



**HAL**  
open science

# Stability and performance of distributed computer control systems

Flavia Felicioni

► **To cite this version:**

Flavia Felicioni. Stability and performance of distributed computer control systems. Other. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2011. Español. NNT : 2011INPL013N . tel-01748893

**HAL Id: tel-01748893**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748893>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



Certifico que el trabajo incluido en esta tesis es el resultado de tareas de investigación originales y que ha sido presentado para optar a un título de “Doctor en Ingeniería” de la Universidad Nacional de Rosario y “Docteur” de l' Institut National Polytechnique de Lorraine de Nancy, Francia, en un todo de acuerdo con el acuerdo de Co-Tutorado celebrado entre la Universidad Nacional de Rosario y el Institut National Polytechnique de Lorraine Francia, aprobado por la Resolución N° 3011/2006 de esta Universidad. Además, certifico que no ha sido presentado para optar a un título de postgrado en ninguna otra universidad o Institución.

**Flavia Eleonora Felicioni**



# RESUMEN

Esta tesis tiene por objetivo principal contribuir al estudio de propiedades dinámicas y al desarrollo de métodos de diseño y síntesis de algoritmos de control de sistemas cuyos sensores, actuadores y controladores se encuentran distribuidos en nodos de una red de comunicación digital y cuyos algoritmos de control se ejecutan en dispositivos de cálculo no dedicados.

Con el uso de esta tecnología, los lazos de control deben competir por los recursos de cálculo y comunicación, los que al ser de capacidad limitada provocan la aparición de retardos y/o pérdida de paquetes de la información transmitida entre distintos nodos. Estos problemas pueden degradar sensiblemente los índices de performance del sistema e incluso desestabilizarlo.

Para evitar estas consecuencias se propone trabajar conjuntamente en los dos dominios teóricos principales: la Teoría de Control, en el nivel funcional más abstracto de su tratamiento, y la Informática Aplicada en el nivel relacionado con su implementación tecnológica.

En una primera parte se realizan aportes al análisis de la performance de ciertas clases de sistemas y al diseño robusto de los controladores cuando las características de la red son modeladas con parámetros de calidad de servicio, considerándola como un elemento pasivo. Este enfoque se enmarca dentro de la línea clasificada en la literatura como “Control sobre Redes”. Como resultado de la aplicación de este enfoque se formula una serie de reglas para asistir a los ingenieros especialistas en las etapas de diseño de los controladores.

En una segunda parte se hace una contribución a la línea denominada de “Co-Diseño” vía la articulación de resultados obtenidos en ambos dominios en el área de síntesis y diseño de algoritmos de control y en el área de administración de las tareas de tiempo real que comparten recursos limitados. La técnica propuesta resulta en el cambio forzado del período del algoritmo de control, lo que da lugar a un modelo discreto del sistema variante en el tiempo. Tratando este tipo de modelos como sistemas conmutados, se resuelve el problema de su estabilización con métodos asociados a las álgebras de Lie de sus matrices de evolución. Específicamente, los resultados obtenidos permiten calcular familias adaptables de controladores estabilizantes.



# RESUME

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de propriétés dynamiques et de méthodes de conception et synthèse des algorithmes de contrôle-commande des systèmes dans le cas où les fonctions de mesures, actionnements, et contrôles sont distribuées sur des organes de calcul pouvant être partagés avec d'autres applications et connectés sur un réseau de communication numérique. En conséquence, les boucles de contrôle sont en compétition avec d'autres applications pour accéder aux ressources de calcul et de communication de capacité limitée et gérées par des politiques (ordonnanceurs locaux, protocoles) spécifiques. Ceci provoque l'apparition de délais et de perte d'informations transmises entre les différents nœuds qui peuvent dégrader les performances du système et, le cas échéant, conduire à leur instabilité.

Nous avons proposé d'attaquer ce problème en étudiant les systèmes conjointement selon deux points de vue : la théorie du contrôle, sur le plan fonctionnel et l'ordonnancement, sur le plan du déploiement sur une plate-forme d'exécution distribuée.

Dans une première partie de la thèse, nous avons considéré que le réseau était un élément passif non contrôlé et nous avons étudié l'analyse des performances de certains systèmes ainsi que la conception de contrôleurs robustes en fonction de la qualité de service fournie par le réseau. Cette étude a permis de spécifier les règles de conception de contrôleurs.

Dans la deuxième partie de la thèse, les principales contributions du travail sont présentées, à savoir une approche de conception conjointe intégrant les résultats obtenus dans les deux domaines : la synthèse et la conception des algorithmes de contrôle, d'une part et l'ordonnancement et la gestion de tâches temps réel qui partagent des ressources limitées. La technique proposée repose sur le changement de la période d'activation de l'algorithme de contrôle, et en conséquence le modèle du système devient un modèle échantillonné à taux variable. Ce modèle devient un système discret à commutation, et nous avons résolu le problème de stabilité en considérant l'algèbre de Lie des matrices d'évolution. Spécifiquement, les résultats proposés permettent de calculer des familles de contrôleurs adaptatifs aux périodes d'échantillonnage induites par la qualité de service courante du réseau et qui stabilisent tous le système.





# ABSTRACT

The main contributions of this thesis are related to the analysis, synthesis and design of control systems sharing communication and computational resources. The research focuses mainly on networked control systems or NCS, i.e., control systems where the feedback loops are closed over digital communication networks which transmit the information provided to its nodes by sensors, actuators and controllers. The shared resource in this spatially distributed scenario is the communication network. Nevertheless, some of the results are also valid when the shared resource is a processor locally placed respect to several controller executing their algorithms on it.

In any of the preceding scenarios, the control loops must contend for the shared computation and communication resources. The limited capacity of these resources can cause delays and packet losses when information is transmitted among the network nodes. These effects can significantly degrade the control system performance and even destabilize it. Precisely these issues define the subject of this thesis which consists in providing techniques to analyze these problems and design methods assuring stability and improving performance of the closed-loop systems. A twofold approach is followed along the thesis. At the abstract level the problems are analyzed and solved with a control-theoretical methodology, while at the practical implementation level real-time computer-science tools are invoked. This results in the so-called “CoDesign” approach when the control system designer has the freedom to specify not only the controller, but also some features of the shared resource (network/processor) in correspondence with the controller, as both approaches are linked in this practice.

The first part of this thesis contributes to the performance analysis of specific classes of systems and to the design of robust controllers for fixed network characteristics modeled by Quality of Service (QoS) parameters. Here, the network is considered a passive resource providing constraints expressed in terms of QoS. These contributions correspond to the approach usually called “control over networks”. A series of methods to assist the control systems engineer at the controller design stage are provided.

In the second part of this thesis a relevant contribution to the Co-Design methodology is made via the integration of control system synthesis and design techniques with rules allowing to define the communication policy to manage real-time tasks sharing a limited resource.

Putting in correspondance a dynamical scheduling of instances of the controller tasks with their sampling periods, the proposed methodology results in discrete-time varying systems. Modeling them as families of discrete-time switched systems, the stabilization problem is solved with novel methods based on the solvability of Lie-algebras generated by the set of the evolution matrices defining each family. In terms of the standard control system classification, the proposed methodology provides stabilizing adaptive controller families.

À ma famille.

À Rodolfo pour son soutien inconditionnel pendant toutes ces années.



# REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Françoise Simonot-Lion, directrice au Laboratoire LORIA et Sergio Junco professeur du Département de Contrôle de la FCEIA (UNR), pour son soutien et encouragement permanent et autant pour ses conseils, suggestions et discussions scientifiques qui ont beaucoup contribué à la réalisation de ma thèse doctoral.

Je tiens aussi à remercier Ye-Qiong Song pour son intérêt dans mon travail de recherche, ainsi que pour ses conseils. Il a apporté des idées très intéressantes pour la poursuite du sujet. Merci aussi à Ning Jia pour sa disponibilité et sa bonne volonté pour travailler avec moi.

Je voudrais faire un petit hommage au professeur François Simonot. J'ai eu l'opportunité de travailler avec lui, pendant mon dernier stage à Nancy. Cela a été un vrai plaisir.

Je remercie très sincèrement aux professeurs qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury de thèse. Merci à Ernesto Kofman, Aníbal Zanini et Fabio Gomez-Estern d'avoir bien voulu accepter la charge de rapporteurs ainsi que Daniel Simon et Françoise Simonot-Lion d'avoir accepté la charge d'examineurs et finalement Ricardo Sánchez Peña et Sergio Junco d'avoir accepté la charge de membres invités. Grace à leurs suggestions et leurs conseils, j'ai pu améliorer la qualité de la rédaction de cette mémoire.

Je souhaiterais remercier aussi à tous mes collègues, au Département de Contrôle de la FCEIA (Mónica, Ernesto, Juan Carlos, Matías, Marianela, Hernán) et de l'équipe TRIO au LORIA (Lionel, Giancarlo, Ricardo, Laurence, Nicolás, Xavier). Un très grand merci à tous mes amis avec qui j'ai partagé de très bons moments : Silvina, Franco, Gustavo, Alejandro, Lucas, Raúl, Gaby, Luis, et les dissidents Iván, Diego et Leticia /'.

Cette thèse a pu être développée grâce à une bourse de doctorat en Argentine de CONICET et des bourses du gouvernement français pour financer mes déplacements au laboratoire LORIA. Je remercie aussi toute l'équipe du projet SAFE-NECS, financé par l'Agence Nationale de la Recherche.



# ÍNDICE

## NOTACIÓN Y ACRÓNIMOS

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Capítulo 1. INTRODUCCIÓN .....</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1.1. Implementación de sistemas de control en plataforma informática distribuida o compartida. ....</b> | <b>3</b>  |
| 1.1.1. Problemas inducidos por la red, protocolos y planificación.....                                     | 4         |
| 1.1.2. Período de muestreo y performance de lazo cerrado.....  | 5         |
| <b>1.2. Enfoque mixto desde el control y la informática.....</b>   | <b>8</b>  |
| 1.2.1. Control sobre Redes.....  | 8         |
| 1.2.2. Co-Diseño .....   | 9         |
| <b>1.3. Aportes de esta tesis .....</b>  | <b>10</b> |
| <br>   |           |
| <b>Capítulo 2. FUNDAMENTOS Y ESTADO DEL ARTE DE SISTEMAS DE CONTROL EN TIEMPO DISCRETO .....</b>           | <b>13</b> |
| <b>2.1. De la arquitectura distribuida a los problemas inducidos por la red .....</b>                      | <b>13</b> |
| <b>2.2. Estado del arte del Control sobre Redes.....</b>   | <b>14</b> |
| 2.2.1. Origen del Retardo en NCS y modelado .....  | 14        |
| 2.2.2. Tipos de redes de comunicación que pueden ser usadas en control .....                               | 17        |
| 2.2.3. Características del retardo en distintas redes .....  | 21        |
| 2.2.4. Efecto del retardo constante en NCS .....   | 21        |
| 2.2.5. Efecto del retardo variable en NCS .....  | 27        |
| 2.2.6. Variación del período de muestreo en NCS .....  | 34        |
| <b>2.3. Estado del arte sobre Co-Diseño.....</b>   | <b>39</b> |
| 2.3.1. Hipótesis de modelado para Co-Diseño .....  | 39        |
| 2.3.2. Enfoques propuestos de Co-Diseño.....   | 40        |
| <b>2.4. Conclusiones .....</b>   | <b>44</b> |



|   |            |
|---|------------|
| <b>Apéndice A. Modelos Discretos de Sistemas Continuos.....</b>   | <b>47</b>  |
| <b>Apéndice B. Diseño de Sistemas de Control Digital.....</b>   | <b>57</b>  |
| <b>Apéndice C. Estabilidad de Sistemas Discretos.....</b>   | <b>69</b>  |
| <b>Apéndice D. Planificación y análisis de factibilidad de planificación.....</b>   | <b>77</b>  |
| <br>  |            |
| <b>Capítulo 3. ESTABILIDAD Y PERFORMANCE DE SISTEMAS DISTRIBUIDOS DE CONTROL:<br/>SISTEMAS LTI CON RETARDOS CONSTANTES EN LA RED DE COMUNICACIÓN.....</b> | <b>81</b>  |
| <b>3.1. Introducción.....</b>   | <b>81</b>  |
| 3.1.1. Antecedentes.....  | 82         |
| 3.1.2. Aportes de este Capítulo.....  | 83         |
| <b>3.2. Formulación del problema y modelado matemático.....</b>   | <b>85</b>  |
| 3.2.1. Hipótesis de modelado y problema planteado.....  | 85         |
| 3.2.2. Modelado matemático con la transformada Z modificada.....  | 86         |
| 3.2.3. Estabilidad en lazo cerrado.....   | 87         |
| 3.2.4. Respuesta en Frecuencia de sistemas discretos.....   | 88         |
| <b>3.3. Estabilidad de sistemas con retardo constante, desconocido y acotado.....</b>   | <b>93</b>  |
| 3.3.1. Criterio de Jury.....  | 94         |
| 3.3.2. Criterio frecuencial.....  | 97         |
| 3.3.3. Estabilidad robusta de polinomios.....   | 104        |
| <b>3.4. Efecto del retardo sobre índices de performance.....</b>  | <b>107</b> |
| 3.4.1. Evolución de los polos de lazo cerrado ante retardos crecientes.....   | 108        |
| 3.4.2. Ubicación de las raíces – Caso particular de grado relativo uno.....   | 110        |
| <b>3.5. Caso de estudio.....</b>  | <b>112</b> |
| 3.5.1. Criterio de Jury.....  | 114        |
| 3.5.2. Evaluación de estabilidad mediante criterio de respuesta en frecuencia.....  | 116        |
| 3.5.3. Evaluación de estabilidad mediante criterio robusto de polinomios.....   | 119        |
| 3.5.4. Performance ante retardos creciente.....   | 120        |
| <b>3.6 CONCLUSIONES.....</b>  | <b>126</b> |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Capítulo 4. ESTABILIDAD Y PERFORMANCE DE SISTEMAS DISTRIBUIDOS DE CONTROL:<br/>SISTEMAS LTI CON RETARDOS VARIABLES EN LA RED DE COMUNICACIÓN .....</b> | <b>127</b> |
| <b>4.1. Introducción .....</b>  | <b>127</b> |
| 4.1.1. Antecedentes.....  | 128        |
| 4.1.2. Aportes del capítulo.....  | 131        |
| <b>4.2. Formulación del problema y modelado matemático .....</b>  | <b>133</b> |
| 4.2.1. Hipótesis de modelado y problema planteado .....   | 133        |
| 4.2.2. Modelado matemático del sistema con retardo variable.....  | 134        |
| 4.2.3. Estabilidad en lazo cerrado.....   | 135        |
| 4.2.4. Crítica del esquema compensado ante retardo variable.....  | 138        |
| <b>4.3. Diseño de Controlador Robusto frente a retardos .....</b>   | <b>143</b> |
| 4.3.1. Diseño robusto $H_\infty$ ante retardo variable acotado.....   | 144        |
| 4.3.2. Loop Shaping en el dominio discreto .....  | 147        |
| <b>4.4. Evaluación de la estabilidad con otros métodos de la literatura .....</b>   | <b>160</b> |
| 4.4.1. Modelo de lazo cerrado en espacio de estados .....   | 160        |
| 4.4.2. Problema de estabilidad. Métodos en EE .....   | 161        |
| 4.4.3. Análisis de estabilidad en el caso de estudio.....   | 162        |
| <b>4.5. Efecto del retardo en la performance.....</b>   | <b>163</b> |
| 4.5.1. Trade-off entre estabilidad y performance .....  | 164        |
| 4.5.2. Otros índices de performance .....   | 166        |
| <b>4.6. Conclusiones .....</b>  | <b>170</b> |
| <br>  |            |
| <b>Capítulo 5. CONTROL DE SISTEMAS DISCRETOS LTI CON PERÍODO DE MUESTREO<br/>VARIABLE EN BASE A MÉTODOS LIE-ALGEBRAICOS.....</b>                          | <b>171</b> |
| <b>5.1. Introducción .....</b>  | <b>171</b> |
| 5.1.1. Antecedentes.....  | 172        |
| 5.1.2. Aportes del Capítulo.....  | 174        |
| <b>5.2. Formulación del problema y modelado matemático .....</b>  | <b>175</b> |
| 5.2.1. Hipótesis de modelado.....   | 175        |
| 5.2.2. Modelo de control por Realimentación de Estados .....  | 176        |

|  |   |            |
|--|---|------------|
| 5.2.3.   | Modelo de control por Realimentación de Estados con Observador.....             | 176        |
| 5.2.4.   | Planteo del Problema .....  | 177        |
| 5.2.5.   | Álgebra de Lie de matrices y resolubilidad .....                                | 177        |
| 5.2.6.   | Condiciones de estabilidad en lazo cerrado.....                                 | 179        |
| <b>5.3.</b>  | <b>Métodos Lie algebraicos de diseño de control .....</b>                       | <b>180</b> |
| 5.3.1.   | Método por Triangularización de la familia de matrices.....                     | 181        |
| 5.3.2.   | Imposición de condiciones sobre índice de resolubilidad. ....                   | 192        |
| 5.3.3.   | Control por realimentación de estados con observadores .....                    | 197        |
| <b>5.4.</b>  | <b>Análisis de robustez y performance .....</b>                                 | <b>199</b> |
| 5.4.1.   | Calculo de la matriz P de la CQLF.....  | 199        |
| 5.4.2.   | Performance establecida en términos de la norma espectral .....                 | 203        |
| 5.4.3.   | Robustez frente a perturbaciones.....   | 205        |
| <b>5.5.</b>  | <b>Conclusiones .....</b>   | <b>208</b> |
| <b>Apéndice E. Deficiencias de resultados previos de la literatura .....</b> |   | <b>211</b> |
| <br>   |   |            |
| <b>Capítulo 6. CODISEÑO DE CONTROL Y PLANIFICACIÓN PARA DESCONGESTIÓN DE</b> |   |            |
| <b>RECURSOS EN SISTEMAS DISTRIBUIDOS DE CONTROL .....</b>                    |   | <b>213</b> |
| <b>6.1.</b>  | <b>Introducción .....</b>   | <b>213</b> |
| 6.1.1.   | Antecedentes.....   | 214        |
| 6.1.2.   | Enfoque de este capítulo.....   | 215        |
| <b>6.2.</b>  | <b>Formulación del problema y modelado matemático .....</b>                     | <b>216</b> |
| 6.2.1.   | Hipótesis de modelado y problema planteado.....                                 | 217        |
| 6.2.2.   | Estrategia de planificación y factibilidad con restricción (m,k)-firm.....      | 218        |
| <b>6.3.</b>  | <b>Co-Diseño de control con restricción (m,k)-firm: Teoría.....</b>             | <b>221</b> |
| 6.3.1.   | Modelo de la planta y controlador con patrón (m,k)-firm .....                   | 222        |
| 6.3.2.   | Diseño de control y selección de los parámetros temporales .....                | 222        |
| 6.3.3.   | Análisis del empleo de modelo (m,k)-firm teórico en la performance.....         | 225        |
| <b>6.4.</b>  | <b>Co-Diseño de control y planificación: Estrategias de implementación.....</b> | <b>231</b> |
| 6.4.1.   | Estrategia (m,k)-firm básica .....  | 232        |
| 6.4.2.   | Estrategia (m,k)-firm con detección de eventos de la planta.....                | 233        |

|                     |   |            |
|---------------------|---|------------|
| 6.4.3.              | Estrategia de optimización conjunta de control y planificación.....               | 236        |
| <b>6.5.</b>         | <b>Casos de estudio .....</b>   | <b>241</b> |
| 6.5.1.              | Técnica (m,k) firm con uso de información de estado de la planta.....             | 241        |
| 6.5.2.              | Optimización conjunta aplicada al problema de estabilización de cuatri-rotor..... | 243        |
| 6.5.3.              | Optimización conjunta con aplicación a un conjunto de plantas.....                | 246        |
| <b>6.6.</b>         | <b>Conclusiones .....</b>   | <b>251</b> |
| <b>Apéndice F.</b>  | <b>Criterio de performance para evaluar distintas secuencias .....</b>            | <b>255</b> |
| <b>Anexo I.</b>     | <b>Comportamiento frecuencial de sistemas discretos con retardos. ....</b>        | <b>259</b> |
| <b>Capítulo 7.</b>  | <b>CONCLUSIONES .....</b>   | <b>271</b> |
| <b>Bibliografía</b> | <b>.....</b>  | <b>279</b> |



# NOTACIÓN Y ACRÓNIMOS

|      |   |
|------|---|
| NCS  | Sistemas controlados por red                      |
| NID  | Retardos inducidos por red                        |
| LTI  | Sistemas lineales invariantes en el tiempo        |
| LTV  | Sistemas lineales variantes en el tiempo          |
| DTSS | Sistemas de tiempo discreto conmutados            |
| DLI  | Inclusiones lineales discretas                    |
| SISO | Sistema una entrada – una salida                  |
| MIMO | Sistema múltiple entrada- múltiple salida         |
| MZT  | Transformada Z modificada                         |
| FT   | Función Transferencia                             |
| CT   | Tiempo Continuo                                   |
| DT   | Tiempo Discreto                                   |
| RF   | Respuesta en frecuencia                           |
|      |   |
| LMI  | Desigualdades (inecuaciones) lineales matriciales |
| JSR  | Radio espectral conjunto                          |
| QLF  | Función Lyapunov cuadrática                       |
| CQLF | Función Lyapunov cuadrática común                 |
| L-K  | Lyapunov–Krasovskii                               |
|      |   |
| RM   | Rate Monotonic                                    |
| EDF  | Earliest Deadline First                           |
| QoC  | Calidad de control (Quality of Control)           |
| QoS  | Calidad de servicio (Quality of Service)          |



# CAPÍTULO 1

## Introducción

Un sistema distribuido de control es un sistema espacialmente distribuido en el cual la comunicación entre sensores, actuadores y controladores se realiza a través de una red de comunicaciones. En la literatura actual, la denominación dominante para estos sistemas es NCS, por *Networked Control Systems*, su designación en inglés, (Walsh et al., 2002).

El uso de una red compartida multipropósito para conectar tales elementos distribuidos proporciona arquitecturas flexibles y generalmente reduce los costos de instalación y mantenimiento. Asimismo, los avances tecnológicos en la capacidad de los procesadores permiten que sean compartidos entre diferentes sistemas de control, (Nilsson, 1998), (Eker et al., 2000), (Ben Gaid et al., 2006).

En Figura 1.1 extraída de (Hespanha et al., 2007) se muestra un NCS en el cual varios lazos de control se cierran a través de una red de comunicación. En la misma se muestran los bloques de codificación (“Enc.”) y decodificación (“Dec.”). El primer bloque es responsable del muestreo de la señal de salida de la planta y su acondicionamiento para la transmisión por la red. El segundo bloque tiene como tarea la decodificación de la señal recibida y su conversión en señales que actúen sobre la planta.

En Figura 1.2 se muestra una arquitectura de un sistema embarcado, cuya designación en inglés es *Embedded System*, en el cual las tareas de tiempo real que implementan las leyes de control se ejecutan en forma paralela en un mismo procesador.

En las aplicaciones de control embarcadas y distribuidas, los mencionados recursos de comunicación y de procesamiento son limitados.

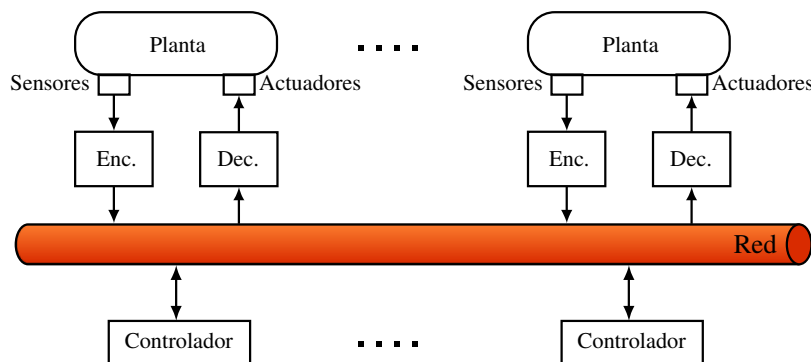


Figura 1.1: Arquitectura general del NCS.



El uso de las redes de comunicación y los procesadores compartidos facilita la disponibilidad de la información instantánea e histórica sobre el sistema en los niveles de control, supervisión y administración, y mejora el rendimiento de los recursos instalados. Además, aumenta la capacidad de mantenimiento y detección de fallas, la interoperabilidad de los dispositivos y presenta una mejora en la reconfigurabilidad de los sistemas de control.

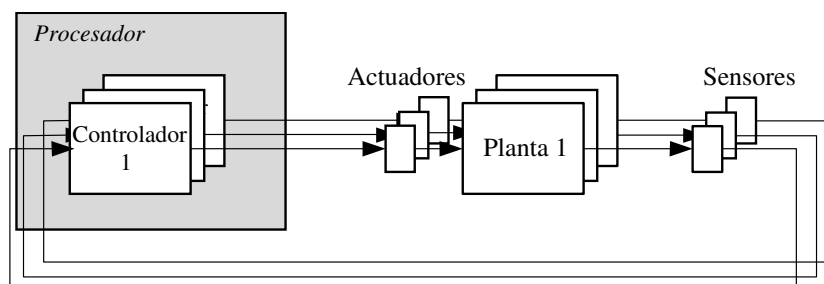


Figura 1.2: Sistemas de control que comparten un procesador común.

Los NCS son encontrados en un amplio rango de áreas tales como la industria, el transporte, la medicina (por ejemplo cirugía remota), en la generación de energía, con propósitos militares, entre otros.

Por ejemplo, en el ámbito industrial las redes de comunicación son muy utilizadas y se organizan según tres niveles de jerarquías. En cada uno de estos niveles se presentan características propias de intercambio de información y diferentes tipos de equipamiento. El nivel más bajo se refiere a las conexiones físicas al nivel de entradas salidas discretas, sensores, contactores, actuadores y el intercambio de datos en este nivel es en bits y físicamente esta red está ubicada en el campo.

El nivel intermedio (red de control) se refiere a la red que une los controladores; implementados en dispositivos como PLC (siglas de Programmable Logic Controller), CNC (siglas de Computer Numeric Controller), PC de control; y por la misma la información se transporta a nivel de bytes, requiriéndose un flujo de información para garantizar la actualización adecuada en los controladores y las estaciones de monitoreo. Esta red está físicamente ubicada donde se encuentran los controladores, ya sea en el campo, en la sala de control, o en el centro de monitoreo.

El nivel más alto se refiere a una red de computadoras que procesa el comportamiento de la instalación; tales como SCADA (siglas de Supervisory Control And Data Acquisition), HMI (siglas de Human–Machine Interfaces); y permite operaciones de monitoreo, supervisión y comando (pasaje de órdenes, consignas o set-points en lazo abierto) estadístico. Esta red se instala generalmente dentro del centro de cómputos, una sala de control en un ambiente

industrial. En este nivel la información se transporta en paquetes con datos del sistema más otros datos necesarios para cumplir con el requisito de disponibilidad operativa.

Si bien los buses de campo fueron inicialmente pensados para el nivel más bajo, hoy en día existen buses para todos estos niveles. Las distintas tecnologías de redes utilizadas en la industria son descritas en sección 2.2.2 y las referencias citadas allí.

## **1.1 Implementación de sistemas de control en plataforma informática distribuida o compartida**

La secuencia de las operaciones involucradas en la ejecución del control en lazo cerrado de un sistema (muestreo, cálculo, actuación) se denomina generalmente tarea de control (traducción del inglés de *control task*) y tiene como requerimiento ser realizada en un dado tiempo. Por esto se puede caracterizar al sistema de control como un sistema con restricciones temporales de Tiempo Real (RT, por Real Time).

Dependiendo de la aplicación, se puede considerar que las restricciones RT asociadas a las tareas son del tipo: “*hard*” (rígidas), “*soft*” (flexibles) o “*firm*” (firmes). Esta distinción está basada en las consecuencias derivadas de la no satisfacción de las restricciones temporales, que se expresan como límites de tiempo y se refieren como *deadlines*. Por ejemplo, un sistema con restricciones “*hard*” debe garantizar que sus tareas se completen “rigurosamente” a tiempo, dado que su incumplimiento puede tener consecuencias graves, mientras que las restricciones “*soft*” presuponen restricciones de mejor esfuerzo. Los sistemas con restricciones “*firm*” son sistemas “*hard*” que pueden tolerar algunas pérdidas, si las mismas ocurren con una baja probabilidad.

Si bien en (Åström & Wittenmark, 1997) se considera que las tareas de control son de tipo “*hard*”, en numerosos artículos se ha mostrado que se puede tolerar la no ejecución de algunas instancias de estas tareas sin tener consecuencias drásticas, ver (Eker et al., 2000), (Ramanathan, 1999), (Hadjicostis & Touri, 2002), (Ben Gaid et al., 2006), entre otros, es decir de acuerdo con esta interpretación, las restricciones temporales son de tipo *RT-firm*.

Una típica restricción temporal de una tarea de control es que cada instancia sea completada antes de que esté disponible la instancia posterior, esto implica definir el *deadline* de la tarea igual al período de muestreo, (Ramanathan, 1999), (Zhang et al., 2001), entre otros.

El no cumplimiento de los requerimientos temporales puede ocurrir no sólo por una situación crítica en cuanto a la cantidad de recurso disponible, sino también debido a una

---

incorrecta asignación del mismo (Stankovic, 1988). Para asignarlo adecuadamente se requiere tener en cuenta el protocolo de la red de comunicación, el tráfico previsto según la cantidad de tareas, sus períodos y sus requerimientos temporales, ver sección 1.1.1.

Desde el punto de vista de los objetivos de control existe una relación entre las especificaciones de diseño sobre la performance del sistema de control y el período de la tarea que ejecuta el control. Además, como se mencionó en el párrafo precedente, el período está vinculado a la restricción temporal de la tarea de control. Por ambos motivos, el período se vuelve un parámetro de diseño determinante de la performance obtenible al implementar un sistema de control en una plataforma informática. Esto es analizado en sección 1.1.2.

### 1.1.1 Problemas inducidos por la red, protocolos y planificación

La implementación de un sistema de control en una plataforma informática de tiempo real provoca que se deban compartir recursos de procesamiento y comunicación que son de capacidad limitada. Esto tiene como consecuencia la aparición de ciertos problemas como retardos y/o pérdidas de datos que pueden impedir que no se respeten las restricciones temporales requeridas por las tareas de control.

En el caso de que la capacidad del recurso sea muy limitada o sólo se asigne una pequeña porción a los distintos dispositivos, pueden aparecer errores de cuantificación y retardos significativos debido a la baja resolución y el tiempo de transmisión finito de los valores discretos intercambiados. Este problema de control con tasa de datos limitada, que no será tratado en esta tesis, ha sido ampliamente abordado en la literatura aprovechando su analogía con elementos de la teoría de la información (Nair & Evans, 2000), (Liberzon, 2003), etc.

A continuación se presentan brevemente las causas de aparición de los retardos y la pérdida de mensajes. Luego, se presentan algunas características concernientes a la planificación.

#### *i. Retardos y pérdidas de datos*

Para transmitir una señal de tiempo continuo sobre una red, la señal debe ser muestreada, codificada en un formato digital, transmitida a través de la red, y finalmente decodificada en el nodo receptor. Este proceso es significativamente diferente del muestreo periódico y el sincronismo entre muestreo de datos y aplicación de la ley de control asumidos en la teoría de control digital. Al tiempo entre que se realiza el muestreo efectivo y la señal es decodificada en el receptor se lo denomina retardo de entrada/salida o de extremo a extremo. Su valor

---

puede ser altamente variable y está constituido en parte por el tiempo de acceso al medio compartido de comunicación, la funcionalidad adicional requerida para la codificación de señales físicas y procesamiento de la comunicación. Dependiendo de los protocolos de red adoptados, el hardware elegido y el algoritmo de planificación, los retardos pueden ser caracterizados como constantes, acotados o incluso aleatorios, ver sección 2.2.3.

El mensaje a ser transmitido en cada comunicación es almacenado en colas (o buffers) a la espera de que la red esté disponible. Debido al tamaño finito de estas colas, en caso de congestión se pueden perder algunos de estos mensajes. En la capa física los mensajes son transmitidos en paquetes por lo que suele denominarse pérdida de paquetes.

## ii. Protocolos y planificación

Las restricciones de tiempo real determinan que el tráfico debe ser enviado y recibido dentro de un intervalo adecuado y en caso de que las mismas no se respeten se dice que ha ocurrido una falla temporal (pérdida de un *deadline*). Asimismo, tales fallas pueden ocurrir no sólo por la cantidad de recurso disponible, sino debido a la incorrecta asignación del mismo.

En la práctica, se suele intentar resolver el problema de satisfacer las restricciones temporales de cada lazo de control con el uso de algoritmos de planificación o agendado (traducciones del término en inglés *scheduling*) del tráfico de la red y/o de la ejecución de tareas (Almeida et al., 2002), (Zhang et al., 2001). Si bien el uso de estos algoritmos puede mejorar la respuesta temporal del sistema, implícitamente no garantiza que las restricciones temporales sean satisfechas. Esto requiere un análisis extra que demuestre cuan factible es la satisfacción de las restricciones temporales para una dada planificación, lo que es realizado vía un análisis de planificación. Este tipo de análisis tiene su origen en la teoría informática de planificación de tareas de tiempo real (Liu & Layland, 1973), (Stankovic, 1988). Para más detalle, los conceptos de tareas de tiempo real, planificación, su caracterización y conceptos de análisis de factibilidad de planificación se presentan en el Apéndice D.

### 1.1.2 Período de muestreo y performance de lazo cerrado

La performance del control de lazo cerrado de una planta implementado en una plataforma informática depende de parámetros informáticos y del diseño de control, tal como se adelantó en sección 1.1. A continuación se resumen dos resultados que son motivadores para abordar este problema con las soluciones de sección 1.2.

*i. Período y performance en plataforma real*

El problema que surge al implementar un sistema de control en una plataforma informática puede ser ejemplificado con la Figura 1.3 extraída de (Lian et al., 2001). En la misma se compara la performance de control en función del período de muestreo para un sistema de control digital (que asume muestreo sincrónico) y para el mismo sistema real (implementado en un NCS).

A los efectos de tal comparación se destacan distintas categorías de performance, que son medidas con un costo que asocia un menor valor para una mejor performance. En particular, se proponen los siguientes niveles de costo: mejor (para período de muestreo nulo, es decir control continuo), aceptable, inaceptable y peor (inestable).

El resultado para el *sistema de control digital* muestra que a medida que el período de muestreo tiende a cero, el costo es más pequeño acercándose más al mejor, que es el de tiempo continuo. Sin embargo, este resultado no es preservado para el *sistema real* implementado en la plataforma informática, ver por ejemplo los costos a la izquierda de  $h_b$ . La diferencia entre ambos se debe a que ante la disminución del período de muestreo por debajo de  $h_a$  se produce un aumento en el tráfico de la red, lo que puede provocar congestión que puede traducirse en la pérdida de paquetes o un aumento considerable del retardo que sufre el sistema. Por detalles, referirse a Capítulo 2.

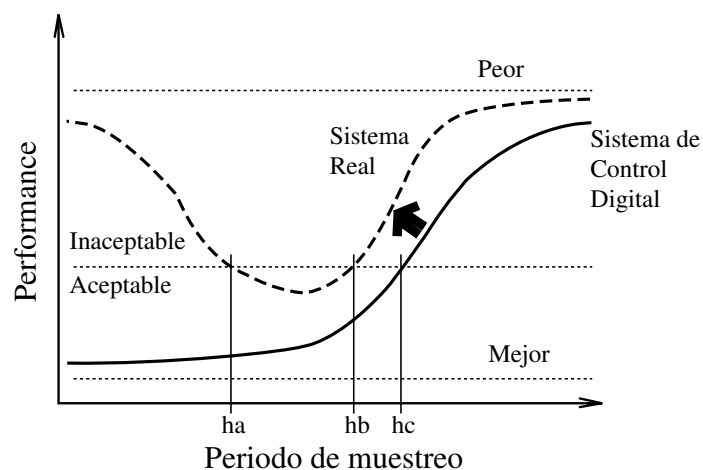


Figura 1.3: Comparación de performance de sistema de control digital y NCS

Una conclusión que surge de lo expuesto anteriormente es que para conseguir una buena performance en un NCS, el período de muestreo se debe elegir en el rango de valores entre  $h_a$  y  $h_c$ , preferentemente cercanos a  $h_b$ . Es decir, en su determinación se deben incorporar los problemas inducidos por red.

## ii. Diseño de controlador adaptable al período

Sin tener en cuenta el análisis previo, se considera aquí la situación ideal en la cual la performance de lazo cerrado del sistema es sólo función del controlador elegido y del período. En este contexto supongamos que la selección de los parámetros del controlador se hace de manera de optimizar la performance para cada valor específico de período, por ejemplo realizando un diseño con el método óptimo LQ para cada período. Esta relación puede ser ejemplificada por medio de la Figura 1.4 a), que muestra la relación entre la performance de lazo cerrado (evaluada con el costo cuadrático  $J$ ) y el período  $h$  obtenida para un modelo lineal de segundo orden de un péndulo.

Esta Figura 1.4 a) muestra explícitamente que existen períodos para los cuales el costo resulta efectivamente infinito (corrigiendo la Figura 4 de (Eker et al., 2000), en la cual los valores de costo asumen erróneamente un valor alto pero finito). Este fenómeno resonante puede ser explicado con el siguiente argumento: los períodos  $h_p = p 2\pi / (\omega_A \sqrt{1 - \xi^2})$ , con  $p$  un número entero, son períodos patológicos y la planta discretizada se vuelve no controlable (sección B.4 de Apéndice B por detalles). Como consecuencia de tal fenómeno de resonancia la característica del costo no es convexa, y entonces se puede concluir que un período de muestreo más chico no siempre garantiza una mejor performance. A modo de ejemplo se indica el costo para un período de  $h''=0.7s$  que resulta más chico que para  $h'=0.49 s$ .

Para evaluar las ventajas de la adaptación de los parámetros del controlador al período se puede comparar su performance con la obtenible si se mantuviera un controlador único. Por ejemplo, sea el controlador LQ diseñado para  $h^*=0.05$ , entonces es simple de comprobar que con un aumento del período a valores  $h \geq 0.306 s$ . el sistema se vuelve inestable. Por su parte, la técnica de adaptación permite garantizar la estabilidad para valores muy superiores de período, ver en Figura 1.4-a que superan a 0.306 s. A partir de esto se puede postular que la adaptación permite obtener una performance aceptable del sistema en lazo cerrado para un rango superior de períodos con respecto al uso de un controlador único.

Otro criterio de performance de (Åström & Wittenmark, 1997) muy usado en la literatura, establece ciertos límites para seleccionar el período. Específicamente postula que se debe satisfacer la regla  $0.2 \leq \omega_{CL}h \leq 0.8$ . Para el mismo ejemplo se muestra en Figura 1.4-b el producto  $\omega_{CL}h$  y tales cotas (regiones en gris). Por debajo de la línea de 0.2 se tiene sobremuestreo y por encima de 0.8 se tiene un submuestreo. Lo interesante que se muestra en esta figura es que hay dos zonas donde se puede elegir el período manteniendo un nivel

aceptable de performance de lazo cerrado. Inclusive este criterio es satisfecho para valores de períodos superiores al primer período de resonancia.

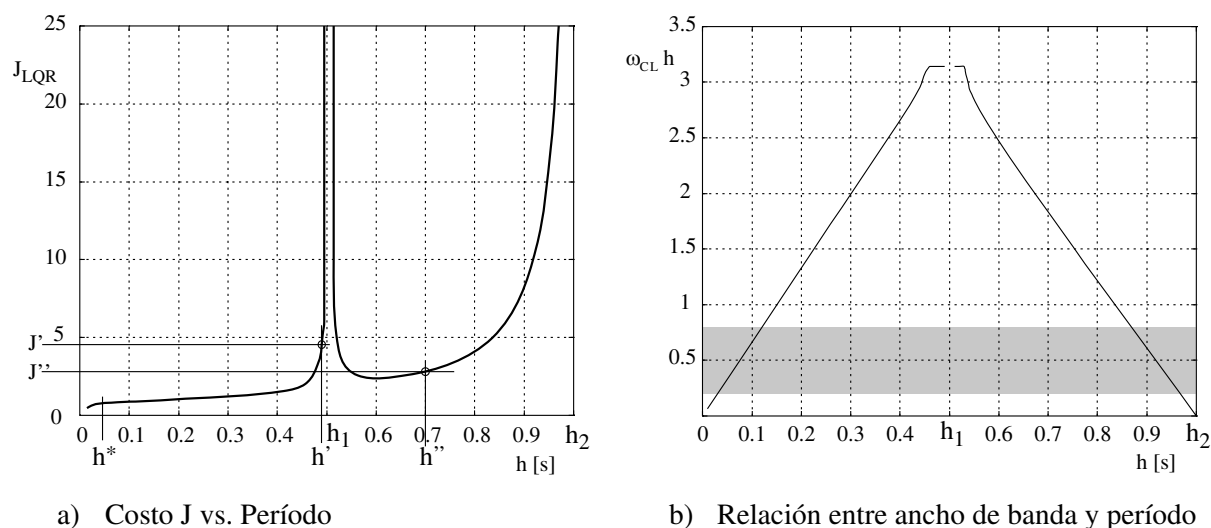


Figura 1.4: Dos medidas de performance en función del período para sistema péndulo.

Del análisis precedente resulta que no es necesariamente cierto que el aumento del período signifique una pérdida de performance, sino que depende del control diseñado y de la función de performance evaluada.

## 1.2 Enfoque mixto desde el control y la informática

La mejor manera para tratar los problemas mencionados es trabajando conjuntamente en los dos dominios teóricos principales: la Teoría de Control, en el nivel funcional más abstracto de su tratamiento, y la Informática Aplicada en el nivel relacionado con su implementación tecnológica. Considerando los resultados en ambas vertientes las diferentes alternativas de solución suelen ser agrupadas en alguna de las dos líneas descritas a continuación.

### 1.2.1 Control sobre Redes

El enfoque denominado “Control sobre Redes”, (Vatanski et al., 2009), considera que la red es un recurso pasivo que establece ciertas restricciones, expresadas en términos de calidad de servicio (QoS), para las aplicaciones de control. Diferentes QoS que suelen ser consideradas de interés son: máximo valor de retardo, la variación del retardo, la variación del período de muestreo, cierta tasa de pérdida de paquetes, entre otras, ver descripción en sección 1.1.2.

---

Este enfoque comúnmente involucra el análisis de la incidencia de estas QoS sobre la degradación de la performance y la estabilidad. Un ejemplo de la incidencia de estos efectos se muestra en la curva de performance del sistema real en función del período de Figura 1.3, ver análisis en sección 1.1.2 i. Además, esto puede llevar a la concepción de nuevos métodos y modificación de métodos convencionales de la ingeniería de control vía la integración a sus modelos de diseño de las características tecnológicas de los NCS a fin de satisfacer las especificaciones de comportamiento en lazo cerrado (estabilidad y performance).

### 1.2.2 Co-Diseño

El enfoque de Co-Diseño, en lugar de considerar pasivamente a la red de comunicaciones e incorporar sus particularidades al modelo del diseño del control, propone considerarla como un recurso activo sobre el cual se puede actuar a través de la asignación de recursos, políticas o algoritmos de planificación, determinación de las características más ventajosas de QoS, etc, esto implica poder realizar un “control de la red”, (Vatanski et al., 2009).

El uso de algunas de estas soluciones, basadas en el control de la admisión de distintos flujos, requiere cierta flexibilidad por parte de los NCS. Por ejemplo: para poder admitir un nuevo flujo en la red algún otro debe ceder un poco del ancho de banda que utiliza. Así se tiene una política activa que previene la ocurrencia de los retardos y que conlleva el beneficio adicional de descongestionar la red.

En esta línea, uno de los mecanismos considerados en numerosos artículos como estrategia para el Co-Diseño propone ajustar el período de las tareas involucradas en el control al estado del recurso, ver sección 2.3.2. Con esta técnica al evitar la congestión no hay retardos ni pérdida de paquetes significativas y por tanto el valor de  $h_A$  de Figura 1.3 es pequeño. La pérdida de performance asociada al aumento de período con un controlador único puede ser compensada reajustando los parámetros del controlador al período efectivo, partiendo de la idea seminal analizada en sección 1.1.2 ii.

Sin embargo, si bien esta propuesta es muy prometedora en cuanto a performance, el hecho de que se varíe el período de muestreo de acuerdo al estado del recurso convierte al problema en un sistema variante en el tiempo que merece un especial tratamiento.

Dado que esta combinación de diseño de controladores con los algoritmos de planificación para manejo de la red tiene como objetivo la optimización conjunta de los comportamientos de los NCS, la alternativa de Co-Diseño, si bien más compleja, resulta más prometedora que el enfoque de Control sobre Redes.



---

### 1.3 Aportes de esta tesis

La organización de esta tesis se describe a continuación.

En el Capítulo 2 se presenta un estudio exhaustivo de los distintos enfoques usados para tratar los problemas presentados en esta introducción, haciendo una clasificación entre las dos posibles estrategias de solución: Control sobre redes y Co-Diseño.

Asimismo el Capítulo 2 se complementa con cuatro apéndices que resumen ciertos aspectos teóricos relevante para la tesis. En los primeros tres apéndices A, B y C se describen los fundamentos de teoría de control digital y se presentan los modelos matemáticos, ciertas nociones básicas sobre diseño y performance y resultados sobre estabilidad. En el cuarto apéndice D se presenta un resumen con los conceptos de tareas de tiempo real, planificación, su caracterización y conceptos de análisis de factibilidad de planificación

En los Capítulos 3 y 4 se aborda el problema de los NCS con un enfoque de *Control sobre Redes*. En particular, se consideran como indicadores de la calidad de servicio de la red de comunicaciones a los retardos de transmisión que la misma induce. Se analiza el impacto en la estabilidad y la performance de los lazos de control.

En Capítulo 3 se asume que el retardo es constante. Tal retardo se incorpora al modelo discreto del sistema usando la transformada Z modificada (MZT) y en relación con ciertas características de estos modelos se propone realizar un análisis de estabilidad para retardos acotados pero desconocidos, todos en el dominio de tiempo discreto.

En Capítulo 4 se considera que los retardos son de variación arbitraria pero acotada. Se proponen dos métodos de diseño de controladores robustamente estables frente al retardo. El primero de ellos considera un enfoque que opera sobre las normas  $H_\infty$  de las funciones de sensibilidad del lazo cerrado y el segundo método se formula con un método *Loop-Shaping*.

En Capítulos 5 y 6 se aborda el problema de los NCS mediante un enfoque de Co-Diseño.

En particular se combinan las soluciones para la administración de tareas con el de la familia de controladores adaptables para constituir una alternativa de solución al problema general de Co-Diseño.

En Capítulo 5 se proponen soluciones para el problema teórico de la estabilización en lazo cerrado de plantas LTI continuas con muestreo no uniforme mediante un enfoque Lie-

algebraico. Los resultados permiten calcular familias de controladores parametrizados por los distintos períodos de muestreo, es decir, familias adaptables de controladores estabilizantes.

En Capítulo 6, desde el dominio informático se propone usar una política de pérdida de datos que descarte ciertas instancias de tareas de control utilizando el modelo  $(m, k)$ -firm para evitar la congestión del recurso. Entre los motivos que justifican el uso de esta política  $(m, k)$ -firm se destacan que es fácilmente implementable, y que en general los sistemas de control pueden tolerar la pérdida de algunas instancias de las tareas de control (es decir que son RT *firm*), ver sección 1.1. El modelo  $(m, k)$ -firm resulta en un mecanismo indirecto de ajuste de período, y por esto se complementa con un diseño de control que garantice la estabilidad y un buen nivel de performance. A tal fin se usa la familia de controladores adaptables a los períodos variables que resulta del Capítulo 5.

En Capítulo 7 se presentan las conclusiones.

### **Publicaciones**

Los diferentes Capítulos de este documento se basan en las siguientes publicaciones, que están ordenadas en orden cronológico creciente y se agrupan en dos partes: los resultados para Capítulos 3 y 4, y los resultados para Capítulos 5 y 6.

Felicioni, F. & Junco, S., Analysis of Stability and Performance of Simple Networked Control Systems. In *17th IMACS World Congress "IMACS: International Association for Mathematics and Computers in Simulation"*. Paris, 2005.

Felicioni, F., Blet, N. & Junco, S., Control robusto  $H_\infty$  de sistemas distribuidos con retardos variables en la red de comunicación. In *XI RPIC "Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control"*. Río IV, Argentina, 2005.

Felicioni, F. & Junco, S., 2006. Restricciones para diseño "Loop Shaping" de sistemas de control lineales monovariantes con retardos variables. In AADECA, ed. *Actas de AADECA 2006 - XX Congreso Argentino de Control Automático*. Buenos Aires, Argentina, 2006.

Felicioni, F. & Junco, S., Estabilidad de sistemas controlados sobre redes de comunicación ante retardos de transmisión. AMCA Online, *Mecánica Computacional Vol XXVIII*, págs. 2625-2647, ENIEF 2009, Tandil, Argentina, Nov. 2009.

Felicioni, F., Jia, N., Song, Y. & Simonot Lion, F., 2006. Impact of a  $(m,k)$ -firm data dropouts policy on the quality of control. In *6th IEEE International Workshop on Factory Communication Systems*. Torino, Italy, 2006.

---

Felicioni, F. & Junco, S., Control de Tráfico de Redes de Comunicación de Sistemas Distribuidos de Control. In *XII RPIC, Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control*. Río Gallegos, Argentina, 2007.

Felicioni, F. & Junco, S., A Lie Algebraic Approach to Design of Stable Feedback Control Systems with Varying Sampling Rate. In *17th IFAC World Congress (IFAC WC 2008)*. Seúl, Corea del Sur, 2008 a.

Felicioni, F. & Junco, S., Stabilité robuste de systèmes échantillonnés à taux variable : Une approche basée sur l'algèbre de Lie. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*. Bucarest, Rumania, 2008 b.

Felicioni, F., Junco, S. & Haimovich, H. Control de sistemas discretos LTI conmutados en base a métodos lie-algebraicos, con aplicación al Control sobre Redes de comunicación. In *AADECA 2008 - XX Congreso Argentino de Control Automático*. Buenos Aires, Argentina, 2008.

Felicioni, F. 2008. *Design of stable feedback controller for second order systems with varying sampling time rate: LQ & Lie-algebraic approaches*. Rapport de recherche n°6753. Nancy, Francia: INRIA-Nancy Grand Est.

Felicioni, F., Jia, N., Song, Y. & Simonot Lion, F., 2008. Optimal On-line (m,k)-firm Constraint Assignment for Real-time Control Tasks Based on Plant State Information. In *ETFA 12th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. Hamburgo, Alemania, 2008.

Felicioni, F., Berbra, C., Gentil, S. & Lesecq, S., 2010. On-line adaptive control of a quadrotor under (m,k)-firm constraint. In *XXII Congreso Argentino de Control Automático - AADECA*. Buenos Aires, Argentina, 2010.

Felicioni, F., Jia, N., Simonot-Lion, F. & Song, Y.-Q., 2010. Overload Management Through Selective Data Dropping. In I. Wiley, ed. Capítulo 5 de *Co-design approaches to dependable networked control systems*.

Se destacan asimismo la participación en los siguientes artículos cuyos resultados, relacionados con el tema de tesis, no son incluidos en este trabajo. Los dos últimos continúan el trabajo iniciado en esta tesis, sobre diseño de controladores con métodos Lie-algebraicos.

Braslavsky, J., Kofman, E. & Felicioni, F. Effects of time quantization and noise in level crossing sampling stabilization. In *AADECA 2006 - XX Congreso Argentino de Control Automático*. Buenos Aires, 2006.

Felicioni, F., Song, Y., Simonot Lion, F. & Simonot, F. Optimal control with packet drops in networked control systems. In *8th IFAC International Conference On FieldBuses & Networks in Industrial & Embedded Systems*. Corea, 2009.

Haimovich H., Braslavsky J. y Felicioni F. On feedback stabilisation of switched discrete-time systems via Lie-algebraic techniques. *48th IEEE Conference on Decision and Control*. China, 2009.

Haimovich, H.; Braslavsky, J.; Felicioni, F. Feedback stabilisation of switching discrete-time systems via Lie-algebraic techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*. Scheduled issue of publication: Volume 56, Issue 5. May, 2011.

# CAPÍTULO 2

## **Fundamentos y estado del arte de sistemas de control de tiempo discreto**

En este Capítulo se presenta el problema de los sistemas distribuidos de control y se analiza el estado del arte que comprende los resultados más relevantes para tratar los problemas inducidos por red haciendo una diferenciación entre los dos enfoques: “Control sobre Redes” y “Co-Diseño”.

Para facilitar la lectura de la tesis se complementa este Capítulo con cuatro Apéndices. Los tres primeros (A, B y C) son consagrados a la presentación de resultados de la teoría de control; incluyen modelos matemáticos básicos, un resumen de diseño de control con las técnicas más difundidas y las nociones de estabilidad de los sistemas discretos más generales posibles; mientras el cuarto apéndice (D) presenta los conceptos más importantes de tareas de tiempo real.

### **2.1 De la arquitectura distribuida a los problemas inducidos por la red**

Los avances en las tecnologías de los sistemas de cómputo y de comunicación han hecho que en muchos ámbitos la tecnología punto a punto sea reemplazada por una arquitectura que cierra los lazos de control sobre una red de comunicaciones, ejecutándose los algoritmos de control en procesadores compartidos. Esto provoca que el intercambio de información se haga en un medio común a varios dispositivos, lo que tiene varias consecuencias, entre las que se destacan los retardos en las comunicaciones entre los distintos dispositivos, conocidos como retardos inducidos por red, los retardos de ejecución del algoritmo de control y el hecho de que los paquetes de información pueden ser perdidos durante la transmisión.

Debido a estas características, se producirán distorsiones o desviaciones en relación con las hipótesis de la teoría convencional de control (ver reseña en sección 2.2), requeridas para el diseño “estándar” de los lazos de control (secciones B.1, B.2 y B.3). Estos problemas inducidos por los recursos informáticos harán que los índices de performance de los lazos de

---

control (diseñados sin tener en cuenta estos efectos) se puedan degradar sensiblemente, pudiendo llegar incluso a la desestabilización de los sistemas de control.

Como fue adelantado en el Capítulo introductorio, aquí se consideran dos enfoques para tratar este problema: “*Control sobre Redes*” que considera que la red es un recurso pasivo sobre el cual no se puede actuar y “*Co-Diseño*” que requiere poder asignar el recurso compartido de acuerdo a alguna estrategia.

A continuación se presenta el estado del arte que contempla separadamente tales enfoques. Se introducen las hipótesis de modelado en cada caso, se incluye una breve descripción sobre las redes típicamente usadas en los NCS y se analiza los problemas que induce. Se presenta un análisis exhaustivo de las soluciones que han sido consideradas para resolver el problema.

## **2.2 Estado del arte del Control sobre Redes**

Los enfoques de Control sobre Redes habitualmente involucran dos etapas, la primera es hacer un análisis de la incidencia de las particularidades de las redes de comunicación sobre la performance de los sistemas de control distribuidos, la segunda se encarga de estudiar la estabilidad.

Aquí son presentadas las hipótesis de modelado del problema de Control sobre Redes y luego se citan los trabajos más comúnmente referidos de acuerdo con las categorías mencionadas.

### **2.2.1 Origen del Retardo en NCS y modelado**

#### *Hipótesis de modelado de NCS:*

Las propiedades del NCS relevantes para los Capítulos 3 y 4 se exponen en base al esquema de la Figura 2.1. La planta continua y el controlador discreto se comunican vía una red de comunicaciones de tiempo real, de la cual sólo se modelan los retardos que ella induce.

Se asume lo siguiente en relación con el manejo de las señales de cada sistema de control en la red (Zhang et al., 2001): i) muestreo periódico de la salida de la planta; controlador y actuador manejados por los eventos a su entrada; ii) agrupamiento de los mensajes de varios sensores hacia un mismo controlador en un único paquete de red (*single-packet*); iii) en forma análoga se envía un paquete desde un controlador hacia varios actuadores.

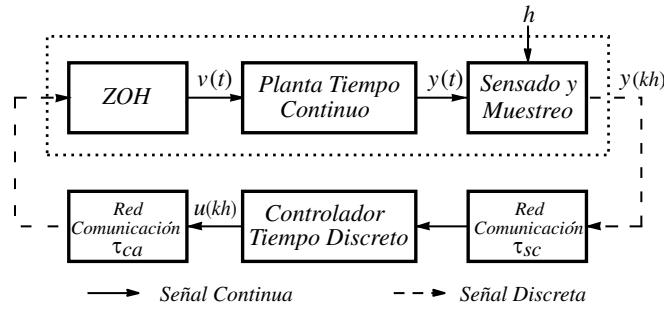


Figura 2.1: Modelo del NCS con retardos inducidos por la red

Se distinguen dos clases de retardos inducidos por la red: del sensor al controlador  $\tau_{sc}$ , y del controlador al actuador  $\tau_{ca}$ . El retardo computacional  $\tau_{comp}$  del controlador, es decir el tiempo de ejecución de la ley de control (ver Apéndice D), puede ser absorbido en  $\tau_{sc}$  o  $\tau_{ca}$ . Ambos retardos de red pueden ser superiores o inferiores al período de muestreo  $h$ . Con la hipótesis de controlador lineal y estacionario, para cada instante  $t_k$  de muestreo, los retardos pueden englobarse en un único retardo  $\tau_{(k)}$  efectivo sobre la acción de control ( $\tau_{(k)} = \tau_{sc,k} + \tau_{comp} + \tau_{ca,k}$ ), como se muestra en la Figura 2.2. En la literatura,  $\tau_{(k)}$  se conoce también como retardo de entrada-salida.

Otra forma alternativa de manejar las señales en la red considerada en (Wittenmark et al., 1995) es: i) muestreo periódico de la salida de la planta; ii) controlador (*time-triggered*) planificado para ejecutarse desfasado  $\tau_s$  con respecto a los instantes de muestreo y actuador manejados por los eventos a su entrada. Si  $\tau_s > \tau_{sc,k}$ , el retardo entre sensor y controlador es conocido y constante con valor  $\tau_s$ . En caso contrario, la medición no estará disponible cuando se necesita, lo que se denomina muestreo vacante (*vacant sampling*) (Halevi & Ray, 1998).

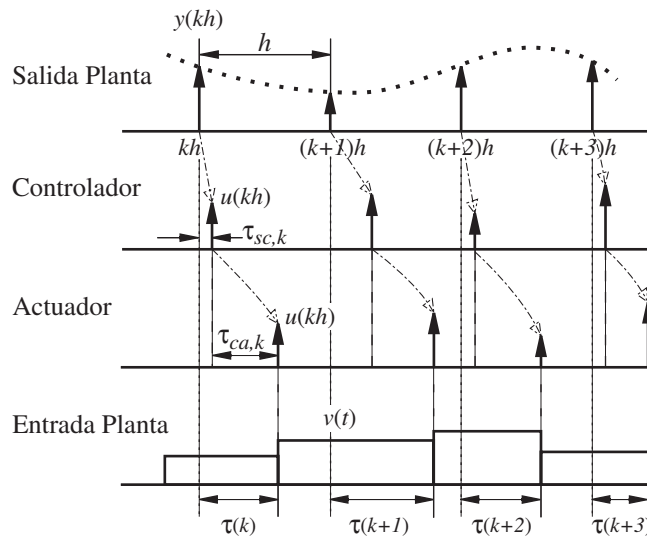


Figura 2.2: Retardos Inducidos por red ( $\tau < h$ ).

### *Origen del retardo:*

En los NCS los retardos de transmisión que sufren los mensajes entre controlador- actuador  $\tau_{ca}$  y sensor- controlador  $\tau_{sc}$ , están conformados por dos términos: un término asociado al dispositivo y otro asociado a la red (Lian et al., 2001).

El retardo de dispositivo incluye a los retardos en los nodos fuente y destino. El retardo en el nodo fuente incluye el tiempo de pre-procesamiento  $\tau_{pre}$  y el tiempo de espera  $\tau_w$  y el retardo en el nodo destino es solo el tiempo de post-procesamiento  $\tau_{post}$ . El retardo de red incluye el tiempo total de transmisión de un mensaje y el retardo de propagación en la red.

Entonces el retardo total es la suma de todos los retardos enumerados (2.1).

$$\tau_{delay} = \tau_{pre} + \tau_w + \tau_{tx} + \tau_{post} \quad (2.1)$$

En lo que sigue, se analizan las características más importantes de los valores de estos retardos que se muestran en Figura 2.12 extraída de (Lian et al., 2002).

*Tiempo de pre-procesamiento en el nodo de origen (o fuente)  $\tau_{pre}$ :* Este tiempo es el necesario para adquirir datos desde un ambiente externo y codificarlo en un formato de datos apropiado para la red. Depende de la adquisición de datos y de las características del software y hardware del dispositivo. Si bien en muchos casos se asume que su valor es constante o despreciable, esto no es necesariamente cierto en un caso más general. En (Lian et al., 2002) se muestra que existen diferencias notables en su valor aún en dispositivos similares. También se explica cómo se puede usar modelos de identificación para representar este retardo.

*Tiempo de espera en el nodo fuente  $\tau_w$ :* Un mensaje debe esperar en la cola del nodo fuente y puede ser bloqueado debido a la transmisión de otros mensajes en la red. Los principales factores que lo afectan son el protocolo de red, la carga de la red y la actividad del mensaje en el nodo local. Su valor puede ser importante dependiendo de la cantidad de datos en el nodo fuente y del tráfico de la red. Otros retardos adicionales de espera pueden ocurrir en las colas de dispositivos “switch” o “router” ver Nota 2.1.

*Tiempo de transmisión en la red  $\tau_{tx}$ :* Este tiempo es el parámetro mas determinístico de la red porque depende de la tasa de datos, el tamaño del mensaje y la distancia entre los nodos fuente y receptor.  $\tau_{tx} = N T_{bit} + \tau_{prop}$  donde  $N$  es el tamaño del mensaje en bits,  $T_{bit}$  es el tiempo de bit y  $\tau_{prop}$  es el tiempo de propagación entre dos dispositivos.

*Tiempo de pos-procesamiento en el nodo destino  $T_{post}$* : Este tiempo es el que le toma al nodo destino decodificar el dato recibido por la red a partir de su formato de dato físico.

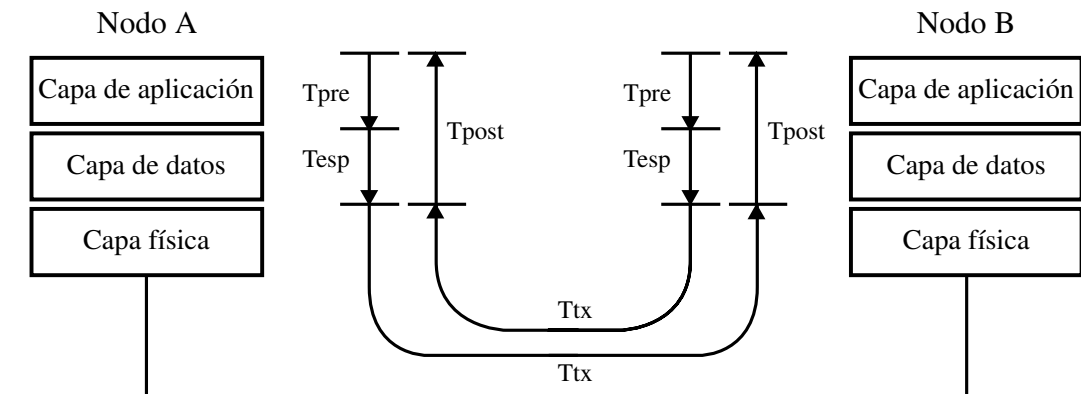


Figura 2.3: Tiempo para un mensaje desde un nodo fuente a uno de destino.

### 2.2.2 Tipos de redes de comunicación que pueden ser usadas en control

Los parámetros relevantes para el diseño del control dependen de las características de las redes, que son en consecuencia resumidas a continuación.

Los protocolos de red utilizan distintas formas para realizar la entrega de datos de extremo a extremo. La funcionalidad del protocolo es comúnmente descripta y diferenciada usando el modelo de referencia de siete capas ISO-OSI (en sus siglas por *International Standards Organization Open Systems Interconnection*), definidas en (ANSI, 1984). Las siete capas son: física, enlace de datos, red, transporte, sesión, presentación y aplicación. La capa de enlace de datos es subdividida en dos subcapas: la capa de Control de Acceso al Medio (MAC en sus siglas del inglés *Medium Access Control*) y la capa de control de enlace lógico (LLC).

El componente del protocolo del control de acceso al medio define el mecanismo para gestionar el ancho de banda. Entonces, el mecanismo MAC es responsable de satisfacer los requerimientos de respuesta en tiempo real o críticos en el tiempo (*time-critical/real-time response*) establecidos sobre la red y asimismo de la calidad de la comunicación entre nodos (Koubias & Papadopoulos, 1995). Existen tres tipos principales de MAC usados en redes de control: *time-division multiplexing* TDM (ej. maestro-esclavo o *token bus*), acceso aleatorio con retransmisión ante colisiones (ej. Ethernet y mecanismos *wireless*) y acceso aleatorio con arbitraje ante colisiones (ej. CAN). Además hay implementaciones híbridas como por ejemplo *switched*-Ethernet que combina TDM con acceso aleatorio. Para referirse a las redes



---

se suele usar la siguiente nomenclatura según el tipo de acceso: aleatorio (RA) con detección de colisión (CD) y con impedimento de colisión (CA); arbitración basada en prioridad (AMP); *time-division multiplexed* (TDM).

A continuación se describen brevemente las características de estas redes, ver (Lian et al., 2002), (Lian et al., 2001), (Moyné & Tilbury, 2007) y referencias allí.

*i. TDM:*

Este método puede ser realizado en dos formas: *maestro-esclavo* (MS siglas de *Master-Slave*) o pasaje de “*token*” o testigo. En una red MS un único maestro sondea múltiples esclavos. Estos pueden mandar datos sólo si han sido demandados por el maestro. Es decir, si el dato de un esclavo está listo para ser enviado debe esperar a ser sondeado por el maestro. Con esto, no aparecen colisiones dado que las transmisiones son planificadas por el maestro. Una vez que los esclavos son sondeados el tiempo de espera es nulo. Ejemplos de red MS son: AS-I, *Modbus* e *Interbus-S*.

En una red de pasaje de “*token*” pueden existir múltiples maestros o *peers* y sólo el nodo que tiene el “*token*” está habilitado para enviar datos. Una vez que el mismo termina de enviar los datos el “*token*” pasa a su vecino lógico. Debido a que sólo un nodo puede transmitir a la vez no existen colisiones de datos. Esta red es determinística porque el máximo tiempo de espera antes de enviar un mensaje puede ser caracterizado con el tiempo de rotación del “*token*” (RTT por *rotation time token*). Una red con pasaje de “*token*” es *ControlNet*. El protocolo *Profibus* está basado en un procedimiento de pasaje de “*token*” entre los maestros y un protocolo de MS para la comunicación entre cada maestro y sus esclavos.

*ii. Acceso aleatorio con arbitración ante colisión:*

CAN es un protocolo de comunicación serie desarrollado principalmente para aplicaciones de la industria automotriz pero que también puede ser utilizado con buena performance en aplicaciones industriales de criticidad temporal. Este protocolo usa una arbitración de Acceso Múltiple por Detección de Portadora (CSMA son las siglas de *Carrier Sense Multiple Access*) basado en la prioridad del mensaje (AMP) para acceder al medio. Es decir, cada prioridad específica sirve para arbitrar el acceso al medio en el caso de transmisión simultánea. Si un nodo quiere transmitir un mensaje debe esperar hasta que el bus este libre; recién entonces comienza a enviar el mensaje bit por bit; luego de enviar cada bit escucha la red, si recibe un bit diferente del que acaba de enviar entonces pierde el derecho a continuar enviando y el otro gana la arbitración. La arbitración se resuelve según la lógica de que un cero lógico gana

sobre un uno lógico. Con este método las transmisiones son no destructivas (Lian et al., 2001), (Moyne & Tilbury, 2007).

### iii. Redes basadas en Ethernet:

Ethernet es una red de acceso aleatorio, también conocida como red de Acceso Múltiple por Detección de Portadora (en sus siglas CSMA por *Carrier Sense Multiple Access*). Cada nodo que quiere transmitir escucha la red y puede comenzar a hacerlo si la misma esta libre. En general ocurre que una vez que la red está libre cada nodo tiene que esperar cierto tiempo (tiempo *interframe* o entre tramas) antes de enviar un mensaje. Para reducir colisiones en la red, los nodos tienen que esperar una cantidad aleatoria de tiempo llamada “*binary exponential backoff*” (BEB) antes de empezar a transmitir.

Existen tres tipos de implementaciones Ethernet: 1. Basada en “Hub” (CSMA/CD), 2. *Switched* Ethernet, 3. Ethernet inalámbrica.

- Basada en “*Hub*”: En esta implementación usada típicamente en oficinas se tiene un “*Hub*” que simplemente transmite cada paquete a todas las interfaces que tiene conectadas. Por tanto, todos los dispositivos reciben el mismo paquete simultáneamente. La operación básica de este protocolo es como sigue: si la red esta ociosa, un nodo comienza a transmitir, si algún otro nodo también intenta transmitir al mismo tiempo los mensajes chocan y se corrompen. Por esto, esto existe una gran probabilidad de colisión de mensajes (Moyne & Tilbury, 2007).
- *Switched* Ethernet: Esta implementación utiliza “*switches*” para subdividir la arquitectura de la red. Tales elementos aprenden la topología de la red y envían los paquetes solo al puerto de destino impidiendo colisiones, incrementando la eficiencia de la red y mejorando el determinismo. Por esto, es ampliamente usada en aplicaciones de manufactura (Moyne & Tilbury, 2007). Además, si se configura la red en una conexión tipo estrella, donde cada nodo es conectado con un único cable al “*switch*” en enlace punto a punto “*full-duple*”, se puede garantizar que no existen colisiones (propiedad *collision-free*). A pesar de que no existan colisiones en la red, la congestión puede ocurrir dentro del “*switch*” ver Nota 2.1. Si los buffers dentro del “*switch*” se desbordan (por un “*overflow*”) debido a la congestión, los mensajes pueden ser perdidos.
- Wireless Ethernet (CSMA/CA): Esta red, basada en el estándar IEEE 802.11, implementa las dos capas inferiores del modelo ISO-OSI. Las estaciones “*wireless*” no

---

pueden escuchar la red, por ello aunque se utilice un mecanismo para impedir las colisiones, las mismas no pueden ser completamente prevenidas. Después que un paquete ha sido correctamente recibido por el destinatario, dicho nodo envía un paquete de reconocimiento ACK (por “*acknowledgment*”). Si el nodo transmisor no recibe el paquete ACK se asume que la transmisión no fue exitosa y se retransmite. Existen varios ajustes del protocolo básico que proporcionan resultados mas deterministas, por ejemplo los nodos pueden reservar la red enviando un mensaje de pedido de envío o pueden hacer una conexión MS creando una red TDM (Moyne & Tilbury, 2007).

Nota 2.1: Los principales principios de encolamiento dentro del “*switch*” son colas “primero en llegar-primero en ser servido” (FCFS en sus siglas por first-come/first-served). Si hay mucho tráfico en la red, la cola FCFS no puede garantizar la calidad de servicio de la red (QoS). La operación de encolamiento por flujo implica asociarles a las colas distintos niveles de prioridades. Por lo tanto las colas son procesadas de acuerdo a su prioridad, y aquellas con alta prioridad tendrán generalmente alta performance, pudiendo eventualmente bloquear a las colas con menor prioridad (Decotignie, 2005).

#### *iv. Comparación de redes*

La selección de una red específica para una implementación debe resultar del análisis de los requerimientos de la aplicación de control y el costo económico. A continuación se transcriben de (Moyne & Tilbury, 2007) algunas ventajas y desventajas de estas redes.

Una red con pasaje de “*token*” es muy eficiente con una alta carga dado que no hay tiempo desperdiciado en colisiones y no hay nodos que la monopolicen. A baja utilización se vuelve ineficiente dado que se tiene mucho “*overhead*” asociado al pasaje del “*token*”.

Una ventaja de la red CAN es que está preparada para transmitir mensajes cortos, típicos en los NCS. La mayor desventaja es su baja tasa de datos, la cual es limitada por el tamaño de la red. Por ejemplo *DeviceNet* tiene un valor máximo de 500 kb/s para una red de 100 m.

En cuanto a *Ethernet*, el uso de *switched Ethernet* resulta adecuado para los NCS. Sin embargo, si bien su uso podría impedir los retardos originados por las colisiones y retransmisiones, se pueden producir retardos asociados con el almacenamiento en el buffer y los reenvíos, ver Nota 2.1. En general el retardo del “*switch*” es pequeño y constante hasta que el buffer se satura y los paquetes se reenvían, en un “*hub*” el retardo se incrementa más gradualmente. En el caso particular de redes inalámbricas existe una gran diferencia entre la

tasa de datos teórica y la tasa de transferencia práctica. Por ejemplo la tasa de datos de redes va desde 11 hasta 54 *Mbits/s* pero se reduce mucho debido al “overhead” asociado con los espacios entre tramas, la señal de ACK, entre otros problemas.

### 2.2.3 Características del retardo en distintas redes

El retardo puede caracterizarse de acuerdo a los procesos que intervienen en su aparición de acuerdo con la descripción de 2.1.1, y tal como fue mencionado depende fuertemente del tipo de red usada. Por esto y de acuerdo con el resumen de sección 2.1.2 iv se pueden considerar los siguientes modelos de retardo en las distintas redes.

En redes que transmiten en un orden cíclico TDM se tiene un comportamiento determinístico y el retardo se puede considerar periódico o inclusive constante (Halevi & Ray, 1998), (Zhang et al., 2001), (Nilsson, 1998). Por ejemplo, el tiempo que debe esperar cada nodo la llegada del “*token*” se puede calcular adicionando los tiempos de transmisión de todos los mensajes previos en el anillo lógico. Por ejemplo en *ControlNet* cada nodo puede retener el “*token*” desde un tiempo mínimo de 22.4  $\mu$ s y uno máximo de 827.2  $\mu$ s. Esto es así en un caso ideal, pero en la práctica pueden aparecer algunas discrepancias que provocan una variación del retardo. Algunas soluciones han sido propuestas en (Tovar & Vasques, 1999).

En redes como CAN o Ethernet el acceso es de tipo aleatorio lo que suele generar incerteza en el valor del retardo. En el caso de estos protocolos y de acuerdo a la carga de la red, ciertas mediciones han permitido determinar (con cierto grado de aproximación) que los retardos pueden ser considerados aleatorios y con alguna distribución estocástica (Lian et al., 2001), (Nilsson, 1998). Alternativamente y basándose en estas mediciones se pueden determinar límites máximos y mínimos en el retardo, lo que permite usar un modelo variante en el tiempo pero sin considerar una distribución particular del retardos (Cloosterman, 2008), (Lincoln, 2002), (Richard, 2003), entre otros.

### 2.2.4 Efecto del retardo constante en NCS

Desde el punto de vista del diseño de control, estos problemas han sido enfocados de dos maneras, una con modelos en tiempo discreto (DT, por *Discrete-Time systems*) y otra con modelos aproximados en tiempo continuo (CT, por *Continuous-Time systems*).

En aquellos artículos donde se trata el problema de análisis y/o diseño de NCS con retardo constante en el dominio CT se usa alguno de los modelos de la planta en CT: caso SISO

(A.18) y caso MIMO (A.4). En el caso más simple se desprecia el efecto del dispositivo ZOH y una mejor aproximación de este modelo lo tiene en cuenta, ver por ej. (Åström et al., 1984) y subsección *i*.

Uno de los temas que concentra mayor interés es la forma en la cual incide el aumento del retardo en la performance del sistema de control. En subsección *ii* se muestran algunos resultados donde el aumento del retardo es un factor desestabilizante del sistema y también es responsable del deterioro de la performance en una planta particular. Sin embargo estos resultados no se pueden generalizar. Es decir, el aumento del retardo no siempre provoca la pérdida de estabilidad y/o el deterioro de la performance, ver en la misma subsección. Un análisis análogo en DT del mismo problema se muestra en Capítulo 3.

#### *i. Modelos CT de sistemas con retardo constante y estabilidad*

En (Zhong, 2003) se analiza la estabilidad de lazo cerrado mediante el diagrama Dual-Locus para una configuración de planta particular (de segundo orden sin ceros y estable) modelada como (A.18) y un controlador continuo (una ganancia), con un retardo entre sensor y controlador. El lazo cerrado queda descrito por (2.2)

$$\ddot{y}(t) + 2\xi \alpha \dot{y}(t) + \alpha^2 y(t) = k_p y(t - \tau) \quad (2.2)$$

En tal artículo se determina el valor de  $k_p$  normalizada por la frecuencia de la planta ( $\eta = k_p/\alpha^2$ ) de forma analítica en función del amortiguamiento ( $\xi$ ) de manera de que el lazo cerrado sea independiente del retardo (región  $R_D$ ) y dependiente del retardo (regiones  $R_A$ ,  $R_B$  y  $R_C$ ), tal como se muestra en Figura 2.4. Además se muestra la región de inestabilidad  $R_U$ .

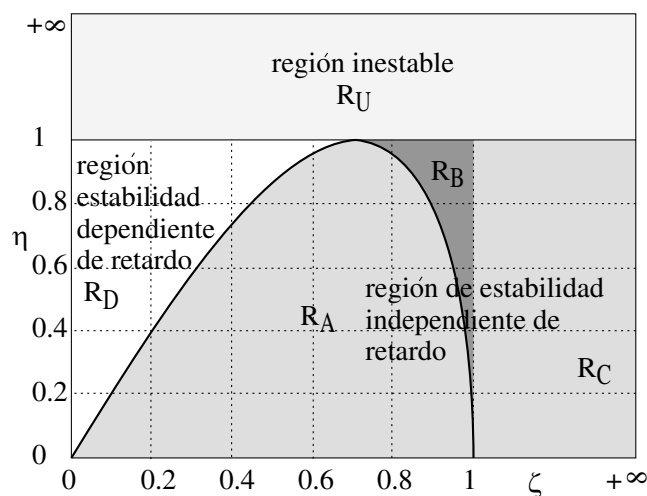


Figura 2.4: Región de estabilidad. Figura tomada de (Zhong, 2003).

Se observa que el valor de amortiguamiento es un factor crucial para la estabilidad del sistema. En particular a mayor amortiguamiento el sistema es más estable (y también es más lento) mientras que si es muy pequeño la región de estabilidad es muy angosta.

Cuando  $0 < \xi < 1/\sqrt{2}$ , el criterio de estabilidad, dependiente del retardo, ofrece una ganancia de control grande y en consecuencia una mejor performance dinámica pero a expensas de que los retardos de comunicación están limitados. El criterio independiente del retardo puede soportar cualquier valor de retardo pero a expensas de un valor de la ganancia más pequeño. Esto pone de manifiesto el compromiso entre los requerimientos de la red y los requerimientos de la performance del control cuando se diseña un sistema controlado por red.

Una mejor aproximación del modelo mencionado anteriormente tiene en cuenta también al dispositivo ZOH que se modela como un retardo de la mitad del período de muestreo, ver por ejemplo (Åström et al., 1984). Es decir (A.15) se transforma en

$$H(s) \approx h e^{-sh/2} \quad (2.3)$$

La condición de validez de esta aproximación es que el período de muestreo sea muy superior a la mayor frecuencia de la planta muestreada. Entonces esto permite agrupar el retardo de control con el introducido por el ZOH como

$$G(s)H(s) \approx h e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s) \quad (2.4)$$

Por ejemplo, en (Juanole, 2002) se utiliza este modelo para una planta de primer orden (2.5) controlada por un controlador integral (2.6)

$$G_0 = 1/(s + T1) \quad (2.5)$$

$$C = K/s \quad (2.6)$$

Se verifica que el margen de fase (2.7), medida de la performance, depende de los parámetros definidos para evaluar la Calidad de Servicio de la red, retardo  $\tau$  y período  $h$ . Específicamente (2.7) se reduce a medida que  $\tau$  y  $h$  aumentan.

$$\varphi_m = \pi - \arg \left( \frac{K e^{-j(\tau+\frac{h}{2})\omega}}{j\omega (1 + jT1\omega)} \right) \quad (2.7)$$

## ii. Performance ante retardos

### Evolución de las raíces: Inestabilidad

En (Tipsuwan & Chow, 2003) se observó que el aumento del retardo es un factor desestabilizante del sistema y también es responsable del deterioro de la performance en una planta particular. Estos resultados se resumen a continuación.

Sea una planta de segundo orden (2.8) con un controlador de tipo PI (proporcional e integral) (2.9), entonces el aumento del valor del retardo en el lazo de control degrada la performance cuantificada con ciertos parámetros de la respuesta temporal (sobrealor (2.29) y tiempo de establecimiento (B.4)).

$$G_p(s) = \frac{2029.826}{(s + 26.29)(s + 2.296)} \quad (2.8)$$

$$C(s) = \beta K_p \left( s + \frac{K_I}{K_p} \right) / s \quad (2.9)$$

Donde  $K_p=0.17$  y  $K_I=0.378$  y  $\beta$  es un parámetro de ajuste de las constantes del controlador.

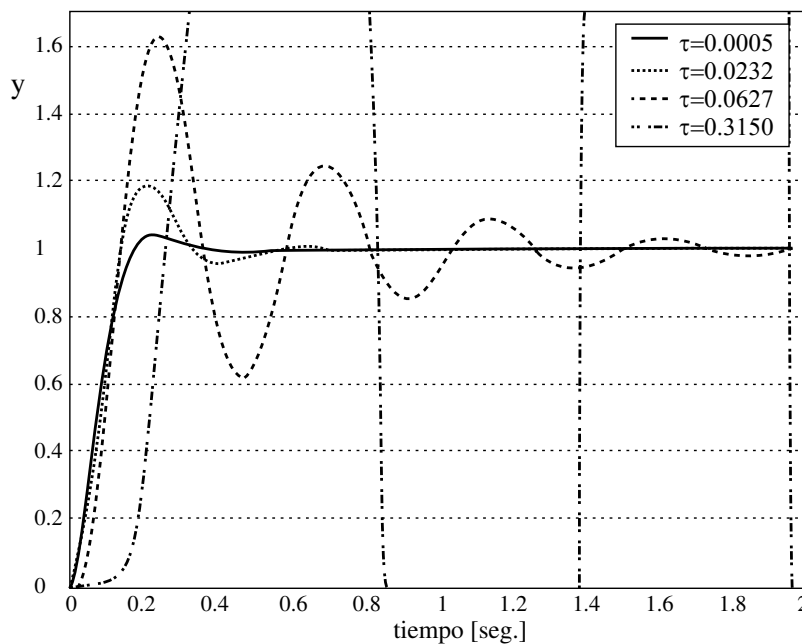


Figura 2.5: Respuesta temporal para distintos retardos. Figura de (Tipsuwan & Chow, 2003).

Como se muestra en Figura 2.5 (que considera  $\beta=1$ ) la degradación de la performance asociada al crecimiento del valor del retardo se visualiza en un crecimiento de ambos parámetros de la respuesta temporal.

En Figura 2.6 se muestra como el retardo creciente reduce la región de estabilidad. Además, muestra las ramas del lugar de las raíces del sistema con respecto al parámetro  $\beta$  (lo que equivale a incrementar  $K_P$  y  $K_I$  del PI). Solo las ramas primarias son analizadas porque ellas son suficientes para aproximar la región de estabilidad (Kuo, 1996). Cuando el retardo  $\tau$  es mayor, la rama primaria del lugar de las raíces tienden al semiplano derecho del eje imaginario y el valor de  $\beta$  para el cual las ramas cruzan el eje es más pequeño.

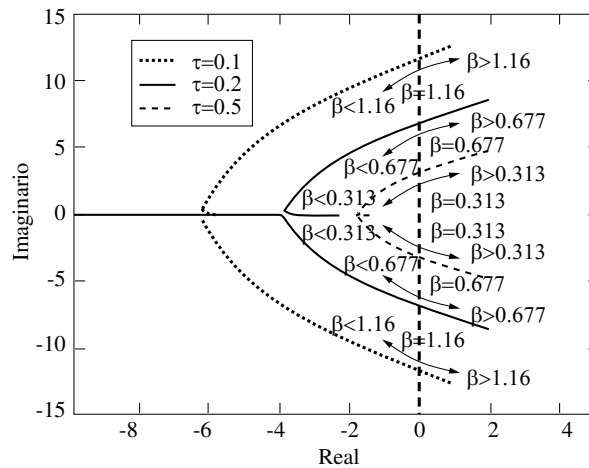


Figura 2.6: Evolución de las raíces para  $\tau$  y  $\beta$  variantes. Figura de (Tipsuwan & Chow, 2003).

### Evolución de las raíces: Caso General SISO

Un ejemplo donde el aumento del retardo no siempre provoca la pérdida de estabilidad fue presentado en (Mirkin & Palmor, 2005), donde se analiza la estabilidad dependiente del retardo para una ganancia de lazo  $L(s) = \frac{0.4 e^{-\tau s}}{(s^2+0.1s+1)}$  realimentada unitariamente. Se verifica que hay valores de retardo para los cuales la planta es inestable y valores superiores de retardo donde la planta es estable, i.e. aparece un fenómeno “estabilizante” del retardo. Estos resultados se formulan a partir del análisis del *quasi*\_polinomio característico de un sistema genérico en lazo cerrado con retardo (A.18).

$$D_{LC}(s) = D(s) + N(s)e^{-s\tau} \quad (2.10)$$

Siendo  $D(s)$  y  $N(s)$  los polinomios denominador y numerador de la ganancia de lazo (sin retardo), respectivamente. El retardo en (2.10) puede incluir el retardo introducido por la aproximación del ZOH (2.4).

La propiedad clave de los *quasi*-polinomios (Kharitonov & Zhabko, 1994) (en el caso de  $n \geq p$  con  $n$  orden del denominador y  $p$  del numerador, y tal que el elemento de orden  $p$  de  $N$  sea en valor absoluto inferior a 1) es la continuidad de las raíces como funciones positivas de



$\tau$ . Tal continuidad significa que es posible comenzar el análisis contando los cruces por el eje imaginario de las raíces  $\tau$  cuando se incrementa. Y entonces las raíces pueden cruzar el eje desde la izquierda hacia la derecha (volviéndose inestable), desde la derecha hacia la izquierda (volviéndose estable), o sólo ser un punto de tangencia con el eje imaginario.

Una raíz sobre el eje imaginario debe satisfacer

$$|D(j\omega)|^2 = |N(j\omega)|^2 \quad (2.11)$$

$$\arg(D(j\omega)) - \arg(N(j\omega)) + \tau\omega = (2k + 1)\pi \text{ para } k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.12)$$

Entonces para cualquier solución real  $\omega_c$  de (2.11) existe algún  $\tau > 0$  (más específicamente habrá una familia de retardos de la forma  $\tau_0 + 2\pi k/\omega_c$ ) tal que también sea válida ecuación (2.12) para  $\omega = \omega_c$ . Si no hay soluciones positivas reales de (2.11) no existirá una migración de polos hacia el semiplano derecho (o viceversa) y la estabilidad (o inestabilidad) de las raíces de (2.10) será independiente del retardo. En caso contrario, la dirección en la cual las raíces de (2.46) cruzan el eje imaginario para  $s = j\omega_c$ , cuando  $\tau$  se incrementa, depende sólo del signo de la derivada del polinomio de módulo (2.13) evaluada en las frecuencias de cruce.

$$\sigma(\omega) = d(|D(j\omega)|^2 - |N(j\omega)|^2)/d\omega \quad (2.13)$$

Entonces, si  $\sigma(\omega_c) > 0$ , una raíz cruza el eje de izquierda a derecha (denominado “switch”); si  $\sigma(\omega_c) < 0$ , una raíz cruza el eje de derecha a izquierda (denominado “reversal”); si  $\sigma(\omega_c) = 0$ , la situación depende de las derivadas  $\sigma(\omega)$ , pero puede parecer que no hay cruces del eje.

Para el ejemplo numérico:  $\omega_{c1} = 0.78$  y  $\omega_{c2} = 1.176$ , y  $\sigma(\omega_{c1}) < 0$  y  $\sigma(\omega_{c2}) > 0$  y por tanto  $\tau_{switch} = 0.254 + 5.344 k$  y  $\tau_{reversal} = 3.778 + 8.06 k$  para  $k = -1, 0, 1, \dots$ . Entonces el sistema es estable para  $\tau \in [0, 0.254)$  y  $\tau \in (3.778, 5.598)$  e inestable entre  $[0.254, 3.778]$ .

#### *Modelos DT de sistemas con retardo constante:*

Una herramienta para trabajar en el dominio *DT* es la transformada *Z* modificada, ver los modelos en sección A.2 del Apéndice A. La MZT ha sido usada en el contexto del modelado de los NCS con NID en (Yook et al., 2000).

En (Branicky et al., 2000) se reportan condiciones de estabilidad y se determina el dominio de atracción, en función de la relación retardo-período de muestreo para un integrador controlado por realimentación de estado, ambos presentados en (2.14).

$$G_p(s) = 1/s \text{ y } C(s) = K_p \tag{2.14}$$

En Figura 2.7 extraída de (Branicky et al., 2000) se muestra la relación entre retardo y ganancia  $k_c$  del controlador en DT.

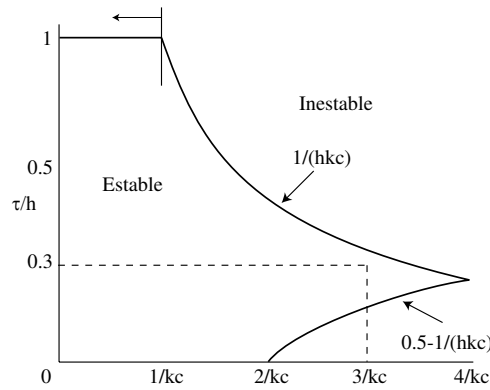


Figura 2.7: Región de estabilidad,  $\tau$  vs.  $h$ .

La posibilidad de extender tales resultados a plantas más complejas con los criterios allí mencionados es muy difícil o imposible y los autores sugieren utilizar simulaciones para encontrar las relaciones. Se puede remarcar que si se elige  $k_c$  tal que la planta controlada sea estable para dos valores de retardos entonces se mantiene la estabilidad para todo retardo intermedio (la región de estabilidad es convexa).

### 2.2.5 Efecto del retardo variable en NCS

El problema de estabilidad y performance ante retardos variables ha sido considerado en numerosos artículos (Nilsson, 1998), (Yook et al., 2000), (Zhang et al., 2001), (Richard, 2003), (Hetel et al., 2006), (Cloosterman, 2008) (Sala, 2005), (Tipsuwan & Chow, 2003) entre otros. En la mayor parte de la literatura se ha modelado el problema basándose en alguna información extra del retardo (por ejemplo su máximo valor, el conjunto de valores que puede asumir, etc.), se han analizado los efectos que causa en la performance del lazo de control y se han buscado medidas para la neutralización o atenuación de su efecto.

En la subsección *i* se presentan dos modelos muy usados: el modelo exacto DT de lazo cerrado y un modelo aproximado en CT. Distintas hipótesis sobre la forma en la cual varía el retardo y los resultados más relevantes para abordar el problema de estabilidad son presentados en subsección *ii*.

*i. Modelos del sistema con retardo variable*

Al igual que en el caso de retardo constante es más adecuado tratar el problema en el dominio discreto. Por esto, en esta tesis se considera el problema en el dominio DT y se incluye el modelo CT sólo a título informativo.

*Modelo exacto DT de lazo cerrado:*

Sea el modelo exacto discreto de la planta con retardo en la acción de control descrito en su representación de espacio de estados, ver (A.8) en Apéndice A. Sea un controlador lineal con un *posible* conocimiento parcial o total del retardo  $\tau_k$ , descrito en su forma de espacio de estados (2.15) cuyas matrices tienen las dimensiones adecuadas.

$$\begin{aligned} x_{k+1}^c &= \Phi^c(\tau_k) x_k^c + \Gamma^c(\tau_k) y_k^c \\ u_{k+1} &= C^c(\tau_k) x_k^c + D^c(\tau_k) y_k^c \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con los modelos (A.8) y (2.15) se puede construir la matriz de evolución del sistema en lazo cerrado (2.16), ver (Nilsson, 1998). Por ejemplo, para  $\tau_k \leq h$ , el sistema en lazo cerrado se puede escribir como (2.16) donde  $z_k = [x_k \quad x_k^c \quad u_{k-1}]^T$  es el estado aumentado de planta y controlador y entrada con retardo; y cuya matriz de lazo cerrado es (2.17).

$$z_{k+1} = \Phi_{LC}(\tau_k) z_k \quad (2.16)$$

$$\Phi_{LC}(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma_0(\tau_k) D^c(\tau_k) C & \Gamma_0(\tau_k) C^c(\tau_k) & \Gamma_1(\tau_k) \\ \Gamma^c(\tau_k) C & \Phi^c(\tau_k) & 0 \\ D^c(\tau_k) C & C^c(\tau_k) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Con esto, el modelo en lazo cerrado puede ser pensado como el sistema autónomo (C.13) donde para retardo  $\tau_k$  se tiene una matriz asociada  $\Phi_{LC}(\tau_k)$  definida según (2.17). Si el retardo asume un número finito de valores este sistema puede ser definido como un DTSS en lazo cerrado. Nótese que en (A.25) se definió el modelo DTSS, pero en lazo abierto.

*Modelo aproximado CT de la planta con retardo variable:*

El sistema con retardo en su representación entrada/salida (A.18) de Apéndice A se puede simplificar con la aproximación de *Padé* como se muestra a continuación, ver (Göktas, 2000). Suponiendo que el retardo se escribe como (2.18) donde  $\tau_n$  puede ser  $\tau_{sc}$ ,  $\tau_{ca}$  o la suma de ambos,  $\tau_{\max}$  es el valor máximo del retardo tal que  $0 \leq \alpha \leq 0.5$  y  $-1 \leq \delta \leq 1$  son números reales que quedan determinados por la aplicación.

$$\tau_n = (1 - \alpha)\tau_{\max} + \alpha \delta \tau_{\max} \quad (2.18)$$

Entonces el sistema con retardo se convierte con la aproximación de *Padé* de primer orden.

$$e^{-\tau_n s} \approx \left( \frac{1 - s(1 - \alpha)\tau_{\max}/2}{1 + s(1 - \alpha)\tau_{\max}/2} \right) \left( \frac{1 - s \alpha \delta \tau_{\max}/2}{1 + s \alpha \delta \tau_{\max}/2} \right) \quad (2.19)$$

La parte incierta del retardo,  $\delta$  en la segunda fracción de (2.19), puede ser tratada como una perturbación multiplicativa de la planta. Luego la estabilidad se puede estudiar para este modelo CT en el dominio frecuencial usando teoría de control robusta (Göktas, 2000).

### *Modelo politópico DT para retardo acotado:*

Un modelo con incerteza politópica presentado en (Hetel et al., 2006) considera la presencia de retardos variantes en el tiempo e inferiores al período de muestreo. El análisis se basa en la aproximación en serie de Taylor de las matrices del modelo (A.11) de Apéndice A que depende del retardo, es decir las matrices (A.9) y (A.10) se aproximan por (2.20) y (2.21), respectivamente.

$$\Gamma_1(\tau_k) = - \sum_{q=1}^{\infty} (-\tau_k)^q \frac{A^{q-1}}{q!} e^{Ah} B \quad (2.20)$$

$$\Gamma_0(\tau_k) = B + \sum_{q=1}^{\infty} (-\tau_k)^q \frac{A^{q-1}}{q!} e^{Ah} B \quad (2.21)$$

### *ii. Estabilidad con retardo variable*

La estabilidad del sistema no sólo depende del valor del retardo sino también de su variación. Puede ocurrir que un sistema sea estable para ciertos valores específicos y constantes de retardo y sea inestable cuando el retardo varía asumiendo esos mismos valores. Entonces, la posibilidad de tener información sobre el retardo, su valor y la forma en la cual varía permite abordar este problema con diferentes enfoques.

Una alternativa usada en numerosos artículos (Nilsson, 1998), (Nilsson et al., 1998), (Lincoln & Cervin, 2002) entre otros, parte de la posibilidad de poder modelar al retardo como una variable aleatoria independiente y con una distribución de probabilidad conocida. Resultados más generales consideran la estabilidad no en términos probabilísticos sino aplicando métodos que no dependen de la secuencia en particular que pueda asumir un retardo variante. Por ejemplo, si el retardo asume su valor en un conjunto conocido y finito de valores

se puede usar un enfoque de tipo *gridding* LMI ver (Sala, 2005) y (Apkarian & Adams, 1998). Este método *Gridding LMI* falla si se tienen un gran número de LMI, por lo tanto no permite garantizar la estabilidad robusta asintótica para retardo acotado (infinitos modos).

En la mayor parte de artículos de la literatura que tratan el problema de retardo acotado, las condiciones de estabilidad son derivadas mayormente con un enfoque de estabilidad de Lyapunov (Chen et al., 2007), (Gao et al., 2004); (Yu et al., 2005) (Yu et al., 2004) y los de CQLF (Cloosterman et al., 2006).

En esta tesis se considera un resultado presentado en (Kao & Lincoln, 2004) que propone condiciones de estabilidad en el dominio frecuencial para sistemas SISO con retardo acotado basado en el Teorema de la pequeña ganancia. Debido a su relevancia para esta tesis este resultado es presentado en el Capítulo 4.

Este enfoque del dominio frecuencial, al menos en el caso continuo, ha sido generalizado para los sistemas más generales MIMO en (Kao & Rantzer, 2007), a partir de la teoría ICQ (siglas de *Integral Quadratic Constraint*).

Seguidamente se presentan algunos de los trabajos más relevantes en este contexto.

#### *Estabilidad Cuadrática Media - Retardo como variable aleatoria:*

Si se modela al retardo como una variable aleatoria independiente y con una distribución de probabilidad conocida el sistema es estocástico y la estabilidad se puede analizar en términos de la denominada estabilidad cuadrática media (MSS por siglas de “mean square stability”). La MSS se garantiza si la función de costo estacionario (2.22) asume un valor finito cuando el retardo  $\tau(k)$  tiene determinada distribución de probabilidades, siendo  $E$  el valor esperado,  $Q$  una matriz simétrica (semi) definida positiva y  $R$  la matriz que pesa la entrada. Este costo es calculable de manera exacta con la herramienta *Jitterbug* de (Lincoln & Cervin, 2002).

$$J = E \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt \right) \quad (2.22)$$

Conceptualmente la MSS significa que puede existir una secuencia particular de retardos y ruido que hagan que el sistema se vuelva inestable, aunque la probabilidad de que ocurra es nula, ver (Ji et al., 1991). En consecuencia, el resultado para una dada distribución no puede extenderse a otras posibles distribuciones.

Este concepto de estabilidad ha sido usado en (Nilsson, 1998) para calcular un control óptimo LQG que minimiza la función de costo (2.23) de una planta que además tiene ruido de

proceso  $v_k$  y de salida  $\omega_k$ . Por tanto el modelo (2.16) se transforma en (2.24) donde  $e_k = [v_k \ \omega_k]^T$  son los procesos estocásticos  $v_k$  y  $\omega_k$  de ruido blanco con media cero, no correlacionado Gaussiano con matices de covariancia  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente.

$$J_N = E x_N^T Q_N x_N + E \sum_{k=0}^{N-1} \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} x_k \\ u_k \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$z_{k+1} = \Phi_{LC}(\tau_k) z_k + \Gamma(\tau_k) e_k \quad (2.24)$$

Para sintetizar el controlador en (Nilsson, 1998) se supone que los retardos  $\tau_{sc,k}$  son conocidos al momento de calcular la ley de control. Entonces, el controlador óptimo que minimiza (2.23) es la realimentación de estados (2.25).

$$u_k = -L(\tau_{sc,k}) [x_k \ u_{k-1}]^T \quad (2.25)$$

El costo (2.22) también ha sido usado en numerosos artículos para comparar la performance de distintos controladores ante cierta distribución de retardo. Por ejemplo en Figura 2.8 tomada de (Nilsson, 1998) se compara la performance obtenida con un controlador que se diseño sin tener en cuenta los retardos (Doyle & Stein, 1979), con el controlador óptimo (2.25), el esquema de (Halevi & Ray, 1998) que elimina la aleatoriedad del retardo al introducir buffers, y un diseño que considera el valor medio del retardo (Nilsson, 1998). Claramente la mejor performance se obtiene con el controlador óptimo.

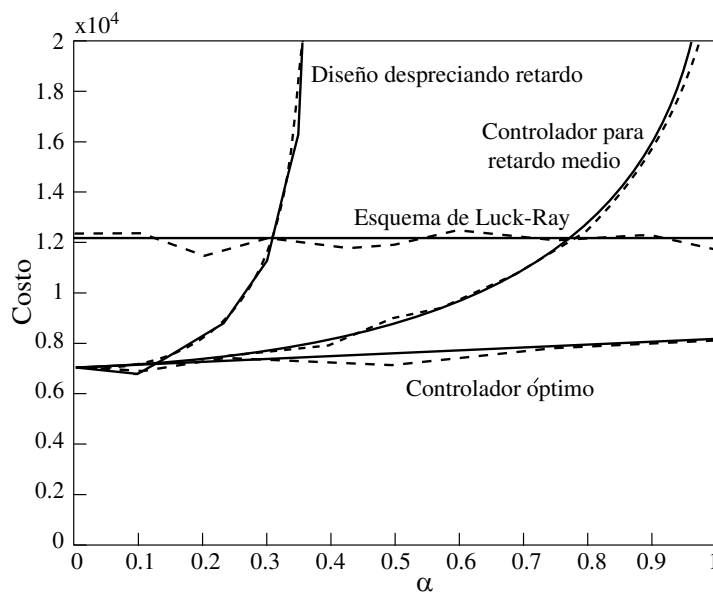


Figura 2.8: Comparación de performance de cuatro esquemas de control vía evaluación de costo.

*Estabilidad para retardo variando en número finito:*

Si el retardo asume su valor de forma aleatoria en un conjunto conocido y finito de valores se puede usar un enfoque de tipo *gridding* LMI ver (Sala, 2005) y (Apkarian & Adams, 1998). Esto define un DTSS donde cada matriz de (2.17) está asociada a un valor específico de retardo. Luego, se puede ya bien verificar la estabilidad o sintetizar un controlador estable resolviendo un conjunto de inecuaciones lineales matriciales LMI (C.14), de Apéndice C, de forma que el sistema DTSS tenga una QCLF. Sin embargo, los métodos para resolver las LMI pueden volverse inefectivos cuando la cantidad de modos aumenta (Lin & Antsaklis, 2008). Por esto, a pesar de lo sugerido en (Sala, 2005) este método falla para determinar la estabilidad retardos variables y acotados (infinitas LMI).

*Estabilidad para retardo acotado:*

Como se mencionó previamente el problema de estabilidad para retardo acotado es más complejo de resolver porque se tienen infinitas matrices de lazo cerrado. Si se puede modelar el problema de retardo acotado como un sistema nominal mas cierta perturbación se puede utilizar teoría (robusta) de Lyapunov. En (Cloosterman et al., 2006) se plantea un número finito de LMI para encontrar una CQLF que garantice la estabilidad robusta asintótica para retardo acotado. Esto se expresa en forma de un Teorema que es transcripto a continuación.

**Teorema 2.1** (Cloosterman et al., 2006): Sea el sistema en lazo cerrado con la matriz dependiente del parámetro  $\Phi_{LC}(\tau_k)$  definida en (2.17); con  $\tau_k \in [0, \tau_{max}]$  y  $\tau_{max} \in [0, h]$ .

Se define el conjunto de matrices  $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{A} \in R^{n \times n} : \bar{a}_{ij} = q_{ij} \text{ o } \underline{a}_{ij} = r_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$  con  $\bar{a}_{ij}$  el (i,j)-ésimo elemento de  $\bar{A}$ ,  $q_{ij} = \min_{\tau_k \in [0, \tau_{max}]} \tilde{a}_{ij}(\tau_k)$  y  $r_{ij} = \max_{\tau_k \in [0, \tau_{max}]} \tilde{a}_{ij}(\tau_k)$ , el mínimo y máximo valor del (i,j)-ésimo elemento  $\tilde{a}_{ij}(\tau_k)$  de  $\Phi_{LC}(\tau_k)$ , respectivamente.

Si existe una solución de las inecuaciones matriciales en tiempo discreto de Lyapunov

$$\begin{aligned} P &= P^T > 0 \\ \bar{A}^T P \bar{A} - P &< 0, \forall \bar{A} \in \bar{\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Entonces el sistema es robusta, global y asintóticamente estable para cualquier secuencia de retardos, con  $\tau_k \in [0, \tau_{max}]$ .

Para usar el Teorema 2.1, se debe determinar el conjunto de matrices  $\bar{\mathcal{A}}$ . Una forma de determinar tal conjunto es haciendo un politopo. Este Teorema se aplicó al ejemplo enunciado

al comienzo de esta subsección para determinar la región de estabilidad para retardo constante y variable ( $\tau_{max}$  admisible) en función del parámetro  $K_2$  del controlador  $L=[50 \ K_2]$ , ver Figura 2.9 extraída de (Cloosterman, 2008). La región de estabilidad se indica en línea continua. Resulta inferior para retardos variables que para constante (línea de cota).

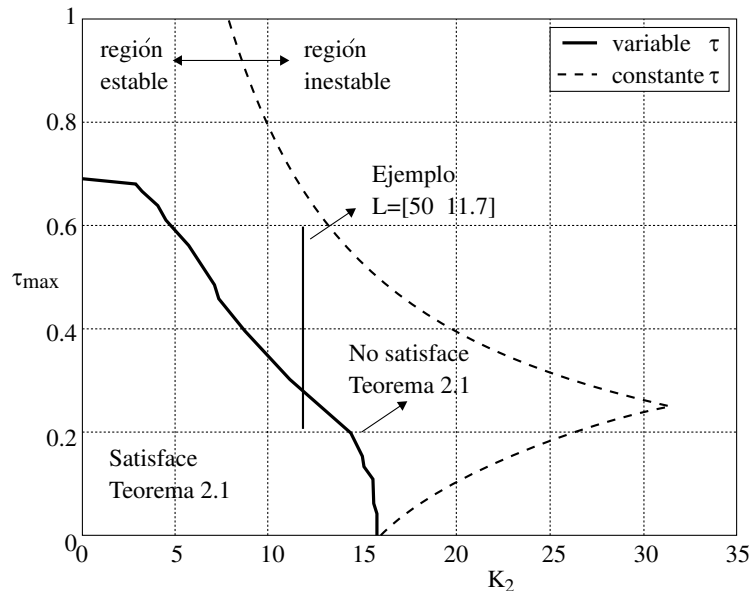


Figura 2.9: Región de estabilidad para retardo constante (cota) y retardos variables ( $K_1=50$ ).

El modelo politopo aproximado de (Hetel et al., 2006) descrito en  $\{(2.20) \text{ y } (2.21)\}$ , en el cual  $q$  asume valores finitos, puede ser usado para el análisis de estabilidad y/o la síntesis del controlador, ya sea con una formulación LMI que permita conseguir una QCLF (por ejemplo usar Teorema 2.1) o como se consideró en (Hetel et al., 2006) usando las funciones conmutadas de Lyapunov (2.27) definidas en (Daafouz & Bernussou, 2001).

$$V(z_k) = z_k^T \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \sum_{j=1}^{q+1} \mu_j(k) P_{ij} z_k \quad (2.27)$$

El procedimiento de análisis y/o diseño es iterativo, es decir se va incrementando el orden  $q$  de la aproximación de Taylor hasta que se obtiene un controlador para el sistema aproximado que puede usarse en la planta exacta.

Además de las mencionadas QCLF y las funciones conmutadas de Lyapunov, una función candidata que ha sido considerada para analizar estabilidad en sistemas con retardo es basada en un funcional de Lyapunov-Krasovskii (en sus siglas L-K). Cabe aclarar que el enfoque L-K, que proporciona resultados menos conservativos que las condiciones de estabilidad impuestas por QCLF para sistemas con retardo en el dominio continuo no necesariamente brinda resultados menos conservativos en problemas de tiempo discreto (Cloosterman, 2008).



### 2.2.6 Variación del período de muestreo en NCS

Cuando se implementan sistemas de control en una arquitectura informática pueden aparecer variaciones en el intervalo efectivo de muestreo y/o en el intervalo de aplicación de la ley de control. Esto plantea una diferencia con las hipótesis de control digital clásico, que asumen muestreo y aplicación de la ley de control equiespaciados en el tiempo y medición de datos y aplicación de la ley de control en forma sincrónica, ver sección A.1 de Apéndice A.

Típicamente, la pérdida de paquetes es una consecuencia de los errores en la transmisión en la capa física de la red y/o debido al tamaño finito de las colas (desbordamiento de las colas) y ciertas situaciones de congestión. En caso de sufrir largos retardos de transmisión, a raíz del reordenamiento de paquetes, tales envíos pueden ser descartados (otro motivo de pérdida). Esto se traduce en la pérdida de paquetes de medición y/o actuación, ver (Zhang et al., 2001), (Nilsson, 1998) y sección 2.2.2, la cual es responsable de que el intervalo de tiempo durante el cual la acción de control debe ser aplicada sea variable en el tiempo.

Otro motivo de tal variación puede ser ocasionada por un retardo variable presente en la red de comunicaciones, por ejemplo puede ocurrir que el controlador demande por la red un dato del sensor en ciertos intervalos de tiempo equidistantes pero que debido a retardos presentes en la red, la demanda sea efectuada en un intervalo de muestreo variante en el tiempo. Este problema se muestra en Figura 2.10 extraída de (Marti, 2002).

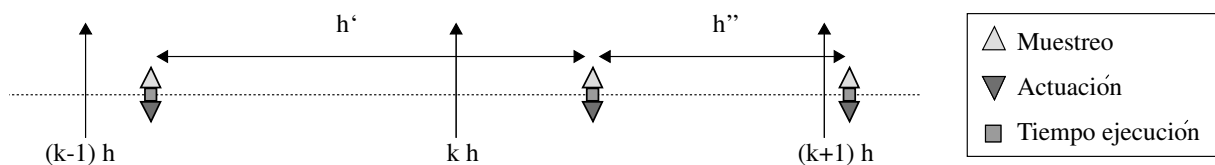


Figura 2.10: Implementación con tiempo de muestreo no equidistante. Fig. extraída de (Marti, 2002).

En un procesador compartido la variación del período puede ocurrir debido a derivas del reloj en el tiempo del *muestreador*, ver por ejemplo (Sala, 2005).

A continuación se presentan los modelos más comúnmente usados y los resultados más relevantes en cuanto a estabilidad.

*i. Modelado del sistema con período variable*

*Modelo DT para cantidad finita de períodos:* El modelo en DT de la planta para sistemas con período de muestreo variable es (A.2) con matrices definidas en (A.3), ver Apéndice A por detalles. Si además el período de muestreo puede asumir un número finito de valores se puede modelar al sistema como un DTSS tal como se definió en (A.24).

*Modelo para pérdida de paquete:* El sistema de control discreto con pérdida de paquetes y un controlador por realimentación de estados ha sido modelado en (Branicky et al., 2002) y es transcrito a continuación.

Se considera una llave  $s$ , cuya posición  $s=1$  indica que el mensaje que contiene el paquete  $x_k$  es transmitido (i.e.  $\hat{x}_k = x_k$ ), mientras que la posición  $s=2$  indica que el paquete es perdido (i.e.  $\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1}$ ) y se *mantiene el valor precedente del estado*. Entonces, la dinámica del estado aumentado  $w_{k+1} = [x_{k+1} \hat{x}_{k+1}]^T$  se describe con (2.28) cuyas matrices son (2.29), siendo  $0_{n,n}$  e  $I_{n,n}$  las matrices nula e identidad y  $n$  el orden del sistema.

$$w_{k+1} = \Theta_s(h) w_k \quad (2.28)$$

$$\Theta_{s=1} = \begin{bmatrix} \Phi(h) & \Gamma(h)F \\ \Phi(h) & \Gamma(h)F \end{bmatrix} \text{ y } \Theta_{s=2} = \begin{bmatrix} \Phi(h) & \Gamma(h)F \\ 0_{n,n} & I_{n,n} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

De forma equivalente este sistema con pérdida de paquetes puede ser modelado como un caso particular de variación de período de muestreo descrito previamente, donde el período efectivo  $h_i$  de las matrices (A.3) es múltiplo del período nominal  $h$ , i.e.  $h_i = i h$  con  $i \in \mathbb{N}$ . El estado  $x_k$  de (A.2) coincide con él de (2.28) en los instantes donde se actualiza la ley de control ( $s=1$ ).

Un enfoque diferente presentado en (Imer et al., 2006) considera que ante la pérdida de paquetes en lugar de mantener el valor precedente del estado poner un valor 0 en la acción de control, lo que es denominado *acción nula*. En este caso el modelo resulta (2.30).

$$x_{k+1} = \begin{cases} (\Phi(h) + \Gamma(h)F) x_k & \text{si paquete es enviado} \\ \Phi(h) x_k & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.30)$$

*Modelo con período de muestreo acotado en intervalo en DT:* Si el período de muestreo asume sus valores en un período acotado, es decir con  $h_k \in [h_{min}, h_{max}]$ , el principal

problema para probar estabilidad es que se debe resolver un conjunto de infinitas LMI, lo que no puede ser tratable numéricamente. Por esto se debe recurrir a otros modelos.

De forma similar a lo que se hizo para retardo variable en (Hetel et al., 2008) se puede definir el siguiente politopo convexo. Entonces, sea el sistema discreto (A.2) de Apéndice A y la matriz definida en (2.31), entonces las matrices (A.3) de Apéndice A equivalen a (2.32). El politopo (2.33) se basa en la aproximación de Taylor de orden N.

$$\Upsilon(h_k) = \int_0^{h_k} e^{tA} dt \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi(h_k) &= I + A \Upsilon(h_k) \\ \Gamma(h_k) &= \Upsilon(h_k) B \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\Upsilon(h_k) \approx \Upsilon_N(h_k) = \sum_{j=1}^N A^{j-1}/j! h_k^j \quad (2.33)$$

Este politopo convexo con  $N+1$  vértices encierra a la matriz polinomial si existen los parámetros  $\mu_i(h_k)$  que verifican (2.34) tal que valga (2.35) donde  $U_j$  representan los vértices del politopo definidos en (2.36).

$$\sum_{j=1}^{N+1} \mu_j(h_k) = 1, \mu_j > 0 \forall j = 1, \dots, N+1 \quad (2.34)$$

$$\Upsilon_N(h_k) = \sum_{j=1}^{N+1} \mu_j(h_k) U_j \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{A^{N-1}}{N!} h_{min}^N + \dots + \frac{A}{2!} h_{min}^2 + h_{min} I \\ U_2 &= \frac{A^{N-1}}{N!} h_{min}^N + \dots + \frac{A}{2!} h_{min}^2 + h_{max} I \\ U_3 &= \frac{A^{N-1}}{N!} h_{min}^N + \dots + \frac{A}{2!} h_{max}^2 + h_{max} I \\ &\vdots \\ U_{N+1} &= \frac{A^{N-1}}{N!} h_{max}^N + \dots + \frac{A}{2!} h_{max}^2 + h_{max} I \end{aligned} \quad (2.36)$$

La relación entre los parámetros  $h_k$  y  $\mu$  esta dada por (2.37).

$$\begin{aligned} \mu_1(h_k) &= 1 - \left( \frac{h_k - h_{min}}{h_{max} - h_{min}} \right), \mu_{N+1}(h_k) = \frac{h_k^N}{h_{max}^N}, \\ \mu_j(h_k) &= \frac{h_k^{j-1} - h_{min}^{j-1}}{h_{max}^{j-1} - h_{min}^{j-1}} - \frac{h_k^j - h_{min}^j}{h_{max}^j - h_{min}^j}, \quad j = 2..N \end{aligned} \quad (2.37)$$

Con esto (A.2) se puede escribir como (2.38).

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^N \mu_i(h_k) A_i x_k + \sum_{i=1}^N \mu_i(h_k) B_i u_k \quad (2.38)$$

$$A_i = I + A U_i, B_i = U_i B$$

En Figura 2.11 extraída de (Hetel et al., 2009) se muestra la construcción de la expansión de Taylor para el sistema descrito por las matrices A y B y controlador F de (2.39).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, F = [3.75 \quad 11.5] \quad (2.39)$$

Las incertezas de la variación del período de la aproximación (2.33), es decir  $Y(h_k) = [m_{01}(h_k), m_{02}(h_k)]$ , son respectivamente las abscisas y ordenadas. La incerteza en el período, representada por la curva en negro es delimitada por los vértices (marcados por puntos) del politopo convexo que es representado en gris, dando validez a la aproximación.

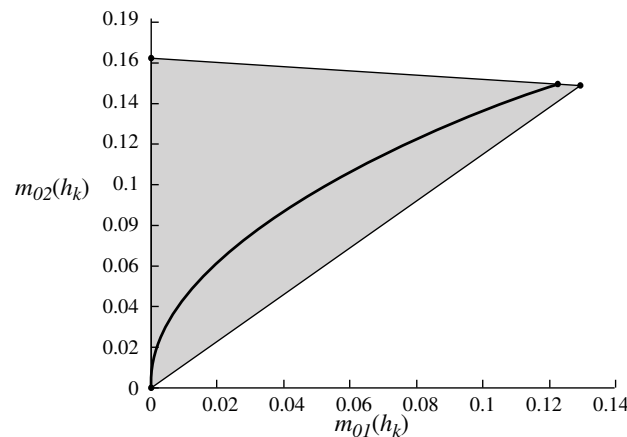


Figura 2.11: Incerteza en el período y politopo convexo.

*Modelo con período de muestreo acotado en intervalo en CT:* En (Walsh et al., 2002) se considera un controlador continuo “*event-driven*” y que la red, insertada sólo entre sensor y controlador, es compartida con varios nodos. Estos autores introducen el concepto de “*Maximum Allowable Transfer Interval*” (MATI) para designar a la máxima cantidad de tiempo entre mensajes consecutivos del sensor. En (Fridman et al., 2004) se usa este modelo y se elige una ley de realimentación discreta (2.40). Con esto, se tiene el modelo en CT con retardo variante en el tiempo (2.41), donde el máximo valor  $\tau$  de (2.42) es MATI.

$$u(t) = F x(t_k) \text{ para } t_k \leq t \leq t_k + 1 \quad (2.40)$$

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B F x(t - \tau(t)) \quad (2.41)$$

$$\tau(t) = t - t_k, t_k \leq t \leq t_k + 1 \quad (2.42)$$

## ii. Diseño estable con período de muestreo variable

### Estabilidad ante la pérdida de paquetes

Para estudiar este problema se puede considerar la equivalencia del modelo de pérdida con el DTSS y por ende todos sus resultados. Por ejemplo, se puede usar el enfoque de QCLF con “gridding” finito definido para un conjunto de períodos de (Sala, 2005) que permite calcular un controlador común y óptimo. También se puede usar la versión corregida del *Teorema 8* de (Branicky et al., 2002), es decir que valga la inecuación (2.43) donde  $\sigma_{max}(A_i)$  es el máximo valor singular y  $A_i$  es la matriz de lazo cerrado. Esta última condición es muy conservativa como es indicado desde un punto de vista teórico en (Theys, 2005).

$$A_i^T T A_i \leq \sigma_{max}(A_i)^2 I \quad (2.43)$$

### Estabilidad para período acotado

Si el período de muestreo puede variar en un continuo con  $h_k \in [h_{min}, h_{max}]$ , se deben usar modelos como los introducidos en (2.38) o (2.42). Si con tales modelos se puede conseguir un controlador tal que los distintos modos tengan una CQLF entonces se puede garantizar la estabilidad del problema, ver sección C.2 de Apéndice C.

Una comparación de los resultados obtenibles con diferentes métodos se presenta en (Hetel et al., 2006). En la misma se establece como objetivo encontrar el valor de  $h_{max}$  (MATI) tal que la estabilidad del NCS definido en (2.39) sea garantizada. A cálculo hecho con el resultado de (Zhang et al., 2001) resulta  $h_k \in (0, 0.0593]$ , con el resultado de (Fridman et al., 2004) resulta  $h_k \in (0, 0.86]$  y por último usando el modelo de politopo de Figura 2.11 de (Hetel et al., 2006) permite determinar  $h_k \in (0.01, 1.72]$ . Este valor es cercano al exacto (para  $h=1.73$  el sistema resulta inestable). Este ejemplo muestra claramente lo conservativo de los resultados de (Fridman et al., 2004) y (más aún) (Zhang et al., 2001) comparado con lo obtenido con el enfoque de (Hetel et al., 2006).

## 2.3 Estado del arte sobre Co-Diseño

Los enfoques de solución del problema denominados de Co-Diseño pueden ser categorizados en tres grandes grupos: basados en el ajuste del período de muestreo, basados en el rechazo o pérdida de instancias de tareas de control y basados en el ajuste de la prioridad de las tareas.

A continuación, se presentan las hipótesis de modelado consideradas en este problema y luego se citan los trabajos más comúnmente referidos según las categorías mencionadas.

### 2.3.1 Hipótesis de modelado para Co-Diseño

En los problemas mencionados en la introducción (Figuras 1.1 y 1.2) existe un recurso compartido que es limitado, ancho de banda y capacidad de procesamiento respectivamente, y que en situaciones puede llegar a congestionarse. El conjunto de sistemas de control que comparten un recurso común se denomina aquí sistema integrado global, ver Apéndice D.

Se asume lo siguiente en relación con las tareas de tiempo real de cada sistema de control:

- i. muestreo de la salida de la planta cada cierto tiempo (que puede ser periódico); controlador y actuador manejados por los eventos a su entrada;
- ii. una tarea incluye la siguiente secuencia de operaciones: muestreo, cálculo de control y actuación (en el caso de redes se incluyen las respectivas operaciones de transmisión de datos);
- iii. cada  $i$ -ésima tarea tiene un tiempo de ejecución de peor caso (WCET) denominado  $C_i$  y cada instancia de esa tarea se ejecuta en un cierto tiempo de ejecución;
- iv. cada  $i$ -ésima tarea tiene asociado un *deadline*  $D_i$  que es el tiempo límite en el cual cada una de sus instancias debe estar completada (esta es una restricción temporal de la tarea).
- v. una instancia de una tarea se encuentra en alguno de los siguientes estados: lista (*ready*), en ejecución (*running*), en espera (*waiting*), no activada (*sleeping*), detenida (*stopped*).

En general las tareas en un procesador compartido pueden ser expropiadas mientras que en una red son o no lo son, ver (Branicky et al., 2002), (Almeida et al., 2002) entre otros. En el caso de una red el tiempo  $C_i$  es el máximo del retardo de extremo a extremo  $\tau(k)$  definido en sección 2.2.1.

### 2.3.2 Enfoques propuestos de Co-Diseño

#### *i. Enfoque basado en el ajuste del período de muestreo*

##### *Ajuste de período en procesador:*

El artículo seminal que trata este problema es (Seto et al., 1996) para una aplicación centralizada en una estructura como la de Figura 1.2. La performance de cada controlador es representada por una función de costo en función del período de muestreo que se aproxima por una función exponencial (2.44) donde  $a$  es un coeficiente constante y  $\beta$  es la tasa de decaimiento. Esta aproximación surge al considerar que las plantas son de primer orden.

$$J(h) = a e^{-\beta/h} \quad (2.44)$$

Este enfoque propone calcular el período de cada tarea de forma que la performance global de la aplicación sea optimizada, sujeta a la satisfacción de las restricciones temporales de las tareas. Esto requiere resolver el problema de optimización (2.45) donde  $n$  es la cantidad de tareas que comparten el procesador,  $\omega_i$  pondera la importancia de cada controlador,  $C_i$  es el tiempo de ejecución de la  $i$ -ésima tarea de control,  $A$  es el umbral de carga que garantiza la factibilidad de una planificación (ver Apéndice D) y depende de la política de planificación escogida, siendo siempre  $0 < A \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \min_{(h_1, h_2, \dots, h_n)} \sum_{i=1}^n \omega_i J(h_i) &= \sum_{i=1}^n \omega_i a_i e^{-\beta_i/h_i} \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^n C_i 1/h_i &\leq A \end{aligned} \quad (2.45)$$

Debido a la complejidad de este algoritmo, este método sólo puede ser utilizado “off-line”.

Para resolver este problema en (Eker et al., 2000) se usa un diseño LQ con horizonte infinito y para calcular el período se resuelve el problema de optimización (2.46).

$$\begin{aligned} \min_{(h_1, h_2, \dots, h_n)} \sum_{i=1}^n J(h_i) \\ \text{sujeto a } \sum_{i=1}^n C_i 1/h_i &\leq A \end{aligned} \quad (2.46)$$

El cálculo de la ley de control LQ con período variable requiere la resolución de ecuaciones de Lyapunov y Ricatti, que son computacionalmente costosas, ver sección B.2. Para disminuir esta complejidad en (Eker et al., 2000) se considera un diseño con horizonte infinito (B.20), y que la función de costo es aproximada por una cuadrática (2.47). Sin embargo, como se muestra en Figura 1.4 a extraída de (Eker et al., 2000), la función de costo es convexa para períodos inferiores a  $h_1$ . El uso de este diseño puede acarrear problemas de inestabilidad, los que son detalladamente analizados en Apéndice E.

$$J(h) = a + \beta h^2 \quad (2.47)$$

Utilizando esta función de costo el cálculo de los períodos óptimos se simplifica, posibilitando la implementación de un algoritmo “on-line” que ajuste los períodos de los controladores en función de la configuración de la aplicación.

En (Cervin et al., 2002) se propuso un mecanismo “*feedback*” y “*feedforward*” para mejorar la velocidad de respuesta frente a un cambio en la configuración de la aplicación. Específicamente este mecanismo considera un regulador y un planificador, por ejemplo que use EDF o RM<sup>1</sup>. El regulador supervisa la configuración de la aplicación y cuando se detecta un cambio de la configuración se re-ajustan los períodos óptimos. También se considera como costo lineal (2.48), lo que permite simplificar aún más la complejidad del algoritmo.

$$J(h) = a h \quad (2.48)$$

En (Henriksson & Cervin, 2005) los períodos de las tareas de control se calculan en función del estado de las plantas controladas. Es decir, las perturbaciones o cambios de referencias que afectan a los distintos lazos de control son evaluadas para provocar que las tareas se ejecuten más frecuentemente con respecto a las de las plantas que están cerca del equilibrio.

#### *Ajuste de período en redes:*

En (Velasco et al., 2004) se presentó una estrategia dinámica de asignación de red disponible que permite adaptar la tasa de transmisión de información de los controladores distribuidos de cada lazo de control. La misma tiene en cuenta la dinámica del sistema controlado y la utilización global. Específicamente, la disminución de la utilización del ancho de banda se hace aumentando el período de muestreo de cada lazo, calculado localmente en el

<sup>1</sup> Las políticas de planificación EDF y RM se estudian en detalle en Apéndice D.



---

mismo procesador que ejecuta cada algoritmo de control. Puntualmente el período de muestreo se debe variar de manera continua con respecto a la norma de las variables de estado y acorde con el enfoque clásico, el período debe cambiarse en ambos controlador y sensor.

En (Xia et al., 2006) se presenta un planificador que maneja el tráfico de la red, variando el período y la prioridad de cada lazo/tarea. Lo primero resulta ser una extensión de la propuesta realizada por (Lu et al., 2002) para manejar las tareas en una CPU compartida. Específicamente en (Lu et al., 2002) se propone evaluar el tráfico usando para ello la tasa de pérdida de *deadline*  $M$  y en función del error calculado entre su valor de referencia y el calculado “*on-line*”, re-escalar el período de muestreo. Por su parte, la variación de la prioridad se hace de acuerdo a la QoC medida a través del índice IAE (integral del error de la planta) del NCS. El planificador se ejecuta de manera centralizada en un nodo con un período  $T_s$  y cada controlador es responsable de calcular el índice IAE de la planta que controla y enviarlo al mencionado nodo. El reescalado de cada período propuesto se hace de acuerdo a que el costo es como en (2.47) o (2.48).

#### *ii. Enfoque basado en la pérdida de instancias de tareas de control*

##### *Pérdidas de instancias en procesador:*

En (Ramanathan, 1999) se considera una aplicación que tiene una cantidad de lazos de control cuyos controladores son implementados por tareas que se ejecutan en un procesador. Para resolver el problema de congestión del mismo se propone rechazar selectivamente algunas instancias de las tareas, lo que disminuye la carga del procesador. Como la ausencia de algunas instancias puede degradar la performance de la planta controlada se propone diseñar un controlador óptimo LQ adaptable al patrón de pérdida. Como en este artículo se considera un patrón de pérdida constante en el tiempo, entonces cada lazo de control se modela como un sistema LTI de período aumentado, lo que simplifica el cálculo de control.

##### *Pérdidas de paquetes en redes:*

En (Branicky et al., 2002) se analiza particularmente que la planificación de un conjunto de tareas a través de la red no sea factible. Por ejemplo en la Figura 2.12 extraída de (Branicky et al., 2002) se muestra la colisión de mensajes en tiempos  $t=0.06j$  (tareas involucradas 1, 2 y 3) y  $t=0.06j + 0.03$  (tareas involucradas 1 y 2). Por esto, los autores consideran la posibilidad de descartar cierto porcentaje de paquetes que transitan la red para poder garantizar la

factibilidad de la planificación de la red sin perder estabilidad. En este ejemplo esta estrategia impide el envío de paquetes del sistema de control 1 y 2.

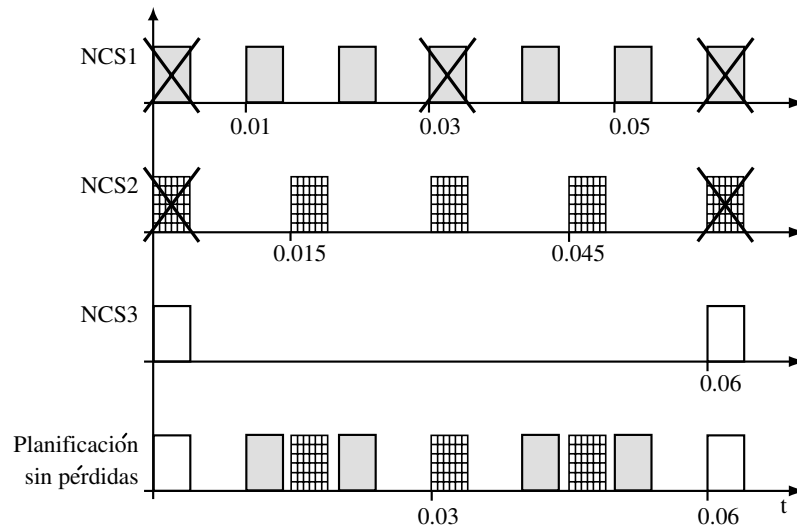


Figura 2.12: Planificación con pérdida de paquetes de tres sistemas de control (NCS).

### iii. Enfoque basado en la asignación de prioridades

#### Prioridades en procesador compartido:

En (Rehbinder & Sanfridson, 2000) se estudia el problema de un conjunto de controladores que controlan cada uno un proceso y se ejecutan en un procesador compartido. El algoritmo propuesto determina la secuencia periódica de las tareas de forma tal que la suma de un costo sea minimizado usando como dato el tiempo de ejecución de la aplicación y las características temporales de las tareas de control.

En (Zhao & Zheng, 1999) se considera la situación en la cual varios sistemas son controlados por un único controlador, y el mismo sólo puede ocuparse de un único proceso a la vez. Se propone una estrategia de planificación que elige como la planta a controlar aquella que tenga mayor desviación entre la performance real y la esperable. Esto se consigue asignando prioridades.

#### Prioridades en redes:

En (Walsh et al., 2002) se considera también que la red es compartida por varios lazos de control. Se propone el protocolo TOD de comunicación (Try-Once-Discard) para planificar los pedidos de acceso a la red. Con este protocolo, si una demanda de acceso a la red no puede ser aceptada a causa de otros pedidos más prioritarios, la misma es rechazada. Desde el punto

---

de vista de control se tiene en cuenta que no se debe exceder el MATI respectivo de cada sistema de lazo cerrado, es decir (2.42).

En (Branicky et al., 2002) se considera un conjunto de plantas conectadas a una red común. Se propone un algoritmo de planificación RM que permite asignar una mayor prioridad mayor a una planta más rápida (es decir la que requiere mayor tasa de transmisión) tiene mayor prioridad sobre una planta más lenta. Este algoritmo puede ser implementado en redes basadas en prioridades como CAN, donde la prioridad del mensaje puede ser incorporado al identificador del mensaje.

En (Ben Gaid et al., 2006) se considera un sistema de control con sensores y actuadores distribuidos y tal que el ancho de banda de la red es un recurso limitado. Específicamente, la limitación de la red implica que no se pueden transmitir toda la información desde los sensores y hacia los actuadores. Esta solución propone transmitir sólo aquella información considerada necesaria y determinar la ley de control óptima que tiene en cuenta la secuencia de información de forma de minimizar la degradación de la performance.

Otras alternativas apuntan a una reducción directa de la utilización del recurso, considerando la utilización de sensores “inteligentes” con capacidad de poder enviar sus mediciones sólo cuando las salidas superan ciertos umbrales. Por ejemplo, la técnica asincrónica (LCS) “Level Crossing Sampling” (Kofman & Braslavsky, 2006) propone muestrear cruces de nivel de las salidas con sensores “*event-driven*”, i.e. que sólo muestreen cuando la salida de la planta difiera de la última muestra en un valor fijo  $q$ . El sensor transmite sólo un bit para indicar que la nueva muestra difiere de la anterior en  $\pm q$ . Un estudio de los problemas en presencia de ruido y cuantificación fue presentado en el artículo (Braslavsky et al., 2006).

En (Otanez et al., 2002a) se presenta una técnica de evaluación de resultados similares a la anterior, donde para cada sensor “*clock-driven*” se evalúa si el error entre la salida actual y la previamente enviada entra dentro de una “*deadband*”, similar al nivel  $q$ . Si este error entra en la banda, la medición no se envía, y viceversa.

## 2.4 Conclusiones

En este Capítulo se reseñaron los principales resultados de solución de los problemas inducidos por el uso de una arquitectura que cierra los lazos de control sobre una red de

comunicaciones y/o ejecuta los algoritmos de control en procesadores compartidos. Los mismos fueron agrupados según su pertenencia a alguno de los dos típicos enfoques de “Control sobre Redes” y “Co-Diseño”.

En los restantes Capítulos de esta tesis se citarán algunas alternativas de solución incluidas en este Capítulo 2 para ser analizadas comparativamente de acuerdo a la relevancia de cada tema específico. Esto se realiza para contextualizar el problema de manera autocontenida en cada uno de los Capítulos.

Asimismo se incluyeron como Apéndices de este Capítulo los resúmenes de los resultados de la teoría de control discreto y de teoría de tareas de tiempo real dado que el problema establecido abarca ambos dominios teóricos. La inclusión de estos resultados busca simplificar la lectura de la tesis.



# APÉNDICE A

## Modelos discretos de sistemas continuos

En esta tesis se considera que se tienen modelos matemáticos de tiempo continuo, lineales e invariantes en el tiempo (LTI) que representan la dinámica de la planta. Incertezas de modelado son consideradas como ruidos de proceso y/o medición. Para obtener el modelo en tiempo discreto (DT son las siglas en inglés de *Discrete-Time*) de la planta se pueden aplicar dos técnicas estándares de la teoría de control dependiendo básicamente si el modelo continuo está en su descripción entrada/salida de función transferencia o en su modelo en espacio de estados. Claramente existen transformaciones que permiten pasar desde una representación a otra (Franklin & Powell, 1980).

En primer lugar, en sección A.1 se describen las partes constitutivas del sistema de control digital y se formulan las hipótesis para su modelado.

Luego, en secciones A.2 y A.3 se presentan ambas técnicas mencionadas; ya que en Capítulos 3 y 4 se usa el modelo en función transferencia mientras que en los Capítulos 5 y 6 se considera el modelo en espacio de estados. También se incluye la extensión de estas técnicas al caso de tener un retardo concentrado en la acción de control. Esto es pertinente dado que tal retardo puede ser un modelo simple de la red de comunicaciones o el recurso compartido, como se analiza en Capítulos 3 y 4.

Asimismo, un sistema lineal con período de muestreo variable o con retardo variable en la acción de control puede ser modelado como un caso particular de sistema lineal conmutado de tiempo discreto (DTSS; en sus siglas en inglés de *Discrete-Time Switched System*). Estos modelos son presentados en la sección A.4 dada su relevancia para Capítulos 5 y 6.

Por último en sección A.5 se presentan algunas propiedades de los modelos discretos de plantas LTI, en relación con sus polos y ceros que son pertinentes al Capítulo 3.

## A.1 El sistema de control digital

En la Figura A.1 se muestra un esquema de un sistema controlado por computadora (Åström & Wittenmark, 1997). El sistema consiste de un proceso o planta, conversores analógico-digital y digital-analógico, un algoritmo de control y un sensor (con cierto reloj).

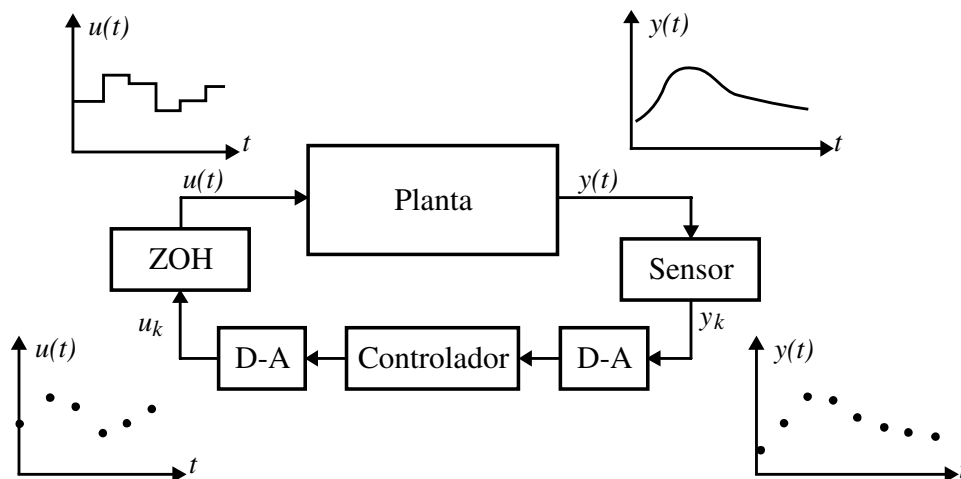


Figura A.1: Sistema de control discreto.

El proceso o planta es un sistema físico de tiempo continuo, es decir sus entradas y salidas son señales de tiempo continuo (CT son las siglas en inglés de *Continuous Time*), que se quiere controlar. El algoritmo de control recibe datos que son cuantificados en tiempo y estado (niveles discretos).

El conversor A-D convierte la señal analógica de salida del proceso en una señal digital, un número de precisión finita (depende de la cantidad de bits o niveles que se pueden usar en la conversión). El proceso de muestreo de la señal de salida tiene asociado el denominado período de muestreo  $h$ , cuyo valor depende del reloj del sensor, que es por lo tanto el responsable de la cuantificación temporal.

El algoritmo de control es un programa que se ejecuta en una computadora y transforma mediciones en una señal de control deseada. La señal de control es transmitida al convertidor D-A que convierte el valor calculado por la computadora en una señal de tiempo continuo. Esto implica que este convertidor tiene unidades de conversión y de retención (típicamente el dispositivo ZOH) que transforman un número en una variable física que se aplica al proceso.

Las hipótesis típicamente consideradas en la teoría de control digital asumen muestreo y aplicación de la ley de control equiespaciados en el tiempo ( $h$  constante) y medición de datos

y aplicación de la ley de control en forma sincrónica (sin retardos). Este y otros modelos teóricos son analizados en lo que sigue.

## A.2 Modelo discreto en el espacio de estados

### *Modelo discreto de la planta*

Se considera la planta descrita en su modelo en espacio de estados de tiempo continuo (A.1), donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  representa el estado,  $u \in \mathfrak{R}^r$  la entrada e  $y \in \mathfrak{R}^p$  la salida.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}\tag{A.1}$$

El sistema muestreado asociado a (A.1) es (A.2), donde  $h_i = t_{k+1} - t_k$  designa la amplitud de los intervalos entre los instantes de muestreo, los cuales en un caso general podrían ser variables. Entradas, estados y salidas son, respectivamente  $u_k \equiv u(t_k)$ ,  $x_k = x(t_k)$ , e  $y_k = y(t_k)$ .

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \Phi(h_i) x_k + \Gamma(h_i) u_k \\ y_k &= C_d(h_i) x_k + D_d(h_i) u_k\end{aligned}\tag{A.2}$$

Las matrices del sistema discreto (A.2) son (A.3).

$$\begin{aligned}\Phi(h_i) &= e^{Ah_i} & , & \quad C_d(h_i) = C \\ \Gamma(h_i) &= \int_0^{h_i} e^{As} B ds & , & \quad D_d(h_i) = D\end{aligned}\tag{A.3}$$

Si el período de muestreo es variable el sistema (A.2) es variante en el tiempo. Si además el período varía dentro de una familia finita, entonces (A.2) puede ser modelado como un caso particular de sistema lineal conmutado, tal como se presenta en Sección 2.2.6.

En el caso de que el período de muestreo sea constante  $h_i = h$  el sistema (A.2) es invariante en el tiempo y sus matrices se calculan con (A.3) para  $h_i = h$ .

### *Modelo discreto de la planta con retardo en la acción de control*

Sea el modelo en espacio de estados descrito en (A.4), que resulta de considerar a (A.1) estrictamente propio ( $D=0$ ) con un retardo  $\tau$  en la acción de control.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t - \tau) \\ y(t) &= C x(t)\end{aligned}\tag{A.4}$$



El retardo se puede descomponer como un múltiplo del período de muestreo nominal  $h$  más una fracción del mismo (A.5). Asimismo el retardo fraccional puede escribirse como (A.6).

$$\tau = (l - 1)h + \tau' \text{ con } 0 < \tau' < h \text{ y } l \in \mathbb{N} \quad (\text{A.5})$$

$$\tau' = (1 - m)h \text{ con } 0 \leq m \leq 1 \quad (\text{A.6})$$

La entrada al modelo es (A.7) y entonces el modelo discreto con retardo, originalmente introducido en (Wittenmark, 1985), resulta ser (A.8) cuyas matrices son (A.9) y (A.10).

$$\begin{cases} u(kh - (l + 1)h) \text{ para } (k - 1)h + \tau' < t < kh + \tau' \\ u(kh - lh) \text{ para } kh + \tau' < t < (k + 1)h + \tau' \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(h) x_k + \Gamma_0(h - \tau') u(kh - (l + 1)h) + \Gamma_1(\tau') u(kh - lh) \\ y_k &= C_d(h) x_k \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_0(h - \tau') = \int_0^{h-\tau'} e^{As} B ds = \int_0^{mh} e^{As} B ds \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_1(\tau') = \int_{h-\tau'}^{\tau'} e^{As} B ds = \Phi(mh)\Gamma_0(h(1 - m)) \quad (\text{A.10})$$

Si el retardo es inferior al período de muestreo ( $l=1$ ), el modelo aumentado de espacios de estados, con vector  $\xi_{k+1} = [x_k \quad u_{k-1}]^T$  tiene la representación (A.11) con matrices (A.12).

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= \tilde{A}_d(\tau) \xi_k + \tilde{B}_d(\tau) u_k \\ y_k &= \tilde{C}_d x_k \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{A}_d(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi(h) & \Gamma_1(\tau') \\ 0_{r,n} & 0_{r,r} \end{bmatrix}, \tilde{B}_d(\tau) = \begin{bmatrix} \Gamma_0(h - \tau') \\ I_r \end{bmatrix}, \tilde{C}_d = [C \quad 0_{p,r}] \quad (\text{A.12})$$

Para retardos superiores al período de muestreo, también se puede construir un modelo de forma similar a (A.11), ver por ejemplo (Nilsson, 1998).

En el caso de tener retardos variables  $\tau_k$  que satisfagan (A.13) para algún entero constante  $l$  calculado con (A.5), se pueden usar los modelos (A.8) y (A.11) intercambiando  $\tau$  por  $\tau_k$ .

$$\tau_k \in [\tau_{min}, \tau_{max}], \text{ con } [\tau_{min}, \tau_{max}] \subseteq [(l - 1)h, lh] \quad (\text{A.13})$$

### A.3 Modelo discreto en su representación entrada/salida

#### *Transformada Z*

Esta transformada es una herramienta que permite obtener la función transferencia discreta de un sistema a partir de la función transferencia de su modelo en tiempo continuo.

Considérese una planta descrita por la transferencia continua (A.14).

$$G_0(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (\text{A.14})$$

La acción de control se mantiene con un ZOH cuya transferencia es (A.15). Luego, la función transferencia de la planta discreta se calcula como (A.16).

$$H(s) = (1 - e^{-sh})/s \quad (\text{A.15})$$

$$G_d(z) = \mathcal{Z}\{G_0(s)H(s)\} = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{G_0(s)}{s}\right\} \quad (\text{A.16})$$

Un método para calcular la  $\mathcal{Z}\{\cdot\}$ , que parte de la representación de *Laplace*, es el Teorema del Residuo (Ogata, 1996), según (A.17). Otra forma equivalente de calcularla es usando la técnica de fracciones simples descrita en (Franklin & Powell, 1980).

$$\mathcal{Z}\{\cdot\} = \sum_{p_i = \text{polos de } G_0(s)} \left[ \text{residuos de } \frac{G_0(s)z}{z - e^{hs}} \Big|_{\text{en } p_i} \right] \quad (\text{A.17})$$

Existen transformaciones que vinculan el modelo invariante en espacio de estados (A.2) y el modelo en función transferencia (A.16) y que permiten pasar desde uno a otro.

#### *Transformada Z modificada*

Supongamos que ahora se tiene el modelo de la planta en su representación en función transferencia (A.14) con un retardo en cascada (ver Figura A.2). Entonces esto cambia el polinomio numerador por un quasi-polinomio real en  $s$ , y deja invariable al polinomio denominador como se ve en (A.18).

$$G(s) = G_0(s) e^{-\tau s} = N(s)e^{-\tau s} / D(s) \quad (\text{A.18})$$

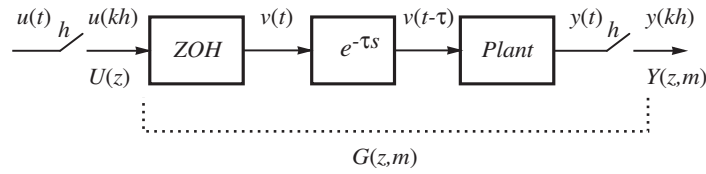


Figura A.2: Retardo global entrada-salida modelado sobre la acción de control.

Considerando que la acción de control se mantiene con un ZOH  $H(s)$  según (A.15), entonces la aplicación de la MZT a la cascada de la (A.18) se hace según (A.19).

$$G_d(z, m) = \mathcal{Z}_m\{G_0(s)H(s)e^{-\tau s}\} = z^{-(l-1)} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1-e^{-hs}}{s} G_0(s) e^{-(1-m)hs}\right\} = \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{G_0(s)}{s} e^{mhs}\right\} \quad (\text{A.19})$$

Uno de los métodos para calcular la  $\mathcal{Z}_m\{\cdot\}$  es el Teorema del Residuo, ver Apéndice b de (Ogata, 1996), que a diferencia de la situación sin retardo (A.17) se aplica a la función (A.20).

$$\mathcal{Z}_m\{\cdot\} = \sum_{p_i=\text{polos de } G_0(s)} \left[ \text{residuos de } \frac{G_0(s)e^{mhs}z}{z-e^{hs}} \Big|_{\text{en } p_i} \right] \quad (\text{A.20})$$

La FT discreta es el cociente de dos polinomios. Su numerador tiene coeficientes dependientes de  $m$  (la parte fraccional del retardo) y la parte entera del retardo sólo afecta el valor del exponente de  $z$  que multiplica al denominador de la planta para retardo nulo (A.21).

$$G_d(z, m) = \frac{N_p(z, m)}{z^l D_p(z)} \quad (\text{A.21})$$

La manera en la cual el retardo se integra con la planta en un único modelo discreto racional MZT depende de cada planta en particular. Por ello, resulta útil considerar la aproximación de (Hara et al., 1989) mencionada en la sección A.5 de Apéndice A.

Cabe acotar que se verifica las condiciones de extremos:

- si  $m \rightarrow l$ , entonces  $\tau = (l-1)h$  (en el dominio  $z$  existe un término  $z^{-(l-1)}$ ).
- si  $m \rightarrow 0$ , entonces  $\tau = lh$  (en el dominio  $z$  existe un término  $z^{-l}$ ).

#### A.4 Modelo conmutado en tiempo discreto

A continuación se define que es un sistema lineal conmutado de tiempo discreto (DTSS) para luego especificar cuáles son las matrices de tales modelos en cada caso.

Definición A.1 (Hespanha & Morse, 1999): Un sistema lineal de tiempo continuo conmutado se define por una familia parametrizada de realizaciones  $\mathbf{M} = \{(A_i, B_i, C_i, D_i) : i \in \underline{p} = \{1, 2, \dots, p\}\}$ , junto con una familia de señales de conmutación seccionalmente constantes  $S := \{\sigma : [0, \infty) \rightarrow \underline{p}\}$ , y la dinámica entrada- estado- salida (A.22).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t) \\ y(t) &= C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

De forma análoga, un Sistema Lineal en Tiempo Discreto con la base de tiempo discreto  $\{t_k : k \in \mathbb{N}\}$  tiene la forma (A.23) siendo  $u_k = u(t_k)$ ,  $x_k = x(t_k)$  e  $y_k = y(t_k)$ .

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{\sigma(k)}x_k + B_{\sigma(k)}u_k \\ y_k &= C_{\sigma(k)}x_k + D_{\sigma(k)}u_k \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Debido a la conmutación de las matrices dentro de la familia  $\mathbf{M}$ , ambos sistemas, (A.22) y (A.23) son variantes en el tiempo.

##### Modelo DTSS con período de muestreo variable

Para período de muestreo variable  $h_i$ , que pertenece a una familia finita de períodos, el sistema (A.2) puede ser modelado por (A.23) donde  $\sigma(k) = i \in \underline{p}$ , lo cual lleva a la equivalencia de matrices (A.24).

$$\{A_i = \Phi(h_i), \quad B_i = \Gamma(h_i), \quad C_i = C(h_i), \quad D_i = D(h_i)\}, i \in \underline{p} \quad (\text{A.24})$$

##### Modelo DTSS con retardo variable

Reemplazando  $\tau$  por  $\tau_k$  de acuerdo a (A.13), el sistema lineal (A.11) con retardo variable en la acción de control puede ser modelado como un caso particular de DTSS, con la equivalencia de matrices (A.25).

$$\{A_i = \tilde{A}_d(\tau_i) \quad B_i = \tilde{B}_d(\tau_i) \quad C_i = \tilde{C}_d \quad D_i = 0\} \quad (\text{A.25})$$

## A.5 Propiedades de plantas LTI - Mapeo de polos y ceros

Los polos y ceros, raíces del denominador y numerador de una función transferencia respectivamente, son propiedades fundamentales de los sistemas invariantes en el tiempo. Los polos reflejan el acoplamiento interno del sistema, y con esto su comportamiento autónomo. Los ceros reflejan la manera en la cual las variables internas están acopladas con las entradas y las salidas. Por esto se presenta a continuación un resumen de resultados que analizan la relación que existe entre los polos y ceros de un modelo continuo y su equivalente discreto.

### *Mapeo de Polos*

Cuando un sistema de tiempo continuo es muestreado, sus polos son transformados según la relación  $p \rightarrow e^{ph}$  (Franklin & Powell, 1980).

Entonces se tiene que los polos que están en:

- el semiplano izquierdo del plano  $s$  (left half side, en siglas LHS) se mapean dentro del círculo unitario del plano  $z$  (polos estables);
- el semiplano derecho (right half side, en sus siglas RHS) se mapean fuera del círculo unitario (polos inestables);
- los polos marginalmente estables (o críticos) ubicados en el eje imaginario del plano  $s$  se mapean sobre el borde del círculo unitario;
- las paralelas al eje real negativo para  $j\omega_a = j\pi/h$  con  $-\infty < \omega_n \leq 0$  del plano  $s$  son mapeadas en el segmento negativo  $-1 \leq z \leq 0$  del plano  $z$ . Si  $-\xi\omega_n > 0$ , los polos en el plano  $s$  son mapeados en la sección negativa del plano  $z$ , i.e.  $z \leq -1$ . La frecuencia  $\omega_a$  debe ser inferior a  $\pi/h$  para satisfacer el Teorema de Muestreo de *Shannon*.

Es decir, como esta transformación mapea el semiplano izquierdo dentro del círculo unitario, la estabilidad es preservada.

### *Mapeo de ceros*

Desafortunadamente no existe una simple transformación que muestre como se mapean los ceros de un sistema continuo debido al muestreo. Por ello (Åström et al., 1984) propone la caracterización de los ceros obtenidos del muestreo de un sistema continuo en Teorema A.1.

**Teorema A.1:** (Åström et al., 1984): Sea  $G(s)$  un sistema continuo cuyo denominador y numerador tienen orden  $n$  y  $p$  respectivamente.

Entonces, cuando el período de muestreo  $h \rightarrow 0$ ,  $p$  ceros de la transferencia discreta van hacia 1 y los restantes  $n-p-1$  ceros van hacia los ceros de  $B_{n-p}(z)$  donde

$$B_x(z) = \sum_{k=1}^x b_{xk} z^{x-k} \quad (\text{A.26})$$

$$b_{xk}(m) = \sum_{i=1}^x (-1)^{x-k} i^x \binom{x+1}{k-i} \text{ con } k = 0, \dots, x \quad (\text{A.27})$$

De igual manera, tampoco es transparente la forma en la cual un sistema continuo con retardo en la acción de control (A.18) mapea sus ceros debido al muestreo. El trabajo de (Hara et al., 1989) extiende lo establecido por (Åström et al., 1984) para este tipo de sistemas.

**Teorema A.2:** (Hara et al., 1989): Sea la planta racional (A.14) con un retardo en la acción de control (A.18), entonces los ceros límites de la función transferencia discreta, cuando el período de muestreo tiende a cero están determinados solamente por el grado relativo del sistema continuo. Esto se enuncia en (A.28) siendo  $B_{n-p}(z, m)$  definida en (A.29) y sus coeficientes en (A.30). Además  $x=n-p$  es el grado relativo de  $G_0(s)$ ,  $n$  grado del denominador y  $p$  del numerador.

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{p-n} \mathcal{Z}_m \{ H(s) G_0(s) e^{-[(l-1)+(1-m)]hs} \} = \frac{k}{(n-p)!} \frac{(z-1)^p B_{n-p}(z, m)}{(z-1)^n z^l} \quad (\text{A.28})$$

$$B_x(z, m) = \sum_{k=0}^x b_{xk}(m) z^{x-k} \quad (\text{A.29})$$

$$b_{xk}(m) = \sum_{i=0}^{x-k} (-1)^{x-k-i} (i + (1-m))^x \binom{x+1}{x-k-i} \text{ con } k = 0, \dots, x \quad (\text{A.30})$$

Si el cero es observado como función de  $\tau$  es periódico con período  $h$ .



# APÉNDICE B

## Diseño de sistemas de control digital

La Figura B.1 muestra la estructura estándar de un sistema de control (realimentado) que se usa para el diseño de controladores, donde  $r(t)$  es la entrada de referencia,  $d(t)$  es una perturbación y  $n(t)$  modela el ruido de medición (eventualmente puede haber una perturbación denominada de proceso entre el controlador y la planta  $G$ ).

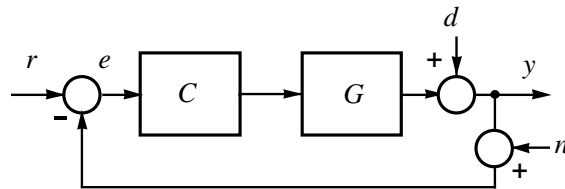


Figura B.1: Lazo de control estándar para diseño.

El requisito esencial de un sistema de control realimentado es su estabilidad. Otros requisitos son performance y robustez frente a perturbaciones y/o incertidumbre del modelo.

La estabilidad se puede caracterizar de varias maneras. Por ejemplo desde un punto de vista entrada-salida requiriendo que la salida del sistema tenga un "buen comportamiento" en *algún sentido* siempre que la entrada tenga un "buen comportamiento". Alternativamente, se puede caracterizar estabilidad estudiando el comportamiento asintótico del estado del sistema en torno a sus soluciones de régimen permanente, como puntos de equilibrio u órbitas periódicas (Khalil, 2001). Nociones de estabilidad de sistemas discretos se presentan en Apéndice D.

Las especificaciones funcionales para el diseño del control dependen fundamentalmente de la aplicación. En general, los problemas de control se caracterizan en: problemas de regulación; de servomecanismos (o de posicionamiento) y de seguimiento de la referencia (tracking), ver (Bosgra et al., 2004).

*Sistemas de regulación:* La principal función de tales sistemas es mantener una dada salida ( $y$ ) dentro de una predeterminada tolerancia en torno a un determinado valor ( $y_0$ ) a pesar de los efectos de cambio en la carga y otras perturbaciones ( $d$  y/o  $n$ ).



---

*Servosistemas o sistemas de posicionamiento*: El control se diseña de forma de cambiar el valor de una salida ( $y$ ) de acuerdo a una señal de referencia ( $r$ ), y puede tener como objetivo complementario actuar como un regulador.

*Sistemas de seguimiento* (tracking): En este caso, más general que el anterior, la señal de referencia  $r$  no está predeterminada sino que se presenta como una señal medida u observada que debe ser seguida por una salida.

Para tratar los problemas enunciados existen distintas técnicas de diseño de controladores, ver (Chen & Francis, 1994), (Franklin & Powell, 1980), (Åström & Wittenmark, 1997), etc. En particular en las secciones B.1, B.2 y B.3 se resumen las siguientes tres técnicas de diseño: de uso de transformadas (equivalente discreto), de control óptimo (LQR) y de diseño robusto (*Loop-Shaping*). Se citan las mismas debido a su relevancia para esta tesis.

Tradicionalmente por técnicas de transformadas se hace referencia a aquellas que usan transformadas de *Laplace* o *Fourier* para representar a los sistemas dinámicos y las especificaciones de control (Franklin & Powell, 1980). Estas técnicas requieren equivalentes discretos para construir un controlador digital indirectamente a partir de un diseño de CT. Por ejemplo, tanto los métodos de mapeo de polos y ceros como el de “*root-locus*”, originalmente concebidos para CT, han podido ser transferidos sin cambios al plano Z (Franklin & Powell, 1980). De igual forma, el criterio de *Nyquist* ha sido trasladado al caso discreto y se pueden usar los conceptos de márgenes de fase y de ganancia que el mismo establece al igual que en el caso continuo. Sin embargo, y a pesar de esta equivalencia, el típico diseño frecuencial de sistemas discretos usa la transformación bilineal (*Tustin*). Esto suele fundamentarse con dos argumentos: *i*) es difícil representar gráficamente la respuesta en frecuencia porque ésta aparece en la exponencial compleja  $z = e^{j\omega h}$ , y *ii*) no se puede extender el clásico diseño propuesto por Bode que utiliza las asíntotas para calcular los compensadores.

Si bien el primer punto está resuelto hoy día, gracias al desarrollo de herramientas potentes de software, perduran ciertos preconceptos que descartan de raíz la alternativa de realizar un diseño en el dominio DT (plano  $z$ ), ver comentarios en (Maciejowski & Samra, 1990) y (León de la Barra & Prieto, 1999). La existencia de estos preconceptos justifica el hecho de que sólo en muy pocos artículos (León de la Barra & Prieto, 1999), etc., se ha analizado el comportamiento frecuencial de sistemas discretos orientado al diseño de compensadores que resuelven el problema íntegramente en el dominio Z. Este diseño con plantas y controladores

en el dominio  $Z$  evita distorsiones en frecuencia y eventuales problemas numéricos introducidos por la *bilineal* (Ogata, 1996).

## B.1 Diseño de control digital usando técnicas de transformadas

### Mapeo de polos y ceros

Esta técnica, muy utilizada para el problema de servomecanismo, parte de considerar que la dinámica del sistema de control muestreado de lazo cerrado es similar a la del sistema equivalente continuo, ver (Franklin & Powell, 1980). Esto permite establecer una correspondencia entre las especificaciones de los transitorios de lazo cerrado o índices de performance (típicamente, límites superiores en el sobrevalor y el tiempo de crecimiento) y la ubicación de los polos y ceros del lazo cerrado en el plano complejo  $z$ . Luego el diseño se basa en encontrar el controlador que satisfaga tal ubicación de polos y ceros, lo que puede ser conseguido usando las técnicas de ubicación de polos (Åström & Wittenmark, 1997).

*Especificaciones en el plano  $z$ :* En particular se tienen en cuenta ciertas especificaciones clásicas asociadas a la respuesta temporal transitoria de un sistema de segundo orden continuo a una referencia escalón, ver Figura B.2.

Se conserva la notación definida en (Goodwin et al., 2001): Valor de régimen permanente  $y_\infty$ ; sobrevalor (*Overshoot*)  $M_p$ , la cantidad máxima que la salida excede su valor final; Tiempo de crecimiento (*Rise time*)  $T_r$ , tiempo necesario para que la salida partiendo del 10% alcance el 90% de su valor final; Tiempo de establecimiento (*Settling Time*)  $T_s$ , tiempo hasta que la salida entra en una banda especificada  $\Delta$  alrededor del valor final de régimen  $y_\infty$ .

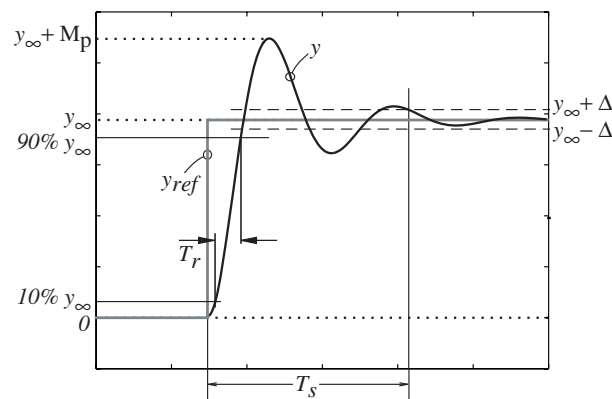


Figura B.2: Respuesta temporal del sistema de segundo orden

El efecto de los polos en el plano  $z$  sobre los índices de performance puede ser visualizado en el denominado  $Z$ -grid que se define a partir de un sistema de segundo orden  $P_{T2}$ - discreto como se enuncia a continuación.

Sea el sistema de Segundo orden  $P_{T2}$ - especificado en (B.1). Si el sistema tiene un par de polos conjugados complejos (B.2) (con  $\omega_n=1/T$ ) tiene un sobrevalor (B.3), un tiempo de establecimiento (B.4) (aproximado para  $0.1 < \xi < 0.9$ ); y el tiempo de crecimiento es (B.5).

$$G(s) = \frac{K}{T^2 + 2\xi T s + 1} \quad (\text{B.1})$$

$$s_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n \quad (\text{B.2})$$

$$M_p = K e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (\text{B.3})$$

$$T_s \approx \frac{3}{\xi \omega_n} \quad (\Delta = 5\%) \quad (\text{B.4})$$

$$T_r = \frac{1}{\omega_n} e^{\frac{\varphi}{\tan \varphi}} \quad \text{con } \varphi = \arccos \xi \quad (\text{B.5})$$

El modelo discreto de la cascada de (B.1) con un dispositivo ZOH nos da la función transferencia discreta (B.6) con polos (B.7) en el plano  $z$ , definidos en (B.7) donde  $r = e^{-\xi \omega_n h}$ ,  $\theta = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n h = \omega_d h$ .

$$G(z) = K \frac{z - q_0}{z^2 - 2 r \cos \theta z + r^2} \quad (\text{B.6})$$

$$p_{1,2} = r e^{\pm j\theta} = r (\cos \theta + j \sin \theta) \quad (\text{B.7})$$

Los índices sobrevalor y tiempo de establecimiento en función de  $r$  y  $\theta$  (parámetros de la FT discreta) son (B.8) y (B.9) respectivamente.

$$M_p = K r^{\frac{\pi}{\theta}} \quad (\text{B.8})$$

$$T_s = -3/\ln(r)h \quad (\text{B.9})$$

La Figura B.3 muestra el Z grid, es decir la ubicación de las raíces con coeficiente de amortiguamiento constante o con frecuencia natural en el plano z. Esto permite establecer las relaciones entre los parámetros de respuesta temporal al escalón elegidos como índices de la performance con la ubicación de los polos. Como un ejemplo, si se considera  $h=1s$  y especificando que  $M_p \leq 15\%$  implica que  $\xi \geq 0.5$ , entonces los polos deben estar dentro de la sección en gris (Figura B.3-a). Para un dado  $T_s$ , la relación  $\xi\omega_n \geq 3/T_s$  implica que  $r_0 = |z| = \exp(-3h/T_s)$ , entonces el modulo de z resulta en un círculo de radio  $r_0$  (Figura B.3 b).

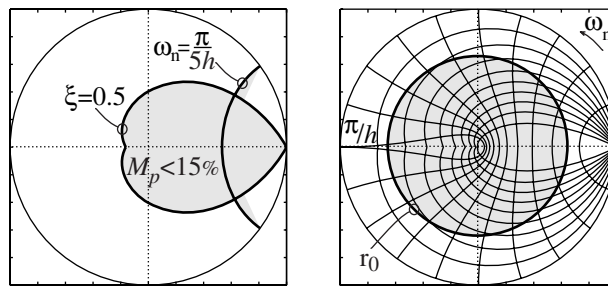


Figura B.3: a) Curvas para coeficiente de amortiguamiento y frecuencial natural constante. b) Tiempo de establecimiento (Settling Time). Z-grid.

*Diseño de respuesta en frecuencia*

El diseño de un controlador que establezca el lazo de control para el caso SISO puede ser realizado siguiendo las reglas enunciadas en esta subsección que se derivan a partir del *Criterio Simplificado* de Nyquist. Este criterio ha sido presentado en (Vidyasagar et al., 1988) y su versión para sistemas DT en (Yaniv, 1999).

Sea la transferencia de lazo abierto  $L$ , la cascada de planta  $P$  y controlador  $C$ . Esta función compleja puede ser escrita como  $L=|L| e^{j\phi}$  donde  $|L|$  es la magnitud de  $L$  y  $\phi = \arg(L)$ .

**Teorema B.1** (Yaniv, 1999): Sea  $R_0$  la línea que une  $(-\infty, j0)$  con  $(-1, j0)$ . Cada cruce a la izquierda ( $C_L$ ) ocurre cuando el lugar de Nyquist de  $L(z)$  interseca  $R_0$ . El cruce se define positivo si en la intersección la magnitud crece hacia arriba y negativa en caso contrario Figura B.4.

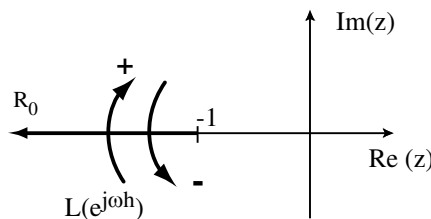


Figura B.4 Definición del signo del cruce.

Entonces el sistema realimentado es estable *si y sólo si* el lugar de Nyquist no interseca a  $(-1, j0)$  y la suma neta de sus cruces  $C_L$  es igual a  $\eta$ , donde  $\eta$  es el número de raíces inestables del denominador de  $L$  (o la rama positiva de frecuencias sólo debe cruzar  $\eta/2$  veces).  $\square$

Para realizar la suma neta, se necesita determinar en primer lugar si el cruce se produce a la izquierda o a la derecha del punto crítico. Si existen cruces a la izquierda ( $C_L$ ), se debe analizar el signo de la magnitud (B.10) en cada uno de tales cruces.

$$\sigma(\theta) = \frac{d|L(e^{j\theta})|}{d\theta} \text{ evaluada en } \theta^* \quad (\text{B.10})$$

Si  $\sigma(\theta^*) < 0$  entonces el signo definido en Figura B.4 es positivo y viceversa.

*Reglas de diseño basadas en el criterio de Nyquist:* En general, en el diseño de controladores solamente se usa la mitad del lugar de Nyquist (sólo la parte imaginaria positiva del contorno de Nyquist), debido a la simetría conjugada. Por esto cada cruce de la curva (para frecuencias positivas) de Nyquist debe ser contado doble.

Si  $L(e^{j\theta})$  no tiene polos en el círculo unitario,  $1+L(e^{j\theta})$  no tiene ceros fuera del círculo y entonces  $\theta_c$  la frecuencia de cruce (“*cross-over*” frecuencia donde la ganancia de lazo interseca al círculo unitario) es la más pequeña y a su vez mayor que todas las frecuencias de cruce en el rayo  $R_0$ , entonces:

- Si el número de polos fuera del círculo es impar, entonces  $\arg(L(e^{j\theta_c}))$  debe ser superior que  $-\pi$  y  $L(1)$  debe estar en el rayo  $R_0$ , de otra forma los números de cruces no pueden ser un número impar.
- Si el número es par, y  $L(1) > 0$  dB, entonces  $\arg(L(e^{j\theta_c}))$  debe ser mayor que  $-\pi$  y  $L(1)$  no puede estar en el rayo  $R_0$ .

Si  $1+L(e^{j\theta})$  no tiene ceros fuera del círculo entonces se tiene la siguiente propiedad: La fase de la frecuencia de cruce,  $\arg(L(e^{j\theta_c}))$  es negativa.

## B.2 Diseño óptimo - LQR

Para tratar el *problema del regulador* un método muy utilizado es el denominado *Lineal Cuadrático del regulador* LQR (en sus siglas por *Linear Quadratic Regulator*). Este es uno de los problemas más comunes de control óptimo, ver por ej. (Åström & Wittenmark, 1997).

Se suelen considerar dos versiones del método LQR, la primera concebida para minimizar un costo discreto (en sus siglas *DT LQR*) y la segunda que minimiza un costo en tiempo continuo y por tanto tiene en cuenta el comportamiento entre muestreo, denominada LQR muestreada. Tras una adecuada conversión de matrices, el problema LQR muestreado es equivalente al DT LQR (Åström & Wittenmark, 1997), por esto aquí se considera el caso más general LQR muestreado.

A continuación se presenta el diseño LQR para un período de muestreo fijo y luego se introduce la solución del caso más general de período de muestreo sea variable.

### LQR para período de muestreo fijo

Sea el sistema (A.1) el objetivo de control es minimizar el costo cuadrático (B.11).

$$J = \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt + x(T)^T Q_f x(T) \quad (\text{B.11})$$

Donde las matrices  $Q$ ,  $Q_f$  y  $R$  son simétricas definidas (o semidefinidas) positivas de dimensiones apropiadas y  $T$  es el valor del horizonte finito. Esta función de costo representa el *trade-off* entre la distancia del estado al origen y el costo de la acción de control. El costo (B.11) es equivalente al costo discreto (B.12) con  $N=T/h$  entero y las matrices son (B.13).

$$J(N) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T Q' x_k + 2 x_k^T M' u_k + u_k^T R' u_k) + x_N^T Q_f x_N \quad (\text{B.12})$$

$$Q' = \int_0^h (e^{At})^T Q e^{At} dt, M' = \int_0^h (e^{At})^T Q \Gamma(t) dt, \quad (\text{B.13})$$

$$R' = \int_0^h (\Gamma(t)^T Q \Gamma(t) + R) dt$$

Como se ve en (B.12) este problema LQR muestreado equivale entonces a un LQR DT con un término cruzado entre la entrada y estado  $M'$ . En el LQR DT estándar la matriz  $M' = 0$ .

La solución del problema LQR es dada por una ley de control lineal (B.14) que vale (B.15) y en la cual  $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz definida positiva dada por la recursión de Ricatti (B.16).

$$u_k = F_k x_k \quad (\text{B.14})$$

$$F_k = -(R' + \Gamma(h)^T P_{k+1} \Gamma(h))^{-1} (\Gamma(h)^T P_{k+1} \Phi(h) + M'^T) \quad (\text{B.15})$$

$$P_k = \Phi(h)^T P_{k+1} \Phi(h) + Q' - (\Phi(h)^T P_{k+1} \Gamma(h) + M') \cdot (\Gamma(h)^T P_{k+1} \Gamma(h) + R')^{-1} (\Gamma(h)^T P_{k+1} \Phi(h) + M'^T) \quad (\text{B.16})$$

Con  $P_k = Q_f$ . Ver por ejemplo la referencia (Shaiju & Petersen, 2008).

Cuando el horizonte de tiempo  $T$  en (B.12) tiende a  $\infty$ , el sistema es estacionario y la solución del problema LQR es dada por una ley de control lineal de la forma (B.14) donde  $F_k$  es una matriz constante denominada  $F$  dada por (B.17) y  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz definida positiva que satisface la ecuación algebraica de Ricatti (B.18).

$$F = - (R' + \Gamma(h)^T P \Gamma(h))^{-1} (M' + \Gamma(h)^T P \Phi(h)) \quad (\text{B.17})$$

$$P = Q' + \Phi(h)^T P \Phi(h) - (\Gamma(h)^T P \Gamma(h) + R')^{-1} \cdot (\Gamma(h)^T P \Phi(h) + M'^T) \cdot (M' + \Gamma(h)^T P \Phi(h)) \quad (\text{B.18})$$

En el caso de horizonte infinito, los comandos LQR o DLQR de MATLAB pueden ser usados para obtener la ley de control (B.14) para las matrices definidas en (B.13).

#### *LQR para período de muestreo variable*

En el caso del período de muestreo pueda variar, las matrices de la función de costo (B.12) son definidas para cada período  $h_i$  son respectivamente (B.19).

$$Q'_k = \int_0^{h_i} (e^{At})^T Q e^{At} dt, M'_k = \int_0^{h_i} (e^{At})^T Q \Gamma(t) dt, \quad (\text{B.19})$$

$$R'_k = \int_0^{h_i} (\Gamma(t)^T Q \Gamma(t) + R) dt$$

Si el período cambia en forma dinámica, entonces se debe resolver un problema LQR para sistemas discretos conmutados (en sus siglas DSLQR por *Discrete-Time Switched LQR*). Es decir, en lugar de conseguir una única ganancia óptima de realimentación (B.17), la solución del DSLQR es una ganancia por realimentación dependiente del estado (Zhang et al., 2009).

Si en cambio el período cambia de forma periódica, entonces se puede obtener la solución óptima cuya ley de control es adaptable al período (B.20), para horizonte infinito  $H = \infty$ .

$$F_i = - (R'_i + \Gamma(h_i)^T P_i \Gamma(h_i))^{-1} (\Gamma(h_i)^T P_i \Phi(h_i) + (M'_i)^T) \quad (\text{B.20})$$

### B.3 Diseño Robusto - Loopshaping

Uno de los métodos más difundidos para el diseño de controladores que resuelvan robustamente el problema de seguimiento de la referencia  $r$ , rechazo a la perturbación  $d$  y ruido de medición  $n$ , ver Figura B.1, es el método *loop-shaping*. El mismo no provee fórmulas cerradas de cálculo de controlador, sino que deja elementos de libre elección del ingeniero de diseño, lo que inevitablemente implica prueba y error en el ajuste final del controlador.

A continuación, se resumen ciertas restricciones de diseño estándares de control, que se traducen como reglas que ayudan al ingeniero de control a reducir las iteraciones de prueba y error mencionadas, ver (Seron et al., 1997), (Toivonen, 2000), (Chiang & Safonov, 2000). Tales restricciones son válidas en ambos dominios,  $CT$  y  $DT$ , por esta razón a continuación se prescinde de los argumentos  $s$  y  $z$ .

#### i. Especificaciones Estándares para diseño de $S$ y $T$

Nuevamente, siendo la transferencia de lazo abierto  $L$ , la cascada de planta  $P$  y controlador  $C$ , y  $L=|L| e^{j\phi}$  donde  $|L|$  es la magnitud de  $L$  y  $\phi=\arg(L)$ .

$$T = L (1 + L)^{-1} \quad (\text{B.21})$$

$$S = (1 + L)^{-1} \quad (\text{B.22})$$

$T$  y  $S$  deben satisfacer la restricción complementaria  $S+T\equiv 1$  para toda frecuencia, luego ambas no pueden hacerse arbitrariamente pequeñas o grandes para la misma frecuencia. Esta restricción fundamental sobre  $S$  y  $T$  establece cierta relación de compromiso (“*trade-off*”) entre los objetivos de control: *performance* y robustez. En consecuencia, como  $T$  mapea  $r$  y  $n$  en la salida, y dado que típicamente  $r$  tiene componentes de baja frecuencia mientras  $n$  es importante en altas frecuencias, es posible postular que  $T$  debería ser cercano a 0 dB en baja frecuencia, y pequeño en alta, para atenuar el ruido ( $-40\text{dB}$  para  $\omega \gg \omega_e$ ). Por otro lado, el rechazo adecuado de una perturbación requiere  $S$  pequeña en el rango de frecuencias donde  $d$  es importante, típicamente baja frecuencia ( $-40\text{ dB}$  a  $\omega < \omega_a$ ). Además, como  $S$  y  $T$  están asociadas con consideraciones de robustez (Seron et al., 1997), se restringe la norma máxima de ambas  $\|T\|_\infty$  y  $\|S\|_\infty$  (o equivalentemente en sistemas SISO  $|T|_{\max}$  y  $|S|_{\max}$ ), a típicamente



valores inferiores que 2 (6 dB). Para eliminar o hacer muy pequeño el error al escalón en régimen la magnitud de  $L$  debe asumir valores muy superiores a 1 (0dB) en baja frecuencia.

A continuación estas ideas se expresan formal y cuantitativamente.

a. Especificaciones para  $S$ : Rechazo a perturbaciones de baja frecuencia ( $d$  en Figura B.1)

i.  $|S| \leq -40dB$  para  $\omega \in [0, \omega_a]$

ii.  $|S_\infty| \leq 6dB$  para  $\omega \in [0, \pi/h](TD), [0, \infty)(TC)$

b. Especificaciones para  $T$ : Atenuación del ruido de alta frecuencia ( $n$  en Figura B.1)

i.  $|T_\infty| \leq 6dB$  para  $\omega \in [0, \pi/h](TD), [0, \infty)(TC)$

ii.  $|T| \leq -40dB$  para  $\omega \in [\omega_e, \pi/h](TD), [\omega_e, \infty)(TC)$

El uso de tales restricciones de frecuencia da lugar a una plantilla para  $S$  y  $T$  en el plano de Bode, tal como se muestra en Figura B.5.

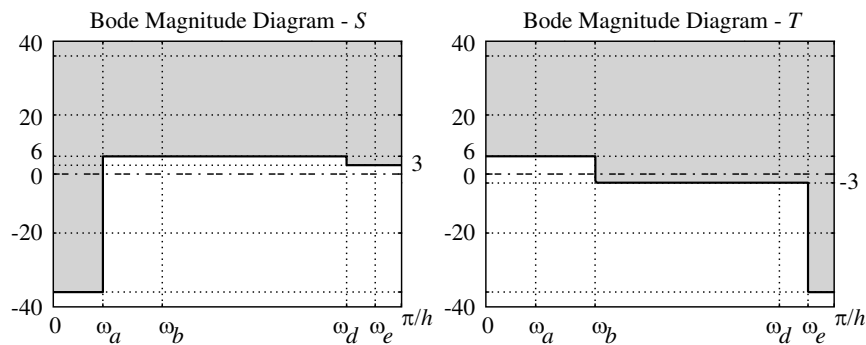


Figura B.5: Requerimientos estándares  $S$  y  $T$ .

#### B.4 Selección del período de muestreo

En control digital el período de muestreo es un parámetro de diseño. Las reglas para su selección deben tener en cuenta ciertas especificaciones de lazo abierto y de performance de lazo cerrado como las que se mencionan a continuación.

En relación con la planta específica que se quiere controlar se tienen que satisfacer las siguientes características:

- 1) El Teorema de Muestreo de *Shannon* establece que la tasa de muestreo  $\omega_s = 2\pi/h$  debe ser al menos dos veces más rápida que la frecuencia más alta de la planta  $\omega_a$ . Es decir  $h < \pi/\omega_a$  (Franklin & Powell, 1980).
- 2) La frecuencia de muestreo  $\omega_s$  debe ser no patológica (non pathological). Esto ocurre si solo si dos autovalores de  $A$  de (A.1) no son mapeados en el mismo autovalor de  $\Phi(h)$  de

(A.2), ver (Chen & Francis, 1994). Este tipo de muestreo preserva las propiedades de *controlabilidad* y *observabilidad* de la planta continua.

En relación con el desempeño de lazo cerrado se puede considerar la regla práctica (*rule of thumb*) presentada en (Åström & Wittenmark, 1997) para la elección del período de muestreo en función de la frecuencia natural de un sistema de segundo orden en lazo cerrado  $\omega_b$ . La misma se establece con el siguiente análisis:

En un sistema LTI la respuesta temporal puede caracterizarse por el tiempo de crecimiento  $Tr$  (rise time), tiempo necesario para que la salida partiendo del 10% alcance el 90% de su valor final. En DT,  $Tr$  puede ser interpretado como  $R$  veces el período de muestreo. Específicamente esta regla expresada en (B.24) surge al considerar los casos extremos  $R=10$  y  $R\approx 3.5$  en la expresión (B.23).

$$\omega_b h = 2.2/R \quad (\text{B.23})$$

$$0.2 \leq \omega_b h \leq 0.8 \quad (\text{B.24})$$

El término 2.2 de (B.23) se obtiene reemplazando en (2.35) con un amortiguamiento igual a 0.707. Para  $R$  superior a 10,  $Tr \gg h$  se tiene un *sobremuestreo* del sistema mientras que un valor ligeramente inferior a  $R=3.5$ , por ejemplo  $R=2$ , resulta en  $Tr \approx h$ . Para  $R < 2$  el tiempo de crecimiento puede resultar inferior al período de muestreo, lo que constituye a  $R=2$  como el valor límite inferior de  $R$ .



# APÉNDICE C

## Estabilidad de sistemas discretos

En esta sección se definen algunos de los conceptos más generales de estabilidad de sistemas discretos. En primera instancia se considera como modelo más general un sistema no lineal discreto. Para el mismo se presenta la herramienta típica y más potente para el estudio de la estabilidad de sistemas no lineales que es el análisis a través de funciones de Lyapunov. Las definiciones que serán usadas y resultados más relevantes son presentadas de forma similar que en (Cloosterman, 2008), cuyo resumen está basado en (Khalil, 2001). Por último, se considera el caso de sistemas lineales conmutados (Liberzon & Morse, 1999) y se presentan herramientas útiles para sistemas lineales invariantes en el tiempo (Hinrichsen & Pritchard, 2005) que son pertinentes para la tesis.

### C.1 Estabilidad de sistema discreto no lineal

Sea el siguiente sistema no lineal discreto (C.1) donde  $x_n \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $k \in \mathbb{N}$  el instante de muestreo y  $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función posiblemente discontinua.

$$x_{k+1} = f(x_k, k) \quad (\text{C.1})$$

Sea  $x=0$  un punto de equilibrio de (C.1). A continuación se considera la estabilidad a través de funciones de Lyapunov (Khalil, 2001).

Definición C.1: El punto de equilibrio  $x=0$  de (C.1) es

- estable si, para cada  $\varepsilon > 0$  y todo  $k_0 \in \mathbb{N}$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon, k_0) > 0$  tal que

$$|x_{k_0}| < \delta \Rightarrow |x_k| < \varepsilon, \forall k > k_0 \quad (\text{C.2})$$

- uniformemente estable si para algún  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  ; independiente de  $k_0$ , tal que para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$  se satisface (C.2).

- inestable si no es estable.
- asintóticamente estable si es estable para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$  y existe una constante  $c = c(k_0) > 0$  tal que  $x_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , para todo  $|x_{k_0}| < c(k_0)$ .
- asintótica y uniformemente estable si es uniformemente estable y existe una constante  $c > 0$ ; independiente de  $k_0$ , tal que para todo  $\eta > 0$  existe un  $T = T(\eta) > 0$  y tal que para todo  $k_0 \in \mathbb{N}$

$$|x_k| < \eta, \forall k > k_0 + T(\eta), \forall |x_{k_0}| < c \quad (\text{C.3})$$

Definición C.2: El punto de equilibrio  $x=0$  de (C.1) es:

- global asintótica y uniformemente estable si es uniformemente estable,  $\delta(\varepsilon)$  puede ser elegida de forma de satisfacer  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon) = \infty$  y para cada par de números positivos  $\eta$  y  $c$ , existe un  $T = T(\eta, c) > 0$  tal que

$$|x_k| < \eta, \forall k > k_0 + T(\eta, c), \forall |x_{k_0}| > c \quad (\text{C.4})$$

- exponencialmente estable si existe una constante positiva  $\theta > 0$ ,  $m \in [0, 1)$  y  $c > 0$  tal que para todo  $x_{k_0}$  con  $|x_{k_0}| < c$

$$|x_k| \leq \theta |x_{k_0}| m^{k-k_0}, \forall k > k_0, k_0 \in \mathbb{N} \quad (\text{C.5})$$

- global y exponencialmente estable si (C.5) vale para cualquier  $x_{k_0}$ .

Para probar la estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov se usa una función en diferencias de Lyapunov definida en (C.6).

$$\Delta V(x, k) = V(x_{k+1}, k+1) - V(x_k, k) \quad (\text{C.6})$$

Antes de definir algunas propiedades de la función  $V(x, k)$  se deben definir las siguientes clases de funciones.

Definición C.3 (Khalil, 2001): Una función continua  $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$  se dice que pertenece a una clase  $\mathcal{K}$  si es estrictamente creciente y  $\alpha(0) = 0$ . Se dice que esta función es de tipo  $\mathcal{K}_\infty$  si  $a = +\infty$  y  $\alpha(r) \rightarrow +\infty$  cuando  $r \rightarrow +\infty$ .

Definición C.4 (Khalil, 2001): Si existe una función  $V: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$  que es continua y satisface  $V(0, k) = 0$  para todo  $k$  y:

1. existe una función escalar  $\omega_1 \in \mathcal{K}$ , tal que para todo  $k \in \mathbb{N}$  y  $x \neq 0$ :  $V(x, k) > \omega_1(|x|)$
2.  $\Delta V(x, k)$  satisface  $\forall k \in \mathbb{N}$  y  $x \neq 0$   $\Delta V(x, k) = V(f(x_k, k), k+1) - V(x_k, k) \leq 0$
3. existe una función escalar  $\omega_3 \in \mathcal{K}$ , tal que  $\Delta V(x, k)$  satisface  $\forall k \in \mathbb{N}$  y todo  $x \neq 0$  lo siguiente  $\Delta V(x, k) = V(f(x_k, k), k+1) - V(x_k, k) < -\omega_3(|x|) < 0$
4. existe una función escalar  $\omega_2 \in \mathcal{K}$ , tal que para  $\forall k \in \mathbb{N}$  y  $x \neq 0$  vale  $V(x_k, k) \leq \omega_2(|x|)$ .
5.  $\omega_1(|x|) \rightarrow \infty$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , la función  $\omega_1(|x|)$  de 1. es ahora de clase  $\mathcal{K}_\infty$ .

Basándose en estas definiciones, se pueden presentar las siguientes condiciones de estabilidad del origen del sistema (C.1):

- si se satisfacen 1 y 2 es estable
- si se satisfacen 1, 2 y 4 es uniformemente estable
- si se satisfacen 1 y 3 es asintóticamente estable
- si se satisfacen 1, 3 y 4 es asintótica y uniformemente estable
- si se satisfacen 1, 3 y 5 es global y uniformemente estable
- si se satisfacen 1, 3, 4 y 5 es global, asintótica y uniformemente estable

## C.2 Estabilidad de sistemas lineales conmutados

Sea un conjunto finito de matrices  $\mathbf{M} = \{A_i, i \in [1, 2, \dots, p]\}$  con cada  $A_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A partir de un punto arbitrario inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se define la siguiente recurrencia

$$x_{k+1} \in \{A_{i_k} x_k, A_{i_k} \in \mathbf{M}\} \quad (\text{C.7})$$

Esta notación significa que en cada tiempo  $k$ , cualquier matriz  $A_i$  de  $\mathbf{M}$  puede ser usada para determinar el próximo valor de  $x_{k+1}$ . La secuencia  $i_k$  es la señal de conmutación.

Una serie  $(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots)$  que satisface la inclusión (C.7), es una trayectoria en el espacio  $\mathbb{R}^n$  descrita en (C.8). El conjunto de todas las posibles señales de conmutación define el conjunto completo de posibles trayectorias.

$$x_{k+1} = A_{i_k} x_k \text{ para una dada secuencia } i_k \quad (\text{C.8})$$

La inclusión lineal discreta (DLI en sus siglas del inglés *Discrete Linear Inclusion*) es el conjunto de todas las secuencias posibles de vectores  $(x_k)$ :  $k \geq 0$  en  $\mathbb{R}^n$  generados con la relación (C.7).

Se puede pensar en (C.7) como un sistema de control discreto, que en cada tiempo  $k$  aplica una matriz (de lazo cerrado) del conjunto  $\mathbf{M}$  y entonces  $\text{DLI}(\mathbf{M})$  es el conjunto de todas las posibles trayectorias del sistema (Gurvits, 1995).

La estabilidad asintótica requiere que cualquier trayectoria  $(x_k)$  descrita en (C.8) de un  $\text{DLI}(\mathbf{M})$  converja al origen, i.e.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$  para toda secuencia. Esto se verifica con el radio espectral conjunto (JSR en sus siglas de *Joint Spectral Radius*).

#### *Estabilidad del $\text{DLI}(\mathbf{M})$ - Radio Espectral Conjunto*

Definición 2C.5: El radio espectral conjunto del conjunto  $\mathbf{M}$  se define como (C.9). Entonces, si  $\rho(\mathbf{M}) < 1 \Leftrightarrow \text{DLI}(\mathbf{M})$  es asintóticamente estable.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{M}) &:= \limsup_{k \rightarrow \infty} \rho_k(\mathbf{M}) \\ \rho_k(\mathbf{M}) &= \sup_{A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathbf{M}} \|A_k \cdots A_1\|^{1/k} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Esta es una condición necesaria y suficiente. □

La principal dificultad de esta condición está asociada al cálculo del radio espectral conjunto (Tsitsiklis & Blondel, 1997). Una posible cota superior de este radio es la aproximación de la norma elipsoidal (Theys, 2005) que tiene cierta relación con ciertas funciones de Lyapunov que se describen seguidamente, ver (C.19).

#### *Función cuadrática de Lyapunov en DTSS*

Considérese, en primer lugar, un caso particular del sistema (C.1) que es el sistema discreto lineal invariante en el tiempo (C.10).

$$x_{k+1} = A x_k \quad (\text{C.10})$$

Definición 2c.6: Sea una función cuadrática escalar del vector  $x \in \mathbb{R}^n$  expresada por (C.11) donde  $P$  es una matriz real  $n \times n$  definida positiva.

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{C.11})$$

Si la función en diferencias  $\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) < 0$ , se dice que es una función cuadrática de Lyapunov.  $\square$

Que la función en diferencias  $\Delta V(x_k)$  sea definida negativa para (C.11) es equivalente a probar que existe una matriz  $P$  que satisfaga las inecuaciones matriciales (LMI) de (C.12).

$$A^T P A - P < 0, P^T = P > 0 \quad (\text{C.12})$$

Esto se deduce a partir de considerar que  $\Delta V(x_k) = x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k = x_k^T (A^T P A - P) x_k$ , y entonces  $A^T P A - P < 0, \forall x_k \neq 0 \Leftrightarrow \Delta V(x_k) < 0$ .

Una función cuadrática de Lyapunov es una condición necesaria y suficiente que garantiza que la estabilidad de (C.11) es global, asintótica y uniformemente estable, ya que satisface 1, 3, 4 y 5 de la sección previa.

Generalizando esto a sistemas conmutados en tiempo discreto (C.13), la relación (C.12) debe ser satisfecha para todas las matrices  $A_i$  en la familia  $\mathbf{M}$ , es decir (C.14).

$$x_{k+1} = A_i x_k \quad (\text{C.13})$$

$$P = P^T > 0, A_i^T P A_i - P < 0, \quad \forall i \quad (\text{C.14})$$

Estas son condiciones para la existencia de una función cuadrática de Lyapunov común del sistema (QCLF en sus siglas en inglés por Common Quadratic Lyapunov Function).

La existencia de una QCLF es sólo una condición suficiente para la estabilidad del sistema conmutado (C.13) con secuencia de conmutación arbitraria. Específicamente, garantiza la estabilidad cuadrática del sistema conmutado, la cual es un caso especial de estabilidad exponencial.

A partir de suponer la existencia de una QCLF para el sistema lineal conmutado generado por  $\mathbf{M}$  se puede obtener la aproximación de la norma elipsoidal, denominada  $\hat{\rho}(\mathbf{M})$ .

Dado que el ínfimo de todas las normas cuadráticas no puede ser inferior que el ínfimo de todas las posibles normas, entonces  $\rho(\mathbf{M}) \leq \hat{\rho}(\mathbf{M})$ . Es decir, aproximación de la norma



elipsoidal es una cota superior del JSR (Theys, 2005). Por esto, esta aproximación puede ser usada para probar la estabilidad del DLI( $\mathbf{M}$ ).

Definición C.7: Sea  $P$  una matriz definida positiva, la norma elipsoidal de un vector  $x$  se define como  $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$ . Asociada a esta norma del vector, hay una norma matricial inducida para  $A_i$  según (C.15).

$$\|A_i\|_P = \sup_x \frac{\|A_i x\|_P}{\|x\|_P} \quad (\text{C.15})$$

La aproximación de la norma elipsoidal del JSR del conjunto  $\mathbf{M}$  se define en (C.16).

$$\hat{\rho}(\mathbf{M}) = \inf_{P>0} \max_{A_i \in \mathbf{M}} \|A_i\|_P \quad (\text{C.16})$$

Esta definición implica que vale la desigualdad (C.17) o equivalentemente vale (C.18).

$$x^T A_i^T P A_i x \leq \|A_i\|_P^2 x^T P x, \forall x \quad (\text{C.17})$$

$$A_i^T P A_i - \|A_i\|_P^2 P \leq 0 \quad (\text{C.18})$$

Entonces se puede interpretar al valor de  $\|A_i\|_P$  de (C.17) como el valor escalar más pequeño para el cual hay una solución de (C.19) y este valor denominado  $\mu$  es la aproximación de la norma elipsoidal del conjunto  $\mathbf{M}$ .

$$A_i^T P A_i \leq \mu^2 P, P > 0. \quad (\text{C.19})$$

Una condición suficiente de la estabilidad de DLI( $\mathbf{M}$ ) es que  $\mu < 1$ .

### C.3 Estabilidad de sistemas LTI

Para sistemas invariantes en el tiempo en su descripción de espacio de estados (C.11), todas las propiedades de estabilidad son equivalentes a restricciones en el espectro de la matriz  $A$ . Esto se resume a continuación.

Sea el autovalor de una matriz  $A$  un valor escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que  $\exists v \neq 0: Av = \lambda v$ . Los autovalores de  $A$  son los ceros de su polinomio característico  $p(A, \lambda) = \det(\lambda I - A)$  siendo  $I$  la matriz identidad. El conjunto de sus autovalores  $\sigma(A) = \{\lambda_i, \dots, \lambda_n\}$  es el espectro de  $A$ .

El radio espectral de la matriz  $A$  es el módulo máximo de sus autovalores definido en (C.20).

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} \quad (\text{C.20})$$

El sistema (C.11) es asintóticamente y exponencialmente estable si solo si  $\rho(A) < 1$ , ver por ejemplo Teorema 3.3.20 de (Hinrichsen & Pritchard, 2005).

La estabilidad de un polinomio con coeficientes invariantes en el tiempo (C.21) equivale a decir que un polinomio es *Schur*. Entonces esta propiedad queda garantizada si y sólo si todas sus raíces están dentro del círculo unitario, ver por ejemplo (Hinrichsen & Pritchard, 2005).

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (\text{C.21})$$



# APÉNDICE D

## **Planificación y análisis de factibilidad de planificación**

El conjunto de sistemas de control que comparten un recurso común se denomina aquí sistema integrado global. Este sistema global puede ser modelado como un conjunto de clientes de recursos por un lado (tareas o mensajes) y un servidor de recursos por el otro, todo siendo arbitrado por un componente central: el soporte de ejecución.

Aquí, la capacidad de los servidores es la capacidad de cálculo del procesador o el ancho de banda de la red. Los clientes tienen a su vez restricciones temporales establecidas por los requerimientos sobre la dinámica de cada planta controlada, que deben ser satisfechas por el servidor.

Realizar un ordenamiento o planificación (scheduling) sobre un recurso consiste en determinar, para un conjunto de operaciones demandadas por diferentes clientes del recurso, el orden en el cual las mismas deben ser ejecutadas.

Tal planificación se dice factible si todas las restricciones temporales asociadas con cada cliente del recurso son respetadas. El objetivo del análisis de factibilidad de una planificación es establecer una planificación y/o comprobar la factibilidad de una planificación propuesta. En general, el mecanismo de planificación será el mismo para cualquiera sea el recurso (tareas en un procesador o mensajes en una red).

A continuación se presentan nociones básicas de tareas de tiempo real e instancias de las tareas y se definen sus parámetros temporales. Luego, se presentan ciertas características que son comúnmente usadas clasificar los algoritmos o políticas de planificación. Por último se introduce análisis de planificación y la verificación de factibilidad de una planificación.

### ***D.1 Tareas de tiempo real***

Una tarea de una aplicación es una secuencia de instrucciones u operaciones previstas para ser ejecutadas por un procesador. El servicio proporcionado por una tarea puede ser realizado varias veces durante el tiempo de vida de la aplicación (por ejemplo el procedimiento de

cálculo de una ley de control es periódico durante toda la vida del proceso físico a controlar). Esto significa que la secuencia de operaciones de una tarea puede ser re-ejecutada varias veces y por esto a cada una de las ejecuciones de la secuencia de operaciones se la considera individualmente como una *instancia* de la tarea.

Generalmente, una instancia se encuentra en alguno de los siguientes estados:

- Lista (ready): lista para comenzar a ser ejecutada, también o continuar su ejecución posterior a una interrupción;
- En ejecución (running): ejecutándose sobre el procesador;
- En espera (preempted o waiting): en espera de la disponibilidad del recurso que ha sido expropiado (preempted) para la ejecución de otra tarea;
- No activada (non activated o sleeping): en espera de un evento que la active;
- Detenida (stopped): instancia completada.

Aquí se representará el estado de la instancia como en la Figura D.1, por ejemplo entre  $t2$  y  $t3$ ,  $t4$  y  $t5$  la instancia se está ejecutando (running), entre  $t1$  y  $t2$ ,  $t5$  y  $t6$  está esperando (preempted) y por último antes de  $t1$  y entre  $t2$  y  $t6$  esta no activada.

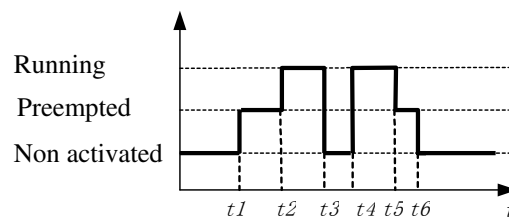


Figura D.1: Representación del estado de la instancia.

Cada tarea o mensaje  $\tau_i$  tiene asociados los siguientes parámetros:

1.  $C_i$  el mayor tiempo necesario por las instancias de  $\tau_i$  para completar su ejecución;
2.  $D_i$  es el deadline de cada  $\tau_i$ , que se supone es el mismo para cada instancia.
3. Cuando  $\tau_i$  es periódica o esporádica, su período o tiempo mínimo entre dos instancias consecutivas es  $h_i$ ;

## D.2 Caracterización de planificación

### Preemptivo/non-preemptivo

La planificación se dice expropiativa (preemptive) si la tarea en curso puede perder el procesador debido a la necesidad de ejecución de una tarea más prioritaria. En general los

sistemas operativos permiten esta expropiación mientras la cual no siempre es posible en un nodo de comunicación para los mensajes de una red.

### *On-line/Off-line*

Un algoritmo de planificación se dice off-line si la secuencia de planificación está determinada de antemano, en la etapa de concepción. Esto es un plan off-line (o estático) que se ejecuta de manera repetitiva.

Desde el punto de vista de su implementación, el análisis de planificación está basado principalmente en respuestas temporales e hipótesis restrictivas de peor caso por lo que el uso de estas técnica off-line conducirá generalmente a un sobredimensionamiento del sistema.

Un algoritmo de planificación on-line tiene en cuenta las tareas efectivamente presentes a la hora de decidir la planificación. Estos pueden basarse en la construcción de planes de planificación durante el transcurso de funcionamiento denominados planes dinámicos (Almeida et al., 1999), (Liu & Layland, 1973) o en la mayor parte de planificadores basarse en la noción de prioridades: a la hora de decidir se ejecuta la tarea de más alta prioridad. Las prioridades pueden ser asignadas “off-line”, lo que se define como algoritmo de prioridad estática o fija, o “on-line” donde se denomina a prioridad dinámica.

Por todo esto, el uso de algoritmos de planificación “on-line” posibilita una asignación más eficiente del recurso y puede evitar el sobredimensionamiento en la etapa de diseño.

Los algoritmos de planificación más difundidos en la literatura son:

**RM** (por Rate Monotonic): algoritmo de planificación a prioridad estática donde la prioridad es asignada de acuerdo a la regla de la tasa monótonica, es decir a menor período mayor prioridad (Liu & Layland, 1973).

**EDF** (en sus siglas de Earliest Deadline First): algoritmo de planificación a prioridad dinámica que asigna mayor prioridad a la tarea que tiene el deadline más cercano al tiempo actual (Liu & Layland, 1973).

En esta tesis se usa la asignación de prioridades RM, por lo tanto a continuación se citan dos resultados de la teoría de planificación de tareas de tiempo real en relación con la factibilidad del algoritmo RM para dos casos de interés, que el recurso pueda ser expropiado o no.

### D.3 Verificación de factibilidad de una planificación

Sea un recurso cuyas tareas pueden ser *preempted*, una condición suficiente de factibilidad de un conjunto de  $N$  tareas sincrónicas tal que  $\forall i, D_i = h_i$  esta dada por

$$\sum_{i=1}^N \frac{C_i}{h_i} \leq N(2^{\frac{1}{N}} - 1) \quad (\text{D.1})$$

Si se admite que el recurso no es expropiable (non-preemptive), la siguiente condición suficiente probada en (Liu & Layland, 1973) establece que un conjunto de  $N$  tareas se pueden planificar si para todo  $s = 1, \dots, N$  se satisface

$$\sum_{i=1}^s \frac{C_i}{h_i} + \frac{\bar{b}_{l,s}}{h_s} \leq s(2^{\frac{1}{s}} - 1) \quad (\text{D.2})$$

Donde  $\bar{b}_{l,s}$  es el peor caso de tiempo de bloqueo de las tareas menos prioritarias, es decir

$$\bar{b}_{l,s} = \max_{j=s+1, \dots, N} C_j$$

# CAPÍTULO 3

## **Estabilidad y performance de sistemas distribuidos de control: Sistemas LTI con retardos constantes en la red de comunicación**

En este Capítulo se consideran los efectos de los retardos de transmisión introducidos por la red de comunicaciones en los lazos de control. En particular, se considera que los mismos son constantes, y que las plantas son lineales, estacionarias (LTI) y SISO (una entrada-una salida). El retardo se incorpora al modelo discreto del sistema usando la transformada Z modificada (MZT), y en relación con ciertas características de estos modelos se propone realizar un análisis de estabilidad para retardos acotados pero desconocidos, utilizando criterios de estabilidad estándar (criterio de Jury), de respuesta en frecuencia y de estabilidad robusta, todos en el dominio de tiempo discreto. En el método frecuencial, una aproximación de los modelos obtenidos con la MZT permite simplificar y generalizar el análisis de estabilidad, a través de una caracterización asociada al grado relativo de la planta continua. Tras el análisis de características frecuenciales de cierto tipo de combinaciones de planta y controlador (ambos estables), se puede conjeturar que ciertos polos de lazo cerrado que se mueven hacia la inestabilidad con retardos temporales crecientes son determinantes de la variación de índices simples de performance comúnmente usados en la práctica.

### **3.1 Introducción**

Actualmente, los sistemas de control en lazo cerrado con intercambio de información entre sensores, controladores y actuadores a través de redes de comunicación son prácticamente omnipresentes en sistemas embarcados (embedded systems, en inglés), observándose también su presencia creciente en sistemas industriales de control y automatización.

Dado que estos sistemas (designados con el acrónimo NCS por las siglas de Networked Control Systems) en general comparten la red de comunicación con otros usuarios, los lazos de control asociados se ven afectados por la aparición de retardos de transmisión de la



---

información que procesan (NID, por las siglas en inglés de Network-Induced Delays), los cuales dependen de características físicas y de gestión de la red. Desviándose de la hipótesis básica de sincronismo entre sensado y actuación de la teoría de control digital clásica, esta situación afecta la performance de diseño de los lazos, pudiendo inclusive llegar a comprometer su estabilidad.

En este Capítulo se consideran que los NID son constantes, lo que puede ocurrir en aplicaciones que utilizan protocolos de red con agendado de tipo estático, como token ring o token bus (Zhang et al., 2001), por detalles referirse a sección 2.2.3. En estos casos de NID constantes el sistema preserva su invariancia en el tiempo, lo cual facilita la investigación de su estabilidad y de la degradación de su performance nominal.

### 3.1.1 Antecedentes

Desde el punto de vista del diseño de control, estos problemas han sido enfocados de dos maneras, una con modelos en tiempo discreto (DT, por Discrete-Time systems) y otra con modelos aproximados en tiempo continuo (CT, por Continuous-Time systems).

El estudio de problemas LTI en el dominio CT se puede hacer usando la transformada de Laplace, como, por ejemplo, en (Zhong, 2003), donde se analiza la estabilidad de lazo cerrado mediante el diagrama Dual-Locus para una configuración de planta particular (de segundo orden sin ceros) y un controlador continuo (una ganancia), con un retardo entre sensor y controlador. En (Juanole, 2002) se considera una aproximación (utilizando la aproximación de Padé para un retardo inferior al período de muestreo) para analizar la calidad de servicio de la red y el margen de fase de la planta, ambos en CT.

Sin embargo, debe observarse que el uso del enfoque CT sólo puede arrojar resultados próximos a los exactos si el período de muestreo tiende a cero (en la práctica, si la frecuencia de muestreo es muy superior a la frecuencia más alta presente en la salida de la planta). Pero una alta frecuencia de datos a transmitir por una red, compartida entre múltiples transmisores/receptores, implica un aumento en el tráfico, lo que, entre otros problemas, puede ser responsable de un valor importante de retardo. Por lo tanto, como ha sido observado en (Lian et al., 2001), existe un compromiso entre la selección de períodos de muestreo de los lazos de control y el valor del retardo de manera de evitar el deterioro de su performance. De esto se deduce que no es el análisis en el dominio continuo, sino en el discreto, el más adecuado para tratar el problema de los NCS.

En el dominio DT, en (Branicky et al., 2000) se reportan condiciones de estabilidad y se determina el dominio de atracción, en función de la relación retardo-período de muestreo para un integrador controlado por realimentación de estado (es decir, para la combinación de planta dinámica y controlador más simple posible). La posibilidad de extender tales resultados a plantas más complejas o generales con los criterios allí mencionados es muy difícil o imposible y los autores sugieren utilizar simulaciones para encontrar las relaciones.

### 3.1.2 Aportes de este Capítulo

En relación con la estabilidad, se procura determinar el *retardo crítico* o *margen de retardo* (Zhang et al., 2001) para un diseño dado que ignora la presencia de NID o que lo asume constante de un valor fijo. Este problema se puede extender a uno de re-ajuste de un diseño dado tal que el controlador siga manteniendo la estabilidad en caso de que el retardo se incremente, i.e. el interés radica en verificar o garantizar cierta *robustez frente a retardos*.

*Observación 3.1.* Como se verá en el desarrollo del trabajo, el uso del concepto de *retardo crítico* requiere sumo cuidado, ya que hay casos donde el comportamiento estable para ciertos valores de retardo no lo implica para valores *menores*. Como ejemplo, en Figura 3.1 se muestra la respuesta al escalón de la planta  $G_0(s) = \frac{1}{s^2+0.1s+1}$  con un controlador proporcional  $k_c=0.3$  y discreto ( $h=1$ seg) para dos valores de retardo,  $\tau=4.5$ , con respuesta en lazo cerrado estable, y  $\tau=0.5$ , con respuesta inestable.

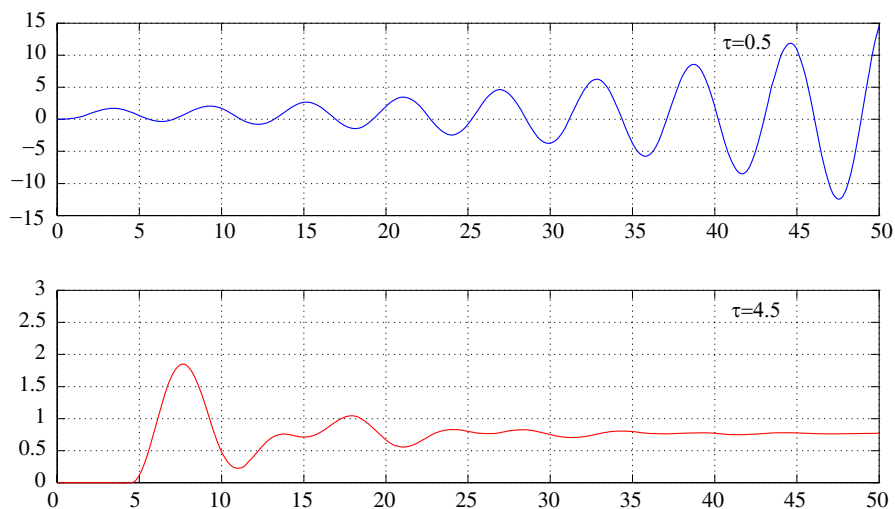


Figura 3.1: Respuesta temporal del sistema controlado con retardo constante. Arriba:  $\tau=0.5$ , Abajo:  $\tau=4.5$ .

---

Dado que el retardo  $\tau$  puede asumir cualquier valor continuo, no necesariamente uno múltiplo del período de muestreo, para tratar este problema en el dominio de tiempo discreto (DT) se puede considerar la transformada Z modificada (Jury, 1964), o MZT por sus siglas en inglés. La misma provee una descripción entrada/salida en el dominio transformado, alternativa al modelo temporal en el espacio de estados de sistemas muestreados, ver Apéndice A sección A.3 y referencias allí. Esta discretización transforma la función transferencia (FT) continua no-racional en una transferencia discreta racional, es decir, de dimensión finita. De esta manera, el retardo se integra con la planta en un único modelo discreto racional.

A diferencia del modelo continuo, donde el retardo es expresado por un único parámetro, en el modelo MZT queda representado por dos coeficientes, uno que es múltiplo entero del período de muestreo y otro que expresa una fracción del mismo. En la respuesta en frecuencia (RF) asociada a esta FT-DT MZT, la parte fraccional del retardo sólo afecta la función magnitud, mientras que tanto la parte fraccional como la parte entera influyen sobre el argumento. Cuando la variación de la magnitud de la RF puede ser acotada en función del rango de valores que la parte fraccional puede asumir, entonces, el análisis de estabilidad robusta puede reducirse al análisis de ciertas relaciones entre magnitudes para un conjunto discreto de valores de la parte fraccional (*Proposición 3.1* de este Capítulo).

La obtención de estas cotas (máximas y mínimas) de la magnitud requiere conocer la expresión simbólica de la FT-DT MZT de la planta en particular, la cual puede ser obtenida utilizando una tabla de MZT, o con algún software de tipo simbólico (por ejemplo, Maple). En la mayor parte de los casos la determinación de estas cotas implica la resolución de ecuaciones trascendentes. Dado que en muchos casos esta resolución es muy compleja o simplemente imposible, se propone aquí la utilización de una aproximación de los coeficientes del numerador de la MZT introducida por (Hara et al., 1989), donde cada coeficiente tiene una dependencia polinomial de la parte fraccional. Si bien los resultados usando esta aproximación discreta son válidos cuando el período de muestreo es pequeño, en este trabajo se mostrará a través de varios ejemplos la ventaja de su empleo, respecto a una aproximación continua muy difundida en la literatura que trata estos problemas en CT (ambas aproximaciones se discuten en la Sección 3.2). El uso de la aproximación discreta permite formular la *Proposición 3.2*, la que reduce el análisis de cotas máximas y mínimas al de ciertos valores de la parte fraccional del retardo que dependen solamente del orden de la planta continua y su grado relativo. Esta forma de dependencia permite generalizar los

resultados a todas las plantas que tienen este mismo par de índices estructurales, mientras que con el modelo MZT exacto sólo se pueden hacer predicciones para plantas específicas.

Además, a partir de la mencionada variación de los coeficientes de la FT-DT MZT, se propone aquí el estudio de este problema mediante otros dos enfoques: el primero utiliza un criterio estándar (de Jury) y el segundo, empleado bajo ciertas consideraciones, vía la teoría de estabilidad robusta. En ambos casos se trata de mostrar las ventajas y desventajas con respecto al enfoque frecuencial. En particular para el criterio de Jury, el uso de la aproximación discreta transforma las condiciones previstas por el criterio en polinomios cuya variable es la parte fraccional del retardo. Esto simplifica su evaluación.

Finalmente, se presenta la Proposición 3.3 que, para cierto tipo de sistemas y controladores, permite conjeturar que ciertos polos de lazo cerrado que se mueven hacia la inestabilidad con retardos temporales crecientes son determinantes de la variación de índices simples de performance comúnmente usados en la práctica (ver sección B.1 de Apéndice B). Este resultado generaliza lo observado vía simulación en el Caso de Estudio. Estos resultados han sido publicados en los artículos (Felicioni & Junco, 2005) y (Felicioni & Junco, 2009).

### 3.2 Formulación del problema y modelado matemático

A continuación se presentan las hipótesis de modelado y se formula cualitativamente el problema de estudio. Luego, se definen los modelos matemáticos discretos y se citan conceptos de estabilidad que permiten formular el problema en forma cuantitativa en 3.2.2. También se presentan ciertos resultados y herramientas de análisis de respuesta en frecuencia asociadas a los modelos presentados que son relevantes para la Sección 3.3.

#### 3.2.1 Hipótesis de modelado y problema planteado

Las propiedades del NCS consideradas aquí, ver sección 2.2.1 por detalles, son: muestreo periódico de la salida de la planta; controlador lineal y estacionario y actuador (ZOH) manejados por los eventos a su entrada. Entonces, los retardos del sensor al controlador  $\tau_{sc}$ , del controlador al actuador  $\tau_{ca}$  y computacional  $\tau_{comp}$  del controlador son agrupados en un único retardo  $\tau$  en la acción de control ( $\tau = \tau_{sc} + \tau_{comp} + \tau_{ca}$ ), ver Figura 3.2.

El problema mencionado en la *Introducción* se formula, en términos cualitativos, de la siguiente manera:

**Estabilidad robusta frente a retardos constantes:** Dado el sistema de control con la configuración de Figura 3.2, el problema de **estabilidad robusta** enfocado en este Capítulo consiste en determinar el máximo valor  $\tau^*$  tal que para todo  $0 < \tau < \tau^*$  el sistema sea estable.

Para resolver este problema se analizará la estabilidad del lazo cerrado de una familia de sistemas LTI parametrizada por el retardo, donde cada elemento en la familia tiene asociada una función transferencia calculada con la MZT para cada valor de retardo. Para facilitar el análisis es de interés reducir, bajo alguna suposición, la cantidad de elementos de esta familia. Más concretamente, se busca un método que, a partir de la determinación de una propiedad (estabilidad) para algunos valores de retardos, permita predecir la validez de la misma propiedad sobre el intervalo definido por esos valores (estabilidad robusta).

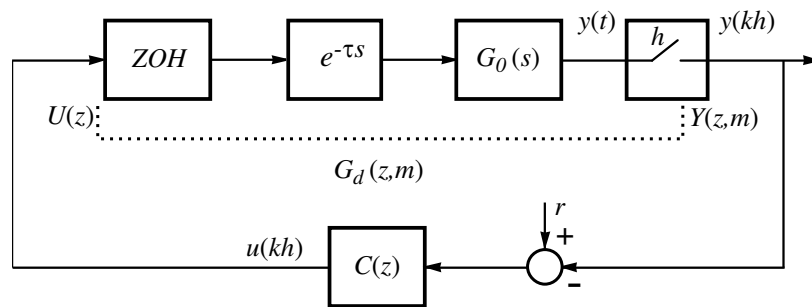


Figura 3.2: Sistema controlado con retardo constante englobado en la acción de control.  $G_0(s)$  representa la planta,  $C(z)$  el controlador,  $\tau$  el retardo y  $h$  el período de muestreo.

### 3.2.2 Modelado matemático con la transformada Z modificada

El modelo discreto de una planta continua SISO LTI con retardo en la acción de control se obtiene utilizando la MZT. A continuación se presenta brevemente este modelo MZT. Para mayor detalle referirse a sección A.3 de Apéndice A.

Sea la planta de Figura 3.2 descrita por la transferencia continua sin retardo  $G_0(s)$ , expresada como el cociente de dos polinomios en  $s$  (numerador  $N(s)$  y denominador  $D(s)$ ), con un retardo en la acción de control:  $\tau$ . Entonces, la FT de la planta con retardo es (3.1).

$$G(s) = G_0(s) e^{-\tau s} = \frac{N(s)}{D(s)} e^{-\tau s} \quad (3.1)$$

El retardo se descompone como un múltiplo del período de muestreo  $h$  más una fracción del mismo (3.2) (ver (A.5) y (A.6) por detalles), donde  $[x]$  es la parte entera inferior de  $x$ .

$$\tau = l h + m h \text{ con } 0 \leq m \leq 1 \text{ y } l = \lfloor \tau/h \rfloor \quad (3.2)$$

Dado que la acción de control se mantiene con un ZOH, de transferencia  $H(s) = (1 - e^{-sh})/s$ , la aplicación de la MZT se hace como en (3.3).

$$\begin{aligned} G_d(z, m) &= \mathcal{Z}_m\{G(s) H(s)\} = \mathcal{Z}_m\left\{G_0(s) e^{-\tau s} \frac{1-e^{-sh}}{s}\right\} = \\ & z^{-(l-1)} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{1-e^{-hs}}{s} G_0(s) e^{-(1-m)hs}\right\} = \frac{z-1}{z^{l+1}} \mathcal{Z}_m\left\{\frac{G_0(s)}{s} e^{mhs}\right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Algunos métodos para calcular la  $\mathcal{Z}_m\{\cdot\}$  son indicados en el Apéndice A.

La FT discreta es el cociente de dos polinomios. Como se muestra en la ecuación (3.4), su numerador tiene coeficientes dependientes de  $m$  (la parte fraccional del retardo) y la parte entera del retardo sólo afecta al exponente de la potencia de  $z$  que multiplica al denominador de la planta para retardo nulo.

$$G_d(z, m) = N_p(z, m)/(z^l D_p(z)) \quad (3.4)$$

La manera en la cual el retardo se integra con la planta en un único modelo discreto racional MZT depende de cada planta en particular. Por ello, resulta útil considerar la aproximación de (Hara et al., 1989) mencionada en sección A.3 de Apéndice A, ver análisis en sección 3.2.4.

### 3.2.3 Estabilidad en lazo cerrado

Considérese ahora que la planta (3.1) es controlada con un controlador discreto en cascada con la planta, ver Figura 3.2, descrito por la función transferencia (3.5).

$$C(z) = k_c N_c(z)/D_c(z) \quad (3.5)$$

La *ganancia de lazo* es el producto de (3.4) y (3.5), esto es (3.6).

$$L(z, m) = C(z)G_d(z, m) = k_c N_c(z)N_p(z, m)/(D_c(z)z^l D_p(z)) \quad (3.6)$$

La *función de sensibilidad complementaria* del sistema es  $T(z, m) = L(z, m)/(1 + L(z, m))$  cuyo denominador es (3.7).

$$D_{LC}(z, m) = z^l D_c(z) D_p(z) + k_c N_c(z) N_p(z, m) \quad (3.7)$$

Este polinomio puede ser escrito equivalentemente como en (3.8).

$$D_{LC}(z, m) = a_n(m) z^n + a_{n-1}(m) z^{n-1} \dots + a_1(m) z + a_0(m) \quad (3.8)$$

El análisis de estabilidad se hará en base al resultado básico sobre estabilidad que establece que el sistema en lazo cerrado es estable si y sólo si el polinomio (3.7) (o equivalentemente (3.8)) es *Schur*, es decir si todas sus raíces están dentro del círculo unitario, ver sección C.3.

Seguidamente, antes de ir a los métodos de análisis de estabilidad, se presentan ciertos resultados y herramientas que son relevantes para la Sección 3.3.

### 3.2.4 Respuesta en Frecuencia de sistemas discretos

A continuación, se analiza la RF de los siguientes tres modelos: *i*) la MZT (3.4), *ii*) su aproximación continua (muy difundida en la literatura, ver ecuación (2.4) o la mencionada en (3.11)) y *iii*) su aproximación discreta presentada en Teorema A.2 de sección A.5. Un análisis comparativo ilustra el mejor desempeño de la aproximación discreta, lo cual justifica la elección de esta última para atacar el problema planteado en este Capítulo cuando sea muy complicado resolverlo con el modelo exacto.

#### *Aproximaciones de la RF de sistemas discretos*

Asociado con el período de muestreo  $h$ , se define la frecuencia de muestreo  $\omega_s = 2\pi/h$ , y el rango de frecuencias de Nyquist  $[-\omega_s/2, \omega_s/2]$ .

La función de respuesta en frecuencia de un sistema discreto, se calcula reemplazando  $z$  por  $e^{sh}$  con  $s = j\omega$ . Equivalentemente se puede calcular con la *fórmula de modulación del impulso* (3.9) (Åström & Wittenmark, 1997); (Araki et al., 1996). Para el caso de  $G_d(z)$  es (3.9).

$$G_d(e^{sh}) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_0(s + j k \omega_s) H(s + j k \omega_s) \quad (3.9)$$

En el caso ideal de que  $G_0(s)$  sea de banda limitada, entre  $-\omega_s$  y  $\omega_s$  (Chen & Francis, 1994), la ecuación (3.9) resulta (3.10).

$$G_d(e^{sh}) = 1/h (G_0(s)H(s)) \quad (3.10)$$

### Aproximación de tiempo continuo

La RF del dispositivo ZOH se puede aproximar para bajas frecuencias como  $H(s) \approx h e^{-sh/2}$ , es decir el ZOH actúa como un retardo de valor  $h/2$  (Chen & Francis, 1994).

Sea el retardo  $\tau$  introducido en (3.1), entonces la aproximación de la planta y el ZOH es

$$G(s)H(s) \approx h e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s) \quad (3.11)$$

Entonces, teniendo en cuenta en (3.9) sólo el contenido de ancho de banda limitada ( $k=0$ ), y reemplazando con la aproximación (3.11), se obtiene:

$$G_d(e^{sh}) \approx 1/h G(s)H(s) \approx e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s) \quad (3.12)$$

*Definición 3.1: Aproximación continua de  $G_d(z)$ .* Se define a la FT  $\bar{G}_d(s) = e^{-s(\frac{h}{2}+\tau)} G_0(s)$  como la aproximación continua de baja frecuencia de  $G_d(z)$ .

A partir de lo cual se obtiene (3.13).

$$\begin{cases} |\bar{G}_d(j\omega)| = |G_0(j\omega)| \\ \arg \bar{G}_d(j\omega) = \arg G_0(j\omega) - \omega(h/2 + \tau) \end{cases} \quad (3.13)$$

En (3.13) se puede apreciar que el retardo no afecta la magnitud (la cual es independiente de  $m$ ) y sólo agrega argumento negativo (lineal con la frecuencia). Con esta aproximación (3.13) se puede calcular el máximo retardo que el sistema puede tolerar, utilizando el criterio presentado en (Mirkin & Palmor, 2005), ver sección 2.2.4 ii por detalles.

### Aproximación del MTZ exacto

Aquí se propone una aproximación discreta en base a la ya existente (A.28) tratada en sección A.5, cuya fórmula se repite a continuación.

$$G_d(z) \approx \frac{k}{(n-p)!} \frac{(z-1)^p B_{n-p}(z,m)}{(z-1)^n z^l} \quad (3.14)$$



En el numerador de (3.14) se tiene un polinomio racional asociado con la parte fraccional del retardo que es (3.15).

$$B_x(z, m) = \sum_{k=0}^x b_{xk}(m) z^{x-k} \quad (3.15)$$

Como las raíces de (3.15) pertenecen al eje real negativo del plano complejo, ver Anexo I, la parte de la RF asociada con  $B_x(z, m)$  se manifiesta en la zona de alta frecuencia.

Además, si el período de muestreo es elegido adecuadamente, ver (Åström & Wittenmark, 1997), (Franklin & Powell, 1980), los polos de  $G(s)$  son mapeados en regiones de baja frecuencia del plano complejo  $z$ .

Por ambos motivos, la mayor diferencia entre la RF de la planta discreta (3.4) y el modelo aproximado (3.14) está relacionada con la aproximación que se realiza en su polinomio denominador (es decir el término  $(z - 1)^n$ ).

Entonces para reducir el error mencionado entre ambos modelos se propone en esta tesis guardar el denominador de (3.7) y considerar sólo la aproximación del numerador de la transferencia discreta (3.14) como se enuncia a continuación.

Sea la siguiente aproximación del numerador (3.16) donde  $k_b = \frac{N_p(z=z^*)}{(n-p)!}$  y  $N_p(z = z^*)$  es la ganancia del numerador de la planta sin retardo para la frecuencia  $\theta^* = \ln(z^*)$ .

$$N_p(z, m) \approx k_b (z - 1)^p B_{n-p}(z, m) \quad (3.16)$$

Se recomienda que si  $N_p(z = 1) \neq 0$  entonces  $z^* = 1$ . En caso contrario elegir  $z^* = 0$ , ver discusión en (Hara et al., 1989).

Se define al numerador  $\hat{N}_p(z, m)$  como la aproximación de  $N_p(z, m)$ , es decir (3.17).

$$\hat{N}_p(z, m) = k_b (z - 1)^p B_{n-p}(z, m) \quad (3.17)$$

A partir de esto resulta la siguiente aproximación discreta de la planta.

*Definición 3.2: Aproximación discreta de  $G_d(z)$ .* Se define a la FT  $\hat{G}_d(z, m) = \frac{\hat{N}_p(z, m)}{z^l D_p(z)}$  como la aproximación discreta de  $G_d(z)$ .

En el siguiente ejemplo se analiza el grado de cercanía de las aproximaciones mencionadas comparando la RF del modelo exacto y las aproximaciones discreta  $\hat{G}_d(z, m)$  y continua  $\bar{G}_d(z, m)$ . Luego, se cierra el lazo con un controlador discreto, cuya ley de control es proporcional al error, y usando los modelos aproximados se comparan los resultados de estabilidad para concluir sobre cuál es el enfoque que resulta más adecuado.

*Ejemplo 3.1:* Sea una planta de primer orden ( $P_{T1}$ ) cuya función transferencia es (3.18).

$$G_0(s) = 1/(s + 2) \quad (3.18)$$

A (3.18) corresponde la siguiente FT, que es el modelo MZT exacto:

$$G_d(z, m) = \frac{z(1-e^{-2hm})+e^{-2hm}-e^{-2h}}{2(z-e^{-2h})z^l} \quad (3.19)$$

La aproximación continua resulta:

$$\bar{G}_d(s) = e^{-sh(\frac{l}{2}+l-m)}/(s + 2) \quad (3.20)$$

La aproximación discreta se expresa como:

$$\hat{G}_d(z, m) = \frac{(1-e^{-2h})}{2} \frac{(z m + 1 - m)}{(z - e^{-2h})z^l} \quad (3.21)$$

*Lazo abierto:* Se observa que el numerador de  $\hat{G}_d(z, m)$  vale  $\hat{N}_p(z, m) = (z m + 1 - m)$ , cuyas funciones de RF, parametrizadas con  $m$ , para todo  $\theta \in [0, \pi/h]$  son

$$\begin{aligned} |\hat{N}_p(z, m)| &= \sqrt{1 - 2 m^2 \cos \theta + 2m \cos \theta - 2m + 2m^2} & y \\ \arg(\hat{N}_p(z, m)) &= \arctan(m \sin \theta, m \cos \theta + 1 - m) \end{aligned}$$

donde arctan es la función inversa de la tangente en los cuatro cuadrantes (analizando los signos de parte real e imaginaria).

La aproximación continua vale  $|\bar{N}_p(z, m)| = 1$  y  $\arg(\bar{N}_p(z, m)) = -\omega\tau = -\theta(1 - m)$ .

De estos resultados se desprende que, en cuanto a la magnitud, la aproximación continua es independiente de  $m$ , sólo coincidiendo con la aproximación discreta para  $m=1$  y  $m=0$ . El  $\arg(\hat{N}_p(z, m))$  puede ser aproximado por  $\arctan(m \theta) \approx m \theta$  cuando  $\theta \rightarrow 0$ , entonces agregando la parte entera  $l=l$ , resulta  $\theta m - \theta$  y coincide con la aproximación continua.

En Figura 3.3 se muestran las RF mencionadas, incluyéndose la RF del numerador exacto (negro), para algunos valores de  $m$ . La magnitud de  $\bar{N}_p(z, m)$  vale 1 (para todo  $m$  y  $\theta$ ). En los argumentos para  $m=\{1, 0.5, 0\}$  coinciden la aproximación continua con los valores exactos (dado que en estos casos son rectas), mientras que para el resto de valores los argumentos obtenidos de  $\bar{N}_p(z, m)$  son las tangentes, en  $\theta=0$ , de los argumentos de la  $\hat{N}_p(z, m)$ , las cuales varían significativamente a medida que la frecuencia crece. Al comparar las RF de  $\hat{N}_p(z, m)$  y de  $N_p(z, m)$ , se tiene una gran cercanía tanto en magnitud como en argumento, a excepción de  $m=0.5$ , donde la aproximación continua proporciona mejores resultados.

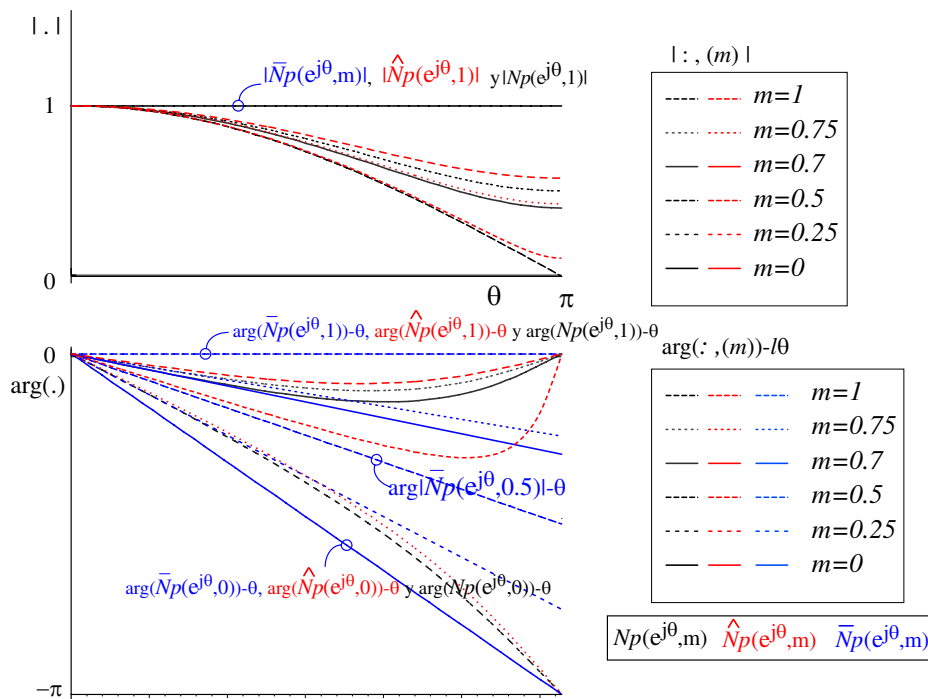


Figura 3.3: RF del numerador discreto  $1/(s+2)$ : exacta, aproximaciones discreta y continua.

*Lazo cerrado:* Se analiza ahora el lazo cerrado considerando como controlador DT una ganancia  $k_c$  positiva. La Figura 3.4 muestra las regiones de estabilidad en el plano  $(k_c, \tau/h)$  calculadas para el modelo MZT exacto (3.19) de forma usando la solución {(3.25) y (3.26)}, para su aproximación discreta (3.21) utilizando la solución exacta {(3.27) y (3.28)} y para la aproximación continua (3.20) aplicando el criterio presentado en (Mirkin & Palmor, 2005).

Como se observa, hay una marcada similitud entre la MZT exacta y su aproximación discreta, que confieren gran confiabilidad a esta última, mientras que ambas difieren mucho de la aproximación continua. Particularmente, en la región inferior de forma triangular apoyada sobre el eje  $k_c$  y definida por la intersección de las curvas continua y discreta, se observa que con la aproximación continua podría ajustarse al controlador con valores tales

que el lazo cerrado resulta inestable de acuerdo a las predicciones más confiables de la MZT y la aprox. discreta. Se ve también una región (tipo triangular con base en curva aproximación continua con vértice a la derecha) donde la aproximación continua es muy conservadora.

Podemos ver que estos resultados avalan la elección del enfoque discreto para el estudio que sigue, tal como se anticipó en la definición de la aproximación discreta  $\hat{G}_d(z, m)$ .

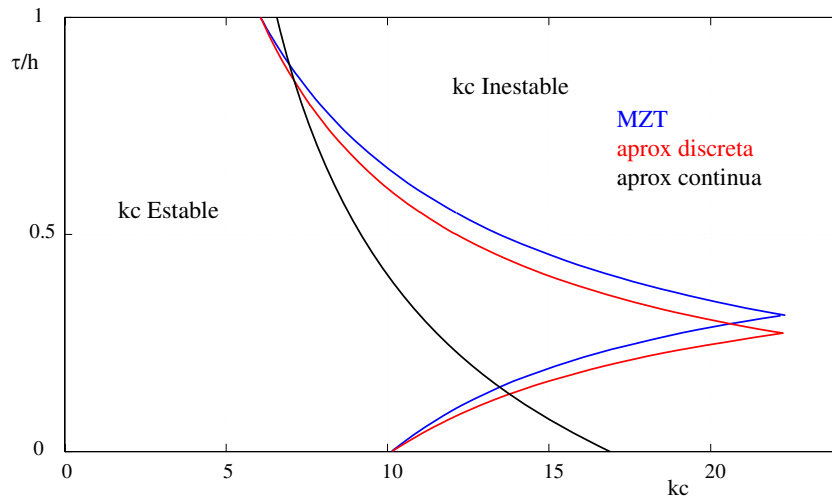


Figura 3.4: Región de estabilidad,  $k_c$  en función de  $\tau$  y  $h$ .

### 3.3 Estabilidad de sistemas con retardo constante, desconocido y acotado

El problema formulado en la sección previa equivale a verificar la estabilidad de la familia de polinomios  $D_{LC}(z, m)$  dada en (3.7), i.e.,  $D_{LC}(z, m) = z^l D_c(z) D_p(z) + k_c N_c(z) N_p(z, m)$ , parametrizada por  $m$  y  $l$  dentro de los intervalos:  $(h-\tau) \leq m \leq 1$  y  $l=1$  si  $\tau^* \leq h$  y en otro caso  $0 \leq m \leq 1, l < l^*$ .

Para verificar que un polinomio es *Schur* los métodos comúnmente usados son: el **criterio de Jury** y el **criterio de Nyquist** (análisis de respuesta en frecuencia). En las secciones 3.3.1 y 3.3.2 se evalúa la extensión de tales métodos para estudiar la estabilidad de la familia mencionada parametrizada por el retardo. En 3.3.1 se muestra que la utilización del criterio de Jury para determinar regiones de estabilidad se vuelve muy compleja cuando se incrementa el orden del sistema y/o controlador y/o la parte entera del retardo. Sin embargo, el problema de analizar la estabilidad de la familia se simplifica considerablemente cuando se usa la aproximación discreta (esto se reduce a buscar las raíces de sólo ciertos polinomios). En 3.3.2 se presenta el principal resultado de este Capítulo que es el análisis de este problema mediante la aplicación del criterio de Nyquist a ciertas funciones transferencias. Gracias a una

interpretación gráfica de este método, se puede visualizar la influencia de retardos de tiempo desconocidos aunque acotados, y también estudiar las regiones de parámetros donde la estabilidad queda garantizada. Como alternativa, en 3.3.3 se propone estudiar la estabilidad de la familia mediante la Teoría de Estabilidad Robusta (Bhattacharyya et al., 1995), que resulta factible si se pueden acotar los coeficientes de la función transferencia obtenida con la MZT.

### 3.3.1 Criterio de Jury

Este es un criterio algebraico que permite determinar si (3.8) es *Schur*, a partir de ciertas condiciones de los coeficientes del mismo.

Sea el polinomio (3.8) para un dado  $m$ , por simplicidad se prescinde de la dependencia en  $m$  de los coeficientes, es decir  $a_n(m) = a_n$ . Entonces, el criterio de *Jury* establece (Isermann, 1989) que el sistema es estable *si y sólo si* se satisfacen las propiedades (3.22).

$$\begin{array}{ll}
 i. & |a_0| < a_n & \text{con} \\
 ii. & P(z=1) > 0 & b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix}, k=0,1,\dots,n-1 \\
 iii. & [(-1)^n P(z=-1)] > 0 & \\
 iv.1. & |b_{n-1}| < |b_0| & c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-k-1} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}, k=0,1,\dots,n-2 \\
 iv.2. & |c_{n-2}| < |c_0| & d_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_{n-k-2} \\ c_{n-1} & c_k \end{vmatrix}, k=0,1,n-3 \\
 iv.3. & |d_{n-2}| < |d_0| \dots & \dots
 \end{array} \quad (3.22)$$

A continuación, las ventajas y desventajas del uso de este criterio de Jury se discuten por medio de su aplicación a una planta de primer orden, en el cual se analiza la estabilidad del lazo cerrado para dos casos de retardos: 1)  $\tau < h$  y 2)  $h \leq \tau$ .

*Ejemplo 3.2:* En este ejemplo se analiza la estabilidad de una planta de primer orden genérica ( $P_{T1}$ ) continua, con un retardo en la acción de control con un controlador discreto proporcional al error utilizando el Criterio de Jury. Sea la planta

$$G_0(s) = 1/(s + a) \quad (3.23)$$

Se considera como controlador DT una ganancia  $k_c$  no nula. Entonces, el denominador de lazo cerrado es

$$D_{LC}(z, m) = z^l(z - e^{-ah}) + k_c k_b N_p(z, m) \quad (3.24)$$

Donde  $N_p(z, m) = (z(1 - e^{-2hm}) + e^{-2hm} - e^{-2h}) / (1 - e^{-ah})$  y  $k_b = (1 - e^{-ah}) / a$

La aproximación (3.17) de  $N_p(z, m)$  es  $\hat{N}_p(z, m) = (zm + 1 - m)$ .

*Retardo inferior al período de muestreo:* La aplicación del criterio de Jury (3.22) para el polinomio de segundo orden de lazo cerrado, (3.24) con  $l=1$ , permite determinar la región de estabilidad ( $k_c$  vs.  $m$ ) que es la región donde se satisfacen las tres condiciones siguientes simultáneamente:

Condición i.  $|a_0| < a_n \Leftrightarrow$

$$|k_c| < 1 / (|k_b|(1 - e^{-ah}) / (e^{-ah} - e^{-mah})) \quad (3.25)$$

Condición ii.  $P(z = 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-ah} + k_c k_b > 0$ . Esta condición, independiente del retardo, se satisface si y sólo si  $|e^{-ah} - k_c k_b| < 1$ , es la condición de estabilidad para retardo nulo. Es decir, se cumple si el sistema con retardo nulo es estable.

Condición iii.  $P(z = -1) > 0 \Leftrightarrow$  se satisface alguna de las condiciones siguientes:

$$k_c < \frac{1 - e^{-2ah}}{(1 - 2e^{-mah} + e^{-ah})k_b} \quad \text{si } 0 < \frac{k_b(1 - 2e^{-mah} + e^{-ah})}{1 - e^{-ah}} \quad (3.26)$$

$$k_c > \frac{1 - e^{-2ah}}{(1 - 2e^{-mah} + e^{-ah})k_b} \quad \text{en otro caso}$$

Si bien el resultado establecido por las condiciones i, ii y iii es exacto, el uso de la aproximación discreta  $\hat{G}_p(z, m)$  proporciona resultados más simples para determinar la región de estabilidad ( $k_c$  vs.  $m$ ), como se muestra a continuación:

Condición i, aprox.  $|a_0| < a_n \Leftrightarrow$

$$|k_c| < 1 / (|k_b|(1 - m)) \quad (3.27)$$

Condición ii, aprox.  $P(z = 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-ah} + k_c k_b > 0$ . Coincide con la condición del sistema exacto.

Condición iii, aprox.  $P(z = -1) > 0 \Leftrightarrow$  se satisface alguna de las condiciones siguientes:

$$k_c < (1 + e^{-ah}) / ((2m - 1)k_b) \quad \text{si } 0 < k_b(2m - 1)$$

$$k_c > (1 + e^{-ah}) / ((2m - 1)k_b) \quad \text{en otro caso} \quad (3.28)$$

Las expresiones obtenidas usando la aproximación discreta son mucho más simples que con el numerador exacto y tal como se muestra en Figura 3.4 reportan un resultado muy similar en cuanto a la región que determinan. El ejemplo mostrado en (Branicky et al., 2000), donde la planta es un integrador (ver Figura 2.7 de 2.2.4 ii) resulta de reemplazar en estas expresiones con  $a=0$ .

*Retardo superior al período de muestreo:* En este caso el polinomio de lazo cerrado es de tercer orden, (3.24) con  $l=2$ . Entonces además de recalculer las condiciones *i*, *ii* y *iii* con respecto al caso anterior, se debe verificar la condición *iv*.  $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_1 a_3|$ .

Aún en este ejemplo simple se requiere resolver una inecuación donde  $k_c$  aparece en términos de segundo orden. Si el retardo está entre  $2h$  y  $3h$ , los términos serán de tercer orden con el agregado de más condiciones *iv* a evaluar. Por esto, el método de Jury es poco apto para obtener expresiones simbólicas de la región de estabilidad ( $k_c$  vs.  $m$ ) cuando el orden del denominador de lazo cerrado es mayor que 1. Sin embargo, el mismo puede ser utilizado satisfactoriamente para analizar la estabilidad ante retardo acotado para un controlador fijo.

Por ejemplo, sean los siguientes parámetros del sistema y controlador:  $a=2$  y  $h=0.2$  y  $k_c=5$ . Con el numerador de la FT exacto la condición *iv* implica resolver

$$|6.25 (e^{-0.4m} - 0.6703)^2 - 1| > |0.8242 e^{-0.4m} - 1.3767| \quad (3.29)$$

Como ambos términos pueden ser positivos o negativos, se requiere resolver dos ecuaciones de tipo trascendentes (sacando el valor absoluto). A calculo hecho, ésta condición se anula dentro del intervalo de interés  $m \in (0, 1]$ , en  $m=0.218$ . Resta analizar si este valor no es sólo un mínimo local, lo que puede determinarse calculando la función en puntos a la izquierda y derecha (o con un análisis de la derivada). Aquí, se verifica que en  $m=1 \rightarrow 1 > 0.154$  mientras que en  $m=0.1 \rightarrow 0.4726 > 0.5848$ . De acuerdo a esto entonces existe un valor de  $m$  tal que para valores inferiores el sistema es inestable.

Una forma de simplificar la inecuación (3.29) es utilizar el numerador aproximado  $\hat{N}_p(z, m)$  dado que es de tipo polinomial en  $m$ . Entonces, usando los términos de la aproximación discreta en los coeficientes  $a_3(m)$ ,  $a_2(m)$ ,  $a_1(m)$  y  $a_0(m)$ , la condición *iv* resulta

$$|0.8242^2(1 - m)^2 - 1| > |0.55247 + 0.2717m| \quad (3.30)$$

Esto requiere simplemente buscar las raíces de dos polinomios y verificar si pertenecen al intervalo. Por ejemplo, uno de los polinomios es  $P(m) = 0.2318 - 1.0869m + 0.6793m^2$  y tiene una raíz en  $m=0.2535$ . Se verifica que a la izquierda de este valor no se cumple la condición iv mientras que si lo hace a la derecha. El valor de  $m$  para el cual se pierde la estabilidad con el método aproximado es muy cercano al exacto calculado previamente.

*Observación 3.2:* En el ejemplo 3.2 se observa que el uso de la aproximación discreta del numerador permite reducir el problema de evaluación de las condiciones de Jury, para una planta con retardo constante y acotado y un controlador fijo, a simplemente verificar si determinados polinomios son positivos o negativos.

Asumiendo que se puede realizar tal aproximación se propone el siguiente procedimiento.

**Procedimiento 3.1:** Criterio de Jury usando la aproximación discreta

1. Construir el polinomio denominador de lazo cerrado usando la aproximación discreta, i.e.  $D_{LC}(z, m) = z^l D_c(z) D_p(z) + k_c N_c(z) \hat{N}_p(z, m)$  para un  $l$  conocido y  $m$  acotado,  $m \in (0, 1]$ .
2. Plantear las condiciones del criterio de Jury enunciados al comienzo de esta sección, las que resultan ser polinomios en  $m$ , denominados aquí  $P(m)$ .
3. Verificar si estos polinomios  $P(m) > 0$  o  $< 0$  para  $m \in (0, 1]$ . Esto se puede determinar si las raíces de  $P(m)$  pertenecen al intervalo  $m \in (0, 1]$ . Si no hay raíces en el mismo, entonces  $P(m)$  no cambia de signo y la condición vale para todo  $m$ . En caso contrario se debe estudiar el signo a ambos lados de cada raíz con métodos algebraicos.

### 3.3.2 Criterio frecuencial

Seguidamente se propone estudiar el problema establecido en Sección 3.2.3 mediante la evaluación de la respuesta en frecuencia. En primer lugar, se define una descomposición de la ganancia de lazo  $L(z, m)$  (3.6) del modelo MZT exacto. Luego a tal descomposición se le aplica el criterio simplificado de Nyquist (ver *diseño de respuesta en frecuencia* en sección B.1). Este resultado se usa luego para determinar el rango de retardos dentro del cual se conserva la estabilidad (estableciendo un método de diseño). Para finalizar se muestra como puede ser simplificado este método si se utiliza la aproximación discreta.



### Descomposición de la ganancia de lazo

Siguiendo las ideas para sistemas continuos en (Mirkin & Palmor, 2005), (Hinrichsen & Pritchard, 2005) se descompone la ganancia de lazo (3.6) como el cociente de las dos funciones transferencias  $Q(z, m)$  y  $P_0(z)$  definidas a continuación.

Sea la ganancia de lazo  $L(z, m) = k_c \frac{N_c(z) N_p(z, m)}{D_c(z) z^l D_p(z)}$ , entonces  $L(z, m) = \frac{Q(z, m)}{P_0(z)}$  donde

$$Q(z, m) = k_c N_p(z, m) z^{-l} \quad (3.31)$$

$$P_0(z) = D_p(z) D_c(z) / N_c(z) \quad (3.32)$$

En (3.31) se agrupan los términos asociados al retardo y entonces (3.32) permanece invariante frente al retardo.

### Aplicación del criterio simplificado de Nyquist

Los cruces de la curva de lugar de la RF con el eje real negativo ocurren en las frecuencias donde se satisface (3.33) para  $z_0 = e^{j\theta_0}$  con  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ .

$$\phi_{P_0(z_0)} = \phi_{Q(z_0)} + (2k + 1)\pi, \text{ con } k=0, \pm 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Particularizado para este caso, con (3.31) y (3.32), entonces (3.33) se convierte en (3.34).

$$\arg\left(\frac{D_p(e^{j\theta}) D_c(e^{j\theta})}{N_c(e^{j\theta})}\right) = \arg\left(N_p(e^{j\theta}, m)\right) - \theta l + (2k + 1)\pi \quad (3.34)$$

Sean las frecuencias donde se producen los cruces (3.34), denominadas por simplicidad  $\theta^* = \theta_{(2k+1)\pi}$ , entonces si  $|Q(e^{j\theta^*})|/|P_0(e^{j\theta^*})| < 1 \Leftrightarrow$  el cruce se produce a la derecha del punto crítico  $(-1, j0)$ , y esta situación se denomina  $C_R$ . Mientras que en caso contrario, se produce a la izquierda, denominada  $C_L$ .

Entonces, las condiciones sobre la ganancia de lazo establecidas por el *Criterio Simplificado de Nyquist* (ver sección B.1) se pueden verificar, de igual manera, a través de las relaciones de magnitudes (3.35) y (3.36), que agrupan a la derecha los términos del retardo, y a la izquierda la parte invariante.

$$\text{Si } \left| \frac{D_p(e^{j\theta^*}) D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| > |N_p(e^{j\theta^*}, m)| \Leftrightarrow C_R \quad (3.35)$$

$$\text{Si } \left| \frac{D_p(e^{j\theta^*})D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| < |N_p(e^{j\theta^*}, m)| \Leftrightarrow C_L \quad (3.36)$$

La igualdad  $\left| \frac{D_p(e^{j\theta^*})D_c(e^{j\theta^*})}{k_c N_c(e^{j\theta^*})} \right| = |N_p(e^{j\theta^*}, m)|$  indica que los polos están sobre el círculo unitario, la cual es una situación de inestabilidad.

El signo de la derivada de la magnitud, ver (B.10), en frecuencias de cruce, es (3.37).

$$\sigma(\theta) = \frac{d(|Q(e^{j\theta^*}, m)|/|P_0(e^{j\theta^*})|)}{d\theta} = \frac{1}{|P_0(e^{j\theta^*})|} \frac{d(|Q(e^{j\theta^*}, m)|)}{d\theta} - \frac{|Q(e^{j\theta^*}, m)|}{|P_0(e^{j\theta^*})|^2} \frac{d(|P_0(e^{j\theta^*})|)}{d\theta} \quad (3.37)$$

Dado que en (3.35) y (3.36) se deben verificar ciertas relaciones entre magnitudes y argumentos en función de la frecuencia, es posible y conveniente analizar la estabilidad a través de la realización de un gráfico de RF como se hace a continuación.

### *Estabilidad robusta frente a retardos acotados – Criterio Frecuencial*

Cada valor de  $m$  define un polinomio numerador con una función de RF asociada. Por tanto, para cada valor de  $m$  las frecuencias de cruce varían, y entonces el criterio de Nyquist debe ser aplicado en cada una. Si pueden determinarse valores de  $m$  tal que existan cotas máximas y mínimas en magnitudes y argumentos en función de la frecuencia, aunque sea en una región de frecuencias de interés, las condiciones  $C_L$  y  $C_R$ , verificadas en sus máximos y mínimos, valen para sus intermedios. La obtención de estas permite simplificar el análisis de estabilidad (o establecer reglas para diseño) para un retardo entre 0 y  $\tau^*$  aplicando las condiciones de Nyquist solamente en los extremos.

### **Proposición 3.1.** Criterio de análisis / diseño con modelo MZT exacto.

Sea la dependencia de  $m$  de los coeficientes del polinomio  $N_p(e^{j\theta}, m)$  tal que:

- 1- existe un par  $m_1$  y  $m_2$  tal que para cualquier valor  $m_x \in [m^*, 1]$  se verifica  $\arg N_p(e^{j\theta}, m_1) \leq \arg N_p(e^{j\theta}, m_x) \leq \arg N_p(e^{j\theta}, m_2)$  para toda frecuencia.
- 2- existe un (posiblemente otro) par  $m_1$  y  $m_2$  tal que para cualquier valor  $m_x \in [m^*, 1]$  se verifica  $|N_p(e^{j\theta}, m_1)| \leq |N_p(e^{j\theta}, m_x)| \leq |N_p(e^{j\theta}, m_2)|$ . Esto puede ser válido en al menos un rango de frecuencias.

Además, para el polinomio  $D(z) = P_0(z)$ , debe valer que

- 3- su  $\arg D(e^{j\theta})$  no tiene mínimos ni máximos<sup>1</sup> en el rango de frecuencias entre  $[\theta_1^*, \theta_2^*]$  delimitado por las intersecciones de  $\arg D(e^{j\theta})$  con  $(2k+1)\pi + \arg N_p(e^{j\theta}, m) - \theta l$  en  $(m_1, l_1)$  y  $(m_2, 1)$ .

Por tanto, para todo  $\theta \in [\theta_1^*, \theta_2^*]$ ,

$$\text{si } |D(e^{j\theta^*})| > |N_p(e^{j\theta}, m_2)| \Rightarrow C_R. \quad (3.38)$$

$$\text{si } |D(e^{j\theta^*})| < |N_p(e^{j\theta}, m_1)| \Rightarrow C_L. \quad (3.39)$$

En Figura 3.5 se muestra como determinar las frecuencias de intersección  $\theta_1^*$  y  $\theta_2^*$  entre  $\phi(m, l) = \arg N_p(e^{j\theta}, m) - \theta l$  y  $\arg D(e^{j\theta})$  para dos posibles situaciones: si  $\arg D(e^{j\theta})$  es creciente en ese rango de frecuencias (izq.) o decreciente (der.).

En Figura 3.6 se muestra la relación entre las magnitudes especificadas en las inecuaciones (3.36) (Fig. derecha), y (3.35) (Fig. izquierda).

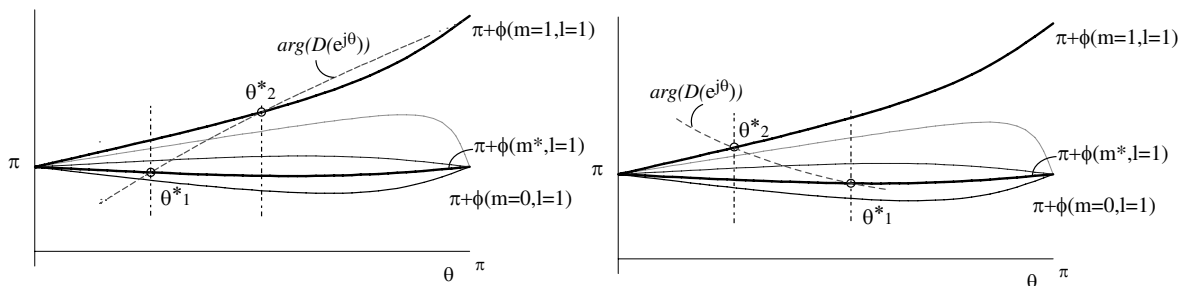


Figura 3.5: Ejemplos de cota superior e inferior del argumento en función de la frecuencia. Arg. de  $D(z)$  creciente (izquierda) y decreciente (derecha).

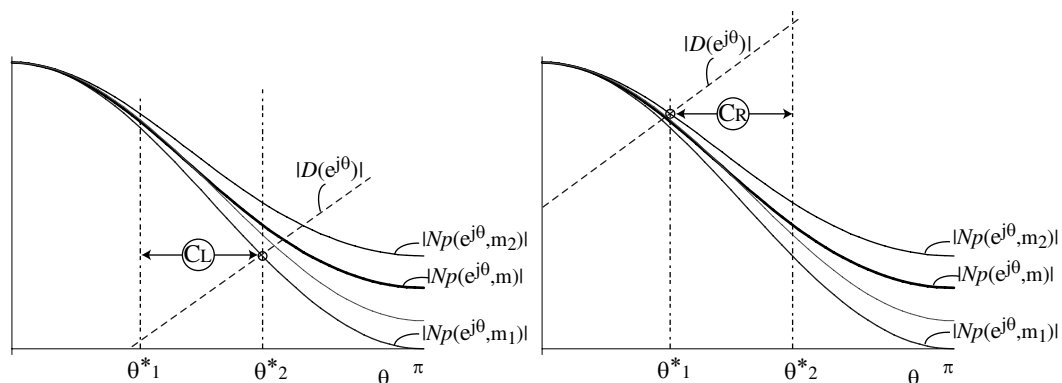


Figura 3.6: Condiciones  $C_R$  y  $C_L$ . Evoluciones de magnitud entre cotas superiores e inferiores para el rango de frecuencia de interés.

<sup>1</sup> Eventualmente esto se puede conseguir con un adecuado diseño del controlador. El mayor problema de que no existan intersecciones con todos los argumentos aparece si el sistema es inestable y se deben conseguir cruces a la izquierda del punto crítico.

En algunos casos encontrar los valores de  $m_1$  y  $m_2$  que satisfacen (3.36) y (3.35), resulta simple (por ejemplo si la planta es un  $P_{T1}$ ). Sin embargo, en otras plantas esto implica: 1) obtener la función transferencia de manera simbólica aplicando la transformada Z modificada (que quede en función de  $m$ ); 2) obtener cotas máximas y mínimas de argumentos y magnitudes en función de la frecuencia (en caso de no tener la expresión simbólica, la evaluación numérica implica calcular los polinomios para cada  $m$  en el continuo). Por esto se reformula la *Proposición 3.1* usando el modelo MZT aproximado.

**Proposición 3.2.** Criterio de análisis / diseño con modelo MZT aproximado.

El uso de la aproximación (3.17) indica que a medida que  $m$  decrece, el argumento en función de la frecuencia se hace más negativo, por tanto en la *Proposición 3.1* se reemplaza en  $m_1$  por  $m^*$  y en  $m_2$  por 1, y para todo  $m$  intermedio vale (3.40).

1-

$$\arg \widehat{N}_p(e^{j\theta}, m^*) \leq \arg \widehat{N}_p(e^{j\theta}, m) \leq \arg \widehat{N}_p(e^{j\theta}, 1) \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.40)$$

El valor de  $l$  sólo agrega más argumento negativo a medida que su valor crece. Esto es equivalente a lo que ocurre en CT.

En la magnitud se distinguen dos casos según el grado relativo  $r$  de la planta continua:

2- si  $r$  es impar,  $m_1=0.5$  y  $m_2=1$  (coinciden las magnitudes de  $m=1$  y  $m=0$ ). Es decir,

$$|\widehat{N}_p(e^{j\theta}, 0.5)| \leq |\widehat{N}_p(e^{j\theta}, m)| \leq |\widehat{N}_p(e^{j\theta}, 1)| \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.41)$$

3- si  $r$  es par,  $m_1=1$  y  $m_2=0.5$  (coinciden las magnitudes de  $m=1$  y  $m=0$ ). Es decir,

$$|\widehat{N}_p(e^{j\theta}, 1)| \leq |\widehat{N}_p(e^{j\theta}, m)| \leq |\widehat{N}_p(e^{j\theta}, 0.5)| \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi \quad (3.42)$$

Con todo esto, para todo  $\theta \in [\theta_1^*, \theta_2^*]$ , si se satisfacen las condiciones suficientes (3.43) o (3.44) entonces resultan válidas  $C_R$  o  $C_L$ , respectivamente.

$$\text{Si } |D(e^{j\theta^*})| > |N_p(e^{j\theta}, m_2)| \text{ con } m_2=1 \text{ si } r \text{ impar o } m_2=0.5 \text{ si } r \text{ par, entonces } C_R \quad (3.43)$$

$$\text{Si } |D(e^{j\theta^*})| < |N_p(e^{j\theta}, m_1)| \text{ con } m_1=0.5 \text{ si } r \text{ impar o } m_1=1 \text{ si } r \text{ par, entonces } C_L \quad (3.44)$$

Lo conservativo de este criterio depende fundamentalmente de la diferencia entre las funciones máxima y mínima de la magnitud (3.35) y (3.36) para todo  $\theta$ . Como se indica en

Anexo I, esta diferencia se reduce a medida que aumenta el grado relativo de la planta.

Como corolario de las *Proposiciones 3.1* y *3.2* precedentes, se propone el siguiente procedimiento de análisis/diseño.

**Procedimiento 3.2:** Criterio frecuencial usando la aproximación discreta

- 1- Dibujar la magnitud vs. frecuencia de  $\widehat{N}_p(e^{j\theta}, m)$  para  $m=1$  y  $m=0.5$ , y  $\arg(\widehat{N}_p(e^{j\theta}, m)) - \theta l^* + (2k + 1)\pi$  para  $(l^*, m^*)$  y  $l=1, m=1$ .
- 2- En torno a cada frecuencia donde ocurre una intersección de argumentos (3.34), calcular  $\theta_1$  y  $\theta_2$  según lo explicado en la *Proposición 3.1*.
- 3- Verificar/imponer la satisfacción de (3.43) o (3.44). También se debe analizar si se mantiene el signo de la derivada (3.37) en torno a cada frecuencia de intersección.

*Ejemplo 3.3:* Aquí se aborda el problema considerado en el *Ejemplo 3.2* mediante el análisis frecuencial presentado en esta sección. Sea entonces una planta de primer orden, para la cual se distinguen los siguientes casos de acuerdo al valor de  $a$ :

- 1- Si  $a > 0$ , entonces la planta real es estable y la estabilidad de lazo cerrado se garantiza si, por ejemplo, en todos los cruces vale  $C_R$ .
- 2- Si  $a < 0$ , entonces en algunos cruces debe valer  $C_L$  (por ejemplo en los primeros) y luego debe valer  $C_R$ .

Para ambos valores de  $a$ , la magnitud de  $D(z) = z^l(z - e^{-ah}) / k_c k_b$  es creciente (León de la Barra & Prieto, 1999).

*Retardo inferior al período de muestreo:* En relación con los argumentos, existe una intersección en  $\theta_x^* = \arccos(0.5 e^{-ah})$  que ocurre para  $m=0$ . Además, se distinguen las siguientes frecuencias en las intersecciones:

Caso 1:  $\theta_1^* = \theta_x^*$  y  $\theta_2^* = \pi$ .

Caso 2:  $\theta_1^* = 0$  y  $\theta_2^* = \theta_x^*$ .

Para Caso 1: de aplicar el procedimiento entre  $[\theta_1^*, \theta_2^*]$  se debe cumplir (3.43). Como el sistema es de grado relativo uno, la cota máxima de magnitud es para  $m=1$  (y  $m=0$ ).

Entonces es estable si  $k_c < a / (1 - \exp(-ah))$

Para Caso 2: de aplicar el procedimiento entre  $[\theta_1^*, \theta_2^*]$  se debe cumplir (3.44). Como el sistema es de grado relativo uno, la cota mínima de magnitud es para  $m=0.5$ .

Entonces es estable si  $-a < k_c < \frac{2}{(e^{-ah} + 2)^{\frac{1}{2}}} \frac{-a}{1 - e^{-ah}}$

*Retardo superior al período de muestreo:* En este caso, la intersección de argumentos, para  $\{m=0, l=2\}$ , se produce en la frecuencia  $\theta_x^* = \arccos\left(\frac{1}{4e^{ah}}(1 + (1 + 4e^{2ah})^{\frac{1}{2}})\right)$

Caso 1: Entonces, el sistema en lazo cerrado es estable si

$$k_c < (1/2 \sqrt{(4 - 2e^{-2ah}(1 + 4e^{2ah})^{\frac{1}{2}} + 2e^{-2ah})a}) / (1 - e^{-ah})$$

Caso 2: En este caso, el sistema en lazo cerrado es estable si

$$k_c < \left( e^{-3ah} \left( 1 + (1 + 4e^{2ah})^{\frac{1}{2}} + 4e^{ah} \right) \left( 2e^{2ah} - (1 + 4e^{2ah})^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \frac{2e^{ah}}{a(1-e^{-ah})(1+(1+4e^{2ah})^{\frac{1}{2}}+4e^{ah})}$$

En las figuras Figura 3.7 a) y b) se ve la RF para dos casos particulares,  $a = -2$  (izquierda) y  $a=2$  (derecha), en ambos casos  $h=0.2$ . En cuanto a magnitud se verifican condiciones  $C_L$  y  $C_R$  respectivamente para las ganancias elegidas usando las ecuaciones presentadas. En este mismo gráfico se pueden estudiar distintas partes enteras de retardo,  $\tau=h, \tau=2h, \dots$

Si bien en este ejemplo simple se pueden calcular estas expresiones exactas, en caso de tener sistemas de mayor orden u otro controlador, los valores límites de las ganancias que garantizan estabilidad se pueden obtener calculando los valores de las FT para las intersecciones de ángulos (por ejemplo usando el comando *ginput* en Matlab).

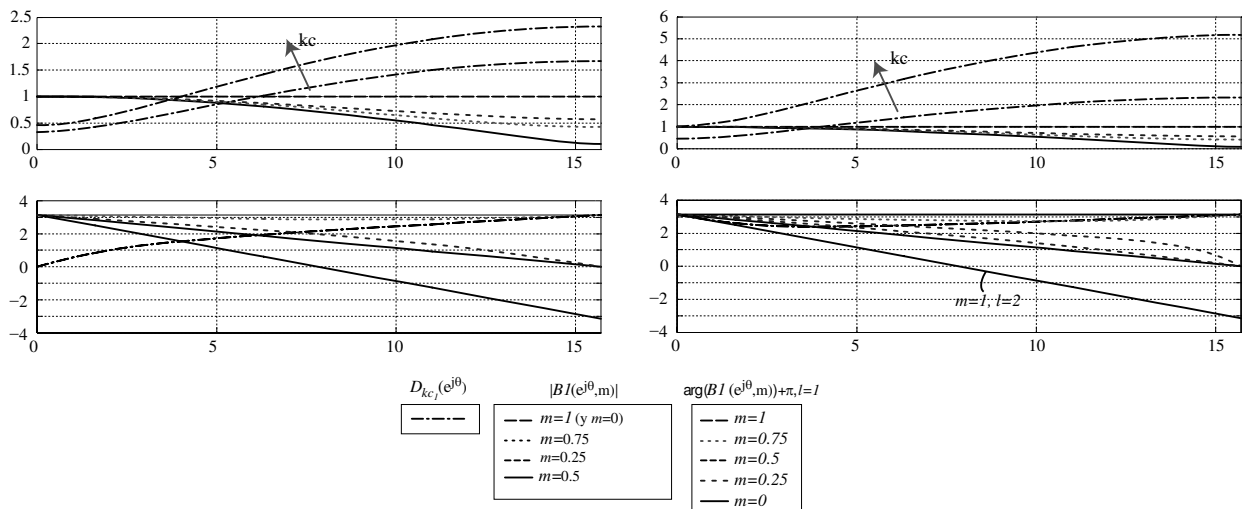


Figura 3.7: RF primer orden a) estable, b) inestable.

*Observación 3.3:* El método presentado aquí es esencialmente gráfico y numérico, pero tal como se mostró en el *Ejemplo 3.3* en algunos casos también se pueden obtener expresiones

analíticas. Además, este método permite analizar estabilidad para distintas partes entera del retardo en un único gráfico, sólo se requiere agregar el argumento en función de la frecuencia.

### 3.3.3 Estabilidad robusta de polinomios

En esta sección se aborda el problema establecido en Sección 3.2.2 mediante un enfoque de la teoría robusta de polinomios. Específicamente, la posibilidad de acotar los coeficientes del numerador de la planta discreta (dependientes de  $m$ ) nos permite acotar los coeficientes del polinomio denominador  $D_{LC}$  definido en (3.8), convirtiendo al problema en un caso particular de un intervalo de polinomios. La estabilidad Schur de un intervalo de polinomios se puede evaluar con los teoremas presentados en el Capítulo 5 de (Bhattacharyya et al., 1995) y citados en la sección siguiente.

#### *Estabilidad Schur de un polinomio intervalo*

Seguidamente se presenta un breve resumen de definiciones y teoremas relevantes para el análisis de la estabilidad Schur de un polinomio intervalo, ver (Bhattacharyya et al., 1995).

*Definición 3.3: Polinomio intervalo.* Un polinomio intervalo es una familia de polinomios, denominada  $I(z)$ , de la forma (3.45) donde cada coeficiente  $a_i \in \mathbb{R}$  pertenece al intervalo  $[a_i^-, a_i^+]$ , con  $a_i^- \leq a_i^+$  y donde  $a_n \neq 0$ .

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 \quad (3.45)$$

*Definición 3.4: Caja de los coeficientes.* Una caja (box)  $A$  se define como (3.46).

$$A := \{a := (a_0, \dots, a_n) \text{ tal que } a_i \in [a_i^-, a_i^+], i = 0.., n\} \quad (3.46)$$

*Definición 3.4: Vértices y aristas de la caja  $A$ .* Se definen los vértices (vertex)  $V$  y aristas (edges)  $E$  como (3.47) y (3.48).

$$V := \{(a_0, \dots, a_{nl}) : a_i = a_i^- \text{ o } a_i^+, i = 0.., nl\} \quad (3.47)$$

$$E_k := \{(a_0, \dots, a_{nl}) : a_i = a_i^- \text{ o } a_i^+, i = 0.., nl, i \neq k, a_k \in [a_k^-, a_k^+]\} \quad (3.48)$$

*Definición 3.4: Familias de polinomios vértices y aristas de la caja A.* Se definen las familias correspondientes a los vértices y aristas como (3.49) y (3.50).

$$I_v(z) := \{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_0, \dots, a_n) \in V\} \quad (3.49)$$

$$I_E(z) := \{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 : (a_0, \dots, a_n) \in E\} \quad (3.50)$$

La estabilidad de la familia  $I(z)$  se puede probar usando el siguiente teorema:

*Teorema 3.1* (5 de (Bhattacharyya et al., 1995)): Sea la familia de polinomios  $I(z)$  con grado constante. Entonces  $I(z)$  es estable *si y sólo si* la familia  $I_E(z)$  es Schur estable.  $\square$

Un interesante lema que permite reducir el cálculo computacional previsto por este teorema, cuando los coeficientes superiores de  $P(z)$  son constantes, se cita a continuación:

*Lema 3.1* (5.5 de (Bhattacharyya et al., 1995)): Sea  $n > 1$  tal que en la familia  $I(z)$  sean fijos los coeficientes de orden superior, denominados  $\bar{a}_i^- = a_i^+$  para  $i = n/2 + 1, \dots, n$  si  $n$  es par e  $i = (n+1)/2 + 1, \dots, n$  si  $n$  es impar. Entonces, la familia entera  $I(z)$  es estable *si y sólo si* la familia de los vértices de los polinomios  $I_v(z)$  es estable.  $\square$

#### *Modelado del denominador de lazo cerrado como polinomio intervalo*

Para este análisis se considera que la parte fraccional del retardo  $m$  puede variar mientras que la parte múltiplo  $l$  se mantiene constante.

En primera instancia se plantea una descomposición del polinomio denominador de lazo cerrado (3.7) como la suma de un polinomio invariante  $P_0(z) = z^l D_c(z) D_p(z)$  más un polinomio perturbación  $Q(z, m) = k_c N_c(z) N_p(z, m)$ , donde  $l$  es constante, y  $0 \leq m \leq 1$ .

Sea el polinomio para retardo nulo  $D_c(z) D_p(z) = d_{nt} z^{nt} + \dots + d_0$ , entonces  $P_0(z)$  es

$$P_0(z) = z^l (d_{nt} z^{nt} + \dots + d_0) \quad (3.51)$$

Supongamos que el polinomio numerador  $N_p(z, m)$  de la planta discreta obtenida con la MZT tiene la forma  $N_p(z, m) = n_n(m) z^n + \dots + n_0(m)$ . Sus coeficientes  $\{n_n(m), n_{n-1}(m), \dots, n_0(m)\}$  son funciones continuas de  $m$  y asumen valores extremos para  $0 \leq m \leq 1$ , i.e.  $[n_i^-, n_i^+]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , ver por ej. Figura 3.10. Reemplazando con  $N_p(z, m)$  en  $Q(z, m)$  queda



$$Q(z, m) = k_c(n_{c,nc} z^{nc} + \dots + n_{c,0}) (n_n(m)z^n + \dots + n_0(m)) \quad (3.52)$$

Al reemplazar con  $[n_i^-, n_i^+], i = 0.., n$  en los coeficientes de (3.52) y sumarle los respectivos coeficientes de (3.51), se obtienen los coeficientes del denominador de lazo cerrado  $[a_i^-, a_i^+], i = 0.., nl$ , donde  $nl = n + nc$ . Así se conforma el polinomio intervalo cuya estabilidad se analiza con el Teorema 3.1 (o el Lema 3.1).

*Observación 3.4.* Dado que los extremos de cada coeficiente  $n_i(m)$  no necesariamente ocurren para el mismo valor de  $m$ , el uso de este enfoque, que requiere calcular máximos y mínimos, dará un resultado en cierto grado conservativo.

*Ejemplo 3.4:* A continuación se aborda el mismo problema del Ejemplo 3.2 con este enfoque de estabilidad robusta. Sea el denominador de lazo cerrado con  $l=1$

$$D_{LC}(z, m) = z^2 - e^{-ah}z + k_c N_p(z, m) \quad (3.53)$$

$$a_2 = 1, \quad a_1 = k_c n_1/a - e^{-ah}, \quad a_0 = k_c n_0/a$$

Donde  $n_1 = (1 - e^{-ahm})$  y  $n_0 = e^{-ahm} - e^{-ah}$

La aproximación del numerador es  $\hat{N}_p(z, m) = k_b(z m + 1 - m)$ .

Los máximos y mínimos, coinciden para el numerador aproximado y el exacto,  $[n_1^-, n_1^+] = [0, (1 - e^{-ah})]$ ,  $[n_0^-, n_0^+] = [0, (1 - e^{-ah})]$

Entonces, la familia correspondiente a los vértices de esta caja A está definida por

$$I_v(z) := \{z^2 + a_1^- z + a_0^-; z^2 + a_1^- z + a_0^+; z^2 + a_1^+ z + a_0^+; z^2 + a_1^+ z + a_0^-\}$$

Donde  $\{a_1^- = -e^{-ah}; a_1^+ = \frac{k_c(1-e^{-ah})}{a} - e^{-ah}; a_0^+ = \frac{k_c(1-e^{-ah})}{a}; a_0^- = 0\}$

En este caso, como el coeficiente de segundo orden permanece constante se puede usar el resultado del Lema 5.5 (i.e.  $I(z)$  es estable *si y sólo si*  $I_v(z)$  es estable).

El polinomio en el vértice  $\{a_1^+; a_0^-\}$  es el polinomio para retardo nulo, mientras que en el vértice  $\{a_1^-; a_0^+\}$  es para retardo igual al período de muestreo. Si bien, los polinomios en los otros dos vértices son ficticios, dado que no pueden ser alcanzados para ningún valor de retardo, deben ser evaluados según lo previsto por el teorema. En este sistema en particular, el polinomio en el vértice  $\{a_1^-; a_0^-\}$  resulta:  $z^2 - e^{-ah}z$ . Este polinomio es estable *si y sólo si*  $|e^{-ah}| < 1$  y esto ocurre *si y sólo si*  $a > 0$ . Es decir, si la planta es inestable no se puede probar

la estabilidad en el polinomio del vértice  $\{a_1^-; a_0^-\}$  y por tanto no se puede garantizar que el sistema sea robustamente estable para todo retardo acotado por  $h$  utilizando este método.

*Observación 3.5.* En el ejemplo 3.4 se puede observar que el método propuesto permite reducir la evaluación de estabilidad a sólo un conjunto de polinomios en la familia. Sin embargo la selección de máximos y mínimos de los coeficientes lleva a la evaluación de estabilidad de algunos polinomios ficticios, entre los que se puede encontrar por ejemplo un polinomio de lazo abierto cuya estabilidad depende de la planta original.

### 3.4 Efecto del retardo sobre índices de performance

En esta sección se analiza la incidencia de los retardos de comunicación en el desempeño de los sistemas de control. Como medida de la performance se considera una que relaciona ciertos términos asociados con la respuesta temporal con la ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado definida en la sección B.1 de Apéndice B.

En primer lugar se presenta una proposición (cualitativa) que permite clasificar si cierto tipo de plantas controladas son estables para todo valor de retardo, o se inestabilizan debido a su presencia. En este segundo caso, se determina que hay mas posibilidad de que las raíces salgan del círculo unitario por el semiplano derecho, es decir en la región de baja frecuencia, por lo que tales raíces son las que dominaran la respuesta temporal.

Para el caso de plantas de grado relativo uno, se prueba que la evolución de las raíces del polinomio de lazo cerrado en función del retardo puede ser analizada como un simple caso de la técnica del lugar de las raíces “*root-locus*”. En particular, la evolución para retardos entre  $lh$  y  $(l+1)h$ , va desde los polos de cierta función transferencia hacia sus ceros, los cuales no llegan a ser alcanzados porque, a diferencia de la técnica estándar de “*root-locus*”, aquí la ganancia de realimentación varía desde 0 hasta 1 (y no hasta  $\infty$ ).

Sin embargo este resultado para plantas de grado relativo uno no puede ser extendido para plantas de grado relativo superior debido a la variación no lineal de los coeficientes del numerador en función de la parte fraccional del retardo. Para tales plantas se puede utilizar la Proposición 3.3, y complementarla con la evaluación de otros polinomios, a los efectos de concluir sobre como es afectada la performance cuando los retardos crecen (sin necesidad

claro está, de calcular exactamente las raíces). Esto se analiza en el caso de estudio de (Felicioni & Junco, 2005), donde en particular se observa que las raíces del denominador de lazo cerrado que dominan la evolución temporal son aquellas originales del lazo cerrado sin retardo que se desplazan con motivo de la aparición y aumento del retardo, dado que son las únicas en el semiplano derecho del círculo unitario.

### 3.4.1 Evolución de los polos de lazo cerrado ante retardos crecientes

Aquí se presenta una proposición, para cierto tipo de plantas y controladores, que permite verificar la forma en que un sistema controlado discreto tiende hacia la inestabilidad cuando el retardo aumenta.

#### **Proposición 3.3.** *Estabilidad y retardo.*

Se consideran plantas continuas  $P_{Tn}$  estables (sin ceros), pudiendo admitirse polos en cero (i.e., integradores en cascada con una  $P_{Tn}$ ), con retardo  $l h < \tau < (l + 1) h$ . El controlador es diseñado (sin polos inestables) tal que se verifique que  $d|P_0(e^{j\theta})|/d\theta > 0$  y  $d \arg P_0(e^{j\theta})/d\theta > 0$ , para toda frecuencia, siendo  $P_0(z)$  definido en (3.32).

- a) Si  $|P_0(e^{j\theta})| > k_b$ ,
  - entonces el sistema es estable independientemente del retardo (para todo retardo positivo).
- b) Si  $|P_0(e^{j\theta})| < k_b$  para alguna frecuencia,
  - entonces la estabilidad depende del retardo.

*Demostración:* Si la planta continua no tiene ceros, entonces vale

$$\hat{N}_p(z, m) = k_b B_n(z, m) \quad (3.54)$$

y en (3.37) resulta

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{|P_0(e^{j\theta})|} \frac{d(|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|)}{d\theta} - \frac{|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|}{|P_0(e^{j\theta})|^2} \frac{d(|P_0(e^{j\theta})|)}{d\theta} \quad (3.55)$$

Para cada valor de  $m$ , la derivada parcial de la magnitud de  $B_n(z, m)$  con respecto a  $\theta$  es menor o igual a cero para toda frecuencia. Es decir,

$$d(|k_b B_n(e^{j\theta}, m)|)/d\theta \leq 0 \quad (3.56)$$

Usando la hipótesis de  $\frac{d(|P_0(e^{j\theta})|)}{d\theta} > 0$  y expresión (3.56) en (3.55), entonces se puede garantizar que  $\sigma(\theta) < 0$ . Es decir, según lo definido en criterio simplificado de Nyquist (Apéndice B), el signo es siempre positivo. Además, de acuerdo a la hipótesis de planta y controlador estables, la suma neta debe ser nula, es decir se debe tener la misma cantidad de cruces  $C_L$  con signos negativos y positivos.

Como no hay cruces con signo negativo, dado que  $\sigma(\theta) < 0$ , entonces no puede haber cruces a la izquierda del punto crítico (no deben existir  $C_L$ ). Por tanto, sólo son admisibles  $C_R$  en las frecuencias de intersección. Para satisfacer  $C_R$  se debe verificar (3.43).

Si vale hipótesis a), y como  $|k_b B_n(e^{j\theta}, m)| < |k_b|$  para todos  $\theta$ ,  $m$  y  $n$ , entonces se verifica (3.43) para toda frecuencia, y el sistema es siempre estable (lo que equivale a estable independientemente del retardo).

Si vale hipótesis b), existe algún valor de frecuencia donde  $|P_0(e^{j\theta})| = |N_p(e^{j\theta}, m)|$ . Si para algún par  $(m, l)$  esta frecuencia es también una de cruce, es decir satisface la ecuación (3.34), entonces el sistema es inestable y la estabilidad depende del valor del retardo.

Si además vale  $|N_p(e^{j\theta^*}, m_1)| > |P_0(e^{j\theta^*})|$ , entonces para cualquier frecuencia de cruce (3.34) no vale  $C_R$ , por lo que el sistema resulta inestable.  $\square$

La performance en función del retardo puede caracterizarse de acuerdo a la ubicación de los polos y ceros de lazo cerrado.

Mientras que la estabilidad está relacionada sólo con la ubicación de los polos. Por esto, a continuación se interpreta el resultado de la *Proposición 3.3* con la hipótesis b).

### *Interpretación 3.1:* Polos de lazo cerrado

A partir de *Proposición 3.3* se observa que a medida que aumenta el retardo, el argumento de  $N_p$  se hace más negativo y entonces las frecuencias de cruce (3.34) se reducen. Por esto, la mínima frecuencia de intersección se vuelve determinante para el estudio de la estabilidad, ver por ejemplo Figura 3.6 derecha y Figura 3.5 izquierda. Es decir, la posibilidad de que el sistema se inestabilice está asociada al primer cruce, que se produce en la región de más baja frecuencia (a mayor retardo menor frecuencia del primer cruce). Por tanto, si las raíces del denominador salen del círculo, lo hacen por la sección del círculo en el semiplano derecho del plano complejo  $z$ .

Como existe una continuidad de tales raíces, si éstas salen del círculo en el semiplano derecho para un valor de retardo, en un entorno del retardo, estarán cerca del círculo. Sin embargo no queda claro como las mismas evolucionan desde su ubicación para retardo nulo hasta que alcanzan este entorno.

Los ceros de la función de lazo cerrado son las raíces de  $N_p(z, m)$  y del controlador (si no hay cancelaciones polo-cero entre planta y controlador). Si es posible utilizar la aproximación  $\hat{N}_p(z, m)$  en lugar de  $N_p(z, m)$ , los ceros de la función de lazo cerrado se encontrarán en el eje real negativo y por ello serán ceros de alta frecuencia.

Entonces, *la presencia de estos ceros inducidos por el retardo no afecta la respuesta temporal del lazo cerrado*, que queda dominada por los polos (de baja frecuencia de acuerdo a la Interpretación 3.1).

### 3.4.2 Ubicación de las raíces – Caso particular de grado relativo uno

En el caso particular de tener una planta de grado relativo uno, el uso de la aproximación del numerador de la planta (3.17) permite estudiar la evolución de las raíces de lazo cerrado utilizando los conceptos de “*root-locus*” como se propone a continuación.

Sin pérdida de generalidad, se muestra este método aplicándolo al sistema propuesto en Ejemplo 3.2.

Si se usa  $\hat{N}_p(z, m)$  se puede reescribir el denominador de lazo cerrado (3.24) como

$$D_{LC}(z, m) = z^l D_p(z) D_c(z) + k_c k_b + m k_c k_b (z - 1) \quad (3.57)$$

En (3.57) el polinomio constante es  $z^l D_p(z) D_c(z) + k_c k_b$ .

*Definición 3.5: Ganancia de lazo constante de  $D_{LC}(z)$ .* Se define a la FT  $L^*(z) = \frac{k_c k_b (z-1)}{z^l D_p(z) D_c(z) + k_c k_b}$  como una ganancia de lazo constante asociada con  $D_{LC}(z)$ .

A partir de esto, se propone analizar la evolución de las raíces de lazo cerrado con la técnica “*root-locus*” siendo la constante  $k$  del método estándar igual a  $m$ , que en este caso está acotada entre 0 y 1. El crecimiento de  $m$  implica la disminución del retardo.

*Observación 3.6.* A diferencia de la técnica estándar donde el lugar de las raíces evoluciona desde los polos a los ceros de  $L^*(z)$ , aquí como  $k=m$  está acotado superiormente por 1, los polos no llegan nunca a los ceros. Los límites para  $k=1$  son los polos para  $m=1$  y un polo en 0, es decir la evolución de los polos de  $L^*(z)$  termina en los polos de  $z^l D_p(z) D_c(z)$ .

La aplicación de este se muestra a través del siguiente ejemplo numérico.

*Ejemplo 3.5:* En este ejemplo se analiza la evolución de los polos de lazo cerrado para el sistema presentado en Ejemplo 3.3. El denominador de lazo es

$$D_{LC}(z, m) = z^l(z - e^{-ah}) + k_c k_b + m k_c k_b (z - 1) \quad (3.58)$$

cuyo polinomio invariante es  $z^l(z - e^{-ah}) + k_c k_b$ , por lo que  $L^*(z) = \frac{k_c k_b (z-1)}{z^l(z - e^{-ah}) + k_c k_b}$ .

*Retardo inferior al período de muestreo:* Sea  $k_c=2$  y  $l=1$ . Como se ve en Figura 3.9, las raíces evolucionan desde los polos (indicados con cruces) a los ceros (indicados con círculos), que en este caso son:  $c_1=1$  y  $c_2=-\infty$  (para  $k$  tendiendo a  $\infty$ ). Para  $k=1$ , los mismos se quedan definitivamente en el valor  $p_1 = e^{-ah} - k_c k_b$ , que resulta ser el polo de lazo cerrado para  $\tau=0$ , y el polo en  $p_2 = 0$ .

Los polos de  $L^*(z)$  son complejos conjugados, y se transforman en los dos polos reales mencionados. Es decir, una de las raíces complejas va a un valor positivo  $p_1$  y la otra va hacia  $p_2$ , por tanto el *punto de ruptura* (donde la trayectoria sale del eje real hacia la parte imaginaria) se encuentra a la derecha del eje imaginario (entre 0 y  $p_1$ ).

Se puede observar en Figura 3.9 que el efecto que produce el aumento del retardo varía de acuerdo a si los polos se mueven sobre el eje real, donde se van juntando hasta el punto de ruptura, que si son complejos conjugados donde su radio crece hacia el círculo unitario.

*Verificación utilizando los índices de performance:* Como el polinomio (3.53) para  $l=1$  es de segundo orden, se pueden calcular exactamente los valores de  $r$  y  $\theta$  requeridos para calcular los índices de performance  $M_p$  y  $T_s$  definidos en (B.8) y (B.9). A cálculo hecho son

$$r = \sqrt{k_b k_c} \sqrt{(1 - m)} \text{ y } \theta = \arccos \left( 0.5 \sqrt{e^{-ah} - k_b k_c m} / (k_b k_c (1 - m)) \right)$$

Cuando  $m$  decrece,  $r$  y  $\theta$  aumentan. Entonces  $M_p \approx K r^{\frac{\pi}{\theta}} \uparrow$  y  $T_s \approx -3/\ln(r)h \uparrow$ . Es decir, ambos parámetros de la RT aumentan para retardos crecientes como se muestra en Figura 3.8.

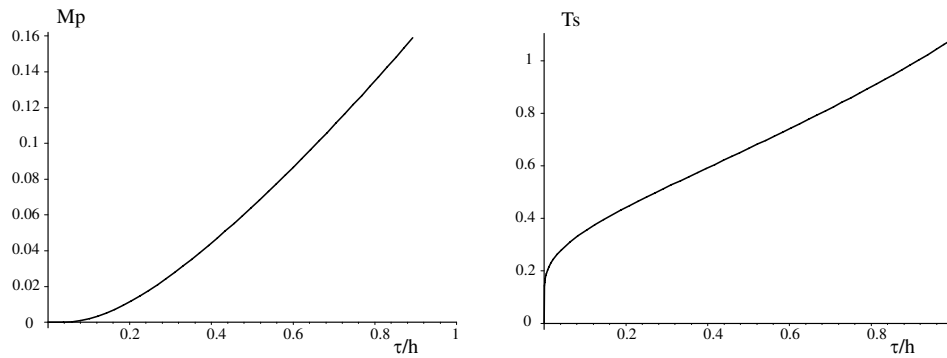


Figura 3.8: Índices de performance vs.  $\tau$ : a) Sobrevalor  $M_p$ , b) Tiempo de establecimiento  $T_s$ .

*Retardo superior al período:* En Figura 3.9 se muestra la evolución cuando la parte entera del retardo vale  $l=1, 2$  y  $3$ . Se verifica la continuidad de las raíces. Además, con  $l$  creciente sólo se agregan raíces en el semiplano izquierdo del círculo. En relación con las raíces del semiplano derecho se aprecia que una vez que dejan el eje real (en  $\tau < h$ ) no vuelven.

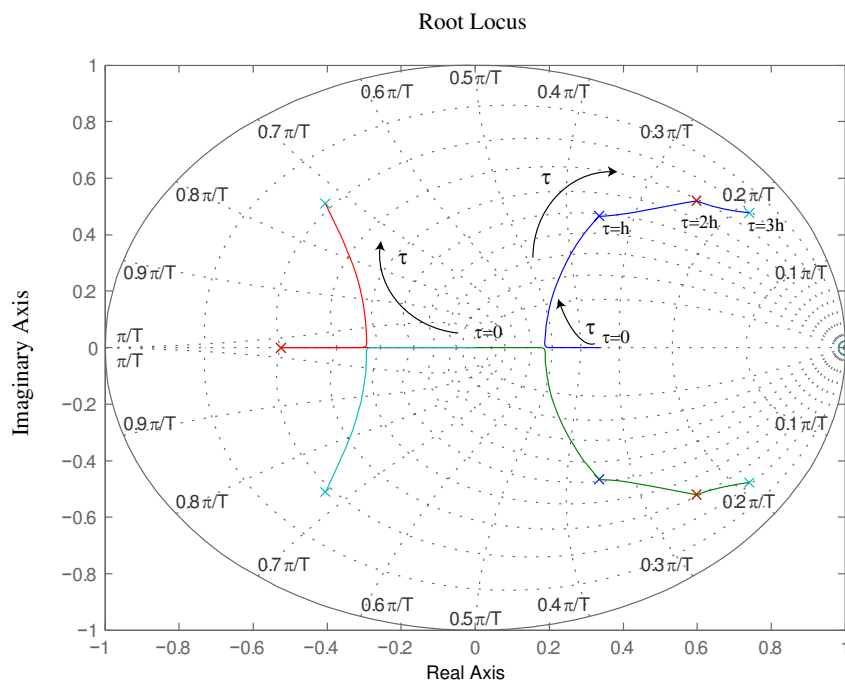


Figura 3.9: Evolución de los polos para retardos entre 0 y  $h$ ,  $h$  y  $2h$  y  $2h$  y  $3h$ .

### 3.5 Caso de estudio

Sea el sistema  $I_{TI}$  considerado en (Felicioni & Junco, 2005), el modelo de un motor de corriente continua de imán permanente, y se asume la parte eléctrica despreciable con respecto a la parte mecánica (parte mecánica modelada como un  $P_{TI}$ ) y donde el integrador puro representa la posición del motor, ejemplo tomado de (Ogata, 1996).

$$G_0(s) = 1/(s(s + 2)) \quad (3.59)$$

Las especificaciones del diseño son que el sobrevalor ( $M_p$ ) no supere el 20% y el tiempo de crecimiento (definido al 5%) sea  $\leq 1.5$  seg, ver (Ogata, 1996).

Con esto, la frecuencia natural de lazo cerrado es  $\omega_0 \cong 4.2$ . Entonces, a partir del criterio empírico de (Åström & Wittenmark, 1997), ampliamente utilizado en el dominio de los NCS, el período de muestreo que se puede elegir para garantizar cierta performance en relación con la respuesta temporal del sistema es  $0.2/\omega_0 \leq h \leq 0.8/\omega_0$ . Considerando este límite superior,  $h$  se elige 0.2 seg, entonces el modelo discreto es

$$G_d(z) = \mathcal{Z} \left\{ \frac{1-e^{-hs}}{s} \frac{1}{s(s+2)} \right\} = \frac{0.0178(z+0.876)}{(z-1)(z-0.6703)} \quad (3.60)$$

La función transferencia del controlador (3.61) satisface tales criterios de diseño (se cancela un polo estable de la planta con un cero del controlador) y  $k_c=13.57$ .

$$C(z) = k_c \frac{z-0.6703}{z-0.2644} \quad (3.61)$$

La planta con retardo no múltiplo del período de muestreo discretizada con la MZT es

$$G_d(z, m) = k \frac{\alpha_m z^2 + \beta_m z + \gamma_m}{z^l(z-1)(z-0.6703)} \quad (3.62)$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_m = amh - 1 + e^{-amh} \\ \beta_m = 1 - amh + ah + e^{-ah} - amh e^{-ah} - 2 e^{-amh} \\ \gamma_m = e^{-2mh} - e^{-2h} + amh e^{-ah} - ah e^{-ah} \\ k = k_c/a^2, \quad a = 2 \end{cases} \quad (3.63)$$

$\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son funciones continuas y no lineales de  $m$ . Aquí, entonces

$$z^{-l} N_p(z, m) = z^{-l} k (\alpha_m z^2 + \beta_m z + \gamma_m) \quad (3.64)$$

En este caso, la aproximación (3.17) es

$$z^{-l} \hat{N}_p(z, m) = z^{-l} k_b k (m^2 z^2 + (1 + 2m - 2 m^2)z + (1 - 2 m + m^2)) \quad (3.65)$$

Donde  $k_b = 0.5 a h (1 - e^{-ah})=0.065936$ .

Los coeficientes de (3.64) y (3.65) son comparados, uno a uno, en Figura 3.10.



A continuación se analiza la estabilidad para retardos acotados por  $h$  y entre  $h$  y  $2h$ , aplicando los métodos presentados en la sección previa.

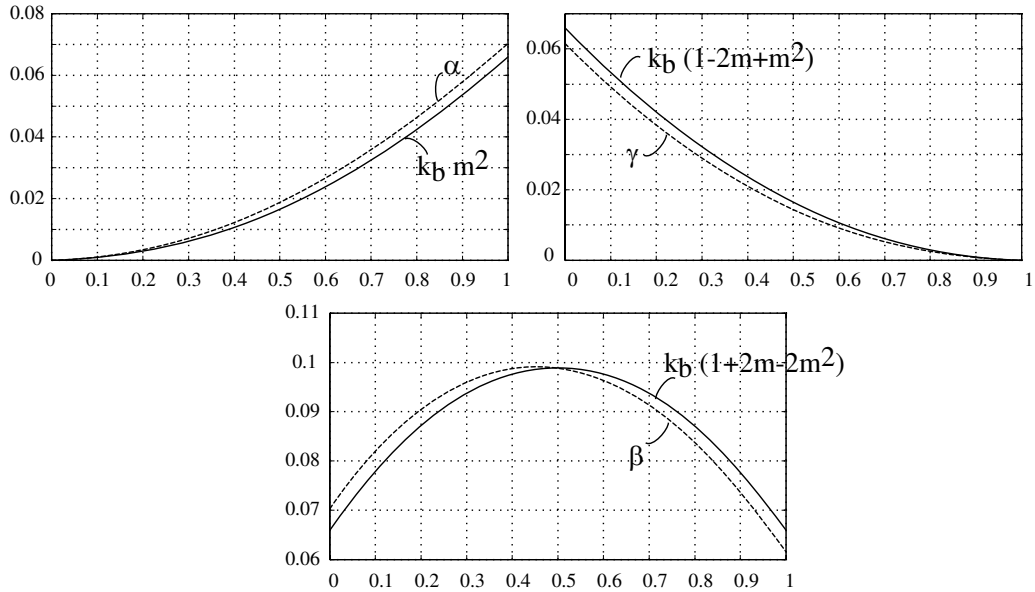


Figura 3.10: Comparación de los parámetros de  $N_p(z,m)$  y de su aproximación.

### 3.5.1 Criterio de Jury

Cuando el orden de la planta y/o el controlador y/o la parte entera del retardo hace que el lazo cerrado tenga un orden superior a 1 no se pueden obtener resultados simbólicos usando el criterio Jury, ver 3.3.1. Por esto, la evaluación de las condiciones de Jury se puede hacer en general sólo de forma numérica (para  $m$  variando en un intervalo), tal como fue presentado originalmente en (Felicioni & Junco, 2005). Sin embargo, el uso del *Criterio con la aproximación discreta* simplifica el problema, lo reduce a la evaluación de sólo algunos polinomios, dando resultados muy exactos como se muestra a continuación.

*Retardo inferior al período de muestreo:* el lazo cerrado del sistema ( $l=1$ ) es

$$H(z) = k \frac{\alpha_m z^2 + \beta_m z + \gamma_m}{z^3 + (k \alpha_m - p_c - 1) z^2 + (p_c + k \beta_m) z + k \gamma_m} \quad (3.66)$$

El sistema de tercer orden (3.66) tiene un denominador de la forma (3.8) con  $n=3$ ,  $a_3(m)=1$ ,  $a_2(m) = k \alpha_m - p_c - 1$ ,  $a_1(m) = (p_c + k \beta_m)$  y  $a_0(m) = k \gamma_m$ .

Debido a la no linealidad de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  en función de  $m$ , las cuatro condiciones de Jury son evaluadas numéricamente y mostradas en Figura 3.11. Todas las condiciones se satisfacen para  $\tau < h$ , entonces todos los polinomios son *Schur*.

Esta evaluación numérica no presenta mayor ventaja que simplemente calcular los polos de lazo cerrado y (verificar su ubicación), para  $m$  variando en el continuo entre 0 y 1.

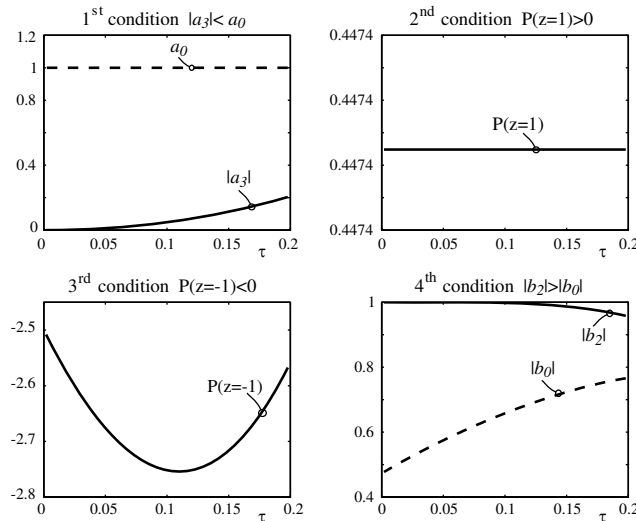


Figura 3.11: Condiciones de Jury para el sistema de control vs. retardo ( $\tau < h$ ).

Como fue adelantado, cuando se usa la aproximación discreta las condiciones de Jury son de tipo polinomial en  $m$ . Específicamente los coeficientes son:  $a_3(m)=1$ ,  $a_2(m) = kk_b m^2 - p_c - 1$ ,  $a_1(m) = p_c + kk_b(1 + 2m - 2m^2)$  y  $a_0(m) = kk_b(1 - 2m + m^2)$ .

Reemplazando con los parámetros del controlador y la planta, se verifica que:

Condición i.  $|a_0(m)| < a_n(m)$ : Como  $a_0 < 0$  entonces  $P(m) = a_n + a_0 > 0$ . A cálculo hecho,  $P(m) = 1.22379 - 0.4474 m + 0.2237 m^2$  que tiene raíces  $m_{1,2} = \{1 \pm 2.114 j\} \notin (0, 1]$ . Además  $P(m = 1) = 1$ . Entonces  $P(m) > 0$ . ✓

Condición ii.  $P(z = 1) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-ah} + k_c k_b > 0$ . Esta condición, independiente del retardo, se satisface si y sólo si el sistema con retardo nulo es estable. ✓

Condición iii.  $-P(z = -1) > 0$ , es decir  $-0.8947m^2 + 0.89475 m + 2.5288 > 0$ , este polinomio no tiene raíces  $\in (0, 1]$ . Además  $-P(m = 1) = 2.52$ . Entonces,  $P(m) > 0$ . ✓

Condición iv.  $|a_0^2 - a_3^2| > |a_0 a_2 - a_1 a_3|$ . Tengo dos polinomios  $P(m) = -1.7199 - 0.082 m + 0.514 m^2 - 0.3 m^3 + 0.1 m^4$  y  $P(m) = -0.1799 - 0.318 m + 0.086 m^2 - 0.2 m^3$ . Ninguno tiene raíces  $\in (0, 1]$ . Ambas condiciones se cumplen. ✓

Entonces el criterio de Jury garantiza que los polinomios son Schur, tal como se muestra gráficamente en Figura 3.11.

*Retardo superior al período de muestreo:* Para  $h < \tau < 2h$  ( $l=2$ ), las condiciones de Jury deben ser evaluadas para el denominador de cuarto orden (3.8).

La evaluación gráfica de estas condiciones exactas, con:  $a_4=1$ ,  $a_3 = -p_c - 1$ ,  $a_2=p_c+k\alpha$ ,  $a_1=k\beta$  y  $a_0=k\gamma$ , se muestra en Figura 3.12. Claramente, la condición iv.b de (3.22) no se satisface para todos los retardos entre  $h$  y  $2h$ . Por esto existe un  $\tau^*$  tal que para  $\tau > \tau^*$  el sistema controlado se vuelve inestable. En este ejemplo  $\tau^*=0.309$  s.

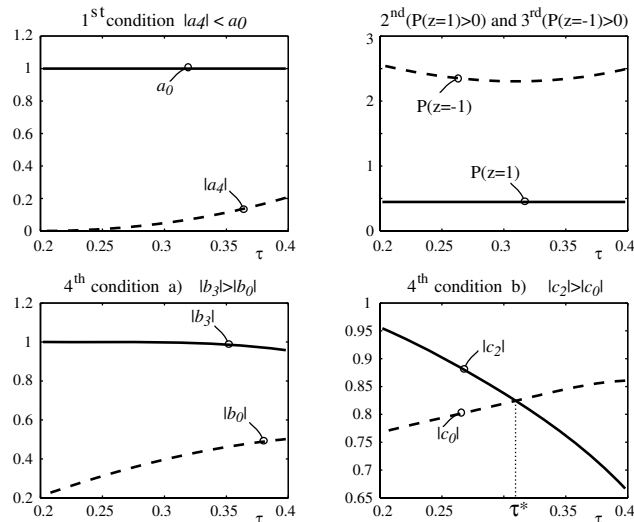


Figura 3.12: Condiciones de Jury para el sistema de control vs. retardo.  $h < \tau < 2h$ .

De manera similar que en  $\tau < h$ , se puede aplicar el método de Jury al polinomio denominador con la aproximación discreta, es decir a

$$D_{LC}(z, m) = z^4 - (p_c + 1)z^3 + (kk_b m^2 + p_c)z^2 + kk_b(1 + 2m - 2m^2)z + k k_b(1 - 2m + m^2)$$

A cálculo hecho, uno de los dos polinomios  $P(m)$  de la mencionada condición iv-b tiene una raíz para  $m=0.484$ , que equivale a  $\tau=0.303$  s. Este valor resulta muy cercano al exacto  $\tau^*$ .

### 3.5.2 Evaluación de estabilidad mediante criterio de respuesta en frecuencia

Aquí, se compara la RF de la aproximación discreta  $\hat{G}_p(z, m)$ , con la de MZT exacta  $G_p(z, m)$ . Como ambas tienen el mismo denominador, se compara sólo la RF de los numeradores. Su proximidad permite analizar el problema de estabilidad para  $\tau \leq h$ , utilizando lo establecido en la *Proposición 3.2*. Se considera también, en tal gráfica, que  $\tau \leq 2h$  y se trata el re-ajuste que debe hacerse de la ganancia del controlador de manera de sea estable.

En Figura 3.13 se muestra la RF de  $N_p(z, m)$  y  $\hat{N}_p(z, m)$ , para algunos  $m$ . Ambas tienen muy poca diferencia en la zona de baja frecuencia, en este ejemplo la zona de mayor interés

para análisis de estabilidad (ver resultado general en Anexo I). Por ello, el uso de la aproximación discreta es muy adecuado en un análisis frecuencial.

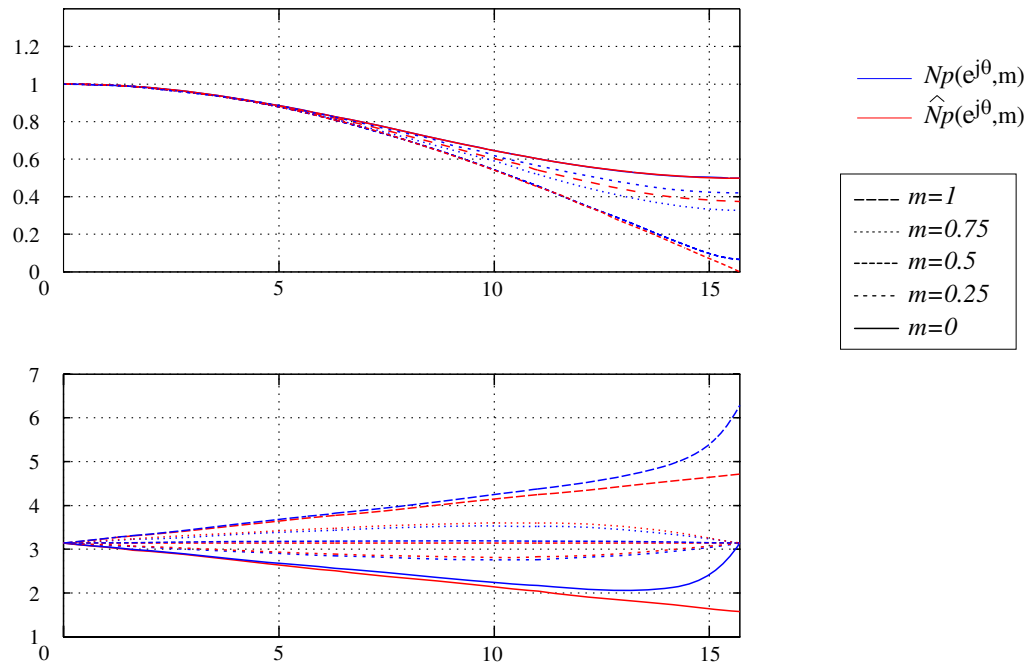


Figura 3.13: Respuesta en frecuencia, método de lazo abierto  $N_p(z, m) - \theta + \pi$  y su aproximación.

Al cancelar un polo estable de la planta con un cero del  $C(z)$ , el denominador de la ganancia de lazo es  $D(z) = (z - 1)(z - 0.2644)$ . En Figura 3.14 se muestra la RF de  $D(z)/k_c$  y se guarda además la RF de la aproximación discreta. La ganancia  $k_c$  sólo puede modificar la magnitud (para  $k_c$  inferior la curva de magnitud se desplaza hacia arriba).

Dado que valen las hipótesis de *Proposición 3.3*, es decir  $\frac{d|P_0(e^{j\theta})|}{d\theta} > 0$  y  $\frac{d \arg P_0(e^{j\theta})}{d\theta} > 0$ , y planta y controlador son estables, entonces en todas las intersecciones debe valer  $C_R$ . Además, como  $P_0(1) = 0$  existe un cruce de magnitudes ( $|D(z)|$  no siempre supera a  $|N_p(z, m)|$ ) y la estabilidad depende del retardo (*hipótesis b de Proposición 3.3*).

En la gráfica de argumentos se observa que los cruces de  $\hat{N}_p(z, m)$  con  $m$  entre 0 y 1 con el argumento de  $D(z)$  están delimitados a la izquierda por  $\theta_1^*$  y a la derecha por  $\theta_2^*$ . Para este rango de frecuencias, como se ve en Figura 3.14 (de magnitud) se cumple  $C_R$ , satisfaciendo *Proposición 3.2* y por tanto el sistema resulta estable para  $\tau \leq h$ .

La máxima ganancia, que puede tener el sistema con retardo entre 0 y  $h$ , que garantice la estabilidad de todo el intervalo, se puede calcular como  $k_c < \frac{|D(e^{j\theta_1^*})|}{|N_p(e^{j\theta_1^*}, m=0.5)|} = 17.45165$ . Este

valor resulta un poco más conservativo que el exacto que se calcula con un proceso iterativo de prueba y error evaluando las raíces para  $0 \leq \tau \leq h$  y que resulta ser  $k_{cM}=17.829$ .

Es posible verificar en Figura 3.14 que para  $\tau=2h$  ( $m=1, l=2$ ), el rango de frecuencias entre  $\theta_3^*$  y  $\theta_1^*$ , la magnitud no siempre verifica  $C_R$ , (por ejemplo, en  $\theta_3^*$  no vale  $C_R$ ), por tanto existe una frecuencia de cruce para un retardo a partir de la cual se pierde la estabilidad.

Para evitar la inestabilidad para  $\tau \leq 2h$ , se puede reducir  $k_c < \frac{|D(e^{j\theta_3^*})|}{|N_p(e^{j\theta_3^*, m=0.5})|} = 11.2762$ .

La ganancia máxima para retardos  $\tau < h$  se obtiene calculando las frecuencias de intersección  $\theta_q^*$  entre ambos argumentos para  $0 < m < 1$ , y evaluando la expresión de magnitud, i.e.  $k_{cMA} = |D(e^{j\theta_q^*})|/|N_p(e^{j\theta_q^*, m=0.5})|$ . La relación ganancia-retardo se grafica en la Figura 3.15 (se utiliza la magnitud para  $m=0.5$  por tanto es apenas conservativo).

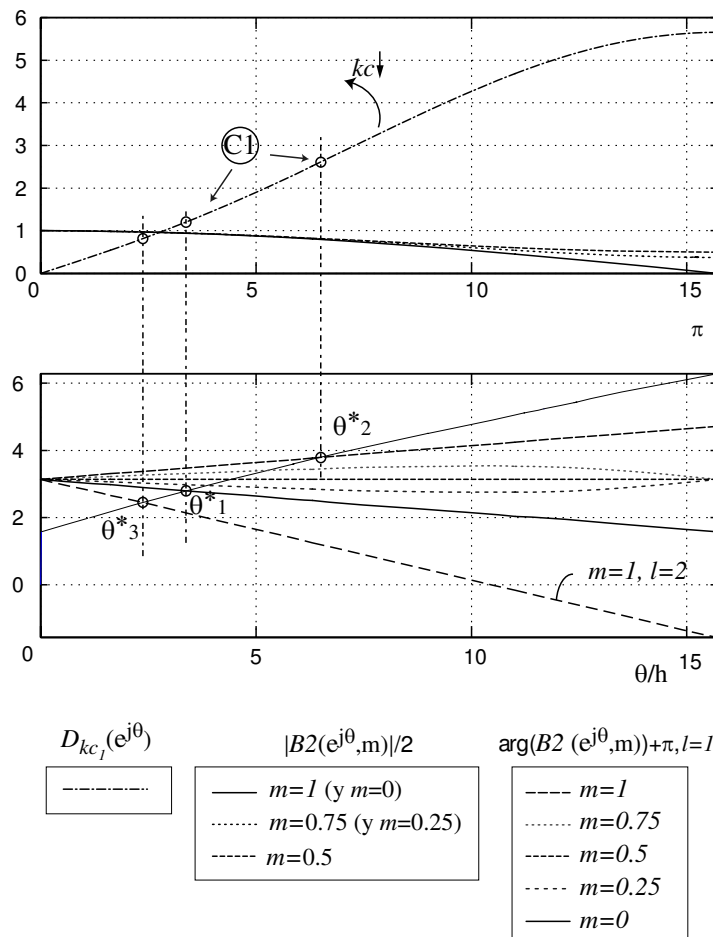


Figura 3.14: Respuesta en frecuencia método de lazo abierto con el denominador.

*Observación 3.7.* En este ejemplo se ve claramente que la utilización del criterio frecuencial permite, en una misma grafica, analizar la estabilidad y visualizar los cambios que pueden

hacerse en la ganancia del controlador cuando la parte del retardo múltiplo del período de muestreo sea distinta.

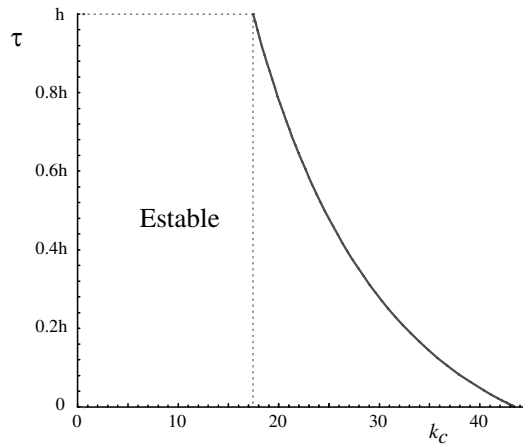


Figura 3.15: Región de estabilidad,  $\tau$  vs.  $k_c$ .

### 3.5.3 Evaluación de estabilidad mediante criterio robusto de polinomios

Aquí se usa lo propuesto en sección 3.3.3. Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  asumen un valor continuo entre dos extremos, ver Figura 3.1. Dado que el término asociado con  $z^3$  permanece constante se usa el Lema 3.1, es decir se evalúan solo  $2^3$  polinomios en los vértices.

El polinomio invariante en lazo abierto es  $P_0(z) = z(z - 1)(z - 0.2644)$  y los parámetros hasta el grado dos ( $Q(z, m) = q_2 z^2 + q_1 z + q_0$ ) se calculan al encontrar extremos de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . La familia de polinomios  $I(z)$  es  $P(z) = P_0(z) + Q(z, m)$ .

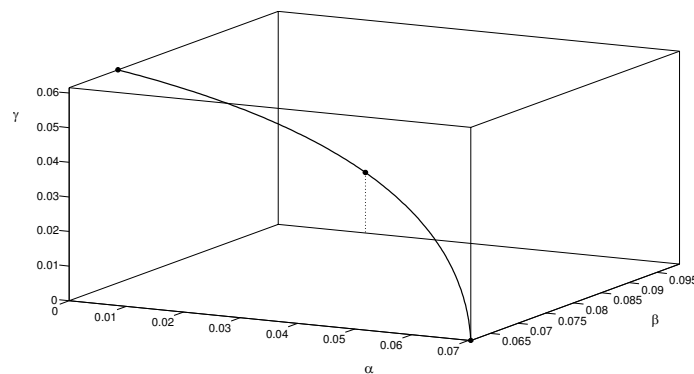


Figura 3.16: Parámetros dentro de la caja delimitada por sus vértices.

Los vértices de la caja A, Figura 3.16, son

$$V = \{q_2^+ = 0.0703 kc, q_2^- = 0; q_1^+ = 0.09912 kc, q_1^- = 0.061552 kc; q_0^+ = 0.061552 kc, q_0^- = 0\}.$$

Los vértices al usar la aproximación (3.65) se calculan como sigue:  $[0, 1]$  para  $m^2$ ,  $[1.5, 1]$  para  $(1 - 2m^2 + 2m)$ , y  $[0, 1]$  para  $1 + m^2 - 2m$ . Estos máximos y mínimos, deben ser multiplicados por  $k_b = 0.065936$ . Entonces,

$$\tilde{V} = \{\tilde{q}_2^+ = 0.065936 kc, \tilde{q}_2^- = 0; \tilde{q}_1^+ = 0.0989 kc, \tilde{q}_1^- = 0.065936 kc; \tilde{q}_0^+ = 0.065936 kc, \tilde{q}_0^- = 0\}$$

Las diferencias en los extremos de la caja, de los valores aproximados respecto a los exactos, son: +6.2% en  $q_1$ , del 0.2% en  $q_2$  y -7.1% en  $q_3$ .

Debido a esta variación de los valores extremos ( $\leq 10\%$ ), en lo que sigue se calcula la estabilidad usando los valores exactos  $V$ .

Es posible verificar que los 8 polinomios de los vértices son estables para  $k_c = 13.57$ , y por tanto el sistema es estable para cualquier  $\tau \leq h$ . Más aún, si se considera el mínimo de  $q_1^- = \varepsilon kc$  con  $\varepsilon > 0$ , es posible verificar que para  $0 < k_c \leq 15.35$  el sistema es (robustamente) estable. El máximo radio espectral vale 0.9997 y es para  $V_6 = P_0(z) + (q_2^- z^2 + q_1^+ z + q_0^+)$ .

#### 3.5.4 Performance ante retardos creciente

En Tabla 1 se presentan los polos de lazo cerrado para algunos valores de  $m$ , calculados con  $N_p(z, m)$  y  $\hat{N}_p(z, m)$ . Los polos son muy cercanos, dando un buen grado de validez a la utilización de la aproximación. En Figura 3.17 se ven los polos para algunos de estos retardos.

| $\tau/h$ | Polos exactos                  | Polos aproximados             |
|----------|--------------------------------|-------------------------------|
| 0        | {0, 0.513±j.4584}              | {0, 0.52±j 0.4662}            |
| 0.25     | {0.573 ± j 0.5062, -0.0201}    | {0.580 ± j 0.5114, -0.0233}   |
| 0.5      | {0.636 ± j 0.534, -0.0706}     | {0.644 ± j 0.536, -0.0796}    |
| 0.75     | {0.69635 ± j 0.54646, -0.1447} | {0.7043 ± j 0.54665, -0.1583} |
| 1        | {0.7527 ± j 0.5471, -0.24113}  | {0.7599 ± j 0.5465, -0.2553}  |

Tabla 1: Polos de lazo cerrado, exactos y aproximados.

Como se puede ver en Figura 3.14 el primer cruce, cuando  $\tau$  crece, se produce en baja frecuencia. Entonces, según lo establecido en *Proposición 3.3*, si el sistema se inestabiliza, esto ocurre para  $0 < \theta < \pi/2$ . Esto significa que existen raíces que salen del círculo en el semiplano derecho.

*Retardo inferior al período de muestreo:* En este caso el polinomio característico es de tercer orden. Si  $D_3 = \frac{1}{27a_3^2} [4R^3 - S^2] < 0$  entonces un polinomio de tercer orden tiene una raíz simple y dos conjugadas, ver (Aranda, 1998) por detalles. Más aún, si  $R < 0$  entonces  $D_3 < 0$ . Usando la aproximación del numerador para  $R$  definido en (Aranda, 1998) queda:

$$R = k_c^2 k_b^2 m^4 + 2k_c k_b m^2 (2 - p_c) + 1 - p_c + p_c^2 - 3k_b k_c (1 - 2m) \quad (3.67)$$

Como  $R$  es un polinomio en  $m$ , si sus raíces estuviesen entre 0 y 1 esto implicaría que hay algún cambio de signo (sino es positivo o negativo). En este caso, no tiene raíces en este intervalo y como  $R(m=0) = 1 - p_c + p_c^2 - 3k_b k_c = -1.878$ , por tanto siempre es negativo.

Por esto el polinomio denominador se puede reescribir como un polo simple  $p_3$  en cascada con un par de polos conjugados  $p_{1,2}$ . Además, como el polo real es  $p_3 = a_0 / \tau^2$  y  $a_0$  es negativo para todo  $m$  entonces también lo es  $p_3$ . Este polo real negativo  $p_3$  es de alta frecuencia. Por tanto, la performance puede ser aproximada sin tenerlo en cuenta.

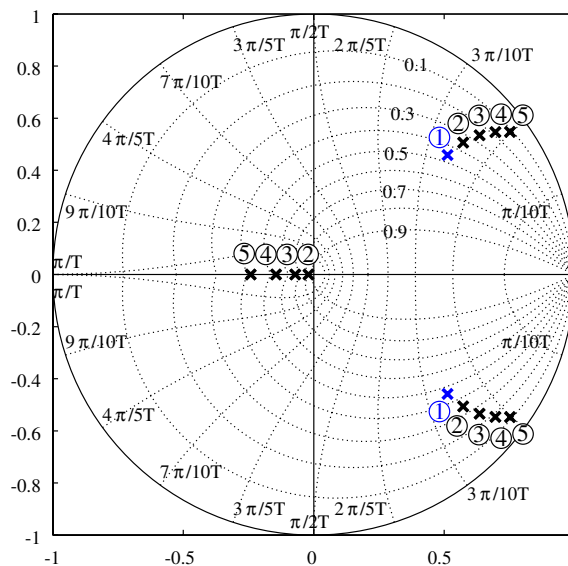


Figura 3.17: Ubicación de polos. ① Sistema sin retardo. ②  $\tau=0.05$ s. ③  $\tau=0.1$  s ④  $\tau=0.15$  s ⑤  $\tau=0.2$  s.

*Retardo superior al período de muestreo:* Aplicando al polinomio de cuarto orden para  $h < \tau < 2h$ , el criterio en (Aranda, 1998) se establece la clasificación de los polos dependiendo de cierto valor que asuman las funciones  $D_4$  y  $V_2$  construidas seguidamente en función de los coeficientes del polinomio.

$$D_4 = 4L a_2^4 - 4N a_2^2 + (K^2 - 20LK - 8L^2) a_2^2 + 18(2L + K)N a_2 - 27N^2 + 4L^3 - 12L^2K + 12K^2L - 4K^3$$

donde  $L = 4 a_0 a_4$ ,  $K = a_1 a_3$ ,  $N = a_0 a_1^2 + a_3^2 a_4$ ,  $Q = 3 a_3^2 - 8 a_4 a_2$  y

$$V_2 = 16 a_4^2 a_2 a_0 - 6 a_3^2 a_0 a_4 - 18 a_4^2 a_1^2 - 3 a_3^3 a_1 + 14 a_4 a_1 a_2 a_3 - 4 a_4 a_2^2 + a_3^2 a_2^2$$

Se pueden remarcar las siguientes situaciones



$$\begin{aligned}
& \bullet D_4 < 0 \Rightarrow p_{1,2} \in \mathbb{C} \text{ y } p_{3,4} \in \mathfrak{R} \\
& \bullet D_4 = 0, \\
& \text{y } V_2 < 0 \} \Rightarrow p_{1,2} \in \mathbb{C} \text{ y } p_{3,4} \text{ doble} \in \mathfrak{R} \text{ (} p_3 = p_4 \text{)} \\
& \bullet D_4 > 0, \\
& \text{y } Q \leq 0 \text{ o } V_2 \leq 0 \} \Rightarrow p_{1,2,3,4} \in \mathbb{C}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Considerando a la FT exacta  $D_4$  se evaluó numéricamente y se obtuvo como resultado que se anula para  $\tau_c = 0.2925$ . Un análisis similar permite concluir que  $V_2$  es siempre negativo.

Si se usa la aproximación,  $D_4$  es un polinomio de grado 10 y tiene una raíz en  $m=0.5691$  que equivale a  $\tau=0.2862$ , el cual es muy similar a  $\tau_c$ .

Entonces, para ambos casos vale lo siguiente:

- Para  $h < \tau < \tau_c$  el polinomio tiene dos polos reales y un par de polos complejos. A partir de la continuidad del lugar de las raíces cuando el retardo pasa el umbral de  $h$  se verifica que el valor límite del polo  $p_3$  for  $\tau \rightarrow h^+$  es el mismo al cual tiende el polinomio de segundo orden cuando  $\tau \rightarrow h^-$ .
- Cuando el retardo iguala  $\tau_c$  hay un polo real doble y un par de polos conjugados.
- Para retardos superiores a  $\tau_c$  hay dos pares de polos complejos conjugados, un par en el semiplano derecho del círculo unitario y el otro en el izquierdo.

El sistema se hace inestable para retardo  $\tau > \tau^*$ . Figura 3.18 muestra el lugar de las raíces para los cuatro polos para una variación continua de  $\tau$ . La transición hacia el comportamiento inestable queda determinada por los polos  $p_{1,2}$  que salen del círculo unitario por el semiplano derecho lo que verifica lo concluido con la *Proposición 3.3*.

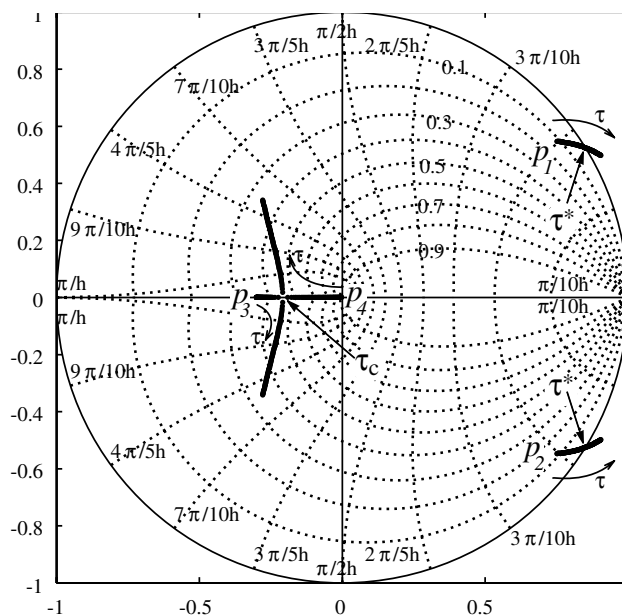


Figura 3.18: Ubicación de los polos para  $h < \tau < 2h$ .

### Respuesta temporal – índices de performance

El análisis de performance se hace para retardos desde 0 a  $\tau^*$ , donde se alcanza el límite de estabilidad. En todo este intervalo la FT de LC tiene dos ceros reales y sobre el eje real negativo (excepto cuando  $\tau$  es un múltiplo entero de  $h$  donde hay uno solo) y un par de polos complejos conjugados  $p_{1,2}$  estables y en el semiplano derecho.

Otros polos se agregan en los tres sub-intervalos: el polo real negativo  $p_3$  en  $(0, h)$ ; dos reales negativos  $p_{3,4}$  en  $(h, \tau_c)$ ; y los complejos conjugados  $p_{3,4}$  en  $(\tau_c, \tau^*)$ .

Mapeando estos ceros y polos en el plano complejo  $s$  con la transformación  $z = e^{sh}$  y teniendo en cuenta lo establecido en sección A.5, se puede concluir que aquellos polos y ceros que pertenecen al eje real negativo son de alta frecuencia y por tanto es esperable que no tengan una considerable influencia sobre la respuesta temporal del sistema completo.

Más aún, para la TF discreta con un par de polos complejos conjugados en cascada con polos reales y ceros se pueden formular los siguientes postulados sobre los índices mencionados en Apéndice B, {(B.8) y (B.9)} (Franklin & Powell, 1980):

- Los ceros reales afectan principalmente el sobrevalor  $M_p$ :
  - Para valores fijos de  $\xi$  y  $\omega_n$  asociados al par de polos complejos y el cero real tendiendo a -1, el sobrevalor  $M_p$  debe tender al  $M_p^{PT2}$ , que es sobrevalor del sistema continuo definido en el estado del arte (determinado por  $\xi$  y  $\omega_n$ ).
  - Para  $\xi$  creciente, y constante  $\omega_n$ , y un valor fijo del cero, el sobrevalor crece con respecto a  $M_p^{PT2}$ .
- La presencia de polos reales negativos modifica el tiempo de crecimiento, entonces cuando  $\xi$  crece (con  $\omega_n$  constante), el tiempo debe crecer con respecto a  $T_r^{PT2}$ .

De aplicar este análisis al caso de estudio surge que los índices de performance de lazo cerrado (sobrevalor y tiempo de establecimiento) *pueden ser aproximado de manera muy precisa solo considerando el equivalente CT del par de polos  $p_{1,2}$ , i.e. el par de polos discretos de lazo cerrado que evoluciona hacia la inestabilidad con retardos creciente.*

Esta evaluación aproximada de los índices se contrasta con los valores exactos obtenidos vía la simulación del sistema controlado, a los efectos de determinar su validez. En particular para retardos superiores a  $\tau_c$ , i.e. cuando  $p_{3,4}$  son un par de polos complejos conjugados.

### Validación numérica

Los experimentos de simulación del sistema muestreado están basados en el trabajo de (Jumel, 2003). Sus resultados, mostrados en Figura 3.20 y Figura 3.21, muestran la evolución del sobrevalor y tiempo de establecimiento para el retardo entre 0 y  $\tau^*$ . Tales resultados son los considerados exactos (“exact”) y son los valores de referencia contra los cuales se contrastan los índices obtenidos vía la aproximación analítica (“approximate”).

En Figura 3.19 se muestran el coeficiente  $\xi$  y la frecuencial natural  $\omega_n$  del  $P_{T2}$  aproximado en función de  $\tau$ . Esto expresa la misma dependencia que fuera observada por el Z-grid bajo otra perspectiva. Ambos resultan de un mapeo vía  $z = e^{sh}$  del par de polos discretos  $p_{1,2}$  en un par de polos continuos  $s_{1,2}$  con respectivos  $\xi$  and  $\omega_n$ . Se puede ver que cuando el retardo aumenta ambos  $\xi$  y  $\omega_n$  se reducen. Entonces, es esperable que crezcan ambos el sobrevalor y el tiempo de establecimiento.

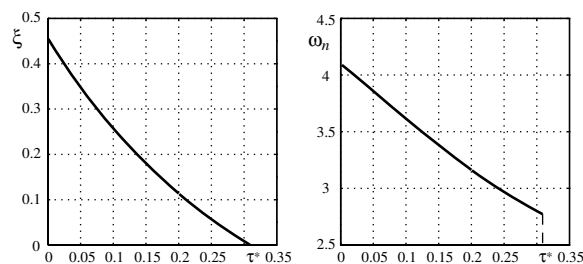


Figura 3.19: a) Amortiguamiento  $\xi$ . ; b) Frecuencia natural  $\omega_n$ .  $0 < \tau < \tau^*$ .

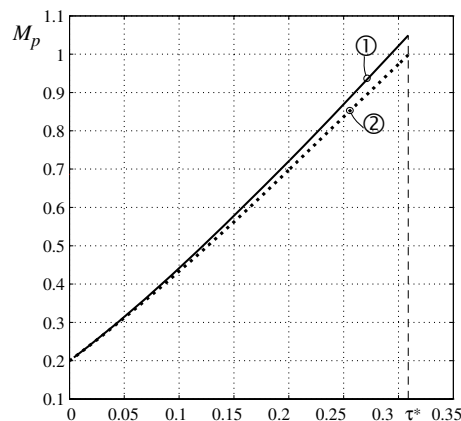


Figura 3.20:  $M_p$  Exacto ① y  $M_p$  Segundo orden ②.  $0 < \tau < \tau^*$ .

El sobrevalor aproximado es calculado usando (ea). Su evolución en función de  $\tau$  se muestra en Figura 3.20 curva ②. El sobrevalor exacto, curva ①, es calculado por simulación.

En Figura 3.21 se muestran tres curvas de tiempo de establecimiento: la exacta se corresponde a la simulación del sistema muestreado, y las curvas ② y ③ se refieren a la

aproximación de segundo orden. La curva ② se obtuvo intersecando la evaluación numérica de la respuesta exacta del sistema  $P_{T2}$  con una banda de desviación  $\Delta$  de 5% alrededor del valor final, para todo valor de  $\xi(\tau)$  y  $\omega_n(\tau)$ . Con esto, la curva ② es una versión exacta del tiempo de establecimiento aproximado. La curva ③ se obtuvo con la aproximación (B.4).

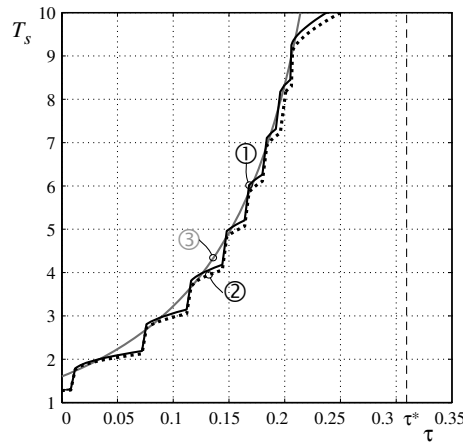


Figura 3.21:  $T_s$  exacto ①,  $T_s$  Segundo orden ② y  $T_s$  aproximado ③.  $0 < \tau < \tau^*$

Figura 3.20 y Figura 3.21 permiten concluir que la aproximación con el método propuesto de los índices de performance considerados es cualitativamente buena. Para verificar esta calidad de manera cuantitativa, se grafican los errores relativos en Figura 3.22, determinados de acuerdo a (3.69) y (3.70) en función de  $\tau$ . Cuando  $\tau$  crece, el error de  $M_p$  también. Este error está siempre bajo el 5%. Para el tiempo de establecimiento, cuando  $\tau$  crece, el error de  $T_s$  está acotado por una banda de 3.5%, excepto en algunos puntos donde el tiempo de establecimiento tiene escalones temporales Figura 3.21.

$$e(M_p) = (M_p^{SD} - M_p^{PT2}) / M_p^{PT2} \cdot 100\% \quad (3.69)$$

$$e(T_s) = (T_s^{SD} - T_s^{PT2}) / T_s^{PT2} \cdot 100\% \quad (3.70)$$

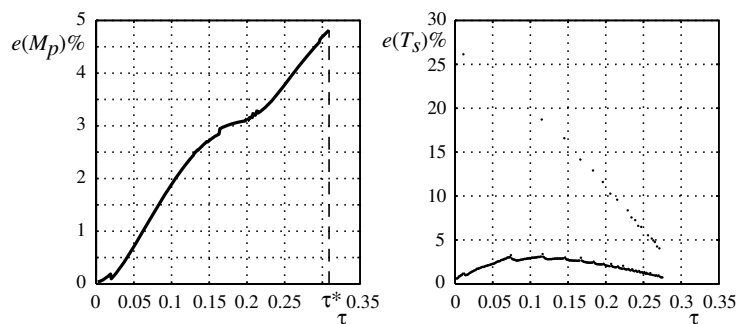


Figura 3.22: a) Error de Sobrealor. b) Error tiempo de establecimiento.  $0 < \tau < \tau^*$ .

---

### 3.6 Conclusiones

Se mostró que el enfoque discreto es más adecuado que otras soluciones basadas en aproximaciones continuas para estudiar la estabilidad de un sistema controlado con un retardo constante en la acción de control.

Se presentaron tres métodos basados en el criterio de estabilidad de Jury, el criterio frecuencial de estabilidad de Nyquist y un criterio de estabilidad Schur de un polinomio intervalo, disponibles en la literatura, para determinar la estabilidad de un sistema controlado ante la presencia de un retardo constante, desconocido y acotado.

Se mostró que la aplicación de los criterios frecuencial y de polinomio intervalo requiere el cálculo de ciertas cotas máximas y mínimas que dependen de la planta específica. En particular, el criterio frecuencial resultó más ventajoso dado que permite concluir en una única gráfica sobre la estabilidad para retardos cuyo múltiplo entero del período de muestreo  $l$  sea distinto, sin necesidad de recalcular los polinomios cuyo orden dependen de  $l$  previstos por el método de polinomio intervalo. Además, permitió en el Caso de Estudio obtener un valor menos conservativo de la ganancia máxima que el sistema en función del retardo.

Se presentó una aproximación discreta del modelo de la planta que depende sólo de su orden y grado relativo, su comportamiento frecuencial se analizó en Anexo I. Se usó esta aproximación para generalizar el criterio frecuencial y para convertir las condiciones de Jury en polinomios en función de la parte fraccional del retardo  $m$ . En el análisis frecuencial el uso de la aproximación discreta se justifica en que la zona de baja frecuencia, de mayor interés para análisis de estabilidad, las RF de la aproximación y la exacta, son muy cercanas.

Se presentó la proposición 3.3 para ciertas plantas y controladores que permite inferir si existe una evolución hacia la inestabilidad para retardos crecientes.

Se verificó que la modificación de la performance cuando el retardo aumenta puede ser evaluada visualizando ciertos índices estándares de sistemas de segundo orden que relacionan la respuesta temporal con la ubicación de los polos del lazo cerrado. Esto puede hacerse por dos motivos: 1) los polos de lazo cerrado que se van hacia la inestabilidad evolucionando a partir de los originales para retardo nulo son de baja frecuencia; 2) los ceros introducidos por el retardo no afectan la respuesta temporal del lazo cerrado porque son de alta frecuencia.

# CAPITULO 4

## **Estabilidad y performance de Sistemas Distribuidos de Control: Sistemas LTI controlados con Retardos Variables en la Red de Comunicación**

En este capítulo se consideran los retardos de variación arbitraria pero acotada inducidos por la red de comunicación en sistemas distribuidos de control. En particular, se considera un criterio de estabilidad de la literatura aplicable a plantas lineales, SISO y estables que restringe la respuesta en frecuencia de la sensibilidad complementaria del lazo cerrado en función del retardo. Este resultado puede usarse ya para verificar la estabilidad de un sistema de control dado, ya para asistir en el diseño de un controlador que tenga en cuenta *a priori* la presencia de retardos. En vista de este segundo objetivo, a partir de dicho resultado se proponen dos métodos de diseño de un controlador robusto frente al retardo. El primero de ellos considera un enfoque que opera sobre las normas  $H_\infty$  de las funciones de sensibilidad del lazo cerrado, dado que la restricción establecida por el criterio mencionado se integra directamente al diseño a través de los pesos de las funciones de sensibilidad. Tal diseño se hace parcialmente en el dominio continuo vía la transformación *bilineal*. Para evitar posibles distorsiones introducidas por esta transformación se propone un segundo método que se formula completamente en el dominio discreto  $z$ . En el mismo se establecen restricciones sobre la zona de paso de la curva de lugar de la ganancia de lazo que luego son usadas para elegir compensadores *lead-lag* en el diseño *loop-shaping* del controlador en el plano de Nichols. El tratamiento exhaustivo de un ejemplo permite una evaluación intrínseca de ambos métodos y un análisis comparativo con otra técnica de la literatura.

### **4.1 Introducción**

En muchas implementaciones de sistemas de control surgen particularidades que en general no son consideradas en la etapa de concepción del sistema, donde se utilizan técnicas clásicas de diseño de controladores. Esto provoca generalmente el deterioro de la performance esperable, siendo incluso posible la pérdida de la estabilidad en lazo cerrado.

La aparición de retardos se cuenta entre las características más frecuentes y perjudiciales en implementaciones en tiempo real de sistemas de control que comparten un recurso común, como una CPU o una red de comunicaciones.

Estos retardos pueden ser variables en el tiempo dependiendo fundamentalmente de la forma en la cual se administra el recurso común. Por ejemplo, en el caso de una CPU los retardos aparecen cuando se tiene una planificación (*scheduling*) de tipo dinámica (Cervin et al., 2002), (Eker et al., 2000); o en el caso de una red de acceso aleatorio como CAN o Ethernet la parte más significativa de la aleatoriedad del retardo está asociada a la espera en la cola (o buffer), ver secciones 2.2.1 y 2.2.4, (Tipsuwan & Chow, 2003) y referencias allí.

#### 4.1.1 Antecedentes

El problema de estabilidad y performance ante retardos variables ha sido considerado en numerosos artículos (Nilsson, 1998), (Yook et al., 2000), (Zhang et al., 2001), (Richard, 2003), (Hetel et al., 2006), (Cloosterman, 2008) (Sala, 2005), (Tipsuwan & Chow, 2003) entre otros. En la mayor parte de artículos de esta vasta literatura, se ha modelado el problema (basándose en alguna información extra del retardo como por ejemplo su máximo valor, el conjunto de valores específicos que puede asumir, etc.), se han analizado los efectos que causa en la performance del lazo de control y se han buscado medidas para la neutralización o atenuación de su efecto.

La estabilidad del sistema no sólo depende del valor del retardo sino también de su variación. Por ejemplo, puede ocurrir que un sistema sea estable para ciertos valores específicos y constantes de retardo,  $\tau = \tau_i$  donde  $\tau_i \in F_\tau = \{\tau_i \text{ con } i=1..N\}$ , y sea inestable cuando el retardo varía ( $\tau_k = \tau_i$ ) asumiendo valores en la misma familia  $F_\tau$ . Esto se muestra en el ejemplo, resumido a continuación, que fue tomado de (Cloosterman, 2008).

*Observación 4.1:* En (Cloosterman, 2008) se presenta un sistema lineal de segundo orden  $\ddot{x}(t) = k u(t)$  que tiene un retardo en la acción de control y cuyo controlador es una realimentación de estados  $L=[50 \ 11.7]$ . El sistema es estable para dos valores de retardo constante  $\tau=0.2 \text{ h}$  y  $\tau=0.6 \text{ h}$ . Sin embargo el sistema se vuelve inestable si el retardo varía entre ambos valores alternadamente (se puede comprobar observando que los autovalores de la matriz de lazo cerrado del sistema periódico no están todos dentro del círculo unitario).

Entonces, para abordar este problema, lo cual puede hacerse con diferentes enfoques, es necesario tener información sobre el retardo, su valor y la forma en la cual varía.

Si el retardo asume su valor de forma aleatoria en un conjunto conocido y finito de valores, se puede usar un enfoque de tipo *gridding* LMI ver (Sala, 2005) y (Apkarian & Adams, 1998). En este caso, se constituye una familia de matrices, donde cada matriz está asociada a un valor específico de retardo (ver modelado en (A.25) y en sección 4.5). Con esto, el sistema se transforma en un sistema de tiempo discreto conmutado DTSS (siglas de *Discrete Time Switched Systems*) que tiene asociado un número finito y conocido de modos. Luego, se puede ya bien verificar la estabilidad o sintetizar un controlador estable resolviendo un conjunto de inecuaciones lineales matriciales LMI (siglas de *Linear Matrix Inequalities*) de forma que el sistema DTSS tenga una función cuadrática de Lyapunov común QCLF (siglas de *Common Quadratic Lyapunov Function*). Sin embargo, los métodos para resolver las LMI pueden volverse inefectivos cuando la cantidad de modos aumenta (Lin & Antsaklis, 2008).

Un enfoque usado en numerosos artículos (Nilsson, 1998), (Nilsson et al., 1998), (Lincoln & Cervin, 2002) entre otros, parte de poder modelar al retardo como una variable aleatoria independiente y con una distribución de probabilidad conocida. En este caso el sistema es estocástico y la estabilidad se puede analizar en términos de la denominada estabilidad cuadrática media (MSS, por sus siglas de “*mean square stability*”). Específicamente, la MSS se garantiza evaluando si una función de costo estacionario asume un valor finito cuando el retardo  $\tau(k)$  tiene determinada distribución de probabilidades. Conceptualmente, la MSS significa que puede existir una secuencia particular de retardos y ruido que hagan que el sistema se vuelva inestable, aunque la probabilidad de esto es nula, ver (Ji et al., 1991).

*Observación 4.2:* El mismo sistema mencionado en *Observación 4.1*, es estable en términos MSS cuando el retardo, de distribución uniforme, varía en un intervalo acotado por  $\tau_{max} \in (0, h)$ . Esto se puede verificar en Figura 4.1 a) donde se muestra que el costo cuadrático es finito. Sin embargo, tal como fue adelantado hay secuencias de este retardo como  $\tau_k = \{0.2h, 0.6h, 0.2h, \dots\}$  para la cual el sistema es inestable. Con esto, este resultado MSS es solamente válido en el caso mencionado de distribución del retardo. En Figura 4.1 b) se muestra la respuesta temporal del estado  $x_1$  a una condición inicial, con la secuencia  $\tau_k$  inestable en rojo y con una secuencia particular del retardo (con distribución uniforme).



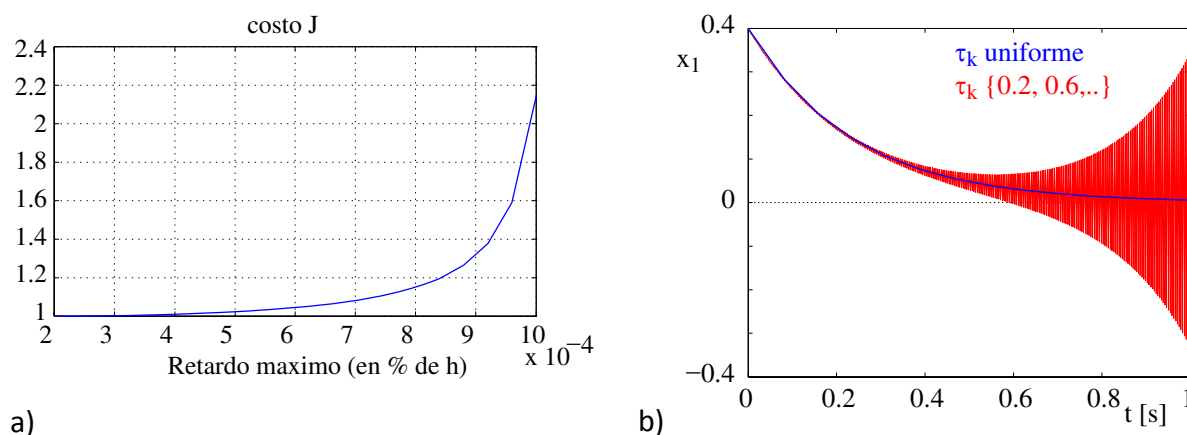


Figura 4.1: a) Costo  $J$  para distribución uniforme de retardo, b) respuesta temporal de  $x_1$  a una condición inicial, secuencia uniforme (azul) y secuencia  $\{0.2, 0.6, \dots\}$  (rojo).

A partir de lo remarcado en *Observación 4.2*, en este capítulo se considera la estabilidad no en términos probabilísticos sino en términos más generales que sean independientes de las secuencias que puedan asumir los retardos. En particular, se considera que el retardo puede variar en forma arbitraria en un intervalo acotado.

En muchos artículos de la literatura que tratan el problema de retardo acotado, las condiciones de estabilidad son derivadas mayormente con un enfoque de estabilidad de Lyapunov, que incluyen los métodos basados en los funcionales de Lyapunov–Krasovskii (L-K por sus iniciales) (Chen et al., 2007), (Gao et al., 2004); (Yu et al., 2005) (Yu et al., 2004) y los de QCLF (Cloosterman et al., 2006). La posibilidad de utilizar estos teoremas de Lyapunov surge a partir de modelar el problema de retardo acotado como un sistema nominal mas cierta perturbación, por ejemplo un análisis con politopo se considera en (Cloosterman, 2008), (Richard, 2003), (Hetel et al., 2006), ver sección 2.2.5 por detalles. La elección entre las funciones QCLF o L-K es un problema aún abierto, pues tal como se remarca en (Cloosterman, 2008) para el caso de modelos de tiempo discreto no es necesariamente cierto que el uso de L-K dé resultados menos conservativos que las condiciones de estabilidad impuestas por QCLF (es decir, no se puede extender al caso DT las conclusiones de CT donde L-K da resultados menos conservativos que QCLF).

En este trabajo se considera un resultado totalmente diferente presentado en (Kao & Lincoln, 2004) que propone condiciones de estabilidad en el dominio frecuencial para sistemas SISO con retardo acotado, con un teorema basado en el teorema de la pequeña ganancia. Este enfoque del dominio frecuencial, al menos en el caso continuo, ha sido

generalizado para los sistemas más generales MIMO en (Kao & Rantzer, 2007), a partir de la teoría ICQ (siglas de *Integral Quadratic Constraint*).

#### 4.1.2 Aportes del capítulo

En (Kao & Lincoln, 2004) se presentó un teorema que garantiza la estabilidad robusta frente a retardos acotados que pueden variar en forma arbitraria para sistemas continuos. El teorema restringe la respuesta en frecuencia de la sensibilidad complementaria del lazo cerrado en función del retardo. Este resultado, que es aplicable a plantas continuas, SISO, y que fue extendido al caso discreto tras realizar cierta aproximación, puede usarse ya para verificar la estabilidad de un sistema de control dado, ya para asistir en el diseño de un controlador que tenga en cuenta *a priori* la presencia de retardos. En este segundo caso, la relación entre las respuestas frecuenciales de lazo abierto y cerrado no es clara en la zona donde la ganancia de lazo es cercana a uno, justamente la zona de interés de la función restrictiva de lazo cerrado planteada por el teorema.

En este capítulo se propone un primer método que resuelve este problema mediante un enfoque que opera sobre las normas  $H_\infty$  de las funciones de sensibilidad del lazo cerrado, aprovechando que el criterio de estabilidad se expresa en términos de la cota superior del módulo de una transferencia asociada al lazo cerrado. Tal diseño se hace parcialmente en el dominio continuo vía la transformación *bilineal*.

La utilización de la transformación bilineal, típica en el diseño en frecuencia de sistemas discretos suele fundamentarse en la literatura en que *i*) es difícil representar gráficamente la respuesta en frecuencia porque ésta aparece en la exponencial compleja  $z = e^{j\omega h}$ , y *ii*) no se puede extender el clásico diseño propuesto por Bode que utiliza las asíntotas para calcular los compensadores de tiempo discreto. Si bien el primer punto está resuelto hoy día, gracias al desarrollo de herramientas potentes de software, perduran ciertos preconceptos que descartan de raíz la alternativa de realizar un diseño en el dominio discreto (plano  $z$ ), ver comentarios en (Maciejowski & Samra, 1990) y (León de la Barra & Prieto, 1999).

La existencia de estos preconceptos explica el hecho de que sólo en recientes artículos se ha analizado el comportamiento de sistemas discretos orientado al diseño de compensadores que resuelven el problema íntegramente en el dominio  $Z$ . Por ejemplo, con polos/ceros reales de primer y segundo orden (León de la Barra & Prieto, 1999) y polos/ceros complejos

conjugados (Messner, 2001). Estos diseños en el dominio  $Z$  evitan distorsiones en frecuencia (prewarping) y eventuales problemas numéricos introducidos por la *bilineal* (Ogata, 1996). En línea con esta tendencia, este capítulo presenta un segundo método de diseño, íntegramente en el dominio discreto, donde la función restrictiva asociada al retardo se convierte en restricciones de módulo y fase que posibilitan el *loop-shaping* de la ganancia de lazo mediante el uso de los compensadores mencionados. En particular se obtiene cierta restricción que vincula el margen de fase con el máximo retardo que podrá admitir el sistema de control.

Si bien ambos métodos resuelven el problema de diseño robusto frente a retardos, utilizando un único controlador robusto frente a la presencia de retardos variables, se destacan los siguientes puntos de manera comparativa:

- El método  $H_\infty$  se realiza en CT, y el loop-shaping en DT por lo que el primero puede sufrir las distorsiones introducidas por la transformación bilineal, usada para mapear restricciones en tiempo continuo y luego discretizar el controlador obtenido, problema que el segundo no tiene.
- El enfoque  $H_\infty$  puede ser resuelto de manera iterativa por Matlab, pero no existe un control desde el punto de vista del diseñador sobre las soluciones del problema que arroje el software, lo que sí ofrece el segundo, si bien con la exigencia de requerir mayor conocimiento de la respuesta en frecuencia de sistemas discretos por parte del ingeniero de control.
- Para el primer método se deben elegir los pesos de orden relativamente bajo, porque un elevado orden incrementa el orden del controlador que pueda ser obtenido vía el uso del software, mientras que una iterativa aplicación del método “loop-shaping” permite mantener el orden del controlador lo más bajo posible.

Ambas técnicas se comparan con un resultado presentado en (Lincoln, 2002), donde se diseña un controlador con un método de dos pasos que primero ignora la red (y por lo tanto el retardo) y luego atenúa su efecto agregando dos compensadores  $D_1$  y  $D_2$ , ver sección siguiente. En (Vatanski et al., 2009), también basándose en la medición o estimación del retardo, se usa como estrategia de compensación el predictor adaptable de Smith. Esto resulta en un caso particular de la estrategia de (Lincoln, 2002) con  $D_1=G$  ( $G$  es la planta) y  $D_2=0$ .

A destacar del método aquí presentado en relación con el de (Lincoln, 2002): *i*) los pesos de las funciones de sensibilidad determinan las cotas de esta última integrando de manera directa al retardo en el diseño; y *ii*) no necesita de ningún artificio adicional, mientras que el controlador compensado referido necesita conocer exactamente el valor del retardo.

## 4.2 Formulación del problema y modelado matemático

A continuación se presentan las hipótesis de modelado y se define cualitativamente el problema de estudio. Luego, se introduce el modelo matemático del problema y se citan los mencionados teoremas de estabilidad de tipo frecuencial. Por último, se resume el esquema compensado de (Lincoln, 2002), y se analizan críticamente los posibles problemas de su implementación. Esto permite justificar la elección de diseño de controladores robustos considerada en los métodos en la sección 4.3.

### 4.2.1 Hipótesis de modelado y problema planteado

Las propiedades del NCS consideradas aquí, ver sección 2.2.1 por detalles, son: muestreo periódico de la salida y de la planta; controlador (lineal y estacionario) y actuador (ZOH) manejados ambos por los eventos a su entrada. Entonces, los retardos en el instante  $k$ -ésimo del sensor al controlador  $\tau_{sc,k}$ , del controlador al actuador  $\tau_{ca,k}$  y computacional  $\tau_{comp,k}$  del controlador pueden englobarse en un único retardo  $\tau_k$  en la acción de control ( $\tau_k = \tau_{sc,k} + \tau_{comp,k} + \tau_{ca,k}$ ). En la Figura 4.2  $G(s)$  representa la planta,  $C(z)$  el controlador,  $\Delta$  el operador del retardo concentrado y  $h$  el periodo de muestreo, las señales  $w$ ,  $d$ ,  $n$  y  $r$  son ruido de proceso, salida, de medición y de referencia respectivamente.

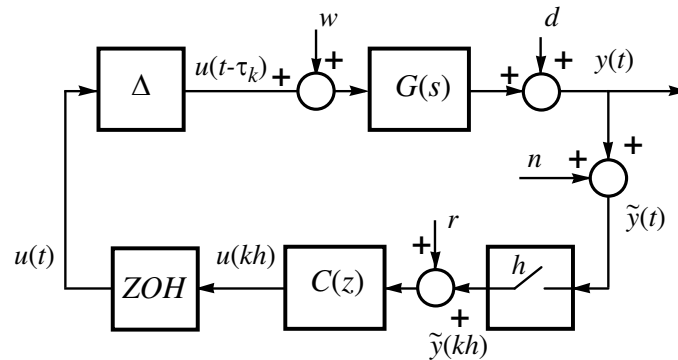


Figura 4.2: Sistema controlado con retardo variable en la acción de control.

Dependiendo de los procesos que intervienen en su aparición (protocolo de comunicación, congestión de la red, políticas de *scheduling*, etc.),  $\tau_k$  puede caracterizarse como la suma de un retardo constante  $\bar{\delta}$  más uno variable  $J$ , que a menudo en la literatura suele llamarse *Jitter*, ver Figura 4.3. En este capítulo se considera el caso más general  $\bar{\delta} = 0$ .

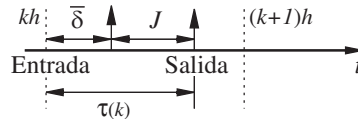


Figura 4.3: Modelo del retardo. Parte constante  $\bar{\delta}$  más *jitter*  $J$ .

En términos cualitativos, el problema considerado en este capítulo se formula de la siguiente manera:

*Estabilidad robusta frente a retardos variables acotados:* Sea el sistema de control con la configuración de Figura 4.2, el problema enfocado aquí consiste en diseñar un controlador  $C$  tal que para todo retardo variable arbitrariamente y acotado,  $0 < \tau_k < \tau_{\max}$ , el sistema sea estable.

#### 4.2.2 Modelado matemático del sistema con retardo variable

En la mayor parte de la literatura, el modelo en tiempo discreto de una planta lineal con retardo variable en la acción de control se describe matemáticamente en su modelo de *Espacio de Estados* (en sus siglas EE), aumentando el vector de estados y las matrices del sistema discreto tal como fue presentado en Apéndice A, ver referencias allí citadas o el resumen presentado en la sección A.2. Sin embargo, aquí se utiliza el enfoque de (Kao & Lincoln, 2004) que propone, en lugar de incorporar el retardo al modelo de la planta discreta como en el modelo en EE, transformar el retardo en una perturbación que afecta a un sistema realimentado sin retardo. Este modelo se presenta a continuación.

**Definición 4.1:** *Retardo variable y acotado*  $\Delta$ . Se define al operador retardo de la señal  $u(t)$ , ver Figura 4.2, como (4.1) donde  $\tau_{\max}$  es su cota superior.

$$\Delta(u) = u(t - \tau(k)), \quad 0 \leq \tau(k) \leq \tau_{\max} \quad (4.1)$$

El operador retardo (4.1), mostrado en Figura 4.2, puede ser transformado en dos caminos: uno directo (independiente del retardo) y uno de error (donde el error o perturbación depende del retardo). Con esta transformación y tras una operación con la técnica de álgebra de bloques se obtiene el diagrama de bloque de la Figura 4.4, gráfica tomada de (Kao & Lincoln, 2004).

El camino de error está constituido por un derivador en tiempo discreto en serie con el operador  $\Delta$ .

*Definición 4.2: Derivador de tiempo discreto  $B_1(z)$ .* Se define a la FT discreta (4.2) como el derivador de la señal de entrada  $u(t)$ .

$$B_1(z) = \frac{z-1}{z} \quad (4.2)$$

Los teoremas de (Kao & Lincoln, 2004) citados en la sección siguiente demuestran la robustez frente a la perturbación  $\Delta_F$  (conformada por  $B_1(z)$  en serie con el operador retardo), a partir del Teorema de la Pequeña Ganancia usando el diagrama de bloques de la Figura 4.4.

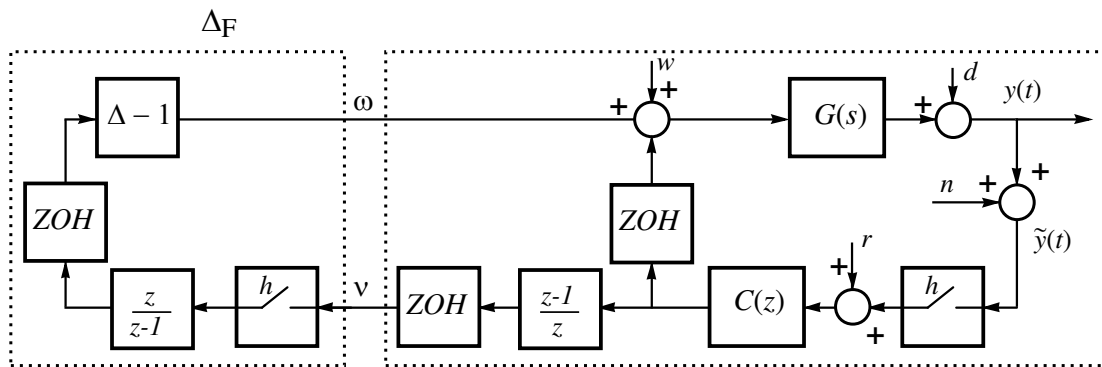


Figura 4.4: Sistema de control con el retardo transformado en dos caminos: directo y error.

#### 4.2.3 Estabilidad en lazo cerrado

A continuación se citan *criterios de estabilidad para sistemas con retardo variable*, en sus dos versiones lazo cerrado en CT, su versión mezclada planta CT y controlador DT y una aproximación de esta última planta DT y controlador DT. La versión CT es incluida con propósitos comparativos mientras que la aproximación DT-DT (Observación 4.4) será usada en la sección 4.2 para resolver el problema formulado en la sección 4.1.1.

Sea  $G(s)$  una planta SISO en CT, estrictamente propia y estable (esta última hipótesis permite usar la teoría muestreada  $H_\infty$ ) y un controlador  $C$  (CT) o (DT) que estabiliza el lazo cerrado para retardo nulo y considérese que el sistema de control es perturbado por el retardo variable  $\tau_k$ , ver Figura 4.2. El siguiente teorema (Kao & Lincoln, 2004) que resulta de aplicar el Teorema de la Pequeña Ganancia al esquema de la Figura 4.4, constituye un criterio (gráfico) simple de estabilidad, para un sistema con un retardo de variación arbitraria y acotada. En DT este retardo puede no ser múltiplo del período de muestreo  $h$ .

**Teorema 4.1:** Teorema 1 de (Kao & Lincoln, 2004) Planta CT y Controlador CT:

Sea el sistema de lazo cerrado con  $G(s)$  y  $C(s)$ . El sistema es estable para cualquier retardo variable definido por (4.1) si se cumple

$$\left| \frac{G(j\omega) C(j\omega)}{1+G(j\omega) C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\tau_{\max}\omega}, \forall \omega \in [0, \infty) \quad (4.3)$$

□

*Observación 4.3:* El término de la izquierda de la inecuación (4.3) es la función de sensibilidad complementaria  $T(s) = \frac{G(s) C(s)}{1+G(s) C(s)}$ . Es decir, el Teorema 4.1 garantiza la estabilidad robusta frente a retardos si la magnitud, en función de la frecuencia, de  $T(s)$  esta superiormente acotada por cierta función que depende del retardo  $|T(j\omega)| < 1/(\tau_{\max}\omega)$ .

**Teorema 4.2:** Corolario 1 de (Kao & Lincoln, 2004) Planta CT y Controlador DT:

Sea el sistema de lazo cerrado con  $G(s)$  y  $C(z)$ . El sistema es estable para cualquier retardo variable definido por (4.1) si para algún real  $N_R = \tau_{MAX}/h$  se cumple

$$\left| \frac{G_{alias}(\omega) C(e^{j\omega h})}{1 + G_d(e^{j\omega h}) C(e^{j\omega h})} \right| < \frac{1}{N|e^{j\omega h} - 1|}, \quad \forall \omega \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \quad (4.4)$$

donde  $N = \sqrt{[N_R]^2 + 2[N_R]g + g}$  y  $g = N_R - [N_R]$  siendo  $[N_R]$  el entero inferior más cercano a  $N$ . □

En (4.4) la FT  $G_d$  es la discretización con un bloqueador de orden cero de  $G(s)$  que puede ser obtenida con la transformada Z y la  $G_{alias}(\omega)$  es (4.5).

$$G_{alias}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |G(j(\omega + 2\pi k/h))|^2} \quad (4.5)$$

Como es mencionado en (Kao & Lincoln, 2004), para un período de muestreo bien elegido, (Chen & Francis, 1994), la suma de *aliasing* (4.5) converge a  $P_{ZOH}$ , es decir (4.6).

$$G_{alias}(\omega) \approx G_d(e^{j\omega h}) \quad (4.6)$$

Entonces, con la aproximación (4.6), el lado izquierdo de la desigualdad (4.4) puede ser aproximado como (4.7).

$$\left| \frac{G_{alias}(\omega) C(e^{j\omega h})}{1 + G_d(e^{j\omega h}) C(e^{j\omega h})} \right| \approx \left| \frac{G_d(z) C(z)}{1 + G_d(z) C(z)} \right| = |T(z)| \quad (4.7)$$

Reemplazando con (4.7) en (4.4), se obtiene la aproximación (4.8) del Teorema 4.2. Esta aproximación es equivalente a lo establecido para el caso discreto, Teorema 2 de (Kao & Lincoln, 2004).

$$|T(e^{j\omega h})| < \frac{1}{N|e^{j\omega h} - 1|}, \quad \forall \omega \in \left[0, \frac{\pi}{h}\right] \quad (4.8)$$

*Observación 4.4:* De la comparación entre las desigualdades (4.3) y (4.8) se deduce que existe una analogía entre las condiciones para la estabilidad robusta en los casos CT y DT. Esto es, el teorema establece que la magnitud en frecuencia del retardo debe ser una cota de la magnitud de la función de sensibilidad complementaria en DT.

Tal como fue mencionado en *Observación 4.4*, la magnitud de  $T(z)$  debe estar acotada para toda frecuencia por la magnitud de  $B_N^{-1}(z)=B_I^{-1}(z)/N$  la cual es

$$|B_1(e^{j\omega h})| = |e^{j\omega h} - 1| \quad (4.9)$$

Se observa entonces que la magnitud de la función de primer orden  $B_I^{-1}(z)$  es monótonamente decreciente y la constante  $N$  sólo produce un desplazamiento, hacia la derecha o la izquierda, según sea  $N < 1$  o  $N > 1$ , como se ve en Figura 4.5. Si la magnitud es representada en dB el cambio en  $N$  produce desplazamientos hacia arriba y abajo.

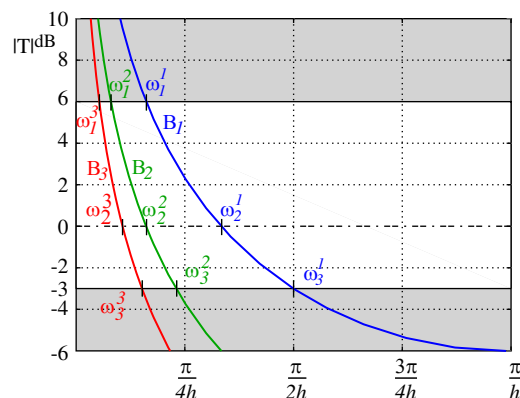


Figura 4.5:  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ . Frecuencias límites y de cruce.



#### 4.2.4 Crítica del esquema compensado ante retardo variable

Una propuesta de diseño de un controlador discreto que satisface el problema enunciado en sección 4.2.1 se presentó en (Lincoln, 2002). A continuación se resume esta propuesta y se presentan ciertos índices de performance que serán utilizados más adelante. Luego, se analizan los problemas asociados con su implementación que se verifican en un ejemplo. A partir de esto se concluye que es más adecuado plantear un controlador robusto a los retardos tal como se hace en la sección 4.3.

##### *Esquema compensado de (Lincoln, 2002)*

Siguiendo una formulación similar a la del teorema de estabilidad robusta (4.26) en el trabajo de (Lincoln, 2002) se propuso un esquema de compensación de retardos variables, para retardos pequeños (acotados por  $h$ ), ver Figura 4.6. Las ideas para una extensión de este esquema para retardos mayores que  $h$  se presentaron en (Lincoln, 2002 b).

Este esquema se basa en medir la diferencia entre la señal de control que se aplica efectivamente a la planta y la que se debería aplicar (salida del controlador). Esta diferencia pasa a través de dos sistemas lineales estrictamente propios ( $D_1$  y  $D_2$ ) cuyas salidas se suman a las señales antes y después del controlador. Para calcular esta diferencia se requiere conocer los retardos  $\tau_{sc}$  (su valor puede conocerse al recibir la medición en el controlador) y  $\tau_{ac}$  para lo cual se propone usar “*time-stamps*” enviados desde el actuador al controlador.

Esta estructura es muy similar al predictor *de Smith* con modelo imperfecto del proceso. El caso particular  $D_1=P$  y  $D_2=0$  resulta en el predictor de *Smith* clásico que fue considerado en (Vatanski et al., 2009).

Para garantizar la estabilidad con este esquema compensado se debe satisfacer la inecuación (4.10) para  $\omega < \pi/h$  siendo  $S = (1 + C G_d)^{-1}$  y  $D_{1d}$  y  $D_{2d}$  las versiones discretizadas de ambos compensadores.

$$\|S (-C(G_d - D_{1d}) - D_{2d})\| \leq \|B_1^{-1}/N\| \quad (4.10)$$

En esta estructura de control no se verifica la restricción de complementariedad.

*Definición 4.3: Índice de estabilidad.* Se define como índice de estabilidad  $Q_{estab}$  del esquema de control compensado, al siguiente término.

$$Q_{estab}(\omega) = \|S(-C(G_d - D_{1d}) - D_{2d})\| \quad (4.11)$$

La *performance* se evalúa analizando la salida  $y(z)$  respecto a una señal de una perturbación  $w(z)$  de Figura 4.6, de donde resulta la inecuación (4.12).

$$\|y\| \approx \frac{\|y_{original}\|}{\|G_d S\| \|w\|} + \frac{\|y_{jitter}\|}{\|G_d S(1 + C D_{1d} - D_{2d})\| \|N B_1\| \|w\|} \quad (4.12)$$

Esta ecuación difiere de la presentada en (Lincoln, 2002), debido a que allí la perturbación antecede a la planta (y por ello aparece un término multiplicativo de  $G_d$ ).

El primer término de (4.12) corresponde al aporte de la función de sensibilidad del sistema con el controlador original, y el segundo mide la influencia del *jitter* sobre la salida. Por esto, se considera el siguiente índice de performance definido originalmente en (Lincoln, 2002).

*Definición 4.4: Índice de performance.* Se define como índice de performance  $Q_{perf}$  del esquema de control compensado, al siguiente término asociado con la salida sensible al jitter.

$$Q_{perf}(\omega) = \|G_d S(1 + C D_{1d} - D_{2d})\| \quad (4.13)$$

El compromiso entre estabilidad y *performance* propuesto en (Lincoln, 2002) se consigue eligiendo

$$\begin{aligned} D_1(j\omega) &= \begin{cases} \approx G(s) & \text{para altas frecuencias} \\ \approx 0 & \text{para } \omega = 0 \end{cases} \\ D_2(j\omega) &= \begin{cases} \ll 1 & \text{para altas frecuencias} \\ \approx 1 & \text{para } \omega = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Como  $D_2$  no influye en altas frecuencias, con  $D_1$  se garantiza la estabilidad; y como  $D_1$  no influye en bajas frecuencias, con  $D_2$  se obtiene rechazo a la perturbación frente al *jitter*.

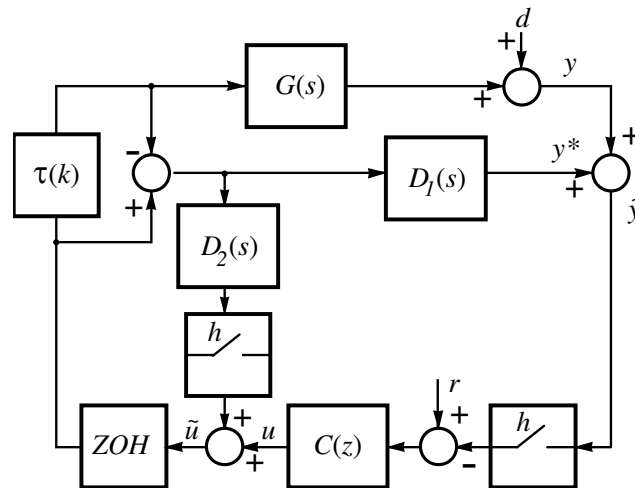


Figura 4.6: Esquema Compensado de Lincoln.

#### Análisis del compensador de (Lincoln, 2002)

Se destacan las siguientes características:

- Error estacionario debido a la perturbación

Como ventaja, este método de compensación no necesita el modelo de la planta a bajas frecuencias. Pero así, la calidad del rechazo a perturbaciones de ese rango frecuencial queda librada a la bondad del diseño del controlador original, ya que como se observa en (4.12), la elección de  $D_2$  permite disminuir  $y_{jitter}$  pero no  $y_{original}$ .

- Time Stamping

Si el *time-stamping* indicase un *jitter* diferente al real se podría llegar a inestabilizarse el lazo ante la incapacidad de la compensación para contrarrestar el efecto del retardo (esto se analiza en el Ejemplo 4.1).

- Desempeño

El uso de los compensadores  $D_1$  y  $D_2$  (Figura 4.6) produce una pseudo-sensibilidad complementaria entre la entrada  $r$  y la salida  $\tilde{y}$ . Como en general  $D_1 \neq G$ , entonces  $\tilde{y}$  no coincide con  $y$ , la salida real de la planta.  $D_1$  actúa como un regulador (su salida tiende a cero), entonces la salida  $\tilde{y} = y$  sólo en estado estacionario ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{y} = y$ ). En el caso de  $D_1 = G$  y  $D_2 = 0$ , (4.12) se simplifica  $\|y_{jitter}\| = \|G_d\| \|N B_1\| \|w\|$  y entonces la salida asociada al *jitter* depende de la RF de la planta.

*Ejemplo 4.1:* En el siguiente sistema tomado de (Lincoln, 2002),  $u_p(t)$  y  $d(t)$  tienen variancia unitaria,  $E[u_p(t)] = E[d(t)] = 0$ ,  $E[u_p(t_1) \cdot u_p(t_2)] = E[d(t_1) \cdot d(t_2)] = \delta(t_1 - t_2)$ ,  $E[d(t)] = 0$ , y  $B_p = [35 \ -61]^T$ .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + B_p u_p, y = [2 \ 1] x + d$$

El objetivo es obtener un controlador, con periodo de muestreo  $h=0.05s$ , que garantice la estabilidad para una cota máxima de retardo  $\tau_{max}=h$  ( $N=1$ ).

Siguiendo lo propuesto en (Lincoln, 2002) se parte de un controlador LQG discreto calculado con  $\tau=0$  para el costo  $J_x$  siguiente:

$$J_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x^T Q x + u^2) dt$$

donde  $Q = \begin{bmatrix} 2800 & 473.3 \\ 473.3 & 80 \end{bmatrix}$ .

Con este controlador LQG no se garantiza la estabilidad del sistema para  $\tau_{max}$  variable entre 0 y  $h$ , como puede verse en la Figura 4.7. Por esta razón en (Lincoln, 2002) se añade el compensador  $D_1(s)$  de Figura 4.6 que cancela el comportamiento de la planta  $G(s)$  en altas frecuencias, donde  $D_1(s)=s/(s+1)^2$  y  $D_2(s)=0$ .

En Figura 4.7 se ve la magnitud de la función lazo cerrado  $T_{LQG+D1}$  que satisface lo establecido por el teorema (4.10).

Además, en la Figura 4.7 se observa que la sensibilidad  $S$  del diseño LQG tiene ganancia unitaria a baja frecuencia, por lo que el sistema no rechazará perturbaciones  $d$  con componentes de bajas frecuencias. Como se mencionó anteriormente, este criterio de diseño no permite eliminar el error a la perturbación, pues con el ajuste de  $D_1$  y  $D_2$  no se puede disminuir la función de sensibilidad en la zona de bajas frecuencias (con los compensadores se puede reducir la  $y_{original}$  pero no se puede actuar en  $y_{jitter}$ ).

Uno de los problemas que puede afectar la implementación de éste esquema compensado radica en la dificultad de conocer con precisión el valor retardo del retardo total. Concretamente, el mayor problema es predecir el valor del retardo entre el controlador y el actuador al momento de que la señal de control es calculada (Nilsson, 1998).

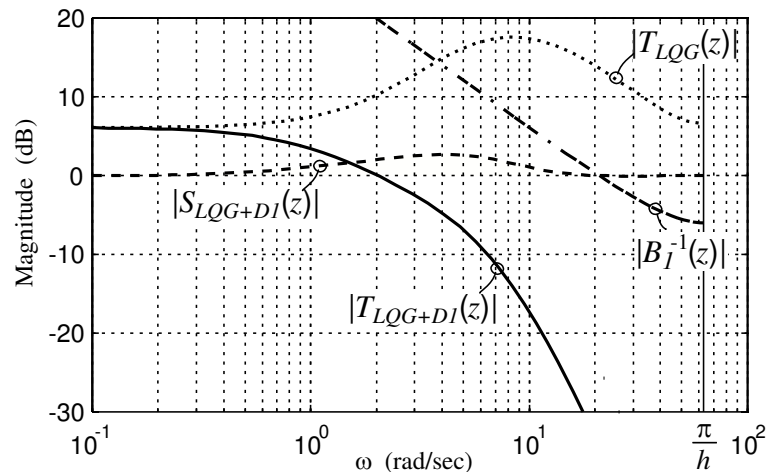


Figura 4.7: Magnitud de  $T(z)$  y  $S(z)$ , LQG y LQG Compensado.

A continuación se compara la performance del sistema con una simulación que tiene como entradas los ruidos de proceso y de salida (para los cuales se diseñó el LQG) en presencia de retardos independientes y uniformemente distribuido entre 0 y  $h$  en los siguientes tres casos: con el controlador LQG; con el esquema compensado considerando que se puede medir exactamente el valor del retardo y con el esquema compensado considerando que en la estimación del retardo existe un error acotado por el 50 % del periodo de muestreo. Esta última situación puede representar que los retardos  $\tau_{sc}$  y  $\tau_{ca}$  son acotados por la mitad del periodo (por ej. en una red simétrica) y que la incerteza se adjudica sólo al retardo  $\tau_{ca}$ .

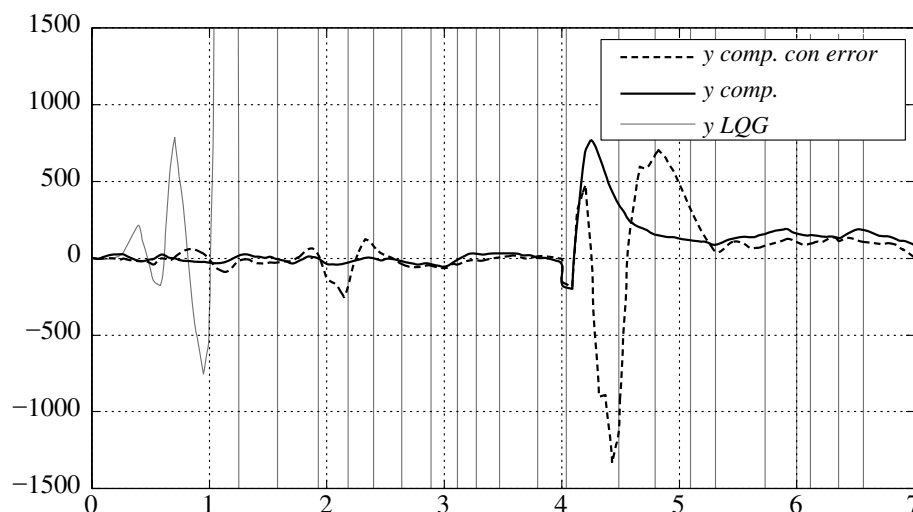


Figura 4.8: Salida de la planta.

En Figura 4.8 se muestra la salida inestable del sistema LQG en línea gris, para la secuencia simulada de ruidos y retardo. Hasta  $t=4$  s, en el caso de tener error en la estimación del retardo, la salida (en línea de cota) tiene mayor oscilación en torno al valor cero que en el caso

del compensador sin error (línea entera). En el instante donde entra una perturbación de tipo escalón (en 4 s), se verifica que ambas respuestas son muy disimiles entre sí, y que el esquema compensado con errores no corrige la perturbación de manera eficiente.

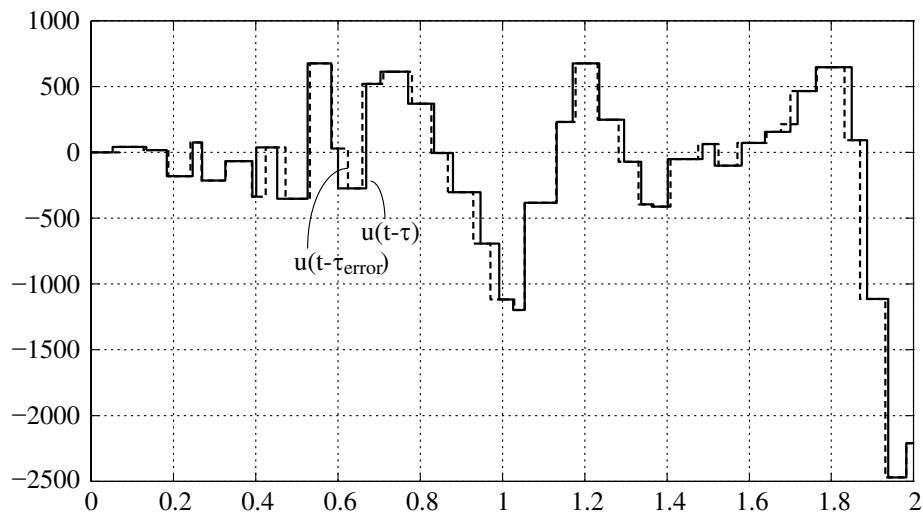


Figura 4.9: Entrada con retardo esquema compensado con errores.

En Figura 4.9 se muestra un detalle entre 0 y 2 s de la entrada  $u(t-\tau)$  (línea entera), que es efectivamente el retardo sufrido por la entrada, y la entrada  $u(t-\tau_{\text{error}})$  (línea de cota), con error en la estimación del retardo que es el valor efectivamente aplicado.

A raíz de las dificultades relacionadas con una posible implementación de este esquema compensado, destacadas en este ejemplo, se justifica la elección de un enfoque de diseño de controlador robusto tal como se propone en la sección siguiente.

### 4.3 Diseño de Controlador Robusto frente a retardos

En esta sección el objetivo es trasladar las especificaciones de lazo cerrado, establecida por el retardo (4.8) y las estándares de performance presentadas en sección B.1 (ver también Figura B.5), a restricciones que asistan en la etapa de diseño de controladores.

Como estas especificaciones son formuladas en función de la respuesta en frecuencia, se han presentado dos métodos de tipo frecuencial.

El primero de ellos propone resolver este problema mediante un enfoque que opera sobre las normas  $H_\infty$  de las funciones de sensibilidad del lazo cerrado, aprovechando que el criterio de

estabilidad se expresa en términos de la cota superior (función del retardo en el dominio frecuencial) del módulo de una transferencia asociada al lazo cerrado (4.8). El diseño  $H_\infty$  planteado por este método se hace parcialmente en el dominio continuo vía la transformación *bilineal*, la cual puede provocar distorsiones en frecuencia y eventuales problemas numéricos.

A los fines de evitar estos problemas, se presenta un segundo método de diseño, íntegramente en el dominio discreto, donde la función restrictiva asociada al retardo se convierte en restricciones de módulo y fase que posibilitan el *loop-shaping* de la ganancia de lazo mediante el uso de ciertos compensadores.

#### 4.3.1 Diseño robusto $H_\infty$ ante retardo variable acotado

##### *Problema mixto de sensibilidades $H_\infty$*

Aquí se propone tratar al problema de control como un problema mixto de sensibilidades  $H_\infty$ . Un enfoque  $H_\infty$  similar pero para el caso en CT, que usa el teorema (4.3), fue realizado en el trabajo de (Sename & Fattouh, 2005) contemporáneo con el realizado en el artículo de (Felicioni et al., 2005) cuyos resultados se presentan a continuación.

El caso  $H_\infty$  estándar (Chiang & Safonov, 2000) consiste en hallar un controlador  $C(s)$  que minimice la norma- $\infty$   $\|W_S S, W_T T\|_\infty$ . Los pesos  $W_S$  y  $W_T$  son funciones de la frecuencia y sirven para obtener las formas deseadas de las respectivas sensibilidades sobre el eje  $j\omega$  (*loop-shaping*). El controlador  $H_\infty$  discreto se obtiene a partir del controlador  $H_\infty$  estándar diseñado en tiempo continuo usando la transformación bilineal, bajo la cual las normas  $H_\infty$  permanecen invariantes.

Típicamente los pesos  $W_S$  y  $W_T$  son filtros pasa-bajos, pasa-altos o pasa-banda de órdenes lo más bajo posible para mantener pequeño el orden del controlador resultante (igual al de la planta aumentada con los pesos  $W_S$  y  $W_T$ ) (Toivonen, 2000). Su selección no es, en general, una tarea trivial, por lo cual el proceso de diseño es usualmente iterativo, pudiendo simplificarse mediante el uso de herramientas de *software*, tal como la *Toolbox* de Control Robusto de MATLAB (Chiang & Safonov, 2000). A continuación se propone elegir estos pesos, en particular el que acota la función de sensibilidad complementaria, teniendo en cuenta además la restricción impuesta por el retardo.

*Proposición para diseño robusto frente a retardos y perturbación*

El método aquí propuesto explota la libertad de elección de los pesos  $W_S$  y  $W_T$  a fin de resolver los problemas de rechazo de perturbaciones y robustez frente a retardos variables. Se presenta como el siguiente procedimiento.

**Procedimiento 4.1:** Reglas para diseño  $H_\infty$  robusto ante retardos

**Selección de  $W_T$ :** Se elige a fin de obtener estabilidad robusta frente a retardos variables.

De acuerdo a (4.8) para alcanzar este requerimiento se debe satisfacer  $|T(z) N B_I(z)| < 1$ . Por lo tanto, se escoge el peso como (4.15).

$$W_T(s) = N \text{ bilin}^{-1}(B_1(z)) \quad (4.15)$$

La especificación de  $B_I(z)$  se transforma al dominio continuo aplicando la transformación bilineal inversa a (4.15) y resulta ser (4.16).

$$\text{bilin}^{-1}(B_1(z)) = \text{bilin}^{-1}(z - 1) = -2s/(s + 2/h) \quad (4.16)$$

**Selección de  $W_S$ :** Idealmente  $|W_S(j\omega)|$  tiene la forma inversa de la deseada para  $|S(j\omega)|$  para satisfacer las especificaciones de diseño estándares mencionadas en sección B.3. Se lo implementa mediante un filtro pasa-bajo de orden  $n$  lo más pequeño posible tal como se sugiere en (Toivonen, 2000)

$$W_S(s) = 1/B \cdot (s + B^{1/n} \omega_{0T})^n / (s + A^{1/n} \omega_{0T})^n \quad (4.17)$$

Con  $A < 1, B > 1$ .

Además, para forzar un error estacionario nulo, se propone agregar a  $W_S$  un término  $1/s$ . En la práctica, y por problemas numéricos, este término es reemplazado por un factor  $1/(s + \varepsilon)$ , donde  $\varepsilon < 0$  es una constante pequeña.

*Ejemplo 4.2:* Aquí se propone resolver el mismo problema del Ejemplo 4.1 usando el método expuesto en la sección previa para diseñar un controlador  $H_\infty$ .

En este caso específico, el peso  $W_T$  definido en (4.15) es:

$$W_T(s) = -2s/(s + 40) \quad (4.18)$$



Mientras que el peso  $W_S$  elegido es (4.19) con  $\varepsilon = 0.01$ ,  $B=30$ ,  $A=1/B$  y  $\omega_{0T} = 13$  rad/s seleccionada de manera de satisfacer la regla de (Åström & Wittenmark, 1997).

$$W_S(s) = 1/B (s + B \omega_{0T}) / (s + A \omega_{0T}) / (s + \varepsilon) \quad (4.19)$$

Usando la función *hinf* de MATLAB se obtuvo el controlador  $C(s)$ , en CT, que luego fue discretizado usando la transformación bilineal resultando (4.20).

$$C(z) = \frac{2.0661(z+1)(z-0.9512)(z-0.861)(z-0.8488)}{(z-0.3876)(z-0.905)(z-0.9786)(z-0.9995)} \quad (4.20)$$

Se puede verificar en Figura 4.10 y Figura 4.11 que con este controlador se resuelve el problema mixto de sensibilidades para retardo nulo y se garantiza la estabilidad para retardo acotado por  $h$  (dado que se satisfacen las especificaciones de diseño frecuencial).

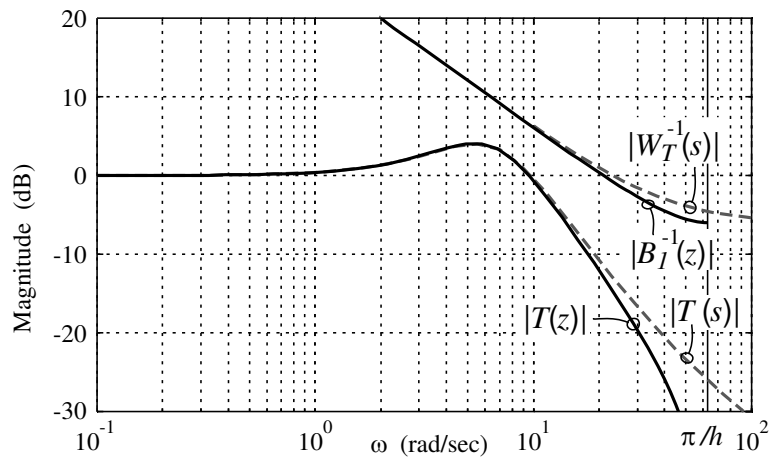


Figura 4.10: Magnitud de  $T$ , continua y discreta (para retardo nulo), Peso  $W_T$  y  $B_I$ .

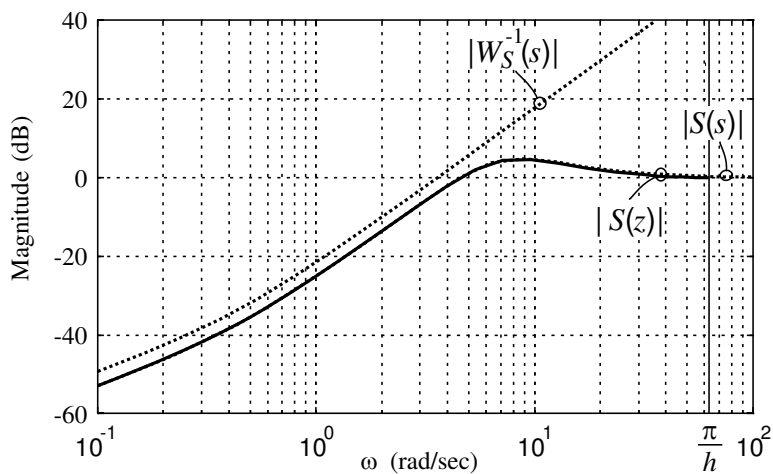


Figura 4.11: Magnitud de  $S$ , continua y discreta (para retardo nulo) y Peso  $W_S$ .

Si bien uno de los pesos elegidos para realizar este diseño  $H_\infty$  acota la respuesta en frecuencia de la sensibilidad  $S$ , la misma en rigor no puede usarse para describir un sistema que es variante en el tiempo (en la Figura 4.11 se evalúa  $S$  para retardo nulo).

Por ello aquí se considera la propuesta de (Lincoln & Cervin, 2002) que consiste en calcular la densidad espectral de la salida y al excitar al sistema con ruido blanco en la perturbación  $d$  de Figura 4.2. Esta densidad puede ser vista como una especie de función de *sensibilidad para sistemas estocásticos*.

Para  $\tau_{max}$  variando entre  $[0, h]$  y  $\omega$  entre  $[0, \pi/h]$ , esta sensibilidad es una superficie tal como se aprecia en Figura 4.12.

Además, se muestra que el valor máximo que alcanza  $S$  está dentro de límites aceptables, es decir  $|S|_\infty \leq M_S$ , con  $M_S = 6 \text{ dB}$ . Para obtener esta función de densidad espectral se usó el software *JITTERBUG* (Lincoln & Cervin, 2002).

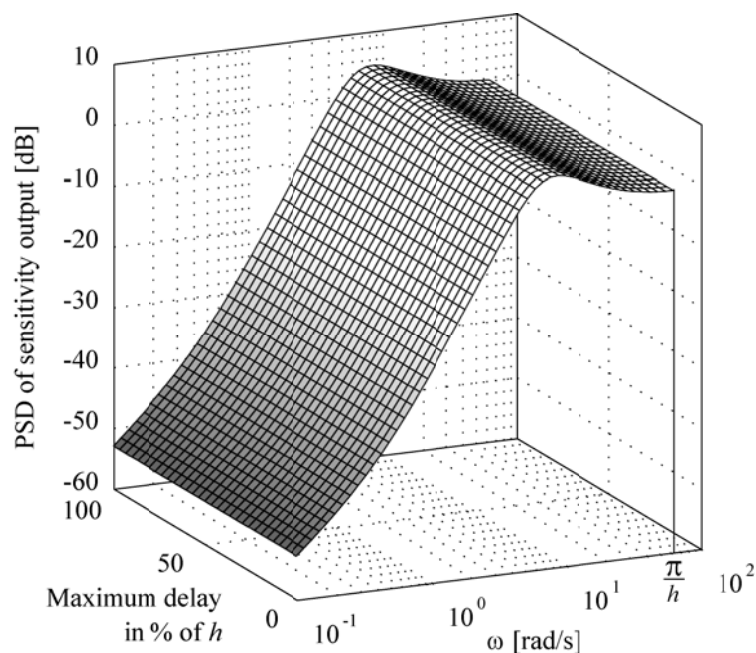


Figura 4.12: Densidad espectral de la función de Sensibilidad.

#### 4.3.2 Loop Shaping en el dominio discreto

Para poder trabajar en el dominio en tiempo discreto frecuencial se presentan un conjunto de herramientas de diseño en el plano magnitud-fase. Luego se analiza la restricción impuesta por el retardo acotado y por último se presenta el método de diseño.

---

*Loopshaping vía diseño de S y T - Diseño en el Plano de Nichols – Messner Revisitado*

La función de lazo abierto puede ser representada en forma paramétrica en el plano magnitud-fase, plano de *Nichols*, siendo la frecuencia la variable implícita. Los denominados círculos *M* y *N* dibujados en dicho plano, forman los contornos donde la magnitud y la fase de *T* permanecen constantes respectivamente. Es decir, en este plano estos contornos son invariantes. Los puntos de intersección entre una dada *L* y tales círculos indicarán los valores que asumirán magnitud y fase de lazo cerrado. Luego, el uso de tales contornos permite mapear juntos en el mismo plano requerimientos de lazo abierto y cerrado.

Siguiendo el concepto de los círculos *M* y *N*, en (Messner, 2001) se desarrolló dos funciones para MATLAB, *sbode* y *tbode* las cuales pueden asistir en un diseño *loop-shaping* en el diagrama de Bode. La función *tbode* resulta de la combinación de los contornos obtenidos al plantear  $|T|=\mu$

$$M_T(\mu) = \begin{cases} \frac{-\cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) + \frac{1}{\mu^2} - 1}}{(1 - 1/\mu^2)} & \mu \neq 1 \\ -1/2\sec(\phi) & \mu = 1 \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\phi_T(\mu) = -\arccos\left[\frac{(1/\mu^2 - 1)|L| - 1}{2|L|}\right] \quad (4.22)$$

Y *sbode* resulta de la extensión de la misma idea para la sensibilidad, contornos  $M_S$  y  $\phi_S$  para  $|M_S|=\mu$ .

$$M_S(\mu) = -\cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) + (1/\mu^2 - 1)} \quad (4.23)$$

$$\phi_S(\mu) = -\arccos\left[\frac{(1/\mu^2 - 1 - |L|)}{2|L|}\right] \quad (4.24)$$

Del análisis de las expresiones (4.21) y (4.23), *Messner* destaca que ambas ganancias  $M_T$  y  $M_S$  dependen sólo de  $\phi(L)$  (y no de  $|L|$ ), y que ambas fases (4.22) y (4.24) dependen sólo de  $|L|$ . A partir de esto, formula un método de diseño que plantea las modificaciones, de una manera casi independiente, de fase y módulo de *L* para conseguir la satisfacción de requerimientos establecidos para las magnitudes y fases de *S* y *T*.

*Comentario 4.1:* La principal desventaja en el uso de *sbode* y *tbode* es que en el diagrama de Bode estos contornos dependen de la magnitud y fase de  $L$  las cuales son funciones de la frecuencia, por tanto cuando la ganancia de lazo cambie también lo harán dichos contornos *objetivos*. Es decir, los objetivos de diseño, mapeados como contornos no son invariantes en dicho diagrama, lo cual es indeseable.

Las restricciones de lazo cerrado (círculos M y N) son invariantes también en un gráfico en coordenadas polares de magnitud y fase, es decir el lugar de *Nyquist*. Sin embargo en un gráfico de Nyquist, se requiere una reconstrucción completa del lugar de la ganancia de lazo cuando por ejemplo se cambia su ganancia de la ganancia de lazo. Por esto resulta mucho más conveniente utilizar la traza de la magnitud-fase y el lugar geométrico resultante forma una carta de Nichols (Kuo, 1996).

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo precedente y en el *Comentario 4.1*, aquí se propone realizar un diseño en el plano de Nichols. Específicamente, se consideran los contornos  $M_T$  y  $M_S$  teniendo en cuenta las observaciones de *Messner* y se agrega la función restrictiva introducida por el teorema de estabilidad frente a retardos variables.

#### *Mapeo de los requerimientos estándares*

La RF de la curva de lugar de  $L$  debe estar siempre en el exterior de ciertas regiones denominadas “*prohibidas*”.

La principal de estas regiones resulta del análisis del requerimiento básico de estabilidad para retardo nulo del Teorema 4.2. Es decir, la fase  $\phi$  (modificada vía  $C$ ) debe ser superior que  $-\pi$  para las frecuencias inferiores que la de corte  $\omega_0$ . Luego, tal región queda delimitada a la derecha por el eje  $-\pi$  e inferiormente por el eje 0dB.

Para incluir los requerimientos estándares de *performance* planteados para ambas sensibilidades,  $|T(e^{j\omega h})| \leq 6 \text{ dB}$  y  $|S(e^{j\omega h})| \leq 6 \text{ dB}$  para  $\omega \in [0, \pi/h]$ , ver sección B.3 por detalles, se adicionan los círculos donde  $M_T \leq 6 \text{ dB}$  y  $M_S \leq 6 \text{ dB}$ .

Finalmente, para satisfacer los requerimientos a)  $|T(e^{j\omega h})| \leq -40 \text{ dB}$  para alta frecuencia y b)  $|S(e^{j\omega h})| \leq -40 \text{ dB}$  para baja frecuencia (ver sección B.3), se incluyen dos áreas admisibles de paso de  $L$ . La primera está limitada superiormente por la curva  $M_S = -40 \text{ dB}$  (en

alta frecuencia) mientras la segunda está acotada inferiormente por  $M_T=40\text{dB}$  (en baja frecuencia). El dibujo de  $L$  deberá cruzar estas últimas dos curvas.

Figura 4.13 muestra secciones prohibidas (gris) y de paso (amarillo) y contornos  $M_T$  y  $M_S$  para algunos  $\mu$  de interés.

Además, en Figura 4.13 se identifican las siguientes frecuencias características del sistema de control:

- Ancho de banda:  $\omega_b / |T(\omega_b)| = -3\text{dB}$ .
- Frecuencia de corte de  $T$ :  $\omega_{0T} / |T(\omega_{0T})| = 0\text{dB}$ .
- Frecuencia de corte de  $L$ :  $\omega_0 / |L(\omega_0)| = 0\text{dB}$ .
- Frecuencia de *roll-off*:  $\omega_c / |L(\omega_c)| = -6\text{dB}$ .
- $\omega_S / |L(\omega_S)| = 2\text{dB}$  y  $\omega_R / |L(\omega_R)| = -7.65\text{dB}$ .
- Frecuencias de cruce:  $\omega_\pi / \arg(L(\omega_\pi)) = (2k+1)\pi$

*Nota 4.1:* A partir de Figura 4.13 se obtiene que la fase de  $L$  debe satisfacer:

$$\phi(\omega_0) \geq -5\pi/6, \phi(\omega_S) \geq -3.072, \phi(\omega_c) \geq -3.072.$$

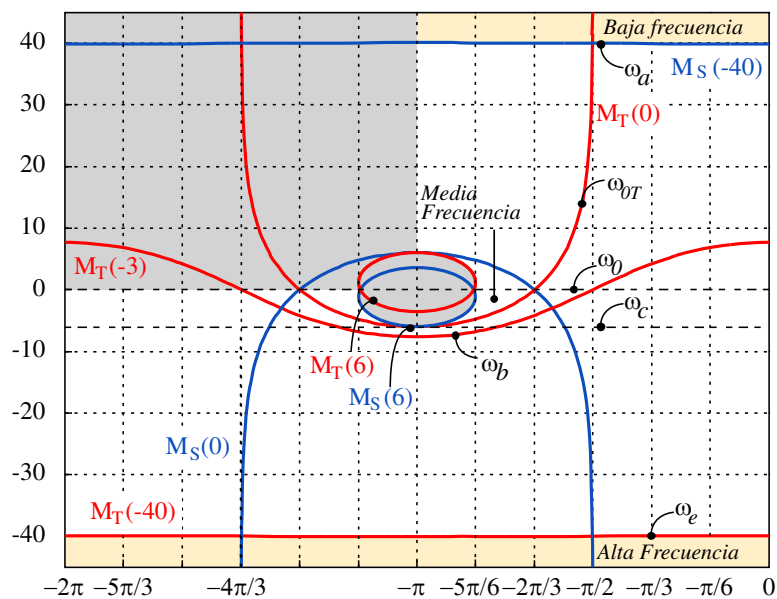


Figura 4.13: Región prohibida y de paso. Contornos.

Para incluir el retardo variable, caracterizado por su cota máxima, seguidamente se analiza la función  $B_N$  definida previamente.

Análisis de de función  $B_N$

Relación de frecuencias en el rango de interés de  $B_N$ : La magnitud en función de la frecuencia de (4.9) es

$$|B_N(z)| = N|B_1(z)| = 2N \sin(\omega h/2) \text{ para } 0 \leq \omega \leq \pi/h \tag{4.25}$$

El rango de frecuencias de mayor interés para evaluar  $B_N$  es  $-3\text{dB} < |B_N^{-1}(\omega)| < 6\text{dB}$ , es decir está delimitado por  $\omega_1$  y  $\omega_3$  definidos en Figura 4.5 tal que  $|B_N^{-1}(\omega_1)| = 6\text{dB}$ ,  $|B_N^{-1}(\omega_3)| = -3\text{dB}$ . Es de interés también conocer el valor de cruce  $|B_N^{-1}(\omega_2)|$  para  $0\text{dB}$ .

Las frecuencias donde la magnitud de (4.25) valen  $\mu_i$  se calculan como sigue

$$\omega_i^N = 2/h \sin^{-1}(1/(2N\mu_i)) \tag{4.26}$$

Siendo  $\mu_1=2$  (6dB),  $\mu_2=1$  (0 dB) y  $\mu_3=1/\sqrt{2}$  (-3dB), se obtienen las frecuencias para tres valores de  $N$  en la siguiente Tabla 4.1.

| N | $\omega_1^N$ | $\omega_2^N$ | $\omega_3^N$ |
|---|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0.505/h      | $\pi/(3h)$   | $\pi/(2h)$   |
| 2 | 0.2506/h     | 0.5053/h     | 0.7227/h     |
| 3 | 0.1668/h     | 0.3349/h     | 0.4759/h     |

Tabla 4.1: Valores de frecuencia de  $\omega_i^N$  para algunos  $\mu_i$  en función de  $N$ .

A partir de los valores de Tabla 4.1 se propone la relación de frecuencias (4.27) en el rango de interés de  $B_N$  con respecto a  $N = 1$ .

$$\omega_i^N \approx \omega_i^1/N \text{ con } i = 1,2,3 \tag{4.27}$$

Esto permite establecer restricciones en las dos siguientes frecuencias típicas sobre la magnitud de  $T(z)$ , enunciadas en el siguiente postulado.

Postulado 4.1

1. La frecuencia  $\omega_3^N \approx \pi/(2hN)$  es una cota superior del ancho de banda  $\omega_b$ .
2. La frecuencia  $\omega_2^N \approx 1/(Nh)$  es una cota superior de la frecuencia de cruce  $\omega_{0T}$ .

□

*Aproximación de  $B_N$  para  $N \geq 1$ :* Para pequeños valores de  $\omega$  (hasta aprox.  $\pi/(2h)$ ),  $|\sin(\omega h)|$  puede ser aproximada por  $|\omega h|$ . Luego, reemplazando en (4.25) resulta (4.28).

$$\mu_B(N, \omega) = 1/(2N \sin(\omega h/2)) \approx 1/(Nh\omega) \quad (4.28)$$

Las cotas de (4.28) son más conservativas que las de (4.26), aunque más simples, para las frecuencias límites y de corte definidas en (4.29).

$$\tilde{\omega}_i^N = 1/(Nh\mu_i) \quad (4.29)$$

De igual manera que en la sección anterior, pero ahora con la expresión aproximada (4.29), se puede obtener la relación de frecuencias en el rango de interés de  $B_N$  con respecto a  $N$  de Tabla 4.2. Al comparar sus valores con los de Tabla 4.1 se puede concluir que los valores exactos y aproximados son muy próximos dando validez al uso de la aproximación (4.29).

| N | $\omega_1^N$ | $\omega_2^N$ | $\omega_3^N$ |
|---|--------------|--------------|--------------|
| 1 | 0.5/h        | 1/h          | $\pi/(2h)$   |
| 2 | 0.25/h       | 0.5/h        | $\pi/(4h)$   |
| 3 | 0.1667/h     | 0.333/h      | 0.4714/h     |

Tabla 4.2: Valores de frecuencia de  $\tilde{\omega}_i^N$  para algunos  $\mu_i$  en función de  $N$ .

*Mapeo de  $B_N$  - Existencia de solución:* Como  $|T|$  debe ser siempre inferior a  $B_N$  para satisfacer el criterio de estabilidad, se reemplaza la constante  $\mu$  en la expresión (4.21) por  $\mu_B$ , que en este caso depende de la frecuencia, y que se define como (4.30).

$$\mu_B(N, \omega) = |B_N|^{-1} = 1/(2N \sin(\omega h/2)) \quad (4.30)$$

Procediendo de manera similar que en el caso de  $\mu$  constante se obtiene la solución (4.31), en la misma se observa que  $M_{TB}$  depende de  $N$ ,  $\phi$  y  $\omega$ , por lo que no resulta invariante en el plano de Nichols.

$$M_{TB}(N, \omega, \phi) = \begin{cases} \frac{-\cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) + (2N \sin(\frac{\omega h}{2}))^2 - 1}}{(1 - (2N \sin(\omega h/2))^2)} & \text{si } \omega \neq \frac{2}{h} \sin^{-1}\left(\frac{0.5}{N}\right) \\ -1/2 \sec(\phi) & \text{si } \omega = \frac{2}{h} \sin^{-1}\left(\frac{0.5}{N}\right) \end{cases} \quad (4.31)$$

Las soluciones  $\Re$  de  $M_{TB}$  existen donde el discriminante de (4.31) es no negativo. Esto es para los argumentos que satisfacen (4.32).

$$\phi < \arccos \sqrt{1 - 4 N^2 \sin(0.5 \theta)^2} \quad (4.32)$$

Evaluando numéricamente (4.32) en función la frecuencia se obtiene la Figura 4.14 para frecuencias limitadas a la derecha por  $\pi/(2Nh)$ , rango de interés de acuerdo al *Postulado 4.1*.

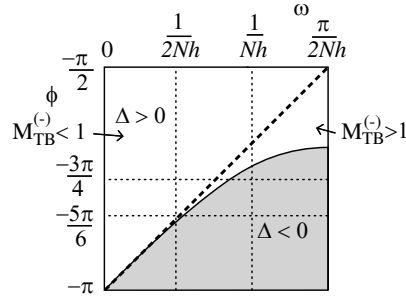


Figura 4.14:  $\Delta$  de  $M_{TB}$ .

En la región gris ( $\Delta < 0$ ) de Figura 4.14 se indica la imposibilidad de intersección entre  $|T|$  y  $B_N$ . En la sección blanca existen las dos soluciones  $\Re$  de  $M_{TB}$ ,  $M_{TB}^+$  y  $M_{TB}^-$ , de acuerdo al signo (+/-) en (4.26) y (4.31). Dentro de esta región solamente se considerarán las soluciones no negativas porque  $M_{TB}$  es una magnitud.

En Figura 4.15 y Figura 4.16 se muestran las soluciones  $M_{TB}^+$  y  $M_{TB}^-$  (en escala logarítmica) como función de  $\omega$  (eje  $z$ ) y  $\phi$  (eje  $x$ ). En Figura 4.15 se observa que siempre  $M_{TB}^+ > 1$  (o equivalentemente  $20 \log_{10}(M_{TB}^+) > 0\text{dB}$ ).

En Figura 4.16 se observa una zona donde  $20 \log_{10}(M_{TB}^-)$  resulta negativo la cual está delimitada a la izquierda por la curva (4.33), que resulta de resolver (4.31) con  $M_{TB}^+ = 1$ .

$$\phi_{M_{TB}=1} = \pi - \arccos(1 - N^2 + N^2 \cos(\omega h)) \quad (4.33)$$

En el caso de  $N=1$ , esto determina una recta incluida en el plano 0dB de valor  $\pi - \omega h$ , que une los puntos  $(\phi_B = \pi, \omega = 0)$  y  $(\phi_B = \pi/2, \omega = \pi/2)$ . A la derecha de esta recta  $M_{TB}^-$  puede ser positiva o no tener solución. Para  $N > 1$  el argumento (4.33) puede ser razonablemente aproximado por la siguiente recta (4.34) para  $0 \leq \omega \leq \pi/(2N)$ .

$$\phi_{M_{TB}=1} = \pi - N\omega h \quad (4.34)$$



Para satisfacer el criterio de estabilidad ambas soluciones de  $M_{TB}$  deben superar la respuesta en frecuencia de  $L$ . Luego se concluye que  $M_{TB}^-$  será la función más restrictiva sobre  $|L|$  si  $|L| \leq 1$  (0dB) y  $M_{TB}^+$  será la más restrictiva en caso contrario.

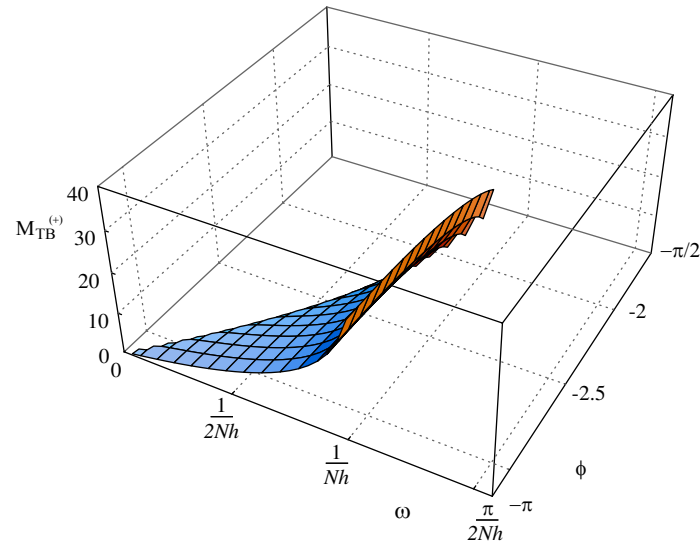


Figura 4.15: Superficie  $20\log_{10}(M_{TB}^+)$ .

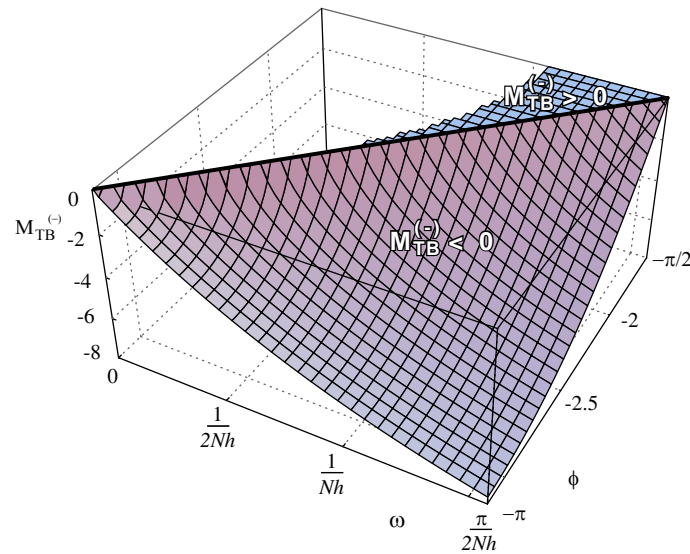


Figura 4.16: Superficie  $20\log_{10}(M_{TB}^-)$ .

#### *Mapeo de Retardo. Restricciones de lazo abierto*

A partir de lo expuesto en la sección previa se enuncia el siguiente postulado y se establecen las restricciones para la ganancia de lazo abierto.

*Postulado 4.2: Margen de fase*

$\omega_0$  debe estar a la derecha de la curva (4.33). Entonces  $\phi_{M_{TB}=1} < \phi(\omega_0)$ , es decir  $M\phi \geq \arccos(1 - N^2 + N^2 \cos(\omega_0 h))$  para  $\omega_0 \in [0, \arccos((-2 + N^2)/N^2)]$ .

De forma aproximada, utilizando (4.34),  $M\phi \geq N\omega_0 h$  para  $\omega_0 \in [0, \pi/(2N)]$  □

Agregando al Postulado 4.2 la *Nota 4.1*, la zona *aproximada* donde debe ubicarse  $\omega_0$  es indicada en blanco en Figura 4.17 a).

Además, a partir del Postulado 4.1 se formulan las siguientes restricciones de lazo abierto:

i) Para satisfacer punto 1,  $\omega_b \leq \omega_3^{lim}$ , hay tres opciones según el valor de  $\phi$  en  $\omega_0$  y  $\omega_c$ :

1. Si  $\phi(\omega_0) > -\pi/2$ , entonces en esta región  $\omega_b \leq \omega_0 \Rightarrow$  puedo adoptar  $\omega_0 \leq \omega_3^{lim}$ .
2. Si  $\phi(\omega_0) \leq -\pi/2$  y
  - a.  $\phi(\omega_c) \leq -2.44$ , entonces en esta región  $\omega_0 \leq \omega_c \Rightarrow$  puedo adoptar  $\omega_c \leq \omega_3^{lim}$ .
  - b.  $-2.44 \leq \phi(\omega_c) \leq \delta_c$  y  $\phi(\omega_R) \geq \delta_R$ , entonces en esta región  $\omega_c \leq \omega_b \leq \omega_R \Rightarrow$  puedo adoptar  $\omega_R \leq \omega_3^{lim}$ . Donde

$$\delta_c = \phi_{M_{TB}=0.5} = \arccos(N^2 \sin(0.5 \omega_c h)^2 - 1.25) \quad (4.35)$$

se obtiene de intersecar el plano  $-6\text{dB}$  con  $M_{TB}^-$  y

$$\delta_c = \phi_{M_{TB}=0.4144} = \arccos(0.823N^2 \sin(0.5 \omega_R h)^2 - 1.41) \quad (4.36)$$

se obtiene de intersecar el plano  $-7.65\text{dB}$  con  $M_{TB}^-$ .

ii) Para satisfacer el punto 2, a partir de (4.29) se tiene  $\omega_{0T} \leq 1/(Nh)$ . Luego, se distinguen los dos casos siguientes a partir del análisis de  $M_{TB}$ :

1. Si  $\phi(\omega) \geq -\pi/2 \forall \omega$ , no hay intersección entre plano  $0\text{dB}$  y  $|T(\omega_{0T})|^{dB} \Rightarrow |T(\omega)|^{dB} < 0\text{dB}$ .
2. En otro caso y supongamos que el módulo decrece para frecuencias crecientes  $|L(\omega_c)|^{dB} \leq |L(\omega_{0T})|^{dB}$  para  $\omega_{0T} < \omega_c$ , si se elige  $\omega_c \leq 1/(Nh)$ ,  $|L(1/(Nh))|^{dB} \leq -6\text{dB}$  entonces se cumple que  $\omega_{0T} < 1/(Nh)$ . Esta acotación para  $\omega_c$  es más conservativa que la que deducida previamente (i.2.b) pero resulta más simple porque es independiente del valor de  $\phi(\omega_c)$ .

Por último, se deriva una restricción para  $\omega_S$  a partir de una combinación de  $M_T \leq 6 \text{ dB}$  ( $\forall \omega$ ) con  $B_N$ . Al intersecar  $M_{TB}^+$  con el plano  $2\text{dB}$  se obtiene (4.37).

$$\delta_S = \phi_{M_{TB}=1.259} = \arccos(2.5178 N^2 \sin(0.5 \omega_S h)^2 - 1.027) \quad (4.37)$$

Si  $\phi(\omega_S) \geq \delta_S \Rightarrow |T(\omega_S)| \leq 6\text{dB}$ . Planteando el peor caso, es decir la igualdad en  $\omega_S$  (ocurre sólo si  $\phi(\omega_S) = -\pi$ ), se tiene que  $\omega_S$  debe ser acotada por la frecuencia límite  $\omega_I^N$ . De lo cual se plantea la restricción  $\omega_S \leq 1/(2Nh)$ . Esta cota de  $\omega_S$  es más conservativa que la establecida por  $\delta_S$  pero es independiente del valor de  $\phi(\omega_S)$ .

En Figura 4.17 b) se mapean las restricciones de lazo abierto (DT) obtenidas, adicionando requisitos de la fase (ver Nota 4.1).

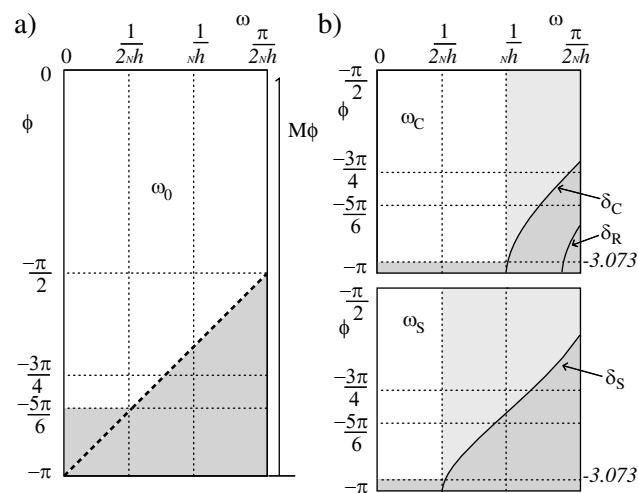


Figura 4.17: a) Margen de fase b) Región para  $\omega_S$  y  $\omega_C$ .

### Método de Diseño Loop – Shaping en tiempo discreto

El método de diseño propuesto aquí consiste en agregar a la planta una serie de compensadores discretos, cada uno de los cuales debe satisfacer especificaciones en los distintos rangos de frecuencia (compensadores *lead-lag* de primer orden o superior) de acuerdo a lo establecido en la sección previa. Este método se presenta en **Procedimiento 4.2**.

En particular se utilizarán compensadores de primer orden ( $PD_{T1}$ ), con un cero real “ $a$ ” (y mínima-fase) y un polo real “ $b$ ” (estable). Dependiendo del valor de tales parámetros es posible adicionar fase negativa o positiva en diferentes rangos de frecuencia deseados. Esta variación de fase está asociada con una variación de la magnitud dada su relación biunívoca.

El análisis frecuencial de distinto tipos de compensadores es objeto de estudio en nuevos trabajos como (León de la Barra & Prieto, 1999).

Los compensadores a utilizar (normalizados con respecto a 0dB) están definidos para  $b \neq 1$

$$C(z) = k[(1-b)(z-a)] / [(1-a)(z-b)] \quad (4.38)$$

- si  $k=1$ ,  $|C(1)|=1$ (0dB) y  $|C(-1)|=[(1-b)(1-a)] / [(1-a)(1-b)]$  superior/inferior a 0dB según  $a$  y  $b$ .
- si  $k=[(1+b)(1-a)] / [(1+a)(1-b)]$ ,  $|C(1)|=k$  resulta superior/inferior a 0dB según  $a$  y  $b$  y  $|C(-1)|=1$ .

En el caso  $b=1$ , (error nulo en régimen), el compensador es

$$C(z) = 2(z-a) / [(1+a)(z-1)] \quad (4.39)$$

Si se agrega una constante  $k_C > 0$ , la magnitud de  $C$  se moverá hacia arriba o abajo en un diagrama frecuencial según sea  $k_C > 1$  o  $k_C < 1$ .

Teniendo en cuenta las restricciones de lazo abierto presentadas en la sección anterior y lo dicho sobre los compensadores se propone el siguiente procedimiento.

**Procedimiento 4.2:** Reglas para diseño *Loop Shaping*

1. Debido a la relación directamente proporcional entre  $M\phi$  de la ganancia de lazo y  $\omega_0$ , adoptar  $\omega_0$  lo más grande posible dentro de esta cota implica una mayor exigencia en el diseño del controlador (el cual debe agregar fase más positiva en  $\omega_0$ ).
2. El menor requerimiento posible del  $M\phi$  requiere que  $\omega_0 \leq \pi / (6Nh) \approx 0.5 / (Nh)$ . Con esto se asegura la satisfacción de la restricción  $\omega_S < 0.5 / (Nh)$ .
3. Se deben identificar los valores de  $|G_d(z)|$  y  $\phi_{P_z}(z)$  en  $\omega=0$  (baja frec.),  $1/(2Nh)$  y  $1/(Nh)$  (media frec.) y  $\omega=\pi/h$  (alta frec.). En MATLAB se dibuja el lugar de  $P_z$  con el comando "nichols" y sobre cada punto de la curva se pueden visualizar sus respectivos valores de magnitud, frecuencia y fase.

4. Si  $|G_d(1)|^{\text{dB}} < 40 \text{ dB}$  y  $-\pi < \phi_{P_z}(1)$ , se debe agregar un compensador de baja frecuencia  $C_1$  (uno o una cascada de  $PD_{TI}$ ) para agregar la magnitud necesaria  $\rightarrow |C_1(1)|^{\text{dB}} > 40 \text{ dB} - |P_z(1)|^{\text{dB}}$ . Se buscará que  $C_1$  afecte lo menos posible magnitud y fase originales de la planta en el resto de frecuencias.
5.  $L$  se rescribe como  $G_d C_1$  (por defecto  $C_1(z)=1$ ), y nuevamente  $|L(e^{j\omega h})|$  y  $\phi_L(e^{j\omega h})$  se deben evaluar en  $1/(2Nh)$  y  $1/(Nh)$ . Dependiendo de esos valores se deberá incluir un compensador de media frecuencia  $C_2$  (uno o una cascada de  $PD_{TI}$ ) para agregar o quitar fase y magnitud tal que  $|L(1/(2Nh))| \leq 2 \text{ dB}$  y  $|L(1/(Nh))| \leq -6 \text{ dB}$ . En ambos casos  $|C_2|^{\text{dB}} \geq 0 \text{ dB}$  en bajas frecuencias, lo que permite adicionar una  $k_C$  si fuera necesario.
6. El nuevo  $L = G_d C_1 C_2$  (por defecto  $C_2(z)=1$ ) debe ser evaluado en  $\pi/h$ . Si  $|L(-1)|^{\text{dB}} > -40 \text{ dB}$  se debe agregar un compensador de alta frecuencia  $C_3$  (uno o una cascada de  $PD_{TI}$ ) que adicione el módulo requerido,  $|C_3(-1)|^{\text{dB}} > 40 \text{ dB} - |L(-1)|^{\text{dB}}$ .  $C_3$  no debería modificar significativamente fase y magnitud de  $L$  resultantes para bajas y medias frecuencias (ajustadas mediante  $C_1$  y  $C_2$ ).
7. Finalmente, el controlador resulta la cascada de los compensadores mencionados,  $C_1, C_2$  y  $C_3$ . □

*Ejemplo 4.3:* Aquí se considera el mismo sistema de *Ejemplo 4.2* y se hace un diseño con siguiendo el **Procedimiento 4.2**. La curva de  $G_d$  es mostrada en Figura 4.18-a.

Según paso 1 se consideró por simplicidad el mínimo margen de fase posible con lo cual debe ser  $\omega_0 < 10$ .

De acuerdo con paso 2 se identificaron magnitud y fase en frecuencias  $1/(2Nh)=10$  y  $1/(Nh)=20$ .

Para el paso 3 se debió agregar magnitud superior a 1 ( $>0 \text{ dB}$ ) en baja frecuencia. Para eliminar el error al escalón en régimen se usa un compensador  $C_1$  con  $b=1$  como (4.39). Debido a que  $\phi_{P_z}(e^{j10h}) = -1.63$ , se eligió un cero ( $a_1=0.5$ ) tal que  $-1 < \phi_{C_1}(e^{j10h}) < 0$ . En Figura 4.18 -b se muestra que  $P_z C_1$  satisface los requerimientos de baja frecuencia.

A continuación (paso 4) se incluyó  $C_2$  para agregar magnitud necesaria. Los requerimientos en  $\omega=10$  son  $|C_2(e^{j10h})| \leq 15.8 \text{ dB}$  y  $\phi_{C_2}(e^{j10h}) < 0.98$  y no es necesario agregar una diferencia de magnitud entre 10 y 20 debido a que  $|L(e^{j10h})| - |L(e^{j20h})|$  es 9.5dB, superior al peor caso (6dB).  $C_2$  fue elegido como (4.38) con  $k=1$ ,  $a=0.95$  y  $b=0.8$ . Incluyendo  $C_2$  la nueva curva de  $L$  se

muestra en Figura 4.19-a (en verde). A esta curva se agregó una pequeña ganancia  $k_c=1.3$  para adicionar  $\sim 2.25\text{dB}$  en 10 y mantener  $|L(e^{j20h})|$  por debajo de  $-6\text{dB}$  ( $L^*$  en negro).

La magnitud en alta frecuencia creció  $|L(-1)|=-19.3$  (fig. 9b), entonces según paso 5 resultó necesario incluir  $C_3$  tipo (4.38) con  $k=[(1+b)(1-a)]/[(1+a)(1-b)]$  para agregar los  $-21\text{ dB}$ . Los parámetros de  $C_3$  se eligieron de manera de no agregar excesiva fase negativa en  $\omega=[10, 20]$ ,  $a=0.8$  y  $b=-0.276$ .

Obteniendo  $C$ , la fase  $CG_d$  es una función conocida y por tanto  $B_l$  queda determinada, cruces verdes en Figura 4.19-b pudiendo verificarse la satisfacción de todos los requerimientos:  $\omega_0=8.43 < 10$ ,  $M\phi=0.61 > \pi/6$ ,  $\omega_{OT}=12.3 < 20$ ,  $\omega_c=12.5 < 20$ ,  $\omega_b=14.3 < 31.41$ .

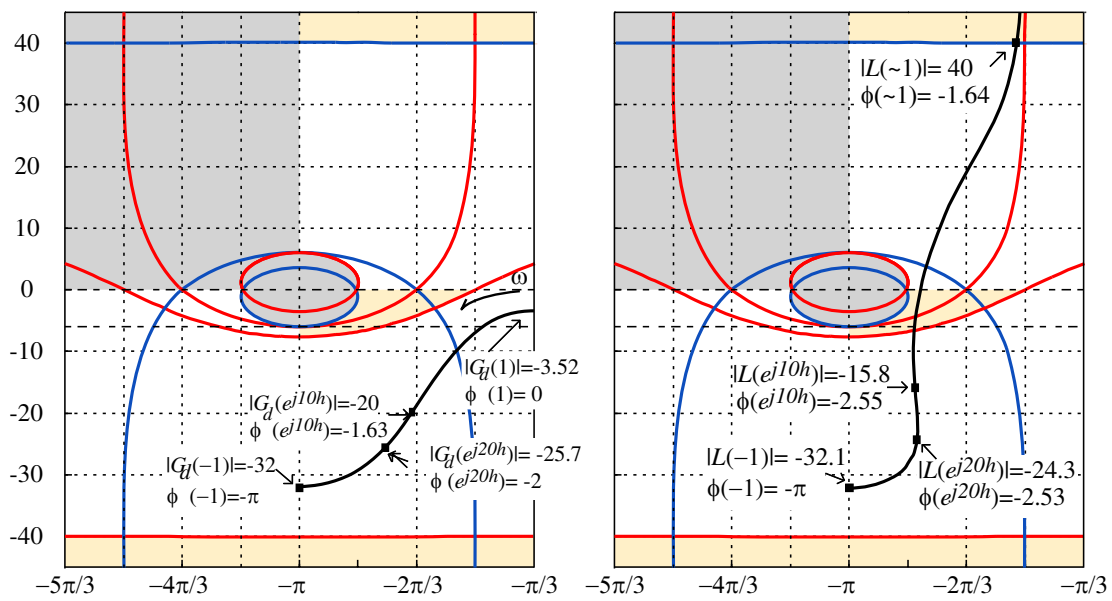


Figura 4.18: Zonas admisibles de paso y prohibidas de L. a)  $G_d$ , b)  $L=G_d C_1$ .

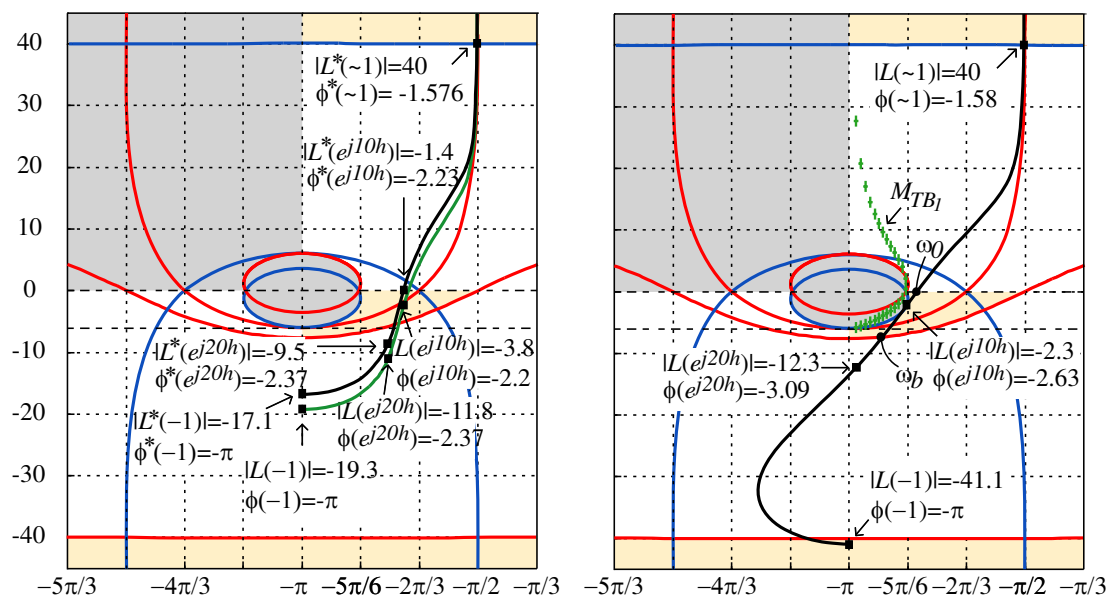


Figura 4.19: Zonas admisibles de paso y prohibidas de L. a)  $L=G_d C_1 C_2$ , b)  $L=G_d C_1 C_2 C_3, B_1$

## 4.4 Evaluación de la estabilidad con otros métodos de la literatura

Los métodos de diseño de controladores propuestos en la sección 4.3 tienen como principal objetivo satisfacer las hipótesis del teorema de estabilidad presentado en sección 4.2.2 que garantiza la estabilidad del sistema ante retardo variable. El modelo usado en este teorema plantea al retardo acotado como una perturbación y por lo tanto es en cierto grado conservativo. Por tanto, interesa determinar cuan conservativo es el controlador obtenible a partir de usar este modelo. A estos efectos, se propone en esta sección utilizar el modelo exacto de lazo cerrado (que incluye los controladores robustos) y verificar la estabilidad con otros criterios de análisis de la literatura. En particular, se analiza la estabilidad tipo “gridding” LMI de (Sala, 2005) y usando el criterio robusto de (Cloosterman et al., 2006), ver sección 2.2.5 .ii por detalles.

Si bien el resultado obtenido de esta verificación en el Ejemplo 4.6 no es generalizable, deja en evidencia que estos criterios de estabilidad de la literatura pueden fallar en garantizar la estabilidad del sistema con retardo variable, debido a sus propias limitaciones, la que si es confirmada por el criterio frecuencial.

### 4.4.1 Modelo de lazo cerrado en espacio de estados

El modelo exacto discretizado de la planta con retardo en la acción de control fue presentado en sección A.4. A partir de considerar tal modelo en conjunto con el modelo del controlador, definido a continuación, se puede construir la matriz de lazo cerrado para cada retardo (Nilsson, 1998). Sin pérdida de generalidad, en esta sección se considera  $\tau_k \leq h$ .

Sea el controlador lineal e invariante en el tiempo (independiente del retardo  $\tau_k$ ) descrito en su forma de espacio de estados (4.40) cuyas matrices tienen las dimensiones adecuadas.

$$\begin{aligned} x_{k+1}^c &= \Phi^c x_k^c + \Gamma^c y_k^c \\ u_{k+1} &= C^c x_k^c + D^c y_k^c \end{aligned} \quad (4.40)$$

Entonces, el sistema en lazo cerrado se puede escribir como (4.41) donde  $z_k = [x_k \quad x_k^c \quad u_{k-1}]^T$  es el estado aumentado de planta, controlador y entrada con retardo y cuya matriz de lazo cerrado es (4.42).

$$z_{k+1} = \Phi_{LC}(\tau_k) z_k \quad (4.41)$$

$$\Phi_{LC}(\tau_k) = \begin{bmatrix} \Phi + \Gamma_0(\tau_k) D^c(\tau_k) C & \Gamma_0(\tau_k) C^c(\tau_k) & \Gamma_1(\tau_k) \\ \Gamma^c C & \Phi^c & 0 \\ D^c C & C^c & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

#### 4.4.2 Problema de estabilidad. Métodos en EE

Dado que  $\tau_k$  puede tomar infinitos valores en el intervalo, se tiene un número infinito de matrices  $\Phi_{LC}(\tau_k)$  definidas por (4.42). Por tanto, una condición suficiente para verificar la estabilidad es mediante la existencia de una QCLF común a todas estas matrices. Esto implica que se debe encontrar una matriz  $P$  que satisfaga simultáneamente las infinitas LMI. Es decir, si existe una solución de (4.43), entonces el sistema es robusta, global y asintóticamente estable para cualquier secuencia de retardos  $\tau_k \in [0, \tau_{max}]$ .

$$\begin{aligned} P = P^T > 0 \\ \Phi_{LC}(\tau_k)^T P \Phi_{LC}(\tau_k) - \Phi_{LC}(\tau_k) < 0, \forall \tau_k \in [0, \tau_{max}] \end{aligned} \quad (4.43)$$

Para poder tratar este problema, se debe reducir la cantidad de LMI a un número finito.

#### *Gridding LMI*

Un primer enfoque planteado, ver (Apkarian & Adams, 1998) y (Sala, 2005), es considerar un número finito de retardos que sea representativo (denominado *gridding LMI*) y luego buscar una  $P$  que satisfaga este conjunto finito de LMI.

Sin embargo la existencia de una  $P$  que satisfaga tales *gridding*-LMI no garantiza que se satisfaga el conjunto de las infinitas (4.43) para todo  $\tau_k$  en el intervalo. Una posibilidad entonces es realizar un *gridding* mas fino y comprobar si esta misma  $P$  satisface tales LMI.

#### *Estabilidad de politopo con QCLF*

Para evitar este proceso iterativo se puede el enfoque usar el Teorema 4.1 de (Cloosterman et al., 2006) que usa un número finito de LMI para garantizar estabilidad asintótica robusta para retardos acotados. Este teorema ha sido transcripto en sección 2.2.5 como Teorema 2.1.



#### 4.4.3 Análisis de estabilidad en el caso de estudio

A continuación se usa el modelo definido en 4.4.1 y los criterios de análisis de estabilidad de 4.4.2 considerando los controladores diseñados con los métodos de sección 4.3.

*Ejemplo 4.4:* Sean la planta definida en el *Ejemplo 4.1* y los controladores calculados con la técnica  $H_\infty$  en *Ejemplo 4.2* y el método “*loop-shaping*” de *Ejemplo 4.3*, denominados  $C_\infty$  y  $C_{LS}$ , respectivamente.

Las matrices discretas del modelo de la planta que dependen de  $\tau_k$ , definidas en ecuaciones {(A.9) y (A.10)}, son a calculo hecho las siguientes

$$\Gamma_0(\tau_k) = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/6 e^{-3(h-\tau_k)} - 1/2 e^{-(h-\tau_k)} \\ -1/2 e^{-3(h-\tau_k)} + 1/2 e^{-(h-\tau_k)} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$\Gamma_1(\tau_k) = \begin{bmatrix} -1/6 e^{-3(h-\tau_k)} + 1/2 e^{-(h-\tau_k)} + 1/6 e^{-3h} - 1/2 e^{-h} \\ 1/2 e^{-3(h-\tau_k)} - 1/2 e^{-(h-\tau_k)} - 1/2 e^{-3h} + 1/2 e^{-h} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Esto permite definir la matriz del modelo aumentado tal como se definió en (4.42).

En todos los casos evaluados para obtener la CQLF se usaron las funciones del “Robust Control Toolbox” de MATLAB, en particular se usó el solver “feasp” para resolver las LMI.

Aplicando la técnica LMI mencionada para un *gridding* de retardos equiespaciados se obtuvo la Tabla 4.3. Con ✓ se indica que se obtuvo una CQLF que satisface las LMI y con NO se indica el caso contrario.

| Gridding         | $C_\infty$ | $C_{LS}$ |
|------------------|------------|----------|
| $\tau_{max}/25$  | ✓          | ✓        |
| $\tau_{max}/50$  | NO         | ✓        |
| $\tau_{max}/500$ | NO         | NO       |

Tabla 4.3: Estabilidad *gridding* LMI.

A partir de lo informado en Tabla 4.3, se remarca que al hacer un *gridding* mas fino, no se puede encontrar una CQLF para ninguno de los dos controladores.

Específicamente el resultado que proporcionó el algoritmo “feasp” es que no se puede garantizar la factibilidad de existencia de una CQLF. Este hecho puede ser el resultado de un

problema de tipo numérico como el remarcado en (Lin & Antsaklis, 2008), o ser una consecuencia de que efectivamente no exista una QCLF. Aunque no pueda identificarse claramente el motivo, lo importante es observar que no se puede encontrar una QCLF para las infinitas matrices en el intervalo que garantice la estabilidad.

Usando el enfoque de politopo en primer lugar se mapea el retardo en la matriz de lazo cerrado (4.42) introduciendo las matrices (4.44) y (4.45). El método de Teorema 2.1 requiere entonces calcular los mínimos y máximos de los coeficientes de (4.42), generar todas las matrices teniendo en cuenta estos valores extremos y buscar una QCLF para las matrices extremas. Según lo previsto por este Teorema y de acuerdo a los órdenes del controlador y la planta, en el caso de controlador  $C_\infty$  se deben resolver  $2^{14}$  LMI mientras que en  $C_{LS}$  serán 212 LMI. Si bien ambos son números grandes, son cantidades finitas. A cálculo hecho, utilizando el solver “feasp”, el resultado para ambos controladores fue que no se puede encontrar una QCLF y en consecuencia no se puede garantizar la estabilidad con este criterio.

A partir de este ejemplo se concluye que el uso del criterio frecuencial, que puede parecer conservativo a-priori debido al modelo que utiliza, garantiza la estabilidad del sistema con retardo variante en el tiempo, y tal estabilidad no puede ser comprobada con métodos basados en la existencia de una QCLF. Por tanto, el diseño de controladores que satisfagan el criterio, propuesto en sección 4.3, no es necesariamente muy conservativo frente a otras propuestas.

#### 4.5 Efecto del retardo en la performance

En esta sección, el objetivo es presentar y discutir críticamente ciertos índices de desempeño de la literatura que permiten cuantificar el efecto que produce el retardo variable en la performance de un sistema en lazo cerrado.

En general, debido a la naturaleza del retardo variante en el tiempo, la performance no puede ser evaluada con parámetros clásicos como aquellos asociados con la respuesta temporal usados en Capítulo 3. Sin embargo, el modelo de sección 4.1 está constituido por un sistema invariante en el tiempo que es perturbado por un error inducido por el retardo y por tanto permite cierto análisis basado en la relación con las funciones de sensibilidad. Una buena performance en este aspecto requiere que exista una baja incidencia de esta perturbación en la salida de la planta. Dado este interés, en el análisis no se consideran los ruidos de entrada y salida.

Como se muestra a continuación existe una relación de compromiso entre una buena performance, en todos sus aspectos, y la estabilidad con respecto al retardo.

#### 4.5.1 Trade-off entre estabilidad y performance

A continuación se analizarán las implicancias de la satisfacción del criterio de estabilidad del Teorema 4.2 y los requerimientos estándares de control de los métodos de diseño de controladores propuestos en sección 4.3.

La performance del sistema con retardo variable cuyo diseño satisfaga el requerimiento básico de estabilidad tiene dos aspectos esenciales con respecto a la función de sensibilidad complementaria  $T$ , por un lado  $T$  representa la relación entre la entrada de referencia y salida del sistema que tiene que satisfacer ciertos criterios de diseño y por otro lado  $T$  debe ser acotada por la limitación establecida por el criterio de retardo.

#### *Relación con el ancho de banda*

En el primer caso se destaca que el ancho de banda del lazo cerrado tiene una relación directa con el tiempo de respuesta del lazo, es decir un sistema LTI con mayor ancho de banda responde más rápidamente (Ogata, 1996). Esto se puede evaluar considerando la relación aproximada (4.46) entre el tiempo de establecimiento y el periodo de muestreo, ver (Åström & Wittenmark, 1997).

$$T_r/h \approx 2.2 / (\omega_b h) \quad (4.46)$$

A partir del Postulado 4.1 se tiene que  $\omega_b h \leq 1/N$ , por lo cual al calcular su máximo valor e igualarlo con (4.46) se determina la relación (4.47) entre el tiempo de establecimiento y el periodo de muestreo y el número  $N$ .

$$T_r/h \approx 2.2 N \quad (4.47)$$

En segundo lugar, el índice de estabilidad  $Q_{estab}(\omega)$  de (Lincoln, 2002) particularizado para los controladores robustos de sección 4.3 se define en (4.48).

$$Q_{estab}(\omega) = \|T\| \quad (4.48)$$

Este índice es una medida que cuantifica cuan cerca está el sistema de inestabilizarse debido a su cercanía con el límite impuesto por el teorema para cierto cota de retardo.

Entonces, a mayor ancho de banda se tiene un sistema más rápido pero el sistema está más cerca de la inestabilidad, por lo que  $Q_{estab}(\omega)$  es mayor y el índice de performance es peor.

*Interpretación 4.1:* A partir de (4.47) se desprende que dado un  $h$  fijo y  $\omega_b$  cerca de su límite, el rediseño del controlador para un valor incrementado de la cota de retardo ( $N \uparrow$ ) implica un incremento de  $T_r$ . En otras palabras, la compensación para retardos más grandes se hace a expensas de forzar que la relación entrada salida (sin retardo) sea más lenta.

#### *Índice de performance y su relación con el ancho de banda*

Mientras el índice de performance  $Q_{perf}(\omega)$  definido en sección 4.2.4 sea más pequeño, el sistema es más robusto frente a la perturbación introducida por el retardo. Su valor es útil para comparar diferentes controladores y determinar cuál es el más adecuado.

Particularizando este índice para el caso de controladores robustos, la salida asociada al *jitter*  $\|y_{jitter}\| = \|Q_{perf}(\omega)\| \|N B_1\| \|w\|$  es (4.49).

$$Q_{perf}(\omega) = \|G_d S\| \quad (4.49)$$

Entonces, de acuerdo a las especificaciones estándares  $S$  fue diseñado para ser muy pequeña en baja frecuencia y por tanto  $Q_{perf}(\omega)$  resulta pequeña en el mismo rango. Asimismo, en alta frecuencia  $|S| \approx 1$  y por tanto  $Q_{perf}(\omega)$  depende de la respuesta en frecuencia original de la planta  $|G_d(e^{\omega h})|$ .

Por tanto la performance asociada al retardo en alta frecuencia queda determinada por la planta y no puede cambiarse tal como se hace en el esquema compensado de (Lincoln, 2002).

*Interpretación 4.2:* Debido a la restricción de complementariedad  $|S|$  y  $|T|$  no se pueden hacerse igual de pequeñas en el mismo rango de frecuencia. Por esto, si  $|T|$  debe achicarse para un incremento de la cota de retardo ( $N \uparrow$ ) de acuerdo a las consideraciones de *Interpretación 4.1*, entonces  $|S|$  resulta cercana a 0dB en un mayor rango de frecuencias y en el parámetro  $Q_{perf}(\omega)$  se traslada la RF de la planta en un mayor rango de frecuencia.

#### 4.5.2 Otros índices de performance

Los índices mencionados en la subsección previa son muy útiles a la hora de analizar la calidad de un controlador en relación a su respuesta frente a perturbaciones del sistema e inducidas por el retardo. Sin embargo, estos índices proporcionan resultados sólo cualitativos. Para poder cuantificar la performance se debe conocer como varía este retardo.

Suponiendo que el retardo tiene una conocida distribución de probabilidades, una alternativa para cuantificar la performance es usar un costo cuadrático calculable analíticamente con ciertas herramientas disponibles en MATLAB (por ejemplo *calcost* para JITTERBUG y TRUETIME). Otra alternativa a este análisis es usar simulación, lo que puede ser útil cuando se quieren evaluar casos más complejos, como los citados a continuación: respuesta temporal a escalón de referencia; respuesta frente al ruido, respuesta a perturbaciones de carga, presencia de elementos no lineales en el lazo de control (por ejemplo saturación del actuador). Inclusive en estos casos más complejos se puede calcular la función de costo haciendo una simulación de Monte Carlo y luego calcular el valor medio de la función de costo (Nilsson, 1998).

En el siguiente ejemplo se considera el cálculo de la función de costo cuadrática mencionada y se muestran algunas simulaciones de ciertas condiciones de perturbaciones.

*Ejemplo 4.5:* Aquí se analiza la performance para el sistema de *Ejemplo 4.1* con los controladores calculados con la técnica  $H_\infty$  en *Ejemplo 4.2* y el método *Loop-Shaping* de *Ejemplo 4.3*. En primer lugar, se realiza una evaluación cualitativa de la *performance* de estos controladores utilizando los índices de sección 4.5.1. En segundo término, se comparan los costos suponiendo un retardo distribuido uniformemente en  $[0, \tau_{max}]$ . Y por último se muestran y analizan comparativamente respuestas temporales en presencia de perturbaciones.

Índice de estabilidad: Observando las magnitudes de  $T$  en la Figura 4.20 para los dos controles estables (en presencia de *jitter*), se concluye que los controladores *loop-shaping* (en azul) y  $H_\infty$  (en rojo) tienen mayor ancho de banda que el LQR compensado, lo cual mejora el tiempo de respuesta en lazo cerrado, pero da un  $Q_{estab}(\omega)$  peor. Además, como la ganancia de  $T$  en baja frecuencia es unitaria, los diseños  $H_\infty$  y *loop-shaping* resuelven el problema de seguimiento de referencia, no así el diseño compensado que tiene error estacionario.

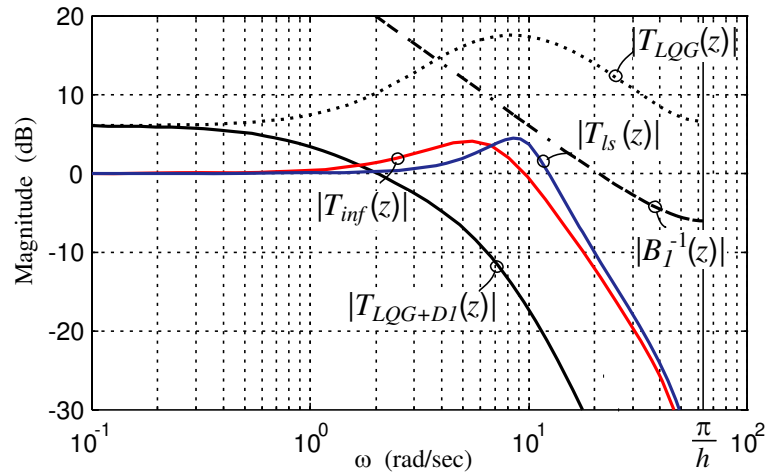


Figura 4.20: Sensibilidad complementaria para los distintos controles.  $Q_{\text{estab}}(\omega)$ .

Índice de performance: La cercanía con  $B_1^{-1}$  indica un menor margen de performance. Los controladores  $C_\infty$  y  $C_{LS}$  tienen peor índice que compensado-LQR como se ve en Figura 4.21.

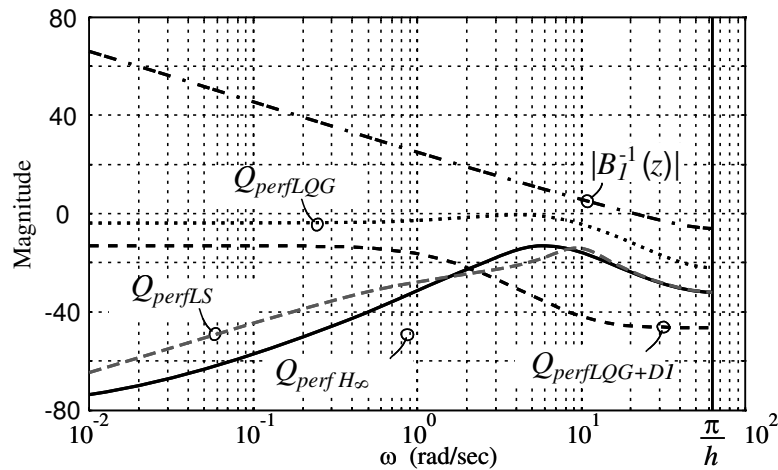


Figura 4.21:  $Q_{\text{perf}}(\omega)$  para los distintos compensadores.

Costo cuadrático: Para evaluar cuantitativamente la *performance* de los controladores se calculan dos funciones de costo estacionario ( $J_x$  y  $J_y$ ) para un retardo  $\tau(k)$  distribuido uniformemente en  $[0, \tau_{\text{max}}]$  con  $\tau_{\text{max}}$  entre 0 y  $h$ . El costo  $J_x$  pesa mayormente a los estados, mientras que  $J_y$  definido en (4.50) pondera a la salida y a la acción de control. Ambas se calculan con la función *calcost* de *JITTERBUG* (Lincoln y Cervin, 2002).

$$J_y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (y^2 + u^2) dt \quad (4.50)$$

Como se ve en la Figura 4.22, el sistema con el control  $LQG$  (sin compensar) es inestable para  $\tau_{\max} > 0.4h$  (costo infinito,  $J_x = J_y = \infty$ , significa inestabilidad en términos de estabilidad cuadrática). Teniendo los controladores  $H_\infty$ ,  $LS$  y el compensado se tienen costos finitos y se concluye que estos sistemas resultan *estables en sentido cuadrático* para todo  $\tau_{\max} \leq h$ .

Dado que el controlador  $LQG$  fue calculado con el objetivo de minimizar el costo en los estados, en presencia de ruidos de medición y del proceso, y dado que el efecto de  $D_I$  desaparece para retardo nulo, ambos diseños alcanzarán el mínimo valor posible de  $J_x$  para  $\tau_{\max} = 0$ . A medida que  $\tau_{\max}$  crece, el  $J_x$  del controlador compensado crece levemente, lo que se debe a que el mismo funciona como un controlador adaptable que determina la señal de control usando el retardo real en cada período de muestreo. En el caso extremo  $\tau_{\max} = h$ , el costo  $J_x$  de los controladores  $H_\infty$  y  $LS$  son aproximadamente el doble del  $J_x$  del sistema compensado. Esto se debe a que para obtener el control  $H_\infty$  se dejan de lado las cuestiones asociadas con los estados para priorizar ciertas relaciones entre  $S$  y  $T$ .

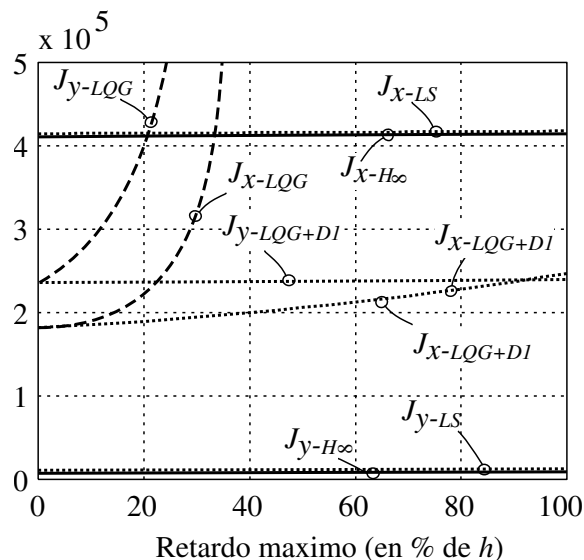


Figura 4.22: Costos  $J_y$  y  $J_x$  para los diferentes controles.

Con esto, es esperable que el costo definido  $J_y$  en (4.50) resulte siempre mayor para el controlador compensado que para los  $H_\infty$  y  $LS$  como se ve en Figura 4.22. Este resultado es coherente con las formas de las funciones de sensibilidad  $S$  y  $T$  para cada controlador y las respuestas temporales de  $y$  y  $u$ , mostradas en la siguiente sección.

*Respuesta Temporal:* Figura 4.23 y Figura 4.24 muestran la salida de la planta y la acción de control, respectivamente, resultantes de las simulaciones de los controladores  $LQR+D_I$ ,  $H_\infty$  y  $LS$  para una condición inicial  $X_i = [50 \ 50]^T$ , con ruido de proceso  $u_p$  y de medición (proceso

discreto con varianza unitaria), y una perturbación escalón  $d$  de amplitud  $-150$  que entra en 5s ambas para el retardo (constante) de peor caso  $\tau_{\max}=\tau_k=h$ . En ambas figuras se ve que con los controladores  $LS$  y  $H_\infty$  la evolución de las variables mencionadas es más rápida, de menor amplitud, presenta mejor comportamiento frente a los ruidos y rechaza la perturbación escalón. Las evoluciones del controlador  $LS$  son ligeramente más rápidas debido al mayor ancho de banda del diseño.

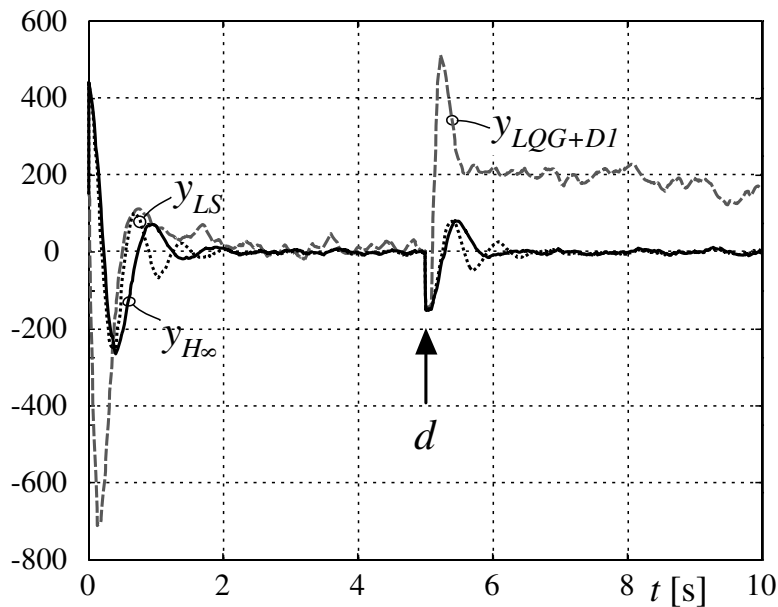


Figura 4.23: Salidas  $y$  e  $(\hat{y})$  para los diferentes controles.

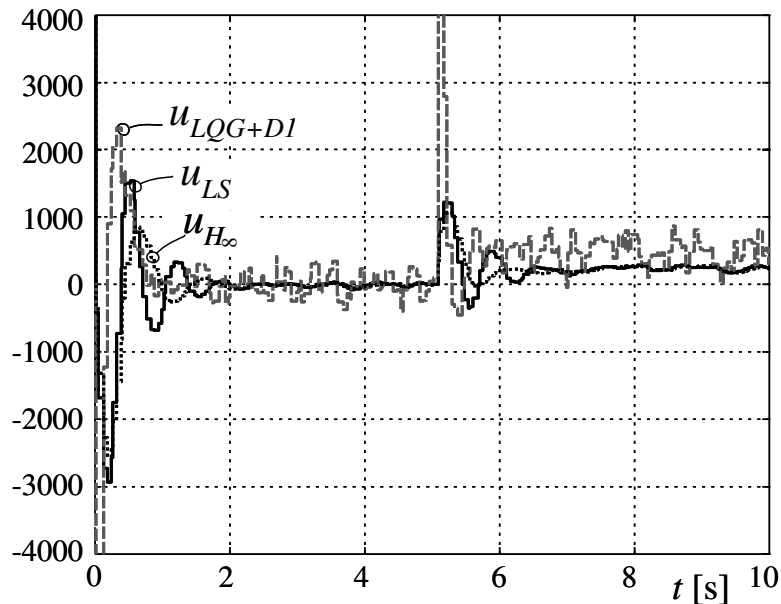


Figura 4.24: Acción de control para los diferentes controles.



---

## 4.6 Conclusiones

En este capítulo se propusieron dos nuevos métodos de diseño robustos frente a retardos inducidos por la red de comunicación en sistemas distribuidos de control, en base a un criterio de estabilidad para sistemas *SISO* con retardos variables y acotados disponible en la literatura (Kao & Lincoln, 2004).

El primero de ellos plantea resolver un problema  $H_\infty$ , es decir realizando un *loop-shaping* de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria del lazo cerrado, incluyendo la información sobre el retardo en los pesos que definen el perfil de las magnitudes de estas funciones en el dominio frecuencial.

El segundo método para el diseño robusto de controladores se realiza íntegramente en el dominio  $z$  y a través del planteo de ciertas reglas ayuda a reducir las iteraciones de prueba y error propias del diseño *loop-shaping*. Específicamente se formularon una serie de restricciones a la ganancia de lazo abierto en base a especificaciones estándares que pesan las funciones de sensibilidad y lo establecido por el criterio de estabilidad. Particularmente se obtuvo una relación directa entre el margen de fase y el máximo retardo que podrá admitir el sistema de control. Complementariamente se establecieron cotas conservativas pero simples para otras frecuencias de interés.

Además, se dedujo que la compensación requerida para retardos más grandes se logra a expensas de la velocidad de respuesta del lazo cerrado.

Los diseños y análisis de sistema de control se hicieron con el apoyo de herramientas numéricas del entorno MATLAB, lo que permitió una evaluación exhaustiva del método a través de distintos indicadores y bajo distintas hipótesis, tanto en términos intrínsecos como en comparativos con otra técnica de la literatura basada en el mismo teorema de estabilidad. El método es evaluado favorablemente en cuanto a simplicidad de diseño y de implementación, en cuanto a verificar cuan conservativo es y también en cuanto a la robustez y la *performance* prestada.

# CAPÍTULO 5

## **Control de sistemas discretos LTI con período de muestreo variable en base a métodos Lie-Algebraicos**

Este Capítulo propone soluciones basadas en un enfoque Lie-algebraico al problema teórico de la estabilización en lazo cerrado de plantas LTI continuas con muestreo no uniforme. La motivación para tratarlo en esta tesis es un enfoque activo en relación con los problemas inducidos por la red en los NCS: en vez de elegir un período de muestreo fijo y un controlador robusto asociado que garantice estabilidad ante los retardos, se admiten variaciones on-line (pre-especificadas) del período de muestreo y se diseña una familia de controladores estabilizantes, cada uno asociado a cada período. Así se tiene una política activa que previene la ocurrencia de los retardos y que conlleva el beneficio adicional de descongestionar la red. Esto aporta una solución de control adaptable a un problema relevante de la teoría de control y, simultáneamente, mediante su empleo conjunto con el diseño de las estrategias de planificación de las redes de comunicación, se ofrece una aplicación que resuelve el problema. El Co-Diseño se tratará en el Capítulo 6. En este Capítulo 5 se proponen métodos novedosos de diseño de control para estabilización, basados en la aplicación de métodos Lie-algebraicos sobre las matrices de evolución en tiempo discreto de la familia de controladores mencionada. Se tratan casos de realimentación con y sin observadores de estado, se analiza la robustez de los esquemas resultantes y se brindan ejemplos de cómputo.

### **5.1 Introducción**

Como ya se ha visto en Capítulos 1 y 2 una causa común de la aparición de los retardos en los NCS es la sobrecarga del recurso compartido. En efecto, los clientes del sistema integrado de comunicación compiten por los recursos del canal de comunicación y de los procesadores de información (CPUs). El consiguiente aumento de la información procesada y transmitida por los mismos recursos conlleva el riesgo de su sobrecarga, lo cual puede traducirse en violación de restricciones temporales exigidas por los sistemas de control, por ejemplo en el

---

intercambio de información entre controlador y planta (recepción de mediciones y envío de acciones de control), y en el mismo cálculo de las acciones de control, o sea, aparecen retardos y pérdidas de paquetes. Esto degrada el desempeño de los lazos cerrados, pudiendo incluso llevar a su inestabilidad. Clásicamente, la resolución de este problema es la asignación de más recursos informáticos, pero también puede pensarse en soluciones de uso más eficiente del mismo. Por detalles referirse a Capítulo 1.

### 5.1.1 Antecedentes

Entre las soluciones propuestas para el uso eficiente de los recursos compartidos se halla la adaptación de la tasa de procesamiento/transmisión de la información. Algunos esquemas que implementan estas soluciones se presentan y discuten en sección 2.3.2 y Capítulo 6.

La adaptación de la tasa introduce la necesidad de diseñar controladores que estabilicen el sistema de control ante variación del período de muestreo, ya sea que resulten robustos frente a la variación o que se adapten a la misma. La adaptación tiene como objetivo mejorar la performance ante la variación del período comparada con la obtenible con un controlador común robusto. Propuestas de diseño robusto han sido presentadas en (Sala, 2005), (Branicky et al., 2002) y recopiladas en el reciente artículo de estado del arte (Hetel et al., 2009).

Aquí se ataca el problema con un enfoque de diseño adaptable.

Una primera proposición para adaptar los parámetros del controlador discreto al valor del período de muestreo fue presentada en (Albertos & Crespo, 1999) aunque este enfoque, justificado en la variación en un pequeño intervalo de los períodos, debe considerarse sólo una propuesta ya que no tiene ninguna verificación de estabilidad. En (Eker et al., 2000), (Cervin et al., 2002) se propone un diseño óptimo LQ para adaptar la ley de control a variaciones de la tasa de transmisión de información. Como se muestra en (Schinkel et al., 2002), el lazo cerrado diseñado con una técnica LQ puede acusar inestabilidad para ciertas secuencias de variación de la tasa. Esto se resuelve en el mismo artículo con un diseño de controladores óptimos con horizonte finito resolviendo un problema de desigualdades matriciales lineales (LMI, linear matrix inequalities) que garantiza la estabilidad. El problema con este enfoque es que la falta de control sobre la resolución numérica de las desigualdades puede conducir a resultados muy conservativos. Un análisis del problema de inestabilidad y las alternativas

comentadas, para el mismo ejemplo de (Schinkel et al., 2002), se presenta en el Apéndice E de este Capítulo.

Se remarca entonces que no sólo es necesaria la estabilidad de cada uno los modos sino también la estabilidad del sistema frente a cualquier secuencia de conmutación.

### ***Condiciones de estabilidad de sistemas conmutados.***

Una condición necesaria y suficiente de estabilidad asintótica del sistema conmutado ante cualquier secuencia de conmutación es que el radio espectral conjunto (JSR, *Joint Spectral Radius*) sea inferior a la unidad (Gurvits, 1995), (Blondel et al., 2004), ver definiciones y detalles en sección C.2 de Apéndice C. Sin embargo, la principal dificultad en el uso de esta condición reside en el cálculo del JSR (Tsitsiklis & Blondel, 1997).

Tal estabilidad también implica la existencia de una función poliédrica común de Lyapunov, tal como ha sido demostrado en (Molchanov & Pyatnitskii, 1989). Sin embargo, tampoco es tarea simple encontrar tal función poliédrica (Lin & Antsaklis, 2008).

Las funciones cuadráticas son la clase de funciones que han sido elegidas en la mayor parte de los artículos de la literatura como funciones candidatas comunes de Lyapunov. Éstas son denominadas QCLF, por sus siglas en inglés de *Common Quadratic Lyapunov Function*.

Como ha sido mostrado en (Shorten et al., 2007) la estabilidad uniforme exponencial del sistema conmutado ante cualquier secuencia de conmutación no implica que exista una QCLF. Es decir, la existencia de una QCLF es sólo una condición *suficiente* para la estabilidad del sistema conmutado.

Al ser sólo una condición suficiente se obtienen resultados en cierto grado conservativos. Para disminuir este grado se pueden usar otra clase de funciones de Lyapunov como las denominadas funciones cuadráticas *conmutadas* de Lyapunov (*Switched Quadratic Lyapunov functions*), ver (Daafouz et al., 2002), (Fang et al., 2004), (Daafouz & Bernussou, 2001) o en el caso de poder restringir la secuencia de conmutación usar las Funciones Múltiples de Lyapunov (MLF) (Branicky, 1998). Sin embargo, tales funciones también establecen condiciones suficientes solamente y con respecto a las QCLF son más difíciles de calcular.

Las condiciones para la existencia de una QCLF pueden ser expresadas como un problema LMI, ver (C.14), que suele ser resuelto comúnmente utilizando métodos numéricos como los de (Boyd et al., 1994). Sin embargo, estos métodos numéricos pueden volverse inefectivos cuando se incrementa la cantidad de matrices de estado del sistema conmutado. Por esto tal

---

como ha sido indicado en (Lin & Antsaklis, 2008) existe un creciente interés en *determinar condiciones algebraicas* sobre tales matrices que garanticen la existencia de una CQLF.

En (Liberzon et al., 1999) se establece una condición algebraica sobre las matrices de un sistema lineal continuo conmutado a partir del vínculo entre la resolubilidad del álgebra de Lie generada por estas matrices y la existencia de una CQLF. La contraparte discreta de este resultado fue presentada en (Blondel et al., 2004) y (Theys, 2005).

Entre otras condiciones algebraicas que han sido presentadas se destacan los resultados de (Narendra & Balakrishnan, 1994) sobre matrices que conmutan entre sí y de (Zhai et al., 2004) sobre matrices normales.

Una reseña de los resultados disponibles en la literatura sobre estabilidad asintótica de sistemas conmutados puede consultarse en (Liberzon y Morse, 1999), (Agrachev y Liberzon, 2001), (Shorten et al., 2007) y (Lin & Antsaklis, 2008).

### 5.1.2 Aportes del Capítulo

El lazo cerrado a diseñar resulta del acoplamiento entre la planta lineal continua muestreada a frecuencia variable con un controlador digital. En virtud del muestreo no uniforme se lo modela como un sistema a tiempo discreto conmutado DTSS, ver sección A.4, y se utilizarán así las propiedades de estabilidad descriptas previamente de esta clase de sistemas.

Aquí se propone usar, por primera vez en la literatura, el resultado de (Blondel et al., 2004) y (Theys, 2005) para resolver el problema de diseñar una familia de controladores que estabiliza asintóticamente el lazo cerrado sobre una planta lineal continua muestreada a frecuencia variable con una política fija. Las soluciones se obtienen calculando los parámetros del controlador (los grados de libertad para el diseño del lazo cerrado) para que el álgebra de Lie del DTSS asociado sea resoluble, es decir con imposición del índice de resolubilidad.

Otra alternativa presentada aquí, y también considerando realimentación de estados lineal, es tratar sistemáticamente la resolubilidad del álgebra de Lie por cálculo de una matriz unitaria de triangularización común a las matrices del DTSS. Además, se extiende este resultado al caso de emplear un observador asintótico del estado. Luego, se agrega un estudio de performance y robustez ante perturbaciones usando una técnica de aproximación de la norma elipsoidal del radio espectral conjunto de la familia de matrices del DTSS.

Estos resultados han sido publicados en los artículos (Felicioni & Junco, 2008 a), (Felicioni & Junco, 2008 b), (Felicioni et al., 2008), (Felicioni et al., 2010).

## 5.2 Formulación del problema y modelado matemático

El enfoque considerado aquí es que el controlador varíe “on-line” el período de muestreo de la planta a controlar. El controlador debe poder asegurar, a pesar de la variación del período de muestreo, distintas especificaciones de desempeño.

En esta sección 5.2 se plantea el problema esencial de asegurar la estabilidad con período de muestreo variable.

En primer lugar, se describe al sistema de control con tasa variable como un DTSS, ver definición en sección A.4. Luego, se procede a examinar resultados y herramientas matemáticas para formular y resolver el problema. Finalmente, se presenta un resumen del álgebra de Lie de matrices, y luego en sección 5.3 se mostrará cómo aplicar esta herramienta a la solución del problema planteado.

### 5.2.1 Hipótesis de modelado

Se considera la planta (5.1) descrita en su modelo en espacio de estados de tiempo continuo, donde  $x \in \mathfrak{R}^n$  representa el estado,  $u \in \mathfrak{R}^r$  la entrada e  $y \in \mathfrak{R}^p$  la salida.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

El sistema muestreado asociado a (5.1) es (5.2), donde  $h_i = t_{k+1} - t_k$  designa la amplitud de los intervalos entre los instantes de muestreo  $t_k$  y  $t_{k+1}$  (período de muestreo variable):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi(h_i) x_k + \Gamma(h_i) u_k \\ y_k &= C_d(h_i) x_k + D_d(h_i) u_k \end{aligned} \quad (5.2)$$

Siendo entradas, estados y salidas, respectivamente  $u_k \equiv u(t_k)$ ,  $x_k = x(t_k)$ , e  $y_k = y(t_k)$ .

Se considera un esquema donde en cada instante  $t_k$ , el controlador puede seleccionar el valor del período de muestreo siguiente,  $h_i$ , de un conjunto de  $p$  valores:

$$h_i \in \{h_1, h_2, \dots, h_p\} \quad (5.3)$$

Debido a esta restricción sobre los períodos de muestreo posibles, las matrices  $\Phi(h_i)$  y  $\Gamma(h_i)$  en (5.2) toman valores en una familia finita de un total de  $p$  pares de matrices posibles, correspondientes a los períodos (5.3). Las distintas matrices posibles son (5.4).

$$\begin{aligned} \Phi_i &\triangleq \Phi(h_i) = e^{Ah_i} & C_d(h_i) &= C \\ \Gamma_i &\triangleq \Gamma(h_i) = \int_0^{h_i} e^{As} B \, ds & D_d(h_i) &= D', \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (5.4)$$

Las ecuaciones (5.2) representan un sistema en tiempo discreto variante en el tiempo que, bajo la hipótesis de que el período de muestreo  $h_i$  sólo puede tomar un número finito de valores (5.3), resulta ser un caso particular de DTSS ver sección A.4 para más detalles.

### 5.2.2 Modelo de control por Realimentación de Estados

En cada instante  $t_k$  el controlador además de poder seleccionar el período de muestreo, debe computar la acción de control  $u_k$ . Si se propone una realimentación de estados lineal, dependiente del período de muestreo (5.5), entonces el sistema a lazo cerrado es (5.6).

$$u_k = L_i x_k, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5.5)$$

$$x_{k+1} = \Phi_i x_k + \Gamma_i u_k = (\Phi_i + \Gamma_i L_i) x_k = \Phi_i^{CL} x_k \quad (5.6)$$

Definición 5.1: Matriz de evolución de lazo cerrado. Se define a  $\Phi_i^{CL}$  como la matriz de lazo cerrado  $\Phi_i^{CL} \triangleq (\Phi_i + \Gamma_i L_i)$  asociada al período  $h_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ .

### 5.2.3 Modelo de control por Realimentación de Estados con Observador

Si no se dispone de la medición del estado pero sí de las salidas  $y_k$ , se puede construir el observador de estados asintótico en tiempo discreto (Chen & Francis, 1994), y usar su estima del estado  $\hat{x}_k$  en el instante  $t_k$  definida en (5.7) en la ley de control (5.8).

$$\hat{x}_{k+1} = \Phi_i \hat{x}_k + \Gamma_i u_k + G_i (\hat{y}_k - y_k) \quad (5.7)$$

$$u_k = L_i \hat{x}_k, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5.8)$$

Con este esquema, el error de observación  $e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}$  satisface (5.9).

$$e_{k+1} = (\Phi_i + G_i C) e_k = \Theta_i e_k \quad (5.9)$$

Definición 5.2: Matriz de evolución del error. Se define a  $\Theta_i$  como la matriz siguiente  $\Theta_i = (\Phi_i + G_i C)$  asociada al período  $h_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ .

La dinámica del sistema realimentado puede entonces ser expresada con (5.10).

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_i^{CL} & -\Gamma_i L_i \\ 0 & \Theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \end{bmatrix} = \Psi_i \begin{bmatrix} x_k \\ e_k \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Definición 5.3: Matriz de evolución del sistema con observador. Se define a  $\Psi_i$  como la matriz siguiente  $\Psi_i = \begin{bmatrix} \Phi_i^{CL} & -\Gamma_i L_i \\ 0 & \Theta_i \end{bmatrix}$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ .

#### 5.2.4 Planteo del Problema

Con el modelo del sistema desarrollado previamente y la notación introducida, el problema que se atacará en el presente Capítulo es el siguiente:

Dada la planta en tiempo continuo (5.1) junto con el conjunto (5.3) de valores posibles para el período de muestreo, encontrar un conjunto de parámetros del controlador ( $L_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  para el caso de realimentación de estados y  $\{L_i, G_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  para el caso de realimentación de salida con observador) tales que el sistema discreto conmutado equivalente (5.2) sea estable cuando se aplica el control (5.5), en el caso de realimentación de estados, o (5.8) en el caso de realimentación de salida con observador, en el instante  $t_k$  para  $h_i$ , para cualquier elección de los períodos de muestreo que pueda realizar el controlador.

La herramienta matemática que se empleará en este problema es el álgebra de Lie resoluble y sus propiedades relacionadas con la existencia de funciones de Lyapunov. A continuación describimos brevemente nociones básicas sobre el álgebra de Lie. En la Sección 5.3 presentaremos y aplicaremos el álgebra de Lie resoluble a la solución del problema planteado.

#### 5.2.5 Álgebra de Lie de matrices y resolubilidad

Si  $M_v$  y  $M_\gamma$  son matrices cuadradas de iguales dimensiones, llamamos corchete de Lie de  $M_v$  y  $M_\gamma$ , escrito  $[M_v, M_\gamma]$ , a la siguiente operación, ver por ejemplo (San Martín, 1999):



$$[M_\nu, M_\gamma] = M_\nu M_\gamma - M_\gamma M_\nu \quad (5.11)$$

Definición 5.4: Sea  $\mathbf{M} := \{M_i \in \mathbb{C}^{n \times n} : i = 1, \dots, s\}$  un conjunto de  $s$  matrices cuadradas, el álgebra de Lie de matrices  $\mathfrak{g}$  generada por  $\mathbf{M}$  es el espacio lineal generado por la aplicación iterativa del corchete de Lie a los elementos de  $\mathbf{M}$ .

Dada un álgebra de Lie de matrices,  $\mathfrak{g}$ , se definen iterativamente la serie central descendente  $\mathfrak{g}^m$  y la serie derivada  $\mathfrak{g}^{(m)}$ ,  $m=0,1,\dots$  como sigue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^0 &:= \mathfrak{g}, & \mathfrak{g}^{m+1} &:= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^m] \\ \mathfrak{g}^{(0)} &:= \mathfrak{g}, & \mathfrak{g}^{(m+1)} &:= [\mathfrak{g}^{(m)}, \mathfrak{g}^{(m)}] \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $[\mathfrak{g}^m, \mathfrak{g}^m]$  designa el álgebra generada por las matrices resultantes de tomar todos los corchetes de Lie posibles entre matrices de  $\mathfrak{g}^m$ .

Definición 5.5: *Álgebra nilpotente*. Si existe un entero  $\mathbf{m}$  tal que  $\mathfrak{g}^{\mathbf{m}}=0$ , se dice que  $\mathfrak{g}$  es nilpotente y el menor  $\mathbf{m}$  tal que  $\mathfrak{g}^{\mathbf{m}}=0$  es llamado *índice de nilpotencia* de  $\mathfrak{g}$ .

Definición 5.6: *Álgebra resoluble*: Si existe un entero  $\mathbf{m}$  tal que  $\mathfrak{g}^{(\mathbf{m})}=0$ , se dice que  $\mathfrak{g}$  es resoluble y llamaremos *índice de resolubilidad* de  $\mathfrak{g}$  al menor  $\mathbf{m}$  tal que  $\mathfrak{g}^{(\mathbf{m})}=0$ .

Un resultado conocido (San Martín, 1999) es que si  $\mathfrak{g}$  es nilpotente entonces es resoluble.

El siguiente resultado es una afirmación del teorema de Lie, ver por ej. (San Martín, 1999):

**Lema 5.1:**  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de matrices resoluble si y sólo si existe una matriz no singular  $T$  tal que  $T^{-1} M_i T$  es triangular superior para toda  $M_i \in \mathbf{M}$ .

De manera equivalente se tiene el siguiente resultado, ver por ej. (Chu & Zhang, 2007).

**Lema 5.2:** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de matrices resoluble si y sólo si existe una matriz unitaria  $U$  tal que  $U^* M_i U$  es triangular superior para todo  $M_i \in \mathbf{M}$ , donde  $U^*$  es la conjugada transpuesta de  $U$ .

Un interesante resultado acerca del índice de *resolubilidad* es expresado en el siguiente Lema, ver por ejemplo (San Martín, 1999).

**Lema 5.3:** El índice de resolubilidad de un álgebra generada por matrices triangulares superiores  $\mathbb{C}^{n \times n}$  es como máximo igual a  $m = \lceil \log_2(n - 1) + 1 \rceil + 1$ , siendo  $\lfloor x \rfloor$  el entero inmediato inferior de  $x$ .

A partir de combinar los resultados de **Lema 5.2** y **Lema 5.3** resulta lo siguiente:

**Lema 5.4:** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de matrices resoluble, entonces su índice de resolubilidad es como máximo  $m^{lim} = \lceil \log_2(n - 1) + 1 \rceil + 1$ . Para cualquier  $m > m^{lim}$ , la serie derivada  $\mathfrak{g}^{(m)}$  resulta nula.

*Observación 5.1:* A partir de lo anterior, la búsqueda de la resolubilidad del álgebra de Lie generada por las matrices en una familia  $\mathbf{M}$  está confinada a la evaluación de un número finito de series derivadas  $\mathfrak{g}^{(x)}$ . Por ejemplo si  $\mathfrak{g}^{(x)} \neq 0$  para  $x > m^{lim}$ , entonces el álgebra de Lie generada por  $\mathbf{M}$  no es resoluble y no es necesario evaluar series derivadas para  $x$ .

El algoritmo de búsqueda es entonces de  $\lceil \log_2(n - 1) + 1 \rceil$  pasos, es decir un valor más chico que el propuesto en (Chu et al., 2006) que es de  $n$  pasos.

### 5.2.6 Condiciones de estabilidad en lazo cerrado

La herramienta típica y más potente para el estudio de la estabilidad del sistema resultante en lazo cerrado (5.6) o (5.10) es el análisis a través de funciones de Lyapunov. Referirse a la introducción de éste Capítulo y al Apéndice C para más detalles.

En particular, aquí se explota la relación entre la resolubilidad del álgebra de Lie generada por las matrices de lazo cerrado y la existencia de una CQLF para el diseño de control.

Para facilitar la lectura de este Capítulo se transcriben a continuación algunos de los resultados más relevantes en este tema.

**Teorema 5.1** (Blondel et al., 2004), (Theys, 2005): Sea el sistema lineal conmutado  $x_{k+1} = M_k x_k$ ,  $M_k \in \mathbf{M}$ . Si todas las matrices en  $\mathbf{M}$  tienen radio espectral  $\rho(M_k)$  inferior a 1 y el álgebra de Lie generada por  $\mathbf{M}$  es resoluble, entonces el sistema tiene una QCLF.  $\square$

Dos resultados son usados para demostrar el **Teorema 5.1**. El primero es que si las matrices del sistema DTSS son estables y triangulares superiores (o inferiores), entonces existe una

QCLF en la forma de una matriz diagonal, ver Teorema 6.14 de (Theys, 2005). El segundo resultado es el que equipara la resolubilidad del álgebra de Lie con la existencia de triangularización común de todas las matrices, afirmación del **Lema 5.1**.

**Corolario 5.1** (Blondel et al., 2004), (Theys, 2005): Si el álgebra de Lie generada por el conjunto  $\mathbf{M}$  es resoluble, entonces el JSR de  $\mathbf{M}$  es igual a  $\max_i \rho(M_i)$  y a su aproximación de la norma elipsoidal.  $\square$

Es decir, existe una  $P$  tal que la aproximación de la norma elipsoidal del JSR del conjunto  $\mathbf{M}$  es  $\hat{\rho}(\mathbf{M}) = \inf_{P>0} \max_{A_i \in \mathbf{M}} \|M_i\|_P = \max_i \rho(M_i) = \rho(\mathbf{M})$ .

Este corolario se demuestra a partir de la extensión al caso de matrices triangularizables (cuya álgebra de Lie sea resoluble) del resultado para matrices triangulares del Corolario 6.14 de (Theys, 2005).

### 5.3 Métodos Lie algebraicos de diseño de control

El problema de estabilizar (5.6) se resuelve si las matrices  $M_i = \Phi_i^{CL}$ ,  $i=1..,p$ , satisfacen las hipótesis del **Teorema 5.1** citado previamente.

Lo anterior motiva el diseño de los parámetros del controlador tal que el álgebra de Lie que generan sus matrices de evolución de lazo cerrado sea resoluble.

A partir de las condiciones de resolubilidad establecidas en la sección 5.2.5, se proponen dos métodos Lie-algebraicos de diseño para calcular los parámetros de los controladores:

- 1) por cálculo de la matriz de triangularización común,
- 2) por la imposición de condiciones de resolubilidad (adicionales).

Ambas propuestas presentan ventajas y desventajas que se comentan a continuación.

La propuesta de diseño 1) establece condiciones lineales en los parámetros del controlador y apunta a lograr un índice resolubilidad igual al máximo posible  $m^{lim}$ . Como desventaja, y tal como fue remarcado en (Shorten et al., 2007), no es una tarea fácil determinar si una matriz de transformación puede poner en forma triangular a un conjunto de matrices.

La propuesta 2) es formulada en términos de los datos originales, sin necesidad de buscar la transformación común. Como contrapartida, el diseño por imposición para índice de

resolubilidad superior a 1 implica la resolución de ecuaciones no lineales y debe ser realizada con algún método numérico.

Ambas propuestas serán analizadas en detalle y se formularán métodos en cada caso.

Se destaca que aún cuando no sea posible conseguir la resolubilidad del álgebra vía el ajuste de parámetros, se planteará el diseño de parámetros del controlador de las matrices perturbadas de lazo cerrado  $\Phi_i^{CL,P} = M_i + \Omega_i$  tal que el álgebra generada por las matrices  $M_i$  sea resoluble y las perturbaciones  $\Omega_i$  resulten admisibles tal como será expuesto en la sección 5.4. Esto se basa en nociones de robustez relacionadas con la existencia de una QCLF.

La utilización de un observador para reconstruir el estado a realimentarse presenta un nuevo desafío en el diseño de las matrices  $\Psi_i$  con  $i=1, \dots, p$ . En la sección 5.2 se mostrará que se puede extender a las familias de controladores y observadores el principio de separación (donde el diseño de controlador y observador se hacen de manera separadas). Esta extensión puede hacerse si las matrices  $\{\Phi_i^{CL}, \Theta_i\}$  con  $i=1, \dots, p$  satisfacen las hipótesis del **Teorema 5.1**.

### 5.3.1 Método por Triangularización de la familia de matrices

Como (5.2) típicamente no tiene una estructura triangular, esta proposición requiere poner a todas las matrices en tal forma usando una transformación de semejanza común a todas las matrices.

Un primer enfoque para resolver este problema es considerar la transformación original del sistema discreto. Debido a lo conservativo de este enfoque, una segunda propuesta es admitir alguna transformación y ajustar los parámetros del controlador de manera que la misma sea común a todas las matrices de lazo cerrado. Esto se presenta en los siguientes métodos.

#### *i. Uso de subespacios invariantes originales (de la matriz de lazo abierto continua)*

De la teoría de control digital se tiene que el mapeo exponencial del sistema de lazo abierto

$$A = T \hat{A} T^{-1} \text{ es}$$

$$e^{A t} = e^{T \hat{A} T^{-1} t} = T e^{\hat{A} t} T^{-1} \quad (5.13)$$

donde  $T$  es una transformación de semejanza. Si  $A = T \hat{A} T^{-1}$  es una descomposición de Jordan, entonces  $\hat{A}$  es triangular superior o inferior (o diagonal).

Aplicando esta transformación al término de la entrada en (5.2) se tiene (5.14).

$$\begin{aligned}\Gamma(t) &= \int_0^t e^{Ax} B ds = \int_0^t T e^{\hat{A}x} T^{-1} B ds = T \left( \int_0^t e^{\hat{A}x} ds \right) T^{-1} B \\ &= T G_t T^{-1} B\end{aligned}\quad (5.14)$$

Si se considera el controlador por realimentación de estados, (5.6) resulta ser (5.15).

$$x_{k+1} = T \left( e^{\hat{A}t} + G_t (T^{-1} B L_t T) \right) T^{-1} x_k \quad (5.15)$$

A partir de la cual se define la siguiente matriz (5.16). Si la misma tiene una forma triangular superior (o inferior) para cada período de muestreo  $t=h_i$  en el conjunto  $\{h_i, i \in \underline{p}\}$ , entonces el álgebra generada por la familia resulta resoluble.

$$e^{\hat{A}t} + G_t (T^{-1} B L_t T) \quad (5.16)$$

Como la descomposición de Jordan tiene una forma triangular superior  $e^{\hat{A}t}$ , se presenta el siguiente método:

**Método 5.1:** Diseñar el controlador  $L_t$  de forma que cada matriz  $G_t (T^{-1} B L_t T)$  tenga una forma triangular superior.

Dependiendo de la estructura de lazo abierto, la satisfacción de esta condición requiere elegir algunos de los parámetros del controlador iguales a cero. Con esto, en muchos casos, se pierden varios grados de libertad para la elección de las ganancias del controlador.

Eso se evalúa en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 5.1:* Sea el sistema “paper machine head box” tomado de (Franklin & Powell, 1980) descripto por:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 1 \\ -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} [u_1 \quad u_2] \quad (5.17)$$

Esta matriz puede ser puesta en una forma diagonal (5.18) por la transformación de semejanza  $T$  (5.19).

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-0.17071t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-0.0292t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1.24223 & -0.02133 & 1.4556 \\ -0.06211 & -0.3642 & 0.4263 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Sea el controlador por realimentación de estados (5.20).

$$L_t = \begin{bmatrix} l_{t,1} & l_{t,2} & l_{t,3} \\ l_{t,4} & l_{t,5} & l_{t,6} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

A partir de la transformación (5.19) y a los efectos de poner la matriz  $G_t(T^{-1}B L_t T)$  en una forma triangular se debe adoptar la solución (5.21).

$$\{l_{t,1} = 0, l_{t,2} = 0, l_{t,5} = -3.4142 l_{t,4}\} \quad (5.21)$$

Por ejemplo, para  $t = h_1 = 0.2$  resulta (5.22).

$$G_t T^{-1} B L_t T = \begin{bmatrix} 0 & 0.504 l_{t,4} & -0.504 l_{t,4} + l_{t,3} + 0.489 l_{t,6} \\ 0 & -1.39 l_{t,4} & 1.39 l_{t,4} + l_{t,3} - 1.35 l_{t,6} \\ 0 & 0 & l_{t,3} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

A partir de (5.22) se deriva que los elementos de la primera columna no pueden ser modificados por los parámetros del controlador (5.21). Con esto,  $\Phi_{t,(1,1)}^{CL}$  queda inalterable e igual a su valor original.

Entonces usando la solución (5.21), la matriz de lazo cerrado resulta (5.23).

$$\Phi_{h_1}^{CL} = \begin{bmatrix} \boxed{0.966} & 0.099 l_{1,4} & -0.099 l_{1,4} + 0.196 l_{1,3} + 0.096 l_{1,6} \\ 0 & \boxed{0.994 - 0.277 l_{1,4}} & 0.277 l_{1,4} + 0.194 l_{1,3} - 0.269 l_{1,6} \\ 0 & 0 & \boxed{0.8187 + 0.181 l_{1,3}} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Cuyos autovalores son  $\{\lambda_1 = 0.966, \lambda_2 = 0.994 - 0.277 l_{1,4}, \lambda_3 = 0.8187 + 0.181 l_{1,3}\}$  Entonces, se tiene un autovalor fijo en 0.966 y los otros dos pueden ser ubicados con  $l_{1,3}$  y  $l_{1,4}$ . De la misma forma se procede para  $h_2 = 0.4$  dando (5.24).

$$\Phi_{h_2}^{CL} = \begin{bmatrix} \boxed{0.934} & 0.195 l_{2,4} & -0.195 l_{1,4} + 0.386 l_{2,3} + 0.189 l_{2,6} \\ 0 & \boxed{0.988 - 0.552 l_{2,4}} & 0.553 l_{2,4} + 0.397 l_{2,3} - 0.536 l_{2,6} \\ 0 & 0 & \boxed{0.6703 + 0.3296 l_{2,3}} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Cuyos autovalores son:  $\{\chi_1 = 0.934, \chi_2 = 0.988 - 0.552 l_{2,4}, \chi_3 = 0.6703 + 0.3296 l_{2,3}\}$ . Se tiene un autovalor fijo en 0.934 mientras los otros pueden ser ubicados con  $l_{2,4}$  y  $l_{2,3}$ .

De la misma forma se puede extender la adaptación de parámetros a cualquier período de muestreo. Lo interesante de este método es que el ajuste de los valores de la realimentación depende sólo de cada modo del sistema. Sin embargo, la pérdida de libertad puede provocar que el problema resulte irresoluble en algunos casos.

## ii. Triangularización de la familia de matrices vía una matriz unitaria

El método propuesto para construir la matriz que simultáneamente triangulariza a todas las matrices en  $\mathbf{M}$ , hace uso de la demostración del Lema 5.2 de (Chu & Zhang, 2007) que será transcripta a continuación para su mejor entendimiento:

En primer lugar se sabe que las matrices de un álgebra resoluble tienen *al menos* un autovector común.

Dado tal autovector común  $v^{(1)}$  normalizado, se debe extender a una base ortonormal  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}$  usando el procedimiento de ortonormalización Gram-Schmidt. Luego se puede calcular la matriz unitaria  $U_1 = [v^{(1)} \dots v^{(n)}]$ .

Entonces para dos matrices del conjunto  $\mathbf{M}$ , llamadas  $M_1$  y  $M_2$ , se puede verificar

$$U_1^* M_1 U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & *** \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \text{ y } U_1^* M_2 U_1 = \begin{bmatrix} \chi_1 & *** \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Asimismo, las matrices  $A_1$  y  $B_1$  de orden  $n-1$  deben tener también un autovector común, i.e.

$$U_2^* A_1 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & *** \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \text{ y } U_2^* B_1 U_2 = \begin{bmatrix} \chi_2 & *** \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

A partir de  $U_2$  se debe construir la matriz de orden  $n$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Las matrices  $V_2$  y  $U_1$   $V_2$  son unitarias y además verifican

$$V_2^* U_1^* M_1 U_1 V_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & *** & *** \\ 0 & \lambda_2 & *** \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$$V_2^* U_1^* M_2 U_1 V_2 = \begin{bmatrix} \chi_1 & *** & *** \\ 0 & \chi_2 & *** \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Se debe continuar con este proceso de calcular matrices  $U_j$  de orden  $(n-j+1)$ , con  $j=1, \dots, n-1$  y las matrices unitarias  $V_j$  de orden  $n$ . Luego de  $n-1$  pasos la matriz unitaria (5.30) triangulariza superior y simultáneamente a  $M_1$  y  $M_2$ .

$$U = U_1 V_2 \cdots V_{n-1} \quad (5.30)$$

Esto puede extenderse a todas las  $p$  matrices  $M_i$  en el conjunto  $\mathbf{M}$ .

A continuación se formula un método que utiliza lo establecido previamente para ajustar los parámetros de realimentación de una matriz de lazo cerrado de manera que sea triangularizable con una transformación común a otra matriz de lazo cerrado ya diseñada.

**Método 5.2:** Sea la realimentación  $L_1$  para el período  $h_1$  ya calculada, es decir en este problema  $\Phi_1^{CL} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , es conocido.

*Paso 1:* Determinar una matriz unitaria de triangularización común.

Supongo que  $\Phi_1^{CL} = \Phi_1 + \Gamma_1 L_1$  tiene autovalores<sup>1</sup> reales  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Entonces, el próximo algoritmo se debe ejecutar como máximo  $n-1$  veces.

Sea inicialmente  $M_1 = \Phi_1^{CL}$  y  $M_2 = \Phi_2^{CL} = \Phi_2 + \Gamma_2 L_2$ .

- 1- Elegir uno de sus autovalores  $\rho_1 = \lambda_i$  de  $M_1$  y construir la matriz  $U_1$  para su autovector asociado  $v^{(1)}$ .
- 2- Obtener la matriz unitaria  $U_j = [v^{(1)} | u^{(2)} | \dots | u^{(n)}]$  donde  $u^{(2)}, \dots, u^{(n)}$  son vectores ortonormales a  $v^{(1)}$  que se obtienen usando el procedimiento de ortonormalización de Gram Schmid.
- 3- Formar la matriz  $W_j = [u^{(2)} | \dots | u^{(n)}]$  (quitando el autovector común de  $U_j$ ), luego

<sup>1</sup> Si el autovalor  $\lambda_i$  de  $M_1$  es complejo, también debe aparecer su complejo conjugado. Una alternativa es tomar dos autovectores asociados a ambos autovalores y construir la matriz  $U_j$  con vectores ortonormales a  $[v^{(1)} | v^{(2)}]$ . Esto reduce la cantidad de pasos del algoritmo.



4- Calcular  $A_j = (W_j)' M_j W_j$ . Luego adoptar  $M_j = A_j$  y volver a retornar al paso 1.

Como resultado de este proceso iterativo se obtendrá la matriz unitaria (5.30) (donde  $U_1 = V_1$ ,  $V_2 = [1 \ 0 \ 0 \dots; 0 \ U_2]$ ,  $V_3 = [1 \ 0 \ 0 \dots; 0 \ 1 \ 0 \dots; 0, \dots \ U_3]$ , etc).

*Paso 2:* Planteo de sistema de ecuaciones

Una vez calculada la matriz unitaria (5.30) se debe resolver el sistema de ecuaciones que surge de igualar la matriz  $\tilde{\Phi}_2^{CL} = U^T (\Phi_2 + \Gamma_2 L_2) U$  a la siguiente matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} \chi_1 & *** & *** \\ 0 & \chi_2 & *** \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Es decir, se deben igualar las  $n \times (n-1)/2$  ecuaciones que se determinan al igualar a 0 los términos debajo de la diagonal principal de  $\tilde{\Phi}_2^{CL}$ . Simultáneamente, los elementos en la diagonal deben ser inferiores a la unidad en módulo. Es decir, se deben satisfacer  $n$  inecuaciones.

Matemáticamente esto se expresa como las  $n \times (n-1)/2$  ecuaciones (5.32) siendo la matriz unitaria  $U = [T_1 | T_2 | \dots | T_n]$ , donde  $T_j$  son vectores columna.

$$\begin{aligned} \text{fila 2} & \left\{ T_2^T \Phi_2^{CL} T_1 = 0 \right. \\ \text{fila 3} & \left\{ T_3^T \Phi_2^{CL} T_1 = 0, T_3^T \Phi_2^{CL} T_2 = 0, \dots \right. \\ \text{fila } n & \left\{ \begin{array}{l} T_n^T \Phi_2^{CL} T_1 = 0 \\ T_n^T \Phi_2^{CL} T_2 = 0 \\ \dots \\ T_n^T \Phi_2^{CL} T_{n-1} = 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.32)$$

A su vez los elementos en la diagonal deben satisfacer (5.33) tal que  $|\chi_i| < 1$  para  $i$  entre 1 y  $n$ .

$$\begin{cases} T_1^T \Phi_2^{CL} T_1 = \chi_1 \\ T_2^T \Phi_2^{CL} T_2 = \chi_2 \\ \dots \\ T_n^T \Phi_2^{CL} T_n = \chi_n \end{cases} \quad (5.33)$$

En muchos casos, la cantidad de parámetros de la realimentación de estados (dependiente del tamaño de la matriz de entrada) es inferior a la cantidad de ecuaciones y por tanto no necesariamente existe una solución de este sistema de ecuaciones. En estos casos se puede proponer una solución aproximada, por ejemplo resolver sólo las ecuaciones de la última fila, y luego verificar si con los parámetros obtenidos el sistema es estable de manera robusta vía por ej. un análisis de Lyapunov. Es decir, se requiere un paso de verificación de estabilidad.

*Paso 3 (opcional):* Verificación de existencia de QCLF en solución aproximada

A continuación se consideran dos posibles maneras de verificar que el sistema conmutado sea estable con matrices determinadas según el método presentado previamente:

1. Para las matrices de lazo cerrado calculadas previamente, buscar una matriz  $P$  común que satisfaga las LMI (ver 5.4.1). Esto puede ser realizado con algún método numérico.
2. Seleccionar los elementos de la matriz  $\tilde{\Phi}_2^{CL}$ , que estén por debajo de la diagonal principal de forma de constituir la siguiente matriz perturbación.

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \tilde{\Phi}_2^{CL}(2,1) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Phi}_2^{CL}(n-1,1) & \tilde{\Phi}_2^{CL}(n-1,2) & \dots & \dots & 0 \\ \tilde{\Phi}_2^{CL}(n,1) & \tilde{\Phi}_2^{CL}(n,2) & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Tras esta definición  $M_2 = \tilde{\Phi}_2^{CL} - \tilde{\Omega}_2$  resulta triangular superior. En este caso la perturbación en el plano original resulta  $\Omega_2 = U^T \tilde{\Omega}_2 U$ . Entonces, se debe verificar si se satisface la condición de robustez establecida en el **Teorema 5.1**.

□

Si bien no hay certezas sobre el éxito del método propuesto en la obtención de una solución para {(5.32) y (5.33)} se pueden considerar las siguientes alternativas en caso de que el mismo falle:

Si no se puede encontrar una CQLF en el caso aproximado se puede intentar resolver otras ecuaciones (por ejemplo, otra fila) y re-intentar la verificación. Si las soluciones previstas por las otras ecuaciones tampoco dan un resultado satisfactorio, se puede construir otra matriz unitaria (empezando por otro autovalor). Por último se puede cambiar el diseño original de  $L_I$ .

El método 5.2 presentado es analizado en los siguientes tres ejemplos. En el primero de ellos se considera el caso más simple, un sistema de segundo orden con una entrada de control. Este caso es el más simple de todos porque requiere la existencia de un sólo autovector común. Como segundo ejemplo se considera un sistema de tercer orden que tiene

la misma cantidad de parámetros del controlador que el total de ecuaciones e inecuaciones que deben ser resueltas {(5.32) y (5.33)}, por lo cual se puede resolver de forma exacta. Por último, el tercer ejemplo tiene menor cantidad de parámetros de control que la necesaria, por lo cual se resolverá de forma aproximada y se efectuará luego el paso de verificación.

*Ejemplo 5.2:* Sea un sistema de segundo orden con una entrada de control. A continuación se presenta la solución exacta del problema de encontrar un autovector común vía realimentación de estados. El caso de autovalores complejos conjugados requiere tener ambos autovectores comunes, por lo cual será tratado más adelante.

Sea un sistema con dos períodos de muestreo  $h_l$  y  $rh_l$ . Las matrices de lazo abierto para cada modo son:

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1}^1 & a_{1,2}^1 \\ a_{2,1}^1 & a_{2,2}^1 \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} b_1^1 \\ b_2^1 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\Phi_r = \begin{bmatrix} a_{1,1}^r & a_{1,2}^r \\ a_{2,1}^r & a_{2,2}^r \end{bmatrix}, \Gamma_r = \begin{bmatrix} b_1^r \\ b_2^r \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Considerando una realimentación de estados, el lazo cerrado resulta (5.37) donde para  $h_r=rh$ , se tiene  $L_r = [l_{r,1} \quad l_{r,2}]$  y para el período nominal  $h$  se define  $L_1 = [l_{1,1} \quad l_{1,2}]$ .

$$\Phi_1^{CL} = \Phi_1 + \Gamma_1 L_1 \text{ y } \Phi_r^{CL} = \Phi_r + \Gamma_r L_r \quad (5.37)$$

Sean  $\lambda_{1,1}$  y  $\lambda_{1,2}$  los autovalores (reales) de  $\Phi_1^{CL}$ . Asociado al autovector común  $v = [v_1 \quad v_2]^T$ , la matriz  $\Phi_1^{CL}$  tiene el autovalor  $\lambda_{1,1}$  y la matriz  $\Phi_r^{CL}$  tiene el autovalor  $\lambda_{r,1}$ .

El valor de  $\lambda_{r,1}$  queda determinado por la expresión (5.38).

$$\begin{aligned} \lambda_{r,1} = & -(-b_2^r a_{1,1}^r \lambda_{1,1} b_1^1 + b_2^r a_{1,1}^r a_{2,2}^1 b_1^1 - b_2^r a_{1,1}^r b_2^1 a_{1,2}^1 - b_2^r a_{1,2}^r \lambda_{1,1} b_2^1 \\ & + b_2^r a_{1,2}^r a_{1,1}^1 b_2^1 - b_2^r a_{1,2}^r a_{2,1}^1 b_1^1 + a_{2,1}^r b_1^r \lambda_{1,1} b_1^1 \\ & - a_{2,1}^r b_1^r a_{2,2}^1 b_1^1 + a_{2,1}^r b_1^r b_2^1 a_{1,2}^1 + a_{2,2}^r b_1^r \lambda_{1,1} b_2^1 \\ & - a_{2,2}^r b_1^r a_{1,1}^1 b_2^1 + a_{2,2}^r b_1^r a_{2,1}^1 b_1^1) / (-b_1^r \lambda_{1,1} b_2^1 + b_1^r a_{1,1}^1 b_2^1 \\ & - b_1^r a_{2,1}^1 b_1^1 + b_2^r \lambda_{1,1} b_1^1 - b_2^r a_{2,2}^1 b_1^1 + b_2^r b_2^1 a_{1,2}^1) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Este autovalor depende de los parámetros del sistema y de  $\lambda_{1,1}$  y no puede ser elegido libremente. La condición  $|\lambda_{r,1}| < 1$  depende entonces del sistema  $\Phi_1^{CL}$ . Para conseguir este autovalor se deben elegir los siguientes parámetros de la realimentación

$$\begin{aligned} l_{r,2} = & -(-\lambda_{1,2} \lambda_{r,2} + \lambda_{1,2} a_{2,2}^r - \lambda_{1,2} a_{1,2}^r + a_{1,1}^r a_{1,2}^r - a_{1,2}^r \lambda_{r,2} + a_{1,2}^r a_{2,2}^r - a_{2,1}^r a_{1,2}^r \\ & + a_{2,2}^r \lambda_{r,2} - (a_{2,2}^r)^2) / (b_1^r a_{1,1}^r + b_1^r a_{1,2}^r - a_{2,1}^r b_1^r - a_{2,2}^r b_1^r) \end{aligned}$$

$$l_{r,1} = (a_{1,1}^r b_1^r l_{r,2} - \lambda_{r,2} a_{1,1}^r + a_{2,2}^r a_{1,1}^r - l_{r,2} a_{2,1}^r b_1^r - l_{r,2} \lambda_{r,2} b_1^r - a_{2,1}^r a_{1,2}^r + (\lambda_{r,2})^2 - a_{2,2}^r \lambda_{r,2}) / (\lambda_{r,2} b_1^r + b_1^r a_{1,2}^r - a_{2,2}^r b_1^r)$$

Donde  $\lambda_{r,2}$  se puede elegir independientemente.

*Ejemplo 5.3:* Para el mismo sistema considerado en *Ejemplo 5.1* se considera el diseño del controlador siguiendo los pasos del Método 5.1. Al igual que en el caso anterior se puede obtener una solución exacta para adaptar los parámetros del controlador. Esto ocurre porque para cualquier modelo genérico de orden tres con dos entradas (y 6 parámetros de control) existe una relación exacta que vincula los autovalores de las dos matrices de lazo cerrado con su autovector común. Tal relación es difícil de obtener en otros casos más generales.

Considérese el siguiente ejemplo numérico donde el controlador para  $h_1$  es

$$L_1 = \begin{bmatrix} -10.1879557 & 14.65194 & -5.3005619 \\ -9.68605415 & 10 & -4.220535 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

los autovalores de  $\Phi_1^{CL}$  son  $\{\lambda_1=0.5597, \lambda_2=0.4836, \lambda_3=0.0638\}$ .

El autovector asociado a  $\lambda_1$  resulta ser

$$V = \begin{bmatrix} -0.7292562728 \\ -0.3520389181 \\ 0.5867315302 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Este es un autovector común de  $\Phi_2^{CL}$  asociado al autovalor  $\chi_1 = 0.291567$  (este valor tiene que ver con la relación mencionada), si se eligen

$$\begin{aligned} l_{2,1} &= -0.4827369 l_{2,2} + 0.80456151 l_{2,3} + 0.924321; \\ l_{2,6} &= 0.6 l_{2,5} + 1.242913 l_{2,4} + 1.462737612 \end{aligned}$$

La matriz calculada según paso 3 es

$$W_1 = \begin{bmatrix} -0.0012304 & 0.68413003 \\ 0.864101 & -0.3597194 \\ 0.503168 & 0.63448249 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Y las condiciones para satisfacer las ecuaciones son

$$\begin{aligned} l_{2,5} &= 100.49317 + 27.44438 l_{2,2} + 99.74945 l_{2,3} - 1.420256 l_{2,4}, \\ \chi_2 &= 28.9743412 + 7.63856157 l_{2,2} + 27.7631433 l_{2,3} \end{aligned}$$

Con esto la matriz unitaria resulta ser (5.42).

$$U = \begin{bmatrix} -0.7292562728 & 0.3907811959 & -0.5616719203 \\ -0.3520389181 & 0.4896068012 & 0.7977178580 \\ 0.5867315302 & 0.7794711260 & -0.2194786411 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

Con esto, el lazo cerrado del sistema  $\tilde{\Phi}_2^{CL}$  en su forma triangular obtenida con  $U^T \Phi_2^{LC} U$  es

$$\begin{bmatrix} \boxed{0.29157} & -37.398 - 9.97869 l_{2,2} - 36.269 l_{2,3} & -25.449 - 6.8191 l_{2,2} - 25.4396 l_{2,3} + 0.6792 l_{2,4} \\ 0 & \boxed{28.9743 + 7.63856 l_{2,2} + 27.763 l_{2,3}} & 19.067 + 5.5581 l_{2,2} + 18.91 l_{2,3} - 0.51186 l_{2,4} \\ 0 & 0 & \boxed{1.1329 - .09554 l_{2,2} + 0.15923 l_{2,3} - 0.00227 l_{2,4}} \end{bmatrix}$$

Es decir, aún con la matriz ya puesta en su forma triangular superior, se cuenta con 3 parámetros libres del controlador para elegir libremente los autovalores que restan.

*Ejemplo 5.4:* Aplicando el método 5.1 se resolvió el siguiente problema de diseño. Sea (5.43) el modelo lineal de un péndulo invertido en tiempo continuo, y dos períodos de muestreo ( $s=2$ )  $h_1=0.04$  y  $h_2=0.08$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 28 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Se calcularon los parámetros de la realimentación de estados para el período de muestreo  $h_2$  ( $L_2 = [l_{1,2} \ l_{2,2} \ l_{3,2} \ l_{4,2}]$ ), de manera que las matrices de lazo cerrado  $\Phi_1^{CL}$  y  $\Phi_2^{CL}$  tengan una matriz unitaria  $U$  que las triangularice simultáneamente.

La realimentación de estados para  $h_1$  ( $L_1$ ) se obtuvo usando la fórmula de *Ackerman* de manera que los polos en lazo cerrado sean  $\{0.65, 0.7, 0.75, 0.8383\}$  (por simplicidad se consideraron autovalores reales), con lo que  $\Phi_1^{CL}$  queda definida.

Se consideró  $\lambda_1=0.8383$  y usando el método de ortonormalización Gram-Schmidt se extendió su autovector asociado a la matriz unitaria  $U_1$ .

$$U_1 = \begin{bmatrix} -0.16745 & 0.21552 & 0.37490 & -0.88598 \\ 0.73778 & 0.33845 & 0.55619 & 0.17825 \\ 0.14444 & -0.90676 & 0.38711 & -0.08406 \\ -0.63778 & 0.12957 & 0.63264 & 0.41976 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

De manera similar, se consideró  $\lambda_1=0.75$  y se calculó la matriz  $U_2$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 0.352884 & 0.503242 & 0.78881 \\ 0.757202 & -0.64883 & 0.07519 \\ 0.549651 & 0.570752 & -0.61002 \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

En el tercer y último paso se eligió  $\lambda_3=0.7$ , y con ello quedó determinada  $U_3$ .

$$U_3 = \begin{bmatrix} 0.81631 & -0.57760 \\ -0.57760 & -0.81631 \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

La matriz de unitaria común se construye según (5.30) a partir de  $U_1, U_2$  y  $U_3$ .

Con esta matriz se triangulariza a  $\Phi_1^{CL}$  de manera exacta, como se ve en (5.47).

$$U^* \Phi_1^{CL} U = \begin{bmatrix} \boxed{0.8383} & 0.051396 & 0.395919 & -2.146224 \\ 0 & \boxed{0.75} & 1.566779 & -15.65498 \\ 0 & 0 & \boxed{0.7} & 2.818571 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0.65} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Como para  $\Phi_2^{CL}$  no alcanzan la cantidad de parámetros para resolver todas las ecuaciones, se plantean sólo 3 de ellas (las de la última fila) y una inecuación, es decir

$$\begin{aligned} \text{fila 4} \begin{cases} T_4^T \Phi_2^{CL} T_1 = 0 \\ T_4^T \Phi_2^{CL} T_2 = 0 \\ T_4^T \Phi_2^{CL} T_3 = 0 \end{cases} \\ T_4^T \Phi_2^{CL} T_4 = \chi_4 \end{aligned} \quad (5.48)$$

Estas ecuaciones se satisfacen si valen las siguientes tres condiciones simultáneamente  $\{l_{2,4}=0.833247-0.2625453l_{2,1}+1.1567847l_{2,2}+0.2264815l_{2,3}; l_{2,3}=-24.50267+3.31909l_{2,1} - 15.42767 l_{2,2}; l_{2,2}=1.630833+0.48066l_{2,1}\}$

Con esto la inecuación da  $\chi_i=0.9999 -0.0490 l_{2,1}$ , es decir si se elige  $l_{2,1}$  entre 0 y 40.77083 el autovalor será inferior a 1.

Usando la matriz unitaria se puede verificar lo establecido por esta solución

$$U^* \Phi_2^{CL} U = \begin{bmatrix} \boxed{0.70239} & 0.080098 & 0.715815 & -2.74629 - 0.04728 l_{2,1} \\ -0.0028 & \boxed{0.54872} & 2.507978 & -9.97030 - 0.96065 l_{2,1} \\ 0.000356 & 0.001775 & \boxed{0.459588} & 2.2006 + 0.1776 l_{2,1} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0.9999 - 0.0490 l_{2,1}} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Si elijo  $l_{2,1}=5$ , entonces  $\chi_4=0.7547266129$ .

Como se puede apreciar la segunda matriz no es exactamente triangular superior, pero puede ser considerada como tal más la siguiente perturbación aditiva:

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0028 & 0 & 0 & 0 \\ 0.000356 & 0.001775 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, se debe verificar que es una perturbación admisible, es decir, que no vulnera la estabilidad.

Para ello, se construyó una función de Lyapunov cuadrática común a las matrices  $\Phi_1^{CL}$  y  $M_2$ . Tal como se mencionó en la sección 5.1 se eligió una matriz  $P$  diagonal trabajando con las matrices triangulares  $U^*\Phi_1^{CL}U$  y  $U^*M_2U$ .

En primer lugar,  $\gamma > \rho(\Phi_1^{CL}) = 0.8383$  (máximo radio espectral de la familia). Entonces, se adopta  $\gamma = 0.85$  y se utiliza el método de construcción de la matriz de  $P$  diagonal analizado en sección 5.4 con lo cual resulta

$$P = \text{diag} (1, 1.2, 260, 25000)$$

Luego  $Q^T Q = P$  tiene la siguiente solución

$$Q = \text{diag} (1, 1.0954, 16.124, 158.113)$$

Con todo esto, se calculó  $\|Q \Omega_i Q^{-1}\| = 0.02676 < (1-0.85) = 0.15$ , permitiendo concluir que el sistema perturbado  $\{\Phi_1^{CL}, \Phi_2^{CL}\}$  será robustamente estable.

Observación 5.2: Al comparar los resultados de los Ejemplos 5.1 y 5.2 se remarca que el primero puede ser considerado como un caso particular de este segundo, para el cual la matriz unitaria se construye a partir de la matriz original de autovectores. Claramente, este segundo método tiene un mejor resultado dado que al no tener que igualar a cero ninguno de los parámetros de la matriz de realimentación permite elegirlos de forma tal que se puedan ubicar independientemente todos los autovalores de cada matriz de lazo cerrado. Recuérdese que en el *Ejemplo 5.1* quedaban autovalores inaccesibles.

### 5.3.2 Imposición de condiciones sobre índice de resolubilidad.

Forzar que la secuencia  $g^{(m)}$  generada por la familia  $\mathbf{M}$  de matrices de lazo cerrado  $M_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se anule para algún  $m = m(n)$  nos permite establecer ecuaciones de diseño de los parámetros de los controladores de manera más directa que con el método de triangularización común. Esto es así debido a que se consideran las matrices originales.

Es decir, se deben calcular las series derivadas desde 0 hasta  $m$ , donde  $m \leq m^{lim}$  de **Lema 5.3**, y obtener tales ecuaciones de diseño a partir de igualar a cero la serie  $g^{(m)}$ .

A continuación, a modo introductorio, se trata la resolubilidad del álgebra generada por un par de matrices de  $2 \times 2$ . El mayor índice de resolubilidad es entonces igual a 2 y entonces se debe anular la serie  $g^{(2)}$ , ver Lema 5.3.

Como el grado de no linealidad de las ecuaciones obtenidas para  $m > 1$  crece significativamente la resolución analítica de este problema es muy complicada, por lo que se propone utilizar algún método no lineal de resolución numérica, como por ejemplo los disponibles en MATLAB.

Un caso particular y más sencillo propuesto luego es considerar el índice de resolubilidad  $m=1$ . En este caso se dice que las matrices en el conjunto conmutan de a pares. Este caso se identifica como *caso abeliano*.

Antes de considerar ambos métodos de diseño, se establecen las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de una matriz  $E_k$  de  $2 \times 2$  genérica tal que su corchete con otra matriz  $E_j$  también de  $2 \times 2$  se anule, es decir  $[E_j, E_k]=0$ .

**Lema 5.5:** *Condiciones para conmutación de matrices de  $2 \times 2$*

Sean dos matrices  $\{E_k, E_j\} \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ , las condiciones que deben satisfacer los coeficientes (no nulos) de  $E_k$  tal que  $[E_j, E_k]=0$  son (5.50), donde  $e_{i,m}^r$  es el elemento de la fila  $i$  y columna  $m$  de la matriz  $r$ .

$$\begin{aligned}
 e_{12}^k &= e_{12}^j \frac{e_{21}^k}{e_{21}^j} \\
 e_{11}^k &= -e_{21}^k \frac{e_{22}^j}{e_{21}^j} + e_{21}^k \frac{e_{11}^j}{e_{21}^j} + e_{22}^k
 \end{aligned}
 \tag{5.50}$$

Demostración

Esto se verifica simplemente calculando el corchete de Lie  $[E_j, E_k]$ . □

Un interesante resultado que surge a partir del Lema 5.5 es la relación entre los autovalores de  $E_j$  y  $E_k$  si los parámetros de esta última se calculan con (5.50).

**Lema 5.6:** *Autovalores de matrices de  $2 \times 2$  que conmutan entre sí.*

Sea un par de matrices  $E_i$  y  $E_j$  de  $2 \times 2$  que conmutan entre sí. Si los autovalores de  $E_i$  son complejos conjugados (reales) entonces los autovalores de  $E_j$  también son complejos conjugados (reales).



Demostración:

Esto se demuestra evaluando el signo de  $\text{trace}(E_i) - 4 \det(E_i)$ . Si el mismo es negativo son complejos y en caso contrario son reales.

Para la matriz  $E_j$  se verifica que esta condición es (5.51).

$$\text{trace}(E_j) - 4 \det(E_j) = (e_{11}^j - e_{22}^j)^2 - 4 e_{12}^j e_{21}^j \quad (5.51)$$

A cálculo hecho para la matriz  $E_k$  calculada con la solución (5.50) se tiene (5.52).

$$\text{trace}(E_k) - 4 \det(E_k) = \left( (e_{11}^j - e_{22}^j)^2 - 4 e_{12}^j e_{21}^j \right) \frac{(e_{21}^k)^2}{(e_{21}^j)^2} \quad (5.52)$$

Como (5.52) resulta igual a (5.51) multiplicada por un cociente positivo  $(e_{21}^k)^2 / (e_{21}^j)^2$  entonces el signo de (5.51) es el mismo de (5.52). Con esto, si  $E_j$  tiene autovalores complejos conjugados entonces  $E_k$  también tiene autovalores complejos conjugados, y viceversa.

#### *i. Caso de índice de resolubilidad $m > 1$*

Sea la familia de matrices de lazo cerrado  $\mathbf{M} = \{M_1, M_2\} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Entonces las series derivadas son

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \text{span}\{M_1, M_2, [M_1, M_2], [M_1, [M_1, M_2]], [M_2, [M_1, M_2]], \dots\},$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \text{span}\{[M_1, M_2], [M_1, [M_1, M_2]], [M_2, [M_1, M_2]], \dots\}$$

$$\mathfrak{g}^{(2)} = \text{span}\{[[M_1, M_2], [M_1, [M_1, M_2]]], [[M_1, M_2], [M_2, [M_1, M_2]]], \dots\}, \text{ y así se continua.}$$

De acuerdo a la *Observación 5.1* se obtiene  $m^{lim} = 2$ . Esto requiere que la serie  $\mathfrak{g}^{(2)}$  sea nula.

Para conseguir esto se definen  $E_1 = [M_1, M_2]$ ,  $E_2 = [M_1, [M_1, M_2]]$  y  $E_3 = [M_2, [M_1, M_2]]$  y luego para que se anulen los corchetes entre  $[E_1, E_2]$ ,  $[E_1, E_3]$  y  $[E_2, E_3]$  se deben satisfacer las ecuaciones (5.50) siendo  $k=1,2,3$ ,  $j=2,3$  con  $i \neq j$ . Más aún, dado que en este caso  $E_k$  y  $E_j$  tienen traza nula ( $\mathfrak{g}^{(1)} \in \mathfrak{sl}(2)$ ), entonces (5.50) se puede simplificar como (5.53).

$$\begin{aligned} e_{12}^k &= e_{12}^j \frac{e_{21}^k}{e_{21}^j} \\ e_{11}^k &= 2e_{21}^k \frac{e_{11}^j}{e_{21}^j} - e_{11}^k \end{aligned} \quad (5.53)$$

Como  $M_1 = \Phi_1 + \Gamma_1 L_1$  y  $M_2 = \Phi_2 + \Gamma_2 L_2$  entonces en los elementos de la matriz  $[M_1, M_2]$  aparecen términos de grado 2 de los elementos de  $L_1$  y  $L_2$  y en el corchete  $[M_1, [M_1, M_2]]$  de grado 3. Por esto las ecuaciones (5.53) son de tipo no lineal en los coeficientes de  $L_1$  y  $L_2$ . Para resolverlas se propone utilizar métodos numéricos de resolución.

La aplicación de este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

*Ejemplo 5.5:* Sea el mismo sistema considerado en el Apéndice E con dos períodos de muestreo. Para obtener los parámetros del controlador, se plantean las ecuaciones no lineales (5.53) que garantizan que  $g^{(2)}=0$ .

Los parámetros que satisfacen tales ecuaciones se obtuvieron haciendo cálculos iterativos con el comando *fsolve* de MATLAB, inicializado con los parámetros diseñados con el método LQR (ver Apéndice E).

Los valores obtenidos son

$$\begin{aligned} L_1 &= [223.9737331539454 \quad -807.65042804235] \\ L_2 &= [925.6796603205983 \quad -1.0185483603890] \end{aligned}$$

Como los radios espectrales de cada matriz de lazo cerrado son  $\rho(\Phi_1^{CL})= 0.9759 < 1$  y  $\rho(\Phi_2^{CL})= 0.9947423 < 1$ , respectivamente y además  $g^{(2)}=0$ , entonces el sistema conmutado es estable asintóticamente para cualquier conmutación.

*Observación 5.3:* Las diferencias entre los parámetros del diseño inicial LQR y las obtenidas con este diseño son mucho menores comparadas con las diferencias entre los parámetros del diseño LQR y el propuesto por (Schinkel et al., 2002), ver Apéndice E.

*Observación 5.4:* El cálculo iterativo de los corchetes produce combinaciones no lineales de parámetros del controlador en los elementos de la ecuación (5.53) (los cuales son lineales en las matrices  $M_1, M_2$ ). Con esto, las ecuaciones se vuelven más complicadas a medida que el valor de  $m$  se incrementa y métodos no lineales de resolución numérica deben ser usados para resolver este problema.

## ii. Caso abeliano

Un caso particular y más sencillo propuesto aquí es considerar el índice de resolubilidad  $m=1$ . Con esto las matrices en el conjunto conmutan de a pares. Este caso particular del Teorema 5.1 ha sido primero demostrado en (Narendra & Balakrishnan, 1994).

Esto requiere para cada par de matrices en  $\mathbf{M}$  que (5.54).

$$[M_i, M_j] = M_i M_j - M_j M_i = 0, \quad i \neq j \quad (5.54)$$

La posibilidad de satisfacer tales ecuaciones depende del orden del sistema y de la cantidad de parámetros ajustables de control. En un caso general se pueden buscar soluciones utilizando algún método no lineal de resolución numérica, como un caso particular del método presentado previamente.

Un caso particular para el cual si es posible obtener la solución analítica del ajuste de los parámetros de un controlador por realimentación de estados es para sistemas lineales de segundo orden genéricos con una sola entrada de control (el caso de tener dos entradas de control es trivial). Esto se presenta en el *Ejemplo 5.6*.

*Ejemplo 5.6:* Sea el mismo sistema de segundo orden de *Ejemplo 5.2*. Para el caso  $m=1$ , se deben satisfacer las ecuaciones (5.54), luego se pueden usar las soluciones (5.50) considerando  $E_1 = \Phi_1^{CL}$  y  $E_r = \Phi_r^{CL}$ .

A cálculo hecho los parámetros de la ley de control  $L_r = [l_{r,1} \quad l_{r,2}]$  deben satisfacer

$$\begin{aligned} l_{r,1} = & -(-l_{1,2}a_{2,1}^r b_2^r b_1^1 + l_{1,2}a_{2,1}^r b_1^r b_2^1 - l_{1,1}a_{2,1}^r b_1^r b_1^1 - l_{1,1}a_{2,2}^r b_1^r b_2^1 + l_{1,1}a_{1,2}^r b_2^r b_2^1 \\ & - a_{1,1}^1 a_{2,1}^r b_1^r - a_{2,1}^1 a_{2,2}^r b_1^r + a_{2,1}^1 a_{1,2}^r b_2^r + l_{1,1}a_{1,1}^r b_1^r b_2^1 + a_{1,1}^1 a_{2,1}^r b_1^r \\ & + a_{2,1}^1 a_{1,2}^r b_1^r) \\ & / (-a_{1,1}^1 b_1^r b_2^r + l_{1,2}b_2^1 b_1^r b_2^r + l_{1,1}b_2^1 b_1^r b_1^r - l_{1,2}b_1^1 b_2^r b_2^r - l_{1,1}b_1^1 b_1^r b_2^r \\ & - a_{1,2}^1 b_2^r b_2^r + a_{2,2}^1 b_1^r b_2^r + a_{2,1}^1 b_1^r b_1^r) \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$\begin{aligned} l_{r,2} = & -(l_{1,1}a_{1,2}^r b_1^r b_2^1 - l_{1,2}a_{2,1}^r b_1^r b_1^1 - l_{1,1}a_{1,2}^r b_2^r b_1^1 - a_{1,2}^1 a_{2,1}^r b_1^r + l_{1,2}a_{1,2}^r b_2^r b_2^1 \\ & - a_{1,2}^1 a_{2,2}^r b_2^r + a_{2,2}^1 a_{1,2}^r b_2^r - l_{1,2}a_{2,2}^r b_2^r b_1^1 + a_{1,2}^1 a_{1,1}^r b_2^r + a_{2,1}^1 a_{1,2}^r b_1^r \\ & - a_{1,1}^1 a_{1,2}^r b_2^r \\ & + l_{1,2}a_{1,1}^r b_2^r b_1^1) \\ & / (-a_{1,1}^1 b_1^r b_2^r + l_{1,2}b_2^1 b_1^r b_2^r + l_{1,1}b_2^1 b_1^r b_1^r - l_{1,2}b_1^1 b_2^r b_2^r - l_{1,1}b_1^1 b_1^r b_2^r \\ & - a_{1,2}^1 b_2^r b_2^r + a_{2,2}^1 b_1^r b_2^r + a_{2,1}^1 b_1^r b_1^r) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Para cualquier período  $kh$  y su matriz asociada  $\Phi_k^{CL}$ , que se agregue a esta familia, vale que si se ajustan los parámetros de su realimentación de estados según {(5.55) y (5.56)} intercambiando  $k$  por  $r$ , entonces  $\Phi_k^{CL}$  conmuta con  $\Phi_1^{CL}$  y  $\Phi_r^{CL}$ , y entonces la familia  $\mathbf{M} = \{\Phi_1^{CL}, \Phi_r^{CL}, \Phi_k^{CL} \dots\}$  genera un álgebra de Lie resoluble (con  $\mathfrak{g}^{(1)}=0$ ).

Observación 5.5: En {(5.55) y (5.56)} se puede ver que los parámetros de la realimentación de estados para una matriz de lazo cerrado asociada a  $h_k$  dependen de los parámetros de las matrices de lazo abierto  $\Phi_i$  para  $h_j$  y  $h_k$  y los parámetros del controlador  $L_1$  para  $h_j$ . Con esto, una vez determinados  $l_{1,1}$  y  $l_{1,2}$  quedaran definidas todas las matrices en el conjunto y sus respectivos radios espectrales, los que pueden resultar superiores a la unidad dependiendo, entre otras cosas, de la planta en particular. Sin embargo a partir del **Lema 5.6** se establece que todas las matrices en el conjunto tendrán sus autovalores complejos conjugados o reales.

### 5.3.3 Control por realimentación de estados con observadores

En primer lugar se analiza la resolubilidad de la familia de matrices (5.10) con  $i=1,..,p$ , a partir de suponer la resolubilidad de las álgebras generadas por matrices del lazo de control y lazo de observación de manera separada.

**Lema 5.7:** Sean las familias  $\mathbf{M}_C = \{\Phi_i^{CL}, \text{ con } i=1,..,p\}$  y  $\mathbf{M}_0 = \{\Theta_i, \text{ con } i=1,..,p\}$  tales que ambas generen álgebras de Lie resolubles.

Entonces, la familia  $\mathbf{M} = \{\Psi_i \text{ con } i=1,..,p\}$  generan un álgebra de Lie resoluble.

*Demostración:*

Como las álgebras asociadas con las familias  $\mathbf{M}_C$  y  $\mathbf{M}_0$  son ambas resolubles (por separado), luego existen dos transformaciones matriciales  $T_C$  y  $T_0$  que triangularizan a todas las matrices en cada uno de los conjuntos  $\mathbf{M}_C$  y  $\mathbf{M}_0$ .

Es decir,  $T_C^{-1}\Phi_i^{CL}T_C$  y  $T_0^{-1}\Theta_i T_0$  con  $i=1,..,p$  son todas matrices triangulares superiores. Sea la transformación invertible  $T$  (dado que  $T_C$  y  $T_0$  son invertibles)  $T = \begin{bmatrix} T_C & 0 \\ 0 & T_0 \end{bmatrix}$ , entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} T_C^{-1} & 0 \\ 0 & T_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i^{CL} & \Gamma_i L_i \\ 0 & \Theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_C & 0 \\ 0 & T_0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} T_C^{-1}\Phi_i^{CL}T_C & T_C^{-1}\Gamma_i L_i T_C \\ 0 & T_0^{-1}\Theta_i T_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.57)$$

que resulta ser triangular superior, por tanto el álgebra generada por  $\Psi_i$  es resoluble.

□

*Observación 5.6:* A partir de este lema y proponiendo además que los radios espectrales máximos de las familias de matrices de lazo cerrado de control  $\rho(\mathbf{M}_c)$  y del error del observador  $\rho(\mathbf{M}_0)$  sean inferiores a 1, la estabilidad de lazo cerrado de la familia (5.10) queda garantizada por el **Teorema 5.1**.

A los efectos de conseguir que el álgebra generada por el  $\mathbf{M}_0$  sea resoluble se pueden aplicar tanto los métodos de triangularización como los de imposición de índice de resolubilidad. A modo de ejemplo se presenta la solución analítica del ajuste de los parámetros de los observadores de sistemas de segundo orden genéricos.

*Ejemplo 5.7:* Sea el mismo sistema descrito en *Ejemplo 5.6*, en el cual se buscan calcular los parámetros del observador asintótico (5.10) para reconstruir el estado que no puede ser medido a partir de su salida.

Definiendo la matriz de salida  $C$ , que permanece invariante ante el cambio de período de muestreo (5.2), como sigue

$$C = [c_1 \quad c_2] \quad (5.58)$$

Entonces para  $h_r=rh$  se tiene  $G_r = [g_{r,1} \quad g_{r,2}]^T$  y para el período nominal  $h$  se define  $G_1 = [g_{1,1} \quad g_{1,2}]^T$ .

Aplicando el método *abeliano* 5.3.2.ii, se pueden usar las soluciones (5.50) considerando  $E_1 = \Phi_1 + G_1 C$  y  $E_r = \Phi_r + G_r C$ , ya que es un caso dual del problema del controlador.

A cálculo hecho, se obtienen las soluciones exactas {(5.59), (5.60)} de ajuste de cualquier observador genérico de forma que la familia  $\mathbf{M}_0$  genere un álgebra resoluble.

$$\begin{aligned} g_{r,1} = & -(a_{12}^r c_2 a_{21}^1 - a_{12}^1 a_{21}^r c_2 - g_{1,1} c_2 c_1 a_{11}^r - a_{12} c_2 a_{11}^r \\ & + g_{1,1} (c_1)^2 a_{12}^r - g_{1,1} (c_2)^2 a_{21}^r + a_{12}^1 c_1 a_{22}^r - a_{12}^r a_{22}^1 c_1 \\ & + a_{12}^r c_1 a_{11}^1 + g_{1,1} c_2 c_1 a_{22}^r) / (-a_{12}^1 (c_1)^2 - a_{22}^1 c_1 c_2 \\ & + c_1 a_{11}^1 c_2 + (c_2)^2 a_{21}^1) \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} g_{r,2} = & -(c_1 a_{12}^r a_{21}^1 + a_{12}^r g_{2,2} (c_1)^2 - c_1 a_{12}^1 a_{21}^r - a_{11}^r a_{21}^1 c_2 \\ & - a_{11}^r g_{2,2} c_1 c_2 - a_{22}^1 a_{21}^r c_2 - g_{2,2} (c_2)^2 a_{21}^r + a_{21}^r a_{11}^1 c_2 \\ & + a_{22}^r a_{21}^1 c_2 + a_{22}^r g_{2,2} c_1 c_2) / (-a_{12}^1 (c_1)^2 - a_{22}^1 c_1 c_2 \\ & + c_1 a_{11}^1 c_2 + (c_2)^2 a_{21}^1) \end{aligned} \quad (5.60)$$

El problema de diseño de realimentación de salidas con observador puede resolverse entonces combinando las soluciones de ajuste de los parámetros de control {(5.55) y (5.56)} y de los parámetros del observador {(5.59), (5.60)}.

#### 5.4 Análisis de robustez y performance

Para DTSS cuyas matrices satisfacen las condiciones Lie-algebraicas del **Teorema 5.1**, la estabilidad exponencial uniforme ante conmutación arbitraria es equivalente a la estabilidad exponencial de todos los modos que lo constituyen.

Si bien la condición algebraica de resolubilidad del álgebra de Lie se destruye ante una dispersión paramétrica en un pequeño entorno (Agrachev & Liberzon, 2001), cierto grado de robustez es esperable debido a la propiedad de estabilidad exponencial que es robusta frente a pequeñas perturbaciones de los parámetros del sistema.

Por tanto, el objetivo de esta sección es proponer herramientas que permitan determinar el grado de robustez.

##### 5.4.1 Calculo de la matriz P de la CQLF

Para realizar un análisis de robustez (o de performance) se requiere explícitamente el cálculo de la matriz de la matriz  $P$  de la función cuadrática de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  y el coeficiente de estabilidad exponencial  $\gamma < 1$  que satisfacen (5.61).

$$\begin{aligned} P &= P^T > 0 \\ \gamma^2 P - M_i^T P M_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (5.61)$$

La existencia de una CQLF se garantiza en este Capítulo diseñando las matrices  $M_i$  con los métodos de sección 5.3.

Una primera alternativa para calcular  $P$  y  $\gamma$  es usar directamente algún método numérico (Boyd et al., 1994) para resolver las LMI (5.61).

Una segunda alternativa es determinar sus valores a través de resolver exactamente la igualdad en (5.61), es decir  $M_y^T P M_y = \gamma^2 P$  siendo  $M_y$  la matriz en la familia  $\mathbf{M}$  de mayor radio espectral y  $\gamma = \varepsilon + \max_i \rho(M_i) = \varepsilon + \rho(M_y)$ . En lo que sigue se mostrara un ejemplo donde la misma es válida.

Una tercera alternativa es construir  $P$  a partir del conocimiento de la transformación de triangularización  $T$ . Específicamente, si el álgebra generada por las matrices es resoluble, se puede construir la matriz  $P$  en el espacio original como (5.62) donde  $\Re$  significa tomar la parte real de la matriz diagonal y  $\tilde{P}$  es la matriz diagonal común, a las matrices triangulares superiores  $T^{-1}M_i T$ , calculada con el método constructivo de (Theys, 2005).

$$P = \Re(T^* \tilde{P} T) \quad (5.62)$$

A continuación se analiza este método constructivo a los fines de establecer conclusiones sobre la relación entre  $\gamma$  y  $P$ .

*i. Relación entre la aproximación de norma elipsoidal y la matriz  $P$*

A partir del método constructivo utilizado para la demostración de Corolario de (Theys, 2005), citado aquí como 5.1, se puede establecer una relación aproximada entre la matriz  $P$  y la aproximación de norma elipsoidal  $\gamma$ .

A estos efectos, se citan a continuación los lineamientos de la propuesta de (Theys, 2005).

El objetivo de la demostración de (Theys, 2005) es encontrar por construcción una  $P$  común de matrices triangulares  $\hat{M}_i$  o triangularizables  $M_i$  (que satisfagan  $\hat{M}_i = T^{-1}M_i T$ ). Esto requiere resolver las LMI (5.63).

$$\gamma^2 \hat{P} - \hat{M}_i^T \hat{P} \hat{M}_i \geq 0 \quad (5.63)$$

Para el caso de estabilidad se debe considerar  $\gamma=1$ . En la demostración de Teorema 5.1 de (Theys, 2005) se propone elegir como  $\hat{P}$  una matriz diagonal. Entonces (5.63) se convierte en

$$\begin{bmatrix} (\gamma^2 - |a_{11}^i|^2) p_1 & -a_{11}^{i*} a_{12}^i p_1 & \cdots \\ -a_{11}^i a_{12}^{i*} p_1 & -|a_{12}^i|^2 p_1 + (\gamma^2 - |a_{22}^i|^2) p_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ -a_{11}^i a_{1n}^{i*} p_1 & -a_{11}^i a_{1n}^{i*} p_1 - a_{22}^i a_{2n}^{i*} p_2 & \cdots \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Luego, los valores de  $p_i$  (para  $\gamma = 1$ ) se eligen de forma que los menores principales de la matriz sean positivos. Estos menores principales  $p_{k+1}$  se pueden forzar a ser positivos, porque  $p_{k+1} > 0$  solo aparece en el último término diagonal y entonces puede ser elegido como un valor suficientemente grande. Por ejemplo, en el primer menor principal (5.65),  $p_2$  solo

aparece en el último término diagonal, y luego puede ser elegido tan grande de forma que se satisfaga el signo positivo.

$$\begin{vmatrix} (\gamma^2 - |a_{11}^i|^2) p_1 & -a_{11}^{i*} a_{12}^i p_1 \\ -a_{11}^i a_{12}^{i*} p_1 & -|a_{12}^i|^2 p_1 + (\gamma^2 - |a_{22}^i|^2) p_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (5.65)$$

Como los elementos de  $M_i$  son finitos se garantiza que el valor de  $p_{k+1}$  existe y es finito.

Si en lugar de usar  $\gamma = 1$  se considera  $\gamma^2 = |a_{jj}^i|^2 + \varepsilon_j^i < 1$  el menor valor de  $\varepsilon$  para el conjunto  $\mathbf{M}$  es  $\varepsilon_{min} = \gamma - \rho(\mathbf{M})$ , donde  $\rho(\mathbf{M}) = \max |a_{jj}^i|$ .

En este caso (5.65) se puede reescribir como (5.66).

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^i p_1 & -a_{11}^{i*} a_{12}^i p_1 \\ -a_{11}^i a_{12}^{i*} p_1 & -|a_{12}^i|^2 p_1 + \varepsilon_2^i p_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (5.66)$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer  $p_1=1$ . Para que el determinante (5.66) sea positivo se verifica que: la disminución del valor de  $\varepsilon_j^i$  requiere que  $p_2$  sea más grande.

El mismo razonamiento puede extenderse al resto de determinantes. Entonces con este método constructivo la cercanía de la constante exponencial al máximo radio espectral del conjunto se logra a expensas de elegir los términos cada vez más grandes.

Por otro lado igualar la constante exponencial al valor de  $\rho(\mathbf{M})$  elimina el término que multiplica con signo positivo al valor  $p_j$  en la diagonal y este término forma parte de los determinantes de los menores principales de tamaño mayor o igual a  $j$ . Por ejemplo, si en (5.66) el máximo autovalor es  $\max |a_{22}^i|$  y  $\varepsilon_2^i=0$  entonces el determinante resulta negativo para cualquier valor de  $p_2>0$ .

Por ambos motivos, si bien se puede aproximar la norma exponencial por un valor superior al radio espectral, no siempre es posible usar la igualdad con la  $\hat{P}$  diagonal construida con este método. Esto no contradice lo postulado por el Corolario 5.1 que dice que la aproximación de la norma elipsoidal puede ser elegida igual  $\rho(\mathbf{M})$  porque el mismo se basa en la existencia de una  $P^*$  común que no necesariamente sea diagonal.



Entonces, a través del análisis del método constructivo se puede llegar a la siguiente conclusión:

La cercanía de  $\gamma$  con  $\rho(\mathbf{M})$  se logra a expensas de agrandar los parámetros  $p_{k+1}$ . Esto implica que la relación entre autovalores de  $\hat{P}$ ,  $p_{n+1}/p_1$  se vuelva muy grande y se reduzca la cota de una posible perturbación admisible como se indicará en la sección siguiente.

Observación 5.7: Si el diseño fue realizado con el Método 5.2 y los autovalores de la planta controlada son reales, entonces la matriz unitaria de transformación es real y la matriz  $P$  construida con (5.62) y la matriz diagonal  $\hat{P}$  tienen los mismos autovalores.

*ii. Igualdad entre la aproximación de norma elipsoidal y el máximo valor singular de  $\mathbf{M}$*

En algunos casos es posible resolver la igualdad en (5.61) para calcular  $P$  tal como se consideró en la segunda alternativa. En este caso  $\hat{P}$  en general no tendrá una forma diagonal tal como fue observado en la sección precedente.

Un interesante ejemplo para matrices de  $2 \times 2$  se muestra a continuación.

*Ejemplo 5.8:* Sean  $\{E_k, E_j\} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  dos matrices que conmutan, es decir matrices que satisfacen (5.50). Considérese la matriz simétrica  $P$  (5.67).

$$P = \begin{bmatrix} \frac{-e_{21}^j}{e_{12}^j} & \frac{(e_{11}^j - e_{22}^j)}{2 e_{12}^j} \\ \frac{(e_{11}^j - e_{22}^j)}{2 e_{12}^j} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Supongamos que  $-e_{21}^j/e_{12}^j > 0$  y que los autovalores de  $E_j$  son complejos conjugados, entonces la condición (5.51) es negativa. Como el signo de (5.51) es el opuesto al del determinante de (5.67), entonces se puede garantizar que el determinante es siempre positivo. La satisfacción de ambas condiciones garantiza que la matriz (5.67) es definida positiva.

Realizando entonces el producto  $E_j^T P E_j$  se obtiene (5.68).

$$E_j^T P E_j = (e_{11}^j \ e_{22}^j - e_{12}^j \ e_{21}^j) \begin{bmatrix} \frac{-e_{21}^j}{e_{12}^j} & \frac{(e_{11}^j - e_{22}^j)}{2 e_{12}^j} \\ \frac{(e_{11}^j - e_{22}^j)}{2 e_{12}^j} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Por simple inspección la matriz de (5.68) resulta ser la matriz  $P$  definida en (5.67) multiplicada por el determinante de  $E_j$ . Como  $\det(E_j) = \lambda_j \lambda_j^* = |\lambda_j|^2$  y entonces la constante exponencial  $\gamma_j = |\lambda_j|$ .

Procediendo de igual forma para todas las matrices calculadas con (5.50), el producto  $E_k^T P E_k$  resulta ser la matriz definida  $P$  definida en (5.67) multiplicada por el determinante de  $E_k$ . Nuevamente como  $|E_k| = \lambda_k \lambda_k^* = |\lambda_k|^2$  entonces la constante exponencial es  $\gamma_k = |\lambda_k|$ .

Con esto, para todas las matrices que conmutan entre sí,  $E_j$  y todas las  $E_k$  que satisfacen (5.50), se puede elegir la matriz  $P$  (5.67) de la función cuadrática común de Lyapunov y el coeficiente de estabilidad exponencial de cada matriz es el modulo de sus autovalores.

#### 5.4.2 Performance establecida en términos de la norma espectral

La estabilidad asintótica exponencial es verificada por la existencia de una CQLF. Esto permite acotar la norma espectral del vector tal como se presenta en el siguiente teorema.

#### **Teorema 5.2:** Performance y norma espectral

Sea el sistema (5.2) donde las matrices  $M_i = \Phi_i^{CL}$  en el conjunto  $\mathbf{M}$  generan un álgebra de Lie resoluble (como se ha propuesto en la sección precedente). Entonces el lazo cerrado (5.2) es asintótica y exponencialmente estable, y tiene una performance, caracterizable por la norma espectral del vector  $x$ , que es  $\|x_{k+1}\| \leq c q^{k+1} \|x_0\|$ .

Donde  $c = \sqrt{\lambda_{\max}(P)} / (\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(P)})$  y  $q = \gamma = \rho(\mathbf{M}) + \varepsilon$ , con  $\rho(\mathbf{M}) = \max_i \rho(M_i)$  en el conjunto  $\mathbf{M}$  y  $\varepsilon > 0$ , y  $\lambda_{\min}(P)$ ,  $\lambda_{\max}(P)$  son los autovalores máximo y mínimo, respectivamente de la matriz  $P$  definida positiva y simétrica.

#### *Demostración:*

A partir de la resolubilidad del álgebra de Lie generada por  $\mathbf{M}$  se tiene que existe una CQLF. Más aún en la demostración del **Corolario 5.1** se tiene que existe una  $P$  para la cual existe una igualdad entre el JSR y la aproximación de la norma elipsoidal, es decir  $\rho(\mathbf{M}) = \hat{\rho}(\mathbf{M}) = \max_i \rho(M_i)$ .

Supongamos para independizarnos de la determinación de  $P$  que  $\gamma = \rho(\mathbf{M}) + \varepsilon$  tal que la constante exponencial  $\gamma < 1$  satisface para todas las matrices  $M_i$  en  $\mathbf{M}$ , la LMI (5.61).

Equivalentemente (5.61) significa que

$$V(x_{k+1}) \leq \gamma^2 V(x_k) \quad (5.69)$$

Además, como  $P$  es una matriz definida positiva vale la siguiente desigualdad

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad (5.70)$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma espectral o euclidea.

Combinando las desigualdades (5.69) y (5.70) se tiene

$$\lambda_{\min}(P)\|x_{k+1}\|^2 \leq V(x_{k+1}) \leq \gamma^2 V(x_k) \quad (5.71)$$

Por recurrencia a partir de  $x_0$  en (5.69) se tiene

$$V(x_k) \leq \gamma^{2k} V(x_0) \quad (5.72)$$

Utilizando la cota superior (5.70) para  $x_0$ , se tiene

$$V(x_0) \leq \lambda_{\max}(P)\|x_0\|^2 \quad (5.73)$$

Acotando superiormente a (5.72) con (5.73) y utilizando esta cota en (5.71), permite obtener

$$\lambda_{\min}(P)\|x_{k+1}\|^2 \leq V(x_{k+1}) \leq \gamma^2 V(x_k) \leq \gamma^{2k} \lambda_{\max}(P)\|x_0\|^2 \quad (5.74)$$

A partir de la cota (5.74) se puede acotar la norma espectral del vector en  $k+1$  por

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}\| &\leq \gamma^k \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \|x_0\| = \gamma^{k+1} \left( \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\gamma \sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \right) \|x_0\| \\ &= c \gamma^{k+1} \|x_0\| \end{aligned} \quad (5.75)$$

Donde  $c$  y  $\gamma$  son las constantes positivas de estabilidad exponencial.  $\square$

*Observación 5.8:* A partir de (5.75) ( $\gamma < 1$ ), se desprende que, existe un valor  $r$  tal que

$$\gamma^{r-1} \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} < 1 \Rightarrow r = \left\lceil e^{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}/\sqrt{\lambda_{\min}(P)} - \gamma} \right\rceil + 1 \quad (5.76)$$

a partir del cual  $\|x_r\| \leq \delta \|x_0\|$ , où  $\delta = \gamma^{r-1} \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} < 1$ .

El problema de esta medida espectral es que puede existir una relación de compromiso entre el valor de la aproximación de la norma exponencial  $\gamma$  y los autovalores de  $P$ , tal como fue analizado previamente para el método constructivo de  $P$ . Es decir si se elige  $\gamma = \rho(M) + \varepsilon$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) \uparrow$  y viceversa.

### 5.4.3 Robustez frente a perturbaciones

La existencia de una QCLF garantizada por la resolubilidad del álgebra de Lie asociada a  $\mathbf{M}$  y la posibilidad de considerar la constante de estabilidad exponencial inferior a la unidad nos permiten realizar análisis de robustez del diseño frente a perturbaciones.

#### **Teorema 5.3:** Robustez frente a perturbaciones

Sea el sistema perturbado

$$x_{k+1} = M_i x_k + \Omega_i x_k \quad (5.77)$$

Donde la perturbación máxima esta acotada por su norma espectral  $\|\Omega_i\| < \alpha$  y las matrices  $M_i = \Phi_i^{CL}$  del conjunto  $\mathbf{M}$  generan un álgebra de Lie resoluble.

Entonces el sistema perturbado es robustamente estable si

- a) la cota de la perturbación satisface la siguiente

$$\|Q \Omega_i Q^{-1}\| < 1 - \gamma \quad (5.78)$$

- b) o en su versión más restrictiva

$$\left( \alpha \sqrt{|\lambda_{\max}(P)|} / \sqrt{|\lambda_{\min}(P)|} \right) < 1 - \gamma \quad (5.79)$$

donde  $Q$  se obtiene vía la descomposición de Cholesky de  $P$ ,  $\lambda_{\min}(\dots), \lambda_{\max}(\dots)$  son el mínimo y máximo autovalor de la matriz  $P$  y donde el coeficiente  $\gamma = \varepsilon + \max_i \rho(M_i)$  siendo  $\max_i \rho(M_i)$  el máximo radio espectral en el conjunto  $\mathbf{M}$  y con  $\varepsilon > 0$  tan chico como se quiera (existen algunos casos donde  $\varepsilon$  puede valer 0).

$$\alpha < (1 - \gamma) \frac{\sqrt{|\lambda_{\min}(P)|}}{\sqrt{|\lambda_{\max}(P)|}} \quad (5.80)$$

*Demostración:*

Por hipótesis existe una QCLF, es decir existe una  $P$  definida positiva y simétrica que se puede descomponer usando la descomposición de Cholesky  $P = Q^T Q$ .

Aplicando el cambio de coordenada  $z = Q x$  en la ecuación (5.77) y considerando (5.69), se obtiene

$$\begin{aligned} z^T (Q^{-1})^T M_i^T Q^T Q M_i Q^{-1} z - \gamma^2 z^T z \\ = \|Q M_i Q^{-1} z\|^2 - \gamma^2 \|z\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.81)$$

De forma equivalente

$$\|Q M_i Q^{-1} z\| \leq \gamma \|z\| \quad (5.82)$$

La dinámica del sistema perturbado expresada por  $z$  resulta

$$z_{k+1} = Q M_i Q^{-1} z_k + Q \Omega_i Q^{-1} z_k \quad (5.83)$$

Luego, utilizando la desigualdad triangular

$$\|z_{k+1}\| \leq \|Q M_i Q^{-1} z_k\| + \|Q \Omega_i Q^{-1} z_k\| \quad (5.84)$$

Reemplazando con (5.82) en la desigualdad previa se tiene

$$\|z_{k+1}\| \leq \gamma \|z_k\| + \|Q \Omega_i Q^{-1}\| \|z_k\| \quad (5.85)$$

Si  $\gamma + \|Q \Omega_i Q^{-1}\| < 1$  entonces se demuestra la parte a).

Para la parte b) se opera como sigue en el término  $\|Q \Omega_i Q^{-1}\|$ , usando la desigualdad triangular y propiedades sobre la descomposición de Cholesky se tiene

$$\begin{aligned} \|Q \Omega_i Q^{-1}\| \|z_k\| &\leq \|Q\| \|Q^{-1}\| \|\Omega_i\| \|z_k\| \\ &\leq \|\Omega_i\| \frac{\sigma_{\max}(Q)}{\sigma_{\min}(Q)} \|z_k\| \leq \alpha \frac{\sigma_{\max}(Q)}{\sigma_{\min}(Q)} \|z_k\| \leq \alpha \frac{\sqrt{|\lambda_{\max}(P)|}}{\sqrt{|\lambda_{\min}(P)|}} \|z_k\| \end{aligned} \quad (5.86)$$

Entonces, si se satisface la desigualdad

$$\left( \gamma + \alpha \frac{\sqrt{|\lambda_{\max}(P)|}}{\sqrt{|\lambda_{\min}(P)|}} \right) < 1 \quad (5.87)$$

Se garantiza la estabilidad del sistema perturbado, porque esto da

$$\|z_{k+1}\| \leq \left( \gamma + \alpha \frac{\sqrt{|\lambda_{\max}(P)|}}{\sqrt{|\lambda_{\min}(P)|}} \right) \|z_k\| < \|z_k\| \quad (5.88)$$

□

La existencia de una función de Lyapunov común brinda cierta robustez frente a una pequeña perturbación aditiva en el sistema. Por ejemplo dispersión paramétrica, incertidumbre en el valor efectivo del período de muestreo, entre otros motivos.

El siguiente ejemplo muestra la robustez del diseño frente a cierta dispersión en el valor del período de muestreo.

*Ejemplo 5.9:* Sea un conjunto de matrices que satisfacen el criterio algebraico, para un período nominal  $h_i^{nom}$ . Entonces existe una CQLF que satisface estabilidad.

Supongamos que cada  $h_i^{nom} \in [h_i^{min}, h_i^{max}]$ . Utilizando el criterio para período acotado de (Hetel et al., 2008), (Hetel et al., 2009), se puede determinar la estabilidad en los extremos del politopo descrito por  $\{(2.34), \dots, (2.38)\}$ , que se construye a partir de la aproximación de Taylor de orden  $N$  (2.33) de las matrices discretas del sistema (2.32), ver sección 2.2.6 por detalles. Con esto, las  $N+1$  matrices de lazo cerrado del politopo son (5.89) y el mismo resulta estable si se satisfacen las LMI (5.90).

$$\Psi_j^{LC} = (A_j + B_j L_i), \quad j = 1 \dots N + 1 \quad (5.89)$$

$$(\Psi_j^{LC})^T P \Psi_j^{LC} - P < 0, \quad j = 1 \dots N + 1 \quad (5.90)$$

Entonces si se realiza la diferencia entre cada una de estas  $N+1$  matrices y las matrices de lazo cerrado para el período nominal se obtienen las matrices de perturbación (5.91). Si todas estas perturbaciones satisfacen el **Teorema 5.3**, entonces el sistema es robustamente estable.

$$\Delta_{i,j} = \Psi_j^{LC} - \Phi_i^{LC}, \quad j = 1 \dots N + 1, i = 1 \dots p \quad (5.91)$$

Numéricamente, considérese el sistema (5.92) donde  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=5$  y  $b_1=1$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 - \beta^2 & 2\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

Los períodos de muestreo nominales son  $h_1=0.1$  y  $h_2=0.2$ . Estos valores varían en los siguientes intervalos  $[0.8, 0.12]$  y  $[0.18, 0.22]$ .

La retroalimentación  $L_2$  (para  $h_2$ ) se calcula de acuerdo a  $\{(5.55), (5.56)\}$ . Es decir, dado  $L_1=[-10,-6]$ , queda definido  $L_2=[-1.4983887, -4.3687792]$ . Con esto, el mayor radio espectral en la familia es  $\rho(\mathbf{M}) = \rho(M_1) = 0.6990$ . A cálculo hecho la  $P$  calculada con (5.67) es

$$P = \begin{bmatrix} 50.40187 & 3.8085937 \\ 3.8085937 & 1 \end{bmatrix} > 0 \quad (5.93)$$

Esto permite calcular  $Q$ . Luego, se puede calcular si la máxima perturbación para cada matriz satisface (5.78). A cálculo hecho estas condiciones son

$$\max_{i=1..N+1} (\|Q \Omega_{i,1} Q^{-1}\|) = 0.1505 < 1 - (\rho(\mathbf{M}))^2 \quad (5.94)$$

$$\max_{i=1..N+1} (\|Q \Omega_{i,2} Q^{-1}\|) = 0.4316 < 1 - (\rho(\mathbf{M}))^2 \quad (5.95)$$

Ambas condiciones se satisfacen y entonces el sistema es robustamente estable.

## 5.5 Conclusiones

La adaptación de la tasa de procesamiento/transmisión de la información en CPU o redes es una técnica que permite el uso eficiente de los recursos compartidos, y provoca la variación del período de muestreo de los lazos de control. Esta variación puede tener un impacto negativo en la estabilidad y performance del sistema.

El diseño de una familia de parámetros del controlador, donde cada elemento en la familia se corresponde con un período de muestreo, debe garantizar la estabilidad asintótica y cierto nivel de performance.

Motivado por estos problemas, en este Capítulo se usó la condición suficiente establecida por la resolubilidad del álgebra de Lie generada por un conjunto de matrices estables, para garantizar la estabilidad asintótica.

Si bien conocida desde hace tiempo, esta condición algebraica ha sido propuesta por primera vez en esta tesis para ser usada en el diseño de sistemas discretos de lazo cerrado. Específicamente se usa para imponer condiciones que permitan obtener los parámetros de un controlador por realimentación de estados que resuelva el problema. Esto permitió proponer nuevos métodos de diseño de control para estabilización, vía la obtención de una matriz de triangularización común o planteando condiciones de resolubilidad del álgebra de Lie, ambos sobre las matrices de evolución resultantes en tiempo discreto.

Estos métodos han permitido obtener soluciones analíticas en algunos casos y aproximadas en otros. Se trataron casos de realimentación sin y con observadores de estado y se analizó la robustez de los diseños propuestos vía ejemplos.





# APÉNDICE E

## Deficiencias de resultados previos de la literatura

Sea la siguiente planta de segundo orden lineal tomada de (Schinkel et al., 2002) descrita por  $\dot{x} = A x + B u$ , con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10000 & -0.1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

Se consideran que esta planta es muestreada con los siguientes dos períodos de muestreo,  $h_1=0.002$  y  $h_2=0.094$ .

Suponiendo un control discreto por realimentación de estados  $u_k = L_i x_k$  las matrices de lazo cerrado  $\Phi_i^{\text{CL}}$  de la familia para cada período de muestreo  $h_i$  son

$$\Phi_1^{\text{CL}} = \begin{bmatrix} 0.9801 & 0.0020 \\ -19.8649 + 0.0020 l_{1,1} & 0.9799 + 0.0020 l_{1,2} \end{bmatrix}, \quad (\text{E.2})$$
$$\Phi_2^{\text{CL}} = \begin{bmatrix} -0.995 + 0.0002 l_{2,1} & 0.000246 + 0.0002 l_{2,2} \\ -2.466 + 0.00025 l_{2,1} & -0.995 + 0.00025 l_{2,2} \end{bmatrix}$$

Supongamos que el controlador  $h_1$  fue diseñado con la técnica LQR, con horizonte infinito, ver ecuación (B.20), y vale en este caso  $L_1 = [177.820 \quad -19.6838]$ .

En primer lugar, si se asume un controlador común a todos los modos,  $L_2 = L_1$ , la matriz  $\Phi_2^{\text{CL}}$  es inestable dado que  $\rho(\Phi_2^{\text{CL}}) = 1.1697 > 1$ .

La opción presentada en (Albertos & Crespo, 1999) para calcular la realimentación de estados adaptable al valor del período propone la siguiente ecuación de diseño

$$L' = (L + L^*h), \quad L^* \cong L(A + BL)/2 \quad (\text{E.3})$$

Si se usa esta ley  $L^*$  para  $h_2$ , la matriz  $\Phi_2^{CL}$  es inestable dado que  $\rho(\Phi_2^{CL}) = 1.0152 > 1$ .

Diseñar el controlador con un diseño LQR, con horizonte infinito, requiere hacer las adaptaciones al período de muestreo de las matrices peso del diseño, es decir  $Q'_k, M'_k, R'_k$  dependen del período  $h_k$  definidas en (B.19). A cálculo hecho los parámetros del controlador diseñados con este método LQR, similar al de (Cervin et al., 2002) pero sin ruido, son:

$$\{L_1 = [195.401 \quad -19.4121], L_2 = [1296.6 \quad 8.826]\}$$

En este caso cada modo es estable, pero el sistema conmutado para variación arbitraria no lo es. Por ejemplo, sea la señal de conmutación  $\sigma = \{1, 2, 2\}$ , la dinámica conmuta entre  $\Phi_1^{CL}$ ,  $\Phi_2^{CL}$  y  $\Phi_2^{CL}$  y siempre lo hace en esa secuencia, por tanto el sistema es periódico y se describe como  $\Phi_3^{CL} = (\Phi_2^{CL})^2 \Phi_1^{CL}$ . El radio espectral es  $\rho(\Phi_3^{CL}) > 1$  muestra que, aunque cada matriz es estable, una secuencia que conmuta entre ellas no lo es.

Otra opción para el diseño es usar el método de horizonte finito LQR de (Schinkel et al., 2002), donde se optimiza la ley de control para un horizonte igual al período de muestreo que varía. Los parámetros son respectivamente:

$$\{L_1 = [0.5784 \quad -0.0507], \quad L_2 = [1765.5 \quad 0.0109]\}$$

Numéricamente los valores de esta solución son muy distintos de la realimentación  $L_I$  original diseñada con LQR, es decir este diseño arroja resultados muy conservativos.

# CAPÍTULO 6

## Co-diseño de control y planificación para descongestión de recursos en Sistemas Distribuidos de Control

En este capítulo se proponen soluciones para el problema de congestión en los recursos compartidos de capacidad limitada de sistemas distribuidos de control con un enfoque de Co-Diseño, así llamado en la literatura en referencia al abordaje conjunto del problema desde ambas perspectivas, la de la teoría de control y la de la informática aplicada.

Desde el aspecto informático se propone usar una política de pérdida de datos que descarte ciertas instancias de tareas de control o paquetes de medición utilizando el modelo  $(m, k)$ -firm. Para implementar esta política se consideran mecanismos de selección que determinan el valor  $m$  del patrón  $(m, k)$ -firm de acuerdo al estado real del recurso o bien a los estados del recurso y la planta. Se prevé que el mecanismo de selección se ejecute de forma “*on-line*”.

Como el modelo  $(m, k)$ -firm resulta en un mecanismo indirecto de ajuste de período se debe complementar con un diseño de control que garantice la estabilidad y un buen nivel de performance. Específicamente, se consideran aquí dos propuestas de diseño: un controlador robustamente estable frente a las variaciones de período y una familia de controladores adaptables a los períodos variables diseñados con el método Lie algebraico del Capítulo 5.

Las estrategias propuestas son aplicadas en casos de estudio exhaustivos.

### 6.1 Introducción

Durante situaciones de sobrecarga de un recurso compartido en una plataforma informática de tiempo real pueden presentarse retardos excesivos y/o pérdida de mensajes entre sensores y controladores. Ambos fenómenos impiden que se implementen las acciones de control *a tiempo* (no se satisfacen sus restricciones temporales), lo que puede resultar en un gran deterioro de la performance o incluso inestabilidad de los lazos de control.

---

En la práctica, se suele intentar resolver el problema de satisfacer las restricciones temporales de cada lazo de control con el uso de algoritmos de planificación (*scheduling* en inglés) para el tráfico de la red y/o de las tareas en un procesador (Almeida et al., 2002), (Zhang et al., 2001), por ejemplo para la comunicación entre los maestros de redes “*token bus*”, el acceso al medio se habilita con la señal de “*token*” (Lian et al., 2001). Si bien estos algoritmos pueden mejorar la respuesta temporal del sistema, implícitamente no garantizan que las restricciones temporales sean satisfechas. Esto requiere un análisis extra que demuestre cuan factible es la satisfacción de las restricciones temporales para una dada planificación, ver Apéndice D.

La satisfacción de la factibilidad se basa principalmente en respuestas temporales e hipótesis restrictivas de peor caso, por lo que el uso de las técnicas de planificación de manera *off-line* conducirá generalmente a un sobredimensionamiento del sistema (Song, 2005). Como alternativa, el uso de soluciones basadas en el control de la admisión de distintos flujos y/o que actualicen sus restricciones de tiempo real, verificando de manera *on-line* la condición de factibilidad, permite satisfacer requerimientos dinámicos de comunicación del tráfico en la red (adición, eliminación y adaptación del flujo de mensajes), evitando su sobredimensionamiento en la etapa de diseño.

En este Capítulo se propone una solución en esta línea de pensamiento, articulando el diseño del sistema informático-computacional con el del sistema de control en lazo cerrado.

### 6.1.1 Antecedentes

Los principales enfoques de Co-Diseño propuestos para resolver este problema fueron presentados en el Capítulo 2. Aquí sólo se remarcan algunas características relevantes teniendo particular interés en lo que concierne al diseño de control.

Las estrategias de Co-Diseño pueden ser categorizadas en tres grupos: basadas en el ajuste del período de muestreo, basadas en el rechazo o pérdida de instancias de tareas de control y basadas en el ajuste de la prioridad de las tareas.

El primer enfoque ha sido utilizado principalmente para optimizar el uso de un procesador compartido por varias tareas de control que se ejecutan en él; (Seto et al., 1996), (Eker et al., 2000), (Cervin et al., 2002); y no es fácilmente implementable en redes estándares, aunque ha sido aplicado exitosamente en redes particulares como FTT-CAN (Antunes et al., 2007). El segundo enfoque, originalmente presentado en (Ramanathan, 1999) consiste en perder

muestras de forma selectiva dentro de cierto límite tolerable durante el período de sobrecarga. Las soluciones que asignan prioridades a las tareas como (Xia et al., 2006) o que reducen la utilización utilizando sensores “inteligentes” que envían sus mediciones sólo cuando las salidas superen ciertos umbrales, (Kofman y Braslavsky, 2006) y (Otanez et al., 2002a) también pueden producir un cambio en el período efectivo de actualización del control.

En aquellas soluciones que varía el período de la tarea de control, se deben prever acciones para evitar una pérdida de la performance de control.

Una primera propuesta considera tener una ley de control fija (controlador único) y promover el envío de mensajes y/o ejecutar las tareas de control en función del estado de la planta. Por ejemplo, enfoques basados en esta idea permiten mejorar la performance cuando se aumenta el período, ver (Marti, 2002), (Velasco et al., 2004), (Xia et al., 2006).

Una segunda alternativa considerada en (Eker et al., 2000) y (Cervin et al., 2002) propone adaptar los parámetros de control a la variación de la tasa de la tarea de control usando el método de diseño óptimo LQ.

Debido a que el período es cambiado de acuerdo al estado del recurso compartido, para obtener una ley de control óptima se debe resolver un problema LQ para sistemas discretos conmutados (en sus siglas DSLQ por *Discrete-Time Switched LQ*). Por esto, en lugar de conseguir una única ganancia óptima de realimentación como en el problema clásico LQ, la solución del DSLQ es una ganancia por realimentación dependiente del estado (Zhang et al., 2009). Como la implementación de un algoritmo que encuentre tal solución óptima del DSLQ en forma “*on-line*” se vuelve prohibitiva, en (Eker et al., 2000) se ha aproximado la solución de horizonte finito del DSLQ por la solución óptima en horizonte infinito. Sin embargo, como fue observado en (Schinkel et al., 2002), el lazo cerrado diseñado con una técnica LQ con horizonte infinito puede acusar inestabilidad para ciertas secuencias de variación de la tasa. Esto se resuelve en el mismo artículo con un diseño de controladores óptimos con horizonte finito resolviendo un problema LMI que garantiza la estabilidad, pero que puede conducir a resultados muy conservativos, referirse a Apéndice E de esta tesis por detalles.

### 6.1.2 Enfoque de este capítulo

El objetivo en este capítulo es proponer soluciones para la descongestión de los recursos de forma dinámica, ya sea resolviendo la sobrecarga inmediatamente, o evitando que aparezca. Para ello se considera una estrategia basada en la pérdida selectiva de datos de acuerdo al

modelo  $(m, k)$ -firm (Hamdaoui & Ramanathan, 1995), que puede ser interpretada como ajuste indirecto del período. El interés en esta alternativa es su fácil implementación con respecto al enfoque de ajuste dinámico de períodos, y tiene como contraparte que sólo puede cambiarse el período a un número múltiple de un período de muestreo nominal.

Para evitar un sobredimensionamiento del sistema informático derivado del uso de las técnicas planificación *off-line* (Song, 2005) se presentan dos estrategias que consideran que la adaptación del valor  $m$  patrón  $(m, k)$ -firm de forma “*on-line*”.

La primera de ellas utiliza la técnica básica  $(m, k)$ -firm y prevé la ejecución de instancias extras de la tarea de control en función de los estados del recurso y de la planta.

La segunda técnica se centra en el estado del recurso por lo cual se propone la adaptación de los parámetros del controlador para mejorar la performance del lazo controlado. Para esta segunda propuesta, y en concordancia con los problemas de las técnicas LQ mencionados previamente, se propone aquí realizar un diseño de parámetros del controlador que se adapten a la variación de la tasa, basado en el enfoque Lie-algebraico del Capítulo 5. La garantía de estabilidad y el cálculo de parámetros en forma “*off-line*” lo hace muy útil para el problema de optimización conjunta de control y planificación.

Estos resultados han sido publicados en los artículos (Felicioni et al., 2006), (Felicioni & Junco, 2007), (Felicioni, 2008), (Felicioni et al., 2008), (Felicioni et al., 2010a), (Felicioni et al., 2010b).

## **6.2 Formulación del problema y modelado matemático**

Se considera una arquitectura de control global integrada por un conjunto de plantas cada una con su propio controlador discreto. Cabe acotar que a lo largo de este capítulo se usan los términos controlador y ley de control de forma equivalente.

En la arquitectura considerada existen recursos limitados que son compartidos entre las tareas de control de las plantas. Por ejemplo, los controladores se ejecutan en un mismo procesador, o las señales muestreadas de la planta y enviadas desde el controlador al actuador son transmitidas a través de la misma red.

El modelado de tal arquitectura y la formulación del problema a abordar en este capítulo se presentan en la sección 6.2.1.

Además, como en este capítulo se propone usar el modelo  $(m, k)$  – firm, sus principales características son descritas en sección 6.2.2. Para consultar los conceptos de tareas de tiempo real, planificación, su caracterización y conceptos de análisis de factibilidad de planificación referirse al Apéndice D.

### 6.2.1 Hipótesis de modelado y problema planteado

En este capítulo se consideran dos posibles problemas: a) un conjunto de sistemas de control en el cual los controladores, sensores y actuadores están intercambiando *mensajes* a través de la red de comunicaciones (Figura 1.1), b) un conjunto de sistemas de control tal que sus leyes o algoritmos de control se ejecuten como tareas en un procesador compartido (Figura 1.2).

Para el caso a), se asume lo siguiente en relación con el manejo de las señales de cada sistema de control en la red, ver (Zhang et al., 2001) y sección 2.2.1: i) muestreo periódico de la salida de la planta; controlador y actuador manejados por los eventos a su entrada; ii) agrupamiento de los mensajes de varios sensores hacia un mismo controlador en un único paquete de red (*single-packet*); iii) en forma análoga se envía un paquete desde un controlador hacia varios actuadores.

Bajo estas hipótesis, el manejo de la red que plantea la omisión selectiva de mensajes de los sensores a cada controlador, implica una reducción simultánea de los paquetes controlador-actuador.

Para el caso b) se asume lo siguiente en relación con el manejo de las señales de cada sistema de control en el procesador, ver sección 2.3.1: i) muestreo periódico de la salida de la planta; controlador y actuador manejados por los eventos a su entrada; ii) una tarea realiza la siguiente secuencia de operaciones: muestreo, cálculo de control y actuación; iii) cada una de las ejecuciones de la secuencia de operaciones se la considera como una instancia de la tarea; iv) cada tarea tiene un tiempo de ejecución de peor caso (WCET) y cada instancia de esa tarea se ejecuta en un cierto tiempo de ejecución  $C_i$ ; v) cada instancia de una tarea se encuentra en alguno de los siguientes estados: lista (*ready*), en ejecución (*running*), en espera (*preempted* o *waiting*), no activada (*non activated* o *sleeping*), detenida (*stopped*), ver Apéndice D.

En el caso a) se considera que las tareas de control incluyen entre sus operaciones a las comunicaciones entre sensor y controlador y entre controlador y actuador.



El problema se puede establecer en forma cualitativa como sigue:

**Administración del recurso ante congestión:** El problema enfocado aquí es la administración del recurso compartido en situaciones de congestión de manera de satisfacer las restricciones temporales de las tareas del sistema integrado global y minimizar la degradación de la performance de los sistemas controlados.

### 6.2.2 Estrategia de planificación y factibilidad con restricción $(m, k)$ -firm

El modelo  $(m, k)$ -firm fue propuesto originalmente en (Hamdaoui & Ramanathan, 1994) para caracterizar las restricciones temporales requeridas por cierto tipo de aplicaciones. Este modelo permite la especificación del nivel de garantías requerido por las aplicaciones de tiempo real tolerando la pérdida de “*deadline*” de ciertas instancias de tareas o mensajes. Esta técnica fue originalmente utilizada para manejar situaciones de congestión en aplicaciones de tiempo real de multimedia y luego en (Ramanathan, 1999) se mostró que puede ser utilizada en aplicaciones de sistemas de control de tiempo real.

*Definición 6.1:* Tarea con restricción  $(m, k)$ - firm

Se dice que una tarea  $\tau_i$  tiene deadlines  $(m_i, k_i)$ -firm si al menos  $m_i$  de cada  $k_i$  instancias consecutivas pueden satisfacer sus “*deadlines*”.

Notar que  $m_i = k_i$  significa que todas y cada una de las instancias de  $\tau_i$  deben satisfacer su *deadline*, es decir todas tienen restricciones de tiempo real “*hard*”.

Tal especificación de restricciones  $(m, k)$  tiene asociados dos problemas:

- Política de planificación: como planificar un conjunto de tareas o mensajes sujetos a una restricción  $(m, k)$ -firm;
- Análisis de factibilidad de planificación: para una dada política, como garantizar que las restricciones sean satisfechas.

Dos tipos de políticas (o algoritmos) de planificación pueden ser consideradas de acuerdo a la restricción  $(m, k)$ -firm de tipo dinámica y estática. Consultar esta caracterización en Apéndice D.

Las principales soluciones a estos problemas son descriptas a continuación.

En (Hamdaoui & Ramanathan, 1995) se implementa una planificación dinámica y se propone el algoritmo DBP (Distance Based Priority) para tareas no expropiativas. En (Ramanathan, 1999) se propone un algoritmo estático basado en restricciones  $(m, k)$ -firm para tareas de tipo expropiativas (con prioridad RM por Rate Monotonic, ver Apéndice D).

En (Jia et al., 2005) y (Jia, 2009) se obtienen condiciones más simples para garantizar el análisis de factibilidad en ambos casos (tareas expropiativas y no). Tales condiciones son citadas después de formalizar el modelo  $(m, k)$ , dado que serán usadas en este capítulo.

### Modelo $(m, k)$ -firm

Para el modelo de restricciones  $(m, k)$ -firm se considera un conjunto tareas  $\tau_i$  con período básico  $h_i$  y los siguientes atributos:

1. El mayor tiempo requerido para completar la ejecución de la instancia  $C_i$
2. El *deadline* relativo de cada instancia, aquí se supone igual al período básico,  $D_i = h_i$
3.  $m_i$  y  $k_i$  son los parámetros de la restricción  $(m, k)$ -firm impuestos a  $\tau_i$
4. el patrón  $(m_i, k_i)$  denominado  $\Pi_i$  se define como la secuencia  $\Pi_i(0), \Pi_i(1), \dots, \Pi_i(k - 1)$  donde:
  - a.  $\Pi_i(j) = 1$  indica que la  $(j + n k)$ -ésima instancia de  $\tau_i$  tiene que satisfacer obligatoriamente su *deadline*,
  - b.  $\Pi_i(j) = 0$  indica que no es obligatorio que la  $(j + n k)$  ésima instancia de  $\tau_i$  satisfaga su *deadline*,
  - c. En consecuencia  $\sum_{j=n}^{n+k_i-1} \Pi_i(j) = m_i$  para  $n \geq 0$ .

Como se asocia un '1' a una instancia que respeta su "*deadline*" y 0 a aquella que no lo hace, se puede describir a un patrón  $(m, k)$  como una sucesión de bits '1' y '0' de largo  $k$ . Por ejemplo, la sucesión {1 0 1 0 1} es un patrón (3,5) que tiene tres instancias que respetan su *deadline* y dos que no lo hacen.

Las instancias con restricción  $(m, k)$  pueden ser clasificadas como obligatorias u opcionales de acuerdo a la regla propuesta por (Ramanathan, 1999), y transcripta a continuación, la cual permite obtener la distribución más uniforme posible de  $m$  en  $k$ .

Sea un par  $(m_i, k_i)$  de cada tarea  $\tau_i$ , el número de instancia  $a$  ( $0 \leq a$ ) es obligatoria si se satisface (6.1) y es opcional en caso contrario, donde  $[x]$  es la parte entera superior a  $x$ .

$$a = [a m_i/k_i] k_i/m_i \quad (6.1)$$

En (Jia et al., 2005) fue demostrado que los patrones (6.1) introducidos por (Ramanathan, 1999) se pueden caracterizar en la forma de una “*mot mecanique*”. Con esto, las instancias son clasificadas como obligatorias u opcionales basándose en la expresión (6.2), siendo  $\alpha = m_i/k_i$ , en el caso de que  $\alpha$  es racional.

$$\Pi_i(a) = [(a + 1) \alpha] - [a \alpha], \forall 0 \leq a \leq k_i \quad (6.2)$$

#### *Condición de factibilidad de planificación con patrón $(m,k)$ -firm*

Aquí, se presentan las condiciones de factibilidad de una planificación del conjunto de tareas con restricciones  $(m, k)$ -firm, para los dos casos posibles de ser o no expropiativas.

Sea un conjunto de tareas periódicas  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  con períodos básicos  $h_1, h_2, \dots, h_n$  y los atributos del modelo  $(m, k)$ , tal que las instancias de cada tarea son clasificadas según el patrón  $(m, k)$  calculado con (6.2), y tal que la prioridad de la instancia de  $\tau_i$  es superior a la de  $\tau_j$  si  $i < j$ . Entonces:

- a) Si las tareas son no expropiativas, el límite superior del tiempo de respuesta se obtiene como el límite de  $R_i^q$  definido por la ecuación de recurrencia (6.3) con  $q \rightarrow \infty$ . Si para cada instancia obligatoria de cada tarea  $\tau_i$  se verifica  $R_i^q + C_i < D_i$  entonces la planificación resulta factible. Este resultado es demostrado en Teorema 2 de (Jia, 2009).

$$R_i^0 = C_i$$

$$R_i^q = \max_{j>i} (C_j) + \sum_{j<i} \left\lceil \frac{m_j}{k_j} \left\lceil \frac{R_i^{q-1}}{h_j} \right\rceil \right\rceil C_j \quad (6.3)$$

- b) Si las tareas son expropiativas y considérese además que cada tarea es planificada de acuerdo a una política fija de prioridad basada en el algoritmo RM (i.e.  $h_1 < h_2 < \dots < h_n$ ). Si se verifica la condición (6.4) donde  $n_{i,j}$  se define en (6.5) para cada tarea  $\tau_i$  entonces

se satisface la restricción  $(m, k)$ -firm de cada tarea  $\tau_i$  y se asegura la factibilidad de la planificación del conjunto de tareas. Este resultado es demostrado en (Jia et al., 2007).

$$C_i + \sum_{j=1}^{i-1} n_{i,j} C_j < h_i, \forall 1 \leq i \leq n \quad (6.4)$$

$$n_{i,j} = \left\lceil \frac{m_j}{k_j} \left\lceil \frac{h_i}{h_j} \right\rceil \right\rceil \quad (6.5)$$

Esta condición de factibilidad para tareas expropiativas es necesaria y suficiente cuando el período básico de las tareas es un múltiplo del período básico de todas las tareas con alta prioridad. En otros casos degenera en sólo una condición suficiente.

### 6.3 Co-Diseño de control con restricción $(m, k)$ -firm: Teoría

El enfoque propuesto para resolver el problema formulado en la sección previa está basado en el modelo  $(m, k)$ -firm. Los principios de planificación  $(m, k)$ -firm pueden ser interpretados como un caso particular de la técnica de ajuste de períodos. Específicamente, esto significa que el período de activación de las tareas que comparten el recurso puede ser elegido como un número limitado de períodos múltiplos del período nominal de muestreo. Por ejemplo, si el período de muestreo básico para la planta  $i$  es  $h$ , y el patrón  $(m, k)$  de una actividad  $\tau_j$  (tarea o mensaje) es  $\Pi_j = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$ , entonces los períodos efectivos pueden ser  $h$ ,  $2h$  o  $3h$ .

Un modelo de la planta sujeto a una restricción  $(m, k)$ -firm es un sistema de tiempo discreto conmutado (DTSS), dado que el efecto de  $(m, k)$  resulta en una planta continua muestreada con un período efectivo que puede ser variable. Esto se analiza en la sección 6.3.1

La posibilidad de cambiar el período de muestreo efectivo puede inducir inestabilidad. Por esto, el controlador debe ser diseñado de forma tal que no sólo se satisfagan las especificaciones de desempeño (al menos para el período básico), sino además de forma tal que el empleo de la estrategia  $(m, k)$  no provoque inestabilidad. Como requisito extra el uso de la estrategia  $(m, k)$  no tiene que representar un cambio sustantivo de la performance. Esto se presenta en sección 6.3.2.

El impacto de aplicar el modelo teórico  $(m, k)$ -firm en la performance de lazo cerrado depende del controlador, los parámetros temporales y la secuencia de períodos efectivos. Estos efectos son analizados exhaustivamente en sección 6.3.3 a través del *Ejemplo 6.1*.

### 6.3.1 Modelo de la planta y controlador con patrón $(m, k)$ -firm

Una planta controlada con una estrategia de planificación  $(m, k)$ -firm se modela en su descripción de espacio de estados con un período  $h_i$  que asume un conjunto finito de valores múltiples del período básico, i.e.  $h_i = i h$  con  $i \in \mathbb{N}$ , ver DTSS en sección A.4.

Sea el controlador por realimentación de estados (6.6), donde  $n_i$  es la cantidad de valores del parámetro  $m$  en la restricción  $(m, k)$ , entonces resulta el DTSS de lazo cerrado (6.7). Las matrices  $\Phi_i^{CL} = \Phi^{CL}(h_i)$  de (6.7) están asociadas a los períodos  $h_i$ .

$$u_t = L_i x_t, \quad i = 1, 2, \dots, n_i \quad (6.6)$$

$$x_{t+1} = \Phi_i x_t + \Gamma_i u_t = (\Phi_i + \Gamma_i L_i) x_t = \Phi_i^{CL} x_t \quad (6.7)$$

### 6.3.2 Diseño de control y selección de los parámetros temporales

La configuración de la política de pérdida  $(m, k)$  requiere la identificación del valor  $k$  y del período  $h$ . Por un lado,  $h$  define cual es la utilización en condiciones normales que hace el sistema de control del recurso compartido. Por otro lado, el valor de  $k$  es determinante en la cantidad de recurso que puede liberarse en caso de congestión. Por ejemplo un valor  $k=5$  significa que como máximo la utilización se puede reducir a un 20% de la normal.

Por su parte, desde el punto de vista de control, a las especificaciones de diseño sobre el controlador para el período básico  $h$  se le agrega el requisito extra de obtener una buena performance (garantizando estabilidad) cuando se emplea la estrategia  $(m, k)$ .

Todos estos requerimientos simultáneos hacen que resolver el problema de diseño no sea una tarea simple. Por esto, si bien una buena solución resulta de un proceso iterativo a continuación se presentan algunas condiciones y reglas que pueden ayudar al ingeniero de control durante el proceso de diseño del controlador (subsección *i*) y elección de los parámetros temporales (en subsección *ii*).

#### *i. Diseño del controlador*

La estrategia de pérdida  $(m, k)$  más general cambia el valor de  $m$  en forma dinámica, de acuerdo al estado del recurso compartido por lo que la secuencia de conmutación del modelo

DTSS se asume arbitraria. Por esto, aquí se usa la condición de existencia de una **QCLF** para garantizar la estabilidad del DTSS ante cualquier secuencia de conmutación, ver discusión en Apéndice C y tratamiento en Capítulo 5.<sup>1</sup>

### *Problema de diseño de control*

Si se considera que  $m$  puede variar entre  $1$  y  $k$  entonces  $m=1$  resulta en el mayor período efectivo (y  $m = k$  en el menor). Con esto, el conjunto  $[h, \dots, kh]$  incluye los períodos efectivos de todos los posibles patrones  $(m, k)$ .

Sea el valor  $k_{max}$  definido como el valor más grande de  $k$  tal que se asegure la propiedad de estabilidad. Entonces, la estabilidad es garantizada si se cumplen simultáneamente las LMI<sup>2</sup> (6.8) para todo  $h_i$  tal que  $i = 1, \dots, k_{max}$ .

$$P = P^T > 0$$

$$P - (\Phi_i^{CL})^T P (\Phi_i^{CL}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, k_{max} \quad (6.8)$$

El problema de diseño implica encontrar un **controlador  $L$  o una familia de controladores  $\mathbf{L} = \{L_i, i = 1, \dots, k_{max}\}$**  tal que se satisfaga (6.8). Garantizado esto, para cualquier restricción  $(m, k)$ -firm con  $k \leq k_{max}$  y  $m \leq k$ , el DTSS resulta estable.

### *Controlador robusto*

La primera arquitectura discutida en la sección 6.4.1 implementa la estrategia  $(m, k)$ -firm más simple y tiene un controlador único, i.e.  $L$  es constante y común en (6.7), por lo que resulta en un sistema de control robusto resuelto con recurso a la técnica de las LMI (6.8), (Boyd et al., 1994).

Una alternativa de diseño LMI para encontrar un controlador único con período variable presentada en (Sala, 2005) considera, además de la estabilidad, cierto nivel de performance. Específicamente modifica las LMI (6.8) agregando a  $\gamma_i = e^{-\beta h_i}$  como término que multiplica a la matriz  $P$  del lado derecho de las LMI. El coeficiente  $\beta$  es la tasa exponencial de decaimiento del equivalente CT. El caso particular  $\gamma_i = 1, \forall i$  garantiza sólo estabilidad.

<sup>1</sup> Si el patrón  $(m, k)$ -firm es fijo, la planta controlada se convierte en un modelo LTI de período aumentado cuya estabilidad es fácilmente analizable por métodos para este tipo de sistemas (Ramanathan, 1999).

<sup>2</sup> Por detalles acerca de lo conservativo de la utilización de una CQLF referirse a la sección 5.1.1.

### *Controlador adaptable*

Si se cuenta con una arquitectura que pueda conocer en cada momento cual es la próxima instancia que se va a ejecutar (determinístico), se puede emplear un enfoque de control adaptable, es decir con un controlador cuyos parámetros se adapten a la variación conocida del período. El requerimiento entonces es que en tiempo  $t_t$  el controlador conozca el próximo  $h_i$ . En este caso, nuestra propuesta para calcular el control adaptable es utilizar el diseño Lie-algebraico de Capítulo 5 que garantiza estabilidad ante cualquier secuencia.

#### *ii. Performance de lazo cerrado y parámetros temporales*

Aún con la garantía de estabilidad indicada previamente, la performance de lazo cerrado puede ser muy deteriorada aplicando la estrategia  $(m, k)$ , por ejemplo ante sucesivas aplicaciones de período efectivo cercanas a  $k_{max}h$ . Por esto, aquí se propone una forma de elegir el valor de  $k$  (con  $k \leq k_{max}$ ) para reducir esta degradación.

#### *Diseño y selección con resultado básico de performance*

La performance de un DTSS es difícil de ser evaluada, a menos que se conozca la secuencia en la cual conmuta entre los distintos modos. En general, es válido suponer que para el período mínimo ( $m = k$ ) se tiene la performance de mejor caso y para el período máximo ( $m = 1$ ) se tiene la de peor caso. Esto permite considerar que la performance ante un período que varíe entre ambos valores quedará comprendida entre ambas. Como tales casos extremos son sistemas discretos LTI se pueden usar criterios para este tipo de sistemas para analizar la performance de mejor y peor caso.

En este contexto, se analiza a continuación la regla práctica de (Åström & Wittenmark, 1997), transcripta en (B.24) de sección B.4 de Apéndice B, que relaciona la selección del período con la performance de lazo cerrado. Cabe mencionar que esta regla es deducida para sistemas de control que tengan como especificaciones de diseño que su respuesta temporal de lazo cerrado a un escalón de entrada tenga una performance que resulte dominada por dos polos complejos conjugados y tal que el amortiguamiento asociado con este par de polos sea igual a 0.707 (“respuesta máximamente plana”).

De acuerdo a la regla (B.24) se derivan las siguientes consideraciones:

El período básico  $h$  debería ser elegido para  $R=10$  en (B.23), con esto vale (6.9).

$$h = 0.2/\omega_b \tag{6.9}$$

El período máximo  $h$  se puede elegir igualando  $R=2$  en (B.23), con lo cual resulta (6.10).

$$k h \approx 1/\omega_b \tag{6.10}$$

Si se satisfacen ambas expresiones, y por simple cálculo, el valor de  $k$  resulta igual a 5.

□

Observación 6.1: Si las especificaciones de diseño no son las enunciadas se puede determinar  $k$  por ejemplo calculando la relación exacta entre algún parámetro que represente la performance del sistema en lazo cerrado en función del período. Esto puede dar valores diferentes a 5 para  $k$ .

Observación 6.2: Las condiciones {(6.9), (6.10)} también pueden usarse en el caso de que los parámetros de control sean adaptables al período. Sólo se debe tener en cuenta que en (6.9) la frecuencia  $\omega_b$  es para  $h$  básico mientras que en (6.10) el valor de  $\omega_b$  es para  $h k$ . Esta diferencia puede permitir un aumento del valor de  $k$  por encima de 5. Esto es ventajoso porque un alto valor de  $k$  permite reducir la carga del recurso compartido que hace cada planta ante situaciones de sobrecarga del mismo.

### 6.3.3 Análisis del empleo de modelo $(m, k)$ -firm teórico en la performance

Los resultados de aplicación del modelo teórico  $(m, k)$  dependen de varios factores, enunciados a continuación, que son evaluados en *Ejemplo 6.1*.

En primer lugar, para mostrar las distintas posibilidades desde el punto de vista de diseño se comparan el caso de un controlador común (robusto) y un controlador cuyos parámetros son calculados con los métodos Lie-algebraicos de sección 5.3. Para ambos se estudia la determinación del  $k_{max}$  de acuerdo a estabilidad y de  $k$  de acuerdo a performance, de acuerdo con los conceptos de sección 6.3.2.

Luego, se analiza ante un mismo patrón que varía en el tiempo como es el cambio en la performance. Desde el punto de vista informático, se analiza el impacto en la performance que tienen la distribución de  $m$  en  $k$  y la variación del patrón. Particularmente, se analiza la relación entre la utilización del recurso y la performance de la planta.



*Ejemplo 6.1*<sup>3</sup>: Se considera un sistema traslacional constituido por un carrito que se puede mover a lo largo de un riel. El objetivo de control es que el carrito alcance una dada posición de referencia. Se supone que la fuerza de fricción puede ser despreciada.

El modelo continuo de esta planta es  $\dot{x} = A x + B u$  que tiene las matrices (6.11), donde  $x = [x_1 \ x_2]^T$  y  $x_1$  es la posición y  $x_2$  es la velocidad del carro, respectivamente y los parámetros son  $a = 12.65$  y  $b=2$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

La matriz discreta de lazo cerrado resulta (6.12).

$$\Phi_i^{CL} = \begin{bmatrix} 1 - l_{i,1} \frac{b}{a} \left( h_i - \frac{1 - e^{-a h_i}}{a} \right) & \frac{1 - e^{-a h_i}}{a} - l_{i,2} \frac{b}{a} \left( h_i - \frac{1 - e^{-a h_i}}{a} \right) \\ l_{i,1} \frac{b}{a} (1 - e^{-a h_i}) & e^{-a h_i} - l_{i,2} \frac{b}{a} (1 - e^{-a h_i}) \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

La utilización del criterio de Jury, ver Capítulo 3 y referencias allí, permite determinar la región de estabilidad en función de los parámetros del controlador. En este caso simple se puede obtener el valor del parámetro  $l_{i,1}$  en función del período de muestreo  $h_i$  y  $l_{i,2}$  tal que cada modo (matriz de lazo cerrado) sea estable. Este valor debe ser  $0 < l_{i,1} < l_{i,1max}$  donde  $l_{i,1max}$  debe satisfacer (6.13) cuyos parámetros son (6.14) y (6.15).

$$l_{i,1max} = \begin{cases} l'_{i,1} & \text{si } l_{i,1} < l_{i,lim} \\ l''_{i,1} & \text{si } l_{i,1} > l_{i,lim} \end{cases} \quad (6.13)$$

$$l_{i,lim} = \frac{4a e^{-a h_i}}{h_i b (e^{-a h_i} - 1)} \quad (6.14)$$

$$\left. \begin{aligned} l'_{i,1} &= \frac{2a(a + a e^{-a h_i} + b l_{i,2} - b l_{i,2} e^{-a h_i})}{b(2 - 2e^{-a h_i} + h_i a + h_i a e^{-a h_i})}, \\ l''_{i,1} &= \frac{a(a + b l_{i,2})(e^{-a h_i} - 1)}{b(-1 - h_i a + e^{-a h_i})} \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

### Controlador común

En primer lugar se considera el caso de un controlador común  $L = -[50 \ 1.5]$  y  $h$  básico constante e igual a 0.02s. Las expresiones (6.15) arrojan un máximo valor del período es  $17h$ . Resta entonces confirmar si con este controlador común las matrices de lazo cerrado para  $h_i \in [1h, \dots, 17h]$  tienen una CQLF. Utilizando un algoritmo de resolución de LMI se pudo

<sup>3</sup> Este modelo corresponde a un sistema real que está implementado en el Laboratorio del LORIA, Nancy.

determinar que existe QCLF con una  $P$  definida en (6.16), para las matrices de lazo cerrado con  $h_i \in [1h, 2h \dots, 15h]$ . Es decir, con  $k_{max} = 15$  se garantiza que el sistema conmutado es asintóticamente estable.

$$P = \begin{bmatrix} 38.159 & 0.1231 \\ 0.1231 & 0.2236 \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

*Controlador adaptable*

Para el mismo sistema pero utilizando el diseño Lie-algebraico se pueden calcular los parámetros de la realimentación de estados adaptables al período usando la solución {(5.55) y (5.56)}. En Figura 6.1 se muestra la evolución de los autovalores de la matriz para período creciente. Como se puede observar estos son siempre un par complejos conjugados (ver sección 5.3.2) y tienden a 0 cuando  $h$  se incrementa y nunca salen del círculo unitario. Con esto, el sistema con adaptación de parámetros es estable para todo  $k_{max} > 0$ , con  $k_{max} \in \mathbb{R}$ .

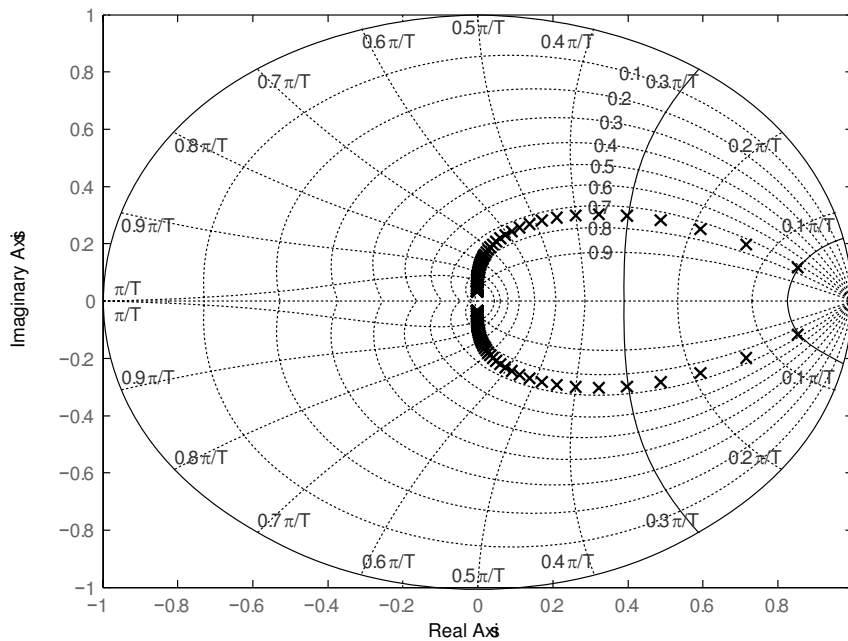


Figura 6.1: Evolución de los autovalores de la planta controlada con adaptación de parámetros Lie.

Teniendo en cuenta las nociones de performance de sección 6.3.2-ii se determina para el controlador común  $k=5$  y para el control adaptable  $k=6$ .

Observación 6.3: A partir de este ejemplo se destaca que el uso de la adaptación de parámetros con el método Lie-algebraico permite elegir  $k_{max}$  tan grande como se quiera (con  $k_{max} \in \mathbb{R}$ ) y  $k$  igual a 6.

### *Análisis de respuesta temporal: robusto vs. adaptable*

En Figura 6.2 se muestran las evoluciones de la salida (izquierda) y acción de control (derecha) de los sistemas controlados para dos posibles escenarios, el escenario ideal es con el período mínimo ( $h=0.02$  s) y el escenario cuya secuencia de patrones  $(m, k)$  es (6.17). En este último caso se realizan dos simulaciones, con el controlador común y con el controlador cuyos parámetros se adaptan según el diseño Lie.

Secuencia de patrón  $(m, k)$  de ensayo:

$$\{11000\} \{10000\} \{10000\} \{10010\} \{10000\} \{10010\} \{10000\} \{10010\} \{10000\} \dots \quad (6.17)$$

Aún en este ejemplo donde el escenario no es el de peor caso ( $m = 1$ ) se ve claramente que el uso de la adaptación proporciona excelentes resultados comparando salida y acción de control con las ideales, y no se deterioran en la misma forma que el esquema no compensado.

Observación 6.4: Ante un mismo patrón de reducción de instancias de tareas de control, variable en el tiempo, la pérdida de performance puede ser reducida con el método de adaptación de la ley de control, respecto de la obtenible con un controlador común.

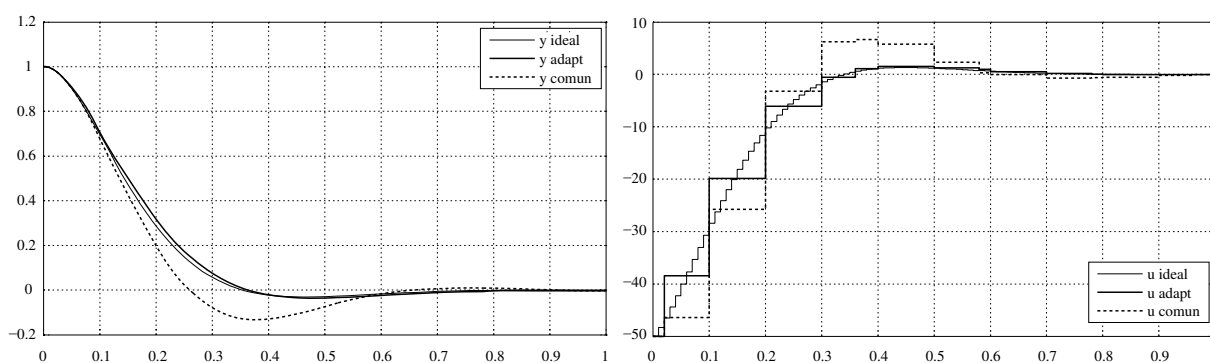


Figura 6.2: Evolución del sistema controlado. Izq) salida, Der) acción de control. Ideal) período  $h$ , Adapt) secuencia adaptación Lie, Común) secuencia controlador común.

### *Influencia en la QoC del patrón $(m, k)$ con controlador robusto*

Aquí se analiza la influencia del patrón  $(m, k)$ , de la distribución de  $m$  en  $k$ , y de la variación de  $m$ , en el índice de performance QoC (Quality of Control) del sistema de control.

En primer lugar, se calcula el costo cuadrático discreto definido en (6.18) para cada patrón  $(m, k)$ , a partir de una misma condición inicial sincronizada con el inicio del patrón. Es decir,

la condición inicial esta sincronizada con el primer “1” de cada patrón y donde  $T$  es el horizonte de tiempo de evaluación.

$$J_{(m,k)} = \frac{1}{h} \sum_{t=0}^T \sum_{i=1}^{n_i} (x^T Q x + u^T R u) \tag{6.18}$$

Luego, la degradación de la performance se calcula como (6.19) donde  $J_{(k,k)}$  es el costo cuadrático obtenido para cada patrón  $(m, k)$  a partir de una misma condición inicial.

$$Q = \frac{(J_{(m,k)} - J_{(k,k)})}{J_{(k,k)}} \tag{6.19}$$

Los parámetros de control para el período  $h$  básico igual a 0.02s fueron obtenidos con el método estándar LQR discreto con las matrices  $R = 6 \cdot 10^{-5}$  y  $Q = [1 \ 0; \ 0 \ 0]$  (ver sección B.2). A cálculo hecho es  $L = -[113.433 \ 6.292]$ .

Utilizando el criterio de estabilidad de sección (6.8) se probó que el  $k_{\max}$  de este sistema que garantiza la estabilidad del DTSS es igual a 7. Para simplificar la construcción de patrones se considera el máximo  $k$  par inferior a  $k_{\max}$ , es decir  $k=6$ .

La evaluación resulta simple dado que se considera que cada patrón es estático durante todo el tiempo de simulación y en consecuencia se puede modelar como un LTI con período de muestreo ampliado.

En la Tabla 6.1 se presentan los resultados correspondientes a experimentos de patrones  $(m, 6)$ , con  $m$  entre 1 y 6, con la distribución más uniforme posible y a modo de ejemplo se incluyen dos distribuciones del patrón (3,6) no uniformes, ambas indicadas en gris.

| Patron (m,k) | Costo J |
|--------------|---------|
| 111111       | 0.22201 |
| 111110       | 0.22787 |
| 110110       | 0.23694 |
| 111010       | 0.23810 |
| 111100       | 0.24547 |
| 101010       | 0.24600 |
| 100100       | 0.27813 |
| 100000       | 0.59219 |

Tabla 6.1: Costo del sistema de control para distintos patrones  $(m,k)$ .

En este experimento se verifica, para un patrón fijo, que a medida que el valor de  $m$  se incrementa la planta controlada tiene mejor performance, es decir un menor valor de costo

cuadrático. Además, se verifica el resultado de (Ramanathan, 1999) que considera que la distribución uniforme proporciona la mejor performance de control. Por ejemplo, para las tres distribuciones de (4,6) {110110}, {1111010} y {111100} se verifica en Tabla 6.1 que el costo de esta primera (con distribución uniforme) resulta inferior al de las otras dos.

El indicador de uso del recurso compartido se define como la relación  $I = m/k$ .

En Figura 6.3 se muestra el resultado de la evaluación del índice de degradación (6.19) en función del índice de uso (indicados con puntos) para los elementos de la Tabla 6.1, ambos en términos porcentuales. En particular, se observa que la degradación de la performance es inferior al 12% para patrones con uso superior al 50%, mientras que su valor crece significativamente (166%) para el mínimo uso del recurso, es decir para  $1/k$ .

Observación 6.5: En este ejemplo se observa claramente que al reducir la utilización del recurso con un patrón fijo  $(m, k)$  y ante la misma condición inicial se tiene una mayor degradación de la performance.

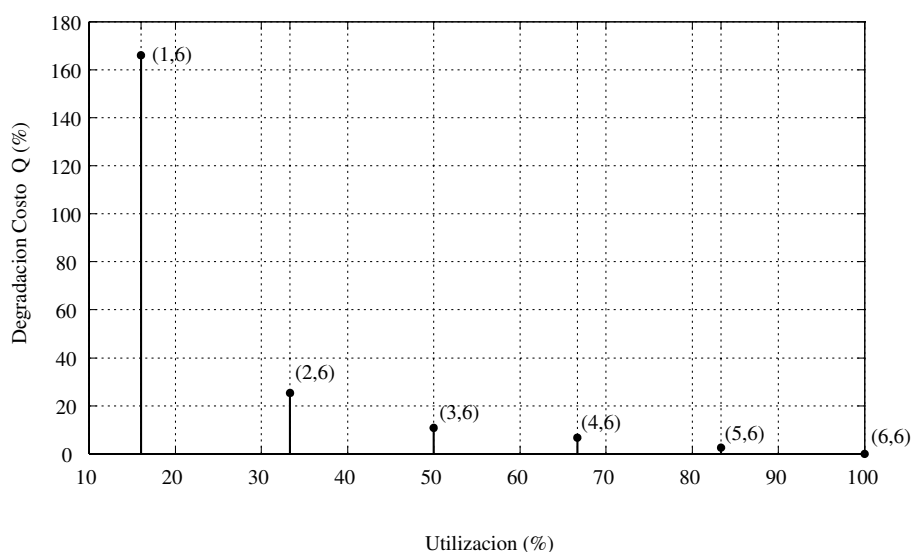


Figura 6.3: Degradación de la performance  $Q(\%)$  en función del indicador de uso  $I(\%)$ .

Ahora supongamos que el patrón  $(m, k)$  puede variar. Es decir, se cambia la distribución de “1” y su cantidad a lo largo del tiempo. Por ejemplo, sea la siguiente configuración: el primer patrón  $k$  a partir de la condición inicial ( $a=1$ ) ejecuta todas sus instancias y a partir de  $a=k$  siempre se ejecutan las instancias del mismo patrón uniforme (3,6), es decir la secuencia de fila 1 de Tabla 6.2. Comparando con los valores de la Tabla 6.1, este costo es inferior al costo que resultó para el patrón (4,6). Es decir, con el aumento de las instancias ejecutadas al

comienzo de la simulación es posible mejorar la performance de un patrón (3,6) superando la obtenible con el (4,6). A largo término el patrón (3,6) tendrá un índice de uso inferior al (4,6). Entonces, se tiene una mejor performance con un menor uso de recurso.

Una ligera variación de la configuración previa es cambiar el orden de los patrones en la secuencia como en la fila 2 de Tabla 6.2. En este caso, el costo es muy superior al de fila 1, lo que permite postular que la performance no sólo es dependiente de la cantidad de instancias ejecutadas y la distribución de las mismas sino también del estado de la planta.

| Secuencia (m,k)          | Costo J |
|--------------------------|---------|
| {111111}{101010}{101010} | 0.22924 |
| {101010}{111111}{101010} | 0.27473 |

Tabla 6.2: Costo del sistema de control para distintas secuencias, patrón  $(m,k)$  variable.

Observación 6.6: A partir del análisis previo se puede concluir que permitir que la secuencia sea conformada con un patrón que varía de acuerdo al estado de la planta resulta muy beneficioso en términos de performance. Inclusive se puede obtener una mejor performance aún con un menor uso de recurso.

#### 6.4 Co-Diseño de control y planificación: Estrategias de implementación

El enfoque considerado aquí resuelve la congestión del recurso descartando selectivamente algunas mediciones, paquetes sensor-controlador en una red, o algunas instancias de tareas de un procesador compartido empleando el modelo  $(m,k)$ -firm. Para esto se caracterizan los paquetes y/o instancias como obligatorios u opcionales según el modelo definido en 6.2.2.

En primer lugar se analiza la estrategia básica  $(m,k)$ -firm, la cual supone que el valor de  $m$  se determina “on-line” en función del estado del recurso compartido y sólo se ejecutan las  $m$  obligatorias. La performance del sistema de control queda determinada por el estado del recurso, tal como se indicó en Observación 6.5. Para la implementación de esta estrategia en una arquitectura de red se discuten los requerimientos en sección 6.4.1.

Se propone aquí una nueva estrategia que promueve la ejecución de tareas extras de control teniendo en cuenta ambos, el estado del recurso y el estado de la planta. Las ventajas de esta técnica se basan en el resultado establecido en Observación 6.6 que postula, para mejorar la performance, ejecutar las instancias de la tarea de control de acuerdo al estado de la planta. La

coincidencia -frecuente en la práctica- de evoluciones lentas y de poca excursión de algunos lazos y rápidas y amplias de otros favorece claramente el éxito de esta propuesta.

Una segunda estrategia propuesta aquí considera nuevamente que el patrón se elija según la utilización del recurso y se propone el uso de un controlador adaptable a la variación del período. La posibilidad de adaptar los parámetros del controlador está basada en el determinismo que resulta al ejecutar solamente las  $m$  instancias obligatorias del patrón  $(m, k)$ , ya que se puede conocer cuál es la próxima instancia a ser ejecutada. Para diseñar el controlador adaptable se consideran los métodos Lie-algebraicos tal como se indicó en sección 6.3.2. Las ventajas de la adaptación son previstas de acuerdo a lo establecido en la Observación 6.4. Asimismo se discute la posibilidad de evaluar en esta última estrategia los transitorios de la planta controlada.

#### 6.4.1 Estrategia $(m, k)$ -firm básica

Este enfoque consiste en resolver la congestión del recurso descartando selectivamente algunas instancias de tareas de control del recurso compartido empleando el modelo  $(m, k)$ -firm. En el caso de que el recurso compartido sea una red la arquitectura de cada sistema de control distribuida es como la mostrada en la Figura 6.4.

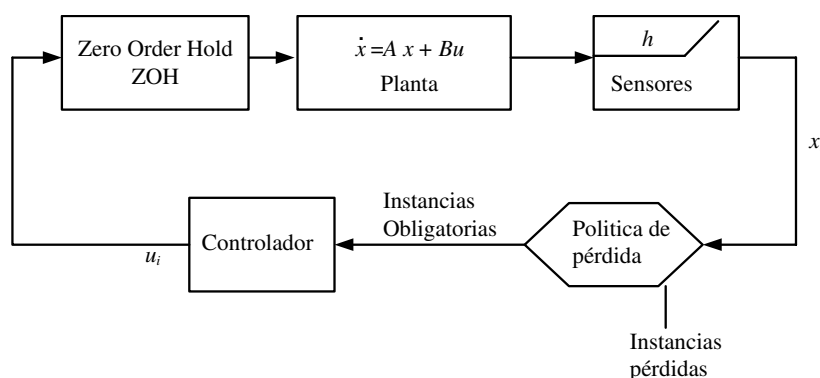


Figura 6.4: Arquitectura de control con restricción  $(m, k)$ .

#### *Mecanismo de selección del patrón $(m, k)$*

En este esquema se plantea que cuando el mecanismo de selección detecta una señal que indica que la red está congestionada, se reduzca el tráfico enviando los paquetes de acuerdo a algún patrón  $(m, k)$ -firm pre-configurado que satisfaga el análisis de planificación, por ejemplo para tareas no expropiativas (en una red) que verifique la condición (6.3).

El sistema cambia entonces desde su modo normal de operación normal a su modo degradado y puede volver al modo normal ya sea después de un cierto período fijo o por desaparición de la indicación de congestión.

#### *Implementación del mecanismo de selección en redes*

Para permitir la pérdida selectiva de datos en una red, el mecanismo de selección puede ser implementado como un controlador de admisión en los nodos que envían mediciones (por ejemplo, el nodo sensor en el lazo de control) o en elementos de la red de comunicaciones (por ejemplo, un controlador de admisión implementado en el “router”).

Una señal que puede ser considerada como indicador de la congestión de la red es asignarle a los paquetes a enviar un *tiempo de espera* (time out) de valor  $\tau_{s,M} - \tau_{sc}$ , donde  $\tau_{s,M}$  es el máximo valor que puede esperar la transmisión de un paquete desde el sensor al controlador más un tiempo de margen de seguridad y  $\tau_{sc}$  es el tiempo efectivo. El retardo  $\tau_{sc}$  puede ser estimado “*on-line*”, de forma similar a la estimación en TCP o UDP del tiempo de ida/vuelta (por ejemplo con un RTT siglas de Round Trip Time) o ser calculado de forma “*off-line*”.

Con esto, si los paquetes son recibidos a tiempo (si llegan antes de  $\tau_{s,M} - \tau_{sc}$ ) entonces la red se considera sin congestión.

La aplicación de esta estrategia tiene resultados similares a los analizados en Ejemplo 6.1 y destacados en Observación 6.5 y 6.6, es decir la secuencia de los patrones  $(m, k)$  queda determinada por el estado del recurso. Entonces, la performance del sistema de control ante el mismo estado inicial de la planta queda determinada por el estado del recurso.

#### 6.4.2 Estrategia $(m, k)$ -firm con detección de eventos de la planta

Aquí se propone una estrategia que promueve la ejecución de tareas de control teniendo en cuenta ambos, el estado del recurso y el estado de la planta. Las ventajas son previstas según lo expresado en Observación 6.6.

La aplicación de esta estrategia requiere tener dispositivos que realicen ciertas operaciones para implementar un mecanismo de selección. Estos requisitos y las principales características del método son analizados a continuación.

El análisis se hace para el caso de una red pero con las debidas consideraciones puede ser utilizado en el caso de un procesador.



### *Mecanismo de selección del patrón $(m, k)$*

Supongamos que existen nodos conectados a la red que pueden decidir cuales datos de sensores podrán enviarse y que estos dispositivos además de su operación normal disponen de una capacidad de cálculo para la toma de decisión.

Para cada sistema de control se elige una salida denominada “salida de selección”, que representa la evolución del sistema a ser evaluada en cada nodo denominado “seleccionador”. Este nodo ejecuta un algoritmo que decide el envío de las mediciones de acuerdo a un patrón pre-configurado  $(m, k)$  y determina instancias que son preferibles de ser enviadas en función del estado de las distintas salidas.

Es decir, esta estrategia propone agregar a la estrategia  $(m, k)$ -firm básica una detección de cruces de nivel de las salidas establecidas como relevantes del sistema que incorpora la información sobre su evolución, tal que permita identificar las instancias preferibles.

*Algoritmo para cada Salida de Selección:* La frecuencia de muestreo de cada salida de selección es constante y vale  $1/h_i$ . La frecuencia real de la tarea de control  $\tau_i$  se denomina  $F_i$  y para el caso de un patrón  $(m, k)$  específico vale  $F_i = m_i/(k_i h_i)$ .

El algoritmo actúa según el error entre la frecuencia de referencia  $F_i^*$  y la frecuencia real  $F_i$  y teniendo en cuenta principalmente la velocidad de los eventos de cruce para permitir o no la transmisión del mensaje que se traduce en la ejecución de la tarea de control. El objetivo del algoritmo es que la frecuencia  $F_i$  iguale a  $F_i^*$ .

Supongamos que la frecuencia de referencia para el patrón  $(m_i, k_i)$  es  $F_i^* = m_i/(k_i h_i)$ , entonces el algoritmo define  $F_i = (m_i + m_{opc,i})/(k_i h_i)$  donde las preferibles  $m_{opc,i}$  pueden ser nulas en el caso de que la planta controlada este cerca de su estado de régimen o tan grande como sea posible (respetando  $m_{opc,i} \leq k_i - m_i$ ), cuando la planta se encuentre en una condición transitoria. Las  $(m_i, k_i)$  deben satisfacer la condición de factibilidad.

El valor de la frecuencia de cada planta controlada  $F_i$  puede asumir ciertos valores entre  $1/(k_i h_i)$  y  $1/h_i$ . En el caso de que el recurso resulte suficiente (i.e., no haya congestión) el patrón resulta  $(k_i, k_i)$  y  $F_i^* = 1/h_i$ . En caso contrario se debe reducir el uso del recurso gradualmente,  $F_i^* \downarrow$ .

La detección entre los estados: cercano al régimen y en transitorio se evalúa con los siguientes dos pasos:

*Paso 1:* se verifica si hubo un cruce de nivel entre el valor actual de la salida y su valor anterior. En caso positivo y si además el nivel del cruce anterior no es igual al actual (histéresis), se decide enviar la medición ( $m_{opc,i} \neq 0$ ). Figura 6.5.

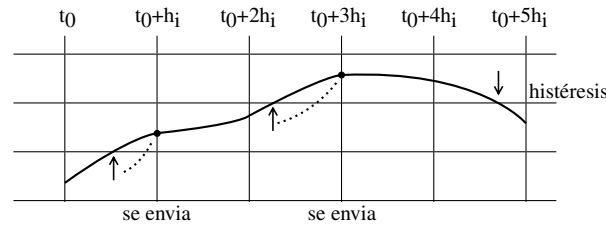


Figura 6.5: Evaluación de cruce de nivel de la salida.

*Paso 2:* en caso de que no haya un cruce ( $m_{opc,i} = 0$ ) se evalúan las dos posibilidades:

- si se envía la medición, la frecuencia  $F_i$  resultará menor o igual a la de referencia? Si la respuesta es positiva, se decide enviar;
- la diferencia entre el tiempo actual y el último envío es igual al tiempo máximo  $h_{max}$ ? Si la respuesta es positiva, se decide enviar.

*Nivel de cruce:* Una etapa decisiva en el correcto funcionamiento del algoritmo es elegir adecuadamente el valor del nivel de cruce en relación al período de muestreo. El valor  $N$  (quantum) debe ser elegido de manera que el tiempo en el cual la salida de selección cruza dos niveles sucesivos (tiempo de cruce) sea igual o superior al período de muestreo. Para esto se debe tener una idea de la respuesta temporal de cada salida de selección.

En este contexto se utilizará la siguiente idea que si bien es válida sólo para un sistema discreto con un período fijo y con respuesta máximamente plana (ver sección 6.3.2.ii), se extenderá aquí para nuestros propósitos.

La salida del sistema crece desde el 10 al 90% en  $T_r$ , es decir  $Dy=80\%$ . Por ejemplo, si se elige  $h$  básico de acuerdo a (6.9) se pueden detectar evoluciones de la salida de aproximadamente un 8% en cada periodo durante el transitorio.

Con un razonamiento similar se propone como fórmula para calcular el nivel de cruce de la salida que  $N \approx 0.8 / (2 R)$ , donde  $R = T_r/h$ .

Con esto, si se elige  $N=0.2$  (20%) para  $R=10$  se permitiría la pérdida de al menos una instancia intermedia durante el transitorio en caso de congestión.

La aplicación de este algoritmo se presenta en el Caso de Estudio 1.

### 6.4.3 Estrategia de optimización conjunta de control y planificación

En esta sección se propone una arquitectura que busca determinar la configuración óptima del patrón  $(m, k)$  para cada tarea  $\tau_i$  de forma “on-line” de acuerdo al estado del recurso, en subsección *i*. Luego, en subsección *ii*, se considera incorporar información sobre los estados de las plantas para determinar tal configuración.

El mecanismo de selección del patrón puede ser implementado con la arquitectura descrita a continuación.

#### *Arquitectura de implementación*

Se propone el empleo de un supervisor que elija el modo de trabajo del sistema global integrado utilizando información sobre el estado del recurso. Específicamente, este supervisor puede detener o comenzar el control de la planta o modificar la estrategia de control.

Las transiciones entre estos distintos modos de trabajo son realizadas modificando al conjunto de tareas que están activas, como sigue:

- algunas tareas son detenidas,
- nuevas tareas son activadas,
- las características temporales de las tareas son modificadas, por ejemplo un aumento del WCET (Worst Case Execution Time) o del período básico.

En resumen, cada vez que el supervisor modifica el modo de control global se debe redefinir la planificación de las tareas en el procesador (y/o de mensajes en una red).

Para cada modo de funcionamiento definido por el supervisor, el controlador de tareas es el responsable de configurar las restricciones  $(m, k)$ -firm y los parámetros de planificación de las tareas que implementan el control de cada planta. Por esto, la determinación del patrón  $\Pi_i$  para cada tarea  $\tau_i$  se puede resolver como un problema de optimización para el cual la función de costo es un indicador de la performance global del sistema. Es decir, el controlador de tareas se encarga de la optimización global de la performance del sistema.

En Figura 6.6 se muestra la arquitectura propuesta para resolver el problema del sistema integrado global de Figura 1.2, agregando el supervisor y el controlador de tareas que realizan las tareas previamente descritas.

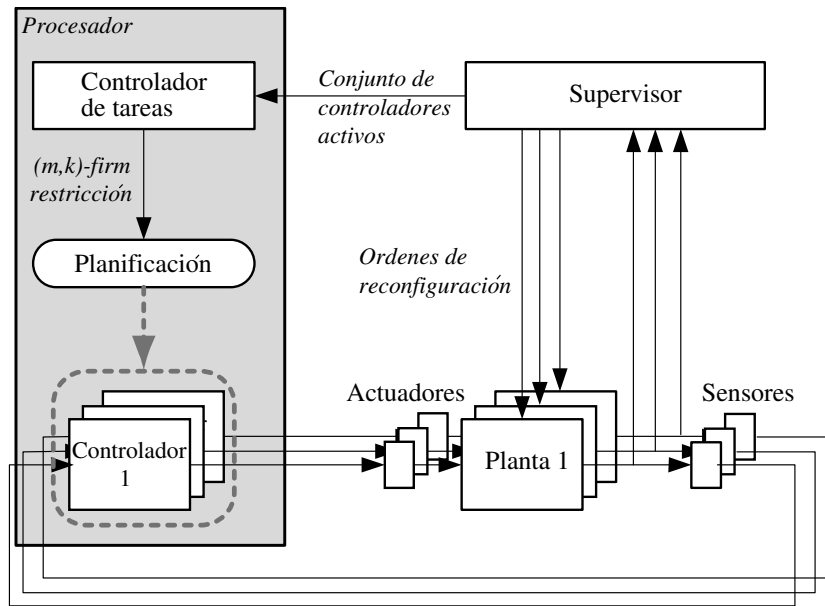


Figura 6.6: Arquitectura de planificación global (procesador compartido).

El enfoque de optimización involucra dos etapas.

La primera etapa se hace “*off-line*”. Para cada tarea  $\tau_i$  se debe determinar un valor de  $k$  y para cada valor de  $m$  con  $1 \leq m \leq k$ , definirse un conjunto de patrones  $(m, k)$  y su respectiva familia de controladores  $\mathbf{L}_i$  para compensar la pérdida de performance entre dos instancias obligatorias, referirse a sección 6.3.2.i. Para cada patrón se evalúa una función de costo, ver Nota 6.1. Los pares de valores de patrón y costo son almacenados en una tabla.

La segunda etapa es hecha por el controlador de las tareas en forma “*on-line*”, quien asigna efectivamente el recurso resolviendo el problema de optimización mediante la determinación de una configuración óptima del patrón  $\Pi_i$  para cada tarea  $\tau_i$ . Para resolver este problema se usa la información almacenada en la tabla de costos vs. patrón mencionada.

*i. Optimización global de las tareas de control*

Para formular el problema de optimización se consideran los atributos de las tareas  $\tau_i$  del modelo  $(m, k)$ -firm definidos en sección 6.2.2, asignándose la prioridad según lo establecido para la condición de factibilidad de planificación con patrón  $(m, k)$ -firm, es decir prioridad RM de acuerdo a su período básico  $h_i$  y siendo  $n_{i,j}$  definido en (6.5). Además, de acuerdo a lo mencionado en la introducción de esta sección para cada patrón  $\Pi_{i,j}$  se definen:

- a. La familia de controladores  $\mathbf{L}_i = \{L_{i,1}, L_{i,2}, \dots, L_{i,m_i,j}\}$ , ver Nota 6.1.
- b. Un valor de la función de costo  $J_{i,j}$  obtenida para cada patrón en cada intervalo  $[pk_i, (p + 1)k_i]$ , con  $p \geq 0$ . Ver Nota 6.1.

*Nota 6.1:* En particular aquí se considera la familia de controladores calculadas con los métodos Lie algebraicos tal como fue adelantado. En concordancia con este diseño se considera, para evaluar el costo, la función cuadrática definida en Apéndice F, cuya aplicación resulta muy ventajosa tal como se muestra en los Casos de Estudio 2 y 3.

*Problema de optimización conjunta*

Sea un conjunto de  $n$  tareas activadas en cada modo de trabajo, i.e.  $\tau_i$  con  $1 \leq i \leq n$ , con los atributos especificados previamente, entonces el problema de optimización global consiste en la determinación de la secuencia  $(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,n_i})$  para cada tarea  $\tau_i$  que minimiza (6.20) con  $s_{i,j} \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{j=1}^{n_i} s_{i,j} = 1, \forall i = 1, \dots, n$ .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (s_{i,j} G_{i,j}) \quad (6.20)$$

Sujeto a la restricción de planificación (6.21) que tiene que satisfacer cada tarea  $\tau_i, i = 1, \dots, n$ .

$$C_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \sum_{p=1}^{n_i} s_{jp} m_{jp} / k_j [h_i/h_j] \right] C_j \leq h_i, i = 1, \dots, n \quad (6.21)$$

□

Es decir, en (6.20) se expresa el costo conjunto que se busca minimizar satisfaciendo la condición (6.21) que es equivalente a la condición (6.4). En el caso de que las tareas sean no expropiativas se debe usar (6.3) en lugar de (6.4).

El valor de  $G_{i,j}$  de (6.20) puede ser seleccionado igual a  $J_{i,m_j}$  es decir igual al costo para el valor  $m_j$  de la tarea  $\tau_i$  o con la forma normalizada (6.22).

$$G_{i,j} = (J_{i,m_j} - J_{i,k_i}) / J_{i,k_i} \quad (6.22)$$

En el primer caso, el controlador de tareas mantendrá el valor más grande de  $m$  que sea posible para las plantas con mayor costo reduciendo el valor de  $m$  para las plantas con menor costo. Por su parte, el criterio normalizado (6.22) permite tratar la degradación de la performance de control de cada subsistema con respecto a él mismo.

Este problema de optimización puede ser considerado como un problema *knapsack* multidimensional de múltiples opciones (MMKP en sus siglas en inglés de multiple-choice multi-dimension knapsack problem) que es NP-hard (Khan et al., 2002). Por lo tanto, para resolver éste problema “*on-line*” se propone utilizar un algoritmo heurístico (HEU) presentado en (Jia, 2009) y citado a continuación que lo resuelve proporcionando una solución subóptima. El mismo es una versión ligeramente modificada del algoritmo heurístico propuesto en (Khan et al., 2002) que resulta más liviana en términos computacionales. En particular en (Jia, 2009) se usó este algoritmo para determinar un patrón  $(m, k)$  estático.

#### *Algoritmo heurístico*

1) *solución factible*: para encontrar esta solución se debe seleccionar  $m_{i,j}$  para cada  $\tau_i$  que satisfaga las restricciones dadas en (6.21). Para conseguir esto se modifica el algoritmo HEU poniendo el valor de  $m_{(i,j)}$  de cada tarea  $\tau_i$  igual a 1 (si la solución no es factible en ese caso entonces no hay ninguna solución factible);

2) *solución factible óptima*: para mejorar la solución del paso 1 se debe reemplazar de manera iterativa para cada  $\tau_i$  con el valor actualizado de  $m_{i,j}$  por otro valor correspondiente a una mejor performance que satisfaga la restricción (6.21). Si no existe tal solución, el algoritmo busca una mejora en la solución con los siguientes pasos iterativos:

- a) reemplazar con  $m_{i,j}$  para una tarea  $\tau_i$  que no es planificable con el valor actual de  $m_{i,j}$
- b) luego reemplazar por el valor de  $m'_{i,j}$  para las tareas  $\tau'_i$  (con  $i' \neq i$ ) por un valor que proporcione una peor performance.
- c) terminar la iteración cuando no hay otra solución factible de ser encontrada.

□

Los resultados del uso de esta estrategia se muestran en el *Caso de Estudio 2*.

#### *ii. Optimización global de tareas de control con información de los estados de las plantas*

En esta sección se propone agregar a la técnica previa que los modos de trabajo también puedan ser identificados por la situación en la cual está cada una de las plantas. Esta situación se corresponde con los dos casos siguientes: la planta se considera en estado transitorio (debido al cambio de una referencia o ruido) o en estado de régimen permanente.

Tal como fue mencionado en *Observación 6.6*, las restricciones en términos de performance no son las mismas para estas dos situaciones. Por lo tanto, se debe construir una función de costo para representar cada una de estas situaciones.

En particular, se considera para cada tarea de control  $\tau_i$  y cada posible valor de  $m_i$  dos valores  $G_{i,m_i}$  y  $G'_{i,m_i}$  correspondientes a la performance del control en estado de régimen permanente o transitorio, respectivamente. Se supone que los valores inferiores de  $G_{i,m_i}$  o  $G'_{i,m_i}$  representan una mejor performance de control.

Entonces, el objetivo del controlador de tareas cuando ocurre una situación de sobrecarga es encontrar para cada  $\tau_i$  un valor tal que la suma de  $G_{i,m_i}$  o  $G'_{i,m_i}$  (la que corresponda de acuerdo a los estados de las plantas) para  $j \in [1, \dots, k_i]$  y  $i \in [1, \dots, n]$  sea minimizada sujeto a la condición de planificación (6.4). Esto es formulado formalmente como el siguiente problema de optimización.

#### *Problema de optimización conjunta*

Sean un conjunto de tareas  $\tau_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , el problema de optimización global consiste en la determinación de  $(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,n_i})$  para cada tarea  $\tau_i$  que minimiza (6.23).

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} (s_{i,j} G_{i,j} I + s_{i,j} G'_{i,j} F) \quad (6.23)$$

Con  $s_{ij} \in \{0,1\}$ ,  $\sum_{j=1}^{n_i} s_{ij} = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, n_i$ . Tal que se verifique condición (6.21).  $F$  e  $I$  son indicadores del estado actual de cada planta controlada: en estado transitorio  $F=0$  e  $I=1$  mientras en régimen permanente  $F=1$  e  $I=0$ .

□

La única diferencia entre la formulación de éste problema de optimización y el de subsección  $i$  radica en el costo conjunto a minimizar, (6.23) y (6.20), respectivamente.

Para identificar el estado de la planta (transitorio o régimen) se propone evaluar la siguiente inecuación (6.24) para la salida de la planta  $y$ , ver (Otanéz et al., 2002a).

$$|y(t_k + h_i) - y_1(t_k)| < \min\{\delta_i |y(t_k)|, th\} \quad (6.24)$$

Si esta condición es válida entonces la planta está en estado estacionario y en caso contrario se encuentra en estado transitorio.  $th$  es un valor umbral que debe ser elegido de forma de impedir que la conmutación entre ambos estados ocurra a causa de factores como el ruido.

El valor de  $G_{i,j}$  (o  $G_{i,j}'$ ) puede ser seleccionado igual a  $J_{i,m_j}$  (o  $J_{i,m_j}'$ ) o de la forma normalizada (6.22). La representación de la performance en los estados de régimen y transitorio debe ser identificado de acuerdo a los requerimientos de la aplicación. Para simplificar el análisis aquí se propone elegir  $G_{i,j} = J_{i,m_j}$  y  $G_{i,j}' = J_{i,m_j}/\delta_i$ .

Al igual que la solución presentada en la subsección  $i$ , el problema de optimización es relevante del problema *knapsack* multidimensional de múltiples opciones. Para resolver éste problema se propone utilizar nuevamente el algoritmo heurístico (HEU).

Esta estrategia se evalúa en el Caso de Estudio 3 de la siguiente sección.

## 6.5 Casos de estudio

En lo que sigue se analizan las estrategias presentadas en la sección 6.4 en casos de estudio exhaustivos. Las simulaciones se realizaron en el ambiente de simulación de MATLAB/Simulink y utilizan la librería TrueTime (Anderson et al., 2006).

### 6.5.1 Técnica $(m, k)$ firm con uso de información de estado de la planta

Sea el mismo sistema considerado en *Ejemplo 6.1*. El período básico es  $h_1=0.02s$  y entonces  $F_1^*(0)=0.2 \cdot 50=10$  Hz. La salida de detección elegida es la posición  $y$ .

Los períodos pueden variar entre  $h_1$  y su máximo  $h_{1,max}=0.14$  por estabilidad y entonces la mínima frecuencia alcanzable es  $50/7=7.14$  Hz. Para el diseño  $\omega_0=\pi/(10 h_1)$  y entonces  $R = \frac{2.2}{\omega_0} h_1 = 7$ . Entonces, para poder reducir instancias durante en el transitorio se adopta  $N=0.2$ . Con este valor de  $N$  elegido, los cruces de niveles durante el transitorio ocurren para tiempos que superan un período de muestreo. Los niveles están centrados en 0 y equiespaciados en  $N$ .

El objetivo inicial, entonces es reducir el envío de mediciones a un 20% del nominal,  $F_{nom,1}=50$  y  $F_1^*=10$ , el patrón  $(m, k)$  configurado es  $(1, 5)$ .

En  $t=0$ , ingresa un escalón de referencia de posición de valor 1.1, el cual no es múltiplo entero de  $N$ . Tal entrada es causante de oscilaciones en torno al valor final en un control LCS (Kofman & Braslavsky, 2006) cuyo quantum sea  $N$ . En  $t=1.62$ , ingresará una perturbación escalón aditiva en la salida del sistema.



Para mostrar la potencialidad del algoritmo se simularon los tres casos siguientes, el sistema de control nominal (denominado S1), donde la frecuencia de envíos es igual a la frecuencia de sensado,  $F_I=1/(h_I)$ , en el segundo caso el sistema de control nominal (denominado S2) en el cual la frecuencia de envíos es reducida al valor de referencia  $F_I^*=1/(5h_I)$ , y en el tercer caso (S3) se usa el algoritmo. En Figura 6.7 se muestran sus evoluciones, en negro, verde, azul, respectivamente, en la cual se puede apreciar en una respuesta al escalón la evolución del S3 se encuentra entre las evoluciones obtenidas con S1 ( $1/h_I$ ) y la deteriorada del S2.

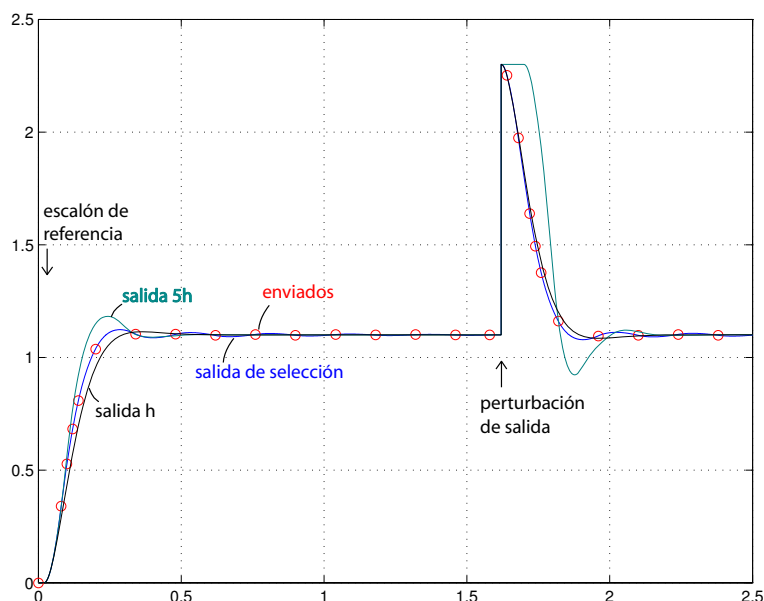


Figura 6.7: Respuesta al escalón y a perturbación.

Para evaluar la *performance* de los distintos sistemas, se utilizó el costo LQ (6.18). Este índice de performance se evalúa para  $0 < t < 1.5$ s. Su valor para  $1/h_I$  es de 0.1373, y para  $1/(5h_I)$   $J$  se degrada un **42.5%**. Utilizando el algoritmo presentado  $J$  se degrada sólo un **6.4%**.

En Figura 6.8 se observa para el S3 la diferencia temporal entre dos eventos de cruce sucesivos para cada tiempo. Se aprecia que la frecuencia en el transitorio no se reduce demasiado, pero el tiempo entre eventos es superior o igual al período de muestreo  $h_I$ . Se ve que una vez que la salida de S3 cruza el último nivel (1.20) el tiempo de muestreo es aumentado al máximo  $h_{max}$  hasta conseguir que  $F_I$  se reduzca a  $F_I^*$ . Cuando esta se alcanza, la frecuencia de envíos se cambia a  $1/(5h_I)$ .

Cuando ingresa la perturbación escalón en  $t=1.62$  el algoritmo detecta el cruce de nivel e inmediatamente se envía la medición, generando que el controlador actúe de manera similar al S1. Para el S3 la perturbación no es detectada por el controlador hasta  $t=1.7$  que es múltiplo del período de muestreo. La velocidad con la que la frecuencia alcanza su referencia depende

principalmente del valor  $h_{max}$  y de la existencia de eventos de cruce. La aparición de muchos eventos de cruce hace más grande el tiempo en el cual el valor real alcanza la referencia.

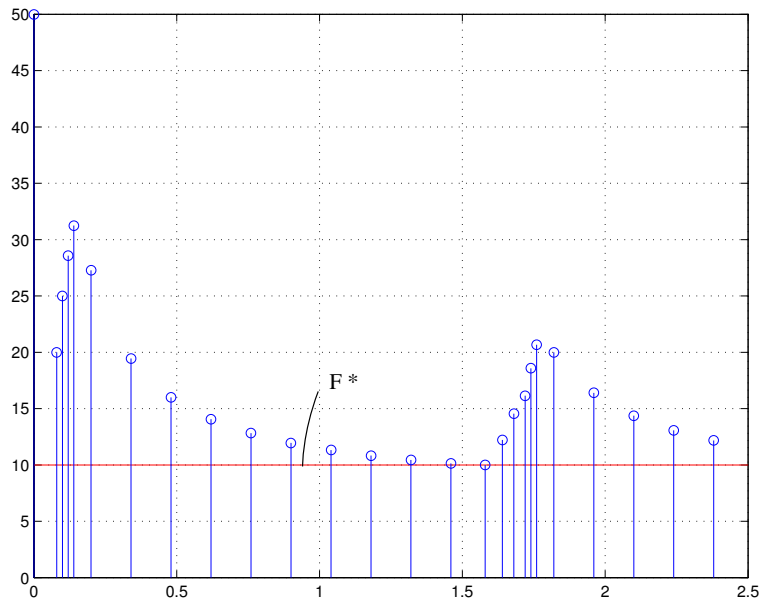


Figura 6.8: Evolución de la frecuencia de envíos.

### 6.5.2 Optimización conjunta aplicada al problema de estabilización de cuatri-rotor

Sean los siguientes tres sistemas de segundo orden en tiempo continuo  $\dot{x} = A_i x + B_i u$ , cada uno descritos con las matrices de estado de (6.25) donde  $b_i$  puede valer  $1/I_x$ ,  $1/I_y$ ,  $1/I_z$  para cada modelo  $i$ .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_i \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Estos tres sistemas son modelos linealizados en torno al punto de operación  $[\varphi=0, \theta=0, \psi=0]$  de un cuatri-rotor donde  $[\varphi, \theta, \psi]$  son los ángulos de rotación de deriva (yaw), inclinación (pitch) y alabeo (roll). Un cuatri-rotor es un pequeño vehículo aéreo controlado por la velocidad rotacional de cuatro hélices manejadas por cuatro motores eléctricos, ver modelado en (Guerrero-Castellanos et al., 2008). El cuatri-rotor es controlado con un microprocesador embarcado y también puede utilizar una red de comunicación embarcada, por lo que se puede ser considerado como un sistema distribuido. Para manejar adecuadamente estos recursos compartidos se usa aquí la estrategia propuesta.

Específicamente, el problema de control considerado aquí es la estabilización de altitud, es decir desde cualquier ángulo de rotación inicial orientarlo con respecto a  $[\varphi=0, \theta=0, \psi=0]$  y mantenerlo en esta posición.

Los períodos de muestreo son elegidos de acuerdo a (6.9), y son respectivamente  $h_\phi=0.1$  s,  $h_\theta=0.1$  s y  $h_\psi = 0.12$  s, y los controladores por realimentación de estados (6.26) fueron diseñados para tener una respuesta transitoria satisfactoria.

$$\begin{aligned} L_1 &= L(h_\phi) = [-0.02959 \quad -0.02524] \\ L_2 &= L(h_\theta) = [-0.02959 \quad -0.02524] \\ L_3 &= L(h_\psi) = [-0.03055 \quad -0.03282] \end{aligned} \quad (6.26)$$

De acuerdo a lo considerado en sección se elige  $k_i = 5$ , igual para los tres sistemas, y se considera el patrón uniforme de (Ramanathan, 1999) definido en (6.1). La adaptación del período de muestreo  $L_{i,r} = [l_{r,1} \quad l_{r,2}]$  se hace con las ecuaciones exactas  $\{(5.55), (5.56)\}$ , donde  $h_r = ph_i$ , con  $p = 1.5$  para cada sistema  $i$ . Con esto se garantiza la estabilidad del sistema ante cualquier secuencia de conmutación.

Los costos de las familias de controladores de acuerdo a las diferentes restricciones  $(m, k)$ -firm de cada tarea  $\tau_i$  son calculados de acuerdo a Apéndice F. Como ejemplo en Tabla 6.3 a) y b) se muestran los valores de  $\gamma(\Theta_{\Pi i})$  obtenidos para distintos valores de  $m$  de los subsistemas de control de ángulo de inclinación (pitch) y deriva (yaw), respectivamente.

| m | $\gamma(\Theta_m)$ | m | $\gamma(\Theta_m)$ |
|---|--------------------|---|--------------------|
| 5 | 0.16294            | 5 | 0.22917            |
| 4 | 0.16310            | 4 | 0.22980            |
| 3 | 0.16326            | 3 | 0.23044            |
| 2 | 0.16397            | 2 | 0.23253            |
| 1 | 0.17123            | 1 | 0.24565            |

a) control pitch

b) control yaw

Tabla 6.3: Valores del coeficiente de costo para cada patrón  $(m, k)$ .

Se puede apreciar que los valores de  $\gamma(\Theta_m)$  de ambos controles son crecientes cuando  $m$  decrece. Es decir, si  $m_1 > m_2$  entonces  $\gamma(\Theta_{m_1}) < \gamma(\Theta_{m_2})$ , y en consecuencia el costo a partir de una misma condición inicial es  $J(k, m_1) < J(k, m_2)$ . Esta conclusión es independiente del valor específico de la condición inicial.

*Escenario propuesto*

El WCET de cada tarea de control es de 20 ms y para la tarea de perturbación el tiempo de ejecución va cambiando tal como se describe en el escenario propuesto. Las tareas una vez que arriban al CPU pueden tener tres estados: running (en ejecución), preempted (en estado de espera debido a la ejecución de una tarea de mayor prioridad) o no activadas.

La simulación del cuatri-rotor comienza a partir de una condición inicial igual a  $[30 \ -10 \ -25]^T$  (en grados). La señal de referencia es  $[0 \ 0 \ 0]^T$ .

Figura 6.9 muestra la traza de planificación de cada una de las tareas.

En el intervalo  $[0, 0.3s]$  sólo hay tres tareas que requieren el procesador (las tareas del cuatri-rotor). Para garantizar la factibilidad de la planificación se evalúa la condición de (6.4). En este caso se verifica para los valores de  $m$  siguientes:  $m_1 = 5, m_2 = 5, m_3 = 5$  (se ejecutan todas las instancias).

En  $t_1 = 0.3$  s, una nueva tarea (de perturbación) se activa en el sistema. La misma tiene un período de 0.5s y un tiempo de ejecución igual a 0.19 s. La condición (6.4) se verifica y con esto la configuración sigue siendo factible para  $m_1 = 5, m_2 = 5, m_3 = 5$ .

En  $t_2=1.6$  s, el tiempo de ejecución de la tarea de perturbación aumenta a 0.29 s.

En un escenario de tiempo real “hard”, en el cual todas las instancias se ejecutan, la condición (6.4) para la tarea 4 no se cumple (a cálculo hecho vale  $C_4 = 0.59 \not\leq 0.5$ ). Esto provoca que a partir de 1.6 s las instancias de la tarea 4 no puedan ser completadas.

En nuestra propuesta, el cambio en el tiempo de ejecución es detectado por el supervisor y en consecuencia el controlador de tareas recalcula los parámetros  $m_i$  de forma que se garantice la condición (6.4) y tal que se minimice la función de costo conjunta. A cálculo hecho se obtienen los parámetros  $m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = 5$ , entonces  $C_4 = 0.49 \leq 0.5$ .

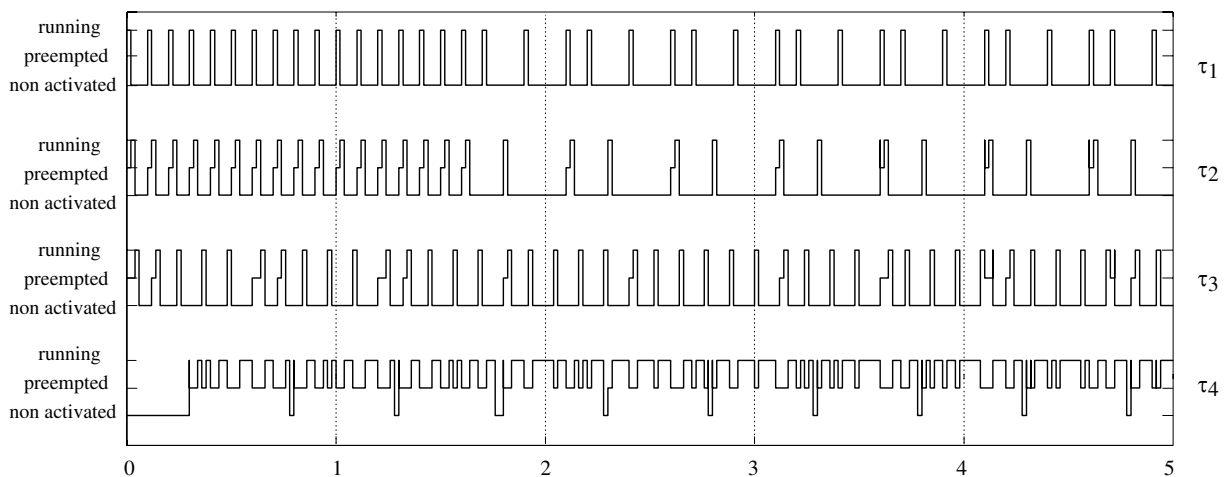


Figura 6.9: Planificación de las tareas con (m,k)-firm.

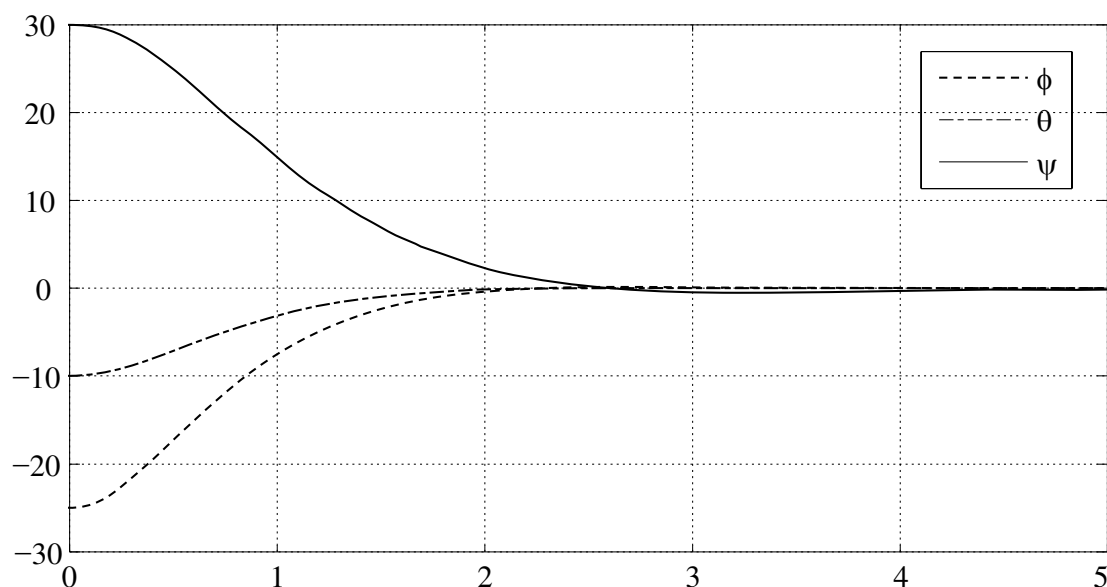


Figura 6.10: Ángulos del cuatri-rotor.

Figura 6.10 muestra la evolución de los ángulos (en grados) del cuatri-rotor. La posición es estabilizada en la referencia ( $\phi=\theta=\psi=0^\circ$ ) en aproximadamente 2.8s.

### 6.5.3 Optimización conjunta con aplicación a un conjunto de plantas

En esta sección se presenta el enfoque de planificación sobre cuatro plantas a ser controladas, donde los respectivos algoritmos de control se ejecutan en un mismo procesador.

Las plantas  $\{\text{Planta}_i\}$  con  $i=1,2,3,4$  son respectivamente: un sistema oscilante armónico cuyo modelo lineal tiene las matrices (6.27) tomado de (Otanez et al., 2002a), un sistema traslacional considerado en *Ejemplo 6.1*, un péndulo descrito por (6.28) tomado de (Eker et al., 2000) y un péndulo invertido de *Ejemplo 5.4*.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -18 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 526 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -22.206 & -0.9424 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.48036 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Se considera que la primera variable del vector  $x$  de cada planta es la variable supervisada por el componente de supervisión. El objetivo de control en cada caso es que esta variable siga a su referencia. Es decir que el estado modificado  $\hat{x}_i = [x_{i,1} - N \text{ref}_i \quad x_{i,2} \quad \dots]^T$  tienda a cero, donde  $N$  se elige de manera que no haya error en régimen permanente. De aquí en adelante se hablara directamente de  $x_i$  en lugar de  $\hat{x}_i$ .

Para la planta 2 se considera que el controlador es elegido tal que su respuesta temporal es sobreamortiguada mientras que en el resto de plantas las respuestas serán subamortiguadas, con un coeficiente de amortiguamiento superior a 0.6.

Los períodos de muestreo de la plantas son  $h_1 = 0.02s$  para planta 1,  $h_2 = 0.02s$  para planta 2,  $h_3 = 0.03s$  para planta 3, and  $h_4 = 0.05s$  para planta 4. Cada tarea de control tiene asignada una prioridad de acuerdo al valor del período de muestreo según la política RM, entonces se tiene  $\text{prioridad}(\tau_1) > \text{prioridad}(\tau_2) > \text{prioridad}(\tau_3) > \text{prioridad}(\tau_4)$ . Las ganancias de los controladores para los períodos básicos  $h_i$  son respectivamente:

$$\{L_1 = -[0.15306 \ 0.02445], \quad L_2 = -[94.8294 \ 7.66], \quad L_3 = -[83.7441 \ 17.5121], \\ L_4 = [17.2308 \ 9.1184 \ -115.3337 \ -18.3500]\}$$

De acuerdo a lo sugerido en sección 6.3.2.ii resulta  $\{k_1 = 6, k_2 = 5, k_3 = 5, k_4 = 2\}$ .

La familia de controladores adaptable al patrón  $(m, k)$  para cada planta se realiza utilizando el diseño Lie de Capítulo 5. Específicamente, como las plantas 1 y 3 tienen autovalores complejos conjugados se usa la solución exacta  $\{(5.55), (5.56)\}$  y sus parámetros no se transcriben aquí. Para la segunda planta se considera la solución para autovalores reales (5.38) y la familia de controladores es

$$L_2(h_r) = \{h_r = 2 \ h_2 \rightarrow [-82.2075 \ -6.628233], h_r = 3 \ h_2 \rightarrow [-70.98133 \ -5.7093], h_r \\ = 5 \ h_2 \rightarrow [-55.97026 \ -4.4915314]\}$$

Estas ganancias permiten adaptar la ley de control al patrón  $(m, k)$  uniforme (6.1).

Para la planta 4 la ley de control para período básico es

$$L_4(h_4) = [17.2308 \ 9.1184 \ -115.3337 \ -18.3500]$$

La familia de controladores adaptables se calcula siguiendo lo establecido en Ejemplo 5.4.

Los costos asociados con las familias de controladores de acuerdo a las diferentes restricciones  $(m, k)$ -firm de cada tarea  $\tau_i$  son calculados de acuerdo al Apéndice F, de manera “*off-line*” y se almacenan en una tabla que es usada “*on-line*”.

Para plantas 1 y 3 los costos se calculan de igual forma que en el Caso de Estudio 1, ver por ejemplo los resultados en Tabla 6.3 b).

Para la planta 2 (con autovalores reales) se resolvieron las LMI (6.8) y se calculó  $P = 1000 \cdot [1.78285 \ 0.13080; \ 0.13080 \ 0.0100279]$  con los siguientes coeficientes de estabilidad exponencial para cada  $i$   $\{\gamma_1 = 0.791366, \gamma_2 = 0.626529, \gamma_3 = 0.496555, \gamma_5 = 0.3136156\}$ . Con estos parámetros se pueden calcular los costos de la Tabla 6.3a).

| m | $\gamma(\Theta_m)$ |
|---|--------------------|
| 5 | 0.31037            |
| 4 | 0.31051            |
| 3 | 0.31064            |
| 2 | 0.31111            |
| 1 | 0.31362            |

a) Planta 2

| m | $\gamma(\Theta_m)$ |
|---|--------------------|
| 6 | 0.44555            |
| 5 | 0.45315            |
| 4 | 0.46089            |
| 3 | 0.46876            |
| 2 | 0.49725            |
| 1 | 0.66072            |

b) Planta 1

Tabla 6.4: Valores del coeficiente de costo para cada patrón  $(m_i, k_i)$ .

El WCET de cada tarea de control es de 9 ms. Las tareas una vez que arriban al CPU pueden tener tres estados: running (en ejecución), preempted (en estado de espera debido a la ejecución de una tarea de mayor prioridad) o no activadas.

### Escenario tiempo real "hard"

Considérese en primer lugar un escenario en el cual no se permite la pérdida de muestras de las tareas. Es decir, donde todas las tareas tienen una restricción *Hard Real-Time*.

En  $t=0s$  las tareas  $\tau_1, \tau_3, \tau_4$  son ejecutadas en la CPU. En  $t=0.5s$  se activa la tarea  $\tau_2$  y en consecuencia el procesador se sobrecarga, como las tareas  $\tau_3, \tau_4$  tienen baja prioridad, no puede ser ejecutadas en el procesador y con esto ambas plantas se inestabilizan.

En Figura 6.11 se identifica con  $\uparrow$  a las tareas que satisfacen su *deadline* y con  $\blacktriangledown$  a aquellas que no lo hacen. Se puede observar que tanto  $\tau_3, \tau_4$  no satisfacen sus *deadlines* a partir de 0.5s.

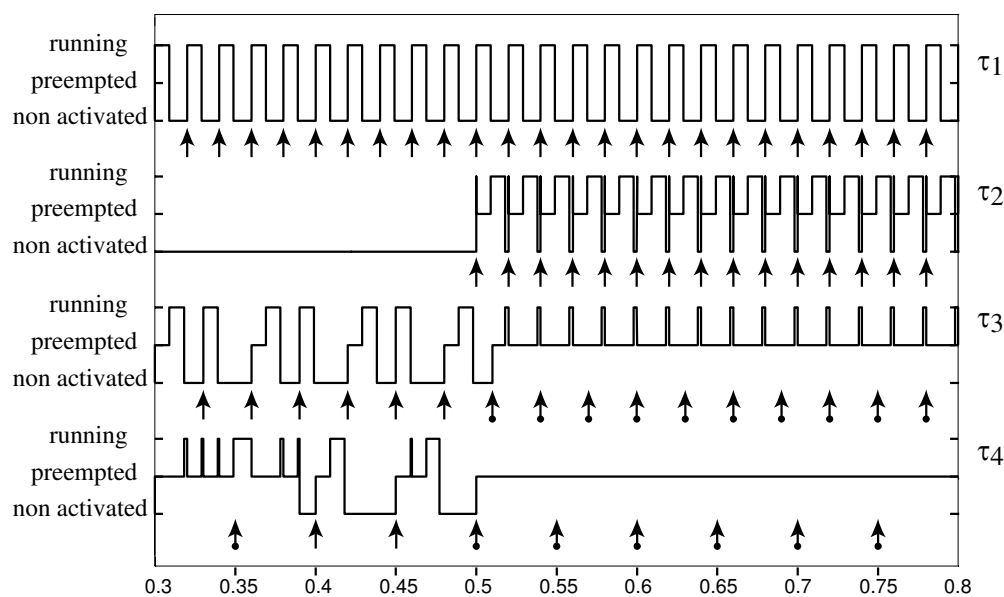
Figura 6.11: Simulación de traza de ejecución de las tareas *Hard Real Time*.

Figura 6.12 muestra la evolución del estado de la planta 3. Hasta 0.5 se observa una buena respuesta pero luego se vuelve inestable debido a la no ejecución de instancias de control.

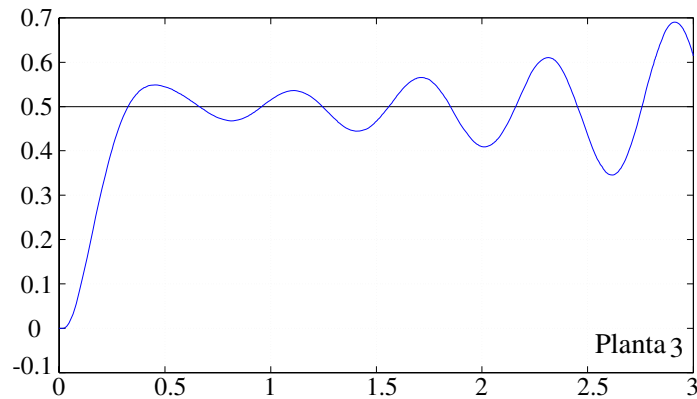


Figura 6.12: Evolución de la salida de Planta 3 en escenario *Hard RT*. Inestabilidad.

A continuación para cada planta  $i$  se muestra si la planta es controlada o no. El valor de la referencia y la salida de la planta  $i$  son denominadas respectivamente  $Ref_i$  y  $x_i$ . La tabla muestra en cada instante significativo el valor de  $m_i$  que es seleccionado por el controlador de tareas. Es decir, en cada instante de tiempo significativo se conmuta entre dos posibles modos de trabajo y su aparición tiene alguna de las siguientes causas: una nueva planta tiene que ser controlada, una planta deja de estar activada, aumentó o disminuyó el WCET, una planta evoluciona desde su estado transitorio al estado de régimen, o viceversa. Estos instantes son identificados de forma on-line por el supervisor.

#### *Escenario (m,k)-firm*

El escenario propuesto cuyos hitos son resumidos en la Tabla 6.5, es descrito como sigue:

Antes del comienzo se supone que las plantas 1 y 3 están siendo controladas mientras que las otras dos tareas están desactivadas. En este caso la planificación es factible con restricciones  $(k_1, k_1)$  y  $(k_3, k_3)$ .

En tiempo  $t_0$ , se activa la tarea  $\tau_4$ , con lo cual las tareas a planificar son  $\{\tau_1, \tau_3, \tau_4\}$ . Las referencias y los estados iniciales son cero, por lo cual las tres plantas están en régimen. El controlador de tareas tiene que encontrar la configuración óptima de  $m_i$  para este conjunto de tareas y de acuerdo a la misma, la secuencia correspondiente de leyes de control. Para esto se usan los costos de régimen. El resultado es  $m_1=4$ ,  $m_3=5$  y  $m_4$  es siempre igual a 1. El estado transitorio es detectado por el supervisor en el tiempo  $t_1$  para las plantas 1 y 4 (respectivos cambios en la señal de referencia). El controlador de tareas busca la configuración óptima de



restricción  $(m_i, k_i)$  teniendo en cuenta los costos de transitorio para plantas 1 y 4 y el costo de régimen para la planta 3. Esto resulta en  $m_1 = 6$  and  $m_3 = 2$ .

La planta 2 es activada en tiempo  $t_2$  y el supervisor identifica que está en régimen mientras las plantas 1 y 4 continúan en sus respectivos transitorios. Los valores de  $m_i$  definidos por el controlador de tareas son respectivamente  $m_1=3$ ,  $m_2=1$  y  $m_3=2$ .

El supervisor detecta su estado régimen para la planta 1 en  $t_3$ . Los valores evaluados para  $m_i$  son  $m_1=2$ ,  $m_2=1$  and  $m_3=5$ .

En tiempo  $t_4$ , los valores de  $m_i$  tienen que ser modificadas cuando el supervisor detecta el estado transitorio para planta 2. Por lo tanto,  $m_1=2$ ,  $m_2=1$  y  $m_3=5$ .

En tiempo  $t_5$  la planta 3 comienza su estado transitorio. El ajuste de los valores de  $m_i$  es  $m_1=2$ ,  $m_2=1$  y  $m_3=5$ .

La planta 2 alcanza su estado de régimen en  $t_6$ . Esto provoca el reajuste de los  $m_i$  de acuerdo con los costos de régimen para  $\tau_1$  y  $\tau_2$  y de régimen para  $\tau_3$ :  $m_1=2$ ,  $m_2=1$ ,  $m_3=5$ .

En tiempo  $t_7$ , una perturbación inadmisibile lleva al estado de la planta 3 a su valor limite  $\pi/2$  y en consecuencia la planta es retirada de servicio, con lo cual la tarea de control de esta planta es desactivada reduciendo la cantidad de tareas activas a tres. Al mismo, la planta 4 comienza su transitorio. Por tanto los valores de  $m_i$  de  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son:  $m_1=6$  y  $m_2=1$ . Al final en tiempo  $t_8$  un estado transitorio es detectado por el supervisor para la planta 2. En consecuencia los parámetros  $m_i$  son elegidos como  $m_1=2$  y  $m_2=5$ .

Durante toda la simulación el parámetro  $m_4$  es igual a 1 restricción “*hard real-time*”.

|              | Planta 1 ( $k_1 = 6$ ) |       | Planta 2 ( $k_2 = 5$ ) |       | Planta 3 ( $k_3 = 5$ ) |       | Planta 4 ( $k_4 = 1$ ) |       |
|--------------|------------------------|-------|------------------------|-------|------------------------|-------|------------------------|-------|
|              | Estado                 | $m_1$ | Estado                 | $m_2$ | Estado                 | $m_3$ | Estado                 | $m_4$ |
| $t < t_0$    | régimen                | 6     | -                      | -     | régimen                | 5     | -                      | -     |
| $[t_0, t_1)$ | régimen                | 4     | -                      | -     | régimen                | 5     | régimen                | 1     |
| $[t_1, t_2)$ | transitorio            | 6     | -                      | -     | régimen                | 2     | transitorio            | 1     |
| $[t_2, t_3)$ | transitorio            | 3     | Régimen                | 1     | régimen                | 2     | transitorio            | 1     |
| $[t_3, t_4)$ | régimen                | 2     | Régimen                | 1     | régimen                | 5     | transitorio            | 1     |
| $[t_4, t_5)$ | régimen                | 2     | transitorio            | 2     | régimen                | 2     | transitorio            | 1     |
| $[t_5, t_6)$ | régimen                | 2     | transitorio            | 1     | transitorio            | 5     | régimen                | 1     |
| $[t_6, t_7)$ | régimen                | 2     | Régimen                | 1     | transitorio            | 5     | régimen                | 1     |
| $[t_7, t_8)$ | régimen                | 6     | Régimen                | 5     | -                      | -     | transitorio            | 1     |
| $t \geq t_8$ | régimen                | 2     | -                      | -     | -                      | -     | transitorio            | 1     |

Tabla 6.5: Valores de  $m_i$  seleccionados por el controlador de tareas en cada modo de trabajo.

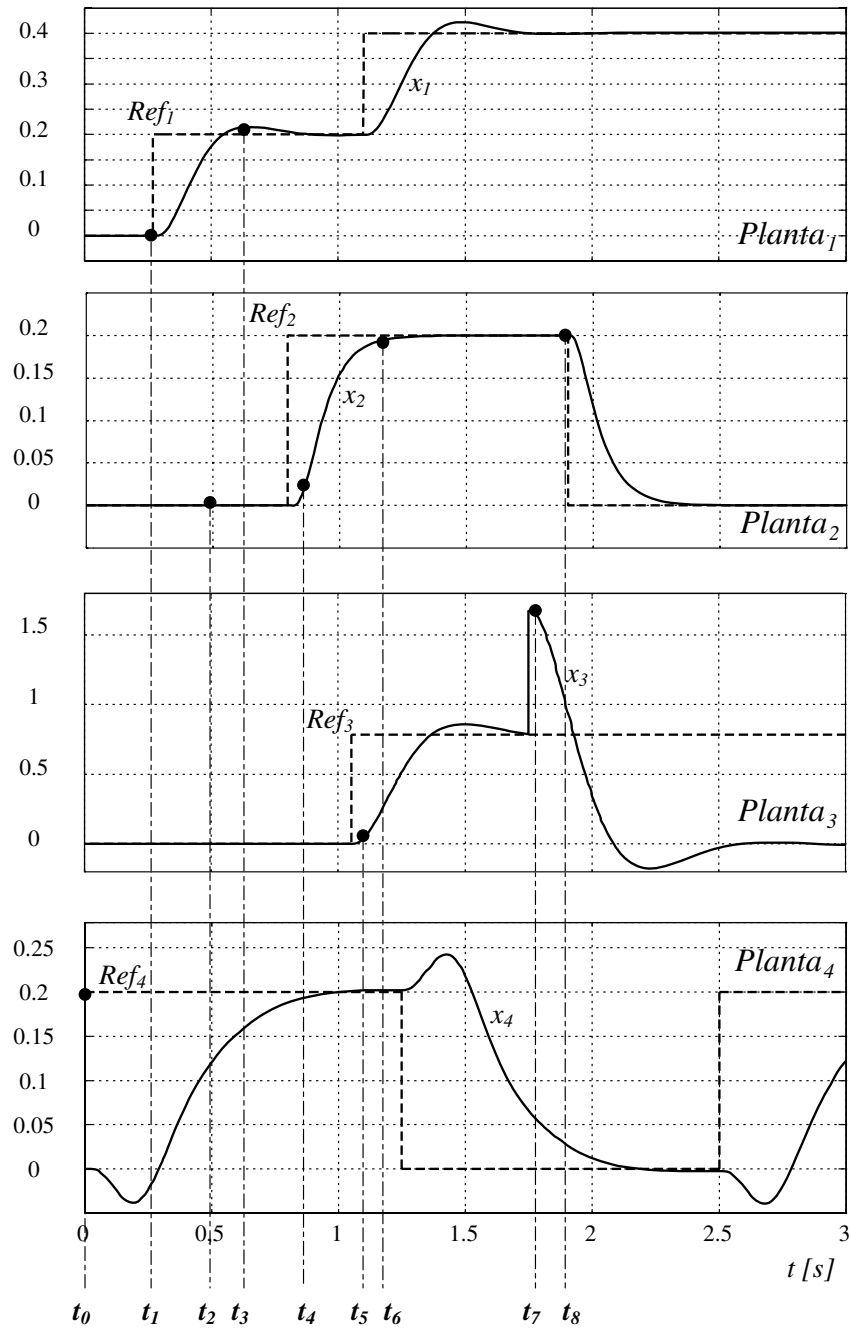


Figura 6.13: Evolución de las cuatro plantas cuyos controladores comparten el mismo procesador. Referencia ( $Ref_i$  para la planta  $Planta_i$ ) y salida ( $x_i$  para cada planta  $i$ ).

## 6.6 Conclusiones

En este capítulo se propone usar un enfoque basado en la pérdida selectiva de algunos paquetes en una red o de la ejecución de algunas instancias en una CPU de acuerdo al modelo  $(m, k)$ -firm para tratar con situaciones de sobrecarga de un recurso compartido. Este método resulta en una cantidad variable de instancias de tareas de control que se ejecutan, cuyo valor debe garantizar la factibilidad de la planificación, i.e. condición (6.4).

---

Como primera estrategia se presentó una arquitectura jerárquica que permite controlar la utilización del ancho de banda de una red con el modelo  $(m, k)$ . La misma se implementa sobre nodos que transmiten la información de las salidas de sensores teniendo en cuenta el estado de la planta. Esto aporta un doble efecto de descongestión dado que al usarse controladores manejados por eventos a su entrada, los mismos no recalculan sus salidas si no reciben nuevos datos de mediciones.

La estabilidad de cada lazo ante variaciones del patrón se garantizó con el diseño de un controlador tal que las matrices de lazo cerrado para los posibles períodos tengan una CQLF.

Al aplicar la estrategia en el Caso de Estudio 1 se comprobó que los envíos durante la parte significativa de la respuesta al escalón de un sistema de control pueden ser parcialmente reducidos, y que la evolución se mantiene cercana a la del sistema nominal, lo que en términos de calidad de la performance se traduce en un mínimo deterioro del índice de desempeño con respecto al nominal. La aparición de una perturbación es rápidamente detectada, permitiendo actuar en consecuencia, lo que no ocurre en técnicas que amplíen el período de muestreo.

La segunda estrategia propone la búsqueda de los valores óptimos del valor  $m$  de cada tarea tal que se minimice la función de costo de la performance de control global. A estos efectos se usa un algoritmo de la literatura, de (Jia, 2009), que efectúa la búsqueda sujeto a la restricción impuesta por la condición de planificación (6.4).

La estabilidad de cada lazo de control ante cualquier variación de  $m$  se garantiza calculando los parámetros de los controladores con los métodos Lie-algebraicos de Capítulo 5. En particular, para el sistema del Caso de Estudio 2, estos métodos proporcionan una solución analítica y exacta, lo que permite además obtener una función de costo para cada patrón  $(m, k)$  admisible que resulta muy simple, basándose en parámetros relacionados con cada modo del lazo cerrado, ver Apéndice F.

En el escenario evaluado se mostró que la arquitectura considerada responde correctamente, por ejemplo reduce la cantidad de instancias que se pueden ejecutar de tres de las tareas para poder asignarle el recurso a una cuarta tarea cuando se incrementa el tiempo de ejecución de esta última por encima del valor admitido por la condición (6.4).

Asimismo el ajuste de parámetros del controlador permitió obtener una performance satisfactoria incluso durante la reducción de la cantidad de instancias ejecutadas, corroborando lo indicado en la **Observación 6.4**.

Este enfoque de optimización global de las tareas de control ha sido extendido para tener en cuenta también el estado real de cada planta. Esto se logra incorporando a la función de costo global del sistema la información sobre dicho estado.

Tal extensión permite que se utilice el recurso compartido de forma aún más eficiente ya que se asigna dinámicamente a las plantas que más lo necesitan (cuando están en su transitorio) a expensas de las plantas que están en régimen y necesitan menos control. Las ventajas de tener en cuenta también los estados de las plantas pueden ser previstas a partir de lo indicado en **Observación 6.6** y en la primera estrategia mencionada.

En el Caso de Estudio 3 se mostró que el uso de nuestro enfoque sufre una mínima degradación de la performance comparando con el caso ideal, en el cual el procesador tiene capacidad infinita. Además, esta técnica previene la inestabilidad del sistema que aparece en un escenario de peor caso, donde las tareas tienen restricciones de tiempo real “*hard*”.



# APÉNDICE F

## Criterio de performance para evaluar distintas secuencias

Es de interés poder cuantificar la performance del sistema DTSS mediante alguna función de costo que dependa de la secuencia de variación del período de muestreo.

Aquí se propone la utilización de un costo cuadrático que motivado por el diseño Lie puede ser planteado en relación con los parámetros relacionados con los modos del sistema.

### F.1 Costo cuadrático

Sea un sistema controlado que parte desde un estado inicial  $x(t_k)$  hacia un estado final  $x(t_k+N h)$  con una dada secuencia de conmutación  $\sigma_i$ , es decir como en (F.1).

$$x(t_k + Nh)^T = \Theta(\sigma_i, N) x(t_k)^T \quad (\text{F.1})$$

Suponiendo que  $N = \sum_{x=1}^r j_x$ , entonces la matriz de evolución asociada a  $\sigma_i$  se define como el producto (F.2) de las “ $r$ ” matrices de lazo cerrado donde  $\Phi_{j_x}^{CL} = \Phi^{CL}(j_x h)$ .

$$\Theta(\sigma_i, N) = \Phi_{j_r}^{CL} \Phi_{j_{r-1}}^{CL} \dots \Phi_{j_1}^{CL} \quad (\text{F.2})$$

Se propone entonces la función de costo (F.3) que mide el costo cuadrático para ir (“cost to go”) desde el estado inicial  $x(t_k)$  al estado  $x(t_k+N h)$  para esta secuencia de conmutación  $\sigma_i$ .

$$J(N, \sigma_i) = x(t_k)^T Q x(t_k) + x(t_k + Nh)^T Q x(t_k + Nh) \quad (\text{F.3})$$

Un costo cuadrático para un horizonte finito de tiempo  $h N$  similar a (F.3) pero que no tiene en cuenta la influencia de la acción de control ( $R=0$ ), ha sido usado para evaluar la performance en artículos como (Cervin et al., 2002).

Se dice que una secuencia es mejor que otra cuando el costo asociado a la misma condición inicial es inferior. Es decir, sean las secuencias  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ , entonces la siguiente relación entre costos  $J(N, \sigma_i) < J(N, \sigma_j)$  indica que la secuencia  $\sigma_i$  es mejor que la  $\sigma_j$ .

### F.1.1 Costo cuadrático usando la QCLF

Aquí se propone elegir como matriz del costo cuadrático (F.3) a la matriz  $P$  de la QCLF, es decir  $V(x_i) = x_i^T P x_i$ , dado que esta matriz es común a todos los modos del sistema. Con esto expresión (F.3) se transforma en (F.4).

$$J(N, \sigma_i) = x(t_k)^T (P + \Theta(\sigma_i, N)^T P \Theta(\sigma_i, N)) x(t_k) \quad (\text{F.4})$$

Supongamos que existe una  $P$  tal que se puede encontrar una aproximación de la norma elipsoidal  $\gamma_{j_r}$  para cada matriz  $\Phi_{j_r}^{CL}$  que satisfaga la igualdad (F.5).

$$(\Phi_{j_r}^{CL})^T P \Phi_{j_r}^{CL} = \gamma_{j_r}^2 (\Phi_{j_r}^{CL}) P \quad (\text{F.5})$$

Entonces la constante exponencial de la secuencia  $\sigma_i$  resulta ser (F.6).

$$\gamma^2(\Theta(\sigma_i, N)) = \gamma_{j_r}^2 \gamma_{j_{r-1}}^2 \dots \gamma_{j_1}^2 \quad (\text{F.6})$$

Con esto, la función de costo (F.4) se puede escribir como (F.7).

$$J(N, \sigma_i) = \left(1 + \gamma^2(\Theta(\sigma_i, N))\right) x(t_k)^T P x(t_k) \quad (\text{F.7})$$

Con esto, el costo de cada secuencia  $\sigma_i$  puede ser caracterizado por un número escalar  $\left(1 + \gamma^2(\Theta(\sigma_i, N))\right)$  que multiplica a un término que es constante  $x(t_k)^T P x(t_k)$  a partir de cualquier condición inicial.

### F.1.2 Discusión sobre validez de la igualdad

Si no pueden ser obtenidas las igualdades (F.5) se pueden plantear las LMI (F.8) y obtener los coeficientes  $\gamma_{j_r}$  respectivos.

$$(\Phi_{j_r}^{CL})^T P \Phi_{j_r}^{CL} \leq \gamma_{j_r}^2 (\Phi_{j_r}^{CL}) P \quad (\text{F.8})$$

Existen casos particulares en los cuales se pueden determinar los coeficientes que satisfacen la igualdad. Por ejemplo, sea el sistema de segundo orden con autovalores complejos de  $\{(5.55), (5.56)\}$ . En este caso para la  $P$  definida en (5.67) vale la igualdad (6.34) y se verifica que la constante exponencial es igual al radio espectral de cada matriz, es decir vale (F.9).

$$\gamma(\Phi_{j_x}^{CL}) = \rho(\Phi_{j_x}^{CL}) \quad (\text{F.9})$$

La igualdad (F.9) significa que la evaluación del costo se puede reducir al producto de una cantidad finita de radios espectrales según la secuencia en particular. Con esta ecuación no se pesa el orden en el cual aparecen las matrices en cada secuencia sino cuales matrices aparecen.

*Observación F.1:* Se remarca que el radio espectral (parámetro de cada modo que es LTI) es usado aquí para comparar la performance del DTSS, que es variable en el tiempo.

## F.2 Costo para pérdida $(m, k)$ -firm

En principio se puede usar este costo para cualquier período de muestreo  $j_x h$  y el caso  $(m, k)$ -firm es un ejemplo particular. Por ejemplo, sean los siguientes dos patrones  $\Pi_j = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$  y  $\Pi_i = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0]$ . El valor de  $k (= N)$  es por tanto igual a 5.

Supongamos que se puede usar la igualdad entonces  $\gamma(\Theta(\Pi_j)) = \rho(\Phi_{h_2}^{CL}) \rho(\Phi_{h_3}^{CL})$  y  $\gamma(\Theta(\Pi_i)) = \rho(\Phi_{h_1}^{CL})^3 \rho(\Phi_{h_2}^{CL})$ .

Con esto si  $\gamma(\Theta(\Pi_j))$  es superior a  $\gamma(\Theta(\Pi_i))$  entonces a partir de cualquier condición inicial el patrón  $\Pi_i$  tiene un costo menor para ir al aproximado estado y viceversa.





# ANEXO 1

## Comportamiento frecuencial de sistemas discretos con retardos.

En este anexo se estudia la respuesta en frecuencia de las funciones transferencias con coeficientes variables en función de la parte fraccional del retardo  $m$ . En primer lugar, se calculan exactamente las mismas para un sistema genérico de primer orden para mostrar el procedimiento que se debe hacer en una dada planta. Si bien esto es plausible de ser aplicado a cualquier planta, un estudio simbólico en cada una de ellas requiere obtener cada función transferencia con la transformada  $z$  modificada (MZT) (Jury, 1964) en particular (o la utilización de una tabla de transformadas).

Aún así, por ejemplo en un sistema de segundo orden continuo con raíces complejas  $(a+jb, a-jb)$  la MZT introduce términos como  $\cos(mhb)$  y exponenciales  $e^{jah}$ , que aparecen combinados en los coeficientes del numerador, lo que no permite inferir como la variación de  $m$  puede afectar la respuesta en frecuencia. Por ello, resulta conveniente considerar la función transferencia utilizando la aproximación de (Hara et al., 1989). La misma depende del grado relativo de la planta y no tiene en cuenta los coeficientes de la planta real, esto permite obtener resultados de tipo generales según el grado relativo, lo que se analiza en este anexo.

En este anexo se utilizan los resultados del teorema de (Hara et al., 1989), que es transcripto como **Teorema 2.2**.

### A1.1 Análisis para grado relativo uno

A los efectos comparativos en primer lugar se presenta un sistema de primer orden (el más simple posible), del cual se analizan ciertas características de su respuesta en frecuencia. Luego se realiza lo mismo con un sistema de grado relativo uno, que en el caso particular de que  $n=1$  es la aproximación del sistema de primer orden. Se termina esta sección comparando los resultados.

### A1.1.1 Primer orden exacto:

Sea una planta de primer orden

$$G(s) = \frac{1}{s + a} \quad (\text{A1.1})$$

Cuya función transferencia discreta, sin retardo y con un ZOH es  $G(z) = \frac{1 - e^{-ah}}{a(z - e^{-ah})}$

$$G(z) = \frac{1 - e^{-ah}}{a(z - e^{-ah})} \quad (\text{A1.2})$$

El modelo discretizado con un retardo aplicando la transformada z modificada (ver sección 2.2.2)

$$G(z, m) = \frac{z(1 - e^{-ahm}) + e^{-ahm} - e^{-ah}}{a(z - e^{-ah})z^l} \quad (\text{A1.3})$$

La cual puede ser escrita como  $G(z, m) = \frac{N(z, m, l)}{D_p(z)}$ , cuyo numerador es

$$N(z, m, l) = z^{-l} N_p(z, m) \quad (\text{A1.4})$$

Donde

$$N_p(z, m) = \frac{(1 - e^{-ahm})}{(1 - e^{-ah})} \left( z + \frac{e^{-ahm} - e^{-ah}}{(1 - e^{-ahm})} \right) \quad (\text{A1.5})$$

Y el denominador es

$$D_p(z) = (z - e^{-ah})a/(1 - e^{-ah}) \quad (\text{A1.6})$$

#### i) Ubicación del cero del numerador

De (A1.5) tanto para  $a > 0$  o  $a < 0$ , el cero  $\frac{e^{-ahm} - e^{-ah}}{(1 - e^{-ahm})}$  es siempre positivo, por tanto, el cero pertenece al semiplano izquierdo del plano complejo para  $0 \leq m < 1$ .

#### i) Análisis de la respuesta en frecuencia de sistema de primer orden

La magnitud (al cuadrado) y fase para cada  $m$  son

$$|N_p(e^{j\theta}, m)|^2 = \frac{1}{(1 - e^{-ah})^2} \left[ \left( \sin \theta (-1 + e^{(-ah)m}) \right)^2 + \left( -\cos \theta + e^{(-ah)} + e^{(-ah)m} \cos \theta - e^{(-ah)m} \right)^2 \right] \quad (\text{A1.7})$$

y

$$\arg(N_p(e^{j\theta}, m)) = \arctan \left( \frac{\sin \theta (-1 + e^{(-ah)m})}{-1 \cos \theta + e^{(-ah)} - e^{(-ah)m}} \right) \quad (\text{A1.8})$$

Donde  $\arctan$  es la función inversa de la tangente en los cuatro cuadrantes (analizando los signos de parte real e imaginaria), que da resultados entre  $0$  y  $\pi$ . Los argumentos de polinomios de primer orden discretos con  $a$  variable, son siempre funciones continuas entre  $0$  y  $\pi$ , ver (León de la Barra & Prieto, 1999).

**Proposición 1.2.1 Magnitud**

- a) Cota mínima para  $m = -(\ln(\frac{1}{2}e^{ah} + \frac{1}{2}) - ah)/(ah)$
- b) Cota máxima para  $m=1$  (coincide para  $m=0$ )

DEMOSTRACIÓN

a) La derivada de (A1.7) con respecto a  $m$  es

$$\frac{d|N_p(e^{j\theta}, m)|^2}{dm} = -2 a h e^{-ahm} \cos \theta - 2 a h e^{-a h (1+m)} \cos \theta + 2 a h e^{-ah(1+m)} + 4 a h e^{-2 a h m} \cos \theta - 4 a h e^{-2 a h m} + 2 a h e^{-a h m} \tag{A1.9}$$

Y se anula para

$$m = -(\ln(\frac{1}{2}e^{ah} + \frac{1}{2}) - ah)/(ah) \tag{A1.10}$$

La derivada segunda evaluada en (A1.10) es  $(1 - \cos \theta) (a^2 h^2 (2 e^{-a h} + 1 + e^{-2 a h}))$ , y es siempre positiva. Entonces, para cada  $\theta$  la mínima magnitud ocurre para (A1.10). Reemplazando en (A1.10) en (A1.7) la cota mínima de magnitud es

$$|N_p(e^{j\theta}, m_{\min})| = \sqrt{0.5(1 + \cos \theta)} \tag{A1.11}$$

□

b) El máximo es  $\max_{0 \leq m \leq 1} |N_p(e^{j\theta}, m)| = |N_p(e^{j\theta}, 0)| = |N_p(e^{j\theta}, 1)|$  es

$$|N_p(e^{j\theta}, 1)| = \left| \frac{(1 - e^{-ahm})}{(1 - e^{-ah})} \right| \left| \left( z + \frac{e^{-ahm} - e^{-ah}}{(1 - e^{-ahm})} \right) \right|_{|m=1} = 1 \tag{A1.12}$$

□

**Proposición 1.2.1 Argumento**

- a) Cota máxima para  $m=1$
- b) Cota mínima para  $m=0$

DEMOSTRACIÓN

La derivada de la función  $\arctan$  es de la siguiente forma:

$$\frac{d \arctan(f(x))}{dx} = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2} \tag{A1.12}$$

Para todo  $x$  donde  $1 + f(x)^2$  está definida, el signo de (A1.12) es el signo de  $f(x)$ .

Aquí  $f(m) = \frac{\sin(\theta)(-1+e^{-ahm})}{(e^{-ahm}-1)\cos(\theta)+e^{-ah}-e^{-ahm}}$  y entonces

$$\frac{df(m)}{dm} = -\left(ah e^{-ahm} \sin \theta (-1 + e^{-ah})\right) / (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta e^{-ah} - 2e^{-ahm}(\cos \theta)^2 + 2e^{-ahm} \cos \theta + e^{-2ah} + 2e^{-ah(1+m)} \cos \theta - 2e^{-ah(1+m)} + e^{-2ahm}(\cos \theta)^2 - 2e^{-2ahm} \cos \theta + e^{-2ahm})$$

Los valores de frecuencia donde no están definidas  $f(m)$  y  $df(m)/dm$  son  $\theta = \pi - \arccos\left(\frac{e^{-ah}-e^{-ahm}}{-1+e^{-ahm}}\right)$ , que equivalen a los puntos de discontinuidad del arctan definido entre  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ . Si considero el arctan en cuatro cuadrantes, entonces para cada  $m$  el argumento es continuo.

A la izquierda y derecha de estos puntos  $df(m)/dm$  es negativa. Entonces la función no tiene mínimos ni máximos para  $0 < m < 1$ .

Además, los argumentos en los límites (cota mínima y máxima) son

$$\arg(N_p(e^{j\theta}, 0)) = 0 \quad \text{y} \quad \arg(N_p(e^{j\theta}, 1)) = \theta \quad \square$$

#### A1.1.2 Grado relativo 1 – aproximado:

La aproximación de los coeficientes del numerador en función de la parte fraccional del retardo (2.29) sistemas de grado relativo 1 es

$$B_1(z, m) = z m + 1 - m \quad (\text{A1.13})$$

##### i) Ubicación del cero de $B_1$

El cero de (A1.13) es  $(m - 1)/m$  que para todo  $0 < m < 1$  es real negativo.

##### i) Análisis de la respuesta en frecuencia de $B_1$

#### Proposición 1.2.2 Magnitud

- Cota máxima para  $m=1$
- Cota mínima para  $m=0.5$
- Para cualquier  $m$ , la función magnitud no es creciente con la frecuencia.

#### DEMOSTRACIÓN

Parte a y b) La magnitud al cuadrado es

$$|B_1(e^{j\theta}, m)|^2 = 1 - 2m + 2m^2 + 2m(m - 1) \cos \theta \quad (\text{A1.14})$$

Su derivada primera con respecto a  $m$ , es  $-4m \cos \theta + 2 \cos \theta - 2 + 4m$ , que se anula para  $m=0.5$ . Su derivada segunda es, que siempre positiva. Por tanto, para  $m=0.5$ , se obtiene la cota mínima, que vale

$$|B_1(e^{j\theta}, 0.5)| = \sqrt{0.5(1 + \cos \theta)} \quad (\text{A1.15})$$

Parte c) La derivada con respecto a la frecuencia para cualquier valor de  $m$  es

$$\frac{\partial |B_1(e^{j\theta}, m)|^2}{\partial \theta} = -2m(1-m)\sin\theta \quad (\text{A1.16})$$

que para cualquier valor a excepción de  $m=0$  y  $m=1$ , donde vale cero, es negativa.

□

### Proposición 1.2.2 Argumento

- Cota máxima para  $m=1$
- Cota mínima para  $m=0$

#### DEMOSTRACIÓN

El argumento de (A1.13) es

$$\arctan\left(\frac{m \sin \theta}{m \cos \theta + 1 - m}\right) \quad (\text{A1.17})$$

La derivada de  $f(m) = \frac{m \sin \theta}{m \cos \theta + 1 - m}$  con respecto a  $m$  es

$$\frac{df(m)}{dm} = \frac{\sin \theta}{m^2 \cos^2 \theta + 2m \cos \theta - 2m^2 \cos \theta + 1 - 2m + m^2}$$

que es siempre negativa donde está definida. Para los puntos donde no está definida se puede considerar la continuidad prevista si se considera además el arctan entre  $-\pi$  y  $\pi$ .

Entonces, las cotas máximas y mínimas son

$$\arg(B_1(e^{j\theta}, 0)) = 0 \quad \text{y} \quad \arg(B_1(e^{j\theta}, 1)) = \theta \quad \square$$

#### A1.1.3 Comparación de Sistema de primer orden exacto y su aproximación

De las proposiciones 1.2.1 y 1.2.2 para el caso de primer orden se tiene que las cotas máximas y mínimas coinciden tanto en argumentos como en magnitudes. La única diferencia es que el  $m_{\min}$  para el cual ocurre el mínimo de magnitud es en el caso del modelo aproximado igual a 0.5 y en el exacto es (A1.10). Más aún, de (A1.10) para  $a=0$ ,  $m_{\min}=0.5$ , si  $a>0$  (sistema estable),  $m_{\min}<0.5$  y si  $a<0$  (inestable)  $m_{\min}>0.5$ .

### A1.2 Análisis de grado relativo dos:

Sea una función transferencia de grado relativo 2 ( $n=2$  y  $p=0$ ,  $n=3$  y  $p=1, \dots$ ), entonces

$$B_2(z, m) = m^2 z^2 + (1 + 2m - 2m^2)z + (1 - 2m + m^2) \quad (\text{A1.18})$$

i) Ubicación de los ceros de  $B_2$

Los ceros de (A1.18) son las raíces de una ecuación cuadrática. Como  $(1 + 2m - 2m^2) < 0$  y  $m^2 > 0$ , el término dentro de la resolvente es siempre positivo por lo cual las raíces son ambas reales y negativas ( $b^2 - 4ac > 0 \rightarrow |b| < |\sqrt{b^2 - 4ac}|$ ).

Los ceros evolucionan entre  $(0, -1)$  y  $(-1, -\infty)$  cuando  $m$  se reduce en el intervalo  $(1, 0)$ .

ii) *Análisis de la respuesta en frecuencia de  $B_2$*

**Proposición 1.3.1** Magnitud

- Cota máxima para  $m=0.5$
- Cota mínima para  $m=1$  ( $m=0$ )
- Para cualquier  $m$ , la función magnitud es decreciente con la frecuencia.

DEMOSTRACIÓN

Parte a y b) Evaluando en  $z = e^{j\theta}$ , la parte real de  $B_2$  es

$$\Re(B_2(e^{j\theta}, m)) = -2m^2 \cos \theta + 2m^2(\cos \theta)^2 + \cos \theta + 2m \cos \theta + 1 - 2m$$

$$\text{Y } \Im(B_2(e^{j\theta}, m)) = \sin \theta (1 + 2m - 2m^2 + 2m^2 \cos \theta)$$

El modulo cuadrado es  $\Re(B_2)^2 + \Im(B_2)^2$ , y su derivada con respecto a  $m$  es

$$\frac{\partial |B_2(e^{j\theta}, m)|^2}{\partial m} = 16m^3 + 8m - 24m^2 \cos \theta^2 + 8m \cos \theta^2 - 24m^2 + 16m^3 \cos \theta^2 - 16m \cos \theta + 48m^2 \cos \theta - 32m^3 \cos \theta$$

Tal función se anula en  $m=0$  (es igual que  $m=1$ ) y  $m=0.5$ .

Evaluando la derivada segunda en estos valores de  $m$  queda:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial |B_2(e^{j\theta}, m)|^2}{\partial m} \right)_{|m=0} = 8(1 + \cos(\theta)^2 - 2\cos(\theta))$$

Y

$$\frac{\partial}{\partial m} \left( \frac{\partial |B_2(e^{j\theta}, m)|^2}{\partial m} \right)_{|m=0.5} = -4(1 + \cos(\theta)^2 - 2\cos(\theta))$$

Los términos dentro del paréntesis para ambas son positivos para todo  $0 < \theta < \pi$ .

Por tanto, para las frecuencias entre  $0 < \theta < \pi$ , la magnitud tendrá un máximo para  $m=0.5$  y un mínimo para  $m=0$  (y  $m=1$ ).

Parte c) La derivada de la magnitud es

$$-2 \sin \theta (4m^2(m-1)^2(\cos \theta - 1) + 1) \quad (\text{A1.19})$$

El término  $4m^2(m-1)^2$  es siempre positivo, y tiene su máximo igual a 0.25 (en  $m=0.5$ ). Entonces evaluando el coseno en el peor caso negativo el término  $(4m^2(m-$

$1)^2(\cos \theta - 1) + 1)$  es como mínimo igual a 0.5. Por tanto, (A1.19) es siempre negativa y la derivada para cualquier  $m$  decrece en función de la frecuencia.

□

### Proposición 1.3.2 Argumento

- a) Cota máxima para  $m=1$
- b) Cota mínima para  $m=0$

#### DEMOSTRACIÓN

En cuanto al argumento, en primer lugar se sabe (Leon de la Barra, Prieto , 1999) que los sistemas de segundo orden discretos asumen valores en el continuo entre 0 y  $2\pi$  (esto es tomando la función inversa del tangente en cuatro cuadrantes). Por tanto, debe tenerse en cuenta cuando se calcula  $\arg\left(\Im\left(B_2(e^{j\theta}, m)\right)/\Re\left(B_2(e^{j\theta}, m)\right)\right)$  que en las frecuencias donde la parte real se anula existe una continuidad del argumento.

$$\frac{\partial \arg B_2(e^{j\theta}, m)}{\partial m} = \frac{-2 \sin(\theta) (m^2 \cos(\theta) - m \cos(\theta) - 1 + m - m^2)}{1 + \cos(\theta) + 2m^2(m^2 + 1 - 2m)(1 + \cos(\theta)^2 - 2 \cos(\theta))}$$

En el denominador el término  $1+\cos(\theta)$  es siempre positivo a excepción de 0 y  $\pi$ , el término  $(m^2 + 1 - 2m)$  es siempre positivo a excepción de  $m=1$ , y multiplica a otro término positivo a excepción de  $\theta=0$ . Por tanto el denominador para  $0<\theta<\pi$  es siempre positivo.

El numerador tiene sus ceros para  $1 \pm \frac{\sqrt{(\cos(\theta)^2 + 2 \cos \theta - 3)}}{(\cos(\theta) - 1)}$ . El término dentro de la raíz es negativo para  $0 < \theta < \pi$ . Por tanto en las frecuencias donde está definida la derivada no se anula y el argumento asume su máximo para  $m=1$ , y su mínimo para  $m=0$ .

Para  $m=0$ ,

$$\arctan(\sin \theta, 1 + \cos \theta) \tag{A1.20}$$

Para  $m=1$

$$\arctan(\sin \theta (1 + 2 \cos \theta), -1 + \cos \theta + 2 \cos \theta) \tag{A1.21}$$

### A1.3 Grado relativo tres o superior

Con el mismo procedimiento anterior se puede hacer un análisis de la ubicación de los ceros y la respuesta en frecuencia de  $B_p$  con  $p \geq 3$ . Sin embargo, dada la cantidad de ecuaciones que esto requiere evaluar contra el resultado cualitativo que se busca, se prefirió aquí realizar el estudio de forma gráfica.



### A1.3.1 Grado relativo impar

#### i) Ubicación de los ceros de $B_p$ impar

A continuación se muestra la evolución continua de los ceros de (2.28) en función de  $m$ , para los casos de  $p=3$  y 5.

En el caso  $p=3$  se tienen tres raíces que se muestran en Figura A.1, la primera evoluciona entre  $(0, -0.268)$  (izq., arriba), la segunda entre  $(-0.268, -3.732)$  (derecha arriba) y la tercera entre  $(-3.732, -\infty)$  (abajo), cuando  $m$  se reduce en el intervalo  $(1,0)$ .

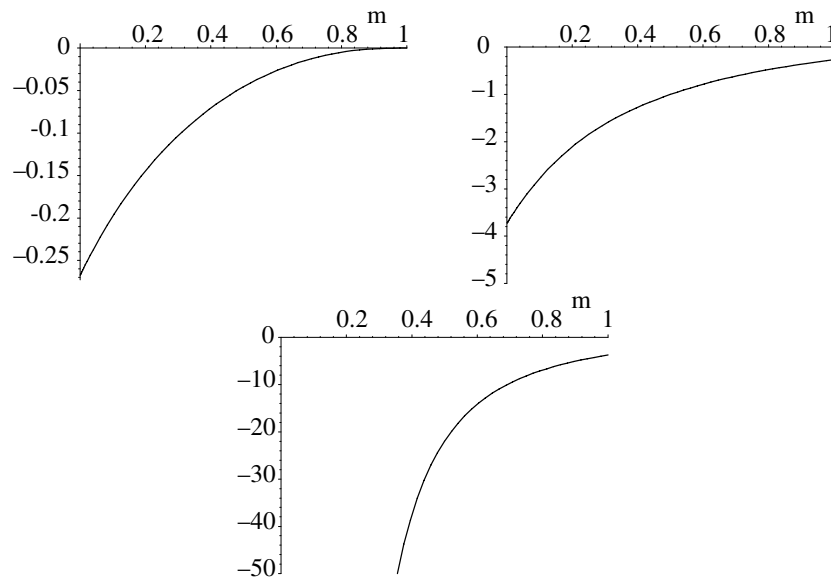


Figura A.1: Evolución de las raíces del numerador,  $p=3$ .

Para  $p=5$  se tienen 5 raíces reales y negativas. Tal como está indicado en Figura A.2 (con línea de cota) cada una de ellas comienza en el mismo valor en el cual termina la previa menos negativa. La raíz menos negativa empieza en 0 y la raíz que comienza en el valor más negativo tiende a  $-\infty$  cuando  $m \rightarrow 0$ .

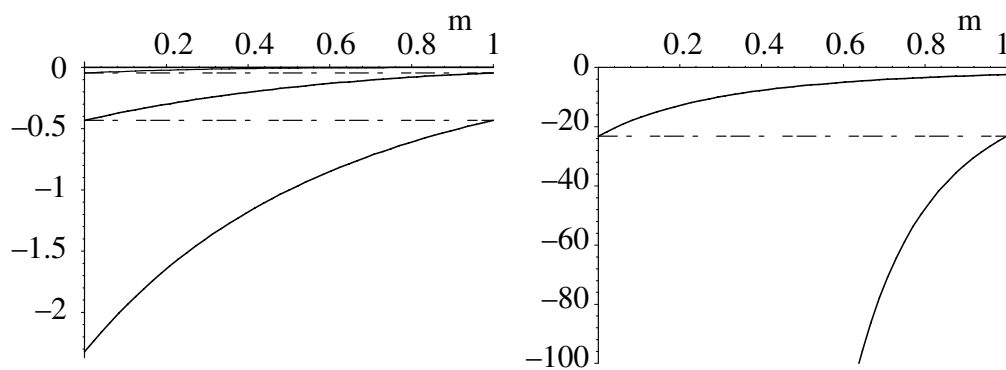


Figura A.2: Evolución de las raíces del  $Bp$ ,  $p=5$ .

i) Análisis de la respuesta en frecuencia de  $B_3$  y  $B_5$

En Figura A.3 se muestran los valores más representativos de magnitudes y argumentos para los polinomios de grado relativo  $p$  impar (3 y 5) con coeficientes dependientes de  $m$ . En ambos casos, la cota máxima del argumento en función de la frecuencia es para  $m=1$  mientras la mínima es para  $m=0$ .

Para la magnitud la cota máxima ocurre para  $|B_p(e^{j\theta}, 1)|$  y la mínima para  $|B_p(e^{j\theta}, 0.5)|$ . Asimismo se puede verificar que para cualquier valor de  $m$  la función de magnitud es decreciente con respecto a la frecuencia.

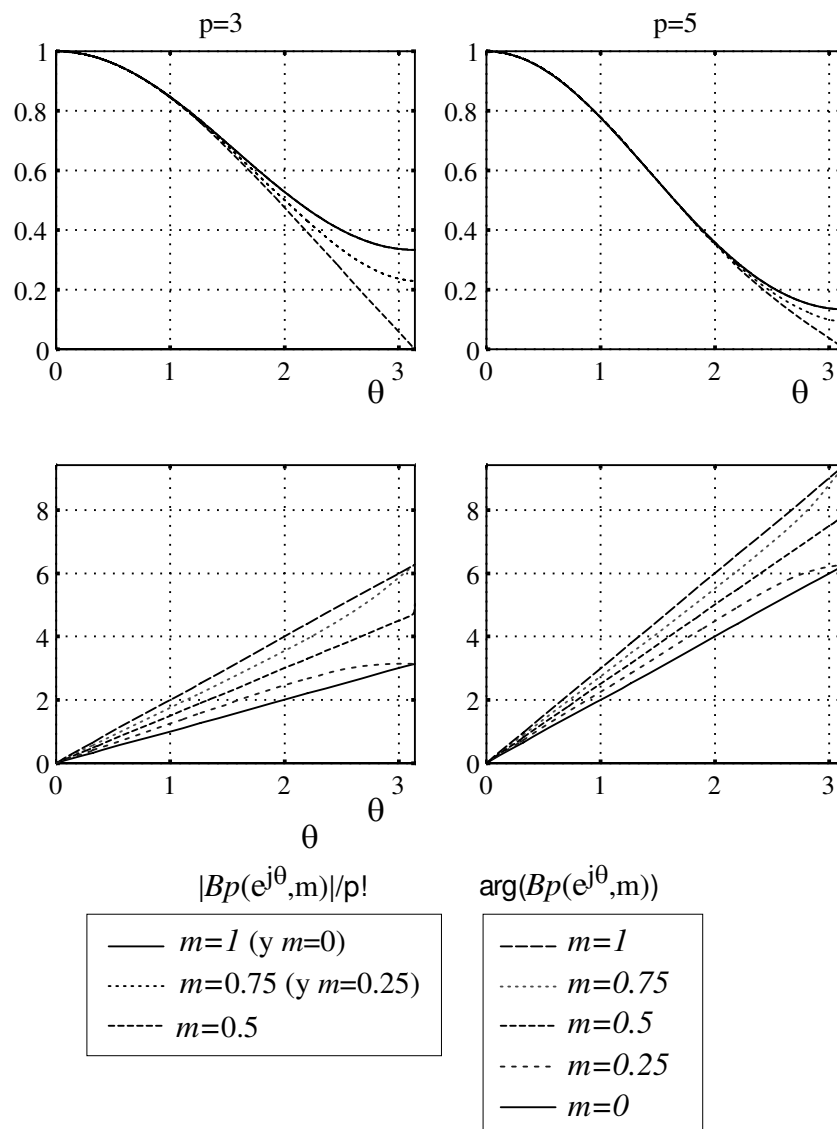


Figura A.3: Respuesta en frecuencia de  $B_p$  para  $p=3$  y  $5$ , para algunos valores de  $m$ .

### A1.3.2 Grado relativo par

#### i) Ubicación de los ceros de $B_p$ par

A continuación, en Figura A.4 y Figura A.5, se muestra la evolución continua de los ceros de (2.28) en función de  $m$ , para los casos de  $p=4$  y 6.

En ambas figuras se muestra que todas las  $p$  raíces son reales y negativas, y su negatividad crece cuando  $m$  se reduce en el intervalo  $(1,0)$ . Además, tal como se observó en el caso anterior (ver línea de cota) cada una de ellas comienza en el mismo valor en el cual termina la previa menos negativa. La raíz menos negativa empieza en 0 y la raíz que comienza en el valor más negativo tiende a  $-\infty$  cuando  $m \rightarrow 0$ .

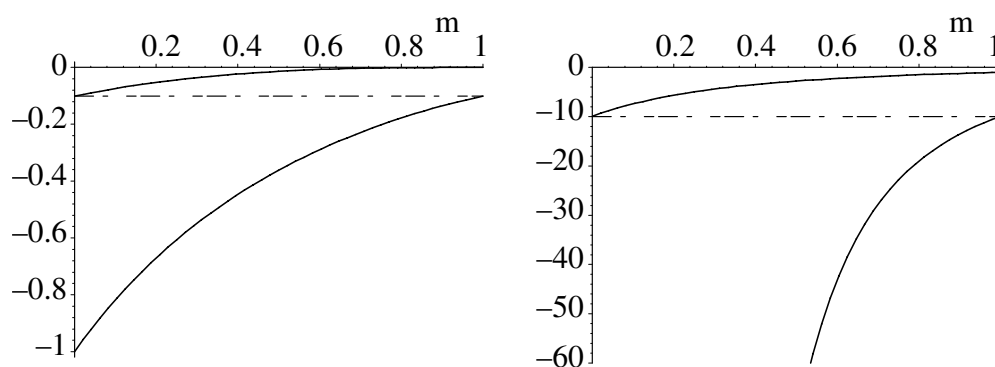


Figura A.4: Evolución de las raíces de  $B_p$ ,  $p=4$ .

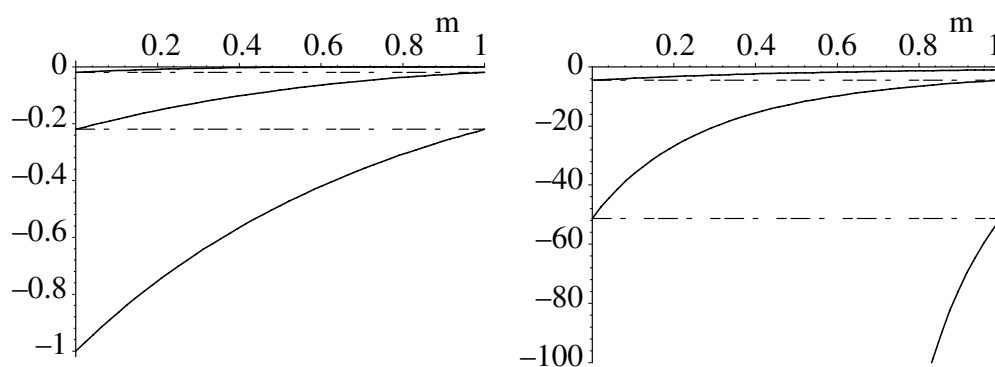


Figura A.5: Evolución de las raíces de  $B_p$ ,  $p=6$ .

#### ii) Análisis de la respuesta en frecuencia de $B_4$ y $B_6$

En Figura A.6 se grafican los valores más representativos de magnitudes y argumentos para los polinomios  $B_p$  de grado relativo  $p$  par (4 y 6).

En todos los casos, se muestra que la cota máxima del argumento en función de la frecuencia es para  $m=0.5$  mientras la mínima es para  $m=1$ .

Para la función de magnitud la cota máxima ocurre para  $|B_p(e^{j\theta}, 0.5)|$  y la mínima para  $|B_p(e^{j\theta}, 1)|$ . Asimismo se puede verificar que para cualquier valor de  $m$  la función de magnitud es decreciente con respecto a la frecuencia.

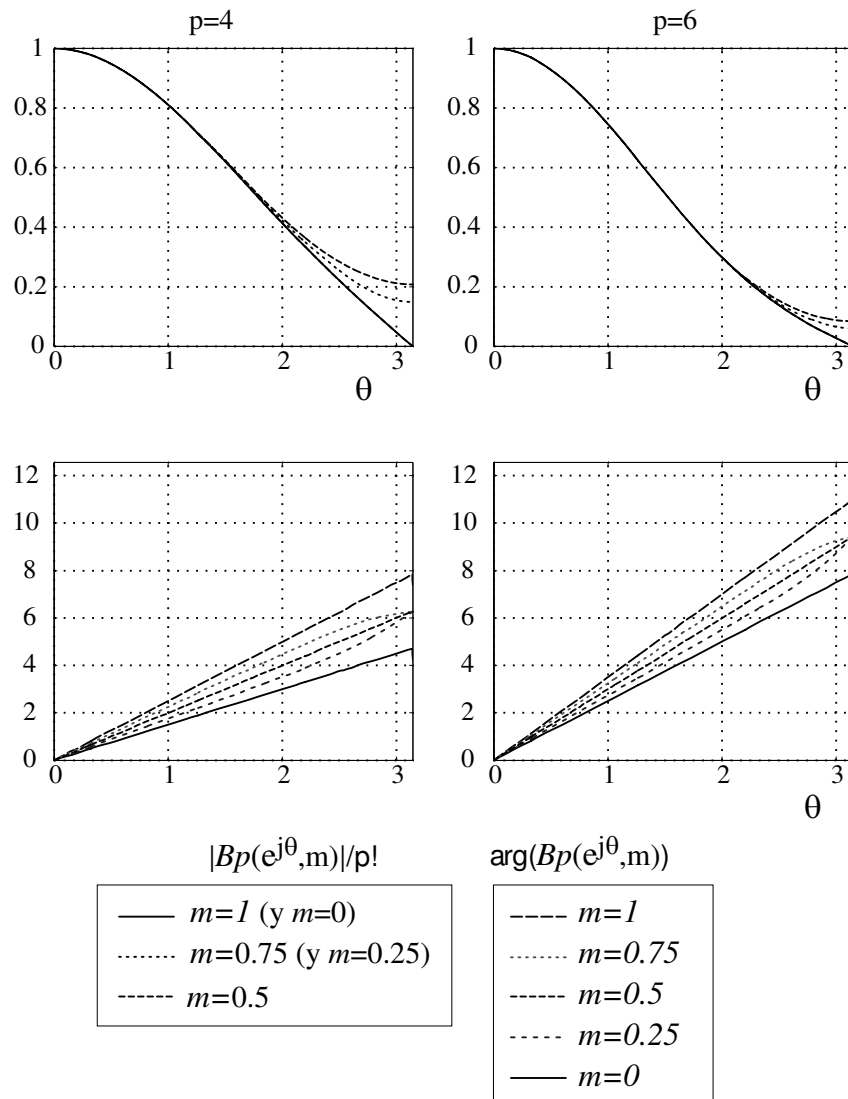


Figura A.6: Respuesta en frecuencia de  $B_p$  para  $p=4$  y  $6$ , para algunos valores de  $m$ .

### A1.4 Conclusiones

A partir de lo analizado en este anexo para los casos de grado relativo analizados (1, 2, 3, 4, 5 y 6) se observa lo siguiente:

- 1- Las raíces de  $B_p$  son siempre reales y negativas, y se hacen más negativas cuando  $m$  se reduce (equivalentemente el retardo aumenta). A excepción de  $p=1$ , la raíz menos negativa empieza en 0 y termina cuando  $m \rightarrow 0$  en un valor finito negativo, la segunda menos negativa empieza en este valor y termina cuando  $m \rightarrow 0$ , en  $-\infty$  si

$p=2$ , o en otro valor negativo si  $p>2$ . Y así continua hasta que la  $p$ -ésima raíz que comienza en el valor más negativo tiende a  $-\infty$  cuando  $m \rightarrow 0$ .

2- La respuesta en frecuencia tiene las siguientes características:

### **Función de Magnitud**

- Grado  $p$  impar
  - a) Cota máxima para  $m=1$  ( $m=0$ )
  - b) Cota mínima para  $m=0.5$
- Grado  $p$  par
  - a) Cota máxima para  $m=0.5$
  - b) Cota mínima para  $m=1$  ( $m=0$ )

A excepción del caso de  $p=1$  y  $m=1(=0)$  donde la magnitud vale 1, para todos los otros casos (de  $p$  y  $m$ ) la función de magnitud decrece con respecto a  $\theta$ .

A partir de la grafica se observa que a medida que  $p$  aumenta, la diferencia entre la cota máxima y mínima de la función de magnitud se reduce.

### **Función de Argumento**

- a) Cota máxima para  $m=1$
- b) Cota mínima para  $m=0$

En el caso particular de un sistema de primer orden se probó que las cotas máximas y mínimas de las funciones de argumento y magnitud coinciden con las equivalentes obtenibles usando el modelo aproximado  $B_1$ . La única diferencia es que la cota mínima de magnitud ocurre para distintos valores de  $m$ .

Por último, en figuras A.3 y A.6 se puede observar que las cotas máximas y mínimas de las funciones magnitud son más próximas entre sí para plantas de mayor grado relativo. Con esto, es esperable que los criterios frecuencial para diseño robusto basados en tales cotas de magnitud (como el de Proposición 3.2) den resultados menos conservativos para plantas de mayor grado relativo.

# CAPÍTULO 7

## Conclusiones

### **Introducción.**

El auge e importancia de los NCS o sistemas realimentados de control complejos con arquitectura distribuida, entendida como la descentralización espacial del procesamiento de la información necesario para la ejecución de sus algoritmos de control, ha sido posible sólo gracias a su implementación sobre redes de comunicación digital. Como se discutió en la Introducción y en otros Capítulos de esta Tesis, las ventajas del empleo de esta tecnología informática van de la mano con nuevos tipos de problemas para los sistemas de control.

Los problemas tratados en esta Tesis están relacionados con el efecto adverso para los NCS de los retardos en la transmisión de la información y con las pérdidas de datos. Se analizaron estos efectos y se proveyeron soluciones que, vistas desde la perspectiva del uso del recurso informático, caen en dos categorías: las soluciones pasivas y las soluciones activas. Las soluciones del tipo pasivo consideran fijas las características de la red de comunicación y abordan los problemas inducidos por ella exclusivamente con métodos y técnicas de la teoría de control. Las soluciones activas consideran la conveniencia de actuar concertada y simultáneamente sobre el diseño de las leyes de control y sobre características propias de los protocolos de comunicación, específicamente el agendado o scheduling de tareas, a los efectos de resolver los problemas abordados. Estas dos líneas se caracterizan en el Capítulo 1 como *Control sobre redes* y *Co-Diseño*, respectivamente, proveyéndose en el Capítulo 2 una revisión de los resultados disponibles en la literatura sobre cada una de ellas.

El primer objetivo cumplido por las soluciones propuestas para todas las clases de problemas tratados es la insoslayable garantía de la estabilidad de los sistemas realimentados. Además, en algunas de estas clases de problemas, se establecen criterios para mejorar índices de desempeño de los sistemas de control. Adicionalmente a estabilidad y performance, las

---

soluciones obtenidas con el enfoque del Co-Diseño proveen métodos para descongestionar el tráfico de las redes de comunicación y/o los procesadores compartidos.

La definición de las clases de problemas referidas se hace en correspondencia con las características determinadas por el tipo de redes de comunicación existentes sobre las cuales se pueden implementar los NCS. Los Capítulos de la Tesis, cuyas contribuciones se resumen y evalúan a continuación, están organizados de acuerdo a este criterio clasificador.

### **Resumen y valoración de los resultados.**

En el Capítulo 3 se analizó el efecto sobre la estabilidad y la performance de los NCS de los retardos de comunicación *constant* inducidos por la red.

El análisis de estabilidad ante la presencia de un *retardo constante, desconocido y acotado*, se hizo con tres métodos basados, respectivamente, en el criterio de estabilidad de Jury, el criterio frecuencial de estabilidad de Nyquist y un criterio de estabilidad Schur de un polinomio intervalo, disponibles en la literatura. Se mostró que la aplicación de los criterios frecuencial y de polinomio intervalo requiere el cálculo de ciertas cotas máximas y mínimas que dependen de la planta específica.

Uno de los principales aportes que se hace en este Capítulo es de orden metodológico, y consiste en el uso de la aproximación discreta del modelo de la planta introducida en (Hara et al, 1989), la que depende sólo de su orden y grado relativo. La utilización de esta aproximación se justifica en que en la zona de baja frecuencia, de mayor interés para el análisis de estabilidad, las RF (respuestas en frecuencia) de la aproximación y la exacta son muy cercanas (ver Anexo I). Con ella se logró generalizar lo establecido por el criterio frecuencial y convertir las condiciones de Jury en polinomios función de la parte fraccional del retardo. Esto permitió la formulación de una proposición para ciertas plantas y controladores que permite inferir si existe una evolución hacia la inestabilidad para retardos crecientes.

En términos de comportamiento del sistema, se verificó que la modificación de la performance cuando el retardo aumenta puede ser evaluada visualizando ciertos índices estándares de sistemas de según orden que relacionan la respuesta temporal con la ubicación de los polos del lazo cerrado.

En relación con otros aportes de la literatura, se mostró que el enfoque discreto utilizado en nuestra investigación es más adecuado que otras soluciones que se basan en aproximaciones continuas como las consideradas en (Zhong, 2003), (Juanole, 2002). En cuanto a resultados en

el dominio DT se destaca que los de (Branicky et al., 2000), donde se reportan condiciones de estabilidad, o los de (Yook et al., 2000) donde se definen índices de performance de lazo cerrado usando la MZT, se establecen para ciertos tipos simples de plantas y controladores y por tanto es muy difícil extender las conclusiones a plantas más complejas o generales. En este contexto, el uso combinado de los métodos propuestos en el Capítulo 3 de esta tesis y la aproximación discreta considerada es altamente ventajoso dado que permite generalizar los resultados (de acuerdo al orden de la planta y su grado relativo).

En Capítulo 4 aborda el problema para el caso de *retardos variables y acotados*.

Se propusieron dos nuevos métodos de diseño robustos en base a un criterio de estabilidad para sistemas *SISO* con retardos variables y acotados, presentado en (Kao & Lincoln, 2004).

El primero de ellos plantea la resolución de un problema  $H_\infty$ , es decir el método se desarrolla realizando un *loop-shaping* de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria del lazo cerrado, incluyendo la información sobre el retardo en los pesos que definen el perfil de las magnitudes de estas funciones en el dominio frecuencial.

El segundo método para el diseño robusto de controladores se realiza íntegramente en el dominio  $z$  y a través del planteo de ciertas reglas ayuda a reducir las iteraciones de prueba y error propias del diseño *loop-shaping*. Específicamente, se formularon una serie de restricciones a la ganancia de lazo abierto en base a especificaciones estándares que pesan las funciones de sensibilidad y lo establecido por el criterio de estabilidad. Estas restricciones son usadas para proponer criterios que asisten en la selección de compensadores *lead-lag* en el diseño *loop-shaping* del controlador en el plano de Nichols. Se determinó una relación directa entre el margen de fase y el máximo retardo que puede admitir el lazo de control, verificándose además que la compensación requerida para retardos más grandes se logra a expensas de reducir la velocidad de respuesta del lazo.

Se destaca que, merced al enfoque integrativo del retardo en el diseño, los métodos propuestos obtienen al controlador en un solo paso, lo cual es una de las ventajas en relación con la técnica presentada en (Lincoln, 2002) que usa el mismo criterio para modificar a posteriori un diseño convencional que ignora a la red de comunicación. Además de la mayor simplicidad de diseño, los métodos propuestos son ventajosos al no requerir elementos adicionales de implementación.

A los efectos de comparar cuan conservativo puede resultar un controlador obtenido con los métodos formulados a partir del mencionado criterio de estabilidad, se evaluó la estabilidad



---

del lazo de control con otros dos criterios de análisis de la literatura, estabilidad tipo *gridding* LMI de (Sala, 2005) y criterio robusto de (Cloosterman et al., 2006). Se concluyó mediante un ejemplo que el criterio considerado, que puede parecer conservativo a-priori debido al modelo que utiliza, permite garantizar la estabilidad que no puede ser comprobada con los otros criterios de análisis. Es decir, el uso de este criterio para el diseño de controladores no es necesariamente muy conservativo frente a otras propuestas.

En el Capítulo 5 se presenta uno de los principales resultados teóricos de la tesis, basado en la utilización de teorías algebraicas de Lie para la obtención de controladores de sistemas conmutados.

Se destaca que este Capítulo propone soluciones a un problema teórico de control de gran actualidad, más allá de que esté motivado por el problema de los retardos en los NCS y posteriormente usado para su solución. Efectivamente, tal como ha sido indicado en (Lin & Antsaklis, 2008), hay un creciente interés en determinar condiciones algebraicas que garanticen la existencia de una CQLF de familias finitas de matrices que representan sistemas LTI conmutados. Cabe mencionar que si bien la condición que vincula la resolubilidad del álgebra de Lie generada por el sistema conmutado con la existencia de una CQLF se conoce desde hace tiempo (Blondel et al., 2004), ha sido considerada por primera vez en esta Tesis como herramienta de diseño de sistemas discretos de control a período variable. En la aplicación de este resultado en el contexto de los NCS, la variación del período resulta de utilizar las estrategias de administración del recurso informático compartido para resolver el problema principal de Co-Diseño de esta Tesis, i.e., la estabilización del sistema y la descongestión de la red, ver referencias en Capítulo 2 y arquitectura propuesta en Capítulo 6.

Los métodos originales de diseño de control estabilizante propuestos se basan en la obtención de una matriz de triangularización común o en el planteo de condiciones de resolubilidad del álgebra de Lie. En algunos casos se han obtenido soluciones analíticas de ajuste de los parámetros del controlador (p. ej., para sistemas lineales de segundo orden con controlador por realimentación de estados, donde además se estableció que todas las matrices en la familia tendrán sus autovalores complejos conjugados o reales). En otros casos se brindan pautas generales para el cálculo numérico de los parámetros que aseguren la resolubilidad del álgebra de Lie generada, así como para el cómputo de ganancias de observador de estados. La adaptación de los parámetros del controlador no sólo es útil para

garantizar la estabilidad asintótica sino que también permite reducir el impacto negativo en la performance del sistema que puede generar el aumento del período.

En relación con otras técnicas de la literatura, utilizadas típicamente en el diseño de la familia de controladores adaptable a la variación del período, se realizó una comparación mediante un ejemplo en el Apéndice D. Se mostró que el diseño óptimo LQ para adaptar la ley de control de (Eker et al., 2000) puede acusar inestabilidad para ciertas secuencias de variación del período tal como se sugirió en (Schinkel et al., 2002). En cuanto a la solución estable de (Schinkel et al., 2002) se puso en evidencia que la falta de control sobre la resolución numérica de las desigualdades puede conducir a resultados muy conservativos.

Cabe mencionar que si bien la condición algebraica de resolubilidad del álgebra de Lie se destruye ante una mínima dispersión paramétrica (Agrachev & Liberzon, 2001) se espera cierto grado de robustez frente a pequeñas perturbaciones de los parámetros del sistema relacionado con la robustez provista por la propiedad de estabilidad exponencial. A estos efectos, se verificó favorablemente la robustez del diseño de Lie frente a una dispersión en el valor del período de muestreo usando un modelo de politopo de (Hetel et al., 2008).

En el Capítulo 6 se tuvieron en cuenta aspectos de los recursos compartidos no sólo en un sentido de incorporación al modelo de diseño del control, sino que han sido explotados activamente a fin de optimizar el comportamiento del lazo cerrado. Esto resulta en una solución al problema de Co-Diseño abordado en esta tesis, con la utilización simultánea de técnicas de la Teoría de Control y de la Informática Aplicada a Sistemas de Tiempo Real.

Considerando que la fuente de los problemas en los recursos compartidos es su capacidad limitada, se propuso para evitar posibles situaciones de congestión, el uso de un enfoque basado en la pérdida selectiva de algunos paquetes (en una red) o de algunas instancias de las tareas de control (en un procesador) con el modelo  $(m, k)$ -firm. Específicamente, esto se consiguió permitiendo que el valor de  $m$  del patrón  $(m, k)$  cambie de acuerdo al estado del recurso, siempre sujeto a la garantía de factibilidad de la planificación evaluada con una condición presentada en (Jia, 2009).

Para mitigar la pérdida de la performance de control inducida por una reducción de  $m$  se hicieron aportes en dos posibles líneas.

Como primera estrategia se presentó una arquitectura para evitar la congestión en una red que debe ser implementada sobre nodos que transmiten la información de las salidas de

---

sensores teniendo en cuenta el estado de la planta. La estabilidad de cada lazo ante variaciones de la cantidad de instancias ejecutadas se garantizó con el diseño de un control robusto resuelto con recurso a la técnica de las LMI.

La segunda estrategia propuso la búsqueda de los valores óptimos del valor  $m$  de cada tarea tal que se minimice la función de costo de la performance de control global utilizando para ello un algoritmo presentado en (Jia, 2009) sujeto a la restricción impuesta por la condición de planificación. La estabilidad de cada lazo de control ante variaciones de  $m$  se garantiza calculando los parámetros de los controladores con los métodos Lie-algebraicos. El uso de tal metodología Lie permitió obtener una función de costo para cada patrón  $(m, k)$  que guarda cierta relación con los parámetros de cada modo del lazo cerrado, ver Apéndice E.

En conclusión, mientras que con la primera estrategia se obtiene una performance satisfactoria gracias a la ejecución de instancias extras durante el transitorio de la planta, la segunda logró este objetivo con el ajuste de parámetros del controlador, sin ejecución de instancias extras.

Por último, la segunda estrategia fue extendida para tener en cuenta además la performance de cada lazo, combinando las ideas de las dos estrategias propuestas. Esto permitió una utilización más eficiente del recurso ya que es asignado dinámicamente a las plantas que más lo necesitan (cuando están en su transitorio) a expensas de las plantas que están en régimen y necesitan menos control.

El algoritmo de la primera estrategia es similar a la técnica de evaluación “clock-driven” de (Otanez et al., 2002), con la promoción de envíos complementarios para eliminar oscilaciones inherentes a dicha técnica mejorando la performance del lazo.

El algoritmo de la segunda estrategia permite que el enfoque  $(m, k)$  pueda ser usado en sistemas de control generales dado que no plantea requerimientos sobre el tipo de función que representa la relación performance- patrón. Esto marca una diferencia con las técnicas de (Eker et al., 2000) y (Cervin et al., 2002) cuya aplicabilidad se ve limitada por la hipótesis de que la función performance-período sea convexa (en gral. cuadrática o lineal). Asimismo es ventajosa porque no depende del valor acumulado de la performance como ocurre con el índice IAE considerado como medida de performance en (Xia et al., 2006), (Lu et al., 2002).

En comparación con otros aportes como los de variación de período propuestos en publicaciones de grupos de investigación líderes en el área, por ejemplo (Eker et al., 2000), (Cervin et al., 2002), (Eker et al., 2000) (Antunes et al., 2007), (Velazco et al., 2004), se destaca la garantía de estabilidad asintótica proporcionada por nuestra solución de Co-Diseño.

Cabe destacar que el enfoque  $(m, k)$  resulta en una alternativa al método directo de adaptación del período de muestreo, (Eker et al., 2000), (Cervin et al., 2002), (Velasco et al., 2004), (Ben Gaid et al., 2006), que es más simple de implementar porque no requiere la variación de los períodos de muestreo de los sensores en un rango continuo.

Asimismo, el uso de nuestro aporte que ajusta el valor de  $m$  durante la operación “*on-line*” permite evitar el sobredimensionamiento en la etapa de diseño de la plataforma informática y de comunicaciones requerida por las técnicas de planificación de tipo “*off-line*”, como las propuestas en el artículo seminal de (Ramanathan, 1999) y en el artículo de (Jia et al., 2007).

### **Problemas abiertos y trabajo futuro.**

En cuanto a los resultados en el área de retardos constantes para sistemas SISO, la aproximación discreta en conjunto con los criterios de Capítulo 3 fueron utilizados para el análisis de estabilidad con un controlador ya calculado. Una de las posibles líneas en este tema, es utilizar dicha aproximación para proponer una metodología de diseño del controlador que garantice la estabilidad de lazo cerrado frente a cierta cota del retardo. También resulta interesante evaluar las limitaciones de diseño introducida por dicha cota de retardo. Como tal análisis está limitado a plantas SISO, una línea a investigar es su extensión a plantas MIMO.

En cuanto a los resultados en el área de retardos variables y acotados para sistemas SISO, un problema futuro a investigar es la adaptación del criterio mencionado al caso de sistemas con retardos que tengan una media no nula más una cota variable  $J$ . Esto presupone la reducción de lo conservativo del diseño con respecto a un diseño con retardo solo acotado superiormente. De igual manera que para el caso de retardos constantes resta analizar la posibilidad de extensión de algunos aportes al diseño de plantas MIMO.

El significativo avance teórico en el diseño de controladores adaptables a la variación del período de Capítulo 5, que surge de plantear condiciones sobre la resolubilidad del álgebra de Lie de las matrices de lazo cerrado ha sido un tema de investigación retomado en el artículo (Haimovich et al., 2009), y subsiguientes. En tal artículo se formula el problema de estabilización basado en la resolubilidad con un “enfoque geométrico” y se derivan condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema con la asignación iterativa de autovectores, lo que surge a partir de la propuesta de sección 5.3.1 de esta tesis. Como trabajo futuro se puede complementar lo propuesto en esta tesis con diferentes adaptaciones de

---

parámetros de controladores, la incorporación de controladores con otras estructuras. Otra alternativa no explorada aquí es el estudio de otras condiciones algebraicas vinculadas con la existencia de una función común de Lyapunov que permita obtener un diseño adaptable.

Finalmente en cuanto a lo considerado en Capítulo 6, se remarca que una familia de controladores obtenida con los métodos Lie-algebraicos puede ser utilizada en cualquier estrategia que proponga variar el período de muestreo, que conozca cual es la próxima instancia a ser ejecutada. Entonces, una posible continuación en esta línea es embeber la adaptación de parámetros de controladores en otras arquitecturas como las propuestas en (Pedreiras y Almeida, 2004), (Cervin et al., 2002), (Eker et al., 2000), (Marti, 2002), (Antunes et al., 2007) y (Velasco et al., 2004).

# BIBLIOGRAFIA

- Agrachev, A. & Liberzon, D., 2001. Lie-algebraic stability criteria for switched systems.. *SIAM J. Control Optim.*, 40(1), pp.253-69.
- Albertos, P. & Crespo, A., 1999. Real-time control of non-uniformly sampled systems. *Control Engineering Practice*, 7, pp.445-58.
- Almeida, L., Pasadas, R. & Fonseca, J., 1999. Using a planning scheduler to improve the flexibility in real-time fieldbus networks. *IFAC Control Engineering Practice*, 7, pp.101-08.
- Almeida, L., Pedreiras, P. & Fonseca, J., 2002. The FTT-CAN Protocol: Why and How. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 49(6), pp.1189- 1201.
- Anderson, M., Henriksson, D. & Cervin, A., 2006. *TrueTime 1.5*. Manual de referencia. Suecia: Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology.
- ANSI, 1984. *OSI Basic Reference Model*. 7498th ed.
- Antunes, A., Pedreiras, P., Almeida, L. & Mota, A., 2007. Dynamic Rate and Control Adaptation in Networked Control Systems. In *5th Intern. Conf. Indin.*, 2007.
- Apkarian, P. & Adams, R.J., 1998. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1), p.21–32.
- Araki, M., Ito, Y. & Hagiwara, T., 1996. Frequency Response of Sampled-data Systems. *Automatica*, 32(4), pp.483-97.
- Aranda, J., 1998. *Métodos simples para el análisis de puntos degenerados de sistemas analíticos planos*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.
- Åström, K., Hagander, P. & Sternby, J., 1984. Zeros of sampled systems. *Automatica*, pp.Vol 20, pp. 31-38.
- Åström, K. & Wittenmark, B., 1997. *Computer Controlled Systems*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice Hall.
- Ben Gaid, M.-M., Çela, Y. & Hamam, A., 2006. Optimal integrated control and scheduling of networked control systems with communication constraints : Application to a car suspension system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(4), pp.776-87.
- Bhattacharyya, S., Chapellat, H. & Keel, L., 1995. *Robust Control - The Parametric Approach*. N. J.: Prentice Hall Information and System Sciences Series.

---

Blondel, V., Theys, J. & Nesterov, Y., 2004. Approximations of the rate of growth of switched linear systems. In Springer-Verlag, ed. *Conf. Hybrid Systems: HSCC USA.*, 2004.

Bosgra, O.H., Kwakernaak, H. & Meinsma, G., 2004. *Design Methods for Control Systems*. Lecture Notes. Dutch Institute of Systems and Control.

Boyd, S., Gaoui, L., Feron, E. & Balakrishnan, V., 1994. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia, PA: SIAM.

Branicky, M., 1998. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 43(4), p.475–482.

Branicky, M., Phillips, S. & Zhang, W., 2000. Stability of networked control systems: Explicit analysis of delay. In *American Control Conference*. Chicago, 2000.

Branicky, M., Phillips, S. & Zhang, W., 2002. Scheduling and Feedback Co-Design for Networked Control Systems. In *41st IEEE Conference on Decision and Control.*, 2002.

Braslavsky, J., Kofman, E. & Felicioni, F., 2006. Effects of time quantization and noise in level crossing sampling stabilization. In *AADECA 2006 - XX Congreso Argentino de Control Automatico*. Buenos Aires, 2006.

Cervin, A., Eker, J., Bernhardsson, B. & Årzén, K.-E., 2002. Feedback feedforward scheduling of control tasks. *Real-Time Systems*, 23, pp.25-53.

Chen, T.W. & Francis, B., 1994. *Optimal Sampled-Data Control Systems*. 44th ed. Londres: Springer.

Chen, N., Gui, W., Xie, Y. & Li, J., 2007. Robust decentralized H-infinity control of multi-channel discrete-time descriptor systems with time-delays. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, USA, 2007.

Chiang, R. & Safonov, M., 2000. *Robust Control Toolbox, For Use with MATLAB, User's Guide*. 2nd ed. Massachusetts: The MathWorks Inc.

Chu, T. & Zhang, C., 2007. New necessary and sufficient conditions for absolute stability of neural networks. *Neural Networks*, 20(1), pp.94-101.

Chu, T., Zhang, C. & Wang, L., 2006. A Solvable Lie Algebra Condition for Stability of Linear Multidimensional Systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 51(2).

Cloosterman, M., 2008. *Control over Communication Networks: Modeling, Analysis, and Synthesis*. Teis doctoral. Eindhoven, The Netherlands: Eindhoven University of Technology.

---

Cloosterman, M., van de Wouw, N., Heemels, M. & Nijmeijer, H., 2006. Robust stabilization of networked control systems with uncertain time-varying. In *45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego, 2006.

Daafouz, J. & Bernussou, J., 2001. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems and Control Letters*, 43, pp.355-59.

Daafouz, J., Riedinger, R. & Iung, C., 2002. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach. *IEEE Trans. Automat. Control*, 47(11), p.1883–1887.

Decotignie, J.-D., 2005. Ethernet-based real-time and industrial communications. *Proceedings IEEE*, 93(6), p.1102–1118.

Doyle, J.C. & Stein, G., 1979. Robustness with observers. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 24(4), p.607–611.

Eker, J., Hagander, P. & Årzén, K., 2000. A Feedback Scheduler for Real-Time Controller Tasks. *Control Engineering Practice*, 12(8), pp.1369-78.

Fang, L., Lin, H. & Antsaklis, P.J., 2004. Stabilization and performance analysis for a class of switched systems. In *43rd IEEE Conf. Decision Control.*, 2004.

Felicioni, F., 2008. *Design of stable feedback controller for second order systems with varying sampling time rate: LQ and Lie-algebraic approaches*. Rapport de recherche n° 6753. Nancy, Francia: INRIA - Nancy Grand Est.

Felicioni, F., Berbra, C., Gentil, S. & Lesecq, S., 2010. On-line adaptive control of a quadrotor under (m,k)-firm constraint. In *XXII Congreso Argentino de Control Automático - AADECA*. Buenos Aires, 2010.

Felicioni, F., Blet, N. & Junco, S., 2005. Control robusto  $H_\infty$  de sistemas distribuidos con retardos variables en la red de comunicación. In *XI RPIC "Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control"*. Río IV, Argentina, 2005.

Felicioni, F., Jia, N., Simonot-Lion, F. & Song, Y.-Q., 2010a. Overload Management Through Selective Data Dropping. In I. Wiley, ed. *Capítulo 5 de: Co-design approaches to dependable networked control systems*. Great Britain. pp.185-221.

Felicioni, F., Jia, N., Song, Y. & Simonot Lion, F., 2006. Impact of a (m,k)-firm data dropouts policy on the quality of control. In *6th IEEE International Workshop on Factory Communication Systems*. Torino, 2006.



---

Felicioni, F., Jia, N., Song, Y. & Simonot Lion, F., 2008. Optimal On-line (m,k)-firm Constraint Assignment for Real-time Control Tasks Based on Plant State Information. In *ETFA 12th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation*. Hamburgo, Alemania, 2008.

Felicioni, F. & Junco, S., 2005. Analysis of Stability and Performance of Simple Networked Control Systems. In *17th IMACS World Congress "IMACS: International Association for Mathematics and Computers in Simulation"*. Paris, 2005.

Felicioni, F. & Junco, S., 2006. Restricciones para diseño "Loop Shaping" de sistemas de control lineales monovariantes con retardos variables. In AADECA, ed. *Actas de AADECA 2006 - XX Congreso Argentino de Control Automático*. Buenos Aires, Argentina, 2006.

Felicioni, F. & Junco, S., 2007. Control de Tráfico de Redes de Comunicación de Sistemas Distribuidos de Control. In *XII RPIC, Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control*. Río Gallegos, Argentina., 2007.

Felicioni, F. & Junco, S., 2008 a. A Lie Algebraic Approach to Design of Stable Feedback Control Systems with Varying Sampling Rate. In *17th IFAC World Congress (IFAC WC 2008)*. Seúl, Corea del Sur, 2008 a.

Felicioni, F. & Junco, S., 2008 b. Stabilité robuste de systèmes échantillonnés à taux variable : Une approche basée sur l'algèbre de Lie. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*. Bucarest, 2008 b.

Felicioni, F. & Junco, S., 2009. Estabilidad de sistemas controlados sobre redes de comunicación ante retardos de transmisión. *AMCA Online, Mecánica Computacional Vol XXVIII, ENIEF 2009, Tandil, Argentina*, pp.2625-47.

Felicioni, F., Junco, S. & Haimovich, H., 2008. Control de sistemas discretos LTI conmutados en base a métodos lie-algebraicos, con aplicación al control sobre redes de comunicación. In *AADECA 2008 - XX Congreso Argentino de Control Automático*. Buenos Aires, 2008.

Felicioni, F., Song, Y., Simonot Lion, F. & Simonot, F., 2009. Optimal control with packet drops in networked control systems. In *8th IFAC International Conference On FieldBuses & Networks in Industrial & Embedded Systems*. Corea, 2009.

Franklin, G. & Powell, J., 1980. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley.

Fridman, E., Seuret, A. & Richard, J.-P., 2004. Robust sampled-data stabilization of linear systems: an input delay approach. *Automatica*, 40, p.1441 – 1446.

Gao, H., Lam, J., Wang, C. & Wang, Y., 2004. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEEE Proc. Control Theory and Applications*, 151(6), p.691–698.

- 
- Göktas, F., 2000. *Distributed control of systems over communication networks*. Tesis doctoral. University of Pennsylvania.
- Goodwin, G., Graebe, S. & Salgado, M., 2001. *Control System Design*. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- Guerrero-Castellanos, J., Berbra, C., Gentil, S. & Leseq, S., 2008. Attitude control of a quadrotor tolerant to network faults using (m-k)-firm approach. In *23rd IAR- ACD Workshop on Advanced Control and Diagnosis.*, 2008.
- Gurvits, L., 1995. Stability of discrete linear inclusion. *Linear Algebra and its Applications*, 231, pp.47-85.
- Hadjicostis, C. & Touri, R., 2002. Feedback control utilizing packet dropping network links. In *41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, 2002.
- Haimovich, H., Braslavsky, J. & Felicioni, F., 2009. On feedback stabilisation of switched discrete-time systems via Lie-algebraic techniques. In *48th IEEE Conference on Decision and Control*. China, 2009.
- Haimovich, H., Braslavsky, J. & Felicioni, F., 2011. Feedback stabilisation of switching discrete-time systems via Lie-algebraic techniques. *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- Halevi, Y. & Ray, A., 1998. Integrated communication and control systems: Part I-analysis.. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 110(4), pp.367-73.
- Hamdaoui, M. & Ramanathan, P., 1994. A Service Policy for Real-Time Customers with (m,k)-Firm Deadlines. In *Fault-Tolerant Computing Symposium*. Austin, USA, 1994.
- Hamdaoui, M. & Ramanathan, P., 1995. A dynamic priority assignment technique for streams with (m, k)-firm deadlines. *IEEE Transactions on Computers*, 44(4), p.1443–1451.
- Hara, S., Kondo, R. & Katori, H., 1989. Properties of zeros in digital control systems with computational time delay. *International Journal of Control*, 49(2), pp.493-511.
- Henriksson, D. & Cervin, A., 2005. Optimal on-line sampling period assignment for real-time control tasks based on plant state information. In *44th IEEE CDC y European Control Conference ECC 2005*. Sevilla, España, 2005.
- Hespanha, J. & Morse, S., 1999. Input-output gains of switched linear systems. In *Open Problems in Mathematical Systems Theory and Control*. J. Willems: Springer-Verlag.
- Hespanha, J., Naghshtabrizi, P. & Xu, Y., 2007. A Survey of Recent Results in Networked Control Systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), pp.138-62.

---

Hetel, L. et al., 2009. Comparison of stability characterisations for networked control systems. In *48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*. Shanghai, P.R. China, 2009.

Hetel, L., Daafouz, J. & Iung, C., 2006. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(10), p.1668 – 1674.

Hetel, L., Daafouz, J. & Iung, C., 2008. Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modeling. *International Journal of Control*, 81(7), p.1125:1138.

Hinrichsen, D. & Pritchard, A.J., 2005. *Mathematical Systems Theory I. "Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness."*. Berlin: Springer-Verlag.

Imer, O.C., Yüksel, S. & Başar, T., 2006. Optimal control of LTI systems over unreliable communication links. *Automatica*, 42, p.1429 – 1439.

Isermann, R., 1989. *Digital Control System Volume 1*. second revised edition ed. Berlin: Springer-Verlag.

Ishii, H. & Francis, B., 2002. *Limited Data Rate in Control Systems with Networks*, Berlin (2002). Berlin: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Verlag.

Jia, N., Hyon, H. & Song, Y., 2005. Ordonnancement sous contraintes (m,k)-firm et combinatoire des mots. In *13th International Conference on Real-Time Systems*. Paris, Francia, 2005.

Jia, N., Song, Y.Q & Simonot-Lion, F., 2007. Feedback scheduling based on (m,k)-firm constraint model for the handling of a set of real-time controllers. In *RTNS'07*. Nancy, Francia, 2007.

Ji, Y., Chizeck, H., Feng, X. & Loparo, K., 1991. Stability and control of discrete time jump linear systems. *Control Theory and Advanced Applications*, 7(2), p.247–270.

Juanole, G., 2002. Quality of Service of Communication Networks and Distributed Automation: Models and Performances. In *IFAC 15th Triennial World Congress*. Barcelona, 2002.

Jumel, F., 2003. *Définition et gestion d'une qualité de service pour les applications temps réel*. Thèse d'Université. INPL. Nancy.

Jury, E.I., 1964. *Theory and Application of the z-Transform Method*. New York: Wiley.

Kaneko, H., Stankovic, J.A., Sen, S. & Ramamritham, K., 1996. *Integrated scheduling of multimedia and hard real-time tasks*. Technical report umcs-1996-045. Amherst: University of Massachusetts.

Kao, C. & Lincoln, B., 2004. Simple stability criteria for systems with time-varying delays. *Automatica*, 40, pp.1429-34.

- 
- Kao, C.-Y. & Rantzer, A., 2007. Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays. *Automatica*, 43, p.959 – 970.
- Khalil, H., 2001. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice Hall.
- Khan, P., LI, K., Manning, E. & Akbar, M., 2002. Solving the knapsack problem for adaptive multimedia system. *Studia Informatica*, 2, pp.161-82.
- Kharitonov, V. & Zhabko, A., 1994. Robust stability of time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12), pp.2388-97.
- Kofman, E. & Braslavsky, J., 2006. Level Crossing Sampling in Feedback Stabilization under Data-Rate Constraints. In *CDC'06*. San Diego, USA, 2006.
- Koubias, S.A. & Papadopoulos, G.D., 1995. Modern fieldbus communication architectures for real-time industrial applications. *Comput. Industry*, 26, p.243–252.
- Kuo, B., 1996. *Sistemas de control automático*. Séptima ed.
- León de la Barra, B. & Prieto, R., 1999. On the frequency response of scalar discrete-time systems. *Automatica* 35 (11), pp.1843-53.
- Lian, F.-L., Moyne, J.R. & Tilbury, D., 2001. Performance evaluation of control networks: Ethernet, ControlNet, and DeviceNet. *IEEE Control Systems*, 21, p.66–83.
- Lian, F.-L., Moyne, J. & Tilbury, D., 2001. Time Delay Modeling and Sample Time Selection for Networked Control Systems. In *ASME-DSC.*, 2001.
- Lian, F., Moyne, J. & Tilbury, D., 2002. Network Design Consideration for Distributed Control Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10, NO. 2, MARCH 2002(2), pp.297-307.
- Liberzon, D., 2003. On stabilization of linear systems with limited information. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(2), pp.304 - 307.
- Liberzon, D., Hespanha, J. & Morse, S., 1999. Stability of switched systems: a Lie-algebraic condition. *Systems Control Letter*, 37, pp.117-22.
- Liberzon, D. & Morse, S., 1999. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*.
- Lin, H. & Antsaklis, P., 2008. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2), pp.308-22.
- Lincoln, B., 2002 b. A simple stability criterion for digital control systems with varying delays. In *15th Triennial World Congress IFAC*. Barcelona, 2002 b.

---

Lincoln, B., 2002. Jitter compensation in digital control systems. In *American Control Conference*. Anchorage, 2002.

Lincoln, B. & Cervin, A., 2002. JITTERBUG: a tool for analysis of real-time control performance. In *Decision and Control 41st IEEE*. Las Vegas, 2002.

Liu, C.L. & Layland, J.W., 1973. Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard-real-time environment. *Journal of the ACM*, 20(1), pp.4661-.

Lu, C., Stankovic, J., Tao, G. & Son, S.H., 2002. Feedback Control Real-Time Scheduling: Framework, Modeling, and Algorithms. *Real-Time Syst.: Special Issue on Control-Theoretical Approaches to Real-Time Computing*.

Maciejowski, J.M. & Samra, B.S., 1990. Gain/phase relationships for discrete-time systems. *International Journal of Control*, 51(1), pp.119 - 137.

Marti, P., 2002. *Analysis and design of real-time control systems with varying control timing constraints*. Tesis doctoral. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.

Messner, W., 2001. Some Advances in Loop Shaping Controller Design with Applications to Disk Drives. *IEEE Trans. on Magnetism*, 37(2), pp.651-56.

Mirkin, L. & Palmor, Z.J., 2005. Control Issues in Systems with Loop Delays. In *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. p.627—648.

Molchanov, A.P. & Pyatnitskii, E.S., 1989. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems Control Letter*, 13, p.59–64.

Moyne, J. & Tilbury, D., 2007. The Emergence of Industrial Control Networks for Manufacturing Control, Diagnostics, and Safety Data. *Proceedings of the IEEE*, 95(1), pp.29 - 47.

Nair, G.N. & Evans, R.E., 2000. Stabilization with data-rate limited feedback: Tightest attainable bounds. *System Control Letter*, 41, p.49–56.

Narendra, K.S. & Balakrishnan, J., 1994. A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(12).

Nilsson, J., 1998. *Real-time Control Systems with Delays*. PhD Thesis. Sweden: IT Lünd.

Nilsson, J., Bernhardsson, B. & Wittenmark, B., 1998. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays. *Automatica*, 34, pp.57-64.

Ogata, K., 1996. *Sistemas de control en tiempo discreto*. segunda edición ed. Mejiro: Prentice Hall.

Otanez, P., Moyne, J. & Tilbury, D., 2002a. Using Deadbands to Reduce communication in Networked Control Systems. In *American Control Conference*, 2002a.

- 
- Otanez, P., Parrott, J., Moyne, J. & Tilbury, D., 2002b. The implications of Ethernet as a control network. In *Global Powertrain Congress*. Ann Arbor, 2002b.
- Ramanathan, P., 1999. Overload management in Real-Time control applications using (m,k)-firm guarantee. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 10(6), pp.549-59.
- Rantzer, A., 1992. Stability conditions for polytopes of polynomials. *IEEE Transactions Automatic Control*, 37, p.79–89.
- Rehbinder, H. & Sanfridson, M., 2000. Integration of offline scheduling and optimal control. In *12th Euromicro Conference on RealTime Systems.*, 2000.
- Richard, J., 2003. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39, p.1667–1694.
- Sala, A., 2005. Computer control under time-varying sampling period: An LMI gridding approach. *Automatica*, 41, p.2077 – 2082.
- San Martin, L., 1999. *Algebras de Lie*. Da Unicamp.
- Schinkel, M., Chen, W.-H. & Rantzer, A., 2002. Optimal control for systems with varying sampling rate. In *American Control Conference.*, 2002.
- Sename, O. & Fattouh, A., 2005. Robust  $H_\infty$  control of a Bilateral Teleoperation System under Communication Time-Delay. In *IFAC World Congress*. Praga, 2005.
- Seron, M., Braslavsky, J. & Goodwin, G., 1997. *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. London: Springer Verlag.
- Seto et al., 1996. On task schedulability in realtime control systems. In *17th IEEE RealTime Systems Symposium*. Washington DC, USA, 1996.
- Shaiju, A.J. & Petersen, I., 2008. Formulas for Discrete Time LQR, LQG, LEQG and Minimax LQG Optimal Control Problems. In *17th World Congress The International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea, 2008.
- Sha, L., Liu, X., Caccamo, M. & Buttazzo, G., 2000. On-line control optimization using load driven scheduling. In *IEEE Conf. on Decision and Control*. Sidney, 2000.
- Shorten, R. et al., 2007. Stability Criteria for Switched and Hybrid Systems. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 49(4), p.545–592.
- Song, Y.-Q., 2005. Approches (m,k)-firm pour la gestion de la qualité de service temps réel. In *Ecole Temps réel*. Nancy, 2005.

---

Stankovic, J., 1988. Real-Time Computing Systems: The Next Generation. *IEEE Tutorial on Hard Real-Time Systems*.

Tavassoli, B. & Maralani, P.J., 2007. Optimal tuning of control systems over Ethernet. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*. New Orleans, 2007.

Theys, J., 2005. *Joint Spectral Radius: theory and approximations..* Tesis doctoral. Universite catholique de Louvain Faculte des sciences appliqués Departement d'ingenierie mathematique. Center for Systems Engineering and Applied Mechanics.

Tipsuwan, Y. & Chow, M.Y., 2003. Control methodologies in networked control systems. *Control Engineering Practice*, 11, pp.1099-111.

Toivonen, H., 2000. *Robust Control Methods*. Lecture Notes. Disponible en <http://www.abo.fi/~htoivone/courses/robust/rob8.pdf>.

Tovar, E. & Vasques, F., 1999. From Task Scheduling in Single Processor Environments to Message Scheduling in a PROFIBUS Fieldbus Network. In S.B./I. Heidelberg, ed. *Parallel and Distributed Processing*. pp.339-52.

Tsitsiklis, J. & Blondel, V., 1997. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard when not impossible to compute and to approximate. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10(31), pp.31-40.

Vatanski, N. et al., 2009. Networked control with delay measurement and estimation. *Control Engineering Practice*, 17(2), pp.231-44.

Velasco, M. et al., 2004. A Control Approach to Bandwidth Management in Networked Control Systems. In *30th IEEE IECON*. Corea, 2004.

Vidyasagar, M., Bertschmann, R. & Sallaberger, C.S., 1988. Some simplifications of the graphical nyquist criterion. *IEEE Transactions Automatic Control*.

Walsh, G., Ye, H. & Bushnell, L., 2002. Stability Analysis of Networked Control Systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 10(3), pp.438-46.

Wittenmark, B., 1985. Sampling Of a System With a Time Delay. *IEEE Trans. Aut.Control*, 30, pp.507-09.

Wittenmark, B., Nilsson, J. & Torngren, M., 1995. Timing problems in real-time control systems. In *American Control Conference*. Seattle, Washington, 1995.

Xia, F., Liu, L., Li, S. & Sun, Y., 2006. Integrated Feedback Scheduling of Networked Control Systems. *Journal of Dynamics and Cont., Disc. Time and Impulsive Systems*.

---

Yaniv, O., 1999. *Quantitative Feedback Design of Linear and Nonlinear Control Systems*. Norwell: Kluwer Academic Publishers.

Yook, J., Tilbury, D. & Soparkar, N., 2000. A Design Methodology for Distributed Control Systems to Optimize Performance in the Presence of Time Delays. In *American Control Conference*. Chicago, 2000.

Yu, M.W.L., Chu, T. & Xie, G., 2004. An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays. In *43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Bahamas, 2004.

Yu, M., Wang, L. & Chu, T., 2005. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delays. In *American Control Conference*., 2005.

Zhai, G., Lin, H., Xu, X. & Michel, A., 2004. Stability analysis and design of switched normal systems. In *43rd IEEE Conf. Decision and Control*. Atlantis, Bahamas, 2004.

Zhang, W., Branicky, M. & Phillips, S., 2001. Stability of networked control Systems. *IEEE Control System Magazine*, 21(1), pp.84-99.

Zhang, W., Hu, J. & Abate, A., 2009. *A study of the discrete-time switched LQR problem*. Technical Report TR ECE 09-03. Electrical and Computer Engineering, Purdue University.

Zhao, Q.C. & Zheng, D.Z., 1999. Stable and realtime scheduling of a class of hybrid dynamic systems. *Journal of Discrete Event Dynamical Systems*.

Zhong, Q., 2003. Robust stability analysis of simple systems controlled over communication networks. *Automatica* , 39, pp.1309-12.







AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur Ernesto KOFMAN, Professeur, FCEIA, Université Nationale Rosario, Argentine**

**Monsieur Fabio GOMEZ-ESTERN AGUILAR, Professeur, Universidad de Sevilla, Espagne**

**Monsieur Anibal ZANINI, Professeur, Universidad de Buenos Aires, Argentine**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Madame FELICIONI Flavia**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Stabilité et performance des systèmes distribués de contrôle-commande. "**

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Informatique** »

Fait à Vandoeuvre, le 09 février 2011

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 5 4 5 0 1  
VANDŒUVRE CEDEX

**TITRE :****Stabilité et performance des systèmes distribués de contrôle-commande****MOTS CLES :**

Contrôle-commande de systèmes, Contrôle sur des réseaux, Conception conjointe, Stabilité des systèmes discrets à commutation, Algèbre de Lie, Ordonnement de tâches

**RESUME :**

L'objectif principal de cette thèse est l'étude de propriétés dynamiques et de méthodes de conception et synthèse des algorithmes de contrôle-commande des systèmes dans le cas où les fonctions de mesures, actionnements et contrôles sont distribuées sur des organes de calcul pouvant être partagés avec d'autres applications et connectés sur un réseau de communication numérique. En conséquence, les boucles de contrôle sont en compétition avec d'autres applications pour accéder aux ressources de calcul et de communication de capacité limitée et gérées par des politiques spécifiques. Ceci provoque l'apparition de délais et de perte d'informations transmises entre les différents nœuds qui peuvent dégrader les performances des systèmes et conduire à leur instabilité.

Dans une première partie de la thèse, nous avons étudié l'analyse des performances de certains systèmes ainsi que la conception de contrôleurs robustes en fonction de la qualité de service fournie par le réseau. Cette étude a permis de spécifier les règles de conception de contrôleurs.

Dans la deuxième partie, nous avons présenté une approche de conception conjointe intégrant les résultats obtenus dans les deux domaines: la synthèse et la conception des algorithmes de contrôle et l'ordonnement de tâches temps réel qui partagent des ressources limitées. La technique proposée repose sur le changement de la période d'activation de l'algorithme de contrôle, et en conséquence le modèle du système devient un modèle échantillonné à taux variable. Les résultats proposés, en considérant l'algèbre de Lie des matrices d'évolution, permettent de calculer des contrôleurs adaptifs aux périodes qui stabilisent tous le système.

**TITLE:****Stability and Performance of Distributed Computer Control Systems****KEYWORDS:**

Control Systems, Networked Control Systems, Co-design, Stability of Discrete Time Switched Systems, Lie's Algebra, Tasks scheduling

**ABSTRACT :**

The main contributions of this thesis are related to the analysis, synthesis and design of control systems sharing communication and computational resources. The research focuses on control systems where the feedback loops are closed over communication networks which transmit the information provided to its nodes by sensors, actuators and controllers. The shared resource in this scenario is the network. Some of the results are valid when the resource is a processor locally placed respect to several controller executing their algorithms on it. In any of the preceding scenarios, the control loops must contend for the shared resource. The limited capacity of the resource can cause delays and packet losses when information is transmitted. These effects can degrade the control system performance and even destabilize it.

The first part of this thesis contributes to the performance analysis of specific classes of systems and to the design of robust controllers for network characteristics modeled by Quality of Service parameters. A series of methods to assist the control systems engineer are provided.

In the second part, a contribution to the CoDesign approach is made via the integration of control system synthesis and design techniques with rules allowing to define the communication policy to manage real-time tasks sharing a limited resource. Putting in correspondence a scheduling of instances of the controller tasks with their sampling periods, the proposed policy results in discrete-time varying systems. The stabilization problem of these systems is solved with methods based on the solvability of Lie-algebras. Specifically, the proposed methodology provides adaptive controllers.