

Implantation d'une loi de commande. Application à la plate-forme de satellite de télécommunication eurostar 2000+

Laurent Caramelle

▶ **To cite this version:**

Laurent Caramelle. Implantation d'une loi de commande. Application à la plate-forme de satellite de télécommunication eurostar 2000+. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1995. Français. NNT : 1995NAN10338 . tel-01748572

HAL Id: tel-01748572
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748572

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

FACULTE DES SCIENCES

CRAN
CNRS URA 821

Ecole Doctorale I.A.E.+M.
DFD Automatique et Production Automatisée
UFR S.T.M.I.A.



THESE

Présentée pour l'obtention du

DOCTORAT

DE L'UNIVERSITE HENRI POINCARE NANCY I

Spécialité Automatique

par

CARAMELLE Laurent

IMPLANTATION D'UNE LOI DE COMMANDE, APPLICATION A LA PLATE-FORME DE SATELLITE DE TELECOMMUNICATION EUROSTAR 2000+

Soutenue publiquement le 7 décembre 1995 devant la commission d'examen:

Membres du jury:

Président:	C. IUNG	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine
Rapporteurs:	D. MEHDI	Professeur, Ecole Supérieure de Poitiers
	C. WEHENKEL	Professeur, I.S.T., Luxembourg
Examinateurs:	C. CHAMPETIER	Docteur, Responsable de section, Matra Marconi Space
	B. FRAPARD	Ingénieur, Matra Marconi Space
	G. KRZAKALA	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I
	M. ZASADZINSKI	Chargé de recherche, Université H. Poincaré, Nancy I
Directeur de thèse:	M. DAROUACH	Professeur, Université Henri Poincaré, Nancy I

A mes parents
et frères adorés

A Christelle
et ses parents

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au Centre de Recherche en Automatique de Nancy, au sein de l'Equipe d'Automatique et de Recherche Appliquée de Longwy (C.R.A.N.-E.A.R.A.L. C.N.R.S. URA 821) dirigée par Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH, sous la responsabilité scientifique de Monsieur Michel ZASADZINSKI, Chargé de Recherche au C.N.R.S.

Je tiens à exprimer ma plus vive reconnaissance à Monsieur le Professeur Claude IUNG, de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider ce jury.

Que Monsieur le Professeur Mohamed DAROUACH qui a assuré la direction de cette thèse, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli au sein de son service et m'avoir encouragé tout au long de ces recherches.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur le Professeur Driss MEHDI, Professeur à l'Ecole Supérieure de Poitiers, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à ce travail et pour avoir accepté de le juger.

Je suis très sensible à l'intérêt qu'a bien voulu porter à ce travail Monsieur le Professeur Claude WEHENKEL de l'Institut Supérieure de Technologie de Luxembourg en ayant accepté de l'examiner et pour l'attention accordée.

Que Monsieur le Professeur Gérard KRZAKALA, qui était Directeur dès mon arrivée au laboratoire et qui est maintenant Directeur du Laboratoire de Saint-Dié soit remercié pour ses conseils, son soutien et son amitié.

Que Monsieur Michel ZASADZINSKI, Chargé de Recherche au C.N.R.S. soit remercié pour l'aide et les conseils précieux qu'il m'a toujours apportés et pour l'attention soutenue qu'il a toujours manifestée pour mon travail.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur Calixte CHAMPETIER, Responsable de la section Etudes Avancées du Département Etudes Dynamiques de Matra Marconi Space, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de venir siéger à ce jury.

Que Monsieur Benoît FRAPARD, Ingénieur au Département Etudes Dynamiques de Matra Marconi Space, soit remercié pour le suivi permanent de mes travaux et pour sa participation au jury.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Michel CALDICHOURY responsable du Département Etudes Dynamiques de Matra Marconi Space et Monsieur MARCHAL Chef du département Dynamique Automatique au Centre National d'Etudes Spatiales pour la confiance qu'ils m'ont témoignée.

J'adresse tous mes remerciements à mon frère Pascal, Manager de programmes Internationaux à Matra Défense pour son aide précieuse et ses encouragements tout au long de ma scolarité.

Je remercie également tous mes collègues de l'E.A.R.A.L. et en particulier les maîtres de Conférences Jean Yves KELLER, Philippe PIERROT, Hugues RAFARALAHY, Mohamed BOUTAYEB, ainsi que les thésards Lionel SUMMERER, Didier AUBRY et Eric MAGAROTTO pour leur aide à un moment donné.

Je tiens à remercier très chaleureusement Monsieur Jean-Luc PREUD'HOMME, Ingénieur à l'E.A.R.A.L. ainsi que Madame Nadine PETIT, Secrétaire à l'E.A.R.A.L.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du Département G.E.I.I. de l'I.U.T. de Longwy en particulier à son directeur Monsieur Bernard GAYRAL, au chef de département, Monsieur Gilbert GILSON, qui a été mon tuteur durant mon monitorat de l'enseignement supérieur ainsi qu'à Monsieur Pascal RISCHETTE, directeur des études.

J'adresse enfin toute ma reconnaissance à ma fiancée Christelle, pour son aide permanente et pour les sacrifices qu'elle a consentis tout au long de cette thèse.

"... nous habitons tous la maison à une pièce qu'est le monde

avec pour toit le firmament des étoiles".

John Muir (1834-1914)

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 1

I.PRESENTATION DES EXEMPLES 6
I.1. Système à quatre disques 7
I.1.1. Description 7
I.1.2. Comportement en boucle ouverte 8
I.1.3. Comportement en boucle fermée 8
I.1.3.1. Réduction de l'ordre du correcteur 8
I.1.3.2. Discrétisation et optimisation à mots finis du correcteur 9
I.2. Plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ 10
I.2.1. Description 10
I.2.2. Comportement en boucle ouverte 15
I.2.3. Comportement en boucle fermée 15
I.2.3.1. Réduction de l'ordre du correcteur 15
I.2.3.2. Discrétisation et optimisation à mots finis du correcteur 16

II.REDUCTION DE L'ORDRE DU CORRECTEUR 17
II.1. Introduction 18
II.2. Réduction de l'ordre d'une réalisation 18
II.2.1. Formulation du problème 18
II.2.2. Réalisation équilibrée 20
II.2.2.1. Définition et propriétés 20
II.2.2.2. Mesure de la commandabilité et de l'observabilité des composantes de l'état 24
II.2.3. Réduction de l'ordre d'une réalisation 26
II.2.3.1. Troncation d'une réalisation équilibrée 26
II.2.3.2. Approximation optimale de Hankel 30
II.2.3.3. Agrégation 31
II.2.3.4. Discussion 32
II.3. Troncation équilibrée des facteurs co-premiers normalisés 33
II.3.1. Factorisation co-première normalisée 33
II.3.1.1. Graphe d'un système linéaire et factorisation co-première 33
II.3.1.2. Réalisation d'une factorisation co-première normalisée 35

II.3.1.3. Propriétés des facteurs co-premiers normalisés 36
II.3.2. Réduction de la réalisation équilibrée des facteurs co-premiers 43
II.3.2.1. Algorithme 43
II.3.2.2. Propriétés 44
II.4. Réduction de l'ordre du correcteur et comportement en boucle fermée 46
II.4.1. Formulation du problème 46
II.4.2. Méthodes de réduction et analyse fréquentielle des systèmes bouclés 47
II.4.3. Réduction équilibrée avec pondérations fréquentielles 51
II.4.3.1. Grammiens pondérés et équilibrage 51
II.4.3.2. Troncation 52
II.4.3.3. Borne de l'erreur de troncation 54
II.4.4. Troncation équilibrée et stabilité en boucle fermée 56
II.4.5. Troncation équilibrée en boucle fermée 58
II.4.5.1. Equilibrage et troncation du correcteur en boucle fermée 58
II.4.5.2. Pondérations fréquentielles et boucle fermée 60
II.4.6. Discussion 62
II.5. Réduction des facteurs co-premiers du correcteur et réalisation équilibrée avec pondérations fréquentielles: stabilité en boucle fermée 63
II.5.1. Formulation du problème 63
II.5.2. Réduction de l'ordre et propriétés 66
II.5.2.1. Premier algorithme 66
II.5.2.2. Deuxième algorithme 68
II.5.2.3. Comportement en boucle fermée après troncation 69
II.5.2.3.1. Propriétés 69
II.5.2.3.2. Performances en boucle fermée 69
II.5.3. Stabilité en boucle fermée 70
II.6. Applications 71
II.6.1. Présentation des applications 71
II.6.2. Système à quatre disques 72
II.6.3. Plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ 76
II.6.4. Discussion 88
II.7. Conclusion 89

III.DISCRETISATION DU CORRECTEUR 91
III.1. Introduction 92
III.2. Boucle fermée avec un correcteur discret 92
III.2.1. Description de la boucle fermée 92
III.2.2. Approximations d'un filtre continu par un filtre discret 94
III.2.3. Limitations dues à l'utilisation d'un correcteur numérique 96
III.2.4. Obtention d'un correcteur discret pour un système continu 97
III.2.4.1. Discrétisation de l'installation puis calcul du correcteur en discret 97
III.2.4.2. Calcul du correcteur en continu puis discrétisation 97
III.3. Mesure de la qualité de la discrétisation du correcteur 98
III.3.1. Mesure des performances en boucle fermée d'une discrétisation 98
III.3.1.1. Critère de performance 98
III.3.1.2. Approximation du critère de performance 99
III.3.2. Mesure de la robustesse en boucle fermée d'une discrétisation 103
III.3.2.1. Critère de stabilité 103
III.3.2.2. Approximation du critère de stabilité 105
III.4. Applications 108
III.4.1. Système à quatre disques 109
III.4.2. Plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ 109
III.5. Conclusion 110

IV.OPTIMISATION A MOTS DE LONGUEUR FINIE 111
IV.1. Introduction 112
IV.2. Formulation du problème 113
IV.2.1. Problèmes numériques 113
IV.2.1.1. Erreurs d'arrondi 113
IV.2.1.2. Représentations en nombres binaires 114
IV.2.1.3. Erreurs de quantification et dépassements 115
IV.2.2. Comportement en boucle fermée 117
IV.3. Sensibilité d'un filtre numérique 117
IV.3.1. Réalisation d'état d'un filtre numérique 117

IV.3.2. Mesure de la sensibilité d'une réalisation d'état d'un filtre numérique 118
IV.3.2.1. Mesure de la sensibilité sans pondération fréquentielle 118
IV.3.2.2. Mesure de la sensibilité avec pondérations fréquentielles 121
IV.4. Optimisation d'une réalisation d'état implantée avec des mots de longueur finie 124
IV.4.1. Optimisation d'une réalisation d'état sans pondération fréquentielle 124
IV.4.2. Optimisation d'une réalisation d'état avec pondérations fréquentielles 128
IV.5. Application à la plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ 130
IV.5.1. Correcteur pris isolément 130
IV.5.2. Correcteur en boucle fermée 136
IV.6. Conclusion 139

V.CONCLUSION ET PERSPECTIVES 140
V.1. Conclusion 141
V.2. Perspectives 142

ANNEXES 143

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES 151

LISTE DES NOTATIONS

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$:	ensemble des nombres réels et complexes
$\mathbb{R}^*$, $\mathbb{C}^+$:	ensemble des nombres réels non nuls et complexes positifs
$\mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbb{C}^{n\times m}$:	espace des matrices n×m réelles et complexes
A^T, A^H:	matrice transposée de A, matrice transposée hamiltonienne de A
$\{\lambda_i(A)\}_{i=1..n}$:	ensemble des valeurs propres de la matrice $A^{n\times n}$
$\{\sigma_i(A)\}_{i=1..n}$:	ensemble des valeurs singulières de la matrice $A^{n\times n}$
$\overline{\sigma}(A) = \max_i \sigma_i(A)$:	valeur singulière maximale de la matrice $A^{n\times n}$
$\underline{\sigma}(A) = \min_i \sigma_i(A)$:	valeur singulière minimale de la matrice $A^{n\times n}$
det(A):	déterminant de la matrice $A^{n\times n}$
Re[A]:	partie réeelle de la matrice $A^{n\times n}$
tr(A):	trace de la matrice $A^{n\times n}$
diag(A):	diagonalisation de la matrice $A^{n\times n}$
I_n:	matrice identité n×n
$A^{\sim}$:	matrice paraconjuguée $A^T(-s)$ (en continu) ou $A^{-1}(z^{-1})$ (en discret)
$\|.\|$	module
$\|\|.\|\|_p$:	norme p définie au sens de Lebesgue (p = 1, 2, ∞)
$\|\|.\|\|_H$:	norme de Hankel
$\|\|.\|\|_E$:	norme euclidienne (vectorielle)

$\|.\|_s$:	norme euclidienne induite (matricielle)
$\|.\|_F$	norme de Frobenius (matricielle)
L_2^m	espace des fonctions carrées intégrables (Lebesgue) sur l'axe imaginaire de dimension m

INTRODUCTION

Dans le cadre de la commande H_∞, l'équipe de recherche en Automatique (EARAL-CRAN) s'est fixée plusieurs objectifs. Tout d'abord, de développer, à partir de résultats théoriques récents, de nouvelles méthodologies d'analyse et de synthèse, puis de les confronter à des problèmes concrets afin d'en préciser l'intérêt et les limites. Cette démarche a obtenu un écho favorable dans le domaine des activités spatiales, où l'évolution va d'une part dans le sens d'une complexification croissante des systèmes et d'autre part vers des exigences en terme de performance et de robustesse de plus en plus contraignantes. MATRA MARCONI SPACE (M.M.S.) en étroite collaboration avec le CENTRE NATIONAL D'ETUDES SPATIALES (C.N.E.S.), conscients de cette évolution, ont défini un programme de recherches sur les techniques modernes de l'Automatique applicables au domaine spatial. La thèse qui est présentée ici s'inscrit au sein de ce programme.

Le problème qui nous a été soumis par les responsables du département Etudes Dynamiques de MATRA MARCONI SPACE est le suivant: étudier les incidences, sur la stabilité et les performances en boucle fermée, de l'implantation numérique d'une loi de commande préalablement synthétisée en continu. La qualité inhérente à la réalisation d'une synthèse d'une loi de commande se dénomme robustesse: invariance d'une propriété (stabilité, performances, ...) malgré des incertitudes et autres variations. La phase de digitalisation de la loi de commande, donc d'approximation d'un modèle continu par un modèle discret, doit elle aussi être robuste. En effet, même si une loi de commande est implantée sous la forme d'un algorithme numérique, la synthèse du correcteur repose sur des spécifications imposées par l'installation qui est continue (le modèle, les perturbations, les plages d'incertitude, ...).

Cela justifie un choix qui est souvent fait dans la pratique: calculer un correcteur en continu, puis le discrétiser. Si on utilise une démarche inverse, c'est-à-dire si on discrétise l'installation avant de synthétiser un correcteur en discret, nous nous exposons notamment aux difficultés suivantes:

- une perte physique des paramètres (passage de A à e^{At}),
- une prise en compte difficile des incertitudes,
- une prise en compte du comportement de l'installation entre deux périodes d'échantillonnage,
- un choix délicat de la période d'échantillonnage.

Ces problèmes sont aggravés par le fait que le filtre discret obtenu dépend de la méthode d'approximation utilisée.

Les performances et la robustesse en boucle fermée, obtenues avec le correcteur discret, sont très dépendantes du choix de la période d'échantillonnage. De plus, une petite période d'échantillonnage bien qu'elle permette, théoriquement, de mieux approximer un système

continu, engendre des phénomènes oscillatoires dus à un "sur-échantillonnage". Dans les applications industrielles, à condition de respecter les contraintes dues au théorème de Shanon, la période d'échantillonnage est souvent figée à une valeur assez grande, ce qui entraîne une mauvaise approximation de l'installation continue. Indépendamment de ces arguments s'appuyant sur des considérations "physiques", l'utilisation de méthodes récentes pour obtenir des lois de commande robustes plaide aussi contre la discrétisation préalable de l'installation. En effet, ces méthodes, de type H_∞ ou LQG / LTR, s'appuient sur des pondérations fréquentielles qui sont calculées par rapport au modèle continu de l'installation. Mais, à cause de ces pondérations, l'ordre du correcteur obtenu est élevé (souvent supérieur à celui de l'installation).

Les contraintes d'implantation numérique auxquelles nous devons faire face

- l'ordre du filtre doit être faible,
- le filtre doit être digitalisé,
- la programmation se fait à mots de longueur finie,

sont à apprécier en regard des problèmes évoqués ci-dessus.

Par conséquent, notre démarche peut désormais se résumer sous forme de trois étapes à traiter séquentiellement [AND-92]:

- la réduction de l'ordre du correcteur,
- la discrétisation du correcteur,
- l'optimisation à mots de longueur finie du filtre digital obtenu.

Le correcteur n'ayant d'intérêt, non pas pour lui-même, mais pour son comportement en boucle fermée, nous envisagerons donc d'approximer, au cours de ces trois étapes, qui correspondront respectivement aux chapitres II, III et IV de ce mémoire, le comportement du correcteur en boucle fermée plutôt que celui du correcteur pris isolément.

La première étape qui concerne la réduction de l'ordre du correcteur, peut être brièvement illustrée par la figure 1 ci-dessous.

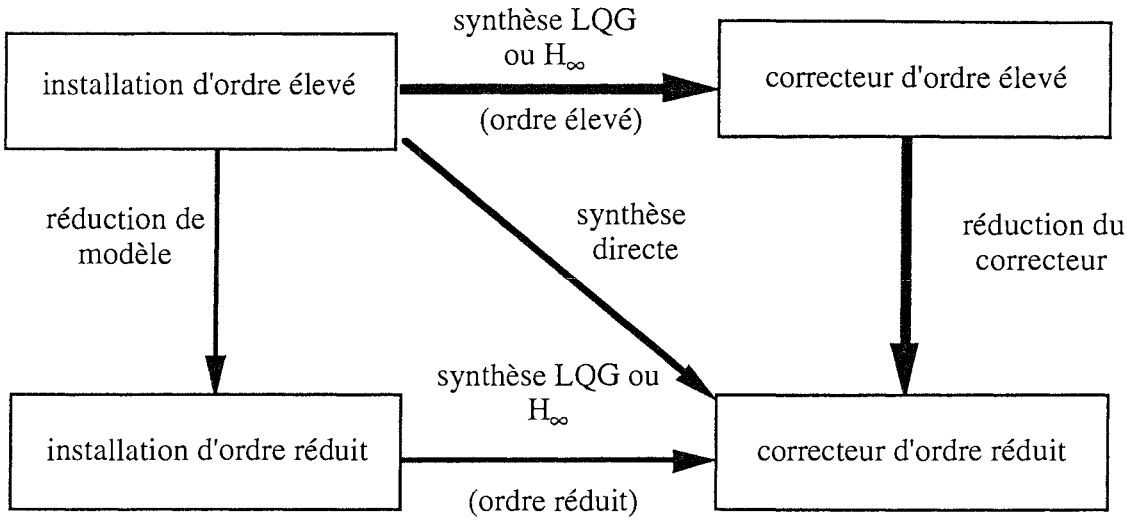


Figure 1: schémas de calcul d'un correcteur réduit

La première flèche en trait double (horizontale) caractérise l'étude établie sur le correcteur spécifié par MATRA MARCONI SPACE; la seconde (verticale), concerne l'étape retenue pour notre étude.

La deuxième étape nous amène à traiter la discrétisation du correcteur. En effet, à partir du correcteur réduit obtenu à l'étape précédente, l'objectif principal de la digitalisation de ce dernier est que la boucle fermée obtenue avec l'installation continue et le correcteur réduit discrétisé reflète au mieux la boucle fermée de référence constituée par l'installation continue et le correcteur continu non réduit.

Enfin, la troisième étape constitue l'optimisation à mots finis du filtre discret obtenu. En effet, le correcteur réduit digitalisé obtenu précédemment, implanté avec des mots de longueur finie, peut être sensible aux bruits de quantification, aux erreurs de troncation et aux dépassements des mots de mémoire. Il est donc important d'optimiser le choix de la réalisation du filtre digital correspondant au correcteur, sachant que son implantation se fera à mots de longueur finie.

La démarche explicitée ci-dessus témoigne des objectifs de MATRA MARCONI SPACE. En effet, à partir d'un correcteur spécifié et des problèmes de la spatialisation de composants (liés notamment à la taille mémoire limitée des processeurs embarqués), nous envisageons une implantation numérique optimale du correcteur.

Tout au long de ce mémoire, deux exemples sont traités pour tester l'efficience de la démarche proposée: l'un est le correcteur élaboré par MATRA MARCONI SPACE et l'autre est un exemple issu de la littérature décrivant un système à quatre disques [ENN-84a].

Ce mémoire est organisé de la façon suivante:

Une première partie intitulée "Présentation des exemples" est prétexte d'une part à l'élaboration d'un correcteur tiré dans la littérature [ENN-84a], [LIU-86], [AND-89], [LIU-90], et d'autre part, à une description détaillée du problème industriel soumis par MATRA MARCONI SPACE. La dynamique relatant de ce dernier est celle d'un satellite géostationnaire de télécommunication pour la plate-forme EUROSTAR 2000+ avec des spécifications strictes de robustesse et de performances pour la régulation. L'objectif est d'assurer un contrôle d'attitude précis pendant les phases perturbées du maintien à poste, lorsque les tuyères du satellite sont allumées pour maintenir ce dernier sur son orbite.

La seconde partie titrée "Réduction de l'ordre du correcteur" traite des différentes techniques de réduction de l'ordre d'un correcteur. L'intérêt des réalisations équilibrées, des factorisations co-premières normalisées et des pondérations fréquentielles font l'objet d'une présentation. Une nouvelle méthode basée sur la réduction des facteurs co-premiers du correcteur et sur la réalisation équilibrée avec pondérations fréquentielles, assurant la stabilité en boucle fermée, est présentée.

Ce mémoire se poursuit sur une troisième partie intitulée "Discrétisation du correcteur". Les problèmes liés à l'approximation d'un filtre continu par un filtre discret et à l'utilisation de ce dernier dans une boucle de régulation sont exposés. Des mesures sur la qualité de la discrétisation du correcteur sont présentées.

En quatrième partie, sous le titre d'"Implémentation à mots de longueur finie", le comportement des correcteurs digitalisés est étudié en tenant compte du fait que leur implantation "réelle" est à mots finis. Les différentes réalisations d'état, calculées à partir du correcteur, obtenu lors de la phase de discrétisation du correcteur continu initial, ne sont donc plus équivalentes. Le problème est donc de trouver, parmi cette infinité de réalisations d'état, celle qui est le moins sensible aux troncations dues à l'implantation à mots de longueur finie.

Pour terminer, le chapitre V est consacré aux "Conclusions et perspectives". Tous les résultats figurant dans ce mémoire sont illustrés par des simulations qui montrent l'intérêt de la démarche pour les applications industrielles où les commandes doivent être réalisées par calculateur.

CHAPITRE I

PRESENTATION DES EXEMPLES

I.1. SYSTEME A QUATRE DISQUES

I.1.1. Description

Dans cet exemple, le système à commander est issu d'un prototype conçu à l'université de Standford. Il a été initialement présenté dans la thèse de Enns [ENN-84a] comme exemple pour mettre en valeur l'importance des pondérations fréquentielles introduites par l'auteur dans la réduction de l'ordre d'un correcteur. Il a été repris dans [LIU-86], [AND-89] et [LIU-90]. Le système décrit par la figure I.1 consiste en quatre disques à inertie unitaire, connectés par un fil métallique flexible à élasticité constante. Un moteur permet d'appliquer les couples de torsion au troisième disque et un capteur sert à mesurer le déplacement angulaire du quatrième disque.

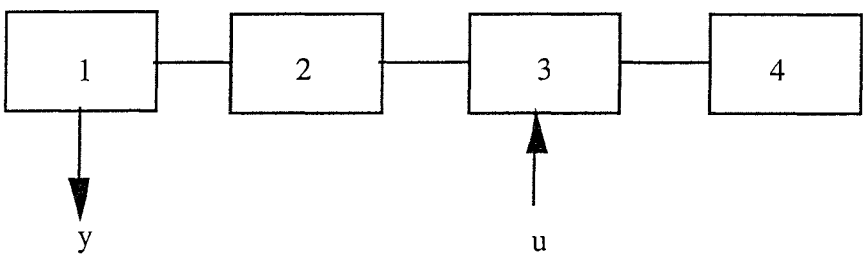


Figure I.1: systèmes mécaniques à quatre disques

C'est une installation à non minimum de phase, instable, d'ordre 8, dont la fonction de transfert est la suivante:

$$G(s) = \frac{0.01\,(0.64432\,s^5 + 0.23196\,s^4 + 7.1252\,s^3 + 100.02\,s^2 + 10.455\,s + 99.551)}{s^2\,(s^6 + 0.161\,s^5 + 6.004\,s^4 + 0.5822\,s^3 + 9.9835\,s^2 + 0.4073\,s + 3.982)}$$

La réalisation d'état utilisée, $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$, est une forme canonique commandable où le polynôme caractéristique apparaît dans la première ligne de A, les coefficients de degré plus petits étant à droite.

Le correcteur à réduire est de type LQG. Les pondérations de la partie LQ sont $R = 1$ et $Q = H^TH$ avec $H = 10^{-3} \times [\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0.55\ \ 11\ \ 1.32\ \ 18\ ]$. Les covariances intervenant dans la synthèse du filtre de Kalman sont $V = 1$ et $W = BB^T$. Le correcteur LQG obtenu est d'ordre 8.

I.1.2. Comportement en boucle ouverte

Les différents comportements du correcteur en boucle ouverte sont illustrés par les figures I.2 suivantes.

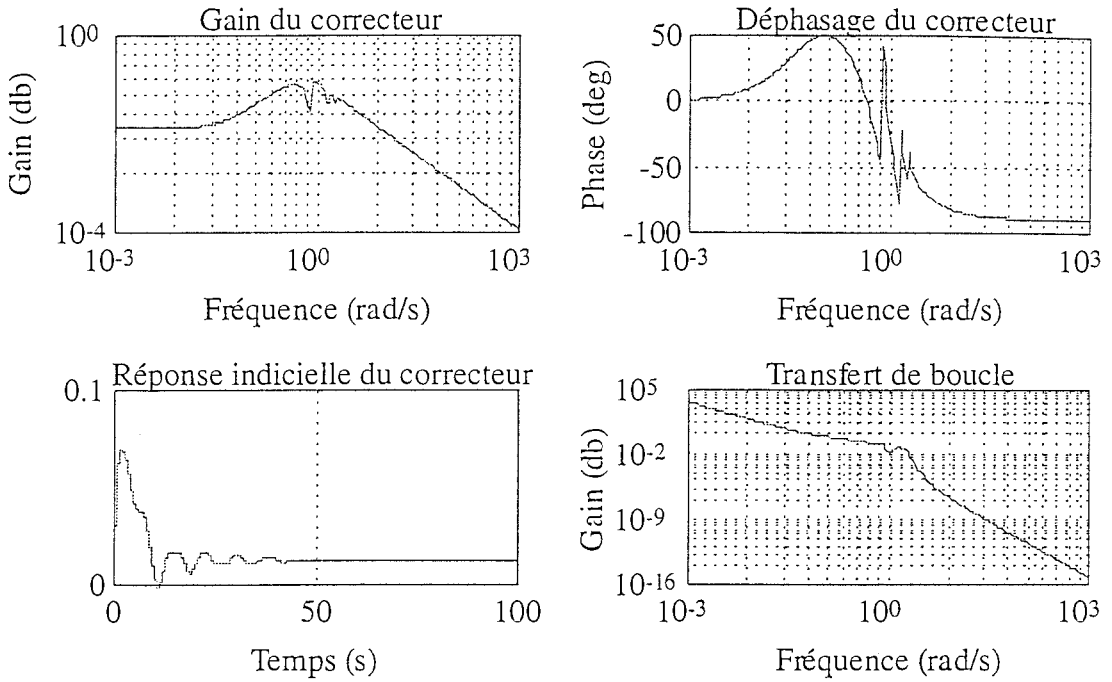


Figure I.2: réponses en boucle ouverte

Le transfert de boucle correspond au gain du produit du correcteur par le système.

I.1.3. Comportement en boucle fermée

I.1.3.1. Réduction de l'ordre du correcteur

Dans le second chapitre de ce mémoire, traitant de la réduction de l'ordre du correcteur, le schéma de bouclage considéré est celui décrit à la figure I.3.

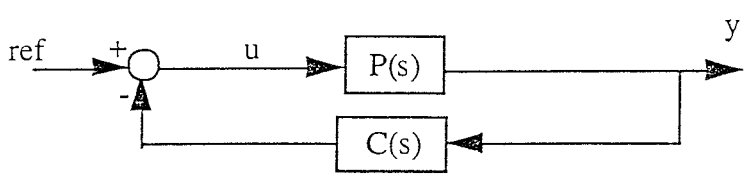


Figure I.3

Les figures numérotées I.4 décrivent le comportement de la boucle fermée (B.F.) (ref = échelon unitaire).

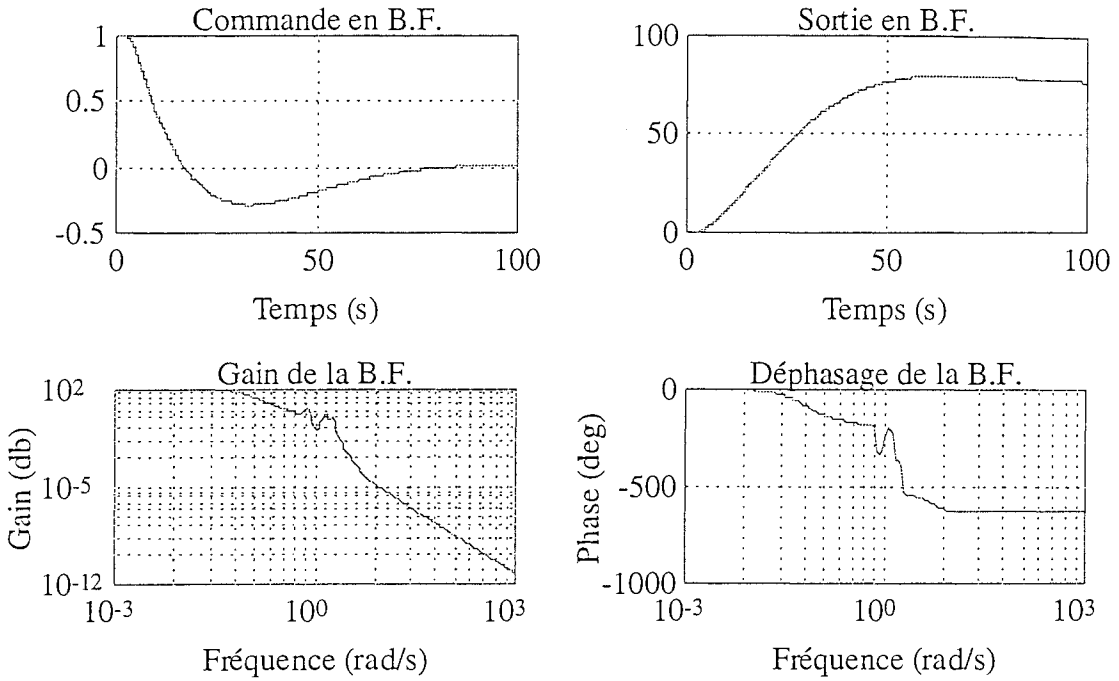


Figure I.4: réponses en boucle fermée

I.1.3.2. Discrétisation et optimisation à mots finis du correcteur

Pour les troisièmes et quatrièmes chapitres, traitant respectivement de la discrétisation et de l'optimisation à mots finis du correcteur, nous considérerons le schéma de bouclage décrit par la figure I.5.

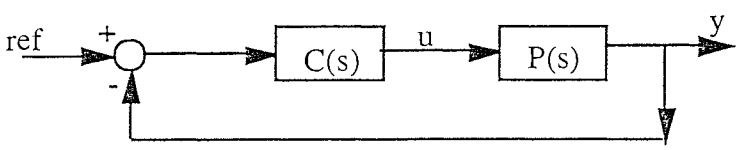


Figure I.5

Les figures I.6 montrent le comportement en boucle fermée (B.F.) (ref = échelon unitaire).

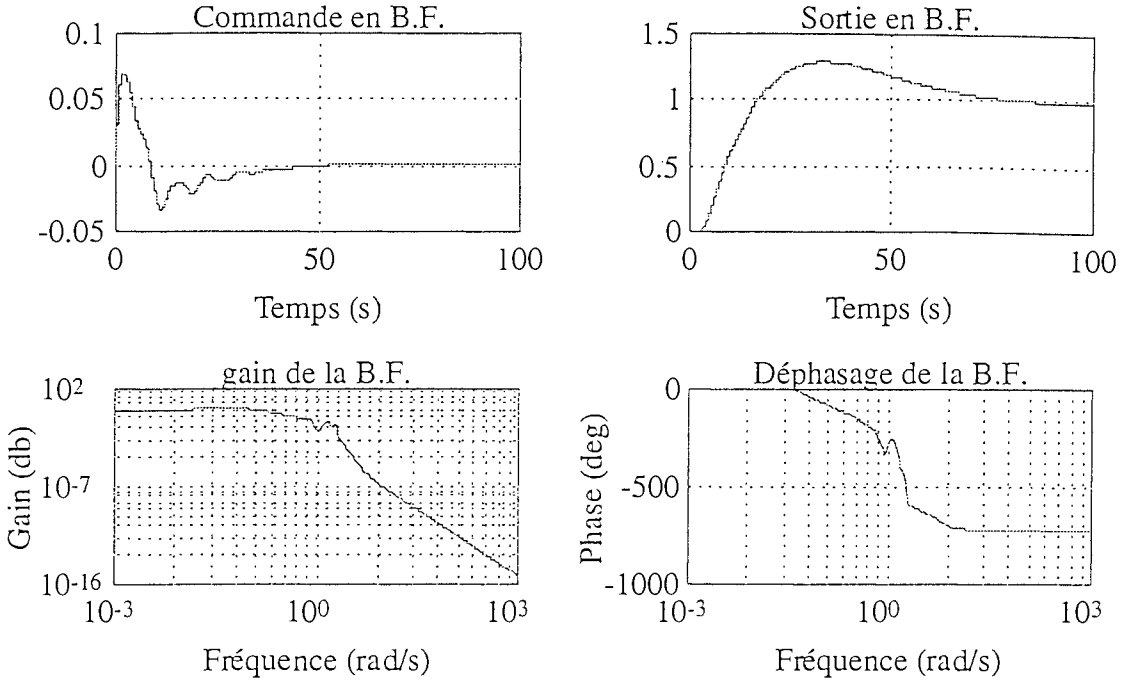


Figure I.6: réponses en boucle fermée

I.2. PLATE-FORME EUROSTAR 2000+ DE SATELLITE DE TELECOMMUNICATION

I.2.1. Description [FRA-94a], [FRA-94b]

La dynamique considérée est celle d'un satellite géostationnaire de télécommunication. Les satellites géostationnaires de télécommunication possèdent une géométrie simple comme l'illustre la figure I.7: un corps principal de géométrie carrée d'environ un mètre de côté, pointant la terre sur lequel sont fixés deux larges panneaux solaires d'environ dix mètres de long, en opposition et pouvant effectuer des rotations à la fréquence d'une par jour afin de rester orientés vers le soleil. L'objectif est d'assurer une régulation d'attitude précise pendant les phases perturbées du maintien à poste, où les tuyères du satellite sont allumées pour ramener ou maintenir le satellite sur son orbite afin de compenser les effets induits par les attractions lunaires et solaires. Le niveau des couples perturbateurs et la précision de pointage des antennes requise (respectivement quelques dixièmes de Newton mètres et quelques 0.01 degrés) conduisent à un besoin de bande passante de l'ordre de quelques 0.01 hertz.

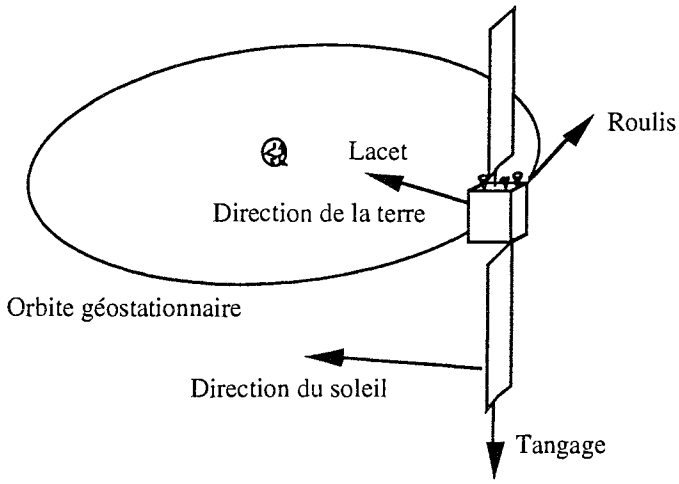


Figure I.7: satellite de télécommunication en orbite géostationnaire

La dynamique en attitude d'un satellite de télécommunication muni de ses deux panneaux solaires de 10 mètres de long est celle d'un corps rigide ($C = J\ddot{\theta}$, J est la matrice d'inertie) affecté de modes souples de grande énergie (forte inertie participative et très faible amortissement, moins de 0.1%). Les caractéristiques de ces modes souples ne sont pas connues avec exactitude. La dynamique rapide selon les 3 axes (lacet, roulis et tangage) est principalement découplée, ce qui justifie d'assurer le commande de chaque axe pris séparément. La synthèse des lois de commande est donc essentiellement monovariable.

La stratégie de compensation retenue vis-à-vis des modes souples d'appendice est une stratégie de réjection de gain: le niveau en gain résiduel de la commande à la fréquence des modes des panneaux doit être suffisamment faible pour éviter d'exciter ces modes: la remontée en gain, considérée pour un pire cas de positionnement des modes et d'amortissement, induite par les modes souples, ne doit jamais excéder une marge résiduelle d'environ - 6 décibels (db).

Sous cette contrainte de réjection des modes souples, la loi de commande générée doit préserver des marges de stabilité classiques de 6 db en gain et de 30 degrés en phase. Toute optimisation de cette régulation cherchera à maximiser le gain statique (ou gain minimal de la commande avant la fréquence de coupure) en respectant le cadre ainsi posé.

Ces contraintes de synthèse sont traduites sur le transfert fréquentiel en gain du compensateur.

Le formalisme de synthèse proposé pour répondre à ce problème d'automatique est schématisé par la figure I.8.

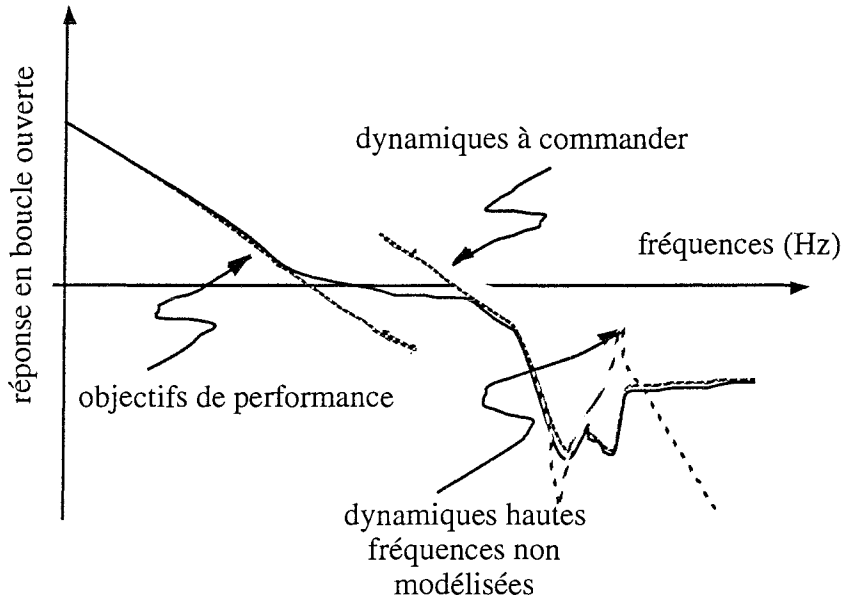


Figure I.8: spécification de la régulation d'attitude

La dynamique naturelle du système (dynamique rigide et retards de chaîne y compris l'impact de la discrétisation) est augmentée d'un pré-compensateur qui contient les spécifications de type "loop-shaping" du problème de synthèse. Le pré-compensateur est constitué d'un filtre elliptique permettant de fournir le niveau de réjection requis à la fréquence des modes souples des panneaux. C'est cette dynamique augmentée de réalisation {A, B, C, E} à laquelle sera ajoutée un filtre à avance de phase d'ordre 2, qui est utilisée pour constituer le critère d'optimisation pour un problème d'optimisation H_∞. Ce critère cherche à atteindre simultanément les objectifs de gain statique (en basses fréquences), de stabilité (à la fréquence de coupure) et de réjection des modes souples (en hautes fréquences).

Le compensateur directement issu de la synthèse est appelé le compensateur H_∞. Le compensateur qui sera effectivement implanté est obtenu par la mise en série du compensateur H_∞ et du pré-compensateur. Le filtre à avance de phase d'ordre 2 n'étant pas implanté. La boucle de régulation est représentée à la figure I.9. Dans le premier schéma, utilisé pour la réduction de l'ordre du correcteur, le pré-compensateur est intégré dans le système à réguler afin de ne pas perdre les spécifications dues à ce filtre, le correcteur à réduire est donc constitué du compensateur H_∞. Dans le deuxième schéma, utilisé pour l'implémentation numérique, le système est réduit à la dynamique du satellite $\{A_r, B_r, C_r, E_r\}$, le correcteur considéré correspond donc à la mise en série du pré-compensateur et du correcteur H_∞.

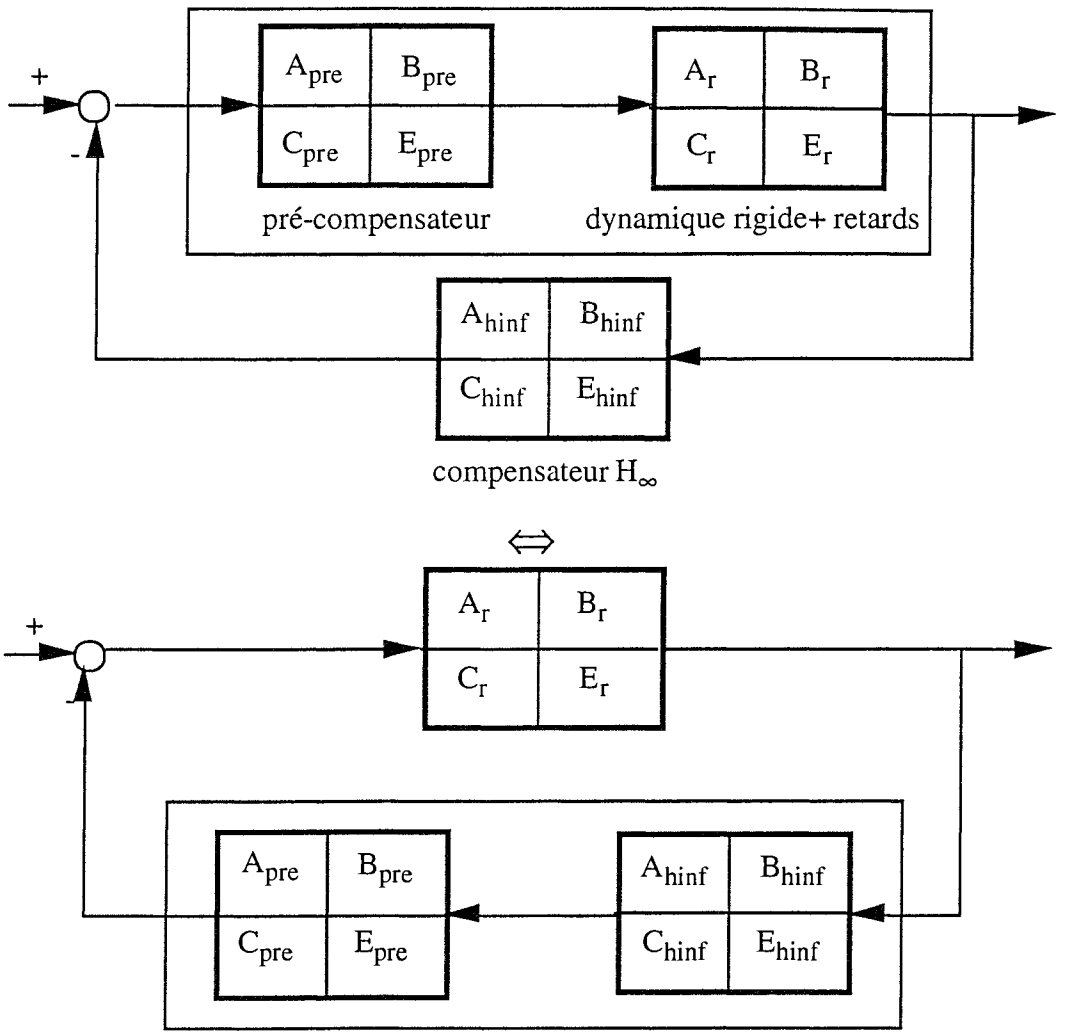


Figure I.9: schéma bloc de la régulation

Le correcteur continu à implémenter dans le calculateur de bord est par conséquent obtenu par la réalisation en série du correcteur H_∞ et du pré-compensateur. Donc, ce correcteur est un filtre d'ordre 14.

En résumé, comme l'illustre la figure I.9, nous sommes en présence de:

- l'installation $\{A_r, B_r, C_r, E_r\}$ d'ordre 4,
- d'un pré-compensateur $\{A_{pre}, B_{pre}, C_{pre}, E_{pre}\}$ d'ordre 4,
- d'un compensateur H_∞ $\{A_{hinf}, B_{hinf}, C_{hinf}, E_{hinf}\}$ d'ordre 10.

Le critère de synthèse H_∞ est fourni par le problème standard suivant:
- deux entrées exogènes (e_1, e_2) et une entrée de commande (u),
- trois sorties exogènes (z_1, z_2, z_3) et une sortie mesurée (y).

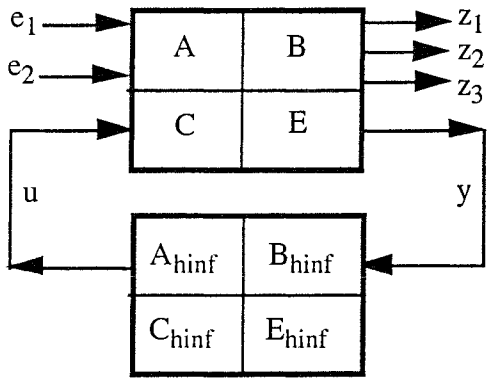


Figure I.10: problème standard pour la synthèse d'un correcteur H_∞

Le système {A, B, C, E} est d'ordre 10 et constitué par la dynamique du satellite, le pré-compensateur et un filtre à avance de phase d'ordre 2. En boucle fermée, le problème standard est représenté à la figure I.11:

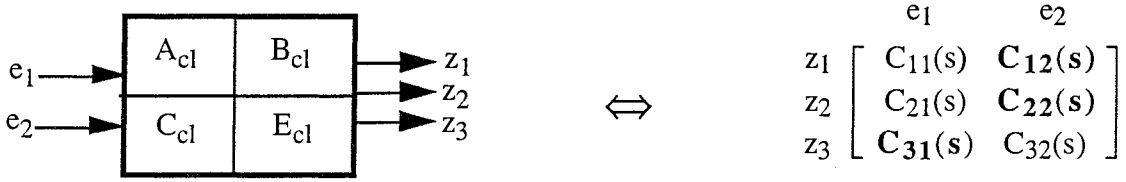


Figure I.11: problème standard en boucle fermée

Les $C_{ij}(s) = \frac{z_i}{e_i}$ représentent les critères scalaires:

$$\min \left\| \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & E_{cl} \end{array}\right] \right\|_\infty = \min \left\| \begin{matrix} C_{11}(s) & C_{12}(s) \\ C_{21}(s) & C_{22}(s) \\ C_{31}(s) & C_{32}(s) \end{matrix} \right\|_\infty$$

La constitution de $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & E \end{array}\right]$ a permis d'incorporer trois critères distincts :

- un critère de maximisation du gain statique, actif à basse fréquence ($C_{12}(s)$),
- un critère de réjection des modes souples d'appendice, actif à haute fréquence ($C_{31}(s)$),
- un critère de stabilité, actif au voisinage de la coupure ($C_{22}(s)$).

I.2.2. Comportement en boucle ouverte

Les différents comportements du correcteur en boucle ouverte sont spécifiées par les figures suivantes:

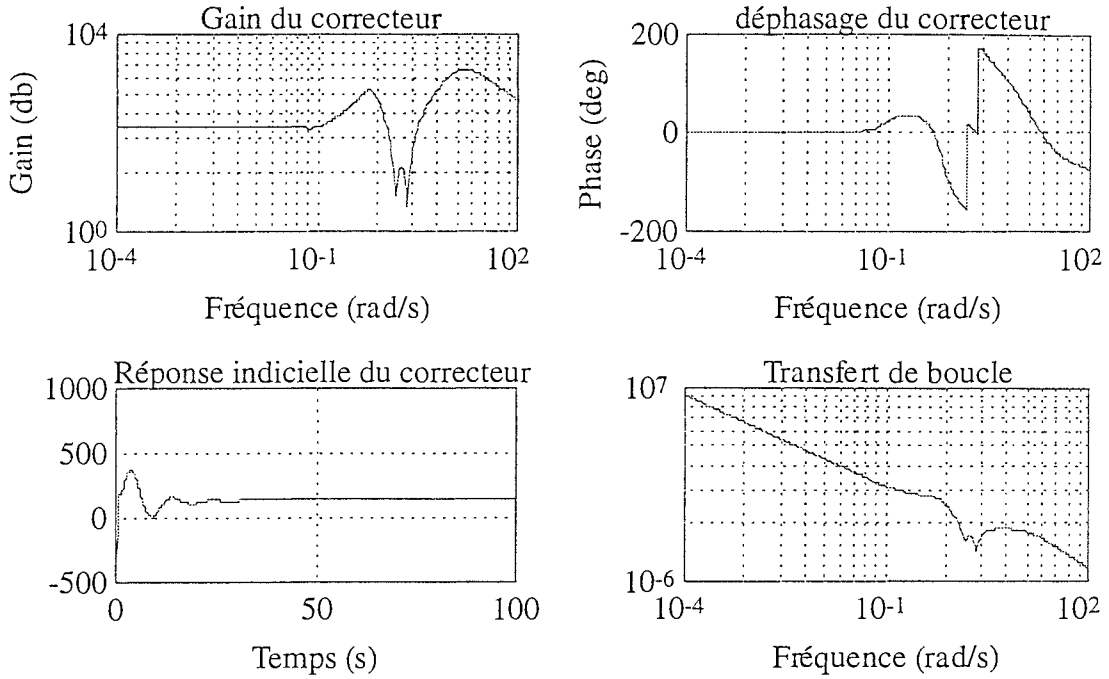


Figure I.12: réponses en boucle ouverte

I.2.3. Comportement en boucle fermée

I.2.3.1. Réduction de l'ordre du correcteur

Les figures numérotées I.13 illustrent le comportement en boucle fermée correspondant à la figure I.3.

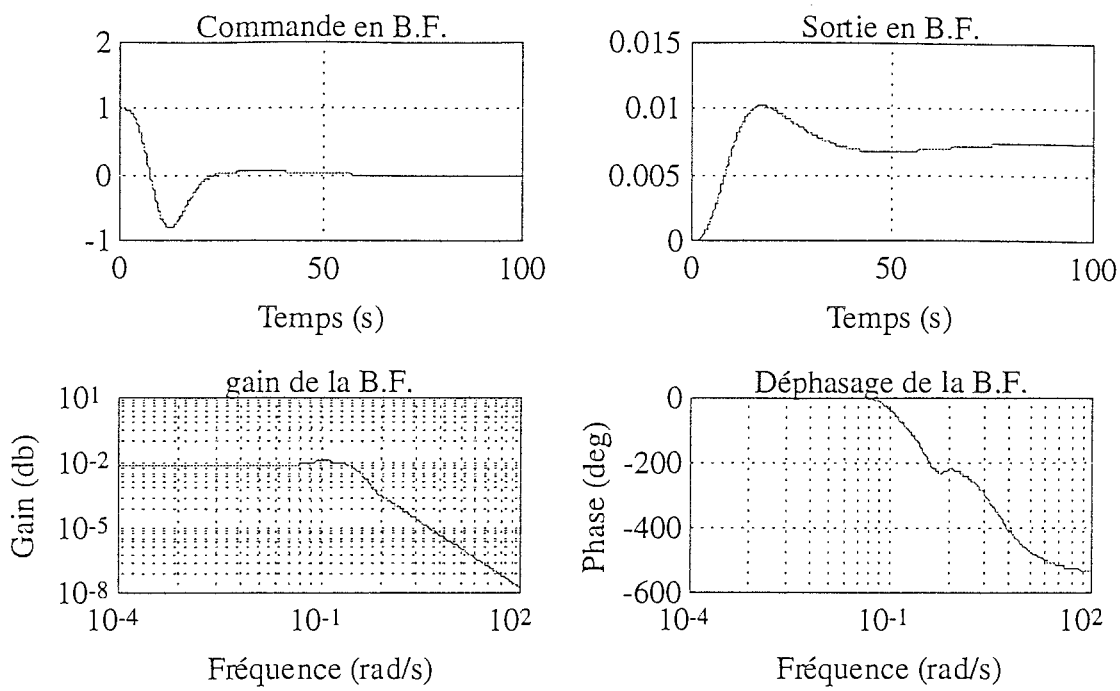


Figure I.13: réponses en boucle fermée

I.2.3.2. Discrétisation et optimisation à mots finis du correcteur

Les figures numérotées I.14 illustrent le comportement en boucle fermée correspondant à la figure I.5.

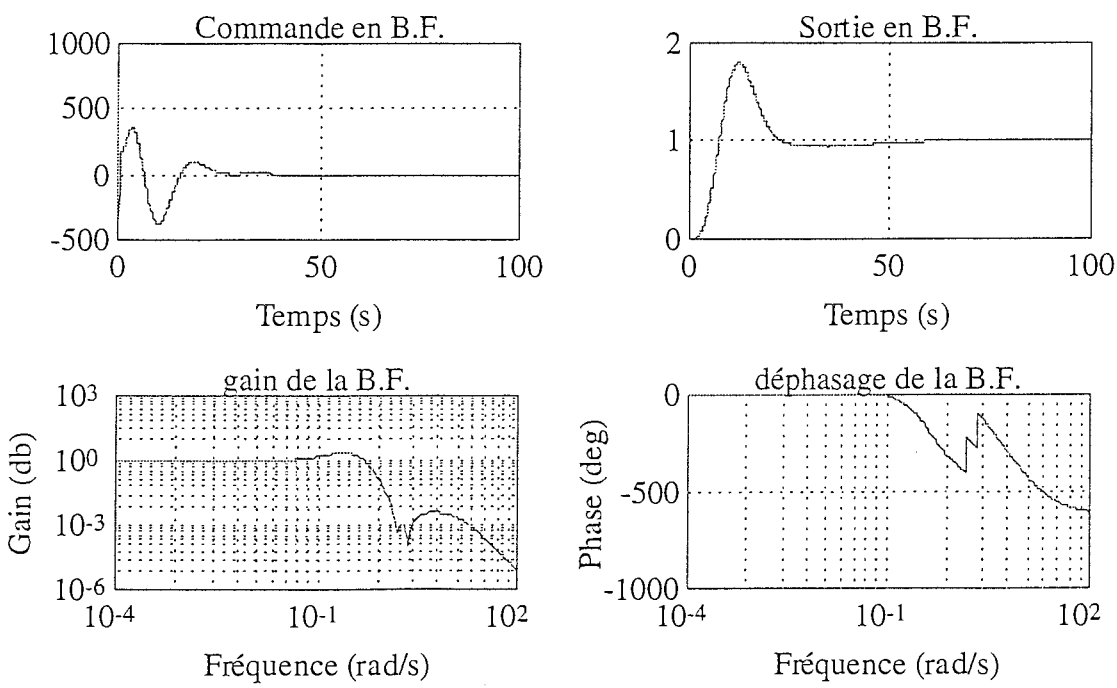


Figure I.14: réponses en boucle fermée

CHAPITRE II

REDUCTION DE L'ORDRE DU CORRECTEUR

II.1. INTRODUCTION

La synthèse de correcteurs est liée étroitement à la robustesse et aux performances. Dans un grand nombre d'applications relatives aux technologies de pointe, le système physique à commander atteint souvent un ordre élevé. Les limites d'implémentation informatique nous contraignent à procéder à une analyse et synthèse de la réduction de modèle du correcteur ou de l'installation.

Dans le cadre de l'application industrielle avec MATRA MARCONI SPACE, le correcteur H_∞ est spécifié et c'est sur ce dernier que les différentes techniques de réduction de l'ordre vont être appliquées et comparées. Par conséquent, l'étude du problème résulte du passage d'un correcteur d'ordre élevé en un correcteur d'ordre réduit.

Des résultats sur la réduction de correcteur ont été établis au moyen de réduction équilibrée, aussi bien par la synthèse LQG [JON-83] que par celle H_∞ [MUS-91]. Les valeurs singulières de Hankel du correcteur sont utilisées pour déterminer l'ordre réduit souhaitable à la troncation équilibrée du correcteur en boucle fermée. Cette approche généralise l'extension de la réduction équilibrée de Enns [ENN-84a] avec l'introduction de pondérations fréquentielles.

II.2. REDUCTION DE L'ORDRE D'UNE REALISATION

II.2.1. Formulation du problème

Soit le système linéaire, stable et d'ordre n, dont la réalisation est donnée par:

$$G(s) = C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + E \qquad \text{(II.1)}$$

Une approximation d'ordre réduit r, (avec $r < n$) de G(s) s'écrit:

$$G_r(s) = C_r\,(sI_r - A_r)^{-1}\,B_r + E_r \qquad \text{(II.2)}$$

L'erreur relative entre G(s) et $G_r(s)$ est déterminée par:

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \qquad \text{(II.3)}$$

Pour une entrée donnée e, les signaux z et z_r définis par:

$$z = G(s)\, e \tag{II.4}$$

et

$$z_r = G_r(s)\, e \tag{II.5}$$

on peut définir l'erreur relative entre G(s) et $G_r(s)$ par:

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty = \sup_{e \in L_2} \frac{\|z - z_r\|_2}{\|e\|_2} \tag{II.6}$$

Ainsi pour diminuer l'erreur entre G(s) et $G_r(s)$, $G_r(s)$ doit être construite à partir de G(s) en supprimant les composantes de l'état x de G(s) qui sont les moins impliquées dans le transfert d'énergie entre l'entrée e et la sortie z.

Pour caractériser ces composantes de l'état, on peut s'appuyer sur l'interprétation des grammiens de commandabilité et d'observabilité comme solutions de deux problèmes de minimisation d'énergie.

Le grammien d'observabilité de la réalisation {A, B, C, E}, appelé W_o, est solution de l'équation de Lyapunov (II.7) (voir § Annexes A.II.):

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \tag{II.7}$$

Si e(t) = 0 pour $t \geq 0$, $x(0) = x_0$, l'énergie sur la sortie z résultant de l'état initial x_0 est caractérisée par:

$$\|z\|_2 = x_0^T W_o x_0 \tag{II.8}$$

Le grammien de commandabilité de la réalisation {A, B, C, E}, appelé W_c, est solution de l'équation de Lyapunov (II.9) (voir § Annexes A.II.):

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \tag{II.9}$$

L'énergie minimale de l'entrée e pour amener l'état x de 0 à x_0 se calcule comme suit:

$$\min_{e \in L_2:\ x(0) = x_0} \int_{-\infty}^{0} e^T(t)\, e(t)\, dt = x_0^T W_c^{-1} x_0 \tag{II.10}$$

En combinant (II.8) et (II.10), on obtient:

$$\sup_{e \in L_2:\, x(0) = x_0} \frac{\int_0^{\infty} z^T(t)\, z(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{0} e^T(t)\, e(t)\, dt} = \frac{x_0^T W_o\, x_0}{x_0^T W_c^{-1}\, x_0} \qquad (II.11)$$

Pour que $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$ soit petit, il faut donc tronquer le sous-espace d'état généré par les vecteur propres correspondant aux plus petites valeurs propres de $W_c^{T/2} W_o W_c^{1/2}$, par conséquent, la partie de l'état la moins commandable et observable. Ainsi, pour tronquer la réalisation de G(s), il faut au préalable exprimer les vecteurs d'état dans la base des vecteurs propres de $W_c^{T/2} W_o W_c^{1/2}$. La réalisation correspondant à cette base est dite équilibrée.

II.2.2. Réalisation équilibrée

II.2.2.1. Définition et propriétés

Définition II.1

Soit un système invariant, linéaire, d'ordre n, asymptotiquement stable et de réalisation minimale avec pour fonction de transfert la matrice G(s). Une réalisation minimale de

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E \qquad (II.12)$$

est équilibrée si les grammiens de commandabilité et d'observabilité sont diagonaux et égaux:

$$W_o = W_c = \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n),\ \sigma_i \geq \sigma_{i+1} > 0,\ i = 1, ..., n-1 \qquad (II.13)$$

avec:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + B B^T = 0 \qquad (II.14)$$

$$A^T \Sigma + \Sigma A + C^T C = 0 \qquad (II.15)\square$$

Les σ_i jouent un rôle important dans la théorie des systèmes linéaires. On les appelle valeurs singulières de Hankel (voir § Annexes A.III. et A.IV.).

Dans cette définition, ainsi que dans l'ensemble de ce chapitre, on ne considère que les systèmes linéaires invariants. Cependant, la notion d'équilibrage d'une réalisation, donnée dans

la définition II.1, a été étendue aux systèmes linéaires variants dans le temps par Verriest et Kailath [VER-83].

Remarque

Explicitons la matrice de similarité T permettant la diagonalisation simultanée des grammiens de commandabilité W_c et d'observabilité W_o. Soient {A, B, C, E} et {A_b, B_b, C_b, E} respectivement une réalisation de G(s) et une réalisation équilibrée de G(s). W_c et W_o satisfont les équations de Lyapunov (II.7) et (II.9).

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \qquad \text{(II.7)}$$

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \qquad \text{(II.9)}$$

Soit T la matrice de changement de base reliant les réalisations {A, B, C, E} et {A_b, B_b, C_b, E}. On a donc $A_b = TAT^{-1}$, $B_b = TB$ et $C_b = CT^{-1}$. Pré- et post-multiplions (II.7) par T^{-T} et T^T, nous obtenons:

$$T^{-T} A^T T^T T^{-T} W_o T^{-1} + T^{-T} W_o T^{-1} T A T^{-1} + T^{-T} C^T C T^{-1} = 0 \qquad \text{(II.7.1)}$$

Cette équation est équivalente à:

$$A_b^T \Sigma_o + \Sigma_o A_b + C_b^T C_b = 0 \qquad \text{(II.7.2)}$$

avec $\Sigma_o = T^{-T} W_o T^{-1}$.

Pré- et post-multiplions (II.9) par T et T^T, nous obtenons:

$$T A T^{-1} T W_c T^T + T W_c T^T T^{-T} A^T T^T + T B B^T T^T = 0 \qquad \text{(II.9.1)}$$

Cette équation est équivalente à:

$$A_b \Sigma_c + \Sigma_c A_b^T + B_b B_b^T = 0 \qquad \text{(II.9.2)}$$

avec $\Sigma_c = T W_c T^T$.

Comme la relation {A_b, B_b, C_b, E} est équilibrée, nous obtenons (voir la définition II.1):

$$\Sigma_c = \Sigma_o = \Sigma = T W_c T^T = T^{-T} W_o T^{-1} \qquad \text{(II.13)}$$

où Σ est diagonale et donnée par

$$\Sigma^2 = \Sigma_c \Sigma_o = T W_c W_o T^{-1} \qquad (II.13.1)$$

Ainsi le grammien Σ_c donné par (II.7.2) satisfait (II.15) et le grammien Σ_o donné par (II.9.2) satisfait (II.14). La matrice de changement de base reliant une réalisation donnée à une réalisation équilibrée correspond à la transformation de similarité diagonalisant le produit W_c W_o. ❑

Les aspects numériques de l'équilibrage d'une réalisation sont traités dans [LAU-87].

Définition II.2

Les valeurs singulières de Hankel de G(s) et la norme de Hankel associée à celles-ci sont déterminées respectivement par:

$$\sigma_i = [\lambda_i(W_c W_o)]^{1/2} \qquad (II.16)$$

$$\|G\|_H = \sup_i (\sigma_i) = \sup_i (\lambda_i^{1/2}(W_c W_o)) \qquad (II.17)❑$$

Ces valeurs singulières sont invariantes pour toutes réalisations de G(s), voir Annexe (A.IV). En effet, les valeurs propres contrairement aux grammiens, ne changent pas par changement de base. L'utilisation des valeurs singulières de Hankel et de la norme de Hankel dans la théorie des systèmes est développée dans [GLO-84] et [FRA-87].

Le lemme ci-dessous concerne l'unicité et la stabilité asymptotique à partir de conditions sur les valeurs singulières de Hankel.

Lemme II.1 [MOO-81]

Si les valeurs singulières de Hankel du système G(s) sont distinctes, alors les vecteurs définissant la base dans laquelle se trouve la réalisation d'état, sont uniques au changement de signe près. ❑

Le théorème suivant montre qu'il y a une propriété intéressante des trajectoires de l'état correspondant à une réalisation équilibrée.

Théorème II.1 [PER-82]

Un système équilibré satisfait la relation:

$$\|e^{At}\|_s < 1 \text{ pour tout } t > 0 \qquad (II.18)❑$$

Ceci constitue un résultat important si on montre que la réalisation équilibrée est dissipative, à savoir que:

$$\|x(t_2)\|_E < \|x(t_1)\|_E, \text{ pour } t_2 > t_1 \qquad \text{(II.19)}$$

Soit {A, B, C, E}, une réalisation équilibrée vérifiant la définition II.1 dont les grammiens de commandabilité et d'observabilité (égaux et diagonaux à la matrice Σ) ont les éléments diagonaux ordonnés par ordre décroissant.
Partitionnons le quadriplet {A, B, C, Σ} en :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix}, C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \end{matrix} \qquad \text{(II.20)}$$

Dans [MOO-81], il est montré que les deux sous-systèmes $\{A_{ii}, B_i, C_i\}_{i=1,2}$ sont tous deux asymptotiquement stables. Le théorème suivant est une première étape renforçant ce résultat.

Théorème II.2 [PER-82]

Supposons que Σ_1 et Σ_2 n'ont pas de termes diagonaux en commun. Alors, les sous-systèmes $\{A_{ii}, B_i, C_i\}_{i=1,2}$ sont asymptotiquement stables. ❐

A partir de ce théorème, on en déduit le corollaire II.1.

Corollaire II.1 [PER-82]

Si Σ a ses valeurs singulières distinctes, alors tout sous-système est asymptotiquement stable. Le changement de base est donné par les vecteurs propres de $(W_o W_c)$. ❐

Le lemme ci-dessous nous procure une autre condition pour laquelle un système est asymptotiquement stable.

Lemme II.2 [PER-82]

Supposons que, pour la paire (A, B) l'équation de Lyapunov suivante

$$A P + P A^T + B B^T = 0 \qquad \text{(II.21)}$$

ait une solution $P = P^T > 0$, alors, le système est asymptotiquement stable si et seulement si la paire (A, B) est commandable. Si le système n'est pas asymptotiquement stable, alors les

valeurs propres de A qui n'ont pas de partie réelle strictement négative sont sur l'axe imaginaire. ❐

II.2.2.2. Mesure de la commandabilité et de l'observabilité des composantes de l'état [MOO-81]

Les grammiens W_c et W_o définis respectivement en (II.9) et (II.7) peuvent être utilisés pour mesurer le "degré" de commandabilité et d'observabilité de chaque composante du vecteur d'état [MOO-81].

Considérons l'exemple ci-dessous [MOO-81], défini par le modèle suivant:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10^{-6}\\ 10^{6}\end{bmatrix}u(t) \qquad \text{(II.22.a)}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}10^{6} & 10^{-6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad \text{(II.22.b)}$$

Calculons les matrices de commandabilité et d'observabilité comme suit:

$$Q_c = [B\ AB\ A^2B\ \dots\ A^{n-1}B] = \begin{bmatrix}10^{-6} & -10^{-6}\\ 10^{6} & -2\times10^{6}\end{bmatrix} \qquad \text{(II.23.a)}$$

$$Q_o = [C\ CA\ CA^2\ \dots\ CA^{n-1}]^T = \begin{bmatrix}10^{6} & 10^{-6}\\ -10^{6} & -2\times10^{-6}\end{bmatrix} \qquad \text{(II.23.b)}$$

On peut en conclure que x_1 est plus observable et moins commandable, à l'inverse de x_2.

Les grammiens de commandabilité et d'observabilité sont caractérisés par les matrices suivantes:

$$W_c = \begin{bmatrix}0 & 0.3334\\ 0.3334 & 2.5\times10^{11}\end{bmatrix},\ W_o = \begin{bmatrix}5\times10^{11} & 0.3333\\ 0.3333 & 0\end{bmatrix} \qquad \text{(II.23.c)}$$

Les valeurs singulières de Hankel associées sont: {0.7310, 0.0190}. La réalisation d'état donnée en (II.22) n'est donc pas équilibrée.

Afin d'effectuer l'équilibrage, on procède au changement de base suivant:

$$\hat{x} = T\,x \tag{II.24.a}$$

$$\hat{A} = T\,A\,T^{-1} \tag{II.24.b}$$

On obtient les matrices ci-dessous:

$$T = \begin{bmatrix} 8.2189\times10^{5} & 0.5696\times10^{-6} \\ 5.6960\times10^{5} & -0.8220\times10^{-6} \end{bmatrix},\ \hat{A} = \begin{bmatrix} -1.3244 & 0.4681 \\ 0.4682 & -1.6756 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.3915 \\ -0.2524 \end{bmatrix},\ \hat{C} = [1.3916 \quad -0.2523] \tag{II.24.c}$$

On a par conséquent:

$$\hat{x}_1(t) = 8.2189 \times 10^{5}\, x_1(t) + 0.5696 \times 10^{-6}\, x_2(t) \tag{II.24.d}$$

$$\hat{x}_2(t) = 5.6960 \times 10^{5}\, x_1(t) - 0.8220 \times 10^{-6}\, x_2(t) \tag{II.24.e}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3244 & 0.4681 \\ 0.4682 & -1.6756 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3915 \\ -0.2524 \end{bmatrix} u(t) \tag{II.24.f}$$

$$y(t) = [1.3916 \quad -0.2523]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{II.24.g}$$

Les nouvelles matrices de commandabilité et d'observabilité obtenues sont:

$$\hat{Q}_c = \begin{bmatrix} 1.3915 & -1.9610 \\ -0.2524 & 1.0744 \end{bmatrix} \tag{II.24.h}$$

$$\hat{Q}_o = \begin{bmatrix} 1.3916 & -0.2523 \\ -1.9611 & 1.0742 \end{bmatrix} \tag{II.24.i}$$

Les grammiens de commandabilité et d'observabilité sont égaux à:

$$\hat{W}_c = \hat{W}_o = \begin{bmatrix} 0.7310 & 0 \\ 0 & 0.0190 \end{bmatrix} \tag{II.24.j}$$

Les valeurs singulières de Hankel associées restent inchangées.

La réalisation équilibrée, "équilibre" l'observabilité et la commandabilité de chaque composante de l'état. Ceci est en lien avec l'interprétation énergétique donnée en (II.8), (II.10) et (II.11).

II.2.3. Réduction de l'ordre d'une réalisation

II.2.3.1. Troncation d'une réalisation équilibrée

Une propriété intéressante concernant la stabilité d'une réalisation équilibrée est référée ci-dessous.

Propriété II.1 [PER-82]
Les sous-systèmes $\{A_{ii}, B_i, C_i\}_{i=1,2}$ sont asymptotiquement stables si $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. ❑

Enonçons le théorème ci-dessous sur la stabilité.

Théorème II.3 [PER-82] et [GRE-95]
Supposons que $\{A, B, C\}$ soit une réalisation équilibrée comme le décrit l'équation (II.20) et que $\{A_{ii}, B_i, C_i, E\}_{i=1,2}$ soit la troncation équilibrée de $\{A, B, C, E\}$. Alors, $\{A_{ii}, B_i, C_i\}$ est une réalisation équilibrée. En particulier A_{ii} est asymptotiquement stable et $\{A_{ii}, B_i, C_i\}$ est minimal. ❐

Démonstration
A partir de équations (II.14) et (II.15), on obtient:

$$A_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}^T + B_1 B_1^T = 0 \qquad \text{(II.25.a)}$$

$$A_{11}^T\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + C_1^T C_1 = 0 \qquad \text{(II.25.b)}$$

Si la partie réelle de $\lambda_i(A_{ii}) < 0$, alors $\{A_{11}, B_1, C_1\}$ est une réalisation équilibrée car $\Sigma_1 > 0$. Puisque $\Sigma_1 > 0$, on a $\lambda_i(A_{ii}) \leq 0$, mais nous devons montrer qu'il n'y a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Supposons, par contradiction, qu'il existe un réel ω tels que $(j\omega I_r - A_{11})$ soit singulière. Soit V une base du noyau de $(j\omega I_r - A_{11})$:

$$(j\omega I_r - A_{11})V = 0 \qquad \text{(II.26)}$$

Multiplions (II.25.b) à sa gauche par V^H et à sa droite par V, puis multiplions juste le terme de droite par V, cela nous mène aux égalités présentées ci-dessous:

$$C_1 V = 0, (j\omega I_r + A_{11}^T)\Sigma_1 V = 0 \qquad \text{(II.27)}$$

Multiplions (II.25.a) à sa gauche par $V^H\Sigma_1$ et à sa droite par $\Sigma_1 V$, puis multiplions juste le terme de droite par $\Sigma_1 V$ et nous obtenons:

$$B_1^T\Sigma_1 V = 0, (j\omega I_r - A_{11})\Sigma_1^2 V = 0 \qquad \text{(II.28)}$$

Par conséquent $\Sigma_1^2 V$ est aussi une base pour l'espace nul de droite de $(j\omega I_r - A_{11})$ d'où $\Sigma_1^2 V = V\bar{\Sigma}_1^2$ pour toute matrice $\bar{\Sigma}_1^2$, dont les valeurs propres seront un sous ensemble des valeurs propres de Σ_1^2. Considérons maintenant les équations (II.29) provenant de (II.25):

$$A_{21}\Sigma_1 + \Sigma_2 A_{12}^T + B_2 B_1^T = 0 \qquad \text{(II.29.a)}$$
$$A_{12}^T\Sigma_1 + \Sigma_2 A_{21} + C_2^T C_1 = 0 \qquad \text{(II.29.b)}$$

Multiplions (II.29.a) à sa droite par $\Sigma_1 V$ et multiplions (II.29.b) à sa gauche par Σ_2 et à sa droite par V, on obtient:

$$A_{21}\Sigma_1^2 V + \Sigma_2 A_{12}^T\Sigma_1 V = 0 \qquad \text{(II.30.a)}$$
$$\Sigma_2^2 A_{21} V + \Sigma_2 A_{12}^T\Sigma_1 V = 0 \qquad \text{(II.30.b)}$$

Soustrayons ceci et nous pouvons écrire

$\Sigma_2^2 A_{21} V = A_{21}\Sigma_1^2 V = A_{21} V\bar{\Sigma}_1^2$, et peut être mis sous la forme:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \Sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r \\ A_{21} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ A_{21} V \end{bmatrix} \bar{\Sigma}_1^2 \qquad \text{(II.31)}$$

Tant que $\bar{\Sigma}_1^2$ et Σ_2^2 n'ont pas de valeurs propres en commun, $[I_r \quad (A_{21}V)^T]^T$ doit être une base pour l'espace des valeurs propres de $\begin{bmatrix} \bar{\Sigma}_1^2 & 0 \\ 0 & \bar{\Sigma}_2^2 \end{bmatrix}$ correspondant aux valeurs propres de $\bar{\Sigma}_1^2$. Nous avons donc:

$$\begin{bmatrix} I_r \\ A_{21} V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.32)}$$

Cela revient à avoir: $A_{21}V = 0$. En combinant ceci avec (II.26), on obtient:

$$(j\omega I_r - A)\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{(II.33)}$$

ce qui contredit la stabilité asymptotique de A. ■

L'erreur faite lorsque l'on tronque une réalisation équilibrée peut être bornée comme en témoigne la propriété suivante.

Propriété II.2

Une borne d'erreur dans le domaine fréquentiel pour les approximations équilibrées, à condition que A et A_r soient stables, est proposée par [ENN-84a], [GLO-84], [ENN-84b] (précisons également que $E = E_r$):

$$\left\| \left[C(sI_n - A)^{-1}B + E \right] - \left[C_r(sI_r - A_r)^{-1}B_r + E \right] \right\|_\infty \le 2(\sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n) = 2\,\mathrm{tr}(\Sigma_2) \qquad \text{(II.34.a)}$$

ou

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \le 2(\sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n) = 2\,\mathrm{tr}(\Sigma_2) \qquad \text{(II.34.b)}\square$$

Démonstration

Présentons les étapes importantes de cette démonstration formulées par Enns [ENN-84a]. Posons les expressions suivantes:

$$\phi(s) = (sI_r - A_{11})^{-1} \qquad \text{(II.35.a)}$$

$$\Delta(s) = sI_{n-r} - A_{22} - A_{21}\,\phi(s)\,A_{12} \qquad \text{(II.35.b)}$$

$$\tilde{B}(s) = A_{21}\,\phi(s)\,B_1 + B_2 \qquad \text{(II.35.c)}$$

$$\tilde{C}(s) = C_1\,\phi(s)\,A_{12} + C_2 \qquad \text{(II.35.d)}$$

A l'aide du lemme d'inversion des matrices partitionnées (voir § Annexes A.VII.), On obtient :

$$G(s) - G_r(s) = \tilde{C}(s)\,\Delta^{-1}(s)\,\tilde{B}(s) \qquad \text{(II.36)}$$

En se référant à la définition de la valeur singulière maximum, on peut écrire:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) = \lambda_{max}^{1/2}((G(j\omega) - G_r(j\omega)\,(G(j\omega) - G_r(j\omega))^H) \qquad \text{(II.37.a)}$$

En utilisant le fait que $\lambda_{max}(A\ B) = \lambda_{max}(B\ A)$ pour toutes matrices A, B où les produits sont définis, on obtient:

$$\bar{\sigma}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) = \lambda_{max}^{1/2}(\Delta^{-1}(j\omega)\ \tilde{B}(j\omega)\ \tilde{B}^H(j\omega)\ \Delta^{-H}(j\omega)\ \tilde{C}^H(j\omega)\ \tilde{C}(j\omega)) \qquad (II.37.b)$$

Une expression de $\tilde{B}(j\omega)\ \tilde{B}^H(j\omega)$ est déterminée comme suit:

$$\tilde{B}(j\omega)\ \tilde{B}^H(j\omega) = A_{21}\ \phi(j\omega)\ B_1\ B_1^T\ \phi^H(j\omega)\ A_{21}^T + A_{21}\ \phi(j\omega)\ B_1\ B_2^T + B_2\ B_1^T\ \phi^H(j\omega)\ A_{21}^T + B_2\ B_2^T \qquad (II.38.a)$$

En remplaçant $(j\omega I_{n-r} - \Delta(j\omega))$ par $(A_{21}\ \phi(j\omega)\ A_{12} + A_{22})$ qui provient de la définition de $\Delta(s)$, on obtient:

$$\tilde{B}(j\omega)\ \tilde{B}^H(j\omega) = \Delta(j\omega)\ \Sigma_2 + \Sigma_2\ \Delta^H(j\omega) \qquad (II.38.b)$$

L'expression $\tilde{C}^H(j\omega)\ \tilde{C}(j\omega)$ est caractérisée de manière analogue comme suit:

$$\tilde{C}^H(j\omega)\ \tilde{C}(j\omega) = \Sigma_2\ \Delta(j\omega) + \Delta^H(j\omega)\ \Sigma_2 \qquad (II.39)$$

En substituant les expressions de (II.38.b) et (II.39) dans (II.37.b) et après simplification, on aboutit aux égalités ci-dessous:

$$\bar{\sigma}(G(j\omega) - G_r(j\omega)) = \lambda_{max}^{1/2}(\Delta^{-1}(j\omega)\ (\Delta(j\omega)\ \Sigma_2 + \Sigma_2\ \Delta^H(j\omega))\ \Delta^{-H}(j\omega)\ (\Sigma_2\ \Delta(j\omega) + \Delta^H(j\omega)\ \Sigma_2))$$

$$= \lambda_{max}^{1/2}((\Sigma_2 + \Delta^{-1}(j\omega)\ \Sigma_2\ \Delta^H(j\omega))\ (\Delta^{-H}(j\omega)\ \Sigma_2\ \Delta(j\omega) + \Sigma_2)) \qquad (II.40)\blacksquare$$

Si on considère la réduction d'un état uniquement (r = n - 1), alors on peut noter que:

$$\Sigma_2 = \sigma_n \qquad (II.41)$$

et

$$\bar{\sigma}(G(j\omega) - G_{n-1}(j\omega)) = \sigma_n \times \sqrt{(1 + A(j\omega))(1 + A^{-1}(j\omega))} \qquad (II.42)$$

où

$$A(j\omega) = \Delta^H(j\omega)\ \Delta^{-1}(j\omega) \qquad (II.43.a)$$

est un filtre passe tout, on utilise la notation suivante

$$|A(j\omega)| = 1 \ \forall \ \omega \in \mathbb{R} \qquad \text{(II.43.b)}$$

En utilisant les propriétés du "passe tout" de A(jω) et en réarrangeant quelques termes, on établit les égalités ci-dessous:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega) - G_{n-1}(j\omega)) = \sigma_n \times \sqrt{\frac{|1 + A(j\omega)|^2}{A(j\omega)}} = \sigma_n \times |1 + A(j\omega)| \qquad \text{(II.44)}$$

Enfin, au respect de l'inégalité triangulaire, on peut conclure sur l'expression suivante:

$$\overline{\sigma}(G(j\omega) - G_{n-1}(j\omega)) \leq \sigma_n \times |1 + A(j\omega)| = 2\,\sigma_n \qquad \text{(II.45)}$$

Cela complète la démonstration sur la borne pour r = n - 1 ■

Définition II.3

Soit $A_r = A_{11}$, $B_r = B_1$, $C_r = C_1$. Alors, le système $\{A_r, B_r, C_r\}$ d'ordre réduit r est une approximation du système {A, B, C} si $\sigma_r \gg \sigma_{r+1}$ ❑

II.2.3.2. Approximation optimale de Hankel

On peut si on cherche une approximation optimale de Hankel de G(s), améliorer la borne (II.34); dans ce cas, l'installation d'ordre réduit est notée $\overline{G}_r(s)$.

Considérons une matrice de transfert $G(s) \in \mathbb{R}H_\infty$, de représentation d'état minimale:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E \qquad \text{(II.46)}$$

et ses grammiens W_o et W_c , solutions définies positives des équations de Lyapunov (II.7) et (II.9). Il existe une borne de l'erreur de l'approximation de $G_r(s)$ par G(s). Elle est déterminée par Glover [GLO-84] et énoncée par le théorème suivant:

Théorème II.4

$$\|G(s) - \overline{G}_r(s)\|_\infty < \sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n \qquad \text{(II.47)}\ ❑$$

Dans l'approximation optimale de Hankel, le terme direct de la réalisation d'état, appelé E, est modifié, contrairement à la technique de troncation équilibrée où il reste inchangé.

II.2.3.3. Agrégation [BAC-89]

A la place du critère (II.6), on peut réduire un système avec le critère suivant:

$$\left\|G(s)-\hat{G}_r(s)\right\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[G(j\omega)-\hat{G}_r(j\omega)\right]\left[G(-j\omega)-\hat{G}_r(-j\omega)\right]^T d\omega\right) \qquad \text{(II.48)}$$

En effet, la plupart des procédures de réduction de modèle sous forme d'espace d'état impliquent une décomposition de ce dernier en deux composantes. Il est souhaitable que l'une soit plus caractéristique du système à modéliser que l'autre. Cette décomposition est déterminée par le choix de sous-espaces disjoints T_1 et T_2 de dimensions r et n-r respectivement.

Le changement de base est donné par:

$$T = [T_1 \;\; T_2] \text{ et } U = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} = T^{-T} \qquad \text{(II.49)}$$

avec la somme directe: $T_1 \oplus T_2 = \mathbb{R}^n$.

La décomposition de l'espace d'état pour la construction du modèle réduit se présente plus facilement en opérant les transformations

$$x_1(s) = T_1 v_1(s) \text{ et } x_2(s) = T_2 v_2(s)$$

$$v(s) = [sI_n - \hat{A}]^{-1} \hat{B}e(s) \qquad \text{(II.50.a)}$$

$$z(s) = \hat{C}v(s) \qquad \text{(II.50.b)}$$

$$\text{avec} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} U_1^T A T_1 & U_1^T A T_2 \\ U_2^T A T_2 & U_2^T A T_2 \end{bmatrix}, \; \hat{B} = \begin{bmatrix} U_1^T B \\ U_2^T B \end{bmatrix}, \; \hat{C} = [CT_1 \;\; CT_2] \qquad \text{(II.50.c)}$$

Un modèle d'agrégation est tout modèle d'ordre réduit obtenu via la transformation d'état dont la structure est précisée par les équations (II.50.a) à (II.50.c), tels que

$$U_1^T A T_2 = 0 \qquad \text{(II.51)}$$

$\hat{G}_r(s)$ représente la partie supérieure de la triangulaire sur $\hat{A}$ et est décrite par $\{U_1^T A T_1, U_1^T B, C T_1, E\}$

La projection de T_1 le long de T_2 est la transformation linéaire P_{12} spécifiée par

$$x_1(s) = P_{12}\, x(s) \text{ avec } P_{12} = T_1 U_1^T \qquad \text{(II.52.a)}$$

La projection de T_2 le long de T_1 est la transformation linéaire P_{21} spécifiée par

$$x_2(s) = P_{21}\, x(s) \text{ avec } P_{21} = T_2 U_2^T \qquad \text{(II.52.b)}$$

La réalisation associée à l'erreur faite sur $(G(s) - \hat{G}_r(s))$ est déterminée par $\{A, B, CP_{21}, 0\}$.

Le modèle optimal d'agrégation, d'ordre r est la minimisation de (II.48). Contrairement à la troncation équilibrée, l'ensemble des directions de l'état ne peuvent pas être utilisées pour caractériser l'agrégation optimale d'ordre n pour tout r avec $1 \leq r \leq n-1$. La différence avec la troncation équilibrée vient du fait que, dans l'agrégation, l'on tronque la réalisation, puis que l'on minimise la norme H_2 et on effectue un changement de base sur A. Alors que pour la troncation équilibrée, on tronque les grammiens, puis on minimise la norme H_∞ du transfert de l'erreur c'est-à-dire du rapport des gains entrée / sortie et de la norme $\|z - z_r\|_2$. Pour l'agrégation, les valeurs propres de $\hat{A}_r$ forment un sous-ensemble de celles de A, ne correspondant pas à l'espace propre défini par T_2. Par conséquent, G(s) et $\hat{G}_r(s)$ ont r pôles en commun. Cependant, les zéros de $\hat{G}_r(s)$ sont différents et compensent la perte des pôles lors de la minimisation de (II.48).

II.2.3.4. Discussion

Par rapport à la troncation équilibrée, l'inconvénient principal de l'approximation optimale de Hankel provient de la modification de l'atténuation en hautes fréquences due à la modification du terme direct (E) de la réalisation d'état.

Par rapport à la troncation équilibrée et à l'approximation optimale de Hankel, l'inconvénient majeur de l'agrégation vient du fait que les modes de A qui sont conservés, c'est-à-dire les modes de $\hat{A}_r$, ne garantissent pas forcément que le comportement entrée / sortie de $\hat{G}_r(s)$ sera semblable à celui de G(s), alors que ce comportement est intégré dans le critère de troncation pour la réduction équilibrée et l'approximation optimale de Hankel (II.6). Equilibrer et tronquer n'est possible que sur des installations stables. Sinon, on est contraint de diviser le modèle

d'ordre plein en une partie stable et une autre instable avec dans ce cas, l'équilibre et la troncature prenant effet uniquement sur la partie stable.

Cette procédure présente trois inconvénients majeurs qui se résument comme suit:

i) Si le correcteur C(s) est instable, le diviser en sa partie stable et antistable peut être numériquement mal conditionné.

ii) La stabilité en boucle fermée avec le correcteur d'ordre réduit obtenu n'est pas garantie a priori.

iii) L' approximation du comportement du correcteur est pris isolément au lieu de son comportement en boucle fermée. Cette dernière pouvant assurer davantage de performances et de robustesse.

En extension aux méthodes présentées dans la partie § II.2., Meyer [MEY-87], [MEY-88] a proposé d'appliquer la réalisation équilibrée avec troncation sur les facteurs co-premiers normalisés au lieu de l'installation elle même. Cela permet de contourner l'inconvénient (i). De plus, l'auteur généralise des résultats sur la stabilité et les bornes d'erreur.
D'autres méthodes basées sur les facteurs co-premiers normalisés ont été proposées par [MCF-90] et [MUS-91]. Un avantage dans ce cas, est que la stabilité robuste peut être ainsi atteinte.

II.3. TRONCATION EQUILIBREE DES FACTEURS CO-PREMIERS NORMALISES

II.3.1. FACTORISATION CO-PREMIERE NORMALISEE

L'un des intérêts de la factorisation co-première est qu'elle transforme les pôles du système en zéros d'une matrice rationnelle stable (voir § Annexes A.VI.). Par conséquent, si G(s) est instable, les problèmes survenant lorsque l'on tronque le correcteur (risque de mauvais conditionnement numérique et d'instabilité) n'ont plus lieu d'être. On peut souligner l'avantage de la normalisation de cette factorisation par le fait que l'erreur commise devienne plus faible. L'emploi de cette dernière nécessite la définition du graphe d'une fonction rationnelle.

II.3.1.1. Graphe d'un système linéaire et factorisation co-première

Si G(s), de dimension p×m, est stable, alors toute entrée d'énergie finie génère une sortie d'énergie finie. Le système linéaire G(s) est alors un opérateur linéaire borné de L_2^m dans L_2^p (voir § Annexes A.I.). Si le système G(s) est instable, alors il est opérateur linéaire non borné. En effet, la plupart des entrées à énergie finie génèrent une sortie à énergie infinie. Cependant, certaines entrées d'énergie finie génèrent des sorties d'énergie finie. Ces paires d'entrées-

sorties bornées appartiennent au graphe de G(s). Une des méthodes pour obtenir des paires d'entrées-sorties bornées lorsque G(s) est instable est de stabiliser G(s) avec une loi de commande, ce qui est toujours possible si le système G(s) n'a pas de mode caché instable (stabilisabilité et détectabilité).

Définition II.4 [VID-85], [MEY-87], [MEY-88]

$$\text{Graphe } [G(s)] = \{(e, z) \in L_2^m \times L_2^p \ / \ z = Ge\} \qquad \text{(II.53)}\square$$

Pour le graphe d'un système instable, nous allons factoriser celui-ci en deux systèmes stables (donc appartenant à $\mathbb{R}H_\infty$), c'est-à-dire en deux systèmes dont les pôles sont à partie réelle strictement négative et qui sont causaux ($\lim_{s \to +\infty} G(s) < \infty$).

Définition II.5 [VID-85]

$$\text{Soit } G(s) = C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + E = N(s)\,D^{-1}(s) \qquad \text{(II.54)}$$

où $\{A, B, C, E\}$ est minimale, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $E \in \mathbb{R}^{p\times m}$. $N(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ et $D(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ définissent une factorisation co-première à droite de G(s) si N(s) et D(s) n'ont pas de zéro commun instable (incluant les zéros à l'infini). N(s) et D(s) sont appelés les facteurs co-premiers à droite de G(s). ❑

Toute matrice rationnelle n'ayant pas de mode caché instable (stabilisabilité et détectabilité) possède une factorisation co-première à droite. D'une manière équivalente, on peut définir une factorisation co-première à gauche pour G(s).

$$G(s) = C\,(sI_n - A)^{-1}\,B + E = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$$

Définissons le signal φ à partir de la factorisation co-première de G(s):

$$\varphi = D^{-1}(s)\,e$$

φ est appelé "l'état interne" de G(s) ou "l'état partiel" de G(s) [VID-85]. On a donc:

$$z = N(s)\,\varphi$$
$$e = D(s)\,\varphi$$

N(s) et D(s) étant stables ($\in \mathbb{R}H_\infty$), la paire (e, z) $\in L_2^m \times L_2^p$ ($\Leftrightarrow$ est à énergie finie) si $\varphi \in L_2^m$. Ainsi, si $G(s) = N(s)\, D^{-1}(s)$, alors toute paire de la forme $(D\varphi, N\varphi)$ appartient au graphe de G(s). Si N(s) et D(s) sont co-premiers, alors toute paire du graphe de G(s) peut s'écrire sous la forme $(D\varphi, N\varphi)$. Nous avons donc une correspondance exacte entre le graphe d'une matrice rationnelle et les signaux générés par ses facteurs co-premiers comme:

$$\text{Graphe } [G(s)] = \{(N\varphi, D\varphi) \in L_2^m \times L_2^p \ / \ \varphi \in L_2^m\} \qquad \text{(II.55)}$$

Par conséquent, on peut associer à toute installation linéaire, un opérateur graphe défini comme suit:

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} : L_2^m \rightarrow L_2^m \times L_2^p \qquad \text{(II.56)}$$

II.3.1.2. Réalisation d'une factorisation co-première normalisée

Il existe une infinité de factorisations co-premières [NET-84], [VID-85]. Parmi celles-ci, on choisit celle qui est normalisée car elle possède des propriétés intéressantes (valeurs singulières de Hankel inférieures à 1, ...).

Définition II.6

Soient N(s) et D(s), des facteurs co-premiers à droite de G(s) (voir définition II.5). N(s) et D(s) définissent une factorisation co-première normalisée de G(s) si:

$$N^T(-s)\, N(s) + D^T(-s)\, D(s) = I_m \qquad \text{(II.57)}\square$$

Lorsque le terme E dans la réalisation d'état de G(s) (II.54) est nul, Meyer [MEY-87] a donné la réalisation d'état des facteurs co-premiers normalisés de G(s). Vidyasagar [VID-88] a étendu les résultats de Meyer [MEY-87] au cas où $E \neq 0$.

La réalisation d'état des facteurs co-premiers normalisés s'effectue en déterminant Q ($Q=Q^T$, $Q > 0$), solution unique stabilisante de l'équation de Riccati algébrique:

$$(A - BS^{-1}E^TC)^T Q + Q\,(A - BS^{-1}E^TC) - QBS^{-1}B^T Q + C^TR^{-1}C = 0 \qquad \text{(II.58)}$$

avec R, S et F tels que:

$$R = I_p + EE^T \qquad \text{(II.59.a)}$$

$$S = I_m + E^T E \tag{II.59.b}$$

$$F = - S^{-1}(E^T C + B^T Q) \tag{II.59.c}$$

La réalisation d'état des facteurs co-premiers normalisés est donnée par:

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C + E F \\ F \end{bmatrix} (sI_n - A - B F)^{-1} B S^{-1/2} + \begin{bmatrix} E S^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix} \tag{II.60}$$

II.3.1.3. Propriétés des facteurs co-premiers normalisés

Dans [MEY-87] et [MEY-88], les propriétés des factorisations co-premières normalisées sont étudiées lorsque E = 0, c'est à dire lorsque G(s) est strictement causale. Pour la suite, afin de prendre en compte le comportement en boucle fermée d'une réalisation tronquée, il faut considérer le cas où $E \neq 0$, car ce terme intervient dans les quatre composantes de la réalisation donnée en (II.60). Par conséquent, étendons le lemme 3 de Meyer [MEY-88] avec $E \neq 0$ en se basant sur [VID-88].

Lemme II.3

Soit le quadruplet {A, B, C, E}; considérons R, S et F définis respectivement par (II.59) ainsi que Q, solution unique stabilisante de l'équation algébrique de Riccati (II.58) alors:

$$\overline{A} = A + BF \text{ stable} \tag{II.61}$$

Supposons de plus que la réalisation

$$\left\{ \overline{A},\ BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C + EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix} \right\} \tag{II.62}$$

soit minimale, alors:

i) Q est le grammien d'observabilité de $\left\{ \overline{A},\ BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C + EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix} \right\}$ avec $Q > 0$,

ii) soit {A, B, C, E} est minimale, soit {A, B, C, E} a des modes inobservables instables.□

Démonstration

Le lien entre grammien et solution de l'équation de Riccati (II.58) est important pour la suite. Pour démontrer i) il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation de Lyapunov énoncée suivante:

$$\bar{A}^T Q + Q\bar{A} = -\begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}$$

où le terme de droite est fonction de la solution. En effet, posons les expressions ci-dessous [VID-88]:

$$A_a = \bar{A} = A + BF,\ B_a = BS^{-1/2},\ C_a = \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix},\ E_a = \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.63.a)}$$

et

$$\hat{A}(s) = \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.63.b)}$$

En utilisant (II.63), l'équation (II.60) s'écrit de la façon suivante:

$$\hat{A}(s) = E_a + C_a (sI_n - A_a)^{-1} B_a \qquad \text{(II.63.c)}$$

En définissant $\phi(s) = (sI_n - A_a)^{-1}$, on obtient:

$$\hat{A}^T(-s)\hat{A}(s) = E_a^T E_a + E_a^T C_a \phi(s) B_a + B_a^T \phi^T(-s) C_a^T E_a + B_a^T \phi^T(-s) C_a^T C_a \phi(s) B_a \qquad \text{(II.64)}$$

Supposons que Q est le grammien d'observabilité de $\{A_a, B_a, C_a, E_a\}$ (donc que i) est vraie). On a donc:

$$C_a^T C_a = -(A_a^T Q + Q A_a) \qquad \text{(II.65)}$$

où Q est une matrice symétrique, spécifiée plus loin, on obtient alors:

$$B_a^T \phi^T(-s) C_a^T C_a \phi(s) B_a = -B_a^T \phi^T(-s)(A_a Q + Q A_a)\phi(s) B_a \qquad \text{(II.66)}$$

En s'inspirant de [MEY-87], on peut utiliser les égalités suivantes

$$A_a\phi(s) = s\phi(s) - I_n,\ \phi^T(-s)A_a^T = -s\phi^T(-s) - I_n \qquad \text{(II.67)}$$

pour montrer la relation ci-dessous:

$$- B_a^T \phi^T(-s)(A_a Q + Q A_a)\phi(s) B_a = B_a^T \phi^T(-s) Q B_a + B_a^T Q \phi(s) B_a \qquad (II.68)$$

En substituant (II.68) dans (II.64), on obtient:

$$\hat{A}^T(-s)\,\hat{A}(s) = E_a^T E_a + E_a^T C_a \phi(s) B_a + B_a^T \phi^T(-s) C_a^T E_a + B_a^T \phi^T(-s) Q B_a + B_a^T Q \phi(s) B_a \qquad (II.69)$$

Par construction, on a $E_a^T E_a = I_m$, donc la réalisation $\{A_a, B_a, C_a, E_a\}$ est normalisée (c'est-à-dire $\hat{A}^T(-s)\,\hat{A}(s) = I_m$ dans (II.69) si:

$$E_a^T C_a = - B_a^T Q \qquad (II.70)$$

La relation (II.57) est donc satisfaite si les expressions (II.65) et (II.70) le sont. Si on substitue les termes de (II.63.a) dans la relation (II.70), cette dernière est équivalente à:

$$(S^{-1/2})^T (E^T C + E^T E F + F) = - (S^{-1/2})^T B^T Q \qquad (II.71)$$

Après simplification, on obtient (II.59.c)

$$F = - (I_m + E^T E)^{-1}(E^T C + B^T Q) = - S^{-1}(E^T C + B^T Q) \qquad (II.72)$$

Pour démontrer i), il reste à montrer que Q est solution de (II.58). En utilisant l'expression de A_a, l'équation (II.65) s'écrit comme suit:

$$(A + BF)^T Q + Q(A + BF) + (C + EF)^T(C + EF) + F^T F = 0 \qquad (II.73)$$

En insérant (II.73) dans (II.72), on obtient aisément à l'équation algébrique de Riccati (II.58) où Q est la seule inconnue à déterminer. On vient donc de montrer que si Q satisfait (II.58) et F est défini par (II.59.c) ou (II.72), alors $\hat{A}^T(-s)\,\hat{A}(s) = I_m \;\forall\, s \in \mathbb{C}$.

Il reste à établir que $\hat{A}(s)$ est une matrice rationnelle stable ($\Leftrightarrow$ A + BF a des valeurs propres stables). A ce propos, notons que (II.58) s'écrit:

$$A_0^T Q + Q A_0 - Q B R^{-1} B^T Q + C^T (I_m + E E^T)^{-1} C = 0 \qquad (II.74)$$

avec R donnée par (II.59.a) et

$$A_0 = A - B(I_m + EE^T)^{-1} E^T C \tag{II.75}$$

Finalement, observons que

$$A + BF = A_0 - BR^{-1} B^T Q \tag{II.76}$$

a toutes ses valeurs propres stables car, par définition, Q est une solution stabilisante de (II.58). Alors, la paire (N(s), D(s)) est une factorisation co-première à droite.

Démontrons le résultat ii):

La commandabilité de la réalisation $\left\{\overline{A},\ BS^{-1/2},\ \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ implique celle de la réalisation $\{A, BS^{-1/2}, C + EF, ES^{-1/2}\}$ (voir les tests de Popov-Belevitch-Hautus [GRE-95]). Supposons que $\{A, BS^{-1/2}, C + EF, ES^{-1/2}\}$ soit inobservable, alors $\exists\ \lambda \in \mathbb{C}^+$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $x \neq 0$ tels que, $Ax = \lambda x$ et $Cx = 0$ (tests de Popov-Belevitch-Hautus [GRE-95]).

Si la paire (A, C) est inobservable, alors la paire $(\overline{A}, R^{-1/2}C)$ l'est aussi (tests de Popov-Belevitch-Hautus [GRE-95]). L'équation algébrique de Riccati (II.58) peut aussi s'écrire:

$$(\overline{A} - BR^{-1} B^T)^T Q + Q\overline{A} + C^T R^{-1} C = 0 \tag{II.77.a}$$

En multipliant (II.77.a) à gauche et à droite par x^H et x où x est le vecteur propre associé à λ, le mode inobservable de la paire (A, C) et sachant que $Qx \neq 0$ (car $Q > 0$), on déduit que $-\lambda$ est aussi une valeur propre inobservable de $(\overline{A} - QBR^{-1} B^T)$ avec Qx comme vecteur propre associé. Comme $\overline{A} - QBR^{-1} B^T = A + BF$ a toutes ses valeurs propres stables, $-\lambda$ est donc stable et donc, λ, le mode inobservable de (A, C) est instable. Remarquons que l'équation algébrique de Riccati (II.58) peut se réécrire comme suit:

$$(\overline{A} - BS^{-1} E^T C)^T Q + Q(\overline{A} - BS^{-1} E^T C) + F^T F + C^T R^{-1} C = 0 \tag{II.77.b}$$

ce qui implique que Q est le grammien d'observabilité pour la paire stable et observable $\left\{\overline{A}, \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}\right\}$ et est défini positif. En multipliant (II.77.b) à gauche et à droite par x^H et x, on obtient:

$$x^H \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix} x = 2\,\mathrm{Re}(\lambda)\, x^H Q\, x \tag{II.77.c}$$

L'équation (II.77.c) est vérifiée si $\begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix} x = 0$ ce qui veut dire que la réalisation $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ n'est pas minimale [MEY-87], or $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ est minimale par hypothèse. On en déduit donc que {A, B, C, E} est soit minimale, soit inobservable avec tous les modes inobservables instables. ■

Remarques

1) La démonstration de i) peut aussi servir à démontrer que la réalisation (II.60) est normalisée.

2) Par dualité, on a l'égalité suivant:

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \tilde{D}^{-1}(s)\tilde{N}(s) \tag{II.78}$$

avec:

$$(A - BS^{-1}E^TC)^TZ + Z(A - BS^{-1}E^TC) + BS^{-1}B^T - ZC^TR^{-1}CZ = 0 \tag{II.79}$$

$$H = (-BE^T + ZC^T)R^{-1} \tag{II.80}$$

$$[\tilde{N} \quad \tilde{D}] = \left[\begin{array}{c|cc} A+HC & B+HE & H \\ \hline R^{-1/2}C & R^{-1/2}E & R^{-1/2} \end{array}\right] \tag{II.81}$$

Il suffit de remplacer Q par Z et nous pouvons appliquer le lemme II.3 sur $[\tilde{N} \quad \tilde{D}]$. ❑

Considérons le lemme suivant, sur les valeurs singulières de Hankel d'une réalisation d'une factorisation co-première normalisée. Ce lemme est une extension du lemme 4 de [MEY-88].

Lemme II.4

Soit $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E$, stabilisable et détectable et $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ une réalisation minimale des facteurs co-premièrs normalisés à droite de G(s). Alors, les valeurs singulières de Hankel de $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ sont toutes strictement inférieures à un. ❑

Démonstration

Il existe une factorisation co-première à droite normalisée stable car G(s) est détectable et stabilisable. Par conséquent, $\overline{A}$ est stable. Les valeurs singulières de Hankel de $\left\{\overline{A},\ BS^{-1/2},\ \begin{bmatrix} C+EF \\ F \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ sont les termes diagonaux de la matrice diagonale et définie positive Σ, solution des deux équations suivantes:

$$(A + BF)^T\Sigma + \Sigma(A + BF) + (C + DF)^T (C + DF) + F^TF = 0 \qquad \text{(II.82.a)}$$
$$(A + BF)\Sigma + \Sigma(A + BF)^T + BS^{-1}B^T = 0 \qquad \text{(II.82.b)}$$

Si on multiplie par Σ, à gauche et à droite, les termes de (II.82.b), on obtient:

$$(A + BF)^T\Sigma + \Sigma(A + BF) + (C + DF)^T (C + DF) + F^TF = 0 \qquad \text{(II.83.a)}$$
$$\Sigma(A + BF)\Sigma^2 + \Sigma^2(A + BF)^T\Sigma + \Sigma\, BS^{-1}B^T\Sigma = 0 \qquad \text{(II.83.b)}$$

Maintenant on enlève et on rajoute l'expression $\Sigma\, BS^{-1}B^T\Sigma$ sur la première ligne (cela revient à faire comme Vidyasagar [VID-88], résoudre l'équation algébrique de Riccati (II.58)).

$$(A + BF)^T\Sigma + \Sigma(A + BF) + \Sigma\, BS^{-1}\, B^T\Sigma + C^T R^{-1}C = 0 \qquad \text{(II.84.a)}$$
$$\Sigma(A + BF)\Sigma^2 + \Sigma^2(A + BF)^T\Sigma + \Sigma\, BS^{-1}B^T\Sigma = 0 \qquad \text{(II.84.b)}$$

On soustrait (II.84.b) à (II.84.a) et on obtient l'équation ci-dessous:

$$\Sigma(A + BF)\,(\Sigma^2 - I_n) + (\Sigma^2 - I_n)\,(A + BF)^T\Sigma = C^T R^{-1}\, C \qquad \text{(II.85)}$$

Soit $\lambda_i = \sigma_i^2 - 1$, une valeur propre de la matrice diagonale $(\Sigma^2 - I_n)$ et soit e_i le vecteur propre unitaire associé à λ_i. Multiplions (II.85) par e_i à sa droite et par e_i^T à sa gauche, on aboutit à:

$$\lambda_i\, e_i^T\, [\Sigma(A + BF) + (A + BF)^T\Sigma]\, e_i = e_i^T\, C^T R^{-1}\, C\, e_i \qquad \text{(II.86)}$$

En combinant (II.84.a) et (II.86), on peut écrire:

$$\lambda_i = \frac{e_i^T\, C^T\, R^{-1}\, C\, e_i}{e_i^T\, (C^T\, R^{-1}\, C + \Sigma\, BS^{-1}\, B^T\, \Sigma)\, e_i} \qquad \text{(II.87)}$$

L'équation (II.87) nous assure que $\lambda_i \leq 0$ et par conséquent, que $\sigma_i \leq 1$. Avant de démontrer que $\sigma_i \leq 1$ se réduit en réalité à $\sigma_i < 1$, il faut montrer que le dénominateur de (II.87) est non nul. En effet, si ce dénominateur est nul, on aurait simultanément $Ce_i = 0$ et $B^T\Sigma\, e_i = 0$, ce qui implique $B^T e_i = 0$ car Σ est strictement positive et diagonale. En effet, si $B^T\Sigma\, e_i = 0$, on obtient, avec (II.84.a)

$$(\Sigma(A + BF) + (A + BF)^T\Sigma)\, e_i = 0 \qquad \text{(II.88.a)}$$

et donc

$$(A + BF)^T e_i = -\frac{\Sigma(A + BF)e_i}{\sigma_i} \qquad \text{(II.88.b)}$$

et avec (II.84.b)

$$\Sigma\,(A + BF)^T e_i = -\,\sigma_i\,(A + BF)\, e_i \qquad \text{(II.89)}$$

En utilisant (II.88.b) et (II.89), on obtient:

$$\Sigma^2(A + BF)\, e_i = \sigma_i^2\,(A + BF)\, e_i \qquad \text{(II.90)}$$

et donc, Σ étant diagonale et définie positive que $(A + BF)\, e_i = \gamma\, e_i$, ce qui veut dire que e_i serait un vecteur propre de $(A + BF)$ satisfaisant $Ce_i = 0$ et donc que $\left\{\overline{A},\ BS^{-1/2},\ \begin{bmatrix} C + EF \\ F \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix}\right\}$ serait inobservable et donc non minimale. On a donc le dénominateur de (II.87) non nul.

Supposons maintenant que $\sigma_i = 1$, ce qui est équivalent à $\Sigma\, e_i = e_i$. A partir de (II.87), cela n'est possible que si $e_i^T\, \Sigma\, BS^{-1}\, B^T\, \Sigma\, e_i = 0$, ce qui implique que $B^T e_i = 0$. Multiplions (II.84.b) par e_i à sa droite et par e_i^T à sa gauche, cela donne:

$$e_i^T\,[(A + BF) + (A + BF)^T]\, e_i = 0 \qquad \text{(II.91)}$$

Procédons de même pour (II.84.a) et, en considérant (II.91), on a le dénominateur de l'équation (II.87) qui s'annule. Cela étant impossible, on a donc $\sigma_i \neq 1$ et par conséquent $\sigma_i < 1$. ■

II.3.2.REDUCTION DE LA REALISATION EQUILIBREE DES FACTEURS CO-PREMIERS

Basée sur les résultats de la section précédente, on se propose maintenant d'étendre les travaux de Meyer [MEY-87], [MEY-88] dans le cas où le terme direct est non nul ($E \neq 0$). L'algorithme suivant permet d'équilibrer et de tronquer des installations instables.

II.3.2.1. Algorithme

i) Soit $G(s) = \tilde{C}\left(sI_n - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} + \tilde{E}$ où la réalisation $\left\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{E}\right\}$ est minimale (II.92.a)

ii) Résolvons l'équation algébrique de Riccati ci-dessous:

$$(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{S}^{-1}\tilde{E}^T C)^T Q + Q(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{S}^{-1}\tilde{E}^T C) - Q\tilde{B}\tilde{S}^{-1}\tilde{B}^T Q + \tilde{C}^T\tilde{R}^{-1}\tilde{C} = 0 \qquad \text{(II.92.b)}$$

et, définissons:

$$\overline{\tilde{A}} = \tilde{A} + \tilde{B}\tilde{F} \qquad \text{(II.92.c)}$$

où

$$\tilde{F} = -\tilde{S}^{-1}(\tilde{E}^T\tilde{C} + \tilde{B}^T\tilde{Q}) \qquad \text{(II.92.d)}$$

Equilibrons maintenant le quadruplet $\left\{\overline{\tilde{A}}, \tilde{B}\tilde{S}^{-1/2}, \begin{pmatrix}\tilde{C} + \tilde{E}\tilde{F}\\ \tilde{F}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\tilde{E}\tilde{S}^{-1/2}\\ \tilde{S}^{-1/2}\end{pmatrix}\right\}$ et notons la réalisation équilibrée ainsi obtenue $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{pmatrix}C + EF\\ F\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}ES^{-1/2}\\ S^{-1/2}\end{pmatrix}\right\}$.

Appelons Σ le grammien diagonal ainsi obtenu:

$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n > 0$.

iii) Partitionnons la réalisation $\left\{\overline{A}, BS^{-1/2}, \begin{pmatrix}C + EF\\ F\end{pmatrix}\right\}$ et le grammien Σ ainsi:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{21}\\ \underbrace{\overline{A}_{12}}_{r} & \underbrace{\overline{A}_{22}}_{n-r}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}r\\ \}n-r\end{matrix}, \quad BS^{-1/2} = \underbrace{\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}}_{m}\begin{matrix}\}r\\ \}n-r\end{matrix}, \quad \begin{pmatrix}C + EF\\ F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overbrace{C_1}^{r} & \overbrace{C_2}^{n-r}\\ F_1 & F_2\end{pmatrix}\begin{matrix}\}p\\ \}m\end{matrix} \qquad \text{(II.93)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \overbrace{\Sigma_1}^{r} & \overbrace{0}^{n-r} \\ 0 & \Sigma_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix} \text{ avec } \Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_r) \text{ et } \Sigma_r = \text{diag}(\sigma_{r+1},\ldots,\sigma_n) \qquad \text{(II.94)}$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$ et $\sigma_r > \sigma_{r+1}$

$$\text{iv) } \left\{\overline{A}_{11}, B_1, \begin{pmatrix} C_1 \\ F_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{(II.95)}$$

est une réalisation minimale, stable d'ordre réduit r de $\left\{\overline{A},\ BS^{-1/2}, \begin{pmatrix} C+EF \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ES^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{pmatrix}\right\}$.

v) L'approximation d'ordre r de G(s) est donnée par $G_r(s) = N_r(s)\, D_r^{-1}(s)$ avec:

$$N_r(s) = \left\{\overline{A}_{11}, B_1, C_1, ES^{-1/2}\right\} \text{ et } D_r^{-1}(s) = \left\{\overline{A}_{11}, B_1, F_1, S^{-1/2}\right\} \qquad \text{(II.96)}\square$$

Remarque

Dans le cas où le terme direct est nul (E = 0), on a le correcteur d'ordre réduit r égal à:

$$C_r(s) = C_1\,(sI_r - \overline{A}_{11} + B_1\,C_1)^{-1}\,B_1 \qquad \text{(II.97)}\square$$

II.3.2.2. Propriétés

Définition II.7

Soient les installations $G_1(s)$, $G_2(s)$. $(N_1(s), D_1(s))$, $(N_2(s), D_2(s))$ représentent des factorisations co-premières droites normalisées de $G_1(s)$ et $G_2(s)$ respectivement. Posons:

$$A_i(s) = \begin{pmatrix} N_i(s) \\ D_i(s) \end{pmatrix},\ i = 1, 2 \qquad \text{(II.98)}$$

$$\text{Définissons } \delta(G_1(s), G_2(s)) = \inf_{U(s)\in RH_\infty,\ \|U(s)\|_\infty \leq 1} \left\|A_1(s) - A_2(s)U(s)\right\|_\infty \qquad \text{(II.99)}$$

Alors, la métrique du graphe est définie par la distance $d(G_1(s), G_2(s))$ [MEY-87], [VID-85]:

$$d(G_1(s), G_2(s)) = d(G_2(s), G_1(s)) = \max\{\delta(G_1(s), G_2(s)), \delta(G_2(s), G_1(s))\} \qquad \text{(II.100)}\square$$

Lorsque l'on tronque une réalisation, il existe a priori une borne de l'erreur effectuée dans la métrique du graphe comme le souligne le lemme II.6 lorsque le terme direct de la réalisation de G(s) est nul. Avant d'énoncer cette borne, donnons le lemme suivant:

Lemme II.5 [MEY-87], [MEY-88]

Soit le système $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B$. Soient N(s) et D(s) les facteurs co-premiers normalisés de G(s) et n l'ordre de G(s). Soient $N_r(s)$ et $D_r(s)$ les facteurs co-premiers obtenus après troncation équilibrée de $\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$. Alors $(N_r(s), D_r(s))$ sont des facteurs co-premiers à droite normalisés. ❐

Appelons $G_r(s)$ l'approximation de G(s) donnée par:

$$G_r(s) = N_r(s)\, D_r^{-1}(s) \qquad \text{(II.101)}$$

où $N_r(s)$ et $D_r(s)$ sont définis au lemme II.5.

Lemme II.6 [MEY-87], [MEY-88]

Supposons G(s) modèle d'ordre plein (n) et $G_r(s)$ modèle d'ordre réduit (r) obtenu à partir de G(s) en utilisant (II.101) et le lemme II.5. On a:

$$d\big((G(s), G_r(s)\big) \le 2 \sum_{i=r+1}^{n} \sigma_i \qquad \text{(II.102)}$$

où d est la métrique du graphe et σ_i sont les valeurs singulières de Hankel de $\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$ avec N(s) et D(s), les facteurs co-premiers normalisés de G(s). ❐

Dans la propriété II.2, l'erreur s'établit uniquement sur la partie stable. L'intérêt du lemme (II.6) résulte du fait que sur le graphe de G(s), le gain induit est maximal sur toutes les paires (entrées / sorties) bornées au sens L_2. Mais les lemmes II.5 et II.6 ne sont plus valables si $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E$ avec $E \neq 0$.

On peut remarquer que l'erreur de troncation sur les facteurs co-premiers normalisés est plus faible que lorsque les facteurs co-premiers ne sont pas normalisés, car les valeurs singulières de Hankel de $\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$ sont strictement inférieures à 1 dans le cas normalisé, donc on "perd" moins en utilisant cette technique (voir (II.101)).

- Pour une troncation équilibrée de $\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$, $N_r(s)$ et $D_r(s)$ sont stables, co-premiers et normalisés.

- L'avantage de cette technique est que, même si le correcteur à réduire est instable, on travaille avec sa factorisation qui, elle, est toujours stable.

- Par contre l'emploi d'une factorisation co-première ne diminue ni le risque d'instabilité en boucle fermée, ni les pertes de performances dues au fait que l'approximation réalisée du comportement est celle du correcteur pris isolément et non pas celle du comportement en boucle fermée.

II.4. REDUCTION DE L'ORDRE DU CORRECTEUR ET COMPORTEMENT EN BOUCLE FERMEE

II.4.1. Formulation du problème

L'étude de la réduction de l'ordre d'un correcteur en boucle ouverte (voir les parties § II.2. et § II.3.) n'apporte pas de garantie sur les performances et la robustesse en boucle fermée après troncation. Par conséquent l'objectif consiste à prendre en compte le correcteur en boucle fermée dans la procédure de réduction.

De nombreux travaux sont consacrés à ce problème. Jonckheere et Silverman [JON-83] se sont intéressés à la commande L.Q.G. appliquée au comportement de chaque état pondéré en boucle fermée. Mc-Farlane et Glover [MCF-90] ont étudié la stabilisation robuste par l'incorporation de facteurs co-premiers. Mustafa et Glover [MUS-91] ont procédé à des troncations équilibrées H_∞ pour réduire le correcteur. Dans ce cas, l'installation peut être instable et compensée par la présence d'un correcteur robuste stabilisant. Chen et Chang [CHE-93] ont proposé une factorisation co-première stable du correcteur et des techniques de réalisation équilibrée pondérée appliquées à une réduction de correcteur H_∞ dont la marge de stabilité pondérée est employée dans le processus de réduction.

Cependant, ces méthodes dédiées à un correcteur spécifique traitent de la réduction des équations de Riccati et non des grammiens d'une réalisation équilibrée. Enns [ENN-84a] a introduit la pondération fréquentielle sur la réalisation équilibrée. Cette méthode nécessite un modèle d'ordre plein stable et donne un modèle d'ordre réduit stable pour des pondérations stables en entrée ou en sortie, mais la stabilité n'est pas garantie pour des pondérations à la fois en entrée et en sortie. Quelques résultats sur les bornes d'erreur avec des pondérations fréquentielles appliquées aux réductions basées sur les approximations optimales de Hankel

sont données par [LAT-85], [GLO-92], [ZHO-93]. Plus récemment, ces bornes ont été étendues au cas des troncations équilibrées [KIM-95].

II.4.2. Méthodes de réduction et analyse fréquentielle des systèmes bouclés

L'objectif est de simplifier l'implantation du correcteur par une représentation de ce dernier d'ordre plus faible, cette dernière se basant sur l'analyse du système en boucle fermée. La synthèse classique de réduction d'ordre du correcteur s'étend aux systèmes multi-entrées / multi-sorties grâce à des méthodes basées sur les valeurs singulières et par des techniques de "loop-shaping" en multivariables [STE-91]. Bacon et Schmidt [BAC-89] étudient deux techniques de réduction, l'approche équilibrée [MOO-81] et l'approche d'agrégation optimale, en fonction des comportements du système bouclé dans différentes gammes de fréquences. Ces techniques présentent un intérêt particulier puisqu'elles peuvent être associées à une norme dans le domaine fréquentiel. Des pondérations fréquentielles sont introduites permettant de meilleures approximations dans les gammes de fréquences critiques.

Rappelons d'abord quelques caractéristiques importantes des systèmes bouclés [BAC-89]. Considérons le système bouclé de la figure (II.1) dans lequel P(s) représente la matrice de transfert d'un système multivariable, de dimensions m×p et C(s) celle d'un correcteur de dimensions p×m. On appelle y_c, y, e, u, d et n respectivement le signal de référence que doit suivre la sortie, la sortie du système, l'erreur d'asservissement, la commande (sortie du correcteur), les perturbations affectant les sorties du système et les bruits de mesure. y_c, y, e, d, $n \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$.

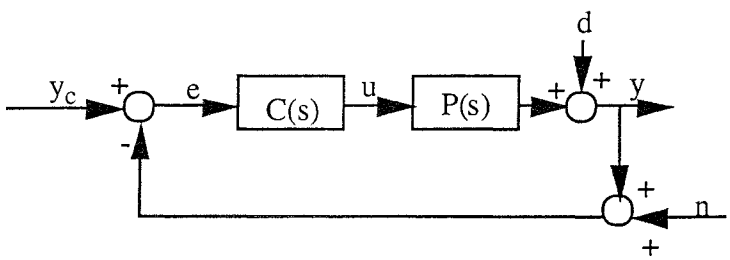


Figure II.1: système bouclé

Une telle configuration, stable, possède les propriétés suivantes:

i) La sortie du système s'écrit:

$$y = PC\,(I_m + PC)^{-1}\,(y_c - n) + (I_m + PC)^{-1}\,d \qquad \text{(II.103)}$$

Soit $e = y_c - y$, on obtient par conséquent:

$$e = (I_m + PC)^{-1} (y_c - d) + PC (I_m + PC)^{-1}n \quad (II.104)$$

ii) En notant $\Delta(.)$, les incertitudes affectant une matrice de transfert, la sensibilité de la matrice de transfert en boucle fermée relative aux perturbations de la boucle s'écrit:

$$\Delta(H_{bf}) = (I_m + (PC)')^{-1} \Delta(H_{bo}) \quad (II.105)$$

avec $\Delta(H_{bf}(s))$ et $\Delta(H_{bo}(s))$, les perturbations du système en boucle fermée et ouverte respectivement, où $H_{bf}(s) = H_{bo}(s)(I_m + H_{bo}(s))^{-1}$, $H_{bo}(s) = P(s)C(s)$, $(PC)'(s) = H_{bo}(s) + \Delta(P(s)C(s))$ et $\Delta(H_{bo}(s)) = \Delta(P(s)C(s))$.

Il est intéressant de noter l'égalité suivante:

$$(PC)' (I_m + (PC)')^{-1} \approx PC (I_m + PC)^{-1} + \Delta(H_{bf}) \quad (II.106)$$

L'objectif consiste à préserver, en utilisant un correcteur réduit, la stabilité robuste du système bouclé obtenu avec le correcteur initial C(s), face aux incertitudes $\Delta(P(s)C(s))$ pouvant être dues à des variations de paramètres et à des dynamiques non modélisées se rapportant à P(s) ou (et) C(s).

La stabilité du système perturbé est déterminée par les racines de l'équation caractéristique, c'est-à-dire par les zéros de:

$$\det(I_m + PC + \Delta(PC)) = 0 \quad (II.107)$$

Supposons que le système nominal bouclé et $\Delta(P(s)C(s))$ soient stables, alors le système perturbé est stable si la relation ci-dessous est satisfaite, $\forall\ \omega \geq 0$ et $\varepsilon \in [0, 1]$:

$$\det(I_m + PC + \varepsilon\Delta(PC))_{s=j\omega} \neq 0 \quad (II.108)$$

Une autre façon d'exprimer ceci, consiste à s'assurer que la matrice de transfert $(I_m + P(j\omega)C(j\omega)) + \varepsilon\Delta(P(j\omega)C(j\omega))$ demeure non singulière $\forall\ \omega \geq 0$ et $\varepsilon \in [0, 1]$. L'hypothèse de stabilité du système bouclé nominal, c'est-à-dire que $(I_m + P(j\omega)C(j\omega))$ est non singulière $\forall\ \omega \geq 0$ ($\varepsilon = 0$), suppose qu'il n'y a pas de simplification pôle-zéro instable dans le produit de P(s) par C(s) (voir (II.107) et (II.108)). Cette hypothèse est maintenue dans la suite de l'analyse de la robustesse.

La stabilité du système perturbé est donc garantie $\forall\ \omega \geq 0$ si l'inéquation suivante est vérifiée:

$$\underline{\sigma}(I_m + P(j\omega)C(j\omega)) > \overline{\sigma}(\Delta(P(j\omega)C(j\omega))) \qquad (II.109)$$

Par conséquent, les fréquences pour lesquelles la stabilité robuste constitue potentiellement un problème sont celles où l'approximation (II.110) est vérifiée

$$\underline{\sigma}(I_m + P(j\omega)C(j\omega)) \approx \overline{\sigma}(\Delta(P(j\omega)C(j\omega))) \qquad (II.110)$$

On peut énoncer le critère de Nyquist multivariable par le théorème suivant:

Théorème II.5

Le système bouclé, de transmittance en boucle ouverte P(s) C(s), est stable si et seulement si l'image du contour de Nyquist Γ (figure II.2) par det $(I_m + P(s)C(s))$ entoure l'origine, dans le sens trigonométrique, un nombre de fois égal au nombre de pôles du produit P(s)C(s) à partie réelle strictement positive, ces pôles étant considérés avant les simplifications pôles-zéros.

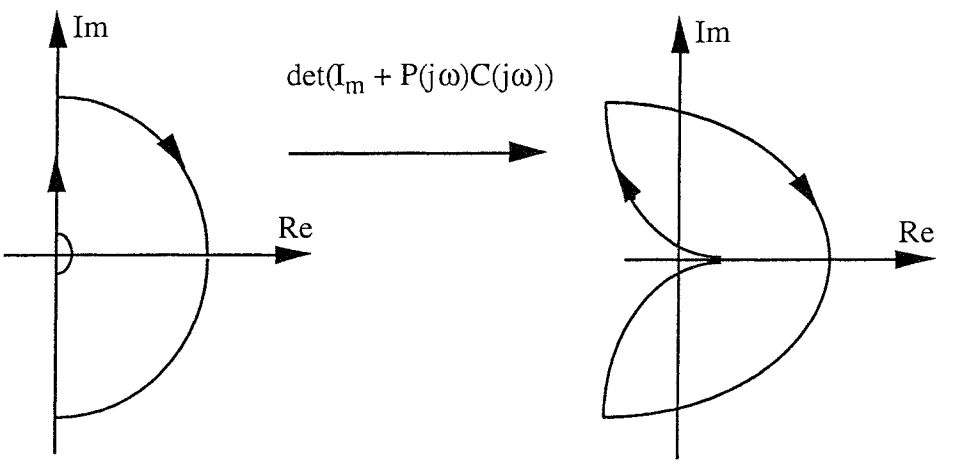


Figure II.2: diagramme de Nyquist

❐

Pour les systèmes monovariables, la partie gauche de l'équation (II.110) en appliquant le critère de Nyquist, correspond à la distance minimale entre $P(j\omega)C(j\omega)$, obtenue en $\omega = \omega_0$, avec le point critique -1. On peut énoncer ceci:

i) pour tout $\omega = \omega_0$, il existe $\Delta(P(j\omega_0)C(j\omega_0))$ satisfaisant (II.110) qui conduit $(PC)'(j\omega_0)$ à -1, c'est à dire à l'instabilité en boucle fermée.

ii) $\Delta(P(j\omega_0)C(j\omega_0))$ vérifiant (II.110) n'implique pas nécessairement $(PC)'(j\omega) = -1$.

Pour les systèmes multivariables, l'équation (II.110) définit des gammes de fréquence pour lesquelles la stabilité robuste pose un problème. On peut ajouter qu'un faible changement sur P(s) ou C(s) peut provoquer une importante variation $\Delta(P(j\omega_0)C(j\omega_0))$ satisfaisant (II.110).

La stabilité robuste met l'accent sur le concept de "loop shaping", c'est-à-dire sur la spécification en termes fréquentiels des objectifs de commande. Cette analyse de la robustesse met en évidence l'importance de la fréquence à gain unitaire ω_0 (module de $P(j\omega_0)C(j\omega_0) \approx 1$). Il est souhaitable que le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte soit élevé en basses fréquences afin d'atténuer les perturbations et de rendre moins sensible le système bouclé aux variations de paramètres en boucle ouverte (voir (II.104), le module de $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ est faible dans la bande passante si le module $P(j\omega)C(j\omega)$ est important dans la bande passante, cette dernière étant définie en général dans les basses fréquences). En hautes fréquences, de faibles gain de boucle sont espérés afin de limiter des bruits de capteur et de dynamiques non modélisées en hautes fréquences (voir (II.103), le module de $P(j\omega)C(j\omega)(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ est faible en hautes fréquences si le module de $P(j\omega)C(j\omega)$ l'est aussi). Remarquons que cette transposition sur la boucle ouverte des performances recherchées en la boucle fermée est une démarche classique de l'automatique fréquentielle monovariable, qui permet de faciliter la synthèse du correcteur: il est plus simple de régler $P(j\omega)C(j\omega)$ que la fonction sensibilité $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$. Le choix d'atténuer $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ en basses fréquences et $P(j\omega)C(j\omega)(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ en hautes fréquences se justifie car, ayant la relation $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}+P(j\omega)C(j\omega)(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1} = I_m$, on ne peut pas atténuer $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ et $P(j\omega)C(j\omega)(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ dans la même bande de fréquences et car le module de $(I_m+P(j\omega)C(j\omega))^{-1}$ tend vers 1 en hautes fréquences.

Remarque

Les considérations précédentes illustrent, dans le cas multivariable, le compromis classique précision / stabilité: toute augmentation des valeurs singulières améliore les performances en basses fréquences (précision) mais peut entraîner l'instabilité. On constate en outre que le meilleur compromis sera obtenu avec le correcteur réduit si l'on arrive à rapprocher le plus possible les valeurs singulières inférieures et supérieures de $P(j\omega)C(j\omega)$. ❑

Ainsi, le gain de boucle obtenu avec le correcteur réduit doit, pour préserver la robustesse en stabilité et les performances de la boucle fermée, approximer celui obtenu avec le correcteur initial dans les trois domaines fréquentiels suivants: à la fréquence à gain unitaire (ω_0), en basse fréquence (atténuation à l'origine ou gain statique si celui-ci est fini) et atténuation à l'infini.

L'introduction de pondérations fréquentielles dans la procédure de troncation du correcteur peut permettre de donner plus d'importance à certaines bandes de fréquences dans la "recopie" par le correcteur réduit du comportement du correcteur initial.

II.4.3. Réduction équilibrée avec pondérations fréquentielles

II.4.3.1. Grammiens pondérés et équilibrage [ENN-84a], [ENN-84b]

Soit $P_o(s)G(s)P_i(s)$, l'installation pondérée en entrée et en sortie, où $P_i(s)$ et $P_o(s)$ sont les pondérations, respectivement en entrée et en sortie, de G(s). $P_i(s)$ et $P_o(s)$ sont stables, minimales (commandables et observables) et nous permettent de choisir la bande de fréquence prioritaire pour la réduction.

L'idée de base est de changer les grammiens de commandabilité et d'observabilité grâce à l'introduction de ces pondérations.

Les matrices G(s) et $P_i(s)$ présentes dans le produit $G(s)P_i(s)$ ont pour réalisations d'état respectives $\{A, B, C, E\}$ et $\{A_i, B_i, C_i, E_i\}$. Appelons $\{\overline{A}_i, \overline{B}_i, \overline{C}_i, \overline{E}_i\}$ la réalisation du produit $G(s)P_i(s)$. $\overline{C}_i$ et $\overline{E}_i$ n'interviennent pas dans les matrices donnant le grammien de commandabilité de ce produit appelé W_c.

Les matrices $P_o(s)$ et G(s) constituant le produit $P_o(s)G(s)$ ont pour réalisations d'état respectives $\{A_o, B_o, C_o, E_o\}$ et $\{A, B, C, E\}$. Appelons $\{\overline{A}_o, \overline{B}_o, \overline{C}_o, \overline{E}_o\}$ la réalisation du produit $P_o(s)G(s)$. $\overline{B}_o$ et $\overline{E}_o$ n'interviennent pas dans les matrices procurant le grammien d'observabilité de ce produit appelé W_o.

Les matrices $\overline{A}_i$, $\overline{B}_i$, $\overline{A}_o$ et $\overline{C}_o$ sont données par:

$$\overline{A}_i = \begin{bmatrix} A & BC_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix},\ \overline{B}_i = \begin{bmatrix} BE_i \\ B_i \end{bmatrix},\ \overline{A}_o = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_oC & Ao \end{bmatrix} \text{ et } \overline{C}_o = [E_oC \quad C_o]$$

Selon la même décomposition que $\overline{A}_i$ et $\overline{A}_o$, les grammiens W_c et W_o s'écrivent:

$$W_c = \begin{bmatrix} W_{c1} & W_{c12} \\ W_{c12}^T & W_{c2} \end{bmatrix} \text{ et } W_o = \begin{bmatrix} W_{o1} & W_{o12} \\ W_{o12}^T & W_{o2} \end{bmatrix}$$

Précisons également les produits matriciels suivants:

$$\overline{B}_i\ \overline{B}_i^T = \begin{bmatrix} BE_iE_i^TB & BE_iB_i^T \\ B_iE_i^TB^T & B_iB_i^T \end{bmatrix} \text{ et } \overline{C}_o^T\ \overline{C}_o = \begin{bmatrix} C^TE_o^TE_oC & C^TE_o^TC_o \\ C_o^TE_oC & C_o^TC_o \end{bmatrix}$$

W_c et W_o sont solutions respectivement des deux équations de Lyapunov ci-dessous:

$$\begin{bmatrix} A & BC_i \\ 0 & A_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{c1} & W_{c12} \\ W_{c12}^T & W_{c2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} W_{c1} & W_{c12} \\ W_{c12}^T & W_{c2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ C_i^T B^T & A_i^T \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} BE_iE_i^TB & BE_iB_i^T \\ B_iE_i^TB^T & B_iB_i^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{II.111}$$

$$\begin{bmatrix} A^T & C^TB_o^T \\ 0 & A_o^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{o1} & W_{o12} \\ W_{o12}^T & W_{o2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} W_{o1} & W_{o12} \\ W_{o12}^T & W_{o2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B_oC & A_o \end{bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} C^TE_o^TE_oC & C^TE_o^TC_o \\ C_o^TE_oC & C_o^TC_o \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{II.112}$$

Dans les grammiens W_c et W_o, seuls les termes W_{c1} et W_{o1} correspondent à l'état du correcteur C(s). Ils sont sélectionnés ainsi:

$$W_{c1} = [I_n \;\; 0]\begin{bmatrix} W_{c1} & W_{c12} \\ W_{c12}^T & W_{c2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.113}$$

$$W_{o1} = [I_n \;\; 0]\begin{bmatrix} W_{o1} & W_{o12} \\ W_{o12}^T & W_{o2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{II.114}$$

Pour un équilibrage pondéré en fréquence, la diagonalisation simultanée de W_{c1} et W_{o1}, notée Σ_p, est donnée par:

$$\Sigma_p^2 = T\, W_{c1}W_{o1}T^{-1} \tag{II.115}$$

Le changement de base T correspond aux vecteurs propres du produit $W_{c1}W_{o1}$.

II.4.3.2. Troncation

Au respect de l'équation (II.115), la troncation équilibrée pondérée en fréquence s'effectue donc sur la réalisation d'état $\{TAT^{-1},TB,CT^{-1}\}$. Il suffit d'appliquer la décomposition donnée par (II.20) en remplaçant Σ par Σ_p.

On peut différencier trois cas pour l'étude de la stabilité du système tronqué, $G_r(s)$, comme le souligne le lemme suivant:

Lemme II.7 [ENN-84a], [ENN-84b]

i) Pondération en entrée: $P_i(s) \neq I_m$ et $P_o(s) = I_p$

Si $\begin{cases} \bullet\, G(s) \text{ est stable} \\ \bullet\, \sigma_r > \sigma_{r+1} \text{ et } \sigma_n > 0 \end{cases}$

alors $G_r(s)$ est stable.

ii) Pondération en sortie: $P_i(s) = I_m$ et $P_o(s) \neq I_p$

Si $\begin{cases} \bullet\, G(s) \text{ est stable} \\ \bullet\, \sigma_r > \sigma_{r+1} \text{ et } \sigma_n > 0 \end{cases}$

alors $G_r(s)$ est stable.

iii) Pondérations en entrée et en sortie: $P_i(s) \neq I_m$ et $P_o(s) \neq I_p$

Si $\begin{cases} \bullet\, G(s) \text{ est stable} \\ \bullet\, \sigma_r > \sigma_{r+1} \text{ et } \sigma_n > 0 \end{cases}$

alors on ne peut pas conclure sur la stabilité de $G_r(s)$. ❐

Dans les cas (i) et (ii), nous avons respectivement les formes partitionnées des équations des grammiens comme suit [ENN-84a], [ENN-84b]:

$$A_{11}^T \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + C_1^T C_1 = 0 \qquad \text{(II.116.a)}$$

$$A_{11} \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}^T + B_1 B_1^T = 0 \qquad \text{(II.116.b)}$$

Puisque le modèle d'ordre plein est supposé minimal, les grammiens équilibrés sont définis positifs et énoncés respectivement par:

$$A^T \Sigma + \Sigma A + C^T C = 0,\ \Sigma > 0 \qquad \text{(II.117.a)}$$

$$A \Sigma + \Sigma A^T + B B^T = 0,\ \Sigma > 0 \qquad \text{(II.117.b)}$$

$\Sigma > 0$ implique $\Sigma_1 > 0$ et donc, vu (II.116), on a: $\mathrm{Re}[\lambda(A_{11})] \leq 0$ [PER-82]. De plus, pour les cas (i) et (ii), on a respectivement:

si (A_{11}, C_1) est observable alors $\mathrm{Re}[\lambda(A_{11})] < 0$ (II.118.a)

si (A_{11}, B_1) est commandable alors $\mathrm{Re}[\lambda(A_{11})] < 0$ (II.118.b)

Pour les cas (i) et (ii), le modèle d'ordre réduit est stable (la commandabilité et l'observabilité sont présumées pour le modèle d'ordre réduit). Le cas (iii) ne nous permet pas de conclure quant à la stabilité du modèle d'ordre réduit.

II.4.3.3. Borne de l'erreur de troncation

Zhou [ZHO-93] donne, pour l'approximation optimale pondérée de Hankel la borne de l'erreur. W représente une pondération rationnelle, strictement propre et stable avec pour réalisation $\{A_w, B_w, C_w, 0\}$. Quelques spécifications sont à signaler, à savoir que B_w est carrée et non singulière, C_w est de rang plein lignes, et enfin que A_w et A (de G) n'ont pas de valeur propre commune. On peut alors écrire que [ZHO-93]:

$$\|W\,(G(s) - G_r(s))\|_\infty \leq 2\,(\sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n) \qquad \text{(II.119)}$$

avec $(\sigma_{r+1} + \ldots + \sigma_n)$ étant les valeurs propres de $G_1(s)$ dont la réalisation est donnée par $\{A, B, C_w P, 0\}$, $G_r(s)$ étant une approximation optimale pondérée de Hankel de G(s). $G_r(s)$ dans (II.119) n'est pas obtenue avec les grammiens pondérés de Enns (II.111) et (II.112) [ENN-84a], [ENN-84b].

Kim *et al.* [KIM-95] ont proposé une borne de l'erreur lorsque la procédure de troncation est basée sur l'équilibrage des grammiens pondérés (II.111) et (II.112). Cette borne généralise celle donnée par Enns [ENN-84a], [ENN-84b] et Glover [GLO-84] lorsque les grammiens sont non pondérés (voir propriété II.2, équation (II.34)). Cette borne est donnée dans le théorème suivant.

Théorème II.6 [KIM-95]

Soient G(s), une fonction de transfert stable, $P_i(s)$ et $P_o(s)$ des fonctions de pondération stables, respectivement en entrée et en sortie . Elles sont toutes trois définies par leur réalisation respectivement données par (II.1), (II.120.a) et (II.120.b).

$$P_i(s) = C_i\,(sI_{ni} - A_i)^{-1}\,B_i + E_i \qquad \text{(II.120.a)}$$

$$P_o(s) = C_o\,(sI_{no} - A_o)^{-1}\,B_o + E_o \qquad \text{(II.120.b)}$$

Soit $G_r(s)$ la fonction de transfert d'ordre réduit (r) donnée par (II.2) et obtenue par la technique de réduction équilibrée (équations (II.111), (II.112) et (II.115)) avec les pondérations fréquentielles $P_i(s)$ et $P_o(s)$. Supposons que $G_r(s)$ soit stable. Alors, la borne de l'erreur s'exprime comme suit:

$$\|P_o(s)\,[G(s) - G_r(s)]\,P_i(s)\|_\infty \le 2 \sum_{k=r+1}^{n} \sqrt{\sigma_k^2 + (\alpha_k + \beta_k)\sigma_k^{3/2} + \alpha_k \beta_k \sigma_k} \qquad \text{(II.121)}$$

avec $\alpha_k = \|E_{k-1}(s)\|_\infty \left\|C_i \phi_i(s) W_{c_2}^{1/2}\right\|_\infty$, $\beta_k = \left\|W_{o_2}^{1/2} \phi_o(s) B_o\right\|_\infty \|\Gamma_{k-1}(s)\|_\infty$

où W_{c2} et W_{o2} sont respectivement les blocs inférieurs droits des grammiens de commandabilité et d'observabilité, solutions respectives des équations de Lyapunov (II.111) et (II.112).

On a: $E_{k-1}(s) = A_{21}^{k-1}\,\phi_{k-1}(s)\,B_{k-1} + b_k$, $\Gamma_{k-1}(s) = C_{k-1}(s)\,\phi_{k-1}(s)\,A_{12}^{k-1} + c_k$,

$\phi_{k-1}(s) = (sI_{k-1} - A_{k-1})^{-1}$, $\phi_o(s) = (sI_{no} - A_o)^{-1}$, $\phi_i(s) = (sI_{ni} - A_i)^{-1}$,

$A_k = \begin{pmatrix} A_{k-1} & A_{12}^{k-1} \\ A_{21}^{k-1} & a_{kk} \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} B_{k-1} \\ b_k \end{pmatrix}$, $C_k = (C_{k-1} \quad c_k)$, b_k et c_k sont respectivement les $k^{\text{ièmes}}$ lignes de B_k et les $k^{\text{ièmes}}$ colonnes de C_k. $A_n = A$, $B_n = B$, $C_n = C$. ❐

Remarque [KIM-95]

La borne (II.121) a été obtenue en utilisant les inégalités: il existe une matrice $H = H^T > 0$ ne dépendant que de W_{c2} telle que:

$$\left\|C_i \phi_i(s) W_{c_2}^{1/2}\right\|_\infty \le \|H\|_2^{1/2} \|C_i \phi_i(s) S\|_\infty \quad \text{avec } S = [B_i \quad A_i B_i \quad \ldots A_{21}^{n_i - 1} B_i]$$

et $W_{c2} \le \|H\|_s S S^T$

Un résultat similaire peut être obtenu sur la borne de $\left\|W_{o_2}^{1/2} \phi_o(s) B_o\right\|_\infty$ en utilisant la matrice d'observabilité à la place de celle de commandabilité. ❑

De nombreuses études sur l'approximation pondérée fréquentiellement se présentent avec uniquement une pondération en entrée ou en sortie. Il s'ensuit alors le corollaire suivant qui peut être déduit directement du théorème précédent.

Corollaire II.2

Soient G(s), $P_i(s)$ et $P_o(s)$ définis ci-dessus. Alors la fonction de transfert d'ordre réduit (r), obtenue par simple pondération (soit en entrée avec $P_i(s)$, soit en sortie avec $P_o(s)$) est stable [ENN-84b] et les bornes de l'erreur suivantes sont:

$$\|[G(s) - G_r(s)]\, P_i(s)\|_\infty \le 2 \sum_{k=r+1}^{n} \sqrt{\sigma_k^2 + \alpha_k \sigma_k^{3/2}} \qquad \text{(II.122.a)}$$

$$\|P_o(s)\, [G(s) - G_r(s)]\|_\infty \le 2 \sum_{k=r+1}^{n} \sqrt{\sigma_k^2 + \beta_k \sigma_k^{3/2}} \qquad \text{(II.122.b)}\square$$

Remarque

Dans le cas où les pondérations ne sont pas prises en compte, c'est-à-dire lorsque $P_i(s) = I_m$ et $P_o(s) = I_p$, on déduit directement du théorème précédent la borne donnée par [ENN-84a] et [GLO-84] (voir (II.34)):

$$\|G(s) - G_r(s)]\|_\infty \le 2 \sum_{k=r+1}^{n} \sigma_k \qquad \text{(II.123)}\square$$

II.4.4. Troncation équilibrée et stabilité en boucle fermée

[ENN-84a], [LIU-86], [AND-89]

Les pondérations intervenant dans les grammiens pondérés (voir (II.111) et (II.112)) vont être déterminées de façon à refléter le comportement en boucle fermée (performances et stabilité). Ainsi, dans cette partie l'approximation du correcteur est considérée en boucle fermée plutôt que celle du correcteur pris isolément.

Soient P(s) l'installation en boucle fermée représentée par la figure II.3 et $C_r(s)$ le correcteur réduit de P(s):

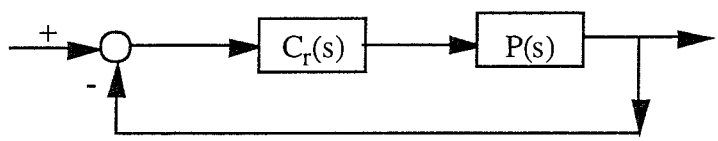


Figure II.3: installation en boucle fermée avec le correcteur réduit

Afin d'assurer la stabilité et de considérer la boucle de référence, on transforme le schéma de la figure II.3 afin d'obtenir un schéma équivalent faisant apparaître le terme $(C_r(s) - C(s))$ (figure II.4).

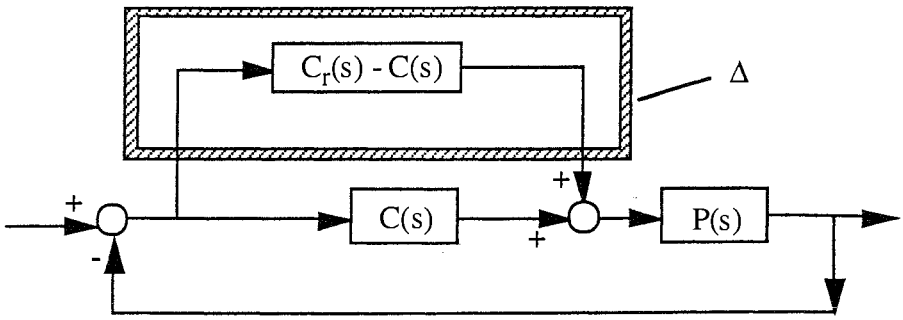


Figure II.4: transformation du schéma de la boucle fermée faisant apparaître l'approximation du correcteur

Ce schéma, faisant apparaître la boucle fermée initiale ainsi que l'approximation sur le correcteur se prête bien à l'approximation du théorème du faible gain [GRE-95] (voir § Annexes A.V.). Ce dernier transfert peut être vu encore comme l'illustre la figure II.5,

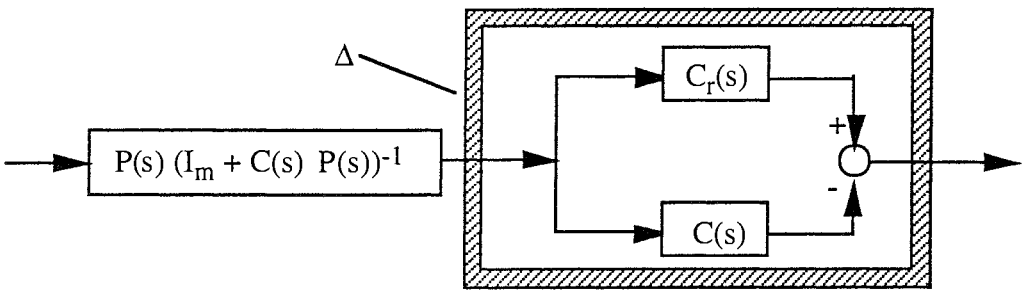


Figure II.5

Dans le cas d'une pondération en entrée, $P_i(s)$ est donnée par la relation:

$$P_i(s) = P(s)\ (I_p + C(s)\ P(s))^{-1} \qquad \text{(II.124)}$$

La stabilité en boucle fermée est assurée si $P_i(s)$ est stable et si:

$$\|(C(s) - C_r(s))\ P_i(s)\|_\infty < 1 \qquad \text{(II.125)}$$

On sait que $P_i(s)$ est stable car C(s) stabilise P(s). L'équation (II.125) correspond au théorème du faible gain appliqué sur la figure II.4, mais ce théorème requiert la stabilité de $(C_r(s) - C(s))$. Ainsi, un inconvénient se produit si le correcteur C(s) est instable car diviser ce dernier en sa partie stable et antistable peut être numériquement mal conditionné ($\Leftrightarrow$ matrice bloc diagonalisable) car l'information sur la partie antistable n'est pas prise en compte. Cette séparation stable et antistable de C(s) suffit à garantir la stabilité de $C_r(s)$ (voir le lemme II.7).

II.4.5. Troncation équilibrée en boucle fermée

II.4.5.1. Equilibrage et troncation du correcteur en boucle fermée

Ceton *et al.* [CET-93] proposent de réduire l'ordre du correcteur en tronquant les grammiens de commandabilité et d'observabilité en boucle fermée. Pour cela, considérons la figure II.6 ci-dessous où C(s) est le correcteur initial à réduire:

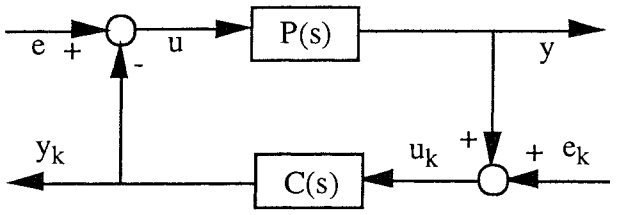


Figure II.6

Appelant respectivement x l'état de P(s) et x_k celui du correcteur C(s), indiquant avec k les éléments de la réalisation d'état de C(s), le système bouclé de la figure II.6 a pour réalisation d'état:

	x	x_k	e	e_k
$\dot{x}$	$A + B\Gamma E_k C$	$B\Gamma C_k$	$B\Gamma$	$B\Gamma E_k$
$\dot{x}_k$	$B_k\Gamma_k C$	$A_k + B_k\Gamma_k E C_k$	$B_k\Gamma_k E$	$B_k\Gamma_k$
y	$\Gamma_k C$	$E\Gamma C_k$	$\Gamma_k E$	$\Gamma_k - I_{n-k}$
y_k	$E_k\Gamma_k C$	ΓC_k	$\Gamma - I_n$	ΓE_k

Tableau II.1: configuration des matrices d'état du système bouclé

avec Γ et Γ_k données par:

$$\Gamma = (I_n - E_k E)^{-1},\ x \in \mathbb{R}^n \tag{II.126}$$

$$\Gamma_k = (I_{nk} - E E_k)^{-1},\ x_k \in \mathbb{R}^{nk} \tag{II.127}$$

Soient W_{ccl} et W_{ocl} les grammiens de commandabilité et d'observabilité du système bouclé, définis par:

$$W_{ccl} = \begin{bmatrix} W_c & W_{ck} \\ W_{ck}^T & W_{ckk} \end{bmatrix} \tag{II.128.a}$$

$$W_{ocl} = \begin{bmatrix} W_o & W_{ok} \\ W_{ok}^T & W_{okk} \end{bmatrix} \tag{II.128.b}$$

avec W_{ccl}, $W_{ocl} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et W_{ckk}, $W_{okk} \in \mathbb{R}^{nk\times nk}$. Les parties des grammiens W_{ckk} et W_{okk} peuvent être interprétées comme des mesures pour la commandabilité et l'observabilité des composantes du vecteur d'état du correcteur, x_k.

Conformément à la définition du grammien d'observabilité (voir (II.7) et (II.8)), les mesures de l'énergie des sorties de la boucle (y et y_k) dues à une condition initiale $[x^T(0) \quad x_k^T(0)]^T$ à t = 0 lorsque e = e_k = 0 sont données par:

$$\left\| \begin{matrix} y \\ y_k \end{matrix} \right\|_2 = [x_0^T \quad x_{k0}^T] + \begin{bmatrix} W_o & W_{ok} \\ W_{ok}^T & W_{okk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{k0} \end{bmatrix}$$

$$= x_0^T W_o x_0 + x_{ko}^T W_{ok}^T x_o + x_0^T W_{ok} x_{k0} + x_{k0}^T W_{okk} x_{k0} \qquad \text{(II.129)}$$

où $x_0 = x(0)$ et $x_{k0} = x_k(0)$. Comme on ne souhaite réduire que l'état de C(s), on ne s'intéresse pas à l'observabilité des états du système, on pose donc $x_0 = 0$. On obtient alors:

$$\left\| \begin{matrix} y \\ y_k \end{matrix} \right\|_2 = x_{k0}^T W_{okk} x_{k0} \qquad \text{(II.130)}$$

On utilise une démarche similaire à celle énoncée ci-dessus pour les grammiens de commandabilité. Conformément à la définition du grammien de commandabilité (voir (II.9) et (II.10)), l'énergie nécessaire pour atteindre l'état initial $X_0 = [x^T(0) \quad x_k^T(0)]^T$ à t = 0 lorsque $[x^T(-\infty) \quad x_k^T(-\infty)]^T = 0$ à $t = -\infty$, est déterminée par:

$$X_0^T W_{ccl}^{-1} X_0 = [x_0^T \quad x_{k0}^T] \begin{bmatrix} W_c & W_{ck} \\ W_{ck}^T & W_{ckk} \end{bmatrix}^{-1} [x_0 \quad x_{k0}] \qquad \text{(II.131)}$$

où $x_\infty = x(\infty)$ et $x_{k\infty} = x_k(\infty)$

Appliquons l'inversion matricielle ci-dessous et spécifions en uniquement le terme matriciel (2;2) car on s'intéresse à la commandabilité de x_k et pas à celle de x:

$$W_{ccl} = \begin{bmatrix} \Psi & \Psi_k \\ \Psi_k^T & \Psi_{kk} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & (\Psi_{kk} - \Psi_k^T \Psi^{-1} \Psi_k)^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.132)}$$

Il en résulte que:

$$X_0^T W_{ccl}^{-1} X_0 = x_0^T \Psi x_0 + x_{k0}^T \Psi_k^T x_0 + x_0^T \Psi_k x_{k0} + x_{k0}^T \Psi_{kk} x_{k0} \qquad \text{(II.133)}$$

Pour minimiser l'énergie nécessaire pour passer de $x_k(-\infty) = 0$ à x_{k0} indépendamment de l'état du système à t = 0, il faut annuler la dérivée par rapport à x_0 de l'expression (II.133), on obtient donc:

$$x_0 = - \Psi^{-1} \Psi_k \, x_{k0} \qquad \text{(II.134)}$$

Puis, en substituant l'expression de x_0 dans (II.133), on arrive aux égalités suivantes:

$$X_0^T W_{ccl}^{-1} X_0 = x_{k0}^T (\Psi_{kk} - \Psi_k^T \Psi^{-1} \Psi_k) \, x_{k0}$$

$$= x_{k0}^T W_{ccl}^{-1} x_{k0} \qquad \text{(II.135)}$$

En appelant T_k la matrice permettant de diagonaliser $W_{ckk}W_{okk}$, on obtient:

$$T_k W_{ckk} T_k^T = T_k^{-T} W_{okk} T_k^{-1} = \Sigma_k = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{nk}) \qquad \text{(II.136)}$$

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_{nk} \geq 0$ relatives au correcteur en boucle fermée. L'état du correcteur correspondant à cet équilibrage est donné par $\hat{x}_k = T_k x_k$. On peut remarquer que $\sigma_i = \lambda_i^{1/2}$ ($W_{ckk}W_{okk}$) indique l'importance de la contribution de la coordonnée $\hat{x}_{k,i+1}$ au comportement entrée-sortie de la boucle fermée. En particulier si $\sigma_i >> \sigma_{i+1}$ alors $\hat{x}_{k,i+1}$ affectera beaucoup moins le comportement entrée-sortie de la boucle fermée que $\hat{x}_{k,i}$. Le correcteur réduit est obtenu en tronquant la réalisation équilibrée en boucle fermée, basée sur les valeurs singulières de Hankel en boucle fermée.

II.4.5.2. Pondérations fréquentielles et boucle fermée

La méthode de troncation en boucle fermée [CET-93] que nous venons de présenter peut se formuler comme une réduction équilibrée avec pondérations fréquentielles en entrées ($P_i(s)$) et en sortie ($P_o(s)$) [ENN-84a], [ENN-84b] (voir les parties § II.4.3.1. et § II.4.3.2.).

A partir de la figure II.6, les fonctions de sensibilité $S_i(s)$ et $S_o(s)$ de la boucle fermée sont définies comme suit:

$$S_i(s) = (I_p + C(s) P(s))^{-1} \qquad \text{(II.137.a)}$$

et

$$S_o(s) = (I_m + P(s) C(s))^{-1} \qquad \text{(II.137.b)}$$

nous avons:

$$\begin{bmatrix} y \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(s)S_i(s) \\ S_i(s) \end{bmatrix} C(s)\, e_k \qquad \text{(II.138.a)}$$

et

$$y_k = C(s) \begin{bmatrix} S_o(s)P(s) & S_o(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ e_k \end{bmatrix} \qquad \text{(II.138.b)}$$

Ainsi, la figure II.6 et les relations (II.138.a) et (II.138.b) donnent les figures II.7.a et II.7.b:

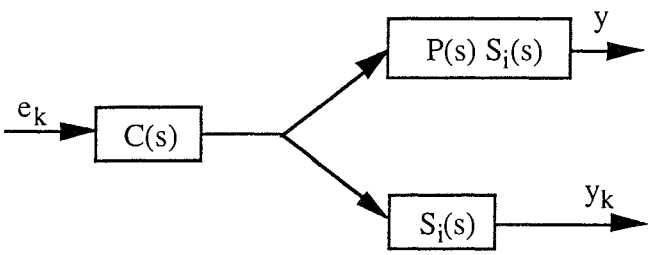


Figure II.7.a

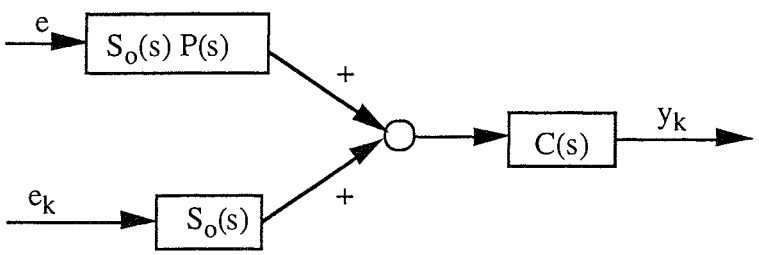


Figure II.7.b

Les pondérations en sortie sont formulées par $P_o(s)$ et valent:

$$P_o(s) = \begin{bmatrix} P(s)S_i(s) \\ S_i(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.139.a)}$$

Les pondération en entrée sont notées $P_i(s)$ et sont égales à:

$$P_i(s) = \begin{bmatrix} S_o(s)P(s) & S_o(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.139.b)}$$

L'équation de Lyapunov (II.111) correspond à la figure II.7.b avec la pondération $P_i(s)$ donnée par (II.139.b) tandisque l'équation de Lyapunov (II.112) correspond à la figure II.7.a avec la pondération $P_o(s)$ donnée par (II.139.a).

C(s) est un correcteur stabilisant, par conséquent, $P_i(s)$ et $P_o(s)$ sont stables. Pour minimiser l'influence de $(C_r(s) - C(s))$ sur la boucle fermée sur le rapport $\frac{\left\| \begin{bmatrix} y \\ y_k \end{bmatrix} \right\|_2}{\left\| \begin{bmatrix} e \\ e_k \end{bmatrix} \right\|_2}$, on définit le problème de troncation équilibrée suivant avec pondérations en entrée et en sortie:

$$\| P_o(s)\,(C(s) - C_r(s))\,P_i(s) \|_\infty \qquad \text{(II.140)}$$

Notons que la relation (II.140) est équivalente à réduire les grammiens W_{ckk} et W_{okk} (II.128) qui correspondent respectivement à W_{c2} (II.111) et à W_{o2} (II.112).

La réalisation des connections en série, utilisées dans (II.111) et (II.112) impliquent n + 2nk états (nk états inobservables et / ou non commandables), alors que la boucle de régulation est d'ordre n + nk ainsi que les grammiens W_{ccl} et W_{ocl} (II.128). Par conséquent, cela peut provoquer des problèmes numériques pour la résolution des équations de Lyapunov donnant les grammiens de commandabilité et d'observabilité (II.111) et (II.112). De plus (II.111) et (II.112) au lieu de (II.128) et (II.132) peut générer un correcteur réduit instable car $P_i(s) \neq I_m$ et $P_o(s) \neq I_p$ (voir lemme II.7). Si le correcteur C(s) est instable, les grammiens donnés en (II.128) correspondent à la boucle fermée qui est stable. Ce n'est pas le cas pour (II.111) et (II.112) car les produits $C(s)P_i(s)$ et $P_o(s)C(s)$ ne sont stables qu'après la simplification des n_k états de C(s) qui sont non commandables et / ou inobservables. Or, cette simplification ne doit être faite car elle entraînerait la disparition des termes W_{c2} et W_{o2} dans les équations (II.111) et (II.112).

II.4.6. Discussion

La méthode présentée au § II.4.3. comporte un inconvénient si le correcteur C(s) est instable. Dans ce cas, on est amené à procéder en une décomposition stable / antistable $C(s) = C_s(s) + C_{as}(s)$. Par conséquent, la réduction d'ordre est faite sur $C_s(s)$ (l'information de $C_{as}(s)$ n'est pas prise en compte). Cette décomposition est souvent mal conditionnée).

Lenz [LEN-88] et [WOR-94] mettent l'accent sur les performances robustes lors de la réduction du correcteur. En effet, l'objectif est d'obtenir un correcteur réduit qui, à la fois stabilise l'installation et assure des performances de type H_∞ en boucle fermée.

Goddard et Glover donnent des conditions sur les pondérations $P_i(s)$ et $P_o(s)$ afin que le système bouclé avec le correcteur réduit, préserve la stabilité interne ainsi que les déformations de type H_∞. Ces conditions portent sur l'erreur pondérée $P_o(s)\,(C(s) - C_r(s))\,P_i(s)$ [GOD-93] ou sur les facteurs co-premiers de cette erreur [GOD-94].

II.5. REDUCTION DES FACTEURS CO-PREMIERS DU CORRECTEUR ET REALISATION EQUILIBREE AVEC PONDERATION FREQUENTIELLE: STABILITE EN BOUCLE FERMEE

II.5.1. Formulation du problème

Une version condensée des résultats présentés dans cette section a été publiée dans [ZAS-95] et [FRA-95]. Le problème consiste à préserver les performances et la stabilité en boucle fermée indépendamment de la stabilité du correcteur. Les factorisations co-premières transformant un système instable en deux systèmes stables sont donc utilisées.

Considérons le système stable en boucle fermée décrit par la figure II.8

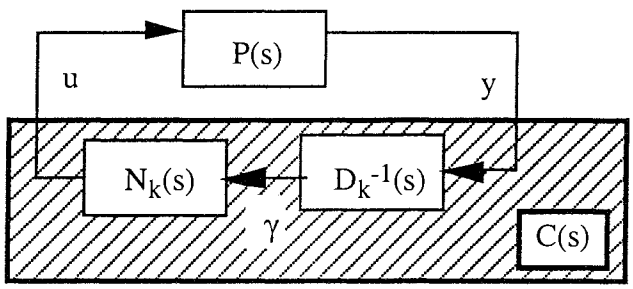


Figure II.8: système bouclé avec C(s)

où u et y sont respectivement les signaux d'entrée (commandes) et de sortie (mesures). P(s) est l'installation à commander et C(s) est le correcteur donné par:

$$C(s) = C_k (sI_{nk} - A_k)^{-1} B_k + E_k = N_k(s) D_k^{-1}(s) \qquad (II.141)$$

où $\{A_k, B_k, C_k, E_k\}$ est une réalisation d'état minimale, $A_k \in \mathbb{R}^{nk \times nk}$ et $E_k \in \mathbb{R}^{p \times m}$. $N_k(s)$ et $D_k(s)$ sont les facteurs co-premiers normalisés à droite de C(s) satisfaisant [MEY-88] et [VID-88]

$$N_k^T(-s) N_k(s) + D_k^T(-s) D_k(s) = I_m \qquad (II.142)$$

Soit Q ($Q = Q^T$, $Q > 0$), la solution stabilisante de l'équation algébrique de Riccati

$$(A_k - B_k S^{-1} E_k^T C_k)^T Q + Q (A_k - B_k S^{-1} E_k^T C_k) - Q B_k S^{-1} B_k^T Q + C_k^T R^{-1} C_k = 0 \qquad (II.143)$$

avec $R = I_p + E_k E_k^T$ et $S = I_m + E_k^T E_k$.

La réalisation d'état des facteurs co-premiers normalisés, $N_k(s)$ et $D_k(s)$ est donnée par [VID-88]

$$\begin{bmatrix} N_k(s) \\ D_k(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k+E_kF \\ F \end{bmatrix} (sI_{nk} - A_k - B_k F)^{-1} B_k S^{-1/2} + \begin{bmatrix} E_kS^{-1/2} \\ S^{-1/2} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.144.a)}$$

avec $F = - S^{-1} (E_k^T C_k + B_k^T Q)$ (II.144.b)

La réalisation d'état donnée par (II.144.a), appelée $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{E}_k\}$ est stable. De plus, elle est minimale si et seulement si $\{A_k, B_k, C_k, E_k\}$ est minimale (voir lemme II.3).

Soit $C_r(s)$ le compensateur d'ordre réduit

$$C_r(s) = N_{rk}(s) D_{rk}^{-1}(s) \qquad \text{(II.145)}$$

où le scalaire r indique l'ordre de $C_r(s)$. Les erreurs commises entre les facteurs co-premiers de $C_r(s)$ et $C(s)$ sont appelées $N_{ek}(s)$ et $D_{ek}(s)$ et sont données par

$$\begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{rk}(s) \\ D_{rk}(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_k(s) \\ D_k(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.146)}$$

Le système en boucle fermée de la figure II.8 avec $C_r(s)$ remplaçant $C(s)$ peut être représenté par la figure II.9 en utilisant $N_{ek}(s)$ et $D_{ek}(s)$.

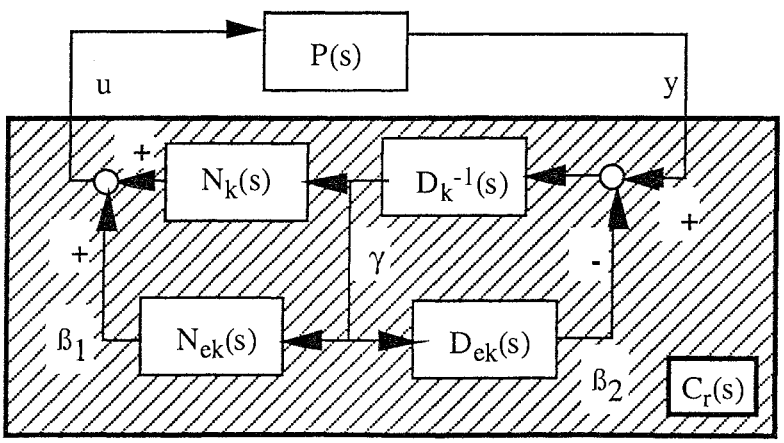


Figure II.9: système bouclé avec $C_r(s)$

La troncation de la réalisation équilibrée du correcteur, en garantissant la stabilité interne en boucle fermée, peut être transformée en un problème de minimisation H_∞ avec pondérations fréquentielles comme le souligne le théorème suivant, basé sur le théorème du faible gain.

Théorème II.7

Le correcteur d'ordre réduit $C_r(s)$, défini par (II.145) et (II.146), stabilise de manière interne l'installation P(s) si

i) Le correcteur C(s) stabilise de manière interne l'installation P(s),

ii) les erreurs sur les facteur co-premiers, $N_{ek}(s)$ et $D_{ek}(s)$, sont stables,

iii) $$\left\| D_k^{-1}(s)\,(I_m - P(s)\,C(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \qquad \text{(II.147)}\square$$

Démonstration

Les signaux u, γ, β_1 et β_2 sont définis dans la figure II.9 comme

$$\begin{bmatrix} u \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & I_p & -C(s) \\ D_k^{-1}(s) & 0 & -D_k^{-1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.148.a)}$$

et $$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \gamma \qquad \text{(II.148.b)}$$

La figure II.10 qui explicite les relations (II.148) et qui prend en compte les erreurs entre les facteurs de $C_r(s)$ et C(s), peut être utilisée pour l'analyse de la stabilité de la boucle fermée de la figure II.9.

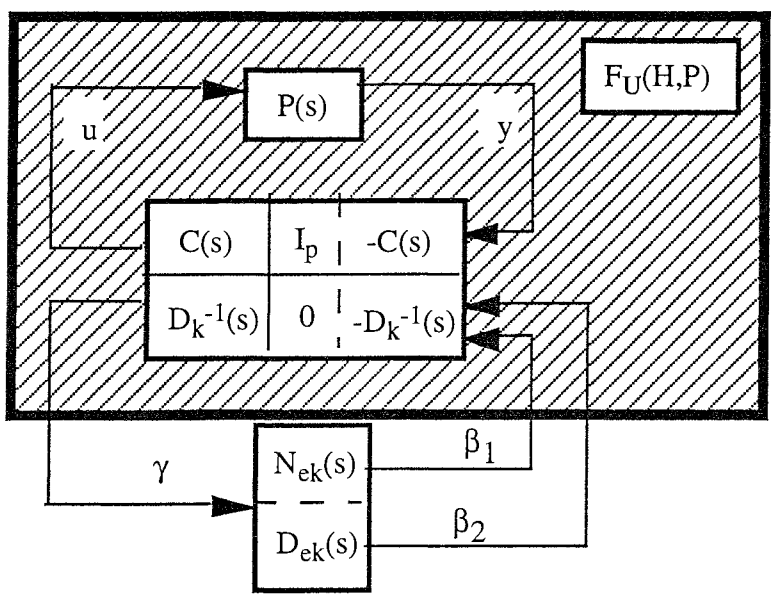


Figure II.10: système bouclé prenant en considération
les erreurs entre les facteurs de $C_r(s)$ et C(s)

En appliquant le théorème du faible gain, le système en boucle fermée de la figure II.10 est stable de manière interne si les conditions i) et ii) sont satisfaites et si

$$\left\| F_U(H,P) \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \qquad \text{(II.149.a)}$$

où $F_U(H,P)$ est une transformation fractionnelle linéaire supérieure [GRE-95] et H(s) est donnée par

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.149.b)}$$

avec $H_{11}(s) = C(s)$, $H_{12}(s) = [\ I_p \quad -C(s)\ ]$, $H_{21}(s) = D_k^{-1}(s)$ et $H_{22}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -D_k^{-1}(s) \end{bmatrix}$. La relation (II.147) étant équivalente à la relation (II.149.a), on a:

$$F_U(H,P) = \begin{bmatrix} 0 & -D_k^{-1}(s) \end{bmatrix} + D_k^{-1}(s)\, P(s)\, (I_p - C(s)\, P(s))^{-1} [\ I_p \quad -C(s)\ ]$$

$$= D_k^{-1}(s)\, (I_m - P(s)\, C(s))^{-1} [\ P(s) \quad -I_m - (I_m - P(s)C(s))^{-1} P(s)C(s)\ ]$$

$$= D_k^{-1}(s)\, (I_m - P(s)\, C(s))^{-1} [\ P(s) \quad -I_m\ ] \qquad \text{(II.150)}\blacksquare$$

La mesure $\left\| F_U(H,P) \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| D_k^{-1}(s)\, (I_m - P(s)\, C(s))^{-1} [\ P(s) \quad -I_m\ ] \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty$ mesure donc la robustesse de la stabilité en boucle fermée vis-à-vis des facteurs co-premiers du correcteur.

II.5.2. Réduction de l'ordre et propriétés

II.5.2.1. Premier algorithme

Comme on peut le voir dans le théorème II.7, la méthode de réduction du correcteur proposée est basée sur la troncation équilibrée avec pondérations fréquentielles qui nécessite la diagonalisation des grammiens pondérés fréquentiellement en sortie [ENN-84b].

Rappelons brièvement cette procédure. Soit $\{A_o, B_o, C_o, E_o\}$, la réalisation d'état minimale de la pondération en sortie $F_U(H,P)$ donnée en (II.147). En se référant aux grammiens pondérés définis dans [ENN-84a] et plus particulièrement aux équations (II.111) et (II.112) de ce manuscrit, on doit résoudre deux équations de Lyapunov, l'une pondérée (II.112), l'autre non (II.111). Les matrices A_f, B_f et C_f sont définies par

$$A_f = \begin{bmatrix} \bar{A}_k & 0 \\ B_o\bar{C}_k & A_o \end{bmatrix},\ B_f = \begin{bmatrix} I_{nk} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } C_f = \begin{bmatrix} E_o\bar{C}_k & C_o \end{bmatrix} \qquad \text{(II.151.a)}$$

où $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{E}_k\}$ est la réalisation d'état minimale donnée par (II.144.a). Le grammien de commandabilité non pondéré (W_c) et le grammien d'observabilité pondéré (W_o) sont obtenus en résolvant ces deux équations de Lyapunov

$$\bar{A}_k W_c + W_c \bar{A}_k^T + \bar{B}_k \bar{B}_k^T = 0 \qquad \text{(II.151.b)}$$

$$A_f^T W_{fo} + W_{fo} A_f + C_f^T C_f = 0 \qquad \text{(II.151.c)}$$

le grammien W_o étant déduit de W_{fo} avec la relation suivante:

$$W_o = B_f^T W_{fo} B_f \qquad \text{(II.151.d)}$$

Les racines carrées des valeurs propres de $W_c W_o$ donnent le grammien diagonal équilibré, appelé W_b. La matrice des vecteurs propres de $W_c W_o$ est appelée T et donnée par

$$(W_c^n)^2 = (W_o^n)^2 = W_b^2 = T W_c W_o T^{-1} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_{nk}^2) \qquad \text{(II.151.e)}$$

et $\quad \bar{A}_k^n = T \bar{A}_k T^{-1}, \bar{B}_k^n = T \bar{B}_k$ et $\bar{C}_k^n = \bar{C}_k T^{-1}$ (II.151.f)

avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_{nk} > 0$.

La matrice T définit le changement de base transformant la réalisation $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{E}_k\}$ en une réalisation $\{\bar{A}_k^n, \bar{B}_k^n, \bar{C}_k^n, \bar{E}_k^n\}$ équilibrée (voir [ENN-84b] ainsi que la partie § II.4.3. de ce manuscrit). Présentons maintenant un algorithme, basé sur la méthode donnée dans [MEY-88], afin de résoudre le problème de réduction des facteurs co-premiers équilibrés du correcteur défini par le théorème II.7 (voir l'algorithme présenté au § II.3.2.1.).

Algorithme 1

Etape 1: Calculer la réalisation minimale de $N_k(s)$ et $D_k(s)$, appelée $\{\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k, \bar{E}_k\}$ (voir (II.144.a)).

Etape 2: Calculer la réalisation minimale de $F_U(H,P)$, appelée $\{A_o, B_o, C_o, E_o\}$ (voir (II.150)).

Etape 3: Résoudre (II.151.a)-(II.151.f) pour obtenir le grammien W_b et la réalisation $\{\bar{A}_k^n, \bar{B}_k^n, \bar{C}_k^n, \bar{E}_k^n\}$. Puis, choisir l'ordre du correcteur réduit r de telle sorte que $\sigma_r > \sigma_{r+1}$.

Etape 4: Partitionner les matrices $\bar{A}_k^n$, $\bar{B}_k^n$ et $\bar{C}_k^n$ telles que

$$\bar{A}_k^n = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}, \bar{B}_k^n = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} \text{ et } \bar{C}_k^n = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} \\ \bar{C}_{21} & \bar{C}_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{(II.152.a)}$$

où $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, $\bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{nk-r\times nk-r}$, $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $\bar{B}_2 \in \mathbb{R}^{nk-r\times m}$, $\bar{C}^{11} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ et $\bar{C}^{22} \in \mathbb{R}^{m\times nk-r}$.

Etape 5: La réalisation des facteurs co-premiers du compensateur d'ordre réduit $C_r(s)$ est donnée par

$$\begin{bmatrix} N_{rk}(s) \\ D_{rk}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} \\ \bar{C}_{21} \end{bmatrix} (sI_r - \bar{A}_{11})^{-1} \bar{B}_1 + \bar{E}_k \qquad \text{(II.152.b)}$$

Etape 6: La réalisation du compensateur d'ordre réduit $C_r(s)$ est donnée par (II.145). ❑

Contrairement à la méthode décrite dans [LIU-86], [LIU-90] et [AND-89], la procédure donnée par l'algorithme 1 ne se réduit pas au cas de correcteurs formés par la combinaison de loi de retour d'état stabilisable et d'observateur d'état.

Propriété II.3

Si le correcteur original est strictement propre ($\Leftrightarrow E_k = 0$), on a $\bar{E}_k^T = [\ 0 \quad I_m\ ]$ et le correcteur $C_r(s)$ dans l'étape 6 est donné par

$$C_r(s) = \bar{C}_{11} (sI_r - \bar{A}_{11} + \bar{B}_1 \bar{C}_{21})^{-1} \bar{B}_1 \qquad \text{(II.153)}\square$$

II.5.2.2. Deuxième algorithme

On simplifie l'expression de la pondération $F_U(H,P)$.

Algorithme 2

Cet algorithme est identique à l'algorithme 1, excepté l'étape 2 où la pondération fréquentielle $F_U(H,P)$ est remplacée par $(I_m - P(s)C(s))^{-1}[\ P(s) \quad -I_m\ ]$. ❑

II.5.2.3. Comportement en boucle fermée après troncation

II.5.2.3.1. Propriétés

Propriété II.4

En utilisant les mêmes arguments que Enns (voir lemme II.7 (cas ii))) et en supposant que $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ (voir théorème 3.2 dans [PER-82]), les facteurs co-premiers $N_{rk}(s)$ et $D_{rk}(s)$ donnés par l'étape 5 sont stables car les pondérations en sortie utilisées dans l'étape 2 et les facteurs co-premiers normalisés de C(s) sont stables. Mais, dans de nombreux cas, les facteurs co-premiers $N_{rk}(s)$ et $D_{rk}(s)$ ne sont pas normalisés. ❑

Propriété II.5

Contrairement à l'algorithme 2, l'algorithme 1 minimise explicitement la condition de stabilité (II.147). ❑

Propriété II.6

Il est bien connu que les valeurs singulières de Hankel σ_i, données en (II.151.e), quantifient la commandabilité et l'observabilité de la $i^{ème}$ coordonnée de l'état de la réalisation équilibrée pondérée fréquentiellement (II.151.f), c'est-à-dire l'influence de cette coordonnée sur la réponse impulsionnelle (en d'autres mots, σ_i est une valeur singulière de l'application reliant les entrées passées aux sorties futures) [MOO-81], [GLO-84]. Ainsi, la supposition $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ n'est pas restrictive, elle implique que seuls les r plus importantes coordonnées de l'état de la réalisation équilibrée pondérée en fréquence (II.151.f) sont retenues dans le correcteur d'ordre réduit $C_r(s)$. ❑

II.5.2.3.2. Performances en boucle fermée

Propriété II.7 Dans [VID-85], il a été montré que

$$G(s) = -X(s)\, Y^{-1}(s) = -\bar{Y}^{-1}(s)\, \bar{X}(s) \qquad \text{(II.154.a)}$$

$$C(s) = N_k(s)\, D_k^{-1}(s) = \bar{D}_k^{-1}(s)\, \bar{N}_k(s) \qquad \text{(II.154.b)}$$

(Le signe moins dans (II.154.a) est dû à la réaction positive dans la figure II.8) et que l'on a l'identité de Bezout suivante:

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_k(s) & \bar{N}_k(s) \\ -\bar{X}(s) & \bar{Y}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(s) & -N_k(s) \\ X(s) & D_k(s) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.154.c)}$$

Alors, à partir de (II.154), la pondération fréquentielle de (II.147) peut s'écrire comme

$$D_k^{-1}(s)\,(I_m - P(s)\,C(s))^{-1}\,[\;P(s)\quad -I_m\;] = [\;\bar{X}(s)\quad -\bar{Y}(s)\;] \qquad \text{(II.155)}\square$$

On peut voir dans la propriété II.7 que la pondération fréquentielle dans le problème de minimisation (II.147) contient toutes les informations sur l'installation à stabiliser et permet d'obtenir une stabilité robuste contre les erreurs sur les facteurs co-premiers du correcteur. De plus, cette pondération tient compte des performances en boucle fermée ($\Leftrightarrow (I_m-P(s)C(s))^{-1}$) et la stabilité robuste contre les erreurs additives sur le correcteur ($\Leftrightarrow (I_m-P(s)C(s))^{-1}G(s)$, voir le critère de stabilité [LIU-86], [LIU-90] et [AND-89]). Ainsi, dans la procédure de réduction du correcteur C(s), le comportement en boucle fermée obtenu avec C(s) est introduit dans la pondération utilisée dans l'algorithme 1. De même, l'algorithme 2 prend en considération les performances et la stabilité robuste en boucle fermée contre les erreurs additives sur le correcteur.

II.5.3. Stabilité en boucle fermée

Le théorème suivant établit des conditions suffisantes pour la stabilité en boucle fermée.

Théorème II.8

Supposons que $\sigma_r > \sigma_{r+1}$. Si les conditions i) et iii) du théorème II.7 sont satisfaites, alors le correcteur d'ordre réduit $C_r(s)$, stabilise de manière interne l'installation P(s). ❐

Démonstration

En utilisant les équations (II.145) et (II.146) et le fait que les facteurs co-premiers normalisés de C(s), donnés par (II.144.a), sont stables, il est facile de voir que les erreurs sur les facteurs co-premiers ($\Leftrightarrow N_{ek}(s)$ et $D_{ek}(s)$) sont stables si les facteurs co-premiers $N_{rk}(s)$ et $D_{rk}(s)$ donnés par l'étape 5 des algorithmes 1 ou 2 sont stables. Sous l'hypothèse $\sigma_r > \sigma_{r+1}$, il est montré à travers la propriété II.4 que $N_{rk}(s)$ et $D_{rk}(s)$ sont stables si la condition i) du théorème II.7 est vérifiée. Ainsi, si le correcteur d'ordre réduit $C_r(s)$ est donné par les algorithmes 1 ou 2, le théorème II.8 donne des conditions suffisantes pour la stabilité interne du système de la figure II.9 en boucle fermée. ■

II.6. APPLICATIONS

II.6.1. Présentation des applications

On compare les algorithmes 1 et 2, notés respectivement méthodes (1) et méthodes (2), avec cinq autres procédures de réduction de l'ordre du correcteur. Nous allons par conséquent tester sept méthodes de réduction de correcteur appliquées tout d'abord au système à quatre disques, puis à la plate-forme Eurostar 2000+ de satellite de télécommunication. Pour davantage de détails, se référer au chapitre I où ces deux exemples sont décrits avec précision. En référant par (0) le correcteur initial, les sept méthodes comparées sont listées ci-dessous:

Correcteur initial (0)

Méthode proposée (algorithme 1, pondération en sortie $P_o(s)$, partie § II.5.2.1.) (1)

Méthode proposée (algorithme 2, pondération en sortie $P_o(s)$, partie § II.5.2.2.) (2)

Réduction équilibrée (partie § II.2.3.1.) (3)

Approximation optimale de Hankel (partie § II.2.3.2.) (4)

Réduction équilibrée avec des facteurs co-premiers (partie § II.3.2.1.) (5)

Réduction équilibrée, stabilité en boucle fermée (pondération en entrée $P_i(s)$, partie § II.4.3.) (6)

Réduction équilibrée en boucle fermée (pondérations en entrée et en sortie $P_i(s)$ et $P_o(s)$, partie § II.4.4.) (7)

Les critères de performance de la réduction du correcteur sont notés N_i, (i = 1 à 4). Les critères N_1 à N_3 présentent des distances non pondérées (N_1) et pondérées (N_2, N_3) entre le correcteur d'ordre plein C(s) et celui d'ordre réduit $C_r(s)$. Ces quatre critères sont donnés par:

$N_1 = \|C(s) - C_r(s)\|_\infty$ (méthodes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

$N_2 = \|(C(s) - C_r(s))\, P(s)\, (I_p - C(s)\, P(s))^{-1}\|_\infty$ (méthodes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

$$N_3 = \| D^{-1}(s)\,(I_m - P(s)\,C(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \|_\infty \qquad \text{(méthodes 1, 2, 5)}$$

$$N_4 = \| (I_m - P(s)\,C(s))^{-1} \begin{bmatrix} P(s) & -I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ek}(s) \\ D_{ek}(s) \end{bmatrix} \|_\infty \qquad \text{(méthode 2)}$$

Le critère N_3 est calculé uniquement pour les méthodes 1, 2 et 5 puisque cette distance mesure la stabilité en boucle fermée si les facteurs co-premiers du correcteur sont utilisés dans la procédure de troncation. N_4 est calculé seulement pour la méthode 2 (voir algorithme 2) parce que la distance ne peut être employée pour mesurer la robustesse de la stabilité en boucle fermée aux erreurs sur le correcteur.

II.6.2. Système à quatre disques [ZAS-95]

Le système à quatre disques est présenté au paragraphe I.1. Les différents critères décrits ci-dessus portent sur la réduction du correcteur initial d'ordre 8 à différents ordres (de 5 à 2). Le critère Obj représente la norme H_2 d'un système (voir § Annexes A.I.). On peut constater comme en témoignent les tableaux suivants, l'importance du choix de la méthode de réduction à employer.

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**0.045**	0.045	×	×	×	0.040	0.044
N_2	×	**0.071**	0.071	×	×	×	**0.070**	0.070
N_3	×	**0.070**	0.070	×	×	×	×	×
N_4	×	×	0.070	×	×	×	×	×
Obj	0.0834	0.0840	0.0840	×	×	×	0.0854	0.0836

Tableau II.2: comparaison des performances (**ordre 8 à 5**)

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**0.040**	0.040	×	0.043	×	0.040	0.047
N_2	×	**0.063**	0.063	×	0.668	×	**0.063**	0.075
N_3	×	**0.063**	0.063	×	×	×	×	×
N_4	×	×	0.063	×	×	×	×	×
Obj	0.0834	0.0838	0.0838	×	0.0961	×	0.0838	0.0838

Tableau II.3: comparaison des performances (**ordre 8 à 4**)

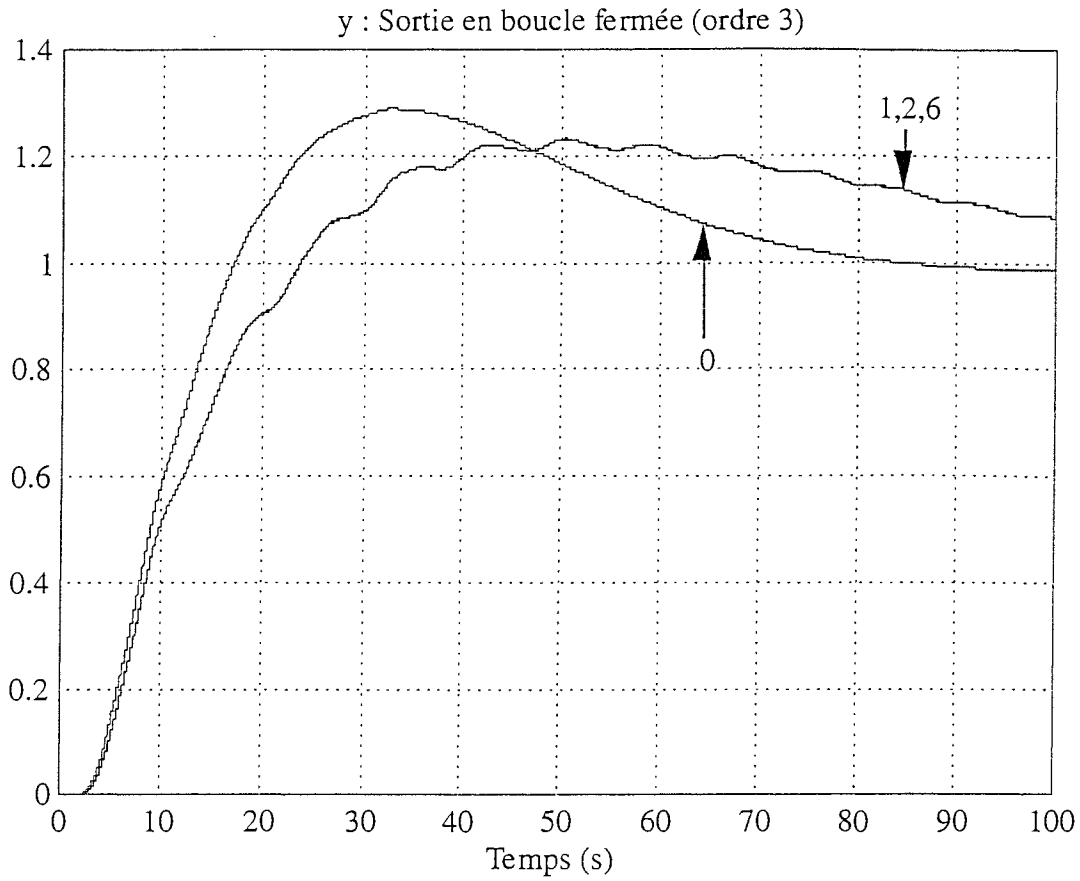
Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**0.102**	0.102	×	×	×	1.356	×
N_2	×	**0.572**	0.573	×	×	×	**0.339**	×
N_3	×	**0.573**	0.574	×	×	×	×	×
N_4	×	×	0.574	×	×	×	×	×
Obj	0.0834	0.0641	0.0641	×	×	×	0.064	×

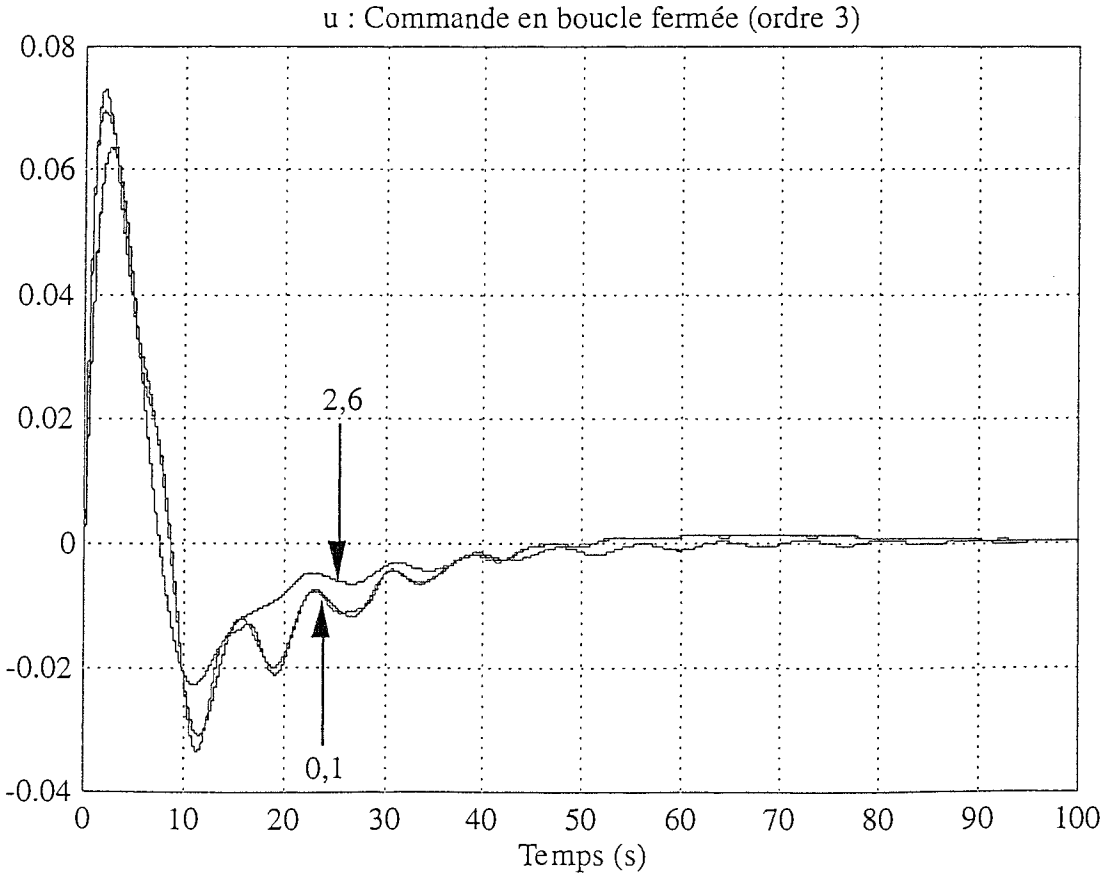
Tableau II.4: comparaison des performances (**ordre 8 à 3**)

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**0.104**	0.104	**0.092**	**0.093**	0.092	0.104	×
N_2	×	**0.327**	0.327	0.762	1.123	0.760	**0.327**	×
N_3	×	**0.322**	0.322	×	×	0.759	×	×
N_4	×	×	0.322	×	×	×	×	×
Obj	0.0834	0.0913	0.0913	0.0868	1.02	0.0866	0.0913	×

Tableau II.5: comparaison des performances (**ordre 8 à 2**)

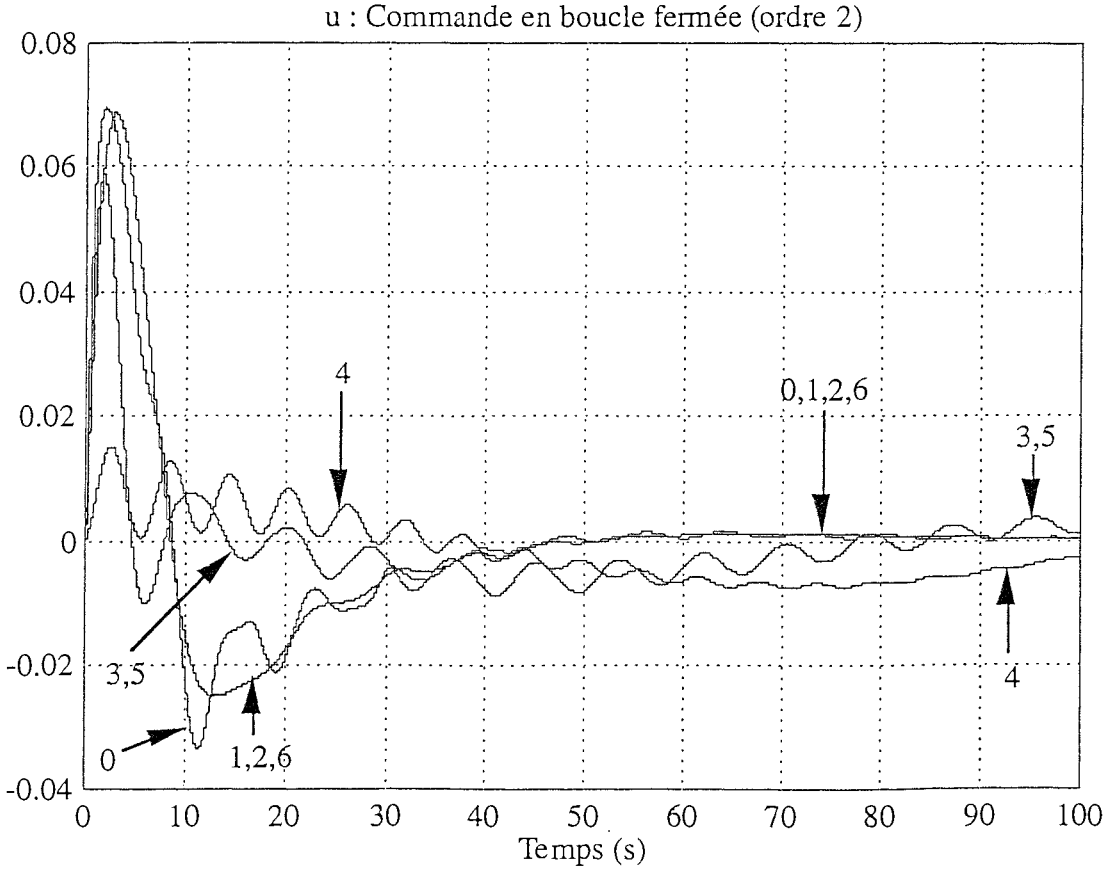
Les courbes représentées par les figures II.11 à II.14 illustrent la sortie et la commande en boucle fermée, les ordres de réduction étant égaux à 3 puis à 2.





Figures II.11 et II.12





Figures II.13 et II.14

Dans cet exemple, on peut remarquer tout d'abord que certaines méthodes génèrent une instabilité. En effet, celles non pondérées numérotées de 3 à 5 et celle en boucle fermée référée par 7 donnent une boucle fermée instable:

- pour un correcteur d'ordre égal à 5, les méthodes 3 ,4 et 5,
- pour un correcteur d'ordre réduit à 4, les méthodes 3 et 5,
- pour un correcteur d'ordre égal à 3, les méthodes 3, 4, 5 et 7,
- enfin, si l'ordre est égal à 2, uniquement la méthode 7.

On peut également constater que la stabilité en boucle fermée est améliorée si elle est intégrée dans la pondération de la procédure de troncation (méthode 1, 2 et 6, dans la méthode 2 la pondération est proche de celle de la méthode 1): les critères de stabilité N_2 et N_3 sont donc des mesures fiables de la marge de stabilité associée à une méthode de troncation (mais représentent seulement des conditions suffisantes).

A travers les figures II.11 et II.13, on remarque que les correcteurs réduits obtenus par les méthodes 1, 2 et 6 sont proches du correcteur initial C(s) (méthode 0). Ce n'est pas le cas avec les méthodes 3, 4 et 5 dans la figure II.13. Ces résultats montrent que les pondérations utilisées dans les méthodes 1, 2 et 6 prennent en compte le comportement en boucle fermée. Cela confirme que l'objectif d'une technique de troncation d'un correcteur ($\Leftrightarrow$ approximation en boucle fermée) est différente de la procédure standard de réduction d'un modèle ($\Leftrightarrow$ approximation du correcteur pris isolément). Par conséquent, le critère N_1 qui mesure uniquement la distance entre C(s) et $C_r(s)$ n'est pas fiable pour la réduction du correcteur en boucle fermée: le critère N_1 est plus petit pour les méthodes 3, 4 et 5 que pour les méthodes 1, 2, 6 dans le tableau II.5 bien que la sortie de la boucle fermée figure II.13 avec les méthodes 3, 4 et 5 est loin de l'initiale (méthode 0). Globalement, on peut constater que la méthode 1 est la plus efficace de toutes celles programmées. Elle se différencie plus particulièrement des méthodes 2 et 6 comme en témoigne la courbe II.12.

II.6.3. Plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ [FRA-95], [ZAS-95], [CAR-95]

La plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+ est décrite au paragraphe § I.2. Rappelons brièvement les transferts représentant les performances et robustesse en boucle fermée:

$C_{12}(s)$: maximisation du gain statique, basses fréquences,

$C_{31}(s)$: rejection des modes souples, hautes fréquences,

$C_{22}(s)$: robustesse en stabilité, fréquence de coupure.

Un critère de qualité (appelé Obj) pour ces méthodes de réduction à tester sur cette application est la norme H_∞ du transfert augmenté de la boucle fermée, incluant les spécifications de robustesse et de performance utilisées pour la synthèse de la loi de commande. Obj représente plus spécifiquement le Compromis performances / robustesse, $\|C_{cl}\,(sI - A_{cl})\,B_{cl} + E_{cl}\|_\infty$. Les marges de gain et de phase sont appelées G_m et P_m.

Les différents critères G_m, P_m décrits dans le paragraphe § II.6.1. portent sur la réduction du correcteur H_∞ de réalisation d'état $\{A_{hinf}, B_{hinf}, C_{hinf}, E_{hinf}\}$ d'ordre 10 (voir figure I.9) à différents ordres (de 6 à 3). Le correcteur à implémenter est obtenu par la mise en série du correcteur d'ordre réduit et du pré-compensateur d'ordre 4 de réalisation d'état $\{A_{pre}, B_{pre}, C_{pre}, E_{pre}\}$. Par conséquent, l'ordre du compensateur initial complet est de 14 et les réductions effectuées procurent les ordres 10 à 7. Les tableaux suivants offrent une synthèse numérique et comparative des sept méthodes testées aux différents ordres de réduction du correcteur.

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**14.6**	18.9	**11.5**	**10.2**	18.7	14.9	194
N_2	×	**0.104**	0.008	0.082	0.088	0.004	0.548 e-3	1.383
N_3	×	**0.006**	0.009	×	×	0.009	×	×
N_4	×	×	0.69 e-6	×	×	×	×	×
Obj	0.9996	**1.112**	1.007	1.076	1.071	1.004	0.999	2.576
P_m	-152.1	**-152.1**	-152.2	-152.1	-149.9	-152.2	-152.1	-152.4
G_m	43.6	**43.2**	42.7	43.8	43.8	**42.9**	43.3	43.7

Tableau II.6: comparaisons des performances (**ordre 10 à 6**)

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**11.0**	39.3	**6.5**	**10.2**	323.6	143.5	18.4
N_2	×	**0.052**	0.058	0.073	0.088	0.142	**0.037**	0.160
N_3	×	**0.007**	0.018	×	×	0.236	×	×
N_4	×	×	0.492 e-4	×	×	×	×	×
Obj	0.9996	**1.039**	1.041	1.057	1.071	1.260	1.049	1.108
P_m	-152.1	**-152.1**	-152.2	-150.7	-149.9	-151.3	-152.7	-152.4
G_m	43.6	**43.2**	43.4	43.5	43.8	**48.8**	***37.8***	43.5

Tableau II.7: comparaisons des performances (**ordre 10 à 5**)

Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**70**	429.3	**35.12**	**32.2**	360.0	502.76	**36.7**
N_2	×	**0.220**	0.420	0.302	0.225	**0.176**	**0.282**	0.305
N_3	×	**0.103**	0.249	×	×	0.282	×	×
N_4	×	×	0.34xe-3	×	×	×	×	×
Obj	0.9996	**1.145**	1.155	1.263	1.230	1.326	1.165	1.288
P_m	-152.1	**-154.8**	-151.3	-155.0	-150.3	-149.3	-151.5	-153.7
G_m	43.6	**44.5**	**47.3**	43.4	43.4	**49.8**	***28.6***	43.1

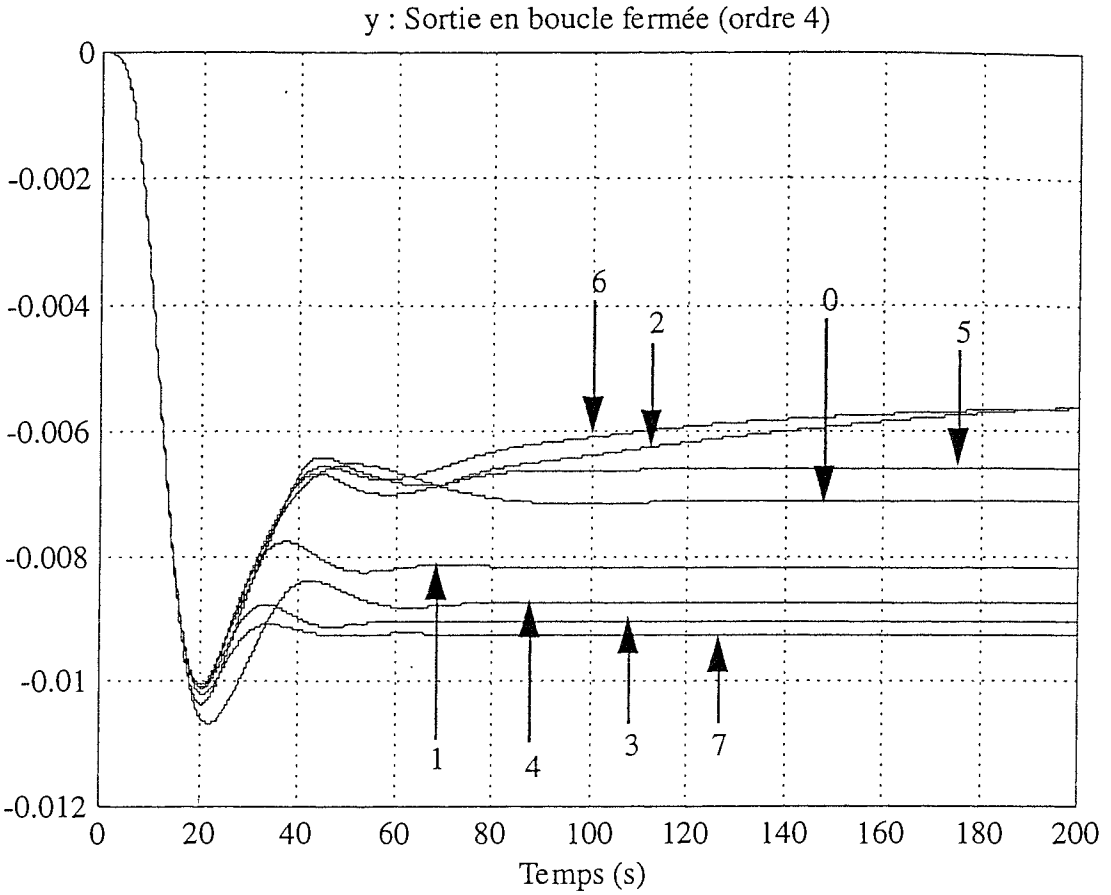
Tableau II.8: comparaisons des performances (**ordre 10 à 4**)

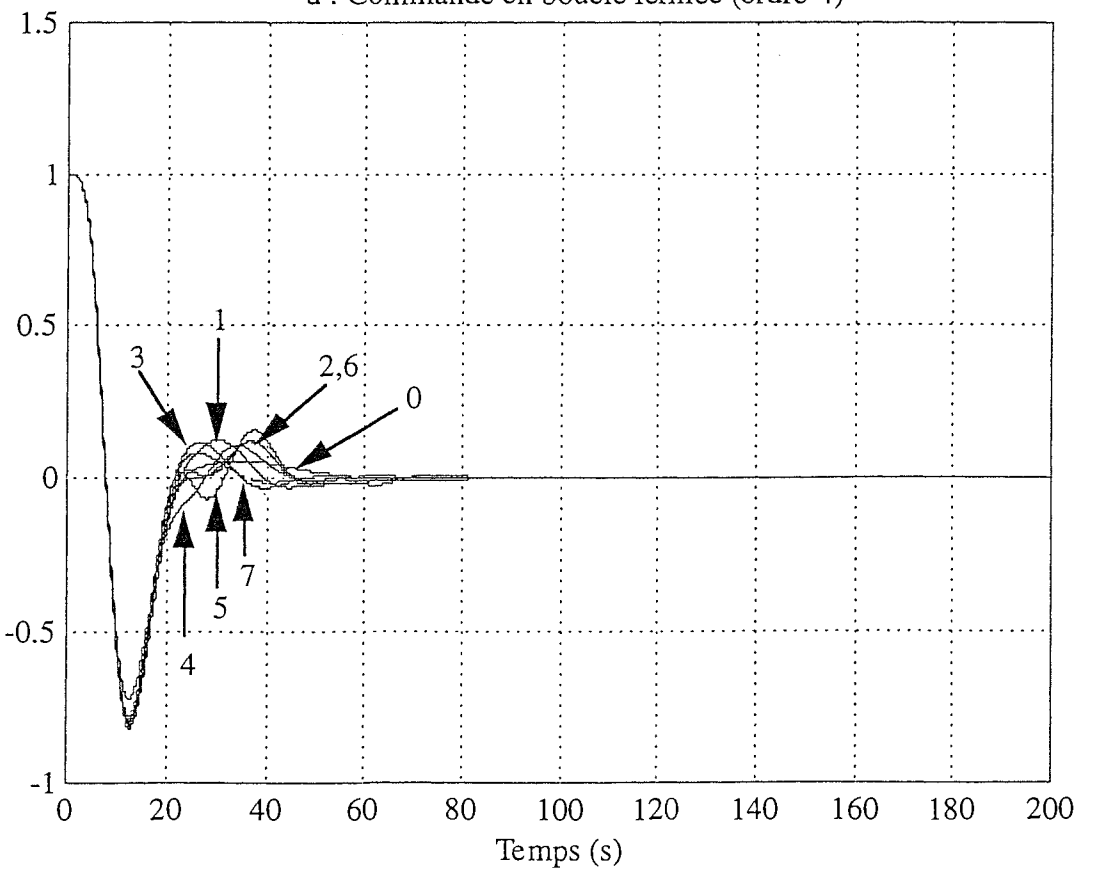
Méthodes	0	1	2	3	4	5	6	7
N_1	×	**270.0**	406.4	×	×	537.5	1356.4	181.8
N_2	×	**0.196**	**0.141**	×	×	0.400	**0.334**	0.791
N_3	×	**0.254**	0.275	×	×	0.569	×	×
N_4	×	×	0.42xe-3	×	×	×	×	×
Obj	0.9996	**1.306**	**1.190**	×	×	2.007	1.464	2.886
P_m	-152.1	**-150.1**	-151.4	×	×	-146.3	-150.8	-168.2
G_m	43.6	**45.5**	**50.9**	×	×	**65.3**	***28.9***	42.7

Tableau II.9: comparaisons des performances (**ordre 10 à 3**)

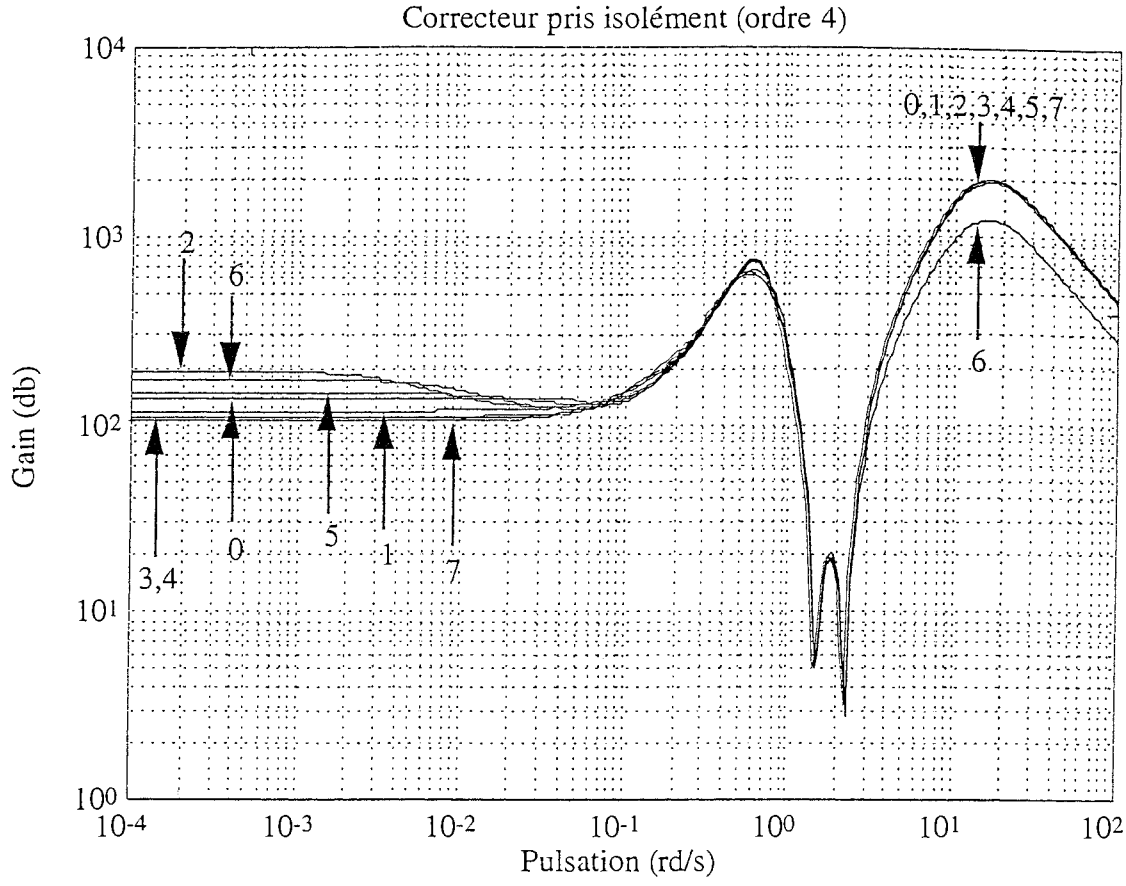
La pulsation de la bande passante est de l'ordre de 0.223 rad/s pour le correcteur initial. Elle varie très peu quels que soient la méthode ou l'ordre utilisés.

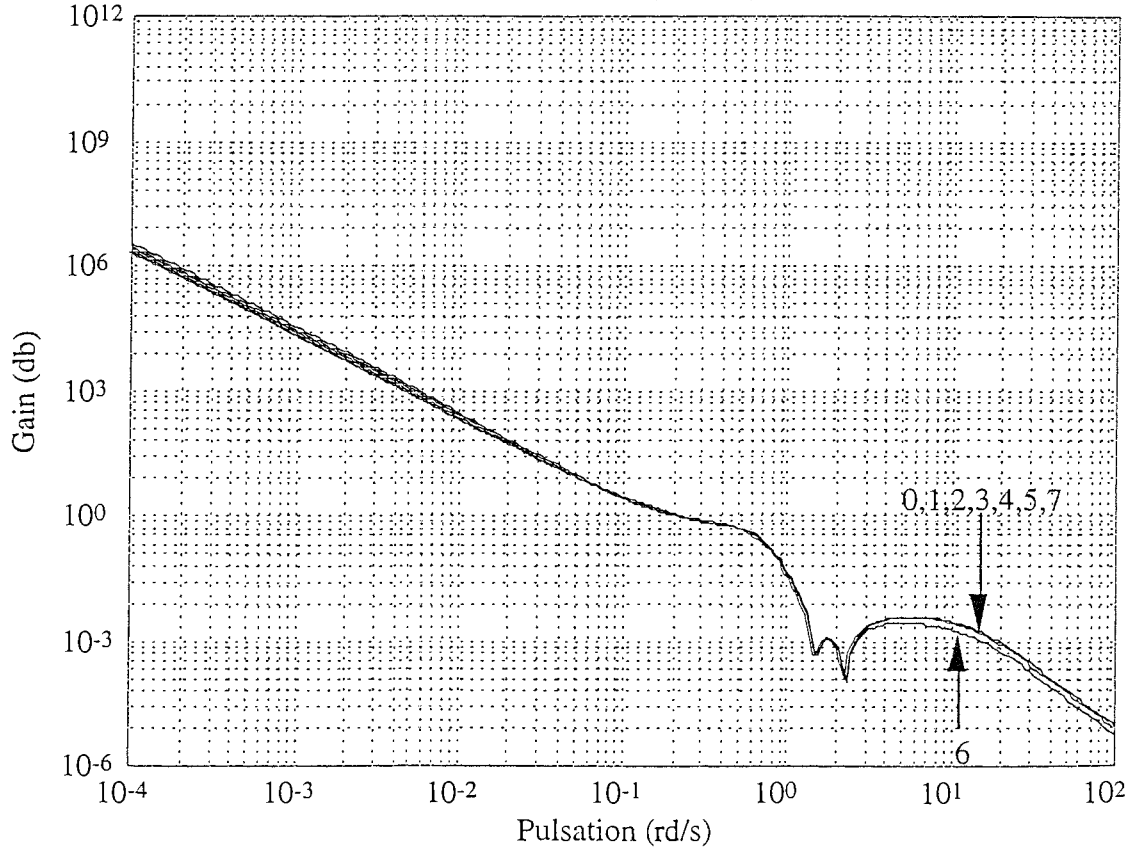
Les courbes représentées par les figures suivantes illustrent les différents comportements temporels (sortie, commande en boucle fermée) et fréquentiels (correcteur pris isolément, gain de boucle, boucle fermée, les valeurs singulières relatives aux transferts $T_{ze}(s)$ de réalisation d'état $\{A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, E_{cl}\}$, ($C_{12}(s)$, $C_{22}(s)$, $C_{31}(s)$ voir figure I.11) aux ordres réduits égaux à 4 (figures II.15 à II.23) puis à 3 (figures II.24 à II.32).



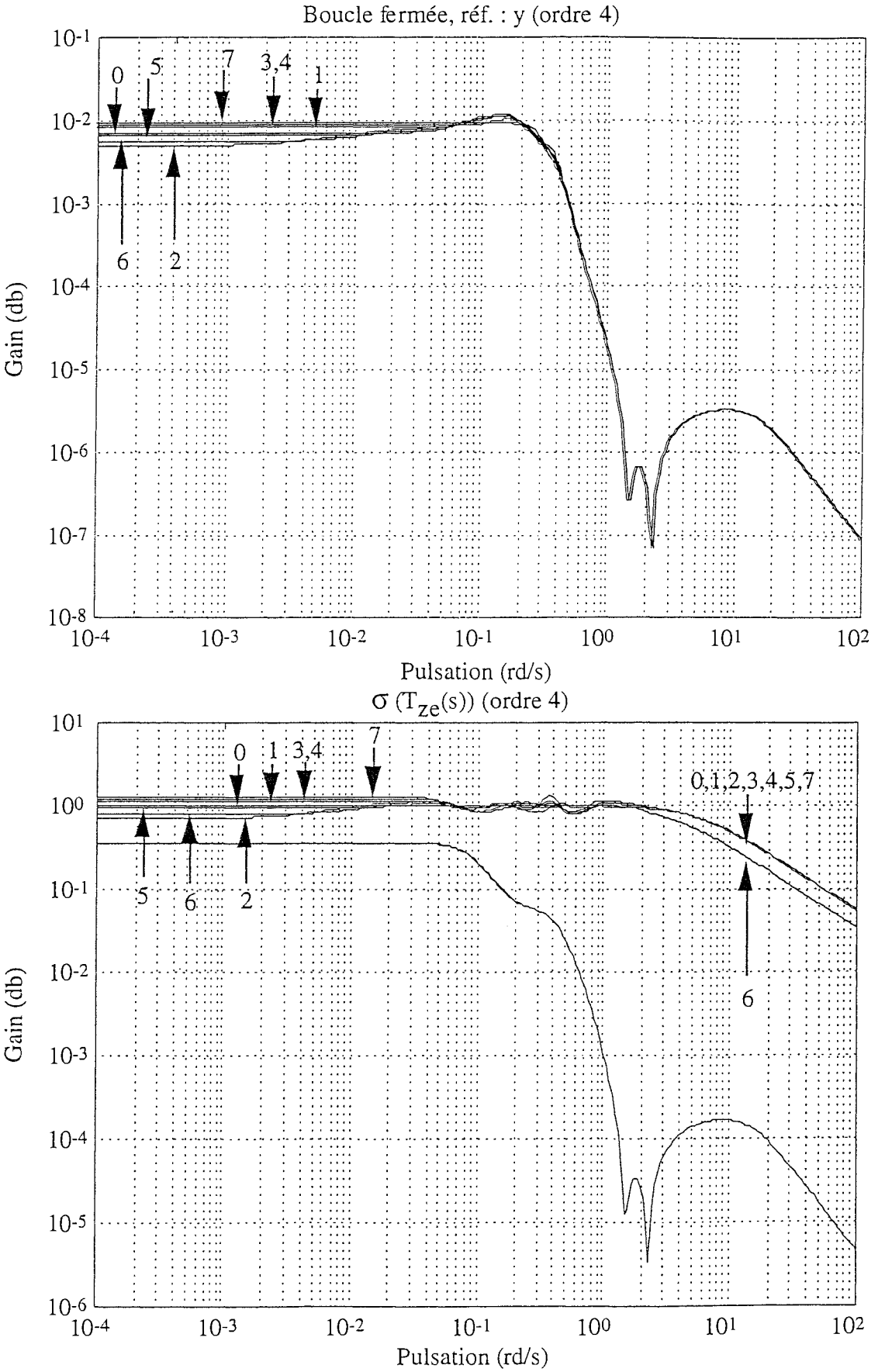


Figures II.15 et II.16

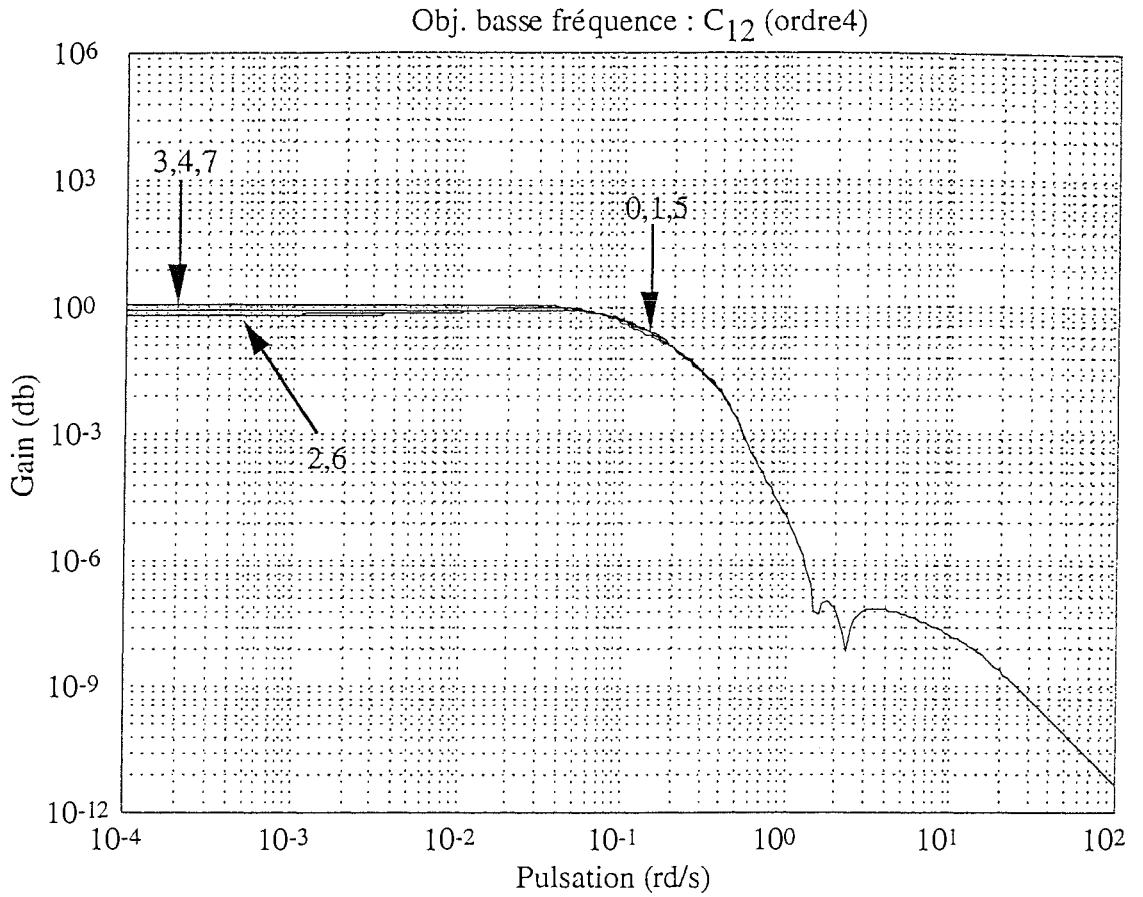


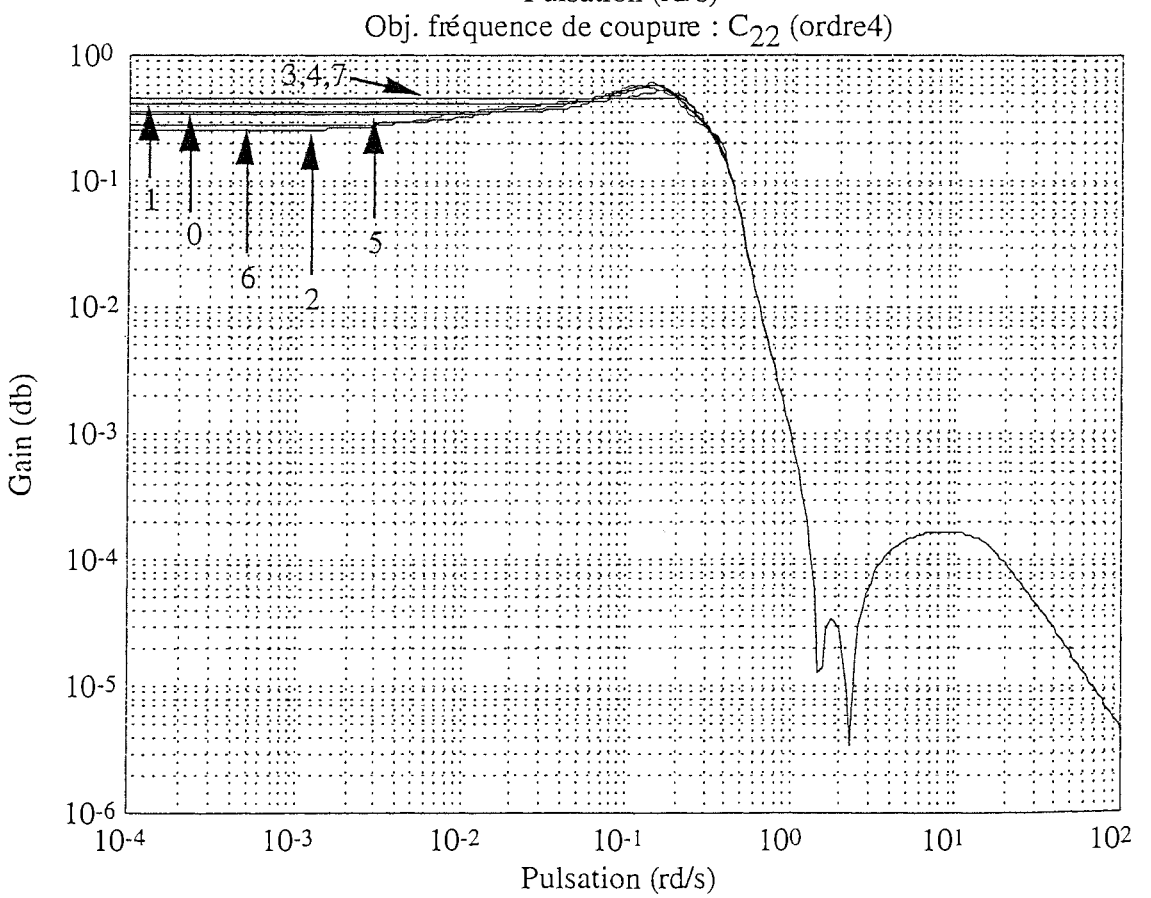


Figures II.17 et II.18

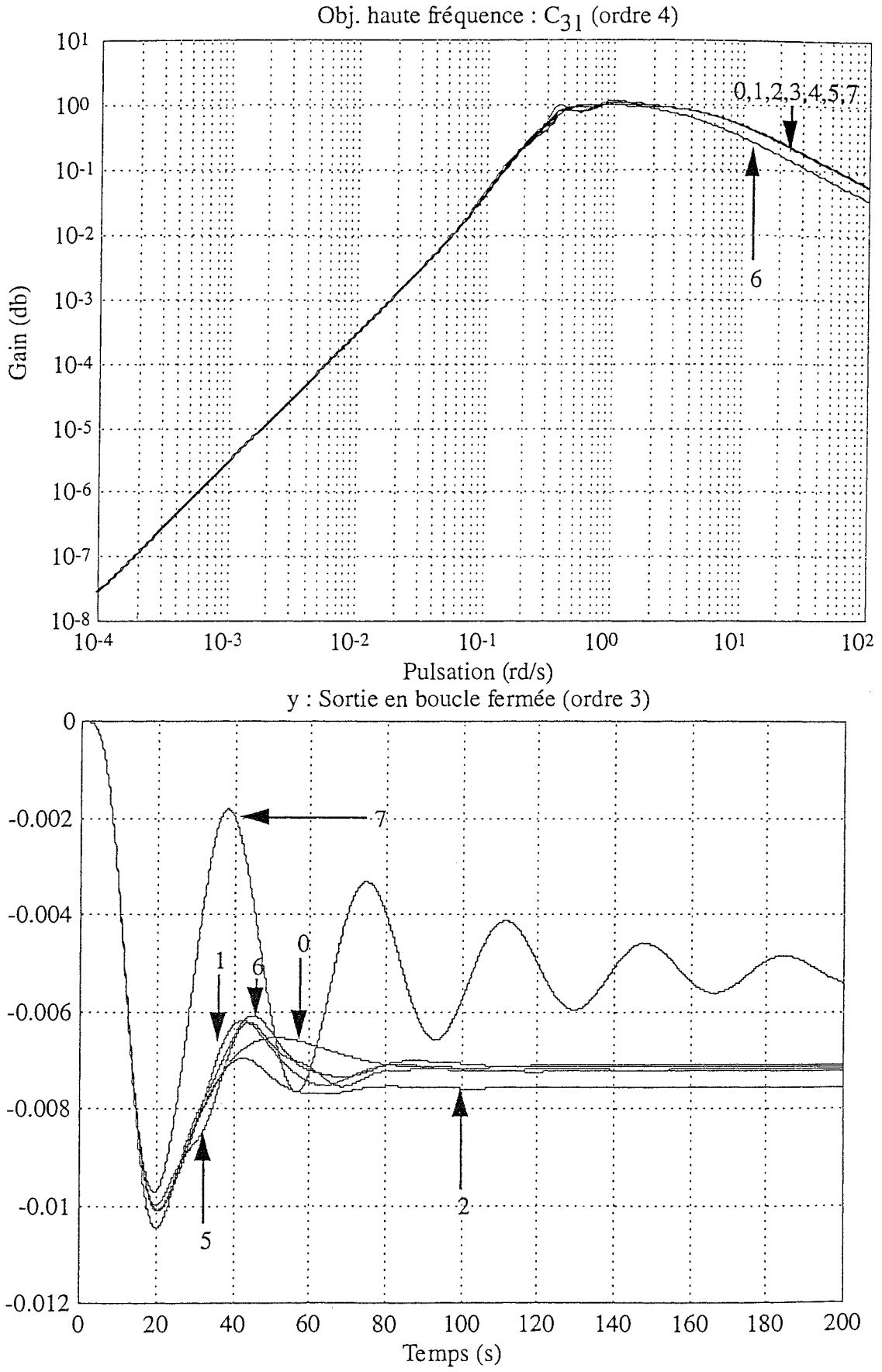


Figures II.19 et II.20

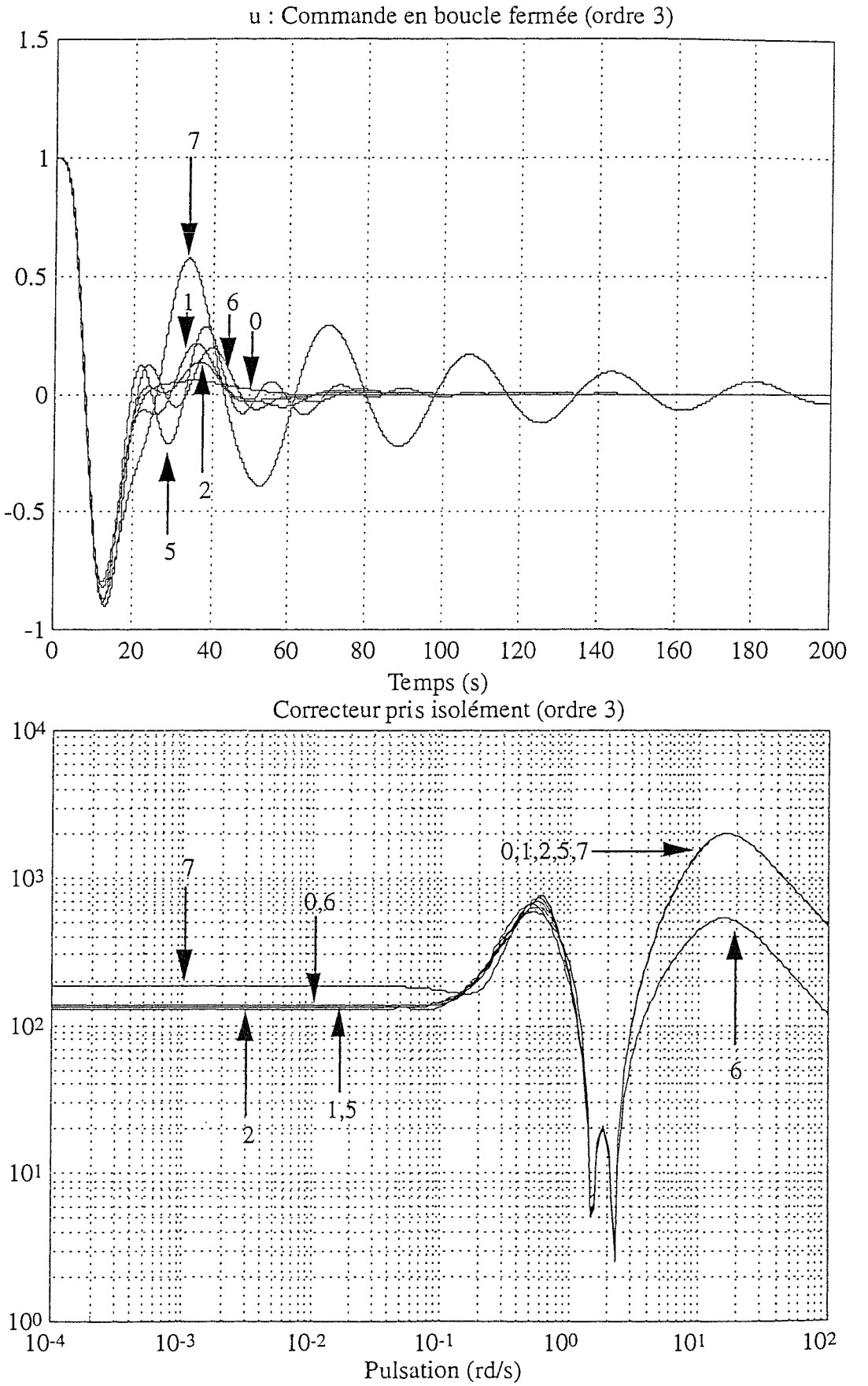




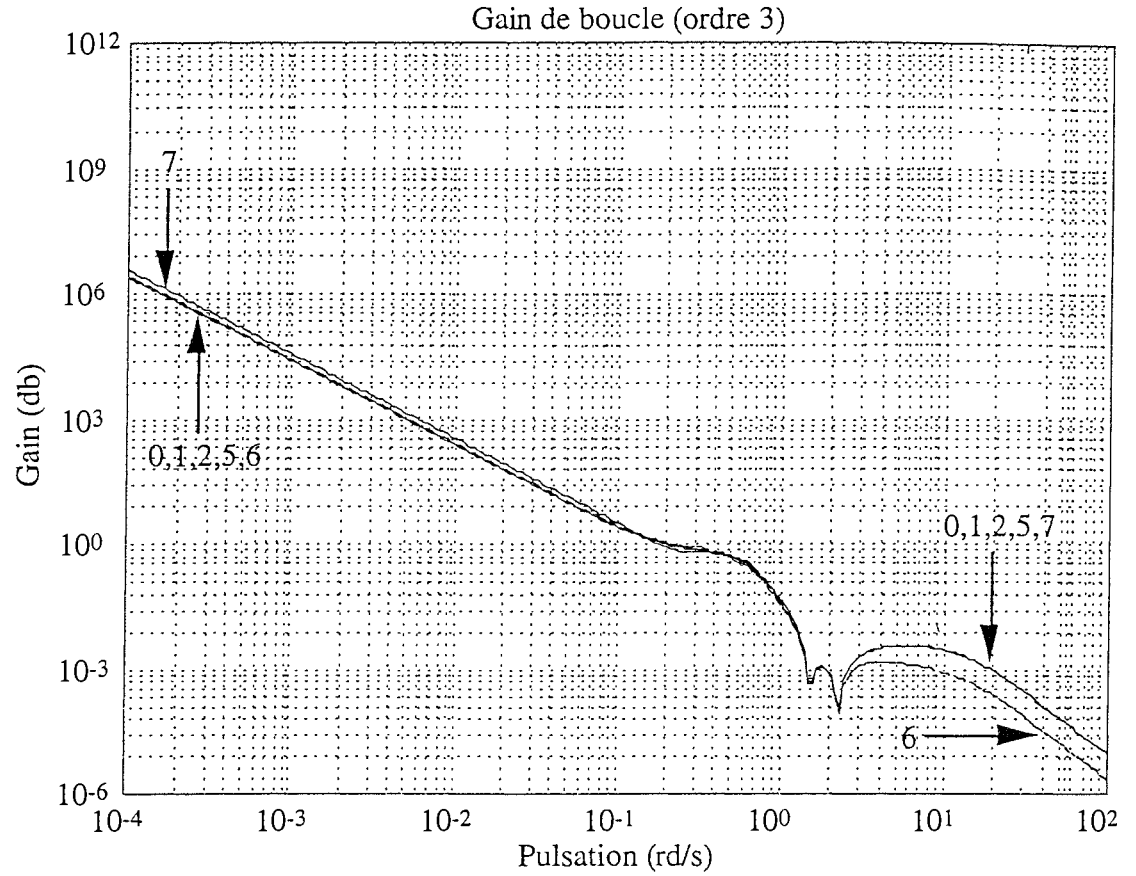
Figures II.21 et II.22

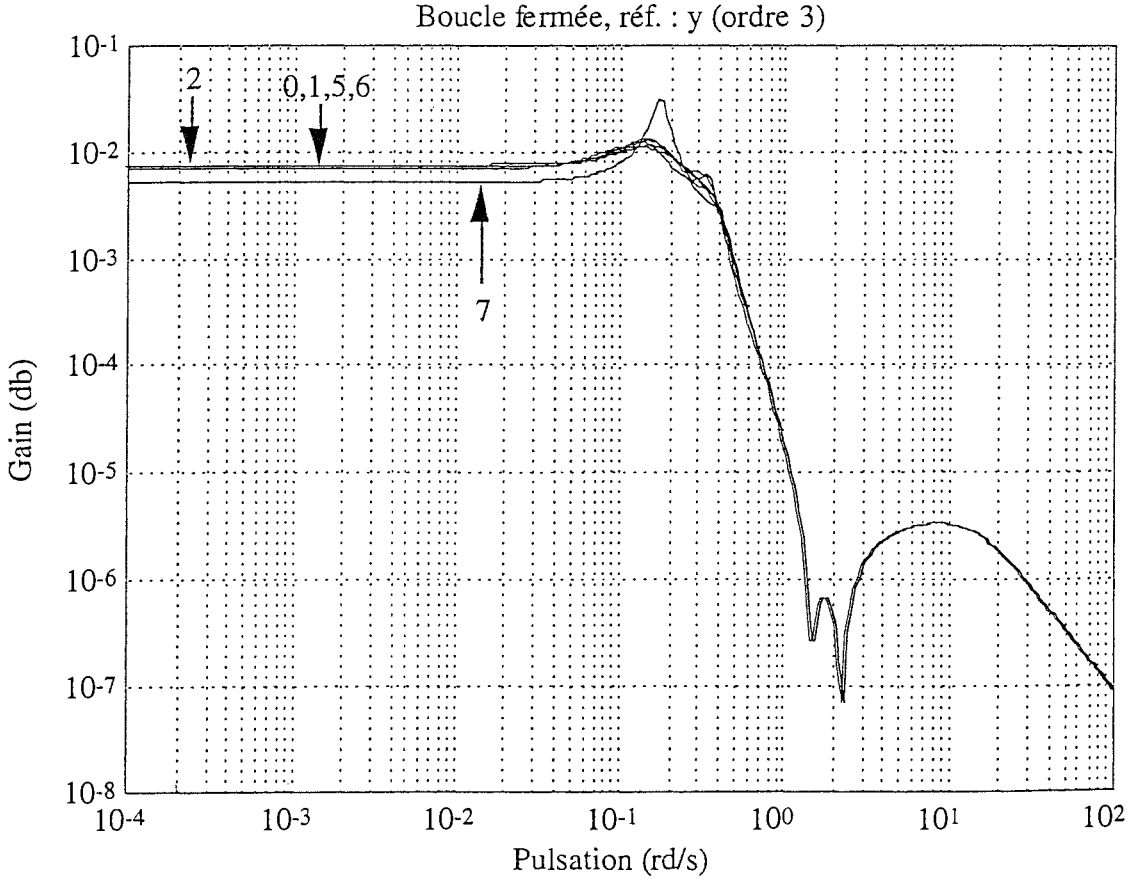


Figures II.23 et II.24

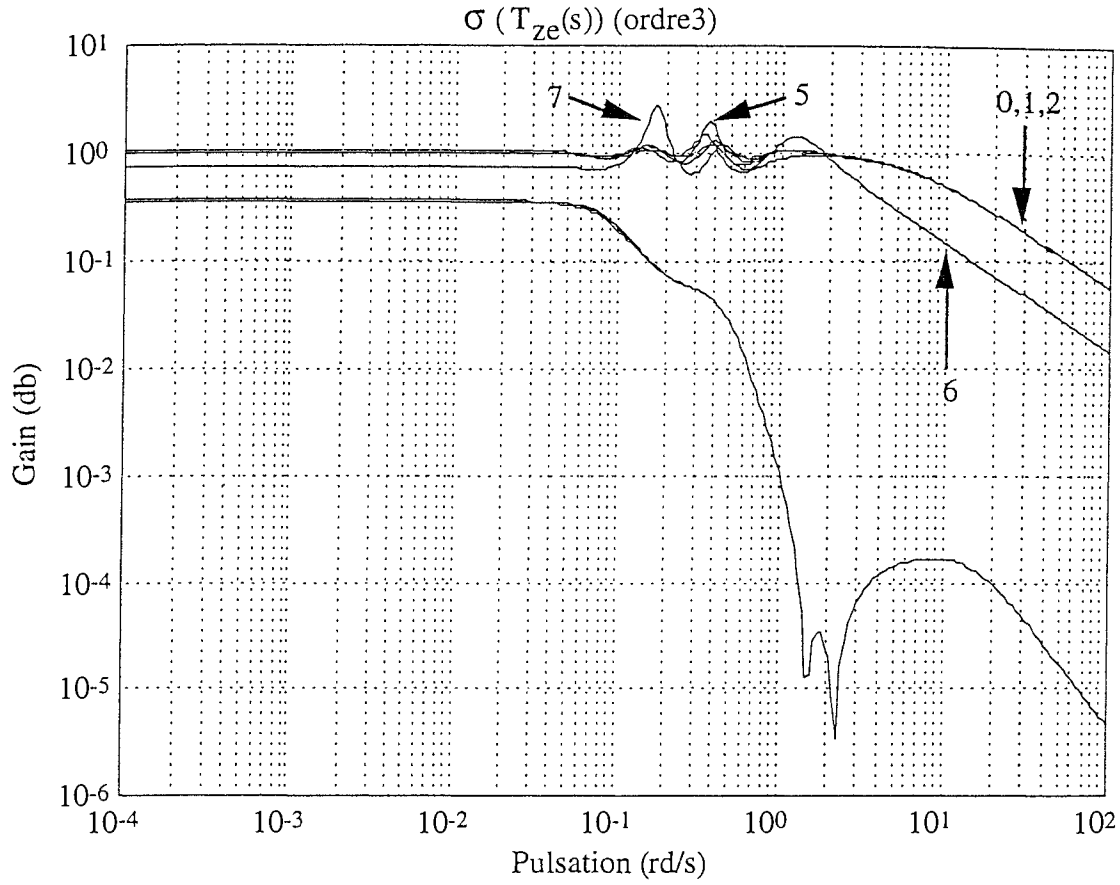


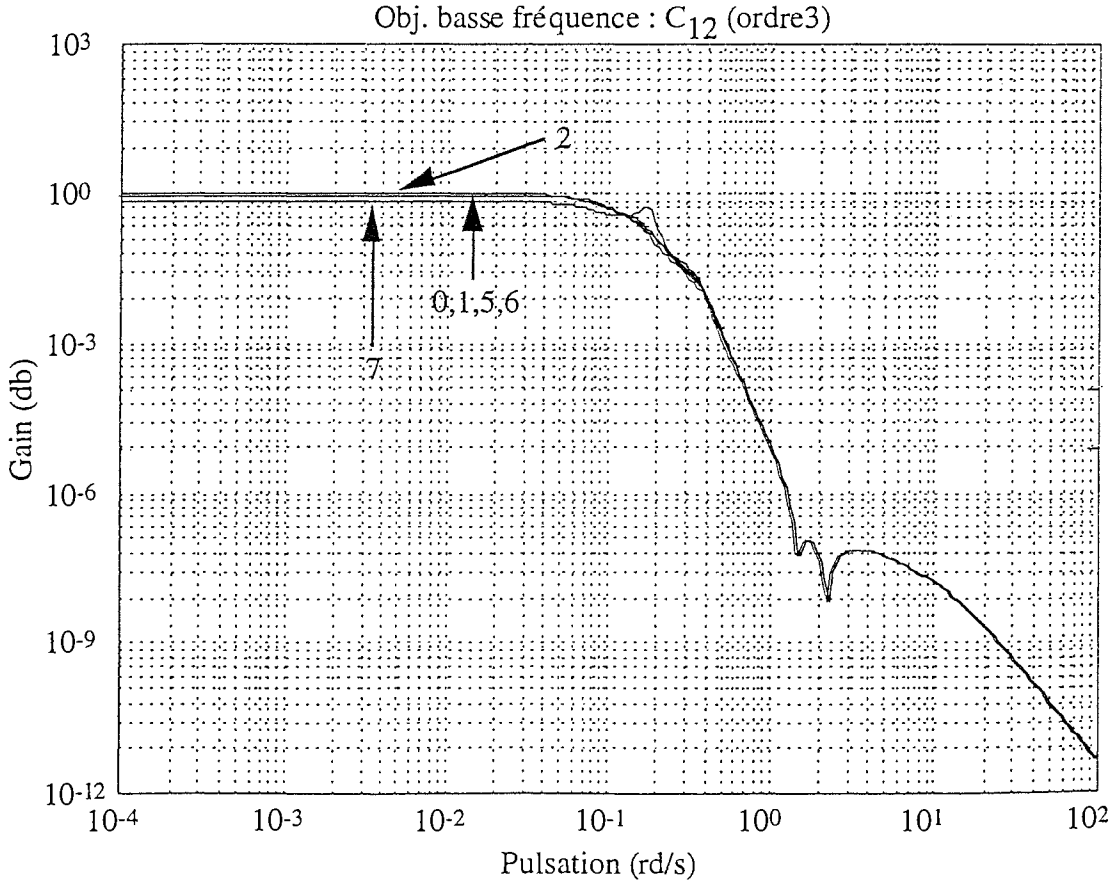
Figures II.25 et II.26



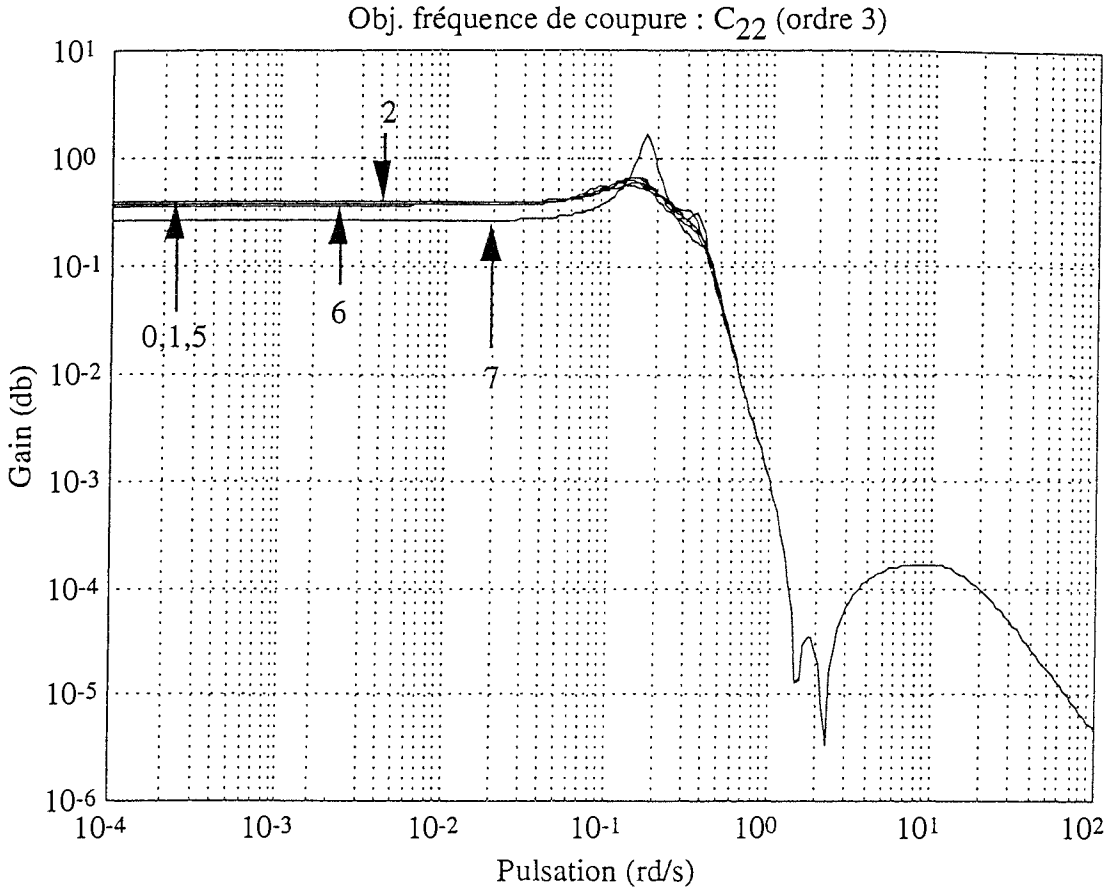


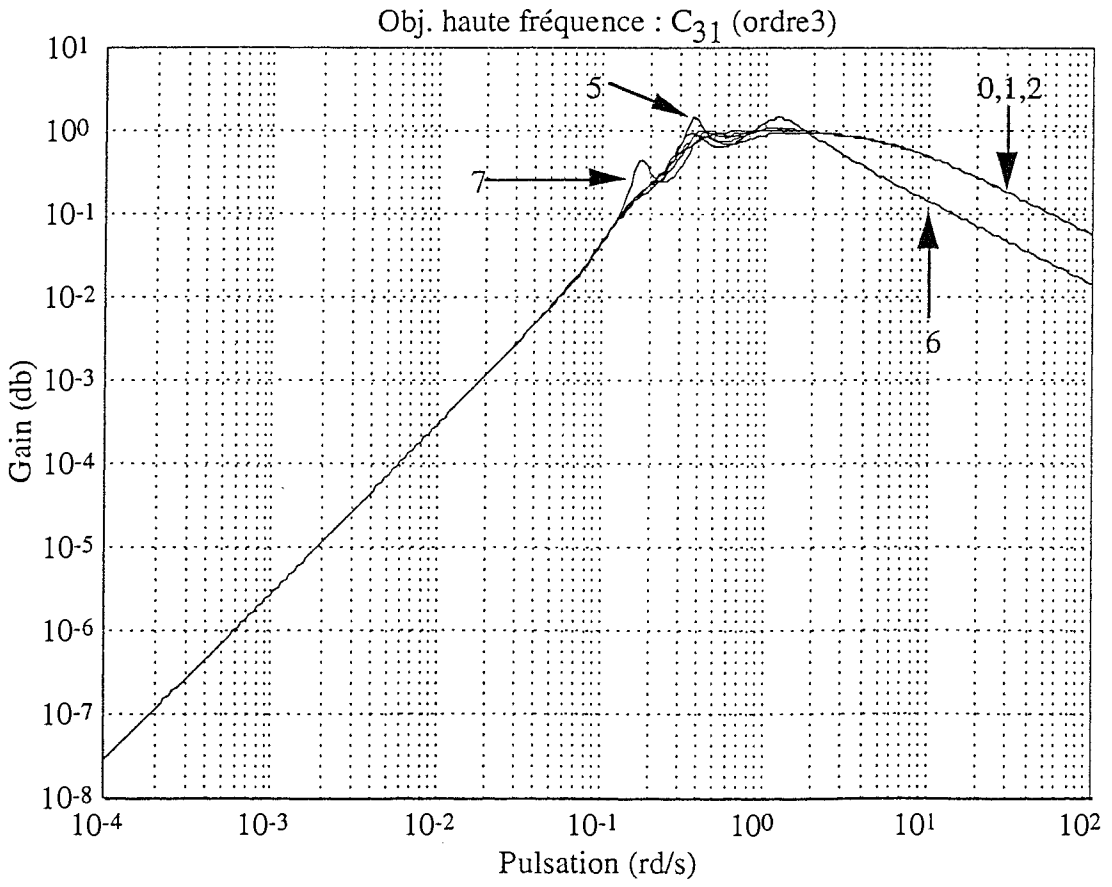
Figures II.27 et II.28





Figures II.29 et II.30





Figures II.31 et II.32

Résultats pour un correcteur réduit d'ordre 3

Les remarques sur les performances et la stabilité en boucle fermée de l'application précédente restent applicables à celle-ci. On peut cependant formuler quelques remarques supplémentaires. La méthode 5, basée sur la réduction de modèle fractionnelle non pondérée, donne une bonne réponse temporelle en boucle fermée comme pour les méthodes pondérées 1 et 6 alors que la méthode 2 présente un biais dans le gain étudié en boucle fermée (voir figure II.24). La méthode 7 donne un faible amortissement en boucle fermée avec un important biais dans l'étude du gain. Pour les méthodes 1 et 2, on peut remarquer que la dégradation des performances est petite (Obj). En effet, obj est proche de 1 et demeure satisfaisant pour les autres approches pondérées. Cela est confirmé par les courbes de Bode dans les figures II.29 à II.32 correspondant aux objectifs de synthèse du problème H_∞ (les figures II.30 à II.32 sont relatives respectivement à la performance en basses fréquences, à la stabilité robuste à la fréquence de coupure et à la réjection des dynamiques non modélisés en hautes fréquences).

Les spécifications de "loop shaping" de la figure I.8 sont satisfaites pour les méthodes 0, 1 et 2 (voir le diagramme de bode en boucle ouverte, figure II.27).

Le critère de stabilité N_3 est inférieur à 1 pour les méthodes 1, 2 et 5 alors que les distances non pondérées entre le correcteur d'ordre plein C(s) et celui d'ordre réduit $C_r(s)$ sont très grandes.

Les courbes représentant la boucle ouverte données par les méthodes 1 et 2 sont très proches de la référence (méthode 0) dans le domaine fréquentiel (voir figure II.27) et dans le domaine temporel (voir figures II.24 et II.25). Cela confirme que le critère N_3 est une mesure fiable de la distance entre les deux correcteurs en boucle fermée, ce n'est pas le cas de la distance non pondérée N_1, qui est uniquement souhaitable pour l'approximation en boucle ouverte.

II.6.4. Discussion

Comparons les différentes méthodes de réduction de l'ordre du correcteur testées sur les deux applications. Etudions plus particulièrement la plate-forme Eurostar 2000+ pour un passage d'ordre plein (10 + 4 = 14) à un ordre réduit égal à (3 + 4 = 7) ainsi que le système à quatre disques et résumons les différents résultats obtenus de la manière suivante:

Méthode proposée (algorithme 1, pondération en sortie $P_o(s)$, partie § II.5.2.1.) **(1)**
⇒ Très proche du correcteur initial
⇒ Très bons résultats (réponses temporelles et fréquentielles, Obj, stabilité)
⇒ Meilleurs résultats pour le système à 4 disques

Méthode proposée (algorithme 2, pondération en sortie $P_o(s)$, partie § II.5.2.2.) **(2)**
⇒ Comme la méthode 1, problème de gain statique en boucle fermée
⇒ Meilleures marges de gain

Réduction équilibrée (partie § II.2.3.1.) (3)

⇒ Instabilité

⇒ Mauvais comportement en boucle fermée pour le système à 4 disques

Approximation optimale de Hankel (partie § II.2.3.2.) (4)

⇒ Instabilité

⇒ Mauvais comportement en boucle fermée pour le système à 4 disques

Réduction équilibrée avec des facteurs co-premiers (partie § II.3.2.1.) (5)

⇒ Comme la méthode 1, Obj trop grand

⇒ Mauvais comportement en boucle fermée pour le système à 4 disques

Réduction équilibrée, stabilité en boucle fermée (pondération en entrée $P_i(s)$, partie § II.4.3.) (6)

⇒ Réponses temporelles proches de celles obtenues avec les méthodes 1 et 2

⇒ Baisse dans les marges de gain

⇒ Réponse fréquentielle → problème en hautes fréquences ($C_{31}(s)$)

Réduction équilibrée en boucle fermée (pondérations en entrée $P_i(s)$ et en sortie $P_o(s)$, partie § II.4.4.) (7)

⇒ Réponse fréquentielle → problème dans la bande passante ($C_{12}(s)$ et $C_{22}(s)$)

⇒ Mauvais comportement en boucle fermée (oscillations, gain statique)

⇒ Instabilité en boucle fermée pour le système à 4 disques

II.7. CONCLUSION

Les critères N_3 et N_4, utilisés pour mesurer la qualité de la réduction du correcteur et correspondant aux pondérations introduites dans les algorithmes 1 et 2, proposés dans la partie § II.6. de ce mémoire, sont basés sur les facteurs co-premiers du correcteur et de l'installation et sont de bons indicatifs du comportement en boucle fermée.

Les pondérations fréquentielles dans les algorithmes 1 et 2 contiennent toutes les informations sur l'installation à stabiliser, et produisent la stabilité robuste contre les erreurs sur les facteurs co-premiers du correcteur. En résumé, ces pondérations prennent les performances en boucle fermée ($\Leftrightarrow D^{-1}(s)\ (I_m - P(s)\ C(s))^{-1}$) et la stabilité robuste contre les erreurs additives sur le correcteur ($\Leftrightarrow D^{-1}(s)\ (I_m - P(s)\ C(s))^{-1}\ P(s)$), voir le critère de stabilité dans [AND-89] et [ENN-84b] pris en compte.

La technique de troncation du correcteur doit essayer d'approximer la boucle fermée plutôt que la réponse du correcteur considérée en isolation. C'est la principale différence entre la réduction du correcteur et la réduction du modèle [AND-89].

Contrairement à la méthode décrite dans [AND-89], les procédures données dans les algorithmes 1 et 2 ne sont pas réduites dans le cas où les correcteurs sont formés par combinaison de loi de retour d'état stabilisant et d'observateur d'état. Les deux algorithmes proposés peuvent être appliqués à des correcteurs instables, sans séparer celui-ci en une partie stable et une partie antistable. Ce n'est pas le cas de la méthode à pondération fréquentielle décrite dans [ENN-84b].

CHAPITRE III

DISCRETISATION DU CORRECTEUR

III.1. INTRODUCTION

Les développements de l'informatique conduisent naturellement à une discrétisation des lois de commande. De nombreuses synthèses étant effectuées dans le domaine continu (voir § introduction), la discrétisation de la loi de commande continue obtenue constitue la deuxième étape avant l'implantation numérique du filtre, après l'étape de réduction de l'ordre, et avant celle de l'optimisation de la réalisation d'état. Lors de cette phase, des problèmes se posent dès lors que l'on ne désire pas perdre l'acquis obtenu avec ces lois continues et recommencer toute la synthèse des lois de commande dans le domaine discret. Il faut donc, à partir d'un filtre continu, déterminer un filtre équivalent en discret reflétant pour le mieux l'installation.

C'est à ce problème que nous allons tenter de présenter des solutions, sachant que pour l'application concernant la plate-forme Eurostar 2000+, le correcteur C(s) et la période d'échantillonnage T_e sont imposés par la société MATRA MARCONI SPACE.

III.2. BOUCLE FERMEE AVEC UN CORRECTEUR DISCRET

III.2.1. Description de la boucle fermée

Dans une boucle fermée discrète, il convient de distinguer les différents éléments présents, caractérisés par la figure III.1 ci-dessous:

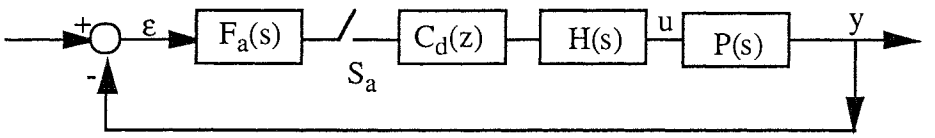


Figure III.1: boucle fermée avec correcteur discret

- P(s) représente l'installation à commander (continue),
- $F_a(s)$ correspond au filtre anti-repliement (continu),
- S_a est un échantillonneur,
- $C_d(z)$ constitue le correcteur discret stabilisant (inconnu),
- H(s) est un bloqueur d'ordre zéro.

Lorsqu'un organe de calcul génère une loi de commande, celle-ci a la forme d'une suite de nombres. Il est nécessaire de transformer cette suite en un signal analogique compatible avec la système.

L'organe qui réalise cette fonction est constitué d'un convertisseur numérique / analogique et d'un bloqueur. Le bloqueur le plus simple et d'utilisation la plus courante est le bloqueur d'ordre zéro B_0 décrit ci-dessous:

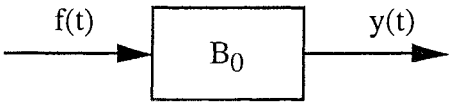


Figure III.2: bloqueur d'ordre zéro

avec

$$y(t) = f(kT_e) \text{ pour } kT_e \leq t \leq (k+1)T_e \qquad \text{(III.1)}$$

Le bloqueur d'ordre zéro prend en compte un échantillon $f(kT_e)$ à l'instant $t = kT_e$ et tient sa sortie constante à cette valeur jusqu'à ce qu'un nouvel échantillon soit envoyé à $t = kT_e + T_e$.

La fonction de transfert de ce bloqueur d'ordre zéro peut être obtenue en calculant la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle illustrée par la figure III.3:

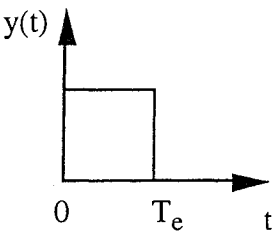


Figure III.3: réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro

Par conséquent, la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro est donnée par:

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sTe}}{s} = \frac{1 - e^{-sTe}}{s} \qquad \text{(III.2)}$$

Dans la littérature, certains auteurs proposent de sélectionner pour période d'échantillonnage 10 à 40 fois la valeur de la bande passante en boucle fermée. Pour des systèmes possédant des modes résonnants supérieurs à la bande passante en boucle fermée ($\Leftrightarrow$ partie réelle hors bande passante), la période d'échantillonnage est parfois choisie comme étant un multiple du plus important mode résonnant.

La période d'échantillonnage utilisée pour l'application de la plate-forme Eurostar 2000+ est spécifiée par MATRA MARCONI SPACE et vaut $T_e = 0.219$ seconde. Celle concernant le système quatre disques sera choisie de telle sorte que le théorème de Shannon soit respecté.

III.2.2. Approximations d'un filtre continu par un filtre discret

La discrétisation d'un filtre continu constitue une procédure d'approximation. Par conséquent, considérons tout d'abord le problème de l'obtention d'un équivalent digital d'une loi de commande continue. Pour cela, on peut avoir recours à différentes approximations qui sont énumérées ci-dessous [AST-90], [FRA-90], [OGA-87]:

- Approximation trapézoïdale

Une des techniques de discrétisation permettant d'obtenir de façon simple et directe une loi de commande numérique est l'approximation trapézoïdale (transformation bilinéaire). La transformation bilinéaire, connue sous le nom de Tustin, transforme s en :

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \rightarrow \frac{2}{T_e} \frac{(z - 1)}{(z + 1)} \qquad \text{(III.3)}$$

Comme l'illustre la figure III.4 ci-dessous, la stabilité est assurée en boucle ouverte car les pôles du demi-plan gauche sont transformés en pôles dans le cercle unité.

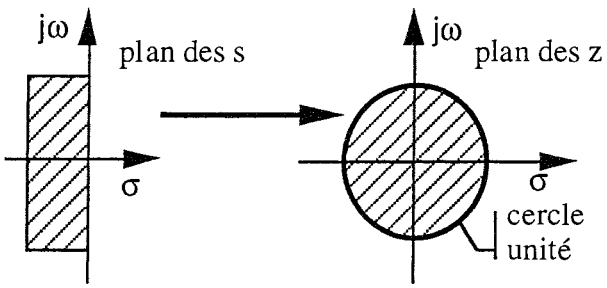


Figure III.4: transformation des pôles, approximation trapézoïdale

- Approximation rectangulaire à gauche (Euler "forward")

Elle se traduit par les passages suivants: (équation (III.4) et figure III.5)

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \rightarrow \frac{(z - 1)}{T_e} \qquad \text{(III.4)}$$

Comme l'illustre la figure III.5 ci-dessous, il y a un risque d'instabilité en boucle ouverte car les pôles du demi-plan gauche ne sont pas nécessairement transformés en pôles dans le cercle unité.

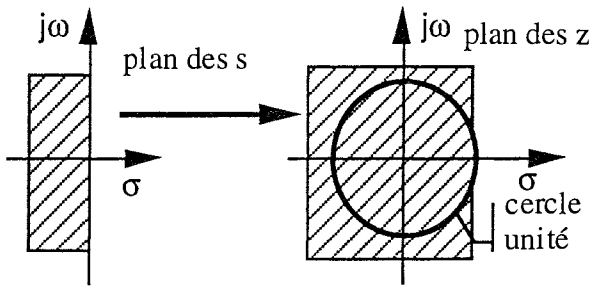


Figure III.5: transformation des pôles, approximation rectangulaire à gauche

- Approximation rectangulaire à droite (Euler "backward")

Cet opérateur de dérivation est équivalent à:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow s \rightarrow \frac{(z - 1)}{T_e z} \qquad \text{(III.5)}$$

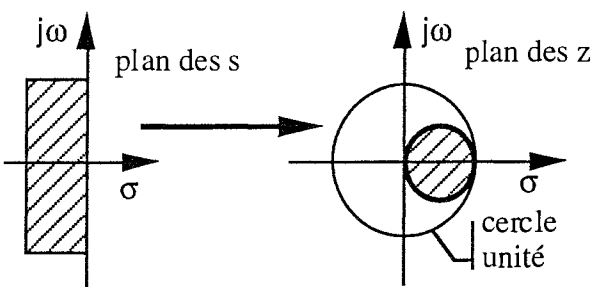


Figure III.6: transformation des pôles, approximation rectangulaire à droite

- Approximation avec invariance indicielle (transformée en Z avec bloqueur d'ordre zéro)

L'opérateur de dérivation est équivalent à:

$$C_d(z) = \frac{(z - 1)}{T_e z} \frac{1}{2j\pi} \int_{\gamma+j\infty}^{\gamma+j\infty} \frac{e^{sTe}}{(z - e^{sTe})} \frac{C(s)}{s} ds \qquad \text{(III.6)}$$

- L'approximation avec adéquation pôles-zéros

Les pôles et zéros de $C_d(z)$ sont les images sous $z = e^{sTe}$ de ceux de C(s) avec $C_d(1) = C(0)$. Les zéros infinis de C(s) ont pour image $z = -1$.

- Approximation avec l'opérateur delta

Pour cet opérateur, les transformations pour un système discret (III.7) et pour un système continu (III.8) sont données respectivement par:

$$\delta \rightarrow \frac{(z - 1)}{T_e} \qquad \text{(III.7)}$$

$$F(\delta) = Z\{F(s)\}_{|z=T_e\delta+1} \qquad \text{(III.8)}$$

Cette approximation est proche de l'approximation rectangulaire à gauche.

III.2.3. Limitations dues à l'utilisation d'un correcteur numérique

L'introduction d'un correcteur discret dans la boucle de régulation d'un système continu génère des contraintes spécifiques. Pour les analyser, étudions la réponse à un signal d'entrée sinusoïdal du système hybride stable ainsi obtenu. Elle consiste en la somme d'une infinité de sinusoïdes émises à des multiples entiers de la fréquence d'échantillonnage à partir de la fréquence d'entrée. Les composantes aux mêmes fréquences que l'entrée sont appelées les fondamentales et les autres, les harmoniques. Notons ω_S et ω_N, les fréquences d'échantillonnage et de Nyquist, respectivement $\omega_S = \frac{2\pi}{T_e}$ et $\omega_N = \frac{\pi}{T_e}$, où T_e est la période d'échantillonnage.

Pour un correcteur analogique, la fonction sensibilité en boucle fermée, l'installation à commander étant un système instable à minimum de phase, peut être rendue petite sur une gamme de fréquence tant que la borne de la sensibilité est en dehors de celle-ci. Ceci n'est pas toujours vrai lorsqu'un correcteur digital remplace le correcteur continu.

Appelons S, le fondamental de la fonction de sensibilité de la boucle fermée obtenue avec un système continu et un correcteur numérique. Freudenberg *et al.* [FRE-94] donnent la borne suivante pour $\|S\|_\infty$:

Corollaire III.1 [FRE-94]

- i) Supposons que l'installation possède un pôle réel (p = x) dans le demi-plan complexe ouvert droit, alors:

$$\|S\|_\infty \geq \sqrt{1 + (\frac{x}{\omega_N})^2} \qquad \text{(III.9)}$$

- ii) Supposons que l'installation ait une paire de pôles complexes conjugués (p = x +jy, $\tilde{p}$ = x - jy), alors pour k = ±1, ±2, ..., ±∞

$$\|S\|_\infty \geq \sqrt{1 + (\frac{x}{k\omega_N})^2} \times \sqrt{1 + (\frac{x}{y - k\omega_N})^2} \qquad \text{(III.10)}\square$$

Dans chaque cas, la fonction sensibilité du fondamental a un pic supérieur à 1. Ceci veut dire que, contrairement à l'utilisation d'un correcteur continu, l'emploi d'un correcteur numérique ne permet pas d'atténuer les perturbations sur une bande de fréquences arbitraire.

III.2.4. Obtention d'un correcteur discret pour un système continu

III.2.4.1. Discrétisation de l'installation puis calcul du correcteur en discret

La détermination du correcteur directement en discret induit un certain nombre de problèmes rendant très difficile l'application de ce type de correcteur:

- une perte du sens physique des paramètres (due au passage de A à e^{ATe}),
- une prise en compte difficile des incertitudes (conservatisme dans le compromis entre la robustesse et les performances),
- un risque de variation du comportement de l'installation entre deux périodes d'échantillonnage,
- une petite période d'échantillonnage pouvant provoquer un sur-échantillonnage.

L'application industrielle spécifiée par MATRA MARCONI SPACE nous impose le correcteur continu et la valeur de la période d'échantillonnage. Par conséquent, pour cette application, nous disposons d'un correcteur continu (ayant été réduit, chapitre § II) pour lequel nous pouvons choisir la méthode de discrétisation.

III.2.4.2. Calcul du correcteur en continu puis discrétisation

A partir d'un correcteur continu, il faut maintenant introduire dans la boucle de régulation les différents éléments nécessaires à la discrétisation de ce dernier, à savoir l'échantillonneur, le bloqueur d'ordre zéro et le filtre anti-repliement.

L'avantage de cette technique pratiquée après la réduction d'ordre du correcteur réside dans la possibilité d'introduire des pondérations fréquentielles sur le correcteur continu d'ordre plein. C'est pour cela que la synthèse du correcteur a été établie en continu par l'approche H_∞ (chapitre § II) dans le souci toujours de préserver le comportement en boucle fermée afin de ne pas perdre en performances et en robustesse. En effet, la discrétisation d'un correcteur continu peut engendrer certains risques tels que:

– la diminution des performances en boucle fermée,
– l'instabilité en boucle fermée ou la diminution de la robustesse.

III.3. MESURES DE LA QUALITE DE LA DISCRETISATION DU CORRECTEUR

La discrétisation du correcteur continu C(s) doit refléter à la fois, l'installation à commander P(s) et la boucle fermée en continu obtenue avec C(s): d'une part, les performances entrée-sortie des systèmes bouclés avec C(s) et avec $C_d(z)$, d'autre part, la robustesse des systèmes bouclés avec C(s) et avec $C_d(z)$ doivent être proches.

Dans la littérature, Keller et Anderson [KEL-91], [KEL-92] proposent une approche basée sur le théorème du faible gain et sur l'optimisation H_∞ afin de répondre aux deux considérations évoquées ci-dessus.

III.3.1. Mesure des performances en boucle fermée d'une discrétisation

III.3.1.1. Critère de performance

On suppose que la boucle fermée donnée par la figure III.7 est équivalente à III.8.

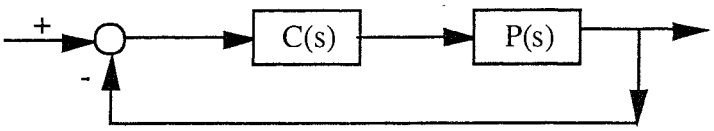


Figure III.7

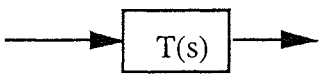


Figure III.8

La boucle fermée continue est supposée être stable et est décrite par la fonction de transfert T(s) suivante:

$$T(s) = P(s)C(s)\,(I + P(s)\,C(s))^{-1} \qquad \text{(III.11)}$$

Considérons maintenant la figure III.9 afin d'effectuer une comparaison des performances entrée-sortie des systèmes bouclés avec C(s) (synthétisé en continu) et avec le correcteur discret $C_d(z)$ (approximation discrète de C(s)).

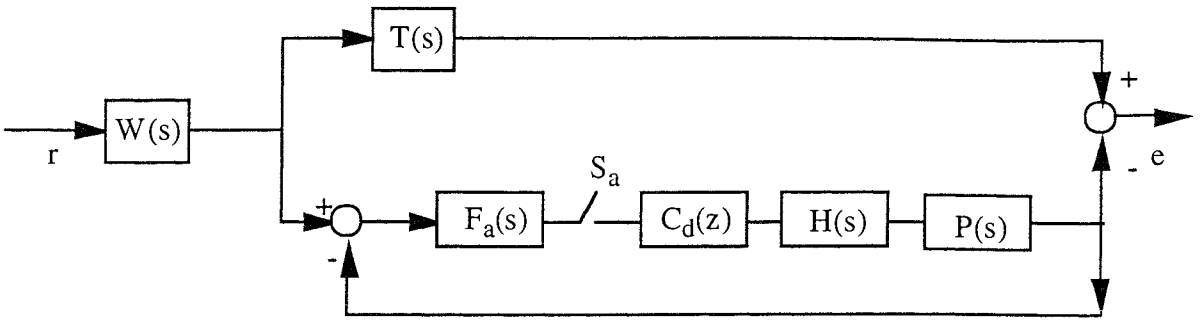


Figure III.9

avec P(s), S_a, $F_a(s)$, H(s), $C_d(s)$ définis dans la partie § III.2.1., T(s) donnée par l'équation (III.11) et W(s) représentant une pondération fréquentielle (continue, stable, strictement causale) permettant de favoriser une plage de fréquences donnée.

Il convient à présent d'appuyer sur le fait que la discrétisation du correcteur doit refléter T(s). On attribue au correcteur discretisé $C_d(z)$ le terme de bon candidat s'il est stabilisant et si l'opérateur hybride J_T, allant de $r \in L_2[0,\infty)$ vers $e \in L_2[0,\infty)$ (voir figure III.9), est borné et minimal.

III.3.1.2. Approximation du critère de performance

Approximons l'opérateur hybride J_T (égal à $\frac{e}{r}$).

On peut écrire de manière formelle:

$$J_T = TW - PHC_d (I_m + S_aF_aPHC_d)^{-1}S_aF_aW \qquad \text{(III.12)}$$

$$= G_{11} - G_{12}C_d (I_m + G_{22}C_d)^{-1}G_{21} \qquad \text{(III.13)}$$

avec $G_{11} = TW$, $G_{12} = PH$, $G_{21} = S_aF_aPH$, $G_{22} = S_aF_aW$

La norme H_∞ de J_T mesure la qualité de discrétisation obtenue lors de la transformation de C(s) en $C_d(z)$. Par ce fait, on veut minimiser la norme H_∞ de J_T afin d'avoir la meilleure discrétisation possible.

Choisir $C_d(z)$ minimisant J_T se ramène à un problème H_∞ mais ce n'est pas directement un problème H_∞ standard car $C_d(z)$ est une fonction de transfert discrète et les $G_{ij}(s)$ ne le sont pas.

Ayant obtenu J_T, on doit se poser deux questions:

- Comment évaluer la norme H_∞ de J_T ?
- Comment pouvons-nous choisir $C_d(z)$ afin de minimiser cette norme et être stable ?

De nombreux auteurs se sont penchés sur ces questions et ce problème est identique à un problème d'optimisation H_∞ de données mixtes échantillonnées-continues, décrite par la figure III.10.

L'installation, le bloqueur et la période d'échantillonnage (H(s) et T_e) sont spécifiés, le but est de trouver $C_d(z)$ qui minimise le gain induit L_2 entre r et e. Boyd Pearson, Bamieh et d'autres auteurs se sont intéressés à ce problème [BAM-91], [BAM-92].

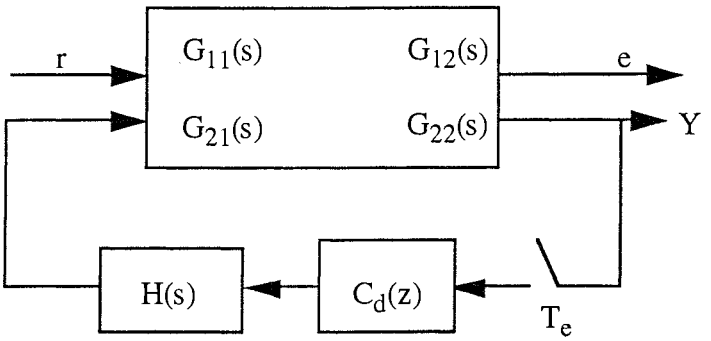


Figure III.10: problème d'optimisation H_∞ mixte continu-discret

Il y a deux étapes clés dans la solution des questions posées précédemment.

i) La première est de trouver une approximation qui remplace le problème mixte continu-discret (minimisation de $\|J_T\|_\infty$) par un problème discret multi-période (minimisation de $\|J_{Td}(z)\|_\infty$).

ii) La seconde est de convertir le problème multi-période en un problème discret mono-période puis de résoudre le problème H_∞ conventionnel discret en minimisant $\|J_{Td}\|_\infty$.

Le lien entre les étapes i) et ii) est basé sur l'équation suivante:

$$\lim_{N\to\infty} \|J_{Td}(z)\|_\infty = \|J_T\|_\infty \qquad \text{(III.14)}$$

où N est un entier égal au nombre de périodes considérées dans l'étape i).

Ces deux étapes vont maintenant faire l'objet d'une analyse plus détaillée.

i) Problème multi-période

Simplifions la figure III.9 par la figure III.11 ci-dessous:

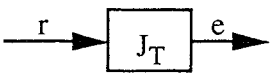


Figure III.11

où J_T est donnée par (III.13).

Un bloqueur et un échantillonneur sont introduits à l'entrée et à la sortie de J_T, avec pour période d'échantillonnage, un entier multiple de N appliqué à $C_d(z)$.

Appelons $H_{Te}(s)$ et $H_{Te/N}(s)$, les bloqueurs d'ordre zéro correspondant respectivement aux périodes d'échantillonnage T_e et T_e/N. Le passage d'un problème mixte en multi-période est présenté par la figure III.12 (N étant le nombre de périodes).

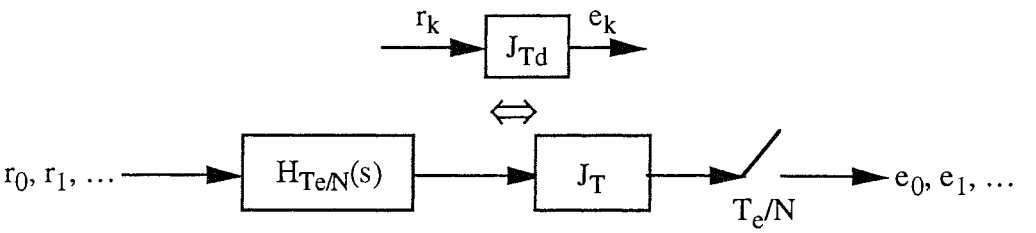


Figure III.12: passage d'un problème mixte continu-discret en un problème discret multi-période

L'ajustement de J_{Td} à J_T constitue le système multi-période.

Pour N assez grand, J_T et J_{Td} ont virtuellement le même gain (voir (III.14)). Par conséquent, minimiser la norme de J_{Td}, revient à minimiser celle de J_T. Ceci remplace le problème mixte initial en un problème discret multi-période décrit par la figure III.13:

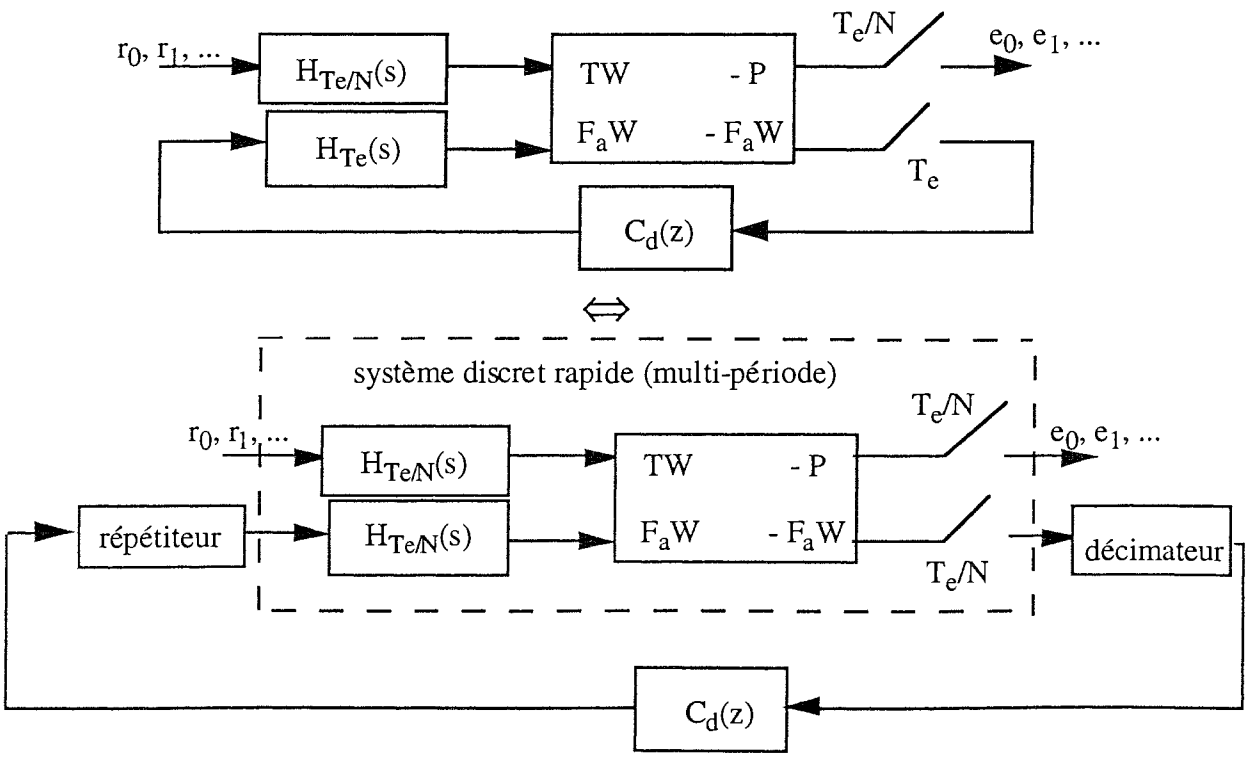


Figure III.13: problème d'optimisation H_∞ discret multi-période

Dans la partie supérieure, le bloqueur additionnel introduit est $H_{Te/N}$ et l'échantillonneur additionnel est spécifié par T_e/N. La présence du bloqueur associé au correcteur discret est

caractérisée par H_{T_e} alors que l'alliance de l'échantillonneur et du correcteur discret est symbolisée par T_e.

La partie inférieure est basée sur la réécriture de la partie supérieure, avec l'ajustement d'un bloqueur lent. On peut souligner la présence d'un décimateur de période N. Quant au répétiteur, il provoque la lenteur du bloqueur d'une durée d'échantillon T_e/N afin d'être ramené à N intervalles successifs de durée T_e/N par le même signal à partir de $C_d(z)$.

Le système rapide discret a pour période T_e/N, $C_d(z)$ constitue un système discret lent avec une période T_e. En vertu de tout ceci, le décimateur et le répétiteur permettent de connecter les systèmes rapides et lents, assurant que les signaux soient présents au moment voulu.

ii) Passage d'un problème multi-période en un problème mono-période

Traditionnellement, les électroniciens surnomment cette conversion: "conversion série-parallèle". A partir d'un système, une procédure de restitution permet de réécrire la sortie de ce dernier avec pour période d'échantillonnage égale à un multiple entier de celle donnée. Appliquer une telle méthode nous permet de remplacer un système rapide multi-période par un système équivalent plus lent mono-période.

Comme l'illustre la figure III.14, considérons un système supérieur nécessitant des signaux arrivant toutes les secondes et un système inférieur les recueillant sous la forme d'un vecteur arrivant toutes les 3 secondes. Par conséquent, le système supérieur a une sortie arrivant toutes les secondes, alors que le système inférieur a une sortie vectorielle apparaissant toutes les 3 secondes. Il convient de remarquer que l'information totale de ces deux systèmes est identique.

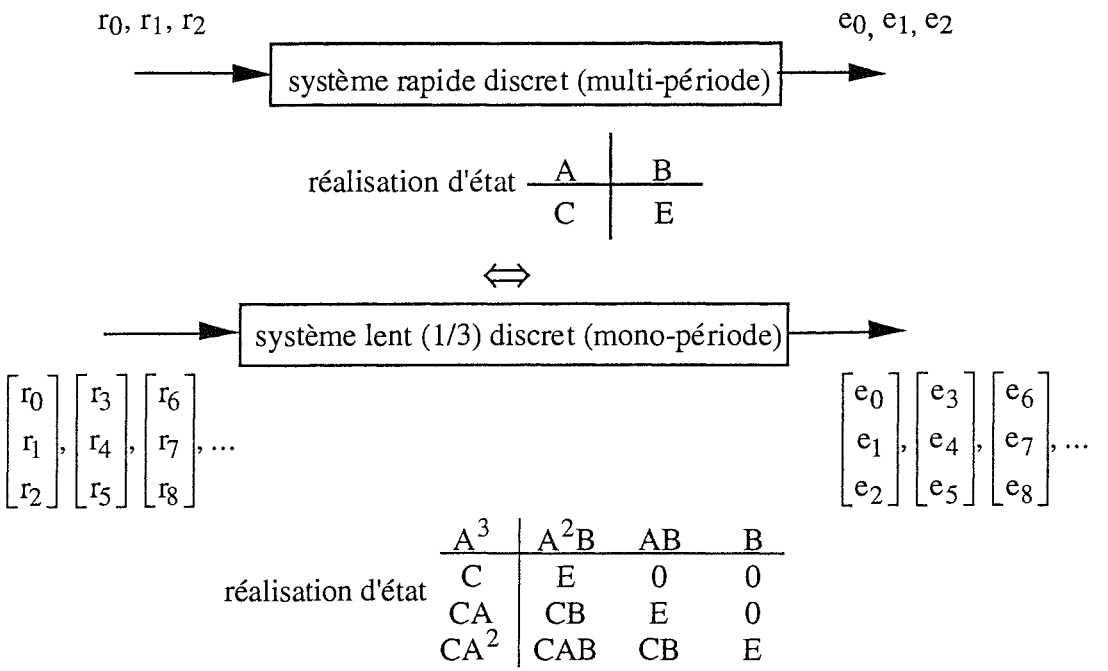


Figure III.14: équivalence entre les systèmes multi-période et mono-période

Les gains L_2 induits (et donc la norme H_∞) sont les mêmes pour les systèmes mono et multi-période.

Si A, B, C et E, les matrices de la réalisation d'état du système rapide, sont connues, celles correspondants au système lent le sont également. La figure III.14 nous présente les parties rapides et lentes de manière séparées.

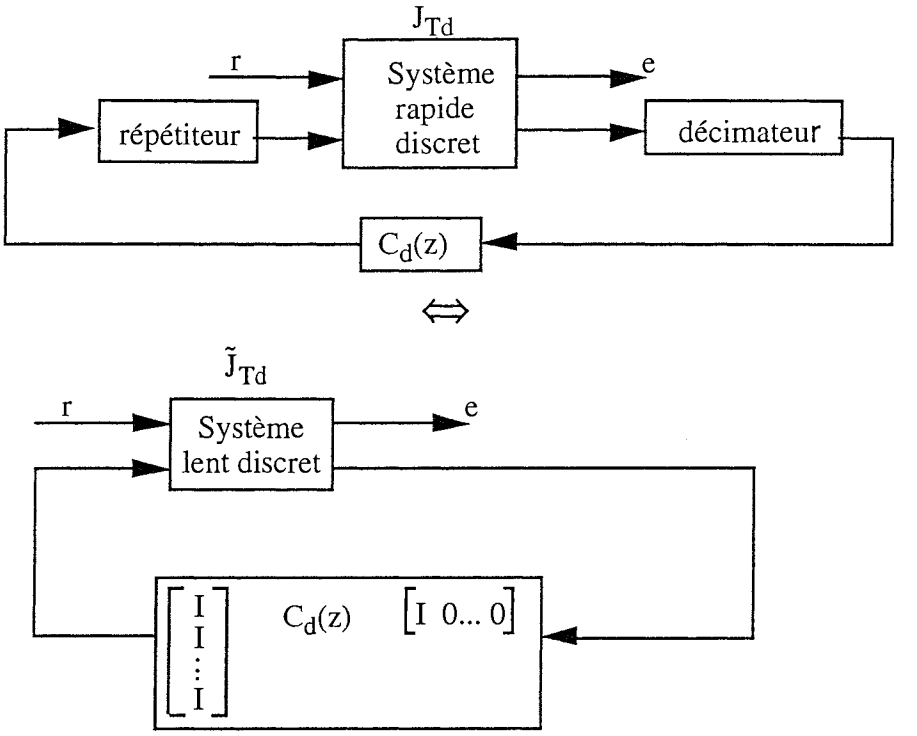


Figure III.15: problème d'optimisation discret H_∞

On a $\tilde{J}_{Td} = J_{Td}$. Les blocs répétiteurs et décimateurs dans un système multi-période sont donnés respectivement par $[I\ I\ ...\ I]^T$ et $[I\ 0\ ...\ 0]$ dans un système mono-période et les gains restent les mêmes.

III.3.2. Mesure de la robustesse en boucle fermée d'une discrétisation

III.3.2.1. Critère de stabilité

La discrétisation de correcteurs continus doit, tout comme la réduction de leur ordre [AND-89], prendre en compte les performances et la stabilité en boucle fermée. Des méthodes en boucle fermée ont été proposées par Rattan [RAT-84] et [RAT-78] mais aucune de ces méthodes d'approximation ne garantissent la stabilité en boucle fermée après discrétisation du correcteur.

La méthode présentée par Keller et Anderson [KEL-92] prend en compte la stabilité de la boucle fermée. Le problème de la stabilité du système en boucle fermée est relatif à l'erreur d'approximation résultant de la discrétisation du correcteur, c'est pourquoi l'approche proposée dans [KEL-92] est proche de celle de la réduction d'ordre proposée par Anderson et Liu [LIU-86], [AND-89].

L'intérêt de cette approche consiste dans la comparaison de la robustesse entrée-sortie des systèmes bouclés obtenue avec le correcteur initial C(s) (synthétisé en continu) et avec le correcteur discret $C_d(z)$ (approximation de C(s)).

La boucle fermée obtenue avec le système continu P(s) et le correcteur discret $C_d(z)$, représentée à la figure III.1, peut être transformée, comme le montre la figure III.16, afin de mettre en évidence la différence entre le correcteur continu initial C(s) et le correcteur discret $C_d(z)$ (différence appelée Δ).

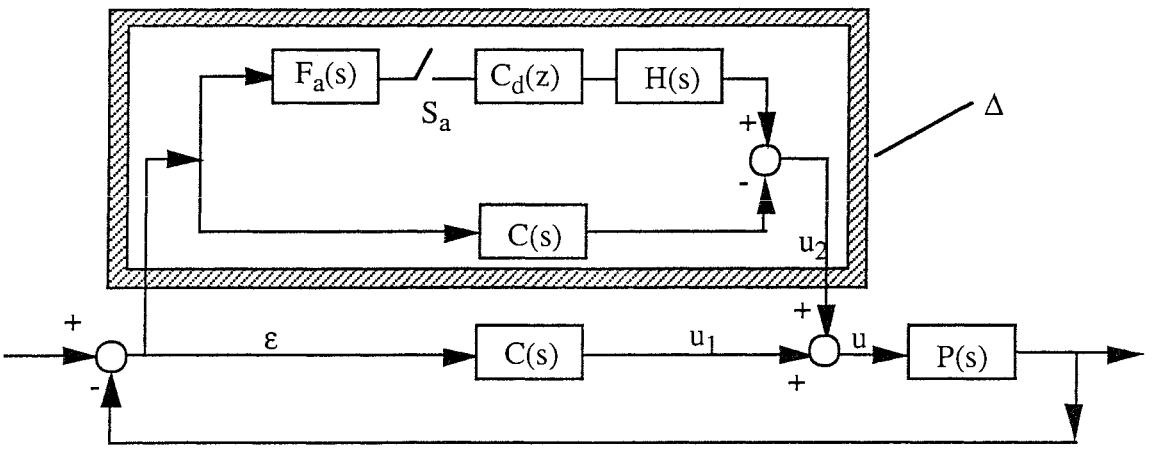


Figure III.16

Ainsi, sachant que le correcteur continu initial C(s) stabilise P(s), la stabilité de la boucle fermée décrite par la figure III.1 peut être testée avec le théorème du faible gain.

Considérons la figure III.16 avec P(s) l'installation, C(s) le correcteur continu (connu), $C_d(z)$ le correcteur discret (inconnu), $F_a(s)$ le filtre anti-repliement et H(s) le bloqueur d'ordre zéro.

Comme le montre la figure III.16, quelques hypothèses sont nécessaires pour pouvoir appliquer le théorème du faible gain. Tout d'abord, C(s) doit être stable en boucle ouverte et être approximé par $C_d(z)$ lui même également stable. C(s) doit stabiliser l'installation P(s) et $F_a(s)$ doit être stable.

Δ constitue l'opérateur de "l'erreur d'approximation" entre C(s) et le correcteur discret $C_d(z)$ associé au filtre anti-repliement $F_a(s)$ et au bloqueur d'ordre zéro H(s).

L'hypothèse de stabilité sur C(s) et $C_d(z)$ n'a pas été reprise pour le problème d'optimisation H_∞ de la figure III.10 car l'opérateur Δ n'y est pas utilisé.

Pour étudier l'influence de Δ sur la stabilité en boucle fermée, une représentation équivalente de la figure III.16 est donnée ci-dessous en la figure III.17.

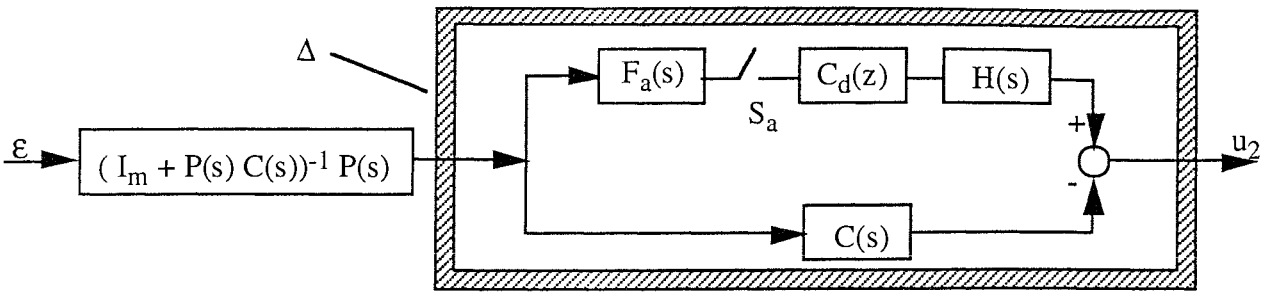


Figure III.17

Rappelons que $C_d(z)$ bénéficie de l'expression de bon candidat s'il est stabilisant et si l'opérateur hybride J_S, allant de $\varepsilon \in L_2[0,\infty)$ vers $u_2 \in L_2[0,\infty)$, donné par

$$J_S \cong \Delta\left(I_m+PC\right)^{-1}P \tag{III.15}$$

est borné et minimal, avec

$$\|J_S\|_\infty = \max_{\varepsilon \in L_2[0\ \infty)} \frac{\|J_S\varepsilon\|_2}{\|\varepsilon\|_2} \tag{III.16}$$

Notons que Δ, $(I_m + P(s)C(s))^{-1}P(s)$ et $F_a(s)$ sont bornés (ils ont un gain fini car ils sont stables par hypothèse). Comme de plus, C(s) et $C_d(z)$ sont stables et que H(s) a un gain fini, il en résulte que $\|\Delta\|_\infty$ existe et est bornée. Par conséquent, $\|J_S\|_\infty$ est finie. Par l'utilisation du théorème du faible gain, la boucle de la figure III.17 est stable si l'opérateur hybride J_S défini en (III.15) et (III.16) vérifie:

$$\|J_S\|_\infty < 1 \tag{III.17}$$

Pour garantir la stabilité, l'approximation effectuée doit vérifier (III.17).

III.3.2.2. Approximation du critère de stabilité

L'objectif est d'approximer les composantes continues de l'opérateur hybride J_S ($\Leftrightarrow$ approximer $(I_m + P(s)C(s))^{-1}P(s)$, $F_a(s)$, H(s) et C(s)) par des opérateurs discrets avec une petite période d'échantillonnage qui soit un sous-multiple de la période d'échantillonnage de $C_d(z)$.

L'opérateur approximé, appelé J_{Sd}, obtenu par remplacement des opérateurs continus avec leur approximation en discret converge vers $\|J_S\|_\infty$ quand la période d'échantillonnage tend vers zéro. Cette approximation est décrite par les figures III.18 et III.19 qui sont équivalentes.

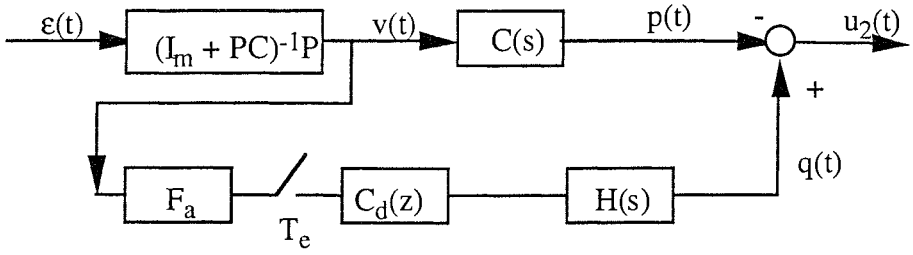


Figure III.18: problème mixte continu-discret

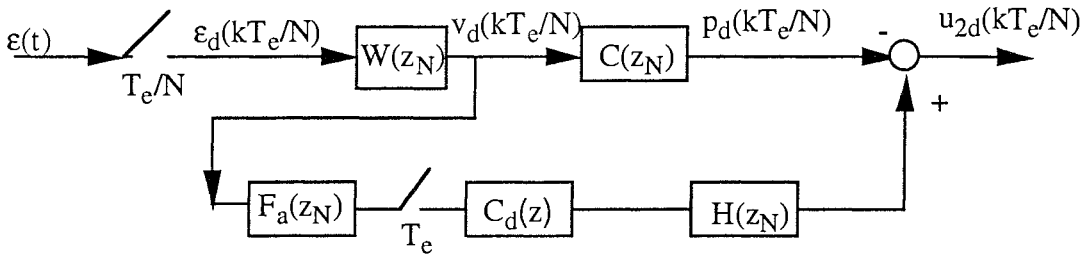


Figure III.19: problème discret multi-période

Deux périodes d'échantillonnage apparaissent maintenant dans J_{Sd}. Les signaux des fonctions de transfert en discret relatifs à T_e et T_e/N sont respectivement z et z_N.

Propriété III.1 [KEL-92]

Considérons un opérateur $\|J_S\|_\infty$ de $\varepsilon(.) \in L_2[0\ \infty)$ dans $u_2(.) \in L_2[0\ \infty)$ (voir figure III.18) et J_{Sd} de $\varepsilon_d(kT_e/N)$, $k = 0, 1, 2, ..., \in L_2[0\ \infty)$ à $u_2(kT_e/N)$, $k = 0, 1, 2, ..., \in L_2[0\ \infty)$ (voir figure III.19) pour T_e fixée, on peut alors écrire:

$$\lim_{N \to \infty} \|J_{Sd}\|_\infty = \|J_S\|_\infty \qquad \text{(III.18)}\square$$

Si on échantillonne suffisamment rapidement et si on utilise la discrétisation conventionnelle des blocs continus, on obtient un système discret multi-période avec le même gain que le système hybride continu-discret initial.

Evaluons maintenant J_{Sd}.

Nous avons deux périodes différentes T_e et T_e/N dans l'opérateur J_{Sd}. Par conséquent, comment représenter J_{Sd} par une fonction de transfert matricielle ?

Une idée simple est de représenter J_{Sd} par une fonction de transfert de norme équivalente en maintenant la plus grande période possible. Cette pratique est utilisée pour des correcteurs variants périodiquement [MIT-78].

Comme dans la figure III.15, l'échantillonneur est représenté par un décimateur, c'est-à-dire par un vecteur ligne de longueur N ayant 1 comme premier élément et 0 partout ailleurs. Le

bloqueur $H(z_N)$ est remplacé par un répétiteur, c'est-à-dire par un vecteur colonne constitué par N éléments égaux à 1.

Comme pour J_{Td} et $\tilde{J}_{Td}$, appelons $\tilde{J}_{Sd}$ l'opérateur équivalent "lent" de J_{Sd} (voir figure III.15). Ainsi, $\tilde{J}_{Sd}$ est donné par l'opérateur discret invariant ayant l'expression ci-dessous pour fonction de transfert (dans le cas monovariable):

$$\tilde{J}_{Sd}(z) = \left[\tilde{C}(z) - \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} C_d(z) [1\ 0\ \ldots\ 0]\, \tilde{F}_a(z) \right] \tilde{W}(z) \qquad \text{(III.19)}$$

où $\tilde{C}(z)$, $\tilde{F}_a(z)$ et $\tilde{W}(z)$ sont les équivalents lents (période d'échantillonnage égale à T_e) de $C(z_N)$, $F_a(z_N)$ et $W(z_N)$ (discrétisations de C(s), $F_a(s)$ et de W(s) avec une période d'échantillonnage égale à T_e/N). Cette transformation est décrite par la figure III.14.

Pour des systèmes multivariables, les valeurs 1 et 0 présentes dans les vecteurs colonne (répétiteur) et ligne (décimateur) de (III.19) sont remplacées respectivement par des matrices identité et nulles.

Considérons la relation suivante:

$$\sum_k u_2^T(kT_e/N)u_2(kT_e/N) = \sum_k \tilde{u}_2^T(kT_e)\tilde{u}_2(kT_e) \qquad \text{(III.20)}$$

La connexion entre J_{Sd}, reliant $\varepsilon_d(.)$ à $u_2(.)$ et $\tilde{J}_{Sd}$, reliant $\tilde{\varepsilon}_d(\cdot)$ à $\tilde{u}_2(\cdot)$ assure donc

$$J_{Sd} = \tilde{J}_{Sd} \qquad \text{(III.21)}$$

En conclusion, ces approximations ont permis la réalisation d'un critère implémentable pour la discrétisation du correcteur. Ce critère vérifie une propriété similaire à J_{Td} (III.14) donnée par la propriété III.1.

Théorème III.1 [KEL-92]

En utilisant la propriété III.1, on a

$$\|J_S\|_\infty = \lim_{N \to +\infty} \|J_{Sd}\|_\infty = \lim_{N \to +\infty} \|\tilde{J}_{Sd}\|_\infty = \lim_{N \to +\infty} \|\tilde{J}_{Sd}(e^{jT_e\omega})\|_\infty$$

(III.22)□

On peut résumer la procédure à suivre en deux étapes:

- approximation du problème hybride continu-discret en un problème discret multi-période (système rapide, passage de T_e à T_e/N)

- conversion du problème multi-période en un problème mono-période ($J_S \rightarrow J_{Sd}$) et optimisation H_∞.

Par application du théorème du faible gain, la robustesse en stabilité est atteinte si l'inéquation (III.17) est vérifiée:

$$\|J_S\|_\infty < 1$$

III.4. APPLICATIONS

Dans le cadre de la discrétisation du correcteur, nous envisageons de comparer six méthodes de discrétisation sur nos deux applications. Il s'agit plus particulièrement de vérifier tout d'abord la robustesse en stabilité qui se traduit par $\|\tilde{J}_{Sd}(z)\|_\infty < 1$. Puis de tester les performances en boucle fermée en minimisant $\|\tilde{J}_{Td}(z)\|_\infty$. Les méthodes utilisées, numérotées de 1 à 6, sont listées ci-dessous:

- approximation trapézoïdale (bilinéaire ou Tustin) (1)
- approximation rectangulaire à gauche (Euler "forward") (2)
- approximation rectangulaire à droite (Euler "backward") (3)
- approximation avec invariance indicielle (4)
  (transformée en Z avec bloqueur d'ordre zéro)
- approximation avec adéquation pôles-zéros (5)
- approximation avec l'opérateur delta (6)

Les correcteurs continus d'ordre réduit $C_r(s)$ utilisés sont issus de la méthode de réduction équilibrée, en boucle fermée, avec pondération fréquentielle, basée sur les facteurs co-premiers normalisés. Cette méthode est référencée par (1) dans le chapitre § II de ce mémoire (§ II.6.1.). Les différents résultats obtenus sont exposés dans les tableaux III.1 à III.3, les calculs étant effectués pour trois valeurs de N distinctes (3, 10, 25) (voir (III.14) et (III.18)).

III.4.1. Système à quatre disques

$C_d(z)$ représente l'approximation obtenue à partir du correcteur continu $C_r(s)$ qui constitue la troncation du correcteur C(s) d'ordre 8 à un ordre 3 (voir § II.6.2.), (tableau III.1) puis à un ordre 2 (tableau III.2).

Approximations		1	2	3	4	5	6
Boucle fermée		stable	stable	stable	stable	stable	**instable**
$\|\|\tilde{J}_{Td}\|\|_\infty$	N = 3	**0.0484**	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484	0.0788
	N = 10	**0.0524**	0.0526	0.0522	0.0524	0.0524	0.0808
	N = 25	**0.0630**	0.0637	0.0624	0.0630	0.0630	0.1138
$\|\|\tilde{J}_{Sd}\|\|_\infty$	N = 3	**0.0578**	0.0581	0.0574	0.0578	0.0578	0.0740
	N = 10	**0.0825**	0.0835	0.0816	0.0825	0.0825	0.1008
	N = 25	**0.1093**	0.1108	0.1079	0.1093	0.1093	0.1813

Tableau III.1: utilisation d'un correcteur d'ordre 3

Approximations		1	2	3	4	5	6
Boucle fermée		stable	stable	stable	stable	stable	**instable**
$\|\|\tilde{J}_{Td}\|\|_\infty$	N = 3	**0.0484**	0.0484	0.0484	0.0484	0.0484	0.0478
	N = 10	**0.0506**	0.0506	0.0506	0.0506	0.0506	0.0518
	N = 25	**0.0561**	0.0561	0.0560	0.0561	0.0561	0.0672
$\|\|\tilde{J}_{Sd}\|\|_\infty$	N = 3	**0.0541**	0.0541	0.0541	0.0541	0.0541	0.0486
	N = 10	**0.0720**	0.0721	0.0719	0.0720	0.0720	0.0583
	N = 25	**0.0928**	0.0929	0.0927	0.0928	0.0928	0.0967

Tableau III.2: utilisation d'un correcteur d'ordre 2

On remarque que la boucle fermée est instable uniquement pour la méthode 6. Le critère de robustesse en stabilité vérifie bien $\|\tilde{J}_{Sd}(z)\|_\infty < 1$ quelle que soit la méthode utilisée (de 1 à 6), quel que soit l'ordre réduit (3 ou 2) et quelle que soit la valeur de N (3, 10 ou 25). Le critère de robustesse $\|\tilde{J}_{Sd}(z)\|_\infty$, est suffisant mais non nécessaire. De plus, il est très conservatif. Les performances en boucle fermée qui se caractérisent par la minimisation de $\|\tilde{J}_{Td}(z)\|_\infty$ donnent aussi de bons résultats.

III.4.2. Plate-forme de télécommunication Eurostar 2000+

$C_d(z)$ est l'approximation réalisée sur un correcteur continu obtenu par la mise en série du préfiltre d'ordre 4 et de $C_r(s)$ qui est la troncation du correcteur H_∞ d'un ordre 10 à un ordre 3 (voir § II.6.3.). Ceci nous mène à un ordre 7 pour $C_d(z)$.

Approximations		1	2	3	4	5	6
Boucle fermée		stable	**instable**	stable	stable	stable	**instable**
$\|\|\tilde{J}_{Td}\|\|_\infty$	N = 3	**3.2047**	3.6314	3.2580	4.3500	3.4450	12.1726
	N = 10	**6.8137**	7.5405	6.9297	9.0868	7.3106	21.6204
	N = 25	**11.1368**	12.2737	11.3280	14.8067	11.9459	33.9395
$\|\|\tilde{J}_{Sd}\|\|_\infty$	N = 3	**0.2016**	0.2991	0.2087	0.4304	0.2758	1.7197
	N = 10	**0.2074**	0.2946	0.2151	0.4365	0.2894	1.7225
	N = 25	**0.2089**	0.2937	0.2167	0.4380	0.2928	1.7232

Tableau III.3: utilisation d'un correcteur d'ordre 3

On remarque que la boucle fermée est instable pour les méthodes 2 et 6. Le critère de robustesse en stabilité vérifie bien $\|\tilde{J}_{Sd}(z)\|_\infty < 1$ pour les méthodes utilisées (de 1 à 5), quelle que soit la valeur de N (3, 10 ou 25). Le critère $\|\tilde{J}_{Sd}(z)\|_\infty$ montre que la méthode (6) donne une boucle fermée instable, mais ne détecte pas l'instabilité générée par la méthode (2). Sur cet exemple, on voit que les méthodes (2) et (6) sont très proches (voir (III.4) et (III.8)). Les performances en boucle fermée qui se caractérisent par la minimisation de $\|\tilde{J}_{Td}(z)\|_\infty$ sont défaillantes lorsque N augmente. Ceci est dû, en partie, à des problèmes numériques.

III.5. CONCLUSION

On peut remarquer tout d'abord que l'opérateur delta nous conduit à l'instabilité dans nos deux applications et que l'approximation rectangulaire à gauche (Euler "forward") est uniquement instable pour la seconde application.

On constate que la transformation bilinéaire (1), malgré la procédure de réduction de C(s), donne la meilleure approximation du comportement en boucle fermée du correcteur C(s), ce constat est mis en évidence par le tableau III.3 dans la seconde application. En effet, c'est elle qui répond le mieux au compromis robustesse en stabilité et performances en boucle fermée. C'est donc sur le correcteur $C_d(z)$ issu de la transformation bilinéaire que l'on va pratiquer l'optimisation à mots finis (partie référencée IV).

CHAPITRE IV

IMPLEMENTATION A MOTS DE LONGUEUR FINIE

IV.1. INTRODUCTION

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés récemment aux effets dus à l'implémentation des algorithmes sur des processeurs dont les mots sont de longueur finie. Dans la littérature, on utilise souvent l'abréviation anglo-saxonne "F.W.L." (finite word length) pour déterminer ces mots de longueur finie. Le problème de spatialisation des composants nécessite une protection de ces derniers face aux rayonnements cosmiques. La simplicité et l'ancienneté des processeurs impliquent des contraintes de type "F.W.L.". Les calculs relatifs à tout matériel digital s'effectuent en tenant compte de trois phénomènes:

- le bruit de quantification (après toute opération arithmétique),
- l'implémentation "F.W.L." des coefficients du filtre,
- les dépassements.

Une synthèse dans l'espace d'état avec optimisation "F.W.L." revient à choisir les réalisations d'état qui minimisent la dégradation des performances d'un système due aux effets "F.W.L.". Cette dégradation peut être séparée en deux parties [MUL-76], [THI-86]:

- la première, résultant de l'implémentation "F.W.L." des coefficients du filtre, mesurée par la sensibilité globale [TAV-84], [THI-86],
- la seconde, provenant des arrondis des signaux après toute opération arithmétique et étant mesurée par l'erreur d'arrondi du gain [HWA-77].

Tavsanoglu et Thiele [TAV-84] présentent une mesure globale de la sensibilité de la fonction de transfert (paramètres du modèle d'état) et proposent une borne supérieure de l'erreur pour ladite mesure.

Thiele [THI-86] démontre que les réalisations minimisant cette borne supérieure minimisent aussi la mesure de la sensibilité et que cette mesure de sensibilité ainsi que l'erreur d'arrondi du gain sont simultanément optimisées.

D'un point de vue pratique, des pondérations sont nécessaires car les performances sont souvent d'un grand intérêt dans un domaine fréquentiel spécifique. Ainsi, pour atteindre cet objectif, la fonction sensibilité sera utilisée avec une pondération fréquentielle.

Thiele a résolu ce problème de minimisation de la sensibilité en employant des méthodes qui sont essentiellement les mêmes que pour le problème non pondéré. Les réalisations optimales sont souvent paramétrées pleinement.

En pratique, il est souhaitable de bénéficier d'un filtre avec une performance correcte et d'un nombre minimal de coefficients à implémenter.

IV.2. FORMULATION DU PROBLEME

L'ordinateur constitue un apport indéniable dans le calcul scientifique. Par ses performances sans cesse croissantes liées aux évolutions technologiques, il permet d'apporter des solutions autrefois non envisageables, en un temps très court, à de multiples problèmes. Cette évolution a rendu la représentation d'un signal digital en une forme analogique plus facile et plus pratique. Toutefois, à cause des limitations imposées par la machine, il n'est pas toujours possible d'obtenir des résultats numériques de précision suffisante pour une durée d'exécution acceptable.

Rappelons que notre problème consiste à implanter un correcteur $C_d(z)$ à mots de longueur finie. L'un des problèmes les plus importants lié aux filtres digitaux concerne la minimisation de la dégradation des performances. Cette dernière est due à la précision finie de l'implémentation des filtres. Les effets résultant de cette précision finie sont:

- la quantification des signaux et les erreurs de quantification,
- les dépassements lors de la programmation qui peuvent conduire à l'instabilité d'un filtre initialement stable,
- l'accumulation des erreurs d'arrondi qui se manifestent lors des diverses opérations arithmétiques,
- la quantification des coefficients pour un nombre fini de bits et les erreurs de quantification qui en résultent.

Le premier de ces effets dépend du convertisseur analogique-digital qui est utilisé. Les dépassements sont relatifs à la longueur du mot donc à la capacité de la machine. Les deux derniers effets cités précédemment sont appelés: effets à mots de longueur finie "F.W.L." (finite word length). Ils dépendent de la paramétrisation ou de la réalisation d'état du filtre. Malheureusement, la dégradation des performances due à ces erreurs est inévitable. Par conséquent, l'objectif consiste à les réduire ou à les minimiser.

IV.2.1. Problèmes numériques

Tout calculateur numérique ne peut traiter des données que sous forme binaire. Pour toute affectation ou toute opération arithmétique, il manipule des opérandes sous forme de "mots-mémoires" qui ont une taille (en nombre de bits) limitée. Cette limitation de la taille d'un mot-mémoire constitue une source d'erreur inévitable.

IV.2.1.1. Erreurs d'arrondi

A cause de la limitation de la taille du mot-mémoire évoquée précédemment, tout calculateur numérique a une précision limitée. De ce fait, les valeurs numériques réelles qui caractérisent les

données à traiter et qui peuvent théoriquement être constituées par une suite illimitée de chiffres, sont approximées par une valeur représentable en machine. On obtient ainsi une valeur approchée, par défaut ou au plus près, introduisant ainsi une certaine erreur:

- une valeur approchée par défaut est une valeur obtenue en supprimant tous les chiffres significatifs de la valeur numérique à représenter ne pouvant pas entrer dans un mot-mémoire. Par cette opération, on commet ce que l'on appelle une erreur de troncature,

- une valeur approchée au plus près est une valeur obtenue par troncature après une opération d'arrondi. On dit alors qu'on commet une erreur d'arrondi sur la valeur numérique à représenter.

Ces deux types d'approximation sont les plus souvent utilisées dans les ordinateurs. Pour effectuer leurs calculs, la plupart des ordinateurs travaillent en arithmétique à virgule flottante normalisée, en simple ou en double précision.

IV.2.1.2. Représentations en nombres binaires

Dans la plupart des ordinateurs, un nombre réel est représenté par des codes binaires. Du fait de la limitation de la taille mémoire de la machine, il doit être arrondi ou tronqué en un nombre d'éléments binaires acceptable, appelés bits.

En représentation à virgule fixe, un nombre réel de longueur infinie s'écrit:

$$x = K\,(-x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}) \qquad \text{(IV.1)}$$

où K est un facteur scalaire arbitraire, les x_i sont des éléments binaires égaux à 0 ou à 1. Le premier bit, x_0, est appelé le bit de signe: x est positif ($0 \le x \le K$) ou négatif ($-K \le x \le 0$) selon que x_0 a pour valeur 0 ou 1. Le nombre entre parenthèses de la formule (IV.1) est compris entre -1 et +1. L'intervalle [-K, K] constitue l'ensemble des nombres pouvant être représenté par (IV.1). Si un registre à mots de longueur finie ayant B+1 bits est utilisé (+1 pour la prise en compte de son signe), alors la représentation (IV.1) doit être remplacée par son estimation à mots de longueur finie. Par exemple, en supprimant tous les termes au-delà de 2^{-B} dans (IV.1), on peut donner une version tronquée, c'est-à-dire à mots de longueur finie, de la représentation à mot de longueur infinie (IV.1) par:

$$Q[x] = K\,(-x_0 + \sum_{i=1}^{B} x_i 2^{-i}) \qquad \text{(IV.2)}$$

Les nombres quantifiés représentés par (IV.2) sont dans l'intervalle $-K \le Q[x] \le K - q$, où chaque nombre est un multiple de $q = K \times 2^{-B}$. Q[x] est une version tronquée du nombre exact

x. L'erreur produite, appelée erreur de troncation (e_T) et comprise dans l'intervalle $0 \leq e_T \leq q$, est égale à:

$$e_T = x - Q[x] \qquad \text{(IV.3.a)}$$

Une erreur d'arrondi (e_A) provenant de la quantification peut également apparaître, chaque nombre x étant remplacé par le nombre quantifié le plus proche. Cette erreur est situé dans l'intervalle $-q/2 \leq e_A \leq q/2$ et est égale à:

$$e_A = x - Q[x] \qquad \text{(IV.3.b)}$$

L'arithmétique binaire à virgule flottante permet l'accroissement de l'intervalle de représentation (intervalle [-K, K] pour la formule (IV.1)). Cette arithmétique adopte la représentation suivante:

$$x = x_m \, 2^{x_e} \qquad \text{(IV.4)}$$

où x_m est une partie fractionnaire, appelée mantisse ($0.5 \leq |x_m| \leq 1$) et x_e est l'exposant (entier signé). L'intervalle de représentation d'un nombre en notation à virgule flottante est déterminé par le nombre de bits utilisé pour l'exposant. Si e +1 bits (e: nombre entier) sont utilisés pour la représentation de l'entier x_e (+1 pour le signe), alors cet intervalle est approximativement de 2^e.

IV.2.1.3. Erreurs de quantification et dépassements

Un dépassement intervient dès lors que $x \notin [-K, K]$. Ceci se produit souvent lorsque x est le résultat de l'addition et / ou de la multiplication de 2 nombres. Par exemple, comme l'illustre la figure IV.1, le résultat de l'addition de 2 nombres positifs peut sortir de l'intervalle des nombres positifs imposé par l'utilisation d'une représentation à mots de longueur finie. Il s'ensuit dans ce cas une erreur au niveau du bit de signe: le résultat est de signe opposé et représente donc une erreur considérable.

0 0 0 1	1/8
+	
0 1 1 1	7/8
=	
1 0 0 0	-8/8

Figure IV.1: addition illustrant un dépassement

Les méthodes les plus utilisées pour traiter ce genre de problème sont celle du "complément à deux" ou celle de "dépassement saturé" (remplacer un nombre qui dépasse l'intervalle de représentation par le plus proche ne dépassant pas). L'inconvénient de la première nommée est que rien ne peut modifier la somme de 2 nombres lorsqu'il y a dépassement. Par contre, l'avantage de cette méthode, contrairement à la deuxième citée ci-dessus, réside dans le fait que des dépassements se produisant dans des résultats intermédiaires d'une somme de plusieurs nombres ne faussent pas le résultat si celui-ci appartient à l'intervalle de représentation autorisé.

Etant donnée que la caractéristique du dépassement est la non linéarité, ce dernier peut provoquer des oscillations, même sur des filtres stables. Le choix de la réalisation d'état permet de remédier à cela. En particulier, si la matrice de transition A est rendue normale ($A^TA = AA^T$) par le choix d'une transformation de similarité appropriée, ces oscillations ne se produisent pas [ROB-87].

L'arrondi, contrairement à la troncation, procure une erreur dont la valeur est comprise entre [-q/2, q/2]. Il est même plus pratique, de part les simulations et les études théoriques établies, de considérer e_A (IV.3.b) comme un bruit blanc, non corrélé avec x, et avec une distribution uniforme sur [-q/2, q/2] [SRI-77]. La variance du bruit e_A associée à cette distribution est égale à:

$$\sigma^2 = E\{e^2\} = q^2/12 \qquad \text{(IV.5)}$$

Les dépassements pouvant produire des erreurs inacceptables, des précautions doivent être prises, notamment en prenant K suffisamment grand de telle sorte que les signaux issus du filtre digital restent dans l'intervalle de représentation autorisé.

La figure IV.2 illustre les différentes erreurs commises en arrondissant ou en tronquant.

0 1 0 1	5/8
×	
0 0 1 1	3/8
=	
0 0 0 1 1 1 1	15/64
0 0 1 0	2/8 en arrondissant
0 0 0 1	1/8 en tronquant

Figure IV.2: multiplication illustrant
un arrondi ou une troncation lors d'un dépassement

La multiplication d'un nombre de B_S bits et d'un de B_C bits produit un nombre ayant $B_S + B_C$ bits devant être arrondi ou tronqué à B_S bits afin d'être stocké dans un registre à mots de longueur finie.

En pratique, les erreurs d'arrondi sont bornées par q/2 si le format "complément à deux" est utilisé. Tous les nombres présents lors de ces opérations arithmétiques doivent être limités par K.

IV.2.2. Comportement en boucle fermée

Les problèmes numériques dus à la représentation des nombres avec des mots de longueur finie (erreurs de troncation et d'arrondi, bruit de quantification, dépassement de la taille des mots mémoires) font que les modèles utilisés (système et correcteur) peuvent être très différents selon qu'ils sont vus par le calculateur ou par l'ingénieur qui a conçu la régulation. Entre le correcteur, tel qu'il a été calculé, et le correcteur tel qu'il est réellement implanté, il y a donc une migration du gain statique, des pôles et des zéros. Il s'ensuit donc, entre la boucle de régulation synthétisée et la boucle de régulation implantée sur un calculateur avec un correcteur numérique, une baisse des performances et de la robustesse. Cette baisse peut être très dommageable si les différences entre le correcteur synthétisé et le correcteur implanté sont importantes dans la bande passante ou dans une autre gamme de fréquences "sensible". C'est la prise en compte de l'environnement de la boucle de régulation et des contraintes fréquentielles qui lui sont attachées qui différencie l'implémentation d'un correcteur discret de celle d'un filtre numérique.

IV.3. SENSIBILITE D'UN FILTRE NUMERIQUE

IV.3.1. Réalisation d'état d'un filtre numérique

Considérons une fonction de transfert H(z) discrète, scalaire, rationnelle, stable, décrite par

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i z^{-i}} \qquad \text{(IV.6)}$$

dont une réalisation d'état minimale est donnée par:

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \text{(IV.7.a)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Eu(t) \qquad \text{(IV.7.b)}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^n$, $C^T \in \mathbb{R}^n$ et $E \in \mathbb{R}$.

Nous pouvons donc écrire:

$$H(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + E \qquad (IV.8)$$

A la différence des coefficients $\{a_i\}$ et $\{b_i\}$ de (IV.6) qui sont uniques, il y a une infinité de réalisations d'état. On peut définir l'ensemble des réalisations d'état de H(z) par S_H:

$$S_H = \{\{A, B, C, E\}: H(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + E\} \qquad (IV.9)$$

Si {A, B, C, E} appartient à S_H alors cette appartenance est aussi vraie pour $\{T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, E\}$ où T est une matrice réelle non singulière. T est appelée transformation de similarité, les matrices A et $T^{-1}AT$ étant similaires [HOR-90].

Dans le cas d'implémentation à précision infinie, toute réalisation dans S_H est équivalente à une autre car elles ont la même fonction de transfert H(z). Cependant, elles ont des propriétés numériques différentes: avec une implémentation à mots de longueur finie, deux réalisations d'état d'un même système ne produisent pas la même fonction de transfert et donc ont des performances différentes.

Ainsi, il convient de définir une mesure de la sensibilité d'une réalisation d'état afin d'optimiser le choix de celle-ci lors de son implantation à mots de longueur finie. C'est l'objet du paragraphe suivant.

IV.3.2. Mesure de la sensibilité d'une réalisation d'état d'un filtre numérique

IV.3.2.1. Mesure de la sensibilité sans pondération fréquentielle

En pratique, implanter les coefficients de {A, B, C, E} de manière exacte vue les contraintes d'implémentation à mots de longueur finie se révèle très délicat voir impossible. L'implémentation de la fonction de transfert H(z) est différente selon que {A, B, C, E} est écrite à mots de longueur finie ou à mots de longueur infinie.

Il existe bien plusieurs manières de définir une mesure de la sensibilité. Celle étudiée dans ce mémoire est proposée par Tavsanoglu et Thiele [TAV-84]. Il s'agit d'une mesure absolue plutôt que relative. On va donc chercher une réalisation d'état qui optimise cette mesure.

Donnons d'abord les deux définitions suivantes.

Définition IV.1

Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice et $f(M) \in \mathbb{C}$ une fonction scalaire complexe de M, différentiable par rapport à tous les éléments de M. On définit la fonction sensibilité de f par rapport à M ainsi:

$$S_M = \frac{\partial f}{\partial M} \qquad (IV.10.a)$$

avec

$$(S_M)_{ij} = \frac{\partial f}{\partial m_{ij}} \qquad \text{(IV.10.b)}$$

où les m_{ij} sont les (i,j) ièmes éléments de la matrice M. ❑

Définition IV.2

Soit $f(z) \in \mathbb{C}^{n\times m}$ une fonction matricielle à valeurs complexes de la variable complexe z. On définit la norme L_p de f(z) comme suit:

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left\|f(e^{j\omega})\right\|_F^p d\omega\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(IV.11)}$$

avec $\left\|f(e^{j\omega})\right\|_F$, norme de Frobenius de la matrice $f(e^{j\omega})$ déterminée par:

$$\left\|f(e^{j\omega})\right\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|f_{ik}(e^{j\omega})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(tr(f^T(e^{-j\omega})f(e^{j\omega})\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(IV.12)}❑$$

La sensibilité des coefficients d'une réalisation d'état vis-à-vis de la matrice A, notée S_A, peut s'écrire en utilisant la définition IV.1:

$$S_A = \left\|\frac{\partial H(z)}{\partial A}\right\|_p^2 = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left|\frac{\partial H}{\partial A}\right|^2\right\}^{p/2} d\omega\right\}^{2/p}, \quad p = 1, 2, ..., \infty \qquad \text{(IV.13)}$$

de même pour S_B et S_C. ❑

Avec (IV.13), la sensibilité de la fonction de transfert scalaire H(z) (IV.8) par rapport aux éléments des matrices A, B et C est donnée par [TAV-84].

$$S_A(z) = \frac{\partial H(z)}{\partial A} = G(z)F^T(z) \qquad \text{(IV.14.a)}$$

$$S_B(z) = \frac{\partial H(z)}{\partial B} = G(z) \qquad \text{(IV.14.b)}$$

$$S_C(z) = \frac{\partial H(z)}{\partial C^T} = F(z) \qquad \text{(IV.14.c)}$$

avec

$$F(z) = (zI_n - A)^{-1}B = [f_1(z) \ldots f_n(z)]^T \qquad \text{(IV.15.a)}$$

$$G^T(z) = C(zI_n - A)^{-1} = [g_1(z) \ldots g_n(z)] \qquad \text{(IV.15.b)}$$

où $H(z)$, $f_i(z)$, $g_i(z)$ sont des fonctions scalaires et $F(z)$, $G(z)$ sont des fonctions vectorielles.

Les fonctions $S_A(z)$, $S_B(z)$, $S_C(z)$ sont des fonctions matricielles ou vectorielles de la variable complexe z. Le terme E étant invariant par changement de base (voir S_H (IV.9)), il n'est pas optimisé, et donc le terme S_E n'est pas calculé.

Tavsanoglu [TAV-84] a proposé la mesure suivante pour la sensibilité de la fonction de transfert H(z) vis-à-vis des paramètres de la réalisation {A, B, C} notée J_{12}:

$$J_{12} = \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial A} \right\|_1^2 + \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial B} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial C^T} \right\|_2^2 \qquad \text{(IV.16)}$$

L'indice 12 de cette mesure est lié au choix de la norme 1 pour le premier terme de la somme et de la norme 2 pour les deux autres. Deux raisons nous mènent au choix de la norme 1 mentionnée ci-dessus. D'une part, parce que l'on obtient une solution analytique directe de S_A au lieu d'avoir recours à la programmation non linéaire [GEV-93]. D'autre part, la sensibilité des pôles de H(z) vis-à-vis des coefficients de la matrice A, appelée $S_{A,\lambda}$, peut être explicitée par un critère proche de $\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial A} \right\|_1^2$ (voir (IV.23.a) dans la suite de ce mémoire).

Une borne supérieure, appelée $\bar{J}_{12}$ de J_{12} peut être déterminée analytiquement comme suit. Majorons d'abord $\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial A} \right\|_1^2$ en utilisant (IV.14) et la définition IV.2.

$$\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial A} \right\|_1^2 \leq \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial B} \right\|_2^2 \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial C^T} \right\|_2^2 \qquad \text{(IV.17)}$$

Evaluons maintenant $\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial B} \right\|_2^2$ et $\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial C^T} \right\|_2^2$ avec (IV.14), (voir § Annexes A.II.):

$$\left\| \frac{\partial H(z)}{\partial B} \right\|_2^2 = \|G\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G^T(e^{-j\omega}) \, G(e^{j\omega}) \, d\omega = tr\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k C^T C A^k \right) = tr(W_o) \qquad \text{(IV.18.a)}$$

$$\left\|\frac{\partial H(z)}{\partial C^T}\right\|_2^2 = \|F\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F^T(e^{-j\omega})\, F(e^{j\omega})\, d\omega = tr\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T \left(A^T\right)^k\right) = tr(W_c) \qquad (IV.18b)$$

Par conséquent, la borne supérieure de J_{12} est la suivante:

$$J_{12} \leq \bar{J}_{12} = tr(W_o)\, tr(W_c) + tr(W_o) + tr(W_c) \qquad (IV.19.a)$$

Thiele [THI-86] a montré que les réalisations qui minimisent cette borne supérieure ($\bar{J}_{12}$), minimisent la mesure de la sensibilité (J_{12}).

L'équation (IV.19.a) met en présence W_c et W_o qui sont respectivement les grammiens de commandabilité et d'observabilité de H(z) associés à la réalisation d'état {A, B, C}.

Le changement de base x = Tz transforme {A, B, C, W_c, W_o} en {$T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, $T^{-1}W_cT^{-T}$, T^TW_oT}. Il existe donc une infinité de solutions dans l'écriture de $\bar{J}_{12}$ comme suit:

$$\bar{J}_{12} = tr(T^TW_oT)\, tr(T^{-1}W_cT^{-T}) + tr(T^TW_oT) + tr(T^{-1}W_cT^{-T}) \qquad (IV.19.b)$$

A l'aide de la propriété sur les traces (tr(AB) = tr(BA)), on peut écrire (IV.19.b) de la manière suivante [GEV-93]:

$$\bar{J}_{12} = tr(W_oP)\, tr(W_cP^{-1}) + tr(W_oP) + tr(W_cP^{-1}) \qquad (IV.19.c)$$

avec $P = TT^T$.

Donc le problème de l'optimisation "F.W.L." consiste à chercher P pour minimiser $\bar{J}_{12}$

$$\min_{\{A,B,C\}} J_{12} \Leftrightarrow \min_{\{A,B,C\}} \bar{J}_{12} \Leftrightarrow \min_{T} \bar{J}_{12} \Leftrightarrow \min_{P} \bar{J}_{12} \qquad (IV.20)$$

IV.3.2.2. Mesure de la sensibilité avec pondérations fréquentielles

La mesure de la sensibilité pondérée, notée J_{p12}, est décrite ci-dessous où les pondérations fréquentielles $W_A(z)$, $W_B(z)$ et $W_C(z)$ sont trois fonctions intégrables scalaires de la variable complexe z

$$J_{p12} = \left\|W_A(z)\frac{\partial H(z)}{\partial A}\right\|_1^2 + \left\|W_B(z)\frac{\partial H(z)}{\partial B}\right\|_2^2 + \left\|W_C(z)\frac{\partial H(z)}{\partial C^T}\right\|_2^2 \qquad (IV.21)$$

En boucle fermée, l'utilisation de pondérations fréquentielles va permettre de sélectionner les bandes de fréquences dans lesquelles on souhaite diminuer la sensibilité de H(z) vis-à-vis de la réalisation d'état.

Une utilisation intéressante des pondérations fréquentielles dans l'optimisation "F.W.L." est donnée par Thiele [THI-86]: une mesure de la sensibilité des pôles d'une réalisation d'état, où les n pôles $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A est décrite par:

$$S_{A,\lambda} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \lambda_k}{\partial a_{ij}} \right|^2 \right\}^{1/2} \right\}^2 \qquad \text{(IV.22)}$$

L'équation (IV.22) peut être approximée par (IV.23.a) en utilisant (IV.23.b):

$$S_{A,\lambda} = \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial A} W_A(z) \right\|_1^2 \qquad \text{(IV.23.a)}$$

$$W_A(z) = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{(1-r_k)^2 D'(\lambda_k)}{N(\lambda_k)} \right| \delta(z - z_k) \qquad \text{(IV.23.b)}$$

avec $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, $D'(z) = \frac{\partial D(z)}{\partial z}$, $\lambda_k = r_k\, e^{-j\omega k}$, $z_k = e^{-j\omega k}$ et δ représente la fonction de Dirac.

Evaluons l'équation (IV.21) et pour cela, posons tout d'abord la factorisation suivante [LI-92]:

$$W_A(z) = W_1(z)W_2(z) \qquad \text{(IV.24)}$$

Les pondérations $W_A(z)$, $W_B(z)$ et $W_C(z)$ sont stables. C'est aussi le cas pour $W_1(z)$ et $W_2(z)$.

Puis, en utilisant les relations (IV.14) et (IV.15), le critère J_{p12} devient:

$$J_{p12} = \left\| W_1(z)G(z)(W_2(z)F(z))^T \right\|_1^2 + \left\| W_B(z)G(z) \right\|_2^2 + \left\| W_C(z)F(z) \right\|_2^2 \qquad \text{(IV.25)}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on peut majorer le premier terme de la somme ci-dessus:

$$\left\|\frac{\partial H(z)}{\partial A}\right\|_1^2 = \left\|W_1(z)G(z)(W_2(z)F(z))^T\right\|_1^2 \le \left\|W_1(z)G(z)\right\|_2^2 \left\|W_2(z)F(z)\right\|_2^2 \qquad \text{(IV.26)}$$

Ainsi, une borne supérieure de J_{p12} est donnée par $\bar{J}_{p12}$:

$$J_{p12} \le \bar{J}_{p12} = \left\|W_1(z)G(z)\right\|_2^2 \left\|W_2(z)F(z)\right\|_2^2 + \left\|\frac{\partial H(z)}{\partial B}\right\|_2^2 + \left\|\frac{\partial H(z)}{\partial C^T}\right\|_2^2 \qquad \text{(IV.27)}$$

Une transformation de similarité x = Tz substitue {A, B, C, F(z), G(z)} en {$T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, $T^{-1}F(z)$, $T^TG(z)$}. Il existe donc une infinité de réalisations de H(z).

Définissons les grammiens pondérés suivants:

$$W_{o1} = \frac{1}{2j\pi}\oint_{|z|=1}(G(z)W_1(z))(G(z)W_1(z))^H z^{-1}dz \qquad \text{(IV.28.a)}$$

$$W_{c2} = \frac{1}{2j\pi}\oint_{|z|=1}(F(z)W_2(z))(F(z)W_2(z))^H z^{-1}dz \qquad \text{(IV.28.b)}$$

$$W_{ob} = \frac{1}{2j\pi}\oint_{|z|=1}(G(z)W_b(z))(G(z)W_b(z))^H z^{-1}dz \qquad \text{(IV.28.c)}$$

$$W_{cc} = \frac{1}{2j\pi}\oint_{|z|=1}(F(z)W_c(z))(F(z)W_c(z))^H z^{-1}dz \qquad \text{(IV.28.d)}$$

La transformation de similarité x = Tz conduit alors au passage de (A, B, C, W_{cc}, W_{c2}, W_{ob}, W_{o1}) à ($T^{-1}AT$, $T^{-1}B$, CT, $T^{-1}W_{cc}T^{-T}$, $T^{-1}W_{c2}T^{-T}$, $T^TW_{ob}T$, $T^TW_{o1}T$).

Le critère $\bar{J}_{p12}$ (IV.27) s'écrit donc comme une fonction de la transformation de similarité T:

$$\bar{J}_{p12} = \mathrm{tr}\left(T^TW_{o1}T\right)\mathrm{tr}\left(T^{-1}W_{c2}T^{-T}\right) + \mathrm{tr}\left(T^TW_{ob}T\right) + \mathrm{tr}\left(T^{-1}W_{cc}T^{-T}\right) \qquad \text{(IV.29)}$$

En utilisant les propriétés sur les traces des matrices, on obtient:

$$\bar{J}_{p12} = \mathrm{tr}\left(W_{o1}P\right)\mathrm{tr}\left(W_{c2}P^{-1}\right) + \mathrm{tr}\left(W_{ob}P\right) + \mathrm{tr}\left(W_{cc}P^{-1}\right) \qquad \text{(IV.30)}$$

où $P = TT^T$.

Le problème "F.W.L." avec pondérations fréquentielles à résoudre est le suivant:

$$\min_{\{A,B,C\}} \bar{J}_{p12} \Leftrightarrow \min_{T:\det(T)\neq 0} \bar{J}_{p12} \Leftrightarrow \min_{P:\det(P)\neq 0} \bar{J}_{p12} \qquad (IV.31)$$

IV.4. OPTIMISATION D'UNE REALISATION D'ETAT IMPLANTEE AVEC DES MOTS DE LONGUEUR FINIE

IV.4.1. Optimisation d'une réalisation d'état sans pondération fréquentielle

En s'appuyant sur [THI-86] et [GEV-93], nous allons montrer que le problème d'optimisation (IV.20) a une solution analytique qui correspond à la recherche d'une réalisation d'état équilibrée pour le filtre H(z). La minimisation de $\bar{J}_{12}$ est basée sur la dérivée de la trace d'une matrice par rapport à une matrice symétrique P. Le lemme suivant donne deux résultats techniques qui tiennent compte de cette symétrie.

Lemme IV.1

Soient M et X deux matrices de dimension appropriée; alors

$$\text{i)}\quad \frac{d[\mathrm{tr}(MX)]}{dX} = 2M - \mathrm{diag}(M) \qquad (IV.32)$$

$$\text{ii)}\quad \frac{d\left[\mathrm{tr}\left(MX^{-1}\right)\right]}{dX} = -2\left(X^{-1}MX^{-1}\right) + \mathrm{diag}\left(X^{-1}MX^{-1}\right) \qquad (IV.33)\square$$

En utilisant ce lemme, dérivons $\bar{J}_{12}$ (IV.19.c) par rapport à P et, afin d'obtenir l'optimalité, résolvons:

$$\frac{\partial \bar{J}_{12}}{\partial P} = 0$$

La matrice P étant inversible, ces conditions de stationnarité sont donc données par:

$$(2W_o - \mathrm{diag}(W_o))\mathrm{tr}(W_cP^{-1}) - (2P^{-1}W_cP^{-1} - \mathrm{diag}(P^{-1}W_cP^{-1}))\mathrm{tr}(W_oP)$$
$$+ (2W_o - \mathrm{diag}(W_o) - (2P^{-1}W_cP^{-1} - \mathrm{diag}(P^{-1}W_cP^{-1})) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$2(tr(W_cP^{-1})W_o - tr(W_oP)P^{-1}W_cP^{-1} + W_o - P^{-1}W_cP^{-1}) - (tr(W_cP^{-1})diag(W_o) - diag(P^{-1}W_cP^{-1})tr(W_oP) + diag(W_o) - diag(P^{-1}W_cP^{-1})) = 0 \quad \text{(IV.34.a)}$$

Nous allons utiliser l'équivalence suivante:

$$2\alpha - diag(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

La relation (IV.34.a) est donc équivalente à:

$$tr(W_cP^{-1})W_o - tr(W_oP)P^{-1}W_cP^{-1} + W_o - P^{-1}W_cP^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P(tr(W_cP^{-1}) + 1)W_oP = (1 + tr(W_oP))W_c \quad \text{(IV.34.b)}$$

A cette étape, nous allons utiliser le résultat suivant. Pour $W > 0$, $M \geq 0$, $W = W^T$, $M = M^T$, l'équation

$$PWP = M \quad \text{(IV.35.a)}$$

a une solution unique $P = P^T \geq 0$, donnée par [BEL-70]:

$$P = W^{-1/2}(W^{1/2}MW^{1/2})^{1/2}W^{-1/2} \quad \text{(IV.35.b)}$$

où $W^{1/2}$ est l'unique matrice telle que:

$$W^{1/2}W^{1/2} = W \quad \text{(IV.35.c)}$$

L'équation (IV.34.b) a une forme similaire à la relation (IV.35.a). La matrice P est donc donnée par:

$$P = \frac{W_o^{-1/2}}{\sqrt{tr(W_cP^{-1}) + 1}} \left(W_o^{1/2}\sqrt{tr(W_cP^{-1}) + 1}\ (1 + tr(W_oP))W_cW_o^{1/2}\sqrt{tr(W_cP^{-1}) + 1}\right)^{1/2} \times \frac{W_o^{-1/2}}{\sqrt{tr(W_cP^{-1}) + 1}} \quad \text{(IV.36.a)}$$

Cette relation se simplifie ainsi:

$$P = \frac{\sqrt{1 + tr(W_o P)}}{\sqrt{1 + tr(W_c P^{-1})}} W_o^{-1/2} (W_o^{1/2} W_c W_o^{1/2})^{1/2} W_o^{-1/2} \qquad \text{(IV.36.b)}$$

L'optimalité de la réalisation d'état reste vraie à un changement de base orthogonal près. En effet, en posant:

$$T = \left(\frac{\sqrt{1 + tr(W_o P)}}{\sqrt{1 + tr(W_c P^{-1})}}\right)^{1/2} W_o^{-1/2} (W_o^{1/2} W_c W_o^{1/2})^{1/4} V \qquad \text{(IV.37.a)}$$

avec

$$VV^T = I_n \qquad \text{(IV.37.b)}$$

nous obtenons:

$$P = TT^T \qquad \text{(IV.37.c)}$$

Les décompositions particulières en forme de Schur et d'Hessenberg peuvent toujours être obtenues avec un choix de V satisfaisant $VV^T = I_n$.

La triangularisation de A définissant les formes de Schur et d'Hessenberg permet d'obtenir une sensibilité S_A "vraie" inférieure à S_A car on ne tient pas compte des zéros de A qui sont "vrais" dans (IV.14.a) et (IV.17).

L'objectif consiste donc à diminuer le nombre de termes incertains sur A en introduisant le maximum d'éléments égaux à 0 ou à 1.

Les deux théorèmes arrivant définissent les formes de Schur et d'Hessenberg.

Théorème IV.1 [GOL-90], [HOR-90]

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors il existe une matrice orthogonale $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($VV^T = I_n$) telle que:

$$A_S = VAV^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.38)}$$

où la matrice A_S est la décomposition de A en forme de Schur. A_S est triangulaire et chaque élément a_{ii} est soit une matrice (1×1), soit une matrice (2×2) ayant des valeurs propres complexes conjuguées. ❐

Ce théorème montre que toute matrice réelle est orthogonalement similaire à une matrice supérieure quasi-triangulaire. Les parties réelles et imaginaires des valeurs complexes peuvent être obtenues à partir de blocs diagonaux (2×2).

Théorème IV.2 [GOL-90], [HOR-90]

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, alors il existe une matrice orthogonale $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($VV^T = I_n$) telle que:

$$A_H = VAV^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \cdots & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & & \\ 0 & a_{32} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ & \vdots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{(IV.39)}$$

où la matrice A_H est la décomposition de A en forme d'Hessenberg. A_H est triangulaire avec la première sous-diagonale différente de zéro. ❐

A travers ces formes, on tient ainsi compte du fait que certains termes de la matrice d'état ont des zéros naturels dans la minimisation de $\bar{J}_{12}$ (et donc de J_{12}).

Nous allons montrer maintenant que la réalisation équilibrée constitue l'une des solutions obtenues en utilisant une des transformations de similarité T définies en (IV.37). Cette réalisation peut être facilement obtenue à partir de la diagonalisation simultanée des grammiens de commandabilité et d'observabilité (voir § II.2.2). De plus, cette réalisation peut servir de point de départ au calcul des formes de Schur ou d'Hessenberg.

Pour obtenir une réalisation équilibrée, réécrivons le critère $\bar{J}_{12}$ sous la forme de la somme de termes positifs:

$$\bar{J}_{12} = \bar{J}^1_{12} + \bar{J}^2_{12} \qquad \text{(IV.40)}$$

où

$$\bar{J}^1_{12} = \mathrm{tr}(W_o(T))\,\mathrm{tr}(W_c(T)) \qquad \text{(IV.41.a)}$$

$$\bar{J}^2_{12} = \mathrm{tr}(W_o(T)) + \mathrm{tr}(W_c(T)) \qquad \text{(IV.41.b)}$$

avec

$$W_o(T) = T^T W_o T \qquad \text{(IV.42.a)}$$

$$W_c(T) = T^{-1} W_c T^{-T} \qquad \text{(IV.42.b)}$$

Donc, une transformation de similarité T minimisant simultanément $\bar{J}_{12}^1$ et $\bar{J}_{12}^2$ minimise $\bar{J}_{12}$. En utilisant le lemme IV.1, les conditions de stationnarité de $\bar{J}_{12}^1$ et de $\bar{J}_{12}^2$ sont données par

$$\frac{\partial \bar{J}_{12}^1}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow W_o(T) = \frac{tr(W_o(T)}{tr(Wc(T)} W_c(T) \qquad \text{(IV.43)}$$

et

$$\frac{\partial \bar{J}_{12}^2}{\partial T} = 0 \Leftrightarrow W_o(T) = W_c(T) \qquad \text{(IV.44)}$$

La réalisation équilibrée, vérifiant simultanément les contraintes (IV.43) et (IV.44), est donc une solution au problème d'optimisation "F.W.L.". Elle constitue un cas particulier donné par la transformation de similarité T (IV.37). En effet, les relations (IV.43) et (IV.44) impliquent (IV.34.b), mais la réciproque est fausse.

IV.4.2. Optimisation d'une réalisation d'état avec pondérations fréquentielles

Pour résoudre le problème de l'optimisation, avec pondérations fréquentielles, de la réalisation d'état, la démarche utilisée sera la même que pour le cas non pondéré.

Avec le lemme IV.1 et (IV.30), on a:

$$\frac{\partial \bar{J}_{p12}}{\partial P} = 2\,[-\,tr(W_{o1}P)P^{-1}W_{c2}P^{-1} - P^{-1}W_{cc}P^{-1} + tr(W_{c2}P^{-1})W_{o1} + W_{ob}]$$
$$- diag(-\,tr(W_{o1}P)P^{-1}W_{c2}P^{-1} - P^{-1}W_{cc}P^{-1} + tr(W_{c2}P^{-1})W_{o1} + W_{ob}) \qquad \text{(IV.45)}$$

Afin d'obtenir l'optimalité, on doit satisfaire la condition de stationnarité $\frac{\partial \bar{J}_{p12}}{\partial P} = 0$ donnée par:

$$2P[W_{o1}tr(W_{c2}P^{-1}) + W_{ob}]P - P[diag(W_{o1})tr(W_{c2}P^{-1}) + diag(W_{ob})]P$$
$$= 2tr[(W_{o1}P)W_{c2} + W_{cc}] - P[diag(P^{-1}W_{c2}P^{-1})tr(W_{o1}P) + diag(P^{-1}W_{cc}P^{-1})]P \qquad \text{(IV.46)}$$

Le théorème suivant nous donne une condition d'unicité pour une solution au problème (IV.46).

Théorème IV.3 [LI-92]

Avec les matrices symétriques et définies positives, W_{o1}, W_{c2}, W_{ob} et W_{cc} caractérisées par (IV.28), l'équation (IV.46) possède une solution unique, le critère $\bar{J}_{p12}$ possédant un minimum global. □

En s'appuyant sur ce théorème, Gevers *et al.* [GEV-93] proposent une solution analytique basée sur (IV.35) dans le cas où $W_{ob} = q_1 W_{o1}$, $W_{cc} = q_2 W_{c2}$, q_1 et q_2 étant des scalaires positifs. L'optimalité de leur algorithme n'est pas réellement démontrée car ils ont omis l'opérateur "diag(.)" dans (IV.45) et (IV.46).

Dans le cas général comme dans ce cas particulier, une expression explicite de la solution de (IV.46) n'est donc pas proposée dans la littérature. Néanmoins, la solution P peut être obtenue par une procédure itérative utilisant l'algorithme du gradient. La méthode du gradient à pas prédéterminé est une méthode numérique pour l'optimisation des fonctions différentiables. Il est donné par:

$$P(k+1) = P(k) - \mu(k) \left.\frac{\partial \bar{J}_{p12}}{\partial P}\right|_{P=P(k)} \qquad \text{(IV.48)}$$

où $\left.\frac{\partial \bar{J}_{p12}}{\partial P}\right|_{P=P(k)}$ est donnée par (IV.45) et $\mu(k)$ représente le pas du gradient. On peut choisir par exemple

$$\mu(k) = \frac{1}{2k^2 \left\| \left.\frac{\partial \bar{J}_{p12}}{\partial P}\right|_{P=P(k)} \right\|_s} \qquad \text{(IV.49)}$$

comme pas de gradient adaptatif.

En vertu du théorème IV.3, la fonction matricielle $\bar{J}_{p12}$ possède un minimum (global) unique, atteint par une matrice P non singulière. Par conséquent, l'algorithme converge vers P optimale pour toute condition initiale définie positive.

Comme pour le cas non pondéré, on peut utiliser les formes de Schur et d'Hessenberg pour améliorer l'optimisation de la réalisation d'état.

IV.5. APPLICATION A LA PLATE-FORME DE TELECOMMUNICATION EUROSTAR 2000+

Deux solutions concernant le problème d'optimisation à mots de longueur finie ont été testées. Il s'agit de l'approche de Li *et al.* [LI-92] et de la réalisation équilibrée. Elles s'obtiennent de la manière suivante: il faut tout d'abord calculer les grammiens, puis calculer la transformation de similarité en résolvant (IV.36) - (IV.37) pour l'approche de Li [LI-92] ou calculer la solution avec la réalisation équilibrée pour la seconde approche.

IV.5.1. Correcteur pris isolément

Les résultats ont été établis sur le correcteur non réduit $C_d(z)$, pris isolément de la boucle.

Les correcteurs utilisés, tronqués après différentes approches d'optimisation "F.W.L.", sont listés ci-dessous:

0 → correcteur initial non tronqué
0_ → correcteur initial tronqué
1 → correcteur tronqué après optimisation "F.W.L." (approche de Li, Gevers et Anderson)
2 → correcteur tronqué après optimisation "F.W.L." (réalisation équilibrée)
s → correcteur tronqué après optimisation "F.W.L." avec forme de Schur (avec méthode 1 ou 2)
h → correcteur tronqué après optimisation "F.W.L." avec forme de Hessenberg (avec méthode 1 ou 2)

Les tableaux (IV.1) et (IV.2) illustrent les variations des pôles et des zéros de la fonction de transfert du correcteur. Ces dernières sont obtenues avec une troncation à 5 décimales.

Notons que le correcteur initial noté (0) n'est pas tronqué contrairement à celui noté (0_). Remarquons que les correcteurs (1, 2, s, h) ont subi une optimisation "F.W.L." avant d'être tronqués.

On remarque que la norme euclidienne de la variation de zéros ($Z_{0_}$) entre le correcteur initial non tronqué (0) et l'initial tronqué (0_) est très importante (> 2.8). Les normes des variations de zéros (Z_1 et Z_{h2}) sont acceptables (de l'ordre de 0.3). Celles concernant (Z_{s1}, Z_{h1}, Z_2, Z_{s2}) sont très petites et par conséquent, constituent de très bons résultats ($< 3.3 \times 10^{-3}$).

Concernant les variations de pôles, on peut constater que celles ($P_{0_}$) entre le correcteur initial tronqué et l'initial non tronqué est non négligeable (< 0.6). Toutes les autres établies sur

les correcteurs tronqués après différentes méthodes d'optimisation "F.W.L." utilisées (P_1, P_{s1}, P_{h1}, P_2, P_{s2}, P_{h2}) ont une variation de norme inférieure à 10^{-4}.

Les résultats illustrés par les courbes IV.3 - IV.8 ont été établis en boucle ouverte.

On peut établir une légende au vue des figures IV.3 - IV.8 comme suit:
- 0: correcteur initial,
- 0_: correcteur tronqué,
- 1: correcteur réduit ou correcteur réduit tronqué avec forme de Schur ou d'Hessenberg,
- y: sortie du correcteur,
- C_g: gain du correcteur,
- C_p: déphasage du correcteur.

Lorsqu'on compare les réponses indicielles du correcteur illustrées par les figures IV.3 et IV.4, on peut établir le constat suivant: à l'ordre 3, y_1 converge rapidement vers y_0 alors que $y_{0_}$ présente un biais; à l'ordre 4, y_1 présente un biais mais moins important que pour $y_{0_}$.

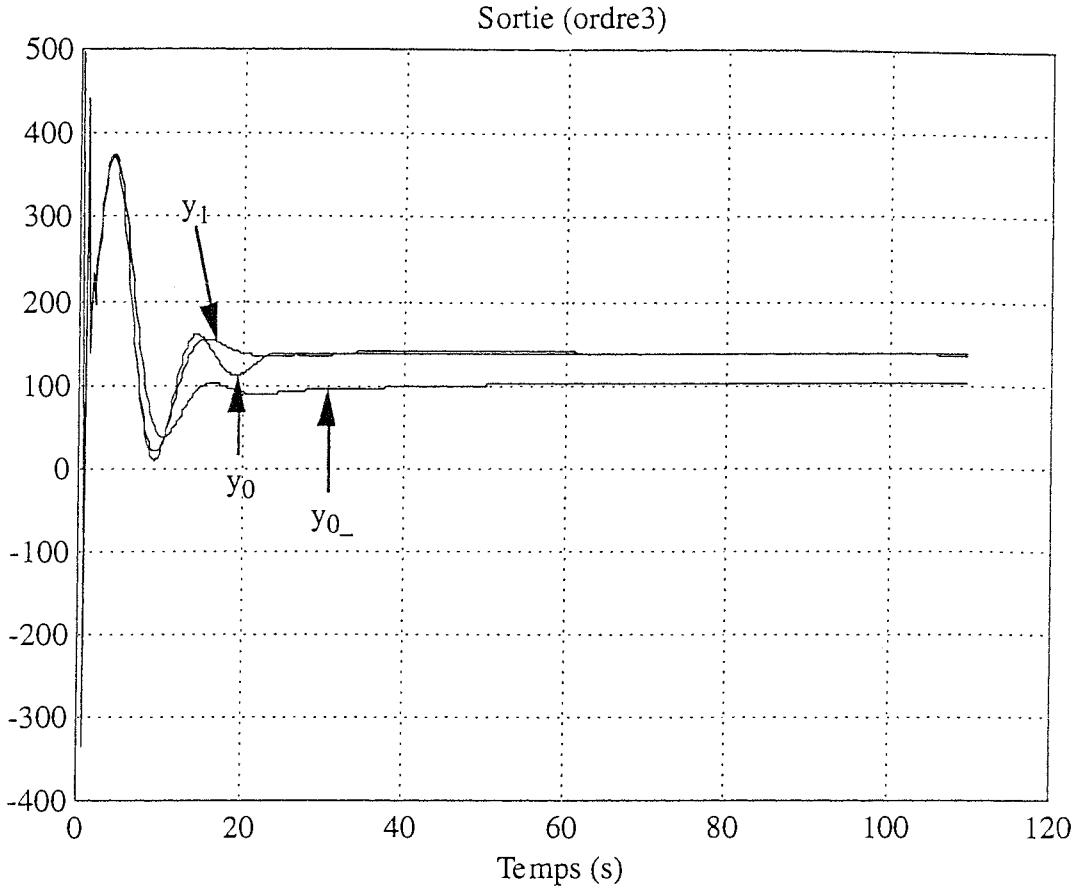
Les réponses fréquentielles du correcteur sont données par les figures IV.5 à IV.8. On peut remarquer que les déphasages et les gains du correcteur 1 (C_{p1}, C_{g1}) convergent vers ceux du correcteur initial 0 (C_{p0}, C_{g0}); ce qui n'est pas le cas pour le correcteur 0_ ($C_{p0_}$, $C_{g0_}$).

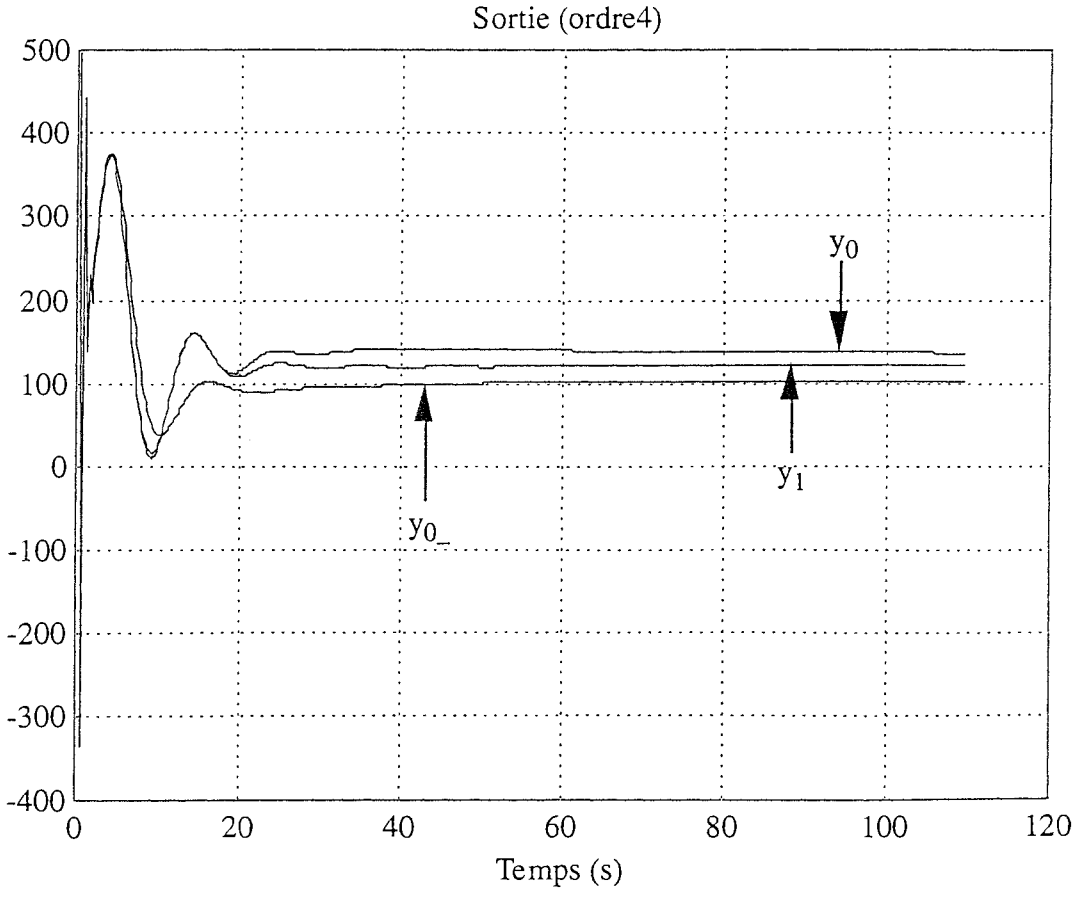
Z_0	$Z_{0_}$	Z_1	Z_{s1}	Z_{h1}	Z_2	Z_{s2}	Z_{h2}
0.3673 ± 0.2339i	0.3646 ± 0.2273i	0.3672 ± 0.2340i	0.3673 ± 0.2339i	0.3673 ± 0.2339i	0.3672 ± 0.2340i	0.3673 ± 0.2340i	0.3673 ± 0.2339i
-0.2848 ± 0.3853i	-0.2818 ± 0.3802i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i
0.9355 ± 0.0807i	0.9407 ± 0.0725i	0.9356 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0808i	0.9355 ± 0.0808i	0.9355 ± 0.0810i	0.9354 ± 0.0809i	0.9354 ±0.0806i
0.9826	0.9822	0.9834	0.9836	0.9821	0.9840	0.9840	0.9827
0.9889 ± 0.0135i	0.9921 ± 0.0103i	0.9886 ± 0.0126i	0.9885 ± 0.0138i	0.9893 ± 0.0131i	0.9885 ± 0.0140i	0.9884 ± 0.0135i	0.9887 ±0.0133i
0.8844 ± 0.4667i	0.8831 ± 0.4638i	0.9452 ± 0.3217i	0.8836 ±0.4677i	0.8833 ± 0.4675i	0.8833 ± 0.4669i	0.8830 ± 0.4674i	0.9462 ± 0.3212i
-1.0000	-1.0172	-0.9998	-0.9999	-0.9998	-1.0000	-0.9998	-0.9997
0.9468 ± 0.3219i	0.9497 ± 0.3262i	0.8854 ± 0.4677i	0.9470 ± 0.3212i	0.9474 ± 0.3210i	0.9474 ± 0.3213i	0.9479 ±0.3214i	0.8851 ±0.4673i
$\|\| Z0 - Zi \|\|_E$	2.8791	0.3154	2.4200e-3	2.6542e-3	2.6000e-3	3.2153e-3	0.3160

Tableau IV.1: variations des zéros

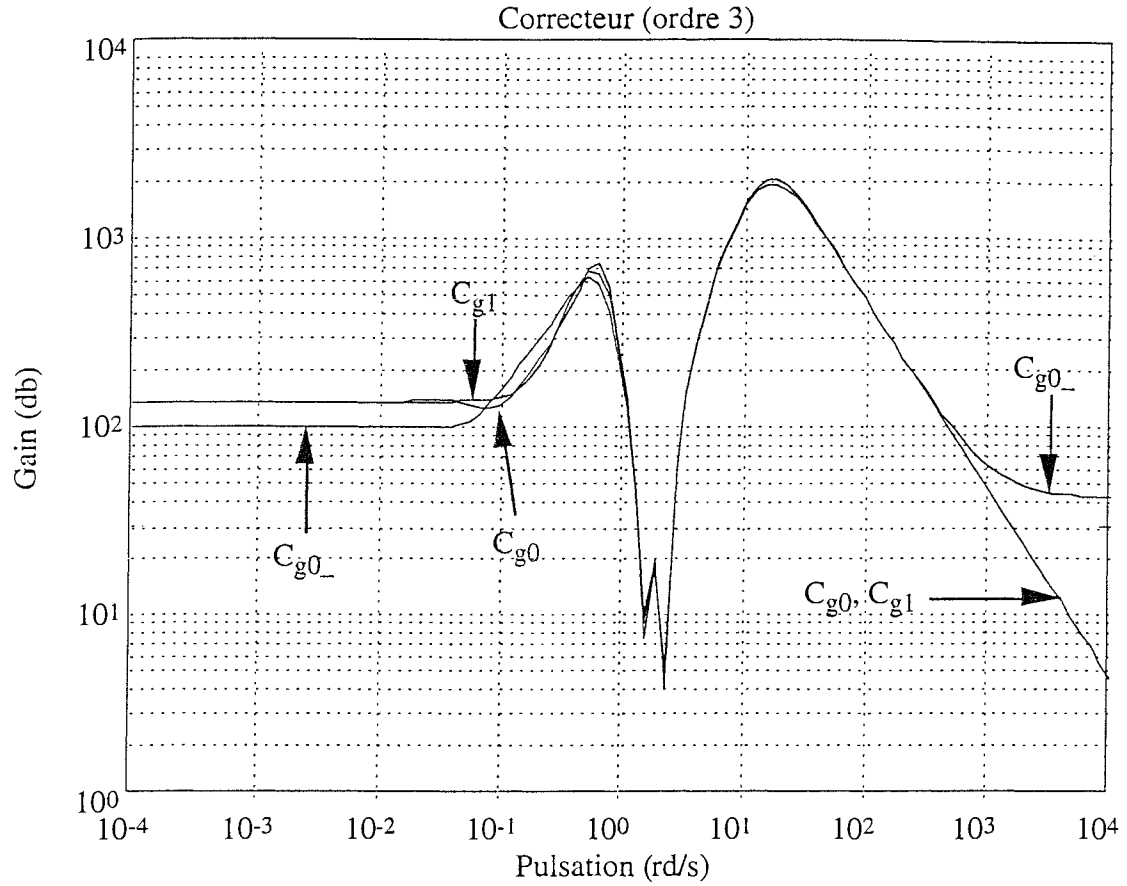
P_0	$P_{0_}$	P_1	P_{s1}	P_{h1}	P_2	P_{s2}	P_{h2}
0.3779	0.3330	0.3779	0.3779	0.3779	0.3779	0.3779	0.3779
0.3088 ± 0.2143i	0.3428 ± 0.2622i	0.3088 ± 0.2142i	0.3088 ± 0.2143i	0.3088 ± 0.2142i	0.3089 ± 0.2142i	0.3088 ± 0.2142i	0.3088 ± 0.2142i
-0.2855 ± 0.3826i	-0.2848 ± 0.3852i	-0.2855 ± 0.3825i	-0.2855 ± 0.3826i	-0.2855 ± 0.3826i	-0.2855 ± 0.3826i	-0.2855 ± 0.3826i	-0.2855 ± 0.3826i
-0.2848 ± 0.3853i	-0.3045 ± 0.4097i	-0.2849 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2849 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i	-0.2848 ± 0.3853i
0.7967	0.8525	0.7967	0.7967	0.7966	0.7966	0.7967	0.7966
0.9355 ± 0.0807i	0.9307 ± 0.1056i	0.9355 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0807i	0.9355 ± 0.0807i
0.9511 ± 0.1306i	0.9355 ± 0.0807i	0.9511 ± 0.1306i	0.9511 ± 0.1306i	0.9511 ± 0.1306i	0.9511 ± 0.1306i	0.9511 ± 0.1306i	0.9511 ± 0.1306i
0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i	0.9903 ± 0.0096i
$\|\| P0 - Pi \|\|_E$	0.5970	0.8845e-4	0.2129e-4	0.7024e-4	0.9415e-4	0.3188e-4	0.4902e-4

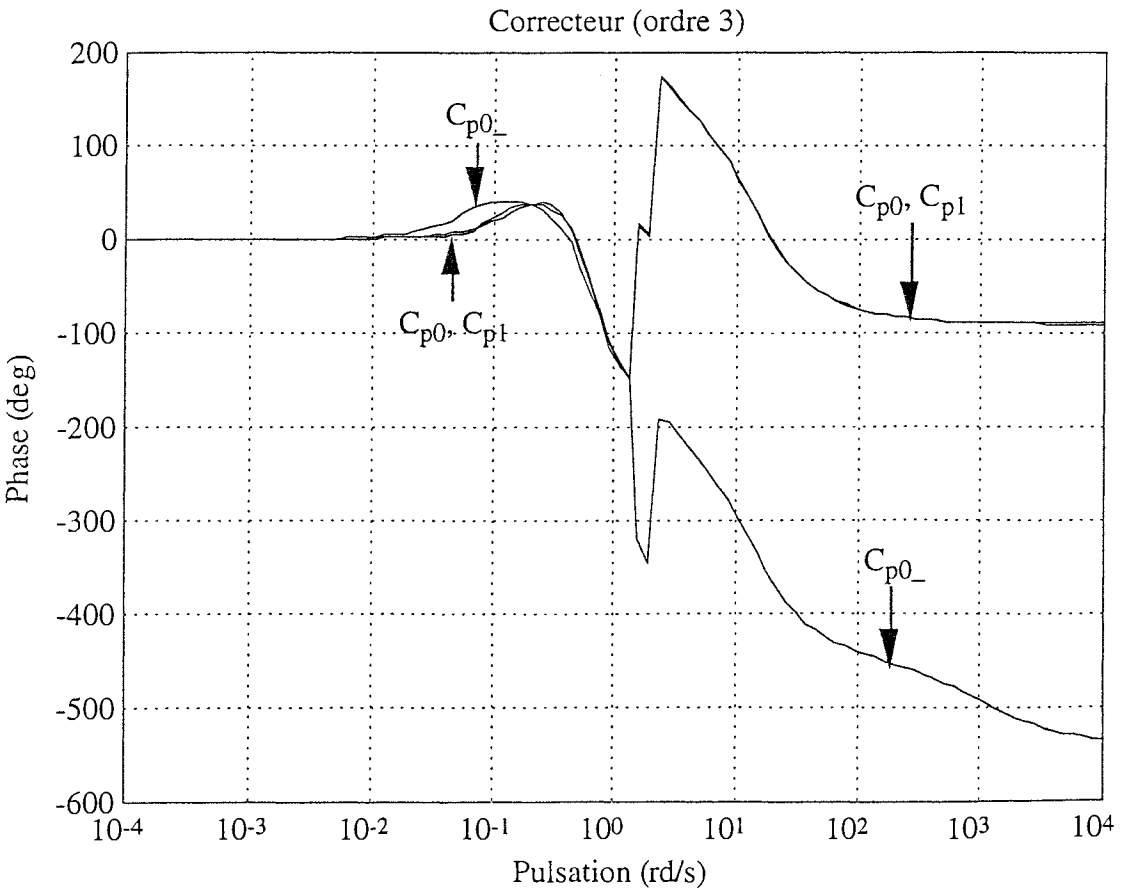
Tableau IV.2: variations des pôles



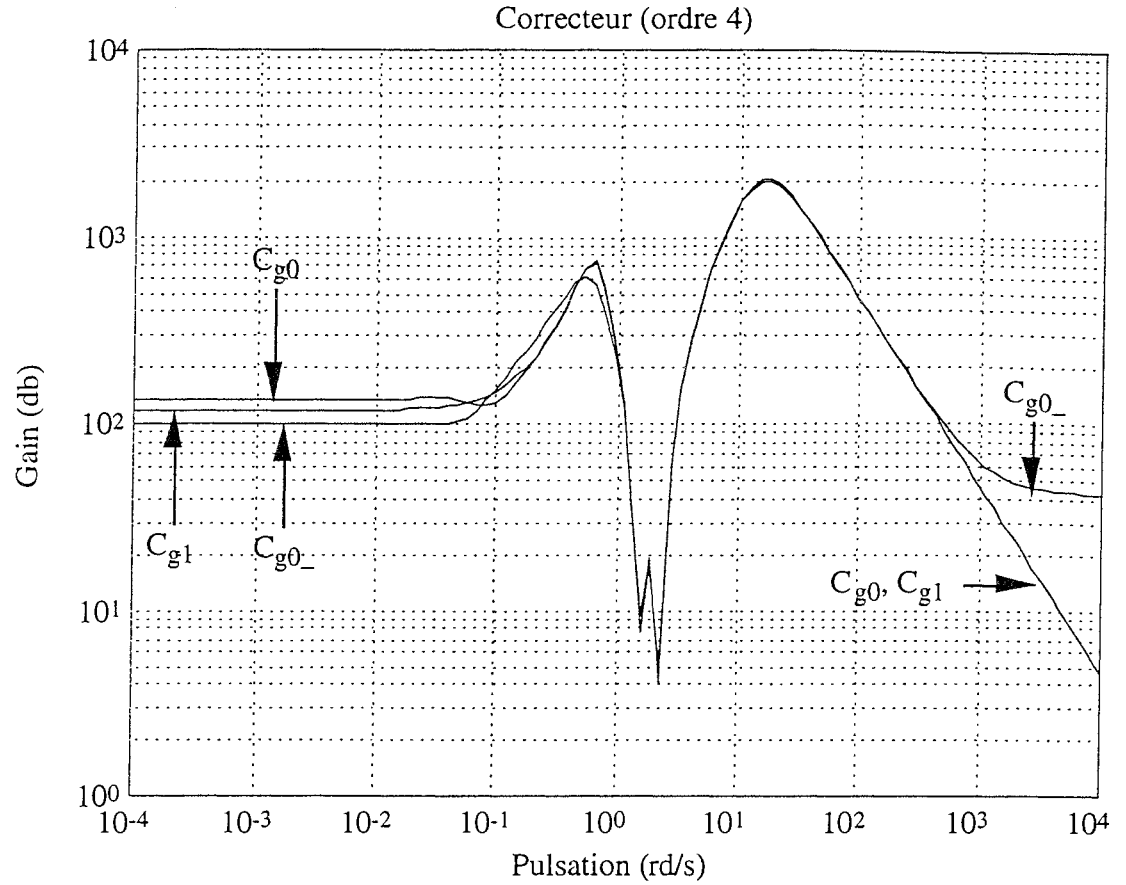


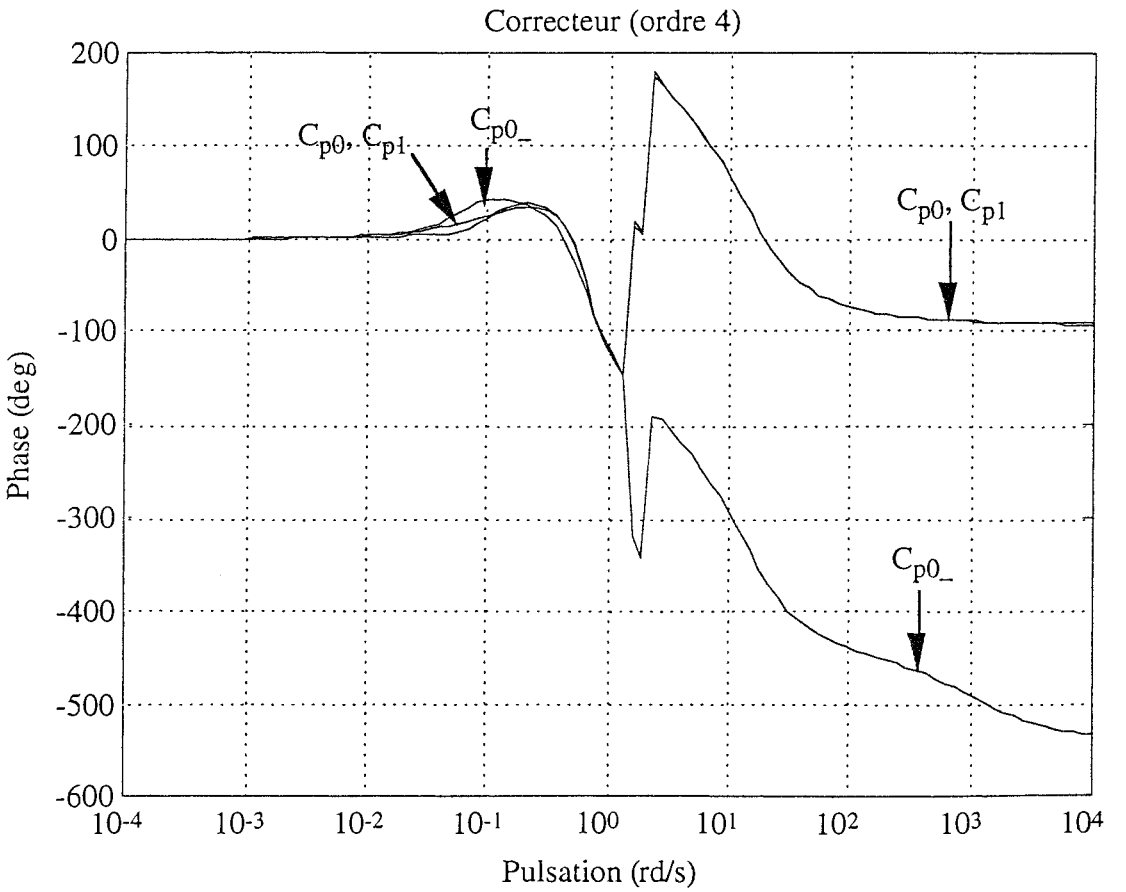
Figures IV.3 et IV.4: réponses indicielles du correcteur en boucle ouverte





Figures IV.5 et IV.6: réponses fréquentielles du correcteur en boucle ouverte





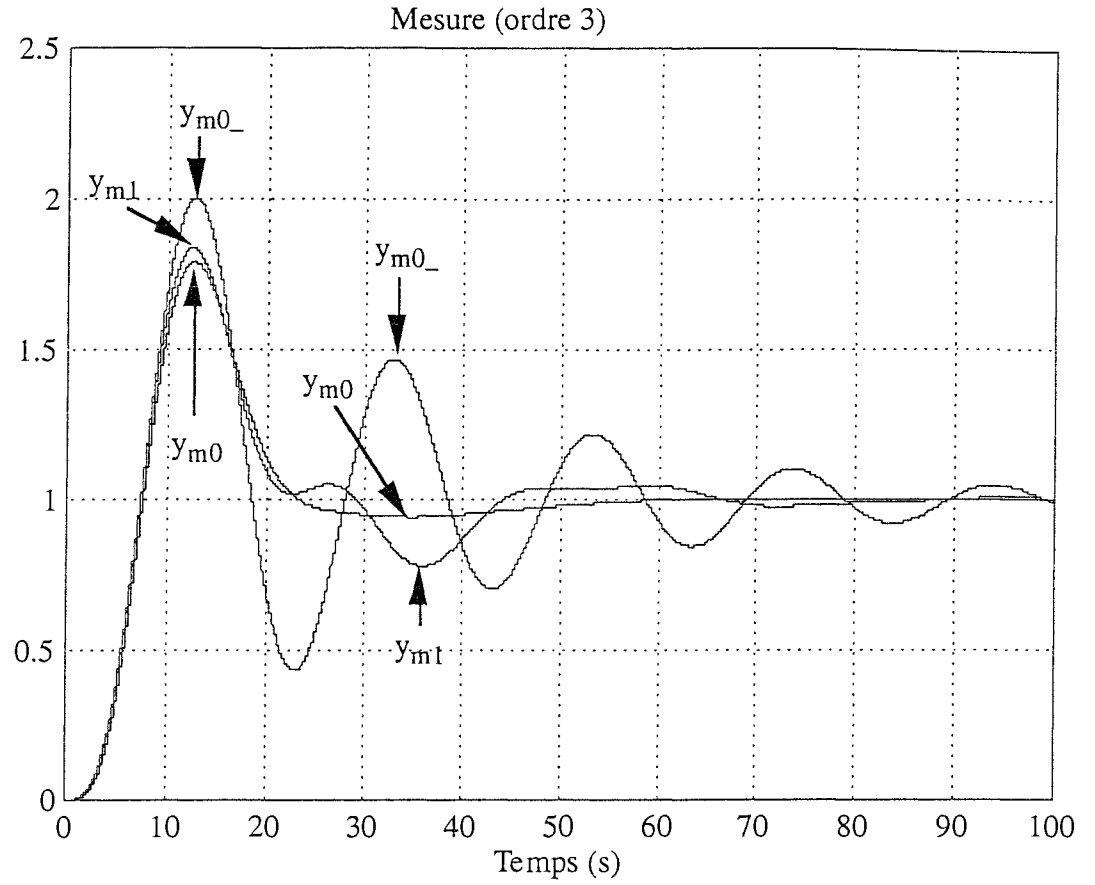
Figures IV.7 et IV.8: réponses fréquentielles du correcteur en boucle ouverte

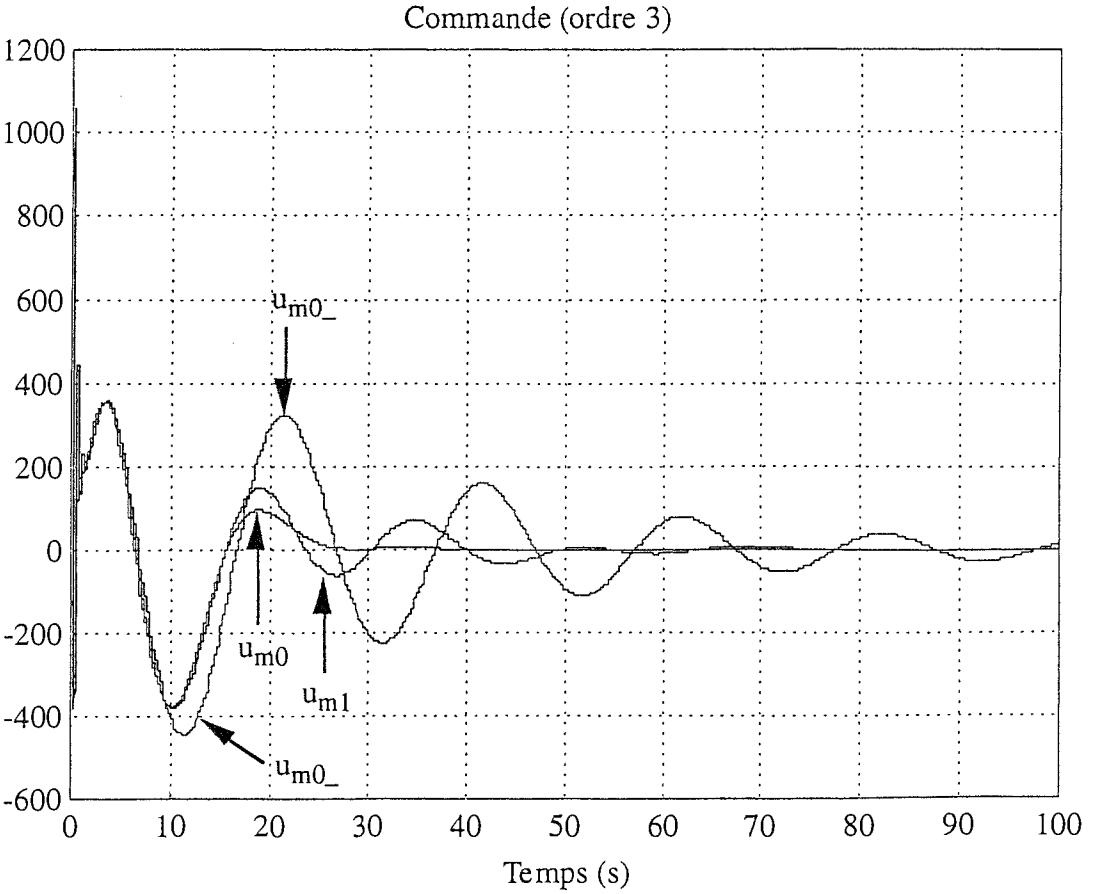
IV.5.2. Correcteur en boucle fermée

Les résultats illustrés par les courbes IV.9 - IV.12 ont été établis en boucle fermée sur un correcteur d'ordre réduit égal à 3 et à 4 à partir d'un correcteur initial d'ordre 10 (voir partie § I.2.). La méthode de réduction retenue est celle équilibrée et pondérée des facteurs co-premiers du correcteur (référencée (1) voir § II.6.1.) où la pondération fréquentielle prend en compte la boucle fermée. La discrétisation de ce correcteur réduit est établie par la transformation bilinéaire (voir § III.2.2.), avec une période d'échantillonnage spécifiée par MATRA MARCONI SPACE (T = 0.219 s). L'implémentation donne lieu à une troncation à 5 décimales sur le correcteur réduit discrétisé après différentes méthodes d'optimisation "F.W.L.".

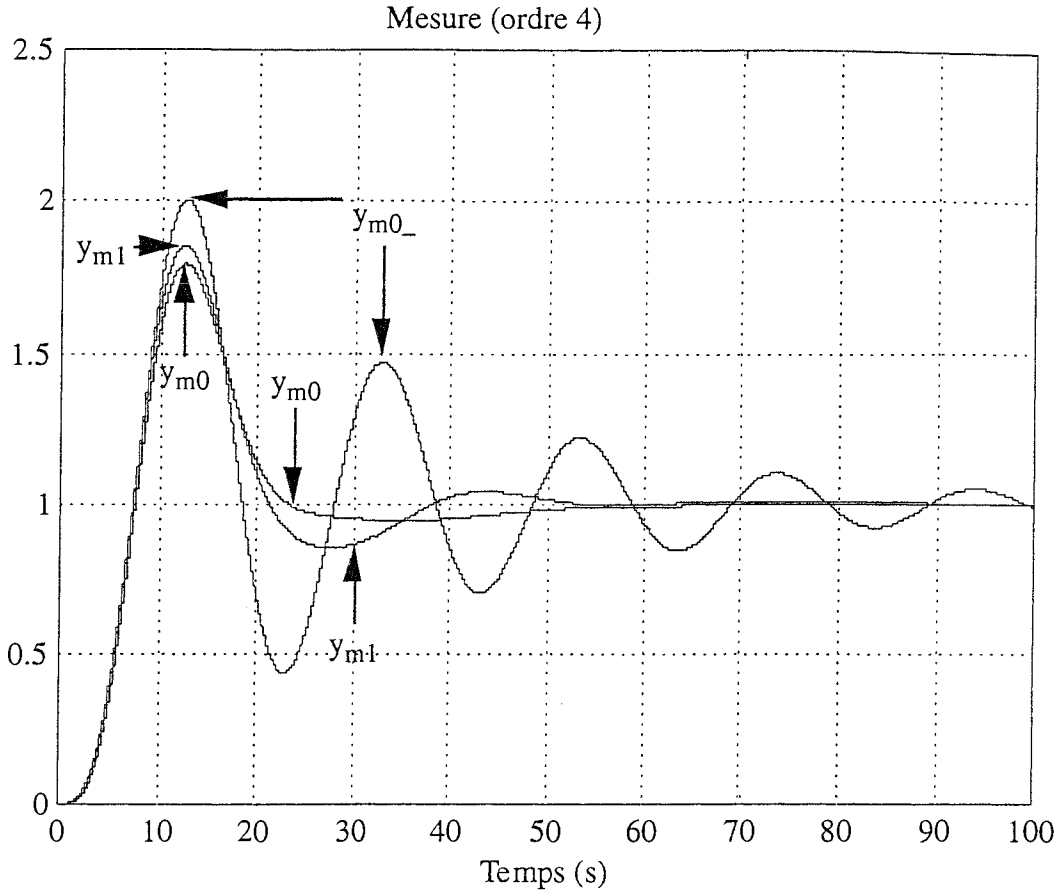
On peut établir une légende au vue des figures IV.9 - IV.12 comme suit:
- 0: correcteur initial,
- 0_: correcteur tronqué,
- 1: correcteur réduit ou correcteur réduit tronqué avec forme de Schur ou d'Hessenberg,
- y_m: mesure,
- u_m: commande.

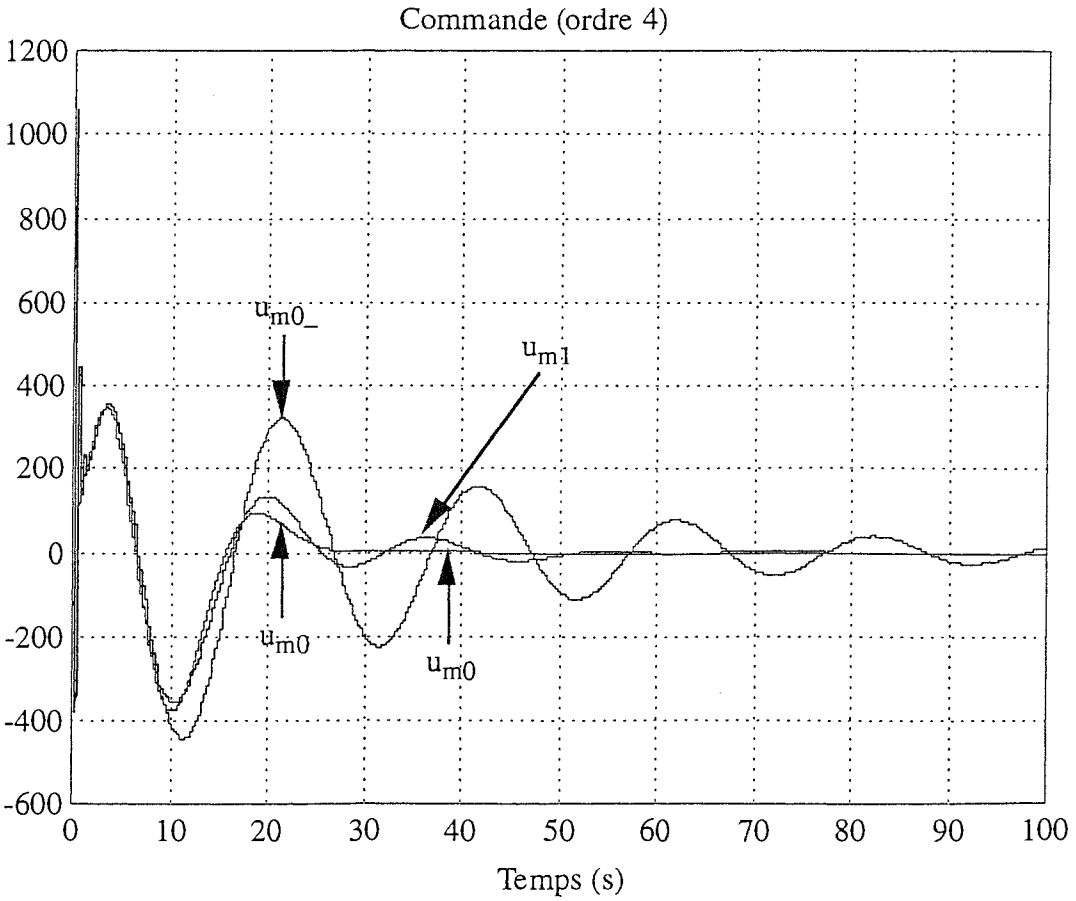
Les figures IV.9 à IV.12 correspondent aux réponses indicielles en boucle fermée. On peut constater que y_{m1} et u_{m1} après de faibles oscillations, convergent assez rapidement, respectivement vers y_{m0} et u_{m0} contrairement à $y_{m0_}$ et $u_{m0_}$ qui présentent des oscillations d'amplitudes importantes.





Figures IV.9 et IV.10: réponses indicielles en boucle fermée





Figures IV.11 et IV.12: réponses indicielles en boucle fermée

IV.6. CONCLUSION

L'implémentation du correcteur $C_d(z)$ a été effectué avec des mots de longueur finie. Il a fallu prendre en considération des problèmes numériques comme les erreurs de troncation, les bruits de quantification et les dépassements. Une étude sur le comportement en boucle fermée a été établie. On a pu constater des migrations des pôles et des zéros du correcteur ainsi qu'une baisse à la fois des performances et de la robustesse.

Dans le souci d'optimiser la sensibilité des réalisations J_{12} et J_{p12}, deux solutions ont été testées, l'approche de Li, Gevers et Anderson ainsi que la réalisation équilibrée. Des formes de Schur et d'Hessenberg ont été proposées afin de diminuer le nombre de termes incertains sur la matrice A.

Des résultats sont donnés sur l'exemple de la plate-forme EUROSTAR 2000+:

- d'une part, pour le correcteur pris isolément, des variations des pôles et des zéros du correcteur avec une troncation à cinq décimales sont à noter. Il n'y a pas de réduction de l'ordre,
- d'autre part, concernant le correcteur en boucle fermée.

On peut donc conclure de tout ceci que les différentes méthodes d'optimisation "F.W.L." testées constituent de très bons résultats comme peut en témoigner une très faible variation de pôles et de zéros. De plus, le suivi des réponses obtenues en boucle fermée ainsi que les gains et déphasages du correcteur viennent confirmer son efficacité.

Par conséquent, l'optimisation "F.W.L." représente une étape nécessaire et indispensable avant l'implantation du correcteur sur un processeur.

CHAPITRE V

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dernière étape de ce manuscrit, la conclusion est ce lieu privilégié où l'on réunit le bilan du travail accompli aux perspectives de développements et de poursuites.

V.1. CONCLUSION

Dans la perspective de développement d'une nouvelle génération de satellites de télécommunication de la famille EUROSTAR 2000+, une collaboration entre MATRA MARCONI SPACE et le C.R.A.N. est née.

L'objectif de cette thèse a consisté à étudier les incidences de l'implantation d'une loi de commande, avec une application à la plate-forme EUROSTAR 2000+. Le système dynamique à commander est un corps formé de trois axes libres en rotation avec de larges accessoires flexibles (voir partie § I.2.1). Il présente des caractéristiques souvent rencontrées dans les applications spatiales: la présence de modes flexibles de grande amplitude et de faible amortissement (moins de 0,1%), la connaissance de ces modes flexibles étant limitée. Des critères stricts de performances et de robustesse sont imposés et ont conduit à utiliser une approche H_∞ avec pondérations fréquentielles, d'où une synthèse en continu d'un correcteur d'ordre élevé. Or les contraintes d'implantation du correcteur reposent essentiellement sur la digitalisation d'un filtre, d'ordre le plus faible possible, en prenant en considération les spécifications industrielles.

Par conséquent, afin d'apporter des éléments de réponse vis-à-vis des différents points mentionnés ci-dessus, le problème de l'implémentation d'une loi de commande a été divisé en trois étapes.

La première étape a été la réduction de l'ordre du correcteur où différentes méthodes ont été testées. Ayant mis l'accent sur l'approximation du comportement du correcteur en boucle fermée plutôt que celui du correcteur pris isolément, une nouvelle méthode basée sur la réduction équilibrée et pondérée des facteurs co-premiers du correcteur a été élaborée.

La seconde étape a consisté à discrétiser le correcteur réduit. Une évaluation des performances et de la robustesse en boucle fermée a été établie et la transformation bilinéaire (voir § III.2.2.), référencée (1) (voir § III.4.) a été choisie pour discrétiser le correcteur.

L'exemple du système à quatre disques (voir § I.1.) a contribué, dans ces deux étapes, à renforcer nos sélections des méthodes appliquées au correcteur pour la dernière étape.

Enfin, la troisième étape a concerné l'optimisation à mots de longueur finie ("F.W.L.") du correcteur. Une mesure de la sensibilité de la réalisation de ce correcteur, pris d'abord isolément, a été effectuée. Une très faible variation des pôles et des zéros du correcteur après une troncation à 5 décimales a été notée. On a pu également souligner le bon comportement en boucle fermée après une troncation à 5 décimales du correcteur réduit (ordres 7 et 8, méthode (1)) et discrétisé (transformation bilinéaire). Ces différentes simulations ont été faites dans l'environnement Matlab / Simulink.

V.2. PERSPECTIVES

Ces travaux peuvent bien entendu être complétés et nous nous y emploierons dans les mois prochains. En particulier, un point mérite d'être exploité, il concerne l'optimisation "F.W.L." avec des pondérations fréquentielles. Une étude précise sur les pôles du correcteur peut être envisagée.

L'optimisation "F.W.L." en boucle fermée représente un problème très complexe, de part sa non réductibilité à l'équilibrage pondéré d'une réalisation et du fait qu'il n'y ait pas de solution analytique. La programmation non linéaire est donc indispensable dans ce cas.

Des essais sur simulateur servant de bancs d'essais pour satellite ont été envisagés à MATRA MARCONI SPACE TOULOUSE.

ANNEXES

A.I. NORME H_∞ DES SYSTEMES

Espace fonctionnel: cas général

L_2: Espace des fonctions carrées intégrables (Lebesgue) sur l'axe imaginaire

$$\|F\|_2 = [\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\, F^T(-j\omega)\, d\omega)]^{1/2} < \infty$$

L_∞: Espace des fonctions bornées (Lebesgue) sur l'axe imaginaire

$$\|F\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega} \|F(j\omega)\| < \infty$$

ess sup $\rightarrow$ la borne supérieure est définie presque partout

Systèmes discrets: $j\omega \rightarrow e^{j\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$ (axe imaginaire $\rightarrow$ cercle unité)

Espace fonctionnel: application aux systèmes linéaires

$\mathbb{R}L_2$: systèmes à coefficients réels, strictement propres, sans pôle sur l'axe imaginaire

$\mathbb{R}H_2$: systèmes à coefficients réels, strictement propres, stables

$\mathbb{R}L_\infty$: systèmes à coefficients réels, propres, sans pôle sur l'axe imaginaire

$\mathbb{R}H_\infty$: systèmes à coefficients réels, propres, stables

Norme H_∞ des systèmes linéaires

$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega))$, où $\bar{\sigma}(j\omega) \rightarrow$ valeur singulière fréquentielle maximale

La norme H_∞ est une norme induite

Si G(s) est stable, z(s) = G(s) e(s) et $\|e\|_2 < \infty$, alors

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{e \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|e\|_2} = \sup_{e \neq 0} \frac{\|G(s)\, e\|_2}{\|e\|_2}$$

$\|G(s)\|_\infty \rightarrow$ gain maximal si G(s) est stable

$\|G(s)\|_\infty \rightarrow$ module maximal si G(s) est instable

Propriétés A.I.1

i) $\|G(s)\|_\infty \geq 0$ avec $\|G(s)\|_\infty = 0 \Leftrightarrow G(s) = 0$

ii) $\|\alpha\, G(s)\|_\infty = |\alpha|\, \|G(s)\|_\infty$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$

iii) $\|G(s) + F(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty + \|F(s)\|_\infty$

iv) $\|G(s)\, F(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty\, \|F(s)\|_\infty$

Remarque

iv) est fausse pour $\|G(s)\|_2$ ($\|G(s)\|_2$ n'est pas une norme induite)

A.II. GRAMMIENS D'OBSERVABILITE ET DE COMMANDABILITE

Définition A.II.1

On appelle grammien d'observabilité du système continu stable G(s) défini par sa matrice de transfert $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E$ la matrice W_o telle que:

$$W_o = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \qquad \text{(A.II.1)}$$

Elle vérifie l'équation de Lyapunov (A.II.2):

$$A^T W_o + W_o A + C^T C = 0 \qquad \text{(A.II.2)}$$

Définition A.II.2

On appelle grammien de commandabilité du système continu G(s) stable défini par sa matrice de transfert $G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + E$ la matrice W_c telle que:

$$W_c = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \qquad \text{(A.II.3)}$$

Elle vérifie l'équation de Lyapunov suivante:

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \qquad \text{(A.II.4)}$$

Lemme A.II.1

Si $\mathrm{Re}[\lambda_i(A)] < 0$ $\forall$ i, alors:

i) $W_c > 0$ si et seulement si (A, B) est complètement commandable.

ii) $W_o > 0$ si et seulement si (A, C) est complètement observable.

Lemme A.II.2

Supposons que le système (A, B) satisfait à (A.II.4) pour tout $W_c > 0$, alors le système est asymptotiquement stable si et seulement si il est commandable.

Définition A.II.3

On appelle grammien de commandabilité du système discret G(z) défini par sa matrice de transfert $G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + E$, la matrice W_c telle que:

$$W_c = \sum_{k=0}^{\infty} A^k BB^T \left(A^T\right)^k \qquad \text{(A.II.5)}$$

Elle vérifie l'équation de Lyapunov (A.II.6):

$$W_c = A\, W_c\, A^T + BB^T \qquad \text{(A.II.6)}$$

Définition A.II.4

On appelle grammien d'observabilité du système discret G(z) défini par sa matrice de transfert $G(z) = C(zI_n - A)^{-1}B + E$, la matrice W_o telle que:

$$W_o = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^T\right)^k C^T C A^k \qquad \text{(A.II.7)}$$

Elle vérifie l'équation de Lyapunov (A.II.8):

$$W_o = A^T\, W_o A + C^T C \qquad \text{(A.II.8)}$$

Définition A.II.5 [AHM-91], [GLO-89]

La norme H_2 de G(z) peut être calculée en fonction des grammiens de commandabilité et d'observabilité comme suit:

$$\|G(s)\|_2^2 = \mathrm{tr}(B^T\, W_o B) = \mathrm{tr}(C\, W_c\, C^T) \qquad \text{(A.II.9)}$$

A.III. VALEURS SINGULIERES

Définition A.III.1

Toute matrice complexe A, de rang k, appartenant à $\mathbb{C}^{m\times n}$ peut se décomposer en:

$$A = V \sum W^H \qquad \text{(A.III.1)}$$

où V et W sont des matrices carrées unitaires. $\sum$ représente le spectre des valeurs singulières de A qui sont des nombres σ_i, réels, positifs ou nuls, tels que:

$$\sigma_i = [\lambda_i(AA^H)]^{1/2} \qquad \text{(A.III.2)}$$

Ces valeurs singulières sont ordonnées de la manière suivante:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_k \geq \sigma_{k+1} = \sigma_{k+2} = \ldots = \sigma_q = 0 \qquad \text{(A.III.3)}$$

où $q = \min \{m,n\}$

La valeur singulière supérieure est une norme matricielle (norme spectrale). Elle est notée $\overline{\sigma}(A)$ et est égale à:

$$\overline{\sigma}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A\,x\|_E}{\|x\|_E} \qquad \text{(A.III.4)}$$

Elle possède par conséquent toutes les propriétés d'un norme induite par une norme vectorielle.

A.IV. VALEURS SINGULIERES ET NORME DE HANKEL [GLO-84]

Définition A.IV.1

On appelle valeurs singulières de Hankel de G, les racines carrées des valeurs propres du produit W_cW_o:

$$\sigma_i = [\lambda_i(W_cW_o)]^{1/2} \qquad \text{(A.IV.1)}$$

Ce sont donc des nombres réels positifs non nuls, et leur nombre est égal à la dimension du vecteur d'état.

Définition A.IV.2

On appelle norme de Hankel de G sa plus grande valeur singulière de Hankel:

$$\|G(s)\|_H = \sup_i (\sigma_i) = \sup_i ([\lambda_i(W_cW_o)]^{1/2}) \qquad \text{(A.IV.2)}$$

A.V. THEOREME DU FAIBLE GAIN

Stabilité en boucle fermée:

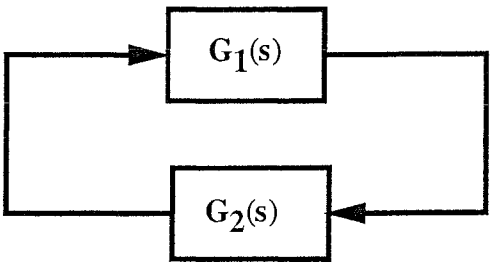


Figure A.1

Théorème A.V.1

Le système de la figure 1, où $G_1(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ et $G_2(s) \in \mathbb{R}H_\infty$, est stable de manière interne si et seulement si

$$\bar{\sigma}(G_1(j\omega))\,\bar{\sigma}(G_2(j\omega)) < 1,\ \forall\ \omega \in \mathbb{R} \qquad \text{(A.V.1)}$$

A.VI. FACTORISATIONS

Factorisation co-première et identités de Bezout [FRA-87], [VID-85]

Soient:$X(s)$, $Y(s) \in \mathbb{R}H_\infty$

$F(s)$ et $G(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ sont premières à droite si:

$$\begin{bmatrix} X(s) & Y(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F(s) \\ G(s) \end{bmatrix} = [I] \qquad \text{(A.VI.1)}$$

$F(s)$ et $G(s)$ sont premières à gauche si:

$$\begin{bmatrix} F(s) & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = [I] \qquad \text{(A.VI.2)}$$

Lemme A.VI.1

Pour toute matrice de transfert $G(s)$ causale, il existe huit matrices dans $\mathbb{R}H_\infty$ vérifiant:

$$G(s) = N(s)D^{-1}(s) = \bar{D}^{-1}(s)\,\bar{N}(s) \qquad \text{(A.VI.3)}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{D}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ (Identités de Bezout)} \qquad \text{(A.VI.4)}$$

Les deux dernières équations constituent une double factorisation co-premières de G(s). Les matrices N(s) et D(s) sont premières droite, par contre $\tilde{N}(s)$ et $\tilde{D}(s)$ sont co-premières gauche.

Factorisation inner-outer [CHU-84], [GRE-88], [FRA-87]

$G(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ est inner si $G^{\sim}(s)\,G(s) = I$ (A.VI.5)

$G(s) \in \mathbb{R}H_\infty$ est outer si elle est de rang plein lignes et sans pôles dans $\mathbb{C}^+$, elle est à minimum de phase. Une factorisation inner-outer d'une matrice de transfert G(s) dans $\mathbb{R}H_\infty$ est définie par:

$G(s) = G_i(s)\,G_o(s)$ avec $G_i(s)$ inner et $G_o(s)$ outer. (A.VI.6)

Une matrice de transfert inner préserve la norme H_∞, c'est-à-dire
si F(s) est inner, $\|F(s)\,G(s)\|_\infty = \|G(s)\|_\infty$

Remarque

Si G(s) et $G^{-1}(s)$ dans H_∞ alors G(s) est outer $\mathbb{R}H_\infty$

Factorisation spectrale [FRA-87], [CHU-84]

Soit G(s) une matrice de transfert vérifiant:

$$\begin{aligned} &G(s) \text{ et } G^{-1}(s) \in \mathbb{R}H_\infty \\ &G^{\sim}(s) = G(s) \\ &G(\infty) > 0 \end{aligned} \qquad \text{(A.VI.7)}$$

alors G(s) admet une factorisation spectrale:

$G(s) = G_s^{\sim}(s)G_s(s)$ (A.VI.8)

$G_s(s)$ et $G_s^{-1}(s) \in \mathbb{R}H_\infty$

$G_s(s)$ est le facteur spectral.

Il existe deux types de factorisation spectrale:

- à gauche : $G_s^{\sim}(s)G_s(s) = I - G^{\sim}(s)G(s)$ (A.VI.9)
- à droite : $G_s(s)G_s^{\sim}(s) = I - G(s)G^{\sim}(s)$ (A.VI.10)

A.VII. LEMME D'INVERSION MATRICIELLE ET MATRICES PARTITIONNEES

i) Lemme d'inversion matricielle

Si les matrices A_1, A_2, $(A_1 - A_2A_4A_3)$ et $(A_1 + A_2A_4A_3)$ ne sont pas singulières, on a les relations suivantes:

$$(A_1 - A_2A_4A_3)^{-1} = A_1^{-1} + A_1^{-1} A_2 (A_4^{-1} - A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} A_3A_1^{-1} \qquad \text{(A.VII.11.a)}$$

$$(A_1 + A_2A_4A_3)^{-1} = A_1^{-1} - A_1^{-1} A_2 (A_4^{-1} + A_3A_1^{-1}A_2)^{-1} A_3A_1^{-1} \qquad \text{(A.VII.11.b)}$$

ii) matricies partitionnées

La matrice $F = \begin{bmatrix} A & B \\ C & E \end{bmatrix}$ est supposée non singulière, les matrices A et E étant carrées.

- Calcul du déterminant

Si $\det(A) \neq 0$, on obtient:

$$\det(F) = \det(A) \det(E - C A^{-1} B) \qquad \text{(A.VII.12.a)}$$

Si $\det(E) \neq 0$, on obtient:

$$\det(F) = \det(E) \det(A - B E^{-1} C) \qquad \text{(A.VII.12.b)}$$

- Inversion

Si $\det(A) \neq 0$ et $\det(E - C A^{-1} B) \neq 0$, on obtient:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(E - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(E - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(E - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (E - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.VII.13.a)}$$

Si $\det(E) \neq 0$ et $\det(A - B E^{-1} C) \neq 0$, on obtient:

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BE^{-1}C)^{-1} & -(A - BE^{-1}C)^{-1}BE^{-1} \\ -E^{-1}C(A - BE^{-1}C)^{-1} & E^{-1}C(A - BE^{-1}C)^{-1}BE^{-1} + E^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.VII.13.b)}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Références

[AHM-91] U.F. Ahmad, "Design of an H_∞ controller", Application to an induction motor, Msc Degree in Engineering Report, Imperial College of Science, Technology and Medecine (London) et Ecole Supérieure d'Électricité (Gif-sur-Yvette), 1991.

[AND-89] B.D.O. Anderson, Y. Liu, "Controller reduction: concepts and approaches", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-34, No 8, pp. 802-812, 1989.

[AND-92] B.D.O. Anderson, Y. Liu, "Controller design: moving from theory to practice", IEEE Control Systems, pp. 16-25, 1992.

[AST-90] K. Aström, B. Wittenmark, "*Computer-controlled systems*", 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1990.

[BAC-89] B.J. Bacon, D.K. Schmidt, "Multivariable frequency-weighted order reduction", J. Guidance, vol. 12, No 1, pp. 97-107, 1989.

[BAM-91] B. Bamieh, J. Boyd Pearson, "A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control", systems & control letters 17, pp. 79-88, 1991.

[BAM-92] B. Bamieh, J. Boyd Pearson, "A general framework for linear periodic systems with applications to H_∞ sampled-data control", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 37, pp.418-435, 1992.

[BEL-70] R. Bellman, "*Introduction to matrix analysis*", New York: Mc-Graw-Hill, 1970, second ed.

[CAR-95] L. Caramelle, M. Zasadzinski, M. Darouach, "implantation d'une loi de commande: application à la plate-forme Eurostar 2000+", exposé à Matra Marconi Space, janvier 1995.

[CET-93] C. Ceton, P.M.R. Wortelboer, O.H. Bosgra, "Frequency weighted closed-loop balanced reduction", 2nd European Control Conference, Groningen, pp. 697-701, 1993.

[CHE-93] J.C. Chen and B.C. Chang, "H_∞ controller reduction with closed-loop stability considerations", 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, pp. 2923-2924, 1993.

[CHU-84] C.C. Chu and J.C. Doyle, "On inner-outer and spectral factorizations", proc.23 rd CDC, Las Vegas, N.V., pp. 1764-1765, 1984.

[ENN-84a] D.F. Enns, "Model reduction for control systems design", ph.D. Dissertations, Dep. Aeronaut. Astronaut., Standford Univ., Standford, CA, 1984.

[ENN-84b] D.F. Enns, "Model reduction with balanced realizations: an error bound and a frequency weighted generalization", 23rd Conference on Decision and Control, Las Vegas, pp. 127-132, 1984.

[FRA-87] B.A. Francis, *Lecture Notes in Control and Information Sciences: "A course in H_∞ control theory"*", MA: Springer-Verlag, vol.88, 1987.

[FRA-90] G.F. Franklin, J.D. Powell, and M.L. Workman, "*Digital control of dynamic systems*", 2nd ed. Reading, MA: Addison Wesley, 1990.

[FRA-94a] B. Frapard, P. Van Troostenberghe, "H_∞ design for satellite attitude control", 2nd Int. E.S.A. Conf. on G.N.C., 1994.

[FRA-94b] B. Frapard, "Eléments de spécification du problème de paramétrisation du correcteur Eurostar 2000+", Internal Memo, MATRA MARCONI SPACE / C.R.A.N.-E.A.R.A.L., 1994.

[FRA-95] B. Frapard, M. Zasadzinski, L. Caramelle, M. Darouach, C. Champetier, "H_∞ controller order reduction technique based on normalized coprime factors for space control systems on board implementation", European Control Conference, Rome, Italie, 1995.

[FRE-94] J.S. Freudenberg, "Inherent design limitations for linear sampled-data feedback systems", American Control Conference, Baltimore, Maryland, pp. 3227-3231, 1994.

[GEV-93] M. Gevers and G. Li, "*Parametrizations in control, estimation and filtering problems*", Springer-Verlag, 1993-1993.

[GLO-84] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞-error bounds", Int. J. Control, vol. 39, No 6, pp. 1115-1193, 1984.

[GLO-89] K. Glover, D. McFarlane, "Robust stabilization of normalized coprime factor plant description with H_∞-bounded uncertainty", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-34, No 8, 1989.

[GLO-92] K. Glover, D.J.N. Limebeer, Y.S. Hung, "A structured approximation problem with applications to frequency weighted model reduction", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-37, No 4, pp. 447-465, 1992.

[GOD-93] P.J. Goddard, K. Glover, "Controller reduction: weights for stability and performance preservation", 32nd Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas, pp. 2903-2908, 1993.

[GOD-94] P.J. Goddard, K. Glover, "Performance-preserving frequency weighted controller approximation: a coprime factorisation approach", 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, pp. 2720-2725, 1994.

[GOL-90] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "*Matrix computations*", The Johns Hopkins Press Ltd., London, 1990.

[GRE-88] M. Green, "On inner-outer factorization", systems & control letters 11, pp. 93-97, 1988.

[GRE-95] M. Green, D.J.N. Limebeer, *Prentice hall information and system sciences series: "Linear robust control"*, Thomas Kailath, Series Editor, 1995.

[HOR-90] R.A. Horn, C.R. Johnson, "*Matrix analysis*", Cambridge University Press, cambridge, 1990.

[HWA-77] S.Y. Hwang, "Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering", IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol ASSP-25, pp. 273-281, 1977.

[JON-83] E.A. Jonkheere, L.M. Silverman, "A new set of invariants for linear systems: application to reduced order compensator design", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-28, No 10, pp. 953-964, 1983.

[KEL-91] J.P. Keller and B.D.O. Anderson, "H_∞ optimal controller discretization", Int. J. of robust and nonlinear control, vol. 1, pp. 125-137, 1991.

[KEL-92] J.P. Keller and B.D.O. Anderson, "A new approach to the discretization of continuous time controllers", IEEE Trans. Automat. Control, vol. 37, pp.214-223, 1992.

[KIM-95] S.W. Kim, B.D.O. Anderson, A.G. Madievski, "Error bound for transfert function order reduction using frequency weighted balanced truncation", Syst. Control Lett., vol. 24, pp. 183-192, 1995.

[LAT-85] G.A. Latham, B.D.O. Anderson, "Frequency-weighted optimal Hankel-norm approximation of stable transfer functions", systems & control letters, vol. 5, No 4, pp. 229-236, 1985.

[LAU-87] A.J. Laub, M.T. Heath, C.C. Paige, R.C. Ward, "Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-32, No 2, pp. 115-122, 1987.

[LEN-88] K.E. Lenz, P.P. Khargonekar and J.C. Doyle, "Controller order reduction with guaranteed stability and performance", American Control Conference, pp. 1697-1698, 1988.

[LI-92] G. Li, B.D.O. Anderson, M. Gevers, "Optimal FWL design of state-space digital systems with weighted sensitivity minimization and sparseness consideration", IEEE Trans. Circuits Syst.,vol. 1: Fundamental theory and applications, vol. 39, No 5, pp. 365-377, 1992.

[LIU-86] Y. Liu, B.D.O. Anderson, "Controller reduction via stable factorization and balancing", Int. J. Control, vol. 44, No 2, pp. 507-531, 1986.

[LIU-90] Y. Liu, B.D.O. Anderson, U.-L. Ly, "Coprime factorization controller reduction with Bezout identity induced frequency weighting", Automatica, vol. 26, No 2, pp. 233-249, 1990.

[MCF-90] D.C. McFarlane, K. Glover, M. Vidyasagar, "Reduced-order controller design using coprime factor model reduction", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-35, No 3, pp. 369-373, 1990.

[MEY-87] D.G. Meyer, "Model reduction via fractional representation", ph.D. Dissertations, Dep. Aeronaut. Astronaut., Standford Univ., Standford, CA, 1987.

[MEY-88] D.G. Meyer, "A fractional approach to model reduction", American Control Conference, Atlanta, pp. 1041-1047, 1988.

[MIT-78] S.K. Mitra and R. Gnanasekaran, "Block implementation of recursive digital filters. New structures and properties", IEEE Trans. Circuits and Syst., vol. CAS-25, pp. 200-207, 1978.

[MOO-81] B.C. Moore, "Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-26, No 1, pp. 17-32, 1981.

[MUL-76] C.T. Mullis, R.A. Roberts "Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters", IEEE Trans. Circuits Syst.,vol. CAS-23, No 9, pp. 551-562, 1976.

[MUS-91] D. Mustafa, K. Glover, "Controller reduction by H_∞-balanced truncation", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-36, No 6, pp. 668-682, 1991.

[NET-84] C.N. Nett, C.A. Jacobson and M.J. Balas, "A connection between state-space and doubly coprime fractional representations", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-29, pp. 831-832, 1984.

[OGA-87] K. Ogata, "*Discrete-time control systems*", Prentice-Hall international editions, 1987.

[PER-82] L. Pernabo, L.M. Silverman, "Model reduction via balanced state space representations", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-27, No 2, pp. 382-387, 1982.

[RAT-78] K.S. Rattan and H.H. Yeh, "Discretizing continuous control systems", Computer Aided Design, vol. 10, pp.299-306, 1978.

[RAT-84] K.S. Rattan, "Digitalization of existing continuous control systems", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-29, No 3, 1984.

[ROB-87] R.A. Roberts, C.T. Mullis, "*Digital signal processing*", Addison-Wesley, 1987.

[SRI-77] A. Sripad, D.L. Snyder, "A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white", IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol ASSP-25, pp. 442-448, 1977.

[STE-91] G. Stein and J.C. Doyle, "Beyond singular values and loop shapes", J. Guidance, vol. 14, No 1, pp. 5-16, 1991.

[TAV-84] V. Tavsanoglu, L. Thiele, "Optimal design of state-space digital filters by simultaneous minimization of sensitivity and roundoff noise", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-31, pp. 884-888, 1984.

[THI-86] L.Thiele, "On the sensitivity of linear state-space systems", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-33, pp. 502-510, 1986.

[VER-83] E.I. Verriest, T. Kailath, "On generalized balanced realizations", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-28, No 8, pp. 833-844, 1983.

[VID-85] M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: "A Factorization Approach.*", Cambridge, MA: M.I.T. Press, 1985.

[VID-88] M. Vidyasagar, "Normalized coprime factorizations for non strictly proper systems", IEEE Trans. Automat. Control, vol. AC-33, No 3, pp. 300-301, 1988.

[WOR-94] P.M.R. Wortelboer and O.H. Bosgra, "Frequency weighted closed-loop order reduction in the control design configuration", 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Floride, pp. 2714-2719, 1994.

[ZAS-95] M. Zasadzinski, L. Caramelle, M. Darouach, B. Frapard, C. Champetier, "Frequency weighted closed-loop balanced controller reduction using normalized coprime factor descriptions", American Control Conference, Seattle, 1995.

[ZHO-93] K. Zhou, "Frequency-weighted model reduction with L_∞ error bounds", Syst. Control Lett., vol. 21, No 2, pp. 115-125, 1993.

Nom : **CARAMELLE**

Prénom : **Laurent**

DOCTORAT de l'UNIVERSITE HENRI POINCARE, NANCY-I

en AUTOMATIQUE

VU, APPROUVÉ ET PERMIS D'IMPRIMER

Nancy, le 18 DEC. 1995 n° 520

Le Président de l'Université

J.P. FINANCE

3C-F9

UNIVERSITÉ HENRI POINCARÉ - NANCY 1
24-30, rue Lionnois B.P.3069 54013 Nancy cedex
Tél : 83 32 81 81 Fax : 83 32 95 90
Adresse électronique : _____ @presn1.u-nancy.fr

IMPLANTATION D'UNE LOI DE COMMANDE, APPLICATION A LA PLATE-FORME DE SATELLITE DE TELECOMMUNICATION EUROSTAR 2000+

Résumé: L'évolution croissante des activités spatiales s'appuie sur des études théoriques complexes. Les systèmes industriels nécessitant des spécifications de robustesse et de performances de plus en plus contraignantes pour la régulation, une étude prospective a été envisagée. La société MATRA MARCONI SPACE pose le problème de l'implémentation d'un correcteur à mots de longueur finie pour la plate-forme de satellite EUROSTAR 2000+. Cette étude a été retenue car elle constitue un excellent exemple de validation des lois de commande. Les travaux présentés dans ce mémoire traitent tout d'abord la réduction de l'ordre du correcteur. L'intérêt des réalisations équilibrées, des factorisations co-premières normalisées et des pondérations fréquentielles font l'objet d'une présentation. Une nouvelle méthode basée sur la réduction des facteurs co-premiers du correcteur et sur la réalisation équilibrée avec pondérations fréquentielles, assurant la stabilité en boucle fermée, est présentée. Les problèmes liés à l'approximation d'un filtre continu par un filtre discret et à l'utilisation de ce dernier dans une boucle de régulation sont ensuite abordés. Enfin, le comportement des correcteurs digitalisés est étudié. Il tient compte du fait que leur implantation "réelle" est à mots finis. Les différentes réalisations d'état, calculées à partir du correcteur obtenu lors de la phase de discrétisation du correcteur continu initial, ne sont donc plus équivalentes. Le problème consiste donc à déterminer, parmi une infinité de réalisations d'état, celle qui est la moins sensible aux troncations dues à l'implantation à mots de longueur finie.

Mots clés: Facteurs co-premiers - Satellite - Optimisation H_∞ - Réduction de l'ordre - Discrétisation - Optimisation à mots de longueur finie.

IMPLEMENTATION OF A CONTROL LAW, APPLICATION TO THE TELECOMMUNICATION SATELLITE PLATE-FORM EUROSTAR 2000+

Abstract: The growing evolution of space activities relies on complex theoretical studies. The industrial systems, requiring more and more constraining robustness and performance specifications, a prospective study was initiated. The society MATRA MARCONI SPACE, submitted the problem of controller implementation of a finite word length for the satellite plate-form EUROSTAR 2000+. The study linked to that plate-form is an excellent example to validate control laws. The current thesis deals first with reduced order problem of controller. A presentation stresses why balanced realizations, normalized coprime factorizations and frequency weighting are relevant in connection to the question. A new method based upon the coprime factors controller reduction and on the balanced realization with frequency weighting ensuring the closed loop stability is presented. The problems of using a discrete filter to approximate a continuous filter is investigated. Its application in a regulation loop is then dealt with. Eventually, the behaviour of discretized controller is studied. It takes into account of the fact that their "real" implementation is in finite word length. The different state space realizations based on the controller obtained during the initial continuous controller discretization are thus no more equivalent. So, the problem is then to find, from the infinite state space realizations, the realization such that the affectation due to truncation of finite word length implementation is minimized.

Key words: Coprime factors - Satellite - H_∞ Optimisation - Order reduction - Discretization - Finite word length optimization.