



**HAL**  
open science

# Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes électrotechniques

Didier Marx

► **To cite this version:**

Didier Marx. Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes électrotechniques. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009. Français. NNT : 2009INPL078N . tel-01748773

**HAL Id: tel-01748773**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748773>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**Institut National Polytechnique de Lorraine**  
École Doctorale « Informatique-Automatique-Électrotechnique-Mathématiques »  
Département de Formation Doctorale « Électrotechnique-Électronique »

---

**THÈSE**

Présentée à

**L'Institut National Polytechnique de Lorraine**

En vue de l'obtention du titre de

**DOCTORAT de l'I.N.P.L.**

Spécialité : Génie Électrique

Par

**MARX Didier**

---

**Contribution à l'étude de la stabilité des  
systèmes électrotechniques**

---

Soutenue publiquement le 12 novembre 2009 devant la commission d'Examen

**Membres du Jury :**

Président :

BACHA Seddik

Rapporteurs :

BETIN Franck

MONMASSON Eric

Examineurs:

DAVAT Bernard

NAHID-MOBARAKEH Babak

PIERFEDERICI Serge

## Remerciements

Je remercie Monsieur Davat Bernard pour m'avoir accueilli à l'institut National Polytechnique de Lorraine au sein de l'Ecole Doctorale Informatique-Automatique-Electrotechnique-Mathématiques, au Département de Formation Doctorale Electrotechnique-Electronique.

Je remercie Monsieur Pierfederici Serge pour la confiance et la liberté qu'il m'a témoigné tout au long de mes travaux de recherches ainsi que pour son soutien, ses encouragements, ses conseils, sa compétence et son expérience.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Nahid-Mobarakeh Babak qui sur la phase finale de ma thèse s'est intéressé à mes travaux. On s'est découvert des centres d'intérêts communs et on a eu de fructueuses discussions.

Je tiens à remercier Latifa pour sa gentillesse, sa disponibilité, ainsi que tous les membres du laboratoire avec lesquels j'ai eu des contacts pour leur conviabilité.

J'exprime mes remerciements à Monsieur Bacha Seddik pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury de cette soutenance de thèse.

Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur Betin Franck et à Monsieur Monmasson Eric qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

## SOMMAIRE

<b>Introduction générale</b>	p.7
<b>Chapitre I : Présentation de la problématique</b>	
<b>1-Introduction</b>	p.9
1.1 - Historique des systèmes non linéaires	p.9
1.2 - Différentes non linéarités	p.9
1.3 - Systèmes de nature non linéaires	p.10
1.4 - Systèmes soumis à des non linéarités	p.10
<b>2-Modélisation et Contrôle conventionnel des hacheurs</b>	
2.1- Introduction	p.11
2.2 - Application au hacheur survolteur	p.11
<b>3-Contrôle conventionnel des ensembles onduleurs-moteurs, application à la Machine Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)</b>	
3.1- Introduction	p.17
3.2-Modélisation de l'ensemble onduleur-machine en vue de la commande vectorielle	p.18
3.2.1- Equations électriques de la machine	p.18
3.2.2- Expression du couple électromagnétique	p.20
3.2.3- Equations mécaniques	p.20
3.2.4- Modèle d'état non linéaire d'une MSAP	p.20
3.2.5- Onduleur de tension	p.21
3.3- Commande vectorielle des MSAP	p.24
3.3.1-Principe	p.24
3.3.2-Dimensionnement des Régulateurs	p.25
<b>4-Conclusion</b>	p.33
<b>Chapitre II : stabilité large signal des dispositifs électrotechniques – les méthodes d'analyse envisageables</b>	
<b>Introduction</b>	p.34
<b>1-Définition de la stabilité d'un système au sens de Lyapunov</b>	
1.1- Fonction de Lyapunov	p.34
1.1.1- Définitions	p.34
1.1.2- Fonction de Lyapunov quadratique	p.35
1.1.3- Fonction de Lyapunov non quadratiques	p.36
1.2- Etude des valeurs propres	p.37
1.3- Notions d'attractivité et de stabilité exponentielle	p.40
1.4- Mise sous forme d'inégalité matricielle linéaire	p.41
1.4.1- Principe	p.41
1.4.2- Application à la résolution du problème de Lyapunov	p.42

1.5- Fonctions et ensembles convexes	p.43
1.6- Région LMI et D- stabilité	p.45
1.6.1- Exemple de calcul de domaine convexe permettant d'assurer la D-stabilité	p.45
1.7- Outils importants	p.47
1.7.1- Lemme de Finsler	p.47
1.7.2- Complément de Schur	p.48
1.7.3- Dérivée de Lie	p.48
1.7.4- Utilisation de l'inégalité de Szasz	p.49
1.7.5-Utilisation du lemme de l'inégalité	p.50
1.7.6-Décomposition QR d'une matrice	p.50
1.7.7-Méthode de l'adjoint	p.50

## 2-Les méthodes usuelles d'analyse de la stabilité large signal envisageables

2.1- Généralités	p.52
2.2- Critères du cercle/Popov	p.53
2.2.1- Définitions et propriétés	p.53
2.2.2- Analyse de la stabilité	p.54
2.3- Théorème des petits gains	p.55
2.4- Utilisation des normes $H_2$ et $H_\infty$	p.55
2.4.1- Généralités	p.55
2.4.2- Utilisation des normes $H_2$ et $H_\infty$ pour l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov	p.58

## 3-Modélisation flou de type Takagi-Sugeno (TS)

3.1- Modèles flou de type Takagi-Sugeno	p.59
3.1.1- Exemples d'utilisation	p.61
3.2- Stabilité des modèles TS	p.63
3.3- Utilisation de la norme $H_\infty$ pour analyser la stabilité d'un modèle TS	p.67

## 4-Conclusion

## Chapitre III : Recherche de bassin d'attraction pour des non linéarités de type produit – application au hacheur survolteur

### 1-Introduction : Tentative de détermination d'un domaine convexe de stabilité par la méthode classique

### 2-Modèle TS d'un hacheur Boost programmé en mode courant

2.1- Mise sous forme TS	p.73
2.2-Recherche de fonctions de Lyapunov quadratiques ou non quadratiques	p.75
2.2.1- Utilisation des théorèmes n°1 et n°2 (chapitre II)	p.75
2.2.2- Utilisation du théorème n°3	p.79
2.3- Recherche de fonctions de Lyapunov non quadratiques avec variations paramétriques	p.80
2.4 -Comparaison entre résultats de simulation et résultats théoriques	p.84

### 3-Conclusion

## **Chapitre IV : Recherche de bassin d'attraction pour des non linéarités de type P/V**

<b>1-Modèle TS d'un système filtre d'entrée / ensemble onduleur moteur</b>	p.89
<b>2-Recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique : cas des paramètres à valeurs constants, filtre d'ordre 2</b>	
2.1-Théorème utilisé	p.91
2.2- Résolution du problème	p.92
2.3- Influence des paramètres sur la taille du bassin d'attraction trouvé	p.92
2.4- Analyse de la qualité d'estimation du bassin d'attraction trouvé	p.98
<b>3-Recherche d'une autre forme de bassin d'attraction</b>	
3.1- Courbes de Lamé	p.101
3.2- Résolution du problème	p.102
<b>4-Recherche de fonction de Lyapunov quadratique avec variations paramétriques pour le système d'ordre deux</b>	
4.1-Problématique	p.104
4.2-Résolution variante n°1 - utilisation du théorème 1	p.105
4.3-Résolution variante 2 - utilisation du théorème 3	p.108
<b>5-Utilisation de la norme <math>H_{\infty}</math></b>	
5.1-Mise en équation	p.110
5.2- Résolution	p.110
<b>6-D-stabilité</b>	
6.1-Problématique	p.111
6.2-Résolution	p.111
6.3- Conclusion	p.113
<b>7-Recherche de la stabilité pour un système d'ordre quatre</b>	
7.1-Système utilisé	p.113
7.2-Mise en équation	p.114
7.3-Résolution	p.115
7.4-Etude de la D-stabilité	p.116
7.5- résultats de simulation	p.116
<b>8-Stabilité exponentielle</b>	
8.1-Utilisation de l' $\alpha$ -stabilité	p.118
8.2-Utilisation des M-matrices	p.119
<b>9-Conclusion</b>	p.120

**Conclusion générale et perspectives**

p.121

**Références**

p.122



# Introduction Générale

L'électronique de puissance occupe depuis quelques années, une place de plus en plus importante dans l'industrie. Grâce à ces multiples topologies et à l'utilisation de stratégies de contrôle de plus en plus performantes, l'utilisation de l'électronique de puissance dans les procédés industriels a permis une amélioration notable des performances des procédés et une diminution du coût des équipements. Dans de nombreux secteurs d'activité comme par exemple l'automobile, l'aéronautique ou encore la construction navale, la tendance est au développement d'architecture de système électrique à puissance distribuée. Ces systèmes possèdent une grande flexibilité d'utilisation et une grande capacité d'intégration de charges de nature très diverses.

Le génie électrique est riche en non linéarité de toute sorte. En effet la plupart des convertisseurs statiques utilisés en électronique de puissance se modélise à un niveau ou un autre par des systèmes différentiels non linéaires avec ou sans dépendance explicite au temps. Plusieurs classes de systèmes non linéaires peuvent être mises en évidence.

La première catégorie regroupe les systèmes non linéaires continûment différentiables. Beaucoup de systèmes électrotechniques appartiennent à cette catégorie. C'est le cas des convertisseurs statiques modélisés au sens des grandeurs moyennes. C'est aussi le cas des dispositifs d'électronique de puissance quasi linéaires avec des éléments saturables comme les inductances. Pour l'étude et la modélisation de ces types de systèmes, on se place autour d'un point de fonctionnement (appelé point d'équilibre) et on étudie le comportement du système linéarisé autour de ce point. Le modèle proposé n'est alors valable que pour un fonctionnement du système autour du point d'équilibre et ne garantit nullement un bon fonctionnement notamment pendant les phases de démarrage du système ou suite à une large perturbation extérieure. En effet dans ces deux cas par exemple, le point de fonctionnement du dispositif peut se retrouver relativement éloigné du point d'équilibre souhaité.

Dans cette thèse, on s'intéresse aux différents outils de l'automatique non linéaire capable d'apporter des solutions et des critères de dimensionnement à ce type de problèmes.

Les méthodes de Lyapunov, les fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques, la stabilité exponentielle, les LMI (inégalités matricielles linéaires), la D-stabilité, les normes  $H_2$ ,  $H_\infty$ , et surtout les modèles de Takagi-Sugeno (T.S) sont autant d'outils que l'on va utiliser pour la résolution de ces problèmes.

Pour illustrer les méthodes qui seront développées, deux exemples électrotechniques seront traités :

- . la recherche du domaine d'attraction d'une alimentation à découpage fonctionnant à puissance constante,
- . la recherche du domaine d'attraction d'un ensemble filtre d'entrée onduleur/machine synchrone à aimant permanent muni de sa commande (commande vectorielle).

Dans le chapitre I, on va détailler les deux systèmes qui vont servir d'exemple de travail à savoir le contrôle d'un hacheur élévateur programmé en courant et fonctionnant en mode de conduction continue et la commande d'une machine synchrone à aimant alimenté via un filtre d'entrée du second ordre par un bus continu d'alimentation.

Dans le chapitre II, on va présenter un ensemble de définitions, outils et théorèmes qui vont être utilisés par la suite pour résoudre le problème de stabilité large signal des systèmes électrotechniques décrits au chapitre I.

Le chapitre III traite du problème de stabilité large signal d'un hacheur de type élévateur programmé en mode courant et fonctionnant en mode de conduction continue. La commande

du système est supposée connue et stable. Elle est basée sur une approche conventionnelle utilisant une modélisation moyenne du convertisseur suivie d'une linéarisation au premier ordre. La synthèse des correcteurs est réalisée via une approche fréquentielle. L'objectif de l'étude est d'essayer d'établir la stabilité large signal du hacheur et notamment d'estimer la taille du bassin d'attraction autour du point d'équilibre du système sachant que la commande est fixée. Une telle information permettra de prouver un fonctionnement correct du système en présence de perturbations extérieures bornées, information que l'approche petit signal ne peut apporter.

Le chapitre IV s'intéresse au cas des systèmes pouvant être modélisés par un dispositif électrique fonctionnant à puissance constante. C'est notamment le cas de la plus part des hacheurs contrôlés en tension ou des actionneurs contrôlés en couple ou vitesse lorsque ceux-ci sont munis de contrôle à dynamique élevée en rejet de perturbations. Une méthode d'analyse de la stabilité large signal va être proposée. On montre l'impact des paramètres du système sur la taille des bassins d'attraction trouvés. Des outils permettant de quantifier les propriétés dynamiques de tels systèmes vont être détaillés.

# Chapitre I : Présentation de la problématique

## 1- Introduction

### 1.1 - Historique des systèmes non linéaires

L'étude des systèmes non linéaires constitue un vaste et difficile domaine, commencée vers la fin du dix-neuvième siècle.

Le grand précurseur est le mathématicien français Henri Poincaré :

- . Sur les courbes définies par les équations différentielles (1881- 1886).
- . Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (1892- 1899).

Puis A.M Lyapunov fonda la théorie de la stabilité :

- . Le problème général de la stabilité du mouvement (1892).

Au vingtième siècle, on peut distinguer trois courants :

1. Entre les deux guerres mondiales, les ingénieurs étudièrent les problèmes d'oscillation. Le chercheur russe A.A. Andronov trouva en 1929 dans les travaux de Poincaré le fondement de sa Théorie des oscillations (1938).
2. Après la seconde guerre, plusieurs chercheurs soviétiques précisèrent et appliquèrent les travaux de Lyapunov sur la stabilité dont A.I. Lourié, I.G. Malkine et M.A. Ayzerman ; puis S. Wegrzyn en Pologne reformula le problème de la stabilité à l'aide de l'analyse fonctionnelle.
3. Vers 1950, des chercheurs de tous les pays s'inspirèrent des méthodes d'étude et de synthèse des systèmes linéaires en temps continu et échantillonné, méthodes devenues classiques, pour élaborer des techniques applicables aux systèmes non linéaires, par exemple la méthode des réponses en fréquences ( L.C. Goldfarb, J. Dutilh, R. Kochenburger ).

Les critères graphiques de stabilité non linéaire (critère de Popov, critère du cercle) se situent aux alentours des courants 2 et 3.

La théorie des systèmes par plus-ou-moins, fondée simultanément par B. Hamel en France et par Z. Cypkin en URSS se place dans les courants 1 et 3.

Les travaux sur les systèmes échantillonnés non linéaires de P. Vidal utilisent les trois courants 1, 2, 3.

### 1.2 - Différentes non linéarités

Un système linéaire est un système régi par des équations différentielles linéaires et homogènes à coefficients constants vérifiant le principe de superposition (propriétés d'additivité et d'homogénéité).

Le terme non linéaire peut englober une infinité de systèmes avec des modélisations conduisant à introduire des équations complexes.

L'analyse des systèmes dynamiques non-linéaires représente un défi :

- . d'une part, l'observation de la nature et des objets techniques révèle la structure profondément non-linéaire des systèmes qui nous entourent, et ce de manière parfois si dure que les non-linéarités ne peuvent pas toujours être contournées. Il semble donc nécessaire d'attaquer cette problématique de façon approfondie.

- . d'autre part, les difficultés mathématiques qui apparaissent sont grandes, et l'on sait rarement obtenir la solution explicite de la trajectoire d'un système non linéaire.

Les calculateurs, munis de leurs algorithmes d'intégration, ne savent pas résoudre tous les problèmes et conduisent même parfois l'analyste dans des pièges redoutables.

### 1.3 - Systèmes de nature non linéaires

Ils ont un fonctionnement non linéaire dans leurs principes.

On distingue les relais, les interrupteurs, les organes fonctionnant par plus-ou-moins ou par tout-ou-rien. L'hystérésis, par exemple, apparaît dans des modèles de la courbe d'aimantation d'un noyau de fer.

Les moteurs électriques sont non linéaires.

### 1.4 - Systèmes soumis à des non linéarités

Ils sont linéaires dans leur conception générale, mais ils subissent :

- . des frottements statiques qui créent des seuils de sensibilité ou zones mortes
- . des butées et des limitations en courant ou tension qui créent des saturations.

On va alors s'intéresser à la stabilité des systèmes non linéaires.

Föllinger a donné des définitions pour caractériser la stabilité :

Définition 1 : Un système est localement stable si on peut garantir la stabilité pour une valeur particulière d'état. Si l'équilibre est stable, on peut s'attendre qu'autour de ce point d'équilibre le système soit stable. Mais on ne connaît pas la taille de ce domaine et rien sur ce domaine n'a été démontré.

Définition 2 : Une valeur particulière de l'état d'un système, appelée état d'équilibre, est asymptotiquement stable pour un sous-ensemble de l'espace d'état si on peut garantir que l'état converge vers cet équilibre pour chaque valeur de tout ce sous-ensemble.

Définition 3 : Une valeur particulière de l'état d'un système, appelée état d'équilibre, est globalement asymptotiquement stable si on peut garantir que l'état converge vers cet équilibre pour chaque valeur de tout l'espace d'état.

## 2- Modélisation et Contrôle conventionnel des hacheurs

### 2.1- Introduction

La littérature est riche en commande de toutes sortes. Toutefois, il est possible de les classer en deux grandes approches.

La première est qualifiée d'approche en courant. La régulation est alors constituée de deux boucles d'asservissement : une boucle de courant qui asservit le courant absorbé par le convertisseur à une référence donnée et une boucle de tension qui impose en sortie de convertisseur une tension régulée et qui fixe la référence de courant (figure 1-1-a).

Pour les convertisseurs de petites puissances (inférieure à quelques centaines de watts) la boucle de courant peut être supprimée. La sortie du régulateur de tension est alors directement connectée au modulateur MLI. Cette technique constitue la deuxième approche qualifiée d'approche en tension (figure 1-1-b).

Une fois choisie la stratégie de contrôle du hacheur, il ne reste plus qu'à fixer la nature des régulateurs de courant et de tension. Dans la plus part des applications, ces régulateurs sont des régulateurs linéaires. Le dimensionnement de ces régulateurs est basé sur l'étude du modèle petit signal du convertisseur. Le correcteur utilisé est généralement constitué d'une fonction de transfert à deux pôles et un zéro. Le premier pôle nul assure une erreur statique nulle, le second filtre la composante HF du courant. Le gain statique ainsi que le zéro permet d'ajuster la largeur de bande et la marge de phase. La prise en compte des effets d'échantillonnage (dus au fait que le rapport cyclique n'est déterminé qu'une seule fois par cycle de commutation) conduit à prendre en compte dans la boucle de régulation en courant un pôle supplémentaire. Pour éviter tout problème de stabilité, la pulsation de coupure de l'asservissement en courant est en général choisie de manière à ne pas dépasser la moitié de la pulsation de découpage. Quant à la pulsation de coupure de l'asservissement en tension, elle est en général choisie une décade en dessous de celle de courant.

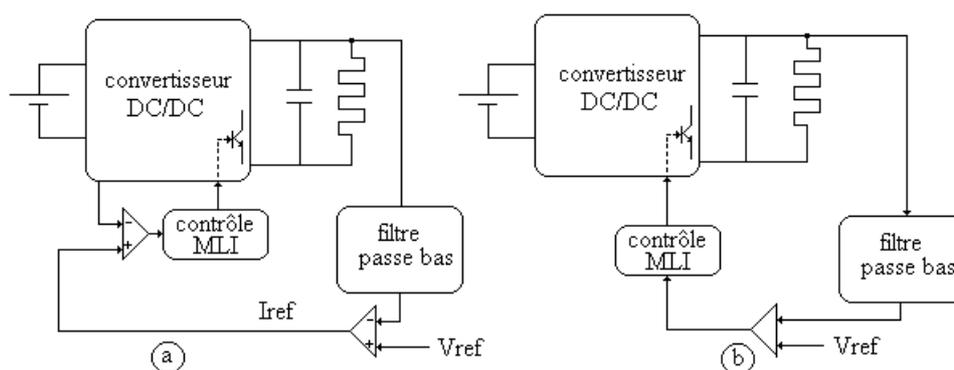


Figure 1-1 : Méthode de commande, approches en courant (a) ou en tension (b).

## 2.2 - Application au hacheur survolteur

On fait l'hypothèse que le convertisseur statique est muni d'une commande petit signal à fréquence fixe de type 'contrôle en courant moyen'. On suppose que le dimensionnement a été réalisé de manière à satisfaire aux critères usuels de stabilité et qu'au point de fonctionnement considéré, le convertisseur fonctionne en mode de conduction continue. On suppose de plus, que toutes les constantes de temps du système régulé sont largement supérieures à la période de découpage, ce qui permet de travailler sur le modèle équivalent moyen du convertisseur. Un schéma du convertisseur et de sa commande est présenté sur la figure 1-2.

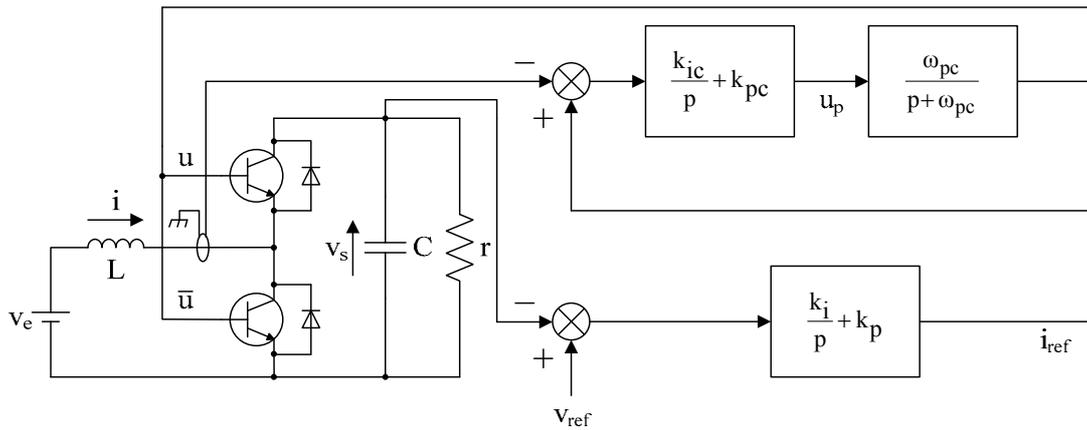


Figure 1-2 : Convertisseur de type Boost muni de sa commande en courant moyen.

L'utilisation des schémas équivalents moyens conduit au schéma équivalent moyen ci-dessous :

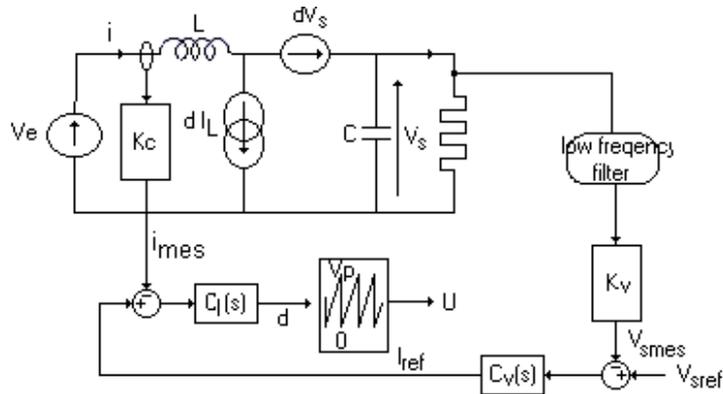


Figure 1-3 : schéma équivalent moyen du convertisseur Boost et sa commande.

Les coefficients  $K_c$  et  $K_v$  représentent respectivement les gains de mesure des capteurs de tension et de courant. Au sens des grandeurs moyennes, le courant inductif moyen  $\bar{i}$  et la tension de sortie moyenne  $\bar{V}_s$  vérifient les équations différentielles suivantes :

$$L \frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{V}_e - (1-d)\bar{V}_s$$

$$C \frac{d\bar{V}_s}{dt} = (1-d)\bar{i} - \frac{\bar{V}_e}{r}$$

Pour toutes les variables, on pose:  $\bar{X} = X_0 + \hat{x}$  où  $X_0$  correspond à la valeur de  $\bar{X}$  en régime établi et  $\hat{x}$  à une variation supposée petite de  $\bar{X}$  autour de  $X_0$ .

Après développement au premier ordre puis transformée de Laplace, il vient :

$$L \cdot s \cdot \hat{i}(s) = \hat{v}_e(s) - (1-D_0) \cdot \hat{v}_s(s) + V_{s0} \cdot \hat{d}(s)$$

$$C \cdot s \cdot \hat{v}_s(s) = (1-D_0) \cdot \hat{i}_L(s) - I_0 \cdot \hat{d}(s) - \frac{\hat{v}_s(s)}{r} \quad (1-1)$$

Calcul de la fonction de transfert en courant :

Pour l'obtenir il suffit d'éliminer la variation de tension d'une des deux équations précédentes et de la réinjecter dans l'autre. Il vient alors :

$$\hat{v}_s(s) = \frac{1}{1-D_0} \cdot (-L \cdot s \cdot \hat{i}(s) + \hat{v}_e(s) + V_{s0} \cdot \hat{d}(s))$$

Après simplifications il vient:

$$r \cdot (1-D_0)^2 \cdot \left(1 + \frac{L}{r(1-D_0)^2} \cdot s + \frac{L \cdot C}{(1-D_0)^2} \cdot s^2\right) \cdot \hat{i}(s) = (2 + r \cdot C \cdot s) \cdot V_{s0} \cdot \hat{d}(s) + (1 + r \cdot C \cdot s) \cdot \hat{v}_e(s)$$

On peut alors extraire de cette dernière équation, la fonction de transfert en asservissement du convertisseur :

$$\frac{\hat{i}_L(s)}{\hat{d}(s)} = \frac{2 \cdot V_{s0}}{r \cdot (1-D_0)^3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{r \cdot C}{2} \cdot s\right)}{\left(1 + \frac{L}{r(1-D_0)^2} \cdot s + \frac{L \cdot C}{(1-D_0)^2} \cdot s^2\right)} \quad (1-2)$$

On en déduit alors aisément la fonction de transfert en boucle ouverte de notre système :

$$\frac{\hat{i}_{mes}(s)}{\hat{i}_{ref}(s)} = K_c \cdot \frac{2 \cdot V_{e0}}{r \cdot (1-D_0)^3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{r \cdot C}{2} \cdot s\right)}{\left(1 + \frac{L}{r(1-D_0)^2} \cdot s + \frac{L \cdot C}{(1-D_0)^2} \cdot s^2\right)} \cdot \frac{1}{V_p} \cdot C_1(s) \quad (1-3)$$

Où  $\frac{I}{V_p}$  représente le gain du modulateur MLI

$$C_I(s) = k_{pc} \frac{(1 + \tau_c \cdot s)}{\tau_c \cdot s \cdot \left(\frac{s}{\omega_{pc}} + 1\right)} \quad \text{et} \quad \tau_c = \frac{k_{pc}}{k_{ic}}$$

Le dimensionnement du régulateur se fait en choisissant les paramètres de commande de manière à respecter les contraintes usuelles de stabilité données ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{Marge de phase} &> 45^\circ \\ \text{Marge de gain} &> 5 \text{ dB} \end{aligned}$$

Calcul de la fonction de transfert en tension:

Pour l'obtenir il suffit d'éliminer cette fois-ci la variation du rapport cyclique d'une des deux équations (1) et de la réinjecter dans l'autre. Il vient alors :

$$\hat{d}(s) = \frac{1}{V_{s0}} \cdot (L \cdot s \cdot \hat{i}(s) - \hat{v}_e(s) + (1 - D_0) \cdot \hat{v}_s(s))$$

On peut alors écrire:

$$\frac{(2 + r \cdot C \cdot s)}{r} \cdot \hat{v}_s(s) = \left( (1 - D_0) - \frac{L \cdot I_0}{V_{s0}} \cdot s \right) \cdot \hat{i}_L(s) + \frac{I_{L0}}{V_{s0}} \cdot \hat{v}_e(s)$$

Pour calculer la fonction de transfert du système, on fait l'hypothèse que la dynamique de la boucle de courant est bien supérieure à celle de tension. On peut alors considéré que pour le dimensionnement de la boucle de tension, le courant moyen mesuré suit parfaitement sa référence.

Il vient alors:

$$\frac{\hat{v}_s(s)}{\hat{i}(s)} = \frac{\left( (1 - D_0) - \frac{L \cdot I_0}{V_{s0}} \cdot s \right) \cdot r}{(2 + r \cdot C \cdot s)} \quad (1-4)$$

L'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit

$$\frac{\hat{v}_{smes}(s)}{\hat{v}_{sref}(s)} = \frac{K_v}{K_c} \cdot \frac{\left( (1 - D_0) - \frac{L \cdot I_{L0}}{V_{s0}} \cdot s \right) \cdot R}{(2 + R \cdot C \cdot s)} \cdot C_v(s) \quad (1-5)$$

avec

$$C_v(s) = K_{pv} \cdot \frac{(1 + \tau_v \cdot s)}{\tau_v \cdot s} \quad \text{et} \quad \tau_v = \frac{k_{pv}}{k_{iv}}$$

Comme pour la boucle de courant, les paramètres du régulateur de tension sont dimensionnés de manière à vérifier les normes usuelles de stabilité données précédemment.

Afin de simplifier les notations, on va par la suite supposer que les gains de mesure sont unitaire tout comme le gain du modulateur MLI.

On obtient alors les paramètres suivants pour le système et sa commande :

$$\begin{aligned}
 L &= 1 \text{ mH} & C &= 1000 \mu\text{F} \\
 v_{réf} &= 400 \text{ V} & k_i &= 500 & k_{ic} &= 500 \\
 v_e &= 312 \text{ V} & k_p &= 10 & k_{pc} &= 0.05 \\
 r &= 160 \Omega & \omega_{pc} &= 6.28 \cdot 10^4 \text{ rad / s}
 \end{aligned}$$

L'un des grands problèmes liés à cette méthode de conception est que cette commande est issue d'un modèle petit signal obtenu par linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Il est alors difficile de déterminer avec exactitude le domaine de validité de cette commande surtout si on s'éloigne du point de fonctionnement. C'est notamment le cas lors des phases de démarrage ou dans la majorité des cas, l'état du système est relativement éloigné du point de fonctionnement. C'est aussi le cas lors de brutales variations de charge comme par exemple le passage d'un fonctionnement à vide à un fonctionnement à charge nominale. Dans tous ces cas de figures, le comportement du système est inconnu et l'approche précédente ne garantit nullement la convergence de la trajectoire d'état vers le point de fonctionnement désiré.

Pour pouvoir étudier le comportement dit « large signal » du système, il sera donc nécessaire dans une première étape de mettre sous forme d'état les équations différentielle qui régissent le fonctionnement du système en boucle fermée. L'origine de l'espace d'état va être placée au point d'équilibre du système défini par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 u_0 &= 1 - \frac{v_e}{v_{réf}} = u_{p0} \quad . \\
 i_0 &= \frac{I}{1 - u_0} = \frac{V_{s0}}{r} \cdot \frac{I}{1 - u_0} \\
 v_{s0} &= \frac{v_e}{1 - u_0} = v_{ref}
 \end{aligned} \tag{1-6}$$

Les équations liées à la commande sont exprimées ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 i_{réf} &= k_p \cdot (v_{réf} - v_s) + k_i \int_0^t (v_{réf} - v_s) dt \\
 \frac{du_p}{dt} &= k_{pc} \cdot \left( \frac{di_{réf}}{dt} - \frac{di}{dt} \right) + k_{pc} \cdot (i_{réf} - i) \\
 \frac{du}{dt} &= \omega_{pc} \cdot (u_p - u)
 \end{aligned} \tag{1-7}$$

On désire étudier le système autour du point d'équilibre, on pose donc :

$$\begin{aligned}
i^* &= i - i_0 \\
v_s^* &= v_s - v_{s0} \\
u^* &= u - u_0 \\
u_p^* &= u_p - u_0 \\
i_{réf}^* &= i_{réf} - i_0
\end{aligned} \tag{1-8}$$

L'équation différentielle régissant le fonctionnement du système autour de son point de fonctionnement peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{réf}^*}{dt} \\ \frac{du^*}{dt} \\ \frac{dv_s^*}{dt} \\ \frac{di^*}{dt} \\ \frac{du_p^*}{dt} \end{bmatrix} = [A]^* \begin{bmatrix} i_{réf}^* \\ u^* \\ v_s^* \\ i^* \\ u_p^* \end{bmatrix} + [B]^* \begin{bmatrix} u^* \cdot i^* \\ u^* \cdot v_s^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \end{bmatrix} = [A]^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + [B]^* \begin{bmatrix} x_2 \cdot x_4 \\ x_2 \cdot x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-9}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_p \cdot i_0}{C} & (\frac{k_p}{rC} - k_i) & \frac{k_p \cdot (u_0 - 1)}{C} & 0 \\ 0 & -w_{pc} & 0 & 0 & w_{pc} \\ 0 & \frac{-i_0}{C} & \frac{-1}{rC} & \frac{1 - u_0}{C} & 0 \\ 0 & \frac{v_{s0}}{L} & \frac{u_0 - 1}{L} & 0 & 0 \\ k_{ic} & \frac{k_p \cdot k_{pc} \cdot i_0}{C} - \frac{k_{pc} \cdot v_{s0}}{L} & \frac{k_p \cdot k_{pc}}{rC} + \frac{k_{pc}}{L} - k_{pc} \cdot k_i - \frac{k_{pc}}{L} u_0 & -k_{ic} + \frac{k_p \cdot k_{pc} \cdot (u_0 - 1)}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_p \cdot k_{pc}}{C} & \frac{-k_{pc}}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On constate donc que ce système est un système non linéaire donc les non linéarités sont de type produit de la forme  $x_2x_4$  et  $x_2x_3$ . Ce type de non linéarité se retrouve avec la plus part des hacheurs fonctionnant en mode de conduction continue et utilisant une commande conventionnelle à base de régulateur linéaire. On verra dans les chapitres suivants comment résoudre le problème de l'analyse de la convergence de la trajectoire d'état vers le point d'équilibre souhaité du système pour cette classe de non linéarité.

### 3- Contrôle conventionnel des ensembles onduleurs-moteurs, application à la Machine Synchrones à Aimants Permanents (MSAP)

#### 3.1- Introduction

L'asservissement des machines à courant alternatif alimentées par des convertisseurs statiques pour en faire des actionneurs à vitesse variable devient de plus en plus courant. Parmi des machines électriques utilisées, les machines synchrones à aimants permanents (MSAP) ont un couple volumique élevé et une inertie très faible. De plus, elles ont des inductances relativement faibles, ce qui entraîne des réponses rapides des courants et donc du couple. Pour diminuer le taux d'ondulation de courant et de couple, elles sont alimentées par d'onduleurs de tension, à base de composants de haute fréquence de découpage (IGBT par exemple). En outre, grâce aux progrès de l'électronique numérique et l'apparition des processeurs rapides de traitement numérique (DSP), la réalisation de leur commande est devenue de plus en plus simple. L'ensemble de ces propriétés leur donne un avantage incontestable dans la motorisation d'actionneurs de forte puissance massique et de hautes performances, notamment dans les systèmes embarqués [36]. La figure 1-4 représente l'ensemble commande-onduleur-machine.

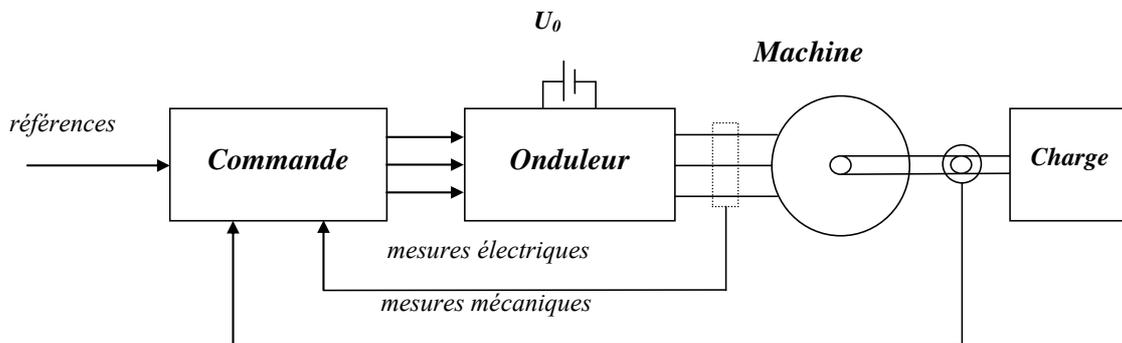


Figure 1-4 : Ensemble Commande-Onduleur-Machine.

Ce paragraphe est consacré à une brève description des différentes parties de l'ensemble commande-onduleur-machine. Les MSAP sinusoïdales ont un modèle relativement simple dans le "repère de Park". Pour cela on présente d'abord les transformations utilisées pour passer d'un repère fixe à un repère tournant, puis les modèles d'état non linéaires et un modèle linéaire basé sur la matrice de transfert pour ces machines sont donnés. Ensuite, l'onduleur triphasé de tension et sa modélisation sont décrits. On présente brièvement les avantages et les inconvénients de différents types de régulateurs, linéaire ou non-linéaire, susceptibles de contrôler les variables électromécaniques du système.

### 3.2-Modélisation de l'ensemble onduleur-machine en vue de la commande vectorielle

#### 3.2.1- Equations électriques de la machine

On va uniquement nous intéresser ici aux MSAP à fem sinusoïdale. La machine synchrone à aimants permanents (MSAP) considérée dans cette étude comporte un stator et un rotor de constitution symétrique avec  $p$  paires de pôles. Les enroulements statoriques sont connectés en étoile à neutre isolé. L'excitation rotorique est créée par des aimants permanents au rotor. Ces aimants sont supposés rigides et de perméabilité voisine de celle de l'air.

Les machines synchrones sont classées en deux catégories "sinusoïdale" et "non sinusoïdale" en fonction de la répartition spatiale des conducteurs. Les machines synchrones sinusoïdales alimentées par des courants sinusoïdaux présentent un couple constant et leur modèle en régime linéaire est relativement simple dans le "repère de Park". Mais la répartition spatiale sinusoïdale n'est qu'un idéal théorique. Les machines réelles ont des conducteurs au stator logés dans un nombre fini d'encoches, ce qui ne permet pas d'obtenir une répartition sinusoïdale exacte des conducteurs. Cependant, l'hypothèse de la répartition sinusoïdale des f.m.m. est justifiée dans un grand nombre des machines synchrones triphasées sans liaison de neutre qui comporte un nombre suffisant d'encoches par pôle et par phase avec une réalisation de bobinages à faible taux d'harmoniques d'espace [36].

Afin de simplifier la modélisation de la machine, les hypothèses suivantes sont faites :

- La répartition des forces magnétomotrices est sinusoïdale.
- Le circuit magnétique de la machine n'est pas saturé.
- L'effet d'amortissement au rotor est négligé.
- Les irrégularités de l'entrefer dues aux encoches statoriques sont ignorées.
- Les phénomènes d'hystérésis et les courants de Foucault sont négligés.
- Les couplages capacitifs entre les enroulements sont négligés.

Les équations électriques des machines électriques dans un repère fixe lié au stator sont décrites par :

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

avec  $R_s$  la résistance des phases statoriques,  $[v_a \ v_b \ v_c]^T$  les tensions des phases statoriques,  $[i_a \ i_b \ i_c]^T$  les courants des phases statoriques et  $[\Psi_a \ \Psi_b \ \Psi_c]^T$  les flux totaux à travers les bobines statoriques.

Comme les enroulements statoriques sont montés en étoile à neutre isolé, la somme instantanée des courants statoriques est nulle, de sorte qu'il n'y a pas de courant homopolaire. Par conséquent, s'il existe une composante homopolaire de tension ou de flux, elle n'intervient pas dans le couple [38]. Le comportement de la machine est donc représenté par deux variables indépendantes. En appliquant la transformation restreinte de Concordia  $T_{32}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_\alpha \\ \Psi_\beta \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

$$\text{où : } \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = T'_{32} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}, \text{ avec } \mathbf{T}_{32} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

$x$  peut être  $v$ ,  $i$ , ou  $\Psi$ .

En appliquant la transformation de Park au système d'équations (1-11), on peut exprimer tous les vecteurs dans un repère lié au rotor. Si  $\theta$  est l'angle électrique désignant la position du rotor par rapport au stator, on a :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} + \dot{\theta} P\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} \Psi_d \\ \Psi_q \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

$$\text{où : } \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = P(-\theta) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}, \text{ avec } P(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

$v_d$ ,  $v_q$ ,  $i_d$  et  $i_q$  sont les composantes direct et en quadrature de tension et de courant.  $\Psi_d$  et  $\Psi_q$  sont les composantes directe et en quadrature du flux.

Dans les machines synchrones à répartition sinusoïdale des conducteurs,  $\Psi_d$  et  $\Psi_q$  sont fonctions linéaires des courants  $i_d$  et  $i_q$  :

$$\begin{cases} \Psi_d = L_d i_d + \Psi_f \\ \Psi_q = L_q i_q \end{cases} \quad (1-15)$$

$L_d$  et  $L_q$  sont les inductances directe et en quadrature et elles sont supposées indépendantes de  $\theta$ .  $\Psi_f$  représente le flux des aimants à travers le circuit équivalent direct. En reportant les expressions des flux dans l'équation (1-14) on aboutit à :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \omega P\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

où  $\omega = p\Omega$ ,  $p$  étant le nombre de paires de pôles et  $\Omega$  la vitesse angulaire du rotor.  $e_d$  et  $e_q$  sont les composantes directe et en quadrature de f.e.m. données par :

$$\begin{cases} e_d = 0 \\ e_q = p\Psi_f \Omega \end{cases} \quad (1-17)$$

Dans le cas des machines synchrones à aimants permanents et à rotor lisse, les inductances directe et en quadrature sont identiques ( $L_d = L_q = L$ ). Le système d'équations (1-16) se simplifie alors à :

$$\begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} = R_s \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + L\omega P\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

### 3.2.2- Expression du couple électromagnétique

Le couple électromécanique développé par les machines synchrones à f.e.m. sinusoïdale peut être donné par la relation suivante [39] :

$$\Gamma_m = p (\psi_\alpha i_\beta - \psi_\beta i_\alpha) = p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) = p (\Psi_f - (L_q - L_d) i_d) i_q \quad (1-19)$$

Si le rotor est lisse ( $L_d = L_q$ ), cette équation se simplifie en :

$$\Gamma_m = p \Psi_f i_q \quad (1-20)$$

### 3.2.3- Equations mécaniques

La conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique dans les machines synchrones est régie par la relation suivante :

$$J \frac{d}{dt} \Omega = \Gamma_m - \Gamma_{ch} \quad (1-21)$$

où  $\Gamma_{ch}$  est le couple de charge et  $J$  le moment d'inertie des parties tournantes de l'ensemble machine-charge. La position du rotor évolue d'après l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \theta = p \Omega \quad (1-22)$$

La représentation fonctionnelle du modèle de Park des MSAP est illustrée sur la figure 1-5.

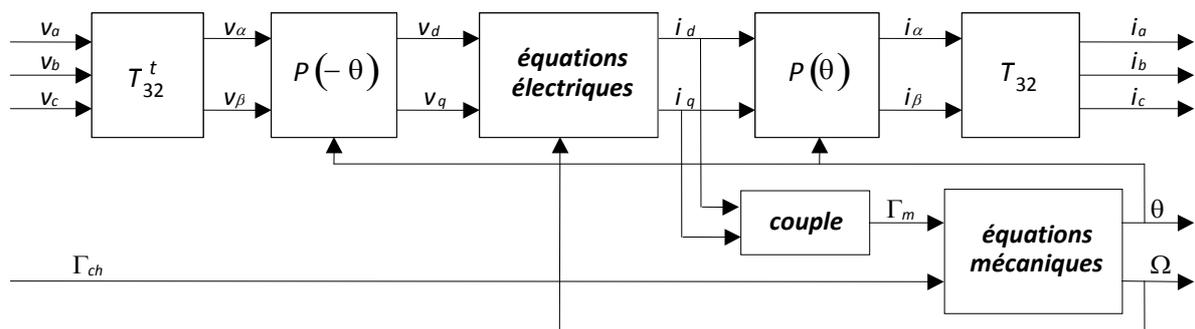


Figure 1-5 : Schéma fonctionnel du modèle de Park.

### 3.2.4- Modèle d'état non linéaire d'une MSAP

La présentation du modèle d'état demande, dans un premier temps, la définition du vecteur d'état  $x$ , du vecteur d'entrée  $u$  et du vecteur de sortie  $y$ . Dans le cas fréquent du modèle (1-16),

les entrées de la machine sont les tensions statoriques  $v_d$  et  $v_q$  et les courants statoriques  $i_d$  et  $i_q$  composent le vecteur de sortie.

Suivant le but de la commande (régulation de couple, de vitesse ou de position), le vecteur d'état peut être constitué de trois ou de quatre variables d'état. Dans le cas d'une régulation de couple ou de vitesse angulaire, le modèle non linéaire d'état dans le repère tournant  $d$ - $q$  est décrit par le système ci-dessous :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_s}{L_d} i_d + \frac{pL_q}{L_d} i_q \Omega \\ \frac{-R_s}{L_q} i_q - \frac{pL_d}{L_q} i_d \Omega - \frac{p\Psi_f}{L_q} \Omega \\ \frac{p\Psi_f}{J} i_q - \frac{p(L_q - L_d)}{J} i_d i_q - \frac{1}{J} \Gamma_{ch}(\Omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_d \\ v_q \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

Ce modèle est non linéaire à cause des termes  $i_d \Omega$ ,  $i_q \Omega$ ,  $i_d i_q$  et  $\Gamma_{ch}$ . En effet, le couple de charge  $\Gamma_{ch}$  est supposé fonction non linéaire de  $\Omega$ . Il est décrit par :

$$\Gamma_{ch}(\Omega) = b_0 \operatorname{sgn}(\Omega) + b_1 \Omega + b_2 \Omega^2 + b_3 \Omega^3 + \dots \quad (1-24)$$

où les coefficients  $b_i$  sont inconnus et pour tout  $\Omega$  appartenant aux plages des vitesses possibles du système on suppose que  $\Gamma_{ch}$  est une fonction croissante de  $\omega$  :

$$\frac{d}{d\Omega} \Gamma_{ch}(\Omega) > 0 \quad (1-25)$$

Le couple de charge  $\Gamma_{ch}$  est considéré généralement comme perturbation à compenser par le régulateur de vitesse.

### 3.2.5- Onduleur de tension

Les onduleurs de tension alimentent les machines à courant alternatif à partir d'une source de tension continue. Ils permettent d'imposer aux bornes de la machine des tensions d'amplitude et de fréquence réglables par la commande. Une machine triphasée sans liaison de neutre est alimentée par un onduleur de tension à trois bras comprenant chacun deux cellules de commutation. Chaque cellule est composée d'un interrupteur, commandé à l'amorçage et au blocage et d'une diode antiparallèle. Dans ce travail, l'onduleur est commandé par la technique de Modulation de Largeur d'Impulsions (MLI) échantillonnée symétrique [40]. Elle consiste à imposer aux bornes de la machine des tensions, hachées à fréquence fixe, évoluant en fonction des références de tension obtenues à partir des régulateurs des courants. A l'aide d'un signal triangulaire appelé "porteuse", ces tensions sont modulées en largeur d'impulsions (MLI) afin de déterminer les instants de commutation et la durée de conduction de chaque interrupteur de l'onduleur. A chaque instant, l'un des deux interrupteurs de chaque bras est en conduction et l'autre est bloqué. En MLI échantillonnée symétrique, le signal de référence est constant pendant au moins une période de la porteuse. Ce qui permet de calculer facilement les instants d'intersection du signal de référence avec la porteuse au début de chaque période de celle-ci.

### Modélisation des onduleurs de tension

Dans l'étude de l'ensemble commande-onduleur-machine-charge, on s'intéresse uniquement au comportement dynamique des variables électriques et mécaniques de la machine. Du fait que les constantes de temps des machines et des régulateurs sont très grandes devant le temps de transition d'un état à l'autre des composants semi-conducteurs, on peut faciliter la modélisation et réduire le temps de simulation en modélisant l'onduleur par un ensemble d'interrupteurs idéaux : c'est-à-dire résistance nulle à l'état passant, résistance infinie à l'état bloqué, réaction instantanée aux signaux de commande. Cette méthode est la plus couramment utilisée dans l'étude de l'ensemble onduleur-machine. La figure 1-6 présente le schéma de cet onduleur et son modèle. Les six interrupteurs de l'onduleur relient les deux bornes de la source de tension aux trois phases de la machine. L'état de conduction des composants de l'onduleur peut être représenté par une matrice de connexion [37] de dimension (2,3) dont chaque élément représente l'état de conduction d'un interrupteur :

$$C = \begin{bmatrix} c_{pa} & c_{na} \\ c_{pb} & c_{nb} \\ c_{pc} & c_{nc} \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

Les indices  $p$  et  $n$  spécifient la liaison des éléments aux bornes positive ou négative de la source et les indices  $a$ ,  $b$  et  $c$  indiquent les trois phases de sortie de l'onduleur :

- 1-  $c_{ij}=1$  lorsque l'interrupteur reliant la borne  $i$  de la source de tension à la phase  $j$  de la machine est passant.
- 2-  $c_{ij}=0$  lorsque l'interrupteur correspondant est bloqué.

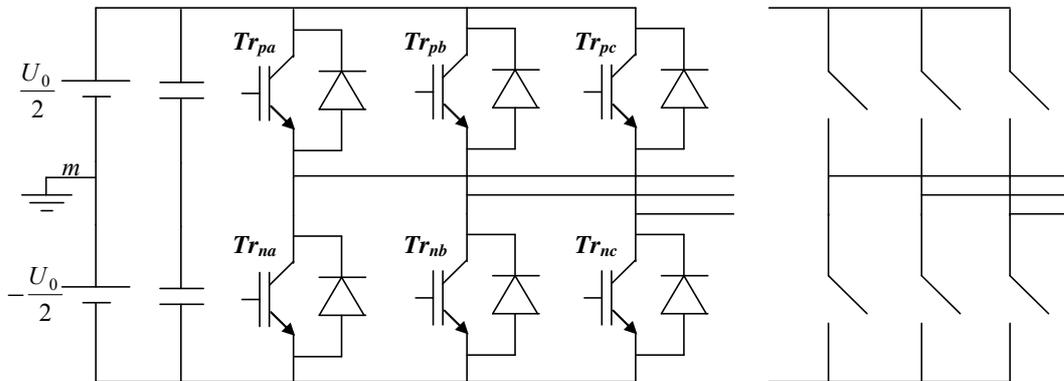


Figure 1-6 : Schéma de l'onduleur et son modèle.

Les tensions de sortie de l'onduleur par rapport au point milieu  $m$  de la source pris comme la référence de potentiel sont données par :

$$\begin{bmatrix} v_{am} \\ v_{bm} \\ v_{cm} \end{bmatrix} = \frac{U_0}{2} C \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

et pour éliminer la composante homopolaire dans les expressions des tensions aux bornes des enroulements statoriques, on a :

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} = T_{32} T_{32}^t = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{am} \\ v_{bm} \\ v_{cm} \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

La figure 1-7 montre le principe de la commande d'un bras de l'onduleur par la technique MLI échantillonnée symétrique. La tension de référence  $v_{jr}$  est constante sur une période de la porteuse  $T_p$  et les commandes  $c_{pj}$  et  $c_{nj}$  sont déterminées à partir des intersections de la porteuse et la référence.

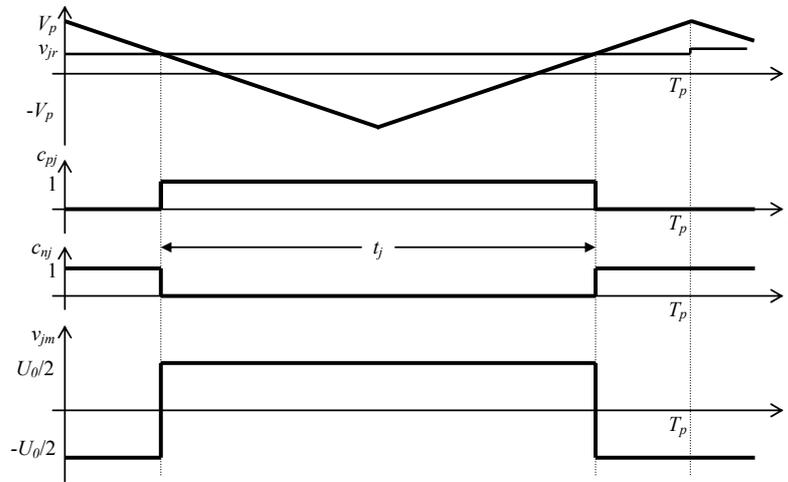


Figure 1-7: Principe de la commande MLI échantillonnée symétrique d'un bras de l'onduleur.

A chaque période de la porteuse, il faut déterminer les rapports cycliques  $t_j$  (i.e. les instants de commutations des interrupteurs) de manière suivante :

$$t_j = \left( \frac{1}{2} + \frac{v_{jr}}{2V_p} \right) T_p, \quad |v_{jr}| < V_p, \quad j = a, b, c \quad (1-29)$$

Dans le cas où les interrupteurs sont considérés idéaux, la tension moyenne de la phase  $j$  est :

$$\bar{v}_j = \left( \frac{2t_j}{T_p} - 1 \right) \frac{U_0}{2} \quad (1-30)$$

Ce qui nous conduit au modèle suivant, au sens des valeurs moyennes sur une période de hachage, de l'onduleur à MLI :

$$\bar{v}_j = G_{ond} v_{jr}$$

avec :  $G_{ond} = \frac{U_0}{2V_p}$  (1-31)

Ce modèle d'onduleur peut aussi bien être utilisé pour la synthèse des régulateurs que pour les méthodes de commande sans capteur mécanique [35].

### 3.3 -Commande vectorielle des MSAP

#### 3.3.1-Principe

Quel que soit le but de la commande (régulation de couple, de vitesse ou de position), le contrôle du couple de moteur est nécessaire. Celui-ci, dépendant des deux variables  $i_d$  et  $i_q$  selon la relation (1-19), nous laisse un degré de liberté. Cette liberté peut être exploitée afin de satisfaire un critère d'optimisation selon l'application. L'objectif principal de la commande vectorielle des MSAP est donc de contrôler le couple de manière optimale selon un critère choisi. Compte tenu de l'importance de la contrainte thermique dans les machines électriques, le critère choisi correspond souvent à la minimisation des pertes Joule à couple donné. Celles-ci, étant proportionnelles au courant efficace, amènent à minimiser  $i_d^2 + i_q^2$  à couple voulu. Mais ce critère demande la solution d'un problème d'optimisation qui impose le contrôle simultané de  $i_d$  et  $i_q$ . Pour simplifier la commande, on fixe souvent le courant  $i_d$  de manière que le couple soit proportionnel à  $i_q$  (relation (1-19)) dans une plage de vitesse donnée. Dans les machines à rotor lisse, où le couple ne dépend que de la composante en quadrature du courant selon (1-20), la valeur optimale du courant direct est évidemment zéro :

$$i_{d\text{ ref}} = 0$$

Le couple est contrôlé par la composante en quadrature,  $i_{q\text{ ref}}$  est donc proportionnel au couple demandé. La commande vectorielle revient alors à contrôler les deux composantes  $i_d$  et  $i_q$  du courant statorique en imposant les tensions  $v_d$  et  $v_q$  qui conviennent. Comme on l'a vu, l'onduleur de tension à MLI peut être modélisé par un gain  $G_{ond}$ , par conséquent pour imposer les tensions  $v_d$  et  $v_q$ , il suffira d'imposer les tensions de référence  $v_{dr}$  et  $v_{qr}$  à l'entrée de l'onduleur. A l'aide des régulateurs, on obtient les tensions de référence permettant de maintenir les courants direct et en quadrature au voisinage de leurs valeurs de référence  $i_{d\text{ ref}}$  et  $i_{q\text{ ref}}$ . Le schéma bloc du principe de la commande vectorielle des MSAP est représenté sur la figure 1-8.

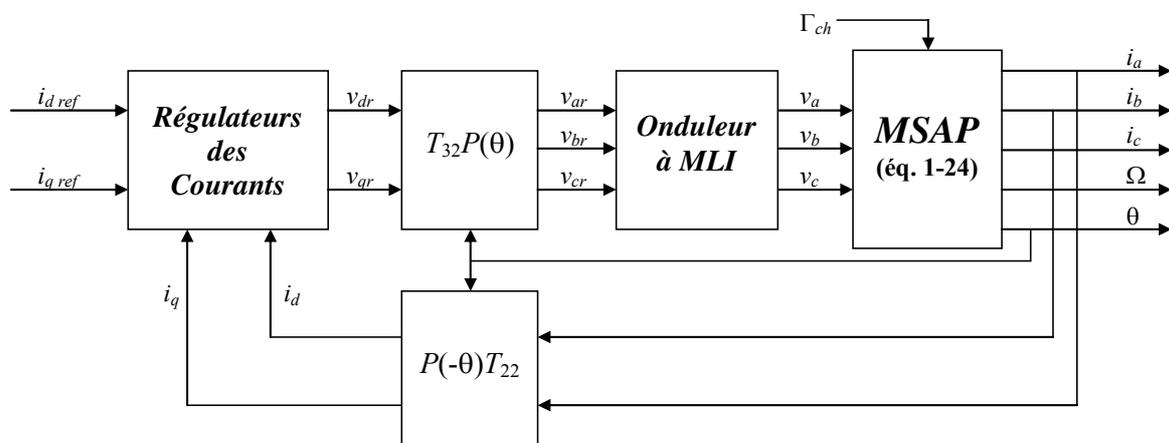


Figure 1-8 : Schéma principal de la commande vectorielle des MSAP.

Sur ce schéma, la matrice  $T_{22}$  est définie par :

$$T_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En réalité on n'a accès qu'aux tensions et courants des trois phases de la machine. Le passage aux grandeurs intermédiaires (tensions et courants de Park) se fait à l'aide des transformations de Park et de Concordia (directe et inverse). Sous les hypothèses suivantes :

- la période de la porteuse  $T_p$  est suffisamment petite par rapport aux constants de temps électriques de la machine, et la pulsation de la porteuse  $\omega_p=2\pi/T_p$  est nettement supérieure à la pulsation électrique maximale de la machine,
- la précision de la mesure de position est suffisante,

le schéma de la figure 1-8 se réduit au schéma 1-9 qui représente le schéma simplifié de la commande vectorielle des MSAP.

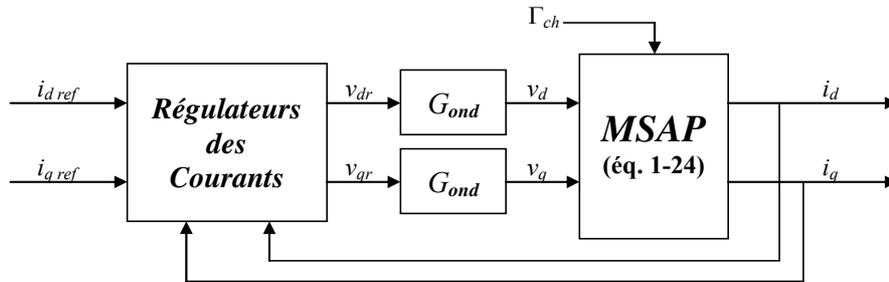


Figure 1-9 : Schéma simplifié de la commande vectorielle des MSAP.

### 3.3.2- Dimensionnement des Régulateurs

Dans ce paragraphe, on rappelle brièvement les méthodes de conception les plus usuelles des régulateurs utilisés dans le contrôle des MSAP. Les régulateurs sont supposés être dans un premier temps linéaire de type PI. On suppose de plus qu'une structure de commande par boucle imbriquée montrée sur la figure 1-10 est utilisée.

Dans ce cas, on peut distinguer deux modes : le mode électrique (mode rapide : boucle interne) et le mode mécanique (mode lent : boucle externe). Le fait de pouvoir séparer les modes électriques et mécaniques permet de décomposer un système d'ordre élevé en plusieurs sous systèmes d'ordre faible et donc avoir une boucle externe et une boucle interne (imbriquée) pour la synthèse des correcteurs aisée. Pour un fonctionnement correct, il faut respecter un écart entre les dynamiques des deux boucles. La dynamique de la boucle interne doit être sensiblement plus rapide que la dynamique de la boucle externe. La commande par boucle imbriquée est alors classiquement appliquée à la MSAP, puisqu'elle permet de contrôler séparément les courants  $i_d$  et  $i_q$  (et donc le couple) et la vitesse  $\Omega$ .

On se limitera donc par la suite aux régulateurs PI suivants :

$$C_d(s) = K_d \frac{1 + \tau_{id}s}{\tau_{id}s}, \quad C_q(s) = K_q \frac{1 + \tau_{iq}s}{\tau_{iq}s}, \quad C_\omega(s) = K_\omega \frac{1 + \tau_{i\omega}s}{\tau_{i\omega}s} \quad (1-32)$$

où  $C_d(s)$  et  $C_q(s)$  sont les régulateurs des courants direct et en quadrature ( $i_d$  et  $i_q$ ) et  $C_\omega(s)$  est le régulateur de vitesse angulaire mécanique  $\Omega$ .

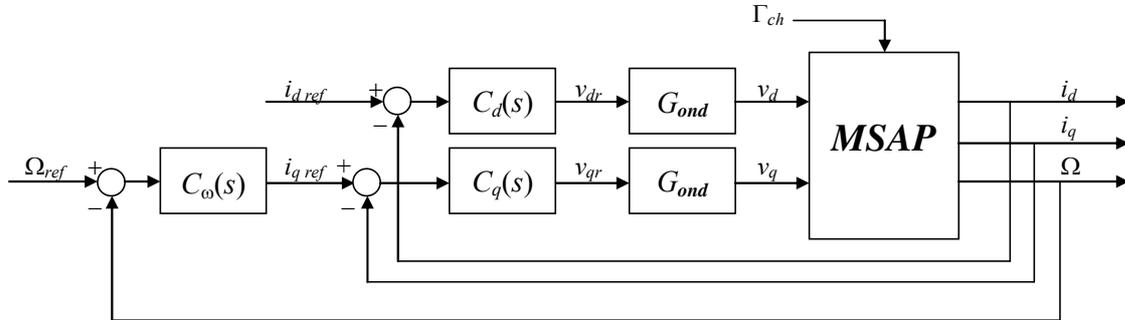
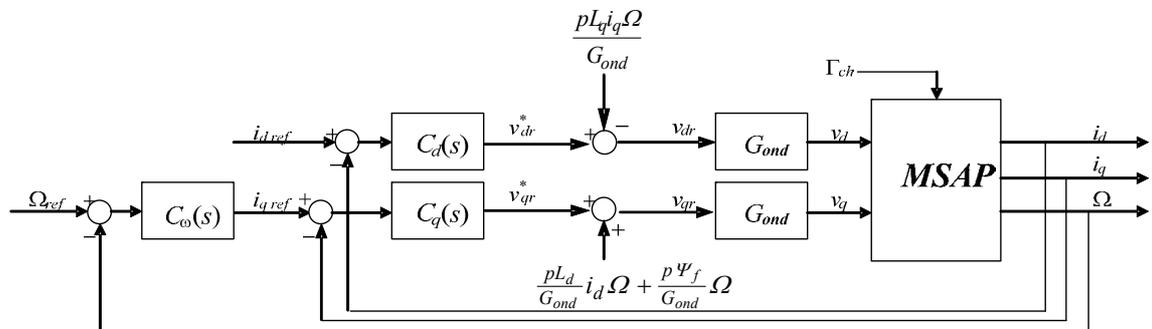
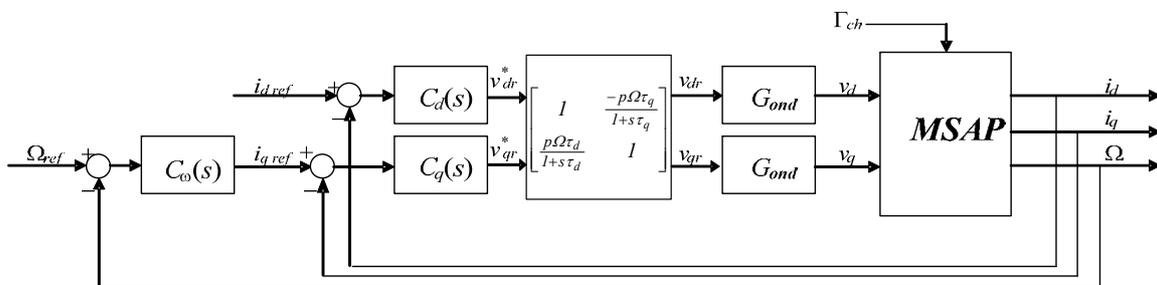


Figure 1-10 : Régulation des courants et de vitesse des MSAP.

Comme le montre les équations du système (1-23), il existe un couplage entre les courants d'axes  $dq$  de la machine synchrone. Dans beaucoup d'applications, il est possible de découpler les contrôles des courants d'axes  $dq$  à l'aide d'une stratégie de découplage. Il existe deux variantes de celle-ci à savoir les découplages de type « feedforward » ou « feedback ». La première se base sur le modèle linéarisé du système (1-23) autour d'un point de fonctionnement. Cette stratégie de découplage est représentée sur la figure 1.11-a. La seconde issue directement du modèle (1-23) permet de découpler sans linéarisation le contrôle des courants d'axes  $dq$ . Elle est représentée sous forme de schéma bloc sur la figure 1.11-b.



a : découplage de type « feedback »



b : découplage de type « feedforward »

Figure 1-11 : Régulation des courants et de vitesse des MSAP avec découplage des courants d'axes  $dq$  où  $\tau_d$  et  $\tau_q$  sont les constantes électriques d'axe  $d$  et  $q$ .

Une fois le système découplé, les fonctions de transfert en boucle ouverte courant – tension ( $i_d/v_d$  ou  $i_q/v_q$ ) sont des systèmes de premier ordre sans zéro triviaux à contrôler. L'approche précédente permet d'implanter sans difficulté une commande vectorielle de MSAP.

### Influence de l'alimentation continue de l'onduleur

Cependant le contrôle et notamment celui des courants reste très dépendant du niveau de tension de l'étage continu  $U_0$  et de ses fluctuations. C'est notamment le cas dans beaucoup d'application embarquée où cette tension continue est obtenue par redressement du réseau triphasé de bord et filtrage. Un schéma équivalent de l'alimentation DC est présenté sur la figure 1.12.

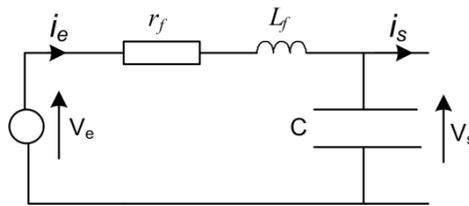
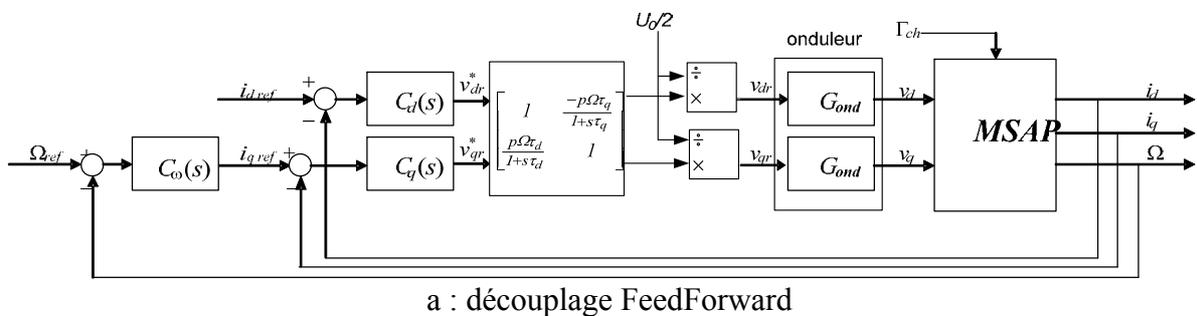


Figure 1.12 : schéma équivalent d'une l'alimentation DC obtenue par redressement PD3

$$\text{avec } V_e = \frac{3\sqrt{2}}{\pi} V_{RMS}, L_f = 2L + L_{DC}, r_f = 2R_L + R_{DC} + \frac{3}{\pi} Lw.$$

- $L$  et  $L_{dc}$  représentent respectivement les inductances de ligne du réseau alternatif et du réseau continu,
- $R_L$  et  $R_{dc}$  représentent respectivement les résistances de ligne du réseau alternatif et du réseau continu,
- le terme  $\frac{3}{\pi} Lw$  modélise la chute de tension due à l'empiètement du pont PD3.

Lors de brutaux appels de charge, le courant absorbé par l'onduleur augmente fortement ce qui se traduit alors par une chute de tension. Cette chute de tension va induire une perturbation au niveau des régulateurs de courants d'axe  $dq$  qui doivent alors compenser la baisse du gain de l'onduleur. Pour s'affranchir de ce problème, les variations de gain de l'onduleur sont souvent compenser par la commande. On utilise alors un schéma de commande de l'onduleur comme présenté sur la figure 1.13.



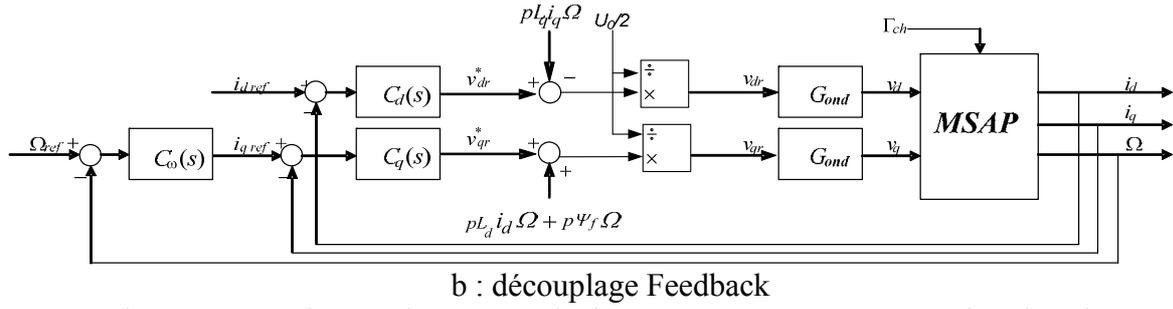


Figure 1.13 : schémas de commande d'une MSAP avec compensation de gain.

Bien que muni d'une structure de découplage (feedback) non linéaire et d'une compensation de gain, les régulateurs linéaires sont souvent associés à de faibles propriétés dynamiques notamment en rejection de perturbation et à des propriétés dynamiques fonction du point de fonctionnement. Pour améliorer la dynamique du système en rejet de perturbation et obtenir des asservissements de courants dont les dynamiques sont indépendantes du point de fonctionnement, des contrôles non linéaires peuvent être utilisés. Dans cette thèse, on a opté pour un contrôle glissant des courant d'axe  $dq$  dont le principe est détaillé ci-dessous.

En réécrivant l'équation (1-23) augmentée de deux nouvelles variables d'état supplémentaires correspondant à l'intégral de l'erreur de courant d'axe  $dq$ , il vient :

$$\begin{pmatrix} L_d \cdot \frac{di_d}{dt} \\ L_q \cdot \frac{di_q}{dt} \\ J \cdot \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{de_d}{dt} \\ \frac{de_q}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s \cdot i_d + p \cdot \Omega \cdot i_q \cdot L_q + \frac{v_{dr} \cdot U_0}{2 \cdot V_c} \\ -R_s \cdot i_q - p \cdot \Omega \cdot i_d \cdot L_d - p \cdot \Omega \cdot \psi_f + \frac{v_{qr} \cdot U_0}{2 \cdot V_c} \\ p \cdot i_q \cdot \psi_f - f \cdot \Omega - p \cdot (L_q - L_d) \cdot i_d \cdot i_q - \Gamma_{ch} \\ i_d - i_{dref} \\ i_q - i_{qref} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{y} = f(y) + g(y) \cdot u \quad (1-33)$$

où -  $V_c$  correspond à l'amplitude maximale de la porteuse MLI,  
-  $y = [i_d \quad i_q \quad \Omega \quad e_d \quad e_q]^T$ ,  $u = [v_{dr} \quad v_{qr}]^T$

Le principe du contrôle est de forcer la trajectoire d'état à évoluer à l'intersection de deux surfaces définies comme suit :

$$S = \begin{bmatrix} s_d \\ s_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{d1} \cdot (i_d - i_{dref}) + k_{d2} \cdot e_d \\ k_{q1} \cdot (i_q - i_{qref}) + k_{q2} \cdot e_q \end{bmatrix} = K \cdot (y - y_{ref})$$

$$\text{avec } y_{ref} = [i_{dref} \quad i_{qref} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \text{ et } K = \begin{bmatrix} k_{d1} & 0 & 0 & k_{d2} & 0 \\ 0 & k_{q1} & 0 & 0 & k_{q2} \end{bmatrix}$$

Le vecteur commande est calculer à partir de la loi de ralliement suivante :

$$\dot{s} = -Q \cdot \text{sign}(e) - \lambda(s) \quad (1-34)$$

$$\begin{aligned}
Q &= \text{diag}[q_1 \quad q_2], \quad q_1 > 0, q_2 > 0, \\
\text{avec } e &= [e_d \quad e_q]^t \\
\lambda(s) &= \text{diag}[\lambda_d \quad \lambda_q]S, \quad \lambda_d > 0, \lambda_q > 0.
\end{aligned}$$

Le calcul du vecteur commande en partant de (1-35) conduit alors à :

$$u = (K.g(y))^{-1} \cdot [K.f(y) - \lambda(s) - Q.\text{sign}(e)] \quad (1-35)$$

Le calcul des pôles du système en boucle fermée se fait en remplaçant la commande donnée en (1-35) dans l'équation du système (1-33). Le calcul des valeurs propres de la matrice de Jacobi du système autour d'un point de fonctionnement conduit alors à quatre valeurs propres ne dépendant que des paramètres de commande (elles ne dépendent donc pas du point de fonctionnement ou des paramètres du système). La cinquième valeur propre est liée à l'évolution de la vitesse (non régulée) et est fonction à la fois des paramètres du système et de sa commande.

Avec cette approche, la dynamique des boucles de courant est indépendante du point de fonctionnement. De plus la dynamique en rejet de perturbations (dues aux erreurs de modélisation ou à des perturbations extérieures) est grande. La compensation des variations de tension continue se fait au niveau du calcul de la commande équivalente (relation 1-36) via le calcul du déterminant de la matrice  $K.g(y)$ . Il s'en suit que vis-à-vis des variations de tension du bus continu, il est possible de supposer que la dynamique de rejection est bien plus grande que les dynamiques liées au bus continu. Les résultats expérimentaux présentés sur les figures 1-14 et 1-15 permettent de valider cette hypothèse. Sur cet essai la tension d'entrée évolue brutalement de 200 à 256 volts. Comme le montre les résultats expérimentaux, le régulateur glissant permet de rejeter très rapidement cette perturbation extérieure puisque les courants d'axe  $dq$  ne sont quasiment pas affectés par la perturbation.

On peut alors supposer que, vue de l'étage continu, l'ensemble onduleur moteur peut être considéré comme un dispositif fonctionnant à puissance constante. Pour analyser la stabilité du réseau DC, on peut alors considérer le système d'ordre réduit présenté sur la figure 1.16.

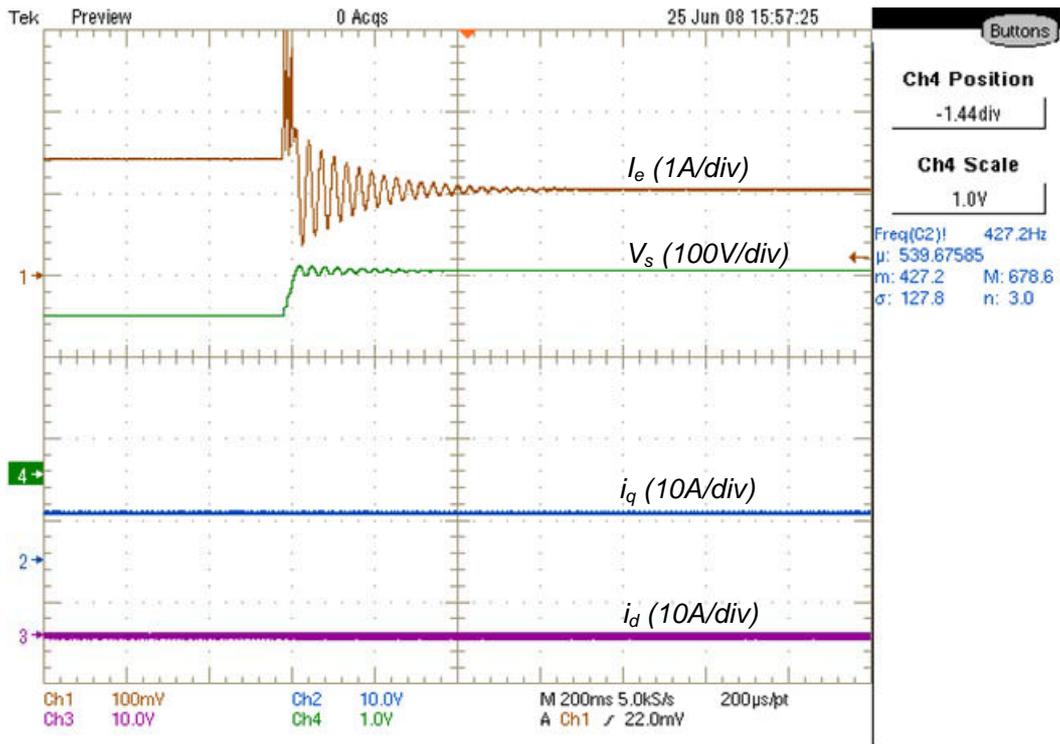


Figure 1-14 : Comportement du système lors d'une variation de la tension d'entrée qui varie de 200 à 256V,  $C=500 \mu\text{F}$ ,  $L_f=39.5 \text{ mH}$ ,  $R_f=1.1 \Omega$

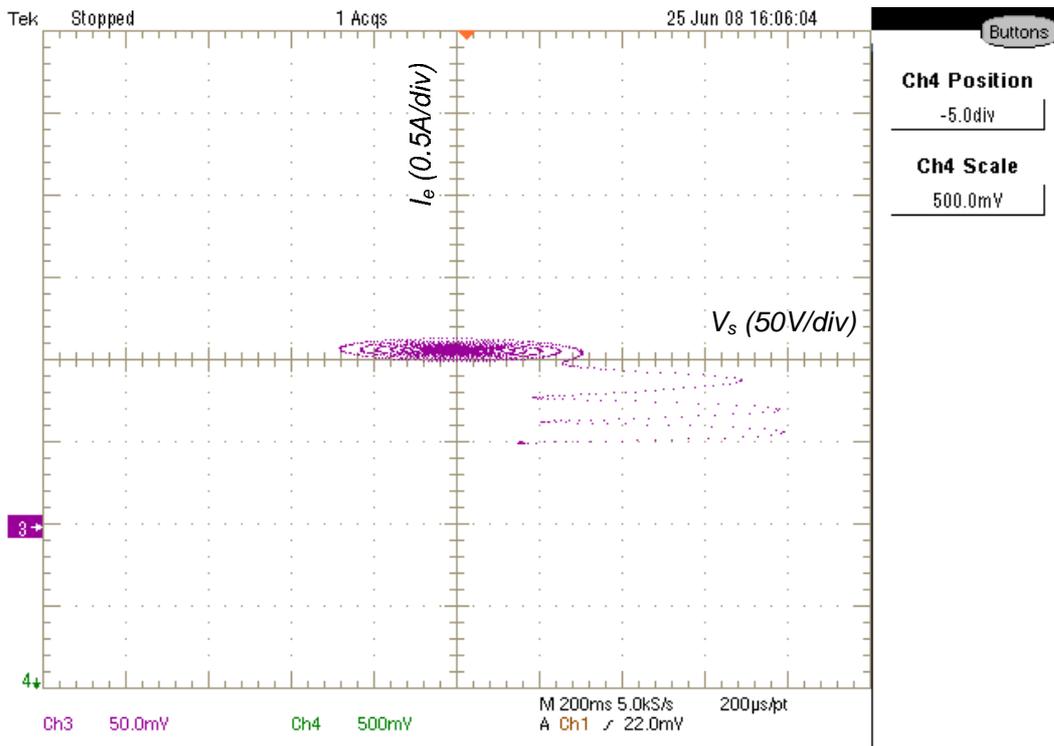
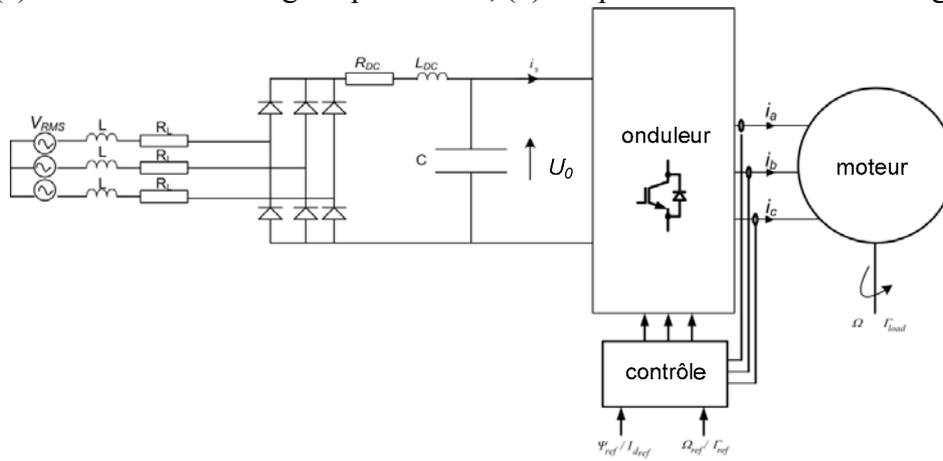


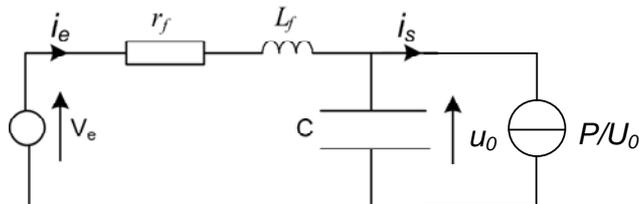
Figure 1-15 : Evolution dans l'espace d'état des variables liées au filtre d'entrée après un échelon de de tension d'entrée de 200 à 256V.



(a) : Schéma de montage expérimental, (b) : la partie de la MSAP et charge.



(c) : schéma de principe du système étudié



(d) : modélisation utilisée pour étudier la stabilité du bus continu

Figure 1-16 : ensemble onduleur-moteur avec son alimentation.

Le point de fonctionnement de ce système réduit est défini par les relations suivantes :

$$i_0 = \frac{V_e - u_0}{r_f} = \frac{P}{u_0}, \quad u_0 = \frac{V_e + \sqrt{V_e^2 - 4Pr_f}}{2} \quad (1-36)$$

$$\text{avec } P < P_{\max} = \min\left(\frac{r_f C}{L_f} u_0^2, \frac{1}{4r_f} u_0^2\right) \quad (1-37)$$

Dans le cas où la condition (1-37) n'est pas vérifiée, des oscillations traduisant des interactions entre l'alimentation et l'actionneur peuvent alors être observées. La figure 1-17 présente le comportement du système dans ce cas de figure.

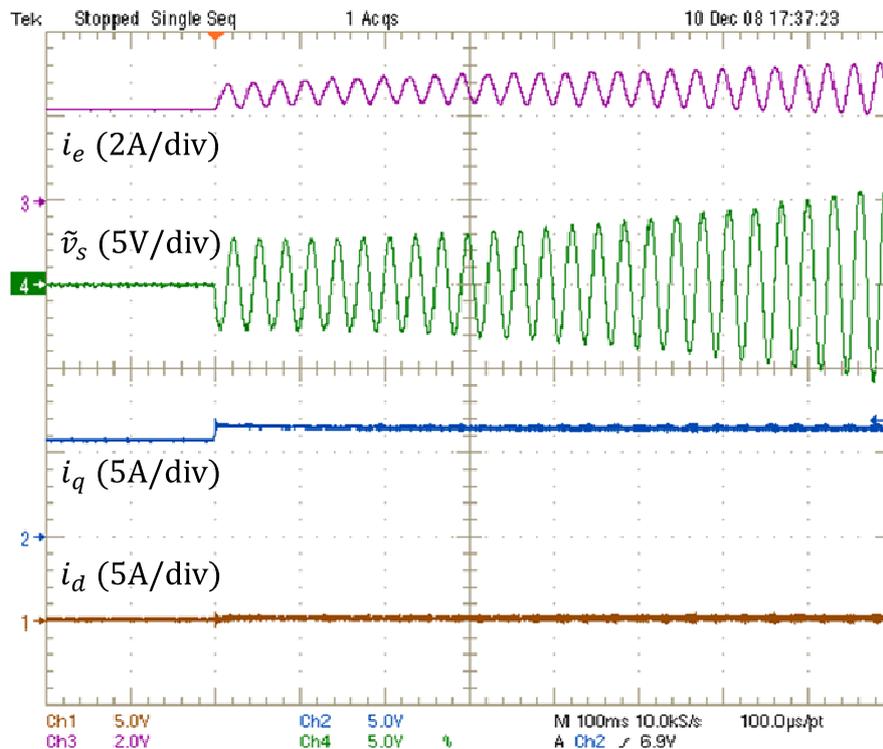


Figure 1-17 : Comportement du système lorsque la relation (1-39) n'est plus vérifiée (échelon sur la référence de courant du courant d'axe  $dq$ ).

Comme pour le cas des hacheurs, on va étudier la stabilité du système après un changement d'origine. On pose alors :

$$i^* = i - i_0$$

$$u^* = u_0 - U_0$$

Le modèle réduit vérifie alors :

$$\begin{cases} \frac{di^*(t)}{dt} = -\frac{r_f}{L_f} i^*(t) - \frac{u^*(t)}{L_f} \\ \frac{du^*(t)}{dt} = \frac{i^*(t)}{C} + \frac{Pu^*(t)}{Cu_0(u^* + u_0)} \end{cases}$$

En posant  $x_1 = i^*(t)$ ,  $x_2 = v^*(t)$  .

On obtient:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r_f}{L_f}x_1 - \frac{x_2}{L_f} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C} + \frac{Px_2}{Cu_0(x_2 + u_0)} \end{cases} \quad (1-38)$$

Le système présente donc une non linéarité de la forme  $\frac{1}{x_2 + u_0}$ .

L'analyse de la stabilité large signal avec ce type de non linéarité sera étudiée au chapitre IV. Bien que mis en évidence ici dans le cas d'un ensemble onduleur-MSAP, ce type de non linéarité se retrouve dans beaucoup d'applications électrotechniques. Ceci reste vrai avec la plus part des actionneurs qu'ils soient synchrones ou asynchrones à partir du moment où ils sont munis de contrôleurs à haute performance. Il en est de même pour les hacheurs munis de contrôle cette fois-ci non linéaires et permettant de rejeter très rapidement les fluctuations de tension d'alimentation (commande fondée sur la platitude, régulateur glissant...).

Applications numériques : Pour le système étudié dans cette thèse, les paramètres du système d'ordre réduit sont les suivants :

$$C=1000\mu F$$

$$L_f=39.5 mH$$

$$R_f=1.1 \Omega$$

$$V_e=200 V$$

$$P=385 W$$

#### 4-Conclusion

On a dans ce chapitre présenté deux applications électrotechniques à savoir un convertisseur élévateur programmé en courant et un actionneur à aimant contrôlé en vitesse. Nous avons expliqué comment sont dimensionnés les régulateurs de ces deux systèmes et avons montré que dans les deux cas, la stabilité asymptotique globale n'était pas démontrée. En effet, pour le hacheur, comme pour tout dispositif utilisant pour la synthèse de ces régulateurs, une approche locale basée sur une linéarisation au premier ordre du système, même si la stabilité asymptotique est démontrée autour du point d'équilibre, le comportement du système lors de brusques variations ou même lors de la phase de démarrage est inconnu. Rien ne garantit en effet que la trajectoire d'état va converger vers le point d'équilibre désiré.

Dans le cas d'un actionneur synchrone muni d'une commande non linéaire rejetant très rapidement les fluctuations de tension d'entrée, on a montré que le système onduleur-moteur pouvait être considéré, vue du réseau DC d'alimentation par un dispositif consommant une puissance constante lorsque les entrées de commande (référence de vitesse, charge mécanique) sont constantes. Même si la stabilité de l'actionneur alimenté par une source parfaite de tension est avérée quelque soit son point de fonctionnement, son interaction avec l'alimentation n'est pas étudiée. Rien ne prouve que le système étudié ne va pas osciller pour certains points de fonctionnement.

# Chapitre II : Stabilité large signal des dispositifs électrotechniques – les méthodes d’analyse envisageables

## Introduction

La non linéarité est une notion qu’on peut définir par le fait que le principe de superposition n’est pas vérifié. La littérature est riche en méthode permettant d’analyser le comportement des systèmes non linéaires. Dans ce chapitre, nous allons établir une liste non exhaustive des méthodes que l’on pourrait envisager d’utiliser pour traiter les deux classes de non linéarité vues au chapitre I. Hors l’analyse de la stabilité, et ceci quasiment pour toutes les méthodes, reposent sur la recherche de fonctions de Lyapunov. On commencera donc par donner une définition de la stabilité au sens de Lyapunov puis on exposera un certain nombre de méthodes d’analyse avec leurs avantages et inconvénients respectifs.

## 1-Définition de la stabilité d’un système au sens de Lyapunov

### 1.1-Fonction de Lyapunov

#### 1.1.1-Définitions

On donne d’abord quelques définitions mathématiques utiles pour caractériser les fonctions de Lyapunov.

*Classes K et  $K_\infty$  :*

Une fonction  $R^+ \rightarrow R^+$  est dite de classe K si elle est continue, strictement croissante et nulle en 0. Elle est de classe  $K_\infty$  si elle est de classe K et non bornée.

*Définie positive :*

Une fonction  $V : R^n \rightarrow R^+$  est dite définie positive si elle vérifie :  $V(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ .

*Radialement non borné :*

$V(x)$  est radialement non borné si  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} V(x) \rightarrow +\infty$ .

*Classe  $C^r$  :*

Une fonction est dite de classe  $C^r$  si elle admet des dérivées partielles continues jusqu’à l’ordre  $r$ .

*Fonction de Lyapunov :*

Une fonction  $V : R^n \rightarrow R^+$  est dite une fonction de Lyapunov de classe  $C^r$  si elle est de classe  $C^r$ , définie positive et radialement non bornée. Ce qui permet de donner une définition de la stabilité.

Soit le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Soit  $U$  un ouvert de  $R^n$  contenant l'origine. S'il existe  $V : U \rightarrow R^+$  de classe  $C^1$  telle que

$V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  et  $\dot{V}(x)$  soit définie négative sur  $U$ , alors l'origine est asymptotiquement stable pour le système non linéaire.

Si  $U = R^n$ , alors l'origine du système non linéaire est globalement asymptotiquement stable.

Remarques :

- En général, il n'existe pas de méthode pour trouver une fonction de Lyapunov candidate pour un système non linéaire.

-La théorie de Lyapunov nous donne des domaines de stabilité qui sont très souvent non optimisés, loin du domaine de stabilité trouvé par l'expérimentation.

On dit que le point  $x$  est Lyapunov-stable, si pour tout voisinage  $U_1$  de  $x$ , il existe un voisinage  $U_2$  de  $x$  contenu dans  $U_1$  tel que toutes les trajectoires partant d'un point quelconque de  $U_2$  à l'instant  $t = 0$  restent dans  $U_1$  pour tout  $t \geq 0$ .

On dit que le point  $x$  est Lyapunov-asymptotiquement stable, s'il est Lyapunov-stable et si toutes les trajectoires partant d'un point quelconque d'un voisinage de  $x$  à l'instant  $t = 0$  convergent vers  $x$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

La différence entre ces deux notions est qu'une petite perturbation sur l'état initial d'un système autour d'un point d'équilibre L-stable peut engendrer des petites oscillations entretenues, alors qu'elles s'amortissent au cours du temps dans le cas d'un point d'équilibre L-asymptotiquement stable.

### 1.1.2- Fonction de Lyapunov quadratique

Différents types de fonctions de Lyapunov candidates sont souvent proposées pour résoudre le problème de stabilité au sens de Lyapunov. La plus simple correspond à la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique définie positive à dérivée négative. On pose alors :

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), P > 0, \text{ où } x(t) \text{ représente le vecteur d'état du système.} \quad (2.1)$$

Elle est principalement utilisée pour l'étude des systèmes linéaires mais aussi pour l'approche multimodèle. Les domaines de stabilité obtenus sont convexes.

Une variante possible est de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n \alpha_i P_i x(t) \text{ avec } P_i > 0, \alpha_i \in R^{+*}. \quad (2.2)$$

*Remarques sur la stabilité au sens de Lyapunov :*

Dans le cas des systèmes linéaires, le système peut être défini par une équation de la forme  $\dot{x} = A \cdot x$ . Ce système est obtenu comme précédemment après un changement de variable qui place le point d'équilibre en  $x = 0$ . On propose alors la fonction de Lyapunov

quadratique suivante  $V(x) = x^t \cdot P \cdot x$ . L'équation de Lyapunov traduisant que la dérivée totale de  $V$  par rapport au temps est négative se traduit par l'égalité :

$$A^t \cdot P + P \cdot A = -Q \quad (2.3)$$

où  $Q$  est une forme quadratique définie positive donnée. S'il est toujours possible de trouver une matrice  $P$  définie positive telle que l'égalité précédente soit vérifiée, alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle négative. L'équilibre  $x = 0$  est donc globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas des systèmes non linéaire de formulation générale  $\dot{x} = f(x)$ , une amélioration possible de la méthode quadratique consiste à remarquer la chose suivante portant sur la stabilité locale asymptotique.

$$\text{Soit } \dot{x} = f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=0} x + g(x) = Ax + g(x).$$

$Ax$  est le terme linéaire et  $g(x)$  les termes non linéaires d'ordre supérieur, par exemple  $x_1 x_2 x_3$ .

Comme les termes qui dépendent de manière linéaire de  $x$  sont isolés dans  $Ax$ ,  $\|g(x)\|$

$$\text{décroit plus vite que } \|x\| : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Ceci signifie que pour tout  $\gamma_i > 0$ , il existe  $r_i$  tel que pour tout  $x$  :

$$\|x\| < r_i \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma_i \|x\|.$$

Si  $A$  est stable alors :

$$\forall Q \succ 0, \exists P \succ 0, A^T P + P A = -Q$$

et donc en posant  $V = x^T P x$  avec  $\dot{x} = f(x) = Ax + g(x)$ . (2.4)

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P g(x).$$

D'après la relation :  $\|a^T b\| \leq \|a\| \|b\|$ , on en déduit :

$$\dot{V} \leq -x^T Q x + \|x\| \|P\| \|g(x)\|,$$

$$\text{comme } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0, \forall \gamma > 0, \exists r, \forall x \leq r \Rightarrow \|g(x)\| < \gamma \|x\|.$$

$$\dot{V} < -x^T Q x + \gamma \|P\| \|x\|^2.$$

Sachant que  $-x^T Q x \leq -\lambda_{\min} \|x\|^2$ , on a donc

$$\dot{V} < -(\lambda_{\min} - \gamma \|P\|) \|x\|^2$$

il suffit de choisir  $\gamma$  suffisamment petit afin que  $(\lambda_{\min} - \gamma \|P\|) > 0$ .

Ainsi pour  $r$  associé à  $\gamma$  choisi,  $\dot{V} < 0, \forall x, \|x\| < r$ .

Par conséquent, le système  $\dot{x} = f(x)$  est localement asymptotiquement stable.  
 Les domaines obtenus sont très souvent très petits par rapport aux résultats expérimentaux.

### 1.1.3- Fonction de Lyapunov non quadratiques

L'utilisation de fonction de Lyapunov quadratique peut être très conservatrice. Pour restreindre le pessimisme de la méthode quadratique, il est possible d'utiliser des fonctions de Lyapunov non quadratiques. Souvent leur expression est étroitement liée à la nature des non linéarités du système.

L'exemple suivant utilise une fonction de Lyapunov non quadratique.

Soit le système :

$$\dot{x} = \begin{cases} (A + Bk_1^T)x & \text{si } k_1^T x < k_2^T x \\ (A + Bk_2^T)x & \text{si } k_2^T x \leq k_1^T x \end{cases}$$

Si  $A = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -3 \\ -21 \end{bmatrix}$ ,  $k = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , alors l'analyse de la stabilité par la fonction de

Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , ne permet pas de conclure sur la stabilité du système.

On considère alors la fonction non quadratique de Lyapunov :

$$V(x) = \begin{cases} x^T P x & \text{si } (k_1 - k_2)^T x < 0 \\ x^T P x + \eta ((k_1 - k_2)^T x)^2 & \text{si } k^T x \geq 0 \end{cases}$$

avec  $P > 0$  et  $\eta \in \mathbb{R}^*$ , construite de telle sorte qu'elle soit continue et quadratique par morceau.

Afin d'obtenir une fonction de Lyapunov définie positive à dérivée négative, il suffit de poser

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \eta = 9$$

La stabilité globale asymptotique a donc pu être démontrée par l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non quadratique.

Dans le cadre de cette thèse, pour les deux classes de non linéarité étudiées, les fonctions de Lyapunov utilisées seront déduites via une approche basée sur des modèles flous de type Tagaki-Sugeno. Ces modèles conduisent suivant les cas à des fonctions de Lyapunov quadratiques ou non quadratiques. Cette modélisation, qui a conduit comme on le verra ultérieurement à résoudre le problème de stabilité, sera exposé en détail dans un paragraphe de ce chapitre.

## 1.2- Etude des valeurs propres

Démontrer la stabilité au sens de Lyapunov va souvent se traduire mathématiquement par démontrer qu'une ou des matrices sont définies positives (ou négatives). Une méthode classique consiste alors à étudier le signe des valeurs propres de la matrice à étudier. Pour cela, il est possible d'utiliser différents outils.

### Utilisation des disques de Gerschgorin-Hadamard

On définit des conditions suffisantes mais pas nécessaires pour le positionnement des valeurs propres. Pour montrer que les valeurs propres d'une matrice sont positives, on peut utiliser le premier théorème de Gerschgorin-Hadamard que l'on rappelle :

**Théorème de Gerschgorin-Hadamard :** Soit  $A$  une matrice carrée d'ordre  $N$  (on note  $i$  une ligne de la matrice et  $j$  une colonne), les valeurs propres de  $A$  appartiennent à l'union des  $N$

disques  $D_k$ , du plan complexe définis par :  $\lambda \in D_k = \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N D_j$  où  $D_k$ , appelé le disque de

Gerschgorin et on a :

$$|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}|.$$

Si la matrice est symétrique, les valeurs propres sont réelles et donc les disques de Gerschgorin deviennent de simples intervalles.

On en déduit que si  $A$  est à diagonale strictement dominante, c-a-d si

$$\forall i, 1 \leq i \leq N, |a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}|, \text{ alors :}$$

$$\text{Si } \operatorname{Re}(a_{kk}) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N |a_{kj}| \text{ avec } a_{kk} > 0 \text{ alors } \operatorname{Re}(\lambda) > 0.$$

Il s'agit de conditions suffisantes et non nécessaires, qui ne sont malheureusement que rarement réalisées.

On peut aussi en déduire que :

$$|\lambda| \leq \min \left\{ \max_{i=1..n} \left[ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right], \max_{j=1..n} \left[ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right] \right\}.$$

### Utilisation des normes logarithmiques

On peut aussi utiliser les normes logarithmiques si on désire montrer que les parties réelles de valeurs propres sont négatives :

Soit une matrice  $A$  carrée de dimension  $n$  et soit  $\mu_{nl}$  une norme logarithmique,

$$\mu_{nl}(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I_n + hA\| - 1}{h} \text{ où } I_n \text{ est la matrice identité et } \|\cdot\| \text{ est une norme matricielle sur } \mathbb{R}^{n,n}.$$

$$\text{Il existe une définition équivalente : } \mu_{nl}(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln \|e^{hA}\|}{h}.$$

Les mesures matricielles ont les propriétés suivantes :

$$\mu_{nl}(A+B) \leq \mu_{nl}(A) + \mu_{nl}(B)$$

$$\max_i (\operatorname{Re}(\lambda_i(A))) \leq \mu_{nl}(A)$$

$$\|e^{Ax}\| \leq e^{\mu_{nl}(A)x}$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées.

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$  :

$$\operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu_1(A) \text{ avec } \mu_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i,i \neq j} |a_{ij}|)$$

$$\text{Ou } \operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu_\infty(A) \text{ avec } \mu_\infty(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j,j \neq i} |a_{ij}|)$$

où  $\mu_1$  et  $\mu_\infty$  sont des normes logarithmiques.

Toutes ces conditions sont très rarement vérifiées dans les mises en équations des systèmes non linéaires.

### Utilisation des Ovals de Cassini

Théorème : Les  $n$  valeurs propres de la matrice carrée  $A$  appartiennent au domaine du plan complexe formé par la réunion des régions intérieures aux  $\frac{n(n+1)}{n}$  ovales de Cassini

$O(a_{kk}, a_{jj}, r_k, r_j)$  définis par :

$|\lambda - a_{kk}| \cdot |\lambda - a_{jj}| = r_k r_j, k, j = 1, \dots, n, k \neq j$  où les rayons  $r_j, r_k$  sont définis comme les rayons des cercles de Gerschgorin.

### Utilisation du Critère de Bendixson

On considère une matrice carrée  $A$ . Cette matrice peut se décomposer sous forme d'une somme d'une matrice hermitienne  $A_h$  et d'une matrice non hermitienne  $A_{nh}$  qui sont définis par :

$$A_h = \frac{1}{2}(A + A^*) \text{ et } A_{nh} = \frac{1}{2}(A - A^*).$$

Les valeurs propres de la matrice  $A$  appartiennent au rectangle défini de la façon suivante :

$$\lambda(A) \text{ telles que : } \begin{cases} \lambda_{\min}(A_h) \leq \operatorname{Re}(\lambda(A)) \leq \lambda_{\max}(A_h) \\ \min\left(\frac{1}{j} \lambda(A_{nh})\right) \leq \operatorname{Im}(\lambda(A)) \leq \max\left(\frac{1}{j} \lambda(A_{nh})\right) \end{cases}$$

Théorème de Poincaré-Bendixson :

Pour un système du second ordre uniquement, si une trajectoire demeure dans une région finie alors une des trois propositions suivantes est vraie :

1. La trajectoire va vers un équilibre.
2. La trajectoire tend asymptotiquement vers un cycle limite.
3. La trajectoire est elle-même un cycle limite.

### Utilisation des propriétés des matrices définies positives

Lorsque la matrice est définie positive, il est possible d'utiliser le lemme suivant permettant de borner toutes les valeurs propres de la matrice.

*Lemme*

Soit  $P > 0$  une matrice réelle symétrique définie positive, il existe deux constantes réelles  $c, C$  telles que :

$$c \cdot x^T \cdot x \leq x^T P x \leq C x^T x .$$

De plus,  $c = \lambda_1$  est la plus petite valeur propre de  $P$  et  $C = \lambda_n$  est la plus grande valeur propre de  $P$ .

### 1.3- Notions d'attractivité et de stabilité exponentielle

Cette notion contient une information supplémentaire qui permet de quantifier la vitesse de convergence de la trajectoire d'état vers le point d'équilibre.

*$\alpha$ -stabilité*

L' $\alpha$ -stabilité est une propriété des systèmes qui permet de garantir la rapidité de convergence vers un point d'équilibre. Ce critère peut aussi être vu comme une contrainte de placement de pôles dans un disque de rayon  $\alpha$ .

L'état  $x$  d'un système est dit  $\alpha$ -stable ( $\alpha \in ]0;1[$ ) ssi pour une entrée nulle et pour toute condition initiale  $x(0)$ , la relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha^{-k} \|x(k)\| = 0 . \quad (2.5)$$

*Attractivité*

La propriété d'attractivité d'un ensemble traduit le rapprochement asymptotique (la convergence) des solutions vers l'état d'équilibre alors que la stabilité traduit le fait que la trajectoire d'état s'approche de l'état d'équilibre tout au long de l'évolution mais sans garantir la convergence vers l'état d'équilibre.

L'état d'équilibre  $x_e$  est attractif s'il existe  $\delta > 0$  tel que si  $\|x(0) - x_e\| < \delta$  alors pour tout  $\nu > 0$ , il existe  $T > 0$  qui satisfait  $\|x(t) - x_e\| < \nu$  pour tout  $t \geq T$ .

**Théorème**

Si l'origine est une solution asymptotiquement stable de  $\dot{x} = f(x)$  de bassin d'attraction  $A$ , il existe une fonction  $V : A \rightarrow R^+$  qui est  $C^\infty$ , définie positive et propre sur  $A$  et satisfait :

$$\dot{V}(x) < 0, \forall x \in A - \{0\} .$$

L'attractivité n'implique pas la stabilité ni l'inverse. La condition d'attractivité exprime que si l'état initial est dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors l'état du système reviendra nécessairement à l'origine au bout d'un temps suffisant.

Un point d'équilibre est stable asymptotiquement s'il est stable et attractif, on est donc capable de déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un  $x_0$  appartenant à un voisinage de  $x_e$  tend vers  $x_e$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- . l'origine est asymptotiquement stable.
- . l'origine est une solution stable et attractive.

### Stabilité exponentielle

Un point d'équilibre  $x_e$  est exponentiellement stable s'il existe  $\alpha > 0$  et  $\lambda > 0$  tels que :

$$\forall t > 0, \exists B_r(x_e, r), \forall x_0 \in B_r, \|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{-\lambda t} \quad (2.6)$$

Cela signifie que le vecteur d'état, pour une condition initiale  $x_0 \in B_r$  converge vers  $x_e$  plus rapidement qu'une fonction exponentielle.  $\lambda$  est appelé le taux de convergence. La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique.

## 1.4-Mise sous forme d'inégalité matricielle linéaire

### 1.4.1- Principe

Une méthode quasi systématiquement utilisée pour résoudre le problème de recherche d'une solution au problème de stabilité au sens de Lyapunov consiste à résoudre les inéquations par l'intermédiaire de problèmes convexes d'un type particulier, à savoir les programmes semi-définis (SDP) connus sous le nom LMI.

L'idée de base de la méthode LMI est de formuler un problème comme un problème d'optimisation avec un objectif linéaire et des contraintes LMI.

Un des grands apports de l'introduction de l'optimisation LMI est de permettre de traiter des problèmes d'automatique impliquant les systèmes non linéaires et d'aider à la résolution du problème de stabilité.

Une contrainte LMI sur un vecteur réel  $x \in R^m$  est de la forme :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0. \quad (2-7)$$

où les matrices symétriques  $F_i = F_i^T \in R^{N \times N}, i=0, \dots, m$  sont données.

La notation  $F > 0$  signifie que la matrice symétrique  $F$  est définie positive.

La contrainte LMI est une contrainte convexe en  $x$ , c-a-d que l'ensemble  $\{x \in R^m : F(x) \geq 0\}$  est convexe.

On dit que la LMI est réalisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur  $x \in R^m$  tel que

l'inégalité matricielle  $F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \geq 0$  est vérifiée.

$\{x \in R^m : F(x) \geq 0\}$  est l'ensemble de réalisabilité.

Un ensemble de plusieurs LMI  $F^{(1)}(x) \geq 0, F^{(2)}(x) \geq 0, \dots, F^{(p)}(x) \geq 0$  peut se réécrire sous la forme d'une seule LMI :

$$\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) \geq 0. \quad (2.8)$$

ce qui permet une ouverture vers les problèmes multicritères.

Exemple :

Soit  $P = P^T > 0$  et  $A^T P + PA < 0$ ,  $P \in R^{2 \times 2}$ ,

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P_3} > 0.$$

Donc,

$$A^T P + PA = x_1 \underbrace{[A^T P_1 + P_1 A]}_{F_1} + x_2 \underbrace{[A^T P_2 + P_2 A]}_{F_2} + x_3 \underbrace{[A^T P_3 + P_3 A]}_{F_3} < 0.$$

Les LMI peuvent être écrites comme un système de  $N$  inégalités polynomiales de degré 1, 2, ...,  $N$  en les  $m$  variables  $x_1, \dots, x_m$ .

Soient  $F^{(0)}, \dots, F^{(p)}$  des fonctions quadratiques de la variable  $x \in R^{m*}$  avec :

$$F^{(i)}(x) = x^T T_i x + 2u_i^T x + \gamma_i \text{ où } T_i = T_i^T \in R^{m \times m}, i \in \{0, \dots, p\}. \quad (2.9)$$

Alors la proposition (i) implique la proposition (ii) :

$$(i) \text{ Il existe } \tau_i \geq 0, i \in \{1, \dots, p\} \text{ tels que } \begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & \gamma_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & \gamma_i \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.10)$$

(ii)  $F_0(x) \geq 0$  pour tout  $x \neq 0$  tel que  $F_i(x) \geq 0, i \in \{1, \dots, p\}$ .

Depuis plusieurs années, la réduction d'un grand nombre de problèmes de synthèse ou d'analyse à des problèmes d'optimisation convexe impliquant des LMI a été développée. Un domaine convexe a l'avantage de ne pas avoir un extremum local mais d'avoir un extremum global unique.

#### 1.4.2- Application à la résolution du problème de Lyapunov [23, 24]

Dans le théorème de Lyapunov, il y a stabilité pour toute condition initiale s'il existe une fonction  $V(x)$  telle que pour  $x \neq 0, V(x) > 0$  et  $\dot{V}(x) < 0$ . En choisissant une fonction de Lyapunov quadratique et en posant  $V(x) = x^T P x$  avec  $P$  une matrice symétrique définie positive à déterminer. Dans une première étape, on écrit le problème sous forme LMI. Il vient :

$$\begin{cases} V(x) > 0 \\ \dot{V}(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -(A^T P + PA) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.11)$$

avec  $P = \sum_{i=1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \xi_i P_i$  avec  $P_i$  une base de l'espace des matrices symétriques de dimension  $n \times n$ .

En posant :  $F_0 = 0$ , la contrainte LMI présenté en (2-1) s'écrit :

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{n(n+1)} \xi_i F_i \text{ avec } F_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -(A^T P_i + P_i A) \end{bmatrix}.$$

En conclusion, la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique définie positive est équivalente à déterminer un vecteur  $\xi$  et des matrices  $P_i$  vérifiant :

$$F(\xi) = \sum_{i=1}^{n(n+1)} \xi_i F_i > 0$$

## 1.5-Fonctions et ensembles convexes

Avec les théorèmes et les outils utilisés dans cette thèse, on obtient des équations dont la résolution conduit à des domaines convexes. On va ci-dessous présenter un certain nombre de domaines convexes avec leurs définitions et leurs propriétés respectives.

### *Ensemble convexe*

Soit un ensemble  $E \subset R^n$ ,  $E$  est un ensemble convexe si et seulement si

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in E. \quad (2.12)$$

L'intersection d'un nombre fini de sous-ensembles convexes de  $R^n$  est un ensemble convexe.

### *Fonction convexe*

Soit une fonction  $f: E \subset R^n \rightarrow R$  avec  $E$  un ensemble convexe, alors  $f$  est convexe si et seulement si :

$$\forall \lambda \in [0,1] \subset R, \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \quad (2.13)$$

On a aussi : Si  $f$  est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ , si  $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$  alors  $f$  est convexe sur  $I$ .

### *Ellipsoïdes*

Le but est de caractériser des domaines convexes qui permettront d'estimer des bassins d'attraction pour des systèmes non linéaires.

Si  $F(x)$  est une fonction quadratique définie par :

$$F(x) = x^T S x + 2x^T q + r \leq 0 \quad (2.14)$$

où  $S = S^T > 0$ , alors l'ensemble défini par :

$$E_1 = \{x \in R^n; F(x) \leq 0\} \text{ est une ellipsoïde dans } R^n.$$

### *Remarques*

On considère que  $q^T S^{-1} q - r > 0$  ce qui garantit que  $E_1$  est non vide et ne se réduit pas à un seul point.

Soit  $x_c(t) \in R^n$ , l'ensemble  $E_2 = \{x \in R^n; (x-x_c)^T Q (x-x_c) \leq 1; Q = P^{-1}\} = \{z \in R^n; Pz + x_c; z^T z \leq 1\}$  est une ellipsoïde de l'espace  $R^n$  avec  $P = P^T > 0$ . On passe de  $E_2$  à  $E_1$  en posant :

$$S = Q; q = -Qx_c; r = x_c^T Qx_c - 1.$$

On passe de  $E_1$  à  $E_2$  en posant :

$$P = \sqrt{q^T S^{-1} q - r} S^{(-0.5)}; x_c = -S^{-1} q.$$

La taille d'une ellipsoïde est fondamentale lorsque l'on souhaite obtenir le plus grand domaine d'attraction de l'origine possible. Le volume de  $E_1$  est alors donné par :

$vol(E_1) = \sqrt{\beta \det((q^T S^{-1} q - r) S^{-1})}$  où  $\beta$  est une constante positive qui dépend de la dimension de  $x$  c-a-d de  $n$ .

Le demi grand axe de  $E_1$  correspond à la moitié du diamètre de l'ellipsoïde qui est donné par :

$$diam(E_1) = 2\sqrt{((q^T S^{-1} q - r) S^{-1}) \lambda_{\max}(S^{-1})}$$
 où  $\lambda_{\max}(S^{-1})$  est la plus grande valeur propre de  $S^{-1}$ .

Si les ellipsoïdes sont centrées sur l'origine, on a  $q = 0, x_c = 0$  et on formule les ellipsoïdes

$$E = \{x \in R^n; x^T P x \leq \gamma^{-1}; P = P^T > 0; \gamma > 0\}. \tag{2-15}$$

Le volume de l'ellipsoïde est proportionnel à  $\sqrt{\det((\gamma P)^{-1})}$  et la longueur de son demi grand axe est proportionnelle à  $\sqrt{\gamma^{-1} \lambda_{\max}(P^{-1})}$ .

### Polyèdres

Un polyèdre  $Q$  est défini par l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces fermés.

Un sous-espace  $Q$  de  $R^n$  est appelé ensemble polyédral si  $Q$  peut être défini de la façon suivante :

$$Q = \{x \in R^n; Qx \leq r\}$$
 où  $r$  est un vecteur de  $R^r$  et  $Q$  est une matrice appartenant à  $R^{r \times n}$ .

### Propriétés

1- Chaque hyperplan  $H \in R^n$  est l'intersection de deux demi-espaces qui sont bornés par  $H$  et chaque sous-espace affine  $A \in R^n$  avec  $A \neq R^n$  est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans. Donc, chaque sous-espace affine de  $R^n$  est un polyèdre.

2- Soit  $A$  un sous-espace affine de  $R^n$  avec  $A \neq R^n$ . Soit  $Q$  un sous-ensemble de  $A$  tel que  $Q$  est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés de  $R^n$ . Alors  $Q$  est l'intersection de demi-espaces fermés de  $R^n$  et est donc polyédral.

3- Chaque ensemble polyédral est fermé et convexe.

4- L'intersection d'un nombre fini d'ensembles polyédraux est un ensemble polyédral.

## Polytope

Un polytope est défini comme l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Un polytope est un ensemble polyédral compact, c-a-d borné et fermé.

Un polytope peut être défini comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, on représente un polytope  $P$  à partir de la connaissance de ses sommets :

$$P = \text{Co}\{v_j, \forall j=1, \dots, p\}.$$

Toute intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, si elle est bornée, est un polytope.

### 1.6-Région LMI et D- stabilité

La D-stabilité est liée aux LMI et à la stabilité exponentielle. Le but est de construire de façon systématique n'importe quelle région convexe du plan complexe à partir de l'intersection de régions convexes comme le demi-plan, les bandes, les cercles, les cônes .... appelées régions LMI, ce qui peut être utile pour déterminer l'emplacement des valeurs propres d'un système dans un domaine donné du plan complexe.

Définition : Un sous- ensemble  $D$  du plan complexe est appelé région LMI d'ordre  $n$  s'il existe une matrice symétrique  $\alpha \in R^{n \times n}$  et une matrice  $\beta \in R^{n \times n}$  telles que

$$D = \left\{ z \in C : f_D(z) = \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0 \right\}. \quad (2.16)$$

Une région LMI est symétrique par rapport à l'axe réel puisque :  $f_D^T(z) = f_D(\bar{z})$ .

Définition : Soient  $A \in R^{n \times n}$  et  $D$  une région LMI. La matrice  $A$  est  $D$ - stable si et seulement s'il existe une matrice  $X \in R^{n \times n}$ , symétrique définie positive, telle que :

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T < 0 \quad (2-17)$$

où  $\otimes$  représente le produit matriciel de Kronecker.

#### Produit de Kronecker

Soient deux matrices  $A(m \times n)$  et  $B(s \times t)$ , on déduit leur produit de Kronecker  $C(ms \times nt)$

par :

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Une matrice  $A$  est  $D$ - stable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement contenues à l'intérieur d'une région  $D$  du plan complexe.

Pour tester la  $D$ - stabilité d'une matrice réelle dans une intersection de régions LMI, une seule solution symétrique définie positive à cette LMI est nécessaire.

Soit la région  $D$  résultante de l'intersection de  $r$  sous- régions LMI  $D_i$ .

Les valeurs propres d'une matrice réelle  $A$  appartiennent à  $D$  si et seulement s'il existe une matrice  $X \in R^{n \times n}$ , symétrique définie positive, telle que :

$$M_{D_i}(A, X) = \alpha_i \otimes X + \beta_i \otimes (AX) + \beta_i^T \otimes (AX)^T < 0, i \in I_r, \text{ ce qui est équivalent à :}$$

$$M_D(A, X) = \alpha \otimes X + \beta \otimes (AX) + \beta^T \otimes (AX)^T = \text{diag}(M_{D_i}(A, X)) < 0, i \in I_r$$

où

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_r), \beta = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_r).$$

Cette inégalité montre que  $D$  peut être formulée comme une région LMI. On considère donc la même matrice  $X$  pour toutes les sous régions de l'intersection tout en préservant la nécessité de la condition de  $D$ -stabilité.

### 1.6.1-Exemple de calcul de domaine convexe permettant d'assurer la D-stabilité

On peut contraindre les pôles d'un système linéaire dans des régions du plan complexe. On doit donc trouver des matrices  $\alpha$  et  $\beta$  à coefficients constants de  $R$  vérifiant l'inéquation suivante :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}X + \beta_{11}AX + \beta_{11}(AX)^T & \dots & \alpha_{1n}X + \beta_{1n}AX + \beta_{n1}(AX)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}X + \beta_{n1}AX + \beta_{1n}(AX)^T & \dots & \alpha_{nn}X + \beta_{nn}AX + \beta_{nn}(AX)^T \end{pmatrix} < 0. \quad (2.19)$$

- Demi-plan gauche ouvert : On cherche à démontrer que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont situées dans le demi-plan de gauche ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\text{Re}(z) < 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} < 0$$

D'où en choisissant  $\alpha = 0, \beta = 1$ , la relation (2-3) conduit à la formulation LMI suivante :

$$AX + (AX)^T < 0.$$

.  $\alpha$ -stabilité : Cette fois-ci on cherche à prouver que toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  reste à gauche d'un axe défini par l'équation  $\text{Re}(z) = -a$

On peut alors écrire :

$$\text{Re}(z) < -a \Leftrightarrow 2a + z + \bar{z} < 0$$

D'où en prenant  $\alpha = 2a, \beta = 1$ , on obtient la LMI suivante :

$$2aX + AX + (AX)^T < 0.$$

- Bande verticale : Cette fois-ci on cherche à encadrer les valeurs propres entre deux axes verticaux.

$$a_1 < \text{Re}(z) < a_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a_2 + z + \bar{z} & 0 \\ 0 & 2a_1 - (z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0 \text{ d'où en prenant}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -2a_2 & 0 \\ 0 & 2a_1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on obtient la LMI suivante :}$$

$$\begin{pmatrix} -2a_2X + AX + (AX)^T & 0 \\ 0 & 2a_1X - (AX + (AX)^T) \end{pmatrix} < 0.$$

- Bande horizontale : Il est aussi possible des les encadrer avec deux axes horizontaux.

$$|\text{Im}(z)| < a \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & z - \bar{z} \\ -z + \bar{z} & -2a \end{pmatrix} < 0 \text{ d'où en prenant}$$

$\alpha = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient la LMI suivante

$$\begin{pmatrix} -2aX & AX - (AX)^T \\ -AX + (AX)^T & 2aX \end{pmatrix} < 0 .$$

- Disque de rayon R et de centre (q, 0) : Si l'on désire démontrer que les valeurs propres restent à l'intérieur d'un disque dont le centre est sur l'axe réel, il suffit de poser :

$|z - q| < R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -R & z - q \\ z - q & -R \end{pmatrix} < 0$  d'où en prenant  $\alpha = \begin{pmatrix} -R & -q \\ -q & -R \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , on obtient la

LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} -RX & -qX + AX \\ -qX + (AX)^T & -RX \end{pmatrix} < 0 .$$

- Secteur conique :

$a \operatorname{Re}(z) + |b \operatorname{Im}(z)| < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a(z + \bar{z}) & -b(z - \bar{z}) \\ b(z - \bar{z}) & a(z + \bar{z}) \end{pmatrix} < 0$  d'où en prenant

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

on obtient la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} a(AX + (AX)^T) & -b(AX - (AX)^T) \\ b(AX - (AX)^T) & a(AX + (AX)^T) \end{pmatrix} < 0 .$$

## 1.7-Outils importants

On va présenter ci-dessous plusieurs outils qui vont être largement utilisés par la suite pour poser et résoudre les différentes équations de Lyapunov.

### 1.7.1-Lemme de Finsler

On peut se servir du lemme pour obtenir des régions de stabilité plus grandes. En effet grâce à ce lemme, on verra qu'il est possible de disposer d'un plus grand nombre de variables que d'équations pour résoudre les problèmes de stabilité et donc d'optimiser la taille des régions de stabilité trouvées.

Lemme de Finsler : Soient  $x \in R^n$ ,  $Q \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{m \times n}$  tel que  $\operatorname{rang}(B) < n$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a.  $x^T Q x < 0, \forall Bx = 0, x \neq 0, x = B^\perp y, y \in R^r, r = \text{rang}(B), B^\perp$  une base du noyau de  $B$ .
- b.  $B^{\perp T} Q B^\perp < 0$ .
- c.  $\exists \mu \in R: Q - \mu B^T B < 0$ .
- d.  $\exists S \in R^{n \times m}: Q + SB + B^T S^T < 0$ . (2.20)

D'après le lemme de Finsler, l'inégalité de Lyapunov  $A^T P + PA < 0$  est équivalente aux relations suivantes, si on remplace dans le lemme :  $x, Q, B^T, S$  et  $B^\perp$  respectivement par :

$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A^T \\ -I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$ , on obtient alors avec d.,

$\exists P \in R^{n \times n}$  avec  $P = P^T > 0, F \in R^{n \times n}, G \in R^{n \times m}$  telles que :

$$\begin{bmatrix} A^T F^T + FA & A^T G^T - F + P \\ GA - F^T + P & -G - G^T \end{bmatrix} < 0 \quad (2.21)$$

### 1.7.2-Complément de Schur

Le complément de Schur permet de transformer le problème de résolution d'inéquation matricielle non linéaire en une formulation de type LMI (donc linéaire) au pris d'une augmentation de l'ordre du système.

Soient trois matrices  $Q(x), S(x), R(x)$  affines par rapport à la variable  $x$ , les matrices  $Q(x), R(x)$  étant symétriques. La LMI :

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.22)$$

est équivalente aux inégalités suivantes :

$$\begin{cases} R(x) > 0 \\ Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\text{ou} \begin{cases} Q(x) > 0 \\ R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1}S(x) > 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Complément de Schur généralisé : A la différence du complément de Schur sous sa forme normale, ici on rajoute des termes dans l'inéquation matricielle non linéaire.

$$\begin{cases} Y - X.R^{-1}.X^T - U.S^{-1}.U^T > 0 \\ R > 0, S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} Y & X & U \\ X^T & R & 0 \\ U^T & 0 & S \end{bmatrix} > 0. \quad (2.25)$$

### 1.7.3- Dérivée de Lie

#### Généralité

Etant donnée une fonction analytique  $f : R^n \rightarrow R^n$ , la dérivée directionnelle ou dérivée de Lie, associée à  $f$  et notée  $L_f$  s'écrit  $L_f = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  où  $f_i : R^n \rightarrow R$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $f$ . Etant donné une fonction  $h : R^n \rightarrow R$  supposée admettre des dérivées à tout ordre  $k \geq 1$ , l'opérateur  $L_f$  agit sur  $h$  comme suit par définition :

$$L_f(h)|_x = \sum_{i=1}^n f_i(x) \frac{\partial h}{\partial x_i} \Big|_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_x \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} \text{ soit de façon vectorielle :}$$

$$L_f(h)|_x = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_x \cdot f(x). \quad (2.26)$$

#### Exemple

$$f : (x_1, x_2) \mapsto (3x_1, x_1 - x_2), \quad h : (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2.$$

$$\text{Donc } L_f = 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} \text{ puis } L_f(h)|_x = 3x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 x_2) + (x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 x_2),$$

$$\text{Donc } L_f(h)|_x = x_1^2 + 2x_1 x_2.$$

#### Application au problème de stabilité au sens de Lyapunov

La notation  $L_f V$  représente la dérivée de Lie au point  $x$  de la fonction  $V$  le long des solutions  $X(x, t)$  de l'équation différentielle :  $\dot{x} = f(x)$ . Si  $V$  est définie positive, de classe  $C^1$ , alors une expression de la dérivée de Lie de  $V$  par rapport au champs de vecteur  $f$  s'écrit :

$$L_f V(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x). \quad (2.27)$$

Lorsqu'on s'intéresse à la stabilité au sens de Lyapunov, il est utile d'introduire les conditions suivantes :

$$\dot{V} = L_f V(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{E} \quad (2.28)$$

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow x = A \quad (2.29)$$

Si (2-4) est vraie pour un voisinage  $\mathcal{E}$  de  $A$ , alors  $A$  est localement stable.

Si  $V$  est radialement non bornée et si (2-4) est vraie pour  $\mathcal{E} = \mathcal{X}$  l'espace d'état, alors  $A$  est globalement stable.

Si (2-4) et (2-5) sont vraies dans un voisinage  $\mathcal{E}$  de  $A$ , alors  $A$  est localement asymptotiquement stable et une estimation de son domaine de stabilité asymptotique est le plus grand  $\nu_c = \{x \in \mathcal{X} : V(x) < c\}$  inclus dans  $\mathcal{E}$ .

Si  $V$  est radialement non bornée et si (2-4) et (2-5) sont vraies pour  $\varepsilon = \chi$  l'espace d'état, alors  $A$  est globalement asymptotiquement stable.

#### 1.7.4- Utilisation de l'inégalité de Szasz

On utilise un théorème qui a l'avantage de n'utiliser qu'une inégalité non linéaire pour aider à trouver si une inégalité matricielle est définie négative ou pas.

Théorème : Soit  $A$  une matrice définie positive et non diagonale d'ordre  $n$  et soit  $P_k$  le produit de tous les mineurs principaux d'ordre  $k$  de  $A$  alors on a,

$$P_1 > P_2^{a_2} > \dots > P_{n-1}^{a_{n-1}} > P_n \text{ où } a_k = \binom{n-1}{k-1}^{-1} \text{ avec } \binom{n-1}{k-1}^{-1} = \frac{(k-1)!(n-k)!}{(n-1)!}. \quad (2.30)$$

On peut aussi écrire  $P_k^{n-k} > P_{k+1}^k, 1 \leq k \leq n-1$ .

Rappel : Les mineurs d'une matrice  $A(n, n)$  sont des matrices extraites de  $A$  :

$$M = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_\mu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_\mu j_1} & \dots & a_{i_\mu j_\mu} \end{bmatrix} \text{ telles que } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_\mu$$

$$1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_\mu$$

Lorsque  $i_k = j_k, k = 1, \dots, \mu$ , le mineur est principal.

Remarque : L'inégalité  $P_1 > P_n$  coïncide avec l'inégalité de Hadamard qui est définie par :

- Si une matrice  $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^n$  est définie positive, alors  $\det A \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$  et l'égalité n'est atteinte que si  $A$  est une matrice diagonale.

- Le théorème précédent ne permet pas de prouver qu'une matrice est définie positive. En revanche, il est d'une aide précieuse pour obtenir des relations permettant d'éliminer certains degrés de liberté dans le choix des paramètres de la matrice. Il a permis notamment d'aider à trouver les solutions aux systèmes LMI qui ont été utilisés dans cette thèse.

#### 1.7.5-Utilisation du lemme de l'inégalité

Soit  $\varepsilon > 0$  et  $X, Y$  des matrices de dimension appropriée, on a

$$X^T Y + Y^T X \leq \varepsilon X^T X + \frac{1}{\varepsilon} Y^T Y. \quad (2.31)$$

On peut remplacer  $\varepsilon$  par une matrice  $M > 0$ , on a alors :

$$X^T Y + Y^T X \leq X^T M X + Y^T M^{-1} Y. \quad (2.32)$$

Le lemme de l'inégalité avec le complément de Schur va permettre d'obtenir des inégalités matricielles sous forme LMI.

### 1.7.6-Décomposition QR d'une matrice

Soit une matrice  $M$  quelconque, alors il existe une matrice unitaire  $Q$  et une matrice triangulaire supérieure  $R$  telles que :  $M = QR$ . Une matrice  $Q$  est unitaire ssi  $QQ^T = Q^T Q = I$ ,  $I$  est la matrice identité. C'est un outil qui sera utile pour déterminer si une inégalité matricielle est ou non définie positive.

### 1.7.7-Méthode de l'adjoint

#### Théorème

Si  $n = 2$ , il n'existe pas d'orbite périodique dans un domaine connexe du plan de phases  $R^2$  dans lequel  $divF(x)$  conserve un signe constant (différent de 0).

#### Théorème

Soit  $X = F(X)$  une équation autonome non linéaire du deuxième ordre définie sur un domaine  $D$  connexe. Supposons que l'équation  $divF(X) = 0$  soit satisfaite pour  $x \in \Gamma$  où  $\Gamma$  est une courbe fermée de  $R^2$  partageant  $D$  en deux régions où  $divF(X)$  est respectivement  $> 0$  et  $< 0$ . Alors, l'équation admet au plus une orbite périodique.

#### Théorème

Les orbites fermées sont impossibles pour  $\dot{x} = -\nabla V$ . (2.33)

#### *Critère de Bendixson*

Si dans un domaine qui n'a pas de trou (domaine simplement connexe),  $D \subset R^2$  l'expression

$divf = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$  n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe, alors le système

$\frac{dx}{dt} = f(x)$  n'a pas d'orbite périodique contenue dans  $D$ .

#### Théorème

Soit le système  $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ , si dans un domaine simple connexe, on a :  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \neq 0$  et

cette expression garde le même signe alors le système n'a pas de trajectoires fermées entièrement contenues dans le domaine considéré.

#### *Cycle limite de stabilité*

Il existe une zone de fonctionnement stable représentant le domaine des variations possibles des variables d'état sans que le système devienne instable et d'une zone de fonctionnement instable, pour laquelle le système diverge. On définit la frontière délimitant ces deux zones, appelée cycle limite de stabilité.

La caractéristique principale du contour recherché est qu'il s'agit d'un cycle limite instable, dans le sens où toute trajectoire décrite par le point de fonctionnement s'éloigne de ce cycle.

Si la trajectoire est interne au cycle, on tend vers le point d'équilibre ; si la trajectoire est externe au cycle, le système diverge.

Si l'on considère le système adjoint au système étudié (on affecte toutes les dérivées des variables d'état du filtre d'un signe moins), alors le cycle limite garde le même contour, mais devient cycle limite stable : toute trajectoire tend vers ce cycle. Ainsi, quelles que soient les conditions initiales choisies, le système convergera vers son cycle limite.

## 2-Les méthodes usuelles d'analyse de la stabilité large signal envisageables

On va dans ce paragraphe exposer les méthodes qu'il semble possible d'utiliser pour la recherche de bassin d'attraction pour les systèmes électrotechniques.

### 2.1-Généralités

Définissons le système suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = A.x + B.u \\ \dot{y} = C.x + D.u \\ u = -\psi(t, y) \end{cases}$$

A, B, C, D sont des matrices carrées,  $u \in R^n$ ,  $(u, y) \in R^{n \times p}$ ,  $\psi \in [0, +\infty[ \times R^p \rightarrow R^p$  une fonction sans mémoire, avec une non linéarité  $\psi$  continûment différentiable et localement lipchitzienne en  $y$ .  $(A, B)$  est contrôlable,  $(A, C)$  est observable. On suppose que la connection bouclée possède un modèle d'état bien défini.

Ainsi  $u = -\psi(t, y)$  admet une solution unique.

La fonction de transfert  $G(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C.(p.I - A)^{-1}.B + D$  est carrée et non singulière. Les

hypothèses de contrôlabilité et d'observabilité assure que  $(A, B, C, D)$  est une réalisation minimale de  $G(p)$ . On montre que G est Hurwitz c-a-d que ses pôles sont à parties réelles négatives.

Définition : Une fonction  $h(t, u)$  sans mémoire (c-a-d dont la valeur instantanée est indépendante des valeurs précédentes) est dite appartenir au secteur :

$$[0, +\infty[ \text{ si } u^t . h(t, u) \geq 0$$

$$[K_1, +\infty[ \text{ si } u^t . [h(t, u) - K_1 . u] \geq 0$$

$$[0, K_2] \text{ avec } K_2 = K_2^t > 0 \text{ (matrice symétrique définie positive) si } h^t(t, u) . [h(t, u) - K_2 . u] \leq 0$$

$$[K_1, K_2] \text{ avec } K = K_2 - K_1 = K^t > 0 \text{ si } [h(t, u) - K_1 . u]^t . [h(t, u) - K_2 . u] \leq 0 .$$

Les matrices  $K_1$  et  $K_2$  peuvent être pleines ou diagonales.

La non linéarité  $\psi$  doit vérifier une condition sur les secteurs. Cette condition peut être satisfaite globalement ( $\forall y \in R^p$ ), ou seulement pour  $y \in Y$  un sous ensemble de  $R^p$  qui contient l'origine. Pour toutes non linéarités satisfaisant une condition sur un secteur, l'origine  $x = 0$  est supposée être un point d'équilibre. Le problème est d'étudier la stabilité de l'origine non pas pour une linéarité donnée mais plutôt pour une classe de non linéarité qui satisfait une condition de secteur. Le système est absolument stable si l'origine est globalement uniformément asymptotiquement stable pour toutes non linéarités dans un secteur donné. Si la

condition portant sur les secteurs est satisfaite seulement sur un ensemble  $Y \in R^p$ , alors les conditions précédentes assurent que le système est absolument stable dans un domaine fini.  
 Théorème : Le système est absolument stable si : Soit  $v$  une matrice colonne contenant sur chaque ligne une variable intervenant dans les non linéarités ( $y = v$ ).

Soient  $K_1$  et  $K_2$  des scalaires ou des matrices,

.  $\psi(t, v) \in [K_1, +\infty[$  et  $G(p).[I + K_1.G(p)]^{-1}$  (2-6) est strictement positive réelle,

.  $\psi(t, v) \in [K_1, K_2]$ ,  $K = K_2 - K_1 = K^t \geq 0$  et  $[I + K_2.G(p)].[I + K_1.G(p)]^{-1}$  est strictement positive réelle,

On rappelle qu'une matrice composée de fonctions de transfert rationnelles est strictement positive si :

.  $M$  est Hurwitz,

.  $M(jw) + M^t(-jw)$  est définie positive pour tout  $w \in R$ ,

.  $M(\infty) + M^t(\infty)$  est définie positive,

Toutes ces conditions vont amenées des contraintes sur  $K_1$  et  $K_2$ . On obtient par cette méthode un domaine qui ne contient pas l'origine pour  $x = 0$  et ce domaine de stabilité peut ne pas être convexe suivant la nature des équations non linéaires régissant l'évolution du système. C'est notamment le cas pour le convertisseur Boost contrôlé en courant et fonctionnant en mode de conduction continue (système présenté au chapitre I).

## 2.2-Critères du cercle/Popov [27]

### 2.2.1- Définitions et propriétés

Ces deux critères sont utilisés pour des systèmes non linéaire constitué d'un système linéaire soumis à certaines non linéarités, celles-ci respectant des conditions de secteur.

Soit le système :  $\dot{x}(t) = Ax(t) - B\Phi(t, y)$  où  $x \in R^n$  (2.34)

$\Phi: \left. \begin{array}{l} (R^+ \times R^m) \rightarrow R^m \\ (t, y) \rightarrow \Phi(t, y) \end{array} \right\}$  où  $\Phi$  est une fonction non linéaire satisfaisant  $\Phi(t, 0) = 0 \forall t \geq 0$ ,

localement lipschitz en  $y$ , décentralisée, c-a-d dont chaque composante  $\Phi_i$  de  $\Phi$  ne dépend que de la mesure de  $y_i, \forall i = 1, \dots, m$  et sans mémoire. On obtient donc un système linéaire défini par les matrices  $A$  et  $B$  commandé par la non linéarité  $\Phi$ .

Soient deux matrices diagonales  $\Omega_{\min}$  et  $\Omega_{\max}$ , telles que  $\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min} > 0$ . Alors  $\Phi(t, y)$  est supposée appartenir au secteur  $(\Omega_{\min}, \Omega_{\max})$  et vérifie la condition de secteur :

$$[\Phi(t, y) - \Omega_{\min} y]^T [\Phi(t, y) - \Omega_{\max} y] \leq 0, \forall t \geq 0, \forall y \in S \subseteq R^m. \quad (2.35)$$

Si  $S \subset R^m$ , la condition de secteur est vérifiée localement, si  $S = R^m$ , elle est vérifiée globalement.

Définition : Le système (2-7) est dit localement absolument stable si le système (2-7) est localement asymptotiquement stable pour tout non linéarité vérifiant localement la condition de secteur (2-8).

Définition : Le système (2-7) est dit globalement absolument stable si le système (2-7) est globalement asymptotiquement stable pour tout non linéarité vérifiant globalement la condition de secteur (2-8).

### Notion de Positivité réelle

La positivité réelle d'une matrice peut être prouvée en utilisant les lemmes donnés ci-dessous. On pose  $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ , la matrice de transfert carré d'ordre  $m$  où  $(A,B)$  est commandable et  $(C,A)$  est observable. Alors,

- La matrice  $G(s)$  est dite positive réelle si et seulement s'il existe des matrices  $P=P^T > 0$ ,  $L$  et  $S$  telles que :

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -L^T L \\ P B &= C^T - L^T S \\ S^T S &= D + D^T \end{aligned} \quad (2.36)$$

- La matrice  $G(s)$  est dite strictement positive réelle si et seulement s'il existe des matrices  $P=P^T > 0$ ,  $L$  et  $S$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$  tels que les relations

$$\begin{cases} P B = C^T - L^T S \\ S^T S = D + D^T \end{cases} \text{ et } A^T P + P A = -L^T L - \varepsilon P \text{ sont vérifiées.} \quad (2.37)$$

### 2.2.2- Analyse de la stabilité

Différents outils sont disponibles pour prouver la stabilité asymptotique de systèmes linéaires bouclés par une contre réaction non linéaire.

#### Proposition 1

Soient  $\Omega_{\min}$  et  $\Omega_{\max}$  deux matrices diagonales telles que  $\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min} > 0$ . On considère le système (2-7) avec  $A$  asymptotiquement stable  $(A,B)$  commandable. La sortie de (2-7) est définie par  $y=Cx$  et nous faisons l'hypothèse que  $(C,A)$  est observable. De plus, la non linéarité  $\Phi$  satisfait la condition de secteur (2-8).

Alors, le système (2-7) est absolument asymptotiquement stable pour  $y \in S \subseteq R^m$  s'il existe les matrices  $P=P^T > 0, L \in R^{m \times n}$  et un scalaire  $\varepsilon > 0$  tels que

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= -L^T L - \varepsilon P \\ P B &= C^T \Omega - \sqrt{2} L^T \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si  $S = R^m$ , la stabilité est vérifiée globalement, si  $S \subset R^m$ , la stabilité est vérifiée localement.

#### Critère du cercle [27]

Sous les hypothèses de la proposition 1, le système (2-7) est absolument asymptotiquement stable pour  $y \in S \subseteq R^m$  si  $Z(s) = I_m + \Omega G(s) = I_m + \Omega C (sI_n - A)^{-1} B$  est strictement positive réelle. Si  $S = R^m$ , la stabilité est vérifiée globalement. Si  $S \subset R^m$ , la stabilité est vérifiée localement.

### Critère de Popov [27]

Soient  $\Omega_{\min}$  et  $\Omega_{\max}$  deux matrices diagonales telles que  $\Omega = \Omega_{\max} - \Omega_{\min} > 0$ . Considérons le système (2-7) avec  $A$  asymptotiquement stable ( $A, B$ ) commandable. La sortie de (2-7) est définie par  $y = Cx$  et nous faisons l'hypothèse que  $(C, A)$  est observable. De plus, la non linéarité  $\Phi$  satisfait la condition de secteur (2-8) et est indépendante du temps. Le système (2-7) est absolument asymptotiquement stable pour  $y \in S \subseteq R^m$  si  $Z(s) = I_m + (1 + \eta s)\Omega G(s) = I_m + (1 + \eta s)\Omega C(sI_n - A)^{-1}B$  est strictement positive réelle. De plus, si  $S \subset R^m$ , la stabilité est garantie localement, et si  $S = R^m$ , elle est garantie globalement.

### 2.3- théorème des petits gains

On suppose que les équations différentielles régissant le fonctionnement du système puisse se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = F(z, x) \\ \dot{x} = G(x, z) \end{cases} \quad \text{où } F \text{ et } G \text{ sont des applications continues.}$$

On suppose de plus qu'il existe deux fonctions  $V_x$  et  $V_z$ , définies positives, radialement non bornées et  $C^1$ , deux fonctions  $\alpha_x$  et  $\alpha_z$  définies positives et deux fonctions  $\rho_x$  et  $\rho_z$  de classe K telles que les implications suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} V_z(z) \geq \rho_z(V_x(x)) \Rightarrow \frac{\partial V_z}{\partial z}(z)F(z, x) \leq -\alpha_z(V_z(z)) \\ V_x(x) \geq \rho_x(V_z(z)) \Rightarrow \frac{\partial V_x}{\partial x}(x)G(x, z) \leq -\alpha_x(V_x(x)) \end{cases} \quad (2.39)$$

Dans ces conditions si  $\rho_z \circ \rho_x(s) < s \quad \forall s > 0$ , alors l'origine est un point globalement asymptotiquement stable. Ce théorème est utilisable dans un nombre très restreint de systèmes car il est difficile de vérifier simultanément les deux implications (2-9). Dans le cadre des travaux réalisés dans cette thèse, cette technique n'a pas abouti notamment pour traiter le cas du convertisseur Boost.

### 2.4- Utilisation des normes $H_2$ et $H_\infty$

#### 2.4.1- Généralités

La représentation d'état d'un système continu est de la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A.x(t) + B.u(t) \\ y(t) = C.x(t) + D.u(t) \end{cases} \quad x \in R^n, u \in R^m, y \in R^p \quad (2.40)$$

La fonction de transfert du système « sortie/perturbation » est définie par :

$$G(j\omega) = C.(j\omega.I - A)^{-1}.B + D. \quad (2.41)$$

Le vecteur  $u(t)$  modélise ici une perturbation indépendante de l'état du système. En régime normal de fonctionnement, celle-ci est nulle. Un critère de performances est de savoir comment le système va réagir aux perturbations qui apparaissent lorsqu'il est mis en contact avec son environnement. Les modèles utilisés ne sont qu'une représentation imparfaite de la réalité (incertitudes de modélisation). Un modèle mathématique ne peut décrire exactement le comportement réel d'un processus physique.

*Norme  $H_2$  [25]*

La norme  $H_2$  permet d'intégrer un critère énergétique sur l'ensemble de la bande de fréquence. La norme  $H_2$  est un bon outil pour évaluer l'aptitude du système à filtrer des bruits générés par les actionneurs ou bien issus de perturbations extérieures. On peut dire que la norme  $H_2$  mesure la puissance du signal de sortie  $y(t)$  en réponse à un bruit blanc sur l'entrée  $u(t)$ . Il s'agit d'un critère qui mesure la performance d'atténuation des perturbations.

On pose :  $G(-jw)^T = G^*(jw)$ .

La norme  $H_2$  est alors définie par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$H_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(jw)|^2 dw} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Trace}[G^*(jw).G(jw)] dw}. \quad (2.42)$$

$$H_2 = \sqrt{\text{Trace}(B^T M_o B)} = \sqrt{\text{Trace}(C M_c C^T)} \quad (2.43)$$

Le calcul de la norme  $H_2$  est lié aux grammien de commandabilité et d'observabilité. On considère par la suite que  $D = 0$  dans les équations du système continu.

*Définitions des grammien*

Le grammien de commandabilité du système continu est une matrice  $M_c$  définie par :

$$M_c = \int_0^{+\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt. \quad (2.44)$$

En général on calcule cette matrice avec l'équation de Lyapunov :

$$A M_c + M_c A^T + B B^T = 0. \quad (2.45)$$

Le grammien d'observabilité du système continu est une matrice  $M_o$  définie par :

$$M_o = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt. \quad (2.46)$$

On calcule cette matrice avec l'équation de Lyapunov :

$$A^T M_o + M_o A + C^T C = 0 \quad (2.47)$$

Les grammien fournissent des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité et d'observabilité.

**Théorème :** Le système continu est commandable et observable (2-10) si et seulement si le grammien de commandabilité  $M_c$  et d'observabilité  $M_o$  sont des matrices définies positives.

Théorème : Soient  $M_o^{\text{sup}}$  et  $M_c^{\text{sup}}$  respectivement une borne supérieure du grammien d'observabilité et une borne supérieure du grammien de commandabilité. On calcule alors la norme  $H_2$  du système en résolvant les inéquations :

$$H_2 = \min(B^T M_o^{\text{sup}} B) \quad \text{ou} \quad H_2 = \min(C M_c^{\text{sup}} C^T)$$

$$\text{avec} \begin{cases} M_o^{\text{sup}} > 0 \\ A^T M_o^{\text{sup}} + M_o^{\text{sup}} A + C^T C < 0 \end{cases} \quad \text{avec} \begin{cases} M_c^{\text{sup}} > 0 \\ A M_c^{\text{sup}} + M_c^{\text{sup}} A^T + B B^T < 0 \end{cases} \quad (2.48)$$

*Norme  $H_\infty$*

Soit un système non linéaire de vecteur d'entrée  $u$ , de vecteur de sortie  $y$ , de vecteur d'état  $x$ , d'équations :  $\dot{x} = f(x, u)$  et  $y = g(x, u)$ .

*Définition de la dissipativité*

Soit  $S(y, u)$  une fonction scalaire appelée flux d'énergie entrant. Un système dynamique est dit S- dissipatif s'il existe une fonction d'énergie  $V(x)$  telle que

$\frac{dV(x)}{dt} < S(y, u)$  pour tout  $x \neq x_0$  où  $x_0$  est le point d'équilibre considéré vérifiant  $f(x_0, 0) = 0$ .

$$\text{Un type particuliers de fonctions } S \text{ est : } S(y, u) = \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Il s'agit de la  $\{Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}\}$ - dissipativité.

*Théorème de la caractérisation LMI de la dissipativité*

Le système (2-10) est  $\{Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}\}$ - dissipatif s'il existe une matrice  $Q = Q^T > 0$  vérifiant le système LMI suivant :

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q A - C^T Q_{11} C & Q B - C^T Q_{11} D - C^T Q_{12} \\ B^T Q - D^T Q_{11} C - Q_{12}^T C & -D^T Q_{11} D - D^T Q_{12} - Q_{12}^T D - Q_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (2.50)$$

*Définition de la norme  $H_\infty$*

$$\text{La norme } H_\infty \text{ d'un système stable est définie par : } \max \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \text{ avec } \|y\|_2 = \int_0^{+\infty} y^T y dt. \quad (2.51)$$

Elle indique la plus grande amplification sur toutes les fréquences pour une entrée  $u$  sinusoïdale : c'est le gain maximal de la réponse fréquentielle.

Elle permet de prendre en compte des objectifs de suivi de référence, de stabilité, de marges de stabilité. La norme  $H_\infty$  permet de mesurer le niveau de performance d'un système dans un contexte de pire-cas. Le modèle d'un système n'étant pas toujours parfaitement connu, une façon raisonnable d'envisager le problème de performance robuste est de considérer le calcul de la norme  $H_\infty$  dans le pire des cas.

*Lemme de Yakubovitch- Kalman*

Soit  $\Sigma$  un système linéaire, les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\Sigma$  est  $\{Q_{11}, Q_{22}, Q_{12}\}$ -dissipatif.

$$(ii) \forall w \in R^+ \text{ tel que } \det(jwI - A) \neq 0, \begin{bmatrix} G(jw) \\ I \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G(jw) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.52)$$

*Théorème de l'équivalence entre norme  $H_\infty$  et dissipativité*

Soit un système linéaire  $\Sigma$  et la fonction de flux d'énergie  $S(y, u) = \gamma^2 u^T u - y^T y$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i)  $\Sigma$  est  $S$ -dissipatif.

(ii)  $\|\Sigma\|_\infty \leq \gamma$ .

Les valeurs singulières de la matrice  $G(jw)$  sont définies comme les racines carrées des valeurs propres de

$$G(jw).G(-jw)^T : \sigma_i(G(jw)) = \sqrt{\lambda_i(G(jw).G(-jw)^T)}, i = 1, \dots, \min\{m, p\}$$

Les matrices  $G(jw).G^*(jw)$  sont hermitiennes semi-définies positives, leurs valeurs propres sont donc réelles positives ou nulles.

La proposition (i) est équivalente à  $-G^*(jw).G(jw) + \gamma^2 I \geq 0$  (d'après le lemme de Yakubovitch- Kalman) donc les valeurs propres de  $G^*(jw).G(jw)$  sont inférieures à  $\gamma^2$ . Une manière d'approcher la norme  $H_\infty$  consiste à rechercher la plus petite valeur possible de  $\gamma$  pour laquelle la matrice  $I - \gamma^{-2}G(jw).G^*(jw)$  reste inversible pour tout  $w$ . On peut écrire :

$$\|G\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow (I - \gamma^{-2}G(jw)^*G(jw))^{-1} \text{ n'a pas de pôles sur l'axe des imaginaires.} \quad (2.53)$$

Or, les valeurs propres réelles et positives de  $G^*(jw).G(jw)$  sont les carrées des valeurs singulières de  $G(jw)$ . La norme  $H_\infty$  de  $\Sigma$  est donc la borne supérieure de la valeur singulière maximale.

La majoration de la norme  $H_\infty$  par  $\gamma$  est donc équivalente à la  $\{-I, \gamma^2, 0\}$ -dissipativité.

*Lemme borné réel*

Un système dynamique continu linéaire de matrices d'état  $A, B, C, D$  a une norme  $H_\infty$  inférieure à  $\gamma$  si et seulement s'il existe une matrice  $Q^T = Q > 0$  vérifiant :

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q A + C^T C & Q B + C^T D \\ B^T Q + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.54)$$

En utilisant le complément de Schur pour éliminer la non linéarité en  $\gamma^2$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} A^T Q + Q A & Q B & C^T \\ B^T Q & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.55)$$

On peut donc appliquer le lemme borné réel pour le calcul de la norme  $H_\infty$  d'un système linéaire stable et connaître la dynamique maximale en rejet de perturbations.

#### 2.4.2- Utilisation des normes $H_2$ et $H_\infty$ pour l'analyse de la stabilité au sens de Lyapunov

La norme  $H_\infty$  permet de donner un formalisme unifié pour l'analyse et la synthèse fréquentielle. Elle permet de prendre en compte des objectifs de suivie de référence, de stabilité, de marges de stabilité. De plus en utilisant les résultats donnés en (2.54) ou (2.55), il est facile de démontrer qu'un système linéaire est stable et admet une norme  $H_\infty$  inférieure à un niveau  $\gamma$  ssi

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

On va utiliser ce résultat pour les modèles de Takagi-Sugeno que l'on va définir ci-dessous.

### 3-Modélisation flou de type Takagi-Sugeno (TS)

#### 3.1- Modèles flou de type Takagi-Sugeno

Les modèles flous TS sont utilisés pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires. Un ensemble flou est défini par sa fonction d'appartenance. Un point de l'univers  $x$  appartient à un ensemble  $A$  avec un degré d'appartenance,  $0 \leq F_A(x) \leq 1$ .

Une règle floue est de la forme « Si je rencontre telle situation alors j'en tire telle conclusion ».

La situation, appelée prémisse ou antécédent de la règle, est définie par une combinaison de relations de la forme  $x$  est  $A$  pour chacune des composantes du vecteur d'entrée.

La partie conclusion de la règle est appelée conséquence ou conclusion.

Les modèles T.S sont caractérisés par l'expression de la dynamique locale de chaque règle par un modèle linéaire du système. Le modèle global est donc obtenu par une combinaison floue des modèles linéaires du système.

La représentation sous la forme d'un modèle flou de type T.S est une astuce permettant une réécriture de modèles non linéaires en reportant les non linéarités dans la partie prémisse des règles.

Le choix des règles, des variables de prémisses et des sous-ensembles flous relèvent de l'identification structurelle du système.

Le modèle T.S n'est pas unique, d'ailleurs c'est mieux d'avoir un nombre de règles minimales afin d'éviter de manipuler un trop grand nombre de matrices dans les inéquations servant à démontrer la stabilité d'un système. Des modèles linéaires interconnectés par des fonctions scalaires non linéaires ayant la propriété de somme convexe constituent ces systèmes. On

intègre donc des modèles locaux linéaires à partir du système non linéaire initial. C'est une méthode qui utilise des règles « si-alors » représentant des relations locales linéaires entrée/sortie du système non linéaire.

On a alors la possibilité de définir les dynamiques locales dans chaque implication floue (règle) par un modèle linéaire du type  $\dot{x}(t) = A_i x(t)$ . On peut déterminer une infinité de modèles TS d'un même modèle non linéaire. Les conditions de stabilité sont généralement basées sur les fonctions de Lyapunov.

Les prémisses  $z_i$  sont les variables de décision ou variables caractéristiques dépendant de l'état / et ou des entrées.

Les fonctions d'activation  $F_j^i$  dite aussi de pondération ou d'interpolation ou d'appartenance (degré de véracité normalisé) sont des fonctions normalisées vérifiant la propriété de convexité.

L'espace de décision est l'espace caractérisé par l'ensemble des variables caractéristiques de décision qui peuvent être des variables d'état mesurables.

Un modèle flou réalise une partition floue de l'espace caractéristique sous la forme de  $r$  règles floues telle que :

- Règle  $R^i$  du modèle :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i, \dots, \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) \end{cases} \quad \forall i=1,2,\dots,r \quad (2.56)$$

avec :  $x(t) \in R^n$  le vecteur d'état,

$u(t) \in R^m$  le vecteur d'entrée,

$y(t) \in R^p$  le vecteur de sortie,

$z(t) \in R^q$  le vecteur des prémisses dépendant (linéairement ou pas) du vecteur d'état,

$A_i, B_i, C_i$  des matrices à coefficients constants.

Chaque conséquence de règle représentée par des relations dans l'espace d'état est appelée un sous modèle.

A chaque règle  $R^i$  est attribué un poids  $w_i(z(t))$  qui dépend de la valeur de vérité (ou degré d'appartenance) des  $z(t)$  aux sous ensembles flous  $F_j^i$  notée  $F_j^i(z_j(t))$  et du choix de la modélisation du connecteur (opérateur) et reliant les prémisses. On essaye de minimiser le nombre de règles du modèle flou, ce nombre de règles a une grande influence sur la conservativité des résultats obtenus en stabilité. Le connecteur « et » est souvent choisi comme étant le produit d'où :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p F_j^i(z_j(t)), i=1,2,\dots,r \quad (2.57)$$

avec  $w_i(z(t)) \geq 0 \forall t$  puisque les fonctions d'appartenance prennent leur valeur dans l'intervalle  $[0,1]$ .

A partir des poids attribués à chaque règle, les sorties finales des modèles flous sont inférées de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \cdot (A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \quad y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) \cdot C_i \cdot x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} . \quad (2.58)$$

En posant  $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$  qui vérifie une propriété de somme convexe c-a-d :

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \text{ et } h_i(z(t)) \geq 0 \quad \forall t .$$

Le modèle flou du système non linéaire initial s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t)) \quad (2.59)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (C_i \cdot x(t))$$

$$\text{Avec } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1$$

Les prémisses étant en général fonctions d'une partie de l'état  $x$ , il est possible d'utiliser la notation  $h_i(z) = h_i(z(x)) = h_i(x)$ .

### *Propriétés*

- Il est possible d'obtenir un modèle TS qui représente le système non linéaire de manière exacte dans un compact des variables d'état.
- Le modèle obtenu comprend  $2^n$  règles, avec  $n$  le nombre de non linéarités considérées.

Remarque : Dans les travaux présentés dans ce mémoire, on prendra  $u(t) = 0$  puisque le système étudié est supposé être un système bouclé pour lequel les correcteurs ont déjà été synthétisés. Toutes les équations du système sont donc incluses dans l'expression des matrices  $A_i$ .

### *Lemme*

Si  $\forall x \in [-b, a]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $f(x) : [-b, a] \rightarrow \mathbb{R}$  bornée sur  $[-b, a]$ , alors il existe deux fonctions  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  ainsi que deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$F_i : [-b, a] \rightarrow [0, 1], i \in \{1, 2\} \quad \text{avec} \quad F_1(x) + F_2(x) = 1 .$$

$$x(t) \mapsto F_i(x(t))$$

$$f(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$$

$$F_1(x) \geq 0, F_2(x) \geq 0.$$

En considérant une fonction  $f(x)$  bornée tel que  $f_{\min} \leq f(x) \leq f_{\max}$ , il est toujours possible d'écrire :

$$f(x) = \alpha F_1(x) + \beta F_2(x) \quad (2.60)$$

avec  $\alpha = f_{\max}$ ,  $\beta = f_{\min}$ ,  $F_1(x) = \frac{f(x) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$  et  $F_2(x) = \frac{f_{\max} - f(x)}{f_{\max} - f_{\min}}$

### 3.1.1-Exemples d'utilisation

#### Exemple 1

Soit le système dynamique 
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^3(t) + \cos(x_1(t)).x_2^4(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3.x_1(t) + 2.x_2(t) \end{cases}$$

On peut considérer 3 non linéarités :  $x_1^2(t)$ ,  $x_2^3(t)$  et  $\cos(x_1(t))$  soit  $2^3 = 8$  règles. Il est aussi possible de ne considérer que deux non linéarités  $x_1^2(t)$  et  $\cos(x_1(t)).x_2^3(t)$ . On choisit alors comme prémisses  $z_1(t) = x_1^2(t)$  et  $z_2(t) = \cos(x_1(t)).x_2^3(t)$  qui conduit seulement à  $2^2 = 4$  règles.

Si on prend maintenant comme non linéarité et prémisses associées :

$$z(t) = x_1^2(t) + \frac{\cos(x_1(t))}{x_1(t)}.x_2^4(t) = f(x)$$

On a alors uniquement 2 règles à traiter. Alors en supposant les variables d'état  $x_1$  et  $x_2$  bornées ( $x_1(t) \in [x_{1\min}, x_{1\max}]$  et  $x_2(t) \in [x_{2\min}, x_{2\max}]$ ), il vient :

$$f(x) = f_{\max} \cdot \frac{z(t) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} + f_{\min} \cdot \frac{f_{\max} - z(t)}{f_{\max} - f_{\min}} = f_{\max} \cdot F_1^1(z) + f_{\min} \cdot F_1^2(z)$$

Alors - si  $z = f(x)$  est  $F_1^1$  alors 
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{\max} \cdot x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3.x_1(t) + 2.x_2(t) \end{cases}$$

- si  $z = f(x)$  est  $F_1^2$  alors 
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_{\min} \cdot x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3.x_1(t) + 2.x_2(t) \end{cases}$$

#### Exemple 2

Soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2.x_1 + \cos(x_1).x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = 4.x_1 - 6.x_2 + x_2^2.x_3 \\ \dot{x}_3 = 3.x_2^2.x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \cos(x_1) & -1 \\ 4 & -6 & x_2^2 \\ 3.x_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

On a comme deux prémisses possibles conduisant à 4 règles:

$$z_1(x_1(t)) = \cos(x_1(t)) = f_1(x_1)$$

$$z_2(x_2(t)) = x_2^2(t) = f_2(x_2).$$

Pour cette exemple, on suppose que  $x_1(t) \in R$  et  $x_2(t) \in [-a, a]$ .

On pose alors :  $f_1(x_1) = F_1^1(x_1).f_{1\max} + F_1^2(x_1).f_{1\min}$  et  $f_2(x_2) = F_2^1(x_2).f_{2\max} + F_2^2(x_2).f_{2\min}$ ,

avec  $f_{1\min} = -1, f_{1\max} = 1, f_{2\min} = 0, f_{2\max} = a^2$

$$F_1^1(x_1) = \frac{1 + \cos(x_1)}{2}, F_1^2(x_1) = \frac{1 - \cos(x_1)}{2}$$

$$F_2^1(x_2) = \frac{x_2^2}{a^2}, F_2^2(x_2) = \frac{a^2 - x_2^2}{a^2}$$

En prenant toujours l'opérateur produit comme opérateur de conjonction, les fonctions d'activation au nombre de quatre sont obtenues à partir des produits :

$$w_1 = F_1^1.F_2^1, w_2 = F_1^1.F_2^2, w_3 = F_1^2.F_2^1, w_4 = F_1^2.F_2^2$$

$$h_1 = w_1, h_2 = w_2, h_3 = w_3, h_4 = w_4 \text{ avec } \sum_{i=1}^4 w_i = 1$$

On aboutit à quatre modèles locaux :

Si  $z_1$  est  $F_1^1$  et  $z_2$  est  $F_2^1$  alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & a^2 \\ 3.a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si  $z_1$  est  $F_1^1$  et  $z_2$  est  $F_2^2$  alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si  $z_1$  est  $F_1^2$  et  $z_2$  est  $F_2^1$  alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & a^2 \\ 3.a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Si  $z_1$  est  $F_1^2$  et  $z_2$  est  $F_2^2$  alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Le multimodèle correspondant s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \left( F_1^1 \cdot F_2^1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + F_1^1 \cdot F_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + F_1^2 \cdot F_2^1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & a^2 \\ a^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + F_1^2 \cdot F_2^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

### 3.2-Stabilité des modèles TS

Les modèles T.S vont être utilisés pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires à l'aide des théorèmes énoncés ci-dessous.

*théorème n°1 : utilisation de fonction de Lyapunov quadratique*

Le modèle flou TS autonome  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot A_i x(t)$  (2.61)

est asymptotiquement stable s'il existe une matrice  $P > 0$  telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, r\}, A_i^T P + P A_i < 0 . \quad (2.62)$$

L'existence de  $P$  dépend de deux conditions :

- Tous les modèles locaux sont stables. Il est nécessaire que chaque matrice  $A_i$  soit de Hurwitz.
- Il existe une fonction de Lyapunov commune aux  $n$  modèles locaux.

Remarque : la première condition implique naturellement que  $\sum_{i=1}^n A_i$  soit de Hurwitz.

Il faut savoir qu'un modèle TS peut être globalement asymptotiquement stable sans qu'il soit quadratiquement stable, c'est-à-dire sans qu'aucune fonction de Lyapunov quadratique puisse vérifier les conditions de stabilité.

*Fonction polyquadratique, multiquadratique ou polytopique*

L'analyse qui est fondée sur les fonctions de Lyapunov quadratiques et les résultats qui en découlent sont souvent pessimistes, l'approche quadratique apparaît souvent conservative. Dans une structure multimodèle, les matrices d'état sont valides dans une région limitée de l'espace de fonctionnement (qui correspond à l'espace d'état quand le vecteur des variables de décision dépend uniquement de l'état). Par conséquent, la condition quadratique (qui omet toute information contenue dans les fonctions d'activation  $A^T \cdot P + P \cdot A < 0$  peut n'être valide que dans la zone de fonctionnement correspondante.

On définit alors comme fonction de Lyapunov candidate :

$$V(x(t), z(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) P_i x(t) \text{ avec } P_i > 0, h_i(z(t)) > 0, \sum_{i=1}^n h_i(z(t)) = 1 . \quad (2.63)$$

Cette fonction est construite par interpolation de fonctions de Lyapunov quadratiques locales (définies par les matrices  $P_i$ ) à travers les mêmes fonctions d'activation que le multimodèle. Ce type de fonctions de Lyapunov tient compte de la vitesse de variation des variables de décision du multimodèle continu ce qui explique la réduction du conservatisme de la méthode.

Il existe aussi une autre forme possible de fonction de Lyapunov non quadratique. On peut proposer :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x), V_2(x), \dots, V_n(x)) \quad (2.64)$$

avec  $V_i(x) = x^T(t) P_i x(t)$ ,  $P_i > 0, i \in I_n$ .

Il s'agit de fonctions de Lyapunov quadratique par morceaux utilisées pour réduire le pessimisme des résultats quadratiques. On peut l'utiliser dans le cas de l'approche multi modèle et dans le cadre des systèmes discrets à paramètres incertains bornés et variant dans le temps. L'analyse de la stabilité du modèle TS se fait alors en utilisant les théorèmes suivants :

### *Théorème n° 2*

Supposons qu'il existe des matrices  $P_i > 0$  et des scalaires  $\tau_{ijk} \geq 0$  tels que :

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \tau_{ijk} (P_j - P_k) < 0, \forall (i, j) \in I_r^2, \text{ avec } r \text{ nombre de règles} \quad (2.65)$$

alors le multimodèle (2-14) est globalement asymptotiquement stable. La fonction de Lyapunov associée étant celle donnée en (2-15).

Les courbes équipotentielles de Lyapunov représentent l'état du système telle que la fonction de Lyapunov soit constante en fonctions des variables d'état. Les courbes de niveaux ainsi obtenues caractérisent les zones de l'espace d'état d'équi-énergie. Contrairement au cas quadratique, les courbes décrites ne sont pas des ellipsoïdes et ne sont pas nécessairement convexes.

### *Théorème n° 3*

La fonction de Lyapunov non quadratique considérée est :

$$V(x(t)) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) P_i \right) x(t). \quad (2.66)$$

Soit le système  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t)$ , soit un réel positif  $\alpha$  satisfaisant

$$A_i^T A_i - \alpha^2 I \leq 0, i \in I_r.$$

S'il existe un ensemble de  $r$  matrices symétriques positives  $P_i, i \in I_r^*$  et  $R = R^T > 0$  de  $R^{n \times n}$  et trois matrices symétriques  $S, M, P_0 \in R^{n \times n}$  satisfaisant :

$$a. A_i^T P_i + P_i A_i \leq S, i \in I_r$$

$$b. A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i \leq 2M, (i, j) \in I_r^2, j > i$$

$$c. S - M \leq 0$$

$$d. -R \leq P_i - P_0 \leq R, i \in I_r$$

$$e. M + \sum_{i=1}^r \|h_i(x)\|^2 (S - M) + \alpha \|x\| G_d(x) R < 0 \quad (2.67)$$

$$\text{avec } G_d(x) = \sum_{i=1}^r \|\Delta h_i(x)\|, \|\Delta h_i(x)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_n}\right)^2}$$

Alors le système TS est globalement asymptotiquement stable.

Remarque : En remplaçant  $\|h(x)\|^2$  par  $\gamma \geq \|h(x)\|^2$  et en posant qu'il existe un réel  $\delta > 0$  majorant de la fonction  $\|x\|G_d(x)$ ,  $x \in R^n$ , alors l'inégalité  $e$  peut être remplacée par :

$$M + \gamma.(S - M) + \alpha.\delta.R < 0. \quad (2.68)$$

### Stabilité exponentielle des modèles TS

Définition de la stabilité exponentielle des modèles TS

Le degré de stabilité, ou le taux de décroissance du système  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x).A_i.x(t)$  est le plus grand scalaire  $\alpha$  tel que quelque soit la trajectoire vérifiant  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x).A_i.x(t)$  on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} \|x(t)\| = 0$ .

En d'autres termes, le taux de décroissance peut être défini sur toutes les trajectoires non nulles, par  $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln \|x(t)\|}{t}$ . Prouver la stabilité exponentielle du système revient à assurer

que, pour toutes les trajectoires  $x(t)$  vérifiant  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x).A_i.x(t)$ , on a pour  $\alpha > 0$  :

$$\exists P > 0: \frac{dV(x(t))}{dt} + 2\alpha.V(x(t)) < 0 \quad (2.69)$$

Dans ce cas, (2.69) implique que  $V(x(t)) \leq V(x(0)).e^{-2\alpha t}$  et que pour toutes les trajectoires vérifiant  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x).A_i.x(t)$ , on a :

$$\|x(t)\| \leq e^{-\alpha t} \cdot \left( \frac{\lambda_{\max}(P^T P)}{\lambda_{\min}(P^T P)} \right)^{0.5} \text{ où } \lambda_{\max}(P^T P) \text{ (respectivement } \lambda_{\min}(P^T P)) \text{ représente la}$$

valeur maximale (respectivement minimale) des valeurs propres de la matrice  $P^T P$

Le système est alors dit  $\alpha$ -stable où  $\alpha$  est bien un minorant du taux de décroissance des trajectoires du système  $\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x).A_i.x(t)$  qu'il serait important de maximiser.

On peut faire l'analogie avec une région LMI en imposant à la partie réelle des valeurs propres d'être à gauche de la droite  $\text{Re}(z) = -\alpha$  dans le plan complexe.

On a alors :

$$A_i^T P + P A_i + \alpha I.P + P.\alpha I \leq 0 \quad (2.70)$$

Théorème de la stabilité exponentielle du modèle TS avec M- Matrices

Définition : Une matrice  $A = (a_{ij}) \in R$  dont tous les termes extra-diagonaux sont négatifs ou nuls est appelée Z-matrice.

Théorème : Pour qu'une Z-matrice  $A$  soit une M-matrice, il faut et il suffit qu'une des propriétés suivantes qui sont équivalentes entre elles, soit vérifiée :

- (i) Toute valeur propre de  $A$  a sa partie réelle positive,
- (ii) Tous les déterminants mineurs principaux de  $A$  sont positifs,
- (iii) Il existe un vecteur  $v$  strictement positif (vecteur à composantes strictement positives), tel que le vecteur  $Av$  soit aussi un vecteur strictement positif.

Pour étudier la stabilité exponentielle d'un modèle TS, on va considérer la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i x(t), P_i > 0, \alpha_i \in R^{*+}, \quad (2.71)$$

$$\text{qui vérifie alors la propriété suivante : } c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad (2.72)$$

$$\text{avec } c_1 = \lambda_{\min} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) > 0 \text{ et } c_2 = \lambda_{\max} \left( \sum_{i=1}^r \alpha_i P_i \right) > 0.$$

On utilise ce type de fonctions de Lyapunov pour l'étude de la stabilité exponentielle.

Théorème : On suppose qu'il existe des matrices symétriques  $P_i > 0, S_{ii} > 0$  et  $S_{ij}$  telles que :

$$(i) A_i^T P_i + P_i A_i \leq -S_{ii}, \forall i \in I_r \quad (2.73)$$

$$(ii) A_j^T P_i + P_i A_j \leq S_{ij}, \forall (i, j) \in I_r^2, i \neq j$$

$$(iii) \Phi \text{ est une M-matrice avec } \Phi = \begin{bmatrix} \lambda_{\min}(S_{11}) & -|\lambda_{\max}(S_{12})| & \dots & -|\lambda_{\max}(S_{1n})| \\ -|\lambda_{\max}(S_{21})| & \lambda_{\min}(S_{22}) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -|\lambda_{\max}(S_{n1})| & \dots & \dots & \lambda_{\min}(S_{nn}) \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

alors le multimodèle est globalement exponentiellement stable.

Comme  $\Phi$  est une M-matrice, alors il existe un vecteur positif  $\alpha$  tel que le vecteur  $\beta = \Phi \alpha$  est positif.

On pose  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$ , on peut écrire :

$$h(z(t)) \beta \geq \beta_{\min} > 0 \text{ avec } \beta_{\min} = \min(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (2.75)$$

On montre que  $\dot{V}(x(t)) \leq -2\delta V(x(t))$  où  $\delta = \frac{1}{2} \frac{\beta_{\min}}{c_2} > 0$  est le degré de stabilité du

système.

On a donc :

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0)) e^{-2\delta(t-t_0)}, \forall t \geq t_0, \forall x(t_0) \in R^p. \quad (2.76)$$

### 3.3-Utilisation de la norme $H_\infty$ pour analyser la stabilité d'un modèle TS

On va montrer qu'il est possible d'utiliser les normes  $H_\infty$  et  $H_2$  pour prouver la stabilité des modèles flous de type Takagi- Sugeno dont les modèles locaux sont linéaires.

Avec la norme  $H_\infty$

On fait l'hypothèse qu'un modèle T.S soumis à une perturbation externe  $u(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (C_i x(t) + D_i u(t))\end{aligned}\quad (2.77)$$

On utilise la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x \geq 0$ ,  $\forall x \in R^n$

On fait l'hypothèse sur la norme  $H_\infty$  du système : chaque sous modèle TS du système est majorée par un unique réel positif  $\gamma$ . En utilisant l'inégalité matricielle du lemme borné réel sur les modèles TS, il existe des matrices  $P_i$  vérifiant :

$$\sum_{i=1}^r (h_i(z(t))) \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + C_i^T C_i & P_i B_i + C_i^T D_i \\ B_i^T P_i + D_i^T C_i & D_i^T D_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

qui correspond, à la condition :

$$\begin{bmatrix} x^T & u^T \end{bmatrix} \cdot \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i + C_i^T C_i & P_i B_i + C_i^T D_i \\ B_i^T P_i + D_i^T C_i & D_i^T D_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} < 0 \quad (2.78)$$

On suppose de plus qu'il soit possible d'exhiber une unique matrice  $P$  telle :  $P = P_i \forall i \in \{1, \dots, r\}$

Alors en développant l'équation (2.78), il vient :

$$\sum_{i=1}^r (h_i(z(t))) (x^T A_i^T P x + x^T P A_i x + x^T C_i^T C_i x + u^T B_i^T P x + u^T D_i^T C_i x + x^T P B_i u + x^T C_i^T D_i u - \gamma^2 u^T u + u^T D_i^T D_i u) < 0$$

Après factorisation, il vient :

$$\sum_{i=1}^r (h_i(z(t))) (x^T P (A_i x + B_i u) + (A_i x + B_i u)^T P x + (C_i x + D_i u)^T (C_i x + D_i u) - \gamma^2 u^T u) < 0 \quad (2.79)$$

Soit la fonction de Lyapunov candidate  $V(x) = x^T P x \geq 0$ ,  $\forall x \in R^n$ . Après dérivation, il vient :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x + B_i u)^T P x + x^T P \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x + B_i u)$$

Soit encore :

$$\dot{V}(x) = x^T \cdot \left( \sum_{i=1}^r \left( (P \cdot (A_i x + B_i u) + (A_i x + B_i u)^T \cdot P) h_i(z(t)) \right) \right) \cdot x \quad (2.80)$$

A l'aide des relations (2.79) et (2.80), il vient :

$$\dot{V}(x) + \sum_{i=1}^r (h_i(z(t))(C_i x + D_i u)^T (C_i x + D_i u) - \gamma^2 u^T u) < 0$$

$$\text{soit encore} \quad \dot{V}(x) + y^T y - \gamma^2 u^T u < 0 \quad (2.81)$$

En prenant  $u$  nul (système TS sans perturbation), on a bien, d'après (2.81),  $\dot{V}(x) < 0$

donc le système est stable.

S'il y a une perturbation, en intégrant l'équation (2.81) entre  $t = 0$  et  $t = +\infty$ , on a

$$\int_0^{+\infty} \dot{V}(x(t)) dt + \int_0^{+\infty} (y^T y - \gamma^2 u^T u) dt < 0 \Leftrightarrow V(x(+\infty)) - V(x(0)) + \int_0^{+\infty} y^T y dt - \gamma^2 \int_0^{+\infty} u^T u dt < 0, \quad (2.82)$$

Or en supposant qu'à l'origine des temps  $x(0) = 0$   $V(0) = 0$ , et que  $V(x(+\infty)) = 0$  (puisque le système est stable) alors en remarquant que :

$$\int_0^{+\infty} y^T y dt = \|y(t)\|_2^2 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} u^T u dt = \|u(t)\|_2^2, \text{ la relation (2.82) se réécrit :}$$

$$\|y(t)\|_2^2 - \gamma^2 \|u(t)\|_2^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\|y(t)\|_2^2}{\|u(t)\|_2^2} < \gamma^2.$$

Conclusion : La norme  $H_\infty$  du système TS est assurée pour une atténuation inférieure à  $\gamma$  si et seulement si, il existe une fonction de Lyapunov quadratique  $V(x) = x^T P x$  telle que  $P$  soit solution des inéquations :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + C_i^T C_i & P B_i + C_i^T D_i \\ B_i^T P + D_i^T C_i & D_i^T D_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, r\}$$

Où les matrices  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$  sont les matrices de chaque sous modèle TS du système non linéaire initial et où  $r$  correspond au nombre de règles,

Le coefficient  $\gamma$  est un majorant des valeurs des normes  $H_\infty$  de chaque sous modèle TS.

Cette dernière propriété va nous servir à montrer que certains systèmes non linéaires (notamment ceux dont la non linéarité est du type «  $P/V$  » (voir chapitre I) ont une norme  $H_\infty$  et sont donc robustes vis-à-vis de perturbations extérieures bornées.

#### 4-Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un certain nombre d'outils généraux permettant d'appréhender l'étude des systèmes non linéaires et notamment celle des deux non linéarités détaillées au chapitre I. Dans les deux chapitres suivants, on va très souvent faire référence aux définitions, propriétés et théorèmes présentés ci-dessus.

# Chapitre III : Recherche de bassin d'attraction pour des non linéarités de type produit – application au hacheur survolteur

## 1-Introduction : Tentative de détermination d'un domaine convexe de stabilité par la méthode classique

On suppose que le convertisseur élévateur étudié est programmé en mode courant et que les régulateurs sont ceux détaillés au chapitre I. Comme détaillé au chapitre I, les équations différentielles régissant le fonctionnement du convertisseur en mode de conduction continue s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{di_{réf}^*}{dt} \\ \frac{du^*}{dt} \\ \frac{dv_s^*}{dt} \\ \frac{di^*}{dt} \\ \frac{du_p^*}{dt} \end{bmatrix} &= [A]^* \begin{bmatrix} i_{réf}^* \\ u^* \\ v_s^* \\ i^* \\ u_p^* \end{bmatrix} + [B]^* \begin{bmatrix} u^* \cdot i^* \\ u^* \cdot v_s^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \end{bmatrix} = [A]^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + [B]^* \begin{bmatrix} x_2 \cdot x_4 \\ x_2 \cdot x_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3-1)
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_p \cdot i_0}{C} & (\frac{k_p}{rC} - k_i) & \frac{k_p \cdot (u_0 - 1)}{C} & 0 \\ 0 & -w_{pc} & 0 & 0 & w_{pc} \\ 0 & \frac{-i_0}{C} & \frac{-1}{rC} & \frac{1 - u_0}{C} & 0 \\ 0 & \frac{v_{s0}}{L} & \frac{u_0 - 1}{L} & 0 & 0 \\ k_{ic} & \frac{k_p \cdot k_{pc} \cdot i_0}{C} - \frac{k_{pc} \cdot v_{s0}}{L} & \frac{k_p \cdot k_{pc}}{rC} + \frac{k_{pc}}{L} - k_{pc} \cdot k_i - \frac{k_{pc}}{L} u_0 & -k_{ic} + \frac{k_p \cdot k_{pc} \cdot (u_0 - 1)}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{k_p}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_p \cdot k_{pc}}{C} & \frac{-k_{pc}}{L} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A$  et  $B$  sont des matrices à coefficients constants dépendant des paramètres du système et de sa commande et où  $x = 0$  est le point d'équilibre du système.

On sait, d'après Lyapunov, que pour que la partie linéaire du système soit stable, il faut que pour toute matrice symétrique définie positive  $Q$ , il existe une matrice  $P$  définie positive symétrique satisfaisant l'équation de Lyapunov :

$$A^T P + PA = -Q .$$

On va créer comme domaine de stabilité une ellipsoïde dont les axes dépendent des racines carrées des valeurs propres de  $P^{-1}$ . Elle est définie (voir chapitre I) par l'équation :

$$\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x^T P x < \gamma^{-1} \right\}$$

Cette représentation d'une ellipsoïde est unique.

Soit la décomposition de  $P^{-1}$  :  $P^{-1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T$  où  $\lambda_i, i \in \{1, \dots, n\}$  sont les valeurs propres de

$P^{-1}$  classées par ordre décroissant et où les vecteurs propres associés  $v_i$  sont orthonormaux.

Chaque demi-axe de l'ellipsoïde est défini par le segment  $\left[0, \sqrt{\lambda_i} v_i\right]$ .

Le volume de l'ellipsoïde  $vol(\varepsilon) = \alpha_n (\det(\gamma P^{-1}))^{0.5}$  avec  $\alpha_n$  le volume de la boule unité de dimension  $n$ .

Les variations des différentes variables sont donc proportionnelles à la racine carrée de leurs valeurs propres. Le problème est que l'on peut trouver des valeurs propres qui n'ont aucun rapport avec un domaine de stabilité convexe pertinent au niveau physique.

Par exemple, on peut trouver pour  $v_s^*$  et  $u^*$  des valeurs propres assez proches, ce qui donne des variations toutes petites pour la tension  $v_s^*$  étant donné que les variations du rapport cyclique sont inférieures à 1.

Une solution est de fixer numériquement les valeurs diagonales de la matrice  $P$  en fonction des valeurs propres que l'on voudrait avoir pour  $P$  afin d'obtenir des variations pour les différents paramètres (courants, tension, rapports cycliques) exploitables physiquement, par exemple, +/- 100 V pour  $v_s$ , +/- 10 A pour les courants, +/- 0.01 pour les rapports cycliques.

On va utiliser comme matrice  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} 100k_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & 10^{10}k_2 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_3 & a_6 & k_3 & a_9 & a_{10} \\ a_4 & a_7 & a_9 & 50k_4 & a_{11} \\ a_5 & a_8 & a_{10} & a_{11} & 10^{10}k_5 \end{bmatrix} .$$

On choisit les  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  le plus proche de 1 afin d'avoir des valeurs propres approchant le cahier des charges.

Posons :

$$-Q = -A^T P - PA = \begin{bmatrix} A & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1 & B & b_5 & b_6 & b_7 \\ b_2 & b_5 & C & b_8 & b_9 \\ b_3 & b_6 & b_8 & D & b_{10} \\ b_4 & b_7 & b_9 & b_{10} & E \end{bmatrix} .$$

On résout alors le système  $\{k_{i=(1\dots5)}, a_{i=(1\dots11)}\} = \{A, B, C, D, E, b_{i=(1\dots10)}\}$ .

On obtient alors les coefficients de la matrice  $P$  en fonction de ceux de la matrice  $-Q$ .

On choisit les coefficients de la matrice  $-Q$  afin qu'elle soit définie positive c-a-d que leurs valeurs propres soient positives et aient un sens physique.

Le calcul de la fonction quadratique  $V(x) = x^T P x$ , puis le calcul de  $\dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  nous donne des termes dus aux non linéarités du système de la forme :  $d_i x_j x_k x_m$  où les termes  $d_i$  sont des coefficients constants dépendant des paramètres  $Q, B$  et  $A$ .

Les termes  $d_i x_j x_k x_m$  ne peuvent pas être simplifiés dans l'expression de la dérivée de  $V$  par les termes issus de la matrice  $-Q$ . Il est alors nécessaire de réécrire les termes en triple produits. Par exemple, pour le terme  $d_1 x_2 x_3 x_5$ , on le réécrit  $d_1 N_2 x_3 x_5$  où  $N_2$  peut prendre toutes les valeurs de  $u^*$ .

On fait cette opération avec tous les termes  $d_i x_j x_k x_m$  qu'on peut maintenant simplifier avec les éléments de la matrice  $-Q$ . En notant  $-Q^*$  la matrice obtenue, on fera l'étude dans le cas le plus défavorable afin d'obtenir une matrice  $-Q^*$  toujours définie positive quelque soit les valeurs prises par les coefficients  $N_j$ .

Remarque : On peut essayer d'obtenir des  $d_i N_j x_k x_m$  très grands qui introduisent des valeurs propres négatives dans  $-Q^*$ .

On pourra essayer de trouver les valeurs extrémales de variations des coefficients  $N_j$  utilisés.

Dans le cas du convertisseur élévateur étudié, on décide de modéliser les non linéarités en  $x_i x_j x_5$  et  $x_2 x_i x_j$  qui apparaissent dans la dérivée de la fonction de Lyapunov par des termes en  $x_i x_j N_5$  et  $N_2 x_i x_j$  avec  $\{i, j\} \in \{2, 3, 4, 5\}$ . L'expression de la dérivée de  $V$  s'écrit alors en fonction de :  $x_i x_j$  et  $N_i x_j x_k$  avec les  $i, j, k$  prenant leurs valeurs dans  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Cette dérivée peut alors s'écrire sous une forme quadratique.

On en déduit alors que la matrice  $-Q^*$  est définie positive si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$10^{-4} \leq x_2 \leq 2.10^{-4}, 10^{-4} \leq x_5 \leq 2.10^{-4}.$$

On trouve alors une plage de variations pour les variables d'état  $x_2$  (variation du rapport cycle) et  $x_5$  (sortie du régulateur de courant) extrêmement petite qui n'a pas intérêt physique. Bien que simple, cette méthode n'apporte pas de solution à la problématique posée.

## 2-Modèle TS d'un hacheur Boost programmé en mode courant

### 2.1- Mise sous forme TS

On va donc utiliser maintenant des méthodes basées sur l'utilisation de modèles flous de type Takagi- Sugeno.

Comme précédemment on utilise le système d'équations différentielles (3-1) défini au chapitre I.

La variable  $x_2$  (rapport cyclique) est supposée incluse dans l'intervalle  $[x_{2\min}, x_{2\max}]$  à déterminer. On réécrit le système (3-1) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \\ \frac{dx_4}{dt} \\ \frac{dx_5}{dt} \end{bmatrix} = [A(x_2)]^* \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

Avec :

$$A(x_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_p i_0}{C} & \frac{k_p}{rC} - k_i & \frac{k_p(u_0 - 1)}{C} + \frac{k_p}{C} x_2 & 0 \\ 0 & -w_{pc} & 0 & 0 & w_{pc} \\ 0 & \frac{-i_0}{C} & \frac{-1}{rC} & \frac{1 - u_0}{C} - \frac{x_2}{C} & 0 \\ 0 & \frac{v_{s0}}{L} & \frac{u_0 - 1}{L} + \frac{x_2}{L} & 0 & 0 \\ k_{ic} & \frac{k_p k_{pc} i_0}{C} - \frac{k_{pc} v_{s0}}{C} & \frac{k_p k_{pc}}{rC} + \frac{k_{pc}}{L} - k_{pc} k_i - \frac{k_{pc} u_0}{L} - \frac{k_{pc} x_2}{L} & \frac{k_p k_{pc} (u_0 - 1)}{C} - k_{ic} + \frac{k_p k_{pc} x_2}{C} & 0 \end{bmatrix}$$

Le nombre de modèles locaux dépend du nombre de non linéarités dans les équations du système. Ici on a une non linéarité et donc deux modèles locaux.

La variable des prémisses est  $z(t) = x_2 = f(x)$  avec :

$$f(x) = f_{\max} \cdot \frac{z(t) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} + f_{\min} \cdot \frac{f_{\max} - z(t)}{f_{\max} - f_{\min}} \quad \text{soit } f(x) = f_{\max} \cdot F_1^1(x) + f_{\min} \cdot F_1^2(x)$$

avec  $F_1^1(x)$  et  $F_1^2(x)$  les fonctions d'appartenance.

Les deux modèles locaux sont alors définis par :

Si  $z(t)$  est  $F_1^1$ , alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_p i_0}{C} & \frac{k_p}{rC} - k_i & \frac{k_p(u_0 - 1)}{C} + \frac{k_p}{C} x_{2\min} & 0 \\ 0 & -w_{pc} & 0 & 0 & w_{pc} \\ 0 & \frac{-i_0}{C} & \frac{-1}{rC} & \frac{1 - u_0}{C} - \frac{x_{2\min}}{C} & 0 \\ 0 & \frac{v_{s0}}{L} & \frac{u_0 - 1}{L} + \frac{x_{2\min}}{L} & 0 & 0 \\ k_{ic} & \frac{k_p k_{pc} i_0}{C} - \frac{k_{pc} v_{s0}}{C} & \frac{k_p k_{pc}}{rC} + \frac{k_{pc}}{L} - k_{pc} k_i - \frac{k_{pc} u_0}{L} - \frac{k_{pc} x_{2\min}}{L} & \frac{k_p k_{pc} (u_0 - 1)}{C} - k_{ic} + \frac{k_p k_{pc} x_{2\min}}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$= A_1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Si  $z(t)$  est  $F_1^2$ , alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_p i_0}{C} & \frac{k_p}{rC} - k_i & \frac{k_p(u_0 - 1)}{C} + \frac{k_p}{C} x_{2max} & 0 \\ 0 & -w_{pc} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-i_0}{C} & \frac{-1}{rC} & \frac{1-u_0}{C} - \frac{x_{2max}}{C} & 0 \\ 0 & \frac{v_{s0}}{L} & \frac{u_0 - 1}{L} + \frac{x_{2max}}{L} & 0 & 0 \\ k_{ic} & \frac{k_p k_{pc} i_0}{C} - \frac{k_{pc} v_{s0}}{C} & \frac{k_p k_{pc}}{rC} + \frac{k_{pc}}{L} - k_{pc} k_i - \frac{k_{pc} u_0}{L} - \frac{k_{pc} x_{2max}}{L} & \frac{k_p k_{pc} (u_0 - 1)}{C} - k_{ic} + \frac{k_p k_{pc} x_{2max}}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$= A_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Remarques : les matrices  $A_1$  et  $A_2$  peuvent ne pas être de Hurwitz. On vérifie facilement qu'elles sont de Hurwitz à condition que les valeurs de  $x_{2min}$  et  $x_{2max}$  soient incluses dans l'intervalle  $[-0.22, 0.779]$  qui n'est pas symétrique autour de zéro.

## 2.2-Recherche de fonctions de Lyapunov quadratiques ou non quadratiques

On va utiliser les trois théorèmes généraux vus au chapitres II. Suivant le théorème utilisé, nous limiterons les valeurs de  $x_2$  à un intervalle assurant que les matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont de Hurwitz si nécessaire.

### 2.2.1- Utilisation des théorèmes n°1 et n°2 (chapitre II)

La méthode basée sur le théorème n°1 (utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique de la forme  $V(x) = x^T \cdot P \cdot x$ ) ne donne aucun résultat. Il n'est pas possible d'obtenir un bassin d'attraction avec une fonction de Lyapunov quadratique pour ce type de non linéarité pour  $x_2 \in [-0.22, 0.779]$

Ceci est normal car ce n'est pas un intervalle symétrique par rapport à 0.

On va alors utiliser le théorème n° 2 basée sur des fonctions de Lyapunov non quadratique.

Soient  $P_1 = P_1^T > 0$ ,  $P_2 = P_2^T > 0$ ,  $F_{1\dot{a}8} \in R^{5 \times 5}$ ,  $G_{1\dot{a}8} \in R^{5 \times 5}$ .

Pour prouver la stabilité globale asymptotique, il faut alors déterminer des coefficients  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ ,  $\tau_4$  et des matrices  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  vérifiant les inéquations suivantes :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) < 0 \quad (3-3)$$

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + \tau_2 (P_1 - P_2) < 0 \quad (3-4)$$

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1 + \tau_3 (P_2 - P_1) < 0 \quad (3-5)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \tau_4 (P_2 - P_1) < 0 \quad (3-6)$$

Deux variantes peuvent être envisagées pour résoudre le problème de Lyapunov.

*Variante 1 : utilisation plusieurs fois du lemme de l'inégalité*

L'inégalité matricielle (3-3) peut s'écrire :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \underbrace{\frac{\tau_1 I}{2} P_1}_{x_1^T y_1} + \underbrace{P_1 \frac{\tau_1 I}{2}}_{y_1^T x_1} + \underbrace{\frac{\tau_1 I}{2} (-P_2)}_{x_2^T y_2} + \underbrace{(-P_2) \frac{\tau_1 I}{2}}_{y_2^T x_2} < 0 .$$

Donc, en utilisant deux fois le lemme de l'inégalité, une condition suffisante à (3-3) s'écrit :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \varepsilon_1 \frac{\tau_1 I}{2} \cdot \frac{\tau_1 I}{2} + \frac{1}{\varepsilon_1} P_1 P_1 + \varepsilon_2 \frac{\tau_1 I}{2} \cdot \frac{\tau_1 I}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2} P_2 P_2 < 0 \quad \text{avec } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 .$$

En utilisant le complément de Schur généralisé, on obtient,

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 + P_1 A_1 & \frac{\tau_1 I}{2} & P_1 & \frac{\tau_1 I}{2} & P_2 \\ \frac{\tau_1 I}{2} & -\frac{I}{\varepsilon_1} & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ \frac{\tau_1 I}{2} & 0 & 0 & -\frac{I}{\varepsilon_2} & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0$$

On applique maintenant aux inégalités matricielles (3-4), (3-5), (3-6) deux fois le lemme de l'inégalité et le complément de Schur et on obtient :

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_1 + P_1 A_2 & \frac{\tau_2 I}{2} & P_1 & \frac{\tau_2 I}{2} & P_2 \\ \frac{\tau_2 I}{2} & -\frac{I}{\varepsilon_3} & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 \\ \frac{\tau_2 I}{2} & 0 & 0 & -\frac{I}{\varepsilon_4} & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_2 + P_2 A_1 & \frac{\tau_3 I}{2} & P_1 & \frac{\tau_3 I}{2} & P_2 \\ \frac{\tau_3 I}{2} & -\frac{I}{\varepsilon_5} & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_5 I & 0 & 0 \\ \frac{\tau_3 I}{2} & 0 & 0 & -\frac{I}{\varepsilon_6} & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_6 I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_2 + P_2 A_2 & \frac{\tau_4 I}{2} & P_1 & \frac{\tau_4 I}{2} & P_2 \\ \frac{\tau_4 I}{2} & -\frac{I}{\varepsilon_7} & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_7 I & 0 & 0 \\ \frac{\tau_4 I}{2} & 0 & 0 & -\frac{I}{\varepsilon_8} & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_8 I \end{bmatrix} < 0$$

On appelle  $M_2, M_3, M_4$  ces matrices.

Les matrices  $M_1, M_2, M_3, M_4$  sont des matrices symétriques. Ces matrices sont fonction des différents éléments des matrices  $A_1, A_2, P_1, P_2$ . On exprime chaque élément des différentes matrices  $M$  en fonction des éléments des matrices  $A_1, A_2, P_1, P_2$ . On obtient donc un système linéaire, on a donc maintenant des éléments des différentes matrices  $P_1, P_2$  en fonction des éléments des matrices  $M$ . On doit choisir ces éléments tels qu'ils vérifient les conditions de stabilité imposées par le théorème n°2.

Pour l'application traitée, on ne peut donner à ces éléments des valeurs qui répondent aux conditions du théorème. On ne trouve donc pas de solution. Cela n'est pas forcément du au fait que le système est instable mais au fait que, en utilisant le lemme de l'inégalité, on obtient une condition suffisante qui est peut-être trop restrictive et ne permet pas de trouver des solutions aux quatre inéquations ci-dessus.

*Origine possible de l'échec de la méthode*

En utilisant par exemple l'équation  $A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) < 0$

Il est possible de la réécrire sous la forme suivante :

$$\Leftrightarrow \left( A_1^T + \frac{\tau_1}{2} I \right) P_1 + P_1 \left( A_1 + \frac{\tau_1}{2} I \right) - \tau_1 P_2 < 0 \quad (3-7)$$

On va maintenant utiliser la réduction d'endomorphismes, plus particulièrement la décomposition QR d'une matrice. (3-7) conduit alors à :

$$\underbrace{R^T Q^T}_{X^T} \underbrace{P_1}_Y + \underbrace{P_1 Q R}_{Y^T X} - \tau_1 P_2 < 0$$

Puis en utilisant le lemme de l'inégalité, on obtient :

$$\varepsilon_9 R^T \underbrace{Q^T Q}_I R + \frac{1}{\varepsilon_9} P_1 P_1 - \tau_1 P_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_9 R^T R + \frac{1}{\varepsilon_9} P_1 P_1 - \tau_1 P_2 < 0$$

$$\varepsilon_9 R^T R + \frac{1}{\varepsilon_9} P_1 P_1 + \underbrace{\frac{\tau_1}{2}(-I)}_{\underbrace{\quad}_{X^T}} \underbrace{P_2}_{\underbrace{\quad}_{Y}} + \underbrace{P_2}_{\underbrace{\quad}_{Y^T}} \underbrace{\frac{\tau_1}{2}(-I)}_{\underbrace{\quad}_{X}} < 0$$

Puis en réutilisant le lemme de l'inégalité, on obtient la condition suffisante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_9 R^T R + \frac{1}{\varepsilon_9} P_1 P_1 + \varepsilon_{10} \frac{\tau_1^2}{4} I + \frac{1}{\varepsilon_{10}} P_2 P_2 < 0 \\ \Leftrightarrow \varepsilon_{10} \frac{\tau_1^2}{4} I - R^T (-\varepsilon_9 I) R - P_1 \left( -\frac{1}{\varepsilon_9} I \right) P_1 - P_2 \left( -\frac{1}{\varepsilon_{10}} I \right) P_2 < 0 \end{aligned}$$

Si on applique maintenant le complément de Schur, le problème revient à résoudre :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{10} \frac{\tau_1^2}{4} I & R^T & P_1 & P_2 \\ R & -\frac{1}{\varepsilon_9} I & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_9 I & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & -\varepsilon_{10} I \end{bmatrix} < 0$$

Il apparaît des termes positifs  $\left( \varepsilon_{10} \frac{\tau_1^2}{4} I > 0 \right)$  sur la diagonale de la matrice obtenue avec le complément de Schur. Cette matrice ne peut alors être définie négative. On voit ici que l'utilisation successive du lemme de l'inégalité et du complément de Schur mène à une impasse. Cela n'implique pas obligatoirement que les conditions du théorème 2 n'admettent pas de solution.

*Variante 2 : résolution directe des inéquations données au théorème 2.*

On utilise les quatre inégalités matricielles initiales (3-3) à (3-6). Il est possible de résoudre directement ces inéquations à l'aide de Maple même si cette fois-ci on ne dispose pas d'autant de degré de liberté qu'avec l'approche précédente.

Pour l'application étudiée, on trouve bien des matrices  $P_1, P_2$  symétriques définies positives. Le multimodèle est globalement asymptotiquement stable au sens de Takagi-Sugeno pour  $x_2 \in [-0.22, 0.22]$ .

Numériquement on a obtenu avec les paramètres donnés au chapitre I :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1554.387434 & -1816.616487 & 984.6706287 & -860.6871951 & -10^4 \\ -1816.616487 & 13082.70175 & -26.63146174 & 2037.476238 & -796.1783439 \\ 984.6706287 & -26.631461 & 10188.23401 & 11.53547169 & 213.5229972 \\ -860.6871951 & 2037.476238 & 11.53547169 & 760.1384909 & 9118.407423 \\ -10^4 & -796.1783439 & 213.5229972 & 9118.407423 & 228167.0307 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 24486.97386 & -21000.69385 & 99339.75435 & -9051.396578 & -10^5 \\ -21000.69385 & 236338.6035 & -426.9314443 & 25915.55877 & -7961.783439 \\ 99339.75435 & -426.9314443 & 1005512.02 & 541.0026734 & 10190.0559 \\ -9051.396578 & 25915.55877 & 541.0026734 & 8442.086549 & 91059.96846 \\ -10^5 & -7961.783439 & 10190.0559 & 91059.96846 & 2637687.147 \end{bmatrix}$$

avec  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 0$ .

### 2.2.2-Utilisation du théorème n°3

On peut aussi envisager d'utiliser le théorème 3 (chapitre II) utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques.

On obtient un système d'inéquations :

$$A_1^T A_1 - \alpha^2 I \leq 0 \quad (3-8)$$

$$A_2^T A_2 - \alpha^2 I \leq 0 \quad (3-9)$$

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 - S \leq 0 \quad (3-10)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 - S \leq 0 \quad (3-11)$$

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 - 2M \leq 0 \quad (3-12)$$

$$-R \leq P_1 - P_0 \leq R \quad (3-13)$$

$$-R \leq P_2 - P_0 \leq R \quad (3-14)$$

$$M + \gamma \cdot (S - M) + \alpha \cdot \delta \cdot R < 0 \quad (3-15)$$

$$(S - M) \leq 0 \quad (3-16)$$

Il faut maintenant calculer les éléments  $\gamma$  et  $\delta$  de (3-16).

Pour le système d'ordre 5, on a

$$h_1(x_2) = \frac{x_2 - x_{2\min}}{x_{2\max} - x_{2\min}} \quad \text{et} \quad h_2(x_2) = \frac{x_{2\max} - x_2}{x_{2\max} - x_{2\min}} \quad \text{donc} \quad \|h(x)\|^2 = h_1^2(x) + h_2^2(x)$$

$$\Rightarrow \|h(x)\|^2 = \left( \frac{x_2 - x_{2\min}}{x_{2\max} - x_{2\min}} \right)^2 + \left( \frac{x_{2\max} - x_2}{x_{2\max} - x_{2\min}} \right)^2.$$

On calcule maintenant  $G_d(x) = \sum_{i=1}^2 \|\Delta h_i(x)\|$  :

On trouve une solution pour les équations (3-8) à (3-12) mais on ne trouve pas de solution pour (3-15) compatible avec les équations (3-8) à (3-14). La méthode ne permet pas d'apporter une solution au problème de stabilité.

Remarque :

$$G_d(x) = \sqrt{\frac{1}{(x_{2\max} - x_{2\min})^2}} + \sqrt{\frac{1}{(x_{2\max} - x_{2\min})^2}}$$

$$= \frac{2}{x_{2\max} - x_{2\min}}$$

Et donc,

$$\|x\| \cdot G_d(x) = \frac{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}}{x_{2\max} - x_{2\min}}$$

Les valeurs maximales admissibles physiquement pour les variations de tension et de courant permettent de trouver un majorant  $\delta$  de  $\|x\| \cdot G_d(x)$ . Numériquement  $\delta$  a été fixé à 20.

Un majorant de  $\|h(x)\|^2$  est  $\gamma = 1$ .

### 2.3- Recherche de fonctions de Lyapunov non quadratiques avec variations paramétriques

Dans un système réel, les valeurs des paramètres du système évoluent au cours du temps (variations en fonction de la température, vieillissement des isolants, saturation...). Il est donc important de disposer d'outils permettant d'assurer la convergence vers le point d'équilibre pour un domaine donné de l'espace d'état incluant l'origine et ceci lorsque certains paramètres varient.

On va maintenant étudier la stabilité du convertisseur Boost en tenant compte des variations du condensateur de sortie  $C$  c-a-d qu'on va essayer d'établir la stabilité globale asymptotique pour toutes valeurs de  $C$  compris entre deux valeurs :  $C \in [C_{\max}, C_{\min}]$ .

On considère alors le système non linéaire décrit par le modèle flou de type TS avec incertitudes paramétriques suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot ((A_i + \Delta A_i(t))) \cdot x(t) .$$

où  $\Delta A_i(t)$  sont des matrices représentant les incertitudes paramétriques du modèle. On fait de plus l'hypothèse qu'il existe des matrices  $\Delta a_i(t)$ ,  $D_i$  et  $E_i$  vérifiant :

$$\Delta A_i = D_i \Delta a_i(t) E_i, \quad i \in I_r \tag{3-17}$$

où  $D_i$ ,  $E_i$  des matrices constantes, connues, de dimension appropriée, et

$$\Delta a_i(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta_2(t) & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \Delta_n(t) \end{bmatrix}, \quad \Delta_j(t) \text{ étant les incertitudes bornées supposées}$$

vérifier :

$$\Delta_j(t) \in [-I; I] \quad j \in I_n \text{ et } \Delta a_i^T(t) \Delta a_i(t) \leq I \quad \forall i \in I_r \tag{3-18}$$

Il va falloir maintenant dimensionner les variations paramétriques. On reprend donc le système différentiel non linéaire du Boost en ne donnant pas de valeur numérique pour le condensateur.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{32}{C}x_2 + \frac{0.0625}{C}x_3 - 500x_3 - \frac{7.8}{C}x_4 + \frac{10}{C}x_2x_4 \\ \dot{x}_2 = -6.28 * 10^4 x_2 + 6.28 * 10^4 x_5 \\ \dot{x}_3 = -\frac{3.2}{C}x_2 - \frac{0.00625}{C}x_3 + \frac{0.78}{C}x_4 - \frac{1}{C}x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = 400000x_2 - 780x_3 + 1000x_2x_3 \\ \dot{x}_5 = 500x_1 + \frac{3.2}{C}x_2 - 20000x_2 + \frac{0.003125}{C}x_3 + 14x_3 - 500x_4 - \frac{0.39}{C}x_4 + \frac{0.5}{C}x_2x_4 - 50x_2x_3 \end{cases}$$

Pour notre système,  $r = 2$  et  $n=5$ . Pour le dimensionnement des matrices  $D_1, D_2, E_1$  et  $E_2$  on va introduire les variations paramétriques de la capacité du condensateur  $\Delta C$  dans le système différentiel :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{32}{C + \Delta C}x_2 + \frac{0.0625}{C + \Delta C}x_3 - 500x_3 - \frac{7.8}{C + \Delta C}x_4 + \frac{10}{C + \Delta C}x_2x_4 \\ \dot{x}_2 = -6.28 * 10^4 x_2 + 6.28 * 10^4 x_5 \\ \dot{x}_3 = -\frac{3.2}{C + \Delta C}x_2 - \frac{0.00625}{C + \Delta C}x_3 + \frac{0.78}{C + \Delta C}x_4 - \frac{1}{C + \Delta C}x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = 400000x_2 - 780x_3 + 1000x_2x_3 \\ \dot{x}_5 = 500x_1 + \frac{3.2}{C + \Delta C}x_2 - 20000x_2 + \frac{0.003125}{C + \Delta C}x_3 + 14x_3 - 500x_4 - \frac{0.39}{C + \Delta C}x_4 + \frac{0.5}{C + \Delta C}x_2x_4 - 50x_2x_3 \end{cases}$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{32}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_2 + \frac{0.0625}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_3 - 500x_3 - \frac{7.8}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_4 + \frac{10}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_2x_4 \\ \dot{x}_2 = -6.28 * 10^4 x_2 + 6.28 * 10^4 x_5 \\ \dot{x}_3 = -\frac{3.2}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_2 - \frac{0.00625}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_3 + \frac{0.78}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_4 - \frac{1}{C}x_2x_4 \\ \dot{x}_4 = 400000x_2 - 780x_3 + 1000x_2x_3 \\ \dot{x}_5 = 500x_1 + \frac{3.2}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_2 - 20000x_2 + \frac{0.003125}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_3 + 14x_3 - 500x_4 - \frac{0.39}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_4 + \frac{0.5}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})}x_2x_4 - 50x_2x_3 \end{cases}$$

On utilise maintenant le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6, \text{ les termes suivants étant supposés négligeables.}$$

Donc,

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta C}{C}} = 1 - \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C^2}{C^2} - \frac{\Delta C^3}{C^3} + \frac{\Delta C^4}{C^4} - \frac{\Delta C^5}{C^5} + \frac{\Delta C^6}{C^6}, \text{ les termes suivants étant négligés,}$$

$C$  la valeur nominale de supposée constante.

En utilisant cette dernière expression pour chaque sous modèle TS, on obtient les expressions des matrices  $\Delta A_1$  et  $\Delta A_2$ . Pour l'application étudiée, il vient :

$$\text{On pose } T = -\frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C^2}{C^2} - \frac{\Delta C^3}{C^3} + \frac{\Delta C^4}{C^4} - \frac{\Delta C^5}{C^5} + \frac{\Delta C^6}{C^6}$$

$$\Delta A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 32T & 0.0625T & -7.8T + 10Tx_{2min} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2T & -0.00625T & 0.78T - Tx_{2min} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2T & 0.003125T & -0.39T + 0.5Tx_{2min} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 32T & 0.0625T & -7.8T + 10Tx_{2max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.2T & -0.00625T & 0.78T - Tx_{2max} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.2T & 0.003125T & -0.39T + 0.5Tx_{2max} & 0 \end{bmatrix}$$

En remarquant que les variations paramétriques portent uniquement sur les états  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$ , on propose de rechercher des matrices  $D_i, E_i$  ( $i = 1, 2$ ) de la forme suivante :

$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad E_i = \begin{bmatrix} 0 & m_{1k} & m_{1l} & m_{1m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2k} & m_{2l} & m_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3k} & m_{3l} & m_{3m} & 0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients de  $E_i$  représentent les variations extrémales des coefficients de même position des matrices  $\Delta A_i$ . Leurs valeurs numériques seront fixées suivant l'objectif suivant :

- le problème de stabilité du modèle TS doit admettre une solution,
- les valeurs données aux coefficients des matrices  $E_i$  doivent permettre de maximiser la plage de variations de la capacité.

Si on a assez de degrés de liberté dans la résolution des inégalités matricielles, alors il n'est pas obligatoire d'utiliser le lemme de Finsler. On va supposer que la dynamique de variation du paramètre C est beaucoup plus lente que les dynamique mise en jeu dans le système initial. On considère donc les matrices  $\Delta A_1, \Delta A_2$  quasi constantes.

En reprenant les résultats donnés par le théorème 2, l'inégalité

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) < 0 \quad \text{se transforme alors en :}$$

$$(A_1 + \Delta A_1)^T P_1 + P_1 (A_1 + \Delta A_1) + \tau_1 (P_1 - P_2) < 0.$$

En utilisant les expressions données en (3-25), il vient :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \underbrace{E_1^T \Delta a^T}_{X^T} \underbrace{D_1^T P_1}_Y + \underbrace{P_1 D_1}_{Y^T} \underbrace{\Delta a E_1}_X + \tau_1 (P_1 - P_2) < 0 \quad (3-19)$$

Comme indiqué sur cette dernière équation, on peut maintenant utiliser le lemme de l'inégalité qui conduisent à :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) + \varepsilon_1 E_1^T \Delta a^T \Delta a E_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} P_1 D_1 D_1^T P_1 < 0 \text{ soit}$$

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) + \varepsilon_1 E_1^T E_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} P_1 D_1 D_1^T P_1 < 0$$

En appliquant maintenant le complément de Schur généralisé de manière à isoler les matrices  $E_1$  et  $P_1$ , en utilisant les notations données au chapitre II sur le complément de Schur généralisé, il suffit de poser :

$$Y = A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2), \quad S_1 = E_1^T, \quad R_1 = -\frac{1}{\varepsilon_1}, \quad S_2 = E_2^T, \quad R_2 = -\varepsilon_1 I.$$

Il vient alors :

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 + P_1 A_1 + \tau_1 (P_1 - P_2) & E_1^T & P_1 \\ E_1 & -\frac{I}{\varepsilon_1} & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \text{ avec } \varepsilon_1 > 0 \quad (3-20)$$

Remarque : La dernière formulation n'est pas une formulation LMI (produit de l'inconnue  $\tau_1$  avec les matrices  $P_1$  et  $P_2$ ). C'est en fait une formulation BMI (Bilinear Matrix inequality).

On fait la même chose avec les trois autres inégalités du théorème n°2 qui conduisent aux résultats suivants :

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_1 + P_1 A_2 + \tau_2 (P_1 - P_2) & E_2^T & P_1 \\ E_2 & -\frac{I}{\varepsilon_2} & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \text{ avec } \varepsilon_2 > 0. \quad (3-21)$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_2 + P_2 A_1 + \tau_3 (P_2 - P_1) & E_1^T & P_2 \\ E_1 & -\frac{I}{\varepsilon_3} & 0 \\ P_2 & 0 & -\varepsilon_3 I \end{bmatrix} < 0 \text{ avec } \varepsilon_3 > 0. \quad (3-22)$$

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_2 + P_2 A_2 + \tau_4 (P_2 - P_1) & E_2^T & P_2 \\ E_2 & -\frac{I}{\varepsilon_4} & 0 \\ P_2 & 0 & -\varepsilon_4 I \end{bmatrix} < 0 \text{ avec } \varepsilon_4 > 0. \quad (3-23)$$

Pour résoudre les inégalités (3-20) à (3-23) on réutilise les matrices de Lyapunov  $P_1$  et  $P_2$  déterminées au paragraphe précédent lorsqu'il n'y avait pas de variations paramétriques. On cherche ensuite les matrices  $E_1$ ,  $E_2$  et les coefficients  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  qui permettent de vérifier ces quatre inéquations. Celles-ci ne sont alors vérifiées que pour de très petites variations (1% maximum) de la capacité du condensateur autour de la valeur nominale  $C = 1000 \mu\text{F}$ .

On voit bien qu'en réutilisant les solutions données dans le cas sans variations paramétriques, il n'est pas possible de prouver la stabilité du système TS lorsque le paramètre  $C$  varie. Il est donc nécessaire de pouvoir résoudre les équations (3-20) à (3-23) directement, travail en cours actuellement. En fait, l'idée est d'utiliser une réduction d'endomorphisme afin d'étudier les non linéarités qui découlent de cette décomposition. On les étudie graphiquement et cela permet de voir pour quelle valeur de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  et  $\tau_4$  le système TS avec variations paramétriques est stable.

## 2.4-Comparaison entre résultats de simulation et résultats théoriques

On étudie le système sans variations paramétrique du condensateur. Comme détaillé au paragraphe 2.3, il est possible de prouver la stabilité du modèle TS lorsque la variable  $x_2$  est incluse dans l'intervalle  $[-0.22, 0.22]$ . On utilise alors la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x(t)) = \max(V_1(x), V_2(x))$$

avec  $-V_1(x) = x^T(t)P_1x(t)$ ,  $V_2(x) = x^T(t)P_2x(t)$

- les matrices  $P_1$  et  $P_2$  étant celles définies en 3.2.2.1.

Dans un premier temps, on peut déterminer les plus grands ellipsoïdes  $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T P_1 x \leq \delta_1; \delta_1 > 0\}$  et  $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^n; x^T P_2 x \leq \delta_2; \delta_2 > 0\}$  vérifiant la contrainte  $x_2 \in [-0.22, 0.22]$ .

### Détermination des ellipsoïdes

On recherche des bassins d'attraction sous la forme d'ellipsoïdes de la forme  $x^T P x < \delta$  avec  $\delta > 0$ ,  $P = P^T > 0$ . Or confère les résultats généraux présentés au chapitre II, on sait que les longueurs des demi-axes des ellipsoïdes sont proportionnelles à  $\sqrt{\delta \lambda_i(P^{-1})}$ . Il est donc nécessaire de calculer  $P^{-1}$  et ses valeurs propres.

Pour le système d'ordre 5, le calcul des valeurs propres de  $P_1^{-1}$  conduit à :

$$\{0.034765, 0.00130996, 0.00000436726, 0.0000729723, 0.0000972708\}$$

Quant à celles de  $P_2^{-1}$ , il vient :

$$\{0.00096684, 0.00010026, 0.000004144807, 9.84757 * 10^{-7}, 3.7811268 * 10^{-7}\}$$

Cela va permettre de dimensionner la plage de variations des différents paramètres.

On a démontré que le système est stable pour un rapport cyclique comprise entre -0.22 et 0.22. Donc, en utilisant les valeurs numériques des valeurs propres, on obtient, en se plaçant dans la base des vecteurs propres :

Pour la matrice  $P_1^{-1}$  : - variations de la tension entre -19.6V et 19.6V  
 - variations des courants entre -3.8A et 3.8A et -1.04A et 1.04A,  
 - variations du rapport cyclique non filtré entre -0.9 et 0.9.

Pour la matrice  $P_2^{-1}$  : - variations de la tension entre -11.1V et 11.1V,  
 - variations des courants entre -3.58A et 3.58A et -0.73A et 0.73A,  
 - variations du rapport cyclique non filtré entre -0.355 et 0.355.

En se plaçant dans la base canonique  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , on obtient comme variations :

Pour la matrice  $P_1$  les points aux sommets des demi-axes ont pour coordonnées :  
 $A_1(3.636, 0.0097, -4.371, -0.0978, 0.137)$ ,  $B_1(0.672, 0.0006446, 2.38, -0.067, -0.876)$   
 $C_1(-0.38, -0.00017, 0.44, -1.03, 0.0452)$ ,  $D_1(-0.758, -0.0088, -18.94, -0.01, -0.14)$ ,  
 $E_1(0.193, -0.22, 0.572, -0.0033, 0.009)$  ainsi que leurs opposés.

Pour la matrice  $P_2$  les points aux sommets des demi-axes ont pour coordonnées :  
 $A_2(3.27, -0.00836, 4.24, -0.0675, -0.0354)$ ,  $B_2(0.461, -0.000572, -0.755, 0.722, 0.00115)$ ,  
 $C_2(-0.327, 0.00086, -0.423, 0.082, 0.000161)$ ,  $D_2(-1.33, 0.0076, 10.22, 0.082, 0.000161)$ ,  
 $E_2(0.173, 0.22, -0.193, -0.00355, 0.000031)$  ainsi que leurs opposés.

On remarque que l'ellipsoïde correspondant à  $P_2$  est compris dans l'ellipsoïde correspondant à  $P_1$ . Or la fonction de Lyapunov considère la valeur maximale des deux convexes. On ne trace donc que l'ellipsoïde associé à la matrice  $P_1$  pour représenter l'estimation du bassin d'attraction.

Le système évoluant dans  $R^5$ , il est difficile de présenter le bassin d'attraction trouvé. On peut cependant examiner des coupes de ce domaine avec des plans particuliers et examiner le comportement de la trajectoire d'état sur ces plans notamment lors de la phase de démarrage. Nous ne visualisons alors qu'une image du bassin estimé. Une telle image est présentée sur la figure 3.1. L'approche présentée permet de prouver que pour des perturbations extérieures ne faisant pas sortir la trajectoire d'état de ce convexe, alors la commande réalisée ramènera la trajectoire d'état vers le point d'équilibre souhaité du système. Pour cette application, les variations de tension et de courant ne doivent pas excéder une dizaine de volts ou d'ampères pour qu'on puisse faire une telle assertion.

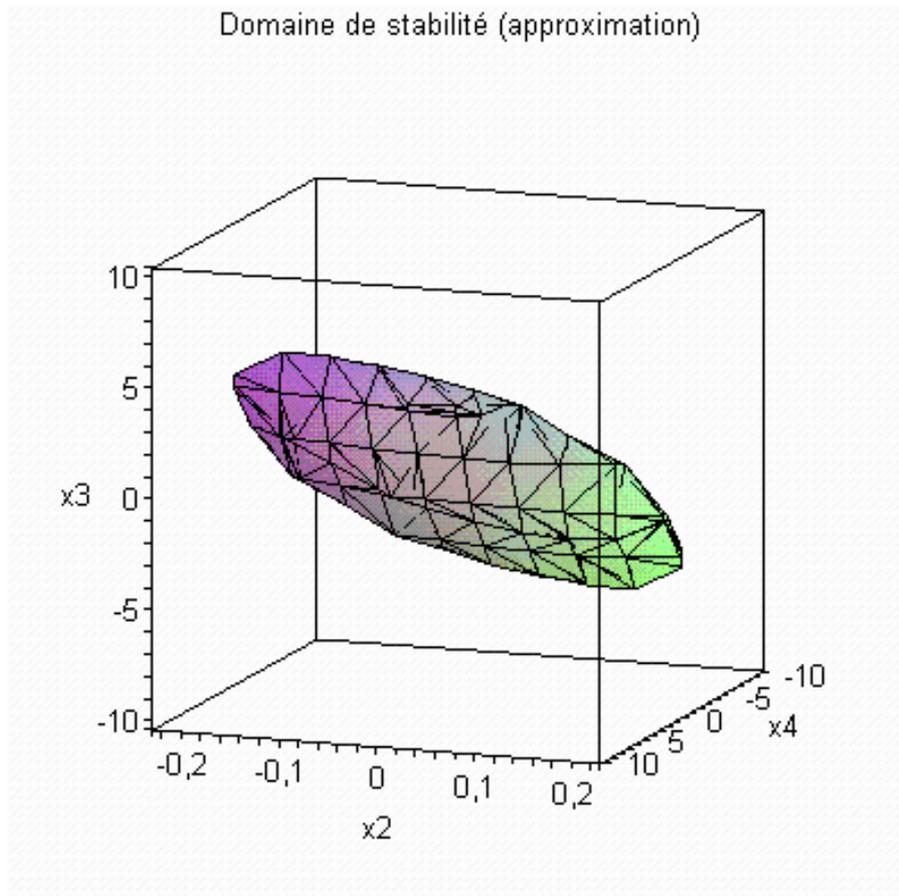


Figure 3.1 : coupe du bassin d'attraction estimé, obtenu en fixant  $x_1 = x_5 = 0$ .

Il est possible de regarder le comportement du système lors d'une phase de démarrage. La figure 3.2 montre l'allure de la trajectoire d'état du système (3-1). Cette allure peut être comparée à celle obtenue avec une simulation réalisée sous Matlab/Simulink prenant en compte le découpage des semi-conducteurs. Comme on peut le constater, les deux allures sont relativement proches ce qui tend à montrer que les propriétés attendues pour le système moyen (convergence vers le point d'équilibre) seront a priori vérifiées par le système réel. La figure 3.4 représente l'évolution de la tension de sortie et du courant inductif lors de la phase de démarrage.

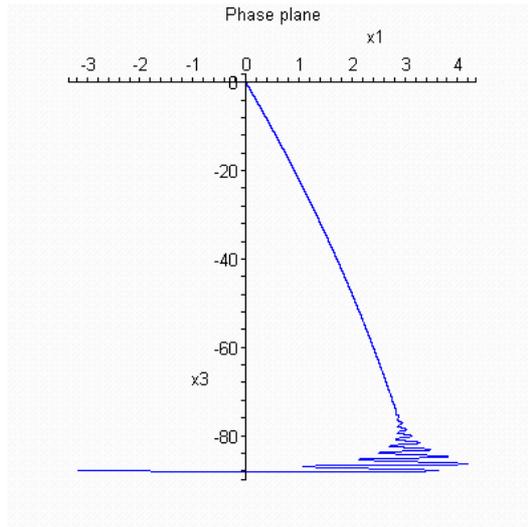


Figure 3-2 : Trajectoire d'état obtenu avec le modèle moyen du hacheur étudié lors d'une phase de démarrage, ( $x_1(0) = -3.2A$ ,  $x_2(0) = -0.22$ ,  $x_3(0) = -88V$ ,  $x_4(0) = -3.2A$ ,  $x_5(0) = -0.22$  ).

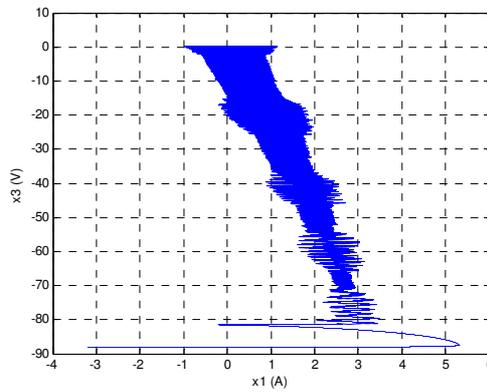


Fig 3-3 : Trajectoire d'état obtenu avec un modèle du hacheur étudié réalisé sur Matlab/simulink lors d'une phase de démarrage, ( $x_1(0) = -3.2A$ ,  $x_2(0) = -0.22$ ,  $x_3(0) = -88V$ ,  $x_4(0) = -3.2A$ ,  $x_5(0) = -0.22$  ).

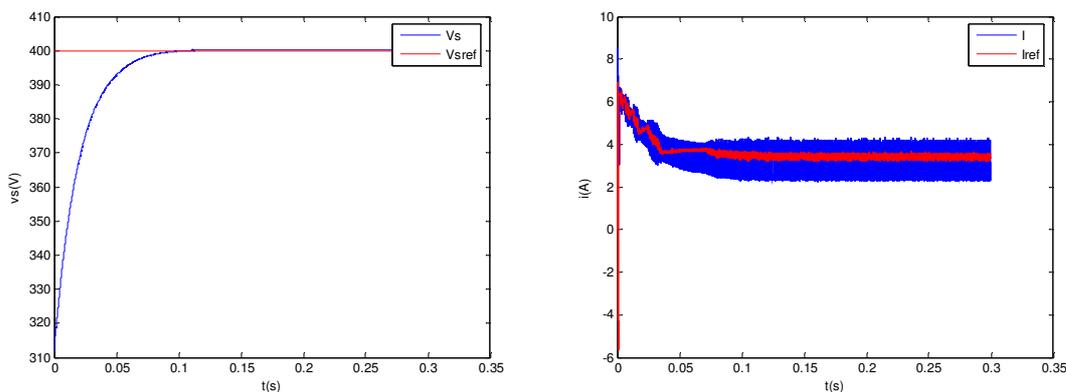


Figure 3-4: Comportement du système lors d'une phase de démarrage, la simulation étant réalisée sous Matlab/simulink.

### **3-Conclusion**

On constate donc qu'avec les méthodes de résolution proposées, la taille du bassin d'attraction trouvé reste modeste. En effet, on n'a pas réussi à démontrer par exemple que, lors d'une phase de démarrage, la trajectoire d'état va converger vers le point de fonctionnement désiré même si, comme le montre les résultats de simulation présentés sur la figure 3-4, c'est effectivement le cas. Toutefois, les travaux présentés dans ce chapitre ont permis d'exhiber une estimation du bassin d'attraction de taille non négligeable. L'utilisation des modèles flous de type Tagaki-Sugeno a permis d'apporter une première solution au problème de stabilité large signal des convertisseurs statiques fonctionnant en mode de conduction continue.

# Chapitre IV : Recherche de bassin d'attraction pour des non linéarités de type P/V

## 1- Modèle TS d'un système filtre d'entrée / ensemble onduleur moteur

On reprend le montage étudié au chapitre I constitué d'un redresseur PD3, d'un filtre faiblement amorti d'ordre 2 et d'un actionneur à aimant contrôlé en vitesse. Comme détaillé au chapitre I, lorsqu'on s'intéresse à la stabilité du réseau continu, on peut modéliser l'actionneur (onduleur MSAP) comme un dispositif absorbant une puissance constante (sous réserve que les pertes dans l'onduleur soit négligeable). On obtient le modèle réduit présenté sur la figure 3.1.

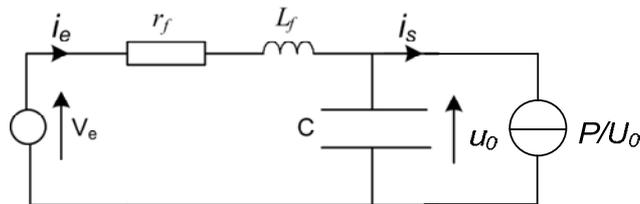


Figure 4-1 : modèle réduite utilisée pour étudier la stabilité du bus continu.

Autour de son point de fonctionnement, ce système est régi par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \frac{d x_1}{d t} = -\frac{r_f}{L_f} x_1 - \frac{x_2}{L_f} \\ \frac{d x_2}{d t} = \frac{x_1}{C} + \frac{P x_2}{C u_0 (x_2 + u_0)} \end{cases} \quad (4.1)$$

Où  $x_1$  (respectivement  $x_2$ ) représente la variation du courant inductif (respectivement de la tension aux bornes du condensateur) autour de sa valeur nominale. Ce système possède donc une non linéarité de la forme :

$$\frac{1}{x_2 + u_0}$$

Pour l'analyse de la stabilité large signal du système, on le met sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_f}{L_f} & \frac{-1}{L_f} \\ \frac{1}{C} & \frac{P}{Cu_0(x_2 + u_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ soit } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

On considère un encadrement de  $x_2 \in [x_{2\min}, x_{2\max}]$ , les valeurs de  $x_{2\min}$  et  $x_{2\max}$  n'étant pour l'instant pas connues. Leurs valeurs seront déterminées par la suite de manière à pouvoir assurer la stabilité du système.

On va donc utiliser la modélisation flou de type Tagaki-Sugeno pour analyser la stabilité de ce système non linéaire. Comme pour le cas du hacheur, ce système possède une seule non linéarité qui va conduire alors à l'existence de deux sous modèles locaux.

La variable des prémisses choisie s'écrit :

$$z(t) = f(x_2) = \frac{P}{Cv_0(x_2 + v_0)}$$

avec :

$$f(x_2) = f_{\max} \frac{f(x_2) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} + f_{\min} \frac{f_{\max} - f(x_2)}{f_{\max} - f_{\min}} = f_{\max} \cdot F_1^1(x_2) + f_{\min} \cdot F_1^2(x_2)$$

où  $F_1^1(x_2)$  et  $F_1^2(x_2)$  sont les fonctions d'appartenance.

Celle-ci vérifient bien la propriété de convexité puisque :

$$0 < \frac{f(x_2) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}} < 1 \text{ et } 0 < \frac{f_{\max} - f(x_2)}{f_{\max} - f_{\min}} < 1$$

avec :

$$f_{\min} = \frac{P}{Cv_0(x_{2\max} + v_0)} \text{ et } f_{\max} = \frac{P}{Cv_0(x_{2\min} + v_0)} .$$

Le système non linéaire (4-2) est donc équivalent au modèle flou TS défini ci-dessous :

$$A(x(t)) = \sum_{i=1}^2 h_i(z(t)) A_i \quad (4-3)$$

avec

$$h_1(z(t)) = \frac{w_1(z(t))}{w_1(z(t)) + w_2(z(t))} \text{ et } h_2(z(t)) = \frac{w_2(z(t))}{w_1(z(t)) + w_2(z(t))} \text{ avec } w_1 = F_1^1 \text{ et } w_2 = F_1^2 .$$

Si la variable de décision  $f(x_2)$  est  $F_1^1$  (fonction d'activation) alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & f_{\max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ que l'on réécrit sous la forme : } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Si la variable de décision  $f(x_2)$  est  $F_1^2$  (fonction d'activation) alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & f_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ que l'on réécrit sous la forme : } \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = [A_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

NB : Le nombre de modèles locaux issus de la transformation se trouve dépendre du nombre des non linéarités des variables d'état, ici on a deux modèles locaux. Les scalaires  $f_{\min}, f_{\max}$  sont les bornes issues de la transformation des termes non constants de la matrice  $A(x(t))$ .

La mise sous forme TS du système initiale correspond en fait à l'écriture suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \frac{P}{CV_0(x_2 + V_0) - f_{\min}} \begin{bmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & f_{\max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{f_{\max} - P}{f_{\max} - f_{\min}} \begin{bmatrix} \frac{-r}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & f_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

2-Recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique : cas des paramètres à valeurs constants, filtre d'ordre 2

### 2.1 Théorème utilisé

On utilise le théorème n°1 associé à la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x$

On cherche maintenant une matrice  $P > 0$  telle que

$$\begin{aligned} A_1^T P + P A_1 &< 0 \\ A_2^T P + P A_2 &< 0 \end{aligned} \tag{4-4}$$

soit encore :

$$\begin{bmatrix} A_1^T P + P A_1 & 0 \\ 0 & A_2^T P + P A_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{4-5}$$

## 2.2-Résolution du problème

Pour augmenter le nombre de degré de liberté dans la résolution du problème de stabilité, on se propose d'utiliser encore une fois le lemme de Finsler.

En l'appliquant aux inéquations (4-4) puis en utilisant le complément de Schur (les matrices obtenues étant symétriques, il suffit de poser  $S=0$ , voir chapitre II), il est possible de reformuler le problème de stabilité à l'aide de l'inéquation équivalente suivante :

$$\begin{bmatrix} A_1^T F_1^T + F_1 A_1 & A_1^T G_1^T - F_1 + P & 0 & 0 \\ G_1 A_1 - F_1^T + P & -G_1 - G_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2^T F_2^T + F_2 A_2 & A_2^T G_2^T - F_2 + P \\ 0 & 0 & G_2 A_2 - F_2^T + P & -G_2 - G_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4-6)$$

La première condition du théorème 1 est bien vérifiée puisque les matrices  $A_1, A_2$  et  $A_1 + A_2$  sont de Hurwitz. En résolvant (4-6) avec l'aide de Maple, il est possible de trouver une solution pour  $x_2 \in [x_{2\min}, x_{2\max}]$ , (intervalle maximal pour lequel il existe une matrice  $P = P^T > 0$  vérifiant l'équation 4-6),  $f(x_2)$  étant monotone. Une fois connue la matrice  $P$ , il est facile de déterminer la plus grande ellipse vérifiant la contrainte sur  $x_2$ .

Remarque : L'utilisation du théorème n°3 associé à la fonction de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t) \left( \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) P_i \right) x(t)$  conduit à  $P_1 = P_2 = P$  car les trois éléments différents de la matrice  $P > 0$  symétrique sont suffisants pour la résolution des inégalités matricielles  $A_i^T P + P A_i < 0$ . On retombe alors sur le théorème 1. Quant à l'utilisation du théorème 2, il sert essentiellement quand les matrices  $A_1$  et/ou  $A_2$  ne sont pas de Hurwitz.

## 2.3- Influence des paramètres sur la taille du bassin d'attraction trouvé

Il est possible maintenant d'étudier l'impact des valeurs de paramètres de l'alimentation sur la taille du bassin d'attraction (plus grand convexe d'équation  $v(x)=c>0$  dont chaque élément vérifie la contrainte sur  $x_2$ ).

Lorsqu'il n'y a pas d'indications contraire, la valeur des paramètres utilisés sont ceux donnés au chapitre I.

### *Variations de la valeur du condensateur C*

La figure 3.2 montre l'évolution du bassin d'attraction trouvé pour différentes valeurs du condensateur. Comme le montre cette figure, la taille du bassin trouvé se réduit fortement lorsque la valeur du bus continu diminue. Ce résultat est corroboré par le tracé de la trajectoire d'état pour différentes conditions initiales et différentes valeurs de condensateurs. Les conditions initiales sont choisies de manière à ce que le point initial se situe à la frontière du bassin d'attraction trouvé. Comme le montre les résultats présentés sur les figures 4-3 à 4-5, la trajectoire d'état converge bien vers le point d'équilibre pour les valeurs de condensateurs

égales à  $500 \mu F$  et  $1000 \mu F$ . Ces résultats sont cohérents avec les bassins d'attraction présentés sur la figure 4.2.

Pour des valeurs de condensateurs inférieures à  $359 \mu F$ , il n'est pas possible de trouver de solution à l'inéquation (4-6). Comme le montre la figure 4-5, même si le point d'équilibre pour cette valeur de condensateur reste stable au sens de Lyapunov, il n'est plus asymptotiquement stable, d'ailleurs les valeurs propres du Jacobien ne sont plus toutes négatives pour  $C < 359 \mu F$ . Il y a alors création d'un cycle limite stable autour du point d'équilibre souhaité.

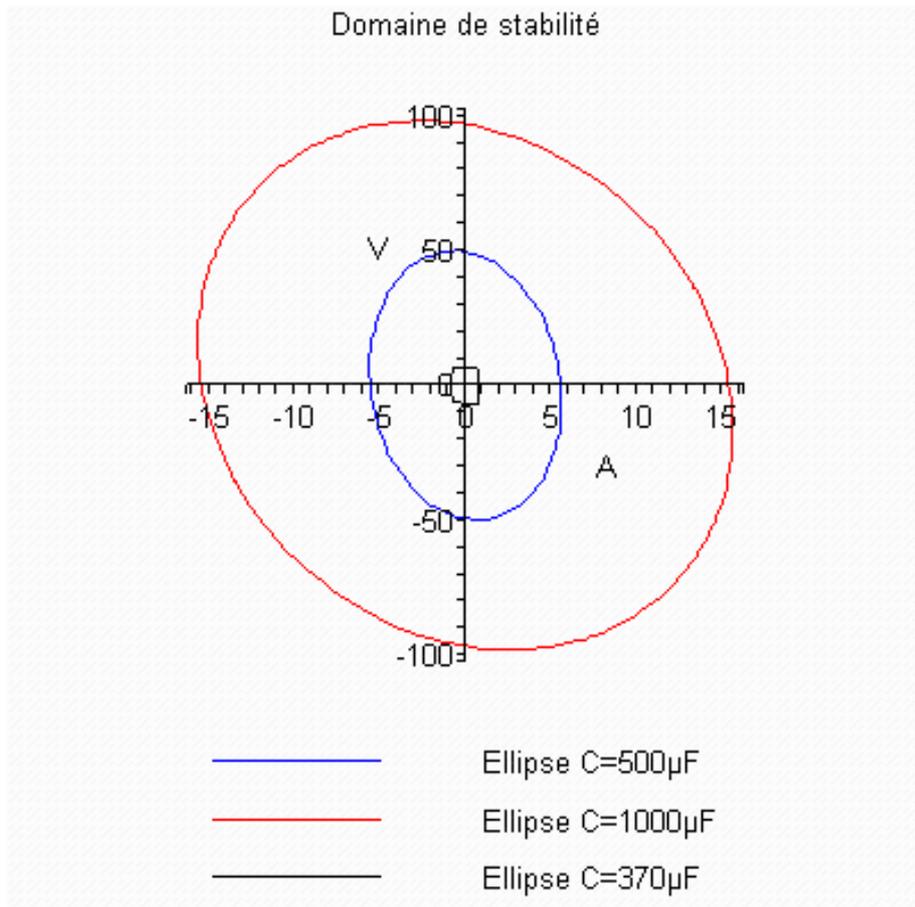


Figure 4-2 : Evolution du bassin d'attraction trouvé pour différentes valeurs de la capacité  $C$  du bus continu

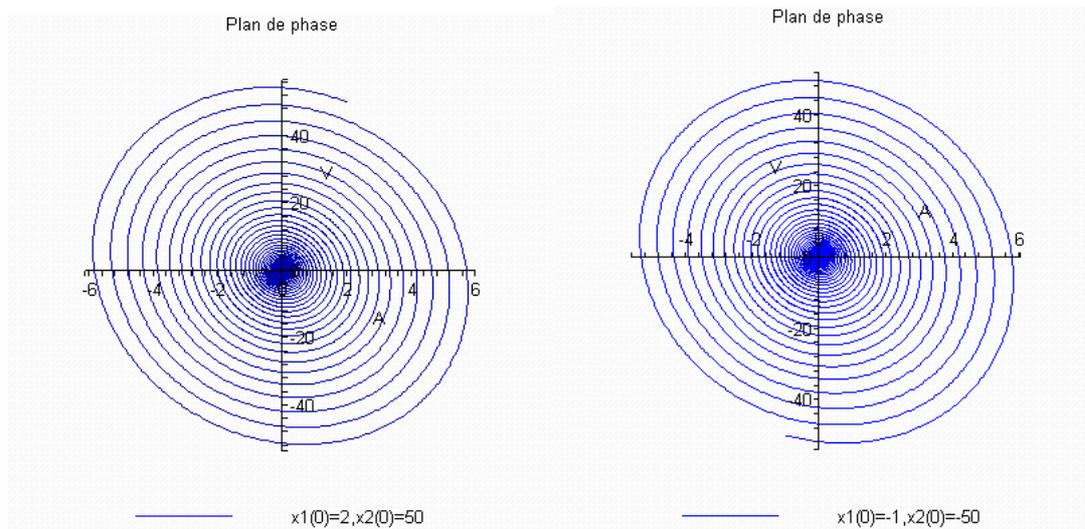


Figure 4.3 : évolution de la trajectoire d'état pour différentes conditions initiales,  $C=500\mu\text{F}$ .

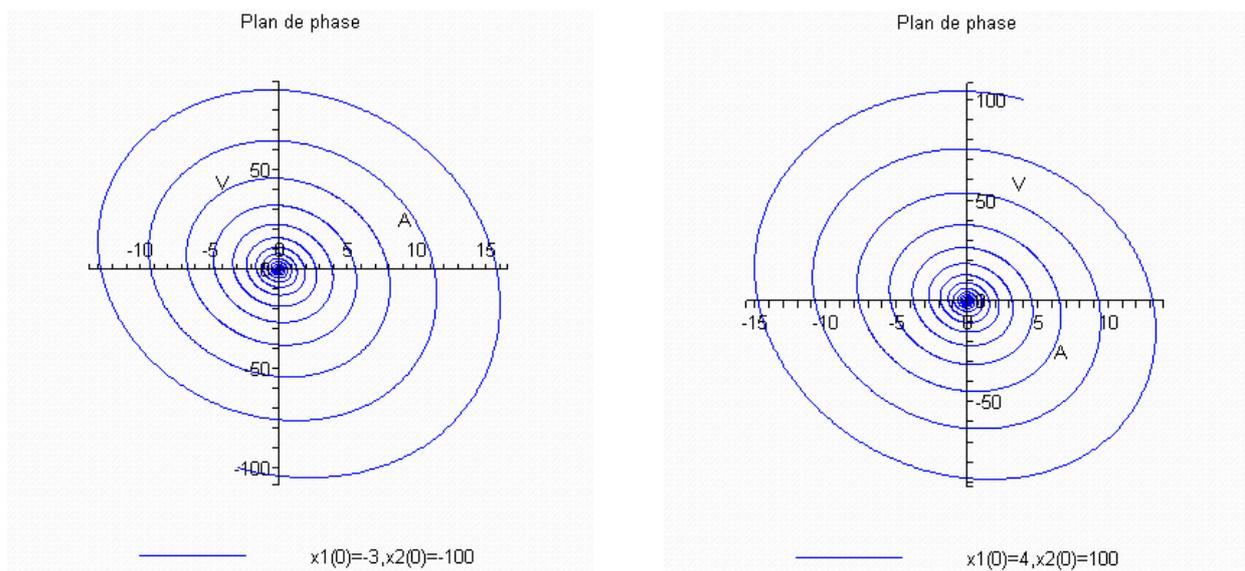


Figure 4-4 : Evolution de la trajectoire d'état pour différentes conditions initiales,  $C=1000\mu\text{F}$ .

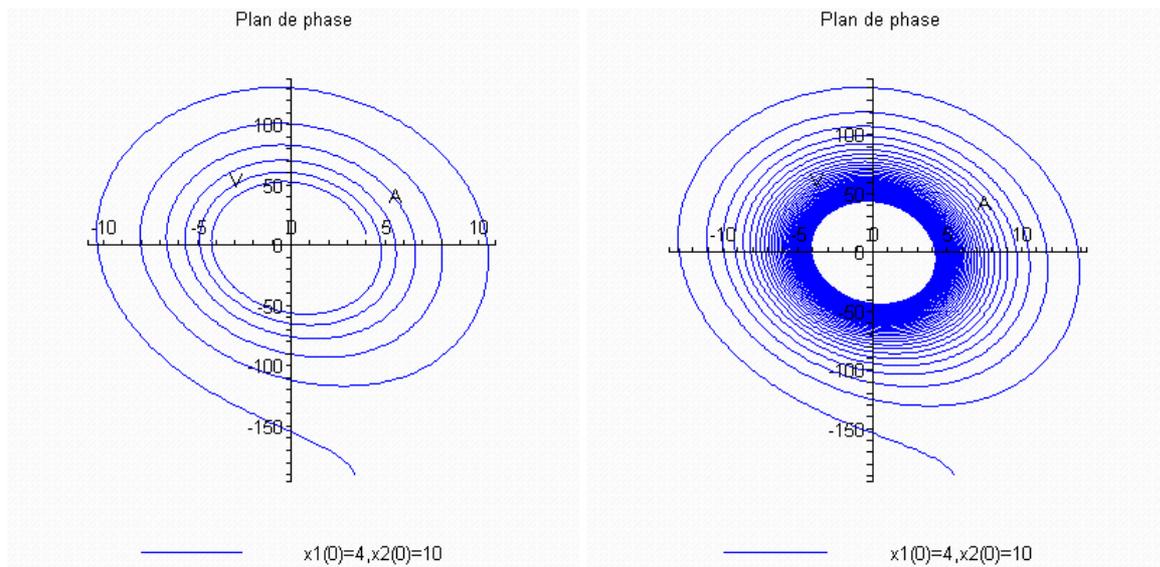


Figure 4-5 : Evolution de la trajectoire d'état dans l'espace d'état pour différentes valeurs de la capacité du condensateur :  $C = 250 \mu\text{F}$  et  $C = 360 \mu\text{F}$  (système instable)

#### *Variation de la valeur d'inductance*

Comme le montre les résultats présentés sur la figure 4-6, l'approche présentée permet de prouver que la taille du bassin d'attraction est d'autant plus grande que la valeur d'inductance du réseau DC est faible.

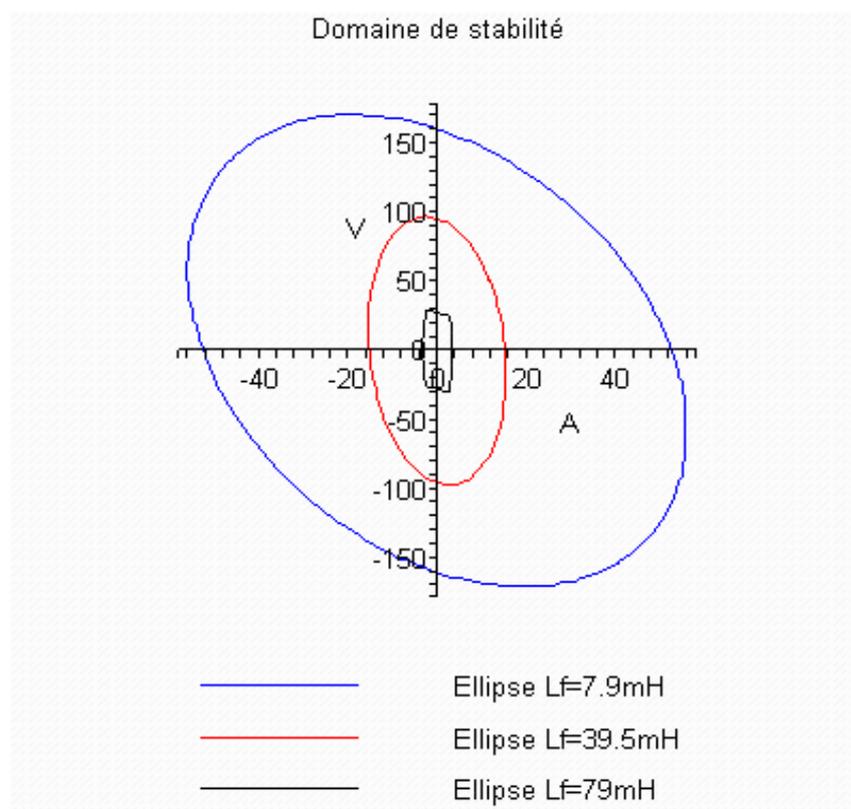


Figure 4-6 : Evolution du bassin d'attraction trouvé pour différentes valeurs de l'inductance  $L_f$  du bus continu.

Les figures 4.7 et 4.8 représentent les trajectoires d'état pour différentes conditions initiales obtenues avec  $L_f = 7.9 \text{ mH}$ ,  $P = 385 \text{ W}$  et  $C = 1000 \text{ }\mu\text{F}$ .

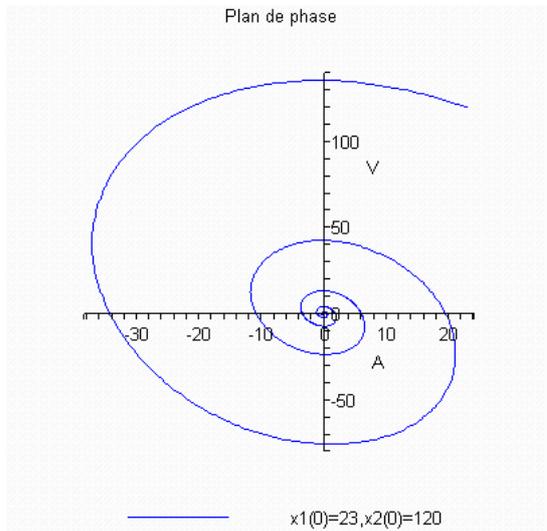


Figure 4.7

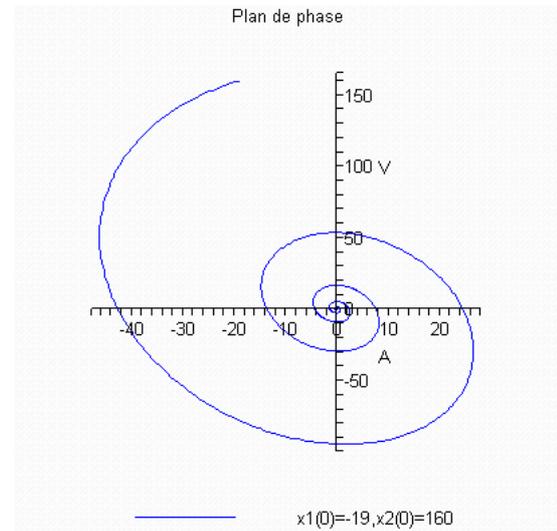


Figure 4.8

Les allures obtenues sont cohérentes avec la forme du bassin d'attraction obtenue sur la figure 4.6.

#### *Variation de la valeur de la puissance de charge*

Le tracé des bassins d'attraction obtenus pour trois valeurs de la puissance de charge présenté sur la figure 4-9 montre que la taille du bassin d'attraction estimé est fortement dépendante de la puissance consommée par la charge. Plus la puissance augmente, plus la taille estimée du bassin d'attraction diminue.

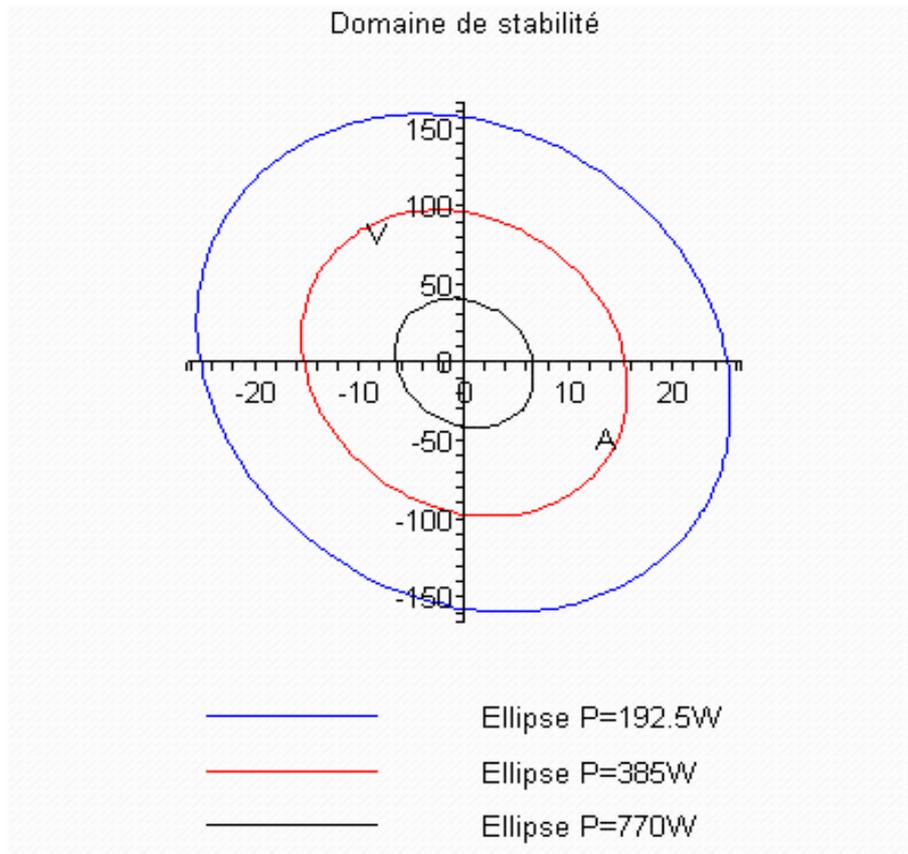


Figure 4-9 : Evolution du bassin d'attraction trouvé pour différentes valeurs de la puissance  $P$  du bus continu avec  $C = 1000 \mu\text{F}$

Les figures 4.10 et 4.11 représentent les trajectoires d'état obtenues pour différentes conditions initiales avec  $L_f = 39.5 \text{ mH}$ ,  $P = 192.5 \text{ W}$  et  $C = 1000 \mu\text{F}$ . Une fois encore, les trajectoires obtenues sont cohérentes avec l'estimation du bassin d'attraction donnée sur la figure 4-9.

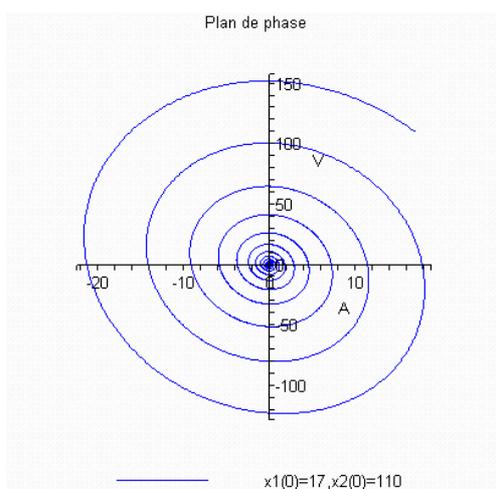


Figure 4.10

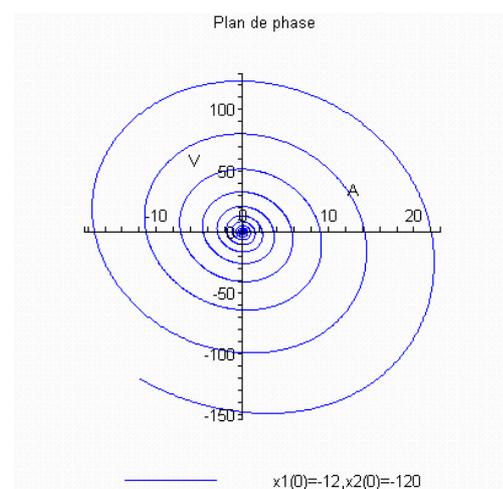


Figure 4.11

#### 2.4-Analyse de la qualité d'estimation du bassin d'attraction trouvé

Pour un système d'ordre deux, il est possible de quantifier l'approximation faite sur la taille du bassin d'attraction. On précise d'abord que les bassins présentés ci-dessus ne sont que des sous ensembles du vrai bassin d'attraction. L'objectif des recherches effectuées ici est de pouvoir exhiber des bassins de taille non négligeable s'approchant le plus possible du bassin d'attraction réel.

Comme présenté dans le chapitre II, on utilise la propriété du système adjoint puisque celui-ci va converger vers le cycle limite du système (sous réserve d'existence). Ce cycle limite constitue alors la limite au-delà de laquelle aucune trajectoire ne convergera vers le point d'équilibre souhaité. Ce cycle limite représente donc la frontière du bassin d'attraction recherché.

Sur les figures 4-12 et 4-13 sont présentés les bassins d'attraction trouvés pour deux valeurs de condensateurs à savoir  $500\mu\text{F}$  et  $1000\mu\text{F}$ , on constate que le bassin estimé ne recouvre que 50 à 60% du domaine recherché.

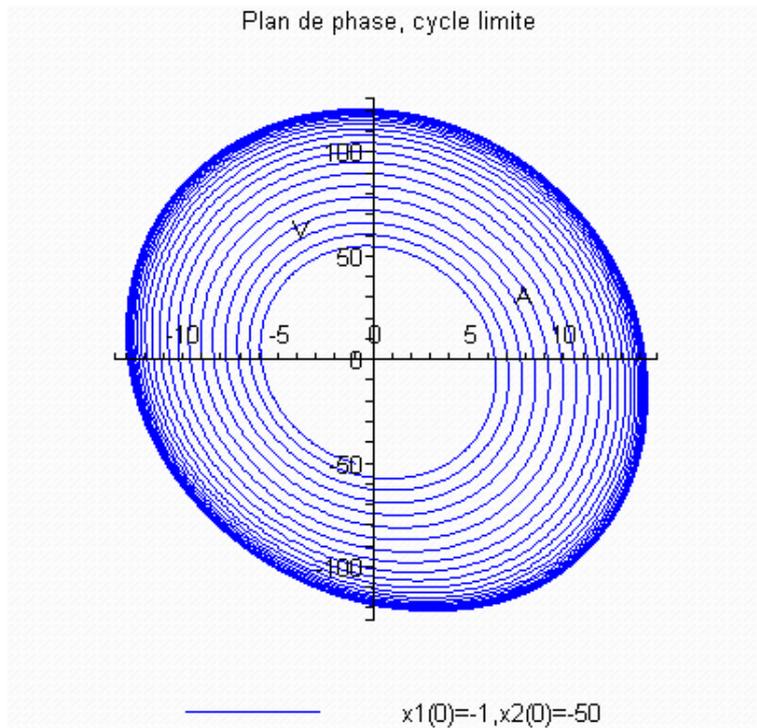


Figure 4-12 : cycle limite obtenu avec le système adjoint lorsque  $C = 500 \mu\text{F}$

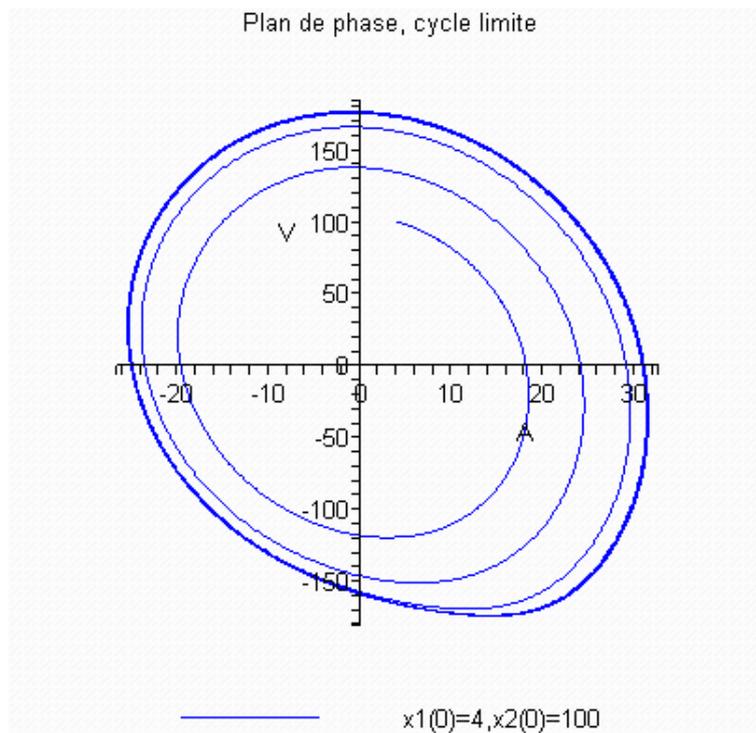


Figure 4-13 : cycle limite obtenu avec le système adjoint lorsque  $C = 1000 \mu\text{F}$

Sur les figures 4-14 et 4-15 sont représentés les bassins d'attraction obtenus respectivement lorsque l'inductance  $L_f$  est fixée à 7,9mH et la puissance de charge à 770 W. La encore en comparant les bassins d'attraction estimés (figure 4.6), on s'aperçoit que l'estimation du bassin ne couvre qu'au plus 50% au plus du bassin réel.

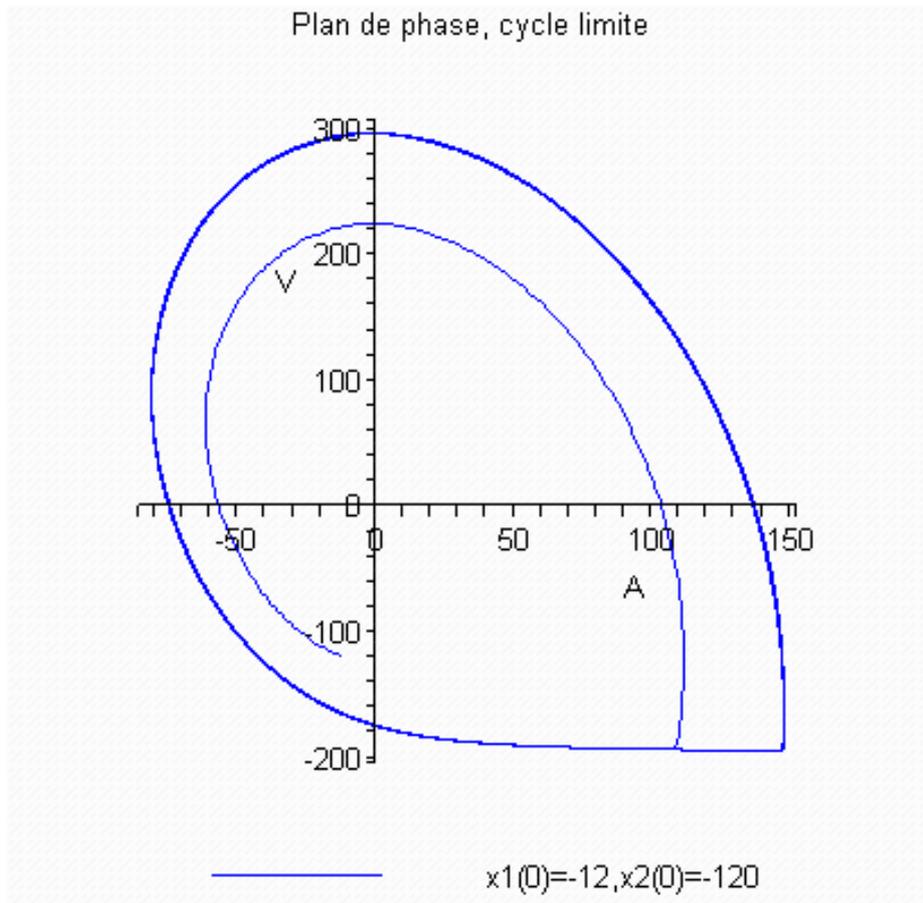


Figure 4-14 : cycle limite obtenu avec le système adjoint lorsque  $L = 7,9$  mH .

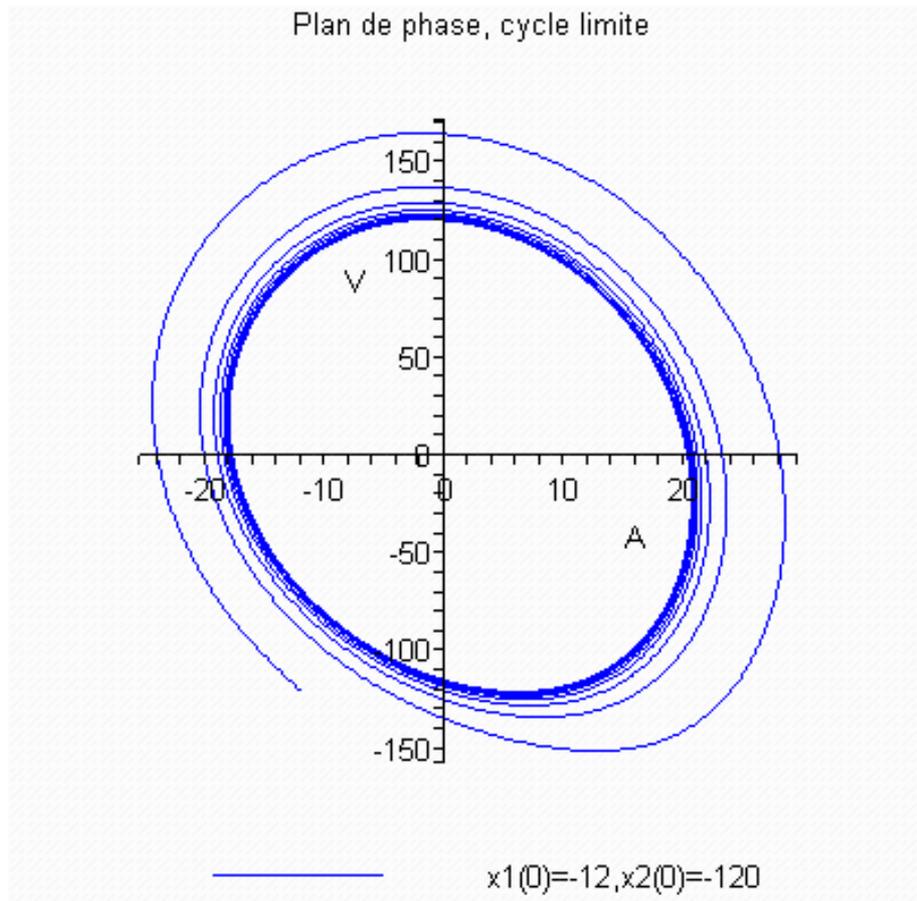


Figure 4-15 : cycle limite obtenu avec le système adjoint lorsque  $P = 770 \text{ W}$ .

Il est évident que l'utilisation du système adjoint permet d'avoir une information rapide et fiable sur la nature du bassin d'attraction. Cependant cette méthode de recherche du bassin d'attraction ne fonctionne que dans le cas très particulier des systèmes d'ordre 2 et est donc, contrairement à l'approche présentée, sans intérêt pour les systèmes d'ordre supérieur qui constituent en fait la majorité des applications.

### 3-Recherche d'une autre forme de bassin d'attraction

La méthode précédente conduit à une erreur proche de 50% sur l'estimation du bassin d'attraction. On peut essayer d'investiguer d'autres formes possibles de fonctions de Lyapunov permettant de répondre au problème de stabilité et de recherche de bassin d'attraction.

On se propose d'étudier ici une autre forme de fonction de Lyapunov utilisant des courbes dites de « lamé » et pouvant conduire à des bassins d'attraction de taille plus importante.

#### 3.1 Courbes de Lamé

Ce sont les courbes étudiées par le mathématicien et physicien français Gabriel Lamé dont l'équation générale est donnée sous la forme :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n \pm \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad n > 0, a \text{ et } b \text{ non nuls.}$$

On se place ici dans le cas des super ellipses dont la forme générale s'écrit :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{y}{b}\right)^4 = 1$$

### 3.2-Résolution du problème

On va prendre comme fonction quadratique  $V = x^T P x$  avec  $P = \begin{bmatrix} c_1 x^2 & c_3 \\ c_3 & c_2 y^2 \end{bmatrix}$ , où  $c_1, c_2$  et  $c_3$  sont des constantes positives.

On a toujours  $P = P^T > 0$ .

Dans le cas du système du deuxième ordre étudié, on pose  $x = x_1, y = x_2$ .

$$\text{On peut alors écrire : } \begin{bmatrix} c_1 x_1^2 & c_3 \\ c_3 & c_2 x_2^2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}}_{B_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}}_{B_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}}_{B_1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & c_3 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix}}_{B_3}.$$

L'utilisation du théorème 1 sur la stabilité des modèles TS nous conduit alors aux inéquations suivantes :

$$\begin{cases} A_1^T P + P A_1 < 0 \\ A_2^T P + P A_2 < 0 \end{cases} \text{ qui se réécrivent maintenant : } \begin{cases} A_1^T (B_1 \cdot B_2 \cdot B_1 + B_3) + (B_1 \cdot B_2 \cdot B_1 + B_3) \cdot A_1 < 0 \\ A_2^T (B_1 \cdot B_2 \cdot B_1 + B_3) + (B_1 \cdot B_2 \cdot B_1 + B_3) \cdot A_2 < 0 \end{cases} \quad (4-7)$$

$x_1$  et  $x_2$  sont les variables d'état du filtre d'entrée (tension et courant) qui sont supposées varier chacune entre un maximum et un minimum. On suppose alors :

$$x_1 \in [x_{1\max}, x_{1\min}] \text{ et } x_2 \in [x_{2\max}, x_{2\min}].$$

Comme dans le chapitre III, on va modéliser les variations des variables  $x_1$  et  $x_2$  contenues dans la matrice  $B_1$  à l'aide de la décomposition suivante :

$$B_1 = D_1 \Delta a_1(t) E_1,$$

$D_1, E_1$  étant des matrices diagonales de dimensions appropriées qui caractérisent les limites physiques du courant et de la tension.

En utilisant le lemme de l'inégalité puis le complément de Schur à chaque inégalité de (4-7), on obtient l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
& A^T B_1 B_2 B_1 + B_2 B_1 B_1 A + A^T B_3 + B_3 A < \tau_{a5} A^T B_1 B_1 A + \frac{1}{\tau_{a5}} B_2 B_1 B_2 B_1 + A^T B_3 + B_3 A \\
\Rightarrow & \begin{bmatrix} A^T B_3 + B_3 A & A^T B_1 + B_2 B_1 \\ B_1 A + B_2 B_1 & -\frac{I}{\tau_{a5}} - \tau_{a5} I \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{4-8}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & A^T B_1 + B_2 B_1 \\ B_1 A + B_2 B_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^T D_1 \Delta a_1(t) E_1 + B_2 D_1 \Delta a_1(t) E_1 \\ D_1 \Delta a_1(t) E_1 A + B_2 D_1 \Delta a_1(t) E_1 & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & A^T E_1 \Delta a_1(t) D_1 \\ D_1 \Delta a_1(t) E_1 A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B_2 D_1 \Delta a_1(t) E_1 \\ B_2 D_1 \Delta a_1(t) E_1 & 0 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \Delta a_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 A & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 D_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \Delta a_1(t) E_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^T E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \Delta a_1(t) D_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta a_1(t) E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_2 D_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, en appliquant deux fois le lemme de l'inégalité, il est possible d'obtenir la condition suffisante :

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & A^T B_1 + B_2 B_1 \\ B_1 A + B_2 B_1 & 0 \end{bmatrix} \leq \tau_{a3} \begin{bmatrix} 0 \\ D_1 \Delta a_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & D_1 \Delta a_1(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{\tau_{a3}} \begin{bmatrix} A^T E_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 A & 0 \end{bmatrix} \\
& \quad + \tau_{a4} \begin{bmatrix} B_2 D_1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_2 D_1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\tau_{a4}} \begin{bmatrix} I \\ \Delta a_1(t) E_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \Delta a_1(t) E_1 \end{bmatrix} \\
& \leq \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau_{a3}} A^T E_1 E_1 A + \tau_{a4} B_2 D_1 D_1 B_2 & 0 \\ 0 & \tau_{a3} D_1 D_1 + \frac{1}{\tau_{a4}} E_1 E_1 \end{bmatrix} \tag{4-9}
\end{aligned}$$

En utilisant (4-9) et (4-8), il est possible d'obtenir la condition suffisante suivante :

$$\begin{bmatrix} A^T B_3 + B_3 A + \frac{1}{\tau_{a3}} A^T E_1 E_1 A & 0 \\ 0 & -\frac{I}{\tau_{a5}} - \tau_{a5} I + \tau_{a3} D_1 D_1 + \frac{1}{\tau_{a4}} E_1 E_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{a4} B_2 D_1 D_1 B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (4-10)$$

Donc, en utilisant le complément de Schur et le fait que les matrices  $B_1$ ,  $B_2$  et  $D_1$  sont diagonales, (4-10) se réécrit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A^T B_3 + B_3 A + \frac{1}{\tau_{a3}} A^T E_1 E_1 A & 0 & B_2 D_1 & 0 \\ 0 & \tau_{a3} D_1 D_1 + \frac{1}{\tau_{a4}} E_1 E_1 - \frac{I}{\tau_{a5}} - \tau_{a5} I & 0 & 0 \\ D_1 B_2 & 0 & -\frac{I}{\tau_{a4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{I}{\tau_{a4}} \end{bmatrix}}_T < 0$$

On n'a pas réussi à trouver de solution à cette dernière LMI. L'utilisation de la méthode de résolution proposée au cas des super ellipses n'aboutit pas.

4-Recherche de fonction de Lyapunov quadratique avec variations paramétriques pour le système d'ordre deux

#### 4.1-Problématique

On va essayer de trouver un bassin d'attraction pour  $C \in [C_{\max}, C_{\min}]$  avec  $C_{\max}$  et  $C_{\min}$  à dimensionner c-a-d une seule matrice  $P$  vérifiant les conditions de stabilité pour une plage de variations de la capacité du condensateur.

On va utiliser les notations introduites au chapitre III pour traiter la stabilité du système avec incertitudes paramétriques. On va utiliser le théorème n° 1 ; on doit donc trouver une matrice  $P = P^T > 0$  telle que :

$$(A_i + \Delta A_i)^T P + P(A_i + \Delta A_i) < 0, \quad i \in \{1, 2\} \quad (4-11)$$

avec  $\Delta A_i = D_i \Delta a_i(t) E_i$  et  $\Delta a_i^T(t) \Delta a_i(t) \leq I$ .

On va utiliser, pour optimiser le domaine de variation de la capacité un outil qui est la décomposition LU (réduction d'endomorphisme).

#### Renseignements sur la décomposition LU

La décomposition LU va servir ici à approcher les valeurs propres des deux matrices afin d'avoir un  $\Delta C$  le plus grand possible.

Pour toute matrice inversible  $A$ , on sait qu'il existe  $L$  ( triangulaire inférieure à diagonale unité) et  $U$  ( triangulaire supérieure ) telle que  $A= LU$ , le couple (  $L, U$  ) étant unique à la condition que pour tout entier  $k$  compris entre 1 et l'ordre de la matrice  $A$ , la sous-matrice formée des  $k$  premières lignes et des  $k$  premières colonnes de  $A$  est inversible.

Le principe de la méthode est le suivant :

On va définir un processus itératif défini comme suit. On part d'une matrice  $A_1$  qu'on décompose sous la forme  $A_1 = L_1 U_1$ . On pose ensuite  $A_2 = U_1 L_1$ .

Soit  $M_1$  l'inverse de  $L_1$  (qui est également triangulaire inférieure à diagonale unité), on constate que :

$A_2 = M_1 L_1 U_1 L_1 = M_1 A_1 L_1$ . Les deux matrices  $A_1$  et  $A_2$  sont donc semblables (matrices possédant les mêmes valeurs propres) , en particulier, elles ont les mêmes valeurs propres. L'étape suivante consiste alors à construire la matrice  $A_3$  à partir de  $A_1$ . On itère alors le processus en posant  $\forall n \geq 3, A_n = U_{n-1} L_{n-1}$  à partir de la décomposition  $A_{n-1} = L_{n-1} U_{n-1}$  de  $A_{n-1}$ . On obtient ainsi une suite  $(A_n)$  de matrices semblables à la matrice initiale  $A_1$ .

La suite des matrices  $L_n$  converge vers la matrice identité, tandis que la suite des matrices  $U_n$  tend vers une matrice triangulaire supérieure limite dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ .

#### 4.2-Résolution variante n°1 - utilisation du théorème 1

On applique le lemme de Finsler à chaque inéquation de (4-11). Il vient :

$$\forall i \in \{1, 2\},$$

$$\begin{bmatrix} A_i^T F_i^T + F_i A_i + E_i^T \Delta a_i^T(t) D_i^T F_i^T + F_i D_i \Delta a_i(t) E_i & A_i^T G_i^T + E_i^T \Delta a_i^T(t) D_i^T G_i^T - F_i + P \\ G_i A_i + G_i D_i \Delta a_i(t) E_i - F_i^T + P & -G_i - G_i^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4-12)$$

On transforme maintenant les termes caractérisant les variations paramétriques.

$$\begin{bmatrix} 0 & E_i^T \Delta a^T D_i^T G_i^T \\ G_i D_i \Delta a E_i & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_i^T \Delta a^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & D_i^T G_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_Y + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_i D_i & 0 \end{bmatrix}}_{Y^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta a E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_X \quad (4-13)$$

En utilisant le lemme de l'inégalité, l'équation (4-12) est alors majorée par :

$$\begin{bmatrix} 0 & E_i^T \Delta a^T D_i^T G_i^T \\ G_i D_i \Delta a E_i & 0 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_1 \begin{bmatrix} E_i^T \Delta a^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ G_i D_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & D_i^T G_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

avec  $\varepsilon_1 > 0$

Une condition suffisante pour vérifier (4-12) est que :

$$\begin{bmatrix} A_i^T F_i^T + F_i A_i + E_i^T \Delta a^T D_i^T F_i^T + F_i D_i \Delta a E_i & A_i^T G_i^T - F_i + P \\ G_i A_i - F_i^T + P & -G_i - G_i^T \end{bmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} E_i^T E_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_i D_i D_i^T G_i^T \end{bmatrix} < 0$$

En utilisant le complément de Schur généralisé, cette dernière inéquation peut alors se réécrire :

$$\begin{bmatrix} A_i^T F_i^T + F_i A_i + E_i^T \Delta a^T D_i^T F_i^T + F_i D_i \Delta a E_i & A_i^T G_i^T - F_i + P & E_i^T & 0 \\ G_i A_i - F_i^T + P & -G_i - G_i^T & 0 & G_i D_i \\ E_i & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_1} I & 0 \\ 0 & D_i^T G_i^T & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4-14)$$

On a aussi :

$$E_i^T \Delta a^T D_i^T F_i^T + F_i D_i \Delta a E_i < \varepsilon_2 E_i^T E_i + \frac{1}{\varepsilon_2} F_i D_i D_i^T F_i^T \quad \text{avec } \varepsilon_2 > 0$$

On a donc, en utilisant le lemme de Schur généralisé :

$$\begin{bmatrix} A_i^T F_i^T + F_i A_i & A_i^T G_i^T - F_i + P & E_i^T & 0 & E_i^T & F_i D_i \\ G_i A_i - F_i^T + P & -G_i - G_i^T & 0 & G_i D_i & 0 & 0 \\ E_i & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_1} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_i^T G_i^T & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ E_i & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_2} I & 0 \\ D_i^T F_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4-15)$$

Le problème posé en (4-11) peut alors se résoudre en recherchant une solution aux inéquations (4-15). On pose alors  $M_1$  et  $M_2$  les matrices obtenues à partir de 4-15 lorsque l'indice  $i$  est égal à 1 et 2 respectivement.

Pour le dimensionnement des matrices  $D_i$  et de  $E_i$ , on va regarder comment interviennent les variations paramétriques de la capacité sur le système différentiel :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C} + \frac{Px_2}{Cv_0(x_2 + v_0)} \end{cases}$$

En exprimant les variations de capacitance autour d'une valeur nominale  $C_0$  de 1000  $\mu\text{F}$ , il vient :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C + \Delta C} + \frac{Px_2}{(C + \Delta C)v_0(x_2 + v_0)} \end{cases}$$

Cette équation se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})} + \frac{Px_2}{C(1 + \frac{\Delta C}{C})v_0(x_2 + v_0)} \end{cases}$$

On utilise maintenant le développement limité suivant :

$\frac{1}{1 + \frac{\Delta C}{C}} = 1 - \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C^2}{C^2} - \frac{\Delta C^3}{C^3} + \frac{\Delta C^4}{C^4} - \frac{\Delta C^5}{C^5} + \frac{\Delta C^6}{C^6}$ , les termes d'ordre supérieur étant négligeables.

Le système se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r}{L}x_1 - \frac{x_2}{L} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C} + \frac{Px_2}{Cv_0(x_2 + v_0)} + \left(\frac{x_1}{C} + \frac{Px_2}{Cv_0(x_2 + v_0)}\right) \left(-\frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta C^2}{C^2} - \frac{\Delta C^3}{C^3} + \frac{\Delta C^4}{C^4} - \frac{\Delta C^5}{C^5} + \frac{\Delta C^6}{C^6}\right) \end{cases}$$

On fixe donc les matrices  $D_i$ ,  $i \in \{1,2\}$  sous la forme  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et les  $E_i$  sous la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m_{i1} & m_{i2} \end{bmatrix}$$

Où les coefficients  $m_{i1}$  et  $m_{i2}$  dépendent des valeurs numériques découlant des variations de  $C$ .

Tout d'abord, on calcule  $M_1$  et  $M_2$  telles que leurs valeurs propres soient à parties réelles négatives en choisissant des valeurs les plus grandes possibles pour les coefficients  $m_{11}$ ,  $m_{12}$ ,  $m_{21}$  et  $m_{22}$ .

Puis, dans  $D_i$  on remplace le terme 1 de la deuxième ligne, deuxième colonne par  $b$  une variable quelconque et on va appliquer la décomposition LU aux matrices  $M_1$  et  $M_2$ .

Les éléments diagonaux calculés par la décomposition LU des matrices  $U_n$  des matrices  $M_1$  et  $M_2$  au bout d'une dizaine d'itérations sont de très bonnes approximations des valeurs propres de  $M_1$  et  $M_2$ .

On trace alors ces approximations en fonction de  $b$  et on regarde pour quelle valeur de  $b$  les éléments diagonaux de la matrice sont positifs. Puis on remplace  $b$  dans  $M_1$  ou  $M_2$  par la valeur trouvée et on calcule les valeurs propres de  $M_1$  et  $M_2$  pour vérifier si elles sont bien positives. Ce qui permet d'avoir les plus grandes valeurs propres possibles par cette méthode.

Avec la méthode proposée ci-dessus, la résolution des inégalités matricielles conduit à ce qu'elles ne soient vérifiées que pour de très petites variations de la valeur de la capacité  $C$  du condensateur. Ces variations sont de l'ordre de quelques pourcents.

Les bassins d'attraction sont les mêmes que ceux trouvés précédemment pour les valeurs de paramètres identiques.

#### 4.3-Résolution variante 2 - utilisation du théorème 3

On va maintenant utiliser le théorème n° 3 pour essayer de montrer que le système d'ordre 2 est globalement asymptotiquement stable pour  $C \in [C_{\max}, C_{\min}]$ . Les closes du théorème 3 s'écrit alors pour le système (4-8) :

$$(A_1^T + \Delta A_1^T).(A_1 + \Delta A_1) - \alpha^2 I \leq 0 \quad (4-16)$$

$$(A_2^T + \Delta A_2^T).(A_2 + \Delta A_2) - \alpha^2 I \leq 0 \quad (4-17)$$

$$(A_1^T + \Delta A_1^T).P_1 + P_1(A_1 + \Delta A_1) - S \leq 0 \quad (4-18)$$

$$(A_2^T + \Delta A_2^T).P_2 + P_2(A_2 + \Delta A_2) - S \leq 0 \quad (4-19)$$

$$(A_2^T + \Delta A_2^T).P_1 + P_1(A_2 + \Delta A_2) + (A_1^T + \Delta A_1^T).P_2 + P_2(A_1 + \Delta A_1) - 2M \leq 0 \quad (4-20)$$

$$-R \leq P_1 - P_0 \leq R \quad (4-21)$$

$$-R \leq P_2 - P_0 \leq R \quad (4-22)$$

$$M + \gamma.(S - M) + \alpha.\delta.R < 0 \quad (4-23)$$

On va utiliser le lemme de l'inégalité sur l'inéquation (4-18) qui se réécrit :

$$A_1^T P_1 + \underbrace{E_1^T \Delta a_1^T}_{X^T} \underbrace{D_1^T P_1}_{Y} + P_1 A_1 + \underbrace{P_1 D_1}_{Y^T} \underbrace{\Delta a_1 E_1}_{X} - S \leq 0$$

En utilisant le lemme de l'inégalité, on obtient,

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 - S + \varepsilon_{11} E_1^T \underbrace{\Delta a_1^T \Delta a_1}_{I} E_1 + \frac{1}{\varepsilon_{11}} P_1 D_1 D_1^T P_1 \leq 0$$

On va faire l'hypothèse que la matrice  $D_I$  est égale à la matrice identité (hypothèse toujours vérifiable a priori en choisissant correctement la matrice  $E_I$ ). Il vient alors :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 - S + \varepsilon_{11} E_1^T E_1 + \frac{1}{\varepsilon_{11}} P_1 P_1 \leq 0, D_1 = I$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient avec  $\varepsilon_{11} > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 + P_1 A_1 - S & E_1^T & P_1 \\ E_1 & \frac{-1}{\varepsilon_{11}} I & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_{11} I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4-24)$$

En faisant de même avec l'inéquation (4-19), on obtient avec  $\varepsilon_{12} > 0$ ,

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_2 + P_2 A_2 - S & E_2^T & P_2 \\ E_2 & \frac{-1}{\varepsilon_{12}} I & 0 \\ P_2 & 0 & -\varepsilon_{12} I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4-25)$$

On présente maintenant l'équation (4-20) sous la forme :

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 - 2M + \underbrace{E_2^T \Delta a_2^T D_2^T P_1}_{\tilde{X}^T} + \underbrace{P_1 D_2 \Delta a_2 E_2}_{\tilde{Y}^T} + \underbrace{E_1^T \Delta a_1^T D_1^T P_2}_{\tilde{X}^T} + \underbrace{P_2 D_1 \Delta a_1 E_1}_{\tilde{Y}^T} \leq 0$$

Qui après utilisation du lemme de l'inégalité conduit à :

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 - 2M + \varepsilon_{13} E_2^T E_2 + \frac{1}{\varepsilon_{13}} P_1 P_1 + \varepsilon_{14} E_1^T E_1 + \frac{1}{\varepsilon_{14}} P_2 P_2 \leq 0$$

avec  $\varepsilon_{13} > 0, \varepsilon_{14} > 0$ ,

L'utilisation du complément de Schur généralisé donne alors :

$$\begin{bmatrix} A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 - 2M & E_2^T & P_1 & E_1^T & P_2 \\ E_2 & \frac{-1}{\varepsilon_{13}} I & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & -\varepsilon_{13} I & 0 & 0 \\ E_1 & 0 & 0 & \frac{-1}{\varepsilon_{14}} I & 0 \\ P_2 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{14} I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4-26)$$

Encore une fois la résolution des inéquations (4-24) à (4-26) conduit à une solution vérifiant  $P_1 = P_2 = P$  et à de très petites variations de la valeur de la capacité du condensateur (quelques %), les autres conditions n'étant plus nécessaires puisqu'on retombe sur le théorème 1.

## 5-Utilisation de la norme $H_\infty$

Dans cette partie, on veut montrer que le système TS étudié reste stable en présence de perturbations extérieures bornées. Ceci permet d'appréhender les propriétés de robustesse du système en présence de perturbations externes ou d'erreurs de modélisation.

### 5.1-Mise en équation

On rappelle qu'un modèle T.S soumis à une perturbation externe  $u(t)$  s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (A_i x(t) + B_i u(t))$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot (C_i x(t) + D_i u(t))$$

$y(t)$  étant les sorties du système.

On utilise la fonction de Lyapunov :  $V(x) = x^T P x \geq 0$ ,  $\forall x \in R^n$ .

### 5.2-Résolution

$$\text{Le système différentiel } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{r_f}{L_f} x_1 - \frac{x_2}{L_f} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_1}{C} + \frac{P x_2}{C u_0 (x_2 + u_0)} \end{cases}$$

correspond à la partie  $\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \cdot A_i x(t)$  du modèle TS sans la perturbation externe.

On suppose  $B_i = B$  car il n'y a pas de non linéarités dans cette partie du système.

$$y(t) = C_i x(t) \text{ avec } C_i = C \text{ (pas de non linéarité), } D_i = 0 \text{ avec } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a donc en utilisant le lemme borné réel pour le calcul de la norme  $H_\infty$ :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i & P B & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad i \in \{1, 2\}$$

$\gamma$  étant un majorant de la norme  $H_\infty$  du système.

C'est une LMI. La résolution de ces deux inégalités matricielles ( $i=1$  ou  $2$ ) conduit à  $\gamma = 48$  avec une matrice  $P > 0$  :

$$P = \begin{bmatrix} 2.750619465 & 0.074906366 \\ 0.0749063669 & 0.07021518 \end{bmatrix}$$

En conséquence, le système est bien stable avec une norme  $H_\infty$  majorée par  $\gamma = 48$ . Ce coefficient représente l'amplification maximale d'une perturbation extérieure au système.

## 6-D-stabilité

### 6.1-Problématique

Le système étant non linéaire, on ne peut pas connaître avec exactitude la valeur des pôles qui dépendent du point de fonctionnement du système. Dans cette partie, on se propose de déterminer la zone du plan complexe (région LMI, voir chapitre II) dans laquelle évoluent les pôles du système pour une région convexe de l'espace d'état.

### 6.2-Résolution

*Région : bande verticale*

On commence par étudier si les pôles évoluent dans une bande verticale telle que :

$$a_1 < \text{Re}(z) < a_2 \quad \text{avec } a_1 < 0, a_2 < 0 \text{ si possible.}$$

En réutilisant les résultats donnés au chapitre II-2-5 étendus au cas des systèmes TS, les pôles du système TS appartiennent à la région LMI ci-dessus à condition de vérifier les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} -2a_1 P + A_1 P + P A_1^T < 0 \\ -2a_1 P + A_2 P + P A_2^T < 0 \\ 2a_2 P - A_1 P - P A_1^T < 0 \\ 2a_2 P - A_2 P - P A_2^T < 0 \end{cases} \quad (4-27)$$

On réutilise la matrice  $P$  déterminée au chapitre IV-2 sachant qu'une solution n'existe que si  $x_2$  appartient à l'intervalle  $[x_{2\min}, x_{2\max}]$ . La résolution de la LMI (4-27) conduit alors à :

Pour  $C = 500 \mu\text{F}$ , on trouve  $a_1 = -8984$ ,  $a_2 = 8984$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 3.49851669 & 0.0470809776 \\ 0.0470809776 & 0.044070193 \end{bmatrix}.$$

Pour  $C = 1000 \mu\text{F}$ , on trouve  $a_1 = -3195$ ,  $a_2 = 3195$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 1.97601244 & 0.0524344569 \\ 0.0524344569 & 0.0501425287 \end{bmatrix}.$$

Lorsque la valeur de la capacité du condensateur  $C$  augmente, les deux bandes latérales se rapprochent. Ce qui tend à montrer que lorsque la valeur du condensateur augmente, la dynamique du système ralentit (résultat à priori cohérent avec la réalité physique). De plus, le système TS étant supposé stable (pôles à partie réelle négative), l'information donnée permet de connaître les dynamiques maximales du système quand la trajectoire d'état reste à l'intérieur d'une région convexe de l'espace d'état.

*Région : disque de rayon  $R$  et de centre  $(q, 0)$*

On résout donc les inégalités toujours avec la matrice  $P$  déterminée au chapitre IV-2 afin d'avoir des LMI suivantes :

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP + A_1P \\ -qP + PA_1^T & -RP \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -RP & -qP + A_2P \\ -qP + PA_2^T & -RP \end{bmatrix} < 0$$

Pour le système d'ordre deux :

Pour  $C = 500 \mu\text{F}$ , on trouve  $q = -38.812527$ ,  $R = 17978.42491$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 34.12811331 & 0.4708097785 \\ 0.4708097785 & 0.433853357 \end{bmatrix}.$$

Pour  $C = 1000 \mu\text{F}$ , on trouve  $q = -28.203$ ,  $R = 26700$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 12.48052146 & 0.2996254641 \\ 0.2996254641 & 0.3193442969 \end{bmatrix}$$

On constate qu'il y a peu de variations entre les deux valeurs de la capacité  $C$  du condensateur. Encore une fois, l'étude permet de connaître les dynamiques maximales du système TS, celui-ci étant supposé stable.

### 6.3-Conclusion

L'utilisation des méthodes non quadratiques pour le système d'ordre deux montrent que la résolution des inéquations matricielles conduit à  $P_1 = P_2 = P$ , ce qui ramène à la résolution d'inéquations par le théorème utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques. Cela est dû au fait que le nombre des différents éléments qui composent les matrices  $P$  est suffisant pour trouver une solution aux inégalités matricielles de la forme  $A_i^T P + P A_i < 0$ .

La méthode de l'adjoint donne le bassin d'attraction réel sans faire de calculs pour des systèmes d'ordre deux. L'utilisation des méthodes non quadratiques est justifiée pour des systèmes pour lesquels certaines matrices  $A_i$  ne sont pas de Hurwitz.

### 7-Recherche de la stabilité pour un système d'ordre quatre

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les outils développés au paragraphe IV-2 sont utilisables pour les systèmes d'ordre plus élevé où l'approche via le système adjoint n'est plus possible.

#### 7.1-Système utilisé

Ce système modélise un actionneur muni d'une commande rejetant parfaitement les perturbations sur l'étage d'entrée, sachant que son alimentation DC est obtenue via la mise en cascade de deux filtres faiblement amortis du second ordre. Dans la pratique, le premier filtre modélise la ligne de transmission, le second quant à lui, permet de limiter les ondulations de courant de mode différentiel injectées sur le réseau DC. La figure 4-15 représente le système étudié.

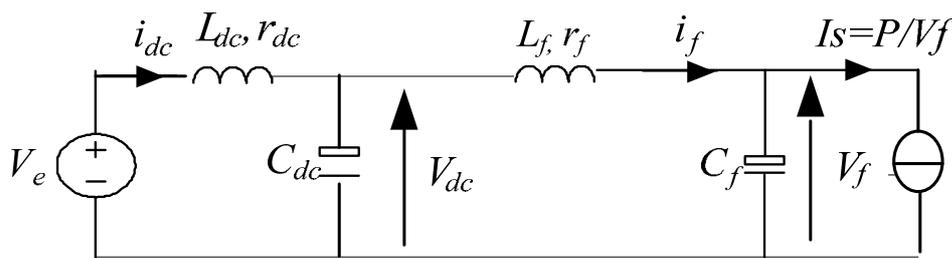


Figure 4.15 : filtre d'entrée chargé par un dispositif fonctionnant à puissance constante.

Où

$$V_e = 540V, P = 5000W, L_f = 10\mu H, r_f = 0.5\Omega, C_f = 10\mu F, C_{dc} = 5\mu F, r_{dc} = 0.1\Omega, L_{dc} = 100\mu H$$

#### 7.2-Mise en équation

On modélise le système par un système différentiel de quatre équations.

Pour le point de fonctionnement :

$$i_{f0} = i_{dc0} = \frac{V_e - V_{f0}}{r_{dc} + r_f}, \quad V_{dc0} = V_{f0} + r_f i_{f0} \quad ,$$

$$V_{f0} = \frac{V_e \pm \sqrt{V_e^2 - 4P(r_{dc} + r_f)}}{2} \quad ,$$

$$i_{f0} = i_{dc0} = 9.3A, \quad V_{f0} = 534.4V$$

$$V_{dc0} = 539V$$

On pose alors :

$$\begin{cases} i_{dc}^* = i_{dc} - i_{dc0} \\ i_f^* = i_f - i_{f0} \\ v_f^* = v_f - V_{f0} \\ v_{dc}^* = v_{dc} - V_{dc0} \end{cases} \quad \text{et} \quad x_1 = i_f^*, x_2 = i_{dc}^*, x_3 = v_{dc}^*, x_4 = v_f^* \quad .$$

Le système peut donc se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_f}{L_f} & 0 & \frac{1}{L_f} & \frac{-1}{L_f} \\ 0 & \frac{-r_{dc}}{L_{dc}} & \frac{-1}{L_{dc}} & 0 \\ \frac{-1}{C_{dc}} & \frac{1}{C_{dc}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & 0 & \frac{P}{C_f V_{f0} (x_4 + V_{f0})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} .$$

On définit  $f(x_4) = \frac{P}{C_f V_{f0} (x_4 + V_{f0})}$  ,

avec

$$f_{\min} = \frac{P}{C_f V_{f0} (x_{4\max} + V_{f0})} \quad , \quad f_{\max} = \frac{P}{C_f V_{f0} (x_{4\min} + V_{f0})}$$

Comme pour le système d'ordre 2, ce système possède une non linéarité. On définit donc deux règles.

Si la variable de décision  $f(x_4)$  est  $\frac{f(x_4) - f_{\min}}{f_{\max} - f_{\min}}$ , on a pour le premier modèle local TS :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_f}{L_f} & 0 & \frac{1}{L_f} & \frac{-1}{L_f} \\ 0 & \frac{-r_{dc}}{L_{dc}} & \frac{-1}{L_{dc}} & 0 \\ \frac{-1}{C_{dc}} & \frac{1}{C_{dc}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & 0 & f_{\max} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{x} = A_1 x .$$

Si la variable de décision  $f(x_4)$  est  $\frac{f_{\max} - f(x_4)}{f_{\max} - f_{\min}}$ , on a pour le second modèle local TS :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-r_f}{L_f} & 0 & \frac{1}{L_f} & \frac{-1}{L_f} \\ 0 & \frac{-r_{dc}}{L_{dc}} & \frac{-1}{L_{dc}} & 0 \\ \frac{-1}{C_{dc}} & \frac{1}{C_{dc}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_f} & 0 & 0 & f_{\min} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{x} = A_2 x .$$

### 7.3-Résolution

On utilise le théorème n°3. En réécrivant les closes a et b du théorème 2, il vient alors :

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 - 2M \leq 0$$

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 - S \leq 0$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 - S \leq 0 .$$

Une fois encore la résolution de ces inéquations conduit à  $P_1 = P_2 = P$  car les dix éléments différents de la matrice  $P > 0$  symétrique sont suffisants pour la résolution des inégalités matricielles  $A_i^T P + P A_i < 0$ . On revient donc au théorème n°1.

La matrice  $P$  obtenue s'écrit alors :

$$P = \begin{bmatrix} 1.615 * 10^8 & 8.821 * 10^8 & -1.2467 * 10^7 & 4.182 * 10^7 \\ 8.821 * 10^8 & 1.4 * 10^{10} & 6.033 * 10^7 & 5.9549 * 10^8 \\ -1.2467 * 10^7 & 6.033 * 10^7 & 2.6 * 10^8 & 4.4 * 10^8 \\ 4.182 * 10^7 & 5.9549 * 10^8 & 4.4 * 10^8 & 1.063 * 10^9 \end{bmatrix}$$

Le système est globalement asymptotiquement stable au sens de T.S pour toutes variations de  $V_{f0} \in [-250, 250]$ .

#### 7.4-Etude de la D-stabilité

Pour la D-stabilité, on trouve, pour les deux bandes verticales :

$$a_1 = -2 * 10^6 \text{ et } a_2 = 1558 \text{ avec } P \text{ définie ci-dessus.}$$

Les pôles sont donc entre ces deux bandes verticales.

#### 7.5-Résultats de simulation

Les valeurs propres de  $P^{-1}$  apportent une information sur la taille de l'ellipsoïde.

Donc, en utilisant les valeurs numériques des valeurs propres, on obtient des plages de variations, en se plaçant dans la base des vecteurs propres, comprises entre :

-250V et 250V et -180V et 180V pour les variations de tension,  
-54A et 54A et -16A et 16A pour les variations de courant.

En se plaçant dans la base canonique  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , on obtient, pour les points aux sommets des demi-axes de l'ellipsoïde associée à  $P$  :

A(1.01, -0.296, -81.25, 169.7), B(15.95, -2.376, 1.955, -11.592),  
C(0.092, 22.14, -215.7, -53.46), D(0.736, 49.2, 96.5, 24.51) ainsi que les points opposés.

Une coupe de l'ellipsoïde obtenu est présentée sur la figure 4-16.

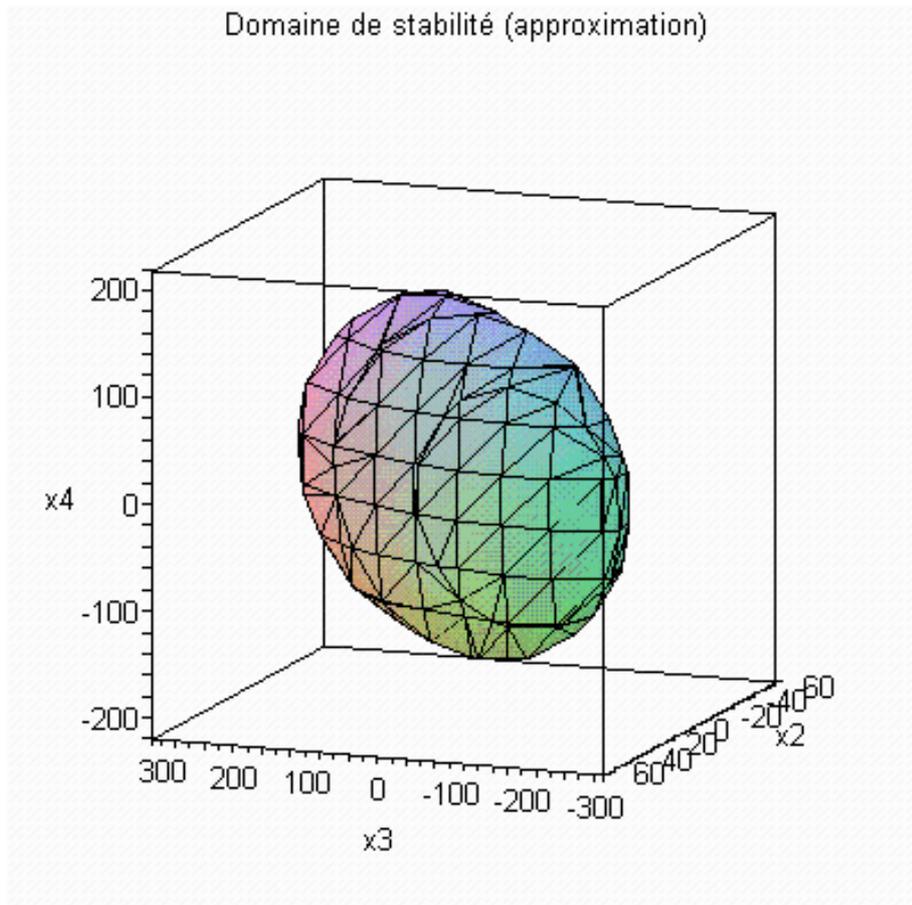


Figure 4.6 : coupe du bassin d'attraction estimé, obtenu en fixant  $i_{dc}=i_{dc0}$ .

## 8-Stabilité exponentielle

On se propose dans cette partie de montrer que le système TS étudié vérifie des propriétés de stabilité exponentielle. Cette propriété permet d'appréhender la dynamique de convergence vers le point d'équilibre. Contrairement à ce qui a été exposé avec la D-stabilité, ici, nous allons étudier la dynamique minimale avec laquelle la trajectoire d'état converge vers le point d'équilibre.

### 8.1-Utilisation de l' $\alpha$ -stabilité

En utilisant le lemme de l'inégalité, pour l' $\alpha$ -stabilité, on a

$$A_i^T P + PA_i + \alpha I.P + P.\alpha I \leq A_i^T P + PA_i + \varepsilon.\alpha^2 I + \frac{1}{\varepsilon}.PP \leq 0 \quad [26]$$

sachant que  $i \in I_r$ . On obtient avec le complément de Schur la condition suffisante suivante :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & \alpha I & P \\ \alpha I & -\frac{1}{\varepsilon} I & 0 \\ P & 0 & -\varepsilon I \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4-28)$$

C'est une forme LMI.

Application aux systèmes d'ordre 2 et d'ordre 4

On peut utiliser ce résultat pour le système d'ordre deux car on a besoin que d'une seule matrice  $P = P^T > 0$  dans les inégalités matricielles. La résolution de (4-28) sous forme LMI donne une valeur de  $\alpha$  différente pour chaque valeur de la capacité C. On obtient les valeurs de  $\alpha$  suivantes :

pour C = 500  $\mu$ F :  $\alpha = 0.2$

d'où :  $\dot{V}(x(t)) \leq -0.4V(x(t))$  et  $V(x(t)) \leq V(x(0)).e^{-0.4t}$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 3.4985166 & 0.047080977 \\ 0.04708097 & 0.044070193 \end{bmatrix}$$

pour C = 1000  $\mu$ F :  $\alpha = 1.2$

d'où  $\dot{V}(x(t)) \leq -2.4V(x(t))$  et  $V(x(t)) \leq V(x(0)).e^{-2.4t}$  avec

$$P = \begin{bmatrix} 1.97601244 & 0.0524344569 \\ 0.05243445 & 0.050142528 \end{bmatrix}$$

On remarque donc que la valeur de  $\alpha$  augmente lorsque la valeur de C augmente.

Quant au système d'ordre quatre, la résolution de (4-28) conduit à :

pour  $C = 1000 \mu\text{F}$      $\alpha = 68.035$

d'où :  $\dot{V}(x(t)) \leq -136.07 V(x(t))$  soit  $V(x(t)) \leq V(x(0)).e^{-136.07 t}$ .

La dynamique minimale du système d'ordre 4 étudié est donc beaucoup plus rapide que celle du système d'ordre 2. Cela s'explique par les valeurs numériques choisies pour le système d'ordre 4 qui sont beaucoup plus petites que celles du système d'ordre 2 et qui conduisent donc à des dynamiques plus rapides.

## 8.2-Utilisation des M-Matrices

On va maintenant utiliser le théorème de la stabilité exponentielle avec l'utilisation des M-Matrices.

Pour le système d'ordre 2 :

L'utilisation des M-Matrices pour montrer la stabilité exponentielle ne donne aucun résultat pour le système d'ordre 2.

Pour le système d'ordre 4 :

On applique ce théorème au système d'ordre quatre. Confère le théorème détaillé au chapitre II, paragraphe 2.4.3, il est nécessaire pour établir la M-stabilité de déterminer des matrices  $P_1, P_2, S_{11}, S_{12}, S_{22}$  et  $S_{21}$  vérifiant :

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 + S_{11} \leq 0 \quad (4-14)$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 + S_{22} \leq 0 \quad (4-15)$$

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 - S_{21} \leq 0 \quad (4-16)$$

$$A_1^T P_2 + P_2 A_1 - S_{12} \leq 0 \quad (4-17)$$

Après résolution, on obtient une matrice  $P = P^T = P_1 = P_2 > 0$ .

Le degré de stabilité  $\delta$  égal à 79.9 avec  $\beta_{\min} = 4.5 * 10^{12}$ ,  $c_2 = 2.8167 * 10^{10}$ .

On a donc :  $\dot{V}(x(t)) \leq -159.8 V(x(t))$  soit  $V(x(t)) \leq V(x(t_0))e^{-159.8(t-t_0)}$ .

C'est une valeur très proche du  $\alpha$  trouvée dans le paragraphe 8.1.

Le système est donc globalement exponentiellement stable au sens de Tagaki-Sugeno.

La résolution de ces inégalités matricielles permet de montrer que le système est exponentiellement stable. Il permet de plus de calculer un degré de stabilité pour le système.

## 9-Conclusion

On a présenté dans ce chapitre, différentes méthodes permettant d'analyser la stabilité large signal d'un système électrique fonctionnant à puissance constante. On a montré qu'il était possible d'exhiber une approximation du bassin d'attraction pour ce type de non linéarité à l'aide d'une modélisation floue de type Tagaki-Sugeno et ceci quelque soit l'ordre du système. Pour analyser la qualité de l'approximation, nous avons utilisé pour les systèmes d'ordre 2 uniquement, la notion de système adjoint qui permet, sous réserve d'existence, de connaître le bassin d'attraction. De plus on a proposé une méthode permettant d'analyser la stabilité large signal lorsque le système est soumis à des incertitudes paramétriques. La dynamique de convergence de ce type de système a été étudiée à l'aide des notions de D-stabilité et de stabilité exponentielle qui fournissent respectivement des informations sur les dynamiques maximales et minimales du système.

## Conclusion générale et perspectives

Dans cette thèse différents outils issus de l'automatique non linéaire ont été mis en œuvre et ont permis d'apporter une première solution au problème de stabilité large signal des dispositifs électriques. A l'aide de modèles flous de type Tagaki-Sugeno, on a montré qu'il était possible de résoudre le problème de stabilité dans le cas de deux applications électrotechniques à savoir un hacheur contrôlé en tension et l'alimentation via un filtre d'entrée d'un dispositif électrique fonctionnant à puissance constante.

Dans le cas du hacheur, la taille estimée des bassins d'attraction reste modeste. Les raisons essentielles à l'échec obtenu dans la recherche de bassin de grande taille peuvent résulter dans le fait que d'une part, la mise sous forme TS du système n'est pas unique et que d'autre part les matrices du sous modèle TS ne sont de Hurwitz que dans une gamme très restreinte de variations du rapport cyclique. Dans les travaux futurs, on envisage de modifier la formulation du modèle TS en introduisant cette fois ci deux non linéarités et quatre règles. L'avantage de cette formulation est que les plages de variations des non linéarités seront plus grandes que celle obtenue avec le rapport cyclique.

Dans le cas de l'alimentation via un filtre d'entrée d'un dispositif fonctionnant à puissance constante, on a montré que l'utilisation d'un modèle flou de type Tagaki-Sugeno permettait d'exhiber un domaine d'attraction de taille significative. A l'aide de la notion de système adjoint, on a pu montrer que pour des systèmes d'ordre 2, l'erreur commise dans l'approximation du bassin d'attraction, était de l'ordre de 50%. On a fourni des outils permettant de borner la plage de variations des pôles du système dans un domaine donné de l'espace d'état, domaine dans lequel la stabilité du modèle TS est prouvée. L'utilisation de la D-stabilité permet de connaître les dynamiques maximales du système. La notion de stabilité exponentielle permet, elle, de connaître les dynamiques minimales du système.

Actuellement l'approche utilisée pour prouver la stabilité du système en présence de variations paramétriques, pour les deux systèmes étudiés, n'autorise que des variations extrêmement faibles de la valeur du paramètre autour de sa valeur nominale. L'utilisation de fonctions de Lyapunov polytopiques pourrait être utile pour trouver des bassins d'attraction plus grands pour ce type de système.

## Références

- [1] L. Harnefors, K. Pietläinenardier, "Inverter DC-link Stabilizing Control With Improved Voltage Sag Ride-Through Capability", EPE 2005, dresde, Allemagne, 11-14 September 2005.
- [2] H. Mosskull, "DC-link stabilization of an induction machine drive", EPE 2003, Toulouse, France, 2-4 September 2003.
- [3] N. Roux, F. Richardeau, "Stability of DC link with reduced energy storage for regenerative synchronous drive – analytical approach", 2 - 5 September 2007, Aalborg, Denmark.
- [4] J. Wang, A. Griffo, L.Han, D. Howe, "input admittance characteristics of permanent magnet brushless AC motor drive systems", IEEEVPPC, 2007.
- [5] R.D. Middlebrook, "Input Filter Considerations in Design and Application of Switching Regulators", in IEEE Proc. IAS'76 Annual Meeting, pp. 366-382, 1976.
- [6] R.D. Middlebrook, "Design Techniques for Preventing Input-Filter Oscillations in Switched-Mode Regulators", in Proc. Powercon 5, pp. A3-1 to A3-16, 1978.
- [7] A. Emadi, B. Fahimi, and M. Ehsani, "On the Concept of Negative Impedance Instability in the More Electric Aircraft Power Systems with Constant Power Loads", in SAE Journal, paper No. 1999-01-2545, 1999.
- [8] Y. Jang and R. W. Erickson., "Physical Origins of Input Filter Oscillations in Current Programmed Converters", in IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 7, no. 4, pp. 725-733, October 1992.
- [9] S.Y. Erich et W.M. Polivka., "Input Filter Design Criteria for Current-Programmed Regulators", in IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 7, no. 1, pp.143-151, January 1992.
- [10] M. Al-Fayyumi, D. Boroyevich, et A. Nayfeh., "Input Filter Interactions in DC-DC Switching Regulators", in IEEE Power Electronics Specialists Conference, PESC'99 Proceedings, pp. 926-932, 1999.
- [11] S. D. Sudhoff, K. A. Corzine, S. F. Glover, H. J. Hegner, and H. N. Robey, Jr., "DC link stabilized field oriented control of electric propulsion systems," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 13, no. 1, pp. 27–33, Mar. 1998.
- [12] H. Mosskull, J. Gali'c, and B. Wahlberg, "Stabilization of Induction Motor Drives With Poorly Damped Input Filters", *IEEE Trans. On Industrial Electronics*, VOL. 54, NO. 5, October 2007.
- [13] B. Délémontey, B. Jacquot, C. Iung, B. De Fornel, J. Bavard, "Non linear decoupling of an induction motor drive with input filter", *IEEE CCA 1995*, pp1004-1009.

- [14] P. Liutanakul, S. Pierfederici, and F. Meibody-Tabar, "DC-link capacitor reduction of a controlled rectifier supplying  $N$  inverter-motor drive systems by compensating the load variations," in *PESC'04*, pp. 1298-1303, 2004.
- [15] A. Lucia, D. Franco, H. Bourlès, E.R. De Pieri, H. Guillard, "robust nonlinear control associating robust feedback linearization and H control", *IEEE transactions on automatic control*, vol.51, no.7, July 2006.
- [16] Weibing Gao and James C. Hung, "Variable Structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, Feb. 1993, pp. 45-55.
- [17] Blanco Y., Perruquetti W. and Borne P. Stability and stabilizability of nonlinear systems and T-S fuzzy models. In *Mathematical Problems in Engineering*, 2001.
- [18] Park Y., Tahk M-J. and Park J. Optimal stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy systems with application to spacecraft control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001.
- [19] Chadli M., Maquin D. and Ragot J. Output stabilisation in multiple model approach. In *Proc. of the IEEE Conference on Control Application ( CCA 02 )*, Glasgow, Scotland, 2002.
- [20] Y. Zhang, G. Duan, L. He , robust stability of a class of uncertain discrete-time switched systems with time-delay, *IEEE system and control in aerospace and astronautics*, 2006, ISSCAA, 19-21 Jan., 2006 pp849-852.
- [21] Elvia Ruth Palacios-Hernandez Contribution à la commande floue de type Takagi-Sugeno des systèmes non linéaires . Thèse de doctorat ( Toulouse) 2004.
- [22] Y. Morère Mise en œuvre de lois de commande pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno. Thèse de doctorat ( Valenciennes ) 2001.
- [23] Jean-Pierre Richard Algèbre et analyse pour l'automatique. Editions Hermes 2001.
- [24] Jean-Pierre Richard Mathématiques pour les systèmes dynamiques. Editions Hermes 2001.
- [25] Rosario Toscano Commande et diagnostic des systèmes dynamiques. Editions Ellipses 2004.
- [26] Mohammed Chadli Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles. Thèse de doctorat ( IAEM Lorraine ) 2002.
- [27] Vladimir Rasvan, Radu Stefan Systèmes non linéaires. Editions Hermès 2007.
- [28] L. Harnefors, K. Pietläinenardier, "Inverter DC-link Stabilizing Control With Improved Voltage Sag Ride-Through Capability", *EPE 2005*, Dresde, Allemagne, 11-14 September 2005.
- [29] N. Roux, F. Richardeau, "Stability of DC link with reduced energy storage for regenerative synchronous drive – analytical approach", 2 - 5 September 2007, Aalborg, Denmark.

- [30] Chilali M., Gahinet P. Design with pole placement constraints: an LMI approach, IEEE Trans. Aut. Contr., 1996.
- [31] Chilali M., Gahinet P., Apkarian P. Robust pole placement in LMI regions, IEEE Trans. Automatic Control, vol.44, 1999.
- [32] D. Marx, S. Pierfederici, B. Nahid-Mobarakeh, B. Davat, "Contribution to Determination of Domain of Attraction in Power Systems: Application to Drives With Input Filter", IAS 2009, 5-8 octobre 2009, Houston USA.
- [33] D. Marx, S. Pierfederici, B. Nahid-Mobarakeh et B. Davat Nonlinear Control Of An Inverter Motor Drive System With Input Filter - Large Signal Analysis Of The DC-Link Voltage Stability, IEEE PESC, 15 au 19 juin 2008, Rhodes.
- [34] D. Marx, S. Pierfederici, B. Nahid-Mobarakeh et B. Davat Stability of non linear system. Converter of Boost type. Non quadratic Lyapunov function Electrimacs , du 8 au 11 juin 2008, Quebec, Canada.
- [35] J.-P. Louis et B. Le Pioufle Représentation fonctionnelle des machines à courants alternatifs et de leur alimentation pour leur commande en vitesse variable, Journées SEE, Valence, France, 1989.
- [36] F. Meibody-Tabar Machines synchrones à aimants permanents alimentées par onduleurs de tension ; modélisation, commande et segmentation de puissance, habilitation à diriger des Recherches, Nancy, 2000.
- [37] H. Ralaivao, J.P. Cambronne, B. François, J.P. Hautier Synthesis of logic connection controllers for matrix converters, EPE 97, vol. 2, Trondheim, Norway, septembre 1997.
- [38] F.-M. Sargos, Transformations des systèmes polyphasés, cours d'électrotechnique analytique à l'ENSEM, Nancy.
- [39] F.-M. Sargos, Machine synchrone à pôles saillants, Cours d'électrotechnique analytique à l'ENSEM, Nancy.
- [40] S.R. Bowes, A. Midoun New PWM switching strategy for microprocessor controlled inverter driver, IEE Proceedings, vol.133,Pt.B,no.4, juillet 1986.
- [41] A. Isiduri, Non linear systems. Editions Springer Verlag.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ooo

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Eric MONMASSON, Professeur, IUPGE, Cergy Pontoise**

**Monsieur Franck BETIN, Professeur, Amiens**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Monsieur MARX Didier**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

« **Contribution à l'étude de la stabilité des systèmes électrotechniques** »

en vue de l'obtention du titre de :

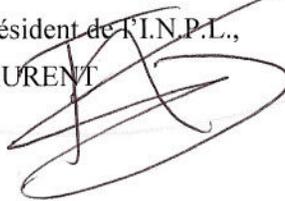
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Génie électrique** »

Fait à Vandoeuvre, le 02 novembre 2009

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 54501  
VANDOEUVRE CEDEX

## Résumé :

Dans cette thèse différents outils issus de l'automatique non linéaire ont été mis en oeuvre et ont permis d'apporter une première solution au problème de stabilité large signal des dispositifs électriques.

A l'aide de modèles flous de type Takagi-Sugeno, on a montré qu'il était possible de résoudre le problème de stabilité dans le cas de deux applications électrotechniques à savoir un hacheur contrôlé en tension et l'alimentation par l'intermédiaire un filtre d'entrée d'un dispositif électrique fonctionnant à puissance constante.

Dans le cas du hacheur, la taille estimée des bassins d'attraction reste modeste. Les raisons essentielles à l'échec obtenu dans la recherche de bassin de grande taille peut résulter dans le fait que d'une part, la mise sous forme TS du système n'est pas unique et que d'autre part les matrices du sous modèle TS du système ne sont de Hurwitz que dans une gamme très restreinte de variations du rapport cyclique.

Dans le cas de l'alimentation par l'intermédiaire d'un filtre d'entrée d'un dispositif fonctionnant à puissance constante, on a montré que l'utilisation d'un modèle flou de type Takagi-Sugeno permettait d'exhiber un domaine d'attraction de taille significative.

On a fourni des outils permettant de borner la plage de variations des pôles du système dans un domaine donné de l'espace d'état, domaine dans lequel la stabilité du modèle TS est prouvée.

L'utilisation de la D-stabilité permet de connaître les dynamiques maximales du système.

La notion de stabilité exponentielle permet de connaître les dynamiques minimales du système.

L'approche utilisée pour prouver la stabilité du système en présence de variations paramétriques, pour les deux systèmes étudiés, n'autorise que des variations extrêmement faibles de la valeur du paramètre autour de sa valeur nominale.

**Mots clés:** système non linéaire, fonction de Lyapunov quadratique ou non quadratique, stabilité large signal, bassin d'attraction, point d'équilibre, modèle flou de type Takagi-Sugeno, ensemble flou, règle flou, fonction d'activation, degré d'appartenance, globalement asymptotiquement stable, propriété convexe, matrice.

## Abstract :

In this thesis, various tools resulting from the nonlinear automatic were implemented and made it possible to bring a first solution to the problem of large signal stability of the electric systems.

Using Takagi-Sugeno fuzzy models, one showed that it was possible to in the case of solve the problem of stability two electrotechnical applications to knowing a Boost converter controlled in tension and an electric system constituted by an input filter connected to an actuator functioning at constant power.

In the case of the Boost converter, the estimated size of attraction domain remains modest. The reasons essential with the failure obtained in the search for domain of big size can result in the fact that on the one hand, the setting TS fuzzy models of the system is not single and that on the other hand the matrices of local model of TS model of the system are of Hurwitz only in one very restricted range of variations of the cyclic ratio.

In the case of the electric system via a filter of entry of a functioning device at constant power, one showed that the use of a Takagi-Sugeno fuzzy model allowed exhibit a attraction domain of significant size.

One provided tools allowing to limit the variations of the poles of the system in a given field of the state space, domain in which the stability of model TS is proven.

The use of D-stability makes it possible to know dynamic maximum system.

The concept of exponential stability makes it possible to know dynamic minimal system.

The approach used to prove the stability of the system in the presence of parametric variations, for the two studied systems, authorizes only extremely weak variations of the value of the parameter around its maximal value.

**Keywords :** nonlinear system, quadratic or no quadratic Lyapunov function, large signal stability, attraction domain, operating point, Takagi-Sugeno fuzzy model, fuzzy set, fuzzy rule, activation function, appartenance degree, globally asymptotically stable, convex propriety, matrix.