Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques : applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques

Francisco dos Reis

▶ **To cite this version:**

Francisco dos Reis. Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques : applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2010. Français. NNT : 2010INPL050N . tel-01748835

HAL Id: tel-01748835
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748835

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
ECOLE DOCTORALE E.M.M.A.
Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée - UMR CNRS 7563

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 21 octobre 2010
pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
Spécialité : Mécanique des Matériaux
par

Francisco DOS REIS

Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques. Applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques

---

Directeur de thèse : Jean-François GANGHOFFER

Composition du jury :

Rapporteurs :	Patrice CARTRAUD	Professeur des universités
	Samuel FOREST	Directeur de recherche au CNRS
Examinateurs :	Guy BONNET	Professeur, Directeur adjoint du laboratoire MSME
	Gérard MAURICE	Professeur Emérite

A Stéphanie, Eva et Yanna

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à Jean-François GANGHOFFER qui a accepté de diriger mon travail de thèse. En raison de mon emploi à plein temps de professeur au lycée Blaise Pascal de Colmar, ma présence au sein du Laboratoire de Mécanique Théorique et Appliquée de Nancy n'a pu être régulière, mais l'aide scientifique de Jean-François, ses qualités humaines, sa patience et son esprit toujours positif ont pallié à l'éloignement. Travailler sous sa direction a été un vrai plaisir.

Ma profonde gratitude va à ma femme Stéphanie, qui durant des années a accepté que je sacrifie à cette thèse une bonne partie de nos soirées, week-ends et vacances. Sans son soutien, je n'aurai jamais mené à terme ces travaux.

Je remercie également Alain BRILLARD pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet de thèse.

Messieurs Samuel FOREST et Patrice CARTRAUD ont accepté de rapporter sur cette thèse. J'en suis profondément honoré et je les remercie sincèrement.

Mes remerciements vont aussi à Marie-Hélène TUILIER responsable de l'équipe de recherche Mécanique, Matériaux et Procédés de Fabrication (MMPF) du Laboratoire de Physique et Mécanique Textile de Mulhouse, pour m'avoir autorisé à utiliser leur équipement informatique pour les simulations par éléments finis à l'aide du logiciel Abaqus.

Je remercie également messieurs Guy BONNET et Gérard MAURICE qui ont accepté de participer au jury et qui ont bien voulu juger de la qualité de mon travail.

Je tiens à remercier également tous mes collègues du BTS mécanique et automatisme industriel de Colmar. Ils se sont montrés indulgents et compréhensifs lorsque, dans les périodes de projets industriels, je n'ai pas pu être aussi disponible qu'il aurait été nécessaire.

Enfin et avant tout, je tiens à remercier du fond du coeur, tous mes parents, frères, soeurs et amis pour leur soutien indéfectible, dans les bons comme les mauvais jours.

Table des matières

Table des matières **4**

Introduction **8**

1 Revue bibliographique sur les méthodes de calcul du comportement mécanique de treillis **13**
1.1 Introduction 14
1.2 Substitution d'un milieu discret cellulaire (treillis, mousses...) par un milieu continu (homogénéisation) 15
1.2.1 Milieu continu équivalent par une approche énergétique 16
1.2.2 Milieu continu équivalent par les champs moyens 17
1.2.3 Homogénéisation asymptotique discrète 18
1.3 Choix des hypothèses, domaines d'application 18
1.3.1 Critères de choix de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète 22
1.4 De l'homogénéisation des milieux périodiques continus à celle des milieux périodiques discrets (treillis) 23
1.4.1 Notion de périodicité, exemple monodimensionnel 23
1.4.2 Volume Élémentaire Représentatif, séparation d'échelle, localisation . 25
1.4.3 Lemme de Hill 26
1.4.4 Bornes de Voigt, de Reuss et d'Hashin - Shtrikman 26
1.4.5 Homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus . . . 27
1.4.6 Passage aux milieux discrets de l'homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus 30
1.5 Nature de dominante dans les treillis de poutres 32
1.6 Conclusion 34

2 Homogénéisation asymptotique discrète, automatisation de la méthode avec un modèle poutre simplifié **36**
2.1 Introduction 38
2.2 Effective mechanical behavior of 2D lattices from discrete homogenization . . 41
2.2.1 Discrete homogenization: description of the method 41
2.2.2 A mixed flexional extensional lattice: the 2D "OctogonMixed" lattice 54
2.2.3 A proposal for classification of lattices with respect to rotations . . . 61

2.3 Extension to 3D: case of the Kelvin foams . . . 62
2.3.1 Effective behavior of the "Tetrakaïdecahedral" truss (Kelvin foams) . 64
2.3.2 Validation by comparison with analytical models and FE simulations 68
2.4 Conclusions and perspectives . . . 68
2.5 Remarques complémentaires . . . 70
2.5.1 Exemples de treillis . . . 70
2.5.2 Conclusion, discussion . . . 70

3 Homogénéisation asymptotique discrète de treillis élastiques vers un milieu continu micropolaire 74
3.1 Introduction . . . 77
3.2 Situation du milieu micropolaire dans les milieux continus généralisés, méthodes d'homogénéisation . . . 77
3.2.1 Bref historique des milieux continus généralisés . . . 77
3.2.2 Équations de base d'un milieu micropolaire . . . 80
3.2.3 Les différentes méthodes d'homogénéisation micropolaire . . . 86
3.3 Extension de l'homogénéisation asymptotique discrète au cas micropolaire . 94
3.3.1 Principe général . . . 94
3.3.2 Première étape : formulation des équations d'équilibre faisant apparaître les vecteurs d'efforts $\mathbf{S^i}$ et les vecteurs de moments $\mu^{\mathbf{i}}$ . . . 95
3.3.3 Deuxième étape : homogénéisation des équations d'équilibre discrètes 98
3.3.4 Simplification des expressions obtenues et résolution des inconnues . . 106
3.4 Exemples d'applications . . . 112
3.4.1 Le treillis carré . . . 112
3.4.2 Le treillis hexagonal (appelé aussi 'nid d'abeille') . . . 117
3.4.3 Vérifications des modules obtenus . . . 120
3.5 Conclusion, discussion . . . 129

4 Application de l'homogénéisation aux treillis auxétiques. 132
4.1 Introduction . . . 132
4.2 Homogénéisation micropolaire des treillis auxétiques centrosymétriques . . . 133
4.2.1 Le treillis hexagonal ré-entrant . . . 135
4.2.2 Le treillis hexachiral . . . 140
4.2.3 Le treillis diamant chiral . . . 144
4.3 Homogénéisation vers un milieu continu classique avec un modèle poutre de Bernouilli complet . . . 150
4.3.1 Simplification du code de calcul micropolaire en vue d'obtenir un code de calcul classique . . . 150
4.3.2 Le treillis de Milton . . . 151
4.4 Conclusions, discussion . . . 155

5 Approche du comportement élastoplastique homogénéisé d'un treillis répétitif à dominante extensionnelle 158

5.1 Introduction . . . 160
5.2 Bibliographie sur la modélisation des treillis dans le domaine plastique . . . 161
5.2.1 Choix de la méthode, limites et domaines d'utilisation . . . 163
5.3 Équations constitutives à l'échelle microscopique . . . 164
5.3.1 Équations à l'échelle microscopique, modèle élastoplastique d'une poutre en traction avec écrouissage isotrope . . . 164
5.3.2 Calcul du module élastoplastique tangent local . . . 166
5.3.3 Schéma d'intégration . . . 167
5.3.4 Algorithme de projection ("return mapping") . . . 167
5.4 Méthode de calcul . . . 169
5.4.1 Principe général . . . 169
5.4.2 Calcul des surfaces de charge limite initiales . . . 171
5.4.3 Évolution de la surface de charge résultant de l'écoulement plastique . 176
5.5 Code de calcul et exemples . . . 180
5.5.1 Algorithme de calcul des surfaces de charges initiales . . . 180
5.5.2 Algorithme de comportement plastique . . . 185
5.6 Conclusions, discussion . . . 191

Conclusion, perspectives **195**

Bibliographie **200**

A Synthèse de la théorie des poutres en petits déplacements et avec l'hypothèse de Bernoulli **208**
A.1 Structure des problèmes de poutre . . . 208
A.2 Passage des équations locales aux équations globales, application du principe des puissances virtuelles . . . 210
A.3 Méthode des éléments finis, application aux poutres . . . 211
A.3.1 Discrétisation d'un problème poutre . . . 212
A.3.2 Poutre en traction-compression . . . 213
A.3.3 Poutre en flexion . . . 214
A.3.4 Matrice de raideur élémentaire dans le repère structural . . . 216
A.3.5 Assemblage des matrices élémentaires . . . 217
A.4 Expression vectorielle des efforts dans le repère structural . . . 218

B Application de la méthode d'homogénéisation à différents treillis **225**
B.1 Introduction . . . 225
B.2 le treillis Kagome . . . 226
B.2.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) . . . 227
B.2.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . . 228
B.3 Le treillis Triangle-Triangle ("T-T") . . . 228
B.3.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) . . . 229
B.3.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . . 229

B.4 Treillis “Mixte” 229
B.4.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 231
B.4.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié 231
B.5 Treillis “SI-square” 231
B.5.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 232
B.5.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié 233
B.6 Treillis “Triangle” 233
B.6.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 234
B.6.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié 234
B.7 Le treillis 'Octet' 234
B.7.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 237

C Code source Maple développé à partir de l'algorithme micropolaire et de l'algorithme classique 238
C.1 Algorithme micropolaire et code source Maple correspondant 238
C.2 Code source Maple correspondant à l'algorithme classique 246

D Flexion simple d'une poutre-treillis micropolaire 250
D.1 Introduction 250
D.2 Flexion micropolaire simplifiée 251

Introduction

Les structures sous formes de treillis [1] sont très utilisées en raison de leurs multiples avantages dont un bon rapport rigidité/poids, des mécanismes d'absorption de l'énergie utile pour l'emballage et la protection, ainsi qu'une grande résistance par rapport à leurs homologues pleines. Elles sont utilisées industriellement (panneaux, pylones, matériaux de remplissage...) mais sont aussi présente naturellement sous la forme de matériaux cellulaires (mousses, bois, os trabéculaire, membranes biologiques...). Le développement de nouveaux procédés de fabrication, liés au prototypage rapide (découpe laser, impression 3D...) permet d'obtenir des treillis avec des microstructures quasi quelconques. La fin des années 1990 a vu le développement de techniques d'analyse de treillis ayant des propriétés peu commune, comme un coefficient de Poisson négatif [Prall and Lakes, 1997]. On s'attend à ce que ces nouveaux matériaux aient des comportements mécaniques peu habituels et des propriétés encore supérieure dans certains cas de chargements, tels que des coefficients de concentration de contrainte réduits, une tolérance aux perforations ou des capacités accrues d'absorption des chocs [Doyoyo and Hu, 2006a]. L'étude mécanique des treillis ou des structures cellulaires est en pleine croissance.

De nombreuses méthodes pour l'étude mécanique des treillis ont été développées. L'étude en force brute par éléments finis, malgré la croissance constante de la puissance des ordinateurs, est à exclure dès lors que l'on parle de treillis quasi infinis. Les diverses méthodes d'études utilisées jusqu'à présent, de l'obtention d'un milieu continu équivalent (homogénéisation) jusqu'aux approches au cas par cas, présentent chacune des avantages et des inconvénients, mais aucune de ces méthodes (à notre connaissance) n'est suffisamment générale et automatisée de telle sorte qu'elle puisse être utilisable par un utilisateur lambda sans connaissance scientifique particulière. L'idée de départ de ce travail de thèse est d'obtenir une méthode unifiée pour le traitement automatique de treillis de topologies et de propriétés mécaniques diverses, de façon à obtenir un milieu continu équivalent (homogénéisation). Cet outil d'homogénéisation devra simplement être alimenté par un fichier texte décrivant la géométrie et la connectivité du treillis étudié.

L'homogénéisation du comportement mécanique d'un treillis peut se faire à des niveaux

1. On utilisera dans cette thèse le terme général de *treillis* pour désigner tout milieu discret qui peut être assimilé à un assemblage répétitif de poutres, triangulé ou non.

de finesse divers et dans différents domaines ou conditions de charge. Nous traiterons trois aspects :

1. un premier niveau de finesse, l'obtention automatique d'un milieu continu continu classique avec les modules mécaniques associés (coefficients de Lamé, module élastique, coefficient de Poisson), dans le domaine élastique.
2. un second niveau de finesse, en visant l'homogénéisation automatique vers un milieu de degré supérieur, le milieu micropolaire, également dans le domaine élastique.
3. le traitement d'un domaine de déformation différent, le domaine plastique. On visera ici à déterminer de façon automatique le domaine de résistance élastiques (limites élastiques) et l'évolution du comportement du treillis homogénéisé après un début d'écrouissage.

Les travaux seront présentés de manière à permettre au lecteur de suivre l'évolution de notre compréhension des problèmes posés et des solutions apportées.

Dans le chapitre un, on aborde le problème du choix de la méthode d'homogénéisation. Après une brève analyse des méthodes les plus courantes, on montrera pourquoi la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète développée dans Tollenaere and Caillerie [1998] et Mourad [2003] (voir aussi Caillerie et al. [2006]), nous a semblée être la plus adaptée au but que l'on s'était fixé. On évoquera également dans ce même chapitre, les hypothèses sous-jacentes à un grand nombre de méthodes d'homogénéisation, car elles influencent grandement le résultat final.

Pour faciliter leur étude, on a utilisé le classement des treillis de Deshpande et al. [2001a] (voir la figure 0.0.1). La présentation de ce classement en deux catégories, dominante flexionnelle ou extensionnelle est détaillée dans ce même chapitre un, on y ajoutera une troisième catégorie, les treillis sans dominante.

Dans le deuxième chapitre nous avons automatisé la version de la méthode utilisée par Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], en apportant un changement sur la définition des efforts transverse. L'effort transverse utilisé par Ayman Mourad repose sur une hypothèse discutable et restrictive de rotation rigide des poutres (voir la figure 0.0.2(a)). Nous lui préférons une loi plus classique issu du modèle de poutre de Bernoulli. Cette loi sera néanmoins utilisée de manière simplifiée dans ce chapitre deux (voir la figure 0.0.2(b)).

Dans le chapitre trois, on propose d'utiliser un modèle poutre de Bernoulli complet (voir la figure 0.0.2(c)) dans la méthode d'homogénéisation. Cela nécessite d'introduire un second paramètre cinématique, la rotation au noeuds, et une seconde série d'équations d'équilibre, l'équilibre des moments. L'utilisation de deux paramètres suscite des questions : quel est le degré initial de développement et à quelle ordre s'arrêtter ? Pour aborder le problème, on a fait une entorse à la philosophie présidant l'utilisation des développements asymptotique en faisant une supposition sur le milieu à obtenir. Comme d'autres avant nous, nous avons tenu le raisonnement suivant : le nombre de paramètres cinématiques devrait être identique, à l'échelle de la microstructure et à l'échelle homogénéisée, macroscopique (voir la figure 0.0.3) : cet argument nous a conduit à viser un milieu micropolaire (ou de Cosserat).

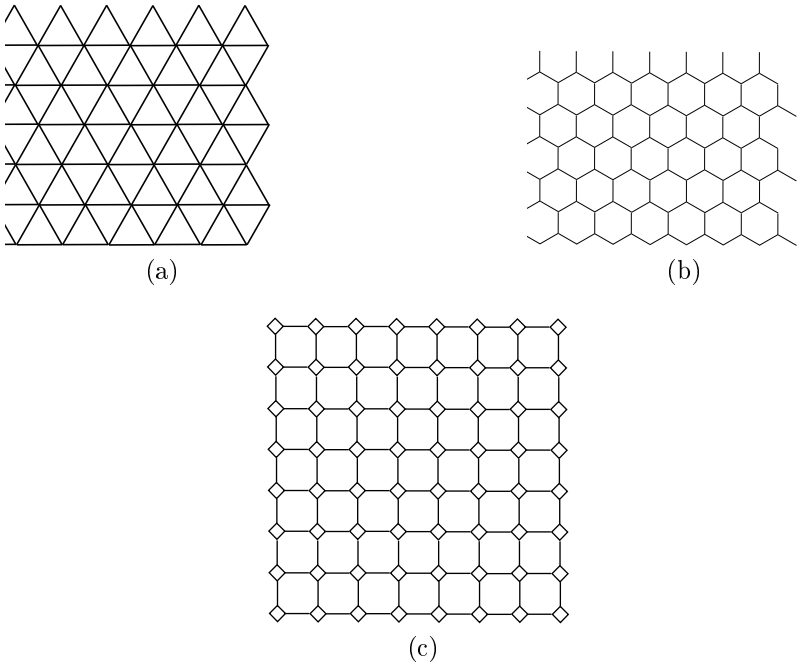


FIGURE 0.0.1 – Exemple de treillis de dominantes différentes : (a) treillis triangle à dominante extensionnelle, (b) treillix hexagone à dominante flexionnelle et (c) treillis Octogone Mixte sans dominante

Ce choix nous a permis de statuer sur l'ordre du développement asymptotique des paramètres et d'utiliser les propriétés que possède le milieu continu équivalent. L'une d'elle est la forme de la relation contrainte-déformation dans le cas de milieux à symétrie centrale [Trovalusci and Masiani, 1999].

Après avoir montré que l'homogénéisation asymptotique avec un modèle de poutre de Bernoulli complet, conduit à deux milieux homogénéisés différents suivant l'ordre du développement asymptotique choisi (un milieu micropolaire avec l'hypothèse d'un treillis centrosymétrique ou un milieu classique). Il nous a alors semblé utile de vérifier et valider autant que possible les méthodes d'homogénéisations et les codes de calculs obtenus : c'est l'objectif du chapitre quatre, dans lequel nous réalisons une série de tests sur différents treillis. Notre intérêt a porté plus particulièrement sur les treillis à coefficients de Poisson négatifs (appelés aussi *auxétiques*) ou considérés comme tels. Les modules homogénéisés sont comparés à ceux obtenus par le biais de simulations éléments finis, ainsi qu'à des tests expérimentaux disponible dans la littérature.

Dans le chapitre cinq nous abordons le comportement des treillis dans le domaine plastique, soit la surface de charge initiale et son évolution liée à l'écrouissage. L'analyse est ici restreinte aux treillis à dominante extensionnelle. En effet, les simulations réalisés sur

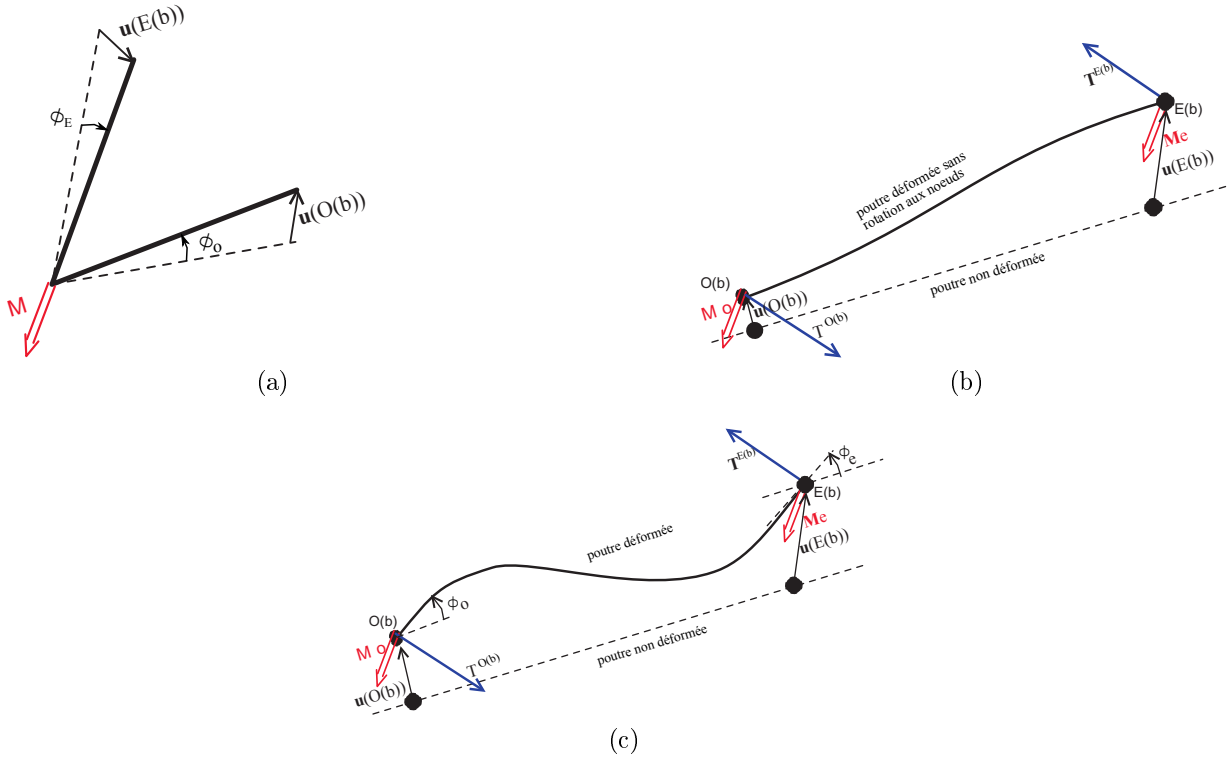


Figure 0.0.2: Differents modèles de poutres évoqués dans cette thèse (a) modèle de Caillerie et al. [2006], les moments sont fonctions de la variation angulaire entre deux poutres rigides, (b) modèle de Bernoulli simplifié en négligeant la rotation des noeuds (c) modèle de Bernoulli complet

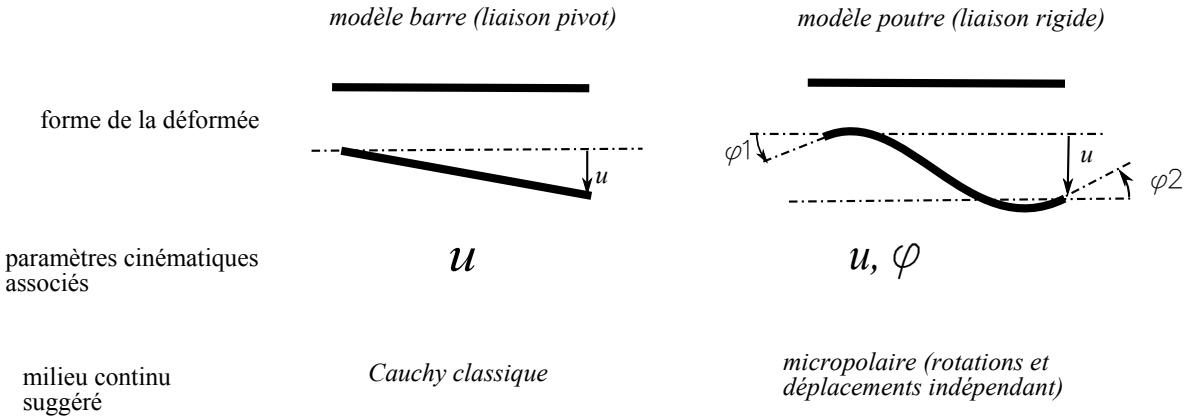


FIGURE 0.0.3 – Raisonnement (discutable) conduisant à associer les paramètres du modèle de poutre de la microstructure et un milieu continu équivalent (d'après Noor [1988])

des treillis à dominante flexionnelle montre des modes de déformation plastique complexes avec des phénomènes de bifurcation et de localisation [Okumura et al., 2004] après un début d'écrouissage. On montre comment obtenir de manière automatique le domaine élastique (surface de charges initiales) à partir des équations d'équilibre obtenues par la méthode d'homogénéisation asymptotique.

Le second objectif de ce chapitre, trouver un algorithme de détermination de l'évolution des surfaces de charges et de l'écrouissage, présente un très grand intérêt pratique, comme le montre l'étude de Mohr [2005]. En effet, un tel algorithme permettrait de réduire le temps de calcul de manière conséquente par rapport à des simulations en éléments finis standard sur de très vastes treillis. L'algorithme utilisé est beaucoup plus général que celui deMohr [2005] et permet de traiter tous les treillis à dominante extensionnelle. A partir des équations d'équilibre obtenues par l'homogénéisation asymptotique, nous avons adapté la méthode de projection (return mapping) développée par Simo and Hughes [1998] pour construire cet algorithme d'évolution plastique.

Chapitre 1

Revue bibliographique sur les méthodes de calcul du comportement mécanique de treillis

Sommaire

1.1 Introduction **14**
1.2 Substitution d'un milieu discret cellulaire (treillis, mousses...) par un milieu continu (homogénéisation) **15**
1.2.1 Milieu continu équivalent par une approche énergétique 16
1.2.2 Milieu continu équivalent par les champs moyens 17
1.2.3 Homogénéisation asymptotique discrète 18
1.3 Choix des hypothèses, domaines d'application **18**
1.3.1 Critères de choix de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète 22
1.4 De l'homogénéisation des milieux périodiques continus à celle des milieux périodiques discrets (treillis) **23**
1.4.1 Notion de périodicité, exemple monodimensionnel 23
1.4.2 Volume Élémentaire Représentatif, séparation d'échelle, localisation 25
1.4.3 Lemme de Hill 26
1.4.4 Bornes de Voigt, de Reuss et d'Hashin - Shtrikman 26
1.4.5 Homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus . 27
1.4.6 Passage aux milieux discrets de l'homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus 30
1.5 Nature de dominante dans les treillis de poutres **32**
1.6 Conclusion **34**

1.1 Introduction

L'analyse du comportement mécanique des treillis peut se faire suivant plusieurs approches. Différents documents font une synthèse de ces méthodes, comme Noor [1988], Cartraud [2003], Tollenaere [1994] ou Verna [1991]. On peut reprendre la classification des méthodes d'analyse établie par Noor :

1. méthode directe
2. méthode des champs discrets
3. approche par la périodicité de la structure
4. approche par continuum équivalent

Intéressons-nous à chaque classe de méthode. Les approches directes, telles que les analyses par éléments finis sont limitées à de petites structures. Il est regrettable de ne pas utiliser les propriétés de répétitivité du treillis. On peut partiellement compenser le problème de la puissance de calcul nécessaire en cherchant des méthodes numériques d'optimisation de l'algorithme et de condensation, mais cela reste néanmoins limité. De plus, certaines méthodes de réduction de la taille des matrices, comme la condensation statique, sont susceptibles d'introduire des approximations de calcul (Tollenaere and Caillerie [1998]). Les informations obtenues par une méthode éléments finis sont très grandes puisque l'on a accès aux champs locaux de façon très détaillée. On doit souligner néanmoins l'aspect inévitable des erreurs de calcul résultant d'un traitement numérique, qui augmentent avec la taille et la non-linéarité du problème traité.

Dans la deuxième classe de méthode, la méthode des champs discrets, la régularité de la structure est prise en compte, Renton et Dean (Renton, [1967] ; Dean et Tauder, [1959]) utilisent cette méthode. Elle consiste à écrire les équations de la loi de comportement et d'équilibre aux noeuds pour chaque barre de la cellule. Puis on introduit un opérateur différentiel reliant les déplacements d'un noeud d'une cellule au noeud analogue dans la cellule suivante. Ces équations aux différences finies sont ensuite remplacées par des équations différentielles en utilisant des développements en série de Taylor que l'on tronque à un certain ordre. Tollenaere [1994] a dans sa thèse utilisé cette méthode pour trouver des modes de couplages en vibrations de treillis poutres. Il a étendu ensuite cette méthode à une modélisation par un milieu continu. D'autres auteurs ont repris les travaux de Renton et Dean (Karpov et al. [2002] Karpov E.G. [2002],Ryvkin et al. [1999]), mais en utilisant différentes combinaisons entre approches différence finie et matrice de transfert par transformée de Fourier discrète. Cette approche fonctionne bien pour des cas simples, mais selon Noor et Abrate, elle devient difficile à mettre en oeuvre pour des géométries complexes.

Le troisième groupe de méthodes, appelé approche structurelle périodique (McDaniel [1980], Williams [1986]), met en oeuvre une combinaison d'éléments finis et de matrice de transfert.

Le quatrième groupe de méthode beaucoup plus répandue aujourd'hui consiste à remplacer le treillis discret par un milieu équivalent continu. On peut noter plusieurs avantages par

rapport aux autres méthodes. Tout d'abord, elle offre une approche pratique et efficace pour analyser les structures de grande taille. Ceci est particulièrement vrai pour les treillis poutres ou plaques ou une substantielle réduction du nombre de degrés de liberté peut être obtenue. Ensuite, elle permet de manière simple de comparer différentes caractéristiques : structurelles, dynamiques... en fonction de la géométrie de la cellule élémentaire et des variations des propriétés du matériau de base (module élastique, limite élastique...). Enfin, elle fournit un moyen efficace pour l'identification des paramètres d'un système et un moyen de contrôler et d'optimiser la conception globale d'un système. On n'est plus contraint de connaître le détail de la microstructure de chaque composant.

On peut faire une remarque sur le terme *homogénéisation*. Beaucoup d'auteurs utilisent le terme général d'*homogénéisation* pour désigner ces méthodes, par analogie avec les méthodes qui se sont développées dans le domaine de la mécanique des milieux hétérogènes, méthodes consistant à remplacer le milieu hétérogène par un milieu continu homogène équivalent. Néanmoins, comme le souligne Cartraud [Cartraud, 2003] ce terme général homogénéisation recouvre des hypothèses initiales très différentes. Cartraud propose de distinguer les méthodes de substitution par un milieu continu suivant les hypothèses faites :

- les méthodes où l'on fait une hypothèse a priori sur la forme du milieu continu, que l'on peut nommer méthodes par " milieu continu équivalent ".
- les méthodes où l'on ne présuppose pas le milieu continu équivalent, que l'on peut nommer "méthodes d'homogénéisation".

Dans les travaux de cette thèse, on va utiliser une méthode de substitution, l'homogénéisation asymptotique, qui a priori ne nécessite pas de présupposer le milieu continu équivalent. On sera néanmoins contraint dans le chapitre 3, traitant de l'homogénéisation micropolaire, de faire des hypothèses simplificatrices quant à la forme du résultat à obtenir.

Dans ce qui suit, on exposera tout d'abord sommairement les principes d'homogénéisation pour les milieux continus périodiques, dont les méthodes discrètes n'en sont qu'une extension. On pourra se reporter à la figure 1.2.3 pour une synthèse des méthodes d'étude mécanique des milieux discrets. Enfin, nous discuterons de la problématique des hypothèses liées à ces méthodes.

1.2 Substitution d'un milieu discret cellulaire (treillis, mousses...) par un milieu continu (homogénéisation)

La figure 1.2.1 présente le principe général de la substitution d'un milieu discret par un milieu continu. Nous ne traiterons que des milieux discrets cellulaires 2D ou 3D répétitifs, ce qui est un domaine déjà très vaste. En effet, il existe d'autres types de milieux discrets tels que les milieux granulaires (géomatériaux, fluides à particules...) qui utilisent d'autres classes de méthodes d'homogénéisation. Nous énoncerons dans un paragraphe séparé les hypothèses liées aux méthodes, car elles ont une très grande influence sur le résultat obtenu.

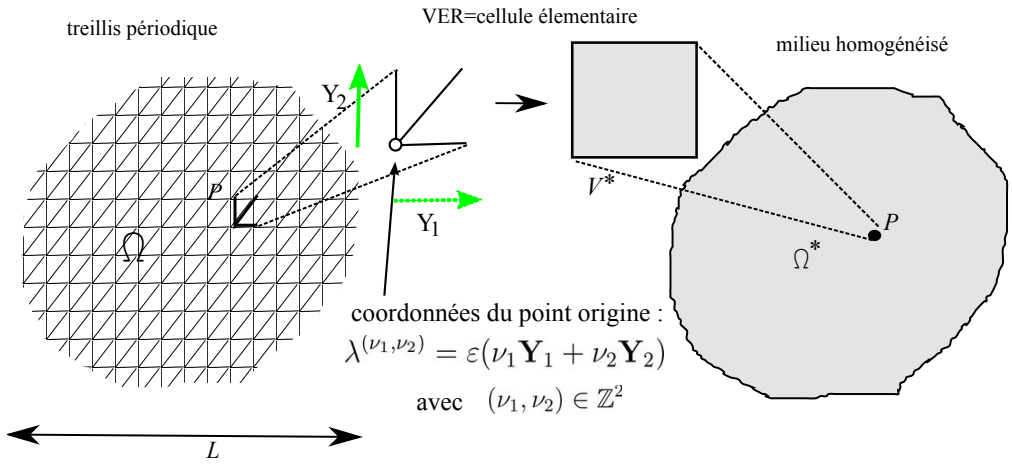


FIGURE 1.2.1 – homogénéisation d'un treillis périodique avec sa cellule élémentaire

1.2.1 Milieu continu équivalent par une approche énergétique

On retrouve dans Noor [1988] un exposé d'une des méthodes basées sur l'équivalence énergétique, reprise sous une variante par Burgardt and Cartraud [1999]. Les principales étapes de cette méthode sont :

1. hypothèse sur la forme du milieu continu équivalent
2. isoler une période
3. définir une approximation de la cinématique de la période
4. identifier les déformations du milieu continu équivalent
5. calculer ses caractéristiques effectives en utilisant l'équivalence énergétique

Le principal inconvénient de cette méthode est de devoir présupposer le milieu continu équivalent.

Il existe plusieurs variantes de cette méthode, liées principalement au mode de résolution des inconnues. Dans Hohe et al. [1999], Hohe and Becker [2001], on suppose une équivalence entre la valeur moyenne de la densité d'énergie entre le milieu discret et continu (principe de Hill, voir le paragraphe 1.4.3). On utilise pour résoudre les inconnues le théorème de Green et des équations additionnelles suivant la géométrie de la structure. Des approches semblables sont utilisées par Demiray et al. [2007, 2006], qui appliquent cette méthode à des treillis divers 2D et 3D.

Ebinger et al. [2005], Odegard et al. [2002] ou Yoo and Jasiuk [2006] proposent des variantes en combinant une approche analytique et une simulation éléments finis pour calculer la densité d'énergie d'un milieu continu équivalent.

[Kumar and McDowell, 2004, 2009] évaluent la densité d'énergie de déformation a l'aide d'un développement en série de Taylor des paramètres cinématiques. Les contraintes et couples de contrainte sont ensuite dérivés de cette densité d'énergie. La méthode ne fonctionne que pour des cellules élémentaires à un seul noeud.

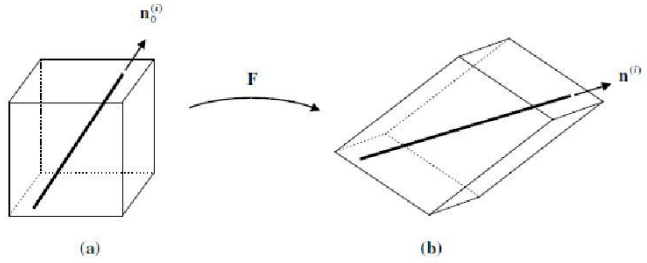


FIGURE 1.2.2 – Déformation uniforme d'un VER incluant une seule poutre : configuration initiale non déformée (a), configuration déformée (b) (selon Mohr [2005])

Pradel and Sab [1998], Florence and Sab [2006] utilisent eux aussi la densité d'énergie de déformation. Les inconnues de la relation contrainte-déformation sont obtenues par minimisation de cette densité d'énergie sous contrainte à l'aide de multiplicateurs de Lagrange.

1.2.2 Milieu continu équivalent par les champs moyens

On ne considère pas dans ces méthodes une approche énergétique, mais une équivalence des moyennes de la déformation et des contraintes, soient

$$\overline{\varepsilon}_{ij} = \int_{\Gamma_{VER}} \frac{1}{2}\left(u_i n_j + u_j n_i\right) d\Gamma = \frac{1}{V}\int_{\Omega_{VER}} \varepsilon_{ij} d\Omega_{VER} \tag{1.2.1}$$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \int_{\Gamma_{VER}} t_i x_j d\Gamma = \frac{1}{V}\int_{\Omega_{VER}} \sigma_{ij} d\Omega_{VER} \tag{1.2.2}$$

Parmi ces méthodes, on peut citer celle utilisée par Mohr [2005] qui consiste à considérer une déformation uniforme du VER (voir la figure 1.2.2). Cela signifie, selon Mohr [2005], que le treillis est inséré dans une matrice infiniment molle et implique que les noeuds des poutres soient tous situés sur les frontières du VER. Liu et al. [2006] fait un prolongement aux treillis avec flexion, mais la contrainte des noeuds aux frontières existe encore. Bien que la présentation en soit différente, on a le même type de méthode dans Deshpande et al. [2001b], Fan and Wei [2006], Fan et al. [2008a], Fan et al. [2008b] et Fan et al. [2008c]. On notera aussi que ces méthodes ne s'appliquent qu'à des treillis à dominante traction-compression.

Bien que l'on ne puisse pas parler de substitut de continuum ou d'homogénéisation, on ne peut passer sous silence de nombreux autres travaux qui ont permis de déduire par un calcul au cas par cas un certain nombre de constantes élastiques de matériaux cellulaires. Nous pouvons citer dans cette catégorie les travaux de Gibson and Ashby [1997], Gibson [2005], Zhu et al. [1997] et Silva et al. [1995] par exemple. Le principe consiste à résoudre le problème mécanique comme un problème de poutres à l'échelle d'une cellule élémentaire. On trouve des relations entre les déplacements et les efforts sur les noeuds aux frontières. Il suffit de diviser le déplacement ou l'effort discret par la surface représentée par la cellule

pour avoir la déformation et la contrainte équivalente. Easterling et al. [1982] fait une application de ce genre de méthode au balsa considéré comme une structure cellulaire hexagonale. Christensen [2000] fait la liste de plusieurs treillis et de modules élastiques trouvés ainsi. Ce genre d'approche est encore utilisé, voir par exemple Sullivan et al. [2008].

1.2.3 Homogénéisation asymptotique discrète

À l'aide de cette méthode, Ohayon [1979] étudie les vibrations harmoniques d'un anneau hétérogène à structure périodique. Pour trouver les caractéristiques du milieu continu équivalent, il développe toutes les inconnues du problème en développements asymptotiques de la forme :

$$u(x,y) = u^0(x,y) + \varepsilon u^1(x,y) + \varepsilon^2 u^2(x,y) + ...$$

ε étant un petit paramètre représentant le rapport entre la période et une longueur caractéristique du milieu considéré.

Cette méthode sous des formes légèrement différentes sera utilisée par Cioranescu et Saint Jean Paulin (1986). Elle sera adaptée par Verna [1991] et Caillerie aux milieux discrets d'une manière plus générale. Dans sa thèse, Verna étudie un certain nombre de treillis de type poutre. D'autres auteurs vont également travailler spécifiquement sur les poutres périodiques élastiques (Trabucho et Viaño, [1996] ; Kolpakov, [1991] ; Kalamkarov et Kolpakov, [1997] ; Haussy et al. [2004]). On trouvera dans Cartraud [2003] une présentation assez complète des travaux dans ce domaine.

La méthode d'homogénéisation asymptotique discrète de Verna et Caillerie sera ensuite améliorée et exposée dans Tollenaere and Caillerie [1998] ainsi que dans Moreau and Caillerie [1998] pour des treillis poutres en grands déplacements. La méthode est aisément exploitable pour des treillis à dominante traction/compression 2D ou 3D. Puis Mourad [2003] va étendre cette méthode au cas des milieux curvilignes en grandes déformations et propose une solution pour l'introduction de contraintes de couple entre deux poutres. Il appliquera cette méthode à l'étude du muscle cardiaque et du treillis hexagonal sous la forme que prennent les nanotubes de carbone (voir Caillerie et al. [2006]). Un exposé de la méthode développée est également donné dans Raoult et al. [2008].

On peut signaler que pour les cas simples de treillis à 1 seul noeud par cellule, cette méthode se rapproche de la simple continualisation par développement en série de Taylor (Askes and Metrikine [2004]).

Une synthèse de toutes ces méthodes est exposé dans la figure 1.2.3.

1.3 Choix des hypothèses, domaines d'application

Outre la méthode d'homogénéisation, il est important de connaître les hypothèses qui sont utilisées et le champ d'application de la méthode (voir l'exposé de ces hypothèses dans Verna [1991]). On peut noter par exemple les hypothèses suivantes qui apparaissent suivant les différents types de méthodes :

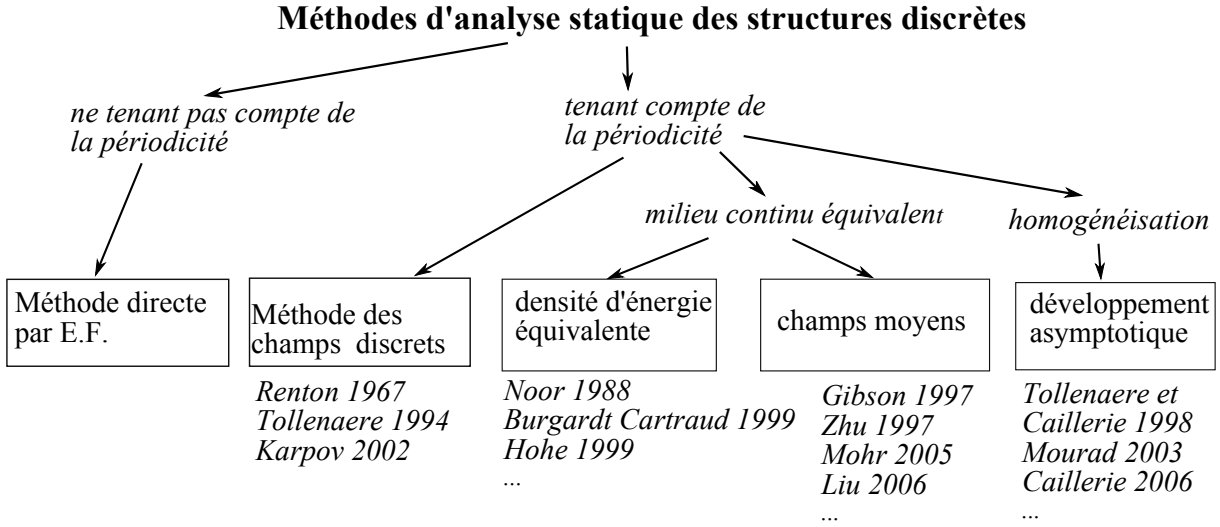


FIGURE 1.2.3 – principales méthodes d'analyse statique de structures discrètes

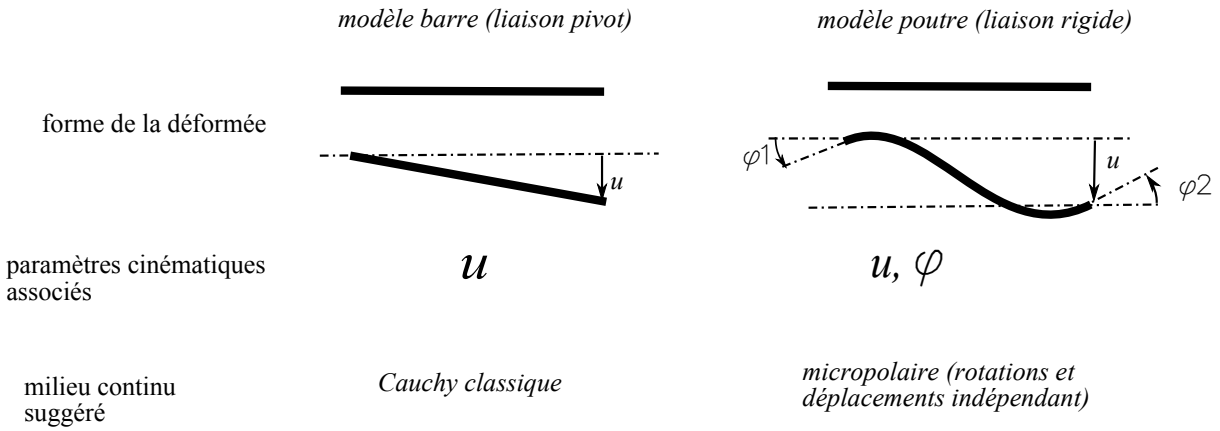


FIGURE 1.3.1 – Paramètres associés au modèle poutre choisi et milieu continu que cela suggère (d'après Noor [1988])

1. hypothèse de dérivabilité. Il s'agit d'une hypothèse de nature plutôt mathématique, mais dans la plupart des cas on fait l'hypothèse de la dérivabilité des fonctions utilisées.
2. hypothèse du premier ordre. Un certain nombre de méthodes font appels à des développements en série dont on ne considère généralement que le premier ordre
3. hypothèse sur le milieu homogène équivalent. Dans un certain nombre de méthodes, on présuppose la forme du milieu à obtenir, ce qui permet de rendre certains termes nuls et donc de simplifier la résolution du problème. Par exemple, s'il semble évident que les treillis avec des modèles barres sont modélisés avec un milieu continu classique, l'existence de rotation aux noeuds dans les treillis avec un modèle poutre semble suggèrer de se diriger vers un milieu micropolaire (voir la figure 1.3.1). Comme nous l'évoquerons dans cette thèse cette hypothèse est criticable.

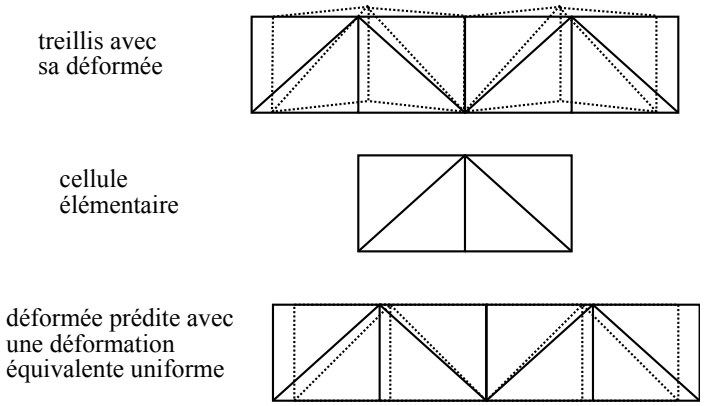
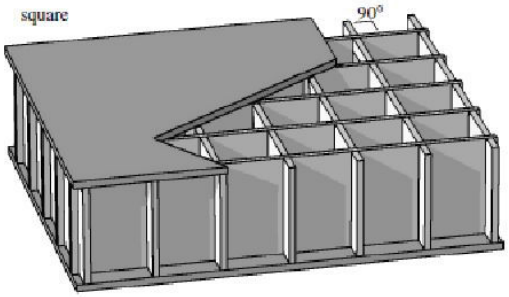


FIGURE 1.3.2 – Exemple de déformations locales des noeuds d'une cellule non prise en compte par les méthodes imposant une déformation uniforme (d'après Noor [1988])

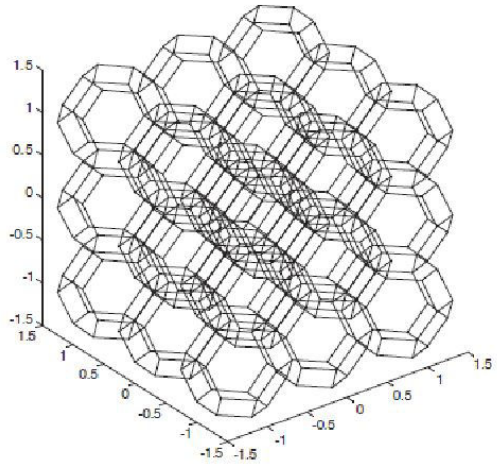
4. hypothèse sur le comportement statique/dynamique. On se place en général dans l'un ou l'autre cas de figure.
5. hypothèse du comportement lié à l'hypothèse de St Venant et plus généralement des effets de bords et du choix des conditions aux limites. Le comportement est souvent calculé par rapport au milieu du corps considéré, le comportement sur les bords ou aux interfaces ne correspond pas forcément véritablement à celui du milieu continu.
6. hypothèse sur les développements asymptotiques : à quel degré débuter et jusqu'à quel ordre, quels paramètres développer. Il y a également une supposition de convergence : si on développe à un ordre $n \to \infty$, la fonction doit converger et non diverger.
7. loi de comportement du milieu équivalent présupposée (élastique, élasto-plastique ...)
8. hypothèses sur la forme mathématique des champs de déplacement ou de déformation macroscopique. Un certain nombre de méthodes présuppose un champ de déplacement (ou de déformation ou de contrainte) uniforme au sein de la cellule de base (voir les figures 1.3.2).
9. hypothèse sur la densité d'énergie thermoélastique emmagasinée aussi bien à l'état de repos que déformée, qui doit être identique dans le treillis original ou son équivalent continu (principe de Hill)

Les domaines d'applications ou les matériaux utilisés donnent lieux à des variantes quant aux méthodes utilisées :

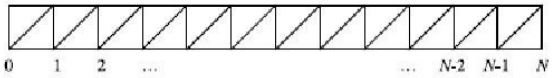
1. hypothèse sur la nature iso / hyper / hypo statique du treillis considéré, sur le nombre de degrés de liberté accordés aux noeuds (liaison pivot ou rigide), (Deshpande et al. [2001a] et Hutchinson and Fleck [2006]).
2. nature de la géométrie macroscopique du milieu homogénéisé : poutre 2D ou 3D, plaque 3D, treillis 2D ou 3D (voir la figure 1.3.3) . Hypothèse sur les liens entre les paramètres géométrique. Par exemple, pour le cas des plaques et poutres 2D, établit-on un lien entre l'épaisseur et la largeur des poutres



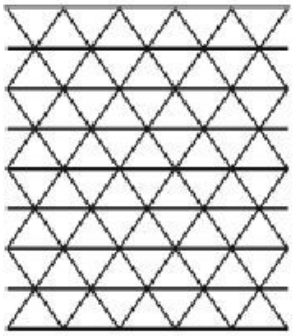
(a) plaque périodique 3D, d'après WADLEY [2006]



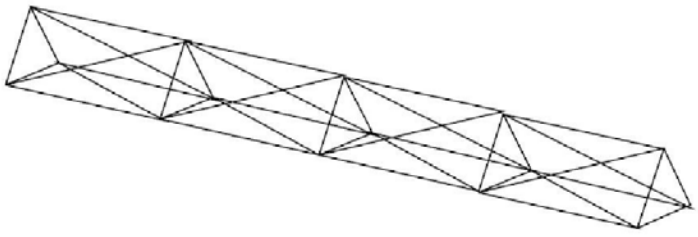
(b) structure 3D périodique, d'après Li et al. [2006]



(c) poutre périodique 2D



(d) structure 2D périodique



(e) poutre périodique 3D

FIGURE 1.3.3 – Milieux périodiques discrets avec des géométries macroscopiques différentes

3. hypothèses sur les perturbations dans la répétitivité de la géométrie du treillis (distribution de Voronoi ...) [Andrews and Gibson, 2001].
4. hypothèses sur la forme des microstructures. C'est souvent pour des treillis l'hypothèse poutre qui est considérée avec une géométrie de section constante et commune, mais certaines méthodes (voir par exemple Florence and Sab [2006]) prennent en compte une variation de la géométrie de la section ou d'autres types d'éléments comme dans les mousses à forte densité.

1.3.1 Critères de choix de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète

Nous avons choisi d'utiliser la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète développée par Tollenaere et Caillerie (Tollenaere and Caillerie [1998], Moreau and Caillerie [1998], Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Raoult et al. [2008]). On peut citer ses avantages par rapport à d'autres approches :

- C'est une méthode rigoureuse, qui tient compte des déformations locales (déplacement en chaque noeud) au sein d'une cellule élémentaire.
- Cette méthode ne présuppose pas un milieu homogène équivalent, celui-ci se déduit du résultat de l'homogénéisation et dépend essentiellement des paramètres cinématiques utilisés, de l'ordre du développement en fonction du paramètre ε et des lois de comportement de la microstructure [1].
- Elle se prête remarquablement bien à un traitement automatique, ce qui constitue l'un de nos objectifs. Dans la présentation qu'en a faite Mourad [2003], la description mathématique de la géométrie du treillis, sous des lourdeurs apparentes, permet le codage de toutes sortes de treillis sous forme de tableaux. Ce codage se prête aisément à un traitement informatique.
- C'est une méthode ouverte, en ce sens que l'on peut choisir et modifier les degrés de finesse de l'étude en stoppant les développements asymptotique à un ordre donné, ou bien modifier les lois de comportements de la microstructure.
- Elle peut s'adapter aux treillis de toutes sortes. Son principe garantit l'équivalence de la densité énergétique.

Dans la suite de ce chapitre, on montrera que cette méthode est issue de l'homogénéisation des milieux périodiques continus.

1. Nous ferons néanmoins une entorse à cette règle dans le chapitre trois en visant en particulier le milieu micropolaire

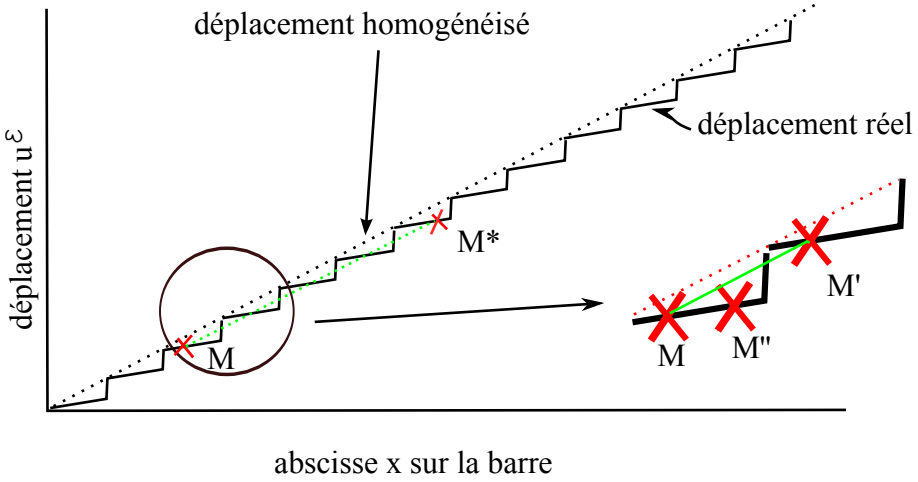


FIGURE 1.4.1 – déplacement d'une barre périodique et variation du déplacement entre des points contigus ou séparés d'une période

1.4 De l'homogénéisation des milieux périodiques continus à celle des milieux périodiques discrets (treillis)

L'homogénéisation des milieux périodiques continus s'est constituée sur la base des travaux liés à l'homogénéisation des milieux hétérogènes. La bibliographie sur la question est abondante, on peut se référer à Bornert et al. [2001], Alverman [2007], Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia [1992] ou Cambou and Jean [2001]. Ces méthodes d'homogénéisation ont ensuite été étendues aux milieux discrets périodiques.

On va présenter quelques résultats liés à l'homogénéisation des milieux périodiques par développement asymptotique, puis on fera le lien avec les milieux discrets. Mais avant tout, on commencera par présenter quelques définitions liées à la notion de périodicité. Nous le ferons au travers d'un exemple, le cas monodimensionnel.

1.4.1 Notion de périodicité, exemple monodimensionnel

On peut considérer l'exemple monodimensionnel de la figure 1.4.1 (Cambou and Jean [2001]) pour illustrer la notion de périodicité et son influence sur la solution mathématique du résultat cherché.

Si on considère une barre linéairement élastique en traction-compression de raideur $k(y)$ composée périodiquement de deux constituants homogènes de raideur k_1 et k_2. En posant la variable microscopique $y = \dfrac{x}{\varepsilon}$, la raideur des barres est telle que

$$k(y) = \begin{cases} k_1 & \text{pour } 0 < y < l_1 \\ k_2 & \text{pour } l_1 < y < l \end{cases}$$

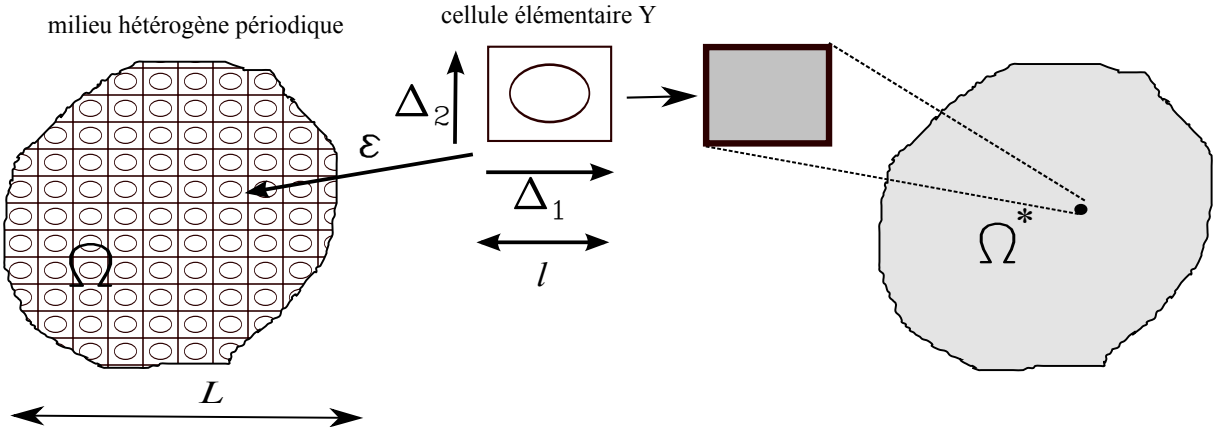


FIGURE 1.4.2 – Exemple de milieu hétérogène à structure périodique

La barre est soumise à une force F à l'extrémité $x = L$. L'origine $x = 0$ est fixée. On supposera qu'il n'y a pas de forces linéiques. L'effort normal N^ε dans la barre et le déplacement u^ε vérifient :

$$\frac{dN^\varepsilon}{dx} = 0 \tag{1.4.1}$$

$$N^\varepsilon = k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{du^\varepsilon}{dx} \tag{1.4.2}$$

$u^\varepsilon(0) = 0$, $N^\varepsilon(L) = F$

La solution se construit par deux intégrations successives, un tracé est donné dans la figure 1.4.1.

On constate que lorsque ε tend vers 0, la solution se rapproche du déplacement d'une barre homogène de raideur

$\frac{L}{k} = \frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}$ soumise aux mêmes conditions, les variations par rapport à ce déplacement sont de faible amplitude et périodiques de période εL. On peut traduire cette constatation en écrivant que u^ε est approximativement égal à :

$$u^\varepsilon = u^0(x) + \varepsilon u^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{1.4.3}$$

ou u^0représente le déplacement limite et $\varepsilon u^1(\frac{x}{\varepsilon})$, qui est périodique de période εL, la petite variation par rapport à $u^0(x)$.

De la même façon, nous pouvons étendre ces notions à un élément de volume périodique, mais de grande taille (voir la figure 1.4.2), comme cela sera expliqué dans le paragraphe 1.4.5. En s'inspirant de l'équation 1.4.3, on peut alors décomposer le champ de déformation local $\varepsilon(u(x))$ en un champ moyen $\overline{\varepsilon}$ qui serait le champ de déformation si le milieu était homogène et une correction fluctuante $\varepsilon'(x)$ qui tient compte de la présence d'hétérogénéités.

$u(x) = \overline{\varepsilon}.x + u'(x)$, $\varepsilon(u(x)) = \overline{\varepsilon} + \varepsilon(u'(x))$, u' périodique.

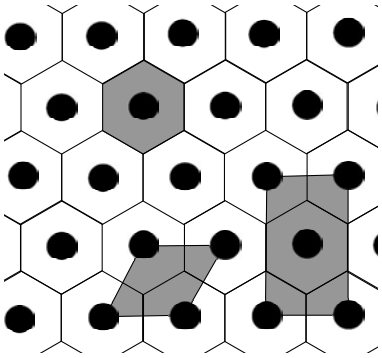


FIGURE 1.4.3 – Fibres circulaires dans un réseau hexagonal. Différents choix possibles pour la cellule de base (Bornert et al. [2001])

1.4.2 Volume Élémentaire Représentatif, séparation d'échelle, localisation

Pour trouver les propriétés homogénéisées, on remplace l'étude du corps Ω entier par une portion de celui-ci suffisamment grande pour inclure les détails de la microstructure. Cette portion de longueur caractéristique l doit néanmoins être suffisamment petite pour être considérée comme un point par rapport à L. Cette portion doit avoir approximativement les mêmes propriétés mécaniques que le corps Ω. On l'appelle Volume Élémentaire Représentatif (VER ou RVE en anglais). Pour que ce volume élémentaire soit représentatif, il faut donc que la condition suivante soit satisfaite

$$l \ll L \tag{1.4.4}$$

Cette condition est appelée séparation d'échelle. Cette condition est automatiquement satisfaite dans les milieux périodiques par le fait que le paramètre $l \to 0$.

Le caractère représentatif du VER mérite d'être souligné. Le choix de la cellule élémentaire est souvent arbitraire, néanmoins la solution homogénéisée doit être unique (voir la figure 1.4.3). Cette problématique du choix de la cellule élémentaire pour les milieux continus périodiques se pose de la même façon dans le cas des milieux périodiques discrets (treillis).

On nomme *localisation* (Cambou and Jean [2001], Lipperman et al. [2008]) la phase de détermination des champs de déformation et de contrainte interne au VER, tandis que le calcul de la moyenne de ces champs sera appelé alors la phase d'homogénéisation. Lipperman et al. [2008] reprenant la distinction établie par Suquet, [1987] nomme *localisation en contrainte,* l'opération qui consiste à obtenir la contrainte locale à partir de la contrainte macroscopique, tandis que l'on peut nommer par *localisation en déformation* la procédure qui consiste à déterminer la déformation locale dans la cellule élémentaire en faisant l'hypothèse d'un champ de déformation uniforme (voir la figure 1.3.2).

Dans un milieu hétérogène, la connaissance de la distribution des hétérogénéités est souvent statistique. Il n'est pas possible alors de déterminer une localisation unique, on utilise une détermination a priori de la forme des champs de déformation et de contrainte interne

au VER, tenant compte au mieux de la connaissance disponible du milieu. Cette démarche conduit à la méthode d'encadrement des propriétés mécaniques de la loi de comportement, résumée dans le paragraphe 1.4.4.

1.4.3 Lemme de Hill

Le lemme de Hill est un résultat important concernant les moyennes des contraintes et des déformations et les énergies correspondantes. Il est surtout utilisé dans les méthodes d'homogénéisation statistiques, mais il est aussi utilisé dans des théories d'homogénéisation de milieux périodiques. La théorie est basée sur la condition de Hill qui stipule que la moyenne de l'énergie de déformation à l'échelle microscopique est égale à l'énergie de déformation à l'échelle macroscopique, sous réserve que la condition de séparation d'échelle soit satisfaite. Les équations suivantes doivent être satisfaites

$$\left\langle W^{micro} \right\rangle = \left\langle W^{macro} \right\rangle \tag{1.4.5}$$

$$\frac{1}{2}\left\langle \sigma\left(x\right) : \varepsilon\left(x\right) \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sigma\left(x\right) \right\rangle : \left\langle \varepsilon\left(x\right) \right\rangle \tag{1.4.6}$$

avec

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \sigma_{ij}\left(x\right) dV \tag{1.4.7}$$

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_\Omega}\int_\Omega \varepsilon_{ij}\left(x\right) dV \tag{1.4.8}$$

On peut étendre ce principe au cas périodique : il faut restreindre le volume Ω à la cellule de périodicité Y, et modifier en conséquence les conditions limites. On montre (Cambou and Jean [2001]) que dans le cas d'un milieu périodique de périodicité Y (voir la figure 1.4.2), avec un champ de déplacement $\mathbf{u}$ défini sur Y et vérifiant la condition $\mathbf{u}(\mathbf{y}) - \mathbf{u}(\mathbf{y} - \mathbf{\Delta_i}) = \mathbf{E}.\Delta_i$ sur les bords et $\mathbf{E}$ un tenseur constant, on a

$$\left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \mathbf{E} \tag{1.4.9}$$

$$\left\langle \sigma_{ij} \right\rangle : \left\langle \varepsilon_{ij} \right\rangle = \frac{1}{V_Y}\int_Y \left(\sigma : \varepsilon_{ij}\right) dv \tag{1.4.10}$$

1.4.4 Bornes de Voigt, de Reuss et d'Hashin - Shtrikman

Le traitement des milieux hétérogènes aléatoires diffère de celui des milieux périodiques (Bornert et al. [2001]). En raison du caractère aléatoire des hétérogénéités, le VER à considérer est beaucoup plus important et plus complexe, il doit tenir compte de la distribution des hétérogénéités. On ne cherche pas la solution exacte en tout point, mais une estimation de la solution en bornant le résultat. On doit pour cela faire des hypothèses supplémentaires. Une technique classique pour déterminer les propriétés des matériaux à microstructures est le

calcul des bornes supérieures et inférieures selon les travaux de Voigt (1889) et Reuss (1929). La théorie est basée sur une formulation variationnelle de l'élasticité.

Avec l'estimation de Voigt, on suppose que l'état de déformation microscopique est en tout point identique et donc constant

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}(x) = const$$

L'approximation de Voigt fournit une borne supérieure pour les paramètres mécanique d'un matériau.

Une approche analogue a été introduite par Reuss, mais contrairement à Voigt, c'est l'état de contrainte qui est supposé constant

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}(x) = const$$

Un calcul affiné des bornes a été développé par Hashin et Shtrikman (1963) par une approche variationnelle, conduisant aux bornes les plus étroites possible. Les bornes d'Hashin-Shtrikman, ainsi que celles de Voigt et Reuss sont des techniques classiques pour des microstructures multiphases. On pourrait penser approcher les matériaux cellulaires par ces méthodes en supposant que l'une des phases a une raideur tendant vers zéro. Mais on constaterait alors que la borne minimale serait également nulle. Certains articles néanmoins (Deshpande et al. [2001a], Torquato et al. [1998] et Zhang et al. [2008]) traitants des propriétés mécaniques des treillis, se servent des bornes d'Hashin et Shtrikman comme indicateur de la qualité de l'optimisation géométrique du treillis. Plus le ratio module élastique du treillis/bornes supérieur Hashin-Shtrikman est proche de 1, plus il a une géométrie optimisée. On peut ajouter que dans les mousses à forte densité, lorsque la microstructure ressemble plus à un matériau semi-continu qu'à des poutres, ces bornes peuvent donner de bonnes approximations Despois et al. [2006].

1.4.5 Homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus

Le principe de l'homogénéisation peut-être exprimée de la façon suivante. Un corps Ω avec une longueur caractéristique L est considéré (voir la figure 1.4.2) avec des conditions aux limites en chargement et efforts imposées. Le corps Ω est constitué d'un matériau à microstructure d'une longueur caractéristique l. Pour l'étude à un niveau macroscopique, on modélise Ω par un corps Ω^*. On considère que ce corps Ω^*est soumis aux mêmes chargements extérieurs et déplacements imposés que Ω. Mais ce corps Ω^*est constitué d'un matériau homogène. Le but de l'homogénéisation est de calculer les propriétés de Ω^*de telle sorte que le comportement mécanique soit équivalent à Ω.

Lorsqu'on impose un déplacement affine $u = \overline{\varepsilon}.x$ aux bords de Ω (déformations homogènes au contour), l'état de déformation qui en résulte dans le matériau homogénéisé est uniforme, $\varepsilon = \overline{\varepsilon}$, et l'état de contrainte est lui aussi uniforme, $\sigma = \overline{\sigma}$. Dans le milieu hétérogène périodique réel, les champs locaux ε et σ sont oscillant et fluctuent autour de leurs valeurs moyennes $\overline{\varepsilon}$ et $\overline{\sigma}$. Loin du bord, on peut faire abstraction du détail des conditions aux limites

(principe de St Venant). La géométrie est invariante par translation le long des vecteurs de périodicité ; les solutions de ε et σ possèdent également cette propriété d'invariance : ils sont périodiques.

Pour un milieu élastique, la périodicité est traduite par la dépendance spatiale périodique des coefficients d'élasticité. Pour assurer la séparation d'échelle, le paramètre l doit satisfaire la condition $l \ll L$. Les méthodes mathématiques tirent parti du fait que l'on cherche une limite ou une convergence des champs de déplacements, de contrainte..., lorsque le rapport $\varepsilon = \dfrac{l}{L} \to 0$ [2]. Ces méthodes supposent donc que ε varie, il est donc indispensable de définir complètement la structure par rapport à ce petit paramètre ε.

La méthode d'homogénéisation des milieux périodiques a été appliquée à de nombreux types de problèmes et de domaines de la physique : problèmes de diffusion, électromagnétisme, milieux poreux, plasticité...

1.4.5.1 Position du problème

On étudie l'équilibre d'un milieu occupant un domaine de l'espace Ω et constitué d'un matériau élastique, soumis à une densité de force $\mathbf{f}$ et à des conditions aux limites usuelles sur $\partial\Omega$ (déplacements imposés sur une partie de $\partial\Omega$, densité de force sur une autre partie). Les inconnues du problème sont les champs de déplacements et de contrainte que l'on nommera $\mathbf{u}^\varepsilon$ et σ^ε, pour signaler leur dépendance vis-à-vis du petit paramètre ε. Ces champs sont solutions des équations

$$\mathrm{div}\sigma^\varepsilon + \mathbf{f} = 0 \tag{1.4.11}$$

dans Ω.

$$\sigma^\varepsilon = \Sigma\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla\mathbf{u}^\varepsilon\right) \tag{1.4.12}$$

dans Ω, associé à des conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Avec $\Sigma(\mathbf{y}, \nabla\mathbf{u}^\varepsilon)$ défini pour $\mathbf{y} \in Y$ et étendu à l'espace entier par périodicité. Le but est de trouver les limites de $\mathbf{u}^\varepsilon$ et σ^ε quand ε tend vers 0.

1.4.5.2 Développement asymptotique

On s'inspire de l'approximation monodimensionnelle. La méthode de développement en double échelle consiste à cherche $\mathbf{u}^\varepsilon$ et σ^ε sous la forme de développements asymptotiques en puissance de ε

$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2\mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})...$

$\sigma^\varepsilon = \sigma^0(\mathbf{x}) + \varepsilon\sigma^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2\sigma^2(\mathbf{x}, \mathbf{y})...$

On notera que les fonctions $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$ et $\sigma^0(\mathbf{x})$, sont considérées comme indépendante de la variable $\mathbf{y}$. Ce choix sera justifié plus loin. Les termes sont fonctions des variables $\mathbf{x} \in \Omega$ et

2. Ce rapport n'est pas à confondre avec le tenseur de déformation $[\varepsilon]$, pour éviter la confusion certains auteurs utilisent plutôt η comme petit paramètre ou bien e.

$\mathbf{y} \in Y$ est défini par $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$. La variable x traduit les variations à grande échelle, la variable $\mathbf{y}$ traduit les variations à petite échelle, qui sont approximativement périodiques.

Les équations 1.4.11 et 1.4.12 font intervenir des opérateurs différentiels qui vont agir sur les variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. Pour les distinguer, on nommera div_x et ∇_x les opérateurs différentiels relatifs à $\mathbf{x}$, et div_y et ∇_y les opérateurs différentiels relatifs à $\mathbf{y}$. On a alors

$$\nabla \mathbf{u}^{\varepsilon} = \nabla_x \mathbf{u}^0 (\mathbf{x}) + \nabla_y \mathbf{u}^1 + \varepsilon \left(\nabla_x \mathbf{u}^1 + \nabla_y \mathbf{u}^2 \right) + ... \tag{1.4.13}$$

$$\mathrm{div} \sigma^{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_y \sigma^0 + \mathrm{div}_x \sigma^0 + \mathrm{div}_y \sigma^1 + ... \tag{1.4.14}$$

Si on reporte ces développements dans 1.4.11 et 1.4.12, on obtient

$$\frac{1}{\varepsilon} \mathrm{div}_y \sigma^0 + \mathrm{div}_x \sigma^0 + \mathrm{div}_y \sigma^1 + ... + \mathbf{f} = 0$$

$$\sigma^{\varepsilon} = \Sigma \left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \nabla_x \mathbf{u}^0 (\mathbf{x}) + \nabla_y \mathbf{u}^1 \right) + ... \tag{1.4.15}$$

Ces développements doivent être vérifiés quelle que soit la valeur de ε proche de 0. Ceci permet d'identifier terme à terme les coefficients des puissances de ε. D'autre part, quand ε tend vers 0, la variable $\mathbf{x}/\varepsilon$ prend toutes les valeurs dans la cellule élémentaire. Ce qui permet d'écrire que les identifications sont valables pour toutes les valeurs de $\mathbf{x} \in \Omega$ et $\mathbf{y} \in Y$. On obtient aux premiers ordres de ε

$$\mathrm{div}_y \sigma^0 = 0 \tag{1.4.16}$$

$$\mathrm{div}_x \sigma^0 + \mathrm{div}_y \sigma^1 + \mathbf{f} = 0 \tag{1.4.17}$$

1.4.5.3 Équilibre et loi de comportement macroscopique

Pour les milieux périodiques continus, l'équation 1.4.16 montre que σ^0 est indépendant de la variable $\mathbf{y}$, et justifie le choix fait plus haut d'un développement qui commence par une fonction σ^0 indépendante du paramètre microscopique $\mathbf{y}$, soit $\sigma^0 = \sigma^0 (x)$.

L'équation d'équilibre macroscopique est obtenue par intégration de l'équation 1.4.17 sur la cellule Y. En raison du théorème de la divergence et de la périodicité du champ σ^1 vis-à-vis de $\mathbf{y}$, l'intégrale de $\mathrm{div}_y \sigma^1$ sur Y s'annule. De plus, comme les variables $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indépendantes, on peut inverser les opérateurs d'intégration par rapport à $\mathbf{y}$ et de dérivation par rapport à $\mathbf{x}$, d'où l'on peut réécrire l'équation 1.4.18 sous la forme

$$\mathrm{div}_x \bar{\sigma}^0 + \mathbf{f} = 0 \tag{1.4.18}$$

dans Ω. Le tenseur macroscopique des contraintes $\bar{\sigma}$ est défini comme la moyenne de σ^0 sur la cellule de référence Y.

Une loi de comportement est d'une façon générale une relation qui relie le tenseur des contraintes au gradient des déplacements. Dans le cas des milieux périodiques, cette relation

est fournie par la résolution du problème aux limites sur Y constitué des équations 1.4.16 et 1.4.15 et des conditions de périodicité portant sur $\mathbf{u}^1$ et σ^0. On montre que par un changement de variable approprié portant sur $\mathbf{u}$, on peut réécrire le problème de telle sorte que la solution soit unique pour σ^0 et déterminée à une constante près pour $\mathbf{u}$.

On notera que dans le cas de l'homogénéisation des milieux périodiques, la solution s'obtient par la résolution d'un problème sur la cellule de référence. Elle fournit une loi de comportement macroscopique, alors que dans les méthodes statistiques, il est en général nécessaire de se donner une forme mathématique de cette loi.

1.4.6 Passage aux milieux discrets de l'homogénéisation asymptotique des milieux périodiques continus

La méthode d'homogénéisation des milieux périodiques a été étendue aux milieux discrets par Moreau and Caillerie [1998] et Tollenaere and Caillerie [1998]. Ces milieux sont discrets en ce sens que les équations qui les gouvernent portent sur des ensembles discrets de variables (les déplacements des noeuds et les tensions des barres). Cette extension repose sur quelques résultats et constats propres aux milieux discrets ; nous allons les résumer ci-dessous.

Pour définir les déformations équivalentes dans un milieu discret, les déformations sont dues aux variations de déplacement d'un point à un autre du milieu. On considère deux points situés en $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}+\mathbf{X}$. Si ces deux points sont dans la même cellule Y (voir les points M et M" dans la figure 1.4.1), alors la variation de déplacement entre ces deux points est de

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}+\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \left(\nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \nabla_y \mathbf{u}^1\right).\mathbf{X} \tag{1.4.19}$$

Par contre, si l'écart $\mathbf{X}$ couvre un grand nombre de cellules élémentaires (points M et M* dans la figure 1.4.1) alors, en raison de la périodicité, la variation due à la petite échelle $\dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ est négligeable devant la variation due à $\mathbf{x}$ et on a

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}+\mathbf{X}) - \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{x}).\mathbf{X} \tag{1.4.20}$$

Si l'écart $\mathbf{X}$ entre les deux points est exactement d'une période (points M et M' de la figure 1.4.1), c'est-à-dire si $\mathbf{X} = \varepsilon \mathbf{Y}_i$, on a

$$\mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{Y}_i) - \mathbf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \approx \varepsilon \nabla_x \mathbf{u}^0(\mathbf{x}).\mathbf{Y}_i \tag{1.4.21}$$

Cette dernière relation montre que le gradient microscopique $\nabla_x \mathbf{u}^0$ est donné par la variation de déplacement entre deux points du milieu séparés par un vecteur de périodicité. Elle donne également les conditions aux limites que doit vérifier le champ de déplacement sur une cellule élémentaire Y. On retrouve ces conditions aux limites sur la cellule de référence.

Il est nécessaire d'adopter une description géométrique du treillis. On ne détaillera pas cette description (voir la figure 1.2.1) qui fait entre autres l'objet du chapitre 2 sur les treillis non polaires. On notera la position d'un point dans une cellule

$$\mathbf{x}^{\varepsilon n} = \lambda^{(\nu_1,\nu_2)} + \varepsilon \mathbf{y} \tag{1.4.22}$$

avec ν_1, ν_2, les coordonnées d'un noeud $\mathbf{n} = (n, \nu_1, \nu_2)$ considéré comme point origine de cette cellule élémentaire. On peut alors poser

$$\lambda^{(\nu_1,\nu_2)} = \varepsilon \left(\nu_1 \mathbf{Y}_1 + \nu_2 \mathbf{Y}_2\right) \tag{1.4.23}$$

avec $\nu_i = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}$ désignant la cellule dans laquelle se trouve ce noeud, ε le petit paramètre et $\varepsilon\mathbf{Y}_1$ et $\varepsilon\mathbf{Y}_2$ les deux vecteurs de périodicité du treillis. La longueur des poutres dans la cellule élémentaire est proportionnelle à l, une longueur de la cellule élémentaire de telle sorte que $l = \varepsilon L$.

On montre (Tollenaere and Caillerie [1998]) que l'on peut développer la fonction de déplacement des noeuds d'un treillis périodique sous la forme d'une suite de fonctions dépendant uniquement de la variable $\lambda^{(\nu_1,\nu_2)}$

$$\mathbf{u}^{\varepsilon n}(\lambda^{(\nu_1,\nu_2)}) = \mathbf{u}^0\left(\lambda^{(\nu_1,\nu_2)}\right) + \varepsilon \mathbf{u}^{n1}\left(\lambda^{(\nu_1,\nu_2)}\right) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^{n2}\left(\lambda^{(\nu_1,\nu_2)}\right) ...$$

avec $\mathbf{u}^0$, la fonction de déplacement commune aux noeuds de la cellule élémentaire, c'est la fonction limite au premier ordre du déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon$. Les fonctions $\mathbf{u}^{ni}$, sont des fonctions de déplacement associées au noeud n à un ordre i. L'une des principales différences avec l'homogénéisation des milieux périodiques continus apparaît. Pour les milieux continus, la fonction $\mathbf{u}^\varepsilon$, se développe en une somme de fonctions $\varepsilon^i \mathbf{u}^i(x, y)$, avec $\mathbf{x}$, la variable macroscopique et $\mathbf{y}$, la variable microscopique. Pour les milieux discrets, la fonction $\mathbf{u}^\varepsilon$ se développe en une somme de fonctions $\varepsilon^i \mathbf{u}^{ni}(\lambda)$, avec λ une variable unique, adimensionalisée, des coordonnées de la cellule. On notera qu'à chaque ordre du développement, il existe plusieurs fonctions $\mathbf{u}^{ni}(\lambda)$, une par noeud de la cellule élémentaire. Comme dans ce cas particulier des milieux discrets il y a une variable unique λ, pour exprimer la fonction $\mathbf{u}^{\varepsilon n}(\lambda^{(\nu_1,\nu_2)})$ dans le repère cartésien classique, il suffit de réaliser un changement de variable des coordonnées adimensionalisées λ^i aux coordonnées cartésiennes.

1.4.6.1 Loi de comportement macroscopique

Nous nous contenterons de brosser les grandes lignes de la méthode, une présentation plus complète sera faite dans le chapitre 2. Avec l'hypothèse de poutres en petites transformations et la restriction au cas des treillis travaillant en traction compression, on considère une loi de comportement pour chaque poutre du type

$$N^{\varepsilon b} = \left(N^b \left(\mathbf{u}^{E(b)} - \mathbf{u}^{O(b)}\right)\right).\mathbf{e}^b \tag{1.4.24}$$

avec N^b raideur associée à la barre b. La loi de comportement du milieu continu équivalent est obtenue par la résolution d'un problème sur la cellule de référence, qui est un problème d'autoéquilibre de la cellule soumise à des conditions aux limites périodiques. L'équation d'autoéquilibre obtenue s'écrit

$$\sum_b N^{\varepsilon b} \mathbf{e}^b \left(\mathbf{v}^{O_R(b)} - \mathbf{v}^{E_R(b)}\right) = 0 \tag{1.4.25}$$

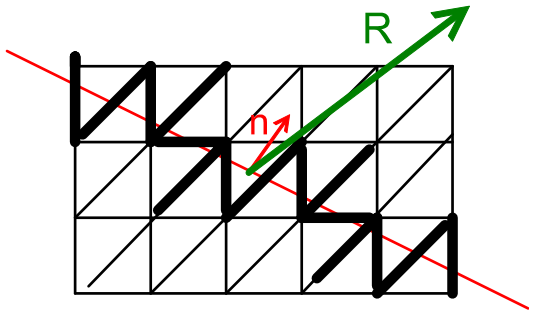


FIGURE 1.4.4 – Le réseau périodique, la facette S et en gras les liaisons contribuant à $\mathbf{R}$

On montre [Tollenaere and Caillerie, 1998] que dans le cas des treillis en traction compression, la résolution du problème conduit à un tenseur de contrainte qui s'exprime par

$$[\sigma] = \frac{1}{V_Y} \sum_b N^b L^b \mathbf{e}^b \otimes \mathbf{e}^b \tag{1.4.26}$$

Il est intéressant de noter qu'une expression similaire du tenseur des contraintes a été établie pour la première fois par Cauchy et Poisson (Cambou and Jean [2001]) (voir la figure 1.4.4) dans la cas d'une cellule élémentaire à un noeud sous la forme suivante

$$\mathbf{R} = \text{sgn}\left(\mathbf{e}^b.\mathbf{n}\right) .N^b.\mathbf{e}^b.x \tag{1.4.27}$$

avec $\mathbf{R}$, résultante sur la facette, $\mathbf{e}^b$ le vecteur directeur de la barre b, N^b, force sur cette barre b et x, le nombre de barres coupées.

Les équations 1.4.26 et 1.4.25 constituent un problème dont les données sont le tenseur $\nabla \mathbf{u}^0$ et les inconnues les efforts N^{b0} et les déplacements $\mathbf{u}^{n1}$. L'équation d'autoéquilibre 1.4.25 se développe en un système constitué d'autant d'équations que de noeuds dans la cellule de référence. Ce système admet une solution unique à une translation près pour les $\mathbf{u}^{n1}$. Le report de ces $\mathbf{u}^{n1}$ dans l'équation 1.4.24 fournit les N^{b0} en fonction de $\nabla \mathbf{u}^0$; le report des N^{b0} dans 1.4.26 donne $[\sigma]$ en fonction de $\nabla \mathbf{u}^0$, qui est la loi de comportement du milieu continu équivalent.

1.5 Nature de dominante dans les treillis de poutres

Il convient avant de commencer l'exposé de nos travaux de fournir quelques définitions sur la nature des dominantes pouvant apparaître dans les treillis. Ces termes et ce classement nous seront utiles tout au long de cette thèse. On va tout d'abord rappeler brièvement le raisonnement qui amène au classement des treillis tel qu'il est présenté dans Deshpande et al. [2001a] (voir la figure 1.5.1).

On considère dans un premier temps un treillis composé de poutres reliées entre elle par des liaisons de type pivot. On constate qu'avec cette hypothèse sur les liaisons le treillis de la figure 1.5.1(a) s'effondre à cause du degré de liberté en rotation aux noeuds, tandis que les

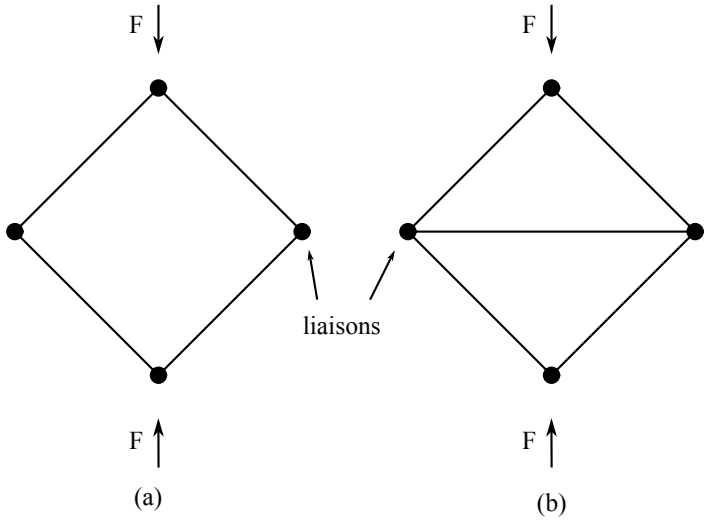


FIGURE 1.5.1 – Les deux principales natures de dominante dans les treillis selon Deshpande (a) dominante flexionnelle, (b) dominante extensionnelle ou de traction-compression (d'après Deshpande et al. [2001a]).

poutres du treillis triangulé de la figure 1.5.1(b) supportent un effort de traction-compression. Deshpande appelle le cas de la figure 1.5.1(a) un *mécanisme,* tandis que le second cas, figure 1.5.1(b) est appelé une *structure*. Dans ce dernier cas, la déformation des poutres et donc la structure est à dominante extensionnelle (ou de traction-compression). Supposons maintenant que les liaisons soient des liaisons complètes (appelés aussi encastrement), les poutres du treillis figure 1.5.1(a) fléchissent, c'est la situation de la plupart des mousses, tandis que ce changement a peu d'effet sur le comportement mécanique des poutres du treillis 1.5.1(b), la structure reste à dominante extensionnelle. On peut noter qu'une distinction du même ordre apparaît également dans Christensen [2000], mais elle est moins précise. Christensen classe un certain nombre de treillis en fonction de la forme mathématique des propriétés mécaniques. Soit ces propriétés sont fonction de la densité relative $\frac{\rho^*}{\rho_s}$, soit elles sont fonction de $\left(\frac{\rho^*}{\rho_s}\right)^3$. Dans le premier cas, Christensen appelle cela un mécanisme d'*action directe*, car c'est la traction-compression des poutres qui est directement responsable des propriétés ; dans le second cas, c'est la flexion des poutres qui est liée aux propriétés. Néanmoins, cette approche ne peut être généralisée, elle ne fonctionne que pour certains treillis. On montrera dans le chapitre qui suit que la forme mathématique des propriétés mécaniques des treillis possédant des noeuds internes à la cellule élémentaire peut être beaucoup plus complexe qu'une simple fonction en puissance de la densité relative.

Il faudrait pour distinguer le comportement mécanique des treillis, faire une étude matricielle plus poussée [Hutchinson and Fleck, 2006]. Comme le montre la figure 1.5.2, l'effondrement réel de certains treillis, quel que soit le modèle de liaisons adopté (liaisons complètes, liaisons pivot), peut se faire par rotation d'une sous-structure de la cellule élémentaire. Les

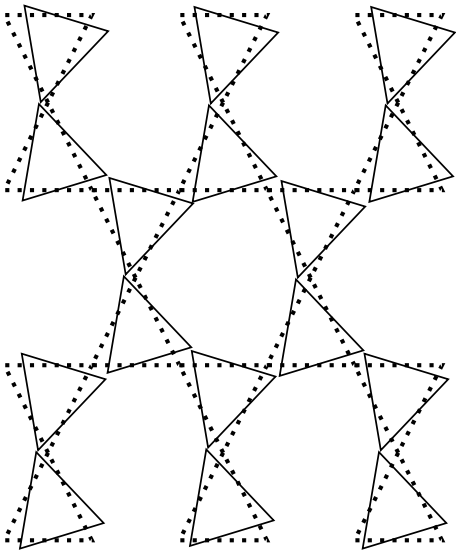


FIGURE 1.5.2 – Effondrement du treillis Kagome par rotation d'une sous structure de la cellule élémentaire. (D'après Hutchinson and Fleck [2006])

degrés de liberté accordés à certains noeuds peuvent jouer un grand rôle, cela souligne l'importance des hypothèses initiales concernant les noeuds : liaison complète ou liaison pivot.

En résumé, on retiendra qu'il existe :

- des treillis à dominante extensionnelle, dont les poutres subissent une contrainte principalement en traction ou en compression ;
- des treillis à dominante flexionnelle, les poutres subissent une contrainte principalement en flexion ;
- des treillis sans dominantes, une partie des poutres travaille en flexion tandis qu'une autre partie travaille en traction-compression.

1.6 Conclusion

Cette brève présentation des méthodes d'étude mécanique des treillis nous a permis de justifier le choix de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète développée par Tollenaere, Mourad et Caillerie (Tollenaere and Caillerie [1998], Moreau and Caillerie [1998], Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Raoult et al. [2008]). On notera que nos travaux portent uniquement sur l'étude de treillis 2D ou 3D (figures 1.3.3 b et d) et non sur les poutres 2D et 3D ou des plaques 3D (figures 1.3.3 a, c et e), qui font l'objet d'études spécifiques.

On peut rappeler les principales raisons de ce choix. L'orientation vers des méthodes d'homogénéisation discrète s'est imposée, car on considère à priori le milieu de départ, le treillis de poutre, comme étant un milieu discret. C'est une méthode rigoureuse, qui tient compte des déformations locales (déplacement en chaque noeud) au sein d'une cellule élémentaire. Cette méthode ne présuppose pas de la loi de comportement à obtenir. Bien que, comme on le montrera dans le chapitre 3 portant sur l'homogénéisation micropolaire, on sera amené à

faire des hypothèses sur le milieu visé pour simplifier les calculs. On peut facilement l'automatiser et ajuster le degré de finesse de l'homogénéisation. Enfin, elle peut traiter des treillis de topologies et de caractéristiques mécaniques variées.

Dans le chapitre qui suit, on montrera comment cette méthode peut être programmée de manière à obtenir de façon automatique le tenseur des contraintes homogénéisé en fonction d'un fichier texte de données d'entrée.

Chapitre 2

Homogénéisation asymptotique discrète, automatisation de la méthode avec un modèle poutre simplifié

Sommaire

2.1 Introduction **38**
2.2 Effective mechanical behavior of 2D lattices from discrete homogenization **41**
2.2.1 Discrete homogenization : description of the method 41
2.2.2 A mixed flexional extensional lattice : the 2D "OctogonMixed" lattice 54
2.2.3 A proposal for classification of lattices with respect to rotations . 61
2.3 Extension to 3D : case of the Kelvin foams **62**
2.3.1 Effective behavior of the "Tetrakaïdecahedral" truss (Kelvin foams) 64
2.3.2 Validation by comparison with analytical models and FE simulations 68
2.4 Conclusions and perspectives **68**
2.5 Remarques complémentaires **70**
2.5.1 Exemples de treillis 70
2.5.2 Conclusion, discussion 70

Préambule

Ce chapitre est essentiellement la reprise d'un article paru dans la revue Technische Mechanik, il apparaît ci-dessous in extenso. On a ajouté un résumé en français et quelques applications et remarques en fin de document.

On a essentiellement automatisé la méthode d'homogénéisation développée par Caillerie, Tollenaere et Mourad en utilisant un modèle de poutre de Bernoulli simplifié. La simplification

concerne le fait que l'on néglige les rotations aux noeuds, les considérant comme nulles dans certains cas de chargement et de géométries de treillis. Le seul paramètre cinématique est alors le déplacement.

Discrete homogenization of architectured materials : implementation of the method in a simulation tool for the systematic prediction of their effective elastic properties

F. Dos Reis, J.F. Ganghoffer

Résumé

Les équations d'équilibre des matériaux architecturés tels que les mousses, les tissés ou tout autre matériau ayant une microstructure sous forme de poutre induisent un comportement particulier. Ce sont les propriétés mécaniques et la topologie de l'assemblage de poutre à l'échelle microscopique qui provoque ce comportement. On se propose d'étudier l'obtention des propriétés mécaniques des treillis 2D et 3D. On va utiliser pour cela la technique d'homogénéisation asymptotique pour obtenir les expressions des propriétés équivalentes en fonction des microparamètres géométriques et mécaniques. Le comportement de différents treillis 2D est calculé puis comparé à des simulations EF pour le valider. Dans le but d'analyser les contributions respectives de la flexion et de l'extension aussi bien à l'échelle micro et macro, un treillis mixte est conçu spécifiquement. On calcule ses modules mécaniques en fonction des paramètres géométriques et mécaniques. On obtient, pour ce treillis, une loi d'échelle du module élastique en fonction de la densité relative montrant une complexe évolution non linéaire. Cette loi décroît de manière importante lorsque la flexion devient le mode dominant. La matrice de souplesse obtenue ne respecte pas les symétries attendues pour ce qui est du module de cisaillement, ce qui s'explique par l'hypothèse trop restrictive que l'on a adoptée qui est de négliger les rotations en les considérant comme nulles. Après extension de la méthodologie au cas 3D, le comportement mécanique des mousses de Kelvin sous compression est obtenu sous la forme d'un milieu continu isotropique équivalent, concordant aussi bien avec les simulations EF que la littérature sur la question. Là encore, la matrice de souplesse ne possède pas les symétries requises pour les modules de cisaillement lorsqu'on néglige la rotation des noeuds. On propose une classification des treillis en fonction du choix du milieu continu équivalent et de la nature des contions aux bords, notamment de la présence ou non de microrotations. Un des principaux résultats de la contribution présente est de montrer le besoin de l'extension de l'homogénéisation asymptotique vers un milieu micropolaire, en tenant compte des microrotations aux noeuds comme des degrés de liberté supplémentaires aussi bien à l'échelle microscopique que macroscopique.

Abstract

The kinematics and the balance equations for multiphase micro-architectured materials such as foams, textiles, or beam-like structures exhibit a peculiar macroscopic behavior. The topology and mechanical properties of their structural constituents at the microscale induce this behavior. The derivation of the effective mechanical properties of 2D and 3D lattices made of articulated beams is herewith investigated. The asymptotic homogenization technique is used to get closed form expressions of the equivalent properties versus the geometrical and mechanical micro-parameters. The effective behavior of a 2D hexagonal lattice is calculated, and is validated by comparison with FE simulations results. In order to analyze the respective roles of flexion and extension at both the micro and macro scales, a mixed lattice has been conceived, accounting for both extensional and flexional effects in a versatile manner. Its effective moduli are calculated versus geometrical and mechanical parameters of the beams. The scaling law of the effective traction modulus versus density shows a complex nonlinear evolution. This law has a drastic decrease when flexional modes become dominant over extensional ones. The obtained compliance matrix does not exhibit the expected symmetries when shear behavior is considered, which is explained by the too restrictive assumption of rotations being suppressed at the edges. After extending the present methodology towards the 3D case, the effective mechanical behavior of Kelvin foams under compression is obtained with an isotropic continuum behavior which is in good agreement with both the literature and FE simulations. The effective compliance matrix of the equivalent continuum does not exhibit some of the required material symmetries under shear when the edge node rotations are prevented. A classification of lattices with respect to the choice of the equivalent continuum model is proposed, according to the nature of the boundary conditions, considering especially boundary micro-rotations. One of the main results of the present contribution is the need for an extension of the asymptotic homogenization to a micro-polar continuum, by considering lattice micro-rotations as additional degrees of freedom at the microscopic and macroscopic scale.

2.1 Introduction

Architectured materials such as polymeric and metallic foams as well as network models (biological membranes) have attracted the interest of many researchers in the last decade. This is due to their specific mechanical properties, which make them suitable materials for their high crash absorbing capacity. The derivation of the mechanical properties of foams with a regular architecture (in the sense of being endowed with a quasi periodic network), in relation to the topology of the cellular material and the material mechanical properties, is especially interesting and important. It allows for understanding the mechanical behavior, and the foam architecture required to achieve optimized properties at the structural level. The appropriate size materials, the lattice topology and mechanical properties can be selected based on a quantitative understanding of the macroscopic impact of the microstructural parameters.

Attempts to derive those effective properties as closed form expressions of the geometrical and mechanical parameters of the lattice representing the foam are so far not satisfactory.

This may be attributed to the difficulty of the task when considering the association of complex geometries and multi-axial loadings. However, this complexity is essential to reproduce the behavior of foams and lattices during their service life. The role of imperfections and heterogeneities, like strain localization phenomena (accompanied by density heterogeneities) as well as the need to extend the kinematics (extra nodal degrees of freedom, such as micro-rotation), may also prevent or complicate this task.

Accordingly there is clearly a need to develop a general and versatile tool able to calculate the effective behavior of architectured materials endowed with a discrete topology, in a systematic and automatic manner.

A brief summary of the main literature works is next exposed. lei Zhang and xing Lu [2007] study the nonlinear behavior of foams under strong compression, and performed a numerical study for a lattice modified by a Voronoï type perturbation. In the same spirit, Li et al. [2006] analyzes the effects of mesh imperfections, using an energetic averaging on a RVE; see also Burgardt and Cartraud [1999] in the line of energetic averaging method with a periodic lattice. One can also mention in the same line of thoughts the contribution of Badiche et al. [2000], whereby the authors use a quasi periodical model to describe the non uniformity of stresses generated in a truss under strong compressive loads in the plastic regime. In Sullivan et al. [2008], the authors develop a micro-mechanical model based on an energetic approach; the model accounts for the eventual anisotropy induced by the lattice deformation along an axis, which accounts for the observed increase of length of certain foams due to the fabrication process. Nevertheless, all the aforementioned references, including the fundamental work by Zhu et al. [1997] on the tetrakaïdecahedral truss, reflect a case by case approach in the sense Zhu and al. have to adopt assumptions related to the reciprocal deformation of the beams within the lattice. The complexity of the task is reflected by the complexity of the calculations required for each specific considered architecture. A big advantage and superiority of the discrete homogenization technique lies in the automatic calculation of the effective behavior. This technique is solely based upon the geometrical representation of the truss; it allows in most cases (at least in a small displacements and strains framework) to derive closed form expressions of the effective moduli, explicitly reflecting the microscopic geometrical and mechanical parameters at the unit cell level.

In the present contribution, we elaborate a variant of the asymptotic homogenization technique recently developed by (Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Tollenaere and Caillerie [1998], Raoult et al. [2008]) in view of the calculation of the effective behavior of periodic lattices. This methodology is applied to various 2D lattices under compression and shear. In order to validate the effective moduli calculated from the asymptotic homogenization, a series of FE simulations has been performed for the 2D hexagonal truss, in a manner similar to Alkhader and Vural [2008]. The principle of those simulations has also been exploited by Roberts and Garboczi [2002]. The present results will further be compared with the reference results from Gibson and Ashby [1997], related to foams with flexion as the dominant deformation mode, and relying on an empirical argumentation essentially based on dimensional analysis (Despois et al. [2006]).

As a further motivation, a result announced in Gibson and Ashby relative to the principal deformation mode of beams for hexagonal lattice (with reference to honeycombs) under

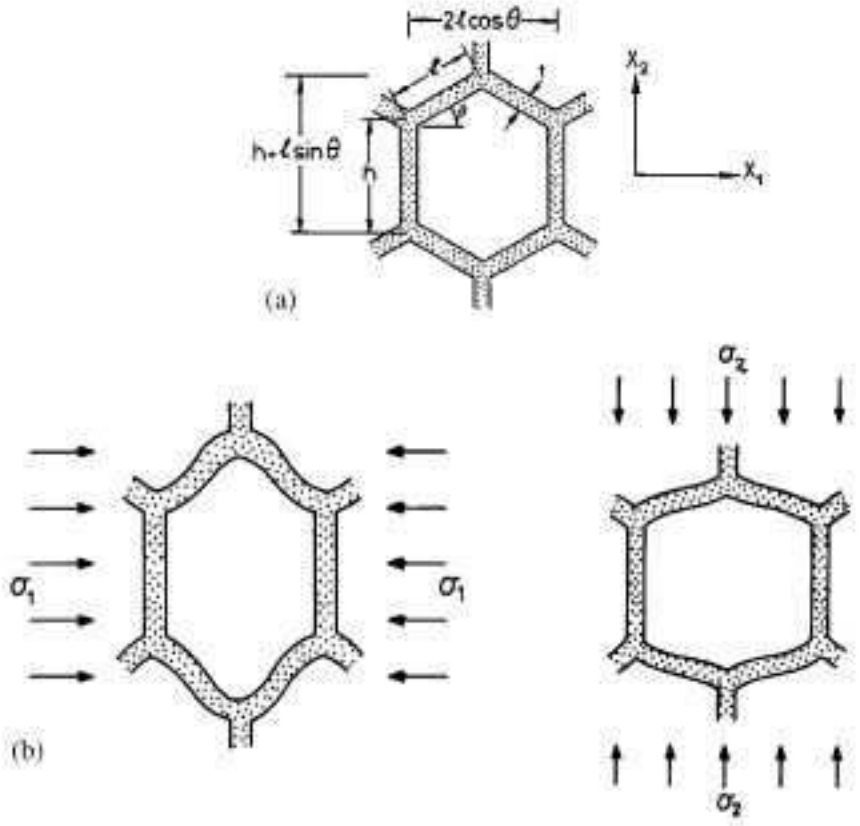


Figure 2.1.1: Deformation modes of a honeycomb structure according to Gibson and Ashby [1997]

compression is 'clamped without rotation of the boundaries' (Figure2.1.1); although this assumption is invalid in some loading cases, we adopt it in the present work.

Therefore, we shall primarily focus on loading the trusses considered below in tension / compression. However, we note that the assumption of non-rotating nodes directly influences the choice of the equivalent continuous medium, non-polar in the present work.

We herewith restrict us to kinematics to the linear geometrical framework, which is justified for most of the applications in view (foams and networks in the elastic regime). We further focus on the derivation of the elastic properties of foams, or more generally architectured materials endowed with a discrete and periodic topology at the micro level. The main steps of the discrete homogenization technique are first exposed, highlighting the novelty of the present approach. Derivations of effective mechanical properties are first achieved for 2D geometries, with closed form expressions being compared with FE simulations. The extension to 3D architecture is next envisaged, considering more particularly Kelvin foams, recognized as a prototype architecture of many foams.

2.2 Effective mechanical behavior of 2D lattices from discrete homogenization

Materials with cellular structure are widespread in nature and include wood, cork, trabecular bone. The microstructural features of cellular solids affecting their mechanical response are most easily observed in engineering honeycombs and foams, Gibson [2005]. Metallic and polymeric foams usually do not deform homogeneously under compression or multiaxial loading, and strain localization bands form in compression. The plateau observed on the overall load displacement curve results from the formation and propagation of such bands. The densification starts when all cell rows are crushed. These strain localization phenomena must normally be taken into account for the identification of a constitutive model, as well as the heterogeneous density field, which can be identified from tomography analysis. The typical response of foam under compression exhibits three main stages:

- An elastic phase limited to small deformations;
- A second plateau zone which is beneficial for shock absorption;
- A third phase of densification characterized by a strong increase of the loading.

The cellular architecture and the mechanical properties of the foam material are responsible of these remarkable properties; accordingly, any mechanical analysis of the behavior of foams consists of trying to link the overall properties of foams to their cellular architecture and to the mechanical properties of the underlying constitutive material (Gibson [2005]). The advance in manufacturing technique promises that, in the near future, the fabrication of functional cellular structures will be achieved with the desired cellular microstructure tailored to specific application in mind. In this perspective, it is essential to develop a detailed understanding of the relationship between mechanical response and the cellular microstructure (Alkhader and Vural [2008]).

Here we concentrate on the first deformation stage at low densities, when densification does not yet take place and the overall response may still be modeled as elastic.

2.2.1 Discrete homogenization: description of the method

Generally speaking, the discrete homogenization can be described as a mathematical method to derive the equivalent continuous medium behavior of a repetitive discrete structure made of elementary cells. This technique is inspired by the homogenization of periodic media developed since the early eighties (Bakhvalov & Panasenko, 1984, Panasenko, 1983, Sanchez, 1980); it has been recently applied by (Mourad [2003]), (Warren and Byskov [2002]). More recently, (Pradel and Sab [1998]) applied the discrete homogenization in combination with the energy method. The general idea at the base of the method is the periodic repetition of an elementary cell made of beams connected at nodes to define an infinite lattice; it may explained as follows. Consider a finite 2D (surface) or 3D structure, parametrized by a small parameter, the ratio between a characteristic length of the basic cell length to a characteristic length of the structure. Maintaining the reference area or volume fixed, one considers the limit situation of a continuous density of unit cells obtained when the small parameter tends to zero. In this limit, a continuum, equivalent in a certain sense to the

initial lattice, is obtained. To obtain this limit behavior, one does mathematically study the equilibrium of the lattice and the dependence of is governing equations versus the introduced small parameter. Asymptotic expansions of the nodal position, tensions and external forces are written and inserted in the equilibrium equations, preferably expressed in weak form. Taylor series expansion of the displacements and possibly rotational degrees of freedom are next inserted into these equilibrium equations. The discrete sums are finally converted in the limit of a continuous density of beams into Riemann integrals, thereby highlighting continuous stress and strain measures. We refer the reader to papers by Caillerie and Tolleneare regarding the more mathematical aspects and the implementation of the method, however restricting to lattices of articulated beams Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Tollenaere and Caillerie [1998], Raoult et al. [2008]. The focus in the present paper is on the geometrical linear framework (the beam orientation and length are supposed fixed), which will prove sufficient for the applications in view. The writing of the equivalent continuum behavior allows next to identify the equivalent properties (traction and shear moduli, Poisson's coefficient, density) of the homogenized lattice versus the lattice geometrical and mechanical properties.

The forthcoming sections will expose in a synthetic manner the principal steps of the discrete homogenization technique, as a variant of the method originally developed in (Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Tollenaere and Caillerie [1998], Raoult et al. [2008]). The essential modification brought to the methodology developed by previous authors is the the consideration of beam lattices, wich entails a specific definition adopted for the transverse force; this technical point will be developed in the paragraph 2.2.1.4.

2.2.1.1 First step: formulation of the equilibrium involving the stress vectors$\mathbf{S^i}$

To simplify subsequent technical developments, we assume nil body forces, and choose the virtual velocity field $\mathbf{v}$ such that it vanishes at the edges; hence, the weak form of equilibrium over a domain $\mathbf{\Omega}$ writes in terms of the Cauchy stress σ.

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla_x \mathbf{v} dx = 0 \tag{2.2.1}$$

with ∇_x the gradient with respect to the variable x, the double point denoting the double contraction of two second order tensors. A change of coordinates is performed in order to express the previous equation in a set of curvilinear coordinates $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$; we thereby follow the method exposed in Mourad [2003]. The spatial position of a material point P is written $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e_i}$ in Cartesian coordinates, as an expression of the vector function

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3) \tag{2.2.2}$$

A covariant basis in curvilinear coordinates can be defined as the set of vectors

$$\mathbf{e}^{\lambda}_{\mathbf{k}} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^i} \mathbf{e_i} \tag{2.2.3}$$

The contravariant basis vectors of the curvilinear coordinate system, $\mathbf{e}^i_{\lambda}$, are defined by

$$\mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{j}}^\lambda = \delta_j^i \tag{2.2.4}$$

with δ_j^i the Kronecker symbol. In order to obtain the expression of the stress tensor in generalized curvilinear coordinates, we make the change of variables $x = x(\lambda)$ in the equation (2.2.1); the Jacobian of this transformation is g, hence $dx = gd\lambda$. For a virtual velocity field $\mathbf{v}$, this coordinate change induces the following relations between the velocity gradients

$$\nabla_x \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}} \tag{2.2.5}$$

The equation (2.2.1) can then be expressed in the form

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_x \mathbf{v}) dx = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : (\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}}) g d\lambda = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}}) . \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} g d\lambda = 0 \tag{2.2.6}$$

One accordingly sets the stress vector as

$$\mathbf{S}^{\mathbf{i}} = g\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}} \tag{2.2.7}$$

The equilibrium equation follows from the equations (2.2.6) and (2.2.7) in terms of the stress vector $\mathbf{S}^{\mathbf{i}}$

$$\int_\Omega \mathbf{S}^{\mathbf{i}} . \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} d\lambda = 0 \tag{2.2.8}$$

From the definition (2.2.7) and the equilibrium equation (2.2.6), one can then express the force-stress tensor as the dyadic products of the stress vector $\mathbf{S}^{\mathbf{i}}$ with the position gradient $\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{\mathbf{i}} \otimes \mathbf{e}_{\mathbf{i}}^\lambda = \frac{1}{g} \mathbf{S}^{\mathbf{i}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{2.2.9}$$

We next calculate the stress vector $\mathbf{S}^{\mathbf{i}}$ from the homogenization of the beam's lattice equilibrium equations.

2.2.1.2 Second step: homogenization of the discrete equilibrium equations

As a prerequisite, we number the nodes and the beams and define a unit direction for these beams. We define the set $\mathcal{B}(\tilde{b})$, composed of beams numbered $\tilde{b}$ and the set of nodes $\mathcal{N}(\tilde{n})$ consisting of nodes numbered $\tilde{n}$. We also define the following three sets of beams $\tilde{b}$, $\mathcal{O}(\tilde{n})$, $\mathcal{E}(\tilde{n})$ et $\mathcal{E}\lceil(\tilde{n})$. In these sets, $\tilde{n}$ is the origin, end or side node respectively. We summarize some of the useful notations in Figure2.2.1.

We denote the force applied to a beam $\tilde{b}$ to the end node $\tilde{n}$ by $\mathbf{T}^{\tilde{b}}$. The balance equilibrium of each beam immediately implies that there is an opposite force $-\mathbf{T}^{\tilde{b}}$ acting on the origin node. Forces at the nodes of edges will be denoted $\mathbf{f}^{\tilde{b}}$. With these notations, one can write the equilibrium equation of the lattice

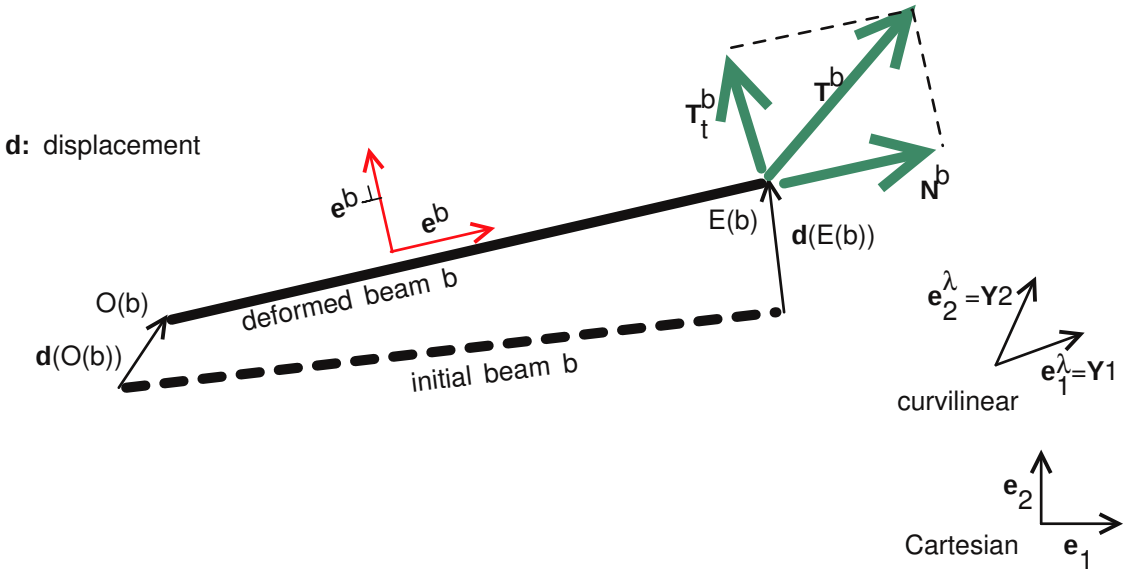


Figure 2.2.1: Kinematic and static variables for a beam element

$$\sum_{\tilde{b}\in\mathcal{O}(\tilde{n})} \mathbf{T}^{\tilde{\mathbf{b}}} - \sum_{\tilde{b}\in\mathcal{E}(\tilde{n})} \mathbf{T}^{\tilde{\mathbf{b}}} + \sum_{\tilde{b}\in\mathcal{E}\lceil(\tilde{n})} \mathbf{f}^{\tilde{\mathbf{b}}} = \mathbf{0} \tag{2.2.10}$$

We assume that no rotations occurs at the lattice nodes, and therefore no couple stresses acting on the lattice edges. These assumptions will be further discussed regarding their validity in the sequel. The previous equilibrium equation (2.2.10) is conveniently expressed in virtual power form

$$\sum_{\tilde{b}\in\mathcal{B}(\tilde{b})} \mathbf{T}^{\tilde{\mathbf{b}}} \cdot \left[\mathbf{v}\left(O\left(\tilde{b}\right)\right) - \mathbf{v}\left(E\left(\tilde{b}\right)\right)\right] = \mathbf{0} \tag{2.2.11}$$

Written in this form, the summation over all the beams is difficult to handle: we will instead rewrite the previous equation by decomposing this sum, changing the way the geometry of the lattice is represented. In order to describe an infinite lattice, we decompose the sets used above, $\mathcal{B}(\tilde{b})$ and $\mathcal{N}(\tilde{n})$ repeating on $\mathbb{Z}^3$ an elementary cell of the lattice, which we call reference cell. We hypothesize that in its deformed state the lattice is quasiperiodic. In the reference cell, the sets of nodes and beams are finite dimensional, and are named $\mathcal{N}_\mathcal{R}$ and $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ respectively. Thus, to any triplet $v^i = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{Z}^3$ (doublet in 2D), we associate a basic cell; hence, the nodes of the whole lattice can be described by the quadruplets $\tilde{n} = (n, v^1, v^2, v^3)$ in $\mathcal{N}_\mathcal{R} \times \mathbb{Z}^3$ and beams of the whole lattice can be described by $\tilde{b} = (b, v^1, v^2, v^3)$ in $\mathcal{B}_\mathcal{R} \times \mathbb{Z}^3$.

With these notations, we note that within the reference cell one can select the node of origin of a beam $O(\tilde{b})$ so that it belongs to the reference cell. This origin node can be represented by the quadruplet (n, v^1, v^2, v^3). Nevertheless, the end node $E(\tilde{b})$ does not necessarily

belong to the reference cell, but is necessarily included in an adjacent cell numbered by $(v^1+\delta^1, v^2+\delta^2, v^3+\delta^3)$. The triplet $(\delta^1, \delta^2, \delta^3) \in \mathbb{Z}^3$, and the end node either belongs to the reference cell or to a cell next to it: this means that in the general case $\delta^i \in \{-1, 0, 1\}$; these integers δ^i will be particularly useful in the discrete homogenization phase.

At this step, we can rewrite the equation (2.2.11) as a double sum

$$\sum_{v^i \in \mathbb{Z}^3 b \in \mathcal{B}_R} \sum \mathbf{T^b} \cdot [\mathbf{v}(O(b)) - \mathbf{v}(E(b))] = \mathbf{0} \tag{2.2.12}$$

We can decompose $\mathbf{T^b}$ in a normal and a transverse force, hence the principle of virtual power is

$$\sum_{v^i \in \mathbb{Z}^3 b \in \mathcal{B}_R} \sum \left(\mathbf{N}^b + \mathbf{T}_t^b\right) \cdot [\mathbf{v}(O(b)) - \mathbf{v}(E(b))] = \mathbf{0} \tag{2.2.13}$$

The discrete homogenization, like the periodic media homogenization, is based on asymptotic expansions of the kinematic and static variables versus a small parameter ε, ratio of a typical length characteristic of an elementary cell to a structural length. We consider that this small parameter $\varepsilon \to 0$. To homogenize, it is necessary to parameterize the entire structure by ε; this concerns the geometry as well as the constitutive behavior. We accordingly set the Lagrangian curvilinear coordinates as $\lambda^\varepsilon = \varepsilon v^i$.

The positions of nodes can then be defined by the vectorial function

$$\mathbf{R}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{R}^{n1}(\lambda^\varepsilon) + ... \tag{2.2.14}$$

With $\mathbf{R}^0(\lambda^\varepsilon)$ the leading term. We associate a function of the node displacement as

$$\mathbf{d}^\varepsilon(\tilde{n}) = \mathbf{d}^0(\lambda^\varepsilon) + \varepsilon \mathbf{d}^{n1}(\lambda^\varepsilon) + ... \tag{2.2.15}$$

From the definition of $\mathbf{R}^\varepsilon(\tilde{n})$, the position of the nodes, one obtains the following asymptotic expansion of the length of the beams (Mourad [2003])

$$l^{\varepsilon b} = \varepsilon l^{b0} + \varepsilon^2 l^{b1} + ... \tag{2.2.16}$$

We shall retain only the dominant term. The superscript '0' indicates that we consider the initial value before any deformation, in coherence with the small deformation framework. The superscript 'ε' indicates that we make the asymptotic expansion of the quantity considered. We consider that for the unit direction vector's of the beams, $\mathbf{e}^{\varepsilon b} = \mathbf{e}^{b0}$ is independent of ε, this means that these vectors are related to the assumptions of small perturbations.

The asymptotic expansion of virtual velocity $\mathbf{v}^\varepsilon$, is written by Taylor series expansion

$$\mathbf{v}^\varepsilon\left(O\left(\tilde{b}\right)\right) - \mathbf{v}^\varepsilon\left(E\left(\tilde{b}\right)\right) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon) - \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon\delta^{ib}) = -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial \lambda^i} \delta^{ib} + ... \tag{2.2.17}$$

Regarding the asymptotic expansion of the forces, we will use the mechanics of beams, considering an Euler-Bernoulli model. In the present 2D case, the unit vector $\mathbf{e_3}$ in Cartesian

coordinate system is normal to the planar lattice. A vector $\mathbf{e}^{b\perp}$ is introduced, as the unit transversal vector for beam b, viz

$$\mathbf{e}^{b\perp} = \mathbf{e_3} \wedge \mathbf{e^b} \tag{2.2.18}$$

The force exerted on beam b

$$\mathbf{T}^{\varepsilon\mathbf{b}} = N^{\varepsilon b}\mathbf{e^b} + T_t^{\varepsilon b}\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} \tag{2.2.19}$$

decomposes into the normal force

$$N^{\varepsilon b}\mathbf{e^b} = \frac{E_s S^{\varepsilon b}}{l^{\varepsilon b}} \left(\left(\mathbf{d}^{\varepsilon} \left(E\left(b\right)\right) - \mathbf{d}^{\varepsilon} \left(O\left(b\right)\right)\right) . \mathbf{e^b} \right) . \mathbf{e^b} \tag{2.2.20}$$

and a transverse force

$$T_t^{\varepsilon b}\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} = \frac{12 E_s I_z^{\varepsilon}}{\left(l^{\varepsilon b}\right)^3} \left(\left(\mathbf{d}^{\varepsilon} \left(E\left(b\right)\right) - \mathbf{d}^{\varepsilon} \left(O\left(b\right)\right)\right) . \mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} \right) . \mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} \tag{2.2.21}$$

E_s represents the Young's modulus of the beam material, $S^{\varepsilon b}$ is the beam section (the beam section is supposed rectangular, with a unit thickness). Another choice could have to be done without harming the demonstration. In the case of a rectangular section, the section of the beam is $S^{\varepsilon b} = t^{\varepsilon b}$. I_z is the quadratic moment of the beam.

The order in ε of the development of the section t^{ε} is obtained from the density ρ^* of the lattice, which is constant, independent of ε, scaled as

$$\rho^* \propto \frac{t^{\varepsilon b}}{l^{\varepsilon b}} \tag{2.2.22}$$

From this relation, it follows

$$t^{\varepsilon b} \propto l^{\varepsilon b} \tag{2.2.23}$$

If one develops this relation as the equation (2.2.16), we obtain

$$t^{\varepsilon b} = \varepsilon t^{b0} + \varepsilon^2 t^{b1} + .. \tag{2.2.24}$$

Retaining only the dominant term, we get the quadratic moment for a beam of rectangular section and unit thickness

$$I_z^{\varepsilon} = \frac{\left(\varepsilon t^{b0}\right)^3}{12} \tag{2.2.25}$$

Due to the presently adopted method which relies on beam mechanics, the transverse force differs from the one given in (Mourad [2003], Caillerie et al. [2006], Tollenaere and Caillerie [1998], Raoult et al. [2008]); the interest of the present method is explained in more details in the subsequent paragraph 2.2.1.4.

It remains to express the displacement difference between the extremity nodes of a beam; a Taylor series development leads to

$$\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(O\left(b\right)\right)=\mathbf{d}^{0}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\varepsilon\mathbf{d}^{O_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+... \tag{2.2.26}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(E\left(b\right)\right)=\mathbf{d}^{0}\left(\lambda^{\varepsilon}+\varepsilon\delta^{ib}\right)+\varepsilon\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}+\varepsilon\delta^{ib}\right)+...=\\ \mathbf{d}^{0}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{d}^{\mathbf{0}}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}+\varepsilon\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{2}\frac{\partial\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}+...=\\ \mathbf{d}^{0}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\mathbf{d}^{\mathbf{0}}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}+\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)\right)+...\end{aligned} \tag{2.2.27}$$

$$\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(O\left(b\right)\right)=\varepsilon\left(\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)-\mathbf{d}^{O_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\frac{\partial\mathbf{d}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}\right)+... \tag{2.2.28}$$

with$\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)$ and $\mathbf{d}^{O_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)$ the unknown displacements of the reference nodes within the unit cell. We show in section (2.2.1.3) how to solve these unknowns. In order to simplify the following developments we define

$$d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}=\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{d}^{\varepsilon}\left(O\left(b\right)\right)=\varepsilon\left(\mathbf{d}^{E_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)-\mathbf{d}^{O_{R}(b)1}\left(\lambda^{\varepsilon}\right)+\frac{\partial\mathbf{d}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}\right)+... \tag{2.2.29}$$

Inserting the equations (2.2.24), (2.2.25), (2.2.28), (2.2.16) in the equations defining the forces(2.2.20) and (2.2.21), one obtains

$$N^{\varepsilon b}\mathbf{e}^{\mathbf{b}}=\frac{E_{s}t^{b}}{l^{b}}(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}}\,\delta^{ib}).\mathbf{e}^{\mathbf{b}} \tag{2.2.30}$$

$$T_{t}^{\varepsilon b}\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp}=\frac{E_{s}\left(t^{b}\right)^{3}}{\left(l^{b}\right)^{3}}\left(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp}\,\delta^{ib}\right).\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} \tag{2.2.31}$$

If we further insert the last two equations in equation (2.2.19), we get

$$\mathbf{T}^{\varepsilon\mathbf{b}}=\frac{E_{s}t^{b}}{l^{b}}(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}}\,\delta^{ib})\mathbf{e}^{\mathbf{b}}+\frac{E_{s}\left(t^{b}\right)^{3}}{\left(l^{b}\right)^{3}}\left(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp}\,\delta^{ib}\right).\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp} \tag{2.2.32}$$

Finally, if we substitute equations (2.2.32) and (2.2.17) in(2.2.13), the following discrete weak form of equilibrium is obtained

$$\sum_{v^{i}\in\mathbb{Z}^{3}}\sum_{b\in\mathcal{B}_{R}}\left(\frac{E_{s}t^{b}}{l^{b}}(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}}\,\delta^{ib})\mathbf{e}^{\mathbf{b}}+\frac{E_{s}\left(t^{b}\right)^{3}}{\left(l^{b}\right)^{3}}\left(d\mathbf{D}^{\varepsilon}{}_{EO}.\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp}\,\delta^{ib}\right).\mathbf{e}^{\mathbf{b}\perp}\right)\cdot\left[\varepsilon\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial\lambda^{i}}\delta^{ib}\right]\;=\;\mathbf{0} \tag{2.2.33}$$

We can write this equation in the 2D case in the form

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^3}\varepsilon^2\sum_{i\in\{1,2\}}\mathbf{S^i}\cdot\left[\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\right]=\mathbf{0} \tag{2.2.34}$$

In this equation the vector $\mathbf{S^i}$ can be defined as

$$\mathbf{S^i}=\sum_{b\in\mathcal{B}_R}\left(\frac{E_s t^b}{l^b}(d\mathbf{D}^\varepsilon{}_{EO}.\mathbf{e^b}\,\delta^{ib})\mathbf{e^b}+\frac{E_s\left(t^b\right)^3}{\left(l^b\right)^3}\left(d\mathbf{D}^\varepsilon{}_{EO}.\mathbf{e^{b\perp}}\,\delta^{ib}\right).\mathbf{e^{b\perp}}\right)\delta^{ib} \tag{2.2.35}$$

Hence, $\mathbf{S^i}$ can be expressed in the condensed form

$$\mathbf{S^i}=\sum_{b\in\mathcal{B}_R}\left(\mathbf{N}^b+\mathbf{T}^b_t\right)\,\delta^{ib} \tag{2.2.36}$$

We next use the following result (Mourad [2003]) to transform the discrete into a continuous equilibrium formulation: "for any sufficiently regular function g, the quantity $\varepsilon^2\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^3}g(\varepsilon v^i)$ can be interpreted as a Riemann sum of an integral over Ω. It tends to $\int_\Omega g(\lambda)d\lambda$ as ε goes to 0". Thus, using this proposition, the equation (2.2.34) can be written

$$\int_\Omega\mathbf{S^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}d\lambda \tag{2.2.37}$$

From the stress vectors $\mathbf{S^i}$, and using equation (2.2.9), one can then formulate the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ as

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{g}\mathbf{S^i}\otimes\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda^i} \tag{2.2.38}$$

Observe that the macroscopic variables naturally follow from the homogenization technique, and there is no need to define the macroscopic fields as averages of their microscopic counterpart, as in classical homogenization methods.

The automatic treatment of the steps of the discrete homogenization has been implemented in a Maple code; these steps are summarized in the following algorithm 4.1. In the examples to be treated next, only lattices with fixed unit vectors in the curvilinear system have been considered. To avoid confusion in notations, the vectors of the curvilinear coordinates are denoted $\mathbf{Y_i}=\mathbf{e}^\lambda_\mathbf{i}$, and the Cartesian vectors $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$. The lattice topology can be modified by simply rewriting a text file describing its geometry and connectivity.

1. Initialization of the tables of initial data. Definition of the function $\mathbf{R}$ such that : $\mathbf{x} = \mathbf{R}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$
2. Transformation of the expression $\left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{e_1^\lambda}, \mathbf{e_2^\lambda})} \mapsto \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})}$. (to avoid confusion in examples and the Maple code, the vectors of curvilinear system are denoted $\mathbf{Y_i} = \mathbf{e_i^\lambda}$, the vectors of Cartesian system are denoted $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$).
3. Decomposition of the resultant $\mathbf{T^b} = \mathbf{N}^b + \mathbf{T}_t^b$, sum of the normal and transverse forces $\mathbf{N}^b, \mathbf{T}_t^b$, versus the displacement unknowns $\mathbf{d}^{E_R(b)1}(\lambda^\varepsilon)$, $\mathbf{d}^{O_R(b)1}(\lambda^\varepsilon)$ and the first order Taylor series expansions of $\mathbf{d}^0$.
4. Solution of the self-equilibrium equations (equilibrium at each node) $\sum_{b \in \mathcal{B}_R} \mathbf{T^b} \cdot [\mathbf{v}(O(b)) - \mathbf{v}(E(b))] = \mathbf{0}$
5. Expression of the stress vector $\mathbf{S^i} = \sum_{b \in \mathcal{B}_R} \left(\mathbf{N}^b + \mathbf{T}_t^b\right) \delta^{ib}$
6. Calculation of the stress tensor $\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g} \mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$
7. Calculation of effective properties

Algorithm 2.1 Algorithm for the automatized discrete homogenization

2.2.1.3 Self-equilibrium equations and evaluation of the displacement unknowns in the case of internal nodes

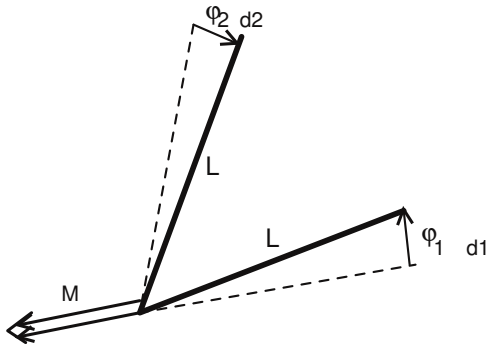
The truss equilibrium implies the unit cell (or reference cell) equilibrium. The equation (2.2.12) can be rewritten in the form

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_R} \mathbf{T^b} \cdot [\mathbf{v}(O(b)) - \mathbf{v}(E(b))] = \mathbf{0} \tag{2.2.39}$$

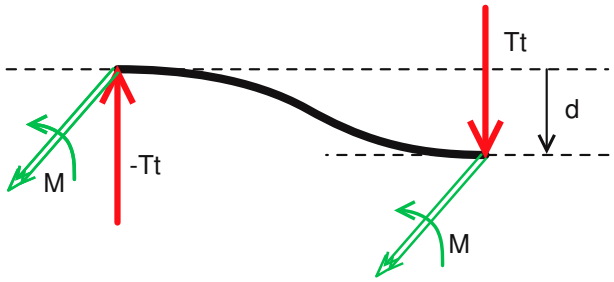
with $\mathcal{B}_R$ the list of nodes for the reference cell. Equation (2.2.39) can be expanded into as many independent equations as internal nodes, since it applies for any nodal velocity $\mathbf{v}(.)$; the resulting system of equations allows to solve for the unknown displacements $\mathbf{d}^{E_R(b)1}(\lambda^\varepsilon)$ and $\mathbf{d}^{O_R(b)1}(\lambda^\varepsilon)$ of the reference nodes within the unit cell.

2.2.1.4 Interest of the adopted definition of the transverse force $\mathbf{T}_t^b$

The method developed in Mourad [2003] and Caillerie et al. [2006] uses the moment equilibrium equation to replace the expression of the transverse forces $\mathbf{T}_t^b$ in the equation (2.2.13) by the couple M generated by the angular variation between two consecutive beams. This modeling approach is customary in the field of applications considered by the authors, namely molecular dynamics or interatomic physics, with an application to carbon nanotube's microstructure. The authors adopt the mechanics of interacting bars, whereas we choose



(a) Couple due to the angular variation between two bars (Caillerie et al. [2006])



(b) Couple generated by the displacement difference between the end nodes of the same beam (present work)

Figure 2.2.2: Differences between the couples in the present method and in Caillerie et al. [2006]

beam mechanics for the description of the lattice behavior. In our treatment, the expression of the couple stresses and thereby of the transverse forces is linked to the difference of displacements between the extremity nodes of a given beam. Figure 2.2.2 shows the difference between both methods (considering the linearized method adopted in Caillerie et al. [2006]). In present approach the couple is a fonction of the displacement difference between the end nodes of a beam. Caillerie and al. use the angular variation between two beams in Caillerie et al. [2006].

Moreover, in order to be able to use the rotational equilibrium equations, the previous authors identify the rotation of the beam to a rigid body motion, implying the assumption of beams without internal transverse force. We adopt, to the contrary, the beam theory, with the couple considered as an internal moment.

The assumption adopted in the present treatment of couples simplifies the problem formulation, since one does not need the moment equilibrium to solve the problem, assuming no node rotations. This method offers additionally interesting perspectives: when considering node rotations, the couple equilibrium equations shall furnish additional equations allowing

the extension of the present model to the construction of micro-polar continua by homogenization, which seems impossible with the method developed by Caillerie et al. [2006].

2.2 Test on a 2D "hexagonal" or "honeycomb" lattice under compression

The geometry of the 2D honeycomb lattice is shown in the previous Figure2.1.1, assuming for a regular hexagonal lattice the geometrical constraints $h = l$ and $\theta = 30°$. The effective Young's modulus, Poisson coefficient and relative density are given versus the microbeam length l, width t and the microbeam modulus E_s

$$E^* = \frac{4E_s t^3\sqrt{3}}{3l(l^2+3t^2)} \tag{2.2.40}$$

$$\nu_{12}^* = \frac{l^2-t^2}{l^2+3\,t^2} \tag{2.2.41}$$

$$\rho^* = \frac{2}{3}\frac{t\sqrt{3}}{l} \tag{2.2.42}$$

One can observe that in the case of slender beams (beams with a large length to width ratio, viz $l \gg t$), the previous expression of the effective traction modulus (2.2.40) becomes $E^* = \frac{4E_s t^3\sqrt{3}}{3l^3}$, which is identical to the formula obtained by various authors (Gibson [2005], Gibson and Ashby [1997]). One can further explore a wider range of beam length to width ratio; we focus on ratios that are comparable or less than unity. The Figure2.2.3 shows a discrepancy of the effective properties with the Gibbson and Ashby results: for a ratio about 5, the relative error is about 10%, and it further increases with decreasing values of l/t. Note, however, that in this case the initial assumption of slender beams looses its validity.

A numerical simulation has been performed, in order to test whether the homogenized expression of the modulus, incorporating compression effects, is more accurate than the Gibson and Ashby formula Gibson [2005], Gibson and Ashby [1997]. The mechanical properties of aluminum have been adopted for the microbeams of the lattice, viz

$E_s = 72000\,N/mm^2$

$\nu = 0.33$

To minimize edge effects inherent to such simulations on finite domains, we use a lattice with 16x16 cells (judged as including a sufficiently large number of cells). The edge condition's consists of blocked rotations, the node at the bottom left is fixed, with all bottom nodes having a fixed vertical displacement (Figure 2.2.4). Both a Bernoulli type element (no shear, Abaqus beam element B23), or a Timoshenko type element incorporating shear (Abaqus element B22), have been considered. This last element is more adequate in the case of beams with a relatively small length to width ratio. The considered sample being simulated represents an

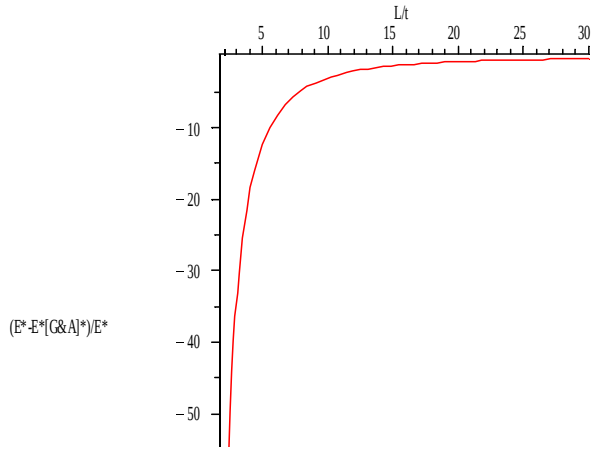


Figure 2.2.3: Evolution of the relative value (in percent) between the effective modulus for a hexagonal lattice in (Gibson [2005], Gibson and Ashby [1997]) and the homogenized modulus, vs. the ratio L/t.

area of 1mm^2, with a relative density $\rho^* = 0.15$, corresponding to beam elements with length 0.0385 mm and width 0.005 mm, endowed with a rectangular section. FE simulations with a higher density $\rho^* = 0.24$ will also be performed (the width is 0.008 mm), corresponding to a length over width ratio of 5. The FE results of virtual compression tests are exploited in terms of the equivalent modulus (normalized to the material modulus) and Poisson's ratio; considering the external nodes (average of two nodal values on each edge), the following definitions of the numerical homogenized properties are adopted

$$\frac{E^*}{E_s}_{(FE)} = \frac{\sigma_{22}}{\varepsilon_{top} E_s} \tag{2.2.43}$$

$$\nu^*_{12(FE)} = \frac{\varepsilon_{lateral}}{\varepsilon_{top}} \tag{2.2.44}$$

with self explanatory notations. As the linear dimension of the cube is 1 mm, and since the modulus of the microbeam E_s is expressed in units of N/mm, the longitudinal and lateral sample deformations follow from the edge displacements as

$$\varepsilon_{top} = U2_{topnode} \tag{2.2.45}$$

$$\varepsilon_{lateral} = U1_{rightnode} - U1_{leftnode} \tag{2.2.46}$$

$U1$, $U2$ denote the horizontal and vertical displacements, respectively.

The FE results (Figure 2.2.5) as apparent from the detailed view of the mesh distortion (see the insert of Figure 2.2.5b) show that the initial assumption related to the deformation

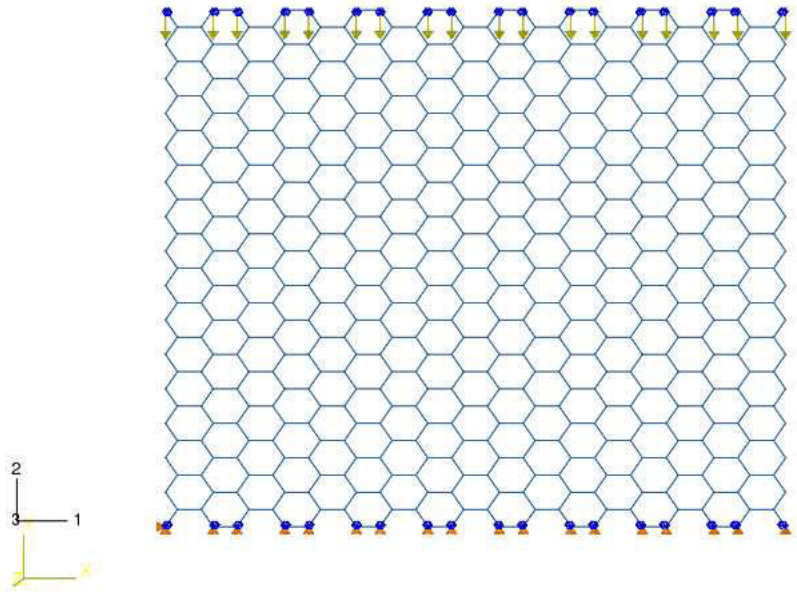
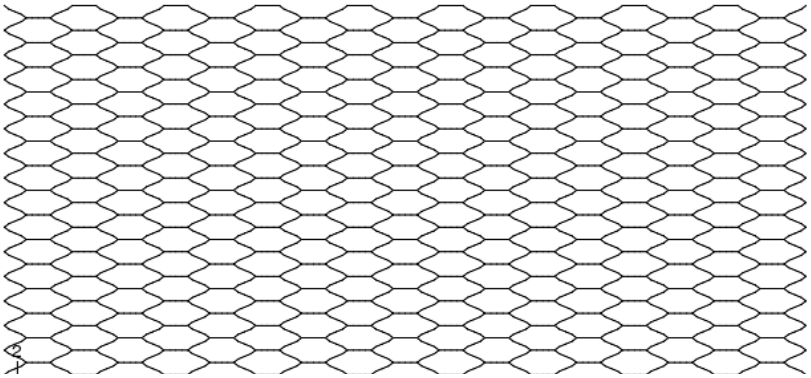
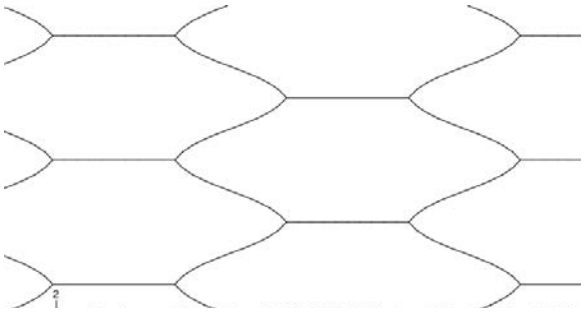


Figure 2.2.4: Geometry of the hexagonal truss and its boundary conditions



(a) FE simulation of the hexagonal lattice under compression



(b) Zoom on the microbeam deformation

Figure 2.2.5: Hexagonal lattice under compression

Beam width and element type	Homogenized properties (this work)	FE results	G&A results
Bernoulli, t=0.005mm	$E^* = 347$MPa, $\nu_{12}^* = 0.94$	$E^* = 355$MPa, $\nu_{12}^* = 0.97$	$E^* = 364$MPa, $\nu_{12}^* = 1$
Bernoulli, t=0.008mm	$E^* = 1321$MPa, $\nu_{12}^* = 0.85$	$E^* = 1368$MPa, $\nu_{12}^* = 0.88$	$E^* = 1492$MPa, $\nu_{12}^* = 1$
Timoshenko, t=0.005mm	$E^* = 347$MPa, $\nu_{12}^* = 0.94$	$E^* = 338$MPa, $\nu_{12}^* = 0.97$	$E^* = 364$MPa, $\nu_{12}^* = 1$
Timoshenko, t=0.008mm	$E^* = 1321$MPa, $\nu_{12}^* = 0.85$	$E^* = 1222$MPa, $\nu_{12}^* = 0.90$	$E^* = 1492$MPa, $\nu_{12}^* = 1$

Table 2.1: Results obtained for the mechanical properties of a hexagonal lattice

mode of the microbeams in the truss is validated: there is obviously no rotation of the edge nodes in this compression loading mode.

2.2.1.5 Comparison of effective homogenized properties with FE results and literature values

The homogenized elastic properties are compared with FE results and to the Gibson and Ashby Gibson and Ashby [1997] results in the Table 2.1.

This Table 2.1 highlights the following points:
- Homogenized properties are closer to the FE values, and a discrepancy with the Gibson and Ashby results is observed for both densities.
- The evolution pictured in Figure2.2.3 reflects the discrepancy between the analytical results of Gibson and Ashby and FE results.
- A supplementary effect due to the micro-beam shear exists, which cannot be neglected when the length to a width ratio is less than 5 (for a beam with width t=0.008). This effect is not taken into account by the present code, based on a Bernoulli beam element.

2.2.2 A mixed flexional extensional lattice: the 2D "OctogonMixed" lattice

Since a shear loading is prone to induce flexion (whereas no flexion will generally accompany compression tests), we have conceived and generated a 2D 'OctogonMixed' lattice. This lattice first illustrates the power of the asymptotic homogenization technique, in comparison to other approaches, like the energetical method, which may not work for complex lattice topologies. In the discrete homogenization, we will not use assumptions of average quantities on a cell or assumptions related to the mathematical form of displacement fields in the unit cell. We rather use the mechanical equilibrium at the nodes; this improves the consistency of results from a mechanical point of view. Perhaps more importantly, this lattice is novel in itself, since it can represent a mixed continuous flexional / extensional behavior, when the topology is varied according to a process being described in the sequel.

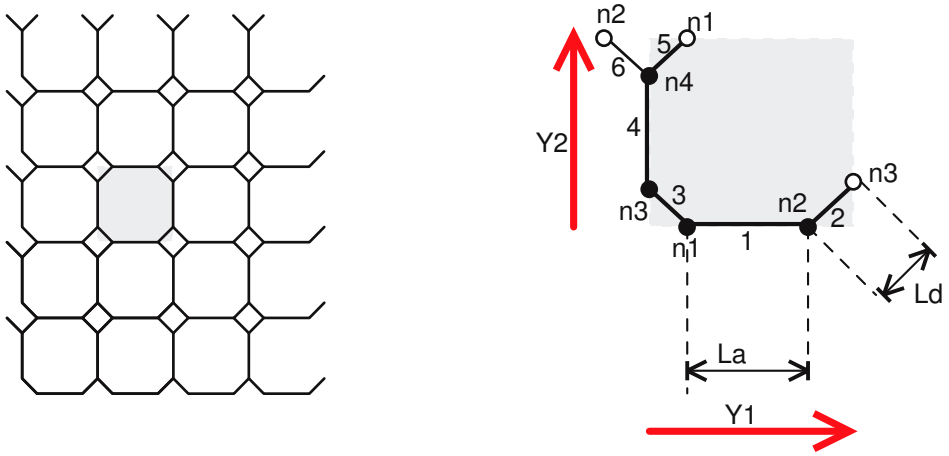


Figure 2.2.6: The"OctogonMixed" lattice. (The nodes with a solid circle belong to the reference cell. The nodes with a hollow circle belong to adjacent cells)

2.2.2.1 Homogenized properties

A new lattice having the ability to account in a flexible manner to both extensional and flexional behavior has been conceived (Figure2.2.6), coined the "OctogonMixed" lattice.

The relative length of diagonal versus axial beams has been parametrized by the scalar r

$$L_a = (1 - r) \cdot L \tag{2.2.47}$$

$$L_d = r \cdot L/\sqrt{2} \tag{2.2.48}$$

with L_a length of vertical and horizontal beams, and L_d length of diagonal beams.

Thereby, one can span a wide spectrum of behaviors, from purely extensional ones with $r = 0$ corresponding e.g. to the tetragonal lattice, to a purely flexional behavior when $r = 1$, corresponding to a 'diamond' type lattice; intermediate values of the parameter r describe a lattice with a mixed flexional and extensional behavior. The width t_a of the axial beams has here been taken as $t_a = t_d/10$. The width of diagonal beams is denoted $t = t_d$. As regard to the boundary conditions, the edge nodes are clamped and no rotational d.o.f. of the nodes are considered. The homogenized properties are obtained as follows

$$E_1^* = 2\,\frac{kld\ kla\ kpd}{kla\ kld + 2\,kld\ kpd + kla\ kpd} \tag{2.2.49}$$

$$\nu_{12}^* = \frac{kla\ (kld - kpd)}{kla\ kld + 2\,kld\ kpd + kla\ kpd} \tag{2.2.50}$$

$$\rho^* = \frac{1/5\ (1-r)\, Lt + 2\, rL\sqrt{2}t}{L^2} \tag{2.2.51}$$

The same properties result for the second axis, due to the isotropy of the equivalent continuum material. The variables $k_{la} = k_{ld} = E_s t_i / L_i$ in the expressions above are the axial moduli of the microbeams, with t_i, L_i their width and length, respectively, and $k_{pa} = k_{pd} = 12 E_s I_z / L_i^3$ the flexion moduli.

2.2.2.2 Comparison with FE results

The geometrical and mechanical (aluminum) characteristics are those of the previously described honeycomb lattice.

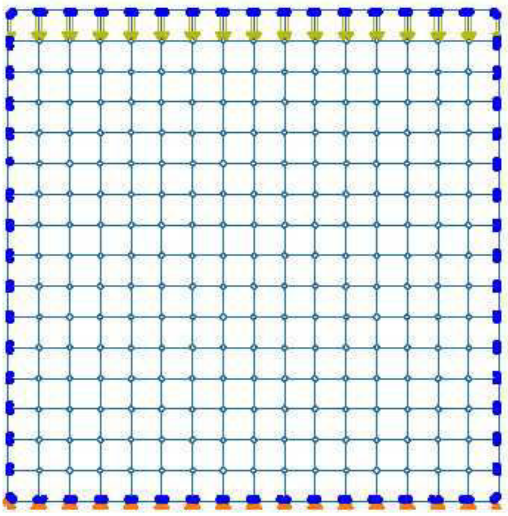
In order to avoid the critical buckling load (given by $F_c = 4\pi E_s I / L^2$ in a bi-clamped configuration), a distributed compressive load of 1N / mm has been considered. The edge (boundary) conditions are blocked rotations on the external edges, the left bottom node fixed, and the other bottom nodes have a fixed vertical displacement. The Bernoulli type element is selected, so as to match the FE mesh with the discrete topology of the lattice, adopting 3 elements per beam. The sample is a 2D cube with dimension 1x1 mm^2, with a constant density $\rho^* = 0.15$. In order to avoid edge effects, one considers a 16x16 cell lattice, with edge beams having a width divided by a factor two, compatible with the applied loading. The equivalent elastic properties are defined similarly to the honeycomb lattice, according to the following formulas (σ is the compression load)

$$\frac{E^*}{E_s}_{(FE)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_{top} E_s} \tag{2.2.52}$$

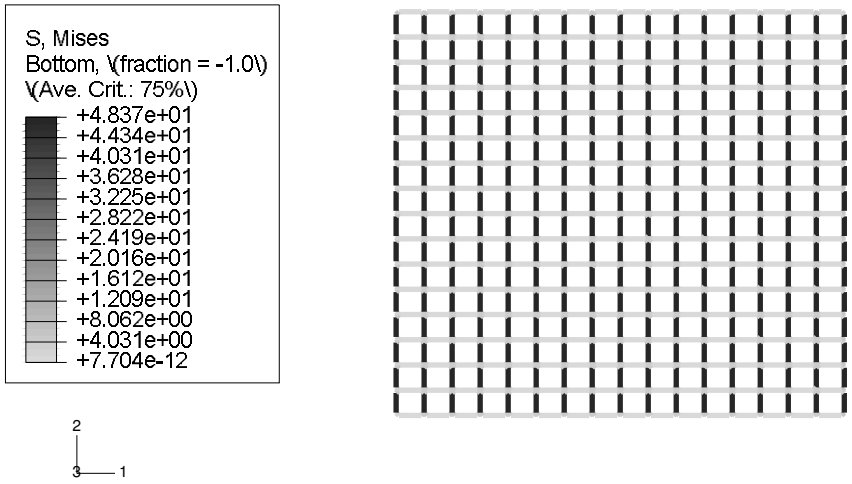
$$\nu^*_{12(FE)} = \frac{\varepsilon_{lateral}}{\varepsilon_{top}} \tag{2.2.53}$$

As the cube has a linear dimension 1 mm, and the modulus of the microbeam E_s is expressed in N/mm, the longitudinal and transversely strains are defined as before. Observe that the homogenized modulus in the compression direction (y) is presently obtained, viz $E_2 = E^*$. Simulation results for this lattice are shown in Figure 2.2.7, 2.2.8 and 2.2.9.

The distribution of the stresses reflects the progressive change of the deformation mode of this truss from dominant extension (for r=0.2: the stresses are distributed mostly in the horizontal and vertical beams) to dominant flexion (for $r = 0.8$). For the intermediate situation ($r = 0.5$), the stresses are distributed in a relatively uniform manner in both axial and transverse beams, witnessing this truss has no more dominant deformation mode. Homogenized and FE simulated moduli are compared in the Table 2.2.



(a) loads



(b) stress distribution

Figure 2.2.7: OctogonMixed lattice. Von Mises stress distribution. $r = 0.2$

Relative length of diagonal versus axial beams	Effective properties from homogenization	FE results
$r = 0.2$	$E^*/E_s = 0.0255\, \nu_{12} = -0.00464$	$E^*/E_s = 0.0255\, \nu_{12}^* = -0.00464$
$r = 0.5$	$E^*/E_s = 0.0133\, \nu_{12} = 0.279$	$E^*/E_s = 0.0133\, \nu_{12}^* = 0.279$
$r = 0.8$	$E^*/E_s = 0.00276\, \nu_{12} = 0.891$	$E^*/E_s = 0.00276\, \nu_{12}^* = 0.891$
$r = 1$	$E^*/E_s = 0.000839\, \nu_{12} = 0.989$	$E^*/E_s = 0.000839\, \nu_{12}^* = 0.989$

Table 2.2: Results for OctogonMixed lattice

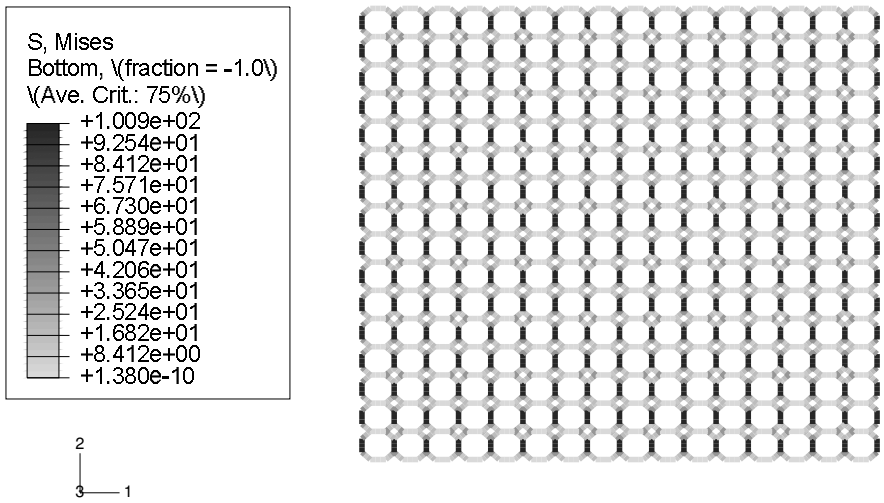


Figure 2.2.8: OctogonMixed lattice. $r = 0.5$. Von Mises stress distribution

The Table 2.2 shows identical results, which validates the calculation steps of the discrete homogenization for this lattice. Since the truss is parametrized by the scalar r, allowing a transition from a lattice working under pure compression to pure flexion, it is interesting to record the evolution of the effective modulus (normalized by the microbeam modulus) versus the parameter r. Considering a constant density, the Figure2.2.10a shows that flexional trusses are considerably less rigid compared to trusses working in traction/compression. This behavior may have important consequences as to the mechanical response of a lattice under traction/compression presenting damaged beams.

It is interesting to note from the Figure2.2.10b that the lattice may exhibit a slightly negative value of the Poisson coefficient, due to the behavior of the diagonal beams of the diamond structure.

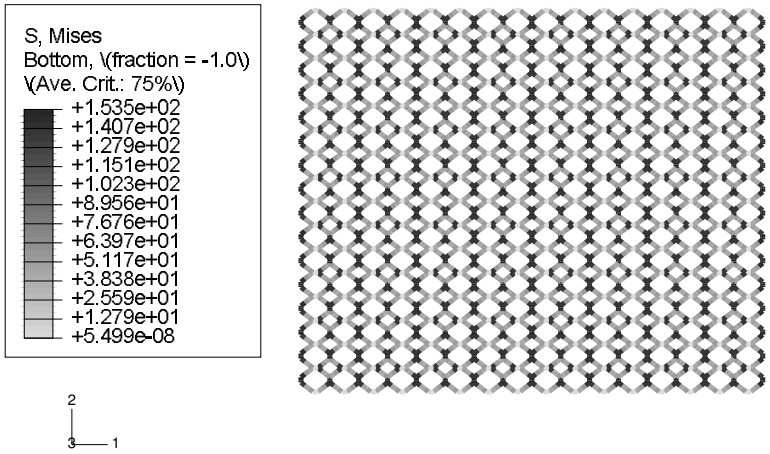
It is worthwile recording the evolution of the coefficient n, according to Fig.2.2.11: numerous authors in the literature propose in order to simplify the lattice calculations a generic formula of the type

$$E^* = C\, E_s(\rho^*)^n \tag{2.2.54}$$

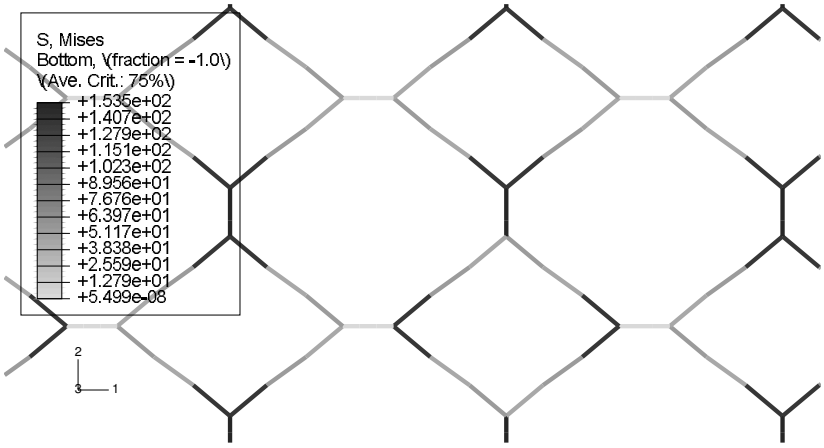
with C constant.

In Gibson [2005], Gibson and Ashby [1997], the values $n = 2$ (the effective modulus scales as the square of the lattice density) and C 1 are adopted for the 2D hexagonal and the 3D tetrakaïdecahedron lattice.

Although these values are convenient for specific lattices, it becomes clear that they do not reflect the true complex behavior of more general lattices, as the present one: the Figure2.2.11 shows that it is not possible to assign a fixed value for the exponent n. This is further confirmed by Roberts and Garboczi [2002], who state that experiments lead to values

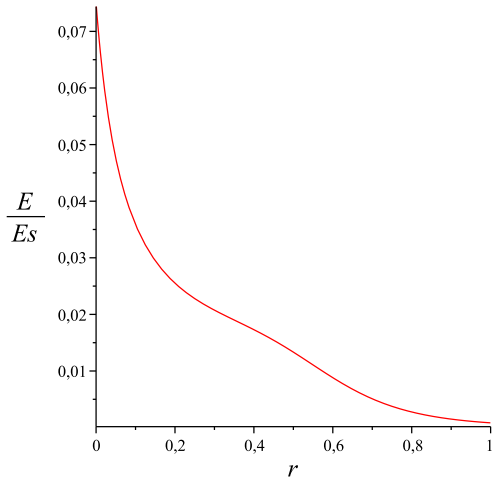


(a) stress distribution

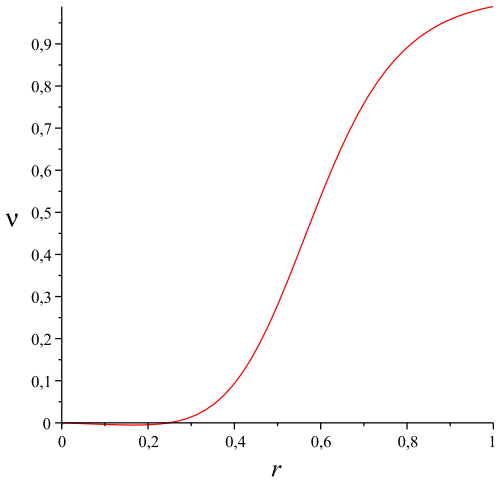


(b) Von Mises stress distribution. zoom from previous Fig.

Figure 2.2.9: OctogonMixed lattice. $r = 0.8$. Von Mises stress distribution



(a) Evolution of the Young's modulus E^*/E_s, of the OctogonMixed lattice, when moving from square to diamond lattice



(b) Evolution of the Poisson coefficient of the OctogonMixed lattice, when moving from square to diamond lattice, at constant equivalent density $\rho^* = 0.15$

Figure 2.2.10: Evolution of homogenized elastic properties versus parameter r

of the exponent in the range $1 < n < 4$, with a dependency of the equivalent modulus upon density being rather obscure.

As for the hexagonal truss, inconsistent effective properties are obtained under a shear test, as reflected by the compliance matrix

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix} \tag{2.2.55}$$

with $S_{11} = S_{22} = \frac{kla.kld+2.kpd.kld+kla.kpd}{2(kld.kla.kpd)}$, $S_{21} = S_{12} = S_{34} = S_{43} = -\frac{kld-kpd}{2(kpd.kld)}$ and $S_{33} = S_{44} = \frac{kpa.kld+kpa.kpd+2.kpd.kld}{2(kpa.kld.kpd)}$

(We recall that the variables $k_{la} = k_{ld} = E_s t_i/L_i$ are the axial moduli, and $k_{pa} = k_{pd} = 12E_s I_z/L_i^3$ the flexion moduli)

Due to the mechanical equilibrium of the cell, the coefficient S_{33} and S_{43} should be equal, as well as coefficients S_{34} and S_{44}. Hence, inconsistent expressions of the shear modulus G will result, due to the too restrictive boundary conditions, that prevent edge rotations. This points towards the need to enhance the kinematics and the statics of both the lattices and

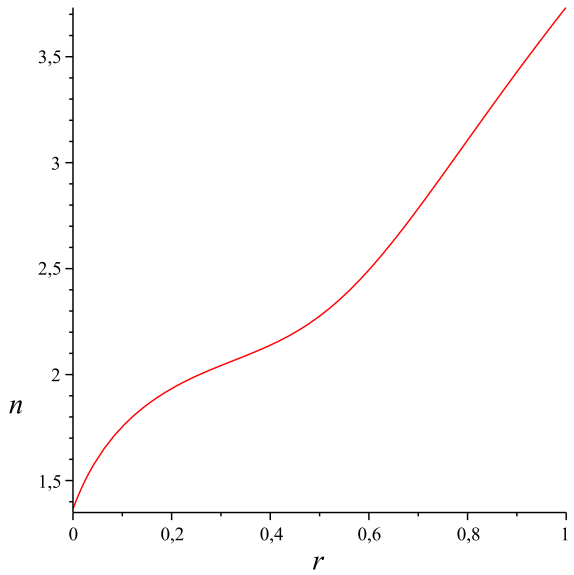


Figure 2.2.11: Evolution of the exponent n, as $\frac{E}{E_s} = (\rho^*)^n$ for the OctogonMixed lattice when moving from square to diamond lattice, at constant relative densityρ^*=0.15

their equivalent continuum to account for rotational d.o.f., especially when shear loadings are involved.

2.2.3 A proposal for classification of lattices with respect to rotations

Lattices may be classified with respect to the consideration of rotational d.o.f., according to the nature of the applied loading. The equivalent continuum model must reflect the mechanical behavior - and especially the deformation modes - of the underlying microscopic discrete material: this coherency has to be reflected in the choice of the kinematic descriptors at the macro scale, so that the macroscopic kinematics matches the microscopic one. In particular, and as indicated in the previous examples, the consideration of rotational microscopic d.o.f. points towards the consideration of a micropolar continuum model at the macroscopic level.

In order to substantiate the argumentation, let write the fundamental energy principle for beams in the absence of torsion and forces, and with moments only applied to the boundaries Pedro et al. [2004]

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum\left(F_i\delta_i + C_i\alpha_i\right)}_{\text{Clapeyron's formula}} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M_f^2}{EI}\right)ds \tag{2.2.56}$$

This equality relates (twice) the internal work of the force and moment of flexion, viz the variables N, M_f respectively, to the external work of the applied force and couple, the variables Fi, Ci respectively (working in the displacement and rotation variables (δi,αi) respectively). Due to the virtual nature of the kinematic variables in the previous equation, it appears that the absence of boundary rotations does not induce a corresponding energetic term involving flexion: hence, one may assume the absence of node rotation when no flexion is applied to the boundaries of the sample. Accordingly, the present argumentation together with the previous examples induces the following classification of lattices

- Isostatic trusses (according to the generalized Maxwell criterion; most of the time the trusses are triangulated) without external moments: a non polar model is sufficient;

- Non isostatic trusses with flexion moments / clamped beams / no edge rotation: a non polar model is sufficient;

- Trusses with flexion moments and edge nodes rotation: a micropolar model is then needed.

2.3 Extension to 3D: case of the Kelvin foams

The extension of the discrete homogenization to 3D has been exemplified for the tetrakaïdecahedral truss, a lattice considered as descriptive for the so called Kelvin foams, which still foster many studies nowadays. The reason of this interest stems from the fact that it models in a relatively faithfull manner the geometry of various foams (polymeric and metallic), such as polyurethane or nickel foams (Figure2.3.1).

From a technical point of view, one specific difficulty in extending the discrete homogenization to 3D is the passage from the local referential of the beam to the global referential of the whole structure (Figure2.3.2).

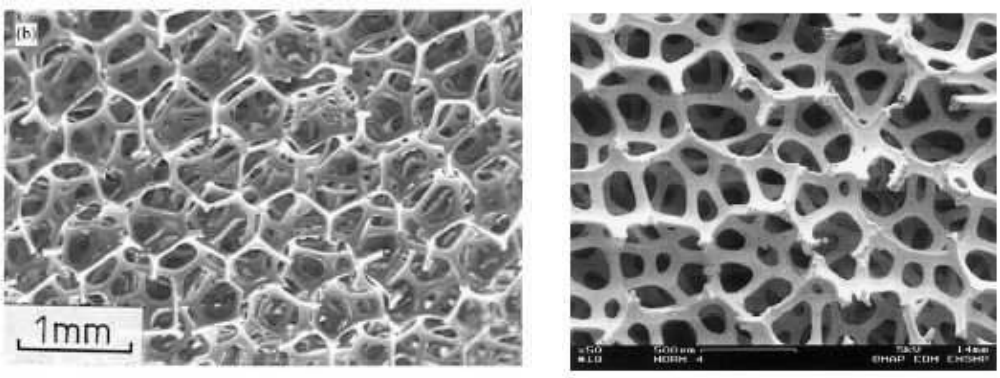
Let us consider a beam aligned with x in its local referential; the passage to the global referential is obtained by the combination of a rotation along z, followed by a rotation along x. One has accordingly

$$R_z = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}$$ [1]

This delivers the transition matrix as

$$P_{beam\to structure} = R_x R_z = \begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha & -s_\beta \\ s_\beta s_\alpha & s_\beta c_\alpha & c_\beta \end{bmatrix} \tag{2.3.1}$$

1. c_i indicates cos(i) and s_i sin(i)



(a) PU foam Gibson [2005] (b) nickel foam (Badiche et al. [2000])

Figure 2.3.1: Examples of various foams with an architecture close to the tetrakaïdecahedral truss

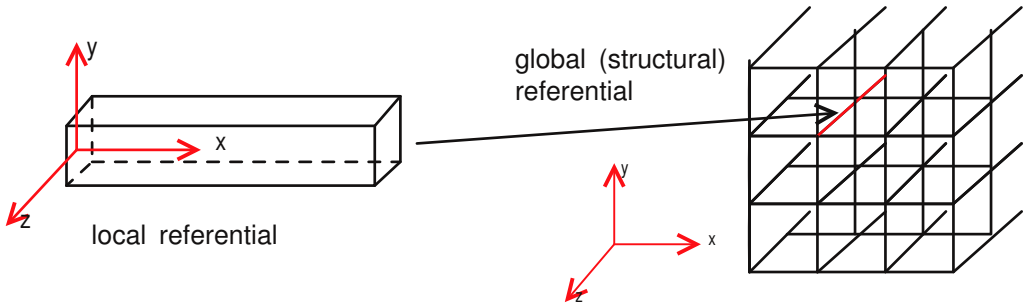


Figure 2.3.2: Transition from the local beam referential to the structural referential

which has to applied to the three axis of the local referential of the beam. Observe that the beam is here endowed with identical quadratic moments Ix and Iz; otherwise, one would need to add a rotation in the transition matrix. The technical complexity of calculating the effective properties from the lattice geometry and mechanical parameters has here been reduced by the implementation of the steps of the asymptotic homogenization in a Maple code specifically devoted to this purpose. This constitutes a novel aspect in the present work, as it allows the calculation of the effective properties of any truss in a 2D or 3D geometry. As pointed out in the introductory section, such a predictive tools remedies the deficiencies of the classical approaches, which are generally not able to perform the necessary calculations in a reliable manner, or rely on special assumptions to overcome those difficulties.

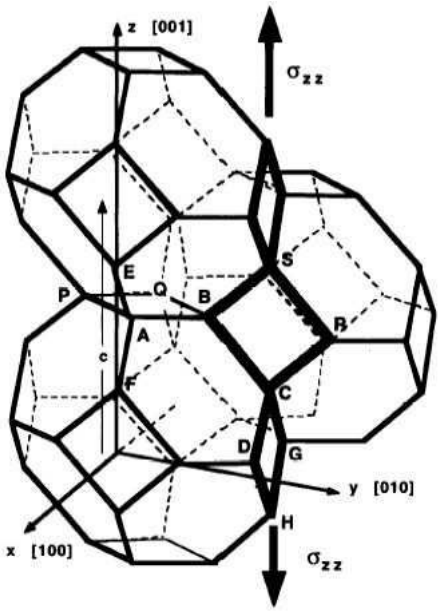


Figure 2.3.3: Modified tetrakaïdecahedron with planar facets (Zhu et al. [1997])

2.3.1 Effective behavior of the "Tetrakaïdecahedral" truss (Kelvin foams)

The tetrakaïdecahedron is considered in the form of a 'BCC lattice'; it has originally been proposed by Thomson (Lord Kelvin) in 1887; it is the sole polyhedron filling space so as to minimize the superficial tension; due to that, a large variety of foams are close to this architecture. Moreover, this polyhedron fulfills Plateau conditions; nevertheless, most of the authors use a slightly modified version of this model configuration in order to dispose of planar surfaces and angles of 120° and 90° (Figure2.3.3).

The truss is described as a the repetition of a set of beams submitted to both flexion and extension.[2].

If one adopts a classical non polar equivalent continuum, one may assume that the beams are clamped with respect to rotation. Moreover, one adopts Bernoulli beam model, hence one has to keep a sufficiently large microbeam length to width ratio, implying in turn low densities. The geometry of the truss is shown in the Figure2.3.4.

The Plateau conditions account for the structure of foam films, amongst other in soap; they have been formulated in the 19^{th}century by the belgian physicist Joseph Plateau from observations on soap foams, and proved later on by Jean Taylor from the laws ruling the superficial tension. The following rules follow (Zhu et al. [1997]) :

1. Four Plateau edges intersect under the angle $arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109,47°$.
2. The average number of facets per cell is 14.

2. The torsion is here not considered.

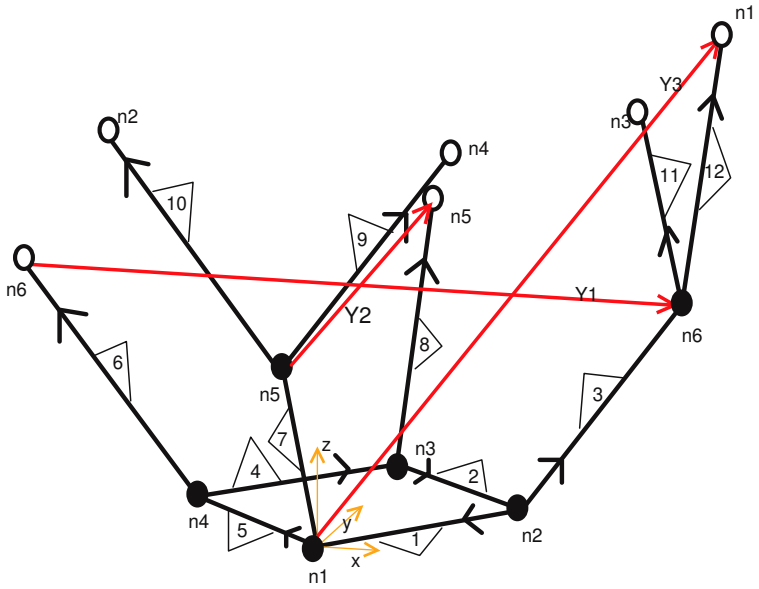


Figure 2.3.4: Geometrical representation of the tetrakaïdecahedron

3. The average number of sides per facet is 5.1.
4. Three arcs meet in the beam section delimiting the edges of a facet (Figure2.3.5) .

These conditions give specific values of the section area and the quadratic moment I

$$A = \sqrt{3}D^2 - \pi D^2/2 \tag{2.3.2}$$

$$\frac{I}{A^2} = \frac{20\sqrt{3} - 11\pi}{6(2 * \sqrt{3} - \pi)^2} \tag{2.3.3}$$

with D the side dimension. One specific feature of the present geometry is its symmetry, with identical quadratic moments whatever the considered axis, viz $I_z = I_y = I$.

The geometrical (node connectivity, beam length ...) and mechanical description of the lattice, Figure2.3.4 are written in a text file, which feeds the Maple code according to the algorithm 4.1. We summarize some data of this text file in the Tables 2.3 and 2.4

Homogenized properties (traction modulus and Poisson's ratio) are next compared to results from the literature.

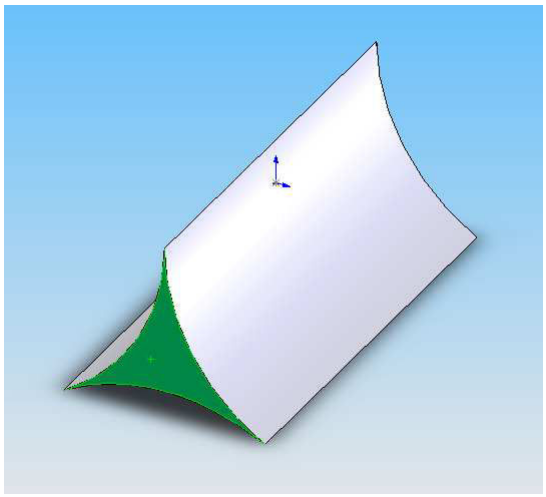


Figure 2.3.5: 'Plateau' section in foams

beam	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
O	2	3	2	3	4	4	1	3	5	5	6	6
E	1	2	6	4	1	6	5	5	4	2	3	1
δ_1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0
δ_2	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	0
δ_3	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Table 2.3: Table of node connectivity for tetrakaïdecahedron

[Gibson and Ashby, 1997Gibson and Ashby [1997]] results: Combining dimensional analysis and experiments, these authors predict that the Young's modulus of PU foams scales versus the equivalent density ρ according to

$$E^* = C_1 E_s (\rho^*)^2;\ \nu^* = \frac{C_1}{2C_2} - 1$$

with the constants $C_1 \approx 1$ and $C_2 \approx 3/8$. The predicted quadratic dependency upon the equivalent density seems to be confirmed by other studies (both numerical and based on dimensional analysis), with a coefficient C_1 ranging from 0.8 to 1, at least in the weak density regime. (Gibson [2005], Gibson and Ashby [1997]).

Homogenized results (this work): The following set of equivalent properties has been obtained from the asymptotic homogenization technique. The equivalent moduli and Poisson

		Length associated
$\mathbf{Y_1}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{2}L$
$\mathbf{Y_2}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$2\sqrt{2}L$
$\mathbf{Y_3}$	$\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{3} \\ -1/3\sqrt{3} \\ 1/3\sqrt{3} \end{bmatrix}$	$L\sqrt{6}$

Table 2.4: Table of generation vector for tetrakaïdecahedron

coefficients are equal in both three directions, reflecting an equivalent isotropic material; their expression is given successively by

$E_1^* = E_2^* = E_3^* = \dfrac{\sqrt{2}kb\,kf}{2(kb+kf)}$; $\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = \dfrac{kb-kf}{2(kb+kf)}$

In this work, with the convention adopted, $E_{010} = E_1^*$, $E_{100} = E_2^*$ and $E_{001} = E_3^*$.

The material parameters $kb = E_s A/L_i$ in the expressions thereabove are the axial moduli of the microbeams, with A, L_i their section and length, respectively, and $kf = 12E_s I/L_i^3$ the flexion moduli; the equivalent density is

$\rho^* = 1/4\,\frac{A\sqrt{6}\sqrt{3}}{L^2}$

with A being the beam section area.

Zhu et al. [1997] results: the direction with Miller index 100 is presently considered

$E_{100} = \dfrac{1.009E_s(\rho^*)^2}{1+1.514\rho^*}$; $\nu_{12} = \dfrac{0.5*(1-1.514\rho^*)}{(1+1.514\rho^*)}$; $\rho^* = \dfrac{3A}{2\sqrt{2}L^2}$

with A the beam section area.

Li et al. [2006] results: FE simulation results (with Abaqus) are derived by those authors, considering an imposed relative density $\rho^* = 0.01$; the equivalent Poisson's ratio, the equivalent shear and traction moduli are given successively versus the material modulus by

$\nu_{12} \approx 0.48$; $G_{12} = 3.2.10^{-5}E_s$; $E_1 = 9.61.10^{-5}E_s$

2.3.2 Validation by comparison with analytical models and FE simulations

The results of homogenized properties (this work) are numerically compared with those available in the literature in Table 2.5, for a relative density $\rho^* = 0.01$ [3] .

Equivalent properties	Zhu et al. [1997]	Homogenized properties (this work)	Li et al. [2006]	Gibson and Ashby [1997]
Young's modulus	$E_{100} = 9.94e-5E_s$	$E_{100} = 9.94e-5E_s$	$E_1 \approx 9.61e-5E_s$	$E \approx 1e-4E_s$
Poisson's coefficient	$\nu_{12} = 0.485$	$\nu_{12} = 0.485$	$\nu_{12} \approx 0.48$	$\nu \approx 0.33$

Table 2.5: Homogenized properties for "Tetrakaïdecahedral" truss compared with literature values

It is nevertheless acknowledged by several authors that Kelvin foams manifest a slight anisotropy (Zhu et al. [1997]; Li et al. [2006];Warren and Kraynik [1997]); this is for instance noticed by Li et al. [2006], although not confirmed neither by experiments, nor by numerical simulations. Values of the Poisson coefficient predicted by Zhu et al. [1997] (~ 0.5) as well as by Li et al. [2006] ($\sim$0.48) are close to incompressibility, but do not really correspond to the observations on PU foams: according to Gibson and Ashby [1997], the value of Poisson's ratio ranges between 0.3 and 0.4 (0.33 in average). Nevertheless, the contraction effect shall decrease for strong compressions, according e.g. to lei Zhang and xing Lu [2007], who performed numerical simulations which sustain this behavior. According to Li et al. [2006], the contraction coefficient shall also decrease when the relative density increases. The smaller value observed in experiments must be due to other phenomena, in our opinion, such as a random variation of geometrical parameters, the collapse of beams, or additional uncontrolled phenomena occurring at the nodes.

2.4 Conclusions and perspectives

The discrete homogenization method based on asymptotic expansions of the fields (nodal position, forces and moments) proves as a systematic method to calculate the equivalent - in a homogenized sense - properties of lattices with a general periodic architecture (characterized by the topology of beams within a repetitive unit cell). The novelty of the present approach lies in the consideration of beam lattices and in the calculation of the transverse forces, which does not require the moment equilibrium, since the expression of the transverse forces is linked to the relative displacements of the extremities of a given beam, in the spirit of beam theory.

The situation of foams in their first elastic regime (small displacements) has been considered in this contribution, thereby excluding buckling, strain localization phenomena and

3. One has to take a small enough equivalent density to keep a large enough L/D ratio: a density 0.01 sets a length to width ratio of 4.

inelastic deformations. The obtained effective properties are expressible as closed form expressions of the geometrical and mechanical parameters of the lattice microbeams. The present developments have been implemented in a software dedicated to the computation of homogenized properties of general 2D and 3D trusses in the geometrical linear framework. Applications to the calculation of the effective mechanical behavior of foams in 2D and 3D situations illustrate the versatility of the method, and its applicability to a wide range of architecture materials in a broad sense. Textiles are further architectured materials for which the present homogenization technique may be applicable, provided the interactions between structural micro-elements (the weft and warp yarns in the armor, which generate internal reactions due to their contact) are additionally incorporated.

Through the given applications and lattices considered in this work, the discrete homogenization technique has proven its ability to provide equivalent moduli in the elastic regime and in the linear geometrical framework for compression tests, which are in agreement with the equivalent properties obtained by parallel FE simulations.

A classification of lattices in terms with respect to rotations has been provided, highlighting the need to consider additional rotational degrees of freedom at both the micro and macroscale in a consistent manner. Accordingly, a micro-polar equivalent continuum model has to be adopted at the macroscale when micro-rotations of the node lattice are considered, as required in some loading cases. The extension of the asymptotic homogenization to micropolar continua constitutes an important perspective of the present work. This extension, in addition to the derivation of the micropolar effects, will allow the treatment of special trusses (the chiral truss; trusses with negative Poisson's coefficients, such as inverted honeycombs). It is expected to provide results related to flexion or shear resistance versus the Young's modulus being different in comparison to a Cauchy continuum. These realizations open up from a general point of view the perspective of optimizing the topology and the mechanical properties of materials having a discrete structure such as foams, but also textiles or more generally any repetitive structure made of discrete elements akin to 1D structural elements like beams or beams.

Globally speaking, the discrete homogenization provides an explicit link between the micro and the macroscale behaviors, hence increasing our understanding of the microstructural origin of the deformation mechanisms of the architectured materials widely used nowadays.

2.5 Remarques complémentaires

2.5.1 Exemples de treillis

Outre les treillis déjà mentionnés dans l'article, un certain nombre d'autres treillis ont été testés avec succès par notre code de calcul (voir la figure 2.5.1). Ils permettent de montrer l'efficacité du code de calcul et sa simplicité de mise en oeuvre. Dans ce chapitre, nous avons fait l'exposé de la méthode pour obtenir un code de calcul incluant la flexion. Néanmoins, dans le cas de treillis à dominante traction-compression, les coefficients liés à la flexion devraient devenir négligeables. On peut alors se contenter d'un code de calcul simplifié, négligeant les effets de la flexion. Le tableau 2.6 montre l'analyse avec les deux catégories de code de calcul : code en traction-compression (extensionnel) ou code incorporant les effets de la flexion.

Les treillis traités en exemple sont, pour la plupart [4], des treillis à dominante traction-compression ; on fait le constat, en comparant les coefficients du module d'élasticité homogénéisé entre les deux codes de calculs (avec ou sans flexion), que l'écart des résultats devient d'autant plus négligeable que le rapport η=largeur/longueur de la poutre est petit. Cela justifie a posteriori, le peu d'utilité d'un code de calcul avec flexion. On joint dans l'annexe B une description plus détaillée des résultats et des fichiers texte d'entrée.

On a comparé les résultats avec ceux de la littérature : Deshpande et al. [2001b] pour le treillis Octet, Hutchinson and Fleck [2006] pour le Kagome et T-T, Fleck and Qiu [2007] pour le treillis triangulaire et Kagome, Lipperman et al. [2008] pour le treillis T-T. On notera que si par certaines méthodes on obtient une partie des paramètres mécaniques, l'homogénéisation discrète fournit la loi de comportement $[\sigma] = [K]\,[\varepsilon]$ et permet ainsi d'obtenir l'ensemble des paramètres mécaniques dans le domaine élastique.

2.5.2 Conclusion, discussion

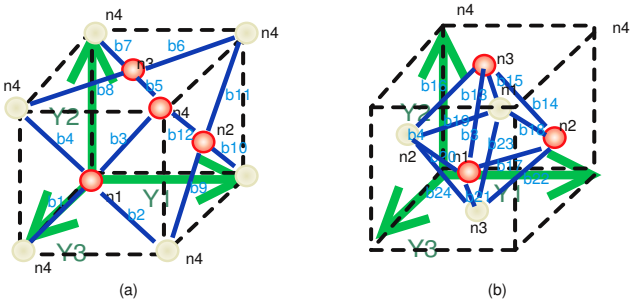
Il apparait que le tenseur des contraintes obtenu n'est pas consistant pour ce qui est des modules de cisaillement, mais a une forme similaire à celle des tenseurs de contraintes d'un milieu micropolaire. En effet, lorsqu'on utilise le code avec le modèle de poutre simplifié, le tenseur de contrainte obtenu n'est pas symétrique, on peut néanmoins utiliser des formules liées à la théorie micropolaire pour retrouver le module de cisaillement. Dans le tableau 2.6, on retrouve le module G_{12} dans le code avec flexion en utilisant les formules suivantes issues de la théorie micropolaire

$$\mu^* = K_{34}$$

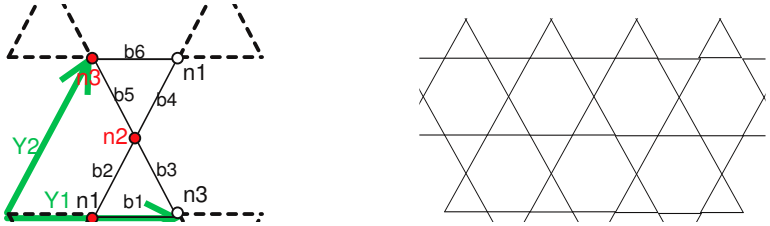
$$\mu^* + \kappa = K_{33}$$

$$G_{12} = \mu^* + \frac{\kappa}{2}$$

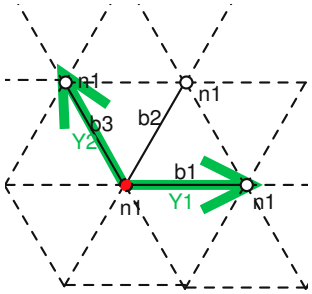
4. Le cas du treillis T-T est particulier, nous ferons par la suite des remarques particulières à son sujet.



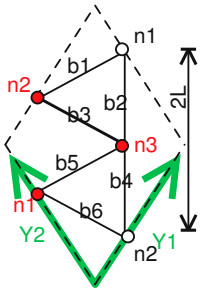
(a) treillis Octet



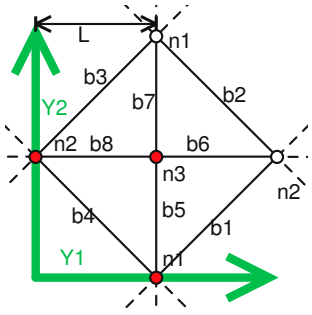
(b) treillis Kagome



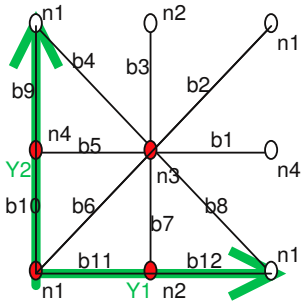
(c) treillis triangle



(d) treillis triangle-triangle (T-T)



(e) treillis SI-square



(f) treillis Mixte

FIGURE 2.5.1 – Exemples de treillis traités avec la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète

		Octet (3D)	triangle (2D)	T-T (2D)	Kagome (2D)	Mixte (2D)	Si-Square (2D)
résultats de la littérature	$\frac{E_1^*}{E_s}$	$\frac{r}{9}$	$r/3$	*	$r/3$	$0.369r$	0.293
	$r = \frac{\rho^*}{\rho_s}$	$6\,\frac{\sqrt{2}t}{L^2}$	$2\sqrt{3}t/L$		$\sqrt{3}t/L$	0.104	$\frac{t(2+\sqrt{2})}{L}$
	ν_{12}	?			$1/3$		0.414
	$\frac{G_{12}}{E_s}$	$\frac{r}{12}$	$r/8$		$r/8$		0.146r
nos résultats code sans flexion	$\frac{E_1^*}{E_s}$	$\frac{r}{9}$	$\frac{r}{3}$	*	$\frac{r}{3}$	$\frac{r(4-\sqrt{2})}{7}$	$r\left(1-1/\sqrt{2}\right)$
	$r = \frac{\rho^*}{\rho_s}$	$6\,\frac{\sqrt{2}t}{L^2}$	$2\,\frac{t\sqrt{3}}{L}$	-	$\frac{t\sqrt{3}}{L}$	$1/4\,\frac{8\,tL+4\,tL\sqrt{2}}{L^2}$	$\frac{t(2+\sqrt{2})}{L}$
	ν_{12}	$1/3$	$1/3$	-	$1/3$	$\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$	$\sqrt{2}-1$
	$\frac{G_{12}}{E_s}$	$\frac{r}{12}$	$\frac{r}{8}$	-	$\frac{r}{8}$	$\frac{r\left(\sqrt{2}-1\right)}{4}$	$\frac{r\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$
nos résultats code avec flexion	$\frac{E_1^*}{E_s}$	**	$r\,\frac{L^2+t^2}{3\,L^2+t^2}$	$3r\,\frac{(L^2+t^2)t^2}{L^4+12\,L^2t^2+3\,t^4}$	$r\,\frac{L^2+t^2}{3\,L^2+t^2}$	$\frac{r\,(4-\sqrt{2})\left(t^2\sqrt{2}+4\,L^2\right)}{2\;\;14\,L^2-t^2+2\,t^2\sqrt{2}}$	$\frac{r\,(2-\sqrt{2})(L^2+t^2\sqrt{2})}{2\;\;L^2-t^2+t^2\sqrt{2}}$
	$r = \frac{\rho^*}{\rho_s}$	-	$2\,\frac{t\sqrt{3}}{L}$	$4/3\,\frac{t\sqrt{3}}{L}$	$\frac{t\sqrt{3}}{L}$	$1/4\,\frac{8\,tL+4\,tL\sqrt{2}}{L^2}$	$1/2\,\frac{4\,tL+2\,tL\sqrt{2}}{L^2}$
	ν_{12}	-	$\frac{L^2-t^2}{3\,L^2+t^2}$	$-\frac{L^4-4\,L^2t^2+3\,t^4}{L^4+12\,L^2t^2+3\,t^4}$	$\frac{-t^2+L^2}{3\,L^2+t^2}$	$\frac{\left(-1+2\sqrt{2}\right)(2\,L-t\sqrt{2})(2\,L+t\sqrt{2})}{2\left(14\,L^2-t^2+2\,t^2\sqrt{2}\right)}$	$\frac{(\sqrt{2}-1)(L-t)(t+L)}{L^2-t^2+t^2\sqrt{2}}$
	$\frac{G_{12}}{E_s}$	-	$\frac{r}{8}\,\frac{L^2+t^2}{L^2}$	$\frac{3}{32}\,\frac{L^2+t^2}{L^2}$	$\frac{r}{8}\,\frac{L^2+t^2}{L^2}$	$\frac{r}{4}\,\frac{(\sqrt{2}-1)\left(L^2+t^2\sqrt{2}\right)}{L^2}$	$\frac{r}{4}\,\frac{(2-\sqrt{2})\left(L^2+t^2\sqrt{2}\right)}{L^2}$

* Dans le cas du treillis T-T, on ne peut obtenir de résultats avec un code sans flexion. En effet en l'absence de rigidité flexionnelle, ce treillis n'a pas de raideur, le treillis s'effondre sous l'effet d'une contrainte. On retrouve avec le code sans flexion la même matrice de rigidité singulière que dans Hutchinson and Fleck [2006].

** Le treillis octet n'a pas été traité avec le code incluant la flexion. Il s'agit d'un treillis à dominante traction-compression, pour lequel le code avec flexion n'apporterait pas d'information significative.

TABLE 2.6 – Propriétés mécanique de différents treillis avec une procédure d'homogénéisation incluant la flexion

avec $[K]$ tel que $[\sigma] = [K]\,[\epsilon]$, en notation ingénieur.

Les résultats mentionnés dans ce chapitre nous ont amènent à la conclusion qu'il faudrait changer le code de calcul à utiliser suivant le type de treillis. A ce stade de notre étude, nous avons étudié et utilisé deux catégories de codes :

1. un code de calcul en traction-compression (sans flexion) issu des travaux de Tollenaere and Caillerie [1998]. Ce code est adapté aux treillis travaillant uniquement en traction-compression, comme le treillis triangle ou octet.
2. un code de calcul avec flexion, mais avec une formulation de poutre simplifiée ; on néglige la rotation aux noeuds. Ce code est adapté aux treillis à dominante flexionnelle ou mixte. Un bon exemple est le treillis triangle-triangle T-T (voir la figure 2.5.1d).

Le défaut du code avec flexion utilisé dans ce chapitre est de délivrer un tenseur de contrainte non symétrique (cf. treillis octogone mixte, matrice de souplesse équation 2.2.55). On attribue cette assymétrie à l'utilisation d'un modèle de poutres de Bernoulli simplifié, sans rotation aux noeuds. On se propose donc d'utiliser désormais un modèle de poutres de Bernoulli complet. L'introduction du paramètre de rotation aux noeuds semble suggérer qu'il faut se tourner vers un code micropolaire, ce sera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Homogénéisation asymptotique discrète de treillis élastiques vers un milieu continu micropolaire

Sommaire

3.1 Introduction **77**
3.2 Situation du milieu micropolaire dans les milieux continus généralisés, méthodes d'homogénéisation **77**
3.2.1 Bref historique des milieux continus généralisés 77
3.2.2 Équations de base d'un milieu micropolaire 80
3.2.3 Les différentes méthodes d'homogénéisation micropolaire 86
3.3 Extension de l'homogénéisation asymptotique discrète au cas micropolaire **94**
3.3.1 Principe général 94
3.3.2 Première étape : formulation des équations d'équilibre faisant apparaître les vecteurs d'efforts $\mathbf{S^i}$ et les vecteurs de moments $\mu^{\mathbf{i}}$. 95
3.3.3 Deuxième étape : homogénéisation des équations d'équilibre discrètes 98
3.3.4 Simplification des expressions obtenues et résolution des inconnues 106
3.4 Exemples d'applications **112**
3.4.1 Le treillis carré 112
3.4.2 Le treillis hexagonal (appelé aussi 'nid d'abeille') 117
3.4.3 Vérifications des modules obtenus 120
3.5 Conclusion, discussion **129**

Notations utilisées dans ce chapitre

$\mathcal{B}(\tilde{b})$	ensembles des poutres du treillis
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$	ensemble des poutres de la cellule de référence
$\tilde{b}$	numéro d'une poutre
δ_j^i	symbole de Kronecker
$(\delta^1, \delta^2, \delta^3)$	triplet de valeurs localisant le décalage entre la cellule auquel appartient le noeud extrémité et la cellule de référence
$\mathbf{e_i}$	vecteurs unitaires d'un système de coordonnées cartésiennes, aussi notés $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$
$\mathbf{e}_\mathbf{k}^\lambda$	vecteurs unitaires covariants de coordonnées curvilignes, aussi notés $\mathbf{Y}_i$ dans les exemples et le code
$\mathbf{e}_\lambda^\mathbf{i}$	vecteurs unitaires contravariant de coordonnées curvilignes
$\mathcal{E}(\tilde{n})$	ensemble des poutres du treillis ayant le noeud $\tilde{n}$ pour extrémité
$E\left(\tilde{b}\right)$	noeud extrémité de la poutre $\tilde{b}$
E_s	module de Young du matériau constituant le treillis
E^*	module de Young homogénéisé du treillis
$\mathbf{e}^{\tilde{b}}$	vecteur directeur unitaire de la poutre $\tilde{b}$
$\mathbf{e}^{\tilde{b}\perp}$	vecteur unitaire perpendiculaire à $\mathbf{e}^{\tilde{b}}$
ε	petit paramètre du développement asymptotique
$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon]$	tenseur des déformations
η	rapport d'élancement d'une poutre $\eta = \dfrac{t}{L}$
$\mathbf{f}^{\tilde{b}}$	efforts de bord appliqués sur la poutre $\tilde{b}$
g	jacobien de la transformation $x = x(\lambda)$
I	moment quadratique d'une poutre
$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa]$	tenseur des microcourbures
$[K]$	matrice de la relation déformation-contrainte en milieu micropolaire à contrainte plane
$(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$	coordonnées curvilignes généralisées
l^b	longueur de la poutre b considérée
$\mathbf{m} = [m]$	tenseur des couples de contraintes
∇_x	gradient par rapport à la variable x
$\mathcal{N}(\tilde{n})$	ensemble des noeuds du treillis
$\mathcal{N}_{\mathcal{R}}$	ensemble des noeuds de la cellule de référence
$\tilde{n}$	numéro d'un noeud du treillis
ν^*	coefficient de Poisson homogénéisé du treillis
$\mathcal{O}(\tilde{n})$	ensemble des poutres du treillis ayant le noeud $\tilde{n}$ pour origine
$O(\tilde{b})$	noeud origine de la poutre $\tilde{b}$
$\boldsymbol{\phi} = (0, 0, \phi)$	vecteur de microrotation
$\mathbf{R}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$	fonction de position d'un point P dans l'espace curviligne
ρ^*	densité du treillis
$\mathbf{S^i}$	vecteurs des contraintes
$[S]$	matrice de souplesse

$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma]$	tenseur de contrainte
S^b	section de la poutre.
t^b	largeur de la poutre considérée. (Elle sera souvent prise comme étant égale en 2D à S^b, si la section de la poutre est rectangulaire, d'épaisseur constante égale à 1.)
$\mathbf{T}^{\tilde{b}}$	effort appliqué sur la poutre $\tilde{b}$
$\mathbf{u} = (u, v)$	vecteur déplacement en 2D
$\mathbf{v}$	champ de vitesse virtuelle
$\mathbf{x}$	vecteur des coordonnées cartésiennes
x^i	coordonnées cartésiennes contravariantes (exposant), coordonnées usuelles

3.1 Introduction

L'intérêt de l'extension vers un milieu micropolaire réside notamment dans la meilleure compréhension du comportement que ces treillis peuvent avoir dans certaines situations de chargement (forces concentrées, tolérance aux dommages, perforations) ou de géométrie (concentration des contraintes aux interfaces entre deux éléments).

Différentes méthodes ont été expérimentées pour homogénéiser un treillis vers un milieu micropolaire. Nous commencerons par situer la place de la théorie micropolaire par rapport aux autres théories de milieux continus généralisés. On fera un exposé plus complet des équations constitutives de cette théorie, puis une brève synthèse des méthodes actuellement employées pour homogénéiser des treillis vers un milieu micropolaire. On s'arrêtera ensuite sur la problématique du développement asymptotique des variables cinématiques de déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon$ et de microrotation ϕ^ε. Cela nous conduira à énoncer les hypothèses de calculs sur lesquelles reposent ces travaux. On fera le développement de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète appliquée au cas micropolaire. Cela débouchera sur un algorithme de calcul micropolaire. On traitera dans ce chapitre à titre d'application deux exemples, le treillis carré et hexagonal. On s'efforcera de montrer la pertinence des résultats analytiques au regard des résultats numériques de simulations EF.

En conclusion, on s'interrogera sur le code obtenu et la pertinence du raisonnement qui nous a conduits à associer le modèle de poutre complet (à l'échelle discrète) au milieu micropolaire comme continuum équivalent.

3.2 Situation du milieu micropolaire dans les milieux continus généralisés, méthodes d'homogénéisation

Les milieux continus généralisés sont classés alternativement comme des milieux d'ordre ou de degré supérieur [Forest, 2006], par rapport au milieu de référence, le milieu continu classique (appelé aussi milieu de Cauchy). Les milieux continus d'ordre supérieur possèdent des degrés de liberté (variables) supplémentaires indépendants. Il s'agit toutefois le plus souvent de théories du premier gradient dans la mesure où seuls les gradients d'ordre 1 de ces degrés de liberté sont introduits dans la modélisation. Les milieux de degré supérieur ne font intervenir qu'une variable, mais utilisent en plus de la déformation, qui constitue le premier gradient du déplacement, des gradients supplémentaires.

3.2.1 Bref historique des milieux continus généralisés

Dans les paragraphes qui suivent, on signalera une théorie importante par un cadre avec le nombre de degrés de liberté (D.L.) et les mesures de déformation associées (M.D.).

Le point de départ est la théorie de milieu continu classique en petites déformations et petits déplacements.

Théorie de milieu continu classique

$D.L.$: u_i, le champ de déplacement

$M.D$: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$

Une généralisation, qui peut paraître naturelle pour les milieux continus classiques, est de modéliser les interactions entre deux points, non seulement par l'intermédiaire de vecteurs forces, mais aussi par des vecteurs couples. Les origines de cette évolution peuvent être situées dans les travaux d'Euler-Bernoulli sur les poutres. L'idée innovante a été de considérer les vecteurs déplacements et rotations comme des quantités indépendantes. Les efforts et les couples sont alors considérés comme des chargements indépendants eux aussi. L'idée de contrainte de couple dans un milieu continu a été explorée au milieu du XIXieme siècle (MacCullagh (1839), Lord Kelvin (1882-1890), Voigt (1887). En 1909, les frères Cosserat développent une théorie non linéaire pour les poutres, les surfaces et les corps. Ils introduisent un trièdre rigide en chaque point du continuum, qui peut tourner indépendamment de la rotation locale du continuum lors de déformations. Ce milieu de Cosserat tient compte d'effets de couple de contrainte dans la déformation élastique d'un milieu continu. Dans le cas de la théorie micropolaire, les vecteurs directeurs sont rigides et il y a seulement trois degrés de liberté en rotation ϕ_i en plus des trois degrés de liberté classiques liés aux déplacements.

Théorie micropolaire (milieu de Cosserat) (ordre supérieur)
$D.L.$: (u_i, ϕ_i)
$M.D.$: $\epsilon_{ij} = u_{i,j} + \in_{ijk} \phi_k$
$\kappa_{ij} = \phi_{i,j}$
avec $\in_{ijk}$ le tenseur de permutation de Levi-Civita

Les travaux des frères Cosserat furent longtemps délaissés jusqu'aux années 1960. À compter de cette période, on s'intéresse de nouveau aux problèmes des couples de contraintes et on se remet à discuter de la théorie des frères Cosserat (Truesdell et Toupin (1960), Eringen (1962), Mindlin et Tierstein (1962), Koiter (1964)). Mindlin, Tierstein et Koiter vont s'intéresser à un cas particulier de la théorie de Cosserat lorsque la rotation du trièdre rigide n'est pas indépendante des variables cinématiques, mais est définie comme étant une fonction de la partie antisymétrique de la déformation. Cette théorie portera différents noms, le plus courant est peut-être celui donné par Koiter "Couple Stress Theory".

Théorie couple de contrainte
$D.L.$: (u_i, ϕ_i)
$M.D.$: $\epsilon_{ij} = u_{i,j} + \in_{ijk} \phi_k$
$\kappa_{ij} = \phi_{i,j}$
avec $\phi_k = \in_{ijk} u_{j,i}/2$
on peut la présenter aussi de la façon suivante [Liu and Su, 2009, Anthoine, 2000]
$D.L.$: u_i
$M.D.$: $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$
$k_{ij} = \frac{1}{2} \in_{klj} u_{l,ki}$
(avec $(k_{ii} = 0)$)

Toupin (1962, 1964) introduit toutes les composantes du premier gradient de la déformation dans la fonction de densité d'énergie sous une forme non-linéaire. Ce sera la base de la théorie du second gradient. Une version linéaire de la théorie "strain gradient" sera donnée par Mindlin (1964).

Théorie du second gradient (degré supérieur),
appelée aussi théorie du gradient de déformation
$D.L.$: $u_{i,j}$
$M.D.$: $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$; $K_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$

Green et Rivlin (1964) établiront les bases d'une théorie générale incluant tous les gradients de degré supérieurs de la déformation, on s'y référera sous le terme théorie " multipolaire ".

Théorie multipolaire (degré supérieur)
$D.L.$: u_i
$M.D.$: $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}$; $K_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$
$K_{ijkl} = \varepsilon_{kl,ij}$, $K_{ijklm} = \varepsilon_{lm,ijk}$, ...

Mindlin (1965, 1968) dérivera une théorie ou à la fois le premier et le second gradient de la déformation sont pris en compte, on l'appellera "théorie du second gradient de déformation ", mais elle reste un cas particulier de la théorie "multipolaire". Toutes ces théories associant l'énergie aux gradients de déformation seront appelées "théorie de degrés supérieurs ".

Une autre façon d'étendre l'élasticité classique est d'inclure les effets de la déformation de la microstructure sous-jacente en insérant de nouveaux degrés de liberté. Ces degrés de liberté sont indépendants des degrés de libertés liés usuellement aux déplacements. Les théories reposant sur cette approche sont appelées "théories d'ordre supérieur ". C'est le cas de la théorie du milieu micromorphe introduite par Eringen et Suhubi (1964) et de la théorie à microstructure de Mindlin (1964). Dans la théorie du milieu micromorphe, un point matériel possède trois vecteurs directeurs déformables, ce qui introduit neuf degrés de liberté, χ_{ij} des quantités adimensionnelles de même nature que les déformations. Cela correspondrait à un micro élément au sein du continuum qui peut tourner et se déformer indépendamment de la déformation locale du " macroélément ".

Le milieu micromorphe se caractérise par la donnée en chaque point d'un vecteur déplacement u et d'un tenseur de microdéformation χ.

Théorie du milieu micromorphe (ordre supérieur)
$D.L.$: (u_i, χ_{ij})
$M.D.$: $\varepsilon_{ij} = u_{i,j}; e_{ij} = u_{i,j} - \chi_{ij}$;
$K_{ijk} = \chi_{ij,k}$

Un choix non ambigu des lois de comportement du milieu micromorphe nécessite le choix d'un trièdre directeur dont χ décrit la rotation et la déformation. Deux cas particuliers de la théorie des milieux micromorphes sont la théorie microstretch (Eringen 1971,1990) et la théorie micropolaire (Eringen 1965, 1966). Dans la théorie microstretch, il y a quatre degrés de liberté additionnels : trois rotations ϕ_i et un pour la déformation χ des vecteurs directeurs.

Une autre liaison interne possible pour le milieu micromorphe consiste à imposer en tout point

$$\chi^{-1}.F - 1 = 0$$

ce qui signifie que la microdéformation est égale au gradient de la déformation. Le champ de microdéformation devient alors compatible et doit suivre strictement la matière, ce qui correspond à la théorie du second gradient.

lien entre les différentes théories

Les différentes théories ne sont pas complètement indépendantes. On appelle milieu de Cosserat un milieu micromorphe pour lequel χ se réduit à une rotation R. Le milieu de Cosserat peut être interprété comme un milieu micromorphe possédant une liaison interne :

$$\chi.\chi^T = 1$$

Cette liaison indique que le trièdre directeur n'est autorisé qu'à tourner au cours de la déformation. Si les vecteurs directeurs sont pris de telles sortent qu'ils soient couplés aux points matériels, les degrés de liberté en rotations deviennent égaux aux rotations classiques, soit $\phi_k = \in_{ijk} u_{j,i}/2$, et la théorie micropolaire se réduit à la théorie couple de contrainte (CST).

On peut faire une synthèse de ces différentes théories dans la table 3.1. Ainsi, comme on le voit dans la table 3.1 la théorie couple de contrainte est aussi un cas particulier de la théorie du second gradient. Ces dernières années, un grand nombre d'articles font état de recherches portant sur les milieux continus généralisés, incluant des extensions au domaine élastoplastique (Aifantis, Fleck et Hutchinson, Sievert, Forest).

3.2.2 Équations de base d'un milieu micropolaire

Dans cette section, nous allons présenter sommairement les équations fondamentales de la théorie linéaire des milieux continus micropolaires. Pour une présentation plus précise, le lecteur est invité à se reporter aux travaux d'Eringen (1999). On peut noter que les noms "théories micropolaire " ou " de Cosserat " sont utilisés généralement de manière interchangeable.

Dans ce chapitre, nous considérons essentiellement des problèmes plans, avec les champs de déplacement et de microrotation suivants

$$\mathbf{u} = (u, v)$$

$$\phi = \phi \mathbf{e}_3$$

En conséquence de quoi, la transmission des efforts entre deux points infiniment voisins va s'effectuer au travers à la fois du couple de contrainte m_{ij}et des contraintes de Cauchy classiques σ_{ij}.

La théorie des milieux micropolaires et sa variante ' couple de contrainte ' ne sont qu'une généralisation de l'élasticité classique qui repose sur une seule variable cinématique, le déplacement. Une théorie micropolaire suppose l'existence d'une variable cinématique additionnelle

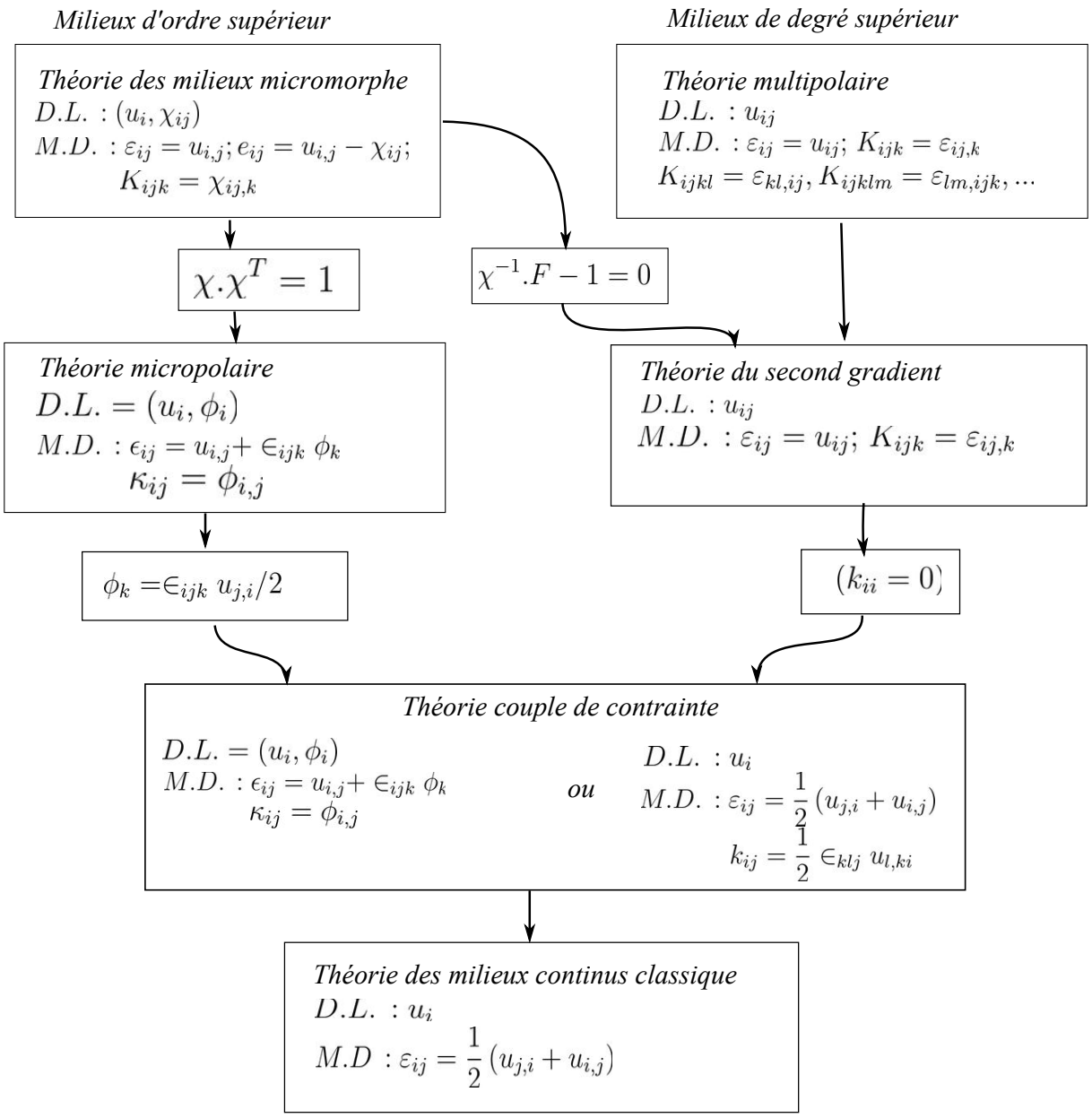


TABLE 3.1 – Principales théories de milieux continus généralisés et leurs liens mutuels

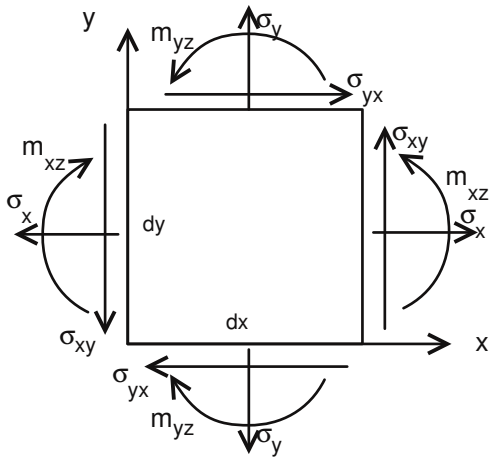


FIGURE 3.2.1 – Composantes des contraintes et couples de contraintes dans un problème plan micropolaire

de rotation locale, appelée microrotation, associée à des couples de contraintes. La contrainte est symétrique en élasticité classique, elle n'est pas nécessairement symétrique dans ce cas. La contrainte comporte quatre composantes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}$ et le couple de contrainte (ou moment par unité de surface) a deux composantes m_{xz}, m_{yz}(figure 3.2.1).

De la même façon que pour les champs de contrainte, il y a des composantes additionnelles aux composantes de déformation classiques :ϵ_x, ϵ_y, ϵ_{xy} et ϵ_{yx}. Ce sont les composantes de microcourbures κ_{xz} et κ_{yz}, produites par les couples de contraintes. Les déformations sont définies selon (Eringen 1966) par

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\ \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} - \phi,\ \epsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \phi\ \kappa_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ \kappa_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Des équations de compatibilité des courbures et déformations doivent être satisfaites

$$\begin{cases} \kappa_{xz} = \dfrac{\partial \epsilon_{yx}}{\partial x} - \dfrac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \\ \kappa_{yz} = \dfrac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} - \dfrac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + p_x = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p_y = 0 \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\partial m_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yz}}{\partial y} + \sigma_{xy} - \sigma_{yx} + q_z = 0 \tag{3.2.3}$$

Dans les équations ci-dessus, p_y, p_x sont des forces volumiques, tandis que q_z est un couple volumique.

La dernière équation 3.2.3 montre que la partie antisymétrique du tenseur de contrainte σ_{ij} est déterminée par la divergence du tenseur couple de contrainte m_{ij}.

Les équations constitutives de l'élasticité linéaire micropolaire sont de la forme

$$\sigma_{kl} = A_{klmn}\epsilon_{mn} + B_{klmn}\kappa_{mn} \tag{3.2.4}$$

$$m_{kl} = C_{klmn}\epsilon_{mn} + D_{klmn}\kappa_{mn} \tag{3.2.5}$$

pour un milieu micropolaire anisotrope.

Les tenseurs du quatrième ordre A_{klmn}, B_{klmn}, C_{klmn} et D_{klmn} sont appelés tenseur de rigidité micropolaire. B_{klmn} et C_{klmn} sont des pseudotenseurs (des tenseurs dont les composantes changent de signes lors d'une inversion des coordonnées du système) et A_{klmn} et D_{klmn} sont des tenseurs vérifiant les propriétés suivantes $A_{klmn} = A_{mnkl}$, $D_{klmn} = D_{mnkl}$. Pour les structures périodiques uniformes à symétrie centrale (les coefficients de raideur du milieu sont indépendants de l'inversion des coordonnées) le pseudo tenseur $B_{klmn} = C_{klmn}$ est égal à zéro [Kumar and McDowell, 2004, 2009, Trovalusci and Masiani, 1999][1].

Pour un matériau micropolaire isotropique et linéaire, les équations constitutives se simplifient suivant les relations

$$\sigma_{kl} = \lambda\epsilon_{rr}\delta_{kl} + (\mu^* + \kappa)\,\epsilon_{kl} + \mu^*\epsilon_{lk} \tag{3.2.6}$$

$$m_{kl} = \alpha\phi_{r,r}\delta_{kl} + \beta\phi_{k,l} + \gamma\phi_{l,k} \tag{3.2.7}$$

Pour un problème 2D, les constantes α et β sont nulles. On peut écrire les relations contraintes déformations pour un problème plan sous la forme

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \phi \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.2.8}$$

Pour les problèmes à déformations planes, la matrice $[K]$ s'écrit

1. Selon Trovalusci and Masiani [1999] les milieux appelés à symétrie centrale (centro-symétriques) sont des milieux dont les équations d'équilibre sont invariantes par application d'une fonction de rotation d'angle π. Dans notre étude des treillis, la symétrie centrale des équations d'équilibre découle de la symétrie centrale géométrique du treillis. On appellera donc centro-symétrique un treillis dont la *géométrie* est à symétrie centrale.

$$[K] = \begin{bmatrix} 2\lambda + 2\mu^* + \kappa & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\lambda + 2\mu^* + \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* + \kappa & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* & \mu^* + \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

Ce qui signifie que pour un problème plan et un milieu à symétrie centrale, il existe quatre constantes indépendantes : λ, μ^*, κ, γ. Nous avons de plus la relation $\mu = \mu^* + \frac{\kappa}{2}$ (Cowin 1970). λ et μ sont les modules classiques de Lamé avec les dimensions N/m^2. Les constantes κ, γ sont de nouvelles constantes micropolaires qui deviennent nulles pour les matériaux non micropolaires. La dimension de κ est en N/m^2 tandis que γ est en N (en fait des $N.m/m$). C'est cette formulation qui est généralement retenue pour les codes éléments finis [Fatemi et al., 2002]. Pour les treillis que nous allons considérer, nous nous placerons plutôt dans un problème à contraintes planes [2], la matrice de rigidité d'un matériau à symétrie centrale $[K]$, se présente alors sous la forme (Yang et al. [2003], Trovalusci and Masiani [1999])

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{(2\mu^*+\kappa)(2\lambda+2\mu^*+\kappa)}{\lambda+2\mu^*+\kappa} & \frac{\lambda(2\mu^*+\kappa)}{\lambda+2\mu^*+\kappa} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(2\mu^*+\kappa)}{\lambda+2\mu^*+\kappa} & \frac{(2\mu^*+\kappa)(2\lambda+2\mu^*+\kappa)}{\lambda+2\mu^*+\kappa} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* + \kappa & \mu^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^* & \mu^* + \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{3.2.10}$$

La matrice de souplesse correspondante s'écrit

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda+2\mu^*+\kappa}{(2\mu^*+\kappa+3\lambda)(2\mu^*+\kappa)} & -\frac{\lambda}{(2\mu^*+\kappa+3\lambda)(2\mu^*+\kappa)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{(2\mu^*+\kappa+3\lambda)(2\mu^*+\kappa)} & \frac{2\lambda+2\mu^*+\kappa}{(2\mu^*+\kappa+3\lambda)(2\mu^*+\kappa)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu^*+\kappa}{\kappa(2\mu^*+\kappa)} & -\frac{\mu^*}{\kappa(2\mu^*+\kappa)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu^*}{\kappa(2\mu^*+\kappa)} & \frac{\mu^*+\kappa}{\kappa(2\mu^*+\kappa)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

2. Les treillis sont assimilables à des matériaux continus à contrainte plane. En effet, les treillis plan, tout comme les matériaux à contrainte plane, ne possèdent pas de coefficient de Poisson dans le sens de l'épaisseur, la normale au plan.

Ceci nous permet d'obtenir le module d'Young :
$\frac{1}{E} = S_{11} = S_{22}$
et le coefficient de Poisson :
$-\frac{\nu}{E} = S_{12} = S_{21}$
Ceci donne (Gauthier 1974, 1975) pour les modules de Young micropolaire et le coefficient de Poisson :

$$E = \frac{(2\mu^* + \kappa)\,(3\lambda + 2\mu^* + \kappa)}{2\lambda + 2\mu^* + \kappa} = \frac{4\,\mu^{*2} + 4\,\mu^*\,\kappa + \kappa^2 + 6\,\lambda\,\mu^* + 3\,\lambda\,\kappa}{2\,\lambda + 2\,\mu^* + \kappa} \tag{3.2.12}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2\,\lambda + 2\,\mu^* + \kappa} \tag{3.2.13}$$

Le module de cisaillement G vaut :

$$G = \mu^* + \frac{\kappa}{2} \tag{3.2.14}$$

$$\lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{3.2.15}$$

Les équations 3.2.12 à 3.2.15 montrent que le terme $2\mu^* + \kappa$ en élasticité micropolaire remplace le terme 2μ de l'élasticité classique. Lorsque $\kappa \to 0$, les relations classiques entre E, ν et les constantes de Lamé sont préservées. (Mindlin 1963, Nakamura 1984, 1995) définissent des constantes qui interviennent dans certaines équations micropolaires, la longueur caractéristique l_{cara}

$$l_{cara} = \sqrt{\frac{\gamma}{2\,(2\mu^* + \kappa)}} \tag{3.2.16}$$

que certains présentent sous la forme $l = \sqrt{\frac{B}{G}}$, avec $B = \frac{\gamma}{4}$, et le facteur de couplage N

$$N^2 = \frac{\kappa}{2\,(\mu^* + \kappa)} \tag{3.2.17}$$

avec N variant de 0 (la théorie élastique classique) à 1 (la théorie 'couple de contrainte', CST). Dans ce dernier cas, le module $\kappa \to \infty$. On notera néanmoins que selon les théories, on relève des incohérences entre les valeurs des différentes constantes E et G (Liu and Su [2009]). La nécessité de conserver une énergie interne positive impose les conditions suivantes sur les constantes micropolaires

$$3\lambda + 2\mu^* + \kappa \geq 0 \tag{3.2.18}$$

$$2\mu^* + \kappa \geq 0 \tag{3.2.19}$$

$$\kappa \geq 0 \tag{3.2.20}$$

$$3\alpha + \beta + \gamma \geq 0 \tag{3.2.21}$$

$$-\gamma \leq \beta \leq \gamma \tag{3.2.22}$$

Nous travaillons sur des treillis avec des contraintes planes et des déformations planes [3], on se rend compte que dans des cas particuliers, les formules classiques données par les équations 3.2.12 et 3.2.13 ne sont pas valide ; on ne va donc pas les utiliser. Nous nous proposerons de calculer les constantes du matériau de la manière suivante :

- Les constantes micropolaires κ, μ^* et γ seront obtenues à partir de la matrice de raideur $[K]$, soit pour un milieu isotrope
  - $\begin{cases} \mu^* + \kappa = K_{33} \\ \mu^* = K_{34} \end{cases}$; $\gamma = K_{55}$
- Le module élastique E, le coefficient de Poisson ν seront obtenus à partir de la matrice de souplesse $[S]$, soit pour un milieu isotrope
  - $E_1 = \dfrac{1}{S_{11}}$; $\nu_{12} = -S_{21} \cdot E_1$

3.2.3 Les différentes méthodes d'homogénéisation micropolaire

3.2.3.1 Synthèse de différentes méthodes d'homogénéisation d'un treillis vers un milieu micropolaire

[Kumar and McDowell, 2004] utilisent une méthode basée sur l'énergie de déformation pour homogénéiser. Ils font une somme des contributions à l'énergie de déformation de chaque élément de la structure discrète. Cette densité d'énergie de déformation est exprimée en fonction du déplacement et de la rotation du centre de la cellule élémentaire utilisée. Les auteurs obtiennent un continuum en utilisant un développement en série de Taylor. On dérive ensuite l'énergie suivant les composantes des tenseurs de déformation et de microcourbure. Même si l'on peut théoriquement, en suivant cette méthode, utiliser des noeuds qui ne coïncident pas avec le centre de la cellule élémentaire, cela impose alors que les rotations et les déplacements dans la cellule suivent une loi affine, ce qui ne peut être vrai dans le cas général. Les résultats présentent des incohérences dans les coefficients du tenseur couple de contrainte. Les exemples traités ne comportent qu'un seul noeud dans la cellule élémentaire. Les auteurs traitent en application le cas de l'indentation par un effort ponctuel ou la concentration des contraintes autour d'un trou circulaire dans un treillis. Ils réalisent cette étude en comparant la réponse d'un code EF discret, à un code EF avec des éléments micropolaires.

Florence and Sab [2006] reprennent et complètent la méthode énergétique développée initialement dans Pradel and Sab [1998] en utilisant deux variantes, l'une cinématique et l'autre statique. L'idée générale est d'obtenir une fonctionnelle d'énergie de déformation à

3. Un treillis 2D est une structure plane de poutres.

partir des variables de déplacement et de rotation. On pose en complément des équations d'équilibre de moments. On cherche ensuite le minimum de la fonctionnelle d'énergie sous la contrainte des équations d'équilibre complémentaires à l'aide de multiplicateurs de Lagrange. Cette méthode semble efficace et les résultats concordent avec ceux de la présente étude. Il semble néanmoins que d'un point de vue calculatoire, cette méthode soit moins simple d'usage que celle que nous utilisons [4]. Dans Florence and Sab [2006], une extension de la méthode est faite au calcul des limites élastiques avec des poutres de section non constante.

Warren and Byskov [2002] posent les équations d'équilibre au noeud et homogénéisent en faisant une moyenne des efforts agissant sur un VER. Ils font cette résolution dans le cas particulier de treillis ayant une symétrie de maillage par rotation de 120° ("3-fold symmetry"). Selon eux, il faut à la fois prendre des développements du second ordre pour le déplacement $\mathbf{u}$ et pour la rotation ϕ. Ils reprennent dans Warren and Byskov [2008] une variante de leur méthode en faisant des applications à certains problèmes : propagation de fissures, forces concentrées. Ils montrent que le fait de ne pas tenir compte de la connectivité spécifique de certaines structures peut avoir des effets significatifs sur les estimations des constantes élastiques.

[Adachi et al., 1998] étudient par un code EF micropolaire la concentration des contraintes autour d'un trou circulaire en fonction des paramètres micropolaires.

Dans Tekoğlu [2007], l'auteur utilise un code EF pour tenter de retrouver numériquement les valeurs des coefficients micropolaires. Il fait une moyenne des valeurs numériques aux noeuds dans une " fenêtre " mobile qui balaie la surface.

Une autre approche aurait pu être de s'inspirer de l'homogénéisation des poutres périodiques par développement asymptotique, qui a fait l'objet de nombreux travaux (Buannic and Cartraud [2001], Haussy et al. [2004], Bourgeois [2000], Nazarov [1999] ...), mais les résultats diffèrent suivant les auteurs, en fonction des hypothèses sur les ordres de grandeurs des paramètres géométriques et des chargement considérés. On développera dans le paragraphe suivant 3.2.3.2, les conséquences de ces choix sur l'ordre relatif de grandeur et de développement des paramètres géométriques et cinématiques.

Une des applications des théories micropolaires est l'os trabéculaire (Yoo and Jasiuk [2006], Fatemi et al. [2002], Rosenberg and Cimrman [2003]) qui est un matériau à microstructure. Yoo and Jasiuk [2006] ont modélisé l'os trabéculaire par un treillis régulier, reprenant la géométrie évoquée dans Gibson and Ashby [1997]. Ils postulent que le milieu continu est de type micropolaire "contrainte couple", et utilisent un code EF pour retrouver numériquement les valeurs des efforts et couple de contrainte, puis développent une méthode pour identifier les modules micropolaires à partir des valeurs numériques. Fatemi et al. [2002] montre que les concentrations de contrainte à l'interface os-prothèse sont significativement

4. L'une des différences avec notre méthode repose sur la définition des moments. Nous conservons la définition des moments du modèle poutre de Bernoulli aux noeuds, mais dans Florence and Sab [2006] les moments sont définis au centre de la poutre, cela entraîne un changement de la liste des moments et des équations d'équilibre. Si l'on prend comme exemple le treillis hexagone, qui comporte deux noeuds et trois poutres dans la cellule élémentaire, notre méthode aboutit à deux moments et deux équations d'équilibre, ce qui permet de résoudre les inconnues, la méthode Pradel-Sab aboutit à trois moments, mais une seule équation d'équilibre statique ; on doit dans ce dernier cas recourir au calcul de l'énergie.

plus petites avec la théorie micropolaire comparée à une théorie d'élasticité classique.

Dans [Elangovan et al., 2008], les auteurs proposent un modèle qui permet d'obtenir la réponse élastique micropolaire d'un matériau cellulaire composite avec plusieurs fractions différentes de microstructure, à partir des modules élastiques de chaque fraction. Une application est faite au balsa.

Liu and Su [2009] montrent un accroissement de la raideur des poutres multicouches à microstructure en flexion.

On notera également avec intérêt que l'étude des effets micropolaires sur les treillis est rendue difficile par la présence d'autres effets tels que les effets de bords (Tekoğlu [2007]). Les effets réels observés dépendent de celui des deux, entre l'effet micropolaire et l'effet de bords, qui est dominant. Les effets de bords sont eux-mêmes sujets à variations suivant le nombre de degrés de liberté octroyés. Les simulations EF faites par Alkhader and Vural [2008] montrent qu'il faut des échantillons de treillis de taille supérieur à 10×10 cellules pour voir baisser significativement les effets de bords ; mais, dans ce cas, disparaît également l'effet micropolaire global.

En conclusion de ces méthodes d'homogénéisation micropolaire, on notera que les approches énergétiques telles qu'elles sont développées dans Pradel and Sab [1998] ou Florence and Sab [2006] semblent rigoureuses, mais le passage par une fonction d'énergie, puis une minimisation de celle-ci, risque de devenir lourd d'un point de vue calculatoire dès que le nombre de degrés de libertés devient conséquent. De plus, la résolution devient complexe dès lors que plusieurs ordres de développement de la même variable apparaissent dans les équations. Des travaux de Warren and Byskov [2002], on retiendra la nécessité de tenir compte de l'équilibre mécanique au noeud et l'interrogation légitime sur l'ordre du développement de $\mathbf{u}$, par rapport à celui de ϕ. Des travaux d'Alkhader and Vural [2008] et de Tekoğlu [2007], on retiendra que l'une des précautions à prendre pour faire une comparaison avec des simulations EF est d'utiliser un échantillon avec un nombre suffisant de cellules élémentaires pour éviter d'avoir des résultats trop pollués par les effets de bords. Des différentes études sur les poutres périodiques, on retiendra la nécessité de s'interroger sur l'ordre de développement des paramètres géométriques, c'est l'objet du paragraphe 3.2.3.2.

Le choix d'étendre la méthode d'homogénéisation discrète au domaine micropolaire présente de l'intérêt. La méthode permet de traiter les cellules élémentaires à noeuds internes. Elle est basée sur les développements asymptotiques des grandeurs considérées. Ce qui signifie qu'elle permet a priori un développement à un ordre quelconque des paramètres. Elle tient compte de la connectivité des structures étudiées et de l'équilibre mécanique en chaque noeud. Enfin, c'est une approche suffisamment simple et générale pour être aisément programmable. On restreindra néanmoins notre étude au cas 2D, pour des petites déformations dans le domaine élastique et pour des treillis possédant une symétrie centrale.

Étant donné que dans la méthode que l'on utilise, on développe l'ensemble des équations d'efforts à partir des paramètres géométriques et cinématiques, il faut s'interroger au préalable sur le degré initial et l'ordre de développement des paramètres. Cela fait l'objet du paragraphe suivant.

3.2.3.2 Problématique liée au développement asymptotique des paramètres

Il y a trois paramètres géométriques à développer asymptotiquement : la longueur d'une poutre $l^{\varepsilon b}$, sa largeur $t^{\varepsilon b}$ et son épaisseur $e^{\varepsilon b}$, et deux paramètres cinématiques, soit le déplacement $\mathbf{u}^{\varepsilon n}$, et la rotation aux noeuds $\phi^{\varepsilon n}$. Pour le développement des paramètres géométriques, on rappelle le résultat suivant [Mourad, 2003], pour $l^{\varepsilon b}$, déjà utilisé dans le précédent chapitre.

$$l^{\varepsilon b} = \varepsilon l^{b0} + \varepsilon^2 l^{b1} + ... \tag{3.2.23}$$

Pour ce qui est des deux autres paramètres, la largeur $t^{\varepsilon b}$ et l'épaisseur $e^{\varepsilon b}$, ajoutons quelques précisions au chapitre précédent. On se place dans le cas 2D, comme le montre la figure 3.2.2, soit on peut considérer que ces deux longueurs caractéristiques sont du même ordre et couplés, c'est un choix que font plusieurs auteurs et on s'impose $t = e$, soit on peut considérer que ces deux longueurs sont différentes et découplées, $e \neq t$. C'est le choix que nous avons fait, déjà dans le précédent chapitre. On peut alors s'imposer $e = Cte = 1$, cela permet de simplifier un peu les expressions sans nuire au développement général de la méthode.

Montrons l'influence de ce choix : on peut partir des modules de raideurs. La figure 3.2.2 montre une section de poutre carrée [5], c'est-à-dire une épaisseur de poutre égale à sa largeur. En effet, les efforts, comme les moments sont fonctions des deux modules de traction et de flexion, k_l et k_f. Dans le modèle poutre de Bernoulli $k_l = \dfrac{E_s S}{l^b}$, avec S la section de la poutre, $k_f = \dfrac{12 E_s I}{\left(l^b\right)^3}$, avec I, le moment quadratique de la poutre par rapport à l'axe normal au plan. Si on considère $t = e$, et avec une section carrée alors nous avons $S = t^2$ et $I = \dfrac{t^4}{12}$. Si on considère que l'épaisseur $e \neq t$, et $e = Cte$ =1, donc indépendante du rapport ε, alors les modules se développent en $k_l = \dfrac{E_s te}{l^b} = \dfrac{E_s t}{l^b}$ et $k_f = \dfrac{12 E_s Ie}{\left(l^b\right)^3} = \dfrac{12 E_s I}{\left(l^b\right)^3} = \dfrac{E_s \left(t^b\right)^3}{\left(l^b\right)^3}$ avec I, le moment quadratique de la poutre par rapport à l'axe normal au plan tel que $I = \dfrac{t^3}{12}$. La différence entre les deux séries de modules est donc le facteur d'épaisseur e. Dans le second cas, si l'on considère $e = Cte = 1$, alors pour garder l'homogénéité des constantes de raideur, il faut considérer un module élastique E_s, non plus en $N.m^{-2}$, mais en $N.m^{-1}$.

Intéressons-nous maintenant à l'une des hypothèses de calcul de plusieurs auteurs de travaux portant sur l'homogénéisation des poutres périodiques. La figure 3.2.2 montre les deux rapports d'échelle existant dans un treillis :$\varepsilon = \dfrac{l}{L}$, c'est le petit paramètre classique d'un développement asymptotique, mais nous avons également le petit paramètre $\eta = \dfrac{t}{l}$ d'élancement de la poutre qui nous est imposé par le choix fait d'une théorie poutre de Bernoulli. Plusieurs auteurs prennent comme hypothèse de calcul $\varepsilon = \eta$. Voyons si ce choix est judicieux dans notre cas.

5. toute autre géométrie de section conviendrait, seule une constante supplémentaire apparaîtrait

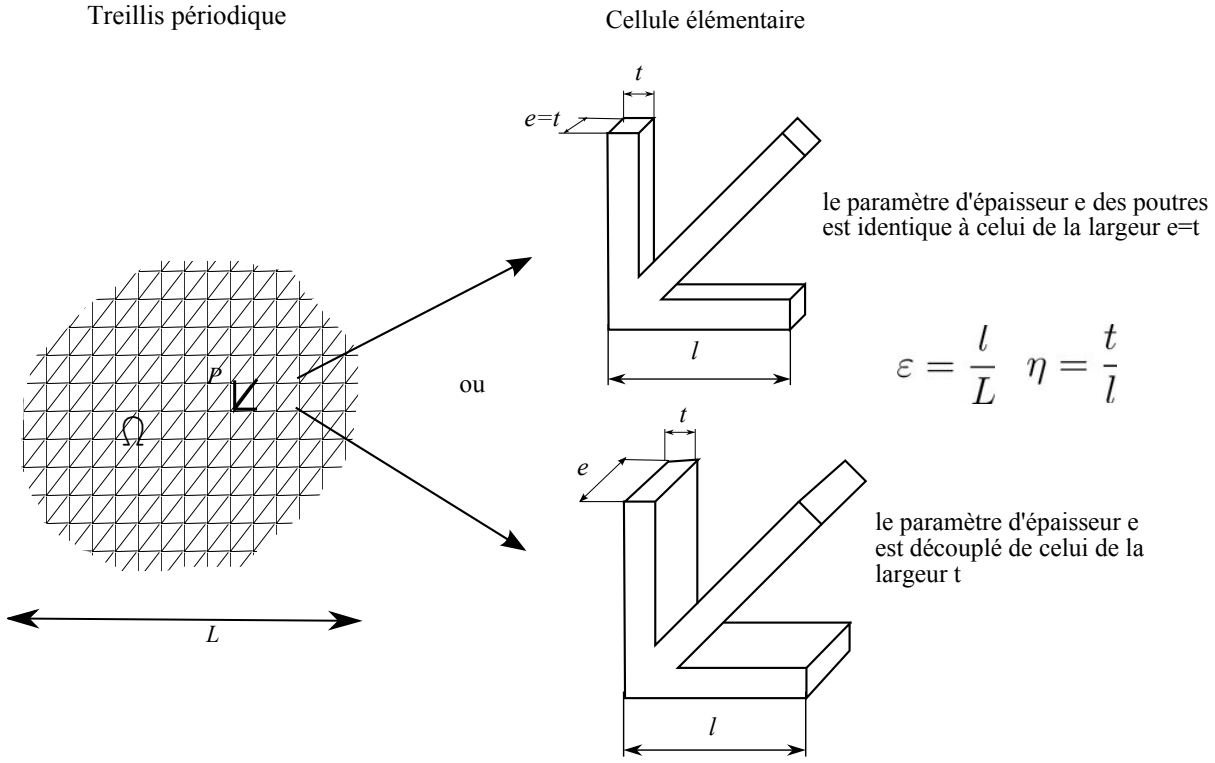


FIGURE 3.2.2 – Paramètres géométriques caractérisant les différents niveaux de la microstructure d'un treillis. Énonce des deux rapports d'échelle η et ε, existant au sein de la microstructure

Il y a trois approches possibles : suivant que l'on fasse varier d'abord le petit paramètre $\eta = \dfrac{t^b}{l^b} \to 0$ et ensuite $\varepsilon \to 0$, ou bien que l'on fasse varier d'abord $\varepsilon \to 0$, puis $\eta \to 0$ ou bien à la fois $(\varepsilon, \eta) \to (0, 0)$. Suivant le cas, les raideurs de poutres obtenues ne sont pas identiques. On propose de poser

$$\varepsilon = \eta^a \tag{3.2.24}$$

à la manière de ce qui est fait dans Dallot et al. [2009], ce qui permet un classement des différentes formes d'équations suivant la valeur de l'exposant a. De plus, si on fait une approche pratique de la question, pour que les treillis ne s'effondrent pas sous le flambement des poutres et pour que l'on puisse les considérer vraiment comme des treillis avec un modèle poutre Bernoulli, cela implique qu'il faut borner le rapport η

$$\sim 10^{-2} < \eta <\sim 10^{-1} \tag{3.2.25}$$

Par contre, le rapport $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$ peut rapidement devenir très petit devant η. On supposera donc que $\varepsilon \leqslant \eta$, ce qui revient à considérer que l'exposant $a \geq 1$. Dès lors, on peut poser

$t^b = \eta l^b = \eta\varepsilon L^b = \eta^{1+a} L^b = \varepsilon^{1+\frac{1}{a}} L^b$ et réécrire les équations des poutres sous trois formes différentes.

1. Forme 1 : les équations de la théorie des poutres (voir annexe A) sont écrites en fonction de η seul

$$N^\varepsilon = E_s \eta \left(\mathbf{e}^b \cdot \Delta \mathbf{U}^\varepsilon\right) \tag{3.2.26}$$

$$T_t^\varepsilon = E_s \eta^3 \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^\varepsilon - \frac{1}{2} E_s \eta^{3+a} L^{b0} \left(\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) \tag{3.2.27}$$

$$M^{O(b)\varepsilon} = E_s \eta^{3+2a} \frac{\left(L^b\right)^2}{6} \left(2\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} E_s \eta^{3+a} L^b \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^\varepsilon \tag{3.2.28}$$

$$M^{E(b)\varepsilon} = E_s \eta^{3+2a} \frac{\left(L^b\right)^2}{6} \left(\phi^{O(b)\varepsilon} + 2\phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} E_s \eta^{3+a} L^b \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^\varepsilon \tag{3.2.29}$$

Cette série d'équations amène une première conclusion, les efforts $N^{\varepsilon b}$ et T_t^ε, auront toujours entre eux, quel que soit le degré de départ choisi pour $\mathbf{u}^\varepsilon$ et ϕ^ε, un écart de grandeur de l'ordre de η^2. Ce qui signifie que lorsque le rapport η devient petit, les efforts tranchants et les moments deviennent négligeables devant les efforts de traction-extension. Ce qui se comprend intuitivement facilement.

2. Forme 2 : les équations sont écrites en conservant séparé les deux paramètres η et ε

$$N^\varepsilon = E_s \eta \left(\mathbf{e}^b \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon}\right) \tag{3.2.30}$$

$$T_t^\varepsilon = E_s \eta^3 \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} - \frac{1}{2} E_s \eta^3 \varepsilon L^{b0} \left(\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) \tag{3.2.31}$$

$$M^{O(b)\varepsilon} = E_s \eta^3 \varepsilon^2 \frac{\left(L^b\right)^2}{6} \left(2\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} E_s \eta^3 \varepsilon L^b \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.32}$$

$$M^{E(b)\varepsilon} = E_s \eta^3 \varepsilon^2 \frac{\left(L^b\right)^2}{6} \left(\phi^{O(b)\varepsilon} + 2\phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} E_s \eta^3 \varepsilon L^b \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.33}$$

Cette forme permet de conserver l'indépendance de η et ε.

3. Forme 3 : de l'équation 3.2.24, on peut tirer $\varepsilon^{\frac{1}{a}} = \eta$. On peut alors réécrire les équations avec uniquement le paramètre ε

$$N^\varepsilon = E_s \varepsilon^{\frac{1}{a}} \left(\mathbf{e}^b \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon}\right) \tag{3.2.34}$$

$$T_t^\varepsilon = E_s \varepsilon^{\frac{3}{a}} \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} - E_s \varepsilon^{\frac{3}{a}+1} \frac{L^b}{2} \left(\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) \tag{3.2.35}$$

$$M^{O(b)\varepsilon} = E_s \varepsilon^{\frac{3}{a}+2} \frac{\left(L^b\right)^2}{6} \left(2\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2} E_s \varepsilon^{\frac{3}{a}+1} L^b \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.36}$$

$$M^{E(b)\varepsilon} = E_s\varepsilon^{\frac{3}{a}+2}\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi^{O(b)\varepsilon} + 2\phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}E_s\varepsilon^{\frac{3}{a}+1}L^{b\varepsilon}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.37}$$

Si on considère que le paramètre η est petit, mais fixe et que le paramètre ε doit tendre vers zéro, alors selon l'équation 3.2.24 a doit tendre vers l'infini. Si prend la limite $a \to \infty$ des équations 3.2.34 à 3.2.37, on obtient

$$N^{\varepsilon} = E_s\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}\right) \tag{3.2.38}$$

$$T_t^{\varepsilon} = E_s\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} - E_s\varepsilon\frac{L^b}{2}\left(\phi_1^{\varepsilon} + \phi_2^{\varepsilon}\right) \tag{3.2.39}$$

$$M^{O(b)\varepsilon} = E_s\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}E_s\varepsilon L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.40}$$

$$M^{E(b)\varepsilon} = E_s\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi^{O(b)\varepsilon} + 2\phi^{E(b)\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}E_s\varepsilon L^{b\varepsilon}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} \tag{3.2.41}$$

Sous cette forme, il est difficile de conclure tant que l'on n'a pas situé l'ordre initial du développement de ϕ^{ε} par rapport à $\mathbf{u}^{\varepsilon}$. Il est nécessaire de définir précisément le degré initial du développement asymptotique de l'une des variables par rapport à l'autre.

3.2.3.3 Conclusions sur la problématique du développement asymptotique des paramètres

De la section précédente, on conclura que le rapport η est petit, mais borné. Ceci implique que faire, avant la résolution des inconnues de calcul, une simplification $\eta \to 0$, peut induire des erreurs dans les treillis à dominante flexionnelle, puisque par définition l'effort tranchant est lié à l'existence de ce paramètre η. Néanmoins, a posteriori, après résolution des inconnues on pourra envisager de simplifier les modules obtenus par le biais de la limite $\eta \to 0$.

Par définition, le rapport $\varepsilon = \dfrac{l}{L}$ peut devenir infiniment petit, et donc considérer la limite $\varepsilon \to 0$, a un sens dans les équations préalables. Cela nous conduit à faire le choix de la forme 2, qui préserve l'indépendance entre η et ε, ce qui revient à conserver les paramètres t^b et L^b. Comment définir le degré initial et l'ordre de développement relatif des paramètres cinématiques $\mathbf{u}^{\varepsilon n}$ et $\phi^{\varepsilon n}$? On peut raisonner sur la forme 2 obtenue pour les équations des efforts tranchants et des moments

$$T_t^{\varepsilon} = \underbrace{E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}}_{f_1\left(\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}\right)} - \underbrace{\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\left(\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right)}_{\varepsilon f_2\left(\phi^{O(b)\varepsilon},\phi^{E(b)\varepsilon}\right)} \tag{3.2.42}$$

$$M^{O(b)\varepsilon} = \underbrace{E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right)}_{\varepsilon^2 f_3\left(\phi^{O(b)\varepsilon},\phi^{E(b)\varepsilon}\right)} - \underbrace{\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}}_{\varepsilon f_4\left(\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}\right)} \tag{3.2.43}$$

$$M^{E(b)\varepsilon} = \underbrace{E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi^{O(b)\varepsilon}+2\phi_2^\varepsilon\right)}_{\varepsilon^2 f_5\left(\phi^{O(b)\varepsilon},\phi^{E(b)\varepsilon}\right)} - \underbrace{\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}}_{\varepsilon f_4\left(\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}\right)} \tag{3.2.44}$$

On constate qu'aussi bien l'effort tranchant que les moments sont constitués de deux termes, l'un fonction de la différence de déplacement $\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}$ et l'autre des angles $\left(\phi^{O(b)\varepsilon},\phi^{E(b)\varepsilon}\right)$. Par exemple pour l'effort tranchant il s'agit des termes $f_1\left(\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}\right) = E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon}$ et $\varepsilon f_2\left(\phi^{O(b)\varepsilon},\phi^{E(b)\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\left(\phi^{O(b)\varepsilon}+\phi^{E(b)\varepsilon}\right)$. Nous allons faire l'hypothèse que ces deux termes sont au même ordre en ε et débutent au même degré. Cette hypothèse a plusieurs conséquences. Si on développe au premier ordre la rotation, cela signifie que la différence de déplacement est en $\varepsilon^1(...)+\varepsilon^2(...)$. En effet, si on développe $\mathbf{u}^\varepsilon$ au second ordre

$$\mathbf{u}^\varepsilon\left(\lambda^\varepsilon\right) = \mathbf{u}_0\left(\lambda^\varepsilon\right)+\varepsilon\mathbf{u}_1\left(\lambda^\varepsilon\right)+\varepsilon^2\mathbf{u}_2\left(\lambda^\varepsilon\right)+... \tag{3.2.45}$$

la différence de déplacement entre les points origine et extrémité apparaît comme

$$\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} = \mathbf{u}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{u}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right) \sim \underbrace{\varepsilon\left(\mathbf{u}_1^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)-\mathbf{u}_1^{O_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)+\frac{\partial\mathbf{u_0}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)}_{\Delta\mathbf{U}_1^b} + \varepsilon^2\underbrace{\left(\mathbf{u}_2^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)-\mathbf{u}_2^{O_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)\right)}_{\Delta\mathbf{U}_2^b} \tag{3.2.46}$$

On note que dans le terme $\Delta\mathbf{U}_1^b$, les inconnues $\mathbf{u}_1^n$ une fois résolues seront fonction de $\frac{\partial\mathbf{u_0}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}$, c'est à dire fonction du gradient du déplacement, donc de la déformation. On exprimera de la façon suivante le développement asymptotique des rotations

$$\phi^{n\varepsilon}\quad\left(\lambda^\varepsilon\right) = \quad\phi_0^n\left(\lambda^\varepsilon\right)+\quad\varepsilon\phi_1^n\left(\lambda^\varepsilon\right)\quad+... \tag{3.2.47}$$

Si on développe asymptotiquement à partir de l'équation 3.2.47 les rotations [6]

$$\phi^\varepsilon(O(b)) = \phi_0^{O_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)+\varepsilon\phi_1^{O_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)+... \tag{3.2.48}$$

$$\phi^{O(b)\varepsilon} = \phi_0^{O_R(b)}+\varepsilon\phi_1^{O_R(b)}+... \tag{3.2.49}$$

$$\phi^\varepsilon(E(b)) = \phi_0^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon+\varepsilon\delta^{ib}\right)+\varepsilon\left(\phi_1^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon+\varepsilon\delta^{ib}\right)\right)+... \tag{3.2.50}$$

$$\phi^\varepsilon(E(b)) = \phi_0^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial\phi_0(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\left(\lambda^\varepsilon\right)\right)+... \tag{3.2.51}$$

$$\phi^{E(b)\varepsilon} = \phi_0^{E_R(b)}+\varepsilon\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)+... \tag{3.2.52}$$

6. On rappelle une précision concernant les notations, l'indice R indique qu'il s'agit du noeud appartenant à la cellule de référence.

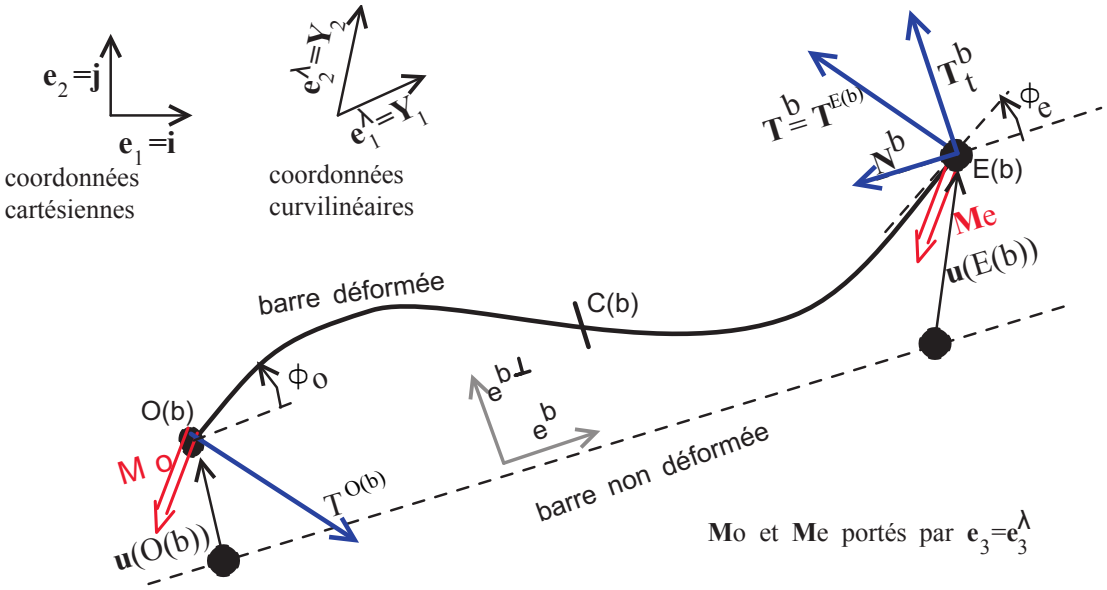


FIGURE 3.2.3 – Paramètres de déformation de la poutre

On peut commenter ce dernier développement. Le noeud extrémité d'une poutre $E(b)$ appartient soit à la cellule de référence soit à une cellule contiguë à celle-ci, mais dans tous les cas de figure ses coordonnées sont $\lambda^\varepsilon + \varepsilon\delta^{ib}$, avec λ^ε les coordonnées du noeud de même numéro appartenant à la cellule élémentaire. C'est pourquoi on écrit la fonction de rotation du noeud extrémité comme le développement en série de Taylor de la fonction de rotation du noeud de même numéro appartenant à la cellule de référence. La dernière équation indique simplement une simplification des notations pour éviter de trop alourdir les développements qui vont suivre.

On remarquera également qu'au premier ordre, ϕ_0 n'est pas indépendant du noeud.

3.3 Extension de l'homogénéisation asymptotique discrète au cas micropolaire

Nous commencerons par rappeler les équations d'équilibre pour les milieux micropolaires sous la forme de puissance virtuelle.

3.3.1 Principe général

Le principe général consiste, dans un premier temps, à écrire les équations d'équilibre du milieu continu micropolaire en formulation puissance virtuelle de telle sorte que les tenseurs de contrainte σ et de micromoments m apparaissent sous la forme d'un produit avec les vecteurs de base d'un repère curviligne.

$$\text{equ. équilibre} \rightarrow \int_\Omega \underbrace{(g\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}})}_{\mathbf{S^i}}.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial\lambda_i}d\lambda + \int_\Omega \underbrace{(g\mathbf{m}\cdot\mathbf{e}_\lambda^{\mathbf{i}})}_{\mu^{\mathbf{i}}}.\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial\lambda_i}d\lambda = 0$$

Dans un second temps, on montrera que les équations d'équilibre du milieu discret peuvent s'écrire sous la même forme après homogénéisation.

$$\sum_{\tilde{b}}\mathbf{T}^{\tilde{\mathbf{b}}}.\mathbf{v}+\sum_{\tilde{b}}\mathbf{M}^{\tilde{\mathbf{b}}}.\mathbf{w}=0 \overset{\text{homogénéisation}}{\rightarrow} \int_\Omega \mathbf{S}^i.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial\lambda_i}d\lambda + \int_\Omega \boldsymbol{\mu}^i.\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial\lambda_i}d\lambda = 0$$

Ayant obtenu la même formulation, on identifie terme à terme les deux vecteurs $\mathbf{S}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^i$, ce qui permet ensuite de remonter aux deux tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{m}$. Nous considérerons dans la suite que le jeu de vitesses virtuelles est constitué de deux champs $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$ équivalent aux vitesses virtuelles $\{\dot{\mathbf{u}},\dot{\phi}\}$.

3.3.2 Première étape : formulation des équations d'équilibre faisant apparaître les vecteurs d'efforts $\mathbf{S^i}$ et les vecteurs de moments $\mu^{\mathbf{i}}$

Nous partons des équations d'équilibre d'un milieu micropolaire (dit aussi *'de Cosserat'*) Forest [2005] défini sur Ω, un milieu continu

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}.\nabla_x).\mathbf{v}dx + \int_\Omega (\mathbf{m}.\nabla_x - \in:\boldsymbol{\sigma}).\mathbf{w}dx = -\int_\Omega \mathbf{f}^{vol}.\mathbf{v}dx - \int_\Omega \mathbf{c}^{vol}.\mathbf{w}dx - \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{n}-\mathbf{t}^{\mathbf{bords}}).\mathbf{v}ds - \int_{\partial\Omega}(\mathbf{m}.\mathbf{n}-\mathbf{M}^{bords}).\mathbf{w}ds \quad (3.3.1)$$

avec $\in$ le tenseur de permutation de Levi-Civita d'ordre trois. Les composantes des tenseurs $\mathbf{m}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont découplées dans le cas d'un milieu à symétrie centrale [Trovalusci and Masiani, 1999], ce qui implique qu'en l'absence d'efforts et de couples de contrainte volumiques, soit $\mathbf{f}^{vol}=0$ et $\mathbf{c}^{vol}=0$, les termes du tenseur couple de contrainte sont autoéquilibrés (voir aussi Riahi and Curran [2009])

$$\int_\Omega (\in:\boldsymbol{\sigma}).\mathbf{w}dx = 0 \quad (3.3.2)$$

$$\int_\Omega (\mathbf{m}.\nabla_x).\mathbf{w}dx = 0 \quad (3.3.3)$$

Si l'on reporte ces relations dans 3.3.1, cela permet d'exprimer les conditions de bords

$$\mathbf{t}^{\mathbf{bords}} = \sigma.\mathbf{n} \quad (3.3.4)$$

$$\mathbf{M}^{\mathbf{bords}} = \mathbf{m}.\mathbf{n} \quad (3.3.5)$$

Si on suppose le cas particulier de champs virtuels $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ choisis de telle sorte qu'ils s'annulent sur les bords du domaine d'étude Ω, seules subsistent les intégrales de volume qui doivent être nulles. Cela nous permet d'obtenir les équations suivantes en quasi statique

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}.\nabla_x) .\mathbf{v} dx = 0 \tag{3.3.6}$$

$$\int_\Omega (\mathbf{m}.\nabla_x) .\mathbf{w} dx = 0 \tag{3.3.7}$$

On va faire un changement de variable pour faire apparaître les deux tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\mathbf{m}$. Soit x_i les coordonnées cartésiennes d'un point matériel P tel que $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e_i}$. Soit les coordonnées curvilignes généralisées $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ définies pour la fonction vectorielle de position $\mathbf{x} = \mathbf{R}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$. On a les vecteurs de base covariants

$$\mathbf{e}^\lambda_\mathbf{k} = \frac{\partial x^i}{\partial \lambda^i} \mathbf{e_i} \tag{3.3.8}$$

Les vecteurs contravariants sont définis par

$$\mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda . \mathbf{e}^\lambda_\mathbf{j} = \delta^i_j \tag{3.3.9}$$

avec δ^i_j le symbole de Kronecker. On fait dans les équations 3.3.6 et 3.3.7 le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$. Soit g le jacobien de cette transformation ; dans les intégrales de volume, nous obtenons

$$dx = g d\lambda \tag{3.3.10}$$

Soit $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$, respectivement les champs de vitesse et de taux de rotation virtuels, on a

$$\nabla_x \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda \tag{3.3.11}$$

$$\nabla_x \mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda \tag{3.3.12}$$

Les équations 3.3.6 et 3.3.7 peuvent se réécrire sous la forme

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}.\nabla_x) .\mathbf{v} dx = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_x \mathbf{v}) dx = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : (\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda) g d\lambda = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda) . \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} g d\lambda = 0 \tag{3.3.13}$$

$$\int_\Omega (\mathbf{m}.\nabla_x) .\mathbf{w} dx = \int_\Omega \mathbf{m} : (\nabla_x \mathbf{w}) dx = \int_\Omega \mathbf{m} : (\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} \otimes \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda) g d\lambda = \int_\Omega (\mathbf{m} \mathbf{e}^\mathbf{i}_\lambda) . \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} g d\lambda = 0 \tag{3.3.14}$$

On pose la définition suivante des vecteurs contraintes

$$\mathbf{S^i} = g\boldsymbol{\sigma}\mathbf{e}^{\mathbf{i}}_{\lambda} \tag{3.3.15}$$

On pose également la définition suivante des vecteurs couple de contrainte

$$\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}} = g\mathbf{m}\mathbf{e}^{\mathbf{i}}_{\lambda} \tag{3.3.16}$$

En partant des définitions 3.3.15 et 3.3.16, on peut exprimer les tenseurs de contrainte et de couple de contrainte :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \mathbf{e}^{\lambda}_{\mathbf{i}} \tag{3.3.17}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{g}\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}} \otimes \mathbf{e}^{\lambda}_{\mathbf{i}} \tag{3.3.18}$$

On peut écrire à partir des équations 3.3.13 et 3.3.15, l'équation d'équilibre en translation suivante

$$\int_{\Omega} \mathbf{S^i}.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} d\lambda = 0 \tag{3.3.19}$$

De même, avec les équations 3.3.14 et 3.3.16, on peut écrire l'équation d'équilibre en rotation

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}}.\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} d\lambda = 0 \tag{3.3.20}$$

Le changement de variables $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda)$ fournit les relations suivantes entre les gradients virtuels

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} = \nabla_x \mathbf{v}.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{3.3.21}$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} = \nabla_x \mathbf{w}.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{3.3.22}$$

On peut avec ces gradients réécrire les équations 3.3.19 et 3.3.20 sous la forme

$$\int_{\Omega} \mathbf{S^i}.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \lambda^i} d\lambda = \int_{\Omega} \mathbf{S^i}.(\nabla_x \mathbf{v}.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}) d\lambda = \int_{\Omega} \left(\mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\right) : (\nabla_x \mathbf{v})\, \frac{1}{g} dx = 0 \tag{3.3.23}$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}}.\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \lambda^i} d\lambda \;=\; \int_{\Omega} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}}.\left(\nabla_x \mathbf{w}.\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\right) d\lambda \;=\; \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\right) \;:\; (\nabla_x \mathbf{w})\, \frac{1}{g} dx \;=\; 0 \tag{3.3.24}$$

D'après ces équations, on fait apparaître les tenseurs $\mathbf{m}$ et σ sous la forme des produits tensoriels

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{3.3.25}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{g}\boldsymbol{\mu^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{3.3.26}$$

On retiendra de ce développement que l'on a d'une part une formulation des équations d'équilibre à l'aide de vecteurs contrainte et couple de contrainte, les équations 3.3.19 et 3.3.20, et d'autre part un moyen de parvenir à obtenir à partir de ces vecteurs les deux tenseurs correspondants grâce aux relations 3.3.25 et 3.3.26. Maintenant, nous allons montrer le moyen d'obtenir, après homogénéisation, les deux séries de vecteurs $\mathbf{S^i}$et $\mu^{\mathbf{i}}$.

3.3.3 Deuxième étape : homogénéisation des équations d'équilibre discrètes

Nous partirons des équations d'équilibre du treillis, les paramètres sont indiqués figure 3.2.3. Avant de présenter les équations d'équilibre aux noeuds, nous rappellerons quelques notations introduites dans le chapitre précédant concernant la numérotation des noeuds et des poutres. On rappelle que l'on utilise l'hypothèse des petites déformations, telle qu'à l'état déformé le treillis reste quasi périodique.

3.3.3.1 Position du problème

Chaque poutre étant en équilibre, la force appliquée sur le noeud extrémité est opposée à la force appliquée au noeud origine $\mathbf{T}^{E(b)} = -\mathbf{T}^{O(b)}$ (voir la figure 3.2.3). Ces vecteurs d'efforts $\mathbf{T}^b$ se décomposent en

$$\mathbf{T}^b = N^b\mathbf{e}^b + T_t^b\mathbf{e}^{b\perp} \tag{3.3.27}$$

avec N^b l'effort longitudinal et T_t^b l'effort transversal. Par convention nous ferons nos calculs avec les forces $\mathbf{T}^b = \mathbf{T}^{E(b)}$. Sur le treillis complet, les équations d'équilibre des forces en formulation puissances virtuelles peuvent donc s'écrire ainsi

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \mathbf{T}^b.\left(\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right) - \mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)\right) = 0 \tag{3.3.28}$$

avec $\mathbf{v}\left(.\right)$ un champ de vitesse virtuelle nul sur les bords. On peut réécrire les équations 3.3.28 sous la forme des développements asymptotiques

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \mathbf{T}^{\varepsilon b}.\left(\mathbf{v}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right) - \mathbf{v}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right)\right) = 0 \tag{3.3.29}$$

On peut écrire de plusieurs façons l'équilibre des moments. Soit on considère l'équilibre des moments appliqués aux noeuds du treillis a l'aide des équations obtenus par la méthode des éléments finis appliqués aux poutres (voir l'annexe A)

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\mathbf{M}^{O(b)}.\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}^{E(b)}.\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)\right)=\mathbf{0} \tag{3.3.30}$$

Cette forme nous sera utile pour la résolution des inconnues. Mais on va considérer une autre approche qui consiste à écrire que chaque poutre est individuellement en équilibre, donc que la somme de ces poutres l'est aussi ; nous déterminerons cet équilibre au centre de chaque poutre par [7]

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\mathbf{M}^{O(b)}.\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}^{E(b)}.\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)+\frac{L^b}{2}(\mathbf{e}^b\wedge\mathbf{T}^{E(b)}).\mathbf{w}\left(C\left(b\right)\right)-\frac{L^b}{2}(\mathbf{e}^b\wedge\mathbf{T}^{O(b)}).\mathbf{w}\left(C\left(b\right)\right)\right)=\mathbf{0} \tag{3.3.31}$$

équations que l'on peut écrire sous forme de développement asymptotique

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\mathbf{M}^{O(b)\varepsilon}.\mathbf{w}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}^{E(b)\varepsilon}.\mathbf{w}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right)+\varepsilon L^b(\mathbf{e}^b\wedge\mathbf{T}^{\varepsilon b}).\mathbf{w}^\varepsilon\left(C\left(b\right)\right)\right)=0 \tag{3.3.32}$$

avec $\mathbf{e}^b$ le vecteur directeur de la poutre, $\mathbf{M}^{O(b)}$ et $\mathbf{M}^{E(b)}$ les moments à l'origine et à l'extrémité des poutres respectivement, L^b la longueur des poutres et $\mathbf{w}(.)$ le champ virtuel de taux de rotation.

3.3.3.2 Description de la géométrie du treillis, numérotation des éléments

On rappelle sommairement ce qui a été déjà évoqué dans le chapitre précédent. Nous nommerons $\mathcal{N}_\mathcal{R}$ et $\mathcal{B}_\mathcal{R}$ respectivement l'ensemble des numéros de noeuds et de poutres appartenant à la cellule de référence. Ainsi, à chaque doublet $v^i=(v^1,v^2)\in\mathbb{Z}^2$ (triplet en 3D $\in\mathbb{Z}^3$), nous associons une cellule de référence. Les noeuds du treillis complet peuvent alors être définis par le triplet $\tilde{n}=(n,v^1,v^2)\in\mathcal{N}_\mathcal{R}\times\mathbb{Z}^2$, (quadruplet en 3D). De la même façon, les poutres du treillis entier peuvent être décrites par le triplet $\tilde{b}=(b,v^1,v^2)\in\mathcal{B}_\mathcal{R}\times\mathbb{Z}^2$.

Dans la cellule de référence, nous allons orienter chaque poutre de telle sorte qu'elle ait un noeud origine noté $O\left(\tilde{b}\right)$ et un noeud extrémité noté $E\left(\tilde{b}\right)$. Nous noterons, que si l'on peut choisir le noeud origine comme faisant partie de la cellule de référence, il n'en est pas forcément de même du noeud extrémité. Ce noeud extrémité appartient néanmoins à une cellule qui est proche, dans la plupart des cas, adjacente à la cellule de référence. On peut

7. On peut remarquer, en comparant les équations 3.3.31 et 3.3.30 que cela revient à considérer que la somme des efforts tranchants sur une poutre est nulle, ou formulée autrement, que l'effort tranchant au noeud origine est l'opposé de celui exercé au noeud extrémité.

On remarquera également que d'autres auteurs [Florence and Sab, 2006, Florence, 2005, Warren and Byskov, 2002] ont choisi de faire leurs calculs uniquement avec un moment moyen lié à la poutre et non plus les moments aux noeuds. Cela revient à des développements similaires à ceux qui sont considérés dans cette section, mais le nombre d'équations d'équilibre de moment obtenu n'est pas identique à notre méthode (nous en obtenons deux avec un treillis hexagone quand dans Florence [2005] il n'y en a qu'une).

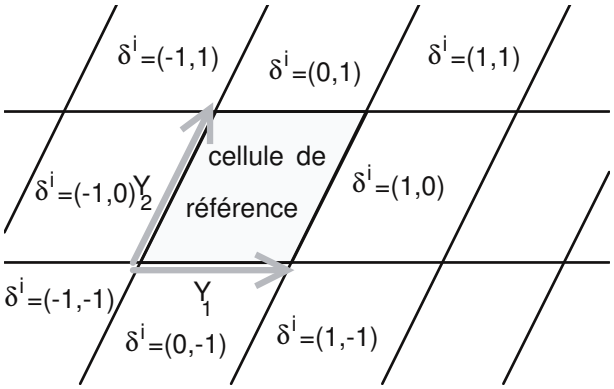


FIGURE 3.3.1 – Signification des paramètres δ^i par rapport à la cellule de référence d'un treillis

donc écrire que, si le noeud d'origine $O\left(\tilde{b}\right)$ est associé au triplet $\tilde{n} = (n, v^1, v^2)$, le noeud extrémité $E\left(\tilde{b}\right)$ est obligatoirement associé au noeud numéroté $(m, v^1 + \delta^1, v^2 + \delta^2)$. Dans la plupart des cas le noeud extrémité appartient à une cellule adjacente, ce qui signifie que les variables δ^i appartiennent à l'ensemble $\delta^i \in \{-1, 0, 1\}$, voir la figure 3.3.1. Nous ajouterons à chaque poutre un noeud défini au centre de celle-ci, soit $C\left(\tilde{b}\right)$.

3.3.3.3 Développements asymptotiques des paramètres

On rappellera les notations condensées des conclusions du paragraphe 3.2.3.3

$$\Delta\mathbf{U}^{b\varepsilon} \sim \varepsilon \underbrace{\left(\mathbf{u}_1^{E_R(b)} - \mathbf{u}_1^{O_R(b)} + \frac{\partial \mathbf{u_0}}{\partial \lambda^i}\delta^{ib}\right)}_{\Delta\mathbf{U}_1^b} + \varepsilon^2 \underbrace{\left(\mathbf{u}_2^{E_R(b)} - \mathbf{u}_2^{O_R(b)}\right)}_{\Delta\mathbf{U}_2^b} \tag{3.3.33}$$

$$\phi^{O(b)\varepsilon} = \phi_0^{O_R(b)} + \varepsilon\phi_1^{O_R(b)} + ... \tag{3.3.34}$$

$$\phi^{E(b)\varepsilon} = \phi_0^{E_R(b)} + \varepsilon\left(\frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda^i}\delta^{ib} + \phi_1^{E_R(b)}\right) + ... \tag{3.3.35}$$

3.3.3.4 Développement des vitesses et taux de rotation virtuels $\mathbf{v}^\varepsilon$ et $\mathbf{w}^\varepsilon$

Pour tout champ de vitesse virtuelle $\mathbf{v}^\varepsilon$, suffisamment régulier, un développement de Taylor au premier ordre conduit à

$$\mathbf{v}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right) - \mathbf{v}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right) = \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon + \varepsilon\delta^{ib}) - \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon) \sim \varepsilon\frac{\partial \mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial \lambda^i}\delta^{ib} \tag{3.3.36}$$

Le champ de taux de rotation virtuel est a priori quelconque. Choisissons un champ suffisamment régulier tel que l'on ait pour le point milieu

$$\mathbf{w}^{C(b)\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{w}^{E(b)\varepsilon} + \mathbf{w}^{O(b)\varepsilon}\right) \tag{3.3.37}$$

Nous posons tout d'abord le champ de taux de rotation suivant

$$\mathbf{w}^{\varepsilon}(O(b)) = \mathbf{w}^{O(b)\varepsilon}(\lambda) = \mathbf{w}_0(\lambda) \tag{3.3.38}$$

Nous obtenons dès lors, avec un développement de Taylor au premier ordre

$$\mathbf{w}^{E(b)\varepsilon}(\lambda + \varepsilon\delta^i) \sim \mathbf{w}_0(\lambda) + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{w}_0(\lambda)}{\partial \lambda^i}\delta^{ib} \tag{3.3.39}$$

3.3.3.5 Développements asymptotiques des efforts et des moments

Comme rappelé plus haut, l'équilibre statique des poutres conduit à un vecteur $\mathbf{T}$ qui se décompose en

$$\mathbf{T}^{\varepsilon b} = N^{\varepsilon b}\mathbf{e}^b + T_t^{\varepsilon b}\mathbf{e}^{b\perp} \tag{3.3.40}$$

avec

$$N^{\varepsilon b} = E_s\eta\left(\mathbf{e}^b \cdot \Delta\mathbf{U}^{\varepsilon}\right) \sim E_s\eta\left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\varepsilon\Delta\mathbf{U_1} + \varepsilon^2\Delta\mathbf{U_2}\right)\right) \tag{3.3.41}$$

$$\begin{aligned} T_t^{\varepsilon b} &= E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{\varepsilon} - \frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\left(\phi^{O(b)\varepsilon} + \phi^{E(b)\varepsilon}\right) \\ T_t^{\varepsilon b} &\sim E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\varepsilon\Delta\mathbf{U}_1 + \varepsilon^2\Delta\mathbf{U_2}\right) - \frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\left(\phi_0^{O_R(b)} + \phi_0^{E_R(b)} + \varepsilon\left(\phi_1^{O_R(b)} + \phi_1^{E_R(b)} + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

Si on ordonne suivant les puissances de ε, on obtient

$$\begin{aligned} N^{\varepsilon b} &\sim \varepsilon E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right) + \varepsilon^2 E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right) \\ &\sim \varepsilon N_1^b + \varepsilon^2 N_2^b \end{aligned} \tag{3.3.43}$$

$$\begin{aligned} T_t^{\varepsilon b} &\sim \varepsilon\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}E_s\eta^3 L^{b0}\left(\phi_0^{O_R(b)} + \phi_0^{E_R(b)}\right)\right) \\ &+\varepsilon^2\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2 - \frac{1}{2}E_s\eta^3 L^{b0}\left(\phi_1^{O_R(b)} + \phi_1^{E_R(b)} + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right) \qquad (3.3.44) \\ &\sim \varepsilon T_{1t}^b + \varepsilon^2 T_{2t}^b \qquad (3.3.45) \end{aligned}$$

On constate que ces deux expressions d'efforts contiennent deux ordres, chacun d'entre eux est fonction de deux séries de variables différentes. Au premier ordre, les variables $\mathbf{u}_1^n$ (contenues dans $\Delta\mathbf{U}_1$) et ϕ_0^n, au second ordre les variables $\mathbf{u}_2^n$ (contenues dans $\Delta\mathbf{U}_2$) et ϕ_1^n. De la même façon, on va développer asymptotiquement les moments, à partir de leur définition dans la théorie des poutres (voir Annexe A)

$$\begin{aligned} M^{O(b)\varepsilon} &= E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi^{O(b)\varepsilon}+\phi^{E(b)\varepsilon}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{\varepsilon} \\ &\sim E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}+\varepsilon\left(2\phi_1^{O_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\varepsilon\Delta\mathbf{U}_1+\varepsilon^2\Delta\mathbf{U}_2\right) \end{aligned} \tag{3.3.46}$$

$$\begin{aligned} M^{E(b)\varepsilon} &= E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi^{O(b)\varepsilon}+2\phi^{E(b)\varepsilon}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}^{\varepsilon} \\ &\sim E_s\eta^3\varepsilon^2\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}+\varepsilon\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+2\phi_1^{E_R(b)}\right)\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}E_s\eta^3\varepsilon L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\varepsilon\Delta\mathbf{U}_1+\varepsilon^2\Delta\mathbf{U}_2\right) \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

Si l'on ordonne suivant les puissances de ε, on obtient

$$\begin{aligned} M^{O(b)\varepsilon} &\sim \varepsilon^2\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right) \\ &+\varepsilon^3\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_1^{O_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right) \\ &\sim \varepsilon^2M_1^{O(b)}+\varepsilon^3M_2^{O(b)} \end{aligned} \tag{3.3.48}$$

$$\begin{aligned} M^{E(b)\varepsilon} &\sim \varepsilon^2\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right) \\ &+\varepsilon^3\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+2\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right) \end{aligned} \tag{3.3.49}$$

$$\sim \varepsilon^2M_1^{E(b)}+\varepsilon^3M_2^{E(b)} \tag{3.3.50}$$

3.3.3.6 Expression finale des équations d'équilibres

Équilibre des efforts Si l'on reporte les équations 3.3.41, 3.3.42 et 3.3.36 dans 3.3.29 on obtient

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\mathbf{T}^{\varepsilon b}.\left(\mathbf{v}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right)\quad-\quad\mathbf{v}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right)\right)\quad=\quad 0 \tag{3.3.51}$$

De façon développée et ordonnée suivant les puissances de ε, cela nous donne [8]

$$\begin{aligned}\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\Bigg[&\varepsilon^2\left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_1}\right)\mathbf{e}^b+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\\&+\varepsilon^3\left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_2}\right)\mathbf{e}^b+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\cdot\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\Bigg]=0\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

On peut passer l'équation 3.3.52 en intégrale en utilisant le résultat suivant : pour toute fonction assez régulière g, la quantité $\varepsilon^2\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}g(\varepsilon v^i)$ peut être interprétée comme la somme de Riemann d'une intégrale sur Ω qui tend vers $\int_\Omega g(\lambda)d\lambda$ (avec Ω espace 2D, en 3D il faudrait considérer $\varepsilon^3\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^3}g(\varepsilon v^i)$) quand $\varepsilon\to 0$. L'équation 3.3.52 devient après homogénéisation

$$\int_\Omega\mathbf{S}^i.\frac{\partial\mathbf{v}(\lambda)}{\partial\lambda^i}d\lambda=0 \tag{3.3.53}$$

avec

$$\mathbf{S}^i\sim\mathbf{S}_1^i+\varepsilon\mathbf{S}_2^i \tag{3.3.54}$$

et les vecteurs contraintes $\mathbf{S}_1^i$ et $\mathbf{S}_2^i$ tels que

$$\mathbf{S}_1^i\quad=\quad\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_1}\right)\mathbf{e}^b+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib} \tag{3.3.55}$$

$$\mathbf{S}_2^i=\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_2}\right)\mathbf{e}^b+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib} \tag{3.3.56}$$

On peut rapprocher cette dernière équation de 3.3.53 et à partir des $\mathbf{S}^i$ construire le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$, comme montré dans le sous-titre 3.3.2.

$$\boldsymbol{\sigma}=\frac{1}{g}\mathbf{S}^i\otimes\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\lambda^i} \tag{3.3.57}$$

8. On rappelle que l'on a fait le choix de variables ε et η indépendantes dans la section 3.2.3.2.

Équilibre des moments Nous rappelons l'équation d'équilibre des moments en puissance virtuelle, équation 3.3.32

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\mathbf{M}^{O(b)\varepsilon}.\mathbf{w}^{\varepsilon}\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}^{E(b)\varepsilon}.\mathbf{w}^{\varepsilon}\left(E\left(b\right)\right)+\varepsilon L^b(\mathbf{e}^b\wedge\mathbf{T}^{\varepsilon b}).\mathbf{w}^{\varepsilon}\left(C\left(b\right)\right)\right)=\mathbf{0} \quad (3.3.58)$$

Si on développe cette équation à l'aide des développements équation 3.3.48, 3.3.49 et 3.3.37 à 3.3.39, on obtient l'équation suivante portée par la normale au plan considéré [9]

$$\begin{aligned}
&\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\left(\varepsilon^2\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right)\right.\right.\\
&\qquad\left.+\varepsilon^3\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_1^{O_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^{b0}\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right)\right).w_0\\
&\qquad+\left(\varepsilon^2\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right)\right.\\
&+\left.\varepsilon^3\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+2\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right)\right).\left(w_0+\varepsilon\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\\
&\qquad+\varepsilon l^{b0}\left(\left(\varepsilon\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right)\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+\varepsilon^2\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)\right)\right).\left(w_0+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)=0
\end{aligned} \quad (3.3.59)$$

Si on ordonne suivant les puissances de ε, on obtient

9. On a choisi un champ de rotation virtuel porté également par la normale au plan d'étude, ce qui permet d'obtenir une équation scalaire

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\varepsilon^2\left[\left(\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right).w_0\right.\right.$$
$$+\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right).w_0$$
$$\left.+L^{b0}\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right).w_0\right]$$
$$+\varepsilon^3\left[\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(2\phi_1^{O_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right).w_0\right.$$
$$+\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+2\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right).w_0$$
$$+L^{b0}\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right).w_0$$
$$+\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1\right)\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}$$
$$\left.+L^{b0}\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right).\frac{1}{2}\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right]$$
$$+\varepsilon^4\left[\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{6}\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+2\phi_1^{E_R(b)}\right)-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2\right).\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right.$$
$$\left.+L^{b0}\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3L^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)\frac{1}{2}\frac{\partial w^0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right]=0 \quad (3.3.60)$$

On constate qu'une partie des termes se simplifient

$$\sum_{v^i\in\mathbb{Z}^2}\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(\varepsilon^3\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{12}\left(\phi_0^{E_R(b)}-\phi_0^{O_R(b)}\right)\right)+\varepsilon^4\left(E_s\eta^3\frac{\left(L^b\right)^2}{12}\left(-\phi_1^{O_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}+\phi_1^{E_R(b)}\right)\right)\right)\delta^{ib}.\frac{\partial w_0}{\partial\lambda^i}=0 \quad (3.3.61)$$

Pour l'homogénéisation, on peut procéder comme pour les efforts. Nous pouvons écrire cette dernière équation après passage à la limite $\varepsilon\to 0$, sous la forme

$$\int_\Omega\boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}}\frac{\partial\mathbf{w^0}(\lambda)}{\partial\lambda^i}d\lambda=0 \quad (3.3.62)$$

avec les vecteurs couples de contrainte

$$\boldsymbol{\mu}^i\sim\varepsilon\boldsymbol{\mu}_1^i+\varepsilon^2\boldsymbol{\mu}_2^i \quad (3.3.63)$$

et

$$\boldsymbol{\mu}_1^i = \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \varepsilon \left(E_s \eta^3 \frac{\left(L^b\right)^2}{12} \left(\phi_0^{E_R(b)} - \phi_0^{O_R(b)} \right) \right) \delta^{ib} \tag{3.3.64}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^i = \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \varepsilon^2 \left(E_s \eta^3 \frac{\left(L^b\right)^2}{12} \left(-\phi_1^{O_R(b)} + \frac{\partial \phi_0}{\partial \lambda^i} \delta^{ib} + \phi_1^{E_R(b)} \right) \right) \delta^{ib} \tag{3.3.65}$$

Cela nous permet de retrouver le tenseur couple de contrainte $\mathbf{m}$ à partir des vecteurs $\boldsymbol{\mu}^i$ tels qu'ils sont décrits dans le sous titre 3.3.2, soit

$$\mathbf{m} = \frac{1}{g} \boldsymbol{\mu}^{\mathbf{i}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \tag{3.3.66}$$

3.3.4 Simplification des expressions obtenues et résolution des inconnues

Dans le sous-titre précédent, on a montré comment obtenir les vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$ et les vecteurs de couple d'efforts $\boldsymbol{\mu}^i$. On peut simplifier les expressions de ces deux vecteurs en se servant d'un résultant concernant les propriété de symétrie des treillis que l'on étudie. On a rappelé dans l'un des paragraphes d'introduction, sous titre 3.2.2, que les équations constitutives de l'élasticité linéaire micropolaire sont de la forme

$$\sigma_{kl} = A_{klmn}\epsilon_{mn} + B_{klmn}\kappa_{mn}$$

$$m_{kl} = C_{klmn}\epsilon_{mn} + D_{klmn}\kappa_{mn}$$

On peut les présenter en 2D également sous la forme

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [C] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix} \tag{3.3.67}$$

On va comparer cela à la forme que l'on obtient après homogénéisation. Après homogénéisation, la résolution s'étant faite sur deux ordres séparés, les variables du premier ordre $\mathbf{u}_1^n$ et ϕ_0^n sont, par construction des systèmes, fonction du tenseur de déformation, tandis que les variables de second ordre $\mathbf{u}_2^n$ et ϕ_1^n sont fonction du tenseur de microcourbure (voir le sous titre 3.3.4.2). On constate qu'on obtient bien la même forme que les équations de l'élasticité linéaire micropolaire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &\sim \frac{1}{g}\left(\mathbf{S}_1^i + \varepsilon \mathbf{S}_2^i\right) \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \\ \boldsymbol{\sigma} &\sim \underbrace{\frac{1}{g}\mathbf{S}_1^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}}_{[A]\{\epsilon\}} + \underbrace{\frac{1}{g}\varepsilon \mathbf{S}_2^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}}_{[B]\{\kappa\}}\end{aligned} \tag{3.3.68}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &\sim \frac{1}{g}\left(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{1}}^{\mathbf{i}} + \varepsilon \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{i}}\right) \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \\ \mathbf{m} &\sim \underbrace{\frac{1}{g}\varepsilon \boldsymbol{\mu}_1^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}}_{[C]\{\epsilon\}} + \underbrace{\frac{1}{g}\varepsilon^2 \boldsymbol{\mu}_2^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}}_{[D]\{\kappa\}}\end{aligned} \tag{3.3.69}$$

Or, il a été montré que pour des milieux à symétrie centrale [Trovalusci and Masiani, 1999] les pseudo tenseurs $[B]$ et $[C]$ sont nuls. Nous nous sommes bornés dans cette étude à ce type de treillis, ce qui signifie que les vecteurs μ_1^i et $\mathbf{S}_2^i$ devraient être nuls. Cela nous conduit à une simplification notable des expressions des vecteurs d'efforts et de couple d'effort

$$\mathbf{S}^i \sim \mathbf{S}_1^i \sim \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(E_s\eta \left(\mathbf{e}^b \cdot \Delta\mathbf{U_1}\right)\mathbf{e}^b + \left(E_s\eta^3 \mathbf{e}^{b\perp} \cdot \Delta\mathbf{U}_1 - \frac{1}{2}E_s\eta^3 L^{b0}\left(\phi_0^{O_R(b)} + \phi_0^{E_R(b)}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib} \tag{3.3.70}$$

$$\sim \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(N_1^b \mathbf{e}^b + T_{1t}^b \mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib} \tag{3.3.71}$$

$$\boldsymbol{\mu}^i \sim \boldsymbol{\mu}_2^i \sim \underbrace{\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\varepsilon^2 \left(E_s\eta^3 \frac{\left(L^b\right)^2}{12}\left(-\phi_1^{O_R(b)} + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib} + \phi_1^{E_R(b)}\right)\right)\right)\delta^{ib}}_{\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(M_2^{E(b)} - M_2^{O(b)}\right)\delta^{ib} = \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\mathbf{M}_2^{E(b)} + \varepsilon\frac{L^b}{2}(\mathbf{e}^b \wedge \mathbf{T}_2^b)\right).\mathbf{e}_3\delta^{ib}} \tag{3.3.72}$$

en posant la fonction N_1^b comme étant la fonction homogénéisée obtenue à partir de sa version asymptotique (équations 3.3.43) après le passage à la limite $\varepsilon \to 0$. Il en est de même pour les fonctions T_{1t}^b obtenues à partir de l'équation 3.3.44 et M_2^n obtenues à partir de 3.3.49 et 3.3.48.

Il subsiste des inconnues de déplacements et de rotations dans les vecteurs $\mathbf{S}^i$ et $\boldsymbol{\mu}^i$: ce sont les fonctions de déplacements $\mathbf{u}_1^n$, $\mathbf{u}_2^n$ et les inconnues de rotation ϕ_0^n et ϕ_1^n. De plus, nous n'avons pas fait apparaître la variable de microrotation ϕ de la théorie micropolaire. La résolution de ces inconnues et l'identification de ϕ feront l'objet du sous-titre suivant.

3.3.4.1 Résolution des inconnues de déplacements et de rotations, identification de ϕ

Comme nous l'avons expliqué dans la section précédente, il subsiste des inconnues de déplacements $\mathbf{u}_1^n$, $\mathbf{u}_2^n$, et de de rotation ϕ_1^n, ϕ_0^n. On n'a pas encore identifié la variable de microrotation ϕ. On peut utiliser un raisonnement similaire à celui fait dans le chapitre deux. Les différences concernent le nombre d'inconnues et le fait que les expressions recouvrent chacune deux ordres de grandeur. Comme nous avons une série d'inconnues supplémentaires, les rotations, il faut pour que le problème soit bien posé une série d'équations supplémentaires, elles seront fournies par l'équilibre des moments. Les équations recouvrent deux ordres, il est donc nécessaire que le système soit équilibré à ces deux ordres.

On notera que nous ne connaissons pas dans le cas général la longueur macroscopique L, ni la valeur du petit paramètre ε ; par contre on se donne souvent la valeur de la longueur microscopique l, la longueur de base de la cellule élémentaire à l'échelle microscopique. Comme nous avons posé le rapport ε comme étant $l = \varepsilon L$, nous remplacerons dans les développements qui suivent εL par l.

Pour ce qui est de l'équilibre des efforts, on peut à nouveau commencer par les équations 3.3.29. Comme le treillis est en équilibre, la cellule élémentaire l'est aussi, donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \mathbf{T}^{b\varepsilon}.\left(\mathbf{v}^\varepsilon\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}^\varepsilon\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \\ \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(N\mathbf{e^b}+T_t\mathbf{e}^{b\perp}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \end{aligned} \tag{3.3.73}$$

Comme cette équation est sur deux ordres, on va la résoudre sur chaque ordre

$$\begin{cases} \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(N_1^b\mathbf{e^b}+T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}\right).\left(\mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \\ \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(N_2^b\mathbf{e^b}+T_{2t}^b\mathbf{e}^{b\perp}\right).\left(\mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \end{cases} \tag{3.3.74}$$

ou de façon plus développée

$$\begin{cases} \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_1}\right)\mathbf{e^b}+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_1-\frac{1}{2}E_s\eta^3l^{b0}\left(\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right)\cdot\left(\mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \\ \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(E_s\eta\left(\mathbf{e}^b\cdot\Delta\mathbf{U_2}\right)\mathbf{e^b}+\left(E_s\eta^3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\Delta\mathbf{U}_2-\frac{1}{2}E_s\eta^3l^{b0}\left(\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp}\right) \\ \cdot\left(\mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)-\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right)\right)=0 \end{cases} \tag{3.3.75}$$

Comme les vitesses virtuelles $\mathbf{v}(.)$ sont a priori quelconque, chacune de ces équations se développe en autant d'équations indépendantes que de noeuds dans la cellule élémentaire, soit deux fois n équations vectorielles (ou $4n$ équations scalaires), n étant le nombre de noeuds

de la cellule élémentaire. On va raisonner de la même façon pour les moments à partir de l'équation 3.3.30. Celle-ci appliquée à la cellule élémentaire et suivant les deux ordres de calcul s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\mathbf{M}_1^{O(b)}.\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}_1^{E(b)}.\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)\right)=\mathbf{0} \\ \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\mathbf{M}_2^{O(b)}.\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right)+\mathbf{M}_2^{E(b)}.\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)\right)=\mathbf{0} \end{array}\right. \tag{3.3.76}$$

ou de façon développée

$$\left\{\begin{array}{c} \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\left(k_f^b\frac{l^b}{6}\left(L^b\left(2\phi_0^{O_R(b)}+\phi_0^{E_R(b)}\right)-3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)\right)\mathbf{e}_3\right).\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right) \\ +\left(\left(k_f^b\frac{l^b}{6}\left(l^b\left(\phi_0^{O_R(b)}+2\phi_0^{E_R(b)}\right)-3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)\right)\mathbf{e}_3\right).\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)=\mathbf{0} \\ \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(\left(k_f^b\frac{l^b}{6}\left(l^b\left(2\phi_1^{O_R(b)}+\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)-3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)\right)\mathbf{e}_3\right).\mathbf{w}\left(O\left(b\right)\right) \\ +\left(\left(k_f^b\frac{l^b}{6}\left(l^b\left(\phi_1^{O_R(b)}+2\left(\phi_1^{E_R(b)}+\frac{\partial\phi_0(\lambda^\varepsilon)}{\partial\lambda^i}\delta^{ib}\right)\right)-3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)\right)\mathbf{e}_3\right).\mathbf{w}\left(E\left(b\right)\right)=\mathbf{0} \end{array}\right. \tag{3.3.77}$$

Comme les taux de rotations virtuelles $\mathbf{w}(.)$ sont a priori quelconque, ces équations se développent en autant d'équations indépendantes que de noeuds dans la cellule élémentaire, soit deux fois n équations scalaires (le champ de rotation virtuelle $\mathbf{w}(.)$ est colinéaire à $\mathbf{e}_3$), n étant le nombre de noeuds de la cellule élémentaire.

Après résolution des inconnues de rotation au premier ordre ϕ_0^n, on va constater que ces inconnues sont fonctions des termes du tenseur de déformation $[\epsilon]$. On peut scinder ce tenseur de déformation en deux parties, une partie symétrique et une antisymétrique. On va identifier ϕ la variable de microrotation homogénéisée à cette partie antisymétrique. En 2D, cela nous donne

$$\phi_0^n=\underbrace{c_i\epsilon_i^{\{\}}}_{\phi_{0\{\}}^n}+\underbrace{d_i\epsilon_i^{\}\{}}_{\phi}$$

3.3.4.2 Algorithme d'homogénéisation micropolaire automatique

On reprend les équations 3.3.77 et 3.3.75, avec un calcul sur deux ordres différents. Pour chacun de ces ordres, deux séries de n équations d'équilibre d'effort et de moments vont se développer.

Au premier ordre :

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E_R(b)=1} N_1^b\mathbf{e}^b + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O_R(b)=1} - N_1^b\mathbf{e}^b - T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp} = 0 \tag{3.3.78}$$

$$\dots \tag{3.3.79}$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E_R(b)=n} N_1^b\mathbf{e}^b + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O_R(b)=n} - N_1^b\mathbf{e}^b - T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp} = 0 \tag{3.3.80}$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O(b)=1} M_1^{O(b)} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E(b)=1} M_1^{E(b)} = 0 \tag{3.3.81}$$

$$\dots \tag{3.3.82}$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O(b)=n} M_1^{O(b)} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E(b)=n} M_1^{E(b)} = 0 \tag{3.3.83}$$

L'ensemble de ces équations 3.3.78 à 3.3.81 aboutit à un système linéaire de la forme

$$[M_1]\begin{bmatrix} u_1^1 \\ \dots \\ u_1^n \\ v_1^1 \\ \dots \\ v_1^n \\ \phi_0^1 \\ \dots \\ \phi_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^1 \\ \dots \\ q_1^{3n} \end{bmatrix} \tag{3.3.84}$$

avec $[M_1]$ matrice de taille $3n \times 3n$, n le nombre de noeud de la cellule de référence, u_1^i et v_1^i les inconnues du vecteur déplacement $\mathbf{u}_1^i = \begin{bmatrix} u_1^i \\ v_1^i \end{bmatrix}$ du noeud i au premier ordre, ϕ_0^i les inconnues de rotation du noeud i au premier ordre et $q_1^i \in \left\{0, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\}$ les données du problème (liées aux conditions d'autoéquilibre). Étant donnée la forme de ce système linéaire, après résolution, les inconnues u_1^i, v_1^i et ϕ_0^i seront fonction de $\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}\right\}$, c'est à dire fonction du tenseur de déformation $[\epsilon]$.

Au second ordre :

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E_R(b)=1} N_2^b\mathbf{e}^b + T_{2t}^b\mathbf{e}^{b\perp} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O_R(b)=1} - N_2^b\mathbf{e}^b - T_{2t}^b\mathbf{e}^{b\perp} = 0 \tag{3.3.85}$$

$$\dots$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E_R(b)=n} N_2^b\mathbf{e}^b + T_{2t}^b\mathbf{e}^{b\perp} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O_R(b)=n} - N_2^b\mathbf{e}^b - T_{2t}^b\mathbf{e}^{b\perp} = 0$$

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O(b)=1} M_2^{O(b)} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E(b)=1} M_2^{E(b)} = 0 \tag{3.3.86}$$
$$\dots$$
$$\sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, O(b)=n} M_2^{O(b)} + \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R},\, E(b)=n} M_2^{E(b)} = 0$$

L'ensemble de ces équations 3.3.85 à 3.3.86 conduit à un système linéaire de la forme

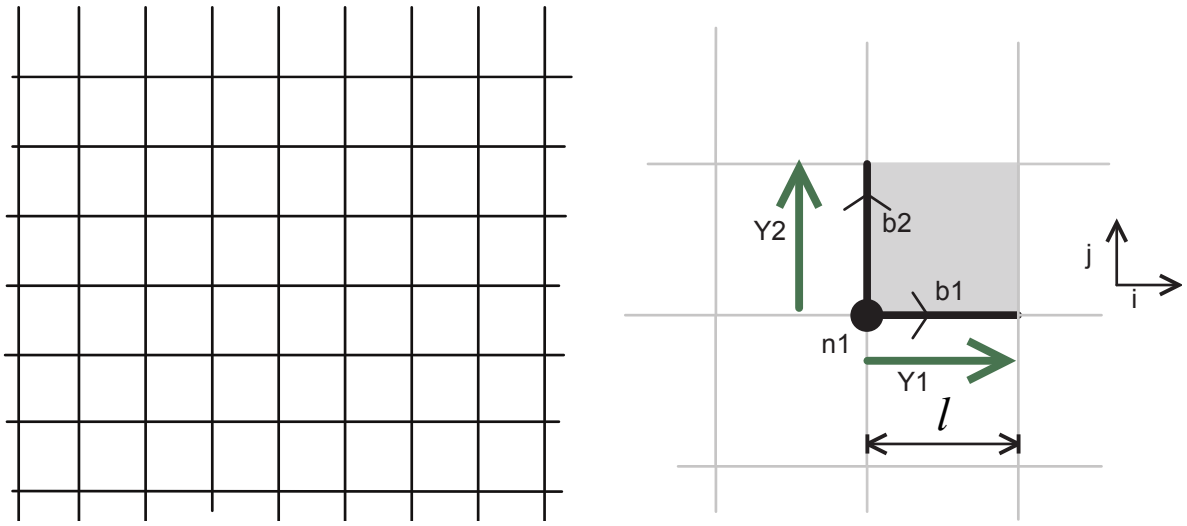
$$[M_2]\begin{bmatrix} u_2^1 \\ \dots \\ u_2^n \\ v_2^1 \\ \dots \\ v_2^n \\ \phi_1^1 \\ \dots \\ \phi_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2^1 \\ \dots \\ q_2^{3n} \end{bmatrix} \tag{3.3.87}$$

avec $[M_2]$ matrice de taille $3n \times 3n$, n le nombre de noeuds de la cellule de référence, u_2^i et v_2^i les inconnues du vecteur déplacement $\mathbf{u}_2^i = \begin{bmatrix} u_2^i \\ v_2^i \end{bmatrix}$ du noeud i au second ordre, ϕ_1^i les inconnues de rotation du noeud i au second ordre et $q_2^i \in \left\{0, \dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right\}$ les données du problème. Étant donnée la forme de ce système linéaire, après résolution les inconnues u_2^i, v_2^i et ϕ_1^i seront fonction de $\left\{\dfrac{\partial\phi}{\partial x}, \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right\}$, c'est à dire fonction du tenseur de courbure $[\kappa]$.

On rappelle que les modules de raideurs [10] sont $k_l^b = E_s\eta$ et $k_f^b = E_s\eta^3$

Nous avons d'un côté, ces deux séries de $3n$ équations indépendantes, soit $6n$ équations au total, et d'un autre côté $6n$ inconnues (deux fois $2n$ inconnues de déplacement et n inconnues de rotations) ; la résolution est possible. Pour simplifier l'identification de ϕ, la variable de microrotation micropolaire, on l'omet des expressions d'équilibre, dans un premier temps, puis on l'identifie a posteriori dans chacune des inconnues de rotation au premier ordre. Après avoir résolu les inconnues, on conserve les expressions des efforts au premier ordre N_1^b, T_{1t}^b pour construire les vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$ et on conserve les expressions de moments au second ordre $M_2^{E(b)}$, $M_2^{O(b)}$ pour construire les vecteurs de couple de contrainte $\boldsymbol{\mu}^i$. Les deux séries de vecteurs serviront, l'une pour obtenir le tenseur de contrainte, et l'autre pour le tenseur de couple de contrainte. Le développement de l'algorithme complet se retrouve dans l'algorithme 3.1. Il suffit de l'alimenter par un fichier texte décrivant la géométrie et

10. Comme cela est expliqué dans la section 3.2.3.2, on aurait également pu utiliser la formulation équivalente $k_l^b = \dfrac{E_s S}{l^b}$, et $k_f^b = \dfrac{12E_s I^b}{(l^b)^3}$



(a) treillis macroscopique (b) cellule de base du treillis carré

FIGURE 3.4.1 – treillis carré

les caractéristiques mécaniques du matériau constituant le treillis. L'intérêt d'avoir un code de calcul automatique est la possibilité de traiter a priori n'importe quel treillis répétitif centro-symétrique, les limites n'étant que les limites de calcul de Maple. On renvoie le lecteur intéressé par le détail de la programmation à l'annexe C où le code source Maple issu de cet algorithme est développé.

3.4 Exemples d'applications

Pour illustrer la méthode, nous conduirons le calcul de façon détaillé sur deux exemples classiques, le treillis carré et le treillis hexagonal.

3.4.1 Le treillis carré

Nous allons tout d'abord appliquer la méthode précédente à un treillis simple en 2D, le treillis carré (voir la figure 3.4.1). [11]

Nous avons deux poutres de longueur $l^b = l$, les deux vecteurs directeurs des poutres sont alors

$\mathbf{e^1} = (1,0)^T$; $\mathbf{e^2} = (0,1)^T$

On pose le vecteur déplacement $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, et ϕ la microrotation, dont le gradient en coordonnées curvilignes est

11. Pour éviter des confusions de notation, les vecteurs de pavage $\mathbf{e}_i^\lambda$ des sections précédentes seront notés $\mathbf{Y}_i$. Ce sont des vecteurs unitaires, dans le repère curvilinéaire, mais ils ont une norme L_i dans le repère cartésien. Les vecteurs unitaires du repère cartésien sont notés $\mathbf{e}_i = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

1. Initialisation des tableaux de données. Définition de la fonction de passage $x \overset{R}{\to} x(\lambda)$. Les inconnues de calcul seront les quatre séries de variables $\mathbf{u}_1^n$, $\mathbf{u}_2^n$, ϕ_0^n et ϕ_1^n avec $n \in \mathcal{N}_R$.
2. Transformation des expressions$\left(\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$ et $\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$. Cette étape est utile si on utilise un code standard dont la fonction produit vectoriel est exprimée dans un repère orthonormé classique. Si on omet cette étape, toutes les fonctions opérant sur des vecteurs et tenseurs doivent être définies pour des coordonnées curvilinéaires.
3. Initialisation des tableaux d'équations $\mathbf{equ1}[1..N_{max}]$,$equ2[1..N_{max}]$ et $equ3[1..N_{max}]$ et $\mathbf{equ4}[1..N_{max}]$ avec N_{max} le nombre de noeuds de la cellule élémentaire. **equ1** et **equ4** sont les premiers membres d'équations vectorielles, $equ2$ et $equ3[1..N_{max}]$ sont les premiers membres d'équations scalaires.
4. Pour chaque poutre $b \in \mathcal{B}_R$:
   a) $E := E_R(b)$, $O := O_R(b)$
   b) $\Delta\mathbf{U}_1^b := \mathbf{u}_1^E - \mathbf{u}_1^O + \dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda^i}\delta^i$, $k_l := E_s\eta$ et $k_f := E_s\eta^3$ (On rappelle que l'on aurait pu utiliser de la même manière $k_l := E_s\dfrac{t}{l^b}$ et $k_f := E_s\dfrac{t^3}{\left(l^b\right)^3}$)
   c) $N_1 := k_l\left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$, $T_{1t} := k_f\left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right) - \dfrac{L^b}{2}\left(\phi_0^O + \phi_0^E\right)\right)$,
   d) $M_1^O := k_f\dfrac{l^b}{6}\left(l^b\left(2\phi_0^O + \phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$, $M_1^E := k_f\dfrac{l^b}{6}\left(l^b\left(\phi_0^O + 2\phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$
   e) $\mathbf{equ1}[E(b)] := \mathbf{equ1}[E(b)] + N_1^b\mathbf{e}^b + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$; $\mathbf{equ1}[O(b)] := \mathbf{equ1}[O(b)] - N_1^b\mathbf{e}^b - T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$. (Il s'agit ici de construire le premier membre de chaque équation)
   f) $equ2[E(b)] := equ2[E(b)] + M_1^E$, $equ2[O(b)] := equ2[O(b)] + M_1^O$
5. Construction de deux systèmes d'équations de $3N_{max}$ lignes au total$\left[\ \mathbf{equ1}\ \right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, $\left[\ equ2\ \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
6. Résolution des deux systèmes pour les variables $\mathbf{u}_1^n$ et ϕ_0^n
7. Identification de $\phi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ dans les variables de rotation ϕ_0^n.
8. Traitement au second ordre identique aux points 4 à 6 mais avec les variables $\mathbf{u}_2^n$ et ϕ_1^n et les équations suivantes
   a) $\Delta\mathbf{U}_2^b := \mathbf{u}_2^E - \mathbf{u}_2^O$
   b) $N_2 := k_l\left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$, $T_{2t} := k_f\left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right) - \dfrac{l^b}{2}\left(\phi_1^O + \phi_1^E + \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda^i}\delta^i\right)\right)$
   c) $M_2^O := k_f\dfrac{l^b}{6}\left(l^b\left(2\phi_1^O + \phi_1^E + \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda^i}\delta^i\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$, $M_2^E := k_f\dfrac{l^b}{6}\left(l^b\left(\phi_1^O + 2\left(\phi_1^E + \dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda^i}\delta^i\right)\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$
9. Expression des vecteurs contraintes $\mathbf{S^i} = \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(N_1^b\mathbf{e^b} + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib}$ et couples de contraintes $\boldsymbol{\mu}^i = \sum\limits_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\dfrac{1}{2}\left(\mathbf{M}_2^{E(b)} - \mathbf{M}_2^{O(b)}\right)\delta^{ib}$.
10. Calcul du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$ et du tenseur couple de contrainte $\mathbf{m} = \dfrac{1}{g}\boldsymbol{\mu}^i \otimes \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$
11. Construction de la matrice de raideur $[K]$ tel que $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = [K]\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix}$, puis de la matrice de souplesse $[S] = [K]^{-1}$
12. Extraction des modules mécaniques micropolaires et autres constantes à partir des matrices de raideur et de souplesse
   a) μ^*, κ à partir de $\begin{cases} \mu^* + \kappa = K_{33} \\ \mu^* = K_{34} \end{cases}$; $\gamma = K_{55}$
   b) $G^* = \mu^* + \dfrac{\kappa}{2}$;$E_1^* = \dfrac{1}{S_{11}}$; $\nu_{12}^* = -S_{21} \cdot E_1^*$

	poutre 1	poutre 2
O(b)	1	1
E(b)	1	1
δ^1	1	0
δ^2	0	1

TABLE 3.2 – description de la connectivité du treillis carré

$$\frac{\partial \mathbf{u_0}(\lambda)}{\partial \lambda^i} = \left[\begin{array}{c} \dfrac{\partial u}{\partial \lambda^i} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \lambda^i} \end{array} \right]_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} ; \frac{\partial \phi}{\partial \lambda^i}_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda^i}$$

Il est préférable d'une manière générale, d'exprimer les coordonnées dans la base cartésienne et de convertir les dérivées curvilignes dans le système de coordonnées cartésien. Cela permet de simplifier le code de calcul Maple dans les calculs de produits scalaires. Dans cet exemple simple, la fonction de changement de coordonnées entre les deux repères vaut $\mathbf{R} = [\underbrace{l\lambda^1}_{x}, \underbrace{l\lambda^2}_{y}]_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$, on obtient dans le repère cartésien :

$$\frac{\partial \mathbf{u_0}(\lambda)}{\partial \lambda^1} = \left[\begin{array}{c} l\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ l\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right]_{(\mathbf{i},\mathbf{j})} ; \frac{\partial \mathbf{u_0}(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \left[\begin{array}{c} l\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ l\dfrac{\partial v}{\partial y} \end{array} \right]_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda^1}_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} = l\frac{\partial \phi}{\partial x}_{(\mathbf{i},\mathbf{j})} ; \frac{\partial \phi}{\partial \lambda^2}_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} = l\frac{\partial \phi}{\partial y}_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$$

On peut coder ce treillis sous la forme d'un tableau (voir tableau 3.2), avec les noeuds origine et extrémité, ainsi que les valeurs des δ^i correspondants.

Si l'on reprend les équations 3.3.85 et 3.3.86 dans le cas du treillis carré, on obtient au premier ordre

$$N_1^1 = k_l \frac{\partial u}{\partial x} ; N_1^2 = k_l \frac{\partial v}{\partial y} ; T_{1t}^1 = k_f \left(l\frac{\partial v}{\partial x} - l\phi_0^1 \right) ; T_{1t}^2 = k_f \left(-l\frac{\partial u}{\partial x} - L\phi_0^1 \right)$$

$$M_1^{E(1)} = \frac{k_f l^2}{2}\left(\phi_0^1 - \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; M_1^{O(1)} = \frac{k_f l^2}{2}\left(\phi_0^1 - \frac{\partial v}{\partial x} \right) ; M_1^{E(2)} = \frac{k_f l^2}{2}\left(\phi_0^1 + \frac{\partial u}{\partial y} \right) ; M_O^{b2} = \frac{k_f l^2}{2}\left(\phi_0^1 + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

On rappelle, les modules de raideurs en extension et flexion suivants : $k_l = E_s\eta = \dfrac{E_s t^b}{l^b}$, $k_f = E_s\eta^3 = \dfrac{12E_sI_z}{(l^b)^3}$.

Il y a une seule inconnue dans ces équations, la rotation au premier ordre du noeud ϕ_0^1, qui après résolution devient

$$\phi_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

L'identification de ϕ , la variable de rotation micropolaire, est immédiate, $\phi_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \phi$.

Au second ordre, on obtient

$N_2^1 = 0\,;\, N_2^2 = 0\,;\, T_{2t}^1 = -\frac{k_f l}{2}\left(2\phi_1^1 + l\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\,;\, T_{2t}^2 = -\frac{k_f l}{2}\left(2\phi_1^1 + l\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

$M_2^{E(1)} = \frac{k_f l^2}{6}\left(3\phi_1^1 + 2l\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\,;\, M_2^{O(1)} = \frac{k_f l^2}{6}\left(3\phi_1^1 + l\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\,;\, M_2^{E(2)} = \frac{k_f l^2}{6}\left(3\phi_1^1 + 2l\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\,;$
$M_2^{O(2)} = \frac{k_f l^2}{6}\left(3\phi_1^1 + l\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

Au second ordre, il n'y a également qu'une variable ϕ_1^1 qui après résolution vaut

$\phi_1^1 = -\frac{l}{4}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$

On peut maintenant exprimer les vecteurs $\mathbf{S}^i$et μ^i, à partir des équations 3.3.70 et 3.3.72

$$\mathbf{S^1} = \begin{bmatrix} k_l l\frac{\partial u}{\partial x} \\ k_f l\left(\frac{\partial v}{x} - \phi\right) \end{bmatrix}\,;\, \mathbf{S^2} = \begin{bmatrix} k_f l\left(\frac{\partial u}{y} - \phi\right) \\ k_l l\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}\,;\, \boldsymbol{\mu}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_f l^3}{12}\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{bmatrix}\,;\, \boldsymbol{\mu^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_f l^3}{12}\frac{\partial \phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Il nous reste à obtenir les deux tenseurs à partir des relations 3.3.25 et 3.3.26 :

$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$

$\mathbf{m} = \frac{1}{g}\boldsymbol{\mu^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$

On rappelle que $\mathbf{R} = \underbrace{l\lambda^1}_{x}\mathbf{i} + \underbrace{l\lambda^2}_{y}\mathbf{j}$. On obtient $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^1} = \begin{bmatrix} l \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix}$ et le déterminant de la matrice Jacobiennne, $g = l^2$. Nous pouvons maintenant développer le tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{l^2}\left(\mathbf{S^1} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^1} + \mathbf{S^2} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^2}\right) = \begin{bmatrix} k_l\frac{\partial u}{\partial x} & k_f\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \phi\right) \\ k_f\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi\right) & k_l\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

De la même façon, on obtient le tenseur $\mathbf{m}$. Il est simplement nécessaire d'étendre la fonction de passage des coordonnées curvilignes à la dimension hors plan en considérant que la normale au plan, support des vecteurs moments $\boldsymbol{\mu}^i$, est identique en coordonnées curvilignes et en coordonnées cartésiennes. Nous considérons que le treillis a une épaisseur unité à la fois dans le système curviligne et dans le système cartésien. Nous obtenons alors une fonction de changement de coordonnées

$$\mathbf{R} = \underbrace{l\lambda^1}_{x}\mathbf{i} + \underbrace{l\lambda^2}_{y}\mathbf{j} + \underbrace{\lambda^3}_{z}\mathbf{k} \tag{3.4.2}$$

$$\mathbf{m} = \frac{1}{l^2}\left(\mu^{\mathbf{1}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^{\mathbf{1}}} + \mu^{\mathbf{2}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^{\mathbf{2}}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_f l^2}{12}\frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{k_f l^2}{12}\frac{\partial \phi}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4.3}$$

Malgré la forme du tenseur obtenu, seules les deux composantes, m_{31} et m_{32} existent dans un problème plan. Comme expliqué dans l'introduction, en notation de l'ingénieur, on peut écrire la loi micropolaire sous la forme condensée

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \phi \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{3.4.4}$$

avec $[K]$ la matrice de rigidité ici égale à

$$[K] = \begin{bmatrix} k_l & & & & & \\ & k_l & & & & \\ & & k_f & & & \\ & & & k_f & & \\ & & & & \frac{k_f l^2}{12} & \\ & & & & & \frac{k_f l^2}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_s\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_s\eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_s\eta^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_s\eta^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2 E_s\eta^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2 E_s\eta^3}{12} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{E_s t}{l} & & & & & \\ & \frac{E_s t}{l} & & & & \\ & & \frac{12E_s I_z}{l^3} & & & \\ & & & \frac{12E_s I_z}{l^3} & & \\ & & & & \frac{E_s I_z}{l} & \\ & & & & & \frac{E_s I_z}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & & & & & \\ & K_{22} & & & & \\ & & K & & & \\ & & & K_{44} & & \\ & & & & K_{55} & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

Nous n'avons au final que trois modules de rigidité différents $K_{11} = K_{22}$,$K_{33} = K_{44}$ et $K_{55} = K_{66}$. On peut obtenir dès lors les modules mécaniques. Le module de Young est trivial, étant donné que ce treillis est orthotétragonal, seules les poutres dans l'axe du chargement travaillent, c'est donc logiquement la raideur d'une poutre qui apparaît

$$E_1^* = E_2^* = k_l = E_s\,\eta = \frac{E_s\,t}{l} \tag{3.4.6}$$

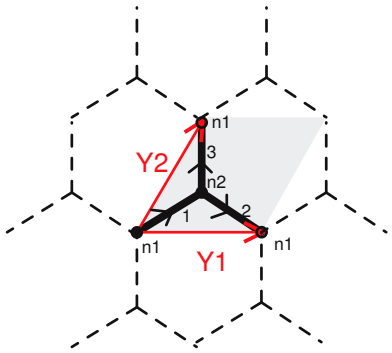


FIGURE 3.4.2 – Symétrisation de la cellule de base

Le coefficient de Poisson est nul

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0 \tag{3.4.7}$$

Les modules micropolaires κ et μ^*, s'expriment selon

$$\kappa = k_f = E_s\,\eta^3 = 12\,\frac{E_s\,I_z}{l^3} \tag{3.4.8}$$

$$\mu^* = 0 \tag{3.4.9}$$

Le module de cisaillement G équivalent en élasticité classique, vaut

$$G \;\; = \tfrac{k_f}{2} = \tfrac{E_s\,\eta^3}{2} = \;\; 6\,\frac{E_s\,I_z}{l^3} \tag{3.4.10}$$

Le module de raideur des microcourbures est identique pour les deux axes :

$$\gamma = \frac{k_f l^2}{12} = \frac{E_s I_z}{l} \tag{3.4.11}$$

On peut remarquer que les modules ont bien les mêmes dimensions que celles de la théorie micropolaire. On ajoutera le calcul des constantes suivantes, liées à certaines équations de la théorie micropolaire :

- la longueur caractéristique $L^2_{cara} = \frac{l^2}{24}$
- le coefficient de couplage $N^2_{coupl} = \frac{1}{2}$. Ce coefficient de couplage n'est pas égal à 1, prouvant que nous ne sommes pas dans le cas d'une théorie "couple stress" mais bien dans le cas d'une théorie micropolaire.

3.4.2 Le treillis hexagonal (appelé aussi 'nid d'abeille')

La figure 3.4.2 montre la définition géométrique de ce treillis.

poutre	1	2	3
O(b)	1	2	2
E(b)	2	1	1
δ_1	0	1	0
δ_2	0	0	1

TABLE 3.3 – Tableau de connectivité du treillis hexagonal

Chaque poutre a une longueur l ; les longueurs de pavages (norme de $\mathbf{Y}_1$ et $\mathbf{Y}_2$ dans le repère cartésien) sont $l_1 = l_2 = \sqrt{3}l$. Les autres caractéristiques du treillis peuvent être synthétisées dans le tableau de connectivité 3.3.

Nous poserons les modules de raideurs axiale et flexionnelle suivants : $k_f = E_s\eta^3 = \dfrac{12\,E_s\,I_z}{l^3}$ et $k_l = E_s\eta = \dfrac{E_s\,t}{l}$. En procédant à l'homogénéisation à l'aide du code de calcul, on obtient pour le tenseur de contrainte

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \frac{k_l\sqrt{3}(k_l\,\frac{\partial u}{\partial x}+3\,k_f\,\frac{\partial u}{\partial x}+k_l\,\frac{\partial v}{\partial y}-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)k_f)}{6(k_l+k_f)} & \frac{k_f\,\sqrt{3}\left(k_l\,\frac{\partial v}{\partial x}-k_f\,\frac{\partial v}{\partial x}+k_f\,\frac{\partial u}{\partial y}+3\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)k_l+2\,\phi\,k_l+2\,k_f\,\phi\right)}{6(kl+kt)} \\ \frac{k_f\,\sqrt{3}(3\,k_l\,\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)k_l+k_f\,\frac{\partial v}{\partial x}-k_f\,\frac{\partial u}{\partial y}-2\,\phi k_l-2\,k_f\,\phi)}{6(k_l+k_f)} & \frac{k_l\,\sqrt{3}\left(k_l\,\frac{\partial u}{\partial x}-k_f\,\frac{\partial u}{\partial x}+k_l\,\frac{\partial v}{\partial y}+3\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)k_f\right)}{6(k_l+kf)} \end{bmatrix}$$

et pour le tenseur couple de contrainte [12]

$$\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}l^2k_f}{36}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\sqrt{3}l^2k_f}{36}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Avec la notation condensée, on obtient la matrice de raideur

12. On rappelle que **m** est représenté par une matrice 3x3 à cause du procédé de calcul, mais seul sont valides les coefficients m_{31}et m_{32}

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}k_l\left(k_l+3\,k_f\right)}{6(k_l+k_f)} & \frac{\sqrt{3}k_l\left(k_l-k_f\right)}{6(k_l+k_f)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}k_l\left(k_l-k_f\right)}{6(k_l+k_f)} & \frac{\sqrt{3}k_l\left(k_l+3\,k_f\right)}{6(k_l+k_f)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}k_f\left(k_f+3\,k_l\right)}{6(k_l+k_f)} & \frac{\sqrt{3}k_f\left(k_l-k_f\right)}{6(k_f+k_f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}k_f\left(k_l-k_f\right)}{6(k_f+k_f)} & \frac{\sqrt{3}k_f\left(k_f+3\,k_l\right)}{6(k_l+k_f)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}k_f.l^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}k_f.l^2}{36} \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta\left(1+3\,\eta^2\right)}{1+\eta^2} & -\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta\left(-1+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta\left(-1+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta\left(1+3\,\eta^2\right)}{1+\eta^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta^3\left(3+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & -\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta^3\left(-1+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta^3\left(-1+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}E_s\,\eta^3\left(3+\eta^2\right)}{1+\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s\eta^3\sqrt{3}l^2}{36} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s\eta^3\sqrt{3}l^2}{36} \end{bmatrix}$$

On retrouve les coefficients que l'on avait calculés dans le chapitre d'homogénéisation non polaire, hormis les coefficients K_{55} et K_{66} qui n'existent bien sûr que pour un milieu micropolaire. On peut tirer de cette matrice les expressions des modules homogénéisés en fonction des paramètres géométriques et mécaniques du treillis :

$$\mu^* = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{3}k_f\left(k_l-k_f\right)}{k_l+k_f} = -\frac{\sqrt{3}Es\,\eta^3\left(-1+\eta^2\right)}{6\left(1+\eta^2\right)} = -2\,\frac{I_z\,E_s\,\left(-tl^2+12\,I_z\right)\sqrt{3}}{l^3\left(tl^2+12\,I_z\right)} \tag{3.4.12}$$

$$\kappa = \frac{k_f\sqrt{3}}{3} = \frac{Es\,\eta^3\sqrt{3}}{3} = 4\,\frac{\sqrt{3}I_z\,E_s}{l^3} \tag{3.4.13}$$

$$E^* = \frac{4\left(k_fk_l\sqrt{3}\right)}{3\left(k_l+3k_f\right)} == 4/3\,\frac{Es\,\eta^3\sqrt{3}}{1+3\,\eta^2} = 16\,\frac{\sqrt{3}E_s\,I_z\,t}{l\left(tl^2+36\,I_z\right)} \tag{3.4.14}$$

$$\nu = \frac{k_l-k_f}{k_l+3k_f} = -\frac{-1+\eta^2}{1+3\,\eta^2} = -\frac{-tl^2+12\,I_z}{tl^2+36\,I_z} \tag{3.4.15}$$

$$G^* = \frac{1}{3}\frac{k_lk_f\sqrt{3}}{k_l+k_f} = \frac{Es\,\eta^3\sqrt{3}}{3\left(1+\eta^2\right)} = 4\,\frac{\sqrt{3}E_s\,I_z\,t}{l\left(tl^2+12\,I_z\right)} \tag{3.4.16}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}k_f.l^2}{36} = \frac{\sqrt{3}I_z\,E_s}{3\,l} \tag{3.4.17}$$

$$l_{cara}^2 = \frac{l^2\,(k_l + k_f)}{48k_l} = \frac{l^2\,(1+\eta^2)}{48}$$

$$N^2 = \frac{k_l + k_f}{3k_l + k_f} == \frac{1+\eta^2}{3+\eta^2}$$

On remarque que les modules sont homogènes quant aux dimensions par rapport à ce qui est évoqué dans la théorie micropolaire. On retrouve les mêmes résultats que Pradel dans Pradel and Sab [1998], ainsi que Kumar et McDowell dans Kumar and McDowell [2009], qui utilisent, des méthodes énergétiques. Warren and Byskov [2002] utilise la symétrie particulière du milieu (distribution des noeuds à 120°), ils trouvent des termes complémentaires, liés au gradient de la déformation. Les auteurs utilisent des développements de Taylor au second ordre pour les déplacements.

Même si on retrouve des résultats identiques à ceux d'autres auteurs, on peut quand même faire une vérification avec Abaqus, en reprenant le principe des tests de Casolo [2006] (voir la figure 3.4.3) pour le module de cisaillement. Le module de flexion pure γ sera évalué en fonction de la formule simplifiée de flexion simple d'une poutre micropolaire 2D (voir l'annexe D).

3.4.3 Vérifications des modules obtenus

L'objectif de cette partie est de vérifier la validité des modules obtenus en faisant des expérimentations numériques par élément fini. D'une façon générale, on fera les tests avec deux types d'échantillons, soit un carré de 16×16 cellules de base, soit une poutre micropolaire, c'est-à-dire avec une microstructure en treillis. On a choisi en général un nombre de cellules supérieur à 10 par côtés pour diminuer les effets de bords [Alkhader and Vural, 2008].

3.4.3.1 Test en cisaillement pur du treillis carré

On a repris le principe des tests de Casolo [2006] pour le module K_{33}. Les paramètres de ces tests sont expliqués dans la figure 3.4.3. Le principe du test en cisaillement pur consiste à appliquer sur les faces latérales du treillis, opposées deux à deux, un effort linéique de cisaillement. Comme il n'y a qu'un seul noeud par cellule élémentaire dans le cas de ce treillis carré, la rotation ϕ, liée à la cellule élémentaire homogénéisée, de la théorie micropolaire suit la rotation de ce seul noeud. Mais de fait, cela n'est plus valable, dès lors qu'il y a plusieurs noeuds par cellule élémentaire.

Les tests ont été fait en éléments finis sur Abaqus en choisissant des éléments poutres de type Euler-Bernoulli (B23 dans le codage Abaqus), avec quatre éléments par poutres. Les conditions aux bords sont indiquées sur la figure 3.4.4. On impose aux bords une rotation nulle et le noeud du bas à gauche est encastré. Le matériau utilisé pour les simulations est de l'aluminium de propriétés élastiques $E_s = 72000\,\text{MPa}$, $\nu = 0,33$. La taille de l'échantillon est de 1 mm de côté, avec un treillis de 16×16 cellules. Les poutres ont une longueur $l = 0,0625$ mm et une largeur $t = 0,005$ mm pour garder un rapport l/t assez grand. Pour diminuer un

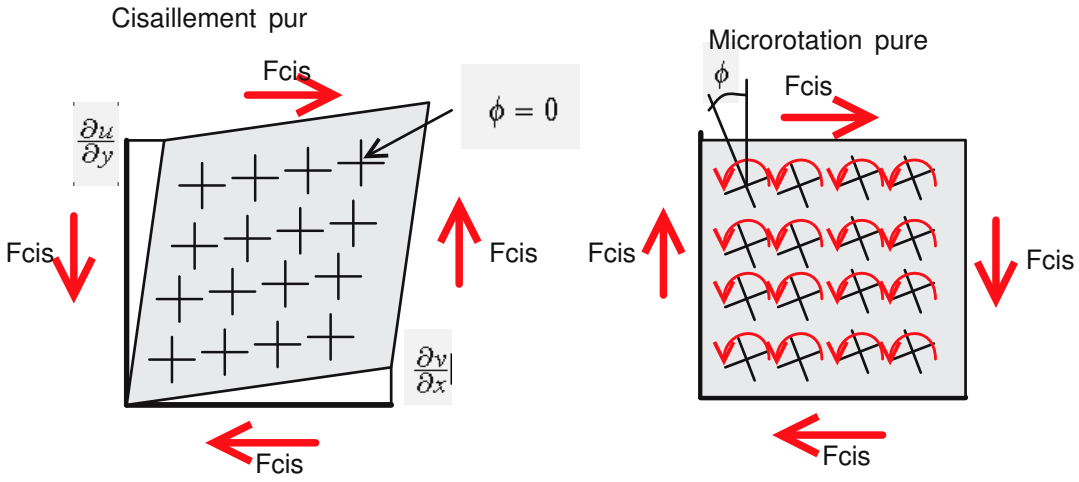


FIGURE 3.4.3 – Principe des tests pour le module K_{33} de la matrice de raideur micropolaire

peu plus les effets de bords, on a modifié la largeur des poutres sur les bords, pour conserver globalement une même rigidité de flexion. Il y a deux poutres sur chaque bord opposé qui doivent assurer la même rigidité flexionnelle qu'une seule poutre. La rigidité flexionnelle est fonction de $I_z = \frac{t^3}{12}$, pour que deux poutres aient la même rigidité qu'une seule, il faut que leur largeur soit $t' = \sqrt[3]{\frac{t^3}{2}} = 0,003968\,\text{mm}$.

On charge avec un effort en cisaillement réparti de 1 N par côtés. Le cisaillement étant identique $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, on constate sur la figure 3.4.5 qu'il y a un cisaillement pur du milieu sans microrotation [13] aux noeuds, ce qui était attendu. Cela va nous permettre d'exprimer directement la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation de cisaillement. D'après la matrice 3.2.8 on devrait obtenir $\sigma_{xy} = K_{33}\varepsilon_{xy} = K_{33}(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi)$, soit comme $\phi = 0$ dans ce cas de chargement,

$$\sigma_{xy} = K_{33}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4.18}$$

$$\Rightarrow K_{33} = \frac{\sigma_{xy}}{\partial v/\partial x} \tag{3.4.19}$$

avec la contrainte de cisaillement égale à l'effort réparti divisé par la longueur, $\sigma_{xy} = \frac{1\,\text{N}}{1\,\text{mm}} = 1\,\text{MPa}$ et la déformation de cisaillement égale au déplacement divisé par la longueur, dans notre simulation il s'agit du déplacement du noeud n1 au bas à droite (voir la figure 3.4.4). Les déplacements sont notés Ui dans Abaqus, avec i la direction, donc $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U2(n_1)}{1\,\text{mm}}$.

13. Dans Abaqus, c'est la variable UR3 qui est la variable de rotation. C'est une variable continue sur le réseau de poutre, mais c'est uniquement aux noeuds que cette variable correspond à ϕ.

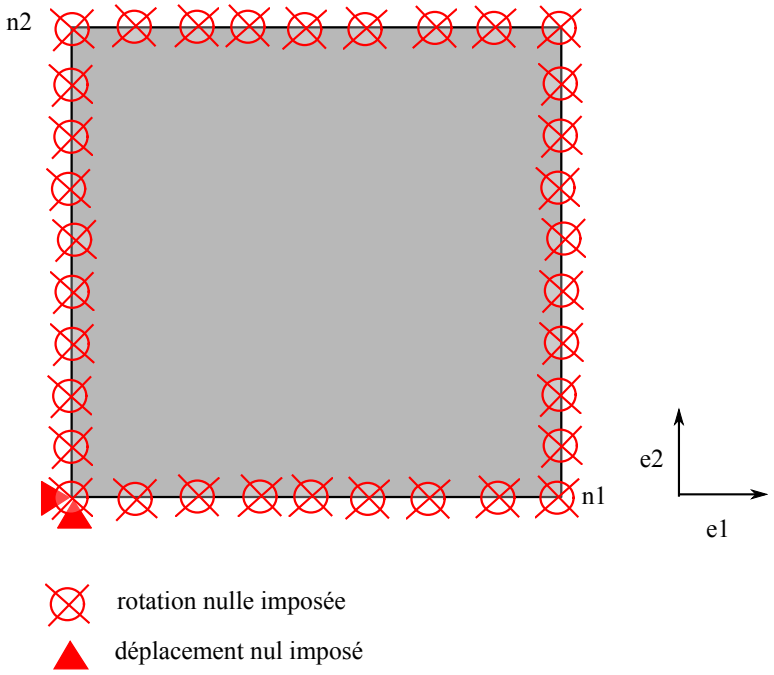


FIGURE 3.4.4 – Conditions aux bords lors du test en cisaillement du treillis carré

déformation de cisaillement $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{U2(n_1)}{1\,\text{mm}}$	$K_{33}(homogen.)$ $= \frac{12E_sI_z}{l^3}$	$K_{33}(Abaqus)$ $= \frac{\sigma_{xy}}{\partial v/\partial x}$	écart en %
$2,711 \times 10^{-2}$mm	36,86 MPa	36,88 MPa	0,05 %

TABLE 3.4 – Comparaison des résultats lors du test du treillis carré en cisaillement, pour le module K_{33} entre la valeur homogénéisée et par EF

On aurait pu raisonner de la même manière avec le module K_{44} et le déplacement $U1(n2)$. Les résultats de la simulation sont

$U2(n_1) = 2,711 \times 10^{-2}$mm, ce qui entraîne $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{U2(n_1)}{1\,\text{mm}} = 2,711 \times 10^{-2}$ et le module K_{33} estimé par Abaqus $K_{33}(Abaqus) = \dfrac{\sigma_{xy}}{\partial v/\partial x} = \dfrac{1}{2.711 \times 10^{-2}} = 36,88\,\text{MPa}$. On peut comparer ce résultat à ce que nous donne l'homogénéisation $K_{33}(homogen.) = \frac{12E_sI_z}{L^3} = E_s\eta^3 = 72000\left(\dfrac{0.005}{0.0625}\right)^3 = 36.86\,\text{MPa}$. On peut donc affirmer que l'on a par l'homogénéisation une excellente approximation de ce module.

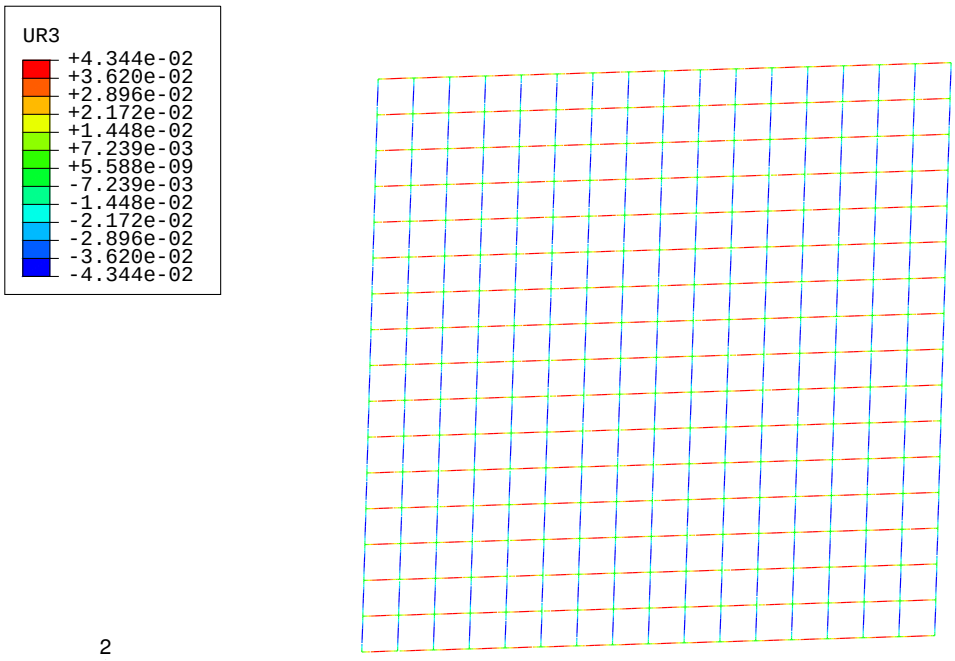


FIGURE 3.4.5 – Variable de rotation UR3 lors de la déformation du treillis carré par cisaillement, de valeur nulle aux noeuds

3.4.3.2 Test en microrotation pure du treillis carré

On cherche à tester le module K_{33}, mais cette fois-ci on ne créant qu'une microrotation sans aucune déformation (voir la figure 3.4.3). Le principe est simple, on applique cette fois-ci un microcouple en chaque noeud. Il faut simultanément pour maintenir l'équilibre appliquer des efforts de cisaillement sur les bords qui créent un couple global équilibrant la somme des micromoments appliqués. Pour réaliser le test en microrotation pure, on a eu recourt à une petite astuce pour compenser les effets de bord (voir la figure 3.4.6). En effet, on applique des moments uniformes sur l'ensemble de l'échantillon considéré, ce qui crée une microrotation de chaque noeud. Mais la valeur des microrotations aux bords si elle est imposée influence le résultat global, car ces noeuds de bords sont reliés à trois poutres et non quatre. Cela crée une réponse non uniforme de l'échantillon pour ce qui est de la rotation des noeuds. Pour avoir une réponse uniforme, on a procédé par itération, en imposant sur les bords la valeur moyenne (centrale) des microrotations dans l'échantillon considéré et simultanément on a modifié la valeur des efforts de cisaillement sur les bords pour maintenir l'équilibre.

Le raisonnement pour le calcul est similaire, on part de $\sigma_{xy} = K_{33}\varepsilon_{xy} = K_{33}(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \phi)$, mais cette fois-ci il n'y a aucun cisaillement $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, on en tire $K_{33} = -\dfrac{\sigma_{xy}}{\phi}$. Les résultats sont résumés dans le tableau 3.5. L'écart est de 0,1% : nous pouvons donc raisonnablement penser que nos valeurs sont correctes pour ce module K_{33} et correspondent réellement au comportement du treillis.

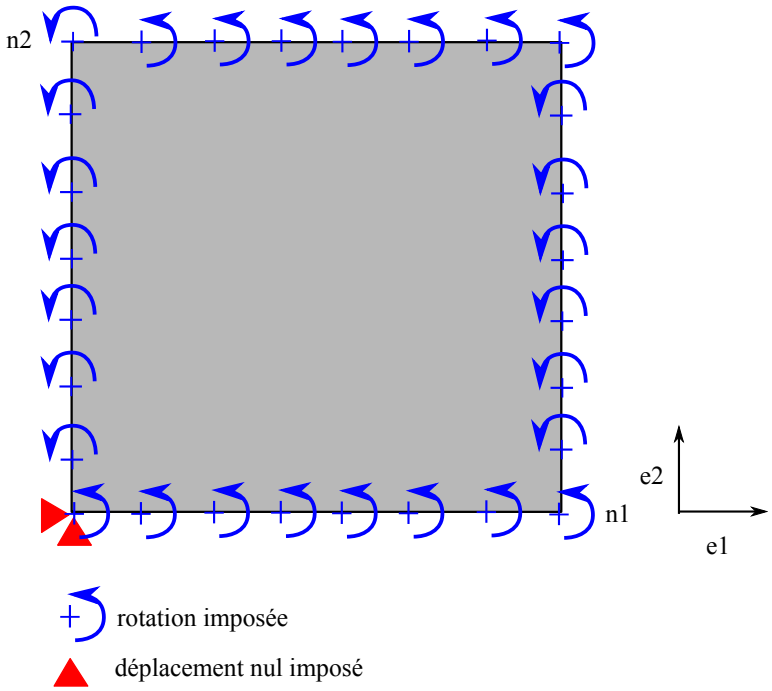


FIGURE 3.4.6 – Conditions aux bords lors du test du treillis carré en microrotations pures

rotation moyenne des noeuds en EF	σ_{xy} imposé au bord	$K_{33}(homogen.)$ $=\frac{12E_sI_z}{l^3}$	$K_{33}(Abaqus)$ $=-\frac{\sigma_{xy}}{\phi}$	écart en %
$\phi = 15,2544 \times 10^{-3}$ rad .	-0,5631 N	36,86 MPa	36,91 MPa	0,1%

TABLE 3.5 – Comparaison des résultats en microrotation pure, pour le module K_{33} du treillis carré, entre la valeur homogénéisée et par EF

3.4.3.3 Test en flexion pure du treillis carré

On cherche cette fois-ci à vérifier le module K_{55} dans la matrice $[K]$ du treillis carré. On va utiliser la flexion d'une poutre micropolaire dans le cas d'une contrainte plane. On invite le lecteur à se référer à l'annexe D pour plus de détails. Les principaux paramètres sont indiqués dans la figure 3.4.7. On obtient la relation suivante en contrainte plane pour une poutre micropolaire soumise à un moment de flexion uniforme

$$(E^* I_z^* + K_{55} H) \frac{\partial \phi}{\partial x} = -M_f \tag{3.4.20}$$

avec E^* module élastique homogénéisé de la poutre macroscopique, tel que $E^* = \frac{E_s t}{l}$, I_z^*

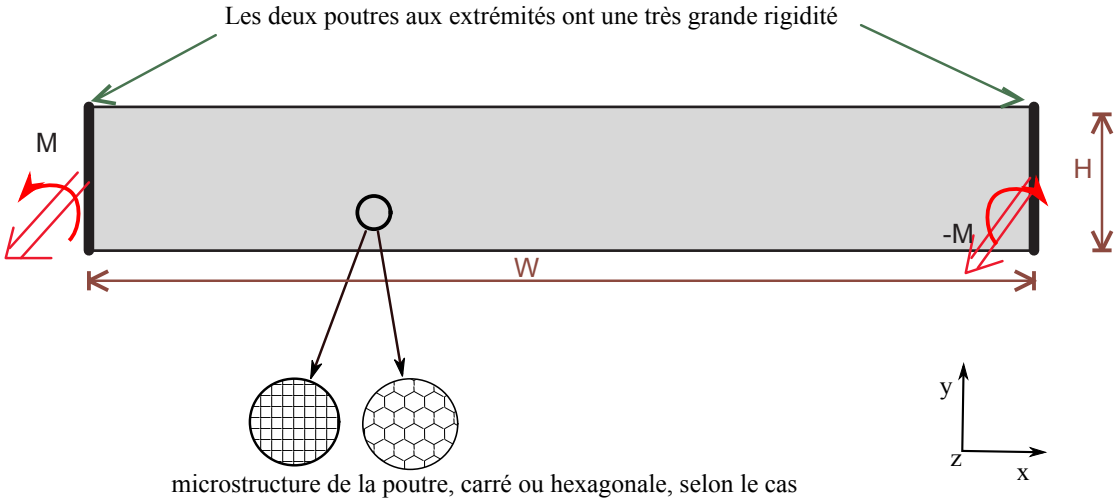


FIGURE 3.4.7 – Principaux paramètres d'une poutre micropolaire en flexion pure

moment quadratique suivant z de la poutre macroscopique, $I_z^* = \dfrac{H^3}{12}$, avec H la largeur de la poutre macroscopique, $K_{55} = \gamma$ étant le module micropolaire calculé précédemment tel que $K_{55} = \dfrac{E_s I_z}{l}$ dans le cas du treillis carré. On précise que le moment quadratique $I_z = \dfrac{t^3}{12}$ dans cette dernière relation est lié aux micropoutres de largeur t et E_s est le module de Young du matériau de base de chaque poutre.

Si on développe l'équation 3.4.20, on obtient

$$\left(\frac{E_s t H^3}{12l} + \frac{E_s t^3 H}{12l}\right)\frac{\partial \phi}{\partial x} = -M_f \tag{3.4.21}$$

$$\frac{E_s t H}{12l}\left(H^2 + t^2\right)\frac{\partial \phi}{\partial x} = -M_f \tag{3.4.22}$$

L'équation d'une poutre standard, non micropolaire, soumise à un moment de flexion uniforme s'écrit

$$\frac{E_s t H^3}{12l}\frac{\partial \phi}{\partial x} = -M_f \tag{3.4.23}$$

L'effet micropolaire apparaît donc sous la forme du terme t^2. On constate que pour faire apparaître un effet micropolaire, il est nécessaire que t^2 soit proche de H^2. Comme M_f est constant, $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ l'est aussi et on peut réécrire les équations 3.4.22 et 3.4.23 sous la forme suivante après intégration le long de l'axe x

$$\phi^{standard} = -\frac{M_f W}{K_f^{standard}} \tag{3.4.24}$$

$$\phi^{micropol} = -\frac{M_f W}{K_f^{micropol}} \tag{3.4.25}$$

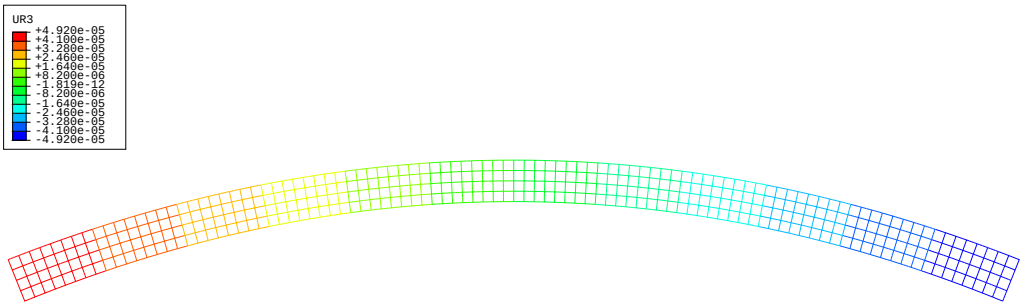


FIGURE 3.4.8 – Valeurs de UR3=ϕ, lors d'une simulation EF d'une poutre à microstructure carrée, en flexion pure

avec $K_f^{standard} = \dfrac{E_s t H^3}{12l}$ et $K_f^{micropol} = \dfrac{E_s t H}{12l}(H^2 + t^2)$. On constate que l'angle de courbure totale ϕ est différent selon que l'on soit dans le cas micropolaire ou non. On peut faire une simulation numérique en élément finis de manière à mettre en évidence cet angle et vérifier s'il se rapproche du modèle homogénéisé micropolaire. On a réalisé la simulation sous Abaqus avec les paramètres suivants

H=3,75 mm, h=2 mm, l=0,9375 mm, E_s=72000 MPa, W=90 mm et M_f=1 N.mm [14].

La figure 3.4.8 montre la distribution spatiale de la variable de rotation $UR3$. La différence des deux valeurs extrêmes fournit la valeur de l'angle de courbure total ϕ.

Si la modélisation micropolaire est exacte, l'écart attendu entre la valeur de $\phi(Abaqus)$ et $\phi^{standard}$ est de

$$\frac{\phi^{micropol} - \phi^{standard}}{\phi^{micropol}} = \frac{t^2}{H^2} \tag{3.4.26}$$

Soit dans notre cas un écart attendu de $t^2/H^2 = 28\,\%$. Les résultats numériques donnent $\phi(Abaqus) = -4.920 \times 10^{-5} - 4.920 \times 10^{-5} = -9,84 \times 10^{-5}$ radians. Les équations 3.4.24 et 3.4.25 prédisent une valeur

$$\phi^{micropol} = 90\frac{-12 \times 0,9375}{72000 \times 3,75 \times 2 \times (3,75^2 + 2^2)} = -10,38 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

et

$$\phi^{standard} = 90\frac{-12 \times 0,9375}{72000 \times 3,75 \times 2 \times 3,75^2} = -13,33 \times 10^{-5}\,\text{rad}$$

Si l'on compare $\phi(Abaqus)$ et $\phi^{micropol}$ on a un écart de 5,2 % sans doute lié aux effets de bords. Si on compare $\phi(Abaqus)$ et $\phi^{standard}$ l'écart est de 35 %. Tous ces résultats sont synthétisés dans le tableau 3.6. On constate donc une valeur très proche entre la simulation numérique et la valeur de la théorie homogénéisée micropolaire pour le module K_{55}.

14. On notera que cette simulation ne peut avoir de réalité physique, car la hauteur des poutres h composant le treillis intérieur est supérieure à la largeur du côté L de la cellule de référence. Mais cette impossibilité

	$\phi(Abaqus)$	$\phi^{micropol}$	$\phi^{standard}$
valeur	$-9,84 \times 10^{-5}$ rad	$-10,38 \times 10^{-5}$ rad	$-13,33 \times 10^{-5}$ rad
écart $\dfrac{\phi^i - \phi(Abaqus)}{\phi(Abaqus)}$ en % (i= $micropol, ou\ standard$)		5,2 %	35%

TABLE 3.6 – Comparaison entre les valeurs de ϕ, la rotation totale lors d'une flexion de poutre à microstructure carrée, obtenues par EF ou analytiquement incluant le module micropolaire $K_{55} = \gamma$ ou non.

On rappelle néanmoins que les écarts trouvés n'ont pas de réalité physique, la simulation EF n'a que pour but de vérifier la validité des modules trouvés. Dans une vraie poutre à microstructure, la largeur des micropoutres de la cellule de base est très inférieure à la largeur de la poutre $t^2 \ll H^2$, dès lors l'effet micropolaire disparaît lors de ce type de chargement.

En conclusion de ces tests sur le treillis carré, on retiendra que les modules trouvés par homogénéisation sont représentatifs.

3.4.3.4 Test en flexion pure du treillis hexagonal

Il est difficile de faire des simulations EF en cisaillement et microrotation d'un treillis hexagonal. En effet, la cellule élémentaire comporte deux noeuds, on ne peut dès lors identifier ϕ à la rotation individuelle d'un noeud, de plus on ne peut définir des conditions de bords similaires horizontalement et verticalement, car la cellule élémentaire n'est pas identique par rotation de 90° . On se contentera donc du test du module K_{55} en flexion pure. Ce test en flexion est similaire à celui du treillis carré (voir la figure 3.4.7), avec la même 'astuce' de calcul, qui consiste à prendre des poutres surdimensionnées en largeur. On a pris une poutre avec 16 cellules en largeur pour ne pas avoir un résultat trop "pollué" par les effets de bords (Tekoglu and R.Onck [2008], Onck et al. [2001] et Alkhader and Vural [2008]).

Nous rappelons brièvement le raisonnement, identique à celui utilisé pour le treillis carré. Le moment de flexion d'une poutre macroscopique, sans effet micropolaire s'exprime selon

$$M_f = -E^* I_z^* \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.4.27}$$

Une poutre avec effet micropolaire (voir annexe D) devrait donner l'expression suivante pour ce qui est de son moment de flexion

$$M_f = -\left(E^* I_z^* + K_{55} H\right) \frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{3.4.28}$$

physique ne gêne pas Abaqus pour ses calculs

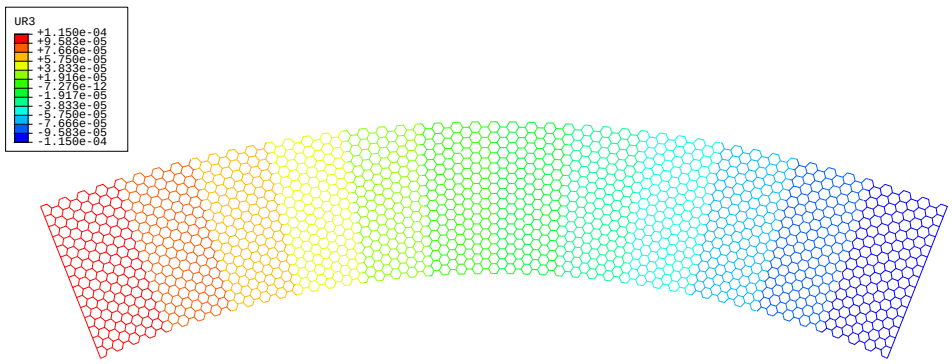


FIGURE 3.4.9 – Valeurs de UR3=ϕ, lors d'une simulation EF d'une poutre à microstructure hexagonale, en flexion pure

avec le module de Young de la poutre homogénéisé (voir l'équation 3.4.14) $E^* = 16\,\frac{\sqrt{3}E_s\,I_z\,t}{l(tl^2+36\,I_z)}$, I_z^* le moment quadratique de la poutre homogénéisée (macroscopique) $I_z^* = \frac{H^3}{12}$, $K_{55} = \gamma$ le module micropolaire, calculé précédemment, voir l'équation 5.3.20, $K_{55} = \frac{\sqrt{3}I_z\,E_s}{3\,l}$.

Les différents paramètres de la simulation numérique sont les suivants :

- longueur de la poutre macropolaire $W = 0.372166$ mm,
- longueur des poutres du treillis hexagonal $l = 0.00256666$ mm,
- largeur des poutres du treillis $t = 0.044419$ mm,
- module de Young du matériau $E_s = 70000$ MPa,
- largeur de la poutre macroscopique $H = 0.0666666$ mm,
- moment de flexion appliqué à l'extrémité $M_f = 0.02$ N.m.

Le résultat de la simulation numérique est donné dans la figure 3.4.9. En reprenant le même raisonnement que précédemment pour la flexion de la poutre à microstructure carré, on intègre suivant x l'équation 3.4.28 et on trouve

$$\phi^{micropol} = -\frac{W M_f}{E^* I_z^* + K_{55} H} \tag{3.4.29}$$

à comparer avec

$$\phi^{standard} = -\frac{M_f W}{E^* I_z^*} \tag{3.4.30}$$

Les résultats numériques ont été synthétisés dans le tableau 3.7. On a, de la même façon que pour la poutre à microstructure carré, une valeur analytique beaucoup plus proche de celle de la simulation éléments finis avec l'expression incluant le module micropolaire γ.

	$\phi(Abaqus)$	$\phi^{micropol}$	$\phi^{standard}$
valeur	$-2,3 \times 10^{-4}$ rad	-2.43×10^{-4} rad	-3.14×10^{-4} rad
écart $\dfrac{\phi^i - \phi(Abaqus)}{\phi(Abaqus)}$ en %		5,6 %	37%

TABLE 3.7 – Comparaison entre les valeurs de ϕ, la rotation totale lors d'une flexion de poutre à microstructure hexagonale, obtenues par EF ou analytiquement incluant le module micropolaire $K_{55} = \gamma$ ou non.

3.5 Conclusion, discussion

L'homogénéisation des treillis centro-symétriques par une méthode de développement asymptotique discrète micropolaire a été validée par comparaison des modules mécaniques homogénéisés à leurs homologues obtenus par simulation numérique, un code de calcul qui permet d'obtenir de façon automatique les modules mécaniques standard et micropolaire d'un treillis a été construit. Néanmoins, quelques points demandent à être encore clarifiés.

Si les résultats analytiques des treillis étudiés semblent corrects, on peut souligner les quelques faiblesses du raisonnement que nous avons tenu. Tout d'abord, on a visé un milieu homogénéisé particulier, le milieu micropolaire ; on peut rappeler les raisons de ce choix. Ce milieu utilisant deux paramètres séparés pour la rotation et le déplacement est historiquement issu des études sur les poutres ; en retour, l'homogénéisation des poutres avec deux paramètres séparés semblerait conduire vers ce milieu. De plus, on a montré dans le chapitre précédent que si on n'utilise que le paramètre de déplacement dans un modèle de poutre simplifié, les tenseurs obtenus sont inconsistants pour ce qui est des modules de cisaillement. Le choix du milieu micropolaire nous a conduits à poser comme condition de départ, le degré initial et l'ordre des développements des paramètres cinématiques $\mathbf{u}$ et ϕ. Mais d'autres approches auraient pu être utilisées, par exemple de ne pas présupposer le milieu visé, ce qui aurait entraîné l'obtention d'un continuum autre que micropolaire (milieu du second gradient ?). Le milieu obtenu serait néanmoins lié à l'ordre du développement des variables $\mathbf{u}$ et ϕ.

On a volontairement limité notre étude aux structures périodiques à symétrie centrale [15]. On s'est appuyé sur cette condition de symétrie pour postuler la forme du résultat et simplifier l'expression des développements asymptotiques et les expressions homogénéisées obtenues, en négligeant certains termes de second ordre. Si on veut étendre l'étude aux treillis périodiques non centrosymétrique, il sera nécessaire soit de formuler plus rigoureusement le développement des différents paramètres (géométriques, cinématiques...) au second ordre, soit de formuler un algorithme simplifié sans aucun terme de second ordre.

Pour ce qui est des perspectives de ces travaux, un aspect qui mériterait que l'on s'y intéresse est celui des applications pratiques. Le développement d'applications concrètes po-

15. On rappelle qu'un treillis centrosymétrique est un treillis dont la *géométrie* est à symétrie centrale. La symétrie centrale de la géométrie entraînant l'invariance des modules de rigidité par rotation d'angle π.

sera de nouvelles questions. Ce n'est que dans des cas très particuliers que l'on devrait voir apparaître un effet réel micropolaire à l'échelle macroscopique. Par exemple, le traitement d'un milieu avec une densité de couple de contrainte surfacique ou linéique amènera à se poser la question du point d'application de ces couples de contrainte sur le treillis. Il peut y avoir, selon le cas de figure, plusieurs points d'application différents pour le même treillis, qui ne sont d'ailleurs pas forcément les noeuds reliant deux poutres entre elles.

On peut envisager d'autres directions de recherche : traitement des grandes déformations, de la plasticité, avec un modèle poutre à élancement faible. En effet, l'une des limitations de notre étude concerne le modèle de poutre adopté qui n'est valable que pour des poutres longues ; dans le cas de treillis ayant des poutres avec un faible rapport longueur/largeur (treillis à forte densité par exemple) on aura intérêt à réaliser une approche avec une théorie de poutre de Timoshenko à la manière d'autres auteurs [Kumar and McDowell, 2004].

Les points que nous venons d'évoquer conduisent à s'interroger sur l'intérêt de viser un milieu continu micropolaire. Au vu de la méthode développée et de l'algorithme obtenu, on peut penser qu'il est possible de limiter les développements des deux paramètres cinématiques et obtenir ainsi un milieu continu classique non micropolaire.

Si on reprend la forme développée plus haut (équations 3.3.67 à 3.3.69), le fait de limiter au premier ordre les développements nous conduit à négliger les matrices $[B]$ et $[D]$. De plus, on a montré au paragraphe 3.3.3.6 que les modules liés à la matrice $[C]$, sont d'ordre ε^3, tandis que ceux liés à la matrice $[A]$, sont d'ordre ε^2, ce qui nous conduit à négliger $[C]$ devant $[A]$. Cela nous amène à

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \\ m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & \cancel{[B]} \\ \cancel{[C]} & \cancel{[D]} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{yz} \end{Bmatrix} \tag{3.5.1}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yx} \end{Bmatrix} \tag{3.5.2}$$

soit,

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\frac{1}{g}\mathbf{S}_1^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}}_{[A]\{\epsilon\}} \tag{3.5.3}$$

c'est-à-dire un milieu continu classique.

Dans le chapitre suivant, on se propose de tester l'homogénéisation de différentes sortes de treillis (auxétiques et chiraux) avec le code de calcul micropolaire et avec la version de ce code limitée au premier ordre des différentes variables. Le but étant de valider les résultats obtenus par ces deux codes de calcul.

Chapitre 4

Application de l'homogénéisation aux treillis auxétiques.

Sommaire

4.1 Introduction **132**
4.2 Homogénéisation micropolaire des treillis auxétiques centrosymétriques . **133**
4.2.1 Le treillis hexagonal ré-entrant 135
4.2.2 Le treillis hexachiral 140
4.2.3 Le treillis diamant chiral 144
4.3 Homogénéisation vers un milieu continu classique avec un modèle poutre de Bernouilli complet **150**
4.3.1 Simplification du code de calcul micropolaire en vue d'obtenir un code de calcul classique 150
4.3.2 Le treillis de Milton 151
4.4 Conclusions, discussion **155**

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va tester le code de calcul micropolaire défini dans le chapitre précédent avec différents treillis centrosymétriques. On développera également la simplification de cet algorithme en vu d'obtenir un milieu continu classique.[1] On fera l'application à un treillis non-centrosymétrique. Pour chacun des treillis traités, on comparera nos résultats à ceux de la littérature sur la question, lorsqu'elle existe, ou bien à des simulations en éléments finis.

1. On notera toutefois qu'il s'agit dans ce chapitre d'un algorithme différent de celui qui a été utilisé dans le chapitre 2, puisque nous allons utiliser un modèle de poutre de Bernouilli non simplifié, incluant les variables de rotation. On s'attend donc à obtenir un tenseur des contraintes symétrique.

4.2 Homogénéisation micropolaire des treillis auxétiques centrosymétriques

Nous évoquerons dans ce chapitre des matériaux sous forme de treillis régulier dont la microstructure induit des propriétés peu courantes. On s'intéressera en particulier aux treillis à coefficient de Poisson négatif. La plupart des matériaux ont une contraction dans le sens transversal lors d'une élongation longitudinale. Ce taux de contraction appelé coefficient de Poisson est habituellement positif, d'environ 0.5 pour le caoutchouc, 0.3 pour les aciers communs, de 0.1 à 0.4 pour les matériaux cellulaires tels que les mousses et d'environ 0 pour le liège. Certains matériaux cellulaires, ou treillis, ont un coefficient de Poisson négatif. On qualifie ces matériaux d'*auxétiques* (du grec *auxein*, s'étendre). Les matériaux auxétiques sont connus depuis un certain temps, on peut remonter en termes de publication à l'article de Lakes [1987] ; il a réussi à convertir une mousse de polyuréthane standard en une mousse auxétique par chauffage-compression et refroidissement sous compression. Bien qu'un certain nombre de mécanismes ait été avancé pour expliquer ce fonctionnement auxétique [Bertoldi et al., 2009, Blumenfeld, 2005, Lakes, 1991], dans le cas des treillis de poutres on connaît principalement deux mécanismes qui permettent cette propriété, le mécanisme *ré-entrant* et le mécanisme *d'enroulement* (voir la figure 4.2.1). Dans le mécanisme ré-entrant, la déformation dans un sens provoque une flexion symétrique et opposée des poutres orientées dans le second sens, tandis que dans le mécanisme d'enroulement, des poutres faisant fonction de *ligaments* relient entre elles des structures circulaires qui tournent sous l'effet d'une déformation et entraînent simultanément les autres ligaments. Le mécanisme d'enroulement est lié à la géométrie *chirale* 2D des treillis, c'est-à-dire que ces treillis ne peuvent être superposés à leur image dans un miroir[2]. Grima et al. [2006] suggère d'expliquer et modéliser par un mécanisme similaire à l'enroulement ce qui se produit dans les mousses auxétiques, il appelle ce mécanisme 'rotation de liaisons rigides' (voir la figure 4.2.2).

Les propriétés attendues de ces matériaux auxétiques sont diverses. Un grand nombre de brevets ont été déposés montrant leur intérêt. On s'attend à ce que les matériaux à coefficient de Poisson négatif aient un pouvoir d'absorption d'énergie supérieur et une meilleure résistance à la rupture que leurs homologues standard, ce qui pourrait être utile pour des matériaux d'emballage ou des matériaux d'absorption de chocs. D'après [Prall and Lakes, 1997], les matériaux auxétiques devraient être difficiles à cisailler, mais faciles à déformer volumétriquement, en quelque sorte des anticaoutchoucs. Ces matériaux devraient entraîner des comportements mécaniques peu habituels lors d'une mise en forme par déformation ; une plaque épaisse que l'on fléchit aurait une déformation en forme de coque (et non en forme de selle de cheval comme la plupart des matériaux standard). On pense les utiliser également pour la fabrication de nouveaux actionneurs, prothèses et mousses ayant un pouvoir d'absorption acoustique supérieur (voir Alverman, 2007 et Bertoldi et al., 2009). Bien qu'il

2. La chiralité peut être comparée à un simple problème de chaussures. Tous les enfants ont déjà été confrontés à un problème de chiralité en mettant le pied droit dans la chaussure gauche et inversement. Une chaussure est un objet chiral, car elle n'est pas superposable à son image dans un miroir, tout comme les mains. Les treillis peuvent également être des objets chiraux.

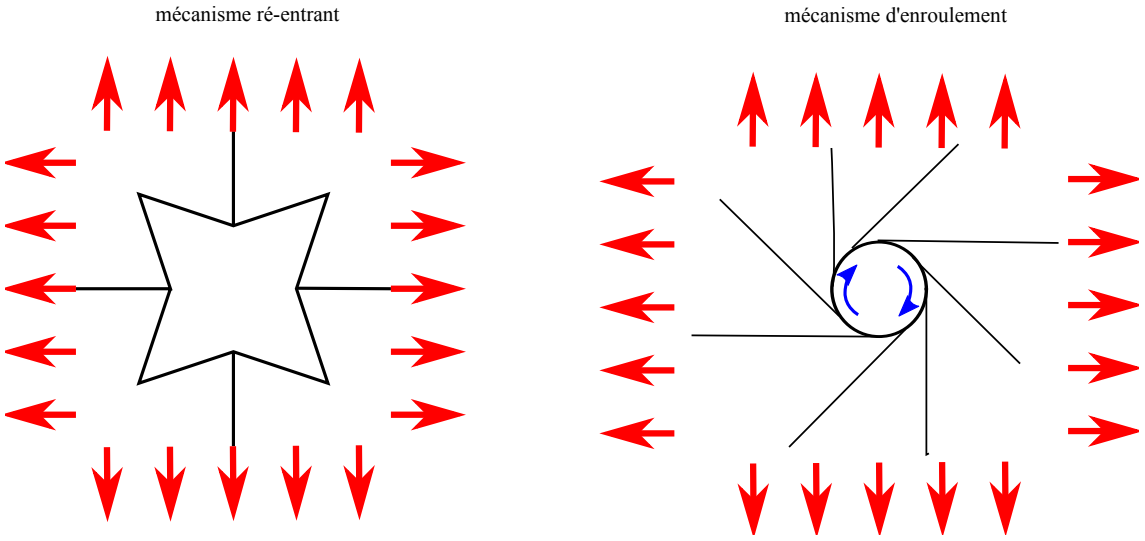


FIGURE 4.2.1 – Deux géométries qui créent un mécanisme permettant d'obtenir un coefficient de Poisson négatif

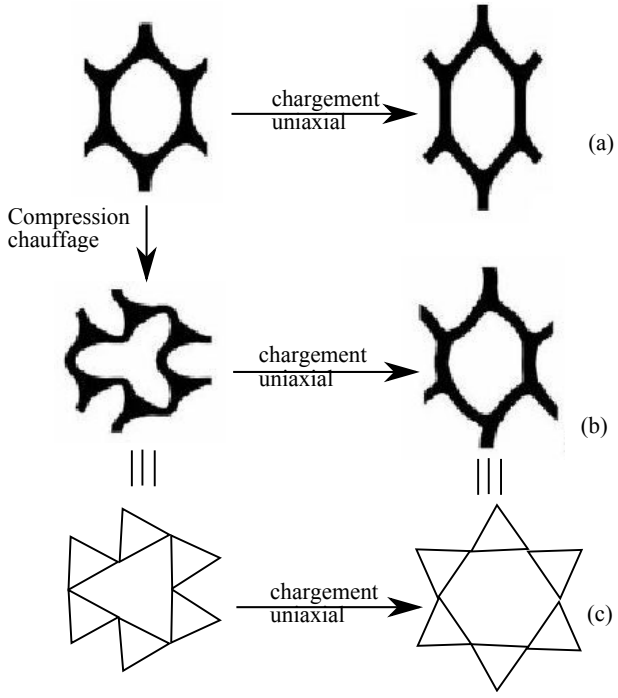


FIGURE 4.2.2 – Mécanisme de 'rotation de liaisons rigides' proposé par Grima et al. [2006] pour expliquer et modéliser le comportement des mousses auxétiques. (a) treillis hexagonal, modèle standard des mousses (b) modèle 'rotation de liaisons rigides' des mousses auxétiques (c) représentation idéalisée du modèle 'rotation de liaisons rigides' (d'après Grima et al. [2006])

ne s'agisse pas à proprement parler de treillis, on commercialise à l'heure actuelle des fibres auxétiques qui gonflent lorsqu'on les met sous traction.

Différentes études ont déjà été réalisées sur ces matériaux depuis Lakes [1987] ; on trouve dans Prall and Lakes [1997] une étude théorique et expérimentale du treillis hexachiral. Yang et al. [2003] ont fait une étude par EF micropolaire du treillis hexagonal ré-entrant. Blumenfeld [2005] a étudié les mécanismes de déformation de treillis qu'il qualifie à la fois d'auxétiques et isostatiques ; il propose une formulation mathématique de ce comportement et différentes géométries possibles. Gaspar et al. [2005] ont fait des expérimentations sur des géométries de treillis simples à obtenir à partir d'un treillis diamant, que l'on pourrait qualifier de diamant chiral. Scarpa et al. [2007] ont étudié la résistance au flambement des treillis hexachiraux. Spadoni and Ruzzene [2007] ont fait l'étude d'une application d'un treillis auxétique chiral, une aile d'avion à profil variable. Cette étude est menée à la fois par EF et expérimentalement. Cet exemple montre tout l'intérêt de ce genre de treillis dans des applications de forte déformation élastique et de non-conservation du volume. Gonella and Ruzzene [2008] ont obtenu les propriétés mécaniques du treillis hexagonal ré-entrant par une technique d'homogénéisation basée sur des équations aux différences finies. Ils se sont intéressés particulièrement au problème du calcul de la vitesse de propagation d'une onde basse fréquence dans de tels treillis auxétiques. Donescu et al. [2009] se sont intéressés au comportement d'un matériau composite formé de couches régulières d'aluminium et d'un matériau auxétique. Ils montrent que ce matériau auxétique fournit un accroissement significatif du module de Young dans ces composites. Alderson et al. [2009] ont fait une étude à la fois expérimentale et par EF d'une série de treillis chiraux et d'autres appelés antichiraux. Les antichiraux sont des treillis formées de structures chirales associées en paire opposée. Dans Bertoldi et al. [2009] on propose une géométrie périodique produisant un effet auxétique. Il ne s'agit pas vraiment d'un treillis, mais d'un réseau d'évidements ellipsoïdaux qui produisent sous une forte déformation un effet auxétique jusqu'à un coefficient -0,5 environ.

Au vu de cette courte bibliographie, on comprend que les treillis auxétiques sont un champ d'application idéal pour tester notre code de calcul. On a choisi quelques treillis auxétiques parmi les plus étudiés : le treillis hexagonal ré-entrant, le treillis hexachiral et le treillis diamant chiral. On montre que l'on retrouve bien les modules calculés dans d'autres études pour les treillis hexagonal ré-entrant et hexachiral, mais des modules différents pour le treillis diamant chiral. Nos résultats prédisent un comportement atypique pour ce dernier treillis. On a donc fait des tests par EF pour vérifier les valeurs du module élastique trouvées pour ce treillis diamant chiral et valider le comportement prédit. On traitera également de l'homogénéisation du treillis de Milton, non centrosymétrique avec notre code de calcul non micropolaire (classique).

4.2.1 Le treillis hexagonal ré-entrant

Le treillis hexagonal ré-entrant est l'un treillis auxétiques les plus connus et étudiés [Gibson and Ashby, 1997, Gonella and Ruzzene, 2008]. On parle de treillis ré-entrant lorsque

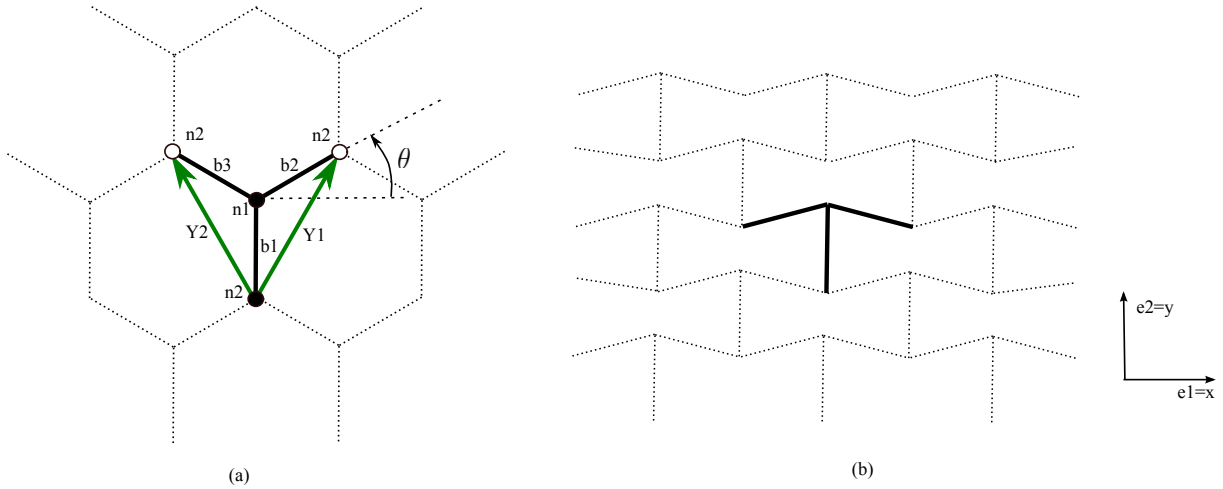


FIGURE 4.2.3 – Définition géométrique du treillis hexagonal ré-entrant : (a) $\theta = 30°$, treillis hexagonal classique (b) $\theta = -15°$, le treillis hexagonal est devenu ré-entrant

poutre	1	2	3
Noeud origine Ob	2	1	1
Noeud Extrémité Eb	1	2	2
δ_1	0	1	0
δ_2	0	0	1

TABLE 4.1 – Tableau des connectivités du treillis hexagonal ré-entrant

l'angle θ des poutres b_2 et b_3 par rapport à l'horizontale est négatif (voir les figures 4.2.3 (a) et (b)).

Les connectivités sont données dans le tableau 4.1, elles sont identiques à celles du treillis hexagonal. La différence de géométrie réside dans les vecteurs directeurs des poutres b_2 et b_3 ; les poutres b_2 et b_3 forment avec l'horizontale un angle variable θ. Si cet angle vaut 30°, nous obtenons le treillis hexagonal classique, mais avec un angle $\theta < 0$ ($\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), on obtient un treillis auxétique ré-entrant, (voir la figure 4.2.3). La matrice de raideur micropolaire homogénéisée vaut

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & & & & & \\ K_{21} & K_{22} & & & & & \\ & & K_{33} & K_{34} & & & \\ & & K_{43} & K_{44} & & & \\ & & & & K_{55} & & \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$

avec $K_{11} = \frac{E_s \eta \left(-\eta^2 c_t^2 + \eta^2 s_t c_t^2 + c_t^2 - s_t c_t^2 + 3\eta^2 - 3\eta^2 s_t\right)}{\left(2\eta^2 c_t^2 + 3 - 2c_t^2\right) c_t}$

$K_{12} = -\frac{c_t s_t \left(\eta^2 - 1\right) E_s \eta}{2\eta^2 c_t^2 + 3 - 2c_t^2}$

$K_{21} = -\frac{c_t s_t \left(\eta^2-1\right) E_s \eta}{2\,\eta^2 c_t^2+3-2\,c_t^2}$

$K_{22} = \frac{E_s \eta \left(s_t+\eta^2 s_t c_t^2-s_t c_t^2+1+\eta^2 c_t^2-c_t^2\right)}{\left(2\,\eta^2 c_t^2+3-2\,c_t^2\right) c_t}$

$K_{33} = 1/2\,\frac{E_s \eta^3 \left(-\eta^2 c_t^2+5\,c_t^2+\eta^2 s_t+\eta^2-3+3\,s_t\right)}{(-3\,s_t+3+\eta^2+\eta^2 s_t) c_t}$

$K_{34} = -1/2\,\frac{E_s \eta^3 \left(-\eta^2 c_t^2+c_t^2+\eta^2 s_t+3\,s_t-3+\eta^2\right)}{(-3\,s_t+3+\eta^2+\eta^2 s_t) c_t}$

$K_{43} = 1/2\,\frac{E_s \eta^3 \left(\eta^4 c_t^2 s_t-8\,\eta^2 s_t c_t^2+8\,\eta^2 c_t^2+15\,s_t c_t^2-3\,c_t^2-c_t^2 \eta^4-12\,\eta^2+12\,\eta^2 s_t\right)}{\left(-6\,\eta^2 c_t^2+c_t^2 \eta^4+9\,c_t^2+12\,\eta^2\right) c_t}$

$K_{44} = -1/2\,\frac{E_s \eta^3 \left(3\,s_t c_t^2-15\,c_t^2+\eta^4 c_t^2 s_t+4\,\eta^2 c_t^2-4\,\eta^2 s_t c_t^2-c_t^2 \eta^4-12\,\eta^2+12\,\eta^2 s_t\right)}{\left(-6\,\eta^2 c_t^2+c_t^2 \eta^4+9\,c_t^2+12\,\eta^2\right) c_t} 0$

$K_{55} = 1/12\,\frac{L^2 c_t E_s \eta^3}{s_t+1}$

$K_{66} = 1/36\,\frac{L^2 (s_t+1) E_s \eta^3}{c_t}$

On en tire les modules homogénéisés suivants

$E_1^* = \frac{E_s \eta^3 c_t}{(s_t+1)\left(\eta^2 c_t^2-c_t^2+1\right)}$

$E_2^* = -\frac{E_s \eta^3 (s_t+1)}{\left(-c_t^2+\eta^2 c_t^2-3\,\eta^2\right) c_t}$

$\nu_{12} = \frac{\left(\eta^2-1\right) s_t (s_t-1)}{\eta^2 c_t^2-c_t^2+1}$

$\nu_{21} = \frac{\left(\eta^2-1\right) s_t (s_t+1)}{-c_t^2+\eta^2 c_t^2-3\,\eta^2}$

avec $cos(\theta) = c_t$ et $sin(\theta) = s_t$, $\eta = \dfrac{t}{L}$ le rapport d'élancement de la poutre et θ l'angle des poutres b_2 et b_3 par rapport à l'horizontale. On peut faire une application numérique avec un matériau aluminium

$E_s = 70$ GPa

$t = \dfrac{L}{15}$ mm $\rightarrow \eta = \dfrac{1}{15}$

Les courbes donnant les propriétés mécaniques en fonction de θ se retrouvent dans les figures 4.2.4 et 4.2.5. On peut constater sur la figure 4.2.5, que le coefficient de Poisson peut prendre des valeurs négatives assez importantes, proches de -8 pour un angle $\theta \sim -5°$. On a choisi de comparer nos résultats comme d'autres auteurs l'ont fait [Gonella and Ruzzene, 2008] à ceux déjà connus de la littérature comme les formules de Gibson et Ashby. On notera que les modules que nous obtenons semblent plus réalistes ; la formule simplifiée de Gibson et Ashby crée un module qui tend vers l'infini pour $\theta = 0$, ce qui est une impossibilité physique. [3]

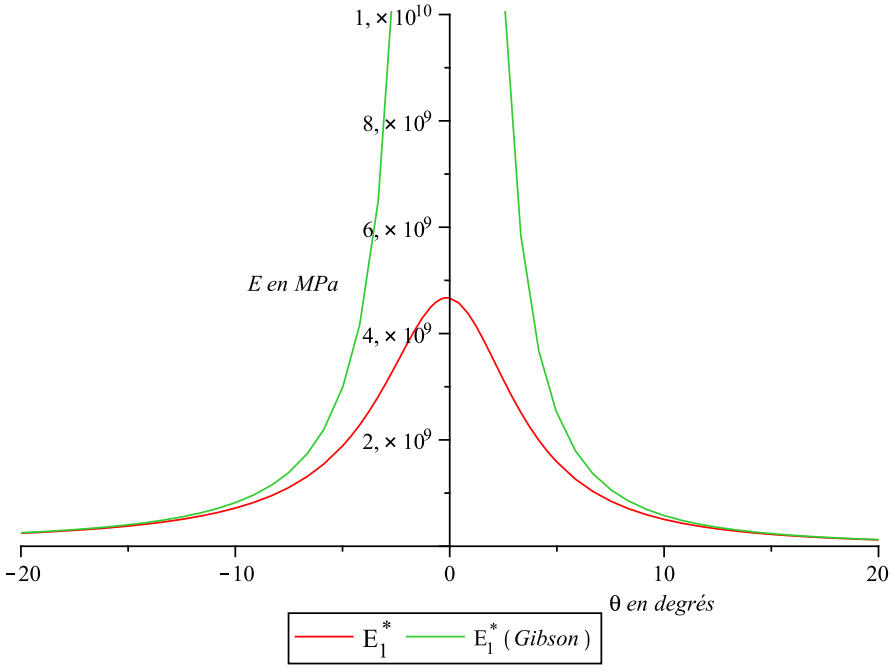
$E_1^*(Gibson) = \frac{E_s\, t^3 c_t}{L^3 (1+s_t) (s_t)^2}$

$E_2^*(Gibson) = \frac{E_s\, t^3 (1+s_t)}{L^3 c_t^3}$

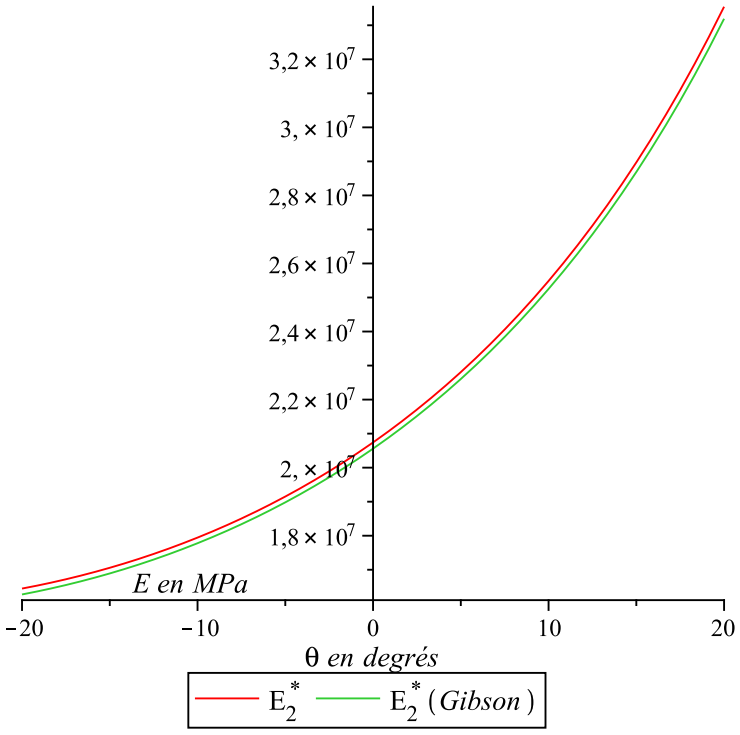
$\nu_{12}(Gibson) = \frac{c_t^2}{(1+s_t) s_t}$

Les courbes obtenues dans nos travaux sont similaires à celles de Gonella and Ruzzene [2008], pour le même treillis hexagonal ré-entrant et dans des conditions identiques. Le code de calcul semble fonctionner correctement sur ce type de treillis. Il fournit des résultats similaires à ceux de travaux récents sur ces mêmes treillis.

3. On notera que cette

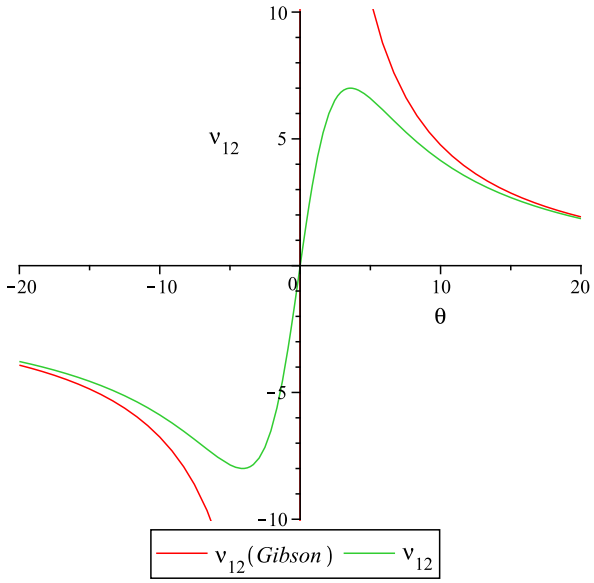


(a)

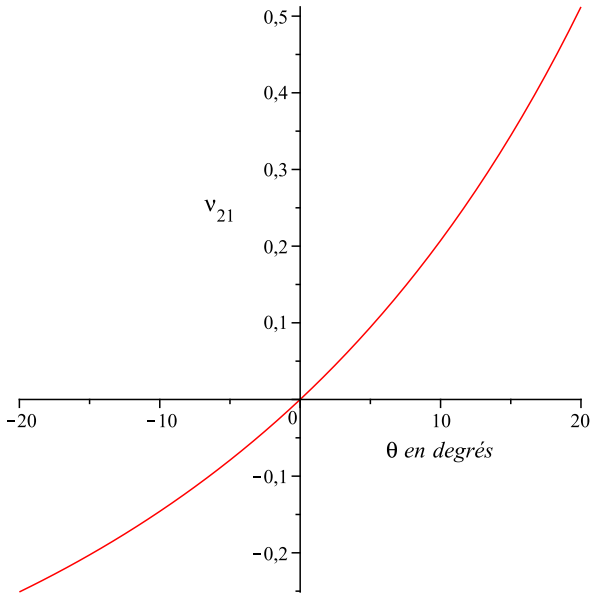


(b)

FIGURE 4.2.4 – Module de Young homogénéisé du treillis hexagonal ré-entrant en fonction de θ, comparaison de nos résultats à ceux des formules simplifiées de Gibson et Ashby pour (a) E_1^*, (b) E_2^*



(a)



(b)

FIGURE 4.2.5 – Coefficient de Poisson du treillis hexagonal ré-entrant en fonction de θ, (a) ν_{12} et comparaison de nos résultats à ceux de Gibson et Ashby , (b) ν_{21}

4.2.2 Le treillis hexachiral

Le treillis hexachiral a fait l'objet de plusieurs travaux et articles associés (Prall and Lakes [1997],Alderson et al. [2009]). Par exemple, dans Alderson et al. [2009] un certain nombre d'échantillons de treillis à coefficients de Poisson négatif ont été obtenus par prototypage rapide dans de la poudre de Nylon (Duraform), puis une comparaison des résultats est faite entre l'expérimentation sur ces échantillons et une analyse EF. Dans le treillis hexachiral, le mécanisme qui permet l'obtention d'un coefficient de Poisson négatif est différent du treillis hexagonal ré-entrant ; c'est un mécanisme "d'enroulement" d'une sous-géométrie au sein de la cellule élémentaire qui produit un coefficient de Poisson négatif. Ce mécanisme semble avoir été évoqué par Lakes [1991]. Ce treillis (figure 4.2.6) est composé d'éléments circulaires de rayon identique r liés entre eux par des ligaments étroits de longueur identique L. Ces ligaments sont disposés tangentiellement aux éléments circulaires à 60° les uns des autres. Le treillis possède à la fois une symétrie hexagonale et une symétrie chirale. Les treillis à symétrie hexagonale ont une isotropie plane, ce qui sera confirmé par les résultats.

Les paramètres du treillis étudié par Prall and Lakes [1997] sont énoncés dans la figure 4.2.6. On remarquera deux points particuliers : premièrement, il y a une multitude de variétés dans cette famille des treillis hexachiraux suivant le rapport $\frac{r}{R}$; deuxièmement, on ne peut modéliser tel quel ce treillis avec notre méthode parce qu'il comporte une courbe (cercle). Nous allons faire un modèle approché de ce treillis, en remplaçant le cercle central par un réseau de poutres rectilignes dessinant un hexagone, selon la figure 4.2.7 ; on a inclus dans la figure les valeurs des δ_i utilisés.

Selon la figure 4.2.6, on peut faire le constat que les paramètres sont liés entre eux par les relations suivantes (voir également [Prall and Lakes, 1997])

$$sin\,\theta = \frac{R/2}{R} \Longrightarrow \theta = 30°$$

$$sin\,\beta = \frac{2r}{R}$$

$$tan\,\beta = \frac{2r}{L}$$

Nous avons choisi une configuration précise, avec $\beta = 30°$ [4], ce qui impose un rapport $R = 4r$ et $L = 2\sqrt{3}r$. On donne la définition géométrique du treillis étudié dans la figure 4.2.7. Les connectivités sont données dans le tableau 4.2.

Les résultats obtenus pour les tenseurs ainsi que pour les matrices de raideurs et de souplesse sont composés de trop de termes pour être insérés dans ce document. Les paramètres mécaniques extraits sont les suivants

4. Les résultats concernant le comportement, évoqués par Prall et Lakes, puis par Alderson dans Alderson et al. [2009] à travers des simulations numériques, particulièrement la valeur négative du coefficient de Poisson, semble peu dépendant de la valeur précise de β

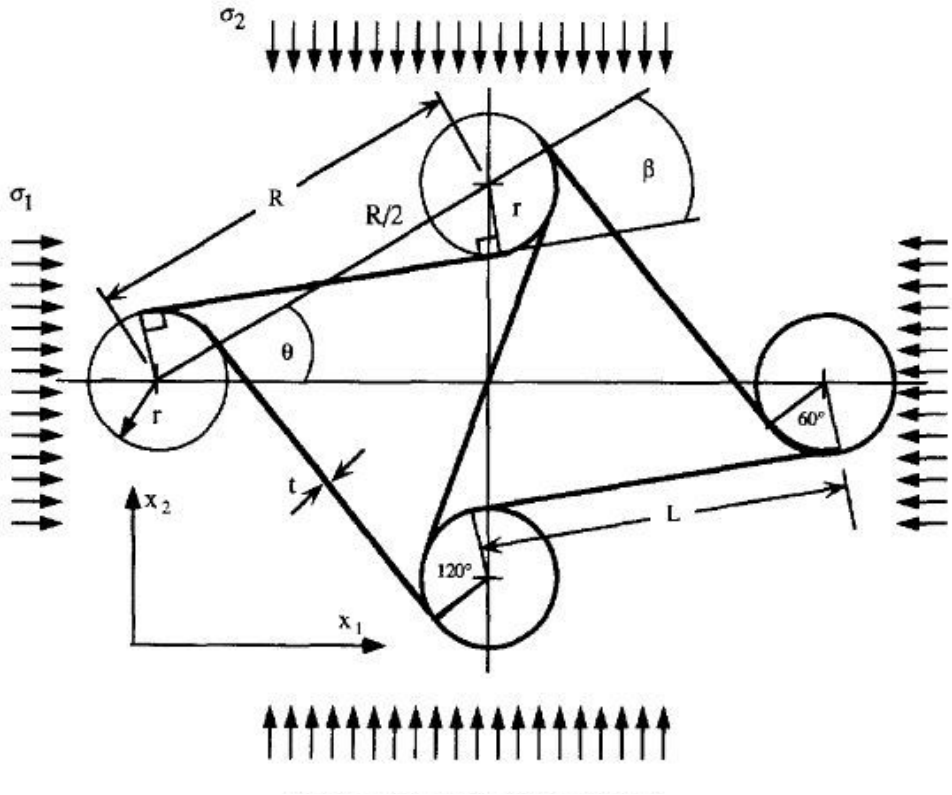


FIGURE 4.2.6 – Treillis hexachiral (extrait de Prall and Lakes [1997])

barre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
O	1	6	2	6	1	2	4	5	6
E	4	3	5	1	2	3	3	4	5
δ_1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
δ_2	1	1	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 4.2 – Tableau de la connectivité du treillis hexachiral

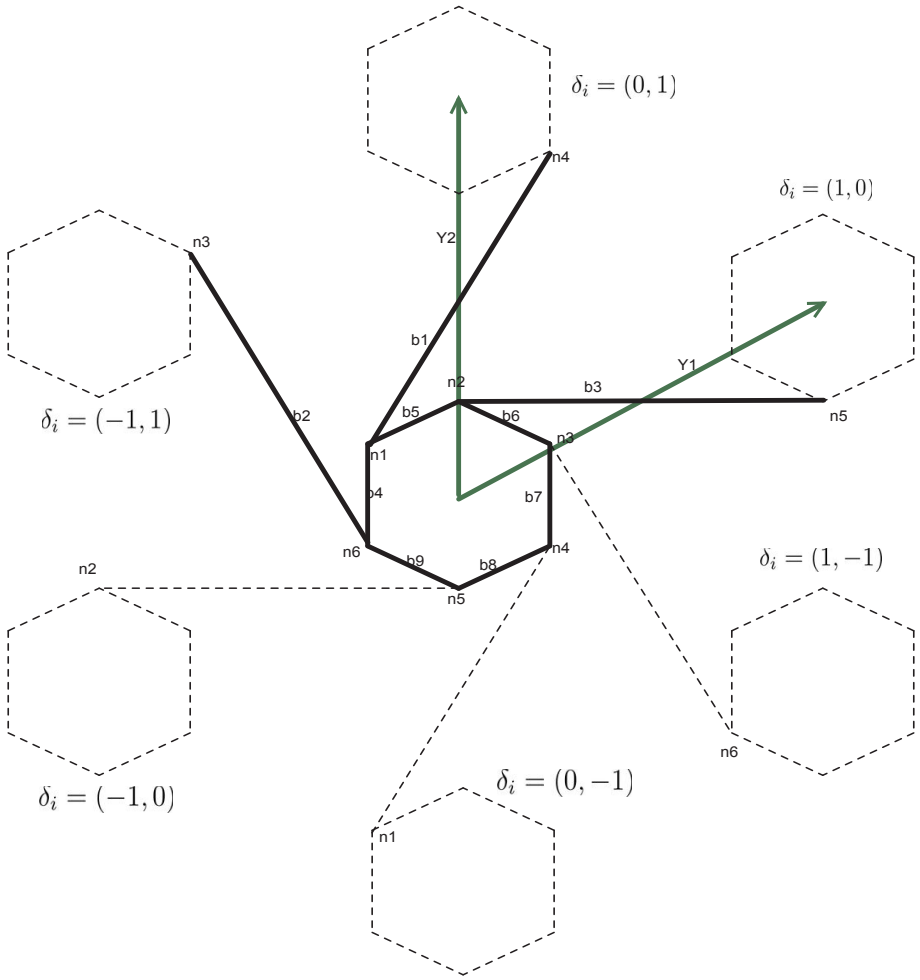


FIGURE 4.2.7 – Treillis hexachiral modèle poutre

$$E_1^* = \frac{96}{47} \frac{\left(139\sqrt{3} - 71\right) Es \left(-575 - 564\,\eta^2 + 44\sqrt{3}\right) \eta^3}{-19729 - 224148\,\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\,\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \tag{4.2.1}$$

$$E_2^* = \frac{96}{47} \frac{\left(139\sqrt{3} - 71\right) Es \left(-575 - 564\,\eta^2 + 44\sqrt{3}\right) \eta^3}{-19729 - 224148\,\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\,\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \tag{4.2.2}$$

$$\nu_{12}^* = \frac{1}{647} \frac{\left(74\sqrt{3} - 617\right)\left(-20689 + 76300\,\eta^2 + 11932\sqrt{3}\eta^2 - 62112\,\eta^4 + 1257\sqrt{3}\right)}{-19729 - 224148\,\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\,\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \tag{4.2.3}$$

$$\nu_{21}^* = \frac{1}{647} \frac{\left(74\sqrt{3} - 617\right)\left(-20689 + 76300\,\eta^2 + 11932\sqrt{3}\eta^2 - 62112\,\eta^4 + 1257\sqrt{3}\right)}{-19729 - 224148\,\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\,\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \tag{4.2.4}$$

$$G_{12}^{*} = -\frac{3}{47}\,\frac{\left(\sqrt{3}+12\right) Es\,\left(-575-564\,\eta^{2}+44\,\sqrt{3}\right)\eta^{3}}{3+351\,\eta^{2}+580\,\sqrt{3}\eta^{2}+36\,\eta^{4}} \tag{4.2.5}$$

en posant $k_l = E_s\eta$ et $k_f = E_s\eta^3$ et $\eta = \dfrac{t}{L}$.

Bien entendu certains termes sont prépondérants par rapport à d'autres. On voit l'intérêt d'avoir utilisé le paramètre η, ce qui permet de trouver des expressions approchées simplifiées en faisant un développement en série relativement à η

$$\tilde{E}_{1}^{*} \approx \frac{96}{47}\,\frac{\left(139\,\sqrt{3}-71\right) Es\,\left(-575+44\,\sqrt{3}\right)\eta^{3}}{-19729+2973\,\sqrt{3}} \approx 11.86\,E_s\eta^{3} \tag{4.2.6}$$

$$\tilde{E}_{2}^{*} \approx \frac{96}{47}\,\frac{\left(139\,\sqrt{3}-71\right) Es\,\left(-575+44\,\sqrt{3}\right)\eta^{3}}{-19729+2973\,\sqrt{3}} \approx 11.86\,E_s\eta^{3} \tag{4.2.7}$$

$$\tilde{\nu}_{12}^{*} \approx \frac{1}{647}\,\frac{\left(74\,\sqrt{3}-617\right)\left(-20689+1257\,\sqrt{3}\right)}{-19729+2973\,\sqrt{3}} \approx -0.96 \tag{4.2.8}$$

$$\tilde{\nu}_{21}^{*} \approx \frac{1}{647}\,\frac{\left(74\,\sqrt{3}-617\right)\left(-20689+1257\,\sqrt{3}\right)}{-19729+2973\,\sqrt{3}} \approx -0.96 \tag{4.2.9}$$

$$G_{12}^{*} \approx -\frac{3}{47}\,\frac{\left(\sqrt{3}+12\right) Es\,\left(-575+44\,\sqrt{3}\right)\eta^{3}}{3} \approx 145.73\,E_s\eta^{3} \tag{4.2.10}$$

On peut comparer ces résultats à ceux de Prall et Lakes qui donnent les formules suivantes dans Prall and Lakes [1997]

$$E_{1}^{*}(Prall) = \frac{E_s t^3}{Lr^2} = \frac{\left(2*\sqrt{3}\right)^2 t^3}{L^3} E_s = 12E_s\eta^3 \tag{4.2.11}$$

$$\nu_{12}(Prall) = -1 \tag{4.2.12}$$

avec $r = L/(2*\sqrt{3})$. On peut constater que ces résultats sont proches des expressions homogénéisées simplifiées. Les résultats de Prall and Lakes [1997] sont obtenus par une analyse similaire à celle utilisée par Gibson and Ashby [1997]. On peut en rappeler le principe : il consiste à considérer l'équilibre statique d'une cellule élémentaire formée du réseau de poutres, soumis à un effort simple (traction, compression ou cisaillement). On obtient une relation scalaire effort-déplacement, que l'on transforme en relation contrainte-déformation en divisant par les longueurs caractéristiques de la cellule élémentaire. Néanmoins, l'approche de Prall et Lakes du problème est simplifiée en ce sens qu'ils considèrent comme indéformables les cercles de rayon r, dès lors seules subsistent les déformations en flexion des poutres périphériques fixées sur ces cercles élémentaires. Or, dans l'expression homogénéisée non simplifiée de ν_{12}, équation 4.2.3, il existe une variation suivant la valeur du rapport η, que l'on peut mettre en évidence dans la figure 4.2.8. On note que l'on retrouve une courbe similaire à celle de la figure 4.2.8 dans Alderson et al. [2009], obtenue par une simulation EF.

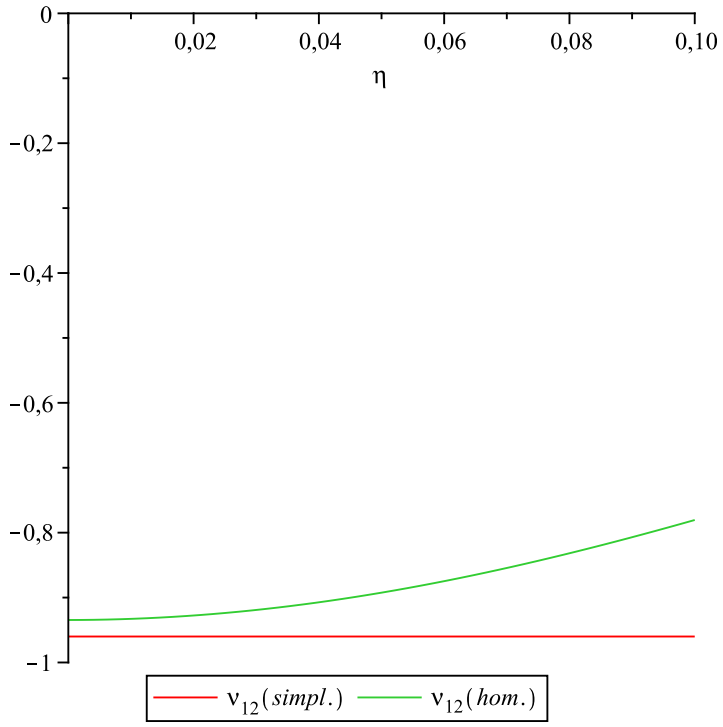


FIGURE 4.2.8 – Coefficient ν_{12} homogénéisé et simplifié du treillis hexachiral en fonction du rapport d'élancement des poutres $\eta = \dfrac{t}{L}$

On compare également les résultats pour le module élastique entre les expressions homogénéisées et l'expression de Prall et Lakes dans la figure 4.2.9, avec une bonne concordance entre les deux approches.

On peut conclure de l'étude de ce treillis que la simplification des résultats sur les constantes mécaniques, introduite sommairement ici par une analyse des termes prépondérants en fonction du petit paramètre η, peut être affinée. La figure 4.2.9 montre des courbes proches pour ce qui est du module élastique entre la version homogénéisée complète et sa version simplifiée, celle de Prall et Lakes. En revanche, si l'on compare les valeurs du coefficient de Poisson ν_{12} entre sa version homogénéisée complète et sa valeur simplifiée, l'écart est plus significatif (voir la figure 4.2.8).

4.2.3 Le treillis diamant chiral

On a repris le treillis diamant chiral étudié dans Gaspar et al. [2005] et Grima et al. [2006] ; il est considéré comme auxétique par ces auteurs. La définition géométrique est donnée dans la figure 4.2.10, sa connectivité est dans le tableau 4.3.

On obtient une matrice de souplesse surprenante montrant un couplage contrainte-cisaillement

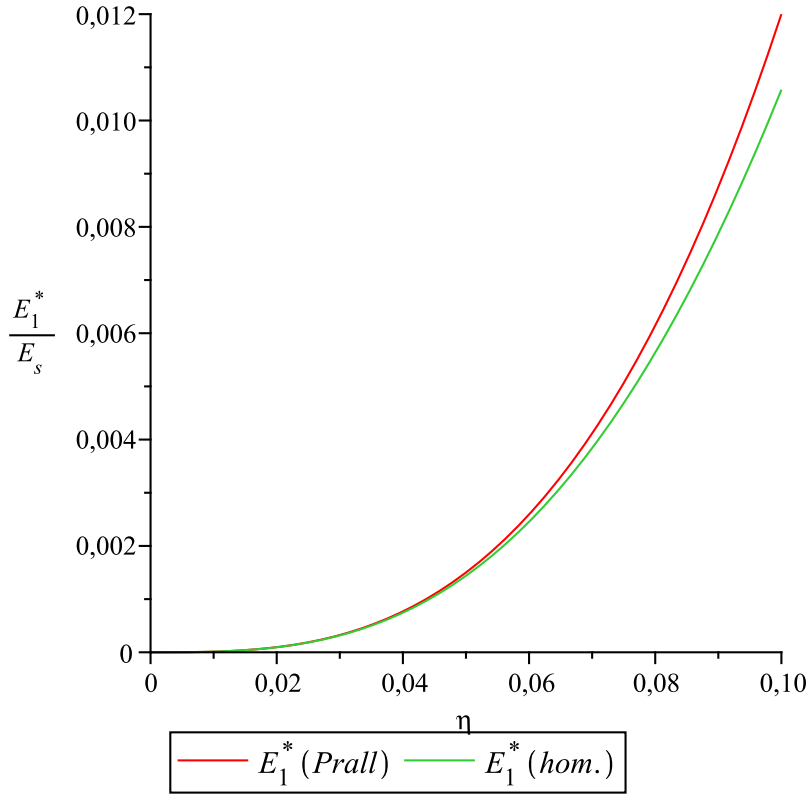


FIGURE 4.2.9 – Module élastique relatif $\frac{E_1^*}{E_s}$ en fonction du rapport η. Comparaison des résultats de nos travaux avec ceux de Prall et Lakes.

barre	1	2	3	4	5	6
O	3	1	1	5	5	2
E	1	2	4	1	4	3
δ_1	0	0	0	0	1	0
δ_2	0	0	0	0	0	1

TABLE 4.3 – tableau de la connectivité du treillis hexachiral

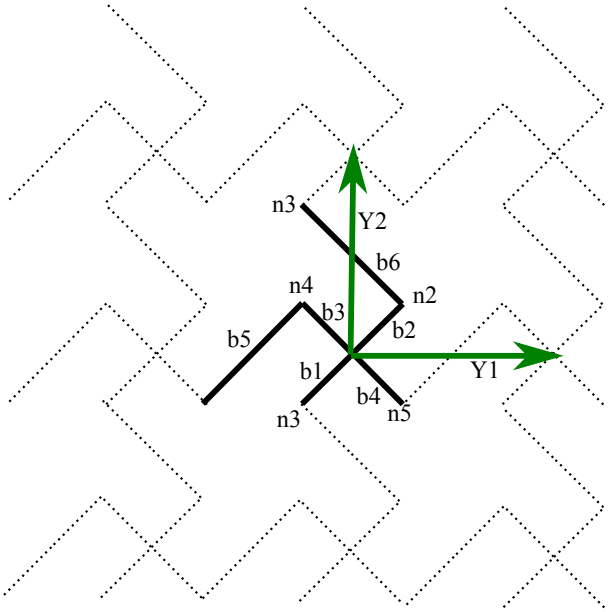


FIGURE 4.2.10 – Définition géométrique du treillis diamant chiral

$$[S] = \begin{bmatrix} 2\frac{4+\eta^2}{E_s\eta^3} & 0 & -\frac{\eta^2+10}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2-2}{E_s\eta^3} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{4+\eta^2}{E_s\eta^3} & -\frac{\eta^2-2}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2+10}{E_s\eta^3} & 0 & 0 \\ -6\frac{1}{E_s\eta^3} & 6\frac{1}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2+24}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2+8}{E_s\eta^3} & 0 & 0 \\ -6\frac{1}{E_s\eta^3} & 6\frac{1}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2+8}{E_s\eta^3} & \frac{\eta^2+24}{E_s\eta^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48\frac{1}{L^2\eta^3E_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48\frac{1}{L^2\eta^3E_s} \end{bmatrix} \tag{4.2.13}$$

(on rappelle que l'on a posé les raideurs en extension et flexion $k_l = E_s\eta$ et $k_f = E_s\eta^3$).

Les coefficients $S_{12} = S_{21} = 0$, amènent à $\nu_{12} = \nu_{21} = 0$, des coefficients de Poisson nuls. Cette singularité du treillis n'apparaît pas de manière évidente en observant sa géométrie, ou l'on aurait pu s'attendre à un coefficient de Poisson négatif avec le même mécanisme d'enroulement que pour le treillis hexachiral, c'est d'ailleurs l'hypothèse initiale dans les deux articles Gaspar et al. [2005] et Grima et al. [2006] [5].

5. Dans Gaspar et al. [2005] on a la description de l'expérimentation menée sur un échantillon de treillis. On a serré deux faces opposées du treillis sur une machine de traction et enregistré la déformation. Mais cette expérimentation est peut-être mal interprétée ; la machine utilisée comporte certainement un guidage en translation des mâchoires de serrage, ce qui fait que la déformation en cisaillement n'apparaît pas. Mais à la place, il y a sans doute naissance d'efforts de réactions transverses, non uniformes par rapport à l'axe de serrage. Ces efforts de réaction provoquent une contraction, certainement non uniforme également, qui peut alors être faussement interprétée comme un coefficient de Poisson. Nos simulations EF confirment ce

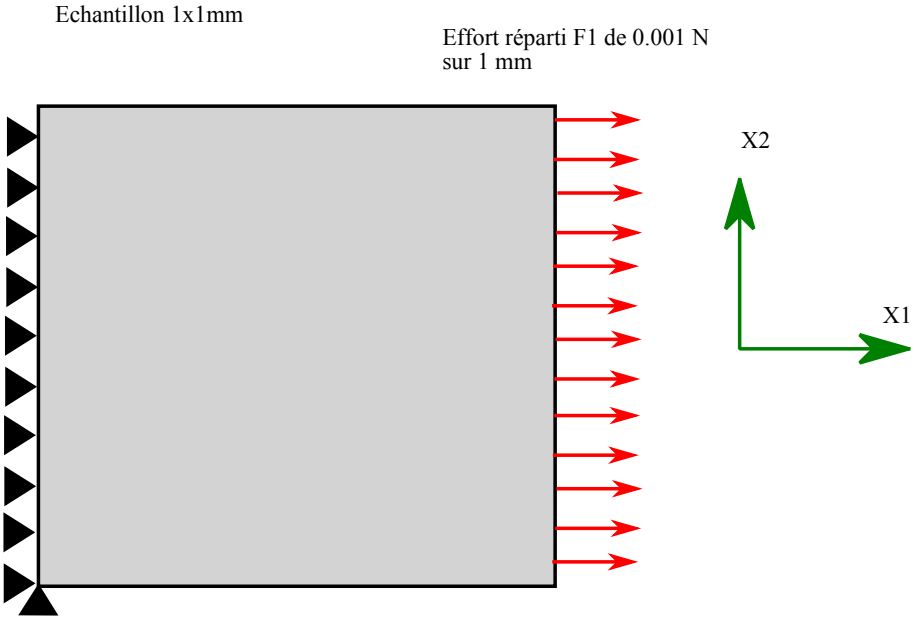


FIGURE 4.2.11 – Conditions aux limites et de chargement pour la simulation EF du treillis diamant chiral

On a décidé de faire une simulation numérique avec Abaqus pour tenter de lever l'incertitude sur le comportement de ce treillis. Les conditions aux limites et de chargement sont décrites dans la figure 4.2.11.

Pour l'application numérique et les simulations EF, on a utilisé les valeurs suivantes $E_s = 72000\,\text{MPa}$; $L = \dfrac{1}{32\sqrt{2}}$ mm ; $t = L/10 \Rightarrow \eta = \dfrac{t}{L} = 0,1$. La valeur de la contrainte sur une face est d'une valeur de 0.001 N/mm. Avec ces valeurs numériques,

$$E_1^*(hom.) = \frac{1}{S_{11}} = 1/2\,\frac{E_s\,\eta^3}{\eta^2+4} \approx 8,97\,\text{MPa} \tag{4.2.14}$$

Pour la simulation numérique, on a utilisé un élément poutre modèle Bernoulli (B23 Abaqus, sans cisaillement), avec 3 éléments par poutres. Les résultats de la simulation numérique apparaissent dans la figure 4.2.12. Les valeurs en simulation EF donnent un déplacement $U1 = 1,122.10^{-4}$ mm. Comme dans les simulations faites dans le chapitre précédent, étant donné que l'échantillon à une dimension de 1x1 mm, on peut estimer que

$\varepsilon_1 = \dfrac{U1\,mm}{1\,mm} = U1 = 1,122.10^{-4}$

$\sigma_1 = \dfrac{F1\,N}{1\,mm} = 0.001\,\text{MPa}$

Une estimation du module d'Young par EF est donnée selon

comportement atypique si on ajoute des conditions limites correspondant à un guidage en translation.

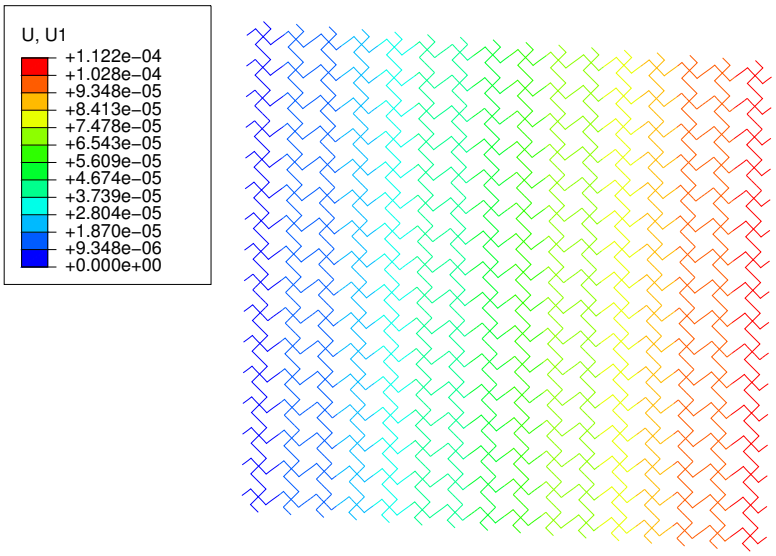


FIGURE 4.2.12 – Simulation par éléments finis de la déformation du treillis diamant chiral soumis à une traction. U1 variable de déformation suivant axe X_1.

$$E_1^*(Abaqus) = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{0.001}{1,122.10^{-4}} \approx 8,913\,\text{Mpa} \tag{4.2.15}$$

L'écart entre le module élastique obtenu par homogénéisation et par simulation EF, équations 4.2.14 et 4.2.15, est de 0.6% : on a une bonne concordance des valeurs.

4.2.3.1 Vérification des modules de couplage traction - cisaillement

Comme nous l'avons dit plus haut, ce treillis voit apparaître des modules peu communs de couplage traction cisaillement, S_{31} et S_{41} dans la matrice de souplesse. Nous allons essayer de calculer la valeur de ce module sur la base de l'essai de traction EF (voir la figure 4.2.13).

Pour interpréter correctement l'essai EF, figure 4.2.13, il faut comprendre le rôle des conditions de bords. Si on se reporte à la modélisation, figure 4.2.14, on constate que si on compare la déformation théorique et celle obtenue par élément fini, on a une rotation de l'échantillon déformé. Cette rotation est une conséquence du fait d'imposer un déplacement nul sur le bord latéral gauche. Cela entraîne également le fait que numériquement la déformation en cisaillement obtenue par élément fini est équivalente à $\frac{2\partial U_2}{\partial x}$.

Numériquement, on obtient un déplacement $U2 = -1.676 \times 10^{-4}$ (voir la figure 4.2.13) ce qui nous permet d'obtenir $\frac{2\partial U_2}{\partial x} = \frac{U2}{1\,\text{mm}}$, soit $\frac{\partial U_2}{\partial x} = -8.38 \times 10^{-5}$. De plus, nous avons $\sigma_{11} = \frac{F1}{1\,\text{mm}} = 1 \times 10^{-3}\,\text{MPa}$.

Le module de couplage calculé à partir des données Abaqus serait donc

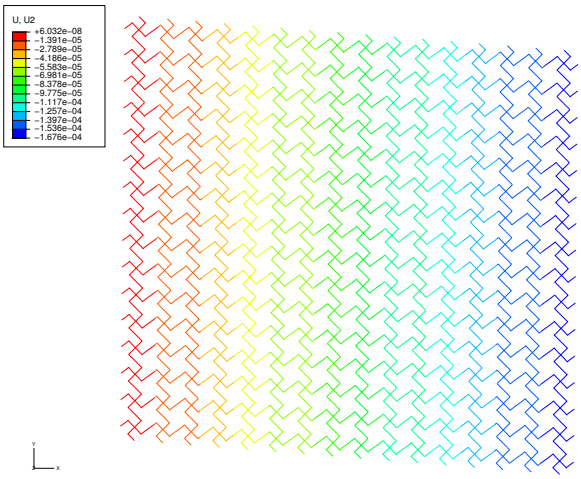


FIGURE 4.2.13 – Variable $U2$ de cisaillement (déformation suivant l'axe X_2) du treillis diamant chiral en traction

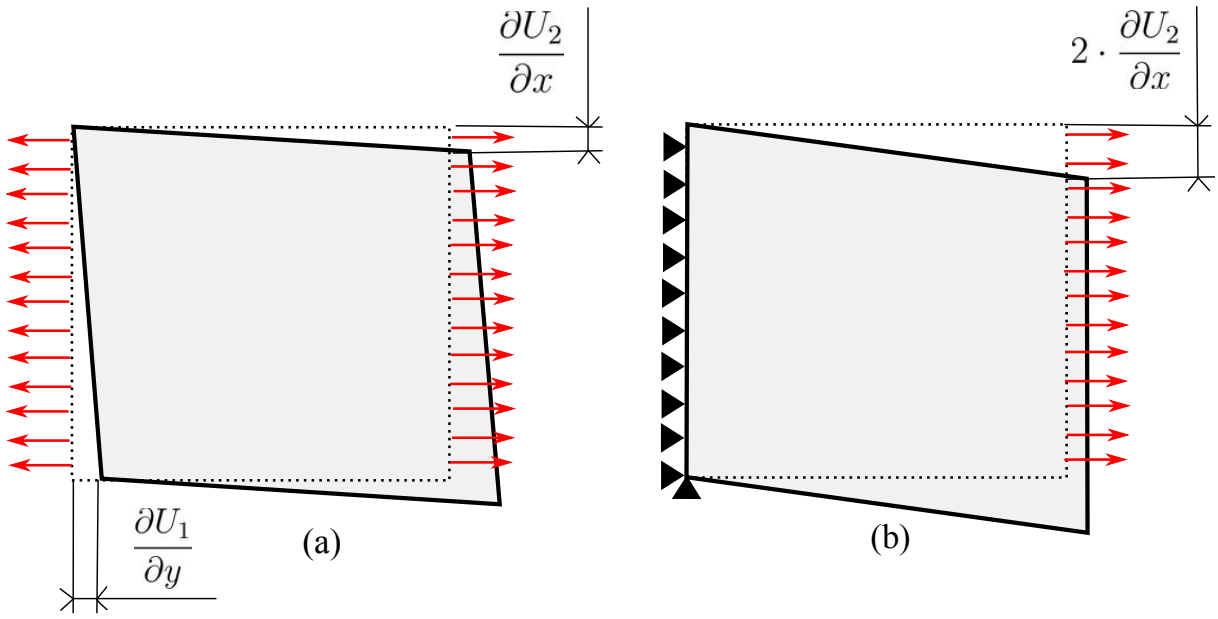


FIGURE 4.2.14 – Modélisation de l'essai de traction du treillis diamant chiral, (a) déformation théorique en l'absence de conditions de bords, (b) déformation obtenue lors de la simulation EF en imposant un déplacement nul sur l'un des bords

$$S_{31}(Abaqus) = \frac{\partial U_2/\partial x}{\sigma_{11}} = \frac{-8.38 \times 10^{-5}}{1 \times 10^{-3}} = -8.38 \times 10^{-2}\,\mathrm{MPa} \tag{4.2.16}$$

On peut le comparer au module de couplage obtenu à partir de la matrice de souplesse homogénéisée

$$S_{31}(hom.) = -\frac{6}{E_s \eta^3} = \frac{-6}{72000 \cdot 0.1^3} = -0.08333\,\mathrm{MPa} \tag{4.2.17}$$

On a une très bonne concordance des valeurs, l'écart entre les valeurs de S_{31} obtenues par homogénéisation et par EF est de 0.5%.

On peut tirer deux conclusions de l'étude de ce treillis. Premièrement, au vu de la déformée figure 4.2.12, ce treillis a un coefficient de Poisson nul (et non pas négatif), mais a un mode de déformation particulier : il se déforme en cisaillement lorsqu'on le soumet à un effort de traction-compression. Deuxièmement, le code de calcul semble fonctionner et être capable de prédire des modules atypiques tels que les modules de couplage traction-cisaillement S_{31} ou S_{41} de la matrice de souplesse.

4.3 Homogénéisation vers un milieu continu classique avec un modèle poutre de Bernouilli complet

Dans le chapitre précédent, on a conclu sur le fait que viser un milieu micropolaire n'apparaît pas, après coup, comme une nécessité pour l'homogénéisation des treillis. D'une part, parce que cela nous a conduits à formuler des hypothèses simplificatrices sur les termes de second ordre et à restreindre notre calcul aux treillis centrosymétriques, d'autre part parce que les effets micropolaires semblent très faibles au niveau macroscopique en dehors de cas de chargement spécifiques. On a montré qu'en limitant au premier ordre le développement de la variable de déplacement $\mathbf{u}^\varepsilon$ on obtient alors un tenseur de contrainte de Cauchy classique.

On tient à rappeler que malgré les similitudes, il ne s'agit pas de reproduire le code de calcul obtenu dans le chapitre deux. La différence tient au modèle de poutre utilisé. Au chapitre deux, on a utilisé un modèle de poutre de Bernouilli simplifié ; dans ce qui suit, on utilisera un modèle de poutre de Bernouilli complet. C'est-à-dire un modèle qui tient compte des inconnues de rotations et de l'équilibre des moments.

4.3.1 Simplification du code de calcul micropolaire en vue d'obtenir un code de calcul classique

On ne va pas rappeler l'intégralité du raisonnement tenu dans le chapitre précédent, mais simplement noter les différences. Le développement des paramètres cinématique apparaît avec un ordre en moins pour chaque paramètre

$$\mathbf{u}^\varepsilon\left(\lambda^\varepsilon\right) = \mathbf{u}_0\left(\lambda^\varepsilon\right) + \varepsilon \mathbf{u}_1\left(\lambda^\varepsilon\right) + ... \tag{4.3.1}$$

poutre	1	2	3	4	5	6	7	8
O(b)	1	2	2	3	3	3	4	4
E(b)	2	3	1	2	4	4	1	1
δ_1	0	0	0	0	0	0	1	1
δ_2	0	0	-1	-1	0	-1	0	-1

TABLE 4.4 – Connectivité du treillis de Milton

$$\Delta \mathbf{U}^{b\varepsilon} = \mathbf{u}^{\varepsilon}\left(E\left(b\right)\right) - \mathbf{u}^{\varepsilon}\left(O\left(b\right)\right) = \underbrace{\varepsilon\left(\mathbf{u}_1^{E_R(b)}\left(\lambda^{\varepsilon}\right) - \mathbf{u}_1^{O_R(b)}\left(\lambda^{\varepsilon}\right) + \frac{\partial \mathbf{u_0}(\lambda^{\varepsilon})}{\partial \lambda^i}\delta^{ib}\right)}_{\Delta \mathbf{U}_1^b} \tag{4.3.2}$$

On exprimera les rotations en ne conservant que le premier terme

$$\phi^{n\varepsilon} \quad (\lambda^{\varepsilon}) = \quad \phi_0^n\left(\lambda^{\varepsilon}\right) + \quad ... \tag{4.3.3}$$

D'où

$$\phi^{\varepsilon}(O(b)) = \phi_0^{O_R(b)}\left(\lambda^{\varepsilon}\right) \tag{4.3.4}$$

$$\phi^{\varepsilon}(E(b)) = \phi_0^{E_R(b)}\left(\lambda^{\varepsilon}\right) \tag{4.3.5}$$

On ne vise plus un milieu micropolaire, il est désormais inutile de faire l'identification $\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. De plus, comme on l'a montré dans le chapitre précédent, les vecteurs de couple d'efforts $\boldsymbol{\mu}^i$ peuvent être négligés devant les vecteurs d'efforts [6] $\mathbf{S}^i$. Tous ces changements sont résumés dans l'algorithme 4.1

4.3.2 Le treillis de Milton

Ce treillis est évoqué dans Lakes [1993] dans une version composite. Il a été proposé par Milton (1993) et, d'après ces auteurs, aurait un coefficient de Poisson de -1. Il est intéressant pour le test de notre code classique (non micropolaire) car il s'agit d'un treillis dont la cellule élémentaire n'est pas centrosymétrique. Cela va nous permettre de vérifier si l'on peut se passer de cette condition avec ce code.

La définition géométrique de ce treillis est donnée dans la figure 4.3.1, sa connectivité dans le tableau 4.4. Il est constitué de 4 noeuds élémentaires et de 4 poutres de longueur L : b1,b2,b5 et b7 et de quatre poutres de longueur $L\sqrt{3}$: b3, b4, b6 et b8.

Après homogénéisation, la matrice de souplesse obtenue est

6. Bien que les efforts tranchants incorporent des microrotations, celles-ci ne sont que des fonctions de la déformation et donc n'apparaissent pas dans l'expression des vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$ homogénéisés.

1. Initialisation des tableaux de données. Définition de la fonction de passage $x \overset{R}{\to} x(\lambda)$. Les inconnues de calcul seront les quatre séries de variables $\mathbf{u}_1^n$ et ϕ_0^n avec $n \in \mathcal{N}_R$.
2. Transformation des expressions $\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$ et $\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$. Cette étape est utile si on utilise un code standard dont la fonction produit vectoriel est exprimée dans un repère orthonormé classique. Si on omet cette étape, toutes les fonctions opérant sur des vecteurs et tenseurs doivent être définies pour des coordonnées curvilinéaires.
3. Initialisation des tableaux d'équations $\mathbf{equ1}[1..N_{max}]$,$equ2[1..N_{max}]$ avec N_{max} le nombre de noeuds de la cellule élémentaire.
4. Pour chaque poutre $b \in \mathcal{B}_R$:
   a) $E := E_R(b)$, $O := O_R(b)$
   b) $\Delta\mathbf{U}_1^b := \mathbf{u}_1^E - \mathbf{u}_1^O + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda^i}\delta^i$, $k_l := E_s\eta$ et $k_f := E_s\eta^3$ (On rappelle que l'on aurait pu utiliser de la même manière $k_l := E_s\frac{t}{L^b}$ et $k_f := E_s\frac{t^3}{(L^b)^3}$)
   c) $N_1 := k_l\left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$, $T_{1t} := k_f\left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right) - \frac{L^b}{2}\left(\phi_0^O + \phi_0^E\right)\right)$,
   d) $M_1^O := k_f\frac{L^b}{6}\left(L^b\left(2\phi_0^O + \phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$, $M_1^E := k_f\frac{L^b}{6}\left(L^b\left(\phi_0^O + 2\phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right)\right)$
   e) $\mathbf{equ1}[E(b)] := \mathbf{equ1}[E(b)] + N_1^b\mathbf{e}^b + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$; $\mathbf{equ1}[O(b)] := \mathbf{equ1}[O(b)] - N_1^b\mathbf{e}^b - T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$. (Il s'agit ici de construire le premier membre de chaque équation)
   f) $equ2[E(b)] := equ2[E(b)] + M_1^E$, $equ2[O(b)] := equ2[O(b)] + M_1^O$
5. Construction de deux systèmes d'équations de $3N_{max}$ lignes au total $\left[\ \mathbf{equ1}\ \right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$, $\left[\ equ2\ \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
6. Résolution des deux systèmes pour les variables $\mathbf{u}_1^n$ et ϕ_0^n
7. Expression des vecteurs contraintes $\mathbf{S^i} = \sum_{b\in\mathcal{B}_\mathcal{R}}\left(N_1^b\mathbf{e^b} + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}\right)\delta^{ib}$
8. Calcul du tenseur de contrainte $\sigma = \frac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$
9. Construction de la matrice de raideur $[K]$ tel que $\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [K]\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$, puis de la matrice de souplesse $[S] = [K]^{-1}$
10. Extraction des modules mécaniques micropolaires et autres constantes à partir des matrices de raideur et de souplesse
    a) $G^* = \frac{1}{S_{33}}$;
    b) $E_1^* = \frac{1}{S_{11}}$; $E_2^* = \frac{1}{S_{22}}$
    c) $\nu_{21}^* = -S_{12} \cdot E_2^*$; $\nu_{12}^* = -S_{21} \cdot E_1^*$

Algorithme 4.1 Algorithme de traitement automatisé de l'homogénéisation discrète classique avec un modèle poutre de Bernouilli complet

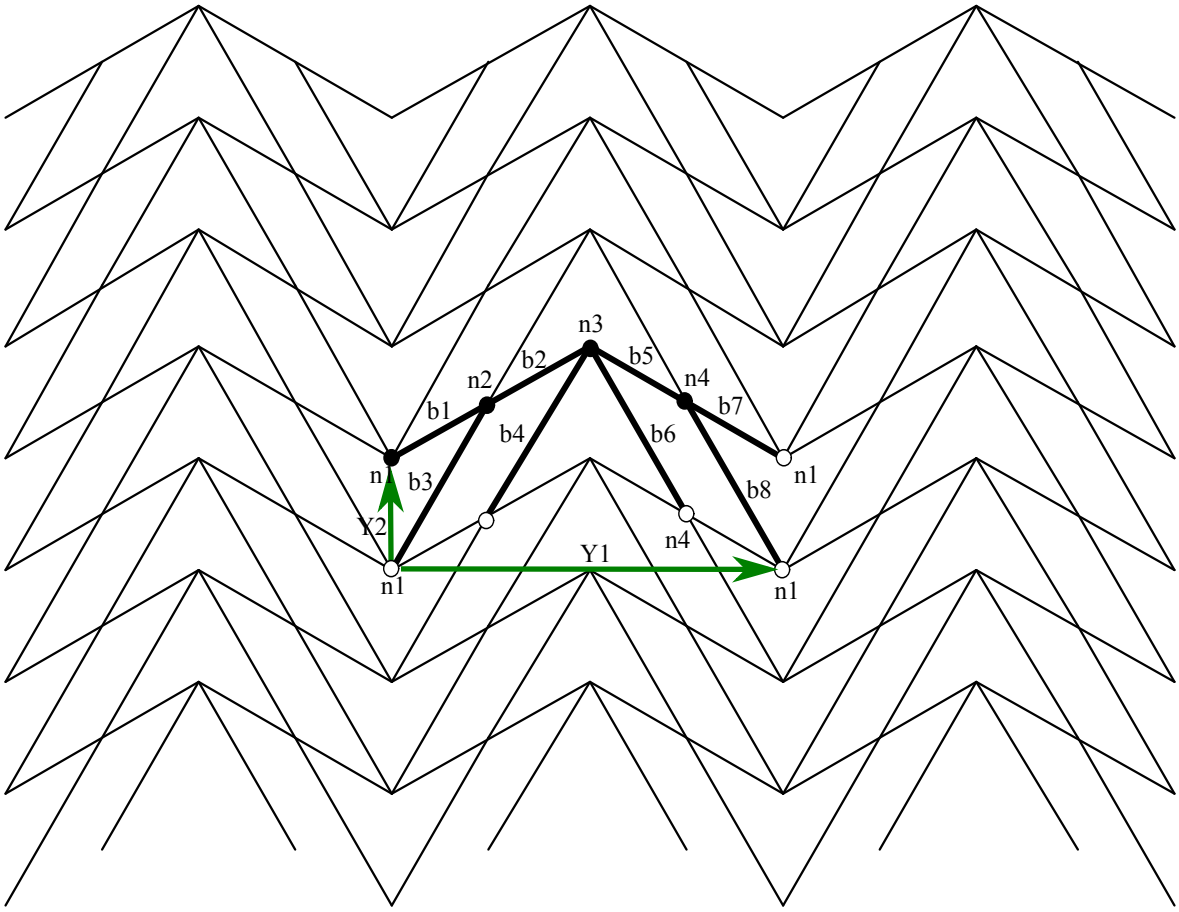


FIGURE 4.3.1 – Définition géométrique du treillis de Milton

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$S_{11} = -\frac{\left(-684-765\,\eta^2\sqrt{3}+503\,\eta^2+108\,\sqrt{3}-57\,\eta^4+9\,\eta^4\sqrt{3}\right)\left(288+60\,\sqrt{3}+167\,\eta^2\right)}{4Es\,\eta^3\left(48096+35701\,\eta^2+2880\,\eta^2\sqrt{3}+4008\,\eta^4+835\,\eta^4\sqrt{3}+10020\,\sqrt{3}\right)}$$

$$S_{22} = \frac{\left(-108+363\,\eta^2\sqrt{3}+373\,\eta^2+228\,\sqrt{3}+19\,\eta^4\sqrt{3}-9\,\eta^4\right)\left(288+60\,\sqrt{3}+167\,\eta^2\right)\sqrt{3}}{4Es\,\eta^3\left(48096+35701\,\eta^2+2880\,\eta^2\sqrt{3}+4008\,\eta^4+835\,\eta^4\sqrt{3}+10020\,\sqrt{3}\right)}$$

$$S_{12} = \frac{\left(-108-125\,\eta^2\sqrt{3}-99\,\eta^2+228\,\sqrt{3}+19\,\eta^4\sqrt{3}-9\,\eta^4\right)\left(288+60\,\sqrt{3}+167\,\eta^2\right)\sqrt{3}}{4Es\,\eta^3\left(48096+35701\,\eta^2+2880\,\eta^2\sqrt{3}+4008\,\eta^4+835\,\eta^4\sqrt{3}+10020\,\sqrt{3}\right)}$$

$$S_{21} = -\frac{3\left(-228+33\,\eta^2\sqrt{3}+125\,\eta^2+36\,\sqrt{3}-19\,\eta^4+3\,\eta^4\sqrt{3}\right)\left(288+60\,\sqrt{3}+167\,\eta^2\right)}{4Es\,\eta^3\left(48096+35701\,\eta^2+2880\,\eta^2\sqrt{3}+4008\,\eta^4+835\,\eta^4\sqrt{3}+10020\,\sqrt{3}\right)}$$

$$S_{33} = \frac{52\sqrt{3}\left(288+60\,\sqrt{3}+167\,\eta^2\right)}{\left(756-1905\,\eta^2+4467\,\eta^2\sqrt{3}+2412\,\sqrt{3}+2171\,\eta^4\sqrt{3}-2171\,\eta^4\right)Es\,\eta}$$

On en tire les modules élastiques suivants

$$E_1^* = -2/3\,\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)Es\left(-3\,\eta^2-24+5\,\sqrt{3}\right)\eta^3}{39\,\eta^2\sqrt{3}-8\,\eta^2+3\,\eta^4+36}$$

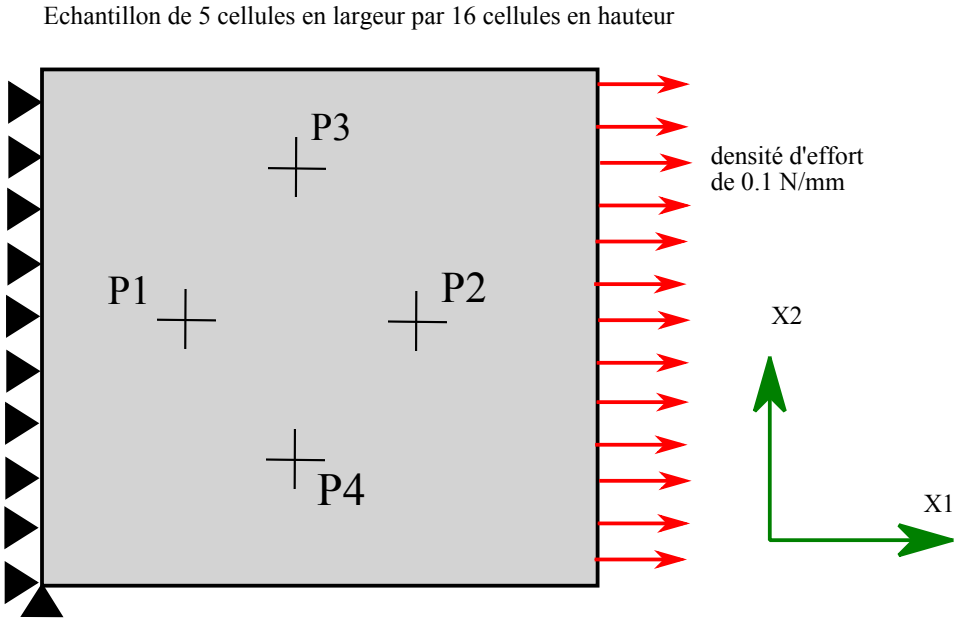


FIGURE 4.3.2 – Conditions de bords et de chargement pour la simulation EF du treillis de Milton en traction

$E_2^* = -2/3\,\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)Es\left(-3\,\eta^2-24+5\,\sqrt{3}\right)\eta^3}{72\,\eta^2+3\,\eta^4+36+31\,\eta^2\sqrt{3}}$
$G_{12}^* = -\frac{1}{156}\,\left(\sqrt{3}-3\right)\,Es\,\left(13\,\eta^2+12+3\,\sqrt{3}\right)\,\eta$
$\nu_{12}^* = 3\,\frac{3\,\eta^2\sqrt{3}-12+8\,\eta^2-\eta^4}{39\,\eta^2\sqrt{3}-8\,\eta^2+3\,\eta^4+36}$
$\nu_{21}^* = 3\,\frac{3\,\eta^2\sqrt{3}-12+8\,\eta^2-\eta^4}{72\,\eta^2+3\,\eta^4+36+31\,\eta^2\sqrt{3}}$
la densité relative
$\rho^* = 1/6\,\frac{\left(4\,Lt+4\,Lt\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{L^2}$

On a réalisé une simulation en EF pour vérifier la validité des modules E_1^* et ν_{12}^*. L'application numérique a été faite avec un aluminium de module élastique $E_s = 72000\,\text{MPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, la longueur $L = 1/16\,\text{mm}$ et une densité relative $\rho^* = 0.15$, ce qui impose une largeur $t \approx 0.00297\,\text{mm}$. On a choisi un maillage avec 3 éléments par poutre (élément type B23 Abaqus) et on a imposé une densité de contrainte $\sigma_1 = 0.1\,\text{MPa}$ sur la face latérale gauche. Les conditions de bords et de chargement sont décrites sur la figure 4.3.2.

Le treillis dans cette simulation ne fait pas exactement 1 x 1 mm, de plus après la simulation les effets de bords semblent assez importants (voir la figure 4.3.3), cela nous conduit à choisir les déplacements des points P1, P2, P3 et P4, intérieur au treillis pour diminuer les effets de bords (voir la figure 4.3.2).

Les résultats sont les suivants

$$\varepsilon_{11}(Abaqus) = \frac{U1_{P2} - U1_{P1}}{distance(P1,P2)} = \frac{0.789673\times10^{-2} - 0.350801\times10^{-2}}{0.4330127020} = 0.01013531469$$

ce qui conduit à une estimation du module élastique

$$E_1^*(Abaqus) = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} = 9.866491871\,\text{MPa}$$

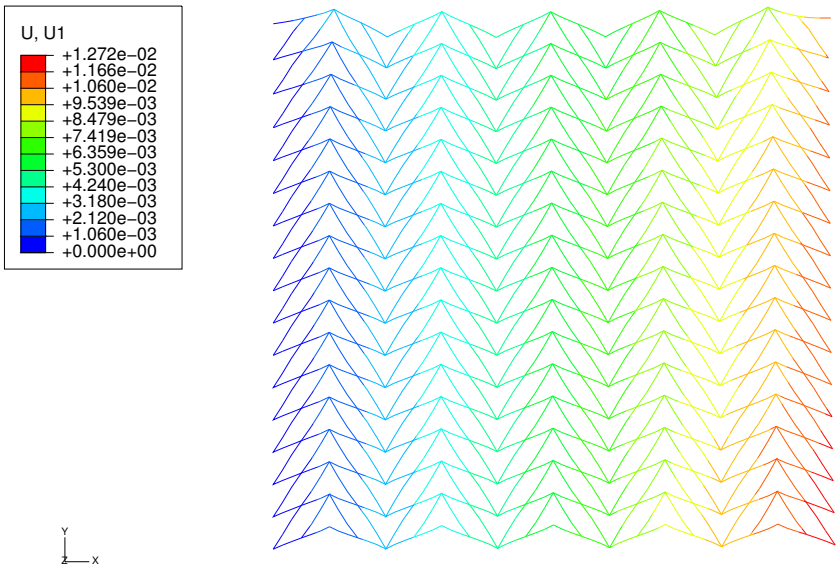


FIGURE 4.3.3 – Déplacement U1 dans la simulation en EF du treillis de Milton en traction

La valeur homogénéisée est de $E_1^*(hom.) = 10.3699419\,\text{MPa}$, soit un écart entre les deux valeurs d'environ 5 %.

Les résultats pour ce qui est de la déformation suivant la direction 2 sont

$$\varepsilon_{22}(Abaqus) = \frac{U2_{P3} - U2_{P4}}{distance(P3, P4)} \approx \frac{0.676932 \times 10^{-2} - 0.348304 \times 10^{-3}}{0.625} \approx 0.0102736256$$

L'estimation du coefficient de Poisson est obtenue selon

$$\nu_{12}^*(Abaqus) = -\frac{\varepsilon_{22}(Abaqus)}{\varepsilon_{11}(Abaqus)} \approx -1.013646435$$

La valeur homogénéisée est de $\nu_{12}^*(hom.) = -0.9937972470$, soit un écart entre les deux valeurs d'environ 2 %.

On a une bonne correspondance entre les valeurs homogénéisées et les valeurs obtenues à partir des simulations EF, on peut donc raisonnablement penser que le code de calcul non micropolaire est capable de fournir le tenseur de l'élasticité classique, ainsi que les différents modules élastiques qui sont liés, même dans le cas de treillis dont la cellule élémentaire n'est pas centro-symétrique.

4.4 Conclusions, discussion

Le code de calcul micropolaire montre à travers les exemples étudiés sa capacité à trouver les propriétés mécaniques homogénéisées. Pour le vérifier, nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux d'autres méthodes. Notre approche présente des avantages. Les modules sont obtenus de manière automatique. Hormis l'hypothèse de centro-symétrie des treillis, il n'est pas besoin de poser des hypothèses supplémentaires propres à tel ou tel treillis. La

	code extensionnel	code micropolaire	code classique
treillis à dominante extensionnelle	milieu classique	sans intérêt	milieu classique
treillis à dominante flexionnelle centrosymétrique	inutilisable	milieu micropolaires	milieu classique
treillis à dominante flexionnelle non centrosymétrique	inutilisable	inutilisable [7]	milieu classique

TABLE 4.5 – Milieux obtenus en fonction du code de calcul utilisé et du treillis traité

méthode utilisée ici permet d'obtenir les tenseurs élastiques complets et donc les modules mécaniques associés, que beaucoup d'autres méthodes ne fournissent pas. Un exemple intéressant à ce propos est le treillis diamant chiral où apparaît le terme de couplage traction-cisaillement.

Une autre conclusion que nous pouvons tirer concerne le code de calcul classique (non micropolaire), qui semble fonctionnel lui aussi et notamment pour des treillis non centrosymétriques. Ce code de calcul apparaît comme une version simplifiée du code micropolaire, en limitant le développement asymptotique des paramètres cinématiques. Si l'on compare les résultats à ceux que nous avions dans le chapitre 2, on constate que la différence réside dans le fait que le tenseur obtenu est cette fois-ci symétrique. Bien que ce code ne fournisse que les modules élastiques classiques, c'est certainement suffisant pour beaucoup d'applications. À ce stade, on peut nuancer la conclusion que nous avions tirée en fin de chapitre 2 sur l'intérêt d'un code micropolaire pour les treillis avec flexion. Hormis des cas particuliers, on peut utiliser un code de calcul classique, non micropolaire, pour traiter l'homogénéisation de tout treillis, même ceux à dominante flexionnelle. Pour clarifier les choses, le tableau 4.5 présente une synthèse des différents codes de calculs étudiés jusqu'à présent et les milieux obtenus en fonction du type de treillis traité.

Une conclusion s'impose au vu de ce tableau, le code de calcul classique utilisé dans ce chapitre semble le plus universel pour traiter les treillis.

Il serait intéressant de poursuivre les travaux suivant plusieurs axes. Premièrement, vérifier la validité de tous les modules mécaniques complémentaires obtenus, par expérimentation réelle et/ou analyse EF. Au-delà des termes complémentaires obtenus, la capacité du code à prédire des comportements mécaniques singuliers, comme dans la section 4.2.3, mérite d'être confirmée.

Deuxièmement, si l'on veut traiter des treillis avec une cellule de base complexe, comprenant un grand nombre de noeuds, dans un temps de calcul raisonnable, il faudra améliorer l'automatisation du calcul. Il s'agit d'un aspect plus technique que scientifique, mais le temps

de calcul est fonction du nombre de variables traitées. Il croît en 2D comme $2 \cdot (3n)^2$ avec le code micropolaire ($(3n)^2$ avec le code classique) , avec n le nombre de noeuds de la cellule élémentaire. Le code a été rédigé en Maple et on a utilisé la fonction solveur générique de Maple. Il sera nécessaire pour améliorer le temps de calcul d'écrire une fonction solveur spécifique.

Troisièmement, on peut améliorer la partie de code concernant la simplification des résultats. En accroissant la complexité de la cellule de base d'un treillis, les modules obtenus comprennent de plus en plus de termes. On a introduit sommairement cette simplification dans ce chapitre par une analyse des termes prépondérants en fonction du petit paramètre η, mais comme le montre la section 4.2.2 cela peut se révéler insuffisant en fonction du degré de précision recherché.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder l'homogénéisation de treillis présentant un comportement élastoplastique.

Chapitre 5

Approche du comportement élastoplastique homogénéisé d'un treillis répétitif à dominante extensionnelle

Sommaire

5.1 Introduction **160**
5.2 Bibliographie sur la modélisation des treillis dans le domaine plastique . . **161**
5.2.1 Choix de la méthode, limites et domaines d'utilisation 163
5.3 Équations constitutives à l'échelle microscopique **164**
5.3.1 Équations à l'échelle microscopique, modèle élastoplastique d'une poutre en traction avec écrouissage isotrope 164
5.3.2 Calcul du module élastoplastique tangent local 166
5.3.3 Schéma d'intégration 167
5.3.4 Algorithme de projection ("return mapping") 167
5.4 Méthode de calcul **169**
5.4.1 Principe général 169
5.4.2 Calcul des surfaces de charge limite initiales 171
5.4.3 Évolution de la surface de charge résultant de l'écoulement plastique 176
5.5 Code de calcul et exemples **180**
5.5.1 Algorithme de calcul des surfaces de charges initiales 180
5.5.2 Algorithme de comportement plastique 185
5.6 Conclusions, discussion **191**

Notations utilisées dans ce chapitre

On a fait usage de la notation vectorielle pour les tenseurs, dite aussi notation de l'ingénieur.

δ^{ib} paramètre de localisation de l'appartenance du noeud d'une cellule

E_1^t module élastique extrait de la matrice tangente

$[\Delta E]_n$ incrément du tenseur de déformation à l'étape considérée

$[\Delta \Sigma]_n$ incrément du tenseur de contrainte à l'étape considérée

E_s module de Young du matériau des poutres

E_1^t module élastique tangent, obtenu à partir de la matrice tangente $[K^t]$, à l'étape n

$[E] = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial U1}{\partial x} & \dfrac{\partial U2}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial U1}{\partial y} + \dfrac{\partial U2}{\partial x}\right) \end{array} \right]^T = \left[\begin{array}{ccc} E_{11} & E_{22} & E_{12} \end{array} \right]^T$ tenseur des déformations homogénéisées

$[e]$ vecteur de la déformation totale par poutre

$[e_e]$ vecteur de la déformation élastique par poutre

$[e_p]$ vecteur de la déformation plastique par poutre

$\mathbf{e}^b$ vecteur directeur de la poutre b

$[f]$ vecteur des fonctions de charges par poutres

$[f_t]$ vecteur des fonctions de charges test par poutres

g Jacobien de la fonction de changement de variable $\mathbf{R}$

$[\gamma]$ vecteur de la valeur absolue du taux d'écrouissage par poutre, $\gamma^b = \left|\dot{e}_p^b\right|$

$[\Delta\gamma']$ vecteur de l'incrément d'écrouissage signé tel que $\Delta\gamma'^b = \mathrm{sgn}(\sigma^b) \cdot \Delta\gamma^b$

H_s module plastique du matériau des poutres

$[K^t]$ matrice tangente au pas n

$[K^p]$ matrice de raideur plastique

$[K^e]$ matrice de raideur élastique

$[K^r]$ matrice intermédiaire de calcul pour $[K^t]$

n nombre de poutres par cellule élémentaire

ν_{12}^t coefficient de Poisson obtenu à partir de la matrice tangente $[K^t]$, à l'étape n

$[Q]$ matrice de passage échelle micro vers macro en contrainte

$[Q]_p$ matrice de passage échelle micro vers macro en contrainte, uniquement pour les poutres primaires

$[Q]_r$ matrice réduite de passage échelle micro vers macro en contrainte, uniquement pour les poutres primaires

$[Q]_i$ matrice de passage des tensions de poutres primaires σ_p vers les tensions de poutres secondaires σ_s

$[Q]_s$ matrice de passage du tenseur des contraintes $[\Sigma]$ vers les tensions de poutres secondaires σ_s

ρ^* densité relative

$\mathbf{R}$ fonction de changement de variable (λ^i) vers (x^i)

σ_{ys} limite élastique initiale du matériau

$[\sigma]$ vecteur des contraintes par poutres, échelle microscopique

$[\sigma_t]$ vecteur des contraintes test par poutres. Cette matrice est identique à $[a]$ au

facteur de section (largeur en 2D) de poutre t^b près.

$[\sigma_p]$ vecteur des contraintes pour les poutres primaires

$[\sigma_s]$ vecteur des contraintes pour les poutres secondaires

$[\sigma_n]$ vecteur des contraintes par poutres normalisées par rapport à σ_{ys}

$[\Sigma] = \left[\begin{array}{cccc} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} & \Sigma_{12} & \Sigma_{12} \end{array} \right]^T$, vecteur (tenseur) des contraintes homogénéisées à l'échelle macroscopique

$[\Sigma]_{norm}$ vecteur (tenseur) des contraintes normalisées par rapport à σ_{ys}

$[s]$ vecteur des surfaces de charges par poutre

$[S^t]$ vecteur de souplesse tangent

t^b largeur d'une poutre

$\mathbf{v}(.)$ vitesse virtuelle

$[\xi]$ vecteur de l'incrément de contrainte élastique test. Ce vecteur fixe la direction de l'évolution de la charge dans l'espace des contraintes.

$[\zeta]$ matrice diagonale (carré) contenant les modules reliant l'incrément de contrainte élastique test $[\xi]$ et l'incrément de déformation plastique $[\Delta\gamma']$, de telle sorte que $[\Delta\gamma'] = [\zeta]\,[\xi]$

5.1 Introduction

On a déjà évoqué dans d'autres chapitres l'intérêt des matériaux cellulaires et des treillis en particulier. Pour certaines applications, comme l'absorption des chocs ou l'utilisation comme matériau de remplissage pour des pièces industrielles, il est nécessaire de déterminer les propriétés mécaniques que sont les limites élastiques et le comportement dans le domaine plastique [Doyoyo and Hu, 2006a]. Une approche numérique directe est inconcevable, car elle dépasse les capacités des systèmes informatiques actuels. Une approche micromécanique par le biais d'une forme d'homogénéisation est préférable.

Notre objectif dans ce chapitre est de trouver une méthode de calcul homogénéisée automatique de la limite élastique puis de l'évolution plastique d'un treillis répétitif.

On commence ce chapitre par une brève bibliographie. Le sujet est très vaste, dans le cadre de cette thèse on abordera le problème en restreignant notre étude aux treillis répétitifs à dominante extensionnelle (traction-compression). Ces treillis sont les plus optimisés quant au rapport caractéristiques mécanique/densité [Wang and McDowell, 2005]. Bien que la méthode développée ci-dessous soit nouvelle (à notre connaissance), elle présente des similitudes avec celle de Mohr [2005]. La méthode développée par D. Mohr est limitée aux treillis dont les noeuds sont situés sur les frontières de la cellule élémentaire ; en adaptant l'homogénéisation asymptotique discrète au traitement de la plasticité, on montre que notre méthode permet de traiter indifféremment tous les treillis à dominante extensionnelle, même ceux dont la cellule élémentaire comporte des noeuds internes.

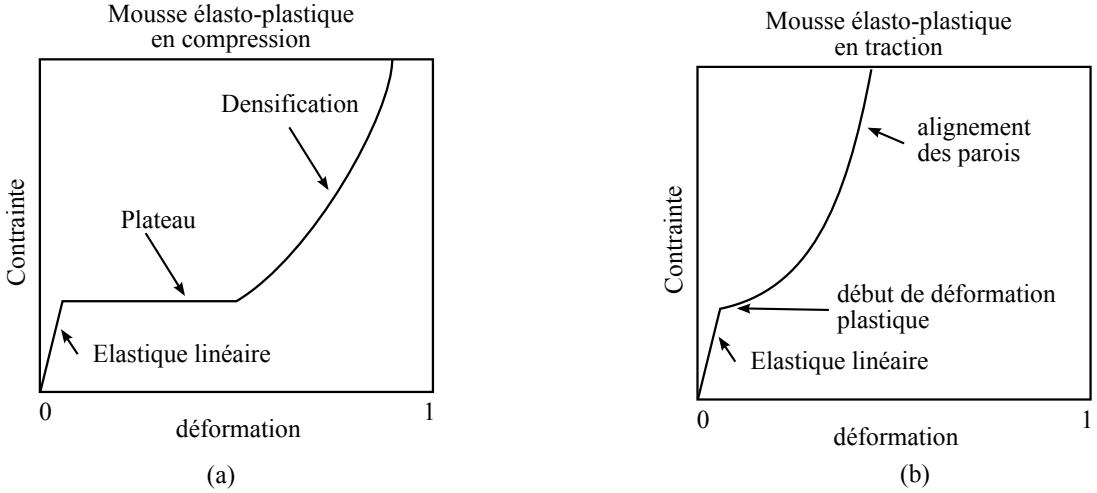


FIGURE 5.2.1 – Courbes contraintes-déformation d'une mousse élastoplastique en compression (a) et traction (b)

5.2 Bibliographie sur la modélisation des treillis dans le domaine plastique

Nous avons rappelé dans le chapitre un les différentes catégories de treillis en fonction de leur dominante : flexionnelle, extensionnelle ou sans dominante. Pour ce qui est des matériaux à dominante flexionnelle, comme les mousses, on trouve dans [Gibson and Ashby, 1997] des résultats expérimentaux qui concernent la plasticité. Ils montrent qu'il faut distinguer trois catégories de matériaux : les mousses de type élastomère, les mousses élastoplastiques et les mousses élastiques à rupture fragile. Les mécanismes de déformation sont différents selon que l'on se place dans le cas d'une extension ou d'une compression (voir la figure 5.2.1). Si l'on considère uniquement les matériaux élastoplastique en compression, figure 5.2.1(a), ces matériaux ont une relation contrainte déformation en trois étapes. Ils se déforment tout d'abord de manière élastique linéaire, puis survient une phase de plateau lors de la plastification et du flambement des micropoutres et enfin survient une phase de densification lorsque les poutres s'enchevêtrent. Mais ces mêmes matériaux élastoplastiques en traction, figure 5.2.1(b), se comportent différemment. La phase élastique est suivi d'une phase d'écrouissage à laquelle vient s'ajouter un phénomène d'alignement des faces d'une cellule de base. Gibson and Ashby [1997] donnent diverses formules permettant de retrouver ces courbes, basées principalement sur des mesures expérimentales ayant pour principal paramètre la densité relative $\frac{\rho^*}{\rho_s}$. Ils soulignent que suivant les treillis (mousses) réels considérés, des phénomènes d'écrouissage aux noeuds peuvent apparaître dus à la concentration des contraintes.

Des études ultérieures sur les treillis à dominante flexionnelle, mettent en évidence des phénomènes complexes dans la déformation plastique de ces treillis. Par exemple Okumura et al. [2004], par une méthode d'homogénéisation de type Lagrangien réactualisé et EF sur des treillis assez vastes, montrent des phénomènes de localisation sous la forme de bandes

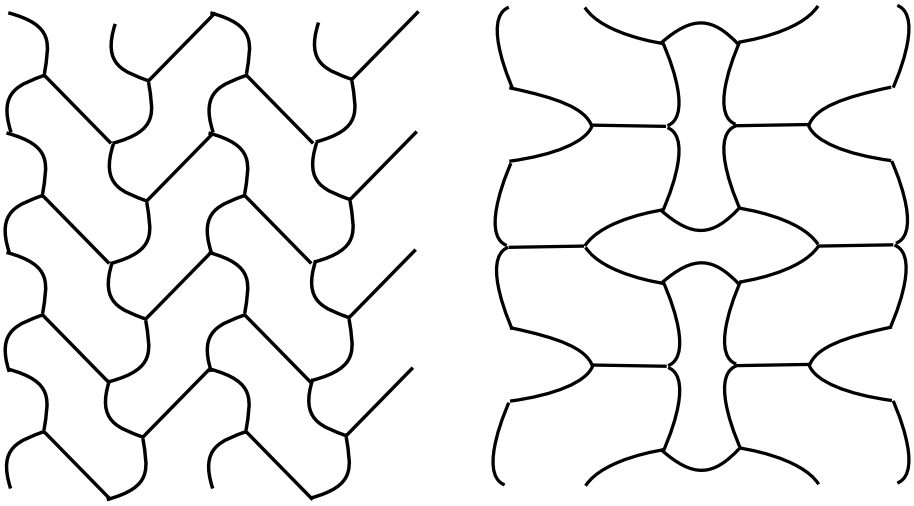


FIGURE 5.2.2 – Différents modes d'effondrement (flambage) du treillis hexagone. (D'après Yan et al. [2006])

d'effondrement, de bifurcation ou de motifs macro-géométriques apparaissant lors de la traction/compression de ces treillis. Dans ces treillis, plusieurs modes de déformation différents existent suivant l'historique du chargement, on note également que la propagation de ces bandes de déformation survient après l'effondrement initial d'une seule cellule. Des motifs géométriques particuliers apparaissent également dans les simulations EF de Yang and Huang [2006] (figure 5.2.2) ou dans Demiray et al. [2006].

Cette analyse nous amène à considérer qu'étant donné la complexité des modes d'écrouissage et d'effondrement des treillis à dominante flexionnelle, on va restreindre notre étude aux treillis à dominante traction-compression, avec un matériau élasto-plastique.

On va faire une brève revue des méthodes d'homogénéisation appliquées à la plasticité. Il s'agit le plus souvent d'une variante des méthodes d'homogénéisation déjà présentées antérieurement dans cette thèse. On peut distinguer néanmoins les études qui se bornent à trouver les surfaces de charges (limites élastiques) initiales et celles qui s'efforcent de fournir un modèle élastoplastique homogénéisé complet.

Pour ce qui est des études sur les surfaces de charges initiales, on trouve dans Deshpande et al. [2001b] une étude des limites du treillis 3D Octet. L'étude est réalisée à la fois analytiquement, par la méthode des moyennes des paramètres cinématiques sur les faces de la cellule élémentaire et par éléments finis. Les surfaces de charges sont trouvées analytiquement par une analyse au cas par cas des poutres qui plastifient. On trouve dans Wang and McDowell [2005] une synthèse des propriétés mécaniques de six treillis 2D par une méthode d'homogénéisation de même nature. Les surfaces de charges sont calculées en utilisant une formule de contrainte équivalente qui combine à la fois l'extension et la flexion. On détermine grâce à cette contrainte équivalente une inéquation par poutre. On fait ensuite l'extremum de cette liste d'inéquations. On retrouve une approche similaire dans Doyoyo and Hu [2006b]

et Doyoyo and Hu [2006b] pour des treillis 3D Warren et 3D auxétiques, dans Sullivan et al. [2008] pour le treillis tétrakaidécahèdre et dans Zhang et al. [2008] pour deux nouveaux treillis, le Si-Square et le N-Kagome.

Certaines études font une approche numérique, ou comparent les résultats analytiques avec une étude EF. On peut citer Wang and McDowell [2005], Yang and Huang [2006, 2005] et Demiray et al. [2007]. D'autres auteurs ont étudié numériquement l'influence de certains paramètres comme la section de la poutre [Xie and Chan, 2006], ou bien l'irrégularité dans les treillis [Alkhader and Vural, 2008]. L'étude d'Alkhader et Vural est intéressante, car elle montre l'influence des effets de bords et du nombre de cellules utilisées dans les simulations numériques.

Une méthode d'homogénéisation plus générale est proposée dans Mohr [2005]. Elle est basée sur la projection de la déformation de la cellule élémentaire sur les poutres de cette cellule. Cette méthode suppose une déformation affine des poutres, que les treillis étudiés soient à dominante extensionnelle et que les noeuds soient situés sur les faces latérales de la cellule élémentaire. Mohr propose un algorithme incrémental pour la résolution de la déformation plastique, algorithme qui fournit, en fonction d'un pilotage en déformation, les tenseurs homogénéisés de contrainte et de déformation plastique suivant une méthode de 'return mapping' [Simo and Hughes, 1998]. On trouve dans Fan et al. [2008a], Fan et al. [2008c] et Fan and Fang [2008] une extension de cette méthode à différentes géométries 2D et 3D, ainsi que l'utilisation d'une loi de déformation plastique de type Ramberg-Osgood.

On trouve dans Florence and Sab [2006] une approche différente, par une méthode d'homogénéisation de type énergétique, initialement développée dans Pradel and Sab [1998]. L'étude comporte une extension de cette méthode pour trouver les surfaces de charge ultimes d'un treillis hexagonal. La méthode est présentée comme rigoureuse et permet l'étude d'un treillis hexagonal avec des poutres à section non constante.

5.2.1 Choix de la méthode, limites et domaines d'utilisation

En conclusion de cette revue bibliographique, on retiendra que différentes méthodes ont été développées pour trouver les limites élastiques (surfaces de charges) initiales de toute sorte de treillis, à dominante traction-compression ou non. Mais que l'étude homogénéisée dans le domaine plastique de treillis à dominante flexionnelle pose des difficultés liées, entre autres, à la localisation de l'effondrement sous forme de bandes. La méthode développée par Mohr [2005], utilisable pour un certain nombre de treillis à dominante traction-compression est intéressante. Elle permet de fournir le comportement homogénéisé plastique de ces treillis. Néanmoins, cette méthode est restreinte aux treillis qui ne possèdent pas de noeuds internes, c'est-à-dire, aux treillis dont les noeuds sont situés sur les faces latérales de la cellule élémentaire. On se propose à travers notre étude, d'aller au delà de cette restriction pour traiter tous les treillis à dominante extensionnelle, avec ou sans noeuds internes, en faisant une extension à la plasticité de la méthode d'homogénéisation discrète.

Cette étude n'est qu'une première approche, tous les facteurs ne seront pas pris en compte. Par exemple, les instabilités liées à la compression ne seront pas traitées : instabilité par flambage et/ou la rotation des noeuds.

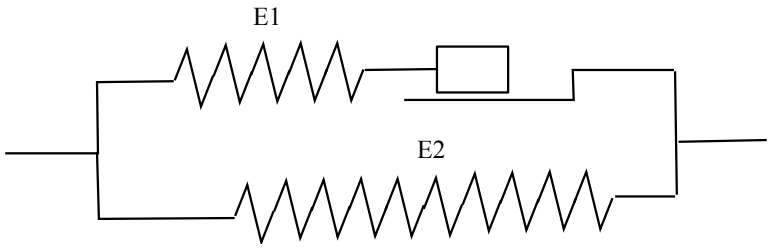


FIGURE 5.3.1 – Modèle analogie mécanique d'une poutre en traction avec écrouissage isotrope

5.3 Équations constitutives à l'échelle microscopique

On va brièvement rappeler dans cette section les équations constitutives de la théorie plastique pour des éléments monodimensionnels de type poutres en traction-compression. Cela permettra d'éclairer les notations utilisées et les notions spécifiques introduites ensuite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à [Simo and Hughes, 1998]. Nous allons aborder succinctement les notions de durcissement isotrope, de réponse irréversible et de sa modélisation mathématique au travers des conditions complémentaires de Kuhn-Tucker, le concept de *projection ("return mapping")* et le choix de la méthode d'intégration associée à la forme incrémentale du problème.

On utilisera de manière fréquente les termes d'échelles *microscopique* et *macroscopique*. Il convient de décrire précisément ce que signifient ces termes dans le contexte de ce chapitre. L'expression *échelle microscopique* fait référence aux grandeurs associées aux poutres au sein d'une cellule élémentaire. Par exemple, le vecteur des contraintes $[\sigma]$, contient l'ensemble des contraintes microscopiques σ^b, associées aux poutres b. L'expression *échelle macroscopique* fait référence aux grandeurs associées à la cellule élémentaire, il s'agit de grandeurs homogénéisées. Par exemple, le tenseur des contraintes $[\Sigma]$ est le tenseur macroscopique résultant de l'homogénéisation des contraintes $[\sigma]$ microscopiques.

5.3.1 Équations à l'échelle microscopique, modèle élastoplastique d'une poutre en traction avec écrouissage isotrope

Le modèle de base adoptée pour la poutre est plastique isotropique, que l'on pourrait représenter par l'analogie mécanique de ressorts additionnés d'un patin de frottement (voir la figure 5.3.1).

La réponse typique d'un modèle écrouissage linéaire isotrope est fournie sur la figure 5.3.2.

On partage la déformation totale que nous nommerons e entre une partie élastique e_e et une partie plastique e_p.

$$e = e_e + e_p \tag{5.3.1}$$

Le module élastique du matériau de la poutre b est E_s, nous avons donc la loi de comportement élastique_

$$\sigma^b = E_s^b \left(e^b - e_p^b\right) \tag{5.3.2}$$

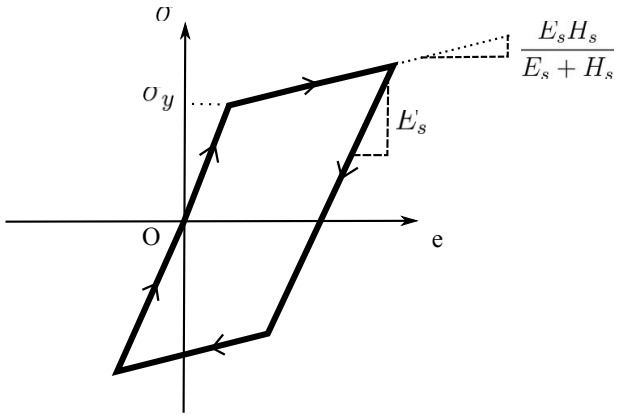


FIGURE 5.3.2 – Réponse d'un modèle poutre à écrouissage linéaire isotrope lors d'un cycle fermé, avec les modules tangents associés

On remarquera que la variable qui pilote, qui est la donnée d'entrée du problème, est e^b, on parlera de pilotage par la déformation. Pour mettre en évidence le côté irréversible de l'écrouissage, on pose les règles suivantes :

1. la contrainte dans le patin ne peut dépasser en valeur absolue la valeur s^b, qui serait la contrainte d'écoulement du patin. Ce sera la limite élastique, ou limite de charge. On va définir une fonction de charge ou condition limite que l'on s'impose comme négative ou nulle
$$f^b = \left|\sigma^b\right| - s^b \leq 0 \tag{5.3.3}$$
la valeur s^b sera variable, mais fixée initialement sur la limite élastique du matériau σ_{ys}.
2. Si la valeur absolue de la contrainte appliquée σ^b est inférieure à s^b, alors il n'y a pas de changement dans e_p^b, la réponse de la poutre sera élastique.
3. La condition que l'on s'est imposée en 1. entraîne le fait qu'il y a écrouissage uniquement lorsque $f^b = 0$. On appellera γ la valeur absolue du taux d'écrouissage. L'écrouissage se fait obligatoirement dans le sens de la contrainte appliquée, ce qui signifie que son taux est du signe de la contrainte σ^b. On obtient
$$\dot{e}_p^b = \gamma^b \operatorname{sign}(\sigma^b) \tag{5.3.4}$$

Ces règles entraînent les conditions suivantes

$$\begin{cases} f^b < 0 \Rightarrow \gamma^b = 0 \\ \gamma^b > 0 \Rightarrow f^b = 0 \end{cases} \tag{5.3.5}$$

Ces conditions portent le nom de conditions de Kuhn-Tucker. On montre [Simo and Hughes, 1998] que l'on peut ajouter une condition additionnelle dite condition de *consistance* ou de persistance
$$\gamma \, \dot{f}^b = 0 \tag{5.3.6}$$

que l'on pourrait interpréter physiquement comme le fait que lors de l'écrouissage la contrainte se maintient sur la surface de charge.

On ajoutera à cela une loi d'écrouissage isotrope. L'écrouissage est isotrope en ce sens qu'à chaque état de chargement, le centre de la surface de charge définie par les limites $\left[-s^b, s^b\right]$ est l'origine. L'écrouissage est linéaire quant au flux plastique et indépendant du signe de $\dot{e}_p^b$: cela conduit à une loi du type

$$s^b = \sigma_{ys} + H_s^b \alpha^b \tag{5.3.7}$$

avec H_s^b, le module plastique et α, telle que $\dot{\alpha}^b = \left|\dot{e}_p^b\right| = \gamma$; α est le cumul de la valeur absolue de la déformation plastique, elle est appelée dans la littérature variable d'écrouissage interne. α sert à définir s^b la limite de charge pour la poutre ; dans notre algorithme on a mémorisé, comme variable interne, la variable s^b.

L'équation 5.3.7 entraîne le fait que l'on peut réécrire la fonction de charge, équation 5.3.3, sous la forme

$$f^b = \left|\sigma^b\right| - \left[\sigma_{ys} + H_s^b \alpha^b\right] \tag{5.3.8}$$

5.3.2 Calcul du module élastoplastique tangent local

On peut à l'aide des équations locales et des lois d'écrouissage définies précédemment calculer le module élastoplastique tangent dans le cas monodimensionnel d'une poutre. La condition de consistance, équation 5.3.6, permet de résoudre γ. On part de l'équation 5.3.8

$$\begin{aligned} \dot{f}^b &= \frac{\partial f}{\partial \sigma^b}\dot{\sigma}^b + \frac{\partial f}{\partial \alpha^b}\dot{\alpha}^b \\ &= \operatorname{sign}(\sigma^b) E_s^b \left(\dot{e}^b - \dot{e}_p^b\right) - H_s^b \dot{\alpha}^b \\ &= \operatorname{sign}(\sigma^b) E_s^b \left(\dot{e}^b\right) - \gamma^b \left[E_s^b + H_s^b\right] \leq 0 \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

D'après la condition de consistance si $\gamma^b \neq 0$ (écrouissage), cela entraîne $\dot{f}^b = 0$ et donc d'après l'équation 5.3.9 on a dans ce cas

$$f^b = \dot{f}^b = 0 \Rightarrow \gamma^b = \frac{\operatorname{sign}\left(\sigma^b\right) E_s^b \dot{e}^b}{E_s^b + H_s^b} \tag{5.3.10}$$

Le module tangent de la relation contrainte déformation s'écrit donc en reportant l'équation 5.3.10 dans la forme en vitesse de l'équation 5.3.2

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E_s^b \dot{e}^b & \text{si } \gamma^b = 0 \\ \dfrac{H_s^b E_s^b}{E_s^b + H_s^b} \dot{e}^b & \text{si } \gamma^b > 0 \end{cases}$$

Ces deux modules apparaissent à différemment moment d'un cycle de charge-décharge, comme on peut le voir sur la figure 5.3.2.

5.3.3 Schéma d'intégration

Le problème se pose de la manière suivante : on suppose qu'à l'instant t_n l'état des variables

$\left\{e_n^b,\, e_{p,n}^b,\, s_n^b\right\}$

est complètement défini. On peut en conséquence définir l'état de contrainte à cet instant

$\sigma_n^b = E_s^b \left(e_n^b - e_{p,n}^b\right)$

On impose un incrément de déformation Δe après un incrément de temps Δt, tel que $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, il nous faut alors recalculer l'ensemble des variables $\left\{e_{p,n}^b,\, s_n^b\right\}$. Comme c'est l'incrément de déformation que l'on s'impose, on parle de pilotage par la déformation.

Les schémas d'intégration classique peuvent être exposés de la façon suivante. Considérons une fonction du temps $g(t)$, et sa dérivée $f\left(g(t)\right) = \dot{g}(t)$, mais telle que f soit une fonction de $g(t)$. On peut alors exprimer une famille d'algorithme dite du point milieu généralisé

$$\begin{aligned} g_{n+1} &= g_n + \Delta t\, f\left(g_{n+v}\right) \\ g_{n+v} &= v g_{n+1} + (1-v)\, g_n \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

avec $g_{n+1} \approx g(t_{n+1})$, l'approximation algorithmique de la valeur exacte de $g(t_{n+1})$. On peut noter que cette famille d'algorithme contient des schémas d'intégration bien connus

$$\begin{cases} v = 0 & \text{explicite} \\ v = \frac{1}{2} & \text{point milieu} \\ v = 1 & \text{implicite} \end{cases} \tag{5.3.12}$$

On renvoie le lecteur à la littérature spécialisée mathématique sur la question pour plus de détails. On notera simplement que les algorithmes de point milieu et implicite sont plus précis, donc convergent plus rapidement et que la stabilité inconditionnelle requiert $v > \frac{1}{2}$. L'algorithme explicite à pour lui un atout majeur, sa simplicité. Le calcul des fonctions à l'étape $n+1$ se fait immédiatement à partir de l'état des fonctions à l'étape n. C'est ce type d'algorithme d'intégration que nous mettrons en oeuvre dans ce chapitre.

5.3.4 Algorithme de projection ("return mapping")

On va considérer un état intermédiaire des fonctions constitutives définies auparavant, appelé état *test,* purement élastique obtenu en figeant le flux plastique e_p.

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1}^t &= E_s\left(e_{n+1} - e_{p,n}\right) = \sigma_n + E_s \Delta e_n \\ f_{n+1}^t &= \left|\sigma_{n+1}^t\right| - s_n \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Cet état n'est admissible que dans le cas purement élastique, dans le cas plastique la fonction de charge test sera positive $f_{n+1}^t > 0$, ce qui viole la règle définie plus haut pour cette fonction. Cela entraîne à cause des conditions de Kuhn-Tucker que si $f_{n+1}^t > 0$, alors $\gamma > 0$. Il nous faut mettre à jour les variables $e_{p,n+1}$ et s_{n+1} de telle sorte que l'état final de $f_{n+1} = 0$. Commençons par faire apparaître $\Delta\gamma$ dans l'expression finale de σ_{n+1}

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= E_s\left(e_{n+1} - e_{p,n+1}\right)\\ &= E_s\left(e_{n+1} - e_{p,n}\right) - E_s\left(e_{p,n+1} - e_{p,n}\right)\\ &= \sigma^t_{n+1} - E_s\Delta\gamma\text{sign}(\sigma_{n+1})\end{aligned} \tag{5.3.14}$$

On peut maintenant réécrire les équations à l'état final

$$\begin{aligned}\sigma_{n+1} &= \sigma^t_{n+1} - E_s\Delta\gamma\text{sign}(\sigma_{n+1})\\ e_{p,n+1} &= e_{p,n} + \Delta\gamma\text{sign}(\sigma_{n+1})\\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\gamma\\ f_{n+1} &= |\sigma_{n+1}| - s_{n+1}\\ s_{n+1} &= \sigma_{ys} + H_s\alpha_{n+1} = s_n + H_s\Delta\gamma\end{aligned} \tag{5.3.15}$$

De l'équation 5.3.14, on tire

$$\left|\sigma^t_{n+1}\right| = |\sigma_{n+1}| + \Delta\gamma\, E_s \tag{5.3.16}$$

Si on reporte dans l'équation 5.3.15, on obtient

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= \left|\sigma^t_{n+1}\right| - \Delta\gamma\, E_s - s_{n+1}\\ &= \left|\sigma^t_{n+1}\right| - \Delta\gamma\, E_s - [s_n + H_s\Delta\gamma]\\ &= f^t_{n+1} - \Delta\gamma\left(E_s + H_s\right)\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

Au final, f_{n+1} doit être égal à zéro, on peut donc tirer de l'équation précédente

$$\Delta\gamma = \frac{f^t_{n+1}}{E_s + H_s} > 0 \tag{5.3.18}$$

L'algorithme 5.1 résume pour un pas de calcul toute cette démarche.

1. On part de l'état des variables à l'état n : $\left\{e_n^b,\, e_{p,n}^b,\, s_n^b\right\}$ et on impose un incrément de déformation Δe
2. On calcule un état intermédiaire test

$$\sigma_{n+1}^t = E_s\left(e_{n+1} - e_{p,n}\right) = \sigma_n + E_s \Delta e_n$$
$$f_{n+1}^t = \left|\sigma_{n+1}^t\right| - s_n \tag{5.3.19}$$

   a) si $f_{n+1}^t \leq 0$, le pas est élastique, les valeurs test sont les valeurs finales, on passe au pas suivant

   b) si $f_{n+1}^t > 0$, le pas est plastique on va en 3.

3. Projection

$$\Delta\gamma = \frac{f_{n+1}^t}{E_s + H_s} > 0 \tag{5.3.20}$$
$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^t - E_s \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \tag{5.3.21}$$
$$e_{p,n+1} = e_{p,n} + \Delta\gamma \text{sign}(\sigma_{n+1}) \tag{5.3.22}$$
$$s_{n+1} = s_n + H_s \Delta\gamma \tag{5.3.23}$$

Algorithme 5.1 Algorithme de calcul par projection du modèle élastoplastique monodimensionnel avec écrouissage isotrope

La figure 5.3.3 illustre cet algorithme.

5.4 Méthode de calcul

5.4.1 Principe général

Nous avons énoncé dans la section précédente la forme locale (pour une poutre) des équations constitutives, il nous faut transformer ces équations sous une forme globale à l'échelle d'une cellule. Cela revient à transformer les variables individuelles de nature scalaire en variables de nature vecteur.

On a fait une approche en deux temps. Dans un premier temps, on a cherché à déterminer quelles sont les surfaces de charges initiales (limites élastiques). Dans un second temps, on a cherché à déterminer l'évolution de la surface de charge résultant de l'écoulement plastique.

Pour le premier cas, la détermination des limites élastiques, le principe de calcul est illustré par la figure 5.4.1. On part du tenseur de contraintes macroscopiques normalisé par rapport à la limite élastique du matériau σ_{ys}. On obtient à partir de celui-ci, à l'aide une matrice de passage $[Q]$, les valeurs des contraintes normalisées par poutres fonctions des composantes du tenseur de contrainte normalisé. On constitue ces contraintes par poutre σ_{norm}^b sous la forme

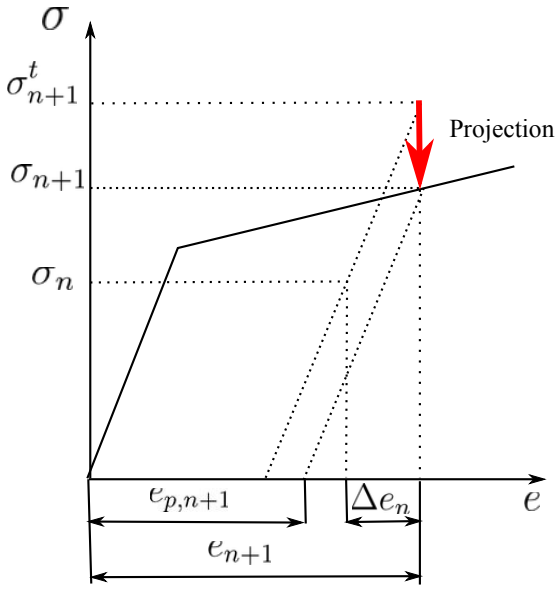


FIGURE 5.3.3 – Illustration de l'algorithme de projection ("return mapping") qui permet d'obtenir l'état de contrainte finale par projection de la contrainte test sur la surface de charge

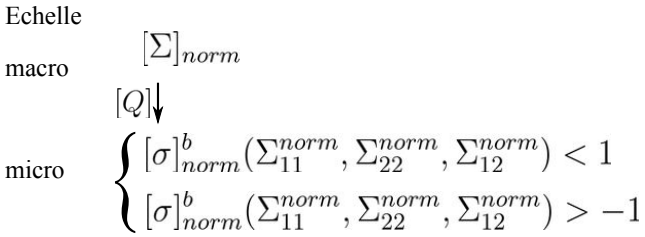


FIGURE 5.4.1 – Schéma de principe pour l'obtention des surfaces de charges (limites élastiques) initiales

d'une liste d'inéquations qui décrivent un volume dans l'espace des contraintes normalisées. Les surfaces de ce volume sont les limites élastiques initiales.

Pour le second cas, l'évolution plastique, on peut illustrer le principe de calcul par la figure 5.4.2. On se situe dans le cas d'un pilotage par la déformation. A l'étape de calcul n, on s'est donné à l'échelle macro le vecteur (tenseur) de déformation $[E]_n$, ce qui nous a fournit après homogénéisation et stabilisation du calcul le vecteur (tenseur) des contraintes $[\Sigma]_n$, la matrice de raideur $[K^t]_n$, et à l'échelle micro, le vecteur des déformations plastiques $[e_p]_n$ et le vecteur des surfaces de charges $[s]_n$. On se donne à l'étape $n+1$, un nouveau tenseur de déformation élastique $[E]_{n+1}$compatible avec l'état actuel du matériau à l'aide de la matrice tangente $[K^t]$. On détermine à partir de $[E]_{n+1}$, à l'échelle micro, une contrainte test par poutre $[\sigma_t]$, on vérifie que les fonctions de charges test $[f_t]$ restent négatives, si ce n'est pas le cas, on réactualise les limites élastiques $[s]$ et l'incrément plastique $[\gamma]$. La modification de l'état de écrouissage d'une poutre modifie l'équilibre mécanique de l'ensemble des poutres

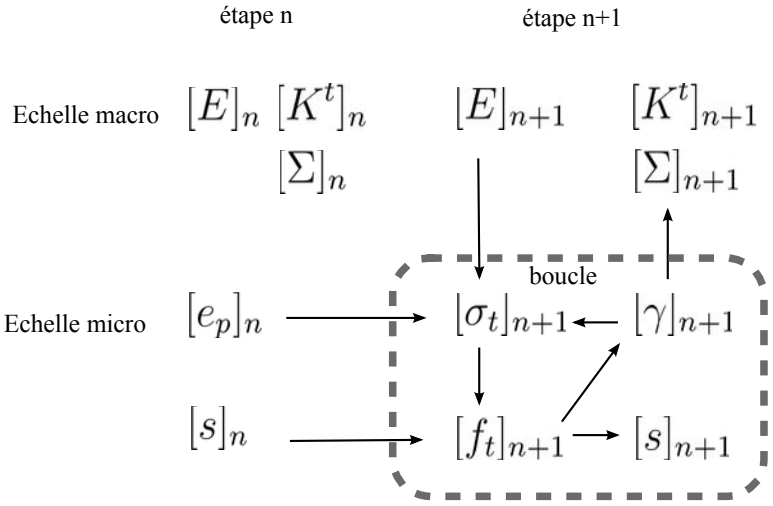


FIGURE 5.4.2 – Schéma de résolution homogénéisée d'un treillis dans le domaine plastique en pilotage par la déformation

dans la cellule élémentaire, on doit donc itérer à l'échelle micro pour stabiliser la solution entre les variables $[\sigma]$, $[s]$, $[\gamma]$. Une fois la solution stabilisée, on peut déterminer les variables macro homogénéisées : tenseur de contraintes $[\Sigma]_{n+1}$ et matrice de raideur tangente $[K^t]_{n+1}$.

5.4.2 Calcul des surfaces de charge limite initiales

Comme nous l'avons énoncé précédemment, on va faire un passage des tenseurs macroscopiques vers le milieu microscopique des barres et résoudre, puis revenir au niveau macroscopique après résolution. Nous avons découpé cela en deux étapes : la première qui concerne le calcul des surfaces de charge limite, la seconde qui concerne l'évolution plastique. Mais auparavant, il nous faut faire une distinction entre deux catégories de poutres dans les treillis que nous étudions qui possèdent des noeuds internes à la cellule de base : les poutres que l'on nommera *poutres primaires* et les poutres que l'on nommera *poutres secondaires*.

5.4.2.1 Définition des poutres primaires et secondaires

L'existence de noeuds internes conduit à définir deux catégories de poutres dans les treillis que nous étudions. Pour illustrer cela, nous prendrons l'exemple du treillis carré-étoile, figure 5.4.3. Ce treillis sera étudié d'un point de vue plastique un peu plus loin.

Les poutres primaires sont les poutres dont l'une des extrémités est située dans une cellule contiguë à la cellule élémentaire, les poutres secondaires sont les poutres dont les deux noeuds extrémités appartiennent à la cellule élémentaire. Les poutres primaires contribuent directement aux vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$, tandis que les poutres secondaires n'apparaîtront que dans les équations d'équilibre du treillis. Du point de vue de leur connectivité, les poutres primaires ont au moins l'un des coefficients δ^i non nul, tandis que les poutres secondaires ont tous leur coefficients $\delta^i = 0$. Dans l'exemple d'illustration, figure 5.4.3, les poutres 1,2,5,6,7,8,9

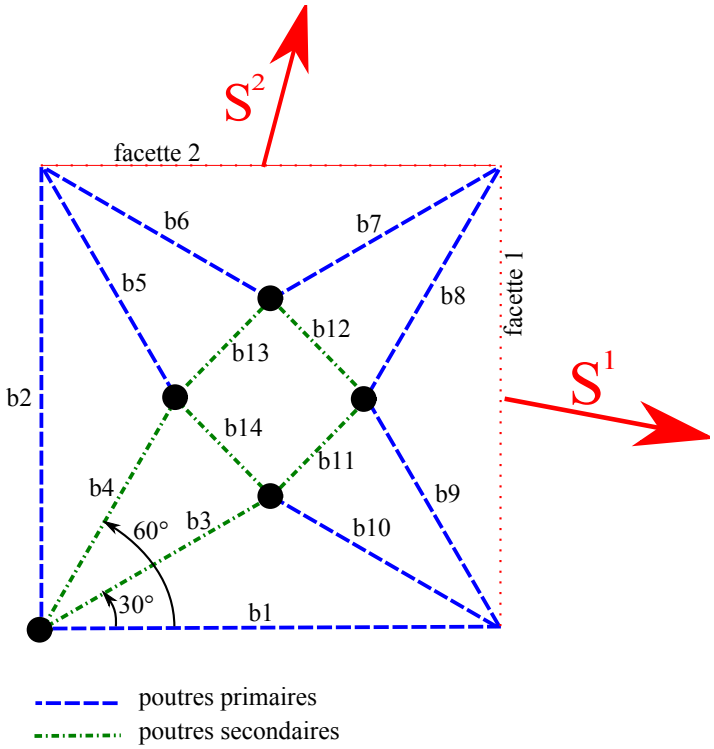


FIGURE 5.4.3 – Exemple illustrant la différence entre les poutres primaires et secondaires du point de vue de leur contribution aux vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$.

et 10 sont des poutres primaires, tandis que les poutres 3,4,11,12,13 et 14 sont des poutres secondaires.

5.4.2.2 Fonctions de charges, passage du tenseur des contraintes macroscopiques (homogénéisées) $[\Sigma]$ aux contraintes microscopiques $[\sigma]$

Si l'on ne s'intéresse qu'aux limites élastiques (surfaces de charges) initiales, le problème consiste à trouver l'expression des contraintes microscopiques $\sigma^{(i)}$ en fonction de la contrainte macroscopique $[\Sigma]$, de telle sorte que l'on puisse déterminer les surfaces définies par les fonctions de charges

$$f^b = \left|\sigma^b\right| - s^b = 0 \tag{5.4.1}$$

Mais la loi de durcissement isotrope énoncée plus haut équation 5.4.21 est obtenue à partir de la déformation microscopique, à l'échelle d'une poutre. Il nous faut obtenir une loi du même ordre, mais à partir du tenseur de déformation macroscopique (homogénéisé) $[E]$.

On peut établir que par construction dans la méthode d'homogénéisation, les vecteurs $\mathbf{S}^i$ s'écrivent comme

$$\mathbf{S}^i = \sum_{b=1}^{n} \mathbf{e}^b \sigma^b t^b \delta^{ib} \tag{5.4.2}$$

avec n le nombre de poutres de la cellule élémentaire du treillis. On conserve dans un premier temps les variables σ^b sans les développer à l'aide du tenseur de déformation. On peut alors réécrire

$$\begin{aligned}
[\Sigma] &= \frac{1}{g}\mathbf{S}^i \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \\
&= \frac{1}{g}\left(\sum_{b=1}^{n} \mathbf{e}^b \sigma^b t^b \delta^{ib}\right) \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i} \\
&= \frac{1}{g}\left(\sigma^1 t^1 \mathbf{e}^1 \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\delta^{i1} ... \sigma^n t^n \mathbf{e}^n \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\delta^{in}\right) \qquad (5.4.3) \\
&= \left[\frac{1}{g} t^1 \mathbf{e}^1 \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\delta^{ib1}\right]\sigma^1 + ... + \left[\frac{1}{g} t^n \mathbf{e}^n \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\delta^{in}\right]\sigma^n \qquad (5.4.4)
\end{aligned}$$

$$[\Sigma] = \left[\left[\frac{1}{g} t^b \mathbf{e}^b \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}\delta^{ib}\right]^T\right][\sigma] \tag{5.4.5}$$

$$[\Sigma] = [Q]_p [\sigma] \tag{5.4.6}$$

On peut ainsi déterminer une matrice $[Q]_p$ de passage micro vers macro dans l'espace des contraintes pour les poutres primaires. Cette matrice $[Q]_p$ contient des colonnes nulles, les colonnes qui correspondent aux poutres secondaires.

Comme cela est expliqué dans le paragraphe 5.4.2.1, il y a deux catégories de poutres selon leur contribution en termes d'efforts au tenseur de contrainte ; la distinction entre les deux peut être formellement établie en fonction des paramètres δ^{ib}.

On peut donc diviser les σ^b sous la forme

$$\left\{\sigma^b\right\} = \begin{cases} \sigma_p^b & \text{si } \delta^{ib} \neq 0 \\ \sigma_s^b & \text{si } \delta^{ib} = 0 \end{cases} \tag{5.4.7}$$

avec $[\sigma_p]$, le vecteur des contraintes microscopiques associées aux poutres primaires et $[\sigma_s]$, le vecteur des contraintes microscopiques associées aux poutres secondaires. On peut alors extraire une sous matrice $[Q]_r$ de $[Q]_p$, réduite aux seules colonnes non nulles de $[Q]_p$, de telle sorte que

$$[\Sigma] = [Q]_r [\sigma_p] \tag{5.4.8}$$

Il nous faut des relations complémentaires pour établir les liens entre le tenseur homogénéisé de contrainte $[\Sigma]$ et les contraintes dans les poutres secondaires $[\sigma_s]$. Ces relations

vont nous être fournies par la résolution des équations d'autoéquilibre statique de la cellule élémentaire. On rappelle que ces équations d'autoéquilibre sont obtenues à partir de

$$\sum_{b\in\mathcal{B}_R} \mathbf{e}^b \sigma^b t^b \cdot \left[\mathbf{v}\left(O\left(b\right)\right) - \mathbf{v}\left(E\left(b\right)\right)\right] = \mathbf{0} \tag{5.4.9}$$

On va considérer que la liste des inconnues de ce système sont les contraintes des poutres secondaires$\left\{\sigma_s^b\right\}$, on obtient une solution de la forme

$$\left[\sigma_s\right] = \left[Q\right]_i \left[\sigma_p\right] \tag{5.4.10}$$

De l'équation 5.4.8, on peut écrire, en supposant l'existence de la matrice pseudo inverse [1] de $\left[Q\right]_r$

$$\left[Q\right]_r^+ \left[\Sigma\right] = \left[\sigma_p\right] \tag{5.4.11}$$

On rappelle que $\left[\sigma_p\right]$ est le vecteur des contraintes microscopiques des poutres primaires. On introduit ce résultat dans 5.4.10, ce qui nous donne

$$\left[\sigma_s\right] = \underbrace{\left[Q\right]_i \left[Q\right]_r^+}_{\left[Q\right]_s} \left[\Sigma\right] \tag{5.4.12}$$

$$\left[\sigma_s\right] = \left[Q\right]_s \left[\Sigma\right] \tag{5.4.13}$$

En rassemblant les deux matrices partielles $\left[Q\right]_r$ et $\left[Q\right]_s$, à partir des équations 5.4.11 et 5.4.13

$$\left[\begin{array}{c} \left[\sigma_p\right] \\ \left[\sigma_s\right] \end{array}\right] = \left[\sigma\right] = \left[\begin{array}{c} \left[Q\right]_r^+ \\ \left[Q\right]_s \end{array}\right] \left[\Sigma\right] \tag{5.4.14}$$

$$\left[\sigma\right] = \left[Q\right] \left[\Sigma\right] \tag{5.4.15}$$

5.4.2.3 Surfaces de charges macroscopiques (limites élastiques) initiales

L'objectif que nous cherchons à atteindre est d'exprimer les surfaces de charges macroscopiques (ou homogénéisées) en fonction de la limite élastique du matériau composant les poutres. Les surfaces de charges initiales sont définies par les fonctions de charges issues de l'équation 5.4.1, en prenant pour s^b initial la valeur de limite élastique initiale du matériau σ_{ys}

$$f^b = \left|\sigma^b\right| - \sigma_{ys} \leq 0 \tag{5.4.16}$$

Ces équations définissent un volume dans l'espace des contraintes, volume que l'on peut exprimer de façon équivalente sous la forme d'une série d'inéquations

1. La matrice $\left[Q\right]$ est rectangulaire dans le cas général, on ne peut donc calculer son inverse. On a donc déterminé une matrice pseudo-inverse selon la méthode de Moore-Penrose

$$\begin{cases} \sigma^b < \sigma_{ys} \\ \sigma^b > -\sigma_{ys} \end{cases} \tag{5.4.17}$$

avec σ^b , la contrainte microscopique associée à chaque poutre b. Il faut exprimer σ^b en fonction du tenseur de contrainte homogénéisée macroscopique $[\Sigma]$, et ainsi on aura une série d'inéquations ayant comme donnée la limite élastique initiale du matériau σ_{ys} et définissant dans l'espace des contraintes un volume enveloppe des surfaces de charges macroscopiques. L'équation 5.4.14 obtenue dans la section précédente permet justement d'exprimer σ^b en fonction de Σ. On peut normaliser l'équation 5.4.17 par rapport à σ_{ys}

$$\begin{cases} \sigma_n^b < 1 \\ \sigma_n^b > -1 \end{cases} \tag{5.4.18}$$

avec $\sigma_n^b = \dfrac{\sigma^b}{\sigma_{ys}}$, la contrainte par poutre normalisée par rapport à σ_{ys}.

Si on pose le tenseur des contraintes macroscopiques normalisé par rapport à la limite élastique du matériauσ_{ys}

$$[\Sigma]_{norm} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11}/\sigma_{ys} \\ \Sigma_{22}/\sigma_{ys} \\ \Sigma_{12}/\sigma_{ys} \\ \Sigma_{12}/\sigma_{ys} \end{bmatrix} \tag{5.4.19}$$

On peut alors exprimer l'équation 5.4.14 sous forme normalisée

$$[\sigma_n] = [Q]\,[\Sigma]_{norm} \tag{5.4.20}$$

On obtient ainsi les σ_n^b en fonction de Σ_{norm}. On notera qu'il y a répétition de Σ_{12}/σ_{ys} parce que le tenseur de contrainte est symétrique, donc $\Sigma_{21} = \Sigma_{12}$ au niveau macroscopique (homogénéisé). Mais, de par la construction des vecteurs d'efforts $\mathbf{S}^i$, ce ne sont pas forcément les mêmes poutres qui contribuent à Σ_{21} et Σ_{12}, donc pas forcément les mêmes σ^b.

On peut alors écrire la série d'inéquations 5.4.18 sous la forme suivante

$$\begin{cases} \sigma_n^1\left([\Sigma]_{norm}\right) < 1 \\ \cdots \\ \sigma_n^m\left([\Sigma]_{norm}\right) < 1 \\ \sigma_n^1\left([\Sigma]_{norm}\right) > -1 \\ \cdots \\ \sigma_n^m\left([\Sigma]_{norm}\right) > -1 \end{cases}$$

avec m indiquant le numéro de la poutre de la cellule élémentaire. Cette série d'inéquations définit un volume enveloppe des surfaces de charges limites initiales dans l'espace des contraintes macroscopiques normalisées par σ_{ys}.

5.4.3 Évolution de la surface de charge résultant de l'écoulement plastique

5.4.3.1 Loi de durcissement plastique homogénéisée, passage du tenseur des déformations macroscopique (homogénéisé) $[E]$ aux contraintes microscopiques $[\sigma]$

Pour passer de la loi de durcissement plastique, équation 5.4.21, du niveau microscopique au niveau macroscopique, il est nécessaire de trouver la fonction reliant les contraintes microscopiques σ^b au tenseur de déformation macroscopique $[E]$. Cette fonction aura des variables internes qui sont les déformations plastiques microscopiques.

$$[\sigma] = fonction\left([E], [e_p]\right) \tag{5.4.21}$$

On peut déterminer cette fonction en réalisant une modification de l'algorithme d'homogénéisation. On ne rappellera pas tout le processus, mais uniquement les modifications suivantes. La première modification concerne la déclaration initiale des efforts (tension) appliqué sur les poutres

$$\sigma^b = \frac{E_s}{L^b}\left(\mathbf{e}^b\left(\mathbf{u}^{E_R(b)1} - \mathbf{u}^{O_R(b)1} + \frac{\partial \mathbf{u}(\lambda^\varepsilon)}{\partial \lambda^i}\delta^{ib}\right) - L^b e_p^b\right) \tag{5.4.22}$$

.

avec e_p^b la déformation plastique associée à la poutre b. On voit apparaître dans cette équation une variable interne par poutre qui est la déformation plastique.

Après résolution des inconnues de déplacement du système, on peut définir les contraintes sous la forme

$$[\sigma] = [K^e][E] + [K^p][e_p] \tag{5.4.23}$$

On a donc un passage macro vers micro de l'espace des déformations macroscopiques vers l'espace des contraintes microscopiques.

On rappelle que nous avons défini d'autre part dans la section 5.4.2.2 un passage de macro vers micro dans l'espace des contraintes grâce aux équations suivantes

$$[\sigma] = [Q][\Sigma] \tag{5.4.24}$$

$$[\Sigma] = [Q]^+[\sigma] \tag{5.4.25}$$

5.4.3.2 Loi de durcissement plastique isotropique, *return mapping* monodimensionnel

On a avec l'équation 5.4.23 n projections monodimensionnelles, n étant le nombre de barres. On peut résoudre par *return mapping* à une dimension (voir Simo and Hughes [1998]), la mise à jour de la déformation plastique e_p^b, variable interne à la poutre.

1. On pose une valeur d'essai ou valeur test $[\sigma_t] = [K^e][E] + [K^p][e_p]$

2. pour chaque poutre i, on détermine la valeur de la fonction de charge $f_t^b = \left|\sigma_t^b\right| - s^b$

   a) si $f_t^b \leq 0$, on est dans un cas élastique pour cette poutre. Il n'y a pas de modification, ni de la limite de charge de la poutre s^b, ni de sa déformation plastique e_p^b.

   b) si $f_t^b > 0$, on est dans un cas plastique pour cette poutre. La surface de charge augmente de la valeur $\dfrac{H_s}{E_s + H_s} f_t^b$ et à la déformation plastique de la poutre s'ajoute la valeur $sign(\sigma_t^b)\dfrac{f_t^b}{E_s + H_s}$.

La formulation est simple d'un point de vue monodimensionnel, mais cette méthode ne peut être appliquée telle quel, car si une seule poutre d'une cellule élémentaire plastifie, à un moment donné, cela modifie l'équilibre en effort de l'ensemble. Les fonctions sont non linéaires, il est nécessaire de définir un schéma d'intégration.

5.4.3.3 Formulation incrémentale, schéma d'intégration

On intègre par rapport au temps, ce qui nous amène à redéfinir la dérivée par rapport au temps de l'ensemble des variables, soit les expressions des vitesses
$[\dot{\sigma}]$, $\left[\dot{E}\right]$...
Il existe principalement deux schémas d'intégration, soit implicite, soit explicite. On va utiliser ici, un schéma d'intégration de type explicite, ce qui signifie que l'on va déterminer en chaque début de pas de calcul la matrice tangente $[K^t]$, telle que

$$\left[\dot{\Sigma}\right] = \left[K^t\right]\left[\dot{E}\right] \tag{5.4.26}$$

Ce schéma d'intégration converge moins rapidement qu'un schéma implicite, de plus le choix du pas de temps est important pour ne pas avoir une trop grande accumulation d'erreurs, mais il est plus simple à mettre en oeuvre. Avec ce choix de schéma d'intégration, nous avons au pas n, temps t les variables
$[\sigma]_n$,$[E]_n$, $[\Sigma]_n$ ...
et au pas $n+1$, temps $t + \Delta t$
$[\sigma]_{n+1} = [\sigma]_n + \Delta[\sigma]_n$,$[E]_{n+1} = [E]_n + \Delta[E]_n$, $[\Sigma]_{n+1} = [\Sigma]_n + \Delta[\Sigma]_n$ ...
La matrice tangente $[K^t]_n$, au pas n, sera donc déterminé par l'obtention de

$$\Delta[\Sigma]_n = \left[K^t\right]_n \Delta[E]_n \tag{5.4.27}$$

Il sera nécessaire d'itérer à chaque étape de calcul n, pour stabiliser la solution. On désignera par la variable k le pas d'itération à chaque étape. On obtient la matrice tangente de la manière suivante.
Au temps t_n, le milieu est en équilibre, soit

$$[\sigma]_n = [K^e][E]_n + [K^p][e_p]_n \tag{5.4.28}$$

On rappelle que les matrices $[K^e]$ et $[K^p]$ sont les matrices élastique et plastique obtenues après avoir résolu les équations d'autoéquilibre de le cellule de référence.

Au temps t_{n+1}, le milieu est aussi équilibré, soit

$$[\sigma]_{n+1} = [K^e]\,[E]_{n+1} + [K^p]\,[e_p]_{n+1} \tag{5.4.29}$$

Avant de poursuivre le développement de l'algorithme, on va donner quelques explications sur le calcul de la matrice tangente. Nous nous plaçons dans le cas d'intégration explicite, ce qui signifie que la matrice tangente utilisée pour l'étape $n+1$ sera déterminée à l'aide des variables à l'état n. Pour la déterminer, nous allons tout d'abord définir une matrice de calcul intermédiaire $[K^r]$, de la façon suivante,

$$[\sigma]_{n+1} = [K^e]\,([E]_n + [\Delta E]) + [K^p]\left([e_p]_n + [\Delta\gamma']\right) \tag{5.4.30}$$

avec $[\Delta\gamma']$, la valeur signée du taux d'écrouissage $[\Delta\gamma]$.

$$[\sigma]_{n+1} = [K^e]\,[E]_n + [K^p]\,[e_p]_n + [K^e]\,[\Delta E] + [K^p]\,[\Delta\gamma'] \tag{5.4.31}$$

Posons alors $[K^r]$ tel que $[\Delta\gamma'] = [K^r]\,[\Delta E]$, alors on peut réécrire l'équation 5.4.31 ainsi

$$\begin{aligned}
[\sigma]_{n+1} &= [K^e]\,[E]_n + [K^p]\,[e_p]_n + [K^e]\,[\Delta E] + [K^p]\,[K^r]\,[\Delta E] && (5.4.32)\\
&= [\sigma]_n + [K^e]\,[\Delta E] + [K^p]\,[K^r]\,[\Delta E] && (5.4.33)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\Delta\sigma] = \left([K^e] + [K^p]\,[K^r]\right)[\Delta E] \tag{5.4.34}$$

$$\Rightarrow [\Delta\Sigma] = [Q]^+\,[\Delta\sigma] = \underbrace{[Q]^+\left([K^e] + [K^p]\,[K^r]\right)}_{[K^t]}[\Delta E] \tag{5.4.35}$$

$$[\Delta\Sigma] = \left[K^t\right][\Delta E] \tag{5.4.36}$$

avec la matrice tangente $[K^t] = [Q]^+\left([K^e] + [K^p]\,[K^r]\right)$.

Il nous reste maintenant à déterminer $[K^r]$ tel que $[\Delta\gamma'] = [K^r]\,[\Delta E]$. Pour cela nous posons $[\xi]$, le vecteur d'incrément de contrainte élastique test dans l'espace des microcontraintes

$$[\xi] = [K_e]\,[\Delta E] \tag{5.4.37}$$

et $[\zeta]$ une matrice diagonale contenant les modules reliant l'incrément de contrainte élastique test $[\xi]$ et l'incrément de déformation plastique

$$\begin{aligned}
[\Delta\gamma'] &= [\zeta]\,[\xi] && (5.4.38)\\
&= [\zeta]\,[K_e]\,[\Delta E] && (5.4.39)\\
&= [K^r]\,[\Delta E] && (5.4.40)
\end{aligned}$$

avec $[K^r] = [\zeta]\,[K_e]$, il reste à calculer les coefficients ζ_b de la matrice diagonale $[\zeta]$. Ceci peut être réalisé facilement à partir de l'équation 5.4.38

$$\begin{bmatrix} \Delta\gamma'_1 \\ ... \\ \Delta\gamma'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ ... \\ \xi_m \end{bmatrix} \tag{5.4.41}$$

$$\Rightarrow \zeta_b = \frac{\Delta\gamma'_b}{\xi_b} \tag{5.4.42}$$

À chaque pas n, il faudra itérer pour stabiliser la solution concernant la matrice $[K^r]$ et le vecteur d'incrément plastique $[\Delta\gamma']$.

Revenons au développement de l'algorithme à étape $\underline{n+1}$. On part de$[E]_{n+1}$, puisqu'on pilote par la déformation, des variables internes à l'état t : $\left([e_p]_n, [s]_n\right)$, et des variables temporaires internes à l'étape $k = 0$ du pas n : $([\Delta\gamma']^{(k)}, [K^r]^{(k)}, [\xi]^{(k)})$.

1. À l'itération initiale($k = 0$), $[\Delta\gamma']^{(0)} = [0]$ et $[K^r]^{(0)} = [0]$
2. Test avec une "prédiction élastique", des contraintes microscopiques à la date $t + \Delta t$, détermination du vecteur $[\xi]$, d'incrément de contrainte élastique test

$$\left[\sigma^t\right]^{(k)}_{n+1} = [K^e]\,[E]_{n+1} + [K^p]\left([e^p]_n + [\Delta\gamma']^{(k)}\right) \tag{5.4.43}$$

$$= [K^e]\left([E]_n + [\Delta E]_{n+1}\right) + [K^p]\left([e^p]_n + [\Delta\gamma']^{(k)}\right) \tag{5.4.44}$$

$$[\xi] = [K^e]\,[\Delta E]_{n+1} \tag{5.4.45}$$

3. Calcul des fonctions de charges pour chaque poutre b , $f_b^{t\,(k)} = \left|\sigma_b^{t\,(k)}\right| - s_b^{(k)}$

   a) $\underline{\text{cas plastique}}$, $f_b^{t\,(k)} \geq 0$

$$\Delta\gamma_b^{(k)} = \frac{f_b^{t\,(k)}}{E_s + H_s}$$

$$\Delta\gamma_b^{'(k+1)} = \Delta\gamma_b^{'(k)} + \mathrm{sgn}(\sigma_b^{t\,(k)})\Delta\gamma_b^{(k)}$$

$$s_b^{(k+1)} = s_b^{(k)} + H_s\Delta\gamma_b^{(k)}$$

$$\zeta_b = \mathrm{sgn}(\sigma_b^{t\,(k)})\frac{\Delta\gamma_b^{(k)}}{\xi_b}$$

   b) $\underline{\text{cas élastique,}}$ $f_b^{t\,(k)} < 0$, il n'y a pas de modification des variables internes liées à cette poutre, $\gamma_b^{'(k+1)} = \gamma_b^{'(k)}$, $s_b^{(k+1)} = s_b^{(k)}$ et $\zeta_b = 0$

4. On évalue $[K^r]$par

$$[K^r]^{(k+1)} = [K^r]^{(k)} + [\zeta]\,[K^e]$$

5. On incrémente le pas k et on répète les étapes 2 à 4 jusqu'à stabiliser la solution, c'est-à-dire les variables internes

6. Calcul des valeurs finales à l'étape $n+1$

$$[e_p]_{n+1} = [e_p]_n + [\Delta\gamma']^{(final)}$$
$$[\sigma]_{n+1} = [K^e]\,[E]_{n+1} + [K^p]\,[e_p]_{n+1}$$
$$[\Sigma]_{n+1} = [Q]^+\,[\sigma]_{n+1}$$
$$\left[K^t\right]_{n+1} = [Q]^+\left([K^e] + [K^p]\,[K^r]^{(final)}\right)$$

5.5 Code de calcul et exemples

5.5.1 Algorithme de calcul des surfaces de charges initiales

1. Obtention, à partir d'une version modifiée de la méthode d'homogénéisation, de la matrice des poutres primaires $[\Sigma] = [Q]_p\,[\sigma]$, dont on tire la restriction $[Q]_r$, matrices des lignes non nulles de $[Q]_p$
2. Résolution des équations d'autoéquilibre $\sum_{b\in\mathcal{B}_R} \mathbf{e}^b\sigma^b t^b \cdot [\mathbf{v}\,(O\,(b)) - \mathbf{v}\,(E\,(b))] = \mathbf{0}$, avec comme inconnues les contraintes des poutres secondaires σ_s^b, on obtient une solution de la forme $[\sigma_s] = [Q]_i\,[\sigma_p]$
3. Obtention de $[Q]_s$, matrice de passage du tenseur des contraintes vers les poutres secondaires par $[\sigma_s] = \underbrace{[Q]_i\,[Q]_r^+}_{[Q]_s}\,[\Sigma]$
4. Assemblages des deux matrices partielles pour obtenir une matrice de passage unique $\begin{bmatrix} [\sigma_p] \\ [\sigma_s] \end{bmatrix} = [\sigma] = \begin{bmatrix} [Q]_r^+ \\ [Q]_s \end{bmatrix}[\Sigma] = [Q]\,[\Sigma]$
5. Obtention des contraintes normalisées $[\sigma_n] = [Q]\,[\Sigma]_{norm}$
6. Détermination des surfaces limites obtenues à partir des inéquations

$$\begin{cases} \sigma_n^b < 1 \\ \sigma_n^b > -1 \end{cases} \tag{5.5.1}$$

5.5.1.1 Exemples de calcul de surfaces de charges initiales

On traitera ci-dessous trois exemples pour ce qui est de la détermination des surfaces de charges, les treillis triangle, kagome et diamant. On utilisera, pour les axes, les conventions de la figure 5.5.1.

5.5.1.2 Treillis triangle

La définition géométrique de ce treillis est donnée dans la figure 5.5.2 et son tableau de connectivité est le tableau 5.1.

Les surfaces de charges initiales de ce treillis triangle sont données dans la figure 5.5.3.

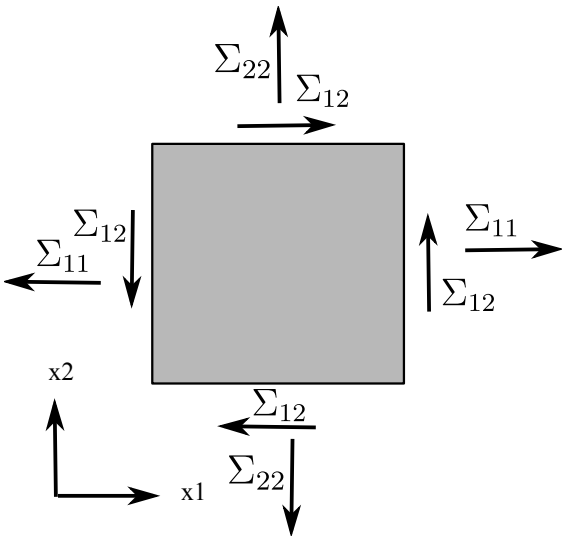


FIGURE 5.5.1 – Axes considérés dans chacune des simulations

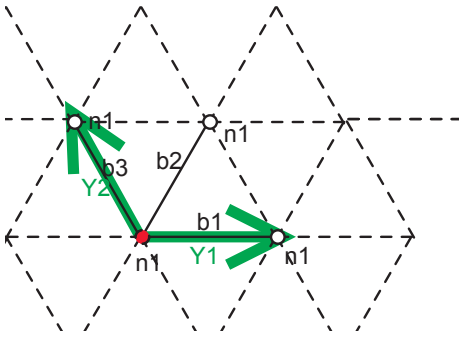


FIGURE 5.5.2 – Définition géométrique du treillis triangle

poutres	1	2	3
O(b)	1	1	1
E(b)	1	1	1
δ_1	1	1	0
δ_2	0	1	1

TABLE 5.1 – Tableau des connectivités treillis triangle

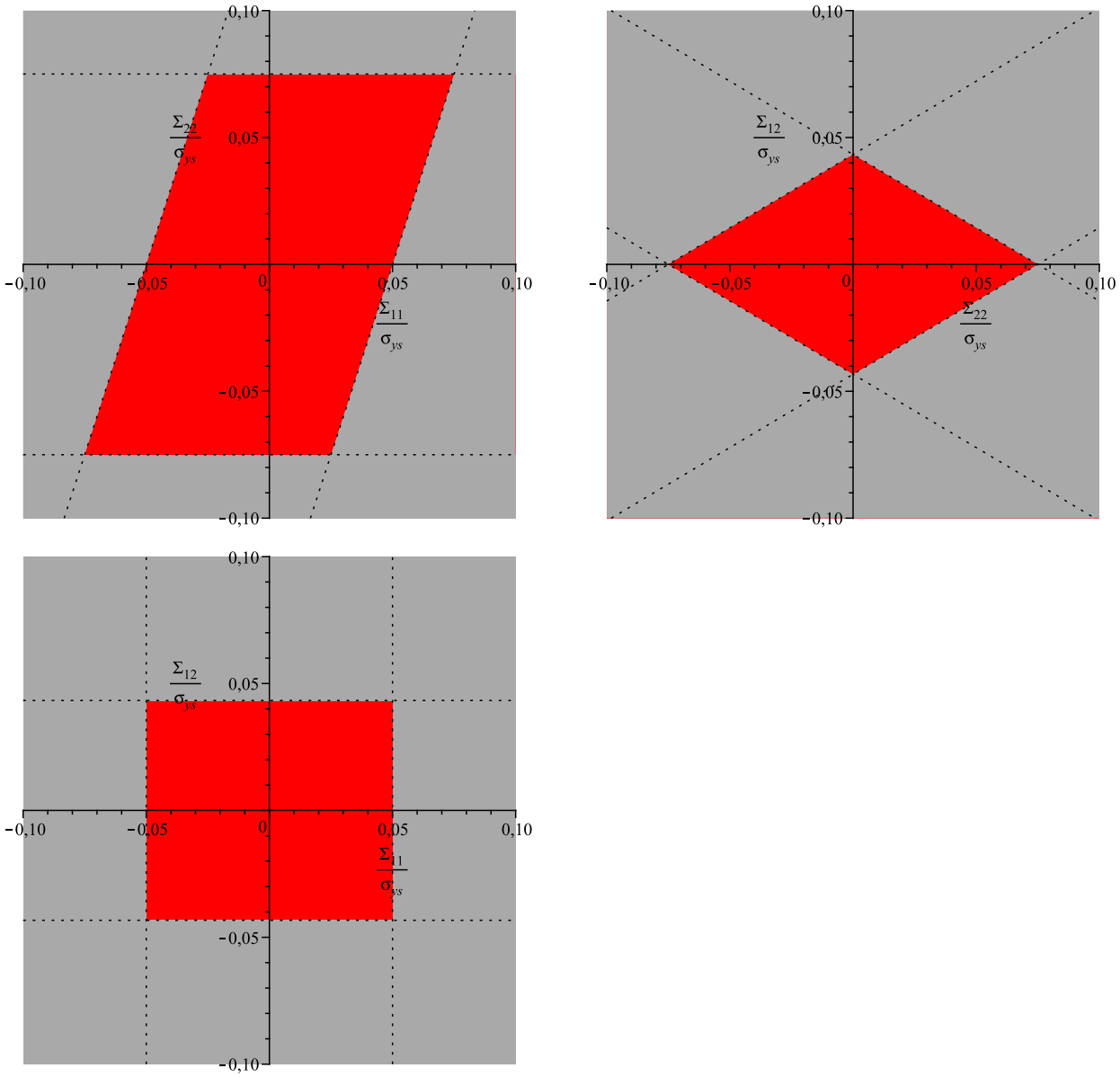


FIGURE 5.5.3 – Surfaces de charge initiales d'un treillis triangle sous une contrainte combinée plane normalisée $\left(\frac{\Sigma_{11}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{22}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{12}}{\sigma_{ys}}\right)$ pour une densité relative $\rho^* = 0.15$

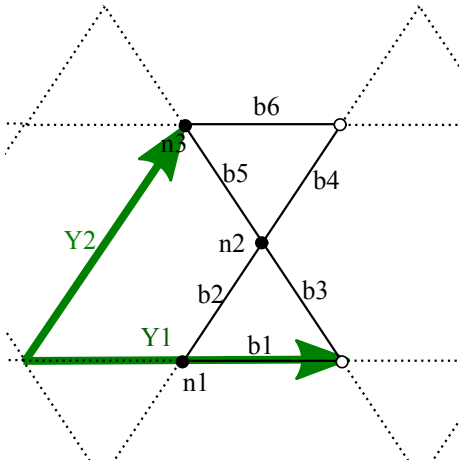


FIGURE 5.5.4 – Définition géométrique du treillis Kagome

poutres	1	2	3	4	5	6
O(b)	1	1	2	2	2	3
E(b)	3	2	3	1	3	1
δ_1	1	0	1	0	0	0
δ_2	-1	0	-1	1	0	1

TABLE 5.2 – Tableau des connectivités du treillis Kagome

poutres	1	2	3	4	5
O(b)	1	1	2	2	2
E(b)	1	2	1	1	1
δ_1	1	0	1	1	0
δ_2	0	0	0	1	1

TABLE 5.3 – Tableau des connectivités du treillis diamant

5.5.1.3 Treillis Kagome

La définition géométrique de ce treillis est donnée dans la figure 5.5.4 et ses connectivités dans le tableau 5.2.

Les résultats en ce qui concerne les surfaces de charges du treillis kagome sont donnés dans la figure 5.5.5.

5.5.1.4 Treillis Diamant

La définition géométrique de ce treillis est donnée dans la figure 5.5.6 et ses connectivités dans le tableau 5.3.

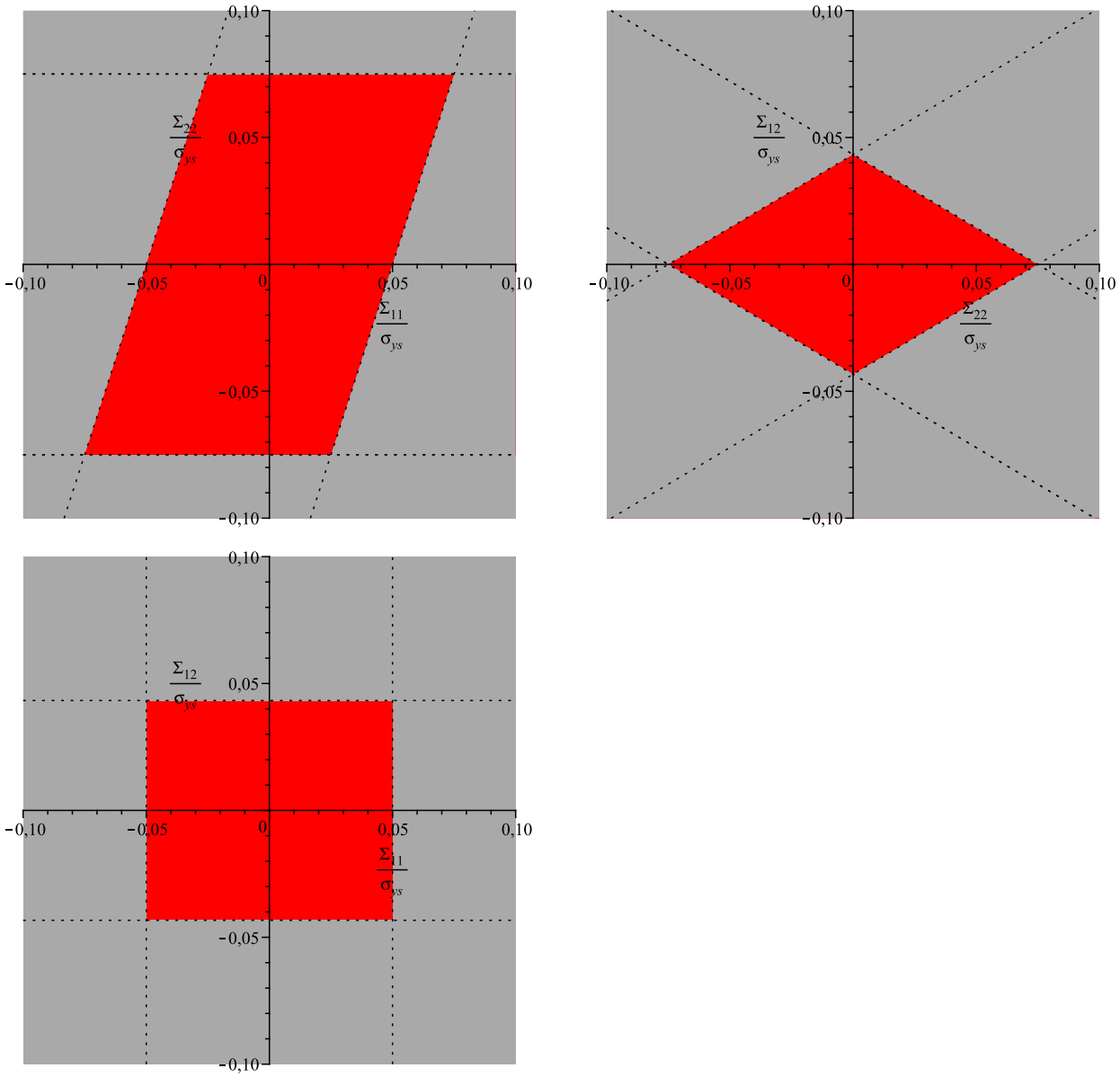


FIGURE 5.5.5 – Surfaces de charge initiales d'un treillis Kagome sous une contrainte combinée plane normalisée $\left(\frac{\Sigma_{11}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{22}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{12}}{\sigma_{ys}}\right)$ pour une densité relative $\rho^* = 0.15$

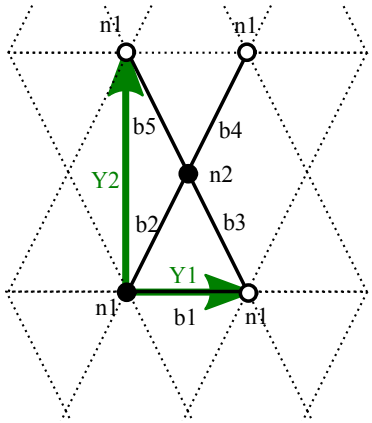


FIGURE 5.5.6 – Définition géométrique du treillis diamant

Les résultats pour ce qui est des surfaces de charges initiales du treillis diamant sont donnés dans la figure 5.5.7.

5.5.1.5 Conclusion sur le calcul des surfaces de charges initiale

Ces trois exemples ont été traités par une autre méthode dans Wang and McDowell [2005], on obtient des résultats identiques dans les trois cas.

5.5.2 Algorithme de comportement plastique

L'algorithme de suivi de l'écrouissage doit lui-même être inséré dans un code de calcul permettant son pilotage par la déformation. Dans l'exemple suivant, on s'est contenté d'ajouter à cet algorithme un pilotage simple en charge - décharge linéaire (c'est à dire avec un pas ΔE_{11} constant).

5.5.2.1 Algorithme de la simulation numérique d'une traction / retour à l'état initial piloté par la déformation

1. Modification du processus d'homogénéisation. Dans la déclaration initiale des efforts en tension $\sigma^b = \dfrac{E_s}{L^b}\left(\mathbf{e}^b\left(\mathbf{u}^{E_R(b)1} - \mathbf{u}^{O_R(b)1} + \dfrac{\partial \mathbf{u}(\lambda^\varepsilon)}{\partial \lambda^i}\delta^{ib}\right) - L^b e_p^b\right)$, avec e_p^b la déformation plastique associée à la poutre b.
   a) Après résolution des inconnues de déplacement, détermination des matrices $[K^e]$ et $[K^p]$ telles que $[\sigma] = [K^e]\,[E] + [K^p]\,[e_p]$
   b) Après homogénéisation et détermination du tenseur des contraintes $[\Sigma]$, détermination de Q tel que $[\Sigma] = [Q]^+\,[\sigma]$
2. Déclaration des variables E_1^t, ν_{12}^t, $[\sigma^t]$, $[\sigma]$, $[\Sigma]$, $[f^t]$, $[s]$, $[\Delta\gamma']$, $[E]$, $[\Delta E]$, $[e_p]$,$[K^r]$, $[\zeta]$(Note : E_1^t est le module de raideur tangent à l'étape n suivant la direction $\mathbf{x}_1$, ν_{12}^t est le coef-

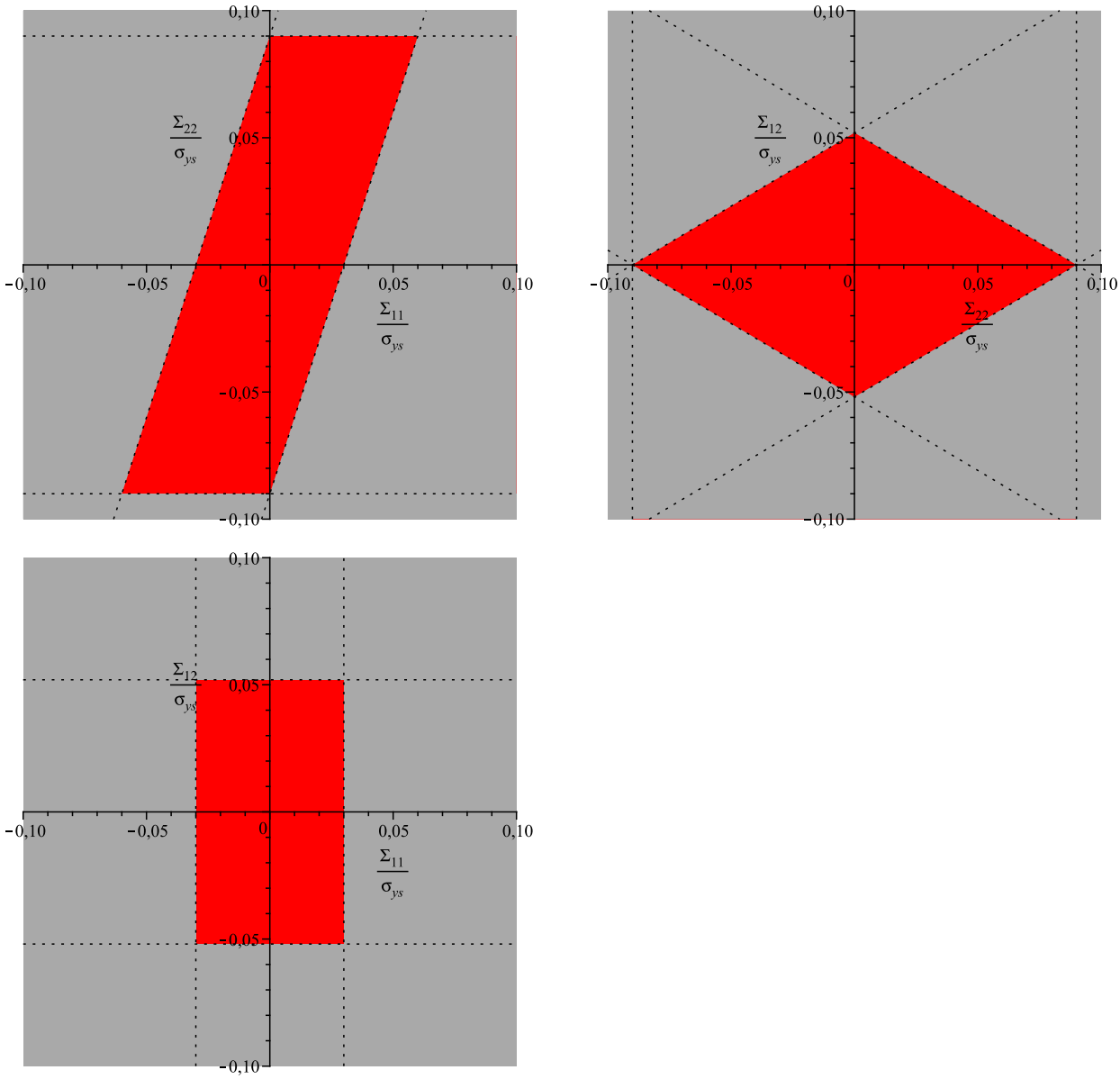


FIGURE 5.5.7 – Surfaces de charge initiales d'un treillis diamant sous une contrainte combinée plane normalisée $\left(\frac{\Sigma_{11}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{22}}{\sigma_{ys}}, \frac{\Sigma_{12}}{\sigma_{ys}}\right)$pour une densité relative $\rho^* = 0.15$

ficient de Poisson issu de la matrice tangente à l'étape n, il est variable suivant l'état d'écrouissage du milieu. E_1^t et ν_{12}^t sont recalculés à la fin de chaque pas.)

3. Initialisation :
   a) des variables de calculs $[s] := \begin{bmatrix} \sigma_{ys} \\ ... \\ \sigma_{ys} \end{bmatrix}$; $[e_p] := [0]$
   b) des paramètres géométriques t^bet L^b
   c) des paramètres mécaniques σ_{ys}, E_s, H_s
   d) des paramètres cinématiques : E_{11} initial, E_{11} final et du pas ΔE_{11}. On en déduit le nombre de pas $nPas := \dfrac{E_{11}\,(final) - E_{11}\,(initial)}{\Delta E_{11}}$. (Note : pour cette simulation on se place dans le cas d'un chargement linéaire, $\Delta E_{11} = Cte$, mais bien entendu tout autre type de chargement est possible.)
4. Pour $cPas$ de 1 à $nPas$
   a) $[\Delta E] := \begin{bmatrix} \Delta E_{11} \\ -\nu_{12}^t \Delta E_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$
   b) $[E] := [E] + [\Delta E]$
   c) Pour i de 1 à $nBarres$
      i. $[\Delta\gamma'] := [0]$; $[K^r] := [0]$;
   d) fin de pour
   e) $err := 100$
   f) tant que $err > 0.1$; (note : err est défini comme $err = max(err^1...err^n)$, c'est à dire la valeur en % du dépassement maximum parmi toutes les poutres de la cellule élémentaire de la surface de charge par la fonction de charge test $err^b = \dfrac{100\, f_t^b}{s^b}$. La valeur de 0.1% d'erreur est arbitraire.)
      i. $err := 0$
      ii. $[\sigma_t] := [K^e]\,[E] + [K^p]\,([e_p] + [\Delta\gamma'])$
      iii. $[\xi] = [K^e]\,[\Delta E]_{n+1}$
      iv. pour b de 1 à $nBarres$
         A. $\zeta_{bb} = 0$;
         B. $f_t^b := abs(\sigma_t^b) - s^b$
         C. si $f_t^b > 0$ alors
            – $\Delta\gamma := \dfrac{f_t^b}{(E_s + H_s)}$; (d'après l'équation 5.3.20)

poutres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O(b)	1	1	1	1	5	4	4	3	3	2	2	4	5	2
E(b)	1	1	2	5	1	1	1	1	1	1	3	3	4	5
δ_1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
δ_2	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

TABLE 5.4 – Tableau des connectivités du treillis carré-étoile

- $\Delta\gamma^{b'} := \Delta\gamma^{b'} + \mathrm{sgn}(\sigma_t^b) \cdot \Delta\gamma$; (on crée une version signée du cumul de $\Delta\gamma$)
- $\zeta_{bb} = \mathrm{sgn}(\sigma_b^{t\,(k)}) \dfrac{\Delta\gamma_b^{(k)}}{\xi_b}$
- $err := \max(err, \dfrac{100\, f_t^b}{s_i})$
- $s^b := s^b + H_s \Delta\gamma$; d'après l'équation 5.3.23

D. fin de si

v. fin de pour

vi. $[K^r] := [K^r] + [\zeta]\,[K^e]$

g) fin de tant que

h) $[\Sigma] := [Q]\,[\sigma]$

i) $[K^t] := [Q]\,([K^e] + [K^p]\,[K^r])$

j) $[S^t] := [K^t]^{-1}$

k) $E_1^t := \dfrac{1}{S_{11}^t}$; $\nu_{12}^t := -S_{21}^t.E_1^t$

l) $[e_p] := [e_p] + [\Delta\gamma']$; d'après l'équation 5.3.22

5. fin de pour

5.5.2.2 Exemple de calcul d'écrouissage, le treillis Carré-Étoile

On a choisi délibérément comme exemple un treillis possédant des noeuds internes, le treillis carré-étoile (voir la figure 5.5.8). La définition de sa connectivité est donnée dans le tableau 5.4.

Ce treillis a dominante extensionnelle possède des propriétés mécaniques intéressantes, comme un coefficient de Poisson variable. En effet, si on pose les raideurs suivantes :

- $k_2 = \dfrac{E_s t_2}{L}$ associé aux poutres $\{1, 2\}$
- $k_1 = \dfrac{E_s t_1}{L}$ associé aux poutres $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $k_3 = \dfrac{E_s t_3}{L}$ associé aux poutres $\{11, 12, 13, 14\}$

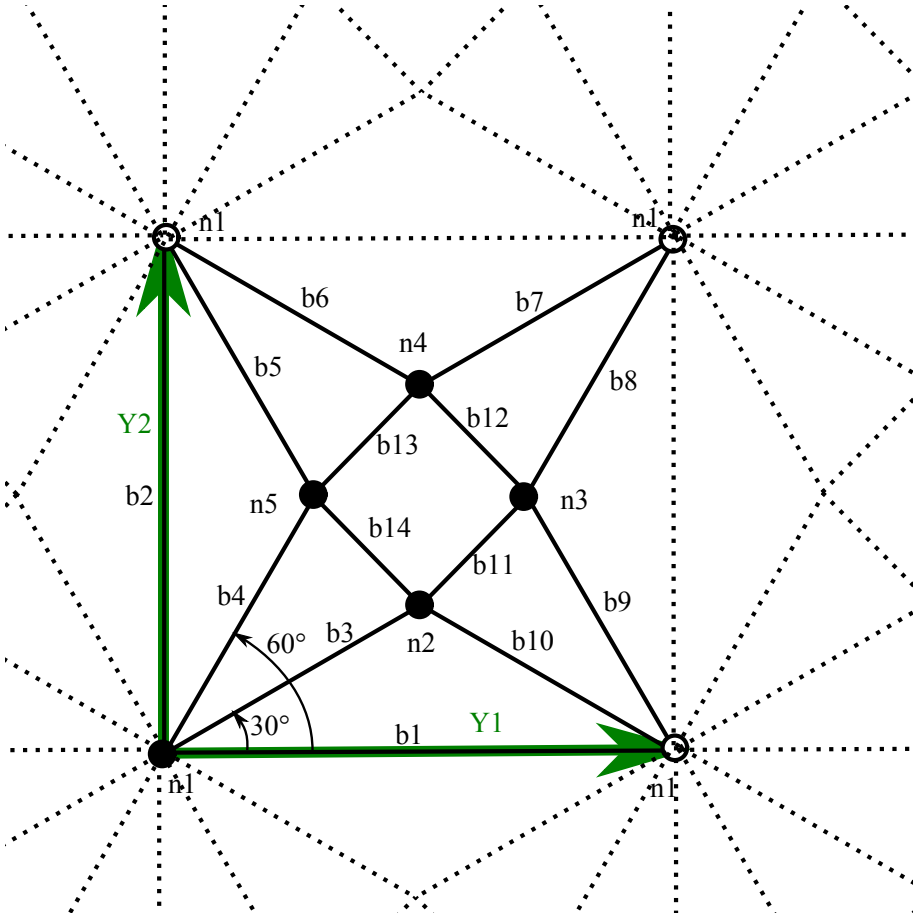


FIGURE 5.5.8 – Définition géométrique d'un treillis carré-étoile

On trouve le coefficient de Poisson suivant la formule homogénéisée suivante

$$\nu_{12} = \frac{\left(2+\sqrt{3}\right) k_1\, k_3}{k_1\, k_2 + 2\, k_1\, k_3 + \sqrt{3} k_1\, k_3 + 4\, k_2\, k_3}$$

Le coefficient de Poisson de ce treillis est variable, suivant les raideurs des poutres k_1, k_2 et k_3. Ces raideurs sont elles-mêmes fonctions des largeurs des poutres t^b. (Voir la figure 5.5.9).

Pour notre application numérique $t_1 = t_2 = t_3 = t$. La densité relative de ce treillis est donnée par $\rho^* = \dfrac{-2t\left(-3-4\sqrt{3}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3L}$. Pour l'application numérique, on a fait le calcul pour une densité relative de 0,15, ce qui nous donne une largeur de poutre $t \sim 0.019\, L$. De plus, on a utilisé une approche identique aux approches numériques faites dans les chapitres précédents : calcul sur un échantillon de 1x1 mm, avec 16x16 cellules élémentaires. Donc la longueur $L = 1/16$ mm et $t \sim 0.0012$ mm. Nous considérons les données mécaniques suivantes : limite élastique $\sigma_{ys} = 20$ MPa, module élastique $E_s = 69000$ MPa et module plastique $H_s = 3000$ MPa.

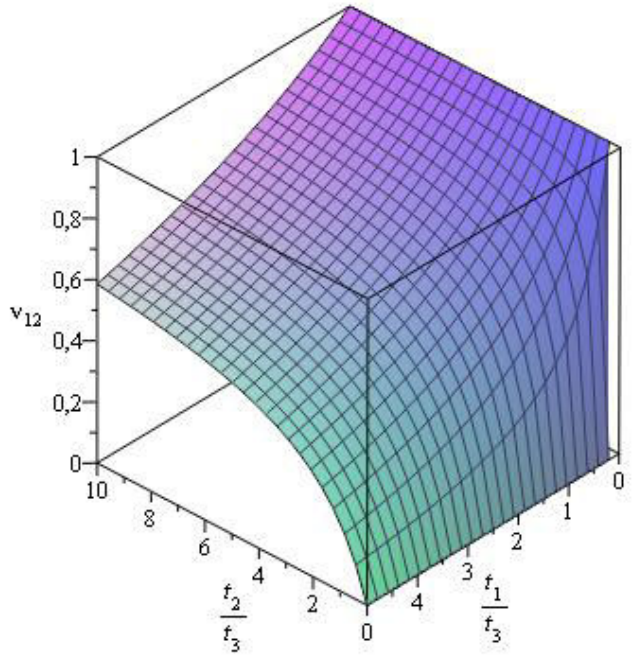


FIGURE 5.5.9 – Coefficient de Poisson du treillis carré-étoile en fonction des rapports de largeurs des poutres constitutives de ce treillis

Dans la version homogénéisée du pilotage en déformation (code en Maple), on a appliqué une déformation de 0 à 1×10^{-3} par pas de $0,5 \times 10^{-4}$, puis fait un retour de 1×10^{-3} à 0 par pas de $-0,5 \times 10^{-4}$.

Dans la version EF (Abaqus), on fait un pilotage en déplacement. L'échantillon fait 1x1 mm, alors la déformation $\varepsilon_{11} = \dfrac{U1}{1\,\text{mm}}$, avec $U1$ le déplacement imposé en mm. Le pas utilisé est de 1×10^{-4} mm (ce qui signifie qu'il y a 10 pas en charge et 10 pas en décharge), avec les données géométriques suivantes : 3 éléments par poutres, éléments de type Euler-Bernoulli (B23 Abaqus), section rectangulaire, largeur=0.0012 mm et profondeur=1 mm.

Les conditions de bords sont décrites dans la figure 5.5.10.

La courbe de comportement matériau plastique éditée dans Abaqus utilise les données matériau suivantes :

Yield stress	Plastic strain
20	0
25.13	0.001635

L'effort de réaction aux noeuds suivant l'axe $X1$ dans le dixième et le vingtième pas de calcul de la simulation EF est donné dans la figure 5.5.11.

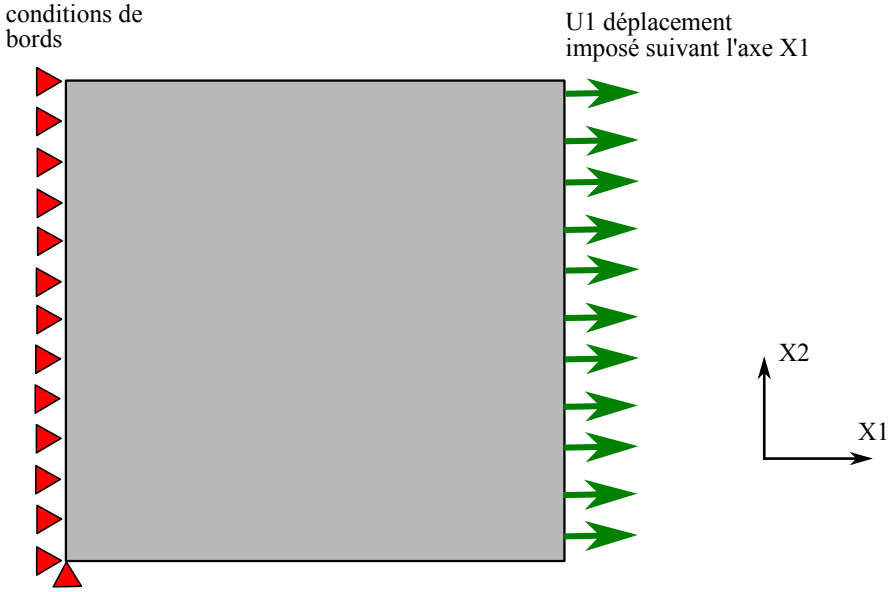


FIGURE 5.5.10 – Conditions aux bords et de chargement dans la simulation EF (Abaqus) de traction du treillis Carré-Étoile

La méthode de calcul pour trouver la relation contrainte - déformation dans la simulation EF est la suivante

$$\sigma_{11}(Abaqus) = -\frac{F_{node}}{L_{cellule}} \tag{5.5.2}$$

Avec F_{node}, l'effort de réaction aux noeuds latéraux droits [2] et $L_{cellule}$, la longueur du côté d'une cellule élémentaire, qui vaut dans notre simulation $L_{cellule} = 1/16\,\text{mm}$. Par exemple au 10e pas de la simulation (figure 5.5.11(a)) on a la valeur de la force de réaction à droite $F_{node} \sim -5,53.10^{-2}\,\text{N}$, qui nous donne une valeur de $\sigma_{11} \sim 5,53.10^{-2}.16 = 0.88\,\text{MPa}$.

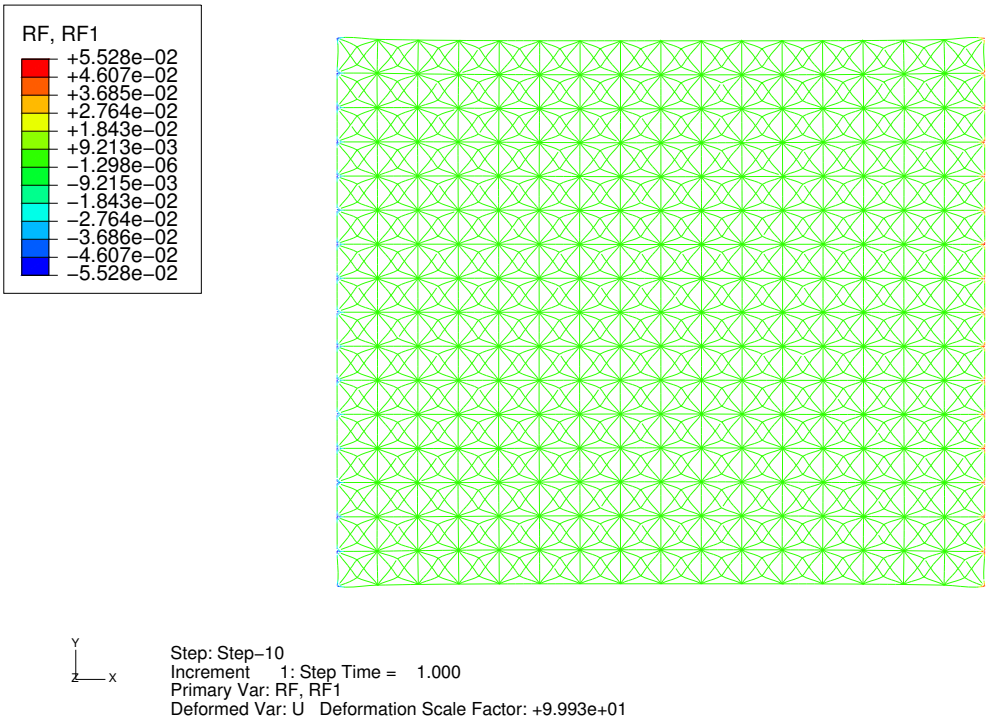
Les résultats comparés entre la simulation EF et le calcul avec l'algorithme homogénéisé de plasticité sont donnés dans la figure 5.5.12 : une très bonne concordance est obtenue entre les courbes de réponse en charge-décharge entre les deux méthodes.

5.6 Conclusions, discussion

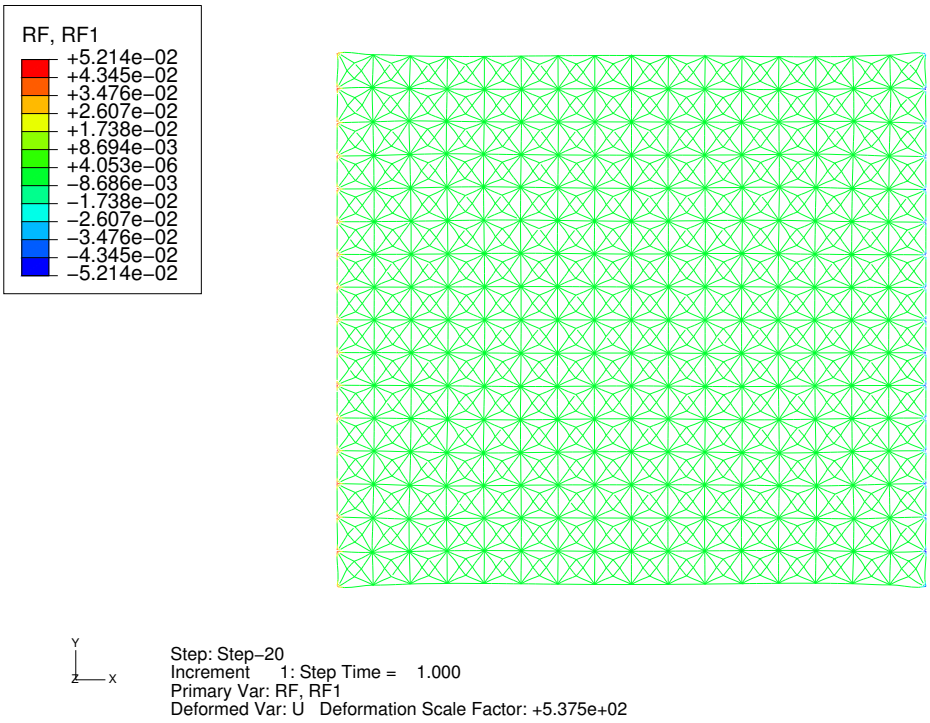
On a réalisé la détermination du domaine de résistance élastique d'un treillis à dominante extensionnelle. Bien que d'autres méthodes parviennent aux mêmes résultats, on peut souligner l'aspect *automatique* de notre approche qui la rend simple d'utilisation.

On a adapté l'homogénéisation asymptotique discrète au traitement de la plasticité. La méthode développée ici constitue une avancée. En effet, la méthode développée par d'autres

2. L'effort de réaction n'est pas complètement uniforme, on a pris l'effort du noeud le plus éloigné des bords, le noeud du milieu latéral droit. Cela permet de diminuer les effets de bords.



(a)



(b)

FIGURE 5.5.11 – Force de réaction en N lors de la simulation EF (Abaqus) de la déformation d'un treillis Carre-Étoile. (a) charge maximale au 10e pas de la simulation (b) 20e pas de la simulation (pas final)

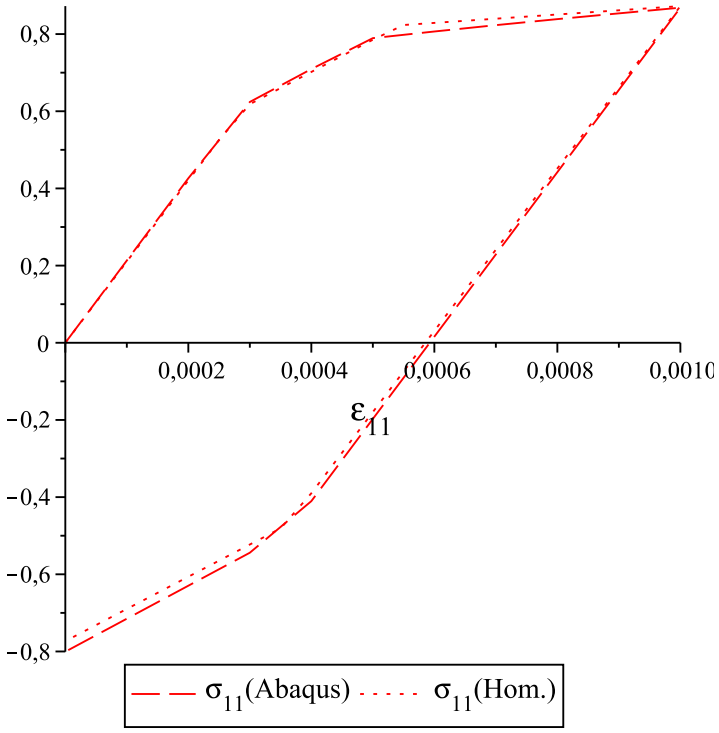


FIGURE 5.5.12 – Courbe contrainte déformation d'un treillis Carre-Étoile

auteurs [Mohr, 2005] est limitée aux treillis dont les noeuds sont situés sur les frontières de la cellule élémentaire. Notre méthode permet de traiter indifféremment tous les treillis à dominante extensionnelle, même ceux comportant des noeuds internes. On a choisi délibérément un treillis de ce type, le treillis carré-étoile, comme exemple et montré une bonne correspondance entre le comportement plastique homogénéisé et un calcul numérique par EF dans le cas d'un cycle d'extension-retour à la déformation initiale.

Ces travaux ne constituent une première avancée ; pour traiter de la plasticité générale des treillis, il faudrait compléter notre approche sous plusieurs aspects ; on peut suggérer les pistes d'étude suivantes : il faudrait pouvoir généraliser le type de treillis traité et étendre l'étude aux treillis à dominante flexionnelle, puis aux treillis mixtes sans dominante. Cela nécessitera sans doute dans un premier temps de pouvoir classer de manière plus précise les treillis selon leur géométrie et le type de comportement attendu sous charge. Une approche matricielle du type de celle développée dans Hutchinson and Fleck [2006] serait sans doute appropriée. Suivant chaque type de treillis, il faudrait ensuite identifier les modes d'effondrement possible, notamment en compression, qui peuvent se révéler complexes. Ensuite, identifier les paramètres influençant ces modes d'effondrement.

Si l'on s'intéresse aux aspects plus techniques, la méthode utilisée dans notre étude peut être améliorée. La matrice de raideur tangente est déterminée en début de pas, ce qui fait de la méthode exposée ici une méthode de type explicite. Une méthode implicite gagnerait sans doute en précision, en vitesse de convergence et en stabilité. On ne s'est pas intéressé

aux problèmes de convergence, mais on a considéré a priori que la solution convergeait. Il faudrait faire une étude pour montrer que tel est effectivement le cas. Enfin, par manque de temps, on a écrit un code séparé pour faire la simulation numérique en Maple et le code EF, ce qui nous a simplement permis de faire une simulation en charge-décharge. L'idéal serait l'écriture d'un module matériau utilisateur dans un code de calcul EF (UMAT ou VUMAT dans Abaqus). Cela permettrait de faire la simulation du comportement de pièces avec une microstructure de treillis dans des cas d'historique de chargement complexe.

Conclusion, perspectives

Ce travail de thèse a pour objet le développement de méthodes d'homogénéisation discrète de treillis de poutres répétitifs quasi périodiques afin de leur substituer un continuum équivalent doté de propriétés effectives. Nous montrons l'intérêt de la méthode d'homogénéisation asymptotique discrète telle qu'elle a été développée et appliquée aux treillis par Tollenaere and Caillerie [1998], Mourad [2003], Caillerie et al. [2006]. Notre contribution porte sur trois points : premièrement, l'automatisation de cette méthode et sa généralisation en utilisant un modèle poutre de Bernoulli plutôt qu'un modèle poutre rigide ; deuxièmement, l'homogénéisation vers un milieu micropolaire pour les treillis centrosymétriques et troisièmement, pour les treillis élastoplastiques à dominante extensionnelle, le calcul du domaine de résistance élastique et la détermination d'un algorithme de calcul de l'évolution des surfaces de charges en adaptant la méthode de projection (return mapping) de Simo and Hughes [1998] au cas des treillis.

La méthode d'homogénéisation asymptotique se prête remarquablement bien à l'automatisation. Elle se révèle être efficace et générale pour retrouver la relation contrainte - déformation du milieu continu équivalent, ainsi que les modules effectifs. Les codes de calculs que nous avons obtenus sont simplement alimentés par un fichier texte de description de la géométrie du treillis et sont ainsi faciles d'utilisation. D'un point de vue calculatoire, elle est également plus simple que d'autres méthodes, car elle repose sur la résolution d'un système linéaire. Les méthodes énergétiques, par exemple, demandent souvent de poser le problème au cas par cas, de passer par l'expression de l'énergie et d'effectuer ensuite des dérivations successives de cette énergie.

On peut résumer les résultats de nos travaux, dans le domaine élastique, à travers le tableau 5.5. Nous avons obtenu trois codes différents suivant les treillis traités et le milieu continu équivalent obtenu. Une grande diversité de treillis a été traitée dans cette thèse pour certifier au mieux que les codes renvoyaient des résultats corrects. Les résultats ont systématiquement été comparés avec les données disponibles dans la bibliographie, ou à des simulations en éléments finis avec une excellente approximation obtenue en général.

Ce tableau appelle quelques remarques. Le code classique apparait comme le plus général, du point de vue des treillis traités, mais on n'obtient de façon homogénéisée qu'un milieu continu classique, c'est-à-dire un tenseur de contrainte de Cauchy symétrique. Ce code, issu

	code extensionnel	code micropolaire	code classique
treillis à dominante extensionnelle	milieu classique	sans intérêt	milieu classique
treillis à dominante flexionnelle centrosymétrique	inutilisable	milieu micropolaires	milieu classique
treillis à dominante flexionnelle non centrosymétrique	inutilisable	inutilisable	milieu classique

TABLE 5.5 – Milieux obtenus en fonction du code de calcul utilisé et du treillis traité

du développement au premier ordre des inconnues du problème semble solidement fondé et appuyé par la théorie. Le code micropolaire, qui vise le milieu du même nom, a lui été bâti avec certaines hypothèses. Pour le construire, on a fait une entorse aux règles du développement asymptotique en présupposant le milieu visé, dans notre cas un milieu micropolaire. Cela nous a permis de nous appuyer sur les propriétés des milieux centro-symétriques micropolaires. De plus, la variable de microrotation ϕ, apparait reliée de façon un peu arbitraire aux noeuds d'interface entre deux cellules élémentaires. Cette partie de nos travaux laisse quelques questions en suspend : quel aurait réellement été le milieu obtenu en développant les paramètres au second ordre sans autre hypothèse préalable ? Ne pourrait-on pas envisager d'établir des liens différents entre la microrotation ϕ du milieu continu et les rotations du réseau de poutres du milieu discret ?

Comme perspective de poursuite de nos travaux, on peut envisager de formuler plus rigoureusement les développements de la méthode d'homogénéisation à un ordre supérieur de tous les différents paramètres (géométriques, cinématiques...), sans présupposer le milieu visé. Il sera dans ce cadre nécessaire également d'utiliser un modèle poutre au second ordre. On s'attend à obtenir un milieu d'ordre (ou de degré) supérieur, mais sans doute pas un simple milieu micropolaire. En effet, si on a été amené à formuler des hypothèses, c'est entre autres parce que toutes les données du problème n'étaient pas clairement formulées. Pour expliquer cela de façon concrète, on peut se référer aux figures 5.6.2 et 5.6.1. La théorie micropolaire suppose l'existence de microcouples, qui seraient invisible par un milieu continu classique. Ce que nous suggèrent les développements asymptotiques au second ordre, c'est qu'il existe deux types de microchargements. La figure 5.6.1 montre qu'il peut exister des microcouples, mais aussi au second ordre des microefforts (ou des microdéplacements).

L'autre point qui devra être clarifié si l'on veut poursuivre nos travaux est la nature exacte de la microrotation ϕ associée au milieu continu équivalent à un treillis. ϕ est associé à la rotation provoqué par une densité de couple d'effort. Mais, si on se réfère à la figure 5.6.2, un paramètre crucial intervient lors de l'homogénéisation, le point d'appui de ces microcouples :

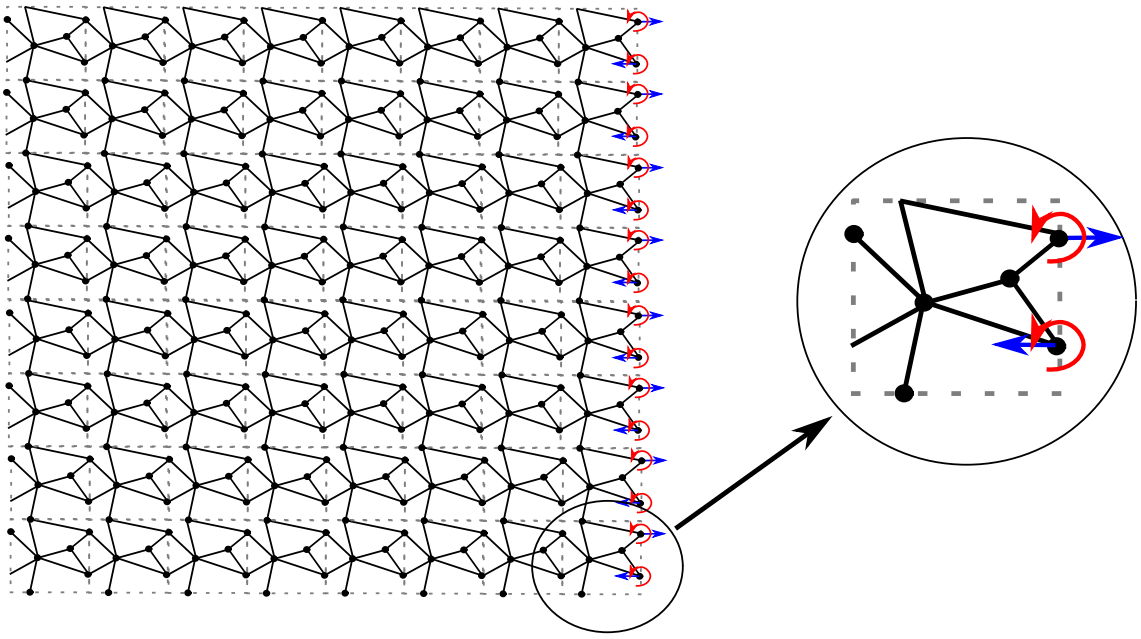


FIGURE 5.6.1 – Exemple de micro-chargement, invisible pour un milieu continu classique, qui ne pourrait être traité que par une théorie d'ordre (ou de degré) supérieur

il se peut en effet que le point d'application ne soit pas un noeud [3], mais un point particulier de la poutre. On peut envisager qu'il existe une grande variété de cas de figure, et donc que le paramètre de raideur associé à ϕ dans la théorie micropolaire varie suivant le cas. On peut émettre une hypothèse de piste de recherche qui demande à être vérifiée : l'indication du point d'appui des micro-couples pour l'homogénéisation peut se faire par la manière dont on décrit la géométrie de la cellule élémentaire. La figure 5.6.2 donne un exemple de deux cellules élémentaires, décrites différemment, mais donnant le même treillis.

Ces points éclaircis, nous pourrions ensuite envisager des applications pratiques. Comme l'a montré le chapitre trois, les effets micropolaires à l'échelle macroscopique liés à la microcourbure du milieu disparaissent rapidement lorsque la finesse du treillis augmente (c'est à dire lorsque le paramètre asymptotique $\varepsilon \to 0$). Par contre, l'existence d'une densité de couple de contrainte aurait des effets macroscopiques bien réels et non prévus par un milieu continu classique. Ce cas n'est pas complètement irréaliste, on peut penser par exemple aux frontières entre deux milieux microstructurés différents.

On peut envisager également d'autres directions d'étude, comme l'utilisation du code de calcul classique comme outil d'exploration pour le comportement homogénéisé de matériaux cellulaire de topologies et de caractéristiques mécaniques diverses. S'il s'agit de treillis manufacturés, on peut le paramétrer pour ajuster une caractéristiques mécanique précise (choisie par le concepteur) ou optimiser sa topologie. On peut envisager une extension du code au traitement des grandes déformations, avec un modèle de poutre différent (tels que les poutres

3. On pourrait ajouter que même si le point d'application est un noeud, une autre question pourrait être : comment le choisir parmi tous ceux d'une cellule élémentaire ?

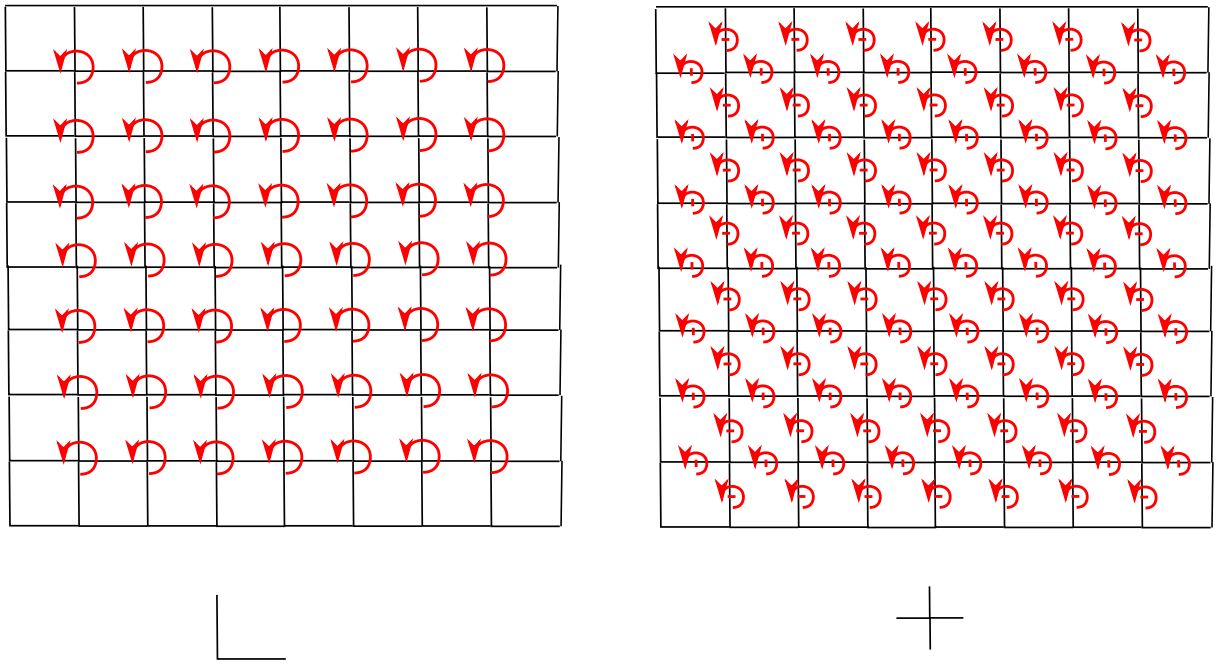


FIGURE 5.6.2 – Exemple de deux répartitions différente des moments sur un treillis, donnant pour le milieu continu la même densité de couple, avec au dessous la cellule élémentaire associée

à élancement faible avec un modèle de Timoshenko), un passage à une vraie description 3D incluant les effets de la torsion, le calcul de plaque ou de poutre 3D et le calcul de treillis avec une double échelle de microstructure. On notera également que la théorie est adaptée au traitement des milieux curvilignes ; on peut dans un contexte de biomécanique envisager de poursuivre par le traitement de membranes biologiques variées, qui se présentent sous forme de coques d'un point de vue de leur géométrie.

Même s'il s'agit d'un aspect plus technique que scientifique, on peut améliorer le programme d'homogénéisation lui-même. Si on veut traiter des treillis avec une cellule de base complexe, comprenant un grand nombre de noeuds, dans un temps de calcul raisonnable, il faudra remplacer la fonction solveur générique de Maple que nous avons utilisé par une fonction spécialisée. On peut améliorer également la simplification des résultats. En accroissant la complexité de la cellule de base d'un treillis, les modules obtenus comprennent un nombre croissant de termes. On a introduit sommairement cette simplification par une analyse des termes prépondérants en fonction du rapport d'élancement η, mais cela peut sans doute être affiné. Enfin, l'ajout d'une interface graphique pour la saisie de la géométrie d'un treillis et la génération du fichier texte associé serait un luxe bienvenu.

Dans le dernier volet des travaux de cette thèse, nous avons montré comment nous servir des équations d'équilibre fournies par l'homogénéisation asymptotique pour traiter de deux aspects complémentaires, la résistance élastique des treillis élastoplastiques et l'évolution des

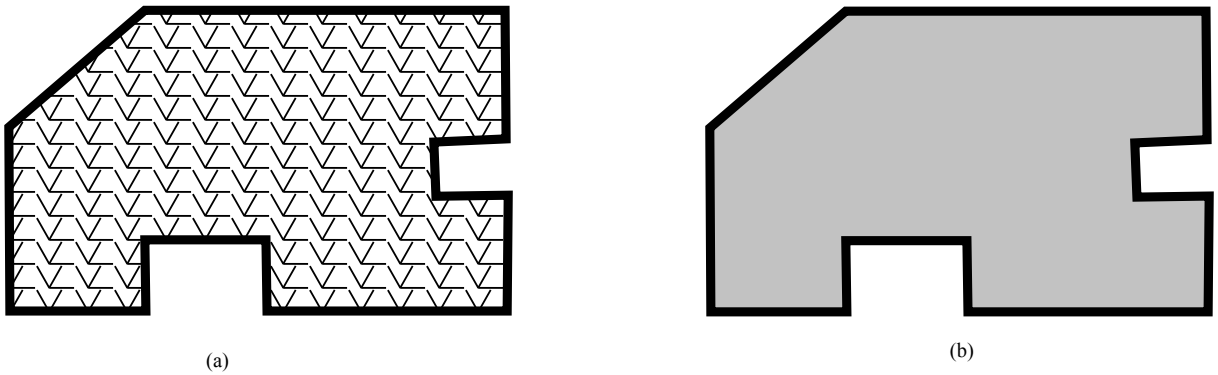


FIGURE 5.6.3 – Exemple de pièce industrielle (a) avec un matériau de remplissage cellulaire, (b) modèle homogénéisé utilisable dans un code élément fini

surfaces de charges en fonction de l'écrouissage. Nous avons réalisé une première approche en abordant les treillis à dominante extensionnelle. Pour ce qui est du domaine de résistance élastique, qui est un sujet déjà couramment traité, notre apport concerne le fait que le calcul s'effectue de manière automatique à partir du fichier texte de définition de la géométrie.

Le second aspect, l'algorithme de détermination de l'évolution des surfaces de charges et de l'écrouissage, est à notre connaissance nouveau, en ce qu'il est capable de traiter tous les treillis à dominante extensionnelle et non seulement ceux à déformation uniforme. La méthode de projection (return mapping*)* développée par Simo and Hughes [1998] a été adaptée au cas des treillis pour obtenir un algorithme d'évolution plastique. La simulation de charge-décharge réalisée pour le valider montre une bonne concordance avec les résultats obtenus par éléments finis.

Ce dernier algorithme a des applications pratiques très intéressantes que nous n'avons pas eu le temps de développer. Si on considère l'exemple de la pièce industrielle figure 5.6.3(a) constitué d'une enveloppe en matériau plein remplie par un matériau cellulaire (à dominante extensionnelle), on peut imaginer un modèle homogénéisé, figure 5.6.3(b), susceptible d'être utilisé dans un code élément fini standard pour faire des simulations numériques, et ce, même dans le domaine plastique. Il suffit d'implanter l'algorithme de traitement du matériau cellulaire de remplissage sous la forme d'un matériau utilisateur.

Comme nous l'avons indiqué dans la fin du dernier chapitre, pour traiter de la plasticité générale des treillis, il faudrait parachever nos travaux sous plusieurs aspects. Il faudrait par exemple pouvoir généraliser le type de treillis traité. Cela passera sans doute par un affinage du classement des treillis établi par Deshpande et une prise en compte des modes de bifurcation après un début d'écrouissage. On peut également envisager d'utiliser un modèle élasto-visco-plastique à la place de notre modèle élastoplastique.

Dans des aspects plus calculatoires, l'algorithme utilisé dans notre étude peut être amélioré. On pourrait essayer de déterminer la matrice de raideur tangente par une méthode implicite plutôt qu'explicite. On gagnerait en précision, en vitesse de convergence et en stabilité.

Bibliographie

Taiji Adachi, Yoshimiro Tomita, and Masao Tanaka. Computational simulation of deformation behavior of 2d-lattice continuum. *Int J. Mech. Sc.*, 40 :857–866, 1998. 87

A. Alderson, K.L. Alderson, D. Attard, K.E. Evans, R. Gatt, J.N. Grima, W. Miller, N. Ravirala, C.W. Smith, and K. Zied. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 2009. doi : 10.1016/j.compscitech.2009.07.009. 135, 140, 143

M. Alkhader and M. Vural. Mechanical response of cellular solids : Role of cellular topology and microstructural irregularity. *International Journal of Engineering Science*, 46 : 1035–1051, 2008. 39, 41, 88, 120, 127, 163

Steffen Alverman. Effective viscoelastic behaviour of cellular auxetic materials. Technical report, Graz University of Technology, Institute of Applied Mechanics, 2007. 23, 133

E.W. Andrews and L.J. Gibson. The role of cellular structure in creep of two-dimensional cellular solids. *Materials Science and Engineering*, A303 :120–126, 2001. 22

A. Anthoine. Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :1003–1018, 2000. 78

Harm Askes and Andrei V. Metrikine. Higher-order continua derived from discrete media : continualisation aspects and boundary conditions. *International Journal of Solids and Structures*, 2004. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2004.04.005. 18

X. Badiche, S. Forest, T. Guibert, Y. Bienvenu, J.-D. Bartout, P. Ienny, M. Croset, and H. Bernet. Mechanical properties and non-homogeneous deformation of open-cell nickel foams : application of the mechanics of cellular solids and of porous materials. *Materials Science and Engineering*, A289 :276–288, 2000. 39, 63

By Katia Bertoldi, Pedro M. Reis, Stephen Willshaw, and Tom Mullin. Negative poisson's ratio behavior induced by an elastic instability. *advanced materials*, 21 :1–6, 2009. 133, 135

R. Blumenfeld. Auxetic strains—insight from iso-auxetic materials. *Molecular Simulation*, 31 :867–871, 2005. 133, 135

Michel Bornert, Thierry Bretheau, and Pierre Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1.* Hermes Science, 2001. 23, 25, 26

Stéphane Bourgeois. Homogénéisation d'une poutre périodique : limite des développements asymptotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris,*, 328, Serie II b :719–725, 2000. 87

Natacha Buannic and Patrice Cartraud. Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. i. asymptotic expansion method. *International Journal of Solids and Structures*, 38 :7139–7161, 2001. 87

B. Burgardt and P. Cartraud. Continuum modeling of beamlike lattice trusses using averaging methods. *computers and structures*, 73 :267–279, 1999. 16, 39

Denis Caillerie, Ayman Mourad, and Annie Raoult. Discrete homogenization in graphene sheet modeling. *Journal of Elasticity*, 84 :33–68, 2006. 9, 11, 18, 22, 34, 39, 42, 46, 49, 50, 51, 195

Bernard Cambou and Michel Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires.* Hermes Science, 2001. 23, 25, 26, 32

Patrice Cartraud. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, contribution à l'analyse asymptotique et à l'homogénéisation de structures périodiques. Ecole Centrale de Nantes, Laboratoire Mécanique et Matériaux, 12 2003. 14, 15, 18

Siro Casolo. Macroscopic modelling of structured materials : Relationship between orthotropic cosserat continuum and rigid elements. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :475–496, 2006. 120

Luc Chevalier. *Mécanique des systèmes et des milieux déformables.* 2004. 208

R.M. Christensen. Mechanics of cellular and other low-density materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :93–104, 2000. 18, 33

Jean-Charles Craveur and Claude Cheze. *Mécanique des structures.* 2008. 208

Julien Dallot, Karam Sab, and Gilles Foret. Limit analysis of periodic beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 28 :166–178, 2009. 90

S. Demiray, W. Becker, and J. Hohe. Analysis of two- and three-dimensional hyperelastic model foams under complex loading conditions. *Mechanics of Materials*, 38 :985–1000, 2006. 16, 162

S. Demiray, W. Becker, and J. Hohe. Numerical determination of initial and subsequent yield surfaces of open-celled model foams. *International Journal of Solids and Structures*, 44 : 2093–2108, 2007. 16, 163

V. S. Deshpande, M. F. Ashby, and N. A. Fleck. Foam topology bending versus stretching dominated architectures. *Acta mater.*, 49 :1035–1040, 2001a. 9, 20, 27, 32, 33

V.S. Deshpande, N.A. Fleck, and M.F. Ashby. Effective properties of the octet-truss lattice material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49 :1747–1769, 2001b. 17, 70, 162

Jean-Francois Despois, Randoald Mueller, and Andreas Mortensen. Uniaxial deformation of microcellular metals. *Acta Materialia*, 54 :4129–4142, 2006. 27, 39

Stefania Donescu, Veturia Chiroiu, and Ligia Munteanu. On the young's modulus of a auxetic composite structure. *Mechanics Research Communications*, 36 :294–301, 2009. 135

Mulalo Doyoyo and Jong Wan Hu. Multi-axial failure of metallic strut-lattice materials composed of short and slender struts. *International Journal of Solids and Structures*, 43 : 6115–6139, 2006a. 8, 160

Mulalo Doyoyo and Jong Wan Hu. Plastic failure analysis of an auxetic foam or inverted strut lattice under longitudinal and shear loads. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :1479–1492, 2006b. 162, 163

K.E. Easterling, R. Harrysson, L.J. Gibson, and M.F. Ashby. On the mechanics of balsa and other woods. *Proc. R. Soc. Lond.*, A383 :31–41, 1982. 18

T. Ebinger, H. Steeb, and S. Diebels. Modeling macroscopic extended continua with the aid of numerical homogenization schemes. *Computational Materials Science*, 32 :337–347, 2005. 16

S. Elangovan, B.S. Altan, and G.M. Odegard. An elastic micropolar mixture theory for predicting elastic properties of cellular materials. *Mechanics of Materials*, 40 :602–615, 2008. 88

H.L. Fan and D.N. Fang. Enhancement of mechanical properties of hollow-strut foams : Analysis. *Materials and Design*, 2008. 163

H.L. Fan, D.N. Fang, and F.N. Jing. Yield surfaces and micro-failure mechanism of block lattice truss materials. *Materials and Design*, 29 :2038–2042, 2008a. 17, 163

H.L. Fan, F.N. Jin, and D.N. Fang. Nonlinear mechanical properties of lattice truss materials. *Materials and Design*, 2008b. 17

Hualin Fan and Yang Wei. An equivalent continuum method of lattice structures. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 19 :103–113, 2006. 17

Hualin Fan, Daining Fang, and Fengnian Jin. Mechanical properties of lattice grid composites. *Acta Mech Sin*, 24 :409–418, 2008c. 17, 163

J. Fatemi, F. Van Keulen, and P.R. Onck. Generalized continuum theories : Application to stress analysis in bone. *Meccanica*, 37 :385–396, 2002. 84, 87

Norman A. Fleck and XinMing Qiu. The damage tolerance of elastic–brittle, two-dimensional isotropic lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :562–588, 2007. 70

Céline Florence. *Etude expérimentale de la fissuration réflective et modélisation de la résistance de structures cellulaires*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2005. 99

Céline Florence and Karam Sab. A rigorous homogenization method for the determination of the overall ultimate strength of periodic discrete media and an application to general hexagonal lattices of beams. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 25 :72–97, 2006. 17, 22, 86, 87, 88, 99, 163

S. Forest. Mechanics of cosserat media an introduction. 2005. 95

Samuel Forest. *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*. Ecoles des mines de Paris, 2006. 77

N. Gaspar, X.J. Ren, C.W. Smith, J.N. Grima, and K.E. Evans. Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Materialia*, 53 :2439–2445, 2005. 135, 144, 146

Lorna J. Gibson. Biomechanics of cellular solids. *Journal of Biomechanics*, 38 :377–399, 2005. 17, 41, 51, 52, 58, 63, 66

Lorna J. Gibson and Michael F. Ashby. *Cellular Solids*. Press syndicate of the university of Cambridge, 1997. 17, 39, 40, 51, 52, 54, 58, 66, 68, 87, 135, 143, 161

Stefano Gonella and Massimo Ruzzene. Homogenization and equivalent in-plane properties of two-dimensional periodic lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 45 : 2897–2915, 2008. 135, 137

Joseph N. Grima, Ruben Gatt, Naveen Ravirala, Andrew Alderson, and K.E. Evans. Negative poisson's ratios in cellular foam materials. *Materials Science and Engineering A*, 423 :214–218, 2006. 133, 134, 144, 146

Bernard Haussy, Corinne Jung, and Jean-François Ganghoffer. Homogenization of the ondulations of a single yarn. applications to the modelling of the traction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 46 :961–979, 2004. 18, 87

J. Hohe, C. Beschorner, and W. Becker. Effective elastic properties of hexagonal and quadrilateral grid structures. *Composite Structures*, 46 :73–89, 1999. 16

Jorg Hohe and Wilfried Becker. A refined analysis of the effective elasticity tensor for general cellular sandwich cores. *International Journal of solids and structures*, 38 :3689–3717, 2001. 16

R.G. Hutchinson and N.A. Fleck. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :756–782, 2006. 20, 33, 34, 70, 72, 193

E.G. Karpov, D.L. Dorofeev, and N.G. Stephen. Characteristic solutions for the statics of repetitive beam-like trusses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44 :1363–1379, 2002. 14

D.L. Dorofeev Karpov E.G., N.G. Stephen. On static analysis of finite repetitive structures by discrete fourier transform. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :4291–4310, 2002. 14

Rajesh S. Kumar and David L. McDowell. Generalized continuum modeling of 2-d periodic cellular solids. *International Journal of Solids and Structures*, 41 :7399–7422, 2004. 16, 83, 86, 130

Rajesh S. Kumar and David L. McDowell. Multifunctional design of two-dimensional cellular materials with tailored mesostructure. *International Journal of Solids and Structures*, 2009. doi : doi:10.1016/j.ijsolstr.10.1016/j.ijsolstr.2009.03.014. 16, 83, 120

R. Lakes. Foam structures with a negative poisson's ratio. *science*, 235 :1038–1040, 1987. 133, 135

Roderic Lakes. Deformation mechanisms in negative poisson's ratio materials : structural aspects. *J. Materials Science*, 26 :2287–2292, 1991. 133, 140

Roderic Lakes. Materials with structural hierarchy. *Nature*, 361 :511–515, 1993. 151

Jia lei Zhang and Zi xing Lu. Numerical modeling of the compression process of elastic open-cell foams. *Chinese Journal of Aeronautics*, 20 :215–222, 2007. 39, 68

K. Li, X.-L. Gao, and G. Subhash. Effects of cell shape and strut cross-sectional area variations on the elastic properties of three-dimensional open-cell foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54 :783–806, 2006. 21, 39, 67, 68

Fabian Lipperman, Moshe B. Fuchs, and Michael Ryvkin. Stress localization and strength optimization of frame material with periodic microstructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197 :4016–4026, 2008. 25, 70

Shutian Liu and Wenzheng Su. Effective couple-stress continuum model of cellular solids and size effects analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2009. doi : 10.1016/j.ijsolstr.2009.03.007. 78, 85, 88

T. Liu, Z.C. Deng, and T.J. Lu. Design optimization of truss-cored sandwiches with homogenization. *International Journal of Solids and Structures*, 43 :7891–7918, 2006. 17

Dirk Mohr. Mechanism-based multi-surface plasticity model for ideal truss lattice materials. *International Journal of Solids and Structures*, 42 :3235–3260, 2005. 12, 17, 160, 163, 193, 237

G. Moreau and D. Caillerie. Continuum modeling of lattice structures in large displacement applications to buckling analysis. *computers and structures*, 68 :181–189, 1998. 18, 22, 30, 34

Ayman Mourad. *Description topologique de l'architecture fibreuse et modelisation mecanique du myocarde*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2003. 9, 18, 22, 34, 39, 41, 42, 45, 46, 48, 49, 89, 195

S. A. Nazarov. Justification of the asymptotic theory of thin rods. integral and pointwise estimates. *Journal of Mathematical Sciences*, 97, No. 4 :4245–4279, 1999. 87

Ahmed K Noor. Continuum modeling for repetitive lattice structures. *applied mechanics review*, 41 :285–296, 1988. 11, 14, 16, 19, 20

Gregory M. Odegard, Thomas S. Gates, Lee M. Nicholson, and Kristopher E. Wise. Equivalent-continuum modeling of nano-structured materials. *Composites Science and Technology*, 62 :1869–1880, 2002. 16

D. Okumura, N. Ohno, and H. Noguchi. Elastoplastic microscopic bifurcation and post-bifurcation behavior of periodic cellular solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52 :641–666, 2004. 12, 161

P.R. Onck, E.W. Andrews, and L.J. Gibson. Size effects in ductile cellular solids. part i : modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43 :681–699, 2001. 127

Michel Del Pedro, Thomas Gmur, and John Botsis. *Introduction à la mécanique des solides et des structures*. presses polytechniques et universitaires romandes, 2004. 61

Francis Pradel and Karam Sab. Cosserat modelling of elastic periodic lattice structures. *C. R. Acad. Sci. Paris,*, t. 326, Serie II b, :p. 699–704, 1998. 16, 41, 86, 88, 120, 163

D. Prall and R. S. Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of - 1. *Int. J. Mech. Sci.*, 39 :305–314, 1997. 8, 133, 135, 140, 141, 143

Annie Raoult, Denis Caillerie, and Ayman Mourad. Elastic lattices : equilibrium, invariant laws and homogenization. *Ann Univ Ferrara*, 54 :297–318, 2008. 18, 22, 34, 39, 42, 46

Azadeh Riahi and John H. Curran. Full 3d finite element cosserat formulation with application in layered structures. *Applied Mathematical Modelling*, 2009. doi : 10.1016/j.apm.2008.11.022. 95

A.P. Roberts and E.J. Garboczi. Elastic properties of model random three-dimensional open-cell solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :33–55, 2002. 39, 58

Josef Rosenberg and Robert Cimrman. Microcontinuum approach in biomechanical modeling. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61 :249–260, 2003. 87

M. Ryvkin, M.B. Fuchs, and B. Nuller. Optimal design of infinite repetitive structures. *Structural Optimization*, 18 :202–209, 1999. 14

Jacqueline Sanchez-Hubert and E. Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation - Application à la mécanique des milieux continus.* 1992. 23

F. Scarpa, S. Blain, T. Lew, D. Perrott, M. Ruzzene, and J.R. Yates. Elastic buckling of hexagonal chiral cell honeycombs. *Composites : Part A*, 38 :280–289, 2007. 135

Matthew J. Silva, Wilson C. Hayes, and Lorna J. Gibson. The effects of non-periodic microstructure on the elastic properties of two-dimensional cellular solids. *Int. J. Mech. Sci.*, 37 :1161–1177, 1995. 17

J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity.* Springer, 1998. 12, 163, 164, 165, 176, 195, 199

Alessandro Spadoni and Massimo Ruzzene. Numerical and experimental analysis of the static compliance of chiral truss-core airfoils. *Journal of mechanics of materials and structures*, 2 :965–981, 2007. 135

Roy M. Sullivan, Louis J. Ghosn, and Bradley A. Lerch. A general tetrakaidecahedron model for open-celled foams. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :1754–1765, 2008. 18, 39, 163

Cihan Tekoglu and Patrick R.Onck. Size effects in two-dimensional voronoi foams : A comparison between generalized continua and discrete models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56 :3541–3564, 2008. 127

Cihan Tekoğlu. *Size effects in cellular solids.* PhD thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2007. 87, 88

H. Tollenaere and D. Caillerie. Continuous modeling of lattice structures by homogenization. *Advances in Engineering Software*, 29 :699–705, 1998. 9, 14, 18, 22, 30, 31, 32, 34, 39, 42, 46, 73, 195

Herve Tollenaere. *Modèle bidimensionnels de tissés - Homogénéisation des treillis en vibration libres.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1994. 14

S. Torquato, L. V. Gibiansky, M. J. Silva, and L. J. Gibson. Effective mechanical and transport properties of cellular solids. *Int. J. Mech. SoL*, 40 :71–82, 1998. 27

P. Trovalusci and R. Masiani. Material symmetries of micropolar continua equivalent to lattices. *International Journal of Solids and Structures*, 36 :2091–2108, 1999. 10, 83, 84, 95, 107

Patrice Verna. *Modélisation continue des structures discrète par homogénéisation : cas des treillis.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1991. 14, 18

Haydn N.G. WADLEY. Multifunctional periodic cellular metals. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 364 :31–68, 2006. 21

A.-J. Wang and D.L. McDowell. Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density. *International Journal of Plasticity*, 21 :285–320, 2005. 160, 162, 163, 185

W.E. Warren and Esben Byskov. A general solution to some plane problems of micropolar elasticity. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 27 :18–27, 2008. 87

W.E. Warren and A.M. Kraynik. Linear elastic behaviour of a low density kelvin foam with open-cell. *J. Appl. Mech.*, 64 :787–794, 1997. 68

William E. Warren and Esben Byskov. Three-fold symmetry restrictions on two-dimensional micropolar materials. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 21 :779–792, 2002. 41, 87, 88, 99, 120

L.S. Xie and K.C. Chan. The effect of strut geometry on the yielding behaviour of open-cell foams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48 :249–255, 2006. 163

Jun Yan, Gengdong Cheng, Shutian Liu, and Ling Liu. Comparison of prediction on effective elastic property and shape optimization of truss material with periodic microstructure. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48 :400–413, 2006. 162

D.U. Yang, S. Lee, and F.Y. Huang. Geometric effects on micropolar elastic honeycomb structure with negative poisson's ratio using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39 :187–205, 2003. 84, 135

Mei-Yi Yang and Jong-Shin Huang. Elastic buckling of regular hexagonal honeycombs with plateau borders under biaxial compression. *Composite Structures*, 71 :229–237, 2005. 163

Mei-Yi Yang and Jong-Shin Huang. Failure surfaces for brittle honeycombs with plateau borders under in-plane biaxial loads. *Composite Structures*, 72 :512–520, 2006. 162, 163

Andrew Yoo and Iwona Jasiuk. Couple-stress moduli of a trabecular bone idealized as a 3d periodic cellular network. *Journal of Biomechanics*, 39 :2241–2252, 2006. 16, 87

Y.H. Zhang, X.M. Qiu, and D.N. Fang. Mechanical properties of two novel planar lattice structures. *International Journal of Solids and Structures*, 45 :3751–3768, 2008. 27, 163

H. X. Zhu, J. F. Knott, and N. J. Mills. Analysis of the elastic properties of open-cell foams with tetrakaidecahedral cells. *J Mech. Phys. Solids.*, 45 :319–343, 1997. 17, 39, 64, 67, 68

Annexe A

Synthèse de la théorie des poutres en petits déplacements et avec l'hypothèse de Bernoulli

Sommaire

A.1 Structure des problèmes de poutre **208**
A.2 Passage des équations locales aux équations globales, application du principe des puissances virtuelles **210**
A.3 Méthode des éléments finis, application aux poutres **211**
A.3.1 Discrétisation d'un problème poutre 212
A.3.2 Poutre en traction-compression 213
A.3.3 Poutre en flexion 214
A.3.4 Matrice de raideur élémentaire dans le repère structural 216
A.3.5 Assemblage des matrices élémentaires 217
A.4 Expression vectorielle des efforts dans le repère structural **218**

A.1 Structure des problèmes de poutre

Cette synthèse est essentiellement issue des ouvrages de Luc Chevalier "Mécanique des systèmes et des milieux déformables" Chevalier [2004] et de J.C. Craveur et C. Cheze - "Mécanique des structures" Craveur and Cheze [2008]. Nous ferons dans cette annexe la présentation de la méthode des éléments finis appliquée à un modèle poutre sous l'hypothèse de Bernoulli. Nous montrerons comment obtenir à partir de cette méthode les formulations des différents efforts et moments sous la forme vectorielle que nous avons couramment utilisée tout au long de nos travaux.

La figure A.1.1 récapitule la liste des actions mécaniques de la théorie des poutres que nous allons utiliser. Les actions mécaniques en grisé correspondent aux sollicitations internes, les actions mécaniques en noir sont les efforts extérieurs appliqués à la poutre. Ces derniers seront choisis comme étant uniquement concentrés en une abscisse fixée.

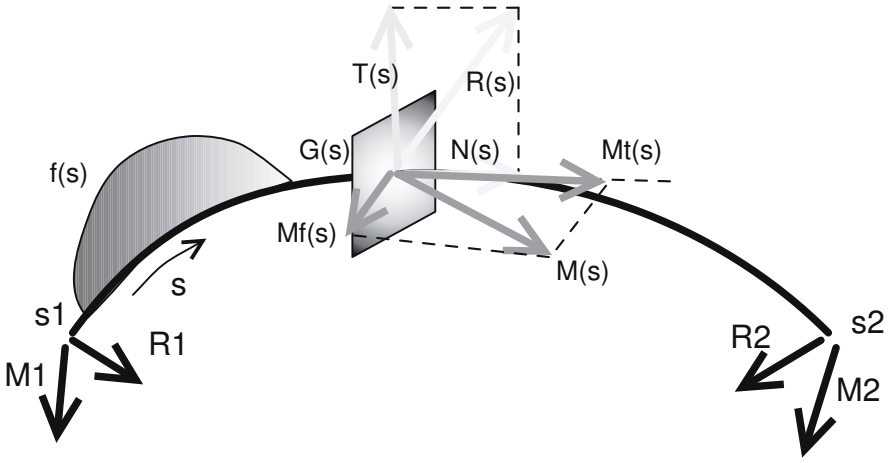


FIGURE A.1.1 – Actions mécaniques appliquées à une poutre

Les composantes des inconnues d'un problème poutre sont

- les 6 composantes du déplacement $\{\mathbf{U}(s)\} = \left\{ \begin{array}{c} \psi(s) \\ \mathbf{u}(s) \end{array} \right\}_{G(s)}$
  - avec $\mathbf{u}(s)$ et $\psi(s)$, le déplacement et la rotation de la fibre neutre de la poutre à l'abscisse s.
- les 6 composantes de la déformation $\{\mathbf{D}(s)\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma(s) \\ \varepsilon(s) \end{array} \right\}_{G(s)}$
- les 6 composantes des sollicitations internes $\{\mathbf{T}(s)\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{M}(s) \end{array} \right\}_{G(s)}$

Nous avons également les relations suivantes sur un tronçon infinitésimal de poutre (équations locales) :

- les relations déformations - déplacement

$$\left\{ \begin{array}{c} \gamma(s) = \dfrac{d\psi(s)}{ds} \\ \varepsilon(s) = \dfrac{d\mathbf{u}(s)}{ds} + \mathbf{n}(s) \wedge \psi(s) \end{array} \right. \tag{A.1.1}$$

  - avec $\mathbf{n}(s)$ le vecteur tangent à la fibre neutre de la poutre au point d'abscisse s
- les équations d'équilibre en quasi statique

$$\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds} = \mathbf{0} \tag{A.1.2}$$

$$\frac{d\mathbf{M}(s)}{ds} + \mathbf{n}(s) \wedge \mathbf{R}(s) = \mathbf{0} \tag{A.1.3}$$

– les relations de comportement élastiques du matériau

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s)}{ES}\,\varepsilon_{T1}(s) = \frac{T_1(s)}{GS}\,\varepsilon_{T2}(s) = \frac{T_2(s)}{GS} \tag{A.1.4}$$

$$\theta(s) = \frac{M_t(s)}{GI_0}\,\gamma_{T1}(s) = \frac{M_{f1}(s)}{EI_1}\,\gamma_{T2}(s) = \frac{M_{f2}(s)}{EI_2} \tag{A.1.5}$$

– avec E, le module élastique appelé aussi module de Young, G, le module de cisaillement, S la section de la poutre, I_0 le moment polaire par rapport au centre de la poutre et I_j le moment quadratique de la poutre par rapport à l'axe j.

A.2 Passage des équations locales aux équations globales, application du principe des puissances virtuelles

Dans le cas d'une poutre chargée par une répartition $\{\mathbf{F}(s)\}$ d'efforts le long de la ligne moyenne paramétrée par l'abscisse s, les équations locales d'équilibre A.1.2 et A.1.3 s'écrivent en quasi statique

$$\left\{\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\} + \{\mathbf{F}(s)\} = \{\mathbf{0}\} \tag{A.2.1}$$

Les conditions de bords aux abscisses terminales $s1$ et $s2$ de la poutre s'écrivent

$$\{\mathbf{T}(s1)\} = -\{\mathbf{F}(s1)\} \tag{A.2.2}$$

$$\{\mathbf{T}(s2)\} = +\{\mathbf{F}(s2)\} \tag{A.2.3}$$

On peut effectuer le comoment avec un torseur quelconque $\{\mathbf{V}^*(s)\}$, et intégrer le long de la poutre pour l'équation A.2.1. Pour les équations A.2.2 et A.2.3, on peut sommer le produit avec les termes $\{\mathbf{V}^*(s1)\}$ et $\{\mathbf{V}^*(s2)\}$. On obtient ainsi la formulation suivante, appelée souvent "principe des puissances virtuelles" (PPV)

$$\int_{s1}^{s2}\left[\left\{\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\} + \{\mathbf{F}(s)\} - \{\mathbf{A}(s)\}\right] \otimes \{\mathbf{V}^*(s)\}\,ds + [\{\mathbf{T}(s1)\} + \{\mathbf{F}(s1)\}] \otimes \{\mathbf{V}^*(s1)\} + [-\{\mathbf{T}(s2)\} + \{\mathbf{F}(s2)\}] \otimes \{\mathbf{V}^*(s2)\} = 0 \tag{A.2.4}$$

Si l'on intègre par partie le terme $\int_{s1}^{s2}\left\{\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\} \otimes \{\mathbf{V}^*(s)\}\,ds$, on remarque que :

$$\int_{s1}^{s2}\left\{\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}\right\}\otimes\{\mathbf{V}^*(s)\}\,ds = \{\mathbf{T}(s2)\}\otimes\{\mathbf{V}^*(s2)\} - \{\mathbf{T}(s1)\}\otimes\{\mathbf{V}^*(s1)\} - \int_{s1}^{s2}\{\mathbf{T}(s)\}\otimes\left\{\frac{d\mathbf{V}^*(s)}{ds}\right\}ds \tag{A.2.5}$$

Si l'on insère ce développement A.2.5 dans l'équation A.2.4, on remarque que les termes de bords s'éliminent et qu'il ne reste qu'une expression plus simple de la forme

$$-\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{T}(s)\}\otimes\left\{\dot{\mathbf{D}}^*(s)\right\}ds+\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{F}(s)\}\otimes\{V^*(s)\}\,ds+\sum_i\{\mathbf{F}(s_i)\}\otimes\{\mathbf{V}^*(s_i)\}=\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{A}(s)\}\otimes\{\mathbf{V}^*(s)\}\,ds \tag{A.2.6}$$

En posant $\left\{\dfrac{d\mathbf{V}^*(s)}{ds}\right\}=\left\{\dot{\mathbf{D}}^*(s)\right\}$. Le premier terme correspond à la puissance virtuelle des inter-efforts, le suivant à la puissance virtuelle des efforts linéiques, dans le second membre on trouve la puissance virtuelle des quantités d'accélération. Cette dernière équation A.2.6 est le point de départ de la méthode de résolution approchée par élément finis.

A.3 Méthode des éléments finis, application aux poutres

Certains auteurs utilisent la présentation de l'équation A.2.6 sous la forme du "principe des travaux virtuels" (PTV), en remplacement la vitesse virtuelle $\{\mathbf{V}^*(s)\}$ par le déplacement virtuel $\{\mathbf{U}^*(s)\}$, qui correspond à l'intégration de $\{\mathbf{V}^*(s)\}$ durant un temps dt. Nous avons alors l'équation suivante

$$-\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{T}(s)\}\otimes\{\mathbf{D}^*(s)\}\,ds+\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{F}(s)\}\otimes\{\mathbf{U}^*(s)\}\,ds+\sum_i\{\mathbf{F}(s_i)\}\otimes\{\mathbf{U}^*(s_i)\}=\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{A}(s)\}\otimes\{\mathbf{U}^*(s)\}\,ds \tag{A.3.1}$$

Nous considérerons qu'il n'y a pas d'efforts linéiques, et nous ferons la résolution en quasi statique. L'équation A.3.1 se simplifie alors en

$$-\int_{s1}^{s2}\{\mathbf{T}(s)\}\otimes\{\mathbf{D}^*(s)\}\,ds+\sum_i\{\mathbf{F}(s_i)\}\otimes\{\mathbf{U}^*(s_i)\}=0 \tag{A.3.2}$$

Cela signifie que le travail virtuel des inter-efforts est égal au travail des efforts extérieurs aux noeuds. Compte tenu du torseur des petits déplacements, le torseur des petites déformations $\{\mathbf{D}(s)\}$ s'écrit

$$\{\mathbf{U}(s)\}=\left\{\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \phi\\ u & v & w\end{array}\right\}\Longrightarrow\{\mathbf{D}(s)\}=\left\{\frac{d\mathbf{U}(s)}{ds}\right\}=\left\{\begin{array}{ccc}\dfrac{d\alpha}{ds} & \dfrac{d\beta}{ds} & \dfrac{d\phi}{ds}\\ \dfrac{du}{ds} & \dfrac{dv}{ds}-\phi & \dfrac{dw}{ds}+\beta\end{array}\right\} \tag{A.3.3}$$

Sous l'hypothèse de Bernoulli[1], ce torseur se simplifie, deux des composantes sont considérées comme nulles

1. On rappelle que dans l'hypothèse de Bernoulli, la poutre est suffisamment élancée pour que la déformation due à l'effort tranchant soit négligée. La section d'une poutre reste perpendiculaire à l'axe de la fibre neutre.

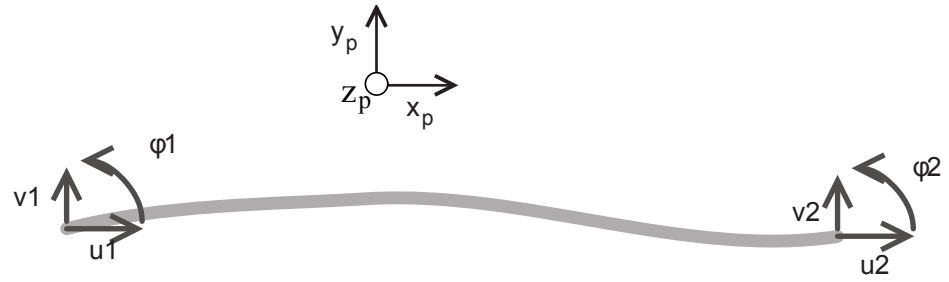


FIGURE A.3.1 – Degrés de liberté d'une poutre en axes propres

$$\{\mathbf{D}(s)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\alpha}{ds} & -\dfrac{d^2w}{ds^2} & \dfrac{d^2v}{ds^2} \\ \dfrac{du}{ds} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{A.3.4}$$

De la même façon, nous pouvons écrire le torseur de déformation virtuelle

$$\{\mathbf{D}^*(s)\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\alpha^*}{ds} & -\dfrac{d^2w^*}{ds^2} & \dfrac{d^2v^*}{ds^2} \\ \dfrac{du^*}{ds} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \tag{A.3.5}$$

Le premier membre de l'équation A.3.2, soit l'expression des travaux virtuels des inter-efforts s'écrit alors

$$\begin{aligned} W_i^* &= -\int_{s1}^{s2} \{\mathbf{T}(s)\} \otimes \{\mathbf{D}^*(s)\}\, ds \\ &= -\int_{s1}^{s2} \left\{ M_t \frac{d\alpha^*}{ds} - M_{fz} \frac{d^2w^*}{ds^2} + M_{fy} \frac{d^2v^*}{ds^2} + N \frac{du^*}{ds} \right\} ds \\ &= -\int_{s1}^{s2} \left\{ GI_0 \frac{d\alpha}{ds}\frac{d\alpha^*}{ds} - EI_z \frac{d^2w}{ds^2}\frac{d^2w^*}{ds^2} + EI_y \frac{d^2v}{ds^2}\frac{d^2v^*}{ds^2} + ES \frac{du}{ds}\frac{du^*}{ds} \right\} ds \end{aligned} \tag{A.3.6}$$

A.3.1 Discrétisation d'un problème poutre

Pour une poutre 2D travaillant en traction-compression, d'axes propres $(\mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p, \mathbf{z}_p)$, et en flexion dans le plan $\mathbf{x}O\mathbf{y}$, chacun des noeuds a trois degrés de liberté, qui sont rappelés dans la figure A.3.1 : les deux translations selon les deux axes propres à la poutre $\mathbf{x}_p$, $\mathbf{y}_p$ et la rotation autour de l'axe orthogonal au plan $\mathbf{z}_p$. Le vecteur des degrés de liberté est de dimension 6, le vecteur des charges également et la matrice de raideur associé est de dimension 6×6.

La poutre est considérée comme ayant une section constante. Le profil de symétrie possède les qualités requises de symétrie pour que le centre de torsion O et le centre de garvité G soient confondus. La poutre est suffisamment élancée pour que la déformation due à l'effort tranchant soit négligée (hypothèse de Bernoulli). Avec ces hypothèses, la poutre à un

comportement qui est la superposition de deux comportements simples indépendants : la traction-compression et la flexion dans le plan principal. Pour la construction de la matrice de raideur, on peut séparer les comportements.

A.3.2 Poutre en traction-compression

Le résultat est simple et connu, mais montrons le raisonnement pour l'obtenir à partir de notre formulation en travaux virtuels. Cela nous permettra de reprendre la même démarche dans le cas plus complexe de la flexion. Dans le cas d'une poutre soumise uniquement à une tension concentrée $N\mathbf{x}_p$, dans la direction de son axe propre $\mathbf{x}_p$, les seules déformations proviennent de la composante $\mathbf{u}$ du torseur des petits déplacements

$$\{\mathbf{U}(x)\} = \left\{ \begin{array}{c} \psi = 0 \\ \mathbf{u} = u(x)\mathbf{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\mathbf{D}(x)\} = \left\{ \begin{array}{c} \gamma = 0 \\ \varepsilon = \dfrac{du(x)}{dx}\mathbf{x} \end{array} \right\} \tag{A.3.7}$$

Le travail virtuel des inter-efforts s'obtient par

$$W_i^* = \int_{s1}^{s2} \left\{ ES \frac{du}{ds} \frac{du^*}{ds} \right\} ds \tag{A.3.8}$$

On choisit un champ de déplacement qui va s'exprimer en fonction des déplacements des noeuds 1 et 2. Nous avons deux degrés de liberté, il nous faut un champ de déplacement à deux inconnues. Une fonction linéaire de la forme suivante convient

$$u(x) = ax + b \tag{A.3.9}$$

avec les conditions aux bords suivantes

$$u(0) = u1 \text{ et } u(L) = u2$$

ce qui donne

$$u(x) = u1\frac{L-x}{L} + u2\frac{x}{L} = [\phi(x)]\,[\mathbf{U}] \tag{A.3.10}$$

en posant $[\mathbf{U}] = \left[\begin{array}{c} u1 \\ u2 \end{array} \right]$, la colonne des déplacements et $[\phi(x)] = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{L-x}{L} & \dfrac{x}{L} \end{array} \right]$, la ligne des fonctions de formes de l'élément. La dérivée $\dfrac{du(x)}{dx}$ se calcule aisément :

$$\frac{du(x)}{dx} = -u1\frac{1}{L} + u2\frac{1}{L} = [\psi]\,[\mathbf{U}] \tag{A.3.11}$$

On notera que les termes de $[\psi]$ sont des constantes. Il est facile d'intégrer ensuite le travail virtuel des inter-efforts

$$W_i^* = \int_0^L ES\,[\mathbf{U}]^t\,[\psi]^t\,[\psi]\,[\mathbf{U}^*]\,dx = ELS\,[\mathbf{U}]^t\,[\psi]^t\,[\psi]\,[\mathbf{U}^*] \tag{A.3.12}$$

On note $[\mathbf{K}_{tc}]$ la matrice carrée obtenue par

$$[\mathbf{K}_{tc}] = ELS\,[\psi]^t\,[\psi] \tag{A.3.13}$$

Le produit $[\psi]^t\,[\psi]$ vaut

$$[\psi]^t\,[\psi] = \frac{1}{L^2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.3.14}$$

Finalement pour la traction-compression, le travail virtuel des inter efforts s'écrit

$$W_i^* = [\mathbf{U}]^t\,[K_{tc}]\,[\mathbf{U}^*] \tag{A.3.15}$$

avec

$$[\mathbf{K}_{tc}] = \frac{ES}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.3.16}$$

Concernant le travail virtuels des efforts extérieurs, comme nous ne considérons que des charges concentrées aux noeuds, la formulation est très simple

$$W_e^* = \sum_i \{\mathbf{F}(s_i)\} \otimes \{\mathbf{U}^*(s_i)\} = \sum_i N_i u_i^* = [\mathbf{F}]^t\,[\mathbf{U}^*] \tag{A.3.17}$$

avec $[\mathbf{F}]$, la colonne des forces nodales.

A.3.3 Poutre en flexion

Dans le cas d'une poutre en flexion, on dispose de quatre conditions aux noeuds
$v(0) = v1\,;\, v(L) = v2\,;\, \dfrac{dv}{dx}(0) = \phi 1\,;\, \dfrac{dv}{dx}(L) = \phi 2$
Dans ces conditions, il est nécessaire de prendre une fonction de déplacement de degré 3, qui contient 4 constantes :

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow \frac{dv(x)}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c \tag{A.3.18}$$

Des conditions initiales, on tire :
$c = \phi 1\,;\, d = v1\,;$
$a = \dfrac{2}{L^3}(v1 - v2) + \dfrac{1}{L^2}(\phi 1 + \phi 2)\,;\, b = -\dfrac{3}{L^2}(v1 - v2) - \dfrac{1}{L}(2\phi 1 + \phi 2)$
Ce qui nous amène à l'expression matricielle

$$v(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 & L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & 3\xi^2 - 2\xi^3 & L(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v1 \\ \phi 1 \\ v2 \\ \phi 2 \end{bmatrix} = [\phi(x)]\,[\mathbf{U}] \tag{A.3.19}$$

avec $\xi = \dfrac{x}{L}$

Dans l'expression du travail des efforts intérieurs, nous avons besoin de la dérivée seconde de $v(x)$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = \left[\begin{array}{cccc} \dfrac{6}{L^2}(-1+2\xi) & \dfrac{2}{L}(-2+3\xi) & \dfrac{6}{L^2}(1-2\xi) & \dfrac{2}{L}(-1+3\xi) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} v1 \\ \phi 1 \\ v2 \\ \phi 2 \end{array} \right] = [\psi(x)]\,[\mathbf{U}] \quad \text{(A.3.20)}$$

Cette fois-ci, les termes ne sont pas des constantes, nous devons intégrer ces fonctions sur l'élément pour obtenir l'expression du travail virtuel :

$$W_i^* = \int_0^L EI \frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2v^*}{dx^2}dx = EI\,[\mathbf{U}]^t \int_0^L [\psi(x)]^t\,[\psi(x)]\,dx\,[\mathbf{U}^*] \quad \text{(A.3.21)}$$

La matrice carrée de flexion $[\mathbf{K}_{fl}]$ est obtenue par

$$[\mathbf{K}_{fl}] \quad = \quad EI \int_0^L [\psi(x)]^t\,[\psi(x)]\,dx \quad = \quad \frac{EI}{L^3} \left[\begin{array}{cccc} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{array} \right] \quad \text{(A.3.22)}$$

En assemblant les deux matrices $[\mathbf{K}_{tc}]$ et $[\mathbf{K}_{fl}]$, nous obtenons la matrice de raideur élémentaire en axe propre $\mathbf{K}$, de telle sorte que le principe des travaux virtuels s'écrit alors

$$W_i^* + W_e^* = 0 \quad \text{(A.3.23)}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{U}]^t\,[\mathbf{K}]\,[\mathbf{U}^*] = [\mathbf{F}]^t\,[\mathbf{U}^*] \quad \text{(A.3.24)}$$

Cette dernière relation est valable quel que soit $[\mathbf{U}^*]$, on peut la réécrire sous la forme

$$[\mathbf{K}]\,[\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \quad \text{(A.3.25)}$$

avec

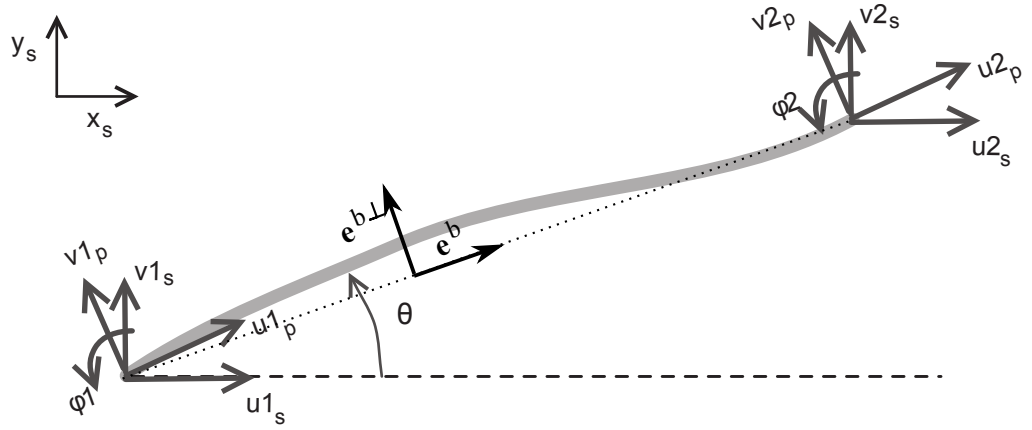


FIGURE A.3.2 – Degrés de liberté associé au repère structural

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} u1 \\ v1 \\ \phi 1 \\ u2 \\ v2 \\ \phi 2 \end{bmatrix} ; [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} F1x \\ F1y \\ M1z \\ F2x \\ F2y \\ M2z \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad \text{(A.3.26)}$$

A.3.4 Matrice de raideur élémentaire dans le repère structural

Le repère structural est le repère fixe arbitrairement choisi par l'utilisateur pour définir sa structure. Il faut que toutes les matrices et vecteurs soient construits dans le même repère pour pouvoir les assembler. On définit aux noeuds des degrés de liberté dans le repère structural (voir la figure A.3.2).

Le passage des degrés de liberté de l'un des repères vers l'autre se fait à l'aide d'une matrice de rotation [**R**], telle que

$$[\mathbf{U}_p] \quad = \quad [\mathbf{R}]\,[\mathbf{U}_s] \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} u1_p \\ v1_p \\ \phi 1_p \\ u2_p \\ v2_p \\ \phi 2_p \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \\ \phi 1_s \\ u2_s \\ v2_s \\ \phi 2_s \end{bmatrix} \tag{A.3.27}$$

avec $c = \cos(\theta)\,;\ s = \sin(\theta)$. De même, on pourrait écrire

$$[\mathbf{F}_p] = [\mathbf{R}]\,[\mathbf{F}_s] \tag{A.3.28}$$

On tire des relations précédentes

$$[\mathbf{F}_p] \;=\; [\mathbf{R}]\,[\mathbf{F}_s] \;=\; [\mathbf{K}_p]\,[\mathbf{U}_p] \;=\; [\mathbf{K}_p]\,[\mathbf{R}]\,[\mathbf{U}_s] \;\Rightarrow\; [\mathbf{F}_s] \;=\; [\mathbf{R}]^{-1}\,[\mathbf{K}_p]\,[\mathbf{R}]\,[\mathbf{U}_s] \tag{A.3.29}$$

On rappelle que les matrices de rotations sont symétriques, inversibles et que leur inverse est égal à leur transposée.

Nous déduisons de la relation précédente l'expression de la matrice de raideur élémentaire en axes structuraux

$$[\mathbf{K}_s] = [\mathbf{R}]^{-1}\,[\mathbf{K}_p]\,[\mathbf{R}] \tag{A.3.30}$$

$$[\mathbf{K}_s] = \begin{bmatrix} \frac{E\,tc^2}{L} + 12\,\frac{s^2 E\,I}{L^3} & \frac{cE\,ts}{L} - 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & -6\,\frac{sE\,I}{L^2} & -\frac{E\,tc^2}{L} - 12\,\frac{s^2 E\,I}{L^3} & -\frac{cE\,ts}{L} + 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & -6\,\frac{sE\,I}{L^2} \\ \frac{cE\,ts}{L} - 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & \frac{E\,ts^2}{L} + 12\,\frac{c^2 E\,I}{L^3} & 6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & -\frac{cE\,ts}{L} + 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & -\frac{E\,ts^2}{L} - 12\,\frac{c^2 E\,I}{L^3} & 6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} \\ -6\,\frac{sE\,I}{L^2} & 6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & 4\,\frac{E\,I}{L} & 6\,\frac{sE\,I}{L^2} & -6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & 2\,\frac{E\,I}{L} \\ -\frac{E\,tc^2}{L} - 12\,\frac{s^2 E\,I}{L^3} & -\frac{cE\,ts}{L} + 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & 6\,\frac{sE\,I}{L^2} & \frac{E\,tc^2}{L} + 12\,\frac{s^2 E\,I}{L^3} & \frac{cE\,ts}{L} - 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & 6\,\frac{sE\,I}{L^2} \\ -\frac{cE\,ts}{L} + 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & -\frac{E\,ts^2}{L} - 12\,\frac{c^2 E\,I}{L^3} & -6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & \frac{cE\,ts}{L} - 12\,\frac{sE\,I\,c}{L^3} & \frac{E\,ts^2}{L} + 12\,\frac{c^2 E\,I}{L^3} & -6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} \\ -6\,\frac{sE\,I}{L^2} & 6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & 2\,\frac{E\,I}{L} & 6\,\frac{sE\,I}{L^2} & -6\,\frac{E\,I\,c}{L^2} & 4\,\frac{E\,I}{L} \end{bmatrix} \tag{A.3.31}$$

A.3.5 Assemblage des matrices élémentaires

L'assemblage des matrices élémentaires est l'opération qui consiste à construire la matrice de raideur de la structure entière. Cette opération résulte du principe des travaux virtuels appliqué à la structure entière. Le champ des déplacements virtuels appliqués étant arbitraire, il en résulte que chaque noeud doit être en équilibre. La raideur associée à un degré de liberté est la somme algébrique des raideurs de chaque élément de matrice élémentaire $[\mathbf{K}_s]$ ayant ce noeud en commun. On peut représenter cette opération de manière graphique dans la figure A.3.3.

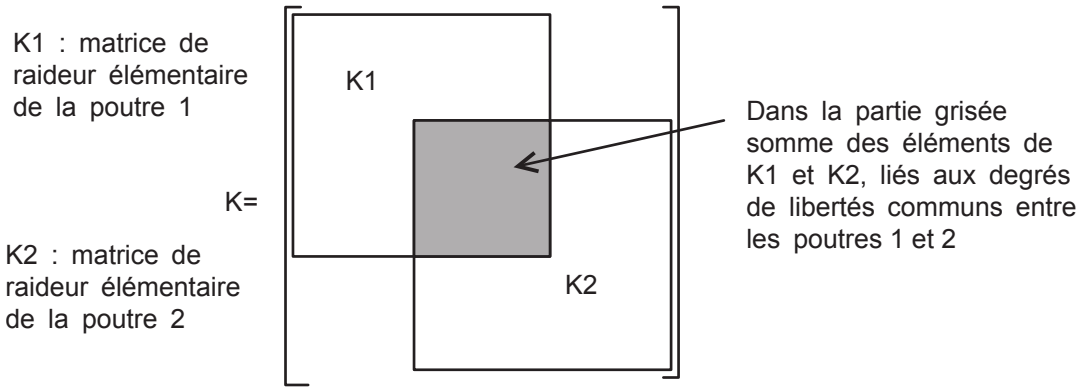


FIGURE A.3.3 – Illustration de l'opération d'assemblage de matrices de raideurs élémentaires

Après assemblage, le système matriciel s'écrit sous la forme

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{K}]\,[\mathbf{U}] \tag{A.3.32}$$

On ne peut pas le résoudre en l'état. Il faut déterminer quelles sont les inconnues du système et quelles sont les conditions aux limites. Il peut s'agir d'inconnues de déplacement ou d'efforts. Différentes méthodes ont été développées pour résoudre le problème, particulièrement quand le nombre de degrés de liberté est très élevé.

A.4 Expression vectorielle des efforts dans le repère structural

Nous avons préféré utiliser au cours de nos travaux les expressions vectorielles pour les efforts et les moments. Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment à partir des équations de la théorie des poutres que nous venons de développer nous pouvons obtenir ces expressions vectorielles.

Nous partirons des efforts exprimés dans le repère propre d'une poutre

$$[\mathbf{K}]\,[\mathbf{U}] = [\mathbf{F}] \tag{A.4.1}$$

avec

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} u1_p \\ v1_p \\ \phi 1_p \\ u2_p \\ v2_p \\ \phi 2_p \end{bmatrix} ; [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} F1x_p \\ F1y_p \\ M1z_p \\ F2x_p \\ F2y_p \\ M2z_p \end{bmatrix} ; [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

en repère propre. Nous nous servirons également de l'équation de rotation A.3.27

$$[\mathbf{U}_p] = [\mathbf{R}]\,[\mathbf{U}_s] \Rightarrow \begin{bmatrix} u1_p \\ v1_p \\ \phi 1_p \\ u2_p \\ v2_p \\ \phi 2_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \\ \phi 1_s \\ u2_s \\ v2_s \\ \phi 2_s \end{bmatrix}$$

Chaque poutre étant en équilibre, on n'a besoin que des efforts en un seul des deux noeuds, les efforts à l'autre noeud étant opposés. On obtient les efforts suivants au noeud 2, que nous considérerons dans nos travaux comme le noeud extrémité :

$$F2x_p = \frac{ES}{L}\left(-u1_p + u2_p\right) = \frac{ES}{L}\left(\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \cdot \left(-\begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix}\right)\right) \tag{A.4.2}$$

$$\begin{aligned} F2y_p &= \frac{12EI}{L^3}\left(v2_p - v1_p + \frac{L}{2}\left(\phi 1_p + \phi 2_p\right)\right) \\ &= \frac{12EI}{L^3}\left(\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right) - \frac{L}{2}\left(\phi 1_s + \phi 2_s\right)\right) \end{aligned} \tag{A.4.3}$$

Pour ce qui est des moments, nous devons exprimer les moments aux deux extrémités :

$$\begin{aligned} M1z_p &= \frac{6EI}{L^2}\left(v1_p - v2_p\right) + \frac{2EI}{L}\left(2\phi 1_p + \phi 2_p\right) \\ &= \frac{6EI}{L^2}\left(-\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right)\right) + \frac{2EI}{L}\left(2\phi 1_s + \phi 2_s\right) \end{aligned} \tag{A.4.4}$$

$$\begin{aligned} M2z_p &= \frac{6EI}{L^2}\left(v1_p - v2_p\right) + \frac{2EI}{L}\left(\phi 1_p + 2\phi 2_p\right) \\ &= \frac{6EI}{L^2}\left(-\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right)\right) + \frac{2EI}{L}\left(\phi 1_s + 2\phi 2_s\right) \end{aligned} \tag{A.4.5}$$

Nous poserons les vecteurs suivant (voir la figure A.3.2)

- le vecteur directeur de la poutre $\mathbf{e}^b = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}$
- le vecteur unitaire normal à la poutre $\mathbf{e}^{b\perp} = \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix}$
- les vecteurs déplacements aux noeuds dans le repère structural $\mathbf{u}1 = \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}$ et $\mathbf{u}2 = \begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix}$,

Nous pouvons alors réécrire la tension de la poutre $F2x_p$, c'est à dire l'équation A.4.2 sous la forme

$$F2x_p = \frac{ES}{L}\left(\mathbf{e}^b \cdot (-\mathbf{u}1 + \mathbf{u}2)\right) \tag{A.4.6}$$

Nous nommerons cette tension N, elle est portée par le vecteur directeur de la poutre :

$$N\mathbf{e}^b = \frac{ES}{L}\left(\mathbf{e}^b \cdot (-\mathbf{u}1 + \mathbf{u}2)\right)\mathbf{e}^b \tag{A.4.7}$$

On nommera usuellement dans cette thèse O le noeud origine 1 et E le noeud extrémité 2.

$$N\mathbf{e}^b = \frac{ES}{L}\left(\mathbf{e}^b \cdot (-\mathbf{u}_O + \mathbf{u}_E)\right)\mathbf{e}^b \tag{A.4.8}$$

L'effort tranchant $F2y_p$, équation A.4.3, peut être aussi réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} F2y_p &= \frac{12EI}{L^3}\left(\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right) - \frac{L}{2}\left(\phi 1_s + \phi 2_s\right)\right) \\ &= \frac{12EI}{L^3}\left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}2 - \mathbf{u}1) - \frac{L}{2}\left(\phi 1_s + \phi 2_s\right)\right) \end{aligned} \tag{A.4.9}$$

Cet effort est porté par le vecteur unitaire normal à la poutre $\mathbf{e}^{b\perp}$, nous le nommerons préférentiellement dans nos travaux T_t donc

$$T_t\mathbf{e}^{b\perp} = \frac{12EI}{L^3}\left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O) - \frac{L}{2}\left(\phi_O + \phi_E\right)\right)\mathbf{e}^{b\perp} \tag{A.4.10}$$

Nous allons procéder de la même manière pour les moments, équations A.4.4 et A.4.5.

$$\begin{aligned} M1z_p &= \frac{6EI}{L^2}\left(-\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right)\right) + \frac{2EI}{L}\left(2\phi 1_s + \phi 2_s\right) \\ &= \frac{2EI}{L^2}\left(L\left(2\phi 1_s + \phi 2_s\right) - 3\begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{2EI}{L^2}\left(L\left(2\phi_O + \phi_E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \end{aligned} \tag{A.4.11}$$

Ce moment sera considéré au point origine O, il est porté par le vecteur $\mathbf{z} = \mathbf{k} = \mathbf{e}_3$ normal au plan.

$$M_O \mathbf{e}_3 = \frac{2EI}{L^2} \left(L \left(2\phi_O + \phi_E \right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O \right) \right) \mathbf{e}_3 \tag{A.4.12}$$

De la même manière, pour le moment au point extrémité E

$$\begin{aligned} M2z_p &= \frac{6EI}{L^2} \left(- \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix} \right) \right) + \frac{2EI}{L} \left(\phi 1_s + 2\phi 2_s \right) \\ &= \frac{2EI}{L^2} \left(L \left(\phi 1_s + 2\phi 2_s \right) - 3 \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u2_s \\ v2_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u1_s \\ v1_s \end{bmatrix} \right) \right) \\ &\Rightarrow M_E \mathbf{e}_3 = \frac{2EI}{L^2} \left(L \left(\phi_O + 2\phi_E \right) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O \right) \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{A.4.13}$$

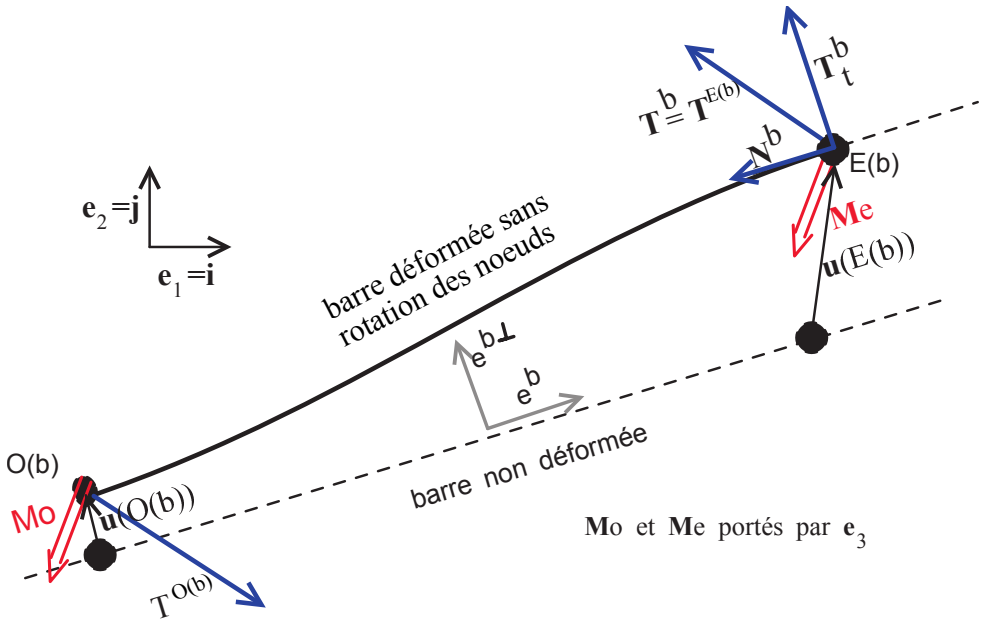
Dans le chapitre 2 traitant de l'homogénéisation non polaire, on a utilisé une formulation simplifiée de ces équations, en négligeant le paramètre de rotation. Cette formulation simplifiée est résumée dans le tableau A.1 ; on considère que $\phi_O = 0$, et $\phi_E = 0$.

Le tableau A.2 résume les formules pour le cas général ou l'on tient compte de la rotation des noeuds. On remarquera que l'on peut écrire les modules de raideurs k_f et k_l de manière différente suivant les hypothèses faites pour le paramètre d'épaisseur dans le cas de treillis 2D (voir la figure explicative A.4.1).

On remarquera que l'équation A.3.24 contient l'équilibre complet des noeuds du treillis. À partir de celle ci, on peut tirer l'équation suivante, traduisant l'équilibre des moments seuls du treillis en puissance virtuelle

$$\sum_b \mathbf{M}_O^b . \dot{\theta}_O^* + \mathbf{M}_E^b . \dot{\theta}_E^* = \mathbf{0} \tag{A.4.22}$$

Cette équation justifie l'équilibre des moments du treillis tel qu'il est écrit dans le chapitre 3 de cette thèse traitant de l'homogénéisation micropolaire.



$$N\mathbf{e}^b = k_l \left(\mathbf{e}^b \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}^b \tag{A.4.14}$$

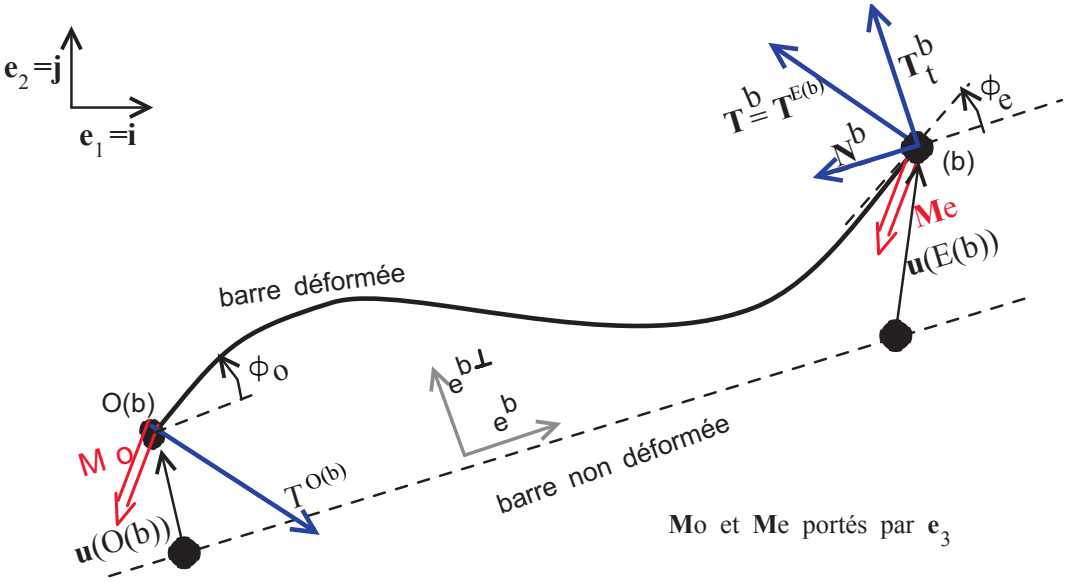
$$T_t\mathbf{e}^{b\perp} = k_f \left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}^{b\perp} \tag{A.4.15}$$

$$M_O\mathbf{e}_3 = \frac{k_f L}{6} \left(-3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}_3 \tag{A.4.16}$$

$$M_E\mathbf{e}_3 = \frac{k_f L}{6} \left(-3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}_3 \tag{A.4.17}$$

Avec $k_l = \dfrac{E_s S}{L}$, raideur en traction-compression, $k_f = \dfrac{12 E_s I}{L^3}$, raideur en flexion

TABLE A.1 – Modèle de poutre de Bernoulli partiel et résumé des formules vectorielles associées (utilisées dans le chapitre 2) pour les efforts et les moments.



$$N\mathbf{e}^b = k_l \left(\mathbf{e}^b \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}^b \tag{A.4.18}$$

$$T_t \mathbf{e}^{b\perp} = k_f \left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O) - \frac{L}{2}(\phi_O + \phi_E)\right) \mathbf{e}^{b\perp} \tag{A.4.19}$$

$$M_O \mathbf{e}_3 = \frac{k_f L}{6} \left(L(2\phi_O + \phi_E) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}_3 \tag{A.4.20}$$

$$M_E \mathbf{e}_3 = \frac{k_f L}{6} \left(L(\phi_O + 2\phi_E) - 3\mathbf{e}^{b\perp} \cdot (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_O)\right) \mathbf{e}_3 \tag{A.4.21}$$

Avec $k_l = \dfrac{E_s S}{L}$, raideur en traction-compression, $k_f = \dfrac{12 E_s I_z}{(L)^3}$, raideur en flexion. Dans le cas de treillis 2D, en posant $\eta = \dfrac{t}{L}$ et l'épaisseur $e = Cte = 1$, les modules peuvent se simplifier en $k_l = E_s \eta$, $k_f = E_s \eta^3$

TABLE A.2 – Modèle de poutre de Bernoulli complet et résumé des formules vectorielles associées pour les efforts et les moments

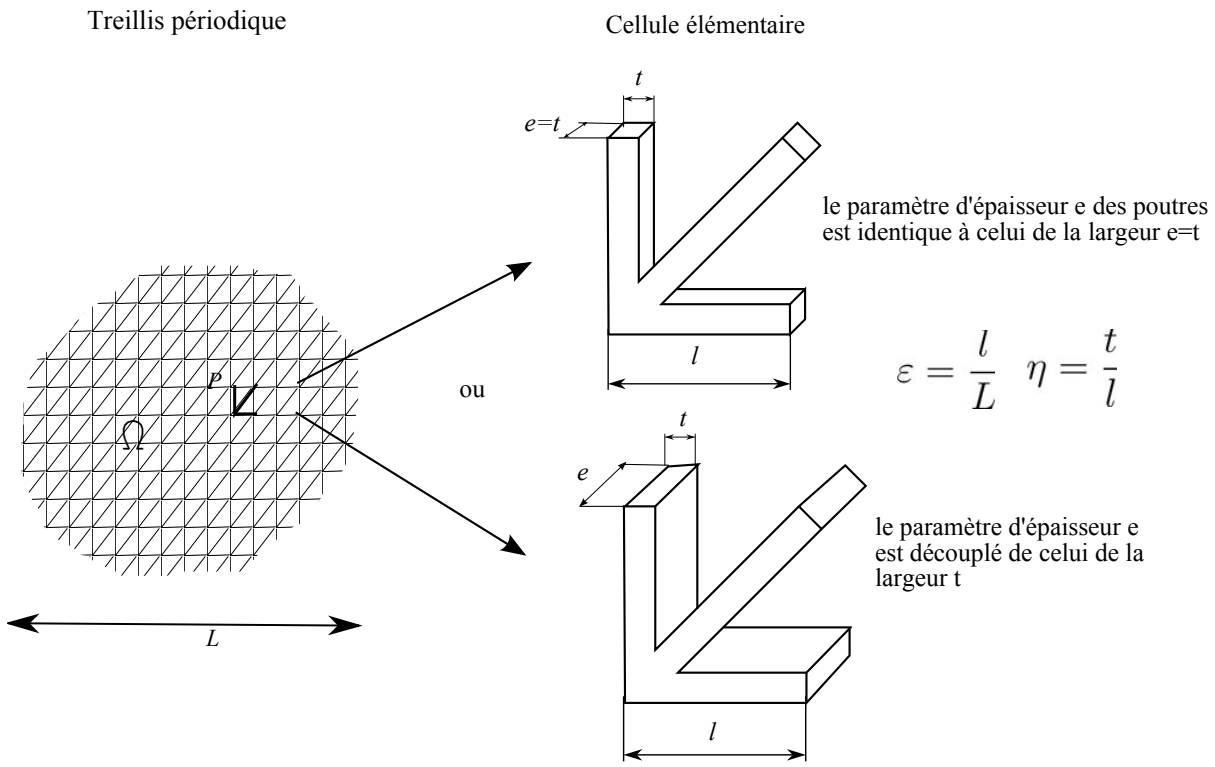


FIGURE A.4.1 – Paramètres géométriques caractérisant les différents niveaux de la microstructure d'un treillis. Définition des deux rapports d'échelle η et ε, existant au sein de la microstructure

Annexe B

Application de la méthode d'homogénéisation à différents treillis

Sommaire

B.1 Introduction **225**
B.2 le treillis Kagome **226**
B.2.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 227
B.2.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . 228
B.3 Le treillis Triangle-Triangle ("T-T") **228**
B.3.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 229
B.3.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . 229
B.4 Treillis "Mixte" **229**
B.4.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 231
B.4.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . 231
B.5 Treillis "SI-square" **231**
B.5.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 232
B.5.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . 233
B.6 Treillis "Triangle" **233**
B.6.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 234
B.6.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié . . 234
B.7 Le treillis 'Octet' **234**
B.7.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion) 237

B.1 Introduction

Cette annexe apporte en complément par rapport au chapitre deux. On y expose de manière plus détaillée les résultats issus du traitement d'un certain nombre de treillis, ainsi

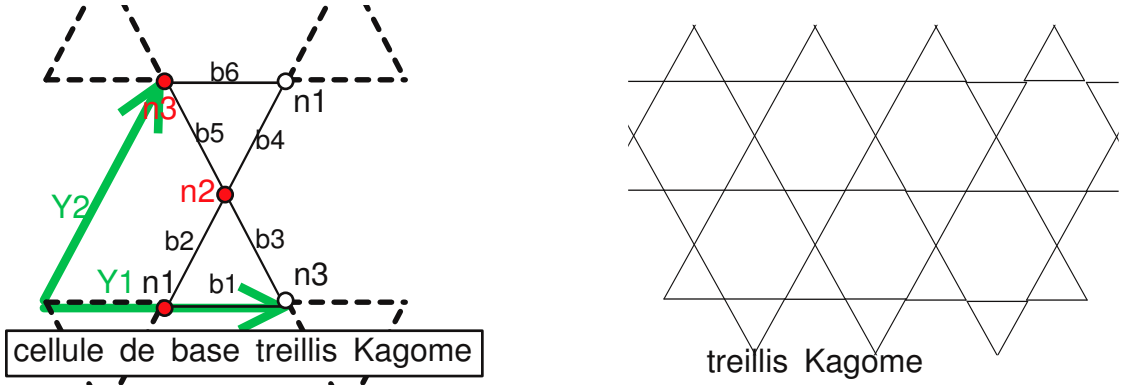


FIGURE B.2.1 – treillis "Kagome"

que les fichiers textes de données d'entrée. Deux codes de calcul sont utilisés dans cette annexe, le code purement extensionnel et le code incorporant la flexion mais avec un modèle de poutre de Bernoulli simplifié.

Le code de calcul extensionnel délivre un tenseur de contrainte symétrique. La matrice de raideur $[K]$ est telle que

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Le code de calcul avec flexion et modèle de poutre de Bernoulli simplifié délivre un tenseur de contrainte non-symétrique. La matrice de raideur $[K]$ est alors

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \end{bmatrix}$$

B.2 le treillis Kagome

Listing code source pour le treillis Kagome :

```
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=6;
e[1]:=<1,0>;
e[2]:=<1/2,sqrt(3)/2>;
e[3]:=<1/2,-sqrt(3)/2>;
e[4]:=e[2];
e[5]:=<-1/2,sqrt(3)/2>;
e[6]:=e[1];
# def des vecteurs de pavage
```

```
Y2:=<1/2,sqrt(3)/2>;
Y1:=<1,0>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=2*L;
L2:=2*L;
# nombre de noeuds
nNoeuds:=3;
# tableau des barres
Ob:=[1,1,2,2,2,3];
Eb:=[3,2,3,1,3,1];
delta1:=[1,0,1,0,0,0];
delta2:=[-1,0,-1,1,0,1];
# ajout des valeurs de raideur pour chaque barres
kb:=t*Es/L;
Iz:=t^3/12;
kf:=12*Es*Iz/(L^3);
Kb:=[kb,kb,kb,kb,kb,kb];
Kc:=[kf,kf,kf,kf,kf,kf];
# ajout des volumes de chaque barre
V:=t*L;
Vb:=[V,V,V,V,V,V];
#section de chaque barres
tb:=[t,t,t,t,t,t];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieKagome.txt";
```

B.2.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

$$[K] = \begin{bmatrix} 3/8\,\frac{Est\sqrt{3}}{L} & 1/8\,\frac{Est\sqrt{3}}{L} & 0 \\ 1/8\,\frac{Est\sqrt{3}}{L} & 3/8\,\frac{Est\sqrt{3}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{Est\sqrt{3}}{L} \end{bmatrix}$$

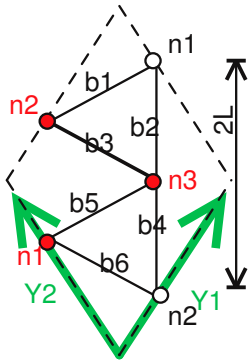


FIGURE B.3.1 – descriprion géométrique du treillis "T-T"

B.2.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(3L^2+t^2\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(3L^2+t^2\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2+3t^2\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2-t^2\right)}{L^3} \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}Est\left(L^2+3t^2\right)}{L^3} \end{bmatrix}$$

B.3 Le treillis Triangle-Triangle ("T-T")

fichier texte du treillis Triangle-Triangle :

```
# toutes les expressions vectorielles sont dans le repère orthonormé (i,j)
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=6;
e[1]:=<sqrt(3)/2,1/2>;
e[2]:=<0,1>;
e[3]:=<sqrt(3)/2,-1/2>;
e[4]:=-e[2];
e[5]:=e[1];
e[6]:=e[3];
# def des vecteurs de pavage
Y2:=<-1/2,sqrt(3)/2>;
Y1:=<1/2,sqrt(3)/2>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=sqrt(3)*L;
L2:=sqrt(3)*L;
# nombre de noeuds
```

```
nNoeuds:=4;
# tableau des barres
Ob:=[2,3,2,3,1,1];
Eb:=[1,1,3,2,3,2];
delta1:=[1,1,0,0,0,0];
delta2:=[0,0,0,-1,0,-1];
# valeurs de raideur pour chaque barres
kb:=A*E/L;
Kb:=[kb,kb,kb,kb,kb,kb];
# volume occuppé par chaque barre
V:=t*L;
Vb:=[V,V,V,V,V,V];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieT-T.txt";
```

B.3.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

Comme on le remarque dans le chapitre 2, le treillis Triangle-Triangle présente des singularités ; en effet le tenseur de contrainte obtenu est le suivant

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1/8\,\frac{tE_s\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial x}U1(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}U2(x,y)\right)}{L} & 1/8\,\frac{tE_s\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial y}U1(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U2(x,y)\right)}{L} \\ 1/8\,\frac{tE_s\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial y}U1(x,y)+\frac{\partial}{\partial x}U2(x,y)\right)}{L} & -1/8\,\frac{tE_s\sqrt{3}\left(\frac{\partial}{\partial x}U1(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}U2(x,y)\right)}{L} \end{bmatrix}$$

B.3.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié

$$[K] = \begin{bmatrix} -1/8\,\frac{\sqrt{3}(-L^4-12\,L^2t^2-3\,t^4)tEs}{L^3(3\,t^2+L^2)} & -1/8\,\frac{\sqrt{3}(L^4-4\,L^2t^2+3\,t^4)tEs}{L^3(3\,t^2+L^2)} & 0 & 0 \\ 1/8\,\frac{\sqrt{3}(-L^4+4\,L^2t^2-3\,t^4)tEs}{L^3(3\,t^2+L^2)} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}(L^4+12\,L^2t^2+3\,t^4)tEs}{L^3(3\,t^2+L^2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{\sqrt{3}(3\,L^4+12\,L^2t^2+t^4)tEs}{L^3(3\,L^2+t^2)} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}(3\,L^4-4\,L^2t^2+t^4)tEs}{L^3(3\,L^2+t^2)} \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{\sqrt{3}(3\,L^4-4\,L^2t^2+t^4)tEs}{L^3(3\,L^2+t^2)} & 1/8\,\frac{\sqrt{3}(3\,L^4+12\,L^2t^2+t^4)tEs}{L^3(3\,L^2+t^2)} \end{bmatrix}$$

B.4 Treillis "Mixte"

Voir la figure B.4.1.
Fichier d'entrée :

```
# toutes les expressions vectorielles sont dans le repère orthonormé (i,j)
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=12;
e[1]:=<1,0>;
```

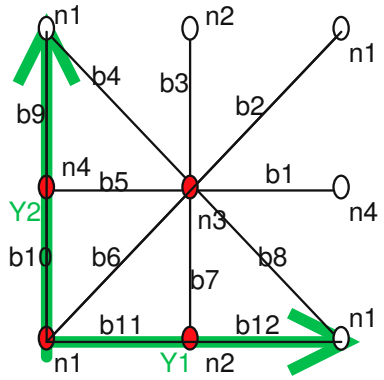


FIGURE B.4.1 – treillis "Mixte"

```
e[2]:=<sqrt(2)/2,sqrt(2)/2>;
e[3]:=<0,1>;
e[4]:=<-sqrt(2)/2,sqrt(2)/2>;
e[5]:=<-1,0>;
e[6]:=<-sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2>;
e[7]:=<0,-1>;
e[8]:=<sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2>;
e[9]:=e[3];
e[10]:=e[3];
e[11]:=e[1];
e[12]:=e[1];
# def des vecteurs de pavage
Y1:=<1,0>;
Y2:=<0,1>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=2*L;
L2:=2*L;
# nombre de noeuds
nNoeuds:=4;
# tableau des barres
Ob:=[3,3,3,3,3,3,3,3,4,1,1,2];
Eb:=[4,1,2,1,4,1,2,1,1,4,2,1];
delta1:=[1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1];
delta2:=[0,1,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0];
# ajout des valeurs de raideur pour chaque barres
kb1:=A*E/L;
kb2:=A*E/(sqrt(2)*L);
Kb:=[kb1,kb2,kb1,kb2,kb1,kb2,kb1,kb2,kb1,kb1,kb1,kb1];
# ajout des volumes de chaque barre
V1:=t*L;
```

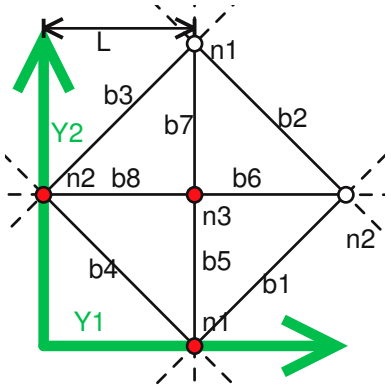


FIGURE B.5.1 – treillis "SI- square"

```
V2:=t*L*sqrt(2);
Vb:=[V1,V2,V1,V2,V1,V2,V1,V2,V1,V1,V1,V1];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieMixte.txt";
```

B.4.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/4\,\frac{tEs\left(4+\sqrt{2}\right)}{L} & 1/4\,\frac{tEs\sqrt{2}}{L} & 0 \\ 1/4\,\frac{tEs\sqrt{2}}{L} & 1/4\,\frac{tEs\left(4+\sqrt{2}\right)}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{tEs\sqrt{2}}{L} \end{bmatrix}$$

B.4.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/8\,\frac{Es\,t\left(8\,L^2+2\,\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{Es\,t\left(8\,L^2+2\,\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+8\,t^2\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} \\ 0 & 0 & 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2}\right)}{L^3} & 1/8\,\frac{Es\,t\left(2\,\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+8\,t^2\right)}{L^3} \end{bmatrix}$$

B.5 Treillis "SI-square"

Voir la figure B.5.1.
Fichier d'entrée :

```
# toutes les expressions vectorielles sont dans le repère orthonormé (i,j)
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=8;
```

```
e[1]:=<sqrt(2)/2,sqrt(2)/2>;
e[2]:=<-sqrt(2)/2,sqrt(2)/2>;
e[3]:=e[1];
e[4]:=<sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2>;
e[5]:=<0,1>;
e[6]:=<1,0>;
e[7]:=<0,1>;
e[8]:=<-1,0>;
# def des vecteurs de pavage
Y1:=<1,0>;
Y2:=<0,1>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=sqrt(2)*L;
L2:=sqrt(2)*L;
# nombre de noeuds
nNoeuds:=3;
# tableau des barres
Ob:=[1,2,2,2,1,3,3,3];
Eb:=[2,1,1,1,3,2,1,2];
delta1:=[1,-1,0,0,0,1,0,0];
delta2:=[0,1,1,0,0,0,1,0];
# ajout des valeurs de raideur pour chaque barres
kb1:=t*Es/L;
kb2:=2*t*Es/(sqrt(2)*L);
Kb:=[kb1,kb1,kb1,kb1,kb2,kb2,kb2,kb2];
# ajout des volumes de chaque barre
V1:=t*L;
V2:=t*L*sqrt(2)/2;
Vb:=[V1,V1,V1,V1,V2,V2,V2,V2];
# ajout de la section des barres
tb:=[t,t,t,t,t,t,t,t];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieSI-square.txt";
```

B.5.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/4\,\frac{tEs\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{L} & 1/2\,\frac{tEs}{L} & 0 \\ 1/2\,\frac{tEs}{L} & 1/4\,\frac{tEs\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\,\frac{tEs}{L} \end{bmatrix}$$

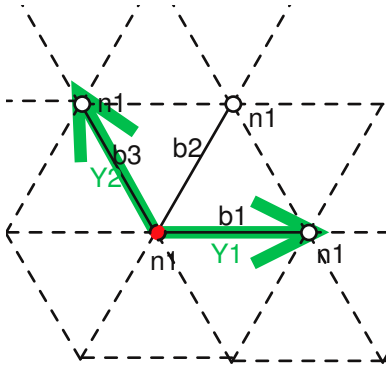


FIGURE B.6.1 – treillis "Triangle"

B.5.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+2\,L^2)\sqrt{2}}{L^3} & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2})\sqrt{2}}{L^3} & 0 & 0 \\ 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2})\sqrt{2}}{L^3} & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+2\,L^2)\sqrt{2}}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+4\,t^2)\sqrt{2}}{L^3} & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2})\sqrt{2}}{L^3} \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2-t^2\sqrt{2})\sqrt{2}}{L^3} & 1/4\,\frac{tEs\,(\sqrt{2}L^2+t^2\sqrt{2}+4\,t^2)\sqrt{2}}{L^3} \end{bmatrix}$$

B.6 Treillis "Triangle"

Voir la figure B.6.1.
Fichier d'entrée :

```
# toutes les expressions vectorielles sont dans le repère orthonormé (i,j)
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=3;
e[1]:=<1,0>;
e[2]:=<1/2,sqrt(3)/2>;
e[3]:=<-1/2,sqrt(3)/2>;
# def des vecteurs de pavage
Y1:=<1,0>;
Y2:=<-1/2,sqrt(3)/2>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=L;
L2:=L;
# nombre de noeuds
nNoeuds:=1;
# tableau des barres
Ob:=[1,1,1];
Eb:=[1,1,1];
```

```
delta1:=[1,1,0];
delta2:=[0,1,1];
# ajout des valeurs de raideur pour chaque barres
kb:=t*E/L;
Kb:=[kb,kb,kb];
# ajout des volumes de chaque barre
V:=t*L;
Vb:=[V,V,V];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieTriangle.txt";
```

B.6.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

$$[K] = \begin{bmatrix} 3/4\,\frac{\sqrt{3}tEs}{L} & 1/4\,\frac{\sqrt{3}tEs}{L} & 0 \\ 1/4\,\frac{\sqrt{3}tEs}{L} & 3/4\,\frac{\sqrt{3}tEs}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{\sqrt{3}tEs}{L} \end{bmatrix}$$

B.6.2 Résultats du code avec flexion, modèle de Bernoulli simplifié

$$[K] = \begin{bmatrix} 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(3\,L^2+t^2\right)}{L^3} & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(3\,L^2+t^2\right)}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2+3\,t^2\right)}{L^3} & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2-t^2\right)}{L^3} \\ 0 & 0 & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2-t^2\right)}{L^3} & 1/4\,\frac{\sqrt{3}Es\,t\left(L^2+3\,t^2\right)}{L^3} \end{bmatrix}$$

B.7 Le treillis 'Octet'

La géométrie du treillis Octet est décrite dans la figure B.7.1. La cellule de base complète est formée des deux figures (a) et (b), la décomposition n'a été faite que pour faciliter la vue.

La connectivité est établie grâce au tableau B.1.

Le fichier texte de données du treillis Octet pour le calcul :

```
# definitions de treillis 3D Octet
# toutes les expressions vectorielles sont dans le repère orthonormé (i,j,k)
# def des vecteurs unitaires des barres
nBarres:=24;
e[1]:=<sqrt(2)/2,sqrt(2)/2,0>;
e[2]:=<-sqrt(2)/2,sqrt(2)/2,0>;
e[3]:=e[1];e[4]:=e[2];
e[9]:=<0,sqrt(2)/2,-sqrt(2)/2>;
e[10]:=<0,sqrt(2)/2,sqrt(2)/2>;
```

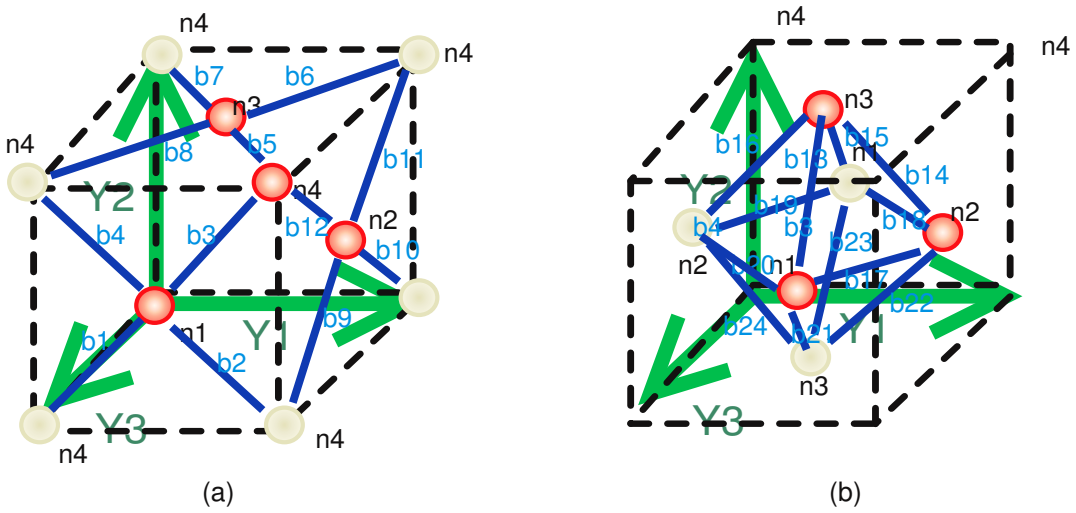


FIGURE B.7.1 – Description géométrique du treillis Octet

b	1*	2*	3	4	5	6	7*	8*	9*	10*	11	12
O	4	4	1	1	3	3	4	4	4	4	2	2
E	1	1	4	4	4	4	3	3	2	2	4	4
δ_1	1	0	0	-1	0	0	1	1	0	0	0	0
δ_2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
δ_3	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	-1	0

b	13	14	15*	16*	17	18*	19**	20*	21*	22*	23**	24**
O	1	2	1	2	1	1	2	2	3	3	3	3
E	3	3	3	3	2	2	1	1	1	2	1	2
δ_1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	-1
δ_2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
δ_3	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	0	-1	0

TABLE B.1 – Tableau de la connectivité du treillis Octet

* Les δ_i ont un signe inversé car il y a inversion du noeud origine et extrémité.

** les poutres ont leur deux extrémités hors de la cellule de base, les δ_i du tableau sont la somme de deux couples de triplets

```
e[11]:=e[9];e[12]:=e[10];
e[5]:=<sqrt(2)/2,0,sqrt(2)/2>;
e[8]:=<sqrt(2)/2,0,-sqrt(2)/2>;
e[7]:=e[5];e[6]:=e[8];
e[13]:=e[9];e[23]:=e[9];
e[14]:=e[2];e[24]:=e[2];
e[15]:=e[10];e[21]:=e[10];
e[16]:=e[1];e[22]:=e[1];
e[17]:=e[8];e[19]:=e[8];
e[18]:=e[5];e[20]:=e[5];
# def des vecteurs de pavage
Y1:=<1,0,0>;
Y2:=<0,1,0>;
Y3:=<0,0,1>;
# norme des vecteurs de pavage
L1:=sqrt(2)*L;
L2:=sqrt(2)*L;
L3:=sqrt(2)*L;
# nombre de noeuds
nNoeuds:=4;
# tableau des barres
Ob:=[4,4,1,1,3,3,4,4,4,4,2,2,1,2,1,2,1,1,2,2,3,3,3,3];
Eb:=[1,1,4,4,4,4,3,3,2,2,4,4,3,3,3,3,2,2,1,1,1,2,1,2];
delta1:=[1,0,0,-1,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0,-1];
delta2:=[1,1,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1];
delta3:=[0,0,0,0,0,-1,1,0,0,1,-1,0,0,0,1,0,0,1,-1,0,0,0,-1,0];
# ajout des valeurs de raideur pour chaque barres
kb:=t*E/L;
Kb:=[kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb,kb];
# ajout des volumes de chaque barre
V:=t*L;
Vb:=[V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V,V];
# nom du fichier de sortie des resultats
nomFichier:="sortieOctet.txt";
```

B.7.1 Résultats du code extensionnel (sans flexion)

Le tenseur de contrainte obtenu est

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(2\,\frac{\partial}{\partial x}U1+\frac{\partial}{\partial y}U2+\frac{\partial}{\partial z}U3\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}U1+\frac{\partial}{\partial x}U2\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}U1+\frac{\partial}{\partial x}U3\right)}{L^2} \\ \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}U1+\frac{\partial}{\partial x}U2\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}U1+2\,\frac{\partial}{\partial y}U2+\frac{\partial}{\partial z}U3\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}U2+\frac{\partial}{\partial y}U3\right)}{L^2} \\ \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}U1+\frac{\partial}{\partial x}U3\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial z}U2+\frac{\partial}{\partial y}U3\right)}{L^2} & \frac{1}{2}\frac{tE\sqrt{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}U1+2\,\frac{\partial}{\partial z}U3+\frac{\partial}{\partial y}U2\right)}{L^2} \end{bmatrix}$$

et la densité relative s'exprime par

$$\rho^* = 6\,\frac{\sqrt{2}t}{L^2}$$

et la matrice de raideur correspondante

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & \frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & \frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2\,\frac{\sqrt{2}tE}{L^2} \end{bmatrix}$$

On constate que ces résultats sont identiques à ceux de Mohr [2005].

Annexe C

Code source Maple développé à partir de l'algorithme micropolaire et de l'algorithme classique

Sommaire

C.1 Algorithme micropolaire et code source Maple correspondant **238**
C.2 Code source Maple correspondant à l'algorithme classique **246**

C.1 Algorithme micropolaire et code source Maple correspondant

algorithme	code source maple correspondant

Initialisation des tableaux de données.
Définition de la fonction de passage $x \xrightarrow{R} x(\lambda)$.
inconnues : $\mathbf{u}^n$ et ϕ^n
	`restart;`
	`with(linalg):`
	`with(LinearAlgebra):`
	`read "dataDiamantAuxetique2.txt";`

algorithme	code source maple correspondant

Transformation des expressions
$\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$
$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{Y_1},\mathbf{Y_2})} \mapsto \left(\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}\right)_{(\mathbf{i},\mathbf{j})}$
Cette étape est utile si on utilise un code standard dont la fonction produit vectoriel est exprimée dans un repère orthonormé classique.
Si on omet cette étape, toutes les fonctions opérant sur des vecteurs et tenseurs doivent être définies pour des coordonnées curvilinéaires.
	`R:=[L1*lambda1*Y1[1]+L2*lambda2*Y2 [1],L1*lambda1*Y1[2]+L2*lambda2*Y2 [2]];`
	`P1:=<diff(R[1],lambda1),diff(R[2],lambda1)>;`
	`P2:=<diff(R[1],lambda2),diff(R[2],lambda2)>;`
	`U:=<U1(x,y),U2(x,y)>;`
	`dU1xy:=<diff(U[1],x),diff(U[1],y)>;`
	`dU2xy:=<diff(U[2],x),diff(U[2],y)>;`
	`dPhixy:=<diff(phi(x,y),x),`
	`diff(phi(x,y),y)>;`
	`dU1:=<BilinearForm(P1,dU1xy,conjugate=false)`
	`,BilinearForm(P1,dU2xy,conjugate=false)>;`
	`dU2:=<BilinearForm(P2,dU1xy,conjugate=false)`
	`,BilinearForm(P2,dU2xy,conjugate=false)>;`
	`dPhi1:=BilinearForm(P1,dPhixy,conjugate =false);`
	`dPhi2:=BilinearForm(P2,dPhixy,conjugate =false);`

Initialisation des vecteurs déplacements $\mathbf{u}_1^i$ et $\mathbf{u}_2^i$, contenant les inconnues de déplacements	`for i from 1 to nNoeuds do`
	`De[i]:=<dx[i],dy[i]>;`
	`De2[i]:=<dx2[i],dy2[i]>;`
	`end do;`

initialisation des tableaux d'équations
equ1$[1..N_{max}]$,
$equ2[1..N_{max}]$,
avec N_{max} le nombre de noeuds de la cellule élémentaire.
equ1 est un tableau d'équations vectorielles, $equ2$ de scalaire.
	`for i from 1 to nNoeuds do`
	`equ1[i]:=<0,0>;`
	`equ2[i]:=0;`
	`end do;`

Calcul des vecteurs $e^{b\perp}$	`for i from 1 to nBarres do`
	`eT[i]:=<-e[i][2],e[i][1]>;`
	`end do;`

Pour chaque poutre $b \in \mathcal{B}_R$
$E := E_R(b)$,
$O := O_R(b)$
$\Delta\mathbf{U} := \mathbf{u}_1^E - \mathbf{u}_1^O + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda^i}\delta^i$,
$k_l := E_s\eta$
$N_1 := k_l\left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\Delta\mathbf{U}^b\right)\right)$,
	`for i from 1 to nBarres do`
	`depl:=factor(DotProduct((e[i]),(De[Eb[i]]`
	`-De[Ob[i]]+delta1[i]*dU1+delta2[i]*dU2),`
	`conjugate=false));`
	`N[i]:=Kb[i]*depl;`
	`end do;`

algorithme	code source maple correspondant

Pour chaque poutre $b \in \mathcal{B}_R$
$E := E_R(b)$,
$O := O_R(b)$
$\Delta\mathbf{U} := \mathbf{u}_1^E - \mathbf{u}_1^O + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \lambda^i}\delta^i$,
$k_f := E_s\eta^3$
$T_{1t} := k_f\left(\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}^b\right) - \frac{L^b}{2}\left(\phi_0^O + \phi_0^E\right)\right) M_1^O :=$
$k_f\frac{L^b}{6}[L^b\left(2\phi_0^O + \phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}^b\right)]$
$M_1^E := k_f\frac{L^b}{6}[L^b\left(\phi_0^O + 2\phi_0^E\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}^b\right)]$
$\mathbf{equ1}[E(b)] := \mathbf{equ1}[E(b)] + N_1^b\mathbf{e}^b + T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$
$\mathbf{equ1}[O(b)] := \mathbf{equ1}[O(b)] - N_1^b\mathbf{e}^b - T_{1t}^b\mathbf{e}^{b\perp}$
$equ2[E(b)] := equ2[E(b)] + M_1^E$,
$equ2[O(b)] := equ2[O(b)] + M_1^O$
les variables ϕ_1^n apparaîtront dans le code sources sous la forme phiN[n]
	`for i from 1 to nBarres do`
	`depl:=factor(DotProduct((eT[i]),`
	`(De[Eb[i]]-De[Ob[i]]+delta1[i]*dU1`
	`+delta2[i]*dU2),conjugate=false));`
	`phiE:=phiN[Eb[i]];`
	`phiO:=phiN[Ob[i]];`
	`T1[i]:=Kc[i]*(depl-Lb[i]/2*(phiE+phiO));`
	`Me1[i]:=simplify(Lb[i]/6*Kc[i]*(Lb[i]`
	`*(2*phiE+phiO)-3*depl));`
	`Mo1[i]:=simplify(Lb[i]/6*Kc[i]*(Lb[i]`
	`*(phiE+2*phiO)-3*depl));`
	`end do;`
	`for i from 1 to nBarres do`
	`nO:=Ob[i];`
	`nE:=Eb[i];`
	`equ1[nO]:=factor(equ[nO]-e[i]*N[i]`
	`-eT[i]*T1[i]);`
	`equ1[nE]:=factor(equ[nE]+e[i]*N[i]`
	`+eT[i]*T1[i]);`
	`equ2[nE]:=factor(equ4[nE]+Me1[i]);`
	`equ2[nO]:=factor(equ4[nO]+Mo1[i]);`
	`end do;`

construction de deux systèmes d'équations de $3N_{max}$ lignes au total
$\left[\ \mathbf{equ1}\ \right] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$,
$\left[\ equ2\ \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
pour faciliter le calcul on transforme les equ1 vectorielles en une double série d'équations scalaires
	`for i from 1 to nNoeuds do`
	`equX[i]:=<1,0>.equ1[i];`
	`equY[i]:=<0,1>.equ1[i];`
	`end do;`

Résolution des deux systèmes pour les variables $\mathbf{u}_1^n$ et ϕ_1^n	`lequ := {seq(equ2[i]=0,i=1..nNoeuds)`
	`,seq(equX[i] = 0, i = 1 .. nNoeuds)`
	`, seq(equY[i] = 0, i = 1 .. nNoeuds)};`
	`lvar := {seq(dx[i], i = 1 .. nNoeuds),`
	`seq(dy[i], i = 1 .. nNoeuds),`
	`seq(phiN[i], i = 1 .. nNoeuds)};`
	`solve(lequ, lvar);`
	`assign(%)`

algorithme	code source maple correspondant

Identification de $\phi^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ dans les variables de rotation ϕ_1^n.	`for i to nNoeuds do`
	`c1 := coeff(phiN[i], diff(U2(x, y),x));`
	`c2 := coeff(phiN[i], diff(U1(x, y),y));`
	`c := c1-c2;`
	`phiN[i]:=simplify(c*phi0+phiN[i]-(1/2)`
	`*c*(diff(U2(x, y), x)) +(1/2)`
	`*c*(diff(U1(x, y), y)))`
	`end do`

algorithme	code source maple correspondant

Traitement au second ordre identique au premier ordre mais avec les variables $\mathbf{u}_2^n$ et ϕ_1^n et les équations suivantes
$\Delta\mathbf{U}_2^b := \mathbf{u}_2^E - \mathbf{u}_2^O$
$N_2 := k_l \left(\mathbf{e}^b \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$,
$T_{2t} := k_f \left(\mathbf{e}^{b\perp} \cdot \left(\Delta\mathbf{U}_1^b\right) - \frac{L^b}{2}\left(\phi_1^O + \phi_1^E + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^i\right)\right)$
$M_2^{O(b)} :=$
$k_f \frac{L^b}{6}\left(L^b\left(2\phi_1^O + \phi_1^E + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^i\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$,
$M_2^{E(b)} :=$
$k_f \frac{L^b}{6}\left(L^b\left(\phi_1^O + 2\left(\phi_1^E + \frac{\partial\phi_0}{\partial\lambda^i}\delta^i\right)\right) - 3\mathbf{e}^{b\perp}\cdot\left(\Delta\mathbf{U}_2^b\right)\right)$
	`for i to nBarres do`
	`depl := simplify(DotProduct(e[i],`
	`De2[Eb[i]]-De2[Ob[i]],`
	`conjugate = false));`
	`N2[i] := Kb[i]*depl end do;`
	`for i to nBarres do`
	`depl := simplify(DotProduct(eT[i],`
	`De2[Eb[i]]-De2[Ob[i]], conjugate`
	`= false));`
	`phiE:=phiN2[Eb[i]]+delta1[i]*dPhi1`
	`+delta2[i]*dPhi2;`
	`phiO := phiN2[Ob[i]];`
	`T2[i] := Kc[i]*(depl-(1/2)* Lb[i]`
	`* (phiE+phiO));`
	`Me2[i]:=simplify((1/6)*Lb[i]*Kc[i]`
	`*(Lb[i]*(2*phiE+phiO)-3*depl));`
	`Mo2[i]:=simplify((1/6)*Lb[i]*Kc[i]`
	`*(Lb[i]*(phiE+2*phiO)-3*depl))`
	`end do;`
	`for i to nNoeuds do`
	`equ4[i] := ‘<,>‘(0, 0);`
	`equ3[i] := 0 end do;`
	`for i to nBarres do`
	`nO := Ob[i];`
	`nE := Eb[i];`
	`equ4[nO]:=simplify(equ4[nO]-e[i]`
	`*N2[i]-eT[i]*T2[i]);`
	`equ4[nE]:=simplify(equ4[nE]+e[i]`
	`*N2[i]+eT[i]*T2[i]);`
	`equ3[nE] := simplify(equ3[nE]+Me2[i]);`
	`equ3[nO] := simplify(equ3[nO]+Mo2[i]);`
	`end do;`
	`for i to nNoeuds do`
	`equX[i] := ‘<,>‘(1, 0).equ4[i];`
	`equY[i] := ‘<,>‘(0, 1).equ4[i];`
	`end do;`
	`lequ := {seq(equ3[i] = 0,`
	`i = 1 .. nNoeuds), seq(equX[i] = 0,`
	`i = 1 .. nNoeuds), seq(equY[i] = 0,`
	`i = 1 .. nNoeuds)};`
	`lvar := {seq(dx2[i], i = 1 .. nNoeuds),`
	`seq(dy2[i], i = 1 .. nNoeuds),`
	`seq(phiN2[i], i = 1 .. nNoeuds)};`
	`solve(lequ, lvar);`
	`assign(%)`

algorithme	code source maple correspondant

Expression des vecteurs contraintes
$\mathbf{S^i} = \sum_{b \in \mathcal{B}_\mathcal{R}} \left(N_1^b \mathbf{e^b} + T_{1t}^b \mathbf{e}^{b\perp} \right) \delta^{ib}$
et couples de contraintes
$\mu^i = \sum_{b \in \mathcal{B}_\mathcal{R}} \frac{1}{2} \left(\mathbf{M}_2^{E(b)} - \mathbf{M}_2^{O(b)} \right) \delta^{ib}$
	`for i to nBarres do`
	`N[i] := simplify(N[i]);`
	`T[i] := simplify(T1[i]);`
	`Me[i] := simplify(Me2[i]);`
	`Mo[i] := simplify(Mo2[i]);`
	`end do;`
	`S1:=<0,0>;`
	`S2:=<0,0>;`
	`M1:=<0,0,0>;`
	`M2:=<0,0,0>;`
	`for i from 1 to nBarres do`
	`S1:=factor(S1+(e[i]*delta1[i]*N[i]`
	`+eT[i]*delta1[i]*T[i]));`
	`S2:=factor(S2+e[i]*delta2[i]*N[i]`
	`+eT[i]*delta2[i]*T[i]);`
	`M1:=M1+<0,0,factor((delta1[i]*`
	`(Me[i]-Mo[i])/2))>;`
	`M2:=M2+<0,0,factor((delta2[i]*`
	`(Me[i]-Mo[i])/2))>;`
	`end do;`

algorithme	code source maple correspondant

Calcul du tenseur de contrainte $[\sigma] = \frac{1}{g}\mathbf{S^i} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^i}$ et du tenseur couple de contrainte $[\mathbf{m}] = \frac{1}{g}\mu^{\mathbf{i}} \otimes \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda^{\mathbf{i}}}$	`g:=Matrix([[diff(R[1],lambda1),`
	`diff(R[1],lambda2)],[diff(R[2]`
	`,lambda1),diff(R[2],lambda2)]]);`
	`gb:=Matrix([[diff(R[1],lambda1)`
	`,diff(R[1],lambda2),0],[diff(R[2]`
	`,lambda1),diff(R[2],lambda2),0]`
	`,[0,0,1]]);`
	`dR1:=<diff(R[1],lambda1),`
	`diff(R[2],lambda1)>;`
	`dR2:=<diff(R[1],lambda2),`
	`diff(R[2],lambda2)>;`
	`dR1b:=<diff(R[1],lambda1),`
	`diff(R[2],lambda1),0>;`
	`dR2b:=<diff(R[1],lambda2),`
	`diff(R[2],lambda2),0>;`
	`detg:=Determinant(g);`
	`detgb:=Determinant(gb);`
	`sigma:=1/detg*factor(factor(`
	`MatrixMatrixMultiply((convert(S1,Matrix))`
	`,Transpose(convert(dR1,Matrix))))`
	`+factor(MatrixMatrixMultiply(`
	`(convert(S2,Matrix)),Transpose`
	`(convert(dR2,Matrix)))));`
	`m:=1/detgb*factor(factor`
	`(MatrixMatrixMultiply((convert`
	`(M1,Matrix)),Transpose(convert`
	`(dR1b,Matrix))))+factor`
	`(MatrixMatrixMultiply((convert`
	`(M2,Matrix)),Transpose(convert`
	`(dR2b,Matrix)))));`

algorithme	code source maple correspondant

Détermination des matrices de raideurs élastiques
$\sigma_{kl} = A_{klmn}\epsilon_{mn} + B_{klmn}\kappa_{mn}$
$m_{kl} = B_{klmn}\epsilon_{mn} + C_{klmn}\kappa_{mn}$
On appelle Mat la matrice A, et Mat2 la matrice C
	`A:=[diff(U1(x,y),x),diff(U2(x,y),y)`
	`,diff(U1(x,y),y),diff(U2(x,y),x)];`
	`B:=[phi0,diff(phi(x, y), x),`
	`diff(phi(x, y), y)];`
	`Mat:=Matrix((4,4));`
	`Mat2:=Matrix(4,3);`
	`Mat[1,1..4]:=Matrix((1,4),`
	`[seq(factor(coeff(sigma[1,1]`
	`,A[i])),i=1..4)]);`
	`Mat[2,1..4]:=Matrix((1,4)`
	`,[seq(factor(coeff(sigma[2,2]`
	`,A[i])),i=1..4)]);`
	`Mat[3,1..4]:=Matrix((1,4)`
	`,[seq(factor(coeff(sigma[1,2]`
	`,A[i])),i=1..4)]);`
	`Mat[4,1..4]:=Matrix((1,4)`
	`,[seq(factor(coeff(sigma[2,1]`
	`,A[i])),i=1..4)]);`
	`Mat2[1,1..3]:=Matrix(1,3,`
	`[seq(simplify(coeff(sigma[1, 1]`
	`, B[i])), i = 1 .. 3)]);`
	`Mat2[2, 1 .. 3] := Matrix(1, 3,`
	`[seq(simplify(coeff(sigma[2, 2]`
	`, B[i])), i = 1 .. 3)]);`
	`Mat2[3, 1 .. 3] := Matrix(1, 3,`
	`[seq(simplify(coeff(sigma[1, 2]`
	`, B[i])), i = 1 .. 3)]);`
	`Mat2[4, 1 .. 3] := Matrix(1, 3,`
	`[seq(simplify(coeff(sigma[2, 1]`
	`, B[i])), i = 1 .. 3)])`

Calcul de la matrice de raideur étendue, appelée MatExt dans le code de calcul
$[K] = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & [C] \end{bmatrix}$
	`MatExt := Matrix(6, 6);`
	`MatExt[1 .. 4, 1 .. 4] :=`
	`simplify(factor(Mat));`
	`MatExt[5, 5] := simplify`
	`(coeff(m[3, 1],`
	`diff(phi(x, y), x)));`
	`MatExt[6, 6] :=`
	`simplify(coeff(m[3, 2],`
	`diff(phi(x, y), y)))`

Calcul de la matrice de souplesse MatSouplesse	`MatSouplesse:=MatrixInverse(MatExt);`

algorithme	code source maple correspondant

Extraction des modules mécaniques micropolaires et autres constantes à partir des matrices de raideur et de souplesse
μ^*, κ à partir de $\begin{cases} \mu^* + \kappa = K_{33} \\ \mu^* = K_{34} \end{cases}$;
$\gamma_{zx} = K_{55}$;$\gamma_{zy} = K_{66}$
$G^* = \mu^* + \frac{\kappa}{2}$;
$E_1^* = \frac{1}{S_{11}}$; $E_2^* = \frac{1}{S_{22}}$
$\nu_{12}^* = -S_{21} \cdot E_1^*$; $\nu_{21}^* = -S_{12} \cdot E_2^*$
longueur caractéristique l_{cara}, telle que
$l_{cara}^2 = \frac{\gamma}{2\,(2\mu^* + \kappa)}$;
coefficient de couplage N, tel que $N^2 = \frac{\kappa}{2\,(\mu^* + \kappa)}$
	`solve({muet = Mat[3, 4],`
	`muet+kappa = Mat[3, 3]},`
	`{kappa, muet});`
	`assign(%);`
	`Get:=simplify(muet+(1/2)*kappa);`
	`Eet1:=1/MatSouplesse[1,1];`
	`Eet2:=1/MatSouplesse[2,2];`
	`nuet21:=simplify(-MatSouplesse[1,2]`
	`*Eet2);`
	`nuet12:=simplify(-MatSouplesse[2,1]`
	`*Eet1);`
	`gammazx := simplify(coeff(m[3, 1],`
	`diff(phi(x, y), x)));`
	`gammazy := simplify(coeff(m[3, 2],`
	`diff(phi(x, y), y)))`
	`lcara:=simplify(sqrt(gammaet/(2*`
	`(2*muet+kappa))));`
	`lcara2:=simplify(gammaet/(2*(2*`
	`muet+kappa)));`
	`Ncoupl:=simplify(kappa/(2*(muet`
	`+kappa)));`

C.2 Code source Maple correspondant à l'algorithme classique

```
# CODE HOMOGENEISATION général --> tenseur Cauchy - Dos Reis F. (15 août 2010)
# Initialisation des paramètres
restart;
with(linalg):
with(LinearAlgebra):
read "dataMilton.txt";

# Passage du gradient de U(lambda1,lambda2) dans le repère (i,j)
R:=[L1*lambda1*Y1[1]+L2*lambda2*Y2[1],L1*lambda1*Y1[2]+L2*lambda2*Y2[2]];
#latex(%);
P1:=<diff(R[1],lambda1),diff(R[2],lambda1)>;
P2:=<diff(R[1],lambda2),diff(R[2],lambda2)>;
U:=<U1(x,y),U2(x,y)>; # champ de déplacement U
dU1xy:=<diff(U[1],x),diff(U[1],y)>;
dU2xy:=<diff(U[2],x),diff(U[2],y)>;
dPhixy:=<diff(phi(x,y),x),diff(phi(x,y),y)>;
dU1:=<BilinearForm(P1,dU1xy,conjugate=false),BilinearForm(P1,dU2xy,conjugate=false)>;
#latex(%);
dU2:=<BilinearForm(P2,dU1xy,conjugate=false),BilinearForm(P2,dU2xy,conjugate=false)>;
```

```
#latex(%);
dPhi1:=BilinearForm(P1,dPhixy,conjugate=false);
#latex(%);
dPhi2:=BilinearForm(P2,dPhixy,conjugate=false);
#latex(%);

# Ecriture des tensions
for i from 1 to nNoeuds do
De[i]:=<dx[i],dy[i]>;
De2[i]:=<dx2[i],dy2[i]>;
end do;
for i from 1 to nBarres do
eT[i]:=<-e[i][2],e[i][1]>;
#latex(%);
end do;
for i from 1 to nBarres do
depl:=simplify(DotProduct((e[i]),(De[Eb[i]]-De[Ob[i]]+delta1[i]*dU1+delta2[i]*dU2),
conjugate=false));
N[i]:=Kb[i]*depl;
#latex(%);
end do;

# Ecriture des moments, des efforts tranchants et du système d'équation
for i from 1 to nBarres do
depl:=simplify(DotProduct((eT[i]),(De[Eb[i]]-De[Ob[i]]+delta1[i]*dU1+delta2[i]*dU2),
conjugate=false));
phiE:=phiN[Eb[i]];
phiO:=phiN[Ob[i]];
T1[i]:=Kc[i]*(depl-Lb[i]/2*(phiE+phiO));
#latex(%);
Me1[i]:=simplify(Lb[i]/6*Kc[i]*(Lb[i]*(2*phiE+phiO)-3*depl));
#latex(%);
Mo1[i]:=simplify(Lb[i]/6*Kc[i]*(Lb[i]*(phiE+2*phiO)-3*depl));
#latex(%);
end do;
for i from 1 to nNoeuds do
equ1[i]:=<0,0>;
equ2[i]:=0;
end do;
for i from 1 to nBarres do
nO:=Ob[i];
nE:=Eb[i];
equ1[nO]:=simplify(equ1[nO]-e[i]*N[i]-eT[i]*T1[i]);
```

```
#latex(%);
equ1[nE]:=simplify(equ1[nE]+e[i]*N[i]+eT[i]*T1[i]);
#latex(%);
equ2[nE]:=simplify(equ2[nE]+Me1[i]);
equ2[nO]:=simplify(equ2[nO]+Mo1[i]);
end do;
for i from 1 to nNoeuds do
equX[i]:=<1,0>.equ1[i];
equY[i]:=<0,1>.equ1[i];
end do;

# Résolution du système d'équation
lequ := {seq(equ2[i] = 0, i = 1 .. nNoeuds), seq(equX[i] = 0, i = 1 .. nNoeuds),
seq(equY[i] = 0, i = 1 .. nNoeuds)};
lvar := {seq(dx[i], i = 1 .. nNoeuds), seq(dy[i], i = 1 .. nNoeuds), seq(phiN[i],
i = 1 .. nNoeuds)};
solve(lequ, lvar);
assign(%);

# Expression des résultantes après résolution des inconnues
for i to nBarres do
N[i] := factor(simplify(N[i]));
T[i] := factor(simplify(T1[i]));
end do;

# Détermination du tenseur de contrainte sigma
# détermination des vecteurs de contraintes
S1:=<0,0>;
S2:=<0,0>;
for i from 1 to nBarres do
S1:=simplify(S1+(e[i]*delta1[i]*N[i]+eT[i]*delta1[i]*T[i]));
S2:=simplify(S2+e[i]*delta2[i]*N[i]+eT[i]*delta2[i]*T[i]);
end do;
g:=Matrix([[diff(R[1],lambda1),diff(R[1],lambda2)],[diff(R[2],lambda1),diff(R[2],
lambda2)]]);
#latex(%);
dR1:=<diff(R[1],lambda1),diff(R[2],lambda1)>;
#latex(%);
dR2:=<diff(R[1],lambda2),diff(R[2],lambda2)>;
#latex(%);
detg:=Determinant(g);
sigma:=1/detg*simplify(simplify(MatrixMatrixMultiply((convert(S1,Matrix)),
Transpose(convert(dR1,Matrix))))+simplify(MatrixMatrixMultiply((convert(S2,Matrix)),
```

```
Transpose(convert(dR2,Matrix)))));
#latex(%);
# Expression finale du tenseur
sigma:=simplify(sigma);

# Détermination de la matrice [Mat] , telles que [sigma]=[Mat][epsilon]
A:=[diff(U1(x,y),x),diff(U2(x,y),y),diff(U1(x,y),y),diff(U2(x,y),x)];
"\epsilon=";latex(A);
Mat:=Matrix((4,4));
Mat[1,1..4]:=Matrix((1,4),[seq(simplify(coeff(sigma[1,1],A[i])),i=1..4)]);
Mat[2,1..4]:=Matrix((1,4),[seq(simplify(coeff(sigma[2,2],A[i])),i=1..4)]);
Mat[3,1..4]:=Matrix((1,4),[seq(simplify(coeff(sigma[1,2],A[i])),i=1..4)]);
Mat[4,1..4]:=Matrix((1,4),[seq(simplify(coeff(sigma[2,1],A[i])),i=1..4)]);
Mat := Mat[1 .. 3, 1 .. 3];

# Détermination de la matrice de souplesse
MatSouplesse:=simplify(factor(MatrixInverse(Mat)));
sigma:=factor(sigma);
"\sigma=";latex(sigma);
"matExt=";latex(Mat);
"MatSouplesse=";latex(MatSouplesse);

# Détermination des constantes mécaniques à partir des coefficients des matrice
de raideur et de souplesse
Get := factor(1/MatSouplesse[3, 3]);
latex(Get);
Eet1 := factor(1/MatSouplesse[1, 1]);
latex(Eet1);
Eet2 := factor(1/MatSouplesse[2, 2]);
latex(Eet2);
nuet21 := factor(-MatSouplesse[1, 2]*Eet2);
latex(nuet21);
nuet12 := factor(-MatSouplesse[2, 1]*Eet1);
latex(nuet12);
rho1 := 0;
for i to nBarres do
rho1 := rho1+Vb[i]
end do;
rho1 := rho1/detg; latex(rho1);
```

Annexe D

Flexion simple d'une poutre-treillis micropolaire

Sommaire

D.1 Introduction **250**
D.2 Flexion micropolaire simplifiée **251**

D.1 Introduction

La flexion d'une poutre micropolaire a été étudiée depuis longtemps (voir la figure D.1.1). Nous formulerons une version simplifiée en tenant compte d'une condition de contrainte plane et de déformation plane, spécifique aux treillis.

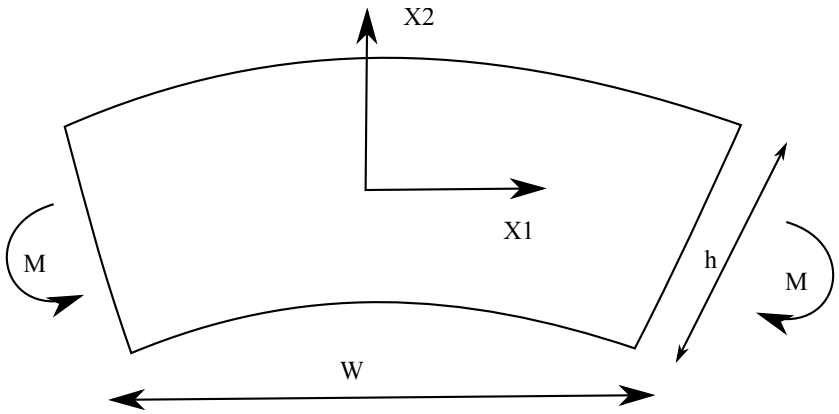


FIGURE D.1.1 – Flexion simple d'une poutre micropolaire

D.2 Flexion micropolaire simplifiée

La poutre d'une largeur h et de longueur W est considérée comme micropolaire et soumise à une flexion simple dans le cas de contrainte plane et déformation plane. La condition de contrainte et déformation plane implique qu'il n'y a pas d'efforts dans le sens hors plan ni de déformation. On pourrait considérer deux types de conditions aux limites : couple imposé M ou une rotation imposée. Dans le dernier cas, cela revient à imposer une microrotation égale à la rotation de la section, mais à cause du principe de St-Venant, cela a peu d'importance. La solution simplifiée prend la forme

$$u_1 = Ax_1x_2,\ u_2 = -\frac{A}{2}x_1^2 + \frac{D}{2}x_2^2,\ u_3 = 0 \tag{D.2.1}$$

$$\phi_1 = 0,\ \ \phi_2 = 0,\ \ \phi_3 = -Ax_1 \tag{D.2.2}$$

dans le système de coordonnées de la figure D.1.1. Sous ces conditions, en considérant A et D constant, les composantes non nuls des tenseurs de déformation et de microcourbure sont

$$e_{11} = Ax_2,\ e_{22} = Dx_2,\ \kappa_{31} = -A \tag{D.2.3}$$

La condition de contrainte plane et déformation plane implique que les constantes A et D sont liées par $D = -\nu A$. Les composantes non nulles des contraintes et couples de contrainte deviennent alors

$$\sigma_{11} = E_s A x_2 \tag{D.2.4}$$

$$m_{31} = -A\gamma \tag{D.2.5}$$

Le moment résultant suivant l'axe x_3 peut être calculé par

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} (-\sigma_{11}x_2 + m_{31})\, dx_2 = -A\left(\frac{E_s h^3}{12} + \gamma h\right) \tag{D.2.6}$$

ce qui nous donne la valeur de A pour une valeur fixée de M. On notera que l'on retrouve la solution classique lorsque γ devient petit. On peut représenter l'effet micropolaire induit dans ce cas de flexion par la figure D.2.1.

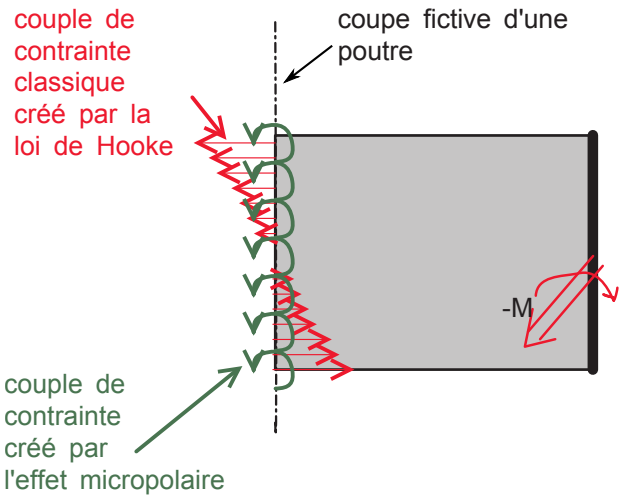


FIGURE D.2.1 – Description de l'effet micropolaire attendu sur une poutre avec microstructure

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Patrice CARTRAUD, Professeur, Ecole Centrale de Nantes, Nantes

Monsieur Samuel FOREST, Directeur de Recherche, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Paristech, Evry

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur DOS REIS Francisco

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques. Applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

en **« Mécanique et Energétique »**

Fait à Vandoeuvre, le 11 octobre 2010
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE – NANCY –

Résumé

Titre : Homogénéisation automatique de milieux discrets périodiques. Applications aux mousses polymères et aux milieux auxétiques.

La première réalisation de ce travail est la construction unifiée et automatique d'un milieu continu équivalent à un treillis de poutres, dans le domaine élastique, en adoptant un modèle de poutres de Bernoulli. Une extension a été réalisée au domaine plastique, selon un algorithme de suivi de la loi de comportement après écrouissage. Suivant l'ordre des développements asymptotiques choisi, on obtient pour le comportement élastique un milieu continu classique ou micropolaire. On se restreint dans ce dernier cas aux treillis à cellules élémentaires centro-symétriques. Les codes de calculs obtenus fournissent de façon automatique les lois de comportement effectives et les modules mécaniques homogénéisés. Une grande variété de treillis, existants ou originaux, a été étudiée. Les résultats ont été systématiquement comparés aux données de la littérature et vérifiés par des simulations éléments finis avec une bonne concordance. La méthode utilisée montre également une capacité à prédire et comprendre le comportement atypique de certains treillis dits auxétiques présentant des coefficients de contraction négatifs. L'homogénéisation dans le domaine plastique a été limitée aux treillis à dominante extensionnelle. Le domaine de résistance élastique a été construit pour différents treillis, et un algorithme d'évolution du comportement avec écrouissage, de type retour-radial a été conçu et implémenté dans un code dédié. Un modèle de poutre élastoplastique à écrouissage isotrope est utilisé. L'application de l'algorithme à une simulation de charge-décharge montre une bonne concordance entre le treillis homogénéisé et les simulations éléments finis.

Mots clés : Homogénéisation, développements asymptotiques, réseau périodique, treillis de poutres, milieux auxétiques, tétrakaïdécahèdre, mousses, milieu micropolaire, plasticité, retour-radial.

Abstract

Title : Automatic homogenization of discrete periodic media. Applications to polymers foams and to auxetic media.

The first achievement of this work is to construct a unified and effective continuum equivalent to a lattice of beams, in the elastic domain, using a Bernoulli beam model. An extension has been done to calculate the elastic domain resistance of such lattices and to build an algorithm for monitoring the constitutive law taking into account work hardening. The choice of the asymptotic expansions leads to a classical continuous or to a micropolar elastic continuum. We restrict in this last case our study to lattices with centro-symmetric unit cells. The numerical codes developed provide the stress-strain relationship and the effective mechanical moduli. A wide variety of trusses has been studied, either existing or original, including typical geometries of foams and various auxetic lattices, exhibiting negative contraction coefficients. The results were systematically compared with data from literature and verified by finite element simulations with a good agreement. The homogenization in the plastic range has been limited to stretching dominated lattices. The equilibrium equations of the discrete asymptotic homogenization have been used to automatically obtain the elastic resistance domain for several trusses, and a return-mapping algorithm for the follow up of the stress-strain relationship including hardening has been conceived and implemented in a dedicated code. An isotropic hardening elastoplastic model of the beam has been used. The application of the algorithm to the simulation of a loading-unloading cycle shows a good agreement between the homogenized lattice and finite element simulations.

Keywords : Homogenization, asymptotic expansions, periodical lattice, truss of beams, auxetic media, tetrakaidecahedron, foams, micropolar medium, plasticity, return mapping.