



HAL
open science

Algèbres de Jordan et représentations unitaires à plus haut poids

Michel Vergult

► **To cite this version:**

Michel Vergult. Algèbres de Jordan et représentations unitaires à plus haut poids. Mathématiques générales [math.GM]. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 1997. Français. NNT : 1997NAN10296 . tel-01748632

HAL Id: tel-01748632

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748632>

Submitted on 20 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

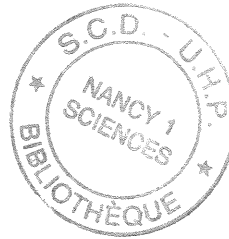
LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré (Nancy I)
D.F.D. Mathématiques

Algèbres de Jordan et Représentations Unitaires à Plus Haut Poids

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 14 novembre 1997

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université Henri Poincaré (Nancy I)

Spécialité Mathématiques Pures

par

Michel VERGULT

Composition du Jury

<i>Président :</i>	Guy ROUSSEAU	Professeur à l'Université Henri Poincaré (Nancy I)
<i>Rapporteurs :</i>	Nicole BOPP	Professeur à l'Université Louis Pasteur (Strasbourg I)
	Karl-Hermann NEEB	Professeur à l'Université d'Erlangen (Nuremberg, Allemagne)
<i>Examineurs :</i>	Jean-Philippe ANKER	Professeur à l'Université Henri Poincaré (Nancy I)
	Didier ARNAL	Professeur à l'Université de Metz
<i>Directeur de thèse :</i>	Jean-Louis CLERC	Professeur à l'Université Henri Poincaré (Nancy I)

REMERCIEMENTS

Je tiens d'abord à remercier vivement Monsieur Jean-Louis Clerc pour, en premier lieu m'avoir fourni le sujet de cette thèse qui constitue un prolongement de l'un de ses travaux. Je lui suis très reconnaissant pour les nombreuses heures de discussions et suggestions qu'il m'a accordées, et tout autant pour le temps qu'il a bien voulu passer à ce travail pénible qu'ont été la correction et l'amélioration de mes textes initiaux.

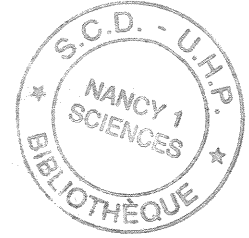
Je remercie grandement Monsieur Guy Rousseau qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Je remercie particulièrement Madame Nicole Bopp et Monsieur Karl-Hermann Neeb qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Mes remerciements à Monsieur Didier Arnal qui a bien voulu être membre du jury et à Monsieur Jean-Philippe Anker qui a bien voulu être membre du jury et pour un cours de D.E.A. qui m'a été particulièrement utile.

Je remercie Monsieur Bruno Blind pour ses conseils.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Madame Haguy Cannistra qui a réalisé avec beaucoup d'amabilité et de patience la transcription de ce texte.



INTRODUCTION

Soit J une algèbre de Jordan euclidienne simple de rang r et dimension n , Ω son cône symétrique, $T_\Omega = J + i\Omega$ le domaine de type tube associé. On note G la composante neutre du groupe structural de J , et soit $G(T_\Omega)$ la composante neutre du groupe des automorphismes biholomorphes de T_Ω . Le sous-groupe U stabilisateur du point-base $ie \in T_\Omega$ est un sous-groupe compact maximal de $G(T_\Omega)$, et U et G sont deux formes réelles de la composante neutre du groupe structural de $J^\mathbb{C}$. Si μ est une représentation irréductible de U sur un espace V_μ , on peut l'étendre en une représentation holomorphe de son complexifié $G^\mathbb{C}$, puis restreindre à G pour obtenir une représentation de G , notée encore μ . Notons \mathcal{V}_μ l'espace des fonctions holomorphes sur T_Ω à valeurs dans V_μ , et pour $g \in G(T_\Omega)$, $f \in \mathcal{V}_\mu$, $z \in T_\Omega$, posons

$$T_\mu(g)f(z) = \mu(J(g^{-1}, z))^{-1}f(g^{-1}z),$$

où on a posé $J(g, z) = \frac{\partial(gz)}{\partial z} \in G^\mathbb{C}$ (facteur canonique d'automorphie). On définit ainsi une représentation du groupe $G(T_\Omega)$ sur \mathcal{V}_μ . Lorsque μ satisfait une certaine condition appelée le critère d'Harish Chandra, cette représentation est en fait (une réalisation de) la représentation de la série discrète holomorphe et on peut décrire le produit hilbertien invariant correspondant. Plus généralement, on peut chercher s'il existe une représentation unitaire (π, \mathcal{H}) de $G(T_\Omega)$ et une application $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{V}_\mu$ qui soit continue lorsqu'on munit \mathcal{V}_μ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et qui entrelace π et T_μ . La solution de ce problème est connue (voir [E-H-W], [J]) par des méthodes algébriques. Une autre attaque de ce problème, dont l'origine remonte à [R-V] utilise l'existence d'un noyau reproduisant pour les espaces hilbertiens de fonctions holomorphes. Posons, pour $z, w \in T_\Omega$, $Q_\mu(z, w) = \mu(P(\frac{z-\bar{w}}{2i}))^{-1}$ où P est la représentation quadratique de J (voir [F-K]). Alors on doit déterminer les conditions sur μ pour que ce noyau (à valeurs dans $\text{End}(V_\mu)$) soit défini positif. Dans [C] et [H-N], on ramène ce problème, par transformée de Laplace, à l'existence d'une mesure R_μ portée par $\bar{\Omega}$ et à valeurs dans $\text{Herm}^+(V_\mu)$ vérifiant :

$$(i) \quad \text{Id}_{V_\mu} = \int_{\bar{\Omega}} e^{-\text{tr } x} dR_\mu(x)$$

$$(ii) \quad dR_\mu(g) = \mu(g)dR_\mu(\cdot)\mu(g)^* \quad \forall g \in G$$

([C] Theorem 3.4.).

On considère désormais μ comme une représentation de G et on la modifie par le produit avec un caractère de paramètre réel α pour obtenir :

$$\mu^\alpha(g) = (\text{Dét } g)^{\frac{r}{2n}\alpha} \mu(g) \quad .$$

Des conditions nécessaires sur α pour l'existence d'une mesure dR_{μ^α} solution du problème précédent sont obtenues au chapitre II, complétant celles de [C] (voir aussi [H-N]). Lorsqu'elles sont satisfaites, on montre qu'il existe une unique mesure dR_{μ^α} à valeurs dans $\text{Herm}(V_\mu)$, à support dans $\overline{\Omega}$, vérifiant (i) et (ii). De plus, dR_{μ^α} a son support dans l'une des orbites de l'action de G dans $\overline{\Omega}$ et a une densité relativement à la mesure (semi-)invariante sur cette orbite.

On note $dR_{\mu^\alpha}(v) = \rho_{\mu^\alpha}(v) d\nu_r(v)$ ($v \in \Omega$), lorsque dR_{μ^α} est portée par Ω et $dR_{\mu^\alpha}(v) = \rho_p^{\mu^\alpha}(v) d\nu_p(v)$ ($v \in O_p$) où $O_p = Ge_p$ est l'orbite des éléments de $\overline{\Omega}$ de rang p , lorsque dR_{μ^α} est portée par O_p ($1 \leq p \leq r-1$).

Etudier la positivité de dR_{μ^α} revient à étudier la semi défini positivité de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ (e élément neutre de J) ou de $\rho_p^{\mu^\alpha}(e_p)$ (voir [R-V], [C], [H-N]).

Dans cette thèse on étudie les cas où μ est sphérique même si dans le chapitre I cette hypothèse sur μ n'est pas utilisée.

Soit μ une représentation irréductible, sphérique, déterminée (à équivalence près) par sa signature $(s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$, avec $s_1 \geq \dots \geq s_r$.

Soit i_μ l'entier compris entre 1 et $r-1$ tel que $s_{i_\mu} > s_{i_\mu+1} = \dots = s_r$; dans le cas où les $(s_i)_{1 \leq i \leq r}$ sont tous égaux (cas où μ est scalaire), on pose $i_\mu = 0$.

On note d la constante de structure de J telle que $n = r + \frac{r(r-1)}{2}d$.

On obtient les résultats suivants : (Corollaire IV.3.4. et Proposition IV.4.3.)

- 1) $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est défini positif si et seulement si $\alpha > (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r$.
- 2) $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est semi-défini positif lorsque $\alpha = (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r$ et éventuellement $\alpha \in \{(r + i_\mu - 1 - p)\frac{d}{2} - s_r\}_{1 \leq p \leq i_\mu - 1}$.

Pour ces valeurs discrètes de α on ne parvient pas toutefois à conclure.

La mesure dR_{μ^α} est portée par un O_p , $1 \leq p \leq r-1$ lorsque $\mu(P(x))$, $x \in \Omega$ vérifie une condition algébrique prolongeant le critère de Clerc : $\alpha + s_{p+1} = \dots = \alpha + s_r = p\frac{d}{2}$. Mais elle est peu explicite. Dans le cas général pour μ cette condition a été établie indépendamment par Hilgert J. et Neeb K.H. (voir [H-N]).

On traite complètement le cas où $i_\mu = r - 1$ i.e. $s_{r-1} > s_r$. Dans ce cas Q_{μ^α} est défini positif si et seulement si $\alpha \geq (r - 1)d - s_r$.

Présentons succinctement les idées et les lemmes clés de ce travail. Dans le cas où $\alpha > (r - 1)d + 1 - s_r$, la théorie des séries discrètes holomorphes permet d'établir que Q_{μ^α} est défini positif. Ding H. et Gross K.J. dans [D-G] donnent une réalisation de ces séries et établissent un théorème fondamental pour notre travail :

Pour $\alpha > (r - 1)d + 1 - s_r$, $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est égal à constante près (dépendant de α) à $\{\Gamma_{\mu^\alpha} - \frac{n}{r}\}^{-1}$ où Γ_{μ^α} est l'opérateur hermitien de V_μ défini par :

$$\Gamma_{\mu^\alpha} = \int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} \mu^\alpha(P(x)) d^* x$$

A partir de ce théorème on établit pour α assez grand des résultats sur $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ en fonction de représentations de $(\text{Str } \tilde{J})_\circ$ où \tilde{J} désigne une sous algèbre de Jordan de J de rang inférieur à r . Puis on les prolonge analytiquement. Dans le chapitre I on s'inspire dans le cadre des algèbres de Jordan (plus exactement de leurs groupes structurels) de la méthode de Gindikin - Karpelevitch - Schiffmann permettant la décomposition en produit de la fonction c d'Harisch Chandra. Le but est d'exprimer l'action de Γ_μ sur un vecteur conique v_c sous forme d'un produit d'opérateurs hermitiens, les $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ $1 \leq i < j \leq r$ $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}$, qu'on peut associer à des algèbres de Jordan de rang deux. Les opérateurs $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ commutent avec $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ pour tout α ; on montre que $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ est inversible pour $\alpha_{i,j}$ assez grand. Cela permet d'exprimer l'action de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ sur un vecteur de plus bas poids de μ noté v_μ en fonction de l'action sur v_μ d'un produit d'opérateurs $\{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1}$ $1 \leq i < j \leq r$.

En combinant cette expression avec la décomposition en produit de termes de la forme $\langle \prod \prod \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v \rangle$, $q_{i,j} \in \mathbb{Z}$ lorsque v appartient à des sous espaces particuliers de V_μ (partie I 6)), on établit pour α assez grand les principaux résultats utilisés sur $\rho_{\mu^\alpha}(e)$.

Pour que ces résultats soient exploitables il est nécessaire de traiter directement le cas où $r = 2$, ce qui est fait au chapitre III ; on calcule la valeur propre de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ associée au vecteur sphérique Φ_μ , puis par tensorisation, d'autres valeurs propres de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$. On en déduit le principal résultat pour $r = 2$:

μ étant sphérique, irréductible, de signature (s_1, s_2) avec $s_1 > s_2$, si $\alpha \in]\frac{d}{2} - s_r, d - s_r[$ alors $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ n'est pas semi défini positif (Proposition III.3.1).

Utilisant au chapitre II une décomposition de $\mu(P(x))x \in \Omega$, en somme d'opérateurs hermitiens (voir aussi [H-N]) on établit l'analyticité de $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$.

Les résultats annoncés sur la positivité de $\rho_{\mu^{\alpha}}(e)$ sont établis au chapitre IV par prolongement analytique. Signalons la difficulté suivante : il ne semble pas possible d'identifier $(\text{Str } \tilde{J})_{\circ}$ où \tilde{J} est une sous algèbre de Jordan de J , à un sous-groupe de G . Mais on peut identifier son algèbre de Lie à une sous-algèbre de \mathfrak{g} . Le début du chapitre IV est consacré au contournement de cette difficulté.

I - GENERALITES

1) Notations et principaux résultats sur les algèbres de Jordan.

Les notations et les principaux résultats de ce paragraphe se trouvent dans [F-K].

Soit J une algèbre de Jordan euclidienne simple de rang r et dimension n , d'élément neutre e , munie du produit scalaire :

$$(x, y) \longmapsto (x|y) = \text{tr } xy$$

On fixe dans J un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux, en abrégé un S.C.I.P.O., $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$ et sa décomposition de Pierce associée :

$$J = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{R}c_i \oplus \left(\bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} J_{i,j} \right).$$

Les $J_{i,j}$ sont de dimension commune d . D'où $n = r + \frac{r(r-1)}{2}d$. On pose $G = (\text{Str } J)_o$; son algèbre de Lie \mathfrak{g} est réductive, de centre $\mathbb{R}Id_J$. On note $K = O(J) \cap G$ le stabilisateur de e dans G ; K est un sous groupe compact maximal de G . Il est aussi l'ensemble des points fixes par l'involution de Cartan θ de G définie par $\theta(g) = g^{*-1}$ (resp. de \mathfrak{g} définie par $\theta(X) = -X^*$) où le signe $*$ désigne la transposée. On pose $\mathfrak{a} = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathbb{R}L(c_i)$. On note $A = \{P(a_1c_1 + \dots + a_rc_r; a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^{*+})\}$ le sous groupe analytique associé, où P est la représentation quadratique de J .

On note $M = Z_K(A)$ le centralisateur de A dans K et $M' = N_K(A)$ le normalisateur de A dans K . On pose $W = M'/M$ le groupe de Weyl. Le groupe W agit sur \mathfrak{a} et s'identifie au groupe des permutations de $\{1, \dots, r\}$.

On note $(\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq r}$ la base duale de $(L(c_i))_{1 \leq i \leq r}$.

Pour $1 \leq i < j \leq r$ on note $\mathfrak{n}_{i,j}$ le sous espace radiciel de \mathfrak{g} associé à la racine $\frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)$, $N_{i,j}$ le sous groupe analytique de G associé. On pose $\bar{\mathfrak{n}}_{i,j} = \theta(\mathfrak{n}_{i,j})$, $\bar{N}_{i,j} = \theta(N_{i,j})$, $\mathfrak{n} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq r} \mathfrak{n}_{i,j}$, N le sous groupe analytique de G associé, $\bar{\mathfrak{n}} = \theta(\mathfrak{n})$ et $\bar{N} = \theta(N)$.

Pour $1 \leq p \leq r$ on pose $e_p = c_1 + \dots + c_p$. On note $J^{(p)}$ la sous algèbre de Jordan d'élément neutre e_p . On vérifie que $J^{(p)}$ est simple.

On note $\mathfrak{g}^{(p)}$ la sous algèbre de \mathfrak{g} définie par : $\mathfrak{g}^{(p)} = \mathbb{R}L(e_p) \oplus \mathfrak{g}'^{(p)}$ où $\mathfrak{g}'^{(p)}$ est l'algèbre de Lie semi-simple engendrée par les $\mathfrak{n}_{i,j}$ et les $\bar{\mathfrak{n}}_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq p$. C'est aussi l'algèbre de Lie engendrée par les $\{L(x)\}_{x \in J^{(p)}}$

On note $G^{(p)}$ le sous groupe analytique de G associé à $\mathfrak{g}^{(p)}$.

On pose $\mathfrak{a}_p = \bigoplus_{1 \leq i \leq p} \mathbb{R}L(c_i)$; $\mathfrak{a}'_p = \bigoplus_{p+1 \leq i \leq r} \mathbb{R}L(c_i)$; A^p (resp. A'_p) le sous groupe analytique de G associé à \mathfrak{a}_p (resp. à \mathfrak{a}'_p). On note Σ_0 (resp. Σ_0^+) l'ensemble des racines restreintes non nulles de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (resp. positives).

Soit $w \in W$, $\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \quad i \neq j$,

alors

$$(1.0.0.1) \quad \omega\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\omega(j)} - \varepsilon_{\omega(i)}) \quad \text{et} \quad Ad\omega \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{\omega\alpha}$$

Lemme I.1.1.

Soit R une partie non vide de Σ_0^+ stable par addition ($\alpha, \beta \in R$, $\alpha + \beta \in (\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) \implies \alpha + \beta \in R$) alors :

(i) $\mathfrak{n}(R) = \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ est une sous algèbre nilpotente de \mathfrak{g} .

(ii) $N(R) = \exp \mathfrak{n}(R)$ est le sous-groupe analytique de G associé à $\mathfrak{n}(R)$; $N(R)$ est nilpotent, fermé, simplement connexe.

(iii) Si $\mathfrak{n}(R) = \mathfrak{n}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_p$ et que pour $1 \leq i \leq p$ chaque \mathfrak{n}_i est égal à une somme de sous espaces radiciels $\mathfrak{g}_\alpha \quad \alpha \in R$, alors $\mathfrak{n}_1 \times \dots \times \mathfrak{n}_p \longrightarrow N(R)$ ($X_1, \dots, X_p \longrightarrow \exp X_1 \dots \exp X_p$) est un difféomorphisme, et en désignant par dn_i la mesure de Lebesgue de \mathfrak{n}_i , $dn_1 \dots dn_p$ est une mesure de Haar de $N(R)$.

(voir [W] vol I, p. 133)

Lemme I.1.2.

Soit G un groupe localement compact unimodulaire, H et K deux sous-groupes fermés de G , dk une mesure de Haar à gauche de K , on suppose que :

1) HK a un complémentaire dans G négligeable pour la (à constante multiplicative positive près) mesure de Haar de G

2) $H \cap K = \{e\}$, e élément neutre de G

3) La fonction modulaire $\Delta_H(\zeta) = |\text{Dét Ad}_H(\zeta)|^{-1}$ se prolonge en un caractère χ de G .

Alors G/H admet une mesure de caractère χ (unique à scalaire positif près) ν -relativement invariante par G telle que,

$$\int_{G/H} \phi(\zeta) d\nu(\zeta) = \int_K \tilde{\phi}(k) \chi(k) dk$$

où pour toute fonction continue ϕ sur G/H à support compact $\tilde{\phi}$ est défini par $\tilde{\phi}(k) = \phi(kH)$ (voir [B] Ch. VII).

Soit Ω le cône symétrique des carrés inversibles de J . On a $\bar{\Omega} = \coprod_{0 \leq p \leq r} \mathcal{O}_p$ où $\mathcal{O}_p = G.e_p$ avec par convention $\mathcal{O}_0 = \{0\}$; ainsi pour $p = r$ $S_r = K$. On pose

$$\mathfrak{n}_p = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \mathfrak{n}_{i,j} \bigoplus \left(\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq r}} \mathfrak{n}_{i,j} \right)$$

Proposition I.1.3

(i) Pour $1 \leq p \leq r$, \mathfrak{n}_p est une sous algèbre nilpotente de G , son sous groupe analytique associé N_p est égal à :

$$N_p = \prod_{1 \leq i < j \leq p} \exp \mathfrak{n}_{i,j} \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq r}} \exp \mathfrak{n}_{i,j}.$$

Une mesure de Haar de N_p est égale au produit des mesures de Lebesgue de chaque $\mathfrak{n}_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq p$, $1 \leq i \leq p$ et $p+1 \leq j \leq r$.

(ii) La mesure de Haar du groupe commutatif A_p est (à constante positive près) :

$$da^{(p)} = \frac{da_1}{a_1} \dots \frac{da_p}{a_p}$$

$\frac{da_i}{a_i}$ étant la mesure de Haar du groupe \mathbb{R}^{+*} . Une mesure de Haar à gauche de $T_p = A_p N_p$ est $da^{(p)} dn_p$ où dn_p est une mesure de Haar de N_p .

(iii) Le groupe S_p désignant le stabilisateur de e_p , $T_p S_p$ a un complémentaire dans G négligeable pour la mesure de Haar de G .

(iv) Si $\xi \in S_p$ $\text{Dét Ad}_{S_p} \xi = (\text{Dét } \xi)^{-h_p}$ où $h_p = \frac{r-p}{2n} pd$

(v) En notant $d\nu_r$ une mesure G invariante de Ω ($\Omega \cong G/K$) pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ $d\nu_r$ -intégrable on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \Omega \quad \int_{\Omega} e^{-\text{tr}yx} f(x) d\nu_r(x) &= \int_{G/K} e^{-\text{tr}(y g k e)} f(g K e) d\nu_r(g K) \\ &= \int_{A \times N} e^{-\text{tr}(y a n e)} f(a n e) da dn \end{aligned}$$

(vi) Pour $1 \leq p \leq r-1$, il existe une mesure (unique à constante positive près) $d\nu_p$ de \mathcal{O}_p ($\mathcal{O}_p \cong G/S_p$) G -semi invariante (i.e. vérifiant pour tout $g \in G$, $d\nu_p(g\omega) = (\text{Dét } g)^{h_p} d\nu_p(\omega)$). Pour toute fonction $f : \mathcal{O}_p \rightarrow \mathbb{C}$ $d\nu_p$ -intégrable on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in \Omega \quad \int_{\mathcal{O}_p} e^{-\text{tr}yw} f(w) d\nu_p(w) &= \int_{G/S_p} e^{-\text{tr}(y g S_p e_p)} f(g S_p e_p) d\nu_p(g S_p) \\ &= \int_{A_p \times N_p} e^{-\text{tr}(y a n e_p)} f(a n e_p) (\text{Dét } a)^{h_p} da_p dn_p \end{aligned}$$

Démonstration

(i) provient facilement du Lemme I.1.1.

(ii) est classique

(iii) voir [R-V]

(iv) voir [R-V] en utilisant l'identité : si $g \in G$, $x \in J$, $\det gx = (\text{Dét } g)^{\frac{r}{n}} \det x$

(v) et (vi) découlent facilement de (iii) et du Lemme I.1.2.

2) Position du problème

Soit μ une représentation irréductible holomorphe de $G^{\mathbb{C}}$ complexifié de G dans un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension finie V_{μ} . On munit V_{μ} d'un produit scalaire hermitien, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_{V_{\mu}}$ noté encore lorsqu'il n'y a pas ambiguïté $\langle v, w \rangle$ vérifiant $\mu(g)^* = \mu(g^*)$ pour tout $g \in G^{\mathbb{C}}$ le signe * désignant le conjugué de la transposée. On pose

$$Q_{\mu}(z, \omega) = \mu\left(P\left(\frac{z - \bar{\omega}}{2i}\right)\right)^{-1}$$

où $z, \omega \in T_\Omega = J + i\Omega$. Q_μ est défini positif si et seulement si il existe une mesure positive sur dR_μ sur Ω à valeurs dans Herm^+V_μ le cône des endomorphismes hermitiens de V_μ semi-défini positifs vérifiant :

$$Q_\mu(z, \omega) = \int_{\overline{\Omega}} e^{-\text{tr}(\frac{z-\bar{\omega}}{2i}v)} dR_\mu(v). \quad (\text{voir [C]})$$

Cette mesure dR_μ est unique. Cela revient à l'existence d'une mesure dR_μ sur $\overline{\Omega}$ à valeurs dans Herm^+V_μ vérifiant :

$$(1.2.0.1) \quad \int_{\overline{\Omega}} e^{-\text{tr}v} dR_\mu(v) < +\infty$$

$$(1.2.0.2) \quad \forall y \in \Omega, \quad \mu(P(y^{-1})) = \int_{\overline{\Omega}} e^{-\text{tr}yv} dR_\mu(v).$$

Proposition I.2.1.

(i) Si $dR_\mu|_\Omega \neq 0$ il existe $\rho_\mu : \Omega \rightarrow \text{Herm}^+V_\mu$ de classe C^∞ tel que : $dR_\mu(v) = \rho_\mu(v)d\nu_\tau(v)$ où $\rho_\mu(v) \in \text{Herm}^+V_\mu$.

(ii) Si dR_μ a son support inclus dans \mathcal{O}_p pour $1 \leq p \leq r-1$ il existe $\rho_p^\mu : \mathcal{O}_p \rightarrow \text{Herm}^+V_\mu$ de classe C^∞ tel que $dR_\mu(v) = \rho_p^\mu(v)d\nu_p(v)$ où $\rho_p^\mu(v) \in \text{Herm}^+V_\mu$.

(iii) $\forall v \in \Omega, \quad \forall g \in G$

$$(1.2.1.1.) \quad \rho_\mu(gv) = \mu(g)\rho_\mu(v)\mu(g)^*$$

$$(1.2.1.2.) \quad \text{pour } 1 \leq p \leq r-1, \quad \rho_p^\mu(gv) = (\text{Dét } g)^{-h_p} \mu(g)\rho_p^\mu(v)\mu(g)^*.$$

Réciproquement si dR_μ vérifie (i) ou (ii), ces deux cas s'excluant l'un l'autre, $Q_\mu(z, \omega)$ est défini positif.

Voir [C].

3) Généralités sur les représentations de dimension finie de $G^{\mathbb{C}}$

Soit π une représentation irréductible holomorphe de $G^{\mathbb{C}}$ dans un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie V_π .

Soit \mathfrak{t} une sous-algèbre abélienne maximale dans \mathfrak{m} . Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$ (resp. $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}}$) est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} (resp. de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$). Toute racine de $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ est à valeurs réelles sur \mathfrak{a} et it.

On peut choisir sur l'ensemble Σ des racines de $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}^{\mathbb{C}})$ un ordre compatible avec celui de Σ_0 . Notons Σ^+ le sous ensemble des racines positives de Σ ; $\tilde{\mu}$ étant la représentation d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ associée à μ , il existe $\lambda \in (\mathfrak{h}^{\mathbb{C}})^*$ et $v_\pi \in V_\pi$ tels que

$$\tilde{\mu}(H)v_\pi = \lambda(H)v_\pi \quad \text{pour tout } H \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$$

et de plus

$$\tilde{\mu}(Y)v_\pi = 0 \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{et tout } \alpha \in \Sigma^+.$$

Un tel vecteur v_π s'appelle vecteur de plus bas poids de π , il est unique à constante près. On le prend de norme 1.

On a en particulier pour $t \in A\overline{N}$

$$(I.3.0.1) \quad \pi(t)v_\pi = \chi_{\mathbf{s}}(t)v_\pi \quad \text{où } \mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r.$$

où $\chi_{\mathbf{s}}$ est un caractère de $A\overline{N}$ défini par : $\chi_{\mathbf{s}}(\overline{n}) = 1$ pour $\overline{n} \in \overline{N}$; $\chi_{\mathbf{s}}(a) = a_1^{\frac{1}{2}s_1} \dots a_r^{\frac{1}{2}s_r}$ $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}^{+*}$ pour $a = P(a_1^{\frac{1}{2}}c_1 + \dots + a_r^{\frac{1}{2}}c_r) = \exp(\sum_{i=1}^r \log a_i L(c_i)) \in A$.

On appelle $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ la signature de π . On a : $s_i - s_{i+1} \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq i \leq r-1$.

Si π est sphérique, π est déterminé à équivalence près par (I.3.0.1.). On note

$$\Phi_\pi = \int_K \pi(k)v_\pi dk$$

où dk est la mesure de Haar de K . Alors Φ_π est non nul.

Soit $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r)$ un élément de \mathbb{N}^r tel que $m_1 \geq \dots \geq m_r$. On note $\Delta_{\mathbf{m}} = \Delta_1^{m_1-m_2} \dots \Delta_{r-1}^{m_{r-1}-m_r} \Delta_r^{m_r}$ où les Δ_i $1 \leq i \leq r$ sont les mineurs principaux généralisés.

On note $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J^{\mathbb{C}})$ le \mathbb{C} espace vectoriel engendré par les $\Delta_{\mathbf{m}} \circ g$, $g \in G^{\mathbb{C}}$. On considère la représentation $\pi_{\mathbf{m}}$ de G dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J^{\mathbb{C}})$ définie par

$$\pi_{\mathbf{m}}(g) = p \circ g^* \quad \text{pour } p \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J^{\mathbb{C}}), g \in G^{\mathbb{C}}$$

On montre que $\pi_{\mathbf{m}}$ est irréductible, sphérique, de signature $2\mathbf{m} = (2m_1, \dots, 2m_r)$.

Toute représentation irréductible, sphérique de dimension finie de signature à coefficients réels est égale (à équivalence près) à $(\text{Dét.})^{\frac{r}{2n}\alpha} \pi_{\mathbf{m}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et sa signature s'écrit alors :

$$2\mathbf{m} + \alpha = (2m_1 + \alpha, \dots, 2m_r + \alpha)$$

Enfin, il est clair que toute représentation $\pi_{\mathbf{m}}$ est homogène de degré $s_{\mu} = m_1 + \dots + m_r$ i.e. $\pi_{\mathbf{m}}(\lambda g) = \lambda^{s_{\mu}} \pi_{\mathbf{m}}(g)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit π une représentation de $G^{\mathbb{C}}$ dans V_{π} ; considérons la restriction de π à G où G est considéré comme sous-groupe de $G^{\mathbb{C}}$. Rappelons que l'une est irréductible si et seulement si l'autre l'est. On note pour $\alpha \in \mathbb{R}$, π^{α} la représentation de G dans V_{π} définie par : $\pi^{\alpha}(g) = (\text{Dét } g)^{\alpha \frac{r}{2n}} \pi(g)$ si $g \in G$.

Lemme I.3.1.

Soit μ une représentation irréductible de G de signature $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$. L'intégrale $\Gamma_{\mu} = \int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} \mu(P(x)) d^*x$ est absolument convergente pour $s_r > (r-1)\frac{d}{2}$ et l'opérateur ainsi défini est hermitien défini positif.

Si de plus $s_r > 1 + (r-1)d$, alors $\rho_{\mu}(e)$ est colinéaire à $\Gamma_{\mu - \frac{1}{r}}$ et $\rho_{\mu}(e)$ est défini positif.

Voir [D.G] 4.7. theorem (i).

On appelle vecteur conique de caractère associé $\chi_{\mathbf{s}}$ dans $A\bar{N}$ tout vecteur de V_{μ} défini comme (1.3.0.1).

4) Une expression de $\Gamma_{\mu} v_c$ où v_c est un vecteur conique.

On applique dans ce paragraphe la méthode de Gindikin - Karpelevich - Schiffmann permettant la décomposition en produit de la fonction "c" d'Harisch-Chandra à l'action de Γ_{μ} sur un vecteur conique v_c .

On commence par un lemme (classique dans cette méthode) de décomposition des groupes nilpotents N et \bar{N} .

Soit p un entier tel que $2 \leq p \leq r$ et v_c est un vecteur conique de V_{μ} . On pose pour $1 \leq k \leq p$

$$n_p^{(k)} = \bigoplus_{1 \leq j \leq k-1} n_{j,p} \bigoplus \left(\bigoplus_{1 \leq i < j \leq p-1} n_{i,j} \right)$$

en convenant que pour $k = 1$ $\mathfrak{n}_p^{(1)} = \mathfrak{n}_{p-1}^{(p-1)} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p-1} \mathfrak{n}_{i,j}$.

Lemme I.4.1.

(i) Il existe $\omega_k \in W$ tel que :

$$\text{Ad } \omega_k \mathfrak{n}_p^{(p)} = \bigoplus_{k \leq j \leq p-1} \bar{\mathfrak{n}}_{j,p} \bigoplus \mathfrak{n}_p^{(k)} \text{ pour } 1 \leq k \leq p-1$$

(ii) Posons :

$$N_p^{(k)} = \exp \mathfrak{n}_p^{(k)} ; \bar{N}_p^{(k)} = \exp \bigoplus_{k \leq j \leq p-1} \bar{\mathfrak{n}}_{j,p} ,$$

on a alors

- 1) $N_p^{(k)} = N \cap \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} ; \bar{N}_p^{(k)} = \bar{N} \cap \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} = \prod_{k \leq j \leq p-1} \bar{N}_{j,p}$.
- 2) $N_p^{(k)}$ et $\bar{N}_p^{(k)}$ sont des groupes nilpotents, fermés, simplement connexes.
- 3) $\omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} = \bar{N}_p^{(k)} N_p^k$ et $\bar{N}_p^{(k)} \cap N_p^{(k)} = \{\text{Id}_J\}$.
- 4) $N_{k,p} \times N_p^{(k)} \longrightarrow N_p^{(k+1)}$
 $(n_{k,p}, n_p^{(k)}) \longmapsto n_{k,p} n_p^{(k)}$ pour $1 \leq k \leq p-1$

est un difféomorphisme et si $dn_{k,p}$ et $dn_p^{(k)}$ désignent des mesures de Haar de $N_{k,p}$ et $N_p^{(k)}$ $dn_p^{(k+1)} = dn_{k,p} dn_p^{(k)}$ où $dn_p^{(k)}$ est une mesure de Haar de $N_p^{(k+1)}$.

(iii) Soit $f : \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} \longrightarrow V_\mu$ invariante à droite par $\bar{N}_p^{(k)}$, dont la restriction à $N_p^{(k)}$ est $dn_p^{(k)}$ -intégrable, on a alors

$$\int_{N_p^{(k)}} f(n) dn_p^{(k)} = \int_{\omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} / \bar{N}_p^{(k)}} f(g \bar{N}_p^{(k)}) d\nu(g \bar{N}_p^{(k)})$$

où $d\nu$ est une mesure de $\omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} / \bar{N}_p^{(k)}$ invariante à gauche par $\omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1}$.

(iv) Soit $g \in \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1}$, si f vérifie les conditions de (iii), on a :

$$\int_{N_p^{(k)}} f(n) dn = \int_{N_p^{(k)}} f(gn) dn.$$

Démonstration

(i) Raisonnons par récurrence sur k à partir de $k = p$:

Si $k = p$ c'est trivial.

Si $1 \leq k \leq p-1$. Notons $\tau_{i,j}$ un élément de W échangeant i et j dans $\{1, \dots, r\}$, il suffit de prendre $\omega_k = \tau_{k,p} \circ \dots \circ \tau_{p-1,p}$. En effet, d'après l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$, il suffit de vérifier que :

$$(I.4.1.1.) \quad \text{Ad } \tau_{k,p} \left(\bigoplus_{k+1 \leq i \leq p-1} \bar{n}_{i,p} \bigoplus \mathfrak{n}_p^{(k+1)} \right) = \bigoplus_{k \leq i \leq p-1} \bar{n}_{i,p} \bigoplus \mathfrak{n}_p^{(k)}.$$

Or, on a :

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \bar{n}_{i,p} = \mathfrak{n}_{k,i} \quad \text{pour } k+1 \leq i \leq p-1.$$

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \mathfrak{n}_{k,p} = \bar{n}_{k,p}.$$

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \mathfrak{n}_{i,p} = \mathfrak{n}_{i,k} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k-1.$$

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \mathfrak{n}_{i,j} = \mathfrak{n}_{i,j} \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq p-1, i \neq k \text{ et } j \neq k.$$

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \mathfrak{n}_{i,k} = \mathfrak{n}_{i,p} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq k-1.$$

$$\text{Ad } \tau_{k,p} \mathfrak{n}_{k,i} = \bar{n}_{i,p} \quad \text{pour } k+1 \leq i \leq p-1.$$

Il est alors facile de vérifier (I.4.1.1.).

(ii) D'après le (i) de ce Lemme on peut écrire

$$\mathfrak{n}_p^{(k)} = \text{Ad } \omega_k \mathfrak{n}_p^{(p)} \cap \mathfrak{n}_p^{(p)},$$

donc d'après le 1) du Lemme I.1.1. on a :

$$N_p^{(k)} = \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} \cap N_p^{(p)}$$

$$\mathfrak{n}_p^{(k)} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma_{\omega_k}} \mathfrak{g}_\alpha \quad \text{où } \Sigma_{\omega_k} = \{\alpha \in \Sigma_o^+ ; \omega_k^{-1} \alpha \in \Sigma_o^+\}.$$

Or, il est clair que Σ_{ω_k} est stable par addition, donc d'après le 2) a) du Lemme I.1.1. $N_p^{(k)}$ est nilpotent, fermé, simplement connexe.

D'autre part, $\bigoplus_{k \leq j \leq p-1} \bar{n}_{j,p} = \text{Ad } \omega_k \mathfrak{n}_p^{(p)} \cap \bar{\mathfrak{n}}$ donc d'après le (ii) du Lemme I.1.1. on a :

$$\bar{N}_p^{(k)} = \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1} \cap \bar{N}.$$

Comme les $\bar{n}_{j,p}$ pour $k \leq j \leq p-1$ commutent deux à deux, on en déduit

$$\bar{N}_p^{(k)} = \prod_{k \leq j \leq p-1} \bar{N}_{j,p}$$

et $\overline{N}_p^{(k)}$ est nilpotent, fermé, simplement connexe.

Enfin $\mathfrak{n}_p^{(p)} = \text{Ad } \omega_k^{-1} \left(\bigoplus_{k \leq j \leq p-1} \overline{\mathfrak{n}}_{j,p} \right) \oplus \text{Ad } \omega_k^{-1} \mathfrak{n}_p^{(k)}$, donc d'après le (iii) du Lemme I.1.1. on a :

$$N_p^{(p)} = (\omega_k^{-1} \overline{N}_p^{(k)} \omega_k) (\omega_k^{-1} N_p^{(k)} \omega_k).$$

On déduit le 3) puisque $\overline{N} \cap N = \{\text{Id}_J\}$.

Comme $\mathfrak{n}_p^{(k+1)} = \mathfrak{n}_{k,p} \oplus \mathfrak{n}_p^{(k)}$ et que $\Sigma_{\omega_{k+1}}$ est stable par addition, on déduit du (iii) du Lemme I.1.1. les résultats du 4).

(iii) On utilise le Lemme I.1.2. avec les données :

$G = \omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1}$, $H = \overline{N}_p^{(k)}$, $K = N_p^{(k)}$ justifié par le (ii) 2) et 3) précédent et avec $\chi = 1$ puisque $\overline{N}_p^{(k)}$ est nilpotent donc unimodulaire.

(iv) C'est une conséquence immédiate de (iii) en utilisant le fait que $d\nu$ est une mesure invariante à gauche par $\omega_k N_p^{(p)} \omega_k^{-1}$.

On a par la Proposition I.1.3. (v)

$$\Gamma_\mu = \int_{A \times N} e^{-\text{tr } ane} \mu(an) \mu(an)^* dadn$$

car $P(ane) = an(an)^*$.

D'où $\Gamma_\mu = \int_{A \times N} e^{-\text{tr } ane} e^{-2\rho \log a} \mu(na) \mu(na)^* dadn$ par le changement de variable $n \mapsto a^{-1}na$ où 2ρ désigne la somme des racines restreintes positives. Si $a = \exp(\sum_{i=1}^r \log a_i L(c_i))$, $a_i \in \mathbb{R}^{+*}$ on a

$$e^{-2\rho \log a} = \prod_{1 \leq i \leq r} a_i^{-\frac{d}{2}(2i-r-1)}$$

D'autre part :

$$\mu(a)\mu(a^*)\mu(n^*)v_c = \mu(a^2)v_c = \prod_{1 \leq i \leq r} a_i^{s_i} v_c$$

Donc on a :

$$\Gamma_\mu v_c = \int_{A \times N} e^{-\text{tr } nae} \prod_{1 \leq i \leq r} a_i^{s_i - \frac{d}{2}(2i-r-1)} \mu(n)v_c dadn.$$

On note pour $2 \leq p \leq r$

$$T_\mu^{(p)} = \int_{A_p \times N_p^{(p)}} e^{-\text{tr} nae_p} \prod_{1 \leq i \leq p} a_i^{s_i - \frac{d}{2}(2i-r-1)} \mu(n) da^{(p)} dn_p^{(p)}$$

Ainsi $\Gamma_\mu v_c = T_\mu^{(r)} v_c$.

Pour $n \in N_p^{(p)}$ on a $nae_p = \sum_{i=1}^p a_i n c_i$, $nc_p = c_p$, on obtient donc

$$(I.4.1.2) \quad T_\mu^{(p)} v_c = \int_0^{+\infty} e^{-a_p a_p^{s_p - \frac{d}{2}(2p-r-1)}} \frac{da_p}{a_p} \dots$$

$$\int_{(\mathbb{R}^{**})^{p-1}} \int_{N_p^{(p)}} e^{-\text{tr} \sum_{i=1}^{p-1} a_i n c_i} \prod_{1 \leq i \leq p-1} a_i^{s_i - \frac{d}{2}(2i-r-1)} \mu(n) v_c \frac{da_1}{a_1} \dots \frac{da_p}{a_p} dn^{(p)}.$$

Pour $g \in G$ on note $g = k(g) \exp H(g) \bar{n}(g)$ la décomposition d'Iwasawa de G , $G = K \bar{A} \bar{N}$.

Pour $1 \leq i < j \leq r$ on rappelle que la sous algèbre de \mathfrak{g} engendrée par $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)} = \mathfrak{n}_{i,j}$ et $\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}(\varepsilon_i - \varepsilon_j)} = \bar{\mathfrak{n}}_{i,j}$ est semi-simple et que l'on a alors : $\forall n \in N_{i,j}$ $H(n) \in \mathbb{R}(L(c_j - c_i))$ et $\bar{n}(n) \in \bar{N}_{i,j}$ (voir [H e]).

Fixons une mesure de Harr de $N_{i,j}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$; on considère l'opérateur que l'on étudiera au I 5),

$$K_{i,j}^\mu(\alpha) = \int_{N_{i,j}} e^{\alpha \varepsilon_j H(n)} \mu(k(n)) dn$$

où dn est une mesure de Haar de $N_{i,j}$.

Proposition I.4.2.

$$Si \ s_r > (r-1) \frac{d}{2}$$

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq j \leq r} \left\{ \Gamma(s_j - \frac{d}{2}(2j-r-1)) \right\}^{-1} \Gamma_\mu v_c \\ &= \prod_{j=r}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^\mu \left(\frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-2-r) \frac{d}{2} \right) v_c \\ &= \left\{ K_{r-1,r}^\mu \left(\frac{s_{r-1} + s_r}{2} - (r-3) \frac{d}{2} \right) \circ \dots \circ K_{1,r}^\mu \left(\frac{s_1 + s_r}{2} + \frac{d}{2} \right) \right\} \circ \dots \end{aligned}$$

$$\circ \left\{ K_{p-1,p}^\mu \left(\frac{s_{p-1} + s_p}{2} - (2p-3-r) \frac{d}{2} \right) \circ \dots \circ K_{1,p}^\mu \left(\frac{s_1 + s_p}{2} - (p-1-r) \frac{d}{2} \right) \right\} \circ \dots$$

$$\circ \left\{ K_{1,2} \left(\frac{s_1 + s_2}{2} - (1-r) \frac{d}{2} \right) \right\} v_c$$

Démonstration

Pour $1 \leq j \leq p-1$ posons provisoirement ψ le caractère de A_{p-1} défini par :

$$\psi(a) = \prod_{i=1}^{p-1} a_i^{s_i - \frac{d}{2}(2i-r-1)} \quad a = \exp \left(\sum_{i=1}^{p-1} \log a_i L(c_i) \right) \quad \text{pour } a_i > 0$$

Montrons la relation :

$$(I.4.2.1.) \quad \int_{A_{p-1}} \int_{N_p^{(j+1)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n_p^{(j+1)} c_i \right)} \psi(a) \mu(n_p^{(j+1)}) v_c da^{p-1} dn_p^{(j+1)}$$

$$= K_{j,p}^\mu \left(\frac{s_j + s_p}{2} - (j+p-2-r) \frac{d}{2} \right) \circ \dots$$

$$\circ \int_{A_{p-1}} \int_{N_p^{(j)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n_p^{(j)} c_i \right)} \psi(a) \mu(n_p^{(j)}) v_c da^{(p-1)} dn_p^{(j)}.$$

D'après le Lemme I.4.1.(ii) 4) on a :

$$\int_{N_p^{(j+1)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n c_i \right)} \mu(n) v_c dn$$

$$= \int_{N_{j,p} \times N_p^{(j)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n_{j,p} n_p^{(j)} c_i \right)} \mu(n_{j,p} n_p^{(j)}) v_c dn_{j,p} dn_p^{(j)}.$$

On peut écrire :

$$\mu(n_{j,p} n_p^{(j)}) = \mu(k(n_{j,p})) \mu(\exp H(n_{j,p}) \bar{n}(n_{j,p}) n_p^{(j)})$$

et par K -invariance de la trace dans J :

$$\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n_{j,p} n_p^{(j)} c_i \right) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i \exp H(n_{j,p}) \bar{n}(n_{j,p}) n_p^{(j)} c_i \right).$$

Remarquons maintenant que l'application $f : \omega_j N_p^{(p)} \omega_j^{-1} \longrightarrow V_\mu$ définie par :

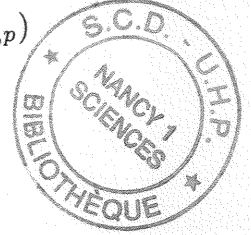
$$g \longmapsto f(g) = e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i \exp H(n_{j,p}) g c_i \right)} \mu(g) v_c$$

est invariante à droite par $\bar{N}_p^{(j)}$. En effet, d'après le Lemme I.4.1 (ii) 1) : $\bar{N}_p^{(j)} = \prod_{j \leq i \leq p-1} \bar{N}_{i,p}$; et pour $\bar{n} \in \bar{N}_{i,p}$ avec $1 \leq i \leq p-1$ on a $\bar{n}c_l = c_l$ pour $1 \leq l \leq p-1$. On en déduit, d'après le Lemme I.4.1. (vi) appliqué à f que pour $n_{j,p} \in N_{j,p}$, on a :

$$\int_{N_p^{(j)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i \exp H(n_{j,p}) \bar{n}(n_{j,p}) n_p^{(j)} c_i \right)} \mu(k(n_{j,p})) \mu(\exp H(n_{j,p}) \bar{n}(n_{j,p}) n_p^{(j)}) v_c, \\ \dots dn_p^{(j)} \\ = \int_{N_p^{(j)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i \exp H(n_{j,p}) n_p^{(j)} c_i \right)} \mu(k(n_{j,p})) \mu(\exp H(n_{j,p}) n_p^{(j)}) v_c dn_p^{(j)} .$$

Par le changement de variable : $n_p^{(j)} \mapsto \exp H(n_{j,p})^{-1} n_p^{(j)} \exp H(n_{j,p})$ on obtient :

$$\int_{N_p^{(j+1)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n c_i \right)} \mu(n) v_c dn^{(j+1)} \\ = \int_{N_{j,p}} \int_{N_p^{(j)}} e^{-\text{tr} \left(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n_p^{(j)} \exp H(n_{j,p}) c_i \right)} e^{-2\rho_{N_p^{(j)}} H(n_{j,p})} \dots \\ \mu(k(n_{j,p})) \mu(n_p^{(j)}) \mu(\exp H(n_{j,p})) v_c dn_p^{(j)} dn_{j,p}.$$



On a : $\exp H(n_{j,p}) c_i = e^{\varepsilon_i H(n_{j,p})} c_i$ et $\mu(\exp H(n_{j,p})) v_c = e^{(\frac{1}{2} s_p \varepsilon_p + \frac{1}{2} s_j \varepsilon_j) H(n_{j,p})} v_c$
 $= e^{\frac{1}{2} (s_p - s_j) \varepsilon_p H(n_{j,p})} v_c$ car $\varepsilon_j H(n_{j,p}) = -\varepsilon_p H(n_{j,p})$

D'autre part, comme

$$\text{Tr}(\text{ad } H(n_{j,p})|_{\mathfrak{n}_{t,q}}) = \frac{1}{2} d(\varepsilon_q - \varepsilon_t) H(n_{j,p}) \quad \text{si } t < q ,$$

on a :

$$2\rho_{N_p^{(j)}} H(n_{j,p}) = \sum_{t \neq j, q \neq p, q > t} \frac{d}{2} (\varepsilon_q - \varepsilon_t) H(n_{j,p}) \dots \\ + \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{d}{2} (\varepsilon_i - \varepsilon_j) H(n_{j,p}) + \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d}{2} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) H(n_{j,p})$$

$$\begin{aligned}
+ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{d}{2} (\varepsilon_p - \varepsilon_i) \mathbf{H}(n_{j,p}) &= \sum_{i=j+1}^{p-1} \frac{d}{2} (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \mathbf{H}(n_{j,p}) \\
&= \frac{d}{2} (p-1-j) \varepsilon_p \mathbf{H}(n_{j,p})
\end{aligned}$$

Par le changement de variable : $a_j \mapsto e^{\varepsilon_p \mathbf{H}(n_{j,p})} a_j$ on obtient alors

$$\begin{aligned}
&\int_{A_{p-1}} \int_{N_p^{(j+1)}} e^{-\text{tr}(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n c_i)} \psi(a) \mu(n) v_c da dn \\
&= \int_{N_{j,p}} e^{\left(\frac{1}{2}(s_j + s_p) - \frac{d}{2}(j+p-2-r)\right) \varepsilon_p \mathbf{H}(n_{j,p})} \mu(k(n_{j,p})) dn_{j,p} \\
&\quad \circ \int_{A_{p-1}} \int_{N_p^{(j)}} e^{-\text{tr}(\sum_{i=1}^{p-1} a_i n c_i)} \psi(a) \mu(n) v_c da dn
\end{aligned}$$

ce qui établit (I.4.2.1.).

D'après (1.4.1.1.) on obtient en utilisant (1.4.2.1) successivement de $j = p-1$ à $j = 1$:

(I.4.2.2)

$$\left\{ \Gamma\left(s_p - (2p-r-1)\frac{d}{2}\right) \right\}^{-1} T_\mu^{(p)} v_c = \prod_{i=p-1}^1 K_{i,p}^\mu \left(\frac{s_i + s_p}{2} - (i+p-2-r)\frac{d}{2} \right) T_\mu^{(p-1)} v_c$$

Alors en posant par convention $T_\mu^{(1)} v_c = v_c$, on obtient en raisonnant de proche en proche de $p = r$ à $p = 2$ la Proposition I.4.2..

5) Etude de $K_{i,j}^\mu(\alpha)$ **Lemme I.5.1.**

$\int_{N_{1,2}} e^{\varepsilon_2 H(n)} dn$ converge pour $\alpha > \frac{d}{2}$, et pour dn convenablement normalisé on a pour tout $\alpha > \frac{d}{2}$

$$\int_{N_{1,2}} e^{\alpha \varepsilon_2 H(n)} dn = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}.$$

La démonstration interviendra après quelques lemmes (voir juste avant le Corrolaire I.5.6.)

Lemme I.5.2.

Pour $1 \leq i < j \leq r$, $K_{i,j}^\mu(\alpha)$ est unitairement semblable à $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ (pour une normalisation convenable des $dn_{i,j}$).

Démonstration

Immédiat en utilisant l'élément $\omega_{i,j} \in W$ tel que $\omega_{i,j}(1) = i$ et $\omega_{i,j}(2) = j$. On obtient

$$(I.5.2.1) \quad K_{i,j}^\mu(\alpha) = \mu(\omega_{i,j}) K_{1,2}^\mu(\alpha) \mu(\omega_{i,j})^{-1}$$

Dorénavant $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ est défini au moyen de la mesure de Haar $dn_{1,2}$ normalisée comme au Lemme I.5.1. et pour $1 \leq i < j \leq r$ $K_{i,j}^\mu(\alpha)$ est normalisé afin que l'égalité (I.5.2.1.) soit vérifiée.

Remarquons que si M est le centralisateur de A dans K , on a pour tout $m \in M$ $m(i) = i$ et $m(j) = j$ pour tout i, j $1 \leq i < j \leq r$.

Donc d'après (I.5.2.1.) en substituant i à 1 et j à 2 on a :

$$(I.5.2.2) \quad K_{i,j}^\mu(\alpha) = \mu(m) K_{i,j}^\mu(\alpha) \mu(m)^{-1} \text{ pour } 1 \leq i < j \leq r$$

Proposition I.5.3.

Pour $1 \leq i < j \leq r$ $K_{i,j}^\mu(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > \frac{d}{2}$.

Démonstration

D'après le Lemme I.5.2. il suffit d'établir la Proposition pour $i = 1$ et $j = 2$. Or, pour tout $n \in N_{1,2}$ $\|\mu(k(n))\| = \text{Tr}\{\mu(k(n))\mu(k(n))^*\}^{\frac{1}{2}} = \|\text{Id}_{V_\mu}\|$. Le résultat provient alors du Lemme I.5.1.

On considère la décomposition de Pierce de $J^{(2)}$ par rapport à c_1

$$J^{(2)} = J^{(2)}(c_1; 1) \oplus J^{(2)}(c_1; \frac{1}{2}) \oplus J^{(2)}(c_1; 0)$$

où $J^{(2)}(c_1; 1) = \mathbb{R}c_1$; $J^{(2)}(c_1; 0) = \mathbb{R}c_2$ et $J^{(2)}(c_1; \frac{1}{2}) = J^{(2)}(c_2; \frac{1}{2}) = J_{1,2}$.

On rappelle que $n_{1,2} = \{2z \square c_1; z \in J_{1,2}\}$ et que $N_{1,2} = \{\exp(2z \square c_1); z \in J_{1,2}\}$. On pose $\tau(z) = \exp(2z \square c_1)$. Il est facile de vérifier que $\tau(z)$ stabilise $J_{(2)}$ et $J_{(2)}^\perp$.

Lemme I.5.4.

Soit $z \in J_{1,2}$ et $n = \tau(z)$ alors

$$k(n) = n \exp\{-H(n)\}\theta(n)$$

et

$$H(n_{1,2}) = \log(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2) L(c_1 - c_2)$$

Démonstration

La matrice de $n|_{J^{(2)}}$ relativement à la décomposition $\mathbb{R}c_1 \oplus J_{1,2} \oplus \mathbb{R}c_2$ est d'après [F-K] (Lemme VI.3.1.).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2L(z) & \text{Id} & 0 \\ 2L(c_2)L(z)^2 & 2L(c_2)L(z) & 1 \end{pmatrix}$$

Fixons une base orthonormé (y_1, \dots, y_d) de $J_{1,2}$. On a :

$$2L(c_2)L(z)^2 c_1 = 2c_2(z \frac{1}{2}z) = c_2 z^2 = c_2(\frac{1}{2}\|z\|^2(c_1 + c_2)) = \frac{1}{2}\|z\|^2 c_2$$

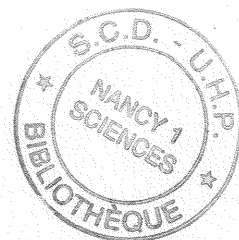
et pour $y \in J_{1,2}$

$$2L(c_2)L(z)y = 2c_2(z y) = 2c_2\left(\frac{1}{2}(z|y)(c_1 + c_2)\right) = (z|y)c_2$$

et $2L(z)c_1 = \sum_{i=1}^d (z|y_i)y_i$.

La matrice de $n_{|J(2)}$ dans la base $(c_1, y_1 \dots y_d, c_2)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ (z|y_1) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (z|y_d) & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\|z\|^2 & (z|y_1) & \dots & (z|y_d) & 1 \end{pmatrix}$$



On en déduit :

$$(I.5.4.1.) \quad \tau(z)_{|J(2)}(c_1 + c_2) = c_1 + \sum_{i=1}^d (z|y_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)c_2 \quad \text{et}$$

$$\tau(z)_{|J(2)}^*(c_1 + c_2) = \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)c_1 + \sum_{i=1}^d (z|y_i)y_i + c_2$$

Comme la matrice de $\exp\{\log(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)L(c_1 - c_2)\}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\|z\|^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\tau(z)_{|J(2)}^* e_2 = \exp\{\log(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)L(c_1 - c_2)\}\tau(z)_{|J(2)} e_2.$$

Il est facile de vérifier que pour $3 \leq i \leq r$ chaque c_i est un point fixe pour $\tau(z), \tau(z)^*$ et pour tout $a \in A_2$. On en déduit que

$$\{\exp\{\log(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)L(c_1 - c_2)\}\tau(z)\}^1 \tau(z)^* e = e.$$

D'où $\tau(z)^{-1} \exp\{-\log(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)L(c_1 - c_2)\}\tau(z)^* \in K$

et par transposition

$$k_z = \tau(z) \exp\left\{-\log\left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)L(c_1 - c_2)\right\}\{\tau(z)^{-1}\}^* \in K .$$

Donc, par l'unicité de la décomposition d'Iwasawa de $\tau(z)$, on obtient comme $\tau(z)^* \in \overline{N}$

$$k(\tau(z)) = k_z ; H(\tau(z)) = \log\left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)L(c_1 - c_2)$$

$$\text{d'où } k(\tau(z)) = \tau(z) \exp\{-H(\tau(z))\}\theta(\tau(z)) .$$

Proposition I.5.5.

- (i) pour $\alpha > \frac{d}{2}$, $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ est hermitien
- (ii) $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{d}{2}} K_{1,2}^\mu(\alpha) = \text{Id}_{V_\mu}$

Démonstration

- (i) Pour $\alpha > \frac{d}{2}$

$$\{K_{1,2}^\mu(\alpha)\}^* = \int_{N_{1,2}} e^{\alpha \varepsilon_2 H(n)} \mu(k(n)^*) dn_{1,2} .$$

Remarquons que si $n = \tau(z)$ avec $z \in J_{1,2}$ $n^{-1} = \tau(-z)$: d'après le Lemme I.5.4. (ii) $H(n) = H(n^{-1})$, d'après le Lemme I.5.4. (i) $k(n)^* = n^{-1} \exp\{-H(n)\}n^*$ d'où $k(n)^* = k(n^{-1})$. Comme $N_{1,2}$ est unimodulaire on en déduit alors par le changement de variable $n_{1,2} \mapsto n_{1,2}^{-1}$

$$\{K_{1,2}^\mu(\alpha)\}^* = K_{1,2}^\mu(\alpha) .$$

(ii) $z \rightarrow 2z \square c$ est un isomorphisme linéaire de $J_{1,2}$ sur $n_{1,2}$ donc il existe $c > 0$ tel que $dn_{1,2} = cdz$ où dz désigne la mesure de Lebesgue de $J_{1,2}$. Alors on peut écrire d'après le Lemme I.5.4.:

$$(I.5.5.1) \quad K_{1,2}^\mu(\alpha) = c \int_{J_{1,2}} \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)^{-\alpha} \mu(k(\tau(z))) dz .$$

Et d'après le Lemme I.5.1. :

$$c \int_{J_{1,2}} \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)^{-\alpha} dz = \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & K_{1,2}^\mu(\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \text{Id}_{V_\mu} \\ &= c \int_{J_{1,2}} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\alpha} (\mu(k(\tau(z))) - \mu(k(\tau(0)))) dz \quad \text{car } k(\tau(0)) = \text{Id}_J. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\delta > 0$ et pour $\alpha > \alpha_0 > \frac{d}{2}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \alpha^{\frac{d}{2}} \frac{1}{c} \|K_{1,2}^\mu(\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \text{Id}_{V_\mu}\| \\ & \leq \alpha^{\frac{d}{2}} \sup_{z \in J_{1,2}, \|z\| < \delta} \|\mu(k(\tau(z))) - \mu(k(\tau(0)))\| \int_{z \in J_{1,2}, \|z\| < \delta} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\alpha} dz \\ & + \alpha^{\frac{d}{2}} (1 + \frac{1}{2} \delta^2)^{-(\alpha - \alpha_0)} \int_{\|z\| \geq \delta} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\alpha_0} (\|\mu(k(\tau(z)))\| + \|\mu(k(\tau(0)))\|) dz \end{aligned}$$

On a $\|(k(\tau(z)))\| = 1$ pour tout $z \in J_{1,2}$, $\int_{\|z\| \geq \delta} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\alpha_0} dz \leq \frac{\Gamma(\alpha_0 - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha_0)}$
et $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{d}{2}} (1 + \frac{1}{2} \delta^2)^{-(\alpha - \alpha_0)} = 0$.

D'autre part, on peut écrire, puisque $\dim J_{1,2} = d$

$$\int_{J_{1,2}, \|z\| < \delta} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\alpha} dz = b \int_0^\delta (1 + \frac{1}{2} t^2)^{-\alpha} t^{d-1} dt$$

avec $b > 0$ indépendant de α .

Pour δ suffisamment petit on a : $e^{\frac{t^2}{4}} \leq 1 + \frac{1}{2} t^2$ pour $0 < t < \delta$ et par le changement variable $u = \frac{\alpha}{4} t^2$

$$\int_0^\delta e^{-\frac{\alpha}{4} t^2} t^{d-1} dt = \left(\int_0^{\frac{\alpha}{4} \delta^2} e^{-u} u^{\frac{d}{2}-1} du \right) \frac{2^{d-1}}{\alpha^{\frac{d}{2}}}.$$

On en déduit :

$$\int_0^\delta (1 + \frac{1}{2} t^2)^{-\alpha} t^{d-1} dt \leq 2^{d-1} \Gamma(\frac{d}{2}) \alpha^{-\frac{d}{2}}$$

Donc, finalement

$$\limsup_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^{\frac{d}{2}}}{c} \|K_{1,2}^\mu(\alpha) - \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \text{Id}_{V_\mu}\| \leq b \sup_{\|z\| < \delta} \|\mu(k(\tau(z))) - \mu(k(\tau(0)))\|.$$

Donc par continuité de $z \rightarrow \mu(k(\tau(z)))$ en 0 et puisque $\frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} \sim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{-\frac{d}{2}}$ on en déduit $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \alpha^{\frac{d}{2}} K_{1,2}^\mu(\alpha) = \text{Id}_{V_\mu}$.

Donnons maintenant la démonstration du Lemme I.5.1. On peut écrire

$$\int_{N_{1,2}} e^{\varepsilon_2 H(n)} dn = c \int_{J_{1,2}} \left(1 + \frac{1}{2} \|z\|^2\right)^{-\alpha} dz$$

avec c indépendant de α . Comme $\dim J_{1,2} = d$, on peut écrire

$$\int_{J_{1,2}} \left(1 + \frac{1}{2} \|z\|^2\right)^{-\alpha} dz = b \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} t^2\right)^{-\alpha} t^{d-1} dt$$

avec $b > 0$ indépendant de α . Il est alors clair que pour $\alpha > \frac{d}{2}$ l'intégrale $\int_{N_{1,2}} e^{\varepsilon_2 H(n)} dn$ est absolument convergente. Par le changement de variable $u = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} t^2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} t^2\right)^{-\alpha} t^{d-1} dt &= 2^{\frac{d}{2}-1} \int_0^1 u^{\alpha - \frac{d}{2} - 1} (1-u)^{\frac{d}{2}-1} du = 2^{\frac{d}{2}-1} \beta\left(\alpha - \frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du Lemme I.5.1.

Corollaire I.5.6.

Pour α suffisamment grand les opérateurs hermitiens $K_{i,j}^\mu(\alpha)$, $1 \leq i < j \leq r$ sont défini - positifs.

Démonstration

D'après le Lemme (I.5.2.) il suffit d'établir le résultat pour $K_{1,2}^\mu(\alpha)$. Comme dans $\text{Herm}(V_\mu)$ le cône des endomorphismes hermitiens défini - positifs est ouvert, il découle immédiatement de la Proposition I.5.5. (ii) que pour α assez grand $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ est défini - positif.

On fixe dans la suite un réel α_0^μ de sorte que, pour $\alpha > \alpha_0^\mu$ $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ soit défini-positif. On va chercher à exprimer pour $\alpha > \alpha_0^\mu$ le scalaire $\rho_{\mu^\alpha}(e) \Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{d}{2}}}$ en fonction des $\langle K_{i,j}^\mu(\alpha) v_\mu, v_\mu \rangle$, $1 \leq i < j \leq r$.

6) Une expression de : $\langle \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle$ pour $q_{i,j} \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_{i,j} > \alpha_o^\mu$

Remarque préalable : en fait on utilisera uniquement les cas où $q_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$. On identifie la signature s de la représentation μ avec le poids restreint $s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r s_i \varepsilon_i$. Soit $p \in \{2, \dots, r\}$. Pour $1 \leq l \leq p-1$ on note $E_{l,p}$ le sous-espace de V_μ engendré par les vecteurs de poids restreint de la forme

$$(*) \quad s + \frac{1}{2} \sum_{i=l}^{p-1} h_i (\varepsilon_p - \varepsilon_i) \quad \text{où } h_i \in \mathbb{N}, \text{ les } h_i \text{ non tous nuls.}$$

On note $E'_{l,p}$ le sous-espace de $E_{l,p}$ engendré par les vecteurs de poids restreint de la forme (*) et vérifiant : les h_i pour $l+1 \leq i \leq p-1$ ne sont pas tous nuls. Soit $\omega \in W$ tel que $\omega(1) = l$ et $\omega(2) = p$. On note $\mathfrak{g}_{l,p} = \text{Ad } \omega \mathfrak{g}^{(2)}$ et $G_{l,p}$ le sous groupe analytique de G associé à $\mathfrak{g}_{l,p}$. On note $M \cap G_{l,p}$ le centralisateur de $A_{l,p} = A \cap G_{l,p}$ dans $G_{l,p}$ et $\mathfrak{m}_{l,p}$ et $\mathfrak{a}_{l,p}$ les algèbres de Lie de $M_{l,p}$ et $A_{l,p}$.

D'autre part, on considère le sous-espace $V_\mu^{l,p}$ de V_μ engendré par les $\mu(g)v_\mu$ où $g \in G_{l,p}$. L'action de $G_{l,p}$ dans $V_\mu^{l,p}$ définit une représentation irréductible notée $\mu_{l,p}$ (voir [Se] (VII) 9 Proposition 3 (d)).

Lemme I.6.1.

Pour tout $g \in G_{l,p}$ $\mu(g)$ stabilise $E'_{l,p}$.

Démonstration

En notant $\tilde{\mu}$ la représentation d'algèbre de Lie associée à μ , il suffit d'établir que pour tout $Y \in \mathfrak{g}_{l,p}$ $\tilde{\mu}(Y)$ stabilise $E'_{l,p}$. Il suffit de l'établir pour tout $Y \in \mathfrak{n}_{l,p}$ et $Y \in \bar{\mathfrak{n}}_{l,p}$ puisque $\mathfrak{g}'_{l,p}$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par $\mathfrak{n}_{l,p}$ et $\bar{\mathfrak{n}}_{l,p}$.

Soit $v \in E'_{l,p}$ un vecteur de poids restreint :

$$\sigma = s + \frac{1}{2} \sum_{i=l}^{p-1} h^{(i)} (\varepsilon_p - \varepsilon_i)$$

Si $Y \in \mathfrak{n}_{l,p}$ $\tilde{\mu}(Y)v$ est un vecteur de poids restreint $\sigma + \frac{1}{2}(\varepsilon_p - \varepsilon_l)$. Donc $\tilde{\mu}(Y)v \in E'_{l,p}$.

Si $Y \in \bar{\mathfrak{n}}_{l,p}$ $\tilde{\mu}(Y)v$ est un vecteur de poids restreint $\sigma - \frac{1}{2}(\varepsilon_p - \varepsilon_l)$. Donc, si $h^{(l)} \neq 0$ $\tilde{\mu}(Y)v \in E'_{l,p}$. Il reste à traiter le cas $h^{(l)} = 0$.

Montrons que dans ce dernier cas $\tilde{\mu}(Y)v = 0$ en montrant que $\sigma - \frac{1}{2}(\varepsilon_p - \varepsilon_l)$ n'est pas un poids restreint de μ .

Pour cela, considérons la base suivante de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$:

$$\left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}) \right\} \quad 2 \leq j \leq r.$$

Les racines appartenant à cette base étant positives, tout poids restreint de μ peut s'écrire sous la forme :

$$s + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^r h'_j (\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}) = s + \frac{1}{2} \left\{ -h'_2 \varepsilon_1 + \sum_{j=2}^l (h'_j - h'_{j+1}) \varepsilon_j + \sum_{j=l+1}^r h'_j (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) \right\}$$

$$\text{avec } h'_j \in \mathbb{N}$$

Mais pour que $\sigma - \frac{1}{2}(\varepsilon_p - \varepsilon_l)$ soit de la forme précédente il faudrait avoir :

$$h'_l - h'_{l+1} = 1 \quad \text{et} \quad 0 = h'_2 = \dots = h'_l. \quad \text{D'où } h'_{l+1} < 0.$$

Soit $\mathfrak{t}_{l,p}$ une sous-algèbre abélienne maximale dans $\mathfrak{m}_{l,p}$. Alors $\mathfrak{h}_{l,p} = \mathfrak{t}_{l,p} \oplus \mathfrak{a}_{l,p}$ (resp. $\mathfrak{h}_{l,p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}_{l,p}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}_{l,p}^{\mathbb{C}}$) est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{l,p}$ (resp. $\text{deg}_{l,p}^{\mathbb{C}}$). Toute racine de $(\mathfrak{g}_{l,p}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{l,p}^{\mathbb{C}})$ est à valeurs réelles sur $\mathfrak{a}_{l,p}$ et $i\mathfrak{t}_{l,p}$.

On considère $\mathcal{P}_{l,p}$ l'ensemble des poids non restreint de la représentation. On note $V_{\mu}^{l,p}(\sigma)$ le sous-espace des vecteurs de poids $\sigma \in (\mathfrak{h}_{l,p}^{\mathbb{C}})^*$ de $\mu_{l,p}$. On note $V_{\mu}^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{t}_{l,p}})$ (resp. $V_{\mu}^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}})$) le sous-espace de $V_{\mu}^{l,p}$ des vecteurs de poids restreints à $\mathfrak{t}_{l,p}$ $\sigma|_{\mathfrak{t}_{l,p}}$ (resp. à $\mathfrak{a}_{l,p}$ $\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}}$).

On a :

$$(I.6.1.2.) \quad V_{\mu}^{l,p} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}} V_{\mu}^{l,p}(\sigma);$$

les $V_{\mu}^{l,p}(\sigma)$ sont deux à deux orthogonaux et si $\sigma_{v_{\mu}}$ désigne le poids de v_{μ} : $V_{\mu}^{l,p}(\sigma_{v_{\mu}}) = \mathbb{C}v_{\mu}$

Lemme I.6.2.

Soit S un endomorphisme de $V_{\mu}^{l,p}$ commutant avec $\mu(m)$ pour tout $m \in M_{l,p}$. Alors on a :

(i) S stabilise chaque $V_{\mu}^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{t}_{l,p}})$, $\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}$

$$(ii) Sv_\mu = \langle Sv_\mu, v_\mu \rangle v_\mu \pmod{(E_{l,p})}$$

Démonstration

(i) Comme S commute avec $\mu(m)$ pour tout $m \in M_{l,p}$, S commute avec $\bar{\mu}(Y)$ pour tout $Y \in \mathfrak{t}_{l,p}$ donc S stabilise chaque $V_\mu^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{t}_{l,p}})$ pour $\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}$.

(ii) D'après (I.6.1.2.) on peut écrire :

$$Sv_\mu = \langle Sv_\mu, v_\mu \rangle v_\mu + \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}_{l,p} \\ \sigma \neq \sigma_{v_\mu}}} (Sv_\mu)^\sigma \quad \text{où } (Sv_\mu)^\sigma \in V_\mu^{l,p}(\sigma) \quad (10)$$

D'après le (i) de ce Lemme $Sv_\mu \in V_\mu^{l,p}(\sigma_{v_\mu|_{\mathfrak{t}_{l,p}}})$, donc pour tout $Y \in \mathfrak{t}_{l,p}$ et tout $\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}$ on a

$$\sigma_{v_\mu}(Y)(Sv_\mu)^\sigma = \sigma(Y)(Sv_\mu)^\sigma, \quad \text{donc pour } \sigma|_{\mathfrak{t}_{l,p}} \neq \sigma_{v_\mu|_{\mathfrak{t}_{l,p}}} (Sv_\mu)^\sigma = 0$$

On en déduit :

Si $\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}$ vérifie $\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}} = \sigma_{v_\mu|_{\mathfrak{a}_{l,p}}}$ et $\sigma \neq \sigma_{v_\mu}$ on a $(Sv_\mu)^\sigma = 0$.

Si $\sigma \in \mathcal{P}_{l,p}$ vérifie $\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}} \neq \sigma_{v_\mu|_{\mathfrak{a}_{l,p}}}$, il est clair que $V_\mu^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}}) \subset E_{l,p}$. Comme $V_\mu^{l,p}(\sigma) \subset V_\mu^{l,p}(\sigma|_{\mathfrak{a}_{l,p}})$, on a établi le (ii) du Lemme I.6.2..

On note $\mathcal{A}_{l,p}$ la sous-algèbre de $\text{End } V_\mu$ engendrée par les $\mu(g)$, où $g \in G_{l,p}$. Il est clair qu'on a

$$(I.6.2.1) \quad K_{l,p}^\mu(\alpha_{l,p})^{q_{l,p}} \in \mathcal{A}_{l,p} .$$

Comme, d'après (I.5.2.2.), $\{K_{l,p}^\mu(\alpha_{l,p})\}^{q_{l,p}}$ commute avec tout $\mu(m)$ $m \in M$ on déduit immédiatement du Lemme I.6.2. (ii) :

$$(I.6.2.2.) \quad \{K_{l,p}^\mu(\alpha_{l,p})\}^{q_{l,p}} v_\mu = \langle \{K_{l,p}^\mu(\alpha_{l,p})\}^{q_{l,p}} v_\mu, v_\mu \rangle v_\mu \pmod{(E_{l,p})}.$$

Proposition I.6.3.

(i) Pour $1 \leq l \leq p-1$, soit $(S_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ une famille d'endomorphismes de V_μ vérifiant pour tout i

$$1) S_i \in \mathcal{A}_{l,p}$$

$$2) S_i v_\mu = \langle S_i v_\mu, v_\mu \rangle v_\mu \pmod{(E_{i,p})}.$$

Alors on a

$$\prod_{i=l}^{p-1} S_i v_\mu = \prod_{i=l}^{p-1} \langle S_i v_\mu, v_\mu \rangle v_\mu \pmod{(E_{l,p})}.$$

$$(ii) \prod_{i=l}^{p-1} \{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}} v_\mu = \prod_{i=l}^{p-1} \langle \{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}} v_\mu, v_\mu \rangle v_\mu \pmod{(E_{l,p})}.$$

Démonstration

(i) Raisonnons par récurrence sur l : pour $l = p-1$ le résultat de la Proposition I.6.3. n'est autre que (I.6.2.1.) appliqué à $l = p-1$. D'après le Lemme I.6.1, il est clair que, puisque $S_i \in \mathcal{A}_{i,p}$, S_i stabilise $E'_{i,p}$. Alors, en faisant l'hypothèse de récurrence au rang $l+1$, et en remarquant que $E_{l+1,p} \subset E'_{l,p} \subset E_{l,p}$, on obtient (i).

(ii) Immédiat d'après le (i) précédent (I.6.2.1.) et (I.6.2.2).

Proposition I.6.4.

Si $\alpha_{i,j} > \alpha_0^\mu$ pour tout i, j $1 \leq i < j \leq r$ on a :

$$\langle \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle = \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle$$

Démonstration

Pour $3 \leq p \leq r$, considérons le sous-espace $V_\mu^{(p-1)}$ de V_μ engendré par les $\mu(g)v_\mu$ où $g \in G^{(p-1)}$. Les racines restreintes positives de $(\mathfrak{g}^{p-1}, \mathfrak{a}_{p-1})$ sont $\frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)$ pour $1 \leq i < j \leq p-1$. $V_\mu^{(p-1)}$ est donc engendré par les vecteurs de poids restreints à \mathfrak{a}_{p-1} de la forme :

$$s + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq p-1} h_{i,j}(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \quad \text{avec } h_{i,j} \in \mathbb{N}$$

Remarquons que pour tout $v \in E_{1,p}$ vecteur de poids restreint à \mathfrak{a} de la forme $v = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p v_i \varepsilon_i$ on a : $v_p > s_p$. On en déduit

(I.6.4.1.) $E_{1,p}$ et $V_\mu^{(p-1)}$ sont orthogonaux.

Donc, d'après la Proposition I.6.3., on peut écrire pour $1 \leq i < p$, $\alpha_{i,p} > \alpha^\mu$, $q_{i,p} \in \mathbb{Z}$ et pour $v \in V_\mu^{(p-1)}$

$$(I.6.4.2.) \quad \left\langle \prod_{i=1}^{p-1} \{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}} v_\mu, v \right\rangle = \prod_{i=1}^{p-1} \left\langle \{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}} v_\mu, v_\mu \right\rangle \langle v_\mu, v \rangle .$$

Or pour $1 \leq i < j \leq p-1$, comme $k(n) \in G^{(p-1)}$ pour $n \in N_{i,j}$ $\{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}}$ stabilise $V_\mu^{(p-1)}$.

Donc, en utilisant (I.6.4.2.) avec $v = \prod_{j=p-1}^2 \prod_{i=j-1}^1 \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu$ on obtient (en rappelant que $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ est hermitien)

$$\begin{aligned} & \left\langle \prod_{j=2}^p \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \right\rangle \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^{p-1} \{K_{i,p}^\mu(\alpha_{i,p})\}^{q_{i,p}} v_\mu, v_\mu \right\rangle \left\langle \prod_{j=2}^{p-1} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \right\rangle \end{aligned}$$

En appliquant cette dernière formule successivement de $p = r$ à $p = 3$ on obtient la formule de la Proposition I.6.4.

$$\text{Soit } \alpha^\mu = \sup_{1 \leq i < j \leq r} \left\{ 1 + (r-1)d - s_r, \alpha_o^\mu - \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3) \frac{d}{2} - 1 \right\}.$$

7) Une expression de $\rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu$ pour $\alpha > \alpha^\mu$

Lemme I.7.1.

$\langle \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu, v_\mu \rangle = \{\Gamma_\Omega(\mathfrak{s} + \alpha)\}^{-1}$; $\langle \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu, v_\mu \rangle$ converge si et seulement si $\alpha > (r-1) \frac{d}{2} - s_r$

Démonstration

Par définition de $\rho_{\mu^\alpha}(x)$, $x \in \Omega$ (Proposition I.2.1. (i)) on a

$$(I.7.1.1.) \quad \langle v_\mu, v_\mu \rangle = \int_\Omega e^{-\text{tr } x} \langle \rho_{\mu^\alpha}(x)v_\mu, v_\mu \rangle d^*x$$

On peut écrire pour dn mesure de Haar de N convenablement normalisée :

$$\int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} \langle \rho_{\mu^\alpha}(x)v_\mu, v_\mu \rangle d^*x = \int_{A \times N} e^{-\text{tr } ane} \langle \rho_{\mu^\alpha}(ane)v_\mu, v_\mu \rangle dadn$$

D'après (I.2.1.1.)

$$\rho_{\mu^\alpha}(ane) = \mu^\alpha(a)\mu^\alpha(n)\rho_{\mu^\alpha}(e)\mu^\alpha(n^*)\mu^\alpha(a)$$

$$\text{d'où} \quad \langle \rho_{\mu^\alpha}(ane)v_\mu, v_\mu \rangle = \{\chi_{\mathbf{s}+\alpha}(a)\}^2 \langle \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu, v_\mu \rangle$$

$$\text{puisque} \quad \mu^\alpha(n^*)\mu^\alpha(a)v_\mu = \chi_{\mathbf{s}+\alpha}(a) \quad \text{pour } a \in A \text{ et } n \in N$$

Avec la normalisation précédente de dn , on a :

$$\int_{A \times N} e^{-\text{tr } ane} \{\chi_{\mathbf{s}+\alpha}(a)\}^2 dadn = \int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} \Delta_{\mathbf{s}+\alpha}(x) d^*x = \Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha)$$

(voir [F-K] Ch. VII 1).

On en déduit d'après (I.7.1.1.) :

$$1 = \Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha) \langle \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu, v_\mu \rangle$$

Proposition I.7.2.

Pour $\alpha > \alpha^\mu$

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha) \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu \\ &= \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{1}{2}(s_i + s_j) - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1}}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{1}{2}(s_i + s_j) - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1}v_\mu, v_\mu \rangle} v_\mu \end{aligned}$$

Démonstration

Puisque $\alpha > 1 + (r-1)d - s_r$, d'après le Lemme I.3.1. $\rho_{\mu^\alpha}(e)^{-1}$ est colinéaire à $\Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}}$, donc d'après la Proposition I.4.2. on peut écrire (comme $\frac{n}{r} = 1 + (r-1)\frac{d}{2}$) :

$$(I.7.2.1.) \quad \rho_{\mu^\alpha}(e)^{-1}v_\mu = b_\mu(\alpha) \prod_{j=r}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^\mu\left(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1\right)v_\mu$$

avec $b_\mu(\alpha) > 0$. Or d'après (I.2.1.1.) pour tout $k \in K$, on a puisque $ke = e$:

(I.7.2.2.) $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$.

Il est alors clair qu'on a :

(I.7.2.3.) $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ commute avec $K_{i,j}^\mu(\beta)$ pour tout $\beta > \frac{d}{2}$ et tout i, j $1 \leq i < j \leq r$.

On peut alors déduire de (I.7.2.1.) :

$$\rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu = \frac{1}{b_\mu(\alpha)} \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1} v_\mu$$

D'où :

$$\frac{1}{b_\mu(\alpha)} = \frac{\langle \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu, v_\mu \rangle}{\langle \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle}$$

D'après la proposition I.6.4. appliquée avec $q_{i,j} = -1$ et $\alpha_{i,j} = \alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1$, et d'après le Lemme I.7.1. on peut déduire le résultat de la Proposition I.7.2.

On note i_μ l'entier de $\{0, \dots, r - 1\}$ associé à la signature de μ de la façon suivante :

si les s_i $1 \leq i \leq r$ ne pas sont tous égaux :

$$s_{i_\mu} > s_{i_\mu+1} \quad \text{et} \quad s_{i_\mu+1} = \dots = s_r$$

si $s_1 = \dots = s_r$ on pose $i_\mu = 0$.

Corollaire I.7.3.

Pour $\alpha > \alpha^\mu$ et $i_\mu \geq 1$

$$\begin{aligned} & \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu \\ = & \frac{1}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s} + \alpha)} \prod_{j=2}^{i_\mu} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1}}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle} \circ \dots \\ & \circ \prod_{j=i_\mu+1}^r \prod_{i=1}^{i_\mu} \frac{\{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1}}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle}, v_\mu \end{aligned}$$

en convenant que pour $i_\mu = 1$

$$\prod_{j=2}^{i_\mu} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i+s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1}}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i+s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)\}^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle} = \text{Id}_{V_\mu}.$$

Démonstration

Montrons d'abord : (I.7.3.1.) si $g \in G_{i,j}$ et $g' \in G_{\ell,p}$ avec $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq \ell < p \leq r$ et $\{i, j\} \cap \{\ell, p\} = \emptyset$ alors g et g' commutent.

Rappelons que $\mathfrak{g}_{i,j} = \text{Ad } \omega_{i,j} \mathfrak{g}^{(2)}$ (notations du I.6)) est engendrée en tant qu'algèbre par $L(c_i - c_j)$ et par $\mathfrak{n}_{i,j}$ et $\bar{\mathfrak{n}}_{i,j}$ notés par l'abréviation $\mathfrak{g} \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)$. Les égalités suivantes se vérifient immédiatement

- $[L(c_i + c_j), L(c_\ell + c_p)] = 0$
- $[L(c_i + c_j), X] = \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_p)L(c_i + c_j) = 0$ si $X \in \mathfrak{g}_{\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_p)}$
- $[\mathfrak{g}_{\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)}, \mathfrak{g}_{\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_p)}] = \{0\}$ car $\pm \frac{1}{2}(\varepsilon_j - \varepsilon_i) + \pm \frac{1}{2}(\varepsilon_\ell - \varepsilon_p)$ n'est pas une racine restreinte de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

Donc $[\mathfrak{g}_{i,j}, \mathfrak{g}_{\ell,p}] = \{0\}$, d'où (I.7.3.1.). On en déduit :

si $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq \ell < p \leq r$ et $\{i, j\} \cap \{\ell, p\} = \emptyset$, alors $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ et $K_{\ell,p}^\mu(\alpha_{\ell,p})$ commutent (pour $\alpha_{i,j} > \alpha_0^\mu$ et $\alpha_{\ell,p} > \alpha_0^\mu$).

On en déduit:

(I.7.3.2.)

$$\prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1} = \prod_{j=2}^{i_\mu} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1} \prod_{j=i_\mu+1}^r \prod_{i=1}^{i_\mu} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1} \dots$$

$$\circ \prod_{j=i_\mu+2}^r \prod_{i=i_\mu+1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1} \quad \text{pour } \alpha_{i,j} > \alpha_0^\mu.$$

On utilise maintenant :

Si $i_\mu < i < j \leq r$, pour $\alpha_{i,j} > \frac{d}{2}$

$$(1.7.3.3.) \quad K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})v_\mu = \frac{\Gamma(\alpha_{i,j} - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha_{i,j})} v_\mu$$

En effet $i_\mu < i < j \leq r$ $s_i = s_r$, donc $\mu_{i,j}$ qui est irréductible, sphérique, de signature (s_r, s_r) est équivalente à la représentation de $G_{i,j} : g \mapsto (\text{Dét } g)^{\frac{r-s_r}{2}}$.

Comme pour tout $n \in N_{i,j}$ $\text{Dét } k(n) = 1$, on en déduit

$$K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j}) v_\mu = \int_{N_{i,j}} e^{\alpha_{i,j} \varepsilon_j H(n)} dn_{i,j} v_\mu$$

d'où (I.7.3.2.) en utilisant le Lemme I.5.1.

On en déduit si $i_\mu < i < j \leq r$, pour $\alpha_{i,j} > \frac{d}{2}$,

$$\frac{\{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1}}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle} v_\mu = v_\mu$$

La formule du Corollaire I.7.3. se déduit alors immédiatement de la Proposition I.7.2. en utilisant (I.7.3.2.).

Lemme I.7.4.

Pour $2 \leq t \leq r$ et $v' \in V_\mu^{(t-1)}$

$$\begin{aligned} & \langle \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v' \rangle \\ &= \prod_{j=t}^1 \prod_{i=1}^{j-1} \langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle \langle \prod_{j=2}^{t-1} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v' \rangle \end{aligned}$$

avec $\alpha_{i,j} > \alpha_0^\mu$ et $q_{i,j} \in \mathbb{Z}$, en convenant que :

$$\prod_{j=2}^{t-1} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} = \text{Id}_{V_\mu} \quad \text{si } t = 2$$

Démonstration

Pour tout p tel que $t \leq p \leq r$, en remarquant que

$$v = \left(\prod_{j=2}^{p-1} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})\}^{q_{i,j}} \right)^* v' \in V_\mu^{(p-1)}$$

on peut appliquer (I.6.4.2.) avec le v précédent successivement de $p = r$ à $p = t$. On obtient alors la formule du Lemme.

8) Une expression de $\rho_{\mu^\alpha}(e)\Phi_\mu$, $\alpha > \alpha^\mu$, lorsque μ est sphérique

Pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2}$, comme $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$, on peut écrire, μ étant supposé sphérique et pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2}$

$$(I.8.0.1.) \quad \rho_{\mu^\alpha}(e)\Phi_\mu = \int_K \mu(k)dk \rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu.$$

Puisque μ est irréductible, $\int_K \mu(k)dk$ est le projecteur orthogonal de V_μ sur $\mathbb{C}\Phi_\mu$. Donc $\rho_{\mu^\alpha}(e)\Phi_\mu \in \mathbb{C}\Phi_\mu$.

On note $\lambda_\mu(\alpha)$ la valeur propre de ρ_{μ^α} , $\alpha > (r-1)\frac{d}{2}$, associée au vecteur propre Φ_μ .

Lemme I.8.1.

Pour $\alpha > \alpha^\mu$

$$\lambda_\mu(\alpha) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s} + \alpha)} \prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-2)\frac{d}{2} - 1)} \dots$$

$$\frac{1}{\langle K_{i,j}^\mu(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1) \rangle^{-1} v_\mu, v_\mu >}$$

Démonstration

Remarquons que, pour $\beta > \frac{d}{2}$, et tout i, j $1 \leq i < j \leq r$

$$\begin{aligned} \int_K \mu(k)dk K_{i,j}^\mu(\beta) &= \int_{N_{i,j}} e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} \int_K \mu(k(n))dk dn_{i,j} \\ &= \int_{N_{i,j}} e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} dn_{i,j} \int_K \mu(k)dk. \end{aligned}$$

On en déduit, en utilisant $\int_{N_{i,j}} e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} dn_{i,j} = \frac{\Gamma(\beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\beta)}$ (Lemme I.5.1.).

(I.8.1.1.) Pour $\beta > \alpha^\mu$

$$(i) \quad \int_K \mu(k)dk K_{i,j}^\mu(\beta) = \frac{\Gamma(\beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\beta)} \int_K \mu(k)dk$$

$$(ii) \quad \int_K \mu(k)dk K_{i,j}^\mu(\beta)^{-1} = \left\{ \frac{\Gamma(\beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\beta)} \right\}^{-1} \int_K \mu(k)dk$$

On déduit alors de (I.8.1.1.) (ii), d'après (I.8.0.1.) et d'après l'expression de $\rho_{\mu^\alpha}(e)v_\mu$ de la Proposition I.7.2. la formule du Lemme.

II - ETUDE DES MESURES dR_μ POUR μ REPRESENTATION SPHERIQUE

On suppose que μ est une représentation de G sphérique irréductible de signature $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{R}^r$ $s_1 \geq \dots \geq s_r$. La représentation μ est donc homogène de degré $\frac{1}{2}s_\mu$ où $s_\mu = s_1 + \dots + s_r$. On pose $s'_\mu = s_\mu - r s_r$, alors : $s'_\mu \in 2\mathbb{N}$ (on rappelle que $s_i - s_r \in 2\mathbb{N}$ pour tout $i \leq i \leq r$).

On peut se ramener à l'étude du cas où dR_μ est porté par un O_p $1 \leq p \leq r$ (voir [C]). D'après la Proposition I.2.1. l'étude des dR_μ se ramène à l'étude des $\rho_p^\mu(v)$ ($v \in O_p$) pour $1 \leq p \leq r-1$ (resp. $\rho_\mu(v)$ $v \in \Omega$) pour $p = r$.

Définition II.0.1

Une application f de G dans \mathbb{C} est dite polynomiale homogène de degré s lorsqu'il existe un polynôme sur $\text{End } J$ homogène de degré s prolongeant f . Le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie de ces applications polynomiales est noté $\mathcal{P}_s(G)$.

On note pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}_{s+\beta}(G) = \{f : f(g) = (\text{Dét } g)^{\frac{\beta}{2n}} p(g) \quad \text{où } p \in \mathcal{P}_s(G)\}$$

On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ de $\mathcal{P}_{s_\mu}(G)$ des applications S_p relativement invariantes à droite i.e. vérifiant :

$$\text{pour } 1 \leq p \leq r-1, s_p \in S_p, g \in G, q \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$$

$$q(g s_p) = (\text{Dét } s_p)^{h_p} q(g)$$

(resp. si $p = r$, $q \in \mathcal{P}_{s_\mu}^K(G)$, q est K -invariante à droite).

1) Généralités sur $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ pour $1 \leq p \leq r$

On note π la représentation de G dans $\mathcal{P}_{s_\mu}(G)$ de dimension finie, définie par :

$$q \in \mathcal{P}_{s_\mu}(G), g \in G \quad \pi(g)q = q \circ L_{g^*}$$

où L_g est la multiplication à gauche par g dans G . On vérifie immédiatement que π stabilise $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ pour $1 \leq p \leq r$. On note encore π la restriction à $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$. Soit

$$(II.1.0.1.) \quad \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G) = \bigoplus_{i \in E_p} \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(i)$$

La décomposition de $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ en somme directe de sous G -modules irréductibles par π . On note

$$\alpha_i = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,r}) \in \mathbb{R}^r \quad \alpha_{i,1} \geq \dots \geq \alpha_{i,r}$$

la signature de la restriction de π à chacun des sous-espace $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_{e_p}}(i)$, $i \in E_p$, dont on note p_i un vecteur de plus bas poids.

Lemme II.1.1.

Soit q_c est un vecteur conique pour π . Alors pour presque tout $g \in G$ (relativement à la mesure de Haar de G) où $g = t_p s_p$ avec $t_p \in T_p$ et $s_p \in S_p$ on a

$$q_c(g) = (\text{Dét } s_p)^{h_p} \mathcal{X}(t_p^*) q_c(\text{Id}_J)$$

(pour $p = r$, peu importe la valeur de h_p puisque $S_p = K$ donc $\text{Dét } s_p = 1$).

Démonstration

Comme $t_p \in T_p$ $t_p^* \in A\bar{N}$ si $g = t_p s_p$ $q_c(g) = (\pi(t_p^*) q_c)(s_p \text{Id}_J)$ et $q_c(s_p \text{Id}_J) = q_c(s_p \text{Id}_J) = (\text{Dét } s_p)^{h_p} q_c(\text{Id}_J)$ car q_c est S_p -relativement à droite.

Proposition II.1.2..

Pour $1 \leq p \leq r$

(i) pour tout $i \in E_p$ $p_i(\text{Id}_J) \neq 0$. Dorénavant on normalise chaque p_i par $p_i(\text{Id}_J) = 1$.

(ii) Si $q_c \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ est un vecteur conique de π avec $\alpha = \alpha_i$, alors q_c est colinéaire à p_i .

(iii) Chaque $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(i)$ est de multiplicité 1. Dorénavant on note $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(i)$ par $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ et p_i par p_{α_i} .

(iv) La restriction de π à chaque $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)_{i \in E_p}$ est sphérique.

Démonstration

(i) et (ii) découlent immédiatement du Lemme II.1.1. et de la continuité des polynomes.

(iii) Si pour $i, j \in E_p$ avec $i \neq j$ $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(i)$ et $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(j)$ étaient équivalents, on aurait $\alpha_i = \alpha_j$ et donc d'après le (ii) précédent $p_i = p_j$.

(iv) Il suffit d'établir que pour tout $m \in M$ on a $\pi(m)p_{\alpha_i} = p_{\alpha_i}$ (voir [He]).

Posons, pour $m \in M$, $q_m = \pi(m)p_{\alpha_i}$. Pour tout $\bar{n} \in \bar{N}$ on peut écrire puisque $m^{-1}\bar{N}m \subset \bar{N}$

$$\pi(\bar{n})q_m = \pi(m)\pi(m^{-1}\bar{n}m)p_{\alpha_i} = \pi(m)p_{\alpha_i}.$$

D'autre part pour tout $a \in A$ comme $am = ma$ on a $\pi(a)q_m = \mathcal{X}_{\alpha_i}(a)q_m$. Donc q_m est un vecteur conique pour π de caractère \mathcal{X}_{α_i} et d'après le (ii) précédent q_m est colinéaire à p_{α_i} .

De plus on a :

$$q_m(\text{Id}_J) = P_{\alpha_i}(m^{-1}\text{Id}_J) = p_{\alpha_i}(\text{Id}_J m^{-1}) = p_{\alpha_i}(\text{Id}_J)$$

$$\text{car } m \in S_p \text{ et } \text{Dét } m^{-1} = 1$$

Proposition II.1.3.

Soit $1 \leq p \leq r-1$, pour tout $i \in E_p$ $\alpha_i = (\alpha_{i,r}, \dots, \alpha_{i,r})$ vérifie :

$$\alpha_{i,p+1} = \dots = \alpha_{i,r} = pd$$

Démonstration

Comme $A' = \exp(\bigoplus_{p+1 \leq i \leq r} \mathbb{R}L(c_i)) \subset S_p$ on a pour $a' \in A'$

$$p_{\alpha_i}(\text{Id}_J a') = (\text{Dét } a')^{h_p} p_{\alpha_i}(\text{Id}_J)$$

mais d'autre part

$$p_{\alpha_i}(\text{Id}_J a') = (\pi(a')p_{\alpha_i})(\text{Id}_J) = \mathcal{X}_{\alpha_i}(a')p_{\alpha_i}(\text{Id}_J)$$

d'où $\chi_{\alpha_i}(a') = (\text{Dét } a')^{h_p}$, ce qui se traduit, en posant

$$a' = P(c_1 + \cdots + c_p + a'_{p+1}c_{p+1} + \cdots + a'_r c_r)$$

$$\text{par } a'_{p+1} \alpha_i^{p+1} \cdots a'_r \alpha_i^r = (a'_{p+1} \cdots a'_r)^{pd} \quad \text{d'où } \alpha_{i,p+1} = \cdots = \alpha_{i,r} = pd$$

2) Une décomposition relativement aux $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ pour $1 \leq p \leq r$ de certains endomorphismes hermitiens de V_μ

Soit $B \in \text{Herm } V_\mu$ vérifiant pour $1 \leq p \leq r-1$ et pour tout $s_p \in S_p$

$$(I.2.0.1.) \quad \mu(s_p)B\mu(s_p)^* = (\text{Dét } s_p)^{h_p} B.$$

(II.2.0.2.) Pour $p = r$, pour tout $k \in K$ $\mu(k)B\mu(k)^* = B$.

Ainsi, d'après (I.2.1.2.) (resp.(I.2.1.1.)) $\rho_p^\mu(ep)$ vérifie (II.2.0.1.) (resp. $\rho_\mu(e)$ vérifie (II.2.0.2.)). On suppose que $B \in \text{Herm } V_\mu$ vérifie (II.2.0.1.) ou (II.2.0.2.). Considérons dans une base de V_μ la matrice de $\mu(g)B\mu(g)^*$ $g \in G$ à coefficients dans $\mathcal{P}_{s_\mu}(G)$. Il est facile de vérifier que ces coefficients sont S_p -relativement invariants à droite. Soit $\beta_{j,l} \in \mathcal{P}_{s_\mu}(G)$ l'élément générique de la matrice de $\mu(g)B\mu(g)^*$. De la décomposition (II.1.0.1.) de $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$ on obtient la décomposition suivante :

$$\beta_{j,l}(g) = \sum_{i \in E_p} \beta_{j,l}^{\alpha_i}(g), \quad g \in G,$$

où les $\beta_{j,l}^{\alpha_i} \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ sont uniques. En notant $(\beta_{j,l}^{\alpha_i}(g))$ pour $g \in G$ la matrice d'élément générique $\beta_{j,l}^{\alpha_i}(g)$, il est clair que si Q est une matrice de changement de base, $Q^{-1}(\beta_{j,l}^{\alpha_i}(g))Q$ est encore à coefficients dans $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$. On en déduit :

$$(II.2.0.4.) \quad \mu(g)B\mu(g)^* = \sum_{i \in E_p} B_{\alpha_i}(g) \quad \text{pour } g \in G$$

où l'opérateur $B_{\alpha_i}(g)$ a pour matrice dans une base quelconque des éléments de $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ $i \in E_p$.

D'après (II.2.0.3.) les $B_{\alpha_i}(g)$ sont déterminés de façon unique par la donnée de $\mu(g)B\mu(g)^*$, $g \in G$.

On appelle (II.2.0.4.) la décomposition de B relativement aux $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$, $i \in E_p$.

Proposition II.2.1.

Si $B \in \text{Herm}V_\mu$ vérifie (II.2.0.1.) ou (II.2.0.2.), on a pour tout $i \in E_p$:

(i) $B_{\alpha_i} \in \text{Herm}V_\mu$.

(ii) pour $g, g' \in G$ $B_{\alpha_i}(g'g) = \mu(g')B_{\alpha_i}(g)\mu(g')^*$.

Démonstration

(i) Comme $\mu(g)B\mu(g)^* \in \text{Herm}V_\mu$ $B_{\alpha_i}(g)^* = B_{\alpha_i}(g)$ découle immédiatement de l'unicité des $B_{\alpha_i}(g)$ dans la décomposition (II.2.0.4.).

(ii) De (II.2.0.4.) on déduit

$$\mu(g'g)B\mu(g'g)^* = \sum_{i \in E_p} \mu(g')B_{\alpha_i}(g)\mu(g')^*$$

Il est clair que pour g' fixé la matrice dans une base quelconque de $\mu(g')B_{\alpha_i}(g)\mu(g')^*$ est encore à coefficients dans $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$. Il est clair que dans cette même base la matrice de $B_{\alpha_i}(g'g)$ (resp. la matrice de $\mu(g'g)B\mu(g'g)^*$) est à coefficients dans $\mathcal{P}_{s_\mu}(G)$ (pour g' fixé) (resp. dans $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$). Donc, d'après (II.1.0.1.),

$$B_{\alpha_i}(g'g) = \mu(g')B_{\alpha_i}(g)\mu(g')^*$$

3) Une condition nécessaire pour l'existence des $\rho_p^\mu \neq 0$ avec $1 \leq p \leq r-1$

Lemme II.3.1.

Si $B \in \text{Herm}^+V_\mu, B \neq 0$ et B vérifie (II.2.0.1.), il existe $i_0 \in E_p$ tel que $g \mapsto \langle \mu(g)B\mu(g)^*v_\mu, v_\mu \rangle$ soit un vecteur de plus bas poids la représentation π de $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_{i_0})$, et on a $\alpha_{i_0} = 2s$ où s est la signature de μ .

Démonstration

Remarquons d'abord que $\langle \mu(g)B\mu(g)^*v_\mu, v_\mu \rangle$ n'est pas identiquement nulle sur G . En effet, dans le cas contraire, on aurait puisque $\mu(g)B\mu(g)^* \in \text{Herm}^+V_\mu, B\mu(g)^*v_\mu = 0$ pour tout $g \in G$. Mais alors, on aurait $B = 0$ car μ étant irréductible, V_μ est engendré par les $\mu(g^*)v_\mu$. Posons

$$\beta(g) = \langle \mu(g)B\mu(g)^*v_\mu, v_\mu \rangle = \langle B\mu(g)^*v_\mu, \mu(g)^*v_\mu \rangle$$

Donc $\beta \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(G)$, puisque B vérifie (II.2.0.1.), et il est immédiat que :

$$\forall t \in A\bar{N} \quad (\pi(t)\beta)(g) = \beta(t^*g) = \mathcal{X}_{2s}(t)\beta(g)$$

où \mathcal{X}_{2s} est le caractère de $A\bar{N}$ défini au (I.3.0.1.). Donc d'après la Proposition II.1.2. (ii), β est un vecteur de plus bas poids de $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(2s)$.

Proposition II.3.2.

$s = (s_r, \dots, s_r)$ étant la signature de μ , on a :

$$s_{p+1} = \dots = s_r = p \frac{d}{2}$$

Démonstration

C'est immédiat d'après le Lemme II.3.1. et la Proposition II.1.3.

Pour chaque $i \in E_p$, posons

$$\varphi_{\alpha_i} = \int_K \pi(k) p_{\alpha_i} dk$$

où dk est la mesure de Haar normalisée du compact K . D'après la Proposition II.1.2. (iv) on a $\varphi_{\alpha_i} \neq 0$. Puisque $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ est le G -module engendré par p_{α_i} , pour tout $\beta^{\alpha_i} \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ $\int_K \pi(k) \beta^{\alpha_i} dk$ est colinéaire avec φ_{α_i} . Si $g_i \in G$ est tel que $\varphi_{\alpha_i}(g_i) \neq 0$, on peut donc écrire pour tout $g \in G$:

$$(II.3.2.1.) \quad \int_K \beta^{\alpha_i}(k^{-1}g) dk = \left(\frac{1}{\varphi_{\alpha_i}(g_i)} \int_K \beta^{\alpha_i}(k^{-1}g_i) dk \right) \varphi_{\alpha_i}(g)$$

De (II.3.2.1.) on déduit d'après (II.2.0.3.) et (II.2.0.4.) le résultat de cette Proposition.

Lemme II.3.3.

Si $B \in \text{Herm}V_\mu$ et B vérifie (II.2.0.1.) on a pour tout $g \in G$

$$\int_K \mu(k^{-1}g) B \mu(k^{-1}g)^* dk = \sum_{i \in E_p} \frac{1}{\varphi_{\alpha_i}(g_i)} \int_K B_{\alpha_i}(k^{-1}g_i) dk \varphi_{\alpha_i}(g)$$

Lemme II.3.4.

- (i) $g \mapsto (\text{Dét } g)^{-h_p} \varphi_{\alpha_i}(g)$ est S_p -invariant à droite.
(ii) Pour $d\nu_p$ mesure semi-invariante de G/S_p convenablement normalisée on a pour tout α_i

$$\int_{G/S_p} e^{-\text{tr } g S_p e_p} \{(\text{Dét } \cdot)^{h_p} \varphi_{\alpha_i}\}(g S_p) d\nu_p(g S_p) \\ = \Gamma_{\Omega}^{(p)}\left(\frac{\alpha_{i,1}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{i,p}}{2}\right)$$

où $\Gamma_{\Omega}^{(p)}$ est la fonction gamma du cône $\Omega^{(p)}$ de rang p

$$\Gamma_{\Omega}^{(p)}(m_1, \dots, m_p) = (2\pi)^{p(p-1)\frac{d}{4}} \prod_{j=1}^p \Gamma(m_j - (j-1)\frac{d}{2}), \quad (m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{C}^p.$$

Démonstration

(i) Comme $\varphi_{\alpha_i} \in \mathcal{P}_{s_{\mu}}^{S_p}(G)$ la vérification est immédiate.

(ii) Comme pour tout $k \in K$ $\text{Dét } k = 1$, $d\nu_p$ est K -invariante à gauche, et on peut alors écrire en utilisant la K -invariance de la trace dans J (par le changement de variable $g S_p \mapsto k g S_p$ pour tout $k \in K$) :

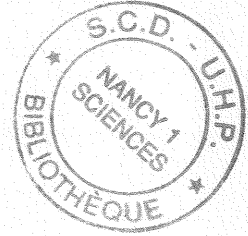
$$\int_{G/S_p} e^{-\text{tr } g S_p e_p} \{(\text{Dét } \cdot)^{-h_p} \varphi_{\alpha_i}\}(g S_p) d\nu_p(g S_p) \\ = \int_{G/S_p} e^{-\text{tr } g S_p e_p} \{(\text{Dét } \cdot)^{-h_p} p_{\alpha_i}\}(g S_p) d\nu_p(g S_p)$$

qui est encore égal d'après la Proposition I.1.3. (vi) à :

$$\int_{A_p \times N_p} e^{-\text{tr } a_p n_p e_p} p_{\alpha_i}(a_p n_p) da_p dn_p$$

En posant $a_p = \exp\{\sum_{i=1}^p \log a_i L(c_i)\}$ avec $a_i \in \mathbb{R}^{*+}$ on a

$$p_{\alpha_i}(a_p n_p) = \prod_{j=1}^p a_j^{\frac{1}{2} \alpha_{i,j}}.$$



D'autre part, d'après la Proposition I.1.3. (i), en utilisant :

$$\text{tr } a n e = \sum_{j=1}^r a_j \left(1 + \sum_{i=1}^{j-1} \|Y_{i,j}\|^2\right) \quad \text{où } Y_{i,j} \in \mathfrak{n}_{i,j}$$

(voir [K-S] Lemme 7 ou [F-K]) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{A_p \times N_p} e^{-\text{tr } a_p n_p e_p} p_{\alpha_i}(a_p n_p) da_p dn_p \\ &= c_\nu \prod_{j=1}^p \int_0^{+\infty} e^{-a_j} a_j^{\frac{\alpha_{i,j}}{2} - (j-1)\frac{d}{2}} \frac{da_j}{a_j} \dots \\ & \prod_{1 \leq i < j \leq p} \int_{\mathfrak{n}_{i,j}} e^{-\|Y_{i,j}\|^2} dY_{i,j} \quad \prod_{1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq r} \int_{\mathfrak{n}_{i,j}} e^{-\|Y_{i,j}\|^2} dY_{i,j} \end{aligned}$$

où $c_\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ (par le changement de variable : $Y_{i,j} \mapsto a_j^{-\frac{1}{2}} Y_{i,j}$ pour $Y_{i,j} \in \mathfrak{n}_{i,j}$). Par $dY_{i,j}$ on désigne la mesure de Lebesgue de $\mathfrak{n}_{i,j}$ qui est de dimension d et $\|Y_{i,j}\|^2 = -B(Y_{i,j}, \theta Y_{i,j})$ où B est la forme de Killing de \mathfrak{g} . On obtient alors (ii) en choisissant convenablement la constante c_ν .

Proposition II.3.5.

Si $B \in \text{Herm} V_\mu$ et B vérifie (II.2.0.1.) on a :

(i) $g \mapsto \text{Dét}(g)^{h_p} \mu(g) B \mu(g)^*$ est S_p -invariant à droite.

$$\begin{aligned} (ii) \quad & \int_{G/S_p} e^{-\text{tr } g S_p e_p} \{ \text{Dét}(\cdot)^{-k_p} \mu(\cdot) B \mu(\cdot)^* \} (g S_p) d\nu(g S_p) \\ &= \sum_{i \in E_p} \Gamma_\Omega^{(p)}\left(\frac{\alpha_{i,1}}{2}, \dots, \frac{\alpha_{i,p}}{2}\right) \int_K B_{\alpha_i}(k^{-1} g_i) dk \frac{1}{\varphi_{\alpha_i}(g_i)}. \end{aligned}$$

Démonstration

(i) Vérification immédiate

(ii) Par le changement de variable $g S_{\bar{p}} \mapsto k^{-1} g S_p$ pour tout $k \in K$, on peut écrire :

$$\int_{G/S_p} e^{-\text{tr } g S_p e_p} \{ \text{Dét}(\cdot)^{-h_p} \mu(\cdot) B \mu(\cdot)^* \} (g S_p) d\nu_p(g S_p) =$$

$$= \int_{G/S_p} e^{-\text{tr} g S_p e_p} \left\{ \text{Dét}(\cdot)^{-h_p} \int_K \mu(k^{-1} \cdot) B \mu(k^{-1} \cdot)^* dk \right\} (g S_p) d\nu_p(g S_p).$$

Le résultat de (ii) provient alors des Lemmes II.3.3. et II.3.4. (ii).

Si la mesure dR_μ est portée par un O_p pour $1 \leq p \leq r-1$, on a d'après (I.2.0.2.) pour $y = e$

$$\text{Id}_{V_\mu} = \int_{O_p} e^{-\text{tr} v} \rho_p^\mu(v) d\nu_p(v).$$

Donc d'après la Proposition I.1.3. (vii) on a

$$\text{Id}_{V_\mu} = \int_{G/S_p} e^{-\text{tr} g S_p e_p} \rho_p^\mu(g S_p e_p) d\nu_p(g S_p).$$

D'après (I.2.1.2.)

$$\rho_p^\mu(g S_p e_p) = \left\{ \text{Dét}(\cdot)^{-h_p} \mu(\cdot) \rho_p^\mu(e_p) \mu(\cdot)^* \right\} (g S_p)$$

Comme $\rho_p^\mu(e_p) \in \text{Herm} V_\mu$ et que d'après (I.2.1.2.) $\rho_p^\mu(e_p)$ vérifie (II.2.0.1.), on a d'après la Proposition II.3.5. (ii), en posant $\alpha_i^{(p)} = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,p})$

$$(II.3.5.1.) \quad \text{Id}_{V_\mu} = \sum_{i \in E_p} \frac{\Gamma_\Omega^{(p)}(\frac{1}{2} \alpha_i^{(p)})}{\varphi_{\alpha_i}(g_i)} \int_K \rho_p^\mu(e_p) \alpha_i(k^{-1} g_i) dk$$

(On rappelle que d'après (II.2.0.4.) : $\mu(g) \rho_p^\mu(e_p) \mu(g)^* = \sum_{i \in E_p} \rho_p^\mu(e_p) \alpha_i(g)$ pour tout $g \in G$).

Lemme II.3.6.

Si pour $i \in E_p$, $q_i \in \mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ $g \mapsto \int_K q_i(g k^{-1} g_i) dk$ est un polynôme de $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)$.

Démonstration

Comme $\mathcal{P}_{s_\mu}^{S_p}(\alpha_i)$ est engendré par les $\{\pi(g) p_{\alpha_i}\}_{g \in G}$ il suffit d'établir le Lemme II.3.6. pour ces derniers éléments. Il est alors clair qu'il suffit d'établir que

$$g \mapsto \int_K p_{\alpha_i}(g k^{-1} g_i) dk$$

est un vecteur de plus bas poids de $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)$.

Or, il est facile de vérifier que cet élément, est un vecteur conique de $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)$; il est non nul car

$$\int_K p_{\alpha_i}(\text{Id}_J k^{-1} g_i) dk = \varphi_{\alpha_i}(g_i) \neq 0.$$

D'après la Proposition II.1.2.(ii), on en déduit le résultat annoncé .

Remarquons qu'il découle immédiatement de la Proposition II.2.1.(ii) appliquée à $\rho_p^\mu(e_p)$ que pour tout $i \in E_p$

$$\int_K \rho_p^\mu(e_p)_{\alpha_i}(gk^{-1}g_i) dk = \mu(g) \int_K \rho_p^\mu(e_p)_{\alpha_i}(k^{-1}f_i) dk \mu(g)^* .$$

Donc d'après (II.3.5.1.) on peut écrire :

$$(II.3.6.1) \quad \mu(g) \text{Id}_{V_\mu} \mu(g)^* = \sum_{i \in E_p} \frac{\Gamma_{\Omega_p}(\frac{1}{2}\alpha_i^{(p)})}{\varphi_{\alpha_i}(g_i)} \int_K \rho_p^\mu(e_p)_{\alpha_i}(gk^{-1}g_i) dk$$

pour tout $g \in G$. Mais d'après le Lemme II.3.6. il est clair que (II.3.6.1.) n'est autre que la décomposition (II.2.0.4.) de Id_{V_μ} relativement aux $\{\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)\}_{i \in E_r}$

$$\mu(g) \text{Id}_{V_\mu} \mu(g)^* = \sum_{i \in E_r} \text{Id}_{V_{\mu\alpha_i}}(g) \quad g \in G .$$

On en déduit d'après la Proposition II.1.3. le résultat suivant.

Proposition II.3.7.

Si dR_μ est porté par O_p $1 \leq p \leq r-1$, alors dans la décomposition (II.2.0.4.) de dR_μ relativement aux $\{\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)\}_{i \in E_r}$

$$\mu(g) \text{Id}_{V_\mu} \mu(g)^* = \sum_{i \in E_r} \text{Id}_{V_{\mu\alpha_i}}(g) \quad g \in G ,$$

les α_i qui figurent effectivement (c'est-à-dire tels que $\text{Id}_{V_{\mu\alpha_i}} \neq 0$) satisfont la condition (A₁) : $\alpha_{i,p+1} = \dots = \alpha_{i,r} = pd$.

4) Une autre formulation de la décomposition (II.2.0.4.) de Id_{V_μ} relativement aux $\{\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)\}_{i \in \tilde{E}}$

On note $\mathcal{P}_{s'_\mu}(J)$ l'espace vectoriel de dimension finie des polynomes sur J homogènes de degré s'_μ . On a (théorème de Schmid)

$$\mathcal{P}_{s'_\mu}(J) = \bigoplus_{|m|=s'_\mu} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J)$$

où $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$, $|m| = m_1 + \dots + m_r$ et $m_1 \geq \dots \geq m_r$. On note pour $\beta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{P}_{s'_\mu+\beta}(\Omega) = \{f : f(x) = (\det x)^\beta p(x), \quad x \in \Omega, \quad p \in \mathcal{P}_{s'_\mu}(J)\}.$$

Remarquons qu'on peut identifier un polynome sur J avec sa restriction à Ω , puisque Ω est ouvert dans J . On peut écrire :

$$(II.4.0.1.) \quad \mathcal{P}_{s_\mu}(\Omega) = \bigoplus_{|m|=s_\mu} \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$$

Si on note $\tilde{\pi}$ la représentation de G dans $\mathcal{P}_{s'_\mu}(\Omega)$ définie par : $\tilde{\pi}(g)q = q \circ g^*$, $q \in \mathcal{P}_{s'_\mu}(\Omega)$, les $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$ sont les sous-espaces engendrés par $\{\tilde{\pi}(g)\Delta_{\mathbf{m}}\}_{g \in G}$. La restriction de $\tilde{\pi}$ à chaque $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$ est irréductible et sphérique, de signature $2\mathbf{m}$; $\Delta_{\mathbf{m}}$ est un vecteur de plus bas poids. Considérons dans une base de V_μ la matrice de $\mu(P(x))$, $x \in \Omega$. Il est clair, puisque P est homogène de degré 2, que les coefficients de la matrice de $\mu(P(x))$ sont éléments de $\mathcal{P}_{s_\mu}(\Omega)$. De la décomposition (II.4.0.1.) on déduit, par la même démarche qu'au II.2), la décomposition de $\mu(P(x))$ relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$

$$(II.4.0.2) \quad x \in \Omega \quad \mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) \quad \text{où} \quad \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \neq 0.$$

Les $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$ sont déterminés de façon unique par la donnée de $\mu(P(x))$. On note φ le morphisme naturel de $\mathcal{P}_{s_\mu}(\Omega)$ dans $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(G)$ définie par :

$$\varphi(q)(g) = q(ge) \quad q \in \mathcal{P}_{s_\mu}(\Omega), \quad g \in G.$$

Lemme II.4.1.

- (i) φ est injectif
- (ii) $\varphi \circ \tilde{\pi} = \pi \circ \varphi$
- (iii) $\varphi(\Delta_{\mathbf{m}}) = p_{2\mathbf{m}}$ où $p_{2\mathbf{m}}$ est le vecteur de plus bas poids de $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(2\mathbf{m})$ normalisé par $p_{2\mathbf{m}}(\text{Id}_J) = 1$
- (iv) L'application φ induit un isomorphisme de $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$ sur $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(2\mathbf{m})$, avec $|m| = \frac{s_\mu}{2}$.

Démonstration

- (i) Si $x \in \Omega$ $\varphi(q(P(x^{\frac{1}{2}}))) = q(x)$. Donc $\varphi(q) = 0$ entraîne $q = 0$
- (ii) Vérification immédiate
- (iii) D'après le (ii) précédent, on établit immédiatement que si $t \in A\bar{N}$ $\pi(t)p_{2\mathbf{m}} = \chi_{2\mathbf{m}}(t)p_{2\mathbf{m}}$ ce qui suffit à établir (iii) d'après la Proposition II.1.2.
- (iv). $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}$ (resp. $\mathcal{P}_{s_\mu}^K(2\mathbf{m})$) est engendré par les $\{\tilde{\pi}(g)\Delta_{\mathbf{m}}\}_{g \in G}$ (resp. par les $\{\pi(g)p_{2\mathbf{m}}\}_{g \in G}$). Le (iv) provient alors des (iii) et (ii) précédents.

Si on note $q_{u,v}(x)$ et $q_{u,v}^{\mathbf{m}_i}(x)$ (pour $i \in \tilde{E}$) les éléments génériques des matrices (dans une base quelconque de V_μ) de $\mu(P(x))$ et $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$ de (II.4.0.2), on a :

$$(II.4.1.1.) \quad q_{u,v}(x) = \sum_{i \in \tilde{E}} q_{u,v}^{\mathbf{m}_i}(x)$$

Comme $\varphi(q_{u,v})(g)$ $g \in G$, est l'élément générique de la matrice de $\mu(P(ge)) = \mu(g)\mu(g)^*$, on déduit de (II.4.1.1.) via φ grâce au Lemme II.4.1. (iv) que la décomposition (II.2.0.4) de Id_{V_μ} relativement aux $\{\mathcal{P}_{s_\mu}^K(\alpha_i)\}_{i \in E_r}$, est de la forme

$$\mu(g)\text{Id}_{V_\mu}\mu(g)^* = \sum_{i \in \tilde{E}} \text{Id}_{V_{\mu_2\mathbf{m}_i}}(g) \quad , \quad g \in G$$

avec $\text{Id}_{V_{\mu_2\mathbf{m}_i}} = 0$ si et seulement si $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu = 0$. La condition (A₁) du Théorème II.3.7 peut donc se réécrire ainsi : dans la décomposition $\mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$, les \mathbf{m}_i tels que $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \neq 0$ vérifient la condition

$$(A_2) \quad m_{i,p+1} = \dots = m_{i,r} = p \frac{d}{2} \quad \text{pour } 1 \leq p \leq r-1.$$

Proposition II.4.2.

- (i) $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}(x) \in \text{Herm}V_\mu$ pour tout $x \in \Omega$ et tout $i \in \tilde{E}$.
(ii) $\text{Id}_{\mathbf{m}_i}^\mu(gx) = \mu(g)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)\mu(g)^*$, $\forall i \in \tilde{E}$, $g \in G$, $x \in \Omega$.

Démonstration

(i) $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) = \{\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)\}^*$ découle immédiatement de $\mu(P(x)) = \mu(P(x))^*$ et de l'unicité des $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$ dans la décomposition (II.4.0.2.)

(ii) Comme $\mu(P(gx)) = \mu(g)\mu(P(x))\mu(g)^*$ pour $g \in G$ on a d'après (II.4.0.2.) :

$$\mu(P(gx)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \mu(g)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)\mu(g)^* .$$

Or, il est clair que pour $g \in G$ fixé, la matrice de chaque $\mu(g)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)\mu(g)^*$ dans une base de V_μ est encore à coefficients dans $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(\Omega)$. On en déduit la formule de (ii) d'après l'unicité des $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(gx)$ dans la décomposition (II.4.0.2.) en gx :

$$\mu(P(gx)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \mu(g)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(gx) .$$

5) Une condition nécessaire et suffisante de l'existence des $\rho_p^\mu \neq 0$ pour $1 \leq p \leq r-1$

Pour chaque $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{N}^r$ avec $m_1 \geq \dots \geq m_r$ on note $\phi_{\mathbf{m}}$ le polynôme sphérique :

$$\Phi_{\mathbf{m}} = \int_K \tilde{\pi}(k)\Delta_{\mathbf{m}}dk$$

où dk est la mesure de Haar de K normalisée. Pour $\beta \in \mathbb{R}$ on note $\Phi_{\mathbf{m}+\beta} = \Phi_{\mathbf{m}}(\det(\cdot))^\beta$. Pour tout $q \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}+\beta}(\Omega)$ on a immédiatement, d'après [F-K] Proposition XI.3.1.

$$(II.5.0.1.) \quad \int_K \tilde{\pi}(k)q dk = q(e)\Phi_{\mathbf{m}+\beta} .$$

Si, pour $1 \leq p \leq r-1$, $\rho_p^\mu \neq 0$ alors d'après la Proposition II.3.7. :

$$(II.5.0.2.) \quad \mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x), \quad x \in \Omega$$

où les \mathbf{m}_i vérifient la condition (A_2) .

Lemme II.5.1.

(i) $((\det \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \Phi_{\mathbf{m}_i})(x)$ est un polynome sur J pour tout $i \in \tilde{E}$.

(ii) Avec $d\nu_p$ mesure semi-invariante de O_p convenablement normalisée on a pour tout $i \in \tilde{E}$

$$\int_{O_p} e^{-\text{tr } v} \{(\det \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \Phi_{\mathbf{m}_i}\}(v) d\nu_p(v) = \Gamma_{\Omega}^{(p)}(\mathbf{m}_i^{(p)}).$$

Démonstration

(i) $\{(\det \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \Phi_{\mathbf{m}_i}\}(x) = \Phi_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(x)$ et pour $i \in \tilde{E}$ $\mathbf{m}_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,r})$ avec $m_{i,1} \geq \dots \geq m_{i,p+1} = \dots = m_{i,r} = p\frac{d}{2}$.

(ii) Comme pour tout $k \in K$ $\text{Dét } k = 1$, $d\nu$ est K -invariante à gauche, et on peut alors écrire en utilisant la K -invariance de la trace dans J (par le changement de variable : $v \mapsto kv$)

$$\int_{O_p} e^{-\text{tr } v} \{(\det \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \Phi_{\mathbf{m}_i}\}(v) d\nu(v) = \int_{O_p} e^{-\text{tr } v} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(v) d\nu(v)$$

qui est encore égal d'après la Proposition I.1.3. (vi) à :

$$\int_{A_p \times N_p} e^{-\text{tr } a_p n_p e_p} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(a_p n_p e_p) (\text{Dét } a_p)^{h_p} da_p dn_p.$$

En posant

$$a_p = \exp \left\{ \sum_{i=1}^p \log a_i L(c_i) \right\} \quad \text{avec } a_i > 0$$

on a pour $n \in N_p$

$$\Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(a_p n_p e_p) = \prod_{j=1}^p a_j^{m_{i,j} - p\frac{d}{2}} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(e_p) \text{ et } (\text{Dét } a_p)^{h_p} = \prod_{j=1}^p a_j^{p\frac{d}{2}}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(e_p) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(P(c_1 + \dots + c_p + \varepsilon(c_{p+1} + \dots + c_r))e) \\ &= \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(e) = 1 \quad , \end{aligned}$$

compte tenu que \mathbf{m}_i vérifie $m_{i,1} \geq \dots \geq m_{i,p} \geq m_{i,p+1} = \dots = m_{i,r} = p\frac{d}{2}$. Alors, comme pour la dernière formule de la démonstration de II.3.5. (ii), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{A_p \times N_p} e^{-\text{tr } a_p n_p e_p} \Delta_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(a_p n_p e_p) (\text{Dét } a_p)^{h_p} da_p dn_p \\ &= c_\nu \prod_{j=1}^p \int_0^{+\infty} e^{-a_j} a_j^{m_{i,j} - (j-1)\frac{d}{2}} \frac{da_j}{a_j} \\ & \times \prod_{1 \leq i < j \leq p} \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ p+1 \leq j \leq r}} \int_{\mathbf{n}_{i,j}} e^{-\|Y_{i,j}\|^2} dY_{i,j}. \end{aligned}$$

On obtient alors (ii) par un choix convenable de c_ν .

Proposition II.5.2.

(i) $\left\{ (\text{dét } \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \right\} (x)$ a dans toute base de V_μ une matrice à coefficients se prolongeant en polynomes sur J

(ii) Soit $f_p \left| \begin{array}{l} O_p \longrightarrow \text{Herm} V_\mu \\ v \longmapsto \sum_{i \in \tilde{E}} \frac{1}{\Gamma_{\Omega(p)}(\mathbf{m}_i^{(p)})} \left((\text{dét } \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \right) (v) \end{array} \right.$

On a :

$$1) \int_{O_p} e^{-\text{tr } v} f_p(v) d\nu(v) = \text{Id}_{V_\mu}.$$

$$2) \int_{O_p} e^{-(y|v)} f_p(v) d\nu(v) = \mu(P(y^{-1})), \quad y \in \Omega$$

où $d\nu$ est normalisée comme au (ii) du Lemme II.5.1.

Démonstration

(i) Les coefficients de $\left((\text{dét } \cdot)^{-p\frac{d}{2}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \right) (x)$ appartiennent à $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2}}(J)$ pour tout $i \in \tilde{E}$ avec $\mathbf{m}_i - p\frac{d}{2} \in \mathbb{N}^r$ puisque \mathbf{m}_i vérifie la condition (A_2) .

(ii) Comme $d\nu_p$ est K -invariante, ainsi que la trace dans J on peut écrire :

$$\int_{O_p} e^{-\text{tr } v} f_p(v) d\nu(v) = \int_{O_p} e^{-\text{tr } v} \int_K f_p(k^{-1}v) dk d\nu(v).$$

Il est clair d'après (II.5.0.1.) que l'on a :

$$\int_K \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(k^{-1}x) dk = \Phi_{\mathbf{m}_i}(x) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)$$

pour tout $x \in J$ et tout $i \in \tilde{E}$.

Donc, d'après le Lemme II.5.1. (ii)

$$\int_{O_p} e^{-\text{tr } v} \int_K f_p(k^{-1}v) dk d\nu(v) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e) .$$

On en déduit le 1) de ce (ii) d'après (II.4.0.2) en $x = e$.

Pour $y \in \Omega$, on déduit de la Proposition II.4.2.(ii)

$$\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(\mathbf{P}(y^{1/2})^{-1}v) = \mu(\mathbf{P}(y^{1/2})^{-1}) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(v) \mu(\mathbf{P}(y^{1/2})^{-1}).$$

D'après la Proposition I.1.3 (vii), comme $(\text{Dét } \mathbf{P}(y^{1/2})^{-1})^{h_p} = (\det y^{1/2})^{-pd}$ et que $\text{Dét}(\mathbf{P}(y^{1/2})^{-1}v) = (\det y^{1/2})^{-2} \det v$ (voir [F-K] Proposition III.4.2 (i)), on obtient grâce au 1) de ce (ii) par le changement de variable $v \mapsto \mathbf{P}(y^{1/2})^{-1}v$ dans $\int_{O_p} e^{-(y|v)} f_p(v) d\nu(v)$ le résultat du 2) de ce (ii). Par injectivité de la transformée de Laplace, on en déduit que pour tout $v \in O_p$ $\rho_p^\mu(v) = f_p(v)$.

Proposition II.5.3.

La mesure dR_μ (du I 2)) a son support inclus dans un O_p $1 \leq p \leq r-1$ si et seulement si :

1) Dans la décomposition de $\mu(\mathbf{P}(x))$ ($x \in \Omega$) relativement aux $\{\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(\Omega)\}_{i \in \tilde{E}}$ on a :

$$(A_2) \quad m_{i,p+1} = \dots = m_{i,r} = p \frac{d}{2} \quad \text{pour tout } i \in \tilde{E} .$$

$$2) \quad \sum_{i \in \tilde{E}} \frac{1}{\Gamma_\Omega^{(p)}(\mathbf{m}_i^{(p)})} \left((\det \cdot)^{-p \frac{d}{2}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \right) (e_p) \in \text{Herm}^+ V_\mu$$

Démonstration

Nécessité de 1) et 2) : le 1) provient de (II.5.0.2) et 2) du fait que $dR_\mu(v) \in \text{Herm}^+ V_\mu$ pour tout $v \in O_p$ puisque $\rho_p^\mu(v) = f_p(v)$.

Suffisance de 1) et 2) : Si $v \in O_p$ il existe $g \in G$ tel que $v = ge_p$, donc d'après la Proposition II.4.2. (ii) on a

$$f_p(v) = (\text{Dét } g)^{-\frac{r}{n} p \frac{d}{2}} \mu(g) f_p(e_p) \mu(g)^*$$

ce qui établit que 2) entraîne la semi-défini-positivité de $f_p(v)$. Enfin le 2) de la Proposition II.5.2. (ii) établit que dR_μ est porté par O_p .

6) Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\rho_\mu \neq 0$

Considérons à nouveau la décomposition (II.4.0.2.) de $\mu(P(x))$ ($x \in \Omega$) relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$.

$$\mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) \quad \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \neq 0 \quad .$$

D'après (II.4.0.1.) on a $\mathbf{m}_i - s_r \in \mathbb{N}^r$ pour tout $i \in \tilde{E}$. En notant $\mathbf{m}_i = (m_{i,1}, \dots, m_{i,r})$, on a pour tout $i \in \tilde{E}$

$$(II.6.0.1.) \quad m_{i,r} \geq s_r \quad .$$

Remarquons que, d'après le Lemme I.7.1., si $\rho_\mu \neq 0$ alors $s_r > (r-1)\frac{d}{2}$.

Proposition II.6.1.

Si $s_r > (r-1)\frac{d}{2}$

(i) $m_{i,r} > (r-1)\frac{d}{2}$ pour tout $i \in \tilde{E}$

(ii) $\int_{\Omega} e^{-\text{tr}yx} \sum_{i \in \tilde{E}} \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{m}_i)} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) d\nu(x) = \mu(P(y^{-1}))$ pour $y \in \Omega$.

Démonstration

(i) C'est immédiat d'après (II.6.0.1.)

(ii). Comme $m_{i,r} > (r-1)\frac{d}{2}$, on peut écrire pour $q \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(J)$ et tout $i \in \tilde{E}$, d'après [F-K] Lemme XI.2.3. :

$$(II.6.1.1.) \quad \int_{\Omega} e^{-\text{tr}yx} q(x) d\nu(x) = \Gamma_{\Omega}(\mathbf{m}_i) q(y^{-1})$$

La formule de (ii) découle alors facilement du fait que :

$$\mu(P(y^{-1})) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(y^{-1}) \quad .$$

D'autre part, par injectivité de la transformée de Laplace, on déduit de la Proposition II.6.1. (ii)

$$(II.6.1.2.) \quad x \in \Omega \quad . \quad \rho_\mu(x) = \sum_{i \in \tilde{E}} \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{m}_i)} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$$

Proposition II.6.2.

(i) Il existe une mesure dR_μ à valeurs dans $\text{Herm}(V_\mu)$, portée par Ω si et seulement si $s_r > (r-1)\frac{d}{2}$ et dans ce cas :

$$\rho_\mu(e) = \sum_{i \in E} \frac{1}{\Gamma_\Omega(\mathbf{m}_i)} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)$$

(ii) lorsque $s_r > (r-1)\frac{d}{2}$, Q_μ est défini positif si et seulement si $\rho_\mu(e) \in \text{Herm}^+ V_\mu$.

Démonstration

(i) Cela se déduit immédiatement de (II.6.0.2.) de la Proposition II.6.1. (ii) et de (II.6.1.3.)

(ii) on remarque que, d'après (I.2.1.1.) $\rho_\mu(x) = \mu(P(x^{1/2}))\rho_\mu(e)\mu(P(x^{1/2}))^*$ puisque $P(x^{1/2})e = x$.

7) Analyticité de $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la décomposition (II.4.0.2.) de $\mu(P(x))$, $x \in \Omega$, relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}}(\Omega)$.

$$\mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) \quad \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \neq 0$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mu^\alpha(P(x)) = (\det x)^\alpha \mu(P(x))$$

$$\text{Donc } \mu^\alpha(P(x)) = \sum_{i \in E} (\det(\cdot)^\alpha \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu)(x), \quad x \in \Omega \quad \text{où } \det^\alpha(\cdot) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \neq 0$$

est la décomposition (II.4.0.2.) de $\mu^\alpha(P(x))$, relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}+\alpha}(\Omega)$. D'où, d'après (II.6.1.3.), pour $s_r + \alpha > (r-1)\frac{d}{2}$

$$(II.7.0.1.) \quad \rho_{\mu^\alpha}(e) = \sum_{i \in \tilde{E}} \frac{1}{\Gamma_\Omega(\mathbf{m}_i) + \alpha} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)$$

Proposition II.7.1.

L'application $\alpha \mapsto \rho_{\mu\alpha}(e)$ se prolonge en une application analytique sur \mathbb{R} .

Démonstration

Cela se déduit immédiatement de (II.7.0.1.) puisque $z \mapsto \frac{1}{\Gamma(z)}$ est analytique sur \mathbb{R} .

8) Quelques propriétés simples des $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e) \quad i \in \tilde{E}$

Proposition II.8.1.

- (i) Pour $i \neq j, i, j \in \tilde{E}, \quad \text{Tr}(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_j}^\mu(e)) = 0$
- (ii) pour $i \in \tilde{E} \quad \text{Tr} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e) = \text{Tr}(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e))^2$
- (iii) Si $\sum_{\substack{i \in \tilde{E} \\ \mathbf{m}_i \neq \mathbf{s}}} \lambda_i \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu \in \text{Herm}^+ V_\mu, \quad \lambda_i \in \mathbb{C},$ alors tous les λ_i sont nuls.

Démonstration

D'après la Proposition II.4.2., comme $P(x^{1/2})e = x$ pour $x \in \Omega$, on a :

$$\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) = \mu(P(x^{1/2}))\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\mu(P(x^{1/2}))$$

d'où

$$\begin{aligned} \text{Tr} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) &= \text{Tr} \{ \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\mu(P(x^{1/2})) \} \\ &= \text{Tr} \{ \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) \} + \text{Tr}_{\substack{j \in \tilde{E} \\ j \neq i}} \{ \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_j}^\mu(x) \} . \end{aligned}$$

Or il est clair que $\text{Tr} \{ \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) \} \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(\Omega)$. On en déduit le (i) et le (ii) de la proposition en prenant $x = e$.

(iii) En considérant la décomposition de $\mu(P(x)) \quad x \in \Omega$ relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(\Omega) \quad i \in \tilde{E}$, on a d'après (II.5.0.1.)

$$\int_K \mu(P(kx))dk = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\Phi_{\mathbf{m}_i}(e)\Phi_{\mathbf{m}_i}(x), \quad x \in \Omega .$$

D'après le Lemme II.3.1. avec $B = \text{Id}_{V_\mu}$ et le Lemme II.4.1, l'application $x \mapsto \langle \mu(P(x))v_\mu, v_\mu \rangle$ est proportionnel à $\Delta_{\mathbf{s}}(x)$ pour $x \in \Omega$ (remarquons

que pour $g \in G$ $\langle \mu(P(ge))v_\mu, v_\mu \rangle = \langle \mu(g)\mu(g)^*v_\mu, v_\mu \rangle$. Donc $x \mapsto \langle \int_K \mu(P(kx))v_\mu, v_\mu \rangle dk$ est colinéaire à $\Phi_{\mathbf{s}}(x)$. On déduit alors de (II.8.1.1.) que si $\mathbf{m}_i \neq \mathbf{s}$ alors $\langle \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)v_\mu, v_\mu \rangle = 0$. Donc si $\sum_{\substack{i \in \tilde{E} \\ \mathbf{m}_i \neq \mathbf{s}}} \lambda_i \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$,

était semi défini positif, on aurait $\sum \lambda_i \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)v_\mu = 0$. D'après la Proposition II.4.2., puisque $ke = e$ pour tout $k \in K$, $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)$ commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$. Comme V_μ est irréductible, les $(\mu(k)v_\mu)_{k \in K}$ engendrent V_μ . On aurait donc $\sum_{\substack{i \in \tilde{E} \\ \mathbf{m}_i \neq \mathbf{s}}} \lambda_i \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e) = 0$. Or d'après (i) la famille des $\{\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)\} \quad i \in \tilde{E}$, est libre, d'où le (iii).

9) Traitement d'un exemple

Soit μ est la représentation canonique de G dans $\mathcal{J}^{\mathbb{C}}$ définie par : $\mu(g) = g$.

Proposition II.9.1.

La représentation μ est irréductible, sphérique, de signature $(2, 0, \dots, 0)$.

Démonstration

Les résultats suivants sont très classiques : (voir [F-K])

Si $\bar{n} \in \bar{N}$ $\bar{n}c_1 = c_1$, $P(a_1c_1 + \dots + a_rc_r)c_1 = a_1^2c_1$ pour $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$, si $m \in M$ $mc_1 = c_1$. Cela montre que c_1 est un vecteur de plus bas poids de μ .

Soit J' le sous espace de J engendré par les gc_1 , $g \in G$.

Pour tout $i \leq 1 \leq i \leq r$ $c_i \in Kc_1$, et pour tout x de J de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, il existe $k_x \in K$ tel que $x = k_x(\lambda_1c_1 + \dots + \lambda_rc_r)$. Donc $x \in J'$ et $J = J'$ ce qui établit que μ est irréductible.

Lemme II.9.2.

(i) $(\mathbb{C}e)^\perp$ est $\mu(K)$ -irréductible

(ii) Un endomorphisme hermitien B commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$ si et seulement si :

$$Be = \varphi_1(B)e \quad \varphi_1(B) \in \mathbb{R}$$

$$B_{|(\mathbb{C}e)^\perp} = \varphi_2(B)\text{Id}_{(\mathbb{C}e)^\perp} \quad \varphi_2(B) \in \mathbb{R} \quad .$$

Démonstration

(i) voir [F.K] exercice 2, p.77.

(ii) Puisque B commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in Ke$, vecteur sphérique de μ est vecteur propre de B ; B étant hermitien B stabilise donc $(Ce)^\perp$. Alors par le Lemme de Schur $B|_{(Ce)^\perp}$ est scalaire.

De (II.8.1.1.) on déduit puisque $s_\mu = 2$

$$\int_K P(kx)dk = \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)\Phi_{\mathbf{m}_1}(x) + \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e)\Phi_{\mathbf{m}_2}(x)$$

pour $x \in \Omega$, où $\mathbf{m}_1 = (2, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{m}_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$.

On pose pour $x \in J$ $u(x) = \int_K P(kx)dk$, et $\varphi_1(x) = \varphi_1(u(x))$, $\varphi_2(x) = \varphi_2(u(x))$ où $\varphi_1(u(x))$ et $\varphi_2(u(x))$ sont définis au Lemme précédent II.9.2.. Il est clair que $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \mathcal{P}_2(J)$.

Proposition II.9.3.

Soit $x \in J$, et soit $x = a_1c_1 + \dots + a_rc_r$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ sa décomposition spectrale.

- (i) $\varphi_1(x) = \frac{1}{r} \text{tr } x^2$
- (ii) $\varphi_2(x) = \frac{1}{n-1} \{ \text{Tr } P(x) - \varphi_1(x) \}$
- (iii) $\text{Tr } P(x) = \sum_{i=1}^r a_i^2 + \dots + d \sum_{i < j} a_i a_j$; $\text{tr } x^2 = \sum_{i=1}^r a_i^2$.

Démonstration

(i)

$$u(x)e = \int_K kx^2 dk = \left(\text{tr} \int_K kx^2 dk \right) \frac{e}{r} = \frac{1}{r} \text{tr } x^2 e$$

(ii) Cela provient immédiatement de ce que $\text{Tr } u(x) = \text{Tr } P(x)$ et $\dim(Ce)^\perp = n - 1$.

(iii) Formules classiques (voir [F-K]).

Le polynome en x $\text{tr } x^2$ étant K -invariant, il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$, telle que

$$(II.9.3.1.) \quad \text{tr } x^2 = \lambda \Phi_{\mathbf{m}_1}(x) + (r - \lambda) \Phi_{\mathbf{m}_2}(x)$$

où $\mathbf{m}_1 = (2, 0, \dots, 0)$ et $\mathbf{m}_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$.

Lemme II.9.4.

Soit $x = a_1c_1 + \dots + a_rc_r \in J$. Alors $\Phi_{\mathbf{m}_2}(x) = \frac{2}{r(r-1)} \sum_{i < j} a_i a_j$.

(voir [F-K] Proposition XI.5.2).

On en déduit que $\text{Tr } P(x) = \text{tr } x^2 + d \frac{r(r-1)}{2} \Phi_{\mathbf{m}_2}(x)$ et donc d'après II.9.3.1.
 $\text{Tr } P(x) = \lambda \Phi_{\mathbf{m}_1}(x) + (r - \lambda + d \frac{r(r-1)}{2}) \Phi_{\mathbf{m}_2}(x)$.

Rappelons que d'après la Proposition II.4.2., puisque $ke = e$ pour tout $k \in K$, $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)$ et $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e)$ commutent avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$. On peut donc appliquer le Lemme II.9.2. (ii) à $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)$ et $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e)$. D'après (II.8.1.1.) et la Proposition II.9.3. on peut écrire en utilisant (II.9.3.1.) $\varphi_1(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)) = \frac{\lambda}{r}$, $\varphi_2(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)) = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right) \lambda$. Donc, d'après la Proposition II.8.1. (ii), on a :

$$\lambda = \frac{\lambda^2}{r^2} + \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2 \lambda^2$$

D'après l'expression de $\text{tr } x^2$ dans le (iii) de la Proposition II.8.1. il est clair que dans (II.9.3.1.) $\lambda \neq 0$. D'où $\lambda = r \frac{1 + r \frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2}}$, et on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)) &= \frac{1 + r \frac{d}{2}}{1 + \frac{d}{2}}, \quad \varphi_2(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)) = \frac{1}{1 + \frac{d}{2}}, \quad \varphi_1(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e)) = \frac{d}{2} \frac{1-r}{1 + \frac{d}{2}}, \\ \varphi_2(\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e)) &= \frac{d}{2} \frac{1}{1 + \frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Théorème II.9.5.

(i) pour $\alpha > (r-1) \frac{d}{2}$

$$\varphi_1(\rho_{\mu^\alpha}(e)) = \frac{(2\pi)^{-r(r-1) \frac{d}{4}} (\alpha - r \frac{d}{2})}{\Gamma(2 + \alpha) \Gamma(1 + \alpha - \frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - d) \dots \Gamma(\alpha - (r-1) \frac{d}{2})}$$

$$\varphi_2(\rho_{\mu^\alpha}(e)) = \frac{(2\pi)^{-r(r-1) \frac{d}{4}} \alpha}{\Gamma(2 + \alpha) \Gamma(1 + \alpha - \frac{d}{2}) \Gamma(\alpha - d) \dots \Gamma(\alpha - (r-1) \frac{d}{2})}$$

(ii) pour $p \in \{2, \dots, r-1\}$, ce qui suppose $r \geq 3$, $dR_{\mu \frac{pd}{2}}$ est portée par O_p , et on a

- $\rho_p^{\mu \frac{pd}{2}}(e_p)e_p = \frac{(2\pi)^{-p(p-1)\frac{d}{4}}(\alpha - p\frac{d}{2})}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+\alpha-\frac{d}{2})\Gamma(\alpha-d)\dots\Gamma(\alpha-(p-1)\frac{d}{2})}e_p$
- pour $x \in (\mathbb{C}e_p)^\perp \cap J^{(p)}$

$$\rho_p^{\mu \frac{pd}{2}}(e_p)x = \frac{(2\pi)^{-p(p-1)\frac{d}{4}} \alpha}{\Gamma(2+\alpha)\Gamma(1+\alpha-\frac{d}{2})\Gamma(\alpha-d)\dots\Gamma(\alpha-(p-1)\frac{d}{2})}x$$

avec la convention $\Gamma(\alpha-d)\dots\Gamma(\alpha-(p-1)\frac{d}{2}) = 1$ si $p = 2$.

- pour $x \in J^{(p)\perp} \rho_p^{\mu \frac{pd}{2}}(e_p)x = 0$

(iii) Le noyau Q_{μ^α} est défini positif si et seulement si :

$$\alpha \in \{d, \dots, (r-1)\frac{d}{2}\} \quad \text{ou} \quad \alpha \geq r\frac{d}{2}.$$

Démonstration

(i) Remarquons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e) = \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^{\mu^\alpha}(e)$ pour tout $i \in \tilde{E}$.
Donc d'après II.6.1. (ii) on a

$$\rho_{\mu^\alpha}(e) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(2+\alpha, \alpha, \dots, \alpha)} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e) + \frac{1}{\Gamma_\Omega(1+\alpha, 1+\alpha, \alpha, \dots, \alpha)} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e).$$

On en déduit le (i).

(ii) Remarquons que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(\det.)^{-\alpha} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x) = \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^{\mu^\alpha}(x) \quad \text{pour tout } i \in \tilde{E} \quad \text{et } x \in J.$$

Donc, d'après la Proposition II.5.3.

$$\rho_p^{\mu \frac{pd}{2}}(e_p) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega^{(p)}}((s_1 + \alpha)^{(p)})} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e_p) + \frac{1}{\Gamma_{\Omega^{(p)}}((s_2 + \alpha)^{(p)})} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e_p)$$

$$\text{où } s_1 = (2, 0, \dots, 0) \quad \text{et } s_2 = (1, 1, 0, \dots, 0).$$

D'après la Proposition II.4.2. (ii), on a pour tout $i \in \tilde{E}$ et tout $x \in \Omega$
 $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(P(x)e) = P(x)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)P(x)$. D'où, par continuité lorsque $x \in \Omega$ tend vers e_p on a $\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e_p) = P(e_p)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(e)P(e_p)$. Puisque $P(e_p)$ est la projection orthogonale de J sur $J^{(p)}$, on vérifie que :

$$P(e_p)\tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e)P(e_p)e_p = \frac{1+p\frac{d}{2}}{1+\frac{d}{2}}e_p$$

$$P(e_p) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e) P(e_p) e_p = \frac{d}{2} \frac{1-p}{1+\frac{d}{2}} e_p .$$

Pour $x \in J^{(p)} \cap (\mathbb{C} e_p)^\perp$

$$P(e_p) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_1}^\mu(e) P(e_p) x = \frac{1}{1+\frac{d}{2}} x$$

$$P(e_p) \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_2}^\mu(e) P(e_p) x = \frac{d}{2} \frac{1}{1+\frac{d}{2}} x .$$

On en déduit (ii).

(iii) C'est une conséquence immédiate des Propositions II.5.3., II.6.1., du (i) et du (ii) précédents.

III - ETUDE DE LA POSITIVITE DU NOYAU REPRODUISANT Q_μ LORSQUE μ EST SPHERIQUE ET J DE RANG 2

On sait (voir [F-K] Corollaire IV.1.5.) que les algèbres de Jordan euclidiennes simples de rang 2 sont isomorphes à l'algèbre de Jordan suivante : \mathbb{R}^ν où $\nu = 2 + d$, munie du produit défini par

$$x = (x_1, \dots, x_\nu) \in \mathbb{R}^\nu, y = (y_1, \dots, y_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$$

$$xy = z = (z_1, \dots, z_\nu) \quad z_1 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i y_i \quad z_i = x_1 y_i + x_i y_1 \quad 2 \leq i \leq \nu.$$

Dans la suite, on note $J = \mathbb{R}^\nu$ et $G = (\text{Str } \mathbb{R}^\nu)_0$. L'élément neutre est $e = (1, 0, \dots, 0)$; $c_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ et $c_2 = ((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \dots, 0))$ forment un C.S.O.P.I de J . On a pour $x = (x_1, \dots, x_\nu) \in J$ (voir [F-K] p.31)

$$(III.0.0.1.) \quad \text{tr } x = 2x_1 \quad , \quad \det x = x_1^2 - \sum_{i=2}^{\nu} x_i^2$$

$$(III.0.0.2.) \quad \text{si } \det x \neq 0 \quad x^{-1} = \frac{1}{\det x} (x_1, -x_2, \dots, -x_\nu)$$

$$(III.0.0.3.) \quad \Delta_1(x) = \text{tr } xc_1 = x_1 + x_2 \quad ; \quad \text{tr } xc_2 = x_1 - x_2.$$

Soit μ est représentation irréductible et sphérique de G de signature $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$ $s_1 \geq s_2$. A équivalence près, μ est défini par :

$$V_\mu = \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J) \quad \text{où } \mathbf{m} = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2 \quad \begin{matrix} m_1 = \frac{1}{2} s_1 \\ m_2 = \frac{1}{2} s_2 \end{matrix}$$

et pour tout $g \in G$, $q \in \mathcal{P}_{\mathbf{m}}(J)$ $\mu(g)q = qog^*$. On prend pour produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V_\mu}$ le produit scalaire de Fischer noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Un vecteur de plus bas poids de μ ayant pour norme 1 est :

$$v_\mu = \frac{\Delta_{\mathbf{m}}}{\|\Delta_{\mathbf{m}}\|} \quad \text{où } \Delta_{\mathbf{m}}(x) = \Delta_1(x)^{m_1 - m_2} (\det x)^{m_2} \quad \text{pour } x \in J.$$

1) Calcul de la valeur propre $\lambda_\mu(\alpha)$ de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ associée au vecteur sphérique Φ_μ pour $\alpha > \frac{d}{2}$.

On peut écrire $\lambda_\mu(\alpha) = \langle \rho_{\mu^\alpha} \Phi_\mu, \Phi_\mu \rangle$, et comme $\int_K \mu(k) dk$ est un projecteur orthogonal, on en déduit :

$$(III.1.0.1.) \quad \lambda_\mu(\alpha) = \|\Phi_\mu\|^{-1} \langle \rho_{\mu^\alpha}(e) v_\mu, \Phi_\mu \rangle .$$

Par définition de ρ_{μ^α} on peut écrire pour $y \in \Omega$

$$\langle (\det y^{-1})^\alpha \Delta_{\mathbf{m}} \circ P(y^{-1}), \Phi_\mu \rangle = \int_{\Omega} e^{-(x|y)} \langle \rho_{\mu^\alpha}(x) v_\mu, \Phi_\mu \rangle d^*x$$

où $d^*x = (\det x)^{-1-\frac{d}{2}} dx$, dx étant la restriction de la mesure de Lebesgue de J à Ω . Soit f définie sur Ω et admettant une transformée de Laplace, notée $\mathcal{L}(f)(y) = \int_{\Omega} e^{(x|y)} f(x) dx$ ($y \in \Omega$). On a alors par injectivité de la transformée de Laplace :

$$\|\Delta_{\mathbf{m}}\| \lambda_\mu(\alpha) = \mathcal{L}^{-1}((\det y^{-1})^\alpha \langle \Delta_{\mathbf{m}} \circ P(y^{-1}), \Phi_\mu \rangle)(e).$$

Comme $\Phi_\mu = \Phi_{\mathbf{m}}$, on a d'après [F-K] Proposition XI.3.3. (ii) :

$$\langle \Delta_{\mathbf{m}} \circ P(y^{-1}), \Phi_\mu \rangle = \|\Phi_{\mathbf{m}}\| \Delta_{\mathbf{m}} \circ P(y^{-1})(e) = \|\Phi_{\mathbf{m}}\| \Delta_{\mathbf{m}}(y^{-2}).$$

Soit $y = (y_1, \dots, y_\nu) \in J$ et convenons de noter $\Delta(y) = \det(y)$. On vérifie facilement que

$$\Delta(y^{-1})^\alpha \Delta_{\mathbf{m}}(y^{-2}) = \Delta_1(z)^{m_1-m_2} \Delta(y)^{-2m_1-\alpha}$$

où $z = \left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2, -2y_1 y_2; \dots, -2y_1 y_\nu \right)$. D'après (III.0.0.3) $\Delta_1(z) = \sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - 2y_1 y_2$. D'après (III.0.0.1) et (III.0.0.3) on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{\nu} y_i^2 - 2y_1 y_2 = \operatorname{tr} y \operatorname{tr} y c_2 - \Delta(y).$$

Soit $q_{1,2}$ le polynôme homogène sur J de degré $2(m_1 - m_2)$ défini par :

$$q_{1,2}(y) = (\operatorname{tr} y \operatorname{tr} y c_2 - \Delta(y))^{m_1-m_2} .$$

On a donc

$$(III.1.0.2) \quad \lambda_\mu(\alpha) = \frac{\|\Phi_{\mathbf{m}}\|}{\|\Delta_{\mathbf{m}}\|} \mathcal{L}(q_{1,2} \Delta^{-2m_1-\alpha})(e) .$$

Dans ce qui suit on peut se placer à nouveau dans le cadre général de l'algèbre de Jordan J simple euclidienne de rang r et dimension n .

A un polynome p sur J on associe l'opérateur différentiel noté $p(\partial)$ défini par :

$$p(\partial)e^{(x|y)} = p(y)e^{(x|y)}.$$

Dans une base orthonormée de J , si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ constitue un système de coordonnées de $x \in J$ si N_p est le degré de p et que :

$$p(x) = \sum_{|\beta| \leq N_p} a_\beta x^\beta$$

où

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n, |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i, a_\beta \in \mathbb{R} x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$$

on a :

$$p(\partial) = \sum_{|\beta| \leq N_p} a_\beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \quad \text{où} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\beta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}.$$

Lemme III.1.1.

Soit p un polynome sur J de degré N_p et f une application de classe C^{N_p} sur l'ouvert Ω telle que

1) Pour tout $y \in \Omega$, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq N_p$, et pour tout polynome q sur J on ait

$$\sup_{x \in \Omega} \left| q(x) e^{-(x|y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta f(x) \right| < +\infty$$

2) Pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\beta| \leq N_p$, $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta f$ tend vers 0 en tout point de la frontière $\partial\Omega$ de Ω . Alors pour tout $y \in \Omega$ on a :

$$(III.1.1.1.). \quad \int_{\Omega} e^{-(x|y)} p(\partial) f(x) dx = p(y) \int_{\Omega} e^{-(x|y)} f(x) dx$$

C'est un résultat classique.

Soit p un polynome sur J de degré N_p et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi > N_p$. Par récurrence sur $\beta \in \mathbb{N}^n$, il est clair que pour $|\beta| \leq N_p$ on a pour $x \in \Omega$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \Delta^\varphi(x) = q_\beta(x) \Delta^{\varphi-|\beta|}(x)$$

où q_β est un polynome sur J .

Comme $\Delta(x) = 0$ si $x \in \partial\Omega$, il est clair que Δ^φ vérifie les hypothèses 1) et 2) du lemme III.1.1. Alors, en utilisant pour $\varphi > (r-1)\frac{d}{2}$ l'égalité

$$\int_{\Omega} e^{-(x|y)} \Delta^{\varphi-\frac{n}{r}}(x) dx = \Gamma_{\Omega}(\varphi) \Delta^{-\varphi}(y) \quad \text{pour tout } y \in \Omega$$

(voir [F-K] Proposition VII.1.2.), on en déduit que pour $\varphi > N_p + \frac{n}{r}$

$$(III.1.1.2.) \quad \Gamma_{\Omega}(\varphi) p(y) \Delta^{-\varphi}(y) = \int_{\Omega} e^{-(x|y)} p(\partial) \Delta^{\varphi-\frac{n}{r}}(x) dx$$

pour tout $y \in \Omega$.

Revenons maintenant au cas $r = 2$. D'après (III.1.1.2.), on déduit de (III.1.0.2.) que pour $\alpha > 1 + \frac{d}{2} - s_2$

$$(III.1.1.3.) \quad \lambda_{\mu}(\alpha) = \frac{c_{1,2}}{\Gamma_{\Omega}(2m_1 + \alpha)} q_{1,2}(\partial) \Delta^{2m_1 + \alpha - 1 - \frac{d}{2}}(e)$$

avec $c_{1,2} = \|\Phi_{\mathbf{m}}\| \|\Delta_{\mathbf{m}}\|^{-1}$.

Lemme III.1.2.

(III.1.2.1.) Pour $\varphi \in \mathbb{R}$

$$- \quad q_{1,2}(\partial) \Delta^\varphi(e) = \prod_{p=0}^{m_1-m_2-1} (\varphi - p) \left(\varphi - \frac{d}{2} - m_1 + m_2 - p\right) \quad \text{si } m_1 \neq m_2$$

$$- \quad q_{1,2}(\partial) \Delta^\varphi(e) = 1 \quad \text{si } m_1 = m_2$$

Démonstration

Pour $\varphi < -\frac{d}{2}$ on a $\Delta^\varphi(y) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(-\varphi)} \int_{\Omega} e^{-(x|y)} \Delta^{-\varphi}(x) d^*x$. Donc d'après une propriété classique de la transformée de Laplace

$$q_{1,2}(\partial) \Delta^\varphi(e) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(-\varphi)} \int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} q_{1,2}(-x) \Delta^{-\varphi}(x) d^*x$$

Rappelons que $q_{1,2}$ est de degré pair $2(m_1 - m_2)$. D'autre part, on peut écrire :

$$\int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} q_{1,2}(-x) \Delta^{-\varphi}(x) d^*x = \int_{A_2 \times N_{1,2}} e^{-\text{tr}(an_{1,2}^*e)} (q_{1,2} \Delta^{-\varphi})(an_{1,2}^*e) da_2 dn_{1,2}$$

où $A = A_2 = \{a = \exp(\log a_1 L(c_1) + \log a_2 L(c_2)) a_1, a_2 \in \mathbb{R}^{*+}\}$ où $da = \frac{da_1}{a_1} \frac{da_2}{a_2}$ et $dn_{1,2}$ est une mesure de Haar sur $N = N_{1,2}$ convenablement normalisée. On rappelle que $N_{1,2} = \{\tau(z); z \in J_{1,2}\}$ et $dn_{1,2} = c_1 dz$ $c_1 > 0$ où dz est la mesure de Lebesgue de $J_{1,2}$. Pour $a = \exp(\log a_1 L(c_1) + \log a_2 L(c_2))$ et $n_{1,2} = \tau(z)$ on déduit de (I.5.4.1.) que $\text{tr}(an_{1,2}^*e) = a_1(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2) + a_2$. D'autre part, $\text{tr}((an_{1,2}^*e)c_2) = (e | n_{1,2}ac_2) = a_2$ et $\Delta(an_{1,2}^*e) = a_1a_2$; ainsi en rappelant que $q_{1,2}(y) = (\text{tr } y \text{tr } yc_2 - \Delta(y))^{m_1 - m_2}$ pour $y \in \Omega$ on a

$$q_{1,2}(an_{1,2}^*e) = \left(\frac{1}{2}\|z\|^2 a_1 a_2 + a_2^2\right)^{m_1 - m_2}$$

D'où

$$\int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} q_{1,2}(x) \Delta^{-\varphi}(x) d^*x = c_1 \int_{(\mathbb{R}^{*+})^2 \times J_{1,2}} e^{-a_1 - a_2 - \frac{1}{2}a_1\|z\|^2} \left(a_2 + \frac{1}{2}a_1\|z\|^2\right)^{m_1 - m_2} a_1^{-\varphi} a_2^{-\varphi + m_1 - m_2} \frac{da_1}{a_1} \frac{da_2}{a_2} dz$$

par le changement de variable : $z \mapsto \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}} z$, $z \in J_{1,2}$, cette dernière expression vaut encore :

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^{*+})^2 \times J_{1,2}} e^{-a_2(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)} e^{-a_1} \left(a_2 + \frac{1}{2}a_2\|z\|^2\right)^{m_1 - m_2} \dots \\ & \dots a_1^{-\varphi - \frac{d}{2}} a_2^{-\varphi + m_1 - m_2 + \frac{d}{2}} \frac{da_1}{a_1} \frac{da_2}{a_2} dz \\ & = c_1 \Gamma\left(-\varphi - \frac{d}{2}\right) \int_{(\mathbb{R}^{*+})^2 \times J_{1,2}} e^{-a_2(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)} \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)^{m_1 - m_2} \dots \\ & \dots a_2^{-\varphi + 2(m_1 - m_2) + \frac{d}{2}} \frac{da_2}{a_2} dz \end{aligned}$$

qui est encore égal par le changement de variable $a_2 \mapsto a_2(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2)^{-1}$ à :

$$\begin{aligned} & c_1 \Gamma\left(-\varphi - \frac{d}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^{*+} \times J_{1,2}} e^{-a_2} a_2^{-\varphi + 2(m_1 - m_2) + \frac{d}{2}} \dots \\ & \dots \left(1 + \frac{1}{2}\|z\|^2\right)^{-(-\varphi + m_1 - m_2 + \frac{d}{2})} \frac{da_2}{a_2} dz \end{aligned}$$

$$= c_1 \Gamma(-\varphi - \frac{d}{2}) \Gamma(-\varphi + 2m_1 - 2m_2 + \frac{d}{2}) \dots$$

$$\dots \int_{J_{1,2}} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-(-\varphi + m_1 - m_2 + \frac{d}{2})} dz$$

On rappelle qu'on a vu au (I.5.5.2.) que $\int_{J_{1,2}} (1 + \frac{1}{2} \|z\|^2)^{-\beta} dz = \frac{1}{c} \frac{\Gamma(\beta - \frac{d}{2})}{\Gamma(\beta)}$

lorsque $\beta > \frac{d}{2}$. Comme $\frac{\Gamma(-\varphi - \frac{d}{2})}{\Gamma_\Omega(-\varphi)} = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \Gamma(-\varphi)^{-1}$, on a pour $\varphi < -\frac{d}{2}$

$$q_{1,2}(\partial) \Delta^\varphi(e) = c' \frac{\Gamma(-\varphi + m_1 - m_2)}{\Gamma(-\varphi)} \frac{\Gamma(-\varphi + \frac{d}{2} + 2m_1 - 2m_2)}{\Gamma(-\varphi + \frac{d}{2} + m_1 - m_2)}$$

ou on a posé $c' = \frac{c_1}{c} (2\pi)^{-\frac{d}{2}}$. Remarquons que si $m_1 = m_2$, alors $q_{1,2}(\partial) \Delta^\varphi(e) = \Delta^\varphi(e) = 1$, d'où l'on déduit que $c' = 1$. En utilisant l'identité, valable pour $s < 0$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{\Gamma(-s + m)}{\Gamma(-s)} = (-1)^m \prod_{p=0}^{m-1} (s - p) \quad \text{si } m \geq 1$$

$$= 1 \quad \text{si } m = 0$$

on en déduit l'égalité (III.1.2.1.) pour $\varphi \in]-\infty, -\frac{d}{2}[$. Mais il est clair que chaque membre de l'égalité (III.1.2.1.) est analytique en φ . Alors, par prolongement analytique, on en déduit (III.1.2.1.) pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

On pose pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$ $(\beta)_m = \prod_{p=0}^{m-1} (\beta + p)$ si $m \geq 1$ et $(\beta)_0 = 1$.

Proposition III.1.3.

Pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ on a :

$$(III.1.3.1.) \quad \lambda_\mu(\alpha) = \frac{c_{1,2}^\mu}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{(s_2 + \alpha - d)^{\frac{1}{2}(s_1 - s_2)}}{\Gamma(s_1 + \alpha) \Gamma(\frac{s_1 + s_2}{2} + \alpha - \frac{d}{2})}$$

Démonstration

Etablissons d'abord l'égalité pour $\alpha > 1 + \frac{d}{2} - s_2$. En utilisant le Lemme III.1.2., on déduit de (III.1.1.3.) le résultat annoncé en remarquant que si $m_1 \neq m_2$,

$$\Gamma\left(s_1 + \alpha - \frac{d}{2}\right)^{-1} \prod_{p=0}^{m_1 - m_2 - 1} \left(s_1 + \alpha - 1 - \frac{d}{2} - p\right) = \Gamma\left(m_1 + m_2 + \alpha - \frac{d}{2}\right)^{-1}$$

et

$$\prod_{p=0}^{m_1 - m_2 - 1} (s_1 + \alpha - 1 - d - m_1 + m_2 - p) = (s_2 + \alpha - d)_{m_1 - m_2} .$$

Puisque $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}$ est analytique pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ (Proposition 1.7.1.), il en est de même pour $\alpha \mapsto \lambda_\mu(\alpha) = \langle \rho_{\mu^\alpha}(e)\Phi_\mu, \Phi_\mu \rangle$. Or il est clair que le second membre de (III.1.3.1.) est aussi analytique en α pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$. Alors, par prolongement analytique, on déduit (III.1.3.1.) pour tout $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$.

2) D'autres valeurs propres de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$

Soit π et ψ deux représentations irréductibles de G dans V_π et V_ψ . On considère la représentation $\pi \otimes \psi$ de G dans $V_\pi \otimes V_\psi$. On munit $V_\pi \otimes V_\psi$ du produit scalaire noté $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ défini par

$$\langle\langle \omega_1 \otimes \omega'_1, \omega_2 \otimes \omega'_2 \rangle\rangle = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_\pi \langle \omega'_1, \omega'_2 \rangle_\psi$$

où $\omega_1, \omega_2 \in V_\pi$, $\omega'_1, \omega'_2 \in V_\psi$, et on a pour tout $g \in G$

$$\langle\langle \pi \otimes \psi(g)v, v' \rangle\rangle = \langle\langle v, \pi \otimes \psi(g^*)v' \rangle\rangle$$

pour tout $v, v' \in V_\pi \otimes V_\psi$.

Si la signature $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ de μ est telle que $s_1 = s_2$, μ est alors équivalente à la représentation scalaire de $G : g \mapsto (\text{Dét } g)^{\frac{r}{2n} s_1}$. Ce cas est traité dans [R-V] ou [F-K]. On suppose donc : $s_1 > s_2$. On prend π irréductible, sphérique, de signature $(s_1 - 2, s_2)$ (on rappelle que $s_1 - s_2 \in 2\mathbb{N}$). On prend ψ , irréductible, sphérique, de signature $(2, 0)$. La restriction de $\pi \otimes \psi$ au sous-espace vectoriel de $V_\pi \otimes V_\psi$ engendré par les $\{\pi \otimes \psi(g)v_\pi \otimes v_\mu\}_{g \in G}$ est irréductible. Il est facile de vérifier qu'elle est sphérique de signature (s_1, s_2) ; donc elle est équivalente à μ . On peut donc prendre cette représentation pour μ . Le vecteur $v_\mu = v_\pi \otimes v_\psi$ est un vecteur de plus bas poids. Quant au produit scalaire, on prend la restriction à V_μ de $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Pour S endomorphisme et λ valeur propre de S on note $\mathcal{V}_S(\lambda)$ le sous-espace propre associé à λ .

Lemme III.2.1.

Soit $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ et soit λ une valeur propre de $K_{1,2}^\pi(\alpha)$, telle que $\mathcal{V}_{K_{1,2}^\pi(\alpha)}(\lambda) \not\subset \{\mathbb{C}v_\pi\}^\perp$. Alors λ est aussi valeur propre de $K_{1,2}^\mu(\alpha)$ et $\mathcal{V}_{K_{1,2}^\mu(\alpha)}(\lambda) \not\subset \{\mathbb{C}v_\mu\}^\perp$.

Démonstration

Puisque $K_{1,2}^\pi(\alpha) \in \text{Herm}(V_\pi)$, on a $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $v_0 \in \mathcal{V}_{K_{1,2}^\pi(\alpha)}(\lambda)$ tel que $\langle v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} \neq 0$. Comme Φ_ψ est un vecteur fixe de $\psi(k)$ pour tout $k \in K$, on peut écrire :

$$\int_{N_{1,2}} e^{\alpha \varepsilon_2 H(n_{1,2})} \pi \otimes \psi(k(n_{1,2})) dn_{1,2} v_0 \otimes \Phi_\psi = \{K_{1,2}^\pi(\alpha)v_0\} \otimes \Phi_\psi = \lambda v_0 \otimes \Phi_\psi.$$

D'autre part, si $g \in G$ alors $g^* \in G$, donc puisque $\pi \otimes \psi(g^*)$ stabilise V_μ , $\pi \otimes \psi(g)$ stabilise V_μ^\perp . On en déduit que $\int_{N_{1,2}} e^{\alpha \varepsilon_2 H(n_{1,2})} \pi \otimes \psi(k(n_{1,2})) dn_{1,2}$ stabilise (outre V_μ) V_μ^\perp . Donc, en notant pr_{V_μ} la projection orthogonale de $V_\pi \otimes V_\psi$ sur V_μ , on a :

$$K_{1,2}^\mu(\alpha) \text{pr}_{V_\mu}(v_0 \otimes \Phi_\psi) = \lambda \text{pr}_{V_\mu}(v_0 \otimes \Phi_\psi).$$

Remarquons que $\langle \langle v_0 \otimes \Phi_\psi, v_\mu \rangle \rangle = \langle v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} \langle \Phi_\psi, v_\psi \rangle_{V_\psi} \neq 0$. Donc $\text{pr}_{V_\mu}(v_0 \otimes \Phi_\psi) \notin \{\mathbb{C}v_\mu\}^\perp$ ce qui établit le Lemme.

Lemme III.2.2.

Soit $S_1, S_2 \in \text{Herm } V_\pi$ tel que

- 1) S_1 et S_2 commutent
- 2) $S_1 v_\pi = S_2 v_\pi$

et soit λ une valeur propre de S_1 telle que $\mathcal{V}_{S_1}(\lambda) \not\subset \{\mathbb{C}v_\pi\}^\perp$. Alors λ est aussi valeur propre de S_2 et $\mathcal{V}_{S_2}(\lambda) \not\subset \{\mathbb{C}v_\pi\}^\perp$.

Démonstration

Il existe une base de V_π formée de vecteurs propres communs à S_1 et S_2 . Nécessairement un des éléments de cette base, notons le v_0 , vecteur propre de S_1 associé à λ vérifie : $\langle v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} \neq 0$ et donc v_0 est vecteur propre de S_2 . Notons β la valeur propre associée. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda \langle v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} &= \langle S_1 v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} = \langle v_0, S_1 v_\pi \rangle_{V_\pi} \\ &= \langle v_0, S_2 v_\pi \rangle_{V_\pi} = \langle S_2 v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} = \beta \langle v_0, v_\pi \rangle_{V_\pi} \end{aligned}$$

D'où $\beta = \lambda$.

Lemme III.2.3.

Soit λ est une valeur propre de $\rho_{\pi\alpha}$. Alors $\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda) \not\subset \{Cv_\pi\}^\perp$.

Démonstration

Supposons le contraire. D'après (I.7.2.2) $\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda)$ est stable par $\pi(k)$ pour tout $k \in K$. Il en est de même du sous-espace $\{\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda)\}^\perp$. On aurait pour tout $k \in K$:

$$\pi(k)v_\pi \in \{\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda)\}^\perp.$$

Mais V_π étant engendré par les $\{\pi(k)v_\pi\}_{k \in K}$, on aurait donc $\{\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda)\}^\perp = V_\pi$, d'où $\mathcal{V}_{\rho_{\pi\alpha}(e)}(\lambda) = \{0\}$.

Proposition III.2.4.

Soit $\alpha > 1 + d - s_2$ et λ une valeur propre de $\rho_{\pi\alpha+1}(e)$. Alors $\lambda \frac{\lambda_\mu(\alpha)}{\lambda_\pi(\alpha+1)}$ est une valeur propre de $\rho_{\mu\alpha}(e)$.

Démonstration

D'après (I.7.2.3.), (I.7.2.1.) et le Lemme III.2.3, on peut appliquer le Lemme III.2.2. à $S_1 = \rho_{\pi\alpha+1}(e)^{-1}$ et $S_2 = b_\pi(\alpha+1)K_{1,2}^\pi(\alpha + \frac{s_1+s_2}{2} - 1)$. On peut ensuite appliquer le Lemme III.2.1. et on obtient que λ^{-1} est valeur propre de $b_\pi(\alpha+1)K_{1,2}^\mu(\alpha + \frac{s_1+s_2}{2} - 1)$. D'après (I.7.2.3.) et (I.7.2.1.) on peut appliquer le Lemme III.2.2. pour μ à $S_1 = b_\mu(\alpha)K_{1,2}^\mu(\alpha + \frac{s_1+s_2}{2} - 1)$ et $S_2 = \rho_{\mu\alpha}(e)^{-1}$.

On en déduit finalement que $\lambda^{-1} \frac{b_\mu(\alpha)}{b_\pi(\alpha+1)}$ est valeur propre de $\rho_{\mu\alpha}(e)^{-1}$.

D'autre part, d'après (I.7.2.2.) et (I.7.2.1.) on peut écrire

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\alpha}(e)^{-1}\Phi_\mu &= \int_K \mu(k)\rho_{\mu\alpha}(e)^{-1}v_\mu dk = b_\mu(\alpha) \int_K \mu(k)K_{1,2}^\mu(h)dk v_\mu \\ &= b_\mu(\alpha) \int_{N_{1,2}} e^{\alpha\varepsilon_2 H(n_{1,2})} dn_{1,2} \int_K \mu(k)v_\mu dk, \end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_\mu(\alpha)^{-1} = b_\pi(\alpha+1) \int_{N_{1,2}} e^{\ell_\alpha \varepsilon_2 H(n_{1,2})} dn_{1,2};$$

d'où encore

$$\lambda_\pi(\alpha)^{-1} = b_\pi(\alpha+1) \int_{N_{1,2}} e^{\ell_\alpha \varepsilon_2 H(n_{1,2})} dn_{1,2}$$

donc $\frac{b_\pi(\alpha+1)}{b_\mu(\alpha)} = \frac{\lambda_\mu(\alpha)}{\lambda_\pi(\alpha+1)}$. On en déduit le résultat cherché.

Proposition III.2.5.

Soit $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ et soit λ une valeur propre de $\rho_{\pi\alpha+1}(e)$. Alors $c\lambda^{\frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1}}$ est une valeur propre de $\rho_{\mu\alpha}(e)$, où $c > 0$ est une constante indépendante de α .

Démonstration

D'après la Proposition III.1.3., on peut écrire pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$

$$\frac{\lambda_\mu(\alpha)}{\lambda_\pi(\alpha+1)} = c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1}$$

où $c = \frac{c_{1,2}^\mu}{c_{1,2}^\pi}$. Alors, d'après la Proposition III.2.4. on obtient le résultat de la Proposition III.2.5. pour $\alpha > 1 + d - s_2$.

Pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$, notons x_1, \dots, x_ℓ les coefficients des matrices de $\rho_{\mu\alpha}(e)$ et $\rho_{\pi\alpha+1}$ dans des bases quelconques de V_μ et V_π . Notons $\chi_{\mu\alpha}(X)$ et $\chi_{\pi\alpha+1}(X)$ les polynômes caractéristiques unitaires de $\rho_{\mu\alpha}(e)$ et $\rho_{\pi\alpha+1}(e)$. On a :

$$\chi_{\mu\alpha}(X), \chi_{\pi\alpha+1}(X) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_\ell][X].$$

On peut écrire $\chi_{\pi\alpha+1}(X) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } \rho_{\pi\alpha+1}(e)} (X - \lambda)^{h_\lambda}$, où $\text{Spec } \rho_{\pi\alpha+1}(e)$ est

l'ensemble des valeurs propres de $\rho_{\pi\alpha+1}(e)$ et h_λ l'ordre de multiplicité de $\lambda \in \text{Spec } \rho_{\pi\alpha+1}(e)$. Si on pose $V(X) = \prod_{\lambda \in \text{Spec } \rho_{\pi\alpha+1}(e)} \left(X - c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1} \lambda \right)$

il est facile de vérifier que $V(X) \in \mathbb{Z}\left[x_1, \dots, x_\ell, c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1}\right][X]$. Ecrivons la division euclidienne de $\{\chi_{\mu\alpha}(X)\}^{\dim V_\pi}$ par $V(X)$:

$$\{\chi_{\mu\alpha}(X)\}^{\dim V_\pi} = Q(X)V(X) + R_\alpha(X)$$

où $R_\alpha(X)$ est le reste de la division. Comme $V(X)$ est unitaire,

$$R_\alpha(X) \in \mathbb{Z}\left[x_1, \dots, x_\ell, c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1}\right][X].$$

Puisque $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$ et $\alpha \mapsto \rho_{\pi^{\alpha+1}}(e)$ sont analytiques pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ ainsi que $\alpha \mapsto c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1}$ (rappelons que $s_1 - 1 > s_2$), les coefficients de $R_\alpha(X)$ sont analytiques en α pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$. Or, une conséquence de la proposition (III.2.5.) pour $\alpha > 1 + d - s_2$ est que $R_\alpha(X) = 0$. Donc, par prolongement analytique, on a : $R_\alpha(X) = 0$ pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$, i.e si λ est valeur propre de $\rho_{\pi^{\alpha+1}}(e)$ $c \frac{s_2 + \alpha - d}{s_1 + \alpha - 1} \lambda$ est racine de $\chi_{\mu^\alpha}(X)$; d'où découle la Proposition III.2.5.

3) Une condition nécessaire et suffisante pour que Q_{μ^α} soit défini-positif

Proposition III.3.1.

Soit $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$.

- Si $\rho_{\mu^\alpha}(e) \in \text{Herm}^+(V_\mu)$ alors $s_2 + \alpha \geq d$.
- Si $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est défini-positif alors $s_2 + \alpha > d$.

Démonstration

D'après la Proposition III.2.5., en remarquant que $s_1 + \alpha - 1 > 0$, il suffit d'établir que $\rho_{\mu^{\alpha+1}}(e)$ a au moins une valeur propre strictement positive. Or cela provient du fait que $\langle \rho_{\pi^{\alpha+1}}(e)v_\pi, v_\pi \rangle_{V_\pi} > 0$, puisque d'après le Lemme I.7.1 on a $\langle \rho_{\pi^{\alpha+1}}(e)v_\pi, v_\pi \rangle_{V_\pi} = \Gamma_\Omega(\mathbf{s}_\pi + \alpha + 1)^{-1}$ où $\mathbf{s}_\pi = (s_1 - 2; s_2)$ et $\Gamma_\Omega(\mathbf{s}_\pi + \alpha + 1)^{-1} > 0$.

Proposition III.3.2.

Si $s_2 + \alpha \geq d$ alors $\rho_{\mu^\alpha}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$.

Démonstration

Ce résultat sera démontré dans la partie IV 3) pour r quelconque. Dans le cas $r = 2$ on peut en donner une preuve formellement plus simple mais qui exploite la même idée.

Lemme III.3.3.

(i) Si $s_1 > s_2$, les $(\mathbf{m}_i)_{i \in \bar{E}}$ résultant de la décomposition de $\mu(P(x))_{x \in \Omega}$ obtenue en (II.4.0.2.) ne peuvent pas vérifier la condition (A_2) (avec $p = 1$).

(ii) Si $s_1 > s_2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ dR_{μ^α} ne peut pas être portée par O_1 .

Démonstration

(i) Dans le cas contraire

$$\mu^{\frac{d}{2}-s_2}(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^{\mu^{\frac{d}{2}-s_2}}(x) \quad x \in \Omega$$

étant la décomposition de $\mu(P(x))$ relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}$, on aurait pour tout $i \in \tilde{E}$ $m_{i,2} = \frac{d}{2}$, d'où $m_{i,1} = s_{\mu^{\frac{d}{2}-s_2}} - \frac{d}{2}$ puisque $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i} \subset \mathcal{P}_{s_{\mu^{\frac{d}{2}-s_2}}}$.

D'où $\mathbf{m}_i = \mathbf{s} + \frac{d}{2} - s_2$, c'est-à-dire encore $\mu^{\frac{d}{2}-s_2}(P(x)) = \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{s} + \frac{d}{2} - s_2}^{\mu^{\frac{d}{2}-s_2}}(x)$. D'où $\mu(P(x)) = \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{s}}^{\mu}(x)$ et $\text{Id}_{\mathbf{s}}^{\mu} = \text{Id}_{V_{\mu}}$. On aurait donc, d'après II.6.1.2, pour $\alpha > \frac{d}{2} - s_2$ $\rho_{\mu^{\alpha}}(e) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha)} \text{Id}_{V_{\mu}}$. Donc pour $\frac{d}{2} - s_2 < \alpha < d - s_2$, $\rho_{\mu^{\alpha}}(e)$ serait défini-positif, ce qui est contradictoire avec la Proposition III.3.1.

(ii) C'est immédiat d'après le (i) précédent et la Proposition II.5.3. 1).

On en déduit

Théorème III.3.4.

Pour $s_1 > s_2$, $Q_{\mu^{\alpha}}$ est défini positif si et seulement si $\alpha \geq d - s_2$.

IV - ETUDE DE LA POSITIVITE
DU NOYAU REPRODUISANT Q_{μ^α} , $\alpha \in \mathbb{R}$

On suppose μ irréductible, sphérique, de signature $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ et $i_\mu \geq 1$ (voir notations du I.7.).

1) Relations entre les représentations sphériques de $G^{(p)}$ et les représentations sphériques de $(\text{Str } J^{(p)})_0$ pour $2 \leq p \leq r$

On note

$$\tilde{K}^{(p)}, \tilde{A}^{(p)}, \tilde{N}_{i,j}^{(p)}, \tilde{\bar{N}}_{i,j}^{(p)}, \tilde{N}^{(p)}, \tilde{\bar{N}}^{(p)}, \tilde{M}^{(p)}$$

les sous-groupes de $(\text{Str } J^{(p)})_0$ correspondant à $K, A, N_{i,j}, \bar{N}_{i,j}, N, \bar{N}$ et M pour $p = r$ et $\tilde{k}^{(p)}, \tilde{a}^{(p)}, \tilde{n}_{i,j}^{(p)}, \tilde{\bar{n}}_{i,j}^{(p)}, \tilde{n}^{(p)}, \tilde{\bar{n}}^{(p)}, \tilde{m}^{(p)}$ leurs algèbres de Lie respectives dans $\tilde{\mathfrak{g}}^{(p)} = \text{Lie } (\text{Str } J^{(p)})$.

On note encore

$K^{(p)} = K \cap G^{(p)}$; $A^{(p)} = A \cap G^{(p)} = \{\exp L(a_1 c_1 + \dots + a_p c_p); a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}\}$;
 $N^{(p)} = N \cap G^{(p)} = \exp \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \mathfrak{n}_{i,j}$; $M^{(p)} = M \cap G^{(p)}$. On note enfin $\mathfrak{h}^{(p)}, \mathfrak{a}^{(p)}, \mathfrak{n}^{(p)}, \mathfrak{m}^{(p)}$, leur algèbres de Lie respectives.

Lemme IV.1.1.

(i) Soit $\text{res} : G^{(p)} \mapsto (\text{Str } J^{(p)})_0$; $g \mapsto g|_{J^{(p)}}$ l'application de restriction. Alors res est un épimorphisme.

(ii) L'épimorphisme res induit un morphisme de K^p dans $\tilde{K}^{(p)}$.

(iii) Le morphisme de \mathfrak{a}_p dans $\tilde{\mathfrak{a}}^{(p)}$ défini par :

$$L(c_i) \mapsto L(c_i)|_{J^{(p)}}$$

pour $1 \leq i \leq p$ est un isomorphisme; res induit un isomorphisme de A_p sur $\tilde{A}^{(p)}$.

(iv) L'épimorphisme res induit un isomorphisme de $N_{i,j}$ sur $\tilde{N}_{i,j}^{(p)}$, de $\bar{N}_{i,j}$ sur $\tilde{\bar{N}}_{i,j}^{(p)}$, de $N^{(p)}$ sur $\tilde{N}^{(p)}$ et de $\bar{N}^{(p)}$ sur $\tilde{\bar{N}}^{(p)}$ pour $1 \leq i < j \leq p$.

(v) En notant $d\lambda(\tilde{n}_{i,j}^{(p)})$ une mesure de Haar de $\tilde{N}_{i,j}^{(p)}$, $d\lambda(\text{res } n_{i,j})$ est une mesure de Haar de $N_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq p$.

(vi) L'épimorphisme res induit un morphisme de $M^{(p)}$ dans $\tilde{M}^{(p)}$.

Démonstration

Si $Y \in \mathfrak{g}^{(p)}$, alors $\exp(Y_{|J^{(p)}}) = (\exp Y)_{|J^{(p)}}$ donc pour (i) il suffit d'établir que :

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{g}^{(p)} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{g}}^{(p)} \\ Y \longmapsto Y_{|J^{(p)}} \end{array} \right.$$

est un épimorphisme d'algèbre. Or $\mathfrak{g}^{(p)}$ est engendrée (en tant qu'algèbre) par les $L(x)$, $x \in J^{(p)}$ (Lemme I.1.4. (ii)).

(ii) Remarquons que pour tout $g \in G^{(p)}$ on a $gc_\ell = c_\ell$ pour tout ℓ tel que $p+1 \leq \ell \leq r$. (En effet on vérifie facilement que pour $x \in J^{(p)}$ $L(x)c_\ell = 0$ si $c_\ell \notin J^{(p)}$).

Donc si $k \in K^{(p)}$, on a $ke_p = e_p$ puisque $ke = e$, d'où $k_{|J^{(p)}} \in \{g \in (\text{Str } J^{(p)})_0; ge_p = e_p\}$ i.e. $k_{|J^{(p)}} \in \tilde{K}^{(p)}$

(iii) Les $L(c_i)$ $1 \leq i \leq p$ (resp. les $L(c_i)$) forment une base de \mathfrak{a}_p (resp. de $\tilde{\mathfrak{a}}^{(p)}$).

(iv) Comme l'exponentielle réalise un bijection de $\mathfrak{n}^{(p)}$ sur $N^{(p)}$, de $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)}$ sur $\tilde{N}^{(p)}$ de $\mathfrak{n}_{i,j}$ sur $N_{i,j}$, de $\tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)}$ sur $\tilde{N}_{i,j}^{(p)}$ pour $1 \leq i < j \leq p$ (resp. de $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)}$ sur $\tilde{N}^{(p)}$, de $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)}$ sur $\tilde{N}^{(p)}$, de $\tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}$ sur $\tilde{N}_{i,j}$, de $\tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)}$ sur $\tilde{N}_{i,j}^{(p)}$) et puisque $\mathfrak{n}^{(p)} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \mathfrak{n}_{i,j}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}$), $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}^{(p)} = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq p} \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)}$) il suffit d'établir que pour

$$1 \leq i < j \leq p \quad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{n}_{i,j} \longmapsto \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)} \\ Y \longmapsto Y_{|J^{(p)}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j} \longmapsto \tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)} \\ Y \longmapsto Y_{|J^{(p)}} \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes. Or $\mathfrak{n}_{i,j} = \{\frac{1}{2}L(z) + [L(z), L(c)] ; z \in J_{i,j}\}$, et de même $\tilde{\mathfrak{n}}_{i,j}^{(p)} = \{\frac{1}{2}L(z)_{|J^{(p)}} + [L(z)_{|J^{(p)}}, L(c)_{|J^{(p)}}] = (\frac{1}{2}L(z) + [L(z), L(c)])_{|J^{(p)}} ; z \in J_{i,j}\}$

Chapitre IV

et, de manière symétrique $\bar{n}_{i,j} = \{ -\frac{1}{2} L(z) + [L(z), L(c)]; z \in J_{i,j} \}$ et $n_{i,j}^{(p)} = (-\frac{1}{2} L(z) + [L(z), L(c)])_{|J^{(p)}}; z \in J_{i,j} \}$ (voir [F-K] Proposition VI.3.3.ii).

De plus $\dim n_{i,j} = \dim \tilde{n}_{i,j}^{(p)} = \dim \bar{n}_{i,j} = \dim \tilde{\bar{n}}_{i,j}^{(p)} = d$ ce qui démontre le résultat annoncé.

(v) Cela provient immédiatement de (iv).

(vi) Comme $M^{(p)} = Z_{K^{(p)}}(\mathfrak{a}_p)$ et $\widetilde{M}^{(p)} = Z_{\widetilde{K}^{(p)}}(\tilde{\mathfrak{a}}^{(p)})$ le résultat provient immédiatement de (ii) et (iii).

Soit $\pi_{G^{(p)}}$ une représentation de $G^{(p)}$ irréductible, sphérique, de signature $\mathfrak{s}_{\pi_{G^{(p)}}}$ de la forme $(2n_1, \dots, 2n_p)$ où $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$. Soit π_p la représentation naturelle de $(\text{Str } J^{(p)})_0$ dans $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}\mathfrak{s}_{\pi_{G^{(p)}}}}(J^{(p)})$ irréductible, sphérique, de signature $\mathfrak{s}_{\pi_{G^{(p)}}}$. Il est clair que $\pi \circ \text{res}$ est une représentation de $G^{(p)}$ irréductible, sphérique, de signature $\mathfrak{s}_{\pi_{G^{(p)}}}$ d'après le Lemme IV.1.1. La représentation $\pi \circ \text{res}$ est donc équivalente à $\pi_{G^{(p)}}$, c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme Ψ de $\mathcal{P}_{\frac{1}{2}\mathfrak{s}_{\pi_{G^{(p)}}}}(J^{(p)})$ dans $V_{\pi_{G^{(p)}}}$ tel que $\pi_{G^{(p)}} = \Psi \circ (\pi_p \circ \text{res})(g) \circ \Psi^{-1}$. Donc, pour tout $g \in \text{Ker}(\text{res})$ on a $\pi_{G^{(p)}}(g) = \text{Id}_{V_{\pi_{G^{(p)}}}}$. Donc $\pi_{G^{(p)}}$ passe au quotient par $\text{Ker}(\text{res})$ en fournissant une représentation de $(\text{Str } J^{(p)})_0$ dans $V_{\pi_{G^{(p)}}}$ notée encore π_p , telle que

$$(*) \quad \pi_{G^{(p)}} = \pi_p \circ \text{res}$$

pour tout $g \in G^{(p)}$.

Dorénavant, π_p désigne la représentation de $(\text{Str } J^{(p)})_0$ dans $V_{\pi_{G^{(p)}}}$, vérifiant (*). En fait on ne considère $\pi_{G^{(p)}}$ que dans les deux cas suivants :

- la représentation induite par μ de $G^{(p)}$ dans le $G^{(p)}$ -module irréductible $V_{\mu}^{(p)}$ de signature $\mathfrak{s}_p = (s_1, \dots, s_p)$

- la représentation $\mu'_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq r$ de $G^{(2)}$ dans $V_{\mu}^{i,j}$ définie par : $\mu'_{i,j}(g) = \mu(\omega_{i,j} g \omega_{i,j}^{-1})$ pour tout $g \in G^{(2)}$ où $\omega_{i,j} \in W$ est tel que :

$$\omega_{i,j}(1) = i \quad \text{et} \quad \omega_{i,j}(2) = j.$$

Il est facile de vérifier que $\mu'_{i,j}$ est irréductible, sphérique, de signature $\mathfrak{s}_{i,j} = (s_i, s_j)$. Dans ce dernier cas π_2 est notée par $\pi_{i,j}$.

Pour $g \in (\text{Str } J^{(p)})_0$, on note $g = k(g) \exp H(g)$ où $k(g) \in \widetilde{K}^{(p)}$, $H(g) \in \tilde{\mathfrak{a}}^{(p)}$ et $\bar{n}(g) \in \widetilde{N}^{(p)}$ la décomposition d'Iwasawa de g . Pour $n \in N_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq p$), on a

$$(IV.1.2.1.) \quad 1) \quad k(n_{|J^{(p)}}) = k(n)_{|J^{(p)}}$$

$$2) \quad H(n_{|J^{(p)}}) = H(n)_{|J^{(p)}}$$

$$3) \quad \bar{n}(n_{|J^{(p)}}) = \bar{n}(n)_{|J^{(p)}}$$

On note $(\tilde{\varepsilon}_i^{(p)})_{1 \leq i \leq p}$ la base duale de $(L(c_i)_{|J^{(p)}})$.

Lemme IV.1.2..

Pour $2 \leq p \leq r$, et $1 > S < t > r$

$$(i) \quad \epsilon_t H(n) = \tilde{\varepsilon}_t^{(p)} H(n_{|J^{(p)}}), \quad n \in N_{s,t}$$

$$(ii) \quad K_{s,t}^\mu(\alpha) = K_{s,t}^{\pi_p}(\alpha), \quad \alpha > \frac{d}{2}$$

$$(iii) \quad K_{i,j}^\mu(\alpha) = K_{1,2}^{\pi_{i,j}}(\alpha), \quad \alpha > \frac{d}{2}$$

Démonstration

(i) Immédiat d'après (IV.1.2.1.2)

$$(ii) \quad K_{s,t}^{\pi_p}(\alpha) = \int_{\tilde{N}_{s,t}^{(p)}} e^{\alpha \tilde{\varepsilon}_t^{(p)} H(\tilde{n}_{s,t}^{(p)})} \pi_p(k(\tilde{n}_{s,t}^{(p)})) d\tilde{n}_{s,t}^{(p)}$$

où $d\lambda(\tilde{n}_{s,t}^{(p)})$ est une mesure de Haar de $\tilde{N}_{s,t}^{(p)}$ normalisée comme au I.5. Par le changement de variable $\tilde{n}_{s,t}^{(p)} = n_{s,t} \circ \text{res}$ valable d'après le Lemme IV.1.1.(iv), on a en utilisant (IV.1.2.1.) $K_{s,t}^\mu(\alpha) = K_{s,t}^{\pi_p}(\alpha)$ pour $\alpha > \frac{d}{2}$.

(iii) Même démonstration que pour le (ii), mais en remplaçant $\pi_{G^{(p)}}$ par $\mu_{i,j}$ et en prenant $p = 2$, en remarquant que

$$K_{i,j}^\mu(\alpha) = \int_{N_{1,2}} e^{\alpha \varepsilon_2 H(n_{1,2})} \mu'_{i,j}(k(n_{1,2})) dn_{1,2}$$

d'après (I.5.2.1).

2) Calcul de la valeur propre $\lambda_\mu(\alpha)$ de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ associée au vecteur sphérique Φ_μ , pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$

D'après le Lemme I.8.1. appliqué aux représentations $\pi_{i,j}$ ($1 \leq i < j \leq r$) de $(\text{Str } J^{(2)})_0$ (donc pour $r = 2$) on a pour $\alpha > \alpha^{\pi_{i,j}}$

(IV.2.0.1.)

$$\lambda_{\pi_{i,j}}(\alpha) = \frac{1}{\Gamma_{\Omega^{(2)}}(s_{i,j} + \alpha)} \frac{\frac{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - \frac{d}{2} - 1)}}{\langle \{K_{1,2}^{\pi_{i,j}}(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - 1)\}^{-1} v_{\pi_{i,j}}, v_{\pi_{i,j}} \rangle_{V_{\pi_{i,j}}}}$$

D'après le lemme I.8.1. et en utilisant le Lemme IV.1.2. (iii), on en déduit, pour $\alpha > \sup_{1 \leq i < j \leq r} \left\{ \alpha^\mu; \alpha^{\pi_{i,j}} + (i+j-3)\frac{d}{2} \right\}$

$$(IV.2.0.2.) \quad \lambda_\mu(\alpha) = \frac{1}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s} + \alpha)} \dots$$

$$\prod_{j=2}^r \prod_{i=1}^{j-1} \Gamma_{\Omega^{(2)}} \left(\mathbf{s}_{i,j} + \alpha - (i+j-3)\frac{d}{2} \right) \lambda_{\pi_{i,j}} \left(\alpha - (i+j-3)\frac{d}{2} \right)$$

Proposition IV.2.1.

Pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$

$$(IV.2.1.1.) \quad \lambda_\mu(\alpha) = \frac{c_\lambda}{\Gamma_\Omega(\mathbf{s} + \alpha)} \prod_{j=2}^r \left\{ (s_j + \alpha - (j-1)\frac{d}{2})_{\frac{1}{2}(s_1 - s_j)} \right\}^{-1}$$

$$\dots \prod_{j=2}^r (s_j + \alpha - (j-1)d)_{\frac{1}{2}(s_{j-1} - s_j)} \prod_{j=3}^r \prod_{i=1}^{j-2} \left(\frac{s_{i+1} + s_j}{2} + \alpha - (i+j-1)\frac{d}{2} \right)_{\frac{s_i - s_{i+1}}{2}}$$

où c_λ est indépendant de α .

Démonstration

L'égalité (IV.2.1.1.) s'obtient pour α suffisamment grand à partir de (IV.2.0.2.), en utilisant le calcul de $\lambda_{\pi_{i,j}}(\alpha)$ de la Proposition III.1.3. avec les données $\pi_{i,j}$ à la place de μ , $\mathbf{s}_{i,j} = (s_i; s_j)$ à la place de $\mathbf{s} = (s_1; s_2)$.

Il faut utiliser aussi les simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_{\Omega^{(2)}} \left(\mathbf{s}_{i,j} + \alpha - (i+j-3)\frac{d}{2} \right)}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma \left(s_i + \alpha - (i+j-3)\frac{d}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s_i + s_j}{2} + \alpha - (i+j-3)\frac{d}{2} - \frac{d}{2} \right)} \\ &= \left\{ \left(s_j + \alpha - (i+j-2)\frac{d}{2} \right)_{\frac{1}{2}(s_i - s_j)} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

et si $\beta \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m' \in \mathbb{N}$ avec $m' \geq m$

$$\frac{(\beta)_{m'}}{(\beta)_m} = (\beta + m)_{m' - m}$$

Pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$, puisque $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$ est analytique (Proposition II.7.1.) et que $\lambda_\mu(\alpha)$ est égal à $\langle \rho_{\mu^\alpha}(e)\Phi_\mu, \Phi_\mu \rangle$ car $\|\Phi_\mu\| = 1$ alors $\alpha \mapsto \lambda_\mu(\alpha)$ est analytique.

D'autre part, il est clair que dans l'ouvert $](r-1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$ le deuxième membre de (IV.2.1.1.) est analytique en α . Alors, par prolongement analytique on déduit (IV.2.1.1.) pour tout $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$.

3) Une condition suffisante pour que $\rho_{\mu^\alpha}(e)$, $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$, soit défini - positif

Lemme IV.3.1.

(i) Pour $\alpha > \alpha^\mu$, posons

- si $i_\mu \leq r-2$

$$\Gamma'_{\mu^\alpha} = \prod_{j=i_\mu+2}^r \frac{\Gamma(\alpha + s_r - (i_\mu + j - 2)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + s_r - (2j - 3)\frac{d}{2} - 1)} \dots$$

$$\prod_{1 \leq j \leq r} \left\{ \Gamma(\alpha + s_j - (j-1)d - 1) \right\}^{-1} \Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}}$$

- si $i_\mu = r-1$

$$\Gamma'_{\mu^\alpha} = \prod_{1 \leq j \leq r} \left\{ \Gamma(\alpha + s_j - (j-1)d - 1) \right\}^{-1} \Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}}$$

Alors on a :

$$(IV.3.1.1.) \quad \Gamma'_{\mu^\alpha} v_\mu = \prod_{j=r}^{i_\mu+1} \prod_{i=i_\mu}^1 \prod_{j=i_\mu}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j}) v_\mu$$

où

$$\beta_{i,j} = \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1$$

(ii) Pour $\alpha > \alpha^\mu$

$$\Gamma'_{\mu^\alpha} \Phi_\mu = \prod_{j=r}^{i_\mu+1} \prod_{i=i_\mu}^1 \prod_{j=i_\mu}^2 \prod_{i=j-1}^1 \frac{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-2)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)} \Phi_\mu$$

Démonstration

(i) D'après la Proposition I.4.2.

$$\begin{aligned} & \prod_{1 \leq j \leq r} \left\{ \Gamma(\alpha + s_j - (j-1)d - 1) \right\}^{-1} \Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}} v_{\mu} \\ &= \prod_{j=r}^2 K_{j-1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{j-1,j}) \circ \cdots \circ K_{1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{1,j}) v_{\mu} \end{aligned}$$

D'après (I.7.3.1.) pour $t < j$, $1 \leq i \leq i_{\mu} < j$ et $i_{\mu} < \ell < t$ $K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})$ et $K_{\ell,t}^{\mu}(\alpha + \beta_{\ell,t})$ commutent.

On peut donc écrire, si $i_{\mu} \leq r - 2$:

$$\begin{aligned} & \prod_{j=r}^2 K_{j-1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{j-1,j}) \circ \cdots \circ K_{1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{1,j}) \\ &= \prod_{j=r}^{i_{\mu}+2} K_{j-1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{j-1,j}) \circ \cdots \circ K_{i_{\mu}+1,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu}+1,j}) \cdots \\ & \quad \circ \prod_{j=r}^{i_{\mu}+1} \prod_{i=i_{\mu}}^1 \prod_{j=i_{\mu}}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) \end{aligned}$$

D'autre part, pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2}$ $\Gamma_{\mu^{\alpha}}$ commute avec $\mu(k)$ pour tout $k \in K$. En effet, on peut vérifier directement que

$$\mu(k) \Gamma_{\mu^{\alpha}} \mu(k^{-1}) = \int_{\Omega} e^{-\text{tr } x} \mu^{\alpha}(\text{P}(kx)) d^*x = \int_{\Omega} e^{-\text{tr } k^{-1}x} \mu^{\alpha}(\text{P}(k)) d^*x = \Gamma_{\mu^{\alpha}}$$

On en déduit, pour tout i, j $1 \leq i < j \leq r$ $K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})$ commute avec $\Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}}$. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} (IV.3.1.2.) \quad & \prod_{1 \leq j \leq r} \Gamma(\alpha + s_j - (j-1)d - 1) \Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{n}{r}}}^{-1} v_{\mu} \\ &= \left\{ \prod_{j=2}^{i_{\mu}+1} \prod_{i=i_{\mu}}^1 \prod_{j=i_{\mu}}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) \right\}^{-1} \prod_{j=i_{\mu}+2}^r \prod_{i=i_{\mu}+1}^{j-1} \{K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})\}^{-1} v_{\mu} \end{aligned}$$

Or, d'après le (1.7.3.3), on peut écrire

$$\prod_{j=i_\mu+2}^r \prod_{i=i_\mu+1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}^{-1} v_\mu = \prod_{j=i_\mu+2}^r \prod_{i=i_\mu+1}^{j-1} \left\{ \frac{\Gamma(\alpha + \beta_{i,j} - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha - \beta_{i,j})} \right\}^{-1} v_\mu$$

Donc, en utilisant à nouveau le fait que $\{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}$ commute avec $\Gamma_{\mu^{\alpha - \frac{d}{r}}}$, on en déduit le (i) de ce Lemme en remarquant que :

$$\prod_{j=i_\mu+2}^r \prod_{i=i_\mu+1} \frac{\Gamma(\alpha + \beta_{i,j} - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha + \beta_{i,j})} = \prod_{j=i_\mu+2}^r \frac{\Gamma(\alpha + s_r - (i_\mu + j - 2)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + s_r - (2j - 3)\frac{d}{2} - 1)}$$

(iii) D'après (IV.3.1.2.)

$$\Gamma'_{\mu^\alpha} \Phi_\mu = \int_K \mu(k) dk \Gamma'_{\mu^\alpha} v_\mu$$

Donc d'après le (IV.3.1.1.) du (ii) du Lemme, et en utilisant (I.8.1.1.) (i) on obtient la formule de ce (iii).

Lemme IV.3.2.

L'application $\alpha \mapsto \Gamma'_{\mu^\alpha}$ se prolonge en une application analytique dans $](r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$.

On note encore Γ'_{μ^α} ce prolongement.

Démonstration

Montrons d'abord que pour $1 \leq i < j \leq r$

(IV.3.2.1.) $\beta \mapsto K_{i,j}^\mu(\beta)$ est analytique sur l'ouvert $\{\beta \in \mathbb{C}; \Re \beta > \frac{d}{2}\}$.

En effet, on a :

$$K_{i,j}^\mu(\beta) = \int_{N_{i,j}} e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} \mu(k(n)) dn$$

$$\|e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} \mu(k(n))\| = e^{\Re \beta} \quad \text{et } \varepsilon_j \mathbf{H}(n) < 0$$

pour tout $n \in N_{i,j}$ d'après le Lemme I.5.4. Donc pour $\beta_0 \in \{\beta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\beta > \frac{d}{2}\}$, si \mathcal{V}_{β_0} est un voisinage compact de β_0 contenu dans $\{\beta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\beta > \frac{d}{2}\}$ on a :

$$\| e^{\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)} \mu(k(n)) \| \leq e^{\inf_{\beta \in \mathcal{V}_{\beta_0}} \operatorname{Re}\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)}$$

pour tout $n \in N_{i,j}$ et tout $\beta \in \mathcal{V}_{\beta_0}$.

Comme $n \mapsto e^{\inf_{\beta \in \mathcal{V}_{\beta_0}} \operatorname{Re}\beta \varepsilon_j \mathbf{H}(n)}$ est $d n_{i,j}$ -intégrable d'après le Lemme I.5.1., on en déduit (IV.3.2.1.) d'après le théorème de convergence de Lebesgue.

Remarquons que, pour $1 \leq i \leq i_\mu < j \leq r$ $\frac{s_i + s_j}{2} \geq \frac{s_{i_\mu} + s_r}{2} \geq 1 + s_r$ car $s_{i_\mu} > s_r$ et donc $s_{i_\mu} \geq 2 + s_r$ (on rappelle que : $s_{i_\mu} - s_r \in 2\mathbb{N}$). Il est alors clair d'après (IV.3.2.1.) que :

$$\alpha \mapsto \prod_{j=r}^{i_\mu+1} \prod_{i=i_\mu}^1 \prod_{j=i_\mu}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^\mu \left(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1 \right)$$

est analytique sur $] (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$. On en déduit alors immédiatement de (IV.3.1.1.) que $\alpha \mapsto \Gamma'_{\mu\alpha} v_\mu$ se prolonge analytiquement sur $] (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$.

Soit E le sous-espace de V_μ des vecteurs v tels que $\alpha \mapsto \Gamma'_{\mu\alpha} v$ se prolonge analytiquement sur $] (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$. On vient de voir que $v_\mu \in E$; mais d'après (IV.3.1.2.) on a aussi $\mu(k)v_\mu \in E$ pour tout $k \in K$. Comme V_μ est un G -module irréductible, V_μ est engendré par le $\mu(k)v_\mu$ $k \in K$. Ce qui prouve que $E = V_\mu$.

Proposition IV.3.3.

(i) Pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$

$$(IV.3.3.1.) \quad \rho_{\mu\alpha}(e)\Gamma'_{\mu\alpha} = C_\mu(\alpha) \operatorname{Id}_{V_\mu}$$

$$\text{où } C_\mu(\alpha) = \lambda_\mu(\alpha) \prod_{j=r}^{i_\mu+1} \prod_{i=i_\mu}^1 \prod_{j=i_\mu}^2 \prod_{i=j-1}^1 \frac{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-2)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1)}$$

(ii) Pour $\alpha > (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2}$ $C_\mu(\alpha) > 0$.

Démonstration

(i) Pour $\alpha > \alpha^\mu$, on peut écrire d'après le Lemme I.3.1. :

$$\rho_{\mu^\alpha}(e)\Gamma'_{\mu^\alpha} = C_\mu(\alpha)\text{Id}_{V_\mu} \quad C_\mu(\alpha) \in \mathbb{R}^{*+}$$

Donc, d'après IV.3.1.(iii), comme $C_\mu(\alpha)\Phi_\mu = \rho_{\mu^\alpha}(e)\Gamma'_{\mu^\alpha}\Phi_\mu$, on en déduit (IV.3.3.1.) pour $\alpha > \alpha^\mu$. Pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$, $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$ et $\alpha \mapsto \Gamma'_{\mu^\alpha}$ sont analytiques d'après la Proposition II.7.1. et le Lemme IV.3.2.. D'autre part, il est clair que $\alpha \mapsto C_\mu(\alpha)$ est analytique pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$ d'après l'expression de $\lambda_\mu(\alpha)$ dans la Proposition IV.2.1. Donc, par prolongement analytique, on déduit (IV.3.3.1.), pour tout $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$.

(ii) La vérification est facile d'après l'expression de $\lambda_\mu(\alpha)$ dans la Proposition IV.2.1.

Corollaire IV.3.4.

(i) Si $\alpha \in](r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$ alors $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est défini-positif.

(ii) Si $\alpha = (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r$ alors $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est semi défini-positif et non inversible.

Démonstration

(i) On note $\text{Spec } \rho_{\mu^\alpha}(e)$ l'ensemble des valeurs propres de $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$ est analytique, on a donc :

$$(IV.3.4.1.) \quad \alpha \mapsto \inf \text{Spec } \rho_{\mu^\alpha}(e) \text{ est continu sur }](r - 1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[.$$

Pour $\alpha > (r - 1)d + 1 - s_r$ $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est défini positif (Lemme I.3.1.) i.e. $\inf \text{Spec } \rho_{\mu^\alpha}(e) > 0$. Donc s'il existait $\alpha \in](r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$ tel que $\inf \text{Spec } \rho_{\mu^\alpha}(e) \leq 0$, il existerait d'après (IV.3.4.1.) $\alpha_0 \in](r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$ tel que $\inf \text{Spec } \rho_{\mu^{\alpha_0}}(e) = 0$. Mais alors, d'après la Proposition IV.3.3. (i), on aurait $C_\mu(\alpha_0) = 0$. Ce qui est contradictoire avec le (ii) de la Proposition IV.3.3.

(ii) D'après le (i) précédent par continuité sur $](r - 1)\frac{d}{2} - s_r, +\infty[$ de $\alpha \mapsto \rho_{\mu^\alpha}(e)$, $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est semi-défini positif pour $\alpha = (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r$. Pour $\alpha = (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r$, $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ est non inversible car $\lambda_\mu(\alpha) = 0$, comme

on le vérifie immédiatement d'après l'expression de $\lambda_\mu(\alpha)$ dans la Proposition IV.2.1.

4) Conditions nécessaires pour que $\rho_{\mu^\alpha}(e)$, avec $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$, soit semi-défini positif

$V_\mu^{i_\mu, r}$ étant un $G_{i_\mu, r}$ -module irréductible, pour tout $v \in V_\mu^{i_\mu, r}$ il existe un endomorphisme t_v de $V_\mu^{i_\mu, r}$ de la forme $t_v = \sum_\ell \lambda_\ell \mu(k_\ell)$, où $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$ et $k_\ell \in K \cap G_{i_\mu, r}$, tel que $v = t_v v_\mu$.

Proposition IV.4.1.

Pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r - \frac{d}{2} - \frac{1}{2}$, pour $v \in V_\mu^{i_\mu, r}$ on a :

$$(IV.4.1.1) \quad \langle \rho_{\mu^\alpha}(e) \mathcal{S}_\alpha(v), \mathcal{S}_\alpha(v) \rangle = B_\mu(\alpha) \langle \rho_{\pi_{i_\mu, r} \alpha - (r + i_\mu - 3)\frac{d}{2}}(e_2)v, v \rangle$$

où $B_\mu(\alpha)$ est indépendant de v et on note

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\alpha(v) &= t_v \circ \prod_{i=i_\mu-1}^1 K_{i,r}^\mu(\alpha + \beta_{i,r}) \dots \\ &\dots \circ \prod_{j=r-1}^{i_\mu+1} \prod_{i=i_\mu}^1 K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j}) \circ \prod_{j=i_\mu}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j}) v_\mu. \end{aligned}$$

ou on a posé $\beta_{i,j} = \frac{s_i + s_j}{2} - (i+j-3)\frac{d}{2} - 1$ pour $1 \leq i < j \leq r$ et avec la même convention qu'au Corollaire I.7.3, afin que $\rho_{\mu^\alpha}(e) \mathcal{S}_\alpha v = t_v \circ K_{i_\mu, r}^\mu(\alpha + \beta_{i_\mu, r})^{-1} v_\mu$.

• pour $i_\mu \leq r-2$, on a $B_\mu(\alpha) > 0$ pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$ et $B_\mu(\alpha) = 0$ pour $\alpha = (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$.

• pour $i_\mu = r-1$ on a $B_\mu(\alpha) > 0$ pour $\alpha \geq (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$.

Démonstration

Supposons d'abord $\alpha > \alpha^\mu$. Comme t_v et les $K_{i,j}^\mu(\alpha_{i,j})$ commutent avec $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ d'après (I.7.1.2.) et (I.7.1.3.), on peut écrire d'après le Corollaire I.7.3 :

$$\langle \rho_{\mu^\alpha}(e) \mathcal{S}_\alpha(v), \mathcal{S}_\alpha(v) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha)} \left\langle t_v^* t_v \frac{\{K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,\mu,r})\}^{-1}}{\langle \{K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,\mu,r})\}^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle} v_{\mu}, \dots \right. \\
&\prod_{i=i_{\mu}-1}^1 \frac{K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r})}{\langle K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r})^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle} \prod_{j=r-1}^{i_{\mu}+1} \prod_{i=i_{\mu}}^1 \frac{K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})}{\langle K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle} \\
&\left. \dots \prod_{j=i_{\mu}}^2 \prod_{i=j-1}^1 \frac{K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})}{\langle \{K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j})\}^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle} v_{\mu} \right\rangle.
\end{aligned}$$

D'autre part, $\mu_{i_{\mu},r}$ étant sphérique on peut écrire $V_{\mu}^{i_{\mu},r} \subset \mathbb{C}v_{\mu} \oplus^{\perp} E_{i_{\mu},r}$ (notations du I.6)), d'où

$$t_v^* t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu} = \langle t_v^* t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle v_{\mu} \pmod{(E_{i_{\mu},r})}.$$

Donc, d'après la Proposition I.6.3. (i) et en utilisant (I.6.2.1) et (I.6.2.2)

$$\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{i_{\mu}-1} K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r}) t_v^* t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu} = \\
&= \langle t_v^* t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu}, v_{\mu} \rangle \prod_{i=1}^{i_{\mu}-1} \langle K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r}) v_{\mu}, v_{\mu} \rangle v_{\mu}
\end{aligned}$$

$\pmod{(E_{1,r})}$. D'autre part, il est clair que :

$$\prod_{j=r-1}^{i_{\mu}+1} \prod_{i=i_{\mu}}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) \prod_{j=i_{\mu}}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) v_{\mu} \in V_{\mu}^{r-1}.$$

Comme $E_{1,r}$ et $V_{\mu}^{(r-1)}$ sont orthogonaux d'après (I.6.4.1.) on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
(IV.4.1.3.) \quad &\left\langle \prod_{i=1}^{i_{\mu}-1} K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r}) t_v^* t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu}, \dots \right. \\
&\prod_{j=r-1}^{i_{\mu}+1} \prod_{i=i_{\mu}}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) \prod_{j=i_{\mu}}^2 \prod_{i=j-1}^1 K_{i,j}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,j}) v_{\mu} \left. \right\rangle \\
&= \langle t_v K_{i_{\mu},r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i_{\mu},r})^{-1} v_{\mu}, t_v v_{\mu} \rangle \prod_{i=1}^{i_{\mu}-1} \langle K_{i,r}^{\mu}(\alpha + \beta_{i,r}) v_{\mu}, v_{\mu} \rangle \dots
\end{aligned}$$

$$\dots < \prod_{j=2}^{r-1} \prod_{i=1}^{j-1} \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle$$

avec $q_{i,j} = 0$ pour $i_\mu < i < j \leq r-1$ et $q_{i,j} = 1$ pour les autres couples (i, j) tels que $1 \leq i < j \leq r-1$. Donc, d'après la Proposition I.6.4. on a (en remplaçant r par $r-1$)

$$< \prod_{j=2}^{r-1} \prod_{i=1}^{j-1} K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle = \prod_{j=2}^{r-1} \prod_{i=1}^{j-1} < K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})^{q_{i,j}} v_\mu, v_\mu \rangle$$

Montrons maintenant

$$(IV.4.1.4.) \quad < t_v \frac{K_{i_\mu, r}^\mu(\alpha + \beta_{i_\mu, r})^{-1}}{< K_{i_\mu, r}^\mu(\alpha + \beta_{i_\mu, r})^{-1} v_\mu, v_\mu \rangle} v_\mu, t_v v_\mu \rangle \\ = \Gamma_{\Omega(2)}(\mathbf{s}_{i_\mu, r} + \alpha - (r + i_\mu - 3) \frac{d}{2}) < \rho_{\pi_{i_\mu, r}^\alpha}(\alpha - (r + i_\mu - 3) \frac{d}{2})(e_2) v, v \rangle .$$

Pour cela, remarquons qu'on peut écrire :

$$t_v = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} \mu(k_{\ell}) = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} \mu'_{i_\mu, r}(\omega_{i_\mu, r}^{-1} k_{\ell} \omega_{i_\mu, r})$$

puisque $k_{\ell} \in K \cap G_{i_\mu, r}$ (voir notations du IV.1)).

Donc d'après le Lemme IV.1.2. (iii) 1)

$$t_v = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} \pi_{i_\mu, r}(\{\omega_{i_\mu, r}^{-1} k_{\ell} \omega_{i_\mu, r}\}_{J(2)})$$

avec

$$\{\omega_{i_\mu, r}^{-1} k_{\ell} \omega_{i_\mu, r}\}_{J(2)} \in \tilde{K}^{(2)}$$

On en déduit d'après (I.7.2.2.) appliqué à $\rho_{\pi_{i_\mu, r}^\alpha}(e_2)$ que :

$$\rho_{\pi_{i_\mu, r}^\alpha}(e_2) v = t_v \rho_{\pi_{i_\mu, r}^\alpha}(e_2) v_\mu$$

Donc d'après la Proposition I.7.2. appliquée à $\rho_{\pi_{i_\mu, r}^\alpha}(e_2)$ (avec $r = 2$) en utilisant le Lemme IV.1.2. (iii) on obtient la formule (IV.4.1.4.).

En utilisant maintenant (IV.4.1.2.), (IV.4.1.3.) et (IV.4.1.4.) on obtient l'égalité (IV.4.1.1.) pour $\alpha > \alpha^\mu$ avec

$$B_\mu(\alpha) = \Gamma_{\Omega(2)}(\mathbf{s}_{i_\mu, r} + \alpha - (r + i_\mu - 3) \frac{d}{2}) \dots$$

$$\prod_{i=1}^{i_\mu-1} \frac{\langle K_{i,r}^\mu(\alpha + \beta_{i,r})v_\mu, v_\mu \rangle}{\langle \{K_{i,r}^\mu(\alpha + \beta_{i,r})\}^{-1}v_\mu, v_\mu \rangle} \prod_{j=2}^{r-1} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}^{q_{i,j}}v_\mu, v_\mu \rangle}{\langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}^{-q_{i,j}}v_\mu, v_\mu \rangle}.$$

où $q_{i,j} = 0$ pour $i_\mu < i < j \leq r-1$ et $q_{i,j} = 1$ pour les autres (i, j) (tels que $1 \leq i < j \leq r-1$).

D'après (IV.2.0.1.), en utilisant le Lemme IV.1.2. (iii) on peut écrire pour $1 \leq i < j \leq r$

$$\begin{aligned} & \langle \{K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})\}^{-1}v_\mu, v_\mu \rangle^{-1} \\ &= \Gamma_{\Omega(2)}(\mathbf{s}_{i_\mu, r} + \alpha - (r + i_\mu - 3)\frac{d}{2}) \frac{\Gamma(\alpha + \beta_{i,j} - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha + \beta_{i,j})} \lambda_{\pi_{i,j}}(\alpha - (i + j - 3)\frac{d}{2}) \\ &= C_{1,2}^\mu \frac{(s_j + \alpha - (i + j - 1)\frac{d}{2})_{\frac{s_i - s_j}{2}}}{\Gamma(\alpha + \frac{s_i + s_j}{2} - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)} \end{aligned}$$

(d'après la Proposition III.1.3.).

On a aussi, d'après la Proposition I.4.2, en utilisant encore le Lemme IV.1.2. (iii)

$$\begin{aligned} & \langle K_{i,j}^\mu(\alpha + \beta_{i,j})v_\mu, v_\mu \rangle \\ &= \Gamma(\alpha - (i + j - 3)\frac{d}{2} + s_j - d - 1)^{-1} \Gamma(\alpha - (i + j - 3)\frac{d}{2} + s_i - 1)^{-1} \dots \\ & \langle \Gamma_{\pi_{i,j}}^{\alpha - (i+j-3)\frac{d}{2}} v_\mu, v_\mu \rangle = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(s_i + \alpha - (i + j - 2)\frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(s_i + \alpha - (i + j - 3)\frac{d}{2} - 1)}, \end{aligned}$$

en utilisant pour $\beta > \frac{d}{2}$

$$\langle \Gamma_{\pi_{i,j}^\beta} v_\mu, v_\mu \rangle = \int_{\Omega(2)} e^{-\text{tr } x} \Delta_{\mathbf{s}_{i,j} + \beta}(x) d^*x = \Gamma_{\Omega(2)}(\mathbf{s}_{i,j} + \beta).$$

Comme

$$\begin{aligned} & (s_r + \alpha - (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2})_{\frac{1}{2}(s_{i_\mu} - s_r)} \Gamma(s_r + \alpha - (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2}) \\ &= \Gamma(\alpha + \frac{s_{i_\mu} + s_r}{2} - (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2}), \end{aligned}$$

comme $\frac{s_r + s_i}{2} \geq s_r + 1$ pour $1 \leq i \leq i_\mu$ et que $d \geq 1$, il est facile de vérifier que $B_\mu(\alpha)$ se prolonge naturellement de $] \alpha^\mu, +\infty[$ à \mathbb{R} en une fonction méromorphe dont le plus grand des pôles est inférieur ou égal à $(r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r - \frac{1}{2}$. En notant encore $B_\mu(\alpha)$ ce prolongement à \mathbb{R} on vérifie facilement que

(IV.4.1.5.) pour $\alpha > (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$ $B_\mu(\alpha) > 0$

pour $\alpha = (r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r$

$$B_\mu(\alpha) = 0 \quad \text{si } i_\mu \leq r - 2$$

$$B_\mu(\alpha) > 0 \quad \text{si } i_\mu = r - 1$$

D'autre part, il est clair d'après (IV.3.2.1.) que pour $\alpha > (r + i_\mu - 3)\frac{d}{2} - s_r$ et tout $v \in V_\mu^{i_\mu, r}$, $\alpha \mapsto \mathcal{S}_\alpha v$ est analytique. Enfin

$\alpha \mapsto \langle \rho_{\pi_{i_\mu, r}^{\alpha - (r + i_\mu - 3)\frac{d}{2}}}(e_2)v, v \rangle$ est analytique sur \mathbb{R} pour tout $v \in V_\mu^{i_\mu, r}$

d'après la Proposition II.7.1. Par prolongement analytique on en déduit le (i) de ce Lemme.

(ii) Cela découle immédiatement de (IV.4.1.5).

Lemme IV.4.2.

Si dR_{μ^α} est à valeurs dans Herm^+V_μ alors $dR_{\mu^{\alpha + \frac{d}{2}}}$ est aussi à valeurs dans Herm^+V_μ .

Démonstration

Il existe une mesure positive $d\tau$ à support dans $\bar{\Omega}$ telle que pour tout $y \in \Omega$:

$$(\det y)^{-\frac{d}{2}} = \int_{\bar{\Omega}} e^{-\text{tr } yv} d\tau(v)$$

(voir [F-K] p 137, Theorem VII.3.1.)

On peut donc écrire pour $y \in \Omega$

$$\mu^{\alpha + \frac{d}{2}} (P(y))^{-1} = \int_{\bar{\Omega}} e^{-\text{tr } yv} (dR_{\mu^\alpha} * d\tau)(v)$$

où
$$(dR_{\mu^\alpha} * d\tau)(v) = \int_{\bar{\Omega} \cap (v - \bar{\Omega})} dR_{\mu^\alpha}(x) d\tau(v - x)$$

i.e.
$$dR_{\mu^{\alpha + \frac{d}{2}}} = dR_{\mu^\alpha} * d\tau$$

par injectivité de la transformée de Laplace. Le résultat de ce Lemme est alors clair.

Proposition IV.4.3.

- (i) pour $\alpha \in](r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r[$ $\rho_{\mu^\alpha}(e) \notin \text{Herm}^+V_\mu$
- (ii) pour $\alpha \in](r - 1)\frac{d}{2} - s_r, (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r[$ sauf peut être si $\alpha \in \{(r + i_\mu - 1 - p)\frac{d}{2} - s_r\}_{1 \leq p \leq i_\mu - 1}$ $\rho_{\mu^\alpha}(e) \notin \text{Herm}^+V_\mu$.

Démonstration

- (i) D'après la Proposition III.3.1., pour $\alpha \in](r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r, (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r[$ $\rho_{\pi_{i_\mu, r}^{\alpha - (r + i_\mu - 3)\frac{d}{2}}}(e_2) \notin \text{Herm}^+V_\mu^{i_\mu, r}$.

Donc d'après la Proposition IV.4.1. $\rho_{\mu^\alpha}(e) \notin \text{Herm}^+V_\mu$.

- (ii) S'il existait $\alpha_0 \in](r - 1)\frac{d}{2} - s_r, (r + i_\mu - 1)\frac{d}{2} - s_r[$ et $\alpha_0 \neq (r + i_\mu - 1 - p)\frac{d}{2}, 1 \leq p \leq i_\mu - 1$ tel que $\rho_{\mu^{\alpha_0}}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$, alors d'après le Lemme IV.4.2, pour tout $p \in \mathbb{N}$ on aurait $\rho_{\mu^{\alpha_0 + p\frac{d}{2}}}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$, ce qui est clairement contradictoire avec le (i) précédent.

Proposition IV.4.4.

Supposons $i_\mu = r - 1$; si $\alpha \in](r - 1)\frac{d}{2} - s_r, (r - 1)s - s_r[$ alors $\rho_{\mu^\alpha}(e) \notin \text{Herm}^+V_\mu$.

Démonstration

D'après la Proposition IV.4.3. (ii) on aurait en supposant le contraire $\rho_{\mu^{(r + i_\mu - 2)\frac{d}{2} - s_r}}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$. Mais alors d'après la Proposition IV.4.1. on aurait $\rho_{\pi_{i_\mu, r}^{\frac{d}{2} - s_r}}(e_2) \in \text{Herm}^+V_\mu^{i_\mu, r}$. Utilisons alors :

Lemme IV.4.5.

Si, dans la décomposition $\mu(P(x)) = \sum_{i \in \tilde{E}} \tilde{\text{Id}}_{\mathbf{m}_i}^\mu(x)$ relativement aux $\mathcal{P}_{\mathbf{m}_i}(\Omega)$, les $(\mathbf{m}_i)_{i \in \tilde{E}}$ ne vérifient pas la condition (A_2) pour $p = r - 1$, à savoir $m_{i, r} = (r - 1)\frac{d}{2} \quad \forall i \in \tilde{E}$, alors $\rho_{\mu^{(r - 1)\frac{d}{2} - s_r}}(e) \notin \text{Herm}^+V_\mu$.

Démonstration

Voir [H-N] Théorème 8.3. C'est aussi une conséquence immédiate de la Proposition II.8.1.(iii). D'après ce dernier Lemme appliqué à $\pi_{i_{\mu,r}}$, les \mathbf{m}_i $i \in \tilde{E}$ de la décomposition de $\pi_{i_{\mu,r}}(P(x))$ $x \in \Omega^{(2)}$ vérifieraient la condition A_2 ce qui n'est pas possible d'après III.3.3.(i).

Théorème IV.4.5.

Si $s_{r-1} > s_r$, Q_{μ^α} est défini positif si seulement si $\alpha \geq (r-1)d - s_r$.

Démonstration

S'il existait $\alpha_0 < (r-1)d - s_r$ tel que $dR_{\mu^{\alpha_0}}$ soit à valeurs dans Herm^+V_μ , alors d'après le Lemme IV.4.2. il existerait $\alpha_1 \in](r-1)\frac{d}{2} - s_r, (r-1)d - s_r[$ tel que $\rho_{\mu^{\alpha_1}}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$, ce qui est contradictoire avec la Proposition IV.4.4.

Proposition IV.4.6.

(i) pour $2 \leq p \leq r$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in V_\mu^{(p)}$

(IV.4.6.1.)

$$\langle \rho_{\mu^\alpha}(e) v_1, v_2 \rangle = \frac{2\pi^{(p(p-1)-r(r-1))\frac{d}{4}}}{\prod_{j=p+1}^r \Gamma(s_j + \alpha - (j-1)\frac{d}{2})} \langle \rho_{\pi_p^\alpha}(e_p) v_1, v_2 \rangle$$

(ii) Pour $\alpha > (r-1)\frac{d}{2} - s_r$, si $\rho_{\mu^\alpha}(e) \in \text{Herm}^+V_\mu$ alors $\rho_{\pi_p^\alpha}(e_p) \in \text{Herm}^+V_\mu^{(p)}$.

Démonstration

(ii) est une conséquence immédiate de (i) puisque $s_1 \geq \dots \geq s_r$.

(i) puisque $V_\mu^{(p)}$ est un $G^{(p)}$ -module irréductible, il existe t_{v_1} de la forme $t_{v_1} = \sum_\ell \lambda_\ell \mu(k_\ell)$ où $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$ et $k_\ell \in K^{(p)}$, tel que $t_{v_1} v_\mu = v_1$. Comme d'après (I.7.2.2.), pour tout $k \in K^{(p)}$, $\mu(k)$ commute avec $\rho_{\mu^\alpha}(e)$ et $\rho_{\pi_p^\alpha}(e_p)$, t_{v_1} commute avec $\rho_{\pi_p^\alpha}(e_p)$. Il suffit alors d'établir (IV.4.6.1.) en remplaçant v_1 par v_μ et v_2 par $t_{v_1}^* v_2$. Pour $\alpha > \alpha^\mu$, cela provient facilement du Lemme I.7.4. (en prenant $p = t-1$, $q_{i,j} = -1$ pour tout i, j , $v' = t_{v_1}^* v_2$) et de la Proposition I.7.2. appliquée à μ et à π_p en remarquant que

$$\frac{\Gamma_{\Omega^{(p)}}(\mathbf{s}^{(p)} + \alpha)}{\Gamma_{\Omega}(\mathbf{s} + \alpha)} = \frac{2\pi^{(p(p-1)-r(r-1))\frac{d}{4}}}{\prod_{j=p+1}^r \Gamma(s_j + \alpha - (j-1)\frac{d}{2})}$$

et en utilisant le Lemme IV.1.2.((ii). D'autre part, il est clair d'après la Proposition II.7.1. que les deux membres de l'égalité (IV.4.6.1.) sont analytiques en α sur \mathbb{R} . On en déduit par prolongement analytique (IV.4.6.1.) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Corollaire IV.4.7.

Soit $\alpha_p = (r + i_\mu - 1 - p)\frac{d}{2} - s_r$ avec $1 \leq p \leq i_\mu - 1$. Une condition nécessaire pour que $\rho_{\mu^{\alpha_p}}(e) \in \text{Herm}^+ V_\mu$ est que $i_\mu \leq r - p - 1$.

Démonstration

D'après la Proposition IV.4.6. (ii) on doit avoir

$$\rho_{\pi_{i_\mu+1}^{\alpha_p}}(e_{i_\mu+1}) \in \text{Herm}^+ V_\mu^{i_\mu+1}.$$

Comme $i_{\pi_{i_\mu+1}} = i_\mu$ on a donc d'après le Théorème IV.4.5. $\alpha_p \geq i_\mu d - s_r$.

REFERENCES

- [B] BOURBAKI N. "*Intégration*" Chap.7 Hermann Paris 1959.
- [C] CLERC J.L. "*Laplace transform and unitary highest weight modules*" *J.Lie Theory* 5 : 2 (1995), 225-240.
- [D-G] DING H. and GROSS K.H. "*Operator valued Bessel functions on Jordan algebras*" *J. reine angew. Math.* 435 (1993), 157-196.
- [E-H-W] ENRIGHT C.J., HOWE R. and WALLACH N. "*A classification of unitary highest weight modules*", *Proc. "Representation theory of reductive groups"* (Park City, UT 1982), *Progr. Math* 40 (1983), 97-143.
- [F-K] FARAUT J. and KORÁNYI A. "*Analysis on Symmetric Cones*" Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [He] HELGASON J. "*Groups and geometric analysis*" Acad. Press, London, 1984.
- [H-N] HILGERT J. and NEEB K. H. "*Unitary highest weight representations on tube domains*", prepublication, Institut Mittag - Leffler.
- [J] JAKOBSEN H.P. "*Hermitian Symmetric spaces and their unitary highest weight modules*" *J. Funct. Anal.* 52 (1983), 385-412.
- [J-V] JAKOBSEN, H.P. and VERGNE M. "*Wave and Dirac operators and representations of the conformal group*" *J. Funct. Anal.* 24 (1977), 52-106.
- [K] KUNZE R. "*Positive definite operators valued kernels and unitary representations*" in B.R. Geblaum Ed. *Proc. Conf. Functional Anal.* Irvine 1966.
- [K-S] KOSTANT B. and SAHI S. "*Capelli's identities and Jordan algebras*" *Invent. Math* 112 (1993), 657-664.

- [R-V] ROSSI H. and VERGNE M. “*Analytic continuation of the holomorphic discrete series of a semi simple Lie group*”, Acta Math. 136 (1976), 1-59.
- [Sa] SATAKE J. “*Algebraic Structures of Symmetric Domains*”, Iwanami Shoten, 1980.
- [Se] SERRE J.P. “*Algèbres de Lie semi simples complexes*”, Benjamin 1966.
- [W] WALLACH N. “*Real Reductive Groups I*” Academic Press, (1988).