



HAL
open science

Etude et analyse numérique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction dans les milieux semi-transparents : application aux milieux fibreux

Fatmir Asllanaj

► **To cite this version:**

Fatmir Asllanaj. Etude et analyse numérique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction dans les milieux semi-transparents : application aux milieux fibreux. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2001. Français. NNT : 2001NAN10208 . tel-01748569

HAL Id: tel-01748569

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748569>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



U.F.R. STMP
Ecole Doctorale EMMA
Département de Formation Doctorale Mécanique - Energétique

S.C.D. - U.H.P. NANCY 1
BIBLIOTHÈQUE DES SCIENCES
Rue du Jardin Botanique
54600 VILLERS-LES-NANCY

Thèse

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

en Mécanique et Energétique

par

Fatmir ASLLANAJ

Etude et analyse numérique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction dans les milieux semi-transparents : application aux milieux fibreux.

soutenue publiquement le 14 décembre 2001

Composition du jury :

<i>Président :</i>	J. F. SACADURA,	Professeur, Lyon
<i>Rapporteurs :</i>	P. LYBAERT,	Professeur, Mons (Belgique)
	Ph. LAURENCOT,	Chargé de Recherche CNRS, Toulouse
<i>Examineurs :</i>	F. CONRAD,	Professeur, U.H.P., Nancy 1
	D. LEMONNIER,	Chargé de Recherche CNRS, Poitiers
	R. GY,	Chef de Service Saint Gobain Recherche, Aubervilliers
<i>Directeurs de thèse :</i>	G. JEANDEL,	Professeur, U.H.P., Nancy 1
	J.R. ROCHE,	Maître de conférences, U.H.P., Nancy 1

Remerciements

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a été effectué en grande partie au Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA – UMR 7563), et à l'Institut de Mathématiques Elie Cartan de Nancy (IECN – UMR 7502), dans le cadre d'une collaboration établie entre ces deux laboratoires.

Je tiens tout d'abord à remercier particulièrement mes deux codirecteurs de thèse, d'une part :

- *Monsieur Gérard JEANDEL, Professeur au LEMTA. Il m'a accueilli au sein de son équipe de recherche en transfert radiatif et m'a permis de traiter un sujet très intéressant dont l'application industrielle est importante. Il m'a initié au domaine de la thermique avec patience. Il a su me conseiller et rester très disponible tout au long de ce travail ;*

et d'autre part :

- *Monsieur Jean Rodolphe ROCHE, Maître de conférences et HDR à l'IECN. Je lui dois ma formation de chercheur numéricien. Il a suivi le déroulement de cette thèse avec grand intérêt et m'a prodigué de nombreux et précieux conseils. Les discussions fructueuses que nous avons eues ensemble ont contribué à la réalisation de ce travail ;*

Je remercie également Didier SCHMITT, Maître de Conférences à l'IECN, pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée en ce qui concerne les aspects théoriques de ce travail.

Mes remerciements vont à Arnaud MILANDRI avec qui j'ai eu plaisir à travailler.

Je suis aussi très reconnaissant aux membres du jury :

Je suis en particulier très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Jean François SACADURA, Professeur à l'INSA de Lyon, de présider ce jury et je le remercie vivement d'avoir bien voulu examiner ce travail.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur Paul LYBAERT, Professeur à la Faculté Polytechnique de Mons en Belgique, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de juger ce travail et, de surcroît, d'en être rapporteur.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Philippe LAURENCOT, Chargé de Recherche CNRS à Toulouse, pour s'être intéressé à mon travail et avoir bien voulu être rapporteur. Les discussions que nous avons eues ont été très importantes.

Je suis particulièrement flatté pour l'intérêt que Monsieur Francis CONRAD, Professeur à l'UHP de Nancy 1, a porté à ce travail en acceptant de faire partie de ce jury. L'occasion m'est ici offerte de le remercier vivement pour m'avoir attribué un bureau à l'IECN durant toute la période de la thèse.

Ma gratitude va également à Monsieur Denis LEMONNIER, Chargé de Recherche CNRS à Poitiers, pour avoir accepté de participer au jury et pour ses remarques constructives.

Je tiens également à remercier Monsieur René GY, chef de service à Saint Gobain Recherche, pour l'intérêt d'un industriel sur cette étude.

J'aimerais adresser maintenant une pensée très affectueuse à ma famille. Je dédis ce travail à mes très chers parents pour qu'ils puissent se réjouir du fruit de l'éducation qu'ils m'ont donnée. Je remercie chaleureusement mes frères et sœurs pour leur amour et leurs encouragements. En particulier, je remercie mon grand frère Ramis pour m'avoir soutenu durant toutes ces années. J'ai aussi une pensée pour ma nièce Dreniça. Que tous trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

A présent, je voudrais exprimer ma sympathie à l'ensemble des personnels de recherche et d'enseignement qui m'ont apporté leur aide ou qui ont contribué à rendre mon séjour agréable au cours de ces trois années.

Je souhaite particulièrement remercier les membres de l'équipe de recherche du LEMTA au sein de laquelle j'ai travaillé, pour leur collaboration et l'ambiance détendue qu'ils ont su entretenir ; notamment Messieurs A. WARIN et B. MONOD (en me rappelant les bons moments passés ensemble au Canada avec le groupe à Chantal...), A. MILANDRI, D. LACROIX, G. PARENT, X. BRIGE et enfin Madame Nicole NUSSMANN qui a eu la gentillesse de relire mon mémoire.

Je remercie également les membres de l'équipe EDP de l'IECN.

Mes remerciements s'adressent aussi au personnel enseignant de l'ESSTIN que j'ai côtoyé et qui m'a permis d'aborder l'enseignement dans les meilleures conditions.

Je tiens enfin à remercier mes compagnons de thèse avec lesquels j'ai passé de très bons moments : Haykel, Anis, Arian, Hervé, Gilles, Ramzi, Azzedine, Nada, Hend, Samuel, Benjamin, Franck,.....

Table des matières

Introduction	1
---------------------------	---

Chapitre I : Modèles régissant les transferts thermiques

1.1	Transfert de chaleur par rayonnement : l'équation du transfert radiatif	15
1.1.1	L'équation du transfert radiatif pour un milieu à faces parallèles	24
1.1.2	La symétrie azimutale.....	25
1.2	Transfert de chaleur par conduction : l'équation de conservation de l'énergie.....	26
1.3	Récapitulation du modèle 1 D utilisé	30
1.4	Conditions aux limites	31
1.4.1	Températures imposées aux frontières	31
1.4.2	Flux imposés aux frontières	32
1.4.2.1	Réception du rayonnement par un corps : réflexion, absorption et transmission.....	33
1.4.2.2	Conditions aux limites radiatives pour un milieu semi-transparent avec des surfaces semi-transparentes	36
1.4.2.3	Conditions aux limites thermiques pour un milieu semi-transparent avec des frontières semi-transparentes	37
1.4.2.4	Hypothèse simplificatrice de frontières transparentes.....	40
1.4.2.5	Le coefficient d'échange convectif	41
1.5	Conclusion.....	43

Chapitre II : Analyse mathématique du problème en régime stationnaire

2.1	Introduction et principaux résultats	45
2.2	Existence et régularité des solutions pour le système couplé.....	49
2.2.1	Existence et unicité de la solution pour un problème aux limites auxiliaire.....	49
2.2.2	Existence et régularité des solutions pour le système couplé.....	54
2.2.2.1	Problème de point fixe compact.....	54
2.2.2.2	L'existence de solutions pour le système couplé	63

2.2.2.3	Régularité des solutions pour le système couplé.....	65
2.3	Unicité de la solution pour le système couplé.....	66
2.3.1	Expression du terme source radiatif en fonction de la température	66
2.3.2	Unicité de la solution pour le système couplé.....	72
2.4	Conclusion.....	73

Chapitre III : Présentation de quelques méthodes numériques en régime stationnaire

3.1	Introduction	75
3.2	Résolution numérique de l'ETR en régime stationnaire	81
3.2.1	La discrétisation angulaire.....	81
3.2.2	La discrétisation spatiale	87
3.2.2.1	Méthode par diagonalisation	91
3.2.2.2	Méthode par différences finies	98
3.2.3	La discrétisation spectrale	103
3.3	Résolution numérique de l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire	104
3.4	Résolution numérique du système couplé en régime stationnaire.....	107
3.4.1	Calcul des flux et du terme source radiatif.....	107
3.4.2	Résolution numérique du système couplé en régime stationnaire.....	109
3.5	Conclusion.....	110

Chapitre IV : Analyse d'un schéma numérique en régime stationnaire

4.1	Introduction et principaux résultats.....	115
4.2	Convergence du schéma numérique pour le système couplé	122
4.2.1	Existence et unicité de la solution d'un schéma numérique pour un problème aux limites auxiliaire	122
4.2.2	Convergence d'un schéma numérique pour un problème aux limites auxiliaire.....	128
4.2.3	Problème de point fixe	134
4.2.4	Convergence du schéma numérique pour le système couplé	147
4.3	Conclusion.....	153

Chapitre V : Présentation d'une méthode numérique en régime transitoire

5.1	Introduction	157
5.2	Semi-discrétisation en espace de l'équation de conservation de l'énergie par la méthode des éléments finis.....	159
5.2.1	Formulation variationnelle pour le problème associant les conditions aux limites de températures imposées.....	160
5.2.2	Approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux	

limites de températures imposées	162
5.2.3 Formulation variationnelle pour le problème associant les conditions aux limites de flux	164
5.2.4 Approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux limites de flux	166
5.3 Résolution des systèmes d'équations différentielles en temps	168
5.4 Résolution numérique du système couplé en régime transitoire	168
5.4.1 Calcul des flux et du terme source radiatif	169
5.4.2 Résolution numérique du système couplé en régime transitoire	171
5.5 Conclusion	173
 Chapitre VI : Résultats numériques : application à un milieu réel de fibres de silice	
6.1 Introduction	175
6.2 Résultats numériques en régime stationnaire	177
6.3 Résultats numériques en régime transitoire	191
6.3.1 Températures imposées aux frontières	191
6.3.2 Conditions aux limites de flux	192
6.4 Conclusion	196
 Conclusion et perspectives	 199
 Annexes	 203
 Nomenclature	 233

Introduction

Présentation et contexte du sujet

Le mémoire que nous allons présenter porte sur la modélisation, l'étude théorique et la résolution numérique des transferts de chaleur à travers les milieux semi-transparentes monodimensionnels et anisotrope. Nous appliquerons notre modèle au cas des milieux isolants fibreux à base de silice et nous mettrons en évidence les résultats typiques de ce type de matériaux.

Le transfert de chaleur par rayonnement, mais aussi par conduction, a fait l'objet de nombreuses études à travers le monde ces dernières années. Son importance dans l'isolation thermique a poussé les chercheurs à étudier et à modéliser plus finement ses propriétés radiatives. Les deux modes majeurs de transfert de chaleur dans les matériaux isolants que nous allons étudier sont le rayonnement et la conduction. Les travaux de thèse de Guilbert [1] et Boulet [2] ont montré que le rayonnement peut représenter jusqu'à la moitié du transfert de chaleur dans ces milieux à des températures comprises entre 300 à 400 K. Il y a quelques années le transfert radiatif était calculé à partir de coefficients obtenus grâce à des modèles empiriques qui se sont révélés très vite limités. On a donc essayé de modéliser le transfert radiatif à partir de modèles mathématiques. Depuis, les connaissances sur le sujet n'ont cessé de s'étendre. Aujourd'hui, on constate que, si tous les aspects théoriques possibles de l'interaction rayonnement-conduction dans les milieux semi-transparentes ont été traités, ou du moins abordés :

- régime stationnaire/transitoire,
- géométrie monodimensionnelle et étendue aux autres dimensions (cartésienne, cylindrique, sphérique), avec/sans symétrie azimutale, modèle deux/multiflux,
- milieux gris/non gris, homogènes/non homogènes,
- milieux diffusants/non diffusants (isotropes ou non),
- frontières transparentes, opaques (émission et réflexion diffuses/spéculaires, grises/non grises) ou semi-transparentes, températures imposées ou conditions de flux,
- gamme de températures étendue,
- propriétés thermophysiques constantes ou variant avec la température,
- transferts couplés à la convection,....

rare encore sont les travaux qui les intègrent dans leur pluralité. Les études actuelles portent sur des conditions complexes, plus conformes aux réalités industrielles, mais nécessitant souvent beaucoup de patience et d'effort de la part des scientifiques, pour n'apporter parfois

que quelques éléments d'informations très ponctuels. Ces progrès, on les doit à la fois au formidable essor des méthodes et techniques diverses de résolution numérique des problèmes, et au spectaculaire développement des puissances de calcul des ordinateurs qui permettent de les mettre en œuvre.

Plusieurs techniques ont été développées pour effectuer des calculs de simulation dans ces milieux semi-transparents, au niveau du rayonnement, de la conduction, de la convection dans certaines situations, ainsi qu'au niveau du couplage entre ces modes de transferts. L'utilisation de ces techniques de calcul en simulation doit être fondée sur des modèles adéquats, capables de décrire la réalité physique considérée. Cette aptitude des modèles repose, parmi d'autres éléments, sur une utilisation de valeurs de propriétés thermophysiques caractérisant bien le milieu à simuler. La caractérisation d'un milieu se traduit donc par la détermination de ses propriétés. Dans le transfert radiatif, les besoins en données sont de plus en plus poussés, puisque les calculs doivent être faits en tenant compte des variations spatiales, angulaires et spectrales du rayonnement. Ainsi, les propriétés correspondantes doivent contenir des informations sur leur évolution directionnelle et spectrale, en fonction de la température. Guilbert [1] a montré que les milieux fibreux isolants ne peuvent pas être considérés comme gris. Par ailleurs, il a montré qu'ils sont absorbants, émissifs et diffusent de façon fortement anisotrope. Dans le cas des transferts conductif et convectif, les propriétés thermophysiques (la chaleur massique, la conductivité thermique et le coefficient d'échange par convection) doivent prendre en compte la variation en fonction de la température. Les travaux réalisés au LEMTA et à Saint Gobain sur la détermination des propriétés radiatives et thermiques des matériaux fibreux isolants [1,2,3,4] nous permettront de présenter une étude qui tient compte de ces comportements radiatifs et thermiques complexes.

Le recensement des travaux portant sur les études stationnaire et transitoire du phénomène de couplage dans les milieux semi-transparents montre que, jusqu'ici, il existe assez peu d'études sur le régime transitoire et, pour la majeure partie, les milieux considérés sont gris non diffusants [5-8] ou, encore avec une diffusion isotrope [9-15]. Certains auteurs considère toutefois des milieux non-gris non diffusants [16], ou encore avec une diffusion isotrope [17], parfois même avec une diffusion anisotrope [18]. De plus, les problèmes associant les températures imposées aux frontières ont été largement modélisés, mais il existe assez peu d'études portant sur les conditions de flux [19-27]. Cependant, les enjeux pratiques et économiques demeurent importants. Nous verrons que les moyens mathématiques et numériques que nous mettons en œuvre permettent de répondre dans leur complexité à certaines de ces questions. Par ailleurs, notons que, dans les références que nous venons de citer, les milieux fibreux ne sont pratiquement pas étudiés.

Ainsi, le modèle que nous établissons est très complet par rapport à ceux existant dans la littérature, puisque nous considérons un modèle multiflux. Les milieux étudiés sont non gris, anisotropes, absorbants, diffusants et émissifs. Les propriétés thermophysiques (la chaleur massique $c_p(T)$, la conductivité thermique $\lambda_c(T)$ et les coefficients d'échange par convection $h_o(T)$ et $h_E(T)$) varient avec la température.

La thématique abordée est donc pluridisciplinaire puisqu'elle concerne la physique, la mécanique énergétique, la thermique, les mathématiques... Par ailleurs, la diversité du thème de recherche fait que nous disposons d'une littérature importante sur le sujet.

Présentation des résultats de la thèse

Dans cette thèse, les différents chapitres peuvent être lus de manière quasi indépendante l'un de l'autre. La numérotation est locale à chaque chapitre. Les références bibliographiques se trouvent en fin de chaque chapitre. Nous présentons ici les problèmes abordés et nous annoncerons les résultats principaux obtenus dans cette thèse chapitre par chapitre. A la fin de cette introduction, nous donnons les publications réalisées à l'issue de ce travail.

Chapitre I : Modèles régissant les transferts thermiques

Dans ce premier chapitre, nous nous intéressons à la modélisation mathématique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction à travers les milieux semi-transparents. Ceci dans le cas d'une géométrie monodimensionnelle (adaptée au cas d'une tranche plane) en régime transitoire, avec des conditions de température ou de flux imposées aux frontières, avec et sans symétrie azimutale. Le modèle utilisé se compose d'une équation de la chaleur non linéaire (l'équation de conservation de l'énergie) régissant la température dans le milieu et de l'équation du transfert radiatif (ETR) qui est une équation de transport intégral-différentielle, régissant le champ de luminance monochromatique dans le milieu, le couplage étant dû, d'une part au terme source d'énergie radiative et, d'autre part, au terme d'émission propre du milieu qui dépend de la température. Par ailleurs, la modélisation du transfert radiatif nécessite la connaissance d'un certain nombre de coefficients caractérisant les propriétés radiatives du milieu : σ_a le coefficient d'absorption, σ_s le coefficient de diffusion et P la fonction de phase. Le coefficient d'extinction est défini par $\sigma_e = \sigma_a + \sigma_s$. Ces coefficients interviennent dans l'ETR et nous supposons qu'ils sont donnés.

Si l'on désigne E l'épaisseur du milieu et t_f l'instant où le régime stationnaire est atteint, alors le système couplé d'équations en régime transitoire s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L(x, \mu, \omega, \lambda, t)}{\partial t} + \mu \cdot \frac{\partial L(x, \mu, \omega, \lambda, t)}{\partial x} = \\ \sigma_a(\mu, \omega, \lambda) \cdot L^o(T(x, t), \lambda) - \sigma_e(\mu, \omega, \lambda) \cdot L(x, \mu, \omega, \lambda, t) \\ + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^1 \sigma_s(\mu', \omega', \lambda) \cdot P((\mu', \omega') \rightarrow (\mu, \omega), \lambda) \cdot L(x, \mu', \omega', \lambda, t) \, d\mu' \, d\omega' \end{aligned} \quad (0.1)$$

$$\forall (x, \mu, \omega, \lambda, t) \in (0, E) \times [-1, 1] \times [0, 2\pi] \times (0, \infty) \times (0, t_f]$$

$$\rho \cdot c_p(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_c(T(x,t))) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = S_r(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (0.2)$$

avec

$$S_r(x,t) = -\frac{\partial Q_r}{\partial x}(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (0.3)$$

$$Q_r(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 L(x,\mu,\omega,\lambda,t) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (0.4)$$

$$Q_c(x,t) = -\lambda_c(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (0.5)$$

$$Q_t(x,t) = Q_r(x,t) + Q_c(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (0.6)$$

Le système est associé à deux types de conditions aux limites :

- lorsque les températures sont imposées aux frontières (on suppose que les frontières sont noires et qu'il y a symétrie azimutale), on a :

$$T(0,t) = f(t) \quad \text{et} \quad T(E,t) = T_E \quad \forall t \in (0,t_f] \quad \text{où} \quad f(t) \rightarrow T_o \quad \text{très rapidement} \quad (0.7)$$

$$L(0,\mu,\lambda,t) = L^o(f(t),\lambda) \quad \forall (\mu,\lambda,t) \in (0,1] \times (0,\infty) \times (0,t_f] \quad (0.8)$$

$$L(E,\mu,\lambda,t) = L^o(T_E,\lambda) \quad \forall (\mu,\lambda,t) \in [-1,0) \times (0,\infty) \times (0,t_f]$$

- lorsque les conditions de flux sont prises en compte (on suppose que les frontières sont transparentes), on a :

$$L(0,\mu,\omega,\lambda,t) = \mathcal{L}^+(\mu,\omega,\lambda,t) \quad \forall (\mu,\omega,\lambda,t) \in (0,1] \times [0,2\pi] \times (0,\infty) \times (0,t_f] \quad (0.9)$$

$$L(E,\mu,\omega,\lambda,t) = \mathcal{L}^-(\mu,\omega,\lambda,t) \quad \forall (\mu,\omega,\lambda,t) \in [-1,0) \times [0,2\pi] \times (0,\infty) \times (0,t_f]$$

$$-\lambda_c(T(0,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) + h_o(T(0,t)) \cdot (T(0,t) - T_{\infty,o}(t)) = 0 \quad \forall t \in (0,t_f] \quad (0.10)$$

$$\lambda_c(T(E,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(E,t) + h_E(T(E,t)) \cdot (T(E,t) - T_{\infty,E}(t)) = 0 \quad \forall t \in (0,t_f]$$

La condition initiale est la suivante (elle est valable pour les deux types de conditions aux limites décrites ci-dessus) :

$$T(x,0) = T_E \quad \forall x \in [0,E] \quad (0.11)$$

Les inconnues du système sont : la luminance $L(x,\mu,\omega,\lambda,t)$ repérée à la position x , dans la direction (μ,ω) , à la longueur d'onde λ et au temps t , et la température $T(x,t)$ à la position x et au temps t . La fonction $L^o(T,\lambda)$ qui intervient dans (0.1) et (0.8) est donnée. C'est la luminance monochromatique du corps noir à la température T et à la longueur d'onde λ .

Il n'existe pas, a priori, de méthode générale pour résoudre un problème de ce type, où le couplage et les non-linéarités empêchent de prédire le comportement global des équations.

Chapitre II : Analyse mathématique du problème en régime stationnaire

L'étude théorique mathématique de l'ETR et, de manière générale, les équations de transport, ont beaucoup été étudiées. A ce sujet nous renvoyons au travail de synthèse [28], réalisé par V. Agoshkov (1998). Ce n'est que très récemment que l'étude théorique du système des équations couplées par rayonnement et conduction a été abordée par Kelley (1996) [29]. Ce dernier a étudié le système 1 D, en régime stationnaire, lorsque le milieu est supposé homogène, gris et isotrope, avec symétrie axiale et lorsque l'équation de la chaleur est linéaire. Dans cette partie, nous généralisons l'étude de Kelley. Nous montrons les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution pour le système décrit au chapitre I, en régime stationnaire, avec la symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Les techniques utilisées sont les suivantes : problème de point fixe compact, théorèmes de point fixe de Schauder et de Banach, théorie des opérateurs intégraux et des arguments de monotonie.

On pose $\Omega = (0, E) \times [-1, 1]$, $\partial\Omega^+ = \{0\} \times (0, 1]$ et $\partial\Omega^- = \{E\} \times [-1, 0)$, qui sont des ensembles bornés. Nous disons alors que le couple (T, L) est une solution si T est une solution dans $C([0, E]) \cap C^2(0, E)$ (i.e. c'est une solution classique) et L est une solution appartenant à $L^1((0, \infty); C(\Omega \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) \cap C^1((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$. Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 1 (existence) : Sous les hypothèses (2.9)–(2.15) spécifiées au chapitre II, le système a une solution (T, L) . Par ailleurs, le champ de températures T satisfait $\min(T_o, T_E) \leq T(x) \leq \max(T_o, T_E)$ pour tout $x \in [0, E]$ et la luminance L satisfait $L^o(\min(T_o, T_E), \lambda) \leq L(x, \mu, \lambda) \leq L^o(\max(T_o, T_E), \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, $(x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^+ \times (0, \infty)$ et $(x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^- \times (0, \infty)$.

Proposition 2 : Sous les hypothèses du théorème 1, la luminance L est une fonction croissante de T_o, T_E, T dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < S(x) \leq T(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors $L(S, S_o, S_E)(x, \mu, \lambda) \leq L(T, T_o, T_E)(x, \mu, \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, où l'on note $L(T, T_o, T_E)$ la luminance associée aux températures T, T_o, T_E .

Théorème 3 (régularité) : Sous les hypothèses du théorème 1, la solution (T, L) est telle que $T \in C^\infty(0, E)$ et $L \in L^1((0, \infty); C^\infty((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$.

Proposition 4 : Sous les hypothèses du théorème 1, l'équation de la conduction peut être réécrite uniquement en fonction de la température et des coefficients radiatifs comme

$$-\frac{d}{dx}(\lambda_c(T(x))) \cdot \frac{dT}{dx}(x) = f_r(T(x))$$

où la fonction f_r sera donnée dans la suite. Par ailleurs, cette proposition permet de montrer l'unicité de la solution (T, L) du système.

Théorème 5 (unicité) : Sous les hypothèses du théorème 1, la solution (T, L) est unique.

Chapitre III : Présentation de quelques méthodes numériques en régime stationnaire

Il existe une abondante bibliographie concernant les techniques de résolution des équations couplées par rayonnement et conduction en régime stationnaire. Dans le cadre de cette thèse, nous n'avons pas souhaité entrer dans le détail de chacun de ces problèmes ou techniques; ceci pourrait faire l'objet d'un ouvrage général. Toutefois, afin de guider le lecteur dans ses recherches, nous renvoyons à la thèse de Z. E. Da Silva (1997) [30] qui donne une intéressante revue bibliographique synthétique de ces études sous forme de tableaux. En outre, ces tableaux permettent de faire le point des hypothèses traitées dans les diverses études. Notons toutefois que, en ce qui concerne la méthodologie de résolution de l'ETR, les méthodes dites de flux sont les plus utilisées, spécialement la méthode des ordonnées discrètes.

Ce troisième chapitre est donc consacré à la résolution numérique des équations couplées, en régime stationnaire, avec symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Nous donnons aussi une méthode de résolution de l'ETR sans la symétrie azimutale, associée aux conditions de flux. Dans le but de résoudre l'ETR, nous discrétisons l'espace angulaire suivant plusieurs directions et nous utilisons une quadrature numérique du type composée pour approcher le terme intégral de l'équation. Il en résulte alors un système différentiel du premier ordre linéaire, associé à des conditions aux limites, du type :

$$\frac{d \mathbf{L}_\lambda(x)}{dx} = \mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{L}_\lambda(x) + \mathcal{E}_\lambda^o(x) \quad (0.12)$$

où \mathbf{L}_λ est le vecteur dont les composantes sont les luminances dans les différentes directions discrètes retenues pour l'étude. Dans les deux cas (ETR avec et sans symétrie azimutale), nous aboutissons au système différentiel donné par (0.12). La seule différence avec le problème avec symétrie azimutale est que, pour le problème sans symétrie azimutale, nous avons à traiter un problème de plus grande taille. La solution du système s'exprime à l'aide d'une exponentielle de matrice; cependant cette solution présente un caractère d'instabilité numérique. Pour pallier à cette difficulté, différents auteurs ont proposé une technique particulière pour résoudre le système, basée sur le principe d'interaction du milieu [31-34]. Cependant, nous montrons que cette méthode ne résout pas complètement le problème. Ainsi, en considérant que le système est monochromatique (ce qui impose de le résoudre sur

l'ensemble du spectre concerné), nous proposons trois méthodes différentes, dans le but de soulever le problème de l'instabilité numérique et réduire les temps de calcul. La première méthode utilise le principe d'interaction du milieu et fait intervenir des matrices de transmission et de réflexion. C'est la technique évoquée précédemment : nous avons repris cette méthode et nous y avons apporté quelques améliorations au niveau de la précision et des temps de calculs. La deuxième méthode consiste à résoudre le système en diagonalisant au préalable la matrice caractéristique du milieu A_λ , ce qui permet de contourner le problème de l'instabilité numérique et avoir une résolution quasi analytique en espace. La troisième méthode consiste à discrétiser le système (0.12) par un schéma aux différences finies centré-décentré. Nous donnons aussi les avantages et les inconvénients des différentes méthodes. Pour résoudre la deuxième équation, nous proposons deux schémas aux différences finies centrés légèrement différents, associés à une transformation de Kirchhoff. Cette technique permet de traiter la non linéarité de l'équation de manière efficace [35]. Ensuite, nous abordons le couplage entre les deux équations par une méthode de point fixe qui porte uniquement sur le champ de températures.

Chapitre IV : Analyse d'un schéma numérique en régime stationnaire

Si des études ont été menées sur la preuve de convergence pour des schémas numériques de l'équation du rayonnement [36,37,38] indépendamment de celle de la conduction, à l'heure actuelle il semble que l'étude de la convergence pour les équations couplées n'a pas encore été abordée. Le but de ce chapitre consiste à étudier la convergence d'un des schémas numériques exposés au chapitre III, pour la résolution des équations couplées, en régime stationnaire, avec symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Nous considérons le schéma aux différences finies décentré d'ordre un pour la résolution du système (0.12) et un schéma aux différences finies centré d'ordre deux, associé à la transformation de Kirchhoff pour la résolution de l'équation de la chaleur. Nous utilisons une quadrature basée sur la formule à trois points de Simpson composée pour approcher l'intégrale en angle et la formule des trapèzes composée pour approcher l'intégrale en longueurs d'onde. La preuve de la convergence repose essentiellement sur des arguments de monotonie et l'application d'un point fixe discret, portant uniquement sur le champ de températures. Les équations non-linéaires sont résolues à l'aide de la méthode de Newton.

Nous utilisons un maillage uniforme du domaine spatial $[0, E]$, défini par : $x_i = i \cdot h$ avec $0 \leq i \leq nt + 1$ où h est le pas constant du maillage. Nous découpons l'intervalle angulaire $[0, \pi]$ à l'aide d'un pas constant $\Delta\theta = \pi / m$ tel que $\theta_1 = \Delta\theta / 2$, $\theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta$ $\forall 1 \leq j \leq m - 2$ et $\theta_m = \pi - \Delta\theta / 2$. Alors, nous posons $\mu_j = \cos(\theta_j)$ $\forall 1 \leq j \leq m$. Nous considérons un domaine spectral borné $(0, \lambda_{\max}]$ et nous notons λ_k $1 \leq k \leq N$ la suite croissante des longueurs d'onde discrètes prise avec un pas constant $\Delta\lambda = \lambda_{\max} / N$

$(\lambda_N = \lambda_{\max})$. $\tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k)$ représente l'approximation de la luminance $L(x, \mu, \lambda)$ au point (x_i, μ_j, λ_k) pour $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq k \leq N$. \tilde{T}_i respectivement l'approximation du champ de températures $T(x)$ au point x_i pour $1 \leq i \leq nt$. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Théorème 1 (existence) : Sous les hypothèses (4.1) à (4.7) spécifiées au chapitre IV, le schéma numérique décrit précédemment admet une solution (\tilde{T}, \tilde{L}) . De plus, cette solution vérifie $\min(T_o, T_E) \leq \tilde{T}_i \leq \max(T_o, T_E) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$ et $L^o(\min(T_o, T_E), \lambda_k) + O(\Delta\theta^4) \leq \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq L^o(\max(T_o, T_E), \lambda_k) + O(\Delta\theta^4) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq N$.

Ainsi, moyennant une petite erreur sur le pas angulaire $\Delta\theta$, nous retrouvons l'encadrement de la solution continue.

Proposition 2 : Sous les hypothèses du théorème 1, la luminance approchée \tilde{L} est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{T} dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < \tilde{S}_i \leq \tilde{T}_i < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, alors $\tilde{L}(\tilde{S}, S_o, S_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq \tilde{L}(\tilde{T}, T_o, T_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$ où l'on note $\tilde{L}(\tilde{T}, T_o, T_E)$ la luminance approchée associée aux températures \tilde{T}, T_o, T_E .

Ainsi, nous retrouvons la même propriété de monotonie que possède la solution continue.

Théorème 3 (unicité) : Sous les hypothèses du théorème 1, la solution (\tilde{T}, \tilde{L}) est unique.

Théorème 4 (convergence) : Sous les hypothèses du théorème 1, le schéma numérique est convergent : la solution (\tilde{T}, \tilde{L}) converge vers la solution (T, L) du système continu, lorsque les pas $h \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\Delta\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda_{\max} \rightarrow \infty$ comme $1/\Delta\lambda$. C'est un schéma d'ordre un en h , quatre en $\Delta\theta$ et un en $\Delta\lambda$.

Chapitre V : Présentation d'une méthode numérique en régime transitoire

Ce chapitre décrit une méthode numérique pour la résolution du système couplé en régime transitoire, d'une part lorsque les températures sont imposées aux frontières évoluant rapidement dans le temps et, d'autre part, lorsque le milieu est soumis à des conditions de flux très intenses. Une conséquence de ces fortes sollicitations au niveau des conditions aux limites est que la discrétisation en espace nécessite un maillage plus fin dans la zone à fort gradient de température. En régime transitoire, du fait que la vitesse de propagation du rayonnement est très grande ($c \cong 3 \cdot 10^8$ m/s), le premier terme de l'ETR peut être négligé devant les autres termes. L'ETR est alors quasi stationnaire et sa résolution est la même qu'en

régime stationnaire. Nous utilisons alors la méthode basée sur la diagonalisation de la matrice caractéristique du milieu pour résoudre le système (0.12), car elle est très rapide et analytique en espace. Concernant l'équation de la chaleur en régime transitoire, si on fait l'inventaire issu de la littérature des différentes méthodes de résolution de cette équation (lorsque celle-ci est couplée à l'ETR), on s'aperçoit que les schémas de différences finies (en espace et en temps de type Crank-Nicholson) sont les plus couramment utilisés [6-14,16-17,19-26,39-40]. La technique de substitution de noyau dont le but est d'obtenir des solutions semi-analytiques est aussi employée [15,18]. Les techniques de l'approximation nodale [21] et celle des volumes finis [27] sont aussi utilisées. Cependant, compte tenu du problème que nous avons à traiter, nous utilisons la méthode des éléments finis car elle est plus précise et elle peut être utilisée avec des maillages non réguliers. Ainsi, dans un premier temps, nous appliquons les transformations de Kirchhoff et enthalpique, dans le but de simplifier le problème non linéaire. Ensuite, nous résolvons la nouvelle équation en espace par la méthode des éléments finis ; celle-ci nécessite des éléments P^2 afin que le flux conductif soit d'ordre un. Pour le schéma en temps, nous utilisons une méthode de Runge-Kutta implicite adaptée aux problèmes raides, compte tenu des variations rapides des températures et flux.

Chapitre VI : Résultats numériques : application à un milieu réel de fibres de silice

Dans ce dernier chapitre, nous exposons les résultats numériques donnés par la simulation, pour les régimes stationnaire et transitoire. L'application porte sur un matériau isolant constitué de fibres de silice. Nous comparons aussi les performances des différentes méthodes de résolution de l'ETR en termes de précision et de temps de calcul. L'accord entre les résultats numériques et théoriques donne entière satisfaction. Les résultats obtenus par le code en régime stationnaire conduisent bien à un flux total constant dans le milieu, conformément à la loi de conservation de l'énergie, avec une erreur relative très faible. Pour l'exemple d'application traité, le flux radiatif dans le milieu représente environ un tiers du flux total, ce qui confirme l'importance accordée à ce mode de transfert. Le code, en régime transitoire et lorsque les températures sont imposées aux frontières conduit, après convergence, à des résultats (pour le champ de températures et les flux) très proches de ceux obtenus par le code en régime stationnaire (lorsque les températures finales sont imposées). Le code en régime transitoire et lorsque le milieu est soumis à des conditions de flux, donne des résultats encourageants. Par ailleurs, les résultats de simulations obtenus montrent la stabilité et la convergence des schémas considérés.

Enfin, le mémoire s'achève sur une conclusion générale, donnant un bilan des apports de ce travail et s'ouvrant sur quelques recommandations et perspectives nouvelles pour la poursuite de cette recherche.

Références

- [1] G. Guilbert. *Etude des caractéristiques optiques des milieux poreux semi-transparents*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1985.
- [2] P. Boulet. *Etude du transfert par rayonnement à travers les milieux fibreux*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1992.
- [3] A. Milandri. *Détermination des paramètres radiatifs d'un isolant fibreux : théorie de Mie, oscillateurs de Lorentz et méthode inverse*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2000.
- [4] G. Guilbert, G. Jeandel, G. Morlot, C. Langlais and S. Klarsfeld. Optical characteristics of semi-transparent porous media. *High Temp. High Press.* Vol. 19, p. 251–259, 1987.
- [5] D. G. Doornink and R. G. Hering. Transient combined conductive and radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer.* Vol. 94, p. 473-478, 1972.
- [6] H. Yoshida, J. H. Yun, R. Echigo and T. Tomimura. Transient characteristics of combined conduction, convection and radiation heat transfer in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 33, n°5, p. 847-857, 1990.
- [7] R. Siegel and F. B. Molls. Finite difference solution for transient radiative cooling of a conducting semitransparent square region. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 35, n°10, p. 2579-2592, 1992.
- [8] R. Siegel. Transient heat transfer in a semitransparent radiating layer with boundary convection and surface reflections. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 39, n°1, p. 69-79, 1996.
- [9] C. C. Lii and M. N. Ozisik. Transient radiation and conduction in an absorbing, emitting, scattering slab with reflective boundaries. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 15, p. 1175-1179, 1972.
- [10] K. C. Weston and J. L. Hauth. Unsteady, combined radiation and conduction in an absorbing, scattering and emitting medium. *Journal of Heat Transfer.* Vol. 95, p. 357-364, 1973.
- [11] T. W. Tong, D. L. MCELROY, D. W. Yarbrough. Transient conduction and radiation heat transfer in porous thermal insulations. *Journal of thermal insulation.* Vol. 9, p. 13-29, 1985.
- [12] C. Y. Wu and N. R. Ou. Transient two-dimensional radiative and conductive heat transfer in a scattering medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 37, n°17, p. 2675-2686, 1994.
- [13] R. Siegel. Technical note : Two-flux method for transient radiative transfer in a semitransparent layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer.* Vol. 39, n°5, p. 1111-1115, 1996.
- [14] J. R. Tsai and M. N. Ozisik. Transient combined conduction and radiation in an absorbing, emitting and isotropically scattering solid sphere. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.* Vol. 38, n° 4, p. 243-251, 1987.

- [15] S. Andre and A. Degiovanni. A new way of solving transient radiative conductive heat transfer Problems. *Journal of heat transfer*. Vol. 120, p. 943-955, 1998.
- [16] A. L. Burka. Transient radiative-conductive heat transfer in a flat layer of a selective absorbing and radiating medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. Vol. 39, n°1, p. 91-95, 1998.
- [17] O. Hahn, F. Raether, M. C. Arduini-Schuster and J. Fricke. Transient coupled conductive/radiative heat transfer in absorbing, emitting and scattering media : application to laser-flash measurements on ceramics materials. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 40, n°3, p.689-698, 1997.
- [18] M. Lazard, S. André and D. Maillet. Transient coupled radiative-conductive heat transfer in a gray planar medium with anisotropic scattering. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. Vol. 69, p. 23-33, 2001.
- [19] L. K. Matthews, R. Viskanta and F.P. Incropera. Combined Conduction and Radiation heat transfer in Porous materials heated by intense solar radiation. *Journal of solar energy engineering*. Vol. 107, p. 29-34, 1985.
- [20] D. E. Glass, M. N. Ozisik and D.S. McRae. Combined conduction and radiation with flux boundary condition for a semi-transparent medium covered by thin radiating layers. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. Vol. 38, n°3, p. 201-208, 1987.
- [21] J. D. Lin and J. H. Tsai. Radiation-conduction interaction in a planar, anisotropically scattering medium with flux boundary. *Numerical heat transfer. Part A*, Vol. 16, p. 119-128, 1989.
- [22] T. H. Ping and M. Lallemand. Transient radiative-conductive heat transfer in flat glasses submitted to temperature, flux and mixed boundary conditions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 32, n°5, p. 795-810, 1989.
- [23] T. H. Ping, B. Maestre and M. Lallemand. Transient and steady state combined heat transfer in semitransparent materials subjected to a pulse or a step irradiation. *Journal of Heat Transfer*. Vol. 113, p. 166-173, 1991.
- [24] S. Andre and A. Degiovanni. A theoretical study of the transient coupled conduction and radiation heat transfer in glass : phonic diffusivity measurements by the flash technique. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 38, n°18, p. 3401-3412, 1995.
- [25] M. Su and W. H. Sutton. Transient Conductive and Radiative heat transfer in a silica window. *Journal of Thermophysics (technical notes)*. Vol. 9, n°2, p. 370-373, 1995.
- [26] R. Siegel. Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials. *International Journal of Engineering Science*. Vol. 36, p. 1701-1739, 1998.
- [27] K. H. Lee and R. Viskanta. Transient conductive-radiative cooling of an optical quality glass disk. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 41, n°14, pp. 2083-2096, 1998.
- [28] V. Agoshkov. *boundary Value Problems for Transport equations*. Modeling and simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhauser, 1998.

- [29] C.T. Kelley. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive–radiative heat transfer equations. *Transport Theory and Statistical Physics*. Vol. 25, p.249–260, 1996.
- [30] Z. E. Da Silva. *Transferts couplés conduction/rayonnement. Application de la méthode flash aux milieux semi-transparents*. Thèse de 3ème Cycle de l’institut national des sciences appliquées de Lyon, France, 1997.
- [31] P. C. Waterman. Matrix exponential description of radiative transfer. *Journal of the Optical Society of America*. Vol. 71, p. 410–422, 1981.
- [32] P. L. Fleteau and G. L. Stephens. On the fundamental solution of the radiative transfer equation. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 93, p. 11037–11050, 1988.
- [33] K. Stammes and R. A. Swanson. A new look at the discrete ordinates method for radiative transfer. calculations in anisotropically scattering atmospheres. *J. Atmos. Sci.* Vol. 38, p. 387-399, 1981.
- [34] P. Boulet, G. Jeandel and G. Morlot. Model of radiative transfer in fibrous media, matrix method. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 36, n° 18, p. 4287-4297, 1993.
- [35] M. Zlamal. A finite element solution of the nonlinear heat equation. *RAIRO Numerical Analysis*. Vol. 14, p. 203–216, 1980.
- [36] P. Lesaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, C. de Boor, ed. Academic Press, New-York. p. 89-123, 1974.
- [37] E. W. Larsen and P. Nelson. Finite-difference approximations and super-convergence for the discrete-ordinate equations in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 19, p. 334-348, 1982.
- [38] J. Pitkaranta and R. Scott. Error estimates for the combined spatial and angular approximations of the transport equation in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 20, n° 5, p. 922–950, 1983.
- [39] S. André. *Identification de la diffusivité phonique du verre par méthode flash de 20°C à 500°C*. Thèse de 3ème Cycle, INPL, Nancy I, France, 1992.
- [40] J. F. Henry. *Contribution à l’étude des transferts couplés conduction-rayonnement. Application aux protections thermiques*. Thèse de 3ème Cycle, Reims, France, 1991.

Publications (acceptées, soumises ou en préparations) issues de ce travail :

Articles dans des revues internationales :

- [1] F. Asllanaj, G. Jeandel and J. R. Roche. Numerical solution of Radiative Transfer equation coupled with nonlinear heat conduction equation. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*. Vol. 11, n° 5, p. 449-473, 2001.
- [2] F. Asllanaj, A. Milandri, G. Jeandel and J. R. Roche. A finite difference solution of nonlinear systems of radiative–conductive heat transfer equations. *Accepted dans The International Journal for Numerical Methods In Engineering*, 2001.

- [3] A. Milandri, F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche. Heat transfer by radiation and conduction in fibrous media without axial symmetry. Accepté dans *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2001.
- [4] A. Milandri, F. Asllanaj, G. Jeandel. Determination of radiative properties of fibrous media by an inverse method – Comparison with the MIE theory. Accepté dans *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2001.
- [5] F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche and D. Schmitt. Existence and uniqueness of a steady state solution of a coupled radiative–conductive heat transfer problem for a non–grey and anisotropically participating medium. Article soumis à *Transport theory and statistical physics* (Juillet 2001).
- [6] F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche. Convergence of a numerical scheme for a nonlinear coupled system of radiative–conductive heat transfer equations. Article en préparation.
- [7] F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche. Transient combined radiation and conduction heat transfer in fibrous media with temperature and flux boundary conditions. Article en préparation.

Communications à des congrès internationaux :

- [8] F. Asllanaj, A. Milandri, G. Jeandel, J.R. Roche. Transfert de chaleur par conduction et rayonnement en régime transitoire dans les milieux fibreux. *Thermique des systèmes à température modérée. IV^e Colloque Interuniversitaire Franco–Québécois.* p. 369–374, CANADA, 25–27 mai 1999.
- [9] A. Milandri, F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche, S. Bugnon. Transfert de chaleur couplé par rayonnement et conduction en régime permanent dans des milieux fibreux soumis à des conditions de flux et en l’absence de symétrie azimutale. *Thermique des systèmes à température modérée. IV^e Colloque Interuniversitaire Franco–Québécois,* p. 419–423, CANADA, 25–27 mai 1999.
- [10] F. Asllanaj, J.R. Roche, G. Jeandel, D. Lacroix. Transient combined radiation and conduction heat transfer in fibrous media. *The Third International Symposium on Radiative Transfer.* Antalya TURKEY, June 17–22, 2001.
- [11] F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche, D. Schmitt. Numerical analysis of a coupled radiative–conductive heat transfer problem. *ENUMATH 2001 : the European conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications.* Ischia ITALY, July 23–28, 2001.
- [12] F. Asllanaj, G. Jeandel, J.R. Roche, D. Schmitt. Theoretical and Numerical Analysis of a radiative transfer equation coupled with a nonlinear heat conduction equation. *Fourth European Conference on Elliptic and Parabolic Problems : Theory–Applications.* Gaeta ITALY, September 24–28, 2001.
- [13] G. Jeandel, F. Asllanaj, A. Milandri, D. Lacroix, G. Parent, B. Monod, JR. Roche. *Thermique des isolants fibreux. Sciences et techniques-Festival du verre : première journée d’étude sur le matériau verre en Lorraine,* 5 Octobre 2001.

Rapports de recherche :

- [14] F. Asllanaj, A. Milandri, G. Jeandel. Transfert de chaleur couplé (conduction–rayonnement) en régime permanent dans les milieux semi–transparentes. Conditions aux limites de type : températures imposées aux frontières. Rapport du contrat E2745259–Poste 5, Aérospatiale, mars 1999.

Chapitre I

Modèles régissant les transferts thermiques

Résumé : Les trois modes de transfert de chaleur au sein d'un matériau sont le rayonnement, la conduction et la convection. Cependant, pour les types de milieux que nous étudions (matériaux composites à plusieurs phases : solide, fluide) et la gamme de températures dans laquelle nous travaillons, nous pouvons nous limiter aux transferts radiatif et conductif. Nous allons présenter ces deux modes de transferts thermiques, dans un milieu semi-transparent.

1.1 Transfert de chaleur par rayonnement : l'équation du transfert radiatif

Au préalable, il nous a paru nécessaire de définir certaines grandeurs et qualificatifs fondamentaux que nous retrouverons tout au long de notre étude :

milieu semi-transparent : un milieu est désigné comme semi-transparent dans une bande de fréquence donnée des ondes électromagnétiques lorsqu'il transmet partiellement ces ondes. Dans ces conditions, il réfléchit et absorbe aussi partiellement (il n'est ni transparent ni opaque).

milieu gris : un milieu est dit gris lorsque les propriétés radiatives du milieu sont indépendantes de la longueur d'onde. Dans le cas contraire, le milieu est dit *non gris*, les grandeurs sont dites *monochromatiques* et indexées de l'indice λ .

diffusion isotrope : la diffusion est dite isotrope lorsque la diffusion est la même quelle que soit la direction de diffusion considérée. Dans le cas contraire, la diffusion est dite *anisotrope*.

le flux radiatif : c'est la valeur instantanée d'un débit d'énergie radiatif que nous noterons généralement Q , éventuellement avec un indice λ s'il s'agit de la grandeur monochromatique.

la luminance : considérons une surface élémentaire dS située à l'abscisse s . Soit dQ le flux traversant dS selon une famille de directions comprises dans un angle solide élémentaire $d\Omega$ et centrées autour de la direction Δ faisant un angle θ avec la normale à dS , pour un intervalle spectral $d\lambda$ donné. On définit alors la luminance monochromatique L_λ par

$$L_\lambda(s, \Delta) = \frac{dQ}{dS \cdot \cos\theta \cdot d\Omega \cdot d\lambda}$$

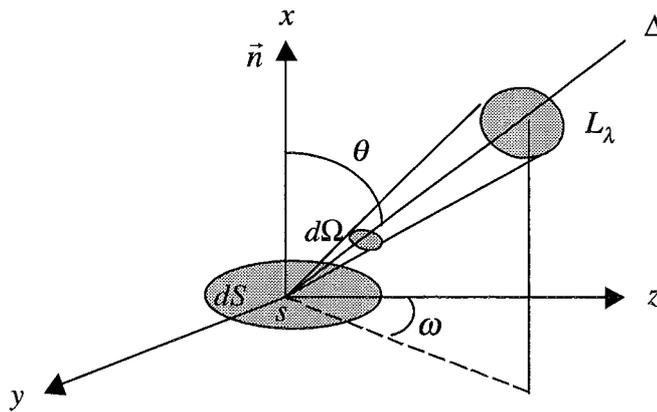


figure 1.1 : La luminance monochromatique

La direction Δ est repérée par les angles θ et ω . θ est l'angle polaire et ω l'azimut. L'angle solide élémentaire $d\Omega$ est défini par la relation : $d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\omega$ ou encore $d\Omega = -d\mu \cdot d\omega$ en posant $\mu = \cos\theta$.

la luminance du corps noir : de par sa définition, un corps noir absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit; il ne réfléchit pas, ne transmet rien et il émet un rayonnement de luminance monochromatique donné par la loi de Planck :

$$L_\lambda^o(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1 \right]} \quad (1.1)$$

où T désigne la température du corps en Kelvin et C_1 , C_2 sont deux constantes positives du rayonnement

$$C_1 = 1,19 \cdot 10^{-16} \text{ W/m}^2 \quad \text{et} \quad C_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}$$

Les courbes de la *figure 1.2* indiquent l'évolution de la luminance monochromatique du corps noir en fonction de la longueur d'onde, pour trois valeurs différentes de la température : $T = 300\text{ K}$, 400 K et 500 K .

On remarque que toutes ces courbes :

- passent par l'origine et sont tangentes en ce point à l'axe des abscisses,
- admettent cet axe comme asymptote lorsque la longueur d'onde tend vers l'infini,
- passent par un maximum $\lambda_m \cdot T$ dont la valeur est d'autant plus grande que la température est élevée et ce pour une longueur d'onde d'autant plus petite ($\lambda_m \cdot T = 2898\ \mu\text{m} \cdot \text{K}$),
- sont « emboîtées » les unes dans les autres : la courbe à la température T_1 est entièrement située au-dessus de celle à température T_2 si $T_1 > T_2$. En d'autres mots, pour une longueur d'onde λ fixée, $L_\lambda^o(T)$ est une fonction croissante de T .

A l'ambiante (300 K), l'émission du corps noir se situe à 82% entre 4,5 microns et 25 microns et, lorsque la température augmente, on observe un déplacement du domaine d'émission vers les plus courtes longueurs d'onde. C'est donc essentiellement dans cette gamme de valeurs que nous travaillerons, plus précisément entre 3,5 microns et 25 microns.

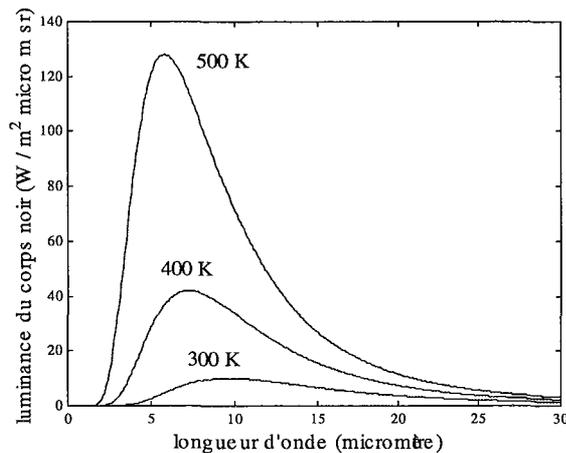


figure 1.2 : La luminance monochromatique du corps noir

Par ailleurs, le rayonnement émis par un corps noir est isotrope. La luminance totale du corps noir s'obtient en intégrant la luminance monochromatique du corps noir sur tout le spectre des longueurs d'ondes. On obtient alors la loi de Stefan-Boltzman :

$$\int_0^{\infty} L_\lambda^o(T) d\lambda = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} \quad (1.2)$$

où σ est la constante de Stefan-Boltzman : $\sigma = 5,6698 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$.

La modélisation du transfert de chaleur par rayonnement à travers un milieu semi-transparent fait appel à des coefficients radiatifs qu'il est nécessaire de préciser. Les propriétés

radiatives du milieu sont caractérisées par les coefficients monochromatiques d'absorption $\sigma_{a\lambda}(\Delta)$, de diffusion $\sigma_{s\lambda}(\Delta)$, ainsi que la fonction de phase $P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta)$. Ces grandeurs dépendent de la direction de propagation du rayonnement Δ et de la longueur d'onde λ . Elles sont **strictement positives, bornées et peuvent varier fortement avec la longueur d'onde**. Dans notre étude, nous supposons que le milieu est homogène. Nous faisons aussi une approximation en supposant que les propriétés radiatives ne dépendent pas de la température du milieu.

Le type de matériau que l'on désire étudier est le milieu fibreux (qui est semi-transparent). Ce milieu présente des propriétés caractérisées par l'arrangement des fibres. Différents cas peuvent se présenter :

1. fibres réparties aléatoirement dans l'espace.
2. fibres orientées dans des plans, avec un cas particulier intéressant qui est une stratification dans des plans parallèles aux frontières du milieu.
3. fibres orientées selon une direction d'espace donnée ou éventuellement "tissées" selon un nombre fini de directions privilégiées.

Nous nous intéresserons, dans ce travail, au cas de fibres réparties aléatoirement dans des plans parallèles aux frontières. Ceci implique des symétries pour les coefficients radiatifs, comme nous le verrons aux chapitres deux et trois.

Si l'on effectue, à une longueur d'onde donnée, un bilan des mécanismes physiques d'interaction rayonnement/milieu pour un rayonnement se propageant à travers un milieu qui absorbe, émet et diffuse (*figure 1.3*), on obtient l'expression d'une équation monochromatique appelée **équation du transfert radiatif (ETR)**.

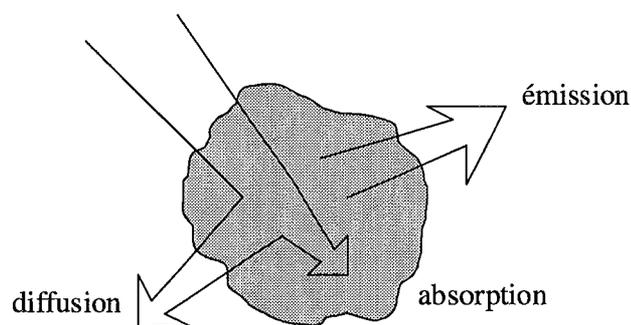


figure 1.3 : milieu semi-transparent

On considère, pour l'établissement de cette équation, un faisceau de rayonnement qui se propage dans une certaine direction d'incidence Δ , dans un volume élémentaire d'un milieu semi-transparent. Nous choisissons un volume de contrôle cylindrique de longueur ds . Le cylindre est orienté selon la direction Δ de propagation du rayonnement. Un changement

d'intensité de ce rayonnement est observé pour le parcours ds : la luminance passe d'une valeur L_λ à une valeur $L_\lambda + dL_\lambda$ (figure 1.4).

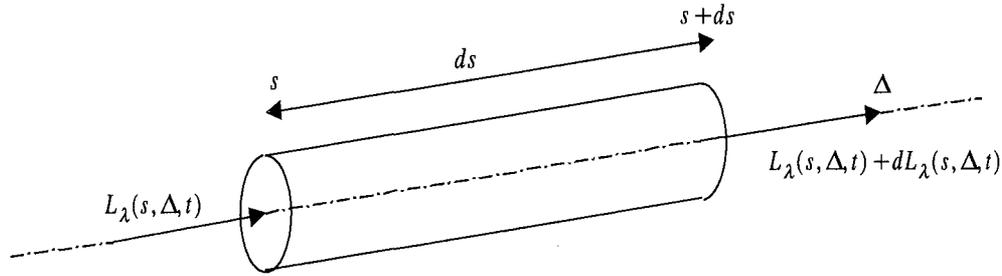


figure 1.4 : Variation de la luminance à la traversée d'un élément cylindrique.

$L_\lambda(s, \Delta, t)$ représente la luminance monochromatique à la longueur d'onde λ , au point d'abscisse curviligne s , dans la direction Δ et à l'instant t . Plusieurs processus expliquent la variation de la luminance dans le cylindre élémentaire :

- **Perte par absorption**

Une partie du rayonnement est absorbée par le milieu. La perte due à l'absorption dans le cylindre de longueur ds est donnée par la relation suivante :

$$dL_\lambda(s, \Delta, t) = -\sigma_{a\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) \cdot ds$$

où $\sigma_{a\lambda}(\Delta)$ est le coefficient monochromatique d'absorption.

- **Perte par diffusion**

Le matériau étudié étant un milieu semi-transparent diffusant, une partie du rayonnement provenant de la direction Δ est diffusée dans toutes les autres directions. L'atténuation due à la diffusion est donnée par :

$$dL_\lambda(s, \Delta, t) = -\sigma_{s\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) \cdot ds$$

où $\sigma_{s\lambda}(\Delta)$ est le coefficient monochromatique de diffusion (s pour "scattering").

- **Gain par émission propre**

Ce phénomène est lié à la température du milieu. Si l'on considère que l'on est à l'équilibre thermodynamique local, en utilisant la loi de Kirchhoff, le renforcement par émission propre est donné par :

$$dL_{\lambda}(s, \Delta, t) = \sigma_{a\lambda}(\Delta) \cdot L_{\lambda}^o(T(s, t)) \cdot ds$$

où $T(s, t)$ est la température du milieu au point s , à l'instant t et $L_{\lambda}^o(T(s, t))$ est la luminance du corps noir à cette température, donnée par la loi de Planck.

- **Gain par diffusion**

Le rayonnement dans la direction Δ est renforcé par la diffusion des rayonnements provenant de toutes les autres directions de l'espace (*figure 1.5*). On explicite le gain par diffusion en introduisant une distribution angulaire de diffusion (ou fonction de phase) P_{λ} telle que la probabilité, pour que ce qui est diffusé le soit dans l'angle solide $d\Omega$ centré autour de la direction Δ (*figure 1.5*), est égale à

$$\frac{1}{4\pi} \cdot P_{\lambda}(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot d\Omega$$

La somme des probabilités sur toutes les directions de diffusion de l'espace doit être égale à l'unité; aussi la fonction de phase doit être normalisée :

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega=4\pi} P_{\lambda}(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot d\Omega = 1 \quad (1.3)$$

Remarque 1.1 : la fonction $\Delta \rightarrow \frac{1}{4\pi} \cdot P_{\lambda}(\Delta' \rightarrow \Delta)$ est une densité de probabilité sur $\Omega = 4\pi$.

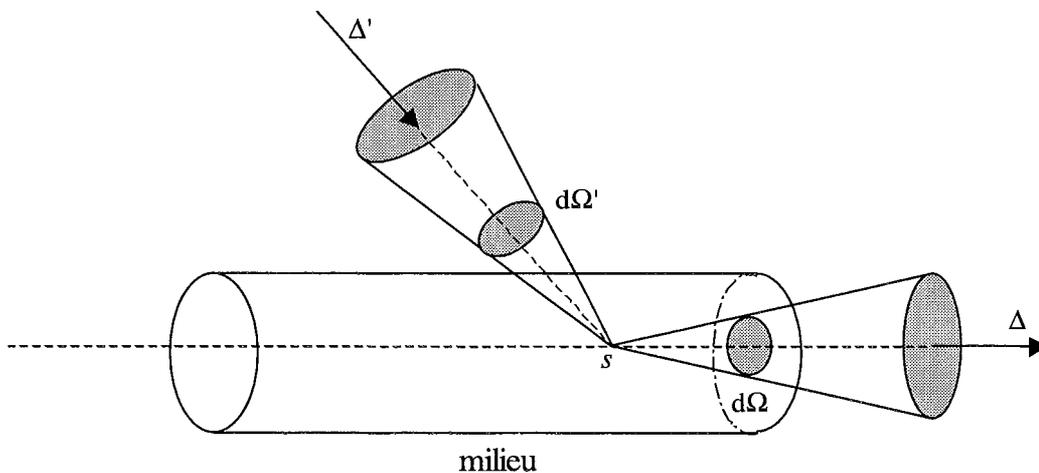


figure 1.5 : Gain par diffusion d'un faisceau de rayonnement

Le gain par diffusion s'écrit alors :

$$dL_\lambda(s, \Delta, t) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega' = 4\pi} \sigma_{s\lambda}(\Delta') \cdot P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta', t) \, d\Omega' \cdot ds$$

où le terme intégral prend en compte la diffusion des rayonnements provenant de toutes les directions de l'espace.

Par ailleurs, le coefficient de diffusion monochromatique et la fonction de phase spectrale satisfont l'équation de conservation suivante, Lee [1] :

$$\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega' = 4\pi} \sigma_{s\lambda}(\Delta') \cdot P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta) \, d\Omega' = \sigma_{s\lambda}(\Delta) \quad (1.4)$$

- **Bilan radiatif général**

Nous pouvons à présent écrire le bilan d'énergie pour la luminance L_λ qui traverse l'élément de volume de longueur ds en sommant les contributions par émission, absorption et diffusion décrites précédemment :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variation de} \\ \text{la luminance} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{gain par} \\ \text{émission} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{renforcement} \\ \text{par diffusion} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{perte par} \\ \text{absorption} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{atténuation} \\ \text{par diffusion} \end{array} \right\}$$

En notant que :

$$L_\lambda(s, \Delta, t) + dL_\lambda(s, \Delta, t) = L_\lambda(s + ds, \Delta, t)$$

nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} L_\lambda(s + ds, \Delta, t) - L_\lambda(s, \Delta, t) = & - (\sigma_{a\lambda}(\Delta) + \sigma_{s\lambda}(\Delta)) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) \cdot ds + \sigma_{e\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda^o(T(s, t)) \cdot ds \\ & + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega' = 4\pi} \sigma_{s\lambda}(\Delta') \cdot P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta', t) \, d\Omega' \cdot ds \end{aligned}$$

En divisant l'expression ci-dessus par ds et en prenant la limite quand $ds \rightarrow 0$, nous obtenons finalement l'équation du transfert radiatif :

$$\begin{aligned} \frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{ds} = & - (\sigma_{a\lambda}(\Delta) + \sigma_{s\lambda}(\Delta)) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) + \sigma_{e\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda^o(T(s, t)) \\ & + \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\Omega' = 4\pi} \sigma_{s\lambda}(\Delta') \cdot P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta', t) \, d\Omega' \end{aligned} \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) est aussi une **équation intégral-différentielle de transport** [2]. L'ETR est une traduction mathématique du bilan de l'énergie radiative dans le milieu. Elle représente l'évolution de la luminance monochromatique du rayonnement le long d'une trajectoire s , au cours du temps. Elle est valable en chaque point du milieu, dans l'intervalle de fréquence $\lambda + d\lambda$, à l'intérieur d'un angle solide élémentaire $d\Omega$ centré autour d'une direction Δ .

Une écriture couramment utilisée met en évidence un terme source d'énergie radiative monochromatique $J_\lambda(s, \Delta, t)$ tel que :

$$\frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{ds} = -\sigma_{e\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) + J_\lambda(s, \Delta, t) \quad (1.6)$$

avec

$$J_\lambda(s, \Delta, t) = \sigma_{a\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda^o(T(s, t)) + \int_{\Omega'=4\pi} \sigma_{s\lambda}(\Delta') \cdot P_\lambda(\Delta' \rightarrow \Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta', t) d\Omega'$$

et où nous avons introduit le coefficient monochromatique dit d'extinction, traduisant l'atténuation du rayonnement dans le milieu et défini par :

$$\sigma_{e\lambda}(\Delta) = \sigma_{a\lambda}(\Delta) + \sigma_{s\lambda}(\Delta) \quad (1.7)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (1.6) traduit donc l'atténuation du rayonnement, tandis que le second terme représente le renforcement du rayonnement.

L'équation (1.5) (ou encore (1.6)) est valable pour tout type de milieu semi-transparent absorbant, diffusant et émissif (d'indice de réfraction égal à un).

La luminance spectrale est fonction de la coordonnée de position, de la direction et du temps : $L_\lambda(s, \Delta, t)$. Entre s et t , nous avons les relations suivantes :

$$s = c \cdot t \quad \text{et} \quad ds = c \cdot dt \quad (1.8)$$

où c est la vitesse de propagation du rayonnement dans le vide ($c = 2,997930 \cdot 10^8$ m/s). En tenant compte de (1.8), nous pouvons écrire :

$$\frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{ds} = \frac{1}{c} \cdot \frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{dt} \quad (1.9)$$

Par ailleurs, étant donné que la luminance dépend directement du temps par l'intermédiaire de s , la dérivée totale de L_λ par rapport à t , sera :

$$\frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{dt} = c \cdot \frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial s} + \frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial t} \quad (1.10)$$

En substituant (1.10) dans (1.9), nous obtenons :

$$\frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{ds} = \frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial s} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial t} \quad (1.11)$$

Du fait que la vitesse de propagation du rayonnement est très grande, le deuxième terme du membre de droite de (1.11) peut, dans notre cas, être négligé devant le premier. L'équation du transfert radiatif est alors **quasi stationnaire**, car la dépendance de la luminance en temps est implicite à travers le terme émission, et donc :

$$\frac{dL_\lambda(s, \Delta, t)}{ds} \approx \frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial s}$$

Réécrivons l'équation du transfert radiatif dans ce cas :

$$\frac{\partial L_\lambda(s, \Delta, t)}{\partial s} = -\sigma_{e\lambda}(\Delta) \cdot L_\lambda(s, \Delta, t) + J_\lambda(s, \Delta, t) \quad (1.12)$$

Le temps interviendra dans l'équation (1.12) uniquement à travers le terme émission, par l'intermédiaire du champ thermique. L'évolution en régime transitoire de ce champ est décrite par l'équation de conservation de l'énergie dont nous parlerons plus loin.

L'équation qui régit le Transfert Radiatif (ETR), dans le cas le plus général d'un milieu semi-transparent absorbant, diffusant et émissif, est donc une intégral-équation aux dérivées partielles, puisque la luminance apparaît dans le terme intégral et la dérivée directionnelle $\frac{\partial L_\lambda}{\partial s}$ induit des dérivées partielles selon les variables d'espace quand elle est écrite

explicitement dans un système de coordonnées spécifique. La luminance est elle-même fonction de six variables indépendantes : trois coordonnées de position, deux coordonnées angulaires pour la direction de propagation et une variable temporelle.

Dans le cas d'un milieu **non gris**, l'équation devient encore plus complexe car une variable supplémentaire (la longueur d'onde λ) traduisant la dépendance spectrale des propriétés radiatives et, donc de la luminance, est introduite.

L'équation du transfert radiatif est par conséquent très complexe, et par suite sa résolution est très difficile. Afin de faciliter sa résolution, des simplifications peuvent être faites.

1.1.1 L'équation du transfert radiatif pour un milieu à faces parallèles

Une possibilité de simplification de l'ETR réside dans le choix de la géométrie du système pris en compte. Le passage du cas tridimensionnel au cas monodimensionnel, correspondant à celui d'une couche limitée par deux plans "infinis", parallèles est pleinement justifié par les applications pratiques qui nous intéressent. **C'est uniquement ce cas qui sera pris en compte par la suite.** On considère un repère cartésien $R(O, x, y, z)$ lié à notre milieu. La dimension suivant la direction Ox est très faible par rapport aux dimensions des deux autres directions. Cela nous permet de considérer le problème unidirectionnel et de ne prendre en compte que le transfert selon la direction Ox . Notre milieu aura une épaisseur E .

Soit s la distance parcourue par le rayonnement selon la direction de propagation Δ et θ l'angle entre l'axe des coordonnées x et la direction Δ (figure 1.6). En projetant l'élément de longueur ds sur l'axe Ox , nous avons : $dx = ds \cdot \cos \theta = \mu \cdot ds$ en posant $\mu = \cos \theta$

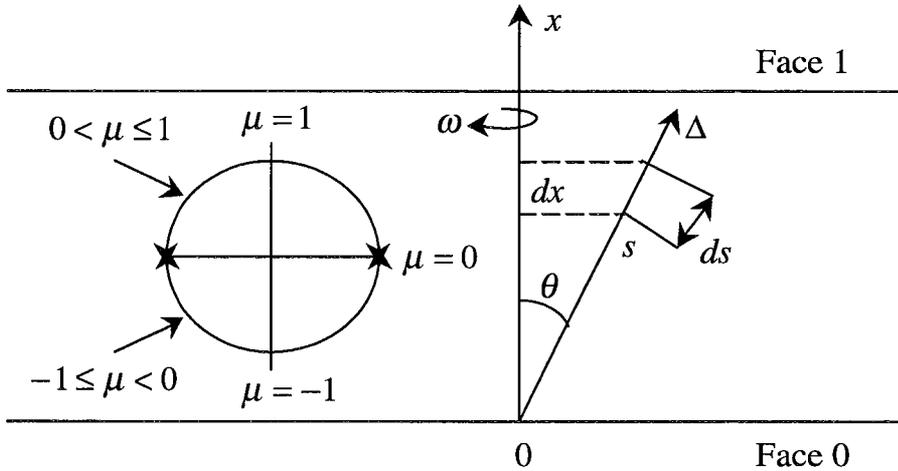


figure 1.6 : Système de référence dans le cas de la couche plane

La dérivée curviligne $\frac{d}{ds}$ peut être exprimée en terme de dérivée par rapport à x :

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial x}$$

En introduisant ces relations et en se rappelant que l'angle solide est donné par $d\Omega = -d\mu \cdot d\omega$, l'ETR devient dans le cas de la couche plane :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu, \omega, t)}{\partial x} &= \sigma_{a\lambda}(\mu, \omega) \cdot L_\lambda^o(T(x, t)) - \sigma_{e\lambda}(\mu, \omega) \cdot L_\lambda(x, \mu, \omega, t) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^1 \sigma_{s\lambda}(\mu', \omega') \cdot P_\lambda((\mu', \omega') \rightarrow (\mu, \omega)) \cdot L_\lambda(x, \mu', \omega', t) \, d\mu' \, d\omega' \end{aligned} \quad (1.13)$$

1.1.2 La symétrie azimutale

Notre domaine d'application concerne les fibres réparties aléatoirement dans des plans parallèles aux frontières. De ce fait, les propriétés radiatives ($\sigma_{a\lambda}$, $\sigma_{s\lambda}$ et P_λ) sont moyennées sur les directions azimutales et deviennent indépendantes de l'angle ω : nous sommes alors en présence d'une "symétrie azimutale". Cela permet de s'affranchir de la variable ω dans l'ETR. La condition de symétrie azimutale facilite les calculs dans la résolution de l'ETR. En utilisant cette condition, la luminance du rayonnement ainsi que les propriétés radiatives sont indépendantes de l'angle azimut ω et sont constantes autour d'un cône d'angle solide $d\Omega$ centré sur l'axe Ox , (figure 1.7). Dans ce cas, l'ETR devient :

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu, t)}{\partial x} &= \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_\lambda^o(T(x, t)) - \sigma_{e\lambda}(\mu) \cdot L_\lambda(x, \mu, t) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_{s\lambda}(\mu') \cdot P_\lambda(\mu' \rightarrow \mu) \cdot L_\lambda(x, \mu', t) d\mu' \end{aligned} \quad (1.14)$$

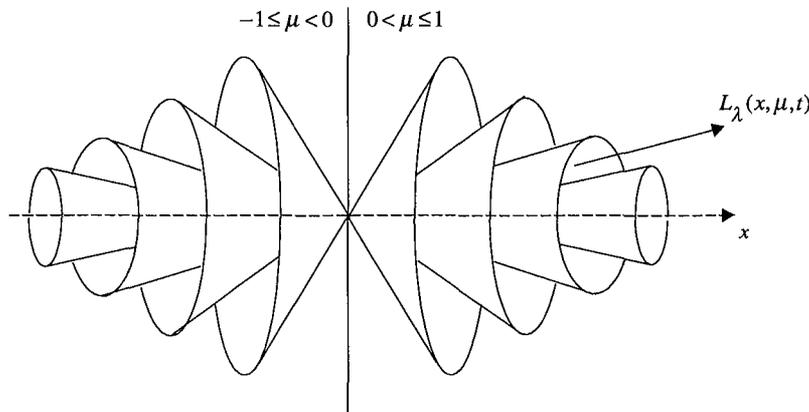


figure 1.7 : Discrétisation polaire de l'espace sphérique en plusieurs anneaux

Nous avons abordé, dans la première partie de cet exposé, un rappel de l'établissement de l'équation du transfert radiatif ainsi que les simplifications couramment utilisées (nous ne reporterons que les éléments nécessaires à la suite de l'exposé, le lecteur étant invité pour plus de détails à se reporter aux ouvrages de références [3,4,5,6,7]).

En fait, les grandeurs qui présentent un grand intérêt dans le domaine de l'ingénierie sont plutôt le flux radiatif et sa divergence, plus que la luminance elle-même (qui n'est en fait qu'une grandeur intermédiaire de calcul). L'expression monochromatique du vecteur densité de flux de rayonnement est obtenue, par intégration sur tout l'espace, de la luminance pondérée par la direction :

$$\mathbf{Q}_{r\lambda}(s, t) = \int_{\Omega=4\pi} L_\lambda(s, \Delta, t) \cdot \Delta d\Omega \quad (1.15)$$

L'étude porte sur la géométrie monodimensionnelle. On considère alors sa composante seulement suivant la direction Ox , qui est telle que :

$$Q_{r\lambda}(x,t) = \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 L_{\lambda}(x,\mu,\omega,t) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \quad (1.16)$$

et lorsqu'il y a symétrie azimutale :

$$Q_{r\lambda}(x,t) = 2\pi \cdot \int_{-1}^1 L_{\lambda}(x,\mu,t) \cdot \mu \, d\mu \quad (1.17)$$

L'intégration sur tout le spectre des longueurs d'ondes donne le flux radiatif total :

$$Q_r(x,t) = \int_0^{\infty} Q_{r\lambda}(x,t) \, d\lambda \quad (1.18)$$

Dans les milieux semi-transparents, les transferts de chaleur et la distribution de la température sont la conséquence de deux mécanismes : la conduction et le rayonnement lorsque la convection est négligée. Le calcul des champs de température ne peut se faire que par un couplage entre ces deux modes de transfert. La réponse transitoire des températures dans le milieu est donnée en résolvant l'équation de la chaleur qui est aussi **l'équation de conservation de l'énergie**.

1.2 Transfert de chaleur par conduction : l'équation de conservation de l'énergie

Désignons par V un volume élémentaire d'étude de notre milieu, délimité par une surface S , qui est la frontière de V . Le volume V et sa frontière S seront considérés comme indéformables, fixes, continus et semi-transparents.

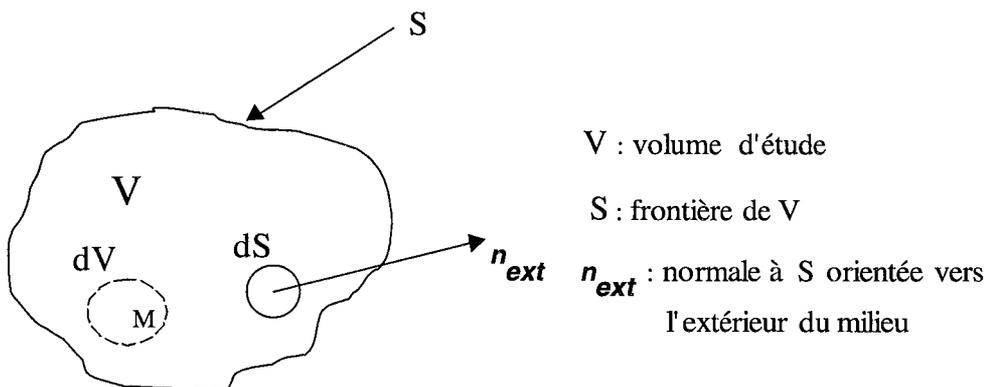


figure 1.8 : Élément de volume du milieu

Notre milieu reçoit, conduit et absorbe un certain flux de chaleur. Sa température T évolue donc dans le temps et l'espace : $T = T(s, t)$. Il en est de même de la "densité de flux total de chaleur" \mathbf{Q}_t . $\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_t(s, t)$. Rappelons que, par définition même de \mathbf{Q}_t , la quantité de chaleur reçue par V à travers S par unité de temps, est égale à :

$$\int_S - \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_{ext} dS \quad (1.19)$$

Le milieu étant considéré comme indéformable, seule la variation locale de température intervient dans l'expression de la variation instantanée de l'énergie interne totale E du milieu. Par unité de temps, le "stock" d'énergie thermique accumulé par le milieu par échauffement s'accroît de

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \int_V c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dm = \int_V \rho \cdot c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (1.20)$$

avec

- Q : la quantité de chaleur échangée par le milieu avec son environnement,
 ρ : la masse volumique du milieu,
 $c_p(T)$: la chaleur massique du milieu à pression constante dépendant de la température.

L'application du premier principe de la thermodynamique au volume V conduit à écrire le bilan suivant lorsqu'il n'y a pas création d'énergie :

Variation de l'énergie interne de V = flux traversant S

Soit (1.19) = (1.20) :

$$\int_V \rho \cdot c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_S - \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_{ext} dS \quad (1.21)$$

Le bilan énergétique devient, après application de la formule d'Ostrogradsky (transformation de l'intégrale de surface en intégrale de volume) au membre de droite de (1.21) :

$$\int_V \rho \cdot c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_V - \operatorname{div}(\mathbf{Q}_t) \cdot \mathbf{n}_{ext} dV \quad (1.22)$$

soit en termes de bilan local au sein de V et par unité de volume :

$$\rho \cdot c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{Q}_t) = 0 \quad (1.23)$$

(1.23) est l'équation de conservation de l'énergie et \mathbf{Q}_t désigne la densité de flux de chaleur totale.

On a adopté comme première hypothèse de départ le transfert de chaleur simultanément radiatif-conductif couplé et en absence de convection naturelle, ce qui revient à exprimer la densité de flux de chaleur totale \mathbf{Q}_t , par

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_r + \mathbf{Q}_c \quad (1.24)$$

où \mathbf{Q}_r est la densité de flux radiatif totale qui a été définie au paragraphe 1.2.2 et \mathbf{Q}_c désigne la densité de flux de chaleur par conduction, donnée par la loi de Fourier :

$$\mathbf{Q}_c = -\lambda_c(T) \cdot \mathbf{grad}(T) \quad (1.25)$$

où λ_c est la conductivité thermique du milieu.

La loi (1.25) exprime que les flux de chaleur par conduction sont d'autant plus intenses que les écarts de température sont plus marqués, et qu'en outre la chaleur va des points chauds vers les points froids.

En assimilant la divergence du flux radiatif à un terme source local S_r , l'équation (1.23) s'écrit :

$$\rho \cdot c_p(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda_c(T) \cdot \mathbf{grad}(T)) = S_r \quad (1.26)$$

avec

$$S_r = -\text{div}(\mathbf{Q}_r) \quad (1.27)$$

Dans le cas de la géométrie monodimensionnelle, l'équation (1.26) s'écrit :

$$\rho \cdot c_p(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_c(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)) = S_r(x,t) \quad (1.28)$$

avec

$$S_r(x,t) = -\frac{\partial \mathbf{Q}_r}{\partial x}(x,t) \quad (1.29)$$

et le flux conductif est donné par

$$Q_c(x,t) = -\lambda_c(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t) \quad (1.30)$$

La divergence du flux radiatif est d'un grand intérêt pratique car elle caractérise l'énergie radiative nette absorbée par le milieu. Elle représente, de ce fait, le terme source radiative que l'on retrouve dans l'équation de conservation de l'énergie (1.28). Si ce terme est nul, le milieu est dit à l'équilibre radiatif.

Dans la plupart des cas, la chaleur massique et la conductivité thermique sont prises comme des constantes. Ici, du point de vue théorique, elles varient avec la température. L'équation (1.28) est alors **non linéaire**, ce qui complique beaucoup plus sa résolution.

C'est l'équation de conservation de l'énergie qui permet d'effectuer le couplage entre le phénomène de conduction et de rayonnement. En effet, nous avons besoin du champ de températures dans l'ETR pour le calcul de l'émission propre du milieu, et du champ de luminance pour le calcul du terme source radiatif qui intervient dans l'équation de conservation de l'énergie.

L'interaction conduction-rayonnement à l'intérieur d'un milieu semi-transparent est donc totalement décrite par les deux équations :

- l'ETR, exprimant le bilan radiatif,
- l'équation de conservation de l'énergie.

Ces deux équations définissent un système fortement couplé d'équations aux dérivées partielles et intégral-différentielle non linéaires, où les inconnues sont le champ de luminance et le champ de températures. La démarche de notre étude va consister à résoudre simultanément ces deux équations.

1.3 Récapitulation du modèle 1 D utilisé

- **L'équation du transfert radiatif**

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu, \omega, t)}{\partial x} &= \sigma_{a\lambda}(\mu, \omega) \cdot L_\lambda^o(T(x, t)) - \sigma_{e\lambda}(\mu, \omega) \cdot L_\lambda(x, \mu, \omega, t) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^1 \sigma_{s\lambda}(\mu', \omega') \cdot P_\lambda((\mu', \omega') \rightarrow (\mu, \omega)) \cdot L_\lambda(x, \mu', \omega', t) \, d\mu' \, d\omega' \end{aligned} \quad (1.31)$$

$\forall (x, \mu, \omega, t) \in (0, E) \times [-1, 1] \times [0, 2\pi] \times (0, t_f]$ et $\lambda \in (0, \infty)$. t_f représente l'instant où le régime stationnaire est atteint (à une tolérance donnée près).

$$\begin{aligned} \mu \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu, t)}{\partial x} &= \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_\lambda^o(T(x, t)) - \sigma_{e\lambda}(\mu) \cdot L_\lambda(x, \mu, t) \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_{s\lambda}(\mu') \cdot P_\lambda(\mu' \rightarrow \mu) \cdot L_\lambda(x, \mu', t) \, d\mu' \end{aligned} \quad \text{avec symétrie azimutale (1.32)}$$

$\forall (x, \mu, t) \in (0, E) \times [-1, 1] \times (0, t_f]$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

- **Flux radiatif**

$$Q_r(x, t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 L_\lambda(x, \mu, \omega, t) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda \quad (1.33)$$

$$Q_r(x, t) = 2\pi \cdot \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\mu=-1}^1 L_\lambda(x, \mu, t) \cdot \mu \, d\mu \, d\lambda \quad \text{avec symétrie azimutale} \quad (1.34)$$

$\forall (x, t) \in (0, E) \times (0, t_f]$

- **Terme source d'énergie radiative**

$$S_r(x, t) = -\frac{\partial Q_r}{\partial x}(x, t) \quad \forall (x, t) \in (0, E) \times (0, t_f] \quad (1.35)$$

- **L'équation de conservation de l'énergie**

$$\rho \cdot c_p(T(x, t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_c(T(x, t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x, t)) = S_r(x, t) \quad \forall (x, t) \in (0, E) \times (0, t_f] \quad (1.36)$$

- **Flux conductif**

$$Q_c(x, t) = -\lambda_c(T(x, t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \quad \forall (x, t) \in (0, E) \times (0, t_f] \quad (1.37)$$

- **Flux total**

$$Q_t(x, t) = Q_r(x, t) + Q_c(x, t) \quad \forall (x, t) \in (0, E) \times (0, t_f] \quad (1.38)$$

1.4 Conditions aux limites

Pour fermer le problème, il reste à introduire les conditions aux limites. Dans notre étude, elles seront de deux types. Dans un premier temps, nous étudierons le problème lorsque les températures sont imposées aux frontières de l'échantillon, correspondant à un système aux plaques chaudes gardées. Ce sont des conditions de type Dirichlet. Dans un deuxième temps, nous étudierons le problème lorsque nous imposons un flux de rayonnement aux frontières de l'échantillon.

1.4.1 Températures imposées aux frontières

Pour les conditions de températures imposées, nous supposons que les frontières de notre milieu sont **noires** (figure 1.9). Nous désignons des frontières noires comme étant des surfaces uniquement émissives (pas de réflexion ni de transmission). Nous allons résoudre le problème dans ce cas; d'une part en régime permanent, et d'autre part en régime transitoire. Nous pourrions alors comparer les résultats lorsque le régime transitoire atteint le régime permanent.

En régime stationnaire : seules les conditions aux bords interviennent.

Les conditions thermiques nécessaires à la résolution de l'équation de conservation de l'énergie sont les suivantes :

en $x = 0$, $T = T_o$, est la température que l'on supposera **chaude**.

en $x = E$, $T = T_E$, est la température que l'on supposera **froide**.

Dans le cas de frontières noires, pour lesquelles les températures sont fixées, les conditions aux limites radiatives (figure 1.9) sont, d'après Ozisik [6] :

en $x = 0$, $L_\lambda(0, \mu, \omega) = L_\lambda^o(T_o)$ pour $0 < \mu \leq 1$ et $0 \leq \omega \leq 2\pi$

en $x = E$, $L_\lambda(E, \mu, \omega) = L_\lambda^o(T_E)$ pour $-1 \leq \mu < 0$ et $0 \leq \omega \leq 2\pi$

En régime transitoire : nous devons rajouter la condition initiale.

Nous supposons que la couche du milieu est initialement à température uniforme et un échelon de température sera brusquement appliqué sur l'une de ses faces, ce qui se traduit mathématiquement par les relations suivantes :

les conditions thermiques pour $t > 0$ sont :

en $x = 0$, $T(0, t) = f(t)$, est la température chaude qui varie au cours du temps et atteint la température constante T_o .

en $x = E$, $T = T_E$, est la température froide qui reste constante au cours du temps.

la condition initiale à l'instant $t = 0$ est : $T(x, 0) = T_E$, une température constante dans le milieu.

Alors les conditions radiatives pour $t \geq 0$ sont données par :

$$\begin{aligned} \text{en } x=0, \quad L_\lambda(0, \mu, \omega, t) &= L_\lambda^o(f(t)) \quad \text{pour } 0 < \mu \leq 1 \text{ et } 0 \leq \omega \leq 2\pi \\ \text{en } x=E, \quad L_\lambda(E, \mu, \omega, t) &= L_\lambda^o(T_E) \quad \text{pour } -1 \leq \mu < 0 \text{ et } 0 \leq \omega \leq 2\pi \end{aligned}$$

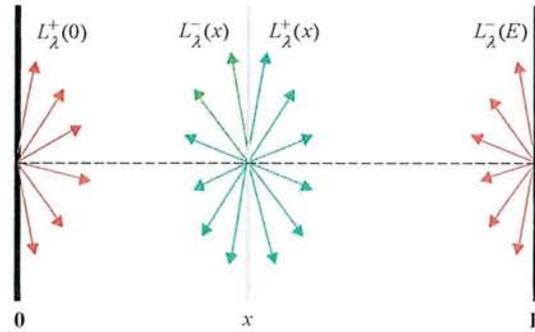


figure 1.9 : Conditions aux limites radiatives et luminances dans le milieu.

Remarque 1.2 : nous allons étudier un milieu à symétrie azimutale dont les conditions aux limites radiatives présentent aussi cette symétrie.

1.4.2 Flux imposés aux frontières

Si les conditions de températures imposées aux frontières sont relativement assez nombreuses dans la littérature, il n'en est pas de même pour les flux imposés, et encore moins pour des surfaces semi-transparentes. En effet, l'hypothèse des températures imposées, intéressante par sa simplicité, présente cependant en transfert thermique un inconvénient : la détermination des températures de surface est délicate et peu précise, et parfois même impossible à réaliser.

Les conditions de Dirichlet sont alors souvent remplacées par des conditions de Fourier (de flux) qui nécessitent la connaissance de lois simulant le comportement du milieu extérieur au système thermique étudié. Le problème physique que l'on désire traiter est celui d'un échantillon semi-transparent à faces parallèles, bordé de frontières semi-transparentes et soumis à des conditions de flux. Ce problème est loin d'être évident, comme nous allons le voir dans la suite. Nous supposons que l'échantillon est une plaque plane composée d'un matériau fibreux, positionnée verticalement dans une air calme (figure 1.10). Les deux faces $x=0$ et $x=E$ sont en contact avec des ambiances de températures respectives $T_{\infty,0}$ et $T_{\infty,E}$ et les échanges superficiels entre paroi et ambiance sont caractérisés par des coefficients d'échange convectif h_o et h_E . Cette plaque est soumise à un flux radiatif sur ses deux surfaces (figure 1.10), que l'on supposera **très intense** sur l'une d'elles (soleil par exemple). L'échauffement des deux parois sous l'effet du rayonnement va se traduire par une génération de chaleur au sein du milieu. Nous étudierons alors le transfert de chaleur au travers de cette plaque. Pour cela, nous devons établir en premier lieu les conditions aux limites radiatives,

puis les conditions aux limites thermiques, ces dernières faisant appel au coefficient de convection h , dont nous déterminerons la grandeur. Au préalable, nous allons introduire quelques notions qui serviront pour l'établissement des conditions aux limites.

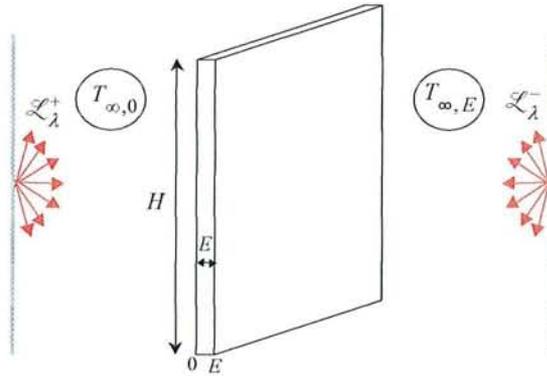


figure 1.10 : Plaque plane soumise à un flux radiatif sur ses deux surfaces

1.4.2.1 Réception du rayonnement par un corps : réflexion, absorption et transmission

Pour cette partie, nous adoptons les définitions données par Ozisik [6]. Nous allons définir des grandeurs permettant de caractériser le comportement radiatif des corps réels : **émissivité**, **absorptivité**, **réflectivité** et **transmittivité**. Considérons, *figure 1.11*, un flux monochromatique incident $Q_{\lambda,i}$ contenu dans un angle solide $d\Omega$, qui atteint une surface dS appartenant à l'enveloppe S d'un corps, selon une direction caractérisée par le vecteur unitaire Δ .

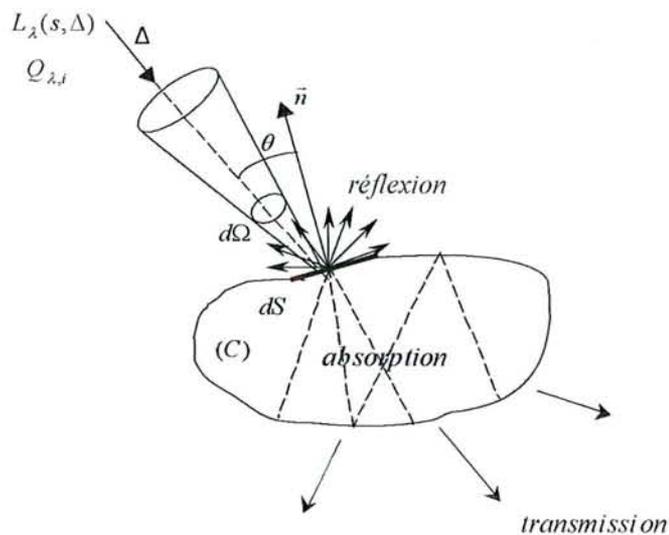


figure 1.11 : Réception du rayonnement thermique par un corps.

Dans le cas le plus général, c'est à dire pour les **milieux semi-transparents**, à ce flux incident vont correspondre trois flux :

- un flux réfléchi, $Q_{\lambda,r}$ qui est renvoyé sans avoir pénétré dans le corps (C),
- un flux transmis, $Q_{\lambda,t}$ qui, ayant pénétré dans (C) au travers de dS , le traverse,
- un flux absorbé, $Q_{\lambda,a}$ qui pénètre et est conservé dans (C), constituant un apport énergétique pour ce dernier.

La conservation de l'énergie entraîne :

$$Q_{\lambda,i} = Q_{\lambda,r} + Q_{\lambda,t} + Q_{\lambda,a} \quad (1.39)$$

Soit $L_\lambda(s, \Delta)$ la luminance du rayonnement réfléchi dans la direction Δ , correspondant à la luminance $L_\lambda(s, \Delta')$ du rayonnement incident suivant la direction Δ' (*figure 1.12*).

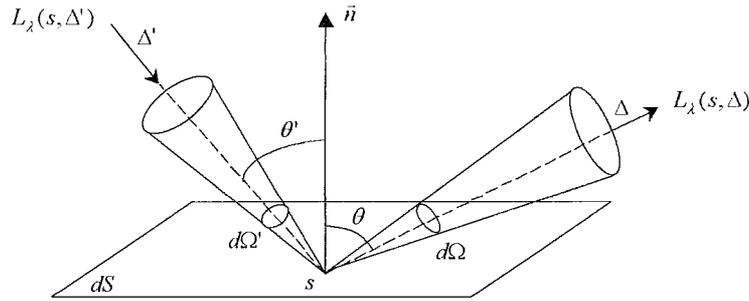


figure 1.12 : Réflectivité monochromatique bidirectionnelle.

La réflectivité monochromatique bidirectionnelle est le rapport de la luminance monochromatique du rayonnement réfléchi dans une direction donnée à la densité de flux radiatif monochromatique incident sur l'échantillon dans un angle solide élémentaire $d\Omega'$. $L_\lambda(s, \Delta') \cdot \cos\theta' \cdot d\Omega'$ représente le flux d'énergie par unité de surface, incident sur l'échantillon.

$$\rho_\lambda''(s, \Delta', \Delta) = \frac{L_\lambda^{ref}(s, \Delta)}{L_\lambda(s, \Delta') \cdot \cos\theta' \cdot d\Omega'} \quad (1.40)$$

De même, nous pouvons considérer le même type de problème en nous intéressant à la luminance transmise à travers le corps (C) : $L_\lambda(s, \Delta)$, et définir la transmittivité monochromatique bidirectionnelle :

$$\tau_\lambda''(s, \Delta'', \Delta) = \frac{L_\lambda^{trans}(s, \Delta)}{L_\lambda(s, \Delta'') \cdot \cos\theta'' \cdot d\Omega''} \quad (1.41)$$

Remarque 1.3 : ces grandeurs peuvent prendre des valeurs positives, inférieures ou supérieures à un, sans limitation particulière, dans la mesure où la valeur $d\Omega'$ (ou $d\Omega''$), par exemple, peut être très faible.

En multipliant les deux membres de (1.40) par $\cos\theta \cdot d\Omega$ et en intégrant les expressions sur tout le demi-espace, on obtient la réflectivité monochromatique directionnelle hémisphérique qui est le rapport du flux réfléchi par l'échantillon sur tout le demi-espace, au flux incident sur l'échantillon dans un angle solide élémentaire $d\Omega'$:

$$\rho_\lambda(s, \Delta') = \frac{\int_{\Omega} I_{\lambda}^{\text{ref}}(s, \Delta) \cdot \cos\theta \cdot d\Omega}{L_\lambda(s, \Delta') \cdot \cos\theta' \cdot d\Omega'} = \frac{Q_{\lambda,r}}{Q_{\lambda,i}} \quad \text{par définition} \quad (1.42)$$

On fait de même pour (1.41). On obtient la transmittivité monochromatique directionnelle, définie de manière analogue, mais cette fois en relation avec le flux de rayonnement transmis

$$\tau_\lambda(s, \Delta'') = \frac{\int_{\Omega} I_{\lambda}^{\text{ans}}(s, \Delta) \cdot \cos\theta \cdot d\Omega}{L_\lambda(s, \Delta'') \cdot \cos\theta'' \cdot d\Omega''} = \frac{Q_{\lambda,t}}{Q_{\lambda,i}} \quad \text{par définition} \quad (1.43)$$

L'absorptivité monochromatique directionnelle est, quant à elle, définie par :

$$\alpha_\lambda(s, \Delta) = \frac{Q_{\lambda,a}}{Q_{\lambda,i}} \quad (1.44)$$

Compte tenu de la conservation de l'énergie (1.39), on a :

$$\rho_\lambda(s, \Delta) + \tau_\lambda(s, \Delta) + \alpha_\lambda(s, \Delta) = 1 \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha_\lambda \leq 1, \quad 0 \leq \rho_\lambda \leq 1, \quad 0 \leq \tau_\lambda \leq 1. \quad (1.45)$$

L'émissivité monochromatique directionnelle est le rapport entre la luminance monochromatique $L_\lambda(s, \Delta)$ du matériau dS considéré, à la température T , et celle du corps noir à la même température $L_\lambda^o(T)$:

$$\varepsilon_\lambda(s, \Delta) = \frac{L_\lambda(s, \Delta)}{L_\lambda^o(T)} \quad (1.46)$$

Les absorptivités et émissivités monochromatiques directionnelles sont liées par la loi de Kirchhoff Drapper, soit :

$$\varepsilon_\lambda(s, \Delta) = \alpha_\lambda(s, \Delta) \quad (1.47)$$

Remarque 1.4 : les coefficients que nous venons de définir dépendent aussi de la température T et de la nature de la surface dS .

Ces grandeurs caractérisent de manière globale le comportement d'un corps vis-à-vis du rayonnement qu'il reçoit. Nous en venons maintenant à l'établissement des conditions aux limites radiatives.

1.4.2.2 Conditions aux limites radiatives pour un milieu semi-transparent avec des surfaces semi-transparentes

Nous considérons un milieu semi-transparent d'épaisseur E , possédant des frontières semi-transparentes. Nous désignons des **frontières semi-transparentes** comme étant des frontières qui peuvent réfléchir, transmettre et absorber le rayonnement. Pour l'écriture des conditions aux limites, on se place dans le cas le plus général. On impose à l'extérieur des deux faces, respectivement, deux sources de rayonnements (*figure 1.13*) d'intensités différentes, qui évoluent dans le temps et définies par :

- $\mathcal{L}_\lambda^+(\mu, \omega, t)$ avec $0 < \mu \leq 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ et $t \geq 0$ pour la face avant (i.e. en $x = 0$)
- $\mathcal{L}_\lambda^-(\mu, \omega, t)$ avec $-1 \leq \mu < 0$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ et $t \geq 0$ pour la face arrière (i.e. en $x = E$).

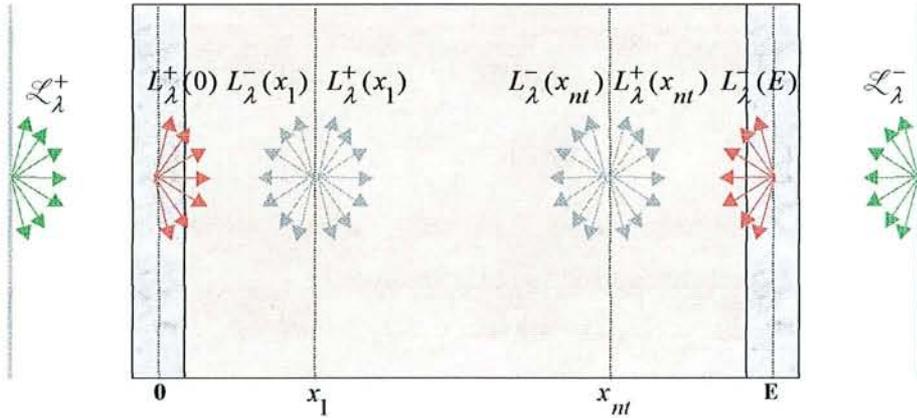


figure 1.13 : Conditions aux limites radiatives

Les conditions aux limites radiatives pour des surfaces semi-transparentes sont détaillées dans Modest [4].

Le rayonnement en $x = 0$, de direction $0 < \mu \leq 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ et pour $t \geq 0$, est dû à :

- l'émission propre de la frontière,
- la réflexion du rayonnement de la frontière dirigée vers l'intérieur du milieu,
- la transmission du rayonnement provenant de l'extérieur du milieu, celui que l'on impose.

soit,

$$L_\lambda(0, \mu, \omega, t) = \varepsilon_\lambda(0, \mu, \omega) \cdot L_\lambda^o(T_o(t)) + \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^0 \rho_\lambda''(0, (\mu', \omega'), (\mu, \omega)) \cdot L_\lambda(0, \mu', \omega', t) \cdot \mu' \, d\mu' \, d\omega' + \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=0}^1 \tau_\lambda''(0, (\mu', \omega'), (\mu, \omega)) \cdot \mathcal{L}_\lambda^+(\mu', \omega', t) \cdot \mu' \, d\mu' \, d\omega'$$

De même, le rayonnement en $x = E$, de direction $-1 \leq \mu < 0$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$ et pour $t \geq 0$, sera donné par :

$$L_{\lambda}(E, \mu, \omega, t) = \varepsilon_{\lambda}(E, \mu, \omega) \cdot L_{\lambda}^o(T_E(t)) + \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=0}^1 \rho_{\lambda}''(E, (\mu', \omega'), (\mu, \omega)) \cdot L_{\lambda}(E, \mu', \omega', t) \cdot \mu' d\mu' d\omega' \\ + \int_{\omega'=0}^{2\pi} \int_{\mu'=-1}^0 \tau_{\lambda}''(E, (\mu', \omega'), (\mu, \omega)) \cdot \mathcal{L}_{\lambda}^{-}(\mu', \omega', t) \cdot \mu' d\mu' d\omega'$$

avec

$T_o(t)$ la température de la face avant qui évolue dans le temps,

$T_E(t)$ la température de la face arrière qui évolue dans le temps,

$\varepsilon_{\lambda}(0, \mu, \omega)$ l'émissivité monochromatique directionnelle de la face avant,

$\varepsilon_{\lambda}(E, \mu, \omega)$ l'émissivité monochromatique directionnelle de la face arrière,

$\rho_{\lambda}''(0, (\mu', \omega'), (\mu, \omega))$ la réflectivité monochromatique bidirectionnelle de la face avant,

$\rho_{\lambda}''(E, (\mu', \omega'), (\mu, \omega))$ la réflectivité monochromatique bidirectionnelle de la face arrière,

$\tau_{\lambda}''(0, (\mu', \omega'), (\mu, \omega))$ la transmittivité monochromatique bidirectionnelle de la face avant,

$\tau_{\lambda}''(E, (\mu', \omega'), (\mu, \omega))$ la transmittivité monochromatique bidirectionnelle de la face arrière.

Remarque 1.5 : Dans les conditions aux limites radiatives décrites ci-dessus,

$L_{\lambda}(0, \mu', \omega', t)$ avec $-1 \leq \mu' < 0$, $0 \leq \omega' \leq 2\pi$ et $L_{\lambda}(E, \mu', \omega', t)$ avec $0 < \mu' \leq 1$, $0 \leq \omega' \leq 2\pi$, sont des inconnues. Par conséquent, la résolution de l'ETR avec ce type de conditions aux limites sera très complexe.

1.4.2.3 Conditions aux limites thermiques pour un milieu semi-transparent avec des frontières semi-transparentes

On se propose dans cette partie d'établir les conditions aux limites pour le champ de températures. On se place toujours dans le cas le plus général en considérant des frontières semi-transparentes. Le milieu est soumis à un flux de rayonnements thermiques sur ses deux surfaces, respectivement $\mathcal{L}_{\lambda}^{+}$ et $\mathcal{L}_{\lambda}^{-}$. L'échantillon d'épaisseur E , initialement isotherme, est donc excité par une impulsion de flux radiatives. Il subira, suite à son échauffement, des pertes radiatives, conductives et convectives sur les deux faces, caractérisées par des coefficients d'échange.

Glass et al. [9] ont modélisé le transfert de chaleur couplé par rayonnement et conduction dans un milieu gris, émissif et absorbant, soumis à des conditions de flux. Les

frontières du milieu sont semi-transparentes et leur propriétés radiatives (réflectivité, transmittivité et émissivité) diffèrent selon qu'elles sont en contact avec le milieu intérieur ou extérieur. Les auteurs donnent alors la forme générale des conditions aux limites thermiques qui s'appliquent au niveau de l'équation de conservation de l'énergie, puis traitent le cas particulier d'un milieu à frontières opaques pour lequel les pertes par convection ne sont pas prises en compte. Les conditions aux limites thermiques sont obtenues à partir d'un bilan énergétique sur les surfaces. Le passage du cas développé par Glass et al. au cas qui nous intéresse se fait en supposant que le milieu est non gris et que les propriétés radiatives des frontières (réflectivité, transmittivité et émissivité) deviennent des grandeurs qui dépendent de la direction et de la longueur d'onde du rayonnement.

Un bilan sur la surface avant (*figure 1.14*) nous amène alors à décomposer les gains et les pertes comme suit :

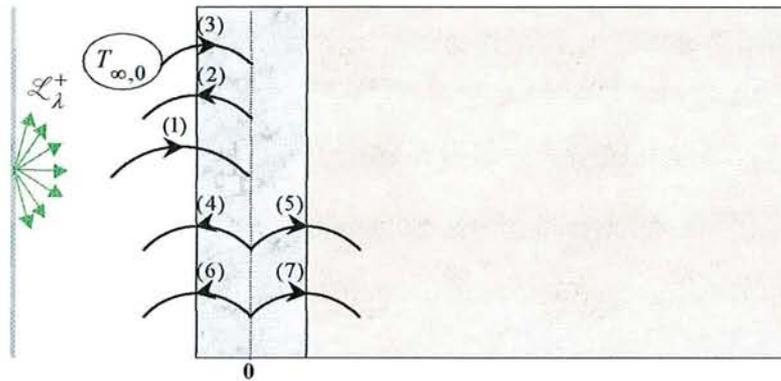


figure 1.14 : Conditions aux limites thermiques.

- **Les gains**

(1) : part absorbée du flux provenant du rayonnement que l'on impose

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^1 \left\{ 1 - \rho_{\lambda}^1(0, (\mu, \omega)) - \tau_{\lambda}(0, (\mu, \omega)) \right\} \cdot \mathcal{L}_{\lambda}^+(\mu, \omega, t) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

(2) : part absorbée du flux par rayonnement issue de la surface

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^0 \left\{ 1 - \rho_{\lambda}^2(0, (\mu, \omega)) - \tau_{\lambda}(0, (\mu, \omega)) \right\} \cdot L_{\lambda}(0, \mu, \omega, t) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

(3) : part absorbée du flux par rayonnement provenant de la source de température $T_{\infty,0}$ se trouvant à l'extérieur du milieu

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^1 \left\{ 1 - \rho_{\lambda}^1(0, (\mu, \omega)) - \tau_{\lambda}(0, (\mu, \omega)) \right\} \cdot L_{\lambda}^o(T_{\infty,0}) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

en supposant que le milieu extérieur émet comme un corps noir.

- **Les pertes**

(4) : perte (ou gain) par convection

$$h_o \cdot (T - T_{\infty,o})$$

où h_o est le coefficient d'échange convectif de la face avant.

(5) : perte (ou gain) par conduction

$$-\lambda_c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

(6) : perte par rayonnement venant de l'émission propre de la paroi : flux à la surface émis vers l'extérieur du milieu

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^0 \varepsilon_{\lambda}(0,(\mu,\omega)) \cdot L_{\lambda}^o(T) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

(7) : perte par rayonnement venant de l'émission propre de la paroi : flux à la surface émis vers l'intérieur du milieu

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=0}^1 \varepsilon_{\lambda}(0,(\mu,\omega)) \cdot L_{\lambda}^o(T) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

et nous aurons une expression similaire pour l'autre face.

Les grandeurs qui interviennent dans les écritures précédentes sont :

T la température de la face avant,

$T_{\infty,o}$ est la température ambiante du milieu extérieur,

$\rho_{\lambda}(0,(\mu,\omega))$ la réflectivité monochromatique directionnelle hémisphérique de la face avant,

$\tau_{\lambda}(0,(\mu,\omega))$ la transmittivité monochromatique directionnelle de la face avant,

$\varepsilon_{\lambda}(0,\mu,\omega)$ l'émissivité monochromatique directionnelle de la face avant.

Si l'on regroupe les gains, indépendants de la température de surface, dans une fonction g_0 , soit $g_0 = (1) + (2) + (3)$ et les pertes radiatives, dépendantes de la température de surface, dans une fonction $f_0(T)$, soit $f_0(T) = (6) + (7)$, alors les conditions aux limites en $x=0$ deviennent :

$$-\lambda_c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + h_o(T) \cdot (T - T_{\infty,o}) + f_0(T) = g_0 \quad (1.48)$$

avec

$$f_0(T) = \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\omega=0}^{2\pi} \int_{\mu=-1}^1 \varepsilon_{\lambda}(0,(\mu,\omega)) \cdot L_{\lambda}^o(T) \cdot \mu \, d\mu \, d\omega \, d\lambda$$

Remarques 1.6 :

- 1) Nous avons noté $h_o(T)$ parce que en toute rigueur, le coefficient d'échange par convection varie avec la température de surface. Nous donnerons son expression dans la suite.
- 2) La condition aux limites (1.48) est une écriture générale pour un milieu à frontières semi-transparentes. C'est une condition aux limites **mixte** (ou de Fourier) et **non linéaire**.
- 3) Comme dans le cas des conditions aux limites radiatives (remarque 1.5), il apparaît des inconnues dans les conditions aux limites thermiques (dans (2)). Cela rendra plus difficile la résolution de l'équation de conservation de l'énergie.

1.4.2.4 Hypothèse simplificatrice de frontières transparentes

Comme nous venons de le voir, dans le cas général, les conditions aux limites pour un milieu à frontières semi-transparentes sont assez complexes. Le domaine d'application qui nous intéresse dans cette étude, est celui des matériaux isolants du type laine de verre, composés de fibres de silice, où les fibres sont stratifiées dans des plans parallèles aux frontières du milieu et où la densité de fibres est très faible (*figure 1.15*). On est alors amené à considérer la surface comme étant pratiquement **transparente** car la densité de fibres est très faible et la probabilité pour un rayon incident de rencontrer une fibre dans le plan de l'interface est négligeable par rapport à celle de traverser l'air (*figure 1.15*). Par ailleurs, une surface sans volume ne peut pas absorber et donc ni réémettre.

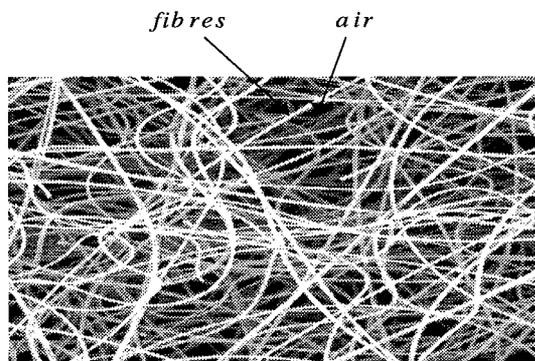


figure 1.15 : Echantillon étudié : isolant composé de fibres de silice.

Ainsi, l'hypothèse de surfaces transparentes va considérablement simplifier la résolution du problème. Les frontières transparentes sont une hypothèse selon laquelle, aux bords, le milieu et le rayonnement n'auraient aucune interaction. Dans ce cas, les conditions aux limites radiatives deviennent

$$\text{en } x=0, L_\lambda(0, \mu, \omega, t) = \mathcal{L}_\lambda^+(\mu, \omega, t) \text{ pour } 0 < \mu \leq 1, 0 \leq \omega \leq 2\pi, t \geq 0 \quad (1.49)$$

$$\text{en } x=E, L_\lambda(E, \mu, \omega, t) = \mathcal{L}_\lambda^-(\mu, \omega, t) \text{ pour } -1 \leq \mu < 0, 0 \leq \omega \leq 2\pi, t \geq 0 \quad (1.50)$$

Au niveau des conditions aux limites thermiques, nous aurons $f_0 = g_0 = 0$, pour avoir finalement en $x=0$

$$-\lambda_c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + h_o(T) \cdot (T - T_{\infty,o}) = 0 \quad (1.51)$$

Si pour la face avant, nous avons une perte par conduction, alors pour la face arrière, nous aurons un gain par conduction. Ainsi la condition aux limites thermiques en $x=E$ s'écrit :

$$\lambda_c(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + h_E(T) \cdot (T - T_{\infty,E}) = 0 \quad (1.52)$$

Remarques 1.7 :

- 1) (1.49) et (1.50) sont des conditions aux limites non homogènes.
- 2) (1.51) et (1.52) restent toujours des conditions aux limites de type Fourier et non linéaire.
- 3) L'hypothèse de frontières transparentes conduit à des conditions aux limites thermiques sans terme radiatif.
- 4) Nous n'avons plus les problèmes de résolution soulevés dans les remarques 1.5 et 1.6.

1.4.2.5 Le coefficient d'échange convectif

Le coefficient d'échange convectif h caractérise l'échange de chaleur entre le fluide et la paroi du milieu étudié. Sa grandeur dépend de la géométrie du système d'échange thermique (plaque, cylindre, etc....) et a une valeur locale qui dépend de la position du point sur la paroi. En première approximation, nous considérons une valeur moyenne pour la totalité de la paroi considérée. Par ailleurs, le coefficient a des expressions différentes suivant que le régime de l'écoulement du fluide est laminaire ou turbulent. Dans cette étude, on considère une plaque plane verticale (*figure 1.10*) et c'est la valeur moyenne du coefficient que l'on désire connaître. On la note toujours h pour ne pas alourdir les notations. Le fluide sera l'air.

Les éléments qui vont suivre sont tirés de la référence [8]. La détermination du coefficient passe par le calcul intermédiaire de quelques nombres :

Le nombre de Nusselt

$$N_u = \frac{h \cdot H}{\lambda_{c,a}}$$

H désigne la hauteur de la plaque (*figure 1.10*) et $\lambda_{c,a}$ la conductivité thermique de l'air.

Le nombre de Rayleigh

$$R_a = G_r \cdot P_r$$

P_r est le nombre de Prandtl et G_r le nombre de Grashof.

Le nombre de Prandtl

$$P_r = \frac{\mu_a \cdot c_{p,a}}{\lambda_{c,a}}$$

μ_a désigne la viscosité dynamique de l'air et $c_{p,a}$ sa chaleur massique. D'après la table des propriétés thermodynamiques de l'air [8], pour une plage de températures variant entre 100 K et 1500 K, le nombre de Prandtl pour l'air varie très peu. Nous fixerons alors sa valeur égale à $P_r = 0,7$.

Le nombre de Grashof

$$G_r = \frac{g \cdot H^3}{\nu_a^2} \cdot \frac{|T - T_\infty|}{T_f}$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$), ν_a est la viscosité cinématique de l'air, T est la température de la paroi, T_∞ est la température ambiante de l'air et T_f est la température de film de l'air définie par $T_f = (T + T_\infty)/2$.

Le calcul du nombre de Grashof permet de déterminer la nature du régime convectif :

Si $G_r \leq 10^8$ alors le régime est laminaire,

Si $G_r \geq 10^9$ alors le régime est turbulent.

Pour une plaque plane verticale, on utilise l'une des deux relations suivantes pour le nombre de Nusselt, selon le régime de l'écoulement de l'air :

$$N_u = 0,59 \cdot R_a^{1/4} \text{ en régime } \underline{\text{laminaire}}$$

$$N_u = 0,13 \cdot R_a^{1/4} \text{ en régime } \underline{\text{turbulent}}$$

Nous pouvons à présent déduire l'expression de h à partir des relations ci-dessus :

En régime laminaire

$$h(T) = 0,95 \cdot \frac{\lambda_{c,a}(T_f)}{\sqrt{\nu_a(T_f)}} \cdot \left(\frac{1}{H} \cdot \frac{|T - T_\infty|}{T_f} \right)^{1/4} \quad (1.53)$$

En régime turbulent

$$h(T) = 0,25 \cdot \frac{\lambda_{c,a}(T_f)}{\nu_a(T_f)^{2/3}} \cdot \left(\frac{|T - T_\infty|}{T_f} \right)^{1/3} \quad (1.54)$$

Ces deux expressions de h font ressortir que celui-ci dépend des variations de la conductivité thermique $\lambda_{c,a}$ et de la viscosité cinématique ν_a avec la température de film de l'air. Par ailleurs, nous possédons la table des propriétés thermodynamiques de l'air [8]. Nous pouvons alors obtenir une expression polynomiale (de degré 2) très approchée de chacune de ces deux fonctions (figures 1.16 et 1.17) :

$$\lambda_{c,a}(T_f) = 10^{-4} \cdot (c_1 \cdot T_f^2 + c_2 \cdot T_f + c_3)$$

avec $c_1 = -2,55 \times 10^{-4}$; $c_2 = 9,2 \times 10^{-1}$; $c_3 = 6,7783$

$$\nu_a(T_f) = 10^{-6} \cdot (c_4 \cdot T_f^2 + c_5 \cdot T_f + c_6)$$

avec $c_4 = 7,56 \times 10^{-5}$; $c_5 = 4,76 \times 10^{-2}$; $c_6 = -4,74$

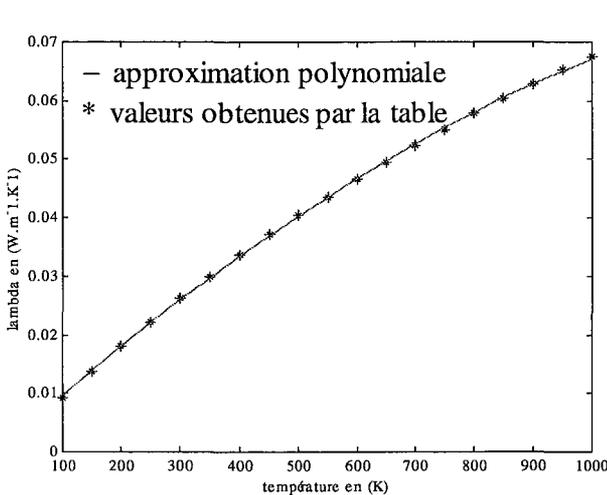


figure 1.16 : Variation de la conductivité thermique de l'air en fonction de sa température.

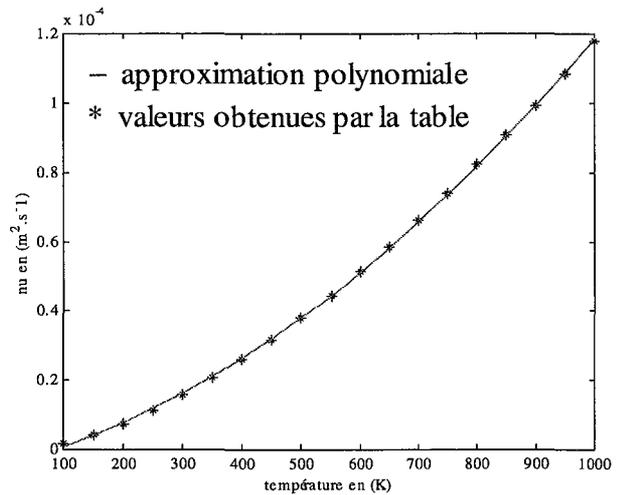


figure 1.17 : Variation de la viscosité cinématique de l'air en fonction de sa température

1.5 Conclusion

Nous avons présenté le modèle des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction, dans les milieux semi-transparents en régime transitoire. Nous avons établi l'équation du transfert radiatif et l'équation de conservation de l'énergie, et nous avons explicité les expressions des flux radiatif et conductif. Une hypothèse simplificatrice de géométrie monodimensionnelle a été introduite dans notre étude afin d'obtenir le modèle particulier d'un milieu à faces parallèles. Nous avons aussi donné les conditions aux limites de notre problème correspondant, d'une part aux températures imposées et, d'autre part, aux conditions de flux, avec l'hypothèse simplificatrice de frontières transparentes liées à la nature de notre milieu. La suite de notre exposé va maintenant porter sur l'analyse mathématique du problème en régime stationnaire, lorsque les températures sont imposées aux frontières.

Références

- [1] S.C. Lee. Radiation heat-transfer model for fibers oriented parallel to diffuse boundaries. *Journal of Thermophysics*. Vol. 2, p. 303–308, 1988.
- [2] R. Dautray – J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Tome 1, 2 et 3. CEA, Masson, 1985.
- [3] J. F. Sacadura. *Initiation aux transferts thermiques*. Technique et documentation, 1980.
- [4] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. Mc Graw-Hill International Ed., Mechanical Engineering Series, 1993.
- [5] R. Siegel and J. R. Howell. *Thermal Radiation Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- [6] M. N. Ozisik. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. Wiley-Interscience publication, New-York, 1973.
- [7] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover publications, Inc. New York, 1960.
- [8] J. Taine and J. P. Petit. *Transferts thermiques mécanique des fluides anisothermes*. Dunod Université, 1989.
- [9] D. E. Glass, M. N. Ozisik and D.S. McRae. Combined conduction and radiation with flux boundary condition for a semi-transparent medium covered by thin radiating layers. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*. Vol. 38, n°3, p. 201-208, 1987.

Chapitre II

Analyse mathématique du problème en régime stationnaire

Résumé : Dans ce chapitre, nous allons montrer les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution pour le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction décrit au chapitre I, avec la symétrie axiale et lorsque les températures sont imposées aux frontières pour des surfaces noires, correspondant aux conditions de type Dirichlet non homogènes. Cependant, pour simplifier l'analyse, nous étudierons seulement le régime stationnaire. L'étude du régime transitoire et des conditions de flux sera laissée en perspective. Les principaux outils utilisés dans la démonstration sont les théorèmes de point fixe de Banach, de Schauder et des arguments de monotonie.

2.1 Introduction et principaux résultats

Kelley [1] a prouvé les résultats d'existence et d'unicité pour le système 1 D couplé par rayonnement et conduction, en régime stationnaire et avec des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour des surfaces noires. Le milieu pris en compte par Kelley est supposé homogène, gris et isotrope, avec symétrie axiale. Par ailleurs, l'équation de la conduction est linéaire. Notre but sera d'étendre l'étude de Kelley à celle d'un milieu non gris, anisotrope, absorbant, diffusant et émissif. Comme lui, on supposera que le milieu est homogène avec symétrie axiale. Cependant, nous allons considérer l'équation de la conduction non linéaire à cause de la dépendance en température de la conductivité thermique, comme décrit dans le chapitre I.

Pour commencer, nous établissons le système des équations en régime stationnaire. Il suffit alors de reprendre les équations données au paragraphe 1.3 en supprimant la variable temps et en annulant les termes 'dérivées' par rapport au temps. On désigne toujours E l'épaisseur du milieu, que l'on supposera fini. On pose $\Omega = (0, E) \times [-1, 1]$, $\partial\Omega^+ = \{0\} \times (0, 1]$ et $\partial\Omega^- = \{E\} \times [-1, 0)$, qui sont des ensembles bornés. Le système s'écrit alors de la façon suivante :

$$\mu \cdot \frac{\partial L(x, \mu, \lambda)}{\partial x} = \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^o(T(x), \lambda) - \sigma_e(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) + \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot L(x, \mu', \lambda) d\mu' \quad \forall (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (2.1)$$

$$-\frac{d}{dx}(\lambda_e(T(x)) \cdot \frac{dT}{dx}(x)) = S_r(x) \quad \forall x \in (0, E) \quad (2.2)$$

associé aux conditions aux limites suivantes :

$$T(0) = T_o, \quad T(E) = T_E \quad (2.3)$$

$$L(x, \mu, \lambda) = L^o(T_o, \lambda) \quad (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^+ \times (0, \infty) \quad (2.4)$$

$$L(x, \mu, \lambda) = L^o(T_E, \lambda) \quad (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^- \times (0, \infty)$$

et où

$$Q_r(x) = 2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda \quad \forall x \in (0, E) \quad (2.5)$$

$$S_r(x) = -\frac{dQ_r}{dx}(x) \quad \forall x \in (0, E) \quad (2.6)$$

Dans l'ETR et les conditions aux limites radiatives, λ est un paramètre. Mais ici, nous avons fait apparaître λ comme une variable dans tout le système (2.1)–(2.6), car celle-ci ne peut pas être considérée comme un paramètre pour tout le système, puisque Q_r donné par (2.5) dépend de tous les $\lambda \in (0, \infty)$. Ainsi, S_r donné par (2.6) et le champ de températures T donné par (2.2) (2.3), dépendent eux aussi de tous les $\lambda \in (0, \infty)$. Nous rappelons que les inconnues du système sont la luminance monochromatique $L(x, \mu, \lambda)$ repérée à la position x , dans la direction μ et à la longueur d'onde λ , et la température $T(x)$ à la position x .

Nous rappelons que la fonction $L^o(T, \lambda)$, qui intervient dans l'ETR et aux conditions aux limites radiatives, est la luminance monochromatique du corps noir donnée par (1.1), soit

$$L^o(T, \lambda) = \frac{C_1}{\lambda^5 \cdot \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda \cdot T}\right) - 1 \right]} \quad (2.7)$$

et que

$$\int_0^{\infty} L^{\circ}(T, \lambda) d\lambda = \frac{\sigma \cdot T^4}{\pi} \quad (2.8)$$

Remarque 2.1 : Pour chaque $\lambda \in (0, \infty)$ fixé, $L^{\circ}(T, \lambda)$ est une fonction $C^{\infty}(]0, \infty[)$ et strictement croissante de T .

Nous rappelons également que le coefficient d'extinction σ_e est défini par

$$\sigma_e = \sigma_a + \sigma_s \quad (2.9)$$

D'après (1.3), la fonction $\mu \rightarrow \frac{1}{2} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda)$ est une densité de probabilité sur $[-1, 1]$ qui satisfait

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) d\mu = 1 \quad (2.10)$$

pour tout $\mu' \in [-1, 1]$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

D'après (1.4),

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) d\mu' = \sigma_s(\mu, \lambda) \quad (2.11)$$

pour tout $\mu \in [-1, 1]$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

Comme précisé au chapitre I, les coefficients d'absorption et de diffusion σ_a, σ_s sont strictement positifs et bornés, i.e. qu'il existe des constantes $\tilde{\sigma}_a^-, \tilde{\sigma}_a^+, \tilde{\sigma}_s^-, \tilde{\sigma}_s^+$ telles que

$$\begin{aligned} 0 < \tilde{\sigma}_a^- &\leq \sigma_a(\mu, \lambda) \leq \tilde{\sigma}_a^+ < +\infty \\ 0 < \tilde{\sigma}_s^- &\leq \sigma_s(\mu, \lambda) \leq \tilde{\sigma}_s^+ < +\infty \end{aligned} \quad (2.12)$$

pour tout $(\mu, \lambda) \in [-1, 1] \times (0, \infty)$.

Par ailleurs, les coefficients radiatifs sont continus pour la direction et vérifient les propriétés suivantes de symétries (les fibres sont réparties dans des plans parallèles aux frontières) :

$$\begin{aligned} \sigma_a(\mu, \lambda) &= \sigma_a(-\mu, \lambda) ; \sigma_s(\mu, \lambda) = \sigma_s(-\mu, \lambda) ; \sigma_e(\mu, \lambda) = \sigma_e(-\mu, \lambda) \text{ d'après (2.9)} \\ P(\mu' \rightarrow -\mu, \lambda) &= P(-\mu' \rightarrow \mu, \lambda) ; P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) = P(-\mu' \rightarrow -\mu, \lambda) \end{aligned} \quad (2.13)$$

pour tout $\mu, \mu' \in [0, 1]$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

Nous supposons que les températures aux bords T_o et T_E sont strictement positives et bornées :

$$0 < T_o < +\infty \text{ et } 0 < T_E < +\infty \quad (2.14)$$

Et enfin, nous ferons l'hypothèse suivante sur la conductivité thermique λ_c :

Hypothèse 2.2 : λ_c est définie sur $[0, \infty[$, $\lambda_c \in C^{\infty}(]0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$, elle est intégrable sur $]0, M[$ et il existe deux constantes λ_1 et λ_2 telles que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_c(u) \leq \lambda_2 < +\infty \quad \text{pour tout } u \in]0, M[\quad (2.15)$$

où M est un réel positif borné fixé. Nous supposons de plus que λ_c est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]0, \infty[$.

Nous allons à présent établir les principaux résultats obtenus dans cette étude.

Pour commencer, nous dirons que le couple (T, L) est une solution du système (2.1)–(2.6) si T est une solution dans $C([0, E]) \cap C^2(0, E)$ (i.e. c'est une solution classique) et L est une solution appartenant à $L^1((0, \infty); C(\Omega \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) \cap C^1((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$.

Alors, on a :

Théorème 1 (existence) : Sous les hypothèses (2.9)–(2.15), le système (2.1)–(2.6) a une solution (T, L) . Par ailleurs, le champ de températures T satisfait $\min(T_o, T_E) \leq T(x) \leq \max(T_o, T_E)$ pour tout $x \in [0, E]$ et la luminance L satisfait $L^o(\min(T_o, T_E), \lambda) \leq L(x, \mu, \lambda) \leq L^o(\max(T_o, T_E), \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, $(x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^+ \times (0, \infty)$ et $(x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^- \times (0, \infty)$.

Nous faisons remarquer que l'encadrement de la luminance monochromatique est, à notre connaissance, un résultat nouveau.

Proposition 2 : Sous les hypothèses du théorème 1, la luminance L est une fonction croissante de T_o, T_E, T dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < S(x) \leq T(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors $L(S, S_o, S_E)(x, \mu, \lambda) \leq L(T, T_o, T_E)(x, \mu, \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, où l'on note $L(T, T_o, T_E)$ la luminance associée aux températures T, T_o, T_E .

Théorème 3 (régularité) : Sous les hypothèses du théorème 1, la solution (T, L) est telle que

$$T \in C^\infty(0, E) \text{ et } L \in L^1((0, \infty); C^\infty((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\}))) .$$

En d'autres termes, la température et la luminance sont des fonctions très régulières en la variable x et la luminance a la même régularité que celle de la luminance du corps noir.

Proposition 4 : Sous les hypothèses du théorème 1, l'équation de la conduction (2.2) peut être réécrite uniquement en fonction de la température et des coefficients radiatifs comme

$$-\frac{d}{dx}(\lambda_c(T(x))) \cdot \frac{dT}{dx}(x) = f_r(T(x))$$

où la fonction f_r sera donnée dans la suite. En outre, cela signifie que le champ de températures dans le milieu peut être déterminé uniquement à partir des températures que l'on impose aux frontières et des propriétés radiatives du milieu.

Par ailleurs, cette proposition permet de montrer l'unicité de la solution (T, L) du système :

Théorème 5 (unicité) : Sous les hypothèses (2.9)–(2.15), la solution du système (2.1)–(2.6) est unique.

Le plan de ce chapitre s'organise de la manière suivante : dans le prochain paragraphe, nous prouvons le théorème 1, la proposition 2 et le théorème 3. Nous reformulons le système (2.1)–(2.6) comme un problème de point fixe compact. Cette approche permet de montrer l'existence de solutions, en utilisant les théorèmes de point fixe de Banach et de Schauder. En utilisant les régularités des fonctions $L^o(T, \lambda)$ et λ_c , nous déduisons le théorème 3. Dans le paragraphe 3, nous prouvons la proposition 4, i.e. nous exprimons le terme source radiatif, uniquement en fonction de T et alors nous prouvons le théorème 5. Et enfin, dans la dernière partie, nous donnons une conclusion.

2.2 Existence et régularité des solutions pour le système couplé

2.2.1 Existence et unicité de la solution pour un problème aux limites auxiliaire

Dans ce paragraphe, nous donnons un lemme d'existence et d'unicité pour un problème aux limites auxiliaire. Il s'agit d'une ETR qui est plus générale que celle donnée par (2.1)–(2.4). Bien sûr, cette équation n'a pas de solution analytique. La preuve du lemme est basée sur le théorème de point fixe de Banach et les relations portant sur les coefficients radiatifs.

Nous considérons le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \mu \cdot \frac{\partial L(x, \mu, \lambda)}{\partial x} + \sigma_e(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) = (A L)(x, \mu, \lambda) + H(x, \mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty) \\ L(x, \mu, \lambda) = \phi_o(\mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^+ \times (0, \infty) \\ L(x, \mu, \lambda) = \phi_e(\mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^- \times (0, \infty) \end{cases} \quad (2.16)$$

où A est un opérateur intégral linéaire défini par

$$(A \varphi)(x, \mu, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \varphi(x, \mu', \lambda) \, d\mu' \quad (2.17)$$

pour toute fonction $\varphi \in L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$ et pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. Les fonctions H , ϕ_o et ϕ_e sont données et appartiennent respectivement à $L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$, $L^1((0, \infty); L^\infty((0, 1]))$ et $L^1((0, \infty); L^\infty([-1, 0]))$.

Avant de se lancer dans l'analyse du problème (2.16), nous rappelons le résultat suivant. Lorsque le milieu est gris et isotrope, c'est-à-dire que les propriétés radiatives du milieu ne

dépendent pas de la direction et de la longueur d'onde (la fonction de phase $P \equiv 1$), l'équation (2.16) devient

$$\begin{cases} \mu \cdot \frac{\partial L(\tau, \mu)}{\partial \tau} + L(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \cdot \int_{-1}^1 L(\tau, \mu') d\mu' + H(\tau, \mu) & \forall (\tau, \mu) \in (0, E^*) \times [-1, 1] \\ L(0, \mu) = \phi_o(\mu) & 0 < \mu \leq 1 \\ L(E^*, \mu) = \phi_E(\mu) & -1 \leq \mu < 0 \end{cases}$$

où nous avons introduit l'épaisseur optique τ définie par $\tau = \sigma_e \cdot x$, l'albédo ω défini par $\omega = \sigma_s / \sigma_e$ et $E^* = \sigma_e \cdot E$. Alors, il est connu [2,3] que si ω vérifie $0 < \omega < 1$ (or ceci est toujours vrai, d'après les relations (2.9) et (2.12)), ce problème est bien posé et admet une unique solution dans un espace qui va dépendre des régularités des fonctions H , ϕ_o et ϕ_E . La preuve se fait par l'application du théorème de point fixe de Banach.

Nous allons alors utiliser la même technique de démonstration et l'adapter à notre problème. Au préalable, il nous faut introduire un espace fonctionnel. Nous définissons l'espace \mathbf{E} par

$$\mathbf{E} = L^1((0, \infty); C(\Omega \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) \cap C^1((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\}))) \quad (2.18)$$

et nous introduisons la norme suivante :

$$\|g\|_{1, \infty} = \int_0^\infty \|g(\cdot, \cdot, \lambda)\|_\infty d\lambda \quad \text{où} \quad \|g(\cdot, \cdot, \lambda)\|_\infty = \sup_{(x, \mu) \in \Omega} |g(x, \mu, \lambda)|$$

pour toute fonction $g : \Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$.

$(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{1, \infty})$ ainsi défini est un espace de Banach.

Nous donnons à présent le lemme annoncé.

Lemme 2.3 : On se donne les paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$ satisfaisant les relations (2.9)–(2.14) et les fonctions H , ϕ_o et ϕ_E appartenant respectivement à $L^1((0, \infty); C(\Omega))$, $L^1((0, \infty); C((0, 1]))$ et $L^1((0, \infty); C([-1, 0]))$. Alors, le problème aux frontières (2.16) a une unique solution dans l'espace \mathbf{E} .

preuve.

Définissons l'application $\mathcal{C} : (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{1, \infty}) \rightarrow (\mathbf{E}, \|\cdot\|_{1, \infty})$ telle que pour $\varphi \in \mathbf{E}$, $L = \mathcal{C}(\varphi)$ est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \mu \cdot \frac{\partial L(x, \mu, \lambda)}{\partial x} + \sigma_e(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) = (A\varphi)(x, \mu, \lambda) + H(x, \mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty) \\ L(x, \mu, \lambda) = \phi_o(\mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^+ \times (0, \infty) \\ L(x, \mu, \lambda) = \phi_E(\mu, \lambda) & (x, \mu, \lambda) \in \partial\Omega^- \times (0, \infty) \end{cases} \quad (2.19)$$

où la fonction φ apparaît dans le terme intégral de l'équation. Alors \mathcal{C} , ainsi définie, est une application strictement contractante. En effet, si l'on prend deux fonctions φ et $\varphi' \in \mathbf{E}$ telles que $L = \mathcal{C}(\varphi)$ et $L' = \mathcal{C}(\varphi')$, la solution de (2.19) est donnée sous forme intégrale.

Pour $0 < \mu \leq 1$, la solution est donnée par

$$\begin{aligned} L(x, \mu, \lambda) = & \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^x \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot (A\varphi + H)(y, \mu, \lambda) dy \\ & + \exp(-x \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot \phi_o(\mu, \lambda) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Alors, en utilisant l'expression de l'opérateur intégral A donné par (2.17), il vient

$$\begin{aligned} & L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda) \\ = & \int_0^x \int_{-1}^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot (\varphi - \varphi')(y, \mu', \lambda) d\mu' dy \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left| L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda) \right| \\ \leq & \int_0^x \int_{-1}^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) d\mu' dy \cdot \left\| (\varphi - \varphi')(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et intégrer l'expression suivant la variable y , pour obtenir

$$\left| L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{\sigma_e(\mu, \lambda)} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) d\mu' \cdot \left\| (\varphi - \varphi')(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty}$$

En utilisant la relation (2.11), on obtient pour tout $0 < \mu \leq 1$

$$\left| L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda) \right| \leq \frac{\sigma_s(\mu, \lambda)}{\sigma_e(\mu, \lambda)} \cdot \left\| (\varphi - \varphi')(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \quad (2.21)$$

Lorsque $-1 \leq \mu < 0$, la solution de (2.19) est donnée par

$$\begin{aligned} L(x, \mu, \lambda) = & -\frac{1}{\mu} \cdot \int_x^E \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot (A\varphi + H)(y, \mu, \lambda) dy \\ & + \exp((E-x) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot \phi_E(\mu, \lambda) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Par des calculs similaires, on montre que la relation (2.21) est valable aussi pour $-1 \leq \mu < 0$.

Lorsque $\mu = 0$, la solution de (2.19) est donnée par

$$L(x, 0, \lambda) = \frac{1}{\sigma_e(0, \lambda)} \cdot (A\varphi + H)(x, 0, \lambda) \quad (2.23)$$

Alors

$$\left| L(x, 0, \lambda) - L'(x, 0, \lambda) \right| \leq \frac{\sigma_s(0, \lambda)}{\sigma_e(0, \lambda)} \cdot \left\| (\varphi - \varphi')(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \quad (2.24)$$

Finalement, en combinant les relations (2.21) et (2.24), il vient

$$\left| L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda) \right| \leq \frac{\sigma_s(\mu, \lambda)}{\sigma_e(\mu, \lambda)} \cdot \left\| (\varphi - \varphi')(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \quad (2.25)$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$.

En utilisant les relations (2.9) et (2.12), on a

$$\frac{\sigma_s(\mu, \lambda)}{\sigma_e(\mu, \lambda)} = \left(1 - \frac{\sigma_a(\mu, \lambda)}{\sigma_e(\mu, \lambda)}\right) \leq c \quad (2.26)$$

pour tout $(\mu, \lambda) \in [-1, 1] \times (0, \infty)$ où c est une constante définie par

$$c = \left(1 - \frac{\tilde{\sigma}_a^-}{\tilde{\sigma}_a^+ + \tilde{\sigma}_s^+}\right) \quad (2.27)$$

La constante c satisfait $0 < c < 1$ et est indépendante de μ et λ . Finalement, d'après (2.25), (2.26) et une intégration sur tous les $\lambda \in (0, \infty)$, il suit

$$\left\| L - L' \right\|_{1, \infty} \leq c \cdot \left\| \varphi - \varphi' \right\|_{1, \infty} \quad (2.28)$$

ce qui donne la stricte contraction de l'application \mathcal{C} .

De plus, pour $\varphi \in \mathbf{E}$, on a bien $L = \mathcal{C}(\varphi) \in \mathbf{E}$. En effet, si on reprend les calculs (prendre la forme intégrale de l'équation donnée par (2.20), (2.22) et (2.23)), on a pour chaque $\lambda \in (0, \infty)$

$$\left\| L(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \leq c \cdot \left\| \varphi(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} + \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-}\right) \cdot \left\| H(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} + G(\lambda) \quad (2.29)$$

où c est la constante donnée par (2.27) et la fonction G est définie par

$$G(\lambda) = \max \left(\sup_{0 < \mu \leq 1} \left| \phi_o(\mu, \lambda) \right|, \sup_{-1 \leq \mu < 0} \left| \phi_E(\mu, \lambda) \right| \right) \quad (2.30)$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$. Alors, une intégration de (2.29) sur tous les $\lambda \in (0, \infty)$ donne

$$\left\| L \right\|_{1, \infty} \leq c \cdot \left\| \varphi \right\|_{1, \infty} + \left(\frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-}\right) \cdot \left\| H \right\|_{1, \infty} + \left\| G \right\|_1 < +\infty \quad (2.31)$$

ce qui prouve déjà que la solution L de (2.16) appartient à l'espace $L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$. La régularité demandée sur la solution s'obtient facilement en utilisant les régularités des fonctions H, ϕ_o, ϕ_E . La continuité de L en $\mu = 0$ vient du fait que

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 < \varepsilon \leq 1}} \int_0^x \frac{1}{\varepsilon} \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{1}{\varepsilon}) \cdot f(y, \varepsilon) dy = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 < \varepsilon \leq 1}} \int_0^{x/\varepsilon} \exp(-z) \cdot f(x - \varepsilon \cdot z, \varepsilon) dz = f(x, 0)$$

et de même

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ -1 \leq \varepsilon < 0}} \int_x^E \frac{-1}{\varepsilon} \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{1}{\varepsilon}) \cdot f(y, \varepsilon) dy = f(x, 0)$$

pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ donnée, continue et bornée sur Ω , pour tout $x \in (0, E)$.

Finalement, par le théorème de point fixe de Banach, le problème aux frontières (2.16) a une unique solution dans \mathbf{E} . De plus, la solution est obtenue comme la limite dans \mathbf{E} de la suite $L_\lambda^{(n)}$ définie par :

$$L^{(n)} = \mathcal{C}(L^{(n-1)}) \quad \text{pour tout } n \geq 1 \quad (2.32)$$

et où nous pouvons prendre

$$L^{(0)} = 0 \quad \square \quad (2.33)$$

Remarque 2.4 : Si, aux hypothèses du lemme 2.3, on ajoute l'hypothèse de régularité suivante sur H : $H \in L^1((0, \infty); C^k((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$ pour $k \in \mathbf{N}$, alors on vérifie facilement que la solution de (2.16) appartient à

$$L^1((0, \infty); C(\Omega \cup \partial\Omega^+ \cup \partial\Omega^-) \cap C^{k+1}((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\}))).$$

On termine maintenant ce paragraphe avec un résultat de monotonie.

Lemme 2.5 : Sous les hypothèses du lemme 2.3, la solution L de (2.16) est une fonction monotone de ϕ_o, ϕ_E, H dans le sens que si

$$0 < \psi_o(\mu, \lambda) \leq \phi_o(\mu, \lambda) < +\infty \quad \text{pour tout } (\mu, \lambda) \in (0, 1] \times (0, \infty)$$

$$0 < \psi_E(\mu, \lambda) \leq \phi_E(\mu, \lambda) < +\infty \quad \text{pour tout } (\mu, \lambda) \in [-1, 0) \times (0, \infty)$$

$$0 < G(x, \mu, \lambda) \leq H(x, \mu, \lambda) < +\infty \quad \text{pour tout } (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$$

alors $L(G, \psi_o, \psi_E)(x, \mu, \lambda) \leq L(H, \phi_o, \phi_E)(x, \mu, \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$

où l'on note $L(H, \phi_o, \phi_E)$ la solution associée aux fonctions H, ϕ_o et ϕ_E .

preuve.

On procède par récurrence. La solution L est donnée par les itérations (2.32) et (2.33). Alors

$L^{(0)}(G, \psi_o, \psi_E)(x, \mu, \lambda) \leq L^{(0)}(H, \phi_o, \phi_E)(x, \mu, \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. Supposons

maintenant que $L^{(n-1)}(G, \psi_o, \psi_E)(x, \mu, \lambda) \leq L^{(n-1)}(H, \phi_o, \phi_E)(x, \mu, \lambda) \quad \forall (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$.

D'après (2.20) et pour $0 < \mu \leq 1$, on a :

$$\begin{aligned} & L^{(n)}(H, \phi_o, \phi_E)(x, \mu, \lambda) - L^{(n)}(G, \psi_o, \psi_E)(x, \mu, \lambda) \\ &= \frac{1}{\mu} \cdot \int_0^x \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot \{ A(L^{(n-1)}(H, \phi_o, \phi_E) - L^{(n-1)}(G, \psi_o, \psi_E))(y, \mu, \lambda) \\ &\quad + (H - G)(y, \mu, \lambda) \} dy \\ &+ \exp(-x \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot (\phi_o - \psi_o)(\mu, \lambda) \geq 0 \end{aligned}$$

Cette quantité est positive car A donné par (2.17), est un opérateur linéaire positif (i.e. agissant sur une fonction positive il donne une fonction positive). De la même façon, en utilisant (2.22), on obtient le même résultat pour $-1 \leq \mu < 0$.

D'après (2.23) et pour $\mu = 0$, on a

$$\begin{aligned} & L^{(n)}(H, \phi_o, \phi_E)(x, 0, \lambda) - L^{(n)}(G, \psi_o, \psi_E)(x, 0, \lambda) \\ &= \frac{1}{\sigma_e(0, \lambda)} \cdot \{ A(L^{(n-1)}(H, \phi_o, \phi_E) - L^{(n-1)}(G, \psi_o, \psi_E))(x, 0, \lambda) + (H - G)(x, 0, \lambda) \} \geq 0 \end{aligned}$$

Cette quantité est aussi positive par les même arguments. \square

2.2.2 Existence et régularité des solutions pour le système couplé

2.2.2.1 Problème de point fixe compact

Dans ce paragraphe, nous donnons un théorème d'existence et d'unicité de la solution de l'ETR, lorsque la température T est donnée. Nous montrons que l'existence d'une solution T , et implicitement l'existence d'une solution L , du système couplé (2.1)–(2.6) se ramène à l'étude de l'existence d'une solution d'un problème de point fixe compact. On procède en définissant les deux quantités suivantes

$$T_- = \min(T_o, T_E) \text{ et } T_+ = \max(T_o, T_E) \quad (2.34)$$

et en définissant une application point fixe compacte $\mathcal{F} : D \rightarrow D$, par

$$\mathcal{F}(T) = T \quad (2.35)$$

où T sera solution du système couplé (2.1)–(2.6). D est donné par

$$D = \{ u \in C([0, E]) \mid T_- \leq u \leq T_+ \} \quad (2.36)$$

qui est un ensemble convexe, fermé et borné. L'application \mathcal{F} va dépendre, bien entendu, des paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$. A cette application, nous appliquerons alors le théorème de point fixe de Schauder, que nous rappelons (voir, par exemple Martin [4]).

Théorème de point fixe de Schauder : Soit X un espace de Banach réel, $D \subset X$, un ensemble non vide, convexe borné et fermé, et $\mathcal{F} : D \rightarrow D$ une application continue et compacte. Alors \mathcal{F} a au moins un point fixe.

Nous devons donc montrer que l'application $\mathcal{F} : D \rightarrow D$ est bien définie, continue et compacte.

Théorème 2.6 : On se donne les paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$ satisfaisant les relations (2.9)–(2.14) et un champ de températures $T \in D$ où D est donné par (2.36). Alors l'ETR a une unique solution L appartenant à $L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$.

preuve.

Ce résultat se déduit assez facilement à partir du lemme 2.3. On pose $H(x, \mu, \lambda) = \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^\circ(T(x), \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, $\phi_o(\mu, \lambda) = L^\circ(T_o, \lambda)$ pour tout $(\mu, \lambda) \in (0, 1] \times (0, \infty)$ et $\phi_E(\mu, \lambda) = L^\circ(T_E, \lambda)$ pour tout $(\mu, \lambda) \in [-1, 0) \times (0, \infty)$. Alors, en utilisant (2.8) et (2.12), H , ϕ_o et ϕ_E appartiennent respectivement à $L^1((0, \infty); C(\Omega))$, $L^1((0, \infty); C((0, 1]))$ et $L^1((0, \infty); C([-1, 0]))$. En appliquant le lemme 2.3, l'ETR a une unique solution dans \mathbf{E} définie par (2.18) et, en particulier, la solution appartient à $L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$. \square

Nous allons à présent simplifier l'expression du terme source radiatif S_r , qui intervient dans l'équation de la conduction. En utilisant l'ETR et le théorème de dérivation sous le signe intégral, nous pouvons permuter dérivée et intégrale dans l'expression ci-dessous

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \int_{-1}^1 L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu \, d\mu \, d\lambda = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{\partial L(x, \mu, \lambda)}{\partial x} \cdot \mu \, d\mu \, d\lambda \quad (2.37)$$

Nous remarquons alors que le terme dans l'intégrale de droite est le premier terme de l'ETR. Le terme de gauche correspond, à une constante près, au terme source radiatif S_r . Alors, nous pouvons exprimer S_r , comme

$$\begin{aligned} S_r(x) &= -2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^\circ(T(x), \lambda) \, d\mu \, d\lambda + 2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_e(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) \, d\mu \, d\lambda \\ &\quad - 2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 f(x, \mu, \lambda) \, d\mu \, d\lambda \end{aligned} \quad (2.38)$$

où la fonction f est définie par

$$f(x, \mu, \lambda) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot L(x, \mu', \lambda) \, d\mu' \quad (2.39)$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. En utilisant les relations (2.9), (2.10) et le théorème de Fubini, il vient :

$$S_r(x) = 2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) d\mu d\lambda - 2\pi \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^\circ(T(x), \lambda) d\mu d\lambda \quad (2.40)$$

pour tout $x \in (0, E)$.

Proposition 2.7 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, $S_r \in L^\infty(0, E)$.

preuve.

En utilisant (2.12) et l'expression de S_r donnée par (2.40), on a pour tout $x \in (0, E)$

$$\begin{aligned} |S_r(x)| &\leq 2\pi \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \left\{ 2 \cdot \int_0^\infty L^\circ(T(x), \lambda) d\lambda + \int_0^\infty \int_{-1}^1 |L(x, \mu, \lambda)| d\mu d\lambda \right\} \\ &\leq 4\pi \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \left\{ \frac{\sigma}{\pi} \cdot \|T\|_\infty^4 + \|L\|_{1,\infty} \right\} < +\infty \quad \text{en utilisant (2.8)}. \quad \square \end{aligned}$$

Pour alléger les écritures qui vont suivre, on définit l'opérateur linéaire intégral M par

$$(M g)(x) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 g(x, \mu, \lambda) d\mu d\lambda \quad (2.41)$$

pour toute fonction $g \in L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$ et on définit la fonction F par

$$F(x) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) d\mu d\lambda \quad (2.42)$$

pour tout $x \in (0, E)$, où σ_a est le coefficient d'absorption et L la solution de l'ETR. Alors, en utilisant (2.40) et les notations (2.41) (2.42), S_r s'écrit sous la forme

$$S_r(x) = 2\pi \cdot \left\{ F(x) - (M \sigma_a \cdot L^\circ(T))(x) \right\} \quad (2.43)$$

L'équation de la conduction est non linéaire due à la dépendance en température de la conductivité thermique. Afin de faciliter l'étude, nous introduisons la transformation de Kirchhoff. C'est un outil classique pour résoudre les équations aux dérivées partielles non linéaires [5]. Elle permet, lorsque cela est possible, de transformer une E.D.P. du second ordre non linéaire (i.e. l'opérateur différentiel est non linéaire) en une E.D.P. semi-linéaire, où la non-linéarité apparaît au second membre. La transformation de Kirchhoff est définie par

$$\Psi_c(u) = \int_0^u \lambda_c(s) ds \quad (2.44)$$

où λ_c est donnée par l'hypothèse 2.2. Nous posons alors pour tout $x \in [0, E]$

$$\bar{T}(x) = \Psi_c(T(x)) \quad (2.45)$$

Remarque 2.8 : Ψ_c est une fonction continue et strictement croissante de $T \in D$ (d'après (2.15), $\lambda_c(T) > 0 \forall T \in D$). Alors, on peut définir son inverse Ψ_c^{-1} et Ψ_c^{-1} sera aussi une

fonction continue et strictement croissante de $T \in D$.

L'équation de la conduction est alors équivalente à

$$T = \Psi_c^{-1}(\bar{T}) \quad (2.46)$$

où \bar{T} est solution de l'équation semi-linéaire suivante

$$-\bar{T}'' = \bar{S}_r(\bar{T}) \quad (2.47)$$

avec les conditions aux bords de Dirichlet non homogènes

$$\bar{T}(0) = \bar{T}_o, \quad \bar{T}(E) = \bar{T}_E \quad (2.48)$$

où $\bar{T}_o = \Psi_c(T_o)$, $\bar{T}_E = \Psi_c(T_E)$ et $\bar{S}_r = S_r \circ \Psi_c^{-1}$.

Maintenant, nous allons donner la formulation du point fixe. Pour cela, nous définissons les deux quantités

$$\bar{T}_- = \min(\bar{T}_o, \bar{T}_E) \quad \text{et} \quad \bar{T}_+ = \max(\bar{T}_o, \bar{T}_E) \quad (2.49)$$

et l'ensemble \bar{D} par

$$\bar{D} = \{ \bar{u} \in C([0, E]) \mid \bar{T}_- \leq \bar{u} \leq \bar{T}_+ \} \quad (2.50)$$

Nous allons alors exprimer l'application \mathcal{F} , donnée par (2.35), comme la composition de quatre applications non linéaires, soit :

$$\mathcal{F} = \Psi_c^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{C} \quad (2.51)$$

Au préalable, nous définissons une application $\mathcal{L} : D \rightarrow \underline{D}$ telle que pour $T \in D$, $\mathcal{L}(T)$ soit la solution de l'ETR. L'ensemble \underline{D} est donné par

$$\underline{D} = \{ g(x, \mu, \lambda) \in L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega)) \mid L^o(T_-, \lambda) \leq g(\cdot, \cdot, \lambda) \leq L^o(T_+, \lambda) \} \quad (2.52)$$

où T_- et T_+ sont donnés par (2.34). Par ailleurs, on munit \underline{D} de la norme $\|\cdot\|_{1,\infty}$.

Nous définissons alors l'application $\mathcal{C} : D \rightarrow D \times \underline{D}$ en posant pour $T \in D$, $\mathcal{C}(T) = (T, L)$ et $L(x, \mu, \lambda) = \mathcal{L}(T)(x, \mu, \lambda)$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$.

Nous définissons l'application $\mathcal{B} : D \times \underline{D} \rightarrow \underline{D}'$ en posant pour $T \in D$, $F = (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T)$ où F est la fonction donnée par (2.42) et $\mathcal{C}(T) = (T, L) \in D \times \underline{D}$. L'ensemble \underline{D}' est donné par

$$\underline{D}' = \{ F \in L^\infty(0, E) \mid M \sigma_a \cdot L^o(T_-) \leq F \leq M \sigma_a \cdot L^o(T_+) \} \quad (2.53)$$

Nous définissons l'application $\mathcal{A} : \underline{D}' \rightarrow \bar{D}$ telle que pour $F \in \underline{D}'$, $\bar{\theta} = \mathcal{A}(F, T_o, T_E)$ soit la solution de l'équation (2.47) (2.48), qui s'écrit encore sous la forme suivante

$$\begin{cases} \bar{\theta}'' = 2\pi \cdot \{ \Phi(\bar{\theta}) - F \} \\ \bar{\theta}(0) = \bar{T}_o, \quad \bar{\theta}(E) = \bar{T}_E \end{cases} \quad (2.54)$$

où la fonction Φ est définie par $\Phi(\bar{\theta}) = M \sigma_a \cdot L^o(\Psi_c^{-1}(\bar{\theta}))$ pour tout $\bar{\theta} \in \bar{D}$.

et enfin, $\Psi_c^{-1} : \bar{D} \rightarrow D$ telle que pour $\bar{T} \in \bar{D}$, $T = \Psi_c^{-1}(\bar{T})$ vérifie le système (2.1)–(2.6).

De manière plus synthétique, on a

$$\begin{array}{ccccccc} (D, \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\mathcal{C}} & (D, \|\cdot\|_\infty) \times (\underline{D}, \|\cdot\|_{1,\infty}) & \xrightarrow{\mathcal{B}} & (\underline{D}, \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\mathcal{A}} & (\bar{D}, \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\Psi_c^{-1}} & (D, \|\cdot\|_\infty) \\ T & \longrightarrow & (T, L) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \bar{T} & \longrightarrow & T \end{array}$$

Notons que les applications \mathcal{F} , \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} et \mathcal{L} dépendent aussi des conditions aux bords T_o, T_E et que cette dépendance est importante. Quand c'est le cas, nous donnerons la dépendance explicitement en écrivant, sans alourdir les notations, $\mathcal{F}(T, T_o, T_E)$, $\mathcal{A}(F, T_o, T_E)$, $\mathcal{B}(T, L, T_o, T_E)$, $\mathcal{C}(T, T_o, T_E)$ et $\mathcal{L}(T, T_o, T_E)$. Par ailleurs, nous devons montrer que l'équation (2.54) a une unique solution positive.

Remarque 2.9 : Soit \bar{T}_- et \bar{T}_+ donnés par (2.49). Alors, en utilisant l'hypothèse 2.2 donnée dans le paragraphe 1, $\Psi_c^{-1} \in C^\infty([\bar{T}_-, \bar{T}_+])$ et en particulier Ψ_c^{-1} est une fonction Lipschitzienne sur l'intervalle $[\bar{T}_-, \bar{T}_+]$.

Nous allons maintenant nous intéresser aux applications \mathcal{L} , \mathcal{C} et donner quelques propriétés qui portent sur la solution de l'ETR. Le théorème 2.6 montre que les applications \mathcal{L} et \mathcal{C} sont bien définies.

Théorème 2.10 : \mathcal{C} est une application continue de D vers $D \times \underline{D}$.

preuve.

On prend deux couples d'éléments $(U, L), (V, \overset{\cdot}{L}) \in D \times \underline{D}$ tels que $\mathcal{C}(U) = (U, L)$,

$\mathcal{C}(V) = (V, \overset{\cdot}{L})$ où L et $\overset{\cdot}{L}$ sont solutions de l'ETR. Alors, en utilisant les relations (2.12) et (2.29), nous déduisons que

$$\left\| L(\cdot, \cdot, \lambda) - \overset{\cdot}{L}(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_\infty \leq c \cdot \left\| L(\cdot, \cdot, \lambda) - \overset{\cdot}{L}(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_\infty + \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \left\| L^o(U, \lambda) - L^o(V, \lambda) \right\|_\infty$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$, où c est la constante donnée par (2.27). Une intégration sur tous les $\lambda \in (0, \infty)$ donne :

$$\left\| L - L' \right\|_{1,\infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \int_0^\infty \left\| L^\circ(U, \lambda) - L^\circ(V, \lambda) \right\|_\infty d\lambda$$

En utilisant (2.8), il vient

$$\left\| L - L' \right\|_{1,\infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \cdot \left\| U^4 - V^4 \right\|_\infty$$

et

$$\left\| L - L' \right\|_{1,\infty} \leq cste \cdot \left\| U - V \right\|_\infty$$

puisque $U, V \in D$ (i.e. ils sont bornés par T_+) et $U^4 - V^4 = (U - V) \cdot (U + V) \cdot (U^2 + V^2)$. Par

conséquent, $\left\| U - V \right\|_\infty + \left\| L - L' \right\|_{1,\infty} \leq cste \cdot \left\| U - V \right\|_\infty \quad \square$

Proposition 2.11 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, soit $\mathcal{L}(T)$ la solution de l'ETR.

Alors \mathcal{L} est une fonction monotone de T_o, T_E, T dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$,

$0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < S(x) \leq T(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors

$$\mathcal{L}(S, S_o, S_E)(x, \mu, \lambda) \leq \mathcal{L}(T, T_o, T_E)(x, \mu, \lambda) \text{ pour tout } (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty).$$

preuve.

On pose $H(x, \mu, \lambda) = \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^\circ(T(x), \lambda)$ et $G(x, \mu, \lambda) = \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^\circ(S(x), \lambda)$ pour tout

$(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. $\phi_o(\mu, \lambda) = L^\circ(T_o, \lambda)$ et $\psi_o(\mu, \lambda) = L^\circ(S_o, \lambda) \quad \forall (\mu, \lambda) \in (0, 1] \times (0, \infty)$.

$\phi_E(\mu, \lambda) = L^\circ(T_E, \lambda)$ et $\psi_E(\mu, \lambda) = L^\circ(S_E, \lambda) \quad \forall (\mu, \lambda) \in [-1, 0) \times (0, \infty)$. Alors on a le résultat directement en utilisant la remarque 2.1 et le lemme 2.5. \square

Corollaire 2.12 : Sous les hypothèses de la proposition 2.11, $\mathcal{L}(T) \in \underline{D}$, où \underline{D} est donné par (2.52).

preuve.

D'après le théorème 2.6, $\mathcal{L}(T) \in L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$. Maintenant, si on suppose la température constante dans le milieu et $T = T_o = T_E$ alors, d'après les relations (2.9) et (2.11), $L^\circ(T, \lambda)$ est solution de l'ETR. En utilisant la monotonie de l'application \mathcal{L} donnée par la proposition 2.11, il vient

$$L^\circ(T_-, \lambda) = \mathcal{L}(T_-, T_-, T_-)(x, \mu, \lambda) \leq \mathcal{L}(T, T_-, T_+)(x, \mu, \lambda) \leq \mathcal{L}(T_+, T_+, T_+)(x, \mu, \lambda) = L^\circ(T_+, \lambda)$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. \square

Maintenant, on va s'intéresser à l'application \mathcal{B} et on donne quelques propriétés qui portent sur la fonction F . Le théorème 2.6 montre que l'application \mathcal{B} est bien définie.

Théorème 2.13 : \mathcal{B} est une application continue de $D \times \underline{D}$ vers \underline{D}' .

preuve.

Soit $F, G \in \underline{D}'$ et $(U, L), (V, L') \in D \times \underline{D}$ tels que $F = \mathcal{B}(U, L)$ et $G = \mathcal{B}(V, L')$. Alors pour tout $x \in (0, E)$, on a

$$\begin{aligned} |F(x) - G(x)| &= \left| \int_0^\infty \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda)) \, d\mu \, d\lambda \right| \\ &\leq \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \int_0^\infty \int_{-1}^1 |L(x, \mu, \lambda) - L'(x, \mu, \lambda)| \, d\mu \cdot d\lambda \quad \text{en utilisant (2.12)} \\ &\leq 2 \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \left\| L - L' \right\|_{1, \infty} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\|F - G\|_\infty \leq cste \cdot (\|L - L'\|_{1, \infty} + \|U - V\|_\infty)$ \square

Proposition 2.14 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, $F = (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T)$ est une fonction monotone de T_o, T_E, T dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < S(x) \leq T(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors $(\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(S, S_o, S_E)(x) \leq (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T, T_o, T_E)(x)$ pour tout $x \in (0, E)$. Par ailleurs, si $T = T_o = T_E$, alors $F(x) = M \sigma_a \cdot L^\circ(T) \quad \forall x \in (0, E)$.

preuve.

F s'écrit encore sous la forme $F = M \sigma_a \cdot \mathcal{L}(T, T_o, T_E)$. Alors, le résultat de monotonie s'ensuit en utilisant la proposition 2.11, la positivité de l'opérateur M et celle du coefficient σ_a . Soit maintenant $T = T_o = T_E$. D'après l'équation de la conduction (2.2), il vient $S_r(x) = 0$ pour tout $x \in (0, E)$ i.e. d'après (2.43), $F(x) = M \sigma_a \cdot L^\circ(T)$ pour tout $x \in (0, E)$. \square

Le corollaire qui va suivre est une conséquence importante de la proposition.

Corollaire 2.15 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, $F \in \underline{D}'$ où \underline{D}' est donné par (2.53).

preuve.

Le résultat se déduit très facilement à partir de la proposition 2.14.

$F \in L^\infty(0, E)$ puisque σ_a est borné et $L \in L^1((0, \infty); L^\infty(\Omega))$. D'après la proposition 2.14, on a $(\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T_-, T_-, T_-) \leq (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T, T_-, T_+) \leq (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T_+, T_+, T_+)$ avec $F = (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T, T_-, T_+)$, $(\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T_-, T_-, T_-) = M \sigma_a \cdot L^\circ(T_-)$ et $(\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T_+, T_+, T_+) = M \sigma_a \cdot L^\circ(T_+)$. \square

Nous allons à présent étudier l'application \mathcal{A} . Dans un premier temps, on montre que l'application \mathcal{A} est bien définie, i.e. que pour $F \in \underline{D}'$ donné, le problème aux limites (2.54) a une unique solution positive $\bar{\theta} \in \bar{D}$ qui satisfait les propriétés de monotonie par rapport aux données. Avant de se lancer dans l'étude, on donne deux propositions qui serviront pour la démonstration. Les résultats que nous énonçons maintenant sont des résultats fondamentaux

pour l'étude de certaines classes d'E.D.P. non linéaires, qui contiennent un terme non linéaire monotone et un second membre dans l'espace L^p avec $1 \leq p < +\infty$.

Proposition 2.16 (DaPrato [6]) : Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ assez régulière, $\Phi : \overline{\Omega} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, u) \rightarrow \Phi(x, u)$ continue et croissante en u quel que soit $x \in \overline{\Omega}$, $F \in L^p(\Omega)$ avec $2 \leq p < +\infty$. Alors $\exists ! u \in D_{\Delta_p} \cap D_{\Phi_p}$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \Phi(x, u(x)) = F(x) & \forall x \in \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.55)$$

où $D_{\Delta_p} = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et $D_{\Phi_p} = \{u \in L^p(\Omega); x \rightarrow \Phi(x, u(x)) \in L^p(\Omega)\}$.

Proposition 2.17 (Brezis-Strauss [7]) : Le cas $p=1$ a été étudié par Brezis-Strauss. Si $F \in L^1(\Omega)$ alors (2.55) a une unique solution u appartenant à $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Théorème 2.18 : On se donne $F \in \underline{D}$. Alors, l'équation semi linéaire (2.54) a une unique solution positive $\bar{\theta} \in \overline{D} \cap W^{2,p}(0, E)$ avec $2 \leq p < +\infty$.

preuve.

Sans ajouter de notation supplémentaire, définissons la fonction Φ par

$$\Phi(\overline{T}) = \begin{cases} M \sigma_a \cdot L^0(\Psi_c^{-1}(\overline{T}_-)) - \frac{(\overline{T}_- - \overline{T})}{1 + (\overline{T}_- - \overline{T})}, & \text{lorsque } \overline{T} < \overline{T}_- \\ M \sigma_a \cdot L^0(\Psi_c^{-1}(\overline{T})) & \text{lorsque } \overline{T}_- \leq \overline{T} \leq \overline{T}_+ \\ M \sigma_a \cdot L^0(\Psi_c^{-1}(\overline{T}_+)) + \frac{(\overline{T} - \overline{T}_+)}{1 + (\overline{T} - \overline{T}_+)}, & \text{lorsque } \overline{T} > \overline{T}_+ \end{cases}$$

Alors Φ est définie sur \mathbf{R} . C'est une fonction continue et strictement croissante, d'après la remarque 2.1 et la remarque 2.8. Par ailleurs, elle est bornée et

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\theta}) &< M \sigma_a \cdot L^0(\Psi_c^{-1}(\overline{T}_-)) \quad \text{si } \bar{\theta} < \overline{T}_- \\ \Phi(\bar{\theta}) &> M \sigma_a \cdot L^0(\Psi_c^{-1}(\overline{T}_+)) \quad \text{si } \bar{\theta} > \overline{T}_+ \end{aligned}$$

$F \in \underline{D}$ i.e. $F \in L^\infty(0, E)$ et est telle que

$$\Phi(\overline{T}_-) \leq F(x) \leq \Phi(\overline{T}_+) \quad \forall x \in (0, E) \quad (2.56)$$

Maintenant, posons

$$\bar{\theta}(x) = U(x) + \frac{\overline{T}_o \cdot (E - x) + \overline{T}_E \cdot x}{E} \quad \text{et} \quad \Phi^*(x, U(x)) = \Phi\left(U(x) + \frac{\overline{T}_o \cdot (E - x) + \overline{T}_E \cdot x}{E}\right)$$

pour tout $x \in [0, E]$. Alors Φ^* est défini sur $[0, E] \times \mathbf{R}$. Elle est continue et strictement croissante en U , pour tout $x \in [0, E]$. Le problème aux limites avec des conditions aux bords de Dirichlet non homogènes sur $[0, E]$ (2.54) est alors équivalent au problème suivant avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -U''(x) + 2\pi \cdot \Phi^*(x, U(x)) = 2\pi \cdot F(x) & x \in (0, E) \\ U(0) = U(E) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

(2.57) a un second membre dans $L^\infty(0, E) \subset L^p(0, E) \quad \forall 1 \leq p < +\infty$. Alors, d'après la proposition 2.16, (2.57) a une unique solution dans $W^{2,p}(0, E) \cap W_0^{1,p}(0, E) \quad \forall 2 \leq p < +\infty$. Par conséquent (2.54) a aussi une unique solution, appartenant à $W^{2,p}(0, E) \quad \forall 2 \leq p < +\infty$. En particulier, elle est absolument continue [8].

Il reste maintenant à montrer que $\bar{T}_- \leq \bar{\theta} \leq \bar{T}_+$. Faisons la preuve par l'absurde. Supposons alors que $\exists x^* \in (0, E)$ tel que $\bar{\theta}(x^*) < \bar{T}_-$. Dans ce cas, il existe un intervalle $[a, b]$ contenant x^* tel que $\bar{\theta} < \bar{T}_-$ sur (a, b) et $\bar{\theta}(a) = \bar{\theta}(b) = \bar{T}_-$. En utilisant la monotonie de Φ , il vient $\Phi(\bar{\theta}) < \Phi(\bar{T}_-)$ sur (a, b) . Compte tenu de (2.56), on aura $\bar{\theta}'' = 2\pi \cdot \{\Phi(\bar{\theta}) - F\} < 0$ sur (a, b) i.e. $\bar{\theta}$ est une fonction concave sur $[a, b]$ et alors $\bar{\theta}(x^*) \geq \bar{T}_-$, ce qui est une contradiction. Par conséquent $\bar{T}_- \leq \bar{\theta}$ sur $[0, E]$. De la même manière, on montre que $\bar{\theta} \leq \bar{T}_+$ sur $[0, E]$. Ce qui conclut la preuve du théorème. \square

Maintenant, on donne le résultat de continuité suivant.

Théorème 2.19 : \mathcal{A} est une application continue de \underline{D}' dans \bar{D} .

preuve.

Soit $F, G \in \underline{D}'$, $\bar{U} = \mathcal{A}(F, T_o, T_E)$, $\bar{V} = \mathcal{A}(G, T_o, T_E)$ et $\bar{W} = \bar{U} - \bar{V}$. Alors \bar{W} est solution du problème aux frontières

$$\begin{cases} \bar{W}'' = 2\pi \cdot \{\Phi(\bar{U}) - \Phi(\bar{V}) - (F - G)\} \\ \bar{W}(0) = \bar{W}(E) = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons multiplier les deux membres de l'équation par $-\bar{W}$ et intégrer par partie pour obtenir la relation suivante

$$\left\| \bar{W}' \right\|_2^2 = -2\pi \cdot \int_0^E \bar{W} \cdot \{\Phi(\bar{U}) - \Phi(\bar{V})\} dx + 2\pi \cdot \int_0^E \bar{W} \cdot (F - G) dx$$

En utilisant la monotonie de la fonction Φ , on observe que le premier terme du membre de droite est négatif. Alors, il vient

$$\left\| \bar{W}' \right\|_2^2 \leq 2\pi \cdot \int_0^E \bar{W} \cdot (F - G) dx \leq 2\pi \cdot E \cdot \left\| \bar{W} \right\|_\infty \cdot \left\| F - G \right\|_\infty$$

En utilisant les injections continues de Sobolev et l'inégalité de Poincaré, on a

$$\left\| \bar{W} \right\|_\infty^2 \leq cste \cdot \left\| \bar{W} \right\|_\infty \cdot \left\| F - G \right\|_\infty$$

Alors, si $\bar{W} \neq 0$ et en divisant par $\|\bar{W}\|_\infty$, on obtient

$$\|\bar{W}\|_\infty \leq cste \cdot \|F - G\|_\infty$$

ce qui complète la preuve. \square

Nous terminons maintenant la discussion sur \mathcal{A} avec un résultat de monotonie.

Proposition 2.20 : On se donne F et $G \in \underline{D}'$. Alors, l'application \mathcal{A} est une fonction monotone de T_o, T_E, F dans le sens que si $T_- \leq S_o \leq T_o \leq T_+$; $T_- \leq S_E \leq T_E \leq T_+$ et $0 \leq G(x) \leq F(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors $\mathcal{A}(G, S_o, S_E)(x) \leq \mathcal{A}(F, T_o, T_E)(x)$ pour tout $x \in [0, E]$.

preuve.

Posons $\bar{U} = \mathcal{A}(F, T_o, T_E)$, $\bar{V} = \mathcal{A}(G, S_o, S_E)$ et $\bar{W} = \bar{U} - \bar{V}$. Alors \bar{W} est solution du problème aux frontières suivant

$$\begin{cases} \bar{W}'' = 2\pi \cdot \{ \Phi(\bar{U}) - \Phi(\bar{V}) - (F - G) \} \\ \bar{W}(0) = \bar{T}_o - \bar{S}_o \geq 0 \\ \bar{W}(E) = \bar{T}_E - \bar{S}_E \geq 0 \end{cases}$$

Nous devons montrer que $\bar{W} \geq 0$. L'idée de la preuve est similaire à celle utilisée dans le théorème 2.18. Par l'absurde, supposons que $\exists x^* \in (0, E)$ tel que $\bar{W}(x^*) < 0$, alors il existe un intervalle $[a, b]$ contenant x^* tel que $\bar{W} = \bar{U} - \bar{V} < 0$ sur (a, b) et $\bar{W}(a) = \bar{W}(b) = 0$. Puisque Φ est strictement croissante, alors $\Phi(\bar{U}) - \Phi(\bar{V}) < 0$ sur (a, b) . Par ailleurs, $F - G \geq 0$. Dans ce cas, en combinant les relations, il vient $\bar{W}'' \leq 0$ sur (a, b) i.e. \bar{W} est concave sur $[a, b]$ et donc $\bar{W}(x^*) \geq 0$, ce qui est une contradiction. \square

2.2.2.2 L'existence de solutions pour le système couplé

Dans cette section, on établit l'existence de solutions (T, L) pour le système couplé (2.1)–(2.6).

Corollaire 2.21 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, le problème aux frontières (2.54) a une unique solution positive $\bar{\theta} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T)$ telle que $\bar{\theta} \in \bar{D} \cap W^{2,p}(0, E)$ avec $2 \leq p < +\infty$.

preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 2.18 avec $F = (\mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T)$. $F \in \underline{D}'$ d'après le corollaire 2.15.

\square

Comme conséquence directe du paragraphe précédent, on a un résultat de monotonie pour l'application \mathcal{F} .

Proposition 2.22 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, l'application \mathcal{F} est une fonction monotone de T_o, T_E, T dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < S(x) \leq T(x) < +\infty$ pour tout $x \in (0, E)$ alors $\mathcal{F}(S, S_o, S_E)(x) \leq \mathcal{F}(T, T_o, T_E)(x)$ pour tout $x \in [0, E]$.

preuve.

Le résultat découle de l'expression de \mathcal{F} donnée par (2.51), la remarque 2.8, la proposition 2.14 et la proposition 2.20. \square

Soit maintenant un petit corollaire qui servira pour la preuve du théorème qui va suivre.

Corollaire 2.23 (Brezis [8]) : Soit $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle borné, $G \in C^1(\mathbf{R})$ et $u \in W^{1,p}(I)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors $G \circ u \in W^{1,p}(I)$. De manière générale, cette propriété est valable aussi pour les espaces $W^{m,p}$.

Théorème 2.24 : Sous les hypothèses du théorème 2.6, l'application \mathcal{F} a un point fixe $T \in D \cap W^{2,p}(0, E)$ avec $2 \leq p < +\infty$.

preuve.

\mathcal{F} est donnée par $\mathcal{F}(T) = (\Psi_c^{-1} \circ \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T)$ pour tout $T \in D$. Alors \mathcal{F} est bien définie et va de D dans D : $\mathcal{F}(T) \in D$ puisque $\bar{T} = (\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{C})(T) \in \bar{D}$ d'après le corollaire 2.21, et Ψ_c^{-1} est une fonction continue (remarque 2.8). \mathcal{F} est une application continue car c'est la composée d'applications continues, d'après le théorème 2.10, le théorème 2.13, le théorème 2.19 et la remarque 2.8. $T = \Psi_c^{-1}(\bar{T})$ et $\bar{T} \in D \cap W^{2,p}(0, E)$ avec $2 \leq p < +\infty$ d'après le corollaire 2.21. Alors, en utilisant la remarque 2.9 et le corollaire 2.23, il vient que $T \in D \cap W^{2,p}(0, E)$ avec $2 \leq p < +\infty$. En particulier, $T \in W^{2,2}(0, E) \subset W^{1,2}(0, E)$.

Par ailleurs, T appartient à un borné de $W^{1,2}(0, E)$. En effet, en utilisant la même technique de démonstration que pour le théorème 2.19 et l'hypothèse 2.2, on en déduit que

$$\left\| T' \right\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_c(T_-)^2} \cdot \left\| \bar{T}' \right\|_2^2 \leq \frac{2\pi \cdot E}{\lambda_c(T_-)^2} \cdot \left\| \bar{T} \right\|_\infty \cdot \left\| F \right\|_\infty$$

et sachant que $T \in D$ et $F \in \underline{D}'$:

$$\left\| T' \right\|_2^2 \leq \frac{2\pi \cdot E}{\lambda_c(T_-)^2} \cdot \bar{T}_+ \cdot M \cdot \sigma_a \cdot L^o(T_+)$$

De plus, l'injection de $W^{1,2}(0, E)$ dans $C([0, E])$ est compacte [8], donc \mathcal{F} est une application compacte de D dans D . Ainsi, \mathcal{F} vérifie bien les hypothèses du théorème de

Schauder. Son application nous donne alors l'existence d'un point fixe T de \mathcal{F} , ce qui achève la démonstration. \square

On peut maintenant conclure sur l'existence de solutions pour le système couplé (2.1)–(2.6).

Théorème 2.25 : On se donne les paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$ satisfaisant les relations (2.9)–(2.14). Alors le système (2.1)–(2.6) admet une solution (T, L) telle que $T \in D$ et $L \in \underline{D}$.

Preuve.

D'après le théorème 2.24, l'application \mathcal{F} a un point fixe $T \in D$. Alors T satisfait (2.2) avec S_r donné par (2.40). Par conséquent, si L est une solution de l'ETR, le couple (T, L) vérifie le système (2.1)–(2.6). D'après le corollaire 2.12, $L \in \underline{D}$. \square

2.2.2.3 Régularité des solutions pour le système couplé

Théorème 2.26 : Sous les hypothèses du théorème 2.25, le système (2.1)–(2.6) admet une solution (T, L) telle que $T \in D \cap C^2(0, E)$ et $L \in \underline{D} \cap \mathbf{E}$ où \underline{D} est donné par (2.52) et \mathbf{E} est donné par (2.18).

preuve.

La régularité de la solution de l'ETR est donnée par le lemme 2.3. Concernant la régularité de la température, le point fixe T de \mathcal{F} satisfait (2.2) avec S_r donné par (2.40). En utilisant la régularité de la solution de l'ETR, on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral pour dire que $S_r \in C(0, E)$. Puisque Ψ_c^{-1} est aussi une fonction continue, alors le problème aux limites (2.47)–(2.48) a une solution classique $\bar{T} \in C^2(0, E)$ (voir, par exemple Brezis [8]). Alors, en utilisant la remarque 2.9, $T = \Psi_c^{-1}(\bar{T})$ est aussi dans $C^2(0, E)$. \square

En fait, la solution (T, L) a plus de régularités :

Corollaire 2.27 : Sous les hypothèses du théorème 2.26, la solution (T, L) est telle que

$$T \in C^\infty(0, E) \text{ et } L \in L^1((0, \infty); C^\infty((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$$

preuve.

Par le théorème 2.26, $T \in C^2(0, E)$. En utilisant la remarque 2.1 et la remarque 2.4, on en déduit que $L \in L^1((0, \infty); C^3((0, E); C([-1, 1] \setminus \{0\})))$. Alors S_r donné par (2.40) appartient à $C^2(0, E)$ et par suite $\bar{T} \in C^4(0, E)$. En utilisant la remarque 2.9, il vient que $T \in C^4(0, E)$. Ensuite, par récurrence, on obtient le résultat. \square

2.3 Unicité de la solution pour le système couplé

Dans ce paragraphe, nous étudions l'unicité de la solution du système (2.1)–(2.6). La démonstration est assez longue et consiste à montrer que l'application \mathcal{F} a un unique point fixe T dans D . Alors le système (2.1)–(2.6) aura un unique couple de solution (T, L) , sous la condition que $T \in D$. Dans un premier temps, nous allons exprimer la fonction F , donnée par (2.42) et qui intervient dans le terme source radiatif S_r , donné par (2.43), uniquement en fonction de T . Ainsi, nous aurons S_r uniquement en fonction de T . Dans ce cas, on ramène le problème à l'étude d'une seule équation en T et finalement on pourra prouver l'unicité de la solution.

2.3.1 Expression du terme source radiatif en fonction de la température

Proposition 2.28 : Sous les hypothèses du théorème 2.26, soit (T, L) une solution du système couplé (2.1)–(2.6) et F la fonction donnée par (2.42) que nous rappelons

$$F(x) = \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda) \, d\mu \, d\lambda \quad (2.58)$$

pour tout $x \in (0, E)$. Alors F satisfait l'égalité suivante

$$F(x) = (M Q f)(x) + h(x) \quad (2.59)$$

pour tout $x \in (0, E)$, où la fonction f est donnée par (2.39). Q est un opérateur intégral linéaire défini par la somme de deux opérateurs, soit

$$Q = Q^1 + Q^2 \quad (2.60)$$

où

$$\begin{aligned} (Q^1 u)(x, \mu, \lambda) &= \int_0^x \int_0^1 q(x, \mu, y, \mu', \lambda) \cdot u(y, \mu', \lambda) \, d\mu' \, dy \\ (Q^2 u)(x, \mu, \lambda) &= \int_x^E \int_{-1}^0 -q(x, \mu, y, \mu', \lambda) \cdot u(y, \mu', \lambda) \, d\mu' \, dy \end{aligned} \quad (2.61)$$

pour toute fonction $u \in L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^\infty(0, E))$ et $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, avec un noyau q donné par :

$$q(x, \mu, y, \mu', \lambda) = \frac{1}{2\mu'} \cdot \sigma_a(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'} \quad (2.62)$$

pour tout $(x, \mu, y, \mu', \lambda) \in \Omega \times (0, x) \times (0, 1) \times (0, \infty)$.

M est l'opérateur intégral linéaire défini par (2.41) et la fonction h est définie par

$$h(x) = (M Q \sigma_a \cdot L^o(T))(x) + (M \varphi(\cdot, \cdot, \cdot, T_o, T_E))(x) \quad (2.63)$$

pour tout $x \in (0, E)$, où la fonction φ est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi(x, \mu, \lambda, T_o, T_E) &= \frac{L^o(T_o, \lambda)}{2} \cdot \int_0^1 \sigma_a(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp\left(-x \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}\right) d\mu' \\ &+ \frac{L^o(T_E, \lambda)}{2} \cdot \int_0^1 \sigma_a(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow -\mu, \lambda) \cdot \exp\left(-(E-x) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}\right) d\mu' \end{aligned}$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$.

preuve.

Lorsque $0 < \mu' \leq 1$, la forme intégrale de l'ETR est donnée par

$$\begin{aligned} L(x, \mu', \lambda) &= \frac{1}{\mu'} \cdot \int_0^x \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}) \cdot S(y, \mu', \lambda) dy \\ &+ \exp\left(-x \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}\right) \cdot L^o(T_o, \lambda) \end{aligned} \quad (2.64)$$

et lorsque $-1 \leq \mu' < 0$, celle-ci est donnée par

$$\begin{aligned} L(x, \mu', \lambda) &= \frac{-1}{\mu'} \cdot \int_x^E \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}) \cdot S(y, \mu', \lambda) dy \\ &+ \exp\left((E-x) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'}\right) \cdot L^o(T_E, \lambda) \end{aligned} \quad (2.65)$$

où la fonction S est définie par

$$S(x, \mu, \lambda) = f(x, \mu, \lambda) + \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot L^o(T(x), \lambda)$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$.

Pour obtenir l'égalité (2.59), il suffit de multiplier (2.64) par $\frac{1}{2} \cdot \sigma_a(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda)$ et intégrer sur $(\mu, \mu') \in (-1, 1) \times (0, 1)$, en utilisant la relation (2.10). Ensuite, il faut multiplier (2.65) par la même quantité et intégrer sur $(\mu, \mu') \in (-1, 1) \times (-1, 0)$, toujours en utilisant la relation (2.10). Et enfin, il faut additionner ces deux dernières quantités et intégrer sur tous les $\lambda \in (0, \infty)$. \square

Nous allons maintenant exprimer la fonction f uniquement en fonction de T .

Proposition 2.29 : Sous les hypothèses du théorème 2.26, soit (T, L) une solution du système couplé (2.1)–(2.6). Alors, la fonction f donnée par (2.39), satisfait une équation intégrale de Fredholm de second espèce [9] i.e.

$$f - K f = g \quad (2.66)$$

où K est un opérateur intégral linéaire identique à l'opérateur Q si l'on remplace σ_a par σ_s , et la fonction g est définie par

$$g(x, \mu, \lambda) = (K \sigma_a \cdot L^o(T))(x, \mu, \lambda) + \Phi(x, \mu, \lambda, T_o, T_E) \quad (2.67)$$

pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. La fonction Φ est identique à la fonction φ si l'on remplace σ_a par σ_s .

preuve.

La preuve est similaire à celle d'avant. Il faut multiplier (2.64) par $\frac{1}{2} \cdot \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda)$ et intégrer sur $\mu' \in (0, 1)$. Ensuite, il faut multiplier (2.65) par la même quantité et intégrer sur $\mu' \in (-1, 0)$, en utilisant les propriétés de symétrie donnée par (2.13). Et enfin, il faut additionner ces deux dernières quantités. \square

Remarque 2.30 :

$(M \varphi) \in C([0, E])$ et $\Phi(\cdot, \mu, \lambda, T_o, T_E) \in C([0, E])$ pour tout $(\mu, \lambda) \in [-1, 1] \times (0, \infty)$.

Proposition 2.31 : On munit l'espace $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^\infty(0, E))$ de la norme suivante :

$$\|g\| = \int_0^\infty \int_{-1}^1 \|g(\cdot, \mu, \lambda)\|_\infty d\mu d\lambda \quad \text{où} \quad \|g(\cdot, \mu, \lambda)\|_\infty = \sup_{x \in (0, E)} |g(x, \mu, \lambda)|$$

On se donne les paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$ satisfaisant les relations (2.9)–(2.14). Alors l'opérateur K est un opérateur linéaire continu de $(L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^\infty(0, E)); \|\cdot\|)$ dans $(L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^\infty(0, E)); \|\cdot\|)$ et $(I - K)$ a un opérateur inverse borné sur cet espace.

preuve.

Nous devons montrer que pour toute fonction $g \in L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^\infty(0, E))$ non nulle

$$M \| (K g)(\cdot, \mu, \lambda) \|_\infty \leq c \cdot M \| g(\cdot, \mu, \lambda) \|_\infty$$

avec une constante c qui vérifie $0 < c < 1$. M est l'opérateur intégral défini par (2.41).

Pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$, on a

$$\begin{aligned} & (K g)(x, \mu, \lambda) \\ &= \int_0^x \int_0^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu'} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'} \cdot g(y, \mu', \lambda) d\mu' dy \\ &+ \int_x^E \int_{-1}^0 \frac{-\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu'} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'} \cdot g(y, \mu', \lambda) d\mu' dy \\ &\leq \int_0^x \int_0^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu'} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'} \cdot \|g(\cdot, \mu', \lambda)\|_\infty d\mu' dy \\ &+ \int_x^E \int_{-1}^0 \frac{-\sigma_s(\mu', \lambda)}{2\mu'} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu', \lambda)}{\mu'} \cdot \|g(\cdot, \mu', \lambda)\|_\infty d\mu' dy \end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de Fubini et intégrer l'expression suivant la variable y . On obtient l'inégalité suivante

$$(K g)(x, \mu, \lambda) \leq \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{\sigma_e(\mu', \lambda)} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \|g(\cdot, \mu', \lambda)\|_{\infty} d\mu'$$

Il vient alors

$$\| (K g)(\cdot, \mu, \lambda) \|_{\infty} \leq \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \frac{\sigma_s(\mu', \lambda)}{\sigma_e(\mu', \lambda)} \cdot P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \|g(\cdot, \mu', \lambda)\|_{\infty} d\mu'$$

En utilisant les relations (2.26) et (2.27), on a

$$\| (K g)(\cdot, \mu, \lambda) \|_{\infty} \leq \frac{c}{2} \cdot \int_{-1}^1 P(\mu' \rightarrow \mu, \lambda) \cdot \|g(\cdot, \mu', \lambda)\|_{\infty} d\mu'$$

où c est la constante donnée par (2.27) qui satisfait $0 < c < 1$ et est indépendant de μ et λ .

Une intégration sur les $\mu \in (-1, 1)$ donne

$$\int_{-1}^1 \| (K g)(\cdot, \mu, \lambda) \|_{\infty} d\mu \leq c \cdot \int_{-1}^1 \|g(\cdot, \mu, \lambda)\|_{\infty} d\mu$$

en utilisant la relation (2.10). Et enfin, une intégration sur $\lambda \in (0, \infty)$ donne le résultat. \square

On donne maintenant un théorème qui nous sera utile :

Théorème 2.32 (Kress [9]) : Soit X un espace de Banach, $A : X \rightarrow X$ un opérateur linéaire borné tel que $\|A\| < 1$ et soit $I : X \rightarrow X$ l'opérateur identité. Alors, $(I - A)$ a un opérateur inverse borné sur X qui est donné par la série de Neumann :

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n .$$

Ainsi, d'après la proposition 2.31 et le théorème 2.32, $(I - K)$ a un opérateur inverse borné sur $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^{\infty}(0, E))$ qui est donné par

$$(I - K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n$$

Alors, d'après les relations (2.66) et (2.67), nous pouvons exprimer f en fonction de T par

$$f = (I - K)^{-1} K \sigma_a \cdot L^{\circ}(T) + (I - K)^{-1} \Phi(\cdot, \cdot, \cdot; T_o, T_E) \quad (2.68)$$

Proposition 2.33 : Sous les hypothèses de la proposition 2.31, l'opérateur Q est un opérateur continu de $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^{\infty}(0, E))$ dans $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^{\infty}(0, E))$.

preuve.

Similaire à l'opérateur K . \square

Proposition 2.34 : Sous les hypothèses de la proposition 2.31, l'opérateur $(K + Q)$ est un opérateur continu de $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^{\infty}(0, E))$ dans $L^1((0, \infty) \times [-1, 1]; L^{\infty}(0, E))$.

preuve.

D'après les propositions 2.31 et 2.32. \square

Nous pouvons à présent exprimer S_r , uniquement en fonction de T et nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 2.35 : L'équation de la conduction (2.2) (2.3) peut être réécrite uniquement en fonction de la température et des coefficients radiatifs.

Preuve.

Il suffit d'exprimer S_r , uniquement en fonction de la température et des coefficients radiatifs.

Nous rappelons alors l'expression de S_r , donnée par (2.43) :

$$S_r(x) = -2\pi \cdot \left\{ (M \sigma_a \cdot L^\circ(T))(x) - F(x) \right\}$$

pour tout $x \in (0, E)$. En utilisant les relations (2.59) et (2.63), il vient

$$S_r = -2\pi \cdot M \left\{ (I - Q) \sigma_a \cdot L^\circ(T) - (Q f + \varphi(\cdot, \cdot, \cdot, T_o, T_E)) \right\}$$

En utilisant (2.68), on exprime S_r en fonction de T par

$$S_r(T) = -2\pi \cdot M \left\{ (I - Q(I - K)^{-1}) \sigma_a \cdot L^\circ(T) - Q(I - K)^{-1} \Phi(\cdot, \cdot, \cdot, T_o, T_E) - \varphi(\cdot, \cdot, \cdot, T_o, T_E) \right\} \quad (2.69)$$

Ce qui termine la démonstration. \square

Remarque 2.36 : La formulation (2.69) peut être très intéressante d'un point de vue numérique et spécialement pour les temps de calcul. En effet, la résolution de l'équation de la conduction avec le terme source radiatif donné par (2.69) ne demande pas au préalable la résolution de l'ETR pour chaque longueur d'onde. Cependant, une difficulté subsiste, puisqu'il faut calculer une valeur approchée de l'opérateur $(I - K)^{-1}$.

Maintenant, nous donnons un lemme qui sera essentiel pour la preuve de l'unicité.

Lemme 2.37 : Sous les hypothèses de la proposition 2.31, soit $g \in L^1(\Omega \times (0, \infty))$ une fonction positive et non nulle. Alors

$$\| (K + Q) g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)} < \| g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)}.$$

preuve.

En utilisant la relation (2.10) et le théorème de Fubini, on a pour tout $\lambda \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \| ((K + Q) g)(\cdot, \cdot, \lambda) \|_{L^1(\Omega)} \\ &= \int_{\mu=0}^1 \int_{x=0}^E \int_{y=0}^x \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-(x-y)) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot g(y, \mu, \lambda) dy dx d\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\mu=0}^1 \int_{x=0}^E \int_{y=x}^E \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-(y-x) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot g(y, -\mu, \lambda) \, dy \, dx \, d\mu \\
& = \int_{\mu=0}^1 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot g(y, \mu, \lambda) \cdot 1_{\{0 < y < x < E\}} \, dy \, dx \, d\mu \\
& + \int_{\mu=0}^1 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-(y-x) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot g(y, -\mu, \lambda) \cdot 1_{\{0 < x < y < E\}} \, dy \, dx \, d\mu
\end{aligned}$$

Les fonctions à intégrer sont positives. Alors, il vient

$$\begin{aligned}
& \left\| ((K + Q)g)(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{L^1(\Omega)} \\
& \leq \int_{\mu=0}^1 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-(x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot 1_{\{0 < x-y < E\}} \cdot g(y, \mu, \lambda) \cdot 1_{\{0 < y < E\}} \, dy \, dx \, d\mu \\
& + \int_{\mu=0}^1 \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp((x-y) \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot 1_{\{-E < x-y < 0\}} \cdot g(y, -\mu, \lambda) \cdot 1_{\{0 < y < E\}} \, dy \, dx \, d\mu \\
& = \int_{\mu=0}^1 \left\| h(\cdot, \mu, \lambda) * G(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \, d\mu + \int_{\mu=0}^1 \left\| H(\cdot, \mu, \lambda) * G(\cdot, -\mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \, d\mu
\end{aligned}$$

où $*$ est le produit de convolution sur \mathbf{R} . Les fonctions h et H sont données par

$$h(t, \mu, \lambda) = \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu} \cdot \exp(-t \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot 1_{\{0 < t < E\}} ; H(t, \mu, \lambda) = h(-t, \mu, \lambda)$$

pour tout $\mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $\lambda \in (0, \infty)$. La fonction G est donnée par

$$G(y, \mu, \lambda) = g(y, \mu, \lambda) \cdot 1_{\{0 < y < E\}}$$

pour tout $\mu \in [-1, 1]$ et $\lambda \in (0, \infty)$. Grâce à l'inégalité de Young que nous rappelons

$$\left\| f * g \right\|_{L^p(\mathbf{R})} \leq \left\| f \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \cdot \left\| g \right\|_{L^p(\mathbf{R})}$$

on a :

$$\begin{aligned}
& \left\| ((K + Q)g)(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{L^1(\Omega)} \\
& \leq \int_{\mu=0}^1 \left\| h(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \cdot \left\| G(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \, d\mu + \int_{\mu=0}^1 \left\| H(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \cdot \left\| G(\cdot, -\mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} \, d\mu
\end{aligned}$$

avec

$$\left\| h(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} = \left\| H(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} = 1 - \exp(-E \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu})$$

Or

$$\int_{\mu=0}^1 \exp(-E \cdot \frac{\sigma_e(\mu, \lambda)}{\mu}) \cdot (\left\| G(\cdot, \mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})} + \left\| G(\cdot, -\mu, \lambda) \right\|_{L^1(\mathbf{R})}) \, d\mu > 0$$

car la fonction à intégrer est positive et non nulle. Finalement, on obtient

$$\left\| ((K + Q)g)(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{L^1(\Omega)} < \left\| g(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$ et donc

$$\| (K + Q)g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)} < \| g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)}. \quad \square$$

Nous possédons à présent tous les éléments qui serviront pour la preuve de l'unicité de la solution.

2.3.2 Unicité de la solution pour le système couplé

Lemme 2.38 : Sous les hypothèses du théorème 2.26, l'application \mathcal{F} a un unique point fixe $T \in D$.

preuve.

L'idée de la preuve est similaire à celle proposée par Kelley [1]. On définit une suite en posant $U^{(0)} = T_-$ et $U^{(n)} = \mathcal{F}(U^{(n-1)})$ pour tout $n \geq 1$. La proposition 2.22 implique que la suite est croissante. Par ailleurs, elle est majorée par T_+ , et donc converge vers une limite $U \in L^\infty([0, E])$. Puisque l'application \mathcal{F} est compacte, la suite $U^{(n)}$ appartient à un sous-ensemble compact de $C([0, E])$. Alors, il existe une sous-suite $U^{\varphi(n)} \in C([0, E])$ qui converge vers $U \in C([0, E])$ et par la continuité de \mathcal{F} , $U = \mathcal{F}(U)$. De manière similaire, la suite définie par $V^{(0)} = T_+$ et $V^{(n)} = \mathcal{F}(V^{(n-1)})$ pour tout $n \geq 1$, est décroissante et converge vers $V = \mathcal{F}(V) \in C([0, E])$. Par ailleurs, si $T = \mathcal{F}(T)$ (\mathcal{F} a au moins un point fixe d'après le théorème 2.24) alors $U \leq T \leq V$. En effet, $T_- = U^{(0)} \leq T^{(0)} \leq V^{(0)} = T_+$. Alors, par la proposition 2.22, il vient que $U^{(1)} \leq T^{(1)} \leq V^{(1)}$. Ensuite, en passant à la limite, on a le résultat. Nous complétons alors la preuve en montrant que $U = V$ ou encore $\bar{U} = \bar{V}$ en posant $\bar{U} = \Psi_c(U)$ et $\bar{V} = \Psi_c(V)$. \bar{U} et \bar{V} sont solutions de (2.47) et (2.48) avec S_r donné par (2.69). Alors, la différence $\bar{W} = \bar{V} - \bar{U} \geq 0$ satisfait

$$\begin{cases} \bar{W}'' = 2\pi \cdot M \left\{ (I - Q(I - K)^{-1}) \sigma_a \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))) \right\} \\ \bar{W}(0) = \bar{W}(E) = 0 \end{cases} \quad (2.70)$$

D'après la proposition 2.7, $S_r \in L^\infty(0, E) (\subset L^1(0, E))$. Par conséquent, $\bar{W}'' \in L^1(0, E)$ et il vient

$$\begin{aligned} \bar{W}'(E) - \bar{W}'(0) &= \int_0^E \bar{W}''(x) dx \\ &= 2\pi \cdot \int_0^E M \left\{ (I - Q(I - K)^{-1}) \sigma_a \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))) \right\} (x) dx \end{aligned}$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^E M \left\{ (I - (K + Q))(I - K)^{-1} \sigma_a \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))) \right\} (x) dx \quad (2.71)$$

D'après les remarques 2.1 et 2.8, $\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V}(x)), \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}(x)), \lambda)) \geq 0$ pour tout $(x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty)$. Par ailleurs, $(I - K)^{-1}$ est un opérateur positif, d'après (2.60) (2.61) et (2.62) et puisque K est un opérateur identique à l'opérateur Q si l'on remplace σ_a par σ_s . Si l'on pose

$$g = (I - K)^{-1} \sigma_a \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U})))$$

et si l'on applique le lemme 2.37 à (2.71), en utilisant le théorème de Fubini, on obtient $\bar{W}'(E) - \bar{W}'(0) \geq 0$. Puisque, $\bar{W} \geq 0$ et $\bar{W}(0) = \bar{W}(E) = 0$, alors $\bar{W}'(0) \geq 0 \geq \bar{W}'(E)$.

Ainsi, combinant les deux relations, il vient $\bar{W}'(0) = \bar{W}'(E)$ et donc

$$\| (K + Q)g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)} = \| g \|_{L^1((0, \infty) \times \Omega)}$$

Le lemme 2.37 implique que $g = 0$ et alors $\bar{V} = \bar{U}$. Ce qui achève la démonstration. \square

Nous pouvons à présent conclure ce paragraphe en donnant un corollaire d'unicité pour le système couplé (2.1)–(2.6).

Corollaire 2.39 : Sous les hypothèses du théorème 2.26, le système (2.1)–(2.6) a un unique couple de solution (T, L) .

preuve.

Le résultat découle directement du théorème 2.6 et du lemme 2.38. \square

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous venons de montrer les résultats d'existence, d'unicité et de régularité de la solution pour le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction, avec la symétrie axiale, en régime stationnaire et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Par la même occasion, nous avons établi certaines propriétés sur les champs de températures et de luminances. Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, l'étude théorique mathématique du régime transitoire et des conditions de flux sera laissée en perspective. A présent, nous pouvons nous intéresser à la résolution numérique des équations, en régime stationnaire. Pour commencer, on s'intéressera à la résolution de l'ETR.

Références

- [1] C.T. Kelley. Existence and uniqueness of solutions of nonlinear systems of conductive–radiative heat transfer equations. *Transport Theory and Statistical Physics*. Vol. 25, p. 249–260, 1996.
- [2] R. Dautray – J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Tome 1, 2 et 3. CEA, Masson, 1985.
- [3] I. W. Busbridge. *The Mathematics of Radiative Transfer*. n° 50 in Cambridge Tracts, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960.
- [4] R.H. Martin. *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*. Wiley Interscience, New–York, 1976.
- [5] M. Zlamal. A finite element solution of the nonlinear heat equation. *RAIRO Numerical Analysis*. Vol. 14, p. 203–216, 1980.
- [6] G. DaPrato. Somme d’applications non linéaires, *Symposia Mathematica VII*, Ist. Naz. Di Alta Mat. Academic Press, p. 233–268, 1971.
- [7] H. Brezis and W. A. Strauss. Semi-linear second order elliptic equation in L^1 . *J. Math. Soc. Japan*. Vol. 25, No. 4, 1973.
- [8] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1983.
- [9] R. Kress. *Linear integral equations*. Applied mathematical sciences, Springer, New–York, 1989.
- [10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, USA, 1998.
- [11] V. Agoshkov. *Boundary Value Problems for Transport equations*. Modeling and simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhauser, 1998.

Chapitre III

Présentation de quelques méthodes numériques en régime stationnaire

Résumé : Dans ce chapitre, nous présentons quelques méthodes numériques pour résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction, en régime stationnaire et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Nous donnons aussi une méthode de résolution de l'ETR sans la symétrie azimutale et associée aux conditions de flux. Les méthodes numériques en régime transitoire seront évoquées au chapitre V.

3.1 Introduction

Nous avons montré, dans la première partie, que le système des équations à résoudre est fortement couplé. Cependant, dans un premier temps, nous pouvons résoudre les deux équations "indépendamment" l'une de l'autre, en fixant le champ de températures pour l'ETR et en fixant le terme source radiatif, ou encore la fonction F donnée par (2.42), pour la seconde équation. Nous proposons alors une méthode appropriée au type de l'équation et munie d'un maillage spécifique (dans notre cas, maillage à pas constant ou à pas variable). L'idée de base pour relier les deux algorithmes et ainsi résoudre le système d'équations couplées est d'utiliser une méthode de point fixe dont le rôle va être d'obtenir les entrées initialement inconnues. Par ailleurs, le fait de "découpler" chacune des deux équations constitue un avantage non négligeable pour l'implémentation informatique et la vérification de chaque sous-programme, mais aussi surtout pour valider chacune des méthodes numériques qui résolvent les équations.

Pour la résolution numérique des équations en régime stationnaire, mais aussi en régime transitoire que nous verrons au chapitre V, nous supposons que les coefficients radiatifs σ_a , σ_s et P sont donnés. Le point de départ de la méthode de calcul de ces coefficients repose sur la résolution des équations de Maxwell, associée à la théorie de Mie. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux thèses de Guilbert [1], Boulet [2] et Milandri [3].

La difficulté essentielle pour résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction dans les milieux semi-transparents étant la résolution de l'ETR, il nous a paru alors nécessaire de présenter une brève étude bibliographique sur ce thème qui constitue un immense champ de recherche. Ce rappel permettra de définir plus précisément les objectifs de notre travail. Pour commencer, il est à noter que, dans notre cas, l'ETR n'a pas de solution analytique. Alors, il apparaît nécessaire d'employer une méthode numérique pour résoudre l'équation. Sur le plan pratique, l'une des difficultés essentielles dans la résolution numérique de l'ETR, dans le cas général, réside dans le calcul d'une fonction de sept variables (trois coordonnées de position, deux coordonnées angulaires, une variable temporelle et un paramètre spectrale). Typiquement, pour un problème stationnaire bidimensionnel, la discrétisation spatiale nécessiterait $100 \times 100 = 10\,000$ points, la discrétisation angulaire $20 \times 20 = 400$ points, la discrétisation spectrale 500 points, soit un total de l'ordre de 2 000 000 000 points ! C'est pourquoi, dans notre étude, on se limite au problème monodimensionnel adapté à un milieu limité par deux plans "infinis" parallèles, qui est totalement justifié pour les applications pratiques que nous avons à traiter. Par ailleurs, l'ETR étant de type intégro-différentiel, l'autre difficulté majeure pour la résoudre provient du terme intégral et du terme non homogène. Différents auteurs ont publié des ouvrages concernant la résolution de l'équation, notamment Chandrasekhar (1960) [4], Hottel et Sarofim (1967) [5], Ozisik (1973) [6] et Modest (1993) [7]. Aussi, une abondante bibliographie est donnée par Viskanta (1984) [8]. Ozisik [6] propose un récapitulatif des différentes méthodes existantes, comprenant des solutions formelles (utiles pour la compréhension mais peu adaptées au cas de milieux réels), des méthodes dites "approchées" et des méthodes numériques. Les solutions formelles n'étant applicables que pour des cas particuliers, elles ne sont pas abordées ici. Nous présentons seulement quelques exemples de méthodes approchées et numériques, les plus fréquemment utilisées.

Les méthodes approchées : il s'agit généralement de méthodes donnant des formes simplifiées de solutions formelles parmi lesquelles les méthodes connues sous le nom de :

L'approximation de Rosseland ou approximation des fortes épaisseurs optiques

Cette approche est à l'origine des travaux de Rosseland dans le domaine de l'astrophysique (1936) [9]. L'hypothèse simplificatrice consiste à considérer que le milieu est optiquement épais ou, en d'autres termes, que l'épaisseur du milieu est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des photons. Dans ce cas, l'équation se simplifie

considérablement pour donner une équation, similaire à la loi de Fourier, faisant intervenir le flux radiatif (Ozisik [6]) :

$$Q_r(x) = -\lambda_r(T(x)) \cdot \frac{dT}{dx}(x)$$

où λ_r est la conductivité radiative donnée par :

$$\lambda_r(T) = \frac{16 \cdot \sigma \cdot T^3}{3 \cdot \beta_R(T)}$$

σ est la constante de Stefan-Boltzman. β_r est le coefficient d'extinction moyen de Rosseland qui a pour expression :

$$\frac{1}{\beta_R(T)} = \frac{\pi}{4 \cdot \sigma \cdot T^3} \cdot \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_{e\lambda}} \cdot \frac{dL_{\lambda}^o(T)}{dT} d\lambda$$

Cependant, la formulation proposée par cette méthode n'est valable que dans le cas d'un milieu diffusant de façon isotrope. De plus, on peut noter que cette approximation ne s'applique correctement que loin des frontières du milieu. Aussi, cette approximation reste très limitée dans son champ d'application.

Le modèle à deux flux

Cette approximation a été proposée pour la première fois par Schuster et Schwarzschild au début du siècle dernier (Chandrasekhar [4]). L'hypothèse simplificatrice consiste à considérer la luminance constante dans chaque demi-espace, mais pouvant être différente d'un hémisphère à l'autre. L'ETR se ramène alors à un système de deux équations différentielles, l'une pour la composante positive du flux et l'autre pour la composante négative. Dans son travail de thèse, Guilbert [1] a utilisé cette méthode.

Dans de nombreux cas, les deux méthodes approchées que nous venons d'exposer permettent d'approcher les solutions exactes. Elles ont en outre l'avantage de permettre de représenter le transfert radiatif comme un phénomène conductif et de définir une **conductivité radiative** par analogie avec la conductivité thermique. Le problème de transfert couplé radiatif et conductif peut alors être traité comme un transfert conductif uniquement par additivité simple des flux. On se ramène ainsi à étudier une seule équation de la température. Cependant, selon Tong et Tien [10], Lee [11] et également Uny [12], ces méthodes simples sont insuffisantes pour représenter de façon précise le transfert radiatif dans les milieux fibreux, ces derniers présentant une diffusion fortement anisotrope.

Les méthodes numériques : Elles sont nombreuses.

La méthode des zones

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Hottel et Cohen (1958) [13]. Elle consiste à diviser le milieu en un nombre fini de zones volumiques isothermes et les

surfaces entourant le milieu en un nombre fini de zones surfaciques isothermes. Le transfert radiatif est modélisé en écrivant un bilan d'énergie pour chaque zone. Ce bilan fait intervenir des coefficients S_i et S_j appelés facteurs d'échange directs qui représentent la fraction d'énergie radiative quittant la zone S_i absorbée par la zone S_j . Les échanges pouvant intervenir sont du type surface-surface, volume-surface ou volume-volume. La procédure qui consiste à écrire un bilan énergétique sur chaque zone conduit à la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires en fonction de la température. La matrice de ce système est complètement pleine. Elle est par conséquent difficile à inverser. Toutefois, la méthode des zones permet d'obtenir des résultats d'une bonne précision si le nombre de zones choisies est suffisamment important.

La méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo fournit une approche statistique pour résoudre l'ETR en invoquant une description probabiliste des processus d'échanges radiatifs. Cette méthode consiste à suivre le chemin de paquets d'énergie depuis leur émission jusqu'à leur absorption dans le milieu ou jusqu'à ce qu'ils s'échappent du milieu. Le paquet peut subir au sein du milieu une absorption, une diffusion ou encore une réflexion. Tous ces événements sont choisis de manière probabiliste par utilisation de nombres aléatoires. Les différents choix possibles appartiennent à une distribution statistique respectant les propriétés radiatives du milieu étudié. La méthode de Monte Carlo permet de traiter des problèmes à géométrie complexe trop difficilement solvables par d'autres techniques. Cependant, des erreurs statistiques peuvent apparaître si le caractère aléatoire des nombres générés n'est pas garanti et, de plus, le temps de calcul est relativement important ainsi que la taille mémoire requise. La précision de cette méthode peut être améliorée en augmentant le nombre de paquets d'énergie; cependant cette opération conduit à une augmentation du temps de calcul, d'après Al Abed et Sacadura [14]. Pour une présentation détaillée de la méthode de Monte Carlo, on peut citer Howell (1968) [15], Haji-Sheikh (1988) [16], Walters et Buckius (1992) [17].

Les méthodes multiflux

Le principe de ces méthodes repose sur une discrétisation de l'espace angulaire et, dans les différents angles solides formés, la luminance est considérée uniforme. La forme la plus simple de discrétisation consiste à utiliser l'hypothèse simplificatrice de l'isotropie hémisphérique de la luminance. Il s'agit du modèle à deux flux que nous avons déjà évoqué. Ce modèle peut être étendu à des modèles à quatre ou six flux pour des géométries multidimensionnelles et si on affine encore la discrétisation angulaire, nous obtenons la méthode des ordonnées discrètes.

La méthode des ordonnées discrètes

Cette méthode a été proposée pour la première fois par Chandrasekhar [4] pour résoudre les problèmes de transfert radiatif monodimensionnel dans le domaine de l'astrophysique.

Depuis, son adaptation à la résolution de l'ETR a connu un certain succès et a été utilisée par plusieurs auteurs pour différents cas de géométrie, milieux et conditions aux limites. La méthode des ordonnées discrètes consiste à approcher le terme intégral dans l'équation par une formule de quadrature, soit :

$$\int_{\Omega=4\pi} f(\Omega) d\Omega \cong \sum_{k=1}^N f_k \cdot \omega_k$$

où ω_k est le poids d'intégration associé à chaque direction. En écrivant l'ETR pour chaque direction, nous obtenons alors un système d'équations aux dérivées partielles qui se résout en utilisant une discrétisation spatiale, une méthode aux différences finies par exemple. La méthode des ordonnées discrètes est aussi appelée approximation S_N où N indique l'ordre de la quadrature qui est reliée aux nombres de directions. Jamaluddin et Smith [18] ont montré qu'en géométrie bidimensionnelle les approximations S_4 , S_6 et S_8 permettent de modéliser le transfert radiatif dans un milieu diffusant, émissif et absorbant avec une précision acceptable. De manière générale, S_2 donne souvent des résultats assez mauvais, S_4 peut suffire dans certains problèmes couplés, S_6 voire S_8 ne sont en général pas très pénalisants à utiliser. Pour une présentation détaillée de la méthode des ordonnées discrètes, on peut citer Carlson et Lathrop (1968) [19], Fiveland (1982-1984) [20,21], Stammes et al. (1988) [22] et Kumar et al. (1990) [23].

La méthode des harmoniques sphériques

Un autre type d'approximation consiste à développer la distribution angulaire de la luminance en une série d'harmoniques sphériques. La série peut être tronquée arbitrairement à N termes. On parle de méthode P_N et l'ETR se réduit, comme l'approximation S_N , à un système d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode fut proposée la première fois par Jeans (1917) [24] qui étudiait le transfert radiatif dans le domaine de l'astrophysique. La complexité mathématique de cette méthode augmente rapidement avec l'ordre de l'approximation. Alors, les approximations les plus souvent utilisées sont P_1 et P_3 . L'approximation P_1 a le mérite de remplacer l'équation aux dérivées partielles en un système plus simple; cependant, des problèmes de précisions numériques peuvent apparaître pour certaines géométries dans la limite des milieux optiquement minces (Modest [7]). Bayazitoglu et Higenyi [25] ont constaté ce genre de problèmes lors du traitement du transfert radiatif monodimensionnel, lorsque les frontières du milieu sont des cylindres ou des sphères, alors que pour un milieu à faces parallèles, la différence entre P_1 et P_3 est négligeable. Pour les approximations d'ordre supérieur, notamment P_5 , la précision numérique gagnée est relativement faible en comparaison de l'augmentation de la difficulté analytique et du temps de calcul.

La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis a également été utilisée pour résoudre l'ETR, pour un problème couplé conductif-radiatif, dans un milieu gris non diffusant contenu dans une enceinte rectangulaire (modèle 2D). Les auteurs Razzaque et al. [26] reconnaissent certaines difficultés de mise en œuvre. Roux et al. [27] ont utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre l'ETR sur un milieu isolant fibreux absorbant, diffusant, émissif et l'ont comparé à la méthode aux ordonnées discrètes. Ils en concluent que les résultats obtenus sont en très bon accord.

Enfin, nous allons présenter une dernière méthode dite matricielle.

La méthode matricielle

C'est une méthode qui s'applique seulement dans le cas d'une géométrie monodimensionnelle. Le point de départ des méthodes matricielles est, comme pour l'approximation S_N , d'approcher l'intégrale de l'ETR par une quadrature numérique afin d'obtenir, pour les directions choisies, un système d'équations différentielles ordinaires. Le système se réduit dans le cas du transfert monodimensionnel pour la direction (Ox) à un système différentiel du type :

$$\frac{d \mathbf{L}_\lambda(x)}{dx} = A_\lambda \cdot \mathbf{L}_\lambda(x) + \mathcal{E}_\lambda^o(x)$$

où \mathbf{L}_λ est le vecteur dont les composantes sont les luminances dans les différentes directions discrètes retenues pour l'étude. Dans sa thèse, Boulet [2] a généralisé les travaux de Guilbert [1] en passant d'un modèle deux flux à un modèle multiflux. Pour résoudre l'ETR dans ce cas, il a utilisé la méthode matricielle. Partant du système d'équations différentielles obtenus, la solution immédiate est celle qui consiste à utiliser les exponentielles de matrices. Comme nous avons adopté nous aussi cette méthode, son développement sera présenté en détail par la suite.

Il existe également des combinaisons des méthodes appelées méthodes hybrides permettant de pallier les inconvénients de chacune tout en profitant des avantages des autres. Quoi qu'il en soit, aucune de toutes ces méthodes que nous venons de présenter n'est considérée comme étant la plus adaptée à tout type de problème. Les problèmes industriels que l'on peut rencontrer sont très diversifiés, notamment par la nature du milieu à étudier et par la variété des conditions aux limites qui peuvent être traitées. Aussi, le choix d'une méthode est le plus souvent conditionné par le type d'application et c'est généralement un compromis entre les exigences de l'utilisateur en termes de difficulté de mise en œuvre, de précision et de coût en place mémoire et temps de calcul.

3.2 Résolution numérique de l'ETR en régime stationnaire

Nos applications vont porter sur l'étude des milieux fibreux qui sont en général non gris. Ainsi, dans notre cas l'ETR est une équation **monochromatique**, ce qui impose de la résoudre sur l'ensemble du spectre concerné. Dans l'équation, la longueur d'onde λ est un paramètre. En conséquence, nous devons résoudre l'équation autant de fois qu'il y a de longueurs d'onde à prendre en compte. Dans les applications, celles-ci peuvent aller jusqu'à la valeur 500 par exemple. Une attention toute particulière sera alors portée sur cet aspect. Avec le souci de réduire les temps de calcul, nous allons présenter différentes méthodes numériques pour résoudre l'équation, en régime stationnaire. Par la même occasion, nous donnerons l'efficacité et les contraintes de ces méthodes. Par ailleurs, nous pourrons par la suite comparer les résultats obtenus par les différentes méthodes et ainsi valider le modèle. Ceci sera fait au chapitre VI. Nous allons nous intéresser à la résolution de l'ETR en présence de la symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Nous donnerons aussi une méthode de résolution de l'ETR sans la symétrie azimutale et associée aux conditions de flux, que nous reporterons en annexe 3. Nous supposons, pour la résolution de l'équation, que le champ de températures est donné. Il est à noter que la résolution numérique de l'ETR est composée de trois problèmes distincts : la discrétisation **angulaire**, la discrétisation **spatiale** et la discrétisation **spectrale**. Pour commencer, nous allons étudier la discrétisation angulaire.

3.2.1 La discrétisation angulaire

Nous utilisons la méthode matricielle pour résoudre l'ETR. Elle consiste, dans un premier temps, à discrétiser l'espace angulaire pour lequel nous choisissons un certain nombre de directions spécifiques μ_j , $1 \leq j \leq m$ comme indiqué sur la *figure 3.1*, avec m un nombre entier positif, que l'on choisira pair pour une raison de symétrie. La discrétisation angulaire permettra alors d'approcher le terme intégral de l'équation par une formule de quadrature. Les équations discrètes sont obtenues à partir de l'ETR écrite pour chaque direction. Cette procédure transforme l'équation intégral-différentielle, dans notre cas (monodimensionnel), à un système différentiel ordinaire (E.D.O.). La précision de la solution dépendra bien entendu du choix de la quadrature. Il n'existe pas a priori de choix optimal de directions qui conviennent à tous les types de problèmes. Celui-ci dépend en réalité de la connaissance des directions privilégiées du transfert radiatif.

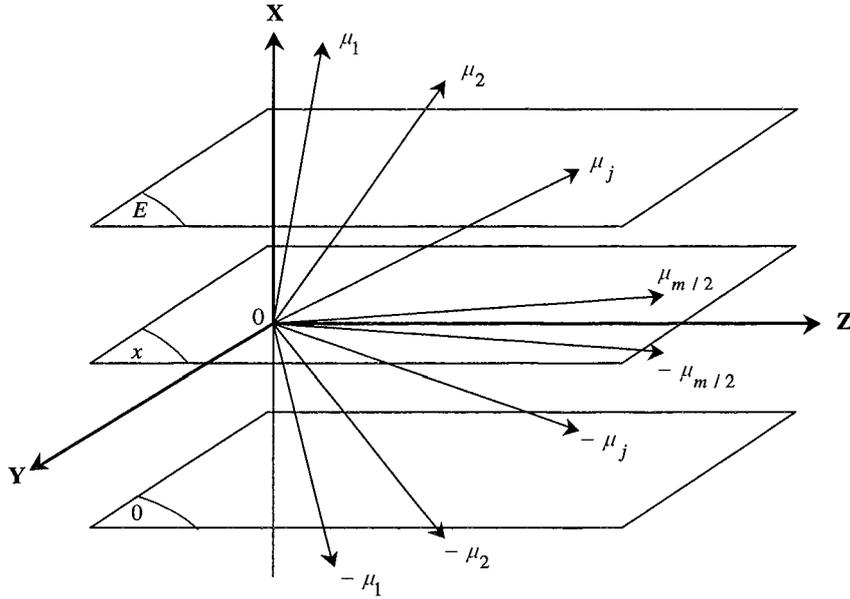


figure 3.1 : Discretisation de l'espace angulaire

La semi-discretisation de l'ETR en la variable μ donne :

$$\mu_j \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu_j)}{\partial x} = \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x)) - \sigma_{e\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda(x, \mu_j) + \sum_{k=1}^m P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) \cdot L_\lambda(x, \mu_k) \quad (3.1)$$

$$1 \leq j \leq m$$

où le coefficient P_λ prend en compte le coefficient de diffusion, la fonction de phase et les poids d'intégration :

$$P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{s\lambda}(\mu_k) \cdot P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) \cdot \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta \quad \forall 1 \leq j, k \leq m \quad (3.2)$$

Les coefficients C_k^θ sont les poids d'intégration liés à la formule de quadrature et les $\{\theta_k\}_{k=1}^m$ sont les directions discrètes polaires telles que $\mu_k = \cos(\theta_k) \quad \forall 1 \leq k \leq m$.

Nous faisons remarquer que, dans les équations (3.1), L_λ est en fait une valeur approchée de la luminance et, pour ne pas alourdir les écritures qui vont suivre, nous garderons la même notation. Par ailleurs, la validité de la relation (3.1) est conditionnée par la capacité de la somme discrète à représenter le terme intégral. Il est donc nécessaire de choisir une bonne formule de quadrature et de prendre éventuellement une valeur de m suffisamment grande pour avoir une bonne précision numérique. Par la suite, nous aurons besoin de connaître les coefficients radiatifs σ_a , σ_s et P intervenant dans les équations (3.1). Dans nos applications (on renvoie au chapitre VI), nous utiliserons les coefficients qui ont été calculés par Boulet [2], et plus récemment par Milandri [3]. Ces auteurs ont calculé les coefficients pour différents types de milieux fibreux et toujours pour des directions angulaires choisies avec un pas constant, comme décrit sur la figure 3.2. Par conséquent, nous serons contraints d'utiliser le même découpage de l'espace angulaire. Nous rappelons que la variable μ est

définie par $\mu = \cos(\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$ est l'angle polaire. Le découpage se fait sur l'intervalle angulaire $[0, \pi/2]$ (le découpage de l'intervalle $[\pi/2, \pi]$ s'opère par symétrie) avec un pas constant $\Delta\theta = \pi/m$ (figure 3.2) tel que

$$\theta_1 = \frac{\Delta\theta}{2}, \quad \theta_{j+1} = \theta_j + \Delta\theta \quad \forall 1 \leq j \leq m/2 - 2 \quad \text{et} \quad \theta_{m/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\theta}{2}$$

Finalement, il vient

$$\mu_j = \cos(\theta_j) \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad \mu_j = -\mu_{m+1-j} \quad \forall m/2 + 1 \leq j \leq m \quad \text{et} \quad 0 < \mu_j < 1 \quad \forall 1 \leq j \leq m/2.$$

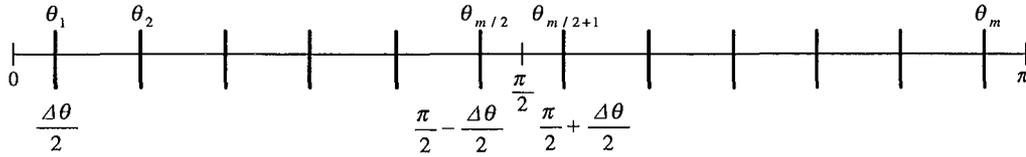


figure 3.2 : Découpage de l'intervalle angulaire

Dans sa thèse, Boulet [2] a utilisé la méthode du point milieu composée pour évaluer l'intégrale, sur le même support d'intégration défini ci-dessus. Mais cette méthode est évidemment peu précise. Il nous a paru alors nécessaire d'utiliser une formule de quadrature donnant une plus grande précision. En calcul intégral, il est bien connu que la méthode de Gauss est la meilleure lorsque la fonction à intégrer peut être évaluée en des points arbitraires, non régulièrement espacés (points de Gauss). La méthode ne peut alors s'appliquer que lorsque la fonction est connue en ces points précis. Dans notre cas, nous ne pourrions pas l'utiliser puisque le support d'intégration est formé de points régulièrement espacés. La méthode de Romberg est une technique d'intégration numérique qui permet d'atteindre aussi des résultats très précis et elle utilise un découpage de l'intervalle à pas constant. Cependant, pour pouvoir l'appliquer, il faut que le nombre de sous-intervalles soit une puissance de 2 (ce qui n'est pas toujours pratique) ou encore le nombre de points de la forme $m = 2^n + 1$ i.e. m impair. Dans notre application, nous avons précisé que m doit être pair. De plus, la méthode ne donne pas, pour le calcul de l'intégrale, une expression faisant intervenir explicitement les valeurs que prend la fonction aux différents points de discrétisation de l'intervalle et c'est ce que l'on recherche dans la relation (3.1). Par conséquent, cette méthode non plus ne pourra pas être utilisée. Les formules de Newton-Cotes sont satisfaisantes mais ne doivent pas être utilisées pour une valeur de m élevée, plus précisément $m \leq 7$, car elles deviennent instables. Au-delà de cette valeur, on est conduit à faire des intégrations par arcs. On partage le domaine d'intégration en un certain nombre d'intervalles partiels, et sur chacun d'eux on utilise les formules de Newton-Cotes : c'est la méthode de Newton-Cotes composée. Nous appliquerons alors cette méthode sur l'intervalle $[\theta_1, \theta_m]$. Dans les applications, nous prendrons $m \geq 12$ et nous utiliserons la formule de type Villarceau. Nous renvoyons à l'annexe 1 pour les valeurs des coefficients C_k^θ .

Remarque 3.1 : Dans la pratique, on ne peut pas déterminer les coefficients radiatifs pour les deux valeurs, en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Par conséquent, nous ferons une extrapolation linéaire pour connaître ces deux valeurs et nous utiliserons alors une intégration du type trapèze pour intégrer la fonction sur les deux intervalles partiels $[0, \theta_1]$ et $[\theta_m, \pi]$. On peut penser que les erreurs d'intégration seront les plus grandes à ces deux endroits, surtout si la fonction à intégrer varie fortement ou change complètement d'allure dans ces deux zones. Dans la pratique, le transfert radiatif est généralement le plus important dans ces deux zones. Par contre, il est certain que les deux valeurs de la fonction obtenues par extrapolation, aux extrémités de l'intervalle, seront d'autant plus proches des valeurs réelles que si l'on prend m suffisamment grand et du même coup on réduira les erreurs d'intégration. Si cela est vraiment nécessaire, une autre façon de procéder serait de discrétiser les deux intervalles partiels $[0, \theta_1]$ et $[\theta_m, \pi]$ avec un pas plus fin (et non constant éventuellement) tout en gardant la même discrétisation avec un pas constant de l'intervalle $[\theta_1, \theta_m]$.

Nous supposons que les températures sont imposées aux frontières. Dans ce cas d'après (2.4), les conditions aux limites radiatives discrètes sont données par

$$L_\lambda(0, \mu_j) = L_\lambda^o(T_o) \quad \text{et} \quad L_\lambda(E, -\mu_j) = L_\lambda^o(T_E) \quad \forall 1 \leq j \leq m/2 \quad (3.3)$$

Les m équations différentielles couplées (3.1), associées aux conditions aux limites (3.3) peuvent se mettre sous forme matricielle. Au préalable, nous divisons l'espace en deux hémisphères, l'un correspondant à l'hémisphère "avant" : $0 < \mu \leq 1$, et l'autre à l'hémisphère "arrière" : $-1 \leq \mu < 0$, comme décrit sur la *figure* suivante :

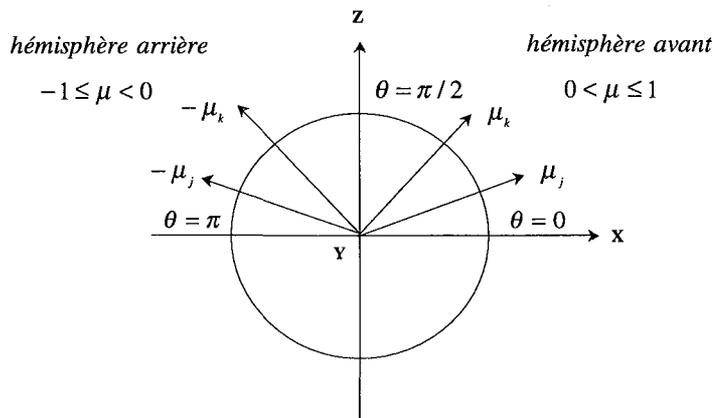


figure 3.3 : Découpage de l'espace en deux hémisphères

Nous introduisons alors deux champs de luminance \mathbf{L}_λ^+ et \mathbf{L}_λ^- de taille $m/2$, correspondant respectivement aux hémisphères avant et arrière (*figure 3.4*) :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda^+(x) &= \left[L_\lambda(x, \mu_j) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \\ \mathbf{L}_\lambda^-(x) &= \left[L_\lambda(x, -\mu_j) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

et nous introduisons le vecteur luminance \mathbf{L}_λ de taille m formé des deux vecteurs \mathbf{L}_λ^+ et \mathbf{L}_λ^- :

$$\mathbf{L}_\lambda(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\lambda^+(x) \\ \mathbf{L}_\lambda^-(x) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

\mathbf{L}_λ est donc le vecteur dont les composantes sont les luminances dans les m directions μ_j retenues pour l'étude.

Nous introduisons à présent le vecteur $\mathcal{E}_\lambda^o(x)$ de taille m , défini par :

$$\mathcal{E}_\lambda^o(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) \\ -\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où $\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x)$ est le vecteur de taille $m/2$ de composantes

$$\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) = \left[\frac{\sigma_{a\lambda}(\mu_j)}{\mu_j} \cdot L_\lambda^o(T(x)) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \quad (3.7)$$

Dans le cas des fibres réparties aléatoirement dans des plans parallèles aux frontières, le calcul des coefficients radiatifs du milieu met en évidence différentes symétries [2,3] que nous allons utiliser afin de simplifier au maximum l'écriture matricielle :

$$\sigma_{a\lambda}(\mu_j) = \sigma_{a\lambda}(-\mu_j) \quad \forall 1 \leq j \leq m/2 \quad (3.8)$$

$$\sigma_{s\lambda}(\mu_j) = \sigma_{s\lambda}(-\mu_j) \quad \forall 1 \leq j \leq m/2$$

et par suite

$$\sigma_{e\lambda}(\mu_j) = \sigma_{e\lambda}(-\mu_j) \quad \forall 1 \leq j \leq m/2 \quad (3.9)$$

$$P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) = P_\lambda(-\mu_k \rightarrow -\mu_j) \quad \forall 1 \leq j, k \leq m/2 \quad (3.10)$$

$$P_\lambda(\mu_k \rightarrow -\mu_j) = P_\lambda(-\mu_k \rightarrow \mu_j) \quad \forall 1 \leq j, k \leq m/2$$

Remarque 3.2 : Les coefficients C_k^θ dans l'écriture (3.2) vérifient

$$1) \sum_{k=1}^m C_k^\theta = 1, \quad 0 < C_k^\theta < 1 \quad \forall 1 \leq k \leq m \quad (\text{avec } m \geq 12) \quad \text{et par suite } P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) > 0$$

$$\forall 1 \leq j, k \leq m.$$

$$2) C_k^\theta = C_{m+1-k}^\theta \quad \text{pour tout } m/2 + 1 \leq k \leq m.$$

A partir des relations (3.2), (3.8), (3.10) et la remarque 3.2, nous déduisons

$$P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) = P_\lambda(-\mu_k \rightarrow -\mu_j) \quad \forall 1 \leq j, k \leq m/2 \quad (3.11)$$

$$P_\lambda(\mu_k \rightarrow -\mu_j) = P_\lambda(-\mu_k \rightarrow \mu_j) \quad \forall 1 \leq j, k \leq m/2$$

Finalement, la forme matricielle de (3.1) est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{L}_\lambda(x)}{dx} = A_\lambda \cdot \mathbf{L}_\lambda(x) + \mathcal{E}_\lambda^o(x) \quad (3.12)$$

où A_λ est une matrice carrée de taille m qui a une structure composée de quatre blocs :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} A_\lambda^1 & A_\lambda^2 \\ -A_\lambda^2 & -A_\lambda^1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

où A_λ^1 et A_λ^2 sont deux matrices carrées de taille $m/2$ dont les éléments sont donnés par :

$$(A_\lambda^1)_{jk} = \frac{1}{\mu_j} \cdot \{P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) - \sigma_{e\lambda}(\mu_k) \cdot \delta_{jk}\} \quad (3.14)$$

$$(A_\lambda^2)_{jk} = \frac{1}{\mu_j} \cdot P_\lambda(\mu_k \rightarrow -\mu_j) \quad (3.15)$$

pour $1 \leq j, k \leq m/2$ (j est l'indice de ligne et k est l'indice de colonne). Par la suite, nous désignerons A_λ la matrice caractéristique du milieu.

Remarque 3.3 :

- 1) La prise en compte d'un modèle multiflux conduit, après la semi-discrétisation en angle de l'ETR, à un système différentiel donné par (3.12).
- 2) Nous pouvons noter la structure particulière de la matrice A_λ qui vient de la symétrie des coefficients radiatifs du milieu.
- 3) La dimension de la matrice A_λ et celle des vecteurs L_λ et \mathcal{E}_λ^o dépendent du nombre de directions de discrétisation choisi pour la variable μ .

D'après (3.3) et (3.4), le système différentiel (3.12) est associé aux conditions aux limites suivantes (*figure 3.4*) :

$$L_\lambda^+(0) = \begin{bmatrix} L_\lambda^o(T_o) \\ \vdots \\ L_\lambda^o(T_o) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L_\lambda^-(E) = \begin{bmatrix} L_\lambda^o(T_E) \\ \vdots \\ L_\lambda^o(T_E) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

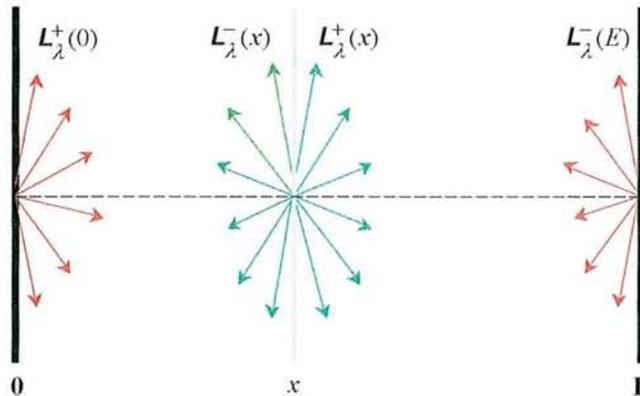


figure 3.4 : Conditions aux limites radiatives et luminances dans le milieu

Nous pouvons à présent passer à la discrétisation spatiale.

3.2.2 La discrétisation spatiale

Le système (3.12) associé aux conditions aux limites (3.16) est un système différentiel ordinaire du premier ordre, linéaire, non homogène et à coefficients constants. Par ailleurs, nous savons résoudre complètement ce genre de système. Par conséquent, nous pouvons donner la solution analytique du système (3.12) (3.16). Le principe général de résolution d'un système différentiel est bien connu : il consiste à résoudre le système homogène et à rechercher une solution particulière du système général. La solution générale du système est alors obtenue en faisant la somme des deux solutions précédentes. Dans un premier temps, nous allons résoudre l'équation homogène associée à (3.12), puis nous chercherons une solution particulière. Nous noterons, pour la suite de notre exposé, $\mathbf{L}_{h\lambda}$ la solution homogène et $\mathbf{L}_{p\lambda}$ la solution particulière. Pour les conditions aux limites, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{\lambda}^{+}(0) = \mathbf{L}_{h\lambda}^{+}(0) + \mathbf{L}_{p\lambda}^{+}(0) \\ \mathbf{L}_{\lambda}^{-}(E) = \mathbf{L}_{h\lambda}^{-}(E) + \mathbf{L}_{p\lambda}^{-}(E) \end{cases} \quad (3.17)$$

où $\mathbf{L}_{h\lambda}^{+}(0)$ et $\mathbf{L}_{p\lambda}^{+}(0)$ sont respectivement les conditions aux limites homogènes et particulières, au point $x = 0$. $\mathbf{L}_{h\lambda}^{-}(E)$ et $\mathbf{L}_{p\lambda}^{-}(E)$ sont respectivement les conditions aux limites homogènes et particulières, au point $x = E$.

Le système homogène associé à (3.12) correspond à un problème de transfert de chaleur radiatif sans émission propre, dont la mise en équation est :

$$\frac{d \mathbf{L}_{h\lambda}(x)}{dx} = A_{\lambda} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}(x) \quad (3.18)$$

auquel on associe les conditions aux limites radiatives homogènes suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{h\lambda}^{+}(0) = \mathbf{L}_{\lambda}^{+}(0) - \mathbf{L}_{p\lambda}^{+}(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^{-}(E) = \mathbf{L}_{\lambda}^{-}(E) - \mathbf{L}_{p\lambda}^{-}(E) \end{cases} \quad (3.19)$$

Pour la résolution du système homogène (3.18) (3.19), nous supposons que les conditions aux limites particulières $\mathbf{L}_{p\lambda}^{+}(0)$ et $\mathbf{L}_{p\lambda}^{-}(E)$ sont données. Le système différentiel (3.18)–(3.19) a une solution unique donnée par

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \exp(A_{\lambda} \cdot x) \cdot K_{\lambda} \quad (3.20)$$

où $\exp(A_{\lambda} \cdot x)$ est l'exponentielle de la matrice $(A_{\lambda} \cdot x)$ et K_{λ} est un vecteur constant d'intégration de taille m , déterminé par les conditions aux limites (3.19).

Si nous posons

$$\exp(A_{\lambda} \cdot x) = \begin{bmatrix} e_{\lambda}^1(x) & e_{\lambda}^2(x) \\ e_{\lambda}^3(x) & e_{\lambda}^4(x) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_{\lambda} = \begin{bmatrix} K_{\lambda}^1 \\ K_{\lambda}^2 \end{bmatrix}$$

où $e_{\lambda}^i(x)$ $1 \leq i \leq 4$ sont des matrices carrées de taille $m/2$ et $K_{\lambda}^1, K_{\lambda}^2$ sont des vecteurs colonnes de taille $m/2$. Il vient alors :

$$\sum_{k=1}^m P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) = \sigma_{s\lambda}(\mu_j) + \eta_\lambda(\Delta\theta) \quad (3.23)$$

où $\varepsilon_\lambda, \eta_\lambda$ sont des réels qui représentent les erreurs d'intégration et $\varepsilon_\lambda(\Delta\theta), \eta_\lambda(\Delta\theta) \rightarrow 0$ lorsque $\Delta\theta \rightarrow 0$. Alors,

$$\left| (A_\lambda^*)_{kk} \right| = \left| \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta \right| \cdot \left| P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_k) - \sigma_{e\lambda}(\mu_k) \right| = \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta \cdot \left\{ \sigma_{e\lambda}(\mu_k) - P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_k) \right\}$$

car $0 < \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta < 1 \forall 1 \leq k \leq m, P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) > 0 \forall 1 \leq j, k \leq m$ (d'après la remarque 3.2),
 $\sigma_{s\lambda} < \sigma_{e\lambda}$ et $\sigma_{e\lambda}(\mu_k) - P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_k) > 0$ pour $\Delta\theta$ suffisamment petit d'après (3.23).

Par ailleurs,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \left| (A_\lambda^*)_{jk} \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \left| (A_\lambda^*)_{kk} \right| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m \left| (A_\lambda^*)_{jk} \right| &= \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta \cdot (\sigma_{a\lambda}(\mu_k) + \sigma_{s\lambda}(\mu_k)) - \sum_{j=1}^m P_\lambda(\mu_k \rightarrow \mu_j) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \\ &= \sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta \cdot (\sigma_{a\lambda}(\mu_k) - \varepsilon_\lambda(\Delta\theta)) \quad \text{en utilisant (3.22)} \end{aligned}$$

Pour $\Delta\theta$ suffisamment petit, cette quantité sera strictement positive. La matrice A_λ^* étant à diagonale strictement dominante, elle est alors inversible et $\det(A_\lambda^*) \neq 0$. D'autre part, $\det(A_\lambda) = \det(G^{-1} \cdot A_\lambda^*) = \det(G^{-1}) \cdot \det(A_\lambda^*) \neq 0$ car

$$\det(G^{-1}) = (-1)^{m/2} \cdot \prod_{j=1}^{m/2} \frac{1}{(\mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta)^2} \neq 0$$

ce qui prouve que la matrice A_λ est inversible et donc elle n'a pas de valeur propre nulle. \square

Proposition 3.5 : Si ξ_λ est une valeur propre de la matrice A_λ associée au vecteur propre

$$\begin{bmatrix} X_\lambda^1 \\ X_\lambda^2 \end{bmatrix} \quad \text{où } X_\lambda^1, X_\lambda^2 \text{ sont deux vecteurs colonnes de taille } m/2, \text{ alors } -\xi_\lambda \text{ est aussi valeur}$$

propre de la matrice A_λ associée au vecteur propre $\begin{bmatrix} X_\lambda^2 \\ X_\lambda^1 \end{bmatrix}$. Par ailleurs, $(\xi_\lambda)^2$ est valeur

propre de la matrice $(A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 - A_\lambda^2)$ associée au vecteur propre $(X_\lambda^1 - X_\lambda^2)$ et est aussi valeur propre de la matrice $(A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2)$ associée au vecteur propre $(X_\lambda^1 + X_\lambda^2)$.

preuve

On a

$$\begin{bmatrix} A_\lambda^1 & A_\lambda^2 \\ -A_\lambda^2 & -A_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\lambda^1 \\ X_\lambda^2 \end{bmatrix} = \xi_\lambda \cdot \begin{bmatrix} X_\lambda^1 \\ X_\lambda^2 \end{bmatrix}$$

ou encore en développant le produit, il vient

$$\begin{cases} A_\lambda^1 \cdot X_\lambda^1 + A_\lambda^2 \cdot X_\lambda^2 = \xi_\lambda \cdot X_\lambda^1 & (L_1) \\ -A_\lambda^2 \cdot X_\lambda^1 - A_\lambda^1 \cdot X_\lambda^2 = \xi_\lambda \cdot X_\lambda^2 & (L_2) \end{cases} \quad (3.24)$$

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} A_\lambda^1 \cdot X_\lambda^2 + A_\lambda^2 \cdot X_\lambda^1 = -\xi_\lambda \cdot X_\lambda^2 & \text{en multipliant } (L_2) \text{ par } -1 \\ -A_\lambda^2 \cdot X_\lambda^2 - A_\lambda^1 \cdot X_\lambda^1 = -\xi_\lambda \cdot X_\lambda^1 & \text{en multipliant } (L_1) \text{ par } -1 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{bmatrix} A_\lambda^1 & A_\lambda^2 \\ -A_\lambda^2 & -A_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\lambda^2 \\ X_\lambda^1 \end{bmatrix} = -\xi_\lambda \cdot \begin{bmatrix} X_\lambda^2 \\ X_\lambda^1 \end{bmatrix}$$

ce qui démontre le premier point de la proposition.

Le système (3.24) est encore équivalent à

$$\begin{cases} (A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (X_\lambda^1 - X_\lambda^2) = \xi_\lambda \cdot (X_\lambda^1 + X_\lambda^2) & (L_1) := (L_1) + (L_2) \\ (A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot (X_\lambda^1 + X_\lambda^2) = \xi_\lambda \cdot (X_\lambda^1 - X_\lambda^2) & (L_2) := (L_1) - (L_2) \end{cases}$$

En substituant (L_1) dans (L_2) et (L_2) dans (L_1) , nous obtenons

$$\begin{cases} (A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (X_\lambda^1 - X_\lambda^2) = (\xi_\lambda)^2 \cdot (X_\lambda^1 - X_\lambda^2) \\ (A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot (X_\lambda^1 + X_\lambda^2) = (\xi_\lambda)^2 \cdot (X_\lambda^1 + X_\lambda^2) \end{cases}$$

ce qui démontre le deuxième point de la proposition. \square

Remarque 3.6 : Pour les cas pratiques qui nous intéressent, nous avons déterminé les valeurs propres de la matrice A_λ en utilisant le logiciel Matlab. Dans nos applications, nous avons pris $m = 12$ directions et $N = 211$ longueurs d'ondes, variant de 3,5 à 25 microns. Les courbes de la *figure 3.5* représentent les six valeurs propres positives de la matrice A_λ en fonction de la longueur d'onde. En particulier, celles-ci sont réelles, simples et distinctes pour chaque longueur d'onde.

Dans Roche [28], il est démontré que le calcul de l'exponentielle d'une matrice par des méthodes numériques est intrinsèquement instable si les valeurs propres (ou la norme) de la matrice sont supérieures à l'unité. D'autres auteurs [29,30,31] ont montré que ce phénomène d'instabilité numérique apparaît lorsque l'épaisseur optique du milieu, définie par $\tau_\lambda(x, \mu) = \sigma_{e\lambda}(\mu) \cdot x$, augmente. Mais ceci revient à dire que les valeurs propres de la matrice $A_\lambda \cdot x$ sont élevées, puisque celles-ci sont proportionnelles à l'épaisseur optique. Or, il se trouve que les matériaux fibreux du type de ceux que nous étudions sont caractérisés par une épaisseur optique importante; par conséquent les valeurs propres sont également importantes comme le montre la *figure 3.5*. Finalement, si notre problème est numériquement mal posé, cela vient du fait que la solution homogène (3.20) est donnée par une exponentielle de matrice

et cette matrice a des valeurs propres réelles, positives, non nulles et très élevées. Dans nos applications, l'épaisseur du milieu est égale à 10 cm. La valeur limite de x pour laquelle la méthode serait malgré tout applicable dépend donc des caractéristiques du milieu.

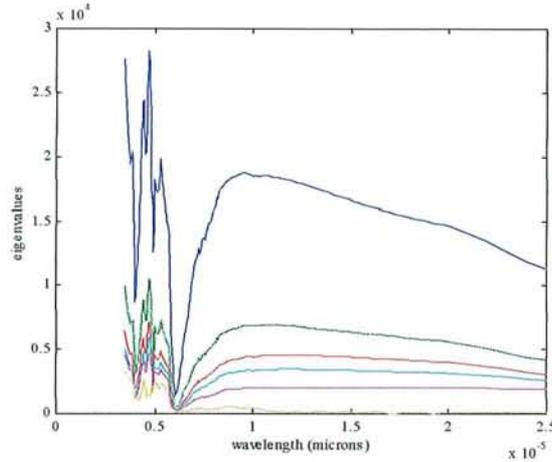


figure 3.5 : Valeurs propres de la matrice A_λ

Finalement, nous sommes amenés à proposer une autre méthode pour résoudre le système (3.12) (3.16). Pour passer outre ce problème numérique, Waterman [29], ensuite Flatau et Stephens [30], et plus récemment Boulet et al. [31], ont introduit une méthode stable numériquement appelée principe d'interaction, utilisant deux matrices caractéristiques représentant la transmission et la réflexion pour une couche d'épaisseur donnée. Nous avons repris cette méthode et nous y avons apporté quelques améliorations au niveau de la précision et des temps de calcul. Nous renvoyons à l'annexe 2 pour la description de la méthode. Cependant, son utilisation dépend fortement de la variation du champ de températures dans le milieu et reste donc très limitée dans les applications. Par ailleurs, nous ne savons pas donner la limite de validité de cette méthode. Pour ces raisons, il nous a paru nécessaire de développer une autre méthode pour résoudre le système (3.12) (3.16).

3.2.2.1 Méthode par diagonalisation

Dans ce paragraphe, nous allons présenter une nouvelle méthode stable et très précise pour résoudre le système (3.12) (3.16). Elles s'appuie essentiellement sur la diagonalisation de la matrice caractéristique du milieu A_λ .

Une condition suffisante pour que la matrice A_λ soit diagonalisable est que toutes ses valeurs propres soient distinctes. Alors, d'après la remarque 3.6 et pour les cas pratiques qui nous intéressent, cette condition est vérifiée. D'après la proposition 3.5, la matrice $(A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2)$ est aussi diagonalisable et sa réduction est donnée par :

$$(D_\lambda)^2 = S_\lambda^{-1} \cdot (A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot S_\lambda$$

avec $(D_\lambda)^2 = \text{diag} [(\xi_\lambda^j)^2]_{1 \leq j \leq m/2}$ où $(\xi_\lambda^j)_{1 \leq j \leq m/2}$ et $(-\xi_\lambda^j)_{1 \leq j \leq m/2}$ sont les valeurs propres de la matrice A_λ . S_λ est la matrice de passage, carrée de taille $m/2$. La réduction de la matrice A_λ est quant à elle donnée par :

$$A_\lambda = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_\lambda & 0 \\ 0 & -D_\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

où les matrices $U_\lambda^1, U_\lambda^2, Z_\lambda^1$ et Z_λ^2 sont définies par

$$\begin{aligned} U_\lambda^1 &= S_\lambda + W_\lambda ; & U_\lambda^2 &= S_\lambda - W_\lambda \\ Z_\lambda^1 &= S_\lambda^{-1} + W_\lambda^{-1} ; & Z_\lambda^2 &= S_\lambda^{-1} - W_\lambda^{-1} \\ W_\lambda &= (A_\lambda^1 + A_\lambda^2) \cdot S_\lambda \cdot D_\lambda^{-1} = (A_\lambda^1 - A_\lambda^2)^{-1} \cdot S_\lambda \cdot D_\lambda \end{aligned}$$

Si on substitue la matrice A_λ par son expression (3.25) dans la solution homogène donnée par (3.20), il vient :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \exp(D_\lambda \cdot x) & 0 \\ 0 & \exp(-D_\lambda \cdot x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot K_\lambda$$

En posant

$$\overline{K}_\lambda = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot K_\lambda \quad \text{et} \quad \text{Exp}_\lambda(x) = \begin{bmatrix} E_\lambda^*(x) & 0 \\ 0 & E_\lambda^*(-x) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad E_\lambda^*(x) = \exp(D_\lambda \cdot x)$$

on a alors

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \text{Exp}_\lambda(x) \cdot \overline{K}_\lambda \quad (3.26)$$

Les composantes vectorielles de $\mathbf{L}_{h\lambda}(x)$ correspondant aux hémisphères avant et arrière sont données par :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) = [U_\lambda^1 \quad U_\lambda^2] \cdot \text{Exp}_\lambda(x) \cdot \overline{K}_\lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{h\lambda}^-(x) = [U_\lambda^2 \quad U_\lambda^1] \cdot \text{Exp}_\lambda(x) \cdot \overline{K}_\lambda$$

\overline{K}_λ est un vecteur constant de taille m qui est déterminé par les conditions aux limites :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) = [U_\lambda^1 \quad U_\lambda^2] \cdot \overline{K}_\lambda \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) = [U_\lambda^2 \quad U_\lambda^1] \cdot \text{Exp}_\lambda(E) \cdot \overline{K}_\lambda$$

ou encore, écrit sous une autre forme :

$$\overline{K}_\lambda = \begin{bmatrix} [U_\lambda^1 \quad U_\lambda^2] \\ [U_\lambda^2 \quad U_\lambda^1] \cdot \text{Exp}_\lambda(E) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

En substituant \overline{K}_λ donné par (3.27) dans (3.26), on obtient l'expression de la luminance homogène en fonction des conditions aux limites :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \text{Exp}_\lambda(x) \cdot \begin{bmatrix} [U_\lambda^1 \quad U_\lambda^2] \\ [U_\lambda^2 \quad U_\lambda^1] \cdot \text{Exp}_\lambda(E) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) \end{bmatrix}$$

La matrice Exp_λ a les propriétés suivantes :

$$(\text{Exp}_\lambda(x))^{-1} = \text{Exp}_\lambda(-x) \quad \text{et} \quad \text{Exp}_\lambda(x) \cdot \text{Exp}_\lambda(y) = \text{Exp}_\lambda(x + y)$$

En utilisant ces propriétés et en se rappelant que pour deux matrices A et B , on a la propriété

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1} \quad (3.28)$$

il vient :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \text{Exp}_\lambda(-x) \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) \end{bmatrix}$$

En développant l'expression de la matrice à inverser, on a :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-x) & U_\lambda^2 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(x) \\ U_\lambda^2 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(E-x) & U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(x-E) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Par définition, $\mathbf{E}_\lambda^*(a) = \text{diag} (e^{\xi_\lambda^j \cdot a})_{1 \leq j \leq m/2}$ où $(\xi_\lambda^j)_{1 \leq j \leq m/2}$ sont les valeurs propres strictement positives de la matrice A_λ . Par conséquent $\mathbf{E}_\lambda^*(a)$ diverge si a est positif. Pour déterminer la matrice à inverser de (3.29), nous allons nous ramener à des matrices $\mathbf{E}_\lambda^*(a)$ où a sera une valeur négative. La matrice \mathbf{E}_λ^* a les mêmes propriétés que la matrice Exp_λ . Dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-x) & U_\lambda^2 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(x) \\ U_\lambda^2 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(E-x) & U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(x-E) \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\lambda^*(E-x) & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_\lambda^*(x) \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\ & = \begin{bmatrix} B_\lambda^1(x) & 0 \\ 0 & B_\lambda^2(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

en utilisant la propriété (3.28) et où l'on a posé

$$B_\lambda^1(x) = \mathbf{E}_\lambda^*(x-E) \quad \text{et} \quad B_\lambda^2(x) = \mathbf{E}_\lambda^*(-x)$$

En reportant (3.30) dans (3.29), on obtient finalement l'expression qui permet de calculer la luminance homogène en tout point du milieu sans problème de stabilité numérique :

$$\mathbf{L}_{h\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_\lambda^1(x) & 0 \\ 0 & B_\lambda^2(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \cdot \mathbf{E}_\lambda^*(-E) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Remarque 3.7 :

1) les matrices B_λ^1 et B_λ^2 peuvent être déterminées de manière itérative. En effet, soit $0 < x_i < x_{i+1} < E$, alors

$$B_\lambda^1(x_i) = E_\lambda^*(-(x_{i+1} - x_i)) \cdot B_\lambda^1(x_{i+1}) \text{ et } B_\lambda^2(x_{i+1}) = E_\lambda^*(-(x_{i+1} - x_i)) \cdot B_\lambda^2(x_i) \quad (3.32)$$

2) dans nos applications, le plus souvent $E_\lambda^*(-E) \cong 0$, la matrice nulle (voir *figure 3.5*).

3) la réduction de la matrice A_λ se ramène en fait à la réduction de la matrice $(A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2)$, ce qui réduit la taille du problème par deux. Le logiciel Matlab (version 5.3) que nous utilisons calcule les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $(A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2)$ assez rapidement et avec une très bonne précision. L'algorithme utilisé est la méthode QR. De plus, le calcul de la matrice E_λ^* ne pose pas de problème puisqu'il est donné directement par la relation

$$E_\lambda^*(-x) = \text{diag} (e^{-\xi_\lambda^j \cdot x})_{1 \leq j \leq m/2} \text{ pour tout } x \in [0, E].$$

Nous allons maintenant chercher une solution particulière au système (3.12). Puisque aucune solution évidente n'apparaît, on utilise la *méthode de variation des constantes*, c'est-à-dire qu'on cherche une solution particulière sous la forme

$$L_{p\lambda}(x) = \exp(A_\lambda \cdot x) \cdot K_\lambda(x)$$

où K_λ est supposé différentiable. K_λ est donné par l'expression suivante

$$K_\lambda(x) = \int_0^x \exp(-A_\lambda \cdot s) \cdot \mathcal{E}_\lambda^{o,o}(s) ds + C_\lambda$$

pour tout $0 < x < E$ où C_λ est un vecteur constant quelconque de taille m . Généralement on prend $C_\lambda = 0$ le vecteur nul, mais ici nous verrons que C_λ joue un rôle important et nous le choisirons de façon à ne plus avoir le problème d'instabilité numérique. Alors, la solution particulière est donnée par

$$L_{p\lambda}(x) = \int_0^x \exp(A_\lambda \cdot (x-s)) \cdot \mathcal{E}_\lambda^{o,o}(s) ds + \exp(A_\lambda \cdot x) \cdot C_\lambda$$

En utilisant la forme réduite de la matrice A_λ donnée par (3.25), il vient

$$\begin{aligned} L_{p\lambda}(x) &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \int_0^x \begin{bmatrix} E_\lambda^*(x-s) & 0 \\ 0 & E_\lambda^*(s-x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{E}_\lambda^{o,o}(s) ds \\ &+ \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} U_\lambda^1 & U_\lambda^2 \\ U_\lambda^2 & U_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_\lambda^*(x) & 0 \\ 0 & E_\lambda^*(-x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot C_\lambda \end{aligned} \quad (3.33)$$

Posons à présent

$$\overline{\mathcal{E}_\lambda^{o,o}}(s) = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{E}_\lambda^{o,+}}(s) \\ \overline{\mathcal{E}_\lambda^{o,-}}(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{E}_\lambda^{o,o}(s) \text{ et } \overline{C_\lambda} = \begin{bmatrix} \overline{C_\lambda^+} \\ \overline{C_\lambda^-} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} Z_\lambda^1 & Z_\lambda^2 \\ Z_\lambda^2 & Z_\lambda^1 \end{bmatrix} \cdot C_\lambda \quad (3.34)$$

alors d'après (3.6), on a : $\overline{\mathcal{E}_\lambda^{o,-}}(s) = -\overline{\mathcal{E}_\lambda^{o,+}}(s)$.

En reportant (3.34) dans (3.33), il vient

$$\mathbf{L}_{p\lambda}(x) = \begin{bmatrix} U_{\lambda}^1 & U_{\lambda}^2 \\ U_{\lambda}^2 & U_{\lambda}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \int_0^x E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds + E_{\lambda}^*(x) \cdot \overline{C_{\lambda}^+} \\ - \int_0^x E_{\lambda}^*(s-x) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds + E_{\lambda}^*(-x) \cdot \overline{C_{\lambda}^-} \end{bmatrix}$$

$\overline{C_{\lambda}^+}$ et $\overline{C_{\lambda}^-}$ sont deux vecteurs constants de taille $m/2$ que l'on peut fixer nous même. On pose

alors $\overline{C_{\lambda}^+} = - \int_0^E E_{\lambda}^*(-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds$ et $\overline{C_{\lambda}^-} = 0$, le vecteur nul. Par suite

$$E_{\lambda}^*(x) \cdot \overline{C_{\lambda}^+} = - \int_0^x E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds - \int_x^E E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds$$

en utilisant les propriétés de la matrice E_{λ}^* et en découpant l'intégrale en deux. Dans ce cas,

$$\mathbf{L}_{p\lambda}(x) = - \begin{bmatrix} U_{\lambda}^1 & U_{\lambda}^2 \\ U_{\lambda}^2 & U_{\lambda}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \int_x^E E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \\ \int_0^x E_{\lambda}^*(s-x) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \end{bmatrix}$$

ou encore en développant le produit, on obtient les composantes vectorielles de $\mathbf{L}_{p\lambda}$ correspondant aux hémisphères avant et arrière :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{p\lambda}^+(x) &= -U_{\lambda}^1 \cdot \int_x^E E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds - U_{\lambda}^2 \cdot \int_0^x E_{\lambda}^*(s-x) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \\ \mathbf{L}_{p\lambda}^-(x) &= -U_{\lambda}^2 \cdot \int_x^E E_{\lambda}^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds - U_{\lambda}^1 \cdot \int_0^x E_{\lambda}^*(s-x) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \end{aligned} \quad (3.35)$$

On en déduit alors les conditions aux limites particulières :

$$\mathbf{L}_{p\lambda}^+(0) = -U_{\lambda}^1 \cdot \int_0^E E_{\lambda}^*(-s) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{p\lambda}^-(E) = -U_{\lambda}^1 \cdot \int_0^E E_{\lambda}^*(s-E) \cdot \overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) ds \quad (3.36)$$

On s'aperçoit alors que

- lorsque $x < s < E$, le calcul de $E_{\lambda}^*(x-s)$ est stable puisque $x-s < 0$,
- lorsque $0 < s < x$, le calcul de $E_{\lambda}^*(s-x)$ est stable puisque $s-x < 0$.

Ainsi, le calcul de la solution particulière et des conditions aux limites particulières, données respectivement par les relations (3.35) et (3.36), conduit à un problème numérique stable.

D'après les relations (3.6), (3.7) et (3.34), $\overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}$ est un vecteur colonne de taille $m/2$ donné par

$$\overline{\mathcal{E}_{\lambda}^{o,+}}(s) = \frac{1}{4} (Z_{\lambda}^1 - Z_{\lambda}^2) \cdot \left[\frac{\sigma_{a\lambda}(\mu_j)}{\mu_j} \cdot L_{\lambda}^o(T(s)) \right]_{1 \leq j \leq m/2}$$

Alors, il vient

$$\begin{aligned} \int_x^E E_\lambda^*(x-s) \cdot \overline{\mathcal{G}_\lambda^{o,+}}(s) ds &= \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot I(x) \\ \int_0^x E_\lambda^*(s-x) \cdot \overline{\mathcal{G}_\lambda^{o,+}}(s) ds &= \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot J(x) \end{aligned} \quad (3.37)$$

où $I(x)$ et $J(x)$ sont deux vecteurs colonnes de taille $m/2$ donnés par

$$\begin{aligned} I(x) &= \left[\frac{\sigma_{a\lambda}(\mu_j)}{\mu_j} \cdot \int_x^E e^{\xi_\lambda^j \cdot (x-s)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \right]_{1 \leq j \leq m/2} \\ J(x) &= \left[\frac{\sigma_{a\lambda}(\mu_j)}{\mu_j} \cdot \int_0^x e^{\xi_\lambda^j \cdot (s-x)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \right]_{1 \leq j \leq m/2} \end{aligned}$$

Finalement, en reportant (3.37) dans (3.35), la solution particulière est donnée par

$$\mathbf{L}_{p\lambda}(x) = -U_\lambda \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot I(x) \\ \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot J(x) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

et les conditions aux limites particulières par

$$\mathbf{L}_{p\lambda}^+(0) = -U_\lambda^1 \cdot \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot I(0) \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_{p\lambda}^-(E) = -U_\lambda^1 \cdot \frac{1}{4}(Z_\lambda^1 - Z_\lambda^2) \cdot J(E) \quad (3.39)$$

A présent, il ne reste plus qu'à calculer les intégrales (pour un indice $1 \leq j \leq m/2$ fixé) données par :

$$\int_x^E e^{\xi_\lambda^j \cdot (x-s)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \quad \text{et} \quad \int_0^x e^{\xi_\lambda^j \cdot (s-x)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds$$

Au préalable, on discrétise le domaine spatial $[0, E]$ (avec un pas constant ou non) en posant

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{nt} < x_{nt+1} = E$$

Ensuite, on pose

$$\begin{aligned} G_i^j &= \int_{x_i}^E e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i-s)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq nt \\ K_i^j &= \int_0^{x_i} e^{\xi_\lambda^j \cdot (s-x_i)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \quad \text{avec} \quad 1 \leq i \leq nt+1 \end{aligned}$$

Puis on détermine les intégrales par récurrence :

$$\begin{aligned} G_i^j &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i-s)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds + e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i-x_{i+1})} \cdot G_{i+1}^j \quad 0 \leq i \leq nt-1 \\ K_{i+1}^j &= e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i-x_{i+1})} \cdot K_i^j + \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (s-x_{i+1})} \cdot L_\lambda^o(T(s)) ds \quad 1 \leq i \leq nt+1 \end{aligned}$$

Dans la pratique, la fonction $L_\lambda^o(T(s))$ ne sera connue qu'aux extrémités de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Alors, on l'approxime par une droite sur cet intervalle, soit $L_\lambda^o(T(s)) \cong a_i \cdot s + b_i$ pour tout $s \in [x_i, x_{i+1}]$. Dans ce cas, il vient

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i - s)} \cdot L_\lambda^o(T(s)) \, ds &\cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i - s)} \cdot (a_i \cdot s + b_i) \, ds \\ &= \frac{1}{\xi_\lambda^j} \cdot \left[a_i \cdot \left(\frac{1}{\xi_\lambda^j} + x_i \right) + b_i - (a_i \cdot \left(\frac{1}{\xi_\lambda^j} + x_{i+1} \right) + b_i) \cdot e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i - x_{i+1})} \right] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (s - x_{i+1})} \cdot L_\lambda^o(T(s)) \, ds &\cong \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{\xi_\lambda^j \cdot (s - x_{i+1})} \cdot (a_i \cdot s + b_i) \, ds \\ &= \frac{1}{\xi_\lambda^j} \cdot \left[a_i \cdot \left(x_{i+1} - \frac{1}{\xi_\lambda^j} \right) + b_i - (a_i \cdot \left(x_i - \frac{1}{\xi_\lambda^j} \right) + b_i) \cdot e^{\xi_\lambda^j \cdot (x_i - x_{i+1})} \right] \end{aligned}$$

Nous possédons à présent tous les éléments nécessaires à la résolution du système (3.12) (3.16). Après avoir déterminé les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $(A_\lambda^1 - A_\lambda^2) \cdot (A_\lambda^1 + A_\lambda^2)$, les relations (3.39) donnent les conditions aux limites radiatives particulières $\mathbf{L}_{p\lambda}^+(0)$ et $\mathbf{L}_{p\lambda}^-(E)$. Les relations (3.31) et (3.32) permettent de calculer la luminance homogène $\mathbf{L}_{h\lambda}$ en tout point du milieu, en fonction des conditions aux limites radiatives homogènes. La relation (3.38) permet de calculer la luminance particulière $\mathbf{L}_{p\lambda}$ en tout point du milieu. La sommation des deux dernières quantités donne le champ de luminance en tout point du milieu. Finalement, la méthode que nous venons de présenter est stable quelles que soient les conditions d'utilisation et elle est très simple à programmer. La précision de la méthode est donnée par la précision de la quadrature numérique utilisée pour approcher l'intégrale de l'ETR et par la précision du calcul approché des valeurs propres. Par rapport à la méthode basée sur le principe d'interaction, le calcul de la luminance demande beaucoup moins d'opérations. Alors, elle est aussi intéressante pour les temps de calcul et la place mémoire. Outre ces avantages, la méthode peut s'utiliser avec un maillage en espace à pas variable sans aucun problème, puisque la résolution est analytique en espace. Cependant, notons que la méthode est limitée dans les applications, par la nature du milieu. Elle peut être utilisée seulement lorsque le milieu possède une symétrie (fibres réparties dans des plans parallèles aux frontières) qui conduit à la même structure de la matrice caractéristique A_λ donnée par (3.13). De plus, nous ne pouvons pas étendre la méthode à la dimension en espace supérieure à un. Pour les applications que nous avons à traiter dans notre étude, nous pourrions nous contenter de cette méthode. Cependant, il serait intéressant d'avoir une méthode qui puisse s'appliquer pour n'importe quel type de milieu. En effet, comme

mentionné au début du premier chapitre, nous pourrions étudier, par exemple, des milieux fibreux dont les fibres sont réparties aléatoirement dans l'espace ou bien orientées selon une direction d'espace donnée ou éventuellement tissées selon un nombre fini de directions privilégiées. Milandri [3] a abordé récemment ce problème et a calculé les propriétés radiatives pour ce type de milieux. Nous allons maintenant présenter la méthode par différences finies et nous verrons qu'elle répond au problème que nous venons de soulever.

3.2.2.2 Méthode par différences finies

Dans ce paragraphe, nous allons construire un schéma aux différences finies pour résoudre les équations (3.1) (3.3). Le schéma va être décrit sur une partition régulière de l'intervalle $[0, E]$.

La première étape de la résolution passe par un maillage du domaine. On subdivise l'intervalle $[0, E]$ en $nt + 1$ intervalles égaux de longueur h : $x_i = i \cdot h$ pour $0 \leq i \leq nt + 1$. Soit D le rectangle $[0, E] \times [-1, 1]$. On définit un quadrillage de D en considérant les points P_{ij} de coordonnées (x_i, μ_j) $0 \leq i \leq nt + 1$ et $1 \leq j \leq m$ (figure 3.6).

On note $\tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j)$ l'approximation de la luminance monochromatique $L_\lambda(x, \mu)$ aux points (x_i, μ_j) pour $1 \leq i \leq nt$ et $1 \leq j \leq m$. \tilde{L}_λ est connu aux frontières. D'après (3.3), on a

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\lambda(0, \mu_j) &= L_\lambda(0, \mu_j) = L_\lambda^o(T_o) && \text{pour } 1 \leq j \leq m/2 \\ \tilde{L}_\lambda(E, -\mu_j) &= L_\lambda(E, -\mu_j) = L_\lambda^o(T_E) && \text{pour } 1 \leq j \leq m/2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

De façon générale, nous utiliserons la formule centrée pour l'approximation de la dérivée. Cependant, la luminance étant connue sur la frontière seulement pour $i = 0$, $1 \leq j \leq m/2$ et pour $i = nt + 1$, $m/2 + 1 \leq j \leq m$ (nœuds représentés en rouge sur la figure 3.6), alors pour l'approximation de la dérivée aux points $(x_1, -\mu_j)$, $1 \leq j \leq m/2$ (nœuds représentés en bleu sur la figure 3.6), il faudra utiliser une formule décentrée à droite et pour l'approximation de la dérivée aux points (x_{nt}, μ_j) , $1 \leq j \leq m/2$ (nœuds représentés en vert sur la figure 3.6), il faudra utiliser une formule décentrée à gauche. Si nous discrétisons les équations (3.1), suivant la variable espace x , par un schéma d'ordre un, en tenant compte des remarques précédentes pour l'approximation des dérivées, nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_j \cdot \frac{\tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j) - \tilde{L}_\lambda(x_{i-1}, \mu_j)}{h} + \sigma_{e\lambda}(\mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j) \\
= \sum_{l=1}^m P_\lambda(\mu_l \rightarrow \mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_l) + \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x_i)) \\
- \mu_j \cdot \frac{\tilde{L}_\lambda(x_{i+1}, -\mu_j) - \tilde{L}_\lambda(x_i, -\mu_j)}{h} + \sigma_{e\lambda}(\mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, -\mu_j) \\
= \sum_{l=1}^m P_\lambda(\mu_l \rightarrow -\mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_l) + \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x_i)) \\
1 \leq i \leq nt \text{ et } 1 \leq j \leq m/2
\end{array} \right. \quad (3.41)$$

On peut augmenter la précision de la solution approchée en considérant l'ordre deux. On obtient alors le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mu_j \cdot \frac{\tilde{L}_\lambda(x_{i+1}, \mu_j) - \tilde{L}_\lambda(x_{i-1}, \mu_j)}{2h} \\
= \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x_i)) - \sigma_{e\lambda}(\mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j) + \sum_{l=1}^m P_\lambda(\mu_l \rightarrow \mu_j) \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_l)
\end{array} \right.$$

ou encore en multipliant la relation par $2h$ et en divisant par μ_j , nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{L}_\lambda(x_{i+1}, \mu_j) - \tilde{L}_\lambda(x_{i-1}, \mu_j) - 2h \cdot \sum_{l=1}^m \frac{1}{\mu_j} \cdot \{P_\lambda(\mu_l \rightarrow \mu_j) - \sigma_{e\lambda}(\mu_l) \cdot \delta_{jl}\} \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_l) \\
= \frac{2h}{\mu_j} \cdot \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x_i)) \\
\text{pour } 2 \leq i \leq nt-1, 1 \leq j \leq m ; i=1, 1 \leq j \leq m/2 \text{ et } i=nt, m/2+1 \leq j \leq m
\end{array} \right. \quad (3.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\tilde{L}_\lambda(x_{i+2}, \mu_j) + 4 \cdot \tilde{L}_\lambda(x_{i+1}, \mu_j) - 3 \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j) \\
- 2h \cdot \sum_{l=1}^m \frac{1}{\mu_j} \cdot \{P_\lambda(\mu_l \rightarrow \mu_j) - \sigma_{e\lambda}(\mu_l) \cdot \delta_{jl}\} \cdot \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_l) \\
= \frac{2h}{\mu_j} \cdot \sigma_{a\lambda}(\mu_j) \cdot L_\lambda^o(T(x_i)) \text{ pour } i=1, m/2+1 \leq j \leq m
\end{array} \right. \quad (3.43)$$

$$\tilde{K}_\lambda = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\lambda(x_1) \\ \mathbf{L}_\lambda(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{L}_\lambda(x_{n-1}) \\ \mathbf{L}_\lambda(x_n) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_\lambda = \begin{bmatrix} 2h \cdot \mathcal{E}_\lambda^o(x_1) + \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\lambda^+(0) \\ 0 \end{bmatrix} \\ 2h \cdot \mathcal{E}_\lambda^o(x_2) \\ \vdots \\ 2h \cdot \mathcal{E}_\lambda^o(x_{n-1}) \\ 2h \cdot \mathcal{E}_\lambda^o(x_n) - \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{L}_\lambda^-(E) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

où \mathbf{L}_λ est le vecteur luminance défini par (3.5), \mathcal{E}_λ^o est le vecteur défini par (3.6), $\mathbf{L}_\lambda^+(0)$ et $\mathbf{L}_\lambda^-(E)$ sont les vecteurs 'conditions aux limites' donnés par (3.16).

Le système que l'on a à résoudre peut être de très grande taille, par exemple supérieur à 14000, si l'on choisit de prendre 100 points de discrétisation pour la variable espace x , 12 directions pour la variable angulaire μ et 12 directions pour la variable azimutale ω en considérant éventuellement le problème sans la symétrie azimutale, dont nous parlerons par la suite. En conséquence, la matrice du système linéaire aura une structure très "creuse". Pour résoudre le système, il convient de mettre en œuvre une technique particulière pour éviter aussi bien de stocker des termes nuls que d'effectuer des opérations dont l'un des opérandes est nul. Les méthodes itératives les plus récentes et très performantes de type Gradient conjugué préconditionné ont été développées particulièrement pour traiter ce genre de problèmes. La matrice du système linéaire n'étant pas symétrique, ni définie positive, on utilise la méthode CGS (Conjugate Gradients Squared method) [36]. Cette méthode est une des mieux adaptées à la résolution de système linéaire de grande taille et pour des matrices quelconques. Elle est utilisée avec succès dans la pratique et l'expérience a montré qu'elle est plus robuste que la méthode GMRES [37]. Dans l'algorithme, la plus grande partie des calculs consiste en des produits matrice-vecteur. Par ailleurs, la matrice du système linéaire G_λ elle-même n'intervient que sous forme de produit par un vecteur, ce qui fait qu'il n'est pas nécessaire de la stocker, d'où l'idée de définir dans le programme une fonction qui fait directement le produit. En utilisant la structure de la matrice G_λ donnée par (3.46), le produit matrice-vecteur $G_\lambda \cdot \tilde{K}_\lambda$ de taille $nt \cdot m$ est donné par :

$$\begin{bmatrix} G_\lambda^1 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_1) + G_\lambda^4 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_2) + G_\lambda^5 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_3) \\ -\mathbf{L}_\lambda(x_1) + G_\lambda^2 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_2) + \mathbf{L}_\lambda(x_3) \\ -\mathbf{L}_\lambda(x_2) + G_\lambda^2 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_3) + \mathbf{L}_\lambda(x_4) \\ \vdots \\ -\mathbf{L}_\lambda(x_{n-2}) + G_\lambda^2 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_{n-1}) + \mathbf{L}_\lambda(x_n) \\ G_\lambda^6 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_{n-2}) + G_\lambda^7 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_{n-1}) + G_\lambda^3 \cdot \mathbf{L}_\lambda(x_n) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Bien entendu, la version sans stockage est beaucoup moins coûteuse en place mémoire et donc en temps de calcul que celle avec stockage. Par ailleurs, la précision des résultats et la rapidité de convergence de la méthode dépendent du nombre de conditionnement de la matrice du système linéaire. La courbe de la *figure 3.7* représente une estimation en norme 2 du nombre de conditionnement de la matrice G_λ en fonction de la longueur d'onde, pour le type de matériau que l'on étudie. Nous remarquons alors que la matrice est très mal conditionnée pour les courtes longueurs d'ondes variant entre 3,5 et 5 microns. En conséquence, nous avons choisi une matrice de préconditionnement adaptée à la méthode, basée sur la factorisation incomplète L.U [38].

La méthode aux différences finies est une approche différente de celles évoquées précédemment pour la résolution de l'ETR dans le sens où nous résolvons l'équation directement sans avoir au préalable à résoudre l'équation homogène et chercher une solution particulière. Nous sommes amenés à résoudre le système linéaire (3.45) où la matrice G_λ comporte beaucoup d'éléments nuls. En utilisant la méthode CGS et le produit matrice-vecteur (3.48) qui tient compte de ce caractère creux, nous limitons le nombre de calculs et nous rendons la méthode plus rapide. Le schéma de différences finies présenté sous cette forme est très simple à programmer. Par ailleurs, notons que la méthode a certains avantages : elle peut être appliquée sur n'importe quels types de milieux et en particulier sur un milieu qui n'a aucune symétrie. La méthode peut être étendue à des cas plus compliqués incluant par exemple les conditions aux bords réfléchissantes, les conditions de flux, un milieu non homogène,... Il est aussi possible d'étendre la méthode en dimension deux ou trois pour les coordonnées de position. La seule difficulté tient dans les temps de calcul et la place mémoire. La méthode des différences finies est donc une méthode très efficace; néanmoins elle présente un inconvénient : le maillage du milieu doit être uniforme si l'on veut garder la précision d'ordre deux en espace (pour le schéma d'ordre deux). Dans le cas contraire, il est préférable d'employer la méthode précédente. Comme pour tout type de schéma aux différences finies, nous devons montrer la convergence de la méthode. Dans le chapitre suivant, nous étudierons la convergence du schéma d'ordre un et nous ferons un commentaire sur celui d'ordre deux.

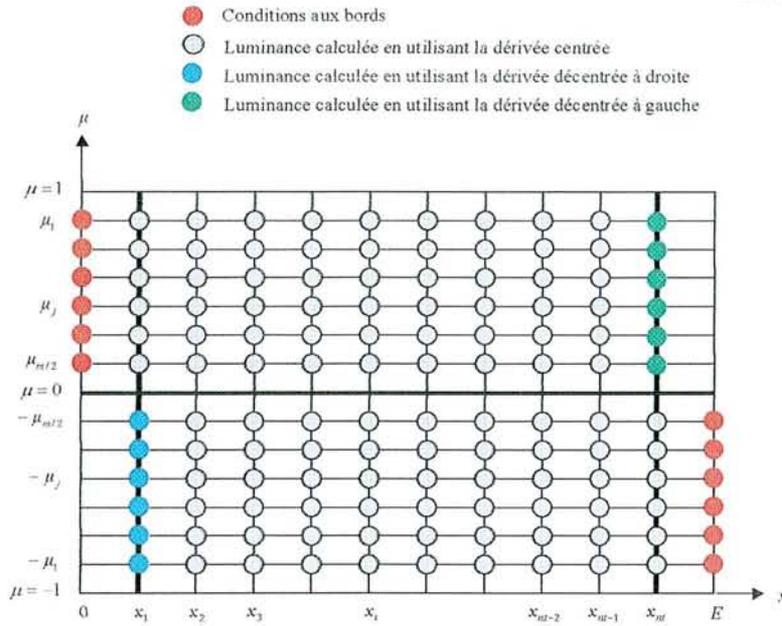


figure 3.6 : Discretisation du domaine D

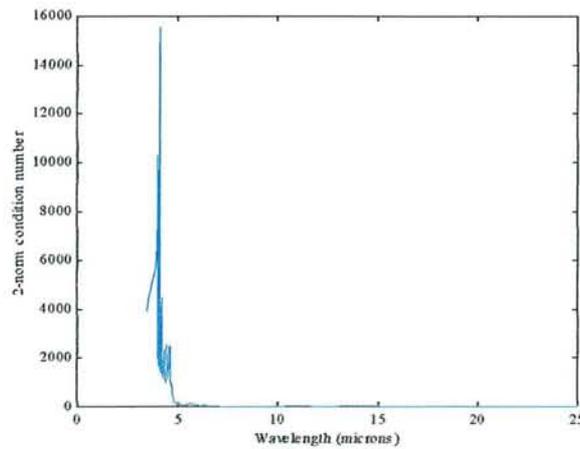


figure 3.7 : Estimation en norme 2 du nombre de conditionnement de la matrice G_λ en fonction de la longueur d'onde

3.2.3 La discrétisation spectrale

Nous en venons à présent à la discrétisation spectrale de l'ETR. On note $\lambda_k, 1 \leq k \leq N$ la suite croissante des longueurs d'onde discrètes avec $\lambda_N = \lambda_{\max}$. Nous rappelons que λ est un paramètre dans l'ETR et donc nous devons résoudre l'équation discrétisée pour chaque $\lambda_k, 1 \leq k \leq N$. Si on considère, pour la discrétisation spatiale de l'ETR, la méthode utilisant le principe d'interaction ou bien la méthode par diagonalisation, alors nous avons à résoudre les équations suivantes :

$$\frac{dL_{\lambda_k}(x)}{dx} = A_{\lambda_k} \cdot L_{\lambda_k}(x) + \mathcal{E}_{\lambda_k}^o(x) \quad \forall 1 \leq k \leq N \quad (3.49)$$

Par contre, si on utilise la méthode des différences finies pour la discrétisation spatiale de l'ETR, alors nous avons à résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$G_{\lambda_k} \cdot \tilde{K}_{\lambda_k} = F_{\lambda_k} \quad \forall 1 \leq k \leq N \quad (3.50)$$

Remarque 3.8 : Les matrices G^i $4 \leq i \leq 9$ intervenant dans la composition de la matrice G_λ donnée par (3.46) ne dépendent pas de la longueur d'onde. En conséquence, il est préférable de les calculer au tout début du programme avant de rentrer dans la boucle des longueurs d'ondes.

3.3 Résolution numérique de l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire

Pour la résolution numérique de l'équation de conservation de l'énergie (mais aussi du système couplé) en régime stationnaire, nous utilisons un maillage uniforme du domaine spatial $[0, L]$, défini par : $x_i = i \cdot h$ avec $0 \leq i \leq nt + 1$ où h est le pas constant du maillage. A cette discrétisation spatiale, nous associons les discrétisations angulaire et spectrale que nous avons définies précédemment.

Nous énonçons maintenant une série de notations qui serviront pour la suite de notre exposé. De manière générale, nous utilisons la notation \tilde{a} pour indiquer l'approximation de a et \bar{a} pour indiquer la transformation de Kirchhoff de a . On note alors :

- $\tilde{L}_{\lambda_k}(x_i, \mu_j)$ l'approximation de la luminance monochromatique $L_\lambda(x, \mu)$ au point (x_i, μ_j, λ_k) pour $1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$,
- \tilde{T}_i et \tilde{T}'_i respectivement les approximations du champ de températures $T(x)$ et de sa dérivée au point x_i pour $1 \leq i \leq nt$,
- $(\tilde{Q}_{r\lambda})_i, (\tilde{Q}_r)_i, (\tilde{S}_r)_i, (\tilde{Q}_c)_i$ et $(\tilde{Q}_t)_i$ respectivement les approximations de $Q_{r\lambda}(x), Q_r(x), S_r(x), Q_c(x)$ et $Q_t(x)$ au point x_i pour $1 \leq i \leq nt$,
- \bar{T}_i, \bar{F}_i et $(\bar{\Phi}(\bar{T}))_i$ respectivement les approximations des fonctions $\bar{T}(x)$ (définie par (2.45)), $F(x)$ (définie par (2.42)) et $\Phi(\bar{T}(x))$ (définie par (2.54)), au point x_i , $\forall 1 \leq i \leq nt$,
- $\bar{\bar{T}} = (\bar{\bar{T}}_i)_{1 \leq i \leq nt}$ et $\bar{\bar{T}}' = (\bar{\bar{T}}'_i)_{1 \leq i \leq nt}$.

Nous allons présenter dans ce paragraphe deux méthodes numériques, légèrement différentes, pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire, donnée par (2.2) et (2.3). La première méthode consiste à partir de l'équation (2.47) (2.48) obtenue après la transformation de Kirchhoff, que nous rappelons :

$$\begin{cases} -\bar{T}''(x) = S_r(x) & \forall 0 < x < E \\ \bar{T}(0) = \bar{T}_o, \quad \bar{T}(E) = \bar{T}_E \end{cases} \quad (3.51)$$

Nous supposons, pour la résolution de cette équation, que le terme source radiatif S_r est donné. Cette équation a une solution analytique donnée par :

$$\bar{T}(x) = \int_0^x Q_r(s) ds - \frac{x}{E} \cdot \left[\int_0^E Q_r(s) ds + \bar{T}_o - \bar{T}_E \right] + \bar{T}_o \quad (3.52)$$

où Q_r est le flux radiatif total donné par (2.5). Pour un maillage non uniforme du domaine spatial, il est plus aisé et la précision sera meilleure si on utilise la formule (3.52), car elle est donnée par une intégrale. Dans notre cas (maillage uniforme), nous préférons (car facile à mettre en œuvre) calculer la solution \bar{T} par un schéma classique de différences finies (d'ordre 2) plutôt que d'approcher l'intégrale par une formule de quadrature. Dans les deux cas, la précision sera quasiment la même. En effet, même si l'on choisit une bonne formule de quadrature, cela aura très peu d'effet puisqu'il ne faut pas oublier que le flux radiatif total est déjà calculé avec une certaine erreur (en $o(h^2)$) par exemple si on utilise le schéma aux différences finies d'ordre deux pour la résolution de l'ETR). Nous utilisons alors la formule centrée d'ordre deux pour approcher la dérivée seconde de l'équation (3.51). Nous obtenons ainsi le schéma numérique d'ordre deux suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\bar{T}_{i+1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{h^2} = (\tilde{S}_r)_i & \forall 1 \leq i \leq nt \\ \bar{T}_0 = \bar{T}_o, \quad \bar{T}_{nt+1} = \bar{T}_E \end{cases} \quad (3.53)$$

et le système linéaire de taille nt suivant :

$$D \cdot \bar{T} = S \quad (3.54)$$

où D est une matrice carrée tridiagonale de taille nt et S est un vecteur colonne de taille nt , donnés par :

$$D = \frac{1}{h^2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} ; \quad S = \begin{bmatrix} (\tilde{S}_r)_1 \\ (\tilde{S}_r)_2 \\ \vdots \\ (\tilde{S}_r)_{nt-1} \\ (\tilde{S}_r)_{nt} \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \cdot \begin{bmatrix} \bar{T}_o \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{T}_E \end{bmatrix}$$

Il est connu que le schéma numérique (3.53) est convergent. Par ailleurs, nous résolvons le système linéaire (3.54) par une méthode de remontée-descente.

La deuxième méthode, pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire, consiste à partir de l'équation (2.54) que nous rappelons :

$$\begin{cases} -\bar{T}''(x) + 2\pi \cdot \Phi(\bar{T}(x)) = 2\pi \cdot F(x) & \forall 0 < x < E \\ \bar{T}(0) = \bar{T}_o, \quad \bar{T}(E) = \bar{T}_E \end{cases} \quad (3.55)$$

Nous supposons, pour la résolution de cette équation, que la fonction F est donnée. Par rapport à l'équation précédente (3.51), l'équation (3.55) n'a pas de solution analytique. De la même façon, nous utilisons la formule centrée d'ordre deux pour approcher la dérivée seconde de l'équation (3.55). Par ailleurs, nous posons

$$\tilde{F}_i = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_{a\lambda_k}(\mu_j) \cdot \tilde{L}_{\lambda_k}(x_i, \mu_j) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot C_k^\lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.56)$$

$$(\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_{a\lambda_k}(\mu_j) \cdot L_{\lambda_k}^o(\Psi_c^{-1}(\tilde{T}_i)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot C_k^\lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.57)$$

pour approcher les fonctions F et $\Phi(T)$. Ainsi, nous obtenons le schéma numérique d'ordre deux suivant :

$$\begin{cases} -\frac{\tilde{T}_{i+1} - 2 \cdot \tilde{T}_i + \tilde{T}_{i-1}}{h^2} + 2\pi \cdot (\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i = 2\pi \cdot \tilde{F}_i & \forall 1 \leq i \leq nt \\ \tilde{T}_0 = \bar{T}_o, \quad \tilde{T}_{nt+1} = \bar{T}_E \end{cases} \quad (3.58)$$

Ce schéma est évidemment plus difficile à résoudre, puisque c'est un schéma **non linéaire**.

Les deux méthodes numériques (3.53) et (3.58) que nous venons de présenter permettent de calculer le vecteur \tilde{T} . Nous devons à présent déterminer le vecteur \tilde{T} en fonction de \tilde{T} . Celui-ci est déterminé par une transformation de Kirchhoff inverse qui consiste à résoudre l'équation non linéaire vectorielle suivante :

$$F^*(\tilde{T}) = 0 \quad (3.59)$$

où $F^* : \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt}$ est une fonction non linéaire. Nous notons la i ème composante de F^* par F_i^* . Alors, d'après (2.45), les composantes F_i^* sont données par : $F_i^*(\tilde{T}) = \Psi_c(\tilde{T}_i) - \tilde{T}_i$ pour tout $1 \leq i \leq nt$ où la fonction Ψ_c est définie par (2.44). Nous pouvons aussi résoudre indépendamment les équations non linéaires suivantes :

$$F_i^*(\tilde{T}) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.60)$$

Si on connaît explicitement la fonction Ψ_c^{-1} , on a directement le résultat. Dans le cas contraire, on est amené à chercher le zéro d'une fonction d'une variable réelle à valeur réelle, qu'il est plus facile de résoudre. Pour cela, nous utilisons un algorithme, donné par le logiciel Matlab, basé sur une combinaison des méthodes de la bisection, sécante et l'interpolation inverse [37]. Cet algorithme donne de très bon résultats.

Le schéma numérique (3.53) associé à (3.60) que nous venons de présenter (et que nous utiliserons dans la pratique voir l'explication un peu plus loin au paragraphe 3.4.2) pour résoudre l'équation de conservation de l'énergie en régime stationnaire, a l'avantage d'être plus précis et plus simple à programmer que le schéma de différences finies habituellement utilisé pour résoudre ce genre d'équations non linéaires [39]. La technique de transformation de Kirchhoff a permis de traiter la non-linéarité de manière plus efficace.

3.2 Résolution numérique du système couplé en régime stationnaire

3.4.1 Calcul des flux et du terme source radiatif

Lorsqu'on est parvenu à calculer le champ de luminance dans le milieu, l'étape suivante consiste à déterminer les flux radiatifs (monochromatique et total) et ensuite le terme source radiatif qui intervient dans l'équation de conservation de l'énergie.

En présence d'une symétrie azimutale, le flux radiatif monochromatique est donné par (1.17). Nous calculons l'intégrale en utilisant la même technique que celle que nous avons proposée pour évaluer le terme intégral de l'ETR (méthode de Newton-Cotes composée), en sachant que nous avons le même support d'intégration. Il vient alors :

$$(\tilde{Q}_{r\lambda})_i = 2\pi \cdot \sum_{j=1}^m \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j) \cdot \mu_j \cdot \sin \theta_j \cdot C_j^\theta \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.61)$$

Les coefficients C_j^θ $1 \leq j \leq m$ sont les poids d'intégration liés à la formule de quadrature et sont les mêmes que ceux utilisés dans la formule (3.2).

En l'absence de symétrie azimutale, le flux radiatif monochromatique est donné par (1.16). En utilisant la même technique d'intégration que celle utilisée pour calculer l'intégrale de l'ETR sans la symétrie azimutale, on obtient :

$$(\tilde{Q}_{r\lambda})_i = \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^m \tilde{L}_\lambda(x_i, \mu_j, \omega_l) \cdot \mu_j \cdot \sin \theta_j \cdot C_j^\theta \cdot C_l^\omega \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.62)$$

Les coefficients C_l^ω $1 \leq l \leq M$ sont les poids d'intégration liés à la formule de quadrature en ω et sont les mêmes que ceux utilisés dans la formule (A3.2) de l'annexe 3.

Le flux radiatif total est donné par (1.18). Le support d'intégration en longueurs d'ondes est un domaine infini. Dans les applications, nous intégrons l'expression sur le domaine fini $(0, \lambda_N]$. Nous rappelons que $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ forme la suite croissante des longueurs d'ondes discrètes. Il vient alors, lorsqu'il y a la symétrie azimutale :

$$(\tilde{Q}_r)_i = 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \tilde{L}_{\lambda_k}(x_i, \mu_j) \cdot \mu_j \cdot \sin \theta_j \cdot C_j^\theta \cdot C_k^\lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.63)$$

et sans la symétrie azimutale :

$$(\tilde{Q}_r)_i = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^M \sum_{j=1}^m \tilde{L}_{\lambda_k}(x_i, \mu_j, \omega_l) \cdot \mu_j \cdot \sin \theta_j \cdot C_j^\theta \cdot C_l^\omega \cdot C_k^\lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (3.64)$$

où les coefficients C_k^λ $1 \leq k \leq N$ sont les poids d'intégration liés à la formule de quadrature en λ . Dans nos applications, les valeurs λ_k $1 \leq k \leq N$ ne sont pas régulièrement espacées et sont distribuées de façon quelconque. En conséquence, pour évaluer l'intégrale, nous utilisons la formule de Simpson à pas quelconque, qui consiste à approcher la fonction par une parabole sur un intervalle partiel de trois points. Les calculs conduisent à la formule suivante :

$$(\tilde{Q}_r)_i = \frac{(\Delta\lambda_{2k} + \Delta\lambda_{2k+1})}{6 \cdot \Delta\lambda_{2k}} \cdot \left\{ (2 \cdot \Delta\lambda_{2k} - \Delta\lambda_{2k+1}) \cdot (\tilde{Q}_{r\lambda_{2k}})_i + \frac{(\Delta\lambda_{2k} + \Delta\lambda_{2k+1})^2}{\Delta\lambda_{2k+1}} \cdot (\tilde{Q}_{r\lambda_{2k+1}})_i \right. \\ \left. + \frac{\Delta\lambda_{2k}}{\Delta\lambda_{2k+1}} (2 \cdot \Delta\lambda_{2k+1} - \Delta\lambda_{2k}) \cdot (\tilde{Q}_{r\lambda_{2k+2}})_i \right\}$$

pour tout $1 \leq i \leq nt$, avec $\Delta\lambda_{2k} = \lambda_{2k} - \lambda_{2k+1}$ et $\Delta\lambda_{2k+1} = \lambda_{2k+1} - \lambda_{2k+2}$.

Il nous reste à présent à déterminer le terme source radiatif S_r , donné par (2.6). Pour approcher la dérivée, nous avons jugé utile et suffisant de prendre les formules d'ordre quatre, utilisant cinq points. Ces formules sont données dans [40]. Par ailleurs, les valeurs du flux radiatif total aux bords en $x=0$ et $x=E$ n'étant pas connues, nous utilisons les formules décentrées pour calculer la fonction S_r près des bords. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{S}_r)_1 = \frac{-1}{12 \cdot h} \cdot (-25 \cdot (\tilde{Q}_r)_1 + 48 \cdot (\tilde{Q}_r)_2 - 36 \cdot (\tilde{Q}_r)_3 + 16 \cdot (\tilde{Q}_r)_4 - 3 \cdot (\tilde{Q}_r)_5) \\ (\tilde{S}_r)_2 = \frac{-1}{12 \cdot h} \cdot (-3 \cdot (\tilde{Q}_r)_1 - 10 \cdot (\tilde{Q}_r)_2 + 18 \cdot (\tilde{Q}_r)_3 - 6 \cdot (\tilde{Q}_r)_4 + (\tilde{Q}_r)_5) \\ (\tilde{S}_r)_i = \frac{-1}{12 \cdot h} \cdot ((\tilde{Q}_r)_{i-2} - 8 \cdot (\tilde{Q}_r)_{i-1} + 8 \cdot (\tilde{Q}_r)_{i+1} - (\tilde{Q}_r)_{i+2}) \quad \forall 3 \leq i \leq nt - 2 \\ (\tilde{S}_r)_{nt-1} = \frac{-1}{12 \cdot h} \cdot (- (\tilde{Q}_r)_{nt-4} + 6 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-3} - 18 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-2} + 10 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-1} + 3 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt}) \\ (\tilde{S}_r)_{nt} = \frac{-1}{12 \cdot h} \cdot (3 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-4} - 16 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-3} + 36 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-2} - 48 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt-1} + 25 \cdot (\tilde{Q}_r)_{nt}) \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Lorsque le champ de températures dans le milieu est connu, nous pouvons alors déduire le flux conductif et ensuite le flux total donnés par (1.24) et (1.30). De la même façon que pour la dérivée du flux radiatif, nous approchons la dérivée de la température par les formules de dérivation d'ordre quatre. Mais cette fois-ci, nous pouvons utiliser les valeurs aux bords car celles-ci sont connues. Il vient alors :

$$\begin{cases} \tilde{T}_1' \equiv \frac{1}{12 \cdot h} \cdot (-3 \cdot T_o - 10 \cdot \tilde{T}_1 + 18 \cdot \tilde{T}_2 - 6 \cdot \tilde{T}_3 + \tilde{T}_4) \\ \tilde{T}_i' \equiv \frac{1}{12 \cdot h} \cdot (\tilde{T}_{i-2} - 8 \cdot \tilde{T}_{i-1} + 8 \cdot \tilde{T}_{i+1} - \tilde{T}_{i+2}) \quad \forall 2 \leq i \leq nt-1 \\ \tilde{T}_{nt}' \equiv \frac{1}{12 \cdot h} \cdot (-\tilde{T}_{nt-3} + 6 \cdot \tilde{T}_{nt-2} - 18 \cdot \tilde{T}_{nt-1} + 10 \cdot \tilde{T}_{nt} + 3 \cdot T_E) \end{cases} \quad (3.66)$$

Nous déduisons alors le flux conductif 'approché' :

$$(\tilde{Q}_c)_i = -\lambda_c(\tilde{T}_i) \cdot \tilde{T}_i' \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

Il est à présent très facile de calculer le flux total puisqu'il est donné simplement par la somme du flux radiatif total et du flux conductif :

$$(\tilde{Q}_t)_i = (\tilde{Q}_r)_i + (\tilde{Q}_c)_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

3.4.2 Résolution numérique du système couplé en régime stationnaire

Nous rappelons que les inconnues de notre système d'équations couplées sont le champ de luminance et le champ de températures. Le schéma de résolution global du système en régime stationnaire est itératif (*figure 3.8*). Nous résolvons le système par une méthode de point fixe, qui porte uniquement sur le champ de températures. La démarche de résolution est la même (ici nous avons la version discrète pratique) que celle présentée au chapitre II sur l'étude théorique du système.

Nous avons proposé précédemment deux schémas numériques ((3.53) et (3.58)) pour la résolution de l'équation de conservation de l'énergie. Notons alors que, lorsque l'on résout le système couplé, le premier schéma (3.53) n'est en fait qu'une relaxation du deuxième schéma (3.58). Ce dernier est évidemment plus précis, mais cependant plus difficile à résoudre (car non linéaire). Si les deux algorithmes pour la résolution du système couplé, l'un considérant le schéma (3.53) et l'autre le schéma (3.58) (pour la résolution de l'équation de conservation de l'énergie) convergent, alors ils convergent vers la même solution, pour le premier la convergence étant seulement plus lente. Par ailleurs, le schéma (3.53) présente un intérêt par rapport au deuxième, puisqu'il passe par le calcul intermédiaire du flux radiatif et du terme source radiative, et dans la pratique ce sont deux quantités que l'on désire connaître. En conséquence, dans la pratique nous utiliserons le schéma (3.53). Au chapitre suivant, nous ferons toutefois l'étude de la convergence du schéma (3.58).

Par ailleurs, nous prenons un champ de températures initial linéaire car c'est vraisemblablement le champ de températures le plus proche du champ réel que l'on peut donner. En effet, d'après l'étude théorique faite au chapitre II, nous savons que la température dans le milieu est strictement comprise entre les deux températures fixées aux bords. De plus,

nous choisissons un critère de convergence qui porte sur le champ de températures et qui doit vérifier

$$\max_{1 \leq i \leq nt} \frac{|\tilde{T}_i^{(n+1)} - \tilde{T}_i^{(n)}|}{|\tilde{T}_i^{(n+1)}|} < \varepsilon$$

où ε est un réel strictement positif que l'on se fixe au départ. C'est le critère d'arrêt.

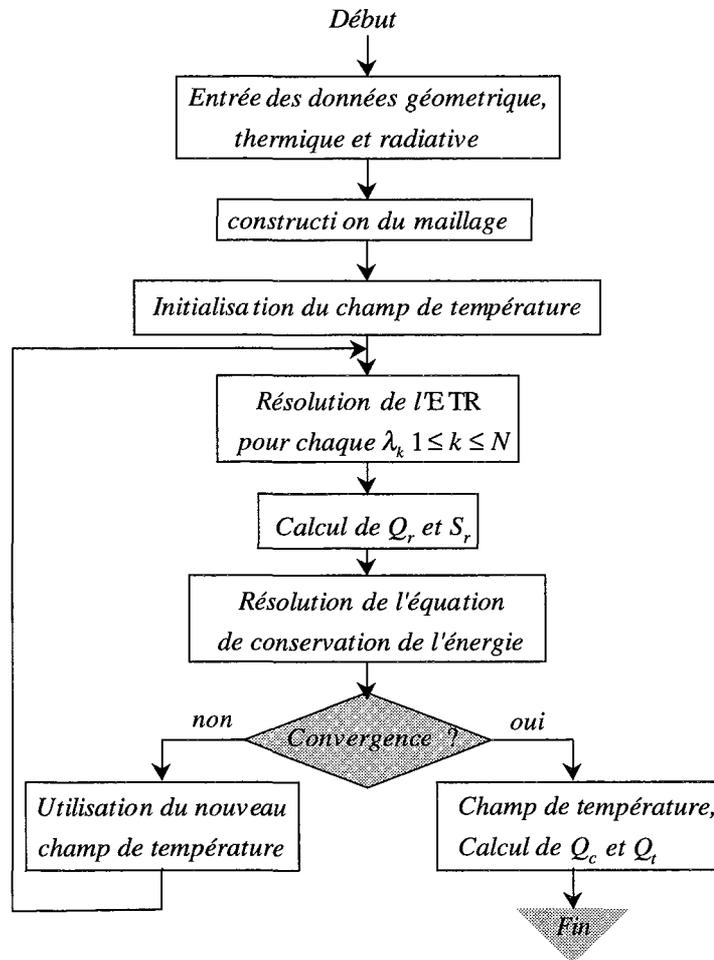


figure 3.8 : Organigramme pour la résolution des équations couplées en régime stationnaire

3.3 Conclusion

Ce chapitre était consacré à la résolution numérique des équations couplées du rayonnement et de la conduction, en régime stationnaire et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Pour résoudre l'ETR, nous avons discrétisé l'espace angulaire suivant plusieurs directions considérant ainsi un modèle multiflux et nous avons utilisé une quadrature numérique du type Newton-Cotes composée pour approcher le terme intégral de l'équation. Il en résulte alors un système différentiel du premier ordre linéaire, associé à des

conditions aux limites. La résolution du système est immédiate en utilisant l'exponentielle de matrice. Cependant, nous avons vu que cette forme de solution présente un caractère d'instabilité numérique. Pour pallier à cette difficulté, mais aussi dans l'esprit de réduire les temps de calcul, nous avons proposé trois méthodes différentes pour résoudre le système. La première utilise le principe d'interaction du milieu et fait intervenir les matrices de transmission et de réflexion. La seconde résout le système en diagonalisant au préalable la matrice caractéristique du milieu, ce qui a permis de soulever le problème de l'instabilité numérique et avoir une résolution analytique en espace. Enfin, la troisième méthode utilise un schéma aux différences finies centré-décentré. Nous avons aussi donné l'efficacité et les contraintes des différentes méthodes. Par ailleurs, nous avons étendu notre étude, associant les conditions de flux et nous avons décrit la méthode qui résout l'ETR lorsqu'il n'y a plus la symétrie azimutale. Ensuite, nous avons calculé les flux de chaleur ainsi que le terme source radiatif intervenant dans la deuxième équation. Alors, nous avons abordé la résolution de l'équation de conservation de l'énergie, qui dans notre cas est non linéaire. Nous avons proposé deux schémas aux différences finies centrés légèrement différents, associés à la transformation de Kirchhoff. Cette technique a permis de traiter la non-linéarité de manière plus efficace. Le couplage entre les deux équations a été abordé par une méthode de point fixe qui porte uniquement sur le champ de températures.

Faisons remarquer qu'il existe encore une autre façon de résoudre l'ETR que nous n'avons pas mentionnée. Il s'agit d'appliquer un point fixe comme indiqué par les relations (2.32) et (2.33) vues au chapitre II. Cependant avec $L_\lambda^{(0)}$ pris linéaire entre les deux valeurs $L_\lambda^o(\min(T_o, T_E))$ et $L_\lambda^o(\max(T_o, T_E))$ car, comme pour la température, c'est vraisemblablement le champ de luminance le plus proche du champ réel que l'on peut donner. Mais cet algorithme nous paraissait un peu lourd à combiner avec l'autre point fixe qui résout le système couplé et il n'est pas dit que cette méthode soit plus rapide que celles que nous avons données. Notons toutefois que cette méthode peut s'appliquer, comme la méthode des différences finies, à n'importe quels types de milieux. Et enfin, remarquons qu'il existe encore une autre façon de résoudre le système couplé. C'est la remarque 2.36 que nous avons faite au chapitre II. Mais il nous paraissait un peu trop tôt pour aborder cette méthode. Nous la laisserons en perspective.

Notons que les méthodes de calcul numérique présentées dans ce chapitre peuvent être adaptées à tout type de milieu semi-transparent. Au chapitre VI, nous appliquerons ces différentes méthodes sur des milieux fibreux réels. Mais des extensions pour d'autres types de matériaux sont envisageables s'il est possible au préalable de calculer les propriétés radiatives variant avec la direction et la longueur d'onde.

A présent, après avoir décrit les différentes méthodes numériques pour résoudre notre système, nous allons, comme annoncé, passer à l'analyse numérique du schéma aux différences finies d'ordre un en espace (3.41) qui résout l'ETR, couplé au schéma non linéaire (3.58) associé à la transformation de Kirchhoff inverse (3.59), pour la résolution de la deuxième équation.

Références

- [1] G. Guilbert. *Etude des caractéristiques optiques des milieux poreux semi-transparents*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1985.
- [2] P. Boulet. *Etude du transfert par rayonnement à travers les milieux fibreux*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1992.
- [3] A. Milandri. *Détermination des paramètres radiatifs d'un isolant fibreux : théorie de Mie, oscillateurs de Lorentz et méthode inverse*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2000.
- [4] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover publications, Inc. New York, 1960.
- [5] H.C. Hottel et A.F. Sarofim. *Radiative Transfer*. Mc Graw-Hill, New York, 1967.
- [6] M. N. Ozisik. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. Wiley-Interscience publication, New-York, 1973.
- [7] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. Mc Graw-Hill International Ed., Mechanical Engineering Series, 1993.
- [8] R. Viskanta. *Radiative heat Transfer*. Prog. Chem. Eng. A 22, p. 51-81, 1984.
- [9] S. Rosseland. *Theoretical astrophysics*. Oxford university press London, 1936.
- [10] T.W. Tong et C.L. Tien. Radiative heat transfer in fibrous insulation. Part 1 : Analytical Study. J. of Heat Transfer, trans. of the A.S.M.E.. Vol. 105, p. 70-75, 1983.
- [11] S.C. Lee. Radiation heat-transfer model for fibers oriented parallel to diffuse boundaries. Journal of Thermophysics. Vol. 2, p. 303-308, 1988.
- [12] G. Uny. *Modélisation du transfert couplé rayonnement-convection au sein de matériaux poreux et identification de leurs propriétés radiatives. Application aux laines de verre*. Thèse de 3ème Cycle, INSA Lyon, France, 1986.
- [13] H.C. Hottel et E.S. Cohen. Radiant heat exchange in a gas-filled enclosure : allowance for nonuniformity of gas temperature. A. I. Ch. E. Journal. Vol. 4, p. 3-14, 1958.
- [14] A. Al Abed et JF Sacadura. A Monte Carlo finite difference method for coupled radiation conduction heat transfer in semi-transparent media. J. Heat Transfer, Vol. 105, p. 931-933, 1983.
- [15] J. R. Howell. *Application of Monte Carlo to Heat Transfer Problems*. In Advances in Heat Transfer, eds. J. P. Hartnett and T. F. Irvine, vol. 5, Academic Press, New York, 1968.
- [16] A. Haji-Sheikh. *Monte Carlo Methods*. In Handbook of Numerical Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, pp. 673-722, 1988.
- [17] D. V. Walters and R. O. Buckius. *Monte Carlo Methods for Radiative Heat Transfer in Scattering Media*. In Annual Review of Heat Transfer. Vol. 5, Hemisphere, New York, 1992.
- [18] A.S. Jamaluddin et P.J. Smith. Predicting radiative heat transfer in rectangular enclosures using the discrete ordinates method. Combust. Sci. and Tech.. Vol. 59, p. 321-340, 1988.

- [19] B. G. Carlson and K. D. Lathrop. *Transport Theory – The Method of Discrete Ordinates*. In Computing Methods in Reactor Physics, eds. H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, Gordon and Breach, New York, 1968.
- [20] W. A. Fiveland. *A Discrete Ordinates Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclosures*. ASME Paper 82-HT-20, 1982.
- [21] W. A. Fiveland. Discrete Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures. ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 699-706, 1984.
- [22] K. Stammes, S. C. Tsay, W. J. Wiscombe and K. Jayaweera. Numerically Stable Algorithm for Discrete Ordinate Method Radiative Transfer in Multiple Scattering and Emitting Layered Media. Applied Optics, Vol. 27, no.12, pp. 2502-2509, 1988.
- [23] S. Kumar, A. Majumdar and C. L. Tien. The differential Discrete Ordinate Method for Solutions of the Equation of Radiative Transfer. ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 112, no. 2, pp. 424-429, 1990.
- [24] J.H. Jeans. The equations of radiative transfer of energy. Monthly Notices Roy. Astron. Soc.. Vol. 78, p. 28-36, 1917.
- [25] Y. Bayazitoglu et J. Higenyi. Higher-order differential equations of radiative transfer : P_3 approximation. AIAA Journal. Vol. 17, p. 424-431, 1979.
- [26] M. M. Razzaque, J. R. Howell et D. E. Klein. Finite element solution of radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with a grey participating media. ASME J. Heat Transfer. Vol. 105, p. 933-936, 1983.
- [27] J. A. Roux, H.Y. Yeh, A.M. Smith and S.Y. Wang. Finite element analysis of radiative transport in fibrous insulation. J. Energy. vol. 7 (6), p. 702-709, 1983.
- [28] J. R. Roche. Application des Approximants de Padé au Calcul de l'Exponentielle d'une matrice. Thèse de 3ème Cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1980.
- [29] P. C. Waterman. Matrix exponential description of radiative transfer. Journal of the Optical Society of America. Vol. 71, p. 410–422, 1981.
- [30] P. L. Flateau and G. L. Stephens. On the fundamental solution of the radiative transfer equation. Journal of Geophysical Research. Vol. 93, p. 11037–11050, 1988.
- [31] P. Boulet, G. Jeandel and G. Morlot. Model of radiative transfer in fibrous media, matrix method. Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 36, n° 18, p. 4287-4297, 1993.
- [32] K. Stammes and R. A. Swanson. A new look at the discrete ordinates method for radiative transfer. calculations in anisotropically scattering atmospheres. J. Atmos. Sci. Vol. 38, p. 387-399, 1981.
- [33] A. Coddington and R. Carlson. *Linear Ordinary Differential Equations*. Siam, 1997.
- [34] J. P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [35] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.
- [36] P. Sonneveld. CGS : A fast Lanczos–type solver for nonsymmetric linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput. Vol. 10, p. 36-52, 1989.

- [37] Kelley CT. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. Frontiers Appl. Math. 16, S.I.A.M, Philadelphia, PA, 1995.
- [38] Saad Y. *Iterative methods for sparse linear systems, Chapter 10 – Preconditioning techniques*. PWS Publishing Company, 1996.
- [39] Mehta RC. Numerical solution of nonlinear inverse heat conduction problem with a radiation boundary condition. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 20, p. 1057–1066, 1984.
- [40] M. Sibony et J. CL. Mardon. *Approximations et équations différentielles*. Hermann, Paris, 1982.
- [41] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods*. Springer, 1995.
- [42] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2000.
- [43] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer, 2000.

Chapitre IV

Analyse d'un schéma numérique en régime stationnaire

Résumé : Dans ce chapitre, nous étudions la convergence du schéma numérique couplé (3.41) (3.58) (3.60) décrit au chapitre précédent. Nous rappelons que le schéma (3.41) permet de résoudre l'ETR et le schéma (3.58), associé à la transformation de Kirchhoff inverse (3.60), donne une solution approchée à l'équation de conservation de l'énergie. La preuve de la convergence repose essentiellement sur des arguments de monotonie et l'application d'un point fixe discret, portant uniquement sur le champ de températures. Les équations non linéaires sont résolues à l'aide de la méthode de Newton.

4.1 Introduction et principaux résultats

Avant de passer à l'étude de notre problème, nous mentionnons quelques travaux portant sur le problème de la convergence d'un schéma numérique pour l'équation du rayonnement et la résolution numérique du système couplé des équations du rayonnement et de la conduction. Des résultats de convergence pour la méthode des ordonnées discrètes appliquée à la résolution de l'équation du rayonnement ont été obtenus pour estimer séparément les discrétisations angulaires et spatiales. De manière générale, les résultats de convergence pour les discrétisations angulaires ont été étudiés par les auteurs [1,2,3,4,5,6,7,8]. Les discrétisations spatiales ont été étudiés (indépendamment de l'approximation angulaire) par Lesaint et Raviart [9], Larsen et Nelson [10]. Les résultats de convergence et de stabilité pour les approximations spatiales et angulaires combinées ont été obtenus pour la première fois par Pitkaranta et Scott [11]. Ces auteurs ont étudié la

convergence de la méthode des ordonnées discrètes pour la résolution de l'ETR, lorsque le milieu est homogène, gris et isotrope (la fonction de phase $P \equiv 1$), avec un terme source isotrope. Les conditions aux limites radiatives sont supposées nulles. Pour approcher le terme intégral de l'ETR, ils ont utilisé la quadrature de Gauss et les formules composées. Pour approcher la dérivée de l'équation, ils ont utilisé les formules centrées-décentrées et la méthode de Galerkin discontinue. Les erreurs sont estimées dans la norme L^p ($1 \leq p \leq +\infty$). Beaucoup de schémas numériques ont été proposés pour résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction, en régime stationnaire. Nous ne mentionnerons ici que les travaux de Kelley et Banoczi. Kelley [12] a développé un algorithme rapide pour résoudre l'ETR associée à des conditions aux limites radiatives uniquement émissives (nous renvoyons à l'article pour les détails de l'algorithme). Le milieu est toujours supposé homogène, gris et isotrope (la fonction de phase $P \equiv 1$), avec un terme source isotrope. Ensuite, Banoczi et Kelley [13] ont proposé un algorithme rapide pour résoudre le système couplé par rayonnement et conduction, associé cette fois-ci à des conditions aux limites radiatives émissives, avec une réflexion spéculaire et diffuse. Le système est exprimé comme un problème de point fixe non linéaire qui porte uniquement sur le champ de températures. La résolution du point fixe demande au préalable de résoudre l'ETR et l'équation de conservation de l'énergie (qui dans leur cas est linéaire). Ces auteurs proposent alors de coupler le solveur de l'ETR (développé par Kelley [12]) avec un solveur qui utilise la méthode des éléments finis pour résoudre la deuxième équation. Le point fixe est alors résolu par une méthode de Newton-GMRES. Ce travail porte sur la dimension un en espace. Les auteurs ont poursuivi cette étude pour le problème en dimension deux [14]. Cependant, aucune preuve de convergence pour ce schéma n'a encore été établie. De manière générale et d'après nos connaissances, il n'existe pas de résultats de convergence pour la discrétisation de l'ETR couplé à l'équation de conservation de l'énergie. Ce problème reste donc ouvert. En ce qui nous concerne, après avoir étudié l'existence et l'unicité de notre système et donné un schéma numérique qui résoud le système, il nous a paru naturel de passer à l'étude de la convergence de ce schéma. Pour cela, nous supposons les discrétisations angulaire et spatiale définies au chapitre précédent. Cependant, afin de simplifier l'étude et sans perdre de généralité, nous supposons dans ce chapitre que la suite des longueurs d'ondes discrètes λ_k $1 \leq k \leq N$ est prise avec un pas constant $\Delta\lambda = \lambda_{\max} / N$. Nous rappelons que $\lambda_{\max} = \lambda_N$. Dans ce cas, nous approcherons l'intégrale en λ à l'aide de la formule des trapèzes composée. Nous aurons alors $C_k^\lambda = \Delta\lambda \quad \forall 1 \leq k \leq N$. De même, nous utiliserons une quadrature plus simple pour approcher l'intégrale en θ (ou encore en μ), basée sur la formule à trois points de Simpson composée. Comme pour l'étude théorique des équations, dans ce chapitre nous faisons apparaître de nouveau la longueur d'onde λ comme une variable.

Nous énonçons maintenant une série d'hypothèses qui seront nécessaires pour établir la preuve de convergence du schéma (3.41) (3.58) (3.60).

Hypothèse 4.1 : Nous supposons que les paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$ sont donnés et satisfont les relations (2.9) à (2.14) du chapitre II. Par ailleurs, nous résolvons le système des équations couplées par un algorithme de point fixe. Pour la convergence de cet algorithme, nous supposons que la donnée initiale appartient à l'intervalle $[T_-, T_+]$.

Hypothèse 4.2 : Nous faisons l'hypothèse 2.2 sur λ_c . Alors, en particulier c'est une fonction Lipschitzienne sur $]0, \infty[$ et on note γ_{λ_c} sa constante de Lipschitz.

Nous allons être amenés à établir des critères d'erreurs dues aux approximations des intégrales et des dérivées. Cela suppose une certaine régularité sur les coefficients radiatifs et la luminance.

Hypothèse 4.3 : Nous supposons les régularités et les majorations suivantes sur les coefficients radiatifs :

$$P \in C_{\mu, \mu'}^4([-1, 1] \times [-1, 1]), \sigma_s \in C_{\mu}^4([0, 1]), \sigma_a \in C_{\mu}^4([0, 1]) \text{ et } \sigma_a \in C_{\lambda}^2(0, \infty).$$

$$\sup_{\substack{\mu \in [-1, 1] \\ \mu' \in [-1, 1] \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^4 P}{\partial \mu^4}(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \right| < +\infty ; \quad \sup_{\substack{\mu \in [-1, 1] \\ \mu' \in [-1, 1] \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda)] \right| < +\infty$$

Avant de passer aux autres hypothèses, nous donnons quelques propriétés concernant le coefficient P donné par la relation (3.2). D'après les relations (2.10) et (3.2), il vient l'égalité suivante :

$$\sum_{j=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot \frac{\sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta}{\sin(\theta_k) \cdot C_k^\theta} = \sigma_s(\mu_k, \lambda) + \varepsilon_1(\Delta\theta, \mu, \mu_k, \lambda) \quad (4.1)$$

et d'après les relations (2.11) et (3.2), on a

$$\sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) = \sigma_s(\mu_j, \lambda) + \varepsilon_2(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda) \quad (4.2)$$

où ε_1 et ε_2 sont deux réels qui représentent les erreurs d'intégration. Nous utilisons ici, pour approcher le terme intégral en θ , la formule à trois points de Simpson composée [15]. Dans ce cas, l'erreur est donnée par

$$\varepsilon(f) = -\frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot f^{(4)}(\theta) \quad (4.3)$$

si f est, de manière générale, la fonction à intégrer sur l'intervalle $[0, \pi]$ et $\Delta\theta = \pi/m$ est le pas constant d'intégration en angle. Alors, les deux erreurs ε_1 et ε_2 sont données par

$$\varepsilon_1(\Delta\theta, \mu, \mu_k, \lambda) = \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sin(\theta) \cdot \sigma_s(\mu_k, \lambda) \cdot \frac{\partial^4 P}{\partial \mu^4}(\mu_k \rightarrow \mu, \lambda) \quad (4.4)$$

$$\varepsilon_2(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda) = \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu_j, \lambda)] \quad (4.5)$$

Revenons à présent aux autres hypothèses.

Hypothèse 4.4 : Nous supposons les régularités et les majorations suivantes sur la luminance :

$L \in C_x^2(0, E)$ (d'après l'étude faite au chapitre II, cette condition est vérifiée), $L \in C_\mu^4([-1, 1])$

et $L \in C_\lambda^2(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda) \right| < +\infty ; \quad \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda)] \right| < +\infty \quad \forall \lambda \in (0, \infty) \\ \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x, \mu, \lambda) \right| < +\infty ; \quad \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu] \right| < +\infty \\ \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^\circ(T(x), \lambda))] \right| < +\infty \\ \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^\circ(T(x), \lambda))] \right| < +\infty \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous supposons que les fonctions suivantes sont dans $L_\lambda^1(0, \infty)$:

$$\begin{aligned} \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda) \right| ; \quad \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda)] \right| \\ \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu] \right| ; \quad \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^\circ(T(x), \lambda))] \right| \end{aligned}$$

Des critères de stabilité vont apparaître pour le schéma numérique en question. Nous allons les énoncer. Au préalable, introduisons quelques définitions.

Définissons la constante c par :

$$c = 1 - \frac{\tilde{\sigma}_a^-}{\tilde{\sigma}_a^+ + \tilde{\sigma}_s^+} + \frac{\Delta\theta^4}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{\mu \in [-1, 1] \\ \mu' \in [-1, 1] \\ \lambda \in (0, \infty)}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda)] \right| \quad (4.6)$$

où $\tilde{\sigma}_a^-$, $\tilde{\sigma}_a^+$, $\tilde{\sigma}_s^-$ et $\tilde{\sigma}_s^+$ sont les constantes données par (2.12).

Supposons que la sous-solution que l'on note (\tilde{L}, \tilde{U}) et que la sur-solution que l'on note

(\tilde{L}', \tilde{V}') , du schéma numérique (3.41) (3.58) et (3.60) existent. Dans ce cas, posons

$\tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) = \tilde{L}'(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$ et

$\tilde{j}(0, \mu_j, \lambda) = \tilde{j}(E, -\mu_j, \lambda) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m/2$, $\lambda \in (0, \infty)$. Par ailleurs, définissons la quantité I_λ^k lorsque, pour un indice $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$ et $\lambda \in (0, \infty)$ fixés, il existe $1 \leq j \leq m/2$ tel que $\tilde{j}(x_k, -\mu_j, \lambda) \neq 0$ ou $\tilde{j}(x_{nt+1-k}, \mu_j, \lambda) \neq 0$, par :

$$I_\lambda^k = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^{m/2} (\tilde{j}(x_k, -\mu_j, \lambda) + \tilde{j}(x_{nt+1-k}, \mu_j, \lambda)) \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta - \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^m \varepsilon_1(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda) \cdot \tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \quad (4.7)$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$ et pour tout $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$. Ent désigne la partie entière et ε_1 est l'erreur d'intégration donnée par (4.4).

Soit $\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathbf{R}^{nt}$ tel que $T_- \leq \tilde{U}_i \leq T_+$ et $T_- \leq \tilde{V}_i \leq T_+ \forall 1 \leq i \leq nt$ où T_-, T_+ sont donnés par (2.34). Définissons alors les erreurs d'intégration $\varepsilon(\Delta\lambda^2)$ et $\eta(\Delta\lambda^2)$ par :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \max_{1 \leq i \leq nt} \left| L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda_k) - L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda_k) \right| \Delta\lambda \\ &= \int_0^\infty \max_{1 \leq i \leq nt} \left| L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda) - L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda - \int_{\lambda_{\max}}^\infty \max_{1 \leq i \leq nt} \left| L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda) - L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda + \varepsilon(\Delta\lambda^2) \\ & \sum_{k=1}^N \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\tilde{U}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{U}_i, \lambda_k) - \frac{1}{\lambda_c(\tilde{V}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{V}_i, \lambda_k) \right| \Delta\lambda \\ &= \int_0^\infty \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\tilde{U}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{U}_i, \lambda) - \frac{1}{\lambda_c(\tilde{V}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda \\ &- \int_{\lambda_{\max}}^\infty \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\tilde{U}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{U}_i, \lambda) - \frac{1}{\lambda_c(\tilde{V}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda + \eta(\Delta\lambda^2) \end{aligned}$$

Définissons la constante γ par

$$\gamma = \frac{8 \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sigma \cdot \gamma_{\Psi_c^{-1}} \cdot T_+^2}{(\lambda_c(T_-))^2} \cdot (4 \cdot \lambda_c(T_+) + T_+ \cdot \gamma_{\lambda_c}) \quad (4.8)$$

Hypothèse 4.5 : On suppose que le pas $\Delta\theta$ est suffisamment petit pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites : $0 < c < 1$ et $I_\lambda^k \geq 0$ pour tout $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$ (on démontrera par la suite, lemme 4.30, qu'il existe bien un pas $\Delta\theta$ suffisamment petit qui vérifie la deuxième condition).

Hypothèse 4.6 : On suppose, pour λ_{\max} fixé, que le pas $\Delta\lambda$ est suffisamment petit pour que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$- \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \max_{1 \leq i \leq nt} \left| L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda) - L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda + \varepsilon (\Delta\lambda^2) \leq 0$$

et

$$- \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\tilde{U}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{U}_i, \lambda) - \frac{1}{\lambda_c(\tilde{V}_i)} \cdot \frac{\partial L^\circ}{\partial T}(\tilde{V}_i, \lambda) \right| d\lambda + \eta (\Delta\lambda^2) \leq 0$$

Par ailleurs, des critères de convergence concernant les données initiales vont apparaître pour les problèmes non linéaires du schéma numérique en question. Nous allons les énoncer :

Hypothèse 4.7 : On considère l'algorithme de Newton pour la résolution des problèmes non linéaires (3.58) et (3.59). On suppose alors que la donnée initiale du schéma (3.58) :

$\tilde{T}^{(0)} \in B(\tilde{T}, \delta)$ avec $\delta < 8/\gamma$ et que la donnée initiale du schéma (3.59) : $\tilde{T}^{(0)} \in B(\tilde{T}, \eta)$ avec $\eta < \lambda_c(T_-)/\gamma_{\lambda_c}$.

Nous allons maintenant établir les principaux résultats obtenus dans ce travail. Rappelons pour commencer le schéma numérique (3.41), (3.58) et (3.60). Celui-ci est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_j \cdot \frac{\tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}(x_{i-1}, \mu_j, \lambda_k)}{h} + \sigma_e(\mu_j, \lambda_k) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \\ = \sum_{l=1}^m P(\mu_l \rightarrow \mu_j, \lambda_k) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_l, \lambda_k) + \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot L^\circ(\tilde{T}_i, \lambda_k) \\ - \mu_j \cdot \frac{\tilde{L}(x_{i+1}, -\mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}(x_i, -\mu_j, \lambda_k)}{h} + \sigma_e(\mu_j, \lambda_k) \cdot \tilde{L}(x_i, -\mu_j, \lambda_k) \\ = \sum_{l=1}^m P(\mu_l \rightarrow -\mu_j, \lambda_k) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_l, \lambda_k) + \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot L^\circ(\tilde{T}_i, \lambda_k) \\ \tilde{L}(0, \mu_j, \lambda_k) = L^\circ(T_o, \lambda_k) ; \tilde{L}(E, -\mu_j, \lambda_k) = L^\circ(T_E, \lambda_k) \end{array} \right. \quad (4.9)$$

pour $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m/2$ et $1 \leq k \leq N$,

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\tilde{T}_{i+1} - 2 \cdot \tilde{T}_i + \tilde{T}_{i-1}}{h^2} + 2\pi \cdot (\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i = 2\pi \cdot \tilde{F}_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt \\ \tilde{T}_0 = \bar{T}_o, \quad \tilde{T}_{nt+1} = \bar{T}_E \end{array} \right. \quad (4.10)$$

et

$$\Psi_c(\tilde{T}_i) = \tilde{T}_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (4.11)$$

avec les notations données au chapitre III. Alors, on a les résultats suivants :

Théorème 1 (existence) : Sous les hypothèses 4.1 à 4.7, le schéma numérique donné par (4.9) (4.10) et (4.11) admet une solution (\tilde{T}, \tilde{L}) . De plus, cette solution vérifie $T_- \leq \tilde{T}_i \leq T_+$ $\forall 1 \leq i \leq nt$ et $L^\circ(T_-, \lambda_k) + O(\Delta\theta^4) \leq \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq L^\circ(T_+, \lambda_k) + O(\Delta\theta^4) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$.

Ainsi, moyennant une petite erreur sur le pas angulaire $\Delta\theta$, nous retrouvons l'encadrement de la solution continue (Théorème 1 du chapitre II).

Proposition 2 : Sous les hypothèses du théorème 1, la luminance approchée \tilde{L} donnée par le schéma numérique (4.9) est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{T} dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty, 0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < \tilde{S}_i \leq \tilde{T}_i < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, alors $\tilde{L}(\tilde{S}, S_o, S_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq \tilde{L}(\tilde{T}, T_o, T_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$ où l'on note $\tilde{L}(\tilde{T}, T_o, T_E)$ la luminance approchée associée aux températures \tilde{T}, T_o, T_E .

Ainsi, nous retrouvons la même propriété de monotonie que possède la solution continue (Proposition 2 du chapitre II).

Théorème 3 (unicité) : Sous les hypothèses du théorème 1, la solution (\tilde{T}, \tilde{L}) est unique.

Théorème 4 (convergence) : Sous les hypothèses du théorème 1, le schéma numérique donné par (4.9) (4.10) et (4.11) est convergent : la solution approchée (\tilde{T}, \tilde{L}) converge vers la solution (T, L) du système (2.1)-(2.6), lorsque les pas $h \rightarrow 0, \Delta\theta \rightarrow 0, \Delta\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda_{\max} \rightarrow \infty$ comme $1/\Delta\lambda$. C'est un schéma d'ordre un en h , quatre en $\Delta\theta$ et un en $\Delta\lambda$.

A partir de maintenant et tout au long de ce travail, nous supposons que les hypothèses 4.1 à 4.7 sont vérifiées.

Nous pouvons remarquer que nous n'avons aucune restriction concernant le pas en espace h . Notons aussi que l'ordre de précision du schéma en angle θ est le même que celui donné par la formule de quadrature approchant l'intégrale en θ . L'ordre de précision du schéma en longueur d'onde λ est donné par celui de la formule de quadrature approchant l'intégrale en λ abaissé d'un. Pour améliorer les ordres du schéma (en θ et λ), il suffit alors d'utiliser des formules de quadrature plus précises : il faudra supposer plus de régularités (en θ et en λ) sur les coefficients radiatifs et la luminance.

Le plan de l'exposé qui va suivre est le suivant. Dans un premier temps, nous faisons une étude d'un schéma numérique plus général que celui donné par (4.9). Ensuite, nous

formulons le schéma numérique couplé (4.9) (4.10) (4.11) comme un problème de point fixe discret et nous montrons que celui-ci a une solution unique. Enfin, nous montrons la convergence de la solution approchée (\tilde{T}, \tilde{L}) vers la solution continue (T, L) du système (2.1)–(2.6), en établissant successivement des preuves de convergence pour \tilde{L} et \tilde{T} . Par la même occasion, nous donnons une preuve de convergence du flux “approché” \tilde{Q}_r vers le flux continue Q_r .

4.2 Convergence du schéma numérique pour le système couplé

4.2.1 Existence et unicité de la solution d’un schéma numérique pour un problème aux limites auxiliaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation du problème aux limites donné par (2.16). Nous proposons, pour discrétiser l’équation, un schéma numérique du même type que celui proposé pour l’ETR et donné par (4.9). Nous donnons alors un lemme de convergence pour ce schéma. De plus, comme pour la solution continue (lemme 2.5), nous montrons que la solution du schéma discret préserve la propriété de monotonie.

On considère le schéma décentré à gauche pour les valeurs $0 < \mu \leq 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_j \cdot \frac{\tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_{i-1}, \mu_j, \lambda)}{h} + \sigma_e(\mu_j, \lambda) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda) \\ = \sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_k, \lambda) + H(x_i, \mu_j, \lambda) \\ \text{pour } 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m/2 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

et on considère le schéma décentré à droite pour les valeurs $-1 \leq \mu < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu_j \cdot \frac{\tilde{L}(x_{i+1}, -\mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_i, -\mu_j, \lambda)}{h} + \sigma_e(\mu_j, \lambda) \cdot \tilde{L}(x_i, -\mu_j, \lambda) \\ = \sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow -\mu_j, \lambda) \cdot \tilde{L}(x_i, \mu_k, \lambda) + H(x_i, -\mu_j, \lambda) \\ \text{pour } 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m/2 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Pour compléter le schéma, nous imposons les conditions aux limites discrètes suivantes :

$$\tilde{L}(0, \mu_j, \lambda) = \phi_o(\mu_j, \lambda) \text{ et } \tilde{L}(E, -\mu_j, \lambda) = \phi_E(-\mu_j, \lambda) \quad \forall 1 \leq j \leq m/2 \text{ et } \lambda \in (0, \infty) \quad (4.14)$$

Le système d’équations $\{(4.12) (4.13) \text{ et } (4.14)\}$ s’écrit sous la forme d’un système linéaire :

$$(M_\lambda - N_\lambda) \cdot \tilde{K}_\lambda^* = F_\lambda^* \quad (4.15)$$

où M_λ et N_λ sont deux matrices carrées de taille $nt \cdot m$. Chacune des deux matrices est donnée par une décomposition par bloc. N_λ est diagonale par bloc :

$$N_\lambda = \begin{bmatrix} G_\lambda & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_\lambda \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad G_\lambda = \begin{bmatrix} P_\lambda^+ & P_\lambda^- \\ P_\lambda^- & P_\lambda^+ \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} (P_\lambda^+)_{jk} &= P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \\ (P_\lambda^-)_{jk} &= P(\mu_k \rightarrow -\mu_j, \lambda) \end{aligned} \quad (4.16)$$

G_λ est une matrice carrée de taille m . P_λ^+ et P_λ^- sont des matrices carrées de taille $m/2$.

La matrice M_λ est donnée par :

$$M_\lambda = \frac{1}{h} \cdot U \cdot C + D_{e\lambda} \quad (4.17)$$

$$\text{où} \quad U = \begin{bmatrix} U^* & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & U^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad U^* = \begin{bmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_{m/2} & \\ & & & -\mu_1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\mu_{m/2} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

U est une matrice diagonale de taille $nt \cdot m$ et U^* est une matrice diagonale de taille m .

$$C = \begin{bmatrix} C_2 & C_3 & & & \\ C_1 & C_2 & C_3 & & \\ & C_1 & C_2 & C_3 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & C_1 & C_2 & C_3 \\ \mathbf{0} & & & & C_1 & C_2 & C_3 \\ & & & & & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} C_1 &= \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \\ C_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.19)$$

C est une matrice tridiagonale par bloc de taille $nt \cdot m$ et C_1, C_2, C_3 sont trois matrices diagonales de taille m . I désigne la matrice identité de taille $m/2$.

$$\text{et} \quad D_{e\lambda} = \begin{bmatrix} \Sigma_{e\lambda} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Sigma_{e\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Sigma_{e\lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_e(\mu_1, \lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_e(\mu_{m/2}, \lambda) & \\ & & & \sigma_e(\mu_1, \lambda) & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_e(\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$D_{e\lambda}$ est une matrice diagonale de taille $nt \cdot m$ et $\Sigma_{e\lambda}$ est une matrice diagonale de taille m .

Lemme 4.8 : La matrice M_λ est inversible.

Preuve :

En utilisant l'expression de la matrice M_λ donnée par (4.17), on a

$$M_\lambda = D_{e\lambda} \cdot Q_\lambda \quad (4.21)$$

où $Q_\lambda = (I + \frac{1}{h} \cdot D_{e\lambda}^{-1} \cdot U \cdot C)$ et I désigne la matrice identité. D'après l'hypothèse 2.12, la matrice $D_{e\lambda}$ est inversible. Il reste donc à montrer que la matrice Q_λ est inversible. La matrice Q_λ est donnée par

$$Q_\lambda = \begin{bmatrix} B_\lambda^{-1} & -C_\lambda & & & & \\ -A_\lambda & B_\lambda^{-1} & -C_\lambda & & & \\ & -A_\lambda & B_\lambda^{-1} & -C_\lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -A_\lambda & B_\lambda^{-1} & -C_\lambda \\ \mathbf{0} & & & & -A_\lambda & B_\lambda^{-1} & -C_\lambda \\ & & & & & -A_\lambda & B_\lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$\text{avec } A_\lambda = \begin{bmatrix} U_\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; B_\lambda = \begin{bmatrix} V_\lambda & 0 \\ 0 & V_\lambda \end{bmatrix}; C_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & U_\lambda \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

où

$$U_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1}{h \cdot \sigma_e(\mu_1, \lambda)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{\mu_{m/2}}{h \cdot \sigma_e(\mu_{m/2}, \lambda)} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{h \cdot \sigma_e(\mu_1, \lambda)}{\mu_1 + h \cdot \sigma_e(\mu_1, \lambda)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{h \cdot \sigma_e(\mu_{m/2}, \lambda)}{\mu_{m/2} + h \cdot \sigma_e(\mu_{m/2}, \lambda)} & \\ & & & \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Notons que Q_λ est une matrice tridiagonale par bloc et chaque bloc est une matrice diagonale de taille m . Les matrices U_λ et V_λ sont de taille $m/2$. Par ailleurs, il est facile de voir que Q_λ est une matrice à diagonale strictement dominante. Elle est donc inversible et son inverse est donnée par :

$$Q_\lambda^{-1} = \begin{bmatrix} B_\lambda & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 & C_\lambda^2 \cdot B_\lambda^3 & \cdots & \cdots & \cdots & C_\lambda^{nt-1} \cdot B_\lambda^{nt} \\ A_\lambda \cdot B_\lambda^2 & B_\lambda & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 & & & & \vdots \\ A_\lambda^2 \cdot B_\lambda^3 & A_\lambda \cdot B_\lambda^2 & B_\lambda & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 & \vdots \\ A_\lambda^{nt-1} \cdot B_\lambda^{nt} & \cdots & \cdots & \cdots & A_\lambda \cdot B_\lambda^2 & B_\lambda & \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La matrice Q_λ^{-1} est une matrice de taille $nt \cdot m$ constituée de blocs et chaque bloc est une matrice diagonale de taille m . Notons au passage que $A_\lambda \cdot C_\lambda = C_\lambda \cdot A_\lambda = 0$. \square

\tilde{K}_λ^* est un vecteur de taille $nt \cdot m$ donné par :

$$\tilde{K}_\lambda^* = \begin{bmatrix} \tilde{L}(x_i, \mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ \tilde{L}(x_i, \mu_{m/2}, \lambda) \\ \tilde{L}(x_i, -\mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ \tilde{L}(x_i, -\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq nt} \quad (4.26)$$

F_λ^* est le vecteur “second membre” de taille $nt \cdot m$ donné par :

$$F_\lambda^* = \begin{bmatrix} f_\lambda(x_1) + \frac{1}{h} \cdot U^* \cdot \begin{bmatrix} \Phi_o^\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \\ f_\lambda(x_2) \\ \vdots \\ f_\lambda(x_{nt-1}) \\ f_\lambda(x_{nt}) - \frac{1}{h} \cdot U^* \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_E^\lambda \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

où pour l'indice i fixé, $f_\lambda(x_i)$ est un vecteur de taille m donné par

$$f_\lambda(x_i) = \begin{bmatrix} f_\lambda^+(x_i) \\ f_\lambda^-(x_i) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$f_\lambda^+(x_i)$ et $f_\lambda^-(x_i)$ sont deux vecteurs colonnes de taille $m/2$ donnés par

$$\begin{aligned} f_\lambda^+(x_i) &= \left[H(x_i, \mu_j, \lambda) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \\ f_\lambda^-(x_i) &= \left[H(x_i, -\mu_j, \lambda) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Φ_o^λ et Φ_E^λ sont deux vecteurs colonnes de taille $m/2$, donnés par les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \Phi_o^\lambda &= \left[\tilde{L}(0, \mu_j, \lambda) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \\ \Phi_E^\lambda &= \left[\tilde{L}(E, -\mu_j, \lambda) \right]_{1 \leq j \leq m/2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nous allons maintenant montrer que le système linéaire (4.15) admet une solution unique \tilde{K}_λ^* .

Au préalable, nous donnons deux lemmes auxiliaires utiles à la démonstration.

Lemme 4.9 : Soit α , a deux réels tels que $0 < \alpha \leq 1$, $x > 0$ et $N \geq 1$ un entier naturel. Alors, on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{\alpha^{k-1} \cdot x}{(\alpha + x)^k} < 1$$

preuve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\alpha^{k-1} \cdot x}{(\alpha + x)^k} &= \frac{x}{\alpha} \cdot \sum_{k=1}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^k = \frac{x}{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^N \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^k - \frac{x}{\alpha} = \frac{x}{\alpha} \cdot \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{N+1}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)} - \frac{x}{\alpha} \\ &= \left(\frac{\alpha + x}{\alpha} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{N+1} \right] - \frac{x}{\alpha} = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^N < 1. \quad \square \end{aligned}$$

Lemme 4.10 : $\| M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \|_\infty \leq c < 1$ et $\| M_\lambda^{-1} \|_\infty \leq \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-}$ où c est la constante donnée

par (4.6) et $\tilde{\sigma}_a^-$, $\tilde{\sigma}_s^-$ sont les constantes données par (2.12).

preuve :

La matrice $M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda (= Q_\lambda^{-1} \cdot D_{e\lambda}^{-1} \cdot N_\lambda)$ est donnée par

$$M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda = \begin{bmatrix} B_\lambda \cdot G_\lambda^* & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & C_\lambda^2 \cdot B_\lambda^3 \cdot G_\lambda^* & \cdots & \cdots & \cdots & C_\lambda^{nt-1} \cdot B_\lambda^{nt} \cdot G_\lambda^* \\ A_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & B_\lambda \cdot G_\lambda^* & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & & & & \vdots \\ A_\lambda^2 \cdot B_\lambda^3 \cdot G_\lambda^* & A_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & B_\lambda \cdot G_\lambda^* & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & C_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* \\ A_\lambda^{nt-1} \cdot B_\lambda^{nt} \cdot G_\lambda^* & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & A_\lambda \cdot B_\lambda^2 \cdot G_\lambda^* & B_\lambda \cdot G_\lambda^* \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

où G_λ^* est une matrice carrée de taille m donnée par

$$G_\lambda^* = \begin{bmatrix} R_\lambda^+ & R_\lambda^- \\ R_\lambda^- & R_\lambda^+ \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad (R_\lambda^+)_{jk} = \frac{P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} \quad \text{et} \quad (R_\lambda^-)_{jk} = \frac{P(\mu_k \rightarrow -\mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)}$$

R_λ^+ et R_λ^- sont des matrices carrées de taille $m/2$.

Si on développe les produits de la matrice $M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda$ donnée par (4.31), celle-ci s'écrit encore de la façon suivante :

$$M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,1} & S_\lambda^{-,1} \\ S_\lambda^{-,1} & S_\lambda^{+,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,2} & S_\lambda^{+,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,3} & S_\lambda^{+,3} \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,nt} & S_\lambda^{+,nt} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,2} & S_\lambda^{-,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,1} & S_\lambda^{-,1} \\ S_\lambda^{-,1} & S_\lambda^{+,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,2} & S_\lambda^{+,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,3} & S_\lambda^{+,3} \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,nt-1} & S_\lambda^{+,nt-1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,3} & S_\lambda^{-,3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,2} & S_\lambda^{-,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,1} & S_\lambda^{-,1} \\ S_\lambda^{-,1} & S_\lambda^{+,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,2} & S_\lambda^{+,2} \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ S_\lambda^{-,nt-2} & S_\lambda^{+,nt-2} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,nt} & S_\lambda^{-,nt} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdots \cdots \cdots \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,3} & S_\lambda^{-,3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,2} & S_\lambda^{-,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_\lambda^{+,1} & S_\lambda^{-,1} \\ S_\lambda^{-,1} & S_\lambda^{+,1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

où les matrices $S_\lambda^{+,i}$ et $S_\lambda^{-,i}$ pour $1 \leq i \leq nt$, sont données par

$$(S_\lambda^{+,i})_{jk} = \frac{\mu_j^{i-1} \cdot h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda)}{(\mu_j + h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda))^i} \cdot \frac{P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)}$$

$$(S_\lambda^{-,i})_{jk} = \frac{\mu_j^{i-1} \cdot h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda)}{(\mu_j + h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda))^i} \cdot \frac{P(\mu_k \rightarrow -\mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)}$$

$S_\lambda^{+,i}$ et $S_\lambda^{-,i}$ sont des matrices carrées de taille $m/2$.

Par ailleurs, on a

$$\|M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq j \leq m/2 \\ 1 \leq N \leq nt}} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\mu_j^{i-1} \cdot h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda)}{(\mu_j + h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda))^i} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m \frac{P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} \right) \quad (4.32)$$

En utilisant le lemme 4.9, il vient

$$\sum_{i=1}^N \frac{\mu_j^{i-1} \cdot h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda)}{(\mu_j + h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda))^i} < 1 \quad \forall 1 \leq N \leq nt \text{ et } 1 \leq j \leq m/2 \quad (4.33)$$

En utilisant les relations (2.9), (2.12), (4.2), (4.5) et l'hypothèse 4.5, on déduit

$$\sum_{k=1}^m \frac{P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} = \left(1 - \frac{\sigma_a(\mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} + \frac{\varepsilon_2(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda)}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} \right) \leq c \quad (4.34)$$

pour tout $1 \leq j \leq m/2$ et $\lambda \in (0, \infty)$ où c est la constante donnée par (4.6). En combinant les relations (4.32), (4.33) et (4.34), on obtient

$$\|M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda\|_\infty \leq c < 1 \quad (4.35)$$

ce qui démontre le premier point du lemme.

On déduit ensuite $\|M_\lambda^{-1}\|_\infty$ à partir de la relation (4.32), en prenant dans l'expression $N_\lambda = I$ la matrice identité, i.e. d'après (4.16), cela vient à poser $P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) = \delta_{jk}$ (le symbole de Kronecker). Dans ce cas, il vient

$$\|M_\lambda^{-1}\|_\infty = \max_{\substack{1 \leq j \leq m/2 \\ 1 \leq N \leq nt}} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\mu_j^{i-1} \cdot h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda)}{(\mu_j + h \cdot \sigma_e(\mu_j, \lambda))^i} \right) \cdot \frac{1}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)}$$

En utilisant l'inégalité (4.33) et ensuite la relation (2.12), on obtient :

$$\|M_\lambda^{-1}\|_\infty \leq \max_{1 \leq j \leq m/2} \frac{1}{\sigma_e(\mu_j, \lambda)} \leq \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \quad \square$$

Proposition 4.11 : Le système linéaire (4.15) admet une solution unique \tilde{K}_λ^* .

preuve :

On peut résoudre le système linéaire (4.15) par la méthode itérative suivante :

$$M_\lambda \cdot \tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)} = N_\lambda \cdot \tilde{K}_\lambda^{*,(n)} + F_\lambda^* \quad (4.36)$$

où on désigne par $\tilde{K}_\lambda^{*,(n)}$ la $n^{\text{ième}}$ itération de \tilde{K}_λ^* . Cette méthode est convergente lorsque $\rho(M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda) < 1$ (voir [16]). Sachant que $\rho(M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda) \leq \|M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda\|_\infty$ on en déduit finalement le résultat énoncé, en utilisant le lemme 4.10. \square

4.2.2 Convergence d'un schéma numérique pour un problème aux limites auxiliaire

Nous allons à présent établir la convergence du schéma (4.12), (4.13) et (4.14), au sens de la norme vectorielle $\|\cdot\|_\infty$ et de la norme matricielle subordonnée correspondante. La démonstration repose de façon essentielle sur le fait que les normes $\|\cdot\|_\infty$ des deux matrices M_λ^{-1} et $M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda$ sont bornées indépendamment du pas h .

Proposition 4.12 : Soit \tilde{L} la solution approchée vérifiant le schéma discret (4.12), (4.13) et (4.14). Alors, on a la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |L(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda)| = \|L(\cdot, \cdot, \lambda) - \tilde{L}(\cdot, \cdot, \lambda)\|_\infty \\ & \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\Delta \theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda)] \right| \\ & + \frac{h}{2} \cdot \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda) \right| \end{aligned} \right\} \quad (4.37) \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$, où c est la constante donnée par (4.6).

preuve :

D'après l'étude théorique faite au chapitre II, la solution L de (2.16) vérifie $L(\cdot, \mu, \lambda) \in C^2(0, E)$ pour tout $\mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $\lambda \in (0, \infty)$. La formule de Taylor donne, pour $i = 1, 2, \dots, nt$ et $j = 1, 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x_i, \mu_j, \lambda) &= \frac{L(x_i, \mu_j, \lambda) - L(x_{i-1}, \mu_j, \lambda)}{h} + \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, \mu_j, \lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial x}(x_i, \mu_j, \lambda) &= \frac{L(x_{i+1}, \mu_j, \lambda) - L(x_i, \mu_j, \lambda)}{h} - \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, \mu_j, \lambda) \end{aligned}$$

avec $|\alpha_i| < 1 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$.

Par ailleurs, pour approcher le terme intégral de l'équation (2.16), nous utilisons une formule de quadrature de type Simpson composée. Alors, pour $i = 1, 2, \dots, nt$ et $j = 1, 2, \dots, m$, on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 \sigma_s(\mu', \lambda) \cdot P(\mu' \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu', \lambda) \, d\mu' \\ &= \sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu_k, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, \mu_j, \lambda) \end{aligned} \quad (4.38)$$

où ε_3 est un réel qui représente l'erreur d'intégration donné par

$$\varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, \mu_j, \lambda) = -\frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} \left[\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu, \lambda) \right] \cdot \sin(\theta) \quad (4.39)$$

Exprimons à présent que la fonction L est solution de (2.16) aux points $(x_i, \mu_j, \lambda) \quad 1 \leq i \leq nt$,

$1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$ en remplaçant les valeurs $\frac{\partial L}{\partial x}(x_i, \mu_j, \lambda)$ par les expressions ci-dessus et

en remplaçant le terme intégral de l'équation par la formule de quadrature donnée par (4.38).

Il vient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} & \mu_j \cdot \frac{L(x_i, \mu_j, \lambda) - L(x_{i-1}, \mu_j, \lambda)}{h} + \mu_j \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, \mu_j, \lambda) + \sigma_e(\mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu_j, \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu_k, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, \mu_j, \lambda) + H(x_i, \mu_j, \lambda) \\ & \text{pour } 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m/2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} & -\mu_j \cdot \frac{L(x_{i+1}, -\mu_j, \lambda) - L(x_i, -\mu_j, \lambda)}{h} + \mu_j \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, -\mu_j, \lambda) + \sigma_e(\mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, -\mu_j, \lambda) \\ &= \sum_{k=1}^m P(\mu_k \rightarrow -\mu_j, \lambda) \cdot L(x_i, \mu_k, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, -\mu_j, \lambda) + H(x_i, -\mu_j, \lambda) \\ & \text{pour } 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m/2 \end{aligned} \right.$$

Ce système d'équations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$(M_\lambda - N_\lambda) \cdot K_\lambda^* = F_\lambda^* + \varepsilon_{h,\Delta\theta}(L) \quad (4.40)$$

où M_λ et N_λ sont les deux matrices données par (4.16) et (4.17). F_λ^* est le vecteur donné par (4.27) et K_λ^* est le vecteur 'exact' de taille $nt \cdot m$ donné par :

$$K_\lambda^* = \begin{bmatrix} L(x_i, \mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ L(x_i, \mu_{m/2}, \lambda) \\ L(x_i, -\mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ L(x_i, -\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq nt} \quad (4.41)$$

$\varepsilon_{h,\Delta\theta}(L)$ est le vecteur 'erreur' de taille $nt \cdot m$ donné par :

$$\varepsilon_{h,\Delta\theta}(L) = \begin{bmatrix} -\mu_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, \mu_1, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, \mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ -\mu_{m/2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, \mu_{m/2}, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, \mu_{m/2}, \lambda) \\ -\mu_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, -\mu_1, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, -\mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ -\mu_{m/2} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_i + \alpha_i \cdot h, -\mu_{m/2}, \lambda) + \varepsilon_3(\Delta\theta, \mu, x_i, -\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq nt} \quad (4.42)$$

Des équations (4.15) et (4.40), on déduit

$$(K_\lambda^* - \tilde{K}_\lambda^*) = M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot (K_\lambda^* - \tilde{K}_\lambda^*) + M_\lambda^{-1} \cdot \varepsilon_{h,\Delta\theta}(L) \quad (4.43)$$

Par suite,

$$\|K_\lambda^* - \tilde{K}_\lambda^*\|_\infty \leq \|M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda\|_\infty \cdot \|K_\lambda^* - \tilde{K}_\lambda^*\|_\infty + \|M_\lambda^{-1}\|_\infty \cdot \|\varepsilon_{h,\Delta\theta}(L)\|_\infty \quad (4.44)$$

En utilisant le lemme 4.10, on obtient

$$\|K_\lambda^* - \tilde{K}_\lambda^*\|_\infty \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \|\varepsilon_{h,\Delta\theta}(L)\|_\infty \quad (4.45)$$

et il reste à combiner avec l'inégalité

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{h,\Delta\theta}(L)\|_\infty &\leq \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{(x,\mu) \in \Omega \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda)] \right| \\ &+ \frac{h}{2} \cdot \sup_{(x,\mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda) \right| \quad \square \end{aligned} \quad (4.46)$$

Nous terminons maintenant ce paragraphe en donnant un résultat de monotonie et un lemme technique qui servira pour la suite. Auparavant, nous donnons un lemme auxiliaire.

Lemme 4.13 : Soit f un vecteur de taille $nt \cdot m$. Si $f_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt \cdot m$ alors $(M_\lambda^{-1} \cdot f)_i \geq 0$ et $(N_\lambda \cdot f)_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt \cdot m$.

preuve :

C'est évident pour la matrice N_λ donnée par (4.16) car, d'après la remarque 3.2 du chapitre III, tous ses coefficients sont strictement positifs. En ce qui concerne la matrice M_λ^{-1} , d'après (4.21), celle-ci est donnée aussi par $M_\lambda^{-1} = Q_\lambda^{-1} \cdot D_{e\lambda}^{-1}$. D'après (4.20) et (4.25), les matrices Q_λ^{-1} et $D_{e\lambda}^{-1}$ ont des coefficients qui sont tous positifs. Par suite, la matrice M_λ^{-1} a aussi tous ses coefficients positifs. \square

Proposition 4.14 : La solution \tilde{L} du schéma numérique (4.12), (4.13) et (4.14) est une fonction monotone de ϕ_o, ϕ_E, H dans le sens que si $0 < \psi_o(\mu_j, \lambda) \leq \phi_o(\mu_j, \lambda) < +\infty$, $0 < \psi_E(-\mu_j, \lambda) \leq \phi_E(-\mu_j, \lambda) < +\infty$ pour tout $1 \leq j \leq m/2$, $\lambda \in (0, \infty)$ et $0 < G(x_i, \mu_j, \lambda) \leq H(x_i, \mu_j, \lambda) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$, alors $\tilde{L}(G, \psi_o, \psi_E)(x_i, \mu_j, \lambda) \leq \tilde{L}(H, \phi_o, \phi_E)(x_i, \mu_j, \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\lambda \in (0, \infty)$ où l'on note $\tilde{L}(H, \phi_o, \phi_E)$ la solution "approchée" associée aux fonctions H, ϕ_o et ϕ_E .

preuve :

Nous fixons $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$ et nous procédons par récurrence. D'après (4.36), il vient $\tilde{K}_\lambda^{*(n+1)} = M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot \tilde{K}_\lambda^{*(n)} + M_\lambda^{-1} \cdot F_\lambda^*$.

Posons pour $n = 0$: $\tilde{K}_\lambda^{*(0)}(G, \psi_o, \psi_E) = \tilde{K}_\lambda^{*(0)}(H, \phi_o, \phi_E) = 0$ alors

$$\tilde{L}^{(0)}(G, \psi_o, \psi_E)(x_i, \mu_j, \lambda) \leq \tilde{L}^{(0)}(H, \phi_o, \phi_E)(x_i, \mu_j, \lambda).$$

Supposons maintenant que $\tilde{L}^{(n)}(G, \psi_o, \psi_E)(x_i, \mu_j, \lambda) \leq \tilde{L}^{(n)}(H, \phi_o, \phi_E)(x_i, \mu_j, \lambda)$. Formons alors la différence des deux vecteurs $\tilde{K}_\lambda^{*(n+1)}(H, \phi_o, \phi_E)$ et $\tilde{K}_\lambda^{*(n+1)}(G, \psi_o, \psi_E)$.

$$\begin{aligned} & \tilde{K}_\lambda^{*(n+1)}(H, \phi_o, \phi_E) - \tilde{K}_\lambda^{*(n+1)}(G, \psi_o, \psi_E) \\ &= M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot (\tilde{K}_\lambda^{*(n)}(H, \phi_o, \phi_E) - \tilde{K}_\lambda^{*(n)}(G, \psi_o, \psi_E)) + M_\lambda^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H, \phi_o, \phi_E) - F_\lambda^*(G, \psi_o, \psi_E)) \end{aligned}$$

Par hypothèse, chaque composante du vecteur $\tilde{K}_\lambda^{*(n)}(H, \phi_o, \phi_E) - \tilde{K}_\lambda^{*(n)}(G, \psi_o, \psi_E)$ est positive. D'après (4.27),

$$F_\lambda^*(H, \phi_o, \phi_E) - F_\lambda^*(G, \psi_o, \psi_E) = \begin{bmatrix} f_\lambda(H)(x_1) - f_\lambda(G)(x_1) + \frac{1}{h} \cdot U^* \cdot \begin{bmatrix} \Phi_o^\lambda(\phi_o) - \Phi_o^\lambda(\psi_o) \\ 0 \end{bmatrix} \\ f_\lambda(H)(x_2) - f_\lambda(G)(x_2) \\ \vdots \\ f_\lambda(H)(x_{m-1}) - f_\lambda(G)(x_{m-1}) \\ f_\lambda(H)(x_m) - f_\lambda(G)(x_m) - \frac{1}{h} \cdot U^* \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_E^\lambda(\phi_E) - \Phi_E^\lambda(\psi_E) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

D'après (4.28) et (4.29),

$$f_\lambda(H)(x_i) - f_\lambda(G)(x_i) = \begin{bmatrix} [H(x_i, \mu_j, \lambda) - G(x_i, \mu_j, \lambda)]_{1 \leq j \leq m/2} \\ [H(x_i, -\mu_j, \lambda) - G(x_i, -\mu_j, \lambda)]_{1 \leq j \leq m/2} \end{bmatrix}$$

pour tout $1 \leq i \leq nt$ et $\lambda \in (0, \infty)$. Par hypothèse, $f_\lambda(H)(x_i) - f_\lambda(G)(x_i)$ est donc un vecteur qui a toutes ses composantes positives. D'après (4.18) et (4.30),

$$U^* \cdot \begin{bmatrix} \Phi_o^\lambda(\phi_o) - \Phi_o^\lambda(\psi_o) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mu_j \cdot (\phi_o(\mu_j, \lambda) - \psi_o(\mu_j, \lambda))]_{1 \leq j \leq m/2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-U^* \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_E^\lambda(\phi_E) - \Phi_E^\lambda(\psi_E) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ [\mu_j \cdot (\phi_E(-\mu_j, \lambda) - \psi_E(-\mu_j, \lambda))]_{1 \leq j \leq m/2} \end{bmatrix}$$

Par hypothèse, ces deux vecteurs ont aussi toutes leurs composantes positives. Par suite, le vecteur $F_\lambda^*(H, \phi_o, \phi_E) - F_\lambda^*(G, \psi_o, \psi_E)$ a toutes ses composantes positives. Pour conclure la preuve du lemme, il suffit d'appliquer maintenant le lemme 4.13. \square

Lemme 4.15 : On suppose que $0 < G(x_i, \mu_j, \lambda) \leq H(x_i, \mu_j, \lambda) < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\lambda \in (0, \infty)$, alors la solution \tilde{L} du schéma numérique (4.12), (4.13) et (4.14) vérifie $\frac{h}{1+h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot (H(x_i, \mu_j, \lambda) - G(x_i, \mu_j, \lambda)) \leq \tilde{L}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(G)(x_i, \mu_j, \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\lambda \in (0, \infty)$.

preuve :

Nous fixons $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$ et nous procédons par récurrence comme pour la démonstration précédente. Toujours d'après (4.36), on a $\tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)} = M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot \tilde{K}_\lambda^{*,(n)} + M_\lambda^{-1} \cdot F_\lambda^*$.

Posons pour $n = 0$:

$$\tilde{K}_\lambda^{*,(0)}(H) = \frac{h}{1+h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot \begin{bmatrix} H(x_i, \mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ H(x_i, \mu_{m/2}, \lambda) \\ H(x_i, -\mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ H(x_i, -\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq nt} \quad \text{et} \quad \tilde{K}_\lambda^{*,(0)}(G) = \frac{h}{1+h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot \begin{bmatrix} G(x_i, \mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ G(x_i, \mu_{m/2}, \lambda) \\ G(x_i, -\mu_1, \lambda) \\ \vdots \\ G(x_i, -\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq nt}$$

Alors pour $n = 0$ la relation est vraie. Supposons maintenant que

$$\tilde{L}^{(n)}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}^{(n)}(G)(x_i, \mu_j, \lambda) \geq \frac{h}{1+h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot (H(x_i, \mu_j, \lambda) - G(x_i, \mu_j, \lambda)) \quad \text{et formons la}$$

différence des deux vecteurs $\tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)}(H)$ et $\tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)}(G)$.

$$\tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)}(H) - \tilde{K}_\lambda^{*,(n+1)}(G) = M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot (\tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(H) - \tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(G)) + M_\lambda^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G))$$

Par hypothèse, chaque composante du vecteur $\tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(H) - \tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(G)$ est positive. Alors, par le lemme 4.13, le vecteur $M_\lambda^{-1} \cdot N_\lambda \cdot (\tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(H) - \tilde{K}_\lambda^{*,(n)}(G))$ a toutes ses composantes positives.

$$\text{Ainsi, } \tilde{L}^{(n+1)}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}^{(n+1)}(G)(x_i, \mu_j, \lambda) \geq \left\{ M_\lambda^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G)) \right\} (x_i, \mu_j, \lambda).$$

Par ailleurs, d'après (4.21) et (4.25), $M_\lambda^{-1} = Q_\lambda^{-1} \cdot D_{e\lambda}^{-1}$ et $Q_\lambda^{-1} = A_\lambda + B_\lambda$ où A_λ est la matrice Q_λ^{-1} sans les blocs diagonaux et B_λ est la matrice constituée des blocs diagonaux de la matrice Q_λ^{-1} . Ainsi,

$$\begin{aligned} \tilde{L}^{(n+1)}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}^{(n+1)}(G)(x_i, \mu_j, \lambda) &\geq \left\{ A_\lambda \cdot D_{e\lambda}^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G)) \right\} (x_i, \mu_j, \lambda) \\ &\quad + \left\{ B_\lambda \cdot D_{e\lambda}^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G)) \right\} (x_i, \mu_j, \lambda) \end{aligned}$$

Par hypothèse, $F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G)$ est un vecteur qui a toutes ses composantes positives. Les matrices A_λ et $D_{e\lambda}^{-1}$ ont tous leurs coefficients positifs. Par suite,

$$\tilde{L}^{(n+1)}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}^{(n+1)}(G)(x_i, \mu_j, \lambda) \geq \left\{ B_\lambda \cdot D_{e\lambda}^{-1} \cdot (F_\lambda^*(H) - F_\lambda^*(G)) \right\} (x_i, \mu_j, \lambda)$$

D'après (4.20), (4.23) et (4.24), il vient

$$\tilde{L}^{(n+1)}(H)(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}^{(n+1)}(G)(x_i, \mu_j, \lambda) \geq \frac{h}{|\mu_j| + h \cdot \tilde{\sigma}_e(\mu_j, \lambda)} \cdot (H(x_i, \mu_j, \lambda) - G(x_i, \mu_j, \lambda))$$

$$\geq \frac{h}{1+h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot (H(x_i, \mu_j, \lambda) - G(x_i, \mu_j, \lambda)) \quad \text{en utilisant la relation (2.12).} \quad \square$$

4.2.3 Problème de point fixe

Dans ce paragraphe, nous montrons que le schéma numérique couplé donné par (4.9), (4.10) et (4.11) peut se résoudre, par analogie avec le point fixe compact du problème continue vu au chapitre II, à l'aide d'un point fixe discret portant uniquement sur le champ de températures "approché" $\tilde{T} = (\tilde{T}_i)_{1 \leq i \leq nt}$. On procède en définissant une application point fixe $\tilde{\mathcal{F}}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$, par

$$\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}) = \tilde{T} \quad (4.47)$$

où \tilde{T} vérifiera le schéma discret (4.9), (4.10) et (4.11). L'ensemble \tilde{D} est donné par

$$\tilde{D} = \left\{ \tilde{u} \in \mathbf{R}^{nt} \mid T_- \leq \tilde{u}_i \leq T_+ \quad \forall 1 \leq i \leq nt \right\} = [T_-, T_+]^{nt} \quad (4.48)$$

où T_-, T_+ sont donnés par (2.34) et nous munissons \tilde{D} de la norme infinie usuelle dans \mathbf{R}^{nt} . L'application $\tilde{\mathcal{F}}$ va dépendre, bien entendu, des paramètres $T_o, T_E, \sigma_a, \sigma_s, P$. Notre objectif est de montrer que l'application $\tilde{\mathcal{F}}$ est bien définie, continue, croissante (de \tilde{T}, T_o, T_E) et qu'elle admet un unique point fixe.

Pour simplifier les écritures qui vont suivre, nous introduisons l'opérateur linéaire \tilde{M} (c'est l'analogue discret de l'opérateur M donné par (2.41)) défini par

$$(\tilde{M} g)_i = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m g(x_i, \mu_j, \lambda_k) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta \lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt \quad (4.49)$$

Nous allons maintenant donner la formulation du point fixe. Nous exprimons l'application $\tilde{\mathcal{F}}$ comme la composition de quatre applications non linéaires, soit :

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\Psi}_c^{-1} \circ \tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{C}} \quad (4.50)$$

Les applications $\tilde{\Psi}_c^{-1}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont les versions discrètes des applications $\Psi_c^{-1}, \mathcal{A}, \mathcal{B}$ et \mathcal{C} établies dans le cas continue. Au préalable, nous définissons une application $\tilde{\mathcal{L}}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}$ telle que pour $\tilde{T} \in \tilde{D}$, $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T})$ est la solution approchée de l'ETR, donnée par le schéma numérique (4.9). L'ensemble \tilde{D} est donné par

$$\tilde{D} = \left\{ g \in \mathbf{R}^{nt \times m \times N} \mid L^o(T_-, \lambda_k) + C_{i,j,k}(T_-) \leq g_{i,j,k} \leq L^o(T_+, \lambda_k) + C_{i,j,k}(T_+) \right. \\ \left. \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq N \right\} \quad (4.51)$$

avec une majoration sur $C_{i,j,k}$ donnée par

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)| \leq \frac{\Delta \theta^4}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\pi}{2880} \cdot L^o(T, \lambda_k) \cdot \sup_{\substack{\mu \in [-1,1] \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda_k) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda_k)] \right|$$

pour tout $1 \leq k \leq N$ où c est la constante donnée par (4.6). Par ailleurs, on munit l'ensemble \tilde{D} de la norme $\|\cdot\|_{1,\infty}$ définie par

$$\|g\|_{1,\infty} = \sum_{k=1}^N \|g(\cdot, \cdot, \lambda_k)\|_{\infty} \cdot \Delta\lambda \quad \text{où} \quad \|g(\cdot, \cdot, \lambda_k)\|_{\infty} = \max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |g(x_i, \mu_j, \lambda_k)| \quad \forall 1 \leq k \leq N.$$

L'application $\tilde{\mathcal{L}}$ est l'analogue discret de l'application \mathcal{L} .

Nous définissons alors l'application $\tilde{\mathcal{C}} : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}} \times \tilde{\mathcal{D}}$ en posant pour $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{T}) = (\tilde{T}, \tilde{L})$ et $\tilde{L} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T})$.

Nous définissons l'application $\tilde{\mathcal{F}} : \tilde{\mathcal{D}} \times \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}'$ en posant pour $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{F} = (\tilde{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T})$ où \tilde{F} est le vecteur de taille nt donné par (3.56) et $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{T}) = (\tilde{T}, \tilde{L}) \in \tilde{\mathcal{D}} \times \tilde{\mathcal{D}}$. L'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}'$ est donné par

$$\tilde{\mathcal{D}}' = \left\{ f \in \mathbf{R}^{nt} \mid \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(T_-) \leq f_i \leq \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(T_+) \quad \forall 1 \leq i \leq nt \right\} \quad (4.52)$$

et on munie l'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}'$ de la norme infinie habituelle dans \mathbf{R}^{nt} .

L'application $\tilde{\mathcal{A}} : \tilde{\mathcal{D}}' \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}$ est définie comme il suit. Pour $\tilde{F} \in \tilde{\mathcal{D}}'$ ($\tilde{F} = (\tilde{F}_i)_{1 \leq i \leq nt}$), nous définissons $\tilde{T} = (\tilde{T}_i)_{1 \leq i \leq nt} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{F}, T_o, T_E)$ comme étant la solution du schéma numérique donné par (4.10). L'ensemble $\tilde{\mathcal{D}}$ est donné par

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left\{ \tilde{u} \in \mathbf{R}^{nt} \mid \tilde{T}_- \leq \tilde{u}_i \leq \tilde{T}_+ \quad \forall 1 \leq i \leq nt \right\} \quad (4.53)$$

où \tilde{T}_-, \tilde{T}_+ sont donnés par (2.48) et nous munissons $\tilde{\mathcal{D}}$ de la norme infinie habituelle dans \mathbf{R}^{nt} .

et enfin $\tilde{\Psi}_c^{-1} : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \tilde{\mathcal{D}}'$ où pour $\tilde{T} = (\tilde{T}_i)_{1 \leq i \leq nt} \in \tilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{\Psi}_c^{-1}(\tilde{T})$ est la solution de l'équation (4.11).

De manière plus synthétique, on a

$$\begin{array}{ccccccc} (\tilde{\mathcal{D}}, \|\cdot\|_{\infty}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{C}}} & (\tilde{\mathcal{D}}, \|\cdot\|_{\infty}) \times (\tilde{\mathcal{D}}, \|\cdot\|_{1,\infty}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{F}}} & (\tilde{\mathcal{D}}', \|\cdot\|_{\infty}) & \xrightarrow{\tilde{\mathcal{A}}} & (\tilde{\mathcal{D}}, \|\cdot\|_{\infty}) & \xrightarrow{\tilde{\Psi}_c^{-1}} & (\tilde{\mathcal{D}}, \|\cdot\|_{\infty}) \\ \tilde{T} & \longrightarrow & (\tilde{T}, \tilde{L}) & \longrightarrow & \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{T} & \longrightarrow & \tilde{T} \end{array}$$

Comme dans le cas continu, les applications $\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{C}}$ et $\tilde{\mathcal{L}}$ dépendent aussi des conditions aux bords T_o, T_E et cette dépendance est importante. Quand c'est le cas, nous donnerons la dépendance explicitement en écrivant, sans alourdir les notations, $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}, T_o, T_E), \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{F}, T_o, T_E), \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}, T_o, T_E), \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{T}, T_o, T_E)$ et $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T}, T_o, T_E)$.

Nous allons maintenant nous intéresser aux applications $\tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{\mathcal{C}}$ et donner quelques propriétés qui portent sur la solution approchée de l'ETR. Pour commencer, nous allons montrer que les applications $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\tilde{\mathcal{C}}$ sont bien définies.

Théorème 4.16 : Soit $\tilde{T} \in \tilde{D}$ où \tilde{D} est donné par (4.48). Alors, l'ETR a une unique solution approchée \tilde{L} donnée par le schéma numérique (4.9).

preuve.

On pose $H(x_i, \mu_j, \lambda) = \sigma_a(\mu_j, \lambda) \cdot L^\circ(\tilde{T}_i, \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\lambda \in (0, \infty)$, $\phi_o(\mu_j, \lambda) = L^\circ(T_o, \lambda)$ et $\phi_E(-\mu_j, \lambda) = L^\circ(T_E, \lambda)$ pour tout $1 \leq j \leq m/2$ et $\lambda \in (0, \infty)$. Ensuite, on applique la proposition 4.11. \square

Théorème 4.17 : $\tilde{\mathcal{C}}$ est une application continue de \tilde{D} vers $\tilde{D} \times \tilde{D}$.

preuve.

On prend deux couples d'éléments $(\tilde{U}, \tilde{L}), (\tilde{V}, \tilde{L}') \in \tilde{D} \times \tilde{D}$ tels que $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{U}) = (\tilde{U}, \tilde{L})$, $\tilde{\mathcal{C}}(\tilde{V}) = (\tilde{V}, \tilde{L}')$ où \tilde{L} et \tilde{L}' sont les solutions approchées de l'ETR. Alors, si nous reprenons de nouveau les calculs donnés par la preuve de la proposition 4.12, nous déduisons que

$$\left\| \tilde{L}(\cdot, \cdot, \lambda_k) - \tilde{L}'(\cdot, \cdot, \lambda_k) \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \left\| L^\circ(\tilde{U}, \lambda_k) - L^\circ(\tilde{V}, \lambda_k) \right\|_{\infty}$$

pour tout $1 \leq k \leq N$ où c est la constante donnée par (4.6). En multipliant la relation par le pas $\Delta\lambda$ et en sommant sur tous les $1 \leq k \leq N$, il vient

$$\left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \sum_{k=1}^N \left\| L^\circ(\tilde{U}, \lambda_k) - L^\circ(\tilde{V}, \lambda_k) \right\|_{\infty} \Delta\lambda$$

L'hypothèse 4.6 conduit à :

$$\left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \int_0^{\infty} \left\| L^\circ(\tilde{U}, \lambda) - L^\circ(\tilde{V}, \lambda) \right\|_{\infty} d\lambda$$

En utilisant la relation (2.8), on obtient

$$\left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\sigma}{\pi} \cdot \left\| \tilde{U}^4 - \tilde{V}^4 \right\|_{\infty} \leq cste \cdot \left\| \tilde{U} - \tilde{V} \right\|_{\infty}$$

puisque $\tilde{U}, \tilde{V} \in \tilde{D}$ (i.e. ils sont bornés par T_+). Par conséquent,

$$\left\| \tilde{U} - \tilde{V} \right\|_{\infty} + \left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} \leq cste \cdot \left\| \tilde{U} - \tilde{V} \right\|_{\infty} \quad \square$$

Proposition 4.18 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, la solution approchée de l'ETR $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T})$, donnée par le schéma numérique (4.9), est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{T} dans le

sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < \tilde{S}_i \leq \tilde{T}_i < +\infty$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, alors $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{S}, S_o, S_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T}, T_o, T_E)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq N$.

preuve.

On pose $H(x_i, \mu_j, \lambda_k) = \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot L^o(\tilde{T}_i, \lambda_k)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$, $\phi_o(\mu_j, \lambda_k) = L^o(T_o, \lambda_k)$ et $\phi_E(-\mu_j, \lambda_k) = L^o(T_E, \lambda_k)$ pour tout $1 \leq j \leq m/2$ et $1 \leq k \leq N$. Ensuite, on applique la proposition 4.14 en utilisant la remarque 2.1. \square

Corollaire 4.19 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T}) \in \underline{\tilde{D}}$, où l'ensemble $\underline{\tilde{D}}$ est donné par (4.51).

preuve.

On suppose que la température T est constante dans le milieu. Dans ce cas, d'après les relations (2.9) et (2.11), $L^o(T, \lambda)$ est solution de l'ETR. D'après la proposition 4.12, $L^o(T, \lambda_k) + C_{i,j,k}(T)$ est solution du schéma discret (4.9) où $C_{i,j,k}(T)$ est l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, qui vérifie :

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)| \leq \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\Delta \theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot L^o(T, \lambda_k) \cdot \sup_{\substack{\mu \in [-1,1] \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda_k) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda_k)] \right|$$

$\forall 1 \leq k \leq N$. En utilisant la monotonie de l'application $\tilde{\mathcal{L}}$ donnée par la proposition 4.18, il vient : $\tilde{\mathcal{L}}(T_-, T_-, T_-)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T}, T_-, T_+)(x_i, \mu_j, \lambda_k) \leq \tilde{\mathcal{L}}(T_+, T_+, T_+)(x_i, \mu_j, \lambda_k)$ avec $\tilde{\mathcal{L}}(T_-, T_-, T_-)(x_i, \mu_j, \lambda_k) = L^o(T_-, \lambda_k) + C_{i,j,k}(T_-)$ et $\tilde{\mathcal{L}}(T_+, T_+, T_+)(x_i, \mu_j, \lambda_k) = L^o(T_+, \lambda_k) + C_{i,j,k}(T_+)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq k \leq N$. \square

Maintenant, nous allons nous intéresser à l'application $\tilde{\mathcal{Q}}$ et nous donnons quelques propriétés qui portent sur le vecteur \tilde{F} donné par (3.56). Le théorème 4.16 montre que l'application $\tilde{\mathcal{Q}}$ est bien définie.

Théorème 4.20 : $\tilde{\mathcal{Q}}$ est une application continue de $\tilde{D} \times \underline{\tilde{D}}$ vers $\underline{\tilde{D}}$.

preuve.

Soit $\tilde{F}, \tilde{G} \in \underline{\tilde{D}}$ et $(\tilde{U}, \tilde{L}), (\tilde{V}, \tilde{L}') \in \tilde{D} \times \underline{\tilde{D}}$ tels que $\tilde{F} = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{U}, \tilde{L})$ et $\tilde{G} = \tilde{\mathcal{Q}}(\tilde{V}, \tilde{L}')$. Alors pour tout $1 \leq i \leq nt$, on a

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_i - \tilde{G}_i| &= \left| \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (\tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}'(x_i, \mu_j, \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta \lambda \right| \\ &\leq \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m |\tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}'(x_i, \mu_j, \lambda_k)| \cdot C_j^\theta \cdot \Delta \lambda \quad \text{en utilisant (2.12)} \end{aligned}$$

$$\leq \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sum_{k=1}^N \left\| \tilde{L}(\cdot, \cdot, \lambda_k) - \tilde{L}'(\cdot, \cdot, \lambda_k) \right\|_{\infty} \cdot \Delta\lambda = \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} \quad (\text{d'après la remarque 3.2, } \sum_{j=1}^m C_j^\theta = 1)$$

Par conséquent,
$$\left\| \tilde{F} - \tilde{G} \right\|_{\infty} \leq \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \left(\left\| \tilde{L} - \tilde{L}' \right\|_{1, \infty} + \left\| \tilde{U} - \tilde{V} \right\|_{\infty} \right) \quad \square$$

Proposition 4.21 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, $\tilde{F} = (\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T})$ est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{T} dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < \tilde{S}_i \leq \tilde{T}_i < +\infty \quad \forall 1 \leq i \leq nt$, alors $(\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{S}, S_o, S_E)_i \leq (\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T}, T_o, T_E)_i$ pour tout $1 \leq i \leq nt$. Par ailleurs, si $\tilde{T}_i = T_o = T_E \quad \forall 1 \leq i \leq nt$ alors $\tilde{F}_i = \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(\tilde{T}_i) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$.

preuve.

\tilde{F} s'écrit encore sous la forme : $\tilde{F} = \tilde{M} \sigma_a \cdot \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{T}, T_o, T_E)$. Alors, le résultat de monotonie s'ensuit en utilisant la proposition 4.18, la positivité de l'opérateur \tilde{M} et celle du coefficient σ_a donnée par (2.12). Supposons maintenant que $\tilde{T}_i = T_o = T_E \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. Alors, d'après le schéma numérique donné par (4.10), il vient $\tilde{F}_i = (\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i = \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(\tilde{T}_i) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. \square

Corollaire 4.22 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, $\tilde{F} \in \underline{\tilde{D}}'$ où $\underline{\tilde{D}}'$ est donné par (4.52).

preuve.

Le résultat s'ensuit d'après $(\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(T_-, T_-, T_-) \leq (\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T} T_-, T_+)_i \leq (\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(T_+, T_+, T_+) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$, comme établi dans la proposition précédente avec $\tilde{F}_i = (\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T}, T_-, T_+)_i$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $(\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(T_-, T_-, T_-) = \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(T_-)$ et $(\tilde{\mathcal{Q}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(T_+, T_+, T_+) = \tilde{M} \sigma_a \cdot L^o(T_+)$ \square

Nous allons à présent étudier l'application $\tilde{\mathcal{A}}$. Dans un premier temps, nous allons montrer que l'application est bien définie i.e. que pour $\tilde{F} = (\tilde{F}_i)_{1 \leq i \leq nt} \in \underline{\tilde{D}}'$ donné, le schéma numérique semi-linéaire d'ordre deux (4.10) a une unique solution positive $\tilde{T} \in \overline{\tilde{D}}$ qui satisfait les propriétés de monotonie par rapport aux données. Au préalable, nous faisons une remarque utile pour la suite.

Remarque 4.23 : D'après la remarque 2.1 et la remarque 2.8, la fonction $\tilde{\Phi}$ donnée par (3.57) est une fonction strictement croissante de \tilde{T} .

Théorème 4.24 : On se donne $\tilde{F} \in \underline{\tilde{D}}'$. Alors, le schéma numérique (4.10) a une unique solution positive $\tilde{T} \in \overline{\tilde{D}}$.

preuve.

Pour commencer, prouvons par l'absurde que $\bar{T}_- \leq \bar{T}_i \leq \bar{T}_+ \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. Supposons alors que $\exists i_o, 1 \leq i_o \leq nt$ tel que $\bar{T}_{i_o} < \bar{T}_-$. Dans ce cas, il existe un ensemble $\{n_1, \dots, n_2\}$ contenant i_o tel que $\bar{T}_i < \bar{T}_- \quad \forall n_1 < i < n_2$ et $\bar{T}_{n_1} \geq \bar{T}_-, \bar{T}_{n_2} \geq \bar{T}_-$. En utilisant la monotonie de $\tilde{\Phi}$ (remarque 4.23), il vient $(\tilde{\Phi}(\bar{T}))_i < \tilde{\Phi}(\bar{T}_-) \quad \forall n_1 < i < n_2$. Puisque $\tilde{F} \in \tilde{D}'$ i.e. $\tilde{\Phi}(\bar{T}_-) \leq \tilde{F}_i \leq \tilde{\Phi}(\bar{T}_+) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$, on a

$$\frac{\bar{T}_{i+1} - 2 \cdot \bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{h^2} = 2\pi \cdot \left\{ (\tilde{\Phi}(\bar{T}))_i - \tilde{F}_i \right\} < 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$$

Posons alors $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i + \bar{T}_- \quad \forall n_1 < i < n_2$. Dans ce cas, $\bar{\alpha}_{n_1} \geq 0, \bar{\alpha}_{n_2} \geq 0$ et

$$\frac{\bar{\alpha}_{i+1} - 2 \cdot \bar{\alpha}_i + \bar{\alpha}_{i-1}}{h^2} < 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$$

En appliquant le principe du maximum discret, on déduit que $\bar{\alpha}_i \geq 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$ et ensuite $\bar{T}_i \geq \bar{T}_- \quad \forall n_1 < i < n_2$. En particulier $\bar{T}_{i_o} \geq \bar{T}_-$, ce qui est une contradiction. Par conséquent $\bar{T}_- \leq \bar{T}_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. De manière similaire, on montre que $\bar{T}_i \leq \bar{T}_+ \quad \forall 1 \leq i \leq nt$.

Pour résoudre le schéma (4.10), on applique la méthode de Newton [17]. (4.10) est équivalent au problème de point fixe $G(\bar{T}) = 0$ où $G: \bar{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt}$. On note la i ème composante de G par G_i . Alors, on a

$$G_i(\bar{T}) = 2\pi \cdot \left\{ (\tilde{\Phi}(\bar{T}))_i - \tilde{F}_i \right\} + \frac{1}{h^2} \left\{ -\bar{T}_{i+1} + 2 \cdot \bar{T}_i - \bar{T}_{i-1} \right\} \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

Soit $\nabla G: \bar{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt} \times \mathbf{R}^{nt}$ la matrice Jacobienne de G . Elle est donnée par

$$(\nabla G(\bar{T}))_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial \bar{T}_j}(\bar{T}) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} \cdot (2 + 2\pi \cdot h^2 \cdot (\tilde{\Phi}'(\bar{T}))_i) & \text{si } i = j \\ \frac{-1}{h^2} & \text{si } j = i+1 \text{ ou } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où, d'après (3.57),

$$(\tilde{\Phi}'(\bar{T}))_i = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}^o}{\partial T}(\lambda_k) \cdot \frac{1}{\lambda_c(\bar{T}_i)} \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta \lambda \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

D'après la remarque 2.1 et la relation (2.15), il vient $(\tilde{\Phi}'(\bar{T}))_i > 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. De plus, $\forall \bar{T} \in \bar{D}, \nabla G(\bar{T})$ est une matrice à diagonale strictement dominante. Elle est donc inversible. Par ailleurs, $\nabla G: \bar{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt} \times \mathbf{R}^{nt}$ est Lipschitzienne. En effet, soient $\bar{T}, \bar{\theta} \in \bar{D}$ et $\tilde{T}, \tilde{\theta} \in \tilde{D}$ tel que $\tilde{T}_i = \Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \tilde{\theta}_i = \Psi_c^{-1}(\bar{\theta}_i) \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. Alors, on a successivement :

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla G(\bar{T}) - \nabla G(\bar{\theta}) \right\|_{\infty} = 2\pi \cdot \max_{1 \leq i \leq nt} \left| (\tilde{\Phi}'(\bar{T}))_i - (\tilde{\Phi}'(\bar{\theta}))_i \right| \\
& \leq 2\pi \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sum_{k=1}^N \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\bar{T}_i)} \cdot \frac{\partial L^o}{\partial T}(\bar{T}_i, \lambda_k) - \frac{1}{\lambda_c(\bar{\theta}_i)} \cdot \frac{\partial L^o}{\partial T}(\bar{\theta}_i, \lambda_k) \right| \Delta\lambda \quad \left(\sum_{j=1}^m \sin(\theta_j) \cdot C_j^o < 1 \right) \\
& \leq 2\pi \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \int_0^{\infty} \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{1}{\lambda_c(\bar{T}_i)} \cdot \frac{\partial L^o}{\partial T}(\bar{T}_i, \lambda) - \frac{1}{\lambda_c(\bar{\theta}_i)} \cdot \frac{\partial L^o}{\partial T}(\bar{\theta}_i, \lambda) \right| d\lambda
\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse 4.6. Par le théorème de dérivation sous l'intégrale et (2.8), on a :

$$\frac{d}{dT} \int_0^{\infty} L^o(T, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{\partial L^o}{\partial T}(T, \lambda) d\lambda = \frac{4 \cdot \sigma \cdot T^3}{\pi}$$

Alors, on a successivement

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla G(\bar{T}) - \nabla G(\bar{\theta}) \right\|_{\infty} \\
& \leq 8 \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sigma \cdot \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \frac{\bar{T}_i^3}{\lambda_c(\bar{T}_i)} - \frac{\bar{\theta}_i^3}{\lambda_c(\bar{\theta}_i)} \right| \\
& \leq \frac{8 \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sigma}{(\lambda_c(T_-))^2} \cdot \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \lambda_c(\bar{\theta}_i) \cdot \bar{T}_i^3 - \lambda_c(\bar{T}_i) \cdot \bar{\theta}_i^3 \right| \quad (\text{en utilisant l'hypothèse 4.2}) \\
& \leq \frac{8 \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sigma}{(\lambda_c(T_-))^2} \cdot \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \lambda_c(\bar{\theta}_i) \cdot (\bar{T}_i^3 - \bar{\theta}_i^3) + \bar{\theta}_i^3 \cdot (\lambda_c(\bar{\theta}_i) - \lambda_c(\bar{T}_i)) \right| \leq \gamma \cdot \left\| \bar{T} - \bar{\theta} \right\|_{\infty}
\end{aligned}$$

avec la constante de Lipschitz γ donnée par (4.8). L'algorithme de Newton est donné par :

$$\bar{T}^{(n+1)} = \bar{T}^{(n)} - (\nabla G)^{-1}(\bar{T}^{(n)}) \cdot G(\bar{T}^{(n)})$$

et l'algorithme converge si la donnée initiale $\bar{T}^{(0)} \in B(\bar{T}, \delta)$ avec

$$\delta < \frac{1}{\gamma \cdot \left\| (\nabla G(\bar{T}))^{-1} \right\|_{\infty}} \quad (4.54)$$

D'après [18], $\left\| (\nabla G(\bar{T}))^{-1} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}$ qui est une constante indépendante de h . Alors, il suffit de prendre $\delta < 8/\gamma$ (cette condition est vérifiée par l'hypothèse 4.7). Ce qui termine la démonstration du théorème. \square

Corollaire 4.25 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, le schéma numérique (4.10) a une solution unique $\bar{T} = (\tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\bar{T})$ tel que $\bar{T} \in \bar{\mathcal{D}}$.

Preuve :

Il suffit d'appliquer le théorème 4.24 avec $\tilde{F} = (\tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\bar{T})$. $\tilde{F} \in \bar{\mathcal{D}}$ d'après le corollaire 4.22. \square

Maintenant, nous donnons un résultat de continuité pour l'application $\tilde{\mathcal{A}}$.

Théorème 4.26 : $\tilde{\mathcal{A}}$ est une application continue de $\underline{\tilde{D}}'$ vers $\underline{\tilde{D}}$.

preuve.

Soit $\tilde{F}, \tilde{G} \in \underline{\tilde{D}}'$, $\tilde{U} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{F}, T_o, T_E)$, $\tilde{V} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{G}, T_o, T_E)$ et $\tilde{W} = \tilde{U} - \tilde{V}$. Alors \tilde{W} est solution du problème discret suivant

$$\begin{cases} \frac{\tilde{W}_{i+1} - 2 \cdot \tilde{W}_i + \tilde{W}_{i-1}}{h^2} = 2\pi \cdot \left\{ (\tilde{\Phi}(\tilde{U}))_i - (\tilde{\Phi}(\tilde{V}))_i - (\tilde{F}_i - \tilde{G}_i) \right\} \quad \forall 1 \leq i \leq nt \\ \tilde{W}_0 = \tilde{W}_{nt+1} = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle, on a

$$A \cdot \tilde{W} = -2\pi \cdot \left\{ \tilde{\Phi}(\tilde{U}) - \tilde{\Phi}(\tilde{V}) - (\tilde{F} - \tilde{G}) \right\} \quad (4.55)$$

où A est la matrice de discrétisation de l'opérateur $-\Delta$ en dimension un. En effectuant le produit scalaire de (4.55) avec le vecteur \tilde{W} , il vient

$$(A \cdot \tilde{W}, \tilde{W})_2 = -2\pi \cdot (\tilde{\Phi}(\tilde{U}) - \tilde{\Phi}(\tilde{V}), \tilde{W})_2 + 2\pi \cdot (\tilde{F} - \tilde{G}, \tilde{W})_2$$

En utilisant la monotonie de la fonction $\tilde{\Phi}$ (remarque 4.23), on observe que le premier terme du membre de droite est négative. Alors, on a

$$(A \cdot \tilde{W}, \tilde{W})_2 \leq 2\pi \cdot (\tilde{F} - \tilde{G}, \tilde{W})_2 \leq 2\pi \cdot \left\| \tilde{W} \right\|_2 \cdot \left\| \tilde{F} - \tilde{G} \right\|_2 \leq 2\pi \cdot nt^2 \cdot \left\| \tilde{W} \right\|_\infty \cdot \left\| \tilde{F} - \tilde{G} \right\|_\infty$$

Par ailleurs,

$$\omega_1 \cdot \left\| \tilde{W} \right\|_\infty^2 \leq \omega_1 \cdot \left\| \tilde{W} \right\|_2^2 \leq (A \cdot \tilde{W}, \tilde{W})_2$$

où $\omega_1 > 0$ est la plus petite valeur propre de la matrice A . Alors si $\tilde{W} \neq 0$ et en divisant par $\left\| \tilde{W} \right\|_\infty$, on obtient

$$\left\| \tilde{W} \right\|_\infty \leq cste \cdot \left\| \tilde{F} - \tilde{G} \right\|_\infty \quad \square$$

Nous terminons maintenant la discussion sur $\tilde{\mathcal{A}}$ avec un résultat de monotonie.

Proposition 4.27 : On se donne \tilde{F} et $\tilde{G} \in \underline{\tilde{D}}'$. Alors, l'application $\tilde{\mathcal{A}}$ est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{F} dans le sens que si $T_- \leq S_o \leq T_o \leq T_+$; $T_- \leq S_E \leq T_E \leq T_+$ et $0 \leq \tilde{G}_i \leq \tilde{F}_i < +\infty \quad \forall 1 \leq i \leq nt$ alors $\tilde{\mathcal{A}}(\tilde{G}, S_o, S_E)_i \leq \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{F}, T_o, T_E)_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt$.

preuve.

Posons $\tilde{U} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{F}, T_o, T_E)$, $\tilde{V} = \tilde{\mathcal{A}}(\tilde{G}, S_o, S_E)$ et $\tilde{W} = \tilde{U} - \tilde{V}$. Alors \tilde{W} est solution du problème discret suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\widetilde{W}}_{i+1} - 2 \cdot \overline{\widetilde{W}}_i + \overline{\widetilde{W}}_{i-1}}{h^2} = 2\pi \cdot \left\{ (\tilde{\Phi}(\overline{\widetilde{U}}))_i - (\tilde{\Phi}(\overline{\widetilde{V}}))_i - (\overline{\widetilde{F}}_i - \overline{\widetilde{G}}_i) \right\} \quad \forall 1 \leq i \leq nt \\ \overline{\widetilde{W}}_o = \overline{T}_o - \overline{S}_o \geq 0 \\ \overline{\widetilde{W}}_{nt+1} = \overline{T}_E - \overline{S}_E \geq 0 \end{array} \right.$$

Nous devons montrer que $\overline{\widetilde{W}}_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. La démonstration est similaire à celle présentée pour le théorème 4.24. Par l'absurde, supposons que $\exists i_o ; 1 \leq i_o \leq nt$ tel que $\overline{\widetilde{W}}_{i_o} < 0$, alors il existe un ensemble $\{n_1, \dots, n_2\}$ ($n_1 < i_o < n_2$) tel que $\overline{\widetilde{W}}_i = \overline{\widetilde{U}}_i - \overline{\widetilde{V}}_i < 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$ et $\overline{\widetilde{W}}_{n_1} \geq 0, \overline{\widetilde{W}}_{n_2} \geq 0$. Alors, puisque $\tilde{\Phi}$ est strictement croissante (remarque 4.23), $(\tilde{\Phi}(\overline{\widetilde{U}}))_i - (\tilde{\Phi}(\overline{\widetilde{V}}))_i < 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$ et $\overline{\widetilde{F}}_i - \overline{\widetilde{G}}_i \geq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$, on a $\frac{\overline{\widetilde{W}}_{i+1} - 2 \cdot \overline{\widetilde{W}}_i + \overline{\widetilde{W}}_{i-1}}{h^2} \leq 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$. En appliquant le principe du maximum discret, on en déduit que $\overline{\widetilde{W}}_i \geq 0 \quad \forall n_1 < i < n_2$. En particulier $\overline{\widetilde{W}}_{i_o} \geq 0$, ce qui est une contradiction. \square

Il reste enfin à étudier l'application $\tilde{\Psi}_c^{-1}$. Le théorème suivant permet de montrer que l'application est bien définie.

Théorème 4.28 : On se donne $\overline{\widetilde{T}} \in \overline{\widetilde{D}}$. Alors, le schéma numérique (4.11) a une unique solution positive $\tilde{T} \in \tilde{D}$.

preuve.

Si on connaît explicitement la fonction Ψ_c^{-1} , on a directement le résultat. Dans le cas contraire, pour résoudre l'équation (4.11), on applique de nouveau la méthode de Newton. (4.11) est équivalent au problème de point fixe (3.59) i.e. $F^*(\tilde{T}) = 0$ où $F^* : \tilde{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt}$. Les composantes de F^* sont données par

$$F_i^*(\tilde{T}) = \Psi_c(\tilde{T}_i) - \tilde{T}_i \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

Soit $\nabla F^* : \tilde{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt} \times \mathbf{R}^{nt}$ la matrice Jacobienne de F^* . Elle est donnée par

$$(\nabla F^*(\tilde{T}))_{ij} = \frac{\partial F_i^*}{\partial \tilde{T}_j}(\tilde{T}) = \begin{cases} \lambda_c(\tilde{T}_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall \tilde{T} \in \tilde{D}$, $\nabla F^*(\tilde{T})$ est donc une matrice diagonale et d'après l'hypothèse 2.2, chaque élément de la diagonale est strictement positif. La matrice est alors inversible. Par ailleurs, d'après l'hypothèse 4.2, la fonction λ_c est Lipschitzienne. Par conséquent, $\nabla F^* : \tilde{D} \subset \mathbf{R}^{nt} \rightarrow \mathbf{R}^{nt} \times \mathbf{R}^{nt}$ l'est aussi. L'algorithme de Newton est donné par :

$$\tilde{T}^{(n+1)} = \tilde{T}^{(n)} - (\nabla F^*)^{-1}(\tilde{T}^{(n)}) \cdot F^*(\tilde{T}^{(n)})$$

et l'algorithme converge si la donnée initiale $\tilde{T}^{(0)} \in B(\tilde{T}, \eta)$ avec

$$\eta < \frac{\min_{1 \leq i \leq nt} |\lambda_c(\tilde{T}_i)|}{\gamma_{\lambda_c}}$$

Alors, d'après l'hypothèse 4.2, il suffit de prendre $\eta < \lambda_c(T_-) / \gamma_{\lambda_c}$ (cette condition est vérifiée par l'hypothèse 4.7). Avant de terminer la preuve, notons que la solution \tilde{T} appartient bien au domaine \tilde{D} . \square

Nous énonçons maintenant un résultat de monotonie pour l'application point fixe $\tilde{\mathcal{F}}$ qui est une conséquence directe de ce qui vient d'être fait jusqu'à présent.

Proposition 4.29 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, l'application $\tilde{\mathcal{F}}$ est une fonction monotone de T_o, T_E, \tilde{T} dans le sens que si $0 < S_o \leq T_o < +\infty$, $0 < S_E \leq T_E < +\infty$ et $0 < \tilde{S}_i \leq \tilde{T}_i < +\infty \forall 1 \leq i \leq nt$, alors $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{S}, S_o, S_E)_i \leq \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}, T_o, T_E)_i \forall 1 \leq i \leq nt$.

preuve.

Le résultat vient de l'expression de $\tilde{\mathcal{F}}$ donnée par (4.50), la remarque 2.8, la proposition 4.21 et la proposition 4.27. \square

Lemme 4.30 : Supposons que la sous-solution que l'on note (\tilde{L}, \tilde{U}) et que la sur-solution que l'on note (\tilde{L}', \tilde{V}') , du schéma numérique (4.9) (4.10) et (4.11) existent. Dans ce cas, posons $\tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) = \tilde{L}'(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda)$ pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$, $\lambda \in (0, \infty)$ et $\tilde{j}(0, \mu_j, \lambda) = \tilde{j}(E, -\mu_j, \lambda) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq m/2$, $\lambda \in (0, \infty)$. Par ailleurs, définissons la quantité I_λ^k lorsque pour un indice $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$ et $\lambda \in (0, \infty)$ fixés, il existe $1 \leq j \leq m/2$ tel que $\tilde{j}(x_k, -\mu_j, \lambda) \neq 0$ ou $\tilde{j}(x_{nt+1-k}, \mu_j, \lambda) \neq 0$, par :

$$I_\lambda^k = \frac{1}{h} \cdot \sum_{j=1}^{m/2} (\tilde{j}(x_k, -\mu_j, \lambda) + \tilde{j}(x_{nt+1-k}, \mu_j, \lambda)) \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta - \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^m \varepsilon_1(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda) \cdot \tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \quad (4.56)$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$ et pour tout $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$. Ent désigne la partie entière et ε_1 est l'erreur d'intégration donnée par (4.4). Alors, il existe un pas $\Delta\theta$ suffisamment petit qui vérifie $I_\lambda^k \geq 0$ pour tout $1 \leq k \leq \text{Ent}(nt/2) + 1$.

Preuve.

D'après le lemme 4.15 et le corollaire 4.19, il vient

$$0 \leq \frac{h \cdot \sigma_a(\mu_j, \lambda)}{1 + h \cdot \sigma_e^+} \cdot (L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda) - L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda)) \leq \tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) \leq L^\circ(T_+, \lambda) + O(\Delta\theta^4)$$

ou encore en utilisant la relation (2.12)

$$0 \leq \frac{h \cdot \tilde{\sigma}_a^-}{1 + h \cdot \tilde{\sigma}_e^+} \cdot (L^\circ(\tilde{V}_i, \lambda) - L^\circ(\tilde{U}_i, \lambda)) \leq \tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) \leq L^\circ(T_+, \lambda) + O(\Delta\theta^4) \quad (4.57)$$

pour tout $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\lambda \in (0, \infty)$. D'après la relation (4.4), $\varepsilon_1(\Delta\theta, \mu, \mu_j, \lambda) \rightarrow 0$ lorsque $\Delta\theta \rightarrow 0$. Ensuite le résultat se déduit facilement. \square

Théorème 4.31 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, l'application $\tilde{\mathcal{F}}$ a un point fixe $\tilde{T} \in \tilde{D}$ qui est unique.

Preuve.

D'après (4.50), $\tilde{\mathcal{F}}$ est donnée par $\tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}) = (\tilde{\Psi}_c^{-1} \circ \tilde{\mathcal{A}} \circ \tilde{\mathcal{B}} \circ \tilde{\mathcal{C}})(\tilde{T})$ pour tout $\tilde{T} \in \tilde{D}$. Alors $\tilde{\mathcal{F}}$ est bien définie et va de \tilde{D} dans \tilde{D} . $\tilde{\mathcal{F}}$ est une application continue comme composition d'applications continues d'après les théorèmes 4.17, 4.20, 4.26 et la remarque 2.8.

Définissons maintenant une suite en posant $\tilde{U}^{(0)} = T_-$ et $\tilde{U}^{(n)} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U}^{(n-1)})$ pour tout $n \geq 1$. La proposition 4.29 implique que la suite est croissante. Par ailleurs, elle est majorée par T_+ , et donc converge vers une limite \tilde{U} bornée. Par la continuité de $\tilde{\mathcal{F}}$, $\tilde{U} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{U})$. De la même façon, définissons la suite $\tilde{V}^{(n)}$ par $\tilde{V}^{(0)} = T_+$ et $\tilde{V}^{(n)} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{V}^{(n-1)})$ pour tout $n \geq 1$. La suite $\tilde{V}^{(n)}$ est décroissante et minorée par T_- et donc converge vers une limite \tilde{V} bornée telle que $\tilde{V} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{V})$. Soit maintenant la suite $\tilde{T}^{(n)}$ définie par $\tilde{T}^{(0)} \in \tilde{D}$ et $\tilde{T}^{(n)} = \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{T}^{(n-1)})$ pour tout $n \geq 1$. Alors, par la monotonie de $\tilde{\mathcal{F}}$ (proposition 4.29), il vient $\tilde{U}_i^{(n)} \leq \tilde{T}_i^{(n)} \leq \tilde{V}_i^{(n)}$ pour tout $1 \leq i \leq nt$ et $n \geq 0$. Par ailleurs, si $\tilde{U} = \tilde{V}$ alors par le théorème de comparaison des suites $\tilde{T}^{(n)} \rightarrow \tilde{T} = \tilde{U} = \tilde{V}$. Il faut donc montrer que $\tilde{U} = \tilde{V}$ ou encore $\overline{\tilde{U}} = \overline{\tilde{V}}$ en posant $\overline{\tilde{U}}_i = \Psi_c(\tilde{U}_i)$ et $\overline{\tilde{V}}_i = \Psi_c(\tilde{V}_i) \forall 1 \leq i \leq nt$. La différence $\overline{\tilde{W}}_i = \overline{\tilde{V}}_i - \overline{\tilde{U}}_i \geq 0 \forall 1 \leq i \leq nt$, satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overline{\tilde{W}}_{i+1} - 2 \cdot \overline{\tilde{W}}_i + \overline{\tilde{W}}_{i-1}}{h^2} \\ = 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\overline{\tilde{V}}_i), \lambda_k) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\overline{\tilde{U}}_i), \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \\ - 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (\tilde{\mathcal{L}}(\Psi_c^{-1}(\overline{\tilde{V}})) - \tilde{\mathcal{L}}(\Psi_c^{-1}(\overline{\tilde{U}})))(x_i, \mu_j, \lambda_k) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \\ \forall 1 \leq i \leq nt \\ \overline{\tilde{W}}_0 = \overline{\tilde{W}}_{nt+1} = 0 \end{array} \right. \quad (4.58)$$

En sommant la relation sur les $1 \leq i \leq nt$, il vient :

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{1}{h^2} \cdot (\bar{W}_1 + \bar{W}_{nt}) \\
&= 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V}_i), \lambda_k) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}_i), \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \quad (4.59) \\
&\quad - 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (\tilde{\mathcal{L}}(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - \tilde{\mathcal{L}}(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))) (x_i, \mu_j, \lambda_k) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda
\end{aligned}$$

Posons alors

$$F_\lambda^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T})) = \left[\left\{ L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda) \right\}_{1 \leq i \leq nt} \right] \quad \text{où} \quad \left\{ L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda) \right\} = \begin{bmatrix} L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda) \\ \vdots \\ L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda) \end{bmatrix} \quad \forall 1 \leq i \leq nt$$

$$C = \begin{bmatrix} C^* \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C^* \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad C^* = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) \cdot C_1^\theta \\ \vdots \\ \sin(\theta_{m/2}) \cdot C_{m/2}^\theta \\ \sin(\theta_1) \cdot C_1^\theta \\ \vdots \\ \sin(\theta_{m/2}) \cdot C_{m/2}^\theta \end{bmatrix}$$

et

$$D_{a\lambda} = \begin{bmatrix} \Sigma_{a\lambda} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Sigma_{a\lambda} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Sigma_{a\lambda} = \begin{bmatrix} \sigma_a(\mu_1, \lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_a(\mu_{m/2}, \lambda) & \\ & & & \sigma_a(\mu_1, \lambda) \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \sigma_a(\mu_{m/2}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$F_\lambda^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}))$ est un vecteur colonne de taille $nt \cdot m$ et pour l'indice i fixé $\left\{ L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda) \right\}$ est un vecteur colonne de taille m . C est un vecteur colonne de taille $nt \cdot m$ et C^* est un vecteur colonne de taille m . $D_{a\lambda}$ est une matrice diagonale de taille $nt \cdot m$ et $\Sigma_{a\lambda}$ est une matrice diagonale de taille m .

Alors, en utilisant le système linéaire (4.15) et la relation (4.59), il vient :

$$\begin{aligned}
0 &\geq -\frac{1}{h^2} \cdot (\bar{W}_1 + \bar{W}_{nt}) \\
&= 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \left\langle (I - (M_{\lambda_k} - N_{\lambda_k})^{-1} \cdot D_{a\lambda_k}) \cdot (F_{\lambda_k}^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - F_{\lambda_k}^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))), D_{a\lambda_k} \cdot C \right\rangle \Delta\lambda \quad (4.61)
\end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représente le produit scalaire euclidien dans $\mathbf{R}^{nt \times m}$.

Par ailleurs, pour tout $\lambda > 0$, on a successivement

$$\begin{aligned}
& \left\langle (I - (M_\lambda - N_\lambda)^{-1} \cdot D_{a\lambda}) \cdot (F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))), D_{a\lambda} \cdot C \right\rangle \\
&= \left\langle D_{a\lambda}^{-1} \cdot (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot (M_\lambda - N_\lambda)^{-1} \cdot D_{a\lambda} \cdot (F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))), D_{a\lambda} \cdot C \right\rangle \\
&= \left\langle (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot (M_\lambda - N_\lambda)^{-1} \cdot D_{a\lambda} \cdot (F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{U}))), C \right\rangle \\
&= \left\langle (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot \tilde{J}_\lambda, C \right\rangle
\end{aligned}$$

en posant $\tilde{J}_\lambda = (M_\lambda - N_\lambda)^{-1} \cdot D_{a\lambda} \cdot (F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{V})) - F_\lambda^o(\Psi_c^{-1}(\bar{U})))$. \tilde{J}_λ est un vecteur de taille $nt \cdot m$ et représente la différence de deux solutions (pour deux températures différentes) du schéma numérique (4.9). On note ses composantes $\tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda)$ pour $1 \leq i \leq nt$, $1 \leq j \leq m$ et $\tilde{j}(0, \mu_j, \lambda)$, $\tilde{j}(E, -\mu_j, \lambda)$ les conditions aux bords. En fait, on a :

$$\begin{aligned}
\tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) &= \tilde{\mathcal{L}}(\bar{V})(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{\mathcal{L}}(\bar{U})(x_i, \mu_j, \lambda) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m, \lambda \in (0, \infty) \text{ et} \\
\tilde{j}(0, \mu_j, \lambda) &= \tilde{j}(E, -\mu_j, \lambda) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m/2, \lambda \in (0, \infty). \text{ D'après la proposition 4.18,}
\end{aligned}$$

on déduit que $(\tilde{\mathcal{L}}(\bar{U}), \bar{U})$ et $(\tilde{\mathcal{L}}(\bar{V}), \bar{V})$ sont respectivement sous-solution et sur-solution du schéma numérique (4.9) (4.10) (4.11). Les relations (4.9), (4.15), (4.17), (4.20) et (4.59) conduisent à :

$$\begin{aligned}
& \left\langle (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot \tilde{J}_\lambda, C \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{m/2} \mu_j \cdot \frac{\tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{j}(x_{i-1}, \mu_j, \lambda)}{h} \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \\
&+ \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^{m/2} -\mu_j \cdot \frac{\tilde{j}(x_{i+1}, -\mu_j, \lambda) - \tilde{j}(x_i, -\mu_j, \lambda)}{h} \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \\
&+ \sum_{i=1}^{nt} \sum_{j=1}^m \sigma_s(\mu_j, \lambda) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \tilde{j}(x_i, \mu_j, \lambda) \\
&- \sum_{i=1}^{nt} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m P(\mu_k \rightarrow \mu_j, \lambda) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \tilde{j}(x_i, \mu_k, \lambda)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation (4.1) et en sommant sur les $1 \leq i \leq nt$, il vient :

$$\left\langle (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot \tilde{J}_\lambda, C \right\rangle = I_\lambda^1$$

où I_λ^1 est défini par (4.56). D'après l'hypothèse 4.5 et le lemme 4.30, on a :

$$\left\langle (M_\lambda - D_{a\lambda} - N_\lambda) \cdot \tilde{J}_\lambda, C \right\rangle \geq 0 \text{ pour tout } \lambda \in (0, \infty) \quad (4.62)$$

Alors, les relations (4.61) et (4.62) conduisent à $\bar{W}_1 = \bar{W}_{nt} = 0$. Notons que si $\tilde{j}(x_1, -\mu_j, \lambda) = \tilde{j}(x_{nt}, \mu_j, \lambda) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m/2$ et $\lambda \in (0, \infty)$ alors, on déduit directement, d'après la relation (4.57), que $\bar{W}_1 = \bar{W}_{nt} = 0$. En répétant la même procédure mais en sommant cette fois-ci (4.58) sur les $2 \leq i \leq nt - 1$, on aura $\bar{W}_2 = \bar{W}_{nt-1} = 0$. Ainsi de suite, pour avoir finalement $\bar{W}_i = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. Ce qui achève la démonstration du théorème. \square

Nous pouvons maintenant conclure ce paragraphe sur l'existence d'une solution unique au schéma numérique couplé (4.9) (4.10) (4.11).

Théorème 4.32 : Le schéma numérique donné par (4.9) (4.10) et (4.11) admet une solution unique. De plus, la solution approchée (\tilde{T}, \tilde{L}) est telle que $\tilde{T} \in \tilde{D}$ et $\tilde{L} \in \tilde{D}$ où \tilde{D} et \tilde{D} sont donnés respectivement par (4.48) et (4.51).

preuve :

Le théorème 4.31 assure l'existence d'un unique point fixe $\tilde{T} \in \tilde{D}$. Alors \tilde{T} satisfait (4.10) (4.11) avec \tilde{F} donnée par (3.56). Par conséquent, si \tilde{L} satisfait le schéma numérique (4.9) alors le couple (\tilde{T}, \tilde{L}) satisfait le schéma numérique (4.9) (4.10) (4.11). D'après le corollaire 4.19, $\tilde{L} \in \tilde{D}$. \square

4.2.4 Convergence du schéma numérique pour le système couplé

Dans ce paragraphe, nous montrons la convergence de la solution approchée (\tilde{T}, \tilde{L}) vers la solution continue (T, L) du système (2.1)–(2.6), en établissant successivement des preuves de convergence pour \tilde{L} et \tilde{T} . Nous donnons aussi par la même occasion, une preuve de convergence du flux ‘‘approché’’ \tilde{Q}_r vers le flux continue Q_r .

Proposition 4.33 : Sous les hypothèses du théorème 4.16, soit L la solution exacte de l'ETR et \tilde{L} la solution approchée vérifiant le schéma numérique (4.9). Alors, on a la majoration suivante :

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}} \left| L(x_i, \mu_j, \lambda) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda) \right| = \left\| L(\cdot, \cdot, \lambda) - \tilde{L}(\cdot, \cdot, \lambda) \right\|_{\infty} \leq a_1(\lambda) \cdot h + a_2(\lambda) \cdot \Delta \theta^4 \quad (4.63)$$

$$a_1(\lambda) = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda) \right| \quad (4.64)$$

$$a_2(\lambda) = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda) \cdot L(x, \mu, \lambda)] \right|$$

pour tout $\lambda \in (0, \infty)$, où c est la constante donnée par (4.6).

preuve :

On applique la proposition 4.12. \square

Proposition 4.34 : Sous les hypothèses de la proposition 4.33, soit Q_r donné par (2.5) et \tilde{Q}_r donné par (3.63). Alors, on a la majoration suivante :

$$\left\| Q_r - \tilde{Q}_r \right\|_{\infty} \leq \delta_1(\lambda_{\max}) + b_1 \cdot h + b_2 \cdot \Delta \theta^4 + b_3 \cdot \Delta \lambda^2 + b_4 \cdot \Delta \lambda^2 \cdot \Delta \theta^4 \quad (4.65)$$

où

$\delta_1(\lambda_{\max}) = 4\pi \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} L^\circ(T_+, \lambda) d\lambda$ et $\delta_1(\lambda_{\max}) \xrightarrow{\lambda_{\max} \rightarrow \infty} 0$. b_i , $1 \leq i \leq 4$ sont des constantes données par

$$b_1 = \frac{\pi}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, \mu, \lambda_k) \right| \Delta\lambda$$

$$b_2 = \frac{1}{1-c} \cdot \frac{1}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda_k) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda_k) \cdot L(x, \mu, \lambda_k)] \right| \Delta\lambda$$

$$+ \frac{\pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda_k) \cdot \mu] \right| \Delta\lambda$$

$$b_3 = \frac{\pi \cdot \lambda_{\max}}{6} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x, \mu, \lambda) \right|$$

$$b_4 = \frac{\lambda_{\max} \cdot \pi^2}{17280} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu] \right|$$

preuve :

D'après (2.5) et (3.63), on a pour tout $1 \leq i \leq nt$

$$\left| Q_r(x_i) - \tilde{Q}_r(x_i) \right| = 2\pi \cdot \left| \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda - \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \right|$$

$$\text{Or } \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda = \int_0^{\lambda_{\max}} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda + \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda$$

$$\text{et } \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu = \sum_{j=1}^m L(x_i, \mu_j, \lambda) \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta + \varepsilon_4(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda)$$

où ε_4 est un réel qui représente l'erreur d'intégration en θ , donné par

$$\varepsilon_4(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda) = -\frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu]$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_{\max}} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu d\mu d\lambda &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m L(x_i, \mu_j, \lambda_k) \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda + \varepsilon_5(\Delta\lambda, \lambda, \mu_j, x_i) \\ &+ \sum_{k=1}^N \varepsilon_4(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda_k) \Delta\lambda + \varepsilon_6(\Delta\theta, \Delta\lambda, \lambda, \mu, x_i) \end{aligned}$$

où ε_5 et ε_6 sont des réels qui représentent les erreurs d'intégration en λ .

Pour approcher l'intégrale en λ , on utilise la formule des trapèzes composée [15]. Dans ce cas, l'erreur est donnée par

$$\varepsilon(f) = -\frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max}}{12} \cdot f^{(2)}(\lambda)$$

si f est, de manière générale, la fonction à intégrer sur l'intervalle $[0, \lambda_{\max}]$.

ε_5 et ε_6 sont alors donnés par

$$\begin{aligned}\varepsilon_5(\Delta\lambda, \lambda, \mu_j, x_i) &= -\frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max}}{12} \cdot \mu_j \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x_i, \mu_j, \lambda) \\ \varepsilon_6(\Delta\theta, \Delta\lambda, \lambda, \mu, x_i) &= -\frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max}}{12} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_4}{\partial \lambda^2}(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda) \\ &= \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max}}{12} \cdot \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi}{2880} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^2 \partial^4}{\partial \lambda^2 \partial \mu^4} [L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu]\end{aligned}$$

Finalement, on aura pour tout $1 \leq i \leq nt$

$$\begin{aligned}\left| Q_r(x_i) - \tilde{Q}_r(x_i) \right| &\leq 2\pi \cdot \left| \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu \, d\mu \, d\lambda \right| \\ &\quad + 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \left| L(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \right| \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \\ &\quad + 2\pi \cdot \left(\sum_{k=1}^N \left| \varepsilon_4(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda_k) \right| \Delta\lambda + \left| \varepsilon_5(\Delta\lambda, \lambda, \mu_j, x_i) \right| + \left| \varepsilon_6(\Delta\theta, \Delta\lambda, \lambda, \mu, x_i) \right| \right)\end{aligned}$$

D'après l'étude faite au chapitre II, la solution L de l'ETR vérifie :

$$L^\circ(T_-, \lambda) \leq L(x, \mu, \lambda) \leq L^\circ(T_+, \lambda) \quad \text{pour tout } (x, \mu, \lambda) \in \Omega \times (0, \infty) \quad (4.66)$$

Alors,

$$2\pi \cdot \left| \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 L(x_i, \mu, \lambda) \cdot \mu \, d\mu \, d\lambda \right| \leq 4\pi \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} L^\circ(T_+, \lambda) \, d\lambda = \delta_1(\lambda_{\max}) \quad \text{et} \quad \delta_1(\lambda_{\max}) \xrightarrow{\lambda_{\max} \rightarrow \infty} 0.$$

D'après (2.8), $\delta_1(\lambda_{\max}) < +\infty$ pour tout $\lambda_{\max} \in (0, \infty)$.

$$\begin{aligned}&2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \left| L(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k) \right| \cdot C_j^\theta \cdot \Delta\lambda \\ &\leq 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \left\| L(\cdot, \cdot, \lambda_k) - \tilde{L}(\cdot, \cdot, \lambda_k) \right\|_\infty \cdot \Delta\lambda \leq 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N (a_1(\lambda_k) \cdot h + a_2(\lambda_k) \cdot \Delta\theta^4) \cdot \Delta\lambda\end{aligned}$$

en utilisant la majoration (4.63). a_1 et a_2 sont donnés par (4.64).

$$2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \left| \varepsilon_4(\Delta\theta, \mu, x_i, \lambda_k) \right| \cdot \Delta\lambda \leq \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda_k) \cdot \mu] \right| \cdot \Delta\lambda$$

$$2\pi \cdot \left| \varepsilon_5(\Delta\lambda, \lambda, \mu_j, x_i) \right| \leq \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \pi \cdot \lambda_{\max}}{6} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(x, \mu, \lambda) \right|$$

$$2\pi \cdot \left| \varepsilon_6(\Delta\theta, \Delta\lambda, \lambda, \mu, x_i) \right| \leq \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \Delta\theta^4 \cdot \lambda_{\max} \cdot \pi^2}{17280} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2 \partial^4}{\partial \lambda^2 \partial \mu^4} [L(x, \mu, \lambda) \cdot \mu] \right|$$

En utilisant toutes ces majorations, on retrouve le résultat (4.65). \square

Proposition 4.35 : Sous les hypothèses de la proposition 4.33, soit \tilde{T} le point fixe de $\tilde{\mathcal{F}}$. Alors, on a la majoration suivante :

$$\|T - \tilde{T}\|_{\infty} \leq \delta_2(\lambda_{\max}) + d_1^* \cdot h + d_1 \cdot h^2 + d_2 \cdot \Delta\theta^4 + d_3 \cdot \Delta\lambda^2 + d_4 \cdot \Delta\lambda^2 \cdot \Delta\theta^4 \quad (4.67)$$

où T est le champ de températures vérifiant le système (2.1)–(2.6),

$$\delta_2(\lambda_{\max}) = 4\pi \cdot d_o \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} (L^\circ(T_+, \lambda) - L^\circ(T_-, \lambda)) d\lambda \quad \text{et} \quad \delta_2(\lambda_{\max}) \xrightarrow{\lambda_{\max} \rightarrow \infty} 0$$

d_o , d_1^* et d_i $1 \leq i \leq 4$ sont des constantes données par

$$d_o = \frac{1}{8} \cdot \gamma_{\Psi_c^{-1}}$$

$$d_1^* = d_o \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot b_1$$

$$d_1 = d_o \cdot \frac{1}{12} \cdot \sup_{x \in (0, E)} |\bar{T}^{(4)}(x)|$$

$$d_2 = d_o \cdot \frac{1}{1-c} \cdot \frac{\tilde{\sigma}_a^+}{\tilde{\sigma}_a^- + \tilde{\sigma}_s^-} \cdot \frac{\pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \mu \in [-1, 1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_s(\mu, \lambda_k) \cdot P(\mu \rightarrow \mu', \lambda_k) \cdot L(x, \mu, \lambda_k)] \right| \Delta\lambda$$

$$+ d_o \cdot \frac{\pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_a(\mu, \lambda_k) \cdot (L(x, \mu, \lambda_k) - L^\circ(T(x), \lambda_k))] \right| \Delta\lambda$$

$$d_3 = d_o \cdot \frac{\lambda_{\max} \cdot \pi}{6} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} [\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^\circ(T(x), \lambda))] \right|$$

$$d_4 = d_o \cdot \frac{\lambda_{\max} \cdot \pi^2}{17280} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^\circ(T(x), \lambda))] \right|$$

b_1 est la constante donnée par la proposition 4.33 et $\gamma_{\Psi_c^{-1}}$ est la constante de Lipschitz de Ψ_c^{-1} .

preuve :

D'après l'étude faite au chapitre II, la solution \bar{T} de (2.47)–(2.48) vérifie $\bar{T} \in C^2(0, E)$. La formule de Taylor donne, pour $i = 1, 2, \dots, nt$

$$-\bar{T}''(x_i) = -\frac{\bar{T}_{i+1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} \cdot \bar{T}^{(4)}(x_i + \alpha_i \cdot h) \quad (\bar{T}_i = \bar{T}(x_i) \quad \forall 1 \leq i \leq nt) \quad (4.68)$$

avec $|\alpha_i| < 1 \quad \forall 1 \leq i \leq nt$. Par ailleurs, d'après (2.43), pour tout $1 \leq i \leq nt$, on a

$$\begin{aligned} S_r(x_i) &= 2\pi \cdot \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) d\mu d\lambda \\ &= 2\pi \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) d\mu d\lambda \\ &\quad + 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (L(x_i, \mu_j, \lambda_k) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \Delta\lambda \\ &\quad + \varepsilon_7(\Delta\theta, \Delta\lambda, \mu, x_i, \lambda) \end{aligned} \quad (4.69)$$

où ε_7 est un réel qui représente l'erreur d'intégration en θ et en λ , donné par

$$\begin{aligned} & \varepsilon_7(\Delta\theta, \Delta\lambda, \mu, x_i, \lambda) \\ &= \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi^2}{1440} \cdot \sin(\theta) \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} \left[\sigma_a(\mu, \lambda_k) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda_k) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda_k)) \right] \Delta\lambda \\ &+ \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max} \cdot \pi}{6} \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\sigma_a(\mu_j, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu_j, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) \right] \\ &- \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \Delta\theta^4 \cdot \lambda_{\max} \cdot \pi^2}{17280} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} \left[\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) \right] \end{aligned}$$

Exprimons à présent que la fonction \bar{T} est solution de (2.47) (2.48) aux points x_i $1 \leq i \leq nt$, en remplaçant les valeurs $\bar{T}''(x_i)$ par l'expression (4.68) et en remplaçant les valeurs $S_r(x_i)$ par l'expression (4.69). On aura alors pour tout $1 \leq i \leq nt$

$$\begin{aligned} & -\frac{\bar{T}_{i+1} - 2\bar{T}_i + \bar{T}_{i-1}}{h^2} + \frac{h^2}{12} \cdot \bar{T}^{(4)}(x_i + \alpha_i \cdot h) \\ &= 2\pi \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) \, d\mu \, d\lambda \\ &+ 2\pi \cdot \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (L(x_i, \mu_j, \lambda_k) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^\theta \, \Delta\lambda + \varepsilon_7(\Delta\theta, \Delta\lambda, \mu, x_i, \lambda) \end{aligned}$$

Ce système d'équations s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$A \cdot \bar{T} = -2\pi \cdot \tilde{\Phi}(\bar{T}) + 2\pi \cdot (\tilde{M} \sigma_a \cdot L) + \varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T}) \quad (4.70)$$

où A est la matrice de discrétisation de l'opérateur $-\Delta$ en dimension un, $\bar{T} = (\bar{T}_i)_{1 \leq i \leq nt}$, $\tilde{\Phi}$ est la fonction donnée par (3.57), \tilde{M} est l'opérateur donné par (4.49), et

$\varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T}) = (\varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T})_i)_{1 \leq i \leq nt}$ avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T})_i &= 2\pi \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x_i, \mu, \lambda) - L^\circ(\Psi_c^{-1}(\bar{T}_i), \lambda)) \, d\mu \, d\lambda \\ &- \frac{h^2}{12} \cdot \bar{T}^{(4)}(x_i + \alpha_i \cdot h) + \varepsilon_7(\Delta\theta, \Delta\lambda, \mu, x_i, \lambda) \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq nt$.

Des équations (4.10) et (4.70), on déduit

$$A \cdot (\bar{T} - \tilde{T}) = -2\pi \cdot (\tilde{\Phi}(\bar{T}) - \tilde{\Phi}(\tilde{T})) + 2\pi \cdot ((\tilde{M} \sigma_a \cdot L) - \tilde{F}) + \varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T}) \quad (4.71)$$

Alors, on a

$$(A \cdot (\bar{T} - \tilde{T}))_i + 2\pi \cdot ((\tilde{\Phi}(\bar{T}))_i - (\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i) = 2\pi \cdot ((\tilde{M} \sigma_a \cdot L)_i - \tilde{F}_i) + \varepsilon_{h,\Delta\theta,\Delta\lambda}(L, \bar{T})_i$$

pour tout $1 \leq i \leq nt$. Posons à présent pour tout $1 \leq i \leq nt$

$$\alpha_i(\bar{T}, \tilde{T}) = \begin{cases} 2\pi \cdot \frac{(\tilde{\Phi}(\bar{T}))_i - (\tilde{\Phi}(\tilde{T}))_i}{\bar{T}_i - \tilde{T}_i} & \text{si } \bar{T}_i \neq \tilde{T}_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par la monotonie de $\tilde{\Phi}$ on déduit que $\alpha_i(\bar{T}, \tilde{T}) \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq nt$. Le système (4.71) est équivalent à

$$(A + D) \cdot (\bar{T} - \tilde{T}) = 2\pi \cdot ((\tilde{M} \sigma_a \cdot L) - \tilde{F}) + \varepsilon_{h, \Delta\theta, \Delta\lambda}(L, \bar{T})$$

où D est une matrice diagonale de taille nt définie par $D = \text{diag}(\alpha_i(\bar{T}, \tilde{T}))$. D'après [18], la matrice $(A + D)$ est inversible et

$$\left\| (A + D)^{-1} \right\|_{\infty} \leq \left\| A^{-1} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}$$

Ainsi,

$$\left\| \bar{T} - \tilde{T} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} \cdot (2\pi \cdot \left\| (\tilde{M} \sigma_a \cdot L) - \tilde{F} \right\|_{\infty} + \left\| \varepsilon_{h, \Delta\theta, \Delta\lambda}(L, \bar{T}) \right\|_{\infty})$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{M} \sigma_a \cdot L) - \tilde{F} \right\|_{\infty} &= \max_{1 \leq i \leq nt} \left| \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^m \sigma_a(\mu_j, \lambda_k) \cdot (L(x_i, \mu_j, \lambda_k) - \tilde{L}(x_i, \mu_j, \lambda_k)) \cdot \sin(\theta_j) \cdot C_j^{\theta} \Delta\lambda \right| \\ &\leq \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \sum_{k=1}^N (a_1(\lambda_k) \cdot h + a_2(\lambda_k) \cdot \Delta\theta^4) \Delta\lambda \end{aligned}$$

en utilisant (2.12) et (4.63). Les deux quantités a_1 et a_2 sont données par (4.64).

$$\begin{aligned} &\left\| \varepsilon_{h, \Delta\theta, \Delta\lambda}(L, \bar{T}) \right\|_{\infty} \\ &\leq \frac{h^2}{12} \cdot \sup_{x \in (0, E)} \left| \bar{T}^{(4)}(x) \right| + 4\pi \cdot \tilde{\sigma}_a^+ \cdot \int_{\lambda_{\max}}^{\infty} (L^{\circ}(T_+, \lambda) - L^{\circ}(T_-, \lambda)) d\lambda \quad (\text{en utilisant (4.66)}) \\ &+ \frac{\Delta\theta^4 \cdot \pi^2}{1440} \cdot \sum_{k=1}^N \sup_{(x, \mu) \in \Omega} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} \left[\sigma_a(\mu, \lambda_k) \cdot (L(x, \mu, \lambda_k) - L^{\circ}(T(x), \lambda_k)) \right] \right| \Delta\lambda \\ &+ \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \lambda_{\max} \cdot \pi}{6} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \left[\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^{\circ}(T(x), \lambda)) \right] \right| \\ &+ \frac{\Delta\lambda^2 \cdot \Delta\theta^4 \cdot \lambda_{\max} \cdot \pi^2}{17280} \cdot \sup_{\substack{(x, \mu) \in \Omega \\ \lambda \in [0, \lambda_{\max}]}} \left| \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} \left[\sigma_a(\mu, \lambda) \cdot (L(x, \mu, \lambda) - L^{\circ}(T(x), \lambda)) \right] \right| \end{aligned}$$

et $\left\| T - \tilde{T} \right\|_{\infty} \leq \gamma_{\Psi_c^{-1}} \cdot \left\| \bar{T} - \tilde{T} \right\|_{\infty}$ où $\gamma_{\Psi_c^{-1}}$ est la constante de Lipschitz de Ψ_c^{-1} .

En utilisant toutes ces majorations, on retrouve le résultat (4.67). \square

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le théorème de convergence annoncé.

Théorème 4.36 : Le schéma numérique donné par (4.9) (4.10) et (4.11) est convergent : la solution approchée (\tilde{T}, \tilde{L}) converge vers la solution (T, L) du système (2.1)–(2.6), lorsque les pas $h \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$, $\Delta\lambda \rightarrow 0$ et $\lambda_{\max} \rightarrow \infty$ comme $1/\Delta\lambda$. C'est un schéma d'ordre un en h , quatre en $\Delta\theta$ et un en $\Delta\lambda$.

preuve :

Le résultat se déduit directement des propositions 4.33 et 4.35. \square

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré le résultat de convergence d'un des schémas numériques présentés au chapitre III, pour la résolution des équations couplées, en régime stationnaire, avec symétrie azimutale et lorsque les températures sont imposées aux frontières. Plus précisément, nous avons considéré le schéma aux différences finies décentré d'ordre un (3.41) pour la discrétisation spatiale de l'ETR et le schéma non linéaire (3.58), associé à la transformation de Kirchhoff inverse (3.59) pour la discrétisation de l'équation de conservation de l'énergie. Par ailleurs, nous avons montré que la solution approchée pour le schéma en question préserve (moyennant une petite erreur sur le pas angulaire) les mêmes propriétés que la solution du système continu, établies au chapitre II. Nous pouvons ainsi conclure que le schéma numérique est cohérent avec le problème continu : il a les mêmes propriétés.

Concernant le schéma aux différences finies décentré d'ordre deux (3.42) (3.43) (3.44) pour la discrétisation spatiale de l'ETR, ce schéma est donc plus précis que le premier; cependant il n'a pas la propriété de monotonie donnée par la proposition 4.18. Donc la preuve de convergence que nous avons donnée pour le schéma couplé ne s'applique pas pour ce dernier. Toutefois, dans les applications, nous utiliserons ce schéma (car plus précis) et nous verrons qu'il donne des bons résultats. En ce qui concerne les autres méthodes de résolution spatiale de l'ETR : la méthode utilisant le principe d'interaction et la méthode par diagonalisation, toutes les deux partent de la solution donnée par

$$\mathbf{L}_\lambda(x) = \mathbf{L}_{h\lambda}(x) + \mathbf{L}_{p\lambda}(x) = \exp(A_\lambda \cdot x) \cdot K_\lambda + \int_0^x \exp(A_\lambda \cdot (x-s)) \cdot \mathcal{E}_\lambda^o(s) ds$$

Ensuite ce sont seulement des techniques qui permettent de résoudre le problème de l'instabilité numérique. Cette solution a bien la propriété de monotonie donnée par la proposition 4.18. La preuve se fait par récurrence de la même façon que celle donnée par la proposition 4.14.

A présent, nous allons nous intéresser à la résolution numérique des équations en régime transitoire.

Références

- [1] H. B. Keller. On the pointwise convergence of the discrete-ordinates method. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*. Vol. 8, p. 43-73, 1960.
- [2] B. Wendroff. On the convergence of the discrete-ordinates method. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*. Vol. 8, p. 508-513, 1960.
- [3] B. Davison. On the rate of convergence of the spherical harmonics method. *Canad. J. Phys.* Vol. 38, p. 1526-1545, 1960.
- [4] P. M. Anselone. Convergence of Chandrasekhar's method for inhomogeneous transfer problems. *J. Math. Mech.*. Vol. 10, p. 537-546, 1961.
- [5] J. H. Bennett. Integral equation methods for transport problems. *Num. Math.* Vol. 6, p. 49-54, 1964.
- [6] P. Nelson. Convergence of the discrete-ordinates method for anisotropically scattering multiplying particles in a subcritical slab. *SIAM J. Numer. Anal.*. Vol. 10, p. 175-181, 1973.
- [7] P. Nelson and H. D. Victory. Theoretical properties of one-dimensional discrete-ordinates. *SIAM J. Numer. Anal.*. Vol. 16, p. 270-283, 1979.
- [8] A. Marsak. On the solution of the radiation transfer equation by the method of discrete ordinates in a non-homogeneous medium. *Trans Estonian Acad. Sci.*. Vol. 30, p. 191-201, 1981.
- [9] P. Lesaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations*, C. de Boor, ed. Academic Press. New-York, p. 89-123, 1974.
- [10] E. W. Larsen and P. Nelson. Finite-difference approximations and super-convergence for the discrete-ordinate equations in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.*. Vol. 19, p. 334-348, 1982.
- [11] J. Pitkaranta and R. Scott. Error estimates for the combined spatial and angular approximations of the transport equation in slab geometry. *SIAM J. Numer. Anal.*. Vol. 20, No. 5, p. 922-950, 1983.
- [12] C.T. Kelley. Multilevel source iteration accelerators for the linear transport equation in slab geometry. *Transport Theory Statist. Phys.*. Vol. 25, p. 249-260, 1996.
- [13] J.M. Banoczi and C.T. Kelley. A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations. *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 19, No. 1, p. 266-279, 1998.
- [14] J.M. Banoczi and C.T. Kelley. A fast multilevel algorithm for the solution of nonlinear systems of conductive-radiative heat transfer equations in two space dimensions. *SIAM J. Sci. Comput.* Vol. 20, No. 4, p. 1214-1228, 1999.
- [15] M. Crouzeix – A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.

- [16] P. Lascaux – R. Théodore. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Tome 1, 2, Masson, 1994.
- [17] C. T. Kelley. *Iterative methods for linear and nonlinear equations*. S.I.A.M, 1995.
- [18] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Masson, 1992.
- [19] R. Dautray – J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Tome 1, 2 et 3. CEA, Masson, 1985.
- [20] V. I. Lebedev. *An introduction to functional analysis and Computational Mathematics*. Birkhauser, Boston, 1997.
- [21] G. D. Smith. *Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods*. Clarendon Press-Oxford, 1985.
- [22] J. W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations. Finite Difference Methods*. Springer, 1995.

Chapitre V

Présentation d'une méthode numérique en régime transitoire

Résumé : Dans ce chapitre, nous présentons une méthode numérique pour résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction en régime transitoire, d'une part lorsque les températures sont imposées aux frontières du milieu et, d'autre part lorsque le milieu est soumis à des conditions aux limites de flux. La résolution de l'ETR en régime transitoire est la même qu'en régime stationnaire. Nous utilisons alors la méthode basée sur la diagonalisation de la matrice caractéristique du milieu, vu au chapitre III. Par contre, en régime transitoire l'équation de conservation de l'énergie est plus complexe. Dans un premier temps, nous appliquons les transformations de Kirchhoff et enthalpique à l'équation. Ensuite, nous résolvons l'équation en espace par la méthode des éléments finis P^2 (il résulte alors des fonctions linéaires par morceaux pour le flux conductif) utilisant un maillage à pas variable. Enfin, nous résolvons le système différentiel en temps qui en résulte par une méthode de Runge-Kutta implicite, adaptée aux équations raides. Le couplage entre les deux équations est résolu par itération au cours du temps.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous proposons de résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction en régime transitoire décrit par (1.31) (ou (1.32)) (1.33) (ou (1.34)) (1.35) (1.36) (1.37) (1.38). Dans un premier temps, nous considérons comme conditions aux limites les températures imposées aux frontières et, ensuite, nous étendons

l'étude en incluant des conditions aux limites de flux. Lorsque nous avons présenté les équations au premier chapitre, nous avons souligné que l'ETR donnée par (1.31) (ou (1.32)) est quasi stationnaire, c'est-à-dire que le temps intervient dans l'équation uniquement à travers le terme émission par l'intermédiaire du champ de températures. Dans ce cas, le temps est considéré simplement comme un paramètre dans l'équation. La dépendance de la luminance en temps est ainsi implicite à travers le champ de températures et l'évolution du champ de températures en régime transitoire est décrite par l'équation de conservation de l'énergie. Par conséquent, pour un champ de températures donné et à un instant donné, la résolution de l'ETR en régime transitoire est la même qu'en régime stationnaire. Il suffit alors de reprendre une des méthodes que nous avons présentées au chapitre III. Compte tenu du fait que la deuxième méthode basée sur la diagonalisation de la matrice caractéristique du milieu est très rapide et analytique en espace, nous utiliserons alors celle-ci. A présent, il nous reste plus qu'à résoudre l'équation de conservation de l'énergie, calculer le terme source radiatif et les flux de chaleur, en régime transitoire.

Si au niveau des conditions aux limites et comme nous l'avons décrit au premier chapitre, nous appliquons une variation rapide de température ou bien un flux de rayonnement très intense sur l'une des faces du milieu étudié, alors nous observons aux premiers instants un gradient de température de plus en plus élevé proche de cette face, pour atteindre des valeurs très importantes. Dans ce cas, nous sommes en présence d'un modèle de système thermique fortement sollicité et qui pose des problèmes numériques délicats. Il apparaît clairement que, pour traiter ce type de problème, la zone à fort gradient de température nécessite une étude très fine. Pour des raisons de coût et de temps de calcul, il n'est pas nécessaire d'utiliser un maillage uniformément fin, partout dans le milieu. Dans ce but, il convient alors de raffiner uniquement la zone d'intérêt particulière. Si nous voulons résoudre l'équation de conservation de l'énergie par la méthode des différences finies, nous devons modifier en conséquence les formules de dérivation en espace et les adapter pour un maillage à pas variable, mais alors nous perdons de la précision. Par contre, la méthode des éléments finis est bien adaptée à ce type de maillage et permet d'obtenir une précision plus grande. De plus, un autre avantage que présente cette méthode est qu'il est possible de prendre en compte des conditions aux limites portant sur les gradients de température (conditions de Neumann ou de Fourier), ce qui est nettement plus malaisé pour la méthode des différences finies.

Rappelons de plus que la méthode des éléments finis a l'avantage, par rapport à la méthode des différences finies, de pouvoir traiter sans difficultés supplémentaires toute géométrie ainsi que d'augmenter la précision des résultats au prix d'efforts de programmation raisonnables.

5.2 Semi-discrétisation en espace de l'équation de conservation de l'énergie par la méthode des éléments finis

Pour commencer, rappelons l'équation que nous avons à résoudre. D'après (1.36), on a :

$$\rho \cdot c_p(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_c(T(x,t)) \cdot \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)) = S_r(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (5.1)$$

Pour la résolution de cette équation, nous supposons que le terme source radiatif S_r est donné. Nous faisons l'hypothèse 2.2 sur λ_c . La masse volumique du milieu ρ est une constante strictement positive et bornée. $c_p(T)$ représente la chaleur massique du milieu à pression constante et varie avec la température. De plus, nous faisons l'hypothèse suivante sur c_p :

Hypothèse 5.1 : c_p est définie sur $]0, \infty[$, $c_p \in C^\infty(]0, \infty[) \cap C([0, \infty[)$, elle est intégrable sur $]0, K[$ et il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$0 < c_1 \leq c_p(u) \leq c_2 < +\infty \quad \text{pour tout } u \in]0, K[\quad (5.2)$$

où K est un réel positif borné fixé.

Nous pouvons alors définir la fonction bijective Γ_p suivante :

$$\Gamma_p(u) = \int_0^u c_p(s) ds \quad \forall u \in]0, K[\quad (5.3)$$

(5.3) représente la transformation enthalpique et, comme pour la transformation de Kirchhoff (2.44), elle est très utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles non linéaires [1,2,3,4,5]. En appliquant les transformations de Kirchhoff et enthalpique à l'équation (5.1), nous obtenons une nouvelle formulation de l'équation :

$$\rho \cdot \frac{\partial (\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 (\Psi_c \circ T)}{\partial x^2}(x,t) = S_r(x,t) \quad \forall (x,t) \in (0,E) \times (0,t_f] \quad (5.4)$$

A cette équation, on adjoint les conditions aux limites suivantes :

- lorsque les températures sont imposées aux frontières, on a :

$$\begin{aligned} T(0,t) &= f(t) \quad \forall t \in (0,t_f] \quad \text{où } f(t) \rightarrow T_o \text{ très rapidement} \\ T(E,t) &= T_E \quad \forall t \in (0,t_f] \end{aligned} \quad (5.5)$$

- lorsque les conditions de flux sont prises en compte, d'après (1.51), (1.52) et après transformation de Kirchhoff, on a :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(0,t) + h_o(T(0,t)) \cdot (T(0,t) - T_{\infty,o}(t)) &= 0 \quad \forall t \in (0, t_f] \\
\frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(E,t) + h_E(T(E,t)) \cdot (T(E,t) - T_{\infty,E}(t)) &= 0 \quad \forall t \in (0, t_f]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

La condition initiale est la suivante (elle est valable pour les deux types de conditions aux limites décrites ci-dessus) :

$$T(x,0) = T_E \quad \forall x \in [0, E] \tag{5.7}$$

avec les notations données au chapitre I.

La semi-discrétisation en espace par la méthode des éléments finis passe par les étapes suivantes :

1. la formulation variationnelle : cette étape consiste en particulier à définir l'espace V dans lequel on cherche la solution T ,
2. l'approximation de Galerkin : cette étape consiste à trouver un sous-espace de dimension finie $V_h \subset V$ dans lequel on cherche l'approximation T_h de T .

Nous allons maintenant détailler ces différents points. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au problème (5.4) (5.5) (5.7), lorsque les températures sont imposées aux frontières. Ensuite, nous allons traiter le problème (5.4) (5.6) (5.7), associant les conditions aux limites de flux.

5.2.1 Formulation variationnelle pour le problème associant les conditions aux limites de températures imposées

Définissons V^* l'espace fonctionnel par :

$$V^* = \left\{ g(\cdot, t) \in H^1(0, E) ; g(0, t) = f(t) \text{ et } g(E, t) = T_E \quad \forall t \in (0, t_f] \right\}$$

Définissons de même V l'espace des fonctions test par : $V = H_o^1(0, E)$

$H^1(0, E)$ et $H_o^1(0, E)$ sont les espaces de Sobolev définis par :

$$H^1(0, E) = \left\{ f \in L^2(0, E) ; \frac{df}{dx} \in L^2(0, E) \right\} \text{ et } H_o^1(0, E) = \left\{ f \in H^1(0, E) ; f(0) = f(E) = 0 \right\}$$

Ils sont munis du produit scalaire

$$(u, v)_1 = \int_0^E u(x) \cdot v(x) + u'(x) \cdot v'(x) dx$$

et de la norme correspondante

$$\|u\|_1 = \sqrt{(u, u)_1}$$

Multiplions alors l'équation (5.4) par une fonction test $v \in V$ et intégrons entre $x=0$ et $x=E$. Nous obtenons :

$$\rho \cdot \int_0^E \frac{\partial (\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx - \int_0^E \frac{\partial^2 (\Psi_c \circ T)}{\partial x^2}(x, t) \cdot v(x) dx = \int_0^E S_r(x, t) \cdot v(x) dx \quad (5.8)$$

En intégrant par partie le second terme du membre de gauche de (5.8), nous déduisons :

$$\rho \cdot \int_0^E \frac{\partial (\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx + \int_0^E \frac{\partial (\Psi_c \circ T)}{\partial x}(x, t) \cdot v'(x) dx = \int_0^E S_r(x, t) \cdot v(x) dx \quad (5.9)$$

En remarquant que : $\int_0^E \frac{\partial (\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^E (\Gamma_p \circ T)(x, t) \cdot v(x) dx$

et en posant pour tout $u, v \in L^2(0, E)$: $(u, v) = \int_0^E u(x) \cdot v(x) dx$

et pour tout $u \in V^*$, $v \in V$: $a(u, v) = \int_0^E \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \cdot v'(x) dx$

Nous sommes ainsi conduits à une nouvelle formulation du problème (5.4) (5.5) (5.7): trouver, pour tout $t \in (0, t_f]$, une fonction $T \in V^*$ qui satisfait la condition initiale (5.7) ainsi que

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} ((\Gamma_p \circ T)(\cdot, t), v) + a((\Psi_c \circ T)(\cdot, t), v) = (S_r(\cdot, t), v) \quad \forall v \in V \quad (5.10)$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ est prise au sens des distributions sur $(0, t_f]$.

Nous sommes dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet **non homogènes**. Nous rappelons qu'étant donné une fonction quelconque $T^* \in V^*$, cet espace peut s'exprimer comme

$$V^* = \left\{ g(\cdot, t) \in H^1(0, E) ; g(\cdot, t) = v(\cdot, t) + T^*(\cdot, t), v(\cdot, t) \in V \quad \forall t \in (0, t_f] \right\}$$

Ainsi, en posant pour une fonction $T^* \in V^*$ (qui satisfait de plus la condition initiale (5.7)) donnée :

$$T = \bar{T} + T^* \quad (5.11)$$

la formulation (5.10) est alors équivalente à la suivante : trouver, pour tout $t \in (0, t_f]$, une fonction $\bar{T}(\cdot, t) \in V$ qui satisfait la condition initiale (5.7) ainsi que

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(\bar{T}(\cdot, t) + T^*(\cdot, t)), v) + a(\Psi_c(\bar{T}(\cdot, t) + T^*(\cdot, t)), v) = (S_r(\cdot, t), v) \quad \forall v \in V \quad (5.12)$$

(5.12) constitue le problème variationnel du problème (5.4) (5.5) (5.7). Nous allons maintenant passer à l'approximation de Galerkin, basée sur la formulation faible (5.12).

5.2.2 Approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux limites de températures imposées

Notons pour la suite : T_h , \bar{T}_h et T_h^* respectivement les approximations des fonctions T , \bar{T} et T^* . Nous aurons alors, compte tenu de (5.11) :

$$T_h = \bar{T}_h + T_h^* \quad (5.13)$$

Définissons à présent $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V et construisons l'espace V_h en considérant toutes les combinaisons linéaires des fonctions φ_i $1 \leq i \leq N$. Par ailleurs, posons

$$T_h^*(x, t) = f(t) \cdot \varphi_o(x) + T_E \cdot \varphi_{N+1}(x) \quad (5.14)$$

pour tout $(x, t) \in [0, E] \times (0, t_f]$ où φ_o et φ_{N+1} sont des fonctions continues, de premières dérivées continues par morceaux qui vérifient :

$$\varphi_o(0) = \varphi_{N+1}(E) = 1 \text{ et } \varphi_o(E) = \varphi_{N+1}(0) = 0 \quad (5.15)$$

Dès lors, l'approximation de Galerkin du problème variationnel (5.12) se formule de la manière suivante : pour tout $t \in (0, t_f]$, trouver une fonction $\bar{T}_h(\cdot, t) \in V_h$ qui satisfait

$$\rho \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(\bar{T}_h(\cdot, t) + T_h^*(\cdot, t)), v_h) + a(\Psi_c(\bar{T}_h(\cdot, t) + T_h^*(\cdot, t)), v_h) = (S_r(\cdot, t), v_h) \quad (5.16)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$. De plus nous exigeons que $T_h(x, 0) = \bar{T}_h(x, 0) + T_h^*(x, 0) = T_E$ $\forall x \in [0, E]$ qui est la condition initiale.

Développons à présent $\bar{T}_h(\cdot, t)$ dans la base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ de V_h . Nous pouvons alors écrire :

$$\bar{T}_h(x, t) = \sum_{j=1}^N T_j(t) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x, t) \in [0, E] \times (0, t_f] \quad (5.17)$$

où les valeurs $T_j(t)$ sont les composantes de $\bar{T}_h(\cdot, t)$ dans la base des φ_j et dépendent du temps.

En posant $T_o(t) = f(t)$ et $T_{N+1}(t) = T_E$ pour tout $t \in (0, t_f]$, d'après (5.13), (5.14) et (5.17) il vient :

$$T_h(x,t) = \sum_{j=0}^{N+1} T_j(t) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x,t) \in [0,E] \times (0,t_f] \quad (5.18)$$

Posons à présent les approximations suivantes :

$$\Psi_c(T_h(x,t)) \cong \sum_{j=0}^{N+1} \Psi_c(T_j(t)) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x,t) \in [0,E] \times (0,t_f] \quad (5.19)$$

et

$$\Gamma_p(T_h(x,t)) \cong \sum_{j=0}^{N+1} \Gamma_p(T_j(t)) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x,t) \in [0,E] \times (0,t_f] \quad (5.20)$$

Les approximations (5.19) et (5.20) sont couramment utilisées. Voir à ce propos [1,2,3,4]. En remplaçant (5.19) et (5.20) dans (5.16) et en choisissant comme fonction test $v_h = \varphi_i$ $\forall 1 \leq i \leq N$, nous obtenons alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} (\Gamma_p(T_j(t))) \cdot (\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j=1}^N \Psi_c(T_j(t)) \cdot (\varphi_j', \varphi_i') \\ & = (S_r(\cdot, t), \varphi_i) - \rho \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(f(t))) \cdot (\varphi_0, \varphi_i) - \Psi_c(f(t)) \cdot (\varphi_0', \varphi_i') - \Psi_c(T_E) \cdot (\varphi_{N+1}', \varphi_i') \end{aligned} \quad (5.21)$$

pour tout $1 \leq i \leq N$.

Dans l'écriture (5.21) et pour un indice $i \in \{0, \dots, N+1\}$ fixé, nous avons noté $\varphi_i'(x)$ la dérivée de $\varphi_i(x)$ par rapport à x .

Si nous posons maintenant :

- $\mathbf{T}(t)$ le N vecteur de composantes $T_j(t) \quad 1 \leq j \leq N$
- $\Gamma_p(\mathbf{T}(t))$ le N vecteur de composantes $\Gamma_p(T_j(t)) \quad 1 \leq j \leq N$
- $\Psi_c(\mathbf{T}(t))$ le N vecteur de composantes $\Psi_c(T_j(t)) \quad 1 \leq j \leq N$
- $[M]$ la $N \times N$ matrice de coefficients $[M]_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j) \quad 1 \leq i, j \leq N$
 ($[M]$ est la matrice de masse),
- $[R]$ la $N \times N$ matrice de coefficients $[R]_{i,j} = (\varphi_i', \varphi_j') \quad 1 \leq i, j \leq N$
 ($[R]$ est la matrice de rigidité),
- $\mathbf{S}_r(t)$ le N vecteur dont la i ème composante est $(\mathbf{S}_r)_i(t) = (S_r(\cdot, t), \varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N$
- \mathbf{M}^0 le N vecteur de composantes $\mathbf{M}_i^0 = (\varphi_0, \varphi_i) \quad 1 \leq i \leq N$
- \mathbf{R}^0 le N vecteur de composantes $\mathbf{R}_i^0 = (\varphi_0', \varphi_i') \quad 1 \leq i \leq N$
- \mathbf{R}^E le N vecteur de composantes $\mathbf{R}_i^E = (\varphi_{N+1}', \varphi_i') \quad 1 \leq i \leq N$

alors les relations (5.21) sont équivalentes à chercher le vecteur $\mathbf{T}(t)$ tel que

$$\begin{aligned}
& \rho \cdot [M] \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(\mathbf{T}(t))) + [R] \cdot \Psi_c(\mathbf{T}(t)) \\
& = \mathbf{S}_r(t) - \rho \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(f(t))) \cdot \mathbf{M}^0 - \Psi_c(f(t)) \cdot \mathbf{R}^0 - \Psi_c(T_E) \cdot \mathbf{R}^E \quad \forall t \in (0, t_f]
\end{aligned} \tag{5.22}$$

En notant que

- $\frac{d}{dt} (\Gamma_p(f(t))) = c_p(f(t)) \cdot f'(t)$ où $f'(t)$ est la dérivée de $f(t)$ par rapport à t .
 - $\frac{d}{dt} (\Gamma_p(\mathbf{T}(t))) = \frac{d\Gamma_p(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}} \cdot \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = [C_p(\mathbf{T}(t))] \cdot \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt}$
- où $[C_p(\mathbf{T}(t))]$ est la matrice Jacobienne donnée par :

$$[C_p(\mathbf{T}(t))] = \text{diag} \{ c_p(T_j(t)) \} \quad 1 \leq j \leq N$$

le système différentiel (5.22) est alors équivalent à :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot ([M] \cdot [C_p(\mathbf{T}(t))])^{-1} \cdot \left\{ -[R] \cdot \Psi_c(\mathbf{T}(t)) + \mathbf{S}_r(t) - \rho \cdot c_p(f(t)) \cdot f'(t) \cdot \mathbf{M}^0 \right. \\
\left. - \Psi_c(f(t)) \cdot \mathbf{R}^0 - \Psi_c(T_E) \cdot \mathbf{R}^E \right\} \\
\forall t \in (0, t_f]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Remarque 5.2 : La matrice $[M]$ est symétrique, définie et positive. Elle est donc inversible. $[C_p(\mathbf{T}(t))]$ est une matrice diagonale et d'après l'hypothèse (5.1), chaque élément de la diagonale est strictement positif. Par conséquent, cette matrice aussi est inversible.

L'approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux limites de températures imposées conduit donc au système différentiel en temps, du premier ordre, non linéaire (5.23). Les inconnues de ce système sont les composantes $T_j(t)$, $1 \leq j \leq N$ de la solution \bar{T}_h dans la base des φ_j . La condition initiale du système différentiel est définie par : $T_j(0) = T_E \quad \forall 1 \leq j \leq N$.

Passons maintenant au problème associant les conditions aux limites de flux.

5.2.3 Formulation variationnelle pour le problème associant les conditions aux limites de flux

Définissons maintenant V^* l'espace fonctionnel par :

$$V^* = \left\{ \begin{aligned} g(\cdot, t) \in H^1(0, E) ; \frac{\partial (\Psi_c \circ g)}{\partial x} &= h_o(g) \cdot (g - T_{\infty, o}) \text{ sur l'ensemble } \{x = 0\} \times (0, t_f] \\ -\frac{\partial (\Psi_c \circ g)}{\partial x} &= h_E(g) \cdot (g - T_{\infty, E}) \text{ sur l'ensemble } \{x = E\} \times (0, t_f] \end{aligned} \right\}$$

Définissons de même V l'espace des fonctions test par : $V = H^1(0, E)$.

De la même façon, multiplions l'équation (5.4) par une fonction test $v \in V$, et intégrons entre $x = 0$ et $x = E$. Nous obtenons :

$$\rho \cdot \int_0^E \frac{\partial(\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx - \int_0^E \frac{\partial^2(\Psi_c \circ T)}{\partial x^2}(x, t) \cdot v(x) dx = \int_0^E S_r(x, t) \cdot v(x) dx \quad (5.24)$$

En intégrant par partie le second terme du membre de gauche de (5.24), il vient :

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \int_0^E \frac{\partial(\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx + \int_0^E \frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(x, t) \cdot v'(x) dx - \left[\frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(x, t) \cdot v(x) \right]_0^E \\ & = \int_0^E S_r(x, t) \cdot v(x) dx \end{aligned} \quad (5.25)$$

Le terme "tout intégré" est égal à :

$$-\frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(E, t) \cdot v(E) + \frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(0, t) \cdot v(0) \quad (5.26)$$

Nous supposons que la fonction $T \in V^*$, alors (5.26) donne :

$$h_E(T(E, t)) \cdot (T(E, t) - T_{\infty, E}(t)) \cdot v(E) + h_0(T(0, t)) \cdot (T(0, t) - T_{\infty, 0}(t)) \cdot v(0) \quad (5.27)$$

En substituant la relation (5.27) dans (5.25), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \int_0^E \frac{\partial(\Gamma_p \circ T)}{\partial t}(x, t) \cdot v(x) dx + \int_0^E \frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(x, t) \cdot v'(x) dx \\ & + h_0(T(0, t)) \cdot (T(0, t) - T_{\infty, 0}(t)) \cdot v(0) + h_E(T(E, t)) \cdot (T(E, t) - T_{\infty, E}(t)) \cdot v(E) \\ & = \int_0^E S_r(x, t) \cdot v(x) dx \end{aligned} \quad (5.28)$$

Nous sommes ainsi conduits à la formulation variationnelle suivante : trouver, pour tout $t \in (0, t_f]$, une fonction $T(\cdot, t) \in V$ (puisque les conditions aux bords ont été utilisées dans (5.28)) qui satisfait la condition initiale (5.7) ainsi que

$$\begin{aligned} & \rho \cdot \frac{d}{dt} ((\Gamma_p \circ T)(\cdot, t), v) + a((\Psi_c \circ T)(\cdot, t), v) + h_0(T(0, t)) \cdot (T(0, t) - T_{\infty, 0}(t)) \cdot v(0) \\ & + h_E(T(E, t)) \cdot (T(E, t) - T_{\infty, E}(t)) \cdot v(E) = (S_r(\cdot, t), v) \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (5.29)$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ est toujours prise au sens des distributions sur $(0, t_f]$.

Nous allons maintenant passer à l'approximation de Galerkin.

5.2.4 Approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux limites de flux

Notons pour la suite T_h l'approximation de la fonction T . Définissons de plus, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}$ $N+2$ fonctions linéairement indépendantes de V et construisons l'espace V_h en considérant toutes les combinaisons linéaires des fonctions φ_i $0 \leq i \leq N+1$. Nous prendrons alors les fonctions φ_i $0 \leq i \leq N+1$ définies précédemment, car elles conviennent parfaitement.

L'approximation de Galerkin du problème variationnel (5.29) se formule alors de la manière suivante : pour tout $t \in (0, t_f]$, trouver une fonction $T_h(\cdot, t) \in V_h$ qui satisfait :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{d}{dt} (\Gamma_p(T_h(\cdot, t)), v_h) + a(\Psi_c(T_h(\cdot, t)), v_h) + h_o(T_h(0, t)) \cdot (T_h(0, t) - T_{\infty,0}(t)) \cdot v_h(0) \\ + h_E(T_h(E, t)) \cdot (T_h(E, t) - T_{\infty,E}(t)) \cdot v_h(E) = (S_r(\cdot, t), v_h) \end{aligned} \quad (5.30)$$

pour toute fonction $v_h \in V_h$. De plus, nous exigeons que $T_h(x, 0) = T_E \quad \forall x \in [0, E]$ qui est la condition initiale.

Développons à présent $T_h(\cdot, t)$ dans la base $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}$ de V_h . Nous pouvons alors écrire :

$$T_h(x, t) = \sum_{j=0}^{N+1} T_j(t) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x, t) \in [0, E] \times (0, t_f] \quad (5.31)$$

où les valeurs $T_j(t)$ sont les composantes de $T_h(\cdot, t)$ dans la base des φ_j et dépendent du temps.

De la même façon que pour le problème précédent, posons les approximations suivantes :

$$\Psi_c(T_h(x, t)) \cong \sum_{j=0}^{N+1} \Psi_c(T_j(t)) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x, t) \in [0, E] \times (0, t_f] \quad (5.32)$$

et

$$\Gamma_p(T_h(x, t)) \cong \sum_{j=0}^{N+1} \Gamma_p(T_j(t)) \cdot \varphi_j(x) \quad \forall (x, t) \in [0, E] \times (0, t_f] \quad (5.33)$$

Si nous remplaçons (5.31), (5.32) et (5.33) dans (5.30) et si nous choisissons comme fonction test $v_h = \varphi_i \quad \forall 0 \leq i \leq N+1$, nous obtenons alors les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \sum_{j=0}^{N+1} \frac{d}{dt} (\Gamma_p(T_j(t))) \cdot (\varphi_j, \varphi_i) + \sum_{j=0}^{N+1} \Psi_c(T_j(t)) \cdot (\varphi_j', \varphi_i') \\ + h_o(T_0(t)) \cdot (T_0(t) - T_{\infty,0}(t)) \cdot \varphi_i(0) + h_E(T_{N+1}(t)) \cdot (T_{N+1}(t) - T_{\infty,E}(t)) \cdot \varphi_i(E) \\ = (S_r(\cdot, t), \varphi_i) \end{aligned} \quad (5.34)$$

pour tout $0 \leq i \leq N+1$.

Si nous posons maintenant :

- $\mathbf{T}(t)$ le $(N+2)$ vecteur de composantes $T_j(t) \quad 0 \leq j \leq N+1$
- $[C_p(\mathbf{T}(t))]$ la $(N+2) \times (N+2)$ matrice définie par :

$$[C_p(\mathbf{T}(t))] = \text{diag} \{ c_p(T_j(t)) \} \quad 0 \leq j \leq N+1$$
- $\Psi_c(\mathbf{T}(t))$ le $(N+2)$ vecteur de composantes $\Psi_c(T_j(t)) \quad 0 \leq j \leq N+1$
- $[M]$ la $(N+2) \times (N+2)$ matrice de coefficients $[M]_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j) \quad 0 \leq i, j \leq N+1$
 ($[M]$ est la matrice de masse),
- $[R]$ est la $(N+2) \times (N+2)$ matrice de coefficients $[R]_{i,j} = (\varphi_i', \varphi_j') \quad 0 \leq i, j \leq N+1$
 ($[R]$ est la matrice de rigidité),
- $\mathbf{S}_r(t)$ le $(N+2)$ vecteur dont la i ème composante est : $(\mathbf{S}_r)_i(t) = (S_r(\cdot, t), \varphi_i)$
- $\mathbf{T}_\infty(t)$ le $(N+2)$ vecteur de composantes :

$$(\mathbf{T}_\infty)_j(t) = \begin{cases} T_{\infty,0}(t) & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } 1 \leq j \leq N \\ T_{\infty,E}(t) & \text{si } j=N+1 \end{cases}$$

- $[H(\mathbf{T}(t))]$ la $(N+2) \times (N+2)$ matrice de coefficients :

$$[H(\mathbf{T}(t))]_{i,j} = \begin{cases} h_o(T_0(t)) & \text{si } i=j=1 \\ h_E(T_{N+1}(t)) & \text{si } i=j=N+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors les relations (5.34) sont équivalentes à chercher le vecteur $\mathbf{T}(t)$ tel que

$$\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = \frac{1}{\rho} \cdot ([M] \cdot [C_p(\mathbf{T}(t))])^{-1} \cdot \left\{ -[R] \cdot \Psi_c(\mathbf{T}(t)) + \mathbf{S}_r(t) - [H(\mathbf{T}(t))] \cdot (\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}_\infty(t)) \right\} \quad (5.35)$$

$\forall t \in (0, t_f]$

L'approximation de Galerkin pour le problème associant les conditions aux limites de flux conduit donc au système différentiel en temps, du premier ordre, non linéaire (5.35). Les inconnues de ce système sont les composantes $T_j(t)$, $0 \leq j \leq N+1$ de la solution T_h dans la base des φ_j . La condition initiale du système différentiel est définie par :

$$T_j(0) = T_E \quad \forall 0 \leq j \leq N+1$$

Remarque 5.3 : (5.35) est un système différentiel en temps de taille $N+2$, tandis que (5.23) est un système différentiel en temps de taille N .

5.3 Résolution des systèmes d'équations différentielles en temps

Dans notre cas, avec les conditions aux limites que nous prenons en compte (températures imposées aux frontières qui évoluent rapidement dans le temps ou alors les flux aux surfaces qui sont très intenses), les systèmes d'équations différentielles en temps (5.23) ou encore (5.35) que nous avons obtenus après la semi-discrétisation en espace, ont la propriété d'être raides (en anglais stiff problem) [6,7]. Les équations raides en temps sont caractérisées par le fait qu'elles ont des solutions qui varient rapidement par rapport au temps. Pour ces équations, on est obligé de limiter le pas de temps, non pas pour des raisons de précision, mais pour des raisons de stabilité. Pour remédier à ces contraintes, on utilise alors des schémas très stables, qui sont implicites et qui nécessitent donc (sauf cas exceptionnel) une méthode itérative de résolution à chaque pas de temps. En ce qui nous concerne, nous avons utilisé une formule de Runge-Kutta implicite (TR-BDF2), qui est décrite en annexe 4. Celle-ci nous a donné entière satisfaction comme nous le verrons au chapitre suivant, lors des résultats de simulation.

5.4 Résolution numérique du système couplé en régime transitoire

Pour la résolution numérique du système couplé en régime transitoire, nous discrétisons le domaine spatial $[0, E]$ (avec un pas non constant) en posant :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{nt} < x_{nt+1} = E$$

En ce qui concerne la discrétisation temporelle, nous appelons Δt le pas de temps et nous posons $t_n = n \cdot \Delta t \quad \forall n \in \mathbf{N}$. De plus, nous notons n_f l'entier naturel pour lequel $t_{n_f} = t_f$. Nous rappelons que t_f correspond à l'instant où le système d'équations atteint le régime stationnaire.

En tenant compte que l'expression du flux conductif donnée par (1.37) fait intervenir la dérivée première en espace de la température, nous proposons alors d'utiliser pour la formulation "Eléments Finis", les fonctions de base quadratique de Lagrange. Nous aurons ainsi des fonctions linéaires par morceaux pour le flux conductif. Nous renvoyons à [9] pour la description de ces fonctions. Par ailleurs, pour intégrer les systèmes différentiels en temps (5.23) ou encore (5.35), nous devons au préalable construire les matrices de masse et de rigidité $[M]$, $[R]$, ainsi que les vecteurs $\mathbf{S}_r(t)$, \mathbf{M}^0 , \mathbf{R}^0 et \mathbf{R}^E . Pour cela, nous posons :

$$N = 2nt + 1, \quad x_{i+1/2} = \frac{1}{2} \cdot (x_i + x_{i+1}) \quad \forall 0 \leq i \leq nt \quad \text{et} \quad z_i = x_{i/2} \quad \forall 0 \leq i \leq N + 1$$

Les calculs conduisent alors aux formules que nous donnons en annexe 5. Notons que nous avons maintenant une nouvelle discrétisation du domaine spatial $[0, E]$ définie par les points $z_i \quad \forall 0 \leq i \leq N + 1$. Rappelons aussi que

- $z_0, z_2, z_4, \dots, z_{N+1}$ sont les **nœuds principaux de la discrétisation**
- $[z_0, z_2], [z_2, z_4], \dots, [z_N, z_{N+1}]$ sont les **éléments géométriques**
- $z_1, z_3, z_5, \dots, z_N$ sont les **nœuds intérieurs aux éléments géométriques**

Ainsi, sur chaque élément géométrique, le champ de températures est approché par un polynôme de degré deux et le flux conductif est, quant à lui, approché par un polynôme de degré un.

A présent, nous énonçons une série de notations qui serviront pour la suite de l'exposé.

On note :

- $\tilde{T}_i^{(n)}$ l'approximation du champ de températures $T(x, t)$ au point z_i et à l'instant t_n pour $0 \leq i \leq N+1$ et $n \in \{0, \dots, n_f\}$.
- $(\tilde{Q}_r)_i^{(n)}$, $(\tilde{S}_r)_i^{(n)}$, $(\tilde{Q}_c)_i^{(n)}$ et $(\tilde{Q}_t)_i^{(n)}$ respectivement les approximations de $Q_r(x, t)$, $S_r(x, t)$, $Q_c(x, t)$ et $Q_t(x, t)$ au point z_i et à l'instant t_n pour $0 \leq i \leq N+1$ et $n \in \{0, \dots, n_f\}$.

Passons maintenant au calcul des flux et du terme source radiatif.

5.4.1 Calcul des flux et du terme source radiatif

Le régime transitoire ne change en rien le calcul des flux radiatifs monochromatique et total donnés par la relation (1.33) (ou (1.34)). Il suffit alors de reprendre les expressions ‘‘approchées’’ en régime stationnaire données par (3.77) (ou (3.78)) et (3.79) (ou (3.80)). Par contre, en régime transitoire, plus précisément si nous utilisons un maillage du domaine spatial avec un pas variable, alors le calcul du terme source radiatif donné par (1.35) n'est plus le même. De la même façon que pour le maillage régulier, nous utilisons les formules de dérivation d'ordre quatre utilisant cinq points pour l'approximation de la dérivée. Ces formules sont décrites dans [10]. Dans ce cas, le calcul du terme source radiatif conduit aux formules que nous donnons en annexe 6.

Comme mentionné au début, sur chaque élément géométrique, nous aurons des fonctions d'interpolations linéaires par morceaux pour le flux conductif. Alors, nous pouvons exprimer ce dernier dans la base P^1 . Dans ce cas, notons χ_j $0 \leq j \leq \frac{N+1}{2}$ ses fonctions de base. Nous renvoyons aussi à [9] pour la description de ces fonctions. Ainsi, nous aurons :

$$Q_c(x, t) \cong \sum_{j=0}^{(N+1)/2} Q_j(t) \cdot \chi_j(x) \quad \forall (x, t) \in [0, E] \times (0, t_f] \quad (5.36)$$

où les valeurs $Q_j(t)$ sont les composantes de la valeur approchée en espace de $Q_c(\cdot, t)$ dans la base des χ_j et dépendent du temps. Par ailleurs, en appliquant la transformation de Kirchhoff à (1.37), nous obtenons l'expression suivante pour le flux conductif :

$$Q_c(x,t) = -\frac{\partial(\Psi_c \circ T)}{\partial x}(x,t) \quad \forall (x,t) \in [0,E] \times (0,t_f] \quad (5.37)$$

En utilisant l'approximation (5.19) pour la fonction $(\Psi_c \circ T)(x,t)$, nous obtenons l'expression approchée suivante pour le flux conductif :

$$Q_c(x,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sum_{j=0}^{N+1} \Psi_c(T_j(t)) \cdot \varphi_j(x) \right\} \quad (5.38)$$

où la dérivée est prise ici au sens faible.

En multipliant les relations (5.36) et (5.38) par la fonction test $\chi_i(x) \quad \forall 0 \leq i \leq \frac{N+1}{2}$ et en intégrant les deux expressions entre $x=0$ et $x=E$, il vient :

$$\sum_{j=0}^{(N+1)/2} Q_j(t) \cdot (\chi_j, \chi_i) = -\sum_{j=0}^{N+1} \Psi_c(T_j(t)) \cdot (\varphi_j', \chi_i) \quad \forall 0 \leq i \leq \frac{N+1}{2} \quad (5.39)$$

Si nous posons maintenant :

- $\mathbf{Q}_c(\mathbf{t})$ le $(\frac{N+1}{2} + 1)$ vecteur de composantes $Q_j(t) \quad 0 \leq j \leq \frac{N+1}{2}$
- $\mathbf{T}(\mathbf{t})$ le $(N+2)$ vecteur de composantes $T_j(t) \quad 0 \leq j \leq N+1$
- $\Psi_c(\mathbf{T}(\mathbf{t}))$ le $(N+2)$ vecteur de composantes $\Psi_c(T_j(t)) \quad 0 \leq j \leq N+1$
- $[A]$ la $(\frac{N+1}{2} + 1) \times (\frac{N+1}{2} + 1)$ matrice de coefficients

$$[A]_{i,j} = (\chi_i, \chi_j) \quad 0 \leq i, j \leq \frac{N+1}{2}$$

- $[B]$ la $(\frac{N+1}{2} + 1) \times (N+2)$ matrice de coefficients

$$[B]_{i,j} = (\chi_i, \varphi_j') \quad 0 \leq i \leq \frac{N+1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq j \leq N+1$$

alors les relations (5.39) sont équivalentes à résoudre le système linéaire de taille $(\frac{N+1}{2} + 1)$

suivant :

$$[A] \cdot \mathbf{Q}_c(\mathbf{t}) = -[B] \cdot \Psi_c(\mathbf{T}(\mathbf{t})) \quad (5.40)$$

où le vecteur inconnu est $\mathbf{Q}_c(\mathbf{t})$. Nous supposons bien sûr que le vecteur $\mathbf{T}(\mathbf{t})$ est connu. $\mathbf{Q}_c(\mathbf{t})$ est donc le vecteur dont les composantes sont les valeurs du flux conductif "approché" déterminées aux nœuds principaux du maillage. Les valeurs du flux déterminées aux nœuds intérieurs aux éléments géométriques sont données par :

$$(\tilde{Q}_c)_i^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot \{ (\tilde{Q}_c)_{i+1}^{(n)} + (\tilde{Q}_c)_{i-1}^{(n)} \} \quad \forall 1 \leq i \leq N \quad \text{et l'indice } i \text{ impair}$$

Il est à présent très facile de calculer le flux total puisqu'il est donné simplement par la somme du flux radiatif total et du flux conductif :

$$(\tilde{Q}_t)_i^{(n)} = (\tilde{Q}_r)_i^{(n)} + (\tilde{Q}_c)_i^{(n)} \quad \forall 0 \leq i \leq N+1 \text{ et } n \in \{0, \dots, n_f\}$$

5.4.2 Résolution numérique du système couplé en régime transitoire

Le schéma de résolution global du système des équations couplées en régime transitoire est itératif. L'organigramme qui décrit l'algorithme est donné par la *figure 5.1*. Tout d'abord, nous introduisons les données géométriques, thermiques, radiatives et, ensuite, nous construisons un maillage en espace adapté au problème posé. Nous avons souligné en introduction de ce chapitre la nécessité de mailler plus finement la zone à fort gradient de température. Alors, nous proposons ici une diminution progressive des pas de discrétisation au fur et à mesure que le gradient de température croît. Donnons ainsi la détermination de cette graduation. En supposons par exemple que les conditions aux limites sont les plus "importantes" sur la face avant, nous proposons de découper le domaine spatial $[0, E]$ en deux parties : $[0, z]$ sur lequel nous appliquons une discrétisation en progression géométrique et $[z, E]$ sur lequel nous appliquons un maillage régulier. Si h est le pas constant du maillage régulier, le plus simple consiste à prendre $z = h$ (ou bien $z = 2h, \dots$). Si nous considérons le segment de longueur h par exemple que l'on désire découper en N_t pas variant en progression géométrique, la raison α de cette progression est définie par : $h_{i-1} = \alpha \cdot h_i$ ($i = 2, \dots, N_t$) et $h_{N_t} = h$. Ensuite, le choix des paramètres α et N_t permet de moduler la suite des pas au gré de l'utilisateur.

Revenons à présent à la suite de l'algorithme de la *figure 5.1*. En partant du champ de températures initial à l'instant $t_0 = 0$, la résolution de l'ETR fournit le champ de luminance et, par intégration de celui-ci sur le domaine angulaire et spectral, le flux radiatif à l'instant t_0 . En dérivant par rapport à la variable d'espace le flux radiatif, on obtient le terme source radiatif S_r à l'instant t_0 . On peut alors résoudre l'équation de conservation de l'énergie et obtenir ainsi le champ de températures à l'instant d'après. Les itérations sont ensuite poursuivies jusqu'à la convergence du régime transitoire vers le régime stationnaire. Cette condition est vérifiée quand le flux total est constant d'après l'équation (1.23), ou encore lorsque le champ de températures ne "varie plus" et vérifie le critère d'arrêt suivant :

$$\max_{1 \leq i \leq nt} \frac{|\tilde{T}_i^{(n+1)} - \tilde{T}_i^{(n)}|}{|\tilde{T}_i^{(n+1)}|} < \varepsilon$$

où ε est un réel strictement positif que l'on se fixe au départ. C'est le critère d'arrêt.

Remarque 5.4 : Nous avons à résoudre l'équation de conservation de l'énergie sur un intervalle du type $[t, t + \Delta t]$ où le terme source radiatif n'est connu qu'à l'instant t . Nous

faisons alors une approximation pour ce dernier, avec une erreur en $o(\Delta t)$. En conséquence, il faudra prendre un pas temps suffisamment petit pour réduire l'erreur au maximum.

Remarque 5.5 : Notons qu'à chaque pas de temps nous devons résoudre l'ETR pour toutes les longueurs d'ondes discrètes λ_k $1 \leq k \leq N$. Nous pouvons alors prévoir des temps de calculs très longs pour la résolution des équations couplées en régime transitoire, surtout si le système met un certain temps avant d'atteindre le régime stationnaire. Ainsi, une résolution rapide de l'ETR présente un intérêt très important en régime transitoire, beaucoup plus qu'en régime stationnaire.

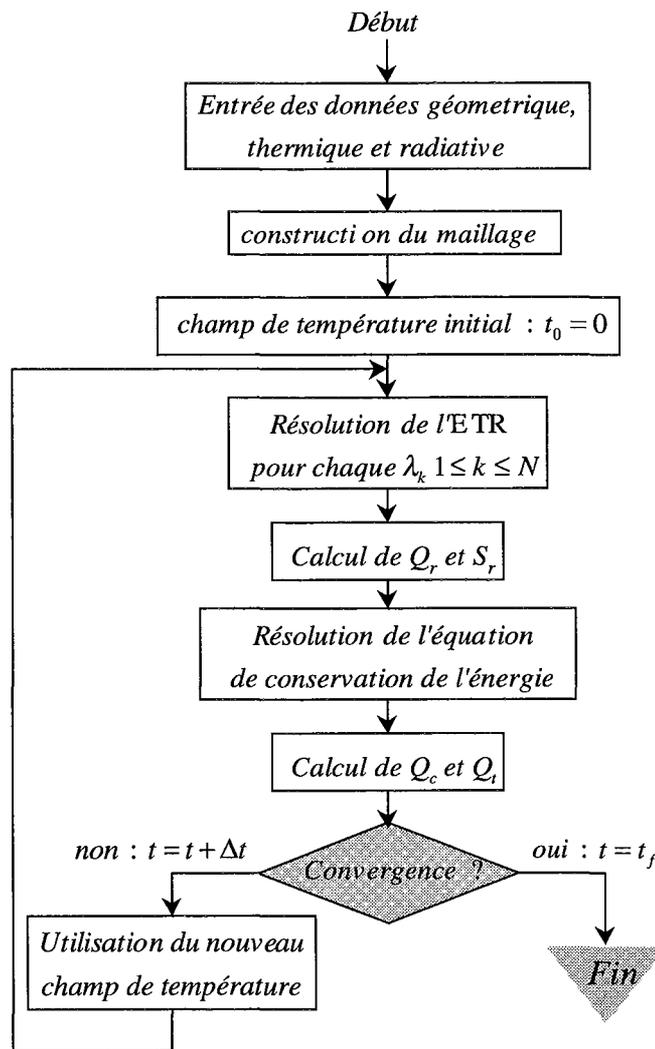


figure 5.1 : Organigramme pour la résolution des équations couplées en régime transitoire

N.B. Nous avons reporté en annexe 7 un problème test qui permet de “valider” la méthode des éléments finis combinée à la méthode de Runge-Kutta implicite que nous venons de présenter.

5.5 Conclusion

Nous venons de résoudre le système couplé des équations du rayonnement et de la conduction en régime transitoire, d'une part lorsque les températures sont imposées aux frontières du milieu (qui peuvent évoluer rapidement au cours du temps) et, d'autre part lorsque le milieu est soumis à des conditions aux limites de flux (qui peuvent être très intenses). La méthode numérique utilisée pour résoudre le système couplé des équations est rapide et très précise. En effet, la résolution numérique de l'ETR est rapide et analytique en espace. L'équation de conservation de l'énergie est résolue en espace par la méthode des éléments finis P^2 (connue pour être très précise) utilisant un maillage non uniforme (de façon à résoudre les fronts de températures avec précision). Le système différentiel en temps résultant a été résolu par une méthode de Runge-Kutta implicite, adaptée aux équations raides. Par ailleurs, les transformations de Kirchhoff et enthalpique appliquées à l'équation de conservation de l'énergie ont permis de traiter la non-linéarité de l'équation de manière très efficace et précise. Les flux de chaleur et le terme source radiatif ont été calculés de manière très précise en utilisant des formules d'intégration et de dérivation d'ordre élevé. Le couplage entre les deux équations a été résolu par itération au cours du temps.

Cependant, nous n'aborderons pas dans ce travail l'étude de l'analyse numérique des schémas en régime transitoire. Nous la laisserons simplement en perspective. Toutefois, dans le chapitre suivant, nous montrerons que, dans la pratique, les schémas sont convergents pour les types de matériaux et les conditions aux limites que nous prenons en compte.

Références

- [1] M. Zlamal. A finite element solution of the nonlinear heat equation. *RAIRO Numerical Analysis*. Vol. 14, p. 203–216, 1980.
- [2] L. Cermak and M. Zlamal. Transformation of dependent variables and the finite element solution of nonlinear evolution equations. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*. Vol. 15, p. 31–40, 1980.
- [3] J. Burger and C. Machbub. Comparison of numerical solutions of a one dimensional non-linear heat equation. *Communications in applied numerical methods*. Vol. 7, p. 233-240, 1991.
- [4] P. Neittaanmaki and D. Tiba. *Optimal Control of nonlinear parabolic systems. Theory, Algorithms, and Applications*. Marcel Dekker, Inc., 1994.
- [5] R. W. Lewis, K. Morgan, H. R. Thomas and K. N. Seetharamu. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*. John Wiley and Sons, 1996.
- [6] M. Crouzeix and A. L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles*. Masson, 1992.
- [7] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential–Algebraic Problems*. Springer Series in Computational Mathematics, New York, 1991.
- [8] O. C. Zienkiewicz. *The finite element method in engineering sciences*. Mc Graw–Hill, New–York, 1977.
- [9] J. Rappaz et M. Picasso. *Introduction à l'analyse numérique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 1998.
- [10] A. L. Pourhiet. *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles*. Cepadues, Toulouse, 1988.
- [11] A. Quarteroni, R. Sacco and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2000.
- [12] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer, 2000.

Chapitre VI

Résultats numériques : application à un milieu réel de fibres de silice

Résumé : Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques pour le modèle considéré, en régime stationnaire et transitoire. En régime transitoire, nous étudions deux exemples : l'un lorsque les températures imposées aux frontières évoluent rapidement dans le temps, et l'autre lorsque les conditions aux limites de flux sont très intenses. L'application est réalisée sur un matériau de type isolant constitué de fibres de silice. Nous comparons aussi les performances des différentes méthodes de résolution de l'ETR, en termes de précision et de temps de calcul.

6.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons situé notre étude dans un cadre général afin de couvrir une très grande diversité de problèmes. Il reste que le domaine d'application qui nous intéresse est celui des milieux fibreux. La suite de notre présentation va par conséquent concerner uniquement ce type de milieux. Plus précisément, nous allons porter notre étude sur des matériaux isolants du type laine de verre, composés de fibres de silice comme le montre la *figure* 1.15. Par ailleurs, mentionnons que ce sont des matériaux proches de ceux que l'on utilise en isolation thermique. Ce type de matériaux a fait l'objet de nombreuses études au LEMTA, notamment par Guilbert (1985) [1], Boulet (1992) [2] et Milandri (2000) [3]. Voici les caractéristiques du milieu réel que nous allons considérer dans la suite de ce chapitre :

- géométrie : milieu plan du type "mur",

- nature des fibres : silice pure de masse volumique 2200 kg/m^3 ,
- diamètre des fibres : 7 microns,
- longueurs des fibres : quelques millimètres,
- masse volumique du milieu : $\rho = 20 \text{ kg/m}^3$,
- morphologie du milieu : le cas qui sera étudié est celui de fibres stratifiées dans des plans parallèles aux frontières du milieu,
- épaisseur du milieu : $E = 10 \text{ cm}$; hauteur du milieu : $H = 50 \text{ cm}$.

Les propriétés radiatives du milieu sont caractérisées par les coefficients monochromatiques d'absorption $\sigma_{a\lambda}$, de diffusion $\sigma_{s\lambda}$, ainsi que la fonction de phase P_λ . Pour nos applications, nous reprenons les coefficients caractéristiques du milieu, qui ont été calculés par Guilbert [1], Boulet [2], et plus récemment par Milandri [3]. De manière générale (et quand ce ne sera pas le cas, nous le préciserons), les discrétisations angulaires et spectrales qui seront utilisées sont les suivantes :

- nombre de discrétisations angulaires : $m = 12$,
- nombre de discrétisations spectrales : $N = 211$.

Les 211 longueurs d'ondes que nous prenons en compte sont significatives pour le milieu et varient entre 3,5 et 25 microns. Comme présenté sur la *figure 6.1*, la variation spectrale des coefficients radiatifs montre que le milieu fibreux que nous étudions est clairement non gris, ce qui justifie totalement la prise en compte du caractère monochromatique dans notre étude. Par ailleurs, ce milieu fibreux possède la caractéristique fondamentale de diffuser le rayonnement de façon fortement anisotrope. A ce sujet, nous renvoyons le lecteur à la thèse de Boulet [2] et à celle de Milandri [3].

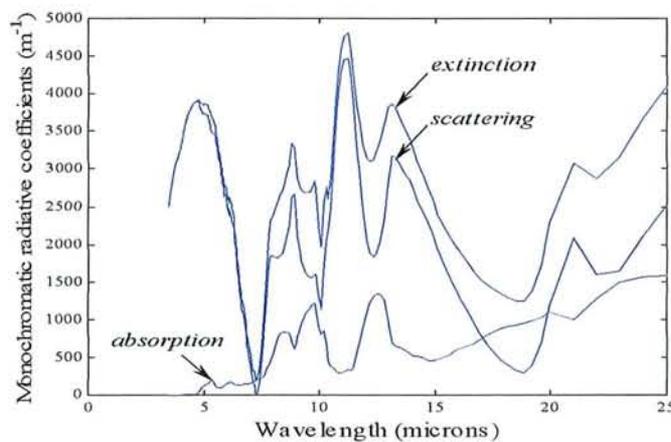


figure 6.1 : Variation des coefficients radiatifs monochromatiques moyens (i.e. moyennés sur les directions) en fonction de la longueur d'onde

Dans notre cas, la conductivité thermique du milieu étudié est déduite par une relation semi-empirique qui prend en compte la conduction de l'air, des fibres de verres et les contacts entre les fibres (Langlais et Klarsfeld, 1985) [4] :

$$\lambda_c(T) = a \cdot T^{0,81} + b \cdot T + c \quad (mW/m \cdot K) \quad (6.1)$$

où $a = 0,2572$, $c = 0,0527 \cdot \rho^{0,91}$ et $b = 0,0013 \cdot c$. ρ est la masse volumique du milieu en kg/m^3 et T est la température du milieu en K .

Remarque 6.1 : La conductivité thermique donnée par la relation (6.1) vérifie bien l'hypothèse 4.2. du chapitre IV avec $\lambda_1 = \lambda_c(T_-)$ et $\lambda_2 = \lambda_c(T_+)$.

Nous avons traité le problème transitoire au chapitre V avec une chaleur massique c_p qui varie avec la température. Cependant, pour les exemples d'applications qui vont suivre dans la gamme de températures considérée, nous la prendrons constante et égale à $670 J/(kg \cdot K)$. Cette valeur est donnée par la table thermophysique [5].

Les applications numériques que nous allons présenter tout au long de ce chapitre ont été effectuées sur un ordinateur de type Pentium II, 450 Mhz avec 128 Mo de mémoire.

Passons maintenant, aux applications numériques et, pour commencer, en régime stationnaire.

6.2 Résultats numériques en régime stationnaire

Dans le but de comparer les différentes méthodes numériques que nous avons présentées au chapitre III, nous désignons par :

- Méthode 1 : la méthode qui résoud le système couplé en utilisant les matrices de transmission et de réflexion pour la résolution de l'ETR (la solution particulière du système (3.12) (3.16) est calculée à l'aide d'un polynôme de degré trois),
- Méthode 2 : la méthode qui résoud le système couplé en utilisant le schéma de différences finies d'ordre deux pour la résolution de l'ETR,
- Méthode 3 : la méthode qui résoud le système couplé en utilisant la technique de diagonalisation de la matrice caractéristique du milieu pour la résolution de l'ETR.

Par ailleurs, pour les exemples d'applications qui vont suivre, nous avons discrétisé le domaine spatial $[0, E]$ à l'aide de $nt = 99$ points (le pas constant en espace est alors égal à $h = E/(nt + 1) = 1 mm$) et nous avons fixé les températures aux frontières à $T_o = 400 K$ et $T_E = 300 K$. Nous avons ainsi choisi un exemple où l'écart entre les températures fixées aux bords est relativement important. Dans ces conditions, l'algorithme qui résoud le système couplé (pour les trois méthodes) a convergé en dix itérations avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$.

Nous avons reporté dans le *Tableau 6.2* les résultats obtenus par les différentes méthodes numériques. Pour chaque colonne, trois valeurs sont représentées : à gauche les valeurs correspondent à la Méthode 1, au centre à la Méthode 2 et enfin à droite à la Méthode 3. Nous pouvons alors constater que les résultats indiqués sont en parfait accord. Cette comparaison prouve ainsi que les différentes méthodes génèrent de bons résultats, ce qui valide en particulier les différentes méthodes de résolution de l'ETR. Notons toutefois une très légère différence concernant les résultats de la première méthode. Cela vient du fait que c'est la moins précise (car la solution particulière est calculée par un polynôme de degré 3). Les temps de calculs que nous présentons maintenant sont les temps CPU (nécessaire pour obtenir la convergence des méthodes, correspondant à dix itérations). Voici ce que nous avons enregistré :

	$nt = 10$ $m = 12$	$nt = 100$ $m = 12$	$nt = 100$ $m = 100$
Méthode 1 (version de Boulet et al.)	208 s.	37 min. 04 s.	15 h. 34 min. 07 s.
Méthode 1 (notre version)	59 s.	9 min. 43 s.	4 h. 42 min. 36 s.
Méthode 2	46 s.	2 h. 19 min. 56 s.	52 h. 39 min. 50 s.
Méthode 3	37 s.	10 min. 27 s.	3 h. 39 min. 53 s.

Tableau 6.1 : Comparaison des performances des différentes méthodes au niveau des temps de calculs.

Comme le montrent les résultats regroupés dans le *Tableau 6.1*, lorsque $nt = 10$ et $m = 12$, le gain de temps est très important pour les nouvelles méthodes, puisque :

- la Méthode 1 (notre version) est approximativement **3,5 fois** plus rapide,
- la Méthode 2 est approximativement **4,5 fois** plus rapide,
- la Méthode 3 est approximativement **5,6 fois** plus rapide,

Lorsque $nt = 100$ et $m = 12$, le gain de temps est aussi important pour les méthodes 1 et 3, puisque :

- la Méthode 1 (notre version) est approximativement **3,8 fois** plus rapide,
- la Méthode 3 est approximativement **3,6 fois** plus rapide,

Par contre, la méthode 2 n'est plus compétitive face aux autres méthodes.

La troisième colonne du *Tableau 6.1* donne un aperçu des temps de calculs lorsque le nombre de directions polaires augmente, passant de $m = 12$ à $m = 100$. On constate alors que pour chaque méthode le temps de calcul devient excessivement long : il est multiplié par environ 25 !

Nous avons représenté sur les *figures* 6.2 et 6.3 respectivement le champ de températures et les flux de chaleur en fonction de la position dans le milieu. Nous pouvons alors constater que :

- d'après la *figure* 6.3 ou encore d'après les résultats présentés dans le *Tableau* 6.2, nous avons bien un flux total constant dans le milieu conformément à la loi de conservation de l'énergie, avec une erreur relative de moins de 0,01 %.
- nous pouvons observer, d'après la *figure* 6.3 (ou le *Tableau* 6.2), l'importance du flux radiatif total dans le milieu : celui-ci représente approximativement un tiers du flux total sous les conditions de calculs précisées au début, ce qui confirme l'importance accordée à ce mode de transfert de chaleur.
- le champ de températures réel obtenu est quasiment linéaire. Cela justifie en particulier le calcul de la solution particulière du système (3.12) (3.16) sous forme de polynôme pour la méthode 1. Par ailleurs, cela justifie le choix d'un champ de températures linéaire pour l'initialisation des calculs par la méthode de point fixe.
- d'après la *figure* 6.3, le flux radiatif total passe par un maximum dans le milieu et le flux conductif, quant à lui, passe par un minimum, au même point. D'après les relations (2.6) et (2.40), en ce point le terme source radiatif est nul et :

$$\int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_{\lambda}(x, \mu) \, d\mu \, d\lambda = \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_{\lambda}^o(T(x)) \, d\mu \, d\lambda \quad (6.2)$$

- comme le montre la *figure* 6.2, la température est une fonction décroissante (ceci lorsque la température imposée sur la face avant est supérieure à celle imposée sur la face arrière) et qu'elle est encadrée par les deux températures fixées aux bords : nous retrouvons ainsi le premier point du résultat énoncé par le théorème 1 du chapitre IV.

Par ailleurs, nous avons testé la stabilité des méthodes en ce qui concerne la donnée initiale. Nous avons considéré un champ de températures initial sensiblement différent d'une fonction linéaire, comme le montre la *figure* 6.2. Finalement, l'algorithme a convergé vers le même champ de températures réel.

Nous avons représenté sur les *figures* 6.4 et 6.5 le champ de luminance dans la première direction μ_1 , en fonction de la position dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde. Ces *figures* montrent que, comme pour la température, la luminance est décroissante en fonction de la position dans le milieu (ceci toujours lorsque la température imposée sur la face avant est supérieure à celle imposée sur la face arrière). Les *figures* montrent aussi que la courbe de la luminance a une allure (en fonction de la longueur d'onde) proche de celle du corps noir.

Sur les *figures* 6.6, 6.7 et 6.8, nous avons représenté les courbes de la luminance et celle du corps noir, à différentes positions dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde. Les courbes en noir représentent la luminance du corps noir. Ensuite, pour ne pas alourdir les

figures, nous avons représenté la luminance spectrale uniquement dans deux directions qui sont cependant significatives. Les courbes en bleu représentent la luminance dans la première direction μ_1 de l'espace avant : c'est dans cette direction que la valeur de la luminance est la plus importante. Les courbes en rouge représentent la luminance dans la première direction $-\mu_1$ de l'espace arrière : c'est dans cette direction que la valeur de la luminance est la plus faible. Sur la figure 6.6, nous constatons alors que les luminances spectrales calculées sont très proches (elles peuvent prendre des valeurs supérieures ou des valeurs inférieures) de celles du corps noir à la température du point considéré. A certains endroits (pour les longueurs d'ondes inférieures à 5 microns et supérieures à 10 microns), les courbes se superposent pratiquement. C'est dans la zone comprise entre 5 et 10 microns que les courbes de la luminance spectrale, calculée dans les deux directions μ_1 et $-\mu_1$, s'écartent le plus de celles du corps noir à la température du point considéré. Notons alors que c'est la variation des luminances spectrales en fonction de l'angle polaire qui est à l'origine du caractère plus ou moins isolant du milieu. Comme le montre toujours la figure 6.6, la luminance spectrale calculée est une fonction encadrée par les luminances monochromatiques du corps noir, aux deux températures imposées aux bords : nous retrouvons ainsi le deuxième point du résultat énoncé par le théorème 1 du chapitre IV.

A l'aide des figures 6.7, 6.8 et 6.9, nous avons voulu mettre en évidence l'influence du choix du nombre de discrétisations angulaires sur le calcul des luminances spectrales et des flux de chaleur. Les courbes de la figure 6.7 ont été obtenues en prenant 100 directions angulaires, les courbes de la figure 6.8 à l'aide de 12 directions angulaires et les courbes de la figure 6.9 respectivement pour 12 et 100 directions angulaires. Pour mieux mettre en évidence le phénomène concernant les luminances spectrales, nous avons représenté celles qui ont été calculées très près des frontières du milieu (aux abscisses $x = 1 \text{ mm}$ et $x = 9,9 \text{ mm}$). Si nous rappelons le résultat concernant l'encadrement de la luminance, énoncé par le corollaire 4.19 du chapitre IV, nous avons :

$$L_{\lambda_k}^o(T_E) + C_{i,j,k}(T_E) \leq \tilde{L}_{\lambda_k}(x_i, \mu_j) \leq L_{\lambda_k}^o(T_o) + C_{i,j,k}(T_o) \quad \forall 1 \leq i \leq nt, 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq N.$$

où $C_{i,j,k}(T)$ représente l'erreur entre la luminance exacte (solution de l'ETR) et la luminance calculée, qui vérifie $\forall 1 \leq k \leq N$:

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)| \leq \frac{L_{\lambda_k}^o(T)}{1 - c_{\lambda_k}} \cdot \frac{\Delta\theta^4}{\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^- + \tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^-} \cdot \frac{\pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{\mu \in [-1,1] \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_{s\lambda_k}(\mu) \cdot P_{\lambda_k}(\mu \rightarrow \mu')] \right| \quad (6.3)$$

où c_{λ_k} est la constante donnée par :

$$c_{\lambda_k} = 1 - \frac{\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^-}{\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^+ + \tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^+} + \frac{\Delta\theta^4}{\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^- + \tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^-} \cdot \frac{\pi}{2880} \cdot \sup_{\substack{\mu \in [-1,1] \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_{s\lambda_k}(\mu) \cdot P_{\lambda_k}(\mu \rightarrow \mu')] \right|$$

avec $\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^-$, $\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^+$, $\tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^-$ et $\tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^+$ des constantes données par :

$$\tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^- = \inf_{\mu \in [-1,1]} \sigma_{a\lambda_k}(\mu) ; \tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^- = \inf_{\mu \in [-1,1]} \sigma_{s\lambda_k}(\mu) ; \tilde{\sigma}_{a\lambda_k}^+ = \sup_{\mu \in [-1,1]} \sigma_{a\lambda_k}(\mu) ; \tilde{\sigma}_{s\lambda_k}^+ = \sup_{\mu \in [-1,1]} \sigma_{s\lambda_k}(\mu)$$

Remarque 6.2 :

1) En fait, nous avons démontré au chapitre IV une majoration de la quantité $\max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)|$

où apparaissent les constantes $\tilde{\sigma}_a^-, \tilde{\sigma}_a^+, \tilde{\sigma}_s^-, \tilde{\sigma}_s^+$ et c qui sont indépendantes de la longueur d'onde. Toutefois, la relation (6.3) que nous venons d'écrire est encore vraie lorsque les coefficients d'absorption, de diffusion et la constante c sont monochromatiques puisque la longueur d'onde est un paramètre dans l'ETR.

2) $\max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)|$ représente l'écart absolu et $\frac{1}{L_{\lambda_k}^o(T)} \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq nt \\ 1 \leq j \leq m}} |C_{i,j,k}(T)|$ représente l'écart relatif.

3) Le terme $\sup_{\substack{\mu \in [-1,1] \\ \mu' \in [-1,1]}} \left| \frac{\partial^4}{\partial \mu^4} [\sigma_{s\lambda_k}(\mu) \cdot P_{\lambda_k}(\mu \rightarrow \mu')] \right|$ est d'autant plus grand que la variation de la fonction $\mu \rightarrow \sigma_{s\lambda_k}(\mu) \cdot P_{\lambda_k}(\mu \rightarrow \mu')$ est rapide.

L'erreur $C_{i,j,k}(T)$ est donc proportionnelle au pas angulaire à la puissance quatrième (car nous avons utilisé la formule à trois points de Simpson composée dans la démonstration) et nous réduisons l'erreur en prenant un pas plus fin. Si nous analysons le problème pour la luminance spectrale calculée à l'abscisse $x = 1 \text{ mm}$, alors l'écart qui existe entre la courbe en bleu et la courbe en noir représente l'erreur $C_{i,j,k}(T_o)$. Nous observons une très nette différence pour les deux figures 6.7 et 6.8. Lorsque le modèle utilise 100 directions angulaires, nous obtenons des résultats très satisfaisants. Par contre, lorsque 12 directions angulaires sont prises en compte, nous constatons que l'erreur est assez importante. Cependant, comme le montre la figure 6.9, les conséquences sur les flux de chaleur sont très minimes. En effet, nous observons une très légère différence qui se situe uniquement près des frontières du milieu.

De plus, notons d'après la proposition 4.33 que l'erreur pour les luminances calculées à n'importe quelle abscisse dans le milieu peut être la même ou encore plus importante puisque une erreur supplémentaire vient s'ajouter provenant de la discrétisation spatiale.

Par ailleurs, notons que l'erreur $C_{i,j,k}(T)$ est plus importante lorsque le coefficient d'absorption est très faible, d'après la formule (6.3). D'après la figure 6.1, la zone où le milieu étudié absorbe très peu se situe dans les courtes longueurs d'onde. Le phénomène que nous avons mis en évidence précédemment concerne justement ce domaine spectral. Nous savons que nous pouvons réduire l'erreur en prenant un pas angulaire suffisamment fin. Cependant les temps de calculs deviennent aussi plus importants comme le montre clairement le Tableau 6.1. Il faut donc faire un compromis entre la précision et les temps de calculs. En

conclusion, nous conseillons lorsque cela s'avère nécessaire, de prendre un pas angulaire plus fin dans la zone à très faible absorption du milieu.

Enfin, à l'aide des *figures* 6.10, 6.12 et 6.13 comparées aux *figures* 6.2, 6.4 et 6.5, nous montrons que la luminance spectrale calculée est une fonction croissante de la température tel que cela est énoncé par la proposition 2 du chapitre IV. La *figure* 6.11 comparée à la *figure* 6.3 montre que les flux de chaleur sont aussi des fonctions croissantes de la température.

Epaisseur (m)	Flux total (W/m ²)	Flux radiatif (W/m ²)	Flux conductif (W/m ²)	Température (K)
0				400.00 / 400.00 / 400.00
0.01	47.30 / 47.31 / 47.32	19.94 / 19.89 / 19.91	27.36 / 27.41 / 27.41	391.39 / 391.45 / 391.47
0.02	47.30 / 47.31 / 47.33	19.63 / 19.50 / 19.51	27.67 / 27.80 / 27.81	383.15 / 383.18 / 383.20
0.03	47.30 / 47.31 / 47.33	18.88 / 18.84 / 18.85	28.42 / 28.47 / 28.48	374.59 / 374.59 / 374.60
0.04	47.30 / 47.31 / 47.33	18.04 / 18.06 / 18.07	29.26 / 29.24 / 29.25	365.62 / 365.61 / 365.62
0.05	47.30 / 47.31 / 47.33	17.14 / 17.20 / 17.21	30.15 / 30.10 / 30.11	356.19 / 356.19 / 356.20
0.06	47.30 / 47.31 / 47.33	16.20 / 16.26 / 16.26	31.10 / 31.05 / 31.06	346.26 / 346.28 / 346.28
0.07	47.30 / 47.31 / 47.33	15.21 / 15.24 / 15.24	32.09 / 32.07 / 32.08	335.77 / 335.80 / 335.81
0.08	47.30 / 47.31 / 47.33	14.16 / 14.14 / 14.14	33.13 / 33.17 / 33.18	324.66 / 324.70 / 324.70
0.09	47.30 / 48.31 / 47.33	12.96 / 12.87 / 12.88	34.34 / 34.43 / 34.44	312.86 / 312.87 / 312.87
0.1				300.00 / 300.00 / 300.00

Tableau 6.2 : Flux de chaleur et champ de températures dans le milieu :
Résultats obtenus par les différentes méthodes

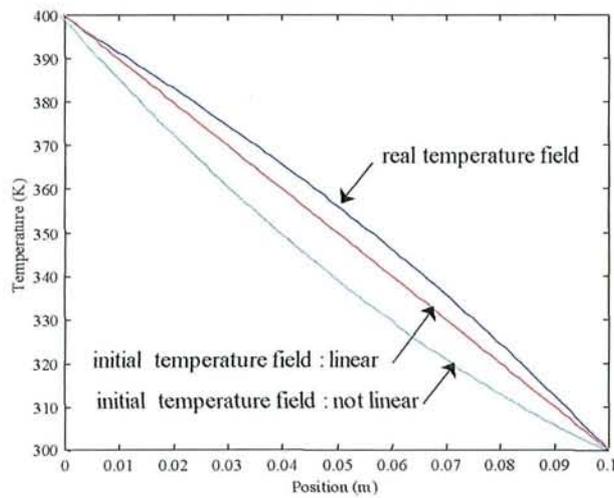


figure 6.2 : Champ de températures dans le milieu

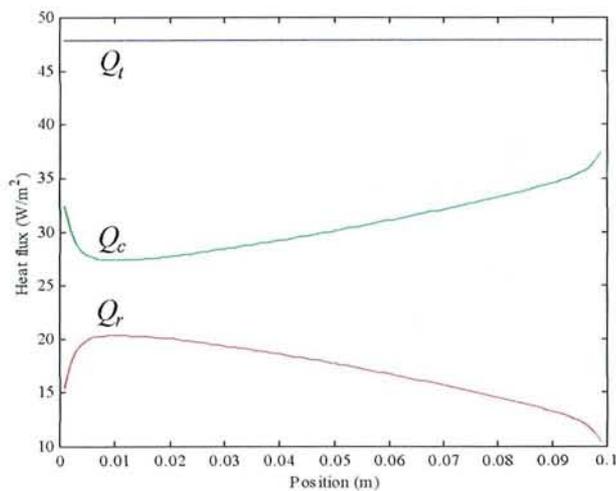


figure 6.3 : Flux de chaleur dans le milieu

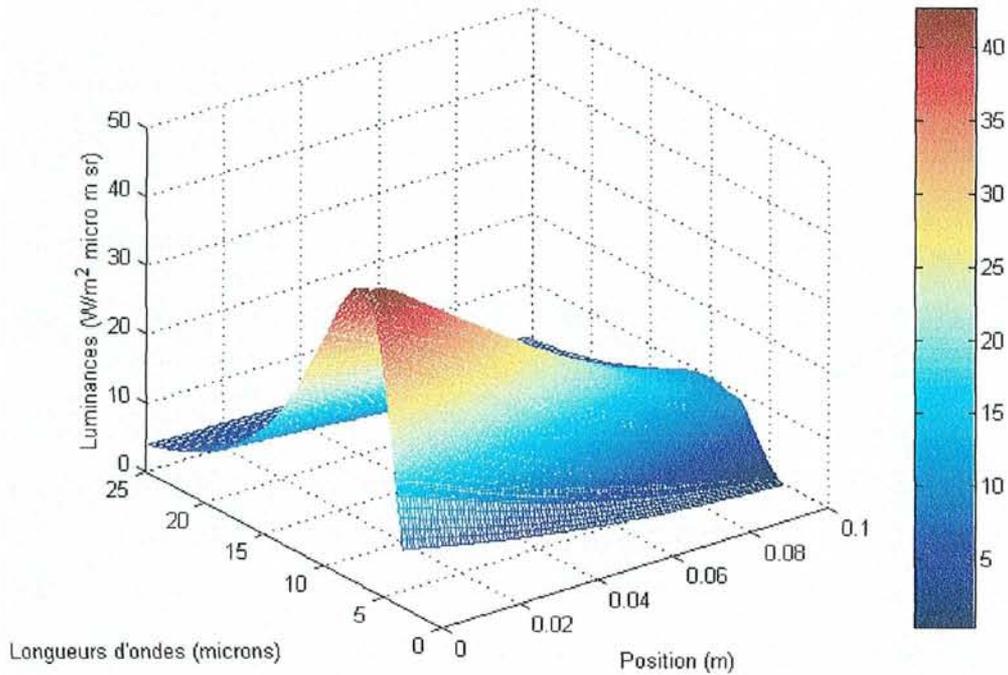


figure 6.4 : Champ de luminance (dans la direction $\mu_1 = \cos(\pi/24)$) en fonction de la position dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde : vu sur la face avant

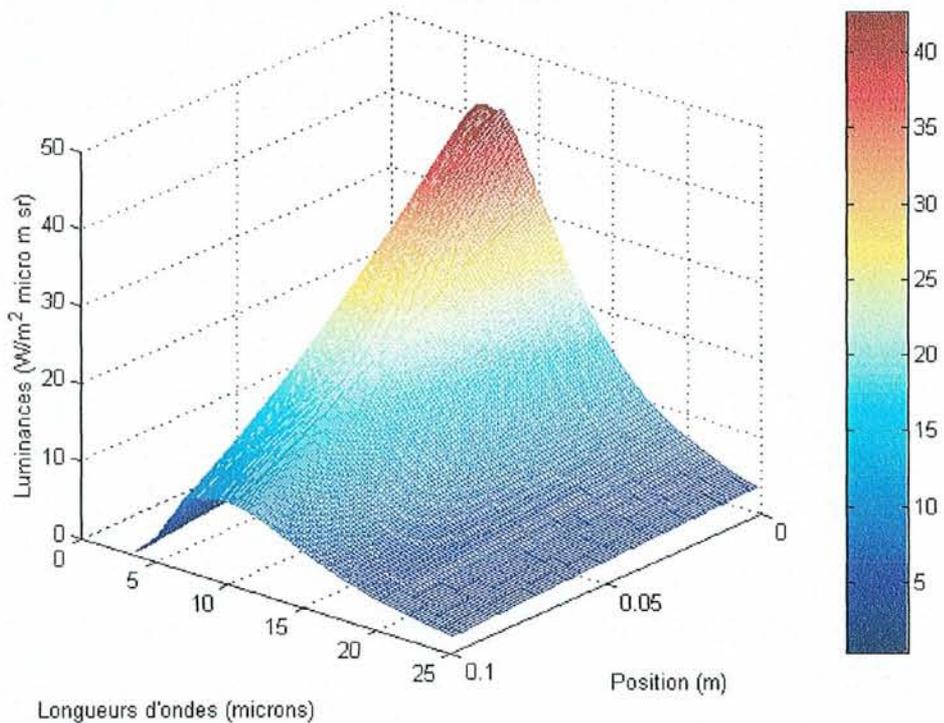


figure 6.5 : Champ de luminance (dans la direction $\mu_1 = \cos(\pi/24)$) en fonction de la position dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde : vu sur la face arrière

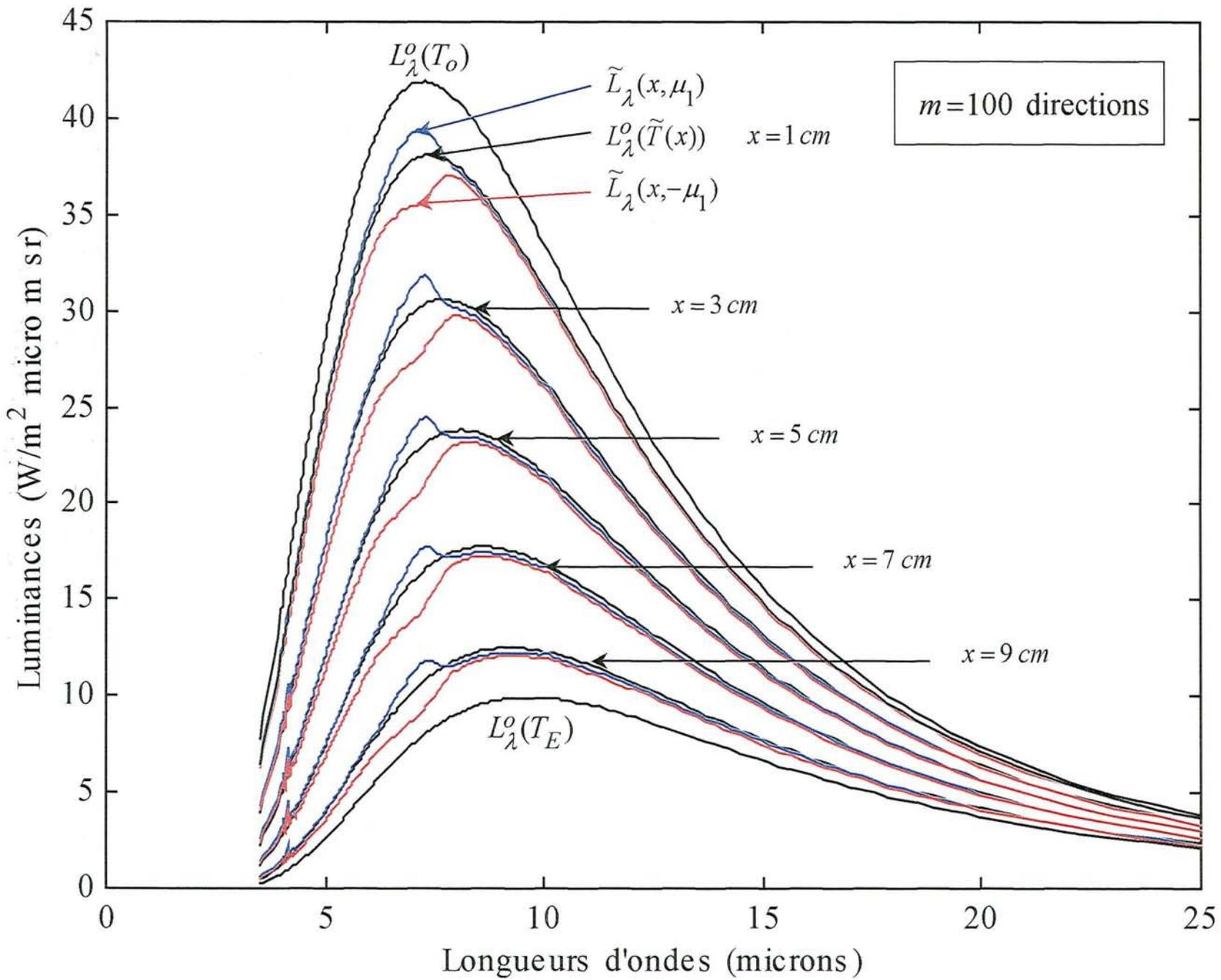


Figure 6.6 : Champ de luminance à différentes positions dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde

figure 6.7 : Champ de luminance calculé près des frontières du milieu en fonction de la longueur d'onde ($m = 100$)

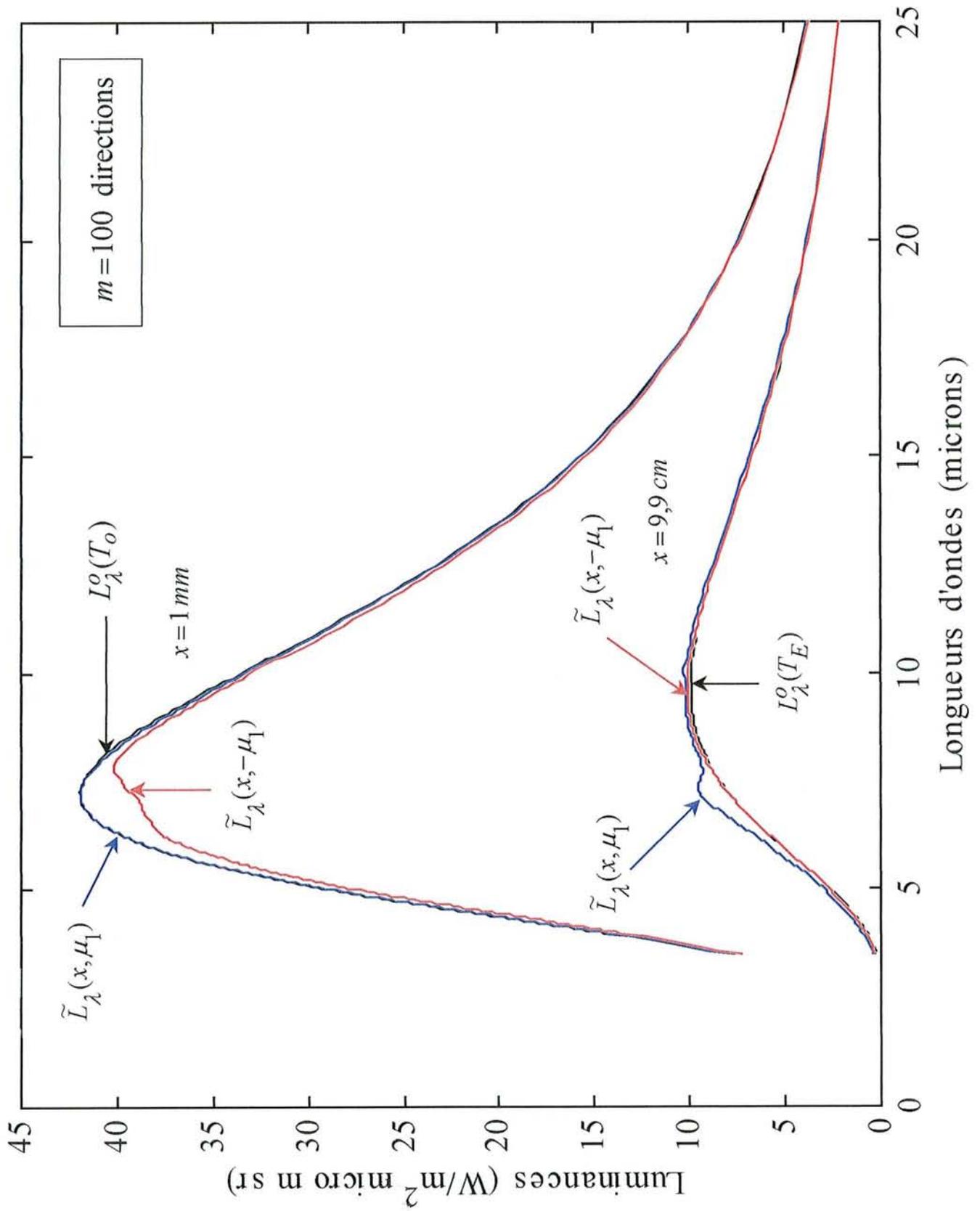


figure 6.8 : Champ de luminance calculé près des frontières du milieu en fonction de la longueur d'onde ($m = 12$)

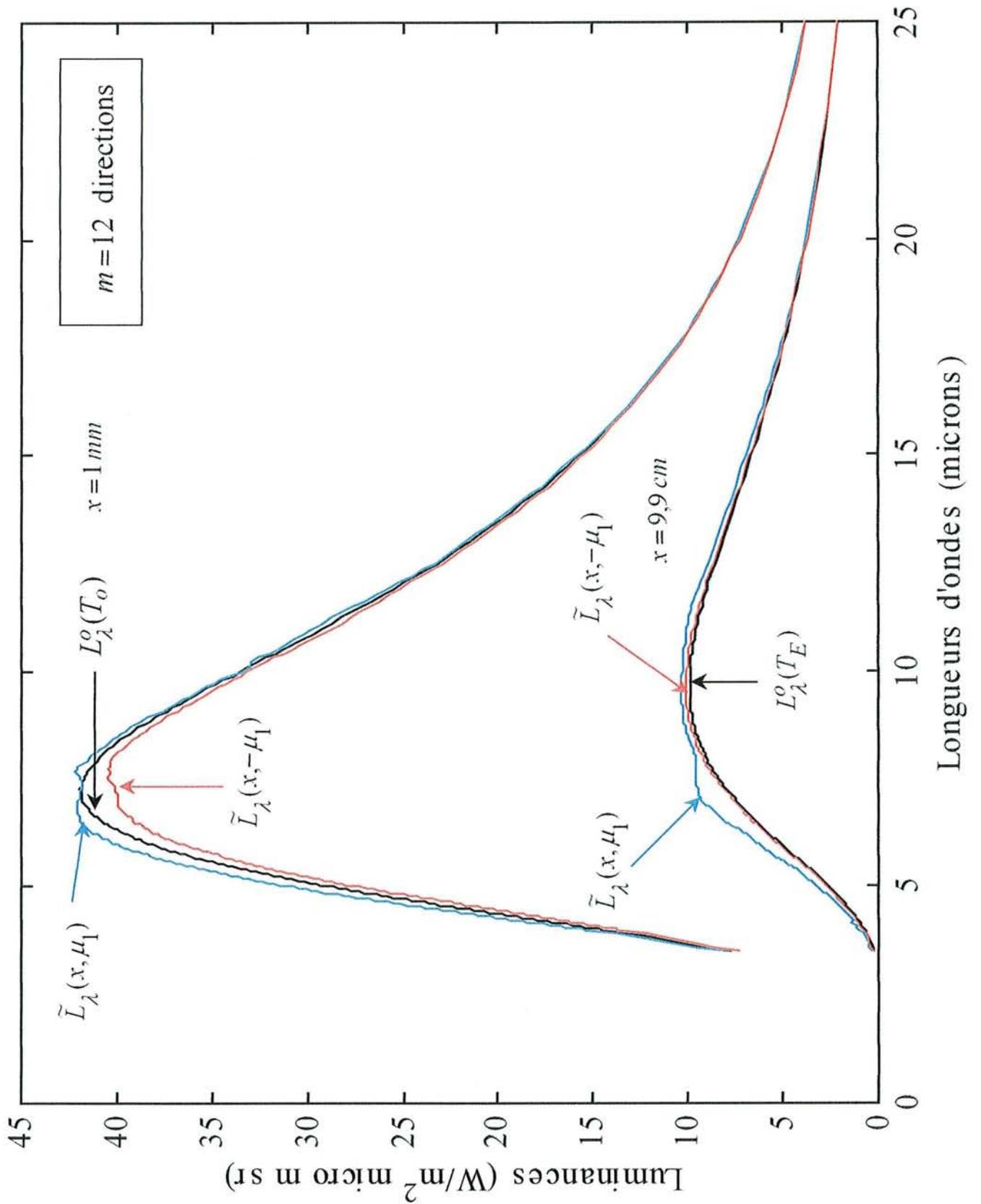
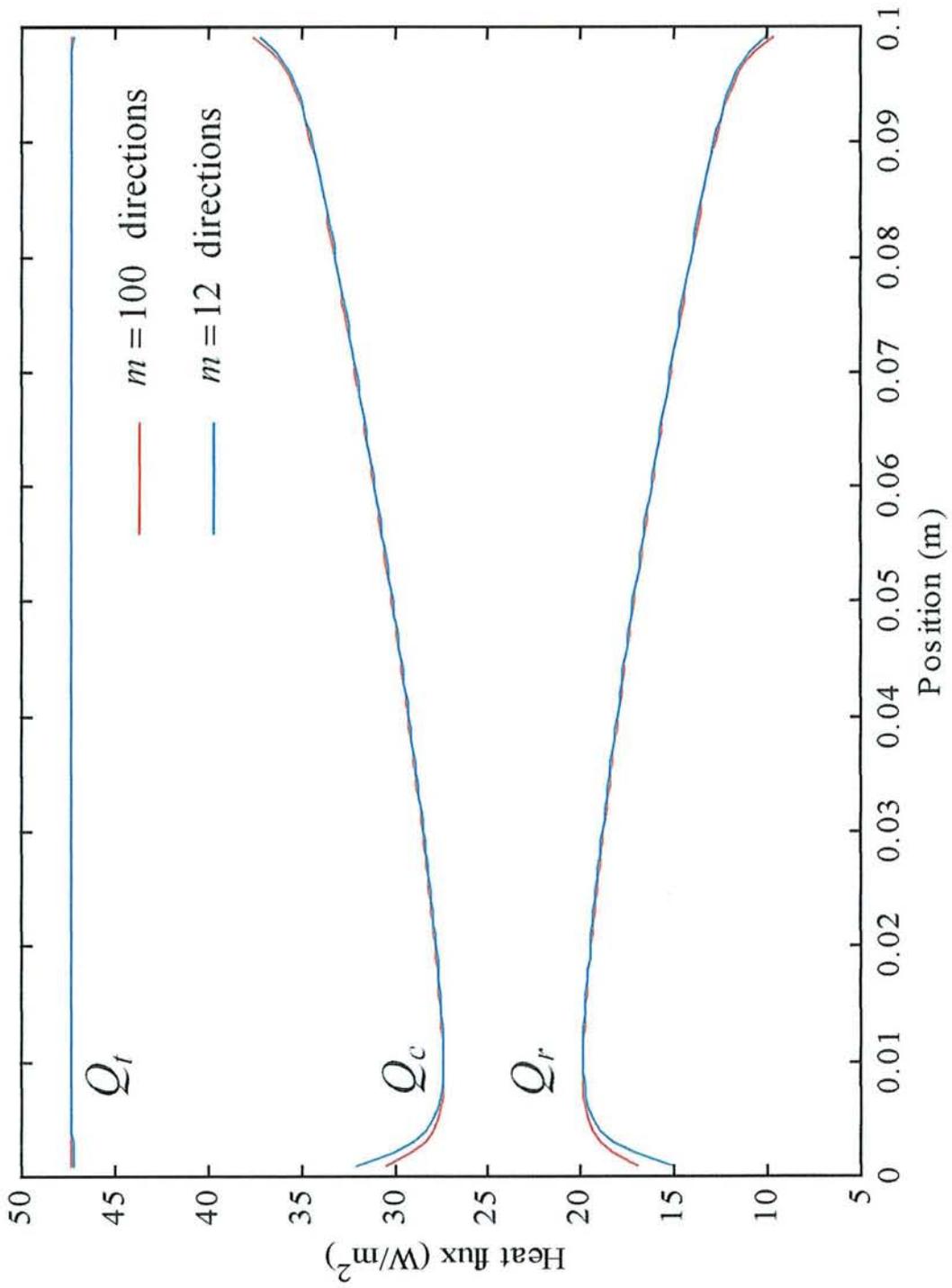


figure 6.9 : Flux de chaleur dans le milieu

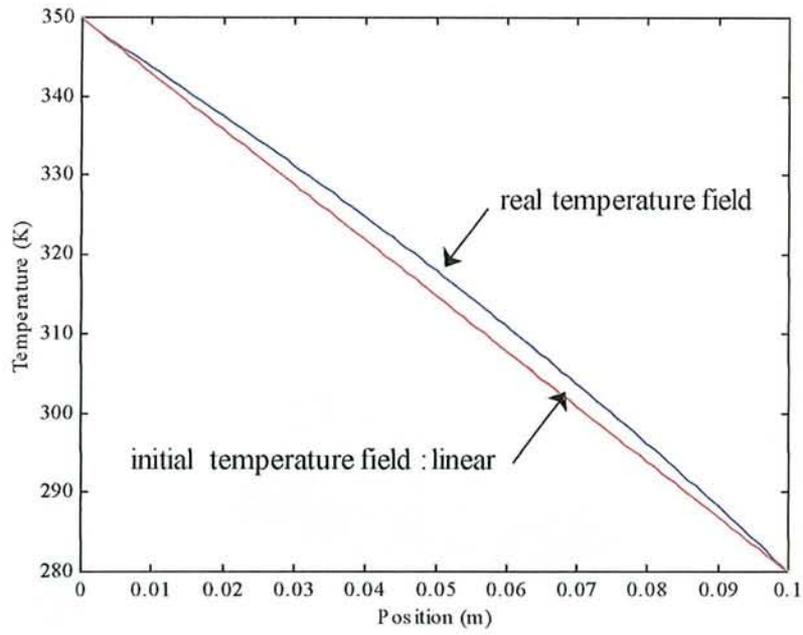


figure 6.10 : Champ de températures dans le milieu

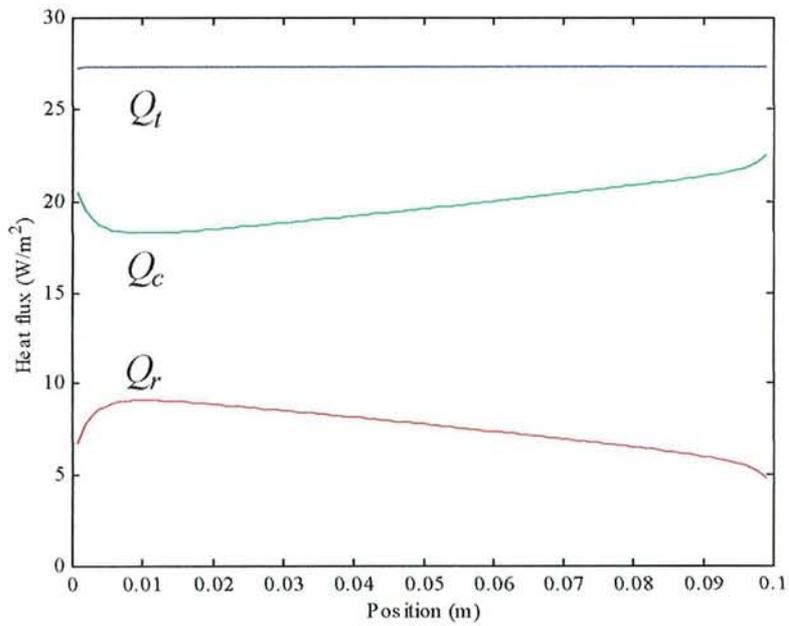


figure 6.11 : Flux de chaleur dans le milieu

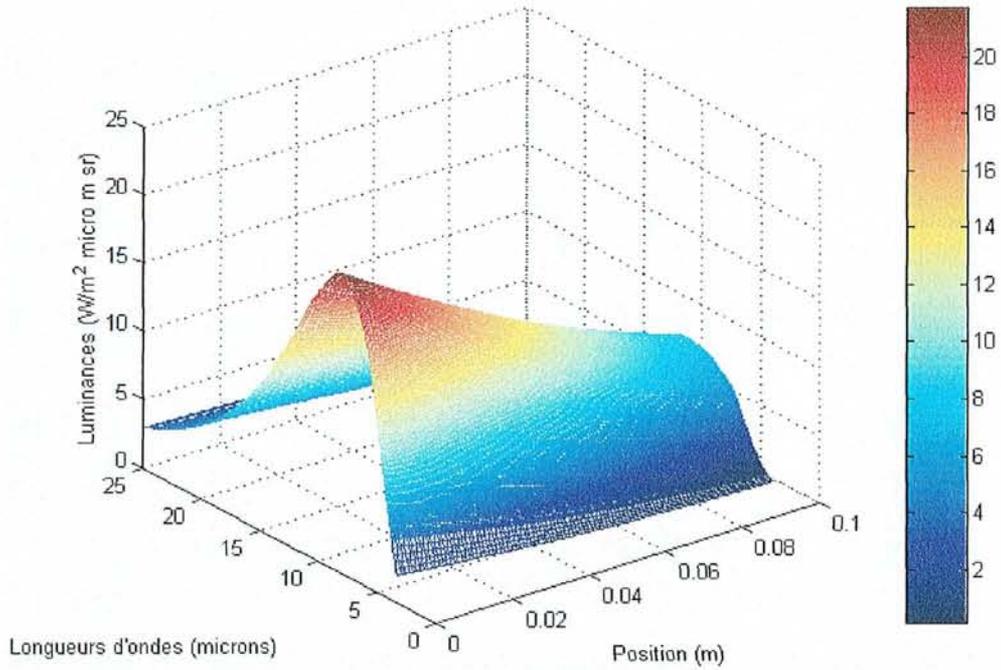


figure 6.12 : Champ de luminance (dans la direction $\mu_1 = \cos(\pi/24)$) en fonction de la position dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde : vu sur la face avant

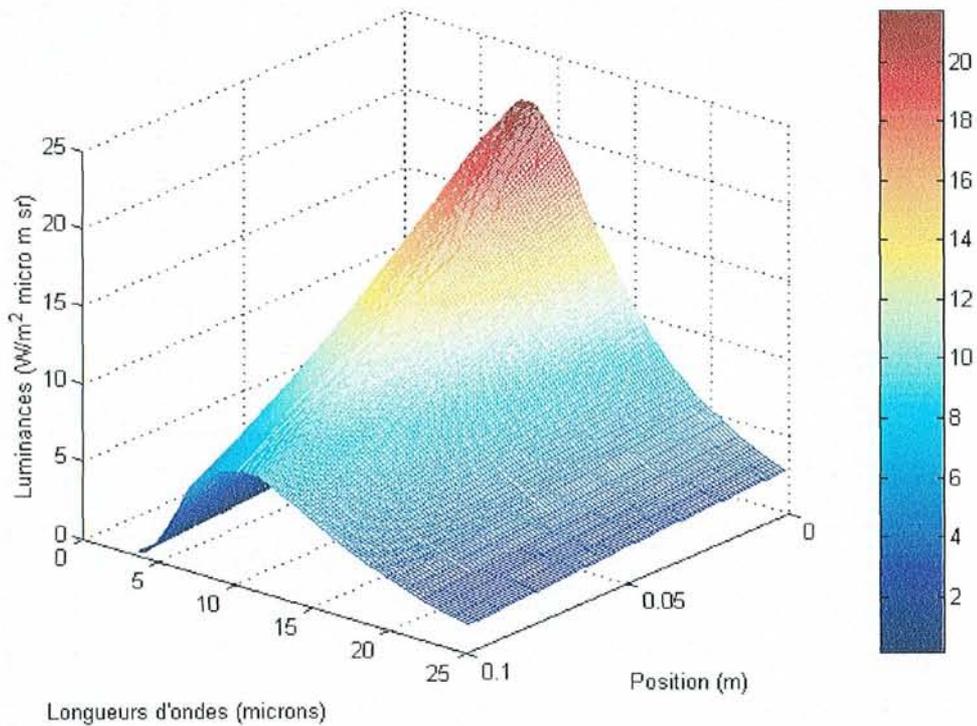


figure 6.13 : Champ de luminance (dans la direction $\mu_1 = \cos(\pi/24)$) en fonction de la position dans le milieu et en fonction de la longueur d'onde : vu sur la face arrière

6.2 Résultats numériques en régime transitoire

6.3.1 Températures imposées aux frontières

Nous avons cherché à calculer le champ de températures et les flux en fonction du temps lorsque $T_o = 400 K$; $T_E = 300 K$ et la température imposée sur la face avant (en $x = 0$) suit une évolution linéaire très rapide :

$$f(t) = \begin{cases} (T_o - T_E)t + T_E & \text{lorsque } 0 \leq t \leq 1 \text{ s} \\ T_o & \text{lorsque } t \geq 1 \text{ s} \end{cases}$$

Nous avons utilisé un maillage en espace à pas variable et nous l'avons raffiné dans la zone à fort gradient de température, en l'occurrence ici sur l'intervalle $[0, E/5]$, ceci à l'aide de 20 points et d'une discrétisation en progression géométrique avec une raison $\alpha = 0,8$. L'intervalle $[E/5, E]$ quant à lui, a été discrétisé avec un pas constant $h = 2,5 \text{ mm}$. Par ailleurs, nous avons utilisé un pas de temps très petit (par rapport au temps mis pour que le système se stabilise) : $\Delta t = 0,5 \text{ s}$, pour des raisons de stabilité et de précision.

Sur les *figures* 6.14, 6.15, 6.16 et 6.17, nous avons représenté l'évolution du champ de températures et des flux en fonction du temps et de l'abscisse du point considéré. Nous pouvons alors constater qu'aux premiers instants, le gradient de température est très significatif : les flux radiatifs et conductifs prennent des valeurs très importantes. A chaque instant, nous observons l'existence d'un maximum pour le flux radiatif total : en ce point, le terme source radiatif est nul et d'après la relation (6.2) :

$$\int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_{\lambda}(x, \mu, t) \, d\mu \, d\lambda = \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \sigma_{a\lambda}(\mu) \cdot L_{\lambda}^o(T(x, t)) \, d\mu \, d\lambda \quad (6.4)$$

puisque la relation est encore vraie en régime transitoire. Au premier tiers du temps environ, le champ de températures est pratiquement linéaire. Ensuite la convergence vers le régime stationnaire est beaucoup plus lente. Quand le système atteint le régime stationnaire ($t_f \cong 1250 \text{ s}$), le flux total devient constant et égal à 47.33 W/m^2 . C'est une valeur numérique que nous retrouvons à partir du modèle développé précédemment en régime stationnaire. Comme le montre le *Tableau* 6.2, nous retrouvons aussi les mêmes valeurs pour le champ de températures, les flux radiatifs et conductifs. Par ailleurs, le programme a mis exactement 54 h. 57 min. 40 s. pour converger, avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$. Le temps de calcul reste donc quand même assez important, bien que nous ayons amélioré considérablement les temps de calculs pour la résolution numérique de l'ETR.

6.3.2 Condition aux limites de flux

Pour cette application, nous nous sommes placés dans le cas où le milieu est éclairé par un corps noir, à une température de 600 K sur la face avant (en $x = 0$) et à une température de 300 K sur la face arrière (en $x = E$). Ces deux températures sont ensuite maintenues constantes au cours du temps. Nous pouvons ainsi considérer la symétrie azimutale dans notre modèle, puisque les conditions aux limites radiatives respectent cette symétrie.

Nous supposons que la température ambiante de l'air du côté de la face avant du milieu, s'échauffe et suit l'évolution linéaire suivante :

$$T_{\infty,0}(t) = \begin{cases} 150 \cdot t + 300 & \text{lorsque } 0 \leq t \leq 120\text{ s} \\ 450 & \text{lorsque } t \geq 120\text{ s} \end{cases}$$

et nous supposons que la température ambiante de l'air du coté de la face arrière du milieu reste constante au cours du temps et égale à $T_{\infty,E}(t) = 300\text{ K}$.

Pour le modèle numérique, nous avons utilisé un maillage en espace à pas variable et nous l'avons raffiné près des deux frontières du milieu, sur les deux sous-intervalles $[0, E/5]$ et $[4E/5, E]$. Ceci (pour chaque sous-intervalle) à l'aide de 30 points et d'une discrétisation en progression géométrique avec une raison $\alpha = 0,8$. L'intervalle $[E/5, 4E/5]$, quant à lui, a été discrétisé avec un pas constant $h = 2,5\text{ mm}$. Toujours pour des raisons de stabilité et de précision, nous avons utilisé un pas de temps très petit : $\Delta t = 0,5\text{ s}$.

Sur les *figures* 6.18, 6.19, 6.20 et 6.21, nous avons représenté l'évolution du champ de températures et des flux en fonction du temps et de l'abscisse du point considéré. Sur ces quatre *figures*, les courbes en noir correspondent à l'instant $t = 1\text{ s}$, les courbes en vert à l'instant $t = 75\text{ s}$, les courbes en rouge à l'instant $t = 250\text{ s}$ et enfin les courbes en bleu à l'instant $t_f = 1500\text{ s}$: c'est l'instant où le régime stationnaire est atteint. Les courbes de températures passent par un maximum dans le milieu : c'est la perte par convection sur la face avant qui en est responsable. En particulier, cela conduit à un flux conductif à valeur négative proche de la face avant. Le pic du flux radiatif est dû au fait que le flux incident croît très rapidement : le rayonnement se propage dans le milieu à une vitesse proche de celle de la lumière dans le vide. L'élévation de température ne peut pas se faire à la même vitesse donc le flux conductif ne varie pas de la même façon. La variation rapide de la température sur la face avant conduit à un flux conductif qui varie aussi fortement. Au premier quart du temps environ, le champ de températures est pratiquement linéaire. Ensuite la convergence vers le régime stationnaire est beaucoup plus lente. Quand le système atteint le régime stationnaire ($t_f \cong 1500\text{ s}$), le flux total devient constant et égal à environ 205 W/m^2 , avec une erreur relative inférieure à $0,6\%$ comme le montre la *figure* 6.23. Notons que nous pouvons réduire encore l'erreur en prenant un maillage plus fin près des frontières.

Par ailleurs, le programme a mis exactement 82 h. 04 min. 10 s. pour converger, avec une tolérance $\varepsilon = 10^{-6}$. Le temps de calcul est donc tout aussi important que pour le modèle précédent (températures imposées aux frontières). De plus, bien que nous ayons donné la méthode qui permet de simuler le problème associant les conditions de flux sans la symétrie azimutale (donné en annexe 3), nous n'avons pas effectué d'essai pour ce modèle car les temps de calculs sont trop longs. En théorie, le programme (dans les conditions définies précédemment en rajoutant 12 directions azimutales) devrait tourner un mois !

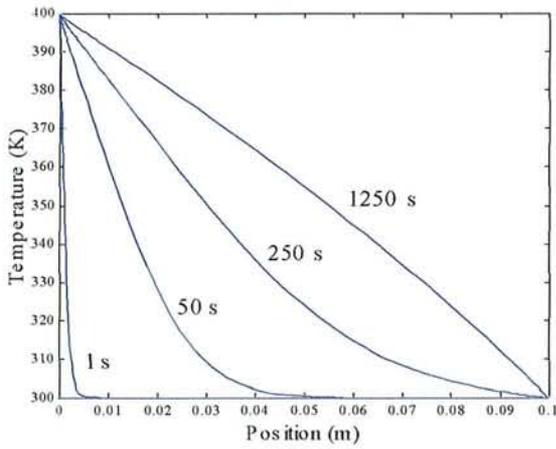


figure 6.14 : Evolution du champ de températures

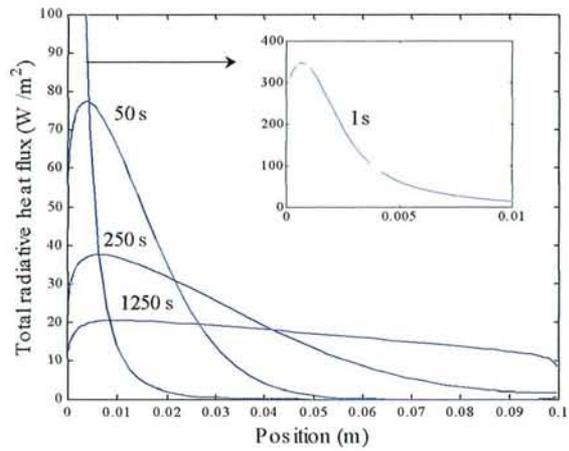


figure 6.15 : Variation du flux radiatif total au cours du temps

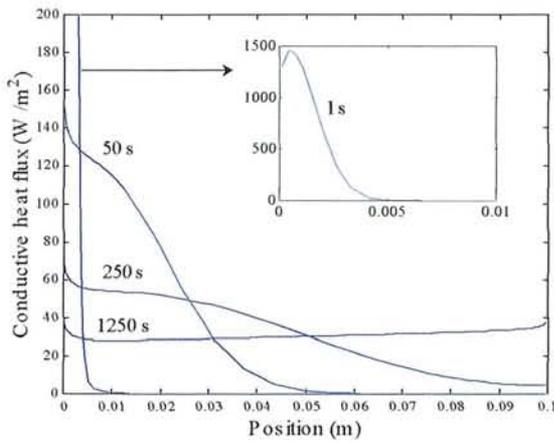


figure 6.16 : Variation du flux conductif au cours du temps

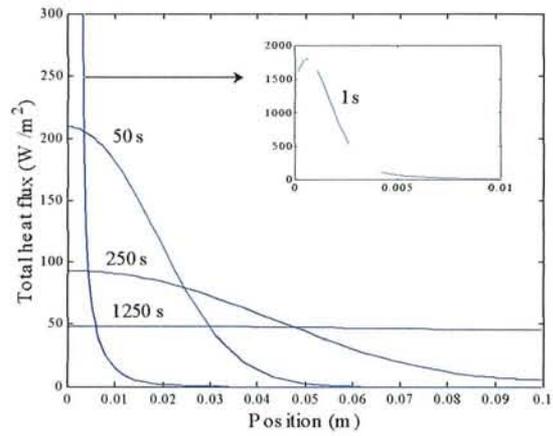


figure 6.17 : Variation du flux total au cours du temps

Epaisseur (m)	Flux total (W·m ⁻²)	Flux radiatif (W·m ⁻²)	Flux conductif (W·m ⁻²)	Température (K)
0				400.00
0.01	47.33	19.93	27.40	391.50
0.02	47.33	19.50	27.83	383.21
0.03	47.33	18.86	28.47	374.61
0.04	47.33	18.07	29.25	365.62
0.05	47.33	17.21	30.11	356.20
0.06	47.33	16.26	31.05	346.28
0.07	47.32	15.24	32.08	335.81
0.08	47.32	14.14	33.18	324.70
0.09	47.32	12.89	34.43	312.85
0.1				300.00

Tableau 6.2 : Flux de chaleur et champ de températures dans le milieu, obtenus après convergence vers le régime stationnaire

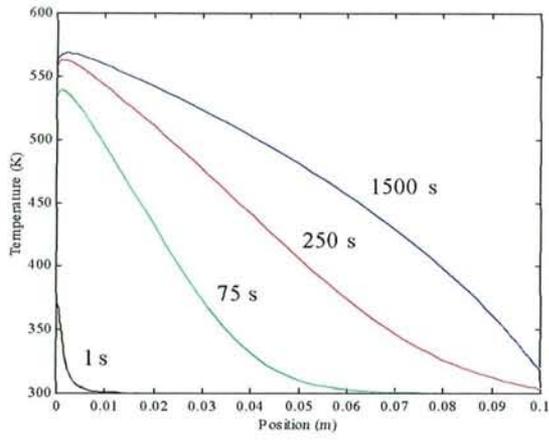


figure 6.18 : Evolution du champ de températures au cours du temps

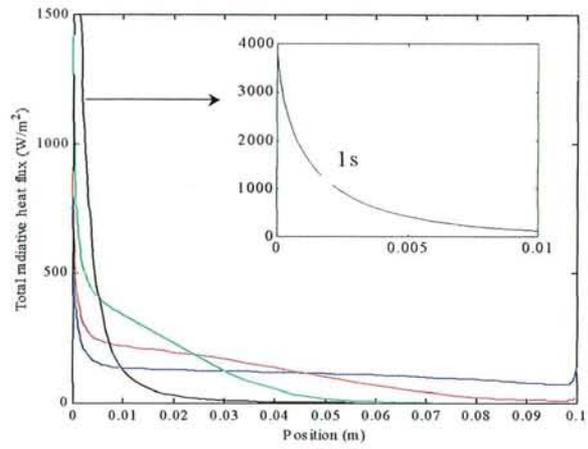


figure 6.19 : Variation du flux radiatif total au cours du temps

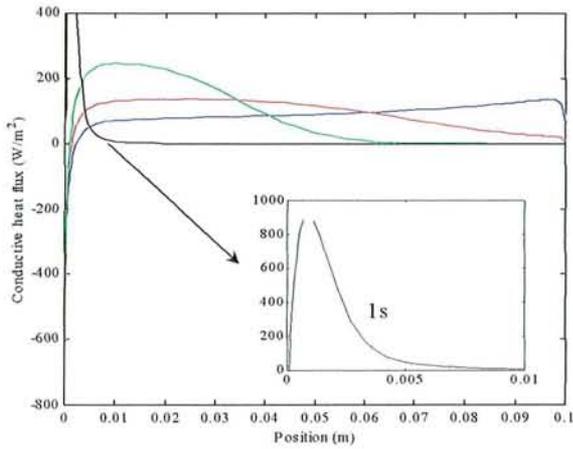


figure 6.20 : Variation du flux conductif au cours du temps

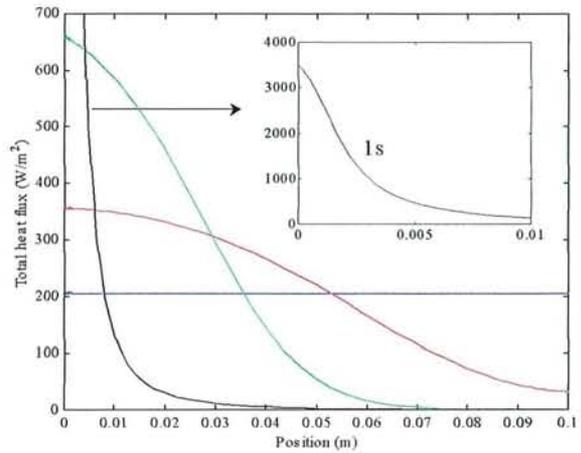


figure 6.21 : Variation du flux total au cours du temps

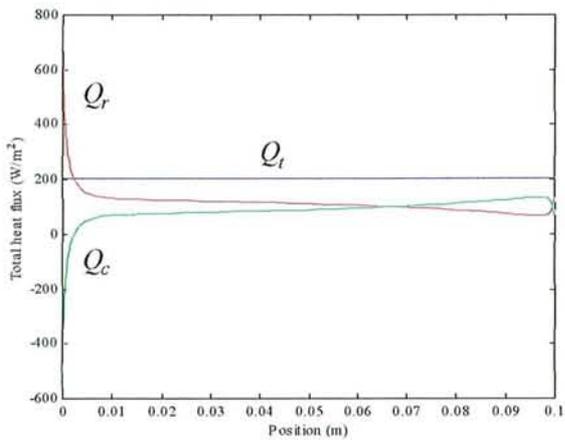


figure 6.22 : Flux de chaleur dans le milieu en régime stationnaire

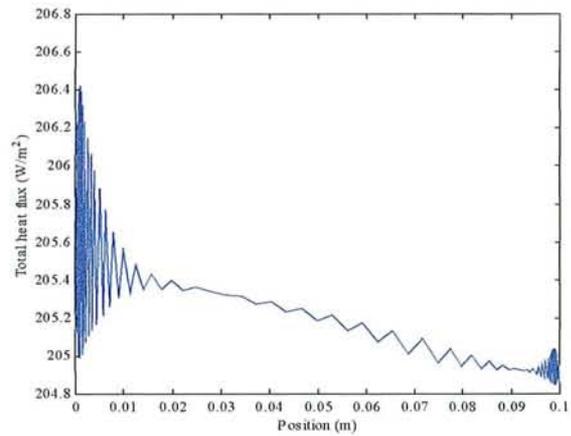


figure 6.23 : Flux total dans le milieu en régime stationnaire

6.4 Conclusion

Nous avons appliqué nos différentes méthodes numériques mises au point en régime stationnaire et transitoire à des milieux fibreux réels. En régime stationnaire, nos résultats concordent parfaitement avec les résultats théoriques (encadrement de la température et de la luminance, un flux total constant dans le milieu, monotonie de la luminance). La comparaison des résultats issus de nos différentes méthodes numériques en régime stationnaire a permis de valider le code en régime stationnaire. Le code, en régime transitoire et lorsque les températures sont imposées aux frontières, conduit, après convergence, à des résultats très proches de ceux obtenus par le code en régime stationnaire (lorsque les températures finales sont imposées). Le code en régime transitoire et lorsque le milieu est soumis à des conditions de flux donne des résultats encourageants.

Par ailleurs, notons que nous n'avons pas comparé nos résultats en régime transitoire à ceux issus de travaux d'autres auteurs, que ce soit pour le modèle qui considère les conditions aux limites de type températures imposées aux frontières ou celui des conditions de flux, pour la simple raison que nous n'avons trouvé aucun modèle qui soit aussi complet : il semble que ce soit une première étude de ce genre, considérant un modèle aussi complexe. Notons toutefois qu'il sera nécessaire pour la suite de ces travaux d'effectuer des confrontations avec divers résultats expérimentaux, pour tester la validité de notre modélisation en régime transitoire.

Références

- [1] G. Guilbert. *Etude des caractéristiques optiques des milieux poreux semi-transparents*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1985.
- [2] P. Boulet. *Etude du transfert par rayonnement à travers les milieux fibreux*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1992.
- [3] A. Milandri. *Détermination des paramètres radiatifs d'un isolant fibreux : théorie de Mie, oscillateurs de Lorentz et méthode inverse*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2000.
- [4] Langlais C, Klarsfeld S. Transfert de chaleur à travers les isolants fibreux en relation avec leur morphologie. *Journée d'étude du groupement universitaire de thermique*. p. 19–53, 1985.
- [5] Y. S. Touloukian, R.K. Kirby, R.E. Taylor, et al. Thermophysical properties of matter. IFI/Plenum, New York. Vol. 13, 1972.
- [6] Guilbert G, Jeandel G, Morlot G, Langlais C and Klarsfeld S. Optical characteristics of semi-transparent porous media. *High Temp. High Press.* Vol. 19, p. 251–259, 1987.
- [7] G. Jeandel, P. Boulet and G. Morlot. Radiative transfer through a medium of silica fibers oriented in parallel planes. *Int. J. Heat Mass Transfer.* Vol. 36, n° 2, p. 531-536, 1993.
- [8] J. H. Matthews and K.D. Fink. Numerical methods using Matlab. Prentice-Hall, London, 1999.

Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire nous a permis d'étudier d'un point de vue théorique et numérique les transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction à travers un milieu semi-transparent, dans le cas d'une géométrie monodimensionnelle. Le sujet que nous avons traité fait l'objet d'un nombre important de recherches en raison de ses applications industrielles variées, notamment en ce qui concerne les questions d'isolation thermique (barrières thermiques et résistance au feu). Le transfert radiatif à travers les milieux fibreux a beaucoup été étudié au laboratoire d'un point de vue théorique et expérimental. L'effort s'est particulièrement orienté sur la détermination des propriétés radiatives des matériaux fibreux, par des méthodes directes (basées sur les équations de Maxwell) et inverses. Notre objectif était alors de répondre à certaines exigences concernant plus l'aspect thermique. En particulier, il s'agissait d'étudier les transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction, d'une part en régime stationnaire et, d'autre part, en régime transitoire.

Le modèle que nous avons établi est très complet par rapport à ceux existant dans la littérature, puisque nous considérons un modèle multi flux. L'étude porte sur un milieu non gris, anisotrope, absorbant, diffusant et émissif. Les propriétés thermophysiques du milieu : la chaleur massique, la conductivité thermique et le coefficient d'échange par convection varient avec la température. Nous avons fait une étude complète concernant le régime stationnaire et nous avons ensuite étendu l'étude au régime transitoire en considérant, d'une part les températures imposées aux bords qui peuvent évoluer rapidement dans le temps et, d'autre part, des conditions aux limites de flux pouvant être très intenses.

L'analyse mathématique montre que le modèle en régime stationnaire, et lorsque les températures sont imposées aux frontières (pour des surfaces noires), est bien posé. Par la même occasion, nous avons établi certaines propriétés concernant les champs de températures et de luminances dans le milieu. En outre, nous avons mis en évidence que la luminance monochromatique est une fonction encadrée par les luminances monochromatiques du corps noir, aux deux températures imposées aux bords.

Ensuite, nous avons présenté quelques méthodes de résolution numérique pour ce modèle. Après avoir donné les limites de validité de la méthode basée sur le principe d'interaction, nous avons développé deux nouvelles méthodes stables et précises pour résoudre l'ETR. La deuxième équation a été résolue à l'aide d'un schéma aux différences finies associé à la transformation de Kirchhoff. Le couplage entre les deux équations a été abordé par une méthode de point fixe qui porte uniquement sur le champ de températures.

L'étude faite au chapitre IV montre que le schéma numérique est convergent sous certaines hypothèses de régularités, de bornitudes et de conditions de stabilité portant sur les pas angulaire et spectral. En outre, nous montrons que les solutions approchées préservent les propriétés établies dans le cas continu.

Au chapitre V, nous donnons une méthode de résolution numérique en régime transitoire. La résolution de l'ETR n'est pas modifiée lorsque l'on étudie le régime transitoire. Après avoir appliqué les transformations de Kirchhoff et enthalpique, l'équation de conservation de l'énergie est résolue en espace par la méthode des éléments finis P^2 (nécessaire pour que le flux conductif soit d'ordre un), utilisant un maillage à pas variable (de manière à résoudre les fronts de température avec précision). Ensuite, le système différentiel en temps a été résolu par une méthode de Runge-Kutta implicite adaptée aux équations raides, compte tenu des fortes variations de flux et de températures dans le milieu.

Enfin, dans la dernière partie de ce travail, nous avons analysé les résultats numériques obtenus par la simulation, en régimes stationnaire et transitoire. L'application a été réalisée sur un matériau isolant constitué de fibres de silice. L'accord entre les résultats numériques et la théorie s'est montré très satisfaisante, ce qui confère une certaine validité à la démarche poursuivie.

Par ailleurs, les travaux réalisés nous ont permis de mettre au point un code de calcul qui permet de simuler le comportement d'un matériau isolant face au feu. Celui-ci a été écrit à l'aide du logiciel Matlab. Soulignons que ce code constitue un instrument de qualité, répondant aux exigences réelles de l'industriel, en termes de précision et de temps de calculs. Il devrait beaucoup aider à une meilleure caractérisation des matériaux isolants. Une application future de cette recherche est l'amélioration des performances d'un isolant thermique en cas d'incendie, soumis à de forts gradients thermiques.

Enfin, concernant les perspectives d'étude apparaissant à l'issue de ce travail, celles-ci sont relativement nombreuses. A court terme, nous pouvons envisager les points suivants :

- 1) en régime transitoire, construire un maillage adaptatif (en fonction de l'évolution au cours du temps des gradients de températures dans le milieu), ceci afin de réduire le coût en temps de calcul du programme;
- 2) étendre l'étude du problème en considérant de manière générale des frontières semi-transparentes, ceci afin de pouvoir étudier différents types de matériaux semi-transparentes, notamment les verres qui présentent un grand intérêt industriel;
- 3) traiter le problème lorsque les coefficients radiatifs varient avec la température ou encore lorsqu'ils varient en fonction de la position dans le milieu, ce qui correspond à un milieu non homogène;
- 4) en régime transitoire, faire l'étude théorique mathématique et la convergence des schémas numériques;
- 5) résoudre l'ETR par une méthode de point fixe (portant sur le terme intégral) ; ensuite, comparer les résultats et les temps de calculs aux autres méthodes;

- 6) pour la méthode de résolution de l'ETR basée sur le principe d'interaction, voir si on peut construire une autre solution particulière qui utiliserait les matrices de transmission et de réflexion;
- 7) concernant les applications, prendre comme conditions aux limites de type flux, un signal modulé et voir que, dans certaines conditions, le terme émission propre du milieu peut être négligé conformément à l'hypothèse avancée (nous avons déjà fait des essais et ceux-ci sont concluants);
- 8) déterminer l'expression de la chaleur massique en fonction de la température pour le type de matériaux étudiés;
- 9) en termes de résolution spectrale, il convient de prendre plus de longueurs d'ondes;
- 10) faire une étude mathématique pour affirmer l'hypothèse qu'en régime transitoire; on peut négliger le premier terme de l'ETR qui contient la dérivée temporelle.

A long terme, nous pourrions aborder les points suivants :

- 11) valider le modèle par des mesures expérimentales (une thèse a débuté récemment pour valider le modèle en régime transitoire);
- 12) essayer de résoudre l'équation de conservation de l'énergie lorsque le terme source radiatif est exprimé uniquement en fonction de la température;
- 13) faire une étude sur le calcul d'erreur des coefficients radiatifs et ensuite étudier la sensibilité due à ces erreurs sur la solution de l'ETR;
- 14) le calcul des coefficients radiatifs passe par la résolution des équations de Maxwell. Dans ce cas, il serait intéressant d'y apporter des techniques mathématiques performantes pour traiter le problème. Ensuite il sera nécessaire de fusionner les programmes;
- 15) généralisation du modèle en 2D, 3D en considérant des géométries complexes. Dans ce cas, il faudra s'orienter vers d'autres techniques numériques pour résoudre l'ETR. Nous songeons notamment à la méthode des éléments finis ou celle des volumes finis. La deuxième équation pourra toujours être résolue en espace par la méthode des éléments finis. On préconise aussi d'utiliser une méthode de décomposition de domaine, faire du calcul parallèle;
- 16) faire l'étude théorique mathématique et l'étude de la convergence des schémas numériques, pour les modèles en 2D et 3D;
- 17) nous pouvons envisager l'extension de l'étude au problème du couplage avec la convection. Si, à température ambiante, la convection est très faible dans les isolants fibreux, lorsque la température est plus élevée, ce phénomène n'est plus négligeable. Il est certain que la prise en compte de la convection rend l'étude plus complexe. Ce problème constitue un vaste champ de recherche. Dans un premier temps, il faudra étudier le transfert de chaleur combiné rayonnement-convection.

Annexe 1 : Les coefficients C_k^θ $1 \leq k \leq m$

Nous rappelons que m doit être pair. Pour $m \leq 6$, nous utilisons les formules de Newton-Cotes, données par le tableau suivant :

Nom	m	\tilde{C}_1^θ	\tilde{C}_2^θ	\tilde{C}_3^θ	\tilde{C}_4^θ	\tilde{C}_5^θ	\tilde{C}_6^θ
Trapèze	2	$\frac{\Delta\theta}{2}$	$\frac{\Delta\theta}{2}$				
Newton	4	$\frac{3 \cdot \Delta\theta}{8}$	$\frac{9 \cdot \Delta\theta}{8}$	$\frac{9 \cdot \Delta\theta}{8}$	$\frac{3 \cdot \Delta\theta}{8}$		
Villarceau	6	$\frac{95 \cdot \Delta\theta}{288}$	$\frac{375 \cdot \Delta\theta}{288}$	$\frac{250 \cdot \Delta\theta}{288}$	$\frac{250 \cdot \Delta\theta}{288}$	$\frac{375 \cdot \Delta\theta}{288}$	$\frac{95 \cdot \Delta\theta}{288}$

Pour une grande valeur de m (dans nos applications $m \geq 12$), on applique une intégration par arc en utilisant les formules composées :

$$\tilde{C}_1^\theta = \tilde{C}_m^\theta = \frac{1451 \cdot \Delta\theta}{1440} ; \tilde{C}_2^\theta = \tilde{C}_{m-1}^\theta = \frac{1478 \cdot \Delta\theta}{1440} ; \tilde{C}_3^\theta = \tilde{C}_{m-2}^\theta = \frac{1380 \cdot \Delta\theta}{1440}$$

$$\tilde{C}_4^\theta = \tilde{C}_{m-3}^\theta = \frac{1462 \cdot \Delta\theta}{1440} ; \tilde{C}_5^\theta = \tilde{C}_{m-4}^\theta = \frac{1429 \cdot \Delta\theta}{1440} \text{ et } \tilde{C}_k^\theta = \Delta\theta \text{ pour } 6 \leq k \leq m-5$$

Puis on tient compte des intégrations sur les deux intervalles partiels $[0, \theta_1]$ et $[\theta_m, \pi]$ (les deux valeurs aux bords de l'intervalle angulaire en $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, sont obtenues par extrapolation linéaire). Dans ce cas, les poids d'intégration C_k^θ $1 \leq k \leq m$ sont donnés par :

$$C_1^\theta = \tilde{C}_1^\theta + \frac{5 \cdot \Delta\theta}{8} ; C_2^\theta = \tilde{C}_2^\theta - \frac{\Delta\theta}{8} ; C_m^\theta = \tilde{C}_m^\theta + \frac{5 \cdot \Delta\theta}{8} ; C_{m-1}^\theta = \tilde{C}_{m-1}^\theta - \frac{\Delta\theta}{8}$$

et $C_k^\theta = \tilde{C}_k^\theta$ pour $3 \leq k \leq m-2$

Annexe 2 : Méthode utilisant le principe d'interaction

Considérons une couche du milieu d'épaisseur $x_2 - x_1$ ($0 < x_1 < x_2 < E$) (figure A2.1) et définissons les matrices de transmission et de réflexion que l'on note T_λ et R_λ en tant que grandeurs caractéristiques du rayonnement respectivement transmis à travers le milieu et réfléchi par le milieu, pour les différentes directions d'incidence envisageables. Pour les cas pratiques qui nous intéressent, nous pouvons considérer que quelle que soit la direction de propagation du rayonnement préalablement choisie (sens positif ou négatif), les caractéristiques obtenues pour la transmission ou la réflexion seront les mêmes. Cela ne serait pas le cas si les propriétés radiatives variaient avec l'abscisse x par exemple.

Soit $L_{h\lambda}(x_1)$, $L_{h\lambda}(x_2)$ les deux champs de luminance monochromatiques homogènes définis respectivement aux abscisses x_1 et x_2 (figure A2.1).

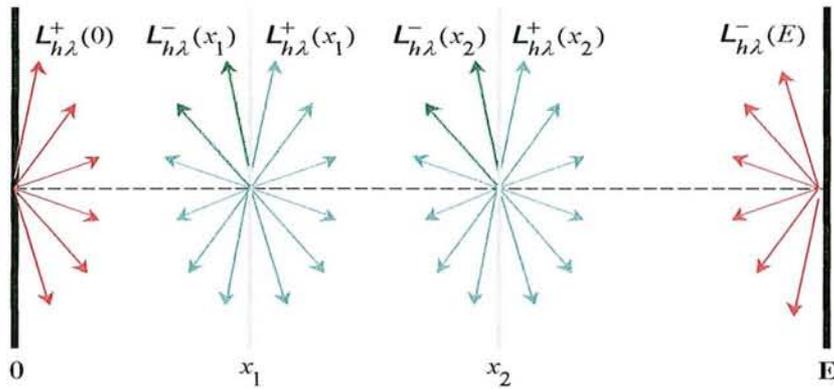


figure A2.1 : Luminances homogènes aux bords et luminances homogènes dans le milieu aux abscisses x_1 et x_2

Nous pouvons alors écrire le principe d'interaction entre x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} L_{h\lambda}^+(x_2) = T_\lambda^{1,2} \cdot L_{h\lambda}^+(x_1) + R_\lambda^{1,2} \cdot L_{h\lambda}^-(x_2) \\ L_{h\lambda}^-(x_1) = R_\lambda^{1,2} \cdot L_{h\lambda}^+(x_1) + T_\lambda^{1,2} \cdot L_{h\lambda}^-(x_2) \end{cases} \quad (\text{A2.1})$$

Le système (A2.1) est ce que Flateau [1] appelle la forme matricielle du principe d'interaction. $T_\lambda^{1,2}$ et $R_\lambda^{1,2}$ sont des matrices carrées de taille $m/2$ qui ne dépendent que de la longueur d'onde et de l'épaisseur de la couche ($x_1 \rightarrow x_2$) et permettent donc de définir le champ de luminance homogène à n'importe quelle abscisse dans le milieu. Le principe d'interaction qui utilise les conditions aux bords est donné par :

$$\begin{cases} L_{h\lambda}^+(x) = T_\lambda^{ox} \cdot L_{h\lambda}^+(0) + R_\lambda^{ox} \cdot L_{h\lambda}^-(x) \\ L_{h\lambda}^-(x) = T_\lambda^{xE} \cdot L_{h\lambda}^-(E) + R_\lambda^{xE} \cdot L_{h\lambda}^+(x) \end{cases}$$

pour tout $0 < x < E$ où T_λ^{ox} , R_λ^{ox} sont caractéristiques de la couche ($0 \rightarrow x$) et T_λ^{xE} , R_λ^{xE} sont caractéristiques de la couche ($x \rightarrow E$).

En regroupant les conditions aux bords à droite, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) - R_\lambda^{ox} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(x) = T_\lambda^{ox} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) & l_1 \\ -R_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) + \mathbf{L}_{h\lambda}^-(x) = T_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) & l_2 \end{cases}$$

Le système est équivalent à

$$\begin{cases} (I - R_\lambda^{ox} \cdot R_\lambda^{xE}) \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) = T_\lambda^{ox} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) + R_\lambda^{ox} \cdot T_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) & l_1 + R_\lambda^{ox} \cdot l_2 \\ -R_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) + \mathbf{L}_{h\lambda}^-(x) = T_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) & l_2 \end{cases}$$

où I désigne la matrice identité de taille $m/2$. En inversant la matrice $(I - R_\lambda^{ox} \cdot R_\lambda^{xE})$, il vient

$$\begin{cases} \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) = (I - R_\lambda^{ox} \cdot R_\lambda^{xE})^{-1} \cdot (T_\lambda^{ox} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(0) + R_\lambda^{ox} \cdot T_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E)) \\ \mathbf{L}_{h\lambda}^-(x) = T_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^-(E) + R_\lambda^{xE} \cdot \mathbf{L}_{h\lambda}^+(x) \end{cases} \quad (\text{A2.2})$$

Le système (A2.2) donne l'expression du champ de luminance homogène en tout point du milieu, à partir des matrices de transmission et de réflexion et en fonction des conditions aux limites radiatives homogènes. Il nous reste maintenant à établir un moyen de calculer les matrices de transmission et de réflexion en tout point du milieu. Les méthodes de calcul que nous allons développer sont appelées : "*doubling method*" et "*adding method*". Elles sont basées sur un processus itératif que nous pouvons mettre facilement en œuvre numériquement. Considérons pour cela un milieu composé de n couches élémentaires toutes très fines, avec des épaisseurs qui peuvent être éventuellement différentes (*figure A2.2*).

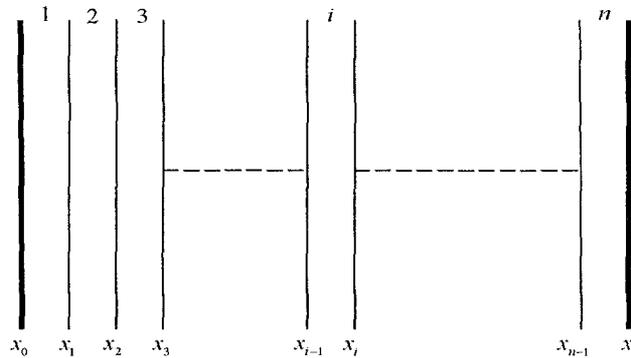


figure A2.2 : Milieu composé de n couches élémentaires toutes très fines

Pour simplifier les écritures qui vont suivre, l'indice λ n'est plus mentionné mais il s'agit toujours de relations monochromatiques. Appelons respectivement T_2 et R_2 les matrices de transmission et de réflexion de la couche $n^o 2$, de même T_3 et R_3 les matrices de la couche $n^o 3$, et enfin T_{2+3} et R_{2+3} les matrices caractéristiques de la couche totale $2 + 3$.

Reprenons de nouveau le système (A2.1); il est équivalent à :

$$\mathbf{L}_h(x_2) = \begin{bmatrix} I & -R_2 \\ 0 & -T_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} T_2 & 0 \\ R_2 & -I \end{bmatrix} \cdot \mathbf{L}_h(x_1) \quad (\text{A2.3})$$

En inversant la matrice de (A2.3), nous avons :

$$\begin{bmatrix} I & -R_2 \\ 0 & -T_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -R_2 \cdot T_2^{-1} \\ 0 & -T_2^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.4})$$

En utilisant (A2.4) et en développant le membre de droite de (A2.3), nous obtenons :

$$\mathbf{L}_h(x_2) = E_2 \cdot \mathbf{L}_h(x_1) \quad (\text{A2.5})$$

où nous avons posé

$$E_i = \begin{bmatrix} T_i - R_i \cdot T_i^{-1} \cdot R_i & R_i \cdot T_i^{-1} \\ -T_i^{-1} \cdot R_i & T_i^{-1} \end{bmatrix}$$

avec l'indice i qui représente le n° de la i ème couche. De même, on a

$$\mathbf{L}_h(x_3) = E_3 \cdot \mathbf{L}_h(x_2) \quad (\text{A2.6})$$

En combinant avec la relation (A2.5), il vient

$$\mathbf{L}_h(x_3) = E_3 \cdot E_2 \cdot \mathbf{L}_h(x_1) \quad (\text{A2.7})$$

De plus, nous avons :

$$\mathbf{L}_h(x_3) = E_{2+3} \cdot \mathbf{L}_h(x_1) \quad (\text{A2.8})$$

Des relations (A2.7) et (A2.8) nous déduisons la propriété fondamentale :

$$E_3 \cdot E_2 = E_{2+3}$$

De même nous aurons :

$$E_2 \cdot E_1 = E_{1+2} \quad (\text{A2.9})$$

puisque les matrices E_i ne dépendent que de l'épaisseur de la couche.

Réécrivons la relation (A2.9) en utilisant les expressions des matrices E_1 , E_2 et E_{1+2} :

$$\begin{bmatrix} T_2 - R_2 \cdot T_2^{-1} \cdot R_2 & R_2 \cdot T_2^{-1} \\ -T_2^{-1} \cdot R_2 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 - R_1 \cdot T_1^{-1} \cdot R_1 & R_1 \cdot T_1^{-1} \\ -T_1^{-1} \cdot R_1 & T_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1+2} - R_{1+2} \cdot T_{1+2}^{-1} \cdot R_{1+2} & R_{1+2} \cdot T_{1+2}^{-1} \\ -T_{1+2}^{-1} \cdot R_{1+2} & T_{1+2}^{-1} \end{bmatrix}$$

En développant et en simplifiant le membre de gauche, nous obtenons par identification l'expression de T_{1+2} et R_{1+2} en fonction de T_1 , R_1 , T_2 et R_2 , soit :

$$\begin{cases} T_{1+2} = T_2 \cdot I_{1,2} & \text{où } I_{1,2} = (I - R_1 \cdot R_2)^{-1} \cdot T_1 \\ R_{1+2} = R_1 + T_1 \cdot R_2 \cdot I_{1,2} \end{cases} \quad (\text{A2.10})$$

Le système (A2.10) nous procure un mode de calcul itératif permettant de connaître les matrices de transmission et de réflexion caractéristiques de couches de matériaux de plus en plus épaisses. Ce premier principe de calcul où les différentes itérations peuvent être menées sur des couches élémentaires de tailles variables est appelé "*adding method*". Si nous considérons le cas particulier où les couches 1 et 2 ont la même épaisseur, nous avons les égalités suivantes : $T_1 = T_2$, $R_1 = R_2$ et le système (A2.10) devient :

$$\begin{cases} T_2^* = T \cdot \Gamma & \text{où } \Gamma = (I - R^2)^{-1} \cdot T \\ R_2^* = R + T \cdot R \cdot \Gamma \end{cases} \quad (\text{A2.11})$$

où T_2^* et R_2^* sont caractéristiques d'une épaisseur double.

Le système (A2.11) permet donc de calculer les matrices de transmission et de réflexion d'une couche de matériau d'épaisseur double de celle de départ, d'où le nom de "*doubling method*". Lorsque les couches ont la même épaisseur, cette procédure est plus efficace que la première, puisqu'elle nécessite un nombre d'itérations plus petit. En effet, reprenons le cas décrit sur la *figure* A2.2 et supposons que les différentes couches ont toutes la même épaisseur $x_n/2^n$. Pour connaître les caractéristiques du milieu au point x_n , à partir de la première sous-couche, il faudrait :

- n itérations en utilisant la méthode dite "*doubling*",
- $2^n - 1$ itérations en utilisant la méthode dite "*adding*".

Pour des raisons de coût et de gain de temps, nous aurons donc intérêt à utiliser la procédure (A2.11), d'autant plus qu'il faut garder présent à l'esprit que nous ne travaillons pas avec des grandeurs scalaires mais avec des matrices carrées de taille $m/2$. Par contre, lorsque les couches ont des épaisseurs différentes, la procédure (A2.10) est la seule qui peut être utilisée. Par ailleurs, rien ne nous empêche de combiner les deux procédures lorsque cela est possible.

Finalement, par itérations successives, on en déduit les matrices de transmission et de réflexion nécessaires au calcul des luminances dans le milieu. Comme pour tout type de processus itératif, il se pose le problème de l'initialisation donnant les caractéristiques de la couche élémentaire de départ : R_1 et T_1 . Le mode d'initialisation que nous choisissons utilise une relation donnant une correspondance entre les matrices de transmission et de réflexion d'une part et l'exponentielle de matrice d'autre part. Rappelons la relation (3.21) du chapitre III appliquée à l'indice $i = 2$:

$$\mathbf{L}_n(x_2) = \exp(A \cdot (x_2 - x_1)) \cdot \mathbf{L}_n(x_1) \quad (\text{A2.12})$$

En identifiant les relations (A2.5) et (A2.12), il vient :

$$\exp(A \cdot (x_2 - x_1)) = E_2 \quad (\text{A2.13})$$

De même, nous aurons :

$$\exp(A \cdot x_1) = E_1 \quad (\text{A2.14})$$

si l'on considère la première couche.

En utilisant les expressions respectives de $\exp(A \cdot x_1)$ et E_1 , nous avons :

$$\begin{bmatrix} e^1(x_1) & e^2(x_1) \\ e^3(x_1) & e^4(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 - R_1 \cdot T_1^{-1} \cdot R_1 & R_1 \cdot T_1^{-1} \\ -T_1^{-1} \cdot R_1 & T_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.15})$$

De façon générale, nous aurons :

$$\exp(A \cdot x) = \begin{bmatrix} T_x - R_x \cdot T_x^{-1} \cdot R_x & R_x \cdot T_x^{-1} \\ -T_x^{-1} \cdot R_x & T_x^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.16})$$

où T_x et R_x sont caractéristiques de la couche ($0 \rightarrow x$)

La relation (A2.16) est essentielle puisqu'elle confirme l'équivalence entre les deux méthodes : exponentielle de matrice et principe d'interaction. En utilisant la relation (A2.15) et par identification, nous obtenons l'initialisation des matrices de transmission et de réflexion :

$$\begin{cases} T_1 = (e^4(x_1))^{-1} \\ R_1 = e^2(x_1) \cdot T_1 \end{cases} \quad (\text{A2.17})$$

En ce qui concerne ce mode d'initialisation de T_1 et R_1 , deux remarques s'imposent :

- il faut calculer $\exp(A \cdot x_1)$
- il faut inverser la matrice $e^4(x_1)$

Pour réaliser ces deux conditions, nous devons choisir une couche d'épaisseur élémentaire x_1 assez petite. Le calcul de l'exponentielle de matrice va alors se révéler possible. Il est bien évident que la précision des matrices d'initialisation T_1 et R_1 conditionne la précision des matrices T_x et R_x , donc celle de la luminance du milieu. Le problème qui se pose maintenant est comment choisir x_1 de manière optimale. Les auteurs Boulet et al. [2] ont pris la valeur suivante : $x_1 = x/2^M$ (x est un point de l'intervalle d'étude $(0, E)$) avec M un entier positif constant quelle que soit la longueur d'onde et égal à 8 dans leurs applications, sans donner l'explication. Toutefois, avec cette valeur, la méthode a donné des résultats satisfaisants. Cependant, il semble plus judicieux de choisir M en fonction de la longueur d'onde puisque les calculs dépendent de celle-ci. Par ailleurs, nous calculons l'exponentielle de matrice en utilisant les approximants de Padé à l'aide du logiciel Matlab. Comme déjà dit au chapitre III, Roche [3] a montré que le calcul de l'exponentielle par cette méthode est stable seulement lorsque la norme de la matrice est inférieure à un. Nous devons alors utiliser ce critère, soit :

$$\frac{h_1}{2^{M_\lambda}} \cdot \|A_\lambda\|_\infty < 1$$

ce qui revient à prendre

$$M_\lambda = \text{Ent} \left[\frac{\log(h_1 \cdot \|A_\lambda\|_\infty)}{\log 2} \right] + 1 \quad (\text{A2.18})$$

où Ent désigne la partie entière et h_1 est le premier pas de discrétisation de l'intervalle $[0, E]$. Pour un maillage régulier $h_1 = h$. Par ailleurs, nous avons choisi de prendre pour la norme matricielle la norme infinie pour une raison de simplicité de calcul. Avant chaque calcul, il faudra donc calculer $\|A_\lambda\|_\infty$. Sur la *figure A2.3* nous avons représenté la variation de M_λ , donnée par la relation (A2.18), en fonction de la longueur d'onde. L'application porte sur le même type de milieu fibreux que celui utilisé par Boulet et al. (les longueurs d'ondes varient toujours de 3,5 à 25 microns). On s'aperçoit dans ce cas que la valeur 8 est omniprésente et cela justifie la valeur que les auteurs ont prise pour M_λ . Notons toutefois que, dans cet exemple, le gain de temps est pratiquement inexistant, mais rien n'empêche que dans d'autres situations le gain de temps puisse être plus intéressant.

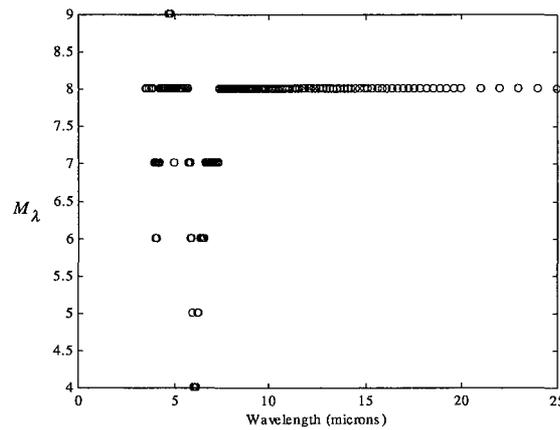


figure A2.3 : Variation de M_λ en fonction de la longueur d'onde

Nous possédons à présent tous les éléments nécessaires à la résolution du système homogène (3.18)-(3.19). Partant de la forme matricielle du principe d'interaction, nous savons déterminer les matrices de transmission T_λ et de réflexion R_λ du milieu à n'importe quelle abscisse x dans le milieu (systèmes (A2.10), (A2.11) et (A2.17)). Ensuite, nous pouvons calculer le champ de luminance dans le milieu en l'absence d'émission propre en utilisant les matrices T_λ et R_λ (système (A2.2)). A priori, en utilisant de simples opérations matricielles, nous disposons d'un moyen de calcul efficace qui a l'avantage de faire appel à des grandeurs qui ont une signification physique et restent donc interprétables. Cette méthode est relativement simple à programmer car elle ne fait intervenir que des additions, multiplications ou inversion de matrices. Le seul inconvénient reste l'initialisation qui peut demander un temps de calcul important.

A présent, nous allons donner les algorithmes (la version de Boulet et al. [2] et la nôtre) utilisés dans la pratique. Au préalable, nous discrétisons le domaine spatial $[0, E]$ avec un pas constant h en posant $x_i = i \cdot h$ pour $0 \leq i \leq nt + 1$.

Algorithme de Boulet et al. (utilise uniquement la "*doubling method*") :

Pour $i = 1 : nt$

1) calcul de $\exp(A_\lambda \cdot x_i / 2^{M_\lambda})$ et $\exp(A_\lambda \cdot (E - x_i) / 2^{M_\lambda})$

2) calcul par la "*doubling method*" de

T_λ^{0,x_i} et R_λ^{0,x_i} à partir de $\exp(A_\lambda \cdot x_i / 2^{M_\lambda})$,

$T_\lambda^{0,(E-x_i)} = T_\lambda^{x_i,E}$ et $R_\lambda^{0,(E-x_i)} = R_\lambda^{x_i,E}$ à partir de $\exp(A_\lambda \cdot (E - x_i) / 2^{M_\lambda})$

3) calcul de $L_{h\lambda}(x_i)$ par la relation (A2.2)

Fin

Notre algorithme (utilise une combinaison de la "*doubling method*" et la "*adding method*") :

1) calcul de $\exp(A_\lambda \cdot x_1 / 2^{M_\lambda})$

2) calcul par la "*doubling method*" de T_λ^{0,x_1} et R_λ^{0,x_1} à partir de $\exp(A_\lambda \cdot x_1 / 2^{M_\lambda})$

Pour $i = 2 : nt$

3) calcul par la "*adding method*" de

T_λ^{0,x_i} et R_λ^{0,x_i} à partir de $T_\lambda^{0,x_{i-1}}$, $R_\lambda^{0,x_{i-1}}$, T_λ^{0,x_1} , R_λ^{0,x_1}

et on garde en mémoire T_λ^{0,x_i} , R_λ^{0,x_i}

Fin

Pour $i = 1 : nt$

4) calcul de $L_{h\lambda}(x_i)$ par la relation (A2.2)

Fin

Il est clair que notre algorithme effectue beaucoup moins d'opérations. Nous verrons dans les applications au chapitre VI que nous gagnons un facteur quatre environ dans les temps de calculs. Les algorithmes que nous venons de présenter sont valables pour un maillage uniforme en espace, mais nous pourrions les adapter sans problème à un maillage non uniforme.

Il reste à présent à déterminer une solution particulière du système général (3.12) (3.16). Boulet et al. [2] ont calculé la solution particulière sous forme polynomiale. Ce type de résolution a déjà été appliqué par Stammes et Swanson [4] dans un autre domaine (étude du transfert radiatif dans une atmosphère diffusante). La méthode consiste à approcher la luminance du corps noir par un polynôme, que l'on introduit dans l'ETR et ensuite, par identification, on déduit les coefficients du polynôme qui représente la luminance. En ce qui concerne l'ordre du polynôme, lorsque le champ de températures est quasi linéaire par exemple, Boulet et al. ont montré que le degré trois suffit pour avoir un résultat satisfaisant.

Cependant, ils mentionnent qu'il faut prendre des précautions lorsque la température a un profil plus particulier et notamment lorsque celle-ci varie fortement dans le milieu. Dans ce cas, la luminance du corps noir varie aussi fortement et il devient difficile de l'approcher par un polynôme dans tout le milieu. Par conséquent, la validité numérique et la précision de la méthode sont mises en cause. Par ailleurs, lorsque l'on augmente le degré du polynôme, le problème peut devenir instable. Dans la pratique, on ne dépasse guère le degré sept ou huit. Nous pourrions éventuellement prendre des fonctions autres que des polynômes, telles que la fonction exponentielle ou une combinaison de la fonction exponentielle avec un polynôme par exemple, qui pourraient mieux approcher la fonction. Mais cette approche ne peut pas être utilisée avec efficacité car on ne connaît pas à l'avance l'allure de la fonction : celle-ci dépend des conditions imposées.

- [1] P. L. Flateau and G. L. Stephens. On the fundamental solution of the radiative transfer equation. *Journal of Geophysical Research*. Vol. 93, p. 11037–11050, 1988.
- [2] P. Boulet, G. Jeandel and G. Morlot. Model of radiative transfer in fibrous media, matrix method. *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 36, n° 18, p. 4287-4297, 1993.
- [3] J. R. Roche. Application des Approximants de Padé au Calcul de l'Exponentielle d'une matrice. Thèse de 3ème Cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1980.
- [4] K. Stammes and R. A. Swanson. A new look at the discrete ordinates method for radiative transfer. calculations in anisotropically scattering atmospheres. *J. Atmos. Sci.* Vol. 38, p. 387-399, 1981.

Annexe 3 : Résolution numérique de l'ETR sans la symétrie azimutale

L'hypothèse de la symétrie azimutale faite jusqu'à présent était tout à fait en accord avec la symétrie propre du milieu. Cependant, l'utilisation du modèle nécessite également cette symétrie pour les conditions aux limites. Lorsque l'on impose les températures aux parois pour des surfaces noires, ou plus généralement lorsque l'on impose un flux de rayonnement ayant pour axe de symétrie la normale aux frontières de l'échantillon (*figure A3.1*), la condition de symétrie est remplie. Par contre, si l'éclairement n'est pas uniforme, ce n'est plus le cas.

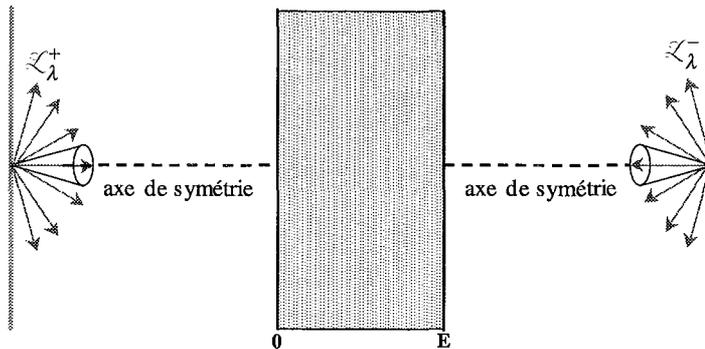


figure A3.1 : Pour une direction μ donnée, l'éclairement est le même pour toutes les directions azimut ω

Si on impose donc un flux de rayonnement dans une direction (μ_j, ω_k) (*figure A3.2*) autre que la normale aux frontières de l'échantillon, le flux est maximal dans cette direction et on ne peut plus appliquer la symétrie azimutale. Il est alors indispensable de connaître les coefficients radiatifs en fonction des deux angles (polaire et azimutal) qui repèrent les directions considérées. Par ailleurs, une extension de la méthode de calcul à des problèmes sans isotropie azimutale est nécessaire pour simuler complètement le cas réel.

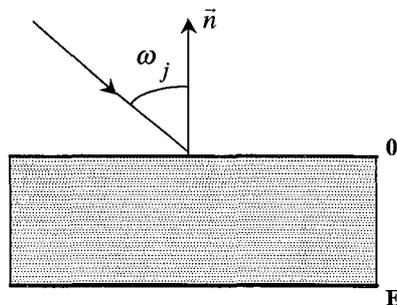


figure A3.2 : Flux de rayonnement dans une direction autre que la normale aux frontières de l'échantillon

Les méthodes de résolution que nous avons développées au chapitre III peuvent s'appliquer au problème qui est posé ici, sans grande difficulté. En effet, si nous revenons à

l'ETR donnée par la relation (1.13) au chapitre I, nous avons alors une intégrale double dans l'équation et rien ne s'oppose à ce qu'une double discrétisation (selon μ et ω) soit effectuée et une nouvelle forme discrète de l'ETR écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mu_j \cdot \frac{\partial L_\lambda(x, \mu_j, \omega_k)}{\partial x} &= \sigma_{a\lambda}(\mu_j, \omega_k) \cdot L_\lambda^o(T(x)) - \sigma_{e\lambda}(\mu_j, \omega_k) \cdot L_\lambda(x, \mu_j, \omega_k) \\ &+ \sum_{\substack{l \leq m \\ l \leq p \leq M}} P_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) \cdot L_\lambda(x, \mu_l, \omega_p) \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

$$1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq M$$

pour M directions de discrétisation de la variable ω et toujours m directions de discrétisation de la variable μ . On a donc décomposé l'espace en $m \times M$ directions possibles. L_λ est toujours une valeur approchée de la luminance et, pour ne pas alourdir les écritures, on garde la même notation. De la même façon que pour le modèle avec symétrie azimutale, P_λ prend en compte le coefficient de diffusion, la fonction de phase et les poids d'intégration liés à la quadrature numérique. Comme pour la variable μ , nous discrétisons l'intervalle angulaire azimutal $[0, 2\pi]$ avec un pas constant (*figure A3.3*). On approche alors l'intégrale suivant l'azimut dans l'ETR par la même technique que celle de l'angle polaire, qui utilise donc les formules de Newton-Côtes composées avec les poids qui lui sont associés. Le découpage de l'intervalle angulaire azimutal $[0, 2\pi]$ permet de définir les directions azimutales ω_k $1 \leq k \leq M$. Ce découpage s'effectue avec un pas constant $\Delta\omega = 2\pi/M$ (*figure A3.3*) tel que :

$$\omega_1 = \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_{k+1} = \omega_k + \Delta\omega \quad \forall 1 \leq k \leq M-2 \text{ et } \omega_M = 2\pi - \frac{\Delta\omega}{2}$$

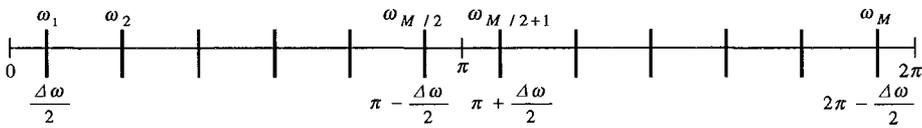


figure A3.3 : Découpage de l'intervalle angulaire azimutal

Remarque 1 : Dans la pratique, on ne peut pas déterminer les coefficients radiatifs pour les deux valeurs en $\omega = 0$ et $\omega = 2\pi$. Alors, comme pour la variable angulaire θ , nous faisons une extrapolation linéaire pour connaître ces deux valeurs et nous utilisons une intégration du type trapèze pour intégrer la fonction sur les deux intervalles partiels $[0, \omega_1]$ et $[\omega_M, 2\pi]$.

Finalement, le coefficient P_λ est donné par :

$$P_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) = \frac{1}{4\pi} \cdot \sigma_{s\lambda}(\mu_l, \omega_p) \cdot P_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) \cdot \sin(\theta_l) \cdot C_l^\theta \cdot C_p^\omega \quad (\text{A3.2})$$

$$\forall 1 \leq j, k \leq m \text{ et } 1 \leq l, p \leq M$$

où les coefficients C_l^θ sont les mêmes que ceux intervenant dans la relation (3.2) et définis par la formule de quadrature associée à la variable polaire θ . Les coefficients C_p^ω $1 \leq p \leq M$ sont les poids d'intégration liés à la formule de quadrature en ω . Ils ont les mêmes valeurs que les coefficients C_l^θ si l'on remplace le pas $\Delta\theta$ par $\Delta\omega$ et la valeur m par M . Nous renvoyons à l'annexe 1 pour les valeurs de ces coefficients.

Pour la résolution numérique des équations discrètes (A3.2), vu que nous avons encore un système d'équations différentielles, la méthode utilisée au chapitre III pour l'écriture matricielle peut être conservée. On peut utiliser de nouveau le modèle deux courants qui consiste à séparer le champ de luminance selon deux hémisphères. Par contre, il est certain que la prise en compte de l'azimut entraînera une augmentation de la taille des vecteurs et des matrices intervenant dans le calcul. En fait la dimension est multipliée par le nombre de discrétisation retenues pour repérer l'azimut. En conséquence, l'ensemble des opérations matricielles nécessitera une place mémoire et des temps de calcul plus importants.

Nous allons donc, comme dans le cas de la symétrie azimutale, introduire deux champs de luminance \mathbf{L}_λ^+ et \mathbf{L}_λ^- correspondant respectivement aux hémisphères "avant" ($0 < \mu \leq 1$) et "arrière" ($-1 \leq \mu < 0$) et qui prennent en compte les directions azimutales :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda^+(x) &= L_\lambda(x, \mu_j, \omega_k) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m/2 \text{ et } 1 \leq k \leq M \\ \mathbf{L}_\lambda^-(x) &= L_\lambda(x, -\mu_j, \omega_k) \quad \text{pour } 1 \leq j \leq m/2 \text{ et } 1 \leq k \leq M \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

Les vecteurs \mathbf{L}_λ^+ et \mathbf{L}_λ^- sont des vecteurs colonnes de taille $(m/2) \times M$. Ils sont ordonnés de la façon suivante : pour une direction μ_j , on classe dans l'ordre les directions ω_k (k variant de 1 à M). Le vecteur luminance \mathbf{L}_λ est alors formé des deux vecteurs \mathbf{L}_λ^+ et \mathbf{L}_λ^- , soit :

$$\mathbf{L}_\lambda(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\lambda^+(x) \\ \mathbf{L}_\lambda^-(x) \end{bmatrix}$$

\mathbf{L}_λ est un vecteur colonne de taille $m \times M$.

On introduit maintenant les deux vecteurs $\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x)$ et $-\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x)$ correspondant respectivement aux hémisphères "avant" et "arrière" et qui prennent en compte les directions azimutales :

$$\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) = \left[\frac{\sigma_{a\lambda}(\mu_j, \omega_k)}{\mu_j} \cdot L_\lambda^o(T(x)) \right]_{1 \leq j \leq m/2, 1 \leq k \leq M}$$

$\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x)$ est un vecteur de taille $(m/2) \times M$ et il est ordonné de la même façon que le vecteur \mathbf{L}_λ^+ : pour une direction μ_j , on classe dans l'ordre les directions ω_k (k variant de 1 à M).

On définit alors le vecteur $\mathcal{E}_\lambda^o(x)$ par

$$\mathcal{E}_\lambda^o(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) \\ -\mathcal{E}_\lambda^{o,+}(x) \end{bmatrix}$$

Nous allons à présent introduire les différentes symétries qui apparaissent dans les coefficients radiatifs et qui nous permettront de simplifier l'écriture matricielle. On considère toujours le cas des fibres réparties aléatoirement dans des plans parallèles aux frontières du milieu. Les coefficients monochromatiques d'absorption et de diffusion étant caractéristiques au milieu, ils sont toujours indépendants de l'azimut, soit :

$$\begin{aligned}\sigma_{a\lambda}(\mu, \omega) &= \sigma_{a\lambda}(\mu) \quad \forall (\mu, \omega) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi] \\ \sigma_{s\lambda}(\mu, \omega) &= \sigma_{s\lambda}(\mu) \quad \forall (\mu, \omega) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi]\end{aligned}\tag{A3.4}$$

et on a toujours les symétries

$$\begin{aligned}\sigma_{a\lambda}(\mu) &= \sigma_{a\lambda}(-\mu) \quad \forall 0 < \mu \leq 1 \\ \sigma_{s\lambda}(\mu) &= \sigma_{s\lambda}(-\mu) \quad \forall 0 < \mu \leq 1\end{aligned}\tag{A3.5}$$

car les plans contenant les fibres sont parallèles aux frontières du milieu.

Les relations de symétrie concernant le coefficient P_λ ont été étudiées par Milandri [1] et nous allons les énoncer. Nous considérons toujours une répartition aléatoire des fibres dans des plans qui sont parallèles aux frontières de l'échantillon. Dans ce cas, l'axe (Ox) est un axe de symétrie pour les plans fibreux et il vient :

$$\begin{aligned}P_\lambda((\mu, \omega + \Delta\omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_*)) &= P_\lambda((\mu, \omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_* - \Delta\omega)) \\ \forall \mu, \mu_* \in [-1, 1] \text{ et } \omega, \omega_* \in [0, 2\pi]\end{aligned}\tag{A3.6}$$

Le plan (yOz) est un plan de symétrie et il vient :

$$\begin{aligned}P_\lambda((\mu, \omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_*)) &= P_\lambda((-\mu, \omega) \rightarrow (-\mu_*, \omega_*)) \\ P_\lambda((\mu, \omega) \rightarrow (-\mu_*, \omega_*)) &= P_\lambda((-\mu, \omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_*)) \\ \forall \mu, \mu_* \in [0, 1] \text{ et } \omega, \omega_* \in [0, 2\pi]\end{aligned}\tag{A3.7}$$

Le plan (xOz) est un plan de symétrie et il vient :

$$\begin{aligned}P_\lambda((\mu, \omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_*)) &= P_\lambda((\mu, \pi - \omega) \rightarrow (\mu_*, \pi - \omega_*)) \\ \forall \mu, \mu_* \in [-1, 1] \text{ et } \omega, \omega_* \in [0, 2\pi]\end{aligned}\tag{A3.8}$$

Le plan (xOy) est un plan de symétrie et il vient :

$$\begin{aligned}P_\lambda((\mu, \omega) \rightarrow (\mu_*, \omega_*)) &= P_\lambda((\mu, 2\pi - \omega) \rightarrow (\mu_*, 2\pi - \omega_*)) \\ \forall \mu, \mu_* \in [-1, 1] \text{ et } \omega, \omega_* \in [0, 2\pi]\end{aligned}\tag{A3.9}$$

Finalement, les symétries qui nous intéressent le plus sont celles énoncées par (A3.7) car, dans ce cas, d'après les relations (A3.2), (A3.4) et (A3.5), il vient :

$$\begin{aligned}P_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) &= P_\lambda((-\mu_l, \omega_p) \rightarrow (-\mu_j, \omega_k)) \\ P_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (-\mu_j, \omega_k)) &= P_\lambda((-\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k))\end{aligned}$$

$$\forall 1 \leq j, k \leq m \text{ et } 1 \leq l, p \leq M$$

Ainsi les propriétés de symétrie par rapport au problème de départ avec symétrie azimutale sont conservées et nous obtenons la même forme matricielle pour l'ETR :

$$\frac{d \mathbf{L}_\lambda(x)}{dx} = A_\lambda \cdot \mathbf{L}_\lambda(x) + \mathcal{C}_\lambda^o(x)\tag{A3.10}$$

où A_λ est une matrice carrée de taille $m \times M$ qui a la même structure :

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} A_\lambda^1 & A_\lambda^2 \\ -A_\lambda^2 & -A_\lambda^1 \end{bmatrix}$$

avec A_λ^1 et A_λ^2 des matrices carrées, cette fois-ci de taille $(m/2) \times M$, définies respectivement par les blocs $(A_\lambda^1)_{jl}$ et $(A_\lambda^2)_{jl}$, $1 \leq j, l \leq m/2$:

$$A_\lambda^1 = \begin{bmatrix} (A_\lambda^1)_{1,1} & (A_\lambda^1)_{1,2} & (A_\lambda^1)_{1,3} & \dots & \dots & (A_\lambda^1)_{1,m/2} \\ (A_\lambda^1)_{2,1} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ (A_\lambda^1)_{m/2,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & (A_\lambda^1)_{m/2,m/2} \end{bmatrix} ; A_\lambda^2 = \begin{bmatrix} (A_\lambda^2)_{1,1} & (A_\lambda^2)_{1,2} & (A_\lambda^2)_{1,3} & \dots & \dots & (A_\lambda^2)_{1,m/2} \\ (A_\lambda^2)_{2,1} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ (A_\lambda^2)_{m/2,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & (A_\lambda^2)_{m/2,m/2} \end{bmatrix}$$

Les blocs $(A_\lambda^1)_{jl}$ et $(A_\lambda^2)_{jl}$ sont les matrices carrées de taille M définies par :

$$(A_\lambda^1)_{jl} = \left\{ \frac{1}{\mu_j} \cdot \left[\mathbf{P}_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) - \sigma_{e\lambda}(\mu_l, \omega_p) \cdot \delta_{jl} \cdot \delta_{pk} \right] \right\}_{1 \leq k, p \leq M}$$

$$(A_\lambda^2)_{jl} = \left\{ \frac{1}{\mu_j} \cdot \left[\mathbf{P}_\lambda((\mu_l, \omega_p) \rightarrow (\mu_j, \omega_k)) \right] \right\}_{1 \leq k, p \leq M}$$

Si on considère les conditions de flux, alors d'après (1.49), (1.50) et (A3.3), le système différentiel (A3.10) est associé aux conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\lambda^+(0) &= \left[\mathcal{L}_\lambda^+(\mu_j, \omega_k) \right]_{1 \leq j \leq m/2, 1 \leq k \leq M} \\ \mathbf{L}_\lambda^-(E) &= \left[\mathcal{L}_\lambda^-(-\mu_j, \omega_k) \right]_{1 \leq j \leq m/2, 1 \leq k \leq M} \end{aligned} \quad (\text{A3.11})$$

Finalement, toutes les méthodes numériques que nous avons développées au chapitre III peuvent être utilisées ici pour la résolution du système (A3.10) sans la symétrie azimutale, associant les conditions aux limites de flux (A3.11). En effet, on est amené à résoudre le même type de système différentiel (même structure de la matrice A_λ), associé au même type de conditions aux limites. La seule différence avec le problème de départ est que nous avons maintenant à traiter un problème de plus grande taille.

- [1] A. Milandri. *Détermination des paramètres radiatifs d'un isolant fibreux : théorie de Mie, oscillateurs de Lorentz et méthode inverse*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 2000.

Annexe 4 : La formule de Runge-Kutta implicite (TR-BDF2)

La formule de Runge-Kutta implicite (TR-BDF2) rentre dans la catégorie des méthodes ‘‘DIRK’’ (Diagonally Implicit Runge-Kutta). Cette méthode est implantée dans le logiciel Matlab (version 5.3) et elle est décrite dans l’article [1]. La méthode est due à Bank et al. (1985) [2] qui l’ont développée pour des problèmes de simulation de circuits et de semi-conducteurs. La méthode s’écrit sous la forme du tableau classique de Runge-Kutta :

0	0	0	0
γ	d	d	0
1	ω	ω	d
	ω	ω	d

où $\gamma = 2 - \sqrt{2}$, $d = \gamma/2$ et $\omega = \sqrt{2}/4$.

Sur l’équation $y' = f(y,t)$, pour avancer d’un pas de temps Δt de t_n à t_{n+1} , on procède donc aux opérations :

$$y_{n,1} = y_n$$

$$y_{n,2} = y_n + \Delta t \cdot \{ d \cdot f(t_n, y_n) + d \cdot f(t_n + \gamma \cdot \Delta t, y_{n,2}) \}$$

$$y_{n,3} = y_n + \Delta t \cdot \{ \omega \cdot f(t_n, y_n) + \omega \cdot f(t_n + \gamma \cdot \Delta t, y_{n,2}) + d \cdot f(t_{n+1}, y_{n,3}) \}$$

puis

$$y_{n+1} = y_{n,3}$$

Ce schéma est donc composé d’une formule de trapèze et d’une formule de différentiation rétrograde d’ordre deux, d’où le nom TR-BDF2. Il est d’ordre deux et a la propriété d’être fortement S-stable. Pour une définition précise, nous renvoyons à Alexander [3].

- [1] M.E. Hosea and L.F. Shampine. Analysis and implementation of TR-BDF2. Applied Numerical Mathematics. Vol. 20, p. 21-37, 1996.
- [2] R.E. Bank, W.M. Coughran, W. Fichtner, E.H. Grosse, D.J. Rose and R.K. Smith. Transient simulation of silicon devices and circuits. IEEE Trans. Comput. Aided Design. Vol. 4, p. 436-451, 1985.
- [3] R. Alexander. Diagonally implicit Runge-Kutta Methods for Stiff ODE’s. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 14, n°6, 1977.

Annexe 5 : Construction des matrices de masse et de rigidité $[M]$, $[R]$, ainsi que des vecteurs $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$, \mathbf{M}^0 , \mathbf{R}^0 , \mathbf{R}^E définis aux paragraphes 5.22 et 5.2.4.

La matrice de masse $[M]$

Cette matrice est symétrique. Nous remplissons alors uniquement sa partie triangulaire supérieure.

- $[M]_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq N$

si l'indice i est impair :

$$= \frac{1}{(z_{i+1} - z_i)^2 \cdot (z_i - z_{i-1})^2} \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} (x - z_{i+1})^2 \cdot (x - z_{i-1})^2 dx$$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{1}{(z_i - z_{i-1})^2 \cdot (z_i - z_{i-2})^2} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (x - z_{i-1})^2 \cdot (x - z_{i-2})^2 dx$$

$$+ \frac{1}{(z_{i+2} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (x - z_{i+2})^2 \cdot (x - z_{i+1})^2 dx$$

- $[M]_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq N-1$

si l'indice i est impair :

$$= \frac{-1}{(z_{i+1} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_{i-1}) \cdot (z_i - z_{i-1})} \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} (x - z_{i+1}) \cdot (x - z_i) \cdot (x - z_{i-1})^2 dx$$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{-1}{(z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (z_{i+2} - z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (x - z_{i+2})^2 \cdot (x - z_{i+1}) \cdot (x - z_i) dx$$

- $[M]_{i,i+2}$ pour $1 \leq i \leq N-2$

si l'indice i est impair : $[M]_{i,i+2} = 0$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{1}{(z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (z_{i+2} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_i)} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (x - z_{i+2}) \cdot (x - z_{i+1})^2 \cdot (x - z_i) dx$$

- $[M]_{i,j} = 0$ pour $i+3 \leq j \leq N$

Lorsque l'on considère les conditions aux limites de flux :

- $[M]_{0,0} = \frac{1}{(z_2 \cdot z_1)^2} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2)^2 \cdot (x - z_1)^2 dx$
- $[M]_{0,1} = \frac{-1}{z_2 \cdot z_1^2 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2)^2 \cdot (x - z_1) \cdot x dx$
- $[M]_{0,2} = \frac{1}{z_2^2 \cdot z_1 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2) \cdot (x - z_1)^2 \cdot x dx$
- $[M]_{0,i} = 0$ pour $3 \leq i \leq N+1$
- $[M]_{N+1,N+1} = \frac{1}{(E - z_N)^2 \cdot (E - z_{N-1})^2} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (x - z_N)^2 \cdot (x - z_{N-1})^2 dx$
- $[M]_{N,N+1} = \frac{-1}{(E - z_N)^2 \cdot (E - z_{N-1}) \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (x - z_N) \cdot (x - z_{N-1})^2 \cdot (x - E) dx$
- $[M]_{N-1,N+1} = \frac{1}{(E - z_N) \cdot (E - z_{N-1})^2 \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (x - z_N)^2 \cdot (x - z_{N-1}) \cdot (x - E) dx$
- $[M]_{i,N+1} = 0$ pour $0 \leq i \leq N-2$

La matrice de rigidité [R]

Cette matrice aussi est symétrique. Nous remplissons de même uniquement sa partie triangulaire supérieure.

- $[R]_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq N$

si l'indice i est impair :

$$= \frac{1}{(z_{i+1} - z_i)^2 \cdot (z_i - z_{i-1})^2} \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} (2x - z_{i+1} - z_{i-1})^2 dx$$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{1}{(z_i - z_{i-1})^2 \cdot (z_i - z_{i-2})^2} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (2x - z_{i-1} - z_{i-2})^2 dx$$

$$+ \frac{1}{(z_{i+2} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+2} - z_{i+1})^2 dx$$

- $[R]_{i,i+1}$ pour $1 \leq i \leq N-1$

si l'indice i est impair :

$$= \frac{-1}{(z_{i+1} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_{i-1}) \cdot (z_i - z_{i-1})} \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} (2x - z_{i+1} - z_{i-1}) \cdot (2x - z_i - z_{i-1}) dx$$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{-1}{(z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (z_{i+2} - z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (2x - z_{i+2} - z_i) dx$$

- $[R]_{i,i+2}$ pour $1 \leq i \leq N-2$

si l'indice i est impair : $[R]_{i,i+2} = 0$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{1}{(z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (z_{i+2} - z_i)^2 \cdot (z_{i+1} - z_i)} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (2x - z_{i+1} - z_i) dx$$

- $[R]_{i,j} = 0$ pour $i+3 \leq j \leq N$

Lorsque l'on considère les conditions aux limites de flux :

- $[R]_{0,0} = \frac{1}{(z_2 \cdot z_1)^2} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1)^2 dx$

- $[R]_{0,1} = \frac{-1}{z_2 \cdot z_1^2 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot (2x - z_2) dx$

- $[R]_{0,2} = \frac{1}{z_2^2 \cdot z_1 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot (2x - z_1) dx$

- $[R]_{0,i} = 0$ pour $3 \leq i \leq N+1$

- $[R]_{N+1,N+1} = \frac{1}{(E - z_N)^2 \cdot (E - z_{N-1})^2} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1})^2 dx$

- $[R]_{N,N+1} = \frac{-1}{(E - z_N)^2 \cdot (E - z_{N-1}) \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (2x - E - z_{N-1}) dx$

- $[R]_{N-1,N+1} = \frac{1}{(E - z_N) \cdot (E - z_{N-1})^2 \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (2x - E - z_N) dx$

- $[R]_{i,N+1} = 0$ pour $0 \leq i \leq N-2$

Le vecteur $\mathbf{S}_r(\mathbf{t})$:

Sur chaque intervalle $[z_{i-1}, z_{i+1}]$ $1 \leq i \leq N$, nous approchons le terme source radiatif $S_r(\cdot, t)$ par un polynôme de degré deux : $S_r(x, t) \cong P_i(x, t)$ où $P_i(x, t) = a_i(t) \cdot x^2 + b_i(t) \cdot x + c_i(t)$. Par ailleurs, nous rappelons que les valeurs aux bords (en $x=0$ et $x=E$) de la fonction S_r ne sont pas connues. Dans ce cas, nous imposons : $S_r(0, t) \cong S_r(z_1, t)$ et $S_r(E, t) \cong S_r(z_N, t)$.

• $(\mathbf{S}_r)_i(\mathbf{t})$ pour $1 \leq i \leq N$

si l'indice i est impair :

$$= \frac{-1}{(z_{i+1} - z_i) \cdot (z_i - z_{i-1})} \cdot \int_{z_{i-1}}^{z_{i+1}} P_i(x, t) \cdot (x - z_{i+1}) \cdot (x - z_{i-1}) dx$$

si l'indice i est pair :

$$= \frac{1}{(z_i - z_{i-1}) \cdot (z_i - z_{i-2})} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} P_{i-1}(x, t) \cdot (x - z_{i-1}) \cdot (x - z_{i-2}) dx$$

$$+ \frac{1}{(z_{i+2} - z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i)} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} P_{i+1}(x, t) \cdot (x - z_{i+2}) \cdot (x - z_{i+1}) dx$$

Lorsque l'on considère les conditions aux limites de flux :

$$\bullet (\mathbf{S}_r)_0(\mathbf{t}) = \frac{1}{z_2 \cdot z_1} \cdot \int_0^{z_2} P_1(x, t) \cdot (x - z_2) \cdot (x - z_1) dx$$

$$\bullet (\mathbf{S}_r)_{N+1}(\mathbf{t}) = \frac{1}{(E - z_N) \cdot (E - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E P_N(x, t) \cdot (x - z_N) \cdot (x - z_{N-1}) dx$$

Lorsque l'on considère les conditions aux limites de températures imposées, nous devons construire les vecteurs \mathbf{M}^0 , \mathbf{R}^0 et \mathbf{R}^E :

Le vecteur \mathbf{M}^0 :

$$\bullet \mathbf{M}_1^0 = \frac{-1}{z_2 \cdot z_1^2 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2)^2 \cdot (x - z_1) \cdot x dx$$

$$\bullet \mathbf{M}_2^0 = \frac{1}{z_2^2 \cdot z_1 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2) \cdot (x - z_1)^2 \cdot x dx$$

$$\bullet \mathbf{M}_i^0 = 0 \text{ pour } 3 \leq i \leq N$$

Le vecteur R^0 :

- $R_1^0 = \frac{-1}{z_2 \cdot z_1^2 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot (2x - z_2) dx$
- $R_2^0 = \frac{1}{z_2^2 \cdot z_1 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot (2x - z_1) dx$
- $R_i^0 = 0$ pour $3 \leq i \leq N$

Le vecteur R^E :

- $R_i^E = 0$ pour $1 \leq i \leq N-2$
- $R_{N-1}^E = \frac{1}{(E - z_N) \cdot (E - z_{N-1})^2 \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (2x - z_N - E) dx$
- $R_N^E = \frac{-1}{(E - z_N)^2 \cdot (E - z_{N-1}) \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (2x - z_{N-1} - E) dx$

Annexe 6 : Calcul du terme source radiatif et construction des matrices $[A]$, $[B]$ intervenant dans l'expression du flux conductif, en régime transitoire.

Dans ce qui suit, $|\cdot|$ désigne le déterminant et $C_1=1/2$, $C_2=1/6$, $C_3=1/24$. Par ailleurs, nous rappelons que les valeurs aux bords (en $x=0$ et $x=E$) du flux radiatif total ne sont pas connues. Ainsi, nous utilisons les formules de dérivation décentrées près des bords :

$$(\tilde{S}_r)_1^{(n)} = - \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{Q}_r)_2^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_1^{(n)} & C_1 \cdot (z_2 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_2 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_2 - z_1)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_3^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_1^{(n)} & C_1 \cdot (z_3 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_3 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_3 - z_1)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_4^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_1^{(n)} & C_1 \cdot (z_4 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_4 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_4 - z_1)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_5^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_1^{(n)} & C_1 \cdot (z_5 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_5 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_5 - z_1)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (z_2 - z_1) & C_1 \cdot (z_2 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_2 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_2 - z_1)^4 \\ (z_3 - z_1) & C_1 \cdot (z_3 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_3 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_3 - z_1)^4 \\ (z_4 - z_1) & C_1 \cdot (z_4 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_4 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_4 - z_1)^4 \\ (z_5 - z_1) & C_1 \cdot (z_5 - z_1)^2 & C_2 \cdot (z_5 - z_1)^3 & C_3 \cdot (z_5 - z_1)^4 \end{vmatrix}}$$

$$(\tilde{S}_r)_2^{(n)} = - \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{Q}_r)_1^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_2^{(n)} & C_1 \cdot (z_1 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_1 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_1 - z_2)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_3^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_2^{(n)} & C_1 \cdot (z_3 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_3 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_3 - z_2)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_4^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_2^{(n)} & C_1 \cdot (z_4 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_4 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_4 - z_2)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_5^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_2^{(n)} & C_1 \cdot (z_5 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_5 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_5 - z_2)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (z_1 - z_2) & C_1 \cdot (z_1 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_1 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_1 - z_2)^4 \\ (z_3 - z_2) & C_1 \cdot (z_3 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_3 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_3 - z_2)^4 \\ (z_4 - z_2) & C_1 \cdot (z_4 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_4 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_4 - z_2)^4 \\ (z_5 - z_2) & C_1 \cdot (z_5 - z_2)^2 & C_2 \cdot (z_5 - z_2)^3 & C_3 \cdot (z_5 - z_2)^4 \end{vmatrix}}$$

A présent pour $3 \leq j \leq N-2$, nous avons

$$(\tilde{S}_r)_j^{(n)} = - \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{Q}_r)_{j-2}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_j^{(n)} & C_1 \cdot (z_{j-2} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j-2} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j-2} - z_j)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{j-1}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_j^{(n)} & C_1 \cdot (z_{j-1} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j-1} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j-1} - z_j)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{j+1}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_j^{(n)} & C_1 \cdot (z_{j+1} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j+1} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j+1} - z_j)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{j+2}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_j^{(n)} & C_1 \cdot (z_{j+2} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j+2} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j+2} - z_j)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (z_{j-2} - z_j) & C_1 \cdot (z_{j-2} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j-2} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j-2} - z_j)^4 \\ (z_{j-1} - z_j) & C_1 \cdot (z_{j-1} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j-1} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j-1} - z_j)^4 \\ (z_{j+1} - z_j) & C_1 \cdot (z_{j+1} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j+1} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j+1} - z_j)^4 \\ (z_{j+2} - z_j) & C_1 \cdot (z_{j+2} - z_j)^2 & C_2 \cdot (z_{j+2} - z_j)^3 & C_3 \cdot (z_{j+2} - z_j)^4 \end{vmatrix}}$$

$$(\tilde{S}_r)_{N-1}^{(n)} = - \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{Q}_r)_{N-4}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_{N-1}^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{N-3}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_{N-1}^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{N-2}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_{N-1}^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^4 \\ (\tilde{Q}_r)_N^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_{N-1}^{(n)} & C_1 \cdot (z_N - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_N - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_N - z_{N-1})^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (z_{N-4} - z_{N-1}) & C_1 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-4} - z_{N-1})^4 \\ (z_{N-3} - z_{N-1}) & C_1 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-3} - z_{N-1})^4 \\ (z_{N-2} - z_{N-1}) & C_1 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_{N-2} - z_{N-1})^4 \\ (z_N - z_{N-1}) & C_1 \cdot (z_N - z_{N-1})^2 & C_2 \cdot (z_N - z_{N-1})^3 & C_3 \cdot (z_N - z_{N-1})^4 \end{vmatrix}}$$

Et enfin,

$$(\tilde{S}_r)_N^{(n)} = \frac{\begin{vmatrix} (\tilde{Q}_r)_{N-4}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_N^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-4} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-4} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-4} - z_N)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{N-3}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_N^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-3} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-3} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-3} - z_N)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{N-2}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_N^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-2} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-2} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-2} - z_N)^4 \\ (\tilde{Q}_r)_{N-1}^{(n)} - (\tilde{Q}_r)_N^{(n)} & C_1 \cdot (z_{N-1} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-1} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-1} - z_N)^4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (z_{N-4} - z_N) & C_1 \cdot (z_{N-4} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-4} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-4} - z_N)^4 \\ (z_{N-3} - z_N) & C_1 \cdot (z_{N-3} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-3} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-3} - z_N)^4 \\ (z_{N-2} - z_N) & C_1 \cdot (z_{N-2} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-2} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-2} - z_N)^4 \\ (z_{N-1} - z_N) & C_1 \cdot (z_{N-1} - z_N)^2 & C_2 \cdot (z_{N-1} - z_N)^3 & C_3 \cdot (z_{N-1} - z_N)^4 \end{vmatrix}}$$

La matrice [A]

Cette matrice est symétrique. Nous remplissons alors uniquement sa partie triangulaire supérieure.

- Pour $1 \leq i \leq N$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[A]_{\frac{i}{2}, \frac{i}{2}} = \frac{1}{(z_i - z_{i-2})^2} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (x - z_{i-2})^2 dx + \frac{1}{(z_{i+2} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (x - z_{i+2})^2 dx$$

- Pour $1 \leq i \leq N-2$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[A]_{\frac{i}{2}, \frac{i}{2}+1} = \frac{-1}{(z_{i+2} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (x - z_{i+2}) \cdot (x - z_i) dx$$

- Pour $\frac{i}{2} + 2 \leq \frac{j}{2} \leq \frac{N}{2}$ et lorsque les indices i et j sont pairs : $[A]_{\frac{i}{2}, \frac{j}{2}} = 0$

- $[A]_{0,0} = \frac{1}{z_2} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2)^2 dx$
- $[A]_{0,1} = \frac{-1}{z_2} \cdot \int_0^{z_2} (x - z_2) \cdot x dx$
- Pour $2 \leq \frac{i}{2} \leq \frac{N+1}{2}$ et lorsque l'indice i est pair : $[A]_{0, \frac{i}{2}} = 0$
- $[A]_{\frac{N+1}{2}, \frac{N+1}{2}} = \frac{1}{(E - z_{N-1})^2} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (x - z_{N-1})^2 dx$
- $[A]_{\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}} = \frac{-1}{(E - z_{N-1})^2} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (x - z_{N-1}) \cdot (x - E) dx$
- Pour $0 \leq \frac{i}{2} \leq \frac{N-3}{2}$ et lorsque l'indice i est pair : $[A]_{\frac{i}{2}, \frac{N+1}{2}} = 0$

La matrice [B]

- Pour $1 \leq i \leq N$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[B]_{\frac{i}{2}, i} = \frac{1}{(z_i - z_{i-1}) \cdot (z_i - z_{i-2})^2} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (2x - z_{i-1} - z_{i-2}) \cdot (x - z_{i-2}) dx$$

$$+ \frac{-1}{(z_{i+1} - z_i) \cdot (z_{i+2} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (x - z_{i+2}) dx$$

- Pour $1 \leq i \leq N - 1$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[B]_{\frac{i}{2}, i+1} = \frac{1}{(z_{i+2} - z_i) \cdot (z_{i+1} - z_i) \cdot (z_{i+2} - z_{i+1})} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+2} - z_i) \cdot (x - z_{i+2}) dx$$

- Pour $1 \leq i \leq N - 2$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[B]_{\frac{i}{2}, i+2} = \frac{-1}{(z_{i+2} - z_{i+1}) \cdot (z_{i+2} - z_i)^2} \cdot \int_{z_i}^{z_{i+2}} (2x - z_{i+1} - z_i) \cdot (x - z_{i+2}) dx$$

- Pour $i+3 \leq j \leq N$, $1 \leq i \leq N - 3$ et lorsque l'indice i est pair : $[B]_{\frac{i}{2}, j} = 0$

- Pour $2 \leq i \leq N$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[B]_{\frac{i}{2}, i-1} = \frac{1}{(z_{i-1} - z_{i-2}) \cdot (z_{i-1} - z_i) \cdot (z_i - z_{i-2})} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (2x - z_i - z_{i-2}) \cdot (x - z_{i-2}) dx$$

- Pour $3 \leq i \leq N$ et lorsque l'indice i est pair :

$$[B]_{\frac{i}{2}, i-2} = \frac{1}{(z_{i-2} - z_{i-1}) \cdot (z_{i-2} - z_i) \cdot (z_i - z_{i-2})} \cdot \int_{z_{i-2}}^{z_i} (2x - z_i - z_{i-1}) \cdot (x - z_{i-2}) \, dx$$

- Pour $1 \leq j \leq i-3$, $4 \leq i \leq N$ et lorsque l'indice i est pair : $[B]_{\frac{i}{2}, j} = 0$

- $[B]_{0,0} = \frac{-1}{z_2 \cdot z_1} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot (x - z_2) \, dx$

- $[B]_{0,1} = \frac{1}{z_2 \cdot z_1 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2) \cdot (x - z_2) \, dx$

- $[B]_{0,2} = \frac{-1}{z_2^2 \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_1) \cdot (x - z_2) \, dx$

- Pour $3 \leq j \leq N+1$: $[B]_{0,j} = 0$

- $[B]_{1,0} = \frac{1}{z_2 \cdot z_1} \cdot \int_0^{z_2} (2x - z_2 - z_1) \cdot x \, dx$

- Pour $2 \leq \frac{i}{2} \leq \frac{N+1}{2}$ et lorsque l'indice i est pair : $[B]_{\frac{i}{2}, 0} = 0$

- $[B]_{\frac{N+1}{2}, N+1} = \frac{1}{(E - z_{N-1})^2 \cdot (E - z_N)} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (x - z_{N-1}) \, dx$

- $[B]_{\frac{N+1}{2}, N} = \frac{-1}{(E - z_{N-1}) \cdot (E - z_N) \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - E - z_{N-1}) \cdot (x - z_{N-1}) \, dx$

- $[B]_{\frac{N+1}{2}, N-1} = \frac{1}{(E - z_{N-1})^2 \cdot (z_N - z_{N-1})} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - E) \cdot (x - z_{N-1}) \, dx$

- Pour $0 \leq j \leq N-2$: $[B]_{\frac{N+1}{2}, j} = 0$

- $[B]_{\frac{N-1}{2}, N+1} = \frac{-1}{(E - z_{N-1})^2 \cdot (E - z_N)} \cdot \int_{z_{N-1}}^E (2x - z_N - z_{N-1}) \cdot (x - E) \, dx$

- Pour $0 \leq \frac{i}{2} \leq \frac{N-3}{2}$ et lorsque l'indice i est pair : $[B]_{\frac{i}{2}, N+1} = 0$

Annexe 7 : Problème test

Pour mesurer l'efficacité (et sa programmation...) de la méthode des éléments finis combinée à la méthode de Runge-Kutta implicite présentée au chapitre V, nous l'avons testée sur un problème modèle dont on connaît la solution analytique et qui est représentatif du problème spécifique pour lequel a été étudiée la méthode (équation parabolique dont la solution en temps présente un profil raide). Bien que nous ayons effectué plusieurs essais, nous n'en reportons ici qu'un seul (et pour les températures imposées aux frontières) mais qui est cependant significatif. Voici l'exemple que nous avons traité :

$$T(x,t) = \frac{(T_E - f(t))}{E} \cdot x + f(t) - \frac{c_1 \cdot t}{(c_2 + x)} x \cdot (x - E) \quad \forall 0 \leq x \leq E \text{ et } 0 \leq t \leq 50 \text{ s}$$

avec des conditions aux limites et une condition initiale compatibles avec la solution.

$$f(t) = \frac{(T_o - T_E) \cdot t}{50} + T_E \quad \forall 0 \leq t \leq 50 \text{ s}, \quad T_o = 400 \text{ K}, \quad T_E = 300 \text{ K}$$

$$T(x,0) = T_E \quad \forall x \in [0, E], \quad c_1 = 100000 \text{ et } c_2 = 300$$

Dans ce cas, le second membre de l'équation est donné par :

$$S_r(x,t) = \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - \lambda'_c(T(x,t)) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2(x,t) - \lambda_c(T(x,t)) \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\forall 0 < x < E \text{ et } 0 \leq t \leq 50 \text{ s}.$$

avec

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \left(1 - \frac{x}{E}\right) \cdot f'(t) - \frac{c_1 \cdot x \cdot (x - E)}{(c_2 + x)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = \frac{(T_E - f(t))}{E} - c_1 \cdot t \cdot \left(1 - \frac{c_2 \cdot (c_2 + E)}{(c_2 + x)^2}\right) ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{2t \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot (c_2 + E)}{(c_2 + x)^3}$$

La figure ci-dessous montre alors un parfait accord entre les solutions numérique et analytique.

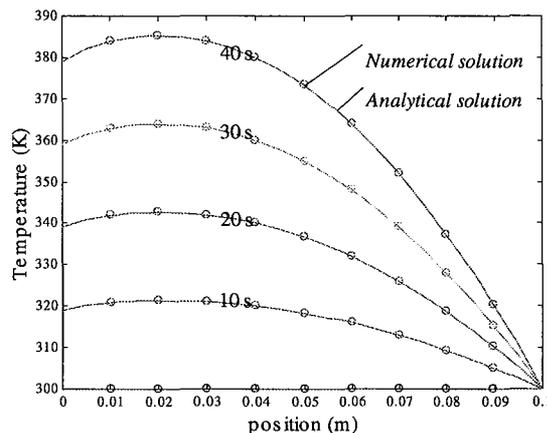


figure A7.1 : Comparaison entre les solutions numérique et analytique

NOMENCLATURE

c	vitesse de propagation du rayonnement dans le vide	m/s
s	abscisse curviligne	m
t	temps	s
x	position dans le milieu	m
E	épaisseur du milieu	m
T	température	K
T_o	température chaude au bord en $x = 0$	K
T_E	température froide au bord en $x = E$	K
c_p	chaleur massique à pression constante	$J/(kg \cdot K)$
L_λ	luminance monochromatique	$W/(m^3 \cdot sr)$
L_λ^o	luminance monochromatique du corps noir	W/m^3
$Q_{r\lambda}$	flux radiatif monochromatique	W/m^3
Q_r	flux radiatif total	W/m^2
Q_c	flux conductif	W/m^2
Q_t	flux total	W/m^2
S_r	terme source radiatif	W/m^3
h_o	coefficient d'échange par convection en $x = 0$	$W/(m^2 \cdot K)$
h_E	coefficient d'échange par convection en $x = E$	$W/(m^2 \cdot K)$
$T_{\infty,o}$	température ambiante du milieu extérieur en contact avec la face avant	K
$T_{\infty,E}$	température ambiante du milieu extérieur en contact avec la face arrière	K
T_f	température de film du milieu extérieur en contact avec la frontière	K
P_λ	fonction de phase monochromatique	

Symboles Grecs

Δ	direction de propagation du rayonnement	
λ	longueur d'onde	m

Ω	angle solide	
θ	angle polaire	
ω	angle azimutal	
μ	cosinus de l'angle polaire	
ρ	masse volumique	kg/m^3
λ_c	conductivité thermique du milieu	$W/(m \cdot K)$
$\sigma_{a\lambda}$	coefficient monochromatique d'absorption	m^{-1}
$\sigma_{s\lambda}$	coefficient monochromatique de diffusion	m^{-1}
$\sigma_{e\lambda}$	coefficient monochromatique d'extinction	m^{-1}

Indices

λ	monochromatique
a	absorption
s	diffusion
e	extinction
r	radiatif
c	conduction
t	total
$0, E$	frontières

Exposants

o	relatif au corps noir
+	hémisphère avant ($0 < \mu \leq 1$)
-	hémisphère arrière ($-1 \leq \mu < 0$)

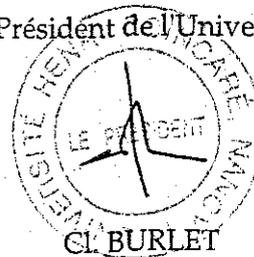
Monsieur ASLLANAJ Fatmir

DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ, NANCY-I
en MECANIQUE & ENERGETIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 27 DEC. 2001 n° 626

Le Président de l'Université



Résumé

L'objet de ce travail est l'étude et l'analyse numérique des transferts de chaleur couplés par rayonnement et conduction à travers les milieux semi-transparents. Le modèle utilisé est constitué d'un système de deux équations aux dérivées partielles couplées : l'équation intégro-différentielle du transfert radiatif (ETR), qui a comme inconnue la luminance, et une équation non linéaire de la chaleur régissant la température dans le milieu. Dans le premier chapitre de la thèse, nous détaillons la modélisation avec les hypothèses simplificatrices qu'elle comporte. Dans le second chapitre, nous montrons l'existence et l'unicité du système couplé d'équations en régime stationnaire. Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations en régime stationnaire. Pour résoudre l'ETR, nous discrétisons l'espace angulaire suivant plusieurs directions et nous utilisons une quadrature numérique pour approcher l'intégrale de l'équation. Il en résulte alors un système différentiel linéaire du premier ordre que nous résolvons par trois méthodes différentes. La deuxième équation est résolue à l'aide d'un schéma aux différences finies, associé à une transformation de Kirchhoff. Le couplage entre les deux équations est résolu par une méthode de point fixe. Dans le quatrième chapitre, nous étudions la convergence d'un schéma numérique en régime stationnaire. Dans le cinquième chapitre nous présentons une méthode numérique pour résoudre le système couplé en régime transitoire, d'une part lorsque les températures sont imposées aux frontières et, d'autre part, lorsque le milieu est soumis à des conditions de flux. L'équation de la chaleur est résolue en espace par la méthode des éléments finis P^2 . Le système différentiel en temps est résolu par une méthode de Runge-Kutta implicite, adaptée aux équations raides. Le dernier chapitre de ce travail analyse les résultats numériques obtenus par la simulation appliquée à un matériau isolant constitué de fibres de silice.

Mots clés : Rayonnement, conduction, milieu semi-transparent, non linéaire, point fixe, système différentiel, différences finies, éléments finis.

Abstract

The aim of this work is the study and the numerical analysis of heat transfer coupled by radiation and conduction through semi-transparent media. The model used is a system of partial differential equations coupling the integro-differential equation of the radiative transfer (RTE), which has as unknown the radiation intensity, and a nonlinear heat equation governing the temperature in the medium. In the first chapter of the thesis, we detail the modelling and the simplifying assumptions. In the second chapter, we show the existence and unicity of the coupled system of equations in steady state. The third chapter is devoted to the numerical solution of the equations in steady state. In order to solve the RTE, the angular space is discretized according to several directions and a quadrature rule is used to approach the integral of the equation. Then, it results a first order linear differential equation system which was solved by three different methods. The second equation is solved using the Kirchhoff transformation associated with a centered finite difference scheme. The coupled system of equations is solved using a fixed-point method. In the fourth chapter, we study the convergence of a numerical scheme in steady state. In the fifth chapter, we present a numerical method achieved to solve the coupled system in transient state, firstly when the temperatures are imposed at the boundaries and, secondly, when the medium is subjected to flux conditions. The heat equation is solved in space by the finite element method P^2 . The differential system in time is solved by a implicit Runge-Kutta method, adapted to stiff equations. The last chapter of this work analyses the numerical results obtained by the simulation applied on a insulator composed of silica fibers.

Key words : Radiation, conduction, semi-transparent medium, non linear, fixed point, differential system, finites differences, finites elements.