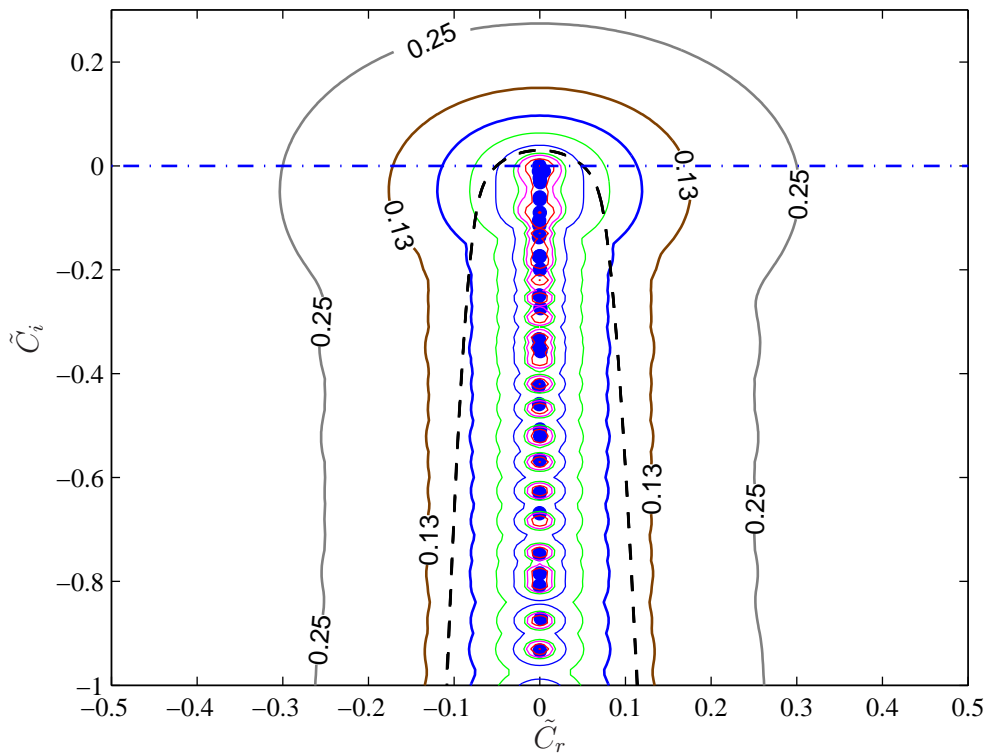


FIG. 2.27 – Portrait spectral de l'opérateur $\mathcal{M}_{uw}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$ pour $r_0 = 0.8$, $n = 0.5$, $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{Hb} = 6.93$, $\tilde{\alpha} = 0$ et $m = 1$). La courbe en tirets est la frontière de l'image numérique associée à l'opérateur considéré. Les courbes en trait continu sont les frontières iso-valeurs des ϵ -pseudospectre. Ces frontières sont repérées par la valeur de ϵ .

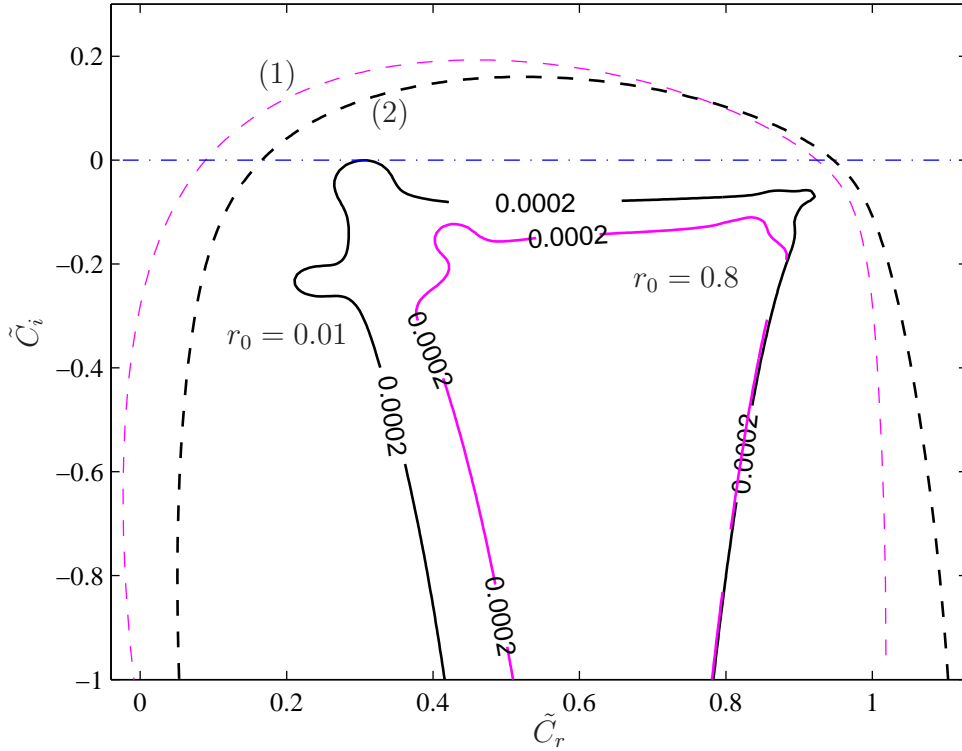


FIG. 2.28 – Frontières de l'image numérique et pseudospectres pour $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$, $\tilde{Re} = 5000$, $n = 0.5$ et $\tilde{\alpha} = m = 1$ (1) $r_0 = 0.01$, $\tilde{Hb} = 0017$; (2) $r_0 = 0.8$, $\tilde{Hb} = 6.93$.

2.7.2.3 Cas d'une perturbation tridimensionnelle

Lorsque les nombres d'onde axial et azimutal sont différents de zéro, la non-normalité provient des opérateurs de couplage et des termes d'advection dans \mathcal{L}_{uw} (si la formulation (u, w) est utilisée). Les pseudospectres sont qualitativement similaires à ceux représentés dans le cas axisymétrique ($m = 0$). Cependant, l'effet de \tilde{Hb} sur les pseudospectres est plus significatif. Dans la figure (2.28), on a choisi la valeur de ϵ de telle façon que la frontière du ϵ -pseudospectre pour $r_0 = 0.01$ soit tangente à $\tilde{C}_i = 0$.

Finalement, les résultats de cette section mettent clairement en évidence, la non-normalité des opérateurs de stabilité linéaire. On a aussi montré que dans le cas axisymétrique, les pseudospectres sont peu sensibles au nombre de Herschel-Bulkley. La non-normalité de l'opérateur de stabilité linéaire signifie que l'énergie cinétique d'une perturbation peut s'amplifier aux temps courts avant une décroissance expo-

entielle. Dans ce qui suit, on examine l'influence des paramètres rhéologiques sur la croissance transitoire de l'énergie et les caractéristique de la perturbation optimale.

2.7.3 Croissance transitoire et perturbation optimale

On utilise le produit scalaire défini dans L^2 pour analyser les effets de non-orthogonalité des fonctions propres. La taille de la perturbation est déterminée par la norme associée au produit scalaire et qui n'est autre que l'énergie cinétique de la perturbation à un facteur près. En effet, soient \mathbf{q}_1 et \mathbf{q}_2 deux vecteurs vitesse de la perturbation, solutions du problème aux valeurs initiales (2.69 - 2.72) ou (2.81) ou (2.87) selon la formulation adoptée. Le produit scalaire basé sur la norme énergie est défini par

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_\mathcal{E} = \int_{r_0}^1 (u_1^* u_2 + v_1^* v_2 + w_1^* w_2) r dr. \quad (2.124)$$

Lorsque la formulation (u, v) est adoptée, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_\mathcal{E} = \int_{r_0}^1 \left[u_1^* u_2 + \frac{1}{\alpha^2} D^+ u_1^* D^+ u_2 + \left(\frac{m^2 + \alpha^2 r^2}{\alpha^2 r^2} \right) v_1^* v_2 \right] r dr \\ + \int_{r_0}^1 \left[\frac{i m}{\alpha^2 r} (D^+ u_1^* v_2 - v_1^* D^+ u_2) \right] r dr. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Dans le cas de la formulation (u, w) , après avoir éliminé v de l'équation de continuité, on a :

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_\mathcal{E} = \int_{r_0}^1 \left[u_1^* u_2 + \frac{r^2}{m^2} (D^+ u_1^* D^+ u_2) + \left(\frac{\alpha^2 r^2 + m^2}{m^2} \right) w_1^* w_2 \right] r dr \\ + \int_{r_0}^1 \left[\frac{i \alpha r^2}{m^2} (D^+ u_1^* w_2 + w_1^* D^+ u_2) \right] r dr, \end{aligned} \quad (2.126)$$

où (*) signifie le complexe conjugué. La norme associée au produit scalaire défini par l'équation (2.126) est alors

$$\|\mathbf{q}\|_\mathcal{E}^2 = \int_{r_0}^1 \left[|u|^2 + \frac{r^2}{m^2} |D^+ u|^2 + \left(\frac{\alpha^2 r^2 + m^2}{m^2} \right) |w|^2 + \frac{2\alpha r^2}{m^2} I_m(w^* D u) \right] r dr. \quad (2.127)$$

(I_m désigne la partie imaginaire de l'argument). Une expression similaire est établie pour la formulation (u, v) .

L'analyse du problème peut être simplifiée en utilisant une approximation discrète : une solution \mathbf{q} du problème aux valeurs initiales linéarisé est projetée sur la base des fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}$ solutions du problème aux valeurs propres. On considère

alors l'espace S_M généré par les M premières fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}_j = (\hat{u}_j, \hat{w}_j)^T$ correspondant aux M premières valeurs propres $\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ classées dans l'ordre décroissant des parties imaginaires C_i de l'opérateur $\mathcal{A}_{uw} = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{L}_{uw}$.

$$S_M = \text{span}\{\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_M\}$$

Une perturbation admissible peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres $\hat{\mathbf{q}}_j$:

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^M \kappa_j \hat{\mathbf{q}}_j \quad (2.128)$$

Pour déterminer l'évolution temporelle des coefficients (κ_j) , le problème aux valeurs initiales (2.87) est réécrit sous la forme

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = -i \mathcal{A}_{uw} \mathbf{q} \quad (2.129)$$

et le problème aux valeurs propres :

$$\mathcal{A}_{uw} \hat{Q} = Q \Lambda, \quad (2.130)$$

où \hat{Q} est une matrice dont les vecteurs colonne sont les vecteurs propres et $\Lambda = \text{diag}\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$ est une matrice diagonale des valeurs propres classées par ordre décroissant des parties imaginaires des C_j .

En substituant (2.128) et (2.130) dans (2.129), on trouve

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = e^{(-i\Lambda t)} \boldsymbol{\kappa}_0. \quad (2.131)$$

où $\boldsymbol{\kappa}_0$ est le vecteur des coefficients (κ_j) à l'instant initial. L'amplification de l'énergie de la perturbation est mesurée par le rapport $g(t)$ entre la norme énergie de la perturbation $\|\mathbf{q}(t)\|_{\mathcal{E}}^2$ à l'instant t et celle à l'instant initial $\|\mathbf{q}(0)\|_{\mathcal{E}}^2$. En utilisant la relation (2.128) on a

$$\|\mathbf{q}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_{\mathcal{E}} = \sum_{j=1}^{j=M} \kappa_j^H \sum_{\ell=1}^{\ell=M} \kappa_{\ell} (\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_{\ell})_{\mathcal{E}} \quad (2.132)$$

soit sous forme matricielle

$$\|\mathbf{q}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 = \boldsymbol{\kappa}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.133)$$

M est une matrice Hermitienne définie positive. Elle admet une décomposition de la forme \mathbf{M} selon $\mathbf{M} = \mathbf{F}^H \mathbf{F}$. Ainsi, la norme énergie de \mathbf{q} peut être écrite sous la forme

$$\|\mathbf{q}(t)\|_{\mathcal{E}}^2 = \boldsymbol{\kappa}^H \mathbf{M} \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}^H \mathbf{F}^H \mathbf{F} \boldsymbol{\kappa} = \|\mathbf{F} \boldsymbol{\kappa}\|_2^2. \quad (2.134)$$

Le facteur d'amplification $g(t)$ est donc

$$g(t) = \frac{\|\mathbf{q}(t)\|_{\mathcal{E}}^2}{\|\mathbf{q}(0)\|_{\mathcal{E}}^2} = \frac{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(t)\|_2^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_2^2} = \frac{\|\mathbf{F}e^{-i\Lambda t}\boldsymbol{\kappa}_0\|_2^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_0\|_2^2}, \quad (2.135)$$

Pour (α, m, Re, Hb, n) fixé, parmi toutes les combinaisons linéaires possibles des fonctions propres, il en existe une qui fournit le maximum d'amplification $G(t)$ à un instant t fixé :

$$\begin{aligned} G(t) &= \sup_{\|\mathbf{q}_0\|_{\mathcal{E}}^2 \neq 0} g(t) = \sup_{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_0\|_2^2 \neq 0} \frac{\|\mathbf{F}e^{-i\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_0\|_2^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_0\|_2^2} = \\ &= \|\mathbf{F}e^{-i\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}\|_2^2 = \sigma_1^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

où σ_1 est la valeur singulière principale de la matrice $\mathbf{F}e^{-i\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}$.

On notera G^{max} le maximum de $G(t)$ sur tout l'intervalle de temps considéré :

$$G^{max}(\alpha, m, n, Re, Hb) = \sup_{t \geq 0} G(t), \quad (2.137)$$

La quantité G^{max} est associée à la perturbation initiale qui, pour α, m, Re, Hb et n donnés, fournit le maximum d'amplification pour tous les temps t . Le temps t pour lequel ce maximum est atteint est noté $t^{max}(\alpha, m, n, Re, Hb)$, *i.e.*, $G^{max} = G(t^{max})$. Le maximum de G^{max} pour toutes les valeurs du couple $(\alpha, m) \in R^+ \times \mathbb{N}$ est notée

$$G^{opt}(n, Re, Hb) = \sup_{\alpha, m} G^{max}(\alpha, m, n, Re, Hb). \quad (2.138)$$

La perturbation initiale dont l'amplification d'énergie est G^{opt} est dite perturbation optimale. Cette amplification optimale est atteinte à $t = t^{opt}(n, Re, Hb)$. Dans ce qui suit, on va examiner l'influence des paramètres rhéologiques sur l'amplification de l'énergie et les caractéristiques de la perturbation optimale.

Comme il a été déjà indiqué, cette influence se manifeste à travers : (i) les effets des conditions aux limites à l'interface, (ii) la variation globale de la viscosité effective et (iii) la stratification de la viscosité.

Effet des conditions aux limites La figure (2.29) montre l'évolution de l'amplification maximale de l'énergie cinétique en fonction du temps pour $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$ et pour deux valeurs de \tilde{Hb} : 0.02, ($r_0 = 0.01$) et 0.5, ($r_0 = 0.2$). L'indice de structure est fixé à $n = 1$, et le nombre de Reynolds à $\tilde{Re} = 3000$. Nous avons représenté sur la même figure la courbe obtenue par Schmid et Henningson (1994)(55) dans le cas

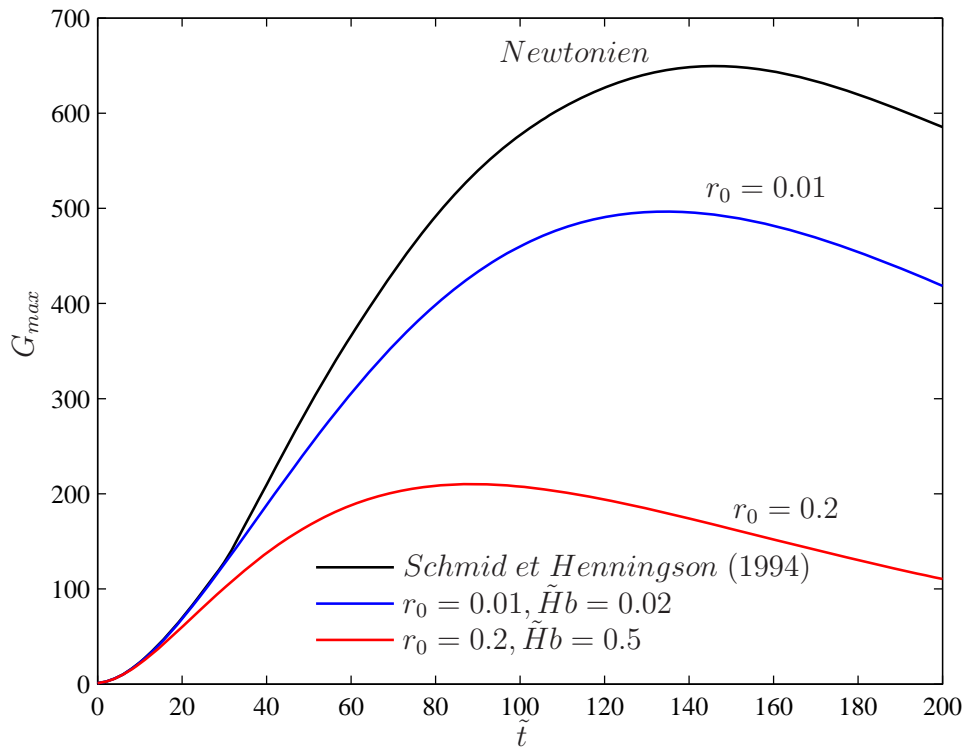


FIG. 2.29 – Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour $\tilde{\alpha} = 0$, $m = 1$, $n = 1$, $\tilde{Re} = 3000$ et deux valeurs de r_0 : 0.01 $\tilde{Hb} = 0.02$; 0.2 $\tilde{Hb} = 0.5$.

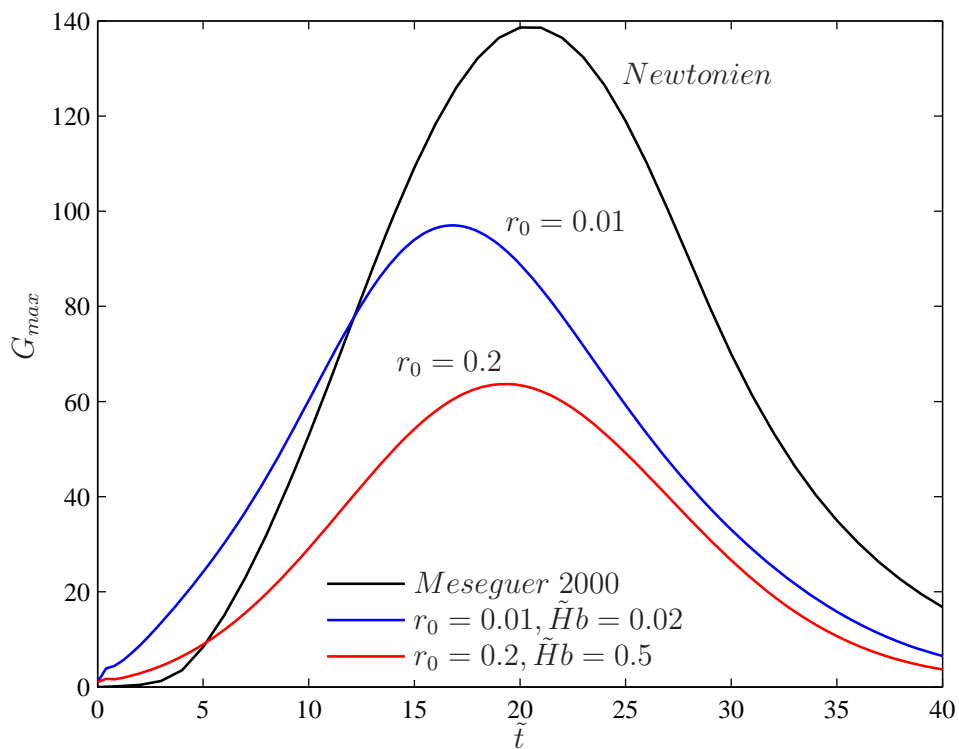


FIG. 2.30 – Amplification de l'énergie de la perturbation au cours du temps pour $\tilde{\alpha} = 1$, $m = 1$, $n = 1$, $\tilde{Re} = 3000$ et deux valeurs de r_0 : 0.01 $\tilde{Hb} = 0.02$; 0.2 $\tilde{Hb} = 0.5$. Le cas Newtonien est donné par Mesequer (2000)(58)

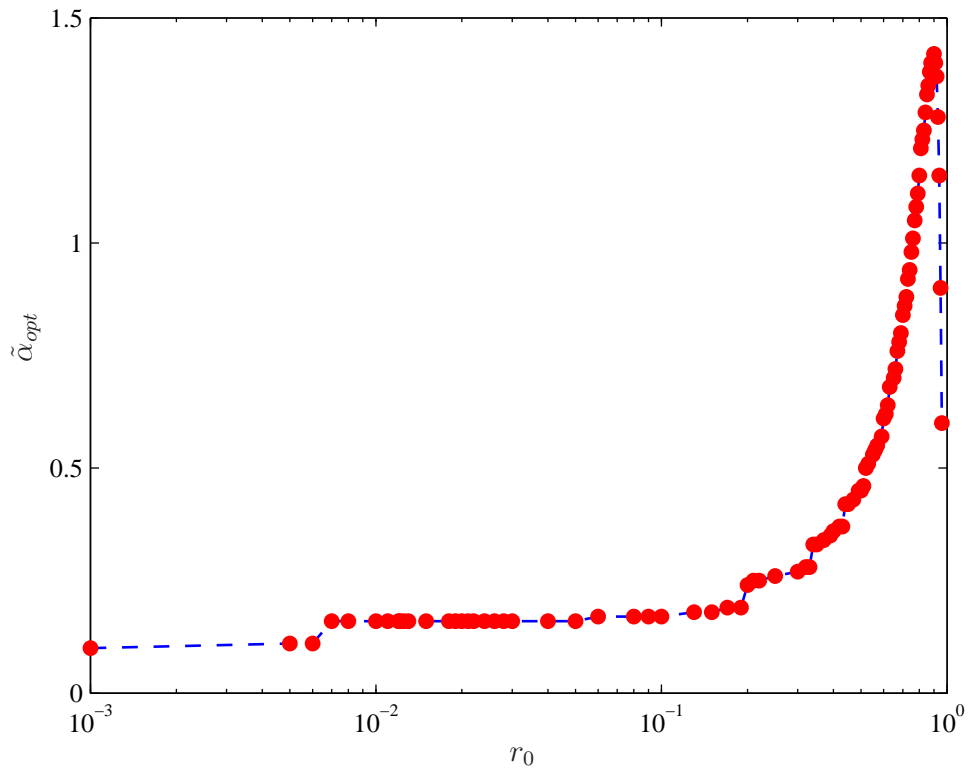


FIG. 2.31 – Evolution du nombre d'onde axial $\tilde{\alpha}_{opt}$ en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$.

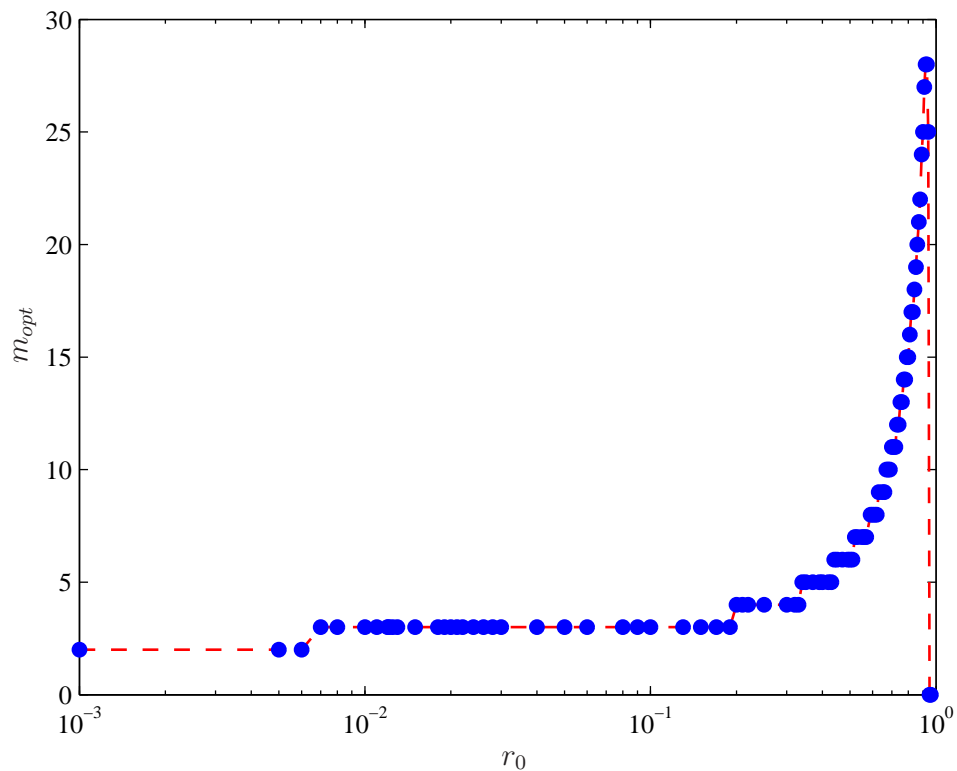


FIG. 2.32 – Evolution du nombre d'onde azimuthal m_{opt} en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$.

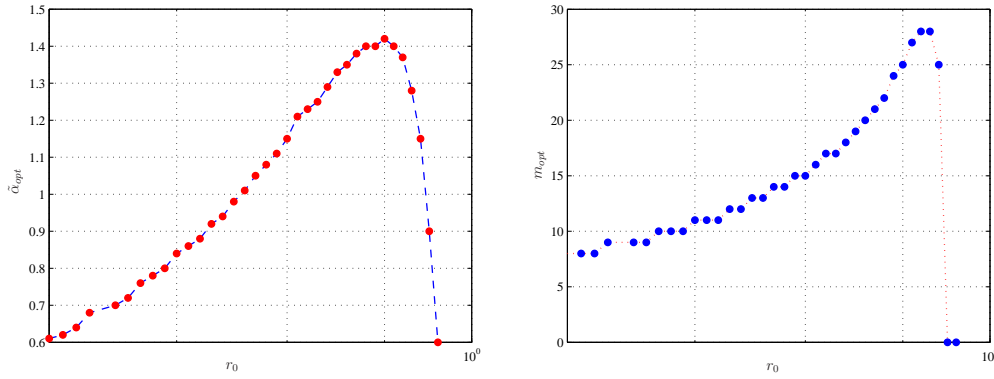


FIG. 2.33 – (Gauche) Evolution du nombre d’onde axial $\tilde{\alpha}_{opt}$ en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, zoom de la figure (2.31). (Droite) Evolution du nombre d’onde azimutal m_{opt} en fonction du rayon adimensionnel r_0 pour un nombre de Reynolds $\tilde{Re} = 5 \times 10^3$, zoom de la figure (2.32).

Newtonien. Comme dans [Nouar et al. \(2007\)\(56\)](#) et [Métivier et al. \(2005\)\(57\)](#), on a une singularité à $Hb = 0$: $G^{max}(Newtonien) \neq G^{max}(n = 1, Hb \rightarrow 0)$. Ceci est une conséquence de la discontinuité des conditions aux limites sur l’axe pour un fluide à seuil. En effet, dans le cas Newtonien, on impose que la perturbation soit régulière et d’amplitude finie. Par contre, dans le cas d’un fluide à seuil, des conditions plus fortes sont imposées à l’interface : $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}')_{r=r_0} = 0$. Le même type de singularité est aussi montré par la figure (2.30) pour $\tilde{\alpha} = m = 1$. L’augmentation de \tilde{Hb} s’accompagne d’une réduction de l’amplification de l’énergie de la perturbation du fait d’une augmentation globale de la viscosité effective. On note aussi une diminution de la période pendant laquelle s’effectue la transition.

Pour un ensemble donné de paramètres rhéologiques $n = 0.5$ et $0.001 \leq r_0 \leq 0.96$, ($0.0017 \leq \tilde{Hb} \leq 41.56$), on a calculé les nombres d’onde optimaux $\tilde{\alpha}_{opt}$ et m_{opt} , pour lesquels la croissance transitoire est la plus grande possible. Le résultat est illustré par les figures (2.31) et (2.32) où on a représenté $\tilde{\alpha}_{opt}$ et m_{opt} en fonction de r_0 pour $n = 0.5$ et $Re = 5 \times 10^3$. Un zoom des figures (2.31) et (2.32) pour les plus grandes valeurs de r_0 ($0.6 < r_0 < 1$) est donné par la figure (2.33).

Pour de très faibles valeurs de $\tilde{Hb} = 0.0017$; $G^{opt} = 2680.78$ atteint à $t^{opt} = 104.47$. La perturbation optimale est caractérisée par $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.1$ et $m^{opt} = 2$. L’amplification de l’énergie se fait essentiellement par le mécanisme “lift-up”³. La projection de la perturbation optimale sur la base des modes propres (Figure 2.34) montre que les modes à l’intersection des branches A , P et S qui sont les plus sensibles

³Transport des particules de basse vitesse au voisinage de la paroi vers le centre.

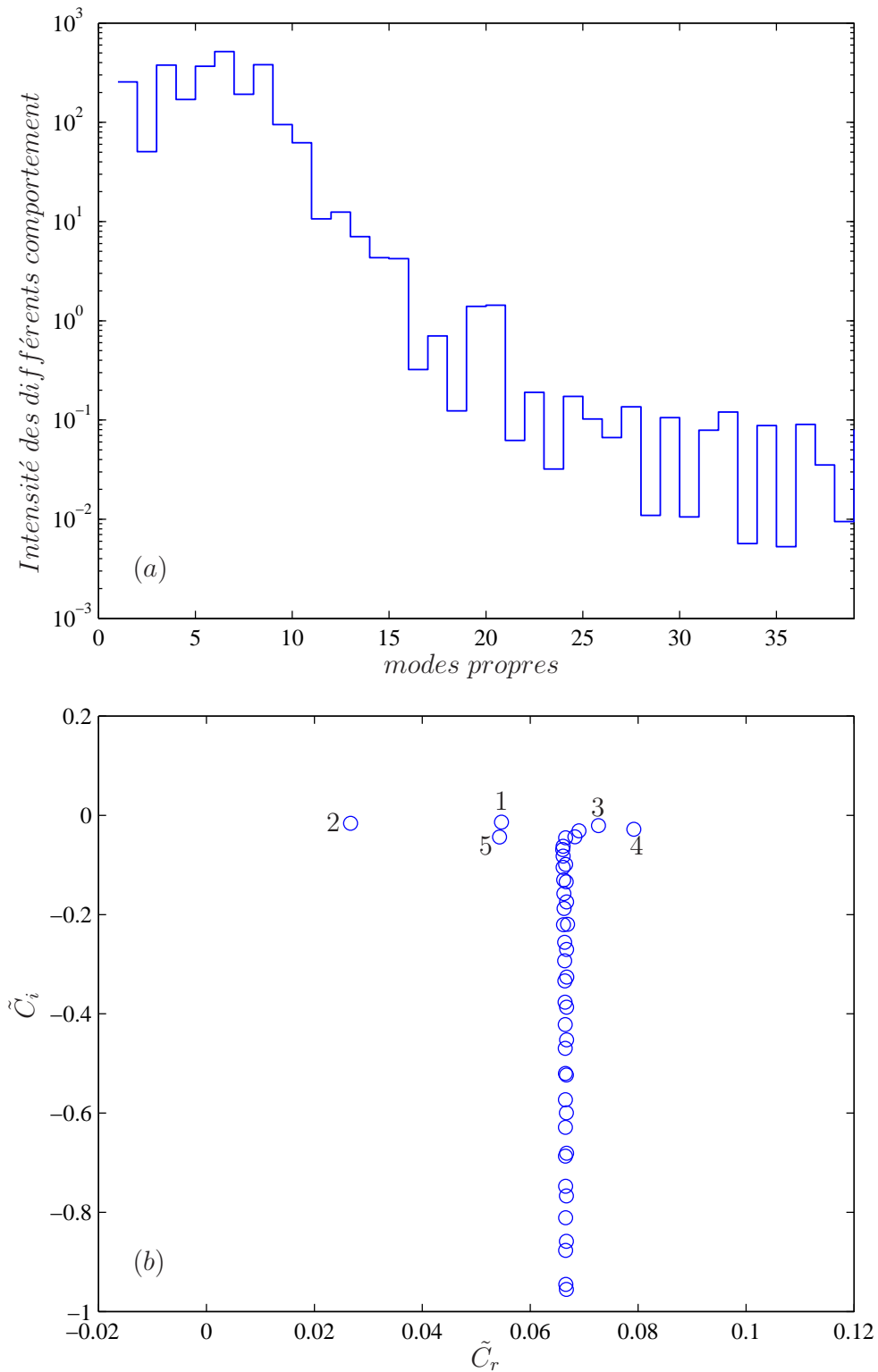


FIG. 2.34 – (a) La projection de la perturbation optimale sur la base des modes propres. Les modes sont numérotés du moins amorti au plus amorti. (b) Spectre des valeurs propres pour $n = 0.5$, $r_0 = 0.001$, $\tilde{H}b = 0.0017$, $\tilde{R}e = 5000$, $\tilde{\alpha} = 1$ et $m = 2$ correspondant à la figure (a).

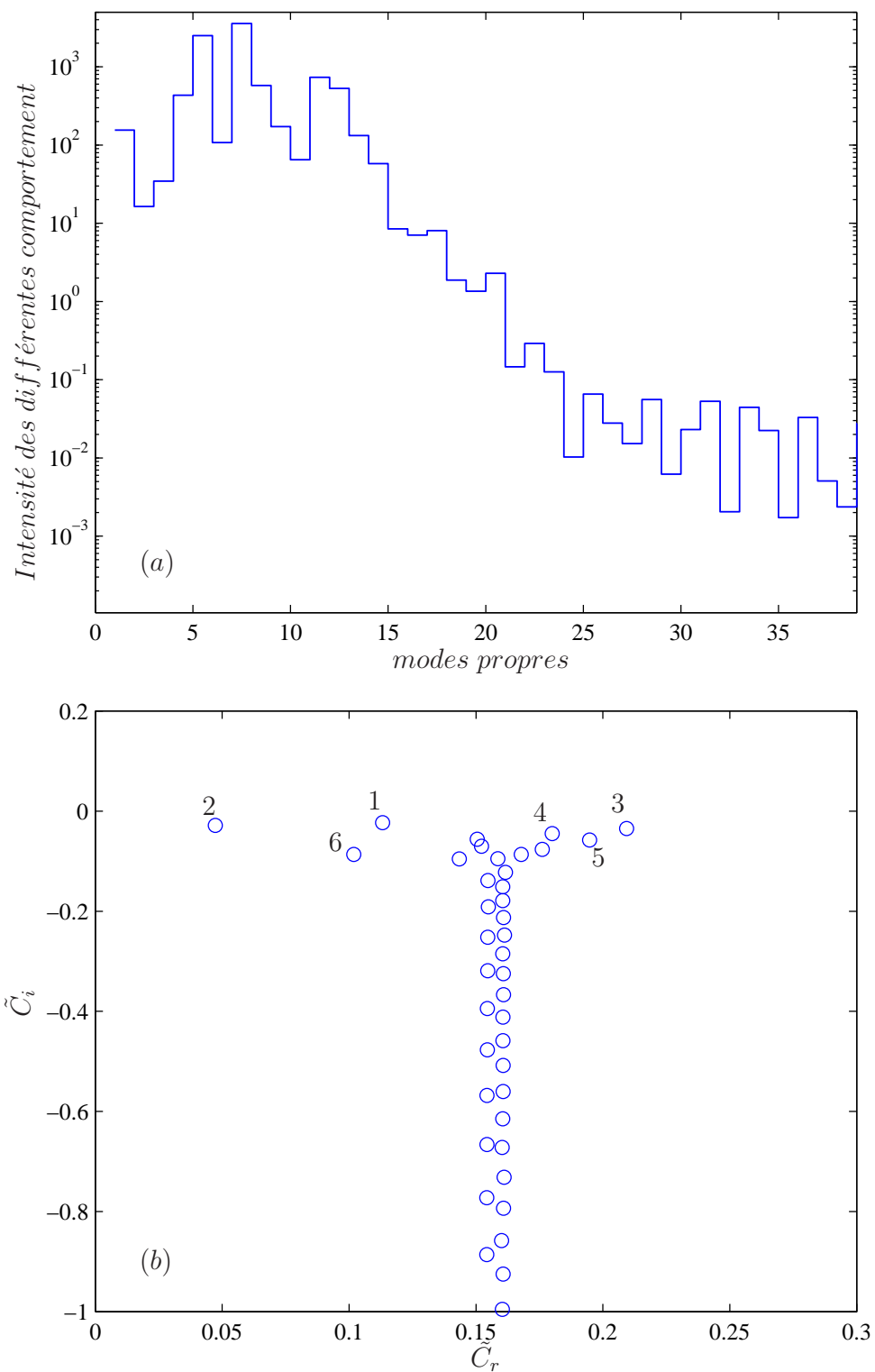


FIG. 2.35 – (a) La projection de la perturbation optimale sur la base des modes propres. Les modes sont numérotés du moins amorti au plus amorti. (b) Spectre des valeurs propres pour $n = 0.5$, $r_0 = 0.2$, $\tilde{H}b = 0.433$, $\tilde{R}e = 5000$, $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.24$ et $m = 4$ correspondant la figure (a).

aux perturbations (Bottaro *et al.* (2003)(59)). La figure (2.36) montre le champ de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ à $t = 0$ et les stries optimaux. En augmentant $\tilde{H}b$, G^{opt} décroît du fait de la dissipation visqueuse; Par exemple pour $n = 0.5$ et $r_0 = 0.2$; $G^{opt} = 1813 \approx 0.67$, $G^{opt}(r_0 = 0.001)$ atteinte à $t^{opt} = 55.5$. La perturbation optimale est caractérisée par $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.24$ et $m^{opt} = 4$. Le mécanisme lift-up reste encore le mécanisme dominant dans l'amplification de l'énergie de la perturbation. Une description complétée de la perturbation optimale pour $r_0 = 0.2$ et 0.5 est donnée pour les figures (2.37) et (2.38). Pour des valeurs suffisamment élevées de $\tilde{H}b$, le gain optimal est obtenu pour une perturbation axisymétrique. Le transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation est assuré par le mécanisme "Orr". La modification de la structure de la perturbation optimale lorsqu'on augmente $\tilde{H}b$ est une conséquence de l'anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes.

La dépendance du gain optimal d'énergie et du temps associé pour $n = 0.5$ et différentes valeurs de $\tilde{R}e$ est indiquée par les figures (2.39) et (2.40). Pour une valeur donnée de $\tilde{R}e$, G^{opt} décroît jusqu'à la valeur limite $G^{opt} = 1$. Dans la gamme des $\tilde{R}e$ examinés, ces figures montrent que $G^{opt} \propto \tilde{R}e^2$ et $\tilde{t}^{opt} \propto \tilde{R}e$ pour $\tilde{H}b \leq O(1)$

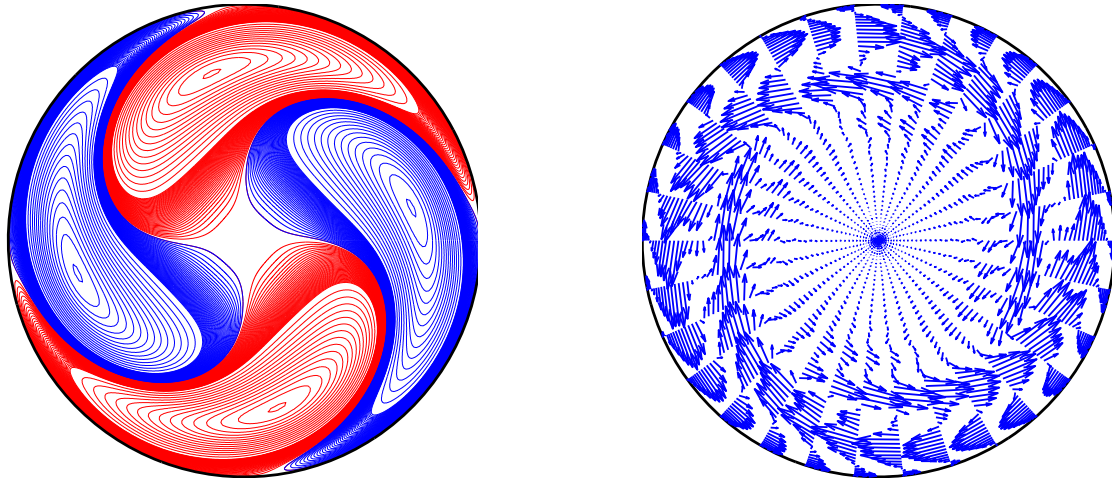


FIG. 2.36 – Perturbation optimale à $\tilde{R}e = 5000$, $\tilde{H}b = 0$, 0.0017 , $r_0 = 0.001$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.1$ et $m^{opt} = 2$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 2680.78$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 104.44$. (Droite) champs de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.

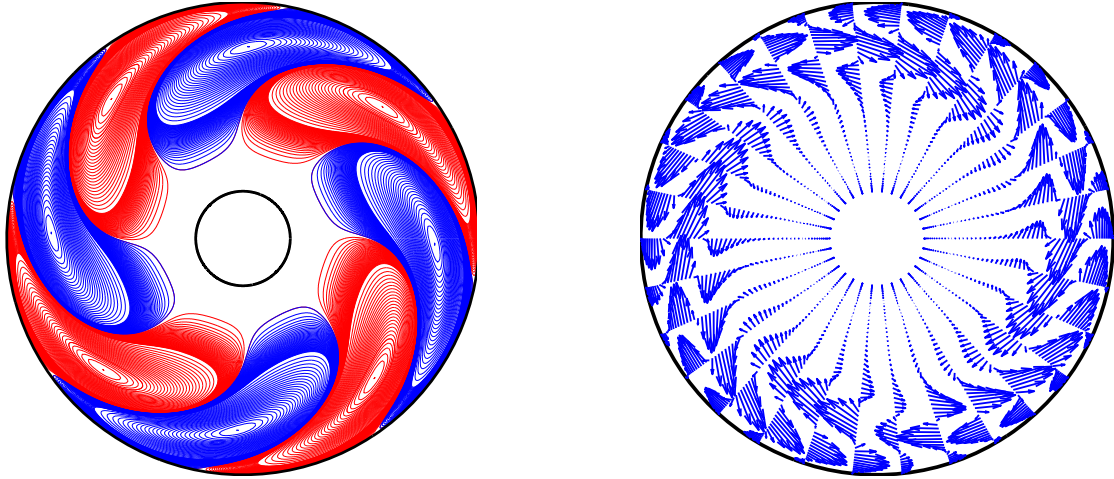


FIG. 2.37 – Perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{H}b = 0, 0.443$, $r_0 = 0.2$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.24$ et $m^{opt} = 4$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 1812.99$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 55.52$. (Droite) champs de vitesse $ue_r + ve_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.

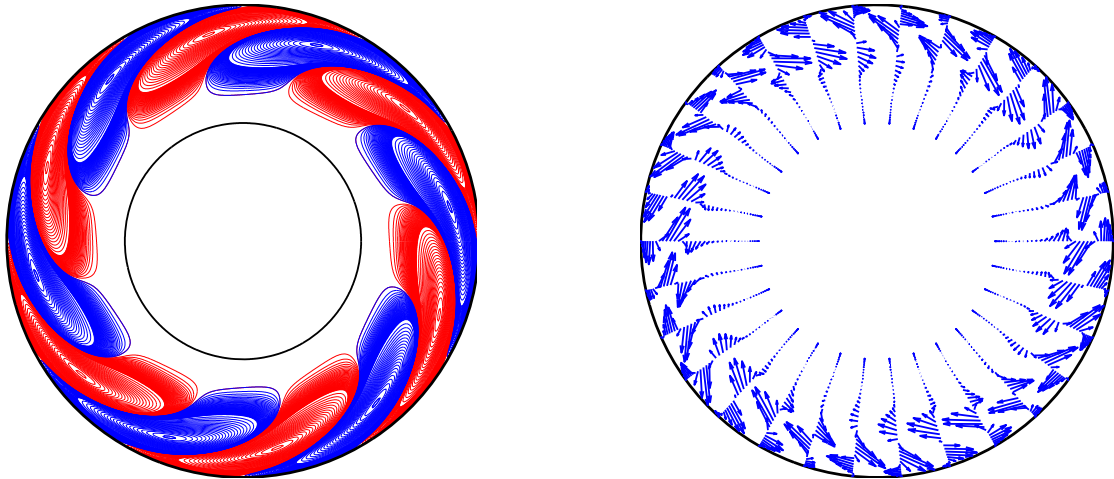


FIG. 2.38 – Perturbation optimale à $\tilde{Re} = 5000$, $\tilde{H}b = 0, 1.73$, $r_0 = 0.5$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 0.45$ et $m^{opt} = 6$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 798.51$ atteint à $\tilde{t}^{opt} = 33.53$. (Droite) champs de vitesse $ue_r + ve_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Gauche) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , rouge valeurs positives et bleu valeurs négatives.

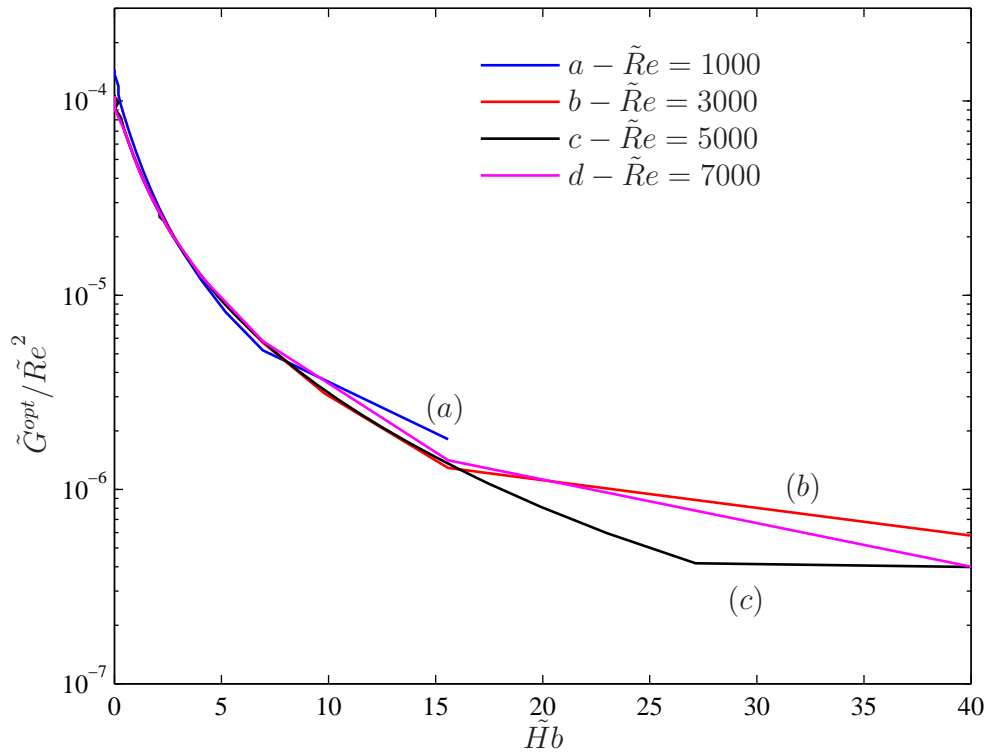


FIG. 2.39 – Variation de $\tilde{G}^{opt}/\tilde{Re}^2$ en fonction de $\tilde{H}b$ pour $n = 0.5$.

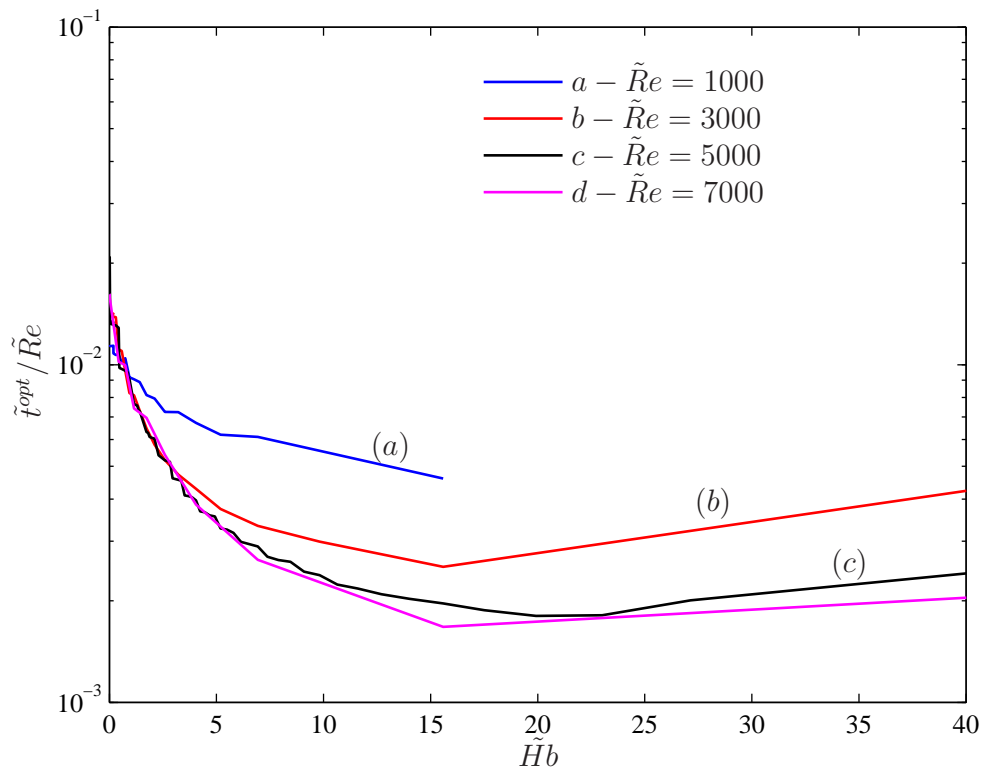


FIG. 2.40 – Variation de $\tilde{t}^{opt}/\tilde{Re}$ en fonction de $\tilde{H}b$ pour $n = 0.5$.

2.8 Condition de non-augmentation de l'énergie de la perturbation

Dans ce paragraphe, on se propose de déterminer le nombre de Reynolds maximal en dessous duquel l'énergie cinétique de toute perturbation admissible décroît de façon monotone au cours du temps. On rappelle que pour des nombres d'onde α et m donnés, une perturbation admissible peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Soit \mathcal{E} l'énergie cinétique moyenne de la perturbation dans la zone cisailée définie ici par $\Omega = [r_0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \frac{2\pi}{\alpha}]$,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \left[\frac{u_r'^2 + v_r'^2 + w_r'^2}{2} \right] d\Omega, \quad (2.139)$$

avec $\|\Omega\| = (1 - r_0) \times 2\pi \times \frac{2\pi}{\alpha}$. Dans l'équation (2.139), u_r' est la partie réelle de $[u(r, t) \exp(i\alpha z + im\theta)]$, il en est de même pour v_r' et w_r' , soit encore

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4(1 - r_0)} \int_{r_0}^1 [uu^* + vv^* + ww^*] r dr$$

où u^* (respectivement v^* ou w^*) est le complexe conjugué de u , (v ou w).

La variation temporelle de l'énergie cinétique moyenne de la perturbation est obtenue en multipliant les équations aux perturbations linéarisées (2.70 - 2.72) suivant r , θ et z par u^* , v^* et w^* , respectivement. Elles sont ensuite intégrées entre r_0 et 1 et additionnées entre elles. Le résultat est une équation de type Reynolds-Orr donnée par

$$2(1 - r_0) \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathcal{I}(\mathbf{u}) - \frac{1}{Re} [\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}(\mathbf{u})] \quad (2.140)$$

où $\mathcal{I}(\mathbf{u})$, $\mathcal{V}(\mathbf{u})$ et $\mathcal{A}(\mathbf{u})$ désignent respectivement les termes d'inertie de dissipation visqueuse et d'anisotropie. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mathbf{u}) &= -\langle DW_{\ell}(u_r w_r + u_i w_i) \rangle, \\ \mathcal{V}(\mathbf{u}) &= \left\langle \mu \left(|D\mathbf{u}|^2 + \alpha^2 |\mathbf{u}|^2 + \frac{m^2}{r^2} |w|^2 \right) \right\rangle \\ \mathcal{A}(\mathbf{u}) &= \langle (\mu - \mu_t) |Dw + i\alpha u|^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.141)$$

Une équation similaire a été obtenue par [Frigaard et Nouar \(2003\)\(60\)](#), excepté que ces auteurs ont fait ressortir séparément la contribution du nombre de Bingham et celle provenant de la viscosité plastique. Finalement, la condition de stabilité de

l'écoulement au sens de la norme énergie est satisfaite si $\frac{d\mathcal{E}}{dt} < 0$. Soit donc Re_{CE} , le plus grand nombre de Reynolds pour lequel cette condition est satisfaite :

$$\frac{1}{Re_{CE}} = \sup_{\mathbf{u}} \frac{\mathcal{I}(\mathbf{u})}{\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}(\mathbf{u})} \quad (2.142)$$

où \mathbf{u} est une perturbation admissible qui satisfait l'équation de continuité et les conditions aux limites. On pose :

$$\Lambda = \frac{\mathcal{I}(\mathbf{u})}{\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}(\mathbf{u})},$$

L'équation (2.142) est un problème d'optimisation avec contraintes. La solution est obtenue en utilisant un calcul variationnel. Pour tenir compte de la condition d'incompressibilité, un multiplicateur de Lagrange $\xi(r, \theta, z)$ est introduit. Le problème d'optimisation peut être reformulé comme suit :

$$\delta [\mathcal{I}(\mathbf{u}) - \Lambda (\mathcal{V}(\mathbf{u}) - \mathcal{A}(\mathbf{u})) - \xi \nabla \cdot (\mathbf{u})] = 0 \quad (2.143)$$

où δ est l'opérateur variationnel. Les équations d'Euler-Lagrange déduites de (2.143) sont données par :

$$wDW_\ell = -D\xi + 2\Lambda \left[\mu \left(\Delta u - \frac{2im}{r^2}v - \frac{u}{r^2} \right) + 2\frac{d\mu}{dr} \frac{du}{dr} \right] + 2\Lambda [(\mu_t - \mu)(Dw + i\alpha)], \quad (2.144)$$

$$0 = -\frac{i\beta}{r}\xi + 2\Lambda \left[\mu \left(\Delta v + \frac{2im}{r^2}u - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{d\mu}{dr} \left(Dv + \frac{im}{r}u - \frac{v}{r} \right) \right], \quad (2.145)$$

$$uDW_\ell = -i\alpha\xi + 2\Lambda \left[\mu \Delta w + \frac{d\mu}{dr} (Dw + i\alpha u) \right] + 2\Lambda \frac{1}{r} D [r(\mu_t - \mu)(Dw + i\alpha)]. \quad (2.146)$$

avec

$$D^+u + i \left[\frac{m}{r}v + \alpha rw \right] = 0 \quad \text{où} \quad D^+u = Du + \frac{u}{r}$$

Les équations (2.144-2.146), définissent un problème aux valeurs propres, qui peut être écrit en termes de u et w si $m \neq 0$. L'expression développée est donnée dans l'annexe A. Dans le cas particulier $m = 0$, la formulation (u, v) est adoptée $Re_{CE}(\alpha, 0, Hb)$ est la plus petite valeur de

$$2\Lambda \mu [L^2u] + 2\Lambda D\mu \left[2DLu + \frac{Lu}{r} \right] + 2\Lambda D^2\mu [Lu + 2\alpha^2u]$$

$$\begin{aligned}
 &+2\Lambda \alpha^2 (\mu_t - \mu) [Lu + 2\alpha^2 u] + 2\Lambda D \left(\frac{1}{r} D (r (\mu_t - \mu) [Lu + 2\alpha^2 u]) \right) \\
 &= -2i\alpha DW_\ell Du - i\alpha DW_\ell \frac{u}{r} - i\alpha D^2 W_\ell u
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

avec les conditions au limites

$$r = r_0; \quad u = Du = 0 \tag{2.148}$$

$$r = 1; \quad u = Du = 0. \tag{2.149}$$

Le problème aux valeurs propres (annexe - A) ainsi que le système (2.147-2.149) sont résolus numériquement en utilisant la méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebyshev décrite dans le paragraphe (2.6). Le domaine de calcul $[r_0, 1]$ est transformé en domaine fixe $[0, 1]$, en utilisant le changement de variable (2.95).

2.8.1 Analyse des résultats et discussion

Les figures (2.41 - 2.50) représentent pour différentes valeurs de $\tilde{H}b$ et m , les frontières séparant les régions où l'on observe une croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation de celles où l'énergie décroît uniformément à partir de l'instant initial. La figure (2.41) rend compte de l'effet de la modification de l'épaisseur de la zone cisailée sur les conditions de stabilité globale. Elle est obtenue, en annulant artificiellement la stratification en viscosité ($Hb = 0, n = 1$). Dans ce cas la perturbation la plus dangereuse se présente sous forme de rouleaux longitudinaux ($\tilde{\alpha} = 0$), avec un nombre d'onde azimutal, m qui augmente lorsque l'épaisseur de la zone cisailée est réduite. Les variations de m se font par palier selon la gamme des valeurs de r_0 considérée. Le nombre de Reynolds critique \tilde{Re}_{CE} varie peu avec r_0 . Lorsque $r_0 \rightarrow +1$, \tilde{Re}_{CE} tend vers la valeur obtenue par [Nouar et al \(2007\)\(56\)](#) dans le cas plan, soit $\tilde{Re}_{CE} = 79.82$. Par contre, lorsque $r_0 \rightarrow 0$, la valeur de \tilde{Re}_{CE} semble se rapprocher de celle pour un fluide Newtonien ($Re_{CE} = 81.49$ d'après [Joseph et Carmi \(1969\)\(61\)](#)). La prise en compte des termes en $\tilde{H}b$ et d'un indice de structure $n < 1$, modifie les conditions critiques de non augmentation d'énergie. Pour une faible stratification en viscosité, les conditions critiques sont encore obtenues pour une perturbation sous forme de rouleaux longitudinaux. En augmentant $\tilde{H}b$, la perturbation la plus dangereuse devient oblique. Enfin, pour des valeurs suffisamment élevées de $\tilde{H}b$, le mode critique est un mode axisymétrique montré par

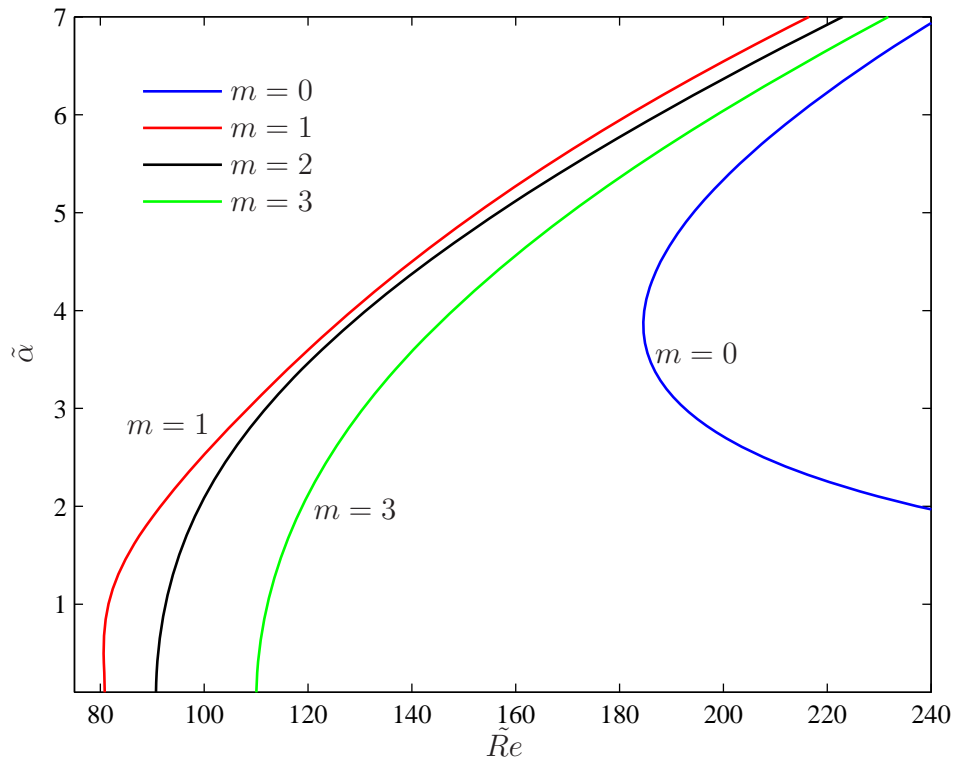


FIG. 2.41 – Frontières, paramétrées en nombres d’ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{H}b = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.001$

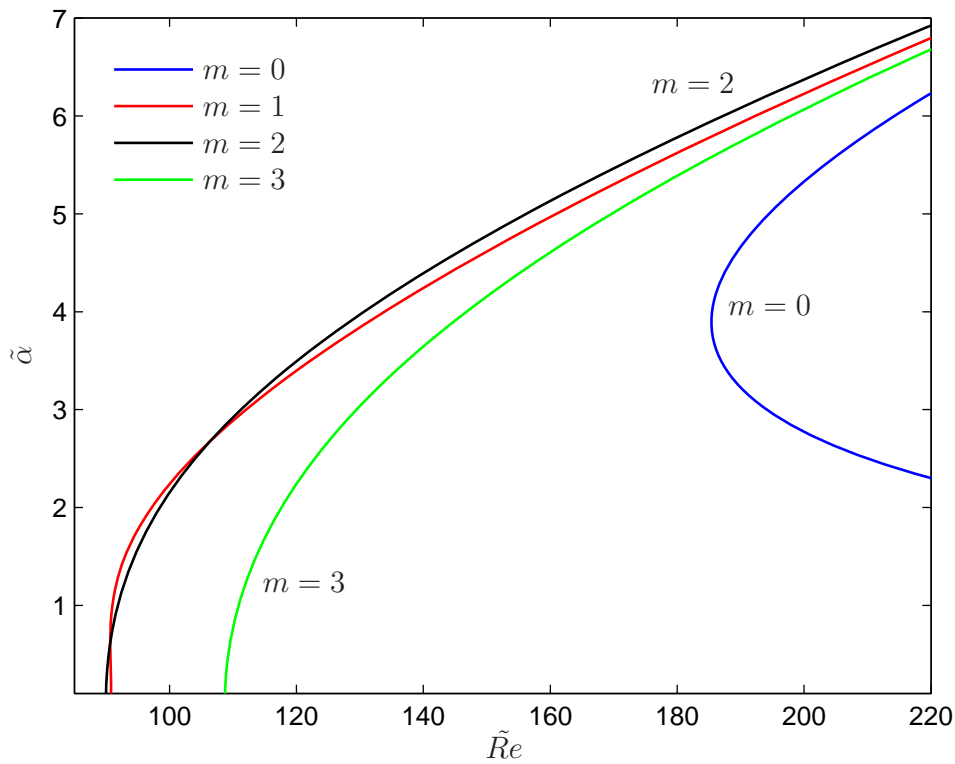


FIG. 2.42 – Frontières, paramétrées en nombres d’ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{H}b = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.01$.

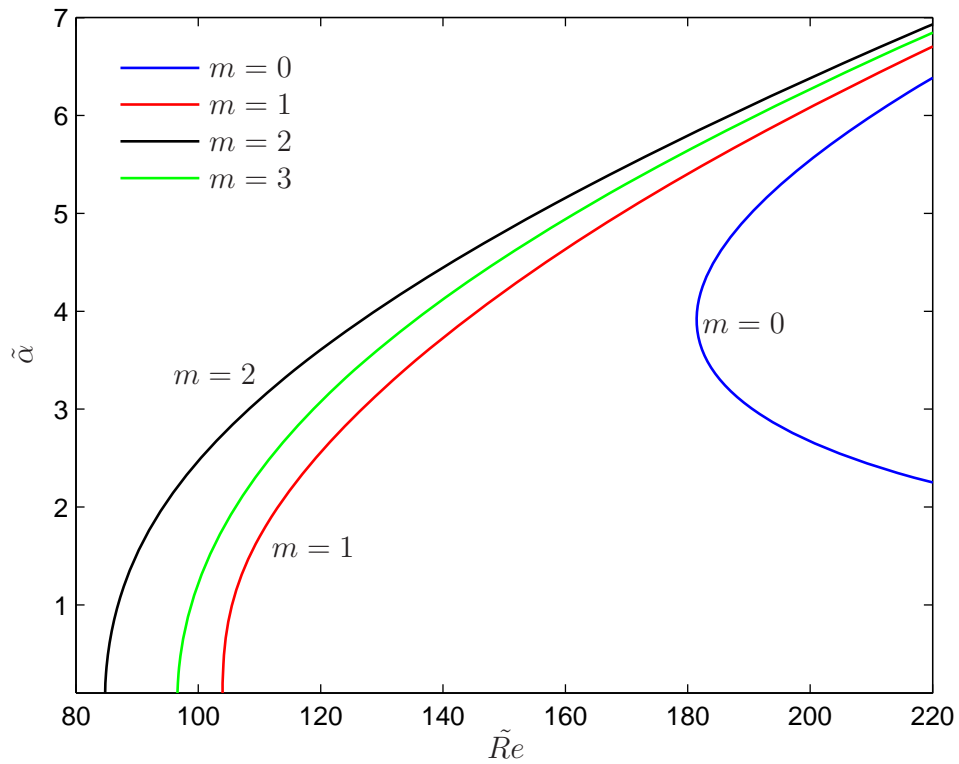


FIG. 2.43 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{H}b = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.1$

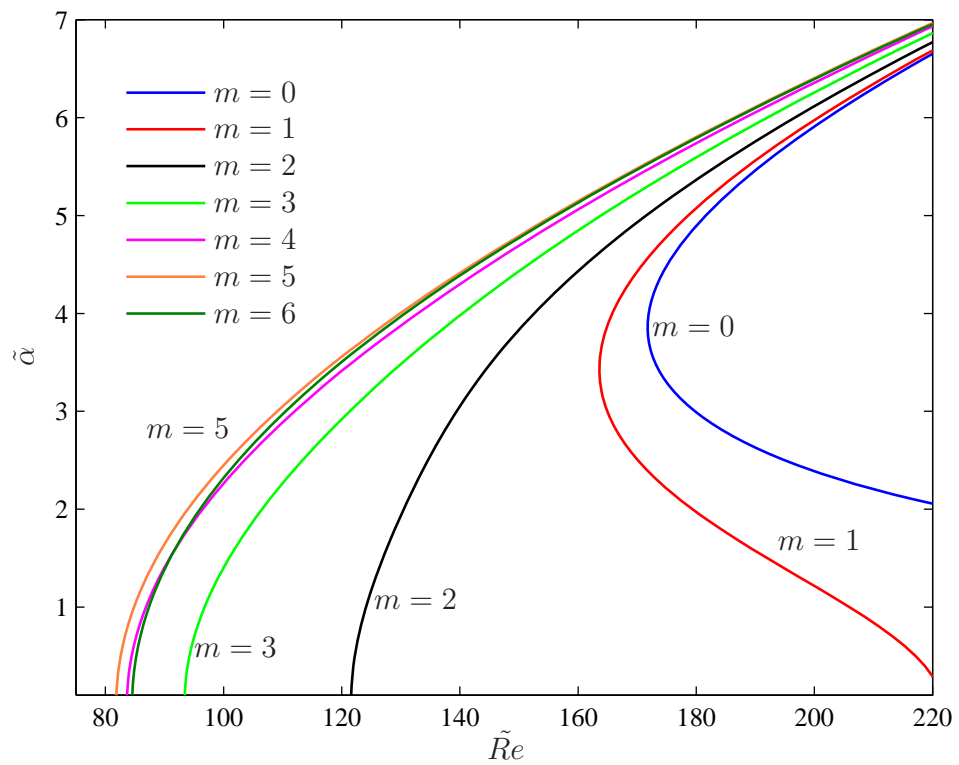


FIG. 2.44 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\hat{H}b = 0$, $n = 1$ et $r_0 = 0.5$.

la figure (2.50). Cette évolution est une conséquence de l'anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes. Le tableau (2.2) donne les conditions critiques pour des valeurs particulières de $\tilde{H}b$ et n , et les compare au cas d'un fluide Newtonien. Les résultats numériques montrent aussi que la stabilité est renforcée pour des valeurs élevées des nombres d'onde longitudinaux et azimutaux. Ceci est en accord avec les relations données ci-dessous. Elle sont obtenues en reprenant la même démarche que Frigaard et Nouar (2003)(60). En effet, en utilisant les inégalités du type Cauchy Schwartz et Poincaré, on arrive à

$$\mathcal{I}(\mathbf{u}) \leq \frac{\alpha (n+1)}{2n} \left\langle \frac{|w|^2}{r} + r|w|^2 \right\rangle + \frac{m (n+1)}{2n} \left\langle \frac{|v|^2 + |w|^2}{r} \right\rangle, \quad (2.150)$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{u}) \geq \left[\frac{(n+1)}{n(1-r_0)} \right]^{n-1} \left\langle \frac{r_0 \pi^2 |\mathbf{u}|^2}{r(1-r_0)^2} + \alpha^2 |\mathbf{u}|^2 + \frac{(m-1)^2 |\mathbf{u}|^2}{r^2} \right\rangle, \quad (2.151)$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) \geq \frac{(n+1)}{n(1-r_0)} \left\langle \left| \frac{m u}{r} - i r D \left(\frac{v}{r} \right) \right|^2 + 2 \left| \frac{u + i m v}{r^2} \right|^2 \right\rangle. \quad (2.152)$$

Les résultats numériques montrent que la perturbation la plus dangereuse est axi-symétrique avec un nombre d'onde axial $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{H}b^{-0.5}$. Ce résultat est en accord avec celui obtenu par Frigaard et Nouar (2003)(60) pour un fluide de Bingham.

<i>fluide</i>	$\tilde{\alpha}$	m	\tilde{Re}_{CE}
<i>Newtonien</i>	1.07	1	81.49
<i>Herschel – Bulkley</i> $\tilde{H}b = 0, r_0 = 0.001, n = 1$	0.5	1	80.65
<i>Herschel – Bulkley</i> $\tilde{H}b = 0.0017, r_0 = 0.001, n = 0.5$	0	2	80
<i>Herschel – Bulkley</i> $\tilde{H}b = 4.05, r_0 = 0.7, n = 0.5$	1	7	276
<i>Herschel – Bulkley</i> $\tilde{H}b = 41.6, r_0 = 0.96, n = 0.5$	0.6	0	1033

TAB. 2.2 – Nombres de Reynolds critiques pour des valeurs particulières de $\tilde{H}b$ et n .

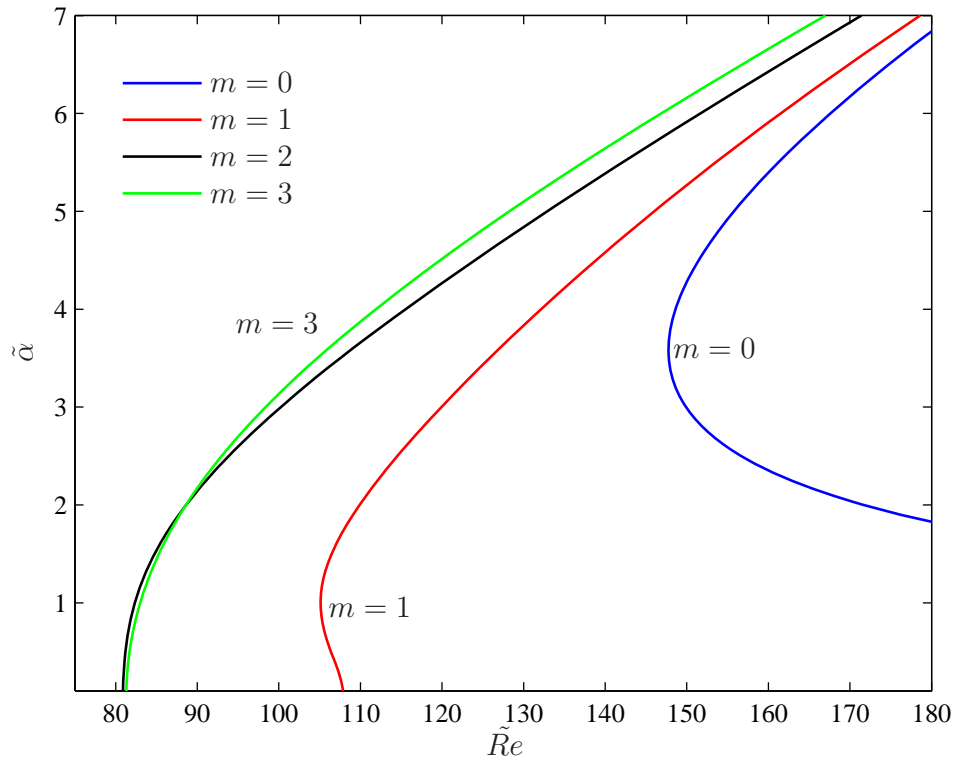


FIG. 2.45 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $\tilde{H}b = 0$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.1$

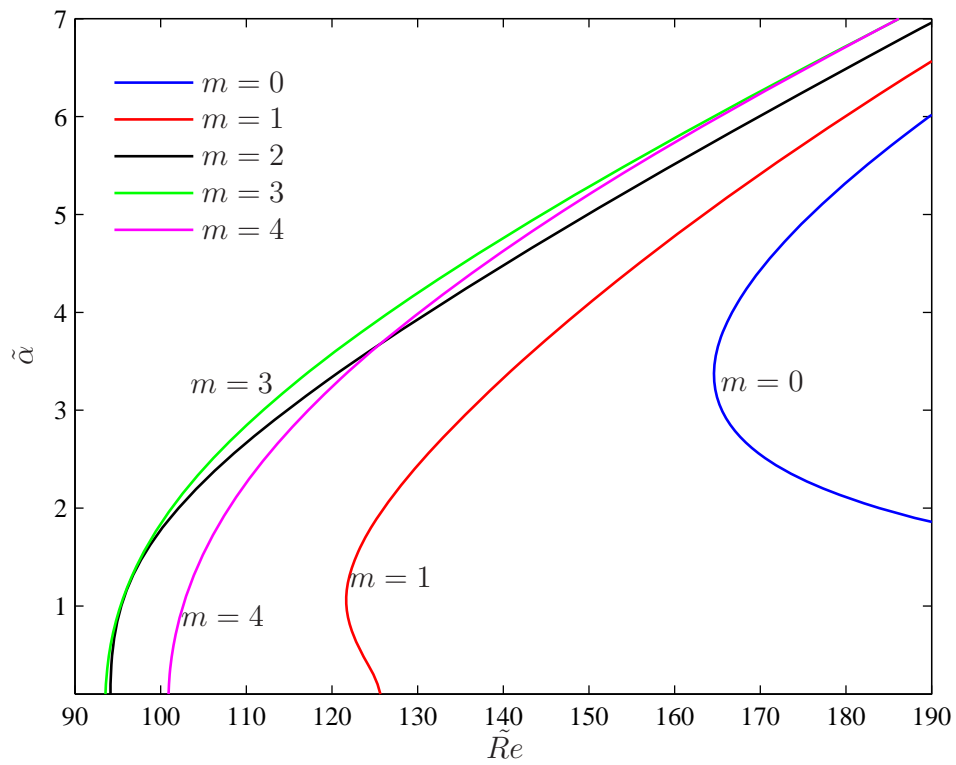


FIG. 2.46 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 0.193$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.1$.

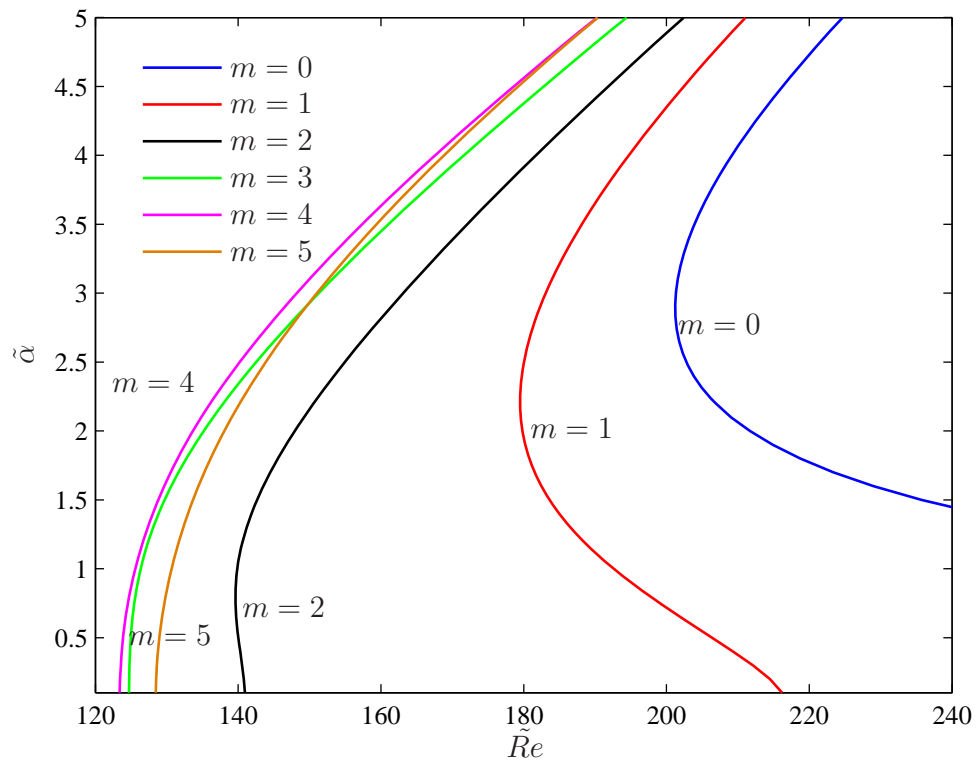


FIG. 2.47 – Frontières, paramétrées en nombres d’ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 0.74$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.3$.

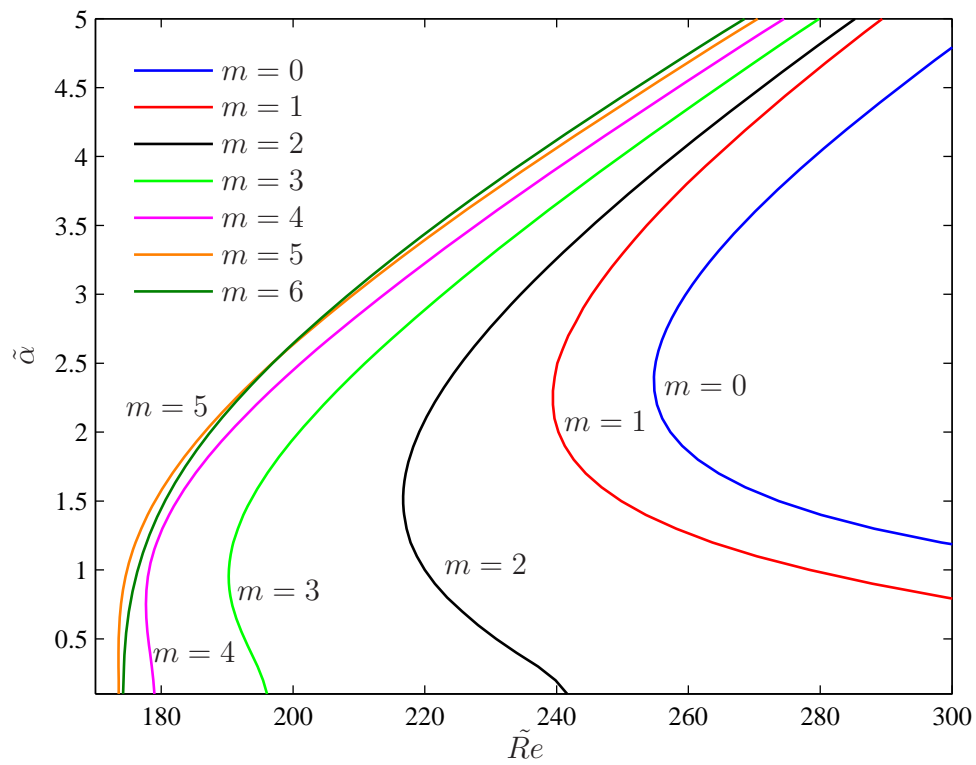


FIG. 2.48 – Frontières, paramétrées en nombres d’ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 1.73$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.5$.

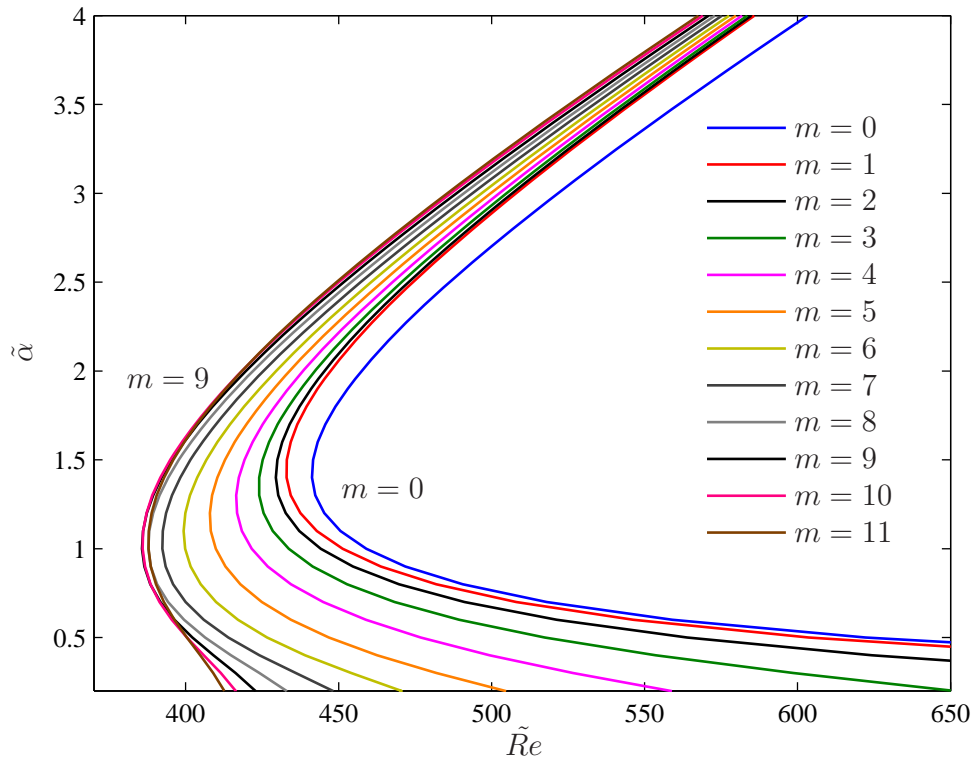


FIG. 2.49 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 6.928$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.8$.

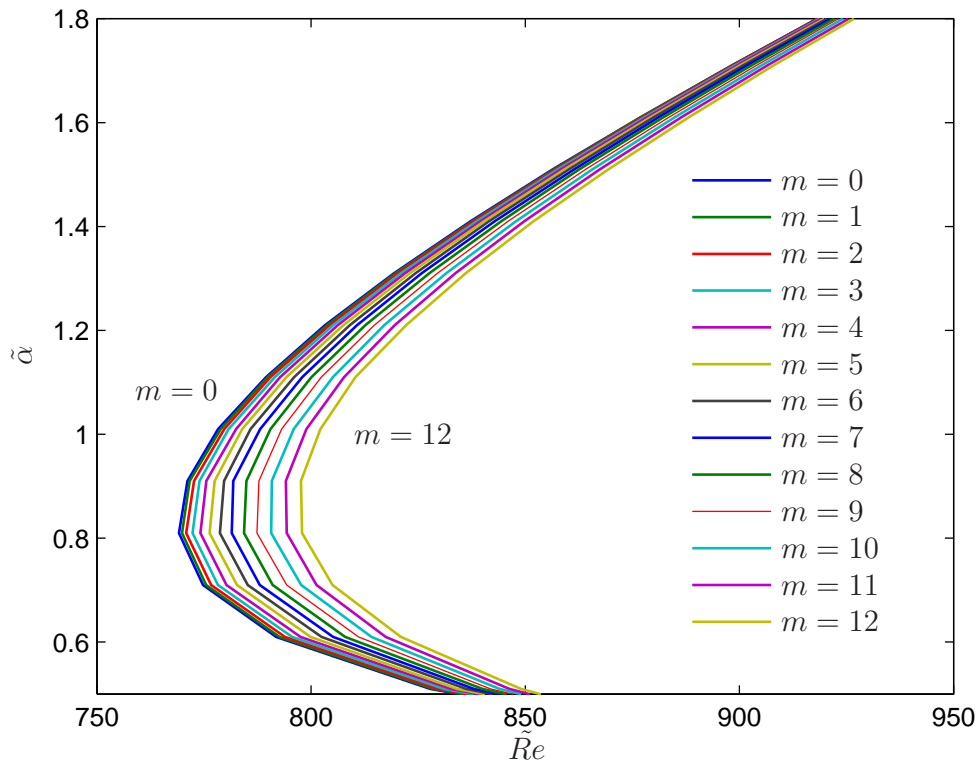


FIG. 2.50 – Frontières, paramétrées en nombres d'ondes azimutaux, délimitant les zones où la stabilité globale est assurée : $Hb = 23.37$, $n = 0.5$ et $r_0 = 0.93$.

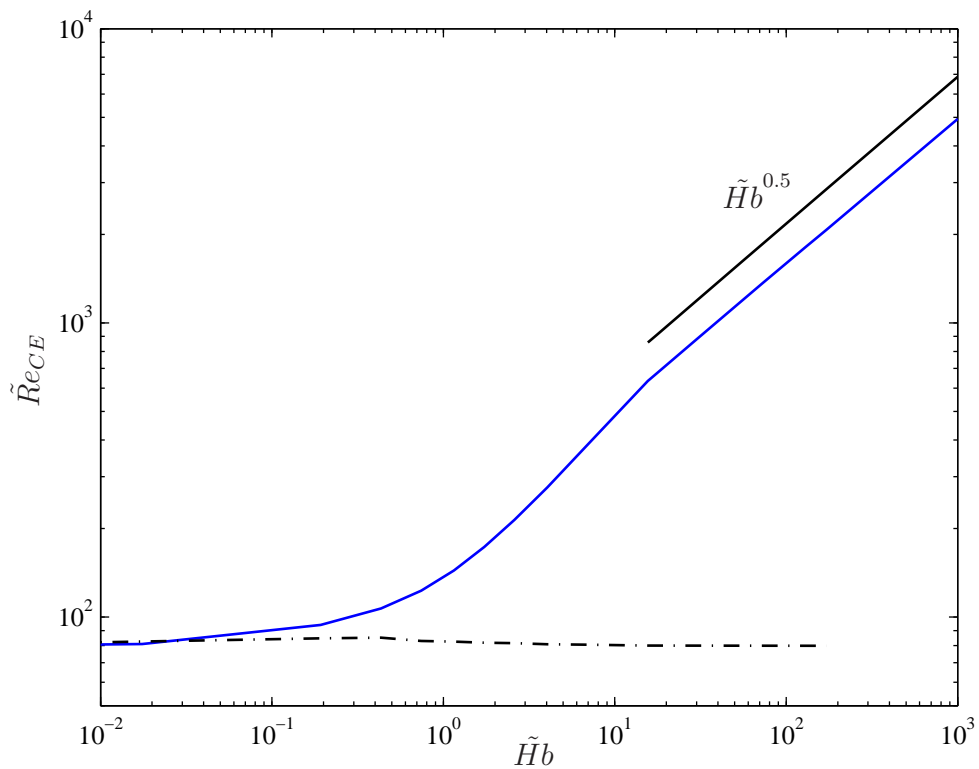


FIG. 2.51 – Variation du nombre de Reynolds critique Re_{CE} en fonction du nombre de $\hat{H}b$ et $n = 0.5$.

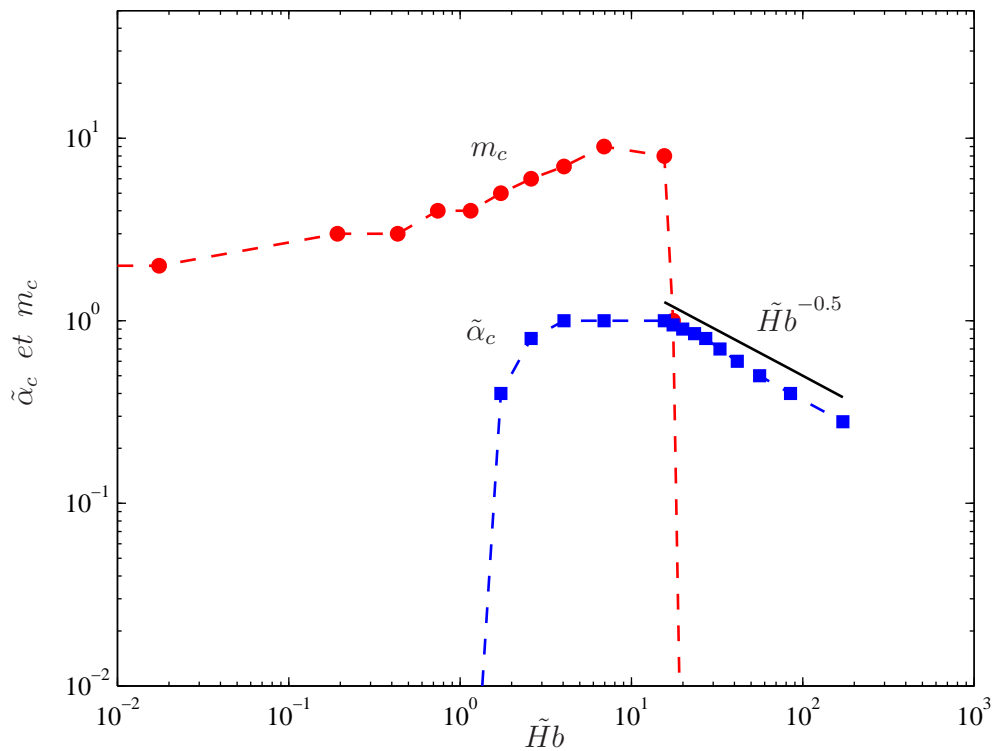


FIG. 2.52 – Evolution des nombres d'ondes axial et azimutal m_c et $\tilde{\alpha}_c$ en fonction du nombre de $\hat{H}b$ et $n = 0.5$.

2.9 Conclusion

Une analyse de la stabilité linéaire et de la réceptivité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley a été effectuée, en utilisant des approches modale et non modale. L'écoulement de base est essentiellement caractérisé par la présence d'une zone centrale (zone non cisailée) qui se déplace comme un solide indéformable à vitesse constante et par la variation non linéaire de la viscosité effective entre la paroi et l'interface. Cet écoulement est gouverné par deux paramètres adimensionnels : l'indice de structure n et le nombre de Herschel-Bulkley Hb ou de façon équivalente par n et le rayon r_0 de la zone non cisailée. La prise en compte de la perturbation en viscosité conduit à une anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes associée à la perturbation. La composante τ'_{rz} fait intervenir la viscosité tangente alors que les autres composantes $\tau'_{ij} (ij \neq rz)$ s'écrivent en fonction de la viscosité effective. L'approche modale a conduit aux résultats suivants : (i) dans le cas d'une perturbation axisymétrique et du fait de l'anisotropie de $\boldsymbol{\tau}'$, l'influence de Hb se réduit essentiellement à la modification de l'épaisseur de la zone cisailée ; (ii) dans le cas d'une perturbation non axisymétrique, l'effet dissipatif dû à Hb est significatif et de ce fait la stabilité de l'écoulement est plus importante lorsque $\tilde{H}b$ augmente ; (iii) l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil est linéairement stable.

Du fait de la non-normalité des opérateurs de stabilité linéaire (vis à vis du produit scalaire basé sur la norme énergie), on observe une croissance algébrique de l'énergie cinétique de la perturbation aux temps courts suivie d'une décroissance exponentielle. Une approche non modale a été mise en œuvre pour examiner l'influence des paramètres rhéologiques sur l'amplification de l'énergie cinétique et les caractéristiques de la perturbation optimale. Les résultats les plus significatifs obtenus sont : (i) L'augmentation de $\tilde{H}b$ s'accompagne d'une réduction de l'amplification G^{max} de l'énergie sauf dans le cas axisymétrique, où $\tilde{H}b$ n'a pratiquement aucun effet sur G^{max} ; (ii) pour $\tilde{H}b \ll 1$ et $n = 0.5$ la perturbation optimale se présente pratiquement sous rouleaux longitudinaux avec $\tilde{\alpha} = 0.11$ et $m = 2$. L'amplification de l'énergie de la perturbation est assurée par le mécanisme lift-up. En outre, les lois d'échelle en $\tilde{R}e^2$ pour G^{opt} et $\tilde{R}e$ pour \tilde{t}^{opt} sont conservées. (iii) En augmentant $\tilde{H}b$, le caractère rhéofluidifiant devient plus marqué et la perturbation optimale pa-

raît oblique dans un plan (rz) , avec $\tilde{\alpha} = O(1)$. Le nombre d'onde azimutal croît du fait de la réduction de la zone cisailée. La perturbation optimale se développe sous l'effet simultané des mécanismes d'Orr et de lift-up. (iv) Pour des valeurs suffisamment élevées de $\tilde{H}b$, l'amplification de l'énergie pour le mécanisme d'Orr devient la plus importante et la perturbation optimale est axisymétrique. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la détermination du nombre de Reynolds, \tilde{Re}_{CE} en dessous duquel, l'énergie cinétique de la perturbation décroît uniformément au cours du temps. Les résultats numériques montrent que pour $\tilde{H}b \ll 1$ et $n = 0.5$, $\tilde{Re}_{CE} = 81.5$ et la perturbation la plus dangereuse se présente sous forme de rouleaux longitudinaux avec $m = 2$. Par contre, $\tilde{Re}_{CE} \approx 158 \tilde{H}b^{1/2}$ et la perturbation la plus dangereuse est axisymétrique avec un nombre d'onde axial qui varie en $Hb^{0.5}$.

Chapitre 3

Installation expérimentale, techniques de mesures et fluides utilisés

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à la description du dispositif expérimental utilisé, des techniques de mesure mises en œuvre et à la rhéologie des fluides considérés. Le dispositif expérimental a été mis au point par [Peixinho \(2004\)\(34\)](#). Il a été modifié pour faire des mesures de la vitesse axiale dans différentes sections de la conduite et à différentes positions azimutales. Une description complète est donnée au paragraphe 3.2. Les caractéristiques géométriques et optiques du système de vélocimétrie laser sont données au paragraphe 3.3. Pour ce qui est des fluides, dans un souci de cohérence et de comparaison, on a choisi de reprendre les mêmes fluides que ceux utilisés par [Peixinho](#) : Une solution aqueuse de Carbopol 940 et une solution aqueuse de Carboxyméthylcellulose. Les aspects physico-chimiques ainsi que les propriétés de la microstructure de la solution de Carbopol sont donnés au paragraphe 3.4. Les caractérisations rhéologiques des fluides sont effectuées au paragraphe 3.5. Les résultats des essais rhéologiques sont présentés au paragraphe 3.6. Ils mettent clairement en évidence, la complexité du comportement rhéologique des fluides considérés : contrainte seuil, dépendance non linéaire de la viscosité effective μ et de la première différence de contraintes normales N_1 en fonction du cisaillement $\dot{\gamma}$.

3.2 Installation expérimentale

Le dispositif expérimental utilisé permettant la circulation du fluide en circuit fermé est schématisé par la figure (3.1). La veine d'essai est une conduite cylindrique horizontale en plexiglass de rayon intérieur $\hat{R} = 15 \text{ mm}$ et de longueur $\hat{L} = 5.75 \text{ m}$. Elle est instrumentée en prises de pression pour l'évaluation du coefficient de frottement. L'ensemble de la veine repose sur un berceau constitué par un fer profilé en C, qui assure l'alignement des divers éléments. Un circuit de dérivation permet de contrôler le débit avec précision dans la veine principale. L'écoulement est assuré au moyen d'une pompe volumétrique à rotor excentré (Moineau 45I5). Le débit, \hat{Q}_v , est réglable jusqu'à 400 l/min avec une précision de 1%. Un bac pressurisé de 50 litres placé en amont de la veine d'essai avec des manchons d'antivibration permettent de limiter la transmission des vibrations de la pompe au châssis qui supporte la conduite. Des profils de vitesse axiale ont été mesurés par vélocimétrie laser à effet Doppler à trois positions axiales (20, 54 et 122 diamètres de l'entrée) et à quatre positions azimutales séparées de $\pi/4$. Pour toutes les expériences effectuées, la température du fluide à l'entrée de la conduite est maintenue à $(20 \pm 0.2) \text{ }^\circ\text{C}$ à l'aide d'un échangeur de chaleur. Le bac d'alimentation en aval de la veine d'essai peut contenir jusqu'à 125 litres des 250 litres de fluide nécessaire au fonctionnement optimal de l'installation.

La longueur \hat{L}_e d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite cylindrique peut être estimée en utilisant la corrélation proposée par [Froishteter et Vinogradov \(1980\)\(62\)](#), donnée par :

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R} Re_g} = 0.23 \left(\frac{1}{n} \right)^{0.31} - 0.4 r_0 \quad \text{avec} \quad Re_g = \frac{\rho \hat{W}_d^{2-n} \hat{R}^n}{\hat{K}} \quad (3.1)$$

où ρ est la masse volumique, \hat{W}_d la vitesse débitante et r_0 est le rayon adimensionnel de la zone non-cisaillée. La relation (3.1) résulte d'une corrélation des résultats numériques issus de la résolution des équations du mouvement munies des hypothèses de Prandtl et en adoptant un modèle à deux viscosités. L'expression est transcrite en termes de Reynolds basé sur la viscosité pariétale et sur le diamètre de la conduite

$$\frac{Re_g}{Re_p} = \frac{1}{2} \frac{\hat{\mu}_p}{\hat{K} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{R}} \right)^{n-1}} \quad (3.2)$$

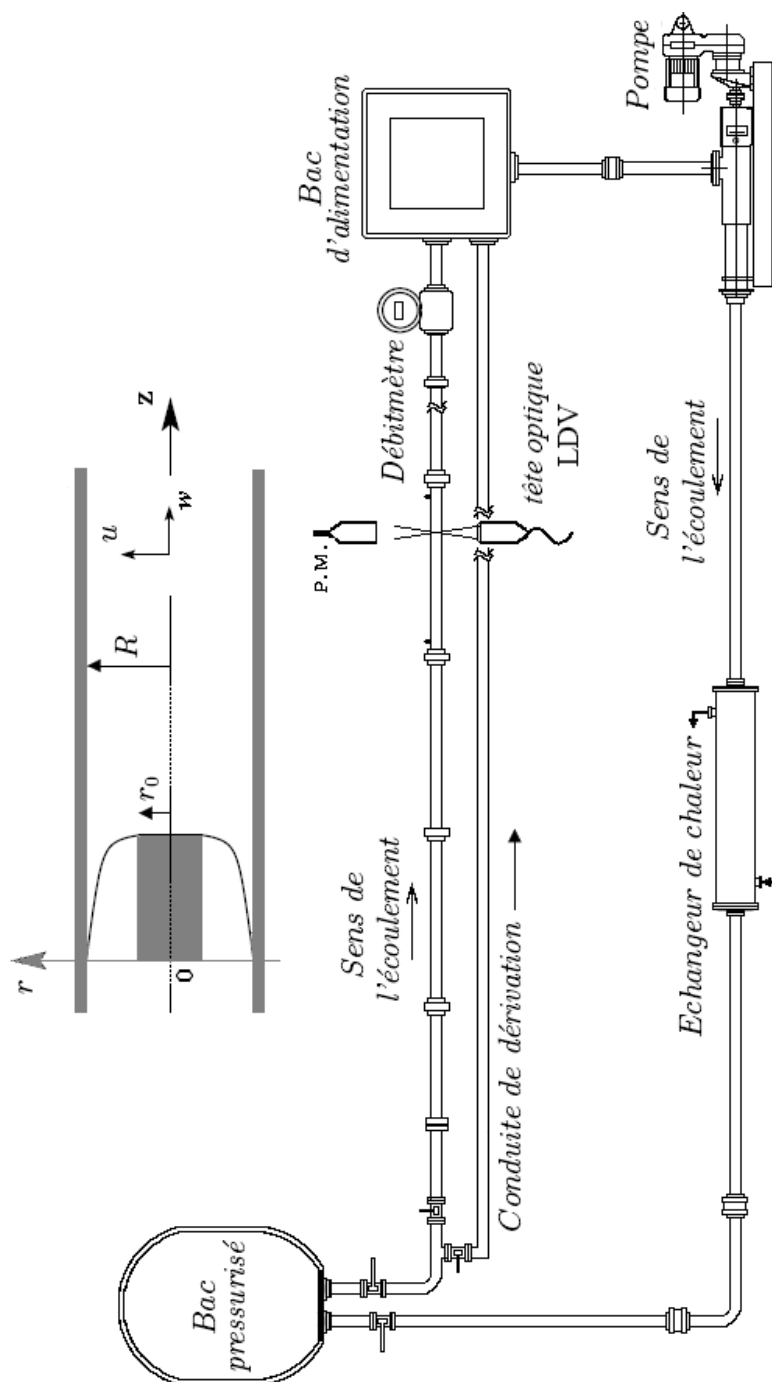


FIG. 3.1 – Schéma de l'installation expérimentale, profil de vitesse axiale et système de coordonnées.

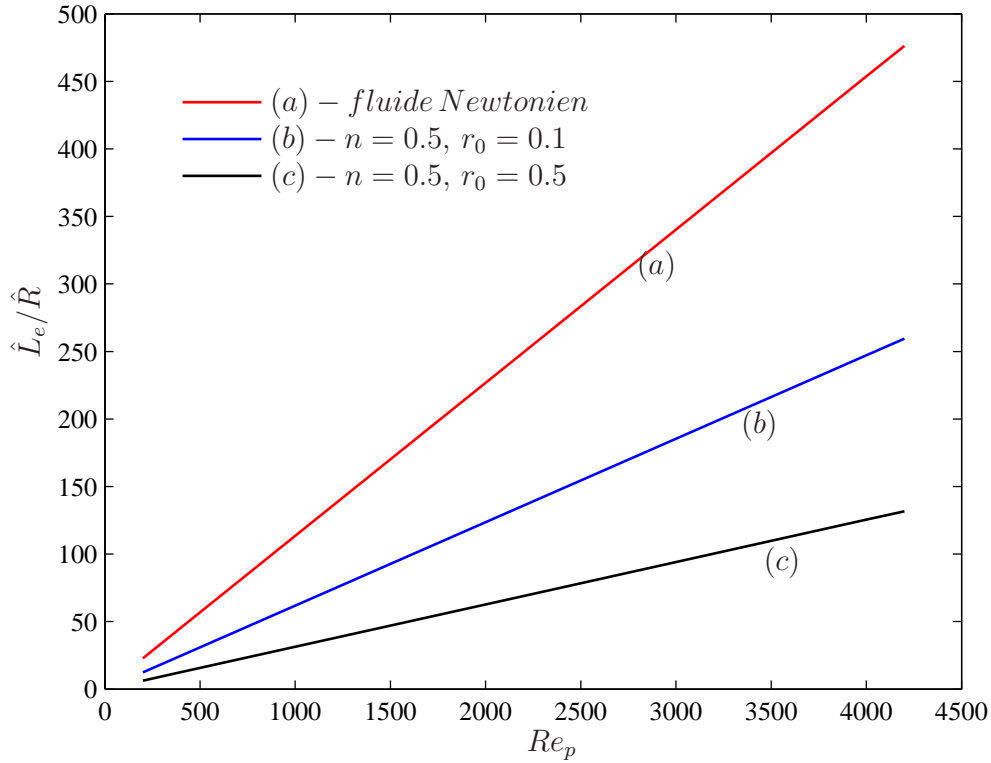


FIG. 3.2 – Longueur d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide de Herschel-Bulkley dans une conduite cylindrique pour $n = 0.5$ et deux valeurs de r_0 : 0.1 (courbe b) et 0.5 (courbe c). Le cas Newtonien est représenté par la courbe (a).

En écrivant $\hat{\mu}_p$ en fonction du gradient pariétal de vitesse théorique et après quelques calculs algébriques, on arrive à :

$$\frac{Re_g}{Re_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}} \right)^{1-n} \frac{1}{(1-r_0)^n} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n-1} \quad (3.3)$$

avec

$$\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}} = 1 - \frac{2n(1-r_0)}{(2+n)} \left(1 - \frac{n(1-r_0)}{3+n} \right) \quad (3.4)$$

soit,

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R}} = \left[0.23 \left(\frac{1}{n} \right)^{0.31} - 0.4r_0 \right] \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{W}_d}{\hat{W}_{max}} \right)^{1-n} \frac{1}{(1-r_0)^n} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{n-1} \right] Re_p \quad (3.5)$$

La figure (3.2) donne à titre d'exemple la longueur d'entrée \hat{L}_e rapportée au rayon de la conduite en fonction de Re_p pour $n = 0.5$ et deux valeurs de $r_0 = 0.1$ et 0.5. On peut noter en particulier une diminution de \hat{L}_e/\hat{R} lorsque r_0 augmente. On a aussi

représenté à titre indicatif la longueur d'entrée pour un fluide Newtonien. Pour cela on a utilisé la corrélation proposée récemment par [Durst et al \(2005\)\(63\)](#) : valable pour $0 \leq Re \leq +\infty$ pourvu que l'écoulement soit laminaire.

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R}} = 2 \times [(0.619)^{1.6} + (0.0567 \times Re)^{1.6}]^{\frac{1}{1.6}}.$$

Dans le cas des fluides rhéofluidifiants sans seuil, à notre connaissance, les corrélations existantes dans la littérature ne concernent que les fluides en loi puissance. Récemment, [Poole et Ridley \(2007\)\(64\)](#) ont proposé la corrélation suivante :

$$\frac{\hat{L}_e}{\hat{R}} = 2 \times \left[(0.246 n^2 - 0.675 n + 1.03)^{1.6} + (0.0567 \times Re_{MR})^{1.6} \right]^{\frac{1}{1.6}} \quad (3.6)$$

où Re_{MR} est le nombre de Reynolds de [Metzner et Reed \(1955\)\(65\)](#), défini tel que le coefficient de frottement C_f en régime laminaire vérifie la relation $C_f = \frac{16}{Re_{MR}}$:

$$Re_{MR} = \frac{8 \rho \hat{W}_d^{2-n} \hat{D}}{\hat{K}} \left[\frac{n}{6n+2} \right]^n.$$

Les Reynolds de paroi et de Metzner et Reed sont reliés par la relation :

$$Re_{MR} = 8 \left(\frac{n}{6n+2} \right) Re_p.$$

On peut noter que la longueur d'établissement diminue lorsque le caractère rhéofluidifiant du fluide devient plus important (voir la figure 3.3).

3.3 Techniques de mesures utilisées

3.3.1 Mesures des pertes de charge

Deux prises de pression sont utilisées vers la sortie de la conduite pour déterminer les pertes de charge. Elles ont un diamètre de 4 mm chacune et sont distantes de $\hat{\ell}_p = 1240$ mm l'une de l'autre. La première est à 90 diamètres de l'entrée. Les deux prises de pression sont reliées à un transmetteur de pression différentielle (Druck LPX 9481). Il s'agit d'un transmetteur à membrane qui permet la transformation d'une différence de pression en déformation. Celle-ci est mesurée à l'aide d'un capteur à courants de Foucault. La précision du transmetteur est estimée à 0.25% de la valeur maximale de l'étendue de mesure (1 bar). Pour obtenir des mesures correctes, on utilise des chambres cylindriques reliées aux prises de pression. Les chambres cylindriques et les tubes de raccordement menant au transmetteur sont remplis d'un fluide Newtonien (de l'eau). Le capteur de pression est relié à un PC via une carte d'acquisition.

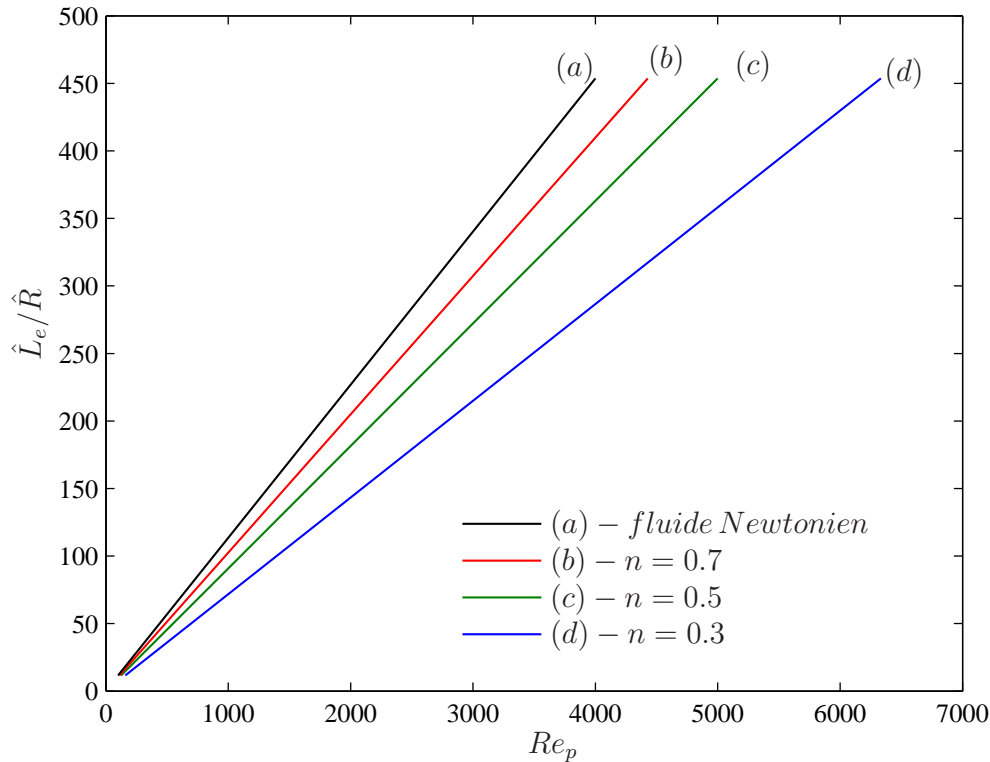


FIG. 3.3 – Longueur d'établissement de l'écoulement laminaire d'un fluide en loi puissance dans une conduite cylindrique calculée par l'expression (3.6) pour différentes valeurs de n : 0.7 (courbe b) et 0.5 (courbe c) 0.3 (courbe d). Le cas Newtonien est représenté par la courbe (a).

3.3.2 Mesures des débits

Un débitmètre électromagnétique (Endress + Hauser modèle Promag 33F) est placé à une distance de 300 mm en aval de la conduite. L'erreur commise sur la mesure du débit n'excède pas 1% de l'étendue de mesure (0 – 400 ℓ/min). Le principe de mesure repose sur la loi d'induction de Faraday. Le liquide qui traverse le débitmètre constitue un élément conducteur qui génère une tension induite par le champ magnétique créé par les bobines d'induction de cet appareil électromagnétique. Cette tension est linéairement proportionnelle à la vitesse de passage du liquide.

3.3.3 Contrôle de la température du fluide

La température du fluide est contrôlée à l'aide d'un thermocouple de type Chromel-Alumel de 1 mm de diamètre placé à l'entrée de la conduite. Elle est maintenue constante à $(20 \pm 0.2) ^\circ C$ durant toutes les expériences, grâce à un échangeur de

chaleur (tube/calandre CIAT). Cet échangeur est alimenté par un mélange thermostaté d'eau et de glycol.

3.3.4 Mesures des vitesses

Des profils radiaux de la composante axiale de la vitesse ont été mesurés à trois positions axiales (20, 54 et 122 diamètres) de la section d'entrée et à quatre positions azimutales séparées de $\pi/4$, comme cela est illustré par la figure (3.4). Dans tout ce qui suit, l'angle θ désigne la position azimutale de la tête optique. Les mesures ont été effectuées par vélocimétrie laser Doppler (VLD). Cette technique se base sur l'analyse fréquentielle du signal lumineux diffusé par une particule passant à travers un volume de mesure constitué de franges d'interférence. Ces dernières sont obtenues à partir de l'intersection de deux faisceaux monochromatiques cohérents, issus d'un même laser. Les franges d'interférence sont des plans parallèles, équidistants alternativement

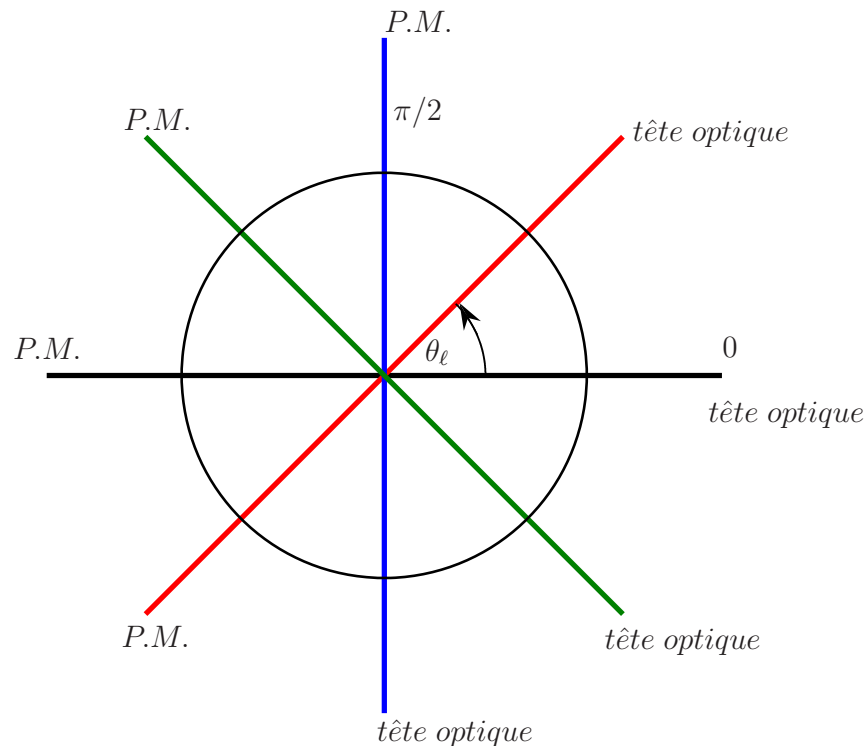


FIG. 3.4 – Positions azimutales des différents diamètres suivant lesquels les profils de vitesse axiale ont été mesurés.

sombres et brillants. Ils sont parallèles à la bissectrice intérieure et perpendiculaires au plan formé par ces faisceaux. La distance $\hat{\delta}_f$ entre deux franges brillantes ou

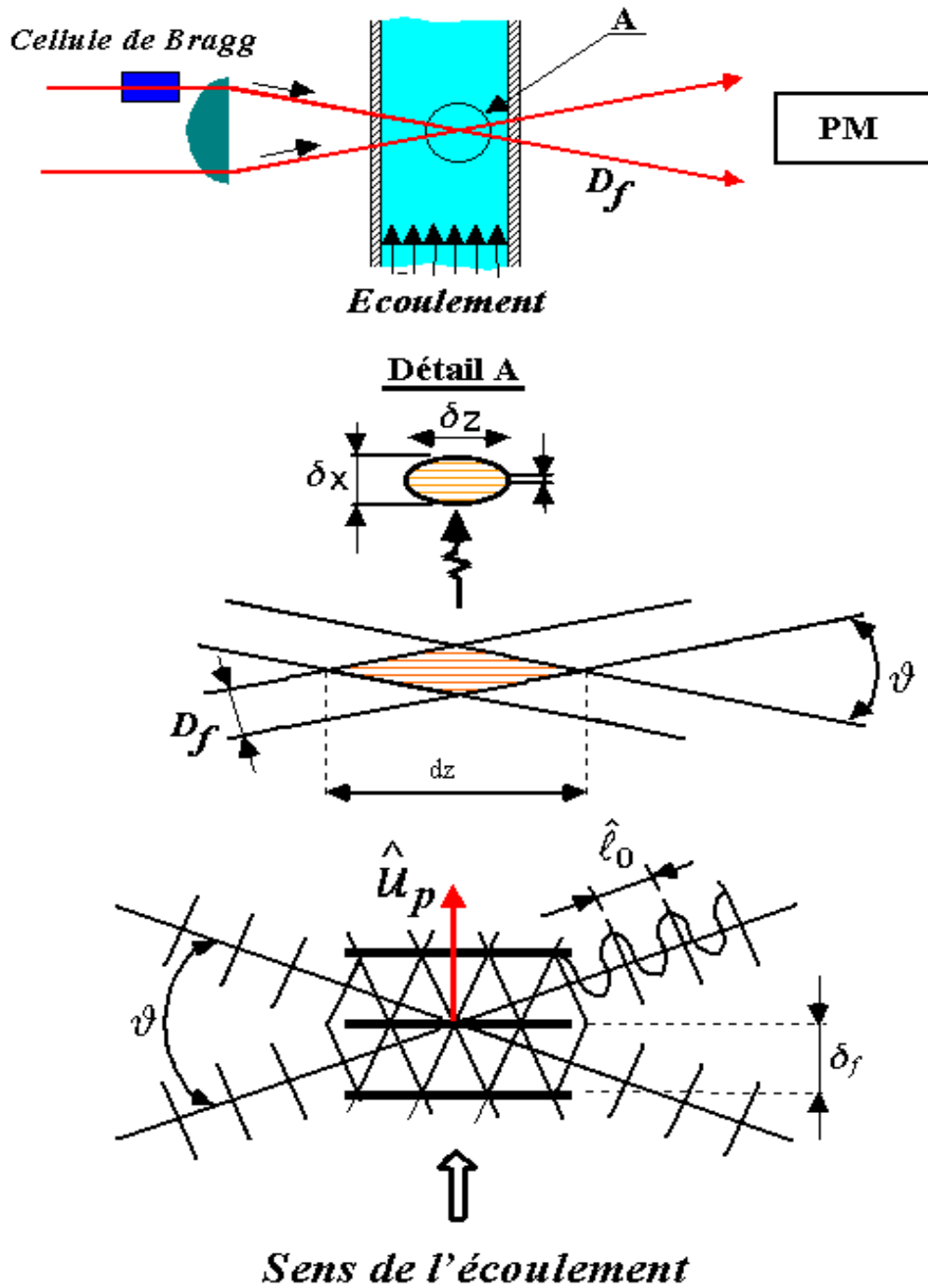


FIG. 3.5 – Mesure de vitesse par vélocimétrie laser Doppler.

interfrange dépend de la longueur d'onde $\hat{\ell}_0$ de la lumière laser et de l'angle ϑ formé par les deux faisceaux. Elle est donnée par

$$\hat{\delta}_f = \frac{\hat{\ell}_0}{2 \sin(\vartheta/2)}. \quad (3.7)$$

Le temps mis par une particule pour passer d'une frange brillante à la suivante est $\hat{T} = \frac{\hat{\delta}_f}{\hat{u}_p}$, où \hat{u}_p est la composante de la vitesse perpendiculaire au plan des franges. La fréquence de lumière diffusée par la particule est

$$\hat{F}_D = \frac{1}{\hat{T}} = \frac{2 \hat{u}_p \sin(\frac{\vartheta}{2})}{\hat{\ell}_0}. \quad (3.8)$$

Pour nos mesures expérimentales, on a utilisé un laser Hélium-Néon d'une puissance de 10 mW, émettant une lumière de longueur d'onde $\hat{\ell}_0 = 632.8 \text{ nm}$. Le faisceau issu du laser est séparé en deux autres faisceaux grâce à un miroir semi-transparent. L'un de ces faisceaux est décalé en fréquence de 40 MHz par passage dans une cellule de Bragg. Les faisceaux sont ensuite dirigés vers une fibre optique. La tête optique comprend un module d'expansion qui accroît le diamètre des faisceaux ainsi que leur écartement et une lentille de focalisation qui assure la convergence des faisceaux. Dans notre cas, à la sortie du système optique, les faisceaux sont séparés d'une distance $\hat{d} = 38.4 \text{ mm}$. Ils convergent ensuite à une distance focale $\hat{L}_f = 160 \text{ mm}$. En raison de la forme cylindrique des faisceaux, le volume de mesure résultant de leur intersection est un ellipsoïde de révolution comprenant les franges d'interférence orientées parallèlement à la bissectrice de l'angle formé par les deux faisceaux incidents. Les dimensions du volume de mesure (voir la figure 3.5) sont donnés par

$$\hat{\delta}_z = \frac{4\hat{\ell}_0\hat{L}_f}{\pi\hat{D}_f \sin(\vartheta/2)} = 0.636 \text{ mm}. \quad (3.9)$$

$$\hat{\delta}_x = \frac{4\hat{\ell}_0\hat{L}_f}{\pi\hat{D}_f \cos(\vartheta/2)} = 0.076 \text{ mm}. \quad (3.10)$$

La distance entre deux franges brillantes successives est

$$\hat{\delta}_f = \frac{\hat{\ell}_0}{2 \sin(\vartheta/2)} = 2.655 \text{ } \mu\text{m}. \quad (3.11)$$

Le nombre de franges dans le volume de mesure est

$$N_f = \frac{\hat{\delta}_x}{\hat{\delta}_f} = 28. \quad (3.12)$$

$\hat{\ell}_0$	<i>Longueur d'onde</i>	632.8 nm
\hat{L}_f	<i>Distance focale</i>	160 mm
\hat{d}	<i>Ecartement des faisceaux</i>	38.4 mm
\hat{D}_f	<i>Diamètre du faisceau</i>	1.7 mm
ϑ	<i>Angle entre deux faisceaux</i>	13.686°
$\hat{\delta}_x$	<i>Épaisseur du volume de mesure</i>	0.076 mm
$\hat{\delta}_z$	<i>Longueur du volume de mesure</i>	0.636 mm
$\hat{\delta}_f$	<i>Espacement des franges</i>	2.655 μ m
N_f	<i>Nombre de franges dans le volume de mesure</i>	28

TAB. 3.1 – Caractéristiques optiques et géométriques du système de vélocimétrie laser Doppler utilisé.

L'ensemble des caractéristiques optiques et géométriques est résumé dans le tableau (3.1).

En traversant ce réseau de franges, une particule va diffuser de la lumière dans l'espace. Une partie de celle-ci va être transmise, via une lentille de focalisation au photomultiplicateur dont le rôle est de convertir l'énergie lumineuse en un signal électrique. Le traitement du signal électrique est effectué à l'aide d'un BSA (Burst Spectrum Analysers) 57N11 de chez DANTEC. La figure (3.6) montre l'enveloppe et la forme du signal électrique pour un passage de particules dans le volume de mesure. Le signal caractéristique est connu sous le nom de "bouffée Doppler". Pour améliorer la qualité du signal, l'écoulement estensemencé avec des particules sphériques creuses d'un diamètre de 10 μ m. Pour l'ensemble des essais expérimentaux, la tension du Photomultiplicateur a été maintenue à 130 ± 50 volts et le gain à 30 ± 5 dB. Pour ce qui est de la taille de la fenêtre de mesure, elle est comprise entre 8 et 14 fois l'écart type de la vitesse axiale mesurée.

3.3.5 Détermination de la position de la paroi

Pour toutes les expériences de vélocimétrie laser, on a d'abord déterminé la position de la paroi, en approchant progressivement le système optique LDA de celle-ci (EL Karkri (2005)(66)). Pour chaque position, près de la paroi on a tracé un histogramme des vitesses instantanées. La figure (3.7) montre un exemple des résultats obtenus en déplaçant le système optique par pas de 50 μ m. Dans la figure (3.7 - a), l'histogramme présente un pic assez marqué pour la valeur moyenne $\hat{u}_p = 0$,

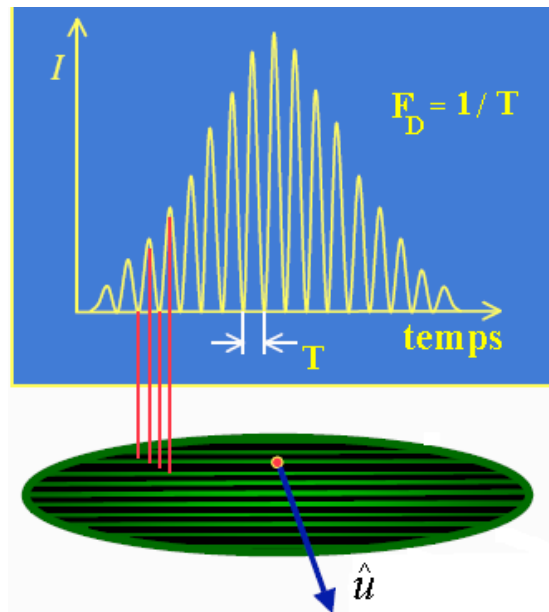


FIG. 3.6 – Forme du signal résultant d'un passage de particules dans le volume de mesure : bouffée Doppler.

montrant ainsi la proportion des réalisations statistiques de la vitesse nulle. L'autre partie du signal montre la contribution des vitesses positives des particules qui traversent la partie du volume de mesure située au sein de l'écoulement. L'amplitude du pic ($\hat{u}_p = 0$) diminue lorsqu'on déplace le volume de mesure vers le fluide comme le montrent les histogrammes (3.7 -b) - (3.7 -d). La situation (3.7 -e) correspond au cas où le volume de mesure est tangent à la paroi. Le centre de volume de mesure est alors à une distance $\frac{\hat{\delta}_z}{2}$ de la paroi.

3.4 Fluides utilisés

Deux fluides non Newtoniens ont été utilisés :

- i. Une solution aqueuse de Carbopol 940 à 0.2% en masse (polymère de l'acide acrylique fourni par B. F. Goodrich). C'est un fluide à seuil fortement rhéofluidifiant.
- ii. Une solution aqueuse à 2% en masse de Carboxyméthylcellulose CMC71MC (fourni par PROLABO). C'est un fluide sans seuil et faiblement rhéofluidifiant.

Les fluides indiqués ci-dessus sont très souvent cités dans la littérature comme fluides modèles de fluides rhéofluidifiants avec ou sans contrainte seuil. Ils présentent

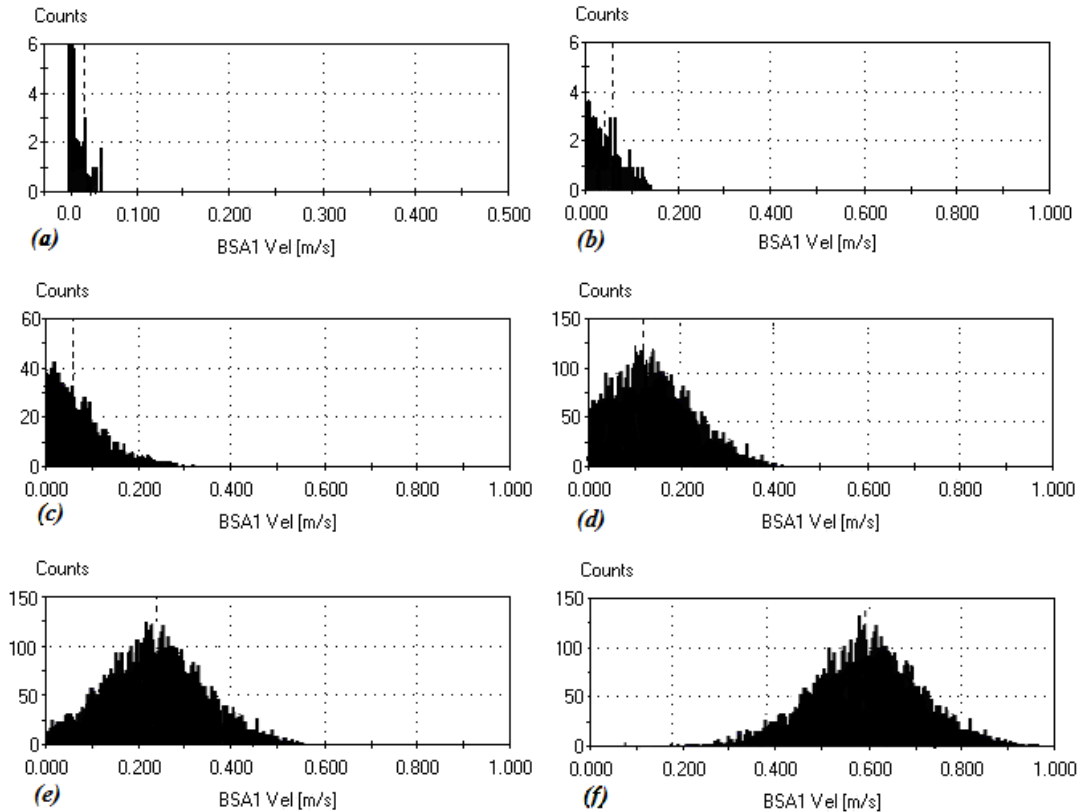


FIG. 3.7 – Histogrammes des vitesses instantanées montrant le repérage de la paroi.

en plus l'avantage d'être non toxiques et translucides, donc adaptés aux mesures par vélocimétrie laser.

3.4.1 préparation des fluides et propriétés physico-chimiques

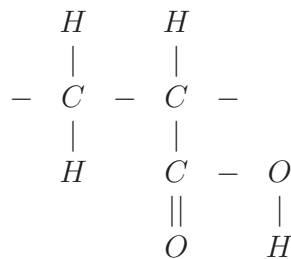
3.4.1.1 préparation de la solution de Carbopol

La solution de Carbopol 940 (polymère de l'acide acrylique) à 0.2% en masse est d'abord préparée dans des récipients de 25 litres d'eau déminéralisée. Le polymère sous forme de poudre blanche hygroscopique est dispersé progressivement dans l'eau, tout en mélangeant à l'aide d'un agitateur du type Heidolph muni d'une tige avec deux lames. Après deux heures d'agitation à une vitesse de rotation de 2000 t/min , on obtient une dispersion homogène turbide. Cette dispersion est acide avec un $pH \simeq 3$. Le système est laissé au repos pendant 24 heures. Par la suite, la dispersion est neutralisée en rajoutant une solution d'Hydroxyde de Sodium (NaOH)

à 18%¹ (53 ml pour 25 l de solution à 0.2 % en masse). Le mélange est effectué à l'aide d'un agitateur constitué d'une tige à pales (marine) relié à un moteur électrique de puissance 0.45 KW. Le pH est contrôlé à l'aide d'un papier pH et d'un pH -mètre du type Multi 340i. La solution finale se présente sous forme d'un gel translucide. Elle est laissée au repos pendant au moins 48 heures avant tout essai rhéologique.

- Propriétés physico-chimiques et microstructure de la solution de Carbopol 940

Le Carbopol 940 (B. F. Goodrich) est un polymère de l'acide acrylique $[CH_2 - CH - COOH]$ de masse moléculaire $M = 1.4 \times 10^6$ g/mol.



Forme développée de l'acide acrylique.

Sous forme anhydre, le polymère se présente d'un point de vue statistique comme une pelote de taille moyenne $0.2 \mu m$. En dispersion dans l'eau, on a une solution acide avec un $pH \simeq 3$. L'addition d'un agent neutralisant tel que l'Hydroxyde de Sodium, provoque une ionisation du groupe acide acrylique. La répulsion électrostatique qui en résulte, suite à l'apparition de charges négatives sur le squelette du polymère, conduit à un étirement des molécules (ALain (1973)(67)). Par effet d'encombrement spatial, le contact et l'enchevêtrement entre les chaînes polymère favorise la constitution d'un réseau. L'hydratation des parties hydrophiles du polymère conduit à un gonflement des structures polymériques qui donne naissance à des micro-gels. C'est le contact entre ces micro-gels qui est responsable des propriétés gélifiantes des solutions de Carbopol. La figure (3.8) prise de l'article de Piau (2007)(68) est une représentation schématique de la dispersion des micro-gels selon la concentration C en masse du Carbopol 940 :

¹La solution d'Hydroxyde Sodium "NaOH" à 18% est obtenue en ajoutant 45 grammes de NaOH sous forme de pastilles à 205 ml d'eau déminéralisée.

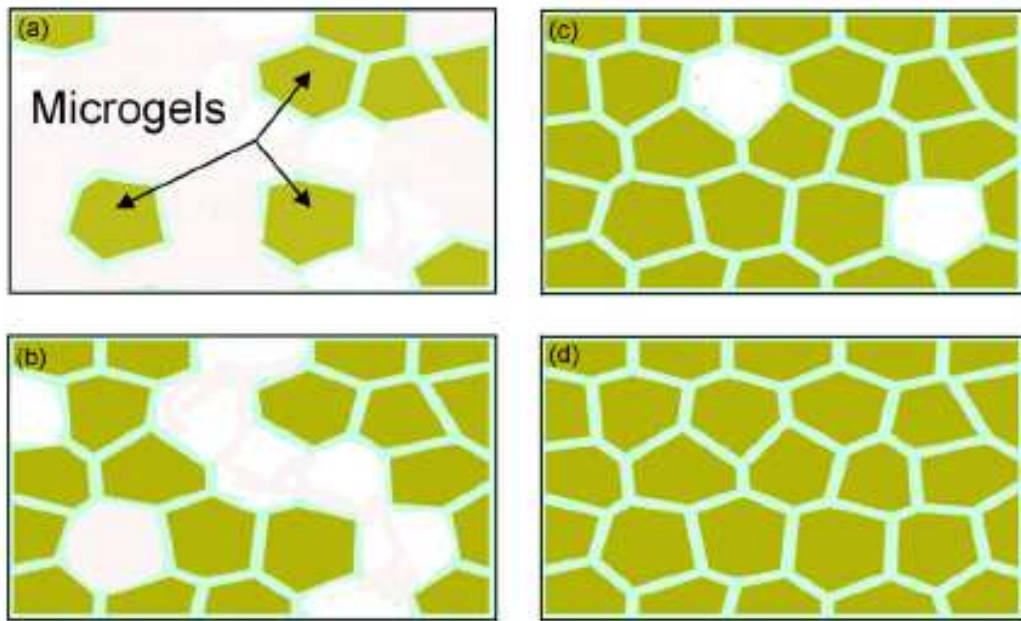


FIG. 3.8 – Dispersion des micro-gels selon la concentration en masse de Carbopol 940.

- a. $C < 0.035\%$. On a une dispersion diluée de micro-gels, viscoélastique sans contrainte seuil.
- b. $0.035 < C < 0.12\%$. Une percolation des micro-gels est observée.
- c. $0.12 < C < 0.21\%$. Une inversion de phase de la dispersion est obtenue.
- d. Pour des concentrations en masse supérieures à 0.21% , on a un assemblage compact de micro-gels polydisperse.

- Lorsqu'une contrainte suffisamment faible $\tau < \tau_0$ est appliquée à la dispersion, le système se déforme sans modification de la structure interne. Lorsque la contrainte est relâchée, le système revient à son état initial. Il a un comportement du type solide élastique.

- Pour des contraintes intermédiaires, $\tau_0 < \tau < \tau_1$, le réseau formé par les micro-gels est brisé et un écoulement est observé. Suite à cela, les micro-gels se réorganisent. D'après [Putz et Burghlea \(2007\)\(69\)](#), il y'a une compétition entre déstructuration et restructuration du fait du cisaillement et du mouvement brownien.

- Pour des contraintes plus élevées $\tau > \tau_1$, le temps caractéristique associé au cisaillement est beaucoup plus petit que le temps caractéristique de restructuration.

On a alors un régime visqueux.

3.4.1.2 préparation de la solution de CMC7M1C

Le CMC est un polymère anionique hydrosoluble. D'un point de vue physico-chimique le CMC a le squelette de la cellulose constituée d'un enchaînement de glucoses (figure 3.9). La présence sur chaque monomère glucose de trois groupements hydroxyles, liés aux carbones C_2 , C_3 et C_6 permet la formation de ponts hydrogène entre les structures cellulosiques. Cette interaction entre les chaînes linéaires de cellulose est à l'origine de l'insolubilité de ce polymère naturel dans de nombreux solvants. Pour la fabrication du CMC, la cellule est mise au contact d'une solution de soude concentrée. Par la suite, le CMC est obtenu par une éthérisation des groupes hydroxyles en groupements carboxyméthyl. Le degré de substitution est un paramètre important dans la rhéologie de la solution CMC.

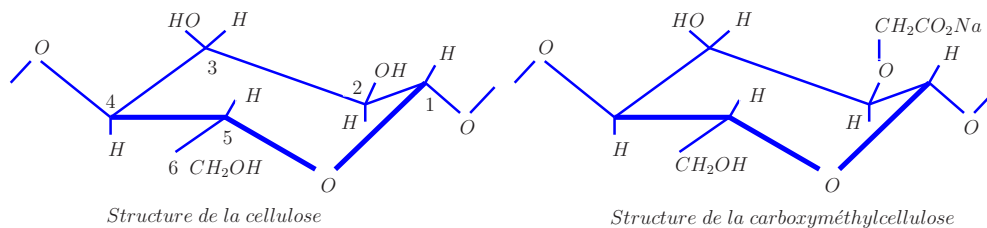


FIG. 3.9 – Structures de la cellulose et de la carboxyméthylcellulose de Sodium.

Afin de limiter la dégradation bactériologique des produits, quelques millilitres de Formaldehyde à 37 % sont ajoutés pour les deux fluides utilisés.

3.5 Caractérisations rhéologiques des fluides

3.5.1 Viscosité effective

La caractérisation rhéologique des fluides utilisés a été effectuée à l'aide d'un rhéomètre fonctionnant à couple imposé et à vitesse imposée. (AR 2000 de TA Instrument), équipé d'une géométrie cône-plan (diamètre : 6 cm, angle : 1° et troncature : 58) muni d'une trappe à solvant pour éviter l'évaporation du fluide. La surface

du cône en contact avec le fluide à été traitée et rendue rugueuse afin d'éviter le problème de glissement du fluide à la paroi. Un schéma de la géométrie cône-plan est donné par la figure (3.10). Le fluide est cisailé entre le cône en rotation et le plateau

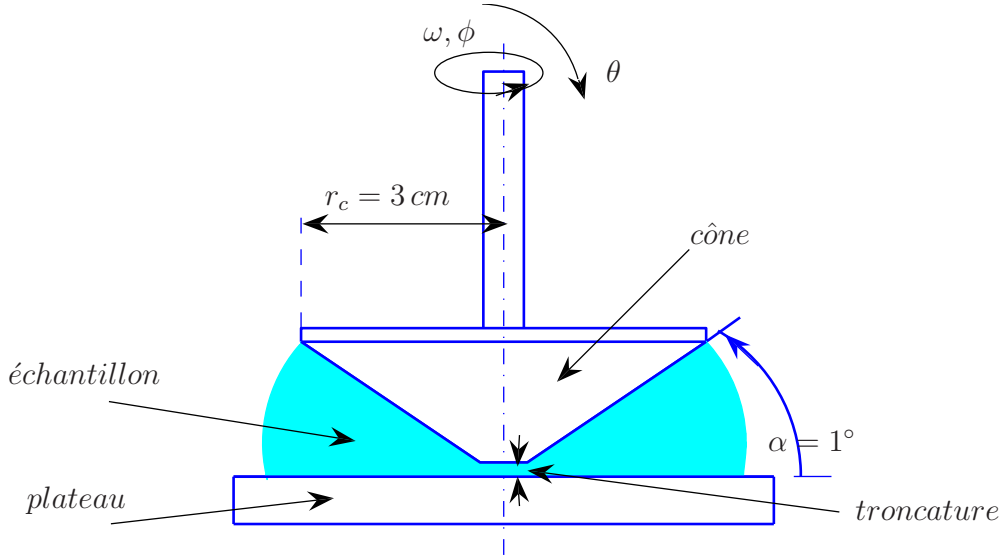


FIG. 3.10 – Géométrie de mesure.

fixe. La relation entre la contrainte $\tau_{\phi\theta}$ et le couple \mathcal{M} imposé sur le cône est

$$\tau_{\phi\theta} = \frac{3 \mathcal{M}}{2\pi r_c^3 \sin^2\theta} \approx \frac{3 \mathcal{M}}{2\pi r_c^3}. \quad (3.13)$$

La contrainte est considérée comme homogène lorsque ($\alpha < 4^\circ$). Sous la même hypothèse, on a la relation suivante pour le cisaillement

$$\dot{\gamma}_{\phi\theta} = \frac{\omega}{\tan\alpha} \approx \frac{\omega}{\alpha}. \quad (3.14)$$

la viscosité effective est $\mu = \frac{\tau_{\phi\theta}}{\dot{\gamma}_{\phi\theta}}$.

3.5.2 Première différence de contraintes normales

En utilisant les équations du mouvement et en supposant d'une part que le bord de l'échantillon est de forme sphérique et d'autre part que la tension de surface de cette interface est négligeable, on a la relation suivante entre la force normale totale F_z et la première différence de contraintes normales [Macosco \(1994\)\(70\)](#).

$$F_z = \frac{\pi r_c^2}{2} (\tau_{\phi\phi} - \tau_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} \pi r_c^2 N_1, \quad \text{soit,} \quad N_1 = \frac{2F_z}{\pi r_c^2}.$$

En fait, cette première différence de contraintes normales est due à une anisotropie de la structure interne du fluide. Au repos, la macromolécule en solution a l'aspect d'une "pelote" contenue dans une enveloppe sphérique. Lorsqu'elle est soumise à un cisaillement suffisamment fort, cette pelote se déforme en un ellipsoïde dont le grand axe a tendance à s'orienter dans la direction de l'écoulement. L'élasticité du polymère a tendance à ramener cet ellipsoïde vers une forme sphérique. La force de rappel est maximale dans la direction de l'écoulement. C'est ce qui donne lieu à une différence de contraintes normales. D'après [Barnes *et al.* \(1989\)\(71\)](#), on peut considérer qu'un liquide est très viscoélastique lorsque la première différence de contraintes normales N_1 dans un écoulement de cisaillement simple est supérieure à la contrainte de cisaillement $(N_1/\tau) > 1$. Ce critère est utilisé par plusieurs auteurs dans la littérature, on cite en particulier [Escudier *et al.* \(1999\)\(7\)](#). En fait, les mesures de N_1 sont très délicates et sont très sensibles à la forme de la surface libre. [Venerus \(2007\)\(72\)](#) a montré qu'une faible modification de la surface libre peut induire des erreurs de l'ordre 10% dans la mesure de N_1 .

3.6 Analyse rhéologique

La caractérisation rhéologique des fluides a été faite au début et à la fin de chaque expérience d'écoulement en conduite cylindrique. La gamme de cisaillement considérée est proche de celle que l'on a dans une section droite de la conduite où l'écoulement est établi. Le protocole suivi pour les mesures rhéologiques est le suivant : Une fois que le fluide est mis dans l'entrefer cône-plan, on l'amène à un état de cisaillement permanent. Pour cela, on le cisaille à 5 s^{-1} pendant cinq minutes. Ensuite on le laisse au repos pendant trois minutes pour que le matériau se restructure complètement. Par la suite, on a appliqué une rampe par paliers de cisaillements croissants $0.01 \leq \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_{max}$ suivie d'une rampe par paliers décroissants. Typiquement, pour $\dot{\gamma}_{max}$ de l'ordre de 2000 s^{-1} , la durée d'une rampe est de l'ordre d'une heure.

3.6.1 Solution de CMC71MC à 2%

La figure (3.11) montre l'évolution de la viscosité effective en fonction du cisaillement pour la solution de CMC71MC. Le comportement rhéologique est décrit par

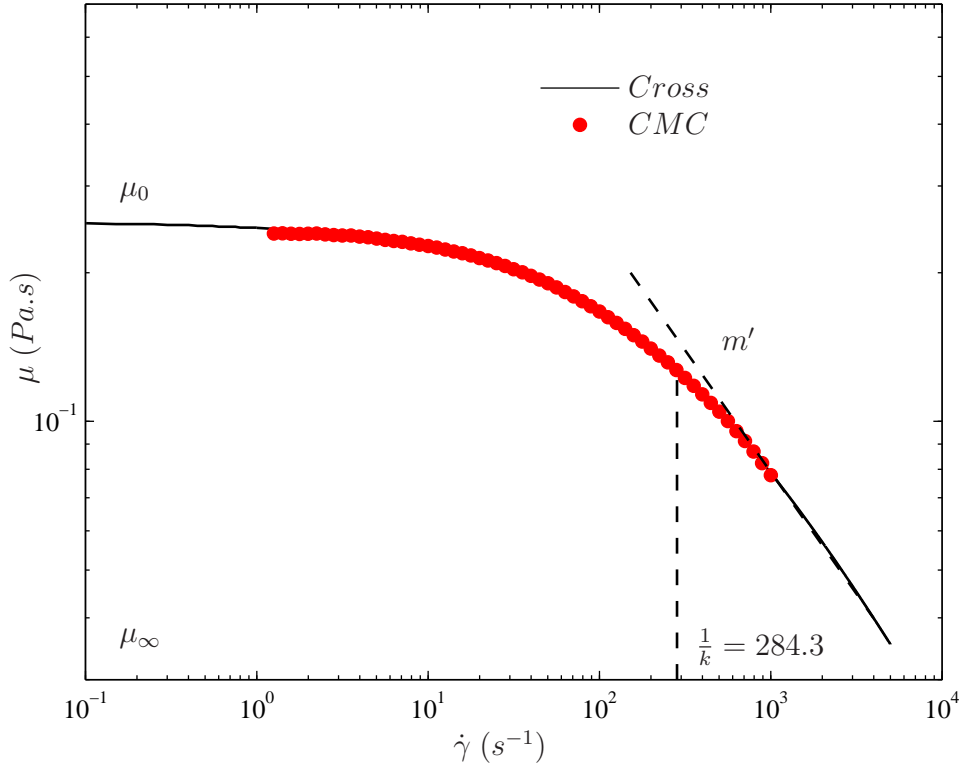


FIG. 3.11 – Evolution de la viscosité effective en fonction du cisaillement pour la solution de CMC à 2% en masse. Les symboles sont les données expérimentales et le trait continu est une interpolation par le modèle de Cross : ($\mu_0 = 0.253$ Pa.s, $\mu_\infty = 1.65 \times 10^{-3}$ Pa.s, $k = 3.19 \times 10^{-3}$ s).

le modèle de Cross :

$$\frac{\mu - \mu_\infty}{\mu_0 - \mu_\infty} = \frac{1}{1 + (k\dot{\gamma})^{m'}} \quad (3.15)$$

où μ_0 et μ_∞ sont les viscosités pour des cisaillements respectivement nul et infini, la constant k est un temps de relaxation et m' est un indice de structure de l'écoulement. On peut noter, en particulier, que le fluide est faiblement rhéofluidifiant et ne peut induire qu'une faible stratification de la viscosité dans la conduite. En effet, $\frac{\mu(\dot{\gamma} = 1000)}{\mu(\dot{\gamma} = 0)} \simeq \frac{1}{4}$, où la valeur de $\dot{\gamma} = 1000 \text{ s}^{-1}$ est proche du cisaillement pariétal lors de la transition vers la turbulence pour ce fluide. Les résultats des mesures de N_1 sont consignés dans la figure (3.12). pour la courbe (a), N_1 peut être mis sous la forme $N_1 = 0.485\tau^{1.274}$ pour $28 < \tau < 77 \text{ Pa}$. Le caractère viscoélastique du fluide ne peut pas être négligé dans la mesure où $N_1/\tau > 1$ (Barnes *et al.* (1989)(71)). A forts débits, l'écoulement du fluide dans le dispositif expérimental s'accompagne d'une dégradation mécanique des chaînes de polymère, il s'ensuit une réduction significative du caractère rhéofluidifiant et viscoélastique comme le montrent respectivement

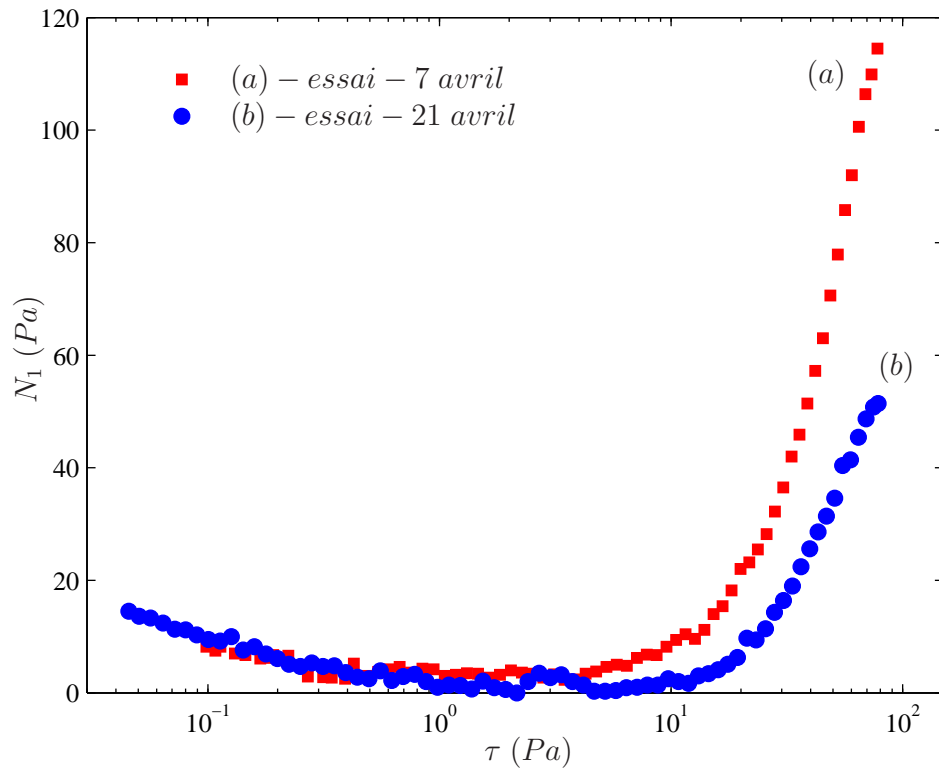


FIG. 3.12 – Evolution de la première différence des contraintes normales en fonction de la contrainte de cisaillement pour une solution de CMC à 2% en masse.

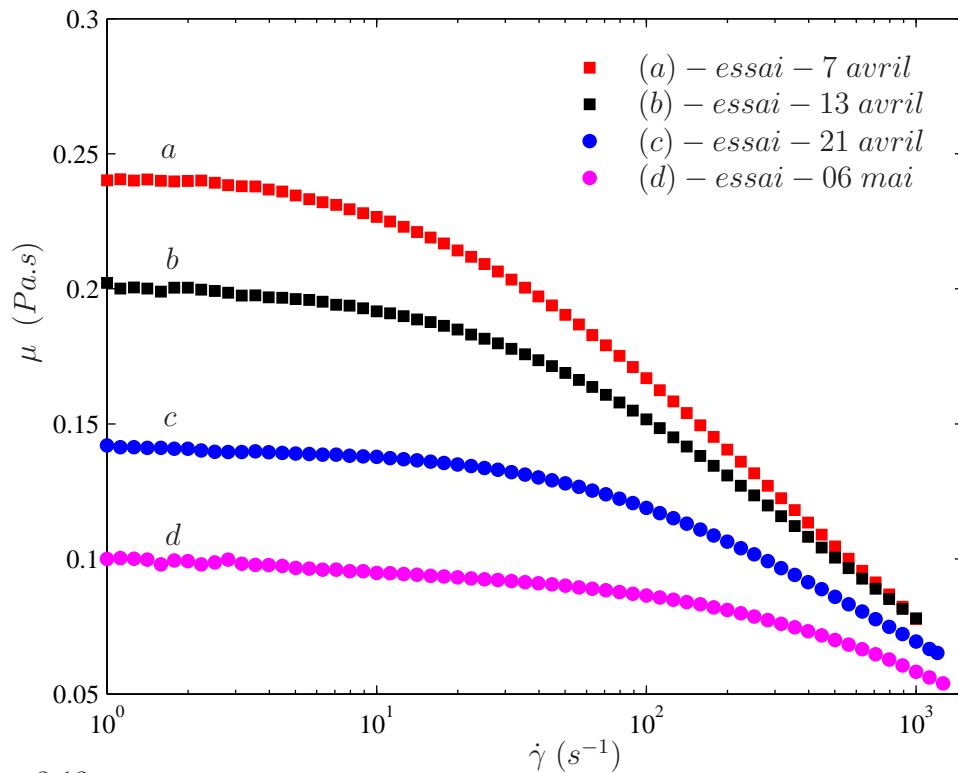


FIG. 3.13 – Modification de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de CMC pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence.

les figures (3.12) et (3.13). Après trois semaines d'expérience, N_1 est négligeable et difficile à mesurer.

3.6.2 Solution de Carbopol 940 à 0.2%

La figure (3.14) montre un rhéogramme en terme de $\mu(\dot{\gamma})$ et $\tau(\dot{\gamma})$ pour la solution de Carbopol. Deux comportements différents du fluide sont clairement identifiés par les zones *I* et *II* séparées par une valeur critique de cisaillement $\dot{\gamma}_c \simeq 7 \text{ (s}^{-1}\text{)}$. Un comportement similaire a déjà été observé par Brancher (1988)(73) pour une plus faible concentration de Carbopol. Lorsque $\dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c$ (zone *II*), le cisaillement dans le cône-plan est homogène et le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. Lorsque $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_c$, le cisaillement n'est plus homogène dans l'entrefer. Il serait localisé dans une couche de fluide en contact avec le cône en rotation. L'épaisseur de cette couche augmente lorsque $\dot{\gamma}$ croît et remplit tout l'entrefer à $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ (Coussot *et al.* (2002)(74), Møller *et al.* (2003)(75) et Varnik *et al.* (2003)(76)). Putz et Burghlea (2007)(69) attribue la zone I à celle où il y a une compétition entre les effets de destruction et de restructuration du réseau formé par les micro-gels.

Les zones (*I*) et (*II*) décrites ci-dessus sont aussi retrouvées dans la courbe (a) de la figure (3.15) qui décrit l'évolution de N_1 en fonction de $\dot{\gamma}$. Une très forte augmentation de N_1 dans la zone *I* est observée, suivie d'une augmentation plus lente dans la zone *II*. Les données expérimentales dans la zone *II* peuvent être interpolées par une relation de la forme $N_1 = 143.41\tau^{0.274}$. Dans toute cette zone $N_1/\tau > 1$ et le fluide doit être considéré comme viscoélastique selon le critère de Barnes *et al.* (1989)(71).

Comme dans le cas de la CMC, l'écoulement à forts débits de la solution de Carbopol dans le dispositif expérimental s'accompagne d'une dégradation mécanique des chaînes de polymère qui induit une modification significative du comportement rhéologique montrée par les figures (3.15) et (3.16). On peut noter en particulier :

- i. On ne distingue plus l'effet du cisaillement localisé. Il se situe peut être à $\dot{\gamma} < 10^{-2} \text{ s}^{-1}$.
- ii. Une forte réduction du caractère viscoélastique, courbe (b) figure (3.15).

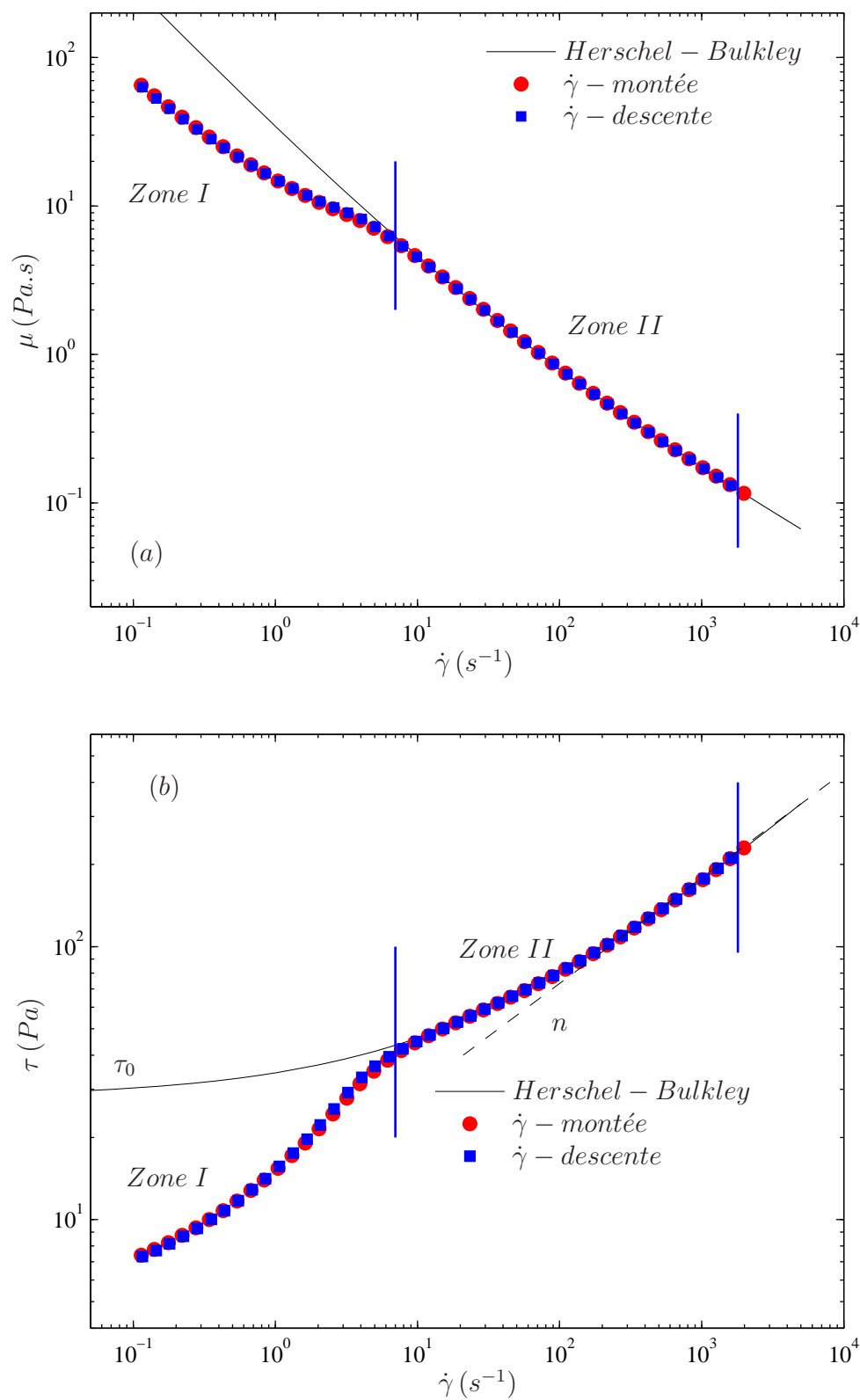


FIG. 3.14 – Comportement rhéologique de la solution de Carbopol à 0.2% décrit par le modèle de Herschel-Bulkley avec les paramètres rhéologique ($\tau_0 = 28.1$ Pa, $K = 6.37$ Pa.s n et $n = 0.45$).

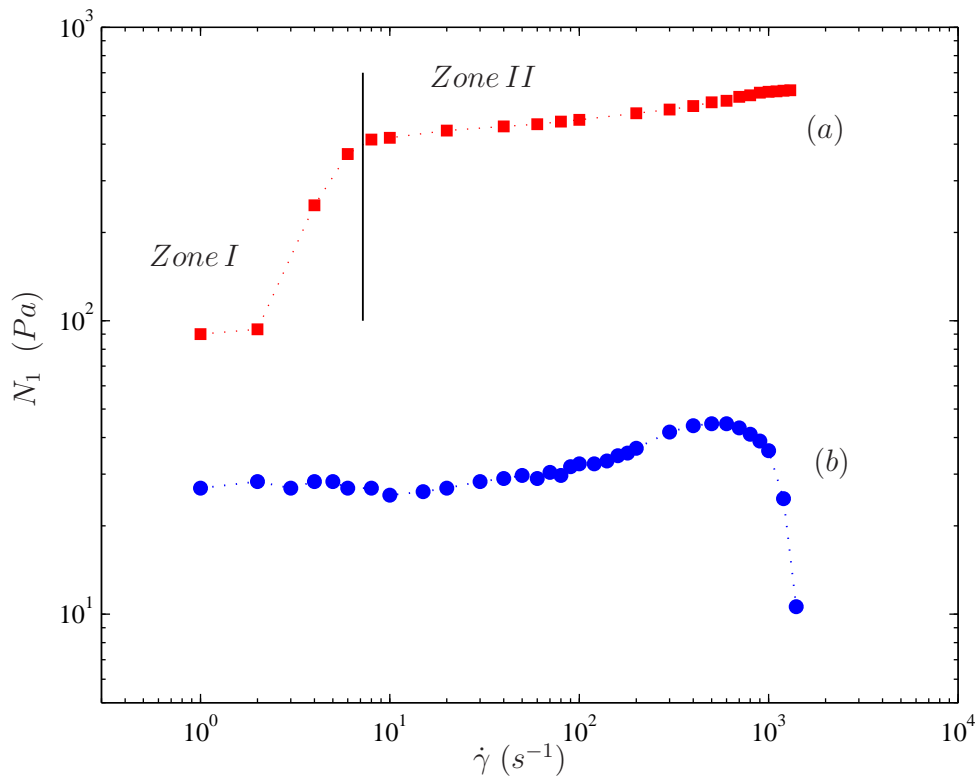


FIG. 3.15 – Evolution de la première différence des contraintes normales en fonction de la contrainte de cisaillement pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse.

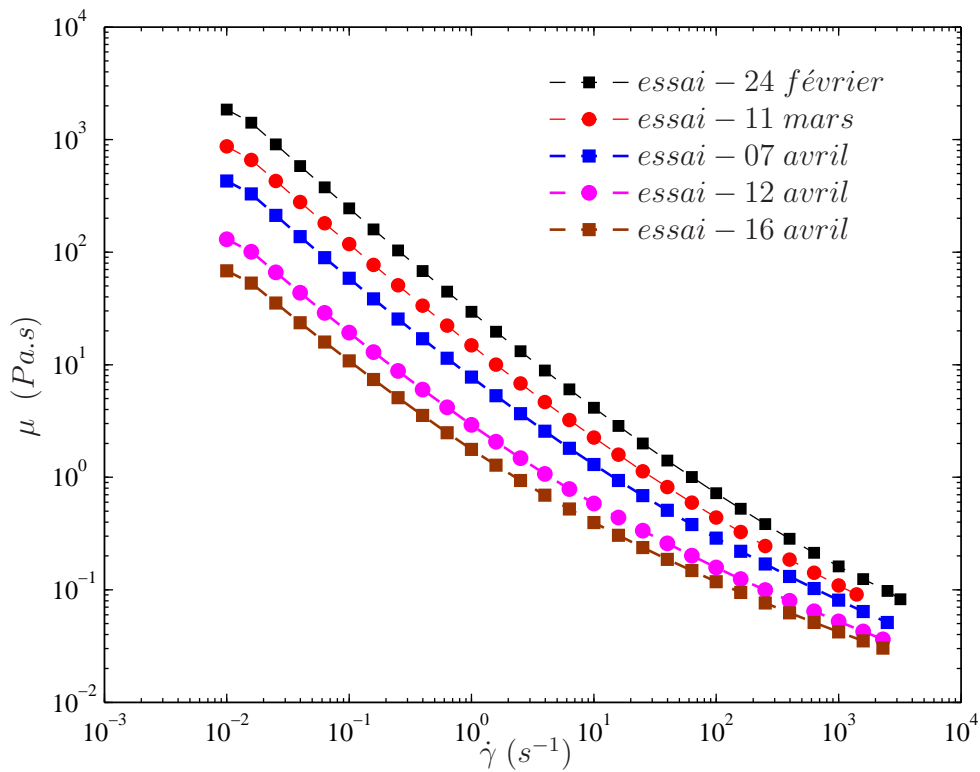


FIG. 3.16 – Modification de la viscosité et du caractère rhéofluidifiant de la solution de Carbopol 940 pendant une campagne d'essais expérimentaux sur la transition vers la turbulence.

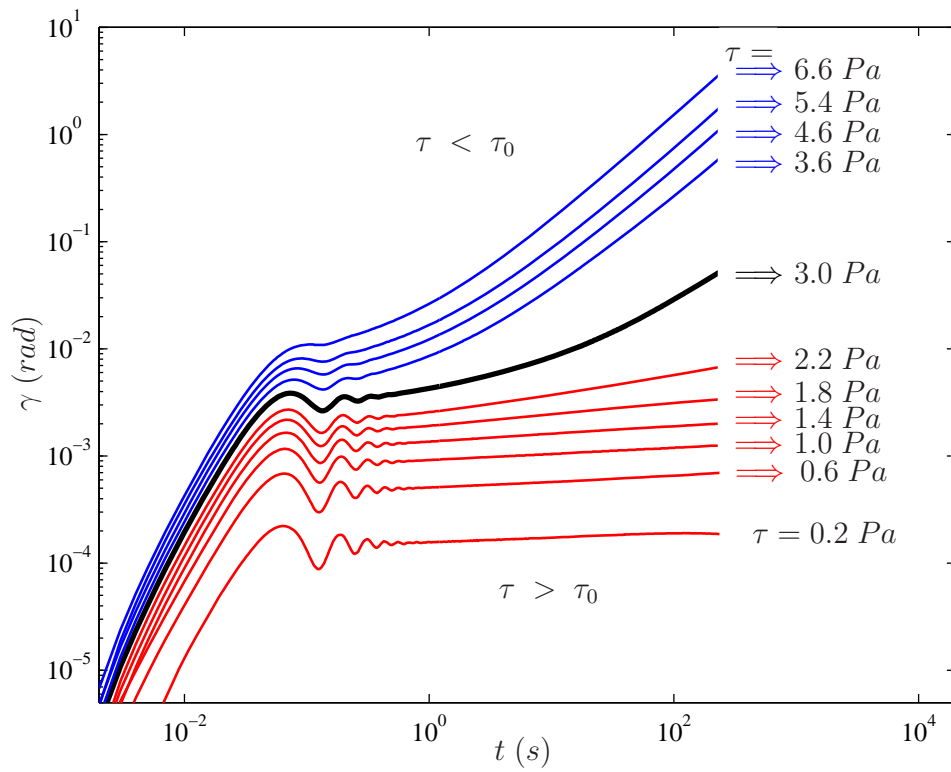


FIG. 3.17 – Essais de fluage pour une solution de Carbopol à 0.2%. La courbe 3 Pa marque la contrainte à partir de laquelle un changement de phase est observé pour un essai limité à 120 s

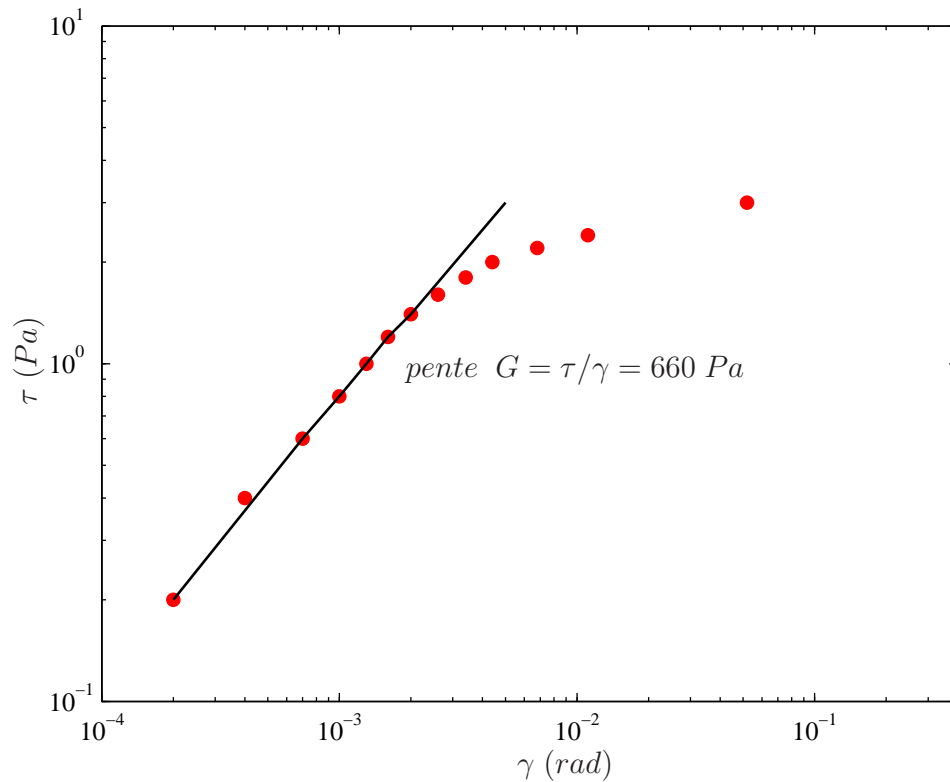


FIG. 3.18 – Variation de la contrainte en fonction de la déformation asymptotique.

3.6.3 Test de fluage

Des essais de fluage permettent de mettre en évidence le comportement du matériau suivant que la contrainte appliquée est inférieure ou supérieure à la contrainte seuil. La figure (3.17) montre un résultat des essais de fluages effectués sur une solution de Carbopol à 0.2 % en masse. Lorsque la contrainte appliquée est inférieure à la contrainte seuil τ_0 , la déformation atteint une valeur asymptotique ce qui correspond à un comportement du type solide élastique. Lorsque la contrainte appliquée est supérieure à la contrainte seuil, la courbe $\gamma(t)$ présente un point d'inflexion, signe d'un changement de comportement, ensuite γ augmente linéairement avec t , ce qui traduit un comportement du type visqueux. La valeur τ_0 du seuil de contrainte correspond à celle qui sépare les comportements visqueux et solide. Dans notre cas $2.2 Pa < \tau_0 < 3 Pa$. Pour des contraintes inférieures à la contrainte seuil, la relation entre contrainte et déformation aux temps longs représentée par la figure (3.18), permet de rendre compte du comportement "solide" de la solution de Carbopol. Un comportement élastique linéaire, caractérisé par un module $G \approx 660$ (pente de la portion linéaire initiale) est suivi d'une variation non linéaire de la contrainte jusqu'à la rupture.

Au vu de ces résultats, on pense qu'on devrait limiter la définition de la contrainte seuil à la limite du comportement élastique ($\approx 2 Pa$) et introduire une déformation critique pour définir la rupture. La déformation critique peut être atteinte plus ou moins rapidement selon la contrainte appliquée.

3.6.4 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre révèlent la complexité du comportement rhéologique des fluides utilisés, en particulier pour la solution de Carbopol. Les points suivants sont probablement les plus significatifs :

- i. Le caractère rhéofluidifiant de la solution de Carbopol est nettement plus important que celui de la solution de CMC.
- ii. Les deux fluides présentent un caractère viscoélastique marqué qui diminue fortement au cours des expériences d'écoulement en conduite cylindrique, du fait de la dégradation des chaînes de polymère.
- iii. Une valeur critique du cisaillement a été mise en évidence à partir de laquelle le comportement rhéologique de la solution de Carbopol est décrit par le modèle

de Herschel-bulkley. Les paramètres rhéologiques issus de ce modèle seront vus uniquement comme des paramètres d'interpolation des données expérimentales.

En perspective, on pense qu'il serait intéressant de reprendre l'étude du comportement viscoélastique de la solution de Carbopol lors de la transition entre les phases gel et liquide, pour interpréter correctement la variation brutale de N_1 dans la zone I (Figure 3.15)

Chapitre 4

Résultats et discussion

Ce chapitre est structuré en trois parties. La première partie concerne le régime laminaire. Des profils expérimentaux de vitesse axiale ainsi que l'évolution du coefficient de frottement en fonction de Re_p sont donnés et comparés aux résultats théoriques. Le but étant essentiellement de valider l'installation expérimentale et les différentes techniques de mesure mises en œuvre. La transition vers la turbulence comprend deux phases. La première phase appelée aussi régime pré-turbulent est décrite dans la deuxième partie de ce chapitre. Des profils de vitesse axiale mesurés à différents nombres de Reynolds sont d'abord donnés pour montrer l'asymétrie de l'écoulement. Une description tridimensionnelle est ensuite présentée suggérant l'existence d'une structure cohérente robuste constituée de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Il s'ensuit une analyse statistique des fluctuations de la vitesse axiale. Enfin, la troisième partie, représente des mesures de vitesse axiale au cours de l'apparition des bouffées turbulentes.

Première partie
Régime laminaire

4.1 Écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil

On commence par rappeler l'expression du profil théorique de la vitesse axiale dans le cas d'un écoulement unidirectionnel d'un fluide à seuil suivant l'axe \hat{z} d'une conduite cylindrique de rayon \hat{R} . Si on suppose que le comportement rhéologique peut être décrit par le modèle de Herschel-Bulkley, soit :

$$\hat{\tau}_{rz} = \operatorname{sgn} \left(\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \right) \hat{\tau}_0 + \hat{K} \left| \frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \right|^{n-1} \frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\tau}| > \hat{\tau}_0, \quad (4.1)$$

$$\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{r}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\hat{\tau}| \leq \hat{\tau}_0, \quad (4.2)$$

où $\hat{\tau}_0$ est la contrainte seuil, \hat{K} la consistance, n l'indice de structure et sgn l'argument de la fonction signe. Le profil de vitesse axiale est donné par :

$$\hat{W}_\ell(\hat{r}) = \frac{n}{1+n} \left[-\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{K}} \right]^{\frac{1}{n}} \hat{R} \left[1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \right]^{\frac{1+n}{n}} \left[1 - \left(\frac{\hat{r} - \hat{r}_0}{\hat{R} - \hat{r}_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]; \quad \hat{r}_0 \leq \hat{r} \leq \hat{R} \quad (4.3)$$

$$\hat{W}_\ell(\hat{r}) = \frac{n}{1+n} \left[-\frac{\hat{\tau}_p}{\hat{K}} \right]^{\frac{1}{n}} \hat{R} \left[1 - \frac{\hat{r}_0}{\hat{R}} \right]^{\frac{1+n}{n}}; \quad 0 \leq \hat{r} \leq \hat{r}_0 \quad (4.4)$$

Dans tout ce chapitre, la vitesse débitante \hat{W}_d sera une échelle caractéristique de vitesse, dans la mesure où on contrôle directement le débit volumique. Sous forme adimensionnelle, les équations (4.3) et (4.4) s'écrivent :

$$W_\ell = \begin{cases} W_{\ell_{max}} & ; \quad 0 \leq r \leq r_0, \\ W_{\ell_{max}} \left[1 - \left(\frac{r - r_0}{1 - r_0} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] & ; \quad r_0 \leq r \leq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

$W_{\ell_{max}}$ est la vitesse adimensionnelle de la zone bouchon

$$W_{\ell_{max}} = \frac{\hat{W}_{\ell_{max}}}{\hat{W}_d} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{Hb}{r_0} \right)^{\frac{1}{n}} (1 - r_0)^{\frac{n+1}{n}}, \quad (4.6)$$

Le nombre de Herschel-Bulkley est défini par

$$Hb = \frac{\hat{\tau}_0}{K [\hat{W}_d / \hat{R}]^n}. \quad (4.7)$$

Bien que cette définition de Hb soit différente de celle utilisée dans le chapitre 2, on garde la même notation, dans la mesure où par la suite, on utilise uniquement la

relation (4.7). La dépendance de r_0 en fonction de Hb et n est obtenue à partir de l'équation de continuité écrite sous forme intégrale :

$$\int_0^1 r W_\ell(r) dr = \frac{1}{2}. \quad (4.8)$$

En utilisant les équations (4.3) et (4.4), la relation suivante est déduite :

$$0 = (1 - r_0)^{3+\beta} - (3 + \beta)(1 - r_0)^{2+\beta} + \frac{(2 + \beta)(3 + \beta)}{2}(1 - r_0)^{1+\beta} - \frac{(3 + \beta)(2 + \beta)(1 + \beta)}{2} \left(\frac{r_0}{Hb}\right)^\beta, \quad (4.9)$$

où $\beta = 1/n$. Les comportements asymptotiques de r_0 pour de petites et grandes valeurs de Hb , vérifient les relations suivantes :

$$r_0 = \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n Hb - \frac{n}{2n+1} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1} Hb^2 + O(Hb^3) \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow 0, \quad (4.10)$$

$$r_0 = 1 - C_1 \left(\frac{1}{Hb}\right)^{\frac{1}{1+n}} - C_2 \left(\frac{1}{Hb}\right)^{\frac{2}{1+n}} + O\left(\left(\frac{1}{Hb}\right)^{\frac{3}{1+n}}\right) \quad \text{lorsque } Hb \rightarrow \infty \quad (4.11)$$

avec

$$C_1 = \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{1+n}} ; \quad C_2 = \frac{2n^2}{(1+n)(2n+1)} C_1^2 - C_1^{\frac{n-1}{n}}$$

La figure (4.1) montre deux profils de vitesse axiale mesurés en régime laminaire, pour deux débits volumiques $\hat{Q}_v = 11.71 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ($\hat{W}_d = 1.657 \text{ m/s}$) et $\hat{Q}_v = 25.32 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ ($\hat{W}_d = 3.584 \text{ m/s}$), ce qui correspond respectivement à deux valeurs du nombre de Reynolds de paroi :

$Re_p = \rho \hat{W}_d \hat{D} / \hat{\mu}_p = (367 \text{ et } 1485)$. La viscosité pariétale $\hat{\mu}_p$ est calculée en utilisant le rhéogramme du fluide et la contrainte pariétale $|\hat{\tau}_p|$ est évaluée à partir de la mesure de la chute de pression $\hat{\Delta p}$

$$|\hat{\tau}_p| = \frac{\hat{\Delta p} \hat{R}}{2 \hat{\ell}_p}. \quad (4.12)$$

Chaque point de mesure est en fait une moyenne d'environ 100000 points acquis avec une fréquence comprise entre 300 Hz et 4 KHz. Le profil expérimental (symboles)

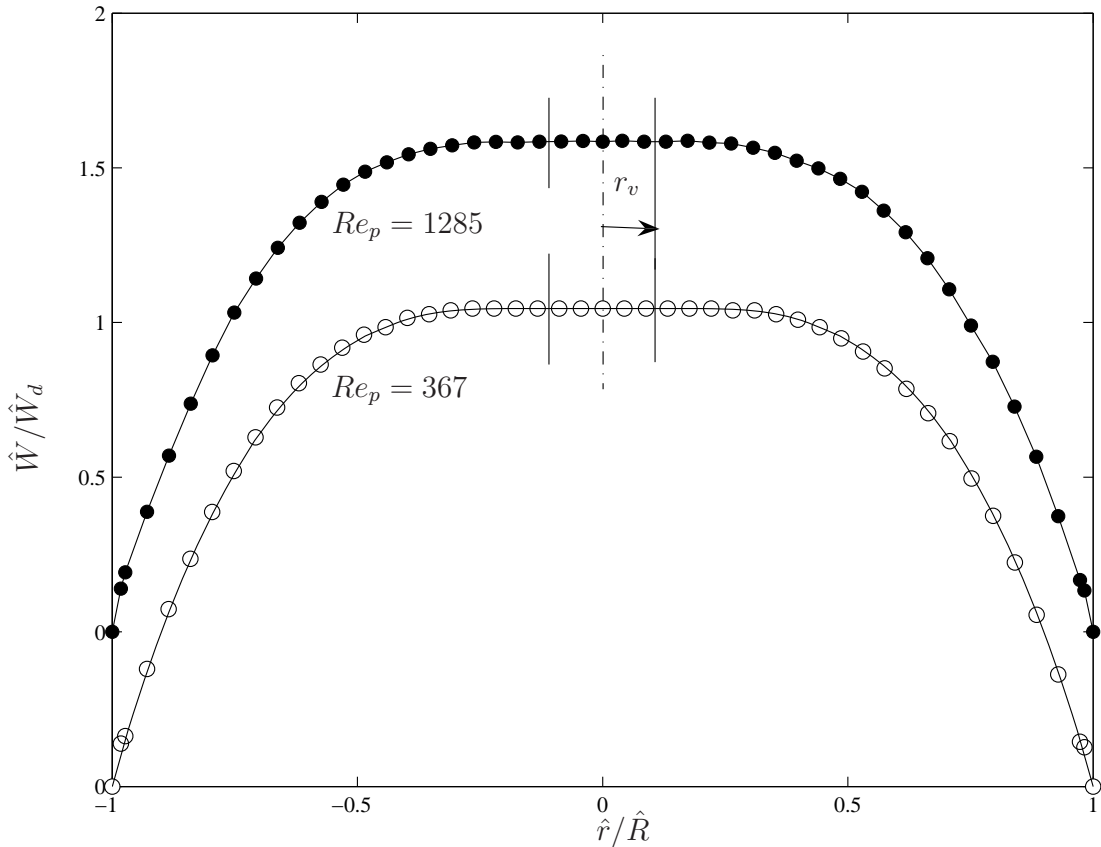


FIG. 4.1 – Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.sⁿ, $n = 0.46$, $Hb = 0.276$, $r_0 = 0.11$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds, $Re_p = 367$ ($\hat{W}_d = 1.657$ m/s), $Re_p = 1285$ ($\hat{W}_d = 3.584$ m/s). Les données expérimentales sont représentées par des cercles et le profil théorique est représenté en trait continu.

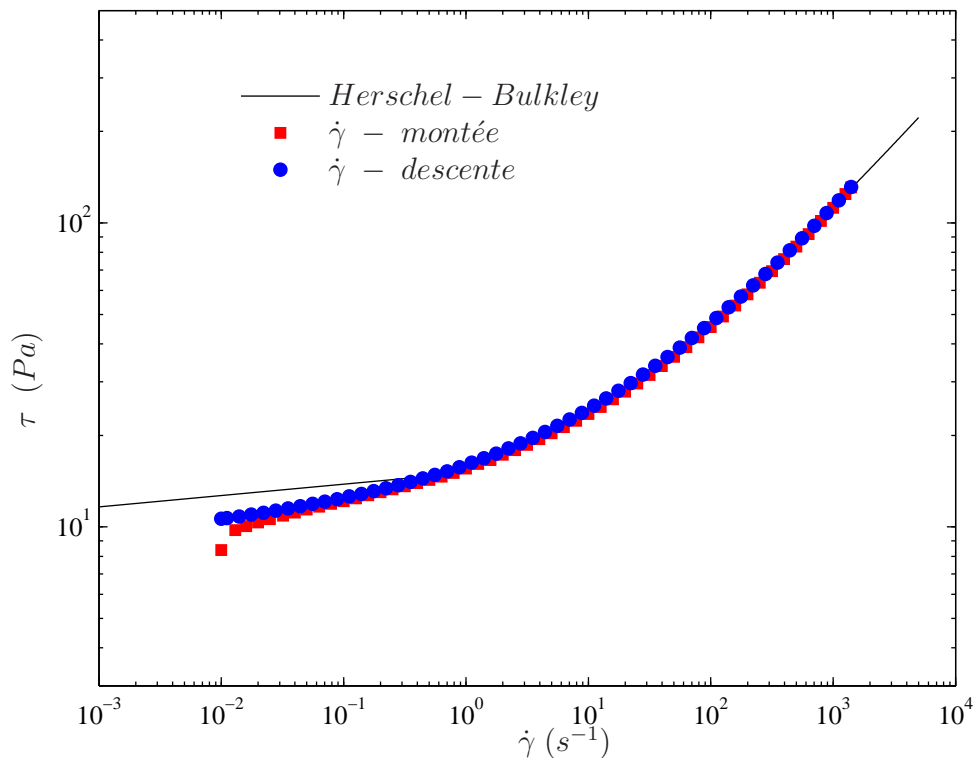


FIG. 4.2 – Comportement rhéologique de la solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse avec des paramètres rhéologiques ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.sⁿ et $n = 0.46$).

est en très bon accord avec le profil théorique représenté en trait continu. L'écart relatif maximal entre le profil théorique et le profil expérimental est de 2%. Le profil théorique a été calculé en utilisant un modèle de Herschel-Bulkley où les paramètres n , \hat{K} et $\hat{\tau}_0$ sont obtenus en interpolant le rhéogramme du fluide considéré (figure-4.2), par le modèle en question pour $0.1 < \hat{\gamma} < 1500 \text{ s}^{-1}$. Il convient de noter que n , K et τ_0 sont considérés essentiellement comme des paramètres d'interpolation et en particulier la vraie contrainte seuil est inférieure à τ_0 . Le calcul de la dérivée seconde de $\tau(\dot{\gamma})$ expérimental par une méthode aux différences finies avec un schéma centré, fait apparaître une modification de la courbure à $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_v \approx 0.1 \text{ s}^{-1}$. Ce qui correspond à une contrainte $\hat{\tau}_v = \hat{\tau}_0 = \hat{\tau}_0 + \hat{K} \hat{\gamma}_v^n \approx 13 \text{ Pa}$. On définit $r_v = \frac{|\hat{\tau}_v|}{|\hat{\tau}_p|}$. Il est représenté par un tiret vertical sur la figure (4.3). Dans la partie du profil de vitesse où $r > r_v$, le fluide a un comportement visqueux. La zone $0 \leq r \leq r_v$ comprend probablement une vraie zone non cisailée très fine, et une zone intermédiaire. Les essais de fluage sont longs et n'ont pas été faits de manière systématique pour identifier la dimension de la vraie zone non cisailée.

Remarque : Les vitesses données par le vélocimètre laser sont en fait une moyenne spatiale sur toute la longueur du volume de mesure. Dans les zones cisailées, notamment au voisinage de la paroi où les gradients de vitesse sont très importants; il en résulte un écart entre la vitesse mesurée et celle attribuée au centre du volume de mesure. Une correction dans ce sens a été proposée par [Durst et al. \(1976\)\(77\)](#).

$$\hat{W}_{\ell_{\text{corrigée}}} = \hat{W}_{\ell_{\text{mesurée}}} - \frac{1}{12} \frac{(\hat{\gamma} \hat{\delta}_z)^2}{\hat{W}_{\ell_{\text{mesurée}}}}$$

où $\hat{\delta}_z$ désigne la longueur du volume de mesure, qui dans notre cas est égale à 0.636 mm. Cette correction n'a de sens que si $(\hat{\gamma} \hat{\delta}_z) / \hat{W}_{\ell_{\text{mesurée}}} \ll 1$. Dans la pratique, le gradient de vitesse $\hat{\gamma}$, qui est inconnu, est déterminé à partir de la courbe expérimentale. Dans notre cas, la prise en compte de cette correction ne modifie pas de façon visible le profil expérimental.

Les profils du taux de fluctuation de la vitesse axiale $\sqrt{\hat{w}'^2} / \hat{W}_d$ pour les deux nombres de $Re_p = 367$ et 1285 sont représentés par la figure (4.3). Les remarques suivantes peuvent être faites : (i) en régime laminaire, les profils de $\sqrt{\hat{w}'^2} / \hat{W}_d$ peuvent

pratiquement être décrits par une courbe unique; (ii) les rms (\hat{w}') sont systématiquement plus faibles pour $-1 < r < 0$, où le volume de mesure est du côté du photomultiplicateur, que pour $0 < r < 1$. Ceci a été constaté quelle que soit la position azimutale du diamètre où les mesures sont effectuées. Cet écart entre les fluctuations mesurées côté photomultiplicateur et celles mesurées côté laser pourrait être attribué en partie au bruit introduit par le système d'acquisition et de traitement du signal. Pour des raisons techniques, le gain côté laser a été de l'ordre de 30 dB alors que côté photomultiplicateur, il n'est que de 20 dB; (iii) dans une très large zone centrale (40 % du diamètre), la rms (\hat{w}') est constante. On rappelle que dans ce cas $r_0 < 0.1$, une estimation du rayon r_f de cette large zone centrale peut être obtenue en admettant que dans cette zone, la viscosité effective est dominée par le terme $\hat{\tau}_0/\hat{\gamma}$. Ainsi à $r = r_f$; on a $\hat{\tau}_0 = \hat{K}|\hat{\gamma}_f|^n$, par conséquent $r_f = 2r_0$.

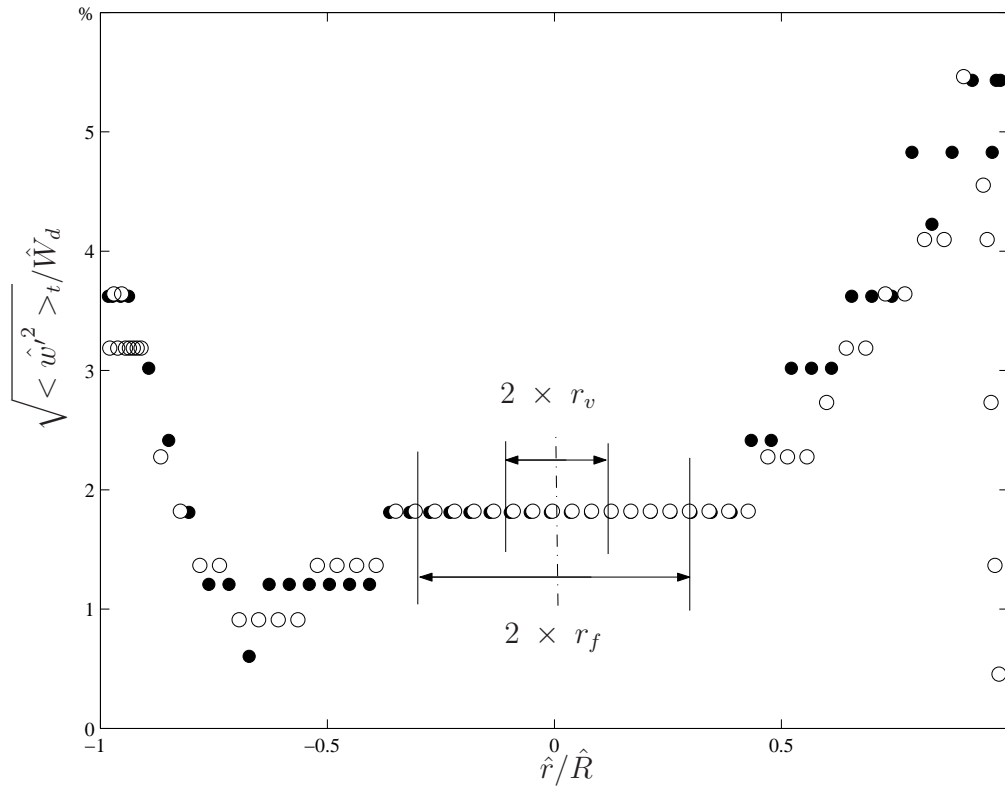


FIG. 4.3 – Profils du taux de fluctuations de la vitesse axiale pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse ($\hat{\tau}_0 = 11.45$ Pa, $\hat{K} = 4.42$ Pa.s $^{-n}$, $n = 0.46$, $Hb = 0.276$, $r_0 = 0.11$, $r_1 = 0.32$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds, $Re_p = 367$ ($\hat{W}_d = 1.657$ m/s), $Re_p = 1285$ ($\hat{W}_d = 3.584$ m/s).

Comme pour la vitesse moyenne, [Durst et al. \(1976\)\(77\)](#) ont proposé une correction de la rms qui tiendrait compte de l'effet d'un gradient de vitesse dans le volume de mesure

$$\overline{\hat{w}'^2}_{\text{corrigée}} = \overline{\hat{w}'^2}_{\text{mesurée}} + \frac{\hat{\delta}_z^2}{16} \left[\frac{d\hat{W}_\ell}{d\hat{y}} \right]^2$$

où \hat{y} est comptée à partir de la paroi.

Pertes de charge En utilisant les équations (4.14) et (4.15), on montre que la chute de pression $\hat{\Delta}p$ sur une longueur $\hat{\ell}_p$ est liée au débit par l'expression

$$Q_v = \frac{2n\pi^3}{1+n} \left[\frac{\hat{R} \hat{\Delta}P}{2 \hat{K} \hat{\ell}_p} \right]^{\frac{1+n}{n}} (1-r_0)^{\frac{1+n}{n}} \left[1 - \frac{2n(1-r_0)}{2n+1} \left(1 - \frac{2n(1-r_0)}{3n+1} \right) \right] \quad (4.13)$$

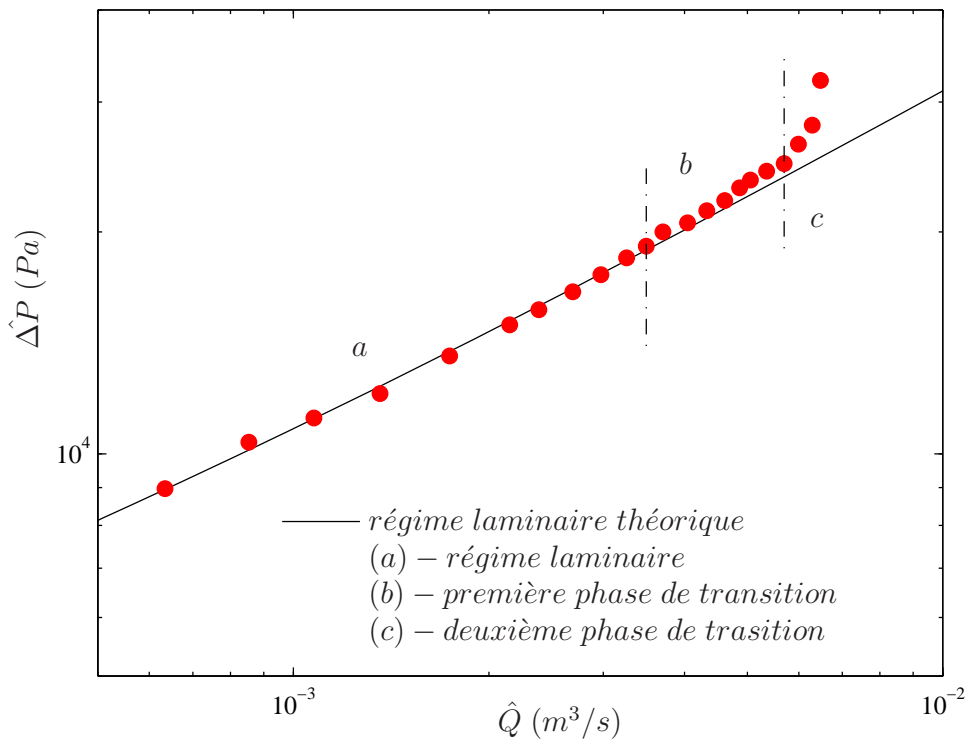


FIG. 4.4 – Evolution des pertes de charge en fonction du débit pour une solution de Carbopol 0.2% en masse.

Cette dernière relation est représentée en trait continu sur la figure (4.4). Les symboles sont les résultats expérimentaux. En général, on introduit le coefficient de

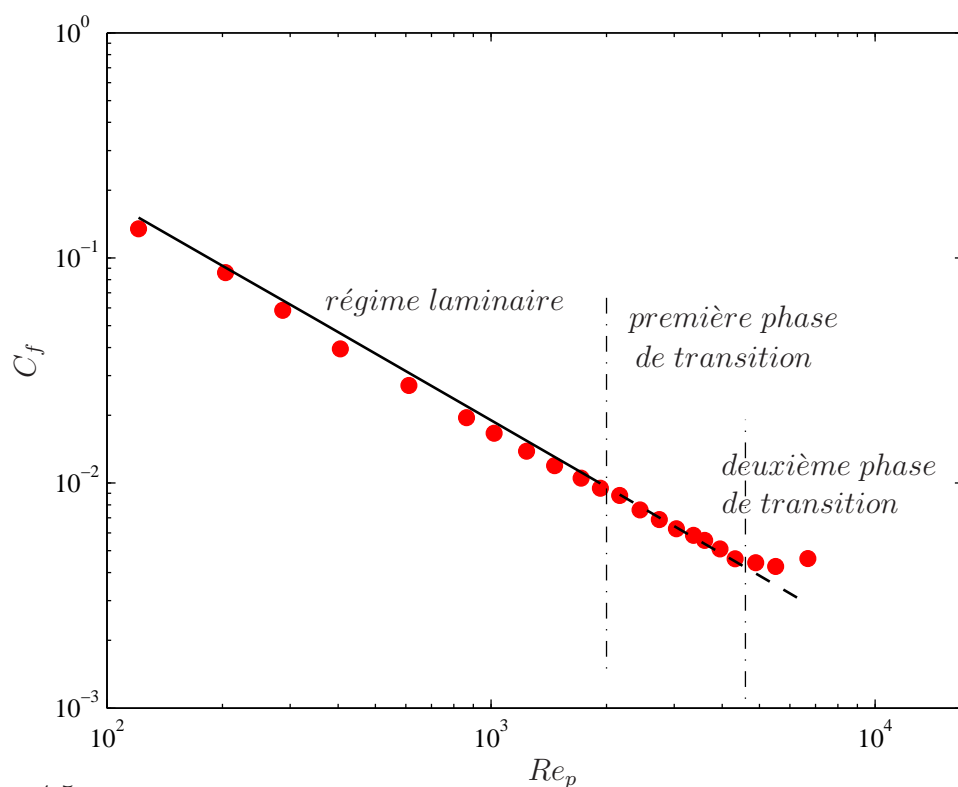


FIG. 4.5 – Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale pour une solution de Carbopol à 0.2%; ($\tau_0 = 11.64$ Pa, $K = 2.84$ Pa.s $^{-n}$ et $n = 0.49$).

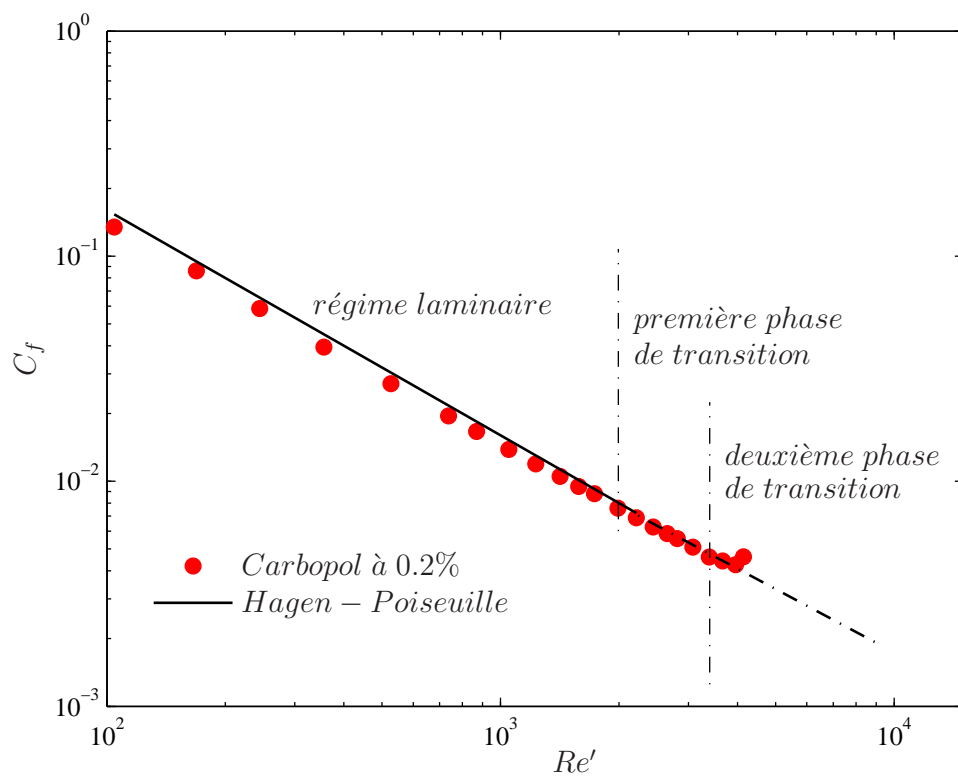


FIG. 4.6 – Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds de Metzner et Reed pour une solution de Carbopol à 0.2%; ($\tau_0 = 11.64$ Pa, $K = 2.84$ Pa.s $^{-n}$ et $n = 0.49$).

frottement C_f défini par :

$$C_f = \frac{2\hat{\tau}_p}{\rho\hat{W}_d^2}; \quad (4.14)$$

où la contrainte pariétale $\hat{\tau}_p$ est évaluée à partir de la mesure de $\hat{\Delta P}$:

$$\hat{\tau}_p = \frac{\hat{R}}{2} \frac{\hat{\Delta P}}{\hat{L}} \quad (4.15)$$

La figure (4.5) représente C_f en fonction de Re_p . Les symboles sont les résultats expérimentaux et le trait continu est la relation théorique.

$$C_f = \frac{4}{Re_p} \left(\frac{Hb}{r_0} \right)^\beta (1 - r_0)^{1+\beta}. \quad (4.16)$$

Encore une fois, un très bon accord est observé avec les prévisions théoriques. Dans la littérature, on introduit le nombre de Reynolds de Metzner *et al.* (1955)(65) noté Re' tel que

$$C_f = \frac{16}{Re'}. \quad (4.17)$$

Dans le cas d'un fluide d'Herschel-Bulkley Re' est donné par :

$$Re' = \frac{16}{C_f} = \frac{16\rho\hat{W}_d^2}{2\hat{\tau}_p} = \frac{8r_0}{Hb} \frac{\hat{\rho}\hat{W}_d^{2-n}\hat{R}^n}{\hat{K}} = \frac{8r_0Re_g}{Hb}. \quad (4.18)$$

où Re_g est le nombre de Reynolds généralisé de Schowalter. La figure (4.6) est une autre version de la précédente figure, où on donne C_f en fonction de Re' .

4.2 Ecoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide rhéofluidifiant sans seuil

La figure (4.7) montre deux profils de vitesse axiale obtenus pour la solution de CMC7M1C; pour deux nombres de Reynolds $Re_p = 635$ et $Re_p = 1455$. Comme pour la solution de Carbopol, l'écart entre le profil expérimental (en symboles) et le profil théorique ne dépasse pas 2%. Pour ce qui est du profil théorique, il est obtenu en résolvant numériquement l'équation du mouvement

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\tau_{rz}) \quad (4.19)$$

$$\text{avec} \quad \tau_{rz} = \frac{1}{Re_0} \mu \dot{\gamma}_{zz} \quad \text{et} \quad \frac{\mu - \mu_\infty}{1 - \mu_0} = \left[1 + (k\dot{\gamma})^{m'} \right]^{-1}$$

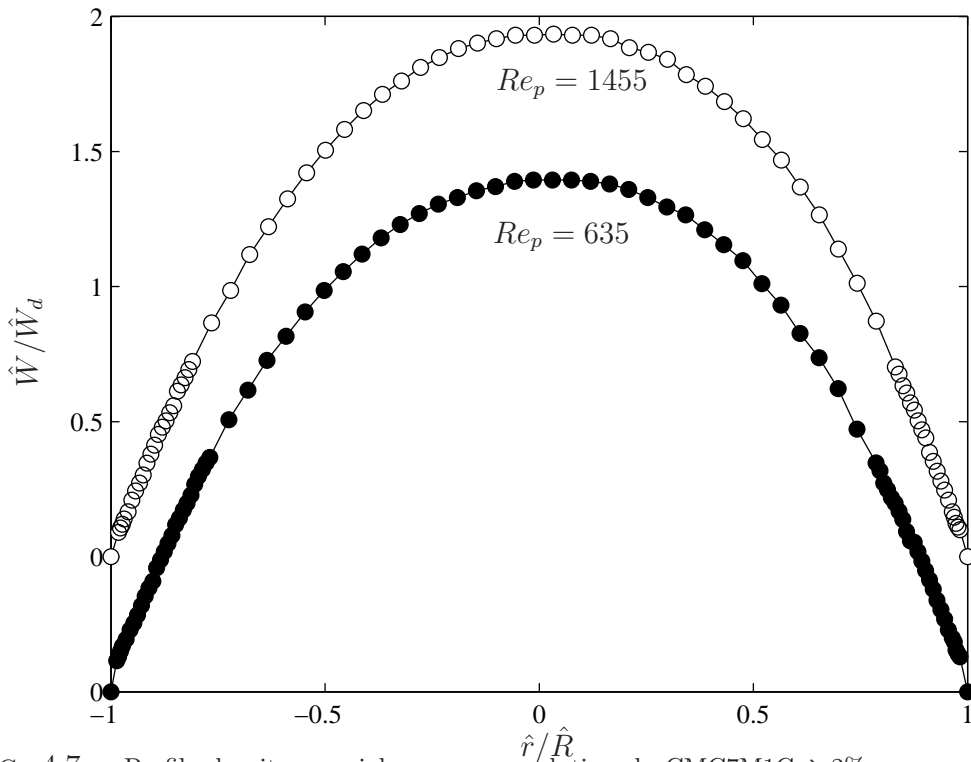


FIG. 4.7 – Profils de vitesse axiale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0204$ Pa.s, $\mu_\infty = 20.27$ mPa.s, $k = 2.84$ ms, $m' = 0.74$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds $Re_p = 635$ et $Re_p = 1455$. Les données expérimentales sont représentées par des cercles et le profil théorique est représenté en trait continu.

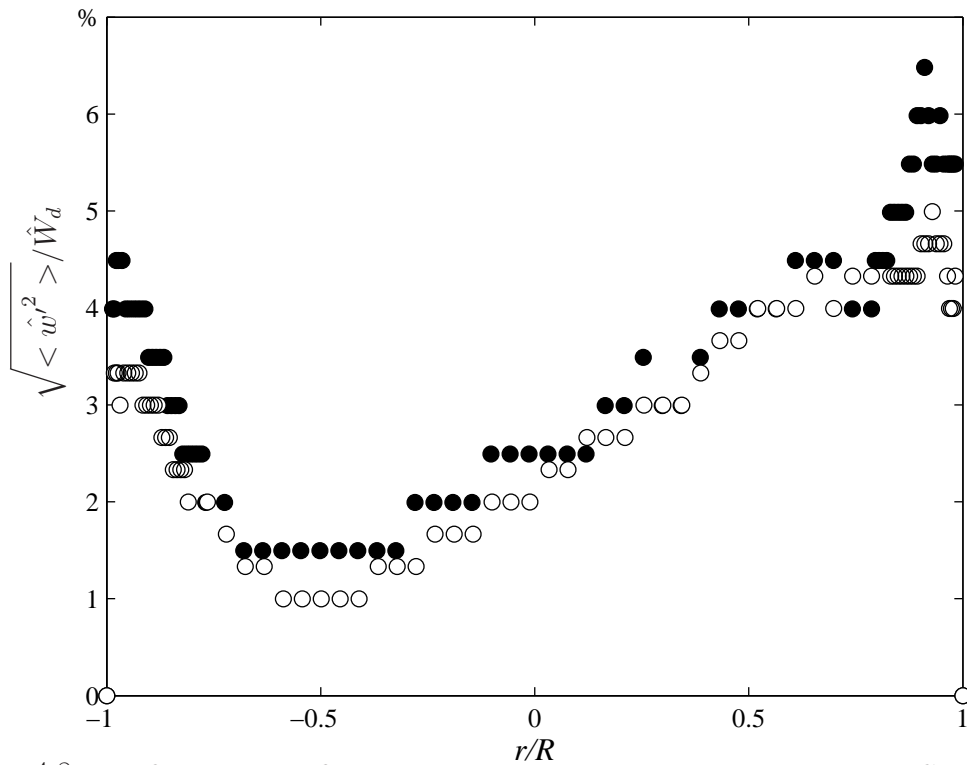


FIG. 4.8 – Profils du taux de fluctuations de la vitesse axiale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0204$ Pa.s, $\mu_\infty = 20.27$ mPa.s, $k = 2.84$ ms, $m' = 0.74$), en régime laminaire pour deux nombres de Reynolds $Re_p = 635$ et $Re_p = 1455$.

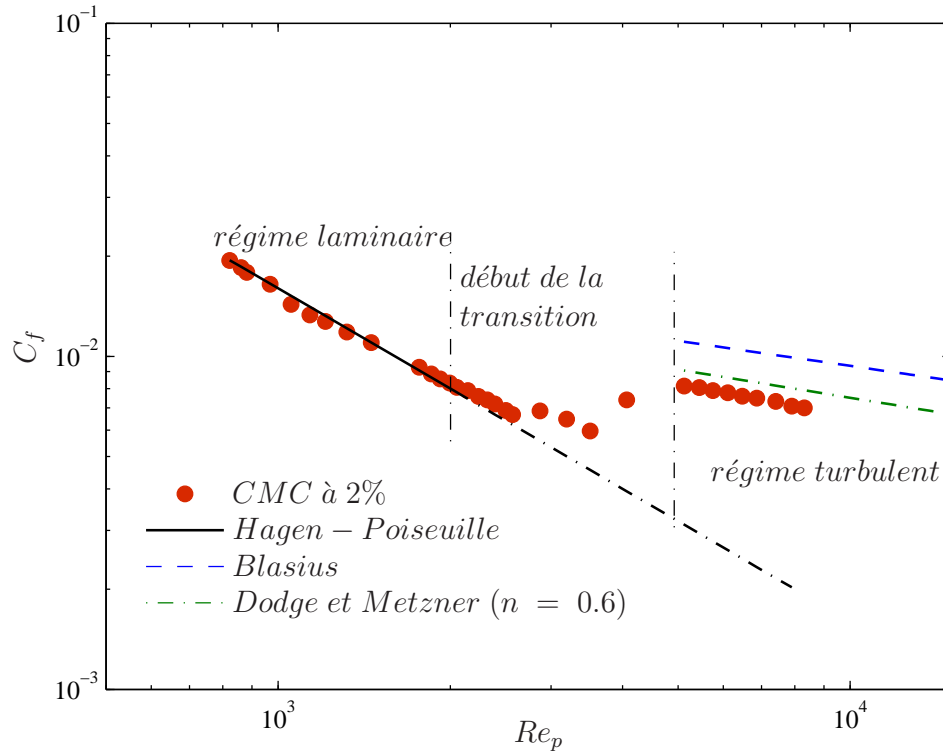


FIG. 4.9 – Coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale pour une solution de CMC7M1C à 2% en masse, ($\mu_0 = 0.0405$ Pa.s, $\mu_\infty = 14.31$ mPa.s, $k = 1.46$ ms, $m' = 0.74$).

où

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_0}, \quad \mu_\infty = \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0} \quad \text{et} \quad k = \frac{\hat{k} \hat{W}_d}{\hat{R}}$$

La procédure est la suivante :

1. On se donne une contrainte pariétale τ_p , ce qui revient à se donner un gradient de pression.
2. On détermine le profil de contrainte $\tau_{rz} = \tau_p \times \frac{r}{R}$.
3. On se donne un profil de cisaillement $\dot{\gamma}_{rz}$.
4. Ayant $\dot{\gamma}_{rz}$, on calcule le profil de viscosité par le modèle rhéologique $\mu(\dot{\gamma})$.
5. On réévalue $\dot{\gamma}_{rz}$ par la relation $\dot{\gamma}_{rz} = \tau_{rz}/\mu$.
6. On itère entre les points (4) et (5) jusqu'à convergence.
7. On évalue le débit adimensionnel $I = \int_0^1 r W_d dr$.

8. On corrige la contrainte pariétale $\tau_p^{nouveau} = \tau_p^{ancien} + coef_relax (I - \frac{1}{2})$.
9. On revient au point (1) et on répète toute la procédure jusqu'à ce que la condition $(I - \frac{1}{2}) \leq \varepsilon = 10^{-9}$ soit satisfaite.
10. On calcule le profil de vitesse axiale, en utilisant un développement sur une base de polynômes de Chebychev : $W_d = \sum_i a_i T_i$.

Aux points de collocation de Gauss Labatto, on a $\dot{\gamma} = D1 * a$ où $D1$ est la matrice de dérivation dans l'espace spectral.

Conclusion Un très bon accord est observé entre les mesures expérimentales de vitesse et de pertes de charge et les résultats théoriques en régime laminaire pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans contrainte seuil. Ceci qualifie l'installation expérimentale et les techniques de mesure mises en œuvre, ce qui nous autorise à explorer la structure de l'écoulement, lors de la transition vers la turbulence.

Deuxième partie
Régime pré-turbulent

4.3 Cas de la solution de Carbopol

4.3.1 Transition vers la turbulence pour la solution de Carbopol : Identification d'un régime pré-turbulent

Le paragraphe qui suit se propose d'identifier le début de la transition vers la turbulence, ainsi qu'un régime pré-turbulent à travers l'analyse des profils de vitesse axiale et des taux de fluctuation de celle-ci. La figure (4.10) montre l'évolution des profils de vitesse axiale moyenne (moyenne dans le sens temporel) pour une large gamme du nombre de Reynolds, Re_p , allant du régime laminaire au régime turbulent. Ils ont été mesurés le long d'un diamètre vertical à la position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$. Les symboles représentent les mesures expérimentales et les traits continus ont été tracés à partir de la moyenne arithmétique des valeurs expérimentales à droite et à gauche de l'axe de la conduite. La fin du régime laminaire est détectée à partir de la mesure du taux de fluctuation de la vitesse axiale au voisinage de la paroi en fonction du nombre de Reynolds montré par la figure (4.11). En régime laminaire la rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ reste pratiquement constante aux incertitudes de mesure près. D'après Escudier et Presti (1996)(8) et Park *et al.* (1989)(78), les mesures effectuées à $r = 0.8$ constituent un très bon indicateur du début de la transition. En régime laminaire, les profils de vitesse axiale sont parfaitement symétriques, comme cela est montré par les profils à $Re_p = 367$ et 1285 . A $Re_p = 1805$, une faible asymétrie est observée, celle-ci s'accroît puis décroît rapidement pour s'annuler à $Re_p = 6421$ où rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ est maximale. En régime turbulent, les profils de vitesse axiale sont symétriques. Le degré d'asymétrie des profils de vitesse axiale peut être quantifié en introduisant l'écart \hat{W}_s entre le profil expérimental et le profil symétrique en trait continu. Des profils de \hat{W}_s/\hat{W}_d à différents Re_p sont illustrés par la figure (4.12). Il est intéressant de noter la similarité des profils radiaux de \hat{W}_s . Le maximum de $|\hat{W}_s/\hat{W}_d|$ est obtenu à $r \approx 0.7$. Il est représenté en fonction de Re_p par la figure (4.13). Elle semble indiquer un passage "brutal" vers la dissymétrie. En fait, pour l'ensemble des essais expérimentaux qu'on a effectués, la petite asymétrie \hat{W}_s/\hat{W}_d mesurée est de l'ordre de 0.02. Une meilleure appréciation de l'évolution de l'intensité de turbulence en fonction du nombre de Reynolds est donnée par la figure (4.14), où on a représenté la rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ en fonction de Re_p à différentes

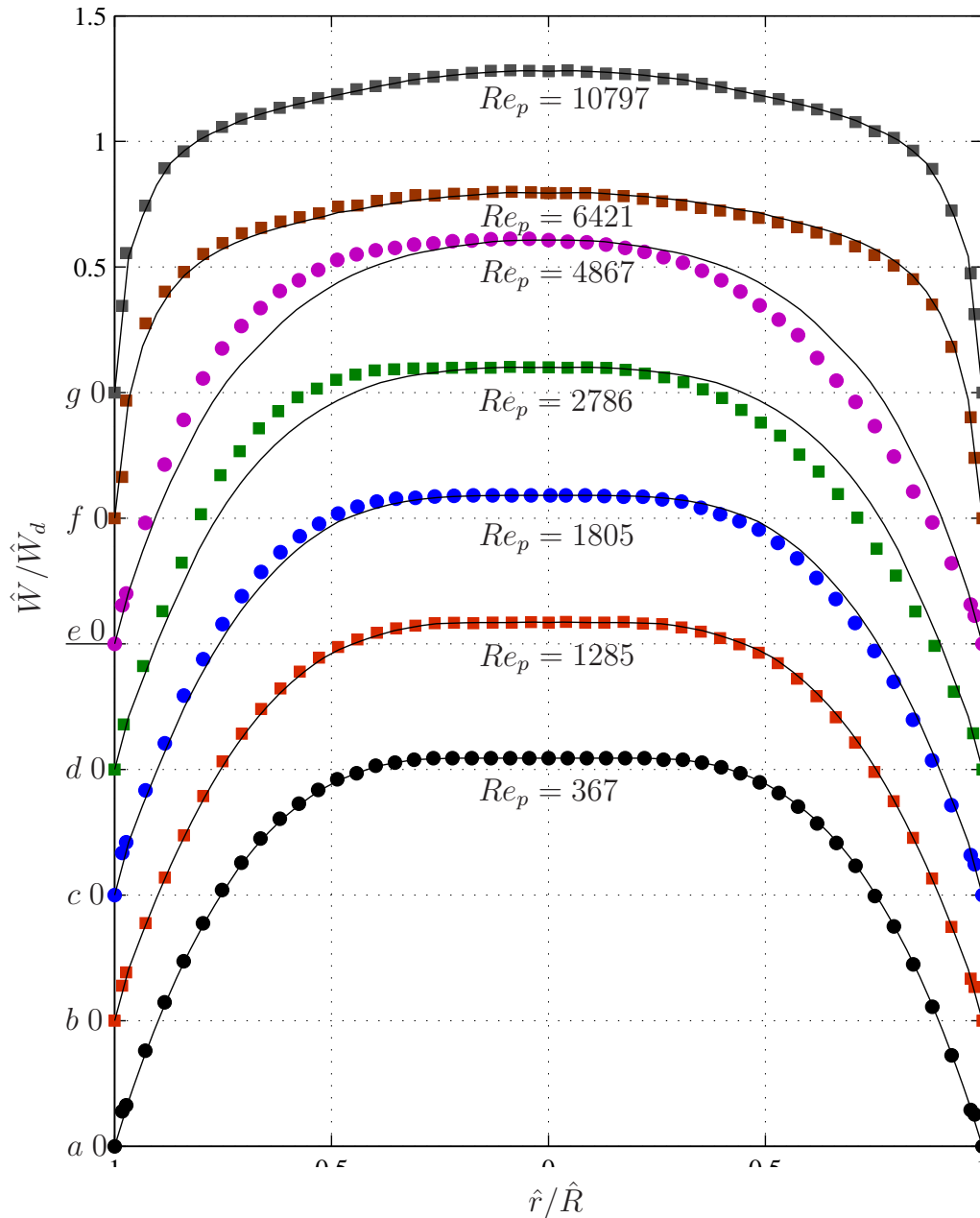


FIG. 4.10 – Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.5$, $\hat{K} = 3 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 10 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$). Les mesures ont été effectuées le long d'un diamètre vertical à $\hat{z} = 122\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales. Le trait continu est le profil symétrique construit en prenant la moyenne arithmétique des vitesses mesurées de part et d'autre de l'axe de la conduite.

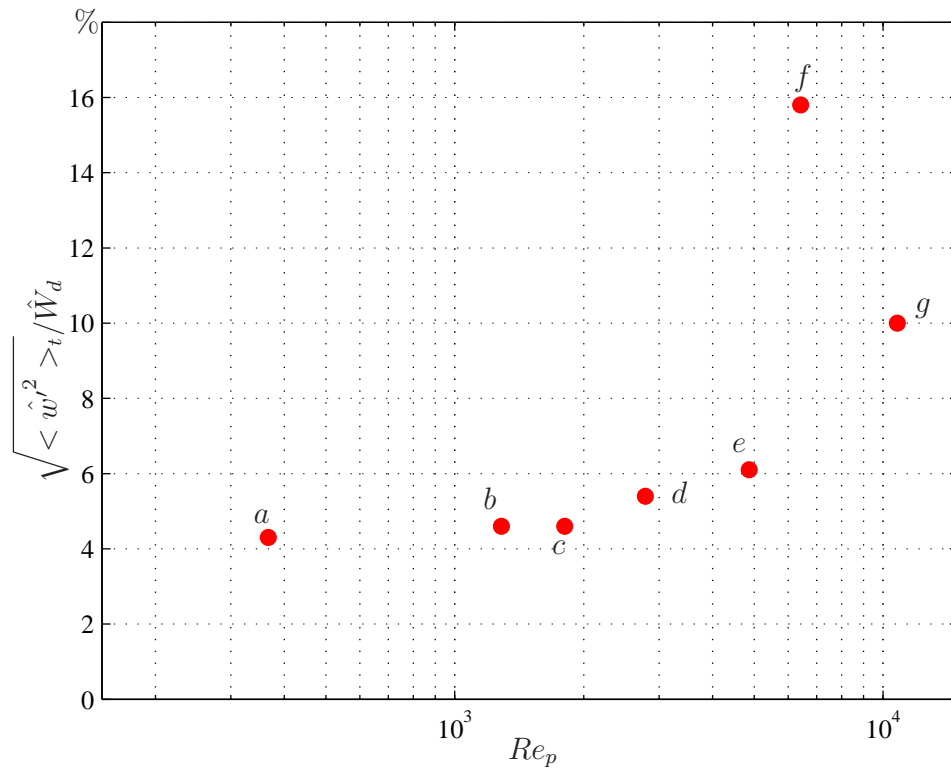


FIG. 4.11 – Fluctuations de la vitesse axiale rapportée à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition. Mêmes paramètres rhéologiques que la figure (4.10).

positions radiales¹. Deux phases sont clairement identifiées lors de la transition vers la turbulence. Dans la première phase, appelée par la suite régime pré-turbulent, les fluctuations rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ augmentent uniquement dans un espace annulaire délimité par la paroi et une zone centrale visqueuse. Dans cette dernière zone la rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ reste au même niveau qu'en laminaire. En augmentant le nombre de Reynolds, le diamètre de cette zone décroît jusqu'à s'annuler (Figure 4.14). Pour les résultats présentés ici, la rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ commence à augmenter à partir de $Re_p = 4000$ avec la détection du premier spot de turbulence, caractéristique de la turbulence inertielle. Ainsi, on distingue deux valeurs critiques du nombre de Reynolds $Re_{pc1} \simeq 1800$ et $Re_{pc2} \simeq 4000$ (pour les essais de la figure (4.14) marquant respectivement les débuts de la première et deuxième phase de transition. Pour [Escudier et Presti \(1996\)](#)(8) $Re_{pc1} \simeq 1300$ dans le cas d'une solution de Laponite (fluide thixotrope à seuil).

¹Les expériences de la figure (4.14) n'ont pas été conduites en même temps que celles de la figure (4.10)

Dans ce qui suit, on se focalise sur la première phase de transition. On fournit une description tridimensionnelle de l'asymétrie des profils de vitesse axiale et une analyse statistique des fluctuations de la vitesse axiale.

4.3.2 Description tridimensionnelle de l'asymétrie de l'écoulement

Afin de donner une description tridimensionnelle de l'asymétrie de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence, des profils de vitesse axiale ont été mesurés à trois positions axiales $\hat{z} = 20\hat{D}$ (au voisinage de la section d'entrée), $\hat{z} = 54\hat{D}$ (milieu de la conduite) et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et suivant quatre diamètres décalés d'un angle de $\frac{\pi}{4}$, repérés par la position azimutale de tête optique du laser notée θ_ℓ : $\theta_\ell = 0$ (plan horizontal), $\theta_\ell = \frac{\pi}{4}$, $\theta_\ell = \frac{3\pi}{2}$ et $\theta_\ell = \frac{7\pi}{4}$. L'angle θ_ℓ est orienté dans le sens trigonométrique (Figure 3.4).

La figure (4.15) montre l'évolution des profils de vitesse axiale mesurés le long d'un diamètre horizontal sur une large gamme du nombre de Reynolds mesuré à la position axiale $\hat{z} = 20\hat{D}$. La nature du régime d'écoulement est indiquée par la courbe rms $(\hat{w}')/\hat{W}_d$ en fonction de Re_p , (Figure 4.16). Aucune asymétrie n'est observée. Ceci est encore confirmé par la figure (4.17) où on a représenté des profils de vitesse axiale à $Re_p = 2420$ et à différentes positions azimutales. Ce résultat est fondamental. Il indique que l'asymétrie de l'écoulement observée à des positions axiales plus importantes n'est pas une conséquence d'un artefact expérimental lié aux conditions d'entrée. En effet, d'après les expériences effectuées par [Eliahou *et al.* \(1998\)](#) (18) sur la transition vers la turbulence pour un fluide Newtonien, une asymétrie de l'écoulement n'est observée que s'il est soumis à une perturbation asymétrique d'amplitude suffisamment importante.

En répétant la même expérience à $\hat{z} = 54\hat{D}$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ une asymétrie est clairement mise en évidence et semble en plus augmenter le long de la conduite comme cela est illustré par les figures (4.18) et (4.19).

Pour quantifier l'asymétrie de l'écoulement, on écrit le profil de vitesse axiale mesuré sous la forme de la superposition d'un profil moyen au sens azimutal $\overline{W}(r, z) = \langle W(r, \theta, z) \rangle_\theta$ (profils en trait continu) et d'un jet axial ou stries $W_s(r, \theta, z)$. La représentation de $\hat{W}_s(r, \theta, z)/\hat{W}_d$ en fonction de θ (8 points) pour plusieurs positions radiales est parfaitement décrite par une fonction de la forme $A(r, z)\cos(\theta + \varphi)$. A

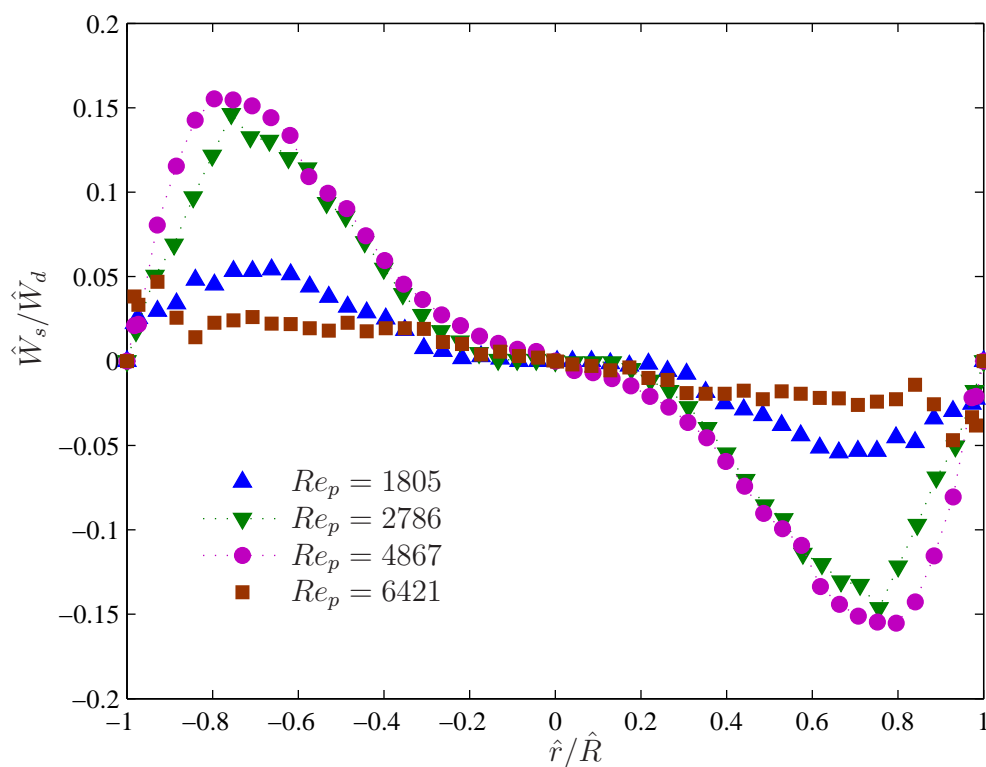


FIG. 4.12 – Ecart entre le profil de vitesse axiale mesurée suivant la direction verticale $\frac{3\pi}{2}$ et le profil moyen pour différents nombres de Reynolds à travers la section de la conduite.

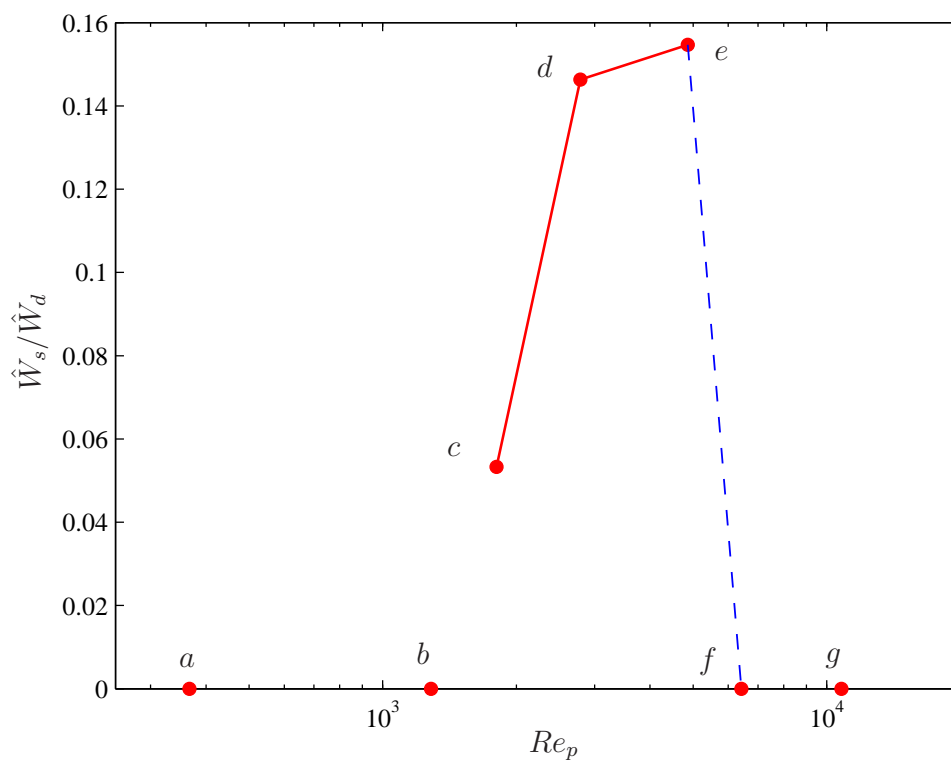


FIG. 4.13 – Ecart entre le profil de vitesse axiale mesurée suivant la direction verticale $\frac{3\pi}{2}$ et le profil moyen pour différents nombre de Reynolds à position radiale $r = 0.7$.

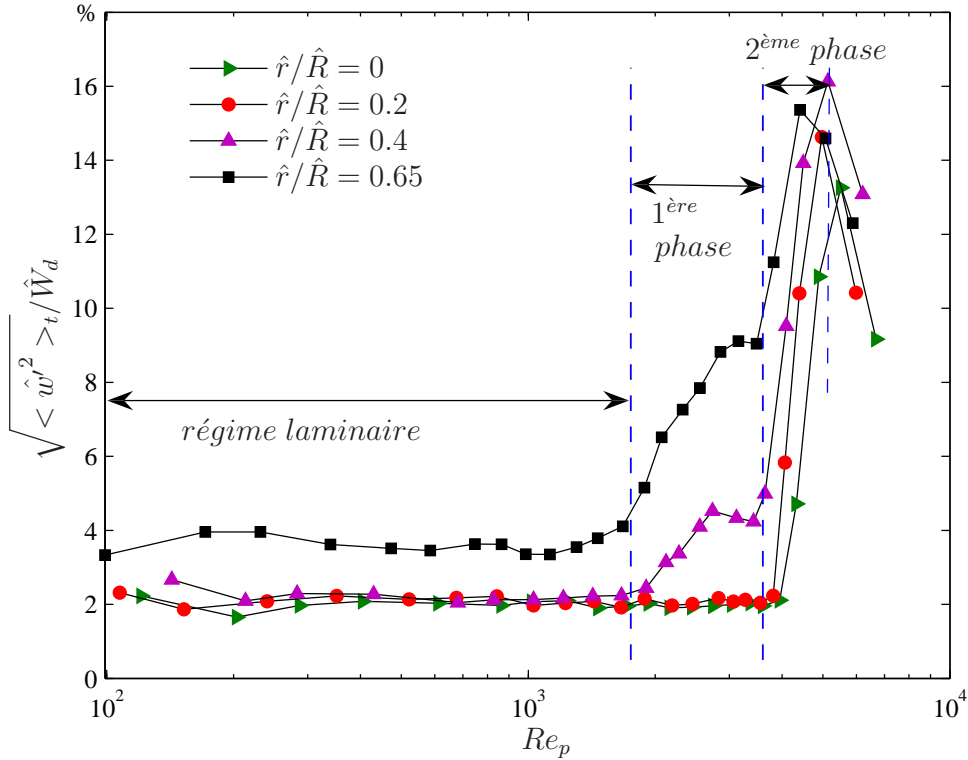


FIG. 4.14 – Evolution des taux de fluctuations en fonction du nombre de Reynolds à différentes positions radiales et à une position azimutale $\theta = \pi/4$. Durant la première phase, les fluctuations de la vitesse axiale dans la zone centrale (points rouges et triangles verts) restent au même niveau que le laminaire. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.5$, $\hat{K} = 3.2 \text{ Pa s}^n$ et $\hat{\tau}_0 = 10 \text{ Pa}$

titre d'exemple la figure (4.20) donne \hat{W}_s/\hat{W}_d en fonction de θ à $r = 0.72$ et pour les trois positions axiales. Il est important de noter que la phase φ est invariante sur toute la longueur de la conduite. On pense que φ ne dépend que des conditions d'entrée. Ce point sera discuté par la suite. Il est alors possible de représenter les contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d pour les trois sections considérées. Le résultat de cette procédure est donné par la figure (4.21). La couleur rouge (foncé vers le bas de la section de la conduite) indique la région où l'écoulement du fluide est plus rapide que le profil moyenné en azimut (profil symétrique). La couleur bleu (foncé vers le haut) indique la région où l'écoulement s'effectue à une vitesse plus faible que le profil symétrique. La même structure est observée à un nombre de Reynolds plus élevé mais avec une amplitude plus importante des stries, comme cela est illustré par la figure (4.22). Cette redistribution de l'écoulement suggère l'existence de deux rouleaux longitudinaux qui advectent les particules fluides de basse vitesse au voi-

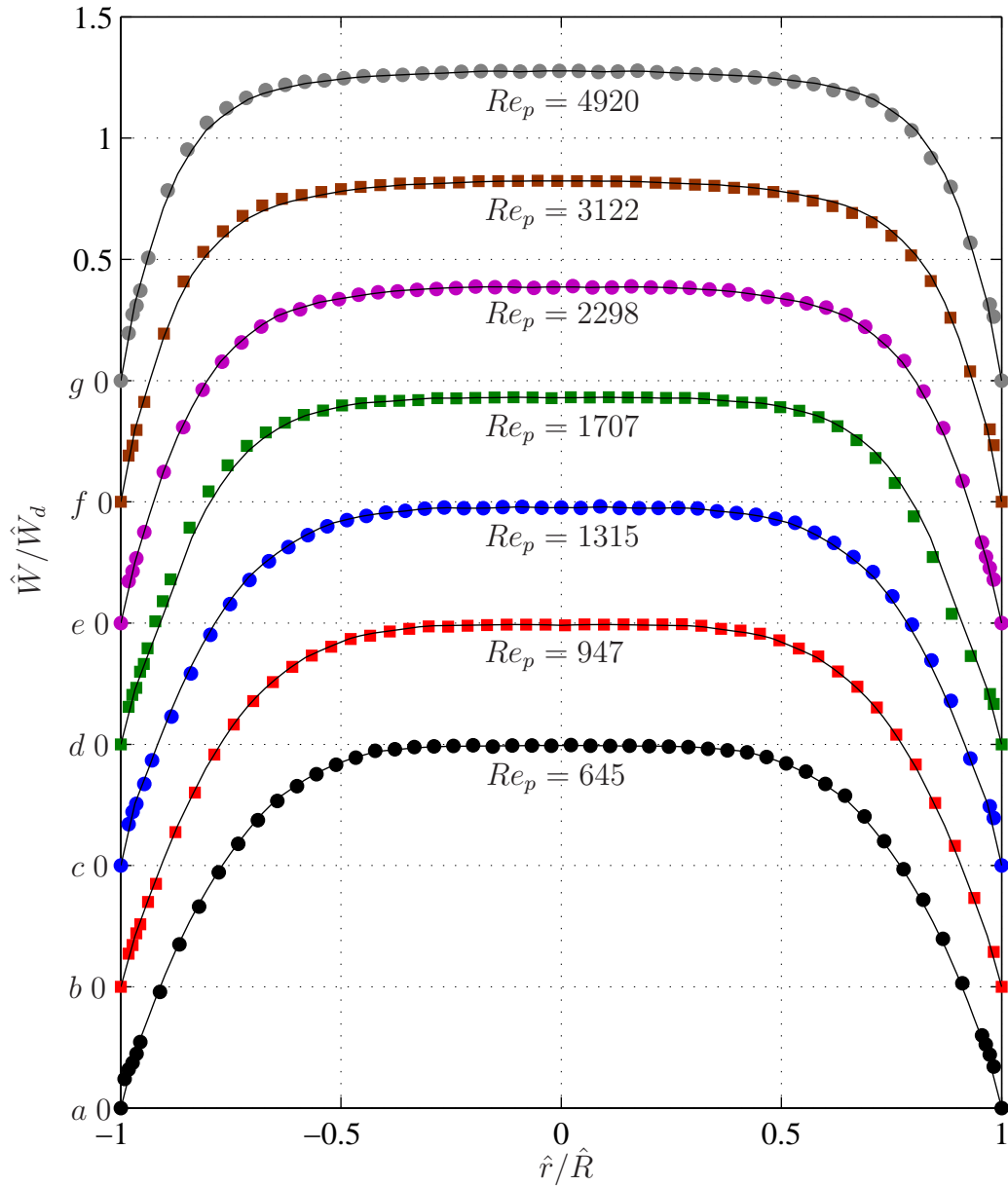


FIG. 4.15 – Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.49$, $\hat{K} = 3.72 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 13 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 1500 \text{ s}^{-1}$). Les mesures ont été effectuées dans un plan horizontal $\hat{z} = 20\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales, le trait continu est le profil symétrique.

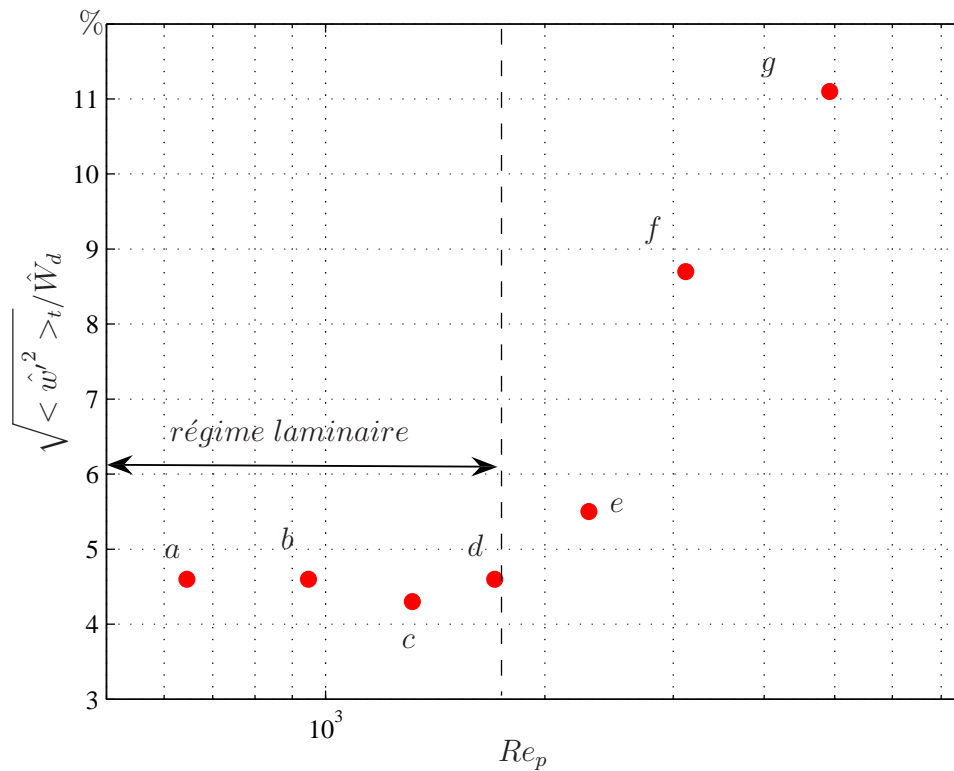


FIG. 4.16 – Fluctuation de la vitesse axiale rapportée à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition.

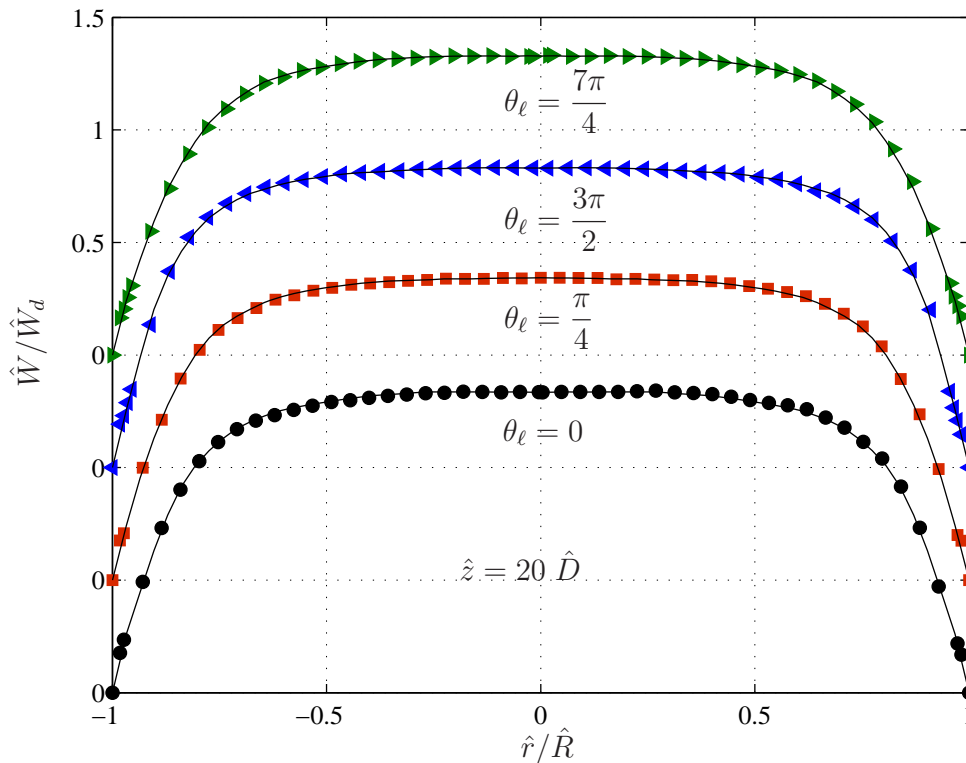


FIG. 4.17 – Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.48$, $\hat{K} = 4.12 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 15.2 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 20 \hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$.

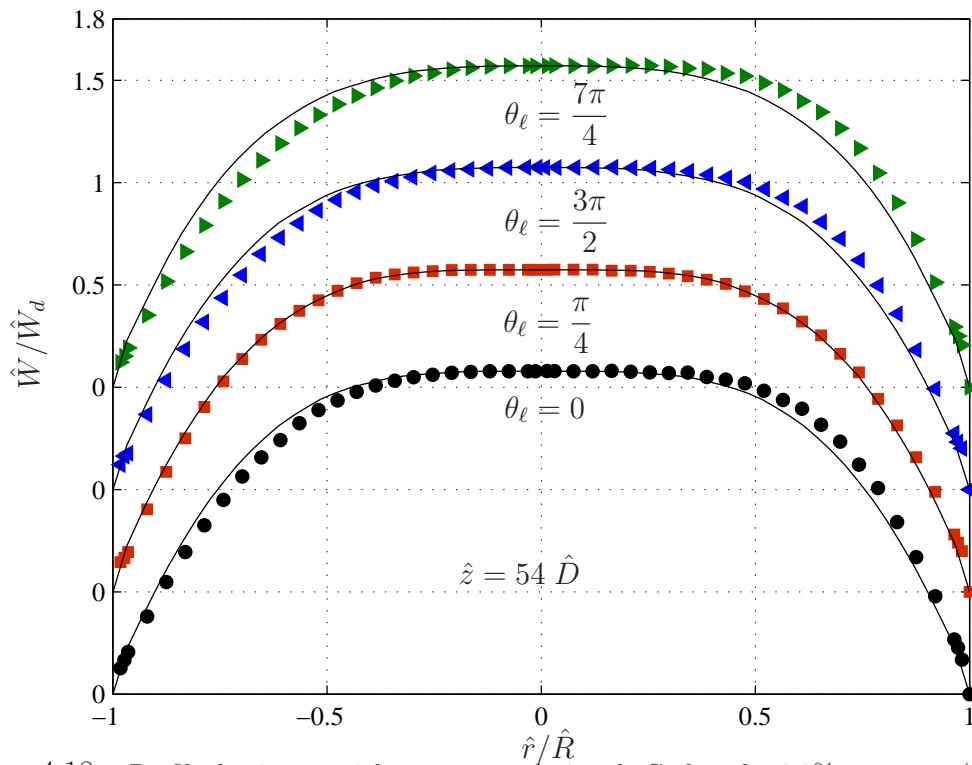


FIG. 4.18 – Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.51$, $\hat{K} = 3.56 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 11.1 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 54\hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$.

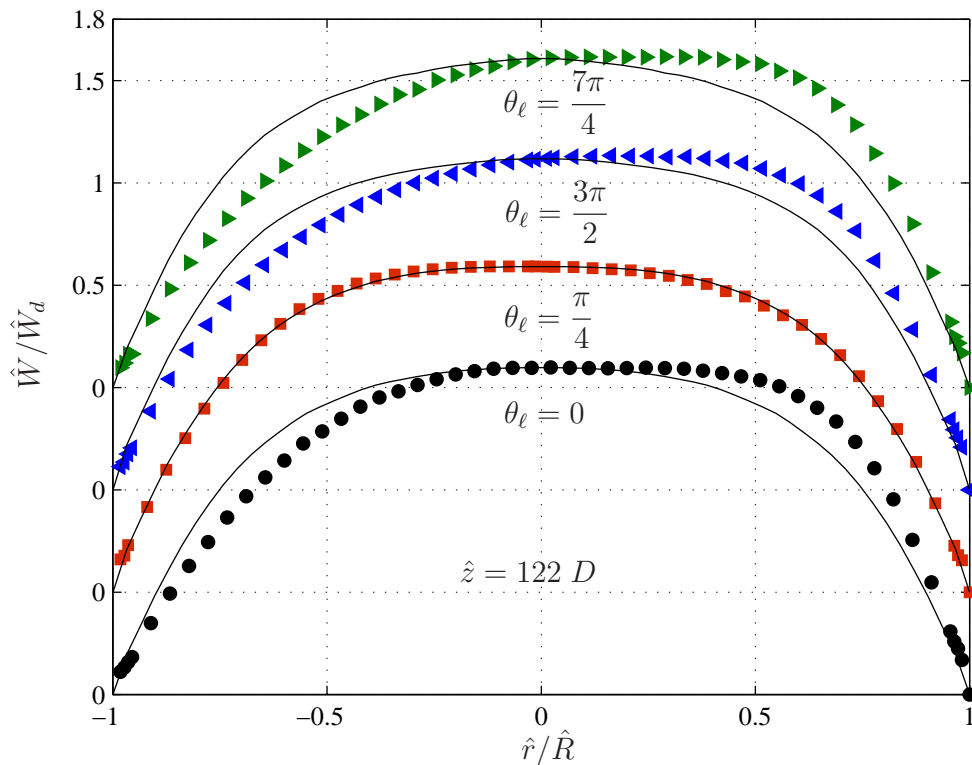


FIG. 4.19 – Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse, ($n = 0.51$, $\hat{K} = 2.96 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 7.9 \text{ Pa}$ pour $0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000 \text{ s}^{-1}$) mesurés à $\hat{z} = 122\hat{D}$ de l'entrée et à différentes positions azimutales pour un nombre de Reynolds $Re = 2420$.

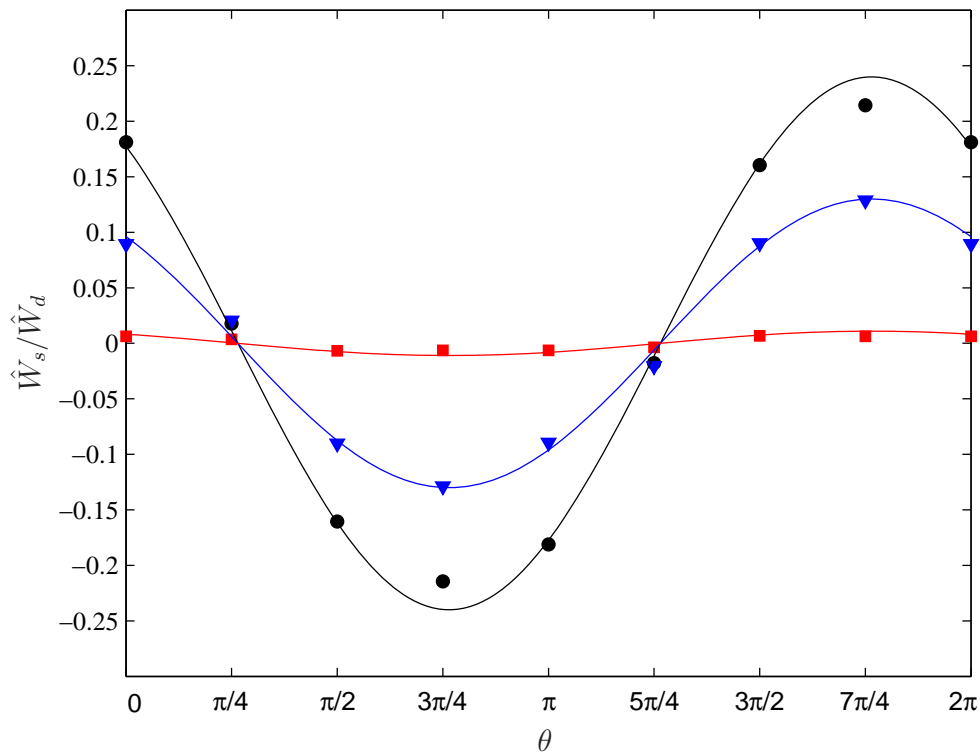


FIG. 4.20 – Variation azimuthale de \hat{W}_s/\hat{W}_d pour trois positions axiales : (■) $\hat{z} = 20\hat{D}$, (◄) $\hat{z} = 54\hat{D}$ et (●) $\hat{z} = 122\hat{D}$.

sinage de la paroi vers la zone bleue, et les particules fluides de grande vitesse vers la zone rouge de façon similaire au mode $m = 1$ et $\tilde{\alpha} = 0$ calculé par l'approche modale (figure 4.24).

A ce niveau, les remarques et interprétations suivantes peuvent être notées :

- Il n'y a plus de zone bouchon du fait de l'asymétrie et de l'évolution axiale de l'écoulement. Elle est probablement remplacée par une pseudo-zone bouchon, *i.e.*, une zone où la contrainte est supérieure à la contrainte seuil mais avec un très faible cisaillement. La notion de pseudo-zone bouchon a été introduite par [Walton et Bittleston \(1991\)\(79\)](#).
- Lors de cette première phase de transition, les pertes de charge sont très proches de celles que l'on aurait eu en régime laminaire (Figure 4.4). Contrairement aux cas de la turbulence inertielle ou élastique où une forte augmentation (par rapport au laminaire) du coefficient de frottement est observée. En

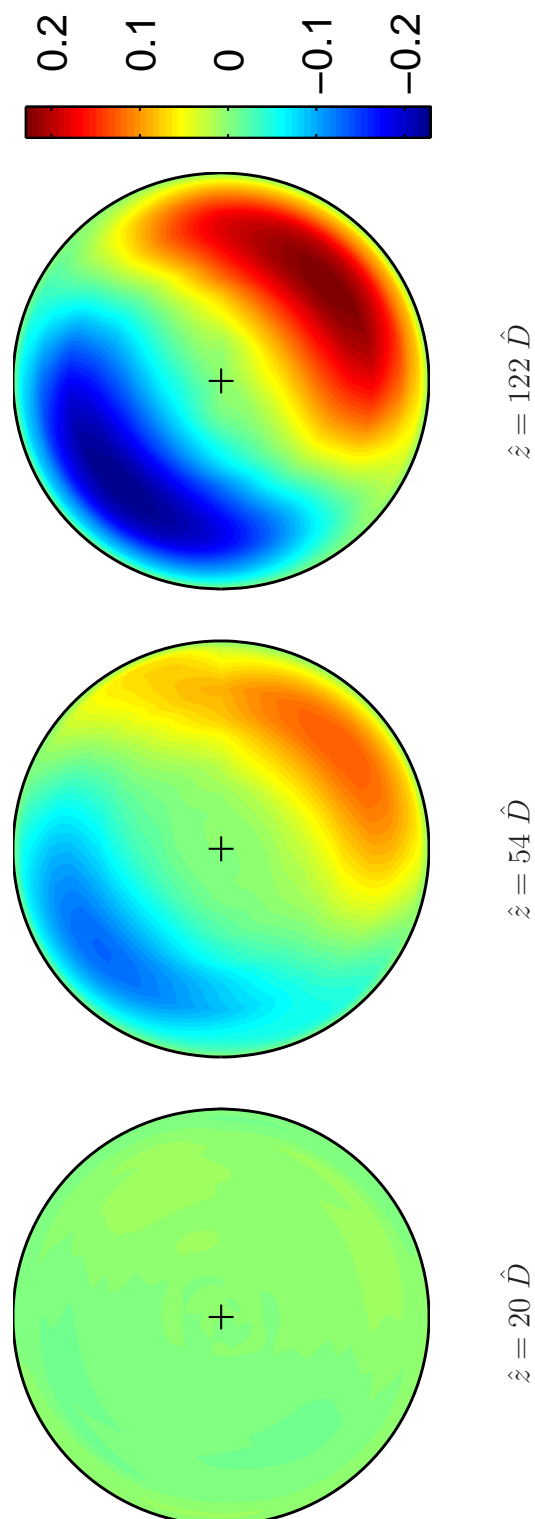


FIG. 4.21 – Contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour trois positions axiales $\hat{z} = 20\hat{D}$, $\hat{z} = 54\hat{D}$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et un nombre de Reynolds $Re_p = 2420$. L'écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue). Mêmes paramètres rhéologiques que les figures (4.17), (4.18) et (4.19)

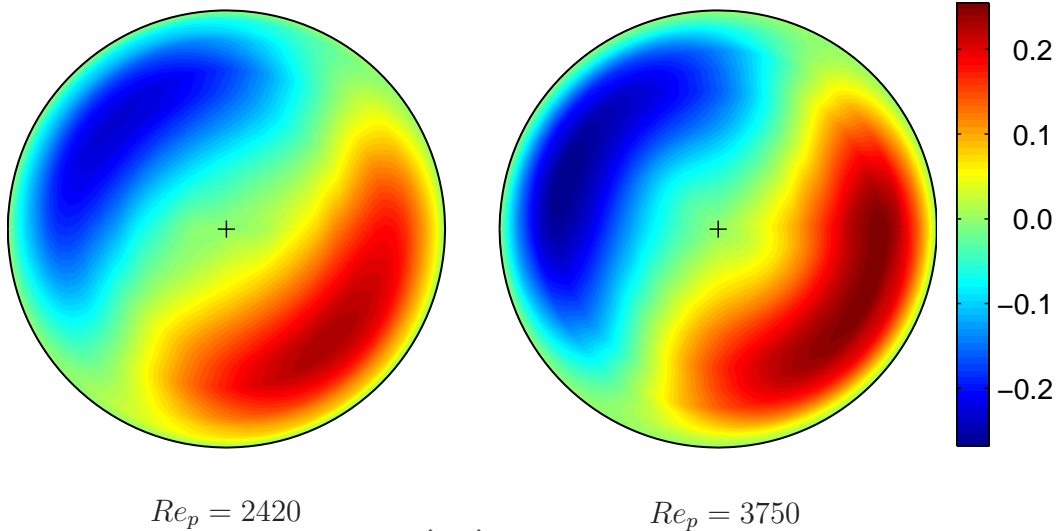


FIG. 4.22 – Contours d’iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour une position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour deux nombres de Reynolds. L’écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue).

d’autres termes, le système est faiblement dissipatif.

- La structure cohérente mise en évidence est robuste et reproductible. Elle est différente de la perturbation optimale. En effet, pour les mêmes paramètres rhéologiques et dynamiques, la perturbation optimale est une onde progressive avec $m = 2$ et $\alpha = 1.2$ (Figure 4.23), qui fournit une amplification optimale de l’énergie cinétique $G^{opt} = 96.14$ atteinte à $\tilde{t}^{opt} = 8.98$. A titre indicatif, pour une perturbation sous forme de deux rouleaux longitudinaux représentée par la figure (4.24), l’amplification maximale de l’énergie cinétique est $G^{max} = 31.9$ atteinte à $\tilde{t} = 25.2$.
- L’orientation des stries de haute et basse vitesse dans une section de la conduite est probablement liée à des imperfections géométriques à l’entrée de la conduite. En effet, dans une première série d’expériences (avant un démontage de l’installation), on avait une autre répartition des stries de haute et basse vitesse représentée par la figure (4.25).
- Ce nouvel état non linéaire asymétrique, intermédiaire entre les régimes laminaire et turbulent est qualitativement similaire à “l’état frontière”² calculé

²Il s’agit de la frontière entre les bassins d’attraction laminaire et turbulent.

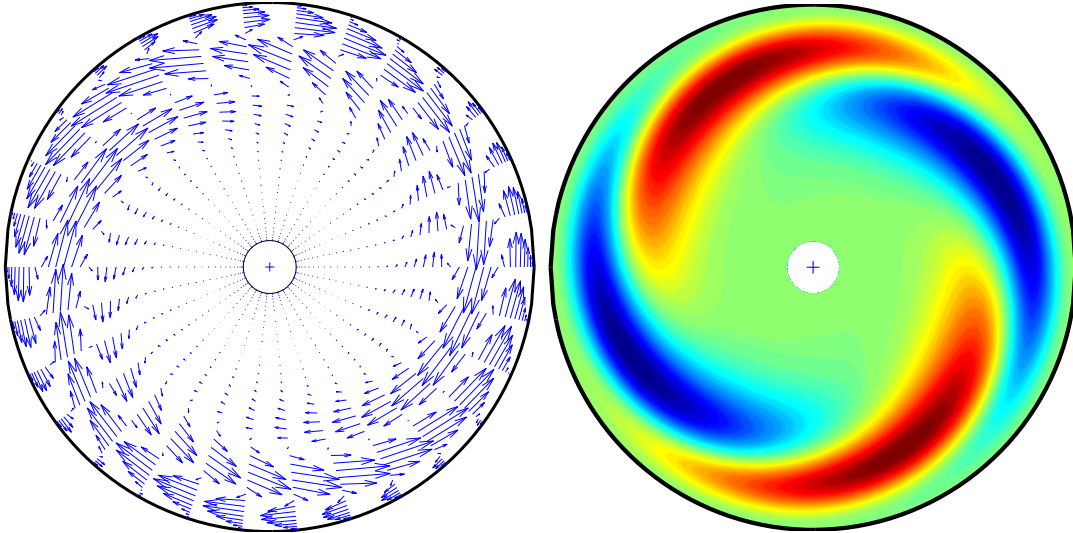


FIG. 4.23 – Perturbation optimale à $Re_p = 2425$, $\tilde{H}b = 0.19$, $r_0 = 0.1$, $n = 0.5$. Elle est obtenue pour $\tilde{\alpha}^{opt} = 1.2$ et $m^{opt} = 2$. L'amplification optimale de l'énergie est $G^{opt} = 96.14$ atteinte à $\tilde{t}^{opt} = 8.98$. (Gauche) champs de vitesse $u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Droite) contours de la composante axiale de la vitesse à t^{opt} , (**rouge**) valeurs positives et (**bleue**) valeurs négatives.

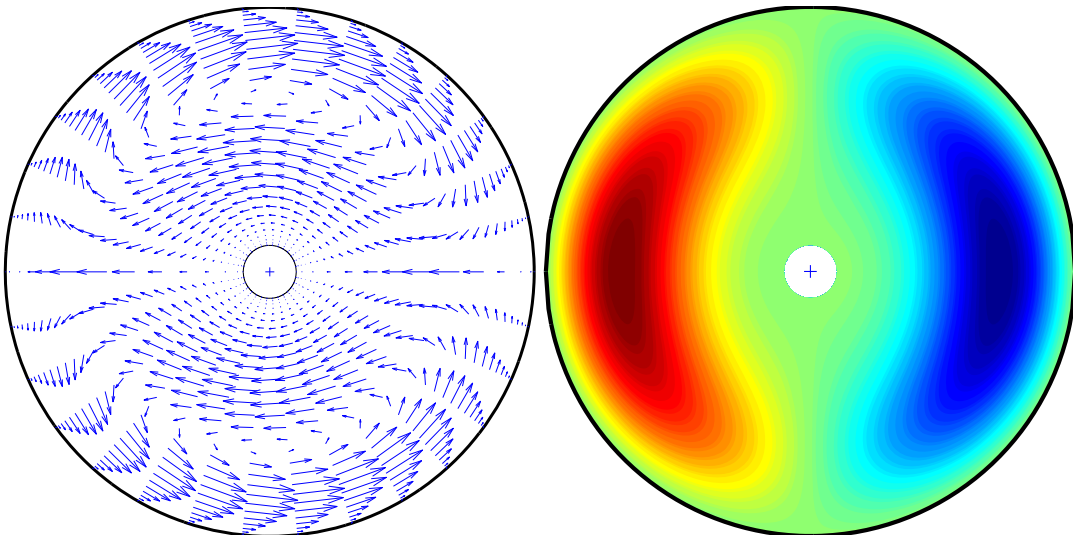


FIG. 4.24 – Perturbation sous forme de rouleaux longitudinaux. (Gauche) champs de vitesse $u \mathbf{e}_r + v \mathbf{e}_\theta$ de la perturbation à $t = 0$. (Droite) contours de la composante axiale de la vitesse (**rouge**) valeurs positives et (**bleue**) valeurs négatives $Re_p = 2425$, $Hb = 0.19$, $r_0 = 0.1$ et $n = 0.5$.

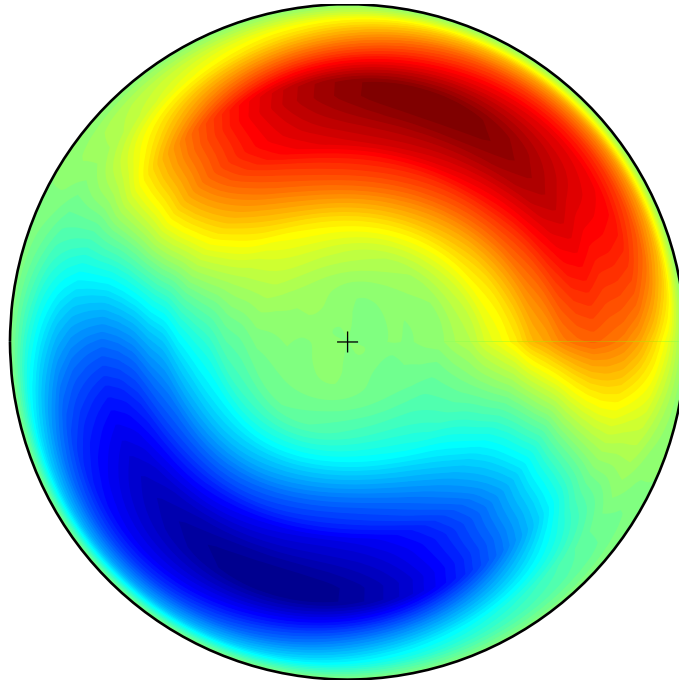


FIG. 4.25 – Contours d’iso-valeurs de \hat{W}_s/\hat{W}_d à $r_0/R = 0.1$ et $n = 0.5$ pour une position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$. L’écoulement est rapide dans la zone (rouge) et lent dans la zone (bleue).

récemment pour un fluide Newtonien par Pringle et Kerswell (2007)(80) et Schneider *et al.* (2007)(81), sauf que dans notre cas, les deux tourbillons sont au voisinage de la paroi du fait de l’existence d’une zone centrale très visqueuse. Cette comparaison qualitative ne signifie pas pour autant que l’état non linéaire observé est un état frontière.

- La structure cohérente décrite précédemment continue à être observée même lorsque le fluide est fortement dégradé. Dans ce dernier cas, la première différence de contraintes normales est difficilement mesurable. Ceci pour affirmer, que ce qui est observé n’est pas induit par une onde élastique générée par la phase gel.
- Les résultats obtenus jusqu’à présent peuvent être décrits dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques. On peut les représenter dans le sous espace à deux dimensions représenté par la puissance dissipée par unité de volume \mathcal{D} et la puissance fournie par unité de volume \mathcal{I} . Dans ce sous espace, l’écoulement laminaire est un point fixe linéairement stable pour tout Re_p et un attracteur global pour $Re < Re_{c_1}$. Pour les essais expérimentaux qu’on a effectués $Re_{c_1} \simeq$

1850. Toutes les conditions initiales convergent en spirale vers l'état laminaire tant que $Re < Re_{c1}$. On rappelle à titre indicatif que les conditions de stabilité au sens énergétique donnent $Re_{CE} \approx 94$. A partir de $Re_{C2} \approx 5000$ (selon la rhéologie du fluide), le bassin d'attraction de cet état non linéaire asymétrique décroît. Une trajectoire peut s'échapper du bassin d'attraction de cet état en suivant la variété stable d'un point selle, pour aller ensuite vers l'attracteur de l'écoulement turbulent représenté par le point (3) (Figure 4.26). Après avoir passé un laps de temps dans l'attracteur (3), le système revient à l'attracteur local (2). Un phénomène d'intermittence est observé entre l'état non linéaire asymétrique et l'état turbulent.

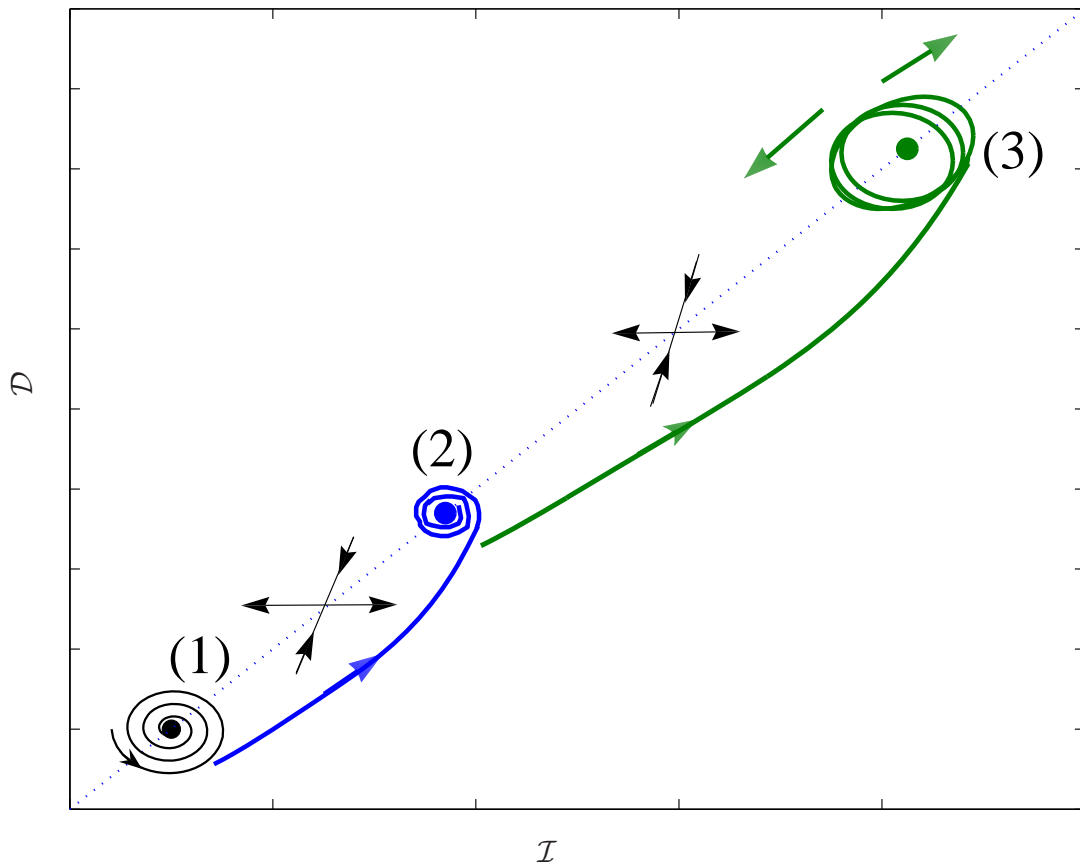


FIG. 4.26 – Description qualitative du processus de transition dans un diagramme de phase qui décrit le taux de dissipation d'énergie en fonction du taux d'énergie fournie au fluide. Le point (1) correspond à l'écoulement unidimensionnel laminaire, linéairement stable. Il constitue un attracteur global pour $Re \leq Re_{c1} \approx 1850$. Le point (2) représente les valeurs moyennes de D et I pour l'état non linéaire asymétrique. Le point (3) correspond à l'écoulement turbulent moyen. Les bifurcations noeud-col entre deux états sont schématisées par des croix.

4.3.3 Approche statistique

Les paragraphes précédents nous ont permis de déterminer la structure de l'écoulement moyen au sens temporel dans toute la conduite lors de la première phase de transition. Des stries de haute et basse vitesse ont été localisées. Dans ce qui suit, on se propose d'apporter des informations supplémentaires sur cette première phase de transition à travers une analyse statistique des fluctuations de la vitesse. Le but étant d'obtenir des comportements moyens au sens statistique des fluctuations de la vitesse. La figure (4.27) montre un exemple de signaux de vitesse relatifs à la première phase de transition. Ils ont été obtenus au voisinage des centres des stries de haute vitesse (zone rouge) et basse vitesse (zone bleue). La figure (4.28) est un zoom sur une partie du signal $w(t)$. On distingue clairement deux échelles temporelles (spatiales, $\ell = wt$) dans l'évolution de $w(t)$, qu'on peut séparer en utilisant un filtre approprié, comme le montre la figure (4.29). Cette séparation fait ressortir des structures de taille comparable à la longueur de la conduite sur lesquelles se superpose un signal chaotique en temps. L'écoulement peut être qualifié de faiblement turbulent. On reviendra par la suite sur ce point lors de l'analyse dans l'espace de Fourier.

4.3.3.1 Fonction de densité de probabilité

D'une manière générale, X est une variable aléatoire, la probabilité pour que la valeur de X soit comprise entre x_0 et $x_0 + dx$ est proportionnelle à dx :

$$\text{probabilité}(x_0 \leq X \leq x_0 + dx) = p(x_0) dx,$$

où $p(x_0)$ est la fonction de densité de probabilité notée généralement *pdf*. Elle vérifie la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = +1. \quad (4.20)$$

D'un point de vue pratique si $w(t)$ est la partie de la vitesse axiale mesurée à une position (r, θ, z) fixée et si N est le nombre total des valeurs relevées au cours du temps pour un débit donné, alors :

$$\text{probabilité}(w_0 \leq w \leq w_0 + \Delta w) = p(x_0) \Delta w = \frac{n_0}{N},$$

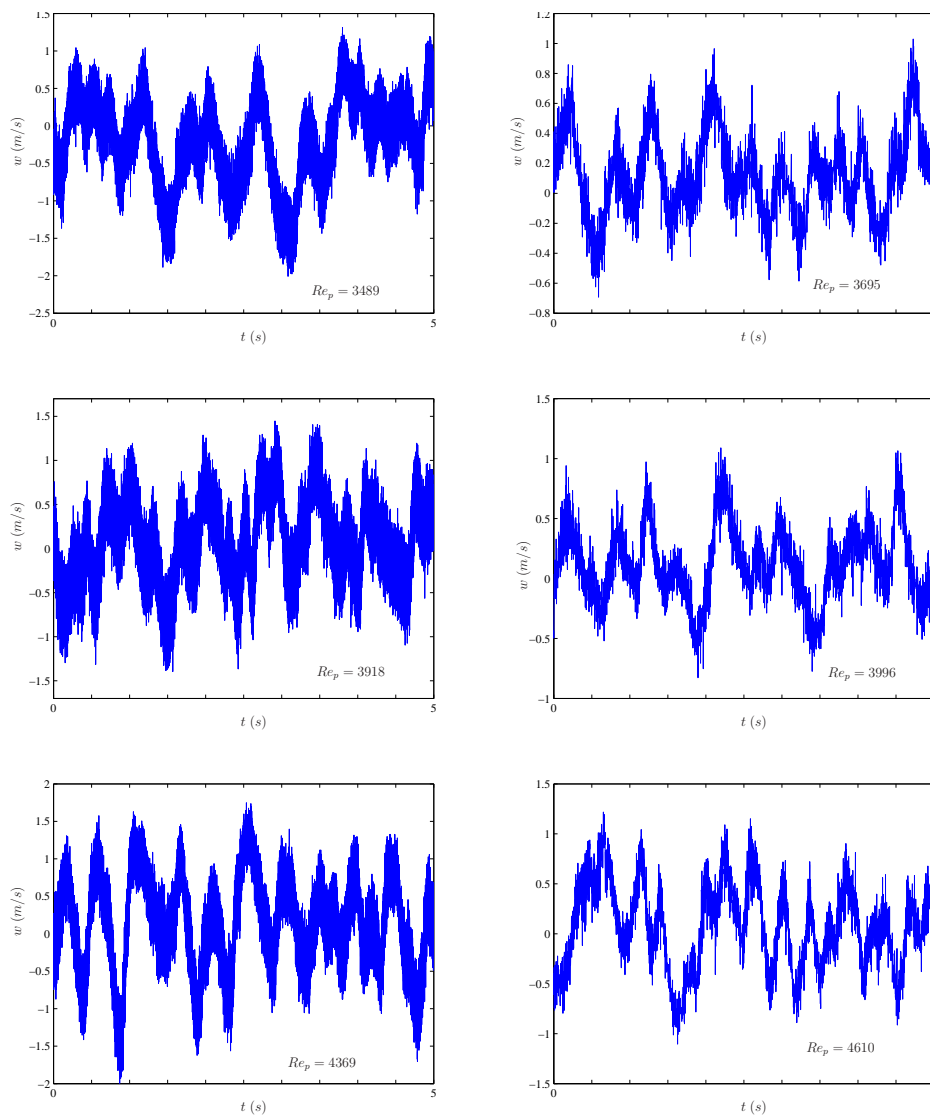


FIG. 4.27 – Signaux de la vitesse axiale pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse pour différents nombres de Reynolds dans la lère phase de transition (pré-turbulent) au voisinage du centre de la strie haute vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$) et du centre de la strie basse vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$). La tête optique du laser est à $\theta_\ell = 7\pi/4$

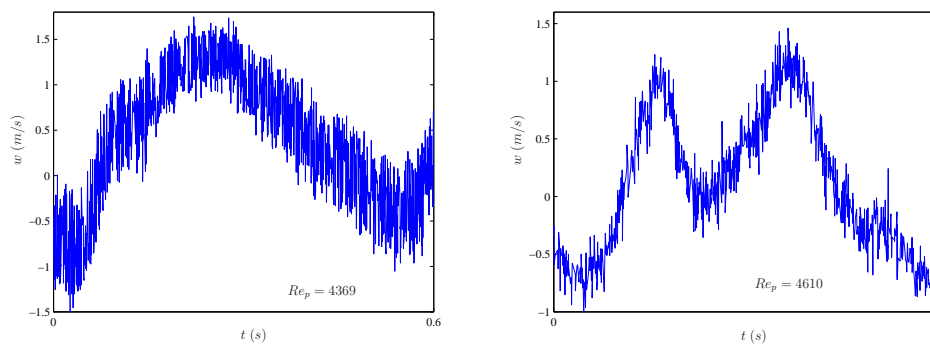


FIG. 4.28 – Zoom sur les signaux de vitesse de la figure (4.27) à $Re_p = 4369$ et 4610 .

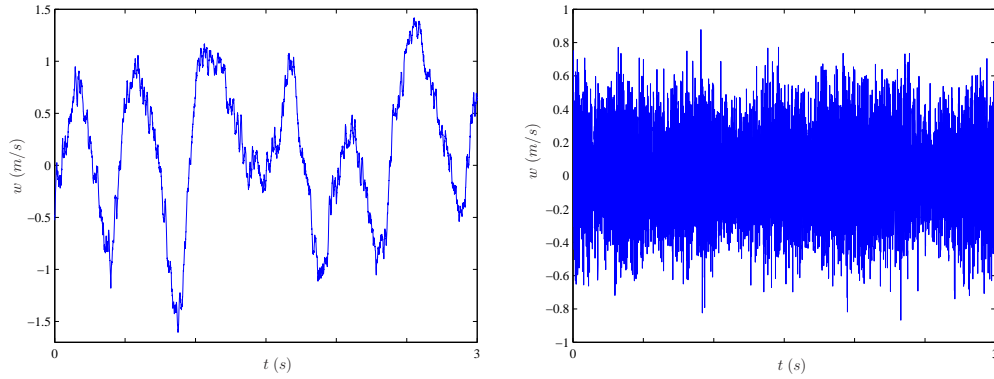


FIG. 4.29 – Décomposition du signal $w(t)$ à $Re_p = 4369$ ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$) en deux échelles temporelles. (Gauche) grande échelle. (Droite) petite échelle. La vitesse locale moyenne est de 9.4 m/s

où n_0 est le nombre de valeurs de w comprises entre w_0 et $w_0 + \Delta w$. La fonction de densité de probabilité sera comparée à la loi normale (Loi de Gauss) $f(w)$:

$$f(w) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{w - W}{\sigma} \right)^2}. \quad (4.21)$$

où W est la moyenne temporelle de w et σ l'écart type défini par

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^N p_i (w_i - W)^2. \quad (4.22)$$

Lorsqu'on introduit la variable réduite $w'_r = \frac{w - W}{\sigma}$, la loi normale s'écrit

$$f_n(w'_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{w'^2_r}{2} \right)}. \quad (4.23)$$

4.3.3.2 Facteurs de dissymétrie et d'aplatissement

L'écart par rapport à la loi de Gauss est caractérisé par les facteurs de dissymétrie S et d'aplatissement F . Ils sont définis par :

$$S = \frac{\langle (w - W)^3 \rangle_t}{[\langle (w - W)^2 \rangle_t]^{\frac{3}{2}}}, \quad F = \frac{\langle (w - W)^4 \rangle_t}{[\langle (w - W)^2 \rangle_t]^2},$$

Dans les définitions précédentes, on a implicitement adopté les hypothèses de stationnarité et d'ergodicité. Les processus ergodiques sont une classe de processus pour

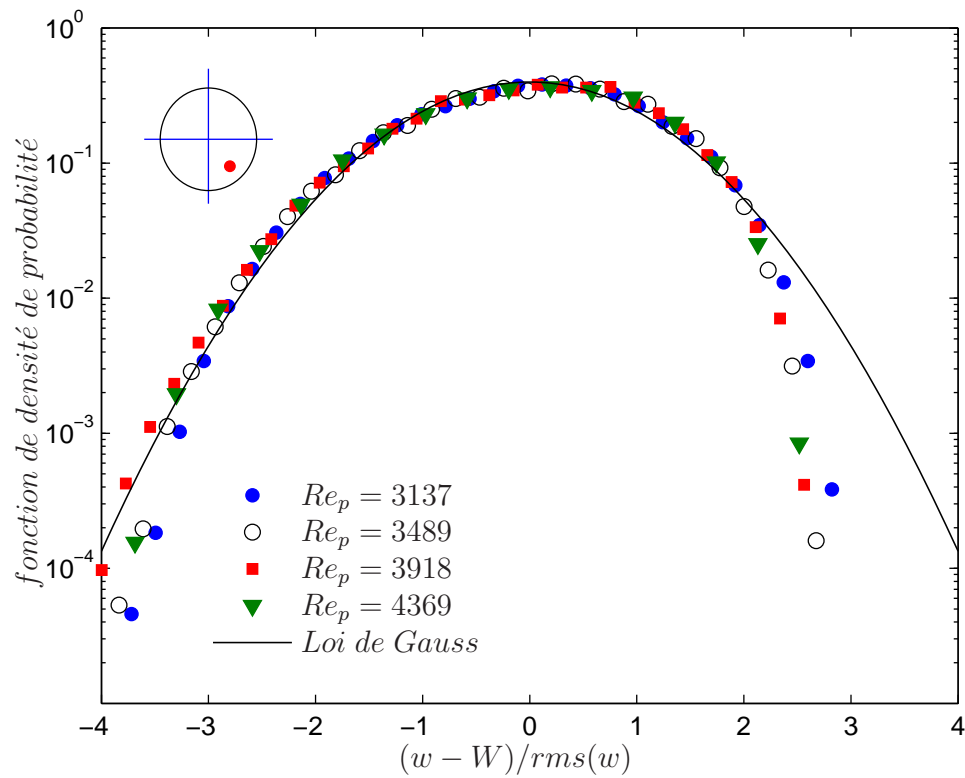


FIG. 4.30 – Fonction de densité de probabilité pour différentes valeurs de Re_p au voisinage du centre de la strie haute vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$). Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.52$, $\hat{K} = 2.0 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 6.97 \text{ Pa}$.

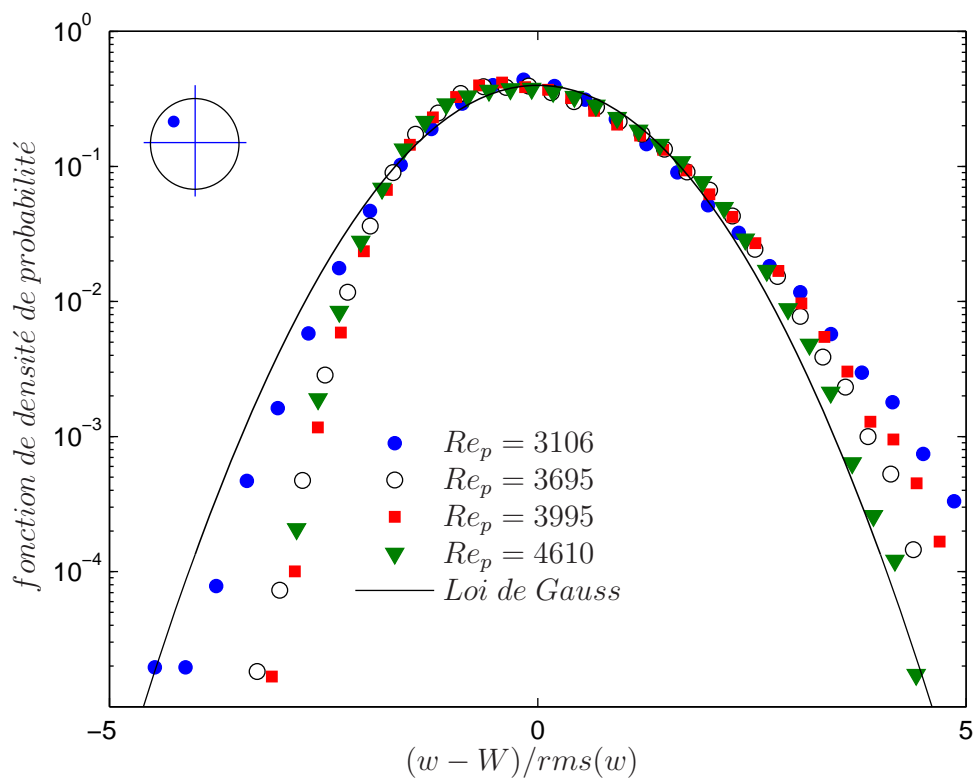
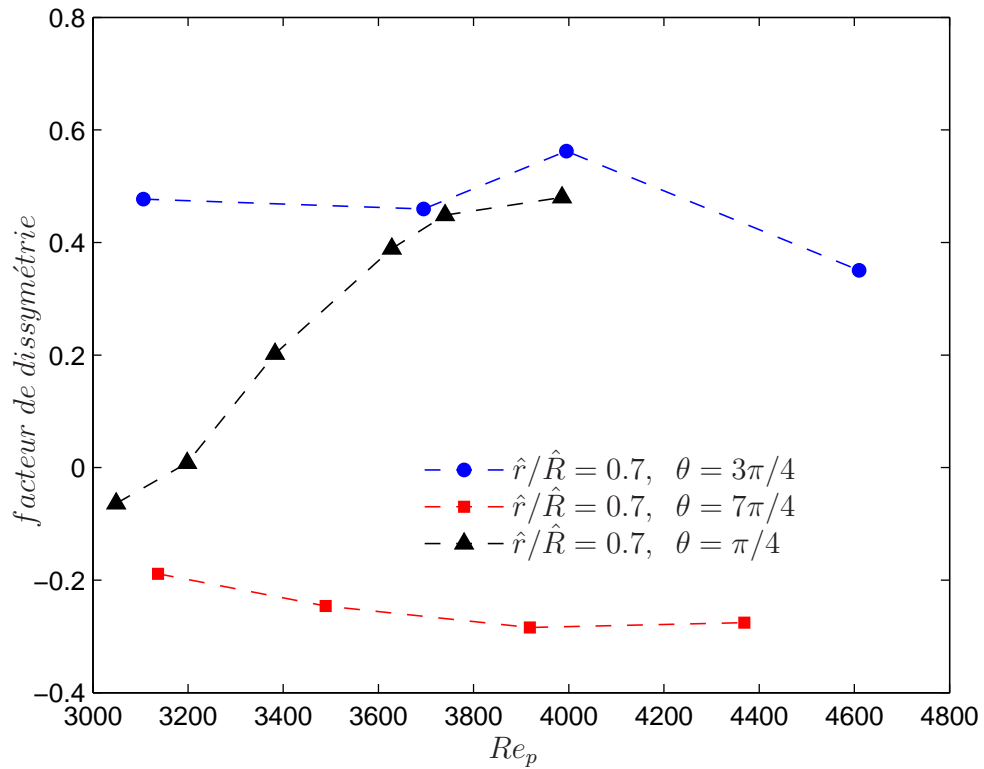
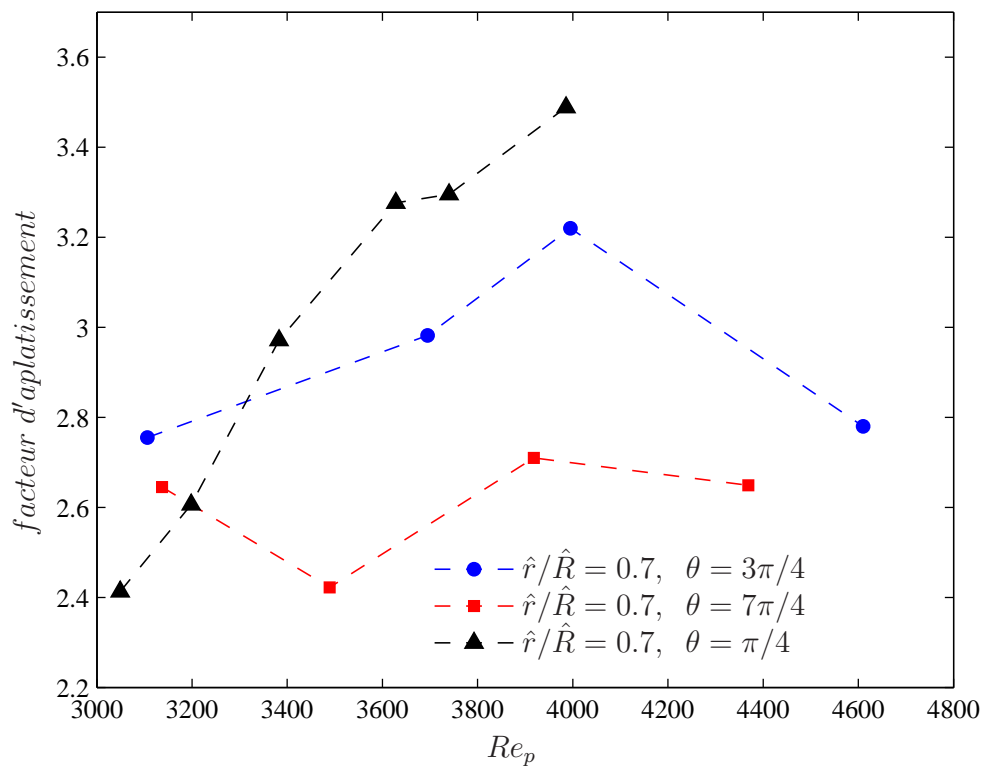


FIG. 4.31 – Fonction de densité de probabilité pour différentes valeurs de Re_p au voisinage du centre de la zone basse vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$). Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.50$, $\hat{K} = 3.0 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 9.2 \text{ Pa}$.

FIG. 4.32 – Facteur de dissymétrie en fonction de Re_p à $r = 0.7$ et différentes positions azimutales.FIG. 4.33 – Facteur d'aplatissement en fonction de Re_p à $r = 0.7$ et différentes positions azimutales.

lesquels la moyenne d'ensemble³ peut être remplacée par la moyenne temporelle. Dans le cas d'une distribution Gaussienne, $S = 0$, et $F = 3$. Les figures (4.30) et (4.31) montrent la distribution des fluctuations de la vitesse axiale à $r = 0.7$, $\theta_\ell = 7\pi/4$ et $3\pi/4$ (approximativement au centre de la strie de haute et basse vitesse) et pour différentes valeurs de Re_p . La comparaison avec la loi normale représentée en trait continu montre une asymétrie dans les fluctuations de la vitesse axiale. Ceci est encore illustré par les figures (4.32) et (4.33) où on a reporté le facteur de dissymétrie en fonction de Re_p pour différentes positions radiales. Une valeur positive de S indique que des fluctuations positives relativement importantes se produisent plus souvent que des fluctuations négatives. Des valeurs non nulles de S , sont probablement le signe du caractère intermittent de l'écoulement. Au centre de la strie haute vitesse, des fluctuations négatives relativement importantes se produisent plus souvent que des fluctuations positives. Vice Versa pour la strie de basse vitesse. Pour toutes nos mesures le facteur d'aplatissement reste proche de la valeur $F \simeq 3$. A titre de comparaison, pour un écoulement en conduite cylindrique, $S \simeq -0.4$ et $F \simeq 3$, [Chassaing \(2000\)\(82\)](#).

4.3.4 Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation associée aux fluctuations w' de la vitesse axiale est définie par

$$\mathcal{R}_{ww}(\tau) = \langle w'(t).w'(t + \tau) \rangle_t, \quad (4.24)$$

où t est le temps et τ le décalage ou retard. Sous forme normalisée $\overline{\mathcal{R}}_{ww}(\tau)$ est donnée par

$$\overline{\mathcal{R}}_{ww}(\tau) = \frac{\mathcal{R}_{ww}(\tau)}{\langle w'(t)w'(t) \rangle_t}, \quad (4.25)$$

l'évolution de \mathcal{R}_{ww} permet d'estimer les échelles de temps caractéristiques de l'écoulement. Si on adopte l'hypothèse de Taylor, c'est à dire que l'on suppose que les structures cohérentes concernées sont advectées beaucoup plus vite qu'elle n'évoluent (turbulence gelée), alors la mesure en un point en fonction du temps ressemblera à la mesure spatiale à un instant donné. On définit une échelle intégrale de temps

$$\Gamma_\tau = \int_0^{+\infty} \overline{\mathcal{R}}_{ww}(\tau) d\tau. \quad (4.26)$$

³Elle s'appelle aussi l'espérance mathématique définie par $E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \times x_i = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx$.

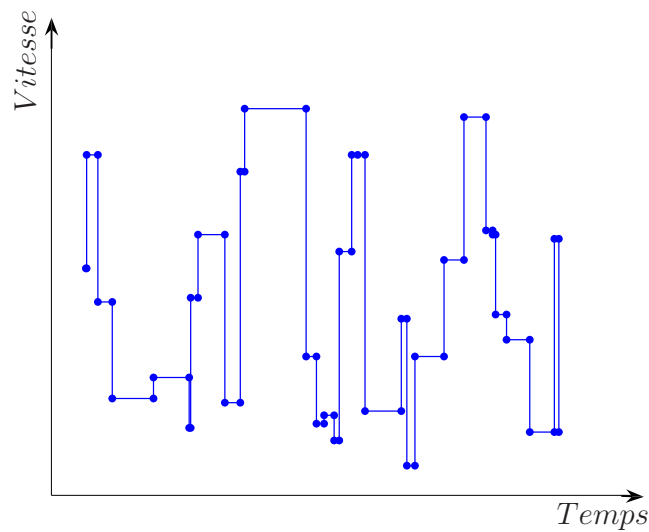


FIG. 4.34 – Illustration de l'interpolation par bloqueur.

Elle peut être reliée à une échelle intégrale de longueur Γ_ℓ par l'intermédiaire de l'hypothèse de Taylor :

$$\Gamma_\ell = W \Gamma_\tau. \quad (4.27)$$

Γ_ℓ donne une idée de la distance sur laquelle les fluctuations de vitesse restent bien corrélées. Elle donne par conséquent une dimension caractéristique des structures cohérentes en présence.

Il est important de noter que les vélocimètres laser ne mesurent une vitesse que lorsqu'une particule traverse le volume de mesure. Comme les particules arrivent de manière aléatoire dans le volume de mesure, le signal vitesse se trouve échantillonné de manière aléatoire. Afin de mettre en œuvre, les techniques classiques de traitement du signal, il est nécessaire de reconstruire le signal avec un pas constant. Les données expérimentales doivent donc être interpolées puis re-échantillonnées. Parmi les méthodes d'interpolation utilisées dans la littérature, on cite l'interpolation d'ordre zéro, d'ordre 1 (interpolation linéaire) et d'ordre 2 (parabolique). Plusieurs auteurs [Adrian et Yao \(1987\)\(83\)](#), [Nobach *et al* \(1998\)\(84\)](#), [Simon et Fitzpatrick \(2004\)\(85\)](#), [Fitzpatrick et Simon \(2005\)\(86\)](#), recommandent l'utilisation de l'interpolation d'ordre zéro, appelée interpolation par bloqueur (sample and hold)⁴. Les figures (4.35) et (4.36) montrent des fonctions d'autocorrélation calculées à $(r=0.7, \theta = 7\pi/4)$ et $(r=0.7, \theta = 3\pi/4)$, pour différentes valeurs de Re_p . On a reporté sur

⁴Cette interpolation consiste à maintenir la dernière valeur de vitesse mesurée jusqu'à la mesure de vitesse suivante.

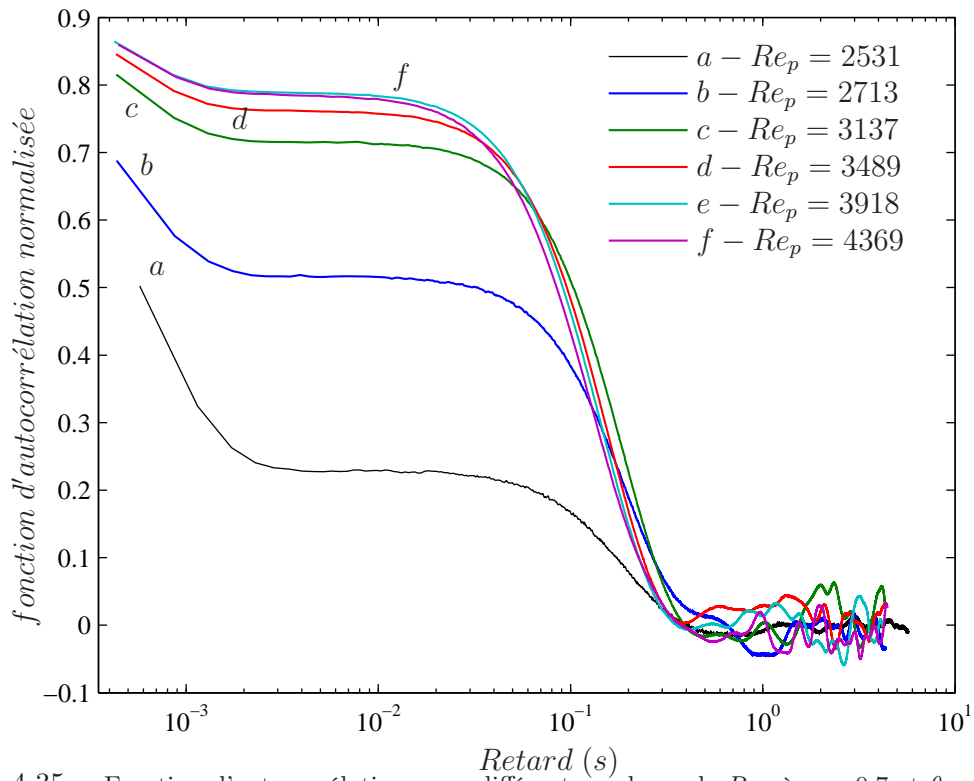


FIG. 4.35 – Fonction d'autocorrélation pour différentes valeurs de Re_p à $r = 0.7$ et $\theta = 7\pi/4$. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.51$, $\hat{K} = 2.4 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 6.97 \text{ Pa}$.

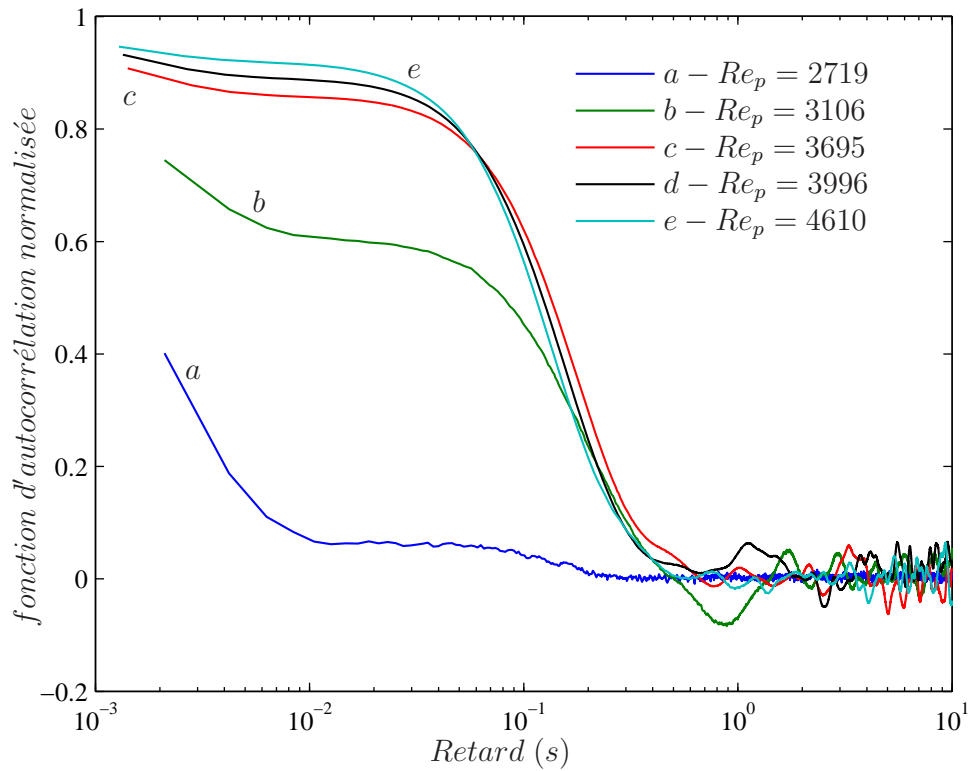


FIG. 4.36 – Fonction d'autocorrélation pour différentes valeurs de Re_p à $r = 0.7$ et $\theta = 3\pi/4$. Les paramètres rhéologiques sont $n = 0.48$, $\hat{K} = 3 \text{ Pa s}^n$, $\hat{\tau}_0 = 9.16 \text{ Pa}$.

le tableau les échelles intégrales de temps et de longueur. On constate que les fluctuations de la vitesse axiale sont corrélées sur des échelles de longueur comparables à la longueur de la conduite.

Re_p	Echelle intégrale (m)	Re_p	Echelle intégrale (m)
2531	0.303	—	—
2713	0.665	2719	0.041
3137	0.862	3106	0.458
3489	0.8612	3695	0.710
3918	0.895	3996	0.680
4369	0.933	4610	0.734
<i>position</i>	$\theta = 7\pi/4$ et $r = 0.7$	<i>position</i>	$\theta = 3\pi/4$ et $r = 0.7$

TAB. 4.1 – Tableau montrant l'évolution de l'échelle intégrale en fonction de Re_p .

4.3.4.1 Analyse spectrale des fluctuations de la vitesse axiale

Dans les paragraphes précédents, les fluctuations de la vitesse axiale ont été analysées dans l'espace physique. Dans ce qui suit, le signal est étudié dans l'espace de Fourier. Ceci permet en particulier de faire ressortir les échelles spatiales et temporelles. On commence par quelques définitions. Soit $\tilde{w}'(f)$ la transformée de fourier de $w'(t)$:

$$\tilde{w}'(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w'(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (4.28)$$

On appelle spectre d'amplitude du signal $w'(t)$, la représentation de $|\tilde{w}'(f)|$ en fonction de f . On appelle densité spectrale d'énergie des fluctuations de la vitesse ou spectre de puissance, la quantité

$$\mathcal{S}(f) = |\tilde{w}'(f)|^2. \quad (4.29)$$

Une autre méthode est parfois utilisée dans la littérature pour le calcul de $\mathcal{S}(f)$. En effet d'après le théorème de Wiener-Khinchine [Chassaing \(2000\)\(82\)](#), le spectre de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{ww}(\tau)$. Comme $R_{ww}(\tau)$ est paire alors :

$$\mathcal{S}(f) = 2 \int_0^{+\infty} R_{ww}(\tau) \cos 2\pi f \tau d\tau. \quad (4.30)$$

En pratique, on a calculé $\mathcal{S}(f)$ par la relation (4.29), en utilisant la transformée de Fourier discrète (TFD) sur MATLAB.

$$\mathcal{S}(n) = \sum_{m=1}^N R_{ww}[m] e^{-2i\pi(m-1)(n-1)/N}. \quad (4.31)$$

Les spectres de puissance sont calculés sur 5×10^5 points répartis par bloc de 2048 points.⁵ Le spectre final est la moyenne arithmétique des spectres calculés sur l'ensemble des blocs. Dans tous les cas, la condition de Shannon⁶ est largement respectée. Les figures (4.37) et (4.38) montrent la densité spectrale normalisée d'énergie des fluctuations de la vitesse axiale au voisinage du centre de la strie haute vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$) et du centre de la strie basse vitesse ($r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$) pour plusieurs valeurs Re_p . La figure (4.39) compare les spectres de puissance à différentes positions azimutales pour des nombres de Reynolds très proches. Au début de la phase de transition, *i. e.*, lorsque la rms (\hat{w}'/\hat{W}) commence à quitter le niveau laminaire, le spectre d'énergie (courbe a) présente un comportement en loi puissance $f^{-5/3}$ pour $1 \leq f \leq 8 \text{ Hz}$. En augmentant le nombre de Reynolds, un comportement en loi puissance f^{-3} est observé sur pratiquement une décade $2 \leq f \leq 10 \text{ Hz}$. Pour tout les spectres, on note une partie plus au moins plate pour $20 \leq f \leq 100 \text{ Hz}$ suivie d'un comportement en f^{-1} . La partie plate du spectre est attribuée à un bruit blanc induit probablement par les vibrations du châssis. En adoptant l'hypothèse de Taylor, le spectre en fréquences, peut être interprété en spectre de puissance en fonction du nombre d'onde, en utilisant la relation entre la fréquence et le nombre d'onde $\hat{k} = 2\pi f/\hat{W}$. La répartition de l'énergie des fluctuations de la vitesse axiale en fonction de la fréquence ou du nombre d'onde appelle un certain nombre de remarques :

- Un spectre en f^{-3} (ou k^{-3}) signifie que l'énergie est essentiellement concentrée dans les grandes structures. La dissipation d'énergie $k^2 S(k) \propto k^{-1}$ a lieu essentiellement aux grandes échelles.
- Le spectre d'énergie en f^{-3} est très similaire à celui décrit dans la littérature dans le cas d'une turbulence bidimensionnelle. Le lecteur peut trouver une description complète de la turbulence bidimensionnelle dans les articles de [Kraich-](#)

⁵En prenant des blocs de 2048 points, on a implicitement enlevé toutes les fréquences inférieures à $fe/2048$ où fe est la fréquence d'échantillonnage.

⁶Un échantillonnage de w à la fréquence fe permet la reconstruction complète du signal à condition que $fe/2 \geq f_{max}$.

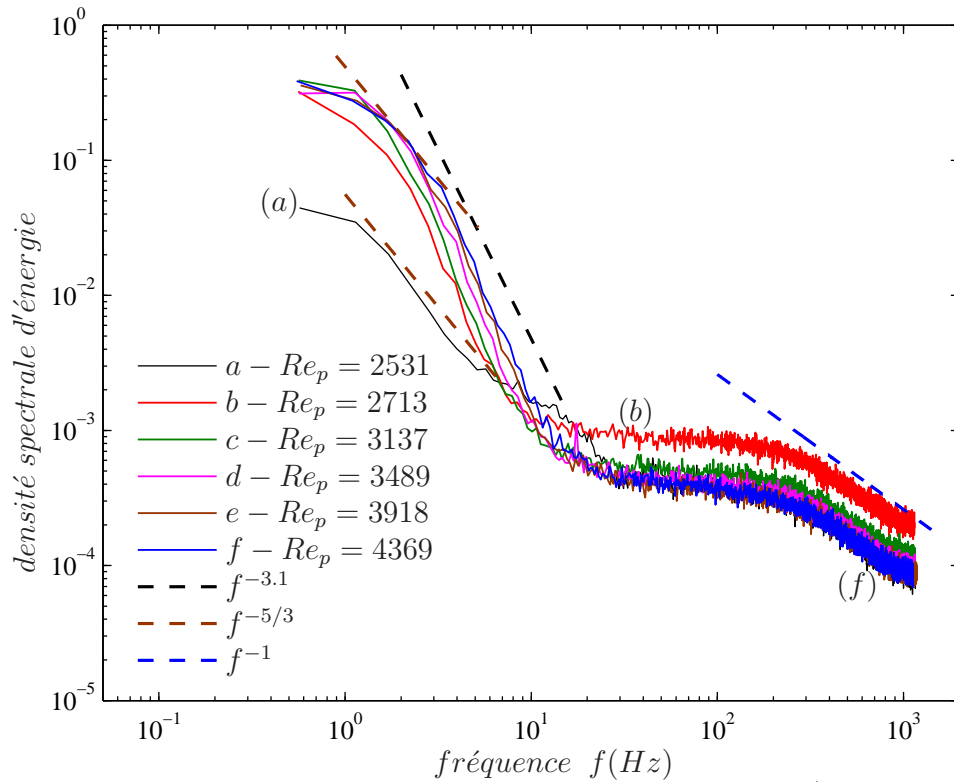


FIG. 4.37 – Densité spectrale d'énergie à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour différentes valeurs de Re_p .

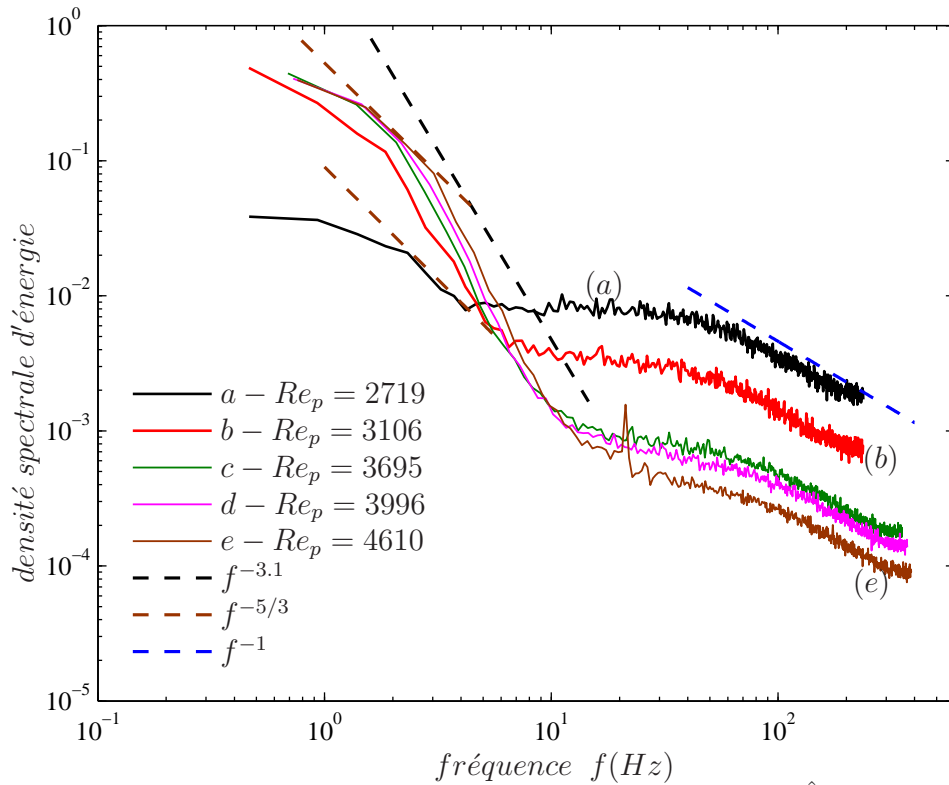


FIG. 4.38 – Densité spectrale d'énergie à $r = 0.7$, $\theta = 3\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ et pour différentes valeurs de Re_p .

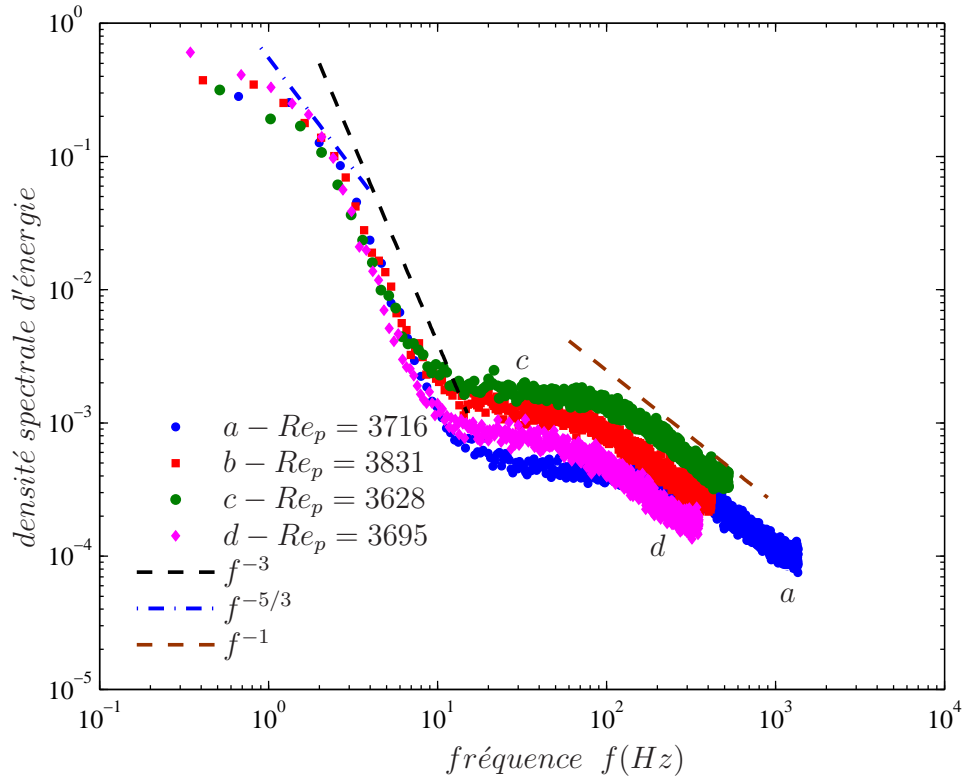


FIG. 4.39 – Densité spectrale d'énergie à $\hat{z} = 122\hat{D}$ pour des valeurs de Re_p autour de 3700 et quatre positions angulaires. (a) $r = 0.8$ et $\theta = 7\pi/4$; (b) $r = 0.7$ et $\theta = 0$; (c) $r = 0.8$ et $\theta = \pi/4$; (d) $r = 0.7$ et $\theta = 3\pi/4$.

nan (1967)(87) et (1971)(88), ainsi que dans le travail de Tabeling (2002)(89) pour le point de vue expérimental ou dans le livre de Lesieur (1990)(90). D'une manière globale, ce qui distingue la dynamique des fluides $2D$ du cas $3D$ provient de l'absence de l'effet d'étirement de filaments de vorticité présent en $3D$ et qui fournit un "ingrédient" pour comprendre la cascade directe d'énergie, des grandes échelles vers les petites échelles où elle est dissipée. Par contre en $2D$, la vorticité $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ est normale au vecteur vitesse \mathbf{V} . Dans ce cas, les équations de Navier- Stokes ont un autre invariant : l'enstrophie $H = |\mathbf{\Omega}|^2$. La physique est alors complètement modifiée. Dans cette situation, les interactions non linéaires transfère l'énergie de l'échelle de forçage ou d'injection à des échelles beaucoup plus grandes où elle est dissipée par les forces de frottement externe. Par contre l'enstrophie cascade vers les petites échelles où elle est dissipée par la viscosité. Le flux d'énergie vers les grandes échelles est appel e cascade inverse d'énergie. Le flux d'enstrophie vers les petites échelles est appel e

cascade directe. La théorie de Kraichnan (1967)(87) - Batchelor (1969)(91) prédit deux intervalles d'inertie, au-dessus et au-dessous d'une échelle de forçage, $\hat{k} \sim \hat{k}_f$. Le flux d'énergie dans le domaine des larges échelles spatiales, $\hat{k} < \hat{k}_f$ doit donner, selon la théorie une pente du spectre énergétique $\mathcal{S}(\hat{k}) \sim \hat{k}^{-5/3}$, tandis que le flux de l'enstrophie dans le domaine des petites échelles spatiales, $\hat{k} > \hat{k}_f$, doit donner $\mathcal{S}(\hat{k}) \sim \hat{k}^{-3}$. Ainsi, un écoulement turbulent bidimensionnel tend à se former en raison de la cascade inverse des structures d'échelle de plus en plus grandes. Des tourbillons de forte intensité et longue durée de vie sont obtenus. Toutefois, la situation bidimensionnelle offre une certaine variété en fonction des situations qu'il convient de bien distinguer :

- La turbulence en déclin : Cette situation se réalise si on laisse évoluer librement une perturbation initiale en absence de mécanismes de forçage. Le système développe rapidement une double cascade. L'énergie gagnant les grandes échelles et des tourbillons intenses se forment par fusion de deux tourbillons.
- La turbulence de Kraichnan : Cet état est obtenu par une injection constante d'énergie et une dissipation à grande échelle.
- Le régime d'accumulation : dans une situation forcée avec une dissipation à grande échelle absente ou insuffisante, l'énergie "remonte" jusqu'à la plus grande échelle offerte par le système (taille du dispositif expérimental ou du domaine de simulation) Paret et Tabeling (1998)(92). On assiste alors à la formation d'un ou deux tourbillons très intenses et cohérents à cette échelle maximale.

Ainsi dans notre cas, les spectres en $f^{-5/3}$ (courbe, *i. e.*, début de la première phase, Figures (4.37 et 4.38)) correspondent à un transfert d'énergie vers les grandes échelles. Cela se traduit par une croissance de l'échelle intégrale (voir tableau 4.1). Lorsque la taille des structures devient comparable à la longueur de la conduite, le spectre présente essentiellement une loi puissance en f^{-3} qui représenterait une cascade d'enstrophie si on fait le rapprochement avec la turbulence bidimensionnelle. Pour ce qui est de la partie du spectre où une loi puissance en f^{-1} est observée, elle est associée aux fluctuations de la vitesse à petite échelle (voir figure 4.29 (Droite)). Dans notre cas, l'essentiel de l'énergie est concentrée dans les grandes structures dont la dynamique résulte de l'interaction non linéaire de modes ayant un faible nombre d'onde. Le mécanisme

physique à l'origine des petite échelles de variation de la vitesse serait l'advection de $\mu'\dot{\gamma}'\frac{dW}{dr}$ par les fluctuations à grande échelle. La quantité $\mu'\dot{\gamma}'\frac{dW}{dr}$ aurait le rôle d'un scalaire passif dans le régime de Batchelor (1959)(93)

4.3.4.2 Fonctions de structure

Les spectres d'énergie étudiés précédemment nous renseignent sur la distribution de l'énergie mais n'apportent aucune information en ce qui concerne les flux d'énergie. Des informations dans ce sens sont obtenues à partir du calcul des fonctions de structure. Elles font intervenir l'écart en vitesse entre deux points séparés par la distance ℓ :

$$\delta w(\ell, t) = w(z + \ell, t) - w(z). \quad (4.32)$$

Cet écart en vitesse peut être considéré comme une vitesse caractéristique associée à une échelle caractéristique ℓ . La fonction de structure d'ordre p ou le moment d'ordre p de l'incrément en vitesse axiale est défini par :

$$S_p(\ell) = \langle \delta w(\ell)^p \rangle_t. \quad (4.33)$$

D'un point de vue pratique, les incréments du signal mesuré $w(t + \delta t) - w(t)$ sont considérés comme des variations spatiales longitudinales de W : $\delta w(\ell) = w(z + \ell, t) - w(z)$, avec $\ell = -\langle w \rangle_t \cdot \delta t$.

Parmi les différents moments, $S_2(\ell)$ et $S_3(\ell)$ ont des significations physique très pertinentes. Le moment d'ordre 2 est une mesure de l'énergie cinétique turbulente à l'échelle ℓ , tandis que le moment d'ordre 3 caractérise le flux moyen d'énergie à une certaine échelle ℓ . En particulier, le signe de $\langle \delta_\ell w^3 \rangle$ nous renseigne sur la direction des transferts d'énergie à travers les échelles : positif lorsque l'énergie est transférée vers les grandes échelles, et négatif lorsque l'énergie est transférée vers les petites échelles.

A titre indicatif, pour une turbulence isotrope 3D à grand nombre de Reynolds, l'énergie se transfère à un taux, ε , à travers toutes les échelles du régime inertiel et $S_3(\ell)$ satisfait la loi des 4/5 de Kolmogorov :

$$S_3(\ell) = -\frac{4}{5}\varepsilon\ell, \quad (4.34)$$

où ε est le taux moyen de dissipation d'énergie. Cette loi d'échelle conduit au spectre d'énergie de Kolmogorov $\mathcal{S}(k) \sim k^{-5/3}$.

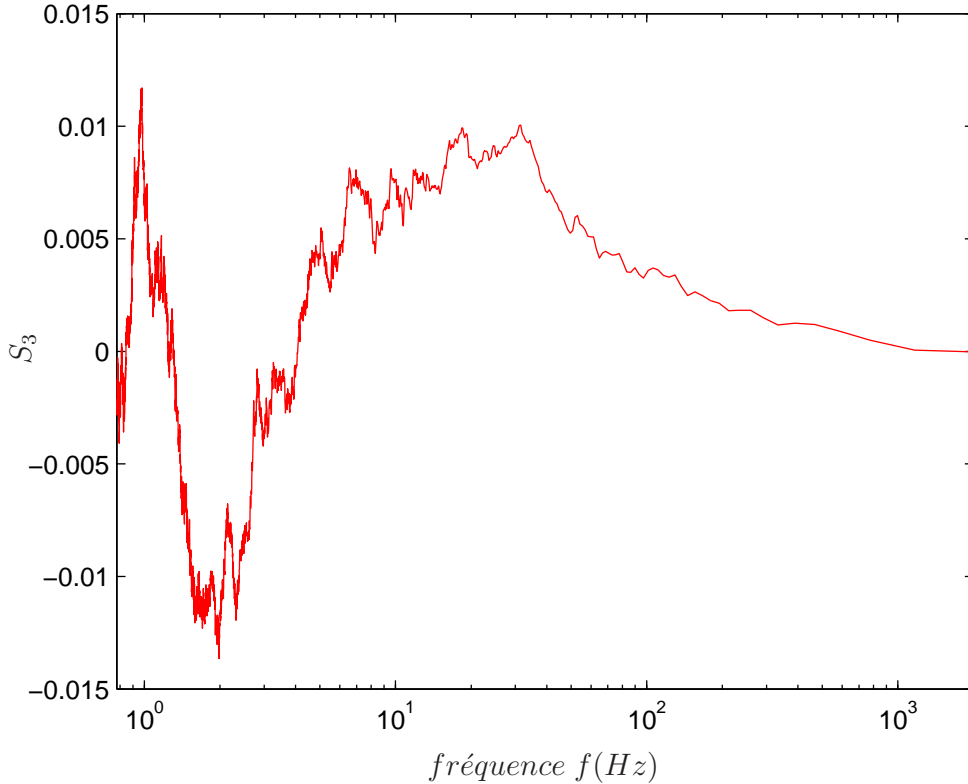


FIG. 4.40 – Représentation de la fonction de structure S_3 en fonction de la fréquence à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$ pour un nombre de Reynolds $Re_p = 2531$ correspondant à la courbe (a) figure (4.37).

Pour les nombres de Reynolds correspondant à la cascade inverse d'énergie (courbe (a) du spectre, figures 4.37 et 4.38), on a représenté dans la figure (4.40) $S_3(f)$. Pour une fréquence f donnée, $S_3(f)$ représente le flux d'énergie d'une fréquence plus petite que f vers une fréquence plus grande que f .

Le caractère intermittent du signal peut être analysé à travers les moments d'ordre p de la valeur absolue des incréments en vitesse

$$S_p^{|\delta w|} = \langle |\delta w(\ell)|^p \rangle_t. \quad (4.35)$$

La figure (4.41) donne $S_p^{|\delta w|}$ pour $1 \leq p \leq 6$. On pose $S_p^{|\delta w|} \sim f^{\zeta_p}$ dans la zone où le spectre de puissance évolue en f^{-3} . La représentation de ζ_p/ζ_3 en fonction de p (Figure 4.42) montre qu'on est en présence d'une très faible intermittence. Dans le cas d'une turbulence 3D, la théorie de Kolmogorov prévoit $\zeta_p = p/3$

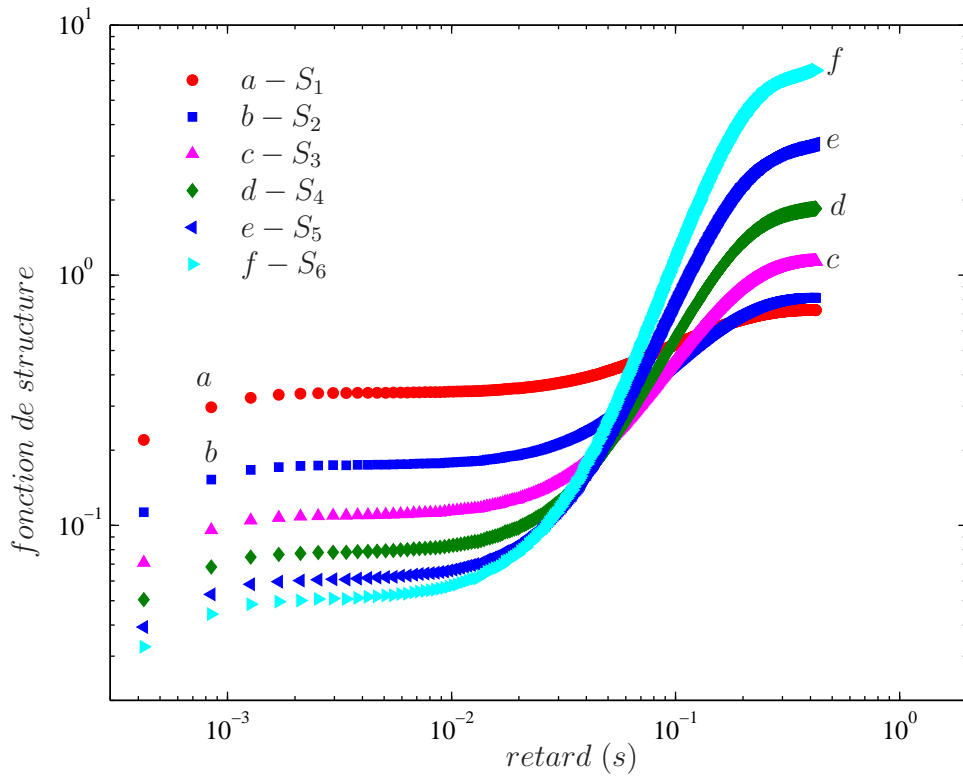


FIG. 4.41 – Représentation des fonctions de structures $S_p^{|\delta w|}$ d'ordre p ; $1 \leq p \leq 6$, pour un nombre de Reynolds $Re_p = 3918$ à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$.

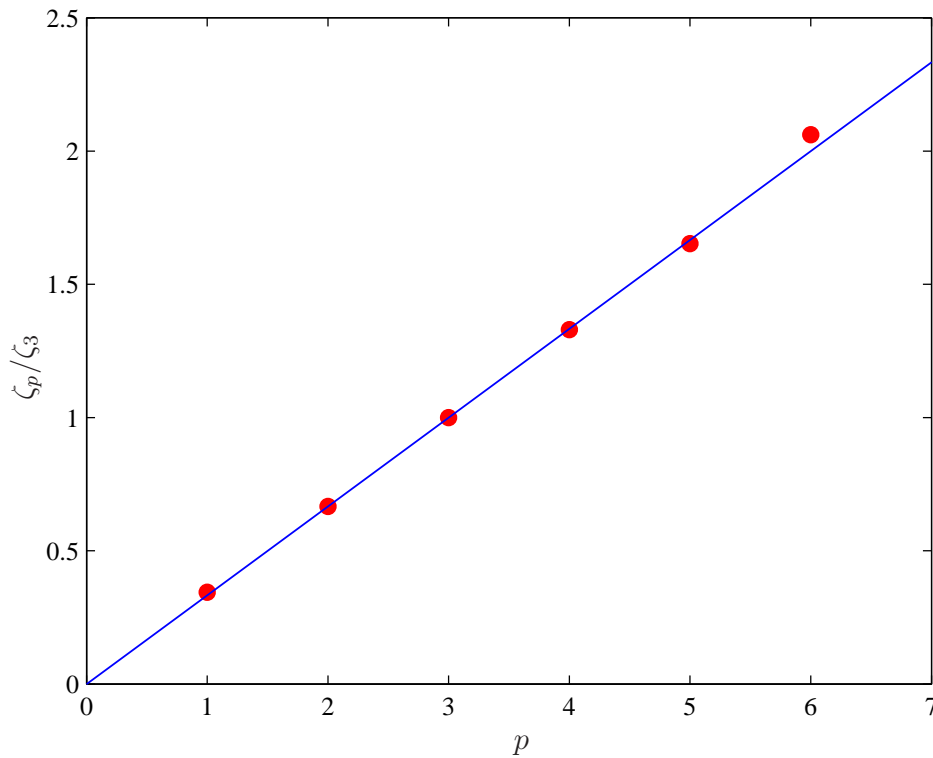


FIG. 4.42 – ζ_p/ζ_3 en fonction de p pour un nombre de Reynolds $Re_p = 3918$ à $r = 0.7$, $\theta = 7\pi/4$ et $\hat{z} = 122\hat{D}$.

4.3.5 Conclusion

Une étude expérimentale de la transition vers la turbulence pour un fluide rhéofluidifiant à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique a été effectuée. Des profils de vitesse axiale ont été mesurés à trois positions axiales ($20 \hat{D}$, $54 \hat{D}$ et $122 \hat{D}$) pour une large gamme de Reynolds allant du laminaire au turbulent. Les résultats montrent qu'en régime laminaire et turbulent, les profils de vitesse axiale sont parfaitement axisymétriques, par contre lors de la transition une asymétrie croissante a été observée. L'analyse des profils de vitesse axiale mesurés à différentes positions azimutales fait clairement ressortir deux zones : une où l'écoulement est accéléré et une autre où il est décéléré. Ceci suggère l'existence de deux rouleaux contrarotatifs, qualifiés de structure robuste dans la mesure où elle observée sur toute la longueur de la conduite et durant tout les essais expérimentaux. Il a été expliqué, que cette asymétrie ne relève pas d'un artefact expérimental, mais bien au contraire, elle est la conséquence d'un phénomène physique lié à la rhéologie du fluide qui n'est pas clairement identifié. Des mesures similaires effectuées pour un fluide moins rhéofluidifiant, ne font pas apparaître une asymétrie mesurable, comme l'indiquent les résultats présentés en annexe (C) pour une solution de CMC faiblement rhéofluidifiante. L'intensité de turbulence mesurée à différentes positions radiales et pour plusieurs valeurs de Rep, font apparaître deux phases lors de la transition vers la turbulence. Dans la première phase, les fluctuations de la vitesse augmentent essentiellement dans une zone annulaire délimitée par une zone centrale très visqueuse et la paroi. La deuxième phase correspond à l'apparition des spots de turbulence (puffs) où les fluctuations augmentent dans toute la section de la conduite. Des informations supplémentaires sur la structure de l'écoulement lors de la première phase ont été apportées à partir d'une analyse statistique des fluctuations de la vitesse axiale. Fondamentalement, le spectre d'énergie présente au début de la première phase de transition une loi puissance en $f^{-5/3}$ qui passe à f^{-3} pour des Reynolds suffisamment importants. Ce type d'évolution ainsi que l'existence de structures cohérentes robustes de taille comparable à la longueur de la conduite nous a amené à faire un rapprochement à ce qui est connu en turbulence bidimensionnelle. On retrouve les mêmes caractéristiques que celles d'une turbulence bidimensionnelle en déclin. Le comportement initial en $f^{-5/3}$ traduit une cascade inverse d'énergie, vérifiée d'une part par l'augmentation de l'échelle intégrale et d'autre part par le signe de la fonc-

tion de structure d'ordre 3. La relation entre le comportement rhéofluidifiant du fluide et les résultats issus de l'analyse statistique n'est pas encore établie. La perturbation en viscosité est bien sûr fondamentale pour ce processus.

Chapitre 5

Conclusion générale

5.1 Synthèse

Dans le présent travail de thèse, on s'est intéressé au problème de transition vers la turbulence pour un fluide à seuil rhéofluidifiant en écoulement dans une conduite cylindrique. Il s'agissait d'une part d'apporter des informations supplémentaires pour mieux interpréter l'asymétrie des profils de vitesse axiale observée par [Peixinho \(2004\)](#)(34) lors de la transition vers la turbulence pour le même type de fluide et d'autre part d'examiner comment la non linéarité de la loi de comportement rhéologique intervient dans ce processus de transition vers la turbulence. L'influence de la variation non linéaire de la viscosité en fonction du cisaillement a été étudiée théoriquement via une analyse de la stabilité linéaire et de la réceptivité de l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide de Herschel-Bulkley $\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n$ en utilisant des approches modale et non modale. La non linéarité apparaît à travers l'anisotropie du déviateur du tenseur des contraintes. Une perturbation axisymétrique est sensible à la viscosité tangente qui est plus faible que la viscosité effective. La conséquence majeure de cet effet se manifeste particulièrement à travers la modification brutale de la forme de la perturbation optimale d'oblique à axisymétrique, pour de grandes valeurs du nombre de Herschel-Bulkley. Dans le cadre de la théorie linéaire, on a vérifié qu'une perturbation infinitésimale ne modifie pas la vitesse de la zone non cisailée (zone bouchon, où la contrainte est inférieure à la contrainte seuil). Ce qui donne l'impression, que tout se passe comme si on avait un écoulement composé Couette-Poiseuille entre deux cylindres coaxiaux, où le cylindre intérieur se déplacerait avec une vitesse axiale constante et le cylindre extérieur serait fixe. Les résultats de [Gittler \(1993\)](#)(47) sur la stabilité d'un écoulement de Couette entre

deux cylindres coaxiaux nous a laissé entrevoir la possibilité d'obtenir enfin une bifurcation pour un écoulement de Hagen-Poiseuille. Cette tentative s'est avérée vaine et l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil reste linéairement stable. De l'étude de la réceptivité, on retiendra particulièrement que pour des paramètres rhéologiques proches de ceux rencontrés dans les essais expérimentaux, ($Hb \ll 1$) et $n = 0.5$, la perturbation optimale est obtenue pour un nombre d'onde axial non nul $\alpha = 0.1$ et un nombre d'onde azimutal $m = 2$. L'augmentation de la non linéarité via par exemple l'augmentation de Hb , se traduit par des perturbations optimales de plus en plus oblique (accroissement du nombre d'onde axial).

D'un point de vue expérimental, on a étudié la transition vers la turbulence dans une conduite cylindrique de 5 m de long pour deux fluides : une solution de Carbopol à 0.2% en masse (fluide à seuil rhéofluidifiant) et une solution de CMC7M1C à 2% en masse (fluide sans seuil, faiblement rhéofluidifiant). Dans un souci de reproductibilité et de comparaison, on a repris les mêmes fluides que ceux utilisés par [Peixinho \(2004\)\(34\)](#). On a commencé par vérifier encore une fois, que pour la solution de Carbopol, les profils de vitesse axiale sont parfaitement axisymétriques en laminaire et en turbulent et présentent une asymétrie croissante avec le nombre de Reynolds durant toute la phase de transition. Par contre pour le fluide faiblement rhéofluidifiant, aucune asymétrie mesurable n'a été détectée. Afin de mieux décrire cette asymétrie observée dans notre cas, pour la solution de Carbopol et par ailleurs pour des fluides suffisamment rhéofluidifiants sans seuil ([Escudier et al.\(2005\)\(15\)](#), [Güzel et al. \(2008\)\(95\)](#)), des profils de vitesse axiale ont été mesurés à différentes positions axiales et à différentes positions azimutales. Les résultats mettent clairement en évidence, l'existence de deux zones, une où l'écoulement est accéléré et l'autre où il est décéléré. La disposition de ces deux zones dans une section est identique sur pratiquement toute la longueur de la conduite (au voisinage de l'entrée, aucune asymétrie n'a été observée). Ceci suggère l'existence de deux rouleaux longitudinaux contrarotatifs, qualifiés de structure cohérente robuste. La reproductibilité de cette structure cohérente a été vérifiée pour l'ensemble des essais expérimentaux. Elle ne relève pas d'un artefact expérimental et elle est différente de la perturbation optimale. Les mesures de l'intensité de turbulence à différentes positions radiales et pour une large gamme du nombre de Reynolds font apparaître deux phases lors de la transition vers

la turbulence. Dans la première phase, les fluctuations de la vitesse augmentent avec Re_p essentiellement dans une zone annulaire délimitée par la paroi de la conduite et la zone centrale très visqueuse. La deuxième phase correspond à l'apparition de spots "classiques" de turbulence (puff) où l'intensité de turbulence quitte le niveau laminaire dans toute la section de la conduite. Il est extrêmement intéressant de noter que durant la première phase, les pertes de charge sont très proches de celles que l'on aurait eu si l'écoulement était laminaire. En d'autres termes, le système est faiblement dissipatif. Par contre l'apparition de spots de turbulence s'accompagne comme cela est bien connu d'une nette augmentation des pertes de charge. Dans la première phase de transition, l'analyse statistique des fluctuations de la vitesse axiale présente les mêmes caractéristiques qu'une turbulence bidimensionnelle. Au début de la première phase, le spectre de puissance présente une pente de $-5/3$. Il traduit une cascade inverse d'énergie, *i.e.*, des petites structures vers les grandes structures, ceci est confirmé par l'augmentation progressive de l'échelle intégrale ainsi que par le signe positif du moment d'ordre 3 des incréments de la vitesse axiale. Pour des valeurs de Re_p suffisamment élevées, l'échelle intégrale spatiale devient comparable à la longueur de la conduite et on observe sur pratiquement une décade un comportement en f^{-3} pour le spectre de puissance. Ce qui signifie que l'énergie des fluctuations de la vitesse axiale est concentrée essentiellement dans les grandes structures. En turbulence bidimensionnelle, un spectre en f^{-3} correspond à une cascade directe d'entrophie. La relation entre cette évolution du spectre de puissance et le caractère rhéofluidifiant est bien sûr liée à la perturbation de la viscosité et plus exactement au terme $\mu' \dot{\gamma}' dW/dr$. Le mécanisme physique de ce processus n'a pas été clarifié.

Le résultat majeur de cette thèse, est la mise en évidence expérimentale d'un écoulement faiblement turbulent induit par le comportement rhéofluidifiant du fluide. A notre connaissance ce résultat est nouveau et n'a jamais été signalé dans la littérature.

5.2 Perspectives

Les premières perspectives sont de nature à compléter l'ensemble des données dont on dispose et à répondre plus ou moins rapidement à certaines interrogations.

- Des mesures expérimentales de profils de vitesse axiale seront effectuées pour clarifier comment la disposition des deux rouleaux longitudinaux contrarotatifs est modifiée lorsqu'on change la forme de la section d'entrée.
- Il est prévu une modification du dispositif expérimental comportant une conduite de longueur plus importante $8m$ de façon à examiner comment évolue le degré d'asymétrie avec la position axiale.
- On envisage de faire des mesures de champs de vitesse par PIV combinée avec une caméra rapide. Le but étant de voir comment évolue un profil de vitesse axiale instantané au cours du temps.
- Etudier la deuxième phase de transition où on a observé une intermittence entre l'état asymétrique de l'écoulement et l'état où l'écoulement turbulent est développé. Il est en particulier évident, que la forme des puffs est fortement altérée par l'asymétrie de l'écoulement. C'est ce que nous avons noté à travers quelques mesures qui ne sont rapportées dans cette thèse.
- D'autres géométries pourraient être testées. On pense en particulier au cas de la conduite rectangulaire et aux écoulements du type Taylor Couette et Taylor Couette Poseuille.
- D'un point de vue théorique, une analyse non linéaire de stabilité ([Meseguer et Mellibovsky \(2007\)\(96\)](#)) de l'écoulement de Hagen-Poiseuille pour un fluide rhéofluidifiant devrait nous indiquer que le mode azimutal $m = 1$, est celui pour lequel la turbulence peut être entretenue. L'approche numérique a aussi l'avantage de pouvoir tenir compte ou pas de la perturbation en viscosité, et ressortir ainsi l'importance de ce terme.

A long terme, on pourrait reprendre l'équation de Karman Howarth et la réécrire pour des fluides non-newtoniens purement visqueux.

Annexe A

Equation de non-augmentation de l'énergie de la perturbation

Les expressions (A.1) et (A.2) ont été développées à partir de l'équation (2.144-2.146), qui définit un problème aux valeurs propres en termes de u et w si $m \neq 0$

$$\begin{aligned} -m^2 DW_{\ell} w &= 2\Lambda\mu \left[r^2 D^4 u - m^2 (2Lu - \alpha^2 u) - Lu \right] \\ &+ 2\Lambda\mu \left[6r \left(D^3 u + \frac{1}{r} D^2 u \right) - \alpha^2 r^2 \left(D^2 u + \frac{3}{r} Du \right) \right] \\ &+ 2\Lambda\mu \left[2m^2 \left(\frac{1}{r} Du - \frac{u}{r^2} \right) - 2m^2 \left(\frac{1}{r} Du + \frac{u}{r^2} \right) + \frac{m^4}{r^2} \right] \\ &+ 2\Lambda D\mu \left[2r^2 \left(D^3 u + \frac{2}{r} D^2 u \right) - m^2 \left(2Du - \frac{u}{r} \right) \right] \\ &+ 2\Lambda D\mu \left[rLu - \alpha^2 r^2 Du \right] + 2\Lambda (\mu_t - \mu) \alpha^2 m^2 u \\ &+ 2\Lambda D^2 \mu \left[r^2 \left(L + \alpha^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \\ &+ 2i\Lambda\mu \left[\alpha r^2 D^3 w + \alpha r \left(5D^2 w + \frac{3}{r} Dw \right) - (\alpha^3 r^2 + \alpha m^2) \left(Dw + \frac{2}{r} w \right) \right] \\ &+ 2i\Lambda D\mu \left[\alpha r^2 \left(2D^2 w + \frac{5}{r} w \right) - (\alpha^3 r + \alpha m^2) w \right] \\ &+ 2i\Lambda (\mu_t - \mu) \alpha m^2 Dw + 2i\Lambda D^2 \mu \left[\alpha r^2 D \right] \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
m^2 DW_\ell u = & 2\Lambda\mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) \left(Lw + \frac{1}{r^2} w - \frac{m^2}{r^2} w \right) + 2\alpha^2 r Dw \right] \\
& + 2\Lambda D\mu \left[(m^2 + \alpha^2 r^2) Dw \right] + 2\Lambda \frac{m^2}{r^2} D [(\mu_t - \mu) (Dw)] \\
& - 2i\Lambda\mu \left[\alpha r Lu + \alpha r^2 \left(D^3 u + \frac{3}{r} D^2 u \right) - \alpha r^2 \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) Du + \frac{\alpha m^2}{r} u \right] \\
& - 2i\Lambda D\mu \left[\alpha r^2 (Lu + \alpha^2 u) \right] + 2i\Lambda \frac{\alpha m^2}{r} D [(\mu_t - \mu) (ru)] \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

où $\mu = \left[|DW_\ell|^{(n-1)} + \frac{Hb}{DW_\ell} \right]$, $\mu_t = n|DW_\ell|^{(n-1)}$ et $\Lambda = \frac{1}{Re_{CE}}$

Annexe B

Détermination du nombre de Reynolds de Metzner et Reed

Une définition d'un nombre de Reynolds applicable pour tous les fluides quelque soit la géométrie est souhaitable afin de comparer les résultats avec ceux de la littérature : par exemple, la définition du nombre de Reynolds retenue est celle basée sur les travaux de Metzner et Reed (1955)(65) et Kozicki *et al.* (1966)(94).

En considérant l'écoulement en régime établi d'un fluide non élastique dans une conduite de section circulaire, on montre que la contrainte de cisaillement, $\hat{\tau}$, varie linéairement de zéro sur l'axe jusqu'à $\hat{\tau}_p$ à la paroi :

$$\hat{\tau} = \hat{\tau}_p \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \quad (\text{B.1})$$

En écrivant la définition du débit volumique que l'on intègre par partie et que l'on combine avec la relation précédente, on arrive à :

$$\frac{\hat{Q}}{\pi \hat{R}^3} = \frac{1}{\hat{\tau}_p^3} \int_0^{\hat{\tau}_p} \hat{\tau}^2 f(\tau) d\hat{\tau} \quad (\text{B.2})$$

C'est la relation de Rabinowitsch où $f(\tau) = -dW_\ell/dr$ est la loi rhéologique du fluide. Cette relation générale entre la perte de pression et le débit volumique peut également s'écrire sous une autre forme après dérivation :

$$\left(-\frac{dW_\ell}{dr} \right)_p = \tau_p \frac{d(8\hat{W}_d/\hat{D})}{d\tau_p} + 3 \left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}} \right) \quad (\text{B.3})$$

En introduisant des différentielles de logarithmes, on arrive à l'expression de Rabinowitsch-Mooney :

$$f(\hat{\tau}_p) = - \left(\frac{dW_\ell}{dr} \right)_p = \left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}} \right) \frac{d \left[\ln \left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}} \right) \right]}{d \left[\ln(\hat{\tau}_p) \right]} + 3 \left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}} \right) \quad (\text{B.4})$$

Koziki *et al.* (1966)(94) indiquent que cette relation peut être généralisée à des conduites de sections quelconques (annulaires, rectangulaires, triangles, ...). On définit alors :

$$\tau_A = \frac{1}{c} \oint_c \tau_p ds \quad (\text{B.5})$$

où c est la circonférence de la conduite, s la section. Les relations (B.3) et (B.4) deviennent :

$$f(\tau_A) = a\tau_A \frac{d\left(\frac{2\hat{W}_d}{R_h}\right)}{d\tau_A} + b \left(\frac{2\hat{W}_d}{R_h}\right) \quad (\text{B.6})$$

où R_h est un rayon hydraulique¹ et (a, b) sont deux paramètres géométriques pouvant être évalués en considérant le cas d'un fluide Newtonien. La relation précédente peut être intégrée et on obtient :

$$\frac{2\hat{W}_d}{R_h} = \frac{\tau_A^{-b/a}}{a} \int_{\tau_0}^{\tau_A} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau \quad (\text{B.7})$$

La vitesse maximale est donnée par :

$$\frac{\hat{W}_{\ell max}}{R_h} = \frac{1}{a\tau_A} \int_0^{\tau_A} f(\tau) d\tau \quad (\text{B.8})$$

A partir de (B.7) et (B.8), on détermine les paramètres géométriques a et b en considérant le cas d'un fluide Newtonien.

Metzner et Reed (65) ont étendu la définition du coefficient de frottement de Fanning, f , définissant ainsi le nombre de Reynolds Re' :

$$f = \frac{2\hat{\tau}_p}{\rho\hat{W}_d^2} = \frac{16}{Re'} \quad (\text{B.9})$$

La relation (B.6) implique que τ_p est une fonction unique de la quantité $8\hat{W}_d/D$. Par conséquent, on peut postuler que :

$$\tau_p = k' \left(\frac{8\hat{W}_d}{D}\right)^{n'} \quad (\text{B.10})$$

Ainsi :

$$Re' = \frac{\rho U^{2-n'} D^{n'}}{8^{n'-1} k'} \quad (\text{B.11})$$

¹Dans le cas d'une conduite cylindrique ce rayon hydraulique R_h est égal à $R/2$.

avec n' et k' définis par :

$$n' = \frac{d[\ln(\tau_p)]}{d\left[\ln\left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}}\right)\right]} \quad (\text{B.12})$$

et

$$k' = \tau_p \left(\frac{8\hat{W}_d}{\hat{D}}\right)^{-n'} \quad (\text{B.13})$$

La relation (B.4) permet de définir explicitement n' et k' :

$$n' = \frac{\int_{\tau_0}^{\tau_A} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau}{\tau_A^{b/a} f(\tau_A) - \frac{b}{a} \int_{\tau_0}^{\tau_A} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau} \quad (\text{B.14})$$

$$k' = a^{n'} \tau_A^{bn'/a+1} \left[\int_0^{\tau_A} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau \right]^{-n'} \quad (\text{B.15})$$

L'analyse du cas d'un fluide Newtonien en utilisant les relations (B.7) et (B.8) permet d'obtenir les paramètres géométriques a et b :

– Conduite cylindrique :

$$a = \frac{1}{4} \quad b = \frac{3}{4} \quad (\text{B.16})$$

– Canal plan :

$$a = \frac{1}{2} \quad b = 1 \quad (\text{B.17})$$

– Conduite annulaire :

$$a + b = \frac{(1 - \eta_1)^2}{1 + \eta_1^2 - \frac{1 - \eta_1}{\ln 1/\eta_1}} \quad (\text{B.18})$$

$$b = \frac{(1 - \eta_1)^2}{4 \left[1 - \frac{1 - \eta_1^2}{2 \ln 1/\eta_1} \left(1 - \ln \frac{1 - \eta_1^2}{2 \ln 1/\eta_1} \right) \right]} \quad (\text{B.19})$$

où η_1 est le rapport d'aspect. Par exemple, pour $\eta_1 = 0,421$: $a = 0,490$ et $b = 0,992$

Application : Dans une conduite cylindrique, les expressions de k' et n' pour différents modèles sont :

– Pour un fluide de Ostwald :

$$n' = n \quad (\text{B.20})$$

$$k' = k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^{n'} \quad (\text{B.21})$$

– Pour un fluide de Bingham :

$$n' = 1 - \frac{4\tau_0}{3\tau_p} \quad (\text{B.22})$$

$$k' = \tau_p K^{n'} \left\{ \tau_p \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_p} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau_0}{\tau_p} \right)^4 \right] \right\}^{-n'} \quad (\text{B.23})$$

– Pour un fluide de Herschel-Bulkley :

$$n' = \frac{(1-r_0) + \frac{2r_0(1-r_0)(1+\beta)}{2+\beta} + \frac{(1-r_0)^2(1+\beta)}{3+\beta}}{\beta+1-3(1-r_0) \left[r_0^2 + \frac{2r_0(1-r_0)(1+\beta)}{2+\beta} + \frac{(1-r_0)^2(1+\beta)}{3+\beta} \right]} \quad (\text{B.24})$$

$$k' = \left(\frac{k^\beta}{4} \right)^{n'} \left(\frac{\tau_0}{r_0} \right)^{1-n'\beta} \left\{ (1-r_0)^{1+\beta} \left[1 + \frac{2(1-r_0)(1+\beta)}{r_0(2+\beta)} + \frac{(1-r_0)^2(\beta+1)}{r_0^2(3+\beta)} \right] \right\}^{-n'} \quad (\text{B.25})$$

On vérifie bien que n' et k' se simplifient pour retrouver les résultats obtenus pour les lois de Ostwald, Bingham et Newton.

Annexe C

Cas d'un fluide rhéofluidifiant sans seuil : Solution de CMC7M1C

La figure (C.1), représente une série des profils de vitesses axiales moyennes mesurées à différents nombres de Reynolds basé sur le diamètre de la conduite, la vitesse débitante et la viscosité pariétale. Les mesures de vitesse sont effectuées dans un plan horizontal situé à une distance de 122 diamètres de la section d'entrée de la conduite (à une position axiale où le régime dynamique est pratiquement établi). En régime laminaire ($Re=630-1452$), il y a un très bon accord entre les relations théoriques caractérisées par le modèle de Cross, représenté en trait continu et les mesures expérimentales de vitesse axiale. Ceci qualifie l'installation expérimentale et les méthodes expérimentales utilisées. Cependant, à travers les deux régimes (transition et turbulent) à partir de $Re = 2490$, les symboles représentent les mesures expérimentales et les traits continus ont été tracés à partir de la moyenne des valeurs expérimentales à droite et à gauche de l'axe de la conduite. Les profils de la vitesse axiale moyenne sont axisymétriques pour toutes gammes de nombre de Reynolds. Ces résultats sont en accord avec les résultats mentionnés par [Escudier *et al.* \(1996\)\(8\)](#).

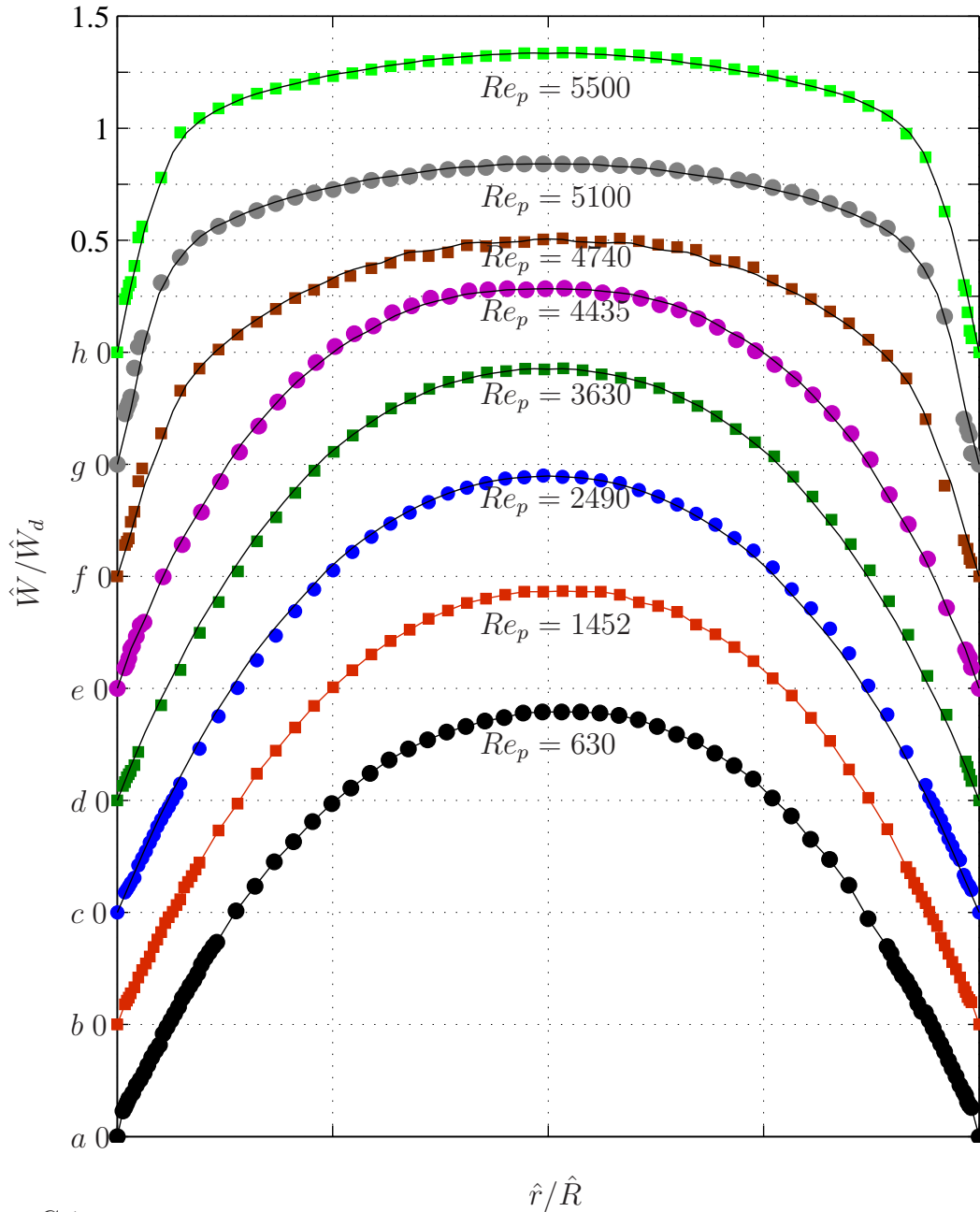


FIG. C.1 – Evolution des profils de vitesse axiale en fonction du nombre de Reynolds pour une solution de CMC à 2% en masse, ($m' = 0.67$, $k = 7.6$ ms, $\mu_0 = 0.5164$ Pa, $\mu_\infty = 32.46$ mPa.s) pour $\hat{\gamma}_v = 0.1 \leq \hat{\gamma} \leq 2000$ s $^{-1}$). Les mesures ont été effectuées le long d'un diamètre vertical à $\hat{z} = 122\hat{D}$. Les symboles désignent les données expérimentales. Le trait continu est le profil symétrique construit en prenant la moyenne arithmétique des vitesses mesurées de part et d'autre de l'axe de la conduite.

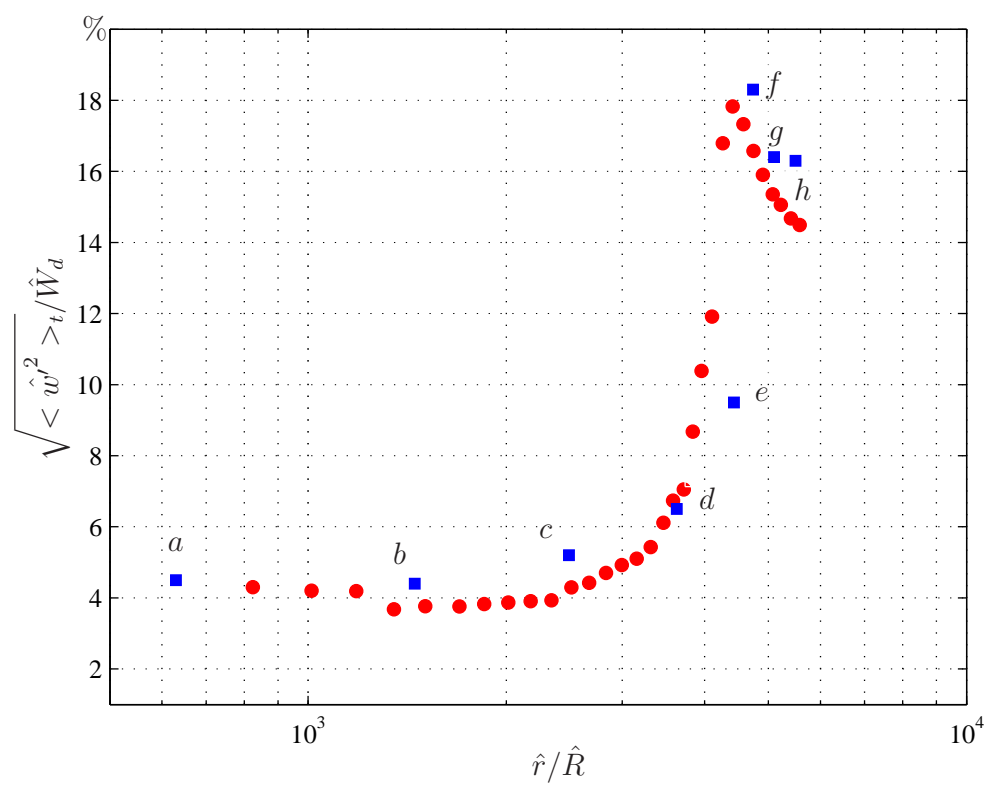


FIG. C.2 – Fluctuations de la vitesse axiale rapportées à la vitesse débitante pour indiquer le début de la transition. Mêmes paramètres rhéologiques que la figure (C.1).

Bibliographie

- [1] B. A. Toms, Proc. Int. Cong. Rheology (North-Holland, Amsterdam, 1949).
- [2] R. H. Hadolink, W. H. Haigh, ASME, Appl. Mech. Rev. **48**,351 (1995).
- [3] A. Groisman and V. Steinberg, Elastic turbulence in a polymer solution flow. Nature, **405**, 53-55 (2000).
- [4] R. Govindarajan, V. S. L'VOV, I. Procaccia, A. Sameen. Stabilization of hydrodynamic flows by small viscosity variations. Phy. Rev. E, **67**, 026310 (2003).
- [5] C. Nouar, A. Bottaro and J. P. Brancher, Delaying transition to turbulence in channel flow : revisiting the stability of shear-thinning fluids. J. Fluid Mech. **592**, 177-194 (2007).
- [6] F. T. Pinho and J. H. Whitelaw, Flow of non-Newtonian fluids in a pipe. J. non-Newtonian Fluid Mech., **34**, 129-144 (1990).
- [7] M. P. Escudier, F. Presti, S. Smith, Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **81**, 197-213 (1999).
- [8] M. P. Escudier, F. Presti, Pipe flow of a thixotropic liquid, Journal of Non-Newtonien Fluid Mech. **62**, 291-306 (1996).
- [9] R.E. Khayat, Chaos in the thermal convection of weakly shear-thinning fluids, J. of Non-Newtonian Fluid Mech., **63**, 153-178 (1996).
- [10] N. Ashrafi & R.E. Khayat, Shear-thinning-induced chaos in Taylor-Couette flow, J Phys. Rev. E., **61**, 1455-1467 (2000).
- [11] R. B. Bird, O. Hassager, Dynamics of polymeric liquids, **1**, Fluid Mechanics, John Wiley & Sons, (1987).

- [12] R. G. Larson, E. S. G. Shaqfeh, S. J. Muller, A purely elastic instability in Taylor-Couette flow., *J. Fluid Mech.*, **218**, 573-600 (1990).
- [13] R.G. Larson, Turbulence without inertia. *Nature*, (**405**), 27-28 (2000).
- [14] J. Peixinho, C. Nouar, C. Desaubry, B. Théron, Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe, *Journal of Non-Newtonien Fluid Mech.*, **128**, 172-184 (2005).
- [15] M. P. Escudier, R. J. Poole, F. Presti, C. Dales, C. Nouar, C. Desaubry, L. Graham, C. Desaubry, L. Pullum, Observation of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow of yield-stress and other shear-thinning liquids, *Journal of Non-Newtonien Fluid Mech.*, **127**, 143-155 (2005).
- [16] A. A. Draad, F. T. M. Nieuwstadt, The earth's rotation and laminar pipe flow., *J. Fluid Mech.* **361**, 297-308 (1998).
- [17] M. Rudman, H. M. Blackburn, L. J. W. Graham, L. Pullum, Turbulent pipe flow of shear thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, **118**, 33-48 (2004).
- [18] S. Eliahou, A. Tumin, I. Wygnanski, Laminar-turbulent transition in Poiseuille pipe flow subjected to periodic perturbation emanating from the wall. *J. Fluid Mech.* **361**, 333-349 (1998).
- [19] F.T. Pinho, A GNF framework for turbulent flow models of drag reducing fluids and proposal for a $k-\epsilon$ type closure, *J. non-Newtonian Fluid Mech.* **114**, 149-184 (2003).
- [20] A. Meseguer, L.N. Trefethen, Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 ., *J. Comput. Phys.* **186** 178-197 (2003).
- [21] W. Pfenniger, Boundary and flow control., G.V. Lachman, pp.970-980 (1961).
- [22] B. Hof, A. Juel and T. Mullin, Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244502 (2003).
- [23] M. I. Gavarini, A. Bottaro and F.T.M. Nieuwstadt, The initial stage of transition in pipe flow : role of optimal base-flow distortions., *J. Fluid. Mech.* **517**, 131-165 (2004).

- [24] J. Peixinho and T. Mullin, Finite-amplitude thresholds for transition in pipe flow., *J. Fluid. Mech.*, **582**, 169-178 (2007).
- [25] F. Waleffe, On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 883-900 (1997).
- [26] F. Waleffe, Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows., *Phys. Fluids*. **15**, 1517-1534 (2003).
- [27] H. Faisst and B. Eckardt, Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502 (2003).
- [28] H. Wedin, R. R. Kerswell, Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.* **508**, 333-371 (2004).
- [29] B. Hof, C.W.H. Van Doorne, J.Westerweel, F.T.M. Nieuwstadt, H. Faisst, B. Eckhardt, H. Wedin, R. R. Kerswell and F. Waleffe, Experimental observations of nonlinear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*, **302**, 1594-1598 (2004).
- [30] F. Busse, Visualizing the dynamics of the onset of turbulence. *Science*, **305**, no. 5690, 1574-1575 (2004).
- [31] N. Kabouya, Influence de la contrainte seuil sur la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoplastique : Etude modale et non modale, Thèse (UHP), (2005).
- [32] D. Biau, H. Soeuid and A. Bottaro, Transition to turbulence in duct flow., *J. Fluid. Mech.* **596**, 133-142 (2008).
- [33] B. Eckhardt, T. M. Schneider, B. Hopf and J. Westerweel, Turbulence in pipe flow., *Annual Review of Fluid Mechanics*. **39**, 447-468 (2007).
- [34] J. Peixinho, Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite, Thèse (UHP), (2004).
- [35] R. B. Bird, G. C. Dai, The rheology and flow of viscoplastic materials, *Reviews in Chemical Engineering*, **1**(1), 1-70 (1983).

- [36] J. G. Oldroyd, "A rational formulation of the equations of plastic flow for a Bingham solid", Proc. Camb. Phil. soc. **43**, 100-105 (1947).
- [37] J. G. Oldroyd, "Two dimensional plastic flow of a Bingham solid. A plastic boundary-layer theory for slow motion", Proc. Camb. Phil. soc. **43**, 383-395 (1947).
- [38] A. N. Beris, J. A. Tsamopoulos, R. C. Armstrong, R. A. Brown, Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. Journal of Fluid Mech. **50**, 225-251 (1985).
- [39] P. Coussot, Saffman-Taylor instability in yield-stress fluids. Journal of Fluid Mech., **380**, 362-376 (1998).
- [40] I. A. Frigaard, S. D. Howison, I. J. Sobey, On the stability flow of a Bingham fluid, Journal of Fluid Mech. **263**, 133-150 (1994).
- [41] R. R. Huilgol, Variational principle and variational inequality for a yield stress fluid in the presence of slip, Journal of Non-Newtonian Fluid Mech., **75**, 231-251 (1998).
- [42] P. J. Schmid, D. S. Henningson, Stability and Transition in Shear Flows. Springer-Verlag, New york (2000).
- [43] M. R. Khorrami, M. R. Malik et R. L. Ash, Application of spectral collocation techniques to the stability of swirling flows. Journal of Computational Physics, **81**, 206-229 (1989).
- [44] J. E. Mott, D. D. Joseph, Stability of parallel flow between concentric cylinders, Physics of fluids, **11**, 2065-2073 (1968).
- [45] R. Mahadevan, G. M. Lilley, The stability of axial flow between concentric cylinders to asymmetric disturbances, In : Agard Conference Proceedings No. 224, "Laminar-turbulent transition", 9/1 - 9/10 (1977).
- [46] L. Preziosi, F. Rosso, Stability of a viscous liquid between sliding pipes, Physics of fluids/A, **2**, 1158-1162 (1990).
- [47] Ph. Gittler, Stability of axial Poiseuille-Couette flow between Concentric cylinders, Acta Mechanica, **101**, 1-13 (1993).

- [48] S. J. Cowley, F. T. Smith, On the stability of Poiseuille-Couette : a bifurcation from infinity, *Journal Of Fluid Mechanics*, **156**, 83-100 (1985).
- [49] V. M. Sadeghi and B. G. Higgins, Stability of sliding Couette-Poiseuille flow in an annulus subject to axisymmetric and asymmetric disturbance. *Phys. Fluids A* **3**, 2092-2104 (1991).
- [50] L. M. Mack, A numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the Blasius boundary layer, *Journal of Fluid Mech.* **73**, 497-520 (1976).
- [51] P. L. O'Sullivan, K. S. Breur, Transition growth in circular pipe flow. I : Linear disturbances. *Physics of fluids.* **6**(11), 3643-3651 (1994).
- [52] G. P. Galdi and M. Padula, A new approach to energy theory in the stability of fluid motion, *Aich. Rat. Mechs Anal.* **110**(3), 187-286 (1990).
- [53] L. N. Trefethen, Pseudospectre of linear operators, *SIAM Rev.* **39** 383-406 (1997).
- [54] S. C. Reddy, P. T. Schmid, D. S. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator *SIAM Journal of Applied Mathematics*, **53**(1), 15-47 (1993).
- [55] P. J. Schmid, D. S. Henningson, Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow, *J. fluid Mech.* **277**, 197-225 (1994).
- [56] C. Nouar, N. Kabouya, J. Dusek, M. Mamou, Modal and non-modal linear stability of the plane Bingham-Poiseuille flow, *Journal of Fluid Mech.* **577**, 211-239 (2007).
- [57] C. Métivier, C. Nouar, J. P. Brancher, Linear Stability involving the Bingham model when the yield stress approaches zero, *Physics of fluids*, **17**(10) 11, 104106.1-104106.7 (2005).
- [58] A. Meseguer, A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow I : Linear stability and transient growth. Report no. 00/18 (2000).
- [59] A. Bottaro, P. Corbett, et P. Luchini, The effect of base flow variation on flow stability, *J. Fluid Mech.* **476**, 293-302 (2003).

- [60] I. A. Frigaard, C. Nouar, On three-dimensional linear stability of Poiseuille flow of Bingham fluids, *Physics of fluids*, **15**(10), 2843-2851 (2003).
- [61] D. D. Joseph, S. Carmi, Stability of Poiseuille flow in pipes, annuli and channels, *Quarterly of applied Mathematics*, **26**(4), 575-599 (1969).
- [62] G. B. Froishteter, G. V. Vinogradov, The laminar flow of plastic disperse systems in circular tubes, *Rheol. Acta*, **19**, 239-250 (1980).
- [63] F. Durst, S. Ray, B. Unsal, O. A. Bayoumi, The development lengths of laminar pipe and channel flows. *J. Fluids Eng.* **127**, 1154-1160 (2005).
- [64] R. J. Poole, B. S. Ridley, Development-length requirements for fully developed laminar pipe flow of inelastic non Newtonian liquids. *J. Fluids Eng.* **129**, 1281-1287 (2007).
- [65] A. B. Metzner, J. C. Reed, Flow of non-Newtonian fluids-Correlation of laminar, transition and turbulent-flow regions, *A.I.Ch.E.J.* **1**, 434-440 (1955).
- [66] A. El Karkri, Contribution à l'étude de la structure de l'écoulement pariétal sur une plaque plan, comparaison entre fluides Newtoniens et non Newtoniens., Thèse (INPL), (1985).
- [67] M. Alain, Le Carbopol 940 : Caractérisation physicochimique et processus de gélification, Thèse de doctorat en pharmacie, Université de Montpellier 1, Faculté de Pharmacie (1973).
- [68] J. M. Piau, Carbopol gels : Elastoviscoplastic and slippery glasses made of individual swollen sponges Meso- and macroscopic properties, constitutive equations and scaling laws, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **23**, 1-29 (2007).
- [69] A. M. V. Putz, T. L. Burghelca, The solid-fluid transition in a yield stress thinning physical gel. Article soumis à *Rheol. Acta*. Juin (2007).
- [70] C. W. B. Macosco, *Rheology principles, measurements and applications*. VCH publishers (1994).
- [71] H. A. Barnes, J. F. Hutton, K. Walters, *An introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, (1989).

- [72] D. C. Venerus, Free surface effects on normal stress measurements in cone and plate flow. *Appl. Rheol.* **17**(3), 364-394 (2007).
- [73] J. P. Brancher, Comportement d'un ferrofluide dans un champ magnétique tournant et application. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, **7**(3), 329-350 (1988).
- [74] P. Coussot, J. S; Raynaud, F. Bertrand, P. Moucheront, J. P. Guilbaud, H. T. Huynh, S. Jarny, D. Lesueur, Coexistence of liquid and solid phases in flowing soft glassy materials, *phy. Rev. Lett.*, **88**, 218301 (2002).
- [75] P. C. F. Møller, S; Rodts, M. A. J. Michels, D. Bonn, Shear banding and yield stress in soft glassy materials, *Phys. Rev. E* **77**, 041507 (2008).
- [76] F. Varnik, L. Bocquet, J. L. Barrat, L. Berthier, Shear localization in a model glass, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 095702 (2003).
- [77] F. Durst, J. H. Whitelaw, Principles and practice of laser Doppler anemometry, Academic Press, (1976).
- [78] J. T. Park, R. J. Mannheimer, T. A. Grimley, T. B. Morrow, Pipe flow measurement of a transparent non-Newtonian slurry, *Journal of Fluids Engineering*, **111**, 331-336 (1989).
- [79] I. C. Walton, S. H. Bittleston, The axial flow of a Bingham plastic in a narrow eccentric annulus., *J. Fluid Mech.* **222**, 39-60 (1991).
- [80] C. C. T. Pringle, R. R. Kerswell, Asymmetry, Helical, and Mirror-Symmetric Traveling waves in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 074502 (2007).
- [81] T. M. Schneider, B. Echardt, and J. A. Yorke, Turbulence transition and the edge of chaos in pipe flow., *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 034502 (2007).
- [82] P. Chassaing, Turbulence en mécanique des fluides. Cépaduès - Edition (2000).
- [83] R. Adrian, C. S. Yao, Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry. *Exp. Fluids* **5**, 17-28 (1987).
- [84] H. Nobach. E. Møller, and C. Tropea, Efficient estimation of power spectral density from Laser Doppler Anemometer Data. *Exp. Fluids*, **24**, 489-498 (1998).

- [85] L. Simon, J. Fitzpatrick, An improved sample-and-hold reconstruction procedure for estimation of power spectra from LDA data. *Exp. Fluids* **37**, 272-280 (2004).
- [86] J. Fitzpatrick, L. Simon, Estimation of cross-power spectra using sample-and-hold reconstruction of laser Doppler anemometry data. *Exp. Fluids* **39**, 954-965 (2005).
- [87] R. H. Kraichnan, Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **10**, 1417-1423 (1967).
- [88] R. H. Kraichnan, Inertial-range transfer in two and three dimensional turbulence, *J. Fluid Mech.* **47**(3), 525-535 (1971).
- [89] P. Tabeling, Two-dimensional turbulence : a physicist approaches. Report and progress in physics, (2002).
- [90] M. Lesieur, Turbulence in fluids, Kluwer Academic Publishers, (1990).
- [91] G. K. Batchelor, Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids. suppl. II*, **12** 233-239 (1969).
- [92] J. Paret, P. Tabeling, Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy : experimental observations, *Phys. Fluids.* **10** 3126-3136 (1998).
- [93] G. K. Batchelor, Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid. *J. Fluid Mech.* **5** 113-133 (1959).
- [94] W. Kozocki, C. H. Chou, C. Tiu, Non-Newtonian flow in ducts of arbitrary cross-sectional shape. *Chemical Engineering Science*, **21**, 665-679 (1966).
- [95] B. Güzel, T. Burghelea, I. A. Frigaard, D. M. Martinez, Observations of laminar-turbulent transition of a yield stress fluid in Hagen-Poiseuille flow., Article soumis à *J. Fluid Mech.* (2008)
- [96] A. Meseguer, F. Mellibovesky, On a solenoidal fourier-Chebyshev spectral methode for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow., *Appl. Num. Math.* **57**(8), 920-938 (2007).

Résumé

La transition vers la turbulence pour un fluide rhéofluidifiant avec seuil en écoulement dans une conduite cylindrique est étudiée. Une analyse linéaire de stabilité est effectuée moyennant des approches modale et non modale. Les résultats numériques montrent que l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide à seuil est linéairement stable. L'effet du comportement rhéologique du fluide sur les caractéristiques de la perturbation optimale est clairement mis en évidence. Pour de faibles valeurs du nombre d'Herschel-Bulkley ($Hb \ll 1$), la perturbation optimale se présente pratiquement sous forme de rouleaux longitudinaux et l'amplification de l'énergie est assurée par le mécanisme lift-up. Par contre pour des valeurs suffisamment élevées de Hb , la perturbation optimale est axisymétrique et l'amplification de l'énergie est assurée par le mécanisme Orr. D'un point de vue expérimental, l'écoulement d'une solution de Carbopol à 0.2 % en masse dans une conduite cylindrique est étudié à partir de la mesure des profils des vitesses axiales et analyse statistique des fluctuations de celle-ci. Il a été constaté qu'en régimes laminaire et turbulent, les profils moyens (au sens temporel) sont axisymétriques et présentent une asymétrie croissante avec le nombre de Reynolds lors de la transition. Une description tridimensionnelle de cette asymétrie a été obtenue à partir des profils de vitesse axiale mesurés à différentes positions angulaires. Les résultats obtenus suggèrent l'existence d'une structure cohérente robuste constituée de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs de longueur comparable à celle du dispositif expérimental. L'analyse statistique des fluctuations de la vitesse axiale fait apparaître deux phases lors de la transition vers la turbulence. Dans la première phase, le système passe du régime laminaire à un état non linéaire asymétrique où les spectres de puissance sont très similaires à ceux observés dans le cas d'une turbulence bi-dimensionnelle. La deuxième phase correspond au passage de cet état asymétrique à un régime turbulent avec apparition de spots classiques de la turbulence hydrodynamique.

Mots clés : transition laminaire turbulent ; fluide à seuil ; écoulement de Hagen-Poiseuille.

Laminar-turbulent transition of a yield stress fluid in pipe flow

Abstract

The transition to turbulence for shear-thinning fluid with a yield-stress in a cylindrical pipe flow is studied. A linear stability analysis is performed using modal and non-modal approaches. The numerical results show that the Hagen-Poiseuille flow of yield stress fluid is linearly stable. The effect of rheological behavior of the fluid on the characteristics of the optimal perturbation is clearly highlighted. At very low Herschel-Bulkley number ($Hb \ll 1$), the optimal perturbation consists of almost streamwise vortices, and the amplification of the kinetic energy is provided by the lift-up mechanism. In contrast for sufficiently large values of Hb , the optimal perturbation is axisymmetric and the growth of the kinetic energy is provided by the Orr-mechanism. From experimental point of view, the flow of 0.2 wt % aqueous solution of Carbopol 940 in a pipe is investigated from the measurement of the mean, *i.e.*, time-averaged, axial velocity profiles as well as the statistical analysis of the fluctuations. It is observed that the velocity profiles are axisymmetric in the laminar and turbulent regimes, and present an increasing asymmetry with increasing Reynolds number in the transitional regime. A three-dimensional description of this asymmetry is provided from velocity profiles measurements at different azimuthal positions. The observed transitional flow suggest the existence of a robust non-linear coherent structure characterized by two weakly modulated counter-rotating longitudinal vortices, which length is comparable to that of the test section. The statistical analysis of the axial velocity fluctuations indicate that the transition occurs essentially in two stages. The first stage corresponds to the transition from the laminar regime to a stable non linear asymmetric state, where the spectra of axial velocity fluctuations are similar to those obtained in the case of two-dimensional turbulence. The second stage corresponds to the transition from this non linear asymmetric state to the hydrodynamic turbulence with the apparition of the classical spots of turbulence.

Mots clés : laminar-turbulent transition ; yield stress fluid ; Hagen-Poiseuille flow.