



HAL
open science

Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires

Nicolas Roland

► **To cite this version:**

Nicolas Roland. Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2010. Français. NNT : 2010INPL037N . tel-01748830

HAL Id: tel-01748830

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748830>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique

École Doctorale Énergie Mécanique et Matériaux

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée



Thèse de doctorat

en *Mécanique - Énergétique*

présentée par

Nicolas ROLAND

*Modélisation de la transition vers la turbulence
d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants
par calcul numérique d'ondes non linéaires*

Soutenue publiquement le 10 septembre 2010 devant le jury composé de

Alessandro BOTTARO	Professeur Università di Genova	Examinateur
Alvaro MESEGUER	Lecteur Universitat Politècnica de Catalunya	Examinateur
Éric SERRE	Chargé de recherche CNRS M2P2	Rapporteur
Christian WAGNER	Professeur Universität des Saarlandes	Rapporteur
Jean-Pierre BRANCHER	Professeur INPL	Président
Chérif NOUAR	Directeur de recherche CNRS LEMTA	Directeur de thèse
Emmanuel PLAUT	Professeur INPL	Co-directeur de thèse

Remerciements

Cette thèse constitue le fruit d'un travail de quatre ans au sein du Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée. Ces quatre années n'ont pas vraiment été de tout repos, et je me suis souvent demandé si j'en verrais un jour la fin...Mais elle m'a permis d'apprendre évidemment beaucoup sur le plan scientifique mais, et c'est peut-être le plus important, sur le plan humain et personnel. Évidemment une thèse ne peut se réussir seul et ces quelques lignes s'adressent à ceux qui d'une manière ou d'une autre m'ont apporté leur soutien.

Mes premiers remerciements vont respectivement à mon directeur de thèse, Chérif Nouar, et à mon co-directeur, Emmanuel Plaut. Ils m'ont proposé un sujet intéressant, et à posteriori je dirai presque un défi. Emmanuel m'a permis de mettre le pied à l'étrier et les discussions scientifiques tout au long de la thèse avec eux étaient intéressantes et instructives. Je leur adresse mes sincères remerciements pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant ces années et je tiens à souligner que sans eux, ce travail n'aurait pu être finalisé.

Ma gratitude va également à Mathieu Jenny, Maître de Conférences INPL, pour toutes les discussions que l'on a eu au sujet de l'élaboration de mon code.

Je tiens ensuite à remercier Éric Serre, Chargé de Recherches CNRS, de m'avoir fait l'honneur de rapporter mon travail et d'y avoir apporté un éclairage nouveau. Je remercie également Christian Wagner, Professeur à l'université de Saarlandes, d'avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse.

J'adresse ma reconnaissance à Alessandro Bottaro, Professeur à l'université de Gênes, et à Alvaro Meseguer, Professeur Associé à l'Université Polytechnique de Barcelone, pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens à remercier Christian Moyne et Fabrice Lemoine, qui se sont succéder à la direction du LEMTA, de m'avoir accueilli. Je remercie aussi les secrétaires pour leur disponibilité et amabilité. Merci aussi à tout le personnel que j'ai pu côtoyer durant ces années et en particulier Ludovic

Buhler pour sa sympathie et pour tous les problèmes informatiques qu'il a pu résoudre pour moi...

Je n'oublie évidemment pas les doctorants et ex-doctorants pour leur bonne humeur. Je pense tout d'abord à ceux qui ont partagé mon bureau : Yannick, Ahmed et Ali, qui sont partis et au petit nouveau Nicolas, à qui je souhaite également bon courage pour la suite. Je remercie particulièrement Youssef, avec qui j'ai passé quelques soirées, pour son écoute et son soutien. Merci à Fermin pour sa bonne humeur et sa culture cinématographique. Je pense aussi à Wassim et Benoît. Merci à Vincent et Bamdad, deux futurs doctorants à qui je souhaite bonne chance.

Merci aussi aux amis de plus longue date : Nadjim et Catherine pour les discussions que l'on a pu avoir sur la vie de thésard, et surtout à Alexandre pour toutes ces soirées PES!

Je remercie aussi ma famille, en particulier ma mère et ma soeur, qui, même si elles n'ont pas toujours compris ce que je faisais, ont toujours eu une pensée pour moi.

Ma plus profonde gratitude et reconnaissance vont à Virginie qui a toujours été présente et a toujours su trouver les mots pour me redonner courage. Elle m'a accompagné pendant ces quatre années et m'a tant apporté. Pour tout cela, je ne la remercierai jamais assez.

Merci.

À Virginie

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
1 Problématique de la thèse - Contexte et bibliographie	11
1.1 Transition vers la turbulence pour un fluide newtonien	11
1.1.1 Historique du problème	11
1.1.2 Études expérimentales	13
1.1.3 Études théoriques	16
1.1.4 Simulations numériques directes. États frontières.	21
1.2 Transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens	23
1.2.1 Importance technologique et variété des fluides non newtoniens	23
1.2.2 Premières études historiques de la transition vers la turbulence	24
1.2.3 Études expérimentales	25
1.2.4 Études numériques	30
1.3 Objectifs de la thèse	32
2 Loi de comportement - Écoulements de base et leur stabilité	34
2.1 Lois de comportement de fluides rhéofluidifiants	34
2.2 Équation de la dynamique et nombres adimensionnels	37
2.3 Écoulements de base et pertes de charge	40
2.3.1 Écoulements de base. Effet du paramètre λ	40
2.3.2 Coefficients de pertes de charge	43
2.3.3 Écoulements de base. Effets du paramètre n	44
2.4 Étude linéaire de stabilité	45

2.4.1	Équations du problème linéarisé	45
2.4.2	Exemples de spectres	47
3	Méthode de forçage pour calculer des ondes non linéaires	50
3.1	Calcul d'un écoulement indépendant de z : les rouleaux-jets	51
3.2	Choix du terme de forçage de l'écoulement	51
3.3	Analyse de stabilité linéaire et non linéaire de l'écoulement de rouleaux-jets	52
4	Modélisation numérique	54
4.1	Méthode pseudo-spectrale de Petrov-Galerkin	55
4.1.1	Fonctions de base	57
4.1.2	Méthode des résidus pondérés. Intégration par parties	58
4.1.3	Fonctions test	59
4.1.4	Conséquences de la symétrie des solutions	60
4.1.5	Équation projetée	61
4.1.6	Condition de phase	62
4.2	Méthode de continuation	62
4.2.1	Prédicteur : méthode d'Euler	63
4.2.2	Calcul du vecteur tangent	65
4.2.3	Correcteur : méthode de Newton-Raphson avec paramétrisation	66
4.3	Méthode inexacte de Newton-Raphson	69
4.3.1	Généralités. Utilisation de la GMRES	69
4.3.2	Critère d'arrêt des itérations de Newton : méthode inexacte de Newton	70
4.4	Aspects pratiques - Performances numériques	70
4.5	Validation du code	71
4.5.1	Validation pour un fluide newtonien	71
4.5.2	Validation pour un fluide rhéofluidifiant	72
5	Recherche d'ondes non linéaires $m_0 = 1$	78
5.1	Structures indépendantes de z forcées	79
5.2	Étude de stabilité de l'écoulement « rouleaux-jets »	80
5.3	Ondes non linéaires forcées	80

5.4	Raisons de l'échec de la démarche	82
6	Ondes non linéaires $m_0 = 2$ et 3	83
6.1	Introduction	83
6.2	Ondes non linéaires $m_0 = 3$	84
6.2.1	Nombres de Reynolds d'apparition des ondes	84
6.2.2	Structure des écoulements	91
6.2.3	Coefficients de perte de charge	92
6.3	Ondes non linéaires $m_0 = 2$	93
6.3.1	Nombres de Reynolds d'apparition des ondes	93
6.3.2	Structure des écoulements	99
6.3.3	Coefficient de perte de charge	101
	Conclusion et perspectives	103
A	Intégration numérique	105
A.1	Méthode des trapèzes	105
A.2	Méthode de quadrature de Gauss	106
B	Dérivation numérique	108
C	Méthode de Newton	110
D	Méthode de Backtracking	112
E	Calcul d'un point de bifurcation : méthode de la sécante	114
F	Méthode de changement de branche	116
G	Méthode d'Euler : contrôle du pas	118
H	Méthode GMRES avec préconditionneur	120
H.1	Méthode GMRES	120
H.2	Préconditionneur	121
H.3	Évaluation de l'action du jacobien sur un vecteur	123

I	Calculs dans l'espace physique	124
I.1	Calcul du champ de vitesse sur les points de grille : méthode de sommation partielle	124
I.2	Évaluation des termes non linéaires	125
	Bibliographie	131

Introduction

Dans le groupe « Milieux fluides, réactifs et multiphasiques » du LEMTA, plusieurs équipes s'intéressent aux fluides non newtoniens. Par exemple, l'équipe de Christophe Baravian se focalise sur la caractérisation et l'étude de l'organisation des milieux dispersés (interactions, structure, orientation, déformation), ainsi que les conséquences sur les lois de comportement et les propriétés physiques à l'échelle macroscopique (viscosité, élasticité, propriétés diffusionnelles). L'équipe de Jean-Pierre Brancher, dont je fais partie, s'intéresse elle aux problèmes de stabilité et à ceux de la transition vers la turbulence. Pour les problèmes de stabilité, on peut citer par exemple les travaux récents de Lebranchu (2008), ou encore celui de Métivier (2006), qui s'est intéressée aux instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques en canal plan.

En ce qui me concerne, je m'inscris dans la thématique de la transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens. Depuis 2002, un montage expérimental existe pour l'étude de l'écoulement dans un tuyau. Au départ, ce travail a été initié avec la thèse expérimentale de Jorge Peixinho (Peixinho 2004) et était centré sur l'étude des fluides à seuil. Une asymétrie inattendue lors de la transition a été observée, cf. par exemple la figure 9 de Peixinho et al. (2005). Cette asymétrie a été également observée par d'autres équipes à travers le monde, cf. Escudier et al. (2005). Devant le manque d'explications de ce phénomène, le projet s'est poursuivi par une seconde thèse expérimentale, celle d'Ahmed Esmael (Esmael 2008), portant également sur les fluides à seuil. Son travail, essentiellement expérimental, a permis d'avoir une meilleure description de cette asymétrie (Esmael & Nouar 2008). Une étude théorique par analyse linéaire de stabilité a également été menée. Une étude théorique plus poussée a semblé alors nécessaire.

Dans le même temps, une nouvelle approche pour l'étude de la transition vers la turbulence en fluide newtonien a émergé. Cette approche, basée sur un processus auto-entretenu (le « Self-Sustaining Process »¹) phénoménologique explicité par Waleffe (1995) et Waleffe (1997),

¹On le notera parfois SSP.

s'intéresse aux « structures très cohérentes » ondes non linéaires qui joueraient un rôle lors des bouffées turbulentes. Le SSP a permis de calculer de nouvelles solutions ondes en canal plan (Waleffe 1998, Waleffe 2001 et Waleffe 2003) mais aussi, et c'est ce qui nous intéresse, en tuyau (Faisst & Eckhardt 2003, Wedin & Kerswell 2004). Ma thèse s'inscrit dans la même démarche, le but étant d'étudier la transition vers la turbulence et, si possible, de modéliser l'asymétrie observée. Mais, contrairement aux travaux menés par J. Peixinho et A. Esmaël, j'ai travaillé sur un fluide rhéofluidifiant, vérifiant la loi de Carreau. Cette approche est originale en fluide non newtonien. En effet, seuls Stone et al. (2002), Stone et al. (2004) et Li et al. (2006) ont appliqué cette méthodologie « ondes non linéaires » mais à des fluides viscoélastiques, et en canal plan. Pour mener à bien ma thèse, j'ai été amené à développer un nouveau code pseudo-spectral de continuation (sans qu'aucun code de ce type n'existe avant mon arrivée au LEMTA).

Dans ce mémoire de thèse, je présente tout d'abord l'historique du problème de la transition vers la turbulence dans un tuyau et les méthodes qui ont été utilisées pour l'étudier. Ensuite, différents modèles de fluides non newtoniens rhéofluidifiants sont explicités (section 2.1), dont celui avec lequel j'ai travaillé : le modèle de Carreau. On se concentre ensuite sur les équations et les nombres adimensionnels entrant en jeu. Une étude des écoulements laminaires est donnée dans la section 2.3. Dans le chapitre 3, la méthode utilisée pour « attraper » les ondes non linéaires est expliquée. Dans le chapitre 4, les méthodes numériques du code sont décrites. Puis les deux derniers chapitres 5 et 6 exposent les résultats obtenus en utilisant le code.

Une version PDF de cette thèse est disponible sur le lien

<http://perso.ensem.inpl-nancy.fr/Nicolas.Roland/These.pdf> .

Chapitre 1

Problématique de la thèse - Contexte et bibliographie

1.1 Transition vers la turbulence pour un fluide newtonien

1.1.1 Historique du problème

Les écoulements en conduite cylindrique sont fréquemment rencontrés dans le monde industriel et leur étude présente un intérêt économique. En effet, les pertes de charges plus importantes en turbulence augmentent les coûts énergétiques. Mais, au-delà de l'intérêt que des industriels peuvent porter à ces écoulements, leur transition vers la turbulence constitue surtout une des plus vieilles énigmes de la mécanique des fluides.

La transition vers la turbulence en conduite cylindrique a commencé à être étudiée il y a plus d'un siècle par Osborne Reynolds (Reynolds 1883). En faisant des visualisations de l'écoulement par injection d'un filet de colorant à l'entrée de la conduite, il mit en évidence le rôle d'un nombre adimensionnel aujourd'hui appelé nombre de Reynolds,

$$\overline{Re} = \frac{DW_m}{\nu} \quad (1.1)$$

avec D le diamètre de la conduite, W_m la vitesse débitante du fluide, ν la viscosité cinématique. Le filet de colorant caractérise l'écoulement. Lorsqu'il est rectiligne, on est en présence d'un

écoulement laminaire (figure 1.1). À partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds \overline{Re} , le filet de colorant se met à osciller et diffuse dans toute la section de la conduite (figure 1.2). Au début de la transition, les états laminaires et turbulents coexistent.

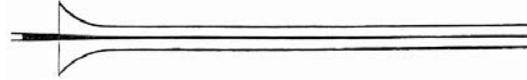


FIG. 1.1 – Écoulement laminaire d'un filet de colorant dans une conduite cylindrique (Reynolds 1883).



FIG. 1.2 – Filet rectiligne + zone de turbulence (Reynolds 1883).

O. Reynolds trouva deux valeurs critiques du nombre de Reynolds à partir desquelles la turbulence commence à apparaître : une limite inférieure aux alentours de $\overline{Re} \approx 2000$ et une limite supérieure $\overline{Re} \approx 12000$ obtenue en prenant plus de précautions. Une étude plus récente a réussi à élever cette limite supérieure à $\overline{Re} \approx 10^5$ (Pfenniger 1961).

Depuis, des études numériques ont montré que l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide newtonien est linéairement stable, c'est-à-dire stable face à de petites perturbations. Ceci a été prouvé par Davey & Drazin (1969) pour des perturbations axisymétriques, Salwen & Grosch (1972) pour des perturbations 3D, Garg & Rouleau (1972) pour une analyse spatiale de stabilité vis-à-vis de perturbations 3D. Récemment, Meseguer & Trefethen (2003) ont vérifié cette stabilité linéaire jusqu'à $Re = 10^7$, où Re est une autre définition du nombre de Reynolds utilisée lors des études numériques et théoriques et issue de l'adimensionnalisation des équations de Navier Stokes :

$$Re = \frac{aW_c}{\nu} \quad (1.2)$$

avec a le rayon de la conduite, W_c la vitesse de l'écoulement laminaire au centre de la conduite. Ce nombre de Reynolds définit en fait le gradient de pression appliqué pour entretenir l'écoulement.

La transition vers la turbulence dans ce système ne peut donc se comprendre à partir d'une théorie standard de bifurcation, i.e. à partir de l'effet de perturbations infinitésimales : elle est forcément plus complexe.

L'étude des mécanismes qui gouvernent la transition vers la turbulence a fait en conséquence

l'objet d'un grand nombre de travaux expérimentaux, numériques et théoriques.

1.1.2 Études expérimentales

Les études expérimentales effectuées par différents auteurs ont permis d'une part d'identifier deux types de structures apparaissant lors de la transition vers la turbulence. D'autre part, ces études ont fait ressortir le rôle de l'amplitude critique de la perturbation nécessaire pour provoquer la transition, et en particulier la dépendance de cette amplitude au nombre de Reynolds.

Dans les expériences effectuées à gradient de pression fixé par Wygnanski & Champagne (1973), l'écoulement qui subit une transition naturelle a été observé. À partir de la mesure de la vitesse axiale par anémométrie à fil chaud, les auteurs ont identifié deux types de structures : les « puffs » et les « slugs » .

Les « puffs » sont observés pour des nombres de Reynolds $2000 \leq \overline{Re} \leq 2700$ (figure 1.3). Ils sont générés par de fortes perturbations à l'entrée de la conduite. Ils gardent une taille constante et sont advectés à une vitesse de $0.9W_m$, où W_m est la vitesse débitante.

Les « slugs » sont observables pour $\overline{Re} \geq 3200$ (figure 1.3) et générés par l'instabilité de la couche limite vis-à-vis de petites perturbations. Ils ont eux, contrairement aux « puffs », tendance à s'étendre et la turbulence gagne alors toute la conduite.

Les « puffs » et les « slugs » peuvent être identifiés facilement à partir de la forme du signal de vitesse comme le montre la figure 1.4. Les chutes de vitesse axiale localisent les « puffs » et les « slugs » . On constate sur cette figure que tout le « slug » a la même vitesse, ce qui n'est pas le cas du « puff » .

L'existence de ces structures a été confirmée par les travaux expérimentaux de Darbyshire & Mullin (1995), où cette fois une perturbation est introduite loin de l'entrée, dans la zone où l'écoulement est développé. Darbyshire & Mullin (1995) ont étudié le rôle de ces perturbations dans la transition vers la turbulence. Contrairement à Wygnanski & Champagne (1973) et Wygnanski et al. (1975), leur expérience consiste en un écoulement à débit massique constant actionné par un piston. Cela ne modifie pas les phénomènes observés. Les perturbations sont des jets obliques injectés par un autre piston à travers des obturations dans le tuyau. Leur amplitude, leur fréquence et leur nombre (six au maximum) peuvent être contrôlés. La figure 1.5 montre le résultat d'études effectuées avec un seul jet. L'amplitude de perturbation A est définie comme la course du piston qui crée le jet, ce de façon périodique en temps ; dans le cas de la figure 1.5 la fréquence angulaire

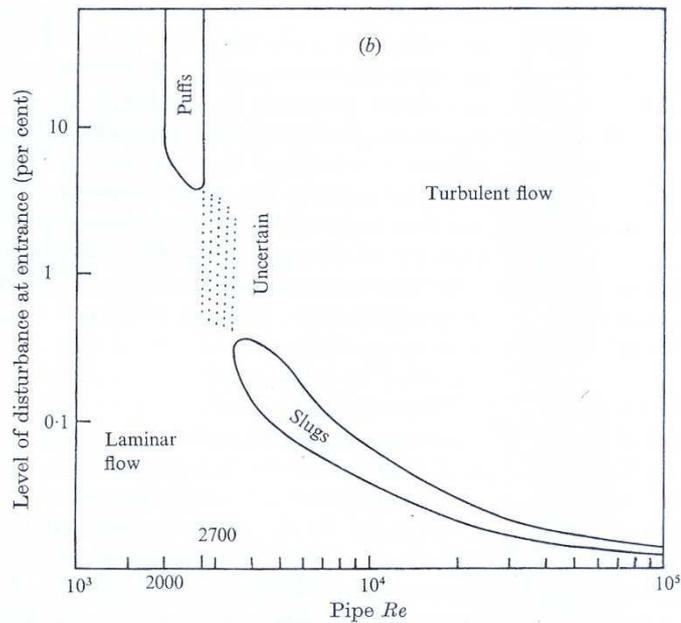


FIG. 1.3 – Diagramme représentant l'apparition des « puffs » et des « slugs » en fonction de l'amplitude de forçage (Wyganski & Champagne 1973). En abscisse, on a en fait le nombre de Reynolds \overline{Re} défini par (1.1).

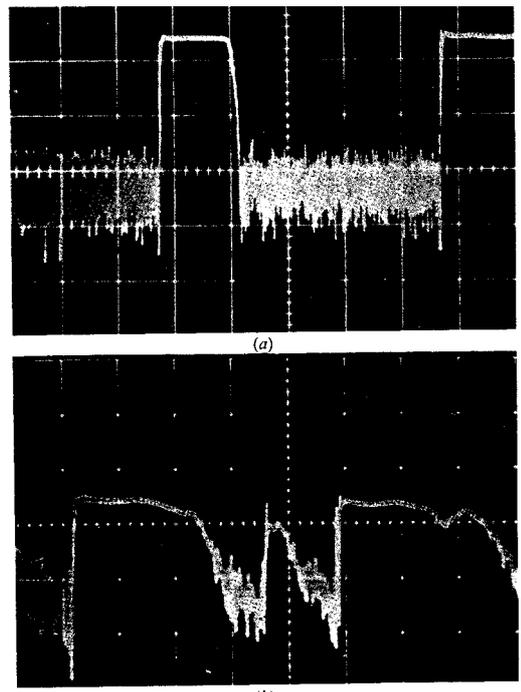


FIG. 1.4 – Signal de vitesse axiale en fonction du temps montrant le signal caractéristique des « slugs », en haut pour $\overline{Re} = 4200$, et une durée $T = 18$ s, et des « puffs », en bas pour $\overline{Re} = 2400$, et une durée $T = 9$ s (Wyganski & Champagne 1973).

de perturbation est $\omega = 0.41$ Hz. Une amplitude $A = 1$ correspond à une vitesse moyenne de jet de l'ordre de 0.2 m s^{-1} . Ce travail met en évidence l'existence d'un « double seuil » pour la transition vers la turbulence :

- un seuil $A = A(\overline{Re})$ en amplitude de la perturbation nécessaire pour provoquer la transition, qui décroît lorsque Re augmente
- un seuil en Reynolds ($\overline{Re} \approx 1760$) en dessous duquel la transition la turbulence ne peut s'entretenir, et cela quelle que soit l'amplitude A de la perturbation

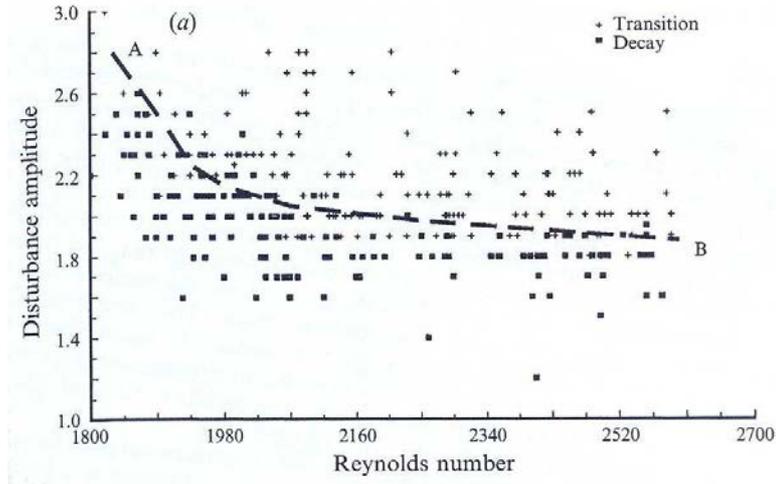


FIG. 1.5 – Diagramme représentant, en utilisant un seul jet, l'amplitude de perturbation nécessaire pour provoquer la transition en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re} (Darbyshire & Mullin 1995).

Hof et al. (2003) ont montré au moyen d'un dispositif expérimental similaire que l'amplitude A nécessaire pour provoquer la transition évolue en $A = O(\overline{Re}^{-1})$ quand le nombre de Reynolds est grand.

L'existence d'un seuil d'amplitude finie A pour provoquer la transition conforte l'idée, résultant déjà des analyses linéaires de stabilité, de l'absence totale de connection entre l'état laminaire et l'état turbulent. Les expériences de « trempes » de Peixinho & Mullin (2006) ont à nouveau mis en évidence le seuil pour la transition entre l'état laminaire et turbulent, soit pour eux une valeur de l'ordre de 1750. Peixinho & Mullin (2006) provoquent l'apparition d'un « puff » à $\overline{Re} = 1900$ et diminuent progressivement \overline{Re} jusqu'à un nombre de Reynolds final \overline{Re}_f . Ils observent ainsi l'évolution du « puff » le long de la conduite. Ils ont constaté que la durée de vie des puffs tend vers l'infini lorsque le nombre de Reynolds final \overline{Re}_f tend vers la valeur critique de transition

$\overline{Re} \approx 1750$ (figure 1.6).

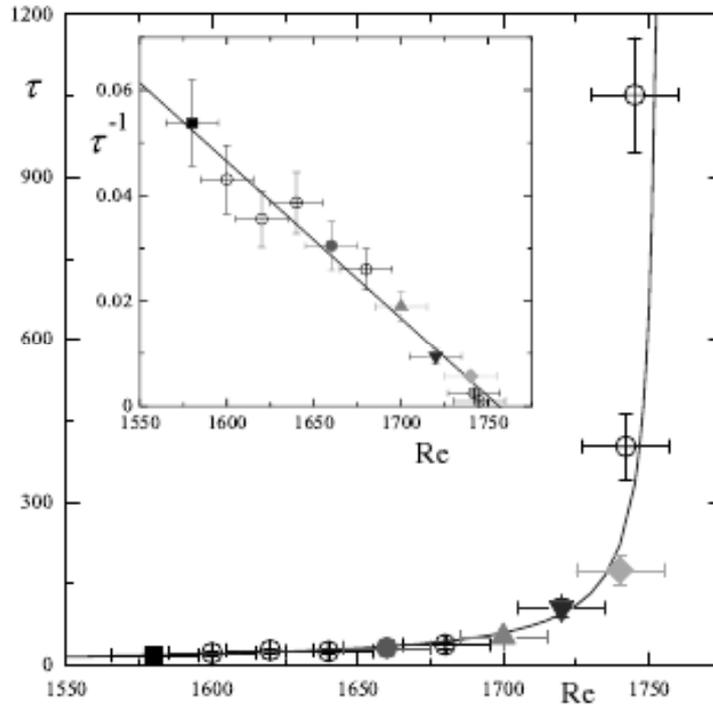


FIG. 1.6 – Variation du taux de décroissance du « puff » en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re} (Peixinho & Mullin 2006).

1.1.3 Études théoriques

Théorie linéaire de stabilité

Une étude linéaire de stabilité consiste à imposer à l'écoulement de base \mathbf{U}_b une perturbation $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ de très faible amplitude. Cette perturbation est de la forme $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}(x, y, z)e^{\sigma t}$. Ces analyses se ramènent à la résolution d'un problème aux valeurs propres. Si l'amplitude de cette perturbation se met à croître au cours du temps, ce qui est signalé par $\Re(\sigma) > 0$, on dit que l'écoulement est linéairement instable. Comme cela a déjà été évoqué dans la section 1.1.2, des études linéaires de stabilité ont été menées pour l'écoulement de Hagen-Poiseuille. Puisqu'il est désormais admis que toutes ces perturbations s'amortissent pour tous les nombres de Reynolds, l'équation de Navier-Stokes linéarisée autour de l'écoulement de Hagen-Poiseuille ne peut être utilisée pour trouver une nouvelle solution. Il n'existe pas de point de bifurcation à partir duquel une analyse non linéaire pourrait être menée pour suivre une nouvelle branche de solution.

La croissance transitoire

La croissance transitoire est l'amplification sur un temps court d'une perturbation initiale d'énergie suivie d'une décroissance exponentielle. L'énergie cinétique totale E d'une perturbation \mathbf{u} par rapport à l'écoulement de base \mathbf{U}_b est définie par

$$E = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 d\Omega \quad (1.3)$$

avec Ω le volume du domaine considéré. La théorie de la croissance transitoire est en général basée sur une étude linéaire pour des perturbations périodiques en espace. Dans ce cas, le terme non linéaire $\underline{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ n'entre pas en jeu dans l'équation d'évolution de l'énergie E , l'équation de Reynolds-Orr :

$$\frac{dE}{dt} = - \iiint_{\Omega} (\underline{\nabla} \mathbf{U}_b \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} d\Omega - \frac{1}{Re} \iiint_{\Omega} |\underline{\nabla} \mathbf{u}|^2 d\Omega. \quad (1.4)$$

Cette équation montre la possibilité d'un transfert d'énergie de \mathbf{U}_b vers \mathbf{u} , si la structure du champ \mathbf{u} est adéquate. Schmid & Henningson (1994) ont mis en évidence un phénomène de croissance transitoire pour des solutions 2D indépendantes de z . Ils ont montré que ces rouleaux transverses sans dépendance axiale n'ont pas de source d'énergie en raison de leur indépendance par rapport à z . On assiste aux temps longs à une décroissance avec le temps conduisant à la décroissance de l'énergie totale dans un écoulement indépendant de z . Schmid & Henningson (1994) concluent en suggérant que la croissance transitoire combinée avec un processus non linéaire auto entretenu pourrait peut-être empêcher le retour à l'écoulement de Hagen-Poiseuille. Zikanov (1996) a montré qu'une perturbation 3D pouvait croître quand on l'applique sur un écoulement modulé par ce type de rouleaux. Mais cette perturbation finissait par décroître car les rouleaux perdaient leur énergie. Lui aussi suggéra alors qu'un mécanisme pourrait entretenir ces rouleaux. Ce processus a été découvert par Waleffe (1997).

Le « Self-Sustaining Process »

Récemment une nouvelle approche théorique est apparue : le « Self-Sustaining Process ». Les travaux de Waleffe (1995) et Waleffe (1997) en canal plan ont initié et mis en place les éléments de cette approche en tentant d'expliquer comment la turbulence est maintenue. L'idée est, au lieu d'effectuer une étude linéaire de stabilité de l'écoulement laminaire \mathbf{U}_b , d'étudier la stabilité linéaire d'un nouvel écoulement de base. Ce nouvel écoulement de base se développerait

au cours d'un processus de croissance transitoire, et s'avère instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales pour mener à une bifurcation sous-critique. Comme son nom l'indique le SSP désigne un mécanisme d'auto-entretien de structures « cohérentes ». Trois structures entrent en jeu et s'entretiennent entre elles dans ce processus :

- des rouleaux transverses $(\tilde{U}(r, \theta), \tilde{V}(r, \theta), 0)$ qui sont une perturbation d'amplitude finie A de l'écoulement de base, i.e. l'écoulement laminaire $\mathbf{U}_b(r)$;
- des « jets » axiaux $\tilde{W}(r, \theta)$ qui sont l'écart à l'écoulement $W_b(r)$;
- des ondes tridimensionnelles $\tilde{\mathbf{v}}(r, \theta, z)$.

La perturbation \mathbf{u} à l'écoulement laminaire W_b est donc représentée par

$$\mathbf{u} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{U}(r, \theta) \\ \tilde{V}(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{rouleaux}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{W}(r, \theta) \end{pmatrix}}_{\text{jets}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{u}(r, \theta, z) \\ \tilde{v}(r, \theta, z) \\ \tilde{w}(r, \theta, z) \end{pmatrix}}_{\text{ondes.}} \quad (1.5)$$

Les rouleaux transverses vont par advection former des « jets » axiaux. On sera alors en présence d'un nouvel écoulement de base $W_b(r) + \tilde{W}(r, \theta)$. Ce nouvel écoulement présente une instabilité inflexionnelle vis-à-vis d'une perturbation onde 3D $\tilde{\mathbf{v}}(r, \theta, z)$. Les interactions non linéaires entre cette onde et les rouleaux-jets fournissent de l'énergie aux rouleaux (figure 1.7).

En suivant cette idée du SSP, Waleffe a développé une approche reposant sur un forçage artificiel pour les écoulements de Couette plan et Poiseuille plan (Waleffe 1998 et Waleffe 2003) pour calculer des ondes non linéaires. En utilisant comme paramètre de continuation l'amplitude A_F du terme de forçage artificiel, Waleffe crée des rouleaux transverses et des jets d'amplitude finie. Puis il teste la stabilité de cet écoulement vis-à-vis d'une onde 3D. S'il y a bifurcation sous-critique, il suit la nouvelle branche de solution jusqu'à ce que l'amplitude A_F s'annule. Le terme de forçage ayant disparu, on est alors en présence d'une solution physique. Ce procédé a été adapté avec succès au cas d'une conduite cylindrique par Faisst & Eckhardt (2003) et Wedin & Kerswell (2004).

Ondes non linéaires propagatives

En adaptant l'approche par forçage artificiel de Waleffe au cas d'écoulement en tuyau, Faisst & Eckhardt (2003) et Wedin & Kerswell (2004) ont réussi à calculer des ondes non linéaires apparaissant à

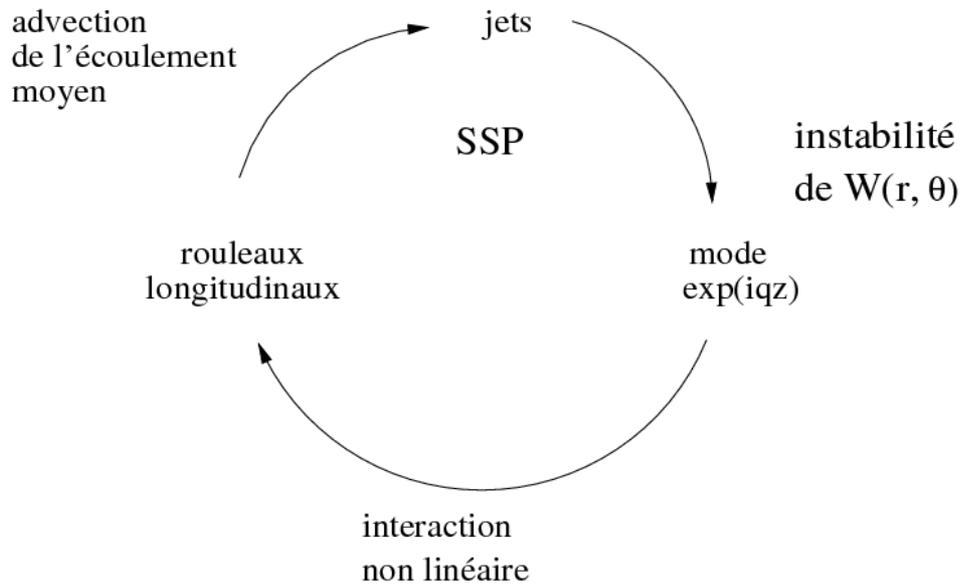


FIG. 1.7 – Le processus auto-entretenu proposé par Waleffe (1997).

partir d'une bifurcation nœud-col pour différents nombres d'onde azimutaux m_0 . Ces ondes respectent la symétrie de type « miroir et translation »

$$S_1 : (r, \theta, z, u, v, w) \longmapsto (r, -\theta, z + \pi/q_0, u, -v, w), \quad (1.6)$$

où q_0 est le nombre d'onde axial fondamental. Dans l'équation (1.6) et dans ce qui suit, on note (u, v, w) les composantes de la perturbation de vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{U}_b$, dans la base locale des coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Le nombre de Reynolds le plus bas d'apparition de ces ondes est de l'ordre de $\overline{Re} = 1250$, pour un nombre d'onde azimutal $m_0 = 3$. On peut visualiser ces ondes sur la figure 1.8. On voit bien sur cette figure les paires de rouleaux longitudinaux et les jets lents et rapides, introduits formellement figure 1.7. Ces ondes non linéaires pourraient constituer le squelette de l'attracteur turbulent sur lequel se « construisent » les « puffs » et les « slugs ». Des études expérimentales ont appuyé cette idée : voir la figure 1.9 extraite de Hof et al. (2004). Pringle & Kerswell (2007) ont découvert avec un nouveau terme de forçage deux nouvelles familles d'ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal $m_0 = 1$ présentant une nouvelle classe

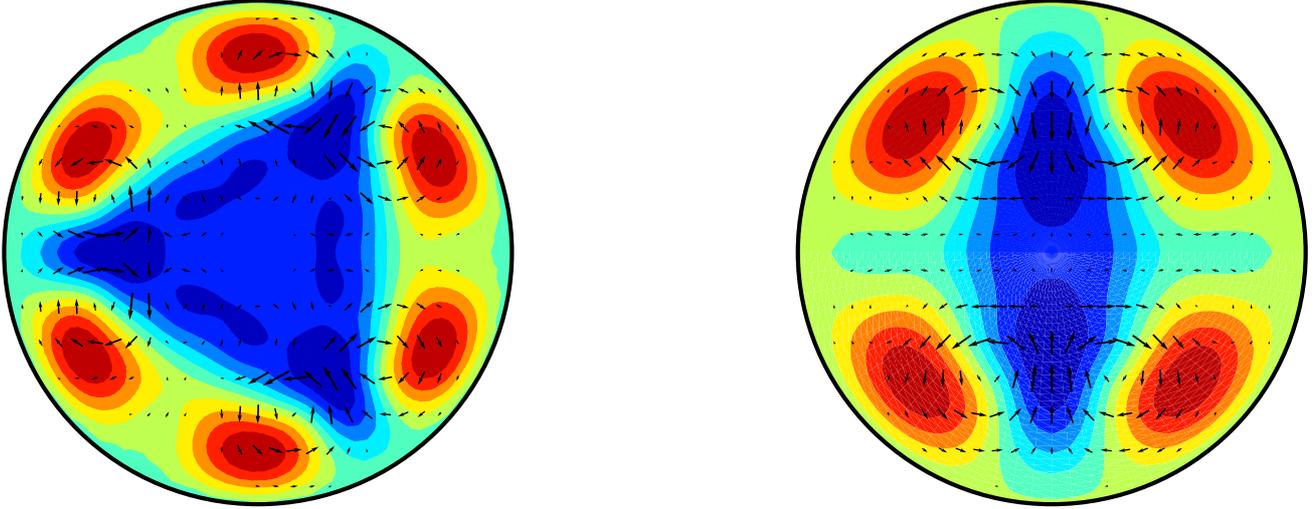


FIG. 1.8 – Ondes non linéaires en fluide newtonien pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$ (à gauche) et $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$ (à droite) aux nombres de Reynolds critiques $\overline{Re} = 1250$ (à gauche) et $\overline{Re} = 1360$ (à droite) ; les couleurs montrent les contours de la vitesse axiale moyennées en z , à laquelle on a retranché l'écoulement laminaire de même débit, les flèches montrent l'écoulement transverse moyenné en z . 10 niveaux allant du minimum (bleu foncé) au maximum (rouge) de la vitesse axiale \overline{w}_m^z ont été déterminés (on voit donc 9 contours). Seuls les vecteurs vitesse transverse qui ont une norme au-dessus de 10% de la norme max mesurée sur la grille de points utilisée ont été tracés ; ces ondes ont été calculées grâce au code qui sera présenté (section 4). Ces figures sont une version LEMTA des figures 12 et 13 de Wedin & Kerswell (2004).

de symétrie par rapport à Faisst & Eckhardt (2003) et Wedin & Kerswell (2004). Une première famille vérifie uniquement la symétrie S_1 (voir figure 1.10b), la seconde (figure 1.10a) la symétrie S_1 plus une autre symétrie de type « symétrie centrale et translation »¹,

$$\Omega_1 : (r, \theta, z, u, v, w) \longmapsto (r, \theta + \pi, z + \pi/q_0, u, v, w). \quad (1.7)$$

La première famille est qualifiée d'« asymétrique » et la seconde de « symétrique à 2 miroirs ». Cette deuxième famille d'onde mise en évidence par Pringle & Kerswell (2007) apparaît à un nombre de Reynolds beaucoup plus petit que celles découvertes en 2003 : $\overline{Re} = 773$. Pringle et al. (2009) ont précisé le nombre de Reynolds d'apparition de l'onde « asymétrique », égal à $\overline{Re} = 820$. Ces ondes non linéaires découvertes par Pringle & Kerswell (2007) et Pringle et al. (2009) semblent s'appuyer dans l'espace des phases sur une surface séparant le bassin d'attraction de

¹En composant S_1 et Ω_1 , on obtient la symétrie de type « miroir et translation »

$$\Omega_1 \circ S_1 : (r, \theta, z, u, v, w) \longmapsto (r, \pi - \theta, z, u, -v, w).$$

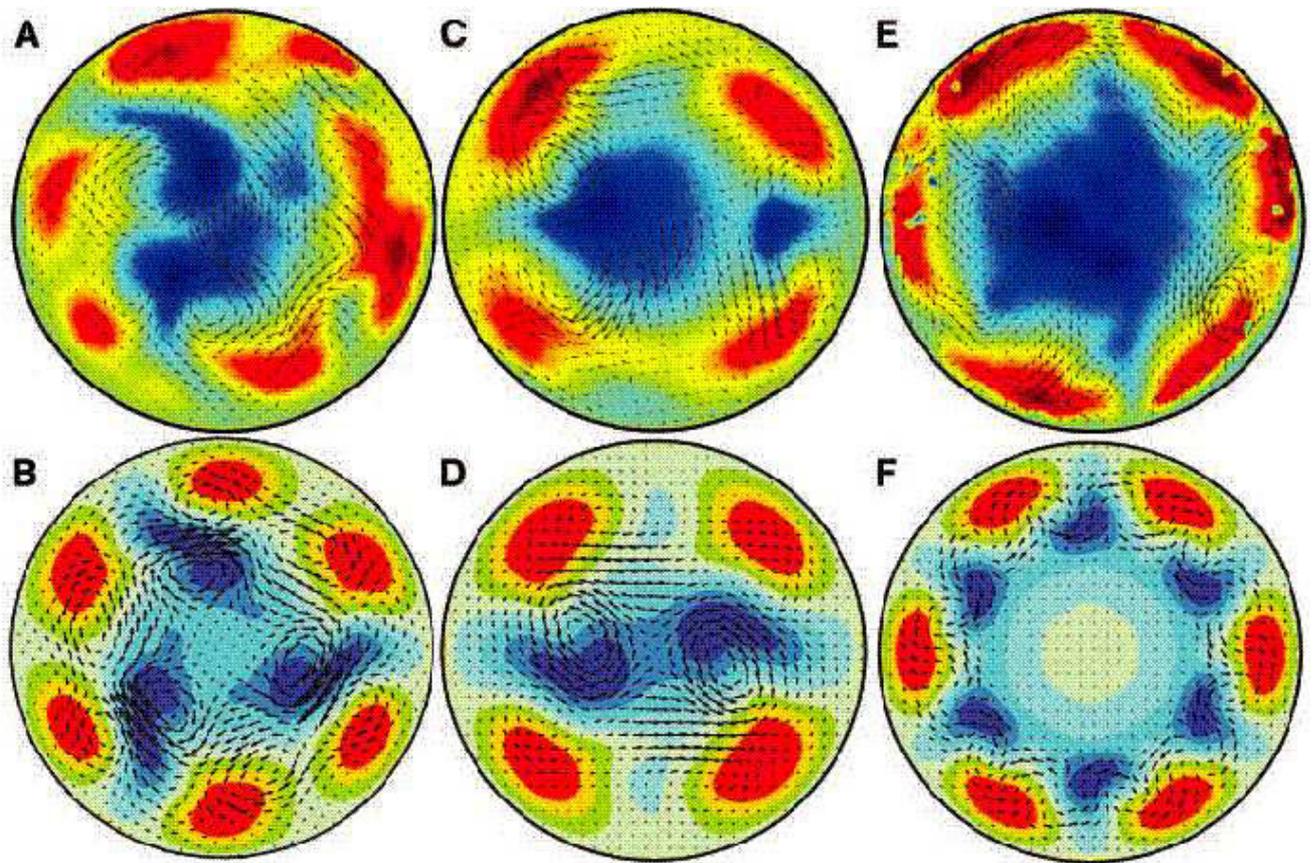


FIG. 1.9 – Figure extraite de Hof et al. (2004). Comparaison expérimentale (haut) et numérique (bas) d'écoulements en tuyau. Le champ de vitesse transverse est indiqué par des flèches et la composante axiale par la couleur. En rouge, les zones de survitesse et en bleues les zones plus lentes que l'écoulement laminaire. (A) Observation expérimentale d'une structure de nombre d'onde azimutal $m_0 = 3$ dans un puff turbulent à $\overline{Re} = 2000$. (B) Champ de vitesse obtenu numériquement pour une onde non linéaire de nombre d'onde azimutal $m_0 = 3$ à $\overline{Re} = 1250$. (C) Observation expérimentale d'une structure de nombre d'onde azimutal $m_0 = 2$ dans un puff turbulent à $\overline{Re} = 2500$. (D) Onde non linéaire de nombre d'onde azimutal $m_0 = 2$ calculée numériquement à $\overline{Re} = 1360$. (E) Observation expérimentale d'une structure de nombre d'onde azimutal $m_0 = 6$ dans pour un écoulement pleinement turbulent à $\overline{Re} = 5300$. (F) Onde non linéaire de nombre d'onde azimutal $m_0 = 6$ calculée numériquement à $\overline{Re} = 2900$.

l'écoulement laminaire du turbulent.

1.1.4 Simulations numériques directes. États frontières.

Les travaux de Schneider et al. (2007), grâce à des simulations numériques directes, ont mis en évidence l'« edge of chaos », une surface frontière dans l'espace des phases qui sépare les conditions initiales qui décroissent vers l'écoulement laminaire de celles qui mènent vers la turbulence. Ce travail a permis d'arriver à la conclusion que la dynamique de cette frontière ne se résume

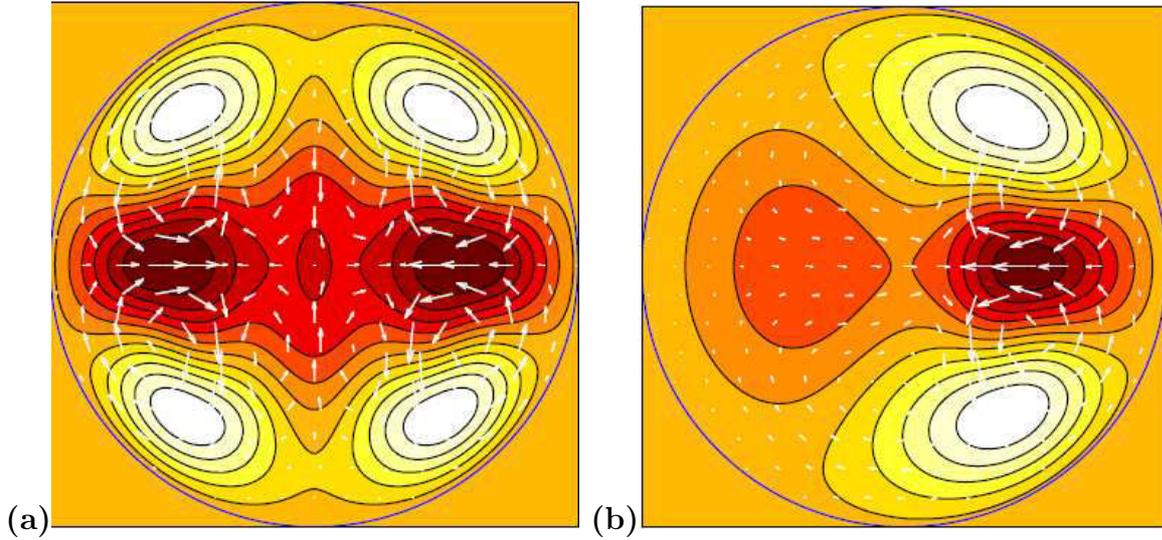


FIG. 1.10 – Ondes non linéaires en fluide newtonien, calculées par Pringle & Kerswell (2007) pour $m_0 = 1$, $q_0 = 0.75$. (a) $\overline{Re} = 1344$ pour la solution « symétrique à 2 miroirs ». (b) $\overline{Re} = 2900$ pour la solution « asymétrique ». Les mêmes champs de vitesse que ceux de la figure 1.8 sont visualisés.

pas uniquement à une onde non linéaire, puisque des solutions chaotiques ou faiblement turbulentes sont obtenues. Duguet et al. (2008b), qui ont étudié ces états frontières au moyen d'une simulation directe couplée à une méthode de Newton-Krylov, expliquent par contre qu'elle est organisée autour d'ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal $m_0 = 1$ qui sont en fait des points selles liés entre eux par des connections hétéroclines. Ces solutions ondes sont les ondes « asymétrique » de la figure 1.10b. D'autres types de solutions cohérentes existent. Ainsi, Duguet et al. (2008a) se sont intéressés aux orbites périodiques relatives. Il s'agit d'un écoulement qui se répète périodiquement dans un référentiel en mouvement. Ces orbites périodiques relatives ont été mise en évidence au moyen d'une simulation directe couplée à une méthode de Newton-Krylov. Tout comme les ondes non linéaires ces orbites sont instables et se situent sur l'« état frontière ».

Mellibovsky & Meseguer (2008) ont étudié le bassin d'attraction de l'état laminaire. Cette étude numérique consiste à appliquer des jets de manière impulsionnelle à l'écoulement et à déterminer l'amplitude nécessaire A pour provoquer la turbulence. Ce travail est complémentaire des travaux expérimentaux de Hof et al. (2003). L'évolution de l'amplitude A en \overline{Re}^{-1} est bien retrouvée pour $\overline{Re} = O(10^4)$. Pour des nombres de Reynolds plus faibles, ils ont eux aussi montré que des ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal $m_0 = 1$, du type de celle de la figure 1.10b, jouent un rôle dans la transition vers la turbulence. Mellibovsky et al. (2009) ont également étudié l'« état frontière » et ont suivi les trajectoires critiques dans l'espace des phases. Ils ont en particulier étudié les puffs turbulents issus de l'« état frontière ». Jusqu'à $\overline{Re} = 2200$, l'« état

frontière » et les puffs turbulents qui en sont issus ont des propriétés énergétiques et spatiales proches. Au delà, l'énergie de ces puffs turbulents est beaucoup plus grande et ils s'étendent spatialement.

1.2 Transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens

1.2.1 Importance technologique et variété des fluides non newtoniens

La transition vers la turbulence dans des écoulements de fluides non newtoniens reste l'un des défis de la physique contemporaine et de la technologie. Les fluides non newtoniens sont généralement des solutions de polymères ou des suspensions de particules solides ou déformables. Le caractère non newtonien résulte de l'interaction non linéaire entre l'écoulement et la structure interne du fluide à l'échelle mésoscopique. À cette échelle, une modification des forces hydrodynamiques induit une réorganisation de la structure interne du fluide. Cette réorganisation se traduit au niveau macroscopique par une variation de la viscosité et donc de l'écoulement. La plupart des fluides non newtoniens sont rhéofluidifiants. Leur viscosité diminue lorsqu'on augmente la contrainte. Lorsque l'échelle de temps caractéristique de la réorganisation de la structure interne du fluide devient du même ordre de grandeur ou plus grande que l'échelle de temps de l'écoulement, le fluide est dit thixotrope ; la caractérisation rhéologique de tels fluides nécessite l'introduction d'une équation supplémentaire qui décrit l'évolution de la structure interne du fluide au cours du temps. Certaines solutions de polymères flexibles ont la capacité de stocker de l'énergie et de la restituer lorsque la contrainte appliquée est annulée. Ces fluides sont dits viscoélastiques. Lorsque le temps de relaxation du fluide est du même ordre de grandeur ou plus grand que le temps caractéristique, le caractère élastique de ces fluides doit être pris en considération. Les fluides non newtoniens sont rencontrés dans de nombreux procédés industriels agroalimentaires, chimiques et pétroliers. Un des effets les plus remarquables du comportement non newtonien est la réduction de traînée découverte par Toms (1949) : l'ajout de quantité infime de polymères (quelques parties par millions) peut induire en régime turbulent une forte réduction des pertes de charges. Cet effet est particulièrement utilisé dans le transport à longue distance dans les pipelines ou dans les jets à incendie. À des concentrations plus importantes, les effets non linéaires élastiques peuvent pro-

voquer une turbulence faible à très bas nombre de Reynolds (Larson 2000, Groisman & Steinberg 2000).

1.2.2 Premières études historiques de la transition vers la turbulence

Comparativement au cas newtonien, très peu de résultats existent dans la littérature sur la transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens. Ceci n'est pas étonnant au regard de la complexité à étudier ces fluides. Les premières études relatives à la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour des fluides non newtoniens datent des années 50. Il s'agit d'approches phénoménologiques pour déterminer un nombre de Reynolds critique. On utilise pour les fluides non newtoniens rhéofluidifiants un nombre de Reynolds basé sur la viscosité à la paroi² :

$$\overline{Re}_p = \frac{2a\rho W_m}{\mu_p} \quad (1.8)$$

avec W_m la vitesse débitante et μ_p la viscosité à la paroi. L'approche générale consiste à caractériser la transition par un paramètre adimensionnel qui se présente sous la forme d'un rapport de deux quantités physiques, l'une favorisant le développement des instabilités et l'autre les freinant. La valeur critique de ce paramètre adimensionnel peut être calculée pour un fluide newtonien. Il est supposé que cette valeur critique soit la même pour les fluides non newtoniens. Plusieurs critères ont été proposés dans la littérature et continuent à faire l'objet de publications surtout dans les revues de la Society of Petroleum Engineers (SPE). Parmi ces critères, on cite le critère de Metzner & Reed (1955) où le paramètre adimensionnel utilisé est le coefficient de frottement C_f . Pour un fluide newtonien, $C_f \approx 0.008$ à $\overline{Re} = 2000$ à la transition. Il est ensuite admis que $C_f \approx 0.008$ à la transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens. À partir de cette valeur de C_f , le nombre de Reynolds critique \overline{Re}_p est déterminé. On peut encore citer le critère de Ryan & Johnson (1959). Dans ce critère, il est suggéré de considérer le rapport entre l'énergie transférée par l'écoulement de base vers la perturbation via les contraintes de Reynolds et l'énergie dissipée par frottement. La valeur de ce rapport est calculée pour un fluide newtonien lors de la transition vers la turbulence. Il est ensuite supposé que la valeur de ce rapport est la même pour les fluides non newtoniens purement visqueux.

En fait une étude comparative, présentée dans les figures 3.3 et 3.4 de Peixinho (2004), des

²voir section 2.2 pour plus de détails sur la définition de \overline{Re}_p .

nombres de Reynolds critiques \overline{Re}_p déduits de ces différents critères montre une divergence des résultats lorsque l'on s'écarte de manière significative du comportement newtonien. Il n'existe aucune étude théorique qui permet de justifier le choix d'un critère plutôt qu'un autre. Ceci constitue d'ailleurs un problème majeur rencontré par les industriels lors du dimensionnement d'une installation où il est nécessaire de connaître le nombre de Reynolds \overline{Re}_p à partir duquel l'écoulement n'est plus laminaire.

1.2.3 Études expérimentales

Très peu de résultats relatifs à la transition vers la turbulence pour des fluides non newtoniens existent dans la littérature, en dépit de l'importance de ce problème dans de nombreux procédés industriels. Bien que limitée, la littérature existante fait ressortir des résultats qui restent encore inexpliqués. En effet, à partir d'une certaine valeur critique du nombre de Reynolds \overline{Re}_p , notée par la suite \overline{Re}_{c1} , les profils de vitesse axiale moyennée $\langle v_z \rangle$ temporellement présentent une asymétrie croissante avec le nombre de Reynolds. Ce nombre de Reynolds \overline{Re}_{c1} correspond aussi à un début d'augmentation du taux de fluctuations de l'écoulement, ou intensité turbulente It . Cette intensité est le rapport entre le taux de fluctuations et la vitesse débitante, au voisinage de la paroi, plus exactement à $r/a = 0.8$, comme cela a été suggéré par Park et al. (1989). L'asymétrie de la vitesse axiale moyenne que l'on peut visualiser sur la figure 1.11a est stable et reproductible. Sur cette figure, les résultats expérimentaux de la vitesse axiale sont signalés par des symboles. Le trait continu représente un profil symétrique de vitesse axiale. Il est construit comme une moyenne arithmétique entre $\langle v_z(r) \rangle$ et $\langle v_z(-r) \rangle$ à partir du profil expérimental. La figure 1.11b représente It mesuré à $r/a = 0.8$, comme cela a été suggéré par Park et al. (1989), en fonction du nombre de Reynolds. Cette représentation est utilisée pour détecter le nombre de Reynolds critique à partir duquel commence la transition vers la turbulence.

En régimes laminaire et turbulent, l'écoulement est axisymétrique. L'asymétrie de l'écoulement, qui n'apparaît donc qu'en régime transitionnel, a été notée la première fois par Escudier & Presti (1996), lors de leur étude de la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour un fluide thixotrope. Il s'agissait d'une suspension de Laponite (argile synthétique) à 1.5% en masse. C'est un fluide rhéofluidifiant, thixotrope et qui possède une contrainte seuil d'écoulement. A l'équilibre, le comportement rhéologique est décrit par le modèle d'Herschel-Bulkley (section 2.1). D'après les auteurs, la suspension de Laponite est pratiquement inélastique. Ceci se manifeste d'ailleurs par

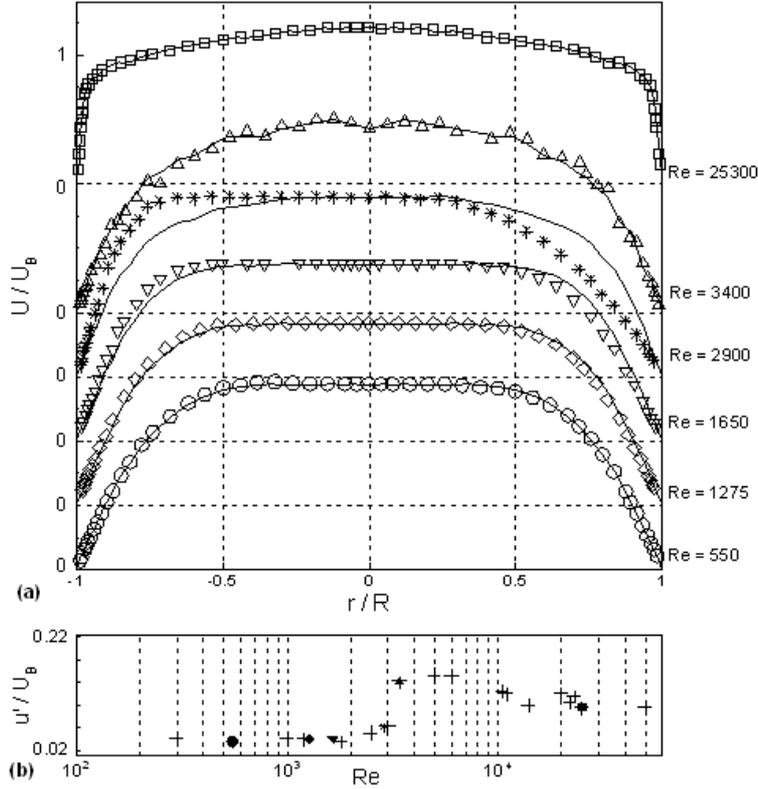


FIG. 1.11 – Fluide thixotrope composé d’une suspension de Laponite à 1.5% en masse : (a) Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds allant du régime laminaire au régime turbulent. (b) Intensité de turbulence mesurée à $r/a = 0.8$ (Escudier et al. 2005).

un faible degré de réduction de frottement constaté en régime turbulent par Escudier & Presti (1996). Il a été montré récemment, par Escudier et al. (2009) et par Esmael (2008), que l’intensité de la turbulence It varie, à rayon fixé, avec la position azimutale. Par exemple, dans le cas de la suspension de Laponite, la figure 1.11b, ne montre pas à $\overline{Re}_{c1} = 1275$, une augmentation It alors qu’on assiste à un début de l’asymétrie de l’écoulement. Une mesure de It à une autre position azimutale aurait probablement indiqué que l’écoulement est dans la phase de transition, voir la figure 1.12. Pour résumer, on observe en régime transitionnel l’apparition d’une asymétrie à \overline{Re}_{c1} . Ce nombre de Reynolds est caractérisé par une augmentation de l’intensité turbulente It . Mais il est à noter que It dépend de la position azimutale.

On introduit un deuxième nombre de Reynolds critique, noté \overline{Re}_{c2} , à partir duquel une très forte augmentation de It est observée. Dans le cas de la suspension de la Laponite de la figure 1.11, on a $\overline{Re}_{c2} \approx 2900$. A partir de cette dernière valeur de \overline{Re}_p , l’asymétrie décroît et le profil de vitesse axiale moyenne redevient axisymétrique au nombre de Reynolds où l’intensité de turbulence est maximale, $\overline{Re}_p \approx 5000$ pour le cas de la Laponite figure 1.11. Cette dernière valeur de \overline{Re}_p , notée

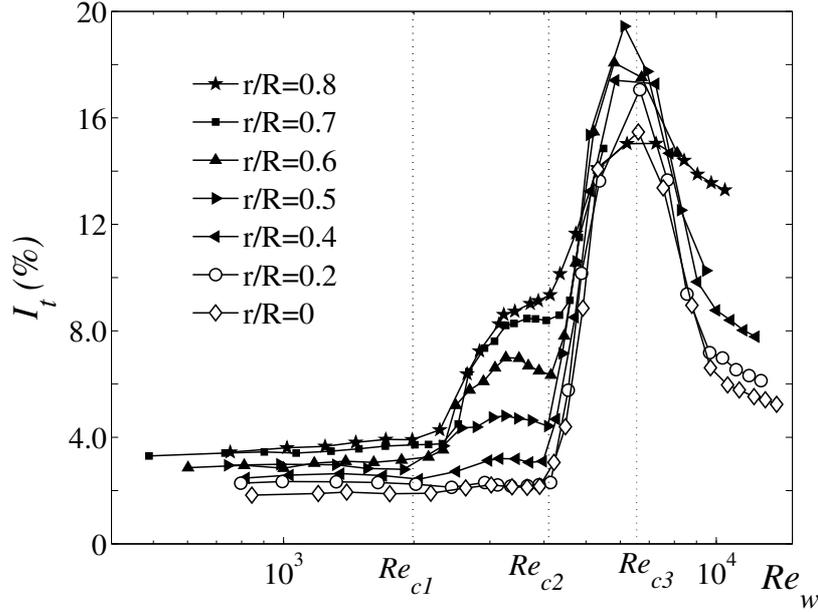


FIG. 1.12 – Carbopol à 0.2% en masse : intensité turbulente I_t en fonction du nombre de Reynolds à la paroi, noté ici Re_w (Esmael 2008). I_t est mesuré à différentes positions radiales et à $\theta = \pi/4$ par rapport au vecteur de \mathbf{g} de l'accélération terrestre. Les différents nombres de Reynolds \overline{Re}_{c1} , \overline{Re}_{c2} et \overline{Re}_{c3} sont indiqués.

\overline{Re}_{c3} représente la fin de la transition (Pinho & Whitelaw 1990). De manière complètement indépendante, Peixinho et al. (2005) ont obtenu des résultats similaires pour une solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse. Ils ont été ensuite confirmés par Esmael & Nouar (2008). Les différents seuils \overline{Re}_{c1} , \overline{Re}_{c2} et \overline{Re}_{c3} sont indiqués sur la figure 1.12. On constate bien sur ce graphique les différents processus :

- I_t est presque constant jusqu'à \overline{Re}_{c1} , puis à partir de là, l'intensité turbulente commence à augmenter,
- l'intensité turbulente augmente brusquement à partir de \overline{Re}_{c2} ,
- I_t diminue à partir de \overline{Re}_{c3} .

Le Carbopol 940 est un fluide à seuil dont le comportement rhéologique est décrit par le modèle de Herschel-Bulkley. Contrairement au cas de la Laponite, le caractère viscoélastique de la solution de Carbopol peut être significatif particulièrement lorsque le fluide n'a pas été dégradé après plusieurs heures de passage dans la boucle expérimentale. L'analyse des résultats d'Esmael & Nouar (2008), montre un début d'asymétrie à $\overline{Re}_p = \overline{Re}_{c1} \approx 1800$. Cette asymétrie est maximale à $\overline{Re}_{c2} \approx 4800$. C'est à cette valeur que I_t augmente fortement, et atteint un maximum à $\overline{Re}_p = \overline{Re}_{c3} \approx 6400$. Une visualisation de l'asymétrie est présentée figure 1.13.

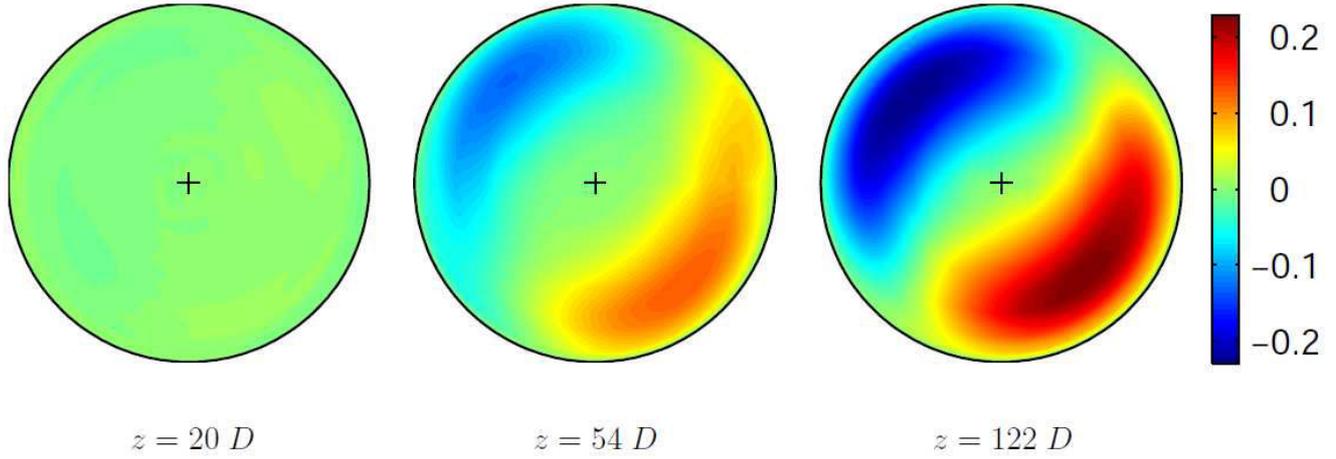


FIG. 1.13 – Pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse modélisée par une loi d’Herschel-Bulkley avec pour paramètres $n = 0.48$, $K = 4.12 \text{ Pa s}^n$, $\tau_0 = 15.2 \text{ Pa}$, contours d’iso-valeurs de W_s/W_m (W_s représente l’écart de vitesse axiale entre le profil expérimental qui est par exemple indiqué par les symboles sur la figure 1.11 et le profil symétrique qui est construit comme une moyenne arithmétique à partir du profil expérimental. Ce profil symétrique est par exemple symbolisé par le trait continu sur la figure 1.11.) à $r/a = 0.1$ et $n = 0.5$ pour trois positions axiales $z = 20D$, $z = 54D$ et $z = 122D$ et un nombre de Reynolds $\overline{Re}_p = 2420$. L’écoulement est rapide dans la zone rouge et lent dans la zone bleue (Esmael 2008).

En 2005, un article, Escudier et al. (2005), co-signé par des auteurs de trois laboratoires différents, rapporte des résultats expérimentaux pour plusieurs fluides rhéofluidifiants comprenant des solutions de polymères flexibles (solution de Polyacrylamide), des solutions de polymère semi-rigide (Xanthan-gum), des fluides thixotropes à seuil et des fluides à seuil. Des asymétries à des degrés divers dans l’évolution de l’écoulement avec \overline{Re}_p sont notées. Dans le cas newtonien, aucune asymétrie n’a été observée.

Pour tous les fluides cités jusqu’à maintenant, les valeurs critiques \overline{Re}_{c1} , \overline{Re}_{c2} et \overline{Re}_{c3} sont consignées dans la table 1.1. Le comportement rhéologique à l’équilibre de la plupart de ces fluides considérés est donné par la figure 1.14.

Les auteurs Escudier et al. (2005) expliquent que cette asymétrie n’est pas la connaissance d’un artefact expérimental, tel que la force de Coriolis due à la rotation de la terre ou la force de poussée provenant d’un écart de température dans une section droite de la conduite. En outre, cette réorganisation de l’écoulement ne semble pas être affectée par les conditions d’entrée ou de sortie.

Par conséquent, l’asymétrie de l’écoulement observée pour une certaine gamme de \overline{Re}_p est le résultat d’un mécanisme physique qui n’a pas encore été expliqué. L’ensemble des fluides utilisés ont deux propriétés communes : la rhéofluidification et la viscoélasticité. En choisissant de

Référence	Fluide	Rhéologie	Re_{c1}	Re_{c2}	Re_{c3}
Escudier & Presti (1996), Escudier et al. (2005)	Suspension de Laponite à 1.5% en masse	Herschel-Bulkley $\tau_0 = 4.42$; $n = 0.534$ $K = 0.242 \text{ Pa s}^n$	1275	2900	5000
Esmael & Nouar (2008)	Solution de Carbopol 940 à 0.2% en masse	Herschel-Bulkley $\tau_0 = 10 \text{ Pa}$; $n = 0.5$ $K = 3 \text{ Pa s}^n$	1805	4867	6400
Escudier et al. (2005)	Solution de Glycérine 60%	newtonien $\mu = 0.0082 \text{ Pa s}$	-	2100	3000
Peixinho et al. (2005)	Sirop de Glucose	newtonien 0.1 Pa s	-	2050	2500
Escudier et al. (2005)	Solution de Xanthan-Gum à 0.2% en masse	Carreau-Yasuda $\mu_0 = 0.431 \text{ Pa s}$ $\lambda = 0.778 \text{ Pa s}$; $n = 0.673$ $a = 1.29$; $\mu_\infty = 2.35 \text{ mPa s}$	1600	3100	4200
Escudier et al. (2005)	Solution de Carbopol EZ1 à 0.1% en masse	Carreau-Yasuda $\mu_0 = 5.92 \text{ Pa s}$ $\lambda = 13000 \text{ s}$; $n = 0.376$ $a = 7.4$; $\mu_\infty = 1.65 \text{ mPa s}$	1100	2600	3400
Escudier et al. (2005)	Solution de Polyacrylamide à 0.2% en masse	Carreau-Yasuda $\mu_0 = 2.94 \text{ Pa s}$ $\lambda = 11.1 \text{ s}$; $n = 0.660$ $a = 2.01$ $\mu_\infty = 3.55 \text{ mPa s}$	1800	4000	10000
Guzel et al. (2009)	Solution de Xanthan-Gum à 0.2% en masse	Loi puissance $n = 0.65$; $K = 0.65 \text{ Pa s}^n$	< 1800	2850	4000
Esmael (2008)	Solution de CMC7M1C à 2% en masse	Cross $\mu_0 = 0.253 \text{ Pa s}$; $\lambda = 0.003 \text{ s}$ $\mu_\infty = 1.65 \text{ mPa s}$; $n = 0.70$	-	2600	4400
Escudier et al. (2009)	Solution de Polyacrylamide à 0.125% en masse	Carreau-Yasuda $\mu_0 = 4.22 \text{ Pa s}$ $\lambda = 45.8 \text{ s}$; $n = 0.660$ $a = 1.25$ $\mu_\infty = 3.72 \text{ mPa s}$	4000	7500	12000

TAB. 1.1 – Valeurs critiques du nombre de Reynolds pour plusieurs fluides rhéofluidifiants. Le nombre \overline{Re}_{c1} est le nombre de Reynolds à partir duquel une asymétrie de la vitesse axiale moyenne commence à apparaître et l'intensité de turbulence It commence à augmenter. Le nombre \overline{Re}_{c2} est le nombre de Reynolds à partir duquel l'intensité de turbulence It augmente fortement et \overline{Re}_{c3} , celui où It est à son maximum.

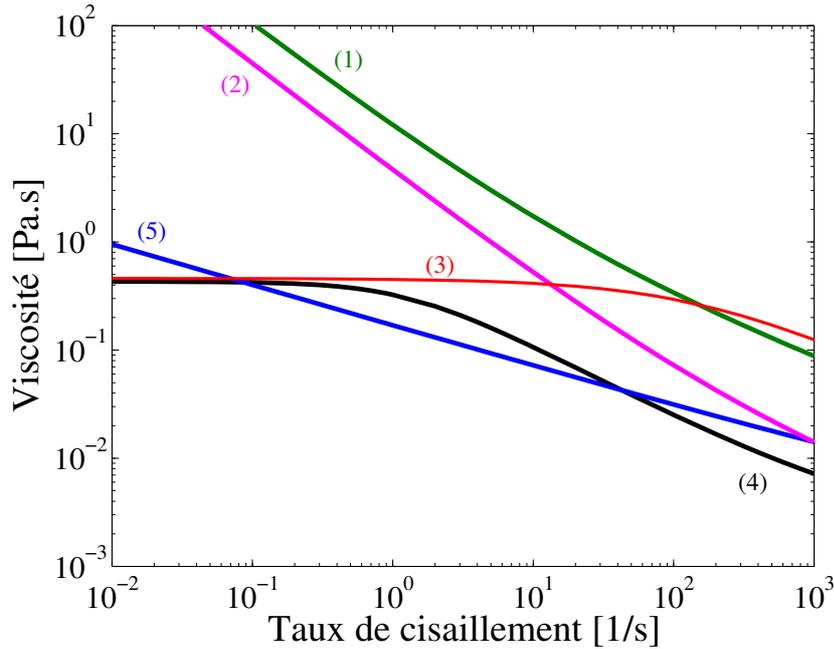


FIG. 1.14 – Rhéogrammes pour certains des fluides présentés dans le tableau 1 : (1) Solution de Carbopol à 0.2% en masse; (2) Suspension de Laponite à 1.5% en masse; (3) Solution de CMC7M1C à 0.2% en masse; (4) Solution de Xanthan-Gum à 0.2% en masse Escudier et al. (2005); (5) Solution de Carbopol EZ1 à 0.1% en masse

manière appropriée, les concentrations en polymères, Escudier et al. (2009) ont montré que des solutions de Polyacrylamide, notée PAA, et de Xanthan-Gum notée XG, présentant des comportements rhéofluidifiants très similaires avec des propriétés viscoélastiques très différentes (le PAA a un comportement élastique beaucoup plus marqué que le XG), donnent pour la même valeur du nombre de Reynolds \overline{Re}_p , des degrés d'asymétrie très proches. Ce résultat a été aussi indiqué par Esmael (2008). Il est expliqué qu'après plusieurs heures de circulation dans la boucle expérimentale, la solution de Carbopol subissait des dégradations mécaniques, qui se caractérisaient en particulier par une forte réduction des propriétés viscoélastiques, et une faible modification du caractère rhéofluidifiant. Encore une fois, il a été observé que pour la même valeur du nombre de Reynolds pariétal, on retrouve pratiquement le même degré d'asymétrie. Il semble donc que cette réorganisation de l'écoulement soit induite par le caractère rhéofluidifiant du fluide.

1.2.4 Études numériques

L'idée que c'est surtout le caractère rhéofluidifiant qui contrôle l'asymétrie est étayée par les travaux numériques de Rudman et al. (2004). Ces auteurs ont effectué des simulations numériques directes de l'écoulement d'un fluide non-newtonien purement visqueux dans une conduite cylin-

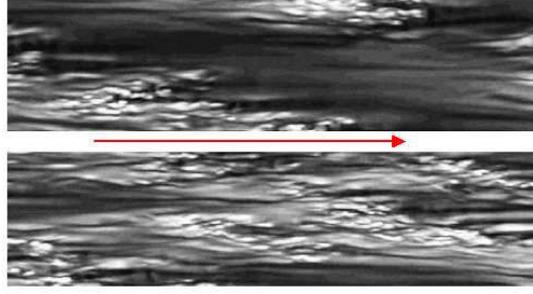


FIG. 1.15 – Contours instantanés d’iso-vitesse axiale au voisinage de la paroi pour un fluide de Herschel-Bulkley : $\tau = \tau_0 + K\dot{\gamma}^n$ avec $\tau_0 = 1.35$ Pa, $n = 0.52$ et $K = 1.203$ Pa.sⁿ, pour deux valeurs du nombre de Reynolds : (haut) $\overline{Re}_p = 5800$, (bas) $\overline{Re}_p = 8130$. L’écoulement se fait de la gauche vers la droite comme l’indique la flèche. Les données ont été déroulées de 0 à 2π . Les stries de haute vitesse sont en blanc et les stries de basse vitesse sont en noir (Rudman et al. 2004).

drique à $\overline{Re}_p > 5000$. Deux modèles rhéologiques ont été considérés : le modèle d’Ostwald (loi de puissance) et le modèle de Herschel-Bulkley (fluide à seuil rhéofluidifiant). Des résultats typiques de ces simulations sont montrés sur la figure 1.15. On observe une bande centrale sombre (fluide lent) entourée de bandes claires (fluide rapide) dans le cas $\overline{Re}_p = 5800$; par contre ce type de structuration de la turbulence n’est pas observé pour $\overline{Re}_p = 8130$.

Ainsi, les auteurs indiquent que : « *In the simulation, the active region of the flow continually moves along the pipe and appears to preferentially occur at one azimuthal location for extended times, so that the average velocity profile over approximately 10 domain transit times shows some asymmetry* ». Des résultats similaires ont été obtenus pour un fluide d’Ostwald lorsque l’indice de rhéofluidification est suffisamment faible $n = 0.5$. Les auteurs mettent ainsi en évidence l’existence de structures cohérentes qui occupent toute la longueur du domaine de calcul. Ceci est particulièrement visible dans la figure 3 de la référence Rudman et al. (2001). Ces simulations numériques ont été effectuées pour des longueurs de $4\pi D$, $5\pi D$ et $8\pi D$, elles conduisent toutes à des résultats similaires.

Finalement, l’analyse des profils de viscosité à $\overline{Re}_p \approx \overline{Re}_{c1}$ semble indiquer que cette asymétrie apparaît particulièrement dans le cas où le profil $\mu(r)$ présente un fort gradient de viscosité au voisinage de l’axe, c’est à dire dans les régions à faible cisaillement, comme le montre la figure 1.13.

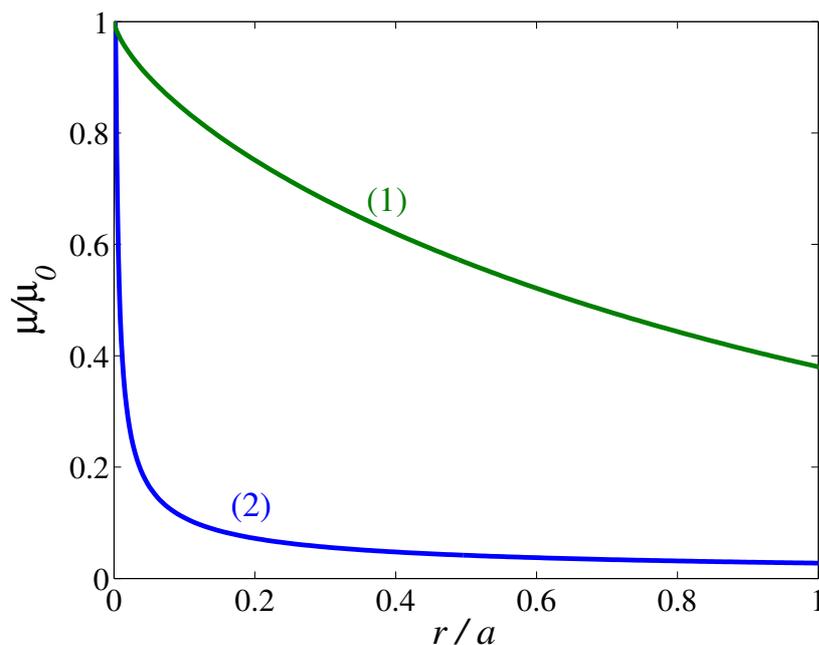


FIG. 1.16 – Profils de viscosité de l'écoulement de base évalué à $\overline{Re}_p \approx \overline{Re}_{c1}$ pour (1) une solution de CMC71C à 2% en masse (dans ce cas les profils de vitesse axiale restent axisymétriques lors de la transition vers la turbulence, voir Peixinho 2004) et (2) une solution de Carbopol EZ1 à 0.1% en masse (dans ce cas, les profils de vitesse axiale deviennent asymétriques, voir Escudier et al. 2005).

1.3 Objectifs de la thèse

La problématique de la transition vers la turbulence en fluides non newtoniens peut se résumer à deux choses :

- déterminer les différents nombres de Reynolds critiques \overline{Re}_{c1} , \overline{Re}_{c2} et \overline{Re}_{c3} ;
- comprendre de quelle manière on franchit ces différents paliers.

Le premier point est important et peut intéresser le monde industriel. Connaître ces différents nombres de Reynolds pour un fluide donné, permettrait de savoir dans quel régime d'écoulement l'on se trouve et de dimensionner les installations. On constate sur la table 1.1 qu'il y a de grands écarts entre ces différents nombres de Reynolds. On peut aussi noter dans cette table un effet stabilisant en fluide non newtonien au niveau des seuils \overline{Re}_{c2} , d'apparition des bouffées turbulentes, nettement plus élevés en fluides non newtoniens. La forte dispersion de tous les seuils en fluide non newtonien est probablement la conséquence non seulement du comportement rhéofluidifiant mais aussi du caractère viscoélastique des fluides considérés. Dans le souci de faire ressortir ce qui est dû au comportement purement rhéofluidifiant, nous avons considéré un fluide de Carreau. Dans la lignée des travaux de Faisst & Eckhardt (2003) et Wedin & Kerswell (2004),

on a exploité l'idée des ondes non linéaires pour étudier la transition vers la turbulence dans un fluide rhéofluidifiant vérifiant la loi de Carreau. En particulier, on s'est intéressé aux ondes de nombre d'onde azimutal $m_0 = 1$, $m_0 = 2$ et 3 . Avec l'étude des ondes pour $m_0 = 1$, on avait pour but d'apporter des éléments de réponses à l'asymétrie observée par exemple par Esmael & Nouar (2008) et donc également avoir une idée de \overline{Re}_{c1} . L'étude des ondes pour $m_0 = 2$ et 3 est faite pour le calcul de « puffs » et cela permet d'estimer une valeur inférieure du nombre de Reynolds \overline{Re}_{c2} . La détermination du nombre \overline{Re}_{c3} , qui correspond à des écoulements fortement turbulents, est hors de portée de notre étude. On a fait l'hypothèse de la symétrie S_1 seule qui est moins restrictive.

En premier lieu, on présente le modèle de Carreau, ainsi que les équations de la dynamique et leur adimensionnalisation. Puis, on présentera comment adapter le « SSP » numériquement. Ensuite, les méthodes de discrétisation et de continuation seront décrites. Enfin en dernier lieu, on présentera les résultats obtenus lors de la recherche d'ondes non linéaires pour $m_0 = 1$ puis $m_0 = 2$ et 3 .

Chapitre 2

Loi de comportement - Écoulements de base et leur stabilité

Ce chapitre se propose d'expliquer le choix d'un modèle rhéologique pour notre étude, de donner les équations de base et leur adimensionnement, puis de présenter les écoulements laminaires et leurs propriétés de stabilité linéaire. Le comportement rhéologique du fluide est supposé être décrit par le modèle de Carreau. Ce modèle a été choisi car d'une part il a des assises théoriques (Carreau 1972) et d'autre part, il permet, en modifiant ses paramètres, de contrôler le profil de viscosité, qui joue un rôle fondamental dans notre problème. Des modèles similaires au modèle de Carreau existent dans la littérature, par exemple le modèle de Cross (Bird et al. 1987) ou celui de Carreau-Yasuda (Bird et al. 1987). Ce dernier, comportant cinq paramètres, présente l'avantage d'être plus flexible et permet souvent une meilleure interpolation des données expérimentales issues d'essais rhéométriques. Rappelons que les modèles de fluides à seuil rhéofluidifiants n'ont pas été considérés en raison de la difficulté à traiter les zones non cisillées, appelées « zones bouchons ».

2.1 Lois de comportement de fluides rhéofluidifiants

Différentes lois permettent de modéliser le comportement rhéofluidifiant. On rappelle qu'on ne s'intéresse qu'au caractère rhéofluidifiant et qu'on ne considère pas la réponse élastique. Dans ce cas, la loi de comportement est purement viqueuse; la partie déviatorique $\underline{\hat{\underline{\tau}}}$ du tenseur des

contraintes se présente sous la forme

$$\underline{\hat{\tau}} = \hat{\mu} \underline{\hat{\gamma}}, \quad (2.1)$$

$\hat{\mu}$ étant la viscosité, $\underline{\hat{\gamma}}$ étant le tenseur des taux de déformation :

$$\underline{\hat{\gamma}} = \underline{\hat{\nabla}} \hat{\mathbf{v}} + \underline{\hat{\nabla}} \hat{\mathbf{v}}^T. \quad (2.2)$$

Dans tout ce qui suit, on désigne avec des chapeaux les quantités dimensionnelles. Les différents modèles rhéofluidifiants donnent l'évolution de $\hat{\mu}$ en fonction du taux de cisaillement $\hat{\gamma}$, la racine carré du deuxième invariant de $\underline{\hat{\gamma}}$:

$$\hat{\gamma} = \left(\frac{1}{2} \underline{\hat{\gamma}} : \underline{\hat{\gamma}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.3)$$

Voici quelques lois utilisées :

- modèle d'Ostwald-de Waele ou loi de puissance :

$$\hat{\mu} = \hat{K} \hat{\gamma}^{n-1}, \text{ avec } \begin{cases} \hat{K} \text{ la consistance,} \\ n \text{ l'indice de rhéofluidification, } n \in [0, 1]. \end{cases} \quad (2.4)$$

- modèle d'Herschel-Buckley pour les fluides à seuil :

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\tau}_s}{\hat{\gamma}} + K \hat{\gamma}^{n-1}, \text{ avec } \hat{\tau}_s \text{ la contrainte seuil.} \quad (2.5)$$

La zone où la contrainte est inférieure à $\hat{\tau}_s$ se comporte d'un point de vue cinématique comme un solide ; cette zone est appelée « zone bouchon ».

- modèle de Carreau-Yasuda :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_\infty + (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty)[1 + (\hat{\lambda}_{CY}\hat{\gamma})^a]^{\frac{n_{CY}-1}{a_{CY}}}, \text{ avec } \begin{cases} \hat{\mu}_0 : \text{viscosité à taux de cisaillement nul,} \\ \hat{\mu}_\infty : \text{viscosité à taux de cisaillement infini,} \\ \hat{\lambda}_{CY} : \text{un temps caractéristique du fluide,} \\ n_{CY} : \text{indice de rhéofluidification,} \\ a_{CY} : \text{paramètre d'ajustement.} \end{cases} \quad (2.6)$$

- modèle de Carreau :

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_\infty + (\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty)[1 + (\hat{\lambda}\hat{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}, \text{ avec } \begin{cases} \hat{\mu}_0 : \text{viscosité à taux de cisaillement nul,} \\ \hat{\mu}_\infty : \text{viscosité à taux de cisaillement infini,} \\ \hat{\lambda} : \text{un temps caractéristique du fluide.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Nous avons choisi de travailler avec la loi de Carreau (2.7) pour des raisons principalement numériques. En effet, la loi de Carreau est plus régulière que la loi de puissance (2.4), pour laquelle la viscosité diverge lorsque le taux de cisaillement tend vers 0.

D'autre part, avec la loi d'Herschel-Buckley (2.5), il est difficile de traiter la « zone bouchon ».

Lorsque la constante de temps $\hat{\lambda}$ est grande, la viscosité diminue rapidement quand le cisaillement augmente. De même lorsque n est petit, la pente que l'on observe sur le rhéogramme typique de la figure 2.1 est d'autant plus importante : ce qui signifie une diminution de la viscosité plus importante en fonction du taux de cisaillement. La quantité $\frac{1}{\hat{\lambda}}$ est le cisaillement à partir duquel commence le comportement rhéofluidifiant. La figure 2.1 montre à titre d'exemple le rhéogramme d'une solution aqueuse de polyacrylamide, de concentration 0.125% en masse étudiée par Escudier et al. (2009). Il montre une bonne correspondance entre le modèle de Carreau et de Carreau-Yasuda.

Intéressons nous à présent à l'équation de la dynamique et aux nombres adimensionnels qui interviennent.

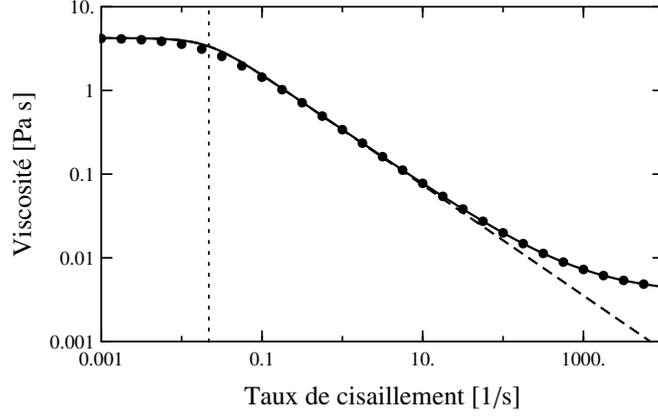


FIG. 2.1 – Diagramme log-log de la viscosité $\hat{\mu}$ en fonction du taux de cisaillement $\hat{\gamma}$ pour le fluide 0.125% PAA étudié par Escudier et al. (2009). Les disques montrent les résultats pour le modèle de Carreau-Yasuda qui est en totale adéquation avec les mesures rhéologiques (cf la Fig.2 de Escudier et al. 2009). La courbe continue résulte du modèle de Carreau, avec $n_{CY} = 0.66$, $\hat{\lambda} = 45.8$ s, $\hat{\mu}_0 = 4.22$ Pa s, $\hat{\mu}_\infty = 0.00372$ Pa s. La courbe en tirets résulte du modèle de Carreau avec les mêmes paramètres sauf $\hat{\mu}_\infty = 0$. La droite verticale en pointillés indique le taux de cisaillement caractéristique $\frac{1}{\lambda}$ du début de la rhéofluidification.

2.2 Équation de la dynamique et nombres adimensionnels

Notre écoulement est contrôlé par un gradient de pression

$$\hat{G} = \partial_z \hat{P}_b \quad (2.8)$$

fixé. L'équation de la quantité de mouvement sous forme dimensionnelle s'écrit :

$$\hat{\rho} \left(\hat{\partial}_t \hat{\mathbf{v}} + \underline{\underline{\hat{\nabla}}} \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} \right) = -\hat{\nabla} \hat{p} + \mathbf{div} \left(\underline{\underline{\hat{\tau}}} \right), \quad (2.9)$$

avec \hat{p} la pression motrice, qui contient la contribution de la pesanteur. Comme expliqué précédemment, seule la partie déviatorique du tenseur des contraintes (2.1) est modifiée par rapport à la loi de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens.

Les équations sont adimensionnées en utilisant \hat{W}_c la vitesse au centre de la conduite de l'écoulement laminaire, $\hat{\mu}_0$ la viscosité à cisaillement nul, \hat{a} le rayon de la conduite et $\hat{\rho} \hat{W}_c^2$ comme l'unité de pression. On obtient ainsi l'équation adimensionnée :

$$\partial_t \mathbf{v} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\mu \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \right) \quad (2.10)$$

$$\text{où } \mu = \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0} + \left(1 - \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0} \right) [1 + (\lambda \dot{\gamma})^2]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.11)$$

On voit apparaître dans (2.10) deux nombres adimensionnels : Re et λ . Intéressons nous tout d'abord au nombre λ dans l'expression de la viscosité,

$$\lambda = \hat{\lambda} \frac{\hat{W}_c}{\hat{a}}, \text{ que l'on qualifie de nombre « non newtonien » .} \quad (2.12)$$

Plus λ est élevé, plus les effets rhéofluidifiants sont importants. Lorsque $\lambda = 0$, on se retrouve dans le cas d'un fluide newtonien. Le nombre λ constitue le rapport entre un temps caractéristique du fluide $\hat{\lambda}$ et un temps caractéristique de la dynamique $\frac{\hat{a}}{\hat{W}_c}$. L'inverse de λ est le cisaillement adimensionnel à partir duquel la rhéofluidification de l'écoulement démarre. L'autre nombre adimensionnel est le nombre de Reynolds basé sur la viscosité à cisaillement nul,

$$Re = \frac{\hat{a} \hat{\rho} \hat{W}_c}{\hat{\mu}_0}. \quad (2.13)$$

Notons que λ est lié au nombre de Reynolds Re par la relation

$$\lambda = \Lambda Re \quad (2.14)$$

où

$$\Lambda = \hat{\lambda} \frac{\hat{\mu}_0}{\hat{\rho} \hat{a}^2}. \quad (2.15)$$

Λ constitue le rapport du temps caractéristique du fluide au temps de diffusion visqueuse. Contrairement à λ , il présente l'intérêt de ne dépendre que de la géométrie et des propriétés du fluide, et non de l'écoulement. Cela signifie que si ce nombre est constant, on modélise une expérience réelle. Par exemple, en prenant les valeurs de Escudier et al. (2009) pour le 0.125% PAA,

$$\hat{a} = 50 \text{ mm}, \quad \hat{\rho} \approx 1000 \text{ kg/m}^3, \quad \hat{\mu}_0 = 4.22 \text{ Pa s}, \quad \hat{\lambda} = 45.8 \text{ s}, \quad (2.16)$$

on calcule

$$\Lambda \approx 77. \quad (2.17)$$

Du fait de la variation de μ avec $\dot{\gamma}$ en fluide non newtonien, plusieurs définitions du nombre de Reynolds sont possibles. On peut par exemple construire un nombre de Reynolds à partir de la viscosité à la paroi de l'écoulement laminaire μ_{bp} pour rendre compte des effets pariétaux :

$$\overline{Re}_p = \frac{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{W}_m}{\mu_{bp}}, \text{ avec } W_m \text{ la vitesse débitante.} \quad (2.18)$$

Cette définition tiendra également lors du calcul des ondes non linéaires. Expliquons la provenance de cette définition. Un bilan global de la quantité de mouvement dans la direction z nous donne à la paroi, en $\hat{r} = \hat{a}$,

$$\langle \hat{\tau}_{rz}(\hat{r} = \hat{a}) \rangle_{\theta z} = -\frac{1}{2}\hat{G}\hat{a}. \quad (2.19)$$

Pour simplifier l'écriture, on note $\langle \hat{\tau}_{rz} \rangle_{\theta zp} = \langle \hat{\tau}_{rz}(\hat{r} = \hat{a}) \rangle_{\theta z}$.

D'un point de vue expérimental, on suppose également un équilibre entre le gradient de pression et la contrainte tangentielle à la paroi, du moins en moyenne temporelle. Les expérimentateurs mesurant le gradient de pression \hat{G} peuvent donc déterminer $\langle \hat{\tau}_{rz} \rangle_{\theta zp}$. À partir de là et de la loi de comportement rhéologique du fluide,

$$\langle \hat{\tau}_{rz} \rangle_{\theta zp} = \hat{\mu}(\hat{\gamma}(\hat{r} = \hat{a})) \hat{\gamma}(\hat{r} = \hat{a}), \quad (2.20)$$

ils déterminent le taux de cisaillement à la paroi $\hat{\gamma}(\hat{r} = \hat{a})$ et ensuite la viscosité correspondante à la paroi $\hat{\mu}(\hat{\gamma}(\hat{r} = \hat{a})) = \hat{\mu}_p$. On peut donc utiliser cette viscosité comme référence pour la définition du nombre de Reynolds. Il s'avère que cette viscosité est la viscosité de l'écoulement laminaire à la paroi

$$\hat{\mu}_p = \hat{\mu}_b(\hat{r} = \hat{a}) =: \hat{\mu}_{bp}. \quad (2.21)$$

Intéressons nous à la manière dont l'écoulement laminaire est calculé, ainsi qu'au comportement de cet écoulement en fonction des différents paramètres rhéologiques. On considère dans toute la suite que

$$\hat{\mu}_\infty = 0. \quad (2.22)$$

Cette hypothèse se justifie par le fait qu'en général $\hat{\mu}_\infty \ll \hat{\mu}_0$. Par exemple pour la solution aqueuse

de 0.125% PAA, $\hat{\mu}_\infty = 0.00372 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ contre $\hat{\mu}_0 = 4.22 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, soit un rapport $\frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0} = 0.000881517$.

2.3 Écoulements de base et pertes de charge

2.3.1 Écoulements de base. Effet du paramètre λ

On travaille en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Notre écoulement est forcé par un gradient de pression constant $\partial_z P_b$.

On recherche un écoulement laminaire de la forme

$$\mathbf{U}_b = W_b(r)\hat{\mathbf{z}}. \quad (2.23)$$

La composante selon z de l'équation de la quantité de mouvement (2.10) devient :

$$- Re \partial_z P_b + \frac{1}{r} \partial_r (r \mu_b \partial_r W_b) = 0. \quad (2.24)$$

Le produit $Re \partial_z P_b$ est constant ; on le note

$$\beta = Re \partial_z P_b. \quad (2.25)$$

On est en présence de deux inconnues : le champ de vitesse $W_b(r)$ et la constante β . Pour résoudre l'équation (2.24), on ajoute les conditions

$$W_b(r=0) = 1 \quad \text{et} \quad W_b(r=1) = 0. \quad (2.26)$$

La résolution s'effectue par une méthode de Newton (cf. annexe C). La discrétisation utilisée est une méthode de Petrov-Galerkin. Des détails peuvent être trouvés dans le chapitre 4. Dans le cas newtonien, $W_b = 1 - r^2$, $\mu_b = 1$ et $\beta = -4$.

On présente différents profils caractéristiques d'écoulement laminaire pour n fixé avec λ variable sur la figure 2.2. L'écoulement de base W_b est représenté, ainsi que sa dérivée W_b' qui est en fait, à la valeur absolue près, le taux de cisaillement de l'écoulement. On peut observer que lorsque λ augmente (figure 2.2a), le profil de vitesse tend vers une limite qui n'est autre que le

profil obtenu pour un fluide obéissant à la loi puissance :

$$W_b(r) = 1 - r^{\frac{n+1}{n}}. \quad (2.27)$$

On constate que le taux de cisaillement $|W'_b|$ (figure 2.2b) tend également vers la limite de la loi de puissance,

$$W'_b(r) = -\frac{n+1}{n} r^{\frac{1}{n}}. \quad (2.28)$$

Justifions cette constatation sur la tendance du fluide à tendre vers un comportement en loi de puissance. En dimensionnel, lorsque $\hat{\lambda}$ devient très grand, la loi de Carreau (2.7) devient (avec $\hat{\mu}_\infty = 0$)

$$\hat{\mu} = \hat{\mu}_0 (\hat{\lambda} \hat{\gamma})^{n-1}. \quad (2.29)$$

C'est une loi de puissance du type (2.4) avec

$$\hat{K} = \hat{\mu}_0 \hat{\lambda}^{n-1}, \quad (2.30)$$

les indices n étant les mêmes dans les deux lois. Avec cette nouvelle loi de viscosité (2.29) et la composante selon z de l'équation dimensionnelle de la quantité de mouvement pour l'écoulement laminaire

$$\frac{d\hat{\tau}_{rz}}{d\hat{r}} + \frac{\hat{\tau}_{rz}}{\hat{r}} = -\hat{G}, \quad (2.31)$$

on obtient après calculs,

$$\hat{W}_b(r) = \hat{W}_b(0) \left[1 - \left(\frac{\hat{r}}{\hat{a}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (2.32)$$

De là, on en déduit

$$\hat{W}'_b(r) = -\hat{W}_b(0) \frac{n+1}{n} \left(\frac{\hat{r}}{\hat{a}} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.33)$$

et

$$\hat{\mu}_b = \hat{\mu}_0 W_b(0)^{n-1} \hat{\lambda}^{n-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n-1} \left(\frac{\hat{r}}{\hat{a}} \right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.34)$$

On retrouve bien en adimensionnel les équations (2.27) et (2.28). On a également en adimensionnel

$$\mu = (\lambda \dot{\gamma})^{n-1} \quad (2.35)$$

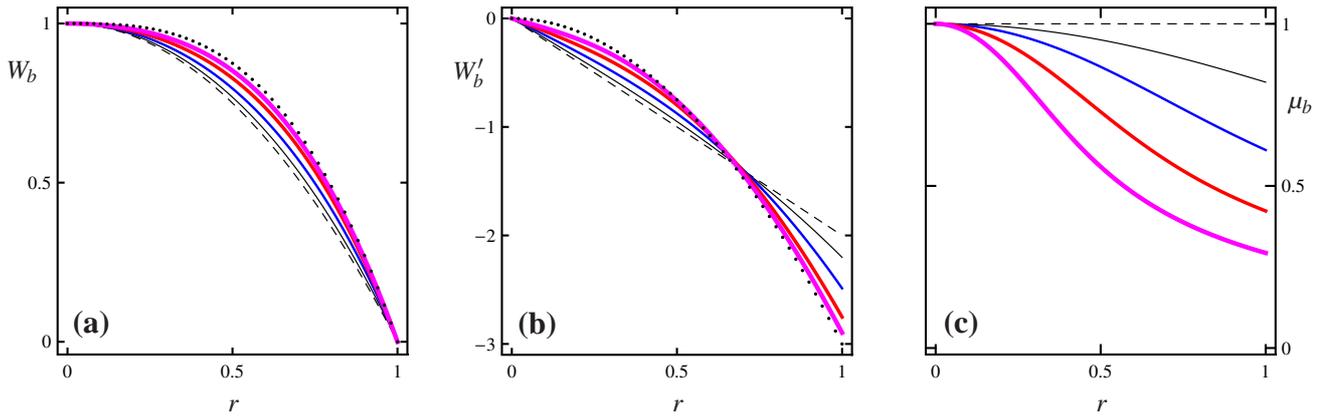


FIG. 2.2 – Pour $n = 0.5$ fixé, profils caractéristiques des écoulements de base à λ variable. (a) Écoulement de base, (b) opposé du taux de cisaillement, (c) viscosité en fonction du rayon. Les courbes noires pointillées correspondent à $\lambda = 0$, noires continues à $\lambda = 0.5$, bleues à $\lambda = 1$, rouges à $\lambda = 2$, magentas à $\lambda = 4$. Les disques indiquent le profil de l'écoulement pour une loi de puissance (2.27) et sa dérivée (2.28)

soit dans l'écoulement laminaire

$$\mu(r) = \lambda^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} r^{\frac{n-1}{n}}. \quad (2.36)$$

Ainsi à la paroi, un fluide en loi de puissance présente une viscosité

$$\mu_{bp} = \lambda^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}. \quad (2.37)$$

On observe sur la figure 2.3 que la viscosité à la paroi tend bien vers 0 en approchant cette loi de puissance lorsque λ augmente.

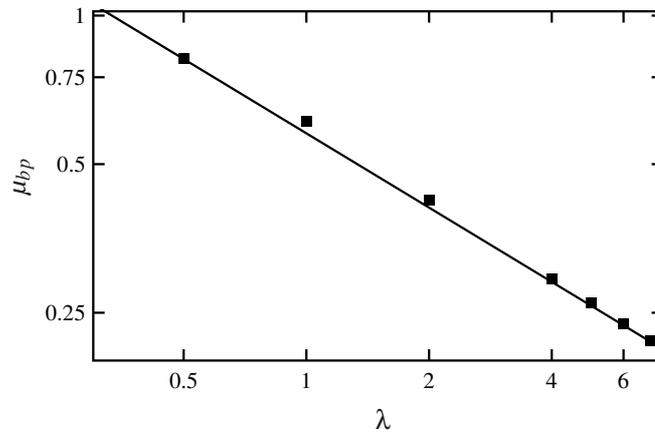


FIG. 2.3 – Diagramme log-log de la viscosité à la paroi μ_{bp} en fonction de λ . La droite indique la loi de puissance (2.37).

On a référencé dans la table 2.1 différentes valeurs caractéristiques de l'écoulement laminaire, dont en particulier la viscosité à la paroi μ_{bp} et le coefficient de perte de charge f .

La viscosité de l'écoulement laminaire à la paroi μ_{bp} joue un rôle important et est à notre sens la viscosité de référence. On démontrera par l'étude des ondes non linéaires la pertinence de cette viscosité. Elle nous permet de définir le nombre de Reynolds \overline{Re}_p (2.18).

2.3.2 Coefficients de pertes de charge

Le coefficient de pertes de charge f apparaît dans le calcul des pertes de charges $\Delta\hat{H}$:

$$\Delta\hat{H} = f \frac{\hat{W}_m^2 \hat{L}}{2\hat{g} \hat{D}} \quad (2.38)$$

où \hat{W}_m est la vitesse débitante, \hat{g} l'accélération de la pesanteur, \hat{L} la longueur du tuyau, \hat{D} son diamètre. La perte de charge $\Delta\hat{H}$ rend compte de la différence de pression motrice \hat{P} entre 2 sections indicées 1 en amont et 2 en aval :

$$\Delta\hat{H} = \frac{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}{\hat{\rho}\hat{g}} \quad (2.39)$$

ou encore

$$\Delta\hat{H} = -\partial_z \hat{P} \frac{\hat{L}}{\hat{\rho}\hat{g}}. \quad (2.40)$$

Après calcul, on obtient

$$f = -\frac{4\beta}{Re W_m^2} \quad (2.41)$$

ou encore

$$f = -\frac{8\beta}{\overline{Re}_p \mu_{bp} W_m}. \quad (2.42)$$

On peut réécrire le gradient de pression \hat{G} (2.8) sous la forme :

$$\hat{G} = -\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{a}\hat{\lambda}}\beta\lambda. \quad (2.43)$$

Cette expression n'est évidemment pas valable dans le cas newtonien. Le rapport $\frac{\hat{\mu}_0}{\hat{a}\hat{\lambda}}$ étant constant si le fluide et la géométrie sont fixés, l'évolution de $\beta\lambda$ pour les cas non newtoniens nous fournit donc l'évolution du gradient de pression nécessaire pour créer l'écoulement.

λ	W_m	μ_{bp}	$1/\mu_p$	β	$\beta \lambda$	$f\overline{Re}_p$
0	0.5	1	1	-4	0	64
0.5	0.5166	0.8199	1.220	-3.611	-1.806	68.21
1	0.5409	0.6107	1.637	-3.038	-3.038	73.59
2	0.5672	0.4228	2.365	-2.327	-4.654	77.63
4	0.5845	0.2933	3.410	-1.699	-6.794	79.27

TAB. 2.1 – Propriétés des écoulements de base à $n = 0.5$ fixé, λ variable.

Dans le tableau 2.1, la vitesse débitante W_m augmente avec λ . La viscosité à la paroi μ_{bp} diminue de près de 70% par rapport au cas newtonien. On constate que plus la rhéofluidification augmente et plus le gradient de pression, indiqué par le produit $\beta\lambda$, lui aussi augmente. Le coefficient de perte de charges au même \overline{Re}_p est plus important avec λ . Les pertes de charges sont ainsi plus importantes lorsque le caractère rhéofluidifiant augmente.

2.3.3 Écoulements de base. Effets du paramètre n

Une étude similaire est menée pour n variant de 1 à 0.3 et λ fixé à 0.5 (figure 2.4 et table 2.2). Des constatations similaires sont à faire. La vitesse débitante W_m augmente avec la diminution de n . De même, la viscosité à la paroi diminue mais seulement de 35% entre le cas newtonien et $n = 0.3$. On observe sur la figure 2.4c que lorsque n diminue, la pente de la viscosité augmente au voisinage de la paroi.

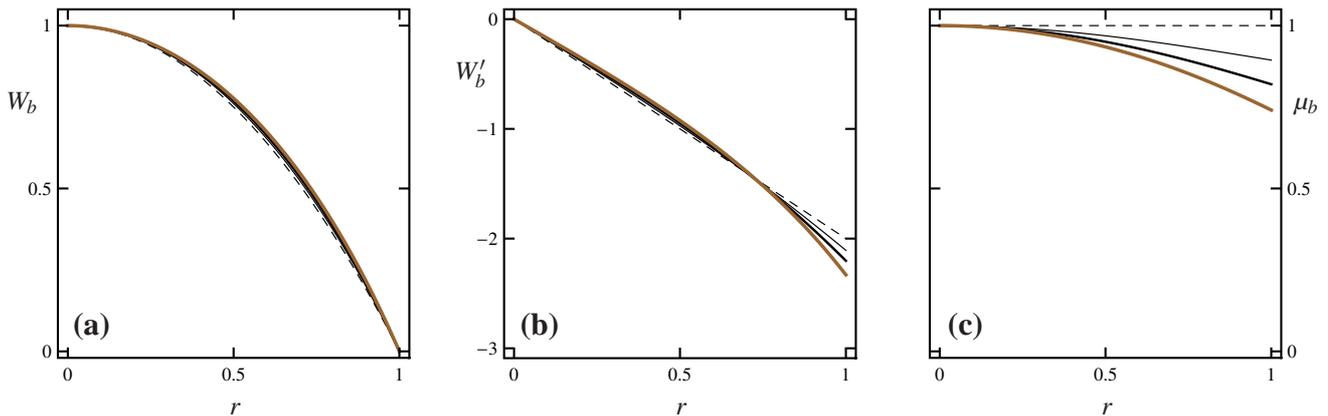


FIG. 2.4 – Pour $\lambda = 0.5$ fixé, profils caractéristiques des écoulements de base à n variable. (a) Écoulement de base, (b) opposé du taux de cisaillement, (c) viscosité en fonction du rayon. Les courbes noires pointillées correspondent à $n = 1$, noires continues fines à $n = 0.7$, noires continues épaisses à $n = 0.5$, marrons à $n = 0.3$.

On a effectué la même étude avec λ plus élevé : $\lambda = 2$. On constate que les valeurs à $n = 0.3$

n	$\langle W_b \rangle_{r\theta}$	μ_{bp}	$1/\mu_p$	β	$\beta \lambda$	$f \overline{Re}_p$
1	0.5	1	1	-4	-2	64
0.7	0.5093	0.8940	1.119	-3.768	-1.884	66.20
0.5	0.5166	0.8199	1.220	-3.611	-1.806	68.21
0.3	0.5251	0.7407	1.350	-3.452	-1.726	71.01

TAB. 2.2 – Propriétés des écoulements de base à $\lambda = 0.5$ fixé, n variable.

dans la table 2.3 sont comparables à celles à $\lambda = 4$, $n = 0.5$ de la table 2.1. D'ailleurs la viscosité μ_{bp} a diminué de presque 75% entre le cas newtonien et $n = 0.3$.

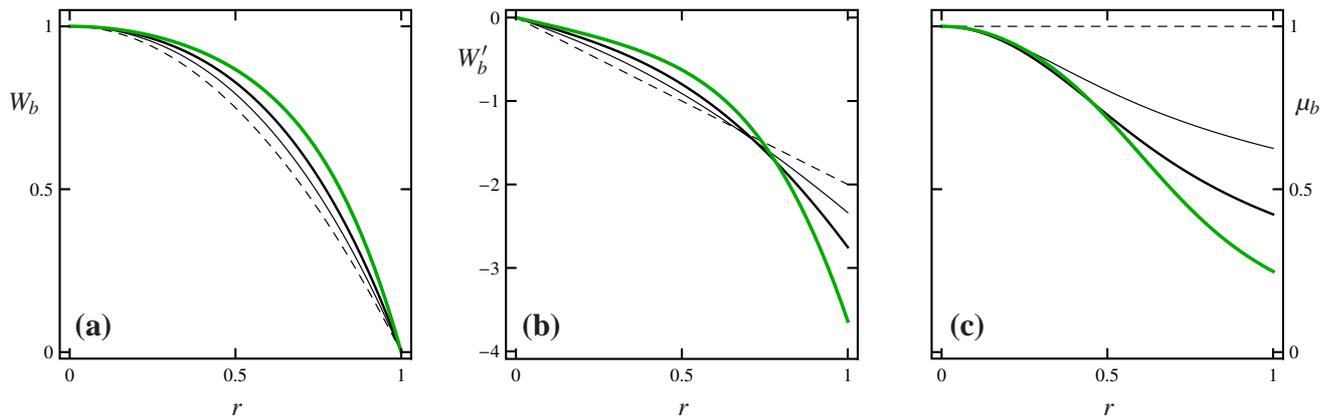


FIG. 2.5 – Pour $\lambda = 2$ fixé, profils caractéristiques des écoulements de base à n variable. (a) Écoulement de base, (b) opposé du taux de cisaillement, (c) viscosité en fonction du rayon. Les courbes noires pointillées correspondent à $n = 1$, noires continues fines à $n = 0.7$, noires continues épaisses à $n = 0.5$, vertes à $n = 0.3$.

n	$\langle W_b \rangle_{r\theta}$	μ_{bp}	$1/\mu_p$	β	$\beta \lambda$	$f \overline{Re}_p$
1	0.5	1	1	-4	-2	64
0.7	0.5342	0.6254	1.599	-2.923	-5.847	70.00
0.5	0.5672	0.4228	2.365	-2.327	-4.654	77.63
0.3	0.6165	0.2477	4.038	-1.802	-3.604	94.40

TAB. 2.3 – Propriétés des écoulements de base à $\lambda = 2$ fixé, n variable.

2.4 Étude linéaire de stabilité

2.4.1 Équations du problème linéarisé

On rappelle qu'en fluide newtonien, l'écoulement d'Hagen-Poiseuille est considéré comme linéairement stable. Des résultats issus de Esmael (2008) pour un fluide à seuil (avec le modèle de

Hershel-Burkley) montrent la stabilité de l'écoulement vis-à-vis de petites perturbations. Dans le cas d'un fluide de Carreau, nous avons également vérifié que l'écoulement est linéairement stable. À l'écoulement de base \mathbf{U}_b , on ajoute une perturbation infinitésimale $(\epsilon \mathbf{u}', \epsilon p')$ où $\epsilon \ll 1$. Le champ de vitesse \mathbf{v} et de pression p s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(r, \theta, z, t) &= \mathbf{U}_b(r) + \epsilon \mathbf{u}'(r, \theta, z, t) \\ p(r, \theta, z, t) &= P_b(r) + \epsilon p'(r, \theta, z, t).\end{aligned}\tag{2.44}$$

Les équations aux perturbations linéarisées sont données par

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}') = 0\tag{2.45}$$

et

$$\partial_t \mathbf{u}' + \frac{dW_b}{dr} u'_r \hat{\mathbf{z}} + W_b \partial_z \mathbf{u}' = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \operatorname{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}')\tag{2.46}$$

où

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}' = \mu_b \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}(\mathbf{u}') + \frac{\mu'_b}{\dot{\gamma}_b} \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}') \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}(\mathbf{U}_b)\tag{2.47}$$

en notant $\dot{\gamma}_b = \dot{\gamma}(\mathbf{U}_b)$, $\mu_b = \mu(\dot{\gamma}_b)$,

$$\mu'_b = \mu'(\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b)),\tag{2.48}$$

avec μ' la dérivée première de μ par rapport à $\dot{\gamma}$,

$$\mu'(\dot{\gamma}(\mathbf{u})) = \dot{\gamma}(\mathbf{u}) \left(1 - \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0}\right) \lambda^2 (n-1) (1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}))^{\frac{n-3}{2}}.\tag{2.49}$$

L'écoulement est périodique dans les directions azimutale et axiale. On peut donc écrire, en passant en modes normaux,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(r, \theta, z, t) &= \tilde{\mathbf{u}}(r) e^{i(m_0 \theta + q_0 z) + \sigma t}, \\ p'(r, \theta, z, t) &= \tilde{p}(r) e^{i(m_0 \theta + q_0 z) + \sigma t},\end{aligned}\tag{2.50}$$

avec m_0 le nombre d'onde azimutal, q_0 le nombre d'onde axial.

On obtient ainsi le problème aux valeurs propres :

$$\sigma \tilde{\mathbf{u}} + \frac{dW_b}{dr} \tilde{u}_r \hat{\mathbf{z}} + iq_0 W_b \tilde{\mathbf{u}} = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \mathbf{div}(\underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\tau}}}}) \quad (2.51)$$

où

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} &= \underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\tau}}}} e^{i(m_0\theta + q_0z) + \sigma t}, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\tilde{\tau}}}} &= \mu_b \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}(\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{\mu'_b}{\dot{\gamma}_b} \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \underline{\underline{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}(\mathbf{U}_b). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Numériquement, la discrétisation utilisée est une méthode de Petrov-Galerkin. Des détails peuvent être trouvés dans le chapitre 4.

2.4.2 Exemples de spectres

Pour vérifier la stabilité linéaire de l'écoulement de base, plusieurs cas ont été étudiés. On a vérifié dans un premier temps la validité du code en retrouvant le spectre dans le cas newtonien figure 2.6 à $Re = 3000$. Ces résultats sont à comparer à ceux obtenus par Schmid & Henningson (1994). Les calculs dans le cas non newtonien ont été effectués à $\lambda = 2$, $n = 0.5$ pour deux nombres de Reynolds, $Re = 3000$ (figure 2.7) et $\overline{Re}_p = 3000$ (figure 2.8). On constate sur ces deux figures l'absence de modes instables. En effet, la partie réelle σ_r de toutes les valeurs propres est strictement négative. L'analyse des valeurs propres associées à la figure 2.7 montre que la partie réelle du mode le moins stable est plus grande dans le cas non-newtonien que dans le cas newtonien. Néanmoins, si on considère le même Reynolds pariétal \overline{Re}_p , on observe sur la figure 2.8 au contraire un effet stabilisant induit par la rhéofluidification.

On a vérifié pour d'autres valeurs de paramètres que les écoulements de base pour un fluide de Carreau sont linéairement stables. Finalement, on peut conjecturer que les écoulements laminaires en conduite cylindrique de fluides rhéofluidifiants avec ou sans contrainte seuil sont linéairement stables.

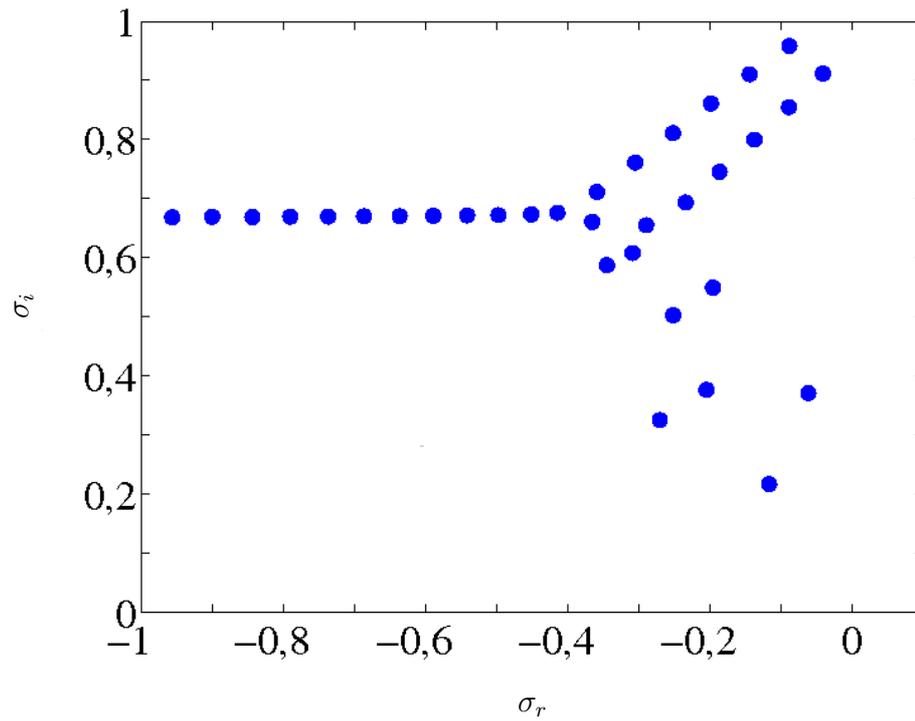


FIG. 2.6 – Pour $q_0 = 1$, $m_0 = 1$, spectre dans le cas newtonien $\lambda = 0$ à $Re = 3000$.

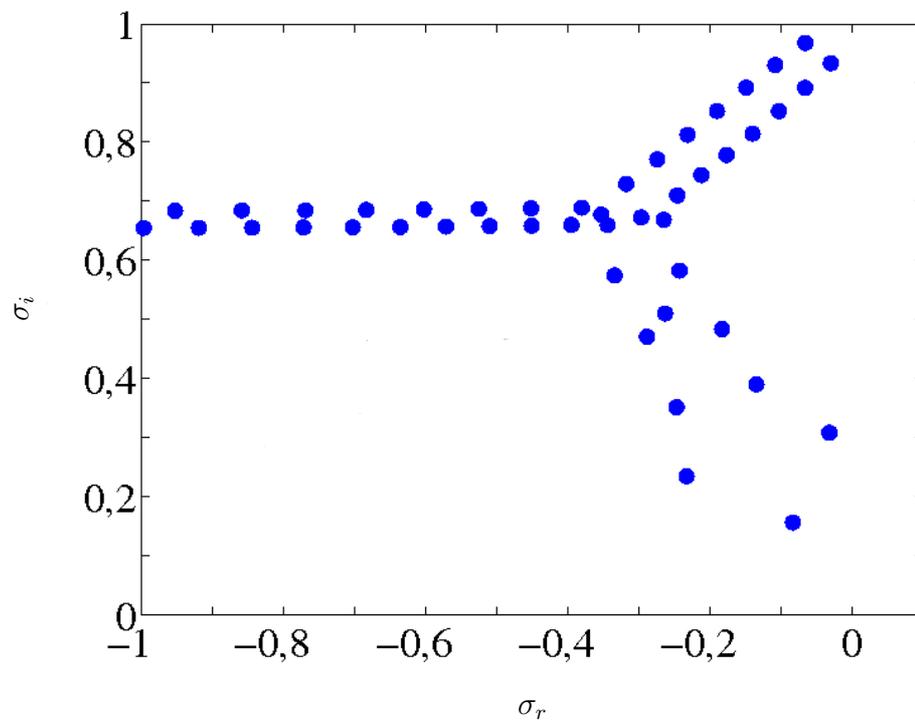


FIG. 2.7 – Pour $q_0 = 1$, $m_0 = 1$, spectre pour le cas $n = 0.5$, $\lambda = 2$ à $Re = 3000$.

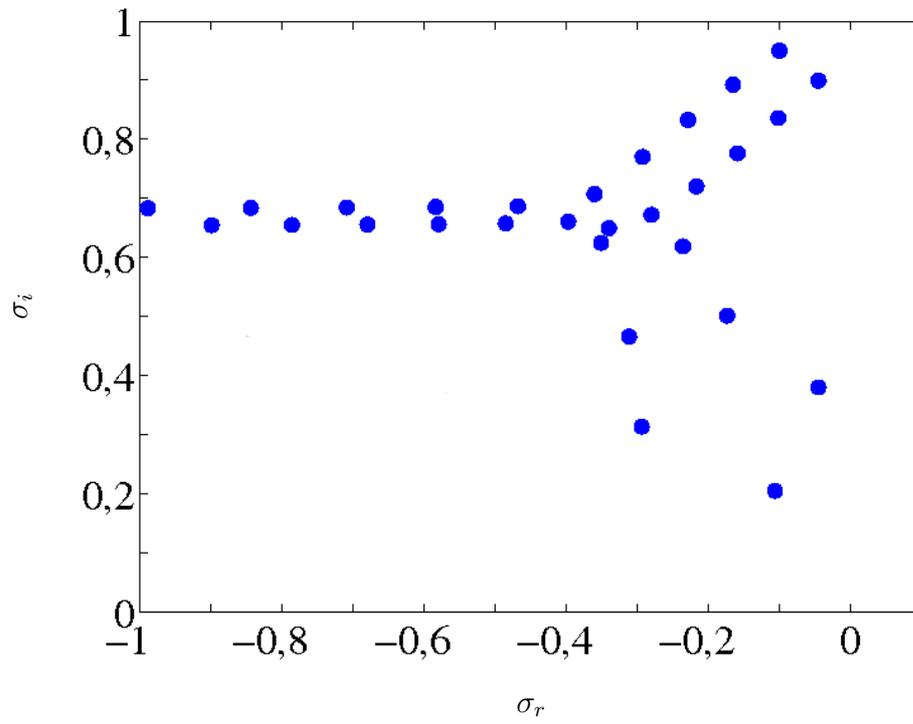


FIG. 2.8 – Pour $q_0 = 1$, $m_0 = 1$, spectre pour le cas $n = 0.5$, $\lambda = 2$ à $\overline{Re}_p = 3000$.

Chapitre 3

Méthode de forçage pour calculer des ondes non linéaires

Le but de cette thèse est de calculer des solutions à l'équation (2.10) écrite pour $\mathbf{v} = \mathbf{U}_b + \mathbf{u}$,

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{dW_b}{dr} u_r \hat{\mathbf{z}} + W_b \partial_z \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) - \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b)), \quad (3.1)$$

où $p' = p - P_b$ est la pression de perturbation à l'écoulement laminaire. Dans cette équation, l'écart par rapport à l'écoulement laminaire \mathbf{U}_b , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, z - ct)$ est une onde non linéaire de vitesse de phase c . Sachant cela, on peut modifier le terme temporel de l'équation (3.1)

$$-c \partial_z \mathbf{u} + \frac{dW_b}{dr} u_r \hat{\mathbf{z}} + W_b \partial_z \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) - \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b)). \quad (3.2)$$

Le but de ce chapitre est d'expliquer la méthode de forçage artificiel utilisée pour « attraper » les ondes non linéaires, qui ne bifurquent pas par instabilité de l'écoulement de base. Cette méthodologie a été mise au point et appliquée par Waleffe (1997), Waleffe (1998) en canal plan. Wedin & Kerswell (2004) et Faisst & Eckhardt (2003) l'ont adapté au cas d'un tuyau. Nous évoquerons en premier lieu le calcul des rouleaux-jets, puis la recherche d'instabilité et enfin la méthode de continuation.

3.1 Calcul d'un écoulement indépendant de z : les rouleaux-jets

On procède en plusieurs étapes. Dans un premier temps, on recherche une solution \mathbf{u} sans dépendance en z que l'on note $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}(r, \theta) \\ \tilde{V}(r, \theta) \\ \tilde{W}(r, \theta) \end{pmatrix}$ dans le but de reproduire l'écoulement « rouleaux-jets ».

Pour créer ces rouleaux, on utilise un terme de forçage artificiel \mathbf{F} d'amplitude A_F que l'on ajoute à l'équation de la dynamique, c'est-à-dire que l'on va résoudre

$$\frac{dW_b}{dr} \tilde{U} \hat{\mathbf{z}} + \underline{\underline{\nabla}} \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = A_F \mathbf{F} - \nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \left(\mathbf{U}_b + \tilde{\mathbf{U}} \right) \right) - \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \left(\mathbf{U}_b \right) \right). \quad (3.3)$$

Ce terme de forçage \mathbf{F} est lui-même un champ de vitesse de la forme $\begin{pmatrix} U(r, \theta) \\ V(r, \theta) \\ 0 \end{pmatrix}$, i.e. des rouleaux.

Il doit avoir la même allure que les rouleaux que l'on veut reproduire.

3.2 Choix du terme de forçage de l'écoulement

Le terme de forçage \mathbf{F} joue un rôle primordial dans le procédé numérique du « SSP ». Il donne la forme des rouleaux et conditionne donc la solution \mathbf{u} . On a utilisé le même terme de forçage que Wedin & Kerswell (2004) pour un fluide newtonien. Il est à noter que, contrairement au cas newtonien, on n'a dans notre cas aucune idée expérimentale sur la forme de l'écoulement transverse. Pour construire ce terme de forçage, on recherche dans un premier temps les modes

propres $\mathbf{U}(r, \theta, t) = \begin{pmatrix} U(r) \\ V(r) \\ 0 \end{pmatrix} e^{im_0\theta} e^{-\frac{\sigma^2}{Re}t}$ indépendants de z du problème (3.2) linéarisé autour de

l'écoulement de base. Cela nous amène à résoudre le problème aux valeurs propres

$$-\frac{\sigma^2}{Re} \begin{pmatrix} U \\ V \\ 0 \end{pmatrix} = -\nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\mu_b \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}(\mathbf{U}) \right), \quad (3.4)$$

résolu numériquement par la routine DGGEVX de la librairie LAPACK. Le terme de forçage sera le mode propre le moins amorti, i.e. celui associé à la valeur propre dont la partie réelle est la plus grande. On normalise ce mode propre de sorte que $U(r_0) = 1$ à la position $r = r_0$ où U atteint son maximum.

On fixe une amplitude A_F de forçage. On calcule alors en résolvant (3.3) par une méthode de Newton (voir annexe C) un écoulement de « rouleaux-jets »

$$\begin{pmatrix} \tilde{U}(r, \theta) \\ \tilde{V}(r, \theta) \\ \tilde{W}(r, \theta) \end{pmatrix}.$$

3.3 Analyse de stabilité linéaire et non linéaire de l'écoulement de rouleaux-jets

On teste ensuite la stabilité de cet écoulement « rouleaux-jets de » $\tilde{\mathbf{U}}$ vis-à-vis d'une onde 3D $\tilde{\mathbf{v}}(r, \theta, z) = \tilde{\mathbf{u}}(r, \theta)e^{iqz}e^{\sigma t}$. On effectue donc une étude linéaire de stabilité avec un calcul de la valeur propre σ la plus dangereuse et du mode propre associé, vérifiant

$$\begin{aligned} \sigma \tilde{\mathbf{v}} = & -\frac{dW_b}{dr} \tilde{v}_r \hat{\mathbf{z}} - W_b \partial_z \tilde{\mathbf{v}} - \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \underline{\underline{\nabla}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{U} + \\ & \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\mu \left(\dot{\gamma}^2 \left(\mathbf{U}_b + \tilde{\mathbf{U}} \right) \right) \underline{\underline{\dot{\gamma}}}(\mathbf{v}) \right) + \\ & \frac{1}{Re} \mathbf{div} \left(\mu' \left(\dot{\gamma}^2 \left(\mathbf{U}_b + \tilde{\mathbf{U}} \right) \right) \dot{\gamma}_{ij} \left(\mathbf{U}_b + \tilde{\mathbf{U}} \right) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{v}) \underline{\underline{\dot{\gamma}}} \left(\mathbf{U}_b + \tilde{\mathbf{U}} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\mu'(\dot{\gamma}^2)$ est la dérivée première de μ par rapport à $\dot{\gamma}^2$. Numériquement, la routine ZGGEVX de la librairie LAPACK a été utilisée pour le calcul des modes propres. Trois paramètres entrent en jeu : les nombres d'ondes azimutal m_0 et axial q_0 , ainsi que l'amplitude de forçage A_F . Pour trouver une instabilité, on travaille soit à A_F fixé et l'on fait varier q_0 ou vice versa.

Une fois une instabilité trouvée, on calcule le point de bifurcation par une méthode de la sécante (voir annexe E) puis par une méthode de branchement (voir annexe F), on attrape la nouvelle branche de solution que l'on suit avec la méthode de continuation qui sera présentée au chapitre 4.

Le suivi de la branche se fait en fonction du paramètre de forçage A_F . L'objectif est la recherche de bifurcations sous critiques, bifurcations pour lesquelles l'amplitude de forçage A_F diminue lorsque l'énergie de la perturbation croît. Lorsque cette amplitude passe par 0, i.e. lorsque $A_F = 0$,

on obtient une solution de l'équation de la quantité de mouvement (3.2) non forcée. Un exemple de tel calcul est montré sur la figure 4.1.

Chapitre 4

Modélisation numérique

Le but de la thèse est de calculer des solutions ondes propagatives \mathbf{u} de vitesse de phase c de l'équation de la quantité de mouvement (3.2), éventuellement forcée,

$$-c\partial_z\mathbf{u} + \frac{dW_b}{dr}u_r\hat{\mathbf{z}} + W_b\partial_z\mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = A_F\mathbf{F} - \nabla p' + \frac{1}{Re}\mathbf{div}(\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) - \frac{1}{Re}\mathbf{div}(\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b)). \quad (4.1)$$

On doit en particulier être en mesure de suivre les branches de ces solutions en fonction des paramètres de contrôle du système. Dans notre cas, ces paramètres de contrôle seront le nombre de Reynolds Re et l'amplitude de forçage A_F . En effet, on travaillera en général avec les paramètres rhéologiques λ et n fixés.

Nous avons utilisé une méthode *pseudo-spectrale* pour la résolution numérique de l'équation (3.2). Cette méthode consiste à représenter la solution sous la forme d'une somme finie de fonctions de base et à appliquer la méthode des résidus pondérés pour obtenir un système de dimension finie, portant sur les coefficients des fonctions de base. Dans la présente étude, nous avons opté pour la méthode de Petrov-Galerkin (cette terminologie signifie que les fonctions de base et les fonctions-test sont différentes) proposée par Meseguer & Trefethen (2000), Meseguer & Trefethen (2001), Meseguer & Trefethen (2003), Meseguer & Mellibovsky (2007). De manière générale, le vecteur des coefficients du développement spectral appartient à ce qui est appelé l'« espace spectral ». On distingue celui-ci de l'« espace physique », constitué des valeurs des vitesses aux points de grille, c'est-à-dire les points de l'espace choisis pour l'évaluation. Une méthode est dite pseudo-spectrale si une partie des calculs se font dans l'espace physique et une autre partie dans l'espace spectral. Ce qui est le cas ici : les termes linéaires sont évalués dans l'espace spectral et les termes non

linéaires dans l'espace physique. L'avantage principal des méthodes spectrales est leurs propriétés de convergence. Pour une solution C^∞ , ces méthodes permettent une convergence exponentielle, i.e., l'écart ϵ entre la solution exacte et la solution approximée se comporte comme $\epsilon \sim e^{-\alpha N}$ où α est réel strictement positif, N représente le nombre de fonctions de base utilisées pour représenter la solution. L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles sont limitées à des géométries simples, ce qui est le cas de notre conduite cylindrique. Dans un premier temps, on s'intéressera à la discrétisation numérique du problème, puis dans un second temps aux méthodes employées pour le suivi des branches de solutions.

4.1 Méthode pseudo-spectrale de Petrov-Galerkin

Le principe des méthodes spectrales consiste à rechercher la solution \mathbf{u} du problème (3.2) sous la forme d'un développement en série de fonctions dites fonctions de base. Pour bien choisir les fonctions de base, il faut bien définir l'espace fonctionnel dans lequel on cherche la solution.

Le champ de vitesse doit obéir à différentes contraintes :

- il doit être à divergence nulle,
- il doit s'annuler à la paroi en $r = 1$ (condition d'adhérence),
- il doit être régulier dans le domaine d'écoulement, et en particulier ne pas présenter de singularités sur l'axe de la conduite $r = 0$.

De plus, les solutions doivent être périodiques en azimuth et dans la direction axiale de l'écoulement. Étant donné un nombre d'onde axial q_0 et azimuthal m_0 et une vitesse de phase c , l'espace fonctionnel dans lequel on recherche la solution est donc

$$\mathbf{H}_{\mathbf{m}_0, \mathbf{q}_0} = \left\{ \mathbf{u} \in C_+^\infty \text{ définie sur } \Omega_\infty, \text{ t.q. } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(r = 1, \theta, z) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(r, \theta + 2\pi/m_0, z) = \mathbf{u}(r, \theta, z) \\ \mathbf{u}(r, \theta, z + 2\pi/q_0) = \mathbf{u}(r, \theta, z) \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \end{array} \right. \right\} \quad (4.2)$$

avec

$$\Omega_\infty = \{(r, \theta, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}. \quad (4.3)$$

Techniquement, on utilise le domaine

$$\Omega = \left\{ (r, \theta, z) \in [0, 1] \times \left[0, \frac{2\pi}{m_0}\right] \times \left[0, \frac{2\pi}{q_0}\right] \right\} \quad (4.4)$$

en raison des hypothèses de périodicité en θ et z . Par C_+^∞ dans (4.2), on entend que le champ de vitesse \mathbf{u} est non seulement C^∞ dans Ω_∞ mais également *analytique*, au sens où on peut développer ses composantes cartésiennes $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ en série de Taylor autour de tout point (x_0, y_0, z_0) de l'intérieur de Ω_∞ sous la forme

$$u_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{nmk} (x - x_0)^n (y - y_0)^m (z - z_0)^k, \quad (4.5)$$

et idem pour les autres composantes. Ceci conduit alors (voir par exemple Tuckerman 2006) à restreindre la forme de développements en série de puissances de r , séries de Fourier en θ et z , des composantes cylindriques de \mathbf{u} . Le cas le plus général tridimensionnel est présenté dans Priymak & Miyazaki (1998), qui donnent le corollaire suivant.

Corollaire de Priymak & Miyazaki (1998)

Soit un champ vectoriel $\mathbf{v}(r, \theta, z) = u\hat{\mathbf{r}} + v\hat{\boldsymbol{\theta}} + w\hat{\mathbf{z}}$ périodique en z de période $\frac{2\pi}{q_0}$ et analytique pour tout $r \in [0, \epsilon]$ ($\epsilon > 0$). Alors pour tout $r \in [0, \epsilon]$, les fonctions u , v et w s'écrivent sous la forme :

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \phi_{ml}(r) e^{iq_0 l z + im\theta} \quad \text{pour } \phi = u, v \text{ ou } w, \quad (4.6)$$

avec

$$(u_{ml}, v_{ml}) = r^{|m|-1} (\hat{u}_{ml}(r), \hat{v}_{ml}(r)) \quad \text{pour } m \neq 0, \quad (4.7)$$

$$(u_{0l}, v_{0l}) = r (\hat{u}_{0l}(r), \hat{v}_{0l}(r)) \quad \text{pour } m = 0, \quad (4.8)$$

$$w_{ml} = r^{|m|} \hat{w}_{ml}(r), \quad (4.9)$$

les fonctions $\hat{u}_{ml}(r)$, $\hat{v}_{ml}(r)$ et $\hat{w}_{ml}(r)$ étant des séries entières paires en r .

4.1.1 Fonctions de base

L'études de ces conditions ainsi que celles énumérées équation (4.2) a été menée par Meseguer & Trefethen (2000). Cette étude a abouti à introduire des fonctions de bases $\mathbf{v}_{mln}(r)e^{imm_0\theta}e^{ilq_0z}$ avec

$$\mathbf{v}_{mln}(r) = \begin{pmatrix} u_{mln}(r) \\ v_{mln}(r) \\ w_{mln}(r) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Imposer la condition d'incompressibilité aux fonctions de base amène ces dernières à vérifier l'équation

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r}\right)u_{mln} + \frac{im}{r}v_{mln} + ilqw_{mln} = 0. \quad (4.11)$$

Cela signifie que pour un triplet m, l, n donné, le champ \mathbf{v}_{mln} appartient à un espace vectoriel de dimension 2. Cela conduit à deux développements en séries tronquées :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = \sum_{m=-M}^M \sum_{l=-L}^L \sum_{n=1}^N a_{mln}^{(1)} \mathbf{v}_{mln}^{(1)}(r) e^{imm_0\theta} e^{ilq_0z} + \sum_{m=-M}^M \sum_{l=-L}^L \sum_{n=1}^N a_{mln}^{(2)} \mathbf{v}_{mln}^{(2)}(r) e^{imm_0\theta} e^{ilq_0z}. \quad (4.12)$$

En notant T_n le polynôme de Chebyshev de degré n , on utilise, comme Meseguer & Trefethen (2000),

$$g_n(r) = (1 - r^2)^2 T_{2n-2}(r) \quad \text{et} \quad h_n(r) = (1 - r^2) T_{2n-2}(r), \quad (4.13)$$

pour $m = 0$:

$$\mathbf{v}_{0ln}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ rh_n(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{0ln}^{(2)} = \begin{pmatrix} -ilqr g_n(r) \\ 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right) [rg_n(r)] \\ h_n(r), \text{ si } l = 0 \end{array} \right. \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

pour $m \neq 0$:

$$\mathbf{v}_{mln}^{(1)} = \begin{pmatrix} -imm_0 r^{\sigma(mm_0)-1} g_n(r) \\ \frac{d}{dr} [r^{\sigma(mm_0)} g_n(r)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{mln}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -ilqr^{\sigma(mm_0)+1} h_n(r) \\ imm_0 r^{\sigma(mm_0)} h_n(r) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\text{où } \sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{pour } m \text{ impair} \\ 2 & \text{pour } m \text{ pair} \end{cases}.$$

4.1.2 Méthode des résidus pondérés. Intégration par parties

Afin de pouvoir définir des résidus pondérés, on munit l'espace fonctionnel $\mathbf{H}_{\mathbf{m}_0, \mathbf{q}_0}$ du produit scalaire suivant :

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \iiint_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* d^3x \quad (4.16)$$

avec Ω défini en (4.4) et $d^3x = r dr d\theta dz$. On utilise une méthode de résidus pondérés : on projette l'équation (3.2) sur des fonctions-test \mathbf{w}_{mln} . Ces fonctions sont à divergence nulle pour éliminer le champ de pression (Meseguer & Trefethen 2000) et s'annulent en $r = 1$. De manière générale, considérons un champ de tenseur $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ supposé symétrique et périodique dans les directions axiales et azimutales, qui serait par exemple une contribution du tenseur des contraintes. On a¹

$$\langle \mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}), \mathbf{w}_{mln} \rangle = \iiint_{\Omega} \mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{w}_{mln}^*) d^3x - \iiint_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w}_{mln}^* d^3x. \quad (4.17)$$

Le premier terme de (4.17) devient, avec la formule intégrale de la divergence,

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{w}_{mln}^*) d^3x = \iint_{\partial\Omega} [\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{w}_{mln}^*] \cdot \mathbf{d}^2\mathbf{S}. \quad (4.18)$$

La périodicité de $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ et \mathbf{w}_{mln} , ainsi que la nullité de \mathbf{w}_{mln} en $r = 1$, impliquent l'annulation de ce terme. En conséquence,

$$\langle \mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}), \mathbf{w}_{mln} \rangle = - \iiint_{\Omega} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w}_{mln}^* d^3x. \quad (4.19)$$

Ainsi, on peut éliminer le champ de pression qui apparaît dans le tenseur $-p' \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ dans (3.2), car \mathbf{w}_{mln} est à divergence nulle. D'autre part la formule (4.19) permet de faire agir les dérivées spatiales sur les fonctions test ; cela sera utile car $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ est de forme compliquée en fluide non newtonien.

¹en vertu de l'identité $\mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \mathbf{w}_{mln}) = \mathbf{div}(\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}) \cdot \mathbf{w}_{mln} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} : \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{w}_{mln}$, valable car $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}$ est symétrique.

4.1.3 Fonctions test

Dans le produit scalaire (4.16), l'intégration selon la variable r s'effectue sur $[0, 1]$. Or les fonctions de bases $\mathbf{v}_{mln}^{(k)}(r)$ sont des polynômes de Chebyshev modifiés. La méthode numérique d'intégration selon la variable r est la méthode de Gauss-Lobatto (section A.2). Mettant en oeuvre des propriétés d'orthogonalité des polynômes de Chebyshev, le domaine d'intégration radial naturel pour cette méthode serait l'intervalle $[-1, 1]$. Or l'intervalle physique du rayon est $[0, 1]$. Pour cette raison, les fonctions de base et les fonctions-test sont choisies Meseguer & Trefethen (2000) de telle sorte que l'intégrande soit toujours une fonction paire, puisque

$$\int_0^1 g(r)dr = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(r)dr \text{ si } g \text{ est une fonction paire.} \quad (4.20)$$

Le champ des fonctions-test $\mathbf{w}_{mln}^{(k)}$ est sous la forme

$$\mathbf{w}_{mln}^{(k)} = \tilde{\mathbf{v}}_{mln}^{(1),(2)} e^{i(mm_0\theta + lq_0z)} \quad (4.21)$$

pour $m = 0$,

$$\tilde{\mathbf{v}}_{0ln}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ h_n(r) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{v}}_{0ln}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} -ilqr^2g_n(r) \\ 0 \\ \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right)[r^2g_n(r)] + r^3h_n(r) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

si $l = 0$, la troisième composante de $\tilde{\mathbf{v}}_{0ln}^{(2)}$ est remplacée par $rh_n(r)$. pour $m \neq 0$, sachant que $s(m) = 1$ si m est impair, 0 sinon,

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mln}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} -imm_0r^{s(mm_0)}g_n(r) \\ \frac{d}{dr}(r^{s(mm_0)+1}g_n(r)) + r^{2+s(mm_0)}h_n(r) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et} \quad (4.23)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{mln}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -ilqr^{2+s(mm_0)}h_n(r) \\ imm_0r^{s(mm_0)+1}h_n(r) \end{pmatrix},$$

si $l = 0$, la troisième composante de $\tilde{\mathbf{v}}_{mln}^{(2)}$ est remplacée par $r^{1-s(m)}h_n(r)$.

4.1.4 Conséquences de la symétrie des solutions

Tout d'abord, la solution recherchée \mathbf{u} est réelle donc $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ (le symbole $*$ représente le complexe conjugué). En exploitant (4.12), on en conclut que

$$\forall m, l, n, k, \quad a_{-m-ln}^{(k)} = a_{mln}^{(k)*}. \quad (4.24)$$

On peut donc ne s'intéresser qu'aux modes $l \geq 0$. De plus, on recherche des ondes non linéaires qui doivent respecter la symétrie (1.6)

$$S_1 : (r, \theta, z, u, v, w) \mapsto (r, -\theta, z + \pi/q_0, u, -v, w). \quad (4.25)$$

Cette règle, ainsi que le caractère réel ou imaginaire des fonctions de base, nous amènent aux relations suivantes sur les coefficients spectraux $a_{mln}^{(1)}$ et $a_{mln}^{(2)}$ pour $l \geq 0$, valables $\forall n = 1, \dots, N$:

$$\begin{cases} a_{00n}^{(1)} = 0 \\ a_{00n}^{(2)} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\forall m \neq 0 \forall k = 1, 2, \quad a_{m0n}^{(k)} \in i\mathbb{R}, \quad a_{-m0n}^{(k)} = -a_{m0n}^{(k)} \quad (4.27)$$

$$\forall l \neq 0, \quad \begin{cases} a_{0ln}^{(1)} = 0 \text{ pour } l \text{ pair} \\ a_{0ln}^{(2)} = 0 \text{ pour } l \text{ impair} \end{cases} \quad (4.28)$$

$$\forall l \neq 0, m \neq 0, \forall k, \quad \begin{cases} a_{-mln}^{(k)} = -a_{mln}^{(k)} \text{ pour } l \text{ pair} \\ a_{-mln}^{(k)} = a_{mln}^{(k)} \text{ pour } l \text{ impair} \end{cases} \quad (4.29)$$

Ces relations nous permettent donc de ne considérer que les coefficients pour $l \geq 0$ et $m \geq 0$. Cela permet de diminuer la taille du système. On introduit en conséquence le vecteur des coefficients

réels et de la vitesse de phase

$$X = \begin{pmatrix} \Re(a_{00n}^{(2)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \\ \Im(a_{m0n}^{(1)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ \Im(a_{m0n}^{(2)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ \text{pour } l = 1, \dots, L \Re(a_{0ln}^{(1)}) \text{ ou } \Re(a_{0ln}^{(2)}) \text{ selon la parité de } l \text{ pour } n = 1, \dots, N \\ \Re(a_{mln}^{(1)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ \Re(a_{mln}^{(2)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ \text{pour } l = 1, \dots, L \Im(a_{0ln}^{(1)}) \text{ ou } \Im(a_{0ln}^{(2)}) \text{ selon la parité de } l \text{ pour } n = 1, \dots, N \\ \Im(a_{mln}^{(1)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ \Im(a_{mln}^{(2)}) \text{ pour } n = 1, \dots, N \text{ et } m = 1, \dots, M \\ c \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

X est un vecteur de dimension

$$N_{tot} = (2L + 1)(2M + 1)N + 1. \quad (4.31)$$

On note \underline{X} le vecteur X sans la vitesse de phase c , soit

$$X = \begin{pmatrix} \underline{X} \\ c \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

4.1.5 Équation projetée

On obtient alors avec la méthode des résidus pondérés un système réel de la forme :

$$cD \cdot \underline{X} + L \cdot \underline{X} + N_2(\underline{X}) + \frac{1}{Re} \tilde{N}(\underline{X}) = 0. \quad (4.33)$$

Les coefficients $b_{mnl}^{(k)}$ des équations projetées vérifient les mêmes règles de symétrie (4.26) à (4.29). L'opérateur linéaire D est issu de la discrétisation de l'opérateur temporel $-\partial_z \mathbf{u}$, l'opérateur linéaire L de la discrétisation de l'opérateur $\frac{dW_b}{dr} u_r \hat{\mathbf{z}} + W_b \partial_z \mathbf{u}$, l'opérateur quadratique N_2 du terme convectif $\underline{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, l'opérateur non linéaire \tilde{N} du terme $\mathbf{div}(\underline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})) - \mathbf{div}(\underline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b))$. Cet opérateur est calculé grâce à la formule (4.19) c'est-à-dire qu'il est calculé par des intégrales de

la forme

$$\left[\tilde{N}(X) \right]_{mln}^{(k)} = - \iiint_{\Omega} \left[\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \underline{\underline{\tau}}(\mathbf{U}_b) \right]_{mln} : \underline{\underline{\mathbf{w}}}_{mln}^{*(k)} d^3x \quad (4.34)$$

Pour le calcul de ces intégrales, on doit passer par l'évaluation de l'intégrande au points de grille. En particulier on doit calculer le champ de vitesse sur les points de grille. Cette étape est présentée dans l'annexe I.

4.1.6 Condition de phase

Le système (4.33) comporte $(2L + 1)(2M + 1)N$ équations. On doit donc ajouter à l'équation (4.33) une équation supplémentaire qui va permettre de déterminer la phase de la solution onde. En effet l'invariance par translation axiale du problème pose un problème d'indétermination de la phase des ondes, qui doit être levée. On a choisi la condition de phase suivante :

$$\sum_{n=1}^N i \Re(a_{-11n}^{(1)}) u_{-11n}^{(1)}(r = 0.1) = 0. \quad (4.35)$$

Le facteur i permet d'avoir une équation réelle. Cette équation est l'équation qui va permettre de déterminer la vitesse de phase.

4.2 Méthode de continuation

En utilisant une méthode spectrale, nous obtenons avec l'équation (4.33) une représentation discrète de l'équation (3.2). Notre problème de suivi de branche de solution se résume alors à résoudre un problème du type :

$$G(X, Re) = 0 \text{ avec } G : \mathbb{R}^{N_{tot}} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{tot}} \quad (4.36)$$

sur un intervalle de nombre de Reynolds Re , en notant

$$G(X, Re) = \begin{pmatrix} cD \cdot \underline{X} + L \cdot \underline{X} + N_2(\underline{X}) + \frac{1}{Re} \tilde{N}(\underline{X}) \\ \sum_{n=1}^N i \Re(a_{-11n}^{(1)}) u_{-11n}^{(1)}(r = 0.1) \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Le suivi des branches de solutions de l'équation (4.36) est effectué par une approche prédiction-correction. Une fois un point calculé sur la courbe des solutions, le point suivant est prédit par

une méthode peu précise : le « prédicteur », la méthode d'Euler dans notre cas. Cette méthode est grossière, d'où la nécessité d'un « correcteur », la méthode de Newton-Raphson, qui permet d'obtenir une meilleure approximation de ce point.

4.2.1 Prédicteur : méthode d'Euler

Explicitons en premier lieu la méthodologie adoptée pour le « prédicteur ». Supposons que l'on ait calculé un point (X_0, Re_0) sur la branche de solution. Pour prédire le point suivant, on utilise une méthode d'Euler. Le paramètre naturel de continuation est le paramètre de contrôle de l'équation (4.33) soit Re . En fixant nous-même la variation $Re - Re_0$, on prédit grossièrement un point (\tilde{X}, Re) :

$$\tilde{X} = X_0 + (Re - Re_0) \frac{dX}{dRe}(Re_0). \quad (4.38)$$

Le vecteur $\frac{dX}{dRe}(Re_0)$ est obtenu à partir de la différentielle de l'équation (4.36) soit :

$$0 = dG = G_X \cdot dX + G_{Re} \cdot dRe \quad (4.39)$$

où G_X est l'opérateur représentant les dérivées partielles de G par rapport à toutes les composantes de X ,

$$(G_X)_{ij} = \frac{\partial G_i}{\partial X_j}, \quad (4.40)$$

et

$$G_{Re} = \frac{\partial G}{\partial Re}. \quad (4.41)$$

G_X est une matrice de dimension $N_{tot} \times N_{tot}$ et G_{Re} un vecteur colonne de dimension N_{tot} . Ainsi,

$$\frac{dX}{dRe} = -(G_X)^{-1} \cdot G_{Re}. \quad (4.42)$$

Un point de rebroussement (X_0, Re_0) est un point singulier caractérisé par (Doedel et al. 1991)

$$\dim \ker \left(G_X(X_0, Re_0) \right) = 1 \text{ et } G_{Re}(X_0, Re_0) \notin \text{Im} \left(G_X(X_0, Re_0) \right). \quad (4.43)$$

En ce point, l'opérateur $G_X(X_0, Re_0)$ est singulier. Le choix de Re comme paramètre de continuation n'est de ce fait plus adapté. Les difficultés que la méthode de continuation peut rencontrer en

approchant d'un point de rebroussement peuvent être surmontées en effectuant la continuation au moyen d'un paramètre artificiel : la « pseudo abscisse curviligne » s de la courbe. Cette pseudo abscisse curviligne est définie par la distance en norme euclidienne entre deux points :

$$s - s_0 = \left\| \left(X(s), Re(s) \right) - \left(X(s_0), Re(s_0) \right) \right\|_2. \quad (4.44)$$

Nous devons calculer le vecteur tangent $\overline{X}'(s_0) = \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right)$ au point $(X(s_0), Re(s_0))$ de la courbe pour prédire le point suivant $(X(s), Re(s))$, dont l'approximation est donnée par :

$$(\tilde{X}(s), \tilde{Re}(s)) = (X(s_0), Re(s_0)) + (s - s_0) \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right) \quad (4.45)$$

où cette fois-ci la variation $\Delta s_0 = s_1 - s_0$ en abscisse curviligne est fixée. On impose la condition de normalisation sur le vecteur tangent :

$$\left\| \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right) \right\|_2 = 1. \quad (4.46)$$

Le vecteur $\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right)$ est obtenu en différenciant par rapport à s (4.36) :

$$J(X(s_0), Re(s_0)) \cdot \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right) = 0 \quad (4.47)$$

où $J(X(s_0), Re(s_0))$ représente le jacobien associé à G évalué en $(X(s_0), Re(s_0))$, soit l'opérateur :

$$J(X(s_0), Re(s_0)) = \left(G_X(X(s_0), Re(s_0)) \quad G_{Re}(X(s_0), Re(s_0)) \right). \quad (4.48)$$

J est une matrice de dimension $N_{tot} \times (N_{tot} + 1)$, obtenue en rajoutant en dernière colonne le vecteur $G_{Re}(X(s_0), Re(s_0))$. Il faut noter que la matrice J n'étant pas carrée, il manque une équation pour déterminer $\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right)$. Celle-ci sera donnée dans la section 4.2.2. En un point de rebroussement $(X(s_0), Re(s_0))$, $G_{Re}(X(s_0), Re(s_0)) \notin \text{Im} \left(G_X(X(s_0), Re(s_0)) \right)$ donc la seule solution possible de (4.47) est

$$G_X(X(s_0), Re(s_0)) \cdot \frac{dX}{ds}(s_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dRe}{ds}(s_0) = 0. \quad (4.49)$$

Ainsi, au point de rebroussement, $\ker \left(G_X(X_0, Re_0) \right) = \text{Vec} \left(\frac{dX}{ds}(s_0) \right)$.

Concrètement, une méthode de Newton-Raphson est utilisée pour résoudre (4.47). Des informations seront données sur la construction des opérateurs $G_X(X_0, Re_0)$ et $G_{Re}(X(s_0), Re(s_0))$ dans l'annexe H.3. De plus, un contrôle du pas Δs_0 est utilisé, voir l'annexe G. Nous attirons l'attention sur le fait que tous les systèmes linéaires carrés (i.e. de la forme $A.v = b$ avec A une matrice carrée) évoqués par la suite, mis en œuvre dans une méthode de Newton-Raphson, sont résolus au moyen d'une méthode GMRES (Generalized Minimum RESidual method) introduite en section 4.3 et décrite plus en détails dans l'annexe H.1. Le choix de cette méthode s'impose en raison du grand nombre de degrés de liberté N_{tot} .

4.2.2 Calcul du vecteur tangent

Rappelons que nous devons calculer le vecteur tangent $\overline{X}'(s_0) = \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0)\right)$ au point $(X(s_0), Re(s_0))$ de la courbe pour prédire le point suivant $(X(s), Re(s))$ (4.45) pour la méthode d'Euler.

Pour déterminer ce vecteur, on doit résoudre l'équation (4.47). Cette équation est indéterminée car l'opérateur $J(X(s_0), Re(s_0))$ n'est pas bijectif, étant défini sur $\mathbb{R}^{N_{tot}} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N_{tot}}$. En d'autres termes le système (4.47) n'est pas carré. On utilise pour le résoudre une méthode itérative de Newton-Raphson :

$$J((X, Re)^k) \cdot \delta \overline{X}'_k = -J((X, Re)^k) \cdot \overline{X}'_k \quad (4.50)$$

où $\overline{X}'_{k+1} = \overline{X}'_k + \delta \overline{X}'_k$, \overline{X}'_k étant l'approximation à l'itération k de $\overline{X}'(s_0)$. On ajoute à l'équation (4.50) la contrainte

$$\overline{X}'_{k-1} \cdot \delta \overline{X}'_k = 0. \quad (4.51)$$

Pour la résolution du système linéaire carré formé des équations (4.50) et (4.51), on utilise une méthode GMRES. Le traitement de la contrainte est fait de manière similaire que celle qui sera présentée dans la section 4.2.3. Pour initialiser (4.50), on effectue une évaluation grossière du vecteur \overline{X}'_0 par une variation entre deux points précédents de la courbe situés aux abscisses curvilignes s_{-2} et s_{-1} :

$$\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0)\right)_0 \approx \frac{\left(X(s_{-2}), Re(s_{-2})\right) - \left(X(s_{-1}), Re(s_{-1})\right)}{s_{-2} - s_{-1}}. \quad (4.52)$$

4.2.3 Correcteur : méthode de Newton-Raphson avec paramétrisation

Une méthode de Newton Raphson, « le correcteur », est utilisée pour revenir sur la courbe de solutions. La condition initiale utilisée pour cette méthode est évidemment $(\tilde{X}(s), \tilde{Re}(s))$. Ensuite, on effectue des itérations pour obtenir une meilleure approximation du point $(X(s), Re(s))$:

$$(X, Re)^{k+1} = (X, Re)^k + (\delta X, \delta Re)^k. \quad (4.53)$$

Pour construire cette suite, on doit résoudre l'équation

$$J((X, Re)^k) \cdot (\delta X, \delta Re)^k = -G((X, Re)^k). \quad (4.54)$$

On doit signaler que le système (4.54) est indéterminé : en effet, l'application J est définie sur $\mathbb{R}^{N_{tot}} \times \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{N_{tot}}$. Pour cette raison, une condition supplémentaire doit être ajoutée au système (4.54) pour calculer de manière unique $(\delta X, \delta Re)^k$.

L'équation (4.36) est donc étendue à un système de la forme :

$$\overline{G}(X, Re, s) = \begin{pmatrix} G(X, Re) \\ P(X, Re, s) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.55)$$

où $P(X, Re, s) = 0$ est une équation de paramétrisation.

La méthode de continuation de la pseudo-abcisse curviligne, que l'on doit à Keller (1977), est celle principalement utilisée :

$$P((X, Re), s) = (X(s) - X(s_0)) \cdot \frac{dX}{ds}(s_0) + (Re(s) - Re(s_0)) \cdot \frac{dRe}{ds}(s_0) - (s - s_0) = 0. \quad (4.56)$$

L'abcisse s_0 est celle du point antérieur calculé. Cette équation (4.56) signifie que l'on cherche le nouveau point dans un hyperplan situé à une distance $s - s_0$ du point $(X(s_0), Re(s_0))$. Cet hyperplan contient le point $(\tilde{X}(s), \tilde{Re}(s))$ donné par (4.45), calculé par le prédicteur. Enfin, cet hyperplan est orthogonal au vecteur tangent $(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0))$ du point $(X(s_0), Re(s_0))$.

Mais il s'est avéré que dans plusieurs cas, cette paramétrisation ne fonctionne pas bien au passage des points de rebroussement. Cela peut provenir du fait que la pente est calculée de manière approximative. Dans ce cas pour passer ces points de rebroussement, j'ai changé la

paramétrisation et choisi ²

$$P((X, Re), s) = V_{NRJ}(s) \cdot V_{NRJ}(s) - \tilde{V}_{NRJ}(s) \cdot \tilde{V}_{NRJ}(s) = 0. \quad (4.57)$$

Le vecteur $V_{NRJ}(s) = \left(X((2M+1)N+1), \dots, X((2L+1)(2M+1)N) \right)$ est constitué des coefficients de X pour $l > 0$. Le vecteur $\tilde{V}_{NRJ}(s) = \left(\tilde{X}((2M+1)N+1), \dots, \tilde{X}((2L+1)(2M+1)N) \right)$ est le vecteur obtenu à partir de la prédiction \tilde{X} de X (4.45). Le nouveau point $\left(X(s), Re(s) \right)$ recherché devra donc avoir pour « énergie » $\sqrt{\tilde{V}_{NRJ}(s)^T \cdot \tilde{V}_{NRJ}(s)}$.

De manière pratique, on utilise une version linéarisée de l'équation de paramétrisation, puisque dans la méthode de Newton δX et δRe sont supposés petits. Ainsi, la linéarisation de l'équation de paramétrisation (4.56) nous amène à l'équation

$$\delta X \cdot \frac{dX}{ds}(s_0) + \delta Re \cdot \frac{dRe}{ds}(s_0) = 0 \quad (4.58)$$

Cette équation est de la forme (Walker 1999) :

$$\bar{t}_k \cdot (\delta X, \delta Re)^k = 0 \quad (4.59)$$

Le choix du vecteur \bar{t}_k est lié au choix du paramètre de continuation. Ce vecteur \bar{t}_k est la linéarisation de l'équation de paramétrisation $P((X, Re), s) = 0$ par rapport à X et Re . Dans le cas de la paramétrisation (4.57), la linéarisation de cette équation nous donne

$$\bar{t}_k = 2(0, \dots, 0, X((2M+1)N+1), \dots, X((2L+1)(2M+1)N), 0, 0)^k. \quad (4.60)$$

Géométriquement, l'équation (4.59) signifie que pour passer au point $(X, Re)^{k+1}$ on parcourt un chemin orthogonal au vecteur \bar{t}_k . On comprend par exemple que dans le cas de la paramétrisation (4.56) notre vecteur \bar{t}_k sera le vecteur tangent $\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right)$. En effet, la condition initiale de la méthode de Newton (4.54) est le point $(\tilde{X}(s), \tilde{Re}(s))$ obtenu par (4.45). Ce point est situé à une distance $s - s_0$ du point précédent de la courbe $(X(s_0), Re(s_0))$. Avec (4.59), on progresse alors lors des itérations de Newton sur un « chemin » orthogonal à $\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right)$ situé à la distance $s - s_0$ (que l'on a fixée) du point $(X(s_0), Re(s_0))$.

²Le produit scalaire $V_{NRJ}(s) \cdot V_{NRJ}(s)$ représente en quelque sorte une « énergie » au carré des modes $l > 0$.

Ayant ajouté une équation au système (4.36) pour obtenir le système étendu (4.55), il suffirait d'ajouter au système (4.54) une équation du type (4.59). Mais il s'avère que dans plusieurs cas les méthodes de Krylov, donc en particulier la méthode GMRES qui est, rappelons le, présentée en annexe H.1, ne sont pas bien adaptées au nouveau problème (Walker 1999), principalement pour des problèmes de conditionnement. J'ai donc procédé comme indiqué dans Walker (1999).

On suppose dans un premier temps le vecteur \bar{t}_k connu. On construit ensuite un opérateur linéaire $Q : \mathbb{R}^{N_{tot}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{tot}+1}$ de telle sorte que l'image de cet opérateur soit l'orthogonal du vecteur \bar{t}_k ($\text{Im}(Q) = \bar{t}_k^\perp$) et $\|Q \cdot y\|_2 = \|y\|_2$ pour tout $y \in \mathbb{R}^{N_{tot}}$. Détaillons quelque peu la construction de cet opérateur :

- Tout d'abord, on construit la matrice $I_{N_{tot}+1}$ à $N_{tot} + 1$ lignes et N_{tot} colonnes, obtenue en supprimant la $N_{tot} + 1^{\text{ème}}$ colonne de la matrice identité I à $N_{tot} + 1$ lignes et colonnes.
- Puis une transformation de Householder³ H , matrice à $N_{tot} + 1$ lignes et colonnes, est utilisée de telle sorte que $H\bar{t}_k = e_{N_{tot}+1}$, $e_{N_{tot}+1}$ étant la $N_{tot} + 1^{\text{ème}}$ colonne de I .

Ainsi, $Q = HI_{N_{tot}+1}$.

Cet opérateur nous permet de modifier (4.54) associé à la contrainte (4.59) en résolvant le système

$$J((X, Re)^k) \cdot Q \cdot \delta Y^k = -G((X, Re)^k), \quad J((X, Re)^k) \cdot Q : \mathbb{R}^{N_{tot}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{tot}} \quad (4.61)$$

où l'on a introduit une nouvelle inconnue δY^k telle que

$$Q \cdot \delta Y^k = (\delta X, \delta Re)^k. \quad (4.62)$$

Une fois δY déterminé, on obtient par l'équation 4.62 $(\delta X, \delta Re)$.

³Il s'agit d'une isométrie de $\mathbb{R}^{N_{tot}+1}$.

4.3 Méthode inexacte de Newton-Raphson

4.3.1 Généralités. Utilisation de la GMRES

Nous sommes amenés, tant dans la phase de « prédiction » que de « correction », à utiliser une méthode de Newton-Raphson. Les équations respectives à résoudre pour chaque phase sont

$$J(X(s_0), Re(s_0)) \cdot \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right) = 0 \quad (4.63)$$

$$\left\| \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dRe}{ds}(s_0) \right) \right\|_2 - 1 = 0 \quad (4.64)$$

pour la phase de « prédiction »,

$$\begin{pmatrix} G(X, Re) \\ P(X, Re, s) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.65)$$

pour la phase de « correction ».

La méthode de Newton-Raphson consiste à résoudre un problème du type $F(\bar{X}) = 0$, $\bar{X} \in \mathbb{R}^{N_{tot}+1}$ avec $F : \mathbb{R}^{N_{tot}+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{tot}+1}$ en construisant une suite \bar{X}^k qui converge vers une solution \bar{X}^* . Cette suite est définie par :

$$\bar{X}^{k+1} = \bar{X}^k + \delta \bar{X}^k \quad (4.66)$$

$$\text{avec } F_{\bar{X}}(\bar{X}^k) \cdot \delta \bar{X}^k = -F(\bar{X}^k) \quad (4.67)$$

où $F_{\bar{X}}(\bar{X}^k)$ est le jacobien de la fonction F évalué en \bar{X}^k .

Par souci de concision $F_{\bar{X}}(\bar{X}^k)$ sera noté F'_k .

La construction de cette suite nous amène donc à chaque itération k de Newton à :

1. générer le jacobien $F_{\bar{X}}(\bar{X}^k)$,
2. résoudre le système linéaire (4.67)

Ces deux étapes sont prohibitives en terme de temps de calcul lorsque le nombre N_{tot} d'inconnues est élevé : dans notre cas, $N_{tot} > 10^3$.

C'est pourquoi l'utilisation d'une méthode GMRES, présentée en annexe H.1, couplée à une méthode inexacte de quasi-Newton s'avère utile. De plus, cette méthode nous affranchit du calcul du jacobien J à chaque itération mais au lieu de cela on calcule l'action de J sur un vecteur v , $J \cdot v$. Pour résumer, la méthode GMRES est une méthode itérative permettant de résoudre

un système linéaire de manière approchée. C'est l'utilisateur qui fixe la précision souhaitée sur la solution. Pour passer à l'itération suivante $k + 1$ de la méthode de Newton-Raphson, on doit donc fixer soit même le critère d'arrêt sur la résolution du système linéaire (4.67) à l'itération k . Il semble alors plus judicieux d'utiliser une méthode inexacte de Newton.

4.3.2 Critère d'arrêt des itérations de Newton : méthode inexacte de Newton

On qualifie d'« inexacte » une méthode de Newton lorsque qu'une solution approchée $\delta\bar{X}^k$ à l'équation de Newton (4.67) est calculée. Le degré de précision de $\delta\bar{X}^k$ à chaque itération k est déterminé par un critère d'arrêt. Avec η_k , le « terme de forçage » (Dembo et al. 1982), ce critère d'arrêt s'écrit

$$\frac{\|r_k\|_2}{\|F(\bar{X}^k)\|_2} \leq \eta_k \quad (4.68)$$

avec

$$r_k = F'_k \delta\bar{X}^k + F(\bar{X}^k) \quad (4.69)$$

le résidu de l'équation. Prendre $\eta_k = 0$, nous donne la méthode exacte de Newton.

Le choix 2 de Eisenstat & Walker (1996) s'est avéré efficace :

Étant donné $\gamma \in [0, 1]$, $\alpha \in]0, 2]$, et $\eta_0 \in [0, 1[$, on choisit pour $k \geq 1$,

$$\eta_k = \gamma \left(\frac{\|F(\bar{X}^k)\|_2}{\|F(\bar{X}^{k-1})\|_2} \right)^\alpha \quad (4.70)$$

Les paramètres principalement utilisés lors des calculs sont $\gamma = 1$, $\alpha = 1.6$ et $\eta_0 = 0.1$. Ce choix (4.70) permet d'éviter une « sur-résolution » du problème (4.67), c'est-à-dire lorsque $\|r_k\|_2$ est trop petit par rapport à $\|F(\bar{X}^k)\|_2$. Cela permet d'éviter des itérations de Newton inutiles. Pour améliorer la convergence de la méthode inexacte de Newton, un algorithme de backtracking a été ajouté, cf. annexe D.

4.4 Aspects pratiques - Performances numériques

Le code a été écrit en Fortran 95. Les calculs ont été effectués en double précision sur des PCs Intel Xeon 5160 à 3.00 GHz. Pour différentes routines, j'ai utilisé aussi la librairie LAPACK.

Un calcul typique pour une troncature $(N, M, L) = (30, 10, 7)$ dure environ 45 minutes. Le pic de RAM utilisée est atteint lors de l'exécution de la GMRES. Ce pic est de l'ordre de 4.5 Gb. Il passe à 12 Gb pour la troncature $(N, M, L) = (34, 12, 9)$. Il est clair qu'un problème de mémoire vive se pose à court terme surtout si l'on veut effectuer des calculs pour de fortes rhéofluidifications. Avec la méthode GMRES, on est amené à utiliser un préconditionneur \tilde{P} , cf. annexe H.2. Ce préconditionneur, construit à partir de 5 matrices, est en terme de mémoire un facteur limitant. On obtient d'ailleurs une sous-estimation de la mémoire utilisée en calculant la mémoire nécessaire au stockage de ces 5 matrices.

4.5 Validation du code

4.5.1 Validation pour un fluide newtonien

Ce code a été validé en newtonien en retrouvant les résultats de Wedin & Kerswell (2004) pour des ondes de nombre d'onde azimutal $m_0 = 2$ et $m_0 = 3$. Dans un premier temps, nous avons retrouvé des ondes non linéaires par la méthode de forçage décrite au chapitre 3. Notre figure 4.1 présente un exemple d'un tel calcul. Cette figure présente l'évolution d'une mesure de l'amplitude de l'onde

$$Amp = \sqrt{\sum_{n=1}^N |a_{n11}^{(1)}|^2 + |a_{n11}^{(2)}|^2} \quad (4.71)$$

en fonction de l'amplitude de forçage A_F . Nous avons ensuite recalculé la figure 7 de cet article, cf. notre figure 4.2. On a enfin reproduit les figures 12 et 13 de Wedin & Kerswell (2004) pour $m_0 = 2$ et 3, cf. notre figure 1.8 page 20.

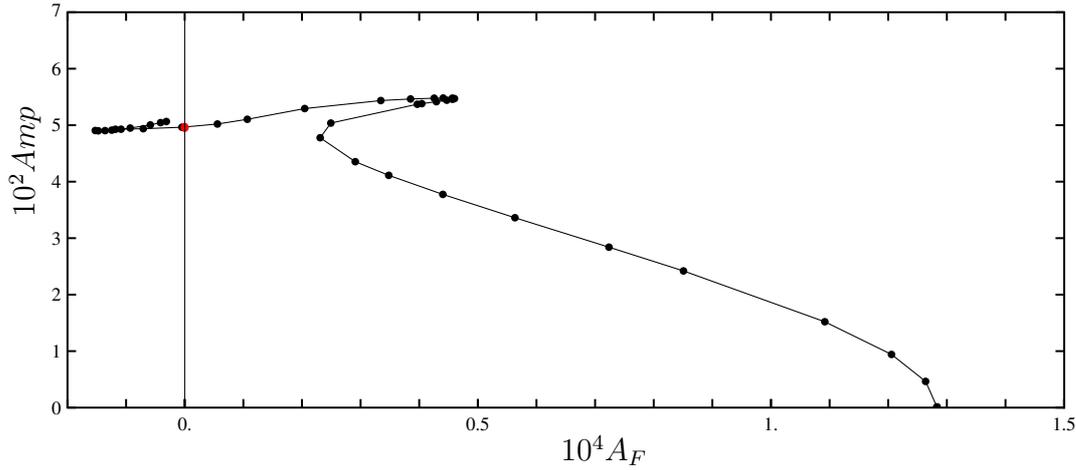


FIG. 4.1 – Pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, $Re = 1800$, évolution en fonction du paramètre de forçage A_F de l'amplitude Amp (voir équation 4.71) de l'onde. Le point rouge indique que l'amplitude A_F du terme de forçage est nul : on a là une solution physique non forcée. Cette figure est une version LEMTA de la figure 5 de Wedin & Kerswell (2004).

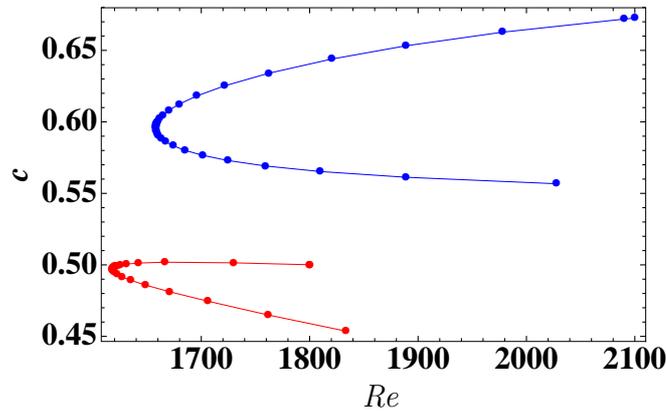


FIG. 4.2 – Vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds Re pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$ (en rouge) et $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$ (en bleu).

4.5.2 Validation pour un fluide rhéofluidifiant

Il faut également valider les résultats obtenus pour les fluides non newtoniens. Cela présente une plus grande difficulté qu'en fluide newtonien. En fluide newtonien, nous avons procédé à une comparaison à des résultats existants, mais pour un fluide rhéofluidifiant il n'y a pas de calculs d'ondes non linéaire donc aucune comparaison n'est possible. On a donc procédé différemment et effectué un test de consistance, du type de celui présenté dans la section 4 de Severac & Serre (2007), et des tests de convergence spectrale. Durant ces tests, le nombre de Reynolds Re est fixé, ainsi que le nombre d'onde axial q_0 ($q_0 = 1$) et la vitesse de phase c ($c = 0.5$). Durant tous les tests, on fixe $n = 0.5$. On introduit un champ de vitesse \mathbf{u}_a ad-hoc dans l'équation (3.2) en considérant

un écoulement laminaire nul, soit $\mathbf{U}_b = 0$ et sans gradient de pression imposé. Évidemment ce champ de vitesse n'est pas solution de (3.2). Il y a donc un reste que l'on note \mathbf{f}_a

$$\partial_t \mathbf{u}_a + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u}_a \cdot \mathbf{u}_a + \nabla p'_a - \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{u}_a)) = \mathbf{f}_a. \quad (4.72)$$

On cherche alors à résoudre une nouvelle équation :

$$\partial_t \mathbf{u} + \underline{\underline{\nabla}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}_a - \nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{div} (\underline{\underline{\tau}}(\mathbf{u})) \quad (4.73)$$

en utilisant notre code, i.e. en utilisant une méthode de Newton-Raphson associée à une méthode GMRES (section H.1). En partant d'une condition initiale \mathbf{u}_0 , on doit converger vers le champ de vitesse \mathbf{u}_a . La solution analytique choisie est

$$u_a = \frac{1}{2} r^2 (1 - r^2)^2 \cosh r \sin(m_0 \theta) \sin(z - \frac{1}{2} t) \quad (4.74)$$

$$v_a = \frac{1}{2m_0} r^2 (r^2 - 1) [(7r^2 - 3) \cosh r + r \sinh r (r^1 + 2r \sinh r)] \cos(m_0 \theta) \sin(z - \frac{1}{2} t) \quad (4.75)$$

$$w_a = r^3 (1 - r^2) \sinh^2 r \sin(m_0 \theta) \cos(z - \frac{1}{2} t). \quad (4.76)$$

On projette le champ de vitesse \mathbf{u}_a sur les fonctions tests afin d'obtenir un vecteur de coefficients $\underline{\underline{X}}_a$. Durant la validation, la vitesse de phase c n'est pas considéré comme une inconnue. La vitesse de phase c n'est pas incluse dans le vecteur $\underline{\underline{X}}_a$. On injecte ce vecteur $\underline{\underline{X}}_a$ dans l'opérateur $\underline{\underline{G}}$, où $\underline{\underline{G}}$ est l'opérateur G de (4.36) sans l'équation (4.35), afin d'obtenir un terme de forçage numérique

$$\tilde{\mathbf{F}}_a = \underline{\underline{G}}(\underline{\underline{X}}_a, Re). \quad (4.77)$$

Par la suite, on doit donc résoudre

$$\underline{\underline{G}}(\underline{\underline{X}}, Re) = \tilde{\mathbf{F}}_a \quad (4.78)$$

où $\underline{\underline{X}}$ est le vecteur X sans la vitesse de phase c . De manière générale, $\tilde{\mathbf{F}}_a$ ne représente pas exactement une projection de \mathbf{f}_a sur les fonctions test. Pour cela, il faudrait, à partir d'une expression analytique de \mathbf{f}_a , effectuer directement cette projection. C'est ce que nous avons fait par calcul formel puis numérique à l'aide de Mathematica, obtenant ainsi de façon totalement indépendante du code Fortran quelques composantes de \mathbf{F}_a . L'erreur relative entre les composantes de \mathbf{F}_a , calculées par Mathematica, et celles de $\tilde{\mathbf{F}}_a$ calculées avec le code Fortran est inférieure

à $4 \cdot 10^{-6}$. Le champ de vitesse \mathbf{u}_a (4.74) est riche uniquement en modes radiaux et comporte uniquement un mode azimutal et axial. Néanmoins le terme de forçage $\tilde{\mathbf{F}}_a$ est riche spatialement en modes radiaux, azimutaux et axiaux, en raison de la nature non linéaire de la viscosité μ_a du champ de vitesse \mathbf{u}_a . Pour montrer cela, on a étudié le spectre du vecteur \mathbf{Y}_a , qui est issu des parties réelles et imaginaires de la projection de \mathbf{u}_a sur les fonctions-test (figure 4.3) et de celui de $\tilde{\mathbf{F}}_a$ (figure 4.4). Le nombre de modes N pour tous les tests est défini par

$$N = 2M + 1 = 2L + 1. \quad (4.79)$$

On a tracé sur les figures 4.3a et 4.4a le module respectivement des parties réelles ou imaginaires des composantes des vecteurs \mathbf{Y}_a et $\tilde{\mathbf{F}}_a$ en fonction d'un « nombre d'onde généralisé »

$$K = \sqrt{(l+1)^2 + (m+1)^2 + n^2}. \quad (4.80)$$

Sur les figures 4.3b et 4.4b, on a voulu rendre compte de la répartition de l'énergie entre les différents nombres d'ondes azimutaux

$$A(m) = \sqrt{\sum_{l,n} |a_{mln}^{(1)}|^2 + |a_{mln}^{(2)}|^2} \quad (4.81)$$

et axiaux

$$B(l) = \sqrt{\sum_{m,n} |a_{mln}^{(1)}|^2 + |a_{mln}^{(2)}|^2}. \quad (4.82)$$

Sur la figure 4.4, on constate bien la richesse spectrale du terme de forçage $\tilde{\mathbf{F}}_a$

Des tests de consistance (figure 4.6, figure 4.5) ont été réalisés à $m_0 = 1$ pour un indice de rhéofluidification $n = 0.5$ et différents λ , pour 2 nombres de Reynolds $Re = 10$ et $Re = 1000$. Pour ces tests, on étudie l'évolution d'une erreur discrète en norme 2 en fonction du nombre de modes N . Cette erreur est la différence sur les points de grille entre \mathbf{u}_a et $\tilde{\mathbf{u}}_a$, le champ de vitesse obtenu numériquement. La condition initiale de la méthode de Newton-GMRES pour la résolution de (4.78) est

$$X_0 = \underline{\tilde{X}}_a + \frac{1}{100} \underline{\tilde{X}}_p \quad (4.83)$$

où \tilde{X}_p est la projection du champ de vitesse \mathbf{u}_p suivant sur les fonctions tests

$$u_p = r^{m_0-1} \cos(m_0\theta) \quad (4.84)$$

$$v_p = -r^{m_0-1} \sin(m_0\theta) \quad (4.85)$$

$$w_p = r^{m_0} \cos(m_0\theta). \quad (4.86)$$

La figure 4.5 prouve qu'il y a bien à $Re = 10$ convergence spectrale même dans les cas non newtoniens ($\lambda > 0$) en dépit de la nature non linéaire du terme visqueux présent dans l'équation (3.2). Des tests ont été faits à $Re = 1000$ et les résultats sont visibles sur la figure 4.6. On a bien convergence spectrale dans tous les cas même si cette convergence est moins rapide pour $\lambda = 4$.

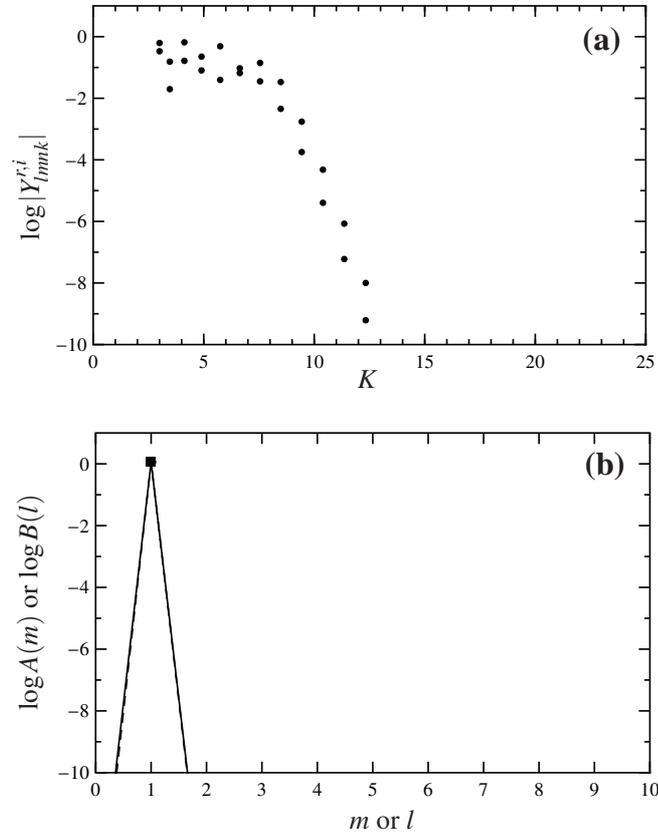


FIG. 4.3 – Spectre de \mathbf{Y}_a , vecteur composé des parties réelles et imaginaires de $\langle \mathbf{u}_a, \mathbf{w}_{lmn}^{(k)} \rangle$ avec $N = 19$ (voir l'équation 4.79). (a) : Logarithme décimal des 24 coefficients $Y_{lmnk} > 10^{-10}$ en fonction de K . (b) : $A(m)$ (resp. $B(l)$) (disques) (resp. carrés) en fonction de m (resp. l). Ici, seuls les modes $m = l = 1$ ont de l'énergie donc $A(1) = B(1)$, $A(m) < 10^{-14}$ (resp. $B(l) < 10^{-14}$) pour $m \neq 1$ (resp. $l \neq 1$).

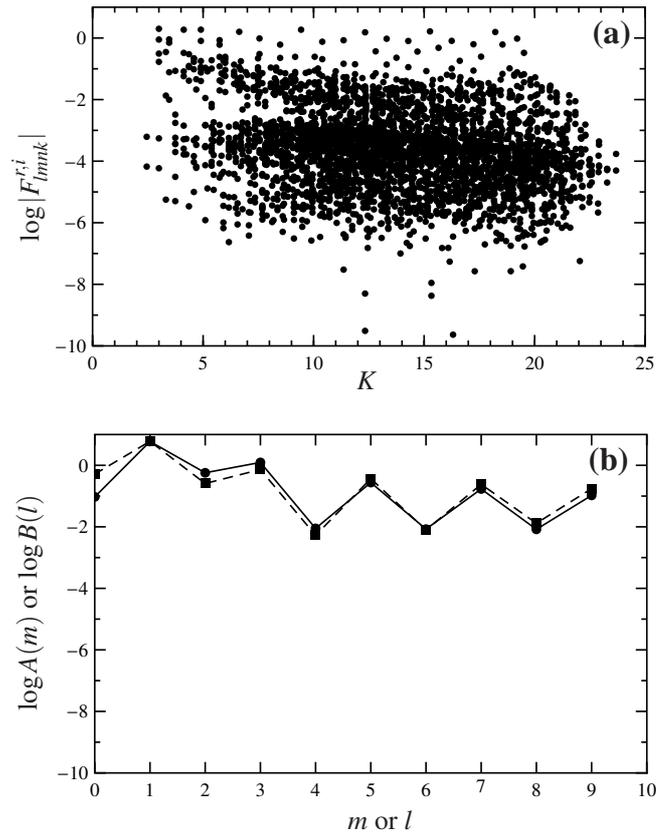


FIG. 4.4 – Pour $n = 0.5$, $\lambda = 4$, $Re = 10$, le spectre de $\tilde{\mathbf{F}}_a$ avec $N = 19$ (voir l'équation 4.79). (a) : Logarithme décimal des 3399 coefficients $F_{lmn} > 10^{-10}$ en fonction de K . (b) : $A(m)$ (resp. $B(l)$) (disques) (resp. carrés) en fonction de m (resp. l).

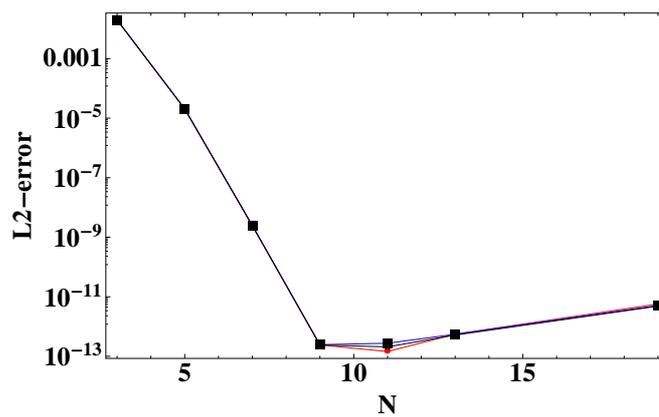


FIG. 4.5 – Diagramme lin-log de l'erreur discrète en norme 2 en fonction du nombre de modes N pour les paramètres : $n = 0.5$, $Re = 10$, $\lambda = 0$ (symbole disque, courbe rouge), $\lambda = 1$ (symbole rectangle, courbe bleu), $\lambda = 4$ (symbole étoile, courbe noire).

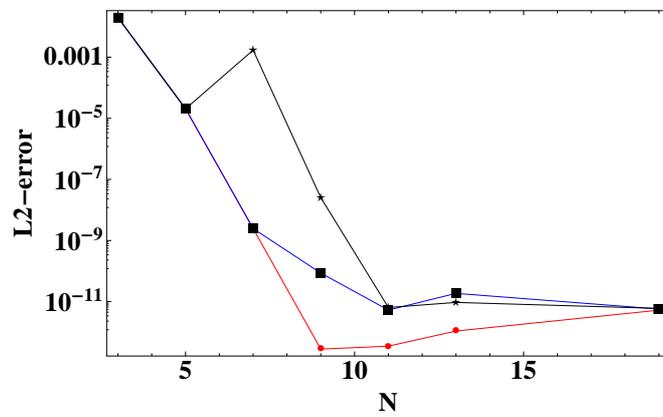


FIG. 4.6 – Diagramme lin-log de l'erreur discrète en norme 2 en fonction du nombre de modes N pour les paramètres : $n = 0.5$, $Re = 1000$, $\lambda = 0$ (symbole disque, courbe rouge), $\lambda = 1$ (symbole rectangle, courbe bleu), $\lambda = 4$ (symbole étoile, courbe noire).

Chapitre 5

Recherche d'ondes non linéaires $m_0 = 1$

L'une des idées fondatrices de la thèse était que la structure observée lors de la transition par divers auteurs, dont Esmael & Nouar (2008), aurait pu se construire sur un attracteur « contenant » des ondes non linéaires. En conséquence, en suivant la méthode du « SSP » utilisée par Wedin & Kerswell (2004) et Faisst & Eckhardt (2003), nous avons tenté d'obtenir des ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal fondamental $m_0 = 1$, en espérant que la partie non axisymétrique de leur champ de vitesse axiale moyenné axialement pourrait ressembler à ce qui est vu expérimentalement sur la figure 1.13. Le processus du « SSP » présenté dans le chapitre 3 consiste à forcer l'écoulement par des rouleaux. Ce terme de forçage d'amplitude A_F permet d'obtenir un écoulement de base indépendant de z : l'écoulement laminaire auquel s'ajoutent des rouleaux et des jets. La stabilité de ce nouvel écoulement est testée vis-à-vis d'une onde 3D. Malheureusement nous n'avons jamais réussi à obtenir de bifurcation sous critique comme pour les ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal $m_0 = 2$ ou 3. Nous présentons dans un premier temps les écoulements forcés indépendant de z , puis les analyses de stabilité, ainsi qu'un exemple de suivi de branches de bifurcation. Pour simplifier, toutes les études présentées dans ce chapitre sont faites à $\lambda = 2$ et en faisant varier l'indice de rhéofluidification n seulement (cf. la section 2.3.3 pour les écoulements laminaires correspondants).

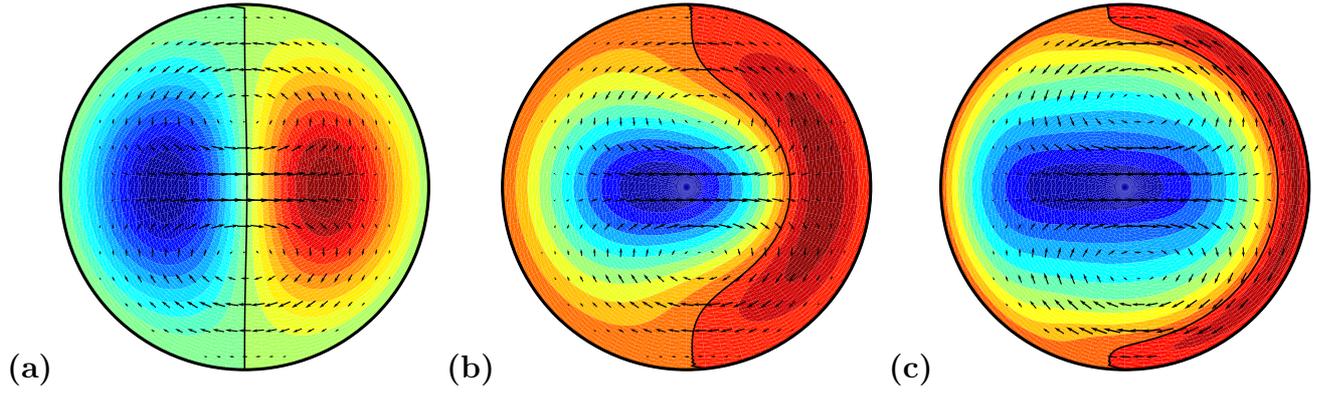


FIG. 5.1 – Pour $m_0 = 1$, $A_F = 10^{-4}$, écoulements de « rouleaux-jets » (a) pour $n = 1$ (cas newtonien) à $Re = 200$ (b) pour $n = 1$ (cas newtonien) à $Re = 2000$ (c) pour $n = 0.3$ (cas non newtonien) à $Re = 2000$.

5.1 Structures indépendantes de z forcées

Après calcul du terme de forçage \mathbf{F} (voir section 3.2), on peut calculer l'écoulement « rouleaux-

jets » $\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \tilde{U}(r, \theta) \\ \tilde{V}(r, \theta) \\ \tilde{W}(r, \theta) \end{pmatrix}$. Des exemples de structures ainsi calculées sont montrés sur la figure 5.1.

Les rouleaux calculés ressemblent aux rouleaux du forçage et induisent par advection du fluide rapide situé près du centre un jet rapide, par advection du fluide lent situé près des parois un jet lent. Dans le cas newtonien, à faible nombre de Reynolds Re (figure 5.1a), le champ de vitesse semble vérifier la symétrie miroir

$$Z_1 : (r, \theta, z, u, v, w) \mapsto (r, \pi - \theta, z, -u, v, -w). \quad (5.1)$$

Lorsque Re augmente (figure 5.1b), les effets d'advection deviennent plus forts d'où un jet lent plus étendu et large, et un jet rapide qui s'écrase près de la paroi. On obtient donc une structure dissymétrique. La rhéofluidification conduit à un élargissement du jet lent et à un écrasement du jet rapide près de la paroi encore plus forts (figure 5.1c). Dans l'idée de synthétiser des visualisations plus proches de celles faites expérimentalement, figure 1.13, on visualise sur la figure 5.2 le champ de vitesse $\tilde{W}(r, \theta) - \left\langle \tilde{W}(r, \theta) \right\rangle_\theta$. On observe encore quelque chose de beaucoup plus asymétrique que sur la figure 1.13, ce qui est mauvais signe pour la suite.

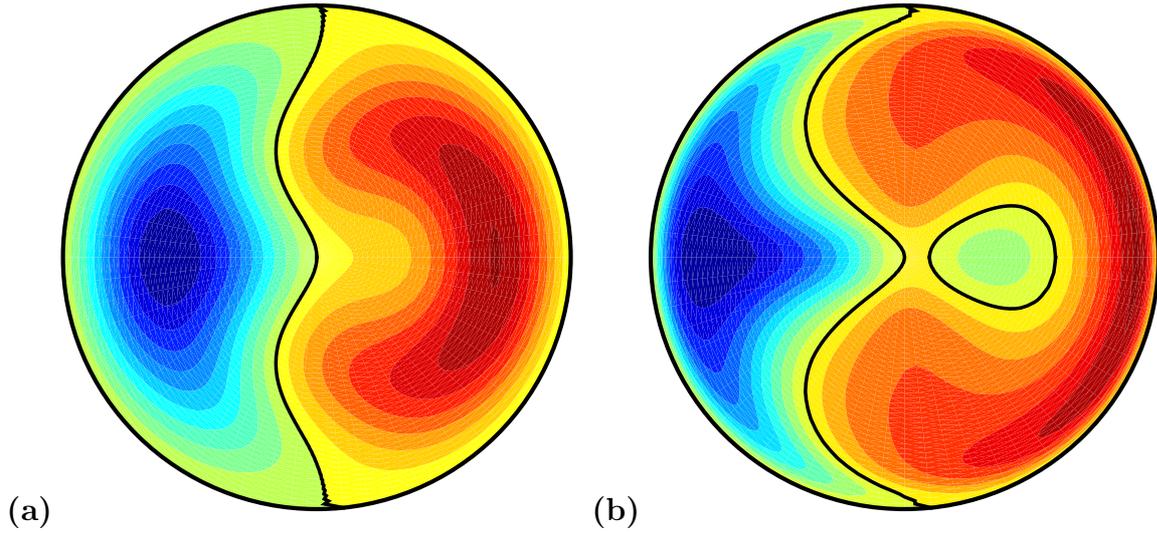


FIG. 5.2 – Pour $m_0 = 1$, $Re = 2000$, isocontours du champ de vitesse axiale $\tilde{W}(r, \theta) - \langle \tilde{W}(r, \theta) \rangle_\theta$ pour (a) le cas newtonien $n = 1$ et (b) le cas non newtonien $n = 0.3$.

5.2 Étude de stabilité de l'écoulement « rouleaux-jets »

Comme indiqué dans le chapitre 3, la stabilité de l'écoulement \tilde{U} vis-à-vis d'une onde tridimensionnelle de nombre d'onde q_0 est étudiée. Une instabilité apparaît lorsque l'amplitude de forçage A_F dépasse une certaine valeur critique A_c pour un nombre d'onde critique $q_c > 0$. Sur la figure 5.3 sont tracées la partie réelle de la valeur propre σ_r en fonction du nombre d'onde q_0 pour différents cas.

On observe sur les figures 5.3b,c une forte diminution de l'amplitude de forçage critique A_c et du nombre d'onde critique q_c lorsque n diminue. Ceci indique une augmentation de la longueur d'onde critique $\frac{2\pi}{q_c}$ lorsque le fluide devient rhéofluidifiant.

5.3 Ondes non linéaires forcées

Après avoir déterminé des points de bifurcation de l'écoulement \tilde{U} , les nouvelles branches de solutions ont été calculées. Malheureusement aucune bifurcation sous critique n'a pu être trouvée. De nombreux paramètres ont été étudiés. Par exemple à $n = 0.5$, $Re = 2000$, $q_0 = 1$, on a étudié les cas $\lambda = 2$ et $\lambda = 5$ sans succès, de même à $Re = 1000$ et $q_0 = 0.5$. On présente sur la figure 5.4 un exemple de bifurcation surcritique pour un fluide faiblement rhéofluidifiant. On a tracé sur

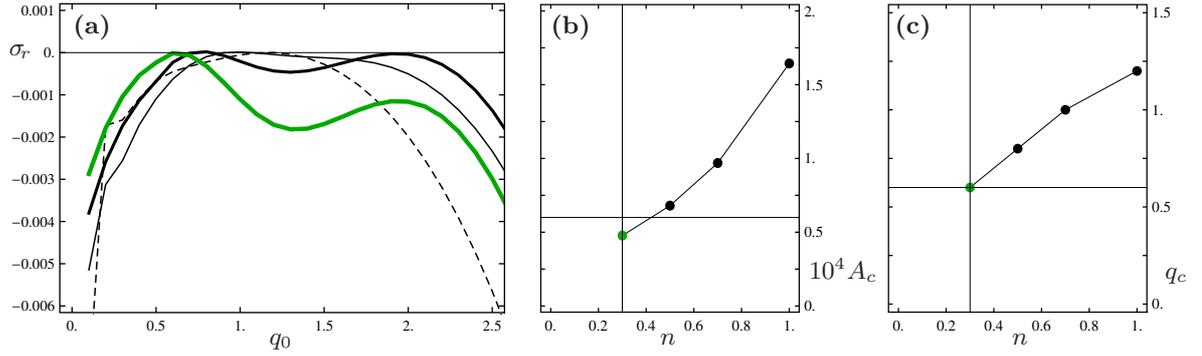


FIG. 5.3 – Pour $m_0 = 1$, $Re = 2000$, (a) : Partie réelle de la valeur propre de stabilité de l'écoulement « rouleaux-jets » $\tilde{\mathbf{U}}$ vis-à-vis d'une onde tridimensionnelles en fonction du nombre d'onde axial q_0 de celle-ci, pour $n = 1$ (trait noir tireté), $n = 0.7$ (trait noir continu), $n = 0.5$ (trait noir épais) et $n = 0.3$ (trait vert). Dans chaque cas l'amplitude de forçage a été réglée à sa valeur critique, montrée sur la figure (b). L'évolution des nombres d'ondes critiques en fonction de n est montrée sur la figure (c).

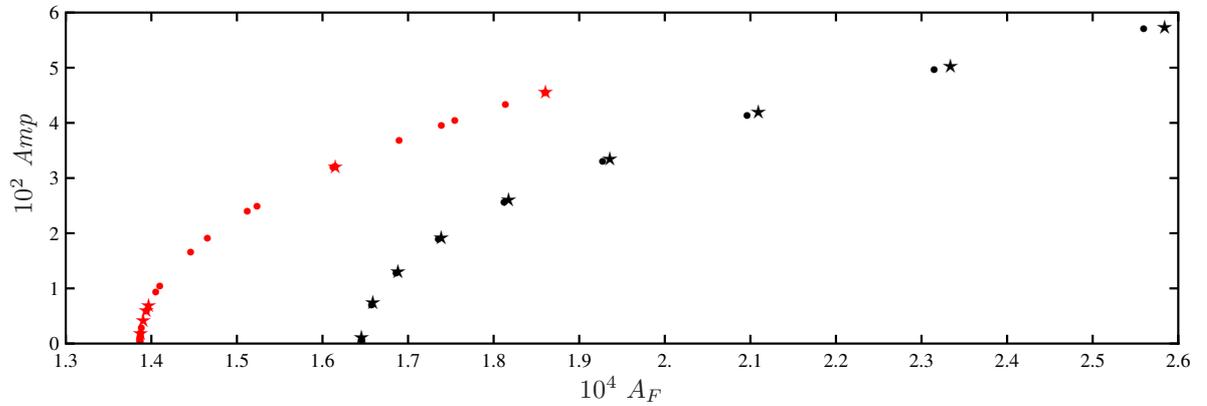


FIG. 5.4 – Pour $m_0 = 1$, $Re = 2000$, $q_0 = 1$: amplitude de tridimensionnelle Amp des ondes (cf. l'équation 4.71) bifurquant par instabilité de l'écoulement « rouleaux-jets » $\tilde{\mathbf{U}}$ en fonction de l'amplitude de forçage A_F . Cas newtonien $n = 1$ en noir et faiblement rhéofluidifiant $n = 0.9$ en rouge. Les paramètres de troncature utilisés sont $(N, M, L) = (28, 8, 5)$ (disques noirs), $(30, 9, 6)$ (étoiles noires), $(30, 12, 3)$ (disques rouges), $(32, 14, 4)$ (étoiles rouges).

cette figure une mesure de l'amplitude de l'onde

$$Amp = \sqrt{\sum_{n=1}^N |a_{n11}^{(1)}|^2 + |a_{n11}^{(2)}|^2} \quad (5.2)$$

en fonction de l'amplitude de forçage A_F . Les calculs présentés sur cette figure ont été confirmés en augmentant la troncature.

Face à cet échec, j'ai tenté de modifier le terme de forçage \mathbf{F} , en utilisant non pas le mode le plus dangereux du problème linéaire 3.4, mais le second. On peut observer sur la figure 5.5 ce que donne dans ce cas le calcul de l'écoulement « rouleaux-jets » $\tilde{\mathbf{U}}$. On a un champ de vitesse axiale

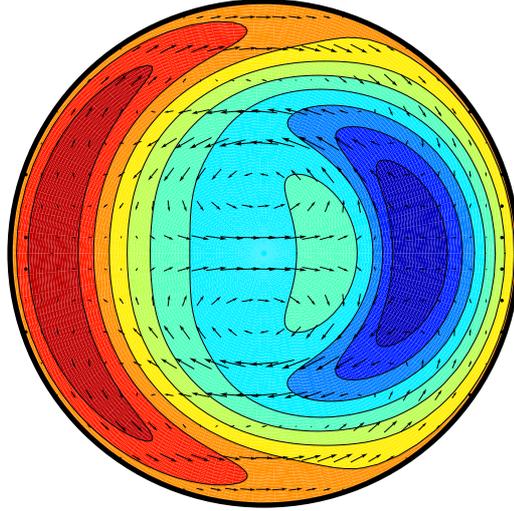


FIG. 5.5 – Pour $m_0 = 1$, $n = 0.5$, $\lambda = 5$, $Re = 1000$, $A_F = 0.000180168$: champ de vitesse transverse et isocontours de la vitesse axiale $\tilde{W}(r, \theta)$ obtenus en utilisant un terme de forçage construit à partir du second mode propre le plus dangereux du problème linéaire 3.4.

un peu moins disymétrique que celui de la figure 5.1c, mais cela n'a pas non plus abouti.

5.4 Raisons de l'échec de la démarche

Une des premières constatations que l'on peut faire est que les structures calculées ne reproduisent pas la symétrie que l'on observe sur la figure 1.13. Cela, on s'en rend mieux compte sur la figure 5.2, où l'on visualise le champ de vitesse $\tilde{W}(r, \theta) - \langle \tilde{W}(r, \theta) \rangle_\theta$. Une des premières raisons que l'on peut évoquer est celle d'un mauvais choix du terme de forçage \mathbf{F} . Il se pourrait qu'il n'y ait pas d'ondes non linéaires « supportant » l'attracteur faiblement turbulent en régime asymétrique. Dans ce cas, la méthodologie basée sur le « SSP » n'est alors pas celle à adopter. Des éléments vont en tout cas dans ce sens, voir Esmael & Nouar (2008). En effet le spectre de puissance des fluctuations présenté sur la figure 4.37 de Esmael (2008) de la vitesse ne met pas en évidence une fréquence particulière.

Chapitre 6

Ondes non linéaires $m_0 = 2$ et 3

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux ondes non linéaires de nombre d'onde azimutal fondamental $m_0 = 2$ et 3 . Pour ce qui est du nombre d'onde axial fondamental, nous avons utilisé respectivement $q_0 = 1.55$ et $q_0 = 2.44$. Il s'agit des valeurs, qui dans le cas newtonien, correspondent aux ondes non linéaires présentant le plus petit nombre de Reynolds critique (cf. Wedin & Kerswell 2004)

$$\overline{Re} = \frac{2\hat{a}\hat{\rho}\hat{W}_m}{\hat{\mu}}. \quad (6.1)$$

Les résultats relatifs aux ondes non linéaires $m_0 = 3$ et $m_0 = 2$ sont présentés respectivement dans les paragraphes 2 et 3. Dans chacun de ces paragraphes, on commence par donner les diagrammes « vitesse de phase en fonction du nombre de Reynolds » pour différentes valeurs de paramètres rhéologiques λ et n . On insistera sur le nombre de Reynolds \overline{Re}_p (2.18) défini avec la viscosité pariétale. Ce nombre de Reynolds permet de rendre compte de l'effet de rhéofluidification, qui se traduit par une viscosité plus faible à la paroi. La structure de l'écoulement au nombre de Reynolds critique \overline{Re}_p sera décrite. On terminera par une présentation de l'évolution du coefficient de perte de charges f en fonction de \overline{Re}_p .

6.2 Ondes non linéaires $m_0 = 3$

Le calcul des ondes non linéaires pour $m_0 = 2$ et 3 a été effectué avec succès au moyen du « SSP » (voir le chapitre 3). Le calcul a été fait pour un fluide newtonien (figure 4.1). Le point rouge indique une solution non forcée. À partir de là, les ondes non linéaires en newtonien ont pu être calculées (cf. la figure 1.8). En partant des ces solutions comme conditions initiales, on a pu attraper les branches de solutions pour les fluides non newtoniens.

6.2.1 Nombres de Reynolds d'apparition des ondes

Effets du paramètre λ à $n = 0.5$ fixé

Pour effectuer une comparaison avec le cas newtonien, des ondes non linéaires ont été calculées pour $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ à $n = 0.5$. Les portraits de phases (c, Re) ont été tracés et l'on observe une évolution non monotone du nombre de Reynolds critique d'apparition Re des ondes (figure 6.1). Cependant lorsque $\lambda \gtrsim 1$, il semble que ce nombre Re soit toujours plus grand que dans le cas newtonien. Par contre, les tracés dans le plan (c, \overline{Re}_p) donnent une vision plus claire (figure 6.2) : lorsque λ augmente, le nombre de Reynolds critique \overline{Re}_p d'apparition des ondes augmente lui aussi. On observe donc un retard à l'apparition des ondes en terme de \overline{Re}_p lorsque λ augmente.

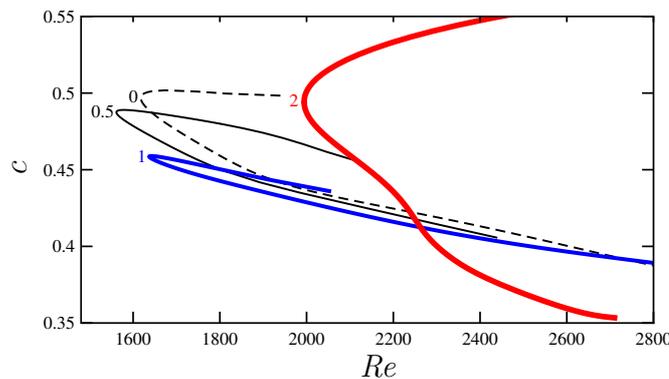


FIG. 6.1 – Pour $n = 0.5$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds Re ; cas newtonien $\lambda = 0$ en pointillé, cas non newtonien à $n = 0.5$ en trait continu du plus fin au plus épais : $\lambda = 0.5, 1, 2$. On a rappelé les valeurs de λ à gauche des points de bifurcations nœud-col.

Les propriétés des ondes critiques, c'est-à-dire les ondes apparaissant au nombre \overline{Re}_p le plus bas pour $m_0 = 3$ ont été regroupées dans le tableau 6.1. Dans ce tableau, la première ligne indique les différentes valeurs λ pour lesquelles les calculs ont été effectués. La seconde nous fournit le nombre

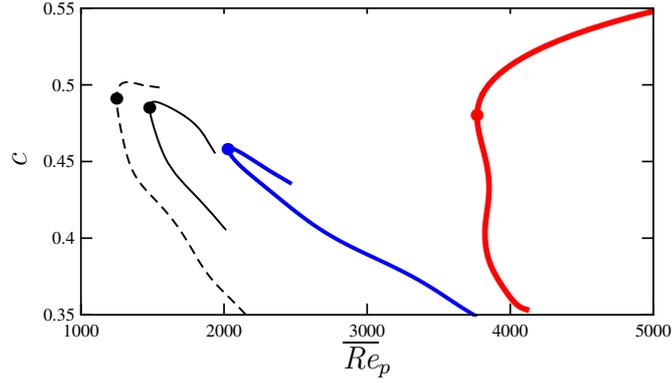


FIG. 6.2 – Pour $n = 0.5$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re}_p ; cas newtonien $\lambda = 0$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $\lambda = 0.5$, 1, 2. Les disques indiquent indiquent les bifurcations nœud-col, qui définissent les ondes critiques.

de Reynolds critique \overline{Re}_p , la troisième nous donne le nombre de Reynolds Re correspondant. La quatrième et la cinquième ligne nous donnent des informations sur la vitesse de phase. Rappelons que c est une vitesse de phase en unité de la vitesse laminaire au centre de la conduite \hat{W}_c ,

$$c = \frac{\hat{c}}{\hat{W}_c}. \quad (6.2)$$

La vitesse de phase \overline{C} est une vitesse de phase en unité de la vitesse débitante \hat{W}_m :

$$\overline{C} = \frac{\hat{c}}{\hat{W}_m} = \frac{c}{W_m}. \quad (6.3)$$

Cette dernière vitesse de phase donne plus directement la vitesse de propagation de l'onde dans la conduite. La vitesse débitante $W_m = \langle v_z \rangle_{r\theta}$ est indiquée sur la sixième ligne. μ_{bp} est la viscosité à la paroi de l'écoulement laminaire (voir la section 2.2). On a indiqué en suite la viscosité moyenne à la paroi, dans la solution onde :

$$\mu_{op} = \langle \mu(r = 1, \theta, z) \rangle_{\theta z}, \quad (6.4)$$

et l'écart maximum $\delta\mu_{op}$ entre la viscosité à la paroi évaluée sur tous les points de grille $\mu(r = 1, \theta, z)$ et cette viscosité moyenne en θ et z :

$$\delta\mu_{op} = \max_{\theta, z} |\mu(r = 1, \theta, z) - \mu_{op}|. \quad (6.5)$$

Enfin, différentes informations sur le champ de vitesse sont fournies, en particulier sur le champ de vitesse transverse

$$\mathbf{v}_\perp = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (6.6)$$

λ	0	0.5	1	2
\overline{Re}_p	1251 ± 1	1481 ± 1	2028 ± 3	3769 ± 9
Re	1629 ± 3	1567 ± 1	1638 ± 3	2016 ± 5
c	0.491	0.485	0.458	0.480
\overline{C}	1.28	1.25	1.21	1.21
$W_m = \langle v_z \rangle_{r\theta}$	0.384	0.387	0.378	0.395
μ_{bp}	1.000	0.820	0.611	0.423
$\mu_{op} = \langle \mu(r=1) \rangle_{\theta z}$	1.000	0.818	0.614	0.429
$\delta\mu_{op}$	0	0.089	0.143	0.120
$\max \langle v_z \rangle_z$	0.70	0.67	0.61	0.61
$\max \langle w \rangle_z$	0.057	0.062	0.062	0.055
$\min \langle w \rangle_z$	-0.31	-0.33	-0.39	-0.42
$\max \langle \mathbf{v}_\perp \rangle_z$	0.019	0.019	0.019	0.011
(L, M, N)	(7, 10, 30)	(7, 10, 30)	(9, 12, 34)	(7, 10, 30)

TAB. 6.1 – Pour $n = 0.5$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, propriétés des ondes critiques. La troisième ligne indique la valeur Re correspondante à \overline{Re}_p . Les deux lignes suivantes indiquent la vitesse de phase c en unité de la vitesse laminaire au centre de la conduite, et \overline{C} la vitesse de phase en unité de la vitesse débitante. La viscosité de l'écoulement laminaire μ_{bp} à la paroi est rappelée. μ_{op} (6.4) et $\delta\mu_{op}$ (6.5) sont données. Les valeurs maximales et minimales dans les lignes suivantes sont des valeurs prises selon r et θ . La dernière ligne indique les troncatures utilisées pour ces calculs.

Les nombres de Reynolds \overline{Re} et \overline{Re}_p sont calculées de manière très précise. Les barres d'erreur indiquent que l'erreur sur Re et \overline{Re}_p est inférieur à 0.5%. La vitesse de phase c au point critique n'a pas d'évolution monotone (table 6.1) : elle diminue lorsque λ augmente jusqu'à 1 puis augmente pour $\lambda = 2$. Cependant on reste dans une plage de 7% autour de la vitesse de phase c newtonienne. La vitesse de phase \overline{C} (6.3) au point critique diminue de 5% entre $\lambda = 0$ et $\lambda = 2$. Il n'y a donc pas de réelles différences à ce niveau entre le cas newtonien et non newtonien. L'écart le plus important entre μ_{bp} et μ_{op} (6.4) est de 1.4% pour $\lambda = 2$. Ce faible écart indique que choisir la viscosité à la paroi de l'écoulement laminaire μ_{bp} comme viscosité de référence pour définir \overline{Re}_p (2.18) est physiquement raisonnable. Par contre, on constate en observant les valeurs de $\delta\mu_{op}$ (6.5) des écarts non négligeables entre la viscosité moyenne de l'écoulement μ_{op} et la viscosité à la paroi $\mu(r=1, \theta, z)$ évaluée aux points de grille. L'écart à μ_{op} monte jusqu'à près de 28% pour $\lambda = 2$: il y a donc de fortes fluctuations de viscosité. Pour ce qui est des valeurs caractéristiques du champ de vitesse, on constate à travers $\max \langle v_z \rangle_z$ que la vitesse axiale diminue. Quant au champ de vitesse transverse caractérisé par $\max \langle |\mathbf{v}_\perp| \rangle_z$, il ne varie pas beaucoup. Observons que

le facteur $\frac{1}{\mu_{bp}}$ augmente rapidement avec λ , alors que la vitesse débitante est à peu près constante (table 6.1).

Études de convergence

Comme dans la section 4.5.2, la validation des résultats décrits ci-dessus a été examinée à travers d'une part le spectre de l'onde critique, d'autre part en modifiant la troncature des calculs (voir la dernière ligne de table 6.1). Les figures 6.3 et 6.4 montrent respectivement le spectre de l'onde critique dans le cas newtonien et dans le cas d'un fluide de Carreau ($\lambda = 2, n = 0.5$). La valeur absolue des plus grands coefficients de X décroît de 4 à 5 ordres de grandeur entre $K \approx 1$ et $K \approx 30$ sur les figures 6.3a et 6.4a, signe d'une bonne convergence spectrale, i.e. exponentielle. On observe sur les figures 6.3b et 6.4b également une décroissance de l'énergie lorsque m ou l augmente. Notons que dans le cas newtonien (figure 6.3b) l'harmonique azimutale $m = 2$ domine. La figure 6.5 est le deuxième test de convergence : elle montre, pour 2 troncatures différentes, des portraits de phase pratiquement superposés.

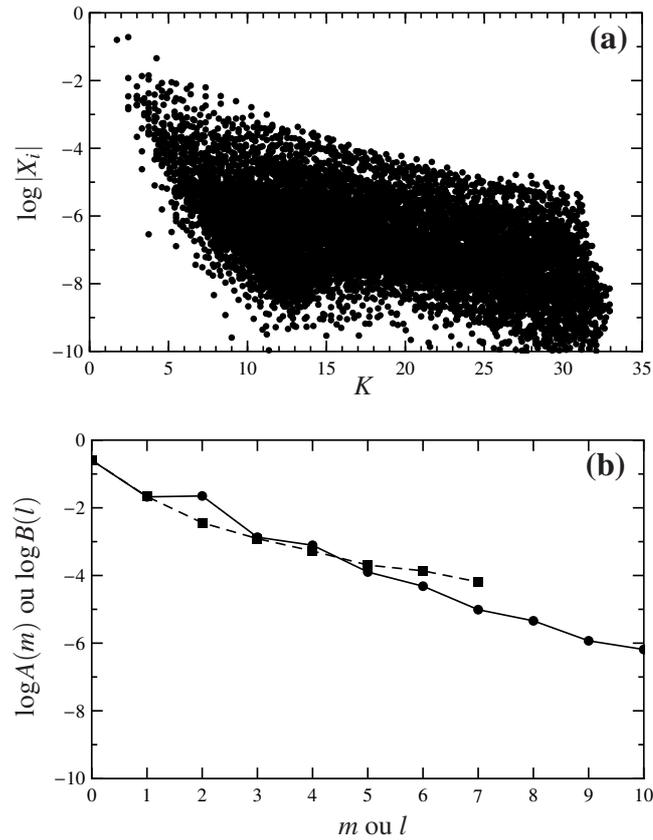


FIG. 6.3 – Pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, $\lambda = 0$, i.e. le cas newtonien : spectre de l'onde critique. **(a)** : Logarithme décimal des 9398 coefficients $\Re(a_{mln}^{(1)\text{ou}(2)})$ ou $\Im(a_{mln}^{(1)\text{ou}(2)})$ dont le module est strictement supérieur à 10^{-10} en fonction du nombre d'onde généralisé K (éq. 4.80). **(b)** : tracé de $\log A(m)$ (disques) (resp. $\log B(l)$) (resp. carrés) pour les amplitudes définies par les équations (4.81) et (4.82) en fonction des nombres d'ondes azimutal et axial.

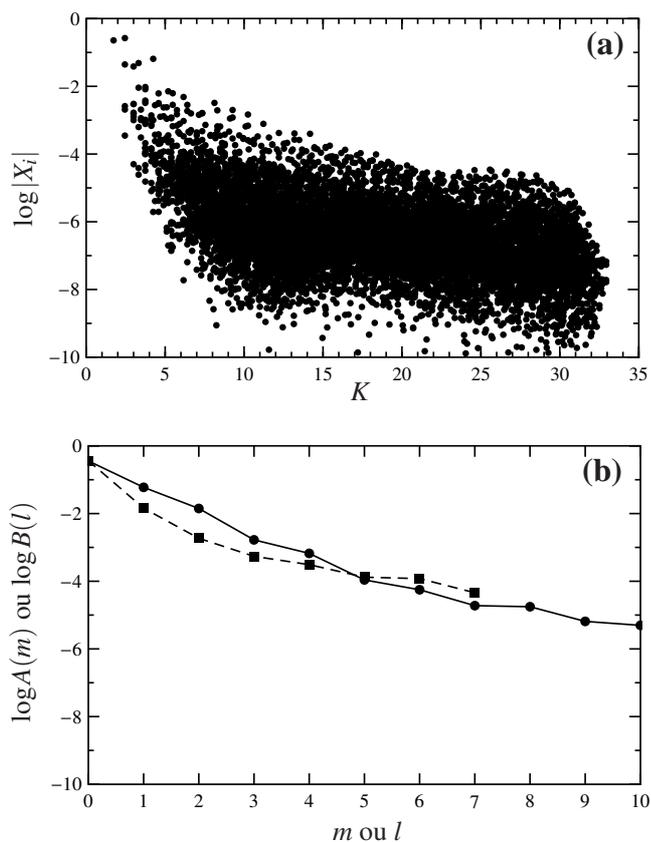


FIG. 6.4 – Idem que figure 6.3 mais pour le cas non newtonien $n = 0.5$, $\lambda = 2$. (a) : 9442 coefficients au lieu de 9398.

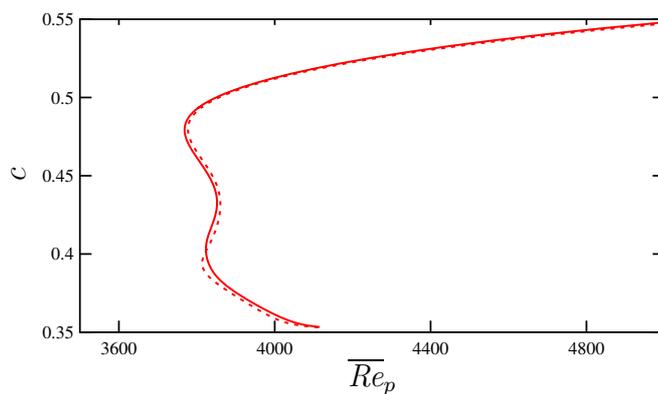


FIG. 6.5 – Test de convergence pour $n = 0.5$, $\lambda = 2$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$: trait continu pour la troncature $(L, M, N) = (7, 10, 30)$, pointillé pour la troncature $(L, M, N) = (5, 8, 24)$.

Influence du paramètre n à $\lambda = 0.5$ fixé

On a également examiné l'influence de l'indice de rhéofluidification n à λ fixé, $\lambda = 0.5$. On observe sur les tracés (c, Re) (figure 6.6) une évolution moins « brutale » que dans la variation en λ . Sur les tracés (c, \overline{Re}_p) , on constate également (figure 6.7) un retard à l'apparition des ondes lorsque n diminue, même si ce retard est moins marqué que dans la variation de λ . En effet, pour $m_0 = 3$, on passe de $\overline{Re}_p(n = 0.5, \lambda = 0) = 1251$ pour le cas newtonien à $\overline{Re}_p(n = 0.5, \lambda = 2) = 3769$ contre $\overline{Re}_p(n = 0.3, \lambda = 0.5) = 1568$. Ainsi, $\frac{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=2)}{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=0)} = 3.0$ contre $\frac{\overline{Re}_p(n=0.3, \lambda=0.5)}{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=0)} = 1.3$. Des calculs à $\lambda > 0.5$ fixé (par exemple 2) permettraient de confirmer le fait qu'une augmentation de λ à n fixé retardent plus l'apparition des ondes qu'une diminution de n à λ fixé.

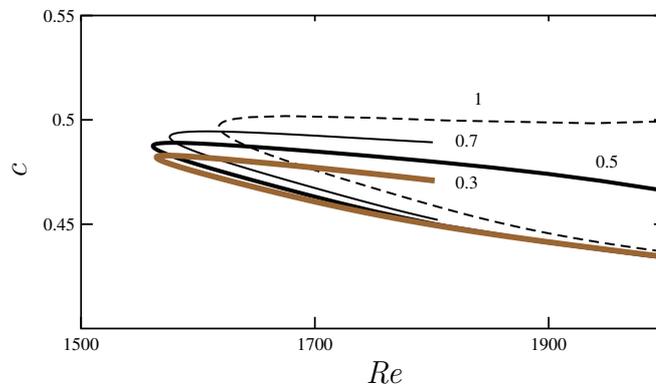


FIG. 6.6 – Pour $\lambda = 0.5$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds Re ; cas newtonien $n = 1$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $n = 0.7$, 0.5 , 0.3 .

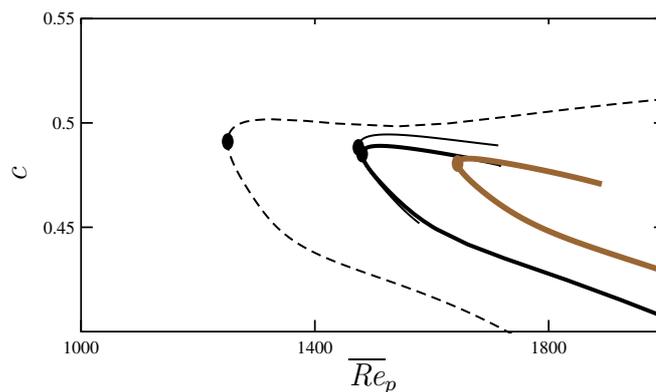


FIG. 6.7 – Pour $\lambda = 0.5$, $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re}_p ; cas newtonien $n = 1$ en pointillé, cas non newtonien $n = 0.5$ en trait continu du plus fin au plus épais : $n = 0.7$, 0.5 , 0.3 . Les disques indiquent les bifurcations nœud-col, qui définissent les ondes critiques.

6.2.2 Structure des écoulements

La structure des écoulements associés aux ondes critiques moyennées dans la direction axiale est présentée sur la figure 6.8. On peut y observer pour $n = 0.5$ et 3 valeurs de λ les iso-contours de la vitesse axiale et la distribution des vitesses transverses représentées par des vecteurs. On a également tracé le champ de viscosité moyenné en z . Sur les tracés du champ de vitesse totale $\langle v_z \rangle_z$ (colonne de gauche de la figure 6.8), on observe un effet classique dû à la rhéofluidification : la vitesse axiale a tendance à devenir constante dans une région de plus en plus large autour de l'axe de la conduite. Cet effet non visible sur les tracés de champs de vitesse $\langle w \rangle_z$ (colonne du milieu de la figure 6.8) de l'écart à la vitesse laminaire W_b ,

$$\langle w \rangle_z = \langle v_z - W_b \rangle_z, \quad (6.7)$$

nous permet d'affirmer qu'il est dû à l'écoulement laminaire. Sur les tracés des champs de vitesse, des jets rapides sont présents près de la paroi. Cela peut s'expliquer par la présence de 3 paires de rouleaux contra-rotatifs visibles dans l'écoulement transverse. En effet ces rouleaux transportent du fluide de la région axiale vers la paroi. Cet effet est connu sous le nom d'effet « Lift-up ». On note un effet remarquable : on passe de 6 jets rapides pour $\lambda = 0$ et 1 à 3 jets rapides pour $\lambda = 2$. Il y a ainsi une coalescence des zones où l'écoulement est accéléré pour $\lambda = 2$. Le fait que l'on passe de 6 jets rapides dans le cas newtonien à 3 jets pour $\lambda = 2$, $n = 0.5$ est manifestement lié à la domination de la deuxième harmonique azimutale dans le spectre pour $\lambda = 0$ (figure 6.3b) et non dans le spectre pour $\lambda = 2$ (figure 6.4b). La troisième colonne de figure 6.8 nous donne une vision du champ de viscosité moyenne en z . On y a retracé le champ de vitesse transverse. Ces figures montrent notamment que les régions près de l'axe à fort taux de déformations sont les régions où les courants venant des parois, à la confluence de deux rouleaux, sont fortement ralentis. La stratification de viscosité augmente lorsque λ augmente. Les zones vertes et bleues, indiquant les faibles viscosités, augmentent de surface.

Sur la figure 6.9 sont représentées des isosurfaces de la vitesse axiale w . La figure 6.9a, le cas newtonien, est à comparer à la figure 17b de Wedin & Kerswell (2004). Dans le cas newtonien, les jets lents serpentent lorsque z varie contrairement aux jets rapides. On a donc une « bidimensionnalisation » de ces jets rapides. Cette tendance à la « bidimensionnalisation » se renforce pour les jets rapides et s'étend aux jets lents dans le cas non newtonien $\lambda = 2$ (figure 6.9b).

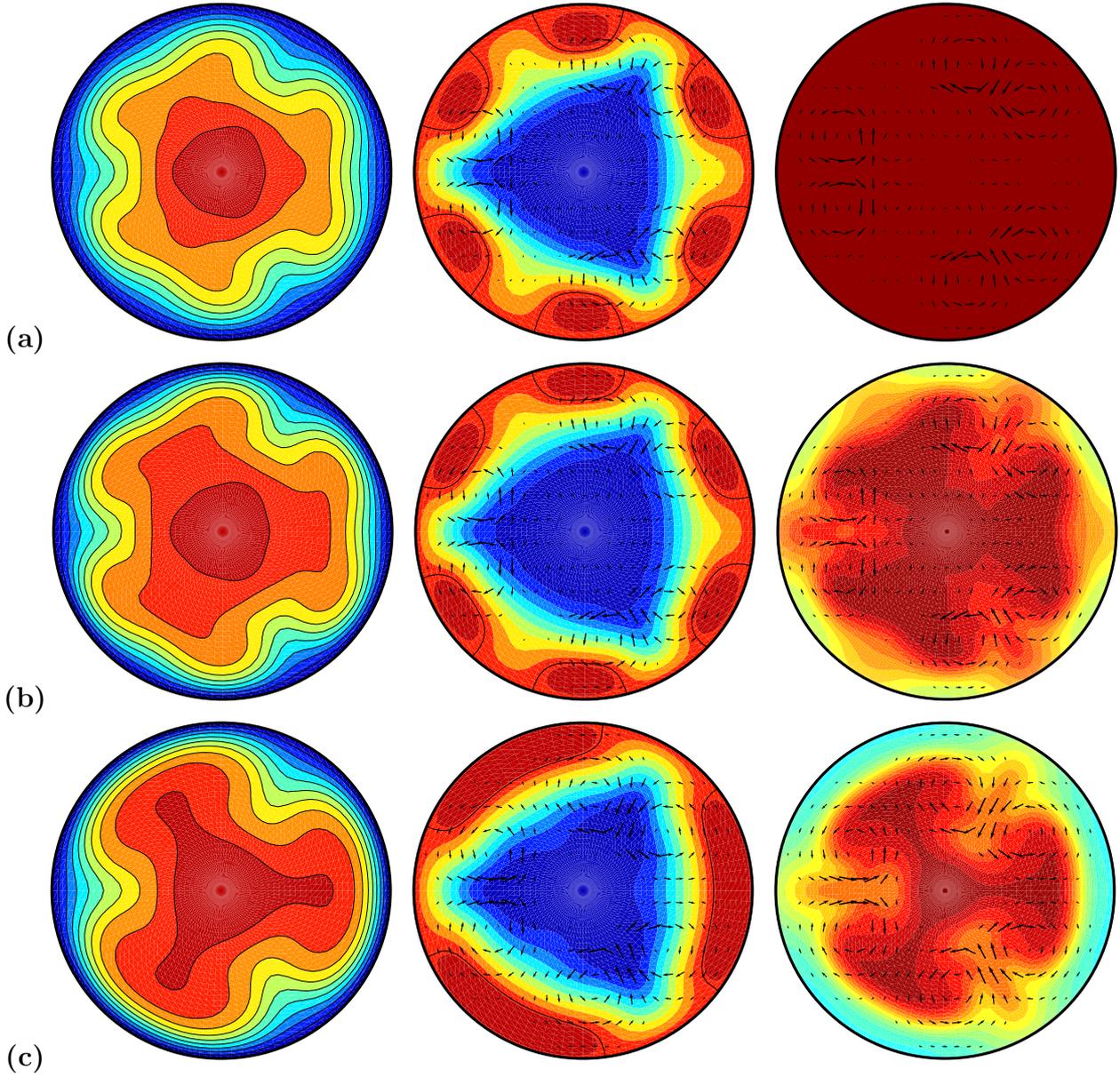


FIG. 6.8 – Pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, $n = 0.5$, (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 1$, (c) $\lambda = 2$: visualisation des champs caractéristiques des ondes critiques moyennés dans la direction axiale. **À gauche** : contours de la vitesse axiale $\langle v_z \rangle_z$. Les contours sont espacés de $\max(\langle v_z \rangle_z)/10$. **Au milieu** : écart à la solution laminaire de la vitesse axiale $\langle w \rangle_z = \langle v_z - W_b \rangle_z$. Les flèches indiquent le champ de vitesse transverse $\langle \mathbf{v}_\perp \rangle = \langle u \rangle_z \hat{\mathbf{r}} + \langle v \rangle_z \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Les contours sont espacés de $(\max \langle w \rangle_z - \min \langle w \rangle_z)/10$. La ligne de contour $\langle w \rangle_z = 0$ est représentée. En rouge les zones de haute vitesse et en bleu celles de basse vitesse. **À droite** : Iso-contours de la viscosité moyenne en z et champ de vitesse transverse; 20 contours pour $\langle \mu \rangle_z$ régulièrement espacés, de 0 à 1, par pas de 0,05.

6.2.3 Coefficients de perte de charge

On observe sur la figure 6.10 l'évolution du coefficient de perte de charge f (voir 2.3 et en particulier l'équation 2.42) en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re}_p pour différents λ à n fixé,

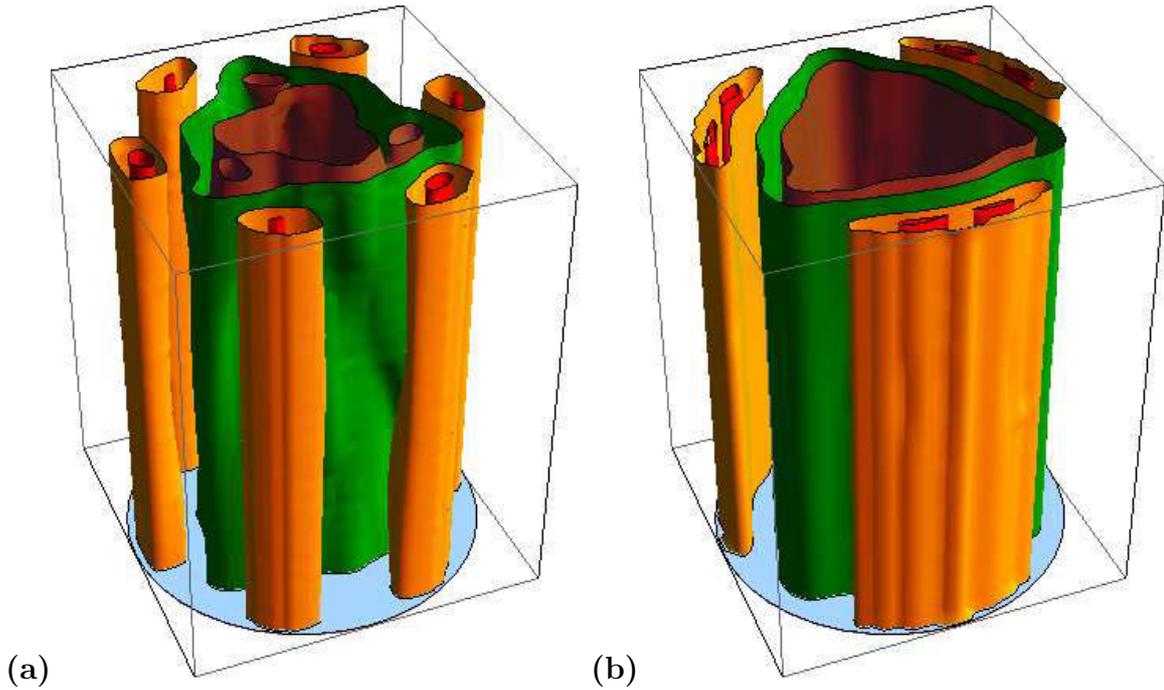


FIG. 6.9 – Pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, $n = 0.5$: iso-surfaces de la vitesse axiale w au point de bifurcation nœud col. L'axe de la conduite est orienté du bas vers le haut de $z = 0$ à $z = \frac{2\pi}{q_0}$. Les jets rapides près de la paroi sont signalés par les couleurs rouge ($w = 0.05$) et doré ($w = 0.01$), les jets lents au centre de la conduite par les couleurs verte ($w = -0.15$) et marron ($w = -0.28$). (a) : cas newtonien $\lambda = 0$. (b) : cas non newtonien $\lambda = 2$.

$n = 0.5$. Les coefficients de perte de charge des écoulements laminaires sont signalés par des droites. Intéressons nous particulièrement aux branches inférieures pour lesquelles le coefficient de perte de charge est le plus faible. On constate que les ondes non linéaires du cas newtonien $\lambda = 0$ présentent un coefficient de perte de charge plus faible que celles des cas non newtoniens $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$. Les pertes de charges sont donc plus importantes lorsque le caractère rhéofluidifiant du fluide augmente.

6.3 Ondes non linéaires $m_0 = 2$

Dans cette section, on présente une analyse similaire à ce qui a été fait pour $m_0 = 3$. On insistera plutôt sur les résultats qui présentent une différence marquée par rapport au cas $m_0 = 3$.

6.3.1 Nombres de Reynolds d'apparition des ondes

La dépendance des nombres de Reynolds critiques Re et \overline{Re}_p vis-à-vis des paramètres rhéologiques λ et n est décrite ci-dessous.

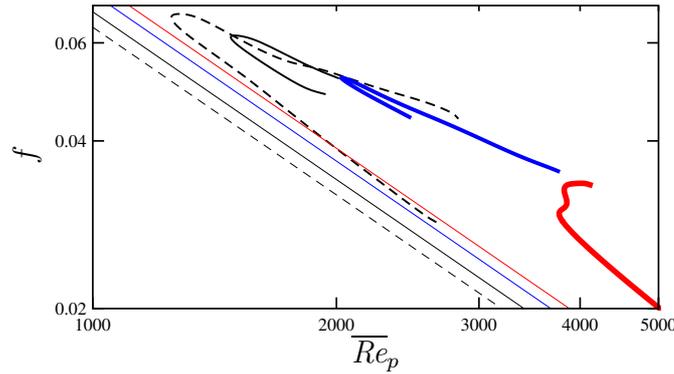


FIG. 6.10 – Pour $m_0 = 3$, $q_0 = 2.44$, $n = 0.5$: coefficients de perte de charge f en fonction de \overline{Re}_p , pour différentes valeurs de λ . En noir tireté, $\lambda = 0$; en noir continu, $\lambda = 0.5$; en bleu, $\lambda = 1$; en rouge, $\lambda = 2$. Les droites correspondent aux écoulements laminaires, les courbes aux solutions ondes.

Influence du paramètre λ à $n = 0.5$ fixé

Comme pour $m_0 = 3$, les ondes non linéaires pour $\lambda = 0.5$, $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ ont été calculées et les portraits de phase (c, Re) (figure 6.11) et (c, \overline{Re}_p) (figure 6.12) ont été tracés pour $n = 0.5$ fixé. Le nombre de Reynolds critique \overline{Re}_p augmente également avec λ . On peut constater dans la table 6.2 que ces nombres de Reynolds critiques sont plus grands que pour les ondes non linéaires à $m_0 = 3$. Sur la figure 6.11, on constate une diminution entre $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ du nombre de Reynolds \overline{Re} critique contrairement à ce que l'on observe pour $m_0 = 3$ (voir la figure 6.1).

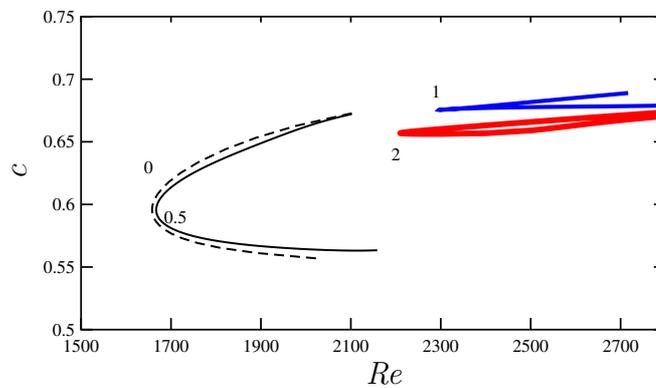


FIG. 6.11 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $n = 0.5$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds Re ; cas newtonien $\lambda = 0$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $\lambda = 0.5, 1, 2$.

La table 6.2 donne les propriétés des ondes critiques. Contrairement au cas $m_0 = 3$, la vitesse de phase \overline{C} n'évolue pas de manière monotone. L'écart le plus important entre μ_{bp} et μ_{op} (6.4) est de 0.7% pour $\lambda = 2$. Ce faible écart appuie encore la pertinence du choix de μ_{bp} comme viscosité de référence pour définir \overline{Re}_p (2.18). De la même manière que pour $m_0 = 3$, on constate en observant

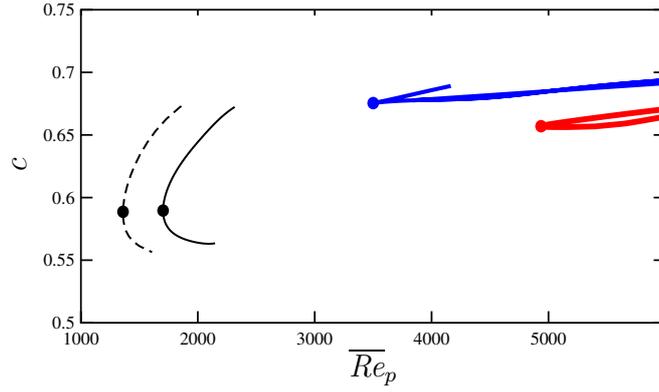


FIG. 6.12 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $n = 0.5$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re}_p ; cas newtonien $\lambda = 0$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $\lambda = 0.5, 1, 2$. Les disques indiquent les bifurcations nœud-col, qui définissent les ondes critiques.

λ	0	0.5	1	2
\overline{Re}_p	1359 ± 2	1703 ± 1	3500 ± 2	4936 ± 4
Re	1664 ± 2	1672 ± 2	2295 ± 1	2210 ± 2
c	0.587	0.590	0.675	0.657
\overline{C}	1.43	1.41	1.45	1.39
$W_m = \langle v_z \rangle_{r\theta}$	0.408	0.417	0.45	0.472
μ_{bp}	1	0.820	0.611	0.423
$\mu_{op} = \langle \mu(r=1) \rangle_{\theta z}$	1.000	0.818	0.613	0.426
$\delta\mu_{op}$	0.000	0.078	0.092	0.085
$\max \langle v_z \rangle_z$	0.692	0.684	0.759	0.732
$\max \langle w \rangle_z$	0.076	0.086	0.079	0.080
$\min \langle w \rangle_z$	-0.32	-0.33	-0.30	-0.33
$\max \langle \mathbf{v}_\perp \rangle_z$	0.014	0.013	0.0071	0.0065
(L, M, N)	(7, 10, 30)	(7, 10, 30)	(7, 10, 30)	(9, 12, 34)

TAB. 6.2 – Pour $n = 0.5$, $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, propriétés des ondes critiques pour différentes valeurs de λ . cf la légende de la table 6.1.

les valeurs de $\delta\mu_{op}$ (6.5) des écarts non négligeables entre la viscosité moyenne de l'écoulement μ_{op} et la viscosité à la paroi $\mu(r=1, \theta, z)$ évaluée aux points de grille. Les fortes variations de viscosité sont indiquées par un écart à μ_{op} qui s'élève jusqu'à près de 20% pour $\lambda = 2$. Quant aux valeurs caractéristiques du champ de vitesse, contrairement à $m_0 = 3$, on constate à travers $\max \langle v_z \rangle_z$ que la vitesse axiale ne diminue pas et est plus élevée que pour $m_0 = 3$. Le champ de vitesse transverse caractérisé par $\max \langle |\mathbf{v}_\perp| \rangle_z$, lui diminue de presque de moitié à partir de $\lambda = 1$. Les rouleaux semblent donc être plus amortis lorsque la rhéofluidification augmente.

Études de convergence

Sur les figures 6.13 et 6.14, sont représentés les spectres des ondes critiques. On constate une diminution de plus de 4 ordre de grandeur de l'énergie entre les plus grands coefficients $K \approx 1$ et $K \approx 30$. On observe bien une convergence spectrale.

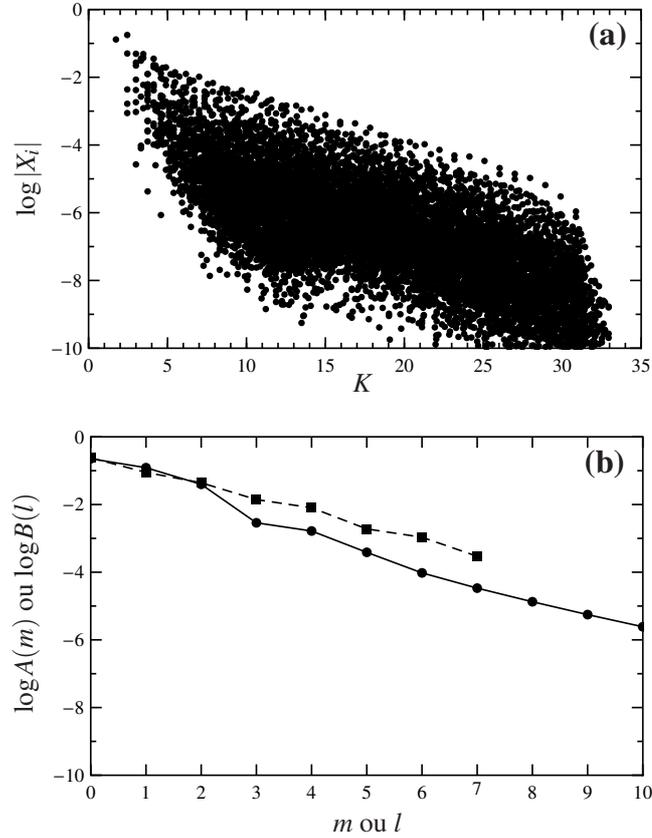


FIG. 6.13 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $\lambda = 0$, i.e. le cas newtonien : spectre de l'onde critique. **(a)** : Logarithme décimal de 9259 coefficients $\Re(a_{mln}^{(1) \text{ ou } (2)})$ ou $\Im(a_{mln}^{(1) \text{ ou } (2)})$ dont le module est strictement supérieur à 10^{-10} en fonction du nombre d'onde généralisé K (éq. (4.80)). **(b)** : tracé de $\log A(m)$ (disques) (resp. $\log B(l)$) (resp. carré) en fonction des amplitudes définies par les éq. (4.81) et (4.82).

Contrairement à $m_0 = 3$, les courbes $A(m)$ et $B(l)$ décroissent toutes de façon monotone. Pour valider les résultats, on a augmenté la troncature pour $n = 0.5$, $\lambda = 2$ et l'on a obtenu des diagrammes de phases (c, \overline{Re}_p) superposés, cf. la figure 6.15.

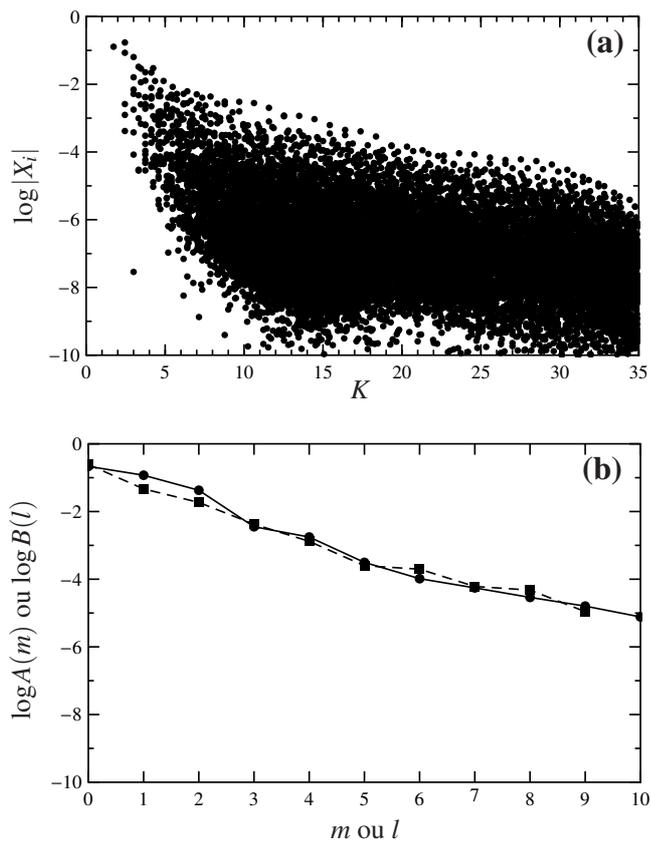


FIG. 6.14 – Idem que dans figure 6.13 mais pour le cas non newtonien $n = 0.5$, $\lambda = 2$. (a) : 15586 coefficients au lieu de 9259 de module strictement supérieur à 10^{-10} et de nombre d'onde généralisé $K \leq 35$.

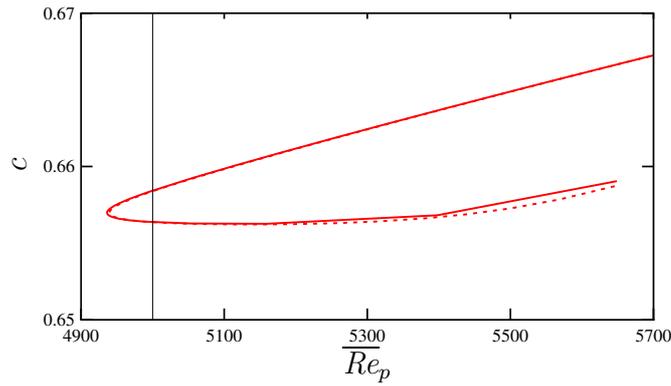


FIG. 6.15 – Test de convergence pour $n = 0.5$, $\lambda = 2$, $m_0 = 2$: trait continu pour la troncature $(L, M, N) = (9, 12, 34)$, pointillé pour la troncature $(L, M, N) = (7, 10, 30)$.

Influence du paramètre n à $\lambda = 0.5$ fixé

Lorsque n diminue à $\lambda = 0.5$ fixé, le nombre de Reynolds critique \overline{Re}_p augmente tout comme pour $m_0 = 3$. Pour $m_0 = 2$, on passe de $\overline{Re}_p(n = 0.5, \lambda = 0) = 1359$ pour le cas newtonien à $\overline{Re}_p(n = 0.5, \lambda = 2) = 4939$ contre $\overline{Re}_p(n = 0.3, \lambda = 0.5) = 2635$. Ainsi, $\frac{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=2)}{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=0)} = 3.6$ contre $\frac{\overline{Re}_p(n=0.3, \lambda=0.5)}{\overline{Re}_p(n=0.5, \lambda=0)} = 1.9$.

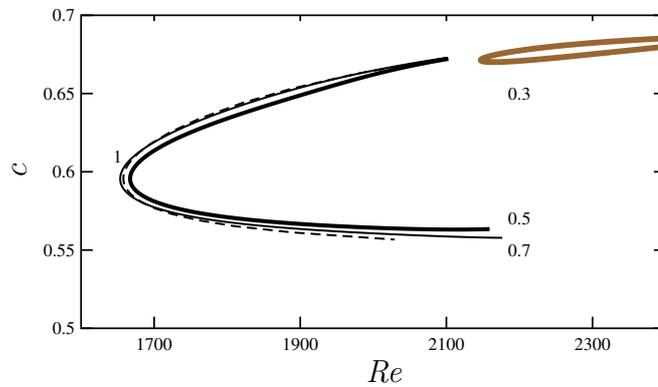


FIG. 6.16 – Pour $\lambda = 0.5$, $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds Re ; cas newtonien $n = 1$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $n = 0.7, 0.5, 0.3$.

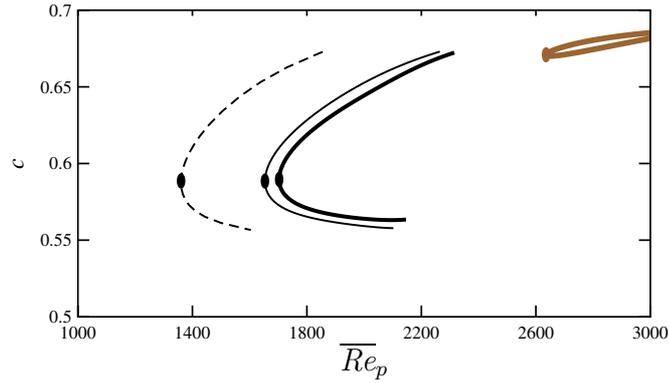


FIG. 6.17 – Pour $\lambda = 0.5$, $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$: vitesse de phase c en fonction du nombre de Reynolds \overline{Re}_p ; cas newtonien $\lambda = 0$ en pointillé, cas non newtonien en trait continu du plus fin au plus épais : $n = 0.7, 0.5, 0.3$. Les points indiquent les bifurcations nœud-col, qui définissent les ondes critiques.

6.3.2 Structure des écoulements

Une visualisation des écoulements est fournie par la figure 6.18. On montre les écoulement moyennés dans la direction z . Les mêmes effets que pour $m_0 = 3$ sont observés. Les zones de survitesse, sur la colonne du milieu, ont tendance à prendre plus de place lorsque λ augmente. Mais cette fois-ci, contrairement au cas $m_0 = 3$, il n'y a pas coalescence des zones de survitesse. Le champ de viscosité est observable sur la colonne de droite. La stratification de viscosité est de plus en plus marquée lorsque λ augmente. Cela est signalé par les zones vertes et bleues de faible viscosité.

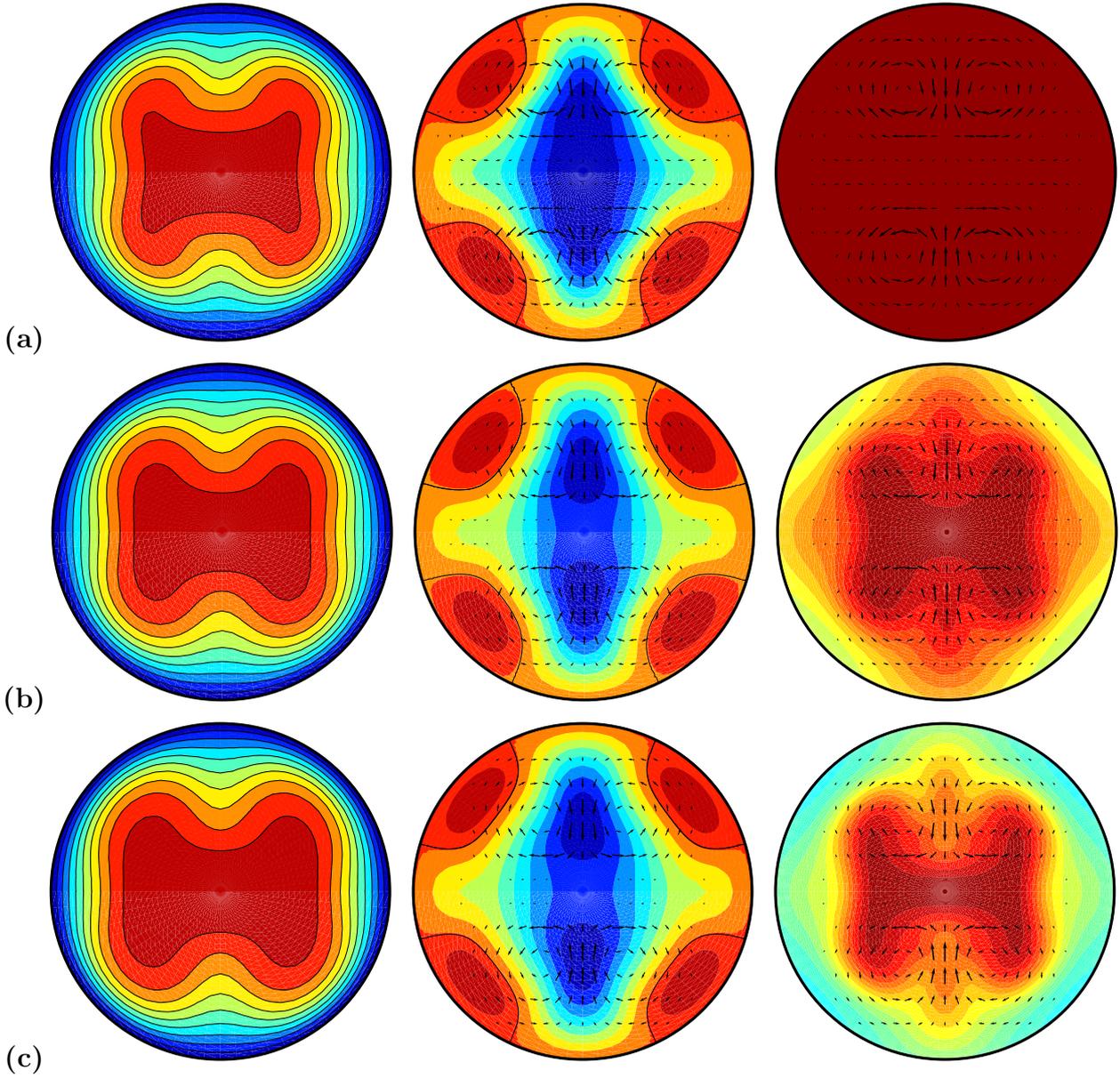


FIG. 6.18 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $n = 0.5$, (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 1$, (c) $\lambda = 2$: visualisation des champs caractéristiques des ondes critiques moyennés dans la direction axiale. **À gauche** : contours de la vitesse axiale $\langle v_z \rangle_z$. Les contours sont espacés de $\max(\langle v_z \rangle_z)/10$. **Au milieu** : écart à la solution laminaire de la vitesse axiale $\langle w \rangle_z = \langle v_z - W_b \rangle_z$. Les flèches indiquent le champ de vitesse transverse $\langle \mathbf{v}_\perp \rangle = \langle u \rangle_z \hat{\mathbf{r}} + \langle v \rangle_z \hat{\boldsymbol{\phi}}$. Les contours sont espacés de $(\max \langle w \rangle_z - \min \langle w \rangle_z)/10$. La ligne de contour $\langle w \rangle_z = 0$ est représentée. En rouge les zones de haute vitesse et en bleu celles de basse vitesse. **À droite** : Iso-contours de la viscosité moyenne en z et champ de vitesse transverse ; 20 contours régulièrement espacés, de 0 à 1, par pas de 0,05.

Sur la figure 6.19 sont présentés des isosurfaces de la vitesse axiale w . La colonne de gauche (figure 6.19a), le cas newtonien, est à comparer à la figure 17a de Wedin & Kerswell (2004). On observe la même tendance à la « bidimensionnalisation » que sur la figure 6.9.

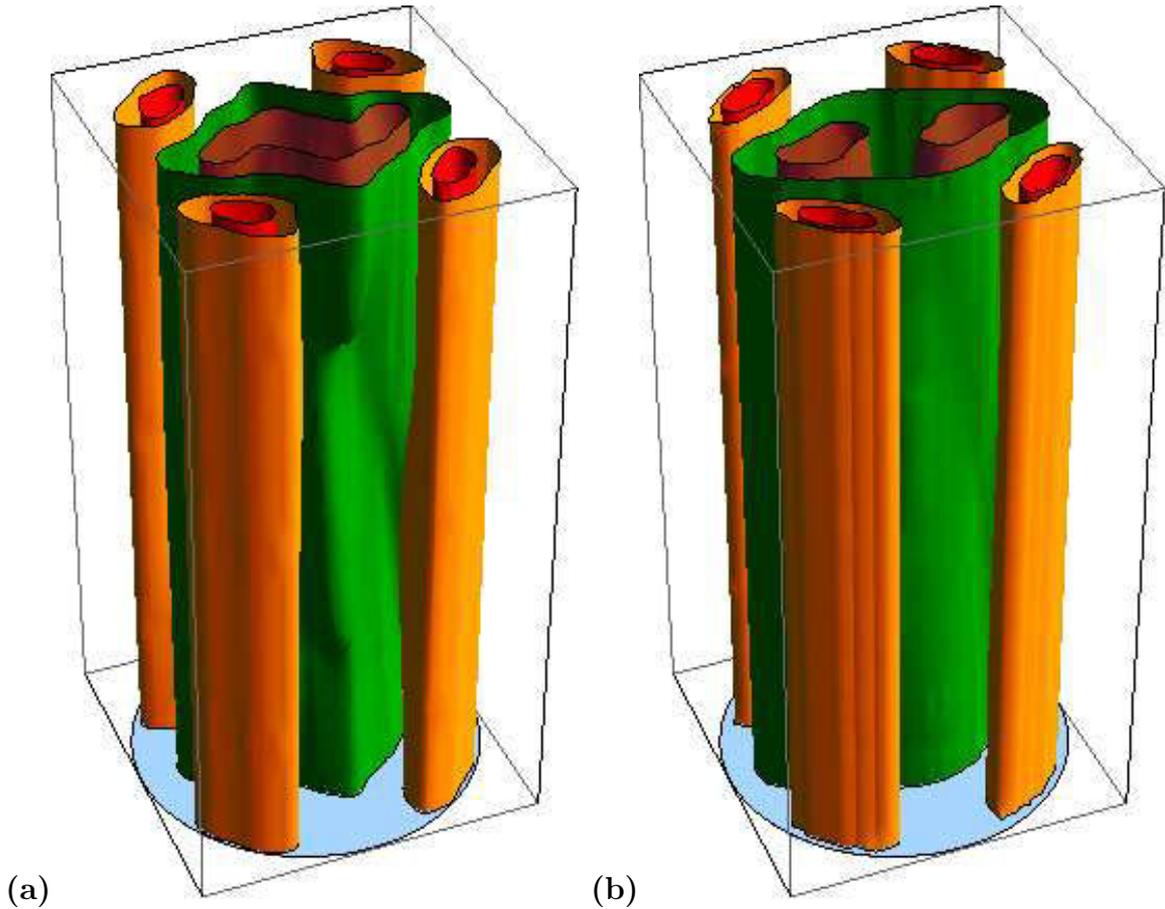


FIG. 6.19 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $n = 0.5$: iso-surfaces de la vitesse axiale w au point de bifurcation nœud col. L'axe de la conduite est orienté du bas vers le haut de $z = 0$ à $z = \frac{2\pi}{q_0}$. Les jets rapides près de la paroi sont signalés par les couleurs rouge et doré, les jets lents au centre de la conduite par la couleur verte. Quatre contours sont dessinés à -0.28 , -0.15 , 0.01 et 0.05 . (a) : cas newtonien $\lambda = 0$. (b) : $\lambda = 2$

6.3.3 Coefficient de perte de charge

L'évolution du coefficient de perte de charge f (cf. l'équation 2.42) en fonction de \overline{Re}_p est représentée sur figure 6.20. On observe que les pertes de charge sont moins importantes dans le cas newtonien que non newtonien lorsque λ augmente.

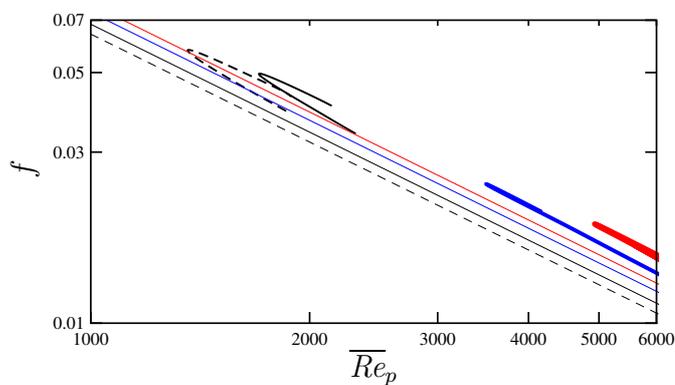


FIG. 6.20 – Pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, $n = 0.5$: coefficients de perte de charge f en fonction de \overline{Re}_p , pour différentes valeurs de λ . En noir tireté, $\lambda = 0$; en noir continu, $\lambda = 0.5$; en bleu, $\lambda = 1$; en rouge, $\lambda = 2$. Les droites correspondent aux écoulements laminaires, les courbes aux ondes critiques.

Conclusion et perspectives

Cette thèse s'est intéressée au problème de la transition vers la turbulence en écoulements en tuyau d'un fluide non newtonien rhéofluidifiant vérifiant la loi de Carreau. Pour cela, on a utilisé une approche nouvelle qui a apporté des résultats probants en fluide newtonien (Faisst & Eckhardt 2003, Wedin & Kerswell 2004, Pringle & Kerswell 2007). Le travail présenté dans cette thèse constitue la première adaptation de cette approche à un fluide non newtonien rhéofluidifiant. Pour arriver aux résultats présentés dans les chapitres 5 et 6, il a fallu développer, en partant de zéro, un code pseudo-spectral de continuation. Ce travail a clairement pris la majeure partie de mon temps¹. De nombreuses méthodes ont dû être implémentées, de la discrétisation des équations avec la méthode de Petrov-Galerkin à la méthode de continuation, en passant par la méthode GMRES. Ce nouveau code a été validé pour les fluides newtoniens et non newtonien. Une convergence spectrale a été obtenue (cf. la section 4.5). Mais même si ce code donne des résultats fiables, il présente néanmoins des limites, notamment en terme de mémoire vive. À mon avis, le point à travailler est le préconditionneur \tilde{P} . En effet, le préconditionneur et certains de ces éléments constituent les seules matrices qui soient générées. On peut donc penser à utiliser un nouveau préconditionneur de type SOR et l'inverser de manière itérative. Cela évitera de générer l'opérateur \tilde{P} . Ainsi le code serait entièrement « matrix free ».

Un premier objectif de la thèse était de modéliser à la structure asymétrique observée en régime faiblement turbulent par Escudier & Presti (1996), Escudier et al. (1999), Escudier et al. (2005), Esmael & Nouar (2008), Escudier et al. (2009). Malheureusement cela n'a pas abouti. Plusieurs raisons ont déjà été évoquées, comme celle d'un mauvais choix de terme de forçage \mathbf{F} . Mais pour moi, celle qui me semble la plus vraisemblable est qu'il n'y a pas d'ondes non linéaires « supportant » l'attracteur faiblement turbulent en régime asymétrique. Mais cela ne

¹Je mentionne aussi que j'ai passé un certain temps, au début de ma thèse, à essayer de développer une compréhension géométrique du tenseur de Reynolds engendré par une onde pure tridimensionnelle, dans l'esprit de l'étude bidimensionnelle de Plaut et al. (2008), mais que cela n'a pas abouti.

reste qu'une conviction personnelle. Le problème avec la méthodologie du « SSP », c'est que des prérequis sont nécessaires. Nous n'avons pas accès au champ de vitesse transverse par exemple, ce qui nous limite dans le choix d'un terme de forçage pertinent. Et puis si on observe de quelle manière l'idée du « SSP » a émergé en canal plan, on constate que des simulations numériques directes ont été nécessaires pour d'abord comprendre le phénomène physique. Je pense que dans le cas de l'étude de la structure asymétrique, des simulations numériques directes sont nécessaires, pour mieux comprendre sa formation. Le travail théorique et numérique sur l'étude de la structure asymétrique se poursuit actuellement avec la thèse de Nicolas Lopez dans l'équipe, qui développe un code de simulation numérique directe.

Même si, jusqu'à présent, l'étude de la structure asymétrique n'a pas abouti, le code a permis d'obtenir des ondes non linéaires pour les nombres d'onde azimutaux $m_0 = 2$ et $m_0 = 3$. On a ainsi montré un retard à la transition vers ces ondes lorsque le caractère rhéofluidifiant devient plus important. Même si le lien entre ces calculs d'ondes non linéaires et les expériences n'est pas direct, ce retard est à mettre en parallèle avec le fait que le nombre de Reynolds critique \overline{Re}_{c2} , d'apparition de bouffées turbulentes, est plus élevé en fluide non newtonien qu'en fluide newtonien, cf. la table 1.1. Cependant, de nombreuses études paramétriques doivent encore être menées. On doit entre autre faire varier le nombre d'onde axial q_0 pour étudier son influence. Même si actuellement on est limité en terme de mémoire vive, il serait intéressant de calculer les branches des solutions pour des λ supérieurs à 2. En effet, en observant les résultats obtenus pour $m_0 = 2$, $q_0 = 1.55$, on pourrait conjecturer que, lorsque λ tend vers l'infini, les solutions ondes convergent vers une solution limite en terme de Re_c (cf. figure 6.11 page 94) et de certains champs (cf. table 6.2 page 6.2). Une autre étude qui semble intéressante serait de faire des calculs pour Λ (cf. équation 2.15 page 38) fixé, ce qui serait plus physique.

Annexe A

Intégration numérique

Dans la méthode de Petrov-Galerkin, on est amené à effectuer des intégrations numériques, pour le calcul d'intégrales du type (4.16) ou (4.19). Le but de cette annexe est de présenter les méthodes utilisées.

A.1 Méthode des trapèzes

Pour intégrer sur θ et z , j'utilise la méthode des trapèzes. Elle approxime l'intégrale d'une fonction f sur un segment $I = [a, b]$ par une somme en divisant l'intervalle I en n parties égales :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right) \quad (\text{A.1})$$

où $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0, \dots, n$. Dans le cas de l'intégration sur θ et z , j'utilise respectivement les points

$$\theta_i = \frac{2\pi i}{m_0 N_\theta}, \quad i = 0, \dots, N_\theta - 1 \quad (\text{A.2})$$

et

$$z_i = \frac{2\pi i}{q N_z}, \quad i = 0, \dots, N_z - 1. \quad (\text{A.3})$$

Le nombre de points d'intégration n , N_θ et N_z pour les variables θ et z , est choisi de manière à respecter la règle de « dealiasing » de Orszag (Canuto et al. 1988), soit¹

$$\begin{cases} N_\theta \geq 3M + 2 \\ N_z \geq 3L + 2. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

J'utilise un nombre impair de points d'intégration (pour les matrices de dérivations B) :

$$\begin{cases} N_\theta = 3M + 2, \text{ pour } M \text{ impair} \\ N_\theta = 3M + 3, \text{ pour } M \text{ pair} \end{cases} \quad \begin{cases} N_z = 3L + 2, \text{ pour } L \text{ impair} \\ N_z = 3L + 3, \text{ pour } L \text{ pair} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

A.2 Méthode de quadrature de Gauss

Pour intégrer sur r , une méthode de quadrature de Gauss avec les points de Gauss-Lobatto est utilisée. Des polynômes de Tchebychev T_k sont utilisés et la fonction-poids associée est $\omega(r) = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$. Ce choix permet d'exploiter les propriétés d'orthogonalités de ces polynômes, à savoir

$$\int_{-1}^1 T_k(r)T_l(r)\omega(r)dr = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } k = l \neq 0, \pi \text{ si } k = l = 0, \\ 0 \text{ si } k \neq l. \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

La méthode de quadrature de Gauss approxime l'intégrale par une somme² :

$$\int_{-1}^1 f(r)\omega(r)dr \approx \sum_{i=0}^{N_r} f(r_i)\omega_i \quad \text{avec} \quad (\text{A.7})$$

$$N_r + 1 \text{ points de Gauss-Lobatto : } \quad r_i = \cos\left(\frac{\pi i}{N_r}\right) \in [-1, 1], \quad 0 \leq i \leq N_r \quad (\text{A.8})$$

$$\text{poids de Gauss-Lobatto : } \quad \omega_i = \begin{cases} \frac{\pi}{2N_r}, & i = 0, N_r \\ \frac{\pi}{N_r}, & 1 \leq i \leq N_r - 1 \end{cases} . \quad (\text{A.9})$$

La formule A.8 est exacte pour tout polynôme $f(r)$ de degré inférieur ou égal à $2N_r - 1$.

¹Cette règle, introduite dans la section 3.2 de Canuto et al. (1988), permet d'annuler l'erreur faite lorsque l'on évalue un produit de termes par passage dans l'espace physique. On peut l'interpréter en pensant qu'il faut au moins 3 points de grilles par période spatiale, jusqu'à la plus petite période spatiale incluse dans le développement spectral.

²Ces formules sont présentées dans la section 2.2 de Canuto et al. (1988).

Lors de l'élaboration du code, une évaluation du degré du terme $\underline{\nabla}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$ de l'équation (3.2), page 50, nous indique qu'il nous faut

$$\begin{cases} N_r = 3N + 8 \text{ si } N \text{ est impair} \\ N_r = 3N + 7 \text{ si } N \text{ est pair,} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

N étant le nombre de modes radiaux. On choisit un nombre impair de points d'intégration pour la dérivation numérique. Cela nous permet d'éviter également d'avoir un point d'intégration passant par $r = 0$. De plus concrètement, pour l'intégration, on n'utilise que les points allant de $r = 1$ (non inclus³.) à $r = 0$ en vertu de l'équation (4.20), page 59 :

$$r_i^+ = \cos\left(\frac{\pi i}{N_r}\right), \quad i = 1, \dots, (N_r - 1)/2. \quad (\text{A.11})$$

³les fonctions de base s'annulent en $r = 1$

Annexe B

Dérivation numérique

Pour effectuer toutes les dérivations selon r , θ et z dans l'équation (3.2), des matrices de dérivations sont utilisées. Selon la coordonnée radiale, on se sert des points de Gauss-Lobatto, définis par (A.8). On a travaillé avec N_r , le nombre de points d'intégration de Gauss-Lobatto, impair. La matrice de dérivation \mathbf{D}_r spectrale est :

$$(\mathbf{D}_r)_{ij} = \begin{cases} (1 + 2N_r^2)/6 & i = j = 0 \\ -(1 + 2N_r^2)/6 & i = j = N_r \\ -\frac{r_i}{2(1-r_i^2)} & i = j, 0 < i < N_r \\ (-1)^{i+j} \frac{c_j}{c_i(r_j-r_i)} & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

où $c_j = 1$ pour $0 < j < N_r$ et $c_0 = c_{N_r} = 2$, voir Solomonoff & Turkel (1989). Les fonctions de base sont des fonctions paires ou impaires de r . On ne considère donc que les points de Gauss-Lobatto contenu dans l'intervalle $[0, 1]$, voir équation (A.11). Pour une fonction arbitraire paire, $f_p(r)$, ou impaire, $f_{imp}(r)$, elles satisfont :

$$f_p(r_i) = f_p(r_{N_r-i}), f_{imp}(r_i) = -f_{imp}(r_{N_r-i}), i = \frac{N_r+1}{2}, \dots, N_r. \quad (\text{B.2})$$

On peut donc construire des matrices de dérivations \mathbf{D}_r^e et \mathbf{D}_r^o :

$$(\mathbf{D}_r^e)_{ij} = (\mathbf{D}_r)_{ij} + (\mathbf{D}_r)_{ij} \quad (\mathbf{D}_r^o)_{ij} = (\mathbf{D}_r)_{ij} - (\mathbf{D}_r)_{ij} \quad i, j = 0, \dots, \frac{N_r-1}{2}. \quad (\text{B.3})$$

La dérivée radiale d'un vecteur de fonction de base s'écrit donc :

$$\frac{d}{dr}\mathbf{v}_{mln} = \mathbf{D}_r^\otimes \cdot \mathbf{v}_{mln} \quad (\text{B.4})$$

où

$$\mathbf{D}_r^\otimes = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r^o & & \\ & \mathbf{D}_r^o & \\ & & \mathbf{D}_r^e \end{pmatrix}, \text{ pour } m \text{ pair} \quad \mathbf{D}_r^\otimes = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_r^e & & \\ & \mathbf{D}_r^e & \\ & & \mathbf{D}_r^o \end{pmatrix}, \text{ pour } m \text{ impair} \quad (\text{B.5})$$

Pour les dérivées azimutales et axiales, on applique les matrices de dérivation suivante à la matrice du champ de vitesse évalué sur tous les points de grille pour obtenir respectivement sa dérivée azimutale ou axiale sur tous les points de grille :

$$\mathbf{D}_\theta = \begin{cases} \frac{m_0(-1)^{i-j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_\theta}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

avec N_θ impair (Fornberg 1996) pour les points $\theta_i = \frac{2\pi i}{m_0 N_\theta}$, $i = 0, \dots, N_\theta - 1$, et

$$\mathbf{D}_z = \begin{cases} \frac{q_0(-1)^{i-j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_z}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

avec N_z impair pour les points $z_i = \frac{2\pi i}{q N_z}$, $i = 0, \dots, N_z - 1$.

Annexe C

Méthode de Newton

Dans cette section, la méthode de Newton est présentée succinctement. De plus amples détails pourront être trouvés par exemple dans Stoer & Bulirsch (2002) ou encore Dennis & Schnabel (1996). Considérons le système

$$f(x) = 0 \tag{C.1}$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est supposée différentiable. La méthode de Newton est une méthode permettant de résoudre les équations du type (C.1). Il s'agit d'une méthode itérative qui, en partant d'une condition initiale x_0 , nous permet de déterminer la solution \bar{x} de (C.1). Par itérative, il faut comprendre que l'on construit une suite de vecteurs x_k tendant vers \bar{x} . Cette suite est définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k + \delta x_k, \tag{C.2}$$

le problème étant de déterminer le pas δx_k . L'idée est que la distance les vecteurs x_{k+1} et x_k est petite. Supposant cela, pour passer de x_k à x_{k+1} , on procède à une linéarisation de (C.1) :

$$\nabla f(x_k) \cdot \delta x_k = -f(x_k). \tag{C.3}$$

La question est de savoir dans quelles conditions cette suite converge effectivement vers la solution \bar{x} . Pour que la méthode de Newton fonctionne, il faut que la condition initiale x_0 ne soit pas trop « éloignée » de \bar{x} . Cela est une question difficile, ne connaissant pas à priori la solution \bar{x} . La convergence de la méthode est locale. La méthode de Newton telle quelle n'a été utilisée que pour le calcul de l'écoulement laminaire (voir section 2.3) et le calcul de l'écoulement

« rouleaux-jets » (voir section 3.2). Pour la méthode inexacte de Newton, présentée dans la section 4.3, un algorithme de backtracking (voir annexe D) a été ajouté. Pour résumer, si le pas δx_k de la méthode inexacte de Newton n'est pas satisfaisant, des pas plus petits dans la même direction sont choisis jusqu'à un pas jugé satisfaisant. En particulier, si la condition initiale est éloignée de la solution, le premier pas risque d'être important et la méthode de Newton risque de diverger assez rapidement. Avec des pas plus petits, le risque de divergence est moins grand. Des explications détaillées de cette méthode sont disponibles dans Dennis & Schnabel (1996).

Annexe D

Méthode de Backtracking

La méthode de backtracking est une méthode qui permet de déterminer si le pas de la méthode de Newton et plus particulièrement de la méthode inexacte de Newton est satisfaisant. Il s'agit d'un algorithme de contrôle du pas que j'ai utilisé dans la méthode inexacte de Newton, voir la section 4.3. Elle permet d'éviter d'avoir des pas trop importants, ce qui pourrait amener la méthode de Newton à diverger.

Lorsque le critère (4.68), page 70 est vérifié, on teste si

$$\|F(\bar{X}^k + \delta\bar{X}^k)\| \leq (1 - 10^{-4}(1 - \eta_k)\|F(\bar{X}^k)\|). \quad (\text{D.1})$$

Tant que cette condition n'est pas vérifiée, on diminue le pas $\delta\bar{X}^k$, et augmente le « terme de forçage » η_k ,

$$\delta\bar{X}^k = \phi \delta\bar{X}^k \quad (\text{D.2})$$

$$\eta_k = 1 - \phi(1 - \eta_k). \quad (\text{D.3})$$

Le coefficient ϕ est déterminé comme la valeur minimisant le polynôme $p(\phi)$ de degré 2 défini par

$$p(0) = \frac{1}{2}\|F(\bar{X}^k)\|^2, \quad (\text{D.4})$$

$$p(1) = \frac{1}{2}\|F(\bar{X}^k + \delta\bar{X}^k)\|^2, \quad (\text{D.5})$$

$$p'(0) = \frac{d}{d\phi} \left[\|F(\bar{X}^k + \phi\delta\bar{X}^k)\|^2 \right]_{\phi=0}, \quad (\text{D.6})$$

la norme utilisée étant la norme euclidienne.

Des explications plus détaillées sur cette méthode sont disponibles dans Dennis & Schnabel (1996).

Annexe E

Calcul d'un point de bifurcation : méthode de la sécante

La méthode de la sécante est une méthode pour déterminer le zéro d'une fonction. On a utilisé la méthode de la sécante pour calculer une approximation $(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ du point de bifurcation (X_c, A_c) de l'écoulement « rouleaux-jets » $\tilde{\mathbf{U}}$ décrit dans le chapitre 3. Dans notre cas, la fonction dont l'on veut déterminer le zéro est la partie réelle σ_r de la valeur propre σ la plus dangereuse du problème (3.5), c'est-à-dire celle dont la partie réelle est la plus grande. σ_r dépend de l'amplitude de forçage A_F et du nombre d'onde axial q_0 . On recherche donc par cette méthode l'amplitude A_F pour laquelle, à q_0 fixé,

$$\sigma_r(A_F) = 0. \quad (\text{E.1})$$

Pour cela, on détermine tout d'abord deux amplitudes de forçage initiales A_0 et A_1 telles que

$$\sigma_r(A_0)\sigma_r(A_1) < 0. \quad (\text{E.2})$$

Ensuite, on construit une suite telle que

$$A_{k+1} = \frac{A_{k-1}\sigma_r(A_k) - A_k\sigma_r(A_{k-1})}{\sigma_r(A_k) - \sigma_r(A_{k-1})}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{E.3})$$

Pour chaque amplitude de forçage A_k , un écoulement $\tilde{\mathbf{U}}$ est calculé et les différentes valeurs de σ_r sont évaluées par résolution du problème aux valeurs propres 3.5, page 52. La condition d'arrêt est fixée à $\sigma_r < 10^{-12}$. De plus amples détails sur cette méthode peuvent être trouvés dans

Stoer & Bulirsch (2002).

Annexe F

Méthode de changement de branche

Une fois une approximation $(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ du point de bifurcation (X_c, A_c) calculée par la méthode de la sécante (cf. section E), l'objectif est de pouvoir passer sur la nouvelle branche de solution émergeant de ce point de bifurcation. Pour cela, on doit réussir à prédire un point (X_b, A_b) sur la nouvelle branche. Pour cela j'ai utilisé une méthode détaillée dans Seydel (1994). Pour « attraper » la nouvelle branche, on travaille avec $A_b = \tilde{A}_c$. Par contre pour déterminer X_b , cela est plus compliqué. Il faut savoir qu'à un point de bifurcation (X_c, A_c) , il existe un vecteur h_c non nul de $\mathbb{R}^{N_{tot}}$ tel que (cf. Seydel (1994), Doedel et al. (1991) ou encore Seydel (1997))

$$G_X(X_c, A_c) \cdot h_c = 0. \quad (\text{F.1})$$

Si l'on considère un plan généré par les deux vecteurs tangents aux deux branches de solutions issues du point de bifurcation, alors h_c appartient à ce plan mais est orthogonal à l'axe du paramètre A_F dans l'espace $\mathbb{R}^{N_{tot}}$. Évidemment numériquement, il est illusoire de croire que l'on puisse obtenir exactement ce vecteur h_c : seule une approximation \tilde{h}_c est possible. D'ailleurs on n'a obtenu qu'une approximation du point de bifurcation. Pour déterminer \tilde{h}_c , on doit donc résoudre

$$G_X(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c) \cdot \tilde{h}_c = 0. \quad (\text{F.2})$$

Résoudre ce système (F.2) n'est pas trivial. En effet, la matrice $G_X(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ est non singulière contrairement à $G_X(X_c, A_c)$. Cela signifie que résoudre directement le système (F.2) va nous conduire à la solution nulle. On doit donc forcer \tilde{h}_c à être non nul. Pour cela, on force la valeur

d'un coefficient k de \tilde{h}_c :

$$h_k = 1. \quad (\text{F.3})$$

La méthode consiste donc à modifier une ligne l de la matrice $G_X(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ par le vecteur unitaire e_k (seule la composante k vaut 1, les autres 0) et à résoudre alors

$$G_X^{lk}(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c) \cdot \tilde{h}_c = e_l \quad (\text{F.4})$$

où $G_X^{lk}(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ est la matrice modifiée, e_l le vecteur unitaire tel que $(e_l)_i = \delta_{il}$. Dans mon code,

$$k = (2M + 1)N + N + 1l = (2M + 1)N + 1 \quad (\text{F.5})$$

Le vecteur \tilde{h}_c ainsi obtenu n'est pas unique et dépend évidemment de la précision de $(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ mais aussi du choix des indices k et l . Notons que l'équation (F.4) est résolue par une méthode *LU* avec la routine DGESVX de la librairie LAPACK. La matrice $G_X^{lk}(\tilde{X}_c, \tilde{A}_c)$ est donc générée.

Revenons au problème de prédiction d'un point (X_b, A_b) sur la nouvelle branche. Une fois \tilde{h}_c calculé, on peut prédire X_b par

$$X_b = \tilde{X}_c + \xi \tilde{h}_c \quad (\text{F.6})$$

où ξ est un réel positif que l'on fixe ad-hoc. En m'inspirant de Seydel (1994), j'ai fixé

$$\xi = 10^{-6} \max 1, |\tilde{X}_c^k| \quad (\text{F.7})$$

où \tilde{X}_c^k est la $k^{\text{ème}}$ composante de \tilde{X}_c . On utilise alors la méthode de Newton présentée dans la section 4.2.3 pour « attraper » la nouvelle branche, (X_b, \tilde{A}_c) servant de condition initiale. Dans ce cas, on ajoute comme équation de paramétrisation

$$P(X, A_F, s) = X_k - 1 = 0. \quad (\text{F.8})$$

Ainsi l'amplitude A_F est libre. On convergera vers $A_F > A_c$ (resp. $A_F < A_c$) si la bifurcation est sur-critique (resp. sous-critique).

Annexe G

Méthode d'Euler : contrôle du pas

On considère le point $(X(s_0), R(s_0))$ ainsi que la pente $\left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dR}{ds}(s_0)\right)$ en ce point connu. Pour contrôler le pas $\Delta s_0 = s_1 - s_0$ du prédicteur pour pouvoir calculer le point suivant $(X(s_1), R(s_1))$, la pente $\left(\frac{d\tilde{X}}{ds}(s_1), \frac{d\tilde{R}}{ds}(s_1)\right)$ de la première approximation $(\tilde{X}(s_1), \tilde{R}(s_1))$ (4.45) est également calculée. Puis, une « variation » var est évaluée à priori :

$$var = 0.5 \left\| \left(\frac{dX}{ds}(s_0), \frac{dR}{ds}(s_0) \right) - \left(\frac{d\tilde{X}}{ds}(s_1), \frac{d\tilde{R}}{ds}(s_1) \right) \right\|_{\infty}. \quad (\text{G.1})$$

Une tolerance tol est fixée (typiquement $tol \approx 10^{-4}$). Ensuite,

– si

$$0.9 tol \leq var \leq 1.1 tol \quad (\text{G.2})$$

alors pour le prochain point $(X(s_2), R(s_2))$, $\Delta s_1 = s_2 - s_1$ restera identique : $\Delta s_1 = \Delta s_0$; cela signifie que si $var \approx tol$, alors le pas ne varie pas.

– Si

$$var < 0.9tol \text{ ou } 1.1tol < var < 1.2tol \quad (\text{G.3})$$

alors $\Delta s_1 = \Delta s_0 \sqrt{\frac{tol}{var}}$; cela signifie que si var est trop petit, on augmente le pas, et si il est légèrement trop grand on le diminue.

– Si

$$1.2tol < var \quad (\text{G.4})$$

alors le point prédit est réévalué avec $\Delta s_0 = \Delta s_0 \sqrt{0.9 \frac{tol}{var}}$; ici, si var est trop grand, on diminue le pas.

De plus, j'ajoute une condition supplémentaire pour éviter une variation trop grande entre 2 points calculés : si

$$\frac{\| (X(s_0), R(s_0)) \|_2}{\| (\tilde{X}(s_1), \tilde{R}(s_1)) \|_2} \geq 1.1 \quad (\text{G.5})$$

alors $(\tilde{X}(s_1), \tilde{R}(s_1))$ est recalculé avec $\Delta s_0 = 0.5\Delta s_0$.

Annexe H

Méthode GMRES avec préconditionneur

H.1 Méthode GMRES

La méthode GMRES (Generalized Minimum RESidual method) a été implémentée pour la résolution de systèmes linéaires, en particulier les systèmes linéaires (4.61) et (4.50). Il s'agit d'une méthode itérative de résolution de systèmes linéaires non symétriques mise au point par Saad & Schultz (1986).

Explicitons l'algorithme de cette méthode pour la résolution du système

$$A \cdot v = b \text{ avec } A \text{ une matrice à } N \text{ lignes et colonnes, } v \in \mathbb{R}^N, b \in \mathbb{R}^N. \quad (\text{H.1})$$

On travaille dans \mathbb{R}^N muni du produit scalaire euclidien et de la norme associée.

Algorithme GMRES(m)

1. On choisit v_0 et on calcule un résidu initial $r_0 = b - A \cdot v_0$ et le vecteur $w_1 = \frac{r_0}{\|r_0\|_2}$.
2. Pour $j = 1, 2, \dots, m$, faire :

$$h_{i,j} = (A \cdot w_j, w_i), \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

$$\hat{w}_{j+1} = A \cdot w_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} w_i,$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{w}_{j+1}\|_2, \text{ et}$$

$$w_{j+1} = \hat{w}_{j+1}/h_{j+1,j}.$$

Les vecteurs w_j constituent une base orthonormale de l'espace de Krylov

$$K_m = \text{Vec}(r_0, A.r_0, \dots, A^{m-1} \cdot r_0)$$

3. On construit une solution approchée $v_m = v_0 + z_m$ où z_m est un élément de l'espace de Krylov $K_m = \text{Vec}(r_0, A.r_0, \dots, A^{m-1} \cdot r_0)$.

Donc $z_m = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$. Pour déterminer les composantes $(\beta_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ de z_m sur la base de Krylov, on minimise au sens des moindres carrés $\|r_0 - A.z\|_2$.

4. On évalue $r_m = b - A.v_m$. Si le résidu est suffisamment petit, on s'arrête.

Autrement, on pose $v_0 = v_m$ et on réitère à partir de 1.

En définitive, la solution approchée v_m de (H.1) est la somme d'un vecteur v_0 et de la combinaison linéaire des vecteurs de la base de Krylov qui minimise au sens des moindres carrés $\|r_0 - A.z\|_2$.

Cette méthode ne fait intervenir que le produit de la matrice A et d'un vecteur w : Il n'est donc pas nécessaire de construire la matrice A mais uniquement de programmer le produit $A.w$. Dans le cas de la méthode de Newton, la méthode GMRES nous permet donc de nous affranchir de la construction du Jacobien.

Pour que cette méthode soit réellement avantageuse, il faut que très peu de directions de Krylov soient nécessaires comparativement à la dimension de notre système linéaire, c'est-à-dire $m \ll N$. Pour rendre cela possible, il est nécessaire de construire un préconditionneur (section H.2).

Pour des raisons de précision et de stabilité numérique, l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt de la méthode GMRES a été remplacé par la méthode de Householder, voir par exemple Walker (1988) et en particulier l'algorithme 2.2 de cet article.

H.2 Préconditionneur

Il est possible d'accélérer la convergence de la méthode GMRES (section H.1) en utilisant un préconditionneur \tilde{P} . De manière générale, le choix du préconditionneur dans le cas de la résolution d'un système linéaire de la forme (H.1) dépend des deux critères suivants :

- \tilde{P} doit être une bonne approximation de l'opérateur A de telle sorte que $\tilde{P}^{-1} \cdot A$ ou $A \cdot \tilde{P}^{-1}$ soit proche de l'opérateur identité
- Les équations de la forme $\tilde{P} \cdot u = v$ doivent être relativement simple à résoudre

Deux types de préconditionnement sont possibles :

- le « préconditionnement gauche » qui, au lieu du système (H.1), nous amène à résoudre le système

$$\tilde{P}^{-1} \cdot A \cdot v = \tilde{P}^{-1} \cdot b \quad (\text{H.2})$$

- le « préconditionnement droite » qui nous conduit à la résolution du système

$$A \cdot \tilde{P}^{-1} \cdot u = b \quad (\text{H.3})$$

où $u = \tilde{P} \cdot v$.

J'ai opté sur le « préconditionnement droite » : cela permet de raisonner directement sur le résidu r_m de la méthode GMRES pour la condition d'arrêt.

J'ai décidé d'utiliser comme préconditionneur un opérateur très proche du jacobien, dont la partie \tilde{P} agissant sur \underline{X} se présente sous

$$\tilde{P} = cD + L + J_{N_2} + J_{\tilde{N}}. \quad (\text{H.4})$$

J_{N_2} est la partie du jacobien provenant de l'opérateur N_2 . Seule la partie du jacobien $J_{\tilde{N}}$ provenant de l'opérateur $\tilde{N}(\cdot)$ (cf. les équations 4.33 et 4.34) a été tronquée. $J_{\tilde{N}}$ est issu, avant projection sur les fonctions-test, de la linéarisation du tenseur $\underline{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n)$ de l'équation (3.2) autour d'un champ $\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n$, soit de

$$\mu(\dot{\gamma}^2(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n)) \underline{\underline{\dot{\gamma}}}(\delta \mathbf{u}_n) + \mu'(\dot{\gamma}^2(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n)) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n) \dot{\gamma}_{ij}(\delta \mathbf{u}_n) \underline{\underline{\dot{\gamma}}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}_n) \quad (\text{H.5})$$

où $\mu'(\dot{\gamma}^2)$ est la dérivée première de μ par rapport à $\dot{\gamma}^2$. Pour la construction du préconditionneur \tilde{P} , le second terme contenant justement de μ' n'a pas été pris en compte.

Une fois le préconditionneur construit, il est factorisé et sauvegardé sous sa forme LU . Il est réactualisé automatiquement après 5 itérations de Newton. De plus, lors du suivi de branche de solutions, on peut choisir de le réactualiser uniquement après un certain nombre de points calculés.

H.3 Évaluation de l'action du jacobien sur un vecteur

Lors de l'utilisation d'une méthode GMRES (section H.1), il n'est pas nécessaire de calculer tout l'opérateur A mais seulement le produit matrice-vecteur $A \cdot w$, w étant un vecteur. Dans la méthode de suivi de branche de solutions (section 4.2) le jacobien J de l'opérateur G intervient à différentes reprises dans des systèmes linéaires. Ces systèmes linéaires sont résolus par une méthode GMRES. Seule donc l'action de J sur un vecteur $\bar{w} \in \mathbb{R}^{N_{tot}+1}$ quelconque, soit par exemple sur les vecteurs $Q\delta Y^k$, a été implémentée. J'ai donc décidé de ne pas utiliser le jacobien exact mais d'évaluer son action approximativement. Rappelons que le jacobien est issu des différents opérateurs D , L , N_2 et \tilde{N} . Seule l'action sur un vecteur \bar{w} de la partie du jacobien (notons la $J_{\tilde{N}}$) provenant de l'opérateur \tilde{N} est approximative et évaluée par la combinaison de différents développements de Taylor (Pernice & Walker 1998) :

$$J_{\tilde{N}}((X, Re)^k) \cdot \bar{w} \approx \frac{1}{6\epsilon} \left(8\tilde{N}((X, Re)^k + \frac{\epsilon}{2}\bar{w}) - \frac{1}{6\epsilon} \left(8\tilde{N}((X, Re)^k - \frac{\epsilon}{2}\bar{w}) - \tilde{N}((X, Re)^k + \epsilon\bar{w}) + \tilde{N}((X, Re)^k - \epsilon\bar{w}) \right) \right) \quad (\text{H.6})$$

avec $\epsilon = 10^{-7}$.

Le vecteur G_{Re} intervenant dans la construction du jacobien J (4.48) est également construit par différences finies, mais cette fois-ci par un développement de Taylor d'ordre 1 :

$$G_{Re}((X, Re)^k) \approx \frac{G(X^k, Re^k + dRe_h) - G(X^k, Re^k - dRe_h)}{2dRe_h} \quad (\text{H.7})$$

où $dRe_h = 10^{-7} Re^k$.

Annexe I

Calculs dans l'espace physique

I.1 Calcul du champ de vitesse sur les points de grille : méthode de sommation partielle

J'ai choisi de ne pas utiliser de transformées de Fourier rapide et de procéder comme Meseguer & Mellibovsk (2007) en utilisant la méthode de sommation partielle. Cette méthode consiste à séparer les étapes de calculs et d'évaluer d'abord le champ de vitesse \mathbf{u} sur la grille radiale, puis azimuthale, puis axiale obtenant ainsi l'évaluation complète du champ de vitesse sur la grille complète.

Le champ de vitesse \mathbf{u} est évalué d'abord sur la grille radiale r_i^+ :

$$\mathbf{u}_i(\theta, z) = \mathbf{u}(r_i^+, \theta, z) = \sum_{l=-L}^L \sum_{m=-M}^M e^{i(m\theta_0 + q_0 lz)} \underbrace{\sum_{n=1}^N a_{mln} \mathbf{v}_{mln}(r_i^+)}_{\alpha_{ml}^i} \quad (\text{I.1})$$

Ensuite, on évalue $\mathbf{u}_i(\theta, z)$ sur la grille azimuthale θ_j

$$\mathbf{u}_{ij}(z) = \mathbf{u}(r_i^+, \theta_j, z) = \sum_{l=-L}^L e^{iq_0 lz} \beta_l^{ij} \quad (\text{I.2})$$

où

$$\beta_l^{ii} = \sum_{m=-M}^M e^{imm_0 \theta_j} \alpha_{ml}^i. \quad (\text{I.3})$$

Et enfin on obtient l'évaluation du champ de vitesse sur la grille complète par

$$\mathbf{u}_{ijk} = \mathbf{u}(r_i^+, \theta_j, z_k) = \sum_{l=-L}^L e^{iq_0 l z_k} \beta_l^{ii}. \quad (\text{I.4})$$

Procéder ainsi coûte moins d'opérations qu'un calcul direct : $O(LMN(L + M + N))$ contre $O(L^2 N^2 M^2)$.

I.2 Évaluation des termes non linéaires

Au cours des différents calculs numériques, on est amené à évaluer la fonction $G(X, Re)$ (4.36). Les opérateurs linéaires D et L sont générés une fois pour toute, car ils ne varient pas, au contraire des opérateurs non linéaires $\tilde{N}(\underline{X})$ et $N_2(\underline{X})$ qui doivent être réactualisés. Pour effectuer cette réactualisation, on utilise une méthode pseudospectrale. Considérons sans nuire à la généralité l'opérateur N_2 qui représente $\underline{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. On doit évaluer les termes

$$b_{mln}^{(k)} = \left\langle \underline{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{w}_{mln}^{(k)} \right\rangle \quad (\text{I.5})$$

pour un champ de vitesse \mathbf{u} . En premier lieu, le champ de vitesse \mathbf{u} est évalué par la technique des sommations partielles sur tout les points de grille (r_i, θ_j, z_k) pour $i = 0, \dots, N_r$, $j = 0, \dots, N_\theta$, $k = 0, \dots, N_z$. Puis, encore avec cette méthode, on calcule $\underline{\nabla} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ aux points de grille en se servant également des matrices de dérivations (section B). Enfin, par intégration numérique, on évalue les termes b_{mln} .

Bibliographie

- BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C. & HASSAGER, O. 1987 *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol.1*. Wiley.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M., QUARTERONI, A. & ZANG, T. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- CARREAU, J. P. 1972 Rheological equations from molecular network theories. *Transactions of the Society of Rheology* **16**, 99–127.
- DARBYSHIRE, A. G. & MULLIN, T. 1995 Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow. *J. Fluid Mech.* **289**, 83.
- DAVEY, A. & DRAZIN, P. 1969 The stability of Poiseuille flow in a pipe. *J. Fluid Mech.* **36**, 209–218.
- DEMBO, R. S., EISENSTAT, S. C. & STEIHAUG, T. 1982 Inexact newton methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **19**, 400–408.
- DENNIS, J. & SCHNABEL, R. 1996 *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equation*. SIAM.
- DOEDEL, E., KELLER, H. & KERNEVEZ, J. 1991 Numerical analysis and control of bifurcation problems (I) Bifurcation in finite dimensions. *International Journal of bifurcation and chaos* **1**, 493–520.
- DUGUET, Y., PRINGLE, C. & KERSWELL, R. 2008a Relative periodic orbits in transitional pipe flow. *Phys. Fluids* **20**, 114102.
- DUGUET, Y., WILLIS, A. & KERSWELL, R. 2008b Transition in pipe flow : the saddle structure on the boundary of turbulence. *J. Fluid Mech.* **613**, 255–274.
- EISENSTAT, S. C. & WALKER, H. F. 1996 Choosing the forcing terms in an inexact newton method. *SIAM J. Sci. Comput.* **17**, 16–32.

- ESCUDIER, M., PRESTI, F. & SMITH, S. 1999 Drag reduction in the turbulent pipe flow of polymers. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **81**, 197–213.
- ESCUDIER, M., ROSA, S. & POOLE, R. 2009 Asymmetry in transitional pipe flow of drag-reducing polymer solutions. *J. non-Newtonian Fluid Mech.* **161**, 19–29.
- ESCUDIER, M. P., POOLE, R. J., PRESTI, F., DALES, C., NOUAR, C., DESAUBRY, C., GRAHAM, L. & PULLUM, L. 2005 Observations of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow of yield-stress and other shear-shinning liquids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **127**, 143–155.
- ESCUDIER, M. P. & PRESTI, F. 1996 Pipe flow of thixotropic liquid. *J. non-Newtonian Fluid Mech.* **62**, 291–306.
- ESMAEL, A. 2008 Transition vers la turbulence pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite cylindrique. Thèse de doctorat, Université de Nancy.
- ESMAEL, A. & NOUAR, C. 2008 Transitional flow of yield-stress in a pipe : Evidence of a robust coherent structure. *Phys. Rev. E* **77**, 057302.
- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling Waves in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502.
- FORNBERG, B. 1996 *A practical guide for Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press.
- GARG, V. & ROULEAU, W. 1972 Linear spatial stability of pipe Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **54**, 113–127.
- GROISMAN, A. & STEINBERG, V. 2000 Elastic turbulence in a polymer solution flow. *Nature* **405**, 53–55.
- GUZEL, B., BURGHELEA, T., FRIGAARD, I. & MARTINEZ, D. M. 2009 Observation of laminar-turbulent transition of a yield-stress fluid in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid. Mech.* **627**, 97–128.
- HOF, B., VAN DOORNE, C., WESTERWEEL, J., NIEWSTADT, F. M., FAISST, H., ECKHARDT, B., WEDIN, H., KERSWELL, R. & WALEFFE, F. 2004 Experimental Observation of Nonlinear Travelling Waves in Turbulent Pipe Flow. *Science* **305**, 1594.
- HOF, B., JUEL, A. & MULLIN, T. 2003 Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 244502.
- KELLER, H. B. 1977 Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. *Applications of Bifurcation Theory* (ed. P. Rabinowitz), pp. 359–384. Academic Press.

- LARSON, R. 2000 Turbulence without inertia. *Nature* **405**, 27–28.
- LEBRANCHU, Y. 2008 Études d'ondes non linéaires hydrodynamiques : approches théoriques et expérimentales. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- LI, W., XI, L. & GRAHAM, M. 2006 Nonlinear travelling waves as a framework for understanding turbulent drag reduction. *J. Fluid Mech.* **565**, 353–362.
- MELLIBOVSKY, F. & MESEGUER, A. 2008 Critical threshold in pipe flow transition. *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**, 545–560.
- MELLIBOVSKY, F., MESEGUER, A., SCHNEIDER, T. & ECKHARDT, B. 2009 Transition in Localized Pipe Flow Turbulence. *Phys. Rev. Lett.* **103**.
- MESEGUER, A. & MELLIBOVSKY, F. 2007 On a solenoidal Fourier-Chebyshev spectral method for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow. *Applied Numerical Mathematics* **57**, 920–938.
- MESEGUER, A. & TREFETHEN, L. 2000 A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow I : Linear stability and transient growth. *Numerical Analysis Group, Oxford University, Computing Lab., 2000, Rep. 00/18 available at <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/publications/natr/>* .
- MESEGUER, A. & TREFETHEN, L. 2001 A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow II : Nonlinear transitional stages. *Numerical Analysis Group, Oxford University, Computing Lab., 2001, Rep. 01/19 available at <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/publications/natr/>* .
- MESEGUER, A. & TREFETHEN, L. 2003 Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 . *J. Comput. Phys.* **186**, 178–197.
- METZNER, A. B. & REED, J. 1955 Flow of Non-Newtonian Fluids - Correlation of laminar, transition and turbulent flow regions. *A.I.Ch.E. Journal* **1**, 443–440.
- MÉTIVIER, C. 2006 Instabilités thermoconvectives pour des fluides viscoplastiques. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine.
- PARK, J., MANNHEIMER, R., GRIMLEY, T. & MORROW, T. 1989 Pipe flow measurements of a transparent non-Newtonian slurry. *Journal of Fluids Engineering* **111**, 331–336.
- PEIXINHO, J. 2004 Contribution expérimentale à l'étude de la convection thermique en régime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide à seuil en écoulement dans une conduite. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy.

- PEIXINHO, J. & MULLIN, T. 2006 Decay of Turbulence in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 094501.
- PEIXINHO, J., NOUAR, C., DESAUBRY, C. & THÉRON, B. 2005 Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **128**, 172–184.
- PERNICE, M. & WALKER, H. F. 1998 Nitsol : a newton iterative solver for nonlinear systems. *SIAM J. Sci. Comput.* **19**, 302–318.
- PFENNIGER, W. 1961 Transition in the Inlet Length of Tubes at High Reynolds Numbers. *Boundary Layer and Flow Control* (ed. G. V. Lachman). Pergamon.
- PINHO, F. T. & WHITELAW, J. H. 1990 Flow of non-Newtonian Fluids in a pipe. *J. non-Newtonian Fluid Mech.* **34**, 129–144.
- PLAUT, E., LEBRANCHU, Y., SIMITEV, R. & BUSSE, F. H. 2008 Reynolds stresses and mean fields generated by pure waves : applications to shear flows and convection in a rotating shell. *J. Fluid Mech.* **602**, 303–326.
- PRINGLE, C., DUGUET, Y. & KERSWELL, R. 2009 Highly symmetric travelling waves in pipe flow. *Phil. Trans. R. Soc. A* **367**, 457–472.
- PRINGLE, C. & KERSWELL, R. R. 2007 Asymmetric, Helical, and Mirror-Symmetric Traveling Waves in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 074502.
- PRIYMAK, V. & MIYAZAKI, T. 1998 Accurate Navier-Stokes Investigation of Transitional and Turbulent Flows in a Circular Pipe. *J. Comput. Phys.* **142**, 370–411.
- REYNOLDS, O. 1883 An experimal Investigation of the Circumstances which determine wether the Motion of Water shall be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance In Parallel Channels. *Phil. Tans. Roy. Soc. Lond.* **174**, 935.
- RUDMAN, M., BLACKBURN, H. M., GRAHAM, L. J. W. & PULLUM, L. 2001 Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids. *Proceeding, 14th Australian Fluid Mechanics Conference, Adelaide, Australia.* .
- RUDMAN, M., BLACKBURN, H. M., GRAHAM, L. J. W. & PULLUM, L. 2004 Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **118**, 33–48.
- RYAN, N. W. & JOHNSON, M. 1959 Transition from laminar to turbulent flow in pipes. *A.I.Ch.E. Journal* **5**, 433–435.

- SAAD, Y. & SCHULTZ, M. H. 1986 GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **7**, 856–869.
- SALWEN, H. & GROSCH, C. 1972 The stability of Poiseuille flow in a pipe of circular cross-section. *J. Fluid Mech.* **54**, 93–112.
- SCHMID, P. & HENNINGSON, D. 1994 Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow. *J. Fluid Mech.* **277**, 197.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence Transition and the Edge of Chaos in Pipe Flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 034502.
- SEVERAC, E. & SERRE, E. 2007 A spectral vanishing viscosity for the LES of turbulent flows within rotating cavities. *J. Comp. Phys.* **226**, 1234–1255.
- SEYDEL, R. 1994 *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Springer-Verlag.
- SEYDEL, R. 1997 On a Class of Bifurcation Test Functions. *Chaos, Solitons and Fractals* **8**, 851–855.
- SOLOMONOFF, A. & TURKEL, E. 1989 Global Properties of Pseudospectral Methods. *Journal of Computational Physics* **81**, 239–276.
- STOER, J. & BULIRSCH, R. 2002 *Introduction to Numerical Analysis*. Springer-Verlag.
- STONE, P., ROY, A., LARSON, R., WALEFFE, F. & GRAHAM, M. 2004 Polymer drag reduction in exact coherent structures of plane shear flow. *Phys. Fluids* **16**, 3470–3482.
- STONE, P., WALEFFE, F. & GRAHAM, M. 2002 Toward a Structural Understanding of Turbulent Drag Reduction : Nonlinear Coherent States in Viscoelastic Shear Flows. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208301.
- TOMS, B. 1949 *Proc. Int. Cong. Rheology*. North-Holland.
- TUCKERMAN, L. 2006 Polar Coordinates. <http://www.pmmh.espci.fr/laurette/highlights/> .
- WALEFFE, F. 1995 Hydrodynamics stability and Turbulence : Beyond Transients to a Self-Sustaining Process. *Stud. Appl. Math.* **95**, 319.
- WALEFFE, F. 1997 On a self-sustaining process in shear flows. *Phys. Fluids* **9**, 883–900.
- WALEFFE, F. 1998 Three-Dimensional Coherent States in Plane Shear Flows. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4140–4143.

- WALEFFE, F. 2001 Exact Coherent Structures in Channel Flow. *J. Fluid Mech.* **435**, 93.
- WALEFFE, F. 2003 Homotopy of Exact Structures in Plane Shear Flows. *Phys. Fluids* **15**, 1517.
- WALKER, H. 1988 Implementation of the GMRES method using Householder transformations. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **9**, 152–163.
- WALKER, H. 1999 An adaptation of Krylov subspace methods to path following problems. *SIAM J. Sci. Comput.* **21**, 1191–1198.
- WEDIN, H. & KERSWELL, R. R. 2004 Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.* **508**, 333–371.
- WYGNANSKI, I. J. & CHAMPAGNE, F. H. 1973 On transition in a pipe. Part1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.* **59**, 281–351.
- WYGNANSKI, I. J., SOKOLOV, M. & FRIEDMAN, D. 1975 On transition in a pipe. Part2. The equilibrium puff. *J. Fluid Mech.* **69**, 283–304.
- ZIKANOV, O. Y. 1996 On the stability of pipe Poiseuille flow. *Phys. Fluids* **9**, 2923–2932.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Christian WAGNER, Professeur, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Allemagne

**Monsieur Eric SERRE, Chargé de Recherche, Université Technopôle de Château-Gombert,
Marseille**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur ROLAND Nicolas

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, 2, AVENUE DE LA
une thèse intitulée : FORET-DE-HAYE

**"Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides
rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires"**

BOITE POSTALE 3
- 5 4 5 0 1
VANDŒUVRE CEDEX

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et Energétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 31 août 2010

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires

Mots clés : transition vers la turbulence, écoulements en tuyau, ondes non linéaires, bifurcations, fluide rhéofluidifiant, modèle de Carreau, code pseudo-spectral, méthode de quasi-Newton, GMRES

L'étude théorique de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyau de fluides non newtoniens rhéofluidifiants (fluides de Carreau) est menée, avec l'approche consistant à calculer des « structures très cohérentes » sous la forme d'« ondes non linéaires ». Pour cela un code pseudo-spectral de type Petrov-Galerkin, permettant de suivre des solutions ondes non linéaires tridimensionnelles dans l'espace des paramètres par continuation, est développé. Ce code est validé par comparaison à des résultats existants en fluide newtonien, et grâce à un test de consistance en fluide non newtonien. Une convergence spectrale exponentielle est obtenue dans tous les cas. Ce code est utilisé pour chercher (guidé par des résultats expérimentaux récents) de nouvelles solutions de nombre d'onde azimutal fondamental égal à 1, sans succès pour l'instant. Par contre des solutions de nombre d'onde azimutal fondamental égal à 2 ou 3 sont obtenues par continuation à partir du cas newtonien. La rhéofluidification induit, en termes de nombres de Reynolds critiques, un retard à l'apparition de ces ondes par rapport au cas newtonien. Ce retard est caractérisé, et le parallèle est fait avec divers résultats expérimentaux qui montrent un retard à l'apparition de bouffées turbulentes en fluides non newtoniens.

Modelling the transition to turbulence in pipe flows of shear-thinning fluids by computing nonlinear waves

Keywords : transition to turbulence, pipe flows, traveling waves, bifurcations, shear-thinning fluid, Carreau model, pseudo-spectral code, quasi-Newton method, GMRES

The transition to turbulence in pipe flows of shear-thinning fluids is studied theoretically. The method used is the computation of 'exact coherent structures' that are tridimensional nonlinear waves. For this purpose a pseudo-spectral Petrov-Galerkin code is developed, which also allows to follow solution branches in the parameter space with continuation methods. This code is validated by recovering already published results in the Newtonian case, and by a consistency test in the non-Newtonian case. A spectral exponential convergence is obtained in all cases. This code is used to seek (guided by recent experimental results) new solutions of fundamental azimuthal wavenumber equal to 1, without success at the time being. On the contrary solutions with a fundamental azimuthal wavenumber equal to 2 and 3 are obtained by continuation from the Newtonian case. The shear-thinning effects induce, in terms of critical Reynolds numbers, a delay for the onset of these waves, as compared with the Newtonian case. This delay is characterized. An analogy is made with various experimental results that show a delay in the transition to turbulence, more precisely, in the onset of 'puffs', in non-Newtonian fluids.