HAL
open science

Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno

Dalil Ichalal

To cite this version:

Dalil Ichalal. Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno. Autre [cs.OH]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009. Français. NNT : 2009INPL088N . tel-01748790

HAL Id: tel-01748790

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748790v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

École doctorale IAEM Lorraine
DFD Automatique et Production Automatisée
Institut National Polytechnique de Lorraine

Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 24 novembre 2009

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique

par

Dalil Ichalal

Composition du jury

Président :	Jean-Pierre Barbot	Professeur à l'ENSEA
Rapporteurs :	Thierry-Marie Guerra	Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis
	Didier Georges	Professeur à Grenoble-INP
Examinateurs :	Moustapha Ouladsine	Professeur à l'Université Aix Marseille III
	Didier Maquin	Professeur à l'INPL (Directeur de thèse)
	José Ragot	Professeur à l'INPL (Co-directeur de thèse)
	Benoît Marx	Maître de conférences à l'INPL (Co-encadrant de thèse)

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 Nancy-Université – CNRS
2, avenue de la forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy
Tél.+33 (0)3 83 59 59 59 Fax +33 (0)3 83 59 56 44

Mis en page avec la classe thloria.

À ma grand mère
À mes très chers parents
À mes soeurs
Et à la mémoire de mes grand parents

"Measure what is measurable and make it measurable what is not so".
Galileo Galilei.

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse ont été effectués au sein du groupe thématique sûreté de fonctionnement et diagnostic des systèmes (SURFDIAG) du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN).

Je voudrais saisir cette occasion pour exprimer ma gratitude envers mes directeurs de thèse, Monsieur Didier Maquin, Monsieur José Ragot et Monsieur Benoît Marx, qui m'ont accueilli au sein de leur équipe de recherche et qui m'ont offert la possibilité d'évoluer. Je les remercie pour la confiance, l'appui et la liberté qu'ils m'ont témoigné, l'intérêt grandissant qu'ils ont porté sur mes travaux, leurs encouragements et leurs disponibilités durant ces années. Je dois dire que c'était un honneur pour moi de travailler avec des personnes d'excellentes compétences et réputations, au niveau national et international. Sans oublier leurs valeurs humaines et leurs bonne humeur qui font de chaque rencontre des moments très agréables.

Mon passage au CRAN a été une aventure passionnante en quête de savoir et compréhension du monde qui nous entoure. Cela constitue pour moi une formidable expérience sur le plan scientifique et le plan humain.

Je remercie particulièrement Monsieur J-P. Barbot, Professeur à l'ENSEA à Cergy Pantoise, d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse et de m'avoir fait l'honneur de le présidé.

J'adresse toute ma reconnaissance à Monsieur Thierry-Marie Guerra, Professeur à l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, pour son acceptation d'être rapporteur sur mes travaux, je le remercie vivement de sa lecture approfondie et ses remarques enrichissantes et constructives.

J'exprime ma profonde gratitude à Monsieur Didier Georges, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour sa lecture minutieuse, ses remarques pertinentes et ses suggestions pour la poursuite des travaux et leurs applications à divers domaines dont nous avons eu l'occasion de discuter par téléphone.

J'ai été très touché par la présence de Monsieur Mustapha Ouladsine, Professeur à l'Université Aix Marseille 3, qui était mon encadrant de master, d'avoir fait partie de mon jury de thèse et d'avoir examiné mes travaux.

J'ai été très honoré de présenter mes travaux de thèse devant un jury de cette envergure. Je vous remercie infiniment.

Je remercie également mes amis et collègues de laboratoire et de l'équipe SURFDIAG, en particulier les amis de la "mythique" salle info : Rodolfo, Serge, Yvon, Julien, Anca, Farah et tous les autres que je n'ai pas cité, pour l'ambiance conviviale qu'ils ont su entretenir et les bons et joyeux moments passés autour d'un café à discuter de tous et de rien. Que tous les amis avec qui j'ai partagé ces trois années à Nancy trouvent ma profonde gratitude, merci pour les soirées spécial danse kabyle et pour tout.

Je ne pourrais terminer ces remerciements sans mentionner les secrétaires, en particulier Marjorie Schwartz et Carole Courrier pour vos disponibilités et votre efficacité enrobée d'une couche permanente de jovialité.

Enfin, je remercie toute ma famille (d'Algérie et de France), en particulier mes parents, ma grand mère et mes soeurs pour leurs encouragements et leurs soutient malgré la distance.

Table des matières

Liste des publications **3**

Chapitre 1
Introduction générale

Chapitre 2
Généralités et position du problème

2.1 Introduction 10
2.2 Observateurs de systèmes dynamiques 10
2.3 Observabilité des systèmes non linéaires 11
2.4 Principes de conception des observateurs d'état des systèmes non linéaires . . . 12
2.4.1 Observateurs à gains linéaires 13
2.4.2 Observateurs à structure variable 16
2.4.3 Observateurs obtenus après transformation des équations d'état 16
2.5 Modèle de Takagi-Sugeno 18
2.5.1 Approche par secteurs non linéaires 20
2.6 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno 20
2.7 Observateurs pour les systèmes de Takagi-Sugeno 22
2.7.1 Variables de décision mesurables (VDM) 23
2.7.2 Variables de décision non mesurables (VDNM) 24
2.8 Motivations et position du problème 24
2.9 Conclusion 26

Chapitre 3
Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno à VDNM

3.1 Introduction 28
3.2 Formulation du problème 29

3.3 Observateur lipschitzien 30
3.3.1 Première approche 30
3.3.2 Deuxième approche 35
3.3.3 Estimation d'état par injection multiple de la sortie 44
3.3.4 Conclusion partielle 52
3.3.5 Approche par le théorème de la valeur moyenne 53
3.3.6 Discussion 81
3.4 Observateur $\mathcal{L}_2$ 82
3.4.1 Approche par incertitudes bornées 82
3.4.2 Approche par "incertitudes constantes" 90
3.4.3 Approche par atténuation des perturbations 97
3.4.4 Discussion 98
3.5 Estimation d'état des systèmes T-S à VDNM incertains 99
3.5.1 Première approche 99
3.5.2 Deuxième approche 107
3.5.3 Discussions 108
3.6 Conclusions 109

Chapitre 4
Reconstruction d'état et des entrées inconnues des systèmes T-S à VDNM

4.1 Introduction 112
4.2 Représentation T-S à VDNM en présence d'entrées inconnues 115
4.3 Conception d'observateur à entrées inconnues par découplage 117
4.3.1 Approche par condition de Lipschitz 119
4.3.2 Construction de l'observateur par l'approche $\mathcal{L}_2$ 120
4.3.3 Estimation des entrées inconnues 124
4.3.4 Observateur à entrées inconnues par l'approche du théorème de la valeur moyenne 130
4.3.5 Cas particulier : mesures non affectées par les entrées inconnues 133
4.4 Conception d'observateurs PI 136
4.4.1 Variables de décision mesurables 137
4.4.2 Variables de décision non mesurables 138
4.5 Conception d'observateurs PMI 140
4.5.1 Structure de l'observateur 142
4.5.2 Variables de décision mesurables 143

4.5.3 Variables de décision non mesurables 145
4.5.4 Discussion et remarques 146
4.6 Conclusion 150

Chapitre 5
Diagnostic de fautes des systèmes T-S et commande tolérante aux défauts

5.1 Introduction 155
5.2 Définitions et généralités 155
5.3 Défauts et modélisation 157
5.4 État de l'art 159
5.5 Objectif 165
5.6 Diagnostic de fautes par observateurs à entrées inconnues 166
5.6.1 Défauts d'actionneurs 166
5.6.2 Défauts de capteurs 167
5.6.3 Discussions et conclusion 169
5.7 Diagnostic par observateurs PI et PMI 170
5.7.1 Discussions et conclusion 176
5.8 Diagnostic par formalisme $\mathcal{H}_\infty$ 177
5.8.1 Formulation du problème 177
5.8.2 Conception du générateur de résidus 177
5.8.3 Diagnostic robuste de fautes 187
5.9 Commande tolérante aux défauts 191
5.9.1 Introduction 191
5.9.2 Etat de l'art 191
5.10 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire 194
5.10.1 Stratégie de commande tolérante aux défauts 194
5.10.2 Objectif 194
5.10.3 Variables de décision mesurables 195
5.10.4 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par perturbation 198
5.10.5 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par le théorème de la valeur moyenne 204
5.11 Conclusion 206

Chapitre 6
Perspectives

6.1 Stabilité des modèles de Takagi-Sugeno 210
6.2 Diagnostic de fautes 210
6.3 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire 210
6.3.1 Utilisation d'un observateur Proportionnel-Multi-Integral. 211
6.3.2 Commande tolérante aux défauts utilisant l'approche par incertitudes bornées 212
6.3.3 Autre structure de la commande tolérante aux défauts 214
6.4 Commande par retour d'état tolérant aux défauts : défauts de capteurs 215
6.5 Commande tolérante aux défauts par formalisme $\mathcal{H}_\infty$ 216

Chapitre 7
Conclusion générale

Annexes

Annexe A
Calcul de la constante de Lipschitz

Annexe B
Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs)

B.1 Ensembles convexes 227
B.2 Fonctions convexes 227
B.3 Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs) 228
B.3.1 Obtention des LMI 228
B.4 Quelques problèmes classiques LMIs 229
B.4.1 Problème de faisabilité 229
B.4.2 Problème de valeur propre (EVP : Eigenvalue Problem) 229
B.4.3 Problème de valeur propre généralisée (GEVP : Generalized Eigeinvalue Problem) 231
B.5 Résolution des LMI 231

Annexe C
Régions LMIs

C.1 Exemples de régions LMI 234

Index **237**

Bibliographie **239**

Table des figures

3.1 Evolution de l'erreur d'estimation d'état 35
3.2 Bras manipulateur articulé par un moteur DC 42
3.3 (a) Etats du système et du modèle T-S. (b) Fonctions d'activation 43
3.4 Etats réels et leurs estimés 44
3.5 (a) États du système et leurs estimés (b) Sorties du système et leurs estimées . 52
3.6 (a) Fonctions d'activation et leurs estimées (b) Variable de prémisse et son estimée 52
3.7 Schémas mécanique et électrique du moteur à courant continu série 58
3.8 Entrées du moteur DC série 59
3.9 Etats du modèle non linéaire et du modèle T-S 60
3.10 Etats du moteur et leurs estimés 61
3.11 Comparaison entre les observateurs à VDM et à VDNM 62
3.12 Avion VTOL JSF X-35 62
3.13 Schéma du système commandé 65
3.14 Signaux de commande délivrés par le contrôleur 65
3.15 Etats de l'avion : position horizontale, vitesse horizontale et position verticale . 66
3.16 Etats de l'avion : vitesse verticale, position angulaire et vitesse angulaire 66
3.17 Poursuite de la trajectoire x_{ref} 67
3.18 Poursuite de la trajectoire y_{ref} 67
3.19 Etats réels et leurs estimés 69
3.20 Etats réels et leurs estimés 69
3.21 Évolution d'une fonction candidate de Lyapunov le long d'une trajectoire d'un modèle 72
3.22 Domaine de stabilité prouvé pour $m = 1$ et $m = 3$ 73
3.23 Comparaison des deux approches A et B pour $k = 3$(* Approche A – o Aproche B) 79
3.24 Entrée de commande $u(t)$ du système 88
3.25 Evolution dans le temps de l'erreur d'estimation d'état 88
3.26 Sorties réelles (traits continus) et estimées (pointillés) 89
3.27 Erreurs d'estimation d'état 96
3.28 $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$ 105
3.29 Etats réels (trait continu bleu) et estimés (pointillés) 106
3.30 Comparaison des erreurs d'estimation d'état obtenues avec le théorème 3.17 (trait continu bleu) et avec le théorème 3.1 (trait en pointillés rouge) 106

4.1 Principe de l'observateur à entrée inconnue 115
4.2 Origines des entrées inconnues 116
4.3 Synchronisation à base d'observateurs 125
4.4 Plan de phase $x_1(t)$ et $x_2(t)$ 126
4.5 Plan de phase $x_1(t)$ et $x_3(t)$ 126
4.6 Plan de phase $x_2(t)$ et $x_3(t)$ 127
4.7 Etats du système et leurs estimés 127
4.8 Erreurs d'estimation d'état 128
4.9 Message envoyé et son estimation 128
4.10 Erreur d'estimation d'état en présence de bruit de mesure 129
4.11 Message estimé en présence de bruit de mesure 129
4.12 Principe de l'observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) 142
4.13 Evolution temporelle des fonctions d'activation μ_1 et μ_2 148
4.14 Entrées inconnues et leurs estimées par l'observateur PI 149
4.15 Entrées inconnues et leurs estimées par l'observateur PMI 149
4.16 Erreurs d'estimation d'état obtenues avec par l'observateur PI 150
4.17 Erreurs d'estimation d'état obtenues avec par l'observateur PMI 150

5.1 Principe du banc d'observateurs GOS pour la détection de défauts d'actionneurs 163
5.2 Principe du banc d'observateurs DOS pour la détection de défauts d'actionneurs 164
5.3 Principe du banc d'observateurs GOS pour la détection de défauts de capteurs . 164
5.4 Principe du banc d'observateurs DOS pour la détection de défauts de capteurs . 165
5.5 Principe du diagnostic 165
5.6 Résidus en présence des défauts capteurs f_1 et f_2 174
5.7 Schéma de détection de défauts d'actionneurs 174
5.8 Résidus en présence des défauts f_1 et f_2 176
5.9 Entrées estimées sans défaut 176
5.10 Schéma de génération robuste de résidus 179
5.11 Défauts et résidus correspondants 190
5.12 Défauts (trait pointillé) et leurs estimés (trait continu) 190
5.13 Architecture FTC 192
5.14 Architecture de la commande tolérante par poursuite de trajectoire 195
5.15 Défaut et son estimé - commande sans défaut et commande tolérante 202
5.16 Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire 202
5.17 Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états du système avec défaut et sans FTC et états du système avec FTC 203

6.1 Schéma de diagnostic robuste 211

Notations

Matrices et vecteurs

$\mathrm{I}_n \quad (\mathrm{I})$	Matrice identité de dimension n (resp. de dimension appropriée)
$0_n \quad (0)$	Matrice nulle de dimension n (resp. de dimension appropriée)
$P > 0$ $(P < 0)$	Matrice P symétrique, définie positive (resp. symétrique, négative)
P^T	Transposée d'une matrice P
P^{-1}	Inverse de la matrice P
$\lambda_{max}(P)\,(\lambda_{min}(P))$	Valeur propre maximale (resp. minimale) de P
$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ (*) & M_{22} \end{bmatrix}$	Matrice symétrique, le symbole $(*)$ représente M_{12}^T

Ensembles

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}_+$	Ensemble des nombres réels positifs

Acronymes

BMI	Inégalité matricielle bilinéaire (Bilinear Matrix Inequality)
LMI	Inégalité matricielle linéaire (Linear Matrix Inequality)
LTI	Linéaire à Temps Invariant
MIMO	Entrée multiple sortie multiple (Multiple Input Multiple Output)
SISO	Mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)
T-S	Takagi-Sugeno
T-S à VDM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Mesurables
T-S à VDNM	Takagi-Sugeno à Variables de Décision Non Mesurables
UIO	Observateur à entrées inconnues (Unknown Input Observer)
PI	Proportionnel-Intégral
PMI	Proportionnel-Multi-Intégral

Liste des publications

Revues internationales et nationales avec comité de lecture

- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "State estimation of Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables", IET Control Theory & Applications. (papier accepté)
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables". e-STA, Sciences et Technologies de l'Automatique, revue électronique de la SEE, volume 6, numéro 2, 2009. Communication sélectionnée de la 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest, Roumanie, 3–5 Septembre, 2008.

Conférences internationales avec comité de lecture

- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Design of observers for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables : an $\mathcal{L}_2$ approach ". 17th IFAC World Congress, Seoul, Korea, July 6–11, 2008.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Robust observer design for uncertain Takagi-Sugeno model with unmeasurable decision variables : an $\mathcal{L}_2$ approach". 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'08, Ajaccio, Corsica, France, June 25–27, 2008.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables". 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Bucarest, Roumanie, 3–5 Septembre, 2008.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. "State estimation of nonlinear systems using multiple model approach". American Control Conference, ACC'2009, St. Louis, Missouri, USA, June 10-12, 2009.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. "Simultaneous state and unknown inputs estimation with PI and PMI observers for Takagi-Sugeno model with unmeasurable premise variables". 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, Thessaloniki, Greece, June 24-26, 2009.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. "State and unknown input estimation for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno models with unmeasurable premise variables". 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, Thessaloniki, Greece, June 24-26, 2009.
- Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. "Fault diagnosis in Takagi-Sugeno nonlinear

systems". 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, SAFEPROCESS'2009, Barcelona, Spain, June 30th - July 3rd, 2009. Article sélectionné pour le prix Paul Frank, dans la catégorie papier théorique.
– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "An approach for the state estimation of Takagi-Sugeno models and application to sensor fault diagnosis". 48th IEEE Conference on Decision and Control, Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009.

Conférences nationales avec comité de lecture

– Ichalal D., Maquin D., Ragot J., "Diagnostic des systèmes non linéaires par approche multimodèle". Workshop Surveillance, Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes, 3SGS'08, Troyes, France, 4–5 juin 2008.
– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Design of observers for Takagi-Sugeno discrete-time systems with immeasurable premise variables". 5th Workshop on Advanced Control and Diagnosis, ACD'2007, Grenoble, France, Novembre 15–16, 2007.
– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables". 9th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control and computing engineering, STA'2007, Sousse, Tunisia, November 5–7, 2007.
– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables". 2ème Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, JD-JN-MACS 2007, Reims, France, 9-11 juillet 2007.

Travaux en cours d'évaluation

– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Fault Tolerant Control for Takagi-Sugeno systems with unmeasurable premise variables by trajectory tracking". IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Bari, Italy, July 4-7, 2010.
– Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D., "Observer based actuator fault tolerant control for nonlinear Takagi-Sugeno systems : an LMI approach". 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10, Marrakech, Morocco, June 23-25, 2010.

1
Introduction générale

L'étude d'un système réel (automobiles, avions, centrales nucléaires, réacteurs chimiques, systèmes économiques...) passe par une phase de modélisation visant à obtenir une représentation mathématique permettant de décrire son fonctionnement. Les modèles linéaires ont été étudiés depuis de très nombreuses années. En effet, l'hypothèse de linéarité des relations entrées-sorties d'un système permet d'élaborer simplement un modèle approximant son comportement. Ce type de modèles a été largement étudié dans différents contextes : l'identification, l'estimation d'état, la commande et le diagnostic. Cependant, de tels modèles ne permettent la représentation du comportement d'un système qu'autour d'un point de fonctionnement donné, l'hypothèse de linéarité n'étant vérifiée que dans une zone restreinte de l'espace de fonctionnement. Sachant que les systèmes réels sont de nature non linéaire, les systèmes de commande et de diagnostic développés sur la base de modèles linéaires fournissent des performances dégradées dès qu'on s'éloigne du point de fonctionnement.

Afin d'améliorer les performances des systèmes, il est impératif de prendre en considération les non-linéarités dans la phase de modélisation. Cela permet de décrire le comportement d'un système réel sur une large plage de fonctionnement avec une meilleure précision comparée à celle obtenue avec des modèles linéaires. Les systèmes de commande et de diagnostic élaborés sont alors plus performants que ceux développés à partir de modèles linéaires. L'inconvénient principal des modèles non linéaires réside dans la complexité de leurs structures du point de vue mathématique, ce qui les rend difficilement exploitables. Pour cette raison, les travaux sur les systèmes non linéaires n'ont pas un cadre général, comme c'est le cas pour les modèles linéaires, mais traitent des classes spécifiques de modèles non linéaires, comme par exemple les systèmes lipschitziens, les systèmes bilinéaires, les systèmes LPV.

Dans de nombreux travaux sur la commande des systèmes dynamiques, le vecteur d'état est supposé accessible à la mesure. Or, sur un plan pratique, une telle hypothèse n'est pas toujours vérifiée. En effet, pour des raisons techniques et/ou économiques, il est difficile, voir impossible, de mesurer la totalité des variables d'état du système, d'où la nécessité d'estimer ces dernières à partir d'un jeu de données d'entrées-sorties. Le besoin de connaître entièrement les variables

d'état du système est souvent une nécessité dans les phases de modélisation ou d'identification, de diagnostic et de commande des systèmes. Tous ces problèmes nécessitent la connaissance des informations internes d'un système, non accessibles à la mesure, ce qui met le problème de la conception d'observateurs au cœur du problème général de contrôle des systèmes.

Les premiers travaux relatifs au problème de reconstruction d'état ont été dédiés aux systèmes linéaires dont la structure est peu complexe [Luenberger, 1971]. De nombreux résultats théoriques ont été alors proposés et sont largement utilisés en commande et en diagnostic. Les méthodes de diagnostic de fonctionnement de systèmes à base de modèles linéaires ont atteint actuellement une certaine maturité [Gertler, 1998], [Patton et al., 1989], [Isermann, 2007], [Ding, 2008]. Cependant, la linéarité des modèles de représentation du processus à surveiller constitue une hypothèse forte qui limite la portée des résultats que l'on peut obtenir. De plus, l'extension directe des méthodes développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires quelconques est délicate. De nombreuses techniques ont été alors dédiées à l'estimation d'état de classes particulières de systèmes non linéaires (filtre de Kalman étendu, observateur à grands gains, observateurs basés sur des transformations sous une forme canonique d'observabilité, ...) [Kalman, 1960], [Chen et Patton, 1999a]. Cependant, ces techniques sont parfois difficiles à appliquer à cause des contraintes imposées. De plus, la richesse des résultats obtenus pour les systèmes linéaires n'est que très peu exploitable dans le contexte des systèmes non linéaires.

La stratégie de reconstruction d'état proposée dans ce mémoire de thèse utilise une technique de modélisation visant à obtenir un modèle tenant compte des non-linéarités du système et offrant une structure simple et facilement exploitable du point de vue mathématique. Cette approche porte le nom général d'**approche multimodèle**. Celle ci s'appuie sur l'utilisation d'un ensemble de sous-modèles de structures simples, chaque sous-modèle décrivant le comportement du système dans une "zone de fonctionnement" particulière. Ces sous-modèles servent alors à la description du comportement dynamique global du système en utilisant des fonctions non linéaires (fonctions poids) définissant la contribution de chaque sous-modèle.

La capacité des multimodèles à représenter ou à approcher le comportement dynamique d'un système réel a été largement reconnue. En effet, d'une part, ils offrent la possibilité de décrire des comportements non linéaires très complexes avec une structure simple inspirée des modèles linéaires. D'autre part, leur structure particulière permet l'extension de certains résultats obtenus dans le cadre des systèmes linéaires (voir chapitre 4 de [Tanaka et Wang, 2001]).

Plusieurs types de multimodèles ont été introduits ces dernières années : multimodèles à états découplés et multimodèles à état unique connu sous le nom de modèle de **Takagi-Sugeno (T-S)**. Les multimodèles à états découplés sont représentés par un ensemble de sous-modèles linéaires représentant chacun le comportement du système autour d'un point de fonctionnement. Ces sous-modèles évoluent indépendamment les uns des autres. La description du comportement global du système est caractérisée par la pondération, via des fonctions non linéaires, des différentes sorties des sous-modèles. Ce type de modèles introduit une certaine flexibilité dans les problèmes d'identification, car les vecteurs d'état des sous-modèles peuvent ne pas avoir la même dimension contrairement aux modèles T-S [Orjuela et al., 2008], [Filev, 1991]. Cependant, une concaténation des différents sous-modèles permet de ramener le modèle global à un modèle T-S particulier où les non-linéarités n'apparaissent que sur l'équation de sortie.

Les modèles T-S sont les plus étudiés dans la littérature, ils sont décrits par un ensemble de sous-modèles partageant un vecteur d'état unique [Takagi et Sugeno, 1985]. Deux catégo-

ries peuvent être considérées selon la nature des variables intervenant dans les fonctions poids. En effet, ces variables, appelées variables de décision ou variables de prémisse, peuvent être connues (entrée ou sortie du système, ...) ou inconnues (état du système, ...). La catégorie des modèles T-S à **variables de décision mesurables (VDM)** a fait l'objet de nombreux développements dans divers domaines et notamment en commande, stabilisation, estimation d'état [Tanaka et Wang, 2001], diagnostic. En revanche, la seconde catégorie est très peu explorée, en particulier dans le domaine de la conception d'observateurs et de leur exploitation pour le diagnostic.

L'obtention d'un modèle T-S par l'application de la méthode des secteurs non linéaires conduit souvent à inclure l'état dans les variables de décision [Nagy et al., 2009b]. Outre les avantages offerts par le modèle T-S, le modèle à variables de décision non mesurables permet d'avoir une représentation exacte d'un modèle non linéaire exprimé sous une forme générale, la possibilité de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires, et d'utiliser un seul modèle pour la conception d'un système de diagnostic (localisation des défauts de capteurs et d'actionneurs) en s'appuyant sur des bancs d'observateurs. Ces différents points seront traités en détail dans le chapitre suivant.

L'objectif du travail présenté dans cette thèse est d'exploiter la structure T-S à **variables de décision non mesurables (VDNM)**, afin de concevoir des observateurs d'état pour les systèmes non linéaires. Par la suite, le problème de l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues est traité. Les observateurs ainsi développés sont utilisés pour la conception d'une stratégie de diagnostic pour systèmes non linéaires permettant la détection, la localisation et l'estimation des défauts. Ces informations sont ensuite exploitées pour élaborer des commandes tolérantes aux défauts. On propose ainsi d'étendre un certain nombre de résultats connus pour les systèmes T-S à VDM au cas des systèmes VDNM.

Organisation de la thèse

Le mémoire est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre présente quelques notions de base sur l'observabilité des systèmes non linéaires ainsi que les principales approches de conception d'observateurs. Les modèles de Takagi-Sugeno sont ensuite introduits en précisant leur intérêt pour l'étude des systèmes non linéaires. Un bref rappel sur des résultats portant sur la stabilité, la stabilisation et la conception d'observateurs pour systèmes T-S est présenté, en mettant en exergue deux classes de modèles T-S : les modèles à variables de décision mesurables et les modèles à variables de décision non mesurables. Cette dernière classe fera l'objet de la majeure partie des travaux qui seront présentés dans ce mémoire.

Dans le chapitre 3, un ensemble d'approches complémentaires pour la conception d'observateurs pour les systèmes T-S sont proposées. La complémentarité des approches réside dans les conditions d'application de chaque méthode. En effet, un ensemble de méthodes est basé sur la satisfaction d'hypothèses issues de la condition de Lipschitz des fonctions d'activation du système T-S, d'autres méthodes s'appuient sur les techniques d'optimisation $\mathcal{L}_2$ afin de s'affranchir de l'hypothèse de Lipschitz.

Les méthodes développées dans le chapitre 3 sont étendues au chapitre 4 à des systèmes présentant des entrées inconnues. Cela est réalisé par l'utilisation, dans un premier temps, de contraintes structurelles afin de découpler totalement ou partiellement l'influence des entrées

inconnues de l'erreur d'estimation d'état. Dans le cas de découplage partiel, les techniques de minimisation $\mathcal{L}_2$ sont utilisées dans le but de réduire l'influence de la partie non découplée des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation d'état. Dans un second temps, dans l'objectif de s'affranchir des contraintes structurelles, des observateurs Proportionnel-Intégral (PI) et Proportionnel-Multi-Intégral (PMI) sont utilisés. L'avantage de ces observateurs est la possibilité d'estimer simultanément l'état du système ainsi que les entrées inconnues.

Le problème du diagnostic des systèmes non linéaires par l'approche multimodèle en utilisant la structure T-S est abordé dans le chapitre 5. Trois méthodes à base d'observateurs sont alors proposées. Une première approche repose sur l'utilisation d'un observateur à entrées inconnues par découplage assurant un découplage partiel de l'estimation vis-à-vis des défauts affectant le système. Une seconde approche exploitant les observateurs PI et PMI est ensuite exposée. Elle permet de fournir directement l'estimation des défauts, par conséquent, les tâches de détection et de localisation sont réalisées. Outre l'objectif du diagnostic, cette technique trouve également un intérêt important dans les problèmes de conception de commandes tolérantes aux défauts. Enfin, une approche inspirée du problème standard de commande $\mathcal{H}_\infty$ est présentée. Elle est basée sur la minimisation de l'influence des perturbations et la maximisation de l'influence des défauts sur les résidus, ce qui revient à un problème min/max. Afin de résoudre ce problème, nous avons introduit un filtre stable linéaire et défini un vecteur de résidus virtuels, ce qui a permis de transformer le problème min/max en un simple problème de minimisation.

Une extension au problème de commande tolérante aux défauts est proposée à la fin du chapitre 5. L'approche est basée sur la poursuite de trajectoire d'un modèle de référence décrivant le bon fonctionnement du système. Dans ce cas, la commande comprend un terme correspondant à la commande nominale du système à laquelle sont ajoutés des termes tenant compte l'estimation de l'état et des défauts.

2

Généralités et position du problème

Sommaire

2.1 Introduction **10**
2.2 Observateurs de systèmes dynamiques **10**
2.3 Observabilité des systèmes non linéaires **11**
2.4 Principes de conception des observateurs d'état des systèmes non linéaires **12**
2.4.1 Observateurs à gains linéaires 13
2.4.2 Observateurs à structure variable 16
2.4.3 Observateurs obtenus après transformation des équations d'état . . . 16
2.5 Modèle de Takagi-Sugeno **18**
2.5.1 Approche par secteurs non linéaires 20
2.6 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno **20**
2.7 Observateurs pour les systèmes de Takagi-Sugeno **22**
2.7.1 Variables de décision mesurables (VDM) 23
2.7.2 Variables de décision non mesurables (VDNM) 24
2.8 Motivations et position du problème **24**
2.9 Conclusion **26**

2.1 Introduction

Comme nous l'avons rappelé précédemment, les modèles linéaires sont valables que très localement. S'il est nécessaire d'obtenir un modèle précis sur une large plage de fonctionnement, on se tourne naturellement vers le formalisme non linéaire. Le passage du linéaire au non linéaire nécessite l'utilisation d'outils théoriques très différents (on peut grossièrement dire que l'on passe de l'algèbre à l'analyse). On étudiera par exemple la notion d'observabilité et quelques méthodes de synthèse d'observateurs dans ce chapitre. Une méthode pour pouvoir conserver certains outils connus dans le cadre linéaire est d'utiliser le formalisme de Takagi-Sugeno qui sera présenté dans ce chapitre introductif. Enfin, on présente le cadre, les enjeux et les objectifs de cette thèse.

2.2 Observateurs de systèmes dynamiques

Il est fréquemment nécessaire d'estimer certaines variables décrivant l'état d'un système qui ne sont pas directement mesurables pour des raisons techniques ou économiques. Ce problème trouve une solution par l'utilisation de "capteurs logiciels" appelés généralement observateurs. La construction d'un observateur, afin d'estimer ces variables, s'appuie sur un modèle mathématique représentant le comportement du système.

Les observateurs d'état trouvent leur intérêt dans plusieurs domaines et notamment en commande des systèmes, en supervision et en diagnostic de fautes.

Plusieurs stratégies de commande utilisent l'état du système afin de calculer la loi de commande permettant au système d'accomplir sa mission. Comme le vecteur d'état n'est pas toujours mesurable directement, un observateur est alors nécessaire pour l'estimer.

Dans le domaine de la supervision, l'opérateur humain a besoin de connaître l'évolution dans le temps de certaines variables d'un système physique pour prendre une décision. Par exemple, un pilote d'avion a besoin de connaître, entre autres, l'altitude et la vitesse de l'avion. Pour un réacteur chimique, la surveillance de l'évolution des concentrations permet de déterminer le moment où certains produits doivent être ajoutés. Un observateur d'état peut être utilisé afin d'estimer ces concentrations à chaque instant.

Les observateurs d'état ont également une place importante dans les problèmes de diagnostic des systèmes dynamiques. En effet, de nombreuses méthodes de détection, localisation et estimation de défauts à base de modèle utilisent le concept d'observateur afin de générer des résidus sensibles aux défauts.

Un système dynamique peut être représenté par les équations suivantes :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \tag{2.1}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \tag{2.2}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée du système et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente la sortie du système. Les fonctions f et h sont généralement non linéaires.

Un observateur d'état est un système ayant pour entrées l'entrée du système $u(t)$ et sa sortie $y(t)$, et ayant pour sortie le vecteur d'état estimé $\hat{x}(t)$:

$$\dot{z}(t) = \kappa(z(t), u(t), y(t)) \tag{2.3}$$

$$\hat{x}(t) = \rho(z(t), u(t), y(t)) \tag{2.4}$$

tel que l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ tende asymptotiquement vers zéro :

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \to 0 \text{ quand } t \to \infty \tag{2.5}$$

L'objectif dans la conception d'un observateur est de déterminer les fonctions $\kappa(z(t), u(t), y(t))$ et $\rho(z(t), u(t), y(t))$ afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro.

Un point crucial, qui doit être étudié au préalable, est de se demander s'il est possible de reconstruire l'état $x(t)$ du système à partir des entrées et des sorties. En d'autres termes, trouver les conditions sous lesquelles l'état $x(t)$ est accessible i.e. établir les conditions d'existence de l'observateur. Ce problème porte le nom de problème d'observabilité et sera étudié dans la section suivante.

2.3 Observabilité des systèmes non linéaires

Étudier l'observabilité consiste à établir les conditions sous lesquelles l'état du système peut être déterminé à partir des entrées et des sorties mesurées. Le problème d'observabilité présenté, par exemple, dans [Fossard et Normand-Cyrot, 1993; Besançon, 2007], utilise la notion d'indiscernabilité.

Soient $y_u^0(t)$ et $y_u^1(t)$, $(t \geq 0)$, des signaux de sortie générés par l'application d'une entrée $u(t)$ au système (2.1)-(2.2) avec deux conditions initiales différents $x(0) = x_0$ et $x(0) = x_1$ respectivement. Alors x_0 et x_1 sont dits indiscernables si :

$$y_u^0(t) = y_u^1(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{2.6}$$

Le système (2.1)-(2.2) est dit observable s'il ne possède pas de couple d'états initiaux distincts $\{x_0, x_1\}$ indiscernables.

Pour les systèmes mono-entrée mono-sortie, le concept d'observabilité peut être énoncé de la manière suivante : supposons que u et y sont mesurés. On définit deux vecteurs contenant les dérivées successives par rapport au temps de y et u :

$$\bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y & \dot{y} & \ddot{y} & \cdots & \cdots & y^{(n-1)} \end{pmatrix}^T \tag{2.7}$$

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u & \dot{u} & \ddot{u} & \cdots & \cdots & u^{(n-1)} \end{pmatrix}^T \tag{2.8}$$

Chaque dérivée de la sortie peut être exprimée en fonction de l'état x et de $\bar{u}$, ce qui permet d'écrire :

$$y^{(i)} = \psi_i(x, \bar{u}) \tag{2.9}$$

La dérivée par rapport au temps de $y^{(i)}$ est donnée par :

$$y^{(i+1)} = \left[\frac{\partial \psi_i(x,\bar{u})}{\partial x}\right] f(x,u) + \left[\frac{\partial \psi_i(x,\bar{u})}{\partial \bar{u}}\right] \frac{d\bar{u}}{dt} = \psi_{i+1}(x,\bar{u}) \tag{2.10}$$

On définit l'opérateur linéaire $\mathcal{M}_f$ comme suit :

$$\left(\mathcal{M}_f \psi\right)(x,\bar{u}) = \left[\frac{\partial \psi_i(x,\bar{u})}{\partial x}\right] f(x,u) + \left[\frac{\partial \psi_i(x,\bar{u})}{\partial \bar{u}}\right] \frac{d\bar{u}}{dt} \tag{2.11}$$

les dérivées par rapport au temps de la sortie y définies par $\bar{y}$ peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\bar{y} = \upsilon(x, \bar{u}) \tag{2.12}$$

où :

$$\upsilon(x, \bar{u}) = \begin{pmatrix} h(x,u) \\ \left(\mathcal{M}_f \psi\right)(x,u) \\ \vdots \\ \left(\mathcal{M}_f^{n-1} \psi\right)(x,u) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Si $\upsilon(x, \bar{u})$ est inversible i.e. $\upsilon^{-1}(x, \bar{u})$ existe, alors :

$$x = \upsilon^{-1}(\bar{y}, \bar{u}) \tag{2.14}$$

alors le système (2.1)-(2.2) est dit observable. De plus, si le jacobien :

$$\Omega(x, \bar{u}) = \frac{\partial \upsilon(x, \bar{u})}{\partial x} \tag{2.15}$$

de $\upsilon(x, \bar{u})$ est inversible pour $x = x_0$, alors il existe un voisinage autour de x_0 où $\upsilon(x, \bar{u})$ est inversible, ce qui correspond à l'observabilité locale i.e. x_0 est discernable de tous les points dans le voisinage de x_0. L'étude de l'observabilité des systèmes multi-entrées multi-sorties s'effectue de manière similaire.

De nombreux problèmes concernant l'observabilité des systèmes non linéaires, notamment les cas où l'entrée de commande intervient dans l'étude de l'observabilité (persistance de l'entrée) et les problèmes d'observabilité des entrées sont étudiés. Ces points ne sont pas détaillés et le lecteur intéressé pourra se référer à [Fossard et Normand-Cyrot, 1993; Besançon, 2007].

Dans le cadre des systèmes linéaires invariants dans le temps, un système est dit observable si la détermination de l'état $x(t)$ du système est obtenue de façon unique à partir d'un ensemble de k observations des sorties. L'existence d'un observateur pour les systèmes linéaires se déduit du calcul du rang du critère de Kalman :

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Le système est observable si et seulement si $rang(\mathcal{O}) = n$. Le critère de Kalman se déduit directement de $\upsilon(x, \bar{u})$.

2.4 Principes de conception des observateurs d'état des systèmes non linéaires

Le but de cette section est de présenter quelques approches très étudiées dans la littérature, ces dernières années, relatives à la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

2.4.1 Observateurs à gains linéaires

Les premiers travaux se rapportant au problème de conception d'observateur d'état pour des systèmes non linéaires remontent aux années 1970, où l'auteur de [Thau, 1973] propose une méthode basée sur l'utilisation des techniques de Lyapunov. Les systèmes considérés sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t), u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{2.17}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice d'état connue et $f(x(t), u(t)) \in \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire vectorielle dépendant de $x(t)$ et de $u(t)$ et satisfaisant la condition de Lipschitz :

$$\|f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t))\| < \gamma \|x(t) - \hat{x}(t)\| \tag{2.18}$$

L'observateur proposé dans Thau [1973] est une extension de l'observateur de Luenberger, proposé dans [Luenberger, 1971], et ayant la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{2.19}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ s'écrit :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) \tag{2.20}$$

L'objectif est de déterminer L de manière à assurer la convergence vers zéro de l'erreur d'estimation d'état. Le résultat suivant, donné dans [Thau, 1973], fournit des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état.

Théorème 2.1. *([Thau, 1973]) Etant donné le système (2.17) et son observateur (2.19). Si :*

$$\gamma < \frac{\lambda_{max}(Q)}{\lambda_{min}(P)} \tag{2.21}$$

où $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices symétriques et définies positives qui vérifient l'équation de Lyapunov :

$$(A - LC)^T P + P(A - LC) = -Q \tag{2.22}$$

alors $lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

Le théorème 2.1 fournit une procédure pour vérifier la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation après choix de L. Cependant, cette méthode ne permet pas la synthèse de l'observateur. Si γ est la constante de Lipschitz de la fonction $f(x(t), u(t))$, il n'existe pas de relation entre le choix de L et la condition (2.21), ce qui pose un problème pour le placement des pôles de $(A - LC)$. Pour plus de détails, un exemple expliquant ce problème est donné dans [Raghavan et Hedrick, 1994].

Dans [Raghavan et Hedrick, 1994], les auteurs fournissent un algorithme de recherche du gain L qui permet d'assurer la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation.

Théorème 2.2. *([Raghavan et Hedrick, 1994]) Étant donné le système (2.17) et son observateur (2.19), s'il existe $\varepsilon > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques et définies positives qui vérifient l'équation de Riccati :*

$$A^T P + PA + P\left(\gamma^2 I - \frac{1}{\varepsilon}C^T C\right)P + I + Q = 0 \tag{2.23}$$

alors le gain de l'observateur $L = \frac{1}{\varepsilon}PC^T$ stabilise la dynamique de l'erreur d'estimation d'état pour toute fonction f avec une constante de Lipschitz γ.

La méthode est basée sur une recherche itérative de ε. Pour des valeurs importantes de la constante de Lipschitz, l'équation de Riccati (2.23) peut ne pas admettre de solution. Les auteurs ont alors proposé une méthode par transformation linéaire $z(t) = Tx(t)$ relaxant cette difficulté. Dans [Pertew et al., 2006], il est montré que, dans certains cas, l'équation de Riccati (2.23) n'admet pas de solution, même si la paire (A,C) est observable.

Un résultat intéressant a été proposé par la suite dans [Rajamani, 1998] pour la détermination du gain L de l'observateur (2.19) :

Théorème 2.3. *([Rajamani, 1998]) Le système (2.19) est un observateur pour (2.17) si :*

1. *$(A - LC)$ est observable.*
2. *le gain L est déterminé de manière à assurer la stabilité de la matrice $(A - LC)$.*
3. $$\min_{\omega\in\mathbb{R}_+} \sigma_{\min}(A - LC - j\omega I) > \gamma \tag{2.24}$$

Ce résultat peut être présenté en utilisant le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ de la manière suivante ([Rajamani, 1998]) :

$$\left\|sI - (A - LC)^{-1}\right\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \tag{2.25}$$

Définissons les variables suivantes :

$$\begin{aligned}
\omega(t) &= f(x(t),u(t)) - f(\hat{x}(t),u(t)) && (2.26)\\
\zeta(t) &= e(t) = x(t) - \hat{x}(t) && (2.27)\\
\nu(t) &= L(y(t) - \hat{y}(t)) && (2.28)\\
\varphi(t) &= y(t) - \hat{y}(t) && (2.29)
\end{aligned}$$

Le membre de gauche de l'inégalité (2.25) représente la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert de $\omega(t)$ et $\nu(t)$ vers $\zeta(t)$ donné sous la forme standard :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \begin{bmatrix} I_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

$$\begin{bmatrix} \zeta(t) \\ \varphi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ C \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_{n_y n} & 0_{n_y n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Cette approche a été utilisée récemment dans [Pertew et al., 2006] pour la conception d'observateurs pour les systèmes lipschitziens (2.17), puis elle a été étendue aux systèmes présentant

des entrées inconnues dans [Pertew et al., 2005a] et pour le diagnostic de défauts de capteurs pour systèmes non linéaires.

Les inconvénients principaux de ce type d'approches résident dans la majoration de l'erreur d'estimation d'état en utilisant la condition de Lipschitz, ce qui peut présenter un certain caractère conservatif. De plus, si la constante de Lipschitz est importante, les gains obtenus par ces méthodes peuvent rendre l'observateur très sensible aux bruits de mesure.

Le problème des grands gains liés à la majoration de Lipschitz a été étudié dans [Arcak et Kokotovic, 2001] où les auteurs utilisent le critère du cercle et supposent que la non-linéarité satisfait la condition de monotonie suivante :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T > 0 \tag{2.32}$$

Des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro sont alors établies sous la forme d'inégalités matricielles linéaires non strictes. Une extension de ce résultat a été proposée pour les systèmes à plusieurs non-linéarités monotones. Cependant, la condition (2.32) limite la classe de systèmes pouvant être étudiés.

Une autre approche proposée dans [Ibrir, 2007] utilise également le critère du cercle avec des injections multiples de la sortie dans les non-linéarités. La condition de monotonie des non-linéarités n'est plus nécessaire. En revanche, la connaissance de la distribution du vecteur d'état dans les non-linéarités est requise.

Les méthodes présentées précédemment cherchent à déterminer un gain constant L de l'observateur (2.19). Une généralisation à un gain variable en fonction de l'entrée du système est proposée dans [Tsinias, 1990]. L'équation définissant le gain s'écrit alors :

$$L(u(t)) = cr(u(t))M^{-1}C \tag{2.33}$$

où c est un scalaire positif constant et $r(u(t))$ ainsi que M sont à déterminer de manière à satisfaire les conditions suivantes :

$$\left|\mu^T M \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\mu\right| \leq c_1 |\mu|^2 \tag{2.34}$$

$$\left|\nu^T M \frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\nu\right| \leq r(u) |\mu|^2 \tag{2.35}$$

$$c_2 \leq r(u) \tag{2.36}$$

pour des scalaires positifs c_1 et c_2 et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mu \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \mathbb{R}^n$. Ces derniers sont choisis de manière à assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. Dans [Tsinias, 1990], une autre forme du gain est proposée en introduisant l'état estimé :

$$L(\hat{x},u) = r(\hat{x},u)M^{-1}C \tag{2.37}$$

Le principe de la détermination de $L(\hat{x},u)$ repose sur l'hypothèse $\{Ker(C) \neq \{0\}\}$. Ce résultat a été utilisé dans [Adjallah et al., 1994] pour la détection de défauts.

2.4.2 Observateurs à structure variable

Une autre catégorie d'observateurs utilisant l'idée de structure variable a été largement étudiée dans la littérature [Slotine et al., 1987; Walcott et Zak, 1987; Bejarano et al., 2008]. L'idée est d'ajouter un terme dépendant de l'erreur de sortie permettant de compenser des incertitudes de modélisation. Ce terme peut être considéré comme un gain variable qui commute entre la valeur zéro si l'erreur de sortie est nulle et une valeur dépendante de cette erreur de sortie dans le cas où cette dernière est non nulle. Par rapport aux méthodes présentées précédemment, la connaissance d'un modèle exact n'est plus nécessaire. En revanche, une hypothèse structurelle sur la fonction non linéaire $f(x(t),u(t))$ est imposée ; cependant, cette hypothèse s'avère difficile à satisfaire en présence d'incertitudes paramétriques. Les commutations du terme additionnel constituent un inconvénient majeur de ces approches car elles engendrent un phénomène de broutement (*Chattering*) qui est un régime oscillatoire haute fréquence. Ce problème a été traité dans [Dawson et al., 1992] par un autre choix du terme additionnel.

2.4.3 Observateurs obtenus après transformation des équations d'état

Les méthodes de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires basées sur une transformation ont fait l'objet de nombreux travaux. Les transformations non linéaires effectuées sur l'état d'un système visent à ré-écrire le système en effectuant un changement de coordonnées de façon à ce que l'erreur d'estimation d'état s'écrive sous une forme linéaire. L'étude de la convergence de cette erreur est alors simplifiée. L'estimation du vecteur d'état initial s'obtient alors par la transformation inverse.

Linéarisation exacte

L'approche par linéarisation vise à transformer un système initialement défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \tag{2.38}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}$, sous la forme canonique d'observabilité donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + \phi(y(t)) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \tag{2.39}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(y(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y(t)) \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_n(y(t)) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

et $\phi(y(t))$ est une fonction de la variable $y(t)$. Un observateur de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}(t) = A\hat{z}(t) + \phi(y(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C\hat{z}(t) \end{cases} \tag{2.41}$$

peut alors être synthétisé. Ainsi, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e(t) = z(t) - \hat{z}(t)$ s'écrit :

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \tag{2.42}$$

On remarque que l'équation différentielle (2.42) est linéaire. Si la paire (A,C) est observable, il est possible de placer les pôles de la matrice $(A - LC)$ afin d'assurer une stabilité asymptotique ou exponentielle. Ce résultat a d'abord été établi pour les systèmes mono-sorties. Puis une généralisation aux systèmes multi-sorties a été proposée dans [Krener et Isidori, 1983] en généralisant les transformations comme suit :

$$z(t) = T(x(t)) \tag{2.43}$$

$$v(t) = W(y(t)) \tag{2.44}$$

La transformation du système (2.38) sous la forme du système (2.39) est basée sur l'algèbre de Lie. Le problème est alors énoncé de la façon suivante : s'il existe des transformations de l'état et de la sortie (2.43)-(2.44) (pour le cas multi-sorties) transformant le système (2.38) en (2.39), alors un observateur de la forme (2.41) peut être synthétisé. L'état $\hat{x}(t)$ du système original est obtenu par la transformation inverse $\hat{x}(t) = T^{-1}(\hat{z}(t))$.

Dans [Keller, 1987], une extension de cette technique a été effectuée en considérant le problème des systèmes non autonomes. En effet, l'approche visant à transformer un système sous une forme canonique d'observabilité a été initialement développé pour les systèmes autonomes. Pour les systèmes non autonomes, la fonction ϕ dépend non seulement de la sortie mais également du vecteur $\bar{u}(t)$ contenant les dérivées par rapport au temps de l'entrée $u(t)$ du système. On a alors $\phi(y(t), \bar{u}(t))$ où :

$$\bar{u}(t) = \begin{pmatrix} u & \dot{u} & \ddot{u} & \cdots & \cdots & u^{(n)} \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Les transformations T et W dépendent alors également de l'entrée et de ses dérivées.

Une première limite qu'on constate facilement est que la conception de l'observateur nécessite de connaître les n premières dérivées par rapport au temps de l'entrée $u(t)$.

De nombreux travaux ont été réalisés afin de donner une méthode de réalisation ou des conditions d'existence des transformations T et W. On peut citer, par exemple, [Glumineau et al., 1996] où les auteurs proposent des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de la transformation T pour les systèmes mono-sorties ; ce résultat a également été généralisé aux systèmes multi-sorties. Dans [Phelps, 1991], une méthode a été proposée pour la recherche de telles transformations pour les systèmes autonomes. Dans la majorité des travaux menés dans le contexte de la transformation d'un système non linéaire sous la forme canonique d'observabilité, les auteurs supposent que la sortie est linéaire par rapport à l'état. [Kazantzis et Kravaris, 1998] ont cependant traité le cas des systèmes mono-sorties non linéaires.

Les inconvénients de ces approches basées sur les transformations de l'équation d'état en une forme canonique d'observabilité, résident dans le fait que, d'une part, la classe de systèmes non linéaires pouvant être transformée ou pour qui une transformation existe est très limitée et, d'autre part, les transformations sont difficiles à mettre en œuvre.

Technique d'immersion

Afin de réduire les inconvénients de l'approche précédente, la technique d'immersion a été utilisée dans [Levine et Marino, 1986; Ticlea, 2006; Besançon, 2007]. Elle est basée sur l'idée

d'immersion de l'espace d'état initial dans un état de dimension supérieure au lieu d'utiliser un difféomorphisme. L'objectif est donc de trouver une transformation injective. Cela élargit la classe de systèmes non linéaires pouvant être étudiés.

Une autre manière de transformer un système non linéaire sous la forme canonique d'observabilité est d'utiliser une transformation approximative. Dans [Nicosia et al., 1989], les auteurs proposent d'approximer le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \tag{2.46}$$
$$y(t) = h(x(t)) \tag{2.47}$$

par un autre système :

$$\dot{x}(t) = \bar{f}(x(t),u(t)) \tag{2.48}$$
$$y(t) = \bar{h}(x(t)) \tag{2.49}$$

où les fonctions $\bar{f}$ et $\bar{h}$ différent seulement de f et h dans le second terme et les termes supérieurs de leurs séries de Taylor respectives au voisinage des points de fonctionnement. Le but est de pouvoir trouver une approximation du système assurant l'existence d'une transformation sous la forme canonique d'observabilité. Dans cette approche, quand les conditions d'existence de transformations sous la forme canonique ne sont pas satisfaites, une forme approximative canonique d'observabilité est obtenue comme suit :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + \varphi(y(t)) + \chi(z(t)) \tag{2.50}$$
$$y(t) = Cz(t) \tag{2.51}$$

où $\chi(z(t))$ est une fonction non linéaire ne pouvant pas être éliminée après la transformation. Dans [Lynch et Bortoff, 1997], les auteurs proposent une approche pour la conception d'un observateur pour le système (2.50)-(2.51) par minimisation de l'influence du terme $\chi(z(t))$ sur l'erreur d'estimation d'état. Par la suite, cette approche par transformation approximative a été généralisée aux systèmes multi-sorties dans [Lynch et Bortoff, 2001].

2.5 Modèle de Takagi-Sugeno

Les modèles de Takagi-Sugeno (T-S) constituent une représentation mathématique très intéressante des systèmes non linéaires car ils permettent de représenter tout système non linéaire, quelle que soit sa complexité, par une structure simple en s'appuyant sur des modèles linéaires interpolés par des fonctions non linéaires positives ou nulles et bornées. Ces modèles permettent de représenter de manière précise les systèmes non linéaires. Ils ont une structure simple présentant des propriétés intéressantes les rendant facilement exploitables du point de vue mathématique et permettant l'extension de certains résultats du domaine linéaire aux systèmes non linéaires.

Un système non linéaire peut être modélisé sous la forme générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)) \\ y(t) = h(x(t),u(t)) \end{cases} \tag{2.52}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente le vecteur d'entrée et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie. Comme précisé dans l'introduction, la difficulté d'étude des modèles de la forme (2.52) a conduit à l'étude de classes particulières représentant seulement un ensemble restreint de systèmes non linéaires.

La représentation des systèmes non linéaires introduite dans [Takagi et Sugeno, 1985] constitue une alternative intéressante dans le domaine de la commande, de l'observation et du diagnostic des systèmes non linéaires.

Un modèle de Takagi-Sugeno est composé d'un ensemble fini de modèles linéaires interconnectés grâce à des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe (2.54). La formulation mathématique des modèles T-S est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{2.53}$$

Les r sous-modèles sont définis par des matrices connues $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ et $D_i \in \mathbb{R}^{n_y\times n_u}$. Les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$ sont des fonctions non linéaires dépendant du paramètre $\xi(t)$ pouvant être mesurable (par exemple l'entrée $u(t)$ ou la sortie $y(t)$ du système) ou non mesurable (l'état $x(t)$ du système). Ces fonctions satisfont la propriété de somme convexe :

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1, \quad i = 1,\ldots,r \\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{cases}, \quad \forall t \tag{2.54}$$

Afin d'obtenir un modèle T-S (2.53), on peut citer trois approches largement utilisées dans la littérature. La première approche repose sur les techniques d'identification. La structure du modèle ainsi que les fonctions d'activation sont tout d'abord choisies a priori. En utilisant des jeux de données d'entrées-sorties récoltées à partir des mesures effectuées sur le système réel, des techniques d'identification sont ensuite mises en place. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [Gasso, 2000].

La seconde approche repose sur la linéarisation du modèle non linéaire (2.52) autour de plusieurs points de fonctionnements. Des sous-modèles linéaires sont alors obtenus pour chaque zone de fonctionnement. En utilisant des techniques d'optimisation afin de minimiser l'erreur quadratique de sortie, les fonctions d'activation peuvent être générées [Akhenak, 2004].

La troisième approche est basée directement sur la connaissance analytique du modèle non linéaire (2.52). Elle est connue sous le nom de transformation par secteurs non linéaires [Tanaka et Wang, 2001]. Contrairement aux deux approches précédentes qui donnent une approximation du modèle non linéaire (2.52), cette troisième méthode fournit un modèle T-S (2.53) représentant de manière exacte le modèle non linéaire (2.52) dans un compacte de l'espace d'état. Le travail présenté dans ce mémoire de thèse utilise majoritairement l'approche par secteurs non linéaires.

2.5.1 Approche par secteurs non linéaires

Considérons le modèle non linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t), u(t)) \end{cases} \tag{2.55}$$

Il est aisé de ré-écrire la système (2.55) sous la forme LPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(x(t), u(t))x(t) + G(x(t), u(t))u(t) \\ y(t) = H(x(t), u(t))x(t) + K(x(t), u(t))u(t) \end{cases} \tag{2.56}$$

où F, G, H et K sont des fonctions non linéaires dépendant de $x(t)$ et $u(t)$ et définies sur des domaines de $x(t)$ et de $u(t)$. D'une manière générale, on nomme la variable de prémisse $\xi(t) = [x(t)^T \;\; u(t)^T]^T$, le système (2.56) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(\xi(t))x(t) + G(\xi(t))u(t) \\ y(t) = H(\xi(t))x(t) + K(\xi(t)) \end{cases} \tag{2.57}$$

Soit k le nombre de fonctions non linéaires présentes dans le système (2.57). On les note f_i, $i = 1, \ldots, k$. Supposons qu'il existe un compact C des variables $\xi(t)$ où les non-linéarités sont bornées :

$$f_i \in [f^i_{min}, f^i_{max}], \;\; i = 1, \ldots, k \tag{2.58}$$

Les non-linéarités f_i peuvent alors s'écrire de la manière suivante [Morère, 2001] :

$$f_i(\xi(t)) = f^i_{\min} w^i_0(\xi(t)) + f^i_{\max} w^i_1(\xi(t)) \tag{2.59}$$

où :

$$\begin{cases} w^i_0 = \frac{f^i_{\max} - f_i(\xi(t))}{f^i_{\max} - f^i_{\min}} \\ w^i_1 = \frac{f_i(\xi(t)) - f^i_{\min}}{f^i_{\max} - f^i_{\min}} \end{cases} \tag{2.60}$$

Les fonctions d'activation $\mu_i(\xi(t))$, $i = 1, \ldots, r$ sont obtenues à partir des fonctions w^i_0 et w^i_1 par :

$$\mu_{i+i_0+i_1\times 2+\ldots+i_k\times 2^{k-1}}(\xi(t)) = \prod_{j=1}^{k} w^j_{i_j}(\xi(t)) \tag{2.61}$$

Le nombre de sous-modèles r est égal à 2^k.

2.6 Stabilité des systèmes de Takagi-Sugeno

La stabilité des systèmes non linéaires représentés par un modèle de Takagi-Sugeno a fait l'objet de nombreux développements. La structure particulière de ce type de modèle a permis l'extension de l'étude de la stabilité des systèmes linéaires au cas des systèmes non linéaires.

Soit un système de Takagi-Sugeno autonome, représenté par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) A_i x(t) \tag{2.62}$$

Théorème 2.4. *Le système* (2.62) *est dit quadratiquement stable s'il existe une matrice* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symétrique et définie positive telle que les conditions suivantes soient vérifiées pour* $i = 1,\ldots,r$ *:*

$$A_i^T P + PA_i < 0 \tag{2.63}$$

Démonstration. Elle s'appuie sur le choix d'une fonction de Lyapunov candidate $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ où $P = P^T > 0$. L'utilisation de la propriété de somme convexe des fonctions de Lyapunov permet l'obtention de r conditions, à résoudre simultanément, formulées en termes d'inégalités linéaires matricielles (LMIs). □

On peut noter que l'interpolation de sous-modèles stables n'est pas nécessairement stable.

Tanaka et al. [1998] ont montré que si le nombre r de sous-modèles est important, il est difficile de trouver une matrice commune P satisfaisant simultanément les r LMIs. Les travaux qui ont suivi ont porté sur la réduction du pessimisme des conditions proposées dans le théorème 2.4. Plusieurs approches ont été étudiées et on peut en particulier citer l'utilisation de fonctions de Lyapunov polyquadratiques de la forme :

$$V(x(t)) = x(t)^T \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) P_i x(t) \tag{2.64}$$

L'idée de cette approche consiste à chercher des matrices P_i au lieu d'une seule matrice commune P [Tanaka et al., 2003; Chadli et al., 2002] ce qui relaxe les contraintes de stabilité du théorème 2.4. Par la suite, une fonction de Lyapunov non quadratique a été introduite exploitant l'idée de fonction continue par morceaux. Elle est définie par :

$$V(x(t)) = \max\{V_1(x(t)), V_2(x(t)), \ldots, V_r(x(t))\} \tag{2.65}$$

où

$$V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t), \quad P_i = P_i^T > 0, \quad i = 1,\ldots,r \tag{2.66}$$

Ce type de fonctions a été utilisé dans le cadre des systèmes LPV dans [Boyd et al., 1994] et dans le cadre des systèmes de Takagi-Sugeno dans [Chadli, 2002] et [Johansson, 1999]. Les conditions de stabilité issues de ce type de fonctions de Lyapunov sont données par :

Théorème 2.5. *([Johansson, 1999]) Le système* (2.62) *est stable, s'il existe des matrices* $P_j = P_j^T > 0$ *et des scalaires* $\tau_{ijk} > 0$ *tels que :*

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^{r} \tau_{ijk}(P_j - P_k) < 0 \tag{2.67}$$

$$P_j > 0 \tag{2.68}$$

$$\tau_{ijk} > 0 \tag{2.69}$$

$$i, j = 1,\ldots,r$$

Ces résultats constituent des conditions de stabilité moins restrictives que les conditions de stabilité quadratique. Cependant, elles sont exprimées en terme d'Inégalités Matricielles Bilinéaires (BMI) qui sont plus difficiles à résoudre que les LMIs.

Dans le cas discret, de nouvelles approches intéressantes ont été introduites, récemment, pour l'étude de la stabilité afin de trouver des conditions moins contraignantes [Kruszewski, 2006]. Une première approche utilise une fonction de Lyapunov quadratique dont l'évaluation des variations se fait entre deux instants k et $k+m$ i.e. sur un intervalle $[k,k+m]$, au lieu de deux instants successifs k et $k+1$. Cela a l'avantage d'assurer la décroissance de la fonction entre les instants k et $k+m$ en autorisant des variations positives à l'intérieur de l'intervalle $]k,k+m[$, ce qui relaxe les conditions de stabilité. Il a été montré que, quand le paramètre m augmente, le conservatisme des conditions de stabilité se réduit au prix d'un nombre important de LMIs.

Ces deux approches vont être présentées en détail à la section 3.3.5, et seront appliquées à la conception d'observateurs pour des systèmes T-S à temps discret.

Plusieurs de ces approches ont été utilisées dans le domaine de la commande et de la stabilisation par retour d'état ou par retour de sortie [Guerra et al., 2006], [Chadli et al., 2002], [Tanaka et Wang, 2001], [Yoneyama, 2008], [Tanaka et al., 2003]. Noter que dans les problèmes de stabilisation, le fait d'avoir des variables de décision non mesurables impose l'utilisation d'un observateur afin d'estimer l'état. Le problème devient alors un problème de stabilité d'un système incertain où les incertitudes sont dues à la non mesurabilité des variables de décision. Dans la majorité des travaux traités, l'entrée $u(t)$ est remplacée par la loi de commande utilisée. L'entrée n'apparaît donc pas dans les équations, de ce fait des conditions sur $u(t)$ ne sont pas nécessaires. Par contre, dans les problèmes d'estimation d'état et de conception d'observateurs destinés au diagnostic, le fait d'avoir des variables de décision non mesurables dans le modèle T-S complexifie le problème et rend inexploitable, les résultats obtenus dans le cas où les variables de décision sont mesurables. Ce point sera traité dans la section suivante.

2.7 Observateurs pour les systèmes de Takagi-Sugeno

Nous allons rappeler les principaux résultats concernant la conception d'observateurs pour systèmes T-S. Pour cela, considérons le modèle T-S suivant pour lequel la sortie est une fonction linéaire de l'état :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{2.70}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.71}$$

L'observateur le plus largement développé dans la littérature est une extension de celui de Luenberger proposé dans [Luenberger, 1971] pour les systèmes linéaires :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{\xi}(t))\,(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \tag{2.72}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{2.73}$$

Afin de déterminer les gains L_i de l'observateur (2.72), la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est étudiée, cette dernière étant définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{2.74}$$

Sa dynamique est régie par une équation différentielle qui dépend de la connaissance ou non des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation. On définit alors deux cas selon que les variables de décision sont mesurables ou non mesurables.

2.7.1 Variables de décision mesurables (VDM)

La majeure partie des travaux effectués sur la conception d'observateurs d'état pour les systèmes T-S s'appuie sur l'hypothèse de disponibilité des variables de décision. De ce fait, l'observateur utilise les mêmes variables de décision que le modèle du système ce qui permet une factorisation par les fonctions d'activation lors de l'évaluation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. Plus précisément, cette dernière s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i - L_i C)\,e(t) \tag{2.75}$$

Les gains L_i de l'observateur sont déterminés par analyse de la stabilité du système T-S (2.75). Dans [Patton et al., 1998], l'analyse de la stabilité via une fonction de Lyapunov quadratique a permis l'obtention de conditions LMIs pour la synthèse de l'observateur :

Théorème 2.6. *([Patton et al., 1998]) L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$PA_i + A_i^T P - K_i C - C^T K_i^T < 0 \tag{2.76}$$

$$i = 1, \ldots, r$$

Les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation :

$$L_i = P^{-1} K_i \tag{2.77}$$

Démonstration. Elle s'appuie sur l'étude de la stabilité par la théorie de Lyapunov en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. L'importante propriété de somme convexe des fonctions d'activation a permis l'obtention de conditions suffisantes de stabilité du système (2.75) générant l'erreur d'estimation d'état. Afin d'obtenir des inégalités linéaires, le changement de variable $K_i = PL_i$ est utilisé. □

Dans [Patton et al., 1998], une amélioration des performances temporelles de l'observateur a été envisagée par un placement des pôles dans une région LMI, puis une application à la détection et localisation de défauts dans un moteur a été réalisée.

Plus récemment, dans [Akhenak, 2004] et [Rodrigues, 2005], les auteurs ont généralisé l'observateur à entrées inconnues proposé dans [Darouach et al., 1994] pour les systèmes linéaires. La stabilité a été étudiée par la théorie de Lyapunov et les conditions obtenues sont formulées en utilisant des LMIs. Dans [Akhenak, 2004], les observateurs à structures variables (à mode glissant) ont également été développés pour les systèmes T-S incertains. Ces observateurs ont été utilisés pour le diagnostic d'un système à trois cuves et d'un turbo-réacteur d'avion.

2.7.2 Variables de décision non mesurables (VDNM)

Dans le cas où les variables de décision ne sont pas connues, leur factorisation n'est plus possible et la dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{\xi}(t))\,(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)) \tag{2.78}$$

En analysant la forme de l'équation d'état (2.78), on conclut que les résultats obtenus dans le cas des systèmes T-S à VDM ne sont pas applicables pour la détermination des gains L_i de l'observateur. Peu de travaux ont été menés pour résoudre ce problème. Néanmoins, on peut citer [Bergsten et Palm, 2000] et [Bergsten et al., 2001], où les auteurs proposent des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro en s'appuyant sur l'observateur de Thau-Luenberger [Thau, 1973]. Les fonctions d'activation sont alors supposées de nature lipschitziennes.

Théorème 2.7. *([Bergsten et Palm, 2000]) L'erreur d'estimation d'état entre le modèle T-S et l'observateur converge asymptotiquement vers zéro, s'il existe des matrices symétriques et définies positives $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ ainsi qu'un scalaire positif γ tels que :*

$$\begin{array}{c} A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C < -Q \\ \begin{bmatrix} -Q+\gamma^2 & P \\ P & -I \end{bmatrix} < 0 \end{array} \tag{2.79}$$

Démonstration. voir [Bergsten et Palm, 2000].

Une extension a été proposée dans [Bergsten et al., 2002] pour la conception d'observateurs à mode glissant afin de prendre en considération d'éventuelles incertitudes de modélisation.

2.8 Motivations et position du problème

L'approche par secteurs non linéaires représente une des techniques les plus classiques de passage d'un modèle non linéaire à un modèle T-S [Tanaka et Wang, 2001]. En effet, cette transformation permet l'obtention d'un modèle T-S (2.53) représentant exactement (2.52). Il a été prouvé dans [Yoneyama, 2009] que si la sortie est bruitée (ce qui est fréquemment le cas en pratique) et est choisie comme variable de prémisse $\xi(t)$ le modèle T-S obtenu ne représente pas précisément le système (2.52). Il a été également conclu que si la sortie est non linéaire par rapport à l'état du système il est difficile voire impossible d'avoir un modèle T-S par l'approche par secteurs non linéaires avec la sortie comme variable de prémisse. C'est pourquoi l'utilisation de l'état du système comme variable de prémisse permet la description d'une classe très large de systèmes non linéaires.

Dans le contexte du diagnostic des systèmes non linéaires T-S à VDNM, le problème d'isolation de défauts par banc d'observateurs est impossible à réaliser avec un seul modèle du système. En effet, si le problème de localisation de défauts d'actionneurs est considéré, la construction

d'un banc d'observateurs afin de localiser les défauts n'est pas possible si la $i^{\text{ème}}$ entrée est utilisée comme variable de prémisse. Tous les observateurs supposant que cette entrée est inconnue ne peuvent pas être implémentés car l'indisponibilité de cette grandeur empêche d'évaluer les fonctions d'activation. Un problème similaire est rencontré quand le problème de localisation de défauts de capteurs est considéré avec un modèle T-S utilisant la sortie du système comme variable de prémisse. Une solution largement utilisée consiste à concevoir deux modèles T-S différents pour le même système non linéaire. Le premier modèle utilise l'entrée $u(t)$ comme variable de prémisse afin de concevoir le banc d'observateurs dédié à la localisation des défauts de capteurs. Le second modèle utilise la sortie $y(t)$ du système comme variable de prémisse pour la conception du banc pour la localisation de défauts d'actionneurs. La solution que nous proposons consiste à exploiter les modèles T-S utilisant l'état du système comme variable de prémisse. Ainsi, un seul modèle permet l'élaboration des deux bancs d'observateurs pour la localisation de défauts d'actionneurs et de capteurs.

Dans le contexte de la cryptanalyse utilisant les multimodèles chaotiques, [Cherrier et al., 2007] considère un modèle T-S où la sortie est utilisée comme variable de prémisse. Un observateur est alors développé afin de pouvoir transmettre et récupérer un message (synchronisation). Les auteurs ont également précisé que le fait d'utiliser l'état du système comme variable de prémisse améliore la sécurité de transmission puisque l'état est inconnu alors que la sortie peut être mesurée.

En conclusion, les modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables sont intéressants car :

- ils permettent de représenter exactement le modèle non linéaire (2.52),
- une classe plus large de systèmes non linéaires peut être décrite à l'aide cette structure comparé aux modèles T-S à variables de décision mesurables [Yoneyama, 2009],
- un seul modèle T-S suffit pour la conception de bancs d'observateurs afin de localiser les défauts de capteurs et d'actionneurs,
- dans le contexte du cryptage, la sécurité de transmission peut être améliorée.

Malgré l'importance des modèles T-S à variables de décision non mesurables, peu de travaux ont été dédiés à cette classe de systèmes [Cherrier et al., 2007]. Il est donc intéressant d'explorer les possibilités offertes par ces modèles dans le domaine de l'estimation d'état et du diagnostic des systèmes non linéaires.

Les travaux décrits dans ce présent mémoire concernent principalement les systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{2.80}$$

Les contributions que nous avons apportées concernent :

- la conception d'observateurs d'état (chapitre 3),
- la conception d'observateurs d'état en présence d'entrées inconnues (chapitre 4),
- la conception de générateurs de résidus pour la détection, la localisation et l'estimation des défauts (chapitre 5),
- la conception de commandes tolérantes aux défauts (chapitre 5).

2.9 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à un rappel de quelques définitions relatives à la conception d'observateurs et à l'étude de l'observabilité des systèmes non linéaires. Un certain nombre d'approches développées ces dernières années ont été présentées. Une discussion sur les systèmes non linéaires a ensuite permis d'introduire les modèles de Takagi-Sugeno en présentant succinctement trois méthodes pour leur obtention (identification et linéarisation des systèmes non linéaires). La méthode utilisant les transformations par secteurs non linéaires a fait l'objet d'un rappel avec une comparaison dans différents domaines à la structure T-S obtenue par les deux premières méthodes. Les motivations et la problématique abordée dans ce travail ont enfin été exposées en détail en définissant les objectifs à atteindre.

3

Reconstruction d'état des systèmes de Takagi-Sugeno à VDNM

Sommaire

3.1 Introduction **28**
3.2 Formulation du problème **29**
3.3 Observateur lipschitzien **30**
3.3.1 Première approche 30
3.3.2 Deuxième approche 35
3.3.3 Estimation d'état par injection multiple de la sortie 44
3.3.4 Conclusion partielle 52
3.3.5 Approche par le théorème de la valeur moyenne 53
3.3.6 Discussion 81
3.4 Observateur $\mathcal{L}_2$ **82**
3.4.1 Approche par incertitudes bornées 82
3.4.2 Approche par "incertitudes constantes" 90
3.4.3 Approche par atténuation des perturbations 97
3.4.4 Discussion 98
3.5 Estimation d'état des systèmes T-S à VDNM incertains **99**
3.5.1 Première approche 99
3.5.2 Deuxième approche 107
3.5.3 Discussions 108
3.6 Conclusions **109**

3.1 Introduction

Ce chapitre est consacré au développement de différentes méthodes de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires décrits par des modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. Malgré l'intérêt, grandissant, porté au problème de l'estimation d'état à base de modèles T-S, depuis quelques années, la conception d'observateurs pour des modèles T-S à variables de décision non mesurables reste rarement abordée dans la littérature.

Comme présenté dans le chapitre précédent, la structure T-S à VDNM présente plusieurs avantages. En effet, d'une part, les modèles non linéaires peuvent être représentés par cette structure de manière exacte. D'autre part, dans le contexte du diagnostic, elle permet de développer un seul modèle T-S qui sera ensuite utilisé pour la conception de bancs d'observateurs afin de détecter et d'isoler des défauts d'actionneurs et des défauts de capteurs. Il a été montré également que l'utilisation de la structure T-S à VDNM améliore la sécurité des systèmes de cryptage [Cherrier et al., 2007].

Les méthodes d'estimation d'état pour les modèles T-S à VDNM sont principalement développées pour la commande par retour d'état observé. Cela simplifie le problème. En effet, le fait de remplacer le signal de commande $u(t)$ par une loi de commande dépendant de l'état permet de traiter le problème comme un problème de commande d'un système incertain, où les incertitudes proviennent de l'impossibilité de mesurer les variables de décision. En revanche, le problème de diagnostic à base de modèle T-S à VDNM reste ouvert, et aucun travail n'a été rapporté à ce jour sur cette problématique.

Bergsten et Palm [2000] proposent une approche inspirée directement de l'observateur de Thau-Luenberger initialement proposé dans [Thau, 1973]. L'étude de la stabilité par la seconde méthode de Lyapunov a permis l'obtention d'une condition suffisante de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. La synthèse de l'observateur s'effectue par la résolution d'un ensemble d'inégalités linéaires matricielles. Par la suite, en se basant sur l'observateur proposé dans [Bergsten et Palm, 2000], les auteurs proposent dans [Bergsten et al., 2002] un observateur à mode glissant permettant de prendre en considération des incertitudes de modélisation. Comme précisé pour la conception d'observateur ou de commande des systèmes représentés par un modèle T-S à VDM, le nombre de LMIs à résoudre introduit un certain conservatisme induit par la recherche d'une matrice de Lyapunov P permettant de satisfaire r LMIs. L'apparition de la constante de Lipschitz dans les LMIs à résoudre introduit également un conservatisme lié à la valeur de cette dernière.

Dans [Yoneyama, 2009], la technique d'optimisation $\mathcal{L}_2$ a été utilisée de manière à concevoir un filtre permettant l'estimation de l'état du système T-S à VDNM, et minimisant l'influence des perturbations sur l'erreur d'estimation d'état. Des conditions LMIs ont été ainsi établies. L'auteur n'a considéré que le cas où seules les perturbations sont présentes et les entrées de commande sont nulles.

La section 3.2 présente le problème de l'observation des modèles T-S à VDNM. La section 3.3 est dédiée à l'étude et la proposition de trois approches basées sur des hypothèses de Lipschitz exposées dans [Ichalal et al., 2007a,b, 2009c]. Ces approches constituent une alternative à l'approche proposée par [Bergsten et Palm, 2000] pour réduire le conservatisme des conditions proposées dans ce dernier article. Des conditions assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état vers zéro sont données sous forme LMIs. La troisième méthode consiste à utiliser le théorème de la valeur moyenne ainsi que la méthode de transformation par

secteurs non linéaires pour la conception de l'observateur. L'étude est faite sur les modèles T-S à VDNM à temps continu et discret. Par la suite, une méthode de relaxation des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état est proposée pour le cas à temps discret. L'approche de relaxation est similaire à celle utilisée dans [Kruszewski et al., 2008] pour la synthèse d'une loi de commande ; elle consiste à considérer une fonction de Lyapunov entre l'instant $k+m$ et l'instant k au lieu de la prendre entre deux instants $k+1$ et k.

Dans la section 3.4, trois approches à base d'optimisation $\mathcal{L}_2$ sont proposées [Ichalal et al., 2009b, 2008a, 2009a]. Elles sont basées sur la ré-écriture du modèle T-S à VDNM sous différentes formes équivalentes, qui seront étudiées séparément. Dans cette approche, les erreurs dues à l'absence de mesure des variables de décision sont considérées comme des incertitudes de modèle. La synthèse $\mathcal{L}_2$ a pour but de minimiser l'influence de ces incertitudes sur l'erreur d'estimation. Le principe de ces approches est de réduire la sévérité des conditions proposées dans la première partie et de s'affranchir de certaines hypothèses de travail (à savoir les hypothèses de Lipschitz).

La conception d'observateurs pour des systèmes incertains et perturbés représentés par la structure T-S à VDNM est abordée dans la section 3.5. L'objectif est de concevoir un observateur afin d'estimer l'état du système tout en assurant une certaine robustesse face aux incertitudes de modélisation ainsi qu'aux perturbations externes (bruit de mesure...).

3.2 Formulation du problème

Considérons la classe de systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente le vecteur de sortie. $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont les matrices d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ sont les matrices d'influence de l'entrée et $C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ représente la matrice de sortie ou d'observation. Enfin, les fonctions $\mu_i(x(t))$ représentent les fonctions d'activation qui dépendent de l'état $x(t)$ du système, et qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1,...,n\} \end{cases} \tag{3.2}$$

L'objectif de ce chapitre est de construire un observateur d'ordre plein pour le système (3.1) ayant la structure

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

où $\hat{x}(t)$ est l'état estimé. Les matrices L_i de dimensions appropriées sont à déterminer de telle sorte que l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement, voire exponentiellement, vers zéro.

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.4}$$

En utilisant (3.1) et (3.3), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) - \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i C e(t)\right)\right) \tag{3.5}$$

Dans ce chapitre, nous proposons quelques méthodes complémentaires afin d'analyser la stabilité de (3.5) et de formuler les conditions de stabilité sous forme d'inégalités linéaires matricielles. La résolution de ces LMIs permet alors de déterminer les gains L_i de l'observateur (3.3).

3.3 Observateur lipschitzien

Les approches rapportées dans cette section sont basées sur des hypothèses de Lipschitz. Ces hypothèses sont exprimées de différentes manières, afin d'obtenir des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro moins contraignantes. Les première et deuxième approches utilisent l'hypothèse de Lipschitz classique, et la troisième approche utilise une autre formulation de cette hypothèse.

3.3.1 Première approche

Dans cette section, nous présentons une première méthode de conception de l'observateur (3.3) basée sur des hypothèses de Lipschitz et une transformation du système (3.1).

Soient les matrices A_0, $\bar{A}_i$, B_0 et $\bar{B}_i$ définies comme suit :

$$A_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} A_i \tag{3.6}$$

$$\bar{A}_i = A_i - A_0 \tag{3.7}$$

$$B_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} B_i \tag{3.8}$$

$$\bar{B}_i = B_i - B_0 \tag{3.9}$$

Par substitution des matrices A_0, $\bar{A}_i$, B_0 et $\bar{B}_i$ dans le système (3.1), il peut être ré-écrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.10}$$

De la même manière, l'observateur (3.3) s'écrit sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + B_0u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(\bar{A}_i\hat{x}(t) + \bar{B}_iu(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.11}$$

L'erreur de reconstruction d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.12}$$

En utilisant (3.10) et (3.11), la dynamique de l'erreur d'éstimation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_0 - L_iC)e(t) + \sum_{i=1}^{r} (\bar{A}_i(\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)) \\ &+ \bar{B}_i(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t)) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Une manière de justifier l'intérêt de l'introduction des matrices A_0 et $\bar{A}_i$ est l'obtention d'une dynamique de l'erreur d'estimation d'état faisant apparaître un terme en $e(t)$. Les autres termes sont non linéaires et tendent vers zéro quand $e(t) \to 0$. Dans cette partie, nous donnons des conditions de convergence de l'observateur en se basant sur la théorie de Lyapunov et des hypothèses sur les termes non linéaires $\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)$ et $(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t)$. Pour l'étude de la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro, posons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 3.1. *Les fonctions d'activation sont lipschitziennes :*

$$|\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))| \leq n_i\,|x(t) - \hat{x}(t)| \tag{3.14}$$

$$|\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)| \leq m_i\,|x(t) - \hat{x}(t)| \tag{3.15}$$

où n_i et m_i, scalaires positifs, sont les constantes de Lipschitz.

Hypothèse 3.2. *L'entrée $u(t)$ du système est bornée :*

$$\|u(t)\| \leq \beta_1, \quad \beta_1 > 0 \tag{3.16}$$

Hypothèse 3.3. *La paire (A_0, C) est observable (ou au moins détectable)*

Théorème 3.1. *L'erreur d'estimation d'état entre le système (3.1) et l'observateur (3.3) tend asymptotiquement vers zéro, sous les hypothèses 3.1 et 3.2, s'il existe deux matrices $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symétriques et définies positives, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et des scalaires positifs λ_1, λ_2 et γ tels que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :*

$$A_0^TP + PA_0 - K_i^TP - PK_i < -Q \tag{3.17}$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 m_i^2 I & P\bar{A}_i & P\bar{B}_i & n_i\gamma I \\ \bar{A}_i^TP & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ \bar{B}_i^TP & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ n_i\gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.18}$$

$$\gamma - \beta_1\lambda_2 \geq 0 \tag{3.19}$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$L_i = P^{-1}K_i \tag{3.20}$$

Démonstration. L'erreur d'estimation d'état est :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.21}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation est obtenue avec les équations (3.1) et (3.3) :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\Phi_i e(t) + \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i \delta_i(t) + \bar{B}_i \Delta_i(t) \tag{3.22}$$

où :

$$\begin{cases} \delta_i(t) = \mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \\ \Delta_i(t) = (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t) \\ \Phi_i = A_0 - L_i C \end{cases} \tag{3.23}$$

Pour démontrer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état, considérons la fonction de Lyapunov quadratique $V(e(t)) = e(t)^T P e(t)$, $P = P^T > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dont la dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \tag{3.24}$$

Puis, en utilisant (3.22) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^{r} (\delta_i(t)^T \bar{A}_i^T P e(t) + e(t)^T P \bar{A}_i \delta_i(t) + \Delta_i(t)^T \bar{B}_i^T P e(t) + e(t)^T P \bar{B}_i \Delta_i(t) \\ &+ \mu_i(\hat{x}(t))(e(t)^T \Phi_i^T P e(t) + e(t)^T P \Phi_i e(t))) \end{aligned} \tag{3.25}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (3.25) est composée de termes quadratiques en $e(t)$ et de termes croisés en $e(t)$, $\delta_i(t)$ et $\Delta_i(t)$. Afin d'exprimer $\dot{V}(e(t))$ sous une forme quadratique en $e(t)$, on procède comme suit. Compte tenu des définitions (3.23) et des hypothèses 3.1 et 3.2, on a alors :

$$\begin{cases} |\delta_i(t)| \leq m_i |e(t)| \\ |\Delta_i(t)| \leq n_i \beta_1 |e(t)| \end{cases} \tag{3.26}$$

Lemme 3.1. *Pour toutes matrices X et Y de dimensions appropriées, λ étant un scalaire positif, la propriété suivante est vérifiée :*

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \quad \lambda > 0 \tag{3.27}$$

En appliquant ce lemme et en utilisant (3.26), on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_i(t)^T \bar{A}_i^T P e(t) + e(t)^T P \bar{A}_i \delta_i(t) &\leq \lambda_1 \delta_i(t)^T \delta_i(t) + \lambda_1^{-1} e(t)^T P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P e(t) \\ &\leq \lambda_1 m_i^2 e(t)^T e(t) + \lambda_1^{-1} e(t)^T P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P e(t) \end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned} \Delta_i(t)^T \bar{B}_i^T P e(t) + e(t)^T P \bar{B}_i \Delta_i(t) &\leq \lambda_2 \Delta_i(t)^T \Delta_i(t) + \lambda_2^{-1} e(t)^T P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P e(t) \\ &\leq \lambda_2 n_i^2 \beta_1^2 e(t)^T e(t) + \lambda_2^{-1} e(t)^T P \bar{B}_i \bar{B}_i^T P e(t) \end{aligned} \tag{3.29}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (3.25) peut alors être majorée de la façon suivante :

$$\dot{V}(e(t)) \leq \sum_{i=1}^{r} e(t)^T (\mu_i(\hat{x}(t))(\Phi_i^T P + P\Phi_i) + (\lambda_1 m_i^2 + \lambda_2 n_i^2 \beta_1^2)I + \lambda_1^{-1} P\bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P\bar{B}_i \bar{B}_i^T P)e(t) \tag{3.30}$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est assurée si, pour $i = 1, ..., r$:

$$\mu_i(\hat{x}(t))(\Phi_i^T P + P\Phi_i) + (\lambda_1 m_i^2 + \lambda_2 n_i^2 \beta_1^2)I + \lambda_1^{-1} P\bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P\bar{B}_i \bar{B}_i^T P < 0 \tag{3.31}$$

ce qui conduit aux conditions suivantes :

$$(A_0 - L_i C)^T P + P(A_0 - L_i C) < -Q \tag{3.32}$$

$$-Q + (\lambda_1 m_i^2 + \lambda_2 n_i^2 \beta_1^2)I + \lambda_1^{-1} P\bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P\bar{B}_i \bar{B}_i^T P \quad < \quad 0 \tag{3.33}$$

En effectuant le changement de variables $K_i = PL_i$, et en appliquant le complément de Schur, on obtient les inégalités matricielles linéaires suivantes :

$$A_0^T P + PA_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q \tag{3.34}$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 m_i^2 + \lambda_2 n_i^2 \beta_1^2)I & P\bar{A}_i & P\bar{B}_i \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ \bar{B}_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \tag{3.35}$$

Plutôt que d'imposer a priori la borne sur l'entrée, on peut ajouter un degré de liberté en considérant cette borne comme une variable à déterminer qu'on appellera ρ. En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (3.35) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 m_i^2 I & P\bar{A}_i & P\bar{B}_i & n_i \lambda_2 \rho I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ \bar{B}_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ n_i \lambda_2 \rho I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \tag{3.36}$$

Cette inégalité n'est plus linéaire en les inconnues (présence du produit $\lambda_2 \rho$). Pour l'écrire sous forme LMI, on pose : $\gamma = \lambda_2 \rho$. On a alors :

$$A_0^T P + PA_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q \tag{3.37}$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 m_i^2 I & P\bar{A}_i & P\bar{B}_i & n_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ \bar{B}_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ n_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.38}$$

Connaissant γ et λ_2, on peut déduire la valeur ρ :

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda_2} \tag{3.39}$$

Pour s'assurer que les valeurs de γ et λ_2 vérifient l'hypothèse 3.2 (ρ doit être supérieur ou égal à β_1), on se propose d'ajouter une contrainte sur γ et λ_2 pour garantir $\frac{\gamma}{\lambda_2} \geq \beta_1$:

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 \geq 0 \tag{3.40}$$

En utilisant la contrainte (3.40) avec les conditions (3.37) et (3.38), la valeur de ρ trouvée est supérieure ou égale à la borne de l'entrée β_1. □

Exemple 3.1 (Estimation d'état)
Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.41}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les conditions initiales sur l'état sont : $x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.7 \end{pmatrix}^T$. *Les fonctions d'activation sont choisies sous la forme :*

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) = \frac{1+\tanh(x_1)}{2} \end{cases} \tag{3.42}$$

et ne dépendent que de la première composante de l'état. Le théorème 3.1 est appliqué en considérant une entrée bornée par 15. *Les constantes de Lipschitz sont données par* $m_1 = m_2 = 1.1$ *et* $n_1 = n_2 = 0.5$. *La résolution des LMIs présentées dans le théorème 3.1 mène aux matrices* Q, P *et* L_i *ainsi qu'aux scalaires* λ_1, λ_2 *et* γ *suivants :*

$$P = \begin{bmatrix} 0.30 & -0.06 & -0.28 \\ -0.06 & 0.20 & 0.05 \\ 0.28 & 0.05 & 0.71 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 5.58 & -0.06 & -0.25 \\ -0.06 & 7.10 & 0.54 \\ -0.25 & 0.54 & 6.22 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 4.52 & 10.25 \\ 19.34 & -14.48 \\ -0.16 & 6.49 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 5.58 & 11.66 \\ 21.10 & -15.62 \\ 0.32 & 7.52 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 1.48, \quad \lambda_2 = 0.03, \quad \gamma = 0.55$$

A partir de ces résultats, on déduit que : $\rho = 15.53 > \beta_1 = 15$. *Les résultats de simulation correspondant à l'évolution de l'erreur d'estimation d'état sont présentés à la figure 3.1 . Clairement, cette dernière méthode permet d'obtenir une solution, i.e. de concevoir un observateur, pour des signaux d'entrée d'amplitude nettement supérieure en comparaison à la méthode proposée dans [Bergsten et Palm, 2000].*

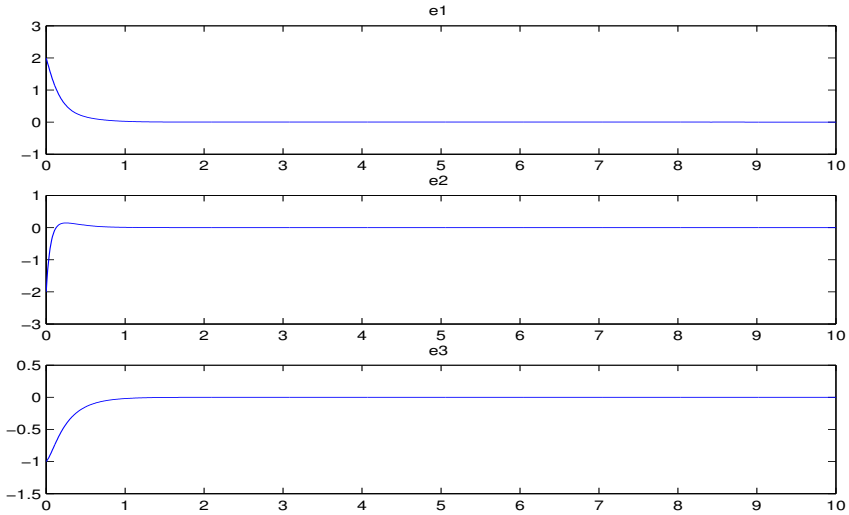


Figure 3.1 – Evolution de l'erreur d'estimation d'état

L'approche proposée dans cette section repose sur les hypothèses de fonctions d'activation Lipschitz, d'entrées bornées, de système stable. Les conditions ainsi établies assurent la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro. Par ailleurs, il a été montré dans la littérature [Tanaka et al., 1998] que, la difficulté de trouver une matrice de Lyapunov P, qui satisfait $(r+1)$ contraintes LMI, est proportionnelle au nombre de sous-modèles r. On conclut alors que, pour réduire le conservatisme des conditions données dans le théorème 3.1, deux approches peuvent être envisagées. La première consiste à utiliser un nouveau type de fonctions de Lyapunov, dites polyquadratiques ou non quadratiques. La seconde s'appuie sur la réduction du nombre de LMI à résoudre. La partie suivante est basée sur la dernière approche permettant de réduire le nombre de contraintes LMIs de $(r+1)$ à une seule contrainte.

3.3.2 Deuxième approche

Considérons le système T-S à VDNM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.43}$$

On peut définir les matrices A_0, $\bar{A}_i$, B_0 et $\bar{B}_i$ de deux façons différentes :

1. les matrices A_0 et B_0 représentent les matrices moyennes des matrices A_i et B_i, donc :

$$A_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} A_i \tag{3.44}$$

et :

$$B_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} B_i \tag{3.45}$$

2. les matrices A_0 et B_0 sont choisies comme les matrices du modèle dominant du système T-S. Supposons que le $j^{\text{ème}}$ sous-modèle est le modèle dominant, donc :

$$A_0 = A_j \tag{3.46}$$

et :

$$B_0 = B_j \tag{3.47}$$

Les matrices $\bar{A}_i$ et $\bar{B}_i$ sont calculées par :

$$\bar{A}_i = A_i - A_0 \tag{3.48}$$

et :

$$\bar{B}_i = B_i - B_0 \tag{3.49}$$

En substituant A_0, $\bar{A}_i$, B_0 et $\bar{B}_i$ dans l'équation (3.43), on obtient le système équivalent suivant :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)) \tag{3.50}$$

L'observateur proposé est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0\hat{x}(t) + B_0 u(t) + \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(\bar{A}_i\hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.51}$$

L'erreur d'estimation d'état est :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.52}$$

et sa dynamique est représentée par

$$\dot{e}(t) = (A_0 - LC)e(t) + \Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \tag{3.53}$$

où :

$$\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{r} [\bar{A}_i(\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)) + \bar{B}_i(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))u(t))] \tag{3.54}$$

Hypothèse 3.4. *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

– ***A1.*** $|\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)| < \alpha_i |x(t) - \hat{x}(t)|$

– ***A2.*** $|\bar{B}_i(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))| < \beta_i |x(t) - \hat{x}(t)|$
– ***A3.*** $|u(t)| < \rho$
– ***A4.*** *La paire* (A_0, C) *observable (ou au moins détectable)*

où $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$ *et* $\rho > 0$.

Les calculs de α_i et β_i sont donnés en annexe A.

Remarque 3.1. *Dans l'hypothèse* ***A1****,*
– *Si les fonctions* $\mu_i(x)x$ *sont globalement Lipschitz alors même si le système est instable les constantes* α_i *existent, par conséquent la méthode proposée est applicable.*
– *Si les fonctions* $\mu_i(x)x$ *sont localement Lipschitz alors la stabilité du système est nécessaire.*

Noter que la méthode proposée dans [Bergsten et al., 2002] nécessite la stabilité du système. Comme notre objectif est de concevoir des observateurs en vue du diagnostic, les systèmes étudiés sont généralement stables.

En utilisant les hypothèses **A1**, **A2** et **A3**, le terme $\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ peut être borné par :

$$|\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t))| < \gamma |x(t) - \hat{x}(t)| \tag{3.55}$$

où :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r} (\bar{\sigma}(\bar{A}_i)\alpha_i + \beta_i \rho) \tag{3.56}$$

où $\bar{\sigma}(M)$ représente la plus grande valeur singulière de M.

Théorème 3.2. *L'erreur d'estimation d'état entre le modèle T-S à VDNM (3.50) et l'observateur (3.51) converge asymptotiquement vers zéro, sous les hypothèses 3.4, s'il existe des matrices symétriques et définies positives* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *(Q est diagonale) et une matrice* $K \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ *telles que la condition suivante soit vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} A_0^T P + PA_0 - C^T K^T - KC + \gamma^2 Q & P \\ P & -Q \end{bmatrix} < 0 \tag{3.57}$$

Le gain de l'observateur est calculé par :

$$L = P^{-1} K \tag{3.58}$$

Démonstration. La condition de convergence de l'erreur d'estimation d'état est obtenue par l'utilisation de la fonction quadratique de Lyapunov candidate suivante :

$$V(t) = e(t)^T P e(t), \quad P = P^T > 0 \tag{3.59}$$

Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}(t) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \tag{3.60}$$

Par substitution de (3.53) dans (3.60), on obtient :

$$\dot{V}(t) = e(t)^T \left(\Phi^T P + P\Phi\right) e(t) + 2e(t)^T P \Delta(x, \hat{x}, u) \tag{3.61}$$

où $\Phi = A_0 - LC$. Afin de pouvoir écrire la dérivée de la fonction de Lyapunov sous forme quadratique, on introduit le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Pour toutes matrices X et Y de dimensions appropriées, la propriété suivante est vérifiée :*

$$X^T Y + XY^T < X^T \Omega^{-1} X + Y \Omega Y^T, \quad \Omega > 0$$

Pour $Q > 0$ diagonale, en utilisant le lemme 3.2 sur l'inégalité (3.61), on obtient :

$$e(t)^T (\Phi^T P + P\Phi + PQ^{-1}P) e(t) + \Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t))^T Q \Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) < 0 \tag{3.62}$$

Tenant compte de (3.55), la négativité de $\dot{V}(t)$ est assurée si :

$$e(t)^T (\Phi^T P + P\Phi + PQ^{-1}P + \gamma^2 Q) e(t) < 0 \tag{3.63}$$

L'inégalité (3.63) est vérifiée si :

$$(A_0 - LC)^T P + P(A_0 - LC) + PQ^{-1}P + \gamma^2 Q < 0 \tag{3.64}$$

La condition (3.64) n'est pas linéaire par rapport aux variables P, L et Q. Afin de pouvoir la résoudre par les approches classiques LMI, le changement de variable $K = PL$, et le complément de Schur (voir [Boyd et al., 1994]) sont utilisés. Ainsi, la condition donnée dans le théorème 3.2 est obtenue. □

Exemple 3.2 (Estimation d'état)
On considère l'exemple suivant pour montrer l'intérêt de l'approche proposée. Ce système est un système du second ordre présentant une non-linéarité :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x), \quad y(t) = Cx(t) \tag{3.65}$$

Le système est défini par :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} k\sin(x_1) \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La constante de Lipschitz est donnée par $|k|$. La valeur maximale de k pour laquelle il existe une solution est 2.2360 pour la technique proposée dans [Thau, 1973] et 2.1181 pour l'approche proposée dans [Abbaszadeh et Marquez, 2006]. En utilisant l'approche par transformation par secteurs non linéaires (voir [Tanaka et Wang, 2001]), on obtient un modèle T-S à VDNM avec les deux sous-modèles suivants :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3+k & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3-0.2172k & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$
$$B_1 = B_2 = B$$

Les fonctions d'activation sont :

$$\begin{cases} \mu_1(z(t)) = \frac{z(t)+0.2172}{1.2172} \\ \mu_2(z(t)) = \frac{1-z(t)}{1.2172} \end{cases} \tag{3.66}$$

où $z(t) = \frac{sin(x_1)}{x_1}$. La résolution des conditions du théorème 3.2 fournit une solution pour de plus grandes valeurs de la constante de Lipschitz que celles obtenues par les approches proposées dans [Thau, 1973; Abbaszadeh et Marquez, 2006]. La table suivante illustre les valeurs admissibles de γ défini dans (3.56) suivant les différentes valeurs de la constante de Lipschitz k

k	1	50	100
γ	165.02	138.59	106.79

Remarque 3.2. *Remarquons que la première composante du vecteur d'état $x(t)$ est instable, donc, la méthode proposée dans [Bergsten et al., 2001] pour les système T-S à VDNM ne peut pas s'appliquer, car la constante de Lipschitz considérée tend vers ∞ et par conséquent, les LMIs proposées n'admettent pas de solution.*

Observateur avec atténuation $\mathcal{L}_2$

Dans cette partie, le résultat proposé précédemment est généralisé à des systèmes affectés par des perturbations externes $\omega(t) \in \mathcal{L}_2$. L'objectif est de trouver le gain L de l'observateur pour assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état en assurant un taux d'atténuation minimal du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$:

$$\frac{\|e(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2} < \xi, \quad \xi > 0 \tag{3.67}$$

Le système perturbé est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i \omega(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.68}$$

En utilisant les matrices définies en (3.44)-(3.49), on obtient le système équivalent :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t) + E_i \omega(t)) \tag{3.69}$$

L'observateur est donné par l'équation (3.51). Le gain L est obtenu en résolvant le problème d'optimisation donné dans le théorème suivant.

Théorème 3.3. *L'observateur (3.51) pour le système (3.68) qui satisfait (3.67), sous les hypothèses 3.4, est obtenu par la minimisation du scalaire réel positif $\bar{\xi}$ sous la condition LMI suivante par rapport aux variables $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($P = P^T > 0$), $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($Q > 0$ et diagonale), $K \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $\bar{\xi}$:*

$$\begin{bmatrix} \Theta & P & PE_i \\ P & -Q & 0 \\ E_i^T P & 0 & -\bar{\xi} I \end{bmatrix} < 0, \; i = 1, \ldots, r \tag{3.70}$$

où :

$$\Theta = A_0^T P + PA_0 - C^T K^T - KC + \gamma^2 Q + I \tag{3.71}$$

Le gain de l'observateur est obtenu par $L = P^{-1}K$. La valeur du taux d'atténuation est donnée par $\xi = \sqrt{\bar{\xi}}$.

Démonstration. La dynamique de l'erreur d'estimation d'état entre (3.69) et (3.51) est donnée par l'équation :

$$\dot{e}(t) = (A_0 - LC)e(t) + \Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))E_i\omega(t) \tag{3.72}$$

où $\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t))$ est défini par (3.54). Considérons la fonction quadratique de Lyapunov candidate :

$$V(e(t)) = e(t)^T(t)Pe(t),\ P = P^T > 0 \tag{3.73}$$

donc :

$$\dot{V}(e(t)) = e(t)^T(\Phi^T P + P\Phi)e(t) + 2e(t)^T P\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) + 2\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))e(t)^T PE_i\omega(t) \tag{3.74}$$

Compte tenu de l'hypothèse (3.55) et du lemme 3.2, on obtient :

$$\dot{V}(e(t)) \quad \leq \quad e(t)^T(\Phi^T P + P\Phi + PQ^{-1}P + \gamma^2 Q)e(t) + 2\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))e(t)^T PE_i\omega(t) \tag{3.75}$$

La condition permettant de garantir une borne pour la norme $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ (qui satisfait (3.67)) est donnée par :

$$\dot{V}(t) + e(t)^T e(t) - \xi^2\omega(t)^T\omega(t) < 0 \tag{3.76}$$

En utilisant la dérivée par rapport à t de la fonction de Lyapunov (3.75), on obtient :

$$e(t)^T(\Phi^T P + P\Phi + PQ^{-1}P + \gamma^2 Q + I)e(t) + 2e(t)^T P\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))E_i\omega(t) - \xi^2\omega(t)^T\omega(t) < 0 \tag{3.77}$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}^T \mathcal{M} \begin{bmatrix} e(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.78}$$

où :

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \begin{bmatrix} \Theta + PQ^{-1}P & PE_i \\ E_i^T P & -\xi^2 I \end{bmatrix} \tag{3.79}$$

Les changements de variables $K = PL$, $\bar{\xi} = \xi^2$ ainsi que le complément de Schur permettent l'obtention de la LMI suivante qui est une condition suffisante pour que (3.78) soit vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Theta & P & PE_i \\ P & -Q & 0 \\ E_i^T P & 0 & -\bar{\xi} I \end{bmatrix} < 0,\ \ i = 1, \ldots, r \tag{3.80}$$

où Θ est donnée par (3.71). □

Placement des pôles

Pour améliorer les performances de l'observateur, comme la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro et l'atténuation des oscillations, on peut placer les pôles de $(A_0 - LC)$ dans une région du plan complexe, notée $S(a,p,q)$ définie par :

$$S(a,r,q) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+q| < p, Re(z) < a, q > 0, a > 0\} \tag{3.81}$$

(voir [Patton et al., 1998; Chilali et Gahinet, 1996]). Le théorème 3.4 propose des conditions assurant à la fois la convergence de l'erreur d'estimation d'état, la minimisation de l'influence des perturbations sur l'erreur d'estimation, le réglage de la vitesse de convergence et enfin l'atténuation du phénomène oscillatoire lié aux parties imaginaires des pôles.

Théorème 3.4. *L'observateur optimal (3.51) pour le système (3.68) qui satisfait (3.67), et tel que les pôles de la matrice $(A_0 - LC)$ sont dans la région $S(a,p,q)$, est obtenu par la minimisation de $\bar{\xi}$ sous la condition LMI suivante par rapport aux variables $P = P^T > 0$, $Q > 0$ (Q est diagonale) et K :*

$$\begin{bmatrix} \Xi & P & PE_i \\ P & -Q & 0 \\ E_i^T P & 0 & -\bar{\xi} I \end{bmatrix} < 0, \; i = 1, \ldots, r \tag{3.82}$$

$$\begin{bmatrix} -pP & qI + A_0^T P - C^T K^T \\ qI + PA_0 - KC & -pP \end{bmatrix} < 0 \tag{3.83}$$

où :

$$\Xi = A_0^T P + PA_0 - C^T K^T - KC + \gamma^2 Q + I + 2aP \tag{3.84}$$

Démonstration. La démonstration est basée sur l'ajout des contraintes de placement des pôles de la matrice $(A_0 - LC)$. (voir [Patton et al., 1998]) □

Exemple 3.3 (Estimation d'état d'un bras manipulateur actionné par un moteur DC)
On considère le système composé d'un bras actionné par un moteur DC (voir figure 3.2), proposé dans [Korbicz et al., 2007; Raghavan et Hedrick, 1994], dont le modèle mathématique est défini par :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_m(t) = \omega_m(t) \\ \dot{\omega}_m(t) = \frac{k}{J_m}(\theta_l(t) - \theta_m(t)) - \frac{B}{J_m}\omega_m(t) + \frac{K_\tau}{J_m}u(t) \\ \dot{\theta}_l(t) = \omega_l(t) \\ \dot{\omega}_l(t) = -\frac{k}{J_l}(\theta_l(t) - \theta_m(t)) - \frac{mgh}{J_l}\sin(\theta_l(t)) \end{cases} \tag{3.85}$$

où $\theta_m(t)$ représente la position angulaire du moteur, $\omega_m(t)$ sa vitesse angulaire, $\theta_l(t)$ est la position angulaire du bras, et $\omega_l(t)$ est la vitesse angulaire du bras. L'entrée du système est donnée par $u(t) = \sin(t)$, et les conditions initiales sont $x_0 = [0\ 0\ 0\ 0]^T$ pour le système et $\hat{x}_0 = [1\ 1\ 1\ 1]^T$ pour l'observateur. L'équation d'état du système est donnée par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t) + E\omega(t) \tag{3.86}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.87}$$

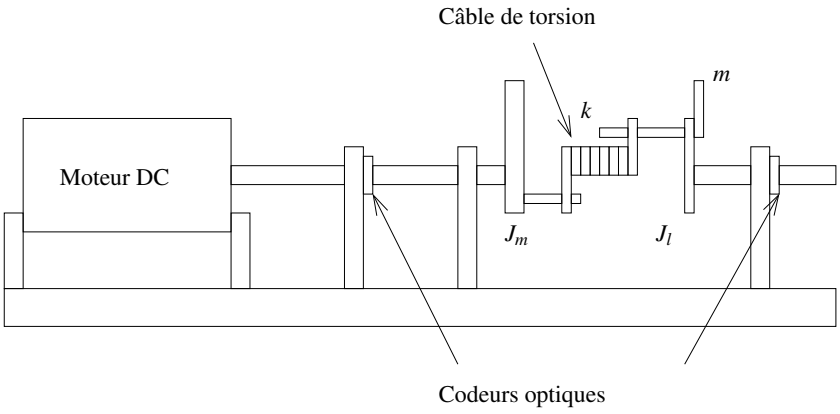


Figure 3.2 – Bras manipulateur articulé par un moteur DC

où :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -1.95 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 21.6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta_m \\ \omega_m \\ \theta_l \\ \omega_l \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.33\sin(x_3) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La constante de Lipschitz de $f(x)$ est $\alpha = 0.333$. Le bruit centré $\omega(t)$ est borné par 0.6. En utilisant l'approche de transformation par secteurs non linéaires [Tanaka et al., 1998], un modèle T-S à VDNM représentant exactement le comportement du modèle (3.85) est obtenu sous la forme (3.43) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -22.83 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -48.6 & -1.25 & 48.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 19.5 & 0 & -18.77 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = B$$

$$\begin{cases} \mu_1(z(t)) = \frac{z(t)+0.2172}{1.2172} \\ \mu_2(z(t)) = \frac{1-z(t)}{1.2172} \end{cases} \tag{3.88}$$

où $z(t) = \frac{\sin(x_3)}{x_3}$. La figure 3.3 (a) présente les états du système (trait continu) et les états du modèle T-S (trait pointillé). Les fonctions d'activation sont données dans la figure 3.3 (b). En utilisant la méthode de calcul de la constante de Lipschitz (voir annexe A), on obtient :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 16.95$$

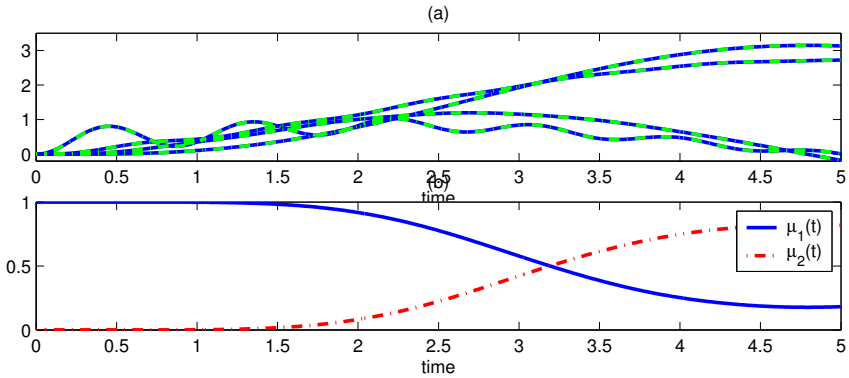


Figure 3.3 – (a) Etats du système et du modèle T-S. (b) Fonctions d'activation

Sachant que $B_1 = B_2 = B$ et en utilisant la propriété de somme convexe des fonctions d'activation (3.2), on a :

$$\sum_{i=1}^{r} B_i \left[\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right] u(t) = 0 \tag{3.89}$$

Donc, le terme (3.54) peut être réduit comme suit :

$$\Delta(x,\hat{x},u) = \sum_{i=1}^{r} \bar{A}_i(\mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t)) \tag{3.90}$$

Alors, la constante γ est :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{r} \bar{\sigma}\left(\bar{A}_i\right) \alpha_i = 0.2027\alpha_1 + 0.2027\alpha_2 = 6.8715$$

En utilisant le théorème 3.4, avec $q = 0, \quad p = 11, \quad a = 0.5$, on obtient :

$$P = \begin{bmatrix} 0.1420 & -0.0625 & 0.2537 & -0.0167 \\ -0.0625 & 0.0335 & -0.1342 & 0.0089 \\ 0.2537 & -0.1342 & 0.7086 & -0.0662 \\ -0.0167 & 0.0089 & -0.0662 & 0.0094 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 10.0762 & 1.2823 \\ -72.4926 & 21.3171 \\ -8.1831 & 4.1334 \\ -3.7979 & 7.9510 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation est $\xi = 0.0316$. La figure 3.4 illustre les résultats de l'estimation d'état.

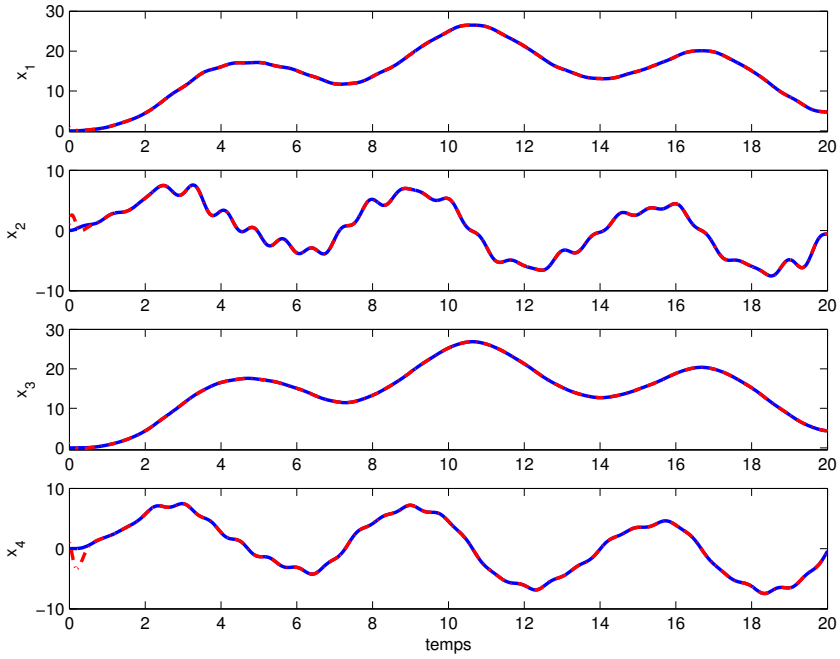


Figure 3.4 – Etats réels et leurs estimés

3.3.3 Estimation d'état par injection multiple de la sortie

Les approches présentées précédemment utilisent l'approche standard consistant à calquer l'observateur sur la dynamique du modèle avec un terme de correction dépendant de l'erreur de sortie. Cependant, la limitation de ces méthodes réside dans l'utilisation d'une seule injection de sortie qui est généralement conçue afin de contrer la non-linéarité qui est vue comme une incertitude de modélisation. Il a été montré dans [Arcak et Kokotovic, 2001; Ibrir, 2007] que la prise en compte de la connaissance sur la structure d'une non-linéarité permet de réaliser plusieurs injections de sorties dans la non-linéarité ce qui conduit à des conditions moins contraignantes pour la conception de l'observateur. Cette idée a été exploitée dans [Arcak et Kokotovic, 2001; Ibrir, 2007] afin de concevoir des observateurs pour une classe de systèmes lipschitziens présentant une non-linéarité satisfaisant la condition de monotonie.

Dans cette section, l'idée d'utiliser plusieurs injections de sortie est étendue à des systèmes T-S à VDNM pour la conception d'observateur tenant compte de la structure des fonctions d'activation afin d'y introduire d'autres injections de l'erreur de sortie. Ainsi, un gain supplémentaire est introduit permettant de réduire l'influence des constantes de Lipschitz.

Soit le système non linéaire suivant, décrit sous forme multimodèle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.91}$$

Les fonctions d'activation $\mu_i(x(t))$ sont connues et définies sur $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La distribution de l'état $x(t)$ dans ces fonctions peut s'écrire à travers une matrice connue H.Le système (3.91) s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(Hx(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.92}$$

L'objectif de ces transformations est la relaxation des conditions de convergence de l'observateur donnée dans les travaux précédents. Pour cela, la connaissance de la distribution de l'état dans les fonctions non linéaires $\mu_i(x(t))$ est très intéressante.

Exemple 3.4 (**Exemple introductif**)
Soit la fonction d'activation suivante :

$$\mu(x) = \frac{1 - tanh(x_1)}{2} \tag{3.93}$$

et

$$x = [x_1 \;\; x_2 \;\; x_3]^T \tag{3.94}$$

On remarque que la fonction (3.93) *ne dépend que de la première composante du vecteur x, donc on peut l'écrire sous la forme :*

$$\mu(Hx) = \frac{1 - tanh(Hx)}{2} \tag{3.95}$$

où :

$$H = [1 \;\; 0 \;\; 0] \tag{3.96}$$

On pose $z(t) = Hx(t)$ ($z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$), le système (3.91) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.97}$$

L'observateur proposé est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{z}(t))\,(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.98}$$

où :

$$\hat{z}(t) = H\hat{x}(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{3.99}$$

Le système (3.97) peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{z}(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) + (\mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t)))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.100}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.101}$$

et sa dynamique s'écrit :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(\hat{z}(t))\,(A_i - L_i C)\,e(t) + A_i \delta_i(t) x + B_i \delta_i(t) u(t)\right) \tag{3.102}$$

où :

$$\delta_i(t) = \mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t)) \tag{3.103}$$

Hypothèse 3.5. *On considère que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *La norme de l'entrée est bornée à tout instant :* $|u(t)| < \rho$.
2. *Le système (3.97) est stable (donc :* $|x(t)| < \sigma\rho$*).*
3. *Les fonctions d'activation* $\mu_i(z(t))$ *sont lipschitziennes :*

$$|\mu_i(z(t)) - \mu_i(\hat{z}(t))| < \gamma_i\,|z(t) - \hat{z}(t)| \tag{3.104}$$

4. *Les apires* (A_i, C) *observable (ou au moins détectable)*

Si les hypothèses 3.5 sont vérifiées alors les gains L_i et K de l'observateur sont déterminés par le théorème 3.5.

Théorème 3.5. *L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices symétriques et définies positives* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, des matrices* $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$*,* $S \in \mathbb{R}^{n_z\times n_y}$ *et un scalaire positif* λ *tels que les LMIs suivantes soient vérifiées* $\forall\, i \in \{1,..,r\}$ *:*

$$PA_i + A_i^T P - M_i C - C^T M_i^T < -Q \tag{3.105}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{Q}{r} & PA_i & PB_i & (\lambda H - SC)^T \\ A_i^T P & -\lambda I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda I & 0 \\ (\lambda H - SC) & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{\gamma_i^2 \rho^2 (\sigma^2+1)} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.106}$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$L_i = P^{-1} M_i \tag{3.107}$$

$$K = \lambda^{-1} S \tag{3.108}$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov quadratique V définie par :

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t),\ P = P^T > 0 \tag{3.109}$$

sa dérivée est donnée par :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}(t)^T P e(t) + e(t)^T P \dot{e}(t) \tag{3.110}$$

En utilisant l'équation (3.102) on obtient :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(\hat{z}(t))e^T(P\Phi_i + \Phi_i^T P)e + e^T PA_i\delta_i x + x^T \delta_i A_i^T Pe + e^T PB_i\delta_i u + u^T \delta_i B_i^T Pe) \tag{3.111}$$

où :

$$\Phi_i = A_i - L_i C \tag{3.112}$$

L'application du lemme 3.2 conduit à :

$$e^T PA_i\delta_i x + x^T \delta_i^T A_i^T Pe \quad < \quad \alpha_i^{-1} e^T PA_i A_i^T Pe + \alpha_i x^T \delta_i^T \delta_i x \tag{3.113}$$

$$e^T PB_i\delta_i u + u^T \delta_i^T B_i^T Pe \quad < \quad \beta_i^{-1} e^T PB_i B_i^T Pe + \beta_i u^T \delta_i^T \delta_i u \tag{3.114}$$

En utilisant l'hypothèse 3.5, on a :

$$x^T \delta_i^T \delta_i x \quad \leq \quad \gamma_i^2 \sigma^2 \rho^2 e^T (H - KC)^T (H - KC) e \tag{3.115}$$

$$u^T \delta_i^T \delta_i u \quad \leq \quad \gamma_i^2 \rho^2 e^T (H - KC)^T (H - KC) e \tag{3.116}$$

Compte tenu de (3.113-3.116), la fonction de Lyapunov est bornée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) \quad < \quad & \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(\hat{z}(t))e^T(P\Phi_i + \Phi_i^T P)e + e^T(\alpha_i^{-1} PA_i A_i^T P + \beta_i^{-1} PB_i B_i^T P \\ + \quad & \gamma_i^2 \rho^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i)(H - KC)^T (H - KC))e) \end{aligned} \tag{3.117}$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov V est assurée si :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{z}(t))e(t)^T(P\Phi_i + \Phi_i^T P)e(t) < -e(t)^T Qe(t), \quad Q = Q^T > 0 \tag{3.118}$$

et

$$-\frac{Q}{r} + \alpha_i^{-1} PA_i A_i^T P + \beta_i^{-1} PB_i B_i^T P + \gamma_i^2 \rho^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i)(H - KC)^T (H - KC) < 0 \tag{3.119}$$

$$\forall i = 1, ..., r$$

Les conditions qui permettent de garantir la négativité de $\dot{V}$ sont alors :

$$P\Phi_i + \Phi_i^T P < -Q \tag{3.120}$$

$$-\frac{Q}{r} + \alpha_i^{-1} PA_i A_i^T P + \beta_i^{-1} PB_i B_i^T P + \gamma_i^2 \rho^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i)(H - KC)^T (H - KC) < 0 \tag{3.121}$$

$$\forall i = 1, ..., r$$

Les inégalités (3.120) et (3.121) sont non linéaires par rapport aux variables P, L_i, K, α_i, et β_i. Une solution peut être proposée en utilisant le complément de Schur et le changement de variable suivant :

$$M_i = PL_i \tag{3.122}$$

On obtient alors les inégalités matricielles (3.123)-(3.124) :

$$PA_i + A_i^T P - M_i C - C^T M_i^T < -Q \tag{3.123}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{Q}{r} & PA_i & PB_i & (H-KC)^T \\ A_i^T P & -\alpha_i I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\beta_i I & 0 \\ (H-KC) & 0 & 0 & -\frac{1}{\gamma_i^2 \rho^2 (\alpha_i \sigma^2 + \beta_i)} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.124}$$

$$i = 1, \ldots, r$$

qui ne sont pas linéaires en les paramètres α_i et β_i.

Afin de pouvoir exprimer les conditions sous forme LMI, nous proposons le second changement de variable :

$$\alpha_2 = \ldots = \alpha_r = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_r = \lambda, \;\; \lambda > 0$$

En utilisant la S-procédure avec les termes suivants :

$$\lambda \delta_i^T \delta_i \leq \gamma_i^2 \rho^2 \sigma^2 \lambda e^T (H-KC)^T (H-KC) e \tag{3.125}$$

et :

$$\lambda \Delta_i^T \Delta_i \leq \gamma_i^2 \rho^2 \lambda e^T (H-KC)^T (H-KC) e \tag{3.126}$$

et en appliquant le changement de variable $S = \lambda K$ ainsi que le complément de Schur, on obtient les inégalités du théorème 3.5. □

Afin de résoudre les LMIs du théorème 3.5 par les outils classiques LMI, l'algorithme suivant explicite les étapes à suivre.

Algorithme de résolution

1. La borne sur l'entrée $u(t)$ est connue et donnée par ρ.
2. Les constantes de Lipschitz γ_i des fonctions d'activation μ_i sont connues.
3. On détermine le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers $x(t)$ en utilisant le lemme borné réel appliqué au système (3.97) avec $C = I$ pour l'obtention du gain du transfert vers $x(t)$ et non pas vers $y(t)$. Cela est réalisé par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min(\bar{\sigma}) \tag{3.127}$$

s.c.

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P + I & PB_i \\ B_i^T P & -\bar{\sigma} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.128}$$

On déduit le gain maximal du transfert de $u(t)$ vers $x(t)$ par :

$$\sigma = \sqrt{\bar{\sigma}} \tag{3.129}$$

On résout les inégalités linéaires matricielles (3.105) et (3.106) pour déterminer les gains L_i et K de l'observateur (3.98).

Remarque 3.3. *La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est étudiée suivant deux étapes qui donnent lieu à 2^r inégalités à résoudre, ce qui peut introduire un certain conservatisme. Afin de réduire ce nombre de LMIs à r inégalités, l'erreur d'estimation peut s'écrire de la façon suivante :*

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(H\hat{x})\Phi_i e(t) + A_i\delta_i x(t) + B_i\delta_i u(t)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(H\hat{x}) \left(\Phi_i e(t) + \Sigma\bar{\delta}\right) \tag{3.130}$$

où :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r & B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \bar{\delta}(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t)x(t) \\ \vdots \\ \delta_r(t)x(t) \\ \delta_1(t)u(t) \\ \vdots \\ \delta_r(t)u(t) \end{bmatrix}$$

Théorème 3.6. *L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$, $S \in \mathbb{R}^{n_z\times n_y}$ et un scalaire positif λ tels que les LMIs suivantes soient vérifiées $\forall\, i \in \{1,..,r\}$:*

$$\begin{bmatrix} PA_i + A_i^T P - M_i C - C^T M_i^T & P\Sigma & (\lambda H - SC)^T \\ \Sigma^T P & -\lambda I & 0 \\ (\lambda H - SC) & 0 & -\frac{\lambda}{\eta} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.131}$$

où :

$$\eta = \rho^2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + ... + \gamma_r^2)(\sigma^2 + 1) \tag{3.132}$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$L_i = P^{-1}M_i \tag{3.133}$$
$$K = \lambda^{-1}S \tag{3.134}$$

Démonstration. Après calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov en utilisant (3.130), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(H\hat{x}(t)) \left(e(t)^T \left(P\Phi_i + \Phi_i^T P\right) e(t) + 2e(t)^T P\Sigma\bar{\delta}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(H\hat{x}(t)) e(t)^T \left(P\Phi_i + \Phi_i^T P\right) e(t) + 2e(t)^T P\Sigma\bar{\delta} \end{aligned} \tag{3.135}$$

Le terme $2e(t)^T P\Sigma\bar{\delta}$ peut être borné de la façon suivante :

$$2e(t)^T P\Sigma\bar{\delta} \leq e(t)^T P\Sigma\Sigma^T Pe(t) + E(t)^T \Gamma E(t) \tag{3.136}$$

où :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1^2\rho^2\sigma^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_r^2\rho^2\sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_1^2\rho^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \gamma_r^2\rho^2 \end{pmatrix}, \quad E(t)^T = \begin{pmatrix} (H-KC)e(t) \\ \vdots \\ (H-KC)e(t) \end{pmatrix} \tag{3.137}$$

Après calcul, on obtient facilement :

$$E(t)^T\Gamma E(t) < \rho^2\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_r^2\right)\left(\sigma^2+1\right)e(t)^T(H-KC)^T(H-KC)e(t) \tag{3.138}$$

On pose

$$\eta = \rho^2\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_r^2\right)\left(\sigma^2+1\right) \tag{3.139}$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov devient :

$$\dot{V}(e(t)) < \sum_{i=1}^{r}\mu_i(H\hat{x}(t))e(t)^T(P\Phi_i+\Phi_i^TP+P\Sigma\Sigma^TP+\eta(H-KC)^T(H-KC))e(t) \tag{3.140}$$

De la même façon que la démonstration précédente, en utilisant la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, le complément de Schur ainsi que le changement de variables $M_i = PL_i$, on aboutit aux LMIs du théorème 3.6. □

Remarque 3.4. *Dans les LMIs données dans le théorème 3.5, si les constantes de Lipschitz et la borne sur l'entrée tendent vers l'infini alors le bloc* $(4,4)$ *de la LMIs* (3.124) *tend vers zéro*

$$\frac{1}{\gamma_i\rho^2(\alpha_i\sigma^2+\beta_i)} \to 0 \tag{3.141}$$

Pour obtenir une solution, il faut chercher la matrice K satisfont l'équation :

$$H-KC=0 \tag{3.142}$$

L'équation (3.142) *peut être résolue si la condition suivante est vérifiée :*

$$rang\begin{pmatrix} C \\ H \end{pmatrix} = rang(C) \tag{3.143}$$

En conclusion, dans cette section, le conservatisme des conditions LMIs liées aux constantes de Lipschitz et aux bornes sur l'entrée est atténué par l'introduction d'une injection supplémentaire de la sortie dans les fonctions d'activation. Cependant, l'obtention d'un modèle T-S à VDNM par la méthode classique de transformation par secteurs non linéaires ne permet pas toujours d'avoir une distribution du vecteur d'état dans les fonctions d'activation (i.e. l'obtention d'une matrice H) satisfaisant la condition (3.143)*. Ce problème a été résolu par l'utilisation d'une nouvelle méthode d'obtention de modèle T-S proposée par [Nagy et al., 2009a].*

En effet, cette méthode est basée sur la modification de l'approche classique de transformation par secteurs non linéaire en introduisant des paramètres supplémentaires qui permettent une flexibilité sur le choix des modèles locaux et des fonctions d'activation. L'objectif dans la méthode proposée par Nagy et al. [2009a] était l'obtention d'un modèle T-S à VDNM tout en garantissant des conditions d'observabilité et/ou de commandabilité ainsi que la minimisation du nombre de composantes du vecteur d'état qui interviennent dans les fonctions d'activation. L'intérêt de ce résultat, pour le problème traité dans cette section, est de choisir les paramètres du modèle T-S à VDNM afin d'assurer l'observabilité des modèles locaux ainsi qu'une distribution du vecteur d'état dans les fonctions d'activation garantissant la condition de rang (3.143).

Exemple 3.5 (**Estimation d'état avec un observateur à deux injections de sortie**)
Soit le système (3.92) défini par les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -0.25 & -1 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -1.9 & -0.4 \\ -2.24 & -4.7 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont données par :

$$\begin{cases} \mu_1(Hx) = \frac{1-\tanh(Hx)}{2} \\ \mu_2(Hx) = 1 - \mu_1(Hx) \end{cases}$$

elles dépendent seulement de la première composante de $x(t)$ (voir la matrice H). L'entrée du système est donnée par :

$$u(t) = 10sin(t) \tag{3.144}$$

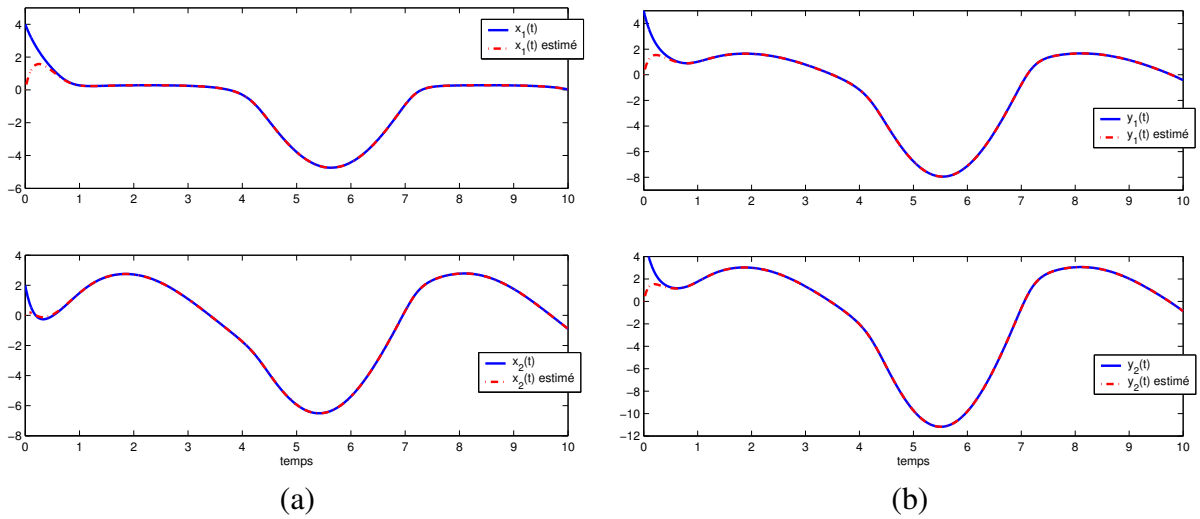
et bornée par $\rho = 10$. La deuxième étape de l'algorithme fournit les constantes de Lipschitz des fonctions d'activation : $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$. L'étape 3 permet de trouver $\sigma = 1.9266$.

La résolution des inégalités matricielles (3.123) et (3.124) donne les résultats suivants :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 7.35 & -3.80 \\ -5.32 & 9.57 \end{bmatrix}, \; L_2 = \begin{bmatrix} 10.18 & -5.76 \\ -7.29 & 7.07 \end{bmatrix}, \; K = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$$

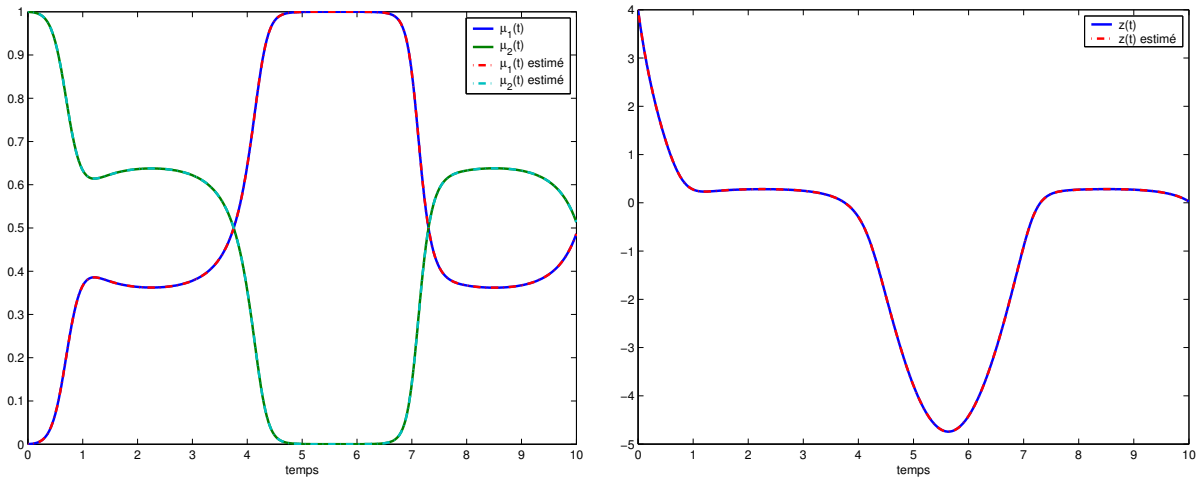
$$P = \begin{bmatrix} 0.13 & -0.01 \\ -0.01 & 0.09 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 0.62 & 0 \\ 0 & 0.61 \end{bmatrix}$$

Les résultats de simulation sont donnés sur les figures 3.5 et 3.6



(a) (b)

Figure 3.5 – (a) États du système et leurs estimés (b) Sorties du système et leurs estimées



(a) (b)

Figure 3.6 – (a) Fonctions d'activation et leurs estimées (b) Variable de prémisse et son estimée

3.3.4 Conclusion partielle

On a constaté au cours des travaux faits précédemment [Ichalal et al., 2007a], [Ichalal et al., 2008a] que l'augmentation de la borne sur l'entrée et des constantes de Lipschitz conduit à de grands gains, ce qui n'est pas une propriété recherchée puisque la bande passante de l'observateur augmente et le rend sensible au bruit. De plus, les LMIs proposées dans [Ichalal et al., 2007a], [Ichalal et al., 2008a], [Bergsten et Palm, 2000], [Palm et Driankov, 1999] deviennent impossibles à résoudre à partir de certaines valeurs de la borne sur l'entrée et des constantes

de Lipschitz. Pour résoudre ces problèmes, nous avons proposé dans la section 3.3.3 une nouvelle approche pour diminuer le conservatisme des conditions LMIs et éliminer le problème des grands gains. L'approche consiste à faire apparaître la matrice de distribution du vecteur d'état dans les non-linéarités (fonctions d'activation). L'observateur possède alors deux injections de sorties : une dans l'équation d'état de l'observateur et une autre dans les fonctions d'activation, ce qui permet d'introduire un gain supplémentaire afin de réduire l'effet de la borne de l'entrée et des constantes de Lipschitz. Cette approche permet aussi de relaxer les conditions d'existence des observateurs à entrées inconnues proposés dans [Ichalal et al., 2008b].

Les approches proposées jusqu'à maintenant fournissent des conditions simples à résoudre par des outils LMIs existant (Toolbox LMI de Matlab). Toutefois, la manière dont la dérivée de la fonction de Lyapunov a été bornée constitue une source de conservatisme des conditions établies dans ces deux méthodes. Dans la section suivante, un autre raisonnement est adopté afin de réduire ce conservatisme. L'idée est d'utiliser l'hypothèse de Lipschitz sous une autre formulation. Le théorème de la valeur moyenne ainsi que la méthode de transformation par secteurs non linéaires permettent d'exprimer la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système perturbé à la forme classique d'un système T-S autonome. L'objectif est de pouvoir réutiliser les travaux effectués sur la stabilité relaxée afin de réduire le conservatisme lié à l'hypothèse de Lipschitz.

3.3.5 Approche par le théorème de la valeur moyenne

Soit le système T-S à VDNM donné, dans le cas à temps continu, par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.145}$$

et, dans le cas à temps discret par :

$$\begin{cases} x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) \left(A_i x(k) + B_i u(k)\right) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{3.146}$$

Il est aisé de ré-écrire le système (3.145) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.147}$$

et dans le cas discret, ré-écrire (3.146) sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) \left(\bar{A}_i x(k) + \bar{B}_i u(k)\right) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{3.148}$$

L'observateur, à temps continu, suivant est proposé :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.149}$$

Dans le cas à temps discret, il est donné par :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_0 x(k) + B_0 u(k) + L(y(k) - \hat{y}(k)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i \hat{x}(k) + B_i u(k)\right) \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \end{cases} \tag{3.150}$$

L'erreur d'estimation d'état, dans le cas à temps continu, s'écrit :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.151}$$

et à temps discret, elle est donnée par :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \tag{3.152}$$

Sa dynamique est :

$$\dot{e}(t) = (A_0 - LC)e(t) + \Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \tag{3.153}$$

où :

$$\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = (f(x(t)) - f(\hat{x}(t))) \tag{3.154}$$

$$f(x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \bar{A}_i x(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \bar{B}_i u(t) \tag{3.155}$$

Pour le cas à temps discret, elle s'écrit sous la forme :

$$e(k+1) = (A_0 - LC)e(k) + \Delta(x(k), \hat{x}(k), u(k)) \tag{3.156}$$

où :

$$\Delta(x(k), \hat{x}(k), u(k)) = (f(x(k)) - f(\hat{x}(k))) \tag{3.157}$$

$$f(x(k), u(k)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) \bar{A}_i x(k) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) \bar{B}_i u(k) \tag{3.158}$$

L'objectif est de trouver le gain L de l'observateur (3.149) (resp. (3.150)) qui stabilise (3.153) (resp. (3.156)). Pour cela, le théorème de la valeur moyenne utilisé pour des fonctions vectorielles est rappelé ci-dessous [Zemouche et al., 2008].

Définition 3.1. *Considérons la fonction vectorielle non linéaire $\varphi(x)$:*

$$\varphi(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \tag{3.159}$$

où :

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x)^T & \cdots & \varphi_n(x)^T \end{bmatrix}^T, \quad \varphi_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{3.160}$$

Considérons un ensemble E_s défini par :

$$E_s = \left\{ \; e_s(i) \quad | \quad e_s(i) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \; i = 1, \ldots, s \; \right\} \tag{3.161}$$

En utilisant la définition de E_s, la fonction $\varphi(x)$ est ré-écrite sous la forme

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} e_n(i) \varphi_i(x) \tag{3.162}$$

Théorème 3.7. *Soit $\varphi_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}^n$. Si φ_i est différentiable sur l'intervalle $[a,b]$ alors, il existe une constante $z \in [a,b]$ et $z \neq a$ et $z \neq b$ telle que :*

$$\varphi_i(a) - \varphi_i(b) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}(z)(a-b) \tag{3.163}$$

En appliquant le théorème 3.7 à (3.155), on obtient pour $a, b \in \mathbb{R}^n$:

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_n(i) e_n(j)^T \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_j)(a-b) \tag{3.164}$$

Une autre formulation de l'hypothèse de Lipschitz est donnée par l'hypothèse 3.6.

Hypothèse 3.6. *Supposons que $f(x)$ est une fonction différentiable satisfaisant :*

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i(x(t), u(t))}{\partial x_j} \leq b_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{3.165}$$

L'erreur d'estimation d'état (3.153) peut être alors ré-écrite sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e_n(i) e_n(j)^T \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_j) + (A_0 - LC) \right) e(t) \tag{3.166}$$

En utilisant les transformations par secteurs non linéaires, chaque non-linéarité $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_j)$ peut être représentée par :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_j) = \sum_{l=1}^{2} v_{ij}^l(z_j) \tilde{a}_{ijl} \tag{3.167}$$

où : $\tilde{a}_{ij1} = a_{ij}$ and $\tilde{a}_{ij2} = b_{ij}$ (a_{ij} et b_{ij} sont respectivement le minimum et le maximum de $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z_j)$. On a aussi :

$$v_{ij}^1(z_j) = \frac{\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(z_j) - a_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}} \tag{3.168}$$

$$v_{ij}^2(z_j) = \frac{b_{ij} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(z_j)}{b_{ij} - a_{ij}} \tag{3.169}$$

$$\sum_{l=1}^{2} v_{ij}^l(z_j) = 1, \quad 0 \leq v_{ij}^l(z_j) \leq 1, \quad l = 1, 2 \tag{3.170}$$

En utilisant (3.167), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est représentée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{2} v_{ij}^l(z_j) A_{ijl} e(t) + (A_0 - LC) e(t) \tag{3.171}$$

où :

$$A_{ijl} = i \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{ijl} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{3.172}$$

L'approche par transformation par secteurs non linéaires (voir chap.2 in [Tanaka et Wang, 2001]) permet de mettre l'équation régissant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous la forme :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{q=2n^2} h_i(z)\,(\mathcal{A}_i + A_0 - LC)e(t) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(t))\Psi_i e(t) \tag{3.173}$$

dans le cas à temps continu, et dans le cas des systèmes à temps discret, par :

$$e(k+1) = \sum_{i=1}^{q=2n^2} h_i(z(k))\,(\mathcal{A}_i + A_0 - LC)e(k) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k))\Psi_i e(k) \tag{3.174}$$

La stabilité de ce type de modèles est largement étudiée dans la littérature. Par conséquent, d'intéressants résultats existent tels que la stabilité quadratique établie en utilisant des fonctions de Lyapunov candidates quadratiques. Des conditions de stabilité relaxées sont également proposées en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques, par exemple les fonctions connues sous le nom anglo-saxon Fuzzy Lyapunov Functions [Tanaka et al., 2003]. Dans le cas discret, une nouvelle fonction de Lyapunov est introduite dans [Kruszewski et al., 2008]. Elle a démontré ses capacités à réduire significativement le conservatisme comparée aux fonctions quadratiques. L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(t))\Psi_i e(t) \tag{3.175}$$

pour le cas à temps continu, et :

$$e(k+1) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k))\Psi_i e(k) \tag{3.176}$$

pour le cas à temps discret.

L'analyse de la stabilité du système (3.175) (resp. (3.176)) est étudiée, dans le but d'obtenir des conditions assurant la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état, et fournir des conditions LMIs. La résolution de ces dernières permettent le calcul des gains L_i qui stabilisent le système (3.175) (resp. (3.176)). La première sous-section est dédiée à quelques résultats pour les cas à temps continu et discret. La stabilité est analysée par la théorie de Lyapunov et une fonction de Lyapunov candidate quadratique. Par la suite, dans la deuxième sous-section, le résultat intéressant proposé pour la commande dans [Kruszewski et al., 2008], est utilisé pour l'obtention dans le cas à temps discret, de manière à trouver des conditions moins contraignantes en utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques.

Analyse de la stabilité quadratique

Considérons l'erreur d'estimation d'état (3.175). En se basant sur une fonction de Lyapunov candidate quadratique de la forme :

$$V(e(t)) = e(t)^T P e(t), \;\; P = P^T > 0 \tag{3.177}$$

pour le cas à temps continu, et :

$$V(e(k)) = e(k)^T P e(k), \;\; P = P^T > 0 \tag{3.178}$$

pour le cas à temps discret :

Théorème 3.8. *(Cas à temps continu) L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in R^{n\times n}$ et des matrices $M_j \in R^{n\times n_y}$ telles que les inégalités linéaires matricielles suivantes soient vérifiées $\forall i = 1,\ldots,q$:*

$$A_0^T P + PA_0 + \mathcal{A}_i^T P + P\mathcal{A}_i - MC - C^T M^T < 0 \tag{3.179}$$

Le gain de l'observateur est donné par :

$$L = P^{-1} M \tag{3.180}$$

Démonstration. Soit la fonction de Lyapunov candidate (3.177), l'étude de la négativité de sa dérivée par rapport au temps permet d'établir les conditions LMIs données dans le théorème 3.8 (voir [Tanaka et Wang, 2001] pour plus de détail). □

Théorème 3.9. *(Cas à temps discret) L'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in R^{n\times n}$ et des matrices $M_j \in R^{n\times n_y}$ telles que les inégalités linéaires matricielles suivantes soient vérifiées $\forall i = 1,\ldots,q$:*

$$\begin{pmatrix} -P & A_0^T P + \mathcal{A}_i^T P - C^T M^T \\ PA_0 + P\mathcal{A}_i - MC & -P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.181}$$

Le gain de l'observateur est donné par :

$$L = P^{-1} M \tag{3.182}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle donnée pour le théorème 3.8 (voir [Tanaka et Wang, 2001]). □

Exemple 3.6 (Exemple 1 : estimation d'état d'un moteur DC série)
Dans cet exemple, nous proposons d'appliquer la méthode développée précédemment pour construire un observateur permettant d'estimer le courant d'induit I et la vitesse $\omega(t)$ d'un moteur DC série (appelé aussi moteur à excitation série). Ce type de moteur est généralement utilisé dans la traction électrique pour son couple de démarrage élevé ainsi que pour son autorégulation en puissance. L'inducteur et l'induit de ce type de moteur sont connectés en série, comme le montre la figure 3.7, d'où l'appellation "Moteur DC série". r et l représentent respec-

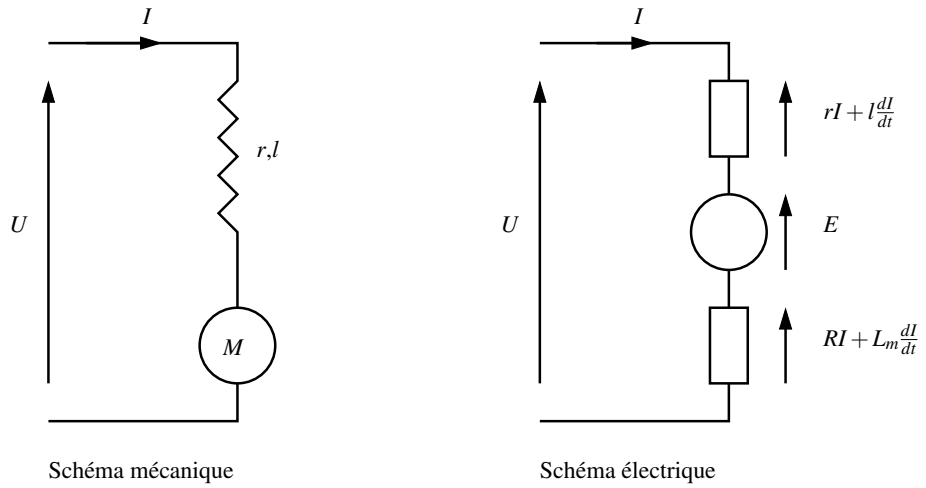


Figure 3.7 – Schémas mécanique et électrique du moteur à courant continu série

tivement la résistance et l'inductance de l'inducteur (stator), tandis que R et L_m représentent respectivement la résistance et l'inductance de l'induit (rotor). La tension d'alimentation U du moteur doit être comprise entre 0 *et* 1000 *Volts et le courant I est limité à* 1000 *Ampères.*

Le modèle non linéaire est donné par les équations suivantes (voir [Cyrille, 2001] pour plus de détails) :

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{f}{J}x_1(t) + K_m\frac{L_m}{J}x_2(t)^2 - \frac{C_r}{J} \tag{3.183}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{R}{L_t}x_2(t) + K_m\frac{L_m}{L_t}x_1(t)x_2(t) - \frac{U}{L_t} \tag{3.184}$$

Le vecteur d'état est donné par $x(t) = [\omega(t) \;\; I(t)]^T$ où $\omega(t)$ représente la vitesse du moteur et $I(t)$ le courant d'induit. Nous avons également $R_t = R + r$ et $L_t = L_m + l$. Le moteur est alimenté par une tension dont l'évolution au cours du temps est donnée par l'équation suivante :

$$U = -70\exp(-\frac{t}{35}) + 70 \tag{3.185}$$

Le couple résistant C_r est normalement inconnu, mais pour cet exemple, on le considérera comme connu. Les deux entrées sont alors U et C_r illustrées sur la figure 3.8. Les valeurs numériques des paramètres du moteur sont données comme suit :

$$\begin{aligned} R &= 0.001485\Omega \\ r &= 0.00989\Omega \\ L_m &= 0.06H \\ K_m &= 0.04329 \\ J &= 30.1N/rad.s^{-2} \\ f &= 0.1N/rad.s^{-1} \end{aligned}$$

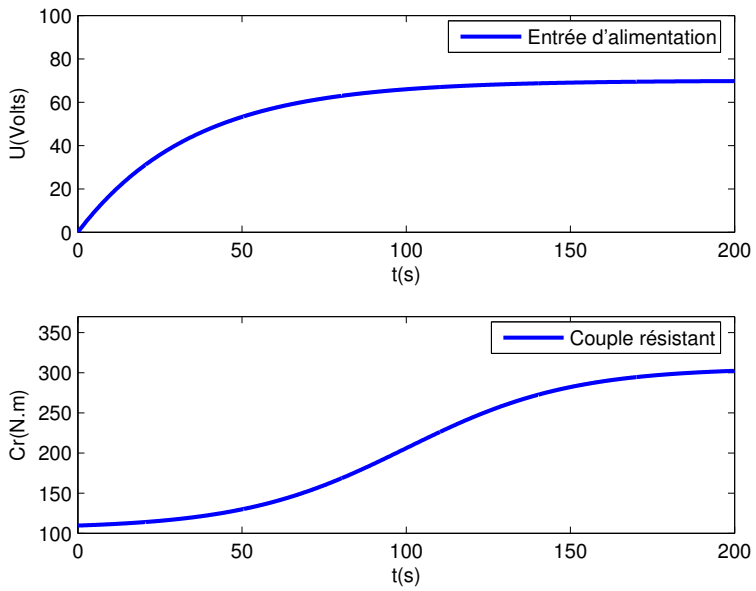


Figure 3.8 – Entrées du moteur DC série

L'inductance du rotor est très grande par rapport à celle du stator alors on a :

$$L_m >> l \Rightarrow L_t = L_m = 0.06H \tag{3.186}$$

La méthode de transformation par secteurs non linéaires permet de transformer de manière exacte le modèle (3.183)-(3.184) *en un modèle T-S suivant, dans le compact définit par* $x_2(t) \in \left[0, \frac{1.039}{K_m L_m}\right]$ *:*

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i(x) A_i x(t) + Bu(t) \tag{3.187}$$

défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0033 & 0.0345 \\ -17.3167 & -0.4123 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -0.0033 & 0 \\ 0 & -0.4123 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -0.0332 & 0 \\ 0 & 16.6667 \end{bmatrix}$$

L'entrée est définie par $u(t) = [C_r \;\; U]^T$*. Les fonctions d'activation sont données par les équations suivantes :*

$$\begin{cases} \mu_1(x(t)) = \frac{K_m L x_2(t)}{1.0390} \\ \mu_1(x(t)) = \frac{1.0390 - K_m L x_2(t)}{1.0390} \end{cases} \tag{3.188}$$

On suppose que seul le courant I est mesuré, ce qui donne l'équation de mesure suivante :

$$y(t) = x_2(t) = [0 \;\; 1] x(t) \tag{3.189}$$

La matrice C est alors donnée par $C = [0 \;\; 1]$*. La figure 3.9 montre l'évolution des états du modèle non linéaire et ceux du modèle T-S à fonctions d'activation dépendant de l'état. On remarque que le modèle T-S représente exactement le modèle non linéaire* (3.183)-(3.184).

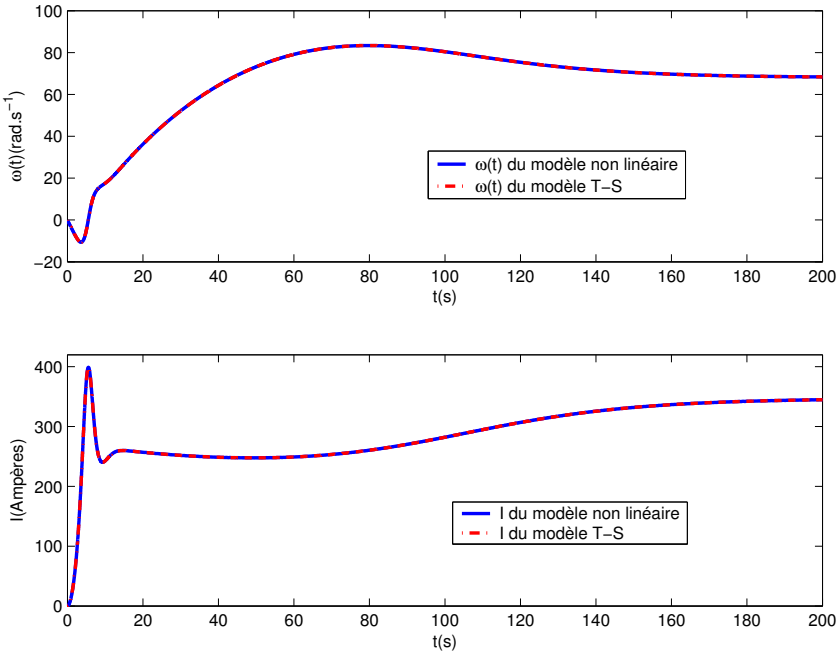


Figure 3.9 – Etats du modèle non linéaire et du modèle T-S

Pour la construction de l'observateur, on applique la méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne développée précédemment pour le cas des systèmes à temps continu, on obtient les matrices $\mathcal{A}_i, i = 1, \ldots, 8$ *:*

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0167 \\ -8.6617 & -3.6372 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0529 \\ -8.6617 & -3.6372 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0167 \\ 8.6583 & -3.6372 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0529 \\ 8.6583 & -3.6372 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0167 \\ -8.6617 & 0.4763 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0529 \\ -8.6617 & 0.4763 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{A}_7 = \begin{bmatrix} 0 & -0.0167 \\ 8.6583 & 0.4763 \end{bmatrix}, \ \mathcal{A}_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0.0529 \\ 8.6583 & 0.4763 \end{bmatrix}$$

La résolution des LMIs données dans le théorème 3.8 permet d'obtenir le gain L de l'observateur :

$$L = \begin{bmatrix} -0.3891 \\ 51.3786 \end{bmatrix} \tag{3.190}$$

Une première simulation est réalisée en l'absence de bruit de mesure afin de montrer la convergence des états de l'observateur vers ceux du système les résultats de simulation sont présentés à la figure 3.10.

Une seconde simulation est effectuée en introduisant cette fois-ci un bruit de mesure d'amplitude maximale de 10% *de l'amplitude de la sortie. L'intérêt de cette seconde application et de montrer que même si l'état* $x_2(t)$ *est mesuré, l'utilisation de l'état estimé donne de meilleures estimations des états que lorsqu'on utilise la mesure bruitée* $y(t)$ *comme variable de premisse. Pour cela, deux observateurs sont développés. Le premier suppose que les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé* $\hat{x}_2(t)$ *et utilise l'approche par théorème de la valeur moyenne et*

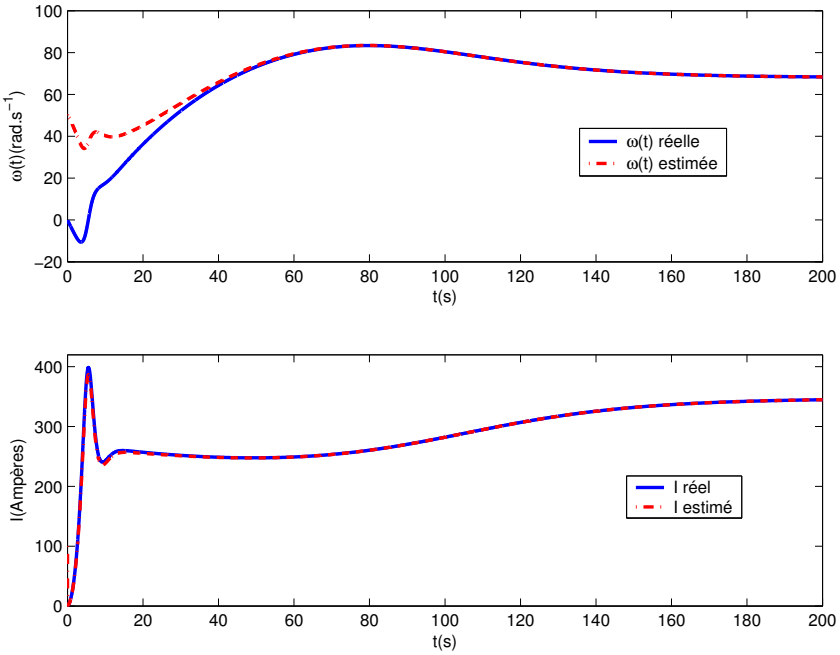


Figure 3.10 – Etats du moteur et leurs estimés

la transformation par secteurs non linéaires. Le second suppose que les fonctions d'activation dépendent de la mesure de $y(t)$ qui correspond à la mesure de $x_2(t)$ et utilise l'approche développée dans [Patton et al., 1998]. Les courbes en rouge à la figure 3.11 représentent les états estimés en considérant l'état estimé $\hat{x}_2(t)$ comme variable de premisse et les courbes en noir celles des états estimés en considérant la sortie $y(t)$ comme variable de premisse. On constate que le choix de $\hat{x}_2(t)$ comme variable de prémisse améliore l'estimation d'état, car l'observateur filtre une partie du bruit. De plus, si on réalise un placement des pôles ou si on garantit des performances $\mathcal{L}_2$ de l'observateur pour atténuer le bruit permettera à l'observateur de fournir une estimation robuste de l'état ce qui améliore encore les résultats de simulation. Il est à noter aussi que la méthode developpée par [Bergsten et Palm, 2000] et celle développée dans la section 3.3 n'admettent pas de solutions à cause des valeurs des constances de Lipschitz considérées.

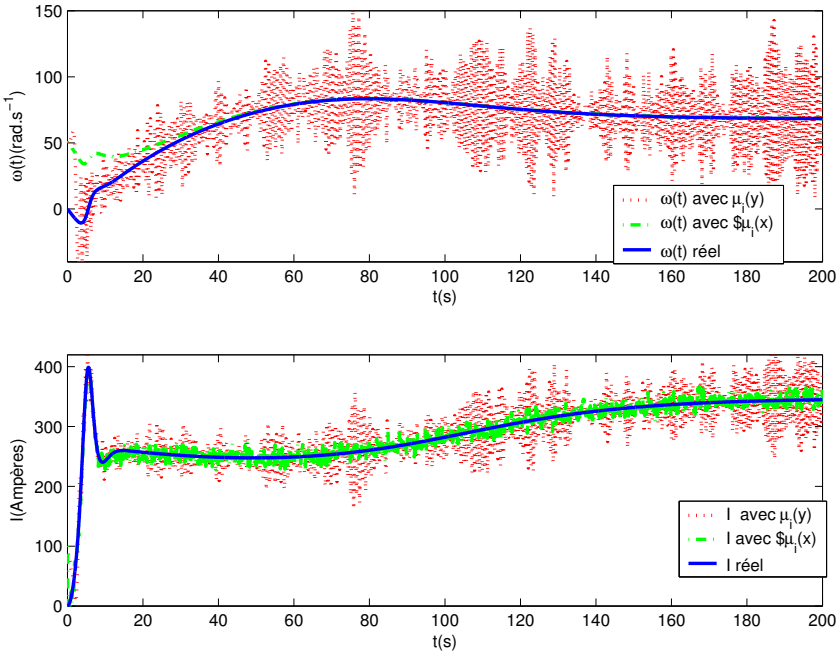


Figure 3.11 – Comparaison entre les observateurs à VDM et à VDNM

Exemple 3.7 (Exemple 2 : estimation d'état d'un avion à décollage et atterrissage vertical (VTOL))
Un avion à décollage et atterrissage vertical (Vertical TakeOff and Landing aircraf) représenté sur la figure 3.12 est un engin très intéressant, notamment sur les porte-avions où les pistes sont limitées d'où la difficulté et la dangerosité de l'atterrissage et du décollage classiques. Cela encourage les recherches dans les domaines de la commande et du diagnostic de ce type d'appareils.

Figure 3.12 – Avion VTOL JSF X-35

Modèle mathématique du VTOL aircraft *Le modèle décrit dans [Marconi et al., 2002], [De Persis et al., 2001] et au chapitre 3 de [Lozano, 2007], est donné par les équations suivantes :*

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \tag{3.191}$$
$$\dot{x}_2(t) = -\sin(\theta_1)\frac{T(t)}{M} + \cos(\theta_1)\frac{2\sin(\alpha)}{M}F(t) \tag{3.192}$$
$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) \tag{3.193}$$
$$\dot{y}_2(t) = \cos(\theta_1)\frac{T(t)}{M} + \sin(\theta_1)\frac{2\sin(\alpha)}{M}F(t) - g \tag{3.194}$$
$$\dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) \tag{3.195}$$
$$\dot{\theta}_2(t) = \frac{2l}{J}\cos(\alpha)F(t) \tag{3.196}$$

x_1, y_1 et θ_1 représentent la position horizontale et verticale du centre de gravité de l'avion et l'angle de roulis de l'avion. $\theta_1 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. $F(t)$ et $T(t)$ sont les commandes.

Les paramètres M, J, l, g et α sont des scalaires constants représentant la masse de l'avion, le moment d'inertie du centre de gravité, la distance entre les ailes et le centre de gravité, l'accélération gravitationnelle et enfin l'angle entre la direction de l'application de la force $F(t)$ et l'axe vertical.

Ce système peut se ré-écrire sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{y}_1(t) \\ y_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \\ 0 & 0 \\ \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.197}$$

où :

$$u_1(t) = \frac{T(t)}{M} \tag{3.198}$$
$$u_2(t) = \frac{2\sin(\alpha)}{M}F(t) \tag{3.199}$$
$$b = \frac{lM\cos(\alpha)}{J\sin(\alpha)} \tag{3.200}$$
$$\tag{3.201}$$

Ecriture sous la forme d'un modèle T-S à VDNM *On définit les variables de prémisse comme suit :*

$$\begin{cases} -1 \leq z_1(t) = \sin(\theta_1(t)) \leq 1 \\ -1 \leq z_2(t) = \cos(\theta_1(t)) \leq 1 \end{cases} \tag{3.202}$$

et les fonctions :

$$F_1^1(z_1(t)) = \frac{z_1(t)+1}{2} \tag{3.203}$$
$$F_1^2(z_1(t)) = \frac{1-z_1(t)}{2} \tag{3.204}$$
$$F_2^1(z_2(t)) = \frac{z_2(t)+1}{2} \tag{3.205}$$
$$F_2^2(z_2(t)) = \frac{1-z_2(t)}{2} \tag{3.206}$$
$$\tag{3.207}$$

Le système (3.197) devient :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{4} \mu_i(x(t))B_i u(t) + D \tag{3.208}$$

où :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \; B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \; B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \tag{3.209}$$

$$\mu_1(x(t)) = F_1^1(x(t)F_2^1(x(t))) \tag{3.210}$$
$$\mu_2(x(t)) = F_1^2(x(t))F_2^1(x(t)) \tag{3.211}$$
$$\mu_3(x(t)) = F_1^1(x(t)F_2^2(x(t))) \tag{3.212}$$
$$\mu_4(x(t)) = F_1^2(x(t))F_2^2(x(t)) \tag{3.213}$$

et :

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.214}$$

Commande de l'avion VTOL *Dans [De Persis et al., 2001] deux lois de commande sont proposées. Dans notre application, ces lois de commande sont modifiées pour des raisons de poursuite de trajectoire variable et sont données par :*

$$u_1(t) = \frac{k_3(y_1(t)-y_{ref}) + k4y_2(t) + 1}{cos(\theta_1(t))} \tag{3.215}$$
$$u_2(t) = k_5\left(\theta_1(t) + tan^{-1}\left(\frac{k_1(x_1(t)-x_{ref}) + k_2x_2(t)}{k_3(y_1(t)-y_{ref}) + k4y_2(t) + 1}\right)\right) \tag{3.216}$$

où :

$$k_1 = -0.0625 \tag{3.217}$$
$$k_2 = -0.45 \tag{3.218}$$
$$k_3 = -0.25 \tag{3.219}$$
$$k_4 = -0.9 \tag{3.220}$$
$$k_5 = -1 \tag{3.221}$$
$$k_6 = -1.8 \tag{3.222}$$

Le système commandé est illustré sur la figure 3.13. Les résultats de simulation liés à la com-

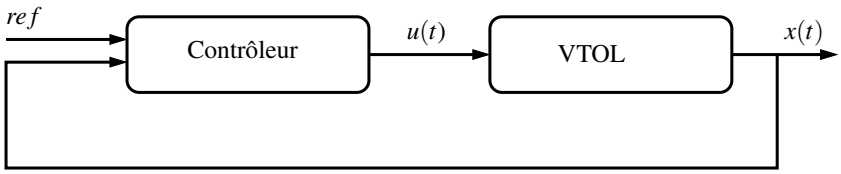


Figure 3.13 – Schéma du système commandé

mande sont donnés sur les figures 3.14, 3.15, 3.16, 3.17 et 3.18.

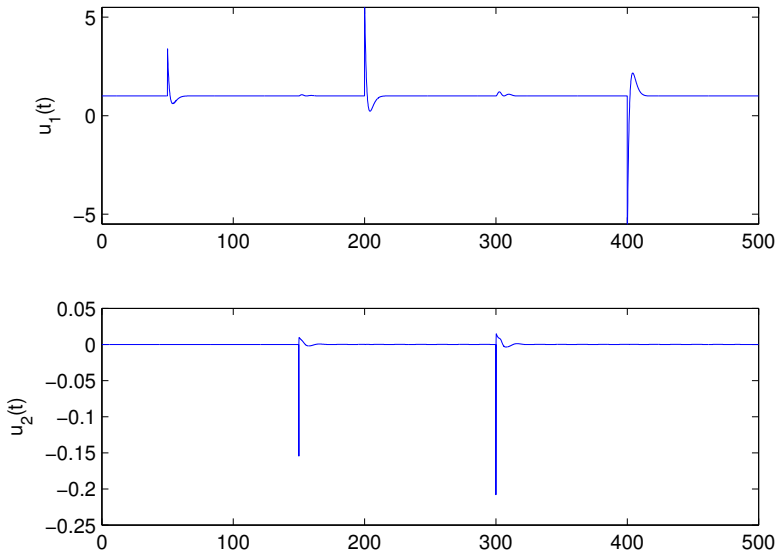


Figure 3.14 – Signaux de commande délivrés par le contrôleur

Conception de l'observateur *Considérons le modèle (3.208) et on suppose que seuls* $(x_1(t), y_1(t), \theta_1(t))$ *sont mesurables. Ce qui donne la matrice C suivante :*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.223}$$

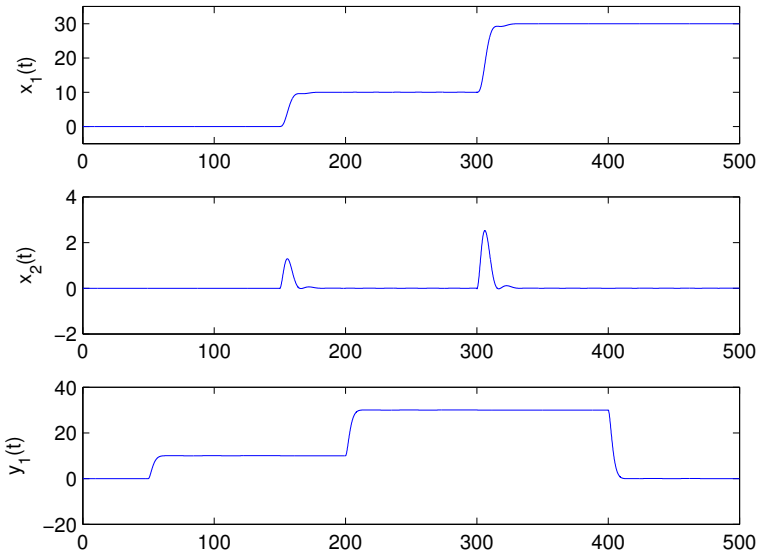


Figure 3.15 – Etats de l'avion : position horizontale, vitesse horizontale et position verticale

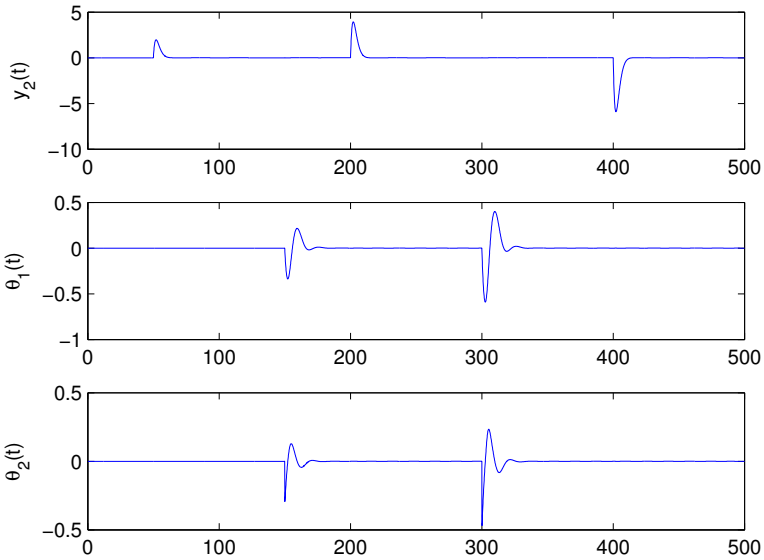


Figure 3.16 – Etats de l'avion : vitesse verticale, position angulaire et vitesse angulaire

L'observateur proposé pour ce système est donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{4} \mu_i(\hat{x}(t))B_i u(t) + D + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.224}$$

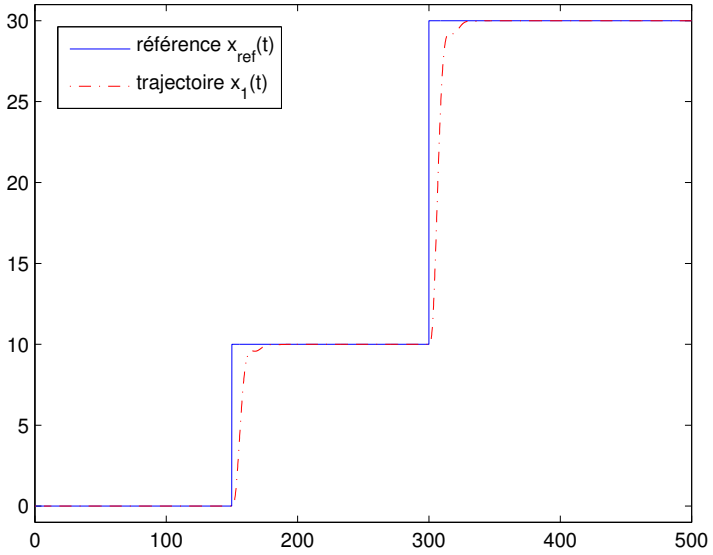


Figure 3.17 – Poursuite de la trajectoire x_{ref}

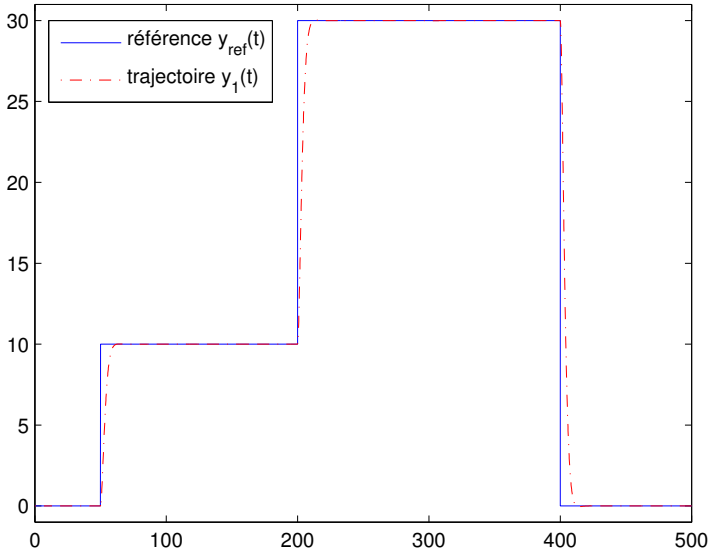


Figure 3.18 – Poursuite de la trajectoire y_{ref}

Le système (3.208) *est déjà sous la forme adaptée pour la méthode utilisant le théorème de la valeurs moyenne et la transformation par secteurs non linéaires. En utilisant cette méthode, la*

dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ *est donnée par :*

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) + \sum_{i=1}^{4} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))B_i u(t) \tag{3.225}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} h_i(z)\,(A + \mathcal{A}_i - LC)\,e(t) \tag{3.226}$$

où :

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.83 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.69 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices $(A + \mathcal{A}_i, C)$ *sont observables* $\forall \;\; i = 1, \ldots, 4$. *Afin de déterminer le gain L de l'observateur, on résout le problème LMIs suivant, permettant d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro tout en plaçant les pôles des matrices* $(A + \mathcal{A}_i - LC)$ *dans la région définie par le cercle de rayon r, de centre* $(0,0)$ *et la droite d'équation* $x = -\alpha$ *avec* $\alpha > 0$ *:*

$$(A + \mathcal{A}_i)^T P + P(A + \mathcal{A}_i) - KC - C^T K^T + 2\alpha P < 0 \tag{3.227}$$

$$\begin{pmatrix} -rP & P(A + \mathcal{A}_i) - KC \\ (A + \mathcal{A}_i)^T P - C^T K^T & -rP \end{pmatrix} < 0 \tag{3.228}$$

$$i = 1, \ldots, 4$$

Après résolution de ces LMIs avec les paramètre $\alpha = 4$ *et* $r = 5$, *on obtient le gain de l'observateur :*

$$L = P^{-1}K = \begin{pmatrix} 8.9018 & 0.7652 & -13.5366 \\ 21.7739 & 3.8185 & 193.6724 \\ 0.0004 & 8.6179 & -0.0193 \\ -0.0003 & 21.9144 & 0.0979 \\ 0.0001 & -0.0037 & 8.4247 \\ 0.0006 & -0.0161 & 21.6587 \end{pmatrix} \tag{3.229}$$

Les résultats de simulation sont présentés sur les figures 3.19, 3.20.

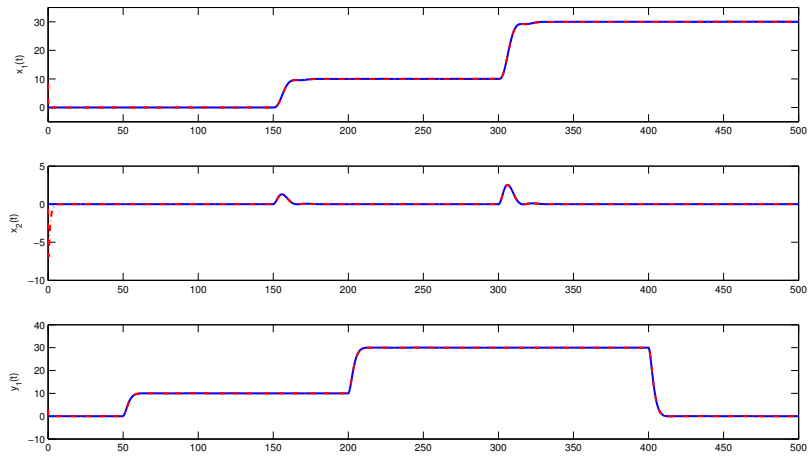


Figure 3.19 – Etats réels et leurs estimés

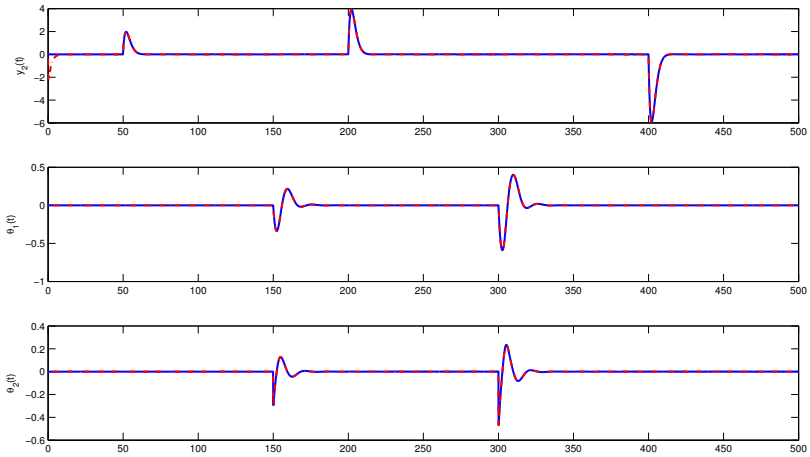


Figure 3.20 – Etats réels et leurs estimés

Extension $\mathcal{H}_\infty$

Revenons maintenant au système à temps continu donné par (3.145) En présence de perturbations, il s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i \omega(t)) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases} \tag{3.230}$$

où E_i sont les matrices de l'influence de $\omega(t)$ sur la dynamique, et W représente la matrice de l'influence de $\omega(t)$ sur l'équation de mesure. Le vecteur de perturbations est borné, i.e. $\omega(t) \in \mathcal{L}_2$. Après introduction des matrices A_0, B_0, $\bar{A}_i$ et $\bar{B}_i$, l'erreur d'estimation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A_0 - LC)e(t) + \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))\left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(E_i - LW)\omega(t) \end{aligned} \tag{3.231}$$

L'application de la méthode exposée dans la section 3.7 permet alors d'écrire l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système T-S :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))\mu_j(x(t))\left(\Psi_i e(t) + (E_j - LW)\omega(t)\right) \tag{3.232}$$

où :

$$\Psi_i = A_0 + \mathcal{A}_i - LC \tag{3.233}$$

Étant donné le système (3.230), le problème de la conception d'un observateur (3.149) robuste revient à trouver le gain L tel que :

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \quad \text{pour} \quad \omega(t) = 0 \tag{3.234}$$

$$\|e(t)\|_2 < \gamma\|\omega(t)\|_2, \quad \text{pour} \quad \omega(t) \neq 0 \tag{3.235}$$

où $\gamma > 0$ est un scalaire positif représentant le taux d'atténuation de la perturbation sur l'erreur d'estimation d'état. Pour satisfaire les contraintes (3.234) et (3.235), il est suffisant de trouver une fonction de Lyapunov $V(e(t))$ telle que :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) < 0 \tag{3.236}$$

Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes, sous forme LMI, pour la synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des perturbations $\omega(t)$.

Théorème 3.10. *Etant donné $\gamma > 0$, l'observateur robuste (3.149) pour le système (3.145) existe s'il existe deux matrices $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $M \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} A_0^T P + PA_0 + A_i^T P + PA_i - MC - C^T M^T + I & PE_j - MW \\ E_j^T P - W^T M^T & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \tag{3.237}$$

$$i = 1, \ldots, q \;\; / j = 1, \ldots, n$$

Le gain de l'observateur est donné par $L = P^{-1}M$.

Démonstration. La démonstration du théorème 3.10 résulte de la satisfaction des conditions vérifiant l'inégalité (3.236). La fonction de Lyapunov est donné par $V(e(t)) = e(t)^T P e(t)$ où $P = P^T > 0$. On obtient alors les LMIs du théorème 3.10. □

Remarque 3.5. *Noter que l'observateur optimal peut être obtenu en minimisant γ. Cela résulte en la minimisation du transfert $\mathcal{L}_2$ des perturbations vers l'erreur d'estimation d'état. Le changement de variable $\bar{\gamma} = \gamma^2$ est effectué pour conserver le caractère linéaire des inégalités matricielles.*

Tanaka et al. [1998] ont montré que le nombre r de sous-modèles influe sur l'existence d'une matrice commune P satisfaisant les LMIs proposées dans les théorèmes 3.8 et 3.9. En effet, si le nombre r est important, il devient très difficile, voire impossible, de trouver une matrice commune P. Ce conservatisme a été largement étudié, et plusieurs approches ont été proposées pour donner des conditions visant à le réduire. Parmi ces approches, on peut citer dans le cas discret, l'utilisation de fonctions de Lyapunov multi-pas [Kruszewski et al., 2008], dans le cas discret. Une autre façon de réduire ce pessimisme est la réduction du nombre de LMIs à résoudre dans le cas à temps continu. Dans les sections suivantes, ces deux approches seront utilisées dans le but de trouver des conditions moins contraignantes pour la synthèse d'observateurs pour des systèmes T-S à VDNM.

Conditions de stabilité relaxées pour les systèmes à temps discret : Approche A

Dans cette section, en se basant sur les travaux récents sur l'étude de la stabilité des système T-S [Kruzewski et al., 2008], des conditions relaxées sont proposées afin de trouver le gain L de l'observateur. L'idée est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov candidate quadratique, et au lieu de calculer la différence entre deux échantillons k et $k+1$, elle est calculée entre les échantillons k et $k+m$. Il a été prouvé dans [Kruzewski et al., 2008] que les conditions de stabilité sont moins conservatives comparées à celles proposées dans 3.9.

Étude de la stabilité relaxée Cette section traite de l'utilisation de la fonction de Lyapunov présentée précédemment pour l'étude de la stabilité. Soit le système T-S suivant :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) A_i x(k) \tag{3.238}$$

Lemme 3.3. *[Kruzewski et al., 2008] Soit le modèle T-S discret (3.238). S'il existe une matrice P symétrique et définie positive telle que les conditions :*

$$\begin{pmatrix} -P & (A_{i_{k-1}} \times \cdots \times A_{i_0})^T P \\ P(A_{i_{k-1}} \times \cdots \times A_{i_0}) & -P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.239}$$

$$i_0, \ldots, i_{k-1} = 1, \ldots, r$$

soient vérifiées alors le modèle (3.238) est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration. Voir [Kruszewski et al., 2008]. □

Exemple 3.8 (Etude de la stabilité pour $m = 1$ et $m = 3$)
Soit le système (3.238) défini par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -0.5 \\ 0 & -0.86 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0.87 & 0 \\ -0.5 & b \end{pmatrix}$$

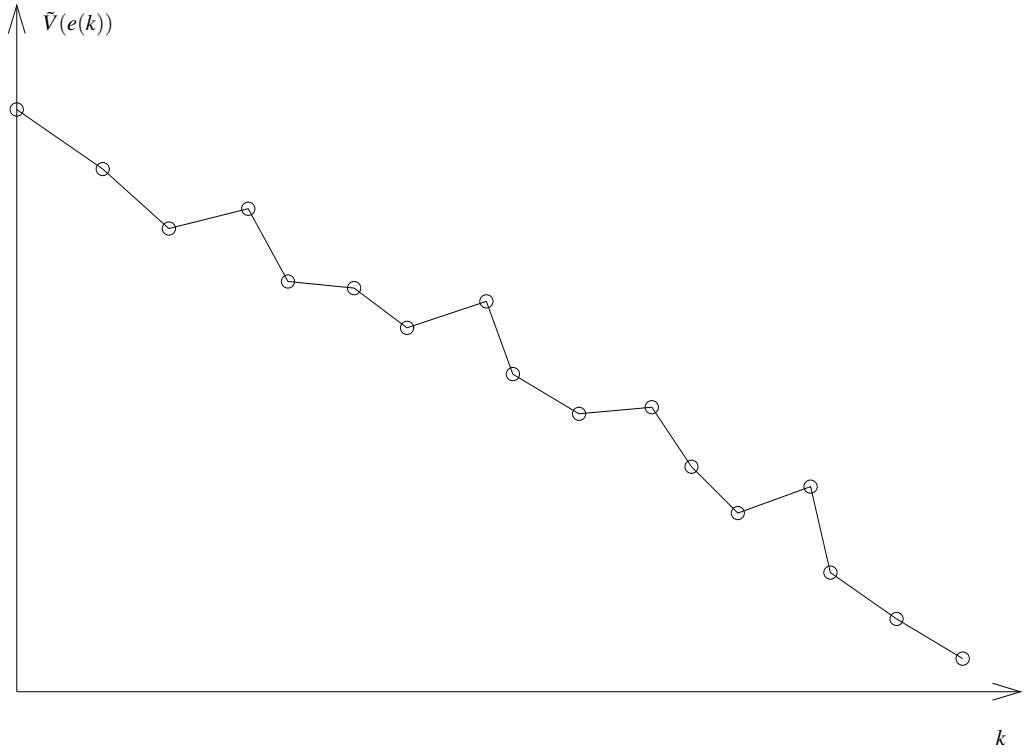


Figure 3.21 – Évolution d'une fonction candidate de Lyapunov le long d'une trajectoire d'un modèle

où $a, b \in [-1, 1]$. *L'objectif de cet exemple est de montrer l'espace de solutions donnant la stabilité du modèle* (3.238) *en fonction des paramètres a et b. La figure 3.22 montre le domaine de la stabilité prouvé pour* $m = 1$ *et* $m = 3$. *On constate une nette relaxation des conditions de stabilité du système* (3.238)*, ce qui montre l'efficacité de l'approche pour l'étude de la stabilité des systèmes T-S.*

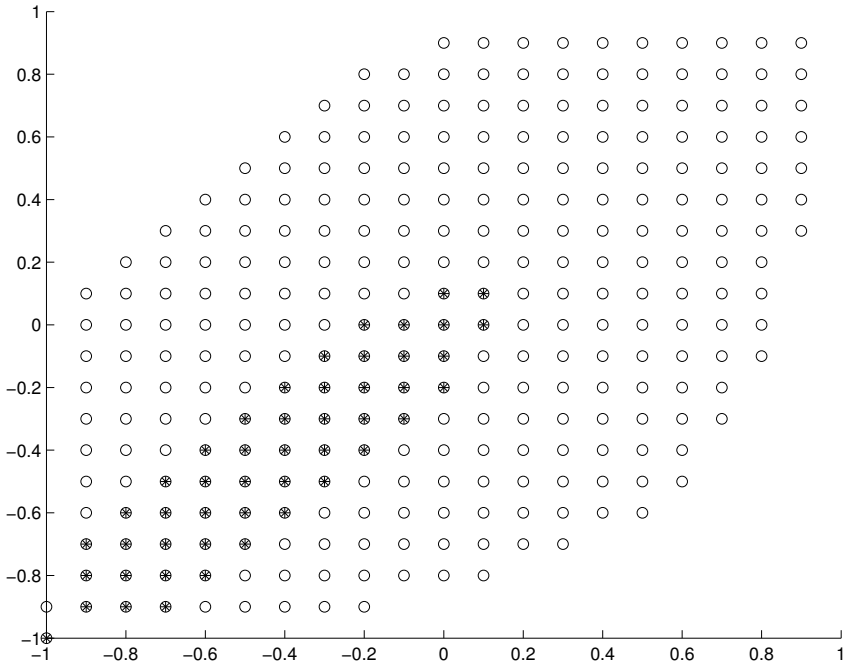


Figure 3.22 – Domaine de stabilité prouvé pour $m = 1$ et $m = 3$

Conception d'observateurs Etant donné la relaxation introduite par ce résultat, il est intéressant de l'appliquer à la synthèse d'observateur pour des systèmes T-S à VDNM. Le théorème suivant donne des conditions LMIs suffisantes pour la synthèse de l'observateur.

Théorème 3.11. *L'erreur d'estimation d'état* (3.176) *converge asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in R^{n\times n}$ et des matrices $M_j \in R^{n\times n_y}$ telles que les inégalités linéaires matricielles suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} -P & A_{i_0}^T G - C^T M^T & 0 & 0 & 0 \\ G^T A_{i_0} - MC & -G - G^T & A_{i_0}^T G - C^T M^T & 0 & 0 \\ 0 & G^T A_{i_0} - MC & -G - G^T & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & A_{i_0}^T G - C^T M^T \\ 0 & 0 & 0 & G^T A_{i_0} - MC & -G - G^T - P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.240}$$

$$i_0 \cdots i_{m-1} \in \{1, \cdots, q\}$$

Le gain de l'observateur est donné par :

$$L = G^{-T} M \tag{3.241}$$

Démonstration. Notons :

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k)) \Psi_i \tag{3.242}$$

L'évaluation de l'erreur d'estimation d'état pour m échantillons donne :

$$\begin{aligned}
&e(k+1) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k))\Psi_i e(k) = \Psi_k e(k) \\
&e(k+2) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k+1))\Psi_i e(k+1) = \Psi_{k+1}\Psi_k e(k) \\
&e(k+3) = \Psi_{k+2}\Psi_{k+1}\Psi_k e(k) \\
&\vdots \\
&e(k+m) = \Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+2}\Psi_{k+1}\Psi_k e(k)
\end{aligned} \tag{3.243}$$

Soit la fonction de Lyapunov candidate quadratique :

$$V(e(k)) = e(k)^T P e(k) \tag{3.244}$$

La différence de la fonction de Lyapunov entre les échantillons k et $k+m$ est donnée par :

$$\Delta_m V(e(k)) = e(k+m)^T P e(k+m) - e(k)^T P e(k) \tag{3.245}$$

On obtient :

$$\Delta_m V(e(k)) = e(k)^T \left((\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1}\Psi_k)^T P (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1}\Psi_k) - P \right) e(k) \tag{3.246}$$

La stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\Delta_m V(e(k)) < 0 \tag{3.247}$$

qui conduit à :

$$(\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1}\Psi_k)^T P (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1}\Psi_k) - P < 0 \tag{3.248}$$

Lemme 3.4. *[Bernussou et al., 1999] Considérons les matrices A, G, $Q = Q^T$ et $P = P^T > 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $A^T P A - Q < 0$
2. $\begin{pmatrix} -Q & A^T P \\ PA & -P \end{pmatrix} < 0$
3. $\begin{pmatrix} -Q & A^T G \\ GA & -G - G^T + P \end{pmatrix} < 0$

Après application du lemme 3.4, l'inégalité matricielle (3.248) devient :

$$\begin{pmatrix} -P & \Psi_k^T G \\ G^T \Psi_k & -G - G^T + (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1})^T P (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+1}) \end{pmatrix} < 0 \tag{3.249}$$

Soit :

$$\Gamma_i = (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+i})^T P (\Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+i}) \tag{3.250}$$

L'inégalité matricielle (3.249) devient :

$$\begin{pmatrix} -P & \Psi_k^T G \\ G^T\Psi_k & -G-G^T+\Gamma_1 \end{pmatrix} < 0 \tag{3.251}$$

L'utilisation du lemme 3.4 une seconde fois conduit à :

$$\begin{pmatrix} -P & \Psi_k^T G & 0 \\ G^T\Psi_k & -G-G^T & \Psi_{k+1}^T G \\ 0 & \Psi_{k+1}^T G & -G-G^T+\Gamma_2 \end{pmatrix} < 0 \tag{3.252}$$

Finalement, les inégalités matricielles suivantes sont obtenues :

$$\begin{pmatrix} -P & \Psi_k^T G & 0 & 0 & 0 \\ G^T\Psi_k & -G-G^T & \Psi_{k+1}^T G & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{k+1}^T G & -G-G^T & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \Psi_{k+m-1}^T G \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{k+m-1}^T G & -G-G^T-P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.253}$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation μ_j et h_i permet d'écrire :

$$\sum_{i_0=1}^{q} \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^{q} h_{i_0}(z(k)) \cdots h_{i_{m-1}}(z(k+m-1))\Omega_{i_0\cdots i_{m-1}} < 0 \tag{3.254}$$

où :

$$\Omega_{i_0\cdots i_{m-1}} = \begin{pmatrix} -P & \Psi_{i_0}^T G & 0 & 0 & 0 \\ G^T\Psi_{i_0} & -G-G^T & \Psi_{i_1}^T G & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{i_1}^T G & -G-G^T & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \Psi_{i_{m-1}}^T G \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{i_{m-1}}^T G & -G-G^T-P \end{pmatrix} \tag{3.255}$$

où :

$$\Psi_{i_0} = \mathcal{A}_{i_0} - LC \tag{3.256}$$

La variation de la fonction de Lyapunov candidate entre les échantillons k et $k+m$ est négative si :

$$\begin{pmatrix} -P & \Psi_{i_0}^T G & 0 & 0 & 0 \\ G^T\Psi_{i_0} & -G-G^T & \Psi_{i_1}^T G & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{i_1}^T G & -G-G^T & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \Psi_{i_{m-1}}^T G \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{i_{m-1}}^T G & -G-G^T-P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.257}$$

$$i_0 \cdots i_{m-1} \in \{1, \cdots, q\}$$

Afin d'écrire les conditions de stabilité ainsi obtenues sous forme LMI, on introduit le changement de variable $M = G^T L$, on obtient alors les conditions LMI garantissant la négativité de $\Delta_m V(e(k))$ données dans le théorème 3.11. □

Conditions de stabilité relaxées pour les systèmes à temps discret : Approche B

Une seconde approche pour la relaxation des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état est proposée dans cette partie. Elle est basée sur l'utilisation d'une autre famille de fonctions de Lyapunov candidates plus générale qui englobe les fonctions quadratiques. Cette famille de fonctions de Lyapunov est proposée pour l'étude de la stabilité et la stabilisation des systèmes T-S dans [Kruszewski, 2006]. L'idée est de donner plus ou moins de poids aux fonctions de Lyapunov aux différents instants. La fonction de Lyapunov est alors une moyenne pondérée de différentes fonctions de Lyapunov.

Ces fonctions sont exprimées par une somme de différentes fonctions à des instants différents :

$$\mathcal{V}_m(E_m(k)) = \sum_{i=0}^{m-1} \tilde{V}_i(e(k+i)) \tag{3.258}$$

Avec $\tilde{V}_i,\ \ i = \{0, \cdots, m-1\}$ des fonctions de Lyapunov candidates et

$$E_m(k) = \left[\ e(k)^T \quad \cdots \quad e(k+m-1)^T\ \right]^T$$

un état augmenté du modèle. On suppose que toutes les fonctions de Lyapunov $\tilde{V}_i$ ont la même structure (quadratique) :

$$\tilde{V}_i = e(k+i)^T P^{(i)} e(k+i) \tag{3.259}$$

L'étude de la variation de $\mathcal{V}_m$ et plus particulièrement la condition :

$$\Delta\mathcal{V}_m(E_m(k)) = \mathcal{V}_m(E_m(k+1)) - \mathcal{V}_m(E_m(k)) \tag{3.260}$$

autorise des croissances locales des fonctions $\tilde{V}_i$ sur un intervalle, qui peut être supérieur à k échantillons, tout en garantissant la convergence de $\mathcal{V}_m$.

Etude de la stabilité des modèles T-S Soit le système T-S représenté par :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k)) A_i x(k) \tag{3.261}$$

La variation de la fonction de Lyapunov :

$$\mathcal{V}_m(X_m) = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{V}_j(x(k+m)) \tag{3.262}$$

est donnée par :

$$\Delta\mathcal{V}_m(X_m) = \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{V}_j(x(k+j+1)) - \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{V}_j(x(k+j)) \tag{3.263}$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} x(k+j+1)^T P^{(j)} x(k+j+1) - \sum_{j=0}^{m-1} x(k+j)^T P^{(j)} x(k+j) \tag{3.264}$$

L'écriture du système en les instants $k,...,k+m$ donne :

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k))A_i x(k) && (3.265)\\
x(k+2) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k+1))A_i x(k+1) \\
&= \sum_{i_0=1}^{r}\sum_{i_1}^{r} \mu_{i_1}(x(k))\mu_{i_0=1}(x(k+1))A_{i_1}A_{i_0}x(k) && (3.266)\\
&\vdots \\
x(k+m) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k+m))A_i x(k+m-1) \\
&= \sum_{i_{m-1}=1}^{r} \dots \sum_{i_0=1}^{r} \mu_{i_{m-1}}(x(k))\mu_{i_0}(x(k+1))A_{i_{m-1}} \times \cdots \times A_{i_0}x(k) && (3.267)\\
& && (3.268)
\end{aligned}$$

On note :

$$A_{x(k)} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(k))A_i \tag{3.269}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{V}_m(X_m) &= x(k)^T\Big(\sum_{j=0}^{m-1}(*)P^{(j)}A_{x(k+j)} \times \cdots \times A_{x(k)} \\
&- \sum_{j=0}^{m-1}(*)P^{(j)}A_{x(k+j-1)} \times \cdots \times A_{x(k)}\Big)x(k) && (3.270)
\end{aligned}$$

La négativité de :

$$\Delta\mathcal{V}_m(X_m) < 0 \tag{3.271}$$

est assurée si et seulement si :

$$\sum_{j=0}^{m-1}(*)P^{(j)}A_{x(k+j)} \times \cdots \times A_{x(k)} - \sum_{j=0}^{m-1}(*)P^{(j)}A_{x(k+j-1)} \times \cdots \times A_{x(k)} < 0 \tag{3.272}$$

Après calcul, (3.272) devient :

$$(*)P^{(m-1)}A_{x(k+m-1)} \times \cdots \times A_{x(k)} + \sum_{j=0}^{m-2}(*)\left(P^{(j)} - P^{(j+1)}\right)A_{x(k+j)} \times \cdots \times A_{x(k)} - P^{(0)} < 0 \tag{3.273}$$

on pose :

$$\begin{aligned}
\Gamma_l &= (*)P^{(m-1)}A_{x(k+m-1)} \times \cdots \times A_{x(k+l)} \\
&+ \sum_{j=0}^{m-2}(*)\left(P^{(j)} - P^{(j+1)}\right)A_{x(k+j)} \times \cdots \times A_{x(k+l)} + P^{(j-1)} - P^{(j)} && (3.274)
\end{aligned}$$

$$l = 1, \ldots, m-1$$

L'inégalité (3.273) s'écrit alors sous la forme :

$$A_{x(k)}^T \Gamma_1 A_{x(k)} - P^{(0)} < 0 \tag{3.275}$$

En utilisant le lemme 3.4, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P^{(0)} & A_{x(k)}^T (G_{(.)}^{(0)})^T \\ G_{(.)}^{(0)} A_{x(k)} & -G_{(.)}^{(0)} - (G_{(.)}^{(0)})^T + P^{(0)} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.276}$$

Il a été montré dans [Kruszewski, 2006] que (3.276) $\Rightarrow$ (3.275) quel que soit le choix de la matrice $G_{(.)}^{(0)}$. En effectuant le même choix que dans [Kruszewski, 2006] dans le but de réduire le nombre de LMIs à résoudre, on pose :

$$G_{(.)}^{(0)} = G_{x(k+1),\cdots,x(k+m-1)}^{(0)} \tag{3.277}$$

On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} -P^{(0)} & A_{x(k)}^T (G_{x(k+1),\cdots,x(k+m-1)}^{(0)})^T \\ G_{x(k+1),\cdots,x(k+m-1)}^{(0)} A_{x(k)} & -G_{x(k+1),\cdots,x(k+m-1)}^{(0)} - (G_{x(k+1),\cdots,x(k+m-1)}^{(0)})^T + P^{(0)} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.278}$$

En utilisant le lemme (3.4) plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P^{(0)} & A_{x(k)}^T (G_{(.)}^{(0)})^T & & 0 \\ G_{(.)}^{(0)} A_{x(k)} & -G_{(.)}^{(0)} - (G_{(.)}^{(0)})^T + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & A_{x(k)}^T (G^{(0)})^T \\ 0 & & G^{(k-1)} A_{x(k)} & -G^{(0)} - (G^{(m-1)})^T + P^{(0)} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.279}$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation permet d'écrire (3.279) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} -P^{(0)} & A_{i_0}^T \left(G_{i_1,\cdots,i_{m-1}}^{(0)}\right)^T & & 0 \\ G_{i_1,\cdots,i_{m-1}}^{(0)} A_{i_0} & -G_{i_1,\cdots,i_{m-1}}^{(0)} - \left(G_{i_1,\cdots,i_{m-1}}^{(0)}\right)^T + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & G^{(k-1)} A_{i_0} & -G^{(0)} - \left(G^{(m-1)}\right)^T + P^{(0)} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.280}$$

Théorème 3.12. *[Kruszewski, 2006] S'il existe des matrices $P^{(i)}$ symétriques et définies positives et des matrices $G_{i_{l+1},\ldots,i_{m-1}}^{(l)}$ $l = 1, \ldots, m-1$ telles que les LMIs (3.280) soient vérifiées, alors le système T-S (3.261) est globalement asymptotiquement stable.*

Exemple 3.9 (**Comparaison des approches A et B**)
On considère l'exemple précédent défini par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & -0.5 \\ 0 & -0.86 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0.95 & 0 \\ -0.5 & b \end{pmatrix}$$

où $a, b \in [-1, 1]$. *On résout les LMI des théorèmes 3.12 et 3.3 avec le paramètre* $m = 2$. *La figure 3.23 montre que le domaine d'existence de solutions prouvant la stabilité du système en utilisant la première méthode est inclus dans celui utilisant la seconde. Par conséquent, sur cet exemple, l'approche B est moins conservative par rapport à l'approche A.*

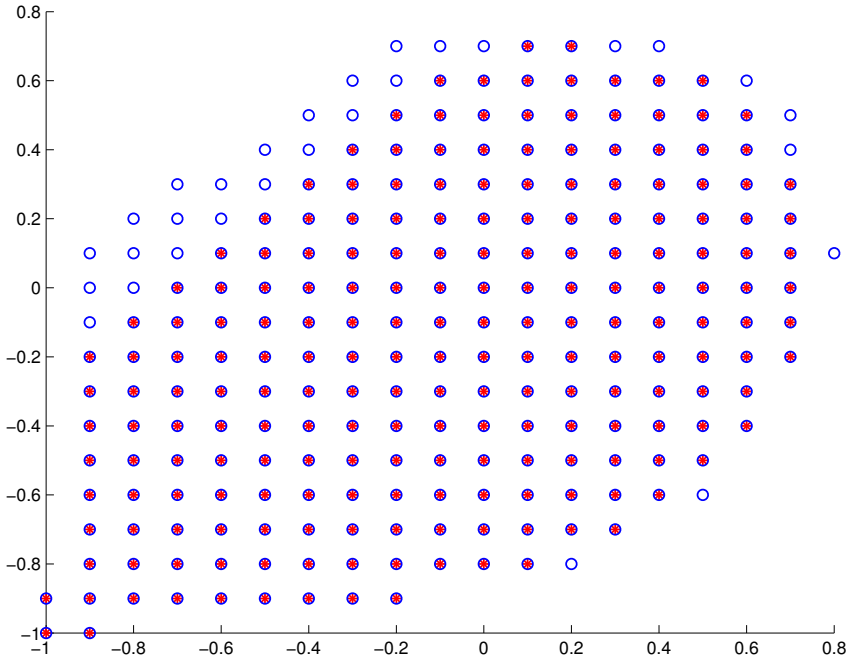


Figure 3.23 – Comparaison des deux approches A et B pour $k = 3$(* Approche A – o Aproche B)

Conception d'observateur Dans cette partie, le résultat de l'étude de la stabilité relaxée présenté dans le paragraphe précédent est appliqué à la conception d'observateur pour l'obtention de conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état (3.176) moins contraignantes.

Reprenons la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.176) obtenue après l'utilisation du théorème de la valeur moyenne et des transformations par secteurs non linéaires :

$$e(k+1) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k))\Psi_i e(k) = \Psi_k e(k) \tag{3.281}$$

Soit la fonction de Lyapunov $\mathcal{V}_m$ (3.258) définie par les fonctions élémentaires :

$$\tilde{V}_i = e(k+i)^T P^{(i)} e(k+i) \tag{3.282}$$

Il est facile d'écrire :

$$\begin{aligned}
&e(k+1) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k))\Psi_i e(k) = \Psi_k e(k) \\
&e(k+2) = \sum_{i=1}^{q} h_i(z(k+1))\Psi_i e(k+1) = \Psi_{k+1}\Psi_k e(k) \\
&e(k+3) = \Psi_{k+2}\Psi_{k+1}\Psi_k e(k) \\
&\vdots \\
&e(k+m) = \Psi_{k+m-1}\cdots\Psi_{k+2}\Psi_{k+1}\Psi_k e(k)
\end{aligned} \tag{3.283}$$

On définit

$$E_m(k) = \left[\begin{array}{ccc} e(k)^T & \cdots & e(k+m-1)^T \end{array}\right]^T$$

Les variations de la fonctions de Lyapunov sont :

$$\Delta V_m(E_m(t)) = \sum_{j=0}^{m-1} e(k+j+1)P^{(j)}e(k+j+1) - \sum_{j=0}^{m-1} e(k+j)P^{(j)}e(k+j) \tag{3.284}$$

On obtient alors la condition de stabilité suivante :

$$\sum_{j=0}^{m-1} (*)P^{(j)}\Psi_{(k+i)} \times \cdots \times \Psi_{(k)} - \sum_{j=0}^{m-1} (*)P^{(j)}\Psi_{(k+i-1)} \times \cdots \times \Psi_{(k)} - P^{(0)} < 0 \tag{3.285}$$

après développement des sommes, on obtient :

$$(*)P^{(m-1)}\Psi_{(k+m-1)} \times \cdots \times \Psi_{(k)} + \sum_{j=0}^{m-2} (*)\left(P^{(j)} - P^{(j+1)}\right)\Psi_{(k+i)} \times \cdots \times \Psi_{(k)} - P^{(0)} < 0 \tag{3.286}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
\Gamma_l &= (*)P^{(m-1)}\Psi_{(k+m-1)} \times \cdots \times \Psi_{(k+j)} \\
&+ \sum_{j=0}^{m-2} (*)\left(P^{(j)} - P^{(j+1)}\right)\Psi_{(k+i)} \times \cdots \times \Psi_{(k+j)} + P^{(l-1)} - P^{(l)}
\end{aligned} \tag{3.287}$$

$$l = 1, \ldots, m-1$$

L'inégalité (3.286) s'écrit alors :

$$\Psi_k^T \Gamma_1 \Psi_k - P^{(0)} < 0$$

En utilisant le lemme 3.4, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cc} -P^{(0)} & (G\Psi_k)^T \\ G\Psi_k & -G - G^T + \Gamma_1 \end{array}\right) < 0 \tag{3.288}$$

En utilisant le lemme 3.4 plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{pmatrix} -P^{(0)} & A_{i_0}^T G - C^T M^T & & & & 0 \\ GA_{i_0} - MC & -G - G^T + P^{(0)} - P^{(1)} & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & & \ddots & -G - G^T + P^{(m-2)} - P^{(m-1)} & A_{i_{(m-1)}}^T G - C^T M^T \\ & & & & GA_{i_{(m-1)}} - MC & -G - G^T + P^{(m-1)} \end{pmatrix} < 0 \tag{3.289}$$

Le théorème suivant peut être alors énoncé.

Théorème 3.13. *S'il existe des matrices $P^{(i)}$ symétriques et définies positives et des matrices G et M telles que les LMIs (3.289) soient vérifiées, alors l'erreur d'estimation d'état converge asymptotiquement vers zéro. Le gain de l'observateur est donné par $L = G^{-1}M$.*

3.3.6 Discussion

Les approches proposées dans cette partie permettent de trouver les gains de l'observateur permettant d'assurer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état. La première méthode nécessite des conditions de Lipschitz et la stabilité du système. La seconde méthode vise à réduire le conservatisme des conditions proposées dans la première approche par réduction du nombre de LMIs à résoudre pour trouver les gains de l'observateur. Cette approche est moins restrictive comparée aux approches proposées dans [Raghavan et Hedrick, 1994] et [Rajamani, 1998], pour les systèmes lipschitziens, et à l'approche publiée dans [Bergsten et Palm, 2000], pour les systèmes T-S à VDNM, en ce qui concerne la constante de Lipschitz maximale admissible. Cependant, la condition de Lipschitz telle qu'elle est utilisée, vise à dominer le terme non linéaire $\Delta(x(t), \hat{x}(t), u(t))$, ce qui est très restrictif. L'exploitation de cette condition sous sa forme équivalente permettra de réduire le conservatisme. La troisième approche, donc, utilise une autre formulation de l'hypothèse de Lipschitz, le théorème de la valeur moyenne et l'approche par transformation par secteurs non linéaires afin de ramener l'équation régissant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système T-S autonome dont la stabilité relaxée est largement étudiée dans la littérature. Un autre point très intéressant est l'utilisation de la nouvelle méthode de transformation par secteurs non linéaires introduite dans [Nagy et al., 2009a]. En effet comme il été expliqué à la fin de la section 3.3.3, cette nouvelle méthode introduit plusieurs degrés de liberté sur le choix des modèles locaux et des fonctions d'activation. Lors de la ré-écriture des dynamiques des erreurs d'estimation d'état (3.153) et (3.156) (pour les cas à temps continu et discret) sous les formes T-S données par (3.175) et (3.176), le choix des paramètres supplémentaires introduits permet alors de satisfaire la condition d'observabilité des nouveaux modèles locaux c-à-d l'observabilité des matrices $(\mathcal{A}_i + A_0, C)$ nécessaire pour l'existence d'une solution aux LMIs proposées.

Les méthodes proposées jusque là peuvent ne s'appliquer qu'à des systèmes ayant des fonctions d'activation vérifiant la condition de Lipschitz. Bien que, généralement, les modèles non linéaires transformés en modèles T-S à VDNM aient souvent des fonctions d'activation de type Lipschitz, il est intéressant d'élargir l'étude au cas où les fonctions d'activation sont quelconques afin de proposer une méthode applicable à une classe de systèmes plus générale. De plus, le domaine de solution des LMIs proposées décroît en augmentant les valeurs des constantes de Lipschitz et de la borne sur l'entrée. La partie suivante sera consacrée à la réduction du conservatisme lié aux hypothèses de Lipschitz, en utilisant les techniques $\mathcal{L}_2$. Les approches que l'on va exposer par la suite ne nécessitent pas des fonctions d'activation de type Lipschitz. Par conséquent, ces méthodes sont applicables à une classe plus générale de systèmes T-S.

3.4 Observateur $\mathcal{L}_2$

L'erreur d'estimation d'état est générée par un système dépendant de l'erreur $e(t)$, de l'état $x(t)$ et de l'entrée $u(t)$. Les méthodes proposées précédemment sont basées sur des hypothèses de Lipschitz qui ne sont pas toujours vérifiées. Cette section est consacrée au développement d'autres méthodes qui n'utilisent pas l'hypothèse de Lipschitz. Ces méthodes consistent à écrire la dynamique de l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système incertain où les incertitudes sont bornées ou même connues (constantes). Les gains de l'observateur sont alors déterminés de manière à assurer la stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état, tout en assurant une atténuation $\mathcal{L}_2$ du transfert de l'influence des incertitudes vers l'erreur d'estimation d'état.

L'étude porte sur les systèmes ayant la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{3.290}$$

3.4.1 Approche par incertitudes bornées

Dans cette section, nous considérons un système non linéaire à temps continu décrit par le modèle T-S (3.290) avec des fonctions d'activation qui dépendent de l'état du système. Sous l'hypothèse $C_1 = C_2 = ... = C$ et $D_i = 0$, nous obtenons le multi-modèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.291}$$

qui peut être ré-écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) + (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{3.292}$$

On définit alors les matrices suivantes :

$$\Delta A(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))A_i = \mathcal{A}\Sigma_A(t)E_A \tag{3.293}$$

$$\Delta B(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))B_i = \mathcal{B}\Sigma_B(t)E_B \tag{3.294}$$

où :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \end{bmatrix}, \ \Sigma_A(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_2 I_n \end{bmatrix}, \ E_A = \begin{bmatrix} I_n & \dots & I_n \end{bmatrix}^T \tag{3.295}$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_r \end{bmatrix}, \ \Sigma_B = \begin{bmatrix} \delta_1 I_m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_2 I_m \end{bmatrix}, \ E_B = \begin{bmatrix} I_m & \dots & I_m \end{bmatrix}^T \tag{3.296}$$

où :

$$\delta_i(t) = \mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tag{3.297}$$

Les fonctions d'activation vérifient la propriété de convexité, on peut donc écrire :

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1$$

d'où :

$$\Sigma_A(t)^T \Sigma_A(t) \leq I$$
$$\Sigma_B(t)^T \Sigma_B(t) \leq I$$

Le système (3.290) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((A_i + \Delta A(t))x(t) + (B_i + \Delta B(t))u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{3.298}$$

avec $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ sont définies en (3.295) et (3.296). Finalement, le système (3.290) à variables de décision non mesurables est ramené à un multimodèle incertain à variables de décision connues (3.298). Pour le système incertain (3.298), on propose le multi-observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.299}$$

Les gains L_i doivent être déterminés de manière à assurer la convergence asymptotique de l'état estimé $\hat{x}(t)$ vers l'état réel du système $x(t)$.

On considère l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left((A_i - L_i C)e(t)\right) + \Delta A(t)x(t) + \Delta B(t)u(t) \tag{3.300}$$

On constate que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état dépend aussi de $u(t)$ et de $x(t)$. Donc le problème de synthèse de l'observateur peut être décrit comme la recherche des gains L_i pour que :

- les matrices $(A_i - L_i C)$ soient stables
- l'erreur $e(t)$ soit le moins sensible possible à $x(t)$ et $u(t)$.

On définit le vecteur d'état augmenté $e_a(t) = [e(t)^T \;\; x(t)^T]^T$, on obtient le système augmenté suivant :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(x(t)) \left(\bar{A}_{ij}(t)e_a(t) + \bar{B}_j(t)u(t)\right) \tag{3.301}$$

où :

$$\bar{A}_{ij}(t) = \begin{bmatrix} \Phi_i & \Delta A(t) \\ 0 & A_j \end{bmatrix}, \;\; \bar{B}_j(t) = \begin{bmatrix} \Delta B(t) \\ B_j \end{bmatrix}, \;\; \Phi_i = A_i - L_i C \tag{3.302}$$

Théorème 3.14. *Le système (3.300) est stable et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers l'erreur d'estimation est borné par γ, s'il existe deux matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$, et des scalaires positifs λ_2, λ_3 et $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes soient vérifiées $\forall \;\; i,j \in \{1,..,r\}$:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & 0 & 0 & P_1\mathcal{A} & P_1\mathcal{B} \\ 0 & A_j^T P_2 + P_2 A_j + \lambda_2 E_A^T E_A & P_2 B_j & 0 & 0 \\ 0 & B_j^T P_2 & -\bar{\gamma} I + \lambda_3 E_B^T E_B & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^T P_1 & 0 & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ \mathcal{B}^T P_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.303}$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T P_1 + P_1 A_i - K_i C - C^T K_i^T + I \tag{3.304}$$

Les gains de l'observateur sont calculés par :

$$L_i = P_1^{-1} K_i \tag{3.305}$$

Le taux d'atténuation γ est obtenu par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{3.306}$$

Démonstration. La preuve du théorème 3.14 est établie en utilisant la fonction quadratique de Lyapunov suivante :

$$V(e(t)) = e_a(t)^T P e_a(t), \;\; P = P^T > 0 \tag{3.307}$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\dot{V}(e(t)) = \dot{e}_a(t)^T P e_a(t) + e_a(t)^T P \dot{e}_a(t) \tag{3.308}$$

En utilisant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.301), on obtient :

$$\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x})\mu_j(x) \left(e_a^T \bar{A}_{ij}^T P e_a + e_a^T P \bar{A}_{ij} e_a + u^T \bar{B}_{ij}^T P e_a + e_a^T P \bar{B}_{ij} u\right) \tag{3.309}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = He_a(t) \tag{3.310}$$

où :

$$H = [I_n \;\; 0] \tag{3.311}$$

L'erreur d'estimation d'état converge vers zéro et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné par γ si la condition suivante est vérifiée :

$$\dot{V}(e(t)) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0 \tag{3.312}$$

En substituant $\dot{V}(e(t))$ (3.309) et $z(t)$ (3.310) dans (3.312), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(x)(e_a(t)^T \bar{A}_{ij}^T P e_a(t) + e_a^T P \bar{A}_{ij} e_a(t) + u(t)^T \bar{B}_{ij}^T P e_a(t) + e_a(t)^T P \bar{B}_{ij} u(t) \\ + e_a(t)^T H^T H e_a(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t)) < 0 \tag{3.313}$$

La mise sous forme matricielle de l'inégalité (3.313) donne :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(x(t)) \begin{bmatrix} e_a(t) \\ u(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + H^T H & P\bar{B}_{ij} \\ \bar{B}_{ij}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a(t) \\ u(t) \end{bmatrix} < 0 \tag{3.314}$$

Compte tenu de la propriété des fonctions d'activation μ_i, l'inégalité (3.314) est négative si :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T P + P\bar{A}_{ij} + H^T H & P\bar{B}_{ij} \\ \bar{B}_{ij}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \;\; \forall i, j \in \{1, .., r\} \tag{3.315}$$

Choisissons une matrice P définie comme suit :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tag{3.316}$$

où $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont deux matrices symétriques et définies positives. Le choix de la forme de la matrice P est dicté par l'objectif visé d'obtenir des LMIs. En utilisant les définitions des matrices $\bar{A}_{ij}$, $\bar{B}_{ij}$ (3.302), H (3.311) et P (3.316), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^T P_1 + P_1\Phi_i + I & P_1\Delta A(t) & P_1\Delta B(t) \\ \Delta A^T(t)P_1 & A_j^T P_2 + P_2 A_j & P_2 B_j \\ \Delta B^T(t)P_1 & B_j^T P_2 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.317}$$

L'inégalité matricielle (3.317) ne peut pas être résolue à cause des termes $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ qui dépendent de t. Afin d'utiliser le lemme 3.2, une transformation de l'inégalité (3.315) permet de séparer les termes constants des termes variables dans le temps. On obtient alors :

$$\begin{bmatrix} \Phi_i^T P_1 + P_1\Phi_i + I & 0 & 0 \\ 0 & A_j^T P_2 + P_2 A_j & P_2 B_j \\ 0 & B_j^T P_2 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \mathcal{Q}(t)^T + \mathcal{Q}(t) < 0 \tag{3.318}$$

où :

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & P_1\Delta A(t) & P_1\Delta B(t) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Compte tenu de la définition de $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$, la matrice $\mathcal{Q}(t)$ s'écrit :

$$\mathcal{Q}(t) = \begin{bmatrix} 0 & P_1\mathcal{A} & P_1\mathcal{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_A(t)E_A & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_B(t)E_B \end{bmatrix} \tag{3.319}$$

En utilisant le lemme 3.2, et en choisissant la matrice Ω sous la forme suivante :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I \end{bmatrix} \tag{3.320}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(t)^T + \mathcal{Q}(t) \quad < \quad & \begin{bmatrix} 0 & P_1\mathcal{A} & P_1\mathcal{B} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^T P_1 & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^T P_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ + \quad & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_A^T \Sigma_A(t)^T & 0 \\ 0 & 0 & E_B^T \Sigma_B(t)^T \end{bmatrix} \Omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_A(t)E_A & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_B(t)E_B \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.321}$$

Après calculs et utilisation des propriétés des termes $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$, on obtient :

$$\mathcal{Q}(t)^T + \mathcal{Q}(t) < \begin{bmatrix} \lambda_2^{-1} P_1 \mathcal{A}\mathcal{A}^T P_1 + \lambda_3^{-1} P_1 \mathcal{B}\mathcal{B}^T P & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 E_A^T E_A & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 E_B^T E_B \end{bmatrix} \tag{3.322}$$

En substituant (3.322) dans (3.318), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Xi & 0 & 0 \\ 0 & A_j^T P_2 + P_2 A_j + \lambda_2 E_A^T E_A & P_2 B_j \\ 0 & B_j^T P & -\gamma^2 I + \lambda_3 E_B^T E_B \end{bmatrix} < 0 \tag{3.323}$$

où :

$$\Xi = (A_i - L_i C)^T P_1 + P_1 (A_i - L_i C) + \lambda_2^{-1} P_1 A A^T P_1 + \lambda_3^{-1} P_1 B B^T P + I \tag{3.324}$$

L'inégalité (3.323) n'est pas linéaire par rapport aux variables P_1, P_2, L_i, λ_2, λ_3 et γ. Pour pouvoir la résoudre avec les logiciels de résolution LMIs existants, il faut donc la linéariser. En utilisant le complément de Schur ainsi que les changements de variables suivants :

$$K_i = P_1 L_i \tag{3.325}$$

$$\bar{\gamma} = \gamma^2 \tag{3.326}$$

On obtient alors les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers 0 sous forme LMI données dans le théorème 3.14. □

Remarque 3.6. *Le résultat obtenu dans cette partie peut être généralisé facilement aux systèmes à sorties non linéaires par rapport à l'état et à l'entrée (i.e. $C_1 \neq C_2 \neq \cdots \neq C_r$ et $D_1 \neq D_2 \neq \cdots \neq D_r \neq 0$).*

Exemple 3.10 (**Estimation d'état**)
Soit le système (3.291) *défini par les matrices suivantes :*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La résolution des LMIs du théorème 3.14, avec minimisation du gain du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$, fournit les résultats suivants :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 70.15 & 11.72 \\ 41.32 & -19.42 \\ -57.63 & 17.04 \end{bmatrix}, \; L_2 = \begin{bmatrix} 95.35 & -28.57 \\ 48.80 & -29.24 \\ -72.68 & 42.54 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.00 & 0.12 \\ 0.00 & 0.46 & 0.22 \\ 0.12 & 0.22 & 0.30 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 5.41 & 3.01 & -3.52 \\ 3.07 & 2.54 & -2.60 \\ -3.52 & -2.60 & 7.82 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = 9.40, \;\; \lambda_3 = 0.68, \;\; \gamma = 0.0949$$

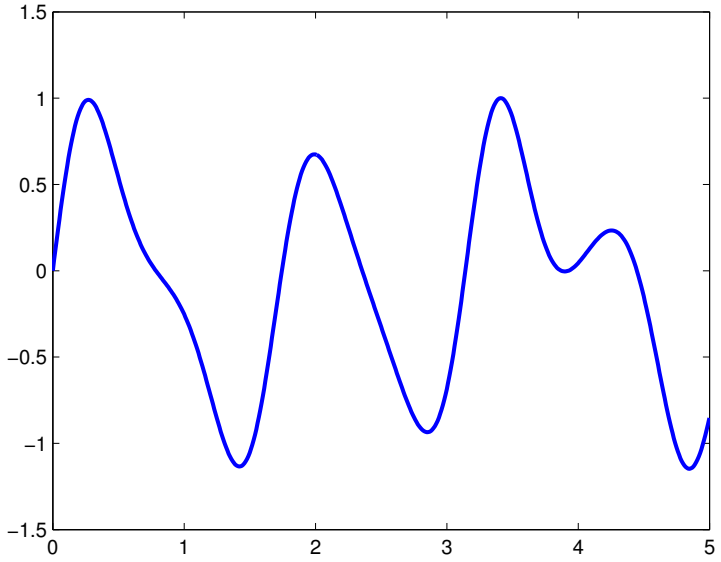


Figure 3.24 – Entrée de commande $u(t)$ du système

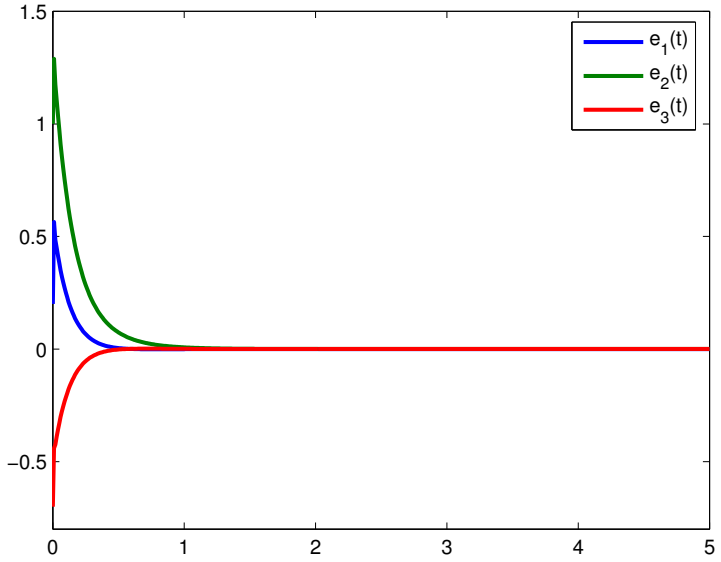


Figure 3.25 – Evolution dans le temps de l'erreur d'estimation d'état

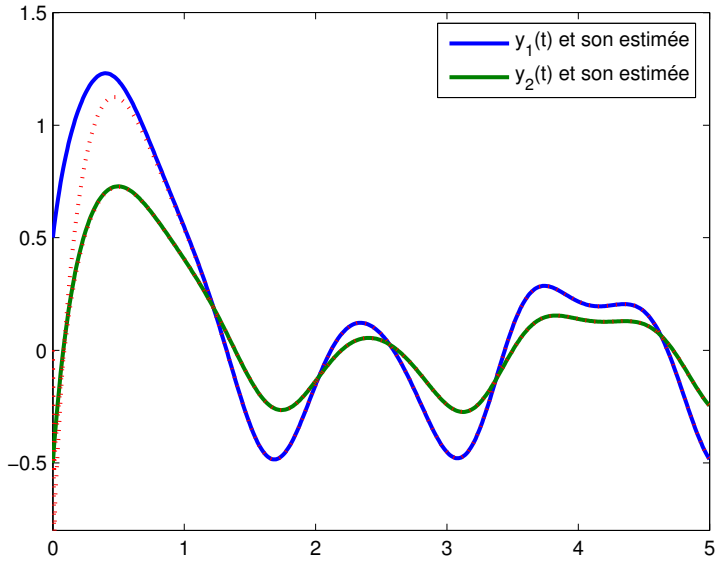


Figure 3.26 – Sorties réelles (traits continus) et estimées (pointillés)

Une autre façon d'écrire le modèle T-S à VDNM sous forme d'un système T-S incertain est proposée dans la prochaine section. L'idée est d'utiliser la propriété de somme convexe des fonctions d'activation au lieu de les borner. Les termes d'incertitudes ainsi obtenus sont des matrices constantes et connues. De plus, la sortie du système est considérée non linéaire par rapport à l'état et à l'entrée.

3.4.2 Approche par "incertitudes constantes"

On considère le système T-S à VDNM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{3.327}$$

Notons $\hat{x}(t)$ l'état estimé. Par ajout et soustraction du terme :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{3.328}$$

on obtient le système équivalent suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) + \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{3.329}$$

Afin d'alléger les équations, la notation suivante est définie :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \Leftrightarrow \sum_{i,j=1}^{r} \tag{3.330}$$

Grâce à la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, l'équation suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))X_i = \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))(X_i - X_j) \tag{3.331}$$

où $X_i \in \{A_i, B_i, C_i, D_i\}$. Avec la définition suivante :

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j \tag{3.332}$$

le système (3.329) peut être réécrit sous la forme équivalente :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))((A_j + \Delta A_{ij})x(t) + (B_j + \Delta B_{ij})u(t)) \tag{3.333}$$

La sortie du système peut être également ré-écrite de la même manière sous la forme :

$$y(t) = \sum_{i,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_k(\hat{x}(t))\left((C_k + \Delta C_{ik})x(t) + (D_k + \Delta D_{ik})u(t)\right) \tag{3.334}$$

Le système (3.333)-(3.334) est décrit, à présent, sous la forme d'un système incertain mais les termes notés ΔX_{ij} sont complètement connus et représentés par des matrices constantes.

L'observateur proposé est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum\limits_{j=1}^{r} \mu_j(\hat{x}(t))\left(A_j\hat{x}(t) + B_j u(t) + L_j(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k(\hat{x}(t))\left(C_k\hat{x}(t) + D_k u(t)\right) \end{cases} \tag{3.335}$$

En prenant en compte (3.2), l'équation (3.335) peut être multipliée par $\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))$ pour obtenir :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\left(A_j\hat{x}(t) + B_j u(t) + L_j(y(t) - \hat{y}(t))\right) \tag{3.336}$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_k(\hat{x}(t))\left(C_k\hat{x}(t) + D_k u(t)\right) \tag{3.337}$$

Les fonctions d'activation $\mu_i(x)$ apparaissent artificiellement dans (3.336-3.337) bien qu'elles ne soient pas disponibles puisque $x(t)$ n'est pas connu. Cet artifice n'empêche pas d'utiliser l'observateur à condition qu'aucun terme ne soit indexé sur i dans (3.336-3.337).

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.338}$$

En utilisant (3.333), (3.334), (3.336) et (3.337), la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est décrite par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x(t))(\Phi_{jk}e(t) + \Gamma_{ijk}x(t) + S_{ijk}u(t)) \tag{3.339}$$

où :

$$\begin{aligned} \Phi_{jk} &= A_j - L_j C_k \\ \Gamma_{ijk} &= \Delta A_{ij} - L_j \Delta C_{ik} \\ S_{ijk} &= \Delta B_{ij} - L_j \Delta D_{ik} \\ & i,j,k \in \{1,\dots,r\} \end{aligned}$$

Soit l'état augmenté défini par $\tilde{x}(t) = [e(t)^T \;\; x(t)^T]^T$. Nous pouvons définir le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x)\left(\mathcal{M}_{ijk}\tilde{x}(t) + \mathcal{B}_{ijk}u(t)\right) \tag{3.340}$$

$$e(t) = H\tilde{x}(t) \tag{3.341}$$

où :

$$\mathcal{M}_{ijk} = \begin{bmatrix} \Phi_{jk} & \Gamma_{ijk} \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \ \mathcal{B}_{ijk} = \begin{bmatrix} \Sigma_{ijk} \\ B_i \end{bmatrix}, \ H = [I_n \ \ 0] \tag{3.342}$$

L'objectif est alors de trouver les gains L_j pour garantir la stabilité de (3.340) tout en atténuant l'effet de l'entrée $u(t)$ sur $e(t)$.

Théorème 3.15. *Le système (3.340) est stable et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné, s'il existe des matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des gains $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et un scalaire positif $\bar{\gamma}$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} X_{1jk} & \Theta_{ijk} & \Psi_{ijk} \\ \Theta_{ijk}^T & X_{2i} & P_2 B_i \\ \Psi_{ijk}^T & B_i^T P_2 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \ \ \forall (i,j,k) \in \{1,...,r\}^3 \tag{3.343}$$

où :

$$X_{1jk} = A_j^T P_1 + P_1 A_j - K_j C_k - C_k^T K_j^T + I \tag{3.344}$$

$$X_{2i} = A_i^T P_2 + P_2 A_i \tag{3.345}$$

$$\Theta_{ijk} = P_1 \Delta A_{ij} - K_j \Delta C_{ik} \tag{3.346}$$

$$\Psi_{ijk} = P_1 \Delta B_{ij} - K_j \Delta D_{ik} \tag{3.347}$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$L_j = P_1^{-1} K_j \tag{3.348}$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{3.349}$$

Démonstration. Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t), \ \ P = P^T > 0 \tag{3.350}$$

sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) = \dot{\tilde{x}}(t)^T P \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P \dot{\tilde{x}}(t) \tag{3.351}$$

Par substitution de $\dot{\tilde{x}}$ (3.340) dans (3.351), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}(t)) &= \sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x(t))(\tilde{x}(t)^T(\mathcal{M}_{ijk}^T P + P\mathcal{M}_{ijk})\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P \mathcal{B}_{ijk} u(t) \\ &+ u(t)^T \mathcal{B}_{ijk}^T P \tilde{x}(t)) \end{aligned} \tag{3.352}$$

L'objectif est d'atténuer l'effet de l'entrée $u(t)$ sur $z(t)$:

$$\frac{\|z(t)\|_2}{\|u(t)\|_2} < \gamma, \ \ \|u(t)\|_2 \neq 0, \gamma > 0 \tag{3.353}$$

tout en garantissant la stabilité du système augmenté. Comme déjà mentionné, il faut satisfaire la condition suivante :

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0 \tag{3.354}$$

Par substitution de (3.352) et (3.341) dans (3.354), on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x(t))(\tilde{x}(t)^T(\mathcal{M}_{ijk}^T P + P\mathcal{M}_{ijk})\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P\mathcal{B}_{ijk}u(t) \\ + u(t)^T \mathcal{B}_{ijk}^T P\tilde{x}(t)) + \tilde{x}(t)^T H^T H\tilde{x}(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t) < 0\end{aligned} \tag{3.355}$$

Compte tenu de la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x(t))(\tilde{x}(t)^T(\mathcal{M}_{ijk}^T P + P\mathcal{M}_{ijk})\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T P\mathcal{B}_{ijk}u(t) \\ + u(t)^T \mathcal{B}_{ijk}^T P\tilde{x}(t) + \tilde{x}(t)^T H^T H\tilde{x}(t) - \gamma^2 u(t)^T u(t)) < 0\end{aligned} \tag{3.356}$$

qui peut être mis sous la forme :

$$\sum_{i,j,k=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\mu_k(x(t))\tilde{r}^T \Xi_{ijk}\tilde{r}(t) < 0 \tag{3.357}$$

où

$$\begin{aligned}\Xi_{ijk} &= \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ijk}^T P + P\mathcal{M}_{ijk} + H^T H & P\mathcal{B}_{ijk} \\ \mathcal{B}_{ijk}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \\ \tilde{r}(t) &= \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

La condition suffisante pour que (3.356) soit vérifiée est :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{ijk}^T P + P\mathcal{M}_{ijk} + H^T H & P\mathcal{B}_{ijk} \\ \mathcal{B}_{ijk}^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall (i,j,k) \in \{1,\ldots,r\}^3 \tag{3.358}$$

Afin d'obtenir des conditions sous forme LMI, P peut être choisie de la manière suivante :

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \tag{3.359}$$

En utilisant les définitions $\mathcal{M}_{ijk}$ et $\mathcal{B}_{ijk}$ données dans (3.342), et après application des changements de variables suivants :

$$K_j = P_1 G_j \tag{3.360}$$

et :

$$\bar{\gamma} = \gamma^2 \tag{3.361}$$

on obtient de (3.358) les conditions LMI (3.343) données dans le théorème 3.15. □

Dans plusieurs cas pratiques, la sortie du système est donnée par un ensemble de capteurs mesurant une partie des variables d'état. Considérons que le placement des capteurs ne dépend pas du point de fonctionnement du système d'où $C_1 = C_2 = ... = C_r = C$. On considère également que les matrices d'action de l'entrée sur la sortie sont nulles i.e. $D_1 = D_2 = ... = D_r = 0$. La sortie du système s'écrit alors sous la forme :

$$y(t) = Cx(t) \tag{3.362}$$

Dans ce cas, le système (3.340) devient :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \sum_{i,j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t))\big(\mathcal{M}_{ij}\tilde{x}(t) + \mathcal{B}_{ij}u(t)\big) \tag{3.363}$$

$$e = H\tilde{x}(t) \tag{3.364}$$

où :

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{bmatrix} A_j - L_jC & \Delta A_{ij} - L_jC \\ 0 & A_i \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta B_{ij} \\ B_i \end{bmatrix} \tag{3.365}$$

La version simplifiée du théorème 3.15 est, donnée par le corollaire 3.1.

Corollaire 3.1. *Le système (3.363) est stable et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné, s'il existe des matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des gains $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et un scalaire positif $\bar{\gamma}$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} X_{1j} & \Theta_{ij} & \Psi_{ij} \\ \Theta_{ij}^T & X_{2i} & P_2B_i \\ \Psi_{ij}^T & B_i^TP_2 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.366}$$

$$\forall (i,j) \in \{1,...,r\}^2$$

où :

$$X_{1j} = A_j^TP_1 + P_1A_j - K_jC - C^TK_j^T + I \tag{3.367}$$

$$X_{2i} = A_i^TP_2 + P_2A_i \tag{3.368}$$

$$\Theta_{ij} = P_1\Delta A_{ij} - K_jC \tag{3.369}$$

$$\Psi_{ij} = P_1\Delta B_{ij} \tag{3.370}$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$L_j = P_1^{-1}K_j \tag{3.371}$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{3.372}$$

Placement des pôles

Pour une meilleure estimation de l'état, les performances de l'observateur peuvent être améliorées par un placement des pôles dans une région particulière du plan complexe. Pour les modèles de Takagi-Sugeno, il est nécessaire de placer les pôles de tous les sous-modèles. Les amélioration visées sont : le taux de décroissance qui assurera une rapidité de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro et la limitation des parties imaginaires des valeurs propres pour atténuer le phénomène oscillatoire. Par conséquent, les pôles du système générant l'erreur d'estimation d'état sont placés dans la région LMI $S(\alpha,\beta)$ qui représente l'intersection entre un disque de centre 0 et de rayon β et la bande définie par $\Re(z) < -\alpha$. Le corollaire 2 donne les conditions de convergence de l'observateur en prenant en compte le placement des pôles.

Corollaire 3.2. *Le système (3.363) est stable, le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $u(t)$ vers $e(t)$ est borné et les pôles du système générant $e(t)$ sont dans $S(\alpha,\beta)$, s'il existe des matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des gains $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et un scalaire positif $\bar{\gamma}$, tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} X_{1j} & \Theta_{ij} & \Psi_{ij} \\ \Theta_{ij}^T & X_{2i} & P_2B_i \\ \Psi_{ij}^T & B_i^TP_2 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0, \tag{3.373}$$

$$\begin{bmatrix} -\beta P & A_j^TP - C^TK_j^T \\ PA_j - K_jC & -\beta P \end{bmatrix} < 0 \tag{3.374}$$

$$A_j^TP + PA_j - C^TK_j^T - K_jC + 2\alpha P < 0 \tag{3.375}$$

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,r\}^2$$

où X_{1j}, X_{2i}, Θ_{ij} et Ψ_{ij} sont définis dans le corollaire 3.1. Les gains de l'observateur sont calculés à partir de l'équation suivante :

$$G_j = P_1^{-1}K_j \tag{3.376}$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{3.377}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle présentée pour le théorème 3.15 en incluant le placement des pôles publié dans [Chilali et Gahinet, 1996]. □

Exemple 3.11 (Estimation d'état)
Considérons le système T-S défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1-\mu_1(x) = \frac{1+\tanh(x_1)}{2} \end{cases} \tag{3.378}$$

Un bruit de mesure aléatoire borné par 1 *est ajouté à la sortie du système. En appliquant le corollaire 3.2 avec placement des pôles dans la région LMI* $S(\alpha,\beta)$ *définie par* $\alpha = 0.1$ *et* $\beta = 10$*, les matrices suivantes sont obtenues :*

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1.3908 & 0.5812 & -0.8439 \\ 0.5812 & 1.4846 & 0.5670 \\ -0.8439 & 0.5670 & 2.4417 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4.5731 & 1.2142 & -3.1630 \\ 1.2142 & 2.3173 & -1.3307 \\ -3.1630 & -1.3307 & 3.5383 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -1.556 & 8.556 \\ 6.919 & -8.956 \\ -1.684 & 6.472 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -1.556 & 8.556 \\ 6.919 & -8.956 \\ -1.684 & 6.472 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation trouvé, après minimisation de $\bar{\gamma}$ *sous les contraintes LMIs du corolaire 3.2, est :*

$$\gamma = 0.3162$$

Les résultats de simulation illustrés sur la figure 3.27 montrent la convergence de l'erreur d'estimation d'état.

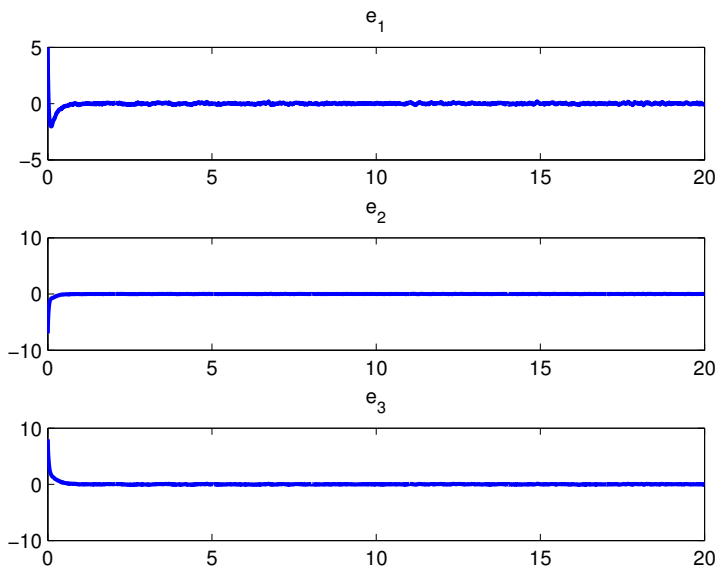


Figure 3.27 – Erreurs d'estimation d'état

Les deux méthodes présentées précédemment en utilisant l'approche $\mathcal{L}_2$ sont basées sur la ré-écriture du modèle du système T-S à VDNM sous la forme d'un modèle T-S à VDE incertain. L'approche que nous proposons dans la suite consiste en une transformation du système sous forme d'un système T-S à VDE avec des perturbations dues à la non-mesurabilité des variables de décision.

3.4.3 Approche par atténuation des perturbations

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{3.379}$$

Après ré-ecriture du modèle (3.1), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t) + \omega_1(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t) + \omega_2(t)) \end{cases} \tag{3.380}$$

où :

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \omega_2(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{3.381}$$

ce qui correspond un modèle T-S perturbé, à variables de décision mesurables (état estimé du système). L'observateur proposé est alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{3.382}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(\hat{x}(t))\left((A_i - L_i C_j)\hat{x}(t) + \omega_1(t) - L_i \omega_2(t)\right) \tag{3.383}$$

Hypothèse 3.7. *Dans cette section nous considérons que les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

1. *La stabilité entrée-état du système* (3.379) *est vérifiée.*
2. *L'entrée du système est bornée :* $|u(t)| < \rho$

D'après les hypothèse 3.7, les termes $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ sont bornés, ce qui permet d'appliquer les techniques $\mathcal{L}_2$ pour assurer à la fois la stabilité du système (3.383) et la minimisation de l'influence de $\omega(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état, avec $\omega(t) = [\omega_1(t)^T \quad \omega_2(t)^T]^T$. Le théorème suivant présente des conditions sous forme LMI pour la synthèse des gains L_i de l'observateur (3.382) assurant la stabilité de (3.383) et la minimisation de l'effet de $\omega(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état $e(t)$.

Théorème 3.16. *Le système (3.383), générant l'erreur d'estimation d'état, est stable et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers l'erreur d'estimation est borné par γ, s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et un scalaire positif $\bar{\gamma}$ tels que les LMIs suivantes soient vérifiées $\forall \; i,j \in \{1,..,r\}$:*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i - K_i C_j - C_j^T K_i^T + I & P & -K_i \\ P & -\bar{\gamma} I & 0 \\ -K_i^T & 0 & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.384}$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$L_i = P^{-1} K_i \tag{3.385}$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{3.386}$$

Démonstration. La démonstration est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique. Après calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov et substitution de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état décrite par (3.383), on utilise le critère suivant :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \gamma^2 \omega(t)^T \omega(t) < 0 \tag{3.387}$$

Après calcul et utilisation des changements de variables $K_i = PL_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$ ainsi que l'application du complément de Schur, on obtient les LMIs du théorème 3.16. □

3.4.4 Discussion

Les approches par incertitudes bornées, par incertitudes constantes et par atténuation de perturbations fournissent des conditions LMIs permettant de trouver les gains de l'observateur. Les approches 1 et 2 permettent de trouver des gains stabilisant le système générant l'erreur d'estimation d'état tout en minimisant le transfert $\mathcal{L}_2$ de l'entrée de commande $u(t)$ vers l'erreur d'estimation d'état. D'après l'exemple, on s'aperçoit que le taux d'atténuation obtenu avec la première méthode ($\gamma = 0.0949$) est inférieur à celui obtenu avec l'approche 2 ($\gamma = 0.3162$). Noter que les deux approches précédentes ne peuvent pas être comparées à la troisième, concernant le taux d'atténuation, puisque cette dernière minimise le transfert $\mathcal{L}_2$ non pas de l'entrée de commande $u(t)$ mais d'une autre quantité $\omega(t) = \sum_{i=1}^{r}(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t))$. Par contre, sur les exemples traités, cette dernière est moins conservative et admet des solutions même si les deux premières approches échouent. Il est également possible de réduire le pessimisme des conditions données dans les théorèmes 3.14 et 3.16 par l'utilisation de différentes approches re relaxations proposées dans la littérature, parmi celles-ci l'approche proposée dans [Tuan et al., 2001] qui permet une réduction du conservatisme sans ajout de variables supplémentaires.

3.5 Estimation d'état des systèmes T-S à VDNM incertains

Cette section traite de l'estimation d'état robuste des systèmes T-S à VDNM incertains. Les incertitudes considérées sont bornées et varient dans le temps. Nous avons choisi de ne présenter que les résultats relatifs à l'extension de la méthode proposée dans le paragraphe 3.3.1 et celle proposée dans le paragraphe 3.4.3. Toutefois, il est facile de généraliser les autres méthodes proposées à l'estimation d'état en présences d'incertitudes de modélisation et de bruit de mesure. Considérons le système incertain suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left((A_i + \Delta A_i(t))x(t) + (B_i + \Delta B_i(t))u(t) \right) \\ y(t) = Cx(t) + D\omega(t) \end{cases} \tag{3.388}$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta A_i(t) &= M_i^A \Sigma_A(t) N_i^A \\ \Delta B_i(t) &= M_i^B \Sigma_B(t) N_i^B \end{aligned} \tag{3.389}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) &\leq I, \quad \forall t \\ \Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) &\leq I, \quad \forall t \end{aligned} \tag{3.390}$$

$\omega(t)$ est un bruit de mesure et borné.

3.5.1 Première approche

Après l'introduction de les matrices A_0, B_0, $\bar{A}_i$ et $\bar{B}_i$ définies par :

$$A_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} A_i \tag{3.391}$$

$$B_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} B_i \tag{3.392}$$

$$A_i = \overline{A}_i + A_0 \tag{3.393}$$

$$B_i = \overline{B}_i + B_0 \tag{3.394}$$

on obtient une autre formulation du système (3.388) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \bar{A}_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left((\bar{A}_i + \Delta A_i)x(t) + (\bar{B}_i + \Delta B_i)u \right) \\ y(t) = Cx(t) + D\omega(t) \end{cases} \tag{3.395}$$

Nous sommes intéressés par la conception d'un observateur pour estimer l'état du système présenté ci-dessus. L'observateur a la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + \bar{A}_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t)) \right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.396}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{3.397}$$

Sa dynamique est ré-écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((A_0 - G_iC)e(t) - G_iD\omega(t)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(\Delta A_i x(t) + \Delta B_i u(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^{r} (\overline{A}_i \delta_i(t) + \bar{B}_i \Delta_i(t)) \end{aligned} \tag{3.398}$$

où :

$$\delta_i(t) = \mu_i(x(t))x(t) - \mu_i(\hat{x}(t))\hat{x}(t) \tag{3.399}$$

$$\Delta_i(t) = (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))u(t) \tag{3.400}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état peut être écrite sous la forme équivalente :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(\hat{x}(t))(A_0 - G_iC)e(t) + H_i(t)\tilde{\omega}(t) + \overline{A}_i \delta_i(t) + \bar{B}_i \Delta_i(t)) \tag{3.401}$$

où :

$$H_i(t) = \begin{bmatrix} -\mu_i(\hat{x}(t))G_iD & \mu_i(x(t))\Delta A_i & \mu_i(x(t))\Delta B_i \end{bmatrix} \tag{3.402}$$

$$\tilde{\omega}(t)^T = [\omega(t)^T \;\; x(t)^T \;\; u(t)^T] \tag{3.403}$$

Hypothèse 3.8. *Dans cette section, on fait les hypothèses suivantes :*

- ***A1.*** *La stabilité entrée-état du système (3.388) est vérifiée.*
- ***A2.*** *Les fonctions d'activation $\mu_i(x)$ sont de type Lipschitz :*

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| < \gamma_1 |x - \hat{x}|$$

- ***A3.*** *Les fonctions $\mu_i(x)x$ sont Lipschitz :*

$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| < \gamma_2 |x - \hat{x}|$$

- ***A4.*** *L'entrée $u(t)$ du système est bornée :*

$$|u(t)| \leq \beta$$

A partir des hypothèses (A1) et (A4), le vecteur d'état $x(t)$ du système ainsi que le terme $\tilde{\omega}(t)$ sont bornés.

Théorème 3.17. *L'observateur optimal (3.396) pour le système T-S à VDNM incertain (3.388) est obtenu par la minimisation de $\bar{\mu}$ sous les contraintes LMIs suivantes par rapport aux variables $P = P^T > 0$, $Q = Q^T > 0$, K_i et les scalaires positifs $\bar{\mu}$, λ_1, λ_2, ε_2, ε_3, ε_4 :*

$$\min_{P,Q,K_i,\lambda_1,\lambda_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\sigma,\bar{\mu}} \quad \bar{\mu}$$

s.c.

$$A_0^T P + PA_0 - K_i C - C^T K_i^T < -Q \tag{3.404}$$

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & P\overline{A}_i & PB_i & PM_i^A & PM_i^B & K_i D & \gamma_1 \sigma I \\ * & M_{1i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & M_{2i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & M_{3i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.405}$$

$$i \in \{1, ..., r\}$$

$$\sigma - \lambda_2 \beta > 0 \tag{3.406}$$

où :

$$M = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + 1) I \tag{3.407}$$

$$M_{1i} = (-\bar{\mu} + \varepsilon_2) I \tag{3.408}$$

$$M_{2i} = -\bar{\mu} I + \varepsilon_3 (N_i^A)^T N_i^A \tag{3.409}$$

$$M_{3i} = -\bar{\mu} I + \varepsilon_4 (N_i^B)^T N_i^B \tag{3.410}$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de l'équation :

$$G_i = P^{-1} K_i \tag{3.411}$$

et le taux d'atténuation est donné par :

$$\mu = \sqrt{\bar{\mu}} \tag{3.412}$$

Démonstration. Pour démontrer la convergence de l'erreur d'estimation d'état $e(t)$, on procède de la même manière que les démonstrations précédentes, en considérant une fonction de Lyapunov quadratique candidate. Après calcul de sa dérivée par rapport au temps et substitution de l'équation de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état (3.401), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(\hat{x}(t)) e(t)^T (\Phi_i^T P + P\Phi_i) e(t) + e(t)^T P\overline{A}_i \delta_i(t) + e(t)^T PB_i \Delta_i(t) \\ &+ \delta_i(t)^T \overline{A}_i^T Pe(t) + \Delta_i^T B_i^T Pe(t) + e(t)^T PH_i \tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i^T Pe(t)) \end{aligned} \tag{3.413}$$

où :

$$\Phi_i = (A_0 - G_i C) \tag{3.414}$$

L'utilisation du lemme 3.2 et des hypothèses **A1**, **A2**, **A3** et **A4** permet d'établir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} e(t)^T P\bar{A}_i\delta_i(t) + \delta_i(t)^T\bar{A}_i^T Pe(t) &< \lambda_1\delta_i(t)^T\delta_i(t) + \lambda_1^{-1}e(t)^T P\bar{A}_i\bar{A}_i^T Pe(t) \\ &< \lambda_1\gamma_2^2 e(t)^T e(t) + \lambda_1^{-1}e(t)^T P\bar{A}_i\bar{A}_i^T Pe(t) \end{aligned} \tag{3.415}$$

$$\begin{aligned} e(t)^T P\bar{B}_i\Delta_i(t) + \Delta_i(t)^T\bar{B}_i^T Pe(t) &< \lambda_2\Delta_i(t)^T\Delta_i(t) + \lambda_2^{-1}e(t)^T P\bar{B}_i\bar{B}_i^T Pe(t) \\ &< \lambda_2\gamma_1^2\beta^2 e(t)^T e(t) + \lambda_2^{-1}e(t)^T P\bar{B}_i\bar{B}_i^T Pe(t) \end{aligned} \tag{3.416}$$

En substituant (3.415) et (3.416) dans la dérivée de la fonction de Lyapunov (3.413), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^{r}(e(t)^T(\mu_i(\hat{x})(\Phi_i^T P + P\Phi_i) + (\lambda_1\gamma_2^2 + \lambda_2\gamma_1^2\beta^2)I + \lambda_1^{-1}P\bar{A}_i\bar{A}_i^T P \\ +\lambda_2^{-1}PB_iB_i^T P)e(t) + e(t)^T PH_i\tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i^T Pe(t)) \end{aligned} \tag{3.417}$$

Dans l'objectif d'atténuer l'effet de $\tilde{\omega}(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état, on utilisera l'approche $\mathcal{L}_2$ [Boyd et al., 1994]. On cherche à garantir :

$$\frac{\|e(t)\|_2}{\|\tilde{\omega}(t)\|_2} < \mu, \quad \mu > 0 \tag{3.418}$$

Le système générant l'erreur d'estimation d'état est stable et le gain $\mathcal{L}_2$ noté μ du transfert de $\tilde{\omega}(t)$ vers $e(t)$ est borné, si :

$$\dot{V}(e(t)) + e(t)^T e(t) - \mu^2\tilde{\omega}(t)^T\tilde{\omega} < 0 \tag{3.419}$$

Par substitution de $\dot{V}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{r}(e(t)^T(\mu_i(\hat{x}(t))(\Phi_i^T P + P\Phi_i) + (\lambda_1\gamma_2^2 + \lambda_2\gamma_1^2\beta^2 + 1)I \\ + \quad & \lambda_1^{-1}P\bar{A}_i\bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1}P\bar{B}_i\bar{B}_i^T P)e(t) + e(t)^T PH_i\tilde{\omega}(t) \\ + \quad & \tilde{\omega}(t)^T H_i^T Pe(t) - \mu^2\tilde{\omega}(t)^T\tilde{\omega}(t)) < 0 \end{aligned} \tag{3.420}$$

La négativité de (3.420) est garantie si $\forall i \in \{1, ..., r\}$:

$$\sum_{i=1}^{r}\mu_i(\hat{x}(t))(\Phi_i^T P + P\Phi_i) < -Q \tag{3.421}$$

et :

$$\begin{aligned} e(t)^T(-Q + (\lambda_1\gamma_2^2 + \lambda_2\gamma_1^2\beta^2 + 1)I + \lambda_1^{-1}P\overline{A}_i\overline{A}_i^T P + \lambda_2^{-1}PB_iB_i^T P)e(t) \\ +e(t)^T PH_i\tilde{\omega}(t) + \tilde{\omega}(t)^T H_i^T Pe(t) - \mu^2\tilde{\omega}(t)^T\tilde{\omega}(t) < 0 \end{aligned} \tag{3.422}$$

où $Q = Q^T > 0$. Les fonctions d'activation satisfont la propriété de somme convexe, donc (3.421) est vérifiée si les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$(A_0 - G_iC)^T P + P(A_0 - G_iC) < -Q, \quad \forall i \in \{1, ..., r\} \tag{3.423}$$

La négativité de la forme quadratique en $(e^T \quad \tilde{\omega}^T)^T$ du membre gauche de l'inégalité (3.422) est garantie si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & PH_i \\ H_i^T P & -\mu^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.424}$$

où :

$$\Psi_i = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 + 1)I + \lambda_1^{-1} P\bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P\bar{B}_i \bar{B}_i^T P$$

En utilisant la définition de la matrice H_i (3.402), l'inégalité (3.424) peut être écrite comme suit :

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu^2 I \end{bmatrix} + W_i + W_i^T < 0 \tag{3.425}$$

où :

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_i(\hat{x})PG_iD & \mu_i(x)P\Delta A_i & \mu_i(x)P\Delta B_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.426}$$

qui peut être décomposée, en tenant en compte des définitions de ΔA_i et ΔB_i (3.389) :

$$W_i = \begin{bmatrix} 0 & PG_iD & PM_i^A & PM_i^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_i(x)I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_i^A(t)N_i^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_i^B(t)N_i^B \end{bmatrix} \tag{3.427}$$

où $F_i^A(t) = \mu_i(x)\Sigma_A(t)$ et $F_i^B(t) = \mu_i(x)\Sigma_B(t)$. Les propriétés de somme convexe et des termes $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \mu_i(\hat{x})^T \mu_i(\hat{x}) &\leq 1 \\ F_i^A(t)^T F_i^A(t) &\leq I \\ F_i^B(t)^T F_i^B(t) &\leq I \end{aligned}$$

Définissons Ω comme suit :

$$\Omega = diag(\varepsilon_1 I, \varepsilon_2 I, \varepsilon_3 I, \varepsilon_4 I)$$

$$\varepsilon_1 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_3 > 0, \quad \varepsilon_4 > 0$$

En utilisant le lemme 3.2 et les définitions (3.389)-(3.390), on obtient, après calculs, les inégalités matricielles suivantes :

$$W_i + W_i^T < \begin{bmatrix} \Xi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 (N_i^A)^T N_i^A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 (N_i^B)^T N_i^B \end{bmatrix} \tag{3.428}$$

où :

$$\Xi_i = \varepsilon_2^{-1} P G_i D D^T G_i^T P + \varepsilon_3^{-1} P M_i^A (M_i^A)^T P + \varepsilon_4^{-1} P M_i^B (M_i^B)^T P$$

En substituant (3.428) dans (3.425) on obtient :

$$\begin{bmatrix} \Theta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{2i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{3i} \end{bmatrix} < 0 \tag{3.429}$$

$$\Theta_i = -Q + (\lambda_1 \gamma_2^2 + \lambda_2 \gamma_1^2 \beta^2 + 1) I + \lambda_1^{-1} P \overline{A}_i \overline{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P + \varepsilon_2^{-1} P G_i D D^T G_i^T P \\ + \varepsilon_3^{-1} P M_i^A (M_i^A)^T P + \varepsilon_4^{-1} P M_i^B (M_i^B)^T P \tag{3.430}$$

où M_{1i}, M_{2i} et M_{3i} sont données dans (3.408)-(3.410).

Afin d'éliminer les non-linéarités dans (3.430), le complément de Schur ainsi que le changement de variable $K_i = PG_i$ sont utilisés. De plus, on considère que la constante μ, représentant le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\tilde{\omega}(t)$ vers $e(t)$, dans (3.429) est une variable à minimiser. Donc, on effectue également le changement de variable $\bar{\mu} = \mu^2$.

Notons que la borne de l'entrée peut également être considérée comme variable à optimiser.

Finalement la convergence de l'erreur d'estimation d'état est assurée si les inégalités (3.423) et (3.429) sont vérifiées. Après utilisation du complément de Schur dans (3.429), on obtient les LMIs données dans le théorème 3.17. □

Exemple 3.12 (**Estimation d'état robuste vis-à-vis d'incertitudes de modélisation**)
On considère le système (3.388) défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -18.5 & 5 & 18.5 \\ 0 & -20.9 & 15 \\ 18.5 & 15 & -33.5 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -22.1 & 0 & 22.1 \\ 1 & -23.3 & 17.6 \\ 17.1 & 17.6 & -39.5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$M_i^A = N_i^A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}, M_i^B = N_i^B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, i = 1,2$$

Les fonctions d'activation sont :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases}$$

$\Sigma_A(t)$ *et* $\Sigma_B(t)$ *sont identiques et illustrées sur la figure 3.28. Après résolution des LMIs* (3.404)-

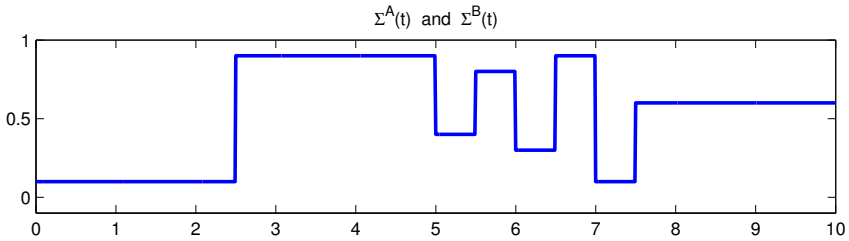


Figure 3.28 – $\Sigma_A(t)$ et $\Sigma_B(t)$

(3.406), *on obtient les matrices suivantes :*

$$G_1 = \begin{bmatrix} 24.18 & -5.35 \\ 16.17 & -2.79 \\ 24.12 & -6.74 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 23.93 & -5.20 \\ 16.13 & -2.76 \\ 23.92 & -6.6781 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & -0.00 \\ -0.01 & 0.03 & -0.00 \\ -0.00 & -0.00 & 0.01 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation obtenu est $\mu = 0.00053$. *Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures 3.29 et 3.30. On peut conclure que les gains obtenus par la résolution des LMIs données dans le théorème 3.17 permettent d'atténuer les effets des incertitudes de modélisation et du bruit de mesure. Dans la figure 3.30, l'erreur d'estimation d'état obtenue est comparée à celle obtenue par la méthode développée dans la section 1.3.1, qui ne tient pas compte des incertitudes et du bruit de mesure. En conclusion, la méthode proposée dans cette partie est robuste par rapport aux incertitudes de modélisation et par rapport au bruit de mesure.*

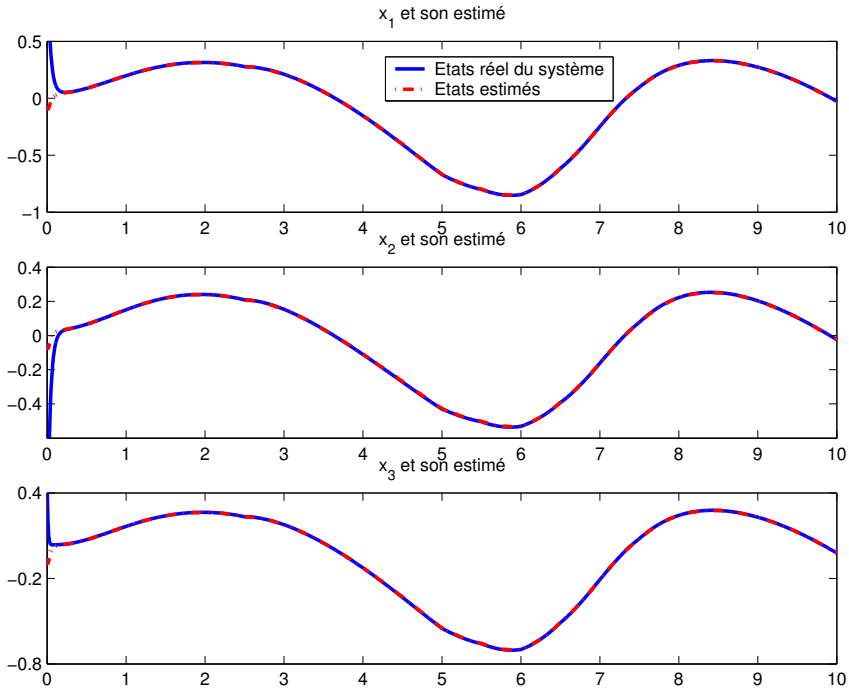


Figure 3.29 – Etats réels (trait continu bleu) et estimés (pointillés)

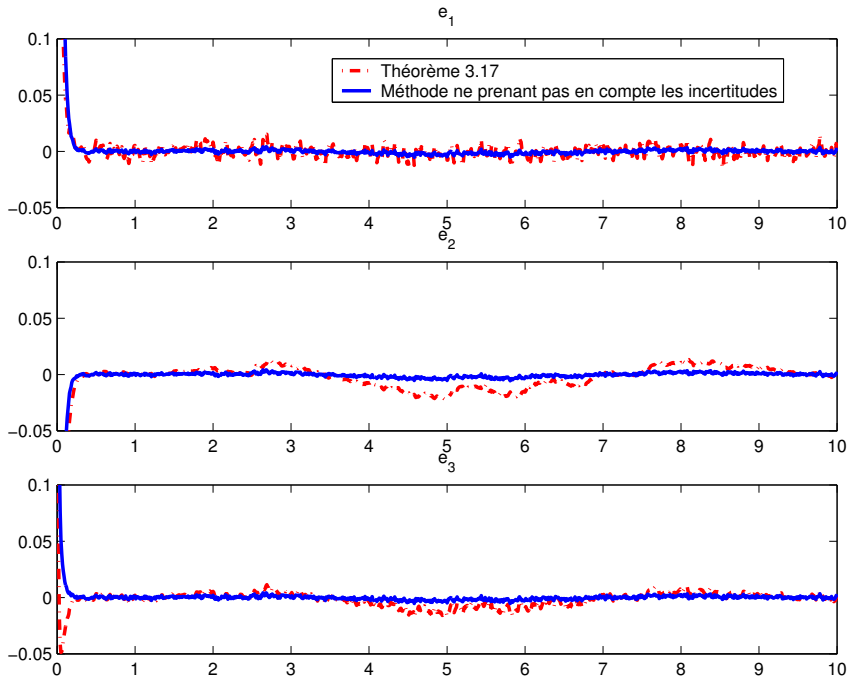


Figure 3.30 – Comparaison des erreurs d'estimation d'état obtenues avec le théorème 3.17 (trait continu bleu) et avec le théorème 3.1 (trait en pointillés rouge)

Après l'étude du conservatisme des conditions LMIs données dans le théorème 3.17, il s'avère qu'en augmentant la constante de Lipschitz et la borne sur l'entrée, le domaine de solution du problème se réduit. Donc, cette méthode ne peut s'appliquer qu'aux systèmes ayant des fonctions d'activation lipschitziennes et telles que la constante de Lipschitz ainsi que la borne sur l'entrée ne dépassent pas des seuils donnés. Nous allons donc proposer dans la section suivante une méthode qui s'affranchit de l'hypothèse de Lipschitz des fonctions d'activation.

3.5.2 Deuxième approche

Le système (3.388) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((A_i+\Delta A_i(t))x(t)+(B_i+\Delta B_i(t))u(t)+\nu(t)) \\ y(t) &= Cx(t)+D\omega(t) \end{aligned} \tag{3.431}$$

où :

$$\nu(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t))-\mu_i(\hat{x}(t)))((A_i+\Delta A_i(t))x(t)+(B_i+\Delta B_i(t))u(t))$$

Le terme $\nu(t)$ est alors considéré comme une perturbation.

L'observateur proposé s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i\hat{x}(t)+B_iu(t)+L_i(y(t)-\hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) &= C(t)\hat{x}(t) \end{aligned} \tag{3.432}$$

L'erreur d'estimation d'état entre (3.431) et (3.432) est définie par :

$$e(t) = x(t)-\hat{x}(t) \tag{3.433}$$

Sa dynamique est :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((A_i-L_iC)e(t)+\Delta A_i(t)x(t)+\Delta B_i(t)u(t)-L_iD\omega(t)+\nu(t)) \tag{3.434}$$

qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((A_i-L_iC)e(t)+\mathcal{M}_i\tilde{\omega}(t)) \tag{3.435}$$

où :

$$\tilde{\omega} = [\,\nu^T\ \omega^T\ x^T\ u^T\,]^T\,,\quad \mathcal{M}_i = [\,I\ \ -G_iD\ \ \Delta A_i\ \ \Delta B_i\,]$$

On suppose que les hypothèses **A1** et **A4** sont vérifiées, donc $\tilde{\omega}(t)$ est bornée.

Théorème 3.18. *L'observateur* (3.432) *pour le système T-S à VDNM incertain* (3.431) *est obtenu par la minimisation de* $\bar{\gamma}$ *sous les contraintes LMIs suivantes par rapport aux variables* $P = P^T > 0$, K_i *et des scalaires positifs* $\bar{\gamma}$, ε_1 *et* ε_2 *:*

$$\min_{P,K_i,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma}$$

sous les contraintes suivantes pour $i \in \{1,...,r\}$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & P & -K_iD & 0 & 0 & PM_i^A & PM_i^B \\ P & -\bar{\gamma}I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D^TK_i^T & 0 & -\bar{\gamma}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{33i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Psi_{44i} & 0 & 0 \\ (M_i^A)^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 \\ (M_i^B)^TP & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.436}$$

où :

$$\begin{aligned} \Psi_{11i} &= A_i^TP + PA_i - C^TK_i^T - K_iC + I \\ \Psi_{33i} &= -\bar{\gamma}I + \varepsilon_1(N_i^A)^TN_i^A \\ \Psi_{44i} &= -\bar{\gamma}I + \varepsilon_2(N_i^B)^TN_i^B \end{aligned}$$

Les gains de l'observateur sont calculés à partir de $G_i = P^{-1}K_i$ *et le taux d'atténuation est obtenu par* $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. L'objectif est de minimiser l'effet de $\tilde{\omega}(t)$ sur l'erreur d'estimation d'état. En utilisant le lemme borné réel [Boyd et al., 1994]), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \begin{bmatrix} (A_i - G_iC)^TP + P(A_i - G_iC) + I & P\mathcal{M}_i \\ \mathcal{M}_i^TP & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.437}$$

Avec les changements de variables $K_i = PG_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$, on a :

$$\begin{bmatrix} A_i^TP + PA_i - C^TK_i^T - K_iC + I & P\mathcal{M}_i \\ \mathcal{M}_i^TP & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0, \forall i \in \{1,...,r\} \tag{3.438}$$

Compte tenu de la définition de $\mathcal{M}_i$, l'inégalité (3.438) peut être ré-écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11i} & P & -PG_iD & P\Delta A_i & P\Delta B_i \\ P & -\bar{\gamma}I & 0 & 0 & 0 \\ -D^TG_i^TP & 0 & -\bar{\gamma}I & 0 & 0 \\ \Delta A_i^TP & 0 & 0 & -\bar{\gamma}I & 0 \\ \Delta B_i^TP & 0 & 0 & 0 & -\bar{\gamma}I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.439}$$

L'utilisation de la même approche et les mêmes calculs que (3.425)-(3.428) dans la démonstration précédente, conduit aux conditions LMIs (3.436). □

3.5.3 Discussions

Dans le théorème 3.18, la borne sur l'entrée β et les constantes de Lipschitz γ_1 et γ_2 définies dans l'hypothèse 3.8 ne sont pas utilisées et n'apparaissent donc pas dans les LMIs (3.436). Par conséquent, la seconde méthode est plus générale dans la mesure où elle ne nécessite pas les hypothèses (A2) et (A3) de 3.8, contrairement à la première méthode. L'application de cette nouvelle méthode pour l'exemple précédent donne cependant des résultats similaires.

Les autres méthodes d'estimation d'état proposées peuvent être également généralisées pour prendre en compte les incertitudes de modélisation ainsi que les perturbations externes comme le bruit de mesure. Des conditions permettant la synthèse de l'observateur peuvent être alors établies en suivant les mêmes étapes que celles de la section 3.5 (théorie de Lyapunov, techniques $\mathcal{L}_2$ et lemme de majoration).

3.6 Conclusions

Plusieurs méthodes, complémentaires, d'estimation d'état ont été proposées dans ce chapitre. Ces méthodes ont été divisées en deux catégories. La première catégorie concerne les méthodes s'appuyant sur des hypothèses de type Lipschitz. Des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état ont été ainsi établies par la théorie de Lyapunov. L'extension de ces méthodes a été abordée pour les systèmes T-S à VDNM présentant des incertitudes de modélisation et des perturbations externes (bruits de mesure,...). L'utilisation du théorème de la valeur moyenne combiné à la transformation par secteurs non linéaires a permis de traiter le problème du conservatisme lié à la valeur de la constante de Lipschitz comme un problème d'étude de stabilité de modèles T-S. Une méthode de relaxation des conditions a été proposée pour les systèmes à temps discret. Elle est basée sur l'utilisation d'une fonction de Lyapunov quadratique et le calcul de ses variations entre les instants k et $k+m$ et non entre k et $k+1$.

Les performances des observateurs ont été également étudiées pour améliorer la vitesse de convergence et la réduction du phénomène oscillatoire dû aux parties imaginaires des pôles de l'observateur.

La seconde catégorie de méthodes est basée sur l'utilisation des techniques $\mathcal{L}_2$. L'idée est de lever les hypothèses de Lipschitz de manière à considérer une classe plus large de systèmes T-S. Cela nous a amené à écrire le système sous plusieurs formes équivalentes, à savoir sous forme d'un système T-S incertain ou sous forme d'un système T-S perturbé. L'utilisation des techniques $\mathcal{L}_2$ et la théorie de Lyapunov permettent alors l'obtention de conditions de stabilité du système générant l'erreur d'estimation d'état tout en assurant le transfert le plus faible possible des perturbations et des incertitudes (qui sont dues à l'impossibilité de mesurer les variables de décision) vers l'erreur d'estimation. Les conditions trouvées sont exprimées sous forme LMI.

La généralisation des deux approches à des systèmes T-S à VDNM incertains et perturbés a été effectuée dans la dernière section de ce chapitre.

4

Reconstruction d'état et des entrées inconnues des systèmes T-S à VDNM

Sommaire

4.1 Introduction **112**
4.2 Représentation T-S à VDNM en présence d'entrées inconnues **115**
4.3 Conception d'observateur à entrées inconnues par découplage **117**
4.3.1 Approche par condition de Lipschitz 119
4.3.2 Construction de l'observateur par l'approche $\mathcal{L}_2$ 120
4.3.3 Estimation des entrées inconnues 124
4.3.4 Observateur à entrées inconnues par l'approche du théorème de la valeur moyenne 130
4.3.5 Cas particulier : mesures non affectées par les entrées inconnues . . . 133
4.4 Conception d'observateurs PI **136**
4.4.1 Variables de décision mesurables 137
4.4.2 Variables de décision non mesurables 138
4.5 Conception d'observateurs PMI **140**
4.5.1 Structure de l'observateur 142
4.5.2 Variables de décision mesurables 143
4.5.3 Variables de décision non mesurables 145
4.5.4 Discussion et remarques 146
4.6 Conclusion **150**

4.1 Introduction

Ce chapitre présente l'étude et l'exploitation des observateurs à entrées inconnues (connus sous le nom anglo-saxon *Unknown Input Observer (UIO)*) pour les systèmes non linéaires décrits par la structure de Takagi-Sugeno à variables de décision mesurables et non mesurables. De façon générale, ce chapitre est consacré, d'une part à l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues par découplage de l'influence de ces dernières sur l'erreur d'estimation d'état ; d'autre part, à l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues des systèmes non linéaires T-S. Enfin, ces observateurs seront utilisés pour le diagnostic de systèmes non linéaires, comme il sera exposé en détail dans le chapitre suivant.

Un système est souvent piloté simultanément par des entrées connues qui représentent les signaux de commande du système et par des entrées inconnues qui peuvent être des perturbations, des bruits de mesure, des erreurs de modélisation ou des défauts comme le montre la figure 4.1. Par conséquent, concevoir un observateur d'état ne tenant pas compte de ces entrées inconnues mène à une estimation dégradée ou même erronée des états du système. Dans ce cas, la conception de lois commande ou de générateurs de résidus pour le diagnostic sur la base de ces états estimés conduit alors à des performances dégradées du système.

Afin de concevoir des observateurs capables de fournir une estimation des états du système en présence d'entrées inconnues, il est indispensable de les prendre en compte dans la phase de modélisation. En effet, l'intégration de toutes les causes possibles pouvant affecter le système (bruits de mesure, défauts, incertitudes de modélisation...) dans le modèle du système permet d'améliorer la qualité de l'estimation, d'où l'importance des problèmes d'estimation d'état en présence d'entrées inconnues et d'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues. Ces problèmes ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche, ces dernières années sur les systèmes linéaires à temps invariants (LTI).

Pour résumer, deux classes d'observateurs à entrées inconnues ont été proposées, l'une utilisant le principe de découplage et l'autre permettant une estimation simultanée de l'état du système ainsi que des entrées inconnues.

Le premier observateur consiste à découpler complètement les entrées inconnues afin de rendre l'erreur d'estimation insensible à ces dernières. Cette idée remonte aux années 1975 où une structure d'observateur à entrées inconnues d'ordre minimal a été introduite dans [Wang et al., 1975] pour les systèmes linéaires. Depuis, beaucoup de travaux ont été dédiés à ce problème en l'abordant de différentes manières. On peut citer par exemple, l'approche géométrique dans [Bhattacharyya, 1978], l'approche par inversion dans [Kobayashi et Nakamizo, 1982], l'approche par décomposition en valeurs singulières dans [Fairman et al., 1984] et aussi d'autres approches par projections matricielles ou par transformations algébriques proposées dans [Darouach et al., 1994], [Corless et Tu, 1998], [Guadouna, 1995]. Il est intéressant, dans le cadre du diagnostic, d'estimer également ces entrées inconnues. Cependant, l'approche utilisée pour l'estimation de ces entrées inconnues [Hou et Patton, 1998] repose sur la dérivation des signaux de sortie qui sont le plus souvent entachés de bruits de mesure. Or, le résultat d'une dérivation est très sensible à de tels signaux. Par conséquent, l'estimation des entrées inconnues fournie est malheureusement fortement noyée dans le bruit amplifié par la dérivation.

Contrairement à la première catégorie d'observateur basée sur le principe de découplage, la seconde famille d'observateurs ne cherche pas à masquer l'effet des entrées inconnues, mais au contraire, à les estimer au moyen d'une action intégrale permettant ainsi l'affinage de l'es-

timation d'état, d'où son nom : Observateur Proportionnel-Intégral (PI). L'observateur, fournit une estimation simultanée de l'état du système ainsi que ses entrées inconnues. Les premiers travaux se référant au problème de conception d'observateurs PI datent des années 1970 [Wojciechowski, 1978] pour les systèmes linéaires SISO. Par la suite, ces travaux ont été généralisés aux systèmes MIMO dans [Kaczorek, 1979]. De tels observateurs fournissent une bonne estimation de l'entrée inconnue, même en présence de bruit de mesure, et l'introduction d'un gain intégral contribue à réduire le conservatisme des conditions de convergence de l'erreur d'estimation dans la mesure où il constitue un degré de liberté supplémentaire à déterminer. Les contraintes structurelles obtenues dans les travaux sur les observateurs à entrées inconnues par découplage ne sont pas nécessaires pour la synthèse de ces observateurs. Toutefois, l'hypothèse d'entrées inconnues constantes est obligatoire pour la démonstration théorique de la convergence de l'erreur d'estimation vers zéro en utilisant la seconde méthode de Lyapunov. Théoriquement, cette hypothèse réduit la classe de signaux pouvant être estimés par l'observateur PI, cependant, en pratique, il est possible d'estimer des signaux ayant des dynamiques lentes (signaux basses fréquences) en augmentant le gain de l'observateur. Dans cette optique, un observateur PI est proposé dans [Xiong et Saif, 2003] en ajoutant un paramètre scalaire dans le retour intégral afin de régler, le plus finement possible, l'estimation des entrées inconnues. L'inconvénient d'une telle démarche est l'augmentation de la sensibilité au bruit de mesure avec l'augmentation des gains de l'observateur (voir la discussion [Koenig et Mammar, 2002]), ce qui mène à la recherche d'un compromis entre robustesse/performances de l'observateur. Afin d'élargir l'ensemble des signaux estimables, l'observateur PI a été généralisé en exploitant l'idée d'utiliser, non pas une seule action intégrale, mais plusieurs ; cet observateur est appelé : Observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI) et a été proposé dans [Jiang et al., 2000]. Cet observateur a l'avantage d'estimer des signaux représentés par une forme polynomiale, qui est plus générale, et ayant une $q^{\text{ème}}$ dérivée nulle ou bornée. Le principe de cet observateur repose sur l'estimation simultanée des q premières dérivées de l'entrée inconnue. Plusieurs types de défauts sont ainsi modélisés (biais constant : échelon, dérive : rampe,...etc.). Une extension aux systèmes algébro-différentiels est aussi proposée dans [Gao et Ho, 2004], [Marx et al., 2003], [Duan et al., 2006] ainsi qu'aux systèmes T-S distribués dans [Lendek, 2009].

Les travaux cités ci-dessus concernent la conception d'observateurs à entrées inconnues (Observateurs par découplage et observateurs PI et PMI) pour des systèmes linéaires. Dans le cadre de certaines classes de systèmes non linéaires, plusieurs extensions de ces résultats ont été publiés. Une extension directe des résultats sur l'observateur à entrées inconnues non linéaire (NUIO) par découplage a été proposée dans [Wünnenberg, 1990] pour une classe de systèmes ayant une non-linéarité dépendant de l'entrée connue et de la sortie du système. Cependant, cette classe est relativement restreinte, car beaucoup de systèmes physiques ne peuvent pas être représentés par une telle structure. Une autre limitation, rencontrée également dans l'estimation d'état des systèmes non linéaires par transformation du systèmes, est la difficulté à trouver une transformation adéquate afin d'écrire le système sous la forme voulue. L'observateur DDNO (Disturbance Decoupling Nonlinear Observer) a été proposé dans [Frank et Seliger, 1991] et [Seliger et Frank, 1991a] prenant en considération une classe plus large de systèmes non linéaires. L'idée de base repose sur une transformation du système non linéaire initial afin de satisfaire une condition de découplage. De même, pour cet observateur, les conditions d'existence de cette transformation sont basées sur le théorème de Frobenius et sont très restrictives. Une méthode systématique et plus générale pour la conception d'observateur à entrées inconnues

pour les systèmes lipschitziens est proposée dans [Chen et al., 1996] fournissant des conditions nécessaires et suffisantes pour le découplage des entrées inconnues. Dans [Imsland et al., 2007], l'observateur proposé s'appuie sur une extension aux systèmes lipschitziens où l'entrée inconnue n'intervient pas dans la non-linéarité. Une application est alors proposée pour l'estimation de l'angle de dérive d'un véhicule. Dans [Pertew et al., 2005b], un observateur à entrées inconnues par découplage est proposé pour la même classe de systèmes non linéaires en utilisant une structure ayant un gain dynamique à la place du gain constant utilisé généralement. L'intérêt de ce gain dynamique est qu'il offre, par sa structure, plusieurs degrés de liberté, pour traiter la non-linéarité. Des conditions de convergence nécessaires et suffisantes ont été proposées sur la base du résultat obtenu dans [Rajamani, 1998]. Quant à l'observateur PI, une extension aux systèmes non linéaires uniformément observables est proposée dans [Busawon, 2001] après une étude dans le cas des systèmes linéaires. Enfin, un observateur PMI pour des systèmes Lipschitziens est étudié dans [Gao et Ding, 2007].

Dans le contexte multimodèle, la conception d'observateurs à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires représentés par la structure T-S à variables de décision connues (entrées et/ou sorties du système...) a déjà été abordée dans [Akhenak, 2004] et [Rodrigues, 2005] où des conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état ont été données sous forme LMIs. Ces observateurs ont été appliqués pour la génération de résidus par bancs d'observateurs (architectures DOS et GOS) dans [Chen et Zhang, 1991] pour la localisation de défauts d'actionneurs. Les approches utilisées pour la conception des observateurs à entrées inconnues s'inspirent de l'observateur initialement proposé par [Darouach et al., 1994] pour les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI). Dans [Marx et al., 2007], l'observateur à entrées inconnues pour les systèmes T-S singuliers à variables de décision mesurables a fait l'objet d'une étude et son application à la détection et l'isolation des défauts est proposée. L'approche d'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues par PI et PMI a été abordée pour une classe particulière de multimodèles appelés multimodèles à états découplés dans [Orjuela, 2008].

Comme il a été mentionné précédemment, l'un des objectifs de cette thèse est de concevoir des observateurs adaptés pour les systèmes T-S à VDNM permettant ainsi l'élaboration d'un seul modèle du système ayant des fonctions d'activation dépendant de l'état du système. En effet, cette structure épargne la recherche de deux modèles T-S à VDM différents du système pour la conception de bancs d'observateurs afin de localiser des défauts de capteurs et d'actionneurs. A notre connaissance, la structure T-S à VDNM n'est pas très étudiée dans la littérature, ce qui motive notre travail dans cette direction vu ses caractéristiques et ses avantages par rapport à la structure T-S à VDM (voir chapitre 2). Néanmoins, dans le cadre de la conception d'observateurs à entrées inconnues pour systèmes T-S à variables de décision non mesurables, on peut citer le seul travail qui a été publié dans [Chen et Saif, 2007b] et qui généralise l'observateur proposé dans [Bergsten et Palm, 2000] au cas des systèmes à entrées inconnues. Ce constat nous a conduit à l'étude et l'analyse de ces observateurs pour les systèmes T-S afin de fournir des outils pour le diagnostic robuste des systèmes non linéaires qui fera l'objet du chapitre suivant.

Les méthodes d'estimation d'état développées dans le chapitre 3 sont généralisées au cas des systèmes T-S à VDNM en présence d'entrées inconnues (voir figure 4.1). Nous choisissons de ne présenter que quatre méthodes. La première est basée sur des conditions de Lipschitz des fonctions d'activation et l'hypothèse des signaux d'entrée bornés. La seconde et la troisième méthodes utilisent les résultats basés sur les techniques $\mathcal{L}_2$ et la ré-écriture du système sous forme d'un système incertain. Enfin, la quatrième présente une généralisation de la méthode

proposée dans la section 3.3.5 du chapitre 3 en se basant sur le théorème de la valeur moyenne ainsi que l'approche de transformation par secteurs non linéaires. Les autres résultats sont également transposables au problème d'estimation d'état en présence d'entrées inconnues. Quant aux observateurs PI et PMI, après augmentation du système, on se ramène à la forme des systèmes utilisés dans le chapitre 3, ce qui nous permettra de réutiliser directement les résultats qui y sont présentés avec quelques modifications exposées par la suite.

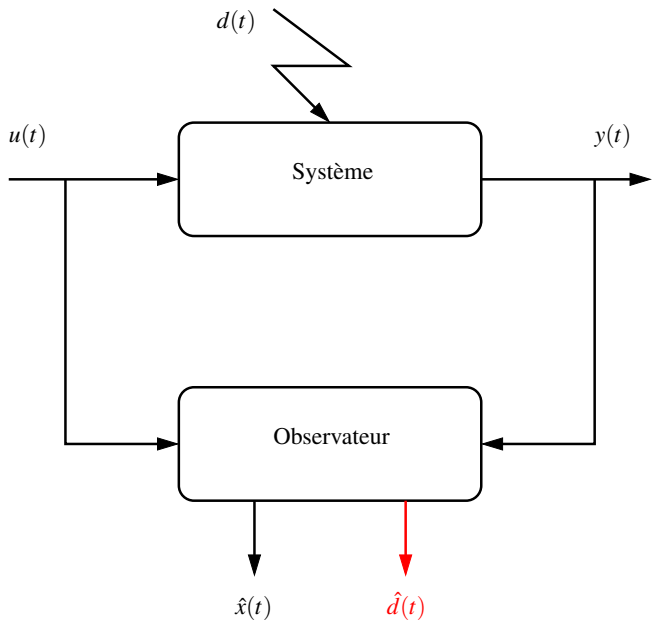


Figure 4.1 – Principe de l'observateur à entrée inconnue

4.2 Représentation T-S à VDNM en présence d'entrées inconnues

Rappelons qu'un système non linéaire peut être ré-écrit de manière exacte en utilisant un système T-S à variables de décision non mesurables employant la transformation par secteurs non linéaires [Tanaka et Wang, 2001], [Nagy et al., 2009a]. La structure d'un tel système est donnée par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{4.1}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des entrées, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente le vecteur de sortie. $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont les matrices d'état, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$ sont les matrices d'influence de l'entrée et $C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$ représente la matrice de sortie ou d'observation. Enfin, les fonctions $\mu_i(x(t))$ représentent les fonctions d'activation qui dépendent de l'état $x(t)$ du système, et qui

vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \end{cases} \tag{4.2}$$

L'objectif de cette section est de montrer l'origine de certaines entrées inconnues et la manière dont on les prend en considération dans la modélisation du système afin d'aboutir à la représentation suivante du système (4.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

Une façon de modéliser des entrées inconnues est de considérer, par exemple, les origines qu'elles peuvent avoir (voir figure 4.2). On peut citer les quelques exemples suivants :

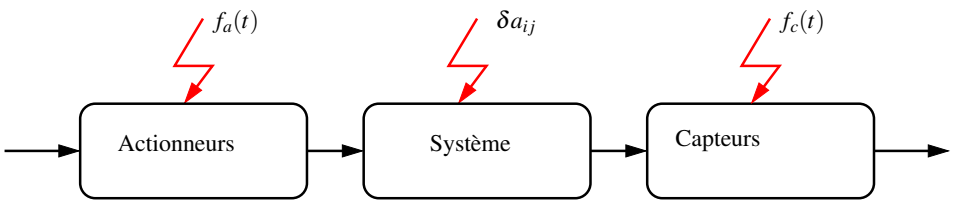


Figure 4.2 – Origines des entrées inconnues

1. En présence d'un biais d'amplitude α affectant l'actionneur j débutant à l'instant t_0, le système (4.1) s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x(t) + B_i u(t) + \alpha B_i e_j \Gamma(t-t_0)\right) \tag{4.4}$$

   où $e_j \in \mathbb{R}^{n_u}$ est un vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la $j^{\text{ème}}$ égale à 1. Les matrices de distribution de l'entrée inconnue sont $E_i = B_i e_j$ et l'entrée inconnue est $d(t) = \alpha\Gamma(t-t_0)$ où $\Gamma(t)$ représente la fonction de *Heavyside* (échelon unitaire).
2. Dans le cas d'une dérive de pente α sur la $j^{\text{ème}}$ commande débutant à l'instant t_0, le système s'écrit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x(t) + B_i u(t) + \alpha B_i e_j (t-t_0)\right) \tag{4.5}$$

   Dans ce cas, on aura $E_i = B_i e_j$ et l'entrée inconnue $d(t) = \alpha(t-t_0)$.
3. L'entrée inconnue peut avoir comme origine la variation d'un paramètre du système se manifestant par une variation α de la composante (j,k) des matrices A_i du système. Le système (4.1) devient alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)\left(A_i x(t) + B_i u(t) + \alpha e_j^i (e_k^i)^T x_k(t)\right) \tag{4.6}$$

où e_j^i et $e_k^i \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs colonne ayant toutes les composantes nulles sauf la $j^{\text{ème}}$. Pour avoir la structure donnée par (4.3), on pose $E_i = e_j^i$ et $d(t) = \alpha x_k(t)$.

4. De même, la variation d'un paramètre de l'actionneur provoque une variation d'amplitude β dans le paramètre (j,k) des matrices B_i, le système (4.3) devient alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + \beta e_j^i e_k^{i^T} u(t) \right) \tag{4.7}$$

où $e_j^i \in \mathbb{R}^n$ et $e_k^i \in \mathbb{R}^{n_u}$. On obtient alors $E_i = e_j^i e_k^{i^T}$ et $d(t) = \beta u(t)$.

5. Le système (4.3) affecté par une panne du $j^{\text{ème}}$ actionneur s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + \beta B_i e_j^i e_j^{i^T} \Gamma(t-t_0) u(t) \right) \tag{4.8}$$

où $e_j^i \in \mathbb{R}^{n_u}$. On obtient alors $E_i = B e_j^i e_j^{i^T}$ et $d(t) = \beta \Gamma(t-t_0) u(t)$.

6. Dans le cadre de la détection et la localisation des défauts d'actionneurs par bancs d'observateurs, on cherche à ce que l'observateur j soit insensible au défaut affectant la $j^{\text{ème}}$ commande, cela se traduit par le choix de la commande $u_i(t)$ comme entrée inconnue. On pose alors $E_i = B_i^j$ et $d(t) = u_i(t)$ où B_i^j représente la $j^{\text{ème}}$ colonne des matrices B_i.

Un raisonnement analogue permet de modéliser les entrées inconnues pouvant affecter l'équation de sortie du système (4.3). La modélisation de défauts multiples est réalisée par la concaténation des différentes matrices de distribution des entrées inconnues E_i.

L'objectif principal de ce chapitre est la conception d'observateurs à entrées inconnues pour des systèmes non linéaires représentés par la structure T-S à variables de décision non mesurables par l'extension des résultats déjà obtenus dans le chapitre 3. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro sont données sous forme de LMI.

4.3 Conception d'observateur à entrées inconnues par découplage

Dans cette section, nous considérons un système non linéaire à temps continu décrit par un multi-modèle utilisant des fonctions d'activation qui dépendent de l'état du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.9}$$

Par la suite, on suppose que le nombre d'entrées inconnues est inférieur au nombre de sorties mesurées ($n_d < n_y$). Le multimodèle à variables de décision non mesurables (4.9) peut se ramener à un multimodèle perturbé à variables de décision mesurables comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + \omega(t) \right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.10}$$

où :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right)\left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) \tag{4.11}$$

Les multimodèles (4.9) et (4.10) sont équivalents. Pour la conception de l'observateur, on utilisera la deuxième structure. L'observateur est pris sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(N_i z(t) + G_i u(t) + L_i y(t)\right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \end{cases} \tag{4.12}$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} e(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ &= x(t) - z(t) + HCx(t) + HGd(t) \\ &= Px(t) - z(t) + HGd(t) \end{aligned} \tag{4.13}$$

où :

$$P = I + HC \tag{4.14}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= P\dot{x}(t) - \dot{z}(t) + HG\dot{d}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(PA_i x(t) + PB_i u(t) + PE_i d(t) \\ &+ P\omega(t) - N_i z(t) - G_i u(t) - L_i y(t)) + HG\dot{d}(t) \end{aligned} \tag{4.15}$$

Après réorganisation des termes de la partie droite de la dynamique de l'erreur d'estimation d'état et en utilisant les définitions de $y(t)$ et de $z(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))((PA_i - N_i - K_i C)x(t) \\ &+ (PB_i - G_i)u(t) + (PE_i - K_i G)d(t) + P\omega(t) \\ &+ N_i e(t)) + HG\dot{d}(t) \end{aligned} \tag{4.16}$$

avec $K_i = N_i H + L_i$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$HG = 0 \tag{4.17}$$

$$N_i = PA_i - K_i C \tag{4.18}$$

$$PB_i = G_i \tag{4.19}$$

$$PE_i = K_i G \tag{4.20}$$

$$L_i = K_i - N_i H \tag{4.21}$$

alors, la dynamique de l'erreur d'estimation d'état devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(N_i e(t) + P\omega(t)\right) \tag{4.22}$$

montrant ainsi que la dynamique de l'erreur d'estimation d'état est perturbée par $\omega(t)$. Pour synthétiser les matrices de l'observateur (4.12), le problème peut être traité suivant certaines méthodes proposées dans le chapitre 3. En effet, connaissant la structure du terme $\omega(t)$, il est possible de l'écrire suivant plusieurs manières.

4.3.1 Approche par condition de Lipschitz

On suppose que le terme $\omega(t)$ défini en (4.11) satisfait la condition suivante :

$$|\omega(t)| \leq \gamma |e(t)| \tag{4.23}$$

où γ est une constante positive.

Théorème 4.1. *Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (4.9) s'il existe une matrice symétrique et définie positive $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $S \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et un scalaire positif λ tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $i = 1,...,r$:*

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & (X+SC) \\ (X+SC)^T & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.24}$$

$$SG = 0 \tag{4.25}$$

$$(X+SC)E_i = M_i G \tag{4.26}$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T(X + C^T S^T) + (X+SC)A_i - C^T M_i^T - M_i C + \lambda\gamma^2 I \tag{4.27}$$

Les matrices de l'observateur sont déterminées par :

$$H = X^{-1}S \tag{4.28}$$

$$K_i = X^{-1}M_i \tag{4.29}$$

$$N_i = (I+HC)A_i - K_i C \tag{4.30}$$

$$L_i = K_i - N_i H \tag{4.31}$$

$$G_i = (I+HC)B_i \tag{4.32}$$

Démonstration. La preuve s'appuie sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique $V(t) = e(t)^T X e(t), \quad X = X^T > 0$. Après calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov et l'utilisation du lemme 1.1, on aboutit à :

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}) e^T (N_i^T X + X N_i + \lambda\gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X) e, \quad \lambda > 0 \tag{4.33}$$

Les fonctions d'activation vérifient la condition de somme convexe, donc la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si :

$$N_i^T X + X N_i + \lambda\gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X < 0, \quad i = 1,\ldots,r \tag{4.34}$$

D'après (4.18), (4.34) s'écrit :

$$(PA_i - K_i C)^T X + X(PA_i - K_i C) + \lambda\gamma^2 I + \lambda^{-1} X P P^T X < 0, \quad i = 1,\ldots,r \tag{4.35}$$

La résolution de l'inégalité matricielle (4.35) n'est pas linéaire en les inconnues K_i, X et λ. Pour résoudre ce problème on procède comme suit.

D'abord, on effectue les changements de variables :

$$S = XH \tag{4.36}$$

$$M_i = XK_i \tag{4.37}$$

et en utilisant le complément de Schur [Boyd et al., 1994], on obtient les inégalités matricielles linéaires :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P^T X + XPA_i - C^T M_i^T - M_i C + \lambda \gamma^2 I & XP \\ P^T X & -\lambda I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.38}$$

Avec (4.36) et (4.17), on a $XP = X + SC$ et (4.38) devient (4.24). (4.36), (4.17) et (4.20) deviennent respectivement (4.25) et (4.26).

Les gains N_i, L_i et G_i sont alors obtenus par (4.30), (4.31) et (4.32) respectivement. □

4.3.2 Construction de l'observateur par l'approche $\mathcal{L}_2$

Dans le cas où la constante de Lipschitz de l'hypothèse (4.23) ne permet pas d'obtenir une solution pour les LMIs (4.24) du théorème 4.1, d'autres méthodes sont proposées dans cette section fondées sur l'approche $\mathcal{L}_2$. Ces méthodes utilisent les résultats obtenus dans le chapitre 3 à la section 3.4. Pour cela, l'exploitation de la structure du terme $\omega(t)$ est nécessaire pour le ré-écrire de façon adaptée à ces approches.

Approche par perturbation

Théorème 4.2. *L'observateur (4.12) pour le système (4.9) tel que le système (4.22) est stable tout en minimisant le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est obtenu en résolvant le problème d'optimisation :*

$$\min_{X, M_i, S, \bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma} \ \ s.c.$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & X + SC \\ (X + SC)^T & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \ \ i = 1, \ldots, r \tag{4.39}$$

$$SG = 0 \tag{4.40}$$

$$(X + SC)E_i = M_i G \tag{4.41}$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T (X + C^T S^T) + (X + SC)A_i - C^T M_i^T - M_i C + I \tag{4.42}$$

$$X \in \mathbb{R}^{n \times n}, M_i \in \mathbb{R}^{n \times n_y}, S, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}$$

Les matrices de l'observateur sont déterminées par les équations (4.17)-(4.21). Le taux d'atténuation est obtenu par $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. Pour démontrer le théorème 4.2, on utilise le lemme borné réel [Boyd et al., 1994]. La dynamique de l'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(N_i e(t) + P\omega(t)\right) \tag{4.43}$$

L'erreur d'estimation converge vers zéro et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers $e(t)$ est borné par γ si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \begin{bmatrix} N_i^T X + XN_i + I & XP \\ P^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.44}$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation permet d'écrire la condition suffisante suivante :

$$\begin{bmatrix} N_i^T X + XN_i + I & XP \\ P^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{4.45}$$

En utilisant l'expression (4.18) de N_i et les changements de variables $M_i = XK_i$ et $\bar{\gamma} = \gamma^2$ (4.45) devient :

$$\begin{bmatrix} A_i^T P^T X + XPA_i - C^T M_i^T - M_i C + I & XP \\ P^T X & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, r \tag{4.46}$$

La suite de la démonstration est similaire à celle du théorème 4.1. □

Approche par incertitudes bornées

Dans cette partie, le terme $\omega(t)$ est ré-écrit sous forme d'incertitudes. Comme on l'a déjà vu dans les sections 3.4.1 et 3.4.2 du chapitre 3, $\omega(t)$ peut s'écrire sous deux formes différentes. La première forme consiste à ré-écrire $\omega(t)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) && (4.47) \\ &= \Delta A(t) x(t) + \Delta B u(t) + \Delta E d(t) && (4.48) \\ &= \Delta A(t) x(t) + \Delta \tilde{B} \tilde{d}(t) && (4.49) \end{aligned}$$

où $\Delta A(t)$ et $\Delta B(t)$ sont définies par (3.293) et (3.294) (voir section 3.4.1 au chapitre 3), $\tilde{d}(t) = [u(t)^T \;\; d(t)^T]^T$, et $\Delta E(t)$ et $\Delta \tilde{B}(t)$ sont données par :

$$\Delta E(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right) E_i = E \Sigma_E(t) E_E \tag{4.50}$$

$$\Delta \tilde{B}(t) = \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right) \tilde{B}_i = \tilde{B} \Sigma_{\tilde{B}}(t) E_{\tilde{B}} \tag{4.51}$$

où :

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} E_1 & \cdots & E_r \end{bmatrix}, \; \Sigma_E(t) = \begin{bmatrix} \delta_1 I_{n_d} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r I_{n_d} \end{bmatrix}, \; E_E = \begin{bmatrix} I_{n_d} & \cdots & I_{n_d} \end{bmatrix}^T \tag{4.52}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{E} \end{bmatrix}, \ \Sigma_{\tilde{B}}(t) = \begin{bmatrix} \Sigma_B(t) & 0 \\ 0 & \Sigma_E(t) \end{bmatrix}, \ E_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} E_B & E_E \end{bmatrix}^T \tag{4.53}$$

où $\delta_i(t) = \mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))$.

En utilisant l'écriture (4.47) de $\omega(t)$, l'erreur d'estimation d'état (4.22) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(N_i e(t) + \Delta A(t)x(t) + \Delta\tilde{B}(t)\tilde{d}(t)) \tag{4.54}$$

On définit l'état augmenté $e_a(t) = [e(t)^T \ \ x(t)^T]^T$ et on obtient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\mu_j(x(t)) \left(A_{ij}(t)e_a(t) + B_{ij}(t)\tilde{d}(t)\right) \tag{4.55}$$

où :

$$A_{ij}(t) = \begin{pmatrix} N_i & \Delta A(t) \\ 0 & A_j \end{pmatrix}, \ B_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \Delta B(t) & \Delta E(t) \\ B_j & E_j \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

Théorème 4.3. *L'observateur (4.12) pour le système (4.9) tel que le système (4.55) générant l'erreur d'estimation $e(t)$ est stable tout en minimisant le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\tilde{d}(t)$ vers $e(t)$ est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{X_1, X_2, M_i, S, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \bar{\gamma}} \ \bar{\gamma} \quad s.c.$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_i & 0 & 0 & 0 & X_1\mathcal{A} & X_1\mathcal{B} & X_1\mathcal{E} \\ 0 & \Theta_j & X_2B_j & X_2E_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_j^TX_2 & -\bar{\gamma}I + \lambda_2E_B^TE_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_j^TX_2 & 0 & -\bar{\gamma}I + \lambda_3E_E^TE_E & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^TX_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^TX_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2I & 0 \\ \mathcal{E}^TX_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.57}$$

$$SG = 0 \tag{4.58}$$

$$(X_1 + SC)E_i = M_iG \tag{4.59}$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T(X_1 + C^TS^T) + (X_1 + SC)A_i - C^TM_i^T - M_iC + I \tag{4.60}$$

$$\Theta_j = A_j^TX_2 + X_2A_j + \lambda_1E_A^TE_A \tag{4.61}$$

où $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}, S \in \mathbb{R}^{n\times n_y}, \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}$. Après résolution des LMIs (4.57) et LMEs (4.58) et (4.59), les matrices de l'observateur sont obtenues à partir de (4.28)-(4.32). Le taux d'atténuation minimal obtenu est donné par $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$

Démonstration. La démonstration est basée sur l'utilisation du lemme borné réel [Boyd et al., 1994] (voir annexe B). On obtient alors l'inégalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} N_i^T X_1 + X_1 N_i + I & X_1 \Delta A(t) & X_1 \Delta B(t) & X_1 \Delta E(t) \\ \Delta A(t)^T X_1 & A_j^T X_2 + X_2 A_j & X_2 B_j & X_2 E_j \\ \Delta B(t)^T X_1 & B_j^T X_2 & -\gamma^2 I & 0 \\ \Delta E(t)^T X_1 & E_j^T X_2 & 0 & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.62}$$

Certains termes de cette inégalité sont variables dans le temps à cause des matrices $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ et $\Delta E(t)$, afin de pouvoir éliminer cette dépendance à t, l'inégalité (4.62) est décomposée en deux parties, l'une constante et l'autre variable dans le temps contenant les termes d'incertitude. Ces termes d'incertitudes sont traités de la même manière que dans la section 3.4.1. Le premier bloc de (4.62) est transformé suivant la démarche utilisée dans la démonstration du théorème 4.1 en prenant en considération les conditions (4.17)-(4.21). □

Approche par "incertitude constantes"

La seconde approche proposée dans la section 3.4.2 du chapitre 3 permet de ré-écrire le terme $\omega(t)$ sous la forme :

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t)) \left(\Delta A_{ij} x(t) + \Delta B_{ij} \tilde{d}(t)\right) \tag{4.63}$$

où :

$$\Delta A_{ij} = A_i - A_j \tag{4.64}$$

$$\Delta B_{ij} = \tilde{B}_i - \tilde{B}_j \tag{4.65}$$

Théorème 4.4. *L'observateur* (4.12) *pour le système* (4.9) *tel que le système générant l'erreur d'estimation d'état $e(t)$ est stable tout en minimisant le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\tilde{d}(t)$ vers $e(t)$ est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{X_1, X_2, M_i, S, \bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma} \qquad s.c.$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_i & X_1(A_i - A_j) & X_1(B_i - B_j) & X_1(E_i - E_j) \\ (A_i - A_j)^T X_1 & \Theta_j & X_2 B_j & X_2 E_j \\ (B_i - B_j)^T X_1 & B_j^T X_2 & -\bar{\gamma} I & 0 \\ (E_i - E_j)^T X_1 & E_j^T X_2 & 0 & -\bar{\gamma} I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.66}$$

$$SG = 0 \tag{4.67}$$

$$(X_1 + SC)E_i = M_i G \tag{4.68}$$

où :

$$\Psi_i = A_i^T (X_1 + C^T S^T) + (X_1 + SC)A_i - C^T M_i^T - M_i C + I \tag{4.69}$$

$$\Theta_j = A_j^T X_2 + X_2 A_j \tag{4.70}$$

avec $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}, X_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}, M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}, S \in \mathbb{R}^{n\times n_y}, \bar{\gamma} \in \mathbb{R}$. *Après résolution des LMIs* (4.66) *et LMEs* (4.67) *et* (4.68)*, les matrices de l'observateur sont obtenues à partir de* (4.28)-(4.32)*. Le taux d'atténuation minimal obtenu est donné par* $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$

Démonstration. La démonstration est basée sur l'utilisation du lemme borné réel [Boyd et al., 1994] (voir annexe B). □

Remarque 4.1. *La même démarche permet aussi de traiter le cas des systèmes présentant du bruit de mesure en considérant un vecteur augmenté contenant toutes les entrées à minimiser. Par conséquent, un observateur optimal est obtenu par minimisation du transfert du nouveau vecteur de perturbation vers l'erreur d'estimation d'état.*

4.3.3 Estimation des entrées inconnues

Après l'estimation de l'état, en découplant complètement ou partiellement l'influence de l'entrée inconnue de l'erreur d'estimation, il est possible d'estimer l'entrée inconnue à partir de l'estimation du vecteur d'état. Dans le système (4.10), l'entrée inconnue $d(t)$ apparaît avec la matrice d'influence :

$$W(t) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))E_i \\ G \end{bmatrix} \tag{4.71}$$

Pour estimer l'entrée inconnue, il faut que le rang de la matrice $W(t)$ vérifie à chaque instant t la condition :

$$rang\,(W(t)) = n_d \tag{4.72}$$

n_d étant la dimension de $d(t)$. Si cette condition est vérifiée, $W(t)$ est de plein rang colonne et sa pseudo-inverse à gauche $W^-(t)$ existe et est définie par :

$$W^-(t) = \left(W^T(t)W(t)\right)^{-1} W^T(t) \tag{4.73}$$

L'entrée inconnue peut alors se calculer de la façon suivante :

$$\hat{d}(t) = W^-(t) \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}(t) - \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) - C\hat{x}(t) \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

Sous la condition (4.72) la convergence asymptotique de $\hat{x}$ vers x entraîne la convergence asymptotique de $\hat{d}$ vers d.

Exemple 4.1 (Estimation d'état et d'entrée inconnue)
Afin d'illustrer les performances des méthodes proposées et de pouvoir comparer entre les différents théorèmes proposés jusqu'ici pour la conception d'observateur à entrées inconnues, nous proposons d'étudier un problème de synchronisation et d'estimation d'un message crypté à l'aide d'un générateur chaotique de Lorenz, considéré comme une entrée inconnue, à base

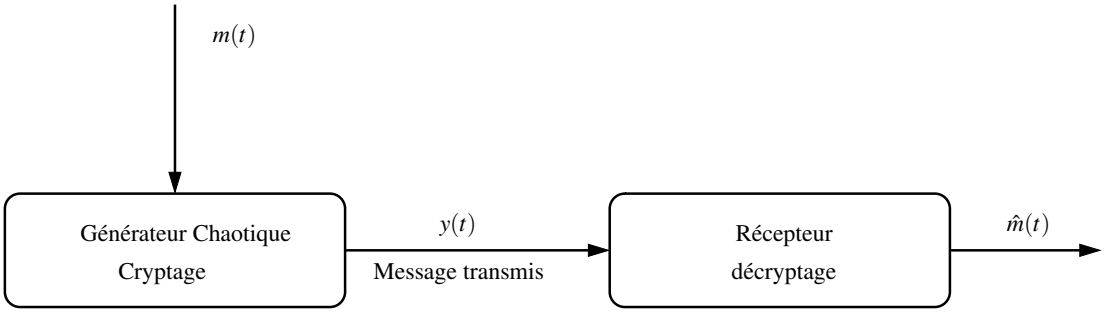


Figure 4.3 – Synchronisation à base d'observateurs

d'observateurs (voir figure 4.3). Pour cela, considérons le système de Lorenz [Chen, 2007] représenté par la structure T-S à VDNM (4.9) défini par les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}, \; E_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; G = 1$$

Les fonctions d'activation du modèle sont données par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mu_1(x(t)) = \frac{1+\frac{x_1(t)}{30}}{2} \\ \mu_2(x(t)) = \frac{1-\frac{x_1(t)}{30}}{2} \end{cases} \tag{4.75}$$

où l'on remarque leur dépendance par rapport à la première composante $x_1(t)$ du vecteur d'état qui n'est pas mesurable. Enfin, un bruit de mesure, d'amplitude 0.1, est ajouté à la sortie $y(t)$.

La résolution du problème énoncé au théorème 4.2 permet l'obtention des matrices de l'observateur (4.12) :

$$N_1 = \begin{bmatrix} -10 & 6 & 0 \\ 28 & -4 & -30 \\ 0 & 29 & -2.66 \end{bmatrix}, \; N_2 = \begin{bmatrix} -10 & -20 & 0 \\ 28 & -29 & 30 \\ 0 & -30 & -2.66 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \; L_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 28 \\ 0 \end{bmatrix}, \; H = 10^{-11} \begin{bmatrix} 0.0338 \\ 0.007 \\ 0.1183 \end{bmatrix}$$

Le taux d'atténuation obtenu est $\gamma = 0.8928$. Les figures 4.4, 4.5 et 4.6 montrent le caractère chaotique du système destiné à crypter le message à transmettre. En l'absence de bruit de mesure, les résultats de simulation sont présentés sur les figures 4.7, 4.8 et 4.9. On observe le découplage total de l'entrée inconnue. En présence de bruit de mesure d'amplitude maximale de 10% de l'amplitude maximale de la sortie $y(t)$, l'erreur d'estimation d'état est donnée sur la figure 4.10 et le message réel ainsi que son estimé sont illustrés sur la figure 4.11. L'estimation de l'entrée inconnue est réalisée directement en utilisant la sortie et l'état estimé puisque G est un scalaire. L'estimation de l'entrée inconnue à partir de la méthode donnée dans la section

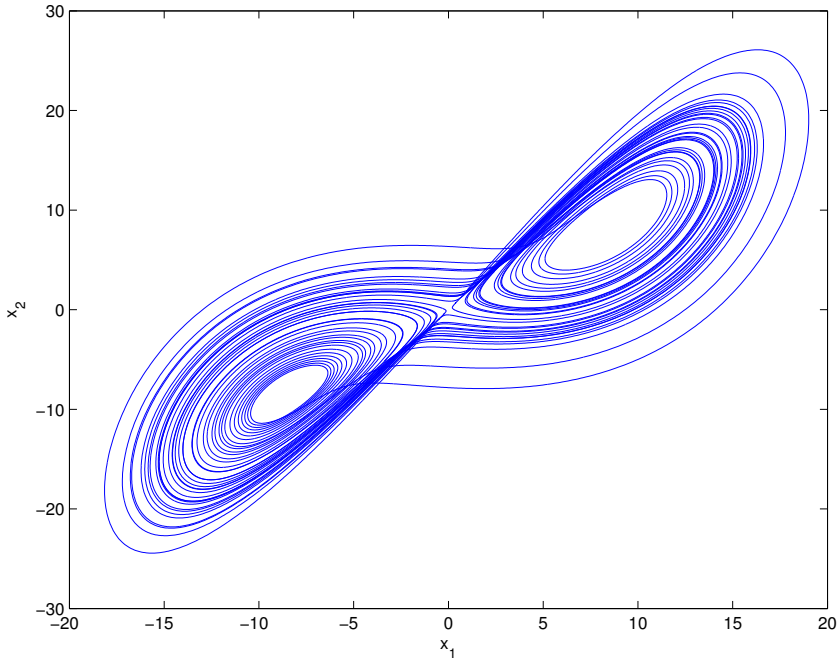


Figure 4.4 – Plan de phase $x_1(t)$ et $x_2(t)$

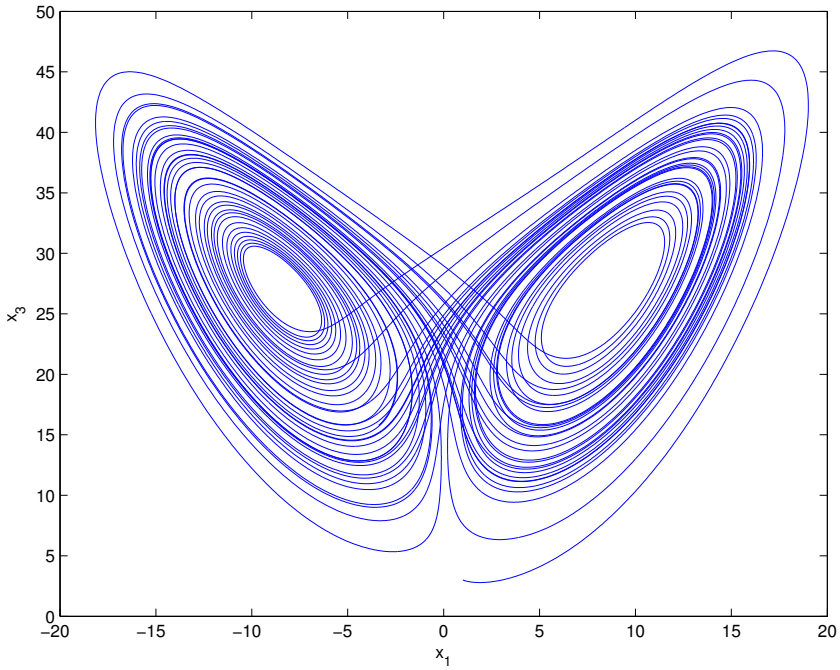


Figure 4.5 – Plan de phase $x_1(t)$ et $x_3(t)$

4.3.3 utilise la dérivation de $\hat{x}(t)$ qui amplifie le bruit de mesure. Afin de reconstituer le signal binaire transmis, un système de seuillage peut être utilisé, par exemple un trigger de Schmidt permettra la remise sous forme binaire du signal.

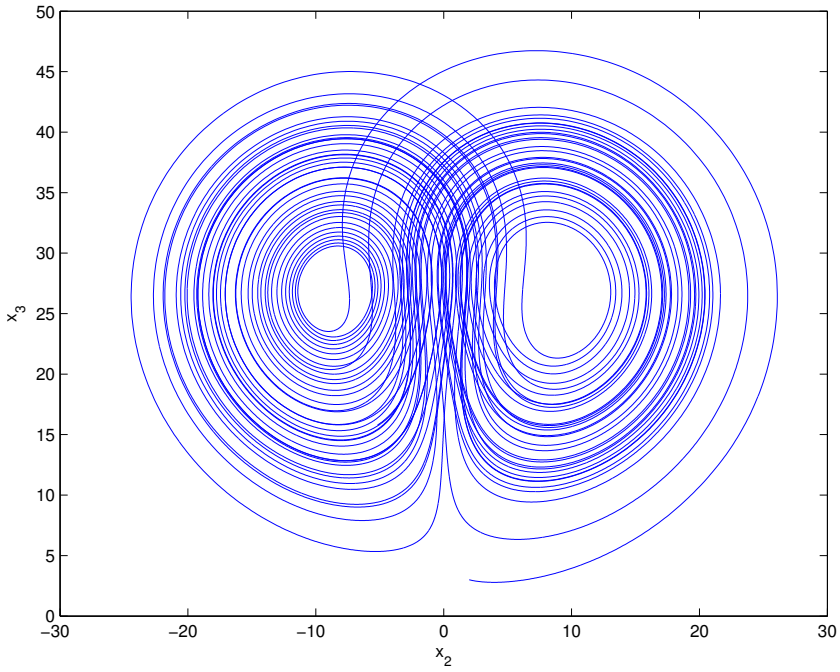


Figure 4.6 – Plan de phase $x_2(t)$ et $x_3(t)$

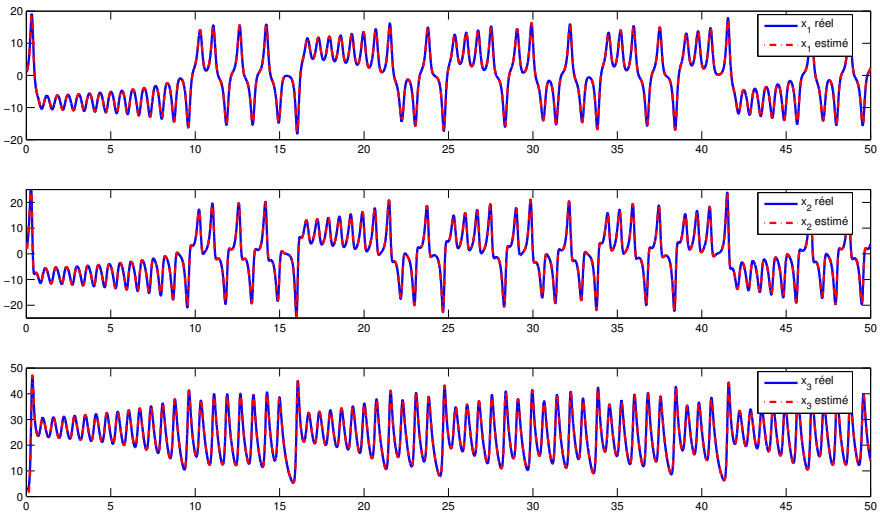


Figure 4.7 – Etats du système et leurs estimés

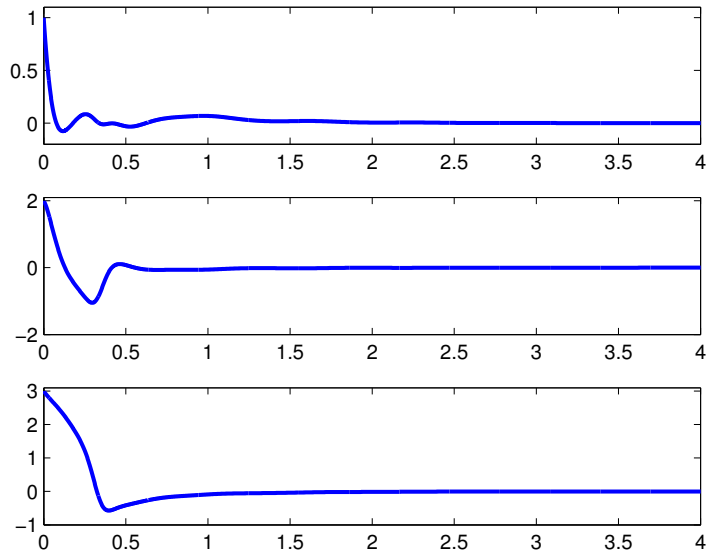


Figure 4.8 – Erreurs d'estimation d'état

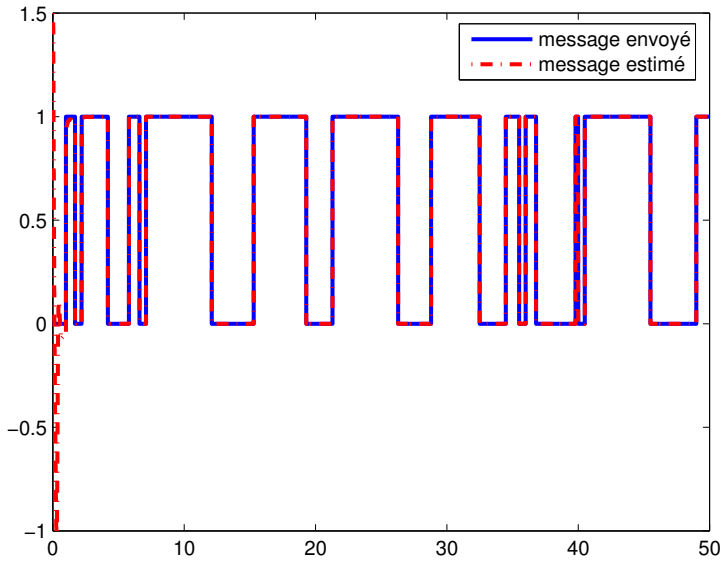


Figure 4.9 – Message envoyé et son estimation

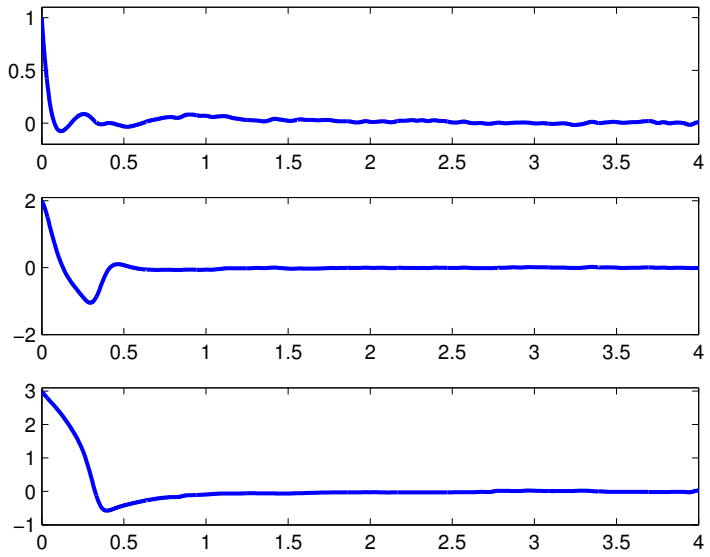


Figure 4.10 – Erreur d'estimation d'état en présence de bruit de mesure

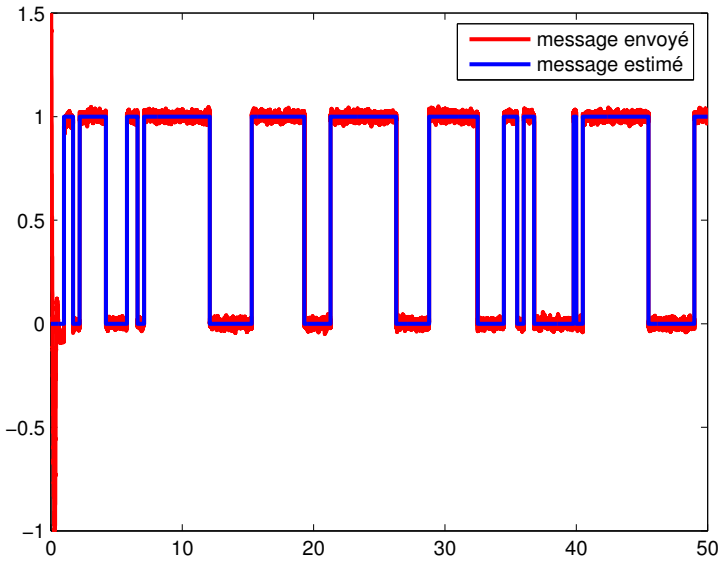


Figure 4.11 – Message estimé en présence de bruit de mesure

Dans cette partie, des conditions d'existence de l'observateur à entrées inconnues (4.12) pour le système (4.9) sont données sous forme LMI et contraintes égalités dans les théorèmes 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4. Ces résultats constituent une extension des approches proposées dans le chapitre 3 pour l'estimation d'état des systèmes T-S à variables de décision non mesurables. Comme mentionné dans le chapitre 3, les hypothèses sur la stabilité du système, les conditions de Lipschitz des fonctions d'activation et l'hypothèse sur l'entrée bornée font que ces nouvelles méthodes de conception de l'observateur à entrées inconnues sont complémentaires. Le théorème 4.1 fournit des conditions assurant la convergence de l'erreur d'estimation d'état sous l'hypothèse $|\omega(t)| < \gamma|e(t)|$. Cette hypothèse s'est avérée très conservative à cause de la condition de Lipschitz des fonctions d'activation, de l'entrée bornée et de l'état borné (i.e. système stable). De plus, l'obtention d'une solution aux conditions LMIs du théorème 4.1 est conditionnée par une faible valeur de la constante γ.

Dans le souci de réduire le conservatisme de ces conditions et d'éliminer certaines hypothèses de travail, l'approche $\mathcal{L}_2$ est utilisée pour obtenir des conditions d'existence moins conservatives de l'observateur (4.12). En effet, les conditions données dans les théorèmes 4.2, 4.3 et 4.4 ne nécessitent pas des fonctions d'activation lipschitziennes, ce qui généralise le résultat à une classe plus large de systèmes T-S à VDNM. Dans les théorèmes 4.3 et 4.4, la connaissance de la structure du terme $\omega(t)$ donné par (4.11) est exploitée conjointement avec la propriété de somme convexe des fonctions d'activation pour ré-écrire le système sous la forme d'un système incertain avec des incertitudes paramétriques bornées et variables dans le temps pour le théorème 4.3 et constantes pour le théorème 4.4. L'intérêt de ces deux derniers résultats réside dans le fait que la minimisation ne porte que sur l'entrée du système qui est supposée appartenir à l'ensemble des signaux de carrés sommables $\mathcal{L}_2$ et non sur tout le terme $\omega(t)$.

L'extension des autres résultats présentés dans le chapitre 3 à l'estimation d'état en présence d'entrées inconnues est possible. Cependant, pour la méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne et la transformation par secteurs non linéaires, sa généralisation n'est pas directement réalisable. Pour cela, on propose dans la section suivante un observateur à entrée inconnue modifié afin de pouvoir généraliser cette méthode. L'intérêt de cette approche est qu'elle fournit des conditions moins restrictives que les autres méthodes puisqu'elle transforme le problème lié à la constante de Lipschitz en un problème d'étude et de relaxation de conditions de stabilité, comme on l'a déjà vu dans la section 3.3.5 et 3.3.5 du chapitre 3 pour le cas des systèmes à temps discret.

4.3.4 Observateur à entrées inconnues par l'approche du théorème de la valeur moyenne

Soit le système T-S à VDNM suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.76}$$

Le système (4.76) peut s'écrire de façon équivalente :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + E_0d(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(\bar{E}_id(t)\right) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left(\bar{A}_ix(t) + \bar{B}_iu(t)\right) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{r} \left(\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t))\right)\left(\bar{E}_id(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.77}$$

où A_0, B_0, $\bar{A}_i$ et $\bar{B}_i$ sont définies par (3.6)-(3.9). La matrice E_0 peut s'obtenir de deux manières différentes :

1. La première idée consiste à considérer E_0 comme la moyenne des matrices E_i, ce qui donne :

$$E_0 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} E_i \tag{4.78}$$

2. L'autre idée est basée sur la recherche de la matrice E_0 minimisant la norme de Frobenius :

$$\min_{E_0} \|E_0 - E_i\|_F^2, i = 1, \ldots, r \tag{4.79}$$

sous la contrainte de rang :

$$rang\,(E_0) < n_y \tag{4.80}$$

Pour plus de détail (voir [Chen et Patton, 1999b], [Lou et al., 1986], [Rodrigues, 2005]).

Les matrices $\bar{E}_i$ sont obtenues par :

$$\bar{E}_i = E_i - E_0 \tag{4.81}$$

Dans le cas où les entrées inconnues influent sur l'équation de mesure (i.e. $G \neq 0$), les deux propositions précédentes sont équivalentes. Par contre la seconde proposition est plus intéressante dans le cas où la matrice d'influence des entrées inconnues est nulle (i.e. $G = 0$), puisqu'un découplage total des entrées inconnues n'est pas réalisable. Dans ce cas, cette approche permet de concentrer la majeure partie de l'influence des entrées inconnues sur la matrice E_0 constante pour laquelle il existe une matrice de projection P telle que $PE_0 = 0$. Autrement dit, une grande partie de l'influence des entrées inconnues est découplée. Contrairement à la méthode utilisée dans [Rodrigues, 2005], pour les systèmes T-S à VDM, consistant à faire une approximation en négligeant les termes $\sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\bar{E}_id(t)$, la méthode que l'on propose prend en considération ces termes comme des incertitudes de modélisation à minimiser. Ce faisant, on améliore la qualité de l'estimation d'état. On réalise alors une atténuation de l'influence des entrées inconnues.

Conception de l'observateur dans le cas de mesures affectées par les entrées inconnues

Nous proposons dans cette section un observateur à entrées inconnues ayant la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\left(N_iz(t) + L_iy(t) + P\bar{A}_i\hat{x}(t) + PB_iu(t)\right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \end{cases} \tag{4.82}$$

où $P = I_n + HC$. L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} e(t) &= (I+HC)x(t) - z(t) + HGd(t) && (4.83)\\ &= Px(t) - z(t) + HGd(t) && (4.84) \end{aligned}$$

Sa dynamique obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(PA_0 - N_iP - L_iC)\,x(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(PE_i - L_iG)\,d(t) \\ &+ P\Delta(x,\hat{x},u,d) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))N_ie(t) + HG\dot{d}(t) && (4.85) \end{aligned}$$

où :

$$\Delta(x,\hat{x},u,d) = f(x,u,d) - f(\hat{x},u,d) \tag{4.86}$$

avec $f(x,u,d)$ définie comme suit :

$$f(x,u,d) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left(\bar{A}_ix(t) + B_iu(t) + \bar{E}_id(t)\right) \tag{4.87}$$

On pose $K_i = N_iH + L_i$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} HG &= 0 && (4.88)\\ N_i &= PA_0 - K_iC && (4.89)\\ PE_i &= L_iG && (4.90) \end{aligned}$$

alors l'erreur d'estimation d'état (4.85) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))N_ie(t) + P\Delta(x,\hat{x},u,d) \tag{4.91}$$

En utilisant l'approche développée dans la section 3.3.5 du chapitre 3 basée sur l'utilisation du théorème de la valeur moyenne ainsi que l'approche de transformation par secteurs non linéaires, l'erreur d'estimation obéit à l'équation différentielle :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q} \mu_i(\hat{x}(t))h_j(z)\left(N_i + P\mathcal{A}_j\right)e(t) \tag{4.92}$$

Le théorème suivant fournit des conditions suffisantes, sous forme LMI et contraintes égalités, assurant la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état entre le système (4.3) et l'observateur (4.82).

Théorème 4.5. *Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (4.76) s'il existe une matrice symétrique et définie positive X, des matrices M_i et S telles que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $i = 1,\ldots,r$ et $j = 1,\ldots,q$:*

$$\mathcal{A}_j^T(X + C^TS^T) + (X+SC)\mathcal{A}_j + A_0^T(X + C^TS^T) + (X+SC)A_0 - C^TM_i^T - M_iC < 0 \tag{4.93}$$

$$SG = 0 \tag{4.94}$$
$$(X+SC)E_i = M_iG \tag{4.95}$$
$$\tag{4.96}$$

Les matrices de l'observateur sont calculées par :

$$H = X^{-1}S \tag{4.97}$$
$$K_i = X^{-1}M_i \tag{4.98}$$
$$N_i = (I+HC)A_0 - K_iC \tag{4.99}$$
$$L_i = K_i - N_iH \tag{4.100}$$
$$P = (I+HC) \tag{4.101}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du théorème 4.1. □

Remarque 4.2. *La même démarche permet de généraliser le résultat à la conception d'observateur par le théorème de la valeur moyenne et l'approche par transformation par secteurs non linéaires aux systèmes à temps discret affectés par des entrées inconnues.*

4.3.5 Cas particulier : mesures non affectées par les entrées inconnues

Dans le problème de détection et de localisation des défauts d'actionneurs utilisant des bancs d'observateur, on suppose toujours que les défauts d'actionneur et les défauts de capteur ne surgissent pas simultanément. Dans ce cas, l'entrée inconnue n'affecte que l'équation de la dynamique et pas l'équation de mesure. Pour ce cas particulier, il est possible d'utiliser les méthodes développées précédemment en utilisant $\dot{y}(t)$ à la place de $y(t)$. Cela fera apparaître l'entrée inconnue dans l'équation de la nouvelle mesure :

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(CA_ix(t) + CB_iu(t) + CE_id(t)) \tag{4.102}$$

Le plus souvent, la sortie mesurée d'un système est entachée de bruit, la dérivation d'un tel signal amplifie le bruit et par conséquent diminue la qualité de l'estimation d'état.

Dans cette section, nous proposons une solution au problème d'entrée inconnue affectant seulement l'équation d'état du système sans affecter l'équation de mesure. En effet, en analysant les conditions (4.90) on s'aperçoit qu'on ne peut trouver une matrice P permettant de satisfaire l'égalité $PE_i = 0$ que si l'intersection des noyaux des matrices E_i est non nulle ce qui est restrictif du point de vue modélisation car la classe de systèmes étudiés est réduite.

Une solution a été proposée dans [Rodrigues, 2005] consistant à approximer un ensemble de matrices E_i, $i = 1,\ldots,r$ par une matrice constante E^* par minimisation de la norme de Frobenius et en négligeant les écarts entre les matrices E_i et la matrice E^* [Patton et al., 1989]. Cependant, si le nombre de sous-modèles r est important, ces écarts peuvent devenir importants et par conséquent affecter la qualité de l'estimation de l'état car l'entrée inconnue n'est pas totalement découplée de l'erreur d'estimation d'état. Il est alors indispensable de prendre en considération ces écarts de manière à les atténuer.

Nous proposons dans cette section, une extension des résultats précédents, en supposant que l'entrée inconnue n'affecte que la dynamique du système et que :

$$\bigcap_{i=1}^{r} \ker(E_i) \neq \{0\} \tag{4.103}$$

Soit le système T-S à VDNM affecté par l'entrée inconnue $d(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{4.104}$$

En utilisant l'observateur (4.82), on aboutit à l'erreur d'estimation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(PA_0 - N_iP - L_iC)\,x(t) + \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))PE_id(t) + P\Delta(x,\hat{x},u,d) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))N_ie(t) \end{aligned} \tag{4.105}$$

On pose $K_i = N_iH + L_i$. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$PE_0 = 0 \tag{4.106}$$

$$N_i = PA_0 - K_iC \tag{4.107}$$

alors, l'erreur d'estimation d'état est réduite à :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))\,(N_ie(t) + PE_id(t)) + P\Delta(x,\hat{x},u,d) \tag{4.108}$$

où $\Delta(x,\hat{x},u,d)$ est définie par (4.86). La stabilité du système (4.108) ainsi que la minimisation du transfert de l'entrée inconnue $d(t)$ vers $e(t)$ sont étudiées en exploitant les résultats du chapitre 3. Nous avons généralisé deux approches parmi celle données dans le chapitre 3, la première utilise l'hypothèse de Lipschitz du terme $\Delta(x,\hat{x},u,d)$, la seconde consiste à généraliser l'approche utilisant le théorème de la valeur moyenne et la transformation par secteurs non linéaires.

Approche par condition de Lipschitz

Dans cette partie, posons l'hypothèse suivante :

$$|\Delta(x(t),\hat{x}(t),u(t),d(t))| < \rho\,|e(t)| \tag{4.109}$$

En utilisant la condition (4.109), on obtient les conditions LMIs données au théorème 4.6

Théorème 4.6. *Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (4.76) s'il existe une matrice symétrique et définie positive $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, des matrices $M_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $S \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et deux scalaires positifs $\bar{\gamma}$ et λ tels que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout $i = 1,\ldots,r$:*

$$\min_{X,M_i,S,\lambda,\bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma} \quad s.c.$$

$$\begin{pmatrix} A_0^T(X+C^TS^T)+(X+SC)A_0-C^TM_i^T-M_iC+(1+\lambda\rho^2)I & (X+SC) & (X+SC)E_i \\ (X+C^TS^T) & -\lambda & 0 \\ E_i^T(X+C^TS^T) & 0 & -\bar{\gamma}I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.110}$$

$$(X+SC)E_0 = 0 \tag{4.111}$$

Les matrices de l'observateur sont obtenues à partir des équations suivantes :

$$H = X^{-1}S \tag{4.112}$$
$$K_i = X^{-1}M_i \tag{4.113}$$
$$N_i = (I+HC)A_0-K_iC \tag{4.114}$$
$$L_i = K_i-N_iH \tag{4.115}$$
$$\tag{4.116}$$

Le taux d'atténuation est donné par $\gamma=\sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. En utilisant (4.109), et après étude de la stabilité du système (4.108) avec la méthode de Lyapunov tout en assurant simultanément une atténuation du gain $\mathcal{L}_2$ noté γ, du transfert de $d(t)$ vers $e(t)$, on aboutit aux LMIs du théorème 4.6. □

Approche par le théorème de la valeur moyenne

La méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne ainsi que la transformation par secteurs non linéaires permet d'écrire :

$$\dot{e}(t)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=}^{q}\mu_i(\hat{x}(t))h_j(z)\left(\left(N_i+P\mathcal{A}_j\right)e(t)+PE_id(t)\right) \tag{4.117}$$

Finalement, le problème est ramené à la recherche des matrices N_i, G_0, L_0, L_i et H garantissant les équations (4.106)-(4.107) et assurant la stabilité du système (4.117) et assurant la minimisation du transfert de $d(t)$ vers l'erreur d'estimation d'état $e(t)$. Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour la synthèse de l'observateur à entrées inconnues.

Théorème 4.7. *Un observateur à entrées inconnues existe pour le système (4.76) s'il existe une matrice symétrique et définie positive* $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$*, des matrices* $M_i\in\mathbb{R}^{n\times n_y}$ *et* $S\in\mathbb{R}^{n\times n_y}$ *telles que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout* $i=1,\ldots,r$ *et* $j=1,\ldots,q$ *:*

$$\min_{X,M_i,S,\bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma} \quad s.c.$$

$$\begin{pmatrix} (\mathcal{A}_j+A_0)^T(X+C^TS^T)+(X+SC)(\mathcal{A}_j+A_0)-C^TM_i^T-M_iC+I & (X+SC)E_i \\ E_i^T(X+C^TS^T) & -\bar{\gamma}I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.118}$$

$$(X+SC)E_0 = 0 \tag{4.119}$$

Les matrices de l'observateur sont obtenues à partir des équations suivantes :

$$H = X^{-1}S \tag{4.120}$$
$$K_i = X^{-1}M_i \tag{4.121}$$
$$N_i = (I+HC)A_0 - K_iC \tag{4.122}$$
$$L_i = K_i - N_iH \tag{4.123}$$

Le taux d'atténuation est donné par $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

Démonstration. La démonstration est similaire à celle proposée pour le théorème 4.1. □

Remarque 4.3. *Comme il a été mentionné au chapitre 3, l'avantage principal de la méthode basée sur le théorème de la valeur moyenne et de la transformation par secteurs non linéaires est la relaxation des conditions données dans le théorème 4.1 par la ré-écriture de la condition de Lipschitz sous une autre forme ramenant ainsi le problème de la réduction du conservatisme lié à la constante de Lipschitz à un problème de relaxation de la stabilité qui peut se faire par d'autres types de fonctions de Lyapunov (voir chapitre 3). Le second avantage découle directement des travaux publié récemment dans [Nagy et al., 2009a] sur la modélisation des systèmes T-S à VDNM. En effet, la méthode de modélisation proposée dans [Nagy et al., 2009a] introduit des paramètres supplémentaires donnant des degrés de liberté additionnels dans le choix des fonctions d'activation et des sous-modèles. Ces paramètres sont choisis de façon à satisfaire des conditions d'observabilité locale (observabilité des sous-modèles). Ce résultat important est utilisé ici pour ré-écrire le terme* $\Delta(x,\hat{x},u,d)$ *sous la forme T-S. Les paramètres supplémentaires sont alors choisis de manière à assurer l'observabilité locale des paires* $(A_0 + \mathcal{A}_j, C)$, $i = 1,\ldots,r$, $j = 1,\ldots,q$.

4.4 Conception d'observateurs PI

Dans cette section l'observateur de type Proportionnel-Intégral utilisé dans le cadre des systèmes linéaires [Wojciechowski, 1978] et des systèmes singuliers [Marx et al., 2003] est étendu aux systèmes T-S. L'étude sera développée lorsque les variables de décision sont mesurables et non mesurables.

Hypothèse 4.1. *Tout au long de cette section, les entrées inconnues sont supposées constantes i.e. :*

$$\dot{d}(t) = 0 \tag{4.124}$$

Cette hypothèse est classiquement utilisée pour la démonstration théorique de la convergence de l'observateur PI, bien qu'en pratique, on constatera qu'on peut s'en affranchir en augmentant les gains de l'observateur afin d'élargir sa bande passante permettant ainsi la prise en compte des dynamiques négligées. Cela provoque cependant une augmentation de la sensibilité aux bruits. Le choix des gains de l'observateur est alors déterminé par la satisfaction d'un compromis entre la robustesse et les performances de l'observateur (voir la discussion faite à ce sujet dans [Koenig et Mammar, 2002]).

4.4.1 Variables de décision mesurables

Considérons le système T-S ayant des variables de décision mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.125}$$

En se basant sur l'hypothèse 4.1, le système (4.125) peut s'écrire sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{A}_i x_a(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ y(t) = \bar{C} x_a(t) \end{cases} \tag{4.126}$$

où :

$$x_a(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ d(t) \end{pmatrix}, \ \bar{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & E_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \bar{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix}, \ \bar{C} = \begin{pmatrix} C & G \end{pmatrix} \tag{4.127}$$

L'observateur PI proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t) \end{cases} \tag{4.128}$$

où L_{Pi} représentent les gains proportionnels et L_{Ii} les gains intégraux de l'observateur (4.128). Cette structure se différencie de la structure classique de Luenberger par la présence d'un retour intégral permettant la reconstruction de l'entrée inconnue. En effet, contrairement à un observateur à entrées inconnues par découplage consistant à masquer l'influence des entrées inconnues sur l'erreur d'estimation d'état, l'observateur PI permet l'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues. De manière générale, l'observateur PI est utilisé par exemple pour l'estimation des défauts ayant un spectre en basses fréquences.

La mise sous forme augmentée de (4.128) donne :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{A}_i \hat{x}_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}_a(t) \end{cases} \tag{4.129}$$

où :

$$\bar{L}_i = \begin{pmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{pmatrix} \tag{4.130}$$

On définit l'erreur d'estimation d'état et d'entrée inconnue comme suit :

$$e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \tag{4.131}$$

En utilisant (4.126) et [Marx et al., 2003], la dynamique de l'erreur $e_a(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\bar{A}_i - \bar{L}_i \bar{C}\right) e_a(t) \tag{4.132}$$

Les conditions de convergence de d'erreur d'estimation de l'état et d'EI sont données dans le théorème 4.8 sous forme LMI.

Théorème 4.8. *Les erreurs d'estimation d'état et d'entrées inconnues convergent asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in \mathbb{R}^{(n+n_d)\times(n+n_d)}$ et des matrices $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+n_d)\times n_y}$ telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\bar{A}_i^T P + P\bar{A}_i - \bar{C}^T \bar{K}_i^T - \bar{K}_i \bar{C} < 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{4.133}$$

Après résolution des LMIs (4.133), les gains de l'observateur sont obtenus à partir de l'équation suivante :

$$\bar{L}_i = \begin{pmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{pmatrix} = P^{-1}\bar{K}_i \tag{4.134}$$

Démonstration. La preuve s'appuie sur la fonction de Lyapunov (4.135) définie par :

$$V(e_a(t)) = e_a(t)^T P e_a(t), \quad P = P^T > 0 \tag{4.135}$$

la propriété de somme convexe des fonctions d'activation et sur le changement de variables $\bar{K}_i = P\bar{L}_i$. □

4.4.2 Variables de décision non mesurables

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les fonctions d'activation du système dépendent de variables non mesurables (par exemple l'état du système). La structure du système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x_a(t) + B_i u(t) + E_i d(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) \end{cases} \tag{4.136}$$

De manière analogue à la démarche exposée dans la section précédente, le système (4.136) se met facilement sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x_a(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ y(t) = \bar{C} x_a(t) \end{cases} \tag{4.137}$$

L'observateur ne pourra pas utiliser la même variable de prémisse que le système (4.137) car elle n'est pas disponible d'où la difficulté de la conception d'observateur pour les systèmes T-S à VDNM. L'observateur proposé utilise alors l'état estimé $\hat{x}(t)$ comme variable de prémisse, ce qui donne la structure suivante de l'observateur :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i \hat{d}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t) \end{cases} \tag{4.138}$$

Sous la forme augmentée, l'observateur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\bar{A}_i \hat{x}_a(t) + \bar{B}_i u(t) + \bar{L}_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \bar{C}\hat{x}_a(t) \end{cases} \tag{4.139}$$

Remarque 4.4. *On constate qu'après l'introduction de l'état augmenté $x_a(t)$, les structures du système (4.137) et de l'observateur (4.139) prennent la même forme que celles utilisées dans le chapitre 3 pour l'estimation d'état sans entrées inconnues, donc les résultats obtenus dans les sections 3.3 et 3.4 au chapitre 3 seront facilement transposables à l'observateur PI par remplacement des matrices A_i, B_i, C et K_i respectivement par $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}$ et $\bar{K}_i$. Cependant les résultats obtenus dans les théorèmes 3.14 et 3.15 de la section 3.4 concernant les observateurs $\mathcal{L}_2$ ne peuvent pas s'appliquer directement car les blocs $(2,2)$ des LMIs (3.303) et (3.343) doivent êtres définis négatifs cela veut dire que les matrices A_i doivent être stables. Or, après l'augmentation du vecteur d'état avec le vecteur d'entrées inconnues $d(t)$, les valeurs propres des matrices $\bar{A}_i$ obtenues peuvent ne pas avoir des parties réelles négatives. Les LMIs (3.303) et (3.343) sont donc irréalisables. Afin de remédier à ce problème, nous proposons dans la section suivante une extension du théorème 3.14 obtenu par l'approche par incertitudes bornées. Le résultat du théorème 3.15 peut se généraliser de façon similaire, il est donc omis.*

Considérons le système (4.137) et son observateur (4.139). En utilisant la transformation opérée dans la section 3.7 du chapitre 3, on écrit le système (4.137) sous une forme équivalente représentée par le système T-S incertain où les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\left(\bar{A}_i + \Delta\bar{A}(t)\right) x_a(t) + \left(\bar{B}_i + \Delta\bar{B}(t)\right) u(t) \right) \\ y(t) = \bar{C} x_a(t) \end{cases} \tag{4.140}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état et des entrées inconnues $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ est donnée par :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\left(\bar{A}_i + \bar{L}_i\bar{C}\right) e_a(t) + \Delta\bar{A}(t) x_a(t) + \Delta\bar{B}(t) u(t) \right) \tag{4.141}$$

Après décomposition de la matrice $\Delta A(t)$ et le vecteur $x_a(t)$, on obtient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\left(\bar{A}_i + \bar{L}_i\bar{C}\right) e_a(t) + \begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \Delta E(t) \\ 0 \end{bmatrix} d(t) + \Delta\bar{B}(t) u(t) \right) \tag{4.142}$$

L'idée consiste maintenant à définir un état augmenté, non pas avec $x_a(t)$ mais seulement avec $x(t)$ comme suit :

$$\tilde{e}_a(t) = [e_a(t)^T \;\; x(t)^T]^T \tag{4.143}$$

ce qui donne :

$$\tilde{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \mu_j(x(t)) \left(M_{ij} \tilde{e}_a(t) + R_{ij} \omega(t) \right) \tag{4.144}$$

où :

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{A}_i - \bar{L}_i\bar{C} & \Delta\hat{A}(t) \\ 0 & A_j \end{bmatrix}, \quad R_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{B}(t) & \Delta\hat{E}(t) \\ B_j & E_j \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \tag{4.145}$$

avec :

$$\Delta\hat{A}(t) = \begin{bmatrix} \Delta A(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta\hat{E}(t) = \begin{bmatrix} \Delta E(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.146}$$

La synthèse des gains de l'observateur (4.139) revient alors à la recherche des gains $\bar{L}_i$ assurant la stabilité du système (4.144) et garantissant une atténuation $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers l'erreur $e_a(t)$, dont la solution est donnée dans le théorème 4.9.

Théorème 4.9. *La stabilité du système (4.144) est assurée et le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est minimisé s'il existe deux matrices symétriques et définies positives $P_1 \in \mathbb{R}^{(n+n_d)\times(n+n_d)}$ et $P_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et des matrices $\bar{K}_i \in \mathbb{R}^{n+n_d\times n_y}$ ainsi que des scalaires positifs $\bar{\gamma}$, λ_1, λ_2 et λ_3 solutions de la minimisation de $\bar{\gamma}$ sous les contraintes :*

$$\begin{pmatrix} X_i & 0 & 0 & 0 & P_1\mathcal{A} & P_1\mathcal{B} & P_1\mathcal{E} \\ 0 & X_j & P_2B_j & P_2E_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_j^TP_2 & -\bar{\gamma}I+\lambda_2E_B^TE_B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_j^TP_2 & 0 & -\bar{\gamma}I+\lambda_3E_E^TE_E & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}^TP_1 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_1I & 0 & 0 \\ \mathcal{B}^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2I & 0 \\ \mathcal{E}^TP_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3I \end{pmatrix} < 0 \tag{4.147}$$

où :

$$X_i = \bar{A}_i^TP_1 + P_1\bar{A}_i - \bar{K}_i\bar{C} - \bar{C}^T\bar{K}_i^T + I \tag{4.148}$$

$$X_j = A_j^TP_2 + P_2A_j + \lambda_1E_A^TE_A \tag{4.149}$$

Les gains de l'observateur sont obtenus par l'équation :

$$\bar{L}_i = P_1^{-1}\bar{K}_i \tag{4.150}$$

Le taux d'atténuation du transfert de $\omega(t)$ vers $e_a(t)$ est obtenu par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{4.151}$$

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve du théorème 3.14. □

4.5 Conception d'observateurs PMI

Dans cette partie, l'hypothèse de travail 4.1 selon laquelle les entrées inconnues $d(t)$ sont constantes est relaxée. La classe de signaux considérée est plus générale dans la mesure où elle prend en considération des entrées inconnues sous une forme polynomiale. La qualité de l'estimation de l'état et des entrées inconnues par un observateur PI, tel que développé dans la section précédente, risque d'être dégradée dans le cas des variations rapides des entrées inconnues.

L'objectif de cette section est de fournir une méthode d'estimation simultanée de l'état du système ainsi que des entrées inconnues ne satisfaisant pas l'hypothèse 4.1.

Soit le système représenté par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\left(A_ix(t) + B_iu(t) + E_id(t) + R_i\omega(t)(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Gd(t) + W\omega(t)(t) \end{cases} \tag{4.152}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement l'état et la sortie du système, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ est l'entrée de commande, $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ l'entrée inconnue (défauts, incertitudes paramétriques...) et $\omega(t) \in \mathbb{R}^{n_\omega}$ une perturbation (bruit de mesure,...). Les matrices $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$, $E_i \in \mathbb{R}^{n\times n_d}$, $R_i \in \mathbb{R}^{n\times n_\omega}$, $C \in \mathbb{R}^{n_y\times n}$, $G \in \mathbb{R}^{n_y\times n_d}$ et $W \in \mathbb{R}^{n_y\times n_\omega}$ sont connues.

Hypothèse 4.2. *L'entrée inconnue $d(t)$ vérifie :*

$$d^{(q)}(t) = 0 \tag{4.153}$$

en d'autres termes, la dérivée $q^{\text{ème}}$ de $d(t)$ est nulle.

Afin de montrer l'intérêt d'une telle hypothèse, prenons quelques exemples

1. Considérons une rampe $d(t) = \alpha t$ de pente α. Pour arriver à la condition (4.153), deux dérivations sont nécessaires, on aboutit donc à $q = 2$.
2. Un autre exemple donné par $d(t) = a_0 + a_1 t + a^2 t^2$ satisfait la condition (4.153) avec $q = 3$. Notons que les paramètres a_i ne sont pas connus, seul l'ordre de dérivation permettant de satisfaire la condition (4.153) est connu.

Dans un cadre de diagnostic, la condition (4.153) permet donc de prendre en considération une large classe de défauts affectant le système : échelon, rampe,....

D'une manière générale, $d^{(1)}(t)$, $d^{(2)}(t), \ldots,$ $d^{(q-1)}$ représenten t les dérivées successives de $d(t)$ qu'on définira sous la forme d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{d}(t) \\ \dot{d}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{d}_{q-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ \vdots \\ d_q(t) \end{bmatrix} \tag{4.154}$$

Le système (4.152), peut se mettre alors sous la forme augmentée suivante :

$$\begin{cases} x_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{R}_i \omega(t)\right) \\ y(t) = \tilde{C} x_a(t) + W\omega(t) \end{cases} \tag{4.155}$$

où :

$$x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ d(t) \\ d_1(t) \\ \vdots \\ d_{q-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & E_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_d} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_d} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_i = \begin{bmatrix} R_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.156}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C & G & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.157}$$

4.5.1 Structure de l'observateur

Définition 4.1. *Étant donné un signal $d(t)$ satisfaisant la condition (4.153). On appellera degré de l'observateur PMI, le nombre d'actions intégrales nécessaires à l'estimation des $q-1$ premières dérivées de $d(t)$.*

L'observateur PMI de degré q permettant l'estimation simultanée de l'état du système ainsi que des entrées inconnues $d(t)$ vérifiant la condition (4.153) est donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + E_i\hat{d}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + G\hat{d}(t) \end{cases} \tag{4.158}$$

où $\hat{d}(t)$ est obtenu par l'observateur Proportionnel Multi-Intégral suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{d}}_j(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \left(\hat{d}_{j+1} + L_{Ii}^{j}(y(t) - \hat{y}(t))\right), j = 1, \ldots, q-1 \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \left(\hat{d}_1(t) + L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \end{cases} \tag{4.159}$$

La figure 4.12 illustre la structure de l'observateur (4.158)-(4.159). Sur celle-ci, on constate que l'estimation des entrées inconnues passe par l'estimation de ses $q-1$ premières dérivées par $q-1$ actions intégrales d'où l'appellation Multi-Intégral. Sous une forme augmentée, l'observateur

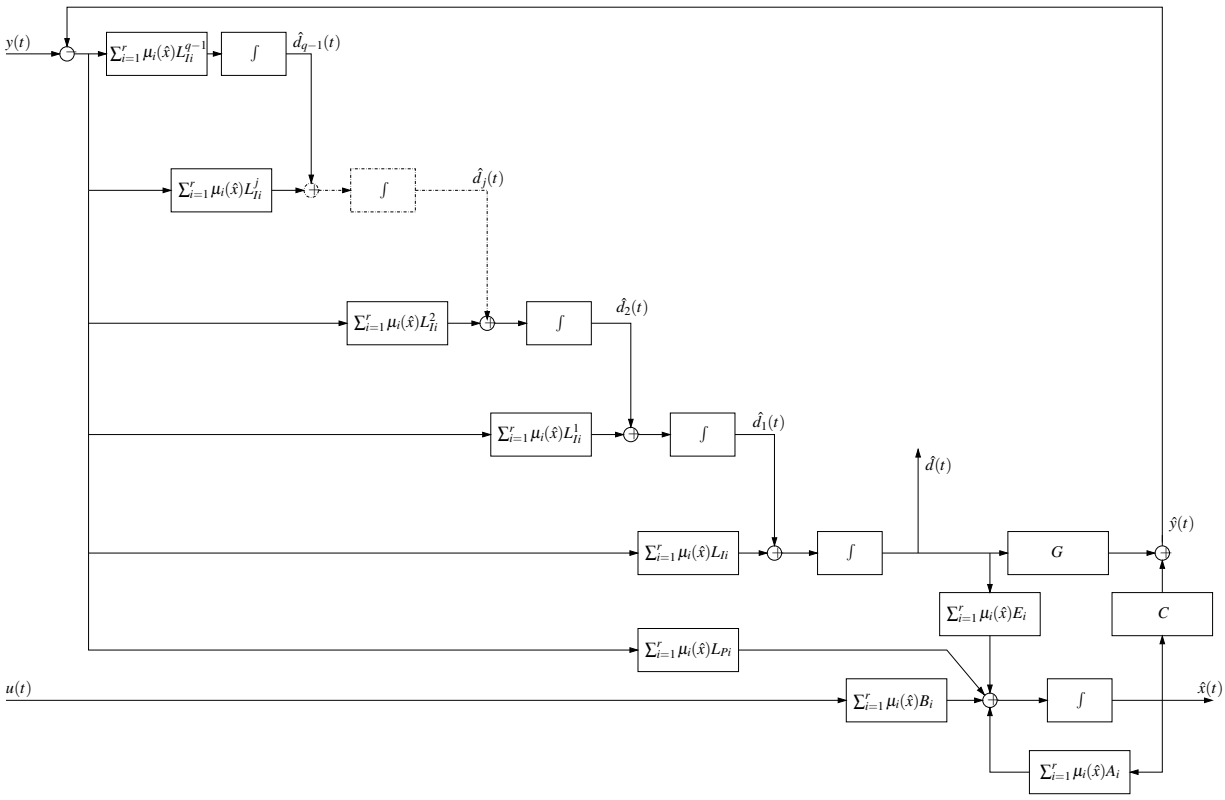


Figure 4.12 – Principe de l'observateur Proportionnel Multi-Intégral (PMI)

(4.158)-(4.159) devient :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(z(t)) \left(\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{L}_i (y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C} \hat{x}_a(t) \end{cases} \tag{4.160}$$

où :

$$\tilde{L}_i = \left[L_{Pi}^T \;\; L_{Ii}{}^T \;\; L_{Ii}^1{}^T \;\; \dots \;\; L_{Ii}^{q-2}{}^T \;\; L_{Ii}^{q-1}{}^T \right]^T \tag{4.161}$$

Les fonction d'activation μ_i de l'observateur (4.158)-(4.159) dépendent de la variable $z(t)$ qui peut être la même que $\xi(t)$ utilisée dans le système (4.152) si $\xi(t)$ est mesurable, ou bien dépendante de l'estimation de $\xi(t)$ si celle ci n'est pas mesurable.

4.5.2 Variables de décision mesurables

Considérons dans cette partie le cas où $\xi(t)$ est mesurable. La variable de prémisse de l'observateur (4.158)-(4.159) est donnée alors par $z(t) = \xi(t)$. L'erreur d'estimation d'état, des entrées inconnues et de leurs dérivées est noté $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$. En utilisant le système (4.155) et l'observateur (4.160), la dynamique de l'erreur d'estimation obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C}\right) e_a(t) + \left(\tilde{R}_i - \tilde{L}_i W\right) \omega(t) \right) \tag{4.162}$$

Systèmes non perturbés

Nous supposons ici que les perturbations sont nulles c-à-d $\omega(t) = 0$. L'erreur d'estimation (4.162) devient :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C}\right) e_a(t) \tag{4.163}$$

Une condition suffisante garantissant la stabilité du système (4.163) est l'obtention d'une matrice de Lyapunov P assurant les inégalités suivantes :

$$\left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C}\right)^T P + P \left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C}\right) < 0, \;\; i = 1, \dots, r \tag{4.164}$$

Le théorème suivant fournit des conditions LMIs permettant la recherche des gains $\tilde{L}_i$ de l'observateur PMI de degré q.

Théorème 4.10. *Les erreurs d'estimation d'état, des entrées inconnues et de leurs $q-1$ dérivées convergent asymptotiquement vers zéro s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times(n+qn_d)}$ et des gains $\tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times n_y}$ tels que :*

$$\tilde{A}_i^T P + P \tilde{A}_i - \tilde{K}_i \tilde{C} - \tilde{C} \tilde{K}_i^T < 0, \;\; i = 1, \dots, r \tag{4.165}$$

Les gains de l'observateur sont obtenus par :

$$\tilde{L}_i = P^{-1} \tilde{K}_i \tag{4.166}$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 4.8. □

Il est possible que la résolution des LMIs du théorème (4.10) aboutisse à une dynamique lente de l'erreur d'estimation. Afin d'assurer une stabilité exponentielle avec un taux de convergence α de l'erreur d'estimation vers zéro, des conditions LMIs sont données dans le théorème (4.11)

Théorème 4.11. *Les erreurs d'estimation d'état, des entrées inconnues et de leurs $q-1$ premières dérivées convergent exponentiellement vers zéro avec un taux de décroissance α s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P = P^T > 0$ et des gains $\tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times n_y}$ tel que :*

$$\tilde{A}_i^T P + P\tilde{A}_i - \tilde{K}_i\tilde{C} - \tilde{C}\tilde{K}_i^T + 2\alpha P < 0, \quad i = 1,\dots,r \tag{4.167}$$

Les gains de l'observateur sont obtenus par :

$$\tilde{L}_i = P^{-1}\tilde{K}_i \tag{4.168}$$

Démonstration. D'après la théorie de Lyapunov, la stabilité exponentielle est garantie avec un taux de décroissance α s'il existe une fonction candidate de Lyapunov $V(e_a(t)) > 0$ telle que [Boyd et al., 1994] :

$$\exists \alpha \in R : \dot{V}(e_a(t)) + 2\alpha V(e_a(t)) < 0 \tag{4.169}$$

En considérant une fonction de Lyapunov quadratique $V(e_a(t)) = e_a(t)^T P e_a(t), \quad P = P^T > 0.$ □

Remarque 4.5. *D'autres performances peuvent être obtenues par un placement des valeurs propres des matrices $\left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i\tilde{C}\right)$ dans des régions LMIs définies dans l'annexe C. Cela s'effectue en résolvant les LMIs du théorème 4.10 conjointement avec les LMIs données dans l'annexe C suivant la région choisie.*

Systèmes perturbés

Dans cette section, les perturbations sont supposées non nulles ($\omega(t) \neq 0$). L'erreur d'estimation est donnée par l'équation :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i\tilde{C}\right) e_a(t) + \left(\tilde{R}_i - \tilde{L}_i W\right) \omega(t)\right) \tag{4.170}$$

L'objectif est de synthétiser les gains $\tilde{L}_i$ de l'observateur afin d'assurer la stabilité du système (4.170) générant l'erreur d'estimation et de garantir un taux d'atténuation γ du transfert des perturbations $\omega(t)$ vers l'erreur $e_a(t)$. Cela se traduit par les contraintes suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} e_a(t) = 0, \omega(t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{4.171}$$

$$\frac{\|e_a\|_2}{\|\omega\|_2} < \gamma, \omega(t) \neq 0, \quad t \geq 0 \tag{4.172}$$

Théorème 4.12. *Étant donné un scalaire $\gamma > 0$. Le système (4.170) générant les erreurs d'estimation d'état, des entrées inconnues et leurs dérivées est stable et respecte les contraintes (4.171)-(4.172) s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times(n+qn_d)}$ et des gains $\tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times n_y}$ tels que :*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P + P\tilde{A}_i - \tilde{K}_i\tilde{C} - \tilde{C}^T\tilde{K}_i^T + I & P\tilde{E}_i - \tilde{K}_i W \\ \tilde{E}_i^T P - W^T\tilde{K}_i^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, \cdots, r \tag{4.173}$$

Les gains de l'observateur se déduisent de l'équation :

$$\tilde{L}_i = P^{-1}\tilde{K}_i \tag{4.174}$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est similaire à celle fournie pour le théorème 3.16. □

4.5.3 Variables de décision non mesurables

Contrairement à la section précédente, les variables de décision sont supposées inconnues et dépendent de l'état du système. De ce fait, le système (4.152) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{R}_i \omega(t)\right) \\ y(t) = \tilde{C} x_a(t) + W\omega(t) \end{cases} \tag{4.175}$$

La non-mesurabilité des variables de décision intervenant dans les fonctions d'activation du système (4.175) rend impossible leur intégration dans l'observateur. Comme il a été fait précédemment, les variables de prémisse $z(t)$ de l'observateur dépendront de l'estimé de l'état $\hat{x}(t)$. L'observateur sera alors sous la forme :

$$\begin{cases} \hat{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{L}_i(y(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \tilde{C}\hat{x}_a(t) \end{cases} \tag{4.176}$$

Les structures du système (4.175) et de l'observateur (4.176) (après augmentation du vecteur d'état), sont identiques aux structures du système et de l'observateur utilisés pour l'estimation d'état dans le chapitre 3. Les résultats proposés dans le chapitre 3 pour l'estimation d'état des systèmes T-S à VDNM sont donc applicables à la conception d'observateur PMI de degré q pour l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues en remplaçant les matrices A_i, B_i, E_i, R, C, G et K_i par $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{E}_i$, $\tilde{R}$, $\tilde{C}$ et $\tilde{K}_i$.

A titre d'exemple, en utilisant l'approche proposée dans la section 3.4.3 du chapitre 3, on introduit $\hat{x}(t)$ de manière artificielle dans le système. L'équation d'état du système (4.3) peut s'écrire alors sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + R_i \omega(t) + \nu(t)) \tag{4.177}$$

où :

$$\nu(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + W_i \omega(t)) \tag{4.178}$$

Sous les hypothèses de stabilité du système, de bornitude des signaux $u(t)$, $d(t)$ et $\omega(t)$ et de conditions de Lipschitz des fonctions d'activation, l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$|\nu(t)| \leq \sigma \tag{4.179}$$

La forme augmentée du système équivalent (4.178) est donnée par :

$$\begin{cases} x_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\tilde{A}_i x(t) + \tilde{B}_i u(t) + \tilde{R}_i \tilde{\omega}(t)\right) \\ y(t) = \tilde{C} x_a(t) + \tilde{W} \omega(t) \end{cases} \tag{4.180}$$

où $\tilde{A}_i$, $\tilde{B}_i$, $\tilde{C}$ sont définies par (4.156)-(4.157) et

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & I_n \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} W & 0_{n_y \times n} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \nu(t) \end{bmatrix} \tag{4.181}$$

L'erreur d'estimation entre le système (4.180) et l'observateur (4.176) est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\left(\tilde{A}_i - \tilde{L}_i \tilde{C}\right) e_a(t) + \left(\tilde{E}_i - \tilde{L}_i \tilde{W}\right) \tilde{\omega}(t)\right) \tag{4.182}$$

Théorème 4.13. *Étant donné un scalaire $\gamma > 0$, le système (4.170) générant les erreurs d'estimation d'état, des entrées inconnues et de leurs dérivées est stable et satisfait les contraintes (4.171)-(4.172) s'il existe une matrice symétrique et définie positive $P = P^T > 0 \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times(n+qn_d)}$ et des gains $\tilde{K}_i \in \mathbb{R}^{(n+qn_d)\times n_y}$ tel que :*

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P + P\tilde{A}_i - \tilde{K}_i\tilde{C} - \tilde{C}^T \tilde{K}_i^T + I & P\tilde{E}_i - \tilde{K}_i \tilde{W} \\ \tilde{E}_i^T P - \tilde{W}^T \tilde{K}_i^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.183}$$

Les gains de l'observateur sont donnés par :

$$\tilde{L}_i = P^{-1} \tilde{K}_i \tag{4.184}$$

Démonstration. La démonstration du théorème 4.13 est identique à celle du théorème 3.16. □

4.5.4 Discussion et remarques

1. Un observateur peut également être obtenu par la minimisation du transfert γ des perturbations $\tilde{\omega}(t)$ vers l'erreur d'estimation $e_a(t)$, ce qui améliore la qualité de l'estimation d'état et des entrées inconnues. Afin de garder le caractère linéaire des inégalités matricielles (4.183), le changement de variable $\bar{\gamma} = \gamma^2$ est effectué. L'observateur optimal est obtenu par la minimisation de $\bar{\gamma}$ sous les contraintes LMIs :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i^T P + P\tilde{A}_i - \tilde{K}_i\tilde{C} - \tilde{C}^T \tilde{K}_i^T + I & P\tilde{E}_i - \tilde{K}_i \tilde{W} \\ \tilde{E}_i^T P - \tilde{W}^T \tilde{K}_i^T & -\bar{\gamma} I \end{bmatrix} < 0 \tag{4.185}$$

   Les gains de l'observateur sont obtenu à partir de l'équation (4.184) et le taux d'atténuation est donné par $\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}}$.

2. La classe d'entrées inconnues traitée ici représente tous les signaux satisfaisant la condition $d^{(q)}(t) = 0$. Cette condition peut être relaxée en supposant seulement une hypothèse sur la borne de la $q^{\text{ème}}$ dérivée de $d(t)$, on obtient alors :

$$\begin{cases} d^{(q)}(t) \neq 0 \\ d^{(q)}(t) \text{ est bornée} \end{cases} \tag{4.186}$$

Une façon de résoudre le problème afin de pouvoir utiliser les résultats est de considérer la $q^{\text{ème}}$ dérivée comme une perturbation bornée et de minimiser son transfert vers l'erreur d'estimation. Le nouveau vecteur de perturbations et les matrices d'influences associées sont :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ d^{(q)}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} W & 0_{n_y \times n_d} \end{bmatrix} \tag{4.187}$$

dans le cas où les variable de décision sont mesurables et :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \omega(t) \\ \nu(t) \\ d^{(q)}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E_i & I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & I_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} W & 0_{n_y \times n} & 0_{n_y \times n_d} \end{bmatrix} \tag{4.188}$$

dans le cas où les variables de décision sont non mesurables.

3. Dans le cas des systèmes T-S à variables de décision mesurables, l'hypothèse de borne sur les entrées inconnues n'est pas nécessaire pour la conception d'observateur PI ou PMI. En revanche, dans le cas des systèmes T-S à variables de décision non mesurables, l'hypothèse de borne sur les entrées inconnues est nécessaire ainsi que la stabilité du système et la borne sur l'entrée. En effet, dans certaines méthodes d'estimation d'état des systèmes T-S à VDNM (développées dans le chapitre 3), le terme additionnel issu de l'hypothèse de non mesurabilité des variables de décision est définie par :

$$\nu(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t)) \tag{4.189}$$

Ce terme est considéré comme une perturbation à minimiser, imposant de ce fait sa bornitude. Du point de vue pratique, l'hypothèse d'entrées inconnues bornées n'est pas très restrictive dans la mesure où, dans la majorité des cas, les signaux physiques considérés comme des défauts sont bornés.

Exemple 4.2 (**Comparaison entre l'estimation d'état avec un observateur PI et un observateur PMI**)
Afin d'illustrer les approches d'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues à base d'observateurs PI et PMI, considérons le système T-S (4.152) *ayant une variable*

de prémisse $\xi(t)$ dépendante de l'état du système, défini par :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}, \; E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; R_1 = R_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; W = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix},$$

et :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'entrées inconnues contient deux composantes : la composante $d_1(t)$ affectant les sorties du système et la composante $d_2(t)$ qui affecte la dynamique du système (voir les matrices E_1, E_2 et G). A titre d'exemple, on peut supposer que $d_1(t)$ est un défaut de capteur et $d_2(t)$ un défaut d'actionneur.

Les fonctions d'activation dépendent de la composante $x_1(t)$ du vecteur d'état $x(t)$ et sont définies par :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases} \tag{4.190}$$

Sans perturbation ni entrée inconnue, l'évolution dans le temps des fonctions d'activation est représentée sur la figure 4.13. On constate alors qu'il y a un mélange entre les deux sous-modèles du système représentant ainsi un comportement non linéaire.

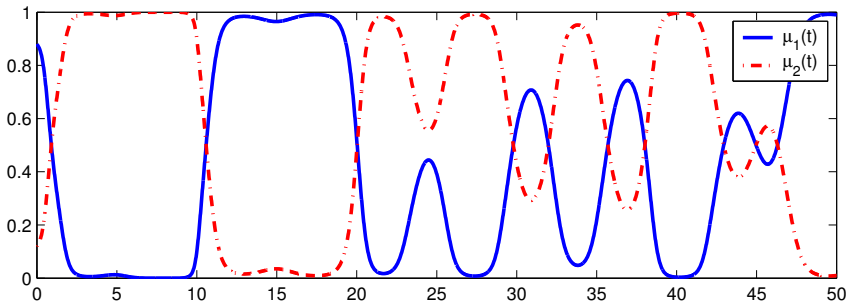


Figure 4.13 – Evolution temporelle des fonctions d'activation μ_1 et μ_2

La perturbation $\omega(t)$ est un signal aléatoire borné par 0.5. Les entrées inconnues $d_1(t)$ et $d_2(t)$ sont variables dans le temps avec des dérivées d'ordre 4 négligeables. Après la conception de l'observateur PI suivant le théorème 4.9 et l'observateur PMI de degré 4 suivant le théorème 4.13 on obtient les résultats de simulation présentés aux figures 4.14, 4.15, 4.16 et 4.17.

L'observateur PI fournit une estimation satisfaisante de l'état et des entrées inconnues même si la condition 4.1 n'est pas vérifiée. Cependant, dans cet exemple, les entrées inconnues ont une variation rapide ce qui entraîne une estimation dégradée de l'état et des entrées

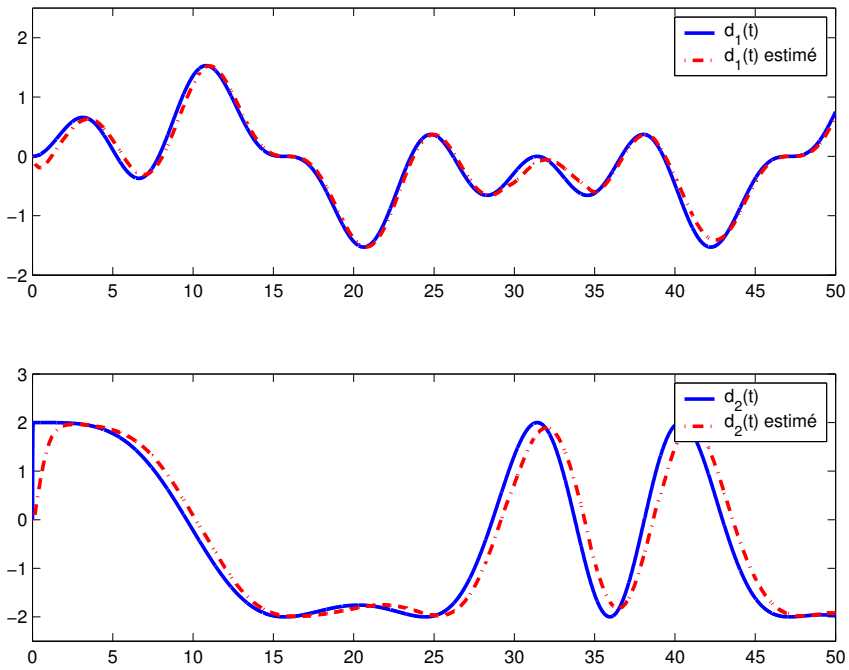


Figure 4.14 – Entrées inconnues et leurs estimées par l'observateur PI

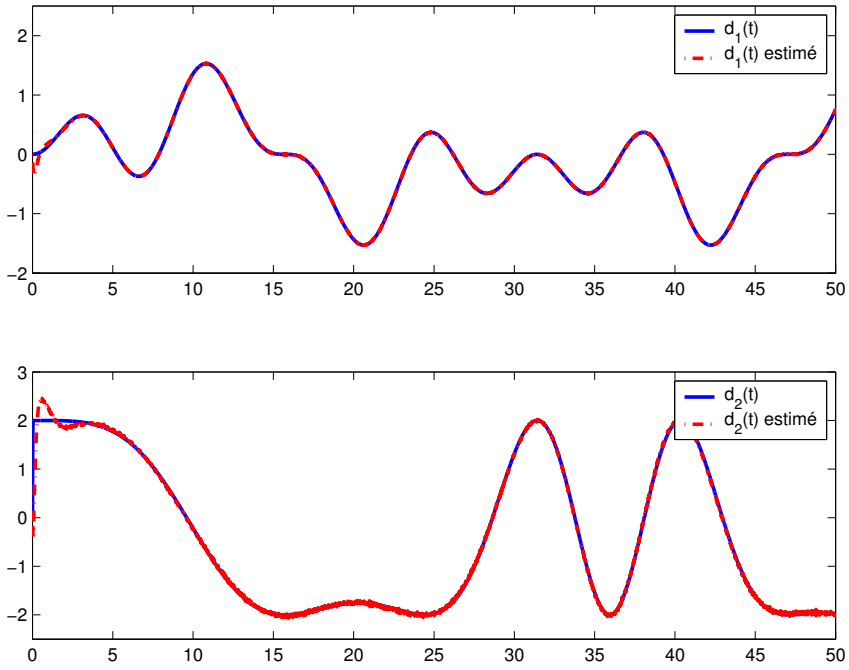


Figure 4.15 – Entrées inconnues et leurs estimées par l'observateur PMI

inconnues (figures 4.14 et 4.16) comparée à celles obtenues avec l'observateur PMI (figures 4.15 et 4.17).

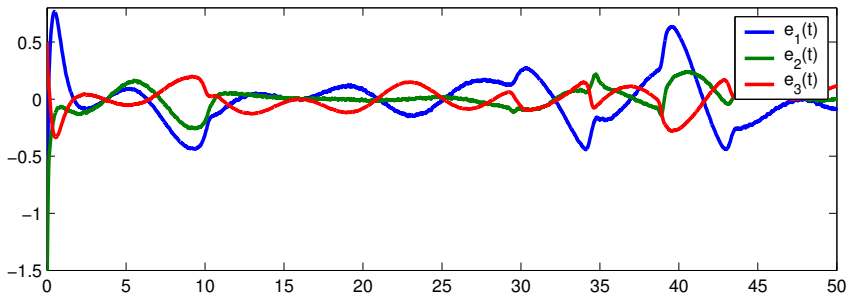


Figure 4.16 – Erreurs d'estimation d'état obtenues avec par l'observateur PI

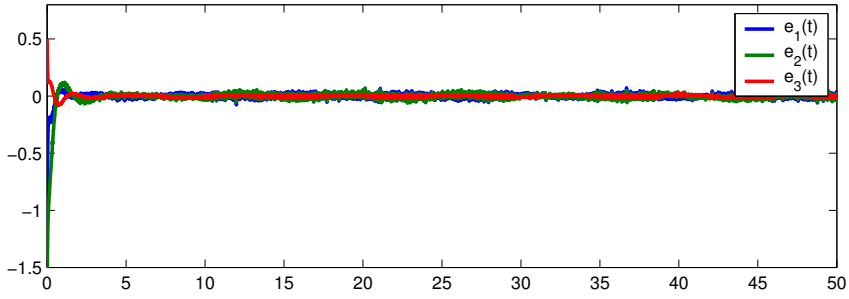


Figure 4.17 – Erreurs d'estimation d'état obtenues avec par l'observateur PMI

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, deux types d'observateurs ont été étudiés pour les systèmes non linéaires représentés par un modèle T-S. L'étude est focalisée sur le cas où les fonctions poids du modèle dépendent de l'état du système qui n'est pas mesurable. L'objectif principal était la prise en compte des entrées inconnues dans la phase de modélisation afin de généraliser les méthodes d'estimation d'état proposées dans le chapitre 3. Cela vise à rendre l'observateur robuste vis-à-vis des entrées inconnues pouvant avoir différentes origines (perturbations, défauts, bruit de mesure, incertitudes de modélisation,...). Les synthèses d'observateurs proposées s'appuient sur deux objectifs complémentaires :

– si l'objectif est une estimation robuste de l'état, on cherche à découpler l'estimation d'état des entrées inconnues ou, à défaut, on minimise leur influence sur l'estimation d'état. Dans ce cas, des solutions ont été proposées pour concevoir un observateur assurant un découplage complet des entrées inconnues de l'erreur d'estimation. En combinant les conditions de découplage aux conditions de stabilité assurant la convergence de l'erreur d'estimation d'état vers zéro, des conditions LMIs et LMEs permettant la synthèse des gains de l'observateur sont ainsi proposées dans le cas où les entrées inconnues affectent simultanément l'équation d'état et de mesure du système. Dans le cas où les entrées inconnues n'affectent pas l'équation de mesure, ce qui est souvent le cas pour les défauts d'actionneur, par exemple, un découplage parfait n'est pas réalisable à cause du problème

de recherche d'une matrice P orthogonale à un ensemble de matrice c-à-d $PE_i = 0$. Afin de résoudre ce problème, nous avons procédé comme suit : on cherche la matrice E_0, moyenne des matrices E_i, puis on cherche une matrice P orthogonale à la matrice E_0 ce qui garantit un découplage partiel des entrées inconnues. La partie résiduelle de l'influence des entrées inconnues est ensuite traitée comme une incertitude dont l'effet est minimisé par les techniques de minimisation $\mathcal{L}_2$ assurant un taux d'atténuation minimal du transfert des entrées inconnues non découplées vers l'erreur d'estimation d'état. Les conditions de convergence de l'erreur d'estimation d'état et de découplage approximatif des entrées inconnues sont données sous forme d'un ensemble de LMIs et de LMEs. L'estimation des entrées inconnues est possible sous certaines conditions de rang, mais reste cependant sensible au bruit.

– Le second type d'observateurs est basé sur l'estimation simultanée de l'état du système et des entrées inconnues. Dans le cas des entrées inconnues constantes ou à dynamiques très lentes, un observateur PI à une seule action intégrale permet de les estimer simultanément avec les états du système. En se basant sur cette hypothèse, une démonstration théorique est possible afin de prouver la convergence des erreurs d'estimation d'état et d'entrées inconnues vers zéro. L'étude de la stabilité permet d'établir des conditions LMIs permettant la synthèse de l'observateur. Une généralisation de cet observateur aux entrées inconnues de forme polynomiale est proposée par l'ajout de q actions intégrales où q correspond au degré des polynômes modélisant ces signaux. Le principe de cet observateur est basée sur l'estimation simultanée des $q-1$ dérivées des entrées inconnues. Cependant, d'après notre étude, il s'avère qu'il n'est pas nécessaire de prendre un degré de l'observateur égal à q. En effet, si certaines dérivées d'ordres élevés sont faibles elles peuvent être considérées comme du bruit. A noter aussi que pour le cas des systèmes T-S à VDNM, les entrées inconnues doivent être bornées contrairement aux cas des systèmes T-S à VDM, ce qui n'est pas très restrictif en pratique.

Les résultats donnés dans ce chapitre sont une extension des résultats fournis pour les systèmes T-S à VDNM du chapitre 3.

5

Diagnostic de fautes des systèmes T-S et commande tolérante aux défauts

Sommaire

5.1 Introduction **155**
5.2 Définitions et généralités **155**
5.3 Défauts et modélisation **157**
5.4 État de l'art **159**
5.5 Objectif **165**
5.6 Diagnostic de fautes par observateurs à entrées inconnues **166**
5.6.1 Défauts d'actionneurs 166
5.6.2 Défauts de capteurs 167
5.6.3 Discussions et conclusion 169
5.7 Diagnostic par observateurs PI et PMI **170**
5.7.1 Discussions et conclusion 176
5.8 Diagnostic par formalisme $\mathcal{H}_\infty$ **177**
5.8.1 Formulation du problème 177
5.8.2 Conception du générateur de résidus 177
5.8.3 Diagnostic robuste de fautes 187
5.9 Commande tolérante aux défauts **191**
5.9.1 Introduction 191
5.9.2 Etat de l'art 191
5.10 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire **194**
5.10.1 Stratégie de commande tolérante aux défauts 194
5.10.2 Objectif 194
5.10.3 Variables de décision mesurables 195

5.10.4 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par perturbation 198
5.10.5 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par le théorème de la valeur moyenne 204
5.11 Conclusion 206

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons des méthodes de diagnostic à base de modèles visant à la détection, la localisation et l'estimation des défauts affectant un système non linéaire décrit par un modèle T-S. Les méthodes développées utilisent les observateurs présentés aux chapitres 3 et 4 afin de concevoir des générateurs de résidus permettant la détection des défauts. Les techniques de bancs d'observateurs sont utilisées dans l'objectif de générer des résidus structurés pour localiser les défauts. Les observateurs PI et PMI permettent leur estimation ce qui implique leur localisation et leur détection. La dernière méthode présentée repose sur le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ proposé pour le diagnostic des systèmes linéaires dans [Stoustrup et Niemann, 2000] et [Mazars et al., 2008]. Cette dernière approche permet la détection d'un défaut, sa localisation et son estimation.

Ce chapitre comporte une partie rappelant quelques concepts de base concernant le diagnostic à la section 5.2, suivie d'une section sur la nature des défauts et leur modélisation. Un panorama des méthodes de diagnostic est présenté à la section 5.4. Les sections 5.6, 5.7 et 5.8 présentent trois méthodes de diagnostic pour les systèmes T-S proposées dans le présent mémoire. Enfin, la section 5.9 présente une loi de commande tolérante aux défauts. Elle utilise la commande nominale conçue pour le système sans défaut à laquelle sont ajoutés deux termes supplémentaires. Le premier terme est relatif au défaut estimé et le second à l'erreur de poursuite de trajectoire. En l'absence de défauts les deux termes s'annulent et la commande appliquée au système correspond exactement à la commande nominale sans défaut.

5.2 Définitions et généralités

Commençons par préciser les définitions de quelques notions propres au diagnostic.

Défaut : déviation non acceptable d'au moins une caractéristique d'un système par rapport à sa valeur nominale. Il est noté $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$.

Défaillance : interruption permanente de la capacité du système à accomplir sa mission dans des conditions de fonctionnement opérationnelles spécifiées.

Panne : état d'un système incapable d'assurer sa fonction à la suite d'une défaillance.

Résidus : signal conçu comme indicateur d'anomalie fonctionnelle ou comportementale. Il est noté $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$.

Détection de défaut (Fault Detection - FD) : fonction consistant à déterminer l'apparition et l'instant d'occurrence d'un défaut. Cette fonction peut être obtenue en utilisant le résidu $r(t)$ généré en comparant le comportement du modèle du système à celui du système réel. Idéalement, un résidu est nul lorsque le système est en fonctionnement normal. Dans les méthodes de

diagnostic à base d'observateurs, généralement, le résidu $r(t)$ est formé par la comparaison des sorties estimées et des sorties mesurées :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{5.1}$$

Le vecteur de résidus $r(t)$ permet la détection d'un défaut $f(t)$ si la condition suivante est satisfaite :

$$r(t) = 0, \ \forall t \quad \text{si et seulement si} \quad f(t) = 0, \ \forall t \tag{5.2}$$

Dans des situations réelles, le résidu $r(t)$, en l'absence de défaut, est à moyenne nulle à cause de la présence de bruit, de perturbations et d'incertitudes de modélisation en plus des bruits engendrés par la chaîne de mesure et d'acquisition des données. En présence de défauts, une déviation du résidu $r(t)$ est observée correspondant à l'apparition d'un défaut. Afin de pouvoir détecter un défaut, le résidu $r(t)$ est comparé à un seuil J_{th} défini en fonction des erreurs de modélisation, des perturbations et des bruits de mesure. Dans certaines méthodes utilisant des approches par minimisation du transfert de ces entrées non désirées vers les résidus, le taux d'atténuation peut être utilisé afin de définir le seuil de détection. On choisit d'utiliser la logique de décision suivante :

$$r(t) < J_{th}, \ \text{pas de défaut détecté} \tag{5.3}$$

$$r(t) \geq J_{th}, \ \text{présence de défaut} \tag{5.4}$$

Localisation de défaut (Fault Isolation - FI) : après la détection d'un défaut dans le système, il est important de pouvoir situer exactement le composant affecté. Cette étape s'appelle localisation ou isolation de défaut. Elle s'appuie fréquemment sur la génération de résidus de manière à ce qu'un ensemble de ces résidus soit sensible à certains défauts et insensible aux autres défauts. La génération des résidus sensibles à des combinaisons des défauts et une logique de décision adaptée, permet de localiser les défauts. Deux types de résidus sont obtenus ([Patton et al., 1989], [Gertler, 1998]) : les résidus structurés et les résidus de directions privilégiées.

Les résidus structurés sont construits de manière à être sensibles à un sous-ensemble de défauts et insensibles aux autres. Considérons par exemple un vecteur de résidus $r(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ et un vecteur de défauts $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$. Les m composantes de $r(t)$, qu'on appellera $r_m(t)$, ne sont sensibles qu'aux l composantes des défauts $f(t)$ qu'on appellera $f_l(t)$:

$$\begin{cases} r_m(t) \geq J_{th} \Leftrightarrow & \text{présence de défauts } f_l(t) \\ r_m(t) < J_{th} \Leftrightarrow & \text{pas de défauts } f_l(t) \text{ détecté} \end{cases}, \forall t \tag{5.5}$$

En suivant cette démarche, un ensemble de résidus est généré de façon à considérer toutes les combinaisons possibles permettant la localisation de chaque défaut. Les sensibilités des résidus (résidus dépassant ou non le seuil de détection) sont répertoriées dans une table binaire appelée table de signatures théoriques. Si un résidu est sensible à un défaut, un **1** est mis dans la case correspondante dans la table, et s'il est insensible, un **0** est mis dans cette case. Dans certaines situations, un phénomène de compensation empêche la prise de décision et il serait dangereux de se prononcer sur certains défauts d'où l'introduction d'un autre état qui est la non-décision

représentée dans la table par **?** qui signifie qu'aucune décision n'est possible quant à la présence ou non du défaut. Après l'élaboration de la table de signatures théoriques, les résidus générés sont comparés à chaque instant à cette table afin de déclencher l'alarme correspondant à l'apparition d'un défaut sur l'élément affecté du système.

Les résidus directionnels sont construits de manière à ce que le vecteur des résidus $r(t)$ s'oriente selon une certaine direction dans l'espace des résidus, en présence de défauts. Par exemple, le vecteur de résidus $\vec{r}_i(t)$ en réponse à un défaut $f_i(t)$ s'oriente vers une direction particulière :

$$\vec{r}_i(t) = \alpha_i(t)\vec{l}_i, \;\; i = 1, ..., n_f \tag{5.6}$$

où $\vec{l}$ est un vecteur constant appelé signature directionnelle du défaut $f_i(t)$ et $\alpha_i(t)$ est une fonction scalaire qui dépend du défaut $f_i(t)$. Dans cette approche, la localisation est réalisée par la comparaison des directions des résidus à des signatures directionnelles théoriques obtenues a priori. L'inconvénient de cette méthode est que la localisation n'est possible que pour de grandes variations des projections car la comparaison consiste à étudier la proximité du vecteur de résidus à chaque instant aux vecteurs représentant les signatures théoriques.

Estimation de défaut (Fault estimation ou Fault identification) : l'estimation des défauts consiste à fournir à chaque instant la valeur du défaut :

$$r_i(t) = f_i(t), \;\; \forall t, \;\; i = 1, \ldots, n_r, (n_f = n_r) \tag{5.7}$$

Dans les problèmes de commande tolérante aux défauts, il est souvent nécessaire de connaître l'amplitude et la forme du défaut afin de mieux le compenser. L'estimation des défauts devient alors un problème important à résoudre. De plus l'estimation implique la détection et la localisation car les estimées des défauts constituent des résidus.

5.3 Défauts et modélisation

Les défauts affectant un système peuvent être de différentes natures et sont généralement classés en défauts d'actionneurs, défauts de capteurs et défauts de système.

Défaut d'actionneur : un défaut d'actionneur est une défaillance représentant une perte totale ou partielle d'un actionneur conduisant à la perte d'une action de commande sur le système. Par exemple, un vérin bloqué ne répond plus au signal de commande qui lui est appliqué, on parle alors d'une perte totale de l'actionneur. Un défaut partiel du vérin peut être la conséquence d'une baisse d'efficacité due à un problème hydraulique (fuite), à un vieillissement ou à une saturation. De tels défauts entraînent un fonctionnement dégradé du système et peuvent même conduire à l'instabilité de ce dernier. L'idée d'utiliser plusieurs actionneurs afin de prévenir les conséquences d'un défaut d'actionneur n'est pas toujours satisfaisante car elle entraîne une augmentation des coûts, d'où l'intérêt de la commande tolérante aux défauts que l'on étudiera en détail dans la dernière section.

Défaut de capteur : un défaut de capteur, qui représente une erreur dans la mesure d'une grandeur physique, peut être partiel ou total. La perte totale d'un capteur (blocage) est due, par exemple, à une perte de connexion physique (électrique par exemple) entre la source d'information et le capteur ou un dysfonctionnement du capteur (usure mécanique, problème logiciel, etc.). Un défaut partiel apparaît sous forme d'un biais, d'une dérive, d'une baisse d'efficacité, d'un défaut de calibrage... Afin de détecter des défauts de capteurs, l'utilisation d'une redondance matérielle est possible. Cette technique est très fiable, mais son inconvénient majeur est le coût engendré ainsi que son encombrement.

Défaut système : les défauts de système sont tous ceux qui affectent les composants du système hors actionneurs et capteurs. Ils reflètent un changement dans les paramètres du système, par exemple, la masse, les coefficients aérodynamiques, etc. Ce type de défaut est difficile à diagnostiquer à cause de la diversité des situations de défaillances.

Les défauts sont aussi classés en défauts additifs et défauts multiplicatifs. Souvent, les défauts multiplicatifs sont transformés en défauts additifs. Soit, par exemple, une défaillance dans un actionneur donné, la modélisation d'un défaut multiplicatif la plus utilisée dans la littérature (voir [Noura et al., 2000] et [Rodrigues, 2005]) est donnée par l'équation suivante :

$$u_f(t) = u(t) + (I - \Sigma)(\bar{u}(t) - u(t)) \tag{5.8}$$

où $u_f(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente le signal de commande après apparition d'un défaut, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le signal de commande sans défaut, $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ un signal inconnu et :

$$\Sigma = diag\,(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n_u}), \quad \sigma_i \in \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \cdots, n_u \tag{5.9}$$

Si $\sigma_i = 0$ on a un défaut total sur l'actionneur i et si $\sigma_i = 1$, l'actionneur i est en fonctionnement normal. Enfin, $\sigma_i \in]0 \quad 1[$ correspond à un défaut partiel. Considérons maintenant l'équation d'état d'un système linéaire donné sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5.10}$$

En présence d'un défaut on a :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu_f(t) && (5.11) \\ &= Ax(t) + Bu(t) + B(I - \Sigma)(\bar{u}(t) - u(t)) && (5.12) \end{aligned}$$

Afin d'écrire le défaut multiplicatif sous une forme additive, on pose $B(I - \Sigma)(\bar{u}(t) - u(t)) = Ff(t)$. On a alors le système suivant :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Ff(t) \tag{5.13}$$

On peut constater que $f(t)$ dépend de $u(t)$ ce qui n'est pas désiré pour la conception de commande tolérante au défaut. Les défauts multiplicatifs de capteurs se transforment sous forme additive de manière similaire.

La conception de systèmes de diagnostic de fautes est plus aisée en utilisant des défauts additifs car ils sont représentés par des signaux externes et non par des changements dans les matrices du système comme c'est le cas des défauts multiplicatifs. D'où la littérature abondante sur le diagnostic des défauts additifs par rapport au diagnostic des défauts multiplicatifs.

Les défauts affectant les composants du système peuvent s'exprimer sous la forme d'une variation de paramètres des matrices représentant le modèle du système, comme on l'a vu au début du chapitre 4 à la section 4.2, ces changements de paramètres peuvent aussi s'exprimer sous la forme de défauts additifs.

5.4 État de l'art

Les problèmes associés à l'amélioration des performances des systèmes afin d'améliorer la qualité des produits, le souci de réduire le coût et les enjeux écologiques actuels amènent à considérer le fonctionnement des systèmes sur un large domaine de fonctionnement nécessitant, d'une part, la prise en compte de comportements non linéaires et d'autre part l'amélioration de la sécurité par la mise en place de systèmes de diagnostic. Ces problèmes sont fortement liés dans la mesure où un système de diagnostic développé à base d'un modèle linéarisé d'un système fournit des performances dégradées (fausses alarmes, mauvaises corrections en présence d'un défaut,...) si on s'éloigne du point de linéarisation. Cela justifie le recours à des modèles non linéaires qui minimisent ces dégradations, et, en particulier, à l'utilisation de la structure T-S qui offre une facilité de manipulation du point de vue mathématique d'autre part.

Ces dernières années, des travaux importants ont été réalisés dans le domaine du diagnostic des systèmes. Deux grandes catégories de méthodes de diagnostic ont été développées. La première catégorie repose sur l'idée de la non-disponibilité d'un modèle mathématique régissant le comportement du système. Parmi ces méthodes, la redondance matérielle est l'une des plus fiables puisqu'elle consiste à multiplier le nombre de capteurs mesurant la même grandeur, ainsi la détection de défaut n'est possible qu'avec deux capteurs alors que la localisation nécessite au moins trois capteurs. Actuellement, cette approche est très utilisée dans dans des domaines où les impératifs de sécurité l'emportent très largement sur les contraintes économiques, comme dans les centrales nucléaires où une défaillance peut causer des catastrophes humaines et écologiques (par exemple l'explosion de la centrale nucléaire de Tchernobyl en Ukraine en 1986), le domaine de l'aéronautique (crashs d'avions et de fusées)... Les inconvénients majeurs sont le coût (prix élevés de capteurs dans le domaine nucléaire par exemple) et l'encombrement dans un contexte embarqué (automobile, aéronautique ou aérospatial). Par exemple, dans le domaine spatial, les satellites ne doivent pas dépasser un certain poids afin de limiter la consommation de carburant.

D'autres techniques n'utilisant pas de modèles ni de redondance matérielle peuvent également être mises en œuvre. Citons par exemple les méthodes s'appuyant seulement sur les données d'entrées-sorties du système comme l'analyse en composantes principales. Celle-ci a été appliquée récemment pour le diagnostic d'une station d'épuration d'eaux usées dans [Tharrault, 2008], et la surveillance de la qualité de l'air sur Nancy dans [Harkat, 2003]. Les résidus

générés permettent de détecter et de localiser des défauts de capteurs. On trouve également des méthodes basées sur le raisonnement logique en développant un arbre de défaillance utilisant un raisonnement du type "**SI** symptôme ***ET*** symptôme ***ALORS*** conclusion". Chaque conclusion peut servir de "symptôme" pour la règle suivante, ainsi un arbre de décision est élaboré. Un tel raisonnement guide l'opérateur humain dans la phase de diagnostic du système ([Gertler, 1998], [Korbicz et al., 2004]). Le traitement du signal et les statistiques sont aussi des techniques très appliquées dans le diagnostic sans modèle. Les signaux peuvent par exemple être analysés par des techniques de transformée de Fourier ou de transformation en ondelettes afin de détecter des variations brusques dans un signal. En conclusion, les méthodes sans modèle sont très intéressantes pour les systèmes de grandes dimensions où il est impossible de formuler les comportements sous forme mathématique. Le lecteur pourra se référer à [Korbicz et al., 2004] pour plus de détails sur les méthodes de diagnostic sans modèle.

Contrairement à cette catégorie de méthodes, la seconde est basée sur la disponibilité d'un modèle mathématique du système. Les systèmes représentés par des modèles linéaires sont largement étudiés et une littérature abondante est dédiée à cette classe de systèmes. Dans le cadre des problèmes FD, FDI et diagnostic, on peut citer les travaux présentés dans [Maquin et Ragot, 2000], [Husson et al., 2007], [Chen et Patton, 1999b], [Isermann, 2007], [Patton et al., 1989], [Ding, 2008]... Les plus importantes approches de diagnostic sont :

- l'espace de parité ;
- l'identification paramétrique ;
- les observateurs d'état ;
- les observateurs de sortie.

L'idée de l'approche par espace de parité est l'utilisation de la redondance entre les entrées et les sorties du système sans l'apparition des états dans les équations [Maquin et Ragot, 2000]. Cette méthode a été introduite dans les années 1970 pour les systèmes aérospatiaux. La première version de cette approche basée sur des systèmes statiques reliant les sorties d'un modèle à ses entrées a été proposée dans [Potter et Suman, 1977] puis elle a été généralisée au cas dynamique dans [Chow et Willsky, 1984] en exploitant les relations temporelles entre les sorties et les entrées afin de générer des résidus. Le lecteur intéressé par l'approche par espace de parité peut se référer aux travaux publiés dans [Frank, 1990], [Patton et al., 2001], [Gertler, 1998], [Venkatasubramanian et al., 2003], [Basseville, 1988].

L'approche par estimation paramétrique consiste à identifier en ligne les paramètres physiques du système à surveiller par des techniques classiques d'identification. Un défaut résultant d'un changement dans un paramètre conduit à une estimation erronée de ce dernier. En comparant alors les paramètres nominaux du système en bon fonctionnement à ceux estimés, des résidus sont générés. Ce type d'approche est très intéressant pour le diagnostic des défauts multiplicatifs résultant d'un changement dans les paramètres du système. Cette approche a été développée pour les systèmes linéaires et généralisée aux systèmes non linéaires. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [Isermann, 2007], [Gertler, 1998] et [Isermann, 1984].

Les méthodes à base d'observateurs d'état sont les méthodes les plus étudiées dans le domaine du diagnostic avec modèles. Différents observateurs ont été proposés : observateur de

Luenberger, observateur à entrées inconnues par découplage, observateur PI, observateur à modes glissants, observateur adaptatif, observateur $\mathcal{H}_\infty$, observateur par apprentissage itératif et estimateur direct de sortie (Direct Output Estimator).

L'observateur à entrées inconnues (UIO) a fait l'objet d'une attention considérable depuis de nombreuses années et plusieurs approches ont été développées (voir chapitre 4). De tels observateurs ont été utilisés pour le diagnostic de fautes des systèmes en présence d'incertitudes afin de générer des résidus sensibles aux défauts et insensibles aux incertitudes considérées comme des entrées inconnues. L'architecture de diagnostic à base d'UIO est l'une des architectures les plus étudiées (voir [Seliger et Frank, 1991b], [Yaz et Azemi, 1998], [Koenig et Mammar, 2001] et [Yang et Saif, 1996]). Plusieurs travaux sur le diagnostic à base d'UIO pour les systèmes linéaires incertains ont été publiés dans [Hou et Muller, 1994], [Chen et al., 1996] et [Duan et Patton, 2001]. La généralisation aux systèmes algébro-différentiels linéaires est proposée dans [Marx, 2003]. La conception d'observateur à entrées inconnues pour les systèmes non linéaires est plus délicate à réaliser, car il n'existe pas de méthodes génériques pour tous les systèmes dynamiques non linéaires. De ce fait, des hypothèses sont formulées concernant les matrices de distribution des défauts dans le modèle, ainsi plusieurs schémas de diagnostic permettent seulement la détection ou la localisation d'un seul défaut. Néanmoins, plusieurs méthodes ont été développées sur des classes spécifiques de systèmes non linéaires. On peut citer par exemple l'observateur à entrées inconnues pour systèmes bilinéaires dans [Yang et Saif, 1997], l'observateur pour les systèmes de type Lipschitz dans [Koenig et Mammar, 2001] et [Pertew et al., 2005b] ou l'observateur pour une classe plus générale de système non linéaires sous une forme canonique et sous certaines hypothèses, ou bien sous une forme admettant une transformation équivalente permettant la mise sous la forme canonique [Seliger et Frank, 1991b] et [Seliger et Frank, 1991a]. Enfin, la classe des systèmes T-S qui est une représentation générale des systèmes non linéaires a fait l'objet de plusieurs travaux. Parmi ces travaux, citons l'observateur à entrées inconnue proposé dans [Akhenak, 2004] pour le diagnostic d'un turbo-réacteur d'un avion. Une extension de ces résultats aux systèmes T-S algébro-différentiels est donnée dans [Marx et al., 2007] pour la détection et la localisation de défauts de systèmes à temps continu et discret. Deux cas sont considérés, le premier suppose que les contraintes structurelles sont vérifiées afin d'aboutir à un découplage total des entrées inconnues et le second cas suppose qu'une partie des entrées inconnues peut être découplée. Une approche permettant de découpler la partie vérifiant les contraintes structurelles et à minimiser le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de l'autre partie des entrées inconnues vers l'erreur d'estimation d'état a donc été proposée. Enfin, le seul travail traitant le cas d'un système T-S à VDNM où la variable de décision est l'état du système est proposé dans [Chen et Saif, 2007b]. Les auteurs supposent que le terme non linéaire issu de la non-mesurabilité des variables de décision satisfait une condition de type Lipschitz. Cette hypothèse, couplée à une condition de rang, donne des conditions suffisantes pour la conception de l'observateur à entrées inconnues. De plus, des conditions de détection et d'isolation des défauts sont données. L'inconvénient de cette approche est le conservatisme lié, d'une part, à la sévérité de la condition de Lipschitz sur le terme non linéaire et, d'autre part, à la condition structurelle qui devient très restrictive lorsque le nombre de sous-modèles devient plus important que le nombre de sorties du système.

Les observateurs à entrées inconnues PI et PMI, permettant l'estimation simultanée de l'état

et des entrées inconnues, n'ont pas été traités aussi abondamment que les UIO par découplage. Néanmoins, on peut citer les travaux publiés dans [Marx et al., 2003] et [Koenig, 2005] portant sur le diagnostic par observateurs PI et PMI respectivement pour les systèmes linéaires singuliers. D'autres travaux ont aussi été dédiés à l'estimation d'état et d'entrées inconnues des systèmes décrits par des multimodèles à états découplés [Orjuela, 2008].

Les observateurs à modes glissants sont très intéressants du point de vue robustesse puisqu'ils permettent de compenser les incertitudes par des termes additionnels. C'est pourquoi le diagnostic à base d'observateurs à modes glissants permet la génération de résidus robustes face aux incertitudes. L'observateur à modes glissants peut être utilisé de deux manières différentes dans les problèmes FDI. Une première idée consiste à rendre l'erreur de sortie insensible aux incertitudes. En se basant sur cette idée, la détection de défauts par génération de résidus est traitée dans [Floquet et al., 2004] et [Sreedhar et al., 1993] alors que dans [Chen et Saif, 2007a], les auteurs traitent le problème de la localisation. La deuxième idée consiste à utiliser ces observateurs dans le but d'estimer les défauts (voir [Chen et Saif, 2007a], [Tan et Edwards, 2003a], [Tan et Edwards, 2003b] et [Edwards et al., 2000]). Ce type d'observateurs a été initialement proposé pour des systèmes linéaires pour améliorer l'estimation d'état en présence d'incertitudes de modélisation [Tan et Edwards, 2003b], [Edwards et al., 2000], [Tan et Edwards, 2003a] et [Tan et Edwards, 2003b], puis ils ont été généralisés aux systèmes non linéaires, par exemple, les systèmes présentant des non-linéarités lipschitziennes et les systèmes non linéaires pouvant être mis sous une forme canonique [Yang et Saif, 1995] et [Jiang et al., 2004]. Les observateurs à modes glissants pour les systèmes T-S ont également fait l'objet de quelques travaux, parmi eux, l'observateur développé dans [Akhenak et al., 2007] et [Akhenak et al., 2008] qui estime les défauts permettant ainsi de réaliser la tache de détection et de localisation. Dans le cadre des systèmes T-S à VDNM, aucun travail, à notre connaissance, n'a été rapporté dans le domaine du diagnostic, par contre le problème d'estimation d'état par observateur à modes glissants de cette classe de systèmes est traité dans [Bergsten et al., 2002] et [Bergsten et al., 2001] en se basant sur le résultat obtenu dans [Bergsten et Palm, 2000].

Dans le contexte des observateurs adaptatifs et estimateurs directs de sortie, le lecteur intéressé pourra se référer aux publications de [Chen et Saif, 2006], [Besançon, 2007], [Chen, 2007], Zhang et Delyon [2001], Zhang [2002]. Toutefois, il est utile de préciser que les estimateurs directs de sortie sont très intéressants dans la mesure où les conditions d'observabilité de l'état (ou de détectabilité), nécessaires pour la conception d'observateurs d'état pour le diagnostic, ne sont pas nécessaires pour cet estimateur. Il est connu que, lorsque le système n'est pas observable, on a recours le plus souvent à l'approche par l'espace de parité. Mais en présence d'incertitudes, cette approche devient très difficile à appliquer voire impossible, ce qui constitue un autre avantage des estimateurs directs de sortie.
Le diagnostic à base d'observateurs est une technique ayant fait l'objet de très nombreux développements. Celle-ci consiste, sur la base d'un modèle de bon fonctionnement d'un système, à effectuer une estimation d'état à partir de la connaissance des entrées et des sorties du système et à utiliser l'erreur d'estimation de la sortie comme résidu. En fonctionnement normal, ce résidu doit être sensiblement nul (robuste aux erreurs de modélisation et aux erreurs de mesures) et s'écarter significativement de zéro lors de l'occurrence d'un défaut (défauts de capteurs ou d'actionneurs) sur le système. La détection de l'occurrence des défauts est en général assez

aisée ; en revanche, sa localisation (la détermination de la grandeur d'entrée ou de sortie sur laquelle il est intervenu) est plus délicate. On utilise alors fréquemment une technique s'appuyant sur l'élaboration de bancs d'observateurs pilotés par des jeux de grandeurs différents (sous réserve de satisfaction des conditions de reconstruction). L'analyse des différents résidus engendrés par ces observateurs couplée à une logique de décision permet ensuite la localisation des défauts. Différents schémas de diagnostic par bancs d'observateurs peuvent être utilisés pour la localisation des défauts de capteurs et d'actionneurs. Par exemple les architectures GOS (Generalized Observer Scheme) représentées sur les figures 5.1 et 5.3 ou DOS (Dedicated Observer Scheme) représentées sur les figures 5.2 et 5.4 (voir [Chen et Zhang, 1991], [Isermann, 2007], et [Ding, 2008]).

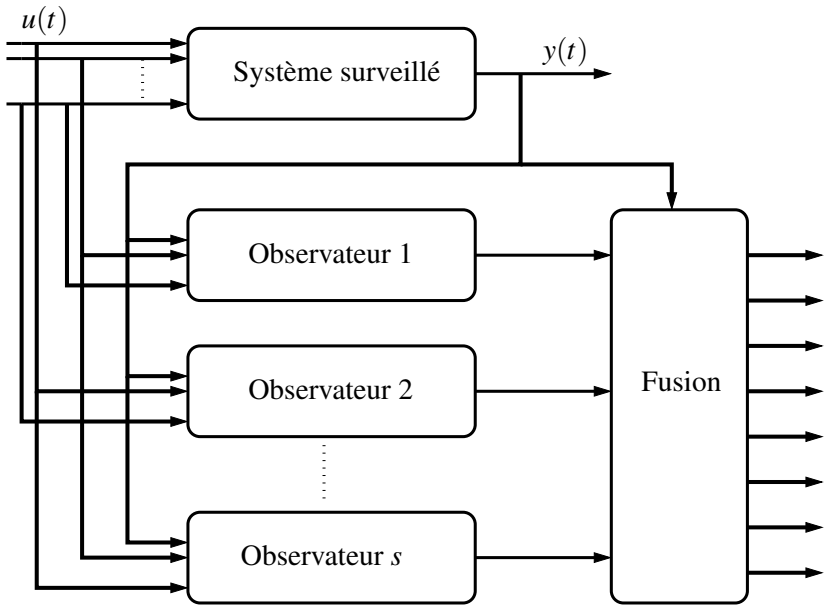


Figure 5.1 – Principe du banc d'observateurs GOS pour la détection de défauts d'actionneurs

D'autres techniques de diagnostic à base d'observateurs ont été introduites, basées sur la satisfaction de contraintes de sensibilité. On trouve, par exemple, dans [Zhong et al., 2003], une méthode pour des systèmes linéaires incertains basée sur un modèle de référence, cette méthode minimise la norme $\mathcal{H}_\infty$ du transfert des perturbations ainsi que les erreurs de modélisation vers les résidus et maximise la norme $\mathcal{H}_-$ du transfert des défauts vers les résidus. Un seuil adaptatif de détection est obtenu en calculant la norme des résidus sans défaut sur une fenêtre temporelle glissante. Le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ est utilisé dans [Stoustrup et Niemann, 2000], [Mazars et al., 2008] et [Mazars et al., 2006] ; il consiste à reformuler le problème de la minimisation du transfert des perturbations et la maximisation du transfert des défauts vers les résidus sous la forme d'un problème de minimisation uniquement, en créant une sortie virtuelle et en insérant des filtres additionnels permettant de générer des signaux de référence que le vecteur de résidus doit suivre. Dans [Armeni, 2001], le problème d'isolation est abordé par la conception de bancs d'observateurs sous contraintes de sensibilité à un sous-ensemble de défauts.

Ce chapitre traite de l'application des observateurs développés dans le chapitre 3 et 4 afin de concevoir des générateurs de résidus pour détecter, isoler et estimer des défauts affectant

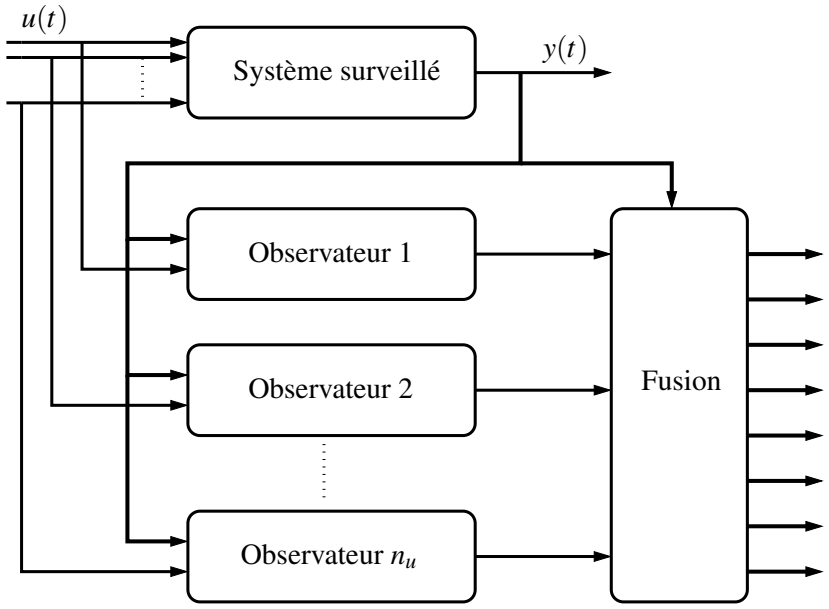


Figure 5.2 – Principe du banc d'observateurs DOS pour la détection de défauts d'actionneurs

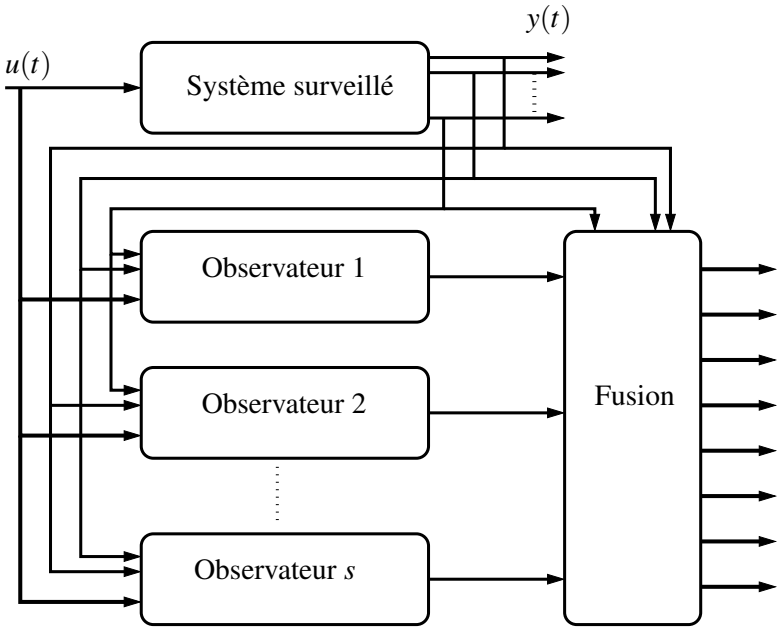


Figure 5.3 – Principe du banc d'observateurs GOS pour la détection de défauts de capteurs

les actionneurs, les capteurs et même le système (voir figure 5.5). Pour cela, en se basant sur différents raisonnements, des méthodes de génération de résidus par observateurs d'état sont proposées. Les générateurs ainsi obtenus permettent de détecter un défaut, de le localiser (sous contraintes d'isolabilité) et de l'estimer (sous contraintes d'observabilité).

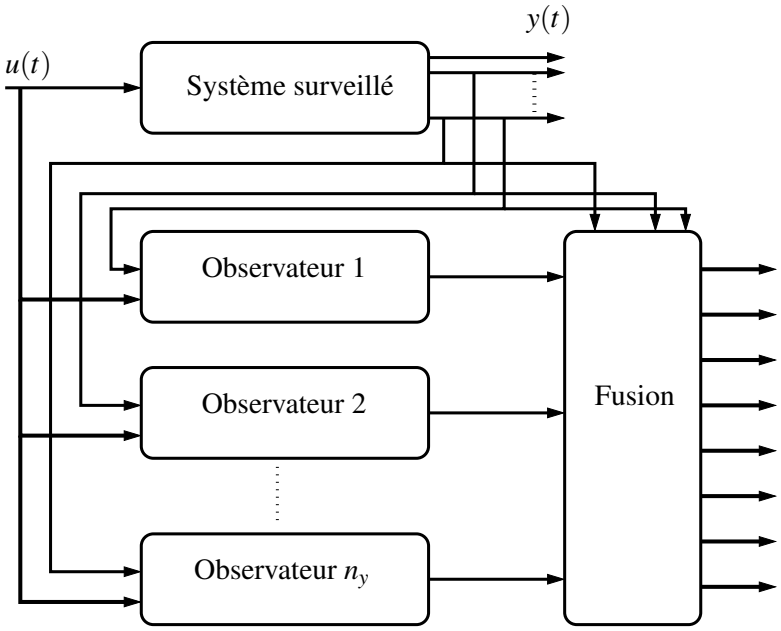


Figure 5.4 – Principe du banc d'observateurs DOS pour la détection de défauts de capteurs

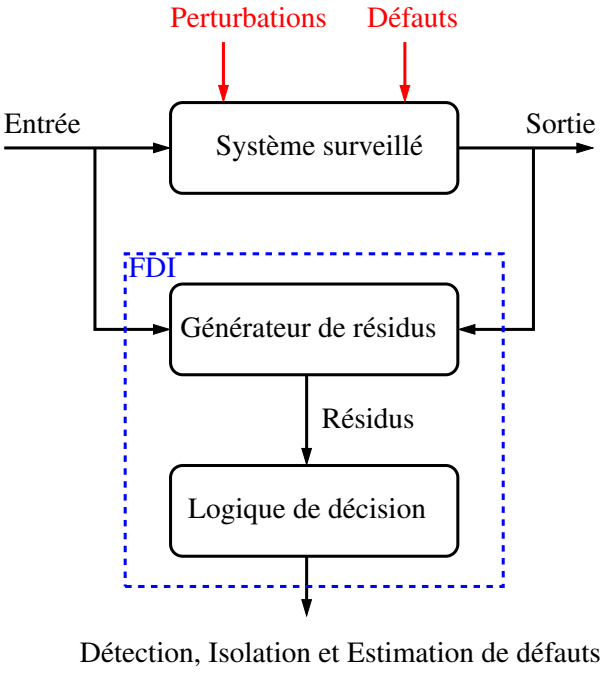


Figure 5.5 – Principe du diagnostic

5.5 Objectif

L'objectif est de concevoir un module de diagnostic représenté sur la figure 5.5 pour des systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno. Les tâches auxquelles ce module est destiné sont la détection, la localisation et l'estimation des défauts. Pour cela, les observa-

teurs développés dans les chapitres 3 et 4 sont utilisés afin de générer des résidus.

Dans ce chapitre, quatre méthodes de génération de résidus sont proposées, la première est basée sur la conception de bancs d'observateurs suivant les architectures DOS ou GOS afin de détecter et d'isoler des défauts de capteurs et d'actionneurs ; cette méthode permet de montrer un des intérêts des modèles T-S à VDNM (voir chapitre 2) à savoir, l'utilisation d'un seul modèle T-S pour la conception des deux bancs d'observateurs pour la localisation des défauts de capteurs et d'actionneurs. La seconde méthode est basée sur l'estimation des défauts en utilisant les observateurs PI et PMI, cela nécessite la modélisation du système en tenant en compte des défauts ainsi que des perturbations pouvant l'affecter. La même modélisation est utilisée pour développer un autre schéma de détection, d'isolation et d'estimation des défauts par utilisation du formalisme $\mathcal{H}_\infty$. La dernière méthode porte sur la détection et l'isolation par des contraintes de sensibilité. Ces dernières portent sur la minimisation de l'effet des perturbations et des erreurs de modélisation et la maximisation de l'influence des défauts. Une technique par bancs d'observateurs est utilisée afin de générer des résidus plus sensibles à certains défauts et moins sensibles aux autres, permettant ainsi leurs localisations.

5.6 Diagnostic de fautes par observateurs à entrées inconnues

Dans cette section, l'observateur à entrées inconnues par découplage développé dans le chapitre 4 est exploité pour construire des bancs d'observateurs afin de générer des résidus structurés permettant la détection et la localisation de défauts d'actionneurs et de capteurs.

Hypothèse 5.1. *La probabilité qu'un actionneur et un capteur tombent en panne simultanément étant faible, on suppose que les défauts de capteurs et d'actionneurs ne surviennent pas simultanément.*

Soit le système non linéaire représenté par la structure T-S à VDNM suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.14}$$

5.6.1 Défauts d'actionneurs

Afin de développer un système de diagnostic de fautes affectant les actionneurs, on adopte les notations suivantes :

$$B_i = \begin{pmatrix} b_i^1 & b_i^2 & \dots & b_i^{n_u} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

où b_i^j représente la $j^{ème}$ colonne de la matrice B_i ($i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,n_u$). Soit $s = \{j_1,\dots,j_l\}$ un ensemble contenant tous les sous-ensembles de $S_a = \{1,\dots,n_u\}$ avec l un nombre tel que $1 \leq l \leq n_u$. On définit alors les matrices $B_i^N = \begin{pmatrix} b_i^{j_1} & \dots & b_i^{j_l} \end{pmatrix}$ et $\bar{B}_i$ les matrices complémentaires de B_i^N contenant les colonnes restantes de B_i. De manière similaire, le vecteur $u(t)$ des commandes est subdivisé en deux parties : $u_N(t) = \begin{pmatrix} u^{j_1} & \dots & u^{j_l} \end{pmatrix}^T$ et $\bar{u}(t)$ le vecteur contenant les composantes restantes de $u(t)$.

On obtient alors la structure équivalente du modèle (5.14) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i^N u_N(t) + \bar{B}_i \bar{u}(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.16}$$

Cette structure est obtenue en regroupant les entrées de commande qu'on considère comme entrées connues dans le vecteur $u_N(t)$ et les entrées qu'on considère inconnues dans le vecteur $\bar{u}(t)$. Traiter toutes les combinaisons d'entrées connues et inconnues, sous des conditions structurelles de découplage, permet l'isolation des défauts d'actionneurs.

D'autres architectures, issues du schéma général présenté ci-dessus, existent. Par exemple en considérant toutes les composantes de $u(t)$ comme des entrées inconnues sauf une, on retrouve alors l'architecture DOS illustrée par le schéma 5.2. Elle consiste à détecter les défauts affectant l'entrée connue, et en développant n_u observateurs dédiés pour les n_u entrées, on aboutit à la localisation des fautes affectant les actionneurs. L'architecture GOS présentée à la figure 5.1 peut être obtenue aussi en considérant toutes les entrées comme connues sauf une, cela revient à masquer tous les défauts affectant cette dernière. Un banc d'observateurs conçu selon cette structure permet de localiser les défauts affectant les actionneurs du système.

Afin de construire les bancs d'observateurs cités ci-dessus, les observateurs à entrées inconnues par découplage proposés dans la section 4.3 sont utilisés. Leur structure est rappelée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(N_i z(t) + G_i u_N(t) + L_i y(t)\right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{5.17}$$

où :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(N_i z(t) + G_i u_N(t) + L_i y(t) + P\bar{A}_i + PB_i\right) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Hy(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \tag{5.18}$$

En utilisant chaque observateur du banc, on génère des résidus formés par l'erreur de sortie entre chaque observateur et la sortie mesurée du système :

$$r^j(t) = y(t) - \hat{y}^j(t) \tag{5.19}$$

où $\hat{y}^j(t)$ représente la sortie estimée par l'observateur j, $\;j = 1, \ldots, n_u$.

5.6.2 Défauts de capteurs

Si le système est affecté par des défauts de capteurs, de manière similaire au cas précédent, la localisation des défauts est effectuée par génération de résidus structurés en utilisant des bancs d'observateurs.

Soit :

$$C = \begin{pmatrix} c_1^T & c_2^T & \ldots & c_{n_y}^T \end{pmatrix}^T \tag{5.20}$$

où c_i^k représente la $k^{ème}$ ligne de la matrice C_i ($i = 1,\dots,r$, $j = 1,\dots,n_y$). Soit $s = \{j_1,\dots,j_l\}$ un ensemble contenant tous les sous-ensembles de $S_c = \{1,\dots,n_y\}$ avec l un nombre tel que $1 \leq l \leq n_y$. On définit alors les matrices $C^N = \begin{pmatrix} c_{j_1}^T & \dots & c_{j_l}^T \end{pmatrix}$ et $\bar{C}$ la matrice complémentaire de C_N contenant les lignes restantes de C. Le vecteur $y(t)$ des sorties est subdivisé en deux parties : $y_N(t) = \begin{pmatrix} y^{j_1} & \dots & y^{j_l} \end{pmatrix}^T$ et $\bar{y}(t)$ le vecteur contenant les composantes restantes de $y(t)$. A partir du système (5.14), on désire construire un observateur n'utilisant que les sorties $y_N(t)$ et ignorant les sorties $\bar{y}(t)$. Avec cette partition des sorties, on obtient le système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ \left[\frac{y_N(t)}{\bar{y}(t)}\right] &= \left[\frac{C_N}{\bar{C}}\right] x(t) \end{aligned} \tag{5.21}$$

L'objectif est de concevoir un générateur de résidus sensibles aux défauts affectant les sorties $y_N(t)$ et insensibles à toutes les autres. Pour cela, nous proposons deux architectures différentes.

Approche par observateur à entrées inconnues

Une première idée consiste à utiliser exactement la même démarche que celle utilisée pour la localisation des défauts d'actionneurs présentée dans la section 5.6.1. Cela est possible après une transformation du système permettant de ré-écrire les défauts de capteurs sous forme de défauts d'actionneurs, la méthode est similaire à celle développée dans [Tan et Edwards, 2003b]. Pour cela, on définit un filtre $\mathcal{W}_f$ stable comme suit :

$$\dot{z}_f(t) = \mathcal{A}_f z_f(t) + \mathcal{B}_f \bar{y}(t) \tag{5.22}$$

où $z_f(t) \in \mathbb{R}^{n_y - l}$. Les matrices $\mathcal{A}_f \in \mathbb{R}^{(n_y-l)\times(n_y-l)}$ et $\mathcal{B}_f \in \mathbb{R}^{(n_y-l)\times(n_y-l)}$ sont connues. Soit l'état augmenté $x_a(t) = [x(t)^T \;\; z_f(t)^T]^T$, dont la dynamique est alors donnée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}_f(t) \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\begin{pmatrix} A_i & 0 \\ 0 & A_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z_f(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i \\ 0_{(n_y-l)\times n_u} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0_{n\times l} \\ B_f \end{pmatrix} \bar{y}(t) \right) \\ y_N(t) &= C_N x(t) \end{aligned} \tag{5.23}$$

On remarque que les systèmes (5.23) et (5.16) ont la même structure. En considérant alors $\bar{y}(t)$ comme le vecteur d'entrées inconnues un observateur à entrées inconnues peut être développé, sous des conditions structurelles sur la matrice d'influence de $\bar{y}(t)$ permettant son découplage, afin de détecter les défauts affectant seulement les sorties $y_N(t)$. Les méthodes à base de bancs d'observateurs exposées dans la section précédente pour la localisation des défauts d'actionneurs peuvent également être appliquées à la localisation de défauts de capteurs.

En conclusion, cette approche permet de développer deux bancs d'observateurs pour la localisation de défauts d'actionneurs et de capteurs en utilisant un seul type d'observateur.

Approche par observateur de Luenberger pour modèle T-S

Dans cette section, une seconde approche de localisation de défauts de capteurs est présentée. A partir du système (5.21) on construit des observateurs (voir chapitre 3) utilisant les sorties $y_N(t)$ de la forme :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y_N(t) - \hat{y}_N(t))\right) \tag{5.24}$$

$$\hat{y}_N(t) = C_N\hat{x}(t) \tag{5.25}$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \tag{5.26}$$

Les résidus générés sont alors donnés par :

$$r(t) = y(t) - \hat{y}(t) \tag{5.27}$$

A partir du vecteur $y(t)$, différentes combinaisons de sorties utilisées $y_N(t)$ et ignorées $\bar{y}(t)$ mènent à la génération de résidus structurés permettant la localisation d'une défaillance de capteur. De plus, des bancs d'observateurs suivant les architectures DOS ou GOS présentés précédemment peuvent également être utilisés.

5.6.3 Discussions et conclusion

Des techniques permettant la génération de résidus structurés par des bancs d'observateurs ont été présentées. La localisation de défauts de capteurs peut s'effectuer grâce aux observateurs développés dans le chapitre 3. L'observateur à entrées inconnues par découplage est utilisé pour la localisation de défauts d'actionneurs. Cependant, afin de pouvoir utiliser le même type d'observateurs pour la conception des deux bancs pour la localisation de défauts de capteurs et d'actionneurs, le problème des défauts de capteurs est mis sous la forme d'un problème de défauts d'actionneurs, ce qui a permis d'appliquer la même démarche que celle utilisée pour ces derniers. En conclusion, nous avons montré l'un des avantages de la structure T-S à VDNM consistant à développer deux bancs d'observateurs à base d'un même modèle T-S du système contrairement aux modèles T-S à VDM où l'on a besoin de deux modèles T-S différents selon que l'on veut localiser des défauts de capteurs ou d'actionneurs. De plus, l'utilisation d'un filtre sur les sorties non utilisées pour la conception des observateurs permet de considérer le problème comme un problème de défauts d'actionneurs ce qui autorise l'utilisation de l'observateur à entrées inconnues pour la conception des deux bancs.

La méthode de diagnostic proposée dans cette section permet la détection et la localisation des défauts de capteurs et d'actionneurs ainsi que certains défauts systèmes. Cependant, pour certains systèmes, les contraintes structurelles de découplage des entrées inconnues et d'observabilité des défauts ne peuvent être vérifiées, rendant impossible la synthèse des observateurs. La méthode que l'on propose dans la section suivante permet la détection, l'isolation et l'estimation des défauts en s'affranchissant des contraintes de découplage des entrées inconnues puisqu'elles sont estimées simultanément avec l'état du système par l'observateur.

5.7 Diagnostic par observateurs PI et PMI

Le problème de l'estimation de défauts est abordé en utilisant les observateurs PI et PMI développés dans le chapitre 4. Outre l'intérêt de l'estimation de fautes pour la détection et la localisation de défaillances, cette approche trouvera sa suite logique dans les problèmes de tolérance aux défauts consistant à utiliser l'information sur le défaut afin de corriger la loi de commande et de permettre au système d'effectuer sa mission même en présence de défauts.

Soit le système non linéaire décrit par la structure T-S à VDNM suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + F_i f(t)\right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i d(t) + R_i f(t)\right) \end{cases} \tag{5.28}$$

L'objectif de cette section est d'utiliser les possibilités des observateurs proportionnel-intégral et proportionnel-multi-intégral pour l'estimation simultanée de l'état $x(t)$ et des défauts $f(t)$ affectant le système en minimisant l'influence des perturbations $d(t)$.

Un observateur PI pour le système (5.28) est donné par :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + F_i \hat{f}(t) + L_{Pi}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \tag{5.29}$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(L_{Ii}(y(t) - \hat{y}(t))\right) \tag{5.30}$$

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t) + R_i \hat{f}(t)\right) \tag{5.31}$$

La convergence des erreurs d'estimation d'état et des entrées inconnues est étudiée en détails dans le chapitre 4. L'un des avantages de ces observateurs réside dans la possibilité de réaliser la détection, la localisation et l'estimation des défauts avec un seul observateur tout en ayant également une estimation des états du système. Les résidus sont alors donnés par l'équation suivante :

$$r(t) = \hat{f}(t) \tag{5.32}$$

Un seuil de détection peut être défini grâce au taux d'atténuation γ obtenu lors de la synthèse de l'observateur. Ce seuil est obtenu par l'utilisation de la connaissance de la borne maximale des perturbations $d(t)$. Supposons que ρ est la borne maximale de $d(t)$, on définit alors le seuil de détection par :

$$J_{th} = \gamma\rho \tag{5.33}$$

On adopte la logique de décision suivante :

$$\begin{cases} r(t) < J_{th}, & \text{pas de défaut} \\ r(t) \geq J_{th}, & \text{présence de défaut} \end{cases} \tag{5.34}$$

Remarque 5.1. – *L'approche peut être conservative dans la mesure où le gain $\mathcal{L}_2$ du transfert des perturbations $d(t)$ vers les erreurs d'estimation et la borne maximale ρ conduisent à un seuil élevé, ce qui peut impliquer la non-détection d'un défaut. Ce problème peut être*

résolu en utilisant l'approche utilisée dans [Marx et al., 2007] consistant en l'introduction d'un scalaire $\alpha > 0$ qui sera utilisé pour ajuster le seuil J_{th} en fonction des mesures prises en bon fonctionnement. Le seuil devient alors :

$$J_{th} = \alpha\gamma\rho \tag{5.35}$$

– *Si l'objectif est seulement le diagnostic de fautes sans l'estimation de l'état du système, la minimisation du gain $\mathcal{L}_2$ du transfert de $d(t)$ peut s'effectuer sur l'erreur $(f(t) - \hat{f}(t))$, ce qui améliorera le taux d'atténuation. De plus, un banc de n_f observateurs peut être utilisé, où chaque observateur est construit en minimisant l'influence de $d(t)$ vers $(f_i(t) - \hat{f}_i(t))$, pour plus de précision dans les estimations des défauts.*

Algorithme de diagnostic

Suivant la méthode de conception d'observateur PI choisie parmi celles proposées dans le chapitre 4, on propose l'algorithme de diagnostic suivant :

1. Pour chaque défaut $f_j(t), \quad j = 1, \ldots, n_f$ construire l'observateur PI (5.29)-(5.30)-(5.31) par minimisation de $\bar{\gamma}_j$ sous les contraintes LMIs (suivant la méthode) en les variables $P_i \in \mathbb{R}^{(n+n_f)\times(n+n_f)}$ et $M_i \in \mathbb{R}^{(n+n_f)\times n_y}$. Les gains L_{Pi} et L_{Ii} de l'observateur sont calculés par :
$$\begin{pmatrix} L_{Pi} \\ L_{Ii} \end{pmatrix} = P_j^{-1} M_i \tag{5.36}$$
et le taux d'atténuation des défauts sur l'erreur d'estimation est obtenu par $\gamma_j = \sqrt{\bar{\gamma}_j}$.
2. Définir le résidu $r_j(t) = \hat{f}_j(t)$ et l'alarme $a_j(t)$ comme suit :
$$a_j(t) = \begin{cases} 1, & |r(t)| \geq \alpha_j\gamma_j\rho \\ 0, & |r(t)| < \alpha_j\gamma_j\rho \end{cases} \tag{5.37}$$
où ρ est la borne des perturbations $d(t)$ et α_j un paramètre d'ajustement du seuil de détection en fonctionnement normal du système pour améliorer la détection des défauts.

Remarque 5.2. *La conception d'observateur PMI pour le diagnostic de fautes est similaire à celle développée dans cette section pour l'observateur PI.*

Exemple 5.1 (Diagnostic d'un système T-S à VDNM par bancs d'observateurs PI)
Cet exemple académique est dédié à la détection et la localisation de défauts de capteurs et d'actionneurs par des bancs d'observateurs PI. Les architectures GOS présentées dans les figures 5.2 et 5.4 sont utilisées. Considérons le multimodèle suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases} \tag{5.38}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont définies par :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1-\tanh((x_1-44)/11)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) \end{cases} \tag{5.39}$$

et dépendent de la première composante du vecteur d'état.

Le bruit de mesure $\omega(t)$ est un bruit centré et d'amplitude maximale 0.5.

Diagnostic des défauts de capteurs *La stratégie utilisée est de concevoir des observateurs avec différentes combinaisons des sorties mesurées du système à surveiller (architecture DOS figure 5.4), le nombre de combinaisons possibles qu'on peut générer pour un système ayant p sorties étant ($2^p - 1$). Pour l'exemple d'application, on dispose de deux sorties du système. On construit alors deux observateurs PI : le premier observateur utilise la première sortie et le deuxième observateur utilise la deuxième sortie. Pour comparaison on construit un autre observateur utilisant les deux sorties. Les observateurs utilisés sont sous la forme suivante :*

$$\dot{\hat{x}}_j(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))(A_i\hat{x}_j(t) + B_i u(t) + K_{Pi}(y_j(t) - \hat{y}_j(t))) \tag{5.40}$$

$$\hat{y}_j(t) = C_j\hat{x}_j + \hat{f}_j(t) \tag{5.41}$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t))K_{Ii}(y_j(t) - \hat{y}_j(t)) \tag{5.42}$$

$$j \in \{1,2,3\}$$

où $\hat{x}_j(t)$ (respectivement $\hat{y}_j(t)$) représente le vecteur d'état estimé (respectivement le vecteur de sortie estimé) par le j^{eme} observateur, C_j la matrice d'observation construite à partir de C. Le vecteur de sortie $y_j(t)$ représente les sorties utilisées pour chaque observateur. Puisque toute les entrées $u(t)$ sont connues et qu'il n'y a pas de défauts affectant les actionneurs, le terme $\hat{f}(t)$ estime les défauts affectant les capteurs.

Le banc d'observateurs permet de générer les résidus $r(t)$ définis par :

- *L'observateur 1 fournit le résidus $r_1 = \hat{f}_1$ qui correspond au défaut affectant la première sortie.*
- *L'observateur 2 fournit le résidus $r_2 = \hat{f}_2$ qui correspond au défaut affectant la deuxième sortie.*
- *L'observateur 3 fournit le résidus $r_{31} = \hat{f}_1$ qui correspond au défaut affectant la première sortie et le résidus $r_{32} = \hat{f}_2$ qui correspond au défaut affectant la deuxième sortie.*

Ensuite, une table de signatures théoriques générées par l'ensemble des signaux z_{ij} définis par :

$$z_{ij}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si le résidu est sensible à } f_i \\ 0 & \text{si le résidu est insensible à } f_i \end{cases} \tag{5.43}$$

	Obs 1	Obs 2	Obs 3	
	r_1	r_2	r_{31}	r_{32}
f_1	1	0	1	0
f_2	0	1	0	1

Tableau 5.1 – Table de signatures théoriques pour les défauts capteurs

*est dressée dans le tableau 5.1. Dans la table des signatures, un "**1**" signifie qu'il est certain que le défaut f_i affecte le résidu r_{ij}. Un "**0**" traduit l'insensibilité du résidu par rapport au défaut. La table de signature est élaborée à partir du raisonnement suivant :*

L'observateur 1 reconstruit la sortie du multimodèle en utilisant seulement la sortie y_1. Si cette sortie est affectée par un défaut qui sera estimé et représentera le résidu. Donc, si le résidu r_1 s'écarte de zéro, on est certain de l'apparition d'un défaut sur la première sortie. Par contre, le deuxième observateur utilise la sortie y_2 qui n'est pas affectée par le défaut f_1, le résidu r_2 reste alors autour de zéro s'il n'y a pas de défaut sur la deuxième sortie. L'observateur 3, estime les deux défauts f_1 et f_2 à la fois. On remarque que si un défaut apparaît sur la première sortie ou sur la deuxième sortie ou sur les deux sorties le défaut est estimé. Donc avec cet observateur, on détecte et on localise les défauts capteurs même s'il apparaissent simultanément sur les deux sorties.

Dans l'exemple, on suppose que les défauts sur les capteurs sont définis comme suit :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.3 & 10 < t < 20 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

et :

$$f_2(t) = \begin{cases} 0.3 & 30 < t < 40 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Les seuils de détection sont fixés empiriquement à 0.1 *sur la base de l'analyse des résidus obtenus en fonctionnement sain.*

La simulation du système présenté dans la section précédente permet de retrouver les résidus illustrés par la figure 5.6. Les seuils de détection sont déterminés en fonctionnement normal du système. Le défaut affectant la première sortie est un biais d'amplitude 0.3 *survenant à l'instant* 10 *et subsiste jusqu'à l'instant* 20*. L'analyse de son estimation fournie par le premier observateur permet de conclure qu'il y a bien un défaut. De même, si un défaut apparaît sur la deuxième sortie, il sera estimé par le deuxième observateur.*

Remarque 5.3. *D'après ces simulations, on note certains points intéressants :*

1. *Le fait d'utiliser des observateurs dédiés pour l'estimation de chaque défaut de capteur, permet de les détecter et de les localiser. On remarque également que les fausses alarmes sont évitées.*

2. *En ce qui concerne le troisième observateur utilisant les deux sorties à la fois, on remarque qu'il est possible de détecter et de localiser les défauts affectant les deux sorties, le nombre d'observateurs pourrait donc être réduit. Cependant, dans l'exemple, le taux*

de fausse alarme est nul en utilisant les deux observateurs dédiés, alors qu'avec le troisième observateur, nous avons des fausses alarmes au moment de l'apparition d'un des défauts et cela est dû à la variation très rapide du défaut de 0 *à* 0.3.

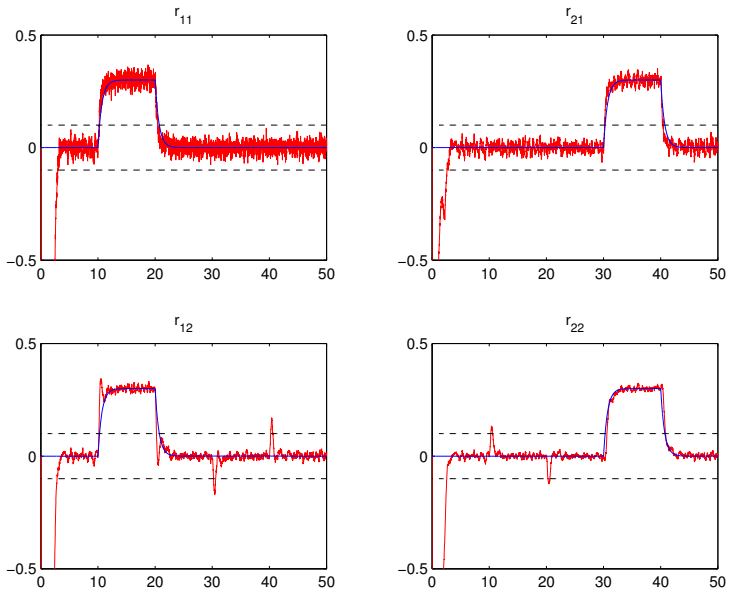


Figure 5.6 – Résidus en présence des défauts capteurs f_1 et f_2

Diagnostic des défauts d'actionneurs *En utilisant des observateurs PI, avec atténuation du bruit de mesure, des observateurs dédiés pour chaque défaut sont construits (voire figure 5.7). L'approche appliquée consiste à considérer l'entrée u_i comme une entrée inconnue et l'estimer via le $i^{ème}$ observateur PI. Par conséquent, si l'actionneur piloté par u_i est en défaut, le résidu issu de la différence entre les sorties estimées et mesurées reste proche de zéro ce qui signifie que ce résidu est insensible au défaut f_i affectant l'actionneur i. Les observateurs PI*

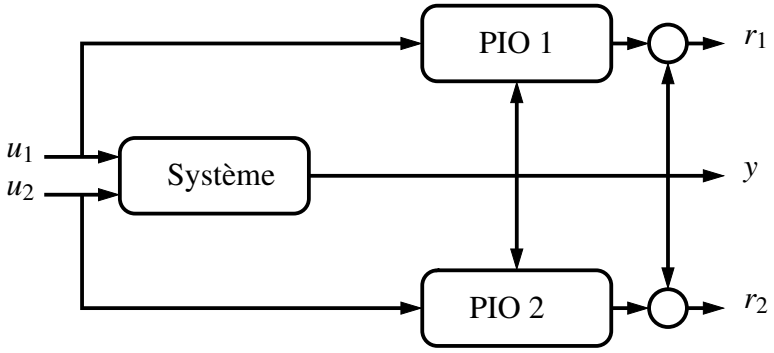


Figure 5.7 – Schéma de détection de défauts d'actionneurs

fournissent à la fois des estimations des sorties ainsi que des estimations des autres entrées considérées comme entrées inconnues. Les résidus r_{ij} générés correspondent à la différence

entre les sorties mesurées y_j et les sorties estimées $\hat{y}_j$ pour le i^{eme} observateur qui est insensible au défaut sur l'actionneur i.

Le système est ré-écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i^1 u_1(t) + B_i^2 u_2(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + W\omega(t) \end{cases} \tag{5.44}$$

Les gains des observateurs sont déterminés avec des contraintes supplémentaires qui concernent le placement des pôles à gauche des droites d'abscisses -1.7 pour le premier observateur et -3 pour le deuxième observateur afin d'assurer une grande vitesse de convergence de l'erreur d'estimation. Les taux d'atténuation des perturbations et du bruit de mesure obtenus sont $\sigma_1 = 0.32$ et $\sigma_2 = 0.34$.

Le premier observateur PI est construit en estimant l'entrée u_2, ce qui signifie que les résidus générés avec cet observateur sont insensibles aux défauts de u_2 mais sensibles au défauts de u_1. De la même manière, on construit le deuxième observateur PI.

Le système présenté dans l'exemple est soumis à deux défauts f_1 et f_2 affectant les actionneurs 1 et 2 respectivement. Ils sont données sous la forme de biais sur u_1 et u_2 :

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.4u_1 & 15 < t < 25 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

et :

$$f_2(t) = \begin{cases} 0.4u_2 & 35 < t < 45 \\ 0 & \textit{ailleurs} \end{cases}$$

Les résidus sont construits à partir de la comparaison entre les sorties réelles et les sorties estimées par chaque observateur :

$$r_{ij} = y_j - \hat{y}_j^i \tag{5.45}$$

où $i \in \{1,2\}$ désigne le numéro de l'observateur, et $j \in \{1,2\}$ désigne le numéro de la sortie. La table de signatures théoriques suivante est dressée dans le tableau 2.

	Observateur 1		Observateur 2	
	r_{11}	r_{12}	r_{21}	r_{22}
f_1	1	1	0	0
f_2	0	0	1	1

Tableau 5.2 – Table de signatures théoriques pour les défauts actionneurs

Les seuils de détection des défauts sont fixés à partir des résultats de simulation, sans défaut du générateur de résidus ; ils sont donnés par par $J_{th} = 0.25$.

Sur la figure 5.8, les résidus r_{11} et r_{12} générés avec le premier observateur indiquent qu'il y a un défaut entre les instants 15s et 25s qui correspond à un défaut sur l'actionneur piloté par la commande u_1. Quant au défaut f_2 affectant u_2, il apparaît sur les résidus r_{21} et r_{22} (figure 5.8).

Les résultats de simulation correspondent à la table de signatures théoriques 5.2.

En l'absence de défauts, les deux observateurs fournissent respectivement l'estimation des entrées u_1 et u_2 (figure 5.9) .

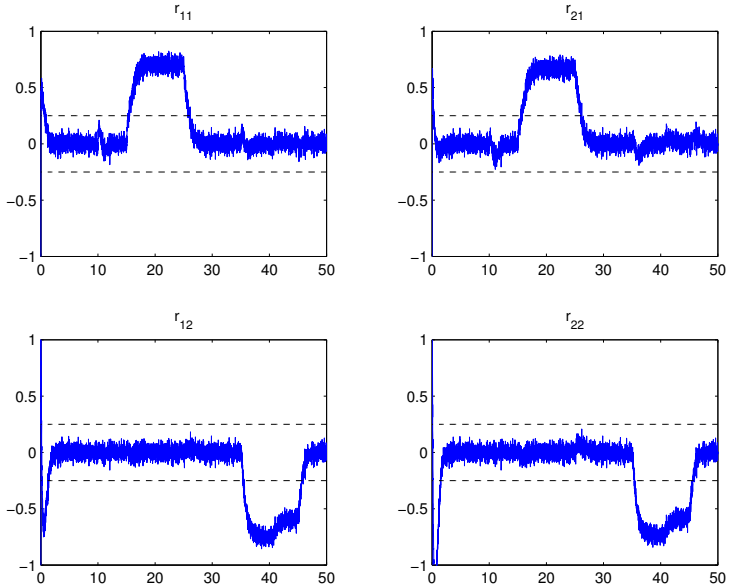


Figure 5.8 – Résidus en présence des défauts f_1 et f_2

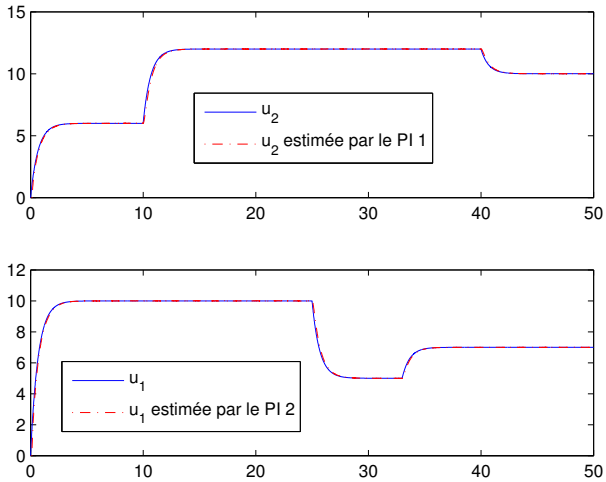


Figure 5.9 – Entrées estimées sans défaut

5.7.1 Discussions et conclusion

Cette section est dédiée à la conception d'un générateur de résidus utilisant l'observateur PI (ou plus généralement PMI) développé dans le chapitre 4. L'objectif est d'estimer les défauts affectant les actionneurs et les capteurs du système non linéaire décrit par la structure T-S à VDNM. L'avantage de cette méthode, par rapport à celle utilisant les observateurs à entrées

inconnues par découplage, est qu'elle s'affranchit des contraintes structurelles nécessaires pour le découplage des entrées inconnues et permet l'estimation des défauts ce qui implique leur détection et leur localisation. Une estimation simultanée des défauts affectant les actionneurs et les capteurs est également possible. En utilisant un banc de n_f observateurs dédiés, l'estimation des défauts est améliorée. Les taux d'atténuation des perturbations, obtenus lors de la synthèse des observateurs, sont utilisés afin de générer un seuil de détection.

5.8 Diagnostic par formalisme $\mathcal{H}_\infty$

Dans cette section, une nouvelle méthode de diagnostic de fautes des systèmes non linéaires représentés sous forme T-S est proposée. L'idée est de transformer le problème de conception de générateur de résidus sensibles aux défauts et insensibles aux signaux de perturbation sous la forme d'un problème $\mathcal{H}_\infty$ standard permettant ainsi de formuler le problème de minimisation/maximisation sous la forme d'un problème de minimisation seulement.

5.8.1 Formulation du problème

Considérons le système non linéaire représenté par le modèle T-S suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i d(t) + F_i f(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i d(t) + R_i f(t)) \end{cases} \tag{5.46}$$

où $A_i \in R^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$, $C_i \in R^{n_y\times n}$, $D_i \in R^{n_y\times n_u}$, $E_i \in R^{n\times n_d}$, $F_i \in R^{n\times n_f}$ et $G_i \in R^{n_y\times n_d}$, et $R_i \in R^{n_y\times n_f}$. Le système est soumis à l'influence de défauts $f(t)$ et de perturbations $d(t)$. Rappelons que les fonctions d'activation μ_i sont non linéaires et dépendent de la variable $\xi(t)$ qui peut être mesurable comme $\{u(t), y(t)\}$ ou non mesurable comme l'état $x(t)$ du système. Les fonctions d'activation satisfont la propriété de somme convexe suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq \mu_i(\xi(t)) \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) = 1 \end{cases} \tag{5.47}$$

Les signaux d'entrée $u(t)$, $f(t)$ et $d(t)$ sont des signaux à énergie finie. La norme-$\mathcal{L}_2$ de $u(t) \in \mathcal{L}_2$ est donnée par :

$$\|u(t)\|_2 = \sqrt{\int_0^{+\infty} u^T(t)u(t)dt} \tag{5.48}$$

5.8.2 Conception du générateur de résidus

Un générateur de résidus pour le système non linéaire représenté par la structure T-S (5.46) est proposé dans cette section. Deux cas sont étudiés, le premier cas concerne les systèmes T-S où les variables de prémisse sont mesurables et le second porte sur les systèmes T-S à variables de décisions non mesurables.

Premier cas : variables de décision mesurables

Considérons le système T-S, affecté par des défauts et des perturbations, modélisé sous forme (5.46).

Un générateur de résidus est proposé sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi)(A_i\hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi)(C_i\hat{x}(t) + D_i u(t)) \\ r(t) = M(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \tag{5.49}$$

où $\hat{x}(t) \in R^n$ est le vecteur d'état estimé et $r(t) \in R^{n_r}$ le vecteur de résidus. Les matrices $L_i \in R^{n\times n_y}$ et $M \in R^{n_r\times n_y}$ sont les gains du générateur de résidus. L'objectif est la détermination des gains L_i et M afin de minimiser le transfert des perturbations $w(t)$ et de maximiser le transfert des défauts $f(t)$ vers le signal de résidus $r(t)$.

Soit l'erreur d'estimation d'état définie par :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \tag{5.50}$$

Sa dynamique est déduite de (5.46) et (5.49) comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = A_\xi e(t) + E_\xi d(t) + F_\xi f(t) \\ r(t) = C_\xi e(t) + G_\xi d(t) + R_\xi f(t) \end{cases} \tag{5.51}$$

où :

$$\begin{aligned} A_\xi &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))(A_i - L_iC_k) \\ E_\xi &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))(E_i - L_iG_k) \\ F_\xi &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))(F_i - L_iR_k) \\ C_\xi &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))MC_i, \\ G_\xi &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))MG_i, \\ R_\xi &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))MR_i \end{aligned} \tag{5.52}$$

Pour plus de commodité, le système (5.51) peut être ré-écrit sous la forme compacte suivante :

$$r = G_{rd}d + G_{rf}f \tag{5.53}$$

où G_{rd}, la matrice de transfert des perturbations $d(t)$ vers $r(t)$, est définie par :

$$G_{rd} := \left(\begin{array}{c|c} A_\xi & E_\xi \\ \hline MC_i & G_\xi \end{array}\right) \tag{5.54}$$

et G_{rf}, le transfert de $f(t)$ vers $r(t)$, est défini par :

$$G_{rf} = \left(\begin{array}{c|c} A_\xi & F_\xi \\ \hline C_\xi & R_\xi \end{array}\right) \tag{5.55}$$

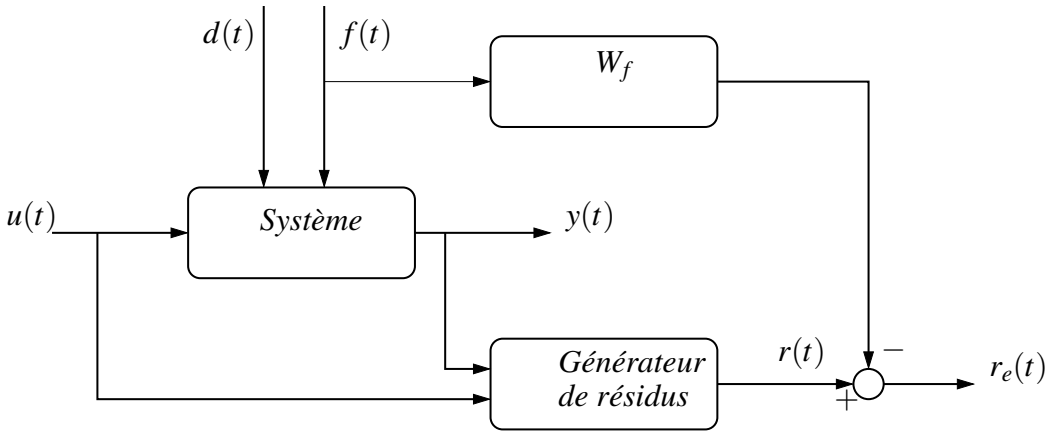


Figure 5.10 – Schéma de génération robuste de résidus

Dans le cadre général H_∞ (voir figure 5.10), la maximisation de l'effet des défauts $f(t)$ sur le résidu $r(t)$ peut se mettre sous la forme d'un problème de minimisation. En effet, par l'introduction d'une matrice poids W_f (éventuellement dynamique), le problème est réduit à la minimisation de l'effet des défauts sur le signal d'erreur défini par :

$$r_e(t) = r(t) - W_f f(t) \tag{5.56}$$

Comme expliqué dans [Stoustrup et Niemann, 2000], le problème de FDI dépend du choix de la structure de la matrice poids W_f. En effet, l'estimation des défauts est obtenue quand $W_f = I$, le problème de détection de défauts est considéré quand $W_f \in R^{1\times n_f}$, enfin le problème de localisation des défauts est réalisé en choisissant pour W_f une matrice diagonale. De plus, W_f peut être un filtre dynamique (mono sortie pour la détection ou bloc-diagonal pour la localisation) défini par :

$$W_f = \left(\begin{array}{c|c} A_f & B_f \\ \hline C_f & D_f \end{array}\right) \tag{5.57}$$

$$W_f \in \mathcal{S} \tag{5.58}$$

où $\mathcal{S}$ est l'ensemble des filtres stables ayant la propriété suivante :

$$\left\|W_f\right\|_- = inf_{w\in R}\left(\underline{\sigma}\left(W_f(jw)\right)\right) \geq 1 \tag{5.59}$$

(voir [Mazars et al., 2008] et [Mazars et al., 2006] pour plus de détails). L'intérêt de ce type de filtres est qu'il n'y a pas d'atténuation des défauts, mais seulement une amplification sur toute la gamme des fréquences ce qui améliore le problème de la détection de défauts. Les tâches de détection, isolation et estimation des défauts peuvent être réalisées par un choix adéquat des matrices A_f, B_f, C_f et D_f. Le problème FDI est alors exprimé sous la forme d'un problème d'optimisation multi-objectifs exprimé par :

obtenir L_i et M qui minimisent $a\gamma_f + (1-a)\gamma_d$ où $a \in [0\ \ 1]$ sous les contraintes suivantes :

$$\left\|G_{rf} - W_f\right\|_\infty < \gamma_f \tag{5.60}$$

$$\left\|G_{rd}\right\|_\infty < \gamma_d \tag{5.61}$$

$$\text{Le système (5.51) est stable} \tag{5.62}$$

Le théorème 5.1 donne une méthode pour résoudre le problème d'optimisation et obtenir les gains L_i et M du générateur de résidus (5.49).

Théorème 5.1. *Étant donnés le paramètre $a \in [0,1]$ et la matrice de transfert $W_f \in \mathcal{S}$, le générateur de résidus (5.49) existe si l'on peut trouver des matrices symétriques et définies positives $P_1 = P_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 = P_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_f\times n_f}$, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $M \in \mathbb{R}^{n_r\times n_f}$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_f$ et $\bar{\gamma}_d$ solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{M,P_1,P_2,K_i,\bar{\gamma}_f,\bar{\gamma}_d} \quad a\bar{\gamma}_f + (1-a)\bar{\gamma}_d$$

s.c.

$$\begin{pmatrix} X_{ik}^1 & 0 & P_1F_i - K_iR_k & C_k^TM^T \\ 0 & X_f^2 & P_2B_f & -C_f^T \\ F_i^TP_1 - R_k^TK_i^T & B_f^TP_2 & -\bar{\gamma}_f I & R_k^TM^T - D_f^T \\ MC_k & -C_f & MR_k - D_f & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.63}$$

$$\begin{pmatrix} X_{ik}^1 & P_1E_i - K_iG_k & C_k^TM^T \\ E_i^TP_1 - G_k^TK_i^T & -\bar{\gamma}_d I & G_k^TM^T \\ MC_k & MG_k & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.64}$$

où :

$$X_{ik}^1 = A_i^TP_1 + P_1A_i - K_iC_k - C_k^TK_i^T \tag{5.65}$$

$$X_f^2 = A_f^TP_2 + P_2A_f \tag{5.66}$$

$$\forall i,k = 1,\ldots,r$$

Les gains L_i sont obtenus par :

$$L_i = P_1^{-1}K_i \;\; i = 1,\ldots,r \tag{5.67}$$

et les taux d'atténuation sont donnés par

$$\gamma_d = \sqrt{\bar{\gamma}_d}, \quad \gamma_f = \sqrt{\bar{\gamma}_f} \tag{5.68}$$

Démonstration. En présence des défauts et en l'absence de perturbation, le générateur de résidus est réduit à $r = G_{rf}f$. Afin de maximiser les effets des défauts sur les résidus, on considère le filtre stable $W_f(s)$ défini par (5.57) et le problème de maximisation est formulé en un problème de minimisation par résolution de (5.60). La matrice $G_{rf} - W_f$ est ré-écrite sous la forme suivante :

$$G_{rf} - W_f := \left(\begin{array}{cc|c} A_\xi & 0 & F_\xi \\ 0 & A_f & B_f \\ \hline C_\xi & -C_f & R_\xi - D_f \end{array}\right) \tag{5.69}$$

On définit la matrice bloc diagonale symétrique et définie positive :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \tag{5.70}$$

En utilisant le lemme borné réel [Boyd et al., 1994] (voir annexe C), la condition (5.60) est exprimée comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_\xi^T P_1 + P_1 A_\xi^T & 0 & P_1 F_\xi & C_\xi^T \\ 0 & A_f^T P_2 + P_2 A_f^T & P_2 B_f & -C_f^T \\ F_\xi^T P_1 & B_f^T P_2 & -\gamma_f^2 I & R_\xi^T - D_f^T \\ C_\xi & -C_f & R_\xi - D_f & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.71}$$

En utilisant les définitions (5.52) des matrices A_ξ, F_ξ, C_ξ et R_ξ ainsi que la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, l'inégalité (5.71) est satisfaite si les inégalités suivantes sont vraies pour $i,k = 1,...,r$:

$$\begin{pmatrix} X_{ik}^1 & 0 & P_1 F_i - P_1 L_i R_k & C_k^T M^T \\ 0 & X_f^2 & P_2 B_f & -C_f^T \\ F_i^T P_1 - R_k^T K_i^T & B_f^T P_2 & -\gamma_f^2 I & R_k^T M^T - D_f^T \\ M C_k & -C_f & M R_k - D_f & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.72}$$

où X_{ik}^1 et X_f^2 sont définies en (5.65) et (5.66) respectivement. Afin d'obtenir les inégalités linéaires matricielles (5.63), on utilise les changements de variables $K_i = P_1 L_i$ et $\bar{\gamma}_f = \gamma_f^2$ et $\bar{\gamma}_d = \gamma_d^2$.

En présence de perturbations mais en l'absence de défaut, un raisonnement similaire, en utilisant le lemme borné réel, permet d'obtenir les LMIs (5.64). Compte tenue de la définition (5.65), le bloc $(1,1)$ des LMIs (5.64) assure la stabilité du générateur de résidus (i.e. le système (5.51) est stable) et la robustesse vis-à-vis des perturbations.

En présence simultanée de défauts et de perturbations, l'importance relative de la minimisation des effets des perturbations et la maximisation de l'effet des défauts sur les résidus peut être exprimée comme la minimisation d'une combinaison linéaire $a\gamma_f + (1-a)\gamma_d$ où $a \in [0 \;\; 1]$. □

Deuxième cas : variables de décision non mesurables

Dans cette section, les fonctions d'activation du système non linéaire T-S (5.46) dépendent de l'état $\xi(t) = x(t)$ du système qui est inconnu. Les fonctions d'activation du générateur de résidus dépendent alors également de l'état estimé $\hat{x}(t)$ comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i(y(t) - \hat{y}(t))) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x})(C_i \hat{x}(t) + D_i u(t)) \\ r(t) = M(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \tag{5.73}$$

En ajoutant et soustrayant le terme :

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j(\hat{x}(t)) \left(A_j x(t) + B_j u(t)\right) \tag{5.74}$$

dans l'équation d'état du système (5.46) et le terme

$$\sum_{j=1}^{r} \mu_j(\hat{x}(t)) \left(C_j x(t) + D_j u(t)\right) \tag{5.75}$$

dans l'équation de sortie de (5.46), on obtient le système strictement équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t)) \left(A_j x(t) + B_j u(t) + E_i d(t) + F_i f(t) + \Delta_1(t)\right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(\hat{x}(t)) \left(C_j x(t) + D_j u(t) + G_i d(t) + R_i f(t) + \Delta_2(t)\right) \end{cases} \tag{5.76}$$

où :

$$\Delta_1(t) = \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_j(x(t)) - \mu_j(\hat{x}(t))\right) \left(A_j x(t) + B_j u(t)\right) \tag{5.77}$$

et :

$$\Delta_2(t) = \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_j(x(t)) - \mu_j(\hat{x}(t))\right) \left(C_j x(t) + D_j u(t)\right) \tag{5.78}$$

Remarque 5.4. *Suivant les hypothèses sur les termes $\Delta_1(t)$ et $\Delta_2(t)$ et la manière dont on les traite comme dans le chapitre 3 pour la conception d'observateurs, des conditions LMIs peuvent être obtenues pour la conception du générateur de résidus (5.73).*

Approche par "incertitudes constantes"

En utilisant l'approche par incertitudes constantes présentée au chapitre 3 exploitant la propriété de somme convexe des fonctions d'activation (5.47), le système (5.76) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(\hat{x})(\tilde{A}_{ij}x(t) + \tilde{B}_{ij}u(t) + E_i d(t) + F_i f(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(\hat{x})(\tilde{C}_{ij}x(t) + \tilde{D}_{ij}u(t) + G_i d(t) + R_i f(t)) \end{cases} \tag{5.79}$$

où :

$$\tilde{A}_{ij} = A_j + \Delta A_{ij}, \tilde{C}_{ij} = C_j + \Delta C_{ij}$$
$$\tilde{B}_{ij} = B_j + \Delta B_{ij}, \tilde{D}_{ij} = D_j + \Delta D_{ij}$$

et :

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j, \;\; X_i \in \{A_i, B_i, C_i, D_i\}$$

$$i, j = 1, \ldots, r$$

En exprimant la dynamique de l'erreur d'estimation d'état, on aboutit à :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \tilde{A}_{x\hat{x}}e(t) + \Delta\tilde{A}_{x\hat{x}}x(t) + \tilde{B}_{x\hat{x}}\tilde{d}(t) + \tilde{F}_{x\hat{x}}f(t) \\ r(t) = \tilde{C}_{x\hat{x}}e(t) + \Delta\tilde{C}_{x\hat{x}}x(t) + \tilde{G}_{x\hat{x}}\tilde{d}(t) + \tilde{R}_{x\hat{x}}f(t) \end{cases} \tag{5.80}$$

Afin de simplifier les écritures, posons :

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(\hat{x})\mu_k(x)\mu_l(\hat{x}) \Leftrightarrow \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l$$

Les matrices de (5.80) sont alors définies par :

$$\tilde{A}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l(A_j - L_jC_l) \tag{5.81}$$

$$\tilde{B}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l \left[\begin{array}{cc} (\Delta B_{ij} - L_j\Delta D_{kl}) & (E_i - L_jG_k) \end{array} \right] \tag{5.82}$$

$$\tilde{F}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l(F_i - L_jR_k) \tag{5.83}$$

$$\tilde{C}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l MC_l \tag{5.84}$$

$$\tilde{G}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l[M\Delta D_{kl} \;\; MG_k] \tag{5.85}$$

$$\tilde{R}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l MR_k \tag{5.86}$$

$$\Delta\tilde{A}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l(\Delta A_{ij} - L_j\Delta C_{kl}) \tag{5.87}$$

$$\Delta\tilde{C}_{x\hat{x}} = \sum_{i,j,k,l=1}^{r} \mu_i\hat{\mu}_j\mu_k\hat{\mu}_l M\Delta C_{kl} \tag{5.88}$$

$$\tilde{d}(t) = \left[\begin{array}{cc} u(t)^T & d(t)^T \end{array} \right]^T \tag{5.89}$$

Soit le vecteur d'état augmenté $\tilde{x} = [e^T \;\; x^T]^T$. Le vecteur de résidus r est donc donné par :

$$r = G_{rd}\tilde{d} + G_{rf}f \tag{5.90}$$

où :

$$G_{rd} = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{x\hat{x}} & \Delta\tilde{A}_{x\hat{x}} & \tilde{B}_{x\hat{x}} \\ 0 & A_x & \tilde{B}_x \\ \hline \tilde{C}_{x\hat{x}} & \Delta\tilde{C}_{x\hat{x}} & \tilde{G}_{x\hat{x}} \end{array} \right) \tag{5.91}$$

et :

$$G_{rf} = \left(\begin{array}{cc|c} \tilde{A}_{x\hat{x}} & \Delta\tilde{A}_{x\hat{x}} & \tilde{F}_{x\hat{x}} \\ 0 & A_x & F_x \\ \hline \tilde{C}_{x\hat{x}} & \Delta\tilde{C}_{x\hat{x}} & \tilde{R}_{x\hat{x}} \end{array} \right) \tag{5.92}$$

$$A_x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)A_i, F_x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x)F_i$$

$$\tilde{B}_x = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x) \left[\begin{array}{cc} B_i & E_i \end{array} \right]$$

Le problème de FDI est le même que celui proposé dans (5.60)-(5.62). Afin de déterminer les gains L_i et M du générateur de résidus (5.73), le théorème 5.2 donne les conditions d'existence, sous forme LMI, d'une solution au problème (5.60)-(5.62) pour les systèmes T-S à variables de décision non mesurables.

Théorème 5.2. *Étant donné un paramètre a et la matrice de transfert W_f, le générateur de résidus (5.49) existe si l'on peut trouver des matrices symétriques et positives $P_1 = P_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_2 = P_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_3 = P_3^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_f\times n_f}$ des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $M \in \mathbb{R}^{n_r\times n_y}$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_d$ et $\bar{\gamma}_f$ solutions du problème d'optimisation :*

$$\min_{M,P_1,P_2,K_i,\bar{\gamma}_f,\bar{\gamma}_d} \quad a\bar{\gamma}_f + (1-a)\bar{\gamma}_d$$

s.c.

$$\begin{pmatrix} X_{jl}^1 & \Xi_{ijkl} & 0 & P_1F_i - K_jR_k & C_l^TM^T \\ * & X_i^2 & 0 & P_2F_i & \Delta C_{kl}^TM^T \\ * & * & X_f^3 & P_3B_f & -C_f^T \\ * & * & * & -\bar{\gamma}_f I & (MR_k - D_f)^T \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.93}$$

$$\begin{pmatrix} X_{jl}^1 & \Xi_{ijkl} & P_1\Delta B_{ij} - K_j\Delta D_{ij} & P_1E_i - K_jG_k & C_l^TM^T \\ * & X_i^2 & P_2B_i & P_2E_i & \Delta C_{kl}^TM^T \\ * & * & -\bar{\gamma}_{\tilde{d}} I & 0 & \Delta D_{kl}^TM^T \\ * & * & * & -\bar{\gamma}_{\tilde{d}} I & G_k^TM^T \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.94}$$

où :

$$X_{jl}^1 = A_j^TP_1 + P_1A_j - K_jC_l - C_l^TK_j^T \tag{5.95}$$

$$X_i^2 = A_i^TP_2 + P_2A_i \tag{5.96}$$

$$X_f^3 = A_f^TP_3 + P_3A_f \tag{5.97}$$

$$\Xi_{ijkl} = P_1\Delta A_{ij} - K_j\Delta C_{kl} \tag{5.98}$$
$$\forall i,j,k,l = 1,\ldots,r$$

Les gains L_i sont définis par :

$$L_i = P_1^{-1}K_i, \quad i = 1,\ldots,r \tag{5.99}$$

et les taux d'atténuation sont calculés à partir de :

$$\gamma_d = \sqrt{\bar{\gamma}_d} \quad \gamma_f = \sqrt{\bar{\gamma}_f} \tag{5.100}$$

Démonstration. On applique le BRL pour le système augmenté d'état $\tilde{x} = [e^T \;\; x^T \;\; x_f^T]^T$ où x_f est le vecteur d'état du filtre W_f, avec pour entrée $f(t)$ et pour sortie $r_e(t)$ définie par $r_e(t) = r(t) - r_f(t)$. La démonstration suit exactement les mêmes étapes que celles données pour la preuve du théorème 5.1.

□

Remarque 5.5. *Notons que le théorème 5.2 est plus général que le théorème 5.1. En effet, si les fonctions d'activation μ_i du système (5.46) dépendent de variables de décision mesurables, les conditions LMIs données dans le théorème 5.1 peuvent être déduites du théorème 5.2 en considérant $i = j$. Quand les variables de prémisse dépendent de l'état du système, et si le nombre de sous-modèles r est important, il devient difficile de trouver une matrice commune P satisfaisant les conditions du théorème 5.2 (voir la remarque 6.1 dans [Tanaka et al., 1998]).*

Approche par le théorème de la valeur moyenne

La méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne et la transformation par secteurs non linéaires développée à la section 3.3.5 dans le chapitre 3 est appliquée pour la conception du générateur de résidus (5.73). Pour cela, nous introduisons les matrices A_0, B_0, C_0, D_0, $\bar{A}_i$, $\bar{B}_i$, $\bar{C}_i$ et $\bar{D}_i$ dans le système (5.46) avec $\xi(t) = x(t)$, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t) + E_i d(t) + F_i f(t)\right) \\ y(t) = C_0 x(t) + D_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{C}_i x(t) + \bar{D}_i u(t) + G_i d(t) + R_i f(t)\right) \end{cases} \tag{5.101}$$

Supposons maintenant que les gains L_i de (5.73) soient identiques (i.e. $L_i = L$, $i = 1, \ldots, r$), le générateur de résidus s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + B_0 u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\bar{A}_i \hat{x}(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ \hat{y}(t) = C_0 \hat{x}(t) + D_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(\bar{C}_i \hat{x}(t) + \bar{D}_i u(t)\right) \\ r(t) = M(y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \tag{5.102}$$

L'objectif est de déterminer les gains L et M du générateur de résidus (5.102) afin de minimiser l'influence de $d(t)$ sur $r(t)$ et de maximiser l'influence de $f(t)$ sur $r(t)$.

En exprimant l'erreur d'estimation d'état entre le système (5.101) et le générateur de résidus (5.102), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A_0 - LC_0)e(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(E_i d(t) + F_i f(t)\right) \\ \qquad + \Delta_1(x(t), \hat{x}(t), u(t)) - L\Delta_2(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \\ r(t) = MC_0 e(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(MG_i d(t) + MR_i f(t)\right) + M\Delta_2(x(t), \hat{x}(t), u(t)) \end{cases} \tag{5.103}$$

où :

$$\begin{cases} \Delta_1(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) \\ \Delta_2(x(t), \hat{x}(t), u(t)) = g(x(t), u(t)) - g(\hat{x}(t), u(t)) \end{cases} \tag{5.104}$$

$$\begin{cases} f(x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t)\right) \\ g(x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{C}_i x(t) + \bar{D}_i u(t)\right) \end{cases} \tag{5.105}$$

Hypothèse 5.2. *Les fonctions f et g satisfont les conditions suivantes :*

$$a_{ij} \leq \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, u) \leq b_{ij}, \forall x, u \tag{5.106}$$

$$c_{ij} \leq \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x, u) \leq d_{ij}, \forall x, u \tag{5.107}$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ et $k = 1, \ldots, n_y$, où a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} et d_{ij} sont des scalaires positifs.

Sous l'hypothèse 5.2, et en appliquant la méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne et l'approche par transformation par secteurs non linéaires, on aboutit à :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))h_k(z)v_l(z)\left(\left(\tilde{A}_k - L\tilde{C}_l\right)e(t) + \left(E_i - LG_j\right)d(t) + \left(F_i - LR_j\right)_i f(t)\right) \\ r(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))v_l(z)\left(M\tilde{C}_l e(t) + MG_i d(t) + MR_i f(t)\right) \end{cases} \tag{5.108}$$

où $q = 2n^2$, $s = 2n_y^2$ et :

$$\tilde{A}_k = A_0 + \mathcal{A}_k \tag{5.109}$$

$$\tilde{C}_l = C_0 + \mathcal{C}_l \tag{5.110}$$

Le système (5.108) exprimant le résidu $r(t)$ en fonction des défauts et des perturbations peut se mettre sous la forme (5.53) avec :

$$G_{rd} := \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))h_k(z)v_l(z)\left(\tilde{A}_k - L\tilde{C}_l\right) & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(x(t))\left(E_i - LG_j\right) \\ \hline \sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))v_l(z)M\tilde{C}_l & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))MG_i \end{array}\right) \tag{5.111}$$

et :

$$G_{rf} := \left(\begin{array}{c|c} \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))h_k(z)v_l(z)\left(\tilde{A}_k - L\tilde{C}_l\right) & \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(x(t))\mu_j(x(t))\left(F_i - LR_j\right) \\ \hline \sum_{l=1}^{s} \mu_i(x(t))v_l(z)M\tilde{C}_l & \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))MR_i \end{array}\right) \tag{5.112}$$

Comme dans la section 5.8.2, on introduit le filtre $W_f \in \mathcal{S}$ défini dans (5.57). On obtient alors le résidu $r_e(t)$ défini à l'équation (5.56). En suivant la même démarche que celle utilisée pour résoudre le problème d'optimisation (5.60)-(5.61), on aboutit aux conditions LMIs données dans le théorème 5.3.

Théorème 5.3. *Étant donnés le paramètre $a \in [0,1]$ et la matrice de transfert $W_f \in \mathcal{S}$, le générateur de résidus (5.49) existe si l'on peut trouver des matrices symétriques et définies positives $P_1 = P_1^T > 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $P_2 = P_2^T > 0 \in \mathbb{R}^{n_f\times n_f}$, des matrices $K_i \in \mathbb{R}^{n\times n_y}$ et $M \in \mathbb{R}^{n_r\times n_y}$ et des scalaires positifs $\bar{\gamma}_f$ et $\bar{\gamma}_d$ solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{M,P_1,P_2,K,\bar{\gamma}_f,\bar{\gamma}_d} \quad a\bar{\gamma}_f + (1-a)\bar{\gamma}_d$$

s.c.

$$\begin{pmatrix} X_{kl}^1 & 0 & P_1F_i - KR_j & \tilde{C}_l^T M^T \\ 0 & X_f^2 & P_2B_f & -C_f^T \\ F_i^T P_1 - R_j^T K^T & B_f^T P_2 & -\bar{\gamma}_f I & R_j^T M^T - D_f^T \\ M\tilde{C}_l & -C_f & MR_j - D_f & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.113}$$

$$\begin{pmatrix} X_{kl}^1 & P_1E_i - KG_j & \tilde{C}_l^T M^T \\ E_i^T P_1 - G_j^T K^T & -\bar{\gamma}_d I & G_i^T M^T \\ M\tilde{C}_l & MG_i & -I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.114}$$

où :

$$X_{kl}^1 = \tilde{A}_k^T P_1 + P_1 \tilde{A}_k - K\tilde{C}_l - \tilde{C}_l^T K^T \tag{5.115}$$

$$X_f^2 = A_f^T P_2 + P_2 A_f \tag{5.116}$$

$$\forall i, j = 1, \ldots, r, \;\; k = 1, \ldots, q = 2n^2, \;\; l = 1, \ldots, s = 2n_y^2$$

Les gains du générateur de résidus sont donnés par M et L qui est défini par l'équation :

$$L = P_1^{-1} K \tag{5.117}$$

et les taux d'atténuation sont donnés par

$$\gamma_d = \sqrt{\bar{\gamma}_d} \quad \gamma_f = \sqrt{\bar{\gamma}_f} \tag{5.118}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle proposée pour le théorème 5.1 □

5.8.3 Diagnostic robuste de fautes

En présence de perturbations externes, les résidus sont différents de zéro même en l'absence de défauts. Dans le contexte de la détection de défauts, un seuil basé sur les taux d'atténuation γ_f et γ_d est généré. Une alarme est déclenchée chaque fois que les résidus $r(t)$ dépassent le seuil de détection. Un seuil fixe peut être obtenu comme suit :

$$J_{th} = \gamma_d \rho \tag{5.119}$$

où ρ est la borne sur la perturbation $d(t)$ dans le cas où les variables de décision sont mesurables ou dans le cas où ces variables sont non mesurables, il représente la borne de $\tilde{d}(t)$ en utilisant l'approche par incertitudes. La logique de décision est donnée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} |r_i(t)| < J_{th} \Rightarrow & \text{pas de défaut} \\ |r_i(t)| > J_{th} \Rightarrow & \text{présence de défaut} \end{cases} \tag{5.120}$$

Afin d'améliorer la détection des défauts, un générateur de résidus est construit séparément pour chaque défaut. Chaque générateur de résidus est synthétisé par la minimisation du transfert de f_i vers $r_{ei} = r_i - W_{fi} f_i$, $i = 1, \ldots, n_f$. Dans le cas où les variables de décision sont non mesurables en utilisant l'approche par incertitudes, le système est vu comme un système incertain. L'entrée $u(t)$ apparaît alors dans la dynamique de l'erreur d'estimation d'état. La méthode proposée dans cette partie considère que l'entrée $u(t)$ est une perturbation au même titre que $d(t)$. Il est clair que l'introduction de $u(t)$ dans les signaux de perturbation pénalise la détection de défauts parce que le seuil de détection calculé dépend de la borne de $\tilde{d}(t) = [u(t)^T \;\; d(t)^T]^T$. En utilisant la méthode proposée dans [Casavola et al., 2008], le critère $(a\bar{\gamma}_f + (1-a)\bar{\gamma}_{\tilde{d}})$ sous les contraintes LMIs peut être remplacé par le critère $(a\bar{\gamma}_f + b\bar{\gamma}_d + c\bar{\gamma}_u)$ permettant de réduire le pessimisme des conditions LMIs. Un seuil adaptatif peut également être généré en utilisant une fenêtre temporelle (voir [Casavola et al., 2008], [Frank et Ding, 1997]).

Le vecteur de défaut $f(t)$ est fréquemment décrit à l'aide de deux composantes, la première composante, notée $f_a(t)$, représente le vecteur de défauts affectant les actionneurs, donc, il

apparaît sur l'équation d'état du système. La seconde composante, notée $f_s(t)$, est le vecteur de défauts affectant les capteurs. L'équation de sortie du système est donnée par :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi)\left(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i d(t) + R_i f(t)\right) \tag{5.121}$$

Lorsque les défauts $f_a(t)$ n'affectent pas l'équation de sortie du système, les matrices R_i ne sont pas de plein rang colonne. Comme expliqué dans ([Stoustrup et Niemann, 2000]), dans le cas où $W_f = I$, le taux d'atténuation γ_f devient plus grand que 1 et les problèmes traités aux théorèmes 5.1 et 5.2 n'admettent pas de solutions. Afin d'éliminer cet inconvénient, un terme de perturbation est ajouté dans l'équation de sortie du système :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi)\left(C_i x(t) + D_i u(t) + G_i d(t) + \begin{bmatrix} \varepsilon_i & R_i^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix}\right) \tag{5.122}$$

où ε_i sont les matrices de distribution des défauts d'actionneurs $f_a(t)$ dans l'équation de sortie et doivent être choisies les plus faibles possible. Cependant, dans le contexte de la localisation des défauts, cette approche peut générer des fausses alarmes. Pour améliorer les résultats d'isolation, nous proposons d'ajouter et de soustraire le même terme et d'utiliser le terme additionnel afin de garantir la condition du plein rang colonne des matrices R_i. L'autre terme sera considéré comme une perturbation à minimiser :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi)\left(C_i x(t) + D_i u(t) + \bar{G}_i \bar{d}(t) + \bar{R}_i \begin{bmatrix} f_a(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix}\right) \tag{5.123}$$

où :

$$\bar{G}_i = \begin{bmatrix} G_i & b\varepsilon_i \end{bmatrix}, \bar{R}_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_i & R_i^1 \end{bmatrix}, \bar{d} = \begin{bmatrix} d \\ -\frac{f_a}{b} \end{bmatrix}$$

où b est un scalaire positif. En utilisant cette seconde approche, le seuil J_{th} est calculé par l'utilisation de la borne du nouveau vecteur de perturbation $\bar{d}(t)$, donc, la tâche d'isolation des défauts est améliorée.

Remarque 5.6. *Les méthodes utilisées dans cette partie, pour le cas des système T-S à VDNM, sont basées sur l'observateur $\mathcal{L}_2$ utilisant l'approche par incertitudes constantes proposée dans le chapitre 3 à la section 3.4. Il est aussi possible d'utiliser les autres méthodes de conception d'observateurs proposées dans ce même chapitre. Comme pour l'estimation d'état, cela fournira des conditions moins restrictives avec certaines méthodes.*

Exemple 5.2 (Diagnostic de défauts capteurs et actionneurs)
L'algorithme proposé pour le diagnostic robuste des défauts est illustré par un exemple académique. Considérons le système non linéaire représenté par la structure (5.46) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; E_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.3 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

et :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \; R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation μ_i sont définies comme suit :

$$\begin{cases} \mu_1(u(t)) = \frac{1-\tanh((u(t)-1)/10)}{2} \\ \mu_2(u(t)) = 1 - \mu_1(u(t)) \end{cases} \tag{5.124}$$

Le vecteur de perturbation $d(t)$ affecte les sorties et la dynamique du système. La première composante du vecteur de défauts $f(t)$ est un défaut de capteur et la seconde représente un défaut d'actionneur. W_f est une matrice diagonale de filtres stables appartenant à $\mathcal{S}$. Un générateur de résidus, dédié à chaque défaut, est synthétisé comme mentionné ci-dessus. La résolution du problème du théorème 5.1 avec $a = 0.9$ conduit à $\gamma_d = 2.1426$ et $\gamma_f = 0.5481$ pour le premier générateur de résidus. Pour le second générateur, on choisit $a = 0.99$, $\varepsilon = [0\ 0.08]^T$ et $b = 10$. La solution du problème du théorème 5.1 conduit à $\gamma_d = 8.2658$ et $\gamma_f = 1.5780$. Les résidus obtenus sont montrés sur la figure 5.11. Le résidu $r_1(t)$ n'est sensible qu'à la première composante du vecteur de défauts (défaut de capteur) et le second résidu $r_2(t)$ n'est sensible qu'au second défaut (défaut d'actionneur). De plus, le filtre W_f permet d'amplifier la sensibilité des résidus aux défauts et permet de détecter des défauts de faibles amplitudes.

Une seconde simulation est réalisée afin de montrer la capacité de la méthode proposée à estimer les défauts. Le filtre choisi est une matrice identité $W_f = I_{n_f}$. Les défauts réels et leurs estimés sont illustrés sur la figure 5.12.

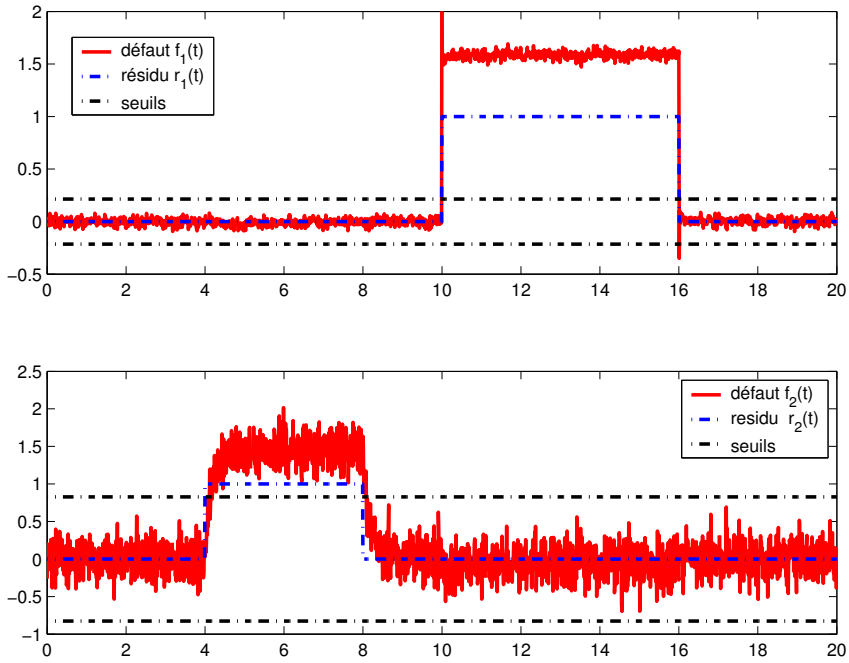


Figure 5.11 – Défauts et résidus correspondants

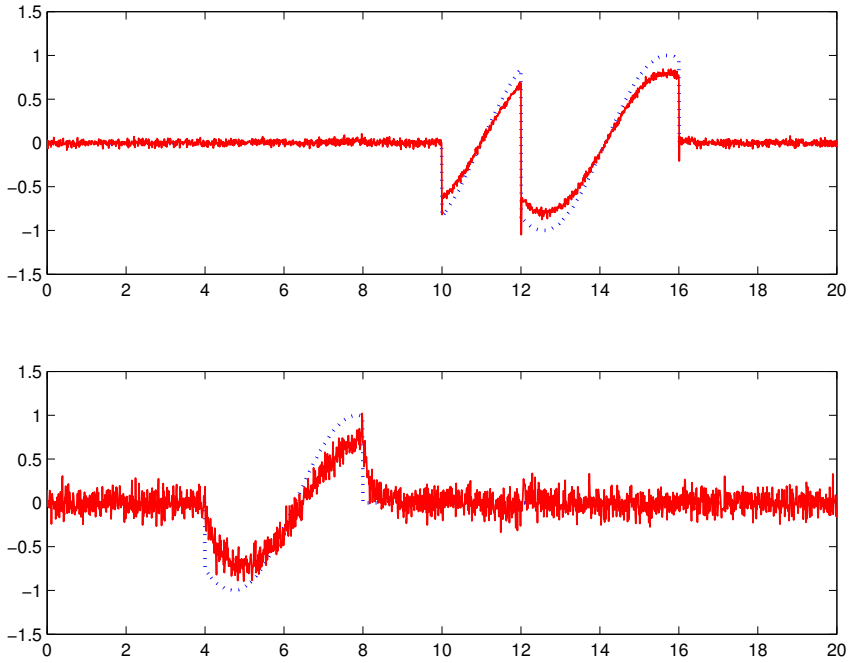


Figure 5.12 – Défauts (trait pointillé) et leurs estimés (trait continu)

5.9 Commande tolérante aux défauts

5.9.1 Introduction

Un système affecté par un défaut dévie de sa trajectoire de référence, conduisant à des performances dégradées jusqu'à provoquer l'instabilité selon la sévérité du défaut pouvant ainsi mettre en cause la sécurité des opérateurs et provoquer des dégâts matériel et écologique (centrales nucléaires, véhicules, machines industrielles,...). Afin de pouvoir remédier à ce problème, il est nécessaire de prendre en considération le défaut et d'agir sur la loi de commande de manière à le compenser et permettre au système d'accomplir sa mission. Cette tâche est appelée commande tolérante aux défauts (**FTC : Fault Tolerant Control**) et elle nécessite un module de détection, isolation et estimation du défaut d'où l'intérêt des méthodes du chapitre 5 visant à concevoir des générateurs de résidus pour le diagnostic permettant de détecter, de localiser et d'estimer les défauts. Il est clair que tous les défauts ne sont pas compensables. Pour les défauts d'actionneurs, l'étude de la comandabilité du système avec les actionneurs sains doit être faite pour savoir si le système est commandable avant de recalculer la loi de commande ; dans cette situation on parle de **reconfiguration de la loi de commande** permettant de générer de nouvelles commandes pour les actionneurs restants dans le but de ramener le système à la trajectoire de référence. Afin d'éviter d'éventuelles saturations, deux approches sont principalement utilisées. Une approche consiste à changer la trajectoire du système et la seconde vise à augmenter le temps de la mission.

Une situation de défaut moins sévère est de considérer la perte d'efficacité d'un actionneur résultant d'un vieillissement, dans ce cas on parle alors de **commande tolérante aux défauts** puisque l'actionneur fonctionne toujours. Un recalcule donc de la loi de commande en prenant en compte ce défaut pour corriger le système. La commande tolérante aux défauts peut également compenser des défauts affectant les capteurs. De manière intuitive, un défaut de capteur qui affecte la mesure fausse la loi de commande ; l'estimation de l'amplitude de ce défaut et sa soustraction de la mesure réelle conduit à ajouter un terme dans la loi de commande permettant ainsi la compensation du défaut.

Ce chapitre est consacré au développement d'une méthode de synthèse de commande tolérante aux défauts basée sur les générateurs de résidus mis en place dans le chapitre précédent. La méthode consiste à utiliser les observateurs PI et PMI de manière à estimer les défauts, la commande sera synthétisée en tenant compte du défaut estimé. Le but de la commande générée est de minimiser l'écart entre les états du système affecté par des défauts et les états d'un modèle de référence. On considère dans ce chapitre les deux cas où les variables de prémisses sont mesurables et non mesurables.

5.9.2 Etat de l'art

Depuis plusieurs années, le problème de la tolérance aux défauts a été abordé sous plusieurs points de vue. Les commandes tolérantes aux défauts peuvent être classées suivant deux catégories : commandes passives et commandes actives.

Les stratégies de commande passive (également appelée commande robuste) s'appuient sur l'idée de synthétiser une commande permettant de rendre le système insensible aux incertitudes de modélisation et à certains défauts connus a priori. Après la synthèse de la commande, tous les

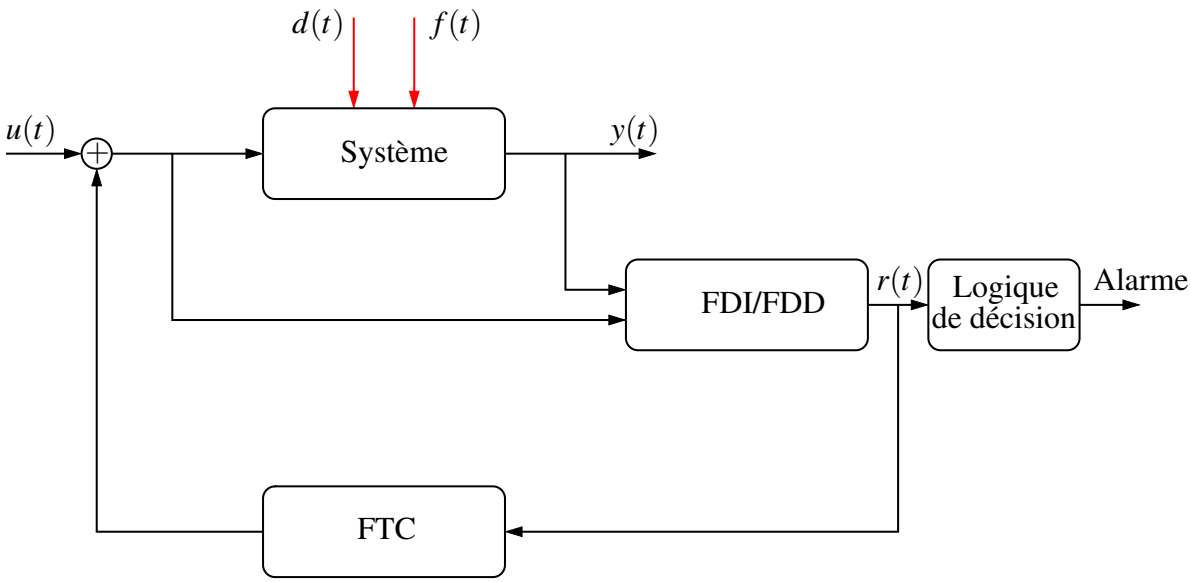


Figure 5.13 – Architecture FTC

défauts pris en compte sont compensés sans aucune modification de la loi de commande et par conséquent aucune information en ligne sur ces défauts n'est nécessaire. Un bloc de détection, localisation et estimation des défauts n'est pas indispensable. Dans ce type d'approches, les défauts pouvant être compensés sont vus comme des incertitudes de modélisation auxquelles la commande doit être robuste i.e. assurer la stabilité du système en boucle fermée. Parmi les travaux traitant de la commande passive tolérante aux défauts, on peut citer les techniques $\mathcal{H}_\infty$ [Patton, 1997; Niemann et Stoustrup, 2005]. Généralement, les approches de commande robuste négligent la structure des incertitudes afin d'aboutir à un problème d'optimisation convexe. De plus, la classe de défauts considérés est limitée, il devient, alors, très risqué d'utiliser la commande passive tolérante aux défauts seule (pour plus de détails voir [Mahmoud et al., 2003] et [Kanev, 2004]).

Dans de nombreuses situations pratiques, la synthèse d'une loi de commande pour un système quelconque est réalisée sans prendre en compte la possibilité d'apparition d'un défaut à un instant donné. Pour des raisons économique et technique, il n'est pas possible de changer la structure du système et de la commande afin de remédier aux défauts. Dans ce cas, une commande tolérante aux défauts peut être synthétisée en utilisant la loi de commande développée pour le cas sans défaut. Pour ce faire, en présence d'un défaut, un bloc de détection/isolation/estimation assure de la détection du défaut sa localisation et son estimation. Ces informations sont alors transmises à un second bloc appelé FTC permettant de les prendre en compte et de calculer une nouvelle loi de commande sur la base de la commande nominale sans défaut en ajoutant un terme relatif au défaut détecté afin de le compenser. La commande active tolérante aux défauts a été développée ces dernières années afin d'améliorer les performances des systèmes et de réduire le conservatisme des méthodes passives en traitant un ensemble plus large de défauts. Parmi les approches développées dans ce contexte, on peut citer la loi de commande re-séquencée (Control law re-scheduling) [Oudghiri, 2008], [Leithead, 1999], [Stilwell et Rugh, 1997] qui consiste à calculer un ensemble de gains (retours d'état). Le passage d'un gain à un autre se fait grâce à un mécanisme de commutation développé à partir d'un module

FDI. L'inconvénient d'une telle commande réside dans le fait qu'elle nécessite un module FDI très robuste. En effet, une fausse alarme ou un défaut non détecté peuvent conduire à des performances dégradées ou même entraîner l'instabilité du système.

La commande tolérante aux défauts par la méthode de la pseudo-inverse a été développée initialement par [Gao et Antsaklis, 1991]. Le principe de cette approche repose sur la minimisation d'une norme de Frobenius conduisant à la détermination du gain de la commande. Soit le système linéaire nominal sans défaut :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.125}$$

Connaissant le vecteur d'état et sous l'hypothèse de commandabilité du système (5.125), une loi de commande par retour d'état stabilisant le système est donnée par $u(t) = Kx(t)$. Si l'on se place maintenant dans une situation en défaut de manière générale, le système s'écrira de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u_f(t) \\ y_f(t) = C_f x_f(t) \end{cases} \tag{5.126}$$

La nouvelle loi de commande $u_f(t)$ permettant d'assurer un fonctionnement acceptable du système (c'est-à-dire proche de celui du système sans défaut) est donnée par $u_f(t) = K_f x_f(t)$ où K_f est calculé par la méthode suivante :

$$K_f = \arg\min_{K_f} \left\| (A - BK) - (A_f - B_f K_f) \right\|_F \tag{5.127}$$

$$= B_f^+ (A - BK - A_f) \tag{5.128}$$

où B_f^+ représente la pseudo-inverse de la matrice B_f et $\|\|_F$ désigne la norme de Frobenius. Bien que cette méthode apparaisse très simple et adéquate à une implémentation en ligne, son principal inconvénient est que la stabilité du système en boucle fermée n'est pas garantie (voir [Gao et Antsaklis, 1991]). Ce problème a été résolu dans [Gao et Antsaklis, 1992] par l'ajout d'une contrainte assurant la stabilité du système bouclé au problème d'optimisation décrit par (5.127)-(5.128). Récemment, une extension de cette approche a été fournie dans [Staroswiecki, 2005]. Elle est basée sur le calcul de la commande en utilisant un ensemble de modèles admissibles et non une recherche par optimisation. La difficulté de prise en compte des incertitudes de modélisation dans cette approche constitue un inconvénient majeur en plus de la difficulté (voir même de l'impossibilité) d'étendre cette méthode aux systèmes non linéaires.

Dans [Liu et Patton, 1998] une approche basée sur le placement de la structure propre est développée. L'idée principale est de calculer le gain de la commande de manière à faire coïncider les valeurs propres du système bouclé avec défauts avec celles du système nominal sans défaut en minimisant la norme 2 entre ces valeurs propres. Comme pour la méthode par la pseudo-inverse, la prise en compte des incertitudes de modélisation n'est pas facilement réalisable.

Une autre approche intéressante consiste à considérer un modèle de référence correspondant au modèle de bon fonctionnement du système. La commande est généralement composée de deux termes, le premier est un retour d'état classique et le second est relatif à l'erreur de poursuite entre la trajectoire de référence et celle du système. L'objectif est alors de minimiser l'erreur de poursuite de trajectoire ce qui conduit à forcer le système en défaut à se comporter comme le système de référence sans défaut.

Notons qu'une grande partie des travaux dédiés à la commande tolérante aux défauts utilise un modèle linéaire du système.

5.10 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire

Dans cette section, la stratégie de commande tolérante aux défauts est présentée puis deux cas sont étudiés : le premier concerne les systèmes T-S à VDM et le second porte sur les systèmes T-S à VDNM.

5.10.1 Stratégie de commande tolérante aux défauts

Considérons le système sans défaut (modèle de référence) décrit par la structure T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{5.129}$$

La modélisation des défauts pouvant affecter le système permet d'écrire le système en présence de défauts sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,\big(A_i x_f(t) + B_i(u_f(t) + f(t))\big) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,\big(C_i x_f(t) + D_i(u_f(t) + f(t))\big) \end{cases} \tag{5.130}$$

5.10.2 Objectif

L'objectif est de concevoir la loi de commande $u_f(t)$ telle que l'état $x_f(t)$ du système en défaut converge vers l'état de référence $x(t)$ donné par le modèle sans défaut (5.129). La stratégie de commande est illustrée sur la figure 5.14.

La loi de commande proposée est alors donnée sous la forme :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\,\big(-\hat{f}(t) + K_{1i}(x(t) - \hat{x}_f(t)) + u(t)\big) \tag{5.131}$$

Les matrices K_{1i} sont déterminées pour garantir la stabilité du système et minimiser l'écart entre $x_f(t)$ et $x(t)$.

L'analyse de la loi de commande proposée dans (5.131) nécessite la connaissance du vecteur de défauts $f(t)$ à travers son estimation. Cette estimation est obtenue via un observateur PI qui estime simultanément l'état du système en défaut ainsi que le vecteur de défauts.

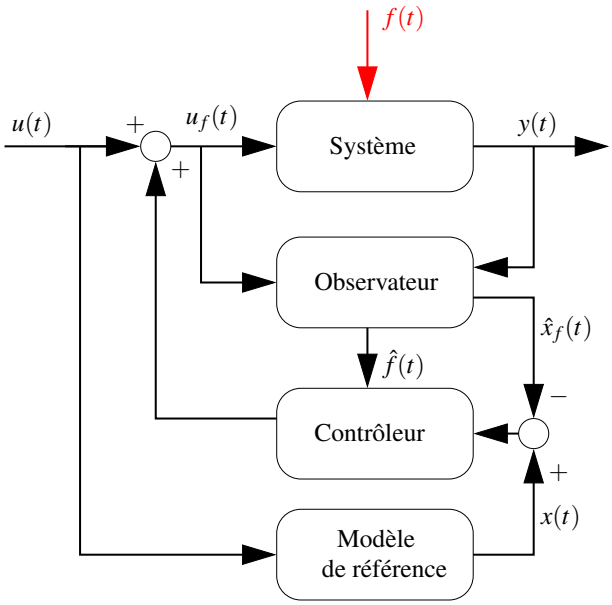


Figure 5.14 – Architecture de la commande tolérante par poursuite de trajectoire

La structure de cet observateur est rappelée ci-dessous :

$$\dot{\hat{x}}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))(A_i\hat{x}_f(t) + B_i(u_f(t) + \hat{f}(t)) + H_{1i}(y_f(t) - \hat{y}_f(t))) \tag{5.132}$$

$$\hat{y}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\left(C_i\hat{x}_f(t) + D_i(u_f(t) + \hat{f}(t))\right) \tag{5.133}$$

$$\dot{\hat{f}}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\left(H_{2i}(y_f(t) - \hat{y}_f(t))\right) \tag{5.134}$$

5.10.3 Variables de décision mesurables

Supposons $\xi(t)$ mesurable. L'erreur de sortie entre le système (5.130) et l'observateur (5.132) s'écrit :

$$y_f(t) - \hat{y}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))(\tilde{C}_i e_a(t) \tag{5.135}$$

où :

$$\tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_i & R_i \end{bmatrix}, \quad x_a(t) = \begin{bmatrix} x_f(t) \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \tag{5.136}$$

La dynamique de l'erreur de poursuite $e(t) = x(t) - x_f(t)$, est donnée par l'équation :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) - A_i x_f(t) - B_i(u_f(t) + f(t))) \tag{5.137}$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))(A_i e(t) + B_i(u(t) + \hat{f}(t)) - B_i K_{1j}(x(t) - \hat{x}_f(t))$$

$$- \quad B_i u(t) - B_i f(t)) \tag{5.138}$$

l'équation (5.137) devient :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))(A_i e(t) - B_i(f(t)-\hat{f}(t)) - B_i K_{1j}(x_f(t)-\hat{x}_f(t))) \quad (5.139)$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))((A_i - B_i K_{1j})e(t) - \tilde{L}_{ij}e_a(t)) \quad (5.140)$$

où :

$$\tilde{L}_{ij} = \begin{pmatrix} B_i K_{1j} & B_i \end{pmatrix}, \quad e_a = x_a(t) - \hat{x}_a(t) \quad (5.141)$$

Sous la condition de défaut constant, on a ($\dot{f}(t) = 0$) et le système (5.130) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\left(\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u_f(t)\right) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\left(\tilde{C}_i x_a(t) + \tilde{D}_i u_f(t)\right) \end{cases} \quad (5.142)$$

où :

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & R_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_i = D_i \quad (5.143)$$

L'erreur d'estimation d'état et de défauts $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ entre le système (5.142) et l'observateur (5.132)-(5.134) évolue suivant l'équation :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\left((\tilde{A}_i - H_i\tilde{C}_j)e_a(t)\right) \quad (5.144)$$

La concaténation de l'erreur de poursuite et des erreurs d'estimation d'état et de défauts permet d'écrire, à partir de (5.139) et de (5.144), le système augmenté suivant :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\tilde{A}_{ij}\tilde{e}(t) \quad (5.145)$$

où

$$\tilde{e}(t) = \begin{pmatrix} e(t) \\ x_f(t) - \hat{x}_f(t) \\ f(t) - \hat{f}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_{1j} & -B_i K_{1j} & -B_i \\ 0 & A_i - H_{1i}C_j & B_i - H_{1i}R_j \\ 0 & -H_{2i}C_j & -H_{2i}R_j \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

Conception de la commande tolérante aux défauts. Les gains K_{1i}, H_{1i} et H_{2i} sont déterminés suivant le théorème 5.4.

Théorème 5.4. *Les erreurs de poursuite $e(t)$, d'estimation d'état et de défaut $e_a(t)$ convergent asymptotiquement vers zéro s'il existe des matrices symétriques et définies positives X_1, P_2 et $P_3 = I$ et des matrices $\bar{H}_{1i}$, H_{2i} et K_{1i} telles que les LMIs suivantes soient vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} A_i X_1 + X_1 A_i^T & -B_1 K_{1j} & -B_i & -B_1 K_{1j} & X_1 \\ * & P_2 A_i + A_i^T P_2 - \bar{H}_{1i}C_j - C_j^T \bar{H}_{1i}^T & P_2 B_i - \bar{H}_{1i}R_j - C_j^T \bar{H}_{2i}^T & 0 & 0 \\ * & * & -\bar{H}_{2i}R_j - R_j^T \bar{H}_{2i}^T & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.147)$$

$$i, j = 1, ..., r$$

Les gains du contrôleur sont K_{1j}, $j = 1, ..., r$ et les gains de l'observateur sont H_{2i} et $\bar{H}_{1i}$ donné par :

$$H_{1i} = P_2^{-1}\bar{H}_{1i} \tag{5.148}$$

Démonstration. Les gains H_{1i}, H_{2i} et K_{1i} sont obtenus par l'étude de la stabilité de l'équation différentielle (5.145) en utilisant la méthode de Lyapunov. Choisissant comme fonction de Lyapunov :

$$V(\tilde{e}(t)) \quad = \quad \tilde{e}(t)^T P\tilde{e}(t), \;\; P = P^T > 0 \tag{5.149}$$

où la matrice P est choisie sous la forme particulière :

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix} \tag{5.150}$$

La dérivée par rapport au temps de la fonction $V(\tilde{e}(t))$ se met sous la forme :

$$\dot{V}(\tilde{e}(t)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\tilde{e}(t)^T \left(\tilde{A}_{ij}^T P + P\tilde{A}_{ij}\right)\tilde{e}(t) \tag{5.151}$$

$$= \quad \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\xi(t))\mu_j(\xi(t))\tilde{e}(t)^T \mathcal{M}_{ij}\tilde{e}(t) \tag{5.152}$$

où :

$$\mathcal{M}_{ij} = \mathbb{S}\left(\begin{pmatrix} P_1A_i - P_1B_iK_{1j} & -P_1B_iK_{1j} & -P_1B_i \\ 0 & P_2A_i - P_2H_{1i}C_j & P_2B_i - P_2H_{1i}R_j \\ 0 & -P_3H_{2i}C_j & -P_3H_{2i}R_j \end{pmatrix}\right) \tag{5.153}$$

où $\mathbb{S}$ est une fonction qui agit sur une matrice X quelconque de la façon suivante :

$$\mathbb{S}(X) = X^T + X \tag{5.154}$$

En utilisant la propriété de somme convexe des fonctions d'activation, la dérivée de la fonction de Lyapunov $\dot{V}(\tilde{e}(t))$ est négative si la condition suivante est vérifiée :

$$\mathcal{M}_{ij} < 0, \;\; i, j = 1, \ldots, r \tag{5.155}$$

En appliquant le lemme de congruence de la façon suivante :

$$\mathcal{M}_{ij} < 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}_{ij} \begin{pmatrix} P_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.156}$$

On obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{pmatrix} \Psi_{ij} & -B_1K_{1j} & -B_i \\ * & \Psi_{ij}^2 & P_2B_i - P_2H_{1i}R_j - C_j^T H_{2i}^T P_3 \\ * & * & -P_3H_{2i}R_j - R_j^T H_{2i}^T P_3 \end{pmatrix} < 0 \tag{5.157}$$

où :

$$\Psi_{ij}^{1} = A_iX_1 + X_1A_i^T - B_iK_{1j}X_1 - X_1K_{1j}^TB_i^T \tag{5.158}$$

$$\Psi_{ij}^{2} = P_2A_i + A_i^TP_2 - P_2H_{1i}C_j - C_j^TH_{1i}^TP_2 \tag{5.159}$$

avec :

$$X_1 = P^{-1} \tag{5.160}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} A_iX_1 + X_1A_i^T & -B_1K_{1j} & -B_i \\ * & P_2A_i + A_i^TP_2 - P_2H_{1i}C_j - C_j^TH_{1i}^TP_2 & P_2B_i - P_2H_{1i}R_j - C_j^TH_{2i}^TP_3 \\ * & * & -P_3H_{1i}R_j - R_j^TH_{2i}^TP_3 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} -B_iK_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B_iK_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T < 0 \tag{5.161}$$

En utilisant le lemme de majoration 3.2, on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_iX_1 + X_1A_i^T & -B_1K_{1j} & -B_i \\ * & P_2A_i + A_i^TP_2 - P_2H_{1i}C_j - C_j^TH_{1i}^TP_2 & P_2B_i - P_2H_{1i}R_j - C_j^TH_{2i}^TP_3 \\ * & * & -P_3H_{1i}R_j - R_j^TH_{2i}^TP_3 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} -B_iK_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Omega^{-1} \begin{pmatrix} -B_iK_{1j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T < 0 \tag{5.162}$$

où Ω est une matrice symétrique et définie positive. Afin d'écrire l'inégalité (5.162) sous une forme linéaire par rapport aux variables X_1, P_2, P_3, K_{1j}, H_{1i}, H_{2i}, on utilise les équations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{H}_{1i} = P_2H_{1i} \\ \bar{H}_{2i} = P_3H_{2i} \end{cases} \tag{5.163}$$

En utilisant le complément de Schur, on obtient les LMIs du théorème 5.4 écrites pour le cas particulier $\Omega = I$.

Puisque la matrice P_3 n'apparaît pas dans les inégalités matricielles (5.162) après changement de variable, il est judicieux de la choisir comme matrice identité. Par conséquent les gains $H_{2i} = \bar{H}_{2i}$ sont directement obtenu par la résolution du problème LMI énoncé dans le théorème 5.4. □

5.10.4 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par perturbation

Dans cette partie, nous considérons le cas où les fonctions d'activation dépendent de l'état du système. Le système s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(A_ix_f(t) + B_i(u_f(t) + f(t))\right) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(C_ix_f(t) + D_i(u_f(t) + f(t))\right) \end{cases} \tag{5.164}$$

Le modèle T-S de référence (sans défaut) est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(C_i x(t) + D_i u(t)) \end{cases} \tag{5.165}$$

Puisque l'état $x_f(t)$ n'est pas connu, la loi de commande devient :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t))\left(-\hat{f}(t) + K_{1i}(x(t) - \hat{x}_f(t)) + u(t)\right) \tag{5.166}$$

où les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé $\hat{x}_f(t)$.

En suivant la démarche de la section précédente, le système générant les erreurs d'estimation d'état et des défauts et l'erreur de poursuite de trajectoire s'écrit :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t))\mu_j(x_f(t))\tilde{A}_{ij}\tilde{e}(t) + \Gamma\Delta(t) \tag{5.167}$$

où :

$$\tilde{e}(t) = \begin{pmatrix} x(t) - x_f(t) \\ x_f(t) - \hat{x}_f(t) \\ f(t) - \hat{f}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_{1j} & -B_i K_{1j} & -B_i \\ 0 & A_i - H_{1i} C_j & B_i - H_{1i} R_j \\ 0 & -H_{2i} C_j & -H_{2i} R_j \end{pmatrix}, \tag{5.168}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} I_{n\times n} & 0 \\ 0 & I_{n\times n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta(t) = \begin{pmatrix} \Delta_1(t) \\ \Delta_2(t) \end{pmatrix} \tag{5.169}$$

$$\Delta_1(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x(t)) - \mu_i(x_f(t)))(A_i x(t) + B_i u(t)) \tag{5.170}$$

$$\Delta_2(t) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i(x_f(t)) - \mu_i(\hat{x}_f(t)))(A_i x_f(t) + B_i(u_f(t) + f(t))) \tag{5.171}$$

Hypothèse 5.3. *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiée :*
- ***H1.*** *Le terme $\Delta(t)$ est borné*
- ***H2.*** *Le système est stable en boucle ouverte*

L'analyse de la stabilité du système (5.167) en assurant la minimisation du gain $\mathcal{L}_2$ du transfert des perturbations $\Delta(t)$ vers les erreurs $\tilde{e}(t)$ permet d'énoncer le théorème 5.5

Théorème 5.5. *La commande tolérante aux défauts (5.166) assurant la convergence de l'état $x_f(t)$ du système (5.164) vers l'état de référence $x(t)$ de (5.165) repose sur l'existence des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, $P_2 = P_2^T > 0$, $P_3 = I$, des gains K_i, $\bar{H}_{1i}$ et H_{2i} et d'un scalaire positif $\bar{\gamma}$ solutions du problème d'optimisation suivant :*

$$\min_{X_1, P_2, K_{1j}, \bar{H}_{1i}, H_{2i}} \quad \bar{\gamma} \quad s.c.$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_i & -B_1K_{1j} & -B_i & -B_1K_{1j} & X_1 & X_1 & 0 \\ * & \Theta_{ij} & \Xi_{ij} & 0 & 0 & 0 & P2 \\ * & * & \Phi_{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\bar{\gamma}I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\bar{\gamma}I \end{pmatrix} < 0 \tag{5.172}$$

$$\Psi_i = A_iX_1 + X_1A_i^T \tag{5.173}$$

$$\Theta_{ij} = P_2A_i + A_i^TP_2 - \bar{H}_{1i}C_j - C_j^T\bar{H}_{1i}^T \tag{5.174}$$

$$\Xi_{ij} = P_2B_i - \bar{H}_{1i}R_j - C_j^TH_{2i}^T \tag{5.175}$$

$$\Phi_{ij} = -H_{2i}R_j - R_j^TH_{2i}^T \tag{5.176}$$

$$i, j = 1, ..., r$$

Les gains du contrôleur et ceux de l'observateur PI sont donnés par :

$$K_{1j}, \quad H_{2i}, \quad H_{1i} = P_2^{-1}\bar{H}_{1i} \tag{5.177}$$

Le taux d'atténuation est obtenu par :

$$\gamma = \sqrt{\bar{\gamma}} \tag{5.178}$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle fournie pour le théorème 5.4 avec la satisfaction de l'inégalité :

$$\dot{V}(\tilde{e}(t)) + \tilde{e}(t)^T\tilde{e}(t) - \gamma\Delta(t)^T\Delta(t) < 0 \tag{5.179}$$

afin de satisfaire la contrainte :

$$\frac{\|\tilde{e}(t)\|_2}{\|\Delta(t)\|_2} < \gamma, \quad \|\Delta(t)\|_2 \neq 0 \tag{5.180}$$

□

Exemple 5.3 (**Commande tolérante aux défauts**)
Afin d'illuster la méthode de commande tolérante aux défauts proposée pour les systèmes T-S à VDNM, considérons le modèle T-S :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(A_ix_f(t) + B_i(u_f(t) + f(t))\right) \\ y_f(t) = Cx_f(t) + Rf(t) \end{cases} \tag{5.181}$$

avec les valeurs numériques :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation dépendent de la première composante du vecteur d'état $x_f^1(t)$. Elles sont définies par :

$$\begin{cases} \mu_1(x_f(t)) = \frac{1-\tanh\left(x_f^1(t)\right)}{2} \\ \mu_2(x_f(t)) = 1-\mu_1(x_f(t)) \end{cases} \tag{5.182}$$

Afin d'appliquer la stratégie de commande tolérante aux défauts proposée, on considère le système de référence :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \tag{5.183}$$

Le défaut $f(t)$ est un échelon unité apparaissant à l'instant 5. La résolution des LMIs du théorème 5.5 donne les résultats suivants :

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.91 & 0.11 & 0.04 \\ 0.11 & 0.93 & -0.04 \\ 0.04 & -0.04 & 0.44 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 1.53 & -0.31 & 0.50 \\ -0.31 & 3.04 & -0.39 \\ 0.50 & -0.39 & 0.95 \end{bmatrix}, \; \gamma = 2.38,$$

$$H_{11} = \begin{bmatrix} -1.93 & 4.58 \\ -3.19 & 6.27 \\ -5.35 & 1.22 \end{bmatrix}, \; H_{12} = \begin{bmatrix} -3.39 & 5.12 \\ -3.27 & 6.67 \\ -4.47 & 2.74 \end{bmatrix}, \; H_{21} = \begin{bmatrix} 4.885 & 0.000 \end{bmatrix},$$

$$H_{22} = \begin{bmatrix} 3.771 & 1.114 \end{bmatrix}, \; K_{11} = \begin{bmatrix} 0.004 & 0.024 & -0.004 \end{bmatrix}, \; K_{12} = \begin{bmatrix} 0.003 & 0.019 & -0.004 \end{bmatrix}$$

Afin d'améliorer les performance de l'observateur, un placement des pôles est réalisé à gauche de la droite d'abscisse -1 de manière à augmenter la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation vers zéro. L'observateur fournit l'estimation des états dont les erreurs d'estimation sont illustrées sur la figure 5.16 ainsi que l'estimation du défaut (figure 5.15). La figure 5.16 présente, également, l'erreur de poursuite entre le système de référence (sans défaut) et le système en défaut avec la commande tolérante au défaut $u_f(t)$. Les figures 5.15 et 5.17 comparent, d'une part, l'entrée de commande du système sans défaut et la commande tolérante et, d'autre part, les états du système avec la commande tolérante au défaut, ceux du système avec défaut et sans commande tolérante, ainsi que ceux du système de référence.

On constate que la commande tolérante au défaut a compensé le défaut et a permis au système d'atteindre son objectif même en présence du défaut.

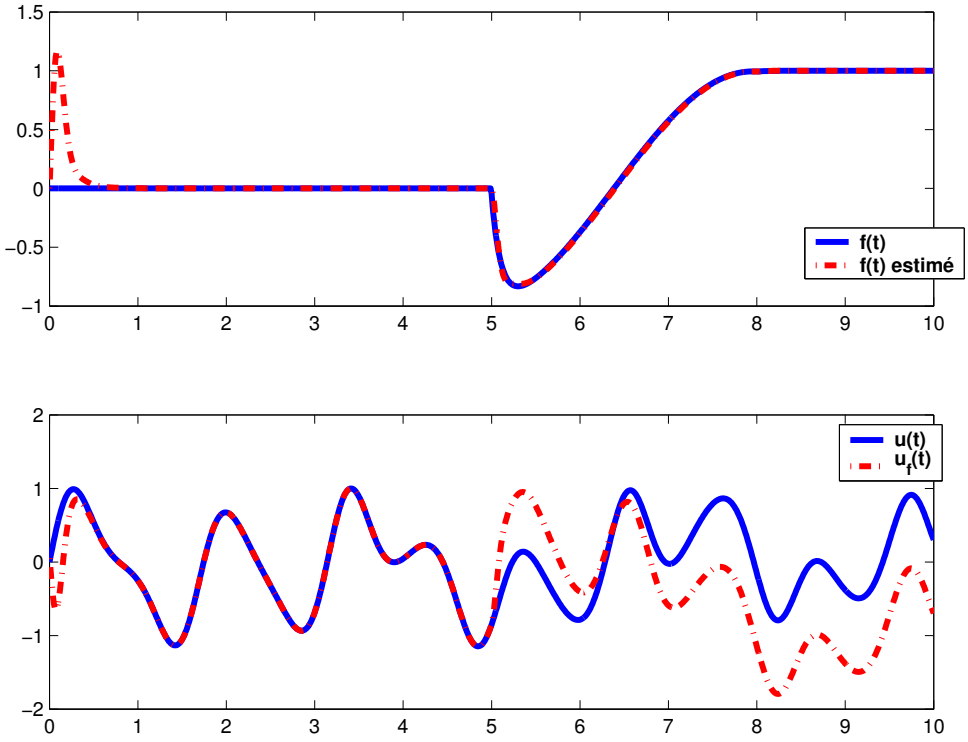


Figure 5.15 – Défaut et son estimé - commande sans défaut et commande tolérante

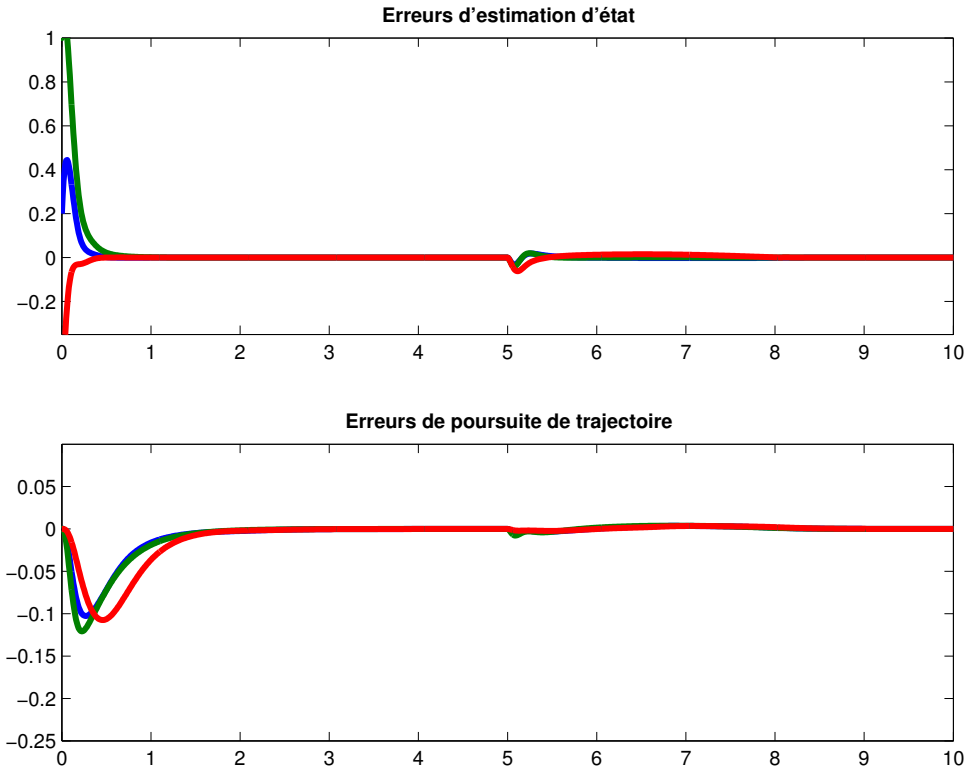


Figure 5.16 – Erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire

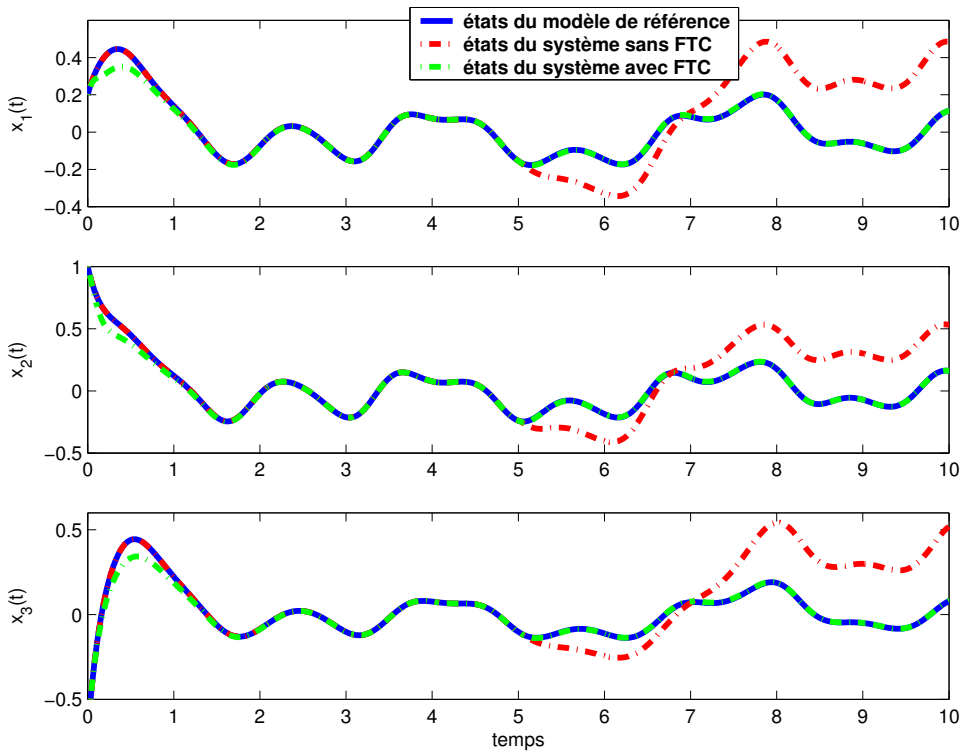


Figure 5.17 – Comparaison entre les états du système de référence (sans défaut), états du système avec défaut et sans FTC et états du système avec FTC

5.10.5 Variables de décision non mesurables : utilisation de la méthode par le théorème de la valeur moyenne

Soit le système T-S à VDNM défini par (6.9). Toujours avec la condition $\dot{f}(t) = 0$, l'état augmenté $x_a(t)^T = [x_f(t)^T \quad f(t)^T]^T$, est régi par la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\tilde{A}_i x_a(t) + \tilde{B}_i u_f(t)\right) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\tilde{C}_i x_a(t) + \tilde{D}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{5.184}$$

L'observateur PI peut se mettre également sous forme augmentée :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left(\tilde{A}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u_f(t) + H_i(y_f(t) - \hat{y}_f(t))\right) \\ \hat{y}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left(\tilde{C}_i \hat{x}_a(t) + \tilde{D}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{5.185}$$

avec les définitions (5.143). Dans le but d'utiliser la méthode utilisant le théorème de la valeur moyenne, on introduit les matrices $\tilde{A}_0$, $\bar{\tilde{A}}_0$, $\tilde{B}_0$, $\bar{\tilde{B}}_i$, , $\tilde{C}_0$, $\bar{\tilde{C}}_i$, , $\tilde{D}_0$, $\bar{\tilde{D}}_i$ définies de la même manière que dans la section 3.3, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \dot{x}_a(t) = \tilde{A}_0 x_a(t) + \tilde{B}_0 u_f(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\bar{\tilde{A}}_i x_a(t) + \bar{\tilde{B}}_i u_f(t)\right) \\ y_f(t) = \tilde{C}_0 x_a(t) + \tilde{D}_0 u_f(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\bar{\tilde{C}}_i x_a(t) + \bar{\tilde{D}}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{5.186}$$

Par la suite, on réduit la complexité des observateurs en imposant $H_i = H$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_a(t) = \tilde{A}_0 x_a(t) + \tilde{B}_0 u_f(t) + H(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left(\bar{\tilde{A}}_i \hat{x}_a(t) + \bar{\tilde{B}}_i u(t)\right) \\ \hat{y}_f(t) = \tilde{C}_0 x_a(t) + \tilde{D}_0 u_f(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\bar{\tilde{C}}_i \hat{x}_a(t) + \bar{\tilde{D}}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{5.187}$$

De manière similaire, le modèle de référence sans défaut (5.129) s'écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) + \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i(t)\right) \tag{5.188}$$

L'erreur de poursuite $e(t) = x(t) - x_f(t)$ a une dynamique régie par l'equation :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \mu_j(\hat{x}_f(t)) \left(\left(A_0 - B_i K_{1j}\right) e(t) - \tilde{L}_i \tilde{f}(t)\right) + \Delta(x, x_f, u) \tag{5.189}$$

où :

$$\Delta(x, x_f, u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\bar{A}_i \left(\mu_i(x) x(t) - \mu_i(x_f) x_f(t)\right) + \bar{B}_i \left(\mu_i(x) - \mu_i(x_f)\right) u(t)\right) \tag{5.190}$$

et :

$$\tilde{L}_i = \left[\begin{array}{cc} B_i K_{1j} & B_i \end{array} \right] \tag{5.191}$$

De même, l'erreur d'estimation d'état et de défauts $e_a(t) = x_a(t) - \hat{x}_a(t)$ est solution de l'équation :

$$\dot{e}_a(t) = \left(\tilde{A}_0 - H\tilde{C}_0\right) e_a(t) + \Delta_a(x_f, \hat{x}_f, u) - H\Delta_b(x_f, \hat{x}_f, u) \tag{5.192}$$

où :

$$\Delta_a(x_f, \hat{x}_f, u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\bar{\tilde{A}}_i \left(\mu_i(x_f(t)) x_f(t) - \mu_i(\hat{x}_f(t)) \hat{x}_f(t) \right) + \bar{\tilde{B}}_i \left(\mu_i(x_f(t)) - \mu_i(\hat{x}_f(t)) \right) u_f(t) \right) \tag{5.193}$$

$$\Delta_b(x_f, \hat{x}_f, u) = \sum_{i=1}^{r} \left(\bar{\tilde{C}}_i \left(\mu_i(x_f(t)) x_f(t) - \mu_i(\hat{x}_f(t)) \hat{x}_f(t) \right) + \bar{\tilde{D}}_i \left(\mu_i(x_f(t)) - \mu_i(\hat{x}_f(t)) \right) u_f(t) \right) \tag{5.194}$$

Les termes $\Delta(x, x_f, u)$, $\Delta_a(x_a, \hat{x}_a, u)$, $\Delta_b(x_a, \hat{x}_a, u)$ peuvent s'écrire également :

$$\Delta(x_f, \hat{x}_f, u) = f(x, u) - f(x_f, u) \tag{5.195}$$

$$\Delta_a(x_a, \hat{x}_f, u) = g(x_a, u) - g(\hat{x}_a, u) \tag{5.196}$$

$$\Delta_b(x_a, \hat{x}_f, u) = h(x_a, u) - h(\hat{x}_a, u) \tag{5.197}$$

$$\tag{5.198}$$

où les fonctions f, g et h sont définies comme suit :

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(\bar{A}_i x(t) + \bar{B}_i u(t) \right) \tag{5.199}$$

$$g(x_a, u) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\bar{\tilde{A}}_i x_a(t) + \bar{\tilde{B}}_i u(t) \right) \tag{5.200}$$

$$h(x_a, u) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(\bar{\tilde{C}}_i x_a(t) + \bar{\tilde{D}}_i u(t) \right) \tag{5.201}$$

Hypothèse 5.4. *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$a_{ij}^{\min} \leq \frac{\partial f_i(x, u)}{\partial x_j} \leq a_{ij}^{\max}, i, j = 1, ..., n \tag{5.202}$$

$$b_{ij}^{\min} \leq \frac{\partial g_i(x_a, u)}{\partial x_{aj}} \leq b_{ij}^{\max}, i, j = 1, ..., (n + n_f) \tag{5.203}$$

$$c_{ij}^{\min} \leq \frac{\partial h_i(x_a, u)}{\partial x_{aj}} \leq c_{ij}^{\max}, i = 1, ..., n_y, j = 1, ..., (n + n_f) \tag{5.204}$$

En utilisant l'approche fondée sur le théorème de la valeur moyenne ainsi que la transfor-

mation par secteurs non linéaires (section 3.3.5), on aboutit aux écritures suivantes :

$$\Delta(x,x_f,u) = \sum_{i=1}^{q} \nu_i(z(t))\mathcal{A}_i e(t) \tag{5.205}$$

$$\Delta_a(x,x_f,u) = \sum_{i=1}^{m} \upsilon_i(z(t))\tilde{\mathcal{A}}_i e(t) \tag{5.206}$$

$$\Delta_b(x,x_f,u) = \sum_{i=1}^{s} h_i(z(t))\tilde{\mathcal{C}}_i e(t) \tag{5.207}$$

où $q = 2n^2$, $m = 2(n+n_f)^2$ et $s = 2n_y(n+n_f)$.

De là, on déduit les nouvelles formes équivalentes des équations des erreurs de poursuite (5.189) et d'estimation (5.192) :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{q} \mu_i(x_f)\mu_j(\hat{x}_f)\nu_k(z(t))\left((A_0+\mathcal{A}_k-B_iK_{1j})e(t)-\tilde{L}_i\tilde{f}(t)\right) \tag{5.208}$$

et :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s} \upsilon_i(z(t))h_j(z(t))\left((\tilde{A}_0+\tilde{\mathcal{A}}_i-H(\tilde{C}_0+\tilde{\mathcal{C}}_j)\right)e_a(t) \tag{5.209}$$

Le système issu de la concaténation des erreurs de poursuite et d'estimation est donné par :

$$\dot{\tilde{e}}(t) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}\sum_{p=1}^{q} \upsilon_i(z)h_j(z)\mu_k(x_f)\mu_l(\hat{x}_f)\nu_p(z)\begin{pmatrix} A_0+\mathcal{A}_p-B_kK_{1l} & -\tilde{L}_k \\ 0_{(n+n_f)\times n} & \tilde{A}_0+\tilde{\mathcal{A}}_i-H(\tilde{C}_0+\tilde{\mathcal{C}}_j) \end{pmatrix}\tilde{e}(t) \tag{5.210}$$

En conclusion, les erreurs d'estimation et de poursuite sont données par le système (5.210). Un raisonnement similaire à celui proposé dans la section précédente permet d'étudier la stabilité de (5.210) et d'en déduire les conditions LMIs assurant la convergence de l'erreur d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire vers zéro et la détermination des gains K_{1j} et H.

5.11 Conclusion

Ce chapitre est dédié à la conception de générateurs de résidus pour des systèmes décrits par des modèles T-S en se basant sur des observateurs d'état.

Le premier générateur de résidus reprend la technique de bancs d'observateurs à entrées inconnues par découplage afin de générer des résidus structurés dans le but de localiser des défauts de capteurs et d'actionneurs. L'inconvénient d'une telle démarche réside dans les contraintes structurelles qu'il est nécessaire de satisfaire pour la conception des observateurs. En effet, pour pouvoir rendre un résidu insensible à certains défauts, les matrices d'influence de ces défauts doivent impérativement vérifier certaines conditions structurelles, dites de découplage. De plus, dans les problèmes de localisation de défauts de capteurs, on est souvent confronté au problème d'observabilité car on considère souvent un sous-ensemble limité de sorties pour la conception des observateurs. Afin d'éliminer ces contraintes structurelles et de réduire ces situations

de perte d'observabilité, une autre méthode basée sur les observateurs PI et PMI est proposée. Outre les solutions apportées aux problèmes structurels de découplage et d'observabilité cités précédemment pour les observateurs à entrées inconnues, les observateurs PI et PMI permettent également de fournir une estimation des défauts. Cette capacité est intéressante puisqu'elle réalise implicitement la détection et la localisation, mais surtout est utile pour la commande active tolérante aux défauts. En effet cette information supplémentaire est primordiale pour déterminer la commande qui compense au mieux les défauts.

En considérant un système non linéaire représenté par un modèle T-S, deux méthodes basées sur le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ ont été développées afin de concevoir des générateurs de résidus pour le diagnostic de fautes. La première méthode est dédiée aux modèles T-S ayant des fonctions d'activation dépendant de variables de prémisse mesurables. La seconde suppose que les variables de prémisse sont non mesurables. Le problème de conception de tels générateurs est initialement énoncé comme un problème min/max, avant d'être ramené à un simple problème de minimisation par l'introduction d'une fonction de pondération fréquentielle. La solution proposée pour résoudre ce problème d'optimisation s'appuie sur des conditions suffisantes d'existence d'un générateur de résidus. Elle est formulée en termes de LMIs strictes afin de faciliter l'obtention des gains du générateur de résidus.

Enfin, une stratégie de commande tolérante aux défauts est proposée. Elle est basée sur la poursuite d'un modèle de référence qui correspond au modèle du système sans défaut. La stratégie de commande consiste à ajouter deux termes à la loi de commande initiale du système ayant pour objectif de compenser un défaut affectant le système. En présence d'un défaut, cette commande permet de forcer l'état du système en défaut à suivre l'état du modèle de référence. La structure de la loi de commande tolérante aux défauts proposée nécessite la connaissance du défaut qui est alors estimé au moyen d'un observateur PI. Les fonctions d'activation du système T-S sont supposées connues. En utilisant la théorie de Lyapunov pour l'étude de la stabilité, des conditions suffisantes LMIs sont alors établies assurant la convergence asymptotique vers zéro des erreurs de poursuite de trajectoire et d'estimation d'état et permettent aussi de synthétiser les gains de l'observateur et de la loi de commande.

6
Perspectives

Sommaire

6.1 Stabilité des modèles de Takagi-Sugeno 210
6.2 Diagnostic de fautes 210
6.3 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire 210
6.3.1 Utilisation d'un observateur Proportionnel-Multi-Integral. 211
6.3.2 Commande tolérante aux défauts utilisant l'approche par incertitudes bornées 212
6.3.3 Autre structure de la commande tolérante aux défauts 214
6.4 Commande par retour d'état tolérant aux défauts : défauts de capteurs . 215
6.5 Commande tolérante aux défauts par formalisme $\mathcal{H}_\infty$ 216

À l'issue de ce travail, de nombreuses pistes peuvent être explorées afin d'améliorer les méthodes proposées pour l'estimation d'état, le diagnostic et la commande tolérante aux défauts. Dans ce chapitre, quelques travaux déjà entamés, mais restent à développer plus complètement.

6.1 Stabilité des modèles de Takagi-Sugeno

Un des problèmes importants de l'analyse des systèmes, en particulier ceux représentés par des modèles T-S, réside dans l'étude de leur stabilité. De nouvelles conditions de stabilité moins contraignantes, par rapport aux conditions établies à partir de fonctions de Lyapunov quadratiques, ont été proposées. L'application de ces dernières à la synthèse de lois de commande ou d'observateurs conduit à des inégalités matricielles bilinéaires qui sont difficiles à résoudre. Cependant, dans le cas des systèmes à temps discret, des résultats de stabilité relaxés [Kruszewski, 2006; Kruzewski et al., 2008] publiés récemment ont pu être appliqués à la conception de lois de commande . Ces mêmes résultats ont été utilisés pour la conception d'observateurs au chapitre 3. Le problème à traiter dans les travaux futurs porteraient sur l'étude de la stabilité relaxée dans le cas des systèmes à temps continu et son application aux problèmes de stabilisation et de conception d'observateurs.

6.2 Diagnostic de fautes

Dans le cadre du diagnostic, les résultats encourageants obtenus par la méthode utilisant le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ proposée au chapitre 5 nous conduisent à poser le problème de la robustesse de l'estimation vis-à-vis des perturbations et des incertitudes de modélisation. Il est alors intéressant, par exemple, d'assurer un certain gabarit de robustesse par rapport aux perturbations en ajoutant un filtre (voir la figure 6.1). Dans le travail énoncé dans le chapitre 5, le filtre W_f est choisi a priori de manière à satisfaire certaines propriétés. Une étude permettant l'intégration du choix du filtre au moment de la résolution des LMIs peut être envisagée afin de chercher le filtre conduisant à une détection de défauts optimale vis-à-vis d'un critère donné.

D'autres pistes seront à explorer concernant le diagnostic des défauts du système et le diagnostic des systèmes à temps continu munis d'observateurs à temps discrets qui est plus adapté en pratique.

6.3 Commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire

Dans la partie commande tolérante aux défauts du chapitre 5, nous avons présenté le cas des systèmes T-S à variables de décision mesurables en donnant des conditions LMIs permettant la détermination des gains de l'observateur PI et de la loi de commande. Le cas des systèmes T-S à variables de décision non mesurables a été formalisé en exploitant deux approches présentées au chapitre 3. La première est basée sur l'utilisation du théorème de la valeur moyenne ainsi que l'approche par transformation par secteurs non linéaires. La seconde utilise l'approche par

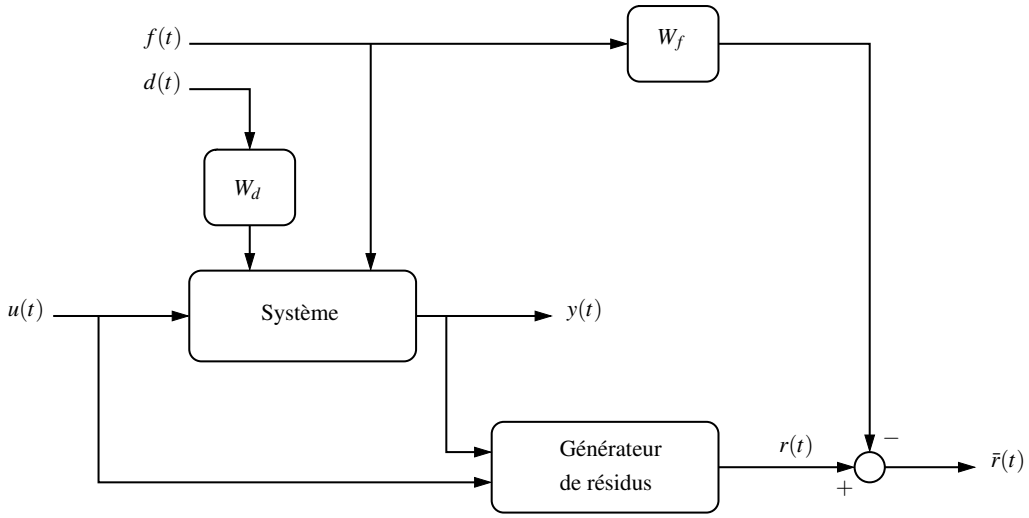


Figure 6.1 – Schéma de diagnostic robuste

incertitudes bornées. Les travaux à court terme doivent être menés afin de déduire des conditions LMIs permettant la synthèse de la loi de commande tolérante aux défauts. D'autres travaux déjà entamés sur l'utilisation d'observateurs Proportionnel-Multi-Intégral et l'extension aux systèmes T-S à variables de décision non mesurables sont présentés dans cette partie.

6.3.1 Utilisation d'un observateur Proportionnel-Multi-Integral.

L'hypothèse de défauts constants ou à dynamiques lentes est restrictive et a été utilisée pour la preuve théorique. D'un point de vue pratique, l'observateur PI permet néanmoins d'estimer une plus large classe de signaux variables dans le temps. Un placement de pôles de l'observateur afin d'augmenter sa vitesse permettrait d'améliorer l'estimation des défauts.

Dans le cas où les défauts sont modélisés par des signaux variables dans le temps et ayant une forme polynomiale d'ordre q i.e. :

$$f^{(q+1)}(t) = 0 \tag{6.1}$$

l'observateur PI peut être remplacé par un observateur Proportionnel-Multi-Intégral. Il est également possible d'utiliser l'observateur PMI ne satisfaisant pas la condition (6.1) mais seulement une condition de borne de la $q^{\text{ème}}$ dérivée de $f(t)$ (voir chapitre 4) :

$$f^{(q+1)} < \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}^+ \tag{6.2}$$

Commande FTC par observateur PMI Soit le système (5.130) affecté par des défauts $f(t)$ modélisés sous la forme suivante :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_q t^q \tag{6.3}$$

avec $d_0(t) = \dot{f}(t), d_1(t) = \ddot{f}(t), ...d_{q-1} = f^q$, le système (5.130) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{A}_i \tilde{x}_f + \tilde{B}_i u_f(t)\right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{C}_i \tilde{x}_f + \tilde{D}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{6.4}$$

où :

$$\tilde{x}_f(t) = \begin{pmatrix} x_f(t) \\ f(t) \\ \vdots \\ f^q(t) \\ d^{(q-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & R_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D}_i = D_i$$

L'observateur qui estime simultanément l'état $x_f(t)$, les défauts $f(t)$ ainsi que les $q^{\text{ème}}$ premières dérivées est donné par la structure suivante :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\tilde{x}}}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{A}_i \hat{\tilde{x}}_f + \tilde{B}_i u_f(t) + \tilde{H}_i (y_f(t) - \hat{y}(t))\right) \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(\tilde{C}_i \hat{\tilde{x}}_f + \tilde{D}_i u_f(t)\right) \end{cases} \tag{6.5}$$

L'erreur de poursuite entre $x_f(t)$ et $x(t)$ et l'erreur d'estimation d'état et de défauts sont solutions de :

$$\begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}_a(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \mu_j(\xi(t)) \tilde{A}_{ij} \begin{pmatrix} e(t) \\ \dot{e}_a(t) \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

où :

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} A_i - B_i K_{1j} & -\tilde{L}_{ij} \\ 0 & \tilde{A}_i - \tilde{H}_i \tilde{C}_j \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

et :

$$\tilde{L}_{ij} = \begin{bmatrix} B_i K_{1j} & B_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{6.8}$$

L'objectif est de chercher les gains K_{1j} et $\tilde{H}_i$ permettant d'assurer la convergence des erreurs d'estimation d'état et de poursuite.

6.3.2 Commande tolérante aux défauts utilisant l'approche par incertitudes bornées

Si l'état du système est utilisé comme variable de décision, qui est souvent le cas quand le modèle T-S est obtenu par transformation par secteurs non linéaires, les méthodes exposées

précédemment ne peuvent pas s'appliquer directement. Cette section est dédiée à l'extension de la stratégie de commande tolérante aux défauts pour les systèmes T-S à VDNM. Seul le cas de la commande utilisant l'observateur PI est traité ici, le résultat étant facilement extensible à la commande FTC utilisant l'observateur PMI.

Soit le système T-S suivant où l'état $x_f(t)$ est utilisé dans les variables de prémisse :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(A_i x_f(t) + B_i(u_f(t) + f(t))\right) \\ y_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x_f(t)) \left(C_i x_f(t) + D_i(u_f(t) + f(t))\right) \end{cases} \tag{6.9}$$

Le modèle T-S de référence (sans défaut) est modélisé par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(A_i x(t) + B_i u(t)\right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) \left(C_i x(t) + D_i u(t)\right) \end{cases} \tag{6.10}$$

Puisque l'état $x_f(t)$ n'est pas connu, la loi de commande devient :

$$u_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}(t)) \left(-S\hat{f}(t) + K_{1i}(x(t) - \hat{x}_f(t)) + u(t)\right) \tag{6.11}$$

où les fonctions d'activation dépendent de l'état estimé $\hat{x}_f(t)$. Afin de construire la loi de commande tolérante aux défauts (6.11), il est nécessaire de reconstruire l'état $x_f(t)$ et le défaut $f(t)$, au moyen d'un observateur PI par exemple.

En utilisant l'approche par incertitudes bornées développée au chapitre 3, le système (6.9) peut être ré-écrit sous la forme équivalente suivante faisant apparaître l'état estimé $\hat{x}_f(t)$ comme variable de prémisse ainsi que des termes bornés considérés comme des incertitudes (voir section 3.4.1) :

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left((A_i + \Delta A(t))x_f(t) + (B_i + \Delta B(t))(u_f(t) + f(t))\right) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left((C_i + \Delta C(t))x_f(t) + (D_i + \Delta D(t))(u_f(t) + f(t))\right) \end{cases} \tag{6.12}$$

où pour $X \in \{A,\ B,\ L,\ C,\ D,\ R\}$:

$$\Delta X(t) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i(t) X_i = \mathcal{X} \Sigma_X(t) E_X \tag{6.13}$$

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_r \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

$$E_X = \begin{bmatrix} I & \dots & I \end{bmatrix}^T \tag{6.15}$$

$$\Sigma_X(t) = \begin{bmatrix} \delta_1(t) I & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \delta_r(t) I \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

$$\delta(t) = \mu_i(x(t)) - \mu_i(\hat{x}(t)) \tag{6.17}$$

La propriété de somme convexe des fonctions d'activation permet d'écrire :

$$-1 \leq \delta_i(t) \leq 1$$

alors :

$$\begin{array}{l} \Sigma_A^T(t)\Sigma_A(t) \leq I, \;\; \Sigma_B^T(t)\Sigma_B(t) \leq I, \;\; \Sigma_C^T(t)\Sigma_C(t) \leq I \\ \Sigma_D^T(t)\Sigma_D(t) \leq I, \;\; \Sigma_L^T(t)\Sigma_L(t) \leq I, \;\; \Sigma_R^T(t)\Sigma_R(t) \leq I \end{array} \tag{6.18}$$

Toujours avec l'hypothèse d'un défaut constant, l'état augmenté $x_a(t) = [x_f(t)^T \;\; f(t)^T]^T$ est solution du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_a(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left((\tilde{A}_i + \Delta\tilde{A}(t))x_a(t) + (\tilde{B}_i + \Delta\tilde{B}(t))u(t) \right) \\ y_f(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left((\tilde{C}_i + \Delta\tilde{C}(t))x_a(t) + (\tilde{D}_i + \Delta\tilde{D}(t))u(t) \right) \end{array} \right. \tag{6.19}$$

où :

$$\tilde{A}_i = \begin{pmatrix} A_i & L_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{B}_i = \begin{pmatrix} B_i \\ 0 \end{pmatrix}, \tilde{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & R_i \end{pmatrix}, \tilde{D}_i = D_i$$

$$\Delta\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} \Delta A(t) & \Delta L(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} \Delta B(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\tilde{C}(t) = \begin{pmatrix} \Delta C(t) & \Delta R(t) \end{pmatrix}, \Delta\tilde{D}(t) = \Delta D(t)$$

Pour reconstruire simultanément l'état ainsi que les défauts, l'observateur PI est utilisé sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_a(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left(\tilde{A}_i\hat{x}_a(t) + \tilde{B}_i u(t) + G_i(y_f(t) - \hat{y}_f(t)) \right) \\ \hat{y}_f(t) = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}_f(t)) \left(\tilde{C}_i\hat{x}_a(t) + \tilde{D}_i u(t) \right) \end{array} \right. \tag{6.20}$$

Le travail à faire consiste à établir des conditions LMIs permettant d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation d'état et de défauts ainsi que la convergence de l'état réel vers l'état de référence.

6.3.3 Autre structure de la commande tolérante aux défauts

Dans le cadre de la commande par poursuite de trajectoire proposée dans le chapitre 5, il est intéressant d'explorer différentes structures de la loi de commande afin de réduire la complexité et le pessimisme des conditions LMIs permettant la synthèse des gains de celle-ci. Une loi linéaire peut alors être envisagée sous la forme :

$$u_f(t) = -\hat{f}(t) + K(x(t) - \hat{x}_f(t)) + u(t) \tag{6.21}$$

où $\hat{x}_f(t)$ et $\hat{f}(t)$ sont respectivement le vecteur d'état et le vecteur de défauts estimés, $u(t)$ est la loi de commande du système sans défaut et S et K sont les gains à déterminer afin d'assurer la convergence de $x_f(t)$ vers $x(t)$.

Une telle loi de commande permettrait de réduire le nombre de LMIs à résoudre ce qui relaxerait les conditions de convergence des erreurs d'estimation d'état et de poursuite de trajectoire. Les performances de cette nouvelle structure sont à comparer à celles de la loi proposée au chapitre 5.

D'autres structures sont également à envisager, par exemple, une loi de commande comportant un terme de poursuite de trajectoire de sortie de la forme :

$$u_f(t) = -\hat{f}(t) + K(y(t) - y_f(t)) + u(t) \tag{6.22}$$

Un deuxième point intéressant à étudier concerne la considération d'autres modélisations des défauts en ayant des matrices différentes d'influence des défauts et des entrées.

6.4 Commande par retour d'état tolérant aux défauts : défauts de capteurs

Dans la section précédente, l'estimation du défaut est supposée réalisable, de ce fait, on utilise la même loi de commande développée que celle dans des conditions normales de fonctionnement à laquelle est ajoutée un terme de compensation permettant l'accommodation au défaut ; ce terme n'est actif que si un défaut est détecté (i.e. estimé). Dans cette section, nous considérons que l'estimation des défauts n'est pas disponible, par contre la détection et la localisation de ces derniers est réalisée à l'aide de bancs d'observateurs.

La conception d'une méthode de commande tolérante aux défauts de capteurs repose sur l'utilisation d'un banc d'observateurs ; elle est similaire à celle proposée dans [Oudghiri, 2008] pour les systèmes T-S à VDM et permet l'estimation de l'état du système en utilisant des combinaisons des sorties mesurées. Un contrôleur par retour d'état est synthétisé pour chaque observateur du banc. Les résidus générés par le banc d'observateurs servent à concevoir un mécanisme de commutation permettant de passer d'un contrôleur à un autre suivant la détection d'un défaut de manière à utiliser celui qui utilise une estimation d'état saine.

Soit le système T-S à VDNM :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t))\,(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(x(t)) C_i x(t) \end{cases} \tag{6.23}$$

muni d'un banc d'observateurs de structure :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}^l(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}^l(t))\left(A_i \hat{x}^l(t) + B_i u(t) + L_i^l(y^l(t) - \hat{y}^l(t))\right) \\ \hat{y}^l(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}^l(t)) C_i \hat{x}^l(t) \end{cases} \tag{6.24}$$

où $\hat{x}^l(t)$ et $\hat{y}^l(t)$ représentent respectivement l'état estimé et la sortie estimée fournis par l'observateur numéro l. Une loi de commande $u^l(t)$ est synthétisée pour chaque observateur :

$$u^l(t) = -\sum_{i=1}^{r} \mu_i(\hat{x}^l(t)) K_i^l \hat{x}^l(t) \tag{6.25}$$

Le mécanisme de commutation est élaboré grâce aux résidus obtenus et à une logique de décision qui, d'une part, sélectionne l'observateur pour élaborer l'estimation d'état saine, et, d'autre part, réalise la commutation vers le contrôleur associé. Si un banc d'observateurs dédiés est utilisé, le nombre de ces derniers est n_y, la loi de commande $u(t)$ appliquée au système s'écrit alors sous la forme :

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n_y} \nu_j(r(t))u^j(t) \tag{6.26}$$

où $\nu_i(r(t))$ sont des fonctions non linéaires dépendant des résidus assurant les commutations.

Conception d'observateurs et de lois de commande Beaucoup de travaux ont été développés concernant la conception de commandes à base d'observateurs pour les systèmes T-S. Ces stratégies de commande peuvent être utilisées dans notre étude. Pour la conception de l'observateur et de la commande numéro l, le système s'écrit avec la loi de commande (6.25) et l'observateur (6.24) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}^l(t) \end{pmatrix} = \sum_{i,j,k,s=1}^{r} \mu_i(x)\mu_j(\hat{x})\mu_k(x)\mu_s(\hat{x}) \begin{pmatrix} A_i - B_iK_j^l & B_iK_j^l \\ \Delta A_{ij} - \Delta B_{ij}K_s - L_j\Delta C_{ik} & A_j - L_jC_k + \Delta B_{ij}K_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e^l(t) \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

où :

$$\begin{cases} A_{ij} = A_i - A_j \\ B_{ij} = B_i - B_j \\ C_{ij} = C_i - C_j \end{cases} \tag{6.28}$$

La synthèse des gains des observateurs et des lois de commande est réalisée, par exemple, par la méthode de Lyapunov. Dans ce contexte, plusieurs travaux ont d'ores et déjà été développés, voir par exemple [Guerra et al., 2006] et [Kruszewski, 2006].

Chaque vecteur d'état estimé fourni par chaque observateur est utilisé pour la conception d'une loi de commande. Le mécanisme de commutation entre une commande et une autre est réalisé via une logique de décision basée sur les signaux de résidus afin de sélectionner le vecteur d'état estimé sain ce qui conduit à la sélection de la commande adéquate. Contrairement à l'approche par poursuite de trajectoire, cette méthode ne nécessite pas la modélisation des défauts pouvant affecter le système ni même l'estimation de ces derniers.

6.5 Commande tolérante aux défauts par formalisme $\mathcal{H}_\infty$

L'objectif visé ici est la conception d'une commande tolérante aux défauts utilisant le bloc de détection/localisation et estimation des défauts développé à partir du formalisme $\mathcal{H}_\infty$.

Soit le système en défaut représenté par le modèle T-S à variables de décision mesurables :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left(A_ix(t) + B_iu_f(t) + E_id(t) + F_if(t)\right) \\ y(t) = Cx(t) + Du_f(t) + Gd(t) + Rf(t) \end{cases} \tag{6.29}$$

La loi de $u_f(t)$ est la loi calculée par le contrôleur afin de commander le système. Étant donné que le système est en défaut, ce contrôleur utilise des informations erronées le conduisant à

fournir des commandes inappropriées $u_f(t)$ dépendant de ce défaut. Rappelons que dans le cas sans défaut, le signal $u_f(t)$ doit être égal au signal $u(t)$, et en présence d'un défaut, ce signal doit être modifié de manière à prendre en charge ce dernier et permettre au système d'atteindre son objectif. Pour cela, on introduit la loi de commande suivante :

$$u_f(t) = u(t) + Kr(t) \tag{6.30}$$

avec $r(t)$ le vecteur de résidus délivré par le bloc de diagnostic défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i(\xi(t)) \left((A_i - L_iC)e(t) + (E_i - L_iG)d(t) + (F_i - L_iR)f(t)\right) \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t) = Ce(t) + Gd(t) + Rf(t) \end{cases} \tag{6.31}$$

L'objectif est de concevoir le générateur de résidus ainsi que la commande tolérante aux défauts par la détermination des gains L_i et K.

7
Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse apportent une contribution aux problèmes d'estimation d'état, de diagnostic et de commande tolérante aux défauts des systèmes non linéaires, ces derniers étant représentés à l'aide d'un modèle de Takagi-Sugeno. Deux cas peuvent être considérés : les modèles T-S à variables de décision mesurables et les modèles T-S à variables de décision non mesurables. La plus grande partie des travaux développés porte sur les systèmes non linéaires décrits par un modèle T-S à VDNM.

Les modèles T-S à VDM ont fait l'objet de nombreux travaux dans différents domaines tels que l'identification, la commande, l'observation et le diagnostic. En revanche, les modèles T-S à VDNM n'ont pas été beaucoup étudiés, en particulier dans le domaine de l'estimation d'état et du diagnostic. Et cela, malgré les avantages qu'ils offrent comme la capacité de représentation exacte d'un modèle non linéaire décrit par la forme générale $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, la possibilité de représenter une classe plus large de systèmes non linéaires par rapport aux modèles T-S à VDM, leur intérêt pour le diagnostic par bancs d'observateurs et leur importance dans les problèmes de cryptanalyse et de synchronisation. Ces intérêts ont motivé notre orientation vers les problèmes d'estimation d'état et de diagnostic des systèmes non linéaires décrits par des modèles T-S à VDNM.

Avant d'aborder le problème d'estimation d'état et de conception d'observateurs, les modèles T-S à VDNM ont été analysés afin d'explorer différentes écritures équivalentes ; chacune ayant des caractéristiques propres. Le but de ces transformations a été de ré-écrire le modèle T-S à variables de décision non mesurables sous la forme d'un modèle T-S à variables de décision connues (état estimé). Les méthodes d'estimation d'état proposées au chapitre 3 reposent sur ces transformation ainsi que sur des hypothèses sur les termes additionnels qui apparaissent après transformation. Deux catégories de méthodes ont alors été proposées : la première suppose que les fonctions d'activation sont de nature lipschitzienne et la seconde utilise une autre transformation afin d'écrire les termes additionnels sous forme d'incertitudes bornées ou constantes, ou bien sous forme de perturbations dont l'influence est à minimiser. Les conditions de convergence des observateurs découlent de l'utilisation des techniques d'optimisation $\mathcal{L}_2$. Afin de

faciliter la détermination des gains de l'observateur, le formalisme LMI a été utilisé dans le but d'exprimer les conditions de convergence sous une forme adaptée à leur résolution.

L'extension de certaines des méthodes proposées au chapitre 3 au problème d'estimation d'état en présence d'entrées inconnues a été considérée dans le chapitre 4. Deux types d'observateurs ont alors été étudiés.

Le premier observateur s'appuie sur le découplage des entrées inconnues. En effet, grâce à des hypothèses structurelles sur les matrices définissant le système, des conditions de découplage sont proposées. La résolution d'un ensemble de LMIs et de LMEs permet la construction de l'observateur. Dans certains cas, un découplage total du vecteur d'entrées inconnues n'est pas réalisable. Une approche combinant le découplage et la minimisation du transfert $\mathcal{L}_2$ a alors été proposée, ce qui est plus général. Cette technique permet de découpler une partie des entrées inconnues par la recherche d'une projection adéquate et de minimiser la partie résiduelle des entrées inconnues après découplage.

La nécessité de connaître l'évolution temporelle des défauts nous a amené à considérer un second type d'observateur appelé observateur Proportionnel-Intégral. Son avantage principal réside dans l'estimation simultanée de l'état et des entrées inconnues. De plus, il fournit une meilleure estimation de ces dernières par rapport à celle fournie par l'observateur à entrées inconnues par découplage. Afin d'étendre la classe d'entrées inconnues pouvant être estimées par l'observateur à une classe plus générale sous la forme polynomiale, un observateur Proportionnel-Multi-Intégral, initialement proposé pour les systèmes linéaires, a été proposé. Il utilise plusieurs actions intégrales pour estimer les q premières dérivées des entrées inconnues.

Dans le chapitre 4, les observateurs proposés ont été utilisés à des fins de diagnostic. Trois méthodes ont été proposées.

La première méthode utilise les techniques de bancs d'observateurs à entrées inconnues par découplage afin de rendre certains observateurs sensibles à un sous-ensemble de défauts et insensibles à un autre sous-ensemble. L'analyse des résidus générés associée à une logique de décision a permis de détecter et de localiser des défauts d'actionneurs. La même approche a été utilisée pour la localisation des défauts de capteurs en introduisant un filtre sur la sortie du système. Cette approche permet de transformer le problème de localisation de défauts de capteurs en un problème de localisation de défauts d'actionneurs. De ce fait, une réponse au premier objectif attendu dans ce travail, visant à utiliser le même modèle T-S à variables de décision non mesurables pour la localisation des défauts de capteurs et d'actionneurs, a été atteint.

Dans le but de fournir une estimation des défauts, une seconde approche a été proposée. Elle est basée sur l'utilisation des observateurs Proportionnel-Intégral et Proportionnel-Multi-Intégral. Afin d'améliorer l'estimation des défauts, une technique par bancs d'observateur a été exploitée.

La troisième approche de diagnostic utilise le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ développé dans le cadre linéaire. L'idée principale est de générer des résidus dont l'analyse permet la détection, l'isolation et l'estimation des défauts. Pour cela, l'objectif est exprimé de manière à minimiser l'influence des perturbations et à maximiser l'influence des défauts sur ces résidus. On fait face alors à un problème min/max que l'on a transformé en un simple problème de minimisation en introduisant un filtre linéaire. Les tâches de détection, localisation et estimation des défauts dépendent du choix du filtre. Des conditions LMIs permettant la construction d'un tel générateur de résidus sont données pour les systèmes T-S à VDM et les systèmes T-S à VDNM.

La dernière partie du chapitre est consacrée à la commande tolérante aux défauts des systèmes T-S. Une approche utilisant la loi de commande nominale a été proposée. La nouvelle loi de commande est alors composée de la commande nominale à laquelle sont ajoutés deux termes relatifs au défaut et à une erreur de poursuite d'état entre le système réel et un modèle de référence. Les deux termes ajoutés nécessitent la connaissance du vecteur d'état pour réaliser la poursuite de trajectoire et la connaissance du défaut afin de le compenser. Les observateurs Proportionnel-Intégral et Proportionnel-Multi-Intégral sont alors utilisés.

Les résultats proposés dans ce mémoire de thèse ouvrent de nombreuses perspectives pour des travaux futurs :

- L'application des résultats obtenus dans le cadre du projet SIRASAS (Stratégies Innovantes Robustes et Autonomes pour les Systèmes Aéro-Spatiaux).
- La conception d'observateurs en utilisant le théorème de la valeur moyenne et la transformation par secteurs non linéaires permet d'écrire l'erreur d'estimation d'état sous la forme d'un système T-S dont la stabilité est traitée au moyen de fonctions de Lyapunov. Dans cette thèse, seule la stabilité quadratique a été étudiée pour les systèmes à temps continu. Il serait intéressant d'appliquer les résultats sur la stabilité relaxée des systèmes T-S et de chercher à obtenir des conditions LMIs. En effet, la plupart des travaux sur la stabilité utilisant des fonctions de Lyapunov non quadratiques ou poly-quadratiques mènent à des conditions sous forme BMIs qui sont difficiles à résoudre. De même, il serait intéressant de s'attarder sur le problème de la stabilité relaxée des systèmes T-S à temps continu.
- Plusieurs méthodes proposées, notamment celle utilisant le théorème de la valeur moyenne, fournissent un ensemble important de conditions LMIs à résoudre simultanément, ce qui peut demander un temps de calcul prohibitif d'où la difficulté d'implémentation en ligne. Une piste en cours d'exploitation au laboratoire vise à réduire le nombre de sous-modèles tout en gardant les caractéristiques des modèles T-S à VDNM.
- L'hypothèse de la non-mesurabilité des variables de prémisse et, par conséquent, de la non-connaissance de l'évolution des fonctions d'activation nous a amené à poser le problème de l'estimation simultanée de l'état et des fonctions d'activation. La solution de ce problème trouvera son intérêt, par exemple, dans les systèmes représentés par un ensemble de sous-modèles locaux traduisant les comportements normaux et les comportements défaillants du système. En effet, la connaissance de l'évolution de ces fonctions fournira une information sur le modèle actif et donc la détection et la localisation des modes de fonctionnement.
- Une étude plus poussée de l'observateur Proportionnel-Multi-Intégral proposé à la section 4.160 peut être envisagée car l'utilisation d'intégrateurs purs peut générer des phénomènes d'instabilité. Une idée serait de les remplacer par des filtres dynamiques permettant la prise en compte d'une classe plus large de signaux que ceux de type polynomial.
- Contrairement aux méthodes de conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires pouvant être mis sous une forme canonique d'observabilité, les méthodes proposées dans cette thèse sont simples et se basent essentiellement sur une technique de vérification d'un jeu de LMIs. Une étude d'observabilité des systèmes T-S serait utile à entreprendre. De plus, dans le cadre du diagnostic des systèmes ne vérifiant pas les conditions d'observabilité, la conception d'estimateur direct de la sortie peut être réalisée afin

de pouvoir générer des résidus par comparaison de sorties.

- La structure de la commande tolérante aux défauts proposée dans ce mémoire a une forme multimodèle. Il serait intéressant d'explorer d'autres structures, notamment une forme linéaire qui réduirait le nombre de LMIs à résoudre. L'objectif serait de proposer une commande moins contraignante, facile à implémenter et garantissant les spécifications d'un cahier des charges.
- Le développement des systèmes commandés en réseaux nous motive à étendre l'étude aux systèmes présentant des retards constants ou variables, connus ou inconnus faisant référence à des retards dans les canaux de communication. De plus, il a été montré dans des travaux très récents que ces retards peuvent être modélisés grâce à des modèles T-S, facilitant ainsi l'étude.
- Enfin, dans les travaux de diagnostic menés dans ce présent mémoire, le problème du diagnostic en boucle fermée est soulevé car la commande masque les défauts d'où l'impossibilité de les détecter. Un premier travail a été mené au CRAN sur ce problème pour les systèmes linéaires. Il serait intéressant de compléter ces travaux puis d'envisager une extension aux systèmes non linéaires sous forme Takagi-Sugeno grâce aux propriétés de cette dernière.

Annexes

A

Calcul de la constante de Lipschitz

On considère la fonction non linéaire :

$$f(x) : x \in R^n \rightarrow R^n \tag{A.1}$$

définie comme suit :

$$f(x) = \left[\begin{array}{ccc} f_1(x)^T & \cdots & f_n(x)^T \end{array} \right]^T, \; x = \left[\begin{array}{ccc} x_1^T & \cdots & x_n^T \end{array} \right]^T \tag{A.2}$$

Le développement en série de Taylor à l'ordre zéro avec reste intégral de $f_i(x)$ autour de $\hat{x}$ est :

$$f_i(x) - f_i(\hat{x}) = \int_{\hat{x}_1}^{x_1} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(t)dt + ... + \int_{\hat{x}_n}^{x_n} \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(t)dt, \;\; i \in \{1, ..., n\} \tag{A.3}$$

Chaque fonction f_i peut être majorée de la manière suivante :

$$|f_i(x) - f_i(\hat{x})| \leq \int_{\hat{x}_1}^{x_1} \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t) \right| dt + ... + \int_{\hat{x}_n}^{x_n} \left| \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(t) \right| dt \tag{A.4}$$

Soit

$$a_{ij} = \max_{t \in [x_j \;\; \hat{x}_j]} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t) \right|, \;\; i, j \in \{1, .., n\} \tag{A.5}$$

Dans le cas où l'intervalle $[x_j \;\; \hat{x}_j]$ n'est pas connu, a_{ij} est calculé pour $t \in R$; on obtient :

$$a_{ij} = \max_{t \in R} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t) \right| \tag{A.6}$$

Par conséquent, (A.4) permet d'écrire :

$$|f_i(x) - f_i(\hat{x})| \leq a_{i1} |x_1 - \hat{x}_1| + ... + a_{in} |x_n - \hat{x}_n| \tag{A.7}$$

En appliquant ce résultat à la fonction $f(x)$, on obtient :

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq J\,|x - \hat{x}| \tag{A.8}$$

où :

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

La constante de Lipschitz de $f(x)$ est donnée par la plus grande valeur singulière de J.

B

Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs)

.

De nombreux problèmes d'optimisation en théorie du contrôle, identification de système et traitement du signal peuvent être formulés grâce à des LMI.

Dans cette annexe, nous donnons un rappel sur l'analyse convexe et les inégalités linéaires matricielles ainsi que les techniques utilisées afin de résoudre les LMIs établies au cours de ce mémoire.

B.1 Ensembles convexes

Définition B.1. *Un ensemble $\mathcal{C}$ est dit convexe si :*

$$\forall \lambda \in [0,1]\,,\ \ (x_1,x_2) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{C} \tag{B.1}$$

Une propriété importante des ensembles convexes est que l'intersection de deux ensembles convexes est un ensemble convexe. L'ensemble convexe utilisé dans ce mémoire est un polytope ayant r sommets correspondant au nombre de sous-modèles représentant le modèle de Takagi-Sugeno.

B.2 Fonctions convexes

Soit la fonction f définie par :

$$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m \ \rightarrow\ \mathbb{R} \tag{B.2}$$

$$x \ \rightarrow\ f(x) \tag{B.3}$$

La fonction f est convexe si :

1. le support (ensemble de définition) $\mathcal{D}$ de f est convexe.
2. $$\forall x \in \mathcal{D}, \forall y \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
   (pour la convexité stricte, on remplace $\leq$ par $<$).

B.3 Inégalités Linéaires Matricielles (LMIs)

Définition B.2. *Une LMI est une inégalité matricielle de la forme :*

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i > 0 \tag{B.4}$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ est une variable et $F_i = F_i^T$, $i = 1, \ldots, n$ sont des matrices symétriques données. L'inégalité (B.4) est définie positive c-à-d $u^T F(x) u > 0$ pour tout u non nul $\in \mathbb{R}^n$. L'inégalité (B.4) est une LMI stricte.

Une LMI non stricte est donnée par :

$$F(x) \geq 0 \tag{B.5}$$

La LMI (B.4) est une contrainte convexe en x, en d'autres termes l'ensemble $\{x | F(x) > 0\}$ est convexe.

Un ensemble de LMIs peut s'écrire sous la forme d'une seule LMI. En effet, il suffit de les écrire dans une matrice bloc diagonale comme suit :

$$F_1(x) > 0, F_2(x) > 0 \cdots, F_p(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F_1(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & F_2(x) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & F_p(x) \end{pmatrix} > 0 \tag{B.6}$$

B.3.1 Obtention des LMI

Le plus souvent, dans les problèmes d'automatique des inégalités matricielles non linéaires (non convexes) sont obtenues. Afin de pouvoir utiliser la puissance des outils LMIs pour la résolution de ces problèmes, il est nécessaire de les transformer en LMIs. Pour ce faire, plusieurs méthodes existent. Les méthodes utilisées dans ce mémoire sont le changement de variables et le complément de Schur.

Lemme B.1. *(Complément de Schur [Boyd et al., 1994]) Soient trois matrices $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ et $S(x)$ affines par rapport à la variable x. Les LMIs suivantes sont équivalentes :*

1.
$$\begin{pmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{pmatrix} > 0 \tag{B.7}$$

2.
$$R(x) > 0, \;\; Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x) > 0 \tag{B.8}$$

En d'autres termes l'inégalité matricielle non linéaire (B.8) est transformée en LMI (B.7).

B.4 Quelques problèmes classiques LMIs

Dans cette section, quelques problèmes classiques LMIs rencontrés dans ce mémoire sont rappelés :

- La faisabilité : trouver x solution de $A(x) < 0$.
- La minimisation d'une fonction linéaire : trouver x minimisant $c^T x$ sous la contrainte LMI : $A(x) < 0$.
- Le problème de valeur propre généralisée : minimiser λ sous les contraintes LMIs : $A(x) < \lambda B(x)$, $B(x) > 0$ et $C(x) < 0$.

B.4.1 Problème de faisabilité

Étant donné la LMI :

$$A(x) > 0 \tag{B.9}$$

Le problème LMI associé est de trouver x tel que (B.9) est satisfaite. La résolution de ce problème consiste à chercher le vecteur x minimisant le scalaire t tel que :

$$-A(x) < tI_n \tag{B.10}$$

Si la valeur minimale de t est négative alors le problème (B.9) est dit faisable (ou réalisable).

Exemple B.1 (**Etude de la stabilité**)
Soit le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{B.11}$$

D'après la théorie de Lyapunov, le système (B.11) *est stable s'il existe une fonction de Lyapunov* $V(x(t))$ *telle que* $\forall x \neq 0$, $V(x(t)) > 0$ *et* $\dot{V}(x(t)) < 0$. *En choisissant* $V(x(t)) = x(t)^T Px(t)$ *où* P *est une matrice symétrique à déterminer, on obtient :*

$$\forall x(t) \neq 0, \quad \begin{cases} V(x(t)) > 0 \\ \dot{V}(x(t)) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P > 0 \\ A^T P + PA < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & -\left(A^T P + PA\right) \end{pmatrix} > 0 \tag{B.12}$$

B.4.2 Problème de valeur propre (EVP : Eigenvalue Problem)

Le problème de valeur propre consiste à minimiser la plus grande valeur propre de la matrice $A(x)$ sous contrainte LMI :

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ s.c. & \lambda I - A(x) > 0, \;\; B(x) > 0 \end{array}$$

où les matrices $A(x)$ et $B(x)$ sont symétriques et linéaires par rapport à la variable x.

D'autres formes équivalentes au problème EVP existent, par exemple la minimisation d'une fonction linéaire en x sous contraintes LMIs est exprimée sous la forme :

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ s.c. & F(x) > 0 \end{array}$$

ou encore, on peut l'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ s.c. & A(x,\lambda) > 0 \end{array}$$

Exemple B.2 (**Etude du gain $\mathcal{L}_2$ des systèmes linéaires**)
Soit le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{B.13}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \tag{B.14}$$

où $u(t)$ représente l'entrée du système. Si le système est stable et que l'entrée $u(t)$ est bornée alors il existe $\gamma > 0$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} y(t)^T y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^{+\infty} u(t)^T u(t)dt \tag{B.15}$$

La valeur γ est appelé gain $\mathcal{L}_2$ du système de manière générale, et en particulier pour les systèmes linéaires de la forme (B.13)-(B.14) γ correspond à la norme $\mathcal{H}_\infty$ de la fonction de transfert associée au système (B.13)-(B.14).

Lemme B.2. *Lemme borné réel (Bounded Real Lemma (BRL) [Boyd et al., 1994]) La contrainte (B.15) est vérifiée pour tout $u(t) \neq 0$ et bornée si et seulement s'il existe une matrice P telle que :*

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{pmatrix} < 0 \tag{B.16}$$

Pour une valeur donnée de γ, l'inégalité (B.16) définit une LMI en la variable P.

Dans les problèmes de contrôle et d'observation, on est toujours amené à minimiser l'influence d'une entrée externe $u(t)$ (perturbation, bruit,...) et cela se traduit par la minimisation du paramètre γ. Afin de garder le caractère linéaire de (B.16), on effectue le changement de variable $\bar{\gamma} = \gamma^2$ et on pose le problème sous la forme d'un problème EVP suivant :

$$\min_{P,\bar{\gamma}} \quad \bar{\gamma}$$

$$P > 0 \tag{B.17}$$
$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \bar{\gamma} I \end{pmatrix} < 0 \tag{B.18}$$

Dans ce mémoire de thèse, on utilise également la version du BRL pour les systèmes polytopiques [Boyd et al., 1994].

B.4.3 Problème de valeur propre généralisée (GEVP : Generalized Eigeinvalue Problem)

Le problème de valeur propre généralisée consiste à minimiser la plus grande valeur propre d'une paire de matrices dépendant linéairement de la variable x, sous contraintes LMIs. Le GEVP est exprimé par :

$$\begin{array}{ll} \min & \lambda \\ s.c. & \lambda B(x) - A(x) > 0 \ , \ B(x) > 0, \ C(x) > 0 \end{array}$$

où A, B, C sont des matrices symétriques.

Exemple B.3 (**Étude du taux de décroissance**)
Pour le système stable (B.11)*, on peut calculer le taux de décroissance exponentiel défini par le réel positif* α *assurant :*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} \|x(t)\| = 0 \tag{B.19}$$

Le paramètre α *a une relation directe avec les valeurs propres de la matrice A. En effet, obtenir un taux de décroissance* α *consiste à assurer la stabilité de la matrice* $(A+\alpha I)$*. Il est possible de démontrer une condition nécessaire et suffisante : le taux de décroissance est supérieur à* α *s'il existe une fonction* $V(x(t))$ *telle que pour* $x \neq 0$*,* $V(x(t)) > 0$ *et* $V(x(t)) < -2\alpha V(x(t))$*. En choisissant* $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ *où P est une matrice symétrique à déterminer, on obtient le problème sous la forme suivante :*

Trouver P et α *tels que :*

$$P > 0 \tag{B.20}$$

$$A^T P + PA + 2\alpha P < 0 \tag{B.21}$$

$$\tag{B.22}$$

Poser $\lambda = -\alpha$*, et sésoudre le problème par minimisation de* λ *ramène le problème sous la forme d'un problème de minimisation de la plus grande valeur propre généralisée (GEVP).*

B.5 Résolution des LMI

L'introduction de la méthode d'optimisation convexe dite "méthode du point intérieur" [Nesterov et Nemirovsky, 1994] a permis le développement de plusieurs algorithmes de résolution de problèmes LMIs. Afin de faciliter l'utilisation des solvers basés sur ces algorithmes, quelques boîtes à outils ont été développées pour permettre d'écrire et de résoudre ces problèmes de manière simple. On peut citer la boîte à outils LMI toolbox de Mathworks, la LMI-tools développée par Laurent El-Ghaoui et l'interface SeDuMi développée au Laboratoire d'Architecture et d'Analyse des Systèmes (LAAS) par Dimitri Peaucelle. Toutes les LMIs des exemples présentés dans cette thèse ont été résolues avec la méthode SeDuMi ainsi que l'interface YALMIP.

C
Régions LMIs

La réponse temporelle d'un système linéaire est liée à la localisation des pôles de sa fonction de transfert dans le plan complexe et, dans le cas des systèmes de Takagi-Sugeno, la réponse dépend de la localisation des pôles des sous-modèles (sommets du polytope). En effet, les parties réelles des pôles ont un effet sur la vitesse de convergence des modes associés. Les parties imaginaires, quant à elles, influent sur la présence d'oscillations et de dépassements ainsi que le temps de réponse à 5%. Par conséquent, une des techniques permettant d'améliorer les performances d'une loi commande ou d'un observateur consiste à placer les pôles du système bouclé ou de l'observateur dans des régions du plan complexe ayant certaines propriétés intéressantes. Ces régions sont appelées régions LMI.

Définition C.3. *Une région $\mathcal{D}$ sous-ensemble du plan complexe est appelée région LMI d'ordre n s'il existe deux matrices $\alpha \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\beta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que :*

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in C : f_D(z) = \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0 \right\} \tag{C.1}$$

où $f_D(z)$ est la fonction caractéristique de la région LMI $\mathcal{D}$.

Théorème C.1. *(Chilali [1996], Chilali et Gahinet [1996]) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathcal{D}$ une région LMI définie par (C.1). La matrice A est dite $\mathcal{D}-$stable si, et seulement si, il existe une matrice symétrique et définie positive $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que :*

$$M_D(A,P) = \alpha \otimes P + \beta \otimes (AP) + \beta^T \otimes (AP)^T < 0 \tag{C.2}$$

où $\otimes$ représente le produit de Kronecker.

C.1 Exemples de régions LMI

La définition C.3 permet de paramétrer un grand nombre de régions LMI. Après calcul, l'inégalité (C.2) devient :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}P+\beta_{11}AP+\beta_{11}(AP)^T & \cdots & \alpha_{1n}P+\beta_{1n}AP+\beta_{1n}(AP)^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}P+\beta_{n1}AP+\beta_{n1}(AP)^T & \cdots & \alpha_{nn}P+\beta_{nn}AP+\beta_{nn}(AP)^T \end{pmatrix} < 0 \tag{C.3}$$

Citons les régions les plus usuelles :

1. La stabilité classique consiste à placer les pôles dans le demi-plan gauche complexe. Cette région est obtenue en choisissant $\alpha = 0$ et $\beta = 1$. L'équation caractéristique de cette région est donnée par :

$$f_D = z + \bar{z} \tag{C.4}$$

Avec les valeurs de α et β, l'inégalité (C.3) se réduit à :

$$PA + (PA)^T < 0 \tag{C.5}$$

2. Afin d'augmenter la vitesse de convergence de l'état d'un système, il est intéressant de localiser les parties réelles des pôles à gauche d'une droite d'abscisse $x = -a$, on assure ainsi la stabilité et une vitesse de convergence (appelé $\alpha-$stabilité). L'équation caractéristique de cette région est donnée par :

$$\Re(z) < -a \Leftrightarrow f_D = 2a + z + \bar{z} \tag{C.6}$$

il suffit de prendre $\alpha = 2a$ et $\beta = 1$, l'inégalité (C.3) devient :

$$2aP + PA + (PA)^T < 0 \tag{C.7}$$

3. Dans les problèmes d'estimation d'état, l'observateur doit être plus rapide que le système et limiter la reconstruction du bruit de mesure. Cela se traduit par la limitation des parties réelles des pôles de l'observateur en imposant leur localisation dans une bande verticale dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$f_D = \begin{bmatrix} -2\sigma_{\max} + z + \bar{z} & 0 \\ 0 & 2\sigma_{\mathrm{mim}} - z - \bar{z} \end{bmatrix} \tag{C.8}$$

avec :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -2\sigma_{\max} & 0 \\ 0 & -2\sigma_{\min} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L'inégalité (C.3) devient :

$$\begin{pmatrix} -2\sigma_{\max} + AP + (AP)^T & 0 \\ 0 & 2\sigma_{\min} - \left(AP + (AP)^T\right) \end{pmatrix} < 0 \tag{C.9}$$

4. Un disque de rayon R et de centre $(q,0)$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in C \,|\, (z+q)^2 < R^2 \right\} \tag{C.10}$$

est une région LMI caractérisée par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} -R & -q \\ -q & -R \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{C.11}$$

L'inégalité (C.3) devient alors :

$$\begin{pmatrix} -RP & -qP+AP \\ -qP+(AP)^T & -RP \end{pmatrix} < 0 \tag{C.12}$$

5. Un secteur conique, centré à l'origine et d'angle interne θ, défini par :

$$\mathcal{D} = \{ z \in C \,|\, |Arg(z)| < \theta \} \tag{C.13}$$

est une région LMI caractérisée par :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{C.14}$$

Avec α et β l'inégalité (C.3) devient :

$$\begin{pmatrix} \sin(\theta)\left(AP+(AP)^T\right) & \cos(\theta)\left(AP+(AP)^T\right) \\ -\cos(\theta)\left(AP+(AP)^T\right) & \sin(\theta)\left(AP+(AP)^T\right) \end{pmatrix} < 0 \tag{C.15}$$

Une des propriétés fondamentales des régions LMI est que la classe des régions LMI est invariante pour l'intersection, autrement dit, toute intersection de régions LMI est une région LMI.

Proposition C.1. *Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, deux régions LMI de fonctions caractéristiques $f_{\mathcal{D}_1}$ et $f_{\mathcal{D}_2}$ respectivement. La région du plan complexe définie par l'intersection des deux régions LMI $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est une région LMI dont la fonction caractéristique est donnée par :*

$$f_{\mathcal{D}_3} = diag(f_{\mathcal{D}_1}, f_{\mathcal{D}_2}) \tag{C.16}$$

Cette propriété permet de définir, ou d'approcher, toute région convexe et symétrique par rapport à l'axe réel du plan complexe, comme une région LMI.

Index

Atténuation $\mathcal{L}_2$
Atténuation $\mathcal{L}_2$, 69, 84, 85, 120

Lemme borné réel
Lemme réel borné, 230

Lemme borné réel
Lemme réel borné, 48, 108, 121, 181

Diagnostic
Bancs d'observateurs, 162, 166, 167, 169
Définitions, 155
Détection de défauts, 169, 170, 187
Formalisme $\mathcal{H}_\infty$, 177
Résidus, 156, 167, 169, 178, 187

Commande tolérante aux défauts
Définitions, 191
Placement de la structure propre, 193
Poursuite de trajectoire, 193, 194
Pseudo-inverse, 193

Incertitudes
Bornées en norme, 82, 99, 121
Constantes, 90, 123, 182

Fonctions de Lyapunov
Non quadratique, 21, 71, 76
Polyquadratique, 21
Quadratique, 32, 57

Multimodèle
Modèle de Takagi-Sugeno, 6, 18
Multimodèle à états découplés, 6
Observateurs, 22
Stabilité des modèles de Takagi-Sugeno, 20
Stabilité des modèles de Takagi-Sugeo, 56
Stabilité non quadratique, 71, 76
Terminologie, 6
Transformation par secteurs non linéaires, 20, 55
variables de décision mesurables, 23, 137, 143, 178
variables de décision non mesurables, 24, 138, 145, 181

Observateurs
À entrées inconnues, 118, 168
Luenberger, 22, 29, 83
Proportionnel-Integral, 136, 170
Proportionnel-Multi-Integral, 140

Observateurs $\mathcal{L}_2$
Incertitudes bornées, 82, 99, 121
Incertitudes constantes, 90, 123, 182

Placement des pôles
Inégalités Linéaires Matricielles, 227
Placement des pôles, 41, 95
Régions LMI, 95, 233

Complement de Schur
Complément de Schur, 228

Stabilité
Stabilité des modèles de Takagi-Sugeno, 20
Stabilité non quadratique, 71, 76
Stabilité Polyquadratique, 21
Stabilité quadratique, 32

Système non linéaires
Observabilité, 11
Observateurs à grands gains, 12

Théorème de la valeur moyenne
Théorème de la valeur moyenne, 54, 135, 185

Entrées inconnes
Entrées inconnues, 115, 157

Observateurs à entrées inconnues
Observateur PI, 136, 170
Observateur PMI, 140
Découplage, 117, 166

Bibliographie

Abbaszadeh, M. et Marquez, H. J. (2006). A robust observer design method for continuous-time Lipschitz nonlinear systems. In *Conference on Decision and Control, CDC*, San Diego, CA, USA.

Adjallah, K., Maquin, D., et Ragot, J. (1994). Non-linear observer-based fault detection. In *3rd IEEE Conference on Control Applications*, Glasgow, UK.

Akhenak, A. (2004). *Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.

Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., et Maquin, D. (2007). Design of sliding mode unknown input observer for uncertain Takagi-Sugeno model. In *15th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'07*, Athens, Greece.

Akhenak, A., Chadli, M., Ragot, J., et Maquin, D. (2008). Fault detection and isolation using sliding mode observer for uncertain Takagi-Sugeno fuzzy model. In *16th Mediterranean Conference on Control and Automation Congress Centre*, Ajaccio, France.

Arcak, M. et Kokotovic, P. (2001). Nonlinear observers : a circle criterion design and robustness analysis. *Automatica*, 37(12) :1923–1930.

Armeni, S. (2001). *Robust Fault Detection and Isolation with a Sensitivity Constraint*. Thèse de doctorat, Université Degli Studi Di Firenze, Italie.

Basseville, M. (1988). Detecting changes in signals and systems–a survey. *Automatica*, 24(3) :309–326.

Bejarano, F., Ghanes, M., et Barbot, J.P. Fridman, L. (2008). Second order sliding mode and adaptive observer for synchronization of a chaotic system : a comparative study. In *IFAC World Congress*, Seoul, Korea.

Bergsten, P. et Palm, R. (2000). Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. In *9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE*, San Antonio, TX, USA.

Bergsten, P., Palm, R., et Driankov, D. (2001). Fuzzy observers. In *IEEE International Fuzzy Systems Conference*, Melbourne, Australia.

Bergsten, P., Palm, R., et Driankov, D. (2002). Observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B : Cybernetics*, 32(1) :114–121.

Bernussou, J., de Olivera, J., et Geromel, J. (1999). New discrete-time robust stability condition. *Systems and Control Letters*, 36 :135–141.

Besançon, G. (2007). *Nonlinear observers and applications*. Springer.

Bhattacharyya, S. (1978). Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 23 :483–484.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., et Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM ed.

Busawon, K. et Kabore, P. (2001). Disturbance attenuation using proportional integral observers. *International Journal of Control*, 74(74) :618–627.

Casavola, A., Domenico, F., et Franze, G. (2008). Robust fault detection of uncertain linear systems via quasi-lmis. *Automatica*, 44(1) :289–295.

Chadli, M. (2002). *Analyse des systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.

Chadli, M., Maquin, D., et Ragot, J. (2002). Non quadratic stability analysis of Takagi-Sugeno systems. In *IEEE Conference on Decision and Control, CDC'2002*, Las Vegas, Nevada, USA.

Chen, J. et Patton, R. (1999a). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic publisher.

Chen, J., Patton, R., et Zhang, H. (1996). Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of Control*, 63(1) :85 –105.

Chen, J. et Patton, R. J. (1999b). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Boston, Dordrecht, London.

Chen, J. et Zhang, H. (1991). Robust detection of faulty actuators via unknown input observers. *International Journal of Systems Science*, 22(10) :1829–1839.

Chen, W. (2007). *Model-Based fault diagnosis in complex control systems - Robust and adaptive approaches*. Thèse de doctorat, Simon Frazer University, Canada.

Chen, W. et Saif, M. (2006). Output estimator based fault detection, isolation and estimation for systems with unmatched unknown inputs. In *IEEE Joint CCA/CACSD/ISIC*, Munich, Germany.

Chen, W. et Saif, M. (2007a). Actuator fault detection and isolation in uncertain systems. In *American Control Conference*, New York City, USA.

Chen, W. et Saif, M. (2007b). Design of a TS based fuzzy nonlinear unknown input observer with fault diagnosis applications. In *American Control Conference*, New York City, USA.

Cherrier, E., Ragot, J., Boutayeb, M., et Aziz-Alaoui, M. (2007). Observer-based exponential synchronization of chaotic multimodels. In *European Control Conference, ECC'07*, Kos, Greece.

Chilali, M. (1996). *Méthodes LMI pour l'Analyse et la Synthèse Multi-Critère.* Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine, France.

Chilali, M. et Gahinet, P. (1996). H-infinity design with pole placement constraints : an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3) :358–367.

Chow, L. et Willsky, A. (1984). Analytical redundancy and the design of robust failure detection system. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7) :603–614.

Corless, M. et Tu, J. (1998). State and input estimation for a class of uncertain systems. *Automatica*, 34(6) :757–764.

Cyrille, C. (2001). *Surveillance des systèmes non-linéaires : application aux machines électriques*. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France.

Darouach, M., Zasadzinski, M., et Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(3) :606–609.

Dawson, D., Qu, Z., et Carroll, J. (1992). On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems. *Systems and Control Letters*, 18 :217–222.

De Persis, C., De Santis, R., et Isidori, A. (2001). Nonlinear actuator fault detection and isolation for VTOL aircraft. In *American Control Conference (ACC)*, Arlington, USA.

Ding, S. X. (2008). *Model-Based Fault Diagnosis Techniques Design Schemes, Algorithms, And Tools*. Springer-Verlag.

Duan, G. et Patton, R. (2001). Detection using Luenberger-type unknown observers- A parametric approach. *International Journal of Systems Science*, 32 :533–540.

Duan, Z., Zhang, J., Zhang, C., et Mosca, E. (2006). Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems. *Automatica*, 42(11) :1919–1926.

Edwards, C., Spurgeon, S., et Patton, R. (2000). Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, 36(4) :541–553.

Fairman, F., Mahil, S., et Luk, L. (1984). Disturbance decoupled observer design via singular value decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(1) :84–86.

Filev, D. (1991). Fuzzy mode of complex systems. *International Journal of Approximate Reasoning*, 5(3) :281–290.

Floquet, T., Barbot, J., Perruquetti, W., et Djemai, M. (2004). On the robust fault detection via a sliding mode observer. *International Journal of Control*, 77 :622–629.

Fossard, A. et Normand-Cyrot, D. (1993). *Systèmes non linéaires : modélisation - estimation (tome 1)*. Masson.

Frank, P. (1990). Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based redundancy- a survey and some new results. *Automatica*, 26 :459–474.

Frank, P. M. et Ding, X. (1997). Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control*, 7(6) :403–424.

Frank, P. M. et Seliger, R. (1991). Fault detection and isolation in automatic processes. *Control and Dynamic systems, C. Leondes (Ed.)*, 49 :241–287. New York academic press.

Gao, Z. et Antsaklis, P. (1991). Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control systems. *International Journal of Control*, 53(3) :717–729.

Gao, Z. et Antsaklis, P. (1992). Reconfigurable control system design via perfect model following. *International Journal of Control*, 56(4) :783–798.

Gao, Z. et Ding, S. X. (2007). Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, 43(5) :912–920.

Gao, Z. et Ho, D. (2004). Proportional multiple-integral observer design for descriptor systems with measurement output disturbances. *IEE proceeding Control Theory and Application*, 151(3) :279–288.

Gasso, G. (2000). *Identification de systèmes dynamiques non linéaires : approche multi-modèle*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), Nancy, France.

Gertler, J. (1998). *Fault detection and diagnosis in engineering systems*. Marcel Dekker.

Glumineau, A., Moog, C., et Plestan, F. (1996). New algebro-geometric conditions for the linearization by input-output injection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(4) :598–603.

Guadouna, B. (1995). *Contribution au diagnostic des systèmes linéaires invariants a entrées inconnues*. Thèse de doctorat, Doctorat de l'Institut National polytechnique de Lorraine, Nancy, France.

Guerra, T.-M., Kruszewski, A., Vermeiren, L., et Tirmant, H. (2006). Conditions of output stabilization for nonlinear models in the Takagi-Sugeno's form. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(9) :1248–1259.

Harkat, M. (2003). *Détection et localisation de défauts par analyse en composantes principales*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.

Hou, M. et Muller, P. (1994). Detection and isolation observers. *International Journal of Control*, 60 :827–846.

Hou, M. et Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6) :789–794.

Husson, R., Iung, C., Aubry, J., et Daafouz, J. Wolf, D. (2007). *Automatique : Du cahier des charges à la réalisation de systèmes*. Dunod.

Ibrir, S. (2007). Circle-criterion approach to discrete-time nonlinear observer design. *Automatica*, 43(8) :1432–1441.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2007a). Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables. In *2è Journées Doctorales / Journées Nationales MACS, Reims, France*.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2007b). Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. In *Eighth international Conference on Sciences and Techniques of Automatic control, STA'2007*, Sousse, Tunisia.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008a). Design of observers for Takagi-Sugeno systems with immeasurable premise variables : an $\mathcal{L}_2$ approach. In *IFAC World Congress 2008,*, Seoul, Korea.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008b). Multi-observateurs à entrées inconnues pour un système de takagi-sugeno à variables de décision non mesurables. In *5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA*. Bucarest, Roumanie.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009a). An approach for the state estimation of Takagi-Sugeno models and application to sensor fault diagnosis. In *48th IEEE Conference on Decision and Control*, Shanghai, P.R. China.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009b). State and unknown input estimation for nonlinear systems described by Takagi-Sugeno models with unmeasurable premise variables. In *17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09*, Thessaloniki, Greece.

Ichalal, D., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2009c). State estimation of nonlinear systems using multiple model approach. In *American Control Conference, ACC'2009*, St. Louis, Missouri, USA.

Imsland, L., Johansen, T., Grip, H., et Fossen, T. (2007). On nonlinear unknown input observers - applied to lateral vehicle velocity estimation on banked roads. *International Journal of Control*, 80(11) :1741–1750.

Isermann, R. (1984). Process fault detection based on modelling and estimation methods. *Automatica*, 20 :387–404.

Isermann, R. (2007). *Fault-diagnosis systems : An introduction from fault detection to fault tolerance*. Springer.

Jiang, B., Staroswiecki, M., et Cocquempot, V. (2004). Fault estimation in nonlinear uncertain systems using robust sliding mode observers. *IEE proceeding Control Theory and Application*, 151 :29–37.

Jiang, G., Wang, S., et Song, W. (2000). Design of observer with integrators for linear systems with unknown input disturbances. *Electronics Letters*, 36(13) :1168–1169.

Johansson, M. (1999). *Piecewise linear control systems*. Thèse de doctorat, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden.

Kaczorek, T. (1979). Proportional-integral observers for linear multivariable time-varying systems. *Regelungstechnik*, 27 :359–362.

Kalman, R. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82 :35–45.

Kanev, S. (2004). *Robust fault tolerant control*. Thèse de doctorat, University of Twente, The Netherlands.

Kazantzis, N. et Kravaris, C. (1998). Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem. *Systems & Control Letters*, 34(5) :241–247.

Keller, H. (1987). Nonlinear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *International Journal of Control*, 46(6) :1915–1930.

Kobayashi, N. et Nakamizo, R. (1982). An observer design for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, 35 :605–619.

Koenig, D. (2005). Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems : application to state and fault estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :212– 217.

Koenig, D. et Mammar, S. (2001). Design a class of reduced order unknown input nonlinear observer for fault diagnosis. In *American Control Conference*, Arlington, USA.

Koenig, D. et Mammar, S. (2002). Design of a proportional integral observer for unknown input descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :2057–2063.

Korbicz, J., Koscielny, J., Kowalczuk, Z., et Cholewa, W. (2004). *Fault Diagnosis : Models, Artificial Intelligence, Applications*. Springer.

Korbicz, J., Witczak, M., et Puig, V. (2007). LMI-based strategies for designing observers and unknown input observers for non-linear discrete-time systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, 55(1) :31–42.

Krener, A. et Isidori, A. (1983). Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*, 3 :47–52.

Kruszewski, A. (2006). *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Valenciennes, France.

Kruszewski, A., Wang, R., et Guerra, T. (2008). Nonquadratic stabilization conditions for a class of uncertain nonlinear discrete time TS fuzzy models : A new approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2) :606 – 611.

Kruzewski, A., Wang, R., et Guerra, T. (2008). Non-quadratic stabilization conditions for a class of uncertain non linear discrete-time T-S fuzzy models : a new approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(2) :606–611.

Leithead, W. (1999). Survey of gain-scheduling analysis design. *International Journal of Control*, 73 :1001–1025.

Lendek, Z. (2009). *Distributed Fuzzy and Stochastic Observers for Nonlinear Systems*. Thèse de doctorat, Delft university of technology, Pays-bas.

Levine, J. et Marino, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters. *Systems & Control Letters*, 7 :133–142.

Liu, G. et Patton, R. (1998). *Eigenstructure Assignment for Control Systems Design*. John Wiley & Sons.

Lou, X., A.S., W., et Verghese, G. (1986). Optimmally robust redundancy relations for failure detection in uncertain systems. *Automatica*, 22(3) :333–344.

Lozano, R. (2007). *Objets volants miniatures : modélisation et commande embarquée*. Hermes.

Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16 :596–602.

Lynch, A. et Bortoff, S. (1997). Nonlinear observer design by approximate error linearization. *Systems & Control Letters*, 32 :161–172.

Lynch, A. et Bortoff, S. (2001). Nonlinear observers with approximately linear error dynamics. The multivariable case. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(6) :927–932.

Mahmoud, M., Jiang, J., et Zhang, Y. (2003). *Active fault tolerant control systems : stochastic analysis and synthesis*. Springer.

Maquin, D. et Ragot, J. (2000). *Diagnostic des systèmes linéaires. Collection Pédagogique d'Automatique*. Hermès Science Publications, Paris.

Marconi, L., Isidori, A., et Serrani, A. (2002). Autonomous vertical landig on an oscillating platform : an internal-model based approach. *Automatica*, 38 :21–32.

Marx, B. (2003). *Contribution à la commande et au diagnostic de systèmes algébro-différentiels linéaires*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Grenoble, France.

Marx, B., Koenig, D., et Georges, D. (2003). Robust fault diagnosis for linear descriptor systems using proportional integral observers. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, USA.

Marx, B., Koenig, D., et Ragot, J. (2007). Design of observers for takagi sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis. *IET Control Theory and Application*, 1 :1487–1495.

Mazars, E., Jaimoukha, I., et Zhenhai, L. (2008). Computation of a reference model for robust fault detection and isolation residual generation. *Journal of Control Science and Engineering*. doi :10.1155/2008/790893.

Mazars, E., Li, Z., et Jaimoukha, I. (2006). A QMI approach to the robust fault detection and isolation problem. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Beijing, China.

Morère, Y. (2001). *Mise en œuvre de loi de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. Thèse de doctorat, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Valenciennes, France.

Nagy, A., Mourot, G., Marx, B., Schutz, G., et Ragot, J. (2009a). Model structure simplification of a biological reactor. In *15th IFAC Symposium on System Identification, SYSID'09*, Saint Malo, France.

Nagy, A., Mourot, G., Marx, B., Schutz, G., et Ragot, J. (2009b). State estimation of the three-tank system using a multiple model. In *48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC'09)*, Shanghai, Chine. papier accepté.

Nesterov, Y. et Nemirovsky, A. (1994). *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming*. SIAM ed.

Nicosia, S., Tomei, P., et Tornambè, A. (1989). A nonlinear observer for elastic robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 4(1) :45–52.

Niemann, H. et Stoustrup, J. (2005). Passive fault tolerant control of a double inverted pendulum–a case study. *Control Engineering Practice*, 13(8) :1047–1059.

Noura, H., Sauter, D., Hamelin, F., et Theilliol, D. (2000). Fault-tolerant control in dynamic systems : Application to a winding machine. *IEEE Control Systems Magazine*, 20(1) :33–49.

Orjuela, R. (2008). *Contribution à l'estimation d'état et au diagnostic des systèmes représentés par des multimodèles*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), Nancy, France.

Orjuela, R., Marx, B., Ragot, J., et Maquin, D. (2008). State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model. *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 4(1) :59–67.

Oudghiri, M. (2008). *Commande multimodèles tolérante aux défauts : application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile*. Thèse de doctorat, Université de Picardie Jules Verne, Amiens, France.

Palm, R. et Driankov, D. (1999). Towards a systematic analysis of fuzzy observers. In *18th NAFIPS Conference*, New York, NY, USA.

Patton, R. (1997). Fault-tolerant control systems : The 1997 situation. In *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*.

Patton, R., Chen, J., et Lopez-Toribio, C. (1998). Fuzzy observers for non-linear dynamic systems fault diagnosis. In *37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida USA.

Patton, R., Frank, P., et Clark, R. (1989). *Fault diagnosis in dynamic systems : Theory and application*. Prentice Hall international.

Patton, R., Frank, P., et Clark, R. (2001). *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer.

Pertew, A., Marquez, H., et Zhao, Q. (2006). H_∞ observer design for lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51 :1211–1216.

Pertew, A. M., Marquez, H. J., et Zhao, Q. (2005a). Design of unknown input observers for lipschitz nonlinear systems. In *American Control Conference*, Oregon, USA.

Pertew, A. M., Marquez, H. J., et Zhao, Q. (2005b). $\mathcal{H}_\infty$ synthesis of unknown input observers for nonlinear Lipschitz systems. *International Journal of Control*, 78(15) :1155–1165.

Phelps, A. (1991). On constructing nonlinear observers. *SIAM Journal of Control and optimization*, 29(3) :516–534.

Potter, J. et Suman, M. (1977). Thresholdless redundancy management with array of skewed instruments. Technical report, Integrity in Electronic flight control systems.

Raghavan, S. et Hedrick, J. K. (1994). Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*, 59(2) :515–528.

Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :397–401.

Rodrigues, M. (2005). *Diagnostic et commande active tolérante aux défauts appliqués aux systèmes décrits par des multi-modèles linéaires.* Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré (UHP), Nancy, France.

Seliger, R. et Frank, P. (1991a). Fault diagnosis by disturbance decoupled non-linear observers. In *30th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 2248–2255, UK, Brighton.

Seliger, R. et Frank, P. (1991b). Robust component fault detection and isolation in nonlinear dynamic systems using unknown input observers. In *IFAC/IMACS Symposium SafeProcess*, Baden-Baden, Germany.

Slotine, J.-J., Heydrick, J., et Misawa, E. (1987). On sliding observers for nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems*, 109 :245–252.

Sreedhar, R., Fernandez, B., et Masada, G. (1993). Robust fault detection in nonlinear systems using sliding mode observers. In *IEEE Conference on Control Applications CCA*, Vancouver, Canada.

Staroswiecki, M. (2005). Fault tolerant control : the pseudo-inverse method revisited. In *16th IFAC World Congress*, Seoul, Korea.

Stilwell, D. et Rugh, W. (1997). Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44 :1225–1229.

Stoustrup, J. et Niemann, H. (2000). Application of an H_∞ based FDI and control scheme for the three tank system. In *4th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Processes*, Budapest, Hungary.

Takagi, T. et Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 15 :116–132.

Tan, C. et Edwards, C. (2003a). Sliding mode observers for reconstruction of simultaneous actuator and sensor faults. In *Control and Decision Conference*, Hawaii, USA.

Tan, C. et Edwards, C. (2003b). Sliding mode observers for robust detection and reconstruction of actuator and sensor faults. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 13 :443–463.

Tanaka, K., Hori, T., et Wang, H. (2003). A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(4) :582– 589.

Tanaka, K., Ikeda, T., et Wang, H. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : Relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(2) :250–265.

Tanaka, K. et Wang, H. (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis : A Linear Matrix Inequality Approach*. John Wiley and Sons.

Tharrault, Y. (2008). *Diagnostic de fonctionnement par analyse en composantes principales : Application à une station de traitement des eaux usées*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France.

Thau, F. (1973). Observing the state of non-linear dynamic systems. *International Journal of Control*, 18 :471–479.

Ticlea, A. (2006). *Techniques d'immersion pour l'estimation non linéaire : Application aux systèmes de puissances*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble (INPG), Grenoble, France.

Tsinias, J. (1990). Further results on the observer design problem. *Systems & Control Letters*, 14(5) :411–418.

Tuan, H., Apkarian, P., Narikiyo, T., et Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. ieee trans. on fuzzy systems. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*, 9 :324–332.

Venkatasubramanian, V., Rengaswamy, R., Yin, K., et S.N., K. (2003). A review of process fault detection and diagnosis part i : Quantitative model-based methods. *Computers and Chemical Engineering*, 27 :293–311.

Walcott, B. et Zak, S. (1987). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2) :166–170.

Wang, S., Davison, E., et Dorato, P. (1975). Observing the states of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20 :716–717.

Wünnenberg, J. (1990). *Observer-based fault detection in dynamic systems*. Thèse de doctorat, University of Duisburg, Germany.

Wojciechowski, B. (1978). *Analysis and synthesis of proportional-integral observers for single-input-single-output time-invariant continuous systems*. Thèse de doctorat, Gliwice, Poland.

Xiong, Y. et Saif, M. (2003). Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, 39(8) :1389–1398.

Yang, H. et Saif, M. (1995). Nonlinear adaptive observer design for fault detection. In *Proceedings of the American Control Conference (ACC)*, pages 1136–1139, Seattle, USA.

Yang, H. et Saif, M. (1996). Monitoring and diagnosis of a class of nonlinear systems using nonlinear unknown input observer. In *IEEE Conference on Control Applications CCA*, Dearborn, Michigan, USA.

Yang, H. et Saif, M. (1997). State observation, failure detection and isolation (fdi) in bilinear systems. *International Journal of Control*, 67 :901–920.

Yaz, E. et Azemi, A. (1998). Actuator fault detection and isolation in nonlinear systems using lmis and lmes. In *American Control Conference (ACC)*, Pennsylvania, USA.

Yoneyama, J. (2008). H_∞ output feedback control for fuzzy systems with immeasurable premise variables : Discrete-time case. *Applied Soft Computing*, 8(2) :949–958.

Yoneyama, J. (2009). H_∞ filtering for fuzzy systems with immeasurable premise variables : an uncertain system approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(12) :1738–1748.

Zemouche, A., Boutayeb, M., et Bara, G. I. (2008). Observers for a class of lipschitz systems with extension to $\langle_\infty$ performance analysis. *Systems & Control Letters*, 57(1) :18–27.

Zhang, Q. (2002). Adaptive observer for multiple-input-multiple-output (mimo) linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(3) :525–529.

Zhang, Q. et Delyon, B. (2001). New approach to adaptive observer design for MIMO systems. In *American Control Conference*, Arlington, USA.

Zhong, M., Ding, S. X., Lam, J., et Wang, H. (2003). An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica*, 39(3) :543–550.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Didier GEORGES, Professeur, GIPSA-lab, Saint Martin d'Hères

Monsieur Thierry-Marie GUERRA, Professeur, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, Valenciennes

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur ICHALAL Dalil

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

« Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno »

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en « Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique »

Fait à Vandoeuvre, le 12 novembre 2009
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Estimation et diagnostic de systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno.

Résumé : Cette thèse traite le problème de l'estimation d'état, du diagnostic et de commande tolérante aux défauts des systèmes non linéaires représentés par un modèle de Takagi-Sugeno (T-S) à variables de prémisse non mesurables. De nombreux algorithmes pour la synthèse d'observateurs robustes vis-à-vis des perturbations, des imperfections de modélisation et des entrées inconnues sont présentés en se basant sur quatre types d'observateurs : les observateurs proportionnels, les observateurs à entrées inconnues, les observateurs proportionnel intégral (PI) et multi-intégral (PMI). Par la suite, ces derniers sont utilisés pour le diagnostic de fautes des systèmes non linéaires. Ceci est réalisé au moyen de trois stratégies. La première utilise l'observateur à entrée inconnue par découplage afin de rendre l'observateur insensible à certains défauts et permettre de détecter et d'isoler les défauts en construisant des bancs d'observateurs. En raison des conditions structurelles souvent insatisfaites, le découplage total des défauts de l'erreur d'estimation d'état n'est pas réalisable. Afin de s'affranchir de ces contraintes, la seconde stratégie utilise les observateurs PI et PMI pour estimer simultanément l'état et les défauts du système. La troisième stratégie qui utilise le formalisme $\mathcal{H}_\infty$ vise à concevoir un générateur de résidus minimisant l'influence des perturbations et maximisant l'influence des défauts. Un choix adéquat des paramètres du générateur de résidus permet la détection, la localisation et l'estimation des défauts. Enfin, une loi de commande tolérante aux défauts par poursuite de trajectoire d'un modèle de référence est proposée en exploitant les observateurs PI et PMI.

Mots-clés : Systèmes non linéaires, modèle de Takagi-Sugeno, estimation d'état robuste, formalisme $\mathcal{H}_\infty$, observateurs à entrées inconnues, diagnostic, commande tolérante aux défauts.

Estimation and diagnosis of nonlinear systems described by Takagi-Sugeno models.

Abstract: This thesis deals with state estimation, fault diagnosis and fault tolerant control of nonlinear systems represented by a Takagi-Sugeno model with unmeasurable premise variables. The problem of state estimation of nonlinear systems with T-S model with unmeasurable premise variable is explored. Algorithms for robust observers synthesis with respect to perturbations, modeling uncertainties and unknown inputs are afterward presented. These algorithms are based on four kinds of observers called proportional, unknown input observers (UIOs), proportional-integral (PI) and multiple-integral (PMI) . The application on model-based diagnosis is studied based on three strategies. The first one uses unknown input observer to decouple some faults and makes the observers insensitive to certain faults. This allows to detect and isolate faults by constructing observers banks. Due to strong structural conditions on designing UIOs decoupling the faults on the state estimation error is not possible. To avoid this problem, the second strategy uses PI and PMI observers in order to estimate simultaneously the state and the faults of the system. The third strategy uses the $\mathcal{H}_\infty$ formalism. This aims to minimize the influence of perturbations and to maximize the effects of faults on the residual signal. An adequate choice of the residual generator parameters allows to detect, to isolate and to estimate the faults affecting the system. Lastly, a fault tolerant control law is proposed by reference trajectory tracking based on the use of PI and PMI observers.

Keywords: Nonlinear systems, Takagi-Sugeno model, robust state estimation, state observers, $\mathcal{H}_\infty$ formalism, unknown input observers, faults diagnosis, fault tolerant control.