AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

École Doctorale Sciences et Ingénierie Ressources Procédés Produits Environnement

École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy

Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages

THÈSE

Présentée et soutenue publiquement le 03 / 12 / 2010
en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'INPL

en Mécanique - Génie Civil

par

NGUYEN Ngoc Bien

Modélisation micromécanique des roches poreuses. Application aux calcaires oolithiques

Membres du Jury :

Rapporteurs :	M. Dashnor HOXHA	Professeur, École Polytechnique de l'Université d'Orléans
	M. Xavier CHATEAU	Directeur de Recherche CNRS, Unité de Recherche Navier, Marne la Vallée
Examinateur :	M. Jian Fu SHAO	Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille
Directeur de thèse :	M. Albert GIRAUD	Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine
Co-Directeur de thèse :	M. Dragan GRGIC	Maître de Conférences, Institut National Polytechnique de Lorraine

A ma grande famille !

A mon amour Nhung !

A ma fille Khánh Chi !

Remerciements

J'adresse mes tous premiers remerciements à mes directeurs de thèse Monsieur Albert Giraud et Monsieur Dragan Grgic. Ma profonde reconnaissance et mes vifs remerciements s'adressent à Albert Giraud, qui m'a dirigé tout au long du travail de thèse et qui m'a accordé sa confiance et son aide scientifique. Je tiens à remercier vivement Madame Françoise Homand qui m'a chaleureusement accueilli au sein de son équipe de recherche au LaEGO.

J'en profite pour remercier les rapporteurs, Monsieur Dashnor Hoxha et Monsieur Xavier Chateau. Je les remercie pour le temps qu'ils y ont consacré, pour leurs conseils et leurs encouragements. Je suis aussi très heureux que Monsieur Jian-Fu Shao ait accepté de faire partie du jury.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les membres du LaEGO pour leur accueil chaleureux et la très bonne ambiance de travail. Merci à Phi pour tes conseils scientifiques, merci à Théophile pour ta correction d'orthographe, merci à tous mes amis au LaEGO et à Nancy pour leur aide et leur amitié.

J'adresse également toute ma gratitude à mes parents et mon frère pour leurs encouragements et leur soutien inconditionnel. En particulier, merci à Nhung pour son amour, sa patience, et pour tout ce qu'elle a fait pour moi. Merci à ma fille Khánh Chi, c'est toi, le plus beau cadeau que la vie ait bien voulu m'offrir.

Résumé

Modélisation micromécanique des roches poreuses : application aux calcaires oolithiques

Ce travail de thèse est consacré à l'étude du comportement poro-élastique linéaire et non linéaire des matériaux et géomatériaux poreux (notamment les calcaires oolithiques et le minerai de fer) par approche de changement d'échelle. A partir des observations microstructurales de ces matériaux, un modèle conceptuel a été proposé. Les roches poreuses étudiées sont constituées par un assemblage de grains (oolithes), à forte fraction volumique, cimentés par une matrice. La porosité, supposée connectée, est présente dans les oolithes (inter-oolithique) et dans la matrice (intra-oolithique). Un modèle d'homogénéisation à deux étapes est développé dans le cadre du modèle des sphères composites. L'importance des effets de liaison d'interface sur les propriétés poro-élastiques des sphères composites est étudiée en déterminant la solution exacte du modèle aux conditions d'interfaces parfaite ou/et imparfaite. Le modèle est tout d'abord appliqué pour estimer les propriétés effectives poro-élastiques linéaires des roches étudiées. Le comportement non linéaire de ces roches est étudié en attribuant à la matrice un comportement élastoplastique et en développant un comportement non linéaire pour les interfaces (oolithes - matrice). La comparaison entre résultats issus de la modélisation et ceux expérimentaux macroscopiques montre l'importance cruciale de la zone interfaciale de transition.

Mots-clés : Milieux hétérogènes, Géomatériaux, Approche micromécanique, Modèle de sphères composites, Interface imparfaite, Poro-élasticité linéaire, Elasto-plasticité, Homogénéisation linéaire, Homogénéisation non-linéaire.

Abstract

Micromechanical modelling of porous rocks : application to oolitic limestone

This work is devoted to the modelling of the linear and non-linear hydro-mechanical behaviour of porous rocks (such as oolitic limestone, iron ore) by the multiscale modelling approach. Based on microstructure observations, a conceptual model was proposed. Porous rocks studied are constituted by an assemblage of grains (oolites), with high volume fraction, coated by a matrix. The overall porosity is supposed connected and decomposed into oolite porosity and matrix porosity. A two step homogenization method has been developed in the framework of CSA (Composite Sphere Assemblage) models. The effect of interfacial bonding condition on poroelastic properties of composite sphere is investigated by determining the exact solution of the model in the case of perfect or/and imperfect interface. Micromechanical model is applied firstly to estimation of effective linear poroelastic properties of rocks studied. Their non-linear behaviour is studied by considering a elasto-plastic behavior for both the matrix and the interfaces (oolite-matrix). The comparison between numerical simulations and macroscopic experimental results underlined the crucial role of the interfacial transition zone.

Mots-clés : Heterogeneous medium, Geomaterials, Micromechanical approach, Composite Sphere Model, Imperfect interface, Linear poro-elasticity, Elasto-plasticity, Linear et non-linear homogenization.

Table des matières

Remerciements **3**

Résumé **5**

Abstract **7**

Introduction **13**

I Homogénéisation du comportement linéaire **17**

1 Homogénéisation des milieux polycristallins **19**

1.1 Approche micromécanique 19

1.1.1 Méthodologie de l'homogénéisation 19

1.1.2 Homogénéisation du milieu élastique linéaire 20

1.1.3 Homogénéisation des milieux poro-élastique linéaire 22

1.2 Problème d'Eshelby 25

1.2.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby 25

1.2.2 Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby 26

1.3 Homogénéisation d'un milieu polycristallin 27

1.3.1 Schéma autocohérent classique 27

1.3.2 Schéma autocohérent itératif 28

1.3.3 Conclusion 31

1.4 Homogénéisation d'un milieu poro-élastique multiphasique 31

1.4.1 Tenseur de Biot effectif 32

1.4.2 Module de Biot effectif du solide 33

1.4.3 Application au milieu à double porosité 36

2 Poro-élasticité linéaire de sphères composites à interface parfaite (SCIP) **39**

2.1 Introduction 39

2.1.1 Assemblage de sphères composites 39

2.1.2 Schéma autocohérent généralisé 40

2.2 Modèle à "n+1" phases SCIP 41
2.2.1 Module de compressibilité k_{n+1}^{SCIP} 42
2.2.2 Module de cisaillement μ_{n+1}^{SCIP} 45
2.2.3 Tenseur de Biot $\boldsymbol{B}_{n+1}^{SCIP}$ 47
2.2.4 Module de Biot N_{n+1}^{SCIP} 49
2.2.5 Tenseur de localisation de la phase A_i 52
2.3 Conclusion 53

3 Poro-élasticité linéaire de sphères composites à interface imparfaite (SCII) 55

3.1 Introduction 55
3.2 Modèle à "n+1" phases SCII 57
3.2.1 Module de compressibilité k_{n+1}^{SCII} 57
3.2.2 Module de cisaillement μ_{n+1}^{SCII} 59
3.2.3 Tenseur de Biot $\boldsymbol{B}_{n+1}^{SCII}$ 62
3.2.4 Module de Biot du solide N_{n+1}^{SCII} 64
3.2.5 Saut de déplacement à l'interface 65
3.3 Conclusion 68

II Homogénéisation du comportement non linéaire 69

4 Comportement non linéaire 71

4.1 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire 71
4.2 Approche incrémentale 72
4.2.1 Principe 72
4.2.2 Homogénéisation non linéaire d'un milieu multiphasique 73
4.2.3 Comparaison des différentes méthodes et discussion 76

5 Comportement non linéaire de l'interface imparfaite 79

5.1 Modèle d'interface non linéaire 79
5.2 Compression isotrope 81
5.3 Compression déviatorique 84
5.4 Compression oedométrique 87

III Applications 89

6 Application aux Calcaires Oolithiques 91

6.1 Microstructure et constituants 91
6.2 Modèle d'homogénéisation 97
6.2.1 Modèle proposé 97

6.2.2 Homogénéisation à deux étapes 98
6.3 Comportement poro-élastique 100
6.3.1 Matériau à 2 phases à interface parfaite 101
6.3.2 Matériau à 2 phases à interface imparfaite 104
6.3.3 Matériau à 3 phases avec zone de transition d'interface (ZTI) 107
6.3.4 Conclusion 110
6.4 Comportement élasto-plastique 112
6.4.1 Comportement local des phases 112
6.4.2 Implémentation 113
6.4.3 Calibration expérimentale 114
6.4.4 Conclusion 120
6.5 Application au cas particulier du calcaire de Lavoux 123
6.5.1 Microstructure et modèle d'homogénéisation 123
6.5.2 Comportement poro-élastique du calcaire de Lavoux 127
6.5.3 Comportement élasto-plastique du calcaire de Lavoux 131
6.5.4 Conclusion 136

7 Application au minerai de fer de Lorraine 139
7.1 Microstructure et constituants 139
7.1.1 Description de la microstructure 139
7.1.2 Constituants et caractérisation 140
7.2 Modèle et méthode d'homogénéisation 145
7.2.1 Modèle proposé 145
7.2.2 Homogénéisation à deux étapes 146
7.3 Comportement poro-élastique du minerai de fer de Lorraine 148
7.3.1 Matériau à 2 phases à l'interface imparfaite 148
7.3.2 Matériau à 3 phases avec zone de transition d'interface (ZTI) 150
7.3.3 Conclusion 151
7.4 Comportement élasto-plastique du minerai de fer de Lorraine 153
7.4.1 Comportement local des phases 153
7.4.2 Calibration expérimentale 154
7.4.3 Conclusion 155

Conclusion générale et perspectives 157

Bibliographie 161

A Modèle des sphères composites à interface parfaite (SCIP) 169
A.1 Modèle à trois phases SCIP 169
A.1.1 Module de compressibilité k_{3ph}^{SCIP} 169

A.1.2 Module de cisaillement μ_{3ph}^{SCIP} 169
A.1.3 Coefficient de Biot b_{3ph}^{SCIP} 170
A.1.4 Module de Biot N_{3ph}^{SCIP} 170
A.1.5 Tenseurs de localisation 170
A.2 Modèle à quatres phases SCIP 172
A.2.1 Module de compressibilité k_{4ph}^{SCIP} 172
A.2.2 Module de cisaillement μ_{4ph}^{SCIP} 173
A.2.3 Coefficient de Biot b_{4ph}^{SCIP} 175
A.2.4 Module de Biot N_{4ph}^{SCIP} 176

B Modèle des sphères composites à interface imparfaite (SCII) 177

B.1 Modèle de trois phases SCII 177
B.1.1 Module de compressibilité k_{3ph}^{SCII} 177
B.1.2 Module de cisaillement μ_{3ph}^{SCII} 178
B.1.3 Coefficient de Biot b_{3ph}^{SCII} 179
B.1.4 Module de Biot N_{3ph}^{SCII} 180
B.1.5 Saut de déplacement à l'interface 180
B.2 Problème d'inclusion équivalente 183

C Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-plastique 187

D Caractéristiques des quelques minéraux carbonatés 191

Introduction

Les géomatériaux forment une classe de matériaux très complexes et hétérogènes à différentes échelles (ouvrage, éprouvette). Ils sont constitués généralement d'une ou de plusieurs phases solides hétérogènes et éventuellement liquides ou gazeuses, mises en place dans un environnement donné de pression, température et contrainte. L'étude des propriétés physiques, chimiques et mécaniques des géomatériaux a été réalisée depuis longtemps dans plusieurs domaines (ouvrages génie civil, stockages, champs pétroliers...). La compréhension du comportement de ces matériaux s'avère naturellement importante dans des domaines d'applications variés. Les très nombreuses études en laboratoire ont été effectuées pour appréhender leurs microstructures, leurs constituants chimiques et leurs comportements à l'échelle macroscopique ainsi qu'à l'échelle microscopique (voir par exemple [34, 40, 65]. Parallèlement à l'étude expérimentale, les lois de comportement des matériaux sont établies selon des approches phénoménologique sur la base de résultats d'essais, et selon des approches micromécanique sur la base de la microstructure pour reproduire leurs réponses macroscopiques. Les approches phénoménologiques ont souvent l'avantage de la simplicité mais possèdent aussi leurs limites dans les situations complexes par exemple de couplage (hydro-mécanique, plasticité-endommagement ...) [45]. Les approches micromécaniques permettent de conduire une meilleure description du comportement macroscopique du matériau hétérogène à partir d'informations sur la microstructure et de la connaissance du comportement local des constituants à travers le processus d'homogénéisation. Dans le domaine élastique linéaire, ces approches ont été appliquées avec succès à la description des comportements hydrique, thermique ou encore couplé thermo-hydro-mécanique. Dans le domaine des comportements non linéaires, les méthodes d'homogénéisation s'appuient le plus souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales en utilisant le concept de milieu linéaire de comparaison.

Le travail exposé dans ce mémoire s'intéresse à l'homogénéisation des comportements hydro-mécaniques linéaire et non linéaire des géomatériaux étudiés au LaEGO - ENSG - INPL à Nancy (calcaire, minerai de fer ...). Une approche micromécanique basée sur des lois mécanique et de transport a été adoptée. A l'échelle microscopique, ces roches sont observées comme des matériaux de sphères composites à phases constituantes poreuses.

Ce mémoire de thèse se présente sous la forme de trois parties principales.

La **première partie** rappelle brièvement les bases de l'homogénéisation des milieux hétérogènes en poro-élasticité linéaire, puis propose une application aux polycristaux poreux. Le comportement poro-élastique du modèle des sphères composites a été étudié et étendu dans le cas général multiphasique en adaptant un état de liaison à l'interface entre les phases.

Le *chapitre 1* présente d'abord la méthodologie et les caractères généraux de l'approche de changement d'échelle qui permet de déterminer les lois de comportement poro-élastique d'un milieu hétérogène. Ensuite, on envisage le problème d'Eshelby qui sert de base aux méthodes d'homogénéisation utilisées pour l'estimation des propriétés effectives d'un milieu hétérogène. Les schémas autocohérents classique et itératif seront présentés brièvement pour l'homogénéisation d'un matériau polycristallin. Ce chapitre présente également les solutions du tenseur et du module de Biot d'un milieu poreux-multiphasique à l'aide de la méthode de polarisation [12, 13].

Dans le *chapitre 2*, la solution en poro-élasticité linéaire du modèle des sphères composites à interface parfaite (SCIP) est présentée dans le cas général à $n+1$ phases. La solution analytique du modèle dans le cas paticulier à trois ou quatre phases est déterminée et comparée à celle obtenue par les autres auteurs [5, 20, 52]. Le tenseur de localisation de la phase est également déterminé, et permet de retrouver facilement la déformation moyenne de la phase.

Le cas général à $n+1$ phases du modèle des sphères composites à interface imparfaite (SCII) est présenté dans le *chapitre 3*. L'interface entre les phases présente un état de liaison imparfait et suit le modèle d'interface imparfaite *" linear spring model "* (LSM) [50]. A l'interface, les contraintes sont supposées continues mais les déplacements sont discontinus, ils sont décrits par les composantes non nulles du saut de déplacement. Sous une condition de chargement isotrope ou déviatorique, les expressions analytiques du saut de déplacment sont déterminées. Dans le cas à trois phases, la solution analytique du modèle est détaillée.

L'étude de la méthode d'homogénéisation du comportement non linéaire d'un matériau hétérogène fait l'objet de la **deuxième partie**.

Le *chapitre 4* expose brièvement les principes de base de l'approche incrémentale de Hill [55] ainsi que l'estimation de l'approche en utilisant les différentes procédures d'isotropisation. L'estimation des différentes méthodes ou techniques d'isotropisation est souvent réalisée par comparaison des prédictions de chaque méthode avec la solution de référence obtenue par calculs aux éléments finis [17, 24, 60, 99]. L'objectif de ce chapitre consiste à lancer une technique de description du comportement non-linéaire de la phase d'un matériau de sphères composites qui donne toujours des opérateurs tangents macroscopique et de localisation isotropes.

Dans le *chapitre 5*, le modèle d'interface non linéaire est développé pour un matériau de sphères

composites à interface imparfaite de type *" linear spring model "*. Du point de vue mécanique, le saut de déplacement est une grandeur variable qui dépend généralement du moyen et de la valeur du chargement imposé. Le comportement non linéaire d'interface est obtenu en introduisant une dépendance des propriétés mécaniques de l'interface aux sauts de déplacement démontrés dans le chapitre 3.

La **dernière partie** est consacrée à l'étude des comportements poro-élastique et élasto-plastique des géomatériaux étudiés. Les roches calcaires oolithiques et le minerai de fer sont étudiés respectivement dans les *chapitre 6* et *chapitre 7*. A partir de l'étude de la microstructure, on propose un modèle géométrique qui permet de décrire la roche sous forme simplifiée. L'étude est menée à l'aide des outils et méthodes d'homogénéisation présentés dans les parties précédentes.

Les roches poreuses étudiées sont décrites généralement comme un matériau composite à trois phases : oolithes sphériques, zone de transition oolithe - matrice et matrice inter-oolithique. La zone de transition d'interface est vue comme une interface imparfaite ou une interphase très mince et peu raide. La méthode d'homogénéisation à deux étapes est utilisée en considérant les constituants de la roche comme des milieux poreux à la première étape ; dans la seconde étape, les modèles dits à trois phases sphères composites à interface imparfaite (SCII) et à quatre phases à interface parfaite (SCIP) sont respectivement appliqués à l'estimation des propriétés poroélastiques linéaires effectives de ces roches poreuses. Leurs comportements élasto-plastiques sont homogénéisés en appliquant un modèle à trois phases de sphères composites à interface imparfaite. Le comportement des oolithes est élastique linéaire et la matrice présente un comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope qui décrit bien un comportement dilatant des matériaux [45]. On applique aussi le modèle non linéaire de l'interface développé dans le chapitre 5 pour étudier l'influence sensible du comportement local de la zone de transition sur le comportement macroscopique.

Le cas particulier du calcaire oolithique de Lavoux est envisagé également dans le *chapitre 6*. Cette roche est vue comme un assemblage de grains d'oolithes à forte fraction volumique, de grains de sparite et de macro-pores. Un modèle d'homogénéisation à trois phases en double porosité est proposé pour cette roche particulière. Son comportement poro-élastique est déterminé en identifiant les paramètres du modèle à partir des données expérimentales. On démontre également le rôle important de la zone de transition interfacialle qui est vue comme une interphase de faibles propriétés mécaniques. En simulant le comportement élasto-plastique de la roche, cette interphase retient un comportement élasto-plastique. Le comportement des oolithes et des grains de sparite est supposé être élastique linéaire. La comparaison entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux disponibles a confirmé la validation du modèle développé.

Première partie

Homogénéisation du comportement linéaire

Chapitre 1

Homogénéisation des milieux polycristallins

Ce chapitre présente d'abord la méthodologie et les caractères généraux de l'approche de changement d'échelle qui permet de déterminer les lois de comportement poro-élastique d'un milieu hétérogène. Ensuite, on envisage le problème d'Eshelby qui sert de base aux méthodes d'homogénéisation utilisées pour l'estimation des propriétés effectives d'un milieu hétérogène. Les schémas autocohérent classique et itératif seront présentés brièvement pour l'homogénéisation d'un matériau polycristallin. Pour plus de détails, on peut consulter le travail de [95]. Ce chapitre présente également les solutions du tenseur et du module de Biot d'un milieu poreux-multiphasique à l'aide de la méthode de polarisation [12, 13].

1.1 Approche micromécanique

1.1.1 Méthodologie de l'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation est utilisée pour déterminer les lois de comportement d'un milieu hétérogène à l'échelle macroscopique à partir d'une description de ses constituants à l'échelle microscopique [12, 108]. Pour les matériaux hétérogènes, la méthode d'homogénéisation est validée d'abord si ces trois longueurs caractéristiques (D - taille de la structure hétérogène, l - taille du VER, d - taille des hétérogénéités) vérifient les conditions suivantes :

- $l << D$: cette première condition pour que l'on puisse traiter la structure comme un milieu continu.
- $d << l$: la condition nécessaire pour que l'on puisse caractériser le comportement du VER par une loi homogène.

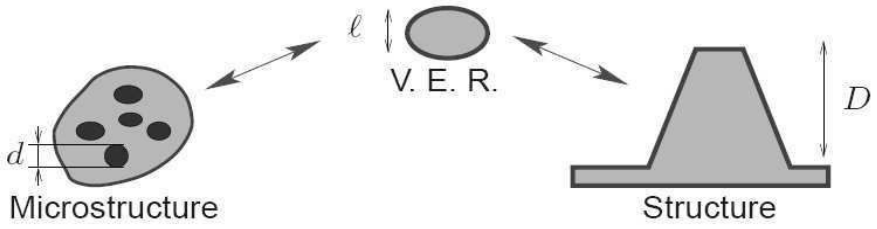


FIGURE 1.1: *Echelle d'analyse ($d << l << D$)*

Ensuite, pour homogénéiser des matériaux hétérogènes, la méthodologie d'homogénéisation en trois étapes a été proposée par A.Zaoui (1998) [108] :

- L'étape de *représentation* qui permet de décrire le matériau à l'échelle microscopique : définition des phases et description de leur répartition spatiale et de leur comportement mécanique.
- L'étape de *localisation* permet de modéliser le comportement mécanique et de déterminer les relations entre les quantités définies à l'échelle microscopique et les quantités définies macroscopiques équivalentes.
- L'étape d'*homogénéisation* permet d'analyser les résultats précédents et de les mettre dans la forme globale attendue.

1.1.2 Homogénéisation du milieu élastique linéaire

On s'intéresse à un matériau élastique linéaire hétérogène. La loi de comportement de ce matériau s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) \end{cases} \tag{1.1}$$

$\mathbb{C}$ et $\mathbb{S}$ sont respectivement les tenseurs d'élasticité et de souplesse ($\mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{S}(\underline{x}) = \mathbb{I}$) ; $\mathbb{I}$ est le tenseur identité du quatrième ordre. Tout d'abord, les conditions de séparation d'échelle sont satisfaites. On suppose que les phases du matériau sont bien accolées. Le problème s'écrit pour un VER occupant le domaine Ω, de frontière $\partial\Omega$ et soumis à une déformation homogène macroscopique $\boldsymbol{E}$ sur son contour :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}\left(\underline{x}\right) = 0 & (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}\left(\underline{x}\right) = \mathbb{C}\left(\underline{x}\right) : \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right) & (\Omega) \\ \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\operatorname{grad} \underline{u} + {}^{\mathrm{T}} \operatorname{grad} \underline{u}\right) & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\underline{u}$ est le champ de déplacement microscopique. On a la relation entre les déformations à l'échelle macroscopique et déformations à l'échelle microscopique :

$$\boldsymbol{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right)\, d\Omega \tag{1.3}$$

où $\langle . \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne. Le champ de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}$ est défini en fonction de la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}$ appliquée :

$$\boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right) = \mathbb{A}\left(\underline{x}\right) : \boldsymbol{E} \tag{1.4}$$

Dans le cas de problème à contrainte homogène macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ imposée sur le contour $\partial\Omega$ du VER, le champ de contraite $\boldsymbol{\sigma}$ est défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{B}(\underline{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \tag{1.5}$$

où $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des tenseurs du quatrième ordre, appelés respectivement tenseur de localisation en déformation et en contrainte. La moyenne de ces tenseurs est un tenseur identité d'ordre quatre ($\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I}$, $\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I}$), et en plus ils sont symétriques mineurs ($A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{ijlk}$, $B_{ijkl} = B_{jikl} = B_{ijlk}$). On rappelle la condition de Hill-Mandel :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{\Sigma} : \boldsymbol{E} \tag{1.6}$$

$\boldsymbol{\sigma}(\underline{x})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})$ sont deux champs respectifs de contrainte statiquement admissible ($\underline{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0$) et de déformation cinématiquement admissible avec $\boldsymbol{E}$ ($\underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x}$ sur $\partial\Omega$ et $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x})$ sur Ω). En utilisant les relations (1.4), (1.5), (1.6) et la loi de comportement (1.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle : \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned} \tag{1.7}$$

On en déduit donc une loi de comportement homogénéisée élastique linéaire caractérisée par le tenseur d'élasticité et de soupless macroscopique $\mathbb{C}_{\mathrm{hom}}$, $\mathbb{S}_{\mathrm{hom}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle \\ \boldsymbol{E} &= \mathbb{S}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{S} : \mathbb{B} \rangle \end{aligned} \tag{1.8}$$

Si la condition de séparation des échelles $d << l$ est satisfaite, $\mathbb{S}_{\text{hom}}$ et $\mathbb{C}_{\text{hom}}$ sont inverses l'un de l'autre [108].

1.1.3 Homogénéisation des milieux poro-élastique linéaire

1.1.3.1 Théorème de Levin

Ce paragraphe aborde un problème d'homogénéisation des milieux élastiques linéaires avec précontrainte ou déformation initiale. Le comportement d'un V.E.R constitué d'un matériau élastique linéaire s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) &= \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) &= \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{x}) \end{aligned} \tag{1.9}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est la précontrainte uniforme et $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ est la déformation libre uniforme avec les relations entre elles :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) = -\mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{x}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_L(\underline{x}) = \mathbb{S}(\underline{x}) : \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) \end{cases} \tag{1.10}$$

On considère un V.E.R constitué d'un matériau élastique linéaire à précontrainte $\boldsymbol{\tau}$ et sous la déformation macroscopique imposée $\boldsymbol{E}$ à l'infini :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}(\underline{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau}(\underline{x}) & (\Omega) \\ \underline{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.11}$$

Pour résoudre ce problème, on peut le décomposer en deux sous-problèmes élémentaires :

– Le premier sous-problème P' correspond au problème élastique linéaire sans précontrainte ($\boldsymbol{E} \neq 0$, $\boldsymbol{\tau} = 0$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\underline{x}) & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}'(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}'(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.12}$$

La solution du sous-problème P' est donnée dans le paragraphe 1.1.2 :

$$\Sigma' = \langle \boldsymbol{\sigma}' \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle : \boldsymbol{E} = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{E} \tag{1.13}$$

– Le deuxième sous-problème P'' correspond au problème élastique linéaire avec précontrainte, mais à déformation macroscopique imposée nulle ($\boldsymbol{E} = 0$, $\boldsymbol{\tau} \neq 0$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}''(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau} & (\Omega) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}''(\underline{x}) = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.14}$$

La solution du sous-problème P'' est déterminée en appliquant la condition de Hill-Mandel (1.6) au champ de contraintes statiquement admissible σ'' du sous-problème P'' et au champ de déformations cinématiquement admissible $\boldsymbol{\varepsilon'}$ du sous-problème P' :

$$\langle \boldsymbol{\sigma''} : \boldsymbol{\varepsilon'} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma''} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon'} \rangle = \Sigma'' : \boldsymbol{E} \tag{1.15}$$

D'autre part, on a

$$\langle \boldsymbol{\sigma''} : \boldsymbol{\varepsilon'} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon''} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon'} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon'} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon''} : \boldsymbol{\sigma'} \rangle + \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} : \boldsymbol{E} \rangle = \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle : \boldsymbol{E} \tag{1.16}$$

A partir de (1.15) et (1.16), on obtient :

$$\Sigma'' = \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle \tag{1.17}$$

Enfin, on trouve la solution du problème (1.11) :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{E} + \langle \boldsymbol{\tau} : \mathbb{A} \rangle \tag{1.18}$$

De la même manière, le comportement macroscopique du problème avec déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ (sous la contrainte macroscopique imposée $\boldsymbol{\Sigma}$) se trouve comme suivante :

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' + \boldsymbol{E}' = \mathbb{S}_{\text{hom}} : \boldsymbol{\Sigma} + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_L : \mathbb{B} \rangle \tag{1.19}$$

1.1.3.2 Application au milieu poreux saturé

On considère un V.E.R de milieu poreux dont la matrice est constituée d'une phase solide élastique linéaire homogène occupant le domaine Ω_s et dont l'espace poreux est saturé par un seul liquide occupant le domaine Ω_p. On suppose que la frontière du V.E.R est constituée seulement de la phase solide. Le problème s'écrit sur le V.E.R [25, 23, 58, 107] :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) + \boldsymbol{\tau_i} & (\Omega_i, i = s, p) \\ \underline{div}\, \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega_s) \\ \underline{u}(\underline{x}) = \boldsymbol{E}.\underline{x} & (\partial\Omega) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| .\underline{n} = 0, \quad \|\underline{u}\| = 0 & (\omega_{sp}) \end{cases} \tag{1.20}$$

avec

$$\boldsymbol{\tau}_p = -p_l\, \boldsymbol{\delta} \ , \qquad \boldsymbol{\tau}_s = 0 \tag{1.21}$$

où ω_{sp} désigne l'interface entre la phase solide et la phase liquide ; p_l est la pression de phase liquide ; $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur identité du second ordre. En appliquant le résultat de théorème de Levin en contrainte (1.18), on obtient la solution de ce problème :

$$\begin{aligned} \Sigma &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{E} + \langle \boldsymbol{\tau}_i : \mathbb{A} \rangle \\ &= \mathbb{C}_{\text{hom}} : \boldsymbol{E} - p_l \boldsymbol{B} \end{aligned} \tag{1.22}$$

avec

$$\begin{cases} \mathbb{C}_{\text{hom}} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A} \rangle = (1 - f_p)\, \mathbb{C}_s : \langle \mathbb{A} \rangle_s + f_p\, \mathbb{C}_p : \langle \mathbb{A} \rangle_p \\ \boldsymbol{B} = f_p\, \boldsymbol{\delta} : \langle \mathbb{A} \rangle_p \end{cases} \tag{1.23}$$

où $\boldsymbol{B}$ désigne le tenseur de Biot. La variation de porosité s'écrit [25] :

$$\phi - \phi_0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p_l}{N} \tag{1.24}$$

avec

$$\frac{1}{N} = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_s - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\boldsymbol{B} - f_p\,\boldsymbol{\delta}) \tag{1.25}$$

où ϕ_0 et ϕ désignent la porosité lagrangienne respectivement à l'état initial et à l'état actuel. Dans le cas particulier d'un comportement isotrope du solide (k_s et μ_s) et d'un comportement macroscopique isotrope (k_{hom} et μ_{hom}), le coefficient de Biot b est défini par :

$$\boldsymbol{B} = b\,\boldsymbol{\delta} \quad , \quad b = 1 - \frac{k_{hom}}{k_s} \tag{1.26}$$

La variation du volume de l'espace poreux s'écrit dans ce cas :

$$\phi - \phi_0 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{E} + \frac{p_l}{N} = b\,tr\boldsymbol{E} + \frac{p_l}{N} \tag{1.27}$$

avec le module de Biot du solide :

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi}{k_s} \tag{1.28}$$

1.2 Problème d'Eshelby

1.2.1 Problème de l'inclusion d'Eshelby

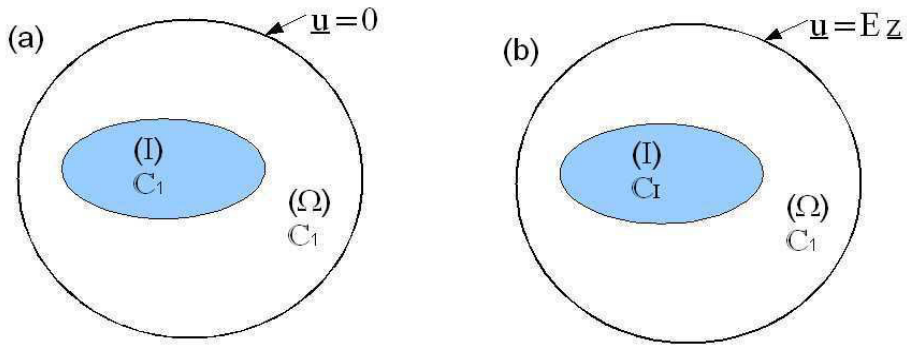


FIGURE 1.2: *(a)- Problème de l'inclusion d'Eshelby*
(b)- Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby

On considère l'influence d'une *déformation libre homogène* $\boldsymbol{\varepsilon}_L$ imposé à l'intérieur d'un domaine borné (I) noyé dans un milieu infini élastique linéaire homogène Ω. On suppose que les modules élastiques de l'inclusion coïncident avec ceux de la matrice et le problème impose des déplacements nuls à l'infini. La solution du problème de l'inclusion satisfait le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{div}}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_1 : [\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_L] & (I) \\ \underline{u}(\underline{x}) \to 0 & (\underline{x} \to \infty) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| = 0 \text{ et } \|\,\underline{u}\,\| = 0 & (\partial I) \end{cases} \tag{1.29}$$

où $\mathbb{C}_1$ est le tenseur élastique de la matrice et $\|a\|$ désigne le saut de la grandeur a sur l'interface de l'inclusion (I). Dans le cas où l'inclusion est de forme ellipsoïdale, le champ de déformation à l'intérieur de l'inclusion (I) est uniforme [33] et s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_I = \mathbb{S}^E : \boldsymbol{\varepsilon}_L \,, \qquad \forall \underline{x} \in (I) \tag{1.30}$$

où $\mathbb{S}^E$ est un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur d'Eshelby. Il dépend du tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}_1$ ainsi que de la forme et de l'orientation de l'ellipsoïde (I) mais il ne dépend pas de sa taille. On pose :

$$\mathbb{P} = \mathbb{S}^E : \mathbb{C}_1^{-1} = \mathbb{S}^E : \mathbb{S}_1 \tag{1.31}$$

où $\mathbb{P}$ est aussi un tenseur d'ordre quatre, appelé tenseur de Hill. Il a les mêmes caractéristiques que le tenseur d'Eshelby mais il est plus commode d'utilisation car il est symétrique mineur ($P_{ijkl} = P_{jikl} = P_{ijlk}$) et majeur ($P_{ijkl} = P_{klij}$) [108].

1.2.2 Problème de l'inhomogénéité d'Eshelby

On élargira le problème d'Eshelby ci-dessus au cas où le tenseur d'élasticité de l'inclusion (I) est différent de celui de la matrice (figure 1.2-b). Dans ce problème, on impose à l'infini une déformation macroscopique homogène $\boldsymbol{E}$, les équations de ce problème s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{\mathrm{div}}\boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (\Omega) - (I) \\ \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C}_I : \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{x}) & (I) \\ \underline{u}(\underline{x}) \to \boldsymbol{E}.\underline{x} & (\underline{x} \to \infty) \\ \|\boldsymbol{\sigma}\| = 0 \text{ et } \|\,\underline{u}\,\| = 0 & (\partial I) \end{cases} \tag{1.32}$$

La solution du problème (1.32) s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbb{I} + \mathbb{P} : (\mathbb{C}_I - \mathbb{C}_1)]^{-1} : \boldsymbol{E} \qquad (I) \tag{1.33}$$

Dans la partie suivante, on utilisera ce résultat pour estimer les tenseurs de localisation de chaque phase.

1.3 Homogénéisation d'un milieu polycristallin

La solution du problème de l'inclusion d'Eshelby nous fournit un outil efficace pour estimer les tenseurs de localisation $\mathbb{A}$ de chaque phase. Sur la base du problème d'Eshelby, différents schémas d'estimation ont été proposés pour l'estimation du comportement effectif des matériaux hétérogènes constitués d'inclusions-matrice. Le schéma dilué ou le schéma d'Eshelby correspond à des matériaux présentant un faible taux de renfort ou de porosité. Cette approche n'est valable que pour des faibles concentrations en inclusions et si les interactions entre hétérogénéités sont négligées [107]. Le schéma de Mori-Tanaka permet de tenir compte des interactions entre les hétérogénéités, il améliore ainsi les résultats du schéma dilué qui a négligé cette interaction [58]. Dans ce paragraphe, on présentera rapidement les différents schémas et méthodes d'homogénéisation pour un milieu polycristallin ou granulaire. On considère un matériau constitué d'inhomogénéités élastiques linéaires homogènes occupant des domaines de même forme et de même orientation. Chaque phase constituante i est caractérisée par f_i et $\mathbb{C}_i$ qui sont respectivement la fraction volumique et le tenseur d'élasticité de phase.

1.3.1 Schéma autocohérent classique

Ce schéma a été introduit par Hershey [53] pour le matériau polycristallin et reformulé par Hill [55] pour le matériau comportant des inclusions ellipsoïdales. Dans ce schéma, on suppose que chaque particule (matrice ou inclusion) est entourée par les autres phases du milieu et donc par le milieu homogène équivalent. Ce milieu homogène équivalent est soumis à une déformation moyenne $\boldsymbol{E}$:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} : \boldsymbol{E} \tag{1.34}$$

Dans le cas d'inhomogénéités de même forme et de même orientation, l'estimation des tenseurs de localisation pour chaque phase s'écrit :

$$\mathbb{A}_i^{AC} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{AC})]^{-1} \tag{1.35}$$

A partir de la relation (1.23),l'estimation du tenseur d'élasticité macroscopique s'obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{C}_{AC} &= \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^{N} f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : \mathbb{A}_i^{AC} \\ &= \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^{N} f_i(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{AC})]^{-1}\end{aligned} \tag{1.36}$$

où f_i $(i = 2, ..., N)$ désigne la fraction volumique de la phase i. Dans le cadre de l'homogénéisation élastique linéaire d'un milieu hétérogène isotrope dont les hétérogénéités sont sphériques, le tenseur de Hill s'écrit sous forme :

$$\mathbb{P}_i^{AC} = \frac{1}{3\,k_{AC} + 4\,\mu_{AC}}\,\mathbb{J} + \frac{3\,(k_{AC} + 2\,\mu_{AC})}{5\,\mu_{AC}\,(3\,k_{AC} + 4\,\mu_{AC})}\,\mathbb{K} \tag{1.37}$$

Pour un matériau biphasique, les modules d'élasticité macroscopiques se retrouvent à partir des équations suivantes :

$$\begin{cases} (1 - f_2)\,\frac{k_1 - k_{AC}}{k_{AC} + \alpha_{AC}\,(k_1 - k_{AC})} + f_2\,\frac{k_2 - k_{AC}}{k_{AC} + \alpha_{AC}\,(k_2 - k_{AC})} = 0 \\ (1 - f_2)\,\frac{\mu_1 - \mu_{AC}}{\mu_{AC} + \beta_{AC}\,(\mu_1 - \mu_{AC})} + f_2\,\frac{\mu_2 - \mu_{AC}}{\mu_{AC} + \beta_{AC}\,(\mu_2 - \mu_{AC})} = 0 \end{cases} \tag{1.38}$$

avec

$$\alpha_{AC} = \frac{3\,k_{AC}}{3\,k_{AC} + 4\,\mu_{AC}}\ , \quad \beta_{AC} = \frac{6\,(k_{AC} + 2\,\mu_{AC})}{5\,(3\,k_{AC} + 4\,\mu_{AC})} \tag{1.39}$$

Dans le cas d'un milieu poreux sec, on obtient le module de compressibilité macroscopique :

$$k_{AC} = \frac{4\,(1 - f_2)\,k_1\,\mu_{AC}}{3\,f_2\,k_1 + 4\,\mu_{AC}} \tag{1.40}$$

où le module de cisaillement macroscopique μ_{AC} est la solution positive unique de l'équation suivante :

$$8\,\mu_{AC}^2 - \left[(8 - 20\,f_2)\,\mu_1 - (9 - 3\,f_2)\,k_1\right]\mu_{AC} - (9 - 18\,f_2)\,k_1\,\mu_1 = 0 \tag{1.41}$$

1.3.2 Schéma autocohérent itératif

Le processus itératif d'homogénéisation a été introduit dans les travaux de A.Benhamida [8, 9], S.Smaoui [95, 96], R.Zouari [113]. Son principe s'inspire du principe de schéma différentiel [78, 80] en construisant le matériau homogénéisé à partir de celui initial par une série d'additions incrémentales de la fraction volumique des phases incluses. Cette approche permet de préciser le comportement de matériaux polycristallins fortement poreux lorsque le schéma autocohérent classiques ne correspond qu'à des prédictions du comportement de matériaux faiblement poreux [95].

1.3.2.1 Homogénéisation itérative des milieux biphasiques

On considère un matériau biphasique hétérogène de fraction volumique f_2 d'hétérogénéités. Le processus itératif d'homogénéisation se fait par la construction de N milieux intermédiaires obtenus par ajouts d'une fraction d'hétérogénéité df_2 au matériau homogène de l'étape précédente. L'opération est terminée lorsque la fraction finale d'hétérogénéités atteint f_2 (N itérations). D'après le principe du schéma, la fraction volumique d'hétérogénéité à l'étape i s'écrit :

$$\phi^{(i)} = \frac{df_2}{1 - f_2 + i\, df_2} \tag{1.42}$$

avec $df_2 = f_2/N$, N est nombre d'itérations.
En considérant un matériau biphasique de tenseurs d'élasticité $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ et de fractions volumiques f_1, f_2, dans l'étape initiale, le tenseur d'élasticité du milieu homogène équivalent s'écrit :

$$\mathbb{C}^{(1)}_{hom} = \mathbb{C}_1 + \phi^{(1)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{hom}_1 : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{(1)}_{hom})]^{-1} \tag{1.43}$$

Le tenseur d'élasticité du milieu homogène équivalent de l'étape i s'obtient en résolvant l'équation suivante :

$$\mathbb{C}^{(i)}_{hom} = \mathbb{C}^{(i-1)}_{hom} + \phi^{(i)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{(i-1)}_{hom}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}^{hom}_i : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}^{(i)}_{hom})]^{-1} \tag{1.44}$$

Ici, le tenseur d'élasticité $\mathbb{C}_{hom}$ est déterminé à l'aide de méthodes d'homogénéisation classiques.

1.3.2.2 Homogénéisation itérative des milieux multi-phasiques

On applique maintenant cette méthode pour un matériau comportant une phase matrice (phase $i = 1$) entourant des hétérogénéités différentes (phase $i = 2, n$) dont les fractions volumiques sont f_i. On pose :

$$f = \sum_{i=2}^{n} f_i; \quad f_i = \rho_i f; \quad \sum_{i=2}^{n} \rho_i = 1; \quad df = f/N \tag{1.45}$$

où les paramètres constants ρ_i $(i = 2, n)$ représentent la fraction volumique relative des inhomogénéités. De la même manière, on utilise la technique qui permet de construire la solution finale incrémentalement comme suit : à chaque étape on ajoute des inhomogénéités df_i $(i = 2, n)$ dans laquelle la fraction volumique relative des phases est toujours fixée à ρ_i $(i = 2, n)$. La fraction volumique de la phase (i) à l'étape (j) vaut :

$$\phi^{(j)}_i = \frac{\rho_i\, df}{1 - f + i\, df} \tag{1.46}$$

avec $df = f/N$, N est le nombre d'itérations.
En considérant un matériau multi-phasique de tenseurs d'élasticité $\mathbb{C}_i$ $(i = 1, n)$ et de fractions volumiques f_i $(i = 2, n)$, les tenseurs d'élasticité du milieu homogène équivalent de l'étape initiale et de l'étape j s'obtiennent en résolvant les équations suivantes :

$$\mathbb{C}_{hom}^{(1)} = \mathbb{C}_1 + \sum_{i=2}^{n} \phi^{(1)}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_1^{hom} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{hom}^{(1)})]^{-1} \tag{1.47}$$

$$\mathbb{C}_{hom}^{(j)} = \mathbb{C}_{hom}^{(j-1)} + \sum_{i=2}^{n} \phi_i^{(j)}(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{hom}^{(j-1)}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_j^{hom} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{hom}^{(j)})]^{-1} \tag{1.48}$$

Le résultat de ce schéma dépend donc du nombre d'incrément N.

1.3.2.3 Approche itérative du schéma autocohérent

On propose une estimation du comportement homogénéisé des milieux poreux en couplant le schéma autocohérent et le processus itératif d'homogénéisation. Considérant un matériau biphasique de tenseurs d'élasticité $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ et de fractions volumiques f_1, f_2, à partir des équations (1.43, 1.44), on peut obtenir les tenseurs d'élasticité du milieu homogène équivalent de l'étape initiale et de l'étape j :

$$\mathbb{C}_{AC}^{(1)} = \mathbb{C}_1 + \phi^{(1)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_1) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_1^{AC} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^{(1)})]^{-1} \tag{1.49}$$

$$\mathbb{C}_{AC}^{(i)} = \mathbb{C}_{AC}^{(i-1)} + \phi^{(i)}(\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^{(i-1)}) : [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{AC} : (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_{AC}^{(i)})]^{-1} \tag{1.50}$$

Dans le cas du comportement isotrope, les modules d'élasticité effectifs à l'étape i d'un milieu biphasique poreux sec sont déterminés par les relations suivantes :

$$k_{AC}^{(i)} = \frac{4\,(1-\phi^{(i)})\,k_{AC}^{(i-1)}\,\mu_{AC}^{(i)}}{3\,\phi^{(i)}\,k_{AC}^{(i-1)} + 4\,\mu_{AC}^{(i)}} \tag{1.51}$$

$$8\,(\mu_{AC}^{(i)})^2 - \left[(8 - 20\,f_2)\,\mu_{AC}^{(i-1)} - (9 - 3\,f_2)\,k_{AC}^{(i-1)}\right]\mu_{AC}^{(i)} - (9 - 18\,f_2)\,k_{AC}^{(i-1)}\,\mu_{AC}^{(i-1)} = 0$$

L'analyse de la convergence du comportement équivalent dans le travail de thèse de Smaoui [95] a montré par exemple que pour un milieu de porosité 0.3, on atteint la convergence au bout de 50 itérations par l'approche diluée, alors que pour une porosité de 0.7, on n'arrive à convergence qu'après 150 itérations. Les approches autocohérent ou à trois phases convergent plus rapidement que les approches à distributions diluées.

1.3.3 Conclusion

On présente sur la figure 1.3 une comparaison des résultats obtenus par le schéma autocohérent classique (AC) et le schéma autocohérent itératif (AC-DIF) en fonction du nombre d'itérations N. Le milieu hétérogène est poreux biphasique à pores sphériques et la phase solide est constituée de calcite pure ($k_s = 76\,GPa$, $\mu_s = 36.8\,GPa$). En comparant les résultats obtenus, on peut remarquer que les deux différents schémas admettent la même tangente pour une faible porosité (< 0.1). Pour le schéma auto-cohérent classique, les modules k, μ s'annulent à la porosité 0.5. Dans ce cas, le matériau perd sa résistance lorsque'on le charge. En couplant avec le processus itératif, le schéma auto-cohérent itératif permet de décrire le comportement de matériaux fortement poreux. On constate que les résultats sont très approchés lorsque le nomdre d'itérations N est supérieur à 20.

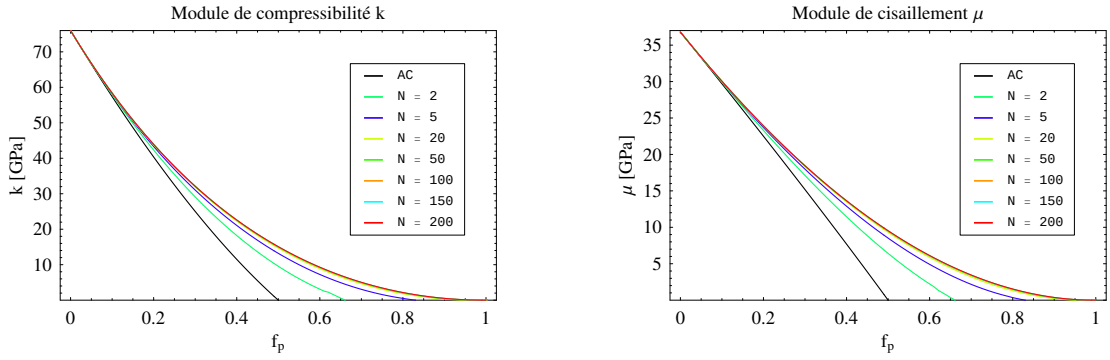


FIGURE *1.3: Influence de nombre d'itérations*

1.4 Homogénéisation d'un milieu poro-élastique multiphasique

On s'intéresse dans cette section à la méthode d'homogénéisation en poro-élasticité linéaire isotrope des milieux poreux multiphasiques dont les phases sont également des milieux poreux isotropes. La phase i constituante est caractérisée respectivement par les modules d'élasticité (k_i, μ_i), les tenseur et module de Biot du solide ($\boldsymbol{B}_i$, N_i). On considère un V.E.R constitué d'un matériau poreux équivalent à la même pression dans l'espace poreux p_l et sous la déformation macroscopique imposée $\boldsymbol{E}$ à l'infini. L'homogénéisation de ce problème en élasticité linéaire a été présentée dans les paragraphes précédents à l'aide de sous-problème P' ($\boldsymbol{E} \neq 0$, $p_l = 0$). Le but de cette section est de déterminer les tenseur et module de Biot effectifs en rappelant le sous-problème P'' ($\boldsymbol{E} = 0$, $p_l \neq 0$) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}''(\underline{x}) - p_l \boldsymbol{B}_i & (\Omega_i) \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}''(\underline{x}) = 0 & (\Omega) \\ \underline{u}''(\underline{x}) = 0 & (\partial\Omega) \end{cases} \tag{1.52}$$

1.4.1 Tenseur de Biot effectif

Dans le cas d'un chargement purement hydrique P'' ($\boldsymbol{E} = 0$ et $p_l \neq 0$), le comportement du matériau s'écrit à l'échelle macroscopique :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_\Omega &= \boldsymbol{E} = 0 \\ \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_\Omega &= \boldsymbol{\Sigma} = -p_l \, \boldsymbol{B}_{hom} \end{aligned} \tag{1.53}$$

La solution du tenseur de Biot effectif $\boldsymbol{B}_{hom}$ est déterminée en appliquant la condition de Hill-Mandel au champ de contraintes statiquement admissible σ'' du problème P'' et au champ de déformations cinématiquement admissible $\boldsymbol{\varepsilon'}$ du problème P' :

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma''} : \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_\Omega = \left\langle \boldsymbol{\sigma''} \right\rangle_\Omega : \left\langle \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_\Omega = -p_l \, \boldsymbol{B}_{hom} : \boldsymbol{E} \tag{1.54}$$

en utilisant $\boldsymbol{\sigma}'' = \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon}'' - p_l \boldsymbol{B}_i$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\langle \boldsymbol{\sigma''} : \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_\Omega &= \sum_{i=1}^{n} f_i \left\langle \boldsymbol{\sigma''} : \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_{\Omega_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \left\langle \boldsymbol{\varepsilon''} : \mathbb{C}_i : \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_{\Omega_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i \, p_l \, \boldsymbol{B}_i : \left\langle \boldsymbol{\varepsilon'} \right\rangle_{\Omega_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \left\langle \boldsymbol{\varepsilon''} : \boldsymbol{\sigma'} \right\rangle_{\Omega_i} - \sum_{i=1}^{n} f_i \, p_l \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i : \boldsymbol{E} \\ &= \left\langle \boldsymbol{\varepsilon''} : \boldsymbol{\sigma'} \right\rangle_\Omega - \sum_{i=1}^{n} f_i \, p_l \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i : \boldsymbol{E} \\ &= \left\langle \boldsymbol{\varepsilon''} \right\rangle_\Omega : \left\langle \boldsymbol{\sigma'} \right\rangle_\Omega - \sum_{i=1}^{n} f_i \, p_l \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i : \boldsymbol{E} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} f_i \, p_l \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Enfin, on obtient la solution du tenseur de Biot effectif :

$$\boldsymbol{B}_{hom} = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i \tag{1.56}$$

avec f_i, $\boldsymbol{B}_i$ et $\mathbb{A}_i$ respectivement la fraction volumique, le tenseur de Biot et le tenseur de localisation de phase i.

1.4.2 Module de Biot effectif du solide

Soient $\langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i$ et $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i$ respectivement la contrainte moyenne et la déformation moyenne de phase i, le problème à n phase sous un chargement purement hydrique s'écrit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f_i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i &= \boldsymbol{E} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} f_i \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i &= \boldsymbol{\Sigma} = -p_l \boldsymbol{B}_{hom} \end{aligned} \tag{1.57}$$

La relation entre la contrainte moyenne $\langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i$ et la déformation moyenne $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i$ dans la phase i s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i &= \mathbb{C}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i - p_l \boldsymbol{B}_i \\ (\phi - \phi_0)_i'' &= \boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \frac{p_l}{N_i} \end{aligned} \tag{1.58}$$

D'autre part, on a la variation de porosité à l'échelle macroscopique :

$$\begin{aligned} (\Phi - \Phi_0)_\Omega'' &= \frac{p_l}{N_{hom}} \\ (\Phi - \Phi_0)_\Omega'' &= \sum_{i=1}^{n} f_i \, (\phi - \phi_0)_{\Omega_i}'' \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \, (\boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \frac{p_l}{N_i}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \, \boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \, \frac{p_l}{N_i} \end{aligned} \tag{1.59}$$

La solution du module de Biot du solide est donc déterminée par :

$$\frac{1}{N_{hom}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{p_l} \boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \sum_{i=1}^{n} f_i \, \frac{1}{N_i} \tag{1.60}$$

Le but est maintenant de déterminer la déformation moyenne dans la phase i $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i$. Notons $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ le champ de déformation solution du problème. Ses moyennes par phase $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_i$ $(i = 1, n)$ peuvent être calculées en fonction du chargement macroscopique $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{E}$ et des polarisations $\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_i$ $(i = 1, n)$ obtenues par la relation (1.62). Le principe de superposition s'applique et sa solution prend la forme [12] :

$$\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_1 \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_2 \\ . \\ . \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \\ . \\ . \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{P}^0_{11} & \mathcal{P}^0_{12} & . & . & \mathcal{P}^0_{1n} \\ \mathcal{P}^0_{21} & \mathcal{P}^0_{22} & . & . & \mathcal{P}^0_{2n} \\ . & & . & . & . \\ . & & . & . & . \\ \mathcal{P}^0_{n1} & \mathcal{P}^0_{n2} & . & . & \mathcal{P}^0_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_1 \\ \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_2 \\ . \\ . \\ \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_n \end{bmatrix} \tag{1.61}$$

$$\langle \boldsymbol{\tau} \rangle_i = (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_0) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_i - p_l \, \boldsymbol{B}_i \tag{1.62}$$

où les $\mathcal{P}^0_{rs}$ sont des tenseurs d'ordre quatre, ils se calculent par la relation suivante avec la covariance $\mathcal{C}_{rs}(h)$ et l'opérateur de Green $\boldsymbol{\Gamma}^0(h)$ modifié en déformation, associé au milieu infini homogène de modules $(\mathbb{C}_0, \boldsymbol{B}_0)$

$$\mathcal{P}^0_{rs} = \frac{1}{f_r} \int_{VER(0)} [\mathcal{C}_{rs}(h) - f_r \, f_s] \, \boldsymbol{\Gamma}^0(h) \, dV_h \tag{1.63}$$

Dans le cas particulier de la distribution isotrope des phases, le tenseur $\mathcal{P}^0_{rs}$ s'obtient par [12] :

$$\mathcal{P}^0_{rs} = (\delta_{rs} - f_s) \, \mathbb{P}^0 \tag{1.64}$$

avec $\mathbb{P}^0$ est le tenseur de Hill.

Dans le cas du chargement purement hydrique ($\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0$), on peut re-écrire la relation (1.61) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_1 \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_2 \\ . \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 - f_1 & -f_2 & ... & -f_n \\ -f_1 & 1 - f_2 & ... & -f_n \\ . & . & ... & . \\ -f_1 & -f_2 & ... & 1 - f_n \end{bmatrix} \mathbb{P}^0 : \begin{bmatrix} (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_0) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_1 - p_l \, \boldsymbol{B}_1 \\ (\mathbb{C}_2 - \mathbb{C}_0) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_2 - p_l \, \boldsymbol{B}_2 \\ . \\ (\mathbb{C}_n - \mathbb{C}_0) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_n - p_l \, \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix} \tag{1.65}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}+(1-f_1)\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & -f_2\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_0) & ... & -f_n\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_n-\mathbb{C}_0) \\ -f_1\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & \mathbb{I}+(1-f_2)\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_0) & ... & -f_n\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_n-\mathbb{C}_0) \\ . & . & ... & . \\ -f_1\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & -f_2\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_0) & ... & \mathbb{I}+(1-f_n)\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_n-\mathbb{C}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_1 \\ \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_2 \\ . \\ \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-f_1)\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_1-f_2\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_2+...-f_n\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_n \\ -f_1\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_1-(1-f_2)\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_2+...-f_n\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_n \\ ... \\ -f_1\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_1-f_2\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_2+...+(1-f_n)\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_n \end{bmatrix} p_l \tag{1.66}$$

en faisant $ligne^*_{(i)} = ligne_{(1)} - ligne_{(i)}$ $(i=2,n)$, l'équation matricielle (1.66) devient :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{I}+(1-f_1)\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & -f_2\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_0) & .. & -f_n\,\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_n-\mathbb{C}_0) \\ \mathbb{I}+\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & -[\mathbb{I}+\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_2-\mathbb{C}_0)] & .. & 0 \\ . & . & .. & . \\ \mathbb{I}+\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_1-\mathbb{C}_0) & 0 & .. & -[\mathbb{I}+\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_n-\mathbb{C}_0)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_1 \\ \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_2 \\ . \\ \langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1-f_1)\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_1-f_2\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_2+...-f_n\,\mathbb{P}^0:\boldsymbol{B}_n \\ \mathbb{P}^0:(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2) \\ ... \\ \mathbb{P}^0:(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_n) \end{bmatrix} p_l \tag{1.67}$$

en rappelant l'expression de tenseur de localisation $\mathbb{A}_i = [\mathbb{I}+\mathbb{P}^0:(\mathbb{C}_i-\mathbb{C}_0)]^{-1}$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\mathbb{A}_1^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_1 - \mathbb{A}_2^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_2 = \mathbb{P}^0:(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)\,p_l \\ &\mathbb{A}_1^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_1 - \mathbb{A}_3^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_3 = \mathbb{P}^0:(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_3)\,p_l \\ &..... \\ &\mathbb{A}_1^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_1 - \mathbb{A}_n^{-1}:\langle\boldsymbol{\varepsilon}^*\rangle_n = \mathbb{P}^0:(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_n)\,p_l \end{aligned} \tag{1.68}$$

$$
\begin{aligned}
& f_1\,\mathbb{A}_1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 - f_1\,\mathbb{A}_1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 = 0 \\
& f_2\,\mathbb{A}_2 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 - f_2\,\mathbb{A}_1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_2 = f_2\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_2 : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)\,p_l \\
& f_3\,\mathbb{A}_3 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 - f_3\,\mathbb{A}_1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_3 = f_3\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_3 : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_3)\,p_l \\
& ..... \\
& f_n\,\mathbb{A}_n : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 - f_n\,\mathbb{A}_1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_n = f_n\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_n : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n)\,p_l
\end{aligned}
\tag{1.69}
$$

On combine n équations présentées dans (1.69) en utilisant $\sum_{i=1}^{n} f_i\,\mathbb{A}_i = \mathbb{I}$ et $\sum_{i=1}^{n} f_i\,\langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_i = \boldsymbol{E''} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_1 = {} & f_2\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_2 : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2)\,p_l \\
& + f_3\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_3 : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_3)\,p_l \\
& + ... \\
& + f_n\,\mathbb{A}_1 : \mathbb{A}_n : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_n)\,p_l
\end{aligned}
\tag{1.70}
$$

Donc dans le cas à n phases, la solution de la déformation moyenne dans la phase i $\langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_i$ est déterminée généralement par la relation suivante :

$$
\langle \boldsymbol{\varepsilon^*} \rangle_i = \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} f_j\,\mathbb{A}_i : \mathbb{A}_j : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{B}_j)\,p_l \tag{1.71}
$$

En introduisant (1.71) dans la relation (1.60), on obtient la solution du module de Biot du solide homogénéisé pour un milieu poreux multiphasique :

$$
\frac{1}{N_{hom}^{n-ph}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{N_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i\,\boldsymbol{B}_i : \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} f_j\,\mathbb{A}_i : \mathbb{A}_j : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_i - \boldsymbol{B}_j) \tag{1.72}
$$

1.4.3 Application au milieu à double porosité

On considère un milieu multiphasique à double porosité occupant un domaine géométrique Ω qui comporte m phases solides Ω_r $(r = 1, m)$, l phases poreuses Ω_k de micro-porosité ϕ_k^I $(k = 1, l)$ et une phase de macro-porosité ϕ^{II} (figure 1.4). La porosité totale du milieu est obtenue par :

$$
\phi = \sum_{k=1}^{l} f_k^{II}\,\phi_k^I + \phi^{II} \tag{1.73}
$$

avec f_k^{II} la fraction volumique de phase poreuse ($k = 1, l$). On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\Omega = \sum_{r=1}^{m} \Omega_r + \sum_{k=1}^{l} \Omega_k + \phi^{II} \\ &f_r^{II} = \frac{\Omega_r}{\Omega} \quad , \quad f_k^{II} = \frac{\Omega_k}{\Omega} \quad , \quad f_p^{II} = \frac{\phi^{II}}{\Omega} \\ &\sum_{r=1}^{m} f_r^{II} + \sum_{k=1}^{l} f_k^{II} + f_p^{II} = 1 \end{aligned} \tag{1.74}$$

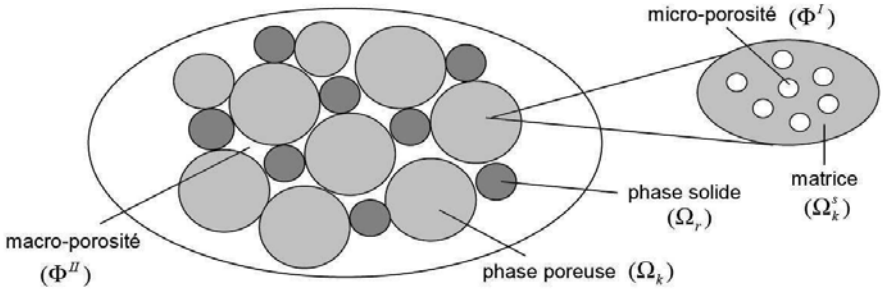


FIGURE 1.4: *Homogénéisation du milieu à double porosité*

Pour homogénéiser un milieu à double porosité, on se propose d'utiliser une méthode d'homogénéisation à deux étapes :

– Etape I : homogénéisation de la phase poreuse Ω_k qui comporte simplement une phase solide Ω_k^s et de micro-porosité ϕ_k^I.

– Etape II : homogénéisation du milieu multiphasique composé de m phases solides Ω_r, l phases poreuses Ω_k et une phase de macro-porosité ϕ^{II}.

La solution en poro-élasticité à l'étape I a été présentée dans le paragraphe 1.1.3. On rappelle que dans le cas d'un comportement isotrope, le tenseur et le module de Biot du solide d'un milieu poreux biphasique sont retenus :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}_k^I = b_k^I.\delta \quad , \quad b_k^I = 1 - \frac{K_k^I}{K_k^s} \\ &\frac{1}{N_k^I} = \frac{b_k^I - f_p^k}{K_k^s} \quad , \quad f_p^k = \frac{\phi_k^I}{\Omega_k} \end{aligned} \tag{1.75}$$

K_k^s est le module de compressibilité de la phase solide Ω_k^s correspondant à la phase poreuse Ω_k ; K_k^I est le module homogénéisé de la phase poreuse k à l'étape I, il est déterminé à l'aide du schéma d'homogénéisation présenté dans le paragraphe 1.3. En fin de l'étape I, on obtient donc les propriétés poroélastique de la phase poreuse k ($\mathbb{C}_k^I$, $\boldsymbol{B}_k^I$ et $1/N_k^I$). Pour déterminer la solution

du problème à l'étape II, on utilise maintenant la solution obtenue dans le cas général d'un milieu poreux multiphasique présentée dans les paragraphes 1.4.1 et 1.4.2. Il faut noter que $\boldsymbol{B}_r^I = 0$ et $1/N_r^I = 0$ pour la phase solide non poreuse r ; $\boldsymbol{B}_{(1)}^I = \delta$ pour la phase macro-pore (1). Le tenseur de Biot est déduit à partir de (1.56) en notant $n = m + l + (1)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_{hom} &= \sum_{i=1}^{n} f_i \, \boldsymbol{B}_i : \mathbb{A}_i \\
&= \sum_{r=1}^{m} f_r^{II} \, \boldsymbol{B}_r^I : \mathbb{A}_r + \sum_{k=1}^{l} f_k^{II} \, \boldsymbol{B}_k^I : \mathbb{A}_k + f_p^{II} \, \boldsymbol{B}_{(1)}^I : \mathbb{A}_{(1)} \\
&= \sum_{k=1}^{l} f_k^{II} \, \boldsymbol{B}_k^I : \mathbb{A}_k + (1 - \sum_{i=1}^{m} f_i^{II} \, \mathbb{A}_i - \sum_{k=1}^{l} f_k^{II} \, \mathbb{A}_k) \, \delta \\
&= (1 - \sum_{r=1}^{m} f_r^{II} \, \mathbb{A}_r) \, \delta - \sum_{k=1}^{l} [f_k^{II} \, \mathbb{A}_k : (\delta - \boldsymbol{B}_k^I)]
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Le module de Biot du solide homogénéisé est obtenu à partir de (1.72) :

$$\frac{1}{N_{hom}^{n-ph}} = \sum_{k=1}^{l} \frac{f_k^{II}}{N_k^I} + \sum_{i=1}^{m+l+(1)} f_i^{II} \, \boldsymbol{B}_i^I : \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} f_j \, \mathbb{A}_i : \mathbb{A}_j : \mathbb{P}^0 : (\boldsymbol{B}_i^I - \boldsymbol{B}_j^I) \tag{1.77}$$

où $\boldsymbol{B}_k^I$, $1/N_k^I$ $(k = 1, l)$ sont déterminés par (1.75) et :

$$\boldsymbol{B}_{(1)}^I = \delta \quad , \quad \boldsymbol{B}_r^I = 0 \quad , \quad \frac{1}{N_r^I} = 0 \quad (r = 1, m) \tag{1.78}$$

Dans le cas d'un matériau triphasique de phase solide (r), de phase poreuse (k) et de volume de pore (1), les expressions du tenseur et du module de Biot du solide sont données exactement par (1.79) et (1.80) :

$$\boldsymbol{B}_{hom}^{3ph} = f_k^{II} \, \boldsymbol{B}_k^I : \mathbb{A}_k + f_p^{II} \, \delta : \mathbb{A}_p \tag{1.79}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_{hom}^{3ph}} = \frac{f_k^{II}}{N_k^I} &+ f_p^{II} \, f_r^{II} \, \delta : \mathbb{A}_p : \mathbb{A}_r : \mathbb{P}^0 : \delta \\
&+ f_k^{II} \, f_p^{II} \, \boldsymbol{B}_k^I : \mathbb{A}_k : \mathbb{A}_p : \mathbb{P}^0 : \boldsymbol{B}_k^I \\
&+ f_r^{II} \, f_k^{II} \, (\delta - \boldsymbol{B}_k^I) : \mathbb{A}_r : \mathbb{A}_k : \mathbb{P}^0 : (\delta - \boldsymbol{B}_k^I)
\end{aligned} \tag{1.80}$$

Chapitre 2

Poro-élasticité linéaire de sphères composites à interface parfaite (SCIP)

2.1 Introduction

2.1.1 Assemblage de sphères composites

L'assemblage de sphères composites ou le modèle des sphères composites a été introduit par Hashin [48]. Ce modèle est constitué de particules sphériques de taille graduelle noyées dans un milieu continu. Les lignes tiretées dans la figure 2.1-A délimitent la région de phase de matrice associée à chaque particule. Le ratio a/b est constant pour chaque élément "sphère composite" et ne dépend pas de sa taille. Cette distribution nécessite une diminution infinitésimale de taille de particule.

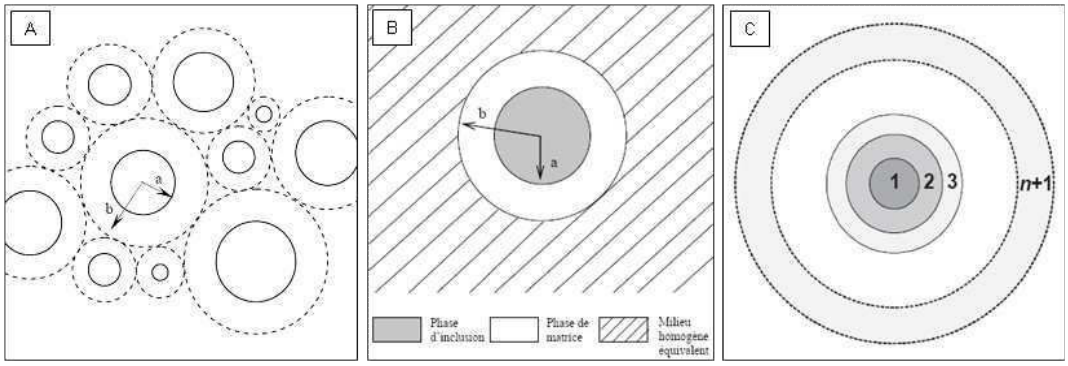


FIGURE *2.1: A : Modèle des sphères composites [48] , B : Modèle à trois phases [20] , C : Modèle à n-phases [54]*

Avec ce modèle, Hashin [48] a trouvé la solution exacte du module de compressibilité effectif

k_{SCA}, il dépend des propriétés élastiques des phases constituantes et s'écrit :

$$k_{SCA} = k_2 + \frac{f_1 (k_1 - k_2)}{1 + (1 - f_1) \frac{k_1 - k_2}{k_2 + \frac{4}{3}\mu_2}} \tag{2.1}$$

k_i, μ_i sont respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement de la phase i ($i = 1$: inclusion ; 2 : phase de matrice). La limitation de ce modèle est que la détermination de la solution pour le module de cisaillement effectif μ_{SCA} est très compliquée [102]. Pour résoudre ce problème, Christensen et Lo [20] ont proposé un modèle appelé modèle autocohérent généralisé qui permet de déterminer exactement le module de cisaillement effectif μ_{SCA}.

2.1.2 Schéma autocohérent généralisé

Sur la base du modèle des sphères composites de Hashin [48], Christensen et Lo [20] ont développé le modèle à trois phases composites ou encore appelé modèle autocohérent généralisé. Le principe est de généraliser le schéma autocohérent de façon à tenir compte du fait qu'il existe une phase homogène entourée de tous les éléments "sphère composite" (figure 2.1-B). On considère qu'à l'infini le modèle est conditionné par une déformation homogène. La région extérieure des sphères composites devient une phase homogénéisée équivalente. La solution du module de compressibilité effectif k_{ACG} retrouve celle de Hashin [48] :

$$k_{ACG} = k_2 + \frac{f_1 (k_1 - k_2)}{1 + (1 - f_1) \frac{k_1 - k_2}{k_2 + \frac{4}{3}\mu_2}} \tag{2.2}$$

La solution du module de cisaillement effectif de ce problème μ_{ACG} a été déterminée sur la base de la théorie élastique et de la méthode d'Eshelby [32]. Les modules effectifs k_{ACG} et μ_{ACG} sont deux à deux indépendants. La solution μ_{ACG} est une racine positive et unique d'une équation quadratique sous la forme suivante [20] :

$$\boldsymbol{A}\,\mu_{ACG}^2 + \boldsymbol{B}\,\mu_{ACG} + \boldsymbol{C} = 0 \tag{2.3}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ sont des expressions des propriétés élastiques des phases constituantes et sont détaillées dans [20] ou dans l'annexe A. Le comportement équivalent d'un milieu poreux sec s'obtient sans difficulté en faisant tendre k_1 et μ_1 vers zéro. A partir du modèle à trois phases, le modèle à quatre phases de sphères composites a été dévellopé par plusieurs auteurs [5, 52, 63, 64, 87, 112] parmi lesquels Hashin et Monteiro [52] ont proposé une condition différente de déplacement à l'infini pour simplifier la solution du problème. Dans le cas général de $n + 1$ phases sphères composites (figure

2.1-C), Hervé et Zaoui [54] ont trouvé la solution exacte en élasticité linéaire. Le coefficient de Biot du modèle a été aussi déterminé par Bary [5]. Dans la section suivante, on présente généralement la solution en poro-élasticité qui permet de déterminer les modules d'élasticité, le tenseur de Biot et le module de Biot du solide dans le cas général du modèle "$n+1$" phases sphères composites. Pour les cas particuliers à trois ou quatre phases, sa solution poro-élastique est présentée dans l'annexe A.

2.2 Modèle à "n+1" phases SCIP

Ce paragraphe présente brièvement la solution en poro-élasticité linéaire et isotrope pour le modèle à "$n+1$" phases sphères composites à interface parfaite (SCIP). Le modèle est constitué de n inclusions concentriques noyées dans un milieu homogène équivalent (phase $n+1$). On considère le cas dans lequel les phases sont isotropes poroélastiques et l'interface entre les phases est supposée parfaite. La porosité est supposée se connecter dans la phase et entre les phases. La limite entre deux phases différentes est distinguée par le rayon r_i (figure 2.2). Chaque phase est caractérisée par les modules d'élasticité k_i, μ_i, le coefficient de Biot b_i et le module de Biot du solide N_i. Le problème est écrit dans le système de coordonnées sphériques avec l'origine au centre de sphères composites. Le modèle est soumis à une condition en déformation homogène $\boldsymbol{E}$ à l'infini en prenant en compte la pression de la phase liquide p_l dans l'espace poreux. Le problème posé sur le V.E.R occupant un domaine géométrique Ω s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sigma = \mathbb{C} : \varepsilon + \sigma^p \qquad (\Omega) \\ &\mathbb{C} = \mathbb{C}_i \qquad (\Omega_i) \\ &\sigma^p = -b_i\, p_l\, \delta \qquad (\Omega_i) \\ &\underline{u} = \mathbf{E}\,\underline{x} \qquad (\partial\Omega) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Pour résoudre ce problème, on peut le décomposer en deux sous-problèmes élémentaires :

1. Le premier sous-problème (P') correspond à un chargement purement mécanique : $\mathbf{E} \neq 0, p_l = 0$

$$\begin{aligned} &\sigma' = \mathbb{C} : \varepsilon' \qquad (\Omega) \\ &\underline{u}' = \mathbf{E}\,\underline{x} \qquad (\partial\Omega) \end{aligned} \tag{2.5}$$

La condition de déplacement à l'infini peut être s'écrite sous forme tensorielle avec E_{ij} constante et symétrique. Dans le cas de composites isotropes, la déformation $\mathbf{E}$ peut être décomposée en deux composants isotrope/deviatorique :

$$\begin{aligned} u_i(\underline{x})_{\underline{x}\to\infty} &= E_{ij}\, x_j \\ E_{ij} &= E^{iso}\,\delta_{ij} + E^{dev}_{ij} \end{aligned} \tag{2.6}$$

2. Le deuxième sous-problème (P") correspond à un chargement purement hydrique : $\mathbf{E} = 0, p_l \neq 0$

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \mathbb{C} : \varepsilon'' + \sigma^p \qquad (\Omega) \\ \underline{u}'' &= 0 \qquad (\partial\Omega) \end{aligned} \tag{2.7}$$

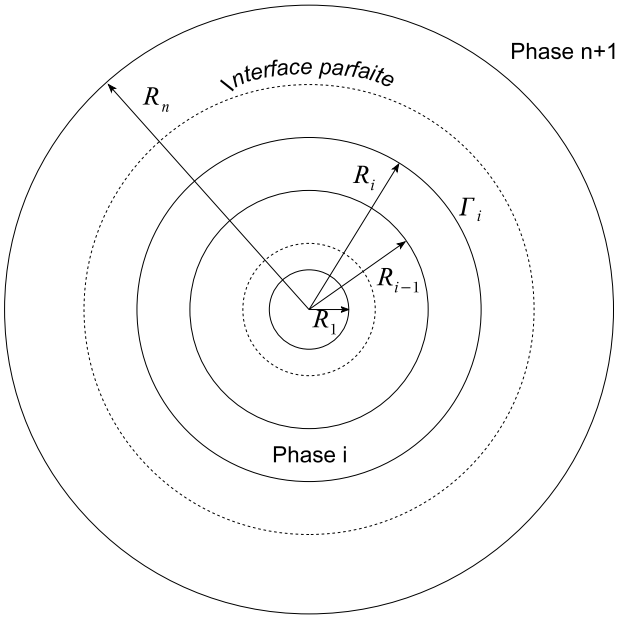


FIGURE 2.2: *Modèle à $n+1$ phases sphères composites à interface parfaite*

2.2.1 Module de compressibilité k^{SCIP}_{n+1}

Les modules d'élasticité effectifs (k^{SCIP}_{n+1} et μ^{SCIP}_{n+1}) sont déterminés à partir du premier sous-problème (P'). D'abord pour déterminer le module de compressibilité, on considère une déformation homogène isotrope à l'infini, donc la condition en déplacement à l'infini (2.6) devient :

$$u_i(\underline{x})_{\underline{x}\to\infty} = E^{iso}\, x_i \tag{2.8}$$

Dans le système de coordonnées sphériques, l'expression du déplacement en fonction du rayon r s'écrit :

$$u_r = U_r(r) = H\,r + \frac{L}{r^2} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad u_\varphi = 0 \tag{2.9}$$

avec H, L des coefficients inconnus. Les expressions des déformations et des contraintes pour chaque phase sont trouvées à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[grad(\underline{u}) + grad^T(\underline{u})] \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\,\mu \varepsilon_{ij} \end{aligned} \tag{2.10}$$

A partir de la relation entre contrainte et déformation 2.37, on obtient l'expression des contraintes normales :

$$\sigma_{rr} = 3\,H\,k - \frac{4\,L\,\mu}{r^3} \quad , \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad , \quad \sigma_{r\varphi} = 0 \tag{2.11}$$

où k et μ sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement. Pour chaque phase i les expressions des déplacements et des contraintes normales s'écrivent :

$$\begin{cases} U_r^{(i)}(r) = H_i\,r + \dfrac{L_i}{r^2} \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r) = 3\,H_i\,k_i - \dfrac{4\,L_i\,\mu_i}{r^3} \end{cases} \tag{2.12}$$

Dans ces équations, H_i, L_i sont des coefficients inconnus de la phase i ($i = \overline{1, n+1}$) qui seront déterminés par les conditions de continuité aux interfaces :

$$\begin{cases} u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i) \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) \end{cases} \tag{2.13}$$

Les relations (2.12) et (2.38) nous donnent les systèmes des équations de continuité comme suivants :

$$\begin{cases} H_i\,r_i + \dfrac{L_i}{r_i^2} = H_{i+1}\,r_i + \dfrac{L_{i+1}}{r_i^2} \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ 3\,H_i\,k_i - \dfrac{4\,L_i\,\mu_i}{r_i^3} = 3\,H_{i+1}\,k - \dfrac{4\,L_{i+1}\,\mu_{i+1}}{r_i^3} \end{cases} \tag{2.14}$$

Sous forme matricielle, les systèmes des équations de continuité (2.14) peuvent être re-écrits :

$$\boldsymbol{J}_i(r_i)\,\boldsymbol{V}_i = \boldsymbol{J}_{i+1}(r_i)\,\boldsymbol{V}_{i+1} \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{J}_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3k_i & -4\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Les conditions de continuité à une telle interface Γ_i s'écrivent donc par (2.17). En combinant (2.17) pour $n+1$ phases, on obtient une relation linéaire des coefficients inconnus entre la phase effective $n+1$ et le noyau des sphères composites (phase 1) par (2.18).

$$\boldsymbol{V}_{i+1} = \boldsymbol{N}_i\,\boldsymbol{V}_i \quad avec \quad \boldsymbol{N}_i = [\boldsymbol{J}_{i+1}(r_i)]^{-1}\,\boldsymbol{J}_i(r_i) \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{V}_{n+1} = [\boldsymbol{N}_n ... \boldsymbol{N}_i ... \boldsymbol{N}_1]\,\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{Q}_n\,\boldsymbol{V}_1 \tag{2.18}$$

En comparant les expressions des déplacements (2.9) pour $r \to \infty$ avec la condition (2.8) et avec la condition en déplacement à $r = 0$, on conlut que $H_{n+1} = E^{iso}$ et $L_1 = 0$. En utilisant la formule d'Eshelby [32] et la méthode de calcul de Christensen et Lo [20], on obtient $L_{n+1} = 0$. Enfin, on trouve un système linéaire (2.19) de 2 équations et 2 inconnues H_1 et k_{n+1} (dans $\boldsymbol{Q}_n$). La solution obtenue de k_{n+1} est donc le module de compressibilité effectif du problème k_{n+1}^{SCIP}. Les constantes inconnues H_i et L_i de phase i ($i = \overline{2,n}$) sont déterminées par la relation (2.20) dans laquelle H_1 est connu et $\boldsymbol{Q}_{i-1}$ est déterminé à partir des propriétés d'élasticité des i phases ($i = \overline{1,i}$).

$$\begin{bmatrix} E^{iso} \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_n \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$\begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{i-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

2.2.2 Module de cisaillement μ_{n+1}^{SCIP}

Pour déterminer le module de cisaillement effectif, on considère une déformation homogène déviatorique à l'infini, donc la condition en déplacement à l'infini (2.6) devient :

$$u_i(\underline{x})_{\underline{x}\to\infty} = E_{ij}^{dev}\, x_j \tag{2.21}$$

D'après Hashin et Monteiro [52], on considère une déformation déviatorique de forme simple, et la condition en déplacement à l'infini s'écrit :

$$u_1^0 = -\beta\, x_1 \quad , \quad u_2^0 = -\beta\, x_2 \quad , \quad u_3^0 = 2\,\beta\, x_3 \tag{2.22}$$

Dans le système de coordonnées sphériques, on obtient l'expression des déplacements en fonction du rayon r :

$$\begin{cases} u_r^{(i)} = U_r^{(i)}(r)\,[3\,cos^2(\theta) - 1] \\ u_\theta^{(i)} = U_\theta^{(i)}(r)\,[-3\,sin(\theta)cos(\theta)] \\ u_\varphi^{(i)} = 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

où r, θ et φ sont les coordonnés sphérique usuelles. U_r et U_θ sont fonctions uniquement du rayon r. A partir des équations d'équilibre, on obtient les expressions de U_r et U_θ pour chaque phase i comme suit :

$$\begin{cases} U_r^{(i)}(r) = A_i r + B_i r^3 + \dfrac{C_i}{r^4} + \dfrac{D_i}{r^2} \\ U_\theta^{(i)}(r) = A_i r + \dfrac{7-4\nu}{6\nu}\, B_i r^3 - \dfrac{2C_i}{3r^4} + \dfrac{1-2\nu}{5-4\nu}\, \dfrac{2D_i}{r^2} \end{cases} \tag{2.24}$$

Les constantes inconnues A_i, B_i, C_i et D_i $(i = \overline{1, n+1})$ sont déterminées par les conditions de continuité à l'interface, ces conditions s'écrivent en déplacement (2.25) et en contrainte (2.26) :

$$\begin{cases} u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i) \\ u_\theta^{(i)}(r_i) = u_\theta^{(i+1)}(r_i) \end{cases} \tag{2.25}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) \\ \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_i) \end{cases} \tag{2.26}$$

Les conditions de continuité (2.25) et (2.26) peuvent être re-écrites en forme matricielle :

$$\boldsymbol{L}_i(r_i)\,\boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{L}_{i+1}(r_i)\,\boldsymbol{W}_{i+1} \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{L}_i = \begin{bmatrix} r & r^3 & \frac{1}{r^4} & \frac{1}{r^2} \\ r & \frac{7-4\nu_i}{6\nu_i}\,r^3 & -\frac{2}{3r^4} & \frac{1-2\nu_i}{5-4\nu_i}\,\frac{2}{r^2} \\ 2\mu_i & -\mu_i r^2 & -\frac{8}{r^5}\,\mu_i & \frac{20-4\nu_i}{4\nu_i-5}\,\frac{\mu_i}{r^3} \\ 2\mu_i & \frac{7+2\nu_i}{3\nu_i}\,\mu_i r^2 & \frac{16}{3r^5}\,\mu_i & \frac{4(\nu_i+1)}{5-4\nu_i}\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{W}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

A l'interface Γ_i, les conditions de continuité s'écrivent en donnant les relations de propriété des phases :

$$\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{M}_i\,\boldsymbol{W}_i \quad avec \quad \boldsymbol{M}_i = [\boldsymbol{L}_{i+1}(r_i)]^{-1}\,\boldsymbol{L}_i(r_i) \tag{2.29}$$

et on obtient :

$$\boldsymbol{W}_{n+1} = [\boldsymbol{M}_n ... \boldsymbol{M}_i ... \boldsymbol{M}_1]\,\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{P}_i\,\boldsymbol{W}_1 \tag{2.30}$$

En comparant l'expression des déplacements pour $r \to \infty$ avec la condition (2.22) et avec la condition en déplacement à $r = 0$, on conlut que $A_{n+1} = \beta$, $B_{n+1} = 0$ et $C_1 = 0$, $D_1 = 0$. En utilisant la formule d'Eshelby [32] et la méthode de calcul de Christensen et Lo [20], on obtient $D_{n+1} = 0$:

$$\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^n_{11} & \boldsymbol{P}^n_{12} & \boldsymbol{P}^n_{13} & \boldsymbol{P}^n_{14} \\ \boldsymbol{P}^n_{21} & \boldsymbol{P}^n_{22} & \boldsymbol{P}^n_{23} & \boldsymbol{P}^n_{24} \\ \boldsymbol{P}^n_{31} & \boldsymbol{P}^n_{32} & \boldsymbol{P}^n_{33} & \boldsymbol{P}^n_{34} \\ \boldsymbol{P}^n_{41} & \boldsymbol{P}^n_{42} & \boldsymbol{P}^n_{43} & \boldsymbol{P}^n_{44} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

Sous forme simplifiée, l'équation matricielle (2.31) devient :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}^n_{21} & \boldsymbol{P}^n_{22} \\ \boldsymbol{P}^n_{41} & \boldsymbol{P}^n_{42} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

La condition nécessaire pour que l'équation matricielle (2.32) ait une racine est que son déterminant soit nul. On obtient donc l'équation du déterminant du système des équations sous la forme :

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_{21}^{n} & \boldsymbol{P}_{22}^{n} \\ \boldsymbol{P}_{41}^{n} & \boldsymbol{P}_{42}^{n} \end{vmatrix} = \boldsymbol{P}_{21}^{n}\,\boldsymbol{P}_{42}^{n} - \boldsymbol{P}_{41}^{n}\,\boldsymbol{P}_{22}^{n} = 0 \tag{2.33}$$

Avec les données numériques de chaque phase i (f_i, k_i et μ_i), il est aisé de déterminer le module de cisaillement effectif μ_{n+1}^{SCIP} à partir de l'équation du déterminant (2.33) et à l'aide du logiciel Mathematica. Dans le cas à quatre phases, les constituants du déterminant sont donnés dans l'annexe A. Pour determiner les constantes inconnues A_i, B_i, C_i et D_i de chaque phase i ($i = \overline{2,n}$), on retient la relation :

$$\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{i-1} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

avec $\boldsymbol{P}_{i-1}$ déterminé à partir des propriétés d'élasticité des i phases ($i = \overline{1,i}$) ; A_1 et B_1 sont déterminés à l'aide de système d'équations (2.31) :

$$\begin{aligned} A_1 &= \boldsymbol{P}_{22}^{n}\,\frac{\beta}{\boldsymbol{P}_{11}^{n}\,\boldsymbol{P}_{22}^{n} - \boldsymbol{P}_{12}^{n}\,\boldsymbol{P}_{21}^{n}} \\ B_1 &= -\boldsymbol{P}_{21}^{n}\,\frac{\beta}{\boldsymbol{P}_{11}^{n}\,\boldsymbol{P}_{22}^{n} - \boldsymbol{P}_{12}^{n}\,\boldsymbol{P}_{21}^{n}} \end{aligned} \tag{2.35}$$

2.2.3 Tenseur de Biot $\boldsymbol{B}_{n+1}^{SCIP}$

Les propriétés poro-élastiques sont déterminées à l'aide du sous-problème (P''), sous un chargement purement hydrique $\mathbf{E} = 0$, $p_l \neq 0$, les expressions du déplacement à l'interface de rayon r s'écrivent :

$$u_r = U_r(r) = P\,r + \frac{Q}{r^2} \quad , \quad u_\theta = 0 \quad , \quad u_\varphi = 0 \tag{2.36}$$

où P, Q sont des constantes inconnues. Les expressions des déformations et des contraintes pour chaque phase sont trouvées à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}[grad(\underline{u}) + grad^T(\underline{u})] \\ \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\,\mu \varepsilon_{ij} - p_l\, b\, \delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.37}$$

Les constantes inconnues P_i, Q_i ($i = \overline{1, n+1}$) sont déterminées par les conditions de continuité aux interfaces. Dans le cas d'un chargement purement hydrique ($\boldsymbol{E} = 0$ et $p_l \neq 0$), on a :

$$\begin{cases} u_r^{(i)}(r_i) = u_r^{(i+1)}(r_i) \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) \end{cases} \tag{2.38}$$

avec $u_r^{(n+1)}(r_n) = 0$ et $\sigma_{rr}^{(n+1)}(r_n) = -p_l\, b_{hom}$. En détaillant les expressions des déplacements et des contraintes, les conditions de continuité (2.38) deviennent :

$$\begin{cases} P_i\, r_i + \dfrac{Q_i}{r_i^2} = P_{i+1}\, r_i + \dfrac{Q_{i+1}}{r_i^2} \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ 3\, P_i\, k_i - \dfrac{4\, Q_i\, \mu_i}{r_i^3} - b_i\, p_l = 3\, P_{i+1}\, k - \dfrac{4\, Q_{i+1}\, \mu_{i+1}}{r_i^3} - b_{i+1}\, p_l \end{cases} \tag{2.39}$$

Sous forme matricielle, on obtient :

$$\boldsymbol{J}_i(r_i)\, \boldsymbol{V}_i + \boldsymbol{B}_i = \boldsymbol{J}_{i+1}(r_i)\, \boldsymbol{V}_{i+1} + \boldsymbol{Y}_{i+1} \tag{2.40}$$

$$\boldsymbol{J}_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3k_i & -4\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{Y}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -b_i\, p_l \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{i+1} &= \boldsymbol{N}_i\, \boldsymbol{V}_i + \boldsymbol{T}_i \\ \boldsymbol{N}_i &= [\boldsymbol{J}_{i+1}(r_i)]^{-1}\, \boldsymbol{J}_i(r_i) \\ \boldsymbol{T}_i &= [\boldsymbol{J}_{i+1}(r_i)]^{-1}\, [\boldsymbol{Y}_i - \boldsymbol{Y}_{i+1}] \end{aligned} \tag{2.42}$$

et donc à l'interface de rayon $r = r_n$:

$$\boldsymbol{V}_{n+1} = \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j \, \boldsymbol{V}_1 + \sum_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{n} \boldsymbol{N}_k) \, \boldsymbol{T}_j \tag{2.43}$$

De la même manière pour satisfaire les conditions aux limites en déplacement à $r = 0$ et à l'infini $r \to \infty$, on obtient $P_{n+1} = 0$ et $Q_1 = 0$. En utilisant la formule d'Eshelby [32] et la méthode de calcul de Christensen et Lo [20], on obtient $Q_{n+1} = 0$. Enfin, on trouve un système d'équations linéaires à 2 équations et 2 inconnues P_1 et b_{n+1}. Le coefficient de Biot effectif b_{n+1}^{SCIP} est alors déterminé. Les coefficients P_i et Q_i de la phase (i) sont déterminés à l'aide de la relation (2.45) dans laquelle P_1 est connu.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{N}_j \begin{bmatrix} P_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{n} \boldsymbol{N}_k) \, \boldsymbol{T}_j \tag{2.44}$$

$$\begin{bmatrix} P_i \\ \\ Q_i \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^{i-1} \boldsymbol{N}_j \begin{bmatrix} P_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{i-1} (\prod_{k=j+1}^{i-1} \boldsymbol{N}_k) \, \boldsymbol{T}_j \tag{2.45}$$

2.2.4 Module de Biot N_{n+1}^{SCIP}

On se place dans le cas d'un chargement purement hydrique ($\boldsymbol{E} = 0$ et $p_l \neq 0$), et on pose $\langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i$ et $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i$ respectivement la contrainte moyenne et la déformation moyenne dans la phase i. Chaque phase est soumise à la même pression p_l dans l'espace poreux. La relation contrainte - déformation moyenne et la variation du volume des pores dans la phase i s'écrivent :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i &= \mathbb{C}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i - p_l \boldsymbol{B}_i \\ (\phi - \phi_0)_i'' &= \boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \frac{p_l}{N_i} \end{aligned} \tag{2.46}$$

Dans le cas isotrope, le module de Biot du solide N_i de la phase i s'écrit :

$$\frac{1}{N_i} = \boldsymbol{\delta} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_p)^{-1} : (\boldsymbol{B}_i - f_p^i \, \boldsymbol{\delta}) \tag{2.47}$$

A l'échelle macroscopique, le comportement du matériau multiphasique s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \sum_{i=1}^{n} f_i \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i = 0 \\ \boldsymbol{\Sigma}'' &= \sum_{i=1}^{n} f_i \langle \boldsymbol{\sigma}'' \rangle_i = \sum_{j=1}^{n} f_i \left(\mathbb{C}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i - p_l \boldsymbol{B}_i \right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

La variation du volume des pores est évaluée à l'échelle macroscopique comme suit :

$$\begin{aligned} (\Phi - \Phi_0)'' &= \frac{p_l}{N_{hom}} \\ (\Phi - \Phi_0)'' &= (\phi - \phi_0)''_\Omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\phi - \phi_0 \right)''_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i + \frac{p_l}{N_i} \right) \end{aligned} \tag{2.49}$$

Le but est maintenant de déterminer la déformation moyenne dans chaque phase $\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i$. En utilisant l'équation (2.59), la déformation moyenne dans la phase i s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i &= \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}''_i(z) d\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega_i} \int_{r(i-1)}^{ri} r^2 \, dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \boldsymbol{\varepsilon}''_i(r, \theta, \varphi) \, d\varphi \end{aligned} \tag{2.50}$$

avec $\boldsymbol{\varepsilon}''_i$ obtenue par la relation (2.37). Il faut noter que l'intégration dans la relation (2.50) doit être effectuée dans un système de coordonnées cartésiennes fixes. On introduit d'abord la matrice de rotation Q^{α}_{ij} entre les coordonnées cartésiennes fixes e_i (e_1, e_2, e_3) et les coordonnées sphériques e^{α}_i $(e^{\alpha}_1, e^{\alpha}_2, e^{\alpha}_3)$:

$$\begin{aligned} e^{\alpha}_i &= Q^{\alpha}_{ij} \, e_j \\ e_i &= Q^{\alpha}_{ji} \, e^{\alpha}_j \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec

$$\begin{aligned} &Q^{\alpha}_{11} = \sin\theta \, \cos\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{12} = \sin\theta \, \sin\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{13} = \cos\theta \\ &Q^{\alpha}_{21} = \cos\theta \, \cos\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{22} = \cos\theta \, \sin\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{23} = -\sin\theta \\ &Q^{\alpha}_{31} = -\sin\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{32} = \cos\varphi \quad , \quad Q^{\alpha}_{33} = 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Dans le système de coordonnées cartésiennes fixes, on obtient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} &= Q^{\alpha}_{ki}\, Q^{\alpha}_{lj}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}_{kl} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{\alpha}_{ij} &= Q^{\alpha}_{ik}\, Q^{\alpha}_{jl}\, \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \end{aligned} \tag{2.53}$$

On peut re-écrire la relation (2.50) selon :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}''_{ij} \rangle_i &= \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\varepsilon}''_i(z) d\Omega \\ &= \frac{1}{\Omega_i} \int_{r(i-1)}^{ri} r^2\, dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} Q^{\alpha}_{ki}(\theta,\varphi)\, Q^{\alpha}_{lj}(\theta,\varphi)\, \boldsymbol{\varepsilon}''^{\,\alpha}_{kl}(r)\, d\varphi \end{aligned} \tag{2.54}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}''^{\,\alpha}_{kl}(r)$ est obtenue par (2.37) avec :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}''^{\,\alpha}_{11}(r) &= P_i - \frac{2Q_i}{r^3} \\ \boldsymbol{\varepsilon}''^{\,\alpha}_{22}(r) &= \boldsymbol{\varepsilon}''^{\,\alpha}_{33}(r) = P_i + \frac{Q_i}{r^3} \end{aligned} \tag{2.55}$$

Après quelque manipulations ou calculs sous le logiciel de Mathematica, on obtient :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i = P_i\, \boldsymbol{\delta} \tag{2.56}$$

En utilisant la relation (2.49), on détermine le module de Biot du solide homogénéisé :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_{hom}} &= \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{1}{N}_i + \frac{1}{p_l} \sum_{i=1}^{n} f_i\, \boldsymbol{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon}'' \rangle_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{1}{N}_i + \frac{3}{p_l} \sum_{i=1}^{n} f_i\, b_i\, P_i \end{aligned} \tag{2.57}$$

avec les constantes P_i $(i = 1, n)$ obtenues par la relation (2.45). Enfin, le comportement poro-élastique linéaire à l'échelle macroscopique est obtenu en superposant les solutions des deux sous-problèmes élémentaires qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \boldsymbol{\Sigma}' + \boldsymbol{\Sigma}'' = \mathbb{C}_{hom} : \boldsymbol{E} - p_l \boldsymbol{B}_{hom} \\ \Phi - \Phi_0 &= (\Phi - \Phi_0)' + (\Phi - \Phi_0)'' = \boldsymbol{B}_{hom} : \boldsymbol{E} + \frac{p_l}{N_{hom}} \end{aligned} \tag{2.58}$$

2.2.5 Tenseur de localisation de la phase $\mathbf{A}_i$

L'objectif de cette partie est de déterminer la moyenne du champ de déformation dans les phases constituantes, puis de déterminer les tenseurs de localisation de chaque phase $\mathbb{A}_i$ par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right) \, d\Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon}\left(\underline{x}\right) &= \mathbb{A}\left(\underline{x}\right) : \boldsymbol{E} \end{aligned} \tag{2.59}$$

Dans le cas isotrope, on peut décomposer les grandeurs $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbb{A}_i$ et la déformation homogène à l'infini $\boldsymbol{E}$ en deux parts sphérique et déviatorique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \varepsilon^{iso}\, \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\varepsilon}^{dev} \\ \boldsymbol{E} &= E^{iso}\, \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{E}^{dev} \\ \mathbb{A} &= \mathcal{A}^K\, \mathbb{K} + \mathcal{A}^J\, \mathbb{J} \end{aligned} \tag{2.60}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{iso} &= \mathcal{A}^J\, E^{iso} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{dev} &= \mathcal{A}^K\, \boldsymbol{E}^{dev} \end{aligned} \tag{2.61}$$

Les relations pour les déformations moyenne dans la phase i et homogène à l'infini $\boldsymbol{E}$ ont été démontrées dans le papier de Hervé et Zaoui [54] :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{iso} &= \frac{H_i}{H_{n+1}}\, E^{iso} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i^{dev} &= \frac{1}{A_{n+1}} \left(A_i - \frac{21}{5} \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{(1-2\,\nu_i)\,(R_i^3 - R_{i-1}^3)}\, B_i\right) \boldsymbol{E}^{dev} \end{aligned} \tag{2.62}$$

En comparant les relations (2.60) et (2.62), on obtient l'expression de tenseur de localisation de la phase i :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i &= \mathcal{A}_i^K\, \mathbb{K} + \mathcal{A}_i^J\, \mathbb{J} \\ \mathcal{A}_i^J &= \frac{H_i}{H_{n+1}} \\ \mathcal{A}_i^K &= \frac{1}{A_{n+1}} \left(A_i - \frac{21}{5} \frac{R_i^5 - R_{i-1}^5}{(1-2\,\nu_i)\,(R_i^3 - R_{i-1}^3)}\, B_i\right) \end{aligned} \tag{2.63}$$

avec H_i, A_i et B_i des constantes inconnues de la phase i, qui seront déterminées par les relations (2.20) et (2.34) dans les parties 2.2.1 et 2.2.2. Dans le cas à trois phases, l'expression analytique des tenseurs de localisation de chaque phase se trouve dans l'annexe A.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, la solution en poro-élasticité linéaire du modèle des sphères composites a été présentée brièvement dans le cas général à $n + 1$ phases. Dans le cas à trois ou quatre phases, la solution analytique du modèle a été déterminée et est présentée dans l'annexe A, elle est identique à celle obtenue par les autres auteurs [5, 20, 52]. On a également déterminé le tenseur de localisation de la phase qui permet par la suite de retrouver facilement la déformation moyenne de la phase. Dans le chapitre suivant, la solution du problème est formulée en adoptant des conditions imparfaites aux interfaces entre les phases.

Chapitre 3

Poro-élasticité linéaire de sphères composites à interface imparfaite (SCII)

3.1 Introduction

L'état de liaison à l'interface a un rôle important dans le contrôle du comportement local, des propriétés effectives des composites et des matériaux polycristallins. La liaison d'interface imparfaite peut apparaître dans ces matériaux et affecter profondément leurs propriétés mécaniques [101]. L'importance des effets de liaison d'interface sur le comportement thermomécanique des matériaux et des structures a été reconnue depuis longtemps par plusieurs auteurs [21, 36, 49, 50, 56, 69, 68, 70, 75, 93, 106]. Mais l'intérêt pour l'interface imparfaite revient depuis quelques années avec le développement des nanotechnologies [27, 44]. Le problème de l'évaluation des propriétés élastiques des sphères composites avec des conditions d'interface imparfaites a été considéré d'abord par Mal et Bose (1975) [71] puis par Benveniste. Y (1985) [10] en termes d'énergie du modèle auto-cohérent généralisé (GSCS), comme dans le cas de l'interface parfaite de Christensen et Lo (1979) [20]. Les interfaces imparfaites normales et tangentielles ont été proposées par Achenbach et Zhu (1989, 1990) [1, 2] dans leurs analyses numériques. En utilisant la méthode d'inclusion équivalente Gu. T.S (2007) [44] a déterminé les effets d'interface imparfaite sur les propriétés effectives thermiques, élastiques et piézoélectriques des matériaux composites à inclusions et à fibres. S.Nie (2005) [79] a démontré l'importante influence des conditions d'interface sur les propriétés élastiques des sphères composites par la comparaison de résultats analytiques avec des données expérimentales. Un modèle d'estimation de l'influence d'une interface imparfaite

sur le comportement élasto-visco-plastique des matériaux composites a été proposé par Capolungo. L (2008) [16]. Nairn. A.J (2007) [77] a utilisé la méthode des éléments finis pour estimer l'influence de l'interface imparfaite. Dans la littérature, deux modèles d'interface imparfaite, à savoir le modèle de ressort linéaire *" linear spring model "* (LSM) et le modèle de contrainte d'interface *" interface stress model "* (ISM), sont utilisés couramment pour simuler les discontinuités du champ de déplacement ou/et de contrainte à l'interface et pour prévoir les propriétés effectives des matériaux composites et polycristallins [27, 49, 59, 100]. Le premier modèle (LSM) suppose que les contraintes sont continues mais les déplacements sont discontinus à l'interface [10, 1, 2, 49, 50, 51]. Au contraire, le deuxième modèle (ISM) propose des discontinuités des contraintes normales et tangentielles tandis que les déplacements sont continus à l'interface [27, 30, 29, 28]. Le premier modèle est couramment utilisé, Hashin. Z [49, 50, 51] et Duan. H.L [27, 30, 29, 28] ont évalué analytiquement les propriétés élastiques effectives et les coefficients de dilatation thermique pour les problèmes de sphères composites et de fibres cylindriques composites. Ces auteurs montrent qu'une couche d'interphase mince et faible est équivalente à une interface imparfaite et ses paramètres ont été déterminés en termes de propriétés et épaisseur d'interphase. Dans ce chapitre, ce modèle d'interface imparfaite (LSM) sera utilisé pour déterminer le comportement poro-élastique linéaire d'un matériau à $n+1$ phases sphères composites. Pour la solution analytique du problème dans certains cas particuliers, on peut consulter l'annexe B.

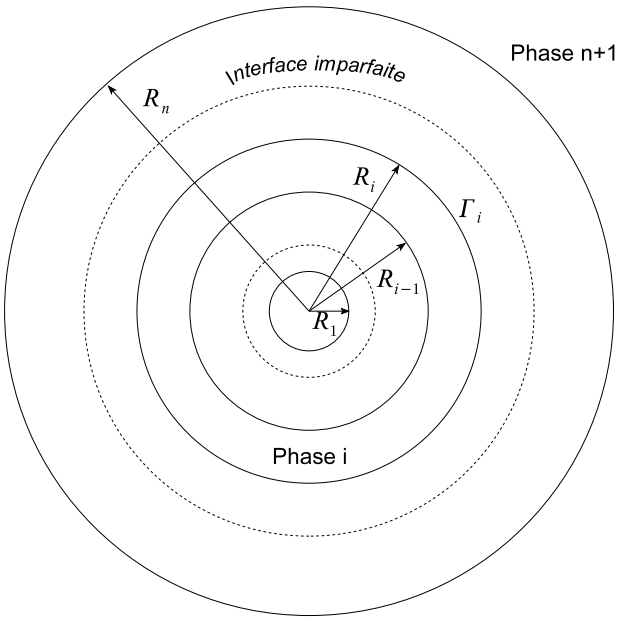


FIGURE *3.1: Modèle à $n+1$ phases sphères composites à interfaces imparfaites*

3.2 Modèle à "n+1" phases SCII

Dans ce paragraphe on envisage le cas général du modèle des sphères composites à interface imparfaite (SCII). La solution du modèle à "$n+1$" phases en poro-élasticité linéaire et isotrope est présentée brièvement. Le modèle est constitué de n inclusions concentriques noyées dans un milieu homogène équivalent (phase $n+1$) (figure 3.1). On considère le cas où les phases sont isotropes poro-élastiques et caractérisées par les modules d'élasticité k_i, μ_i, le coefficient de Biot b_i et le module de Biot du solide N_i. La porosité est supposée connectée dans la phase et entre les phases. Le problème est écrit dans le système de coordonnées sphériques avec l'origine au centre des sphères composites. Le modèle est soumis à une condition en déformation homogène $\boldsymbol{E}$ à l'infini en prenant en compte la pression de la phase liquide p_l dans l'espace poreux. L'interface entre les phases est supposée imparfaite et suit le "linear spring model" de Hashin [50]. Les relations des contraintes continues et des déplacements discontinus à l'interface imparfaite Γ_i s'écrivent donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{(i)} &= \sigma_{rr}^{(i+1)} = D_r^i\,[u_r] \quad , \quad [u_r] = u_r^{(i+1)} - u_r^{(i)} \\
\sigma_{r\theta}^{(i)} &= \sigma_{r\theta}^{(i+1)} = D_\theta^i\,[u_\theta] \quad , \quad [u_\theta] = u_\theta^{(i+1)} - u_\theta^{(i)} \\
\sigma_{r\varphi}^{(i)} &= \sigma_{r\varphi}^{(i+1)} = D_\varphi^i\,[u_\varphi] \quad , \quad [u_\varphi] = u_\varphi^{(i+1)} - u_\varphi^{(i)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

D_r, D_θ, D_φ sont des paramètres de rigidité d'interface liés au saut de déplacement à l'interface $[u]$. $u_r^{(i)}$, $u_\theta^{(i)}$, $u_\varphi^{(i)}$ sont respectivement les composantes du déplacement dans la phase i. Dans le chapitre précédent, on a présenté la solution en poro-élasticité du problème dans le cas à interface parfaite. Dans les paragraphes suivants, le même travail est réalisé en décomposant d'abord le problème en deux sous-problèmes (P' et P"), puis en déterminant les propriétés effectives à l'aide de chaque sous-problème élémentaire (voir la section 2, chapitre 2).

3.2.1 Module de compressibilité k_{n+1}^{SCII}

La détermination du module de compressibilité effectif k_{n+1}^{SCII} est réalisée de la même manière dans la partie 2.2.1 du chapitre 2. Dans le cas d'un chargement purement mécanique (P' : $\mathbf{E} \neq 0$, $p_l = 0$), sous une déformation homogène sphérique à l'infini (2.8), le déplacement et la contrainte normale dans la phase i des sphères composites s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r^{(i)} = U_r^{(i)}(r) \\ U_r^{(i)}(r) = H_i\, r + \dfrac{L_i}{r^2} \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r) = 3\, H_i\, k_i - \dfrac{4\, L_i\, \mu_i}{r^3} \end{cases} \tag{3.2}$$

H_i, L_i sont des coefficients inconnus de la phase i ($i = \overline{1, n+1}$) qui sont déterminés à l'aide des conditions aux interfaces proposées par [50] :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = D_r^i\, [u_r^{(i+1)}(r_i) - u_r^{(i)}(r_i)] \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ u_r^{(i+1)}(r_i) = u_r^{(i)}(r_i) + \dfrac{\sigma_{rr}^{(i)}(r_i)}{D_r^i} \end{cases} \tag{3.4}$$

On peut re-écrire (3.3) en (3.4) où le paramètre D_r^i décrit l'état de liaison normale à l'interface Γ_i. Dans le cas où $D_r^i \to \infty$, on se trouve dans le cas à interface parfaite et (3.4) correspond aux conditions de continuité aux interfaces (2.38). Sous forme matricielle, les conditions aux interfaces (3.4) deviennent :

$$\boldsymbol{J'}_{i+1}(r_i)\, \boldsymbol{V}_{i+1} = [\boldsymbol{J'}_i(r_i) + \boldsymbol{J''}_i(r_i)]\, \boldsymbol{V}_i \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{J'}_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3k_i & -4\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{J''}_i(r) = \begin{bmatrix} \frac{3k_i}{D_r^i} & -4\,\frac{\mu_i}{D_r^i\, r^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

A partir de (3.5), on obtient :

$$\boldsymbol{V}_{i+1} = \boldsymbol{N}_i\, \boldsymbol{V}_i \quad avec \quad \boldsymbol{N}_i = [\boldsymbol{J'}_{i+1}(r_i)]^{-1}\, [\boldsymbol{J'}_i(r_i) + \boldsymbol{J''}_i(r_i)] \tag{3.7}$$

En combinant toutes les conditions aux interfaces (3.7) pour n phases, on obtient une relation linéaire des coefficients inconnus entre la phase effective $(n+1)$ et le noyau des sphères composites (phase 1) :

$$\boldsymbol{V}_{n+1} = [\boldsymbol{N}_n ... \boldsymbol{N}_i ... \boldsymbol{N}_1]\, \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{Q}_i\, \boldsymbol{V}_1 \tag{3.8}$$

Les conditions aux limites en déplacement à $r = 0$ et à l'infini $r \to \infty$ donnent $H_{n+1} = E^{iso}$ et $L_1 = 0$. On obtient aussi $L_{n+1} = 0$ par la méthode de calcul présentée dans [20, 54]. Enfin, on trouve un système d'équations linéaires (3.9) et la solution obtenue k_{n+1} est donc le module de compressibilité effectif du problème k_{n+1}^{SCII}.

$$\begin{bmatrix} E^{iso} \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_n \begin{bmatrix} H_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Les constantes inconnues H_i et L_i de la phase i ($i = \overline{2, n}$) se trouvent par la relation (3.10) dans laquelle H_1 est déterminé par (3.9) et $\boldsymbol{Q}_{i-1}$ est déterminé à partir des propriétés d'élasticité des i phases ($i = \overline{1, i}$).

$$\begin{bmatrix} H_i \\ \\ L_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q}_{i-1} \begin{bmatrix} H_1 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

3.2.2 Module de cisaillement μ_{n+1}^{SCII}

Dans le cas d'un chargement purement mécanique (P' : $\mathbf{E} \neq 0$, $p_l = 0$), sous une déformation homogène déviatorique à l'infini (2.21), les expressions des déplacements dans la phase i des sphères composites s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r^{(i)} = U_r^i(r)\,[3\,cos^2(\theta) - 1] \\ u_\theta^{(i)} = U_\theta^i(r)\,[-3\,sin(\theta)cos(\theta)] \\ u_\varphi^{(i)} = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

U_r et U_θ sont fonctions du rayon r qui ont été déterminées dans la partie (2.2.2) du chapitre 2 par (2.24). Les conditions aux interfaces comportent maintenant la continuité des contraintes (3.12) et la discontinuité des déplacements (3.13) :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) \quad avec \quad i = \overline{1, n} \\ \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i) = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_i) \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} u_r^{(i+1)}(r_i) = u_r^{(i)}(r_i) + \dfrac{\sigma_{rr}^{(i)}(r_i)}{D_r^i} \quad avec \quad i = \overline{1,n} \\ u_\theta^{(i+1)}(r_i) = u_\theta^{(i)}(r_i) + \dfrac{\sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i)}{D_\theta^i} \end{cases} \tag{3.13}$$

où les paramètre D_r^i et D_θ^i décrivent les états de liaison normale et tangente à l'interface Γ_i. Dans le cas où $D_r^i \to \infty$ et $D_\theta^i \to \infty$, on se trouve dans le cas à interface parfaite et (3.13) devient la condition de continuité en déplacement aux interfaces (2.25). Sous forme matricielle, les conditions aux interfaces (3.12) et (3.13) peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{L'}_{i+1}(r_i)\,\boldsymbol{W}_{i+1} = (\boldsymbol{L'}_i(r_i) + \boldsymbol{L''}_i(r_i))\,\boldsymbol{W}_i \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{L'}_i = \begin{bmatrix} r & r^3 & \frac{1}{r^4} & \frac{1}{r^2} \\ r & \frac{7-4\nu_i}{6\nu_i}\,r^3 & -\frac{2}{3r^4} & \frac{1-2\nu_i}{5-4\nu_i}\,\frac{2}{r^2} \\ 2\mu_i & -\mu_i r^2 & -\frac{8}{r^5}\,\mu_i & \frac{20-4\nu_i}{4\nu_i-5}\,\frac{\mu_i}{r^3} \\ 2\mu_i & \frac{7+2\nu_i}{3\nu_i}\,\mu_i r^2 & \frac{16}{3r^5}\,\mu_i & \frac{4(\nu_i+1)}{5-4\nu_i}\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{L''}_i = \begin{bmatrix} \frac{2\mu_i}{D_r^i} & -\frac{\mu_i r^2}{D_r^i} & -\frac{8}{D_r^i\,r^5}\,\mu_i & \frac{20-4\nu_i}{4\nu_i-5}\,\frac{\mu_i}{D_r^i\,r^3} \\ \frac{2\mu_i}{D_\theta^i} & \frac{7+2\nu_i}{3\nu_i}\,\frac{\mu_i r^2}{D_\theta^i} & \frac{16}{3D_\theta^i\,r^5}\,\mu_i & \frac{4(\nu_i+1)}{5-4\nu_i}\,\frac{\mu_i}{D_\theta^i\,r^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{W}_i = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

A_i, B_i, C_i et D_i $(i = \overline{1,n+1})$ sont des coefficients inconnus de la phase i. Ils sont déterminés par les relations à l'interface Γ_i :

$$\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{M}_i\,\boldsymbol{W}_i \quad avec \quad \boldsymbol{M}_i = [\boldsymbol{L'}_{i+1}(r_i)]^{-1}\,(\boldsymbol{L'}_i(r_i) + \boldsymbol{L''}_i(r_i)) \tag{3.17}$$

A l'interface des sphères composites Γ_n, on obtient donc :

$$\boldsymbol{W}_{n+1} = [\boldsymbol{M}_n ... \boldsymbol{M}_i ... \boldsymbol{M}_1]\,\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{P}_n\,\boldsymbol{W}_1 \tag{3.18}$$

En reprenant la méthode de calcul de la partie (2.2.2) du chapitre 2, les coefficients inconnus de la phase (1) et du milieu effectif $(n+1)$ sont déduits :

$$\boldsymbol{W}_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{W}_{n+1} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

donc (3.18) devient :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ 0 \\ C_{n+1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{11}^n & \boldsymbol{P}_{12}^n & \boldsymbol{P}_{13}^n & \boldsymbol{P}_{14}^n \\ \boldsymbol{P}_{21}^n & \boldsymbol{P}_{22}^n & \boldsymbol{P}_{23}^n & \boldsymbol{P}_{24}^n \\ \boldsymbol{P}_{31}^n & \boldsymbol{P}_{32}^n & \boldsymbol{P}_{33}^n & \boldsymbol{P}_{34}^n \\ \boldsymbol{P}_{41}^n & \boldsymbol{P}_{42}^n & \boldsymbol{P}_{43}^n & \boldsymbol{P}_{44}^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

et sous forme simplifiée :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_{21}^n & \boldsymbol{P}_{22}^n \\ \boldsymbol{P}_{41}^n & \boldsymbol{P}_{42}^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

A partir de la condition nécessaire pour que l'équation matricielle (3.21) ait une racine, le module de cisaillement effectif $\mu_{(n+1)}^{SCII}$ se trouve en résolvant l'équation du déterminant sous la forme :

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{P}_{21}^n & \boldsymbol{P}_{22}^n \\ \boldsymbol{P}_{41}^n & \boldsymbol{P}_{42}^n \end{vmatrix} = \boldsymbol{P}_{21}^n \, \boldsymbol{P}_{42}^n - \boldsymbol{P}_{41}^n \, \boldsymbol{P}_{22}^n = 0 \tag{3.22}$$

Les constituantes du déterminant dans le cas à trois phases sont données dans l'annexe B. Pour determiner les constantes inconnues A_i, B_i, C_i et D_i de la phase i $(i = \overline{2, n})$, on retient la relation :

$$\begin{bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \\ D_i \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{i-1} . \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

où A_1 et B_1 sont déterminées à l'aide du système d'équations (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned} A_1 &= \boldsymbol{P}^n_{22} \frac{\beta}{\boldsymbol{P}^n_{11}\boldsymbol{P}^n_{22} - \boldsymbol{P}^n_{12}\boldsymbol{P}^n_{21}} \\ B_1 &= -\boldsymbol{P}^n_{21} \frac{\beta}{\boldsymbol{P}^n_{11}\boldsymbol{P}^n_{22} - \boldsymbol{P}^n_{12}\boldsymbol{P}^n_{21}} \end{aligned} \tag{3.24}$$

3.2.3 Tenseur de Biot $\boldsymbol{B}^{SCII}_{n+1}$

Le tenseur de Biot effectif est déterminé à l'aide du sous-problème (P''). Sous un chargement purement hydrique $\mathbf{E} = 0$, $p_l \neq 0$, on propose d'introduire un paramètre poro-élastique ω_i qui décrit les relations de continuité de contrainte et de discontinuité de déplacement à l'interface imparfaite Γi :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) - \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) = 0 \\ u_r^{(i+1)}(r_i) - u_r^{(i)}(r_i) = \frac{\sigma_{rr}^{(i)}}{D_r^i} + \omega_i\, p_l \end{cases} \tag{3.25}$$

On peut noter que dans le cas où $D_r^i \to \infty$ et $\omega_i \to 0$, on retrouve le cas à interface parfaite et (3.25) converge vers les conditions de continuité en contrainte et en déplacement aux interfaces. En appliquant les expressions des déplacements et des contraintes normales obtenues dans la partie (2.2.3) du chapitre 2, on peut détailler les conditions aux interfaces (3.25) comme suit :

$$\begin{cases} 3\,P_{i+1}\,k_{i+1} - 4\,\dfrac{Q_{i+1}\,\mu_{i+1}}{r_i^3} - b_{i+1}\,p_l = 3\,P_i\,k_i - 4\,\dfrac{Q_i\,\mu_i}{r_i^3} - b_i\,p_l \quad avec \quad i = (1,n) \\ P_{i+1}\,r_i + \dfrac{Q_{i+1}}{r_i^2} = P_i\,r_i + \dfrac{Q_i}{r_i^2} + \dfrac{3\,P_i\,k_i - 4\,\frac{Q_i\,\mu_i}{r_i^3} - b_i\,p_l}{D_r^i} + \omega_i\,p_l \end{cases} \tag{3.26}$$

et (3.26) se re-écrit donc sous forme matricielle :

$$\mathbf{J'}_{i+1}(r_i)\,\mathbf{V}_{i+1} = [\mathbf{J'}_i(r_i) + \mathbf{J''}_i(r_i)]\,\mathbf{V}_i + \mathbf{Y}_i \tag{3.27}$$

$$\mathbf{J'}_i(r) = \begin{bmatrix} r & \frac{1}{r^2} \\ 3k_i & -4\,\frac{\mu_i}{r^3} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{J''}_i(r) = \begin{bmatrix} \frac{3k_i}{D_r^i} & -4\,\frac{\mu_i}{D_r^i\, r^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} P_i \\ Q_i \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} (\omega_i - \frac{b_i}{D_r^i})\, p_l \\ (b_{i+1} - b_i)\, p_l \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

On obtient :

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{N}_i\, \mathbf{V}_i + \mathbf{T}_i \tag{3.30}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i &= [\mathbf{J'}_{i+1}(r_i)]^{-1}\, [\mathbf{J'}_i(r_i) + \mathbf{J''}_i(r_i)] \\ \mathbf{T}_i &= [\mathbf{J'}_{i+1}(r_i)]^{-1}\, \mathbf{Y}_i \end{aligned} \tag{3.31}$$

A l'interface de rayon $r = r_n$, on peut déduire les conditions aux interfaces par :

$$\mathbf{V}_{n+1} = \textstyle\prod_{j=1}^{n} \mathbf{N}_j\, \mathbf{V}_1 + \sum_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{i} \mathbf{N}_k)\, \mathbf{T}_j \tag{3.32}$$

Pour satisfaire les conditions aux limites en déplacement à $r = 0$ et à l'infini $r \to \infty$, (3.32) nous rend :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_n \begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{n} \mathbf{N}_k)\, \mathbf{T}_j \tag{3.33}$$

Au final, le système d'équations (3.33) est un système linéaire à deux inconues P_1 et b_{N+1}. La solution b_{N+1} est finalement le coefficient effectif de Biot des sphères composites à "n+1" phases. Les coefficients P_i et Q_i de la phase (i) sont alors déterminés à l'aide de la relation (3.34) dans laquelle P_1 est connu.

$$\mathbf{V}_i = \textstyle\prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N}_j\, \mathbf{V}_1 + \sum_{j=1}^{i-1} (\prod_{k=j+1}^{i} \mathbf{N}_k)\, \mathbf{T}_j \tag{3.34}$$

3.2.4 Module de Biot du solide N_{n+1}^{SCII}

Dans le cas du sous-problème P'' ($\mathbf{E} = 0$,$p_l \neq 0$), l'energie effective w_{hom} d'un V.E.R occupant un domaine géométrique Ω peut s'écrire sous la forme [103] :

$$\begin{aligned} w_{hom}(\mathbf{E}, p_l) &= \frac{1}{2}\,\mathbf{E} : \mathbb{C}_{hom} : \mathbf{E} - p_l\,\mathbf{B}_{hom} :\, \mathbf{E} - \frac{1}{2}\,\frac{p_l^2}{N_{hom}} \\ w_{hom}(0, p_l) &= -\frac{1}{2}\,\frac{p_l^2}{N_{hom}} \end{aligned} \tag{3.35}$$

avec N_{hom} le module de Biot effectif du solide. Dans le cas à deux phases des composites, l'expression de l'énergie effective s'écrit :

$$\begin{aligned} w_{hom} &= \frac{1}{2\,\Omega}\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon\, dV \\ &= \sum \frac{1}{2\,\Omega}\,(\int_{\Omega_i} \sigma : \varepsilon\, dV + \int_{\Gamma_i} \sigma : \varepsilon\, dS) \\ &= \sum \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Omega_i} \sigma : \varepsilon\, dV + \sum \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma : \varepsilon\, dS \\ &= \sum f_i\, w_i + \sum \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma : \varepsilon\, dS \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans le premier terme de w_{hom}, w_i est l'énergie de la phase i qui et est obtenue par la relation suivante :

$$w_i(\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i, p_l) = \frac{1}{2}\,\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i : \mathbb{C}_i : \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i - p_l\,\mathbf{B}_i :\, \langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_i - \frac{1}{2}\,\frac{p_l^2}{N_i} \tag{3.37}$$

Le deuxième terme de w_{hom} dans la relation (3.36) peut s'écrire à l'interface Γ_i [50, 30] comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma : \varepsilon\, dS &= \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma_{pq}\, u_{pq}\, n_p\, dS \\ &= \frac{f_i}{2\,\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma_{pq}\,([u_p]\, n_q + [u_q]\, n_p)\, dS \\ &= \frac{f_i}{\Omega_i}\int_{\Gamma_i} \sigma_r^i\,[u_r^i]\, dS = \frac{3\,f_i}{r_i}\,\sigma_{rr}^i\,[u_r^i] \end{aligned} \tag{3.38}$$

avec $\underline{n}$ le vecteur normal à l'inteface ; σ_{rr}^i et $[u_r^i]$ sont respectivement la contrainte et le saut de déplacement à l'inteface Γ_i :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i &= D_r^i\,[u_r^i] - D_r^i\,\omega^i\,p_l \\ [u_r^i] &= u_r^{i+1} - u_r^i \end{aligned} \tag{3.39}$$

En dérivant w_{hom}, w_i et σ_{rr}^i dans les relations (3.35), (3.37) et (3.39) par p_l, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{hom}}{\partial p_l} &= -\frac{p_l}{N_{hom}} \\
\frac{\partial w_i}{\partial p_l} &= -\mathbf{B}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i - \frac{p_l}{N_i} \\
\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial p_l} &= -D_r^i \, \omega^i
\end{aligned} \tag{3.40}$$

où $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$ est la déformation moyenne dans la phase i. Dans le cas d'un chargement purement hydrique du sous-problème P'', Hervé et Zaoui (1993) [54] et Vincent et al (2008) [104, 105] ont démontré que la déformation moyenne dans la phase i est uniforme et s'écrit sous la forme :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = P_i \, \boldsymbol{\delta} \tag{3.41}$$

où P_i est déterminé à partir du sous-problème P'' dans la partie (3.2.3). En remplaçant $\mathbf{B}_i = b_i \, \boldsymbol{\delta}$ où b_i est le coefficient de Biot, la relation (3.40) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_{hom}}{\partial p_l} &= -\frac{p_l}{N_{hom}} \\
\frac{\partial w_i}{\partial p_l} &= -3 \, b_i \, P_i - \frac{p_l}{N_i} \\
\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial p_l} &= -D_r^i \, \omega^i
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Enfin, en introduisant (3.42) dans (3.36), on obtient la relation exacte du module de Biot du solide des sphères composites à $n+1$ phases et des propriétés poro-élastiques des phases constituantes :

$$\frac{1}{N_{hom}} = \sum f_i \, (\frac{1}{N_i} + \frac{3 \, b_i \, P_i}{p_l}) + \sum \frac{3 \, f_i}{r_i} \, D_r^i \, \omega^i \, [u_r^i] \tag{3.43}$$

Les constantes inconnues P_i et Q_i dans la relation (3.43) et dans les expressions du saut de déplacement $[u_r^i]$ sont déterminées dans le cas du sous-problème P'' dans la partie (3.2.3). Le module de Biot du solide est obtenu finalement à l'aide de la relation (3.43).

3.2.5 Saut de déplacement à l'interface

Dans le modèle à interface imparfaite *" linear spring model "* (LSM) utilisé dans ce chapitre, les contraintes sont supposées continues mais les déplacements sont discontinus au travers de l'interface. La relation entre la contrainte et le saut de déplacement a été proposée par (3.1) [50]. Le but de ce paragraphe est maintenant de déterminer les expressions du saut de déplacement

dans le cas d'un chargement purement mécanique ($\mathbf{E} \neq 0$, $p_l = 0$). La détermination du saut de déplacement permettra de proposer un modèle d'interface non linéaire dans lequel les propriétés d'interface seront supposées varier en fonction du saut de déplacement (voir chapitre 5). Les deux sous-problèmes sont envisagés, d'abord le modèle est soumis à une compression isotrope à l'infini puis à une compression déviatorique ensuite.

3.2.5.1 Compression isotrope

Sous une compression isotrope, le constituant non nul du déplacement à l'interface de rayon r s'écrit (voir la partie (3.2.1)) :

$$u_r = U_r(r) = H\, r + \frac{L}{r^2} \tag{3.44}$$

H, L sont des coefficients déterminés par (3.10) dans la partie (3.2.1). A l'interface entre la phase (i) et la phase $(i+1)$, les sauts de déplacement et de contrainte normale s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta^{iso} u_r^{(i+1)-(i)} &= u_r^{(i+1)}(r_i) - u_r^{(i)}(r_i) \\ \Delta^{iso} \sigma_{rr}^{(i+1)-(i)} &= \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) - \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Sous forme matricielle, on obtient (voir la partie (3.2.1)) :

$$\Delta^{iso}_{(i+1)-(i)} = \boldsymbol{J'}_{i+1}(r_i)\, \boldsymbol{V}_{i+1} - \boldsymbol{J'}_{i}(r_i)\, \boldsymbol{V}_i \tag{3.46}$$

avec

$$\Delta^{iso}_{(i+1)-(i)} = \begin{bmatrix} \Delta^{iso} u_r^{(i+1)-(i)} \\ \\ \Delta^{iso} \sigma_{rr}^{(i+1)-(i)} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

A l'aide de la relation (3.5), (3.46) se re-écrit :

$$\Delta^{iso}_{(i+1)-(i)} = \boldsymbol{J''}_{i}(r_i)\, \boldsymbol{V}_i \tag{3.48}$$

avec

$$\boldsymbol{J''}_i(r) = \begin{bmatrix} \frac{3k_i}{D_r^i} & -4\,\frac{\mu_i}{D_r^i\, r^3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{V}_i = \begin{bmatrix} H_i \\ L_i \end{bmatrix} \tag{3.49}$$

On constate dans les relations (3.47), (3.48) et (3.49) que les sauts de contrainte dans ce cas $\Delta^{iso}\sigma_{rr}^{(i+1)-(i)}$ sont nuls, cela vérifie la supposition des contraintes continues à l'interface dans le modèle proposé. En fin, le saut de déplacement s'obtient par la formule suivante :

$$\Delta^{iso}u_r^{(i+1)-(i)} = \frac{3k_i}{D_r^i}\,H_i - 4\,\frac{\mu_i}{D_r^i\, r^3}\,L_i \tag{3.50}$$

où H_i, L_i sont des coefficients inconnus de la phase i déterminés par (3.10) dans la partie (3.2.1).

3.2.5.2 Compression déviatorique

Sous un chargement déviatorique, dans le système de coordonnées sphériques, les déplacements de la phase i à l'interface de rayon r s'écrivent :

$$\begin{cases} u_r^i = U_r^i(r)\,[3\,cos^2(\theta) - 1] \\ u_\theta^i = U_\theta^i(r)\,[-3\,sin(\theta)cos(\theta)] \\ u_\varphi^i = 0 \end{cases} \tag{3.51}$$

où r, θ et φ sont les coordonnées sphériques usuelles. U_r^i, U_θ^i sont fonctions uniquement du rayon r. Ils peuvent caractériser le saut de déplacement à l'interface ($r = cte$). A l'interface entre la phase (i) et la phase $(i+1)$, les sauts de déplacement et de contrainte sont décrits par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta^{dev}U_r^{(i+1)-(i)} = U_r^{(i+1)}(r_i) - U_r^{(i)}(r_i) \\ \Delta^{dev}U_\theta^{(i+1)-(i)} = U_\theta^{(i+1)}(r_i) - U_\theta^{(i)}(r_i) \\ \Delta^{dev}\sigma_{rr}^{(i+1)-(i)} = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i) - \sigma_{rr}^{(i)}(r_i) \\ \Delta^{dev}\sigma_{r\theta}^{(i+1)-(i)} = \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_i) - \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i) \end{cases} \tag{3.52}$$

A l'aide de (3.14), sous forme matricielle (3.52) devient :

$$\begin{aligned}\Delta^{dev}_{(i+1)-(i)} &= \boldsymbol{L'}_{i+1}(r_i)\,\boldsymbol{W}_{i+1} - \boldsymbol{L'}_{i}(r_i)\,\boldsymbol{W}_{i} \\ &= \boldsymbol{L''}_{i}(r_i)\,\boldsymbol{W}_{i}\end{aligned} \tag{3.53}$$

où $\boldsymbol{L''}_i(r_i)$ et $\boldsymbol{W}_i$ sont déterminés dans la partie (3.2.2). A partir de la formule de $\boldsymbol{L''}_i(r_i)$ (3.16), on vérifie que les sauts de contrainte à l'interface sont nuls. Les expressions analytiques du saut de déplacement dans le cas simple à trois phases sont présentées dans l'annexe B.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté la solution en poro-élasticité linéaire du modèle des sphères composites dans le cas général à $n+1$ phases. L'interface entre les phases présente un état de liaison imparfait et suit le modèle d'interface imparfaite *" linear spring model "* (LSM) [50]. A l'interface, les contraintes sont supposées continues mais les déplacements sont discontinus, ils sont décrits par les composantes non nulles du saut de déplacement. Sous une condition de chargement isotrope ou déviatorique, les expressions analytiques du saut de déplacment ont été déterminées. Dans le cas à trois phases, la solution du modèle est présentée dans l'annexe B.

Deuxième partie

Homogénéisation du comportement non linéaire

Chapitre 4

Comportement non linéaire

4.1 Méthodologie d'homogénéisation non linéaire

Dans cette section, on se propose de rappeler brièvement les différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire. La méthode d'homogénéisation non linéaire s'appuie souvent sur la linéarisation des lois constitutives locales en utilisant le concept de milieu linéaire de comparaison (M.L.C). Ce concept permet d'appliquer la procédure de l'homogénéisation linéaire à un matériau hétérogène de comportement non linéaire. Les solutions du milieu hétérogène initial reposent donc sur celles du milieu linéaire de comparaison (M.L.C). Dans la littérature, plusieurs méthodes ont été proposées pour homogénéiser le comportement non linéaire d'un matériau hétérogène. La limitation de chaque méthode a été montrée par plusieurs auteurs dans des synthèses sur la correction des différentes méthodes d'homogénéisation non linéaire [17, 18, 23, 72, 73, 88, 89, 98, 99]. La correction de la méthode d'homogénéisation est souvent effectuée par comparaison de sa prédiction avec celle de calculs aux éléments finis (E.F). Ces auteurs ont démontré généralement que la méthode sécante classique de Hutchinson [57] donne des prédictions plus raides notamment à l'échelle microscopique et dans le cas des matériaux poreux ou fortement non-linéaires. Les prédictions des deux approches équivalentes, la méthode sécante modifiée de Suquet [99] et l'approche variationnelle de Ponte-Castaneda [86], ne sont pas très concordantes avec les solutions de référence (E.F) pour les déformations microscopiques. Pourtant, en raison de sa simplicité, la méthode sécante modifiée est souvent utilisée. La méthode d'analyse des champs de transformation de Dvorak et Benveniste [31] et l'approche incrémentale classique de Hill [55] rendent les réponses macroscopiques trop raides par rapport à la référence (E.F) [18]. L'approche incrémentale modifiée qui est mentionnée dans les travaux [24, 38] en utilisant le module tangent isotropisé amène à des prédictions plus souples en accord avec les calculs E.F. Dans la littérature, l'approche incrémentale de Hill et sa modification sont largement développées et utilisées pour la prédiction du comportement non linéraire

des matériaux hétérogènes [18, 24, 45, 60, 81]. Dans le paragraphe suivant, on expose brièvement les principes de base de cet approche ainsi que l'estimation de l'approche en utilisant les différents procédures d'isotropisation.

4.2 Approche incrémentale

4.2.1 Principe

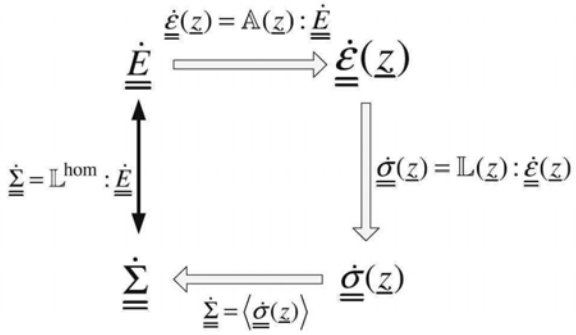


FIGURE *4.1: Processus de l'approche d'homogénéisation incrémentale*

Le processus de l'approche incrémentale de Hill [55] est brièvement illustré par la figure 4.1. Les taux de déformation locale aux taux de contrainte locale et aux taux de déformation macroscopique sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(z) &= \mathbb{L}(z) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(z) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(z) &= \mathbb{A}(z) : \dot{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\mathbb{L}(z)$ et $\mathbb{A}(z)$ désignent respectivement l'opérateur tangent non linéaire de la phase constituante et l'opérateur tangent de localisation de déformation dans le matériau linéaire de comparaison (M.L.C). Le taux de contrainte marcroscopique $\dot{\boldsymbol{\Sigma}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} &= \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}(z) \rangle = \mathbb{L}^{hom} : \dot{\boldsymbol{E}} \\ \mathbb{L}^{hom} &= \langle \mathbb{L}(z) : \mathbb{A}(z) \rangle \end{aligned} \tag{4.2}$$

L'opérateur ou le module tangent effectif $\mathbb{L}^{hom}$ est déterminé par les opérateurs tangents local $\mathbb{L}(z)$ et de localisation $\mathbb{A}(z)$ en chaque point z de la phase constituante (V_r). $\mathbb{L}(z)$ est un opérateur tangent non linéaire. La méthode incrémentale de Hill introduit un opérateur tangent uniforme et la relation liant le taux de déformation au taux de contrainte peut être approchée par :

$$\forall z \in V_r, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}(z) = \mathbb{L}_r : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(z) \tag{4.3}$$

$\mathbb{L}_r$ étant pris pour un état de référence $\boldsymbol{\varepsilon}_r$ qui est choisi simplement par la déformation moyenne dans la phase (r), la relation incrémentale de localisation se simplifie sous la forme :

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r = \mathbb{A}_r : \dot{\boldsymbol{E}} \tag{4.4}$$

où $\mathbb{A}_r$ est l'opérateur tangent de localisation des déformations moyennes par phase $\dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_r$. L'opérateur tangent de localisation $\mathbb{A}_r$ est déterminé sur la base du problème d'Eshelby comme pour les milieux élastiques linéaires (voir Chapitre 1), il dépend du tenseur d'Eshelby ou du tenseur de Hill et des propriétés tangentes $\mathbb{L}_r$ des phases constituantes. Dans le cas d'un milieu biphasique inclusion - matrice, en adoptant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka, l'opérateur tangent de localisation $\mathbb{A}_r$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_M^{MT} &= \left[f_M \mathbb{I} + f_I [\mathbb{I} + \mathbb{P}_I^0 : (\mathbb{L}_I - \mathbb{L}_M]^{-1} \right]^{-1} \\ \mathbb{A}_I^{MT} &= [\mathbb{I} + \mathbb{P}_I^0 : (\mathbb{L}_I - \mathbb{L}_M]^{-1} : \left[f_M \mathbb{I} + f_I [\mathbb{I} + \mathbb{P}_I^0 : (\mathbb{L}_I - \mathbb{L}_M]^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le tenseur de Hill $\mathbb{P}_I^0$ est rélié au tenseur d'Eshelby et au tenseur tangent de la phase matrice par :

$$\mathbb{P}_I^0 = \mathbb{S}^E(\mathbb{L}_M) : \mathbb{L}_M^{-1} \tag{4.6}$$

On peut noter que $\mathbb{L}_M$ et ainsi le milieu de référence sont par nature anisotropes. Enfin on peut déduire l'opérateur tangent homogénéisé :

$$\mathbb{L}^{hom} = \sum_r f_r \, \mathbb{L}_r : \mathbb{A}_r^{MT} \quad , \quad r = I, \ M \tag{4.7}$$

4.2.2 Homogénéisation non linéaire d'un milieu multiphasique

On cherche maintenant à étendre la méthode d'homogénéisaion non linéaire au milieu hétérogène multiphasique qui comporte une matrice solide et des inclusions sphériques rigides. Les inclusions rigides présentent une loi de comportement élastique linéaire alors que la matrice solide est élasto-plastique. Pour la phase élasto-plastique, on adopte un modèle non associé avec écrouissage isotrope basé sur le critère de plasticité de type Drucker-Prager. La matrice et des inclusions sont

respertivement caractérisées par les modules d'élasticité $\mathbb{C}_m$, $\mathbb{C}_i$ et les fractions volumiques f_m, f_i. Pour homogénéiser le M.L.C, on utilise par exemple une approximation de Mori-Tanaka. Les algorithmes d'homogénéisation du comportement élasto-plastique de ce matériau par la formulation incrémentale est détaillé en proposant trois méthodes différentes pour déterminer le comportement macroscopique.

4.2.2.1 Méthode 1

L'approche incrémentale repose sur l'homogénéisation pas à pas du comportement macroscopique du M.L.C. Chaque pas correspond à une intervalle de temps $[t_n, t_{n+1}]$. Supposons qu'à t_n, nous avons les données suivantes : la contrainte et la déformation macroscopiques totales ($\boldsymbol{\Sigma}_n$, $\boldsymbol{E}_n$), la contrainte imposée $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$, la déformation moyenne de la phase matrice $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n}$. Le problème est de déterminer la déformation macroscopique $\boldsymbol{E}_{n+1}$.

– Initialisation :

$$\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_i = \Delta\boldsymbol{\Sigma} \tag{4.8}$$

– Itération (j) (indice j omis pour la simplicité) :

1. Évaluer la déformation moyenne $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ de la matrice :

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m &= \frac{\Delta\boldsymbol{\Sigma} - f_i\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_i}{1-f_i} \\ \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m &= (\mathbb{C}_m^{tan})^{-1} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m \end{aligned} \tag{4.9}$$

2. Déterminer $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n+1}, \gamma^p_{n+1}$ et le module tangent $\mathbb{C}_m^{tan}$ de la matrice à partir des $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n}, \gamma^p_n$ et $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ (voir l'annexe (C)).

3. Calculer le module tangent isotropisé $\mathbb{C}_m^{tan,\mathrm{iso}}$ en appliquant la méthode d'isotropisation de Bornert [12, 13] :

$$\mathbb{C}_m^{tan,\mathrm{iso}} = (\mathbb{J} :: \mathbb{C}_m^{tan})\,\mathbb{J} + \frac{1}{5}(\mathbb{K} :: \mathbb{C}_m^{tan})\,\mathbb{K} \tag{4.10}$$

4. Calculer le tenseur d'Eshelby $\mathbb{S}^E\left(\mathbb{C}_m^{tan,\mathrm{iso}}\right)$.

5. Déterminer le tenseur de Hill $\mathbb{P}_i^{cas1}$=$\mathbb{S}^E\left(\mathbb{C}_m^{tan,\mathrm{iso}}\right) : \left(\mathbb{C}_m^{tan}\right)^{-1}$, les tenseurs de localisation des inclusions rigides $\mathbb{A}_i^{\mathrm{MT}}$ et le module macroscopique homogénéisé $\mathbb{C}_{\mathrm{hom}}^{tan}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_i^{MT} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan}]^{-1} : \left[f_m \mathbb{I} + f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas1} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan}]^{-1} \right]^{-1} \\
&\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan} = \mathbb{C}_m^{tan} + f_i \left(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan} \right) : \mathbb{A}_i^{\text{MT}} \\
&\mathbb{B}_i^{\text{MT}} = \mathbb{C}_i : [\mathbb{A}_i^{\text{MT}} : (\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan})^{-1}]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

6. Vérifier la compatibilité de la déformation moyenne des inclusions sphériques en calculant les résidus :

$$R_i = \mathbb{B}_i^{\text{MT}} : \Delta \boldsymbol{\Sigma} - \Delta \overline{\boldsymbol{\sigma}}_i \tag{4.12}$$

7. Si $R_i \leq Tol$, sortir de la boucle.

8. Si non, nouvelle itération (passer à l'étape 1) avec les nouveaux $\Delta \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E}_{n+1} = \boldsymbol{E}_n + \Delta E \\
&\Delta E = f_i \left(\mathbb{C}_i \right)^{-1} : \Delta \overline{\boldsymbol{\sigma}}_i + (1 - f_i) \, \Delta \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m
\end{aligned} \tag{4.13}$$

4.2.2.2 Méthode 2

La procédure d'homogénéisation dans la deuxième méthode est identique à celle de la première méthode mais le tenseur de Hill s'écrit avec le module isotropisé. L'étape 5 dans l'algorithme d'homogénéisation se re-écrit :

5. Déterminer le tenseur de Hill $\mathbb{P}_i^{cas2}$=$\mathbb{S}^E \left(\mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}} \right) : \left(\mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}} \right)^{-1}$, les tenseurs de localisation des inclusions rigides $\mathbb{A}_i^{\text{MT}}$ et le module macroscopique homogénéisé $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_i^{MT} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas2} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan}]^{-1} : \left[f_m \mathbb{I} + f_i [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas2} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan}]^{-1} \right]^{-1} \\
&\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan} = \mathbb{C}_m^{tan} + f_i \left(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan} \right) : \mathbb{A}_i^{\text{MT}} \\
&\mathbb{B}_i^{\text{MT}} = \mathbb{C}_i : [\mathbb{A}_i^{\text{MT}} : (\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan})^{-1}]
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.2.2.3 Méthode 3

Dans la troisième méthode, tous les opérateurs tangents sont déterminés par le module tangent isotropisé $\mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}}$ sauf la déformation moyenne $\Delta \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ de la matrice :

$$\Delta \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m = (\mathbb{C}_m^{tan})^{-1} : \Delta \overline{\boldsymbol{\sigma}}_m \tag{4.15}$$

On peut re-écrire l'étape 5 dans l'algorithme d'homogénéisation comme suit :

5. Déterminer le tenseur de Hill $\mathbb{P}_i^{cas3}$=$\mathbb{S}^E\left(\mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}}\right):\left(\mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}}\right)^{-1}$, les tenseurs de localisation des inclusions rigides $\mathbb{A}_i^{\text{MT}}$ et le module macroscopique homogénéisé $\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{A}_i^{MT} = [\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas3} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}}]^{-1} : \left[f_m\mathbb{I} + f_i[\mathbb{I} + \mathbb{P}_i^{cas3} : (\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}}]^{-1}\right]^{-1} \\
&\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan} = \mathbb{C}_m^{tan,\text{iso}} + f_i\left(\mathbb{C}_i - \mathbb{C}_{m,\text{iso}}^{tan}\right) : \mathbb{A}_i^{\text{MT}} \\
&\mathbb{B}_i^{\text{MT}} = \mathbb{C}_i : [\mathbb{A}_i^{\text{MT}} : (\mathbb{C}_{\text{hom}}^{tan})^{-1}]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.2.3 Comparaison des différentes méthodes et discussion

Pour comparer et estimer les différentes méthodes présentées dans le paragraphe précédent, on reproduit un exemple de comportement mécanique de l'argilite du Callovo-Oxfordien. Le travail sur ce matériau est été présenté dans la thèse de A. Guéry [45]. La roche est schématisée par un matériau à trois phases, constitué d'inclusions de quartz et de calcite répartis dans une matrice argileuse. La matrice est élasto-plastique et les grains de calcite présentent une loi d'élasticité couplée à un endomagement lié à la microfissuration. Pour homogénéiser le M.L.C, l'auteur a utilisé le schéma de Mori-Tanaka à trois phases. Dans le but de comparer les différentes méthodes, la roche est simplifiée en considérant un comportement élastique linéaire pour les grains de quartz ainsi que de calcite. Les simulations numériques sont effectuées pour un échantillon à la profondeur 482.2 m à teneurs volumiques respectives de calcite et de quartz de 26% et 14%. Les paramètres élastiques et élasto-plastiques nécessaires ont été déterminés par Guéry [45] et sont résumés dans le tableau (4.1).

L'étude de l'approche incrémentale avec différentes méthodes ou techniques d'isotropisation a été effectuée par plusieurs auteurs [17, 24, 60, 99]. L'estimation des différentes méthodes est souvent réalisée par comparaison des prédictions de chaque méthode avec la solution de référence obtenue par calculs aux éléments finis (E.F). Ces études ont démontré les résultats fournis par la méthode 1 amènent à des prédictions en accord avec les calculs numériques (E.F) [18, 24, 45, 46, 60, 81]. Cela montre que dans le cas simplifié, on peut utiliser les résultats obtenus par la méthode 1 comme des références pour estimer les autres méthodes.

Les comparaisons entre les courbes contrainte-déformation des trois différentes méthodes sont présentées dans les figures ci-dessous. La figure (4.2) illustre une comparaison dans les cas de compression hydrostatique et déviatorique. On constate évidemment un comportement linéaire du matériau sous un chargement hydrostatique. Ce résultat a été confirmé par plusieurs travaux issus de la littérature [12, 23, 88, 99]... Une différence significative entre les courbes est notée dans le cas d'une compression déviatorique. On remarque que la méthode 2 rend une réponse macroscopique

plus raide que les autres alors que la prédiction de la méthode 3 est proche de la référence - méthode 1. La figure (4.3) présente les comparaisons entre les trois méthodes dans le cas d'une compression uniaxiale ou triaxiale. La différence est vraiment importante entre les prédictions de la méthode 1 et 2. Cette remarque a été démontrée dans le travail de T.Jiang [60]. On observe également des différences entre les courbes de la méthode 1 et 3 mais elles sont de faible amplitude. La différence semble décroissante en fonction du confinement alors que les courbes sont plus approchées en augmentant le confinement de 5 MPa à 10 MPa et à 20 MPa. On peut conclure que la méthode 3 donne aussi une bonne réponse marcoscopique. On note que cette méthode correspond au cas où tous les opérateurs tangents sont déterminés par le module tangent isotropisé de la matrice, sauf la déformation moyenne de la matrice. Cela montre qu'on peut utiliser la méthode 3 pour décrire le comportement non-linéaire de la phase d'un matériau de sphères composites qui donne toujours les opérateurs tangents macroscopique et de localisation isotropes (voir les chapitres 2 et 3).

TAB. *4.1: Paramètres du modèle [45]*

	Argile	Calcite	Quartz
Paramètres élastiques	$E_m = 3$ GPa $\nu_m = 0.3$	$E_{cal} = 95$ GPa $\nu_{cal} = 0.27$	$E_{qua} = 101$ GPa $\nu_{qua} = 0.06$
plastiques	$\alpha_0^p = 0.05$ $\alpha_m^p = 0.95$ $b = 300$ $\beta_0^p =$ -1.5 $\beta_0^p = 0.3$ $b' = 400$ $C_p = 14$		

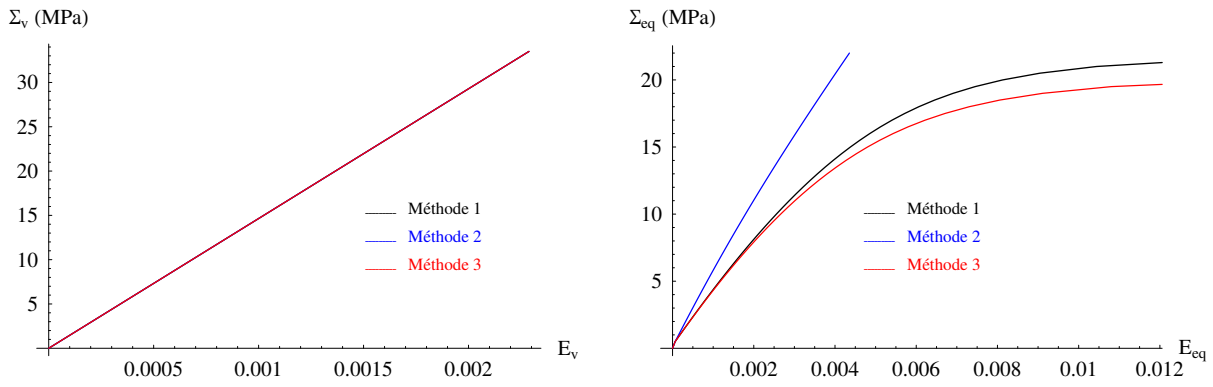


FIGURE 4.2: *Compression hydrostatique et déviatorique*

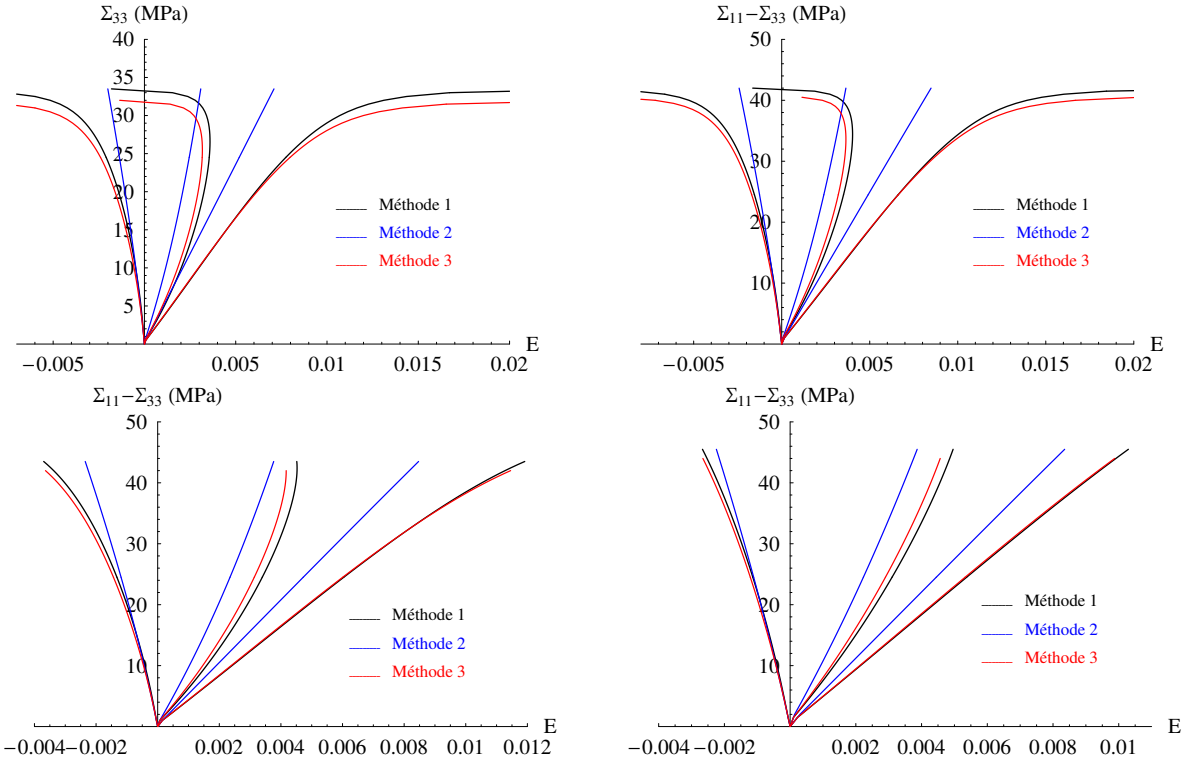


FIGURE 4.3: *Compression uniaxiale et triaxiale* ($P_c = 0; 5; 10; 20 MPa$)

Chapitre 5

Comportement non linéaire de l'interface imparfaite

5.1 Modèle d'interface non linéaire

Dans cette section, on considère un matériau de sphères composites à 2 phases dont l'interface est supposée imparfaite. Les deux phases, l'inclusion (1) et la matrice (2), suivent un comportement élastique linéaire. Dans le système de coordonnées sphériques, les conditions à l'interface sont introduites en proposant les paramètres de rigidité d'interface D_r, D_θ, D_φ liées au saut de déplacement $[u]$ à l'interface par les relations suivantes [49, 50] :

$$\begin{aligned} \sigma^1_{rr} = \sigma^2_{rr} = D_r\,[u_r] \quad &, \quad [u_r] = u^2_r - u^1_r \\ \sigma^1_{r\theta} = \sigma^2_{r\theta} = D_\theta\,[u_\theta] \quad &, \quad [u_\theta] = u^2_\theta - u^1_\theta \\ \sigma^1_{r\varphi} = \sigma^2_{r\varphi} = D_\varphi\,[u_\varphi] \quad &, \quad [u_\varphi] = u^2_\varphi - u^1_\varphi \end{aligned} \tag{5.1}$$

où $D_\theta = D_\varphi$; u^i_r, u^i_θ, u^i_φ sont les composantes du déplacement dans la phase i. Dans le chapitre (3) et l'annexe (B), on a présenté la solution poro-élastique du problème ainsi que les expressions analytiques du saut de déplacement à l'interface pour le cas à trois phases. Du point de vue mécanique, le saut de déplacement est une grandeur variable qui dépend généralement du moyen et de la valeur du chargement impossé. En mathématiques, cela a été démontré analytiquement (voir l'annexe B). Le comportement de l'interface imparfaite (5.1) montre un lien réciproque des propriétés mécaniques de l'interface aux sauts de déplacement en supposant les contraintes continues en tout le point de l'interface. Dans le travail de Le et al [62], basé sur la théorie et l'observation des résultats expérimentaux sur le béton de Burlion et al [15], les auteurs proposent un modèle

de comportement élasto-plastique pour les interfaces. Le comportement non linéaire d'interface est obtenu par l'introduction d'une dépendance de la rigidité normale d'interface D_r au saut de déplacement alors que la rigidité tangentielle D_θ est supposée constante. Dans ce chapitre, sur la base de cette idée, on développe un modèle d'interface qui permet de déterminer le comportement non linéaire d'interface en supposant que les propriétés d'interface normales et tangentielles (D_r et D_θ) varient en fonction du saut de déplacement par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p(\tau_n, \tau_t) &= p_0 \, (1 + \tau_n)^{\beta_p(\tau_t)} \\ q(\tau_n, \tau_t) &= q_0 \, (1 + \tau_n)^{\beta_q(\tau_t)} \\ \beta_p(\tau_t) &= \beta_p^m - (\beta_p^m - \beta_p^0)^{\gamma_p \, \tau_t} \\ \beta_q(\tau_t) &= \beta_q^m - (\beta_q^m - \beta_q^0)^{\gamma_q \, \tau_t} \end{aligned} \tag{5.2}$$

où p, q sont les deux paramètres adimensionnels de souplesse d'interface liés aux propriétés d'interface D_r et D_θ par (5.3) ; p_0, q_0 sont les valeurs initiales d'interface ; τ_n et τ_t donnés par (5.10) sont des rapports des sauts de déplacement respectivement normal et tangentiel à celui maximal à l'interface.

$$p = \frac{\mu_1}{a D_r} \quad , \quad q = \frac{\mu_1}{a D_\theta} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{\Delta n}{\Delta_0 n} \quad , \quad \tau_t = \frac{\Delta t}{\Delta_0 t} \\ \Delta n &= \frac{[U_r]}{a} \quad , \quad \Delta t = \frac{[U_\theta]}{a} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Δn et Δt sont les deux coefficients adimensionnels des composantes normales et tangentielles du saut de déplacement à l'interface (voir l'annexe B), négatifs sous un chargement de compression. Les deux constantes positives $\Delta_0 n$ et $\Delta_0 t$ décrivent les valeurs maximales du saut de déplacement, donc les valeurs absolues des rapports $|\tau_n|$ et $|\tau_t|$ sont toujours inférieures à 1. Les paramètres β_p et β_q permettent de contrôler la vitesse d'évolution du comportement d'interface : β_p , $\beta_q > 0$ correspond à une interface plus raide tandis que β_p , $\beta_q < 0$ est associée à une plus faible. Dans les paragraphes suivants, on envisage le problème sous différents chargements, d'abord sous une compression hydrostatique ou isotrope, ensuite sous une compression déviatorique et enfin dans le cas d'une compression combinée.

5.2 Compression isotrope

Dans le cas d'une compression hydrostatique ou isotrope, le problème des sphères composites repose sur une déformation homogène isotrope à l'infini et la condition de déplacement à l'infini s'écrit (voir chapitre 3) :

$$u_i(\underline{x})_{\underline{x}\to\infty} = E^{iso}\, x_i \tag{5.5}$$

Dans le système de coordonnées sphériques, les expressions du déplacement à l'interface dans chaque phase s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} = U_r^{(1)}(a) \quad , \quad u_\theta^{(1)} = 0 \quad , \quad u_\varphi^{(1)} = 0 \\ u_r^{(2)} = U_r^{(2)}(a) \quad , \quad u_\theta^{(2)} = 0 \quad , \quad u_\varphi^{(2)} = 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

$U_r^{(i)}$ est une fonction du rayon r déterminée par (3.2), on obtient le constituant non nul du saut de déplacement à l'interface par $\Delta^{iso}u_r^{(2)-(1)} = u_r^{(2)} - u_r^{(1)}$ avec $\Delta^{iso}u_r^{(2)-(1)} = \Delta^{iso}U_r^{(2)-(1)}$ donné dans l'annexe (B) comme une fonction de la déformation impossée E^{iso}. Dans la condition d'une compression isotrope (figure 5.1), le coefficient du saut de déplacement $\Delta^{iso}n$ est déterminé par la relation (5.7) dans laquelle $\Delta_0^{iso}n$ décrit la fermeture maximale possible de l'inteface, $\Delta^{iso}u^m \to 0$ correspond à une interface bien fermée.

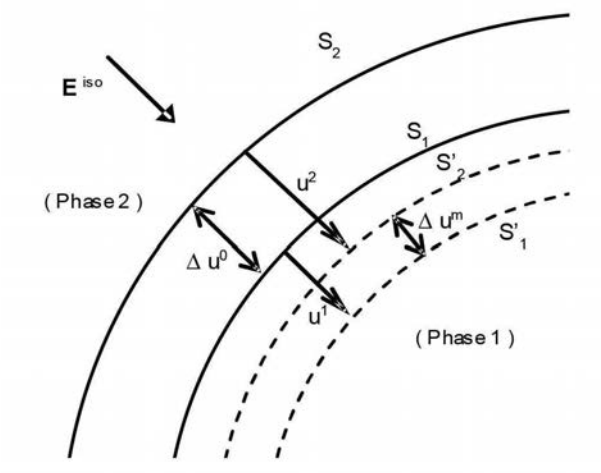


FIGURE *5.1: Déplacement de phase à l'interface sous une compression isotrope à l'infini*

$$
\begin{aligned}
|\Delta^{iso} n| &= \frac{|u_r^{(2)} - u_r^{(1)}|}{a} = \frac{|\Delta^{iso} u^0| - |\Delta^{iso} u^m|}{a} \\
&= \Delta_0^{iso} n - \frac{|\Delta^{iso} u^m|}{a}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

La fermeture sans glissement de l'interface conduit à une augmentation de la rigidité d'interface en directions normale et tangentielle (D_r, D_θ croissants et p, q décroissants en fonction de τ_n^{iso}) :

$$
\begin{aligned}
p(\tau_n^{iso}, 0) &= p_0 \, (1 + \tau_n^{iso})^{\beta_p} \quad avec \quad \beta_p = cte > 0 \\
q(\tau_n^{iso}, 0) &= q_0 \, (1 + \tau_n^{iso})^{\beta_q} \quad avec \quad \beta_q = cte > 0
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

avec $\tau_n^{iso} = \Delta^{iso} n / \Delta_0^{iso} n$. On considère maintenant un matériau à deux phases avec interface imparfaite. Ses propriétés initiales sont décrites par les paramètres suivants : $E_1 = 58$ GPa, $\nu_1 = 0.27$, $E_2 = 20$ GPa, $\nu_2 = 0.26$, $p_0 = 0.27$, $q_0 = 0.93$ et $f_1 = 0.7$. L'interface présente un comportement non linéaire : $\Delta_0^{iso} n = 0.6 \times 10^{-3}$, $\beta_p = 10$, $\beta_q = 5$. Sur la figure 5.2, on constate logiquement la croisance du coefficient de saut de déplacement $|\Delta^{hyd} n|$ par (5.7) en fonction de E_v ($E_v < 0$). La décroissance des paramètres de souplesse d'interface p et q montre que l'interface est plus rigide si le saut de déplacement atteint un maximum. La figure 5.3 présente la relation contrainte-déformation marcroscopique ainsi que les évolutions des propriétés effectives pour différents comportement d'interface. Dans le cas où l'interface présente un comportement non linéaire, la figure 5.3 prévoit un comportement non linéaire à l'échelle marcoscopique et cela a été observé expérimentalement sur plusieurs matériaux. Le module d'Young est croissant en fonction du confinement mais le coefficient de Poisson reste presque constant.

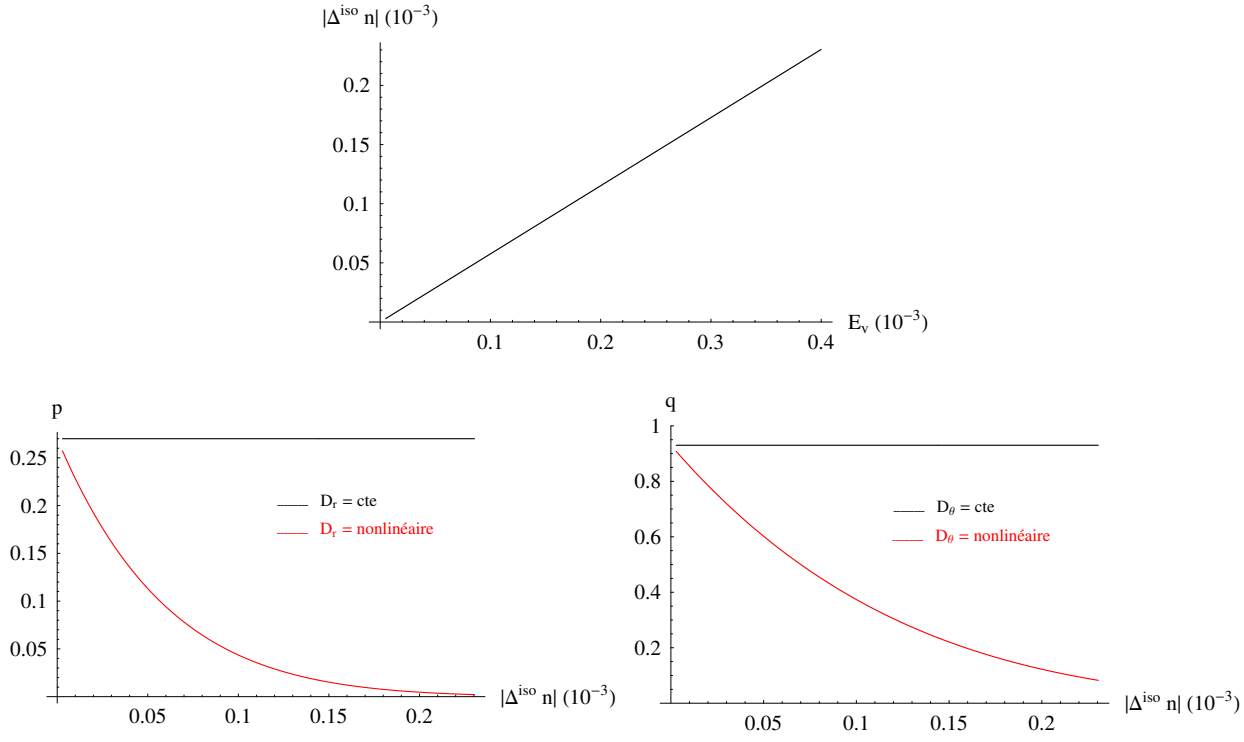


FIGURE 5.2: *Evolution des paramètres d'interface sous une compression hydrostatique*

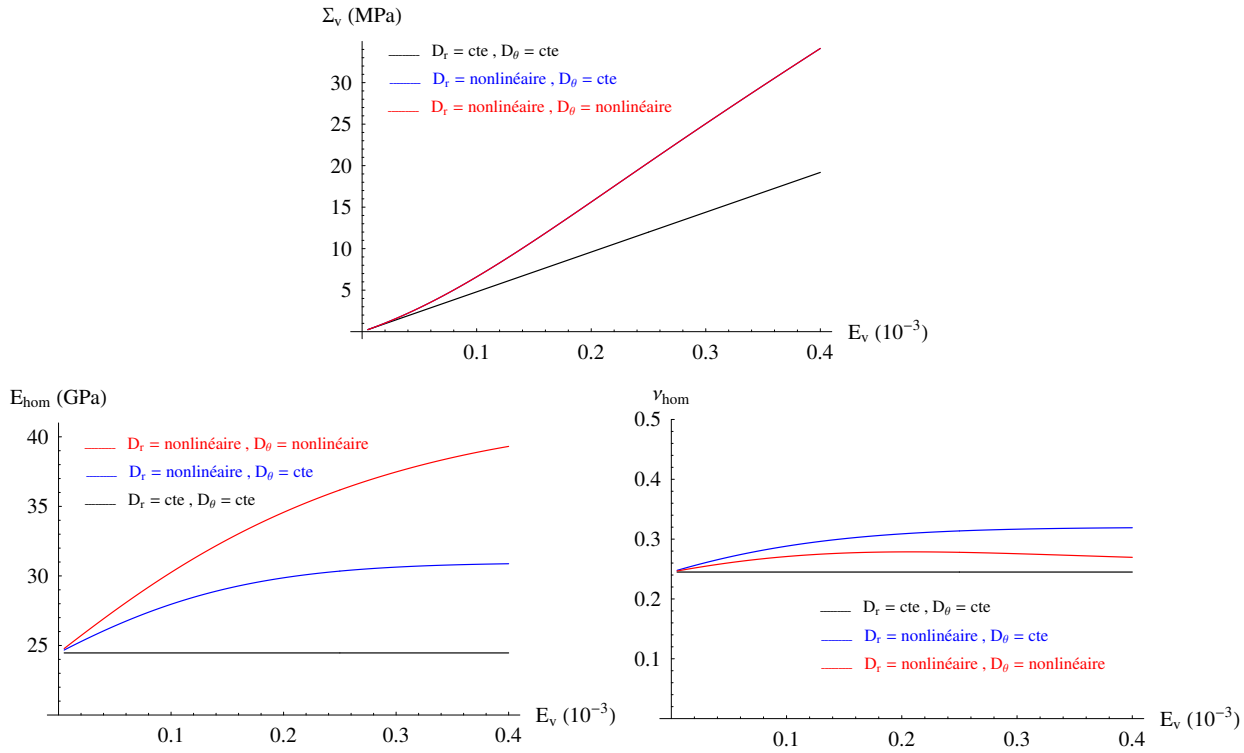


FIGURE 5.3: *Compression hydrostatique : comportement effectif*

5.3 Compression déviatorique

Dans le système de coordonnées sphériques, le problème des sphères composites repose sur une déformation homogène déviatorique à l'infini, et les expressions du déplacement de la phase i à l'interface s'écrivent (voir le chapitre 3) :

$$\begin{cases} u_r^i = U_r^i(r)\,[3\,cos^2(\theta) - 1] \\ u_\theta^i = U_\theta^i(r)\,[-3\,sin(\theta)cos(\theta)] \\ u_\varphi^i = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Les grandeurs U_r et U_θ déterminées par (2.24) sont fonctions du rayon r. A l'interface, le déplacement $u(r = a)$ n'est pas uniforme (θ variable) et est caractérisé par les constantes $U_r(r = a)$ et $U_\theta(r = a)$. Dans le cas d'un chargement déviatorique, sous la condition de déplacement à l'infini (2.21), le saut de déplacement à l'interface est composé de deux constituants non nuls normal et tangentiel. Les rapports du saut de déplacement s'écrivent donc :

$$\tau_n^{dev} = \frac{[u_r]}{[u_r]_0} \quad , \quad \tau_t^{dev} = \frac{[u_\theta]}{[u_\theta]_0} \tag{5.10}$$

En général, ces rapports ne dépendent que des coefficients adimensionnels de déplacement à l'interface Δn et Δt (voir l'annexe B) ; (5.10) devient :

$$\begin{aligned} \tau_n^{dev} &= \frac{\Delta^{dev} n}{\Delta_0^{dev} n} \quad , \quad \tau_t^{dev} = \frac{\Delta^{dev} t}{\Delta_0^{dev} t} \\ \Delta^{dev} n &= \frac{[U_r]}{a} \quad , \quad \Delta^{dev} t = \frac{[U_\theta]}{a} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Les deux constantes positives $\Delta^{dev} n0$ et $\Delta^{dev} t0$ décrivent la fermeture et le glissement d'inteface maximals possibles sous une compression déviatorique. En théorie, la ferméture d'interface conduit à une augmentation de la rigidité d'interface mais le glissement d'interface peut donner une action inverse. Dans ce cas, le modèle d'interface proposé (5.12) permet de prendre en compte le glissement d'interface en donnant la variation de β_p, β_q en fonction de τ_t^{dev}. On note que $\beta_p, \beta_q < 0$ est associée à une interface plus faible.

$$
\begin{aligned}
p(\tau_n^{dev}, \tau_t^{dev}) &= p_0 \, (1 + \tau_n^{dev})^{\beta_p(\tau_t^{dev})} \\
q(\tau_n^{dev}, \tau_t^{dev}) &= q_0 \, (1 + \tau_n^{dev})^{\beta_q(\tau_t^{dev})} \\
\beta_p(\tau_t^{dev}) &= \beta_p^m - (\beta_p^m - \beta_p^0)^{\gamma_p \, \tau_t^{dev}} \\
\beta_q(\tau_t^{dev}) &= \beta_q^m - (\beta_q^m - \beta_q^0)^{\gamma_q \, \tau_t^{dev}}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

La figure (5.4) illustre le comportement local d'interface pour un matériau à deux phases avec une interface imparfaite dont les propriétés initiales sont décrites dans la partie précédente (5.2). L'interface présente un comportement non linéaire : $\Delta_0^{dev} n = 0.6 \times 10^{-3}$, $\Delta_0^{dev} t = 0.6 \times 10^{-3}$, $\beta_p^0 = 10$, $\beta_q^0 = 5$, $\beta_p^m = -1$, $\beta_q^m = -5$, $\gamma_p = 10$, $\gamma_q = 10$. En fonction d'une déformation macroscopique déviatorique, le coefficient du saut de déplacement $\Delta^{dev} n$ ou $\Delta^{dev} t$ est croissant jusqu'à un seuil $\Delta_0^{dev} n$ ou $\Delta_0^{dev} t$. Le comportement local de l'interface est décrit par la variation non linéaire des paramètres de souplesse d'interface p et q. Sur la figure (5.4), on constate en première étape une augmentation de la rigidité normale d'interface ($p \searrow, D_r \nearrow$) tandis que la rigidité tangentielle d'interface semble être constante ($q \backsimeq D_\theta \approx cte$). On peut dire que lorsque le glissement d'interface n'est pas important, l'interface est plus rigide du fait de sa fermeture. En deuxième étape, comme dit précédemment, le glissement très important à l'interface conduit à la diminution des rigidités tangentielle et normale de l'interface ($p, q \nearrow; D_r, D_\theta \searrow$). Dans la figure (5.5), avec le modèle d'interface proposé, on observe un comportement macroscopique non linéaire tandis qu'il reste linéaire dans le cas d'une interface classique.

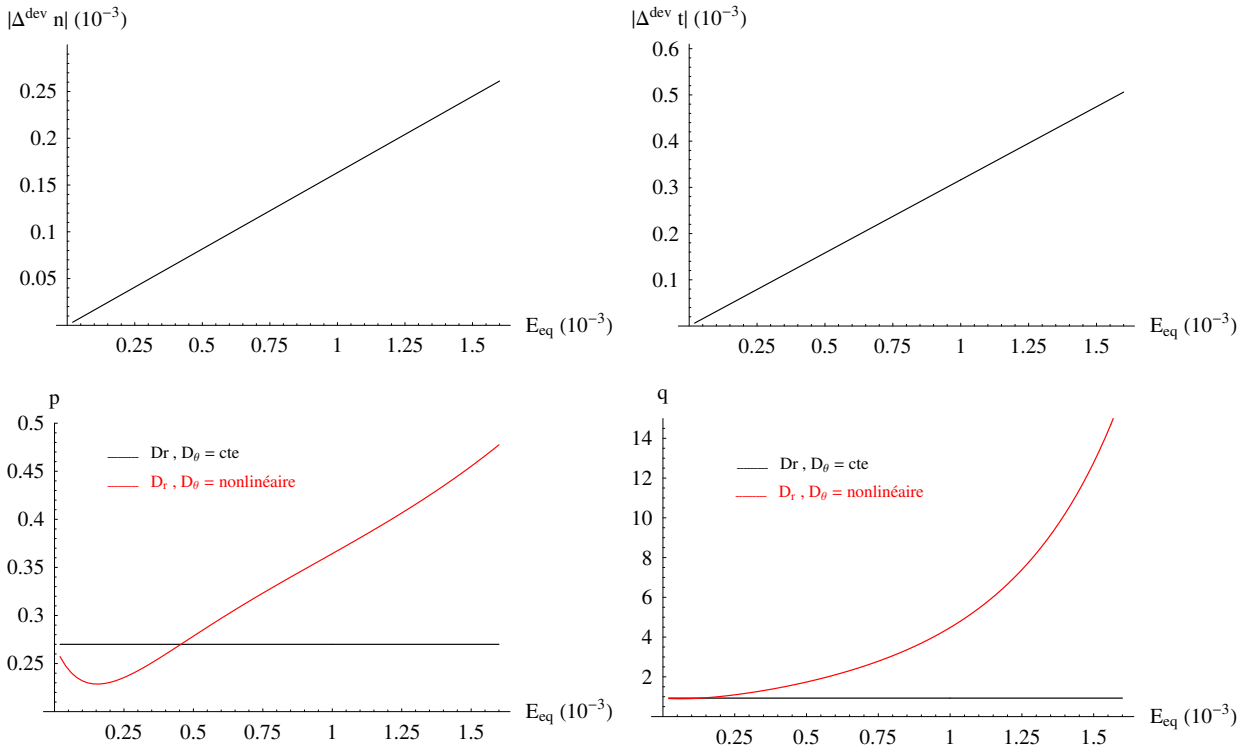


FIGURE 5.4: *Compression déviatorique*

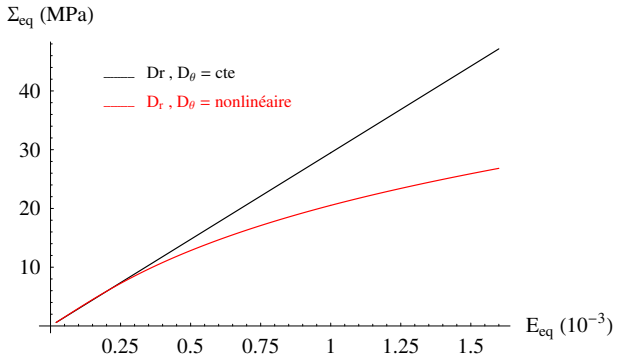


FIGURE 5.5: *Compression déviatorique : relation contrainte - déformation*

5.4 Compression oedométrique

Dans le cas général, on considère d'abord le problème sous une compression quelconque. Le modèle est soumis à une déformation homogène $\boldsymbol{E}$ à l'infini. Dans le cas des composites isotropes, la déformation $\boldsymbol{E}$ peut être décomposée en deux composantes isotrope/deviatorique :

$$E_{ij} = E^{iso}\,\delta_{ij} + E^{dev}_{ij} \tag{5.13}$$

Ce problème peut être décomposé en deux sous-problèmes élémentaires : le premier correspond à une compression isotrope ; le deuxième correspond à une compression déviatorique. Les solutions des deux sous-problèmes élémentaires ont été déterminées dans les parties précédentes (5.2 et 5.3). En combinant ces deux sous-problèmes, on obtient la solution du problème général avec les propriétés non linéaires d'interface qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} p(\tau_n,\tau_t) &= p_0\,(1+\tau_n)^{\beta_p(\tau_t)} \\ q(\tau_n,\tau_t) &= q_0\,(1+\tau_n)^{\beta_q(\tau_t)} \\ \beta_p(\tau_t) &= \beta_p^m - (\beta_p^m - \beta_p^0)^{\gamma_p\,\tau_t} \\ \beta_q(\tau_t) &= \beta_q^m - (\beta_q^m - \beta_q^0)^{\gamma_q\,\tau_t} \end{aligned} \tag{5.14}$$

avec $\tau_n = \tau_n^{iso} + \tau_n^{dev}$, $\tau_t = \tau_t^{dev}$. La figure (5.6) présente le comportement macroscopique dans le cas d'une compression oedométrique. Les propriétés des deux phases constituantes et les paramètres d'interface non linéaires sont choisis comme précédemment.

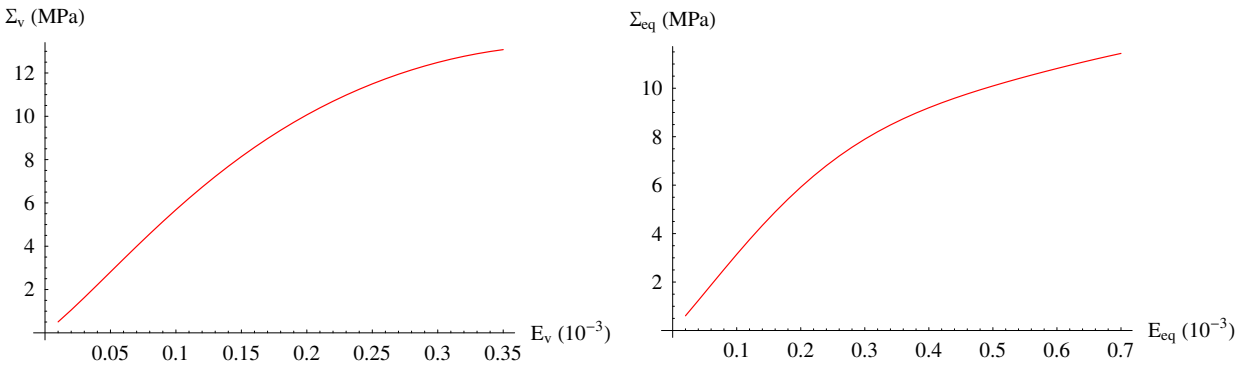


FIGURE 5.6: *Compression oedométrique*

Troisième partie

Applications

Chapitre 6

Application aux Calcaires Oolithiques

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement poro-élastique et élasto-plastique des calcaires oolithiques. L'étude est menée à l'aide des outils et méthodes d'homogénéisation présentés dans les parties précédentes. On détaille tout d'abord la microstructure de la roche et on propose ensuite un modèle géométrique qui permet de la décrire sous forme simplifiée. La méthode et le modèle d'homogénéisation présentées dans la première partie sont utilisées pour estimer le comportement poro-élastique linéaire de la roche étudiée. Leur comportement non-linéaire est étudié en appliquant la méthode d'homogénéisation et le modèle d'interface non linéaires présentées dans la deuxième partie. La comparaison entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux disponibles a confirmé la validation du modèle développé.

6.1 Microstructure et constituants

Le calcaire étudié est un calcaire oolithique poreux. La caractérisation de la roche par DRX a montré que c'est un calcaire monominéral ($> 98\%$ de calcite). La microstructure de la roche a été observée au MO (Microscope Optique) et au MEB (Microscope Electronique à Balayage). La figure 6.1 à gauche donne une vue globale de la microstructure du calcaire d'Anstrude. On constate que la roche est composée d'éléments plus ou moins sphériques (oolithes) et de fragments fossilisés qui sont liés par un ciment calcitique. La taille des oolithes varie entre 100 et $1000\,\mu m$. Le ciment est principalement constitué de plages de sparite de tailles variées (cristaux de 20 à $100\,\mu m$). Il se peut cependant que des zones de micrite assurent la cohésion des grains [65].

On rappelle que [74] :

– Micrite : Contraction de l'anglais "microcristalline calcite", ou boue carbonatée en particules de 1 à 4 μ m, impliquant une formation en eau très calme.

– Sparite : Contraction de l'anglais " spar calcite ", en cristaux supérieurs à 10 μ m, le plus souvent de 20 à 100 μm, qui remplisse par précipitation directe les pores entre des éléments déjà accumulés, le milieu étant assez agité pour avoir empêché le dépôt de particules plus fines.

D'un strict point de vue sédimentologique, la micrite forme une matrice et la sparite forme un ciment. Pour les besoins de cette étude, les deux seront appelés ciment, le terme matrice présentant une signification particulière en poromécanique. A cette échelle, l'étude montre aussi que la roche ne présente pas de vides entre les oolithes et la sparite [65].

La figure 6.1 à droite illustre la microstructure de la roche à plus fort grossissement. Elle présente les différents constituants du matériau : les oolithes et le ciment calcitique (sparite et micrite). A cette échelle, l'étude montre que les vides se trouvent principalement à l'intérieur des oolithes ainsi que dans la zone de ciment micritique. Notons également que la continuité de l'espace poreux connecté est assurée par le fait que les oolithes sont en contact les unes avec les autres [66]. Concernant la structure même des oolithes, les images au MEB permettent de montrer qu'elles sont composées de micrite (figure 6.2) et que c'est à l'échelle des grains de micrite que l'on peut visualiser la porosité intergranulaire [65].

La figure 6.2 à droite montre que la micrite composée les oolithes est formée de grains de calcite de taille inférieure à 5 μm. De même, la porosité intergranulaire apparaît très fine. La microstructure de la roche apparaît homogène. Seules des hétérogénéités à l'échelle millimétrique peuvent être rencontrées (concentration d'oolithes, de micrite ou de sparite). De plus, les observations au MO sur des lames minces coupées aléatoirement par rapport à la stratification montre que la structure de la roche est isotrope, ce qui laisse présumer de l'isotropie mécanique du matériau. A partir de l'observation de la microstructure des oolithes, M. Lion [65, 66] a proposé des modèles de distribution de porosité dans l'oolithe (figure 6.3). La porosité connectée dépend de la structure des oolithes. Parmis les modèles proposés, les cas 5 et 6 n'ont été que très rarement observés. L'étude de distribution porosimétrique du calcaire d'Anstrude montre qu'il ne possède qu'une seule famille de pores, de diamètre moyen 0.4 μm. La porosité de cette roche est très fine et correspond à la porosité située au sein de la micrite. Ceci confirme donc les observations microscopiques (finesse de la porosité et absence de vides entre les plages de sparite et les oolithes). La porosité totale des vides connectés mesurée par porosimètre au mercure est estimée à environ 22 % [65].

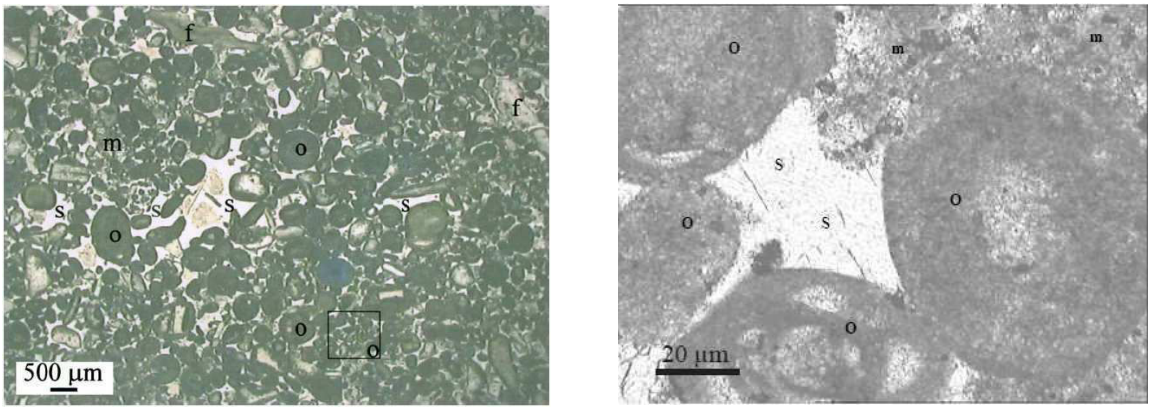


FIGURE 6.1: *Microstructure du calcaire d'Anstrude [65, 66]*
(o : Oolithe, s : sparite, m : micrite, f : fragment d'organisme fossilisé)

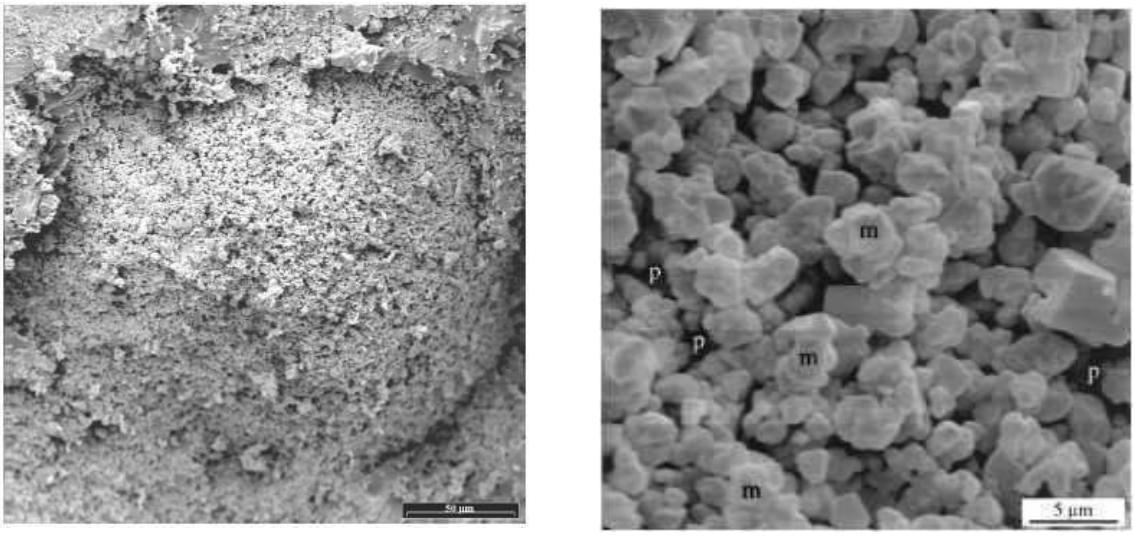


FIGURE 6.2: *Vue d'ensemble d'une oolithe et sa constitution [65, 66]*
(m : grains de micrite, p : porosité intergranulaire)

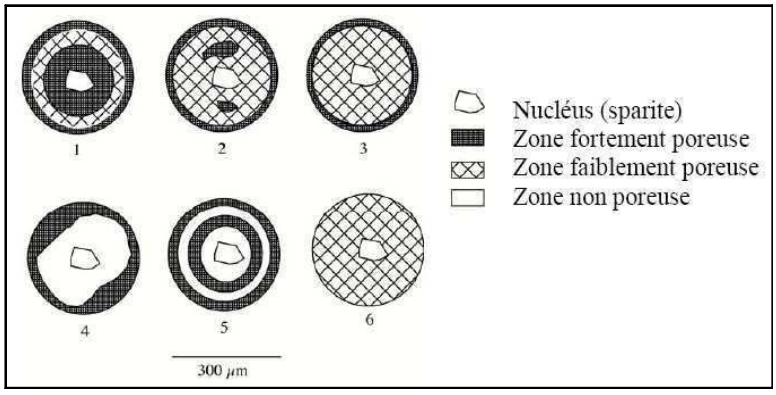


FIGURE 6.3: *Modèle de distribution de la porosité dans l'oolithe [66]*

Dans le travail de Pironon et al [85], les expériences ont été réalisées sur un calcaire oolithique de Lavoux du Bassin de Paris daté du Dogger. Il s'agit d'un calcaire oolitique à macroporosité inter-oolithique importante et à forte microporosité intra-oolithique avec des rayons d'accès aux pores (mesurés par porosimétrie au mercure) à répartition bimodale centrée sur $0,1$ et $10\,\mu m$. La figure 6.4 à gauche présente une vue globale de la microstructure du calcaire de Lavoux observée par D.Drgic au LaEGO. On observe que les oolithes sont des éléments quasi-sphériques et ont une forte fraction volumique de l'ordre de 0.74 [3]. On constate également que la micrite et la microporosité sont des constituants composés des oolithes (figure 6.4 à droite). La distribution des pores dans le calcaire de Lavoux a été étudiée dans le travail de D.Drgic [42]. L'auteur a montré deux types de pores : la porosité intra-oolithique ou microporosité avec des rayons variant de 0.01 à $2\,\mu m$ est plus importante (environ 60% de porosité totale) tandis que la porosité inter-oolithique ou macroporosité est plus grande avec des rayons variant de 2 à $80\,\mu m$.

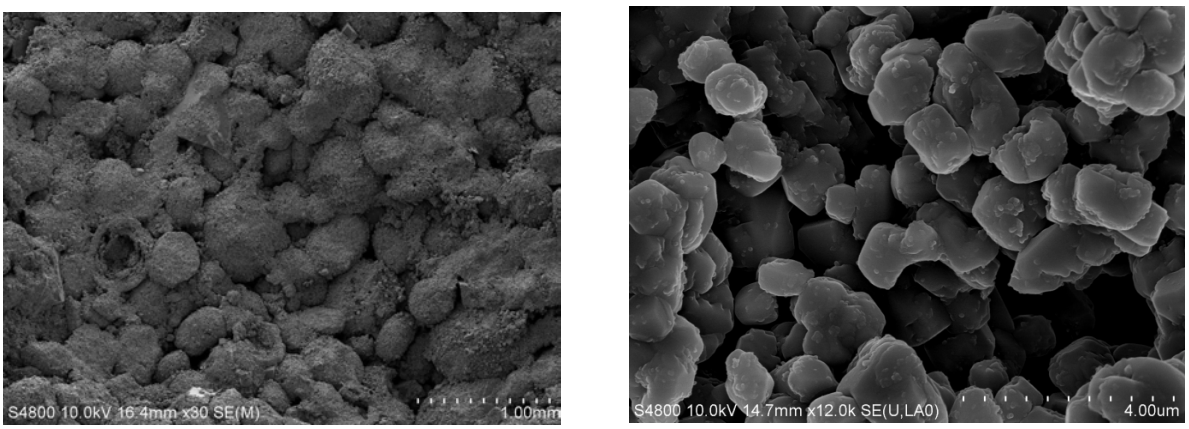


FIGURE *6.4: Microstructure du calcaire de Lavoux et des oolithes [42]*

Une autre étude de la microstructure d'un calcaire oolithique a été aussi réalisée dans le travail de S.Ghabezloo et al [37] sur la roche daté du Néocomien à côté de Nîmes en France. La roche est constituée d'oolithes quasi-sphériques ($100 - 400\,\mu m$) cimentées par une sparite de calcite et distinguées par une interphase (figure 6.5 à gauche). La figure 6.5 à droite illustre la différence de microstructure entre les oolithes et le ciment sparitique. L'oolithe ressemble à un matériau granulaire à microporosité inter-granulaire avec un diamètre des grains micritiques variant de 2 à $5\,\mu m$. Dans le ciment sparitique, les grains sont plus grands et il semble qu'ils soient inter-bloqués [37]. La roche affiche $17,7\,\%$ de porosité totale dont $2\,\%$ occluse. La figure 6.6 présente la distribution de la porosité. Deux types de porosité sont observées dans la roche : la microporosité est présente essentiellement entre les grains de micrite dans les oolithes et entre les grains de sparite dans le ciment tandis que la macroporosité est concentrée autour des oolithes. L'étude a montré également que les oolithes occupent environ $59\,\%$ de la fraction volumique, que la macroporosité

représente 73 % de la porosité totale et que la porosité occluse occupe 42 % de la microporosité dans la roche. La figure 6.6 à droite nous donne aussi une vue détaillée de la zone entre les oolithes et le ciment qui permet de distinguer une interphase entre les deux constituants de la roche.

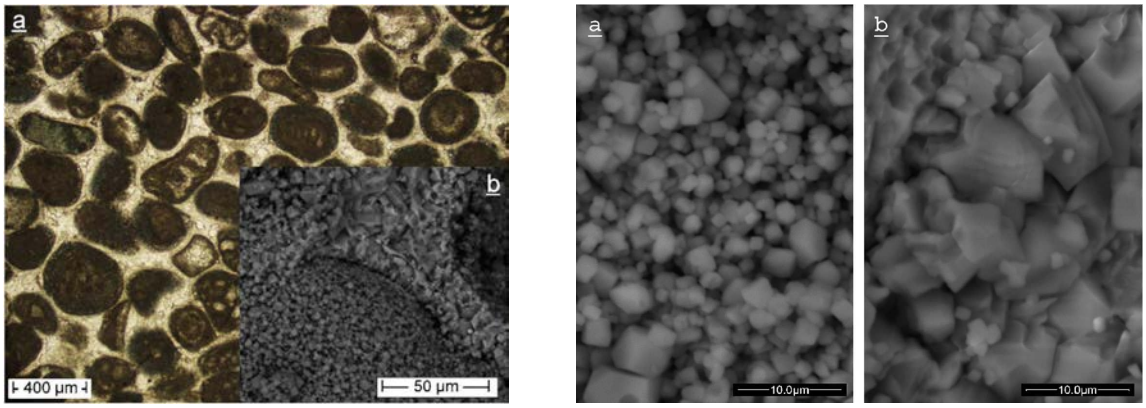


FIGURE *6.5: Microstructure du calcaire oolithique daté du Néocomien [37]*

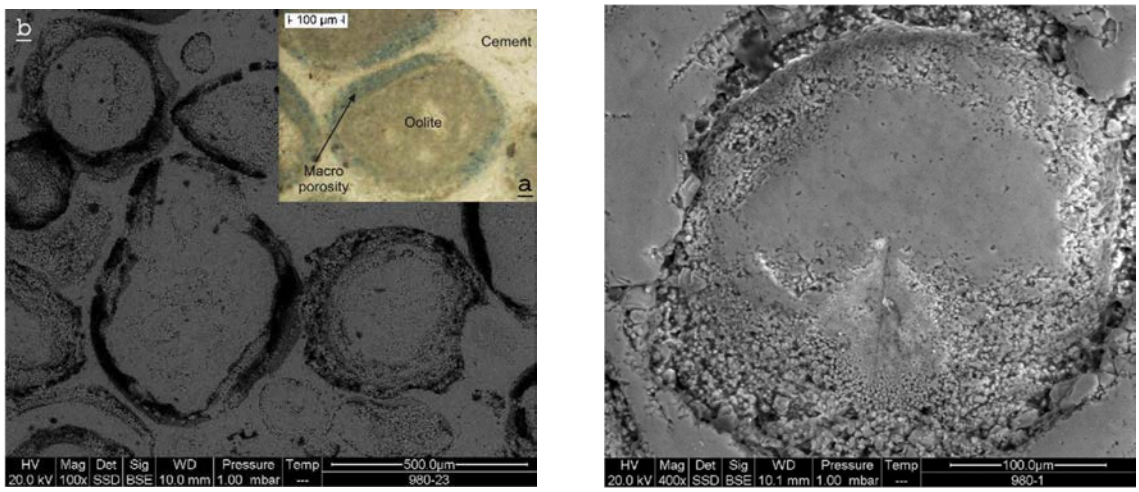


FIGURE *6.6: Distribution de porosité du calcaire oolithique daté du Néocomien [37]*

Dans le travail de thèse de J.Eslami effectué au LaEGO, le comportement à court et à long terme du calcaire d'Euville est étudié. Ce calcaire oolithique, essentiellement composé de calcite pure, est formé par des oolithes et de larges cristaux de calcite syntaxiale. Les observations au MEB sont présentées sur la figure 6.7. Les oolithes sont cimentées par différents types de calcite : de larges cristaux de calcite syntaxiale de plusieurs centaines de micromètres, de petits cristaux de calcite d'une taille moyenne d'environ 10 μm précipités autours des oolithes, et de la micro-calcite (environ 3 μm) formant les oolithes. Les oolithes sont constituées de plusieurs couches concentriques de microcalcite. L'étude de la porosité au mercure du calcaire d'Euville a montré une organisation bimodale du réseau poreux : intra-oolithique et inter-oolithique. Les pores intra-oolithiques sont

plus petits avec un rayon d'accès variant entre $0,01\,\mu m$ et $1,5\,\mu m$ (60 % de la porosité totale). Le rayon d'accès des pores inter-oolithiques se trouve dans la gamme entre $1,5\,\mu m$ et $80\,\mu m$ (40 % de la porosité totale).

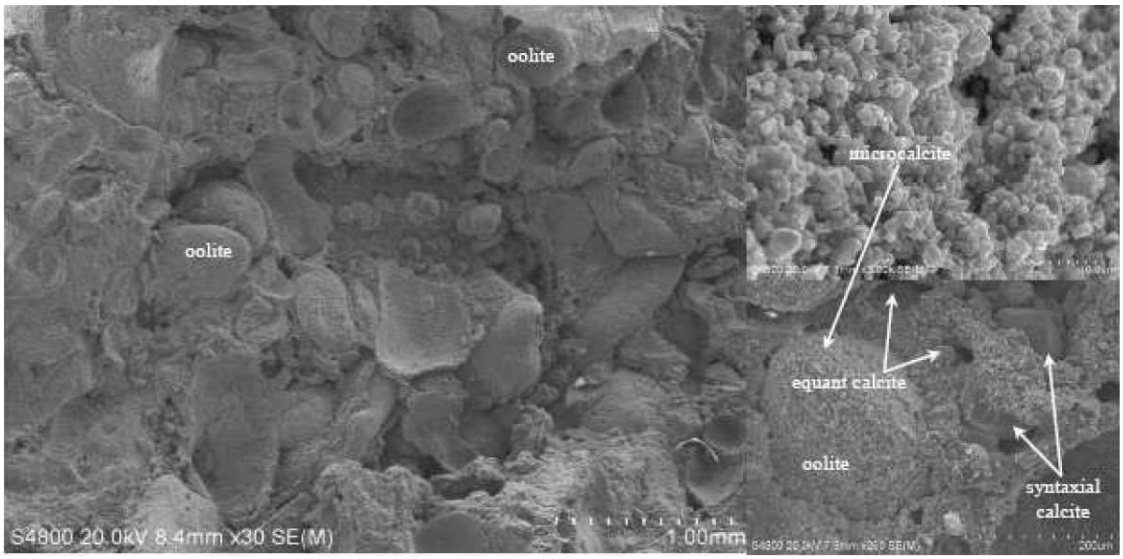


FIGURE *6.7: Microstructure du calcaire oolithique d'Euville à faible et à fort grossissements [34]*

Dans le tableau 6.1, on présente une brève synthèse d'exemples des propriétés poro-élastiques à l'état sain des différents calcaires oolithiques. On note (f_p) la porosité moyenne, (K) le module de compressibilité de la roche, (K_s) le module de compressibilité de la matrice solide, (K_u) le module de compressibilité non drainé de la roche, (b_{exp}) le coefficient de Biot expérimental, (M_{exp}) le module de Biot et (B_{exp}) le coefficient de Skempton. On constate que le module de compressibilité moyen de la matrice solide diffère de celui de la calcite pure : $K_s^{moyen} \simeq 60\,GPa$ tandis que pour la calcite pure $K_{calcite} = 76\,GPa$. En supposant les pores connectés dans la roche, on peut dire que tout ou partie des calcites présentes dans le calcaire a été dégradée mécaniquement. L'étude des propriétés des constituants du calcaire de Lavoux effectuée par C.Auvray au LaEGO a montré que les grains de calcite (sparites) dans la matrice du ciment sont plus raides que les oolithes et leur module d'Young est proche de celui de la calcite pure ($E^{exp}_{sparite} = 75 \div 95\,GPa$, $E_{calcite} = 95\,GPa$) tandis que $E_{oolithe} = 25 \div 35\,GPa$. La différence de rigidité entre les oolithes et le ciment sparitique a été montrée également dans le travail de S.Ghabezloo et al [37], ces auteurs ont mis en évidence que le ciment sparitique est plus raide que les oolithes ($K_c/K_o > 1$). A partir de ces études, on peut conclure que la sparite présente dans le ciment est proche de la calcite pure mais la micrite présente dans les oolithes est plus souple ($K_o < K_c \simeq K_{calcite}$).

TAB. *6.1: Exemples des propriétés poro-élastiques des différents calcaires*

Calcaire	f_p (%)	K (GPa)	K_s (GPa)	K_u (Gpa)	b_{exp}	B_{exp}
Villeperdue [35, 65]	6.4	36	61		0.41	
Tonerrre [35, 39, 65]	13	19.3	41.4	21.9	0.53	0.2
Salem [47]	13	21.78	72.6	31.2	0.7	0.46
Lavoux [35, 39, 65]	21.9	13.8	58.9	19.7	0.77	0.3
Chauvigny [35, 39, 65]	17.4	16.3	52.6	17.9	0.69	0.2
Anstrude [65, 67]	19.9	15.5	63.25	16.3	0.82	0.167

6.2 Modèle d'homogénéisation

6.2.1 Modèle proposé

Les études de la microstructure des calcaires oolithiques (Anstrude, Lavoux, Euville ...) ont montré que ces roches sont constituées par des inclusions quasi-sphériques (oolithes) cimentées par un ciment calcitique. On observe aussi une zone très poreuse autour des oolithes, qui peut être modélisée comme une interface ou une interphase mince. La présence de pores dans les oolithes et dans la matrice de ciment nous permet de proposer un modèle géométrique pour l'homogénéisation des calcaires oolithiques (figure 6.8 $(a)(b)$) comme suit :

- (1) oolithe : calcite (micrite) + micro-pores
- (2) interface ou interphase mince
- (3) matrice poreuse : calcite (sparite) + macro-pores

Avec ce modèle, l'homogénéisation de ces roches calcaires oolithiques est menée en deux étapes (figure 6.8 (b) (c)) : la première est l'homogénéisation de l'oolithe (1) et de la matrice poreuse (3) ; la seconde est l'homogénéisation de la roche en supposant les oolithes noyées dans une matrice poreuse (3). Dans la première supposition, on suppose l'existence d'une interface parfaite ou imparfaite entre les oolithes et la matrice. Ensuite, la roche sera homogénéisée en présence d'une interphase mince entre les deux phases.

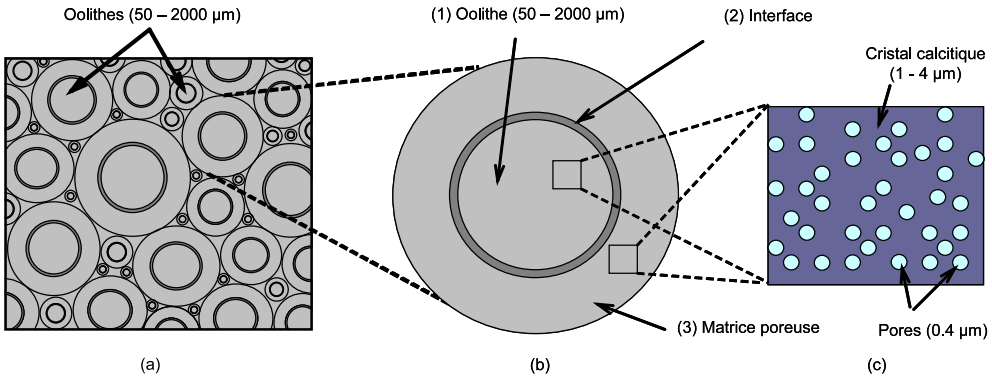


FIGURE *6.8: Homogénéisation à deux étapes*

6.2.2 Homogénéisation à deux étapes

On considère une structure de calcaire occupant un domaine géométrique Ω (figure 6.8 (b)). Les oolithes Ω_O sont composées de cristaux calcitiques (micrites) et de pores Ω_p^O. On pose η_O la porosité relative de l'oolithe :

$$\Omega_p^O = \eta_O \, \Omega_p \tag{6.1}$$

La matrice poreuse Ω_{mp} est constituée par des grains de sparite et des pores Ω_p^{mp}. Ici, on suppose que les grains de sparite et les pores se présentent sous forme sphérique. En bref, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \Omega_p^{mp} + \Omega_p^O \\ \Omega_p^O &= \eta_O \, \Omega_p \\ \Omega_p^{mp} &= (1 - \eta_O) \, \Omega_p \\ f_p &= \frac{\Omega_p}{\Omega} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Les porosités relatives de chaque phase sont déterminées par :

$$\begin{aligned} f_p^O &= \frac{\Omega_p^O}{\Omega_O} = \frac{\Omega_p^O}{\Omega} \frac{\Omega}{\Omega_O} = \frac{\eta_O \, f_p}{f_O} \\ f_p^{mp} &= \frac{\Omega_p^{mp}}{\Omega_{mp}} = \frac{(1 - \eta_O) \, \Omega_p}{\Omega} \frac{\Omega}{\Omega_{mp}} = \frac{(1 - \eta_O) \, f_p}{f_{mp}} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Les porosités relative de l'oolithe f_p^O et de la matrice poreuse f_p^{mp} dépendent donc des paramètres η_O, f_O, f_{mp} et de la porosité totale de la roche f_p. Pour valider le modèle proposé, il faut toujours satisfaire les conditions suivantes :

$$f_p^{mp} = \frac{(1-\eta_O)\, f_p}{f_{mp}} < 1$$
$$f_p^{O} = \frac{\eta_O\, f_p}{f_O} < 1 \tag{6.4}$$

En suppsosant la calcite présente dans la roche n'est pas vraiment de la calcite pure, les propriétés du solide des constituants (oolithe et matrice) sont corrigées par les coefficients dégradés χ_O et χ_m :

$$k_O^S = \chi_O\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_O^S = \chi_O\, \mu_{calcite}$$
$$k_m^S = \chi_m\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_m^S = \chi_m\, \mu_{calcite} \tag{6.5}$$
$$k_{calcite} = 76\, GPa \quad , \quad \mu_{calcite} = 36.8\, GPa$$

On présente ci-dessous l'algorithme de l'homogénéisation à deux étapes. La première permet de déterminer les propriétés poro-élastiques de l'oolithe et de la matrice. Les deux phases sont des milieux polycristallins à forte porosité et sont homogénéisées à l'aide du schéma autocohérent itératif (ACDIF). La deuxième étape consiste à déterminer les propriétés poro-élastiques effectives de la roche à l'échelle macroscopique en utilisant le modèle de sphères composites (voir la partie I). Le modèle de sphères composites est retenu pour estimer le comportement effectif de la roche calcaire oolithique, et dépend des propriétés d'interface ou d'interphase.

Etape 0 : Initialisation

Données d'entrée : f_p, f_O, f_{mp}, η_O, χ_O, χ_m

Etape 1 : Homogénéisation de l'oolithe et de la matrice poreuse

1. Détermination des porosités relatives f_p^O, f_p^{mp} par la relation (6.20) et des modules d'élasticité de la phase solide de constituants k_O^S, μ_O^S, k_m^S, μ_m^S par la relation (6.22). Vérification de la condition à limite (6.21)

2. Détermination des modules d'élasticité effectifs de l'oolithe k_O^I, μ_O^I et de la matrice k_m^I, μ_m^I par le schéma autocohérent itératif (ACDIF). Le processus itératif s'écrit :

$$\frac{k_j^{(i)}}{k_j^{(i-1)}} = \frac{1 - f_{jp}^{I(i-1)}}{1 + \alpha_j^{(i)}\,(k_j^{(i-1)} - k_j^{(i)})}\Big/ k_j^{(i)} \quad , \quad \frac{\mu_j^{(i)}}{\mu_j^{(i-1)}} = \frac{1 - f_{jp}^{I(i-1)}}{1 + \beta_j^{(i)}\,(\mu_j^{(i-1)} - \mu_j^{(i)})}\Big/ \mu_j^{(i)}$$
$$\alpha_j^{(i)} = \frac{3\, k_j^{(i)}}{3\, k_j^{(i)} + 4\, \mu_j^{(i)}} \quad , \quad \beta_j^{(i)} = \frac{2\,(k_j^{(i)} + 2\, \mu_j^{(i)})}{5\,(3\, k_j^{(i)} + 4\, \mu_j^{(i)})} \tag{6.6}$$

avec j = Oolithe (O), matrice (m)

$$\begin{aligned} k_j^{(0)} = k_j \quad , \quad \mu_j^{(0)} = \mu_j \quad , \quad f_{jp}^{I(0)} = 0 \\ \triangle f_{jp}^I = \frac{f_{jp}^I}{N} \quad , \quad f_{jp}^{I(i)} = \frac{\triangle f_{jp}^I}{1 - f_{jp}^I + i \triangle f_{jp}^I} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Le processus itératif est réalisé de $i = 1$ jusqu'à $i = N$, N étant le nombre d'itérations. Une valeur $N = 100$ a été retenue pour le calcul et satisfait la condition de la convergence du processus itératif. On obtient $k_j^I = k_j^{(N)}$, $\mu_j^I = \mu_j^{(N)}$.

3. Détermination du coefficient b_j^I et du module de Biot du solide N_j^I dans le cas isotrope par les relations suivantes :

$$b_j^I = 1 - \frac{k_j^I}{k_j} \quad , \quad \frac{1}{N_j^I} = \frac{b_j^I - f_{jp}^I}{k_j} \tag{6.8}$$

En fin de cette étape, on obtient les propriétés poro-élastiques linéaires isotropes des deux phases poreuses (oolithe et matrice) k_j^I, μ_j^I, b_j^I, N_j^I avec $(j = O, mp)$.

Etape 2 : Homogénéisation de calcaire oolithique

La deuxième étape d'homogénéisation est réalisée à l'aide de la solution du modèle de sphères composites présenté dans la première partie et dans les annexes A et B en cas particuliers. On note ici k_{SC}^{hom}, μ_{SC}^{hom}, b_{SC}^{hom}, N_{SC}^{hom} respectivement les modules de compressibilité, de cisaillement, le coefficient et le module de Biot du solide du modèle de sphères composites ; "SC" soit "SCIP" dans le cas à interface parfaite et "SC" soit "SCII" dans le cas à interface imparfaite.

4. Données d'entrée : f_p, f_O, f_{mp}, k_j^I, μ_j^I, b_j^I, N_j^I avec $(j = O, mp)$

5. Calcul de k_{SC}^{hom}, μ_{SC}^{hom}, b_{SC}^{hom}, N_{SC}^{hom} en fonction des données à l'aide des solutions du modèle de sphères composites (Annexes A et B).

6.3 Comportement poro-élastique

Dans la partie précédente, on a présenté la méthode d'homogénéisation en deux étapes de la roche étudiée. Le but est maitenant de choisir le modèle géométrique pour la roche et de déterminer les paramètres inconnus du matériau. On propose ci-dessous trois modèles différents de sphères composites dépendants de l'état de liaison à l'interface : le premier est le cas plus simple, dans lequel la roche est modélisée comme un matériau à deux phases à interface parfaite ; la présence d'une interface imparfaite ou d'une interphase mince entre les oolithes et la matrice sera modélisée dans les deuxième et troisième modèles. L'étude de la microstructure de la roche présentée dans la première partie de ce chapitre a mis en évidence une fraction volumique d'oolithes variable de

0.59 [37] à 0.74 [3]. Par la suite, on choisit une valeur moyenne $f_O = 0.7$ pour les calculs. L'étude expérimentale dans les travaux de D.Drgic [42] et de J.Eslami [34] a montré également que les pores présents dans les oolithes représentent 60% de la porosité totale, on obtient donc $\eta_O = 0.6$.

6.3.1 Matériau à 2 phases à interface parfaite

Dans le premier modèle, l'interface entre les oolithes et la matrice est supposée parfaite. La roche étudiée est donc un matériau à deux phases où les fractions volumiques des constituants sont connues :

- Oolithe sphérique : $f_O = 0.7$
- Matrice poreuse : $f_{mp} = 0.3$

Le modèle de sphères composites à trois phases à interface parfaite (SCIP) est utilisé (voir l'annexe A). Les figures suivantes présentent les résultats obtenus en fonction de la porosité f_p de la roche. La simulation du modèle dans la figure 6.9 montre que les coefficients choisis $\chi_O = 0.4$ et $\chi_m = 0.7$ donnent des résultats bien corrélés aux mesures expérimentales pour les propriétés élastiques (k_{hom} et μ_{hom}). Mais le module de compressibilité du solide de la roche est plus bas que la moyenne de la roche étudiée $K_s \simeq 60GPa$ (figure 6.10).

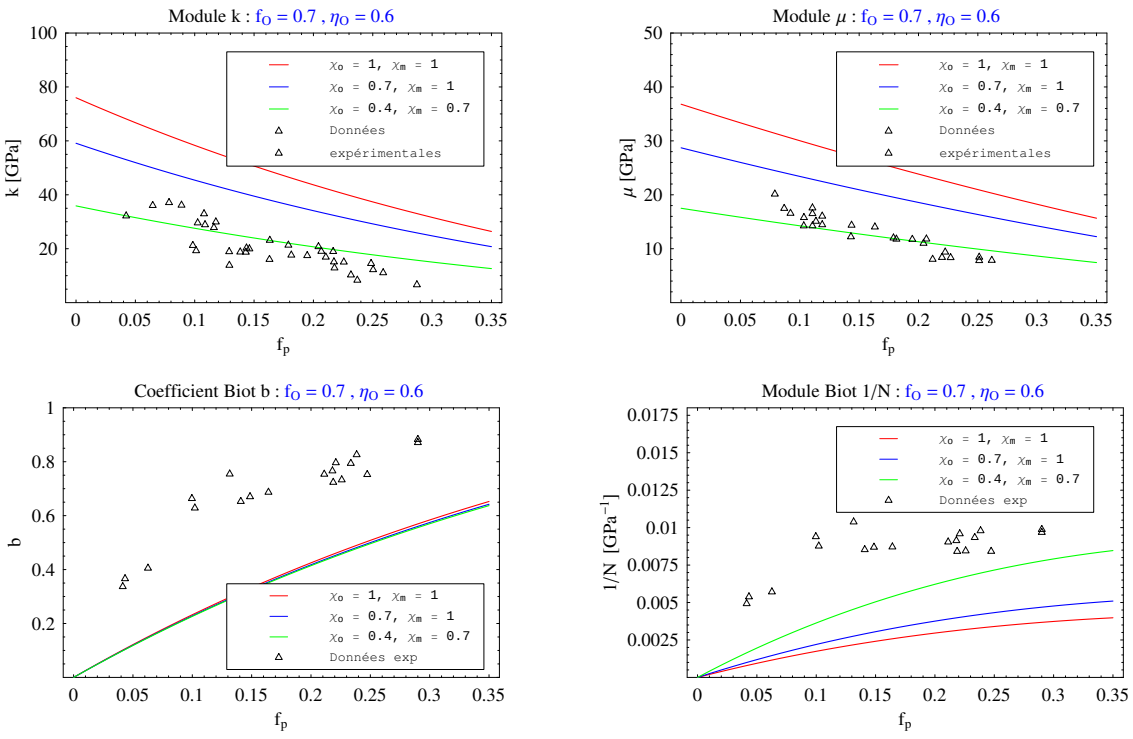


FIGURE *6.9: Propriétés poro-élastiques effectives : influence des paramètres χ_O et χ_m*

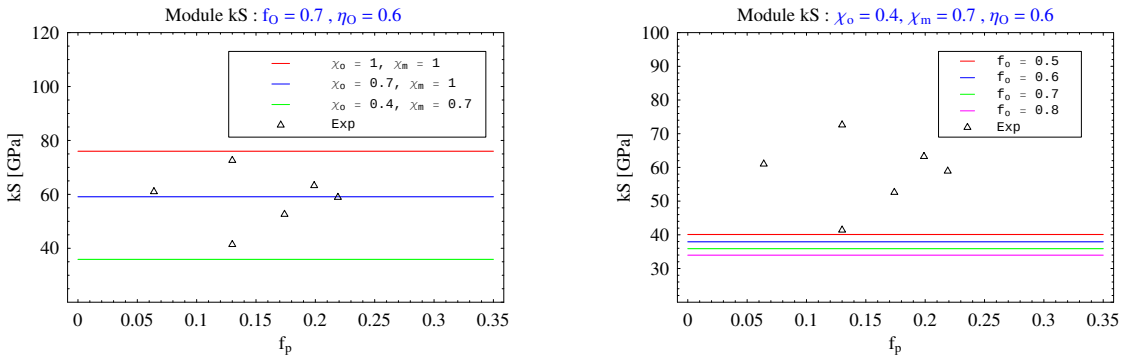


FIGURE *6.10: Module de compressibilité du solide de la roche : influence des paramètres χ_O et χ_m*

D'autres estimations sont réalisées pour vérifier les coefficients choisis $\chi_O = 0.4$ et $\chi_m = 0.7$. Les figures 6.11 et 6.12 présentent les évolutions des propriétés poro-élastiques effectives de la roche en faisant varier la fraction volumique de l'oolithe et de la porosité relative de l'oolithe. Pour les quatre valeurs de f_O et η_O testées, la différence entre les courbes n'est pas très significative. Les simulations des modules effectifs k_{hom} et μ_{hom} sont assez proches des données expérimentales mais les résultats numériques donnent une mauvaise estimation des poro-propriétés b_{hom} et $1/N_{hom}$. On peut donc conclure que le modèle proposé ici n'est pas bien validé en choisissant les coefficients $\chi_O = 0.4$ et $\chi_m = 0.7$. D'après la figure 6.10 (à gauche), on peut choisir les coefficients $\chi_O = 0.7$ et $\chi_m = 1$ qui rendent un bon résultat pour le module K_s. Le coefficient choisi $\chi_m = 1$ montre que le solide de la matrice (sparite) correspond à de la calcite pure. Dans les paragraphes suivants, ces coefficients sont fixés mais les modèles sont affinés pour obtenir de meilleurs résultats.

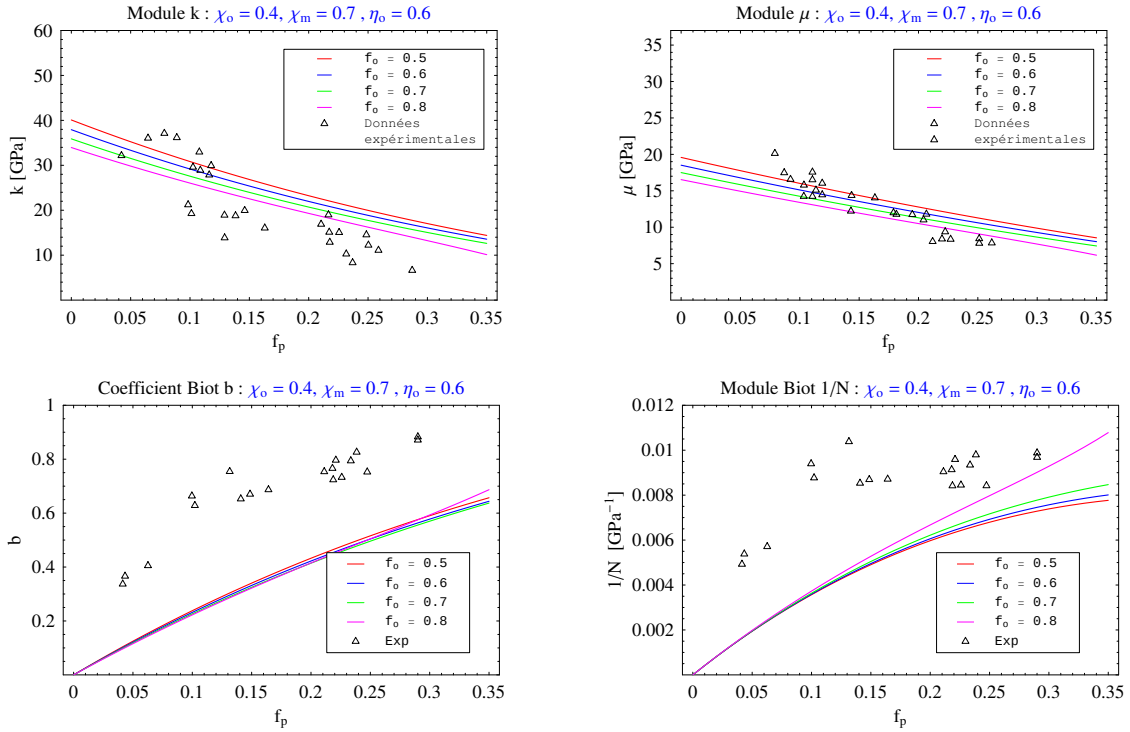


FIGURE 6.11: *Propriétés poro-élastiques effectives : influence de la fraction volumique de l'oolithe f_O*

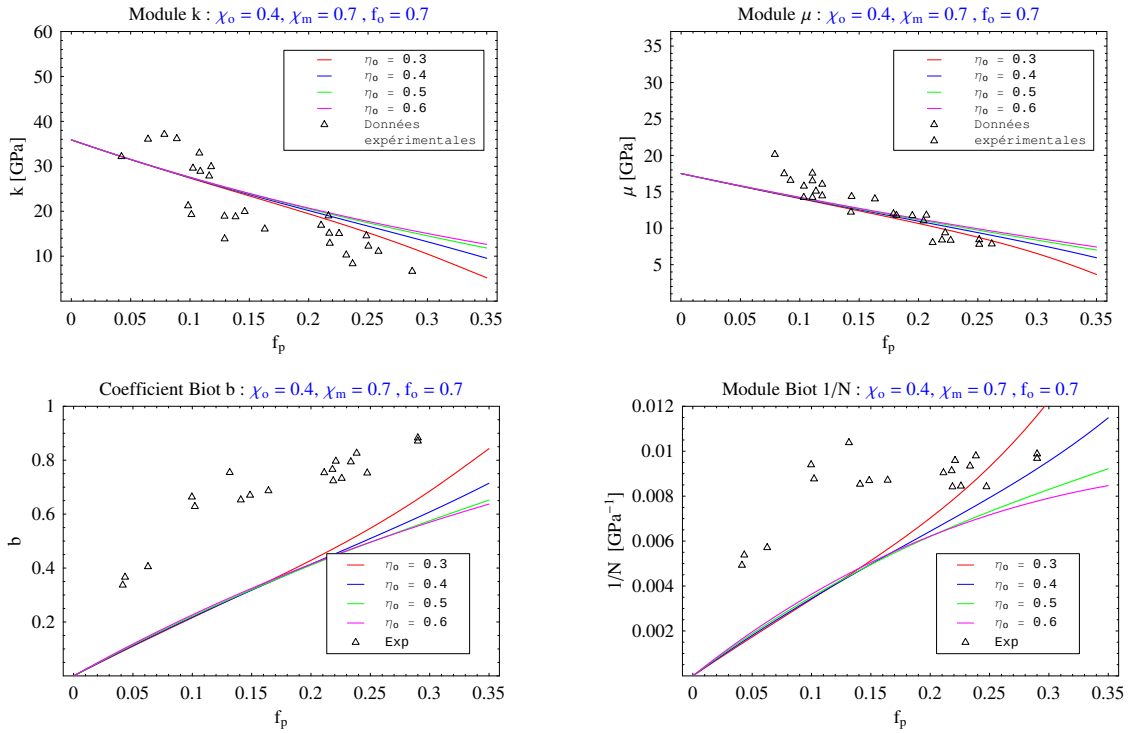


FIGURE 6.12: *Propriétés poro-élastiques effectives : influence de la porosité relative de l'oolithe η_O*

6.3.2 Matériau à 2 phases à interface imparfaite

La présence d'une zone dégradée autour de l'oolithe (voir l'étude de la microstructure de la roche) peut justifier l'utilisation d'une interface imparfaite dans le modèle. La roche étudiée est donc un matériau à deux phases à interface imparfaite. Les fractions volumiques des constituants sont retenues :

- Oolithe sphérique : $f_O = 0.7$; porosité relative de l'oolithe : $\eta_O = 0.6$
- Matrice poreuse : $f_{mp} = 0.3$

Les poro-propriétés d'interface imparfaite sont décrites par des paramètres p, q et n (voir l'annexe B). L'interface étant une zone très poreuse, on propose les relations suivantes entre les paramètres d'interface et la porosité :

$$p = \alpha\, f_p \quad , \quad q = \beta\, f_p \quad , \quad n = \gamma\, f_p \tag{6.9}$$

α, β et γ sont des coefficients d'interface liés à la porosité. Le modèle de sphères composites à trois phases à interface imparfaite (SCII - annexe B) est utilisé en choisissant des bon coefficients $\chi_O = 0.7$ et $\chi_m = 1$. On représente dans la figure 6.13 à gauche une validation du modèle en montrant un bon résultat du module de compressibilité du solide K_s. Dans le cas non-drainé, avec les coefficients d'interface choisis $\alpha = \beta/3.2$, $\beta = 6$, les résultats présentent une bonne corrélation avec les mesures expérimentales (figure 6.13 à droite). La figure 6.14 présente les évolutions des poro-propriétés effectives homogénéisées en fonction de la porosité de la roche. Les résultats sont comparés avec les résultats expérimentaux de différents calcaires oolithiques présentés dans le tableau 6.1 et dans le papier de Bemer et al [7]. Les différentes valeurs des coefficients d'interface sont aussi comparées pour trouver les plus adaptées. On observe logiquement d'abord une décroissance des modules d'élasticite (k_{hom} et μ_{hom}) et une croissance du coefficient de Biot (b_{hom}) en fonction de la porosité f_p. On note également que plus l'interface est souple (p croissants), plus les modules d'élasticité effectifs (k_{hom} et μ_{hom}) obtenus sont faibles. La comparaison montre aussi une influence significative du coefficient poro-élastique d'interface n sur les poro-propriétés macroscopiques. En calant avec les expériences, la figure 6.15 donne des bon résultats avec les coefficients choisis $\alpha = \beta/3.2$, $\beta = 6$ et $\gamma = 3.5$.

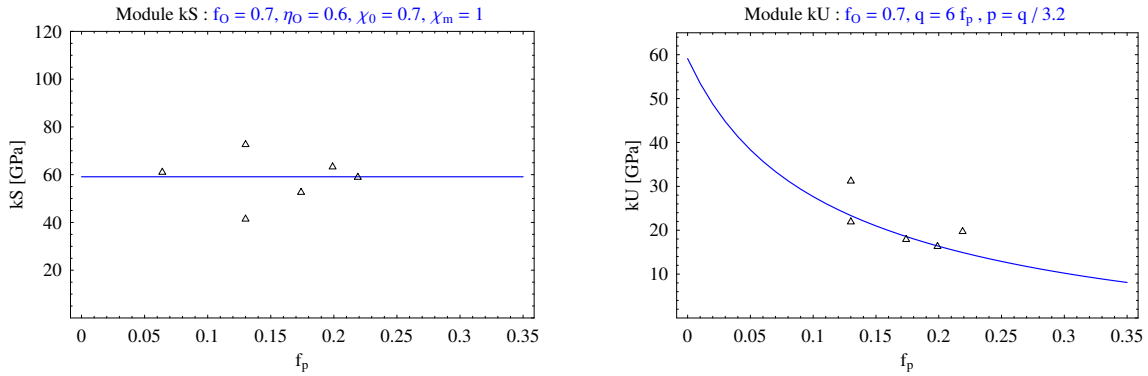


FIGURE *6.13: Module de compressibilité du solide de la roche en fonction de la porosité*

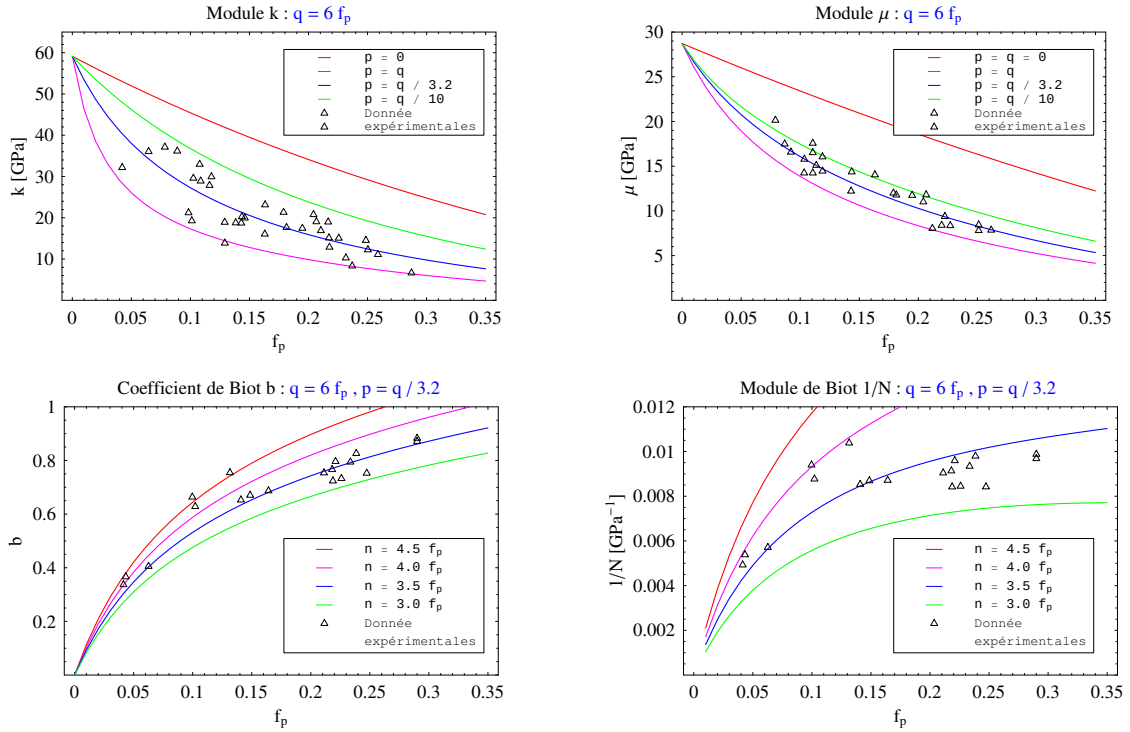


FIGURE *6.14: Propriétés poro-élastiques effectives en fonction de la porosité*

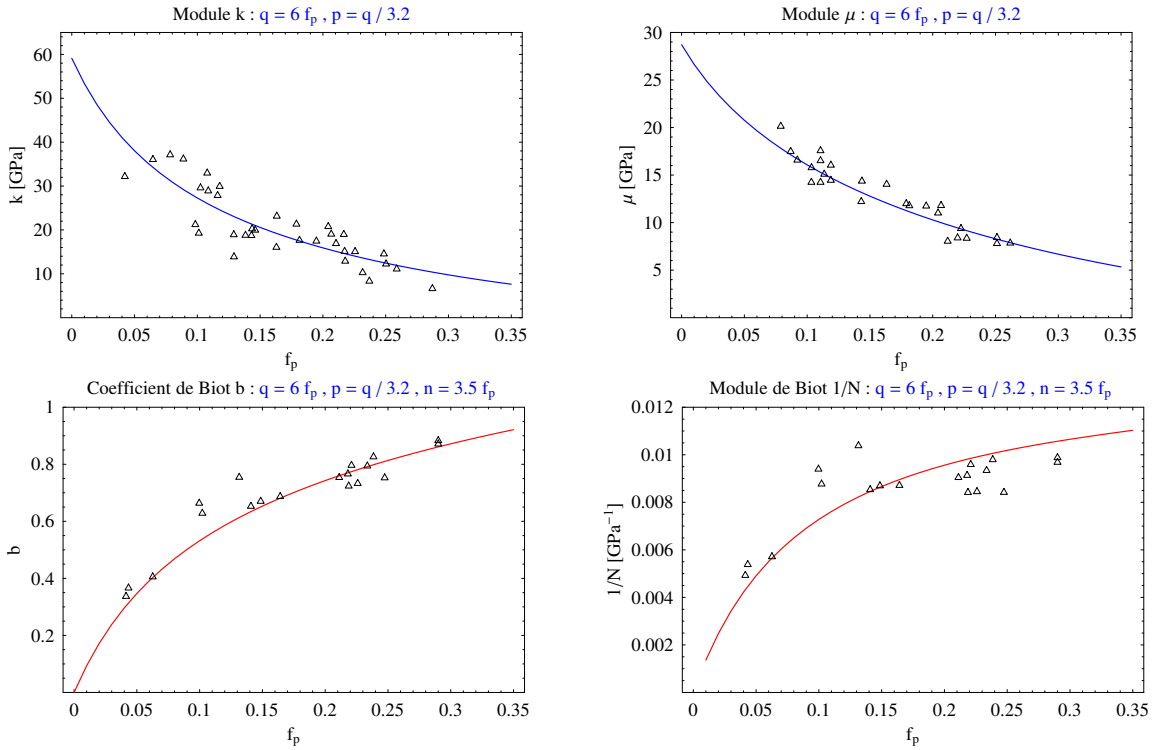


FIGURE 6.15: *Propriétés poro-élastiques effectives en fonction de la porosité : paramètres choisis*

6.3.3 Matériau à 3 phases avec zone de transition d'interface (ZTI)

On propose maintenant un autre modèle où la zone de transition d'interface (ZTI) entre les oolithes et la matrice est vu comme une couche d'interphase Ω_{int} très mince et de propriétés élastiques très faibles :

$$\Omega_{int} = c\,\Omega_p \quad avec \quad c << 1 \tag{6.10}$$

On retient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_{mp} + \Omega_{int} + \Omega_O \\ f_{int} &= \frac{\Omega_{int}}{\Omega} = \frac{c\,\Omega_p}{\Omega} = c\,f_p \\ f_{mp} &= 1 - f_{int} - f_O \end{aligned} \tag{6.11}$$

c est un coefficient qui décrit la fraction volumique relative d'interphase et dépend de la porosité de la roche. Autrement dit, l'augmentation de la porosité amène l'agrandissement de la zone d'interphase. Le matériau est maintenant un assemblage de sphères à trois phases (oolithe, interphase et matrice). Pour homogénéiser ce matériau, on utilise le modèle de sphères composites à quatre phases à interface parfaite (voir l'annexe A). Les fractions volumiques des constituants s'écrivent donc :

- Oolithe sphérique : $f_O = 0.7$
- Interphase très poreuse : $f_{int} = c\,f_p$
- Matrice poreuse : $f_{mp} = 1 - f_{int} - f_O$

Les très faibles propriétés élastiques de l'interphase sont notées à partir de la dégradation de la zone extérieure de l'oolithe. On suppose :

$$E_{int} = \frac{E_{Oolithe}}{m} \quad , \quad \nu_{int} = \nu_{Oolithe} \tag{6.12}$$

E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson, le paramètre m décrit la faiblesse des propriétés d'interphase par rapport à celles de l'oolithe. En fonction de la porosité f_p, les deux paramètres choisis c et m doivent toujours satisfaire les conditions aux limites (6.21). La figure 6.16 présente les résultats du module de compressibilité respectivement du solide K_s et non-drainé K_u homogénéisés avec les coefficients choisis $\chi_O = 0.7$ et $\chi_m = 1$. On constate une bonne simulation de K_u avec les paramètres $m = 250$ et $c = 0.05$. La figure 6.17 présente une influence sensible

des très faibles propriétés d'interphase. Dans ce cas, l'interphase est supposée très mince avec la valeur $c = 0.05$. Une valeur $b_{int} = 1$ a été considérée pour le calcul et correspond à un matériau à forte porosité et à composante solide quasi-incompressible. Les résultats modélisés sont comparés avec les résultats expérimentaux de différents calcaires présentés dans le tableau 6.1 ou disponibles dans la littérature [7]. On observe (figure 6.17) une forte influence du paramètre d'interphase m, caractérisant la dégradation des propriétés élastiques de l'interphase, sur les propriétés poro-élastiques effectives. On observe aussi logiquement une décroissance des modules d'élasticité (k_{hom}, μ_{hom}) et une croissance du coefficient de Biot (b_{hom}) en fonction de la porosité f_p. Les résultats sont comparés avec trois valeurs de m respectivement $100 \div 250 \div 500$. On note logiquement que plus l'interphase est faible (m croissant), plus les modules d'élasticité macroscopiques (k_{hom}, μ_{hom}) obtenus sont faibles, et plus le coefficient de Biot est important (b_{hom}). Dans ce cas, la valeur $m = 250$ nous donne des résultats en accord avec les expériences. Une étude de l'influence de l'épaisseur d'interphase est présenté dans la figure 6.18. On constate également une forte influence du paramètre c, qui décrit la fraction volumique relative d'interphase. Les résultats obtenus sont significativement différents alors que le paramètre c varie de 0.01 à 0.1. Les propriétés d'élasticité (k_{hom}, μ_{hom}) sont logiquement plus faibles lorsque l'interphase grandit (c croissant).

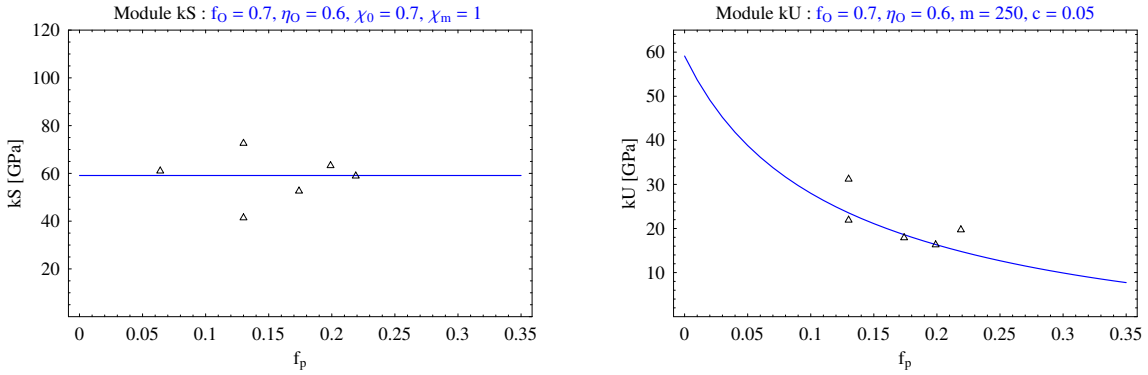


FIGURE *6.16: Modules de compressibilité du solide K_s et non-drainé K_u homogénéisés*

Les figures 6.19 et 6.20 présentent les influences de la fraction volumique de l'oolithe f_O et de la porosité relative d'oolithe η_O sur les propriétés poro-élastiques effectives de la roche. La comparaison des résultats obtenus pour les différentes valeurs de f_O et de η_O permet de valider les valeurs moyennes choisies $f_O = 0.7$ et $\eta_O = 0.6$. On constate que la différence entre les courbes n'est pas très significative notamment dans la figure 6.20. Cela nous montre que les influences de paramètres f_O et η_O ne sont pas importantes et confirme que les valeurs moyennes choisies $f_O = 0.7$ et $\eta_O = 0.6$ sont acceptables pour estimer les poro-propriétés du calcaire oolithique. En calant avec les expériences, la figure 6.21 nous donne des bons résultats avec les paramètres retenus

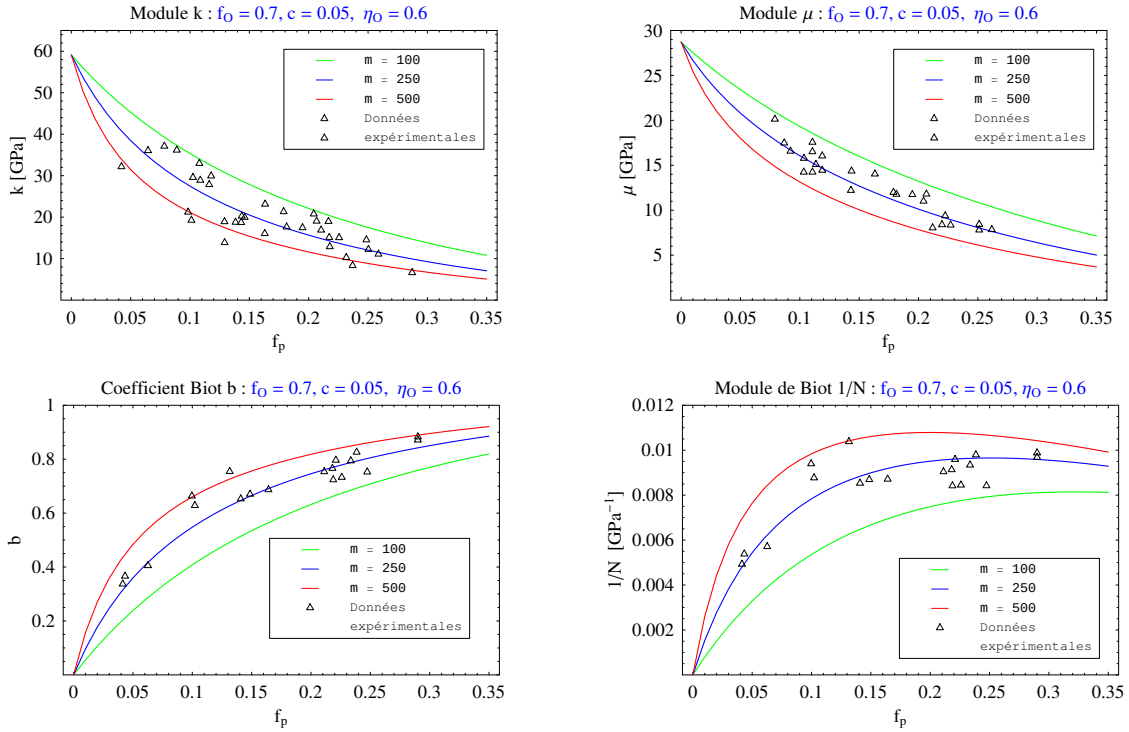


FIGURE *6.17: Influence du paramètre d'interphase m sur les poro-propriétés effectives*

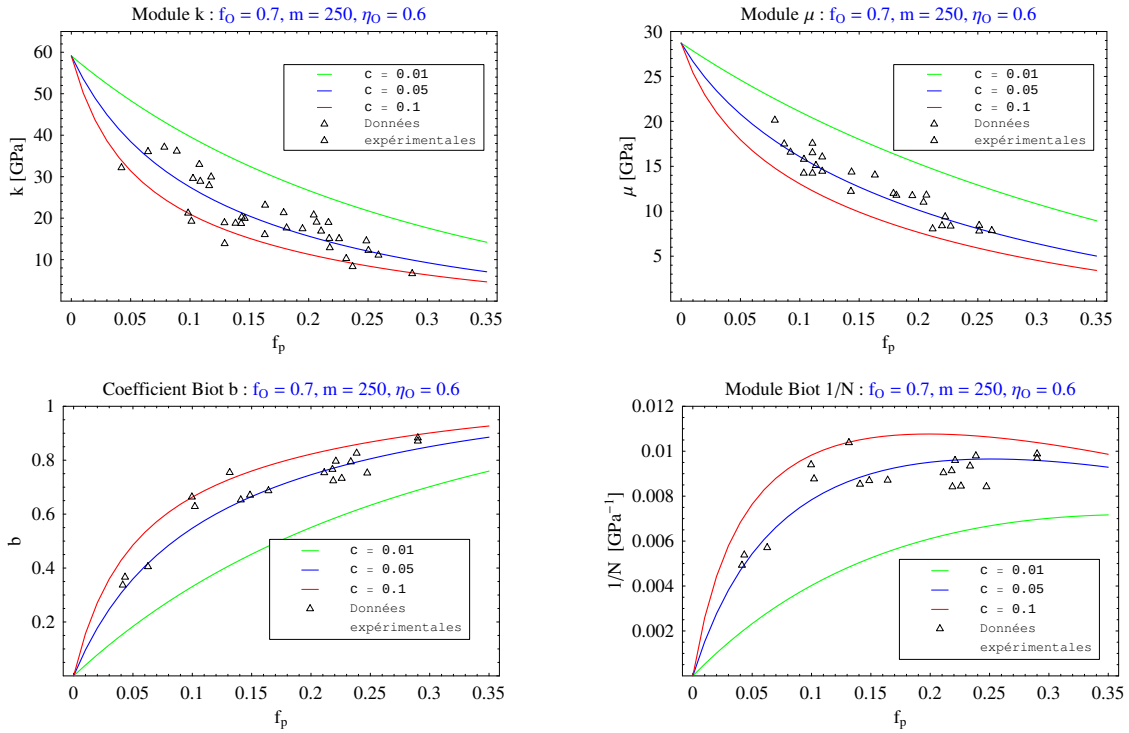


FIGURE *6.18: Influence du paramètre d'interphase c sur les poro-propriétés effectives*

$f_O = 0.7$, $\eta_O = 0.6$, $c = 0.05$ et $m = 250$.

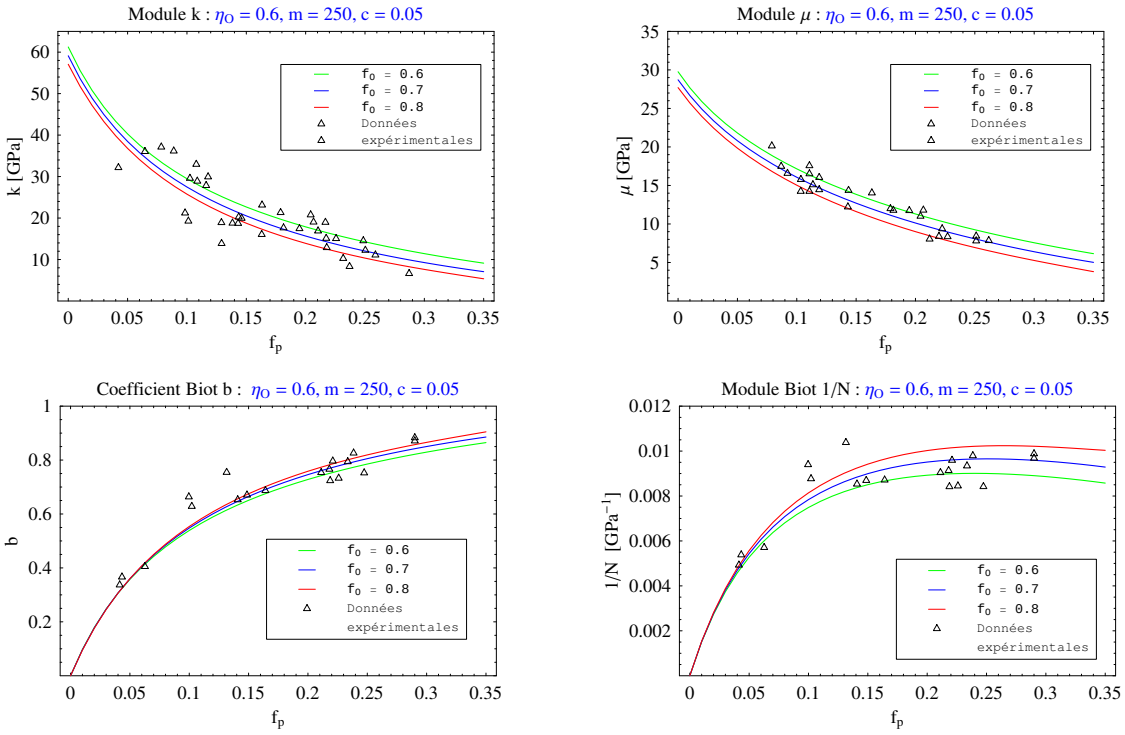


FIGURE *6.19: Influence de la fraction volumique d'oolithe f_O sur les poro-propriétés effectives*

6.3.4 Conclusion

Les roches calcaires oolithiques poreuses étudiées sont décrites comme un matériau composite à trois phases : oolithes sphériques, zone de transition oolithe - matrice et matrice calcitique. La zone de transition d'interface a été supposée comme une interface imparfaite ou une interphase très mince et peu raide. Les modèles dits à trois phases sphères composites à interface imparfaite (SCII) et à quatre phases à interface parfaite (SCIP) sont respectivement appliqués à l'estimation des propriétés poroélastiques linéaires effectives de ces roches poreuses. Dans les deux cas, un modèle d'homogénéisation à deux étapes est développé et comparé aux résultats expérimentaux macroscopiques. On observe un accord satisfaisant entre modèle et résultats expérimentaux macroscopiques et on soulignera l'importance de la zone de transition oolithe - matrice. Dans la partie suivante, le comportement élasto-plastique de ces roches sera envisagé en utilisant le premier modèle (SCII). On se donnera un comportement élasto-plastique pour la matrice ainsi que pour les interfaces.

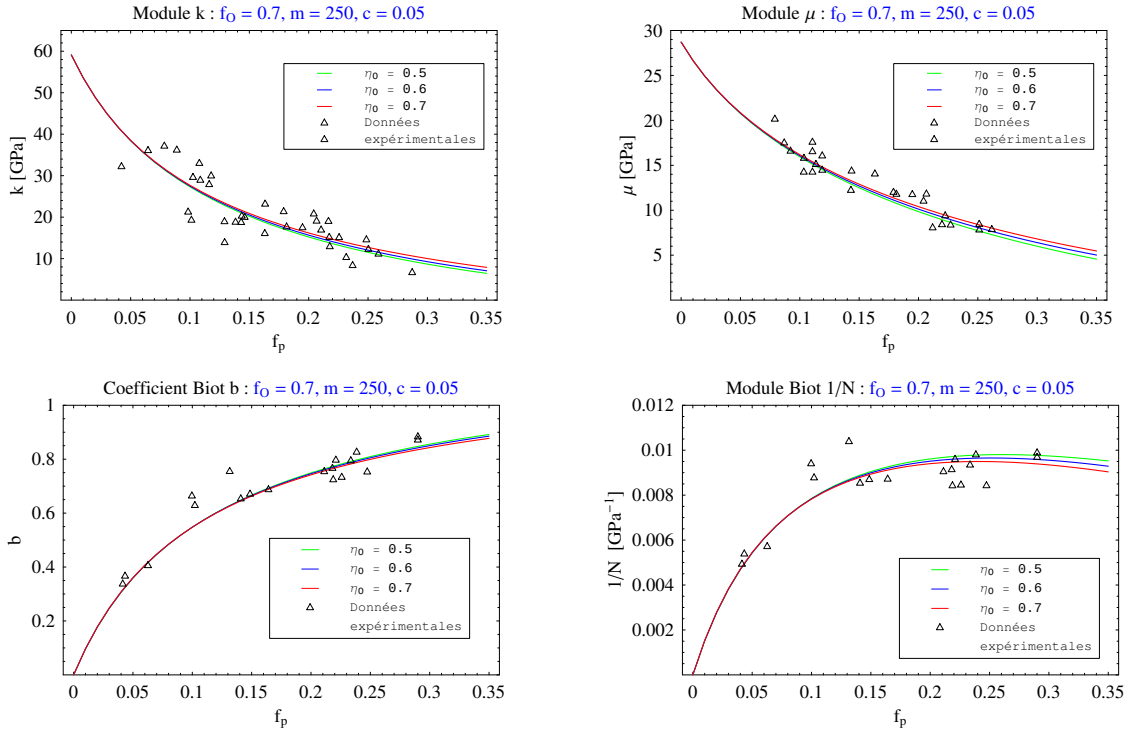


FIGURE *6.20: Influence de la porosité relative d'oolithe p_O sur les poro-propriétés effectives*

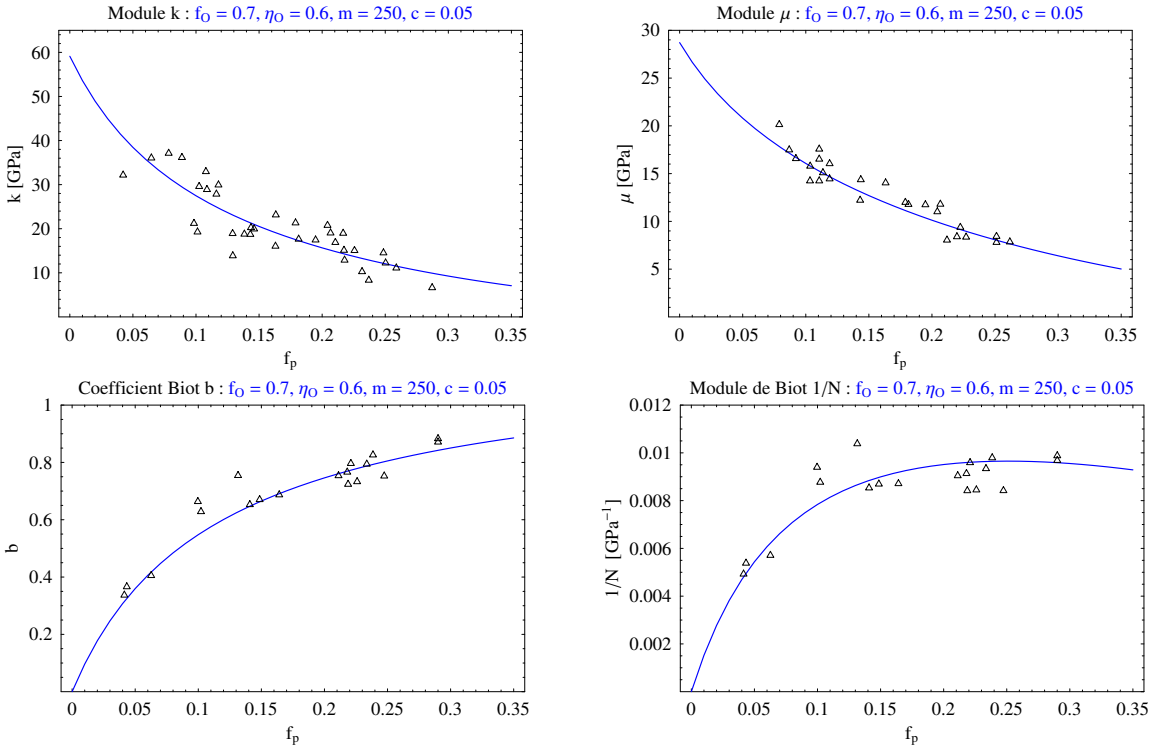


FIGURE *6.21: Propriétés poro-élastiques effectives : paramètres retenus*

6.4 Comportement élasto-plastique

De nombreux essais ont été réalisés au sein du laboratoire LaEGO - ENSG - INPL Nancy pour caractériser le comportement mécanique à l'échelle macroscopique des matériaux étudiés (calcaires oolithiques de Lavoux [42] et d'Euville [34]). Notre intérêt se porte maintenant sur les essais de compression triaxiale déviatorique qui montrent que le comportement de ces matériaux est irréversible, non-linéaire et intégrant de la plasticité. D'après les résultats des essais triaxiaux déviatoriques avec confinement, on note une tendance à la dilatance à proximité du pic pour les faibles confinements. Inversement, un comportement contractant est d'autant plus marqué que la pression de confinement est élevée. Dans le cadre de cette thèse, l'objectif est d'appliquer la méthode d'homogénéisation non-linéaire au modèle proposé dans la partie précédente sur les matériaux étudiés. La méthode incrémentale basée sur une étude bibliographique et résumée dans le chapitre 4 est utilisée pour étudier le comportement élasto-plastique de la matrice, et le modèle d'interface non-linéaire développé dans le chapitre 5 est appliqué pour étudier le comportement non-linéaire macroscopique des matériaux étudiés.

6.4.1 Comportement local des phases

On rappelle d'abord la microstructure des matériaux étudiés (calcaires oolithique de Lavoux [42] et d'Euville [34]). Ces roches sont constituées par un assemblage de grains d'oolithes, à forte fraction volumique, cimentés par une matrice. On note également que les oolithes sont composées de fins grains de micrite avec des micro-pores tandis que des grains de sparite de grande taille et à marco-pores sont observés dans la matrice. Dans cette dernière, les grains ont donc tendance à glisser - déplacer les uns les autres en présence des marcroporosités, cela introduira une diminution du module de cisaillement de matériau lors de chargement déviatorique. La différence de microstructure des deux constituants (oolithe - matrice) nous permet donc de considérer un comportement élastique linéaire pour les oolithes mais un comportement élasto-plastique en condition de chargement pour la matrice. La présence d'un comportement dilatant dans les essais triaxiaux à faible confinement rappelle un comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope qui a été proposé dans la thèse de A.Guéry [45] et bien appliqué pour ce type de comportement. Dans la partie précédente, la roche est homogénéisée en poro-élasticité linéaire en considérant une interface imparfaite entre les oolithes et la matrice. Un modèle d'interface non linéaire a été développé dans le chapitre 5. Dans le travail présenté ici, on propose d'abord un comportement élastique linéaire pour l'interface. Le cas à interface non linéaire est ensuite étudié pour obtenir de meilleurs corrélations avec les résultats expérimentaux.

6.4.2 Implémentation

On s'intéresse dans cette partie au schéma d'intégration du modèle micromécanique décrit dans la partie 6.3.2 avec les comportements de phase et d'interface exposés dans les chapitres 4 et 5. On rappelle que le matériau est constitué d'oolithes et de matrice avec une interface imparfaite entre les deux phases. Dans la partie 6.3.2, le modèle à trois phases de sphères composites à interface imparfaite (SCII) a été utilisé. En se basant sur le problème d'inclusion équivalente (annexe B), dans ce pragraphe le matériau est homogénéisé par le modèle à trois phases de sphères composites à interface parfaite (SCIP) en remplaçant l'oolithe ("O") à interface imparfaite par une inclusion équivalente ("$O-eq$"). Cela permet de simplifier le processus calculatoire notamment le calcul de contrainte ou de déformation locale de la matrice à l'aide du tenseur de localisation de la phase pour le problème SCIP (annexe A).

Le problème est soumis au pas $(n+1)$ à une contrainte macroscopique uniforme $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\Sigma}$ où l'état de contrainte au pas (n) est connu et l'incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ est donné. On adopte le schéma de résolution suivant :

– Initialisation : Données d'entrée : $\boldsymbol{\Sigma}_n$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$

Matrice élasto-plastique : $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{m,n}$, γ^p_n

Interface non linéaire : paramètres initiaux p_0, q_0

– Déterminer les coefficients de saut de déplacement Δn, Δt et les taux de saut de déplacement τ_n et τ_t à partir de $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ par la relation (5.10) (voir aussi l'annexe B). Calculer ensuite les nouveaux paramètres d'interface $p(\tau_n, \tau_t)$, $q(\tau_n, \tau_t)$ à l'aide de (5.2). On obtient le tenseur de rigidité de l'inclusion équivalente (oolithe + interface imparfaite) au pas $(n+1)$

$$\mathbb{C}^{\text{iso}}_{O-eq} = 3\,k_{O-eq}\,\mathbb{J} + 2\,\mu_{O-eq}\,\mathbb{K} \tag{6.13}$$

Les modules d'élasticité de l'inclusion équivalente k_{O-eq} et μ_{O-eq} sont déterminés par les équations (B.22) et (B.26) dans l'annexe B.

– Itération (j) (indice j omis pour la simplicité) :

1. Évaluer la déformation moyenne $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ de la matrice :

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O-eq} &= \Delta\boldsymbol{\Sigma} \\
\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m &= \frac{\Delta\boldsymbol{\Sigma} - f_O\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_i}{1-f_O} \\
\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m &= (\mathbb{C}^{tan}_m)^{-1} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_m
\end{aligned} \tag{6.14}$$

2. Déterminer $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n+1}, \gamma^p_{n+1}$, le module tangent $\mathbb{C}^{tan}_m$ et les modules d'élasticité isotropisés k_m, μ_m (méthodes d'isotropisation de Bornert [12]) de la matrice à partir des $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{m,n}, \gamma^p_n$ et $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ (voir l'annexe (C)).

3. Calculer les modules d'élasticité effectifs homogénéisés k_{hom}, μ_{hom} par les équations (A.1) et (A.2) dans l'annexe A et le module macroscopique isotrope $\mathbb{C}^{\text{iso}}_{hom}$

$$\mathbb{C}^{\text{iso}}_{hom} = 3\,k_{hom}\,\mathbb{J} + 2\,\mu_{hom}\,\mathbb{K} \tag{6.15}$$

4. Déterminer les tenseurs de localisation des inclusions équivalentes $\mathbb{A}_{O-eq}$ à partir des k_{O-eq}, μ_{O-eq}, k_m, μ_m et k_{hom}, μ_{hom} (voir l'annexe A) et le tenseur $\mathbb{B}_{O-eq}$:

$$\mathbb{B}_{O-eq} = \mathbb{C}_{O-eq} : [\mathbb{A}_{O-eq} : (\mathbb{C}^{\text{iso}}_{hom})^{-1}] \tag{6.16}$$

5. Vérifier la compatibilité de la contrainte moyenne des inclusions équivalentes en calculant les résidus :

$$R_{O-eq} = \mathbb{B}_{O-eq} : \Delta\boldsymbol{\Sigma} - \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O-eq} \tag{6.17}$$

6. Si $R_{O-eq} \leq Tol$, sortir de la boucle.
Si non, nouvelle itération (passer à l'étape 1) avec le nouveau $\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O-eq} = \mathbb{B}_{O-eq} : \Delta\boldsymbol{\Sigma}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{n+1} &= \boldsymbol{E}_n + \Delta\boldsymbol{E} \\ \Delta\boldsymbol{E} &= f_O\,(\mathbb{C}_{O-eq})^{-1} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O-eq} + (1 - f_O)\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_m \end{aligned} \tag{6.18}$$

6.4.3 Calibration expérimentale

Les paramètres élastiques de l'oolithe et de la matrice ont été déterminés dans la partie 6.2. Les paramètres d'interface α et β sont recalculés pour les cas isolés des calcaires de Lavoux [42] et d'Euville [34] en comparant numériquement les résultats du modèle avec les résultats de l'essai uniaxial (tableaux 6.2 et 6.4). Les autres paramètres nécessaires pour la description du comportement plastique ont été déterminés par calibration sur les essais triaxiaux effectuées au LaEGO. Les valeurs retenues à la fin de la procédure de calibration sont résummées dans les tableaux 6.3 et 6.5.

TAB. *6.2: Calibration numérique de l'essai uniaxial du calcaire de Lavoux*

Numéro de l'échantillon	f_p (%)	$E_{lateral}$ (Gpa)	ν
Lx 1 [42]	26.5	24	0.3
Lx 2 [42]	23.8	28.7	0.27
Lx 37 [42]	25.2	25.6	0.22
Valeur moyenne	25.1	26.1	0.26
Modèle	25	26.8	0.25

TAB. *6.3: Paramètres du modèle du calcaire de Lavoux*

	Oolithe	Matrice	Interface
Paramètres élastiques	$k_O = 29.3$ GPa $\mu_O = 16.1$ GPa	$k_m = 28.5$ GPa $\mu_m = 16.6$ GPa	$\alpha = \beta/3.4$ $\beta = 2.6$
plastiques		$\alpha_0^p = 0.05$ $\alpha_m^p = 0.47$ $b = 1800$ β_0^p = -0.05 $\beta_0^p = 1.2$ $b' = 1700$ $C_p = 80$	$\Delta n0$ =0.00062 $\Delta t0$ =0.00062 β_p^0= 8 β_q^0= 6 β_p^m= -1.2 β_q^m= -0.1 $\gamma_p = 40$ $\gamma_q = 15$

TAB. *6.4: Calibration numérique de l'essai uniaxial du calcaire d'Euville*

Numéro de l'échantillon	f_p (%)	$E_{lateral}$ (Gpa)	ν
Eu 5 [34]	22.2	14.9	0.26
Modèle	22.2	15.5	0.24

TAB. *6.5: Paramètres du modèle du calcaire d'Euville*

	Oolithe	Matrice	Interface
Paramètres	$k_O = 31.6$ GPa	$k_m = 32.5$ GPa	$\alpha = \beta/4$
élastiques	$\mu_O = 17.1$ GPa	$\mu_m = 18.6$ GPa	$\beta = 17.5$
plastiques		$\alpha_0^p = 0.05$	$\Delta n0$ =0.0009
		$\alpha_m^p = 0.47$	$\Delta t0$ =0.0009
		$b = 1800$	β_p^0= 4
		β_0^p = -0.05	β_q^0= 3
		$\beta_0^p = 1.2$	β_p^m= -1.5
		$b' = 1700$	β_q^m= -0.5
		$C_p = 65$	$\gamma_p = 10$
			$\gamma_q = 2.9$

6.4.3.1 Comportement linéaire de l'interface

On présente d'abord le cas dans lequel l'interface suit un comportement élastique linéaire. Dans ce cas, les paramètres plastiques d'interface donnés dans les tableaux 6.3 et 6.5 ne sont pas utilisés. Seule la matrice présente donc un comportement élasto-plastique. Les figures ci-dessous illustrent les relations contrainte - déformation respectivement pour l'essai uniaxial et pour les essais triaxiaux sous différents confinements. Les simulations du modèle sont comparées avec les données expérimentales. Avec les paramètres retenus des tableaux 6.3 et 6.5, on constate généralement que le modèle donne un comportement dilatant macroscopique pour tous les essais.
Les figures 6.22 et 6.23 présentent les comparaisons entre la simulation et les expériences du calcaire de Lavoux [42]. On constate dans la figure 6.22 un bon accord général entre les prédictions du modèle et les essais de laboratoire pour l'essai uniaxial et pour les essais triaxiaux déviatoriques avec des faibles confinements ($P_c = 2$, 4 et 8 MPa). Dans le cas de pressions de confinement élevées ($P_c = 16$ et 24 MPa) le matériau présente un comportement contractant macroscopique qui n'est pas retrouvé par le calcul (figure 6.23).

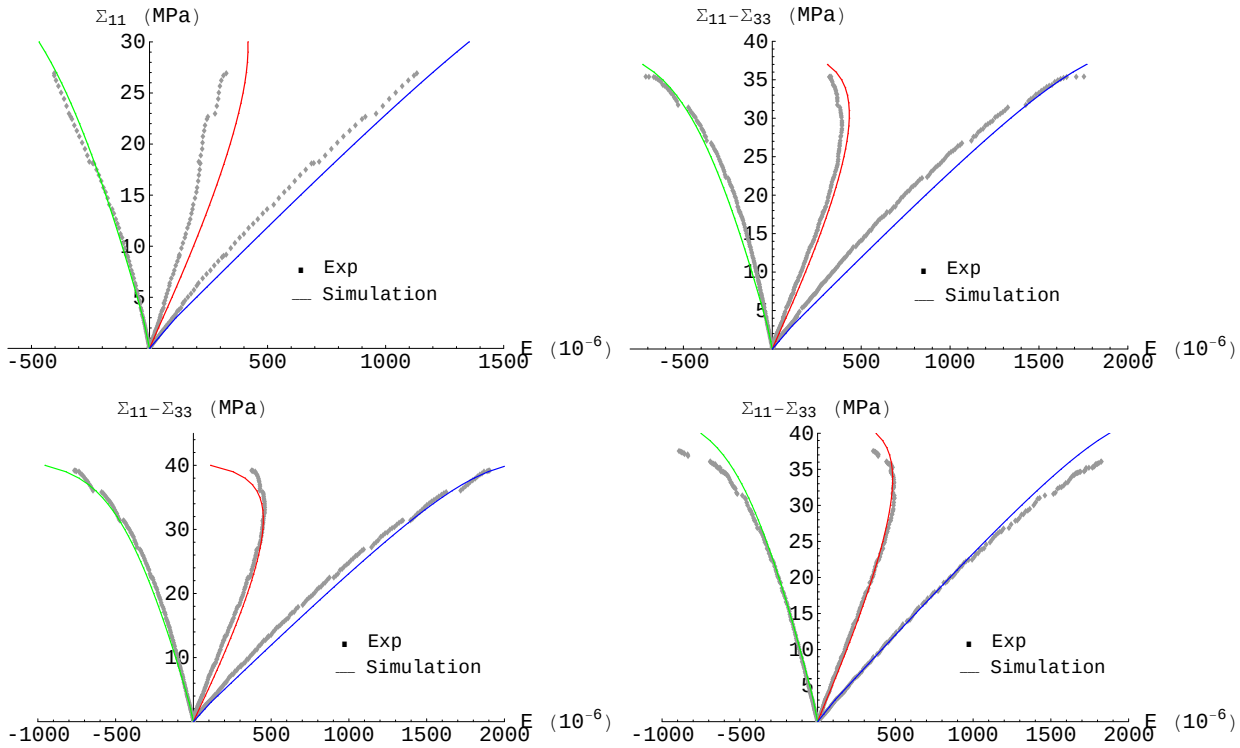


FIGURE *6.22: Calcaire de Lavoux à interface linéaire :*
Essais de compression uniaxiale et triaxiale sous faibles confinements respectifs
2, 4, 8 MPa

Le cas du calcaire d'Euville est présenté dans la figure 6.24. Les essais triaxiaux sont effectués avec trois confinements différents dans le travail de J.Eslami [34]. On constate pour l'essai uniaxial

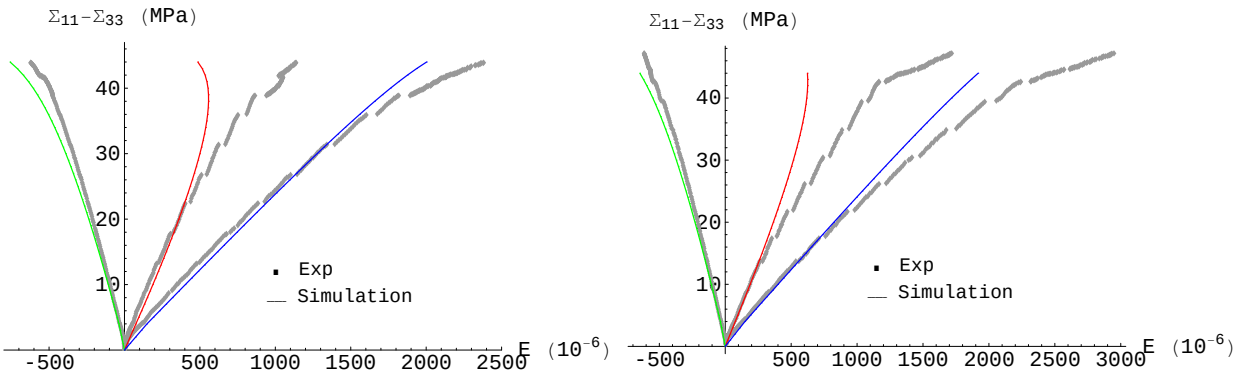


FIGURE *6.23: Calcaire de Lavoux à interface linéaire :*
Essais de compression triaxiale sous forts confinements respectifs 16, 24 MPa

qu'une seule courbe contrainte - déformation (latérale) concorde avec l'expérience. En revanche, les simulations des essais triaxiaux sous pressions de confinement respectives de 1 MPa et de 4 MPa donnent des bon accords avec les essais de laboratoire. Dans le cas d'une pression de confinement plus élevée (6 MPa), le modèle suit la tendance de l'expérience mais une différence marquée apparaît au pic de la courbe contrainte - déformation.

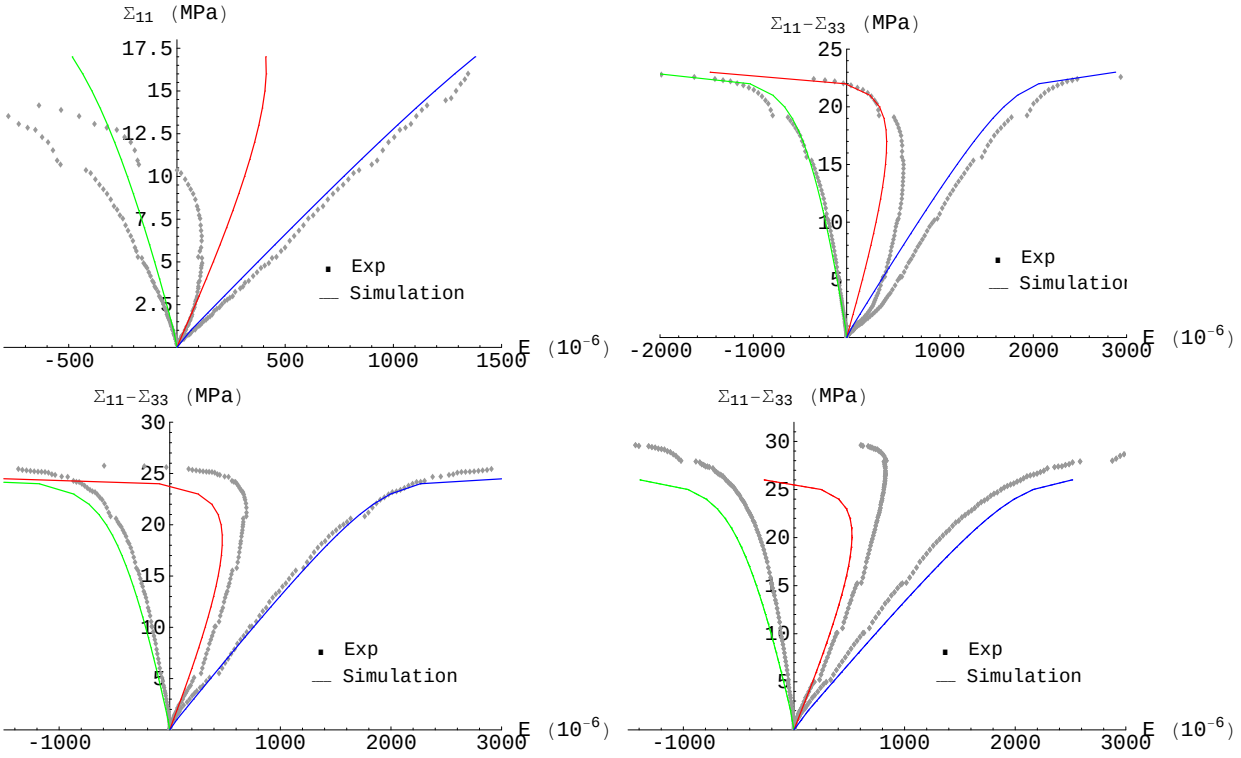


FIGURE *6.24: Calcaire d'Euville à interface linéaire :*
Essais de compression uniaxiale et triaxiale sous confinements respectifs 1, 4, 6 MPa

6.4.3.2 Comportement non linéaire de l'interface

On présente dans ce paragraphe les prédictions du modèle pour les calcaires de Lavoux et d'Euville dans le cas où l'interface obéit à un comportement non linéaire. Les paramètres retenus sont donnés dans les tableaux 6.3 et 6.5.

Dans le cas du calcaire de Lavoux, la figure 6.25 illustre le comportement prédit par le modèle pour des essais hydrostatique et déviatorique. On constate un comportement isotrope non linéaire du matériau pour une compression hydrostatique. La figure 6.26 présente les évolutions des paramètres élastiques macroscopiques du matériau en fonction de la pression de confinement. Les prédictions du modèle sont comparées avec les résultats expérimentaux obtenus par D.Dgric au LaEGO [42]. On constate dans le cas à interface non linéaire que le module d'Young effectif est croissant en fonction du confinement tandis que il reste constant dans le cas à interface élastique linéaire. On observe également que le coefficient de Poisson est quasi constant dans les deux cas. En comparant avec les résultats expérimentaux, un bon accord entre le modèle et l'expérience est observé.

On présente dans les figures ci-après les comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux dans les cas de l'essai uniaxial et des essais triaxiaux déviatoriques sous différents confinements. Les résultats sont également comparés avec ceux obtenus dans le cas à interface élastique linéraire (courbe tiretée). On constate que la différence entre les deux modèles d'interface n'est pas significative dans les cas des compressions uniaxiale et triaxiale aux faibles confinements (figure 6.27). Les simulations du modèle dans les deux cas de comportement de l'interface approchent bien les expériences. Les figures 6.28 et 6.29 présentent les relations contrainte - déformation macroscopiques du matériau sous une compression triaxiale à fort confinement ($P_c = 16$ et 24 MPa). On constate une différence significative entre les résutats des deux modèles d'interface différents. Dans le cas à interface non linéaire, le modèle présente un comportement contractant macroscopique et donne une tendance correcte (figures 6.28 et 6.29).

En appliquant le comportement non linéaire de l'interface au calcaire d'Euville, la figure 6.30 montre les comparaisons entre les résultats numériques et expérimentaux pour les essais uniaxial et triaxial sous confinements respectifs 1, 4 et 6 MPa. Les courbes tiretées illustrent les relations contrainte - déformation dans le cas à interface linéaire. En comparant les résultats des deux modèles d'interface différents, on constate que la différence est marquée dans les essais de compression triaxiale aux confinementx plus importantx ($P_c = 4$, 6 MPa). Dans ce cas, le modèle proposé pour le calcaire d'Euville avec un comportement non linéaire de l'interface nous donne des bons résultats en prenant les paramètres présentés dans le tableau 6.5.

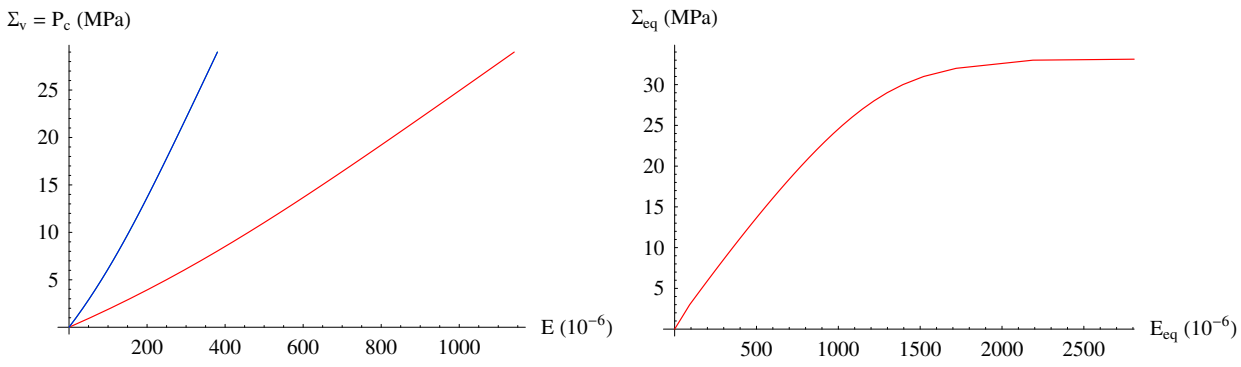


FIGURE *6.25: Calcaire de Lavoux : compressions hydrostatique et déviatorique*

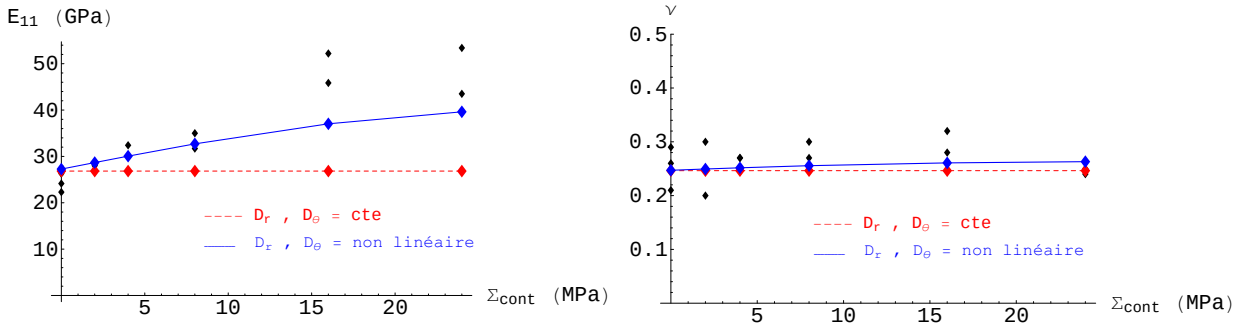


FIGURE *6.26: Calcaire de Lavoux : évolution des paramètres élastiques en fonction du confinement P_c*

6.4.4 Conclusion

Dans cette partie, le comportement élasto-plastique des calcaires oolithiques de Lavoux et d'Euville a été homogénéisé en appliquant un modèle à trois phases de sphères composites à interface imparfaite. Le comportement des oolithes est élastique linéaire et la matrice présente un comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope qui dércit bien un comportement dilatant des matériaux. Le modèle non linéaire de l'interface développé dans le chapitre 5 a été aussi appliqué. Les résultats homogénéisés sont comparés avec les mesures expérimentales et donnent des bonnes corrélations.

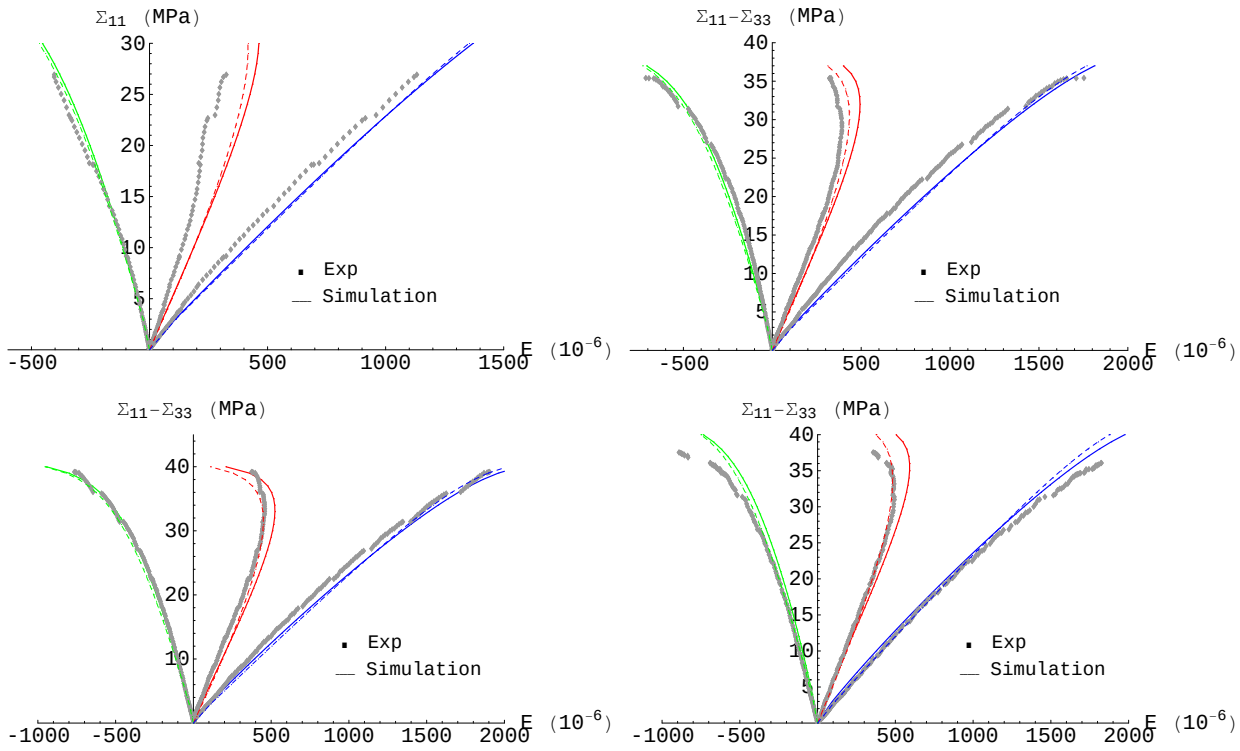


FIGURE 6.27: *Calcaire de Lavoux à interface non linéaire :*
Essais de compression uniaxiale et triaxiale sous faibles confinements respectifs
2, 4, 8 MPa

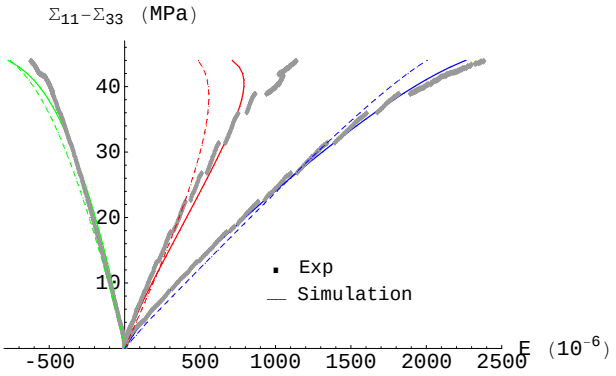


FIGURE 6.28: *Calcaire de Lavoux à interface non linéaire :*
Essai de compression triaxiale sous fort confinement 16 MPa

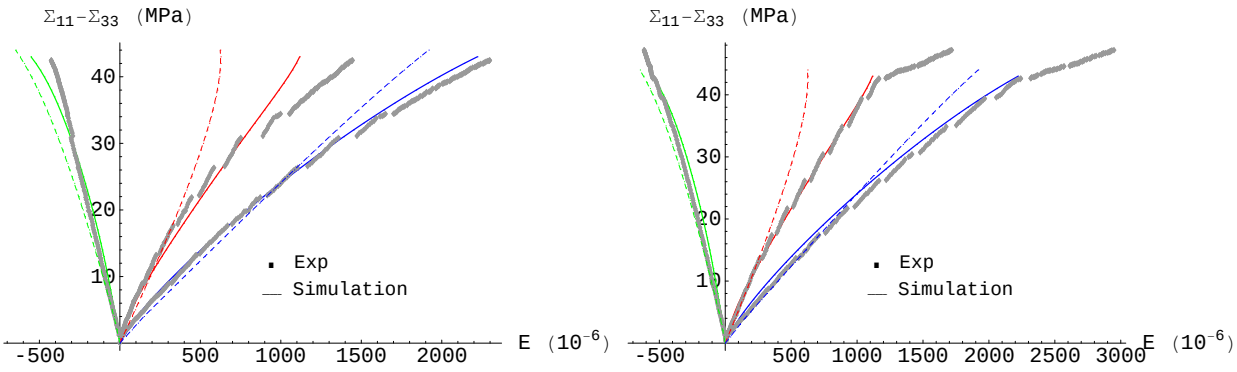


FIGURE 6.29: *Calcaire de Lavoux à interface non linéaire : Essais de compression triaxiale sous fort confinement 24 MPa*

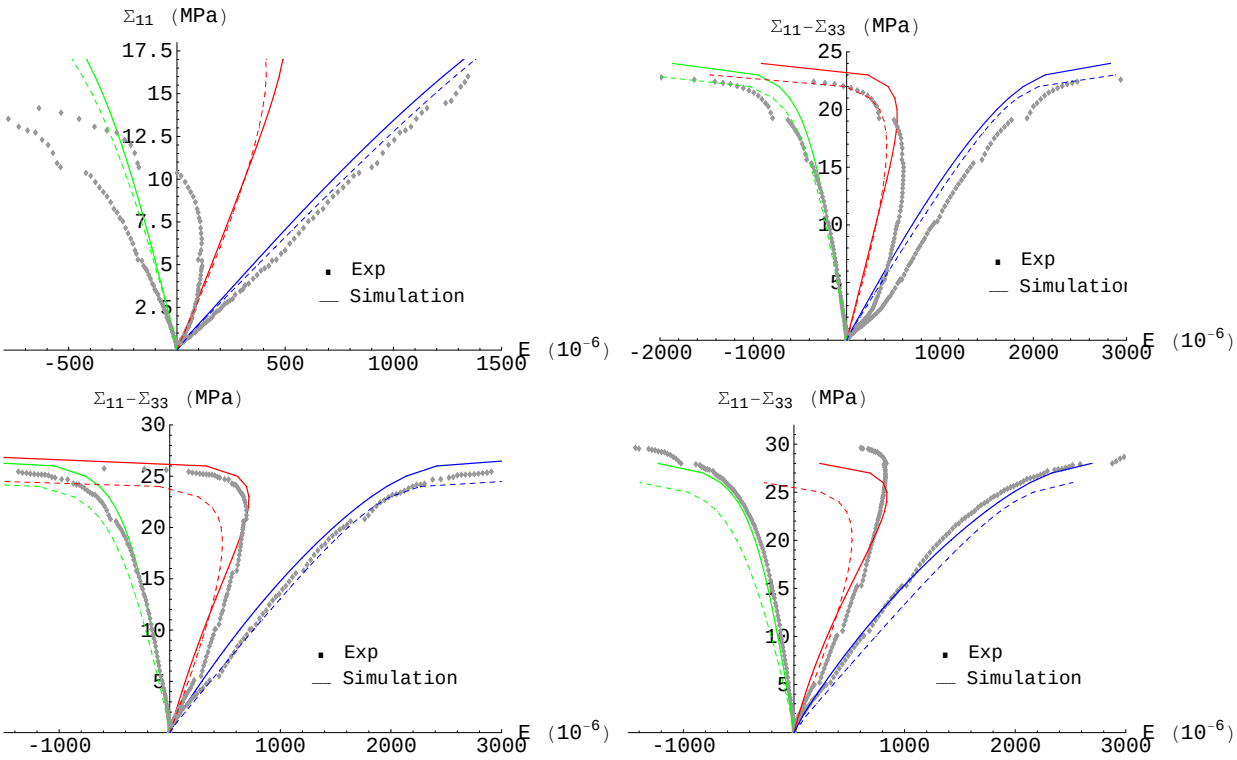


FIGURE 6.30: *Calcaire d'Euville à interface non linéaire : Essais de compression uniaxiale et triaxiale sous confinements respectifs 1, 4, 6 MPa*

6.5 Application au cas particulier du calcaire de Lavoux

6.5.1 Microstructure et modèle d'homogénéisation

6.5.1.1 Microstructure du calcaire de Lavoux

Le travail actuel dans cette partie envisage le cas particulier du calcaire de Lavoux. Il s'agit d'un calcaire oolithique monominéral ($> 98\%$ de calcite) à double porosité. La figure 6.31 à gauche présente une vue globale de la microstructure du calcaire de Lavoux. On constate que la roche est composée d'éléments quasi-sphériques (oolithes) avec une taille variant entre 100 et 1000 μm. L'étude dans le travail de Pironon et al [85] sur un calcaire de Lavoux du Bassin de Paris daté du Dogger a montré que c'est un calcaire à macroporosité inter-oolithique importante et à forte microporosité intra-oolithique avec des rayons d'accès aux pores à répartition bimodale centrée sur $0,1$ et $10\,\mu m$. Une vue à plus fort grossissement de la microstructure observée au MEB (Microscope Electronique à Balayage) est présentée dans la figure 6.31 à droite. On observe clairement qu'en outre des oolithes, les présences de grains de sparite et de pores inter-granulaires sont bien marquées dans la roche. L'observation sur trois lames minces différentes du calcaire de Lavoux par C.Auvray [3] (300 points d'observation par lame mince) a montré que les oolithes occupent $74\,\%$ et que la porosité inter-granulaire représente $12\,\%$ de la roche. La figure 6.32 présente la microstructure de l'oolithe à plus fort grossissement. On constate que les oolithes sont constituées de plusieurs couches concentriques dont l'extérieur est très poreux. Les oolithes sont composées de micrite et de microporosité. La distribution des pores dans le calcaire de Lavoux a été étudiée dans le travail de D.Drgic [42] et est présentée dans la figure 6.33. On constate que la microporosité avec des rayons variant de 0.01 à $2\,\mu m$ est plus importante (environ 60% de la porosité totale) tandis que la porosité inter-oolithique est plus grande avec des rayons variant de 2 à $80\,\mu m$.

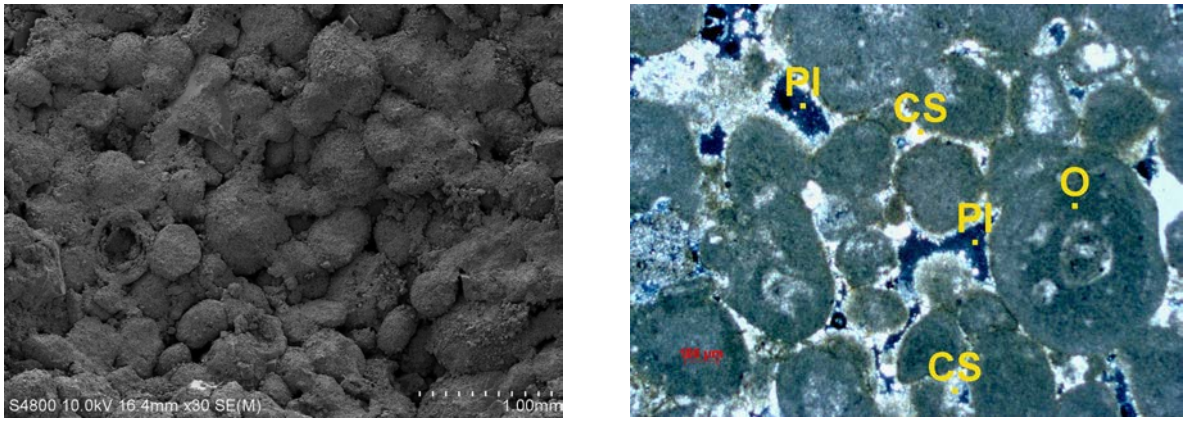


FIGURE *6.31: Vue globale de la microstructure du calcaire de Lavoux [3, 42] (O - oolithes (74%), SC - ciment sparitique (14%), PI - porosité intergranulaire (12%))*

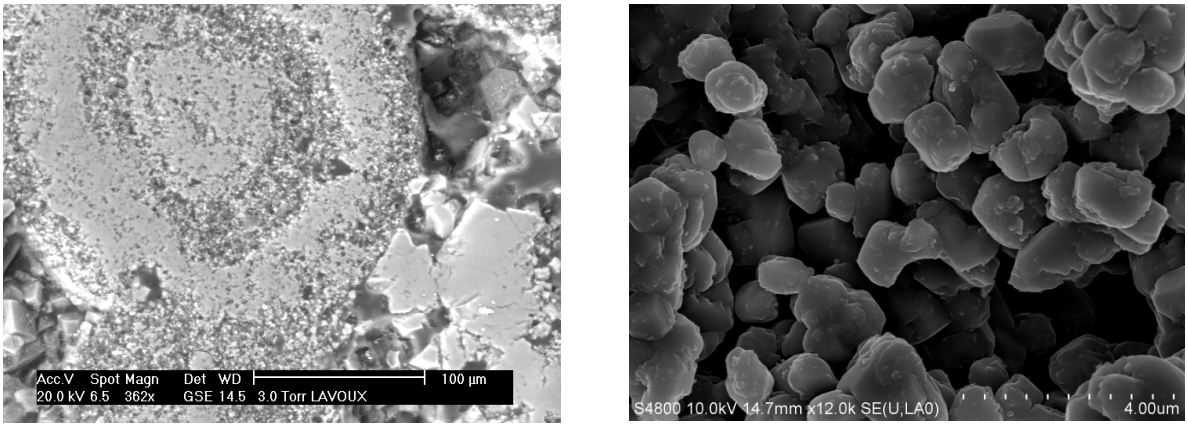


FIGURE 6.32: *Microstructure de l'oolithe du calcaire de Lavoux [3, 42]*

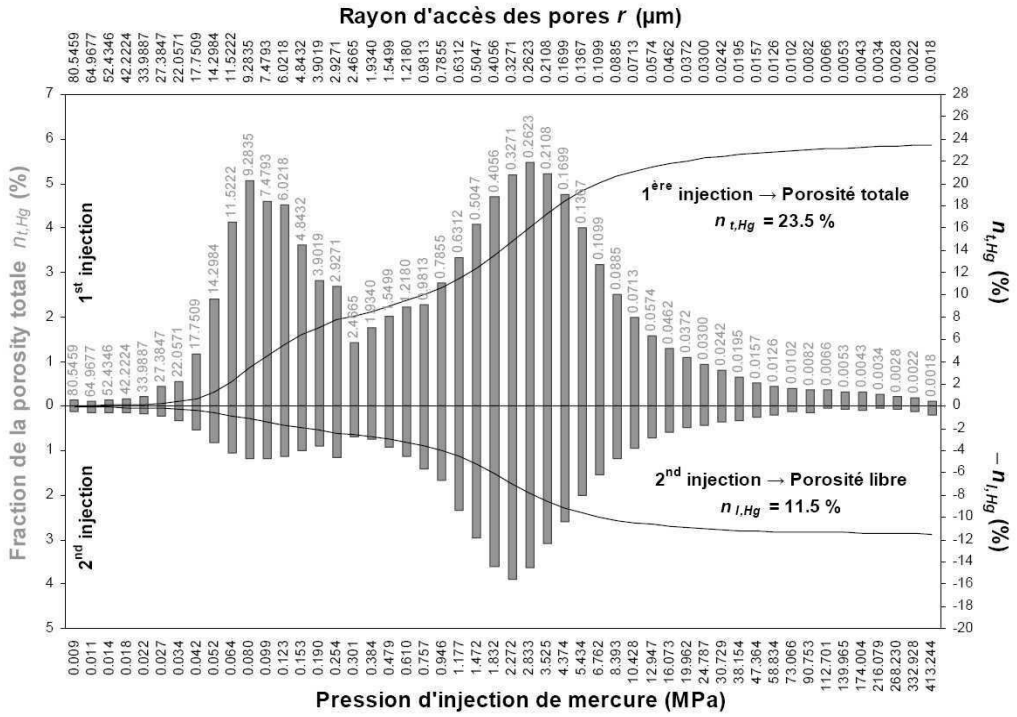


FIGURE 6.33: *Distribution de la porosité du calcaire de Lavoux [42]*

6.5.1.2 Modèle et méthode d'homogénéisation

A partir de la microstructure du calcaire de Lavoux, on peut conclure que la roche est constituée d'oolithes sphériques, de grains de sparite et de pores inter-granulaires. Les oolithes sont des milieux poreux biphasiques composées de micrites et de micro-pores. Une zone très poreuse autour de l'oolithe est marquée. On propose ci-dessous pour le calcaire de Lavoux un modèle géométrique d'homogénéisation (figure 6.34) :

- (1) oolithe : micrite + micro-pores
- (2) interphase ou zone très poreuse
- (3) grains de sparite
- (4) macro-pores

La méthode d'homogénéisation en deux étapes est utilisée. Dans la première étape, tout d'abord l'oolithe (1) puis l'assemblage de l'oolithe et de l'interphase l'entourant $(1+2)$ sont homogénéisés. Dans la seconde, la roche est homogénéisée comme un matériau granulaire des assemblages oolithe - interphase $(1 + 2)$, des grains de sparite (3) et des macro-pores (4). La forme sphérique est considérée pour tous les constituants de la roche.

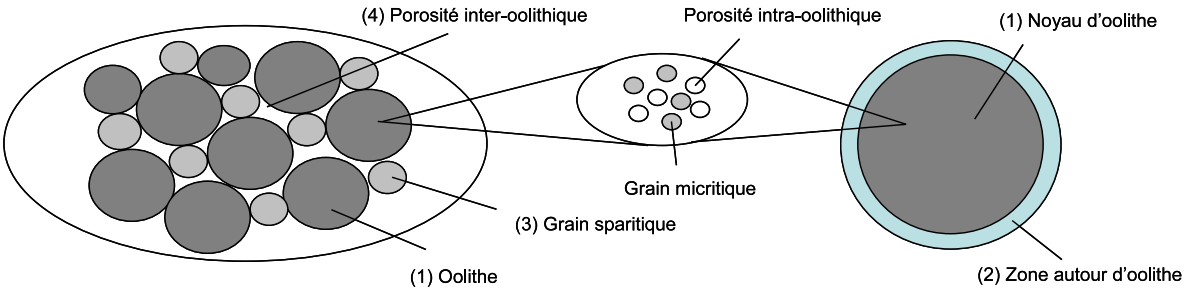


FIGURE *6.34: Modèle et méthode d'homogénéisation en deux étapes du calcaire de Lavoux*

En considérant une structure de calcaire occupant le domaine géométrique Ω dont les volumes des oolithes, des grains de sparite, des micro-pores et des macro-pores sont respectivement Ω_O, Ω_g, Ω_p^{mic} et Ω_p^{mac}. On pose η_O la porosité relative de l'oolithe :

$$\begin{aligned} \Omega_p &= \Omega_p^{mic} + \Omega_p^{mac} \\ \Omega_p^{mic} &= \eta_O \, \Omega_p \\ \Omega_p^{mac} &= (1 - \eta_{mic}) \, \Omega_p \\ f_p &= \frac{\Omega_p}{\Omega} \end{aligned} \tag{6.19}$$

La porosité relatives de l'oolithe f_p^O est déterminée par (6.20). Pour valider le modèle proposé, il faut toujours satisfaire la condition à la limite (6.21).

$$f_p^O = \frac{\Omega_p^{mic}}{\Omega_O} = \frac{\Omega_p^{mic}}{\Omega}\frac{\Omega}{\Omega_O} = \frac{\eta_O\, f_p}{f_O} \tag{6.20}$$

$$f_p^O = \frac{\eta_O\, f_p}{f_O} < 1 \tag{6.21}$$

Les propriétés du solide des constituants (oolithe et grain de sparite) sont corrigées à partir de la calcite pure par les coefficients dégradés χ_O et χ_g :

$$\begin{aligned} &k_O^S = \chi_O\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_O^S = \chi_O\, \mu_{calcite} \\ &k_g = \chi_g\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_g = \chi_g\, \mu_{calcite} \\ &k_{calcite} = 76GPa \quad , \quad \mu_{calcite} = 36.8GPa \end{aligned} \tag{6.22}$$

L'assemblage oolithe - interphase alentour Ω_{O+I} est vu comme un assemblage de sphères composites. L'interphase ou la zone dégradée autour de l'oolithe est vue comme une couche Ω_{int} très mince et de très faibles propriétés élastiques :

$$\begin{aligned} &\Omega_{O+I} = \Omega_O + \Omega_{int} \\ &\Omega_{int} = c\,\Omega_p \;\; avec \;\; c << 1 \\ &f_{int} = \frac{\Omega_{int}}{\Omega} = \frac{c\,\Omega_p}{\Omega} = c\, f_p \\ &f_O = f_{O+I} - f_{int} \end{aligned} \tag{6.23}$$

où c est la fraction volumique relative d'interphase, et dépend de la porosité de la roche. Les fractions volumiques des constituants de cet assemblage s'écrivent donc :

$$f_{int} = c\, f_p \quad , \quad f_{int}^{O+I} = \frac{f_{int}}{f_{O+I}} \quad , \quad f_O^{O+I} = \frac{f_O}{f_{O+I}} \tag{6.24}$$

En posant χ_{int} le coefficient de dégradation de la zone extérieure de l'oolithe, les très faibles propriétés élastiques de l'interphase sont écrites à partir de celles de l'oolithe :

$$k_{int} = \chi_{int}\, k_{Oolithe} \quad , \quad \mu_{int} = \chi_{int}\, \mu_{Oolithe} \tag{6.25}$$

La procédure d'homogénéisation du calcaire de Lavoux est réalisée à l'aide de la méthode d'homogénéisation en deux étapes. La première permet de déterminer les propriétés poro-élastiques tout d'abord de l'oolithe (1) puis de l'assemblage oolithe - interphase $(1+2)$. Le schéma autocohérent itératif (nombre d'itérations $N = 100$) est utilisé pour l'oolithe qui est un milieu polycristallin à forte porosité (voir les relations 6.6, 6.7 et 6.8). L'assemblage oolithe - interphase est homogénéisé en utilisant le modèle de sphères composites à trois phases à interface parfaite (annexe A). A la fin de cette étape, on obtient les propriétés poro-élastiques linéaire isotropes de l'assemblage oolithe - interphase k^I_{O+I}, μ^I_{O+I}, b^I_{O+I}, N^I_{O+I}.
Dans la deuxième étape, la roche est homogénéisée comme un matériau granulaire à trois phases (assemblage oolithe - interphase, grains de sparite et macro-pores) dont l'assemblage oolithe - interphase est une phase poreuse. Pour homogénéiser ce matériau en poro-élasticité, on utilise la méthode d'homogénéisation à double porosité présentée dans le chapitre 1. Le tenseur d'élasticité macroscopique est déterminé par l'équation (1.36), le tenseur et le module de Biot du solide s'obtiennent par (1.79) et (1.80) dans le chapitre 1.

6.5.2 Comportement poro-élastique du calcaire de Lavoux

Dans cette partie, le comportement poro-élastique linéaire du calcaire de Lavoux est homogénéisé. Le but est ici de déterminer les paramètres inconnus de la roche. Les études de la microstructure et de la porosité de la roche présentées dans la partie 6.5.1.1 donnent la fraction volumique d'oolithes $f_O = 0.74$ [3] et la porosité relative de l'oolithe $\eta_O = 0.6$ [42]. Dans les paragraphes ci-dessous, les autres paramètres inconnus sont déterminés respectivement.

6.5.2.1 Détermination de χ_O, χ_g

Les deux coefficients inconnus χ_O, χ_g sont déterminés à l'aide des essais d'indentation réalisés au LaEGO par C.Auvray [3] (tableau 6.6) et des résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique par D.Grgic [42] (tableau 6.7).

TAB. *6.6: Essai d'indentation [3]*

Constituants	%	Module d'Young (Gpa)
Oolithes	74 %	25 - 35
Grain de sparite	14 %	75 - 90
Porosité inter-oolithique	12 %	

TAB. *6.7: Calcaire de Lavoux [42]*

Nom de l'échantillon	porosité	Module du solide de la matrice (Gpa)
Lavoux Lx 25	26.4 %	47.1

Le module du solide de la matrice du calcaire de Lavoux est déterminé en utilisant le schéma autocohérent classique à deux phases : phase solide de l'oolithe et grain de sparite. Les propriétés de chaque phase s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
& k_O^S = \chi_O\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_O^S = \chi_O\, \mu_{calcite} \\
& k_g = \chi_g\, k_{calcite} \quad , \quad \mu_g = \chi_g\, \mu_{calcite} \\
& k_{calcite} = 76GPa \quad , \quad \mu_{calcite} = 36.8GPa \\
& f_p^{mic} = \eta_{mic}\, f_p \quad , \quad f_p^{mac} = (1-\eta_{mic})\, f_p \\
& f_p = 0.264 \quad , \quad \eta_{mic} = 0.6 \quad , \quad f_O = 0.74 \\
& f_O^S = f_O - f_p^{mic} \quad , \quad f_g = 1 - f_O - f_p^{mac}
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Avec les coefficients retenus $\chi_O = 0.57$, $\chi_g = 0.88$, les résultats du modèle sont résumés dans le tableau 6.8 en comparant avec les expériences. On obtient un bon accord entre le modèle et les mesures de laboratoire.

TAB. *6.8: Comparaison entre le modèle et l'expérience : coefficients retenus*

$\chi_O = 0.57$, $\chi_g = 0.88$

Constituants	Exp %	Modèle %	Exp $k_S(Gpa)$	Modèle $k_S(Gpa)$	Exp E (Gpa)	Modèle E (Gpa)
Oolithes	74 %	74 %		43.3	25 - 35	33.4
Grain de sparite	14 %	15 %		66.9	75 - 90	83.6
Porosité inter-oolithique	12 %	11 %				
Lavoux Lx 25			47.1	47.2		

6.5.2.2 Détermination des propriétés de l'interphase

Le tableau 6.9 présente les propriétés poro-élastiques homogénéisées à l'échelle macroscopique de la roche étudiée en l'absence d'une interphase faible autour de l'oolithe. On constate que les résultats du modèle sont plus raides que les expériences même dans le cas de l'utilisation du schéma autocohérent classique (AC) pour homogénéiser l'oolithe [(1)]. Cette remarque met en évidence la présence d'une couche d'interphase très mince et de faibles propriétés mécaniques autour de l'oolithe.

TAB. *6.9: Calcaire de Lavoux en l'absence d'une interphase autour de l'oolithe*

	$k_S(Gpa)$	k (Gpa)	μ (Gpa)	b
Lavoux Lx 25	47.1	8.1		0.83
Modèle [(1)]	47.2	19.4	11.4	0.61
Modèle	47.2	21.1	12.1	0.57

Les tableaux 6.10 et 6.11 présentent les influences sensibles des propriétés et de la fraction volumique relative f_{int}^{O+I} de l'interphase sur les propriétés poro-élastiques effectives du calcaire de

Lavoux. Les paramètres choisis $f_{int}^{O+I} = 0.05$ et $\chi_{int} = 0.015$ donnent des résultats bien corrélés aux mesures expérimentales.

TAB. *6.10: Calcaire de Lavoux en présence d'une interphase autour de l'oolithe : influence du coefficient dégradé de l'interphase*

	f_{int}^{O+I}	χ_{int}	$k_S(Gpa)$	k (Gpa)	μ (Gpa)	b
Lavoux Lx 25			47.1	8.1		0.83
Modèle	0.05	0.01	47.2	6.3	4.4	0.87
Modèle	0.05	0.015	47.2	8.2	5.5	0.83
Modèle	0.05	0.02	47.2	9.6	6.3	0.8

TAB. *6.11: Calcaire de Lavoux en présence d'une interphase autour de l'oolithe : influence de la fraction volumique relative de l'interphase* f_{int}^{O+I}

	f_{int}^{O+I}	χ_{int}	$k_S(Gpa)$	k (Gpa)	μ (Gpa)	b
Lavoux Lx 25			47.1	8.1		0.83
Modèle	0.01	0.015	47.2	16	9.6	0.66
Modèle	0.05	0.015	47.2	8.2	5.5	0.83
Modèle	0.10	0.015	47.2	5.1	3.6	0.9

6.5.3 Comportement élasto-plastique du calcaire de Lavoux

Dans la partie 6.4, le comportement élasto-plastique du calcaire de Lavoux a été prédit en utilisant un modèle simplifié et général pour les calcaires oolithiques. Dans ce paragraphe, son comportement élasto-plastique est modélisé par le modèle particulier proposé dans la partie 6.5.1.2.

6.5.3.1 Comportement local des phases

La roche calcaire étudiée est vue comme un assemblage de grains d'oolithes à forte fraction volumique, de grains de sparite et de macro-porosités. Le comportement local des phases présenté dans le tableau 6.6 à partir des essais d'indentation montre des propriétés raides pour les grains sparitiques et les oolithes. L'étude du comportement poro-élastique du calcaire de Lavoux montre également l'existence d'une zone dégradée autour de l'oolithe. Cette zone a été modélisée comme une couche d'interphase de très faibles propriétés mécaniques. Pour modéliser le comportement élasto-plastique du calcaire de Lavoux, on propose donc un comportement élastique linéaire pour les grains de sparite et les oolithes mais l'interphase présente un comportement élasto-plastique. On utilise ici le comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope proposé dans la thèse de A.Guéry [45] pour acquérir le comportement dilatant dans les essais triaxiaux de la roche étudiée.

6.5.3.2 Implémentation

Le problème est soumis au pas $(n+1)$ à une contrainte macroscopique uniforme $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\Sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\Sigma}$ où l'état de contrainte au pas (n) est connu et l'incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$ est donné. On adopte le schéma de résolution suivant :

– Initialisation : Données d'entrée : $\boldsymbol{\Sigma}_n$, $\Delta\boldsymbol{\Sigma}$

Phase élasto-plastique (interphase) : $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int,n}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{int,n}$, γ^p_n

– Itération (j) (indice j omis pour la simplicité) :

1. Évaluer la déformation moyenne $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int}$ de l'interphase :

$$\begin{aligned}
\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_g &= \Delta\boldsymbol{\Sigma} \\
\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O+I} &= \frac{\Delta\boldsymbol{\Sigma} - f_g\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_g}{f_{O+I}} \\
\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{int} &= \mathbb{B}_{int} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O+I} \\
\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int} &= (\mathbb{C}^{tan}_{int})^{-1} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{int}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

2. Déterminer $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int,n+1}, \gamma^p_{n+1}$, le module tangent $\mathbb{C}^{tan}_{int}$ et les modules d'élasticité isotropisés k_{int}, μ_{int} (méthode d'isotropisation de Bornert [12]) de l'interphase à partir des $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int,n}, \gamma^p_n$ et $\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int}$ (voir l'annexe (C)).

3. Calculer les modules d'élasticité effectifs de l'assemblage oolithes - interphase alentour k_{O+I}, μ_{O+I}. Déterminer le tenseur de localisation de l'oolithe $\mathbb{A}_O$ puis la déformation locale de l'oolithe :

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O+I} &= (\mathbb{C}_{O+I})^{-1} : \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_{O+I} \\ \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O} &= \mathbb{A}_O : \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O+I} \end{aligned} \tag{6.28}$$

4. Calculer les modules d'élasticité effectifs homogénéisés k_{hom}, μ_{hom} et le module macroscopique isotrope $\mathbb{C}_{hom}$

$$\mathbb{C}_{hom} = 3\,k_{hom}\,\mathbb{J} + 2\,\mu_{hom}\,\mathbb{K} \tag{6.29}$$

5. Déterminer les tenseurs de localisation des grains sparitiques $\mathbb{A}_g$ et des macro-pores $\mathbb{A}_{macpore}$ à partir des k_g, μ_g, et k_{hom}, μ_{hom} puis les déformations locales des grains et des macro-pores :

$$\begin{aligned} \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{g} &= \mathbb{A}_g : [\mathbb{C}^{-1}_{hom} : \Delta\boldsymbol{\Sigma}] \\ \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{macpore} &= \mathbb{A}_{macpore} : [\mathbb{C}^{-1}_{hom} : \Delta\boldsymbol{\Sigma}] \end{aligned} \tag{6.30}$$

6. Vérifier la compatibilité de la contrainte moyenne des grains de sparite en calculant les résidus :

$$R_g = \mathbb{C}_g : \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_g - \Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_g \tag{6.31}$$

7. Si $R_g \leq Tol$, sortir de la boucle.
Si non, nouvelle itération (passer à l'étape 1) avec le nouveau $\Delta\overline{\boldsymbol{\sigma}}_g = \mathbb{C}_g : \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_g$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_{n+1} &= \boldsymbol{E}_n + \Delta\boldsymbol{E} \\ \Delta\boldsymbol{E} &= f_{O+I}\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O+I} + f_g\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_g + f_{macpore}\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{macpore} \\ \Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O+I} &= f^{O+I}_{O}\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{O} + f^{O+I}_{int}\,\Delta\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{int} \end{aligned} \tag{6.32}$$

6.5.3.3 Calibration expérimentale

Les propriétés élastiques de l'oolithe et des grains de sparite ont été déterminées dans la partie 6.5.2 et données dans le tableau 6.8. En calant numériquement les résultats du modèle avec ceux

de l'essai uniaxial, les paramètres de l'interphase f_{int}^{O+I}, χ_{int} retenus sont donnés dans le tableau 6.12. Une valeur moyenne de porosité $f_p^{Lav} = 0.25$ du calcaire de Lavoux est considérée pour le calcul. Les paramètres nécessaires pour la description du comportement plastique sont déterminés par calibration expérimentale sur les résultats des essais triaxiaux. On obtient dans le tableau 6.13 les valeurs retenues à la fin de la procédure de calibration.

TAB. *6.12: Détermination des paramètres de l'interphase*

Essai uniaxiale	f_{int}^{O+I}	χ_{int}	$E_{lateral}$ (Gpa)	ν
Lavoux Lx 1			24	0.3
Lavoux Lx 2			28.7	0.27
Lavoux Lx 37			25.6	0.22
Valeur moyenne			26.1	0.26
Modèle	0.05	0.1	26.4	0.25

TAB. *6.13: Paramètres du modèle*

	Oolithe	Interphase	Grain de sparite
Paramètres élastiques	$E_O = 34.4$ GPa $\nu_O = 0.27$	$E_{int} = 3.4$ GPa $\nu_{int} = 0.27$	$E_g = 83.6$ GPa $\nu_g = 0.29$
plastiques		$\alpha_0^p = 0.05$ $\alpha_m^p = 0.69$ $b = 400$ β_0^p = -0.1 $\beta_0^p = 0.9$ $b' = 600$ $C_p = 18$	

On représente dans les figures ci-dessous les prédictions du modèle pour les essais uniaxial et triaxiaux sous différents confinements. En général, le modèle donne un comportement variant entre dilatant et contractant qui dépend de la pression de confinement imposée. Autrement dit, le comportement dilatant de la roche apparaît sous un faible confinement mais dans le cas d'une forte pression de confinement, le comportement contractant est marqué. Cela correspond très bien à l'observation expérimentale. En comparant avec les données expérimentales disponibles dans [42], on constate une bonne corrélation entre le modèle et l'expérience dans la figure 6.35 pour l'essai uniaxial et dans les figures 6.36, 6.37 et 6.38 pour les essais triaxiaux sous faibles confinements ($P_c = 2$, 4 et 8 MPa). La figure 6.39 présente les résultats de l'essai triaxial sous forts confinements ($P_c = 16$ et 24 MPa). On constate que le modèle proposé met en évidence le comportement contractant de la roche mais la différence est marquée au pic des courbes contrainte - déformation.

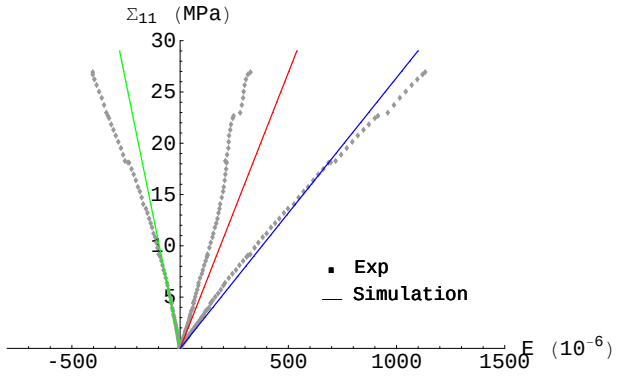


FIGURE *6.35: Essai de compression uniaxiale sur l'éprouvette Lx 2*

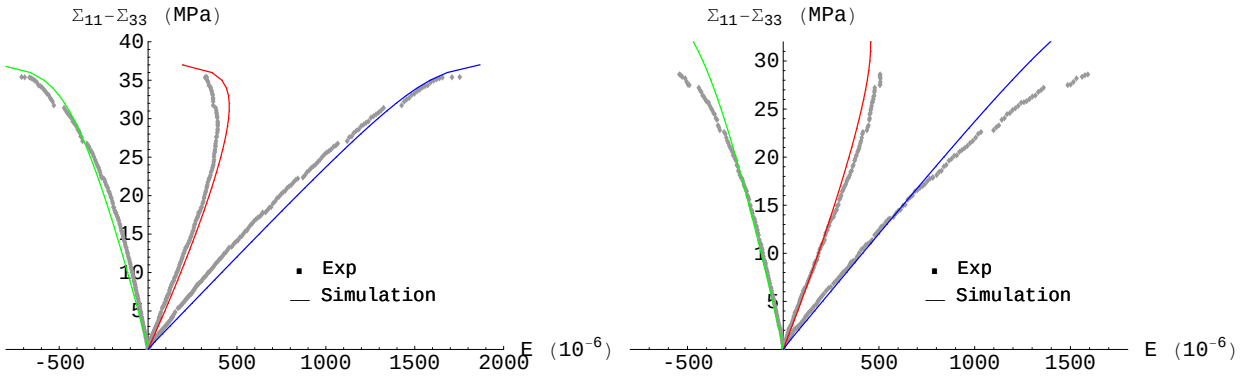


FIGURE *6.36: Essais de compression triaxiale sur les éprouvettes Lx 24 et Lx 27 avec $P_c = 2$ MPa*

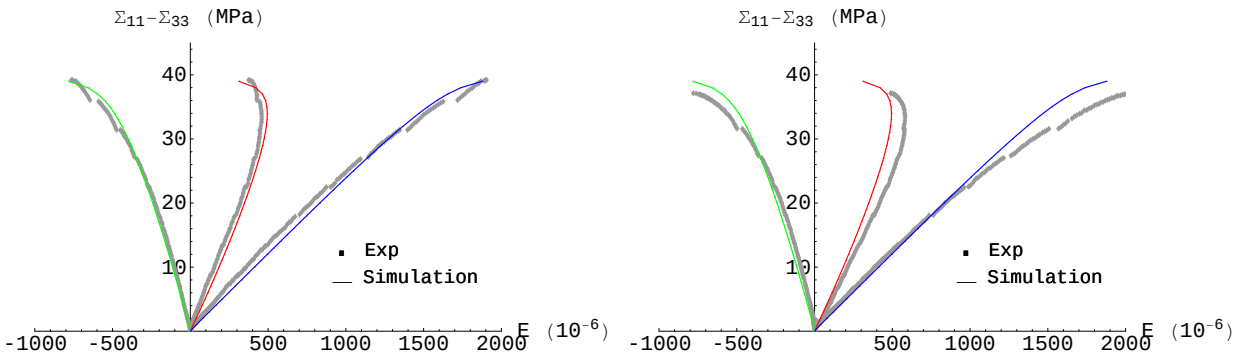


FIGURE 6.37: *Essais de compression triaxiale sur les éprouvettes Lx 23 et Lx 29 avec $P_c = 4$ MPa*

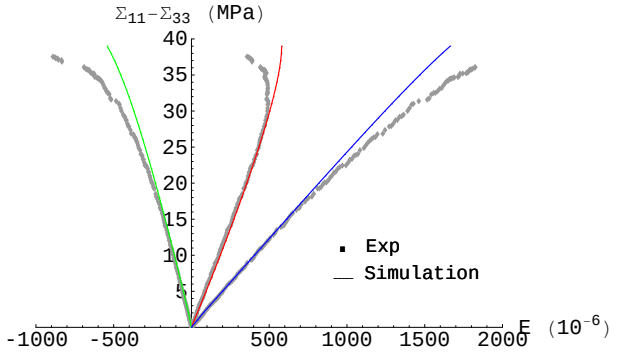


FIGURE 6.38: *Essai de compression triaxiale sur l'éprouvette Lx 28 avec $P_c = 8$ MPa*

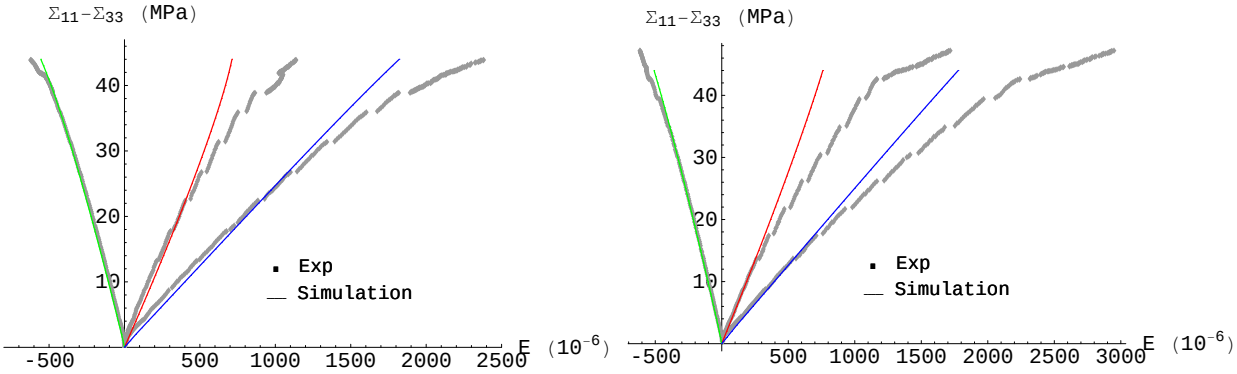


FIGURE 6.39: *Essais de compression triaxiale sur les éprouvettes Lx 22 ($P_c = 16$ MPa) et Lx 35 ($P_c = 24$ MPa)*

6.5.4 Conclusion

Le calcaire oolithique de type de Lavoux a été homogénéisé comme un matériau granulaire à trois phases en double porosité. A partir des observations de la microstructure, un modèle d'homogénéisation est proposé pour cette roche particulière. Son comportement poro-élastique est

déterminé en identifiant les paramètres du modèle avec les données expérimentales. On démontre également le rôle important de la zone de transition interfacielle qui est vue comme une interphase de faibles propriétés mécaniques. En simulant le comportement élasto-plastique de la roche, cette interphase retient un comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope. Le comportement des oolithes et des grain de sparite est supposé être élastique linéaire. Le comportement dilatant - contractant de la roche est bien décrit par le modèle et dépend de la valeur de la pression de confinement. En comparant avec les mesures de laboratoire, le modèle donne des bonnes corrélations.

Chapitre 7

Application au minerai de fer de Lorraine

Ce chapitre envisage l'étude des comportements poro-élastique et élasto-plastique du minerai de fer de Lorraine menée à l'aide de méthodes d'homogénéisation. L'étude expérimentale de cette roche a été réalisée dans le travail de D.Drgic [40] au LaEGO. A partir de l'étude de la microstructure, la roche est homogénéisée en proposant un modèle géométrique simplifié et en utilisant les méthodes d'homogénéisation présentées dans la première partie. Les prédictions du modèle sont comparées avec les mesures au laboratoire pour valider le modèle proposé pour le matériau étudié.

7.1 Microstructure et constituants

7.1.1 Description de la microstructure

Le minerai apparaît formé d'un assemblage de grains jointifs de goethite à texture oolithique (cortex oolithique), en grains ovoïdes ou sphériques de 0.5 à 2 mm bien calibrés. Cet assemblage de grains jointifs s'organise de deux façons différentes, suivant la taille de l'oolithe. A leur taille maximale (millimétrique), les oolithes s'organisent sous la forme d'une structure entrecroisée de dimension variable. Il en résulte une forte hétérogénéité et une anisotropie du minerai de dimensions variables dans l'espace [82]. Dans le cas où l'oolithe est très fine, le ciment est alors nettement plus argileux et l'organisation correspond à une structure contournée. En général, les oolithes sont cimentées par un assemblage (appelé ciment inter-oolithique) de calcite, sidérite et de phyllosilicates en proportions variées. Les pores de quelques nanomètres sont remplis d'un ciment carbonaté spathique largement cristallisé, du calcaire à sidéritique. Ces ciments assurent généralement une bonne cohésion à l'ensemble [40, 41]. On constate sur un échantillon sain de la mine de Joeuf (figure

7.1 à gauche) que les oolithes sont peu ou pas fracturées, que l'espace inter-oolithique est rempli uniformément de carbonates laissant peu de place à des vides. Des grossissements de cet espace inter-oolithique (figure 7.1 à droite) permettent toutefois d'observer une couche de transition entre le cortex oolithique et la matrice carbonatée.

L'étude du vieillissement du minerai de fer sur un échantillon brut montre que la surface des oolithes est recouverte par une croûte en forme crêtée qui a la composition d'un silicate de type chlorite ferrifère (d'après les spectres d'absorption). Cette étude montre également que les oolithes sont souvent dégradées au niveau du cortex, ce qui entraîne une forme de desquamation à différents endroits [40, 43]. En résumé, D.Grgic [40] a conclu que le minerai de fer évolue au cours du temps :

– Diminution de la quantité de matrice inter-oolithique ;

– Perte de cohésion et desquamation des oolithes qui créent ou accentuent les vides inter-oolithiques ;

– Néoformation dans ces vides d'une croûte (chlorite ferrifère) qui cristallise avec une structure crêtée.

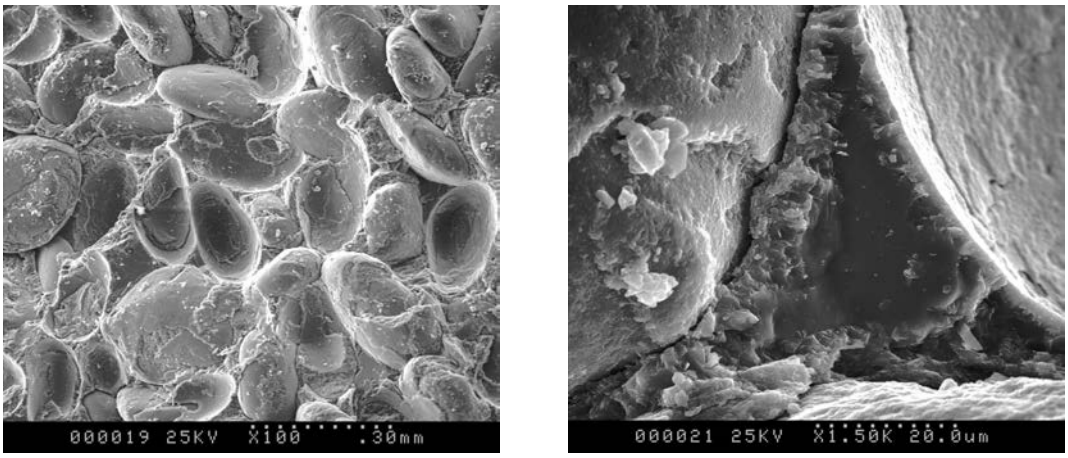


FIGURE 7.1: *-à gauche : structure du minerai de fer sain*
-à droite : espace inter-oolithique [40, 41]

7.1.2 Constituants et caractérisation

Toutes les propriétés macroscopiques des roches dépendent de la microstructure de la porosité, à savoir la forme des vides, leur répartition ainsi que leur connexion. Il n'y a pas de différence macroscopique et microscopique entre les minerais des différentes couches [41]. Les études de la porosité ont été réalisées dans la thèse de D.Drgic [40] selon différentes méthodes sur les différents faciès du minerai de fer de la couche grise. L'étude de la porosité du minerai de fer de la couche grise a montré qu'il s'agit d'une roche très poreuse, plus de 30% pour le faciès le plus ferrifère (Faciès A) et environ 20% pour le faciès carbonaté (Faciès B).

Les résultats de mesure de la porosité du tableau 7.1 montrent que la porosité ouverte à l'eau n_w est égale à la porosité totale n_T. Les différentes méthodes de mesure conduisent au même résultat ; à savoir que toute la porosité est connectée, y compris la porosité intra-oolithique. L'eau peut donc circuler dans tous les pores et pénétrer à l'intérieur des oolithes ferrugineux. Les résultats ont aussi montré l'absence de porosité occluse dans le minerai de fer [40, 41]. Ceci vérifie que la porosité occluse est rare dans la plupart des milieux poreux naturels et souvent négligeable dans les roches sédimentaires [14]. L'étude de l'influence des néoformations dans le minerai de fer a montré qu'il n'y a pas de différence significative de porosité entre les échantillons sains et ceux néoformés de chlorite ferrifère (tableau 7.2). L'étude de la saturation des minerais de fer a montré que le minerai de fer est saturé à environ 35% pour une humidité relative de 94%. C'est une humidité proche de celle de l'atmosphère mesurée dans les mines [41].

TAB. *7.1: Porosité du minerai de fer de Lorraine [41]*

Méthodes de mesure	Faciès A	Faciès B
Porosité à l'azote n_N	0.295	0.2
Porosité à l'eau n_w	0.337	0.207
Porosité totale n_T	0.336	0.203

TAB. *7.2: Influence des néoformations sur la porosité [43]*

	Echan. sain	Echan. néoformé 1	Echan. néoformé 2	Echan. néoformé 3
Porosité	0.32	0.325	0.34	0.323

TAB. *7.3: Caractéristiques du minerai de fer de Lorraine [40]*

Echantillon	Module k_U (GPa)	Module k (GPa)	Module μ (GPa)	Coe. b
Faciès A	9	6.3	3.6	0.93
Faciès B	22	19.2	13.2	0.8

A partir des études réalisées dans le travail de thèse de D.Drgic [40], on peut remarquer que le minerai de fer de Lorraine est composé des constituants suivants :

- Des **oolithes**. Elles correspondent bien à la composition de la goethite de formule chimique $Fe_{3+}O(OH)$. La formule empirique de la goethite est : $\alpha - Fe_{3+}O(OH)$. La goethite se présente rarement sous la forme de cristaux prismatiques mais reste un minéral très commun qui se forme en conditions oxydantes. Elle est le constituant principal des minerais de fer et des latérites et est banale dans les zones d'altération des gisements de fer. Les minéraux associés à la goethite sont des oxydes et des hydroxydes de fer, cuivre et minéraux de la zone d'oxydation. La goethite est également parfois appelée Limonite $\beta - Fe_{3+}O(OH)$. La limonite n'est pas un vrai minéral mais un mélange d'hydroxydes de fer. La plupart des limonites sont formées de goethite et possèdent également des propriétés de pseudomorphisme vis à vis d'autres minéraux comme la pyrite (elle peut remplacer un cristal de pyrite dont elle garde la forme). La limonite est en général amorphe alors que la goethite forme des microcristaux [4, 40]. Les caractéristiques de la goethite et de la limonite sont présentées dans le tableau 7.4.

TAB. *7.4: Caractéristiques de la goethite et de la limonite*

Minéral	Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
Goethite ($\alpha - Fe_{3+}O(OH)$)	115 [76]	60 (corrigé à partir de la limonite)	4.294 [97]
Limonite ($\beta - Fe_{3+}O(OH)$)	60.1 [92]	31.3 [92]	3.6 [92]
Hematite (α-Fe_2O_3)	206.6 [6]	91 [6]	5.254 [6]
Magnetite (Fe_3O_4)	161 [6]	91.4 [6]	5.206 [6]

- Une **croûte néoformée**. Sa composition est relativement proche de celle de la goethite du cortex. Il pourrait s'agir soit d'hématite, soit de goethite plus pure, soit d'un hydroxyde de fer.

Les spectres d'analyse quantitatifs permettent d'obtenir des compositions minéralogiques dans le minerai de fer. Le tableau 7.5 présente les résultats d'analyse de la croûte néoformée à la surface des oolithes, analyses obtenues sur le minerai de fer vieilli (entre 1900 et 1930). La composition chimique du dépôt néoformé à la surface des oolithes montre qu'il s'agit d'un oxyde ou d'un hydroxyde de fer. Les quantités d'impuretés (Al, Si, Ca) présentes sont très faibles.

TAB. *7.5: Composition chimique du dépôt d'oxydes néoformé à la surface des oolithes [40]*

Elément chimique	O	Al	Si	Ca	Fe
Pourcentage (%)	28.3 ± 3.57	1.4 ± 0.1	2.4 ± 0.4	0.3 ± 0.3	56.6 ± 1.51

- Un **ciment inter-oolithique**. Une vue d'ensemble du minerai de fer sain au MEB nous permet de constater que le ciment est riche en phyllosilicates ferrifères et en carbonates et est abondant et bien cristallisé. Le tableau 7.6 présente les résultats d'analyse des carbonates de fer et de calcium dans le ciment inter-oolithique sur un échantillon de minerai de fer en 1970 et d'aspect assez sain.

TAB. *7.6: Composition chimique des carbonates du ciment inter-oolithique [40]*

Minéral	% Sidérite $FeCO_3$	% Calcite $CaCO_3$	% Magnésite $MgCO_3$
Carbonate de calcium	0.2 ± 0.1	99.0 ± 0.4	non significatif
Carbonate de fer	75.4 ± 1.7	10.7 ± 0.6	11.8 ± 0.7

D'après la composition chimique des carbonates, on constate que le carbonate de calcium est très pur (99% de calcite). Au contraire, le carbonate de fer est un mélange de sidérite (en majorité : 75%), de calcite et de magnésite. Les expériences de dosage des différents carbonates de fer (sidérite et calcite) dans le ciment inter-oolithique du minerai de fer nous donnent les résultats du pourcentage de carbonates (sidérite + calcite)(figure 7.2).

En fonction du temps d'exposition à l'atmosphère minière et en fonction de l'emplacement des échantillons, on observe que la quantité de ciment inter-oolithique, ainsi que la quantité de sidérite dans ce ciment, est très variable. Mais on constate aussi une diminution de la proportion relative de sidérite (+ magnésite) dans le ciment inter-oolithique carbonaté (sidérite + magnétite

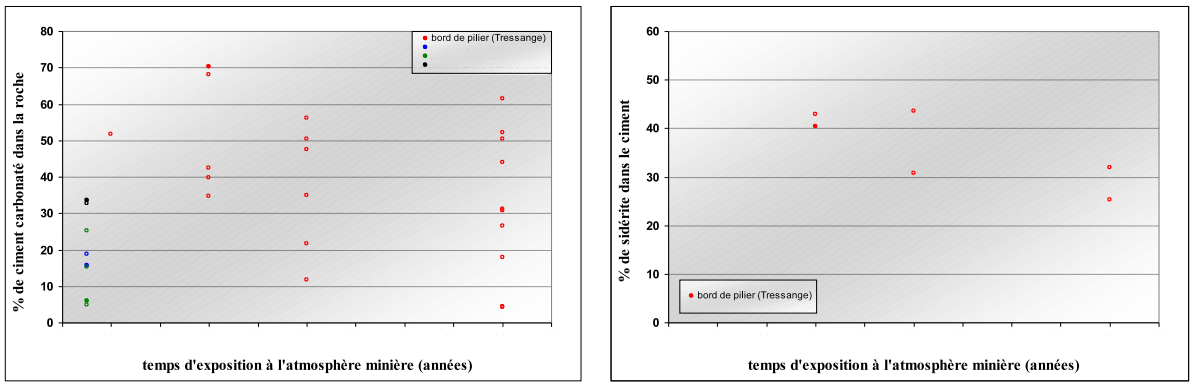


FIGURE 7.2: *Evolution du pourcentage de carbonates dans le minerai de fer en fonction de temps [40]*

+ calcite) en fonction de temps d'exposition à l'atmosphère [40]. Une observation sur deux images de MEB (figure 7.3) montre aussi que : le ciment inter-oolithique d'un minerai de fer de 1970 contient beaucoup de sidérite (couleur claire) alors que le ciment est formé surtout de calcite dans un échantillon vieilli de 1910.

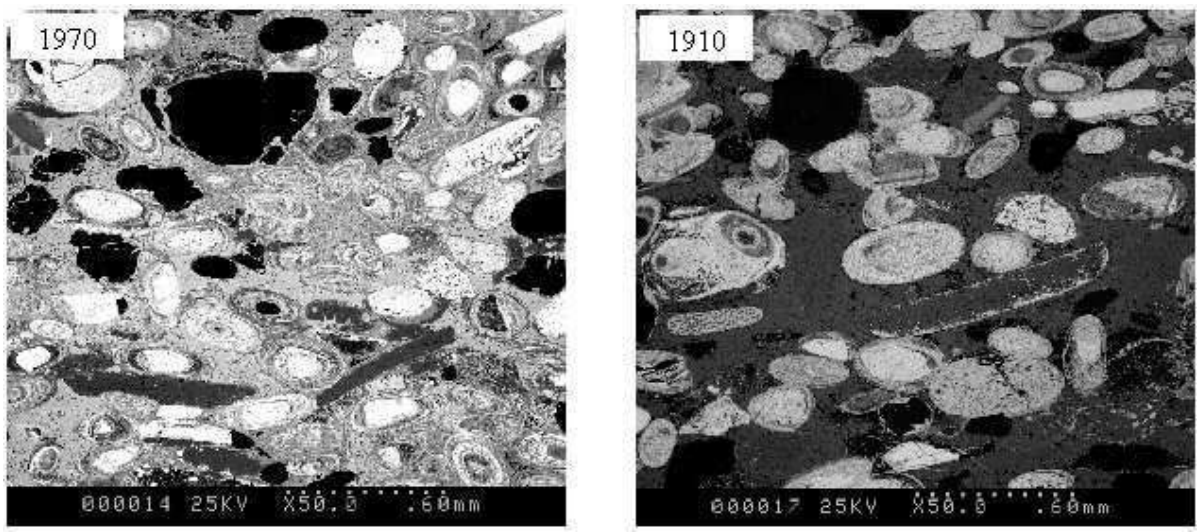


FIGURE 7.3: *Minerai de fer en fonction de temps [40]*

Le tableau 7.7 présente les propriétés mécaniques des quelques minéraux présents dans le ciment inter-oolithique (voir aussi l'annexe D) :

TAB. 7.7: *Caractéristiques des quelques minéraux carbonatés*

Minéral	Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
Sidérite ($FeCO_3$)	124 [19]	51 [19]	3.937 [97]
Calcite ($CaCO_3$)	76 [23]	36.8 [23]	2.712 [6]
Magnésite ($MgCO_3$)	114 [6]	68 [6]	3.009 [6]
Dolomite ($CaMg(CO_3)_2$)	94.9 [6]	45.7 [6]	3.795 [6]

7.2 Modèle et méthode d'homogénéisation

7.2.1 Modèle proposé

L'étude du vieillissement du minerai de fer montre que la surface des oolithes est recouverte par une croûte en forme crêtée et que les oolithes sont souvent dégradées au niveau du cortex [40]. On propose dans la figure 7.4 (a) (b)) un modèle microstructural du minerai de fer composé de :

- (1) oolithe : goethite + pores
- (2) interface ou interphase mince
- (3) ciment inter-oolithique : calcite + sidérite + pores

D'après ce modèle, les oolithes et le ciment sont des milieux poreux, le cortex oolithique dégradé peut être vu comme une couche d'interphase de faibles propriétés mécaniques ou comme une interface imparfaite. La procédure d'homogénéisation du minerai de fer est réalisée en utilisant la méthode à deux étapes : à l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique, l'oolithe (1) et la matrice poreuse inter-oolithique (3) (figure 7.4 (c)) sont homogénéisées ; à l'échelle mésoscopique vers l'échelle macroscopique, la roche est homogénéisée en supposant l'oolithe et son interface imparfaite ou interphase mince noyées dans la matrice inter-oolithique (figure 7.4 (b)).

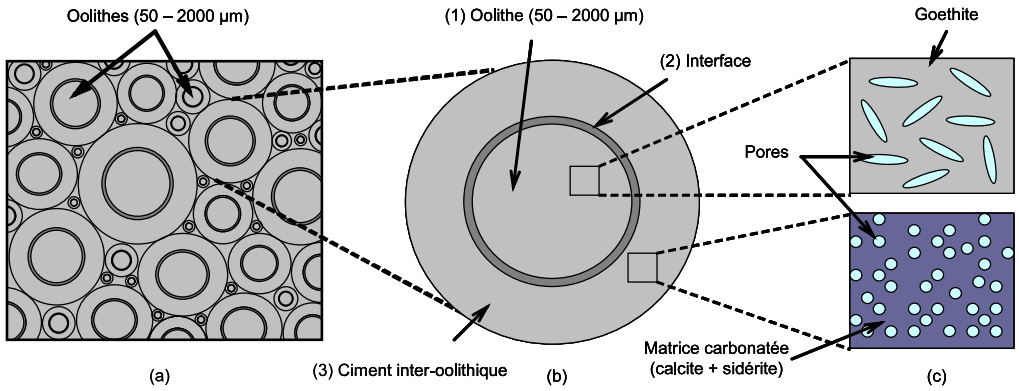


FIGURE 7.4: *Homogénéisation à deux étapes du minerai de fer de Lorraine*

7.2.2 Homogénéisation à deux étapes

On considère un V.E.R du minerai de fer occupant un domaine géométrique Ω (figure 7.4 (b)). Les oolithes Ω_O sont composées de cristaux de goethite et de pores Ω_p^O supposés de forme sphéroïdale aplatie de rapport d'aspect ϵ. La matrice poreuse inter-oolithique Ω_{mp} est constituée de cristaux de calcite et de sidérite avec la même proportion volumique et de pores Ω_p^{mp} de forme sphérique. En posant η_O la porosité relative de l'oolithe, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\Omega = \Omega_{mp} + \Omega_O \quad , \quad \Omega_p = \Omega_p^{mp} + \Omega_p^O \\ &\Omega_p^O = \eta_O\, \Omega_p \quad , \quad \Omega_p^{mp} = (1-\eta_O)\, \Omega_p \\ &f_p = \frac{\Omega_p}{\Omega} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Etape 1 : échelle microscopique vers échelle mésoscopique

Cette étape permet d'homogénéiser d'abord l'oolithe puis la matrice poreuse inter-oolithique. Ces deux constituants sont des milieux polycristallins poreux à deux ou à trois phases. L'étude bibliographique a montré que l'oolithe est composée de goetithe et de pores (en faibles proportions) sous forme sphéroïdale aplatie. Le schéma auto-cohérent classique (AC) à deux phases présenté dans le chapitre 1 est donc utilisé. La fraction volumique relative de pores dans l'oolithe s'obtient par :

$$f_p^O = \frac{\Omega_p^O}{\Omega_O} = \frac{\Omega_p^O}{\Omega}\,\frac{\Omega}{\Omega_O} = \frac{\eta_O\, f_p}{f_O} \tag{7.2}$$

La porosité relative de l'oolithe f_p^O dépend de trois paramètres f_O, η_O et la porosité totale de la roche f_p. En fonction de f_p, les deux paramètres f_O, η_O doivent satisfaire la condition à la limite :

$$f_p^O = \frac{\eta_O\, f_p}{f_O} < 1 \tag{7.3}$$

La matrice poreuse inter-oolithique est un milieu à trois phases à forte porosité. Le pore se présente sous forme sphérique. Les cristaux de calcite et de sidérite occupent une même proportion volumique relative. Pour homogénéiser cette phase, on utilise le schéma autocohérent itératif (nombre d'itérations $N = 100$) à trois phases qui permet d'homogénéiser un milieu polycristallin à forte porosité. Les fractions volumiques des constituants dans la matrice sont déterminées par la relation (7.4) et doivent satisfaire la condition à la limite (7.5).

$$\begin{aligned} f_p^{mp} &= \frac{\Omega_p^{mp}}{\Omega_{mp}} = \frac{(1-\eta_O)\,\Omega_p}{\Omega}\,\frac{\Omega}{\Omega_{mp}} \\ &= \frac{(1-\eta_O)\,f_p}{f_{mp}} \\ f_{cal}^{mp} &= f_{sid}^{mp} = \frac{1}{2}\,(1-f_p^{mp}) \end{aligned} \tag{7.4}$$

$$f_p^{mp} = \frac{(1-\eta_O)\,f_p}{f_{mp}} < 1 \tag{7.5}$$

En fin de cette étape, on obtient les propriétés poro-élastiques linéaires isotropes des deux phases poreuses (oolithe et matrice) k_j^I, μ_j^I, b_j^I, N_j^I avec $(j = O, mp)$.

Etape 2 : échelle mésoscopique vers échelle macroscopique

La deuxième étape consiste à déterminer les propriétés poro-élastiques effectives du minerai de fer de Lorraine à l'échelle macroscopique en utilisant le modèle de sphères composites (voir la partie I). Le modèle de sphères composites est retenu et dépend des propritétés d'interface ou d'interphase. A partir des propriétés poro-élastiques des constituants obtenues dans la première étape, les propriétés poro-élastiques effectives de la roche k_{SC}^{hom}, μ_{SC}^{hom}, b_{SC}^{hom}, N_{SC}^{hom} sont déterminées ; "SC" soit "SCIP" dans le cas à interface parfaite (annexe A) et "SC" soit "SCII" dans le cas à interface imparfaite (annexe B).

On représente dans la figure 7.5 l'impact du rapport d'aspect des pores sur les propriétés élastiques de l'oolithe à l'étape 1. Quatre valeurs du rapport d'aspect on été prises en compte, de la sphère $\epsilon = 1$ aux pores aplatis $\epsilon = 0.1 \div 0.05 \div 0.01$. Les résultats d'homogénéisation correspondent à une distribution isotrope des pores. On note que le rapport d'aspect est croissant selon les modules d'élasticité. Pour un très faible rapport d'aspect $\epsilon = 0.01$, les modules d'élasticité diminuent rapidement et s'annulent à la porosité relative de l'oolithe $f_p^O = 0.023$.

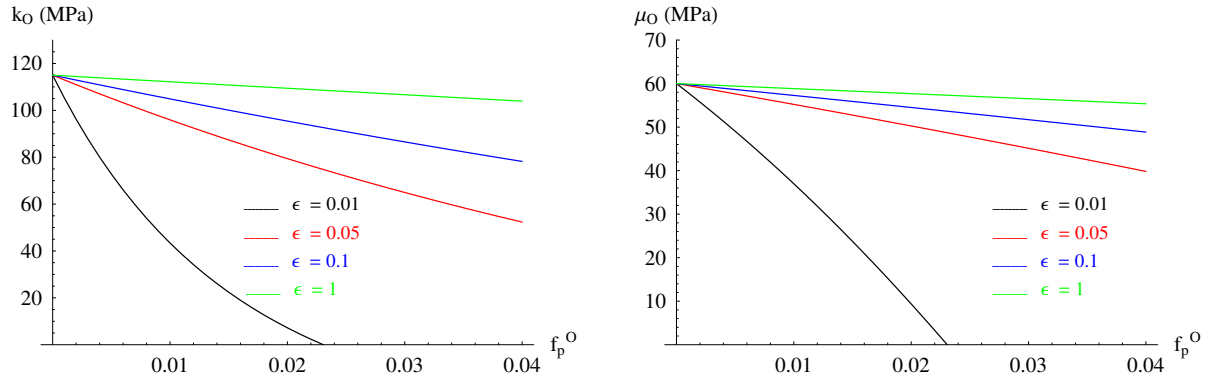


FIGURE 7.5: *Influence du rapport d'aspect sur les propriétés élastiques de l'oolithe*

7.3 Comportement poro-élastique du minerai de fer de Lorraine

7.3.1 Matériau à 2 phases à l'interface imparfaite

L'étape d'homogénéisation du minerai de fer est réalisée en prenant en compte la présence de l'interface imparfaite entre l'oolithe et la matrice inter-oolithique. Cette étape utilise le modèle de sphères composites à trois phases à interface imparfaite (SCII) (annexe B). L'étude de la porosité du minerai de fer dans le travail de D.Grgic [40] a montré que les pores présents dans les oolithes représentent 5% de la porosité totale ($\eta_O = 0.05$) avec une forme géométrique très aplatie ($\epsilon = 0.05$). Les oolithes sont des éléments sphériques et ont une forte fraction volumique de l'ordre de 50% ($f_O = 0.5$). Les poro-propriétés de l'interface imparfaite sont décrites par des paramètres p, q et n (voir l'annexe B) qui dépendent de la porosité totale en voyant l'interface comme une zone très poreuse :

$$p = \alpha\, f_p \quad , \quad q = \beta\, f_p \quad , \quad n = \gamma\, f_p \tag{7.6}$$

où α, β et γ sont des coefficients d'interface. Les figures 7.6 et 7.7 présentent les évolutions des propriétés poro-élastiques effectives de la roche en fonction de la porosité f_p. Les résultats homogénéisés avec les différentes valeurs des coefficients d'interface sont comparés avec les résultats expérimentaux. Une décroissance des modules d'élasticité (k_{hom} et μ_{hom}) en fonction de la porosité f_p est marquée logiquement. En comparant les résultats obtenus par les différentes valeurs des coefficients d'interface, on constate une forte influence des propriétés de l'interface. Plus l'interface est souple (α croissants), plus les modules d'élasticité effectifs (k_{hom} et μ_{hom}) obtenus sont faibles. On constate également les évolutions logiques des poro-propriétés macroscopiques (b_{hom}, N_{hom}) en fonction de la porosité. L'influence sensible du coefficient poro-élastique d'interface γ est observée.

En calant avec les expériences, la courbe en rouge correspondant aux coefficients retenus $\alpha = \beta/3$, $\beta = 15$ et $\gamma = 7.25$ donne généralement des bonnes simulations.

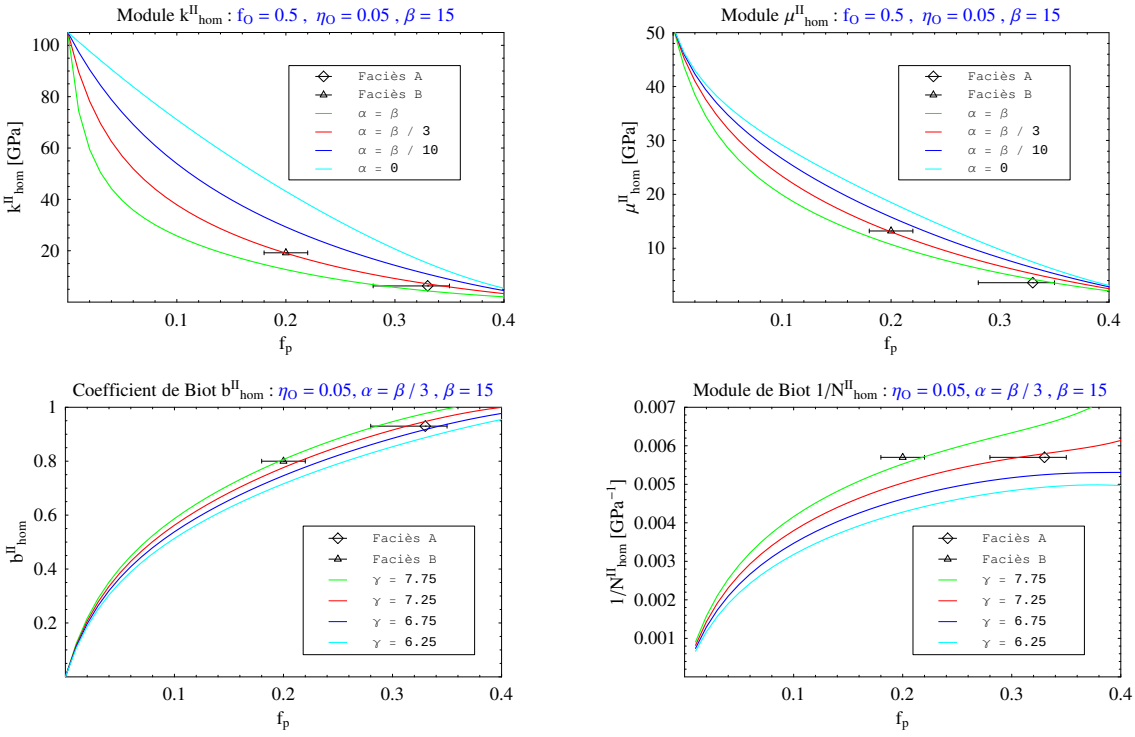


FIGURE 7.6: *Propriétés poro-élastiques effectives du minerai de fer de Lorraine en fonction de la porosité : influence des propriétés de l'interface imparfaite*

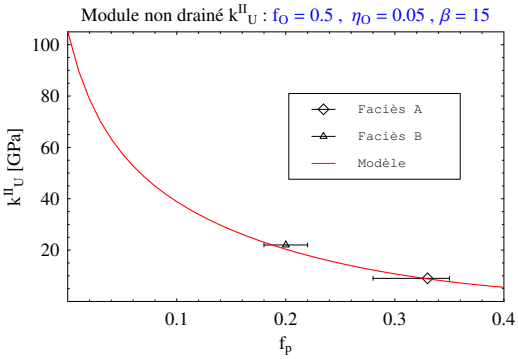


FIGURE 7.7: *Module de compressibilité non drainé de la roche en fonction de la porosité*

7.3.2 Matériau à 3 phases avec zone de transition d'interface (ZTI)

La zone dégradée autour de l'oolithe ou la zone de transition d'interface peut être vue comme une couche d'interphase mince de faibles propriétés mécaniques. Dans ce paragraphe, la roche est homogénéisée en prenant en compte l'influence de cette couche d'interphase. Ses propriétés élastiques sont corrigées à partir de celles de l'oolithe par un coefficient dégradé m :

$$E_{int} = \frac{E_{Oolithe}}{m} \quad , \quad \nu_{int} = \nu_{Oolitthe} \tag{7.7}$$

La fraction volumique relative de l'interphase est déterminée en proposant un paramètre c lié à la porosité par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\Omega_{int} = c\,\Omega_p \quad avec \quad c << 1 \\ &f_{int} = \frac{\Omega_{int}}{\Omega} = \frac{c\,\Omega_p}{\Omega} = c\,f_p \\ &f_{mp} = 1 - f_{int} - f_O \end{aligned} \tag{7.8}$$

En fonction de la porosité f_p, les paramètres choisis c et m doivent toujours satisfaire les conditions aux limites 7.3 7.5. Avec les mêmes valeurs de paramètres que dans la partie précédente ($f_O = 0.5$, $\eta_O = 0.05$ et $\epsilon = 0.05$), les figures 7.8 et 7.9 présentent l'influence sensible des propriétés de l'interface sur les évolutions des propriétés macroscopiques en fonction de la porosité. On observe dans la figure 7.8 une influence des très faibles propriétés d'interphase décrites par le paramètre m. L'interphase mince ($c = 0.1$) est supposée comme un matériau à forte porosité et à composante solide quasi-incompressible ($b_{int} \approx 1$). A la vue générale, on constate une décroissance des modules d'élasticité (k_{hom}, μ_{hom}) et une croissance du coefficient de Biot (b_{hom}) logiquement en fonction de la porosité de la roche f_p. En comparant les résultats obtenus pour les trois valeurs de m respectivement $50 \div 200 \div 500$, la différence significative entre les courbes montre une forte influence des propriétés de l'interface (paramètre m). Plus l'interphase est faible (m croissant), plus les modules d'élasticité macroscopiques (k_{hom}, μ_{hom}) obtenus sont faibles, et plus le coefficient de Biot est élevé (b_{hom}).

La figure 7.9 présente l'influence de la fraction volumique relative d'interphase décrite par le paramètre c. Les courbes sont significativement différentes pour les différentes valeurs de c ($0.05 \div 0.1 \div 0.15$). On constate logiquement que les propriétés d'élasticité (k_{hom}, μ_{hom}) sont plus faibles lorsque l'interphase de très faibles propriétés mécaniques est étendue (c croissant).

La comparaison des résultats obtenus pour les différentes valeurs de la fraction volumique de l'oolithe f_O est présentée dans la figure 7.10. On constate que l'influence du paramètre f_O n'est

pas importante puisque la différence entre les courbes n'est pas très significative. La valeur moyenne $f_O = 0.5$ est alors acceptable pour les prédictions du modèle. En comparant les simulations du modèle avec les mésures de laboratoire, les paramètres retenus $m = 200$ et $c = 0.1$ donnent des bonnes corrélations (courbes en rouge).

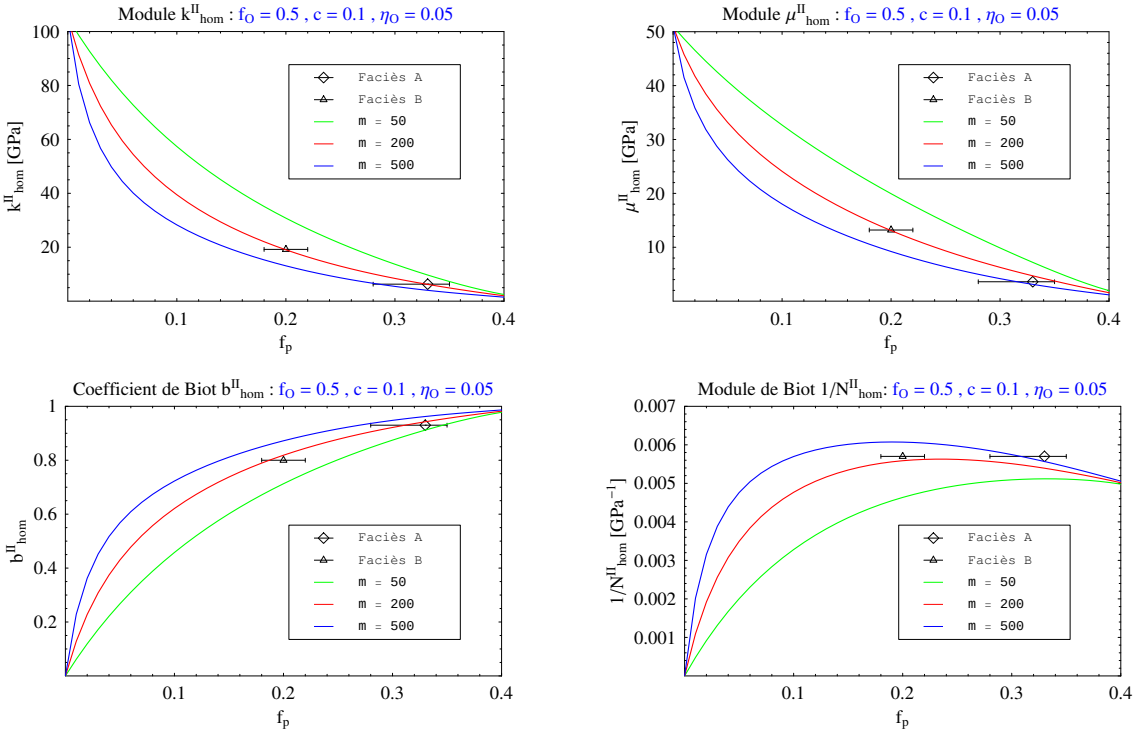


FIGURE 7.8: *Influence des propriétés de l'interface sur les évolutions des propriétés poro-élastiques effectives du minerai de fer de Lorraine*

7.3.3 Conclusion

L'étude de la microstructure du minerai de fer permet d'homogénéiser cette roche comme un matériau composite à trois phases : oolithes sphériques, zone de transition oolithe - matrice et matrice inter-oolithique. La méthode d'homogénéisation à deux étapes est utilisée en considérant les constituants de la roche comme des milieux poreux à la première étape ; dans la seconde étape, la roche est homogénéisée en utilisant le modèle de sphères composites. Le modèle retenu (à trois phases SCII ou à quatre phase SCIP) dépend des propriétés géométriques et mécaniques de la zone de transition d'interface. La comparaison entre le modèle proposé et les résultats expérimentaux permet d'identifier les paramètres du modèle et de marquer l'importance de la zone de transition oolithe - matrice.

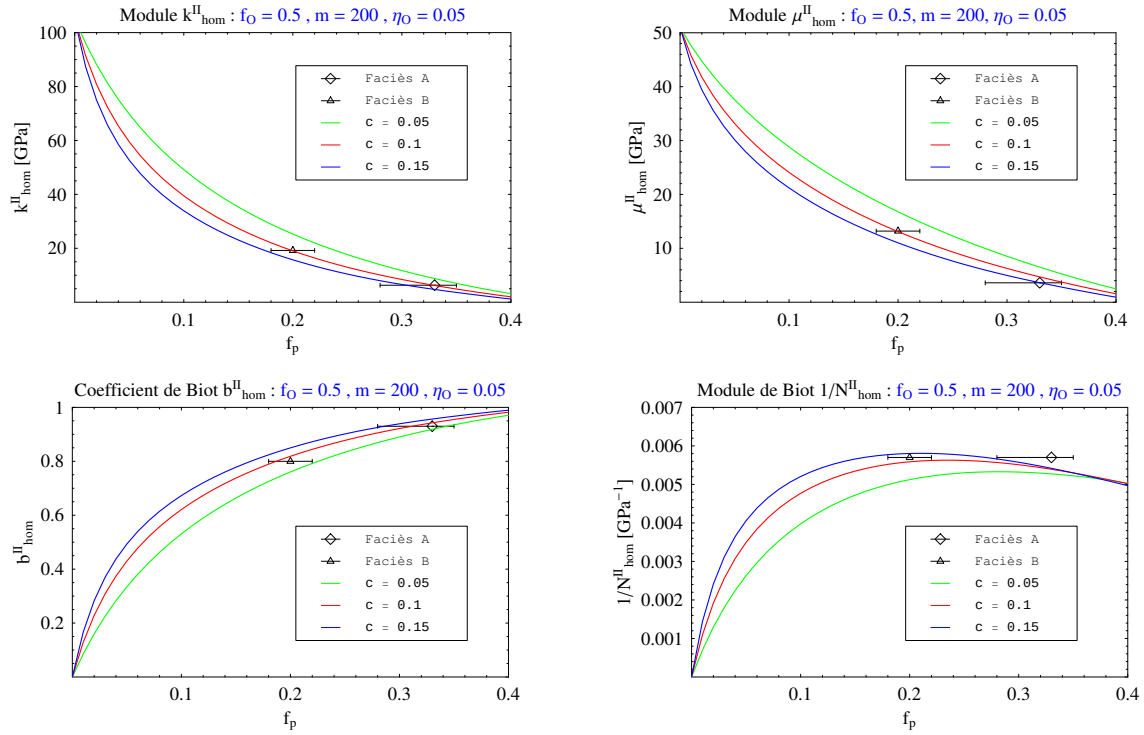


FIGURE 7.9: *Influence de la fraction volumique relative de l'interface sur les évolutions des propriétés poro-élastiques effectives du minerai de fer de Lorraine*

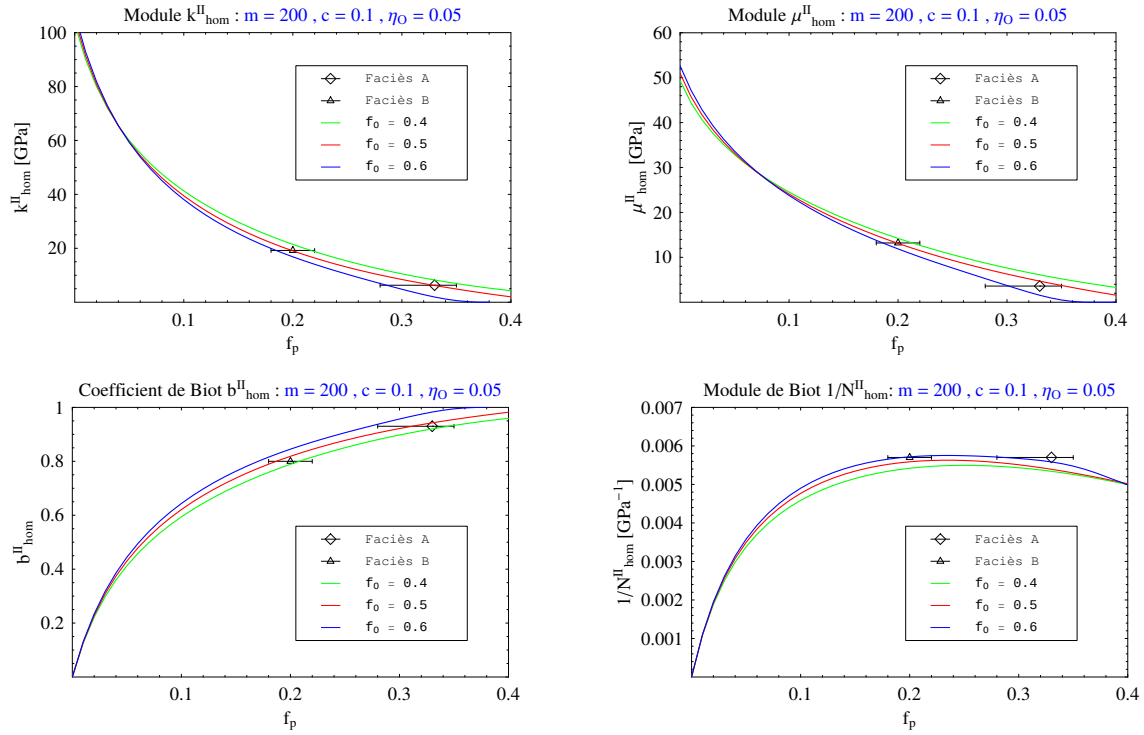


FIGURE 7.10: *Influence de la fraction volumique de l'oolithe f_O sur les évolutions des propriétés poro-élastiques effectives du minerai de fer de Lorraine*

7.4 Comportement élasto-plastique du minerai de fer de Lorraine

L'étude expérimentale du comportement élasto-plastique sur le minerai de fer de Lorraine a été réalisée au LaEGo dans le travail de D.Grgic [40]. A partir des résultats expérimentaux, l'auteur a démontré la présence d'un seul mécanisme de déformation plastique actif dans la gamme des contraintes qui concerne les mines de fer : le mécanisme de plasticité déviatorique lié au cisaillement de la matrice rocheuse. En chargement hydrostatique, le comportement de la roche reste élastique. L'auteur montre également que le caractère de la roche est globalement isotrope. Sous chargement triaxial, la présence d'un endommagement de type isotrope est marquée. Le caractère isotrope de l'endommagement correspond à une décohésion des grains (oolithes). L'observation des différents essais triaxiaux montre que la roche a un comportement qui diffère selon le confinement. Lorsque le confinement est de très faible à nul, le comportement est dilatant. Puis, au fur et à mesure de l'augmentation du confinement, le comportement contractant de la roche est observé. Dans cette partie, à partir des études de la microstructure et des mécanismes de déformation du minerai de fer de Lorraine, le modèle d'homogénéisation et le comportement des phases retenus pour décrire le comportement élasto-plastique de la roche sont présentés.

7.4.1 Comportement local des phases

Le minerai de fer de Lorraine est vu comme un matériau composite à trois phases : oolithes sphériques, zone de transition oolithe - matrice et matrice inter-oolithique. L'étude du comportement poro-élastique de cette roche a montré que les deux constituants (oolithe et matrice inter-oolithique) sont des milieux poreux. L'oolithe présente des modules d'élasticité plus rigides par rapport à ceux de la matrice (tableau 7.8). La décohésion entre les oolithes et la matrice est marquée par la présence de la zone de transition oolithe - matrice. Cette particularité est modélisée par un modèle à interface imparfaite. On note également la présence d'un endommagement de type isotrope dans la roche. Dans le cadre de cette thèse, un modèle simplifié est proposé pour étudier le comportement élasto-plastique de la roche. D'après ce modèle, l'oolithe est supposée présenter un comportement élastique et la matrice obéit à un comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope. Ce type de comportement élasto-plastique est en accord avec le comportement dilatant du matériau [45]. On propose aussi un comportement élasto-plastique (voir chapitre 5) pour l'interface imparfaite. Les paramètres élastiques des constituants (oolithe, interface et matrice) ont été déterminés au paragraphe précédent. Les autres paramètres nécessaires à la description du comportement plastique sont déterminés par calibration sur les résultats expérimentaux des essais triaxiaux. La calibration expérimentale est réalisée sur des échantillons de faciès A avec une valeur moyenne de porosité $f_p^{MF} = 0.33$. Les valeurs retenues

à la fin de la procédure de calibration sont donnés dans le tableau 7.8. La procédure d'homogénéisation du comportement élasto-plastique du minerai de fer de Lorraine est réalisée selon la même méthode de calcul que pour les calcaires oolithiques (chapitre 6).

TAB. *7.8: Paramètres du modèle*

	Oolithe	Matrice	Interface
Paramètres	$k_O = 60.9$ GPa	$k_m = 6.6$ GPa	$\alpha = \beta/3$
élastiques	$\mu_O = 43.5$ GPa	$\mu_m = 4.5$ GPa	$\beta = 15$
plastiques		$\alpha_0^p = 0.05$	$\Delta n0$ =0.005
		$\alpha_m^p = 0.45$	$\Delta t0$ =0.005
		$b = 1000$	β_p^0= 20
		β_0^p = -1.5	β_q^0= 20
		$\beta_0^p = 2$	β_p^m= -20
		$b' = 800$	β_q^m= -20
		$C_p = 48$	$\gamma_p = 8$
			$\gamma_q = 10$

7.4.2 Calibration expérimentale

La figure 7.11 présente d'abord le comportement prédit du modèle sous des chargements hydrostatique et déviatorique. On constate un comportement quasiment isotrope élastique du matériau dans le cas de la compression hydrostatique. Cela correspond aux remarques données dans le travail de D.Grgic [40].

On présente dans les figures 7.12, 7.13 et 7.14 les comparaisons entre la modélisation et les résultats expérimentaux dans le cas de l'essai uniaxial et des essais triaxiaux déviatoriques sous différents confinements. On note que les prédictions du modèle sont obtenues dans le cas où la roche présente un comportement élasto-plastique pour la matrice ainsi que pour l'interface, avec les paramètres retenus donnés dans le tableau 7.8. On présente également les résultats obtenus pour le cas à interface élastique linéraire (courbe tiretée). En comparant les résultats des deux modèles d'interface, on constate que la différence n'est pas très significative mais est marquée

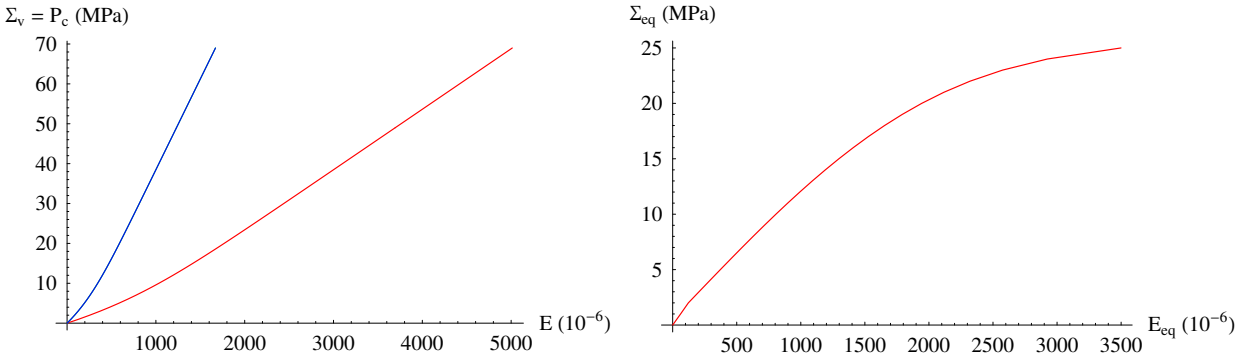


FIGURE 7.11: *Minerai de fer : compressions hydrostatique et déviatorique*

au fur et à mesure de l'augmentation de confinement. Les résultats numériques dans le cas où l'interface obéit à un comportement non linéaire sont les plus proches des expériences. Le modèle donne des prédictions parfaites pour l'essai uniaxial (figure 7.12) et pour l'essai triaxial à très faible confinement $P_c = 1$ MPa (figure 7.13). Dans le cas d'un confinement de 2 Mpa, une bonne corrélation est observée pour la courbe contrainte - déformation axiale mais on note une différence au pic des courbes volumique et latérale.

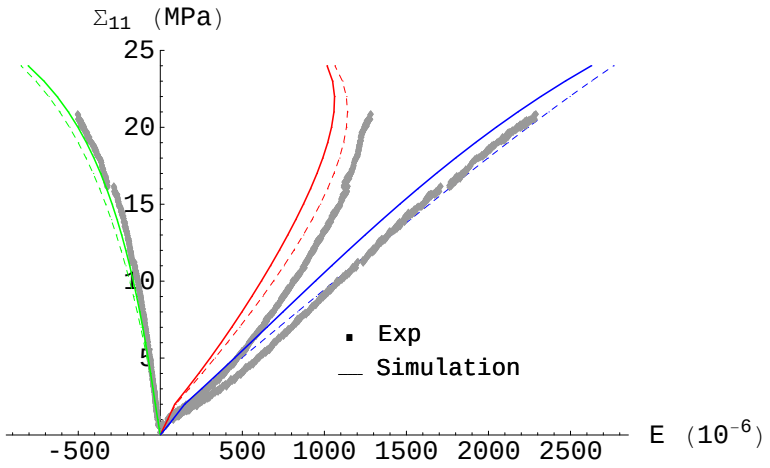


FIGURE 7.12: *Minerai de fer à interface non linéaire : Essai de compression uniaxiale sur l'échantillon A-15*

7.4.3 Conclusion

Le comportement élasto-plastique du minerai de fer de Lorraine a été homogénéisé en appliquant un modèle simplifié à deux phases à interface imparfaite. L'oolithe présente un comportement élastique linéaire. Un comportement non linéaire est proposé pour la matrice et pour l'interface. Le comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope est appliqué à la matrice tandis que l'interface obéit à un comportement non linéaire développé dans

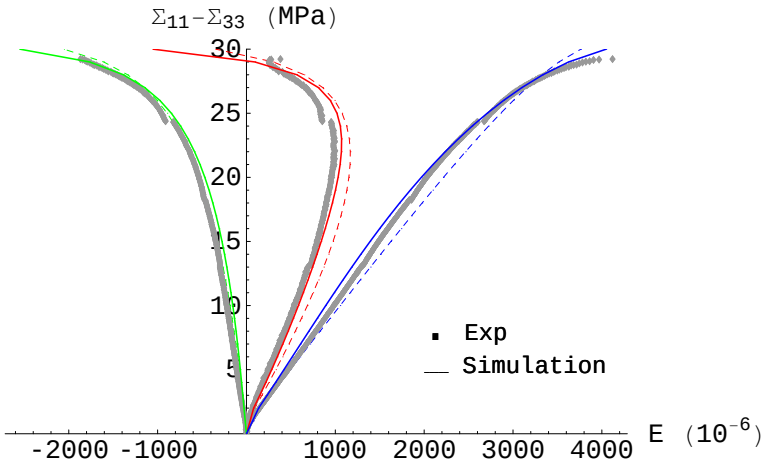


FIGURE 7.13: *Minerai de fer à interface non linéaire : Essai de compression triaxiale sur l'échantillon A-7bis2 avec $P_c = 1$ MPa*

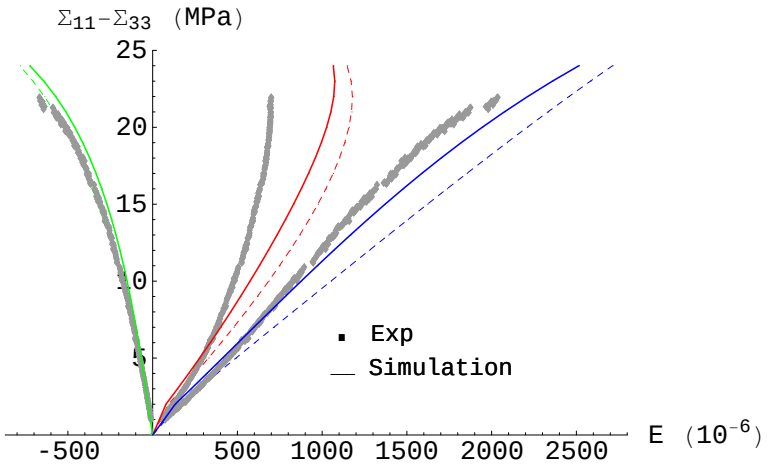


FIGURE 7.14: *Minerai de fer à interface non linéaire : Essai de compression uniaxiale sur l'échantillon A-62 avec $P_c = 2$ MPa*

le chapitre 5. En comparant avec les résultats expérimentaux, on obtient des bonnes corrélations entre le modèle et l'expérience.

Conclusion générale et perspectives

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire consistait à homogénéiser les comportements linéaire et non linéaire à l'échelle macroscopique des géomatériaux à partir d'informations disponibles à l'échelle inférieure en exploitant et adaptant les outils de la micromécanique. Deux types de géomatériau étudiés au LaEGO - ENSG - INPL à Nancy (calcaires oolithiques et minerai de fer de Lorraine) ont été abordés dans ce travail. Les observations microstructurales des ces roches nous ont amené à les schématiser comme des matériaux composites poreux multiphasiques. Les roches poreuses étudiées sont constituées généralement par un assemblage de grains quasi sphériques (oolithes), à forte fraction volumique, cimentés par une matrice. Une zone de transition oolithe - matrice est également observée, et résulte principalement de la dégradation autour des oolithes. La porosité, supposée connectée, est présente dans les oolithes (inter-oolithique) et dans la matrice (intra-oolithique). Un modèle d'homogénéisation à deux étapes a ensuite été développé dans le cadre du modèle des sphères composites. D'après ce modèle, les oolithes et la matrice sont homogénéisées comme des milieux polyscristallins multiphasiques à la première étape. Dans la seconde étape, le modèle de sphères composites à interface parfaite ou imparfaite a été développé et appliqué à l'estimation des propriétés poroélastiques linéaires effectives de ces roches poreuses.

Dans la **première partie** de ce mémoire, les outils et approches d'homogénéisation basé sur le problème d'Eshelby (présentés dans le *chapitre 1*) permettent d'estimer les propriétés effectives d'un milieu hétérogène. La méthode d'homogénéisation pour des milieux polyscristallins fortement poreux a également été abordée en adaptant une approche itérative au schéma autocohérent. Dans le cas général d'un matériau granulaire ou polycristallin multiphasique, les solutions exactes de leurs poro-propriétés (tenseur et module de Biot) sont déterminées à l'aide de la méthode de polarisation [12]. Cet outil permet d'obtenir efficacement les poro-propriétés du matériau à double porosité et a été appliqué à la détermination des propriétés poroélastiques du calcaire de Lavoux (chapitre 6).

Nous nous sommes ensuite attachés dans les *chapitre 2* et *chapitre 3* à fournir une méthode de détermination des propriétés poroélastiques linéaires isotropes du modèle de sphères composites. L'état de liaison d'interface a été pris en compte dans les modèles à interface parfaite (SCIP -

chapitre 2) et à interface imparfaite (SCII - chapitre 3). En étudiant et étendant le cas à $n+1$ phases, la solution analytique du modèle en poro-élasticité linéaire est déterminée. La comparaison avec celle obtenue en élasticité linéaire par les autres auteurs [20, 52, 54] a été également abordée. Le cas à interface imparfaite est présenté sous le modèle d'interface imparfaite *" linear spring model "* (LSM) [50]. D'après ce modèle, les contraintes sont supposées continues mais les déplacements sont discontinus à l'interface, ils sont décrits par les composantes non nulles du saut de déplacement. Sous une condition de chargement isotrope ou déviatorique, les expressions du saut de déplacment lié au chargement imposé ont été déterminées et sont détaillées analytiquement dans l'annexe B pour le cas à trois phases.

La **seconde partie** du mémoire est consacrée à l'étude de la méthode d'homogénéisation du comportement non linéaire d'un matériau hétérogène en vue d'une application aux roches étudiées dans ce travail de thèse. L'observation des différents essais triaxiaux a montré que la roche a un comportement qui diffère selon le confinement. Lorsque le confinement est faible, le comportement est dilatant. Puis, au fur et à mesure de l'augmentation du confinement, le comportement contractant de la roche est observé. Le *chapitre 4* vise à étudier ce type de comportement en exposant d'abord les principes de base de l'approche incrémentale de Hill [55] ainsi que l'estimation de l'approche en utilisant les différentes procédures d'isotropisation. Ensuite, le comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope proposé dans la thèse de A.Guéry [45] est envisagé. En compararant les estimations des différentes méthodes ou techniques d'isotropisation, une technique d'homogénéisation a été lancée pour décrire le comportement non-linéaire de la phase d'un matériau de sphères composites donnant toujours des opérateurs tangents macroscopique et de localisation isotropes.

Le comportement non linéaire de l'interface imparfaite du matériau de sphères composites est développé dans le *chapitre 5*. L'idée est basée sur les liens réciproques des propriétés mécaniques de l'interface aux sauts de déplacement dans le modèle d'interface imparfaite *" linear spring model "*. De plus, le saut de déplacement est une grandeur variable et dépend généralement du moyen et de la valeur du chargement imposé (chapitre 3). Le comportement non linéaire d'interface a alors été construit par l'introduction d'une dépendance entre ces grandeurs, des points de vue mécanique et mathémathique.

Dans la **dernière partie** de ce mémoire, les méthodes et modèles d'homogénéisation présentées et développées dans les deux parties précédentes ont été appliquées aux géomatériaux étudiés (calcaire oolithique, minerai de fer) pour estimer leurs comportements macroscopiques. Les études de la microstructure ont montré que les roches poreuses étudiées peuvent être vues généralement comme des matériaux composites à trois phases : oolithes sphériques, zone de transition oolithe

- matrice et matrice inter-oolithique. La zone de transition d'interface a été prise comme une interface imparfaite ou une interphase très mince et de propriétés élastiques très faibles. Ces roches sont homogénéisées en poro-élasticité à l'aide de la méthode d'homogénéisation à deux étapes. A la première étape, les oolithes et la matrice inter-oolithique ont été homogénéisées en utilisant l'approche autocohérente itérative. Les deux constituants dans les calcaires oolithiques (*chapitre 6*) sont composés de cristaux calcitiques et de pores supposés sphériques. Dans le minerai de fer de Lorraine (*chapitre 7*), les oolithes sont constituées par des cristaux de goethite et de pores supposés de forme sphéroïdale aplatie de rapport d'aspect $\epsilon = 0.05$ et obéissant à une distribution isotrope ; la solution des poro-propriétés d'un matériau polycristallin multiphasique (chapitre 1) a été appliquée à l'estimation du tenseur et du module de Biot de la phase matricielle composée de deux constituants solides (calcite et sidérite) et d'une phase poreuse. Dans la seconde étape, les propriétés poroélastiques linéaires effectives de ces roches ont été estimées en utilisant le modèle de sphères composites. Le modèle retenu (à trois phases SCII ou à quatre phase SCIP) dépend des propriétés géométriques et mécaniques de la zone de transition d'interface.

Un autre travail dans cette partie vise à étudier le comportement élasto-plastique des calcaires oolithiques et du minerai de fer de Lorraine. Les études de la microstructure et du mécanisme de plasticité ont permis de proposer un comportement élasto-plastique dans la matrice, et élastique linéaire dans les oolithes. Le comportement élasto-plastique de type Drucker-Prager non associé avec écrouissage isotrope et la technique d'homogénéisation pour un matériau de sphères composites présentés dans le chapitre 4 ont été appliqués et ont bien reproduit le comportement dilatant des géomatériaux étudiés. On a également appliqué le modèle non linéaire de l'interface développé dans le chapitre 5 pour étudier l'influence sensible du comportement local de la zone de transition sur le comportement macroscopique.

On a également envisagé le cas particulier du calcaire oolithique de Lavoux qui a été vu comme un assemblage de grains d'oolithes dégradés au niveau du cortex, de grains de sparite et de macropores. La méthode d'homogénéisation à deux étapes et le modèle du matériau en double porosité ont été appliqués à la détermination du comportement poro-élastique de cette roche particulière. On a également démontré le rôle important de la zone de transition interfacialle qui est vue comme une interphase de faibles propriétés mécaniques. En simulant le comportement élasto-plastique de la roche, cette interphase retient un comportement élasto-plastique. Le comportement des oolithes et des grains de sparite est supposé être élastique linéaire. En comparant avec des mesures de laboratoire, on a constaté des bonnes corrélations données par le modèle dévellopé.

Ce travail nous a permis de mettre en place des méthodes et modèles d'homogénéisation micromécaniques efficaces pour appréhender le comportement micro-macromécanique des géomatériaux

hétérogènes, notamment les calcaires oolithiques et le minerai de fer de Lorraine. A l'issue de ce travail de thèse, des perspectives s'ouvrent et portent sur :

– L'étude plus précise de la microstructure de la roche : forme des oolithes, des pores et leur distribution dans la roche. Cela permet d'améliorer les modèles géométrique et d'homogénéisation par exemple le modèle ellipsoïdes composites de Berbenni et Cherkaoui [11] pour obtenir des meilleures descriptions du comportement macroscopique de la roche.

– L'essai d'indentation du minerai de fer de Lorraine permet d'obtenir les propriétés micromécaniques des constituants (oolithe, matrice) et ensuite de bien identifier les paramètres du modèle de la roche.

– L'essai de nano-indentation à développer permet de caractériser la structure hétérogène des oolithes, de la zone de transition oolithe-matrice.

– L'extension au comportement à long et très long terme incluant les phénomènes de vieillissement (couplage chemo-mécanique).

– L'implantation des modèles dans un code de calcul de structure couplé THM (Code-Aster) en vue de l'application à des calculs d'ouvrage.

Bibliographie

[1] J.D. Achenbach and H. Zhu. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 37 :381–393, 1989.

[2] J.D. Achenbach and H. Zhu. Effect of interphases on micro and macromechanical behavior of hexagonal-array fiber composites. *J. Appl. Mech.*, 57 :956–963, 1990.

[3] C. Auvray. Rapport d'expertise : Observation microscopique du calcaire de lavoux. Technical report, LaEGO - ENSG - Nancy Université et "Thin Section Lab", 2010.

[4] P. Bariand, F. Cesbron, and J. Geffroy. *Les minéraux : Minéraux de concentration d'éléments commus et d'éléments rares*, volume Vol 3. Minéraux et Fossiles, Meung-sur-Loire, France, 1978.

[5] B. Bary and S. Béjaoui. Assessment of diffusive and mechanical properties of hardened cement pastes using a multi-coated sphere assemblage model. *Cem. Conc. Res*, 36 :245–258, 2006.

[6] J.D. Bass. *Elasticity of minerals, glasses and melts*. Mineral Physics and Crystallography, Handbook of Physical Constants AGU Reference Shelf 2, 1995.

[7] E. Bemer, O. Vincké, and P. Longuemare. Geomechanical log deduced from porosity and mineralogical content. *Oil Gas Sci. Tech.*, 59(4) :405–426, 2004.

[8] A. Benhamida, I. Djeran-Maigrea, H. Dumontet, and S. Smaoui. Clay compaction modelling by homogenization theory. *Int. J. Roc. Mech Min. Sci.*, 42 :996–1005, 2005.

[9] A. Benhamida and H. Dumontet. *Etude micromécanique du comportement de matériaux hétérogènes par approche itérative*. Acte du sixième Colloque National an Calcul des Structures, Hermès, 2003.

[10] Y. Benveniste. The effective mechanical behaviour of composite materials with imperfect contact between the constituents. *Mechanics of Materials*, 4 :197–208, 1985.

[11] S. Berbenni and M. Cherkaoui. Homogenization of multicoated inclusion-reinforced linear elastic composites with eigenstrains : application to thermoelastic behavior. *Philosophical Magazine, DOI : 10.1080/14786431003767033*, 2010.

[12] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome I : Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques.* Hermès, Paris, 2001.

[13] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux. Tome II : Comportements non linéaires et problèmes ouverts.* Hermès, Paris, 2001.

[14] T. Bourbié, O. Coussy, and B. Zinszner. *Acoustique des milieux poreux.* Ed. Technip, 1986.

[15] N. Burlion, G. Pijaudier-Cabot, and N. Dahan. Experimental analysis of compaction of concrete and motar. *Int. J. Num. Anal. Meth. Goemech.*, 25 :1467–1486, 2001.

[16] L. Capolungo, S. Benkassem, M. Cherkaoui, and J. Qu. Self-consistent scale transition with imperfect interfaces : Application to nanocrystalline materials. *Acta Materialia*, 56 :15461554, 2008.

[17] J. L. Chaboche and P. Kanouté. Sur les approximations "isotrope" et "anisotrope" de l'opérateur tangent pour les méthodes tangentes incrémentale et affine. *C. R. Mecanique*, 331 :857–864, 2003.

[18] J. L. Chaboche, P. Kanouté, and A. Roos. On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites. *Inter. Jour. of Plast.*, 21 :1409–1434, 2005.

[19] N.I. Christensen. Elastic properties of polycrystalline magnesium, iron and manganese carbonates to 10 kilobars. *J. Geophys. Res.*, 77(2) :369–372, Jan 1972.

[20] R.M. Christensen and K.H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *J. Mech. Phys. Solids*, 27, 1979.

[21] O. Coussy. *Mécanique des Milieux Poreux.* Ed. Technip, Paris, 1991.

[22] R.T. Cygan and al. Atomistic models of carbonate minerals : Bulk and surface structures, defects and diffusion. July - 2001.

[23] D.P. Do. *Infuence de la microstructure sur les propriétés mécaniques, thermique et hydrique des roches poreuses partiellement saturées : approche micromécanique et modélisation macroscopique.* PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2008.

[24] I. Doghri and A. Ouaar. Homogenization of two-phase composite materials and structures. study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms. *Internat. Journal of Solids and Structures*, 40 :1681–1712, 2003.

[25] L. Dormieux, D. Kondo, and F. J. Ulm. *Microporomechanics.* John Wiley and Sons, 2006.

[26] L. Dormieux, J. Sanahuja, and Y. Maalej. Résistance d'un polycristal avec interfaces intergranulaires imparfaites. *C. R. Mécanique*, 335 :25–31, 2007.

[27] H.L. Duan, Y. Jiao, X. Yi, Z.P. Huang, and J. Wang. Solutions of inhomogeneity problems with graded shells and application to core-shell nanoparticles and composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 54 :1401–1425, 2006.

[28] H.L. Duan and B.L. Karihaloo. Thermo-elastic properties of heterogeneous materials with imperfect interfaces : Generalized levins formula and hills connections. *J. Mech. Phys. Solids*, 55 :1036–1052, 2007.

[29] H.L. Duan, X. Yi, Z.P. Huang, and J. Wang. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. part i : Application and scaling laws. *Mechanics of Materials*, 39 :94–103, 2007.

[30] H.L. Duan, X. Yi, Z.P. Huang, and J. Wang. A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. part i : Theoretical framework. *Mechanics of Materials*, 39 :81–93, 2007.

[31] G. J. Dvorak and Y. Benveniste. On transformation strains and uniform fields in multiphase elastic media. *Proc. R. Soc. Lond.*, A437 :291–310, 1992.

[32] J.D. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. *Prog. Solid State Phys*, 3 :79–114, 1956.

[33] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problem. *Pro. Roy. Soci. Lon*, (241) :376–396, 1957.

[34] J. Eslami. *Etude de l'endommagement à court terme et long terme d'une roche poreuse par méthodes acoustiques*. PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2010.

[35] D. Fabre and J. Gustkiewicz. Poroelastic properties of limestones and sandstones under hydrostatic conditions. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci*, 34 :127–134, 1997.

[36] A. Fritsch, L. Dormieux, C. Hellmich, and J. Sanahuja. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Journal of Materials Science*, 42 :1573–4803, 2007.

[37] S. Ghabezloo, J. Sulem, S. Guédon, and F. Martineau. Effective stress law for the permeability of a limestone. *Int. J. Rock. Mech. Min. Sci.*, 46 :297–306, 2009.

[38] C. González and J. Llorca. A self-consistent approach to the elasto-plastic behaviour of two-phase materials including damage. *J. Mech. Phys. Solids*, 48 :675–692, 2000.

[39] A. Gourri. *Contribution à l'étude de l'influence des conditions de drainage sur les propriétés poro-élastiques des roches carbonatées*. PhD thesis, Université Grenoble 1, 1991.

[40] D. Grgic. *Modélisation du comportement à court et à long terme des roches de la formation ferrifère lorraine*. PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2001.

[41] D. Grgic and F. Homand. Caractérisation physique du minerai de fer de la couche grise (sondages de joeuf). etude de la porosité. Technical Report Rapport Gisos n°3, INPL-LaEGO, 1999.

[42] D. Grgic and F. Homand. Influence de la percolation de co_2 sur les comportements mécanique et physique du calcaire de lavoux (analogue de la roche réservoir). Technical report, LaEGO - ENSG - Nancy Université, 2009.

[43] D. Grgic, A. Joyeux, and F. Homand. Etude du vieillissement du minerai de fer. Technical Report Rapport Gisos n°18, INPL-LaEGO, 2000.

[44] S.T. Gu. *Contributions à la modélisation des interfaces imparfaites et à lhomogénéisation des matériaux hétérogènes*. PhD thesis, Université de Paris-Est, 2007.

[45] A. Guéry. *Contribution à la modélisation micromécanique du comportement non linéaire de l'argilite du Callovo-Oxfordien*. PhD thesis, Université de Lille I, 2007.

[46] A. Guéry, F. Cormery, J. F. Shao, and D. Kondo. A micromechanical model of elastoplastic and damage behavior of a cohesive geomaterial. *Int. Jour. of Sol. and Struc.*, 45 :1406–1429, 2008.

[47] D.J. Hart and H.F. Wang. Laboratory measurements of a complete set of poroelastic moduli for berea sandstone and indiana limestone. *J. Geo. Res.*, 100 :17741–17751, 1995.

[48] Z. Hashin. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29(143), 1962.

[49] Z. Hashin. Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. *Mechanics of Materials*, 8 :333–348, 1990.

[50] Z. Hashin. Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. *J. Mech. Phys. Solids*, 39(6) :745–762, 1991.

[51] Z. Hashin. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 50 :2509–2537, 2002.

[52] Z. Hashin and P.J.M. Monteiro. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste. *Cem. Concr. Res.*, 32 :1291–1300, 2002.

[53] A.V. Hershey. The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals. *J. Appl. Mech.*, 21 :226–240, 1954.

[54] E. Hervé and A. Zaoui. n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *Int. J. Eng. Sci.*, 31 :1–10, 1993.

[55] R. Hill. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13 :213–222, 1965.

[56] J.H. Huang, R. Furuhashi, and T. Mura. Frictional sliding inclusions. *J. Mech. Phys. Solids*, 41 :247–265, 1993.

[57] J. W. Hutchinson. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 348 :101–127, 1976.

[58] Q.V. Huynh. *Estimation des propriétés poromécaniques effectives des argilites : apport des méthodes d'homogénéisation.* PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 2006.

[59] B. Jiang and G.J. Weng. A generalized self-consistent polycrystal model for the yield strength of nanocrystalline materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 52 :11251149, 2004.

[60] T. Jiang and J.F. Shao. On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization. *Comp. Mat. Sci.*, 46 :447–451, 2009.

[61] E. Knittle. *Static Compression Measurements of Equations of State.* Mineral Physics and Crystallography, Handbook of Physical Constants AGU Reference Shelf 2, 1995.

[62] T.H. Le, L. Dormieux, L. Jeannin, N. Burlion, and Barthélémy J-F. Nonlinear behavior of matrix-inclusion composites under high confining pressure : application to concrete and motar. *C. R. Mecanique*, 336 :670–676, 2008.

[63] G. Li, Y. Zhao, and S.S. Pang. Four-phase sphere modeling of effective bulk modulus of concrete. *Cem. Conc. Res*, 29 :839–845, 1999.

[64] G. Li, Y. Zhao, S.S. Pang, and Y. Li. Effective young's modulus estimation of concrete. *Cem. Conc. Res*, 29 :1455–1462, 1999.

[65] M. Lion. *Influence de la température sur le comportement poromécanique ou hydraulique d'une roche carbonatée et d'un mortier. Etudes expérimentales.* PhD thesis, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2004.

[66] M. Lion, B. Ledésert, F. Skoczylas, P. Recourt, and T. Dubois. How does micropetrography help us to understand the permeability and poromechanical behaviour of a rock. *Terra Nova*, 16 :351–357, 2004.

[67] M. Lion, F. Skoczylas, and B. Ledésert. Determination of the main hydraulic and poro-elastic properties of a limestone from bourgogne, france. *Int. J. Rock Mech. Mining Sci*, 41 :915–925, 2004.

[68] R. Lipton. Reciprocal relations, bounds, and size effects for composites with highly conducting interface. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 57 :342–363, 1997.

[69] R. Lipton. Variational methods, bounds and size effects for composites with highly conducting interface. *J. Mech. Phys. Solids*, 45 :361–384, 1997.

[70] R. Lipton. Bounds for the effective conductivity of a composite with an imperfect interface. *Proceedings : Math, Phys and Eng Sci*, 2010 :1501–1507, 2001.

[71] A.K. Mal and S.K. Bose. Dynamic elastic moduli of a suspension of imperfectly bonded spheres. *Proc. Camb. Phil. Soc*, 76 :587–600, 1975.

[72] J. C. Michel and P. Suquet. Nonuniform transformation field analysis. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 40 :6937–6955, 2003.

[73] J. C. Michel and P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :5477–5502, 2004.

[74] Y. Monnin. *Méthodologie pour décrire le gonflement multi-échelle de calcaires siliceux soumis à la réaction alcali-silice dans le matériau béton.* PhD thesis, Université dArtois, 2005.

[75] T. Mura, I. Jasiuk, and B. Tsuchida. The stress field of a sliding inclusion. *International Journal of Solids and Structures*, 21 :1165–1179, 1985.

[76] T. Nagai. Variation of hydrogen bonded *o*...*o* distances in goethite at high pressure. *American Mineralogist*, 88 :1423–1427, 2003.

[77] J.A. Nairn. Numerical implementation of imperfect interfaces. *Computational Materials Science*, 40 :525536, 2007.

[78] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogenous materials.* North Holland - Elsevier, Amsterdam, 1999.

[79] S. Nie and C. Basaran. A micromechanical model for effective elastic properties of particulate composites with imperfect interfacial bonds. *Int. J. Sol. Struc.*, 42 :41794191, 2005.

[80] A. Norris. A differential scheme for the effective moduli of composites. *Mech. Mater*, 4 :1–16, 1985.

[81] O. Pierard and I. Doghri. A study of various estimates of the macroscopic tangent operator in the incremental homogenization of elasto-plastic composites. *Int. J. Mult. Comp. Eng.*, 4 :521–543, 2006.

[82] J.L. Pineau. *Contribution à la caractérisation géomécanique des roches. Application au minerai de fer lorrain.* PhD thesis, I.N.P.L - Nancy, 1978.

[83] G. Piquet and al. The equation of state and high-pressure behavior of magnesite. *American Mineralogist*, 82 :682–688, 1997.

[84] G. Piquet and al. Structure refinements of magnesite at very high pressure. *American Mineralogist*, 87 :1261–1265, 2002.

[85] J. Pironon, J. Sterpenich, A. Géhin, E. Perfetti, J. Sausse, G. Hubert, and D. Grgic. Réactivité d'un calcaire oolithique en présence de co2 aqueux et supercritique avec et sans gradient thermique. Technical report, ANR Palais Beaumont, Pau, 2007.

[86] P. Ponte Castañeda. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, 39 :45–71, 1991.

[87] G. Ramesh, E.D. Sotelino, and W.F. Chen. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. *Cem. Conc. Res*, 26(4) :611–622, 1996.

[88] A. Rekik, F. Auslender, M. Bornert, and A. Zaoui. Objective evaluation of linearization procedures in nonlinear homogenization : A methodology and some implications on the accuracy of micromechanical schemes. *Int. Jour. Sol. Struc.*, 44 :3468–3496, 2007.

[89] A. Rekik, M. Bornert, F. Auslender, and A. Zaoui. A methodology for an accurate evaluation of the linearization procedures in nonlinear mean field homogenization. *C. R. Mecanique*, 333 :789–795, 2005.

[90] J. Sanahuja. *Impact de la morphologie structurale sur les performances mécaniques des matériaux de construction : application au plâtre et à la pâte de ciment.* PhD thesis.

[91] J. Santillan and al. A high-pressure infrared and x-ray study of siderite and manganes carbonate : Comparison with dolomite. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, (143) :291–304, 2004.

[92] Web : Schlumberger. http ://www.slb.com/modules/mnemonics.

[93] H.M. Shodja, S.M. Tabatabaei, and M.T. Kamali. A piezoelectricinhomogeneity system with imperfect interface. *Int J of Eng Sci*, 44 :291–311, 2006.

[94] J. C. Simo and Hugues T. J. *Computational inelasticity.* Springer, New York, 1998.

[95] S. Smaoui. *Modélisation micromécanique du comportement de milieux poreux non linéaire : Applications aux argiles compactées.* PhD thesis, Université de Pierre et Marie Curie, Paris 6, 2007.

[96] S. Smaoui, A. Ben Hamida, I. Djeran-Maigre, and H. Dumontet. Micro-macro approaches coupled to an iterative process for nonlinear porous media porous media. *Computers, Materials and Continua*, 4 :153–162, 2006.

[97] J.R. Smyth and T.C McCormick. *Crystallographic Data for Minerals.* Mineral Physics and Crystallography, Handbook of Physical Constants AGU Reference Shelf 2, 1995.

[98] P. Suquet. Overall properties of nonlinear composites : a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castañeda's nonlinear variational procedure. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 320 :563571, 1995.

[99] P. Suquet. Effective behavior of nonlinear composites. In : Continuum micromechanics, P. Suquet ed., Springer Verlag Wien, 197-264, 1997.

[100] H. Tan, C. Liu, Y. Huang, and P.H. Geubelle. The cohesive law for the particle/matrix interfaces in high explosives. *J. Mech. Phys. Solids*, 53 :18921917, 2005.

[101] P.S. Theocaris. *The mesophase concept in composites.* Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[102] S. Torquato. *Random heterogeneous materials. Microstructure and marcoscopique properties.* Springer-Verlag, 2002.

[103] P-G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Ductile damage of porous materials with two populations of voids. *Comp. Rend. Méca.*, 336(1-2) :245 – 259, 2008.

[104] P-G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : I. instantaneous constitutive relations. *Int. J. Sol. and Struc.*, 46(3-4) :480 – 506, 2009.

[105] P-G. Vincent, Y. Monerie, and P. Suquet. Porous materials with two populations of voids under internal pressure : Ii. growth and coalescence of voids. *Int. J. Sol. and Struc.*, 46(3-4) :507 – 526, 2009.

[106] X. Wang and Z. Zhong. Three-dimensional solution of smart laminated anisotropic circular cylindrical shells with imperfect bonding. *Int J Sol and Struc*, 40 :5901–5921, 2003.

[107] Y. Xu. *Approche multi-échelle pour l'étude du comportement des systèmes polyphasiques-Application aux milieux poreux non saturés.* PhD thesis, ENPC,Paris, 2004.

[108] A. Zaoui. *Matériaux hétérogènes et composites.* Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 1998.

[109] J. Zhang and al. Effects of $mg - fe_{2+}$ substitution in calcite - structure carbonates : Thermoelastic properties. *American Mineralogist*, 83 :280–287, 1998.

[110] J. Zhang and al. Comparative compressibilities of calcite-structure carbonates : Deviations from empirical relations. *American Mineralogist*, 84 :861–870, 1999.

[111] J.J. Zhang. *Time-lapse seismic surveys : Rock physics basis.* PhD thesis, University of Calgary, Alberta, 2001.

[112] X.H. Zhao and W.F. Chen. The effective elastic moduli of concrete and composite materials. *Composites Part B*, 29B :31–40, 1998.

[113] R. Zouari, A. Benhamida, and H. Dumontet. A micromechanical iterative approach for the behavior of polydispersed composites. *Int. J. Sol. Struc.*, 45 :31393152, 2008.

Annexe A

Modèle des sphères composites à interface parfaite (SCIP)

A.1 Modèle à trois phases SCIP

Ce paragraphe présente brièvement la solution analytique en poro-élasticité linéaire et isotrope pour le modèle à trois phases "sphères composites". Ce modèle comprend trois phases : inclusion sphérique (phase 1) , sphère concentrique (phase 2), et région extérieure homogène équivalente. On considère le cas dans lequel les phases sont isotropes poroélastiques et l'interface entre les phases est supposée parfaite. Chaque phase est caractérisée par les grandeurs k_i, μ_i, b_i et N_i respectivement les modules d'élaticité, le coefficient et le module de Biot du solide.

A.1.1 Module de compressibilité k_{3ph}^{SCIP}

$$k_{3ph}^{SCIP} = k_2 + \frac{f_1\,(k_1 - k_2)}{1 + (1 - f_1)\,\frac{k_1 - k_2}{k_2 + \frac{4}{3}\,\mu_2}} \tag{A.1}$$

A.1.2 Module de cisaillement μ_{3ph}^{SCIP}

Le module de cisaillement équivalent μ_{3ph}^{SCIP} est donnée par la solution positive unique de l'équation suivante :

$$\boldsymbol{A}\,(\mu_{3ph}^{SCIP})^2 + \boldsymbol{B}\,\mu_{3ph}^{SCIP} + \boldsymbol{C} = 0 \tag{A.2}$$

où $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C}$ s'écrivent en fonction des caractéristiques des phases par les relations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= 2\,f_1^{7/3}\,(25\,\eta_5 + 4\,f_1\,\eta_3\,\eta_6\,(5\,\nu_2 - 4)) \\
&\quad + \eta_1\,(252\,f_1^{5/3}\,\eta_6 - 50\,f_1\,\eta_4\,\eta_6 + 4\,\eta_2\,(10\,\nu_2 - 7)) \\
\boldsymbol{B} &= -\,3\,\mu_2\,\eta_1\,(168\,f_1^{5/3}\,\eta_6 + 50\,f_1\,\eta_6\,(\nu_2 - 3)\,\nu_2 + \eta_2\,(15\,\nu_2 - 7)) \\
&\quad - 4\,\mu_2\,f_1^{7/3}\,(25\,\eta_5 + f_1\,\eta_3\,\eta_6\,(5\,\nu_2 - 1)) \\
\boldsymbol{C} &= \mu_2^2\,(2\,f_1^{7/3}\,(25\,\eta_5 + 2\,f_1\,\eta_3\,\eta_6\,(7 - 5\,\nu_2)) \\
&\quad + \mu_2^2\,\eta_1\,(\eta_2\,(7 + 5\,\nu_2) + f_1\,\eta_6\,(252\,f_1^{2/3} + 25\,(\nu_2^2 - 7)))
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta_1 &= 7\,(\mu_1 + 4\,\mu_2) + 5\,(\mu_1 - 8\,\mu_2)\,\nu_1 \\
\eta_2 &= 5\,(2\,\mu_1 + \mu_2)\,\nu_2 - 8\,\mu_1 - 7\,\mu_2) \\
\eta_3 &= \mu_1\,(7 + 5\,\nu_1)\,(10\,\nu_2 - 7) - \mu_2\,(10\,\nu_1 - 7)\,(7 + 5\,\nu_2) \\
\eta_4 &= 7 + 4\,\nu_2\,(2\,\nu_2 - 3) \\
\eta_5 &= 2\,\mu_2^2\,(10\,\nu_1 - 7)\,(\nu_2^2 - 7) - \eta_4\,\mu_1^2\,(7 + 5\,\nu_1) \\
&\quad + \mu_1\,\mu_2\,(49\,(\nu_1 - 1) + 6\,(7 + 11\,\nu_1)\,\nu_2 + 4\,(5\,\nu_1 - 14)\,\nu_2^2) \\
\eta_6 &= \mu_1 - \mu_2
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

A.1.3 Coefficient de Biot b_{3ph}^{SCIP}

$$
b_{3ph}^{SCIP} = b2 + \frac{(3k_2 + 4\mu_2)((b_1 - b_2)\,f_1}{4\mu_2 + 3k_1(1 - f_1) + 3\overset{\circ}{2}\,f_1} \tag{A.5}
$$

A.1.4 Module de Biot N_{3ph}^{SCIP}

$$
\frac{1}{N_{3ph}^{SCIP}} = \frac{f_1}{N_1} + \frac{1 - f_1}{N_2} + \frac{3\,f_1\,(1 - f_1)(b_1 - b_2)^2}{3(1 - f_1)k_1 + 3f_1k_2 + 4\mu_2} \tag{A.6}
$$

A.1.5 Tenseurs de localisation

$$
\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &= \mathcal{A}_1^K\,\mathbb{K} + \mathcal{A}_1^J\,\mathbb{J} \\
\mathbb{A}_2 &= \mathcal{A}_2^K\,\mathbb{K} + \mathcal{A}_2^J\,\mathbb{J}
\end{aligned}
\tag{A.7}
$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1^J &= \frac{3\,k_2 + 4\,\mu_2}{3(1-f_1)k_1 + 3f_1k_2 + 4\mu_2}\\ \mathcal{A}_2^J &= \frac{3\,k_1 + 4\,\mu_2}{3(1-f_1)k_1 + 3f_1k_2 + 4\mu_2}\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1^K &= \frac{\mathcal{NA}_1^K}{\mathcal{DNA}^K}\\ \mathcal{A}_2^K &= \frac{\mathcal{NA}_2^K}{\mathcal{DNA}^K}\end{aligned} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{NA}_1^K &= 225\,\mu_2\,\mu_3\,(\nu_2-1)\,(\nu_3-1)\,(\eta_1\,\eta_9 - 4\,f_1^{7/3}\,\eta_3\,\eta_7)\\ \mathcal{NA}_2^K &= 15\,\mu_3\,(\nu_3-1)\,(\eta_1\,\eta_6\,\eta_7\,\eta_{14} - 210\,(f_1^{2/3}-1)\,f_1^{5/3}\,\eta_6\,\eta_7\,\eta_{12}\\ &\quad +\eta_2\,(\eta_1\,\eta_9 + 10\,f_1^{7/3}\,\eta_7\,\eta_{13} - 294\,f_1^{5/3}\,\eta_6\,\eta_7))\\ \mathcal{DNA}^K &= 252\,f_1^{5/3}\,\eta_1\,\eta_6\,\eta_7\,\eta_8 + \eta_1\,\eta_2\,\eta_8\,\eta_9 + 50\,f_1^{7/3}\,\eta_5\,\eta_7\,\eta_8\\ &\quad -8\,f_1^{10/3}\,\eta_3\,\eta_6\,\eta_7\,\eta_{10} + 50\,f_1\,\eta_1\,\eta_6\,\eta_{11}\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 7\,(\mu_1 + 4\,\mu_2) + 5\,(\mu_1 - 8\,\mu_2)\,\nu_1\\ \eta_2 &= 5\,(2\,\mu_1 + \mu_2)\,\nu_2 - 8\,\mu_1 - 7\,\mu_2)\\ \eta_3 &= \mu_1\,(7 + 5\,\nu_1)\,(10\,\nu_2 - 7) - \mu_2\,(10\,\nu_1 - 7)\,(7 + 5\,\nu_2)\\ \eta_4 &= 7 + 4\,\nu_2\,(2\,\nu_2 - 3)\\ \eta_5 &= 2\,\mu_2^2\,(10\,\nu_1 - 7)\,(\nu_2^2 - 7) - \eta_4\,\mu_1^2\,(7 + 5\,\nu_1)\\ &\quad + \mu_1\,\mu_2\,(49\,(\nu_1 - 1) + 6\,(7 + 11\,\nu_1)\,\nu_2 + 4\,(5\,\nu_1 - 14)\,\nu_2^2)\\ \eta_6 &= \mu_1 - \mu_2\\ \eta_7 &= \mu_2 - \mu_3\\ \eta_8 &= 5\,(2\,\mu_2 + \mu_3)\,\nu_3 - 8\,\mu_2 - 7\,\mu_3)\\ \eta_9 &= 7\,(\mu_2 + 4\,\mu_3) + 5\,(\mu_2 - 8\,\mu_3)\,\nu_2\\ \eta_{10} &= \mu_3\,(4 - 5\,\nu_2)\,(5\,\nu_3 - 7) + \mu_2\,(5\,\nu_2 - 7)\,(5\,\nu_3 - 4)\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$
\begin{aligned}
\eta_{11} &= \mu_3^2\,\eta_4\,(5\,\nu_3-7)+\mu_2^2\,(\nu_2^2-7)\,(5\,\nu_3-4)\\
&\quad +3\,\mu_2\,\mu_3\,(7-7\,\nu_3+\nu_2\,(13\,\nu_2+27\,\nu_3-15\,\nu_2\,\nu_3-21))\\
\eta_{12} &= \mu_2\,(7-24\,\nu_1+7\,\nu_2)+\mu_1\,(3\,\nu_1+14\,\nu_2+7)\\
\eta_{13} &= 7\,\mu_1\,(7+2\,\nu_1)-4\,\mu_1\,(7+5\,\nu_1)\,\nu_2+\mu_2\,(4\,\nu_1\,(7+5\,\nu_2)-7\,(7+2\,\nu_2))\\
\eta_{14} &= \frac{126\,f_1\,(f_1^2+f_1^{5/3}-f_1^{1/3}-1)}{1+f_1^{1/3}+f_1^{2/3}}\\
\nu_3 &= \frac{3\,k_3-2\,\mu_3}{2\,(3\,k_3+\mu_3)}
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

avec k_3 et μ_3 les modules d'élasticité effectifs des sphères composites obtenus par les relations A.1 et A.2.

A.2 Modèle à quatres phases SCIP

Ce paragraphe présente la solution en poro-élasticité linéaire et isotrope pour le modèle à quatre phases "sphères composites". Ce modèle a été appliqué à plusieurs matériaux poreux, notamment au béton en considérant celui-ci comme un matériau à trois phases : une matrice de ciment, des inclusions discrètes et une zone de transition à l'interface entre la matrice et l'inclusion [5, 52, 87, 63, 64, 112].

A.2.1 Module de compressibilité k_{4ph}^{SCIP}

$$
k_{4ph}^{SCIP} = k_3 - \frac{3\,k_3+4\,\mu_3}{3-\frac{f_1\,\omega_1+f_2\,\omega_2}{(f_1+f_2)\,(f_1\,\omega_3+f_2\,\omega_4)}}
\tag{A.13}
$$

avec :

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{3\,k_1+4\,\mu_3}{3\,k_1+4\,\mu_2} \quad , \quad \omega_2 = \frac{3\,k_2+4\,\mu_3}{3\,k_2+4\,\mu_2}\\
\omega_3 &= \frac{k_1-k_3}{3\,k_1+4\,\mu_2} \quad , \quad \omega_4 = \frac{3\,k_2-k_3}{3\,k_2+4\,\mu_2}
\end{aligned}
\tag{A.14}
$$

A partir de ce résultat, on peut retrouver le module de compressibilité dans le problème de trois phases k_{3ph}^{SCIP} (A.1) en faisant tendre la fraction volumique de phase la 2 f_2 vers zéro.

A.2.2 Module de cisaillement μ_{4ph}^{SCIP}

L'équation du déterminant de ce système d'équations est :

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{a}_{31} & \boldsymbol{a}_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{a}_{41} & \boldsymbol{a}_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} & a_{510} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} & a_{610} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} & a_{710} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} & a_{810} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{97} & a_{98} & a_{99} & a_{910} & a_{911} & a_{912} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{107} & a_{108} & a_{109} & a_{1010} & a_{1011} & a_{1012} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{117} & a_{118} & a_{119} & a_{1110} & a_{1111} & a_{1112} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{127} & a_{128} & a_{129} & a_{1210} & a_{1211} & a_{1212} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(A.15)}$$

Dans l'équation du déterminant, le module de cisaillement effectif μ_{4ph}^{SCIP} n'est présent que dans 4 éléments $(\boldsymbol{a}_{31}, \boldsymbol{a}_{32}, \boldsymbol{a}_{41}, \boldsymbol{a}_{42})$:

$$\boldsymbol{a}_{31} = \frac{3}{8}\boldsymbol{a}_{32} = 4\boldsymbol{a}_{41} = -\boldsymbol{a}_{42} = \frac{\mu_{4ph}^{SCIP}}{\mu_3} \quad \text{(A.16)}$$

Les autres éléments ne dépendent que des caractéristiques des trois phases $1, 2$ et 3. La solution de μ_{4ph}^{SCIP} s'obtient à partir de la solution de l'équation du déterminant :

$$\boldsymbol{D} = 0 \quad \text{(A.17)}$$

$$
\begin{array}{llll}
a_{11} = 1 & a_{21} = 1 & \boldsymbol{a}_{31} = \dfrac{\mu_e^{4ph}}{\mu_3} & \boldsymbol{a}_{41} = \dfrac{\mu_e^{4ph}}{4\,\mu_3} \\
a_{12} = -\dfrac{2}{3} & a_{22} = 1 & \boldsymbol{a}_{32} = \dfrac{8\,\mu_e^{4ph}}{3\,\mu_3} & \boldsymbol{a}_{42} = -\dfrac{\mu_e^{4ph}}{\mu_3} \\
a_{13} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{(6\,\nu_3)} & a_{23} = -1 & a_{33} = -\dfrac{7 + 2\,\nu_3}{(6\,\nu_3)} & a_{43} = \dfrac{1}{8} \\
a_{14} = -1 & a_{24} = -1 & a_{34} = -1 & a_{44} = -\dfrac{1}{4} \\
a_{15} = -1 + \dfrac{3}{(5 - 4\,\nu_3)} & a_{25} = -1 & a_{35} = -\dfrac{2 + 2\,\nu_3}{(4\,\nu_3 - 5)} & a_{45} = \dfrac{\nu_3 - 5}{8\,\nu_3 - 10} \\
a_{16} = \dfrac{2}{3} & a_{26} = -1 & a_{36} = -\dfrac{8}{3} & a_{46} = 1 \\
a_{97} = \dfrac{f_1^{2/3}(7 - 4\,\nu_2)}{6\,\nu_2} & a_{107} = f_1^{7/3} & a_{117} = \dfrac{f_1^{2/3}(7 + 2\,\nu_2)}{6\,\nu_2} & a_{127} = -\dfrac{f_1^{2/3}}{2} \\
a_{98} = 1 & a_{108} = f_1^{5/3} & a_{118} = 1 & a_{128} = 1 \\
a_{99} = \dfrac{2 - 4\,\nu_2}{f_1(5 - 4\,\nu_2)} & a_{109} = f_1^{2/3} & a_{119} = \dfrac{2 + 2\,\nu_2}{f_1(5 - 4\,\nu_2)} & a_{129} = \dfrac{2\,\nu_2 - 10}{f_1(5 - 4\,\nu_2)} \\
a_{910} = -\dfrac{2}{3\,f_1^{5/3}} & a_{1010} = 1 & a_{1110} = \dfrac{8}{3\,f_1^{5/3}} & a_{1210} = \dfrac{-4}{f_1^{5/3}} \\
a_{911} = -\dfrac{f_1^{2/3}(7 - 4\,\nu_1)}{6\,\nu_1} & a_{1011} = -f_1^{7/3} & a_{1111} = -\dfrac{f_1^{2/3}(7 + 2\,\nu_1)}{6\,\nu_1}\dfrac{\mu_1}{\mu_2} & a_{1211} = \dfrac{f_1^{2/3}}{2}\dfrac{\mu_1}{\mu_2} \\
a_{912} = -1 & a_{1012} = -f_1^{5/3} & a_{1112} = -\dfrac{\mu_1}{\mu_2} & a_{1212} = -\dfrac{\mu_1}{\mu_2}
\end{array}
\tag{A.18}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{53} &= \frac{(f_1+f_2)^{7/3}(7-4\,\nu_3)}{4\,\nu_3} & a_{63} &= (f_1+f_2)^{7/3}\\
a_{54} &= \frac{3}{2}\,(f_1+f_2)^{5/3} & a_{64} &= (f_1+f_2)^{5/3}\\
a_{55} &= 3\,\frac{(f_1+f_2)^{2/3}(2\,\nu_3-1)}{(4\,\nu_3-5)} & a_{65} &= (f_1+f_2)^{2/3}\\
a_{56} &= -1 & a_{66} &= 1\\
a_{57} &= \frac{(f_1+f_2)^{7/3}(-7+4\,\nu_2)}{4\,\nu_2} & a_{67} &= -(f_1+f_2)^{7/3}\\
a_{58} &= -\frac{3}{2}\,(f_1+f_2)^{5/3} & a_{68} &= -(f_1+f_2)^{5/3}\\
a_{59} &= -3\,\frac{(f_1+f_2)^{2/3}(2\,\nu_2-1)}{(4\,\nu_2-5)} & a_{69} &= -(f_1+f_2)^{2/3}\\
a_{510} &= 1 & a_{610} &= -1\\
a_{73} &= \frac{(f_1+f_2)^{7/3}(7+2\,\nu_3)}{16\,\nu_3} & a_{83} &= -\frac{1}{8}\,(f_1+f_2)^{7/3}\\
a_{74} &= \frac{3}{8}\,(f_1+f_2)^{5/3} & a_{84} &= \frac{1}{4}\,(f_1+f_2)^{5/3}\\
a_{75} &= -3\,\frac{(f_1+f_2)^{2/3}(\nu_3+1)}{4\,(4\,\nu_3-5)} & a_{85} &= \frac{(f_1+f_2)^{2/3}(\nu_3-5)}{(10-8\,\nu_3)}\\
a_{76} &= 1 & a_{86} &= -1\\
a_{77} &= -\frac{(f_1+f_2)^{7/3}(7+2\,\nu_2)}{16\,\nu_2}\,\frac{\mu_2}{\mu_3} & a_{87} &= \frac{1}{8}\,(f_1+f_2)^{7/3}\,\frac{\mu_2}{\mu_3}\\
a_{78} &= -\frac{3}{8}\,(f_1+f_2)^{5/3}\,\frac{\mu_2}{\mu_3} & a_{88} &= -\frac{1}{4}\,(f_1+f_2)^{5/3}\,\frac{\mu_2}{\mu_3}\\
a_{79} &= 3\,\frac{(f_1+f_2)^{2/3}(\nu_2+1)}{4\,(4\,\nu_2-5)}\,\frac{\mu_2}{\mu_3} & a_{89} &= -\frac{(f_1+f_2)^{2/3}(\nu_2-5)}{(10-8\,\nu_2)}\,\frac{\mu_2}{\mu_3}\\
a_{710} &= -\frac{\mu_2}{\mu_3} & a_{810} &= \frac{\mu_2}{\mu_3}
\end{aligned}
\tag{A.19}
$$

A.2.3 Coefficient de Biot b_{4ph}^{SCIP}

Le coefficient de Biot macroscopique b_{4ph}^{SCIP} s'écrit [5] :

$$
b_{4ph}^{SCIP} = b3 + \frac{(3k_3+4\mu_3)(f_1+f_2)((b_2-b_3)(4\mu_2(f_1+f_2)+3\Gamma_{12}) - f_1((b_2-b_1)(3k_2+4\mu_2)}{9\,(f_1+f_2)f_3k_1k_2 + 12\mu_2\Gamma_{21}f_3 + (3k_3(f_1+f_2)+4\mu_3)(3\Gamma_{12}+4\mu_2(f_1+f_2))} \tag{A.20}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
f_3 &= 1-f_1-f_2\\
\Gamma_{12} &= f_1k_2+f_2k_1\\
\Gamma_{21} &= f_1k_1+f_2k_2
\end{aligned}
\tag{A.21}
$$

A.2.4 Module de Biot N_{4ph}^{SCIP}

$$\frac{1}{N_{4ph}^{SCIP}} = \sum_{i=1}^{3} f_i \frac{1}{N_i} + \frac{\boldsymbol{NN}_{hom}}{\boldsymbol{DN}_{hom}} \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{NN}_{hom} = 3(&-(b_2-b_3)^2 f_3 (f_1+f_2)^2 (3k_1 \\
&+4\mu_2) + (b_1-b_2)^2 f_1^2 ((f_1+f_2)(3k_3+4\mu_2) - 4\mu_2 + 4\mu_3) \\
&-f_1(f_1+f_2)(3b_3^2 f_3(k_2-k_1) - 2b_1 b_3 f_3(3k_2+4\mu_2) + b_1^2(3f_3k_2 + 3(f_1+f_2)k_3 + 4\mu_3) \\
&+b_2^2((f_1+f_2)(3k_3+8\mu_2) + 4\mu_3 - 3f_3k_1 - 8\mu_2) \\
&-2b_2(b_1((f_1+f_2)(3k_3+4\mu_2) - 4\mu_2 + 4\mu_3) - b_3 f_3(3k_1+4\mu_2))))
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{DN}_{hom} = &-9(f_1+f_2)(f_3k_1k_2 + \Gamma_{12}k_3) - 12(f_3\Gamma_{21} + (f_1+f_2)^2 k_3)\mu_2 \\
&-4(3\Gamma_{12} + 4(f_1+f_2)\mu_2)\mu_3
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
f_3 &= 1 - f_1 - f_2 \\
\Gamma_{12} &= f_1k_2 + f_2k_1 \\
\Gamma_{21} &= f_1k_1 + f_2k_2
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Annexe B

Modèle des sphères composites à interface imparfaite (SCII)

B.1 Modèle de trois phases SCII

Ce paragraphe présente brièvement la solution analytique en poro-élasticité linéaire et isotrope pour le modèle à trois phases sphères composites à interface imparfaite. Ce modèle comprend trois phases : inclusion sphérique de rayon a (phase 1), sphère concentrique de rayon b (phase 2), et région extérieure homogène équivalente. On considère le cas dans lequel les phases sont isotropes poro-élastiques et l'interface entre les phases est supposée imparfaite. Chaque phase est caractérisée par les grandeurs k_i, μ_i, b_i et N_i respectivement les modules d'élaticité, le coefficient et le module de Biot du solide. Pour l'interface imparfaite, on introduit deux paramètres de rigidité d'interface qui permettent de décrire les relations de continuité des contraintes et de discontinuité des déplacements à l'interface (3.1) suivant le modèle *" linear spring model "* (LSM) de Hashin [50].

B.1.1 Module de compressibilité k_{3ph}^{SCII}

$$k_{3ph}^{SCII} = \frac{4f_1k_1\mu_1\mu_2 + k_2(4(1-f_1)\mu_1\mu_2 + 3k_1(4(1-f_1)\mu_2 p + \mu_1))}{4\mu_1\mu_2 + 3k_1(4p\mu_2 + \mu_1) + 3f_1(k_2(3k_1p + \mu_1) - k_1\mu_1)} \tag{B.1}$$

où $p = \frac{\mu_1}{aD_r}$ est un paramètre adimensionnel de souplesse d'interface [50]. Le cas où $D_r \to \infty$ ou $p \to 0$ nous donne le problème à interface parfaite.

B.1.2 Module de cisaillement μ_{3ph}^{SCII}

Le module de cisaillement effectif μ_{3ph}^{SCII} s'obtient en résolvant l'équation du déterminant :

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{d}_{31} & \boldsymbol{d}_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{d}_{41} & \boldsymbol{d}_{42} & d_{43} & d_{44} & d_{45} & d_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} & d_{57} & d_{58} \\ 0 & 0 & d_{63} & d_{64} & d_{65} & d_{66} & d_{67} & d_{68} \\ 0 & 0 & d_{73} & d_{74} & d_{75} & d_{76} & d_{77} & d_{78} \\ 0 & 0 & d_{83} & d_{84} & d_{85} & d_{86} & d_{87} & d_{88} \end{vmatrix} = 0 \tag{B.2}$$

Dans l'équation du déterminant, le module de cisaillement effectif μ_{3ph}^{SCII} n'est présent que dans 4 éléments $(\boldsymbol{d}_{31}, \boldsymbol{d}_{32}, \boldsymbol{d}_{41}, \boldsymbol{d}_{42})$. Les autres éléments ne dépendent que des caractéristiques des deux phases 1 et 2.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_{31} &= 2\,\frac{\mu_{3ph}^{SCII}}{\mu_2} \quad , \quad \boldsymbol{d}_{32} = \frac{12}{\lambda^5}\,\frac{\mu_{3ph}^{SCII}}{\mu_2} \\ \boldsymbol{d}_{41} &= \frac{\mu_{3ph}^{SCII}}{\mu_2} \quad , \quad \boldsymbol{d}_{42} = -\,\frac{4}{\lambda^5}\,\frac{\mu_{3ph}^{SCII}}{\mu_2} \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{array}{llll} d_{11} = 2 & d_{21} = 1 & \boldsymbol{d}_{31} = 2\,\dfrac{\mu_e^{3ph-2i}}{\mu_2} & \boldsymbol{d}_{41} = \dfrac{\mu_e^{3ph-2i}}{\mu_2} \\ d_{12} = -\dfrac{3}{\lambda^5} & d_{22} = \dfrac{1}{\lambda^5} & \boldsymbol{d}_{32} = \dfrac{12}{\lambda^5}\,\dfrac{\mu_e^{3ph-2i}}{\mu_2} & \boldsymbol{d}_{42} = -\dfrac{4}{\lambda^5}\,\dfrac{\mu_e^{3ph-2i}}{\mu_2} \\ d_{13} = -12\,\lambda^2\,\nu_2 & d_{23} = \lambda^2\,(4\,\nu_2 - 7) & d_{33} = 6\,\lambda^2\,\nu_2 & d_{43} = -\lambda^2\,(2\,\nu_2 + 7) \\ d_{14} = -2 & d_{24} = -1 & d_{34} = -2 & d_{44} = -1 \\ d_{15} = \dfrac{2(4\,\nu_2 - 5)}{\lambda^3} & d_{25} = \dfrac{4\,\nu_2 - 2}{\lambda^3} & d_{35} = -\dfrac{4\,(\nu_2 - 5)}{\lambda^3} & d_{45} = -\dfrac{2\,(\nu_2 + 1)}{\lambda^3} \\ d_{16} = \dfrac{3}{\lambda^5} & d_{26} = -\dfrac{1}{\lambda^5} & d_{36} = -\dfrac{12}{\lambda^5} & d_{46} = \dfrac{4}{\lambda^5} \end{array} \tag{B.4}$$

$$
\begin{array}{llll}
d_{53} = -6\,\nu_2 & d_{63} = 2\,\nu_2 + 7 & d_{73} = 12\,\nu_2 & d_{83} = 7 - 4\,\nu_2 \\
d_{54} = 2 & d_{64} = 1 & d_{74} = 2 & d_{84} = 1 \\
d_{55} = 4\,(\nu_2 - 5) & d_{65} = 2\,\nu_2 + 2 & d_{75} = 10 - 8\,\nu_2 & d_{85} = 2 - 4\,\nu_2 \\
d_{56} = 12 & d_{66} = -4 & d_{76} = -3 & d_{86} = 1 \\
d_{57} = \dfrac{6\,\mu_1\,\nu_1}{\mu_2} & d_{67} = -\dfrac{\mu_1\,(2\,\nu_1 + 7)}{\mu_2} & d_{77} = 12\,(p-1)\,\nu_1 & d_{87} = 4\,\nu_1 - 7 - 2\,q\,(2\,\nu_1 + 7) \\
d_{58} = -\dfrac{2\,\mu_1}{\mu_2} & d_{68} = -\dfrac{\mu_1}{\mu_2} & d_{78} = -4\,p - 2 & d_{88} = -2\,q - 1
\end{array}
\tag{B.5}
$$

où p et q sont deux paramètres adimensionnels de souplesse d'interface [50] :

$$
\lambda = f_1^{-1/3} \quad , \quad p = \frac{\mu_1}{a\,D_r} \quad , \quad q = \frac{\mu_1}{a\,D_\theta} \tag{B.6}
$$

Dans le cas à interface parfaite, en considèrant une interphase i très mince ($t \ll a$) et de propriétés mécaniques très faibles ($k_i, \mu_i \ll k_1$), Hashin 1991 [50] a trouvé les relations entre les paramètres d'interface imparfaite (D_r, D_θ) et les propriétés d'interphase parfaite (k_i, μ_i). Ces relations montrent qu'une couche d'interphase mince et faible est équivalente à une interface imparfaite :

$$
\begin{aligned}
D_r &= \frac{3k_i + 4\mu_i}{3t} \\
D_\theta &= \frac{\mu_i}{t}
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

en termes de paramètres adimensionnels d'interface :

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{3\mu_1}{3k_i + 4\mu_i}\frac{t}{a} \\
q &= \frac{\mu_1}{\mu_i}\frac{t}{a}
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

On peut noter que dans le cas où $D_r \to \infty$ et $D_\theta \to \infty$ ou $p \to 0$ et $q \to 0$, la solution du modèle présenté correspond au cas à interface parfaite.

B.1.3 Coefficient de Biot b_{3ph}^{SCII}

$$
b_{3ph}^{SCII} = \frac{f_1\,\mu_1\,(3k_2 + 4\mu_2)(b_1 + 3\,n) + b_2(1 - f_1)(4\mu_1\mu_2 + 3k_1(4p\mu_2 + \mu_1))}{4\mu_1\mu_2 + 3k_1(4p\mu_2 + \mu_1) + 3f_1(k_2(3k_1p + \mu_1) - k_1\mu_1)} \tag{B.9}
$$

avec

$$p = \frac{\mu_1}{aD_r} \quad , \quad n = \frac{k_1\omega_r}{a} \tag{B.10}$$

A partir de ce résultat b_{3ph}^{SCII}, l'expression de coefficient de Biot à trois phases à interface parfaite (A.5) se retrouve en faisant tendre les deux paramètres poro-élastiques d'interface p et n vers zéro. Dans le cas à interface parfaite, en considèrant une interphase i très mince ($t \ll a$) et de propriétés mécaniques très faibles ($k_i, \mu_i \ll k_1$), on peut trouver la relation entre le paramètre poro-élastique d'interface imparfaite (ω_r) et les propriétés poro-élastiques d'interphase comme suit :

$$\omega_r = \frac{3b_i\, t}{3k_i + 4\mu_i} \tag{B.11}$$

B.1.4 Module de Biot N_{3ph}^{SCII}

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N_{3ph}^{SCII}} = \frac{1-f_2}{N1} + \frac{f_2}{N_2} \\
&+[3f_2(k_2^2p^2(-3b_1^2(-1+f_2)k_2 + b_2^2(3f_2k_1 + 4\mu_1)) \\
&-k_2p(b_1^2(-1+f_2)k_2 - 2b_1(-1+f_2)k_2(b_2+3n) \\
&+b_2(b_2(-1+f_2)k_2 + 6f_2k_1n + 8n\mu_1))\mu_2 \\
&+n^2(3f_2(k_1-k_2) + 3k_2 + 4\mu_1)\mu_2^2)] \\
&/[k_2^2p(4\mu_1\mu_2 + 3k_2(4p\mu_1 + \mu_2) + 3f_2(-k_2\mu_2 + k_1(3k_2p + \mu_2)))]
\end{aligned} \tag{B.12}$$

où p et n sont des paramètres adimensionnels poro-élastiques d'interface déternimés par (B.10).

B.1.5 Saut de déplacement à l'interface

B.1.5.1 Compression isotrope

On considère un matériau à deux phases des sphères composites soumis à une déformation homogène isotrope à l'infini sous la forme :

$$\boldsymbol{E}_\infty^{iso} = \begin{bmatrix} E^{iso} & 0 & 0 \\ 0 & E^{iso} & 0 \\ 0 & 0 & E^{iso} \end{bmatrix} \tag{B.13}$$

A l'interface imparfaite entre les phases 1 et 2, à l'aide du logiciel Mathematica, les sauts de déplacement et de contrainte normale s'obtiennent à partir de la relation (3.48) :

$$\Delta^{iso}_{(2)-(1)} = \begin{bmatrix} \Delta^{iso}u_r^{(2)-(1)} \\ \\ \Delta^{iso}\sigma_{rr}^{(2)-(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E^{iso}\,a\,3\,p\,k_1\,(3\,k_2+4\,\mu_2)}{3\,f_1\,(3\,p\,k_1\,k_2-k_1\,\mu_1+k_2\,\mu_1)+4\,\mu_1\,\mu_2+3\,k_1\,(\mu_1+4\,p\,\mu_2)} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

On pose ici un paramètre adimensionnel appelé coefficient de saut normal de déplacement $\Delta^{iso}n$:

$$\Delta^{iso}n = \frac{\Delta^{iso}U_r^{(2)-(1)}}{a} = \frac{\Delta^{iso}u_r^{(2)-(1)}}{a} \tag{B.15}$$

B.1.5.2 Compression déviatorique

Dans le cas d'un compression déviatorique, on considère maintenant à l'infini une déformation homogène déviatorique :

$$\boldsymbol{E}_{\infty}^{dev} = \begin{bmatrix} -E^{dev} & 0 & 0 \\ \\ 0 & -E^{dev} & 0 \\ \\ 0 & 0 & 2\,E^{dev} \end{bmatrix} \tag{B.16}$$

Dans le cas à trois phases sphères composites, à l'interface entre les phases (1) et (2), les sauts de déplacement sont déterminés à partir de la relation (3.53) et à l'aide du logiciel Mathematica :

$$\begin{aligned} \Delta^{dev}U_r^{(2)-(1)} &= \frac{\mathbf{N}\Delta^{dev}U_r^{(2)-(1)}}{\mathbf{DN}\Delta^{dev}U_r^{(2)-(1)}} \\ \Delta^{dev}U_\theta^{(2)-(1)} &= \frac{\mathbf{N}\Delta^{dev}U_\theta^{(2)-(1)}}{\mathbf{DN}\Delta^{dev}U_\theta^{(2)-(1)}} \end{aligned} \tag{B.17}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{DN}\Delta^{dev}U_{\theta}^{(2)-(1)} = \mathbf{DN}\Delta^{dev}U_{r}^{(2)-(1)} = 252\, f_1^{5/3}\,(\mu_2-\mu_3)\,(\mu_1^2\,(7+5\,\nu_1)+4\,\mu_2^2\,(10\,\nu_1-7 \\
+2\,q\,(4\,\nu_1-7)-2\,p\,(7-\nu_1+2\,q\,(7+5\,\nu_1)))+\mu_1\,\mu_2\,(21-45\,\nu_1-4\,p\,(5+7\,\nu_1)\,(\nu_2-2) \\
+2\,q\,(7+5\,\nu_1)\,(2\,\nu_2-1)))\,(-8\,\mu_2-7\,\mu_3+5\,(2\,\mu_2+\mu_3)\,\nu_3)+(7\,(\mu_2+4\,\mu_3) \\
+5\,(\mu_2-8\,\mu_3)\,\nu_2)\,(4\,\mu_2^2\,(7\,(1+2\,p)\,(1+2\,q)+2\,(-5-4\,q+p\,(10\,q-1))\,\nu_1)\,(5\,\nu_2-7) \\
+2\,\mu_1^2\,(7+5\,\nu_1)\,(5\,\nu_2-4)+\mu_1\,\mu_2\,(-273+285\,\nu_1+315\,\nu_2-375\,\nu_1\,\nu_2 \\
+4\,p\,(7+5\,\nu_1)\,(13\,\nu_2-11)+2\,q\,(7+5\,\nu_1)\,(19\,\nu_2-17)))\,(-8\,\mu_2-7\,\mu_3+5\,(2\,\mu_2+\mu_3)\,\nu_3) \\
-50\,f_1^{7/3}\,(\mu_2-\mu_3)\,(2\,\mu_2^2\,(7\,(1+2\,p)\,(1+2\,q)+2\,(-5-4\,q+p\,(10\,q-1))\,\nu_1)\,(\nu_2^2-7) \\
+\mu_1^2\,(7+5\,\nu)\,(7+4\,\nu_2\,(2\,\nu_2-3))+\mu_1\,\mu_2\,(49\,(1-\nu_1)-6\,(7+11\,\nu_1)\,\nu_2 \\
-4\,(5\,\nu_1-14)\,\nu_2^2+4\,p\,(7+5\,\nu_1)\,(7+2\,(\nu_2-3)\,\nu_2)+2\,q\,(7+5\,\nu_1)\,(6\,\nu_2-7+4\,\nu_2^2)))\,(-8\,\mu_2 \\
-7\,\mu_3+5\,(2\,\mu_2+\mu_3)\,\nu_3)+8\,f_1^{10/3}\,(\mu_2-\mu_3)\,(\mu_2^2\,(7\,(1+2)\,(1+2\,q) \\
+2\,(-5-4\,q+p\,(10\,q-1))\,\nu_1)\,(7+5\,\nu_2)-\mu_1^2\,(7+5\,\nu_1)\,(10\,\nu_2-7) \\
+\mu_1\,\mu_2\,(-98+2\,p\,(7+5\,\nu_1)\,(\nu_2-7) \\
+35\,\nu_2+2\,q\,(7+5\,\nu_1)\,(4\,\nu_2-7)+5\,\nu_1\,(7+20\,\nu_2)))\,(\mu_3\,(4-5\,\nu_2)\,(5\,\nu_3-7) \\
+\mu_2\,(7-5\,\nu_2)\,(4-5\,\nu_3))+50\,f_1\,(7\,(\mu_1^2+(3+4\,p+2\,q)\,\mu_1\,\mu_2-4\,(1+2\,p)\,(1+2\,q)\,\mu_2^2) \\
+(5\,\mu_1^2+5\,(-9+4\,p+2\,q)\,\mu_1\,\mu_2+8\,(5+p+4\,q-10\,p\,q)\,\mu_2^2)\,\nu_1)\,(\mu_3^2\,(7+4\,\nu_2\,(2\,\nu_2-3))\,(5\,\nu_3-7) \\
+\mu_2^2\,(7-\nu_2^2)\,(4-5\,\nu_3)+3\,\mu_2\,\mu_3\,(7-7\,\nu_3+\nu_2\,(-21+13\,\nu_2+27\,\nu_3-15\,\nu_2\,\nu_3)))
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N}\Delta^{dev}U_{r}^{(2)-(1)} = E^{dev}\,a\,450\,p\,\mu_2\,\mu_3\,(\nu_2-1)\,(-\mu_1\,(7+5\,\nu_1)\,(-2\,\mu_3\,(14+21\,f_1^{5/3}-20\,\nu_2 \\
+5\,f_1^{7/3}\,(4\,\nu_2-7))+\mu_2\,(42\,f_1^{5/3}-7-5\,\nu_2+10\,f_1^{7/3}\,(4\,\nu_2-7))) \\
-2\,\mu_2\,(\mu_3\,(21\,f_1^{5/3}\,(1+2\,q)\,(5\,\nu_1+7)+8\,(7-10\,\nu_1+2\,q\,(7+5\,\nu_1))\,(10\,\nu_2-7) \\
-5\,f_1^{7/3}\,(49-7\,\nu_1+14\,\nu_2-20\,\nu_1\,\nu_2+2\,q\,(7+5\,\nu_1)(7+2\,\nu_2))) \\
+\mu_2\,(-21\,f_1^{5/3}\,(1+2\,q)\,(7+5\,\nu_1)-2\,(7-10\,\nu_1+2\,q\,(7+5\,\nu_1))\,(7+5\,\nu_2) \\
+5\,f_1^{7/3}\,(49-7\,\nu_1+14\,\nu_2-20\,\nu_1\,\nu_2+2\,q\,(7+5\,\nu_1)\,(7+2\,\nu_2)))))\,(\nu_3-1)
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}\Delta^{dev}U_\theta^{(2)-(1)} = -E^{dev}\,a\,450\,q\,\mu_2\,\mu_3\,(\nu_2-1)\,(\mu_1\,(7+5\,\nu_1)\,(4\,\mu_3\,(-7+7\,f_1^{5/3}+10\,\nu_2-10\,f_1^{7/3}\,\nu_2)\\ +\mu_2\,(-28\,f_1^{5/3}-7-5\,\nu_2+40\,f_1^{7/3}\,\nu_2))+4\,\mu_2\,(\mu_2\,(7\,f_1^{5/3}\,(1+2\,p)\,(5\,\nu_1+7)\\ -(7-10\,\nu_1+2\,p\,(7+5\,\nu_1))\,(5\,\nu_2+7)+5\,f_1^{7/3}\,(\nu_1\,(-21+10\,(p-1)\,\nu_2)+7\,\nu_2\,(1+2\,p)))\\ -\mu_3\,(7\,f_1^{5/3}\,(1+2\,p)\,(7+5\,\nu_1)-4\,(7-10\,\nu_1+2\,p\,(7+5\,\nu_1))\,(10\,\nu_2-7)\\ 5\,f_1^{7/3}\,(\nu_1\,(-21+10\,(p-1)\,\nu_2)+7\,\nu_2\,(1+2\,p)))))\,(\nu_3-1)\end{aligned} \tag{B.20}$$

On pose ici deux paramètres adimensionnels appelés coefficients de sauts de déplacement normal et tangentiel $\Delta^{dev}n$ et $\Delta^{dev}t$:

$$\begin{aligned}\Delta^{dev}n &= \frac{\Delta^{dev}U_r^{(2)-(1)}}{a}\\ \Delta^{dev}t &= \frac{\Delta^{dev}U_\theta^{(2)-(1)}}{a}\end{aligned} \tag{B.21}$$

B.2 Problème d'inclusion équivalente

On présente dans cette partie le problème d'inclusion équivalente qui est constitué par une inclusion à interface imparfaite. Les travaux sur ce problème ont été introduits dans les papiers de L.Dormieux et al [26] et dans la thèse de T.S.Gu [44] ou la thèse de J. Sanahuja [90]. Par une manière simple, à partir du résultat de la solution de module de compressibilité dans le cas à trois phases k_{3ph}^{SCII} (B.1.1), on peut trouver le module de compressibilité du problème d'inclusion équivalente k_{eq}^{SCII} en faisant tendre la fraction volumique de la phase 2 f_2 vers zéro. On obtient :

$$k_{eq}^{SCII} = \lim_{f_2\to 0} k_{3ph}^{SCII} = \frac{k_1\mu_1}{3k_1p+\mu_1} \tag{B.22}$$

Par une manière différente, à partir de la solution du modèle à trois phases sphères composites à interface parfaite k_{3ph}^{SCIP}, on peut déduire la solution du problème d'inclusion équivalente en utilisant les relations entre les paramètres d'interface imparfaite et les paramètres de l'interphase i très mince, de propriétés mécaniques très faibles (B.8). On a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}k_i &= \frac{\mu_1}{p}\frac{t}{a} - \frac{4}{3}\mu_i\\ \mu_i &= \frac{\mu_1}{q}\frac{t}{a}\\ f_1 &= \frac{a^3}{(a+t)^3} = \frac{1}{(1+\frac{t}{a})^3}\end{aligned} \tag{B.23}$$

Le module de compressibilité du modèle à trois phases sphères composites à interface parfaite s'écrit (voir l'annexe A) :

$$k_{3ph}^{SCIP} = k_i + \frac{f_1\,(k_1 - k_i)}{1 + (1 - f_1)\,\frac{k_1 - k_i}{k_i + \frac{4}{3}\,\mu_i}} \tag{B.24}$$

En supposant l'interphase i très mince ($t \ll a$) et de propriétés mécaniques très faible ($k_i, \mu_i \ll k_1$), la solution d'inclusion équivalente peut être obtenue par :

$$k_{eq}^{SCII} = \lim_{\frac{t}{a} \to 0} k_{3ph}^{SCIP} = \frac{k_1 \mu_1}{3k_1 p + \mu_1} \tag{B.25}$$

En comparant les deux solutions obtenues (B.24) et (B.25), on peut conclure qu'avec deux manières de calcul différentes, le même résultat de k_{eq}^{SCII} est obtenu. Ce résultat obtenu est identique avec le résultat de Hashin (1991) [50]. De la même manière, la solution du module de cisaillement du problème d'inclusion équivalente est une racine positive et unique d'une équation quadratique de la forme suivante :

$$\mathbf{X}\,(\mu_{eq}^{SCII})^2 + \mathbf{Y}\,\mu_{eq}^{SCII} + \mathbf{Z} = 0 \tag{B.26}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= 8\,(3\,k_1\,(2 + 10\,q + p\,(13 + 38\,q)) + (17 + 22\,q + 8\,p\,(2 + q))\,\mu_1) \\
\mathbf{Y} &= -\mu_1\,(3\,k_1\,(-3 + 76\,p + 38\,q) + 4\,(33 + 4\,p + 2\,q)\,\mu_1) \\
\mathbf{Z} &= -\mu_1^2\,(57\,k_1 + 4\,\mu_1)
\end{aligned} \tag{B.27}$$

où p et q sont deux paramètres adimensionnels de souplesse d'interface. La solution du problème d'inclusion équivalente permet de simplifier un problème de sphères composites à interface imparfaite (SCII) en un problème à interface parfaite (SCIP). La figure B.1 présente une comparaison des résultats obtenus pour un matériau à deux phases à l'interface imparfaite (inclusion : $k_i = 76\,GPa$, $\mu_i = 36.8\,GPa$, $f_i = 0.7$; matrice : $k_m = 30\,GPa$, $\mu_m = 16\,GPa$). Le premier résultat est déterminé en utilisant directement la solution du SCII (méthode 1). Dans la deuxième méthode, le matériau est simplifié en remplaçant l'inclusion avec l'interface imparfaite par une inclusion équivalente noyée dans la matrice avec l'interface parfaite (SCIP). On constate sur la figure B.1 que les deux méthodes retournent les mêmes résultats en variation des paramètres d'interface p et q.

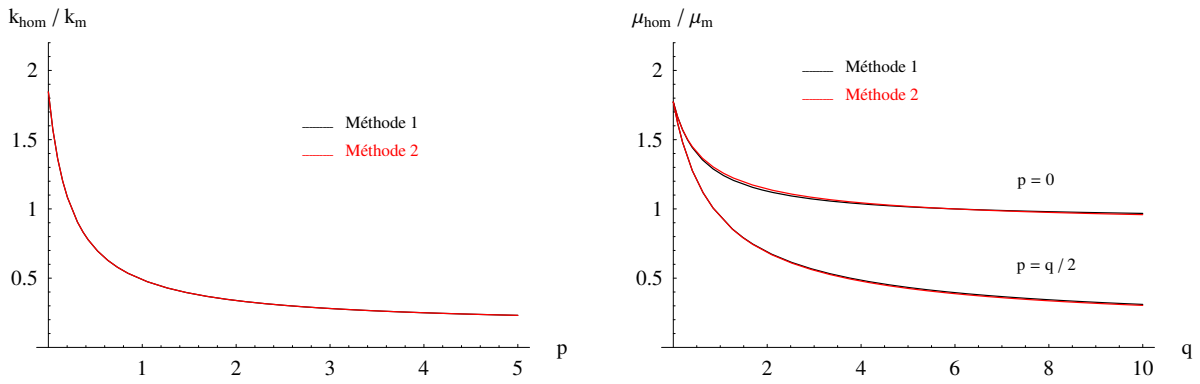


FIGURE *B.1: Equivalence de deux problèmes SCII et SCIP*

Annexe C

Algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-plastique

On introduit brièvement dans cette annexe les algorithmes d'intégration locale du comportement élasto-plastique qui permettent de déterminer les opérateurs tangents utilisés dans la méthode d'homogénéisation non linéaire par l'approche incrémentale de Hill [55]. Pour la phase élasto-plastique, on adopte un modèle non associé avec écrouissage isotrope basé sur le critère de plasticité de type Drucker-Prager dont la fonction de charge s'écrit sous la forme (voir la thèse de Guéry [45]) :

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^p) = q + \alpha^p(\gamma^p)\,(p - c_p) \tag{C.1}$$

$$\alpha^p(\gamma^p) = \alpha_m^p - (\alpha_m^p - \alpha_0^p)\,Exp(-b\,\gamma^p) \tag{C.2}$$

$$p = \frac{Tr(\boldsymbol{\sigma})}{3} \quad , \quad q = \sqrt{\frac{3}{2}\,\boldsymbol{s} : \boldsymbol{s}} \quad , \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\,\boldsymbol{\delta} \tag{C.3}$$

α^p est la force thermodynamique associée à la variable d'écrouissage γ^p par une forme exponentielle (C.2) dans laquelle α_0^p et α_m^p décrivent les seuils de plasticité respectivement initial et ductile (voir [45]), le paramètre b contrôle la vitesse d'évolution de l'écouissage plastique ; p et q sont des contraintes équivalentes calculées par (C.3). Pour décrire la transition de la contractance plastique à la dilatance plastique lors de l'augmentation du déviateur de contrainte, on défini une règle d'écoulement non associée dans le cadre des matériaux non standards sous la forme :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \gamma^p) = q + \beta^p(\gamma^p)\, p \tag{C.4}$$

Le coefficient β^p qui contrôle le taux de déformation plastique volumique ($\beta^p > 0$: la dilatance plastique, $\beta^p \leq 0$: la contractance plastique) est supposé être une fonction de la variable d'écouissage (C.5) avec les coefficients de dilatance initial β_0^p et final β_m^p.

$$\beta^p(\gamma^p) = \beta_m^p - (\beta_m^p - \beta_0^p)\, Exp(-b'\, \gamma^p) \tag{C.5}$$

En adoptant sur une démarche incrémentale, le problème élasto-plastique local peut être écrit :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbb{C} : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p\right) \\
&f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^p\right) = 0 \\
&\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\
&\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad avec \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta\gamma\, \partial_{\boldsymbol{\sigma}} F \\
&\gamma_{n+1}^p = \gamma_n^p + \Delta\gamma^p \quad avec \quad \Delta\gamma^p = \Delta\gamma
\end{aligned} \tag{C.6}$$

La résolution consiste à déterminer la contrainte $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, les déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p$ et l'écrouissage isotrope γ_{n+1}^p à t_{n+1} en connaissant l'incrément de déformation $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et les valeurs de $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$ et γ_n^p au pas n. La procédure de l'algorithme de type "cutting point algorithm" [94] est effectuée comme suit :

- Données d'entrée : $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p$, γ_n^p et $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Déterminer la déformation au pas $n+1$: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
- Initialisation

$$\begin{aligned}
&i := 0 \\
&\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^0 = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \\
&\Delta\gamma = 0, \quad \gamma_{n+1}^{p,0} = \gamma_n^p
\end{aligned} \tag{C.7}$$

- Itérations (i+1) :

1. Evaluer $f_{n+1}^i = f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^i, \gamma_{n+1}^{p,i}\right)$. Si f_{n+1}^i <tolérance, aller en 4, sinon aller en 2.
2. Calculer :

$$\delta(\Delta\gamma) = \frac{f_{n+1}^i}{\partial_\sigma f_{n+1}^i : \mathbb{C} : \partial_\sigma F_{n+1}^i - \partial_\gamma f_{n+1}^i} \tag{C.8}$$

3. Actualiser :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i+1} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{i} - \delta(\Delta\gamma)\mathbb{C} : \partial_\sigma F_{n+1}^{i} \\
\gamma_{n+1}^{p,i+1} &= \gamma_{n+1}^{p,i} + \delta(\Delta\gamma) \\
\gamma_{n+1} &= \gamma_n + \delta(\Delta\gamma) \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,i+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p,i} + \delta(\Delta\gamma)\partial_\sigma F_{n+1}^{i}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Revenir à 1.

4. Sortir de la boucle.

– Calculer l'opérateur tangent $\mathbb{C}^{tan}$ à partir de la formulation :

$$\mathbb{C}^{tan} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si} \quad \begin{cases} f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) \leq 0 \\ \dot{f}\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) < 0 \end{cases} \\ \mathbb{C} - \dfrac{\mathbb{C} : \partial_\sigma F\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) \otimes \partial_\sigma f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) : \mathbb{C}}{h} & \text{si} \quad \begin{cases} f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) = 0 \\ \dot{f}\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) = 0 \end{cases} \end{cases} \tag{C.10}$$

avec $h = \partial_\sigma f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) : \mathbb{C} : \partial_\sigma F\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right) - \partial_{\gamma^p} f\left(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \gamma_{n+1}^{p}\right)$

Annexe D

Caractéristiques des quelques minéraux carbonatés

TAB. *D.1: Caractéristiques d'élasticité de la goethite* $\alpha - FeO(OH)$

Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
111 [76]		4.294 [97]
115 [*]		

[*] : calculé à partir de [76]

TAB. *D.2: Caractéristiques d'élasticité de la sidérite* $FeCO_3$

Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
117 [22, 91, 109, 110]		3.754 [91]
124 [19, 111]	51 [19, 111]	3.937 [97]

TAB. *D.3: Caractéristiques d'élasticité de la calcite* $CaCO_3$

Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
76 [23]	36.8 [23]	
71 [22, 61]		2.71 [61]
70.2 [111]	29 [111]	
73.3 [6]	32 [6]	2.712 [6]

TAB. *D.4: Caractéristiques d'élasticité de la magnésite* $MgCO_3$

Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
107 [84, 110]		
111 [83]		
114 [6]	68 [6]	3.009 [6]
122 [19, 22]	66 [19]	

TAB. *D.5: Caractéristiques d'élasticité de la dolomite* $CaMg(CO_3)_2$

Module de compressibilité k (GPa)	Module de cisaillement μ (GPa)	Masse volumique ρ (g/cm^3)
69.4 [111]	51.6 [111]	2.88 [111]
94.9 [6]	45.7 [6]	3.795 [6]

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Dashnor HOXHA, Professeur, PRISME, Université d'Orléans, Orléans

Monsieur Xavier CHATEAU, Directeur de Recherche, LCPC, Marne la Vallée

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur NGUYEN Ngoc Bien

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Modélisation micromécanique des roches poreuses : application aux calcaires oolitiques"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **« Mécanique - Génie Civil »**

Fait à Vandoeuvre, le 22 novembre 2010
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE - NANCY -

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55

Résumé

Modélisation micromécanique des roches poreuses : application aux calcaires oolithiques

Ce travail de thèse est consacré à l'étude du comportement poro-élastique linéaire et non linéaire des matériaux et géomatériaux poreux (notamment les calcaires oolithiques et le minerai de fer) par approche de changement d'échelle. A partir des observations microstructurales de ces matériaux, un modèle conceptuel a été proposé. Les roches poreuses étudiées sont constituées par un assemblage de grains (oolithes), à forte fraction volumique, cimentés par une matrice. La porosité, supposée connectée, est présente dans les oolithes (inter-oolithique) et dans la matrice (intra-oolithique). Un modèle d'homogénéisation à deux étapes est développé dans le cadre du modèle des sphères composites. L'importance des effets de liaison d'interface sur les propriétés poro-élastiques des sphères composites est étudiée en déterminant la solution exacte du modèle aux conditions d'interfaces parfaite ou/et imparfaite. Le modèle est tout d'abord appliqué pour estimer les propriétés effectives poro-élastiques linéaires des roches étudiées. Le comportement non linéaire de ces roches est étudié en attribuant à la matrice un comportement élastoplastique et en développant un comportement non linéaire pour les interfaces (oolithes - matrice). La comparaison entre résultats issus de la modélisation et ceux expérimentaux macroscopiques montre l'importance cruciale de la zone interfaciale de transition.

Mots-clés : Milieux hétérogènes, Géomatériaux, Approche micromécanique, Modèle de sphères composites, Interface imparfaite, Poro-élasticité linéaire, Elasto-plasticité, Homogénéisation linéaire, Homogénéisation non-linéaire.

Abstract

Micromechanical modelling of porous rocks : application to oolitic limestone

This work is devoted to the modelling of the linear and non-linear hydro-mechanical behaviour of porous rocks (such as oolitic limestone, iron ore) by the multiscale modelling approach. Based on microstructure observations, a conceptual model was proposed. Porous rocks studied are constituted by an assemblage of grains (oolites), with high volume fraction, coated by a matrix. The overall porosity is supposed connected and decomposed into oolite porosity and matrix porosity. A two step homogenization method has been developed in the framework of CSA models (Composite Sphere Assemblage). The effect of interfacial bonding condition on poroelastic properties of composite sphere is investigated by determining the exact solution of the model in the case of perfect or/and imperfect interface. Micromechanical model is applied firstly to estimation of effective linear poroelastic properties of rocks studied. Their non-linear behaviour is studied by considering a elasto-plastic behavior for both the matrix and the interfaces (oolite-matrix). The comparison between numerical simulations and macroscopic experimental results underlined the crucial role of the interfacial transition zone.

Mots-clés : Heterogeneous medium, Geomaterials, Micromechanical approach, Composite Sphere Model, Imperfect interface, Linear poro-elasticity, Elasto-plasticity, Linear et non-linear homogenization.