HAL
open science

Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : "Prise en compte du transfert radiatif"

Hoang Quan Nguyen

To cite this version:

Hoang Quan Nguyen. Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : "Prise en compte du transfert radiatif". Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2009. Français. NNT : 2009INPL054N . tel-01748913

HAL Id: tel-01748913

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748913v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Ecole Doctorale EMMA

THESE

Présentée pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité : Mécanique et Energétique

Par

Hoang Quan NGUYEN

Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : « *Prise en compte du transfert radiatif* »

Soutenue publiquement le **02 octobre 2009** devant la commission d'examen composée de :

Rapporteurs :	Jean-Paul CALTAGIRONE, Professeur Bordeaux I, Bordeaux Didier DELAUNAY, Directeur Recherche CNRS, LTN, Nantes
Examinateurs :	Franck HUMBERT, Docteur, Ingénieur DAUM, Nancy Gérard JEANDEL, Professeur Université Henri Poincaré, Nancy Alain DEGIOVANNI, Professeur INPL, Nancy Benjamin REMY, Maître de Conférences INPL, Nancy
Invités :	Laurent KUREK, Ingénieur BACCARAT Catherine MAIERON, Docteur, Ingénieur DAUM Christian BAJART, Ingénieur ARC INTERNATIONAL

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée
Nancy-Université, CNRS UMR 7563
ENSEM 02, avenue de la Forêt de Haye, BP 160
54 504 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex

Table des Matières

Sommaire

INTRODUCTION GENERALE **9**

CHAPITRE I **19**

METHODE DES VOLUMES FINIS : **19**

« MODELE A UN FLUIDE POUR LE REMPLISSAGE DE MOULES DANS LE CAS ISOTHERME » **19**

INTRODUCTION **21**

1. EQUATIONS A RESOUDRE 23

1.1. Equations de Navier-Stokes *23*

- Ecoulement diphasique 24
- Modèle à un fluide ou mésoscopique 26

1.2. Equation de conservation de l'énergie *29*

1.3. Equation de transport d'espèce *33*

2. RESOLUTION NUMERIQUE DU SYSTEME 33

2.1. Méthode des volumes finis *33*

2.2. Discrétisation temporelle et découplage des équations *36*

2.3. Résolution des équations de Navier-Stokes *37*

- Discrétisation temporelle : 38
- Discrétisation spatiale des équations 42

2.4. Discrétisation et résolution du transport d'interface *47*

2.5. Résolution des systèmes linéaires *49*

2.6. Traitement des conditions aux limites *51*

3. SIMULATION DU REMPLISSAGE DE MOULES DANS LE CAS 2D ISOTHERME 54

3.1. Une interface de calcul conviviale *55*

- Le fichier « caract.par » : 55
- Le fichier « defaut.don » : 55
- Le fichier « castest.don » : 55
- Le fichier de commande « aquilon.dat » 56

3.2. Ecoulement de Poiseuille diphasique 2D *57*

3.3. Remplissage de moule par un fluide visqueux dans le cas isotherme *61*

- Remplissage du moule par pression 61
- Remplissage du moule sous gravité 65

CONCLUSION **68**

CHAPITRE II **69**

LES MODES DE TRANSFERT THERMIQUE : 69

« TRANSFERTS RADIATIFS ET TRANSFERTS COUPLES CONDUCTO-RADIATIF EN MILIEUX SEMI-TRANSPARENT - PREMIERE APPROCHE » 69

INTRODUCTION 71

1. LES TRANSFERTS THERMIQUES 73

1.1. Transfert conductif 75

1.2. Transfert convectif, flux convectif et conducto-convectif 76

- Le phénomène de convection 76
- Flux surfacique conductif à une paroi, couplé au phénomène de convection 78

1.3. Notions de flux radiatif 79

2. EQUATION DU TRANSFERT RADIATIF (E.T.R) DANS UN MILIEU SEMI-TRANSPARENT 81

2.1. Notions sur les milieux semi-transparents 81

- Définition de la luminance 82
- La luminance du rayonnement d'équilibre ou rayonnement du corps noir 83
- La conservation de l'étendue optique d'un faisceau 83
- Absorption 84
- Emission 85
- Diffusion 87

2.2. Etablissement de l'Equation de Transfert Radiatif (E.T.R) 90

- Formulation locale de l'équation de transfert 90
- Formulation intégrale de l'équation de transfert 92
- Conditions aux limites de l'E.T.R. 93

3. COUPLAGE DES CHAMPS CONDUCTIF ET RADIATIF DANS UN MILIEU SEMI-TRANSPARENT 96

3.1. Equation des transferts de chaleur par conduction et par rayonnement 97

3.2. Résolution de l'E.T.R entre deux plans parallèles, d'extension infinie 99

- Simplifications du modèle : première approche 99
- Résolution de l'E.T.R dans le cas d'un matériau non diffusant (absorbant/émettant) 103
- Approximation conductive (sans diffusion) 109
- Extension du modèle à d'autres conductivités radiatives 112

4. VALIDATION 115

4.1. Viscosité dépendante de la température 115

4.2. Conductivité dépendante de la température 117

4.3. Source radiative « ∇q_r » 118

4.4. Couplage thermique entre solide et fluide 120

4.5. Remplissage des moules du verre fondu par gravité dans le cas anisotherme 122

CONCLUSION 124

CHAPITRE III 125

RESOLUTION GENERALE DE L'E.T.R : 125

« METHODE EXPLICITE DIRECTE » 125

INTRODUCTION 127

1. LES METHODES EXISTANTES POUR RESOUDRE L'E.T.R 129

1.1. Les méthodes approchées 129

- Approximation de Rosseland 129
- Le modèle à deux flux 129

1.2. Les méthodes numériques exactes 130

- La méthode des zones 130
- La méthode de Monte Carlo 131
- Les méthodes Multiflux 131
- La méthode des ordonnées discrètes 131
- La méthode des harmoniques sphériques ou méthode PN 132
- La méthode des éléments finis ou volumes finis 133
- La méthode matricielle 133

1.3. Conclusion 134

2. RESOLUTION DU COUPLAGE CONDUCTO-RADIATIF DANS LES MILIEUX SEMI-TRANSPARENTS 134

2.1. Résolution du problème de couplage dans le cas général 3D 135

- Cas général 135
- Milieu gris solide absorbant-émettant (non diffusant), sans source interne 137
- Expression générale de la divergence du flux radiatif $\vec{\nabla}.\left(\boldsymbol{q}^R\right)$ 138
- Luminance moyenne $\overline{L}$ et flux radiatif $\boldsymbol{q}^R$ dans le cas général 3D 139

2.2. Résolution de l'E.T.R par la méthode explicite dans le cas 1D 140

- Luminance moyenne 141
- Flux radiatif 142

2.3. Résolution de l'E.T.R par la méthode explicite dans le cas 2D 143

- Luminance moyenne 144
- Flux radiatif 147

CONCLUSION 149

CHAPITRE IV 151

RESOLUTION DE L'E.T.R PAR LA METHODE D'APPROXIMATION POLYNOMIALE OU METHODE PN 151

INTRODUCTION 153

1. RESOLUTION DE L'E.T.R PAR LA METHODE PN 155

1.1. Equations à résoudre dans le cas général 3D 155

- Cas particulier d'un milieu absorbant-émettant 155
- Recherche d'une solution sous forme d'une série d'harmoniques sphériques 157

- Les moments de la luminance 160
- Principe général de résolution 161
- Expressions approchées de la luminance en fonction de ses moments 161
- Mise en place du système d'équations aux moments 162

1.2. Conditions aux limites pour la méthode PN 163

2. RESOLUTION DE L'E.T.R DANS LE CAS 1D PAR LES METHODES *P1* ET *P3* 166

2.1. Cas de la méthode P1 166

- Equations différentielles 166
- Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1 169

2.2. Cas de la méthode P3 171

- Equations différentielles 171
- Conditions aux limites de Marshak pour la méthode P3 172

3. RESOLUTION DE L'E.T.R DANS LE CAS DE 2D PAR LA METHODE *P1* 173
- Equations différentielles 173
- Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1 175

4. RESOLUTION DE L'E.T.R DANS LE CAS DE 3D PAR LA METHODE *P1* ET *P3* 177

4.1. Cas de la méthode P1 178

- Equations différentielles 178
- Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1 179

4.2. Cas de la méthode P3 180

- Equations différentielles 180
- Condition aux limites de Marshak pour le cas P3 183

5. RESOLUTION DE L'E.T.R DANS LE CAS 2D CYLINDRIQUE AVEC SYMETRIE DE REVOLUTION PAR LA METHODE *P1* 189
- Equations différentielles 189
- Condition aux limites de Marshak 191

6. RESOLUTION DE L'E.T.R DANS LE CAS NON GRIS – MODELE MULTI-BANDES A 2 BANDES 192

6.1. Calcul de $\vec{\nabla}\left(\boldsymbol{q}^R\right)$ 192

6.2. Fraction d'émittance du corps noir $F_{0-\lambda_c T}$ 194

- Définition 194
- Calcul de $F_{0-\lambda_c T}$ et expression approchée 195
- Expression de $\vec{\nabla}\left(\boldsymbol{q}^R\right)$ en fonction de $F_{0-\lambda_c T}$ 199
- Equations différentielles 200
- Conditions aux limites de Marshak 201

CONCLUSION 203

CHAPITRE V 205

VALIDATION DU MODELE RADIATIF ET APPLICATION DU MODELE DANS DES CAS COMPLEXES 205

INTRODUCTION **207**

1. VALIDATION DU MODELE CONDUCTO-RADIATIF EN 1D (REGIME PERMANENT ET TRANSITOIRE) ET 2D EN REGIME PERMANENT 209

1.1. Résolution du couplage conducto-radiatif dans le cas 1D permanent *209*

1.2. Résolution du couplage conducto-radiatif par la méthode PN dans le cas 1D transitoire *220*

1.3. Résolution du couplage conducto-radiatif dans le cas 2D en régime permanent *224*

2. APPLICATION DU MODELE RADIAFIF DANS DES CAS COMPLEXES 230

2.1. Résolution d'un problème de « Convection Naturelle » avec couplage des trois modes de transfert (conduction, convection et rayonnement) par la méthode P1 modifiée (LEMTA) *230*

2.2. Résolution d'un problème de convection naturelle conducto-convecto-radiatif dans une cavité avec obstacle par la méthode P1 modifiée (LEMTA). *233*

2.3. Convection naturelle en tenant compte du couplage conducto-convecto-radiatif dans le cas d'un milieu complexe avec interface inclinée et présence d'un obstacle solide semi-transparent *237*

2.4. Résolution d'un problème de couplage conducto-radiatif dans le système de coordonnées cylindriques (2D axi-symétrique) par la méthode P1 modifiée (LEMTA) *241*

2.5. Résolution d'un problème de couplage conducto-radiatif dans le cas 3D par la méthode P1 modifiée (LEMTA) *245*

2.6. Résolution d'un problème conducto-radiatif 1D dans le cas d'un matériau semi-transparent non gris (modèle à 2 bandes) par la méthode P1 modifiée (LEMTA) *247*

CONCLUSIONS **251**

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES **253**

BIBLIOGRAPHIE **257**

ANNEXE A : ***« PRESENTATION DES FICHIERS DE DONNEES DE L'INTERFACE DU CODE DE CALCUL NUMERIQUE AQUILON »*** **267**

ANNEXE B : ***« SOLUTION ANALYTIQUE DE L'ECOULEMENT DE POISEUILLE DIPHASIQUE »*** **281**

ANNEXE C : « FONCTION INTEGRO-EXPONENTIELLE » **285**

ANNEXE D : ***« PRESENTATION DES COEFFICIENTS SPATIAUX*** A_m^l ***EN FONCTION DES MOMENTS DE LA LUMINANCE POUR LA METHODE P3 »*** **287**

ANNEXE E : ***« OPERATEURS MATHEMATIQUES DANS LES DIFFERENTS SYSTEMES DE COORDONNEES »*** **291**

Introduction Générale

Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : *« Prise en compte du transfert radiatif »*

Cette thèse rentre dans le cadre d'un travail initié par le LEMTA, en collaboration avec BACCARAT et DAUM dont le but est de proposer un outil de simulation pour le remplissage de moules adapté à l'Industrie Verrière. Cette étude fait partie d'un programme de recherche plus vaste lancé dans le cadre d'un projet ANR "Verre" labellisé par le pôle de compétitivité MIPI (Matériaux Innovants et Produits Intelligents) et qui concerne la modélisation et la simulation du Thermoformage et du Remplissage de moules. L'objet de cette étude est de transférer vers l'industrie verrière un code de calcul numérique efficace et rapide pour la simulation du remplissage des moules par du verre fondu. BACCARAT et DAUM utilisent deux types de procédés pour le remplissage de moules : le remplissage par gravité et le remplissage par pression. L'outil proposé doit pouvoir simuler ces deux types de remplissage.

La simulation numérique dans le domaine du remplissage de moules revêt un caractère de plus en plus important. En effet, les outils traditionnels tels que l'expérimentation, les essais, les maquettages sont devenus très coûteux en temps ou en argent et sont parfois insuffisamment représentatifs. La simulation numérique couplée avec une validation expérimentale devient un outil performant permettant une meilleure analyse des phénomènes physiques mis en jeu dans les procédés.

Certes, des codes commerciaux plus ou moins adaptés existent mais peu d'entre eux permettent de prendre en compte les spécificités liées au « verre » telles que la forte thermodépendance de ses propriétés thermophysiques, notamment sa viscosité dynamique (selon une loi exponentielle) et sa forte température de fusion qui nécessite de prendre en compte les transferts de chaleur couplés, en particulier le transfert radiatif.

En pratique, le transfert radiatif est souvent soit négligé, soit traité de façon simple (modèle de type Rosseland ou Rosseland modifié) pour prendre en compte sa présence sans augmenter de façon prohibitive les temps de calcul. Ce dernier critère est souvent un critère déterminant dans des applications industrielles où l'on préfère faire des concessions sur la précision des calculs pour gagner en temps de calcul, partant du principe que les bases de données mais aussi les modèles résolus, reposent eux-mêmes sur des hypothèses simplificatrices.

Le but de ce travail est donc de proposer un code numérique pour la simulation du remplissage de moules adapté à l'Industrie verrière et qui réponde au meilleur compromis entre temps de calcul et précision des résultats.

Dans ce problème, il y a en fait deux aspects : le remplissage de moule qui consiste en la résolution des équations de Navier-Stokes avec frontières libres et les transferts de chaleur couplés (conduction, convection et rayonnement) spécifiques aux matériaux de type Verre.

Une première partie sera donc consacrée à la modélisation et à la simulation des écoulements à frontières libres et mobiles. Nous nous sommes appuyés pour cela sur la bibliothèque numérique Aquilon (devenue Thétis) particulièrement adaptée pour traiter ce type d'écoulement (Ce code a déjà fait ses preuves dans le domaine du remplissage de moules anisothermes). Une deuxième partie sera consacrée au problème thermique avec notamment la prise en compte du couplage des différents modes de transfert de la chaleur (conduction, convection et rayonnement) et la mise en place d'un modèle radiatif adapté.

La première partie de la thèse est consacrée à la partie Mécanique des fluides et aux méthodes numériques associées. Dans un premier chapitre, nous nous intéresserons au cas du remplissage de moules par un verre sous forme liquide dans le cas isotherme où les équations des transferts thermiques ne sont pas prises en compte. Dans les problèmes de remplissage de moules que nous aurons à traiter, nous nous intéressons plus particulièrement au transport de l'interface, qui est la zone séparant les deux fluides (verre-air) et qui est caractérisée par un coefficient déterminé expérimentalement, connu sous le nom de tension superficielle. Il faut absolument que la méthode que nous utilisons soit capable de respecter des interfaces de topologie complexe et que la conservation de la masse soit bien respectée.

La simulation numérique sur des structures de moyennes et grandes dimensions d'une interface associée à un écoulement diphasique nécessite la résolution des ***équations de Navier-Stokes en formulation à un fluide***. Dans le cadre de ce Chapitre, nous présenterons ces équations.

En fonction du maillage, on peut distinguer deux méthodologies numériques qui permettent de résoudre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en présence de plusieurs fluides.

Dans la première approche dite ***méthode lagrangienne***, sur maillage mobile ([MAGNAUDET 97], [BLANCO 95]), un seul des deux fluides en présence est discrétisé, de telle sorte que l'interface soit partie intégrante des limites du domaine de calcul. Cette méthode permet de représenter l'interface comme une réelle discontinuité et de suivre son évolution de manière très précise. Les déformations de l'interface sont prises en compte par des déformations du maillage qui s'adapte à chaque itération de calcul aux évolutions lagrangiennes de l'interface. L'intérêt d'une telle méthode est de fournir une approximation très précise des contraintes à l'interface entre les deux fluides considérés. Dans le même temps, il est possible d'ajuster la densité de points du maillage en fonction par exemple de la courbure, et d'obtenir ainsi une précision très élevée sur la description des phénomènes physiques liés à l'interface. Des méthodes de discrétisation de type Eléments Finis ([SILLIMAN 80]) ou Volumes Finis curvilignes ([MAGNAUDET 96]) sont utilisées fréquemment dans l'approche lagrangienne parce qu'elles permettent de construire naturellement un maillage adapté aux formes complexes de l'interface. Cette méthode possède cependant plusieurs inconvénients qui peuvent la rendre inutilisable dans certains cas : la construction et l'adaptation du maillage aux évolutions de la surface de contact entre les fluides peuvent être très coûteuses en temps de calcul et sont difficiles à maîtriser quand les déformations de l'interface sont importantes.

La deuxième technique de modélisation numérique d'un écoulement diphasique, que nous allons utiliser pour résoudre les équations de conservation sur un maillage fixe, appelée ***méthode eulérienne***, comporte de nombreux avantages par rapport à la méthode lagrangienne. D'une part, la discrétisation de l'approche eulérienne est indépendante de la géométrie de l'interface, le maillage étant fixe. Cette propriété fondamentale induit un gain

important en coût de calcul vis-à-vis de la méthode lagrangienne et assure une grande généralité à l'outil de simulation numérique qui peut traiter des problèmes très variés. D'autre part, si la taille des mailles est suffisante, la méthode sur maillage fixe peut décrire des étirements très importants de la surface de contact entre deux fluides. Elle permet même de décrire précisément les phénomènes de coalescence ou de rupture d'interface. L'autre intérêt d'une approche eulérienne est la possibilité de résoudre des écoulements diphasiques aussi bien bidimensionnels que tridimensionnels. Les méthodes eulériennes peuvent être classées en deux catégories : les ***méthodes de suivi de front*** ("Front Tracking") qui consistent à marquer l'interface (Marqueur de surface ([DALY 69]), Fonction de hauteur ([NICHOLS 73]), et Méthode de ligne de niveau ou "Level-Set" ([OSHER 88], [SUSSMAN 94]), et les ***méthodes de suivi en volume*** qui considèrent le fluide comme un marqueur en utilisant une fonction de présence (Marqueur de volume ([HARLOW 65]), Schémas TVD (Total Variation Diminishing, [LEVEQUE 90], [YEE 87], [HIRSH 90] et [VINCENT 99]), Volume de fluide VOF ([NOH 76], [CHORIN 80], [BAR 74], [JEROME 01] et [ASHGRIZ 91])).

Pour les problèmes de remplissage de moules que nous aurons à traiter, nous avons opté pour la ***méthode VOF*** (Volume Of Fluid) pour résoudre le transport d'interface. Pour ces méthodes, nous utilisons une fonction scalaire dont la valeur varie entre zéro et un pour repérer les deux fluides. Cette fonction scalaire représente le volume occupé par le fluide dans une cellule de calcul, donc une maille pleine de fluide a une valeur de un et une maille vide zéro. Si la valeur de fraction volumique est comprise entre ces deux valeurs, cela indique la présence de l'interface et on connaît directement la proportion occupée par le fluide. L'utilisation de la fraction volumique est plus économique que les méthodes utilisant les marqueurs car une seule valeur doit être associée à une maille de calcul. Un autre avantage de cette méthode est que l'on connait exactement la position de l'interface. Il existe différentes méthodes VOF (VOF SLIC (Simple Line Interface Calculation) [NOH 76], VOF CIAM (Calcul d'Interface Affine par Morceau) en français ou VOF PLIC (Piecewise Linear Interface Calculation) en anglais [BAR 74], [YOUNGS 82]), mais l'algorithme reste le même quelle que soit la méthode utilisée. A chaque itération du calcul on ne connait pas la position de l'interface. Le champ de fraction volumique nous permet, par une étape de reconstruction géométrique de l'interface de déterminer la position exacte de l'interface. C'est cette étape de reconstruction qui fait la spécificité des différentes méthodes VOF. Lors de l'étape d'advection, l'interface reconstruite est transportée en utilisant la vitesse du fluide et on

évalue alors les flux volumiques qui traversent les différentes cellules du domaine de calcul, ce qui permet de construire le nouveau champ de fraction volumique.

Un des problèmes rencontrés lorsque l'on résout les équations de Navier-Stokes exprimées en variables vitesse et pression concerne le traitement du couplage entre ces deux quantités. Pour résoudre ce problème, dans le cadre de notre étude, nous utilisons deux méthodes différentes: la méthode du ***Lagrangien Augmenté*** et la méthode de la ***Projection Vectorielle***. La première est une méthode de minimisation sous la contrainte de l'équation de continuité, où la pression, qui est découplée par rapport à la vitesse, apparaît comme un multiplicateur de Lagrange ([FORTIN 82], [CALTAGIRONE 95], [KHADRA 94], [FIGUE 96], [RITZ 97]). Cette contrainte est directement introduite dans l'équation de conservation du mouvement sous la forme d'un terme de pénalisation qui couple les différentes composantes de la vitesse. Le calcul du couple vitesse-pression est effectué par l'algorithme itératif d'Uzawa. La méthode de projection vectorielle ([RITZ 97], [CALTAGIRONE 99]) consiste à garder la formulation implicite du lagrangien augmenté comme étape de prédiction. Le champ de vitesse qui correspond à la solution de l'algorithme du lagrangien augmenté est alors une approximation de la solution à divergence non nulle. Il correspond à une prédiction du champ de vitesse. On projette ensuite cette solution sur un champ à divergence nulle. Après l'étape de prédiction et celle de projection, on obtient les variables vitesse et pression.

Les systèmes linéaires provenant de la discrétisation spatiale et temporelle des équations de Navier-Stokes sont extrêmement creux. Pour résoudre ce système, on utilise un solveur itératif de type ***Bi-gradient Conjugué Stabilisé*** (Bi-CGStab) dans laquelle le système linéaire est résolu par une méthode de minimisation ([THEODOR 86]).

La seconde partie concerne l'étude des transferts thermiques couplés. Dans un premier chapitre, on présente d'abord des notions générales sur les différents modes de transferts thermiques (conduction, convection et rayonnement) et leurs couplages. On introduit en particulier l'équation du transfert radiatif ou "E.T.R" dans le cas d'un milieu semi-transparent absorbant-émettant (i.e non diffusant). La résolution d'un problème de thermique nécessite la résolution simultanée de l'équation de la chaleur et de l'équation du transfert radiatif qui apparaissent fortement couplées, indépendamment des équations de Navier-Stokes couplées avec l'équation de la chaleur pour prendre en compte la thermodépendance des propriétés des

fluides. La prise en compte des transferts radiatifs est souvent problématique car elle accroît considérablement les temps de calcul. Dans le cas du verre qui est un matériau à haut point de fusion, il n'est pas possible de négliger ce mode de transfert qui compte tenu des fortes températures contribue de façon importante au transfert de chaleur.

Différentes approches fines ou approchée permettent de résoudre ce problème. Les modèles fins sont certes très précis mais nécessitent des moyens et des temps de calcul importants, d'autant plus importants si l'on doit, en plus, prendre en compte la présence d'une interface semi-transparente mobile (interface verre-air). En pratique et dans un contexte industriel, on préfère alors se tourner vers des méthodes approchées.

Dans un premier temps (voir Chapitre II), nous nous intéresserons à la prise en compte du transfert radiatif par l'introduction d'une conductivité radiative équivalente ([ANDERSON 71]). Cette méthode considère l'effet de transfert radiatif comme un pur phénomène de diffusion. Différentes conductivités radiatives, fonction de l'épaisseur optique du milieu ou transparence du milieu, ont été proposées par différents auteurs. On peut citer par exemple le modèle de Rosseland ([ROSSELAND 36], [CLOUET 97]) pour la forte épaisseur optique $(\tau_0 >> 1)$, le modèle de Poltz-Jugel ([POLTZ 67]) pour $(\tau_0 \approx 1)$, le modèle de Deissler ([DEISSLER 67]) ou le modèle de Rosseland modifié pour $(\tau_0 >> 1)$, le modèle Film mince ([REMY 98]) et le modèle de l'équilibre radiatif pour $(\tau_0 << 1)$, ou encore le modèle de l'équilibre radiatif modifié ([LAURIAT 76]) valable sur une très large gamme d'épaisseur optique. Les modèles de Deissler et de l'équilibre radiatif modifiés sont intéressants à double titre. Ils permettent en effet de prendre en compte non seulement les transferts radiatifs entre parois pour de faibles épaisseurs optiques mais aussi le phénomène d'absorption et de réémission en volume apparaissant dans des matériaux à fortes épaisseurs optiques. Bien que simple à mettre en œuvre, ces modèles ne sont rigoureusement valables que pour des matériaux purement diffusants. De plus, cette approche n'est rigoureuse que si le milieu étudié est à l'équilibre thermique (régime permanent). Enfin, dans le cas d'un milieu semi-transparent, on peut noter deux types de transfert : un transfert entre surfaces et un phénomène d'absorption et de réémission en volume. La notion de résistance radiative permet de prendre en compte rigoureusement que le premier type de transfert.

Pour prendre en compte de façon plus fine les transferts radiatifs, il est nécessaire de résoudre l'E.T.R. Là également, deux approches sont possibles. On peut soit résoudre numériquement l'ETR couplée avec l'équation de la chaleur, soit résoudre explicitement l'ETR à partir de la connaissance du champ de température (méthode dite "explicite directe"). Cette méthode de résolution « fine » sera présentée dans le Chapitre III. Elle nous servira de validation dans des cas simple 1D et 2D, en régime permanent et transitoire pour le modèle radiatif approché que nous proposerons dans le Chapitre IV.

Une résolution analytique du problème couplé conduction-rayonnement n'est possible que dans certains cas simples et après linéarisation des flux radiatifs. C'est le cas par exemple ([LAZARD 01]) d'un mur infini, gris, absorbant, émettant et diffusant. Pour des situations plus complexes, tels que les milieux non-gris, à diffusion anisotrope, et géométries complexes (2D et 3D), seules des méthodes numériques sont envisageables. Parmi les différentes méthodes numériques existantes, on peut citer les méthodes des harmoniques sphériques ("MHS"). La méthode d'approximation Polynomiale dite PN comme méthode d'approximation polynomiale d'ordre N fait partie de cette classe de méthodes. Les méthodes d'ordonnées discrètes ("MOD"), les méthodes d'éléments finis ("MEF"), les méthodes de volumes finis ("MVF"), les méthodes des zones ("MZ") ou encore les méthodes de Monte Carlo ("MCM") ([SIEGEL 72], [MODEST 03]). La différence entre ces différentes méthodes réside dans la prise en compte de la dépendance angulaire de la luminance pour la résolution. La luminance monochromatique dépend en effet de 2 variables angulaires (θ et φ), de la longueur d'onde (λ) et des 3 coordonnées de l'espace (3 inconnues qui dépendant des variables d'espace). Les différentes méthodes se différencient en particulier par la prise en compte des variations angulaires de la luminance.

Par exemple, les méthodes MOD /MEF /MVF prennent en compte la dépendance directionnelle de la luminance sur tout l'angle solide 4π en utilisant des quadratures numériques (discrétisation angulaire), alors que les MHS utilisent des séries sous forme d'harmoniques sphériques pour décrire les variations de luminance en fonction de l'angle solide. Les MOD /MEF /MVF présentent l'avantage de pouvoir être facilement implémentées dans des codes commerciaux de calcul numérique de mécanique des fluides ou "CFD" (Computational Fluid Dynamics). Cependant, ces codes la résolution qui reposent souvent sur des méthodes itératives ont une vitesse de convergence souvent longue en particulier pour les

milieux semi-transparents absorbants, émettants, non gris et non diffusants avec de fortes épaisseurs optiques. De plus, les méthodes MOD sont connues pour générer des problèmes de « scintillements » de la luminance et « de fausse diffusion », liés à la discrétisation angulaire de la luminance ([CHAI 93]). Les MZ /MCM sont des méthodes numériques plus précises ([MODEST 03]) pour la résolution de l'E.T.R. Mais, elles présentent l'inconvénient d'être longues en terme de temps de calcul et de demander beaucoup de ressources mémoires. De plus, elles s'incorporent difficilement dans des codes de calcul numérique CFD. Les MSH présentent plusieurs avantages par rapport aux autres méthodes : d'abord, elle transforme l'E.T.R en un système d'équations différentielles du second ordre, pouvant être résolus simplement en utilisant des codes de calcul numérique de type PDE. Ensuite, les MSH sont des méthodes spectrales qui permettent d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus par des MOD mais avec beaucoup moins de termes ou valeurs nodales. Par rapport aux méthodes MOD /MEF /MVF, les temps de calcul requis par les méthodes MSH pour la résolution de l'E.T.R sont généralement faibles, en particulier dans le cas d'un milieu semi-transparent non diffusant comme le Verre et dans le cas de parois réfléchissantes (parois métalliques par exemple).

Dans notre cas, nous cherchons à prendre en compte le rayonnement de façon satisfaisante en privilégiant les temps de calcul. Il faut de plus que cette méthode puisse facilement s'intégrer dans des codes numériques de type CFD du commerce. A partir de la représentation des avantages et inconvénients des méthodes numériques précédentes pour la résolution de l'E.T.R, notre choix s'est portée sur la méthode *PN modifiée (LEMTA)* qui transforme l'E.T.R en un système d'équations différentielles du second ordre stationnaires que l'on peut facilement intégrer dans des codes numériques car ce sont des équations similaires à l'équation de la chaleur. Le principe général de cette méthode sera présenté dans le Chapitre IV. Nous donnerons ensuite les équations différentielles et conditions aux limites à résoudre dans le cas gris (matériaux dont les propriétés optiques sont indépendantes de la température) et pour des géométries 1D (développement P1 et P3), 2D (méthode P1) et 3D (développement P1 et P3), ainsi qu'en géométrie 2D axi-symétrique. Enfin, nous présenterons cette méthode dans le cas non gris.

La méthode PN a été utilisée la première fois pour la résolution de l'équation de Boltzmann sur le problème de transport des neutrons. En 1959, Kofink a établi la méthode PN générale

pour la résolution du transport des neutrons dans un milieu cylindrique 1D ([KOFINK 59]). [BAYAZITOGLU et HIGENYI 79] ont développé la méthode P3 pour la résolution de l'E.T.R 1D dans un cylindre et une sphère. [TONG et SWATHI 87] ont mis en place dans le cas 1D une solution d'ordre élevée (jusqu'à P11) pour un milieu diffusant anisotrope constitué de sphères concentriques. [RATZEL et HOWELL 83] ont étudié le cas d'un milieu semi-transparent gris, émettant et absorbant dans une enceinte rectangulaire 2D en utilisant une méthode de type P3. [MENGUC et VISKANTA 85] ont développé la méthode P1 et P3 dans le cas d'une enceinte rectangulaire 3D. Dans le cas d'un matériau de forme quelconque diffusant [DAVISON 58] a montré en utilisant la méthode PN qu'il était possible de transformer l'équation de Boltzmann en $(N+1)^2$ Equations aux Dérivées Partielles du premier ordre ("EDP" ou Partial Differential Equations - PDEs en anglais). [OU et LIOU 82] ont montré de façon similaire en appliquant la méthode PN sur l'E.T.R dans le cas général 3D que la résolution de ce problème revenait à résoudre un ensemble de $(N+1)^2$ équations aux dérivées partielles du premier ordre couplées, comparable au système d'équations obtenu par une méthode d'ordonnées discrètes (MOD). Le problème des conditions aux limites non trivial n'est cependant pas abordé. Enfin, [YANG et MODEST 07] ont montré qu'il était possible de résoudre l'E.T.R par la méthode PN en mettant en place un système de $(N+1)N/2$ équations aux dérivées partielles du second ordre (N devant être impair pour pouvoir écrire les conditions aux limites associées à ces équations).

Dans le Chapitre IV, nous montrerons que l'écriture des conditions aux limites n'est pas unique. Nous mettrons en place dans le Chapitre V, consacrée à la validation du modèle radiatif et à son application à des cas complexes, une méthode appelée *P1 modifiée (LEMTA)* qui va consister à transformer l'E.T.R en une équation aux dérivées partielles du second ordre stationnaire, analogue à l'équation de Fourier. Cette méthode repose sur la modification du coefficient effectif d'absorption du milieu suivant la loi de Lick ([REMY 98]) et à l'écriture des conditions aux limites sur la variable principale de l'équation génératrice (1 seule équation du second ordre ne dépendant que d'une seule variable, le moment d'ordre 0 de la luminance). Nous montrerons que cette méthode P1 *modifiée (LEMTA)* donne des résultats comparables à ceux de la méthode P3 (7 équations génératrices du second ordre couplés).

Enfin, dans ce dernier chapitre, un certain nombre d'applications pratiques et complexes seront donnés.

Chapitre I

Méthode des Volumes Finis :

« Modèle à un fluide pour le remplissage de moules dans le cas isotherme »

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les équations générales de la mécanique des fluides (Navier-Stokes, conservation de l'énergie, équation de transport, …) et les équations d'état (fluide Newtonien, gaz parfait, …). Nous présenterons le modèle à un fluide pour la modélisation des écoulements diphasiques, modèle qui sera retenu par la suite.

La résolution du système se fera par la méthode des volumes finis. Une présentation détaillée de la discrétisation temporelle et spatiale sera faite en présentant en particulier les différents maillages (maillage pour la pression et maillages décalés pour la vitesse et la viscosité) et les différents schémas d'interpolation (schémas *Centré*, *Upwind*, *Hybride*, *Quick,* les méthodes *TVD, LevelSet ou Volume Of Fluid,* …). Elle sera suivie du choix de l'algorithme de résolution.

Enfin, des simulations utilisant la bibliothèque numérique Aquilon, permettant d'une part de valider l'ensemble de la méthodologie proposée (comparaison avec des résultats analytiques) et d'autre part d'obtenir les premiers résultats sur le remplissage de moules verriers dans un cas simple, celui de l'écoulement isotherme 2D.

1. Equations à résoudre

Dans notre étude, on s'intéresse à des écoulements multiphasiques avec transport d'espèces inertes et transferts thermiques. Ceci se traduit par le couplage des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, de la concentration massique et de l'énergie.

1.1. Equations de Navier-Stokes

On considère un domaine Ω de frontières $\partial\Omega$ dans lequel évolue un fluide newtonien (**Figure 1**). Dans le cas où deux fluides évoluent dans le domaine Ω, on note Ω_1 (respectivement Ω_2) le domaine occupé par le *fluide 1* (respectivement *fluide 2*). La zone séparant les deux milieux porte un nom différent suivant la nature des deux milieux. On appelle interface, la surface d'échange entre deux fluides. Dans la configuration la plus générale, c'est-à-dire en présence de changement de phase (liquide/gaz par exemple), des transferts des masses d'un fluide vers l'autre peuvent intervenir à travers l'interface. La frontière Γ, représentant l'interface, délimite Ω_1 et Ω_2.

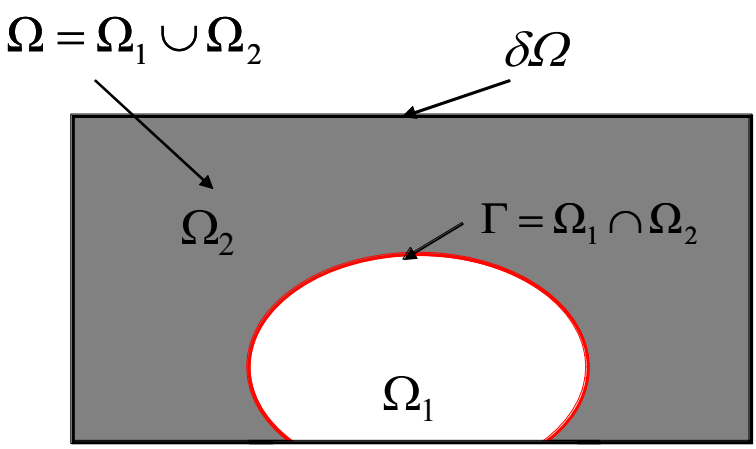


Figure 1 : *Présentation du domaine considéré*

Dans le cadre de la mécanique des milieux continus, l'application du principe fondamental de la dynamique permet de formuler les équations du mouvement d'un fluide réel newtonien dans chacune des phases d'un écoulement diphasique incompressible :

$$\nabla \circ \boldsymbol{u} = 0 \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u})\right)=-\nabla p+\rho g+\nabla_{\circ}\left(\mu\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^{T}\boldsymbol{u}\right)\right) \tag{2}$$

où ρ et μ sont respectivement la masse volumique et viscosité dynamique de la phase considérée. $\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}$ représente la variation temporelle, $\rho\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}))$ le terme d'advection ou d'inertie, ρg la force de gravité, ∇p les forces de pression et $\nabla_{\circ}(\mu(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^{T}\boldsymbol{u}))$ les forces dues au tenseur des contraintes de viscosité. Le système (1) – (2), appelé équations de Navier-Stokes, permet de décrire l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible.

- ***Ecoulement diphasique***

Pour un écoulement diphasique incompressible non miscible, c'est-à-dire faisant intervenir deux fluides séparés par une interface, les équations de Navier-Stokes restent vérifiées dans chacun des fluides *fluide 1* et *fluide 2*. On indicera par 1 (respectivement 2) les caractéristiques du *fluide 1* (respectivement *fluide 2*). L'écoulement peut être décrit par les équations de Navier-Stokes dans chacune des phases, ce qui donne :

$$\nabla_{\circ}\boldsymbol{u}_1=0 \quad dans \quad \Omega_1 \tag{3}$$

$$\rho_1\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t}+\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}_1\otimes\boldsymbol{u}_1)-\boldsymbol{u}_1\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}_1)\right)= -\nabla p_1+\rho_1 g+\nabla_{\circ}(\mu_1(\nabla\boldsymbol{u}_1+\nabla^{T}\boldsymbol{u}_1)) \quad dans \quad \Omega_1 \tag{4}$$

$$\nabla_{\circ}\boldsymbol{u}_2=0 \quad dans \quad \Omega_2 \tag{5}$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}+\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}_2\otimes\boldsymbol{u}_2)-\boldsymbol{u}_2\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}_2)\right)= -\nabla p_2+\rho_2 g+\nabla_{\circ}(\mu_2(\nabla\boldsymbol{u}_2+\nabla^{T}\boldsymbol{u}_2)) \quad \text{dans} \quad \Omega_2 \tag{6}$$

On remarque que le système (3, 4, 5 et 6) permet de prendre en compte l'évolution de chaque fluide, mais de manière séparée. Or ces deux fluides étant en contact via l'interface, ils évoluent de façon couplée. Donc, on a besoin d'ajouter une condition à l'interface qui va traduire la *continuité du flux de masse* et *du flux de quantité de mouvement*, et qui permet de connecter les deux phases. Considérons un volume élémentaire représentatif coupé par l'interface, dans lequel $\boldsymbol{u}_1$ et $\boldsymbol{u}_2$ sont les vitesses locales de part et d'autre de la surface de

contact entre les deux phases en présence (**Figure 2**). On suppose que l'interface se déplace à une vitesse V. Si $\boldsymbol{n}_i$ est la normale à l'élément de surface considéré, on obtient alors dans le référentiel associé à l'interface :

$$\rho_1(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n}_1 - V^n) = \rho_2(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n}_2 - V^n) \tag{7}$$

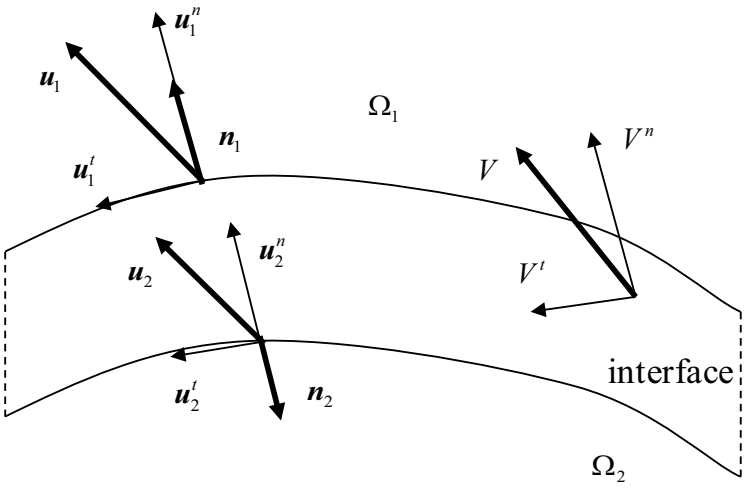


Figure 2 : *Conservation des masses à l'interface des 2 fluides*

Sans changement de phase, les flux de masse relatifs à la position de l'interface sont nuls. Les deux termes de l'équation (7) sont donc identiquement égaux à 0. Soit,

$$V^n = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n}_i \tag{8}$$

Cette expression traduit en fait *la continuité des vitesses normales* à travers l'interface. On peut reformuler l'expression (8) comme une relation de saut à l'interface :

$$(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{n}_i = [\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{n}_i = 0 \tag{9}$$

On postule de plus l'égalité des composantes tangentielles de la vitesse :

$$V^t = \boldsymbol{u}_1^t = \boldsymbol{u}_2^t \tag{10}$$

La continuité du flux de quantité de mouvement s'obtient en appliquant le principe fondamental de la dynamique sur un petit volume de contrôle entourant l'interface. Celle-ci

est soumise à des *forces volumiques* (gravité) et *surfaciques* (pression, contraintes de viscosités et interfaciales). La *tension interfaciale* γ, traduit la cohésion de l'interface et la force associée, Σ a pour expression :

$$\Sigma = 2\gamma\kappa n_i + \nabla_s \gamma \tag{11}$$

où $\kappa = -\frac{1}{2}\nabla_s n_i$ est le rayon de courbure moyen et $\nabla_s \gamma$, l'opérateur gradient associés à la force tangentielle, dans le plan tangent à l'interface, résultant par exemple d'un gradient de température ou d'un gradient de concentration.

L'épaisseur de l'interface étant très faible, les forces associées aux forces volumiques sont négligeables devant celles associées aux forces surfaciques et linéiques. On suppose de plus que le *fluide 1* ne glisse pas par rapport au *fluide 2*, ce qui annule la composante tangentielle (le long de la surface de l'interface) de la tension interfaciale. La conservation de la quantité de mouvement à travers un petit volume de contrôle autour de l'interface donne donc la relation de saut :

$$\left[-pn_i + \mu\left(\nabla(u-V) + \nabla(u-V)^T\right)n_i\right] = 2\gamma\kappa n_i \tag{12}$$

La résolution des équations du système (3, 4, 5, 6, 7 et 12) permet de décrire un écoulement incompressible de deux fluides non miscibles (voir [DELHAYE 74]).

- ***Modèle à un fluide ou mésoscopique***

Le modèle à 1-fluide d'un écoulement diphasique consiste à modéliser l'ensemble des *fluides 1* et *2* par un seul fluide « *hybride* ». Celle-ci a été introduite par [KATAOKA 86] et permet de résoudre des problèmes diphasiques en utilisant des outils numériques qui ont été développés pour des cas monophasiques.

La description géométrique du milieu diphasique peut naturellement être associée à deux fonctions de phase, notées ϕ_1 et ϕ_2, qui adoptent des valeurs différentes selon leur position au sein du *fluide 1* ou du *fluide 2*. On écrit intuitivement que ϕ_1 vaut 1 dans le *fluide 1* et 0 dans

le *fluide 2* et inversement pour ϕ_2 (**Figure 3**). Par définition, les fonctions indicatrices ϕ_1 et ϕ_2 sont discontinues. On remarque de plus que la somme des ϕ_k est constante en temps et en espace et identiquement égale à 1. Pour tout temps *t* et pour tout point (*x, y, z*), on peut alors déduire facilement l'expression de ϕ_2 en fonction de ϕ_1 et ainsi réduire le nombre d'inconnues de notre problème :

$$\phi_2(x,y,z,t) = 1 - \phi_1(x,y,z,t) \tag{13}$$

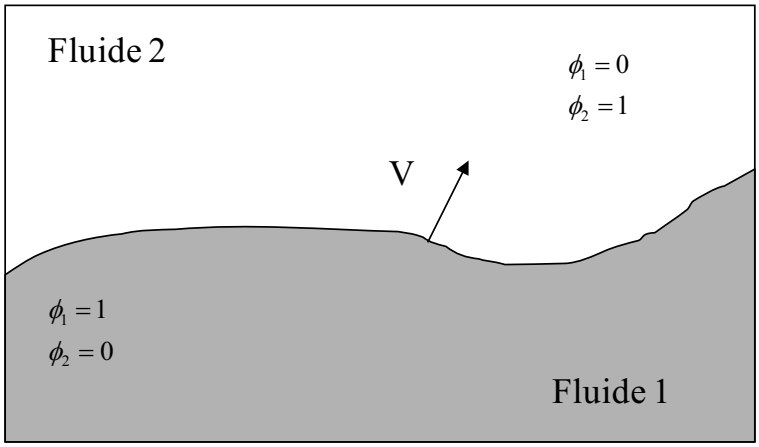


Figure 3 : *Description du milieu diphasique par les fonctions de phases*

Par la continuité des vitesses à l'interface, on peut vérifier que la vitesse locale V de l'interface est la composante normale de la vitesse de chacun des fluides de part et d'autre de la surface de contact :

$$V = \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{n}_i \tag{14}$$

Par définition, V est donc différente de la vitesse des fluides dans chacune des phases. Comme les fonctions indicatrices ϕ_k $(k = 1,2)$ évoluent en parfait accord avec l'interface et que leur dérivée est identiquement nulle dans chacun des fluides, on peut alors décrire leurs évolutions grâce à une relation cinématique qui associe les variations de ϕ_k à la vitesse V de l'interface :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + V \cdot \nabla \phi_k = 0 \tag{15}$$

Cette expression est analogue à une relation cinématique d'évolution d'une discontinuité à la vitesse locale V. On peut remarquer que dans le *fluide 1*, $\phi_1 u_1 = u_1$ et $\phi_2 u_2 = 0$ alors que dans le fluide 2, on a des relations inverses. En associant les fonctions indicatrices à l'équation de conservation de la masse dans chaque phase, on obtient une formulation généralisée de l'équation de continuité qui est vérifiée dans l'ensemble de l'écoulement diphasique :

$$\phi_k \nabla u_k = 0 \tag{16}$$

En vertu des propriétés de l'opérateur divergence, on obtient alors :

$$\nabla(\phi_k u_k) - u_k \cdot \nabla \phi_k = 0 \tag{17}$$

La discontinuité des fonctions indicatrices ϕ_k implique que le gradient de celles-ci soit non nul sur l'interface. Si n_k est la normale à la surface de contact entre les fluides orientée vers la phase *k* et si δ_i est une fonction de Dirac à valeur non nulle sur l'interface, on obtient alors l'expression suivante :

$$\nabla \phi_k = -n_k \delta_i \tag{18}$$

On définie la variable 1-fluide Ψ comme la somme des phases *k* pondérées par des fonctions indicatrices de phase ϕ_k :

$$\Psi = \sum_{k=1}^{2} \phi_k \Psi_k \tag{19}$$

La conservation de la masse pour la variable 1-fluide devient, après sommation sur toutes les phases :

$$\nabla \cdot \left(\sum_{k=1}^{2} \phi_k \nabla u_k \right) = \sum_{k=1}^{2} \nabla u_k \cdot \nabla \phi_k = -\sum_{k=1}^{2} \nabla u_k \cdot n_k \delta_i = -[u] \cdot n_i \tag{20}$$

En utilisant la relation de saut à l'interface (9), l'équation (20) se réduit à :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{21}$$

Après sommation sur toutes les phases de l'équation de conservation de la quantité de mouvement et l'utilisation de la relation de saut associée (11), on obtient :

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}) = \rho g - \nabla p + \nabla\left(\mu\left(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T\right)\right) + 2\gamma\kappa\delta_i n_i \tag{22}$$

Par rapport à l'équation (2), l'équation (21) fait apparaître un terme supplémentaire, liée aux forces interfaciales $2\gamma\kappa\delta_i n_i$.

1.2. Equation de conservation de l'énergie

Cette équation s'établit en utilisant le premier principe de la thermodynamique. Ce dernier stipule que la variation d'énergie interne E_i et cinétique E_c d'un système fermé entre deux états (en équilibre thermodynamique) successifs 1 et 2 est due aux échanges d'énergies mécanique (sous forme de travail δW_{1-2}) et thermique (δQ_{1-2}). Si e désigne l'énergie interne massique du fluide, le premier principe s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}(E_i + E_c) = \frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho\left(e + \frac{u_i^2}{2}\right) dV_m = \int_{V_m(t)} \rho\left(\frac{de}{dt} + u_i \frac{du_i}{dt}\right) dV_m = \delta W_{1-2} + \delta Q_{1-2} \tag{23}$$

δW_{1-2} et δQ_{1-2} sont les puissances échangées par le fluide sous forme de travail et de chaleur, soient :

$$\delta W_{1-2} = \int_{V_m(t)} \rho g_i u_i dV_m + \int_{S_m(t)} t_i\left(n_{ext\ \ j}\right) u_i dS_m = \int_{V_m(t)} \rho g_i u_i dV_m + \int_{V_m(t)} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(p u_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij} u_j\right)\right] dV_m \tag{24}$$

somme des puissances associées aux forces volumiques et aux contraintes, et :

$$\delta Q_{1-2} = \int_{V_m(t)} P dV_m + \int_{S_m(t)} -\left(q_i^{th} + q_i^R\right)\left(n_{ext\ \ i}\right) dS_m = \int_{V_m(t)} P dV_m + \int_{V_m(t)} -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^{th} + q_i^R\right) dV_m \tag{25}$$

somme des puissances engendrées dans l'élément matériel ou traversant algébriquement sa surface (q_i^{th} représente, dans le cas d'un mélange d'espèces, un flux thermique qui n'est pas seulement conductif, mais qui concerne un effet de transport d'enthalpie lié à la diffusion de masse).

Les contraintes $t_i(n_{ext\ \ j})$, dans l'équation (24), regroupent les forces de pression et les forces visqueuses ; on se limitera ici aux fluides usuels, newtoniens.

Les *forces de pression* représentent l'effet cumulé du transport dans la direction *j* de la normale n_j, à travers la surface considérée, des quantités de mouvement dans la direction *j* de toutes les molécules traversant la surface ([Ferziger 1972], [Hirchfelder 1964] et [Chapman 1970]). Ce phénomène est indépendant des interactions élémentaires entre molécules. L'expression de la contrainte associée est :

$$t_{pi}(n_{ext\ \ j}) = -p\delta_{ij}n_{ext\ \ j} \tag{26}$$

Les contraintes visqueuses résultent au contraire des effets cumulés des interactions élémentaires entre molécules du fluide, dirigées par les potentiels intermoléculaires, lorsque des déformations sont imposées à un élément matériel de ce fluide. A la suite de déformations imposées à un élément matériel, il apparaît en tout point de la surface de cet élément un champ vectoriel de contraintes visqueuses, dans le cas d'un fluide newtonien, caractérisé par le vecteur de contrainte $t_{vi}(n_{ext\ \ j})$:

$$t_{vi}(n_{ext\ \ j}) = \tau_{ij}n_{ext\ \ j} \tag{27}$$

où τ_{ij} désigne le tenseur des contraintes visqueuses qui s'exprime simplement en fonction du tenseur d_{ij} des taux de déformation du fluide. Les contraintes visqueuses représentent l'effet cumulé du transport dans la direction *j*, à travers la surface considérée de la quantité de mouvement dans la direction *i* des molécules (et réciproquement à cause de la symétrie). Le

tenseur des contraintes visqueuses s'exprime en fonction de la viscosité dynamique μ du fluide et de la vitesse ([Ferziger 1972] et [Hirchfelder 1964]) :

$$\tau_{ij} = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right] \tag{28}$$

On appelle tenseur des pressions P_{ij} le tenseur résultant :

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \tag{29}$$

C'est un tenseur de rang 2, symétrique, introduit directement en physique statique.

L'expression de la contrainte à la paroi, de normale $n_{ext\ \ j}$ est donc :

$$t_i\left(n_{ext\ \ j}\right) = t_{pi}\left(n_{ext\ \ j}\right) + t_{vi}\left(n_{ext\ \ j}\right) = P_{ij}n_{ext\ \ j} \tag{30}$$

Le premier principe généralisé s'écrit finalement, sous forme locale :

$$\rho\left(\frac{de}{dt} + u_i\frac{du_i}{dt}\right) = \rho g_i u_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(pu_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}u_j\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^{th} + q_i^R\right) + P \tag{31}$$

Dans cette expression, apparaissent au second membre respectivement les puissances associées aux forces volumiques, aux forces de pression, aux forces visqueuses et les puissances calorifiques.

L'équation de bilan de l'énergie interne se déduit de l'expression (31) en soustrayant membre à membre l'équation de bilan d'énergie cinétique à celle-ci. *L'équation de bilan d'énergie cinétique* s'obtient en réalisant le produit scalaire par u_i de l'équation de bilan de quantité de mouvement, soit :

$$\rho u_i\frac{du_i}{dt} = \rho g_i u_i - u_i\frac{\partial}{\partial x_i}p + u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij} \tag{32}$$

L'équation de bilan d'énergie interne s'écrit, après des transformations élémentaires :

$$\rho \frac{de}{dt} = -p\left(\frac{\partial}{\partial x_i} u_i\right) + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^{th} + q_i^R\right) + P \tag{33}$$

L'équation de bilan d'enthalpie s'obtient à partir de la relation :

$$e = h - \frac{p}{\rho} \tag{34}$$

Où h désigne l'enthalpie massique du fluide, qui conduit si on prend en compte l'équation de conservation de la masse à :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{p}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i} u_i \tag{35}$$

L'équation de bilan d'enthalpie s'écrit donc, pour un fluide monophasique éventuellement hétérogène (plusieurs espèces) :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^{th} + q_i^R\right) + P \tag{36}$$

Le premier terme du second membre correspond à la compressibilité du fluide et est réversible. Les trois derniers termes correspondent à des échanges irréversibles de chaleur ; le troisième, toujours positif, correspond à l'échauffement du fluide par le travail irréversible des forces visqueuses.

Dans le cas d'un fluide, la différence entre enthalpie et énergie interne est souvent académique ; on pose généralement :

$$dh = cdT \tag{37}$$

Où c désigne la chaleur massique du liquide. Dans le cas d'un gaz réel, l'expression de l'enthalpie massique est donnée par :

$$dh = c_P dT + (1 - T\beta)\frac{dp}{\rho} \tag{38}$$

Où β est égal à $-1/\rho(\partial\rho/\partial T)_P$. L'équation générale de l'énergie prend, dans ces conditions, la forme déduite de l'équation (36) et totalement rigoureuse pour un fluide monophasique homogène newtonien :

$$\rho c_P \frac{dT}{dt} = \rho c_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T \right) = T\beta \frac{dp}{dt} + \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_i^{th} + q_i^R\right) + P \tag{39}$$

La quantité scalaire qui représente l'échauffement dû aux contraintes visqueuses, proportionnel à μ, si μ est constant, appelée fonction de dissipation, s'écrit généralement :

$$\mu\Phi_D = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \tag{40}$$

1.3. Equation de transport d'espèce

Cette équation traduit la conservation de la concentration massique de l'espèce considérée S_P, soit :

$$\frac{\partial S_P}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(S_P) = \nabla \cdot (D \nabla S_P) \tag{41}$$

où D est le coefficient de diffusion donné à partir de considération physique.

2. Résolution numérique du système

2.1. Méthode des volumes finis

Pour résoudre notre problème décrit par les équations de Navier-Stokes, d'énergie et d'advection décrites ci-dessus et concernant des inconnus vectoriels (vitesses du fluide …) et scalaire (température, pression du fluide …), on peut utiliser des méthodes analytiques exactes (séparation des variables, superposition, théorème de Duhamel, transformations intégrales, transformation de Laplace…), des méthodes analytiques approchées (méthode intégrale, méthode de Ritz, méthode de Galerkin…) ou des méthodes numériques (Runge-Kutta, Itératives linéaires, différence finies, éléments finis, volumes finis…). Les méthodes analytiques fournissent des résultats exacts mais sont limitées à des cas simples (en géométrie et en conditions aux limites) et linéaires. Dans notre cas et compte-tenu de la complexité des conditions aux limites, de la géométrie du problème ainsi que des non linéarités, seules les méthodes numériques sont utilisables.

La méthode des volumes finis repose sur un découpage préalable du domaine d'étude en volumes élémentaires. Sur chaque volume élémentaire, les équations de bilan sont résolues. La méthode est particulièrement efficace lorsqu'on s'intéresse à des géométries structurées. Elle est très employée en thermique et en mécanique des fluides. Nous avons choisi d'utiliser cette méthode, en s'appuyant sur la bibliothèque numérique Aquilon qui a déjà démontré sa capacité à simuler des écoulements fluide en cavités fermées.

Globalement, les équations à résoudre sont constituées d'un terme de variation temporelle $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$, d'un terme d'advection $(\boldsymbol{u} \cdot \nabla \Phi)$ où $\boldsymbol{u}$ est la vitesse à laquelle est advectée la quantité Φ, d'un terme de diffusion $\left(\nabla \cdot \left(D \nabla \Phi + \nabla \Phi^T\right)\right)$ si Φ est une des composantes de la vitesse, $(\nabla \cdot (D \nabla \Phi))$ si non, d'un terme source S, où Φ est l'inconnue représentant $\boldsymbol{u}$, T, S_P et D un coefficient de diffusion. Un bilan de flux sur la variable scalaire Φ donne l'équation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(\Phi) = \nabla \cdot (D \nabla \Phi) + S \tag{42}$$

On peut écrire ces équations sous la forme globale :

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{u}) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (D \nabla \Phi) d\Omega + \int_{\Omega} S d\Omega \tag{43}$$

puis sous la forme de conservation :

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\Phi)\right)d\Omega=\int_{\Omega}\nabla\cdot(D\nabla\Phi)d\Omega+\int_{\Omega}Sd\Omega \tag{44}$$

On précise que l'équation (43) n'est autre qu'un bilan de flux Φ dans le domaine Ω. Celle-ci est discrétisée à partir de la méthode des volumes finis comme indiqué dans [PATANKAR 80]. La résolution de cette équation repose sur les trois étapes suivantes :

(1) Géométrie-maillage : le domaine géométrique qu'on va analyser, est découpé en un ensemble de volumes de contrôle sur lesquels on va faire des bilans de flux Φ. Prenons un maillage cartésien à N nœuds. On définit pour chaque nœud $i\in[1,N]$ un volume de contrôle V_i centré en i de telle façon que $\cup_{i=1}^{n}V_i=\Omega$ et $V_i\cap_{i\neq j}V_j=face_{ij}$. $face_{ij}$ est la face contiguë aux deux volumes de contrôle V_i et V_j.

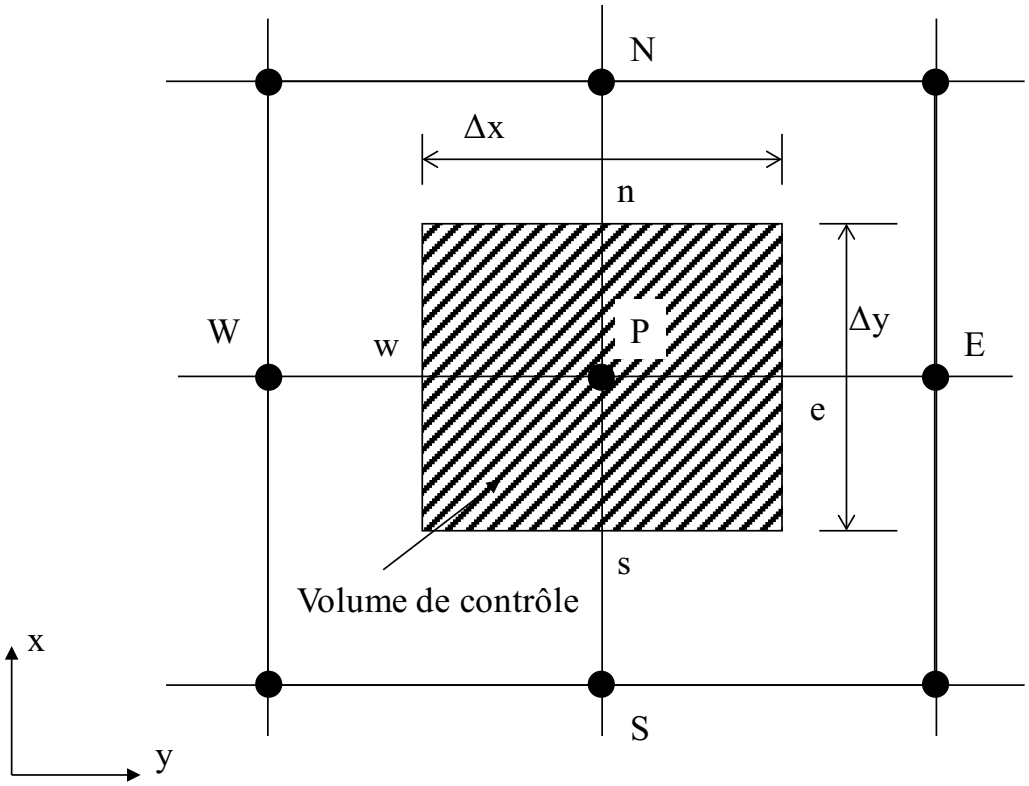


Figure 4 : *Volume de contrôle dans le cas 2D*

(2) Résolution : Les fonctions continues (ou champs) recherchées sont remplacées par un ensemble de valeurs estimées aux nœuds du maillage. Cette approximation, appliquée à une formulation intégrale du problème, permet d'aboutir à un système d'équations (linéaires ou non) dont le nombre est identique au nombre de valeurs à estimer.

Un bilan de flux Φ est fait dans chaque volume de contrôle $V_i, i \in [1, N]$:

$$\int_{V_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{u}) \right) dV_i = \int_{V_i} \nabla \cdot (D \nabla \Phi) dV_i + \int_{V_i} S dV_i \tag{45}$$

On remarque que si on somme (44) sur $i \in [1, N]$, on retrouve l'équation (43). L'équation (44) doit être discrétisée sachant que Φ est connue aux nœuds de discrétisation $i \in [1, N]$. Les flux se calculant sur les faces $face_{ij}$, $(i, j) \in [1, N][1, N]$, il est nécessaire d'interpoler Φ. La nature de l'interpolation dépend des termes de l'équation (44) ([PATANKAR 80]).

(3) Dépouillement-interprétation des résultats : à ce stade, d'autres résultats peuvent être calculés à partir de ceux obtenus par résolution directe du système d'équations. Ces résultats sont ensuite dépouillés et interprétés par l'utilisateur, aidé en cela par des moyens de visualisation graphique très performants.

Le raisonnement est identique quand la variable Φ est vectorielle.

2.2. Discrétisation temporelle et découplage des équations

Le système d'équation défini précédemment est tout d'abord discrétisé en temps avant d'en effectuer une résolution spatiale. L'intervalle de temps est discrétisé en un nombre fini d'intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ de durées éventuellement différentes. Les équations sont résolues implicitement, c'est-à-dire que nous effectuons un traitement implicite des divers termes formant le système d'équations à résoudre. Le terme temporel des équations est résolu par un schéma de Gear d'ordre un ou deux, les autres termes sont exprimés au temps *(n+1)*. Par exemple, pour l'équation de l'énergie, on obtient la forme suivante :

$$\rho^{n+1}C_p^{n+1}\frac{\alpha T^{n+1}+\beta T^n+\gamma T^{n-1}}{\delta t}+C_p^{n+1}\nabla_\circ(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1}T^{n+1})-C_p^{n+1}\nabla_\circ(\rho^{n+1}\boldsymbol{u}^{n+1})+\alpha T^{n+1}$$
$$=\nabla_\circ(\lambda^{n+1}\nabla T^{n+1})+\Phi^{n+1}+S^{n+1}-Bi(T^{n+1}-T_0) \quad (46)$$

Avec :

α=1 ; β= -1 ; γ=0 pour le schéma de Gear d'ordre 1.

α=3/2 ; β= -2 ; γ=1/2 pour le schéma de Gear d'ordre 2.

Où $Bi(T^{n+1}-T_0)$ est le terme de pénalisation qui permet de prendre en compte les conditions aux limites et la pénalisation de variables dans le domaine. αT^{n+1} est un terme source linéaire avec la température et S un terme source non linéaire.

Si l'on écrit de la sorte les autres équations, on remarque que certaines variables apparaissent au temps *(n+1)* dans plusieurs d'entre elles (par exemple la vitesse apparait dans l'équation de Navier-Stokes et dans l'équation de l'énergie). Une technique consiste à découpler les équations en les résolvants les unes après les autres à chaque itération en temps. De même, les caractéristiques des fluides (masse volumique, viscosité, capacité calorifique, conductivité thermique…) sont remises à jour par des relations algébriques à la fin de chaque itération. Cette approche semi-implicite permet de s'affranchir de la condition de stabilité de type CFL (Courant – Friedrich – Levy) qui lie le pas de temps au pas d'espace, autorisant de ce fait l'emploi de grands pas de temps. Elle conduit cependant à la résolution de systèmes linéaires de grandes dimensions nécessitant l'utilisation de pré-conditionnements et de solveurs performants.

2.3. Résolution des équations de Navier-Stokes

Dans cette partie, on va décrire brièvement la discrétisation des équations de Navier-Stokes exprimées en vitesse-pression. On rappelle qu'il s'agit de calculer à chaque instant le couple (vitesse, pression) vérifiant à la fois la conservation de la quantité de mouvement et la contrainte d'incompressibilité.

- ***Discrétisation temporelle :***

L'intégration temporelle est réalisée de manière classique via un schéma d'ordre 1. Un schéma implicite centré est utilisé pour le terme d'inertie ([PATANKAR 80]). Concernant les termes visqueux, un schéma implicite centré d'ordre 2 est utilisé. Le choix de ces schémas implicites est valable pour un champ de vitesse continu sous la contrainte d'incompressibilité. Il n'y a donc pas de condition CFL à satisfaire.

Une fois discrétisé en temps et à l'ordre 1, le problème continu devient :

Connaissant $\boldsymbol{u}^{n}, \boldsymbol{u}^{n-1}, p^{n}$, chercher $\boldsymbol{u}^{n+1}, p^{n+1}$ solution de :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{n+1} = 0 \tag{47a}$$

$$\begin{aligned} &\rho|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}|^{k+1}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}|^{k}.\nabla \boldsymbol{u}|^{k+1}\right) + Biu(\boldsymbol{u}|^{k+1} - \boldsymbol{u}|_{\infty}) \\ &= \rho|^{n} g - \nabla p|^{k} + \nabla.\left[\mu|^{n}\left(\nabla \boldsymbol{u}|^{k+1} + \nabla^{t}\boldsymbol{u}^{k+1}\right)\right] + \rho|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}|^{n}}{\Delta t}\right) \end{aligned} \tag{47b}$$

Où $Biu(\boldsymbol{u}|^{k+1} - \boldsymbol{u}|_{\infty})$ est le terme de pénalisation qui nous permet d'imposer une vitesse sur un bord ou à l'intérieur du domaine de calcul (voir la partie des conditions aux limites).

On note que la pression et la vitesse sont couplées, ce qui rend le coût de résolution du système algébrique final prohibitif, notamment quand il s'agira de simuler des écoulements instationnaires et complexes. Pour contourner cette difficulté, plusieurs algorithmes sont proposés dans la littérature ([PEYRET 83]) afin de réaliser un découplage, le plus consistant et précis possible. On se contente par la suite de donner un résumé de l'algorithme utilisé dans le cadre de ce travail.

- ***Méthode du Lagrangien Augmenté :***

Un des problèmes rencontrés lorsque l'on résout les équations Navier-Stokes exprimées en variables primitives vitesse-pression concerne le traitement du coulage entre ces deux quantités.

En effet, en regardant les équations (47), il apparaît clairement qu'il n'existe aucune équation explicite permettant le calcul de la pression. Toute la difficulté réside donc dans sa détermination sous la contrainte de continuité exprimée par la relation (47a).

Dans le cadre de cette étude, nous utilisons la méthode du *Lagrangien Augmenté* apparue il y a quelques années, et élaborée dans le but de résoudre le couplage vitesse-pression induit par les équations de Navier-Stokes pour un écoulement incompressible. Il s'agit d'une méthode de minimisation sous la contrainte de l'équation de continuité, où la pression, qui est découplée par rapport à la vitesse, apparaît comme multiplicateur de Lagrange ([FORTIN 82]). Ce problème d'optimisation exprimé sous une formulation faible est transformé en un problème de recherche de point-selle (le couple vitesse-pression) écrit sous une formulation forte, sans contrainte. Notons que la contrainte est en fait directement introduite dans l'équation du mouvement sous la forme du terme de pénalisation $-dp\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ qui couple les différentes composantes de la vitesse. Le calcule de couple vitesse-pression est effectué par l'algorithme itératif d'Uzawa.

Les itérations de Lagrangien Augmenté (notées k) sont répétées jusqu'à ce que la valeur moyenne de la divergence de la vitesse dans l'ensemble du domaine soit suffisamment petite. En notant K le nombre maximal d'itérations nécessaires pour satisfaire le précédent critère, l'algorithme itératif du Lagrangien Augmenté est présenté dans le **Tableau 1**.

Les paramètres dp et dr, strictement positifs, sont évalués selon des critères de convergence [FORTIN 82]. Lorsque les équations son préalablement adimensionnées, c'est-à-dire lorsque les grandeurs physiques associées aux champs $\boldsymbol{u}$ et p sont de l'ordre de 1, les deux paramètres sont également choisis de l'ordre de 1. Cependant, notre code de calcul n'est pas développé en variables adimensionnées mais en variables réelles. Le choix de ces deux valeurs est donc un peu plus délicat. En pratique, plusieurs tests seront effectués de manière à les déterminer.

Notons que l'algorithme du Lagrangien Augmenté permet de s'affranchir de conditions aux limites sur la pression.

- ***Initialisations :*** $\boldsymbol{u}\big|^{k=0} = \boldsymbol{u}\big|^{n}$ et $p\big|^{k=0} = p\big|^{n}$
- ***Itérations :*** Pour k=0 à K-1 faire
  - Calcul de $\boldsymbol{u}\big|^{k+1}$ solution de l'équation :

$$\rho\big|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}\big|^{k+1}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}\big|^{k}.\nabla\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right) + Biu\left(\boldsymbol{u}\big|^{k+1} - \boldsymbol{u}\big|_{\infty}\right)$$
$$= \rho\big|^{n} g - \nabla p\big|^{k} + \nabla.\left[\mu\big|^{n}\left(\nabla\boldsymbol{u}\big|^{k+1} + \nabla^{t}\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right)\right] + \rho\big|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}\big|^{n}}{\Delta t}\right) + dr\nabla\left(\nabla.\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right) \quad (48a)$$

  - Calcul de $p\big|^{k+1}$ à partir de l'équation :

$$p\big|^{k+1} = p\big|^{k} - dp\nabla.\boldsymbol{u}\big|^{k+1} \quad (48b)$$

- ***Solution :*** $\boldsymbol{u}\big|^{n+1} = \boldsymbol{u}\big|^{k=K}$ et $p\big|^{n+1} = p\big|^{k=K}$

Tableau 1 : *Algorithme du Lagrangien Augmenté*

➢ *Méthode de projection vectorielle :*

Comme nous l'avons expliqué précédemment, la réalisation de la contrainte d'incompressibilité de l'écoulement dans les équations de Navier-Stokes sera assurée de manière implicite par l'introduction d'un paramètre de Lagrange, en l'occurrence la pression, en transformant le problème en une recherche de point-selle.

Le paramètre *dr* de la première équation (48a) est un terme de couplage des contraintes sur le champ de vitesse qui doit satisfaire à la fois à l'équation de Navier-Stokes et à l'équation de continuité. Si $dr = 0$ alors on retrouve une méthode de prédiction classique où les composantes de cette équation sont résolues séparément. Pour $dr \to \infty$, le champs est bien à divergence nulle mais ne satisfait pas les équations de Navier-Stokes. La satisfaction des deux contraintes n'est possible qu'associée à un processus itératif interne au Lagrangien Augmenté. Telle quelle cette méthode est robuste et efficace mais conduit à une convergence faible sur l'incompressibilité et à des temps de calcul prohibitifs pour des approximations élevées.

La technique proposée consiste à garder la formulation implicite de Lagrangien Augmenté comme étape de prédiction. Le champ de vitesse $\boldsymbol{u}^*$ qui correspond à la solution de l'algorithme du Lagrangien Augmenté est alors une approximation de la solution à divergence non nulle. Il correspond à une prédiction du champ de vitesse. Les champs $\boldsymbol{u}|^n, p|^n$ correspondent à l'instant qui précède la résolution de l'algorithme du Lagrangien Augmenté.

Suivant la raideur du problème physique posé, l'augmentation du paramètre *dr* permettra de converger vers la solution avec des pas de temps raisonnables. Dans la méthode de projection vectorielle, à la différence des méthodes de projection classiques, seule la correction de la vitesse $\boldsymbol{u}$' sera prise en compte pour calculer le champ à divergence nulle $\boldsymbol{u}|^{n+1}$ ([CALTAGIRONE 99]) et sera calculée directement par :

$$\boldsymbol{u}|^{n+1} = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}' \tag{49}$$

$\boldsymbol{u}|^{n+1}$ vérifie :

$$\begin{aligned} &\rho|^n \left(\frac{\boldsymbol{u}|^{n+1} - \boldsymbol{u}|^n}{\Delta t} + \boldsymbol{u}|^n . \nabla \boldsymbol{u}|^{n+1} \right) \\ &= \rho|^n g - \nabla p|^n + \nabla . \left[\mu|^n \left(\nabla \boldsymbol{u}|^{n+1} + \nabla^t \boldsymbol{u}|^{n+1} \right) \right] + dr \nabla \left(\nabla . \boldsymbol{u}|^{n+1} \right) \end{aligned} \tag{50}$$

En remplaçant $\boldsymbol{u}|^{n+1}$ par $\boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}'$ dans (49), et en prenant $dr \to \infty$ nous obtenons la forme finale de l'équation correspondant à l'étape de correction qui nous permet de déterminer la correction de vitesse $\boldsymbol{u}$' :

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}') = -\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^*) \tag{51}$$

Les champs de vitesses $\boldsymbol{u}|^{n+1}$ et $\boldsymbol{u}^*$ satisfont tous deux les conditions aux limites physiques du problème. Nous pouvons en déduire les conditions aux limites sur u' qui sont des conditions aux limites homogènes.

Nous pouvons donc écrire le nouvel algorithme de résolution sous la forme du **Tableau 2**.

- ***Initialisation :*** $\boldsymbol{u}\big|^{k=0} = \boldsymbol{u}\big|^{n}$ et $p\big|^{k=0} = p\big|^{n}$
- ***Itérations :*** Pour *k=0* à *K-1* faire
  - Calcul de $\boldsymbol{u}\big|^{k+1}$ solution de l'équation :

$$\rho\big|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}\big|^{k+1}}{\Delta t} + \boldsymbol{u}\big|^{k}.\nabla\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right) + Biu\left(\boldsymbol{u}\big|^{k+1} - \boldsymbol{u}\big|_{\infty}\right)$$
$$= \rho\big|^{n} g - \nabla p\big|^{k} + \nabla.\left[\mu\big|^{n}\left(\nabla\boldsymbol{u}\big|^{k+1} + \nabla^{t}\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right)\right] + \rho\big|^{n}\left(\frac{\boldsymbol{u}\big|^{n}}{\Delta t}\right) + dr\nabla\left(\nabla.\boldsymbol{u}\big|^{k+1}\right) \quad (52a)$$

  - Calcul de $p\big|^{k+1}$ à partir de l'équation :

$$p\big|^{k+1} = p\big|^{k} - dp\nabla.\boldsymbol{u}\big|^{k+1} \quad (52b)$$

- ***Solution du Lagrangien Augmenté :*** $\boldsymbol{u}^{*} = \boldsymbol{u}\big|^{k=K}$ et $p^{*} = p\big|^{k=K}$.
- ***Projection vectorielle :***
  - calcul de U' solution de l'équation : $\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}'\right) = -\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u}^{*}\right)$
- ***Solutions :*** $\boldsymbol{u}\big|^{n+1} = \boldsymbol{u}^{*} + \boldsymbol{u}'$ et $p\big|^{n+1} = p^{*}$

Tableau 2 : *Algorithme de la projection vectorielle*

- ***Discrétisation spatiale des équations***

L'utilisation des volumes finis sur un *maillage unique*, collocalisé pour toutes les variables, donne de bons résultats lorsqu'on veut résoudre l'équation de l'énergie ou celle du transport d'espèce. Il en est autrement pour l'équation de Navier-Stokes. [PATANKAR 80] explique que l'utilisation des volumes finis dans ces conditions ne permet pas de traiter le terme du gradient de pression dans l'équation de conservation de mouvement correctement. En effet, la variation de pression prise en compte ne se fait pas entre deux nœuds successifs mais d'un nœud sur deux. En utilisant l'exemple 1D d'une pression en zigzag (**Figure 5**), ([PATANKAR 80]) montre que le terme dp/dx est considéré comme nul et donc que la pression est uniforme, ce qui est faux.

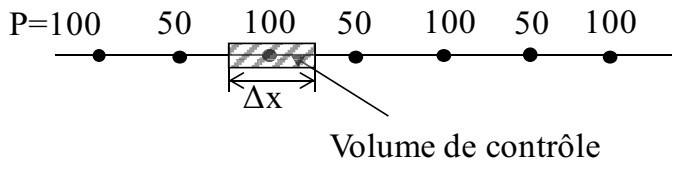


Figure 5 : *Champs de pression en zigzag*

Il propose donc comme solution l'utilisation d'un *maillage décalé* introduit par Harlow quand il a présenté la méthode MAC (Marker And Cells) ([HARLOW 65]). Celui-ci est constitué d'une *grille de pression* sur laquelle les variables scalaires (température, pression, concentration…) sont calculées et d'une grille de vitesse pour le champ de vitesse (voir **Figure 6**). Le calcul du gradient de pression et de la divergence de la vitesse est facilité par la structure du maillage décalé. Cela permet d'éviter les oscillations en pression observées pour un maillage non décalé.

Si on considère un écoulement à deux fluides (μ_1 viscosité du *fluide 1*, et μ_2 celle du *fluide 2*), la détermination des termes de cisaillement dans le tenseur des viscosités nécessite la connaissance de la viscosité au centre des mailles de la grille de pression. La viscosité étant connue sur les nœuds de pression, il suffit de l'interpoler au centre des mailles. Cependant, la valeur obtenue est une combinaison linéaire de μ_1 et μ_2, ce qui n'est pas très satisfaisant.

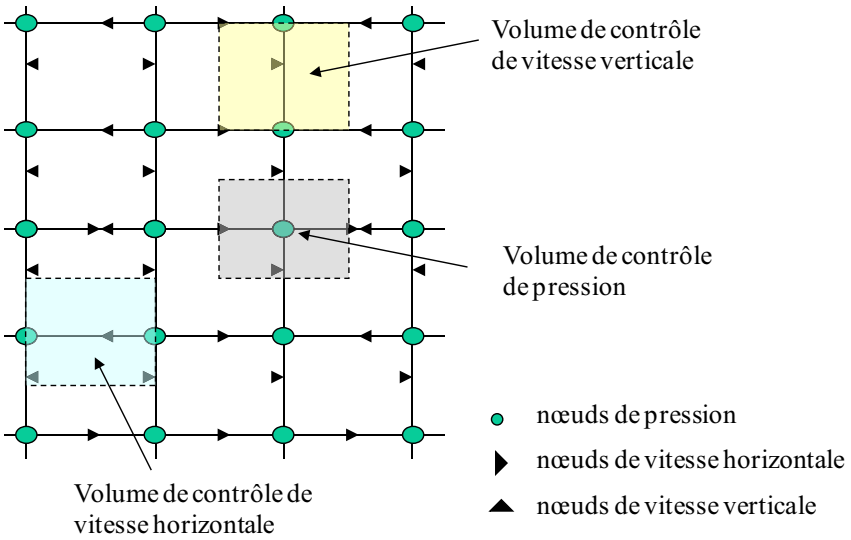


Figure 6 : *Maillage décalé de type MAC*

Une grille de viscosité a donc été ajoutée aux autres grilles (**Figure 7**). Les nœuds de la grille de viscosité se situent aux centres des mailles de la grille de pression. Ceci permet grâce à la fraction volumique de mettre en ces nœuds la valeur de la viscosité du fluide correspondant. La discrétisation s'effectue suivant la méthode des volumes finis consistant à intégrer les équations locales de conservations sur chaque volume de contrôle. En intégrant le terme convectif, il faut déterminer, à l'aide d'un schéma d'advection, la valeur de la variable en question au niveau des interfaces où elle n'est pas définie. Ces valeurs sont obtenues par interpolation puisque ce ne sont pas des points du maillage où est définie la variable. La vitesse est quant à elle calculée en ces points puisque nous utilisons un maillage décalé en vitesse-pression.

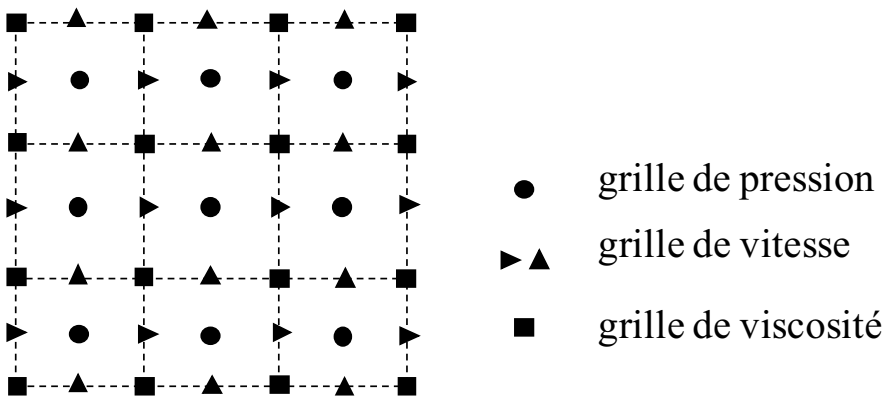


Figure 7 : *Maillage décalé de type MAC auquel on a rajouté une grille de viscosité*

La nature du schéma influence fortement le résultat final. Les plus classiques sont les schémas *centrés*, *Upwind*, *hybrides*, *Quick* ou *double amont*. Chacun d'eux est une approximation et dénature l'équation de transport. On peut monter, par des développements de Taylor ([THEBAULT 95]), que cela équivaut à résoudre une équation de transport à laquelle est ajoutée un terme de diffusion, ce qui en fait des schémas plus ou moins diffusifs selon leur ordre de développement. Le schéma *Upwind* d'ordre 1 diffuse fortement à l'approche des forts gradients, alors que le schéma *Quick*, d'ordre 2, est moins sensible à ce problème mais oscille assez fortement. Le schéma *centré*, d'ordre 2, est rapidement instable à proximité des forts gradients.

Ces problèmes sont particulièrement importants pour les écoulements diphasiques et afin d'éviter la diffusion et l'oscillation, nous avons utilisé deux autres techniques dans le code numérique. Nous avons, d'une part, un schéma *TVD* (Total Variation Diminishing)

([VINCENT 99]) qui est d'ordre 2 sur des zones à faible gradient, et dont les flux sont limités pour éviter les oscillations inhérentes aux schémas d'ordre élevés au niveau des forts gradients. La seconde technique n'est applicable qu'au simple transport d'interface entre deux fluides. C'est la méthode *VOF-CIAM* qui est une méthode géométrique de reconstruction d'interface affine par morceaux.

Les termes de diffusion et du Lagrangien Augmenté rencontrés dans l'équation de Navier-Stokes sont discrétisés avec un schéma centré d'ordre 2. Pour estimer les propriétés physiques des fluides et solides aux interfaces des volumes de contrôle, on procède à une interpolation linéaire ou géométrique.

- ***Schéma centré***

C'est le plus simple qui soit. Notons Φ la variable de résolution. La variable $\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}}$ à l'interface est évaluée linéairement à partir d'une formule de Taylor tronquée à l'ordre 1. Cela revient, à faire une moyenne pondérée entre les nœuds $\Phi\big|_{i}$ et $\Phi\big|_{i+1}$. Elle s'écrit :

$$\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta xc_{i+1}\Phi\big|_{i} + \Delta xc_{i}\Phi\big|_{i+1}}{2\Delta xg_{i+1}} \tag{53}$$

Et devient une simple moyenne arithmétique dans le cas d'un maillage uniforme :

$$\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Phi\big|_{i} + \Phi\big|_{i+1}}{2} \tag{54}$$

- ***Schéma Upwind ou simple-amont***

La valeur $\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}}$ est remplacée par celle située en amont de l'interface. Il s'écrit de la façon suivante :

$$\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \Phi\big|_{i} & si \quad u\big|_{i+1} > 0 \\ \Phi\big|_{i+1} & si \quad u\big|_{i+1} < 0 \end{cases} \tag{55}$$

- ***Schéma hybride***

Il est basé sur le nombre de Péclet exprimant le rapport entre les forces convectives et les forces diffusives. Ce nombre détermine le type de schéma utilisé :

- dans le cas où Pe ≤ 2, il est équivalent au schéma *centré*.
- lorsque Pe >> 2, son comportement se rapproche de celui du schéma *Upwind*.

- ***Schéma Quick***

La valeur $\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}}$ est évaluée grâce à l'interpolation quadratique à partir de deux nœuds situés en amont et d'un nœud situé en aval de l'interface [LEONARD 79] :

- Dans le cas où la vitesse $u\big|_{i+\frac{1}{2}}$ est négative, une interpolation polynomiale à partir des valeurs $\Phi\big|_i$, $\Phi\big|_{i+1}$ et $\Phi\big|_{i+2}$ est effectuée :

$$\begin{aligned}\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{(\Delta xc_{i+1} + 2\Delta xg_{i+2})\Delta xc_{i+1}}{(\Delta xc_i + \Delta xc_{i+1})(\Delta xc_i + 2\Delta xg_{i+2} + \Delta xc_{i+1})}\Phi\big|_i \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(\Delta xc_{i+1} + 2\Delta xg_{i+2})\Delta xc_i}{(\Delta xc_i + \Delta xc_{i+1})\Delta xg_{i+2}}\Phi\big|_{i+1} \\ &- \frac{1}{2}\frac{\Delta xc_i \Delta xc_{i+1}}{(\Delta xc_i + 2\Delta xg_{i+2} + \Delta xc_{i+1})\Delta xg_{i+2}}\Phi\big|_{i+2}\end{aligned} \tag{56}$$

- quand la vitesse $u\big|_{i+\frac{1}{2}}$ est positive, l'interpolation est réalisée à partir des valeurs $\Phi\big|_{i-1}$, $\Phi\big|_i$ et $\Phi\big|_{i+1}$:

$$\begin{aligned}\Phi\big|_{i+\frac{1}{2}} &= -\frac{1}{2}\frac{\Delta xc_i \Delta xc_{i+1}}{(\Delta xc_i + 2\Delta xg_{i+2} + \Delta xc_{i+1})\Delta xg_i}\Phi\big|_{i-1} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{(\Delta xc_i + 2\Delta xg_i)\Delta xc_{i+1}}{(\Delta xc_i + \Delta xc_{i+1})\Delta xg_i}\Phi\big|_i \\ &+ \frac{(\Delta xc_i + 2\Delta xg_i)\Delta xc_i}{(\Delta xc_i + \Delta xc_{i+1})(\Delta xc_i + 2\Delta xg_i + \Delta xc_{i+1})}\Phi\big|_{i+1}\end{aligned} \tag{57}$$

- dans le cas d'un maillage uniforme, nous avons alors :

$$\Phi\Big|_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{8}\Phi\Big|_{i} + \frac{3}{4}\Phi\Big|_{i+1} - \frac{1}{8}\Phi\Big|_{i+2} & si \quad u\Big|_{i+\frac{1}{2}} < 0 \\ -\frac{1}{8}\Phi\Big|_{i-1} + \frac{3}{4}\Phi\Big|_{i} + \frac{3}{8}\Phi\Big|_{i+1} & si \quad u\Big|_{i+\frac{1}{2}} > 0 \end{cases} \tag{58}$$

Les comportements de ces différents schémas au niveau de l'interface $i+\frac{1}{2}$ sont illustrés par la **Figure 8**.

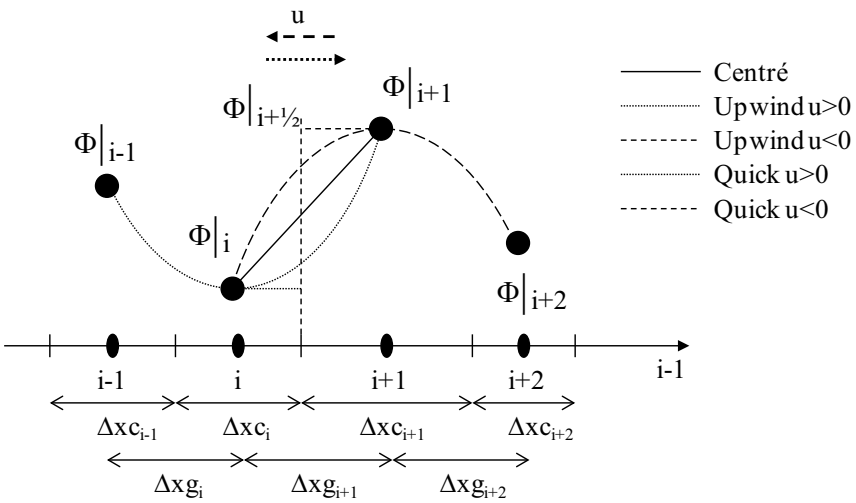


Figure 8 : *Schémas numériques pour l'évaluation de Φ à l'interface* $i+\frac{1}{2}$

2.4. Discrétisation et résolution du transport d'interface

Pour un écoulement diphasique, le modèle 1-fluide est utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes. Le transport de l'interface est réalisé par la méthode *VOF* (Volume Of Fluids) de ([HIRT 81]).

Cette méthode consiste à repérer chaque fluide $i \in [1,2]$ par une fonction de phase, appelée fonction de phase ou encore fonction couleur C_i, propre à chaque fluide $i, i \in [1,2]$, définie par :

$$C_i(M,t) = 1, \forall M \in fluide_i$$
$$C_i(M,t) = 0, \forall M \notin fluide_i \tag{59}$$

Elle permet de représenter la fraction de fluide i dans chaque maille et donc de calculer la position de l'interface au cours du temps grâce à l'équation d'advection :

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(C_i) = 0 \tag{60}$$

La masse volumique et la viscosité sont directement recalculées à partir de la valeur de la fonction de couleur.

Dans le contexte *VOF*, on peut résoudre l'équation d'advection de plusieurs façons :

La première méthode consiste à la discrétiser en utilisant un schéma *TVD* ou *WENO* de préférence (se référer à [HIRSCH 90], [LEVEQUE 90] et [VINCENT 99]). Celle-ci introduit de la diffusion numérique sur deux à trois mailles autour de l'interface. On ne connaît donc la position de l'interface qu'approximativement.

La deuxième méthode, appelée *VOF-CIAM*, développée par [YOUNGS 82] et utilisé par [ZALESKI] par exemple, consiste à utiliser l'équation d'advection pour reconstruire géométriquement l'interface. Ceci permet de connaître l'interface de manière très précise. Cependant, cette méthode a tendance à fractionner l'interface lorsque celle-ci est trop fine ou fortement cisaillée.

La prise en compte des tensions superficielles se fait par l'ajout de la force de tension superficielle F_{TS} comme terme source de l'équation de conservation des mouvements ([BRACKBILL 90]).

$$F_{TS} = -\gamma \nabla C_i \nabla \cdot \left(\frac{\nabla C_i}{\|\nabla C_i\|} \right) \tag{61}$$

Avec γ le coefficient de tension superficielle.

2.5. Résolution des systèmes linéaires

Les systèmes linéaires provenant de la discrétisation des équations des conservations de la masse et de mouvement sont extrêmement creux. Seul un nombre restreint de diagonales non nulles intervient dans la résolution.

Les méthodes itératives classiques (Jacobi, Gauss-Seidel, relaxation…) possèdent un taux de convergence extrêmement lent du fait de la détérioration de leur conditionnement avec l'augmentation de la dimension de la matrice. Elles ne sont donc pas forcément les plus adaptées à la résolution de nos systèmes linéaires. On utilise un solveur itératif de type *Bi-Gradient Conjugué Stabilisé* (Bi-CGStab). Cet algorithme, employé pour résoudre des systèmes composés de matrices régulières quelconques, a démontré des performances plus élevées en termes de convergence que la plupart des méthodes itératives ([VANDERVORST 92]).

On considère le système linéaire $A.x = b$, de rang N quelconque. Partant d'un $x°$ initial, les itérations de gradient conjugué sont répétées jusqu'à ce que le résidu (noté r^k) soit inférieur à une valeur donnée. Une description de cet algorithme est représentée par le **Tableau 3** :

- ***Initialisation :***

$$x = x^0 \in \Re^n$$

$$r^0 = b - Ax^0$$

$$\hat{r}^0 = r^0$$

$$p^0 = r^0$$

- ***Itérations :*** Pour $k=1$ à K faire :

$$\alpha^{k-1} = \frac{(\hat{r}^0, r^{k-1})}{(\hat{r}^0, Ap^{k-1})}$$

$$s^{k-1} = r^{k-1} - \alpha^{k-1} Ap^{k-1}$$

$$\lambda^{k-1} = \frac{(As^{k-1}, s^{k-1})}{(As^{k-1}, As^{k-1})}$$

$$x^k = x^{k-1} + \alpha^{k-1} p^{k-1} + \lambda^{k-1} s^{k-1}$$

$$r^k = s^{k-1} - \lambda^{k-1} A s^{k-1}$$

$$\beta^k = \frac{\alpha^{k-1}}{\lambda^{k-1}} \frac{(\hat{r}^0, r^k)}{(\hat{r}^0, r^{k-1})}$$

$$p^k = r^k + \beta^k (p^{k-1} - \lambda^{k-1} A p^{k-1})$$

Tableau 3 : *Algorithme du bi-gradient conjugué stabilisé*

Nous utilisons, pour cela, le pré-conditionnement qui consiste à trouver les matrices *T* triangulaire inférieure et *S* triangulaire supérieure, telles que :

$$A = TS - R = C - R \tag{62}$$

où *T* et *S* doivent être très creuses et *R* doit être aussi voisine de 0 que possible. *C=TS* est une matrice de pré-conditionnement. Dans le cas du pré-conditionnement MILU0, qui est le plus efficace dans les problèmes que nous avons à traiter, on donne à $R = C - A$ la structure suivante :

$$R = \hat{R} + D \tag{63}$$

où *D* est une matrice diagonale strictement positive, qui s'écrit sous la forme $D = \delta diag(A)$ (avec $\delta = 0.9$ dans notre cas ([KHADRA 90])).

On résout alors le système :

$$C^{-1} A \cdot x = C^{-1} \cdot b \text{, pour lequel, } cond(C^{-1} A) << cond(A) \tag{64}$$

$$(TL)^{-1} A \cdot x = (TL)^{-1} \cdot b \tag{65}$$

$$L^{-1} T^{-1} A \cdot x = L^{-1} T^{-1} \cdot b \tag{66}$$

Ainsi dans l'algorithme du bi-gradient conjugué, chaque produit matrice vecteur $A \cdot x = y$ sera suivi du calcul de $T^{-1} \cdot y = z$ qui revient à effectuer une étape de descente et donc à résoudre $T \cdot z = y$, ce qui nous donne z, puis $S^{-1} \cdot z = w$ par une étape de remontée $S \cdot w = z$ on obtiendra *w*.

On applique la même transformation au second membre : $T^{-1} \cdot b = c$ nous donne c en résolvant par descente $T \cdot c = b$ et $L^{-1} \cdot c = d$ nous donne d par remontée sur $L \cdot d = c$.

2.6. Traitement des conditions aux limites

L'imposition des conditions aux limites se fait via une méthode de pénalisation qui a été développée au laboratoire TREFLE par [ANGOT 89] et [KHADRA 94]. Celle-ci s'applique aux différents types de conditions aux limites : Dirichlet, Neumann. On considère Φ l'inconnue scalaire représentant la température ou la concentration massique et $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ l'inconnue vitesse. Posons $\Phi_\infty(M,t)$ (respectivement $\boldsymbol{u}_\infty(M,t)$) la valeur de Φ (respectivement $\boldsymbol{u}$) en un point *M* quelconque à l'extérieur du domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. La méthode consiste à l'exprimer les conditions aux limites sous la forme d'un flux surfacique :

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = Bi\Phi\left(\Phi_{\partial\Omega} - \Phi_\infty\right) \tag{67}$$

$$-\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = Bi\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{u}_{\partial\Omega} - \boldsymbol{u}_\infty\right) \tag{68}$$

$Bi\Phi$ est un réel et $Bi\boldsymbol{u}$ est un tenseur d'ordre deux diagonal (Biu_1, Biu_2) qui sont soit nul, soit infini.

Si $Bi\Phi = 0$ alors $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0$. C'est donc une condition de Neumann qui est imposée.

Si $Bi\Phi \to \infty$ alors $\Phi_{\partial\Omega} = \Phi_\infty$. C'est donc une condition de Dirichlet qui est imposée.

Si $Bi\boldsymbol{u} = 0$ alors $\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0$. C'est donc une condition de Neumann qui est imposée.

Si $Bi\boldsymbol{u} \to \infty$ alors $\boldsymbol{u}_{\partial\Omega} = \boldsymbol{u}_\infty$. C'est donc une condition de Dirichlet qui est imposée.

Numériquement, cette approche se traduit par l'introduction de terme $Bi\Phi\left(f_\Phi - \Phi_\infty\right)$, où f_Φ est une fonction de Φ, dans l'équation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(\Phi) = \nabla \cdot (K \nabla \Phi) \tag{69}$$

ce qui donne l'équation suivante à résoudre pour les scalaires :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla(\Phi) + Bi\Phi\left(f_\Phi - \Phi_\infty\right) = \nabla \cdot (K \nabla \Phi) \tag{70}$$

$Bi\Phi$ est un réel indiquant l'appartenance du point M à l'intérieur du domaine d'étude ou aux limites et le type de condition à imposer.

Celui-ci vérifie :

- $Bi\Phi = 0$ si M appartient à l'intérieur du domaine Ω.
- $Bi\Phi = 10^{40}$ si $M \in \partial\Omega$ pour une condition de Dirichlet.
- $Bi\Phi = 0$ si $M \in \partial\Omega$ pour une condition de Neumann. Plus précisément, si le voisin du nœud M est à l'extérieur du domaine, il est remplacé par son symétrique par rapport à la limite.

Quant à la fonction f_Φ, elle permet d'appliquer la condition aux limites souhaitée. Par exemple, pour une condition de Dirichlet, on veut imposer $\Phi_{\partial\Omega} = \Phi_\infty$. On a donc $\forall M \in \partial\Omega, f_\Phi(M) = \Phi(M), Bi\Phi = 10^{40} \Rightarrow Bi\Phi\left(f_\Phi - \Phi_\infty\right) = 10^{40}\left(\Phi(M) - \Phi_\infty\right)$.

De même que pour les scalaires, le traitement des limites par la méthode de pénalisation pour les vitesses se traduit numériquement par l'insertion du vecteur $Bi\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{u}_{\partial\Omega} - \boldsymbol{u}_\infty\right) = \left(Biu_1\left(f_{u_1} - u_{1\infty}\right), Biu_2\left(f_{u_2} - u_{2\infty}\right)\right)$, où $\left(f_{u_1}, f_{u_2}\right)$ est une fonction discrète de $\left(u_1, u_2\right)$, dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, soit :

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})-\boldsymbol{u}\nabla_{\circ}(\boldsymbol{u})\right)+Bi\boldsymbol{u}(\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}_{\infty})=-\nabla p+\rho g+\nabla_{\circ}\left(\mu\left(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla^{T}\boldsymbol{u}\right)\right) \tag{71}$$

Biu_1 (respectivement Biu_2) est un réel indiquant l'appartenance du point M_{u_1} (respectivement M_{u_2}) à l'intérieur du domaine d'étude ou sur ses limites et le type de condition imposée.

Chacun vérifie :

- $Biu_1 = 0$ si M_{u_1} appartient à l'intérieur du domaine *Ω*.
- $Biu_1 = 10^{40}$ si $M_{u_1} \in \partial\Omega$ Pour une condition de Dirichlet.
- $Biu_2 = 10^{40}$ si $M_{u_2} \in \partial\Omega$ Pour une condition de Dirichlet.

Pour une condition de Neumann où $M_j \in \partial\Omega, j \in \{u_1, u_2\}$, on impose $Bij = 10^{40}$ à la composante de vitesse normale à la limite. On impose $Bij = 0$ à la composante de vitesse tangentielle à la limite et on applique la même relation de symétrie que pour le cas scalaire.

On rappelle qu'on travaille sur un maillage décalé de type *MAC*. La grille des nœuds de pression coïncide avec le domaine *Ω*. Les autres grilles étant décalées, les vitesses appartenant aux limites de leur grille étant normales à *∂Ω* sont à l'extérieur du domaine *Ω*. Quant aux vitesses appartenant aux limites de leur grille étant tangentielles à *δΩ*, elles appartiennent à cette limite. La fonction (f_{u_1}, f_{u_2}) permet d'appliquer la condition aux limites souhaitée sur $\partial\Omega$.

On détaille le cas d'une condition aux limites de Dirichlet (**Figure 9**). Soit $(u_{1\infty}, u_{2\infty})$ fixé, on impose $(u_1(M_{u_1}), u_2(M_{u_2})) = (u_{1\infty}, u_{2\infty})$.

Si on est sur une limite gauche ou droite, alors :

$$f_{u_1}\left(M_{u_1}\right)=\frac{1}{2}\left(u_W+u_E\right) \tag{72}$$

$$f_{u_2}\left(M_{u_2}\right)=u_2\left(M_{u_2}\right) \tag{73}$$

$$Biu_1=10^{40} \tag{74}$$

$$Biu_2=10^{40} \tag{75}$$

Si on est sur une limite basse ou haute, alors :

$$f_{u_1}\left(M_{u_1}\right)=u_1\left(M_{u_1}\right) \tag{76}$$

$$f_{u_2}\left(M_{u_2}\right)=\frac{1}{2}\left(w_N+w_S\right) \tag{77}$$

$$Biu_1=10^{40} \tag{78}$$

$$Biu_2=10^{40} \tag{79}$$

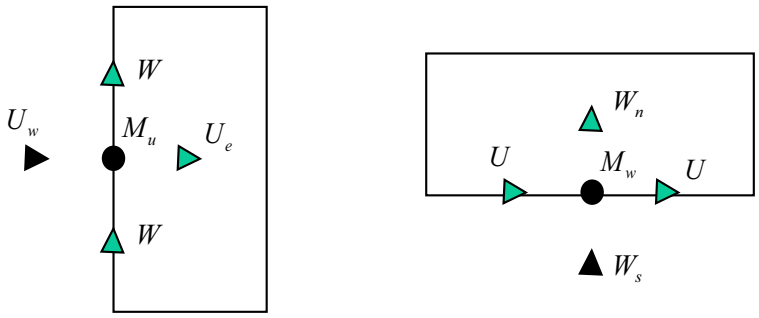


Figure 9 : *Condition aux limites à gauche et en bas*

3. Simulation du remplissage de moules dans le cas 2D isotherme

Cette section est composée de trois parties :

- Dans une première partie, on va présenter le code de calcul AQUILON développé au laboratoire TREFLE à Bordeaux pour la simulation numérique d'écoulement de fluides. Le travail présenté dans les chapitres suivants est de développer différents modules de transferts thermiques, en particulier radiatifs et de les intégrer à cette bibliothèque numérique.

- Dans une seconde partie, afin de valider le modèle à un fluide et les méthodes numériques utilisées de la bibliothèque numérique AQUILON, on va résoudre un problème diphasique simple pour lequel nous avons une solution analytique (écoulement de Poiseuille).

- Enfin, dans une dernière partie, on va simuler le remplissage de moules par du verre fondu dans le cas isotherme sous gravité ou sous pression.

3.1. Une interface de calcul conviviale

Le code de calcul AQUILON est constitué d'un exécutable, d'une bibliothèque, d'une série de fichiers FORTRAN ainsi que d'une série de fichiers de données modifiables par l'utilisateur. Ces derniers permettent de décrire le problème physique à résoudre, le type de maillage, le choix des méthodes numériques de résolution et le choix des sorties pour l'exploitation des résultats.

Il existe quatre types de fichiers de données :

- ***Le fichier « caract.par » :***

C'est une base de données contenant les caractéristiques de plusieurs fluides et solides. Elle peut être enrichie par utilisateur. On y trouve le nom du fluide ou du solide suivi de sa masse volumique, sa viscosité, sa loi de comportement… Les valeurs figurant dans ce fichier seront affectées aux tableaux correspondant en fonction du fluide choisi.

- ***Le fichier « defaut.don » :***

Il contient des paramètres par défaut tels que des critères de convergence ou le choix des méthodes numériques, ainsi qu'une liste de paramètres standard.

- ***Le fichier « castest.don » :***

Il est relatif au problème physique traité et aux méthodes choisies par l'utilisateur. Dans ce fichier figurent les différentes sections relatives à la simulation d'un problème physique :

- Type de calcul (2D ou 3D)
- Choix du maillage (à pas constant, à variation exponentielle…)
- Equations résolues (Navier-Stokes, Phillips…)
- Conditions aux limites
- Conditions initiales
- Impositions
- Mise en place d'obstacles
- Méthodes et paramètres numériques (choix des schémas, pas de temps, résidus…)
- Impressions
- Test d'arrêt
- Utilitaires

- ***Le fichier de commande « aquilon.dat »***

Il contient le nom du répertoire de données, la liste de fichiers de données et le nom du fichier des caractéristiques thermodynamiques des fluides et des solides.

La lecture des fichiers de données repose sur la reconnaissance de mots-clés. Chaque mot-clé peut-être suivi d'un ou plusieurs autres mots-clés permettant un choix entre plusieurs possibilités. Par exemple, le mot-clé CALCUL peut être suivi du mot-clé 2D ou du mot-clé 3D. Au cours de l'exécution du programme, un basculement sera donc fait vers une subroutine traitant les problèmes 2D ou 3D. Un mot-clé peut également être suivi d'une chaîne de caractères pour indiquer par exemple le nom d'un fichier, ou par une valeur numérique correspondant à une donnée d'entrée. Des exemples de ces fichiers sont présentés en **Annexe A**.

Une gestion stricte de la mémoire a été mise en place par l'utilisation de l'allocation dynamique de la mémoire. La partie haute du programme est donc écrite de façon complètement générale et s'adapte à tous les cas solvables par AQUILON sans avoir à recompiler les fichiers sources. Bien entendu, si des cas particuliers nécessitent une programmation en Fortran, celle-ci reste possible.

3.2. Ecoulement de Poiseuille diphasique 2D

Dans cette partie, nous allons étudier un écoulement de Poiseuille diphasique 2D qui est un cas test que plusieurs auteurs ont utilisé ([VINCENT 99] et [STEPHANIE 06]) pour valider le modèle à un fluide simulant l'écoulement diphasique dans le code de calcul Aquilon. Nous présentons en détail dans l'**Annexe B** la solution analytique du problème, qui correspond à l'écoulement laminaire d'une stratification horizontale de deux fluides visqueux non-miscibles entre deux plans parallèles fixes. La configuration du problème est présentée sur la **Figure 10**. On utilise un maillage *8 x 20* avec des pas uniformes. On impose un gradient de pression $\Delta p = -0.555 Pa$ qui engendre le mouvement des fluides dans le canal. On réalise la simulation pour deux fluides avec des viscosités μ_1 et μ_2 différentes et dont le rapport μ_2 / μ_1 varie entre 50 à 5000.

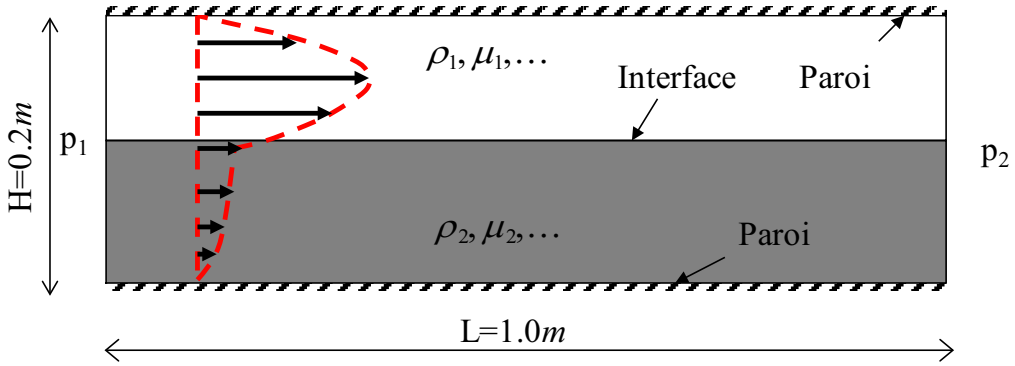


Figure 10 : *Ecoulement de Poiseuille diphasique*

Pour effectuer une comparaison pertinente entre la solution analytique du profil de vitesse et la solution numérique issue du modèle 1-fluide, il faut positionner l'interface non pas sur la valeur 0.5 de la fonction couleur mais sur la valeur $(\mu_1 + \mu_2)/2$, qui correspond à la définition de la position de l'interface par la viscosité. Or, cette position à l'intérieur d'une maille est fortement dépendante de la moyenne employée pour estimer les valeurs discrètes de μ sur le maillage de la vitesse. D'après les définitions des moyennes de la viscosité (**Figure 11**), on déduit qu'une moyenne arithmétique va favoriser la viscosité du fluide le plus visqueux alors qu'une moyenne harmonique va tendre à imposer la viscosité la plus faible dans le volume de contrôle centré sur la vitesse. Les comparaisons présentées sur la **Figure 12** tiennent compte de la position de l'interface imposée par la moyenne pour définir la zone de discontinuité des

vitesses dans la solution analytique. La résolution numérique est réalisée par le solveur lagrangien augmenté. Quelle que soit la moyenne utilisée sur la viscosité et quel que soit le rapport μ_2 / μ_1, les solutions théoriques et numériques sont confondues. Le point d'inflexion sur la vitesse longitudinale de l'écoulement est parfaitement capturé, et ceci aussi bien avec une moyenne diffuse qu'avec une moyenne discontinue. On observe en effet que l'erreur absolue E_S entre la solution théorique issue des développements de l'**Annexe B** et le profil de vitesse simulé est de l'ordre de 10^{-4} à chaque fois.

$$E_S = \max_{i,j} \left| u_{x,i,j}^{TH} - u_{x,i,j}^{1F} \right| = \left\| u_{x,i,j}^{TH} - u_{x,i,j}^{1F} \right\|_\infty = 10^{-4} \tag{80}$$

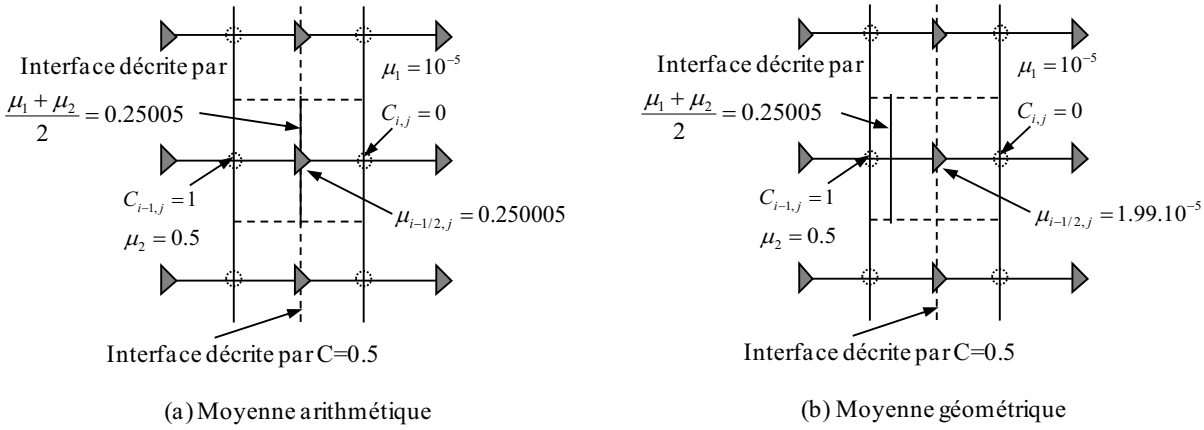


Figure 11 : *Caractérisation de la position de l'interface dépendant de la moyenne sur la viscosité*

Les composantes de cisaillement du problème de Poiseuille sont parfaitement prises en compte par la discrétisation lagrangien augmenté, et indépendamment des moyennes utilisées pour l'approximation de la viscosité sur les nœuds de discrétisation pour lesquels cette inconnue n'est pas calculée explicitement. Le choix du paramètre de convergence *r* sur la divergence, ainsi que les schémas de discrétisation en espace des termes d'advection, n'ont aucune influence sur la qualité des résultats présentés sur la **Figure 12**. Par contre, un schéma Quick couplé à une valeur de *r* égale à 1000 permet d'atteindre la solution stationnaire en 50 itérations de calcul alors qu'un schéma centré et *r*=1 fournissent un résultat identique en 100 itérations.

Nous avons effectué les mêmes simulations que celles décrites précédemment, mais avec des solveurs tour à tour explicite, projection explicite et projection implicite (**Tableau 4**).

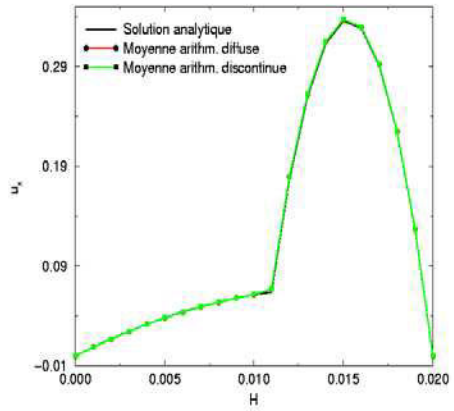
Dans tous les cas, les résultats obtenus sont les mêmes à 10^{-4} près, ce qui est l'ordre de grandeur de l'erreur entre les solutions numérique et analytique. On voit d'une part que le caractère implicite du lagrangien augmenté permet de converger en très peu d'itérations vers l'état stationnaire. D'autre part, la divergence obtenue grâce à cette méthode est meilleure de 7 ordres de grandeur par rapport à celle issue d'une discrétisation explicite. La projection de u sur un champ à divergence nulle gomme naturellement ces écarts par la résolution d'une équation de Poisson.

Le très bon accord trouvé entre les solutions analytiques et numériques du profil de vitesse de l'écoulement de Poiseuille diphasique est important car il permet d'évaluer l'influence des moyennes sur la solution d'un problème diphasique. La qualité des résultats observée sur un maillage *20x8* est conservée quand on augmente ou même quand on diminue la résolution spatiale.

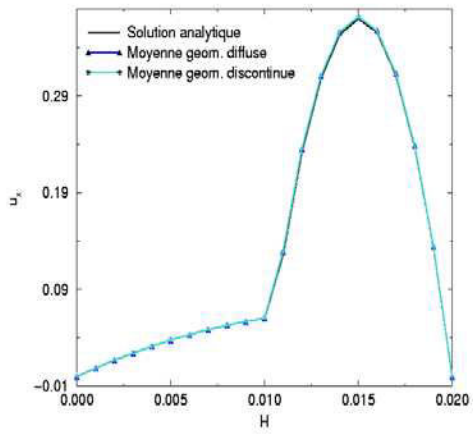
Il faut cependant préciser que dans ce problème, les composantes transversales de vitesses u_y sont identiquement nulles (y compris numériquement) et donc que la fraction volumique reste inchangée au cours du calcul dans le problème de Poiseuille. Ceci engendre une conservation de la masse qui est vérifiée à 10^{-14} près.

Méthode	***Divergence***	***Temps (minutes)***	***Itération***	E_S
Lagrangien Augmenté	10^{-12}	0.5	70	10^{-4}
Explicite	10^{-5}	10	40000	10^{-4}
Projection explicite	10^{-14}	30	40000	10^{-4}
Projection hybride	10^{-15}	2	70	10^{-4}

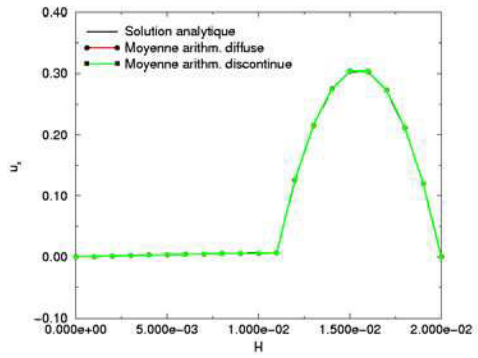
Tableau 4 : *Statistique à convergence de la solution numérique*



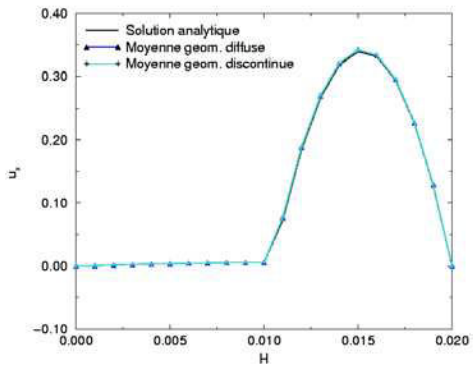
Moyenne arithmétique $(\mu_2 / \mu_1 = 50)$



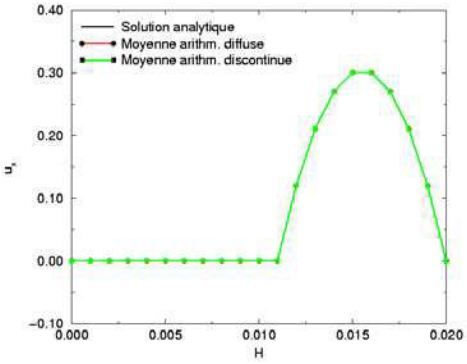
Moyenne géométrique $(\mu_2 / \mu_1 = 50)$



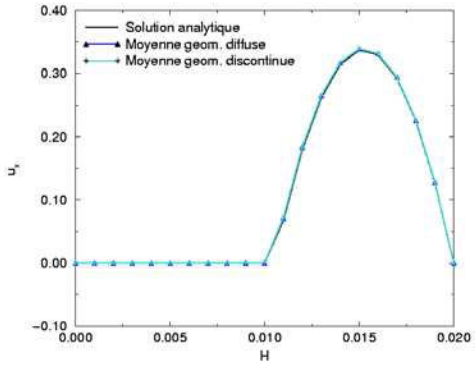
Moyenne arithmétique $(\mu_2 / \mu_1 = 500)$



Moyenne géométrique $(\mu_2 / \mu_1 = 500)$



Moyenne arithmétique $(\mu_2 / \mu_1 = 5000)$



Moyenne géométrique $(\mu_2 / \mu_1 = 5000)$

Figure 12 : *Simulation numérique sur un maillages 8x20 de l'écoulement de Poiseuille 2D par la méthode de Lagrangien Augmenté*

3.3. Remplissage de moule par un fluide visqueux dans le cas isotherme

Le remplissage de moules par un fluide visqueux intervient dans de nombreux procédés de fabrication industriels qui concernent des secteurs d'activées aussi variés que l'agroalimentaire (confection de gâteaux et de yaourts, stockage de produits gras…), l'industrie verrière (fabrication des bouteilles verre …), l'aéronautique et l'aérospatiale (mise au point de moteurs de missiles et de fusées) ou la santé et l'hygiène (pâtes dentifrice …). L'injection d'un fluide visqueux dans une enceinte confinée peut comporter diverses difficultés de mise en œuvre : une stratification du produit injecté peut être engendrée lors du remplissage et des bulles d'air peuvent être piégées à l'intérieur du moule. Il en résulte une répartition inhomogène du fluide considéré et des défauts de fabrication.

Dans cette partie, nous allons étudier le remplissage d'un moule par du verre fondu, qui a le comportement physique d'un fluide visqueux newtonien, dans deux cas différents : le remplissage par *pression* et le remplissage par *gravité*. On rappelle que les deux exemples suivants correspondent aux deux procédés de fabrication utilisés par Daum et Baccarat pour la confection d'objets en Cristal.

- ***Remplissage du moule par pression***

En utilisant les modèles physiques présentés précédemment, on va étudier l'injection du verre fondu dans une cavité qui est occupé initialement par de l'air et au milieu de laquelle se trouve un obstacle solide. La configuration considérée est présenté sur la **Figure 13**. Les caractéristiques des différents fluides en présence sont les suivants :

- Le fluide initialement présent dans la cavité est de l'Air :

$$\mu_{air} = 1.85.10^{-5}(Pa.s)$$
$$\rho_{air} = 1.1768(kg/m^3)$$

- Le fluide que nous allons injecter dans le moule est du Verre :

$$\mu_{verre} = 2500(Pa.s)$$
$$\rho_{verre} = 100(kg/m^3)$$

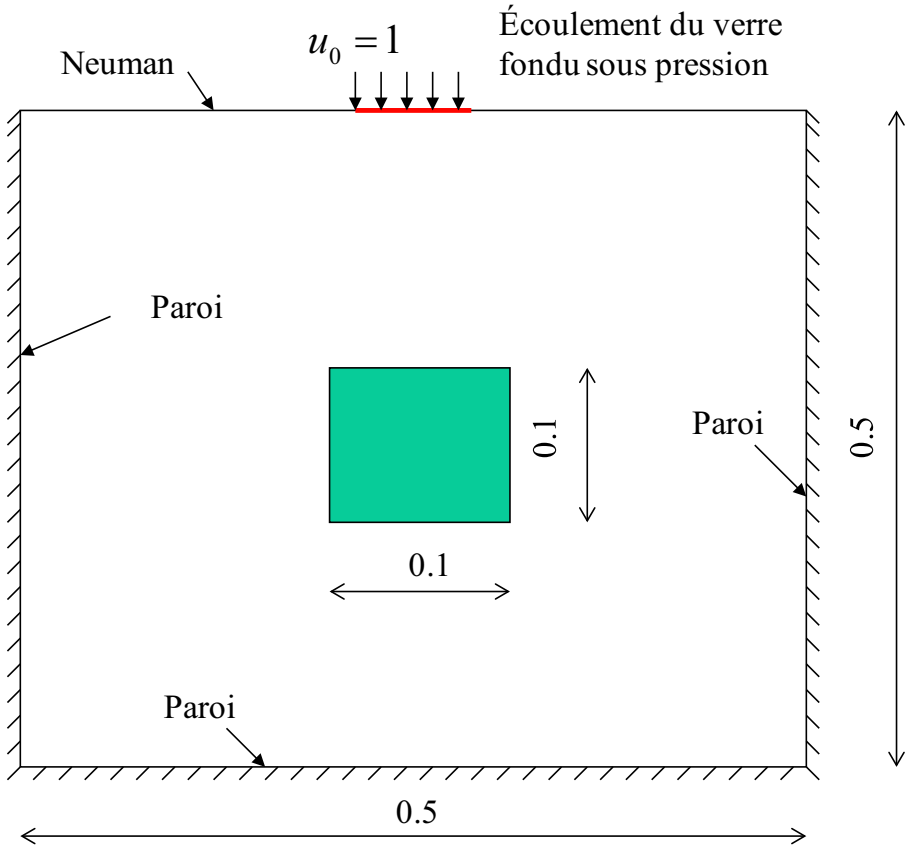


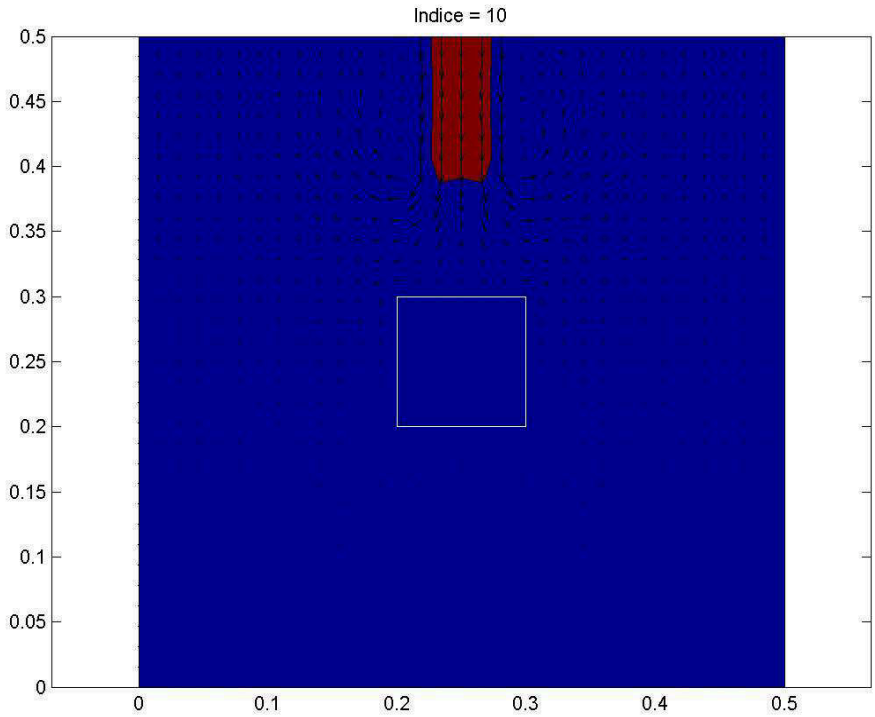
Figure 13 : *Modèle considéré dans le cas du remplissage sous pression*

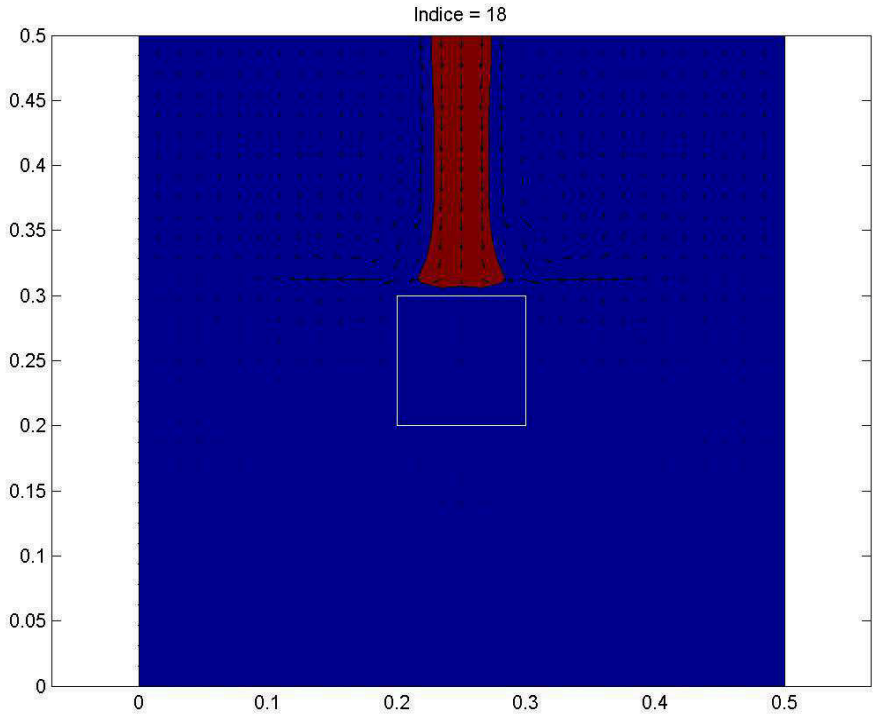
La vitesse d'injection est constante $u_0 = 1(m/s)$ et utilisons des conditions aux limites de type parois sur trois faces (à droite, à gauche et en bas) et de flux nul en sortie dans la partie supérieure de la cavité. Les résultats des simulations sont présentés sur la **Figure 14** .

Toutes les simulations effectuées dans ce paragraphe utilisent un maillage 32x32.

Durant le remplissage, le fluide va rentrer en contact avec l'obstacle solide. Il va ensuite le contourner pour atteindre finalement la partie inférieure du moule.

On constate que la gravité accélère la chute du fluide et que les contraintes visqueuses qui confèrent au jet un caractère élastique, engendrent la striction du jet.


Indice = 10
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5


Indice = 18
0.5
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

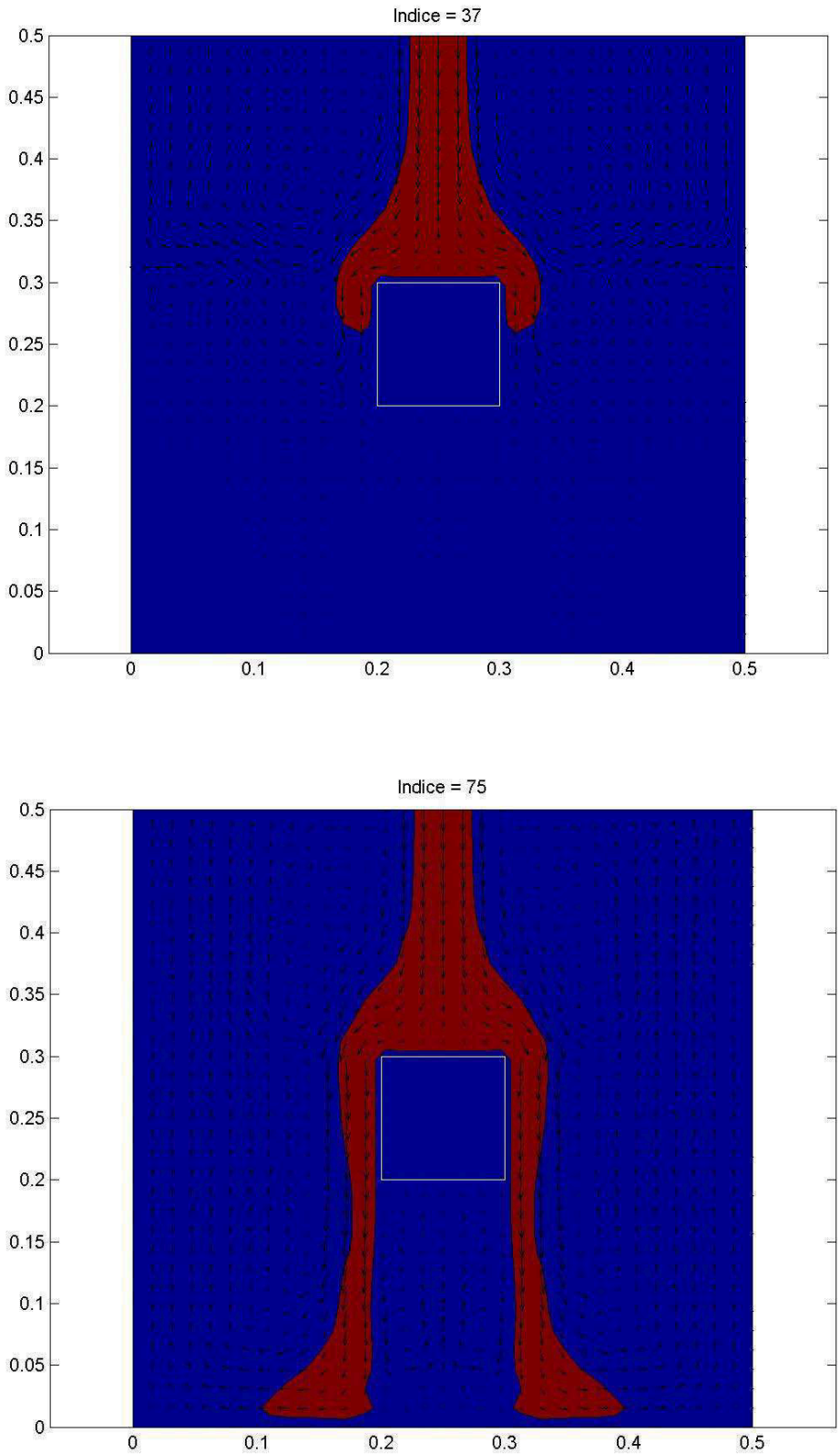


Figure 14 : *Remplissage du moule par pression (par AQUILON)*

- ***Remplissage du moule sous gravité***

Dans cette simulation, on utilise les mêmes fluides que ceux utilisés pour le remplissage sous pression. Les conditions aux limites sont de type parois pour les quatre faces du domaine. Comme dans le cas précédant, un obstacle solide est présent dans la cavité. A l'instant initial, une *quantité du verre est placée dans la cavité initialement remplie d'air. Soumis à la pesan*teur, la pâte de verre va se déformer et remplir le moule par gravité. La configuration du modèle est présentée sur la **Figure 15**. Les résultats de la simulation sont présentés sur la **Figure 16**.

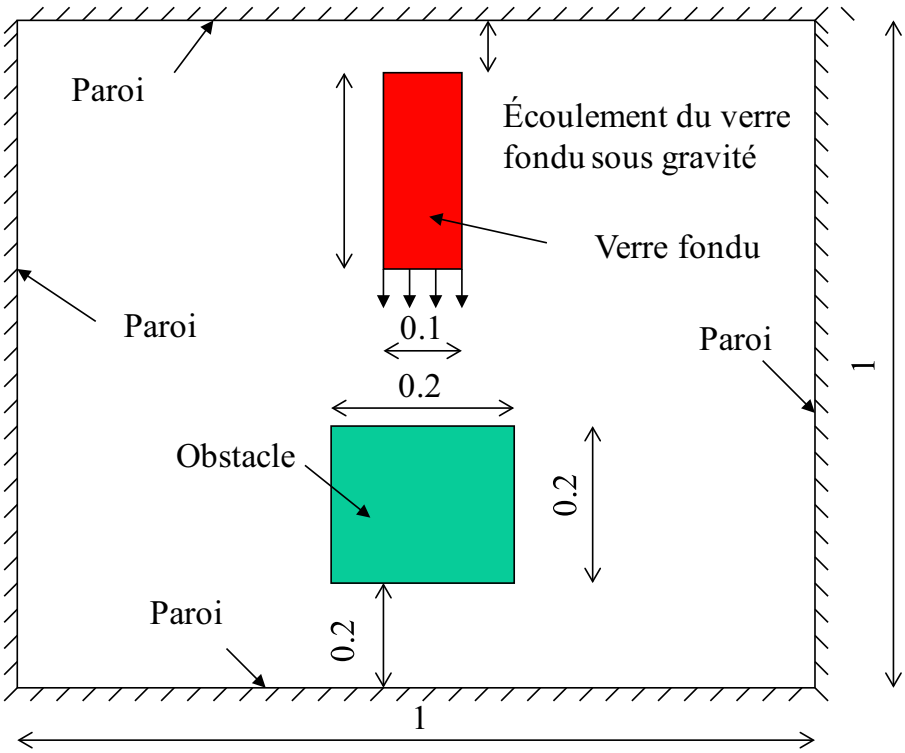
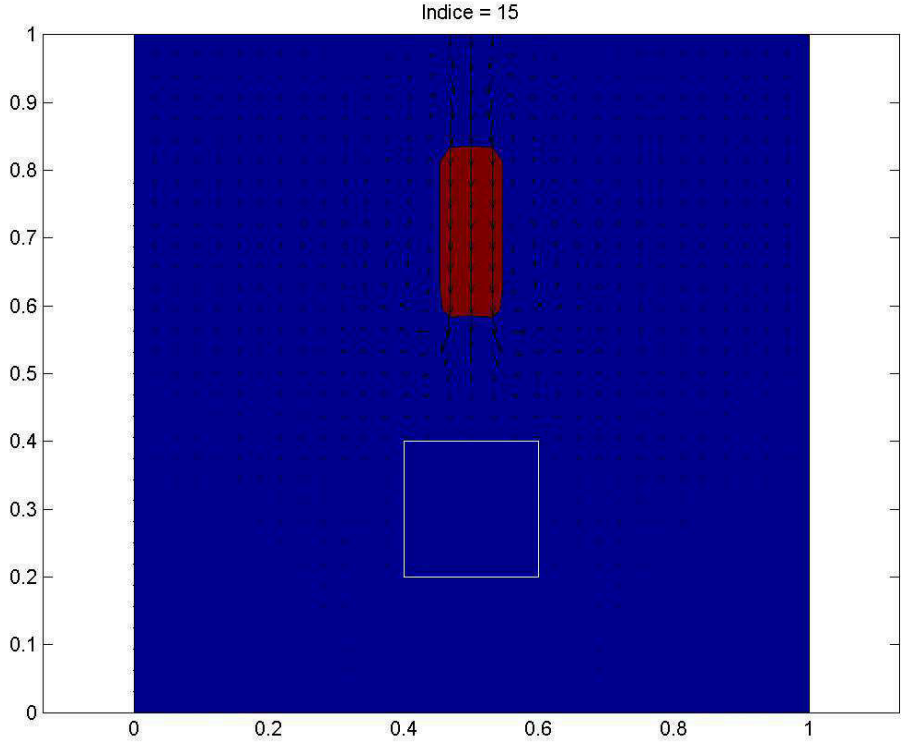
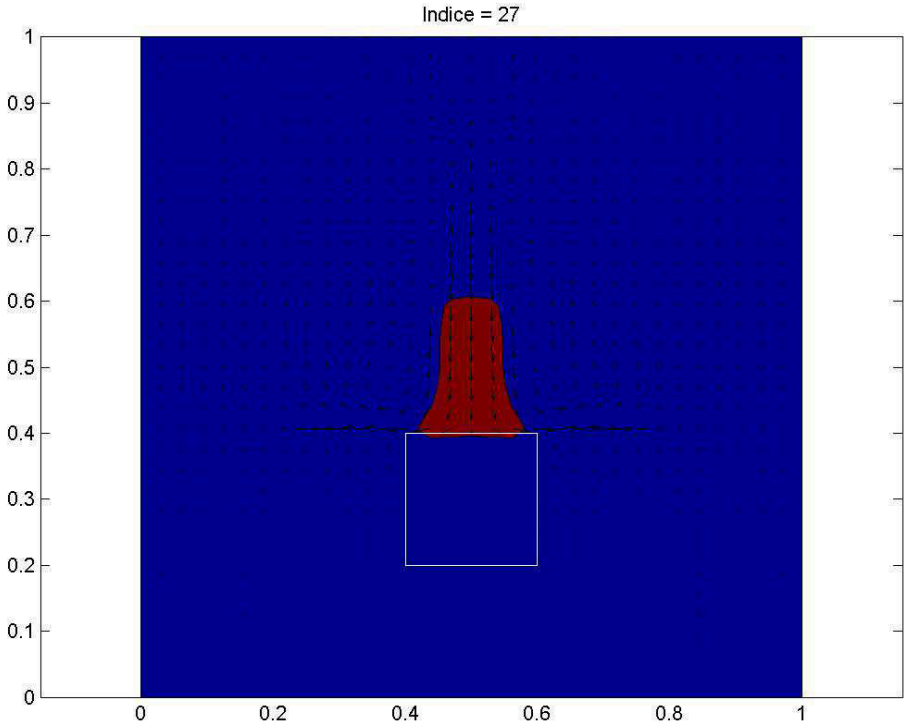


Figure 15 : *Modèle considéré dans le cas du remplissage sous gravité*


Indice = 15
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


Indice = 27
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

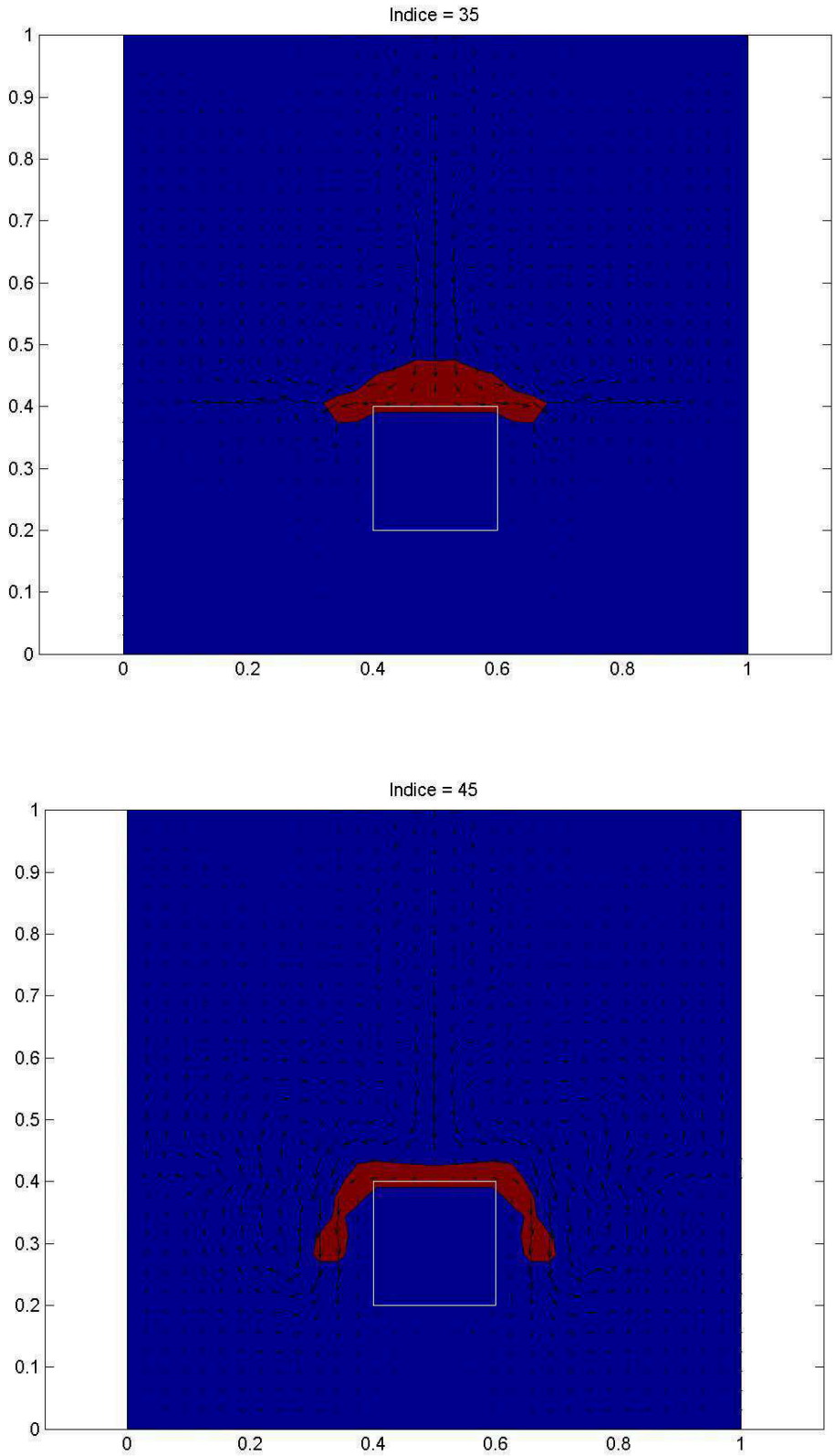


Figure 16 : *Remplissage du moule par gravité (AQUILON)*

Conclusion

Ce chapitre a permis d'établir les différentes équations à résoudre pour simuler le remplissage de moules et de présenter les différentes méthodes numériques utilisées pour leur résolution. Il a permis également à travers l'étude d'un problème de Poiseuille diphasique 2D de valider l'utilisation de la bibliothèque numérique Aquilon et de montrer l'efficacité non seulement des méthodes numériques employées mais aussi du maillage (pression, vitesse et viscosité), de la discrétisation temporelle et spatiale des équations et des schémas d'interpolation utilisés. Enfin, des premiers résultats de simulation de remplissage de moules verriers ont été présentés (cas isotherme et 2D).

Le chapitre suivant va s'attacher à mettre en place les couplages écoulement-transfert thermique, en introduisant en particulier les transferts radiatifs.

Chapitre II

Les modes de transfert thermique :

« Transferts radiatifs et Transferts couplés conducto-radiatif en milieux semi-transparent - Première approche »

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder des notions générales des transferts thermiques.

L'accent sera mis sur les transferts radiatifs en milieux semi-transparents qui représentent le point difficile dans la modélisation du remplissage des moules verriers.

L'Equation du Transfert Radiatif (E.T.R) est présentée dans sa formulation la plus générale, ainsi que les conditions aux limites radiatives associées. On en déduit le système d'équations couplées E.T.R – Equation de l'énergie.

Dans ce chapitre, une première solution du problème est donnée en introduisant la notion de « conductivité radiative ».

Une partie validation permettra de mettre en évidence le bon fonctionnement du code dans différents cas difficiles :

- Thermodépendance de la viscosité
- Thermodépendance de la conductivité thermique
- Couplage parois-fluide

Enfin, un cas complexe sera présenté montrant l'aptitude du code élaboré à traiter des écoulements diphasiques non isothermes à frontières libres, couplés à des parois solides.

1. Les transferts thermiques

L'objectif est de déterminer, dans tout système matériel physique voisin de l'équilibre thermodynamique local, les évolutions des champs de température $T(\boldsymbol{r},t)$ et des flux, quelle que soit la forme de ces flux, en vue de la maîtrise et du conditionnement thermique de ce système.

Une transformation sera dite instationnaire si, par rapport à un référentiel donné, les grandeurs physiques Φ considérées, scalaire, vecteurs ou tenseurs, dépendent explicitement du temps :

$$\frac{\partial \Phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \neq 0 \tag{81}$$

Une transformation sera dite stationnaire dans le cas contraire :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \tag{82}$$

Le transfert de chaleur est une transmission d'énergie d'une région à une autre sous l'influence d'une différence de température. La chaleur s'écoule des parties chaudes vers les parties froide jusqu'à l'égalisation des températures.

On reconnaît en générale trois modes de transmission :

- ***Conduction :*** la chaleur se propage de proche en proche, d'une particule à l'autre, d'une molécule à l'autre par choc : il n'y a pas de déplacement apparent de matière. C'est le seul mode de transmission dans les corps solides opaques aux rayonnements. Il existe aussi dans les liquides et les gaz mais simultanément avec la convection.

- ***Rayonnement :*** rayonnement électromagnétique émit par tout corps porté à une température quelconque. Un autre corps recevant ce rayonnement peut en absorber une partie : le rayonnement électromagnétique pouvant se propager dans le vide, il est ainsi possible de transporter de la chaleur sans aucun support matériel.

- ***Convection :*** transmission de la chaleur avec déplacement macroscopique de la matière, c'est le mode principal dans les fluides.

Dans l'exposé, nous séparerons chacun des trois modes mais bien souvent ils sont superposés et nous adopterons les conventions définies ci-dessous :

La puissance $d\Phi$, exprimé en W, traversant algébriquement une surface élémentaire dS, orientée par une normale $\boldsymbol{n}$ appelée flux d'énergie (ou flux de chaleur) à travers dS, s'écrit en fonction du vecteur flux surfacique d'énergie $\boldsymbol{q}$ (ou la densité du flux) (**Figure 17**):

$$d\Phi = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{83}$$

On appelle flux surfacique d'énergie (algébrique), au point M, à travers la surface dS, la quantité, exprimée en $W.m^{-2}$:

$$\varphi = \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \tag{84}$$

Pour chacun des modes de transfert cités précédemment (conduction, convection et rayonnement), nous définirons les quantités $d\Phi$, $\boldsymbol{q}$ et φ.

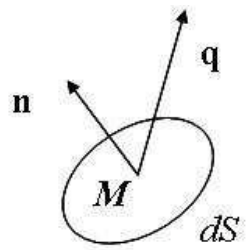


Figure 17 : *Flux d'énergie*

1.1. Transfert conductif

Le transfert d'énergie par *conduction* qui est exprimé par la loi de Fourier se produit dans tout référentiel, en particulier dans le référentiel d'un élément matériel, dès lors qu'il existe un gradient de température : il représente l'effet global du transport d'énergie par les porteurs élémentaires (molécules, phonons, électrons, etc…)

La loi de Fourier (expérimentale en 1822) stipule qu'il existe une relation linéaire entre la densité du flux et le gradient de température : dans le cas d'un milieu isotrope (fluides ou solides), la densité de flux conductif $\boldsymbol{q}^{cd}$ est proportionnelle au gradient de température locale ∇T :

$$\boldsymbol{q}^{cd} = -\lambda \nabla T \tag{85}$$

λ est une caractéristique du milieu qu'on appelle la conductivité thermique en $W / m.^0C$. Elle dépend en général de la température et du point considéré $\lambda(x, y, z, T)$, dans le cas de milieu homogène λ ne dépend que de T. Dans le cas général, les corps sont hétérogènes et anisotropes, la conductivité est un tenseur d'ordre 2. Le signe moins dans l'équation (85) provient du second principe de la thermodynamique.

La loi de Fourier ne fait pas intervenir explicitement le temps : elle postule une réponse instantanée en tout point d'un milieu à une perturbation thermique survenant en un point M. Cette hypothèse est valable tant que les échelles de temps considérées sont grandes devant celles caractérisant le transfert par collisions entre porteurs élémentaires (temps de relaxation). En pratique, la loi de Fourier est valable dans la quasi-totalité des applications.

En introduisant la loi de Fourier dans l'équation (83), on peut écrire la quantité de chaleur ayant traversé la surface dS dans un intervalle de temps dt par :

$$d\Phi = -\lambda \nabla T \cdot \boldsymbol{n} dS dt \tag{86}$$

Ou encore en employant la dérivée normale :

$$d\Phi = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} dSdt \tag{87}$$

1.2. Transfert convectif, flux convectif et conducto-convectif

- ***Le phénomène de convection***

La *convection thermique* est un transfert d'énergie par rapport à un repère donné, consécutif à un transport macroscopique de masse dans ce repère.

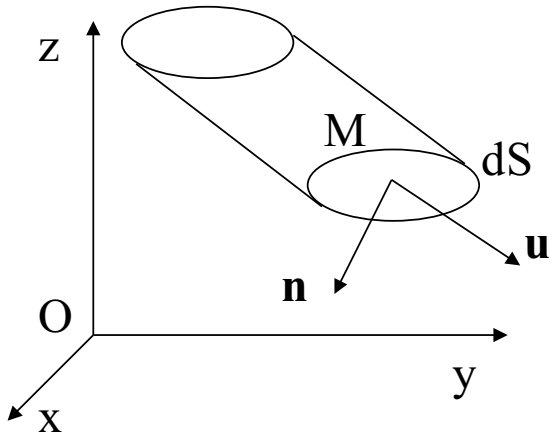


Figure 18 : *Flux convectif*

On considère l'écoulement d'un fluide ou précisément un tube de flux élémentaire, c'est-à-dire un tube auquel les lignes de vitesse sont tangentes (**Figure 18**). Ce tube de flux coupe un plan quelconque (par exemple *Oyz*) d'un repère suivant une surface élémentaire dS, autour d'un point M ; dS est dotée d'une normale orientée $\boldsymbol{n}$. Le débit de masse à travers dS, noté $d\dot{m}$ est donné par :

$$d\dot{m} = \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{88}$$

Où ρ désigne la masse volumique et $\boldsymbol{u}$ la vitesse locale du fluide par rapport à la surface dS de *Oyz*. A ce transfert macroscopique de masse est associé un transfert d'enthalpie en M par rapport à *Oyz*, caractérisé par un flux convectif $d\Phi^{cv}$:

$$d\Phi^{cv} = \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} h dS = d\dot{m} h \tag{89}$$

Où h désigne l'enthalpie massique locale du fluide en M rapportée à une origine arbitraire des températures. Le vecteur flux surfacique convectif est défini par :

$$\boldsymbol{q}^{cv} = \rho \boldsymbol{u} h \quad \text{tel que :} \quad \varphi^{cv} = \rho \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} h \tag{90}$$

On distingue traditionnellement trois types de convection.

- Un phénomène de *convection forcée* apparaît quand le mouvement du fluide est imposé par une cause mécanique extérieure au système.

- Un phénomène de *convection naturelle* thermique apparaît spontanément, sous certaines conditions, dans un fluide au sein duquel existe un gradient de température imposé par le milieu extérieur sous l'effet de la force d'Archimède.

- La *convection mixte* correspond au couplage des deux phénomènes précédents (convections naturelle et forcée) quand les vitesses d'écoulement, fictives, dues aux deux types de convection sont, considérées séparément, du même ordre de grandeur.

Quel que soit le type de convection considéré, on distingue suivant la vitesse du fluide deux régimes principaux d'écoulement : laminaire et turbulent. Considérons un écoulement dans un tube à faible vitesse, l'écoulement se fait de façon ordonnée, parallèlement aux génératrices du tube, sans brassage du fluide : c'est un *régime laminaire*. En tout point, on peut définir de façon déterministe la vitesse et la température du fluide.

Si la vitesse croît, à partir d'une *vitesse critique* u_{cr} (qui dépend de la nature du fluide, du diamètre du tube, voire de la rugosité des parois), l'écoulement est animé par des mouvements tourbillonnaires de caractère apparemment aléatoire ; le mouvement du fluide devenu *chaotique* se fait en trois dimensions. C'est un *régime turbulent*. Il n'est pas possible de prédire la vitesse et la température d'un élément de fluide à un instant donné : seules les valeurs moyennes temporelles de la température, de la vitesse et différents moments statistiques peuvent être connues.

Dans un problème de convection, il est nécessaire de déterminer à la fois les champs de vitesse et de température pour déterminer les flux d'énergie échangés dans le système.

- ***Flux surfacique conductif à une paroi, couplé au phénomène de convection***

On considère une paroi solide au contact d'un fluide en mouvement et supposons pour simplifier que les transferts radiatifs sont négligeables. Le flux surfacique conductif à la paroi S s'écrit en fonction de la conductivité du solide λ_S et du champ de température T_S, si la paroi est normale à Oy :

$$\varphi^{cd}\Big|_{pS} = -\lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial y}\Big|_p \tag{91}$$

Le transfert thermique dans le fluide à la paroi est uniquement conductif, puisque la vitesse du fluide est en ce point celle de la paroi, c'est-à-dire nulle. Le flux surfacique conductif, côté fluide, a pour expression :

$$\varphi^{cd}\Big|_{pf} = -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}\Big|_p \tag{92}$$

où λ_f et T_f représentent la conductivité et le champ de température du fluide. On a bien évidemment, en l'absence de rayonnement et pour une paroi inerte :

$$-\lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial y}\Big|_{pS} = -\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial y}\Big|_{pf} \tag{93}$$

De plus, la température est continue à la paroi.

Dans l'expression du flux conductif, côté fluide, le problème épineux est de déterminer le gradient de température à la paroi $\partial T_f / \partial y\big|_p$, qui dépend du phénomène de convection. Nous appellerons le flux associé, donnée par l'expression (92), *flux conducto-convectif* φ^{cc} à la paroi (**Figure 19**), car il résulte d'un couplage entre un phénomène conductif transverse et un

phénomène convectif dans le sens de l'écoulement. Pour le déterminer, il est nécessaire, en toute rigueur, de résoudre les problèmes thermique et mécanique couplés. Nous allons, en fait, adopté un modèle simplificateur qui représente l'effet global de la convection au moyen d'une loi dite de Newton [Newton 1749] :

$$\varphi^{cc}\Big|_{y=0} = h\left(T_p - T_\infty\right) \tag{94}$$

où T_P est la température de paroi constante maintenue dans un écoulement à température et vitesse assez loin de la paroi T_∞ et u_∞. h est appelé *coefficient de transfert convectif* à la paroi et ne dépend pas de la nature de la paroi ; h dépend uniquement des propriétés physiques du fluide (conductivité thermique, chaleur massique, masse volumique, viscosité) et de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent).

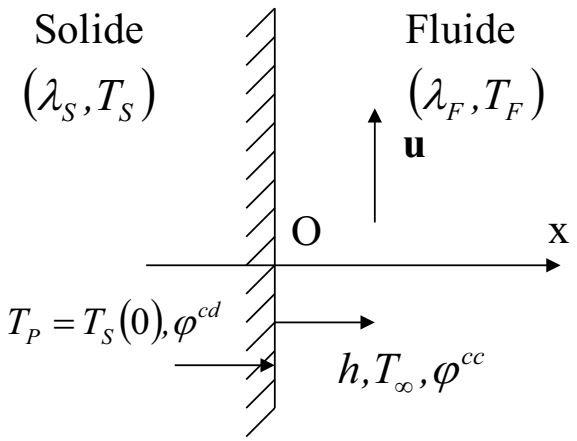


Figure 19 : *Flux conducto-convectif*

1.3. Notions de flux radiatif

Tous les corps, qu'ils soient solides, liquides ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de l'énergie interne du corps considéré. Quand cette énergie ne dépend que de la température, le rayonnement est dit « thermique », par opposition par exemple au rayonnement de luminescence. C'est ce seul type de rayonnement qui intervient dans les phénomènes de transfert de chaleur et sous le nom « rayonnement », c'est lui seul que nous considérons ici.

Le rayonnement électromagnétique est défini par sa longueur d'onde (λ) ou sa fréquence (ν) avec :

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \tag{95}$$

avec :

$$c = \frac{c_0}{n} \text{ avec } n \text{ indice de réfraction du milieu.} \tag{96}$$

$c_0 = 2{,}9979.10^8 m/s$: vitesse de la lumière dans le vide.

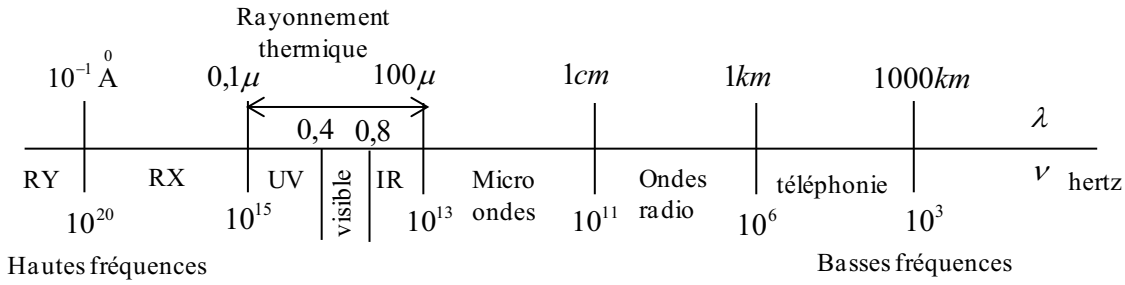


Figure 20 : *Les différents types de rayonnement électromagnétique*

Le rayonnement thermique qui concerne le thermicien est en fait une toute petite partie du rayonnement électromagnétique (**Figure 20**). Il est généralement compris entre 0,1 et 100 µm.

On distinguera trois types de milieux matériels, vis-à-vis du rayonnement : deux cas limites importants, les corps transparents et les corps opaques, et le cas général des milieux semi-transparents.

La plupart des gaz simples sont des milieux parfaitement « *transparents* », ce qui veut dire qu'ils n'interagissent pas avec le rayonnement : ni absorption, ni émission, ni réflexion.

La grande majorité des solides et des liquides sont dits « *opaques* » car ils arrêtent tout rayonnement incident (*i*) dès leur surface. Les phénomènes d'absorption (*a*), d'émission (*e*) et de réflexion (*r*) sont des phénomènes de surface (**Figure 21**). Plus précisément, nous définirons un corps opaque comme un milieu tel que la profondeur de pénétration du rayonnement η est faible devant une dimension caractéristique du système : d. Dans la mesure où un corps opaque absorbe du rayonnement (*a*), il est susceptible d'en émettre (*e*).

Le *flux surfacique radiatif* (ou *densité de flux radiatif)* φ^R est défini par la relation (97) avec la convention qui consiste à compter positivement le flux suivant Ox :

$$\varphi^R = \varphi^e - \varphi^a = \boldsymbol{q}^R \cdot \boldsymbol{n} \tag{97}$$

Dans cette expression, φ^e et φ^a sont des grandeurs arithmétiques, respectivement les *flux surfacique émis* et *flux surfacique absorbé* par le corps opaque au point O, $\boldsymbol{q}^R$ est le *vecteur flux radiatif* et $\boldsymbol{n}$ le vecteur normal unité. Les quantités φ^e et φ^a sont évidemment intégrées sur tout le spectre des longueurs d'onde (fréquences) et sur toutes les directions du demi-espace correspondant. A l'équilibre thermique, le flux radiatif φ^R est nul.

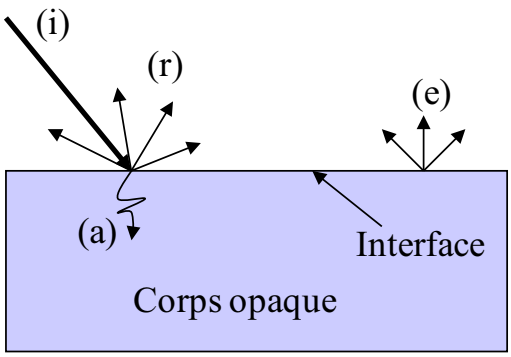


Figure 21 : *Comportement radiatif du corps opaque*

Quand le milieu n'est ni opaque, ni transparent, il est dit semi-transparent. Cette semi-transparence est évidemment fonction de la longueur d'onde et les phénomènes sont maintenant volumiques.

2. Equation du transfert radiatif (E.T.R) dans un milieu semi-transparent

2.1. Notions sur les milieux semi-transparents

Un milieu semi-transparent est caractérisé optiquement par un indice de réfraction complexe $\hat{n}_\nu = n_\nu + i\chi_\nu$. Dans cette expression, n_ν représente l'indice de réfraction du milieu et χ_ν l'indice d'extinction du milieu. L'indice complexe $\hat{n}_\nu$ dépend en général de la fréquence ν du rayonnement mais il varie également en fonction de la variable d'espace $\boldsymbol{r}$ et de la direction

Δ. Si la fréquence ν d'un rayonnement qui se propage dans un milieu semi-transparents est invariante, ce n'est pas le cas de sa longueur d'onde qui est fonction de $\boldsymbol{r}$ et de Δ :

$$\lambda(\boldsymbol{r},\Delta)=\frac{c(\boldsymbol{r},\Delta)}{\nu}=\frac{c_0}{\nu n(\boldsymbol{r},\Delta)} \qquad \text{avec : } n=\frac{c_0}{c} \tag{98}$$

où : c et c_0 représentent respectivement les vitesses de propagation du rayonnement dans le milieu et dans le vide.

C'est pourquoi, on utilise de préférence soit la fréquence ν, soit le nombre d'onde dans le vide ν/c_0 pour caractériser un rayonnement dans un milieu semi-transparent plutôt que la notion de longueur d'onde qui elle est fonction de la nature du matériau.

- ***Définition de la luminance***

Le flux radiatif monochromatique élémentaire en provenance d'une surface dS, dans un angle solide $d\Omega$, centré sur la direction Δ en un point de vecteur position $\boldsymbol{r}$ s'écrit :

$$d^5\Phi'_\nu(\boldsymbol{r},\Delta,dS,d\Omega)=L'_\nu(\boldsymbol{r},\Delta)d\Omega dS\cos(\theta)d\nu \tag{99}$$

Où :

$\theta=(\vec{n},\vec{u})$ représente l'angle entre la normale à la surface et la direction Δ.

$dS\cdot\cos(\theta)$ représente la surface apparente.

$\vec{n}$ est la normale à la surface.

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire, porté par Δ.

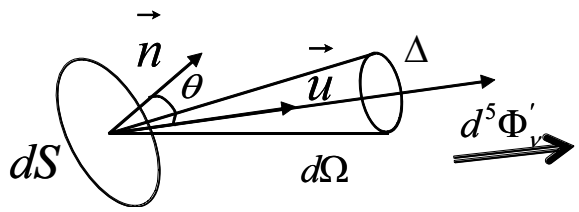


Figure 22 : *Définition de la luminance*

Cette relation constitue en fait la définition de la luminance spectrale (indice ν). Elle dépend en outre de la direction considérée Δ de l'espace, d'où l'indice supérieur ($'$) qui correspond ici à cette grandeur directionnelle. Cette double convention concernant les grandeurs spectrales et directionnelles sera adoptée dans tout ce qui suit (sauf pour l'indice optique pour lequel ces dépendances seront implicites).

- ***La luminance du rayonnement d'équilibre ou rayonnement du corps noir***

Dans le vide, la luminance du rayonnement d'équilibre $L_\nu^0(T)$ ou luminance du corps noir est une grandeur isotrope, fonction uniquement de la fréquence ν et de la température. Dans un milieu, elle dépend en plus de l'indice de réfraction et par conséquent de $\boldsymbol{r}$ et Δ :

$$L_\nu^0(\Delta, \boldsymbol{r}, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2(\boldsymbol{r}, \Delta)}\left[\exp(h\nu / kT) - 1\right]^{-1} = n^2(\boldsymbol{r}, \Delta) L_\nu^0(T) \tag{100}$$

La luminance d'équilibre n'est donc isotrope que dans la mesure où l'indice n du milieu est lui-même isotrope ou peut être considéré comme tel. Ce qui n'est pas le cas général.

- ***La conservation de l'étendue optique d'un faisceau***

Considérons des éléments de surface dS_1 et dS_2 émettant dans des angles solides $d\Omega_1$ et $d\Omega_2$, selon les directions Δ_1 et Δ_2 et faisant les angles θ_1 et θ_2 avec les normales respectives aux surfaces. Ces grandeurs sont *optiquement* conjuguées sur une trajectoire optique courbe, d'abscisse s. L'étendue optique d'un faisceau est définie par la grandeur :

$$n^2 dS \cos(\theta) d\Omega \tag{101}$$

La conservation de l'étendue optique du faisceau, s'écrit alors :

$$n_1^2 dS_1 \cos(\theta_1) d\Omega_1 = n_2^2 dS_2 \cos(\theta_2) d\Omega_2 \tag{102}$$

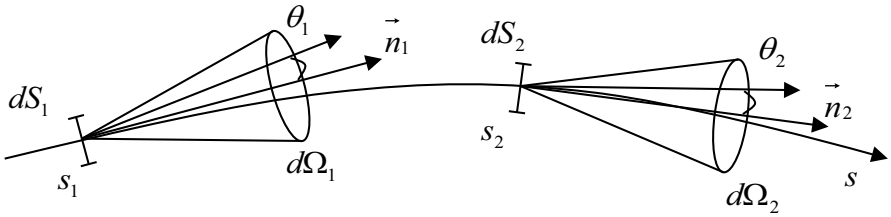


Figure 23 : *Conservation de l'étendue optique d'un faisceau*

L'équation (102) habituellement employée en optique géométrique est appelée relation de *Clausius*. Dans le domaine des transferts radiatifs, cette relation est connue sous le nom d'équation de *Lagrange-Helmoltz*.

- ***Absorption***

La caractéristique essentielle des milieux semi-transparents est qu'ils sont susceptibles d'absorber, d'émettre et de diffuser du rayonnement en chaque élément de volume, tandis que pour des corps opaques ces phénomènes étaient considérés comme superficiels.

Considérons le flux $d^5\Phi'_\nu$ associé à un rayon élémentaire se propageant dans $d\Omega$, en s, normalement à un élément de surface dS dans un milieu semi-transparent. Soit :

$$d^5\Phi'_\nu = L'_\nu \, dSd\Omega d\nu \tag{103}$$

Ce flux est en partie absorbé dans l'élément de volume dV compris entre s et $s + ds$ (soit : $dV = dSds$). D'une manière générale, l'expression algébrique du flux absorbé par un élément de volume est :

$$-d^6\Phi'^{\,a}_\nu = d^6\Phi'_\nu(s) = -\kappa_\nu L'_\nu \, dVd\Omega d\nu \tag{104}$$

κ_ν est par définition le *coefficient volumique monochromatique d'absorption* du milieu (exprimé en cm^{-1}). La relation (104) n'a de sens que si dV est arbitrairement petit, plus précisément si : $\kappa_\nu ds << 1$. On dit alors que l'élément de volume est *optiquement mince* vis-à-vis de l'absorption.

Cas particulier d'une colonne homogène et isotherme.

Pour une colonne rectiligne, de longueur *l*, homogène et isotherme, le *coefficient monochromatique d'absorption* du milieu κ_ν est uniforme. Si on considère le seul phénomène d'absorption entre *s=0* et *s=l*, le flux transmis en *s=l* s'exprime en fonction du flux incident dans la direction *Os* en *s=0*, par intégration de l'équation (104) compte tenu de l'équation (103) en posant *dV=dS.ds*. Soit :

$$d^5\Phi'_\nu(l) = \exp(-\kappa_\nu l) d^5\Phi'_\nu(0) \tag{105}$$

Ce qui fait apparaître les *transmittivité* τ'_ν et *absorptivité* α'_ν de la colonne, liées par :

$$\tau'_\nu = 1 - \alpha'_\nu = \exp(-\kappa_\nu l) \tag{106}$$

C'est la *loi de Beer ou de Bouguer en exponentielle*, rigoureuse pout tout milieu, à condition de considérer des grandeurs monochromatiques. L'intérêt de la configuration élémentaire de la colonne homogène isotherme est d'être celle à laquelle se réduit un calcul dans un milieu hétérogène et anisotherme, après discrétisation numérique.

- ***Emission***

Tout milieu susceptible d'absorber du rayonnement est susceptible d'en émettre. Le flux émis dans l'angle solide élémentaire *dΩ*, par un volume élémentaire *dV*, dans $d\nu$ est, par définition :

$$d^6\Phi'^{\,e}_\nu = \eta_\nu(s) dV d\Omega d\nu \tag{107}$$

$\eta_\nu(s)$ est appelé *coefficient monochromatique d'émission* en *s*.

Si on fait l'hypothèse de l'équilibre thermique du milieu, la luminance dans toute direction et en tout point est la luminance du rayonnement d'équilibre $n^2 L^0_\nu(T)$. Le flux absorbé est égal au flux émis, compte tenu des équations (104) et (107), il vient :

$$\eta_\nu(s) = \kappa_\nu n^2 L_\nu^0(T) \tag{108}$$

Cette relation se généralise dans l'hypothèse de faible déséquilibre du milieu semi-transparent. Dans cette hypothèse, le flux émis par l'élément de volume *dV*, dans l'angle solide *dΩ*, a pour expression :

$$d^6\Phi'^{\,e}_\nu = \kappa_\nu n^2 L_\nu^0(T) dV d\Omega d\nu \tag{109}$$

Dans le cas particulier d'une colonne homogène et isotherme, à l'équilibre thermique à la température *T*, le flux incident (en *s=0*) et le flux partant (en *s=l*) sont caractérisés par la luminance $n^2 L_\nu^0(T)$. Soit, si on considère que *dS* est normale à *Os* :

$$d^5\Phi'_\nu(0) = d^5\Phi'_\nu(l) = n^2 L_\nu^0(T) dS d\Omega d\nu \tag{110}$$

Or, $d^5\Phi'_\nu(l)$ se compose d'un flux émis et d'un flux transmis par la colonne, soit :

$$d^5\Phi'_\nu(l) = d^5\Phi'^{e}_\nu(l) + d^5\Phi'^{t}_\nu(l) \tag{111}$$

Avec :

$$d^5\Phi'^{t}_\nu(l) = \tau'_\nu\, d^5\Phi'_\nu(0) = \exp(\kappa_\nu l) n^2 L_\nu^0(T) dS d\Omega d\nu \tag{112}$$

Par définition de l'émissivité monochromatique de la colonne isotherme et homogène du milieu comprise entre *0* et *l*, on pose :

$$d^5\Phi'^{e}_\nu = \varepsilon'_\nu\, n^2 L_\nu^0(T) dS d\Omega d\nu \tag{113}$$

Soit, d'après les équations (110) à (113) :

$$\varepsilon'_\nu = 1 - \tau'_\nu = \alpha'_\nu = 1 - \exp(-\kappa_\nu l) \tag{114}$$

Les équations (113) et (114) représentent le flux globalement émis et l'émissivité globale de la colonne de longueur *l*. Elles tiennent compte de l'ensemble des phénomènes d'auto-absorption de rayonnement par la colonne, c'est-à-dire des rayonnements émis par tous les éléments *ds* entre *s* et *(s+ds)* et absorbés par les éléments *ds'* entre *s'* et *(s'+ds')* (**Figure 24**). L'expression générale de la luminance en *l* est alors, pour une colonne isotherme en faible déséquilibre avec son environnement :

$$L'_\nu(l) = \tau'_\nu L'_\nu(0) + (1-\tau'_\nu) n^2 L^0_\nu(T) \tag{115}$$

Le premier terme représente la luminance du rayonnement transmis par la colonne, le second celle du rayonnement émis globalement par celle-ci.

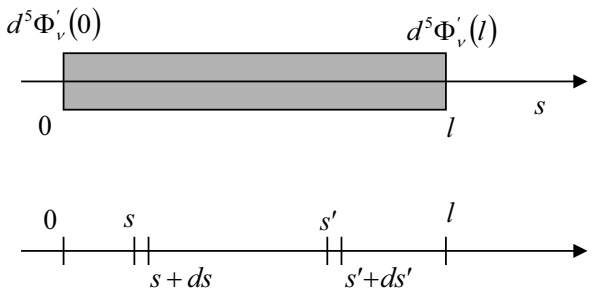


Figure 24 : *Phénomène d'autoabsorption de rayonnement par la colonne*

- ***Diffusion***

La diffusion du rayonnement est un phénomène volumique qui a deux effets (**Figure 25**) sur le flux $d^5\Phi'_\nu(s)$ qui se propage dans l'angle solide $d\Omega$:

- Un effet d'extinction (diminution du flux) qui se traduit par le fait qu'une partie du rayonnement se propage en *(s+ds)* dans une direction Δ' qui n'appartient plus à l'angle solide $d\Omega$.

- Un effet constructif qui traduit le fait qu'une partie du rayonnement qui se propageait en dehors de l'angle solide $d\Omega$ en *s*, se propage en *(s+ds)* dans cet angle solide.

Le premier phénomène décrit est analogue au phénomène d'absorption. On a alors :

$$-d^6\Phi'^{d-}_{\nu}(s) = d^6\Phi'_{\nu}(s) = -\sigma_{\nu}L'_{\nu}\, d\Omega dV d\nu = -\sigma_{\nu}d^5\Phi'_{\nu}(s)ds \tag{116}$$

σ_{ν} est le *coefficient monochromatique de diffusion*, généralement exprimé en cm^{-1}. On introduit, compte tenu des équations (104) et (116) un coefficient monochromatique d'extinction β_{ν} et l'albédo ω_{ν} pour tenir compte des deux phénomènes d'absorption et de diffusion :

$$\beta_{\nu} = \kappa_{\nu} + \sigma_{\nu} \text{ et } \omega_{\nu} = \frac{\sigma_{\nu}}{\beta_{\nu}} \tag{117}$$

Le coefficient d'extinction β_{ν} vérifie :

$$d^6\Phi'^{-}_{\nu} = \beta_{\nu}L'_{\nu}\, d\Omega dV d\nu \tag{118}$$

où $d^6\Phi'^{-}_{\nu}$ représente le flux arithmétique éteint entre *s* et *(s+ds)*.

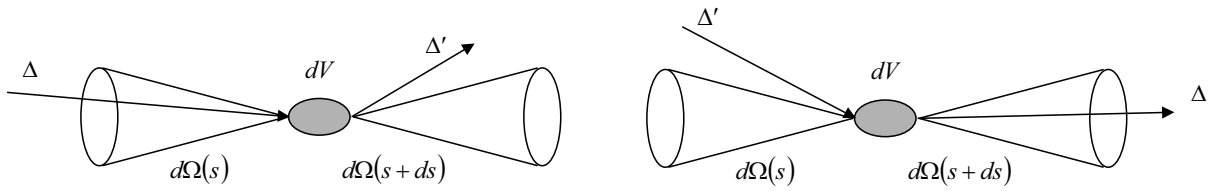


Figure 25 : *Effets de diffusion*

Cas particulier d'une colonne homogène et isotherme.

Le coefficient de diffusion σ_{ν} joue exactement le même rôle que le coefficient d'absorption κ_{ν}, du point de vue de la transmission.

Si on considère une colonne, de longueur *l*, homogène et isotherme, de coefficient de diffusion constant σ_ν, les transmittivités liées à la diffusion et à l'extinction sont :

$$\tau'_\nu = \exp(-\sigma_\nu l) \text{ et } \tau'_\nu = \exp(-(\kappa_\nu + \sigma_\nu)l) \tag{119}$$

Pour la composante constructive, on définit également une fonction de phase de diffusion $p(\Delta' \to \Delta, s)$ qui représente la probabilité qu'un rayonnement dans la direction incidente *Δ'* soit diffusé dans la direction *Δ*.

A un flux incident en *s* dans un angle solide élémentaire *dΩ'* centré sur la direction *Δ'*, on peut associer une luminance $L'_\nu(\Delta', s)$. Ce flux a une probabilité $\sigma_\nu p(\Delta' \to \Delta, s)\frac{d\Omega}{4\pi}$ d'être diffusé dans l'angle solide élémentaire *dΩ*, centré sur *Δ*. Si on intègre sur tout l'angle solide *dΩ'*, on obtient le flux monochromatique diffusé en *(s+ds)*, dans l'angle solide *dΩ* en provenance de toutes les directions de l'espace au point *s*, soit :

$$d^6\Phi_\nu^{d+} = dSdsd\nu \frac{d\Omega}{4\pi}\int_0^{4\pi} \sigma_\nu(\Delta')p(\Delta' \to \Delta)L'_\nu(\Delta', s)d\Omega' \tag{120}$$

La fonction de phase suit une loi de normalisation, soit :

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} n^2(\Delta', s)p(\Delta' \to \Delta)d\Omega' = n^2(\Delta, s) \tag{121}$$

Si on considère le milieu à l'équilibre thermique (luminance isotrope $n^2 L_\nu^0(T)$), la condition de normalisation de la fonction de phase permet de montrer que dans ce cas, les termes de diffusion constructive et destructive se compensent exactement :

$$d^6\Phi'^{d+}_\nu = d^6\Phi'^{d-}_\nu = n^2(\Delta, s)L_\nu^0(T)dSdsd\Omega d\nu \tag{122}$$

2.2. Etablissement de l'Equation de Transfert Radiatif (E.T.R)

- ***Formulation locale de l'équation de transfert***

Si on rassemble l'ensemble des résultats obtenus dans le paragraphe précédent, le bilan radiatif sur la variation du flux élémentaire $d^5\Phi'_\nu$ entre *s* et *(s+ds)* s'écrit alors :

$$d^6\Phi'_\nu = -d^6\Phi'^{a}_{\nu} - d^6\Phi'^{d-}_{\nu} + d^6\Phi'^{e}_{\nu} + d^6\Phi'^{d+}_{\nu} \tag{123}$$

On a également :

$$d^6\Phi'_\nu = d^5\Phi'_\nu(s+ds) - d^5\Phi'_\nu(s) \tag{124}$$

En utilisant la définition de la luminance (99) et la conservation de l'étendue optique (101), on a :

$$d^6\Phi'_\nu = dS(s)d\Omega(s)d\nu n^2(s)\frac{d}{ds}\left(\frac{L'_\nu}{n^2}\right)ds \tag{125}$$

D'où l'expression de l'équation aux luminances :

$$\begin{aligned} n^2(\Delta,s)\frac{d}{ds}\left(\frac{L'_\nu}{n^2}(s)\right) &= -(\kappa_\nu+\sigma_\nu)L'_\nu(s,\Delta) + \kappa_\nu n^2(\Delta,s)L^0_\nu(T) \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi}\sigma_\nu(\Delta')p(\Delta'\to\Delta)L'_\nu(\Delta',s)d\Omega' \end{aligned} \tag{126}$$

Si l'indice de réfraction *n* est constant dans le milieu et si on suppose que le coefficient de diffusion ne dépend pas de la direction de propagation, alors l'équation devient :

$$\frac{dL'_\nu}{ds} + (\kappa_\nu+\sigma_\nu)L'_\nu = \kappa_\nu n^2 L^0_\nu(T) + \frac{\sigma_\nu}{4\pi}\int_0^{4\pi} p(\Delta'\to\Delta)L'_\nu(\Delta',s)d\Omega' \tag{127}$$

avec :

$$L_\nu^0(T) = \frac{1}{\pi}\frac{C_1\nu^5}{\exp(C_2\nu/T)-1} \text{ avec : } \begin{array}{l} C_1 = 3{,}741.10^{-16} W\cdot m^2 \\ C_2 = 0{,}014388 m\cdot K \end{array} \tag{128}$$

et :

κ_ν : coefficient monochromatique d'absorption

σ_ν : coefficient monochromatique de diffusion

β_ν : coefficient monochromatique d'extinction

Si on pose :

$$\omega_\nu = \frac{\sigma_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} = \frac{\sigma_\nu}{\beta_\nu} \qquad \text{« Albédo »}$$

$$1 - \omega_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\beta_\nu}$$

L'équation de transfert radiatif (E.T.R) devient :

$$\frac{1}{\beta_\nu}\frac{dL'_\nu}{ds} + L'_\nu = (1-\omega_\nu)L_\nu^0(T) + \frac{\omega_\nu}{4\pi}\int_0^{4\pi} p(\Delta' \to \Delta)L'_\nu(\Delta', s)d\Omega' \tag{129}$$

- $\omega_\nu = 0 \rightarrow$ milieu absorbant pur
- $\omega_\nu = 1 \rightarrow$ milieu diffusant pur

La partie gauche de l'équation fait apparaître une loi d'atténuation. La partie droite appelée « *fonction source* », contient deux termes. Le premier prend en compte la réémission du milieu. Notons que si le milieu ne fait que diffuser, la contribution de ce terme est nulle. Le second terme est relatif au phénomène de diffusion.

- ***Formulation intégrale de l'équation de transfert***

Une formulation, sous forme intégrale, de l'équation de transfert se déduit de l'équation (126) écrite formellement :

$$\frac{d}{ds}\frac{L'_\nu}{n^2}+\beta_\nu\frac{L'_\nu}{n^2}=S_\nu \tag{130}$$

avec comme terme source S_ν :

$$S_\nu(\Delta,s)=\kappa_\nu L_\nu^0(T(s))+\frac{\sigma_\nu(s)}{4\pi n^2(\Delta,s)}\int_0^{4\pi}p(\Delta'\to\Delta)L'_\nu(\Delta',s)d\Omega' \tag{131}$$

Privée de second membre, l'équation (129) a pour solution :

$$\frac{L'_\nu}{n^2}=C\exp\left[-\int_0^s\beta_\nu(s')ds'\right] \tag{132}$$

Sous forme complète, la solution obtenue par la méthode de variation de la constante est, si on considère une luminance incidente en *s=0* dans la direction u_0 :

$$\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta,s)=\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta_0,s)\exp\left[-\int_0^s\beta_\nu(s')ds'\right]+\int_0^s S_\nu(\Delta,s')\exp\left[-\int_{s'}^s\beta_\nu(s'')ds''\right]ds' \tag{133}$$

Le premier terme de l'équation (133) représente le rayonnement incident en 0 et transmis jusqu'en *s* ; le second terme la somme des contributions des rayonnements émis ou diffusés dans $d\Omega$ dans tous les segments $[s',s'+ds']$ et transmis de *s'* en *s*. Si on introduit la transmitivité monochromatique de *s'* à *s* :

$$\tau'_{\nu s's}=\exp\left[-\int_{s'}^s\beta_\nu(s'')ds''\right] \tag{134}$$

L'équation (133) devient :

$$\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta,s)=\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta_0,s)\tau'_{\nu 0s}+\int_0^s S_\nu(\Delta,s')\beta_\nu^{-1}(s')\frac{\partial}{\partial s'}\tau'_{\nu s's}\,ds' \tag{135}$$

Dans le cas particulier d'un milieu non diffusant $(\sigma_\nu=0,\beta_\nu=\kappa_\nu)$, elle devient :

$$\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta,s)=\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta_0,s)\tau'_{\nu 0s}+\int_0^s L_\nu^0[T(s')]\frac{\partial}{\partial s'}\tau'_{\nu s's}\,ds' \tag{136}$$

Sur ces expressions intégrales reposent de nombreuses méthodes de calcul de transferts radiatifs. L'intérêt essentiel de cette équation est de faire disparaître le coefficient d'absorption au profit de la transmittivité monochromatique d'une partie de trajectoire éventuellement hétérogène et anisotherme, noté $\tau'_{\nu s's}$. Dans cette approche, il est nécessaire de déterminer exactement toutes les transmittivités $\tau'_{\nu s's}$ de toutes les parties de trajectoires utiles en transfert radiatif. En général, une colonne hétérogène et anisotherme est discrétisée en N_c éléments homogènes et isothermes, indicés j ($j=[1,N_c]$) de longueur l_j et caractérisés par un coefficient d'absorption $\kappa_{j\nu}$. Sous forme discrétisée, l'équation (136) devient :

$$\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta,N_c)=\frac{L'_\nu}{n^2}(\Delta_0,0)\tau'_{\nu 0N_c}+\sum_{j=1}^{N_c}L_\nu^0(T_j)\left(\tau'_{\nu jN_c}-\tau'_{\nu j-1N_c}\right) \tag{137}$$

avec :

$$\tau'_{\nu jN_c}=\exp\left(-\sum_{j'=j+1}^{N_c}\kappa_{j'\nu}l_{j'}\right) \tag{138}$$

- ***Conditions aux limites de l'E.T.R***

Tout problème de transfert radiatif consiste à résoudre l'E.T.R, compte tenu de conditions aux limites de type radiatif, éventuellement couplée en tout point d'un milieu à l'équation locale

instationnaire de l'énergie, caractérisée elle-même par des conditions aux limites incluant des des contributions radiatives. Envisageons, à ce stade, quelques conditions aux limites classiques de l'équation de transfert.

Une paroi opaque est en toute généralité caractérisée, en principe, par la donnée en tout point d'une réflectivité bidirectionnelle monochromatique [SIEGEL 02] $\rho''_{\nu P_i P_k}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{r})$. Cette donnée locale, qu'il est généralement difficile d'obtenir, dépend de la direction d'incidence *u* dans un angle solide *dΩ*, de la direction d'émergence *u'* dans *dΩ'*, de la polarisation P_i du rayonnement par rapport au plan d'incidence, de la polarisation P_k par rapport au plan d'émergence (|| ou ⊥), de la fréquence. Elle s'exprime à partir des indices complexes de la paroi et du milieu semi-transparent mais dépend aussi, étroitement, de l'état de surface, de la composition superficielle du matériau, de son histoire,…, paramètres incontrôlables sauf en conditions de laboratoire. Dans l'hypothèse considérée, la condition à la limite s'obtient en exprimant la luminance $L'^{p}_{\nu P_k}(\boldsymbol{u}')$ du rayonnement quittant la paroi opaque dans la direction u' :

$$\begin{aligned} L'^{p}_{\nu P_k}(\mathbf{u}',\mathbf{r}) &= \varepsilon'_{\nu P_k} n^2 L^0_\nu(T) + \frac{1}{\pi}\int_{\Omega=0}^{\Omega=2\pi} \rho''_{\nu\| P_k}(\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{r}) L'^{i}_{\nu\|}(\mathbf{u},\mathbf{r})\cos\theta d\Omega \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{\Omega=0}^{\Omega=2\pi} \rho''_{\nu\perp P_k}(\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{r}) L'^{i}_{\nu\perp}(\mathbf{u},\mathbf{r})\cos\theta d\Omega \end{aligned} \tag{139}$$

où l'émissivité est définie pour un milieu de propagation d'indice *n* isotrope, par :

$$\varepsilon'_{\nu P_k}(\mathbf{u}') = 1 - \int_{\Omega=0}^{\Omega=2\pi} \frac{1}{2\pi}\left[\rho''_{\nu\| P_k}(\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{r}) + \rho''_{\nu\perp P_k}(\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{r})\right]\cos\theta d\Omega \tag{140}$$

L'utilisation des deux équations au-dessus est limitée, dans des situations concrètes usuelles, par le manque de données. Nous nous limiterons à deux hypothèses classiquement faites :

Dans le cas d'une *paroi opaque optiquement lisse* (en optique infrarouge par exemple), on utilise les lois de Fresnel (réflexion spéculaire) qui dépendent de la polarisation :

$$L'^{p}_{\nu P_k}(\mathbf{u}',\mathbf{r}) = \varepsilon'_{\nu P_k}(\mathbf{u}',\mathbf{r}) n^2 L^0_\nu(T) + \left[1-\varepsilon'_{\nu P_k}(\mathbf{u}',\mathbf{r})\right] L'^{i}_{\nu P_k}(\mathbf{u}'^{*},\mathbf{r}) \tag{141}$$

où u'^{*} désigne la direction symétrique de u' par rapport à la normale locale.

Dans le cas d'*une paroi d'état de surface grossier* par rapport à la longueur d'onde du rayonnement considéré, on fait l'hypothèse d'isotropie de ε_ν et ρ_ν (réflexion diffuse) :

$$L^{p}_{P_k}(\mathbf{r}) = \varepsilon_\nu(\mathbf{r}) n^2 L^0_\nu[T(\mathbf{r})] + \frac{1-\varepsilon_\nu(\mathbf{r})}{\pi}\int_0^{2\pi} L'^{i}_{\nu}(\mathbf{u},\mathbf{r})\cos\theta d\Omega \tag{142}$$

Pour ***une interface entre milieux semi-transparents***, les conditions aux limites sont plus complexes (cas par exemple de la frontière d'un bain de verre en fusion et d'un mélange de gaz de combustion : les deux milieux sont semi-transparents, de natures très différentes). Dans le cas idéal où la surface de séparation est optiquement lisse et stable, il convient d'utiliser les lois Fresnel (réflexion spéculaire et réfraction) ; nous nous limiterons ici à ce cas et supposerons que les parties imaginaires des indices sont, pour les deux milieux, très petites devant les parties réelles n_i. Un rayonnement incident sur l'interface (**Figure 26**) dans le milieu 1 (d'indice n_1 supérieur à celui n_2 du milieu 2), dans un angle solide dΩ autour de *u*, est totalement réfléchi si l'angle d'indice θ est supérieur à l'angle limite i_l défini par :

$$\sin(i_l) = \frac{n_2}{n_1} \tag{143}$$

Il est, dans le cas contraire, en partie réfléchi et en partie transmis. Les luminances correspondantes vérifient la relation de conservation de l'énergie, valable pour chaque polarisation *P* (|| ou ⊥) :

$$L'^{i}_{\nu P}(\mathbf{u},\mathbf{r}) dS\cos\theta d\Omega = L'^{r}_{\nu P}(\mathbf{u}^{*},\mathbf{r}) dS\cos\theta d\Omega + L'^{t}_{\nu P}(\mathbf{u}',\mathbf{r}) dS\cos\theta' d\Omega' \tag{144}$$

En divisant cette relation par l'étendue optique $n_1^2 dS\, cos\,\theta d\Omega$ et en utilisant le théorème de Clausius, on obtient la relation de conservation de la luminance :

$$\frac{L'^{i}_{\nu P}}{n_1^2}(\mathbf{u},\mathbf{r}) = \frac{L'^{r}_{\nu P}}{n_1^2}(\mathbf{u}^*,\mathbf{r}) + \frac{L'^{t}_{\nu P}}{n_2^2}(\mathbf{u}',\mathbf{r}) \tag{145}$$

On définit la réflectivité et la transmittivité de l'interface par :

$$\rho'_{\nu p} = \frac{d\Phi'^{r}_{\nu p}}{d\Phi'^{i}_{\nu p}} = \frac{L'^{r}_{\nu p}}{L'^{i}_{\nu p}} \quad \text{et} \quad \tau'_{\nu p} = \frac{d\Phi'^{t}_{\nu p}}{d\Phi'^{i}_{\nu p}} = \frac{\left(L'^{t}_{\nu p}/n_2^2\right)}{\left(L'^{i}_{\nu p}/n_1^2\right)} \tag{146}$$

avec évidemment :

$$\rho'_{\nu p} + \tau'_{\nu p} = 1 \tag{147}$$

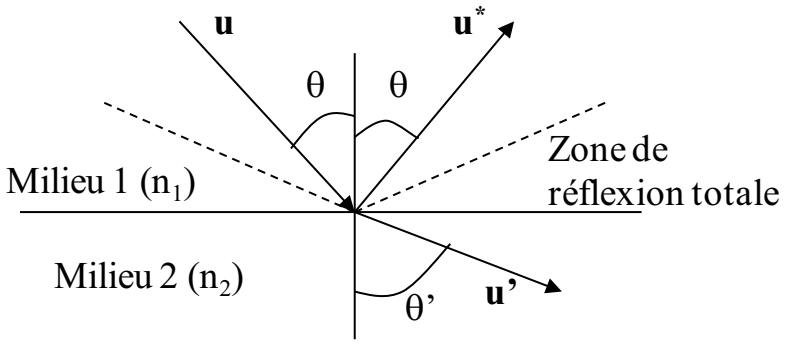


Figure 26 : *Condition aux limites des deux milieux semi-transparents*

3. Couplage des champs conductif et radiatif dans un milieu semi-transparent

Généralement, lorsque deux surfaces à températures différentes sont séparées par un milieu transparent, les échanges radiatifs n'influent sur ces transferts de chaleur et de quantité de mouvement au sein du milieu que par les conditions aux limites puisque le rayonnement tend à diminuer l'écart de température et donc à modifier les mouvements moléculaires au voisinage des surfaces [G. LAURIAT 76]. Par contre lorsqu'elles sont séparées par un milieu semi-transparent, l'interaction du rayonnement et de la matière constitue un mode supplémentaire de transfert de chaleur et de quantité de mouvement en tout point du milieu. Dans bien des cas, la prédominance de l'un des modes de transfert permet de simplifier

l'analyse en considérant que seul le rayonnement intervient ou au contraire qu'il est négligeable devant la conduction ou la convection. Cependant, les progrès technologiques nécessitent, d'une part une analyse plus fine des phénomènes, ce qui remet en cause des approximations admises auparavant, et d'autre part des processus industriels font intervenir des gradients de température de plus en plus élevés de sorte que le transfert radiatif devient du même ordre de grandeur que les autres modes transfert.

Dans cette partie, nous allons aborder quelques modèles simples pour résoudre le problème du couplage conduction-rayonnement. D'autres modèles plus complexes seront décrits dans les chapitres suivants.

Dans les modèles mis en place dans cette partie, nous allons interpréter le transfert de chaleur dans le milieu comme étant la « *superposition* » d'un transfert purement conductif et d'un transfert radiatif (découplage des deux modes de transfert).

3.1. Equation des transferts de chaleur par conduction et par rayonnement

Si on considère un milieu semi-transparent, le flux en un point $\boldsymbol{r}$ est constitué d'une composante conductive $\boldsymbol{q}^{cd}$ et d'une composante radiative $\boldsymbol{q}^{R}$: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{cd} + \boldsymbol{q}^{R}$. L'E.T.R est couplée avec l'équation générale de l'énergie :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T \right) = -\nabla \cdot \left(\boldsymbol{q}^{cd} + \boldsymbol{q}^{R} \right) + P \tag{148}$$

Dans le cas d'un milieu solide, $\boldsymbol{u} = 0$ (pas de transport convectif). P représente l'ensemble des sources et puits de chaleur volumiques, d'origine non radiative. La densité de flux radiatif $\boldsymbol{q}^{R}$ s'exprime à partir des luminances :

$$q^{R}(r,t) = \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} L'_{\nu}(\boldsymbol{r}, \Delta) \Delta d\Omega d\nu \tag{149}$$

Comme : $\boldsymbol{q}^{cd} = -\lambda \nabla T$,

On a :

$$\lambda \Delta T - div\left(\boldsymbol{q}^R\right) + P = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{150}$$

Le transfert radiatif fait apparaître un terme source dans l'équation de la chaleur :

$$P^R = -div\left(\boldsymbol{q}^R\right) \tag{151}$$

Ce qui conduit à :

$$\lambda \Delta T + \left(P + P^R\right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{152}$$

Les couplages qui apparaissent sont multiples :

- La luminance $L'_\nu\left(\Delta, \boldsymbol{r}\right)$ en un point donné r dépend par l'intermédiaire de l'E.T.R du champ de température $T\left(\boldsymbol{r}, t\right)$ en tout point du système et des températures des parois opaques. Dans le cas de parois semi-transparentes, la luminance dépend également du champ de température et des conditions aux limites des autres milieux. Ceci est une conséquence directe de l'interaction instantanée à grande distance du transfert radiatif (vitesse de la lumière).

- De même, le champ de température $T\left(\boldsymbol{r}, t\right)$ dépend du champ de luminance à travers le terme de puissance radiative qui apparaît dans l'équation de la chaleur :

$$P^R\left(\mathbf{r}, t\right) = -\int_0^\infty d\nu \int_{4\pi} \frac{\partial}{\partial s} L'_\nu\left(\mathbf{r}, \Delta\right) d\Omega \tag{153}$$

- Un dernier couplage est réalisé par les conditions aux limites thermiques qui font intervenir entre autres la densité normale du flux radiatif à la paroi :

$$\varphi^R\left(r, t\right) = \int_0^\infty \int_0^{4\pi} L'_\nu\left(\mathbf{r}, \Delta\right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\Omega d\nu = \mathbf{q}^R \cdot \mathbf{n} = \varphi^R \tag{154}$$

Ici, ***n*** et ***u*** désignent respectivement les vecteurs unitaires de la normale à la paroi et de la direction de propagation Δ. Compte tenu du fort couplage qui existe entre le champ de température et le champ des luminances, il est difficile d'obtenir directement l'expression analytique du champ de température au sein du matériau. Les méthodes analytiques consistent à poser certaines hypothèses simplificatrices pour obtenir un champ de température approché. Il existe alors un compromis entre la simplicité du modèle qui suppose de nombreuses hypothèses et un modèle plus sophistiqué qui ferait appel à des hypothèses moins fortes mais qui serait également plus lourd à mettre en œuvre.

3.2. Résolution de l'E.T.R entre deux plans parallèles, d'extension infinie

- ***Simplifications du modèle : première approche***

  - **Projection de l'E.T.R**

Un cas particulier intéressant que l'on peut résoudre de manière analytique est celui d'*un mur infini*, d'épaisseur *e*. l'extension infinie des plans parallèles nous permet de supposer la symétrie azimutale des luminances, lorsque l'on travaille dans un repère en coordonnées sphérique (repère local).

La luminance ne dépend plus alors que de la coordonnée d'espace *s* et de l'angle θ :

$$L'_\nu(s,\theta,\varphi) \rightarrow L'_\nu(s,\theta) \tag{155}$$

On peut donc se ramener à un problème plan. Dans le cas où les conditions aux limites relatives aux deux plans sont uniformes sur toute la surface, le flux conductif n'est plus fonction que de *z*.

En revanche, l'E.T.R est écrite le long de l'abscisse curviligne *s*, parallèle à la direction de propagation du rayonnement *Δ*. Il est commode de projeter cette équation selon l'axe *z*, perpendiculaire aux deux faces pour travailler uniquement en (z,θ) :

$$L'_\nu(s,\Delta) \rightarrow L'_\nu(z,\theta) \tag{156}$$

Pour cela, on pose :

$$\mu = \cos(\theta) \rightarrow \frac{d}{ds} = \frac{d}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} = \cos(\theta)\frac{d}{dz} = \mu \frac{d}{dz} \tag{157}$$

L'équation s'écrit alors :

$$\frac{\mu}{\beta_\nu}\frac{dL'_\nu}{dz} + L'_\nu = (1-\omega_\nu)L_\nu^0(T) + \frac{\omega_\nu}{4\pi}\int_0^{4\pi} p(\mu' \rightarrow \mu)L'_\nu(\mu',s)d\Omega' \tag{158}$$

- **Hypothèse du milieu gris**

On suppose ensuite que le milieu est gris, c'est-à-dire que les grandeurs radiatives sont indépendantes de la longueur d'onde. L'équation devient :

$$\frac{\mu}{\beta}\frac{dL'}{dz} + L' = (1-\omega)L^0(T) + \frac{\omega}{4\pi}\int_0^{4\pi} p(\mu' \rightarrow \mu)L'(\mu',s)d\Omega' \tag{159}$$

Remarque :

Nous avons réalisé l'intégration de l'équation précédente sur toutes les longueurs d'onde. La luminance du corps noir $L_\nu^0(T)$ de l'équation (158) dépend de la longueur d'onde. Ici dans l'équation (159), $L^0(T)$ représente la luminance intégrée sur toutes les fréquences. Elle vaut : $n^2\sigma T^4/\pi$ (n : indice optique du milieu).

- **Décomposition des luminances**

L'angle θ varie sur l'intervalle $[0,\pi]$. Les valeurs de μ sont donc comprises entre -1 et 1. Les pressions des luminances sont complètement déterminées si l'on connaît les luminances aux parois :

$$L'(z,\mu)\big|_{z=0} = L'(0,\mu) \quad \text{pour} \quad 0 \le \mu \le 1 \qquad (0 \le \theta \le \pi/2) \tag{160}$$

$$L'(z,\mu)\big|_{z=e} = L'(e,\mu) \quad \text{pour} \quad -1 \le \mu \le 0 \quad (\pi/2 \le \theta \le \pi) \tag{161}$$

Les conditions aux limites ne font intervenir les luminances que d'un seul demi-espace (du côté du milieu pour chacun des plans). Pour $\mu = 0$, il apparaît une dégénérescence de l'équation. Pour toutes ces raisons, il est commode de décomposer la luminance en deux composantes non nécessairement isotropes :

$$L'(z,\mu) = \begin{cases} L'^{+}(z,\mu) & 0 \le \mu \le 1 \\ L'^{-}(z,\mu) & -1 \le \mu \le 0 \end{cases} \tag{162}$$

La décomposition des luminances en deux composantes telle qu'elle a été introduite précédemment permet de mettre en place un formalisme comparable à celui des radiosités. Dans ce qui suit, pour indiquer que le domaine de variation de la variable μ est compris soit dans l'intervalle $[0,1]$, soit dans l'intervalle $[-1,0]$, nous marquerons la variable μ respectivement de l'exposant $'' + ''$ et $''-''$.

L'E.T.R se décompose alors en deux équations couplées :

$$\frac{\mu}{\beta}\frac{dL'^{+}(z,\mu)}{dz} + L'^{+}(z,\mu) = (1-\omega)L^{0}(T) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\omega}{2}\left[\int_{0}^{1} p(\mu,\mu')L'^{+}(z,\mu')d\mu' + \int_{-1}^{0} p(\mu,\mu')L'^{-}(z,\mu')d\mu'\right] \tag{163}$$

$$\frac{\mu}{\beta}\frac{dL'^{-}(z,\mu)}{dz} + L'^{-}(z,\mu) = (1-\omega)L^{0}(T) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\omega}{2}\left[\int_{0}^{1} p(\mu,\mu')L'^{+}(z,\mu')d\mu' + \int_{-1}^{0} p(\mu,\mu')L'^{-}(z,\mu')d\mu'\right] \tag{164}$$

- **Expression du flux radiatif**

Le flux radiatif qui intervient par le biais de sa divergence comme terme source dans l'équation de la chaleur correspond à l'intégration selon toutes les directions de la luminance projetée selon la normale :

$$\varphi_r(z) = M(z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} L'(z,\theta,\varphi)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta d\varphi \tag{165}$$

Par hypothèse, les luminances ne dépendent pas de φ (symétrie azimutale), d'où :

$$M(z) = 2\pi\int_0^{\pi} L'(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \tag{166}$$

On se ramène à une intégration dans les premier et deuxième quadrants :

$$M(z) = 2\pi\int_0^{\pi/2} L'(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta + 2\pi\int_{\pi/2}^{\pi} L'(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \tag{167}$$

La relation (167) suggère de décomposer l'émittance en deux composantes. Une composante positive qui correspond à la luminance dirigée selon $\vec{z}$ et une composante négative correspondant à la luminance orientée dans le sens opposé, soit :

$$M(z) = M^+(z) - M^-(z) \tag{168}$$

avec :

$$M^+(z) = 2\pi\int_0^{\pi/2} L'^+(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \tag{169}$$

$$M^-(z) = -2\pi\int_{\pi/2}^{\pi} L'^+(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \tag{170}$$

Comme :

$$\mu = \cos(\theta) \;\rightarrow\; d\mu = -\sin(\theta)d\theta \tag{171}$$

$$M^{+}(z) = 2\pi\int_{0}^{1} L'^{+}(z,\mu)\mu d\mu \tag{172}$$

$$M^{-}(z) = 2\pi\int_{0}^{-1} L'^{-}(z,\mu)\mu d\mu \tag{173}$$

On effectue le changement de variable $\mu = -\mu$ dans la seconde expression afin de se ramener au même intervalle de variation pour μ dont les valeurs seront alors comprises entre 0 à 1 :

$$M^{+}(z) = 2\pi\int_{0}^{1} L'^{+}(z,\mu)\mu d\mu \tag{174}$$

$$M^{-}(z) = 2\pi\int_{0}^{1} L'^{-}(z,-\mu)\mu d\mu \tag{175}$$

On a ainsi :

$$\varphi_r(z) = M^{+}(z) - M^{-}(z) = 2\pi\int_{0}^{1}\left(L'^{+}(z) - L'^{-}(z)\right)\mu d\mu \tag{176}$$

Dans le cas d'une *luminance isotrope*, on trouve bien la relation :

$$\varphi_r(z) = M^{+}(z) - M^{-}(z) = \pi\left(L'^{+}(z) - L'^{-}(z)\right) \tag{177}$$

- ***Résolution de l'E.T.R dans le cas d'un matériau non diffusant (absorbant/émettant)***

On considère un milieu semi-transparent compris entre deux plans parallèles, distants de *e*, indéfinis, à propriétés radiatives isotropes et uniformes et caractérisés par conditions aux limites uniformes. La température *T(z)* et le coefficient d'absorption $\kappa_\nu(z)$ ne dépendent que de *z* (**Figure 27**). Le milieu semi-transparent, d'indice *n* uniforme, absorbe et émet du

rayonnement mais ne diffuse pas. On se propose de calculer le flux radiatif $\varphi^R(z)$ en tout point z compris entre les parois ainsi que la puissance volumique $P_R(z)$. Une direction est caractérisée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{u}(\theta,\varphi)$ d'angle θ avec l'axe Ox. Compte tenu de la symétrie plane du système plane du système, le champ de luminances ne dépend que de $\cos\theta$, on pose :

$$\mu = \cos(\theta) \quad \theta \in [0,\pi] \rightarrow \mu \in [-1,1]$$
$$s = z/\cos\theta$$

Dans le cas particulier d'un milieu absorbant/émettant, les équations aux luminances (163) et (164) deviennent :

$$\frac{\mu}{\kappa}\frac{dL'^{+}}{dz} + L'^{+} = n^2 L^0(T(z)) \tag{178}$$

$$-\frac{\mu}{\kappa}\frac{dL'^{-}}{dz} + L'^{-} = n^2 L^0(T(z)) \tag{179}$$

Les composantes des luminances sont maintenant découplées et apparaissent de façon indépendante dans chaque équation différentielle. Donc, on peut les résoudre indépendamment.

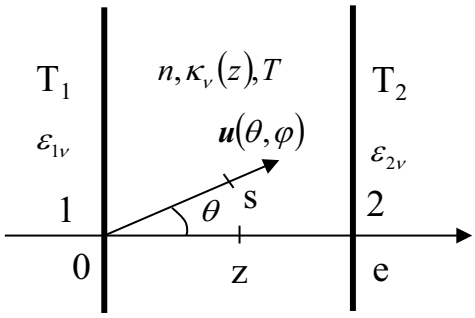


Figure 27 : *Mur plan non diffusant hétérogène et anisotherme*

D'après l'équation (136), la luminance du rayonnement se propageant dans la direction u vers les z positifs (z^+ soit $\mu > 0$) est :

$$s > s' \qquad L'^{+}_{\nu}(s,\theta) = \tau'_{\nu 0s}\, L'^{+}_{\nu}(0,\theta) + \int_0^s n^2 L^0_\nu[T(s')] \frac{\partial}{\partial s'} \tau'_{\nu s's}\, ds' \tag{180}$$

$$z > z' \qquad L'^{+}_{\nu}(z,\theta) = \tau'_{\nu 0z}\, L'^{+}_{\nu}(0,\theta) + \int_0^z n^2 L^0_\nu[T(z')] \frac{\partial}{\partial z'} \tau'_{\nu z'z}\, dz' \tag{181}$$

Dans cette expression la luminance L^0_ν dépend de z' par la température locale *T(z')* et $\tau'_{\nu z'z}$, égale à $\tau'_{\nu s's}$, désigne la transmittivité monochromatique directionnelle du milieu, suivant *u*, de z' à z :

$$\tau'_{\nu z'z}(\mu) = \exp[-e_\nu(z',z)/\mu] \tag{182}$$

e_ν est par définition *l'épaisseur optique* d'une colonne normale aux parois planes entre z' et z, l'épaisseur optique est une grandeur sans dimension qui joue un rôle essentiel en transferts radiatifs :

$$e_\nu(z',z) = \int_{z'}^{z} \kappa_\nu dz'' \tag{183}$$

Si on considère la propagation du rayonnement vers le z négatifs (sens z^- ; $\mu < 0$ et $z' > z$) les quantités $e_\nu(z',z)$ et $\frac{\partial}{\partial z'}\tau'_{\nu z'z}$ sont négatives. Il vient alors :

$$z' > z \qquad L'^{-}_{\nu}(z,\theta) = \tau'_{\nu ez}\, L'^{-}_{\nu}(e,\theta) + \int_e^z n^2 L^0_\nu[T(z')] \frac{\partial}{\partial z'} \tau'_{\nu z'z}\, dz' \tag{184}$$

L'intégrale au second membre de cette équation est bien positive.

Le flux surfacique radiatif en un point z quelconque vaut :

$$\varphi^R(z) = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^\pi L'_\nu(z,\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta = \varphi^{R+}(z) - \varphi^{R-}(z) \tag{185}$$

où on a posé :

$$\mu > 0 \qquad \varphi^{R+}(z) = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^1 L'^{+}_{\nu}(z,\mu)\mu d\mu \tag{186}$$

$$\mu < 0 \quad \mu' = -\mu \quad \theta' = \pi - \theta \qquad \varphi^{R-}(z) = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^1 L'^{-}_{\nu}(z,\mu')\mu' d\mu' \tag{187}$$

La puissance volumique dissipée en un point z est d'après l'équation (151) :

$$P^R(z) = \frac{d\varphi^R}{dz}(z) = \frac{d\varphi^{R-}}{dz}(z) - \frac{d\varphi^{R+}}{dz}(z) \tag{188}$$

- **Expression des flux**

Nous ferons, à ce stade, l'hypothèse d'une distribution isotrope des luminances des rayonnements quittant les parois notées $L^+_\nu(0)$ et $L^-_\nu(e)$; cette hypothèse se justifie dans les cas de parois opaques à propriétés radiatives isotropes. Dans ces conditions, il vient d'après les équations (181) et (184) :

$$\varphi^{R+}(z) = 2\pi \int_0^\infty \left\{ L^+_\nu(0) E_3[e_\nu(0,z)] + \int_0^z n^2 L^0_\nu(T(z')) \frac{\partial}{\partial z'} E_3[e_\nu(z',z)] dz' \right\} d\nu \tag{189}$$

Où apparaît la fonction intégro-exponentielle d'ordre 3 notée E_3, l'équation (189) est réécrite :

$$\varphi^{R+}(z) = \int_0^\infty \left\{ \pi L^+_\nu(0) \tau_{\nu 0 z} + \int_0^z n^2 \pi L^0_\nu(T(z')) \frac{\partial}{\partial z'} \tau_{\nu z' z} dz' \right\} d\nu \tag{190}$$

où apparaît la quantité :

$$0 \le \tau_{\nu z' z} = 2E_3[e_\nu(z',z)] \le 1 \tag{191}$$

qui représente la transmittivité du mur hétérogène et anisotherme compris entre les plan *z'* et *z* vis-à-vis d'un rayonnement source isotrope (soit le rayonnement d'équilibre, soit le rayonnement partant de la paroi). La fonction E_3 vaut effectivement ½ pour $e_\nu = 0$ et 0 pour $e_\nu \to \infty$ ce qui est compatible avec les propriétés d'une transmittivité. De la même façon, on obtient après intégration sur $\mu' = -\mu$:

$$\varphi^{R-}(z) = \int_0^\infty \left\{ \pi L_\nu^-(e)\tau_{\nu ez} + \int_e^z n^2 \pi L_\nu^0(T(z')) \frac{\partial}{\partial z'} \tau_{\nu z' z} dz' \right\} d\nu \tag{192}$$

avec maintenant :

$$0 \le \tau_{\nu z' z} = 2E_3[e_\nu(z, z')] \le 1 \tag{193}$$

Les équations (190) et (192) généralisent les expressions relatives à un mur plan homogène et isotherme. Les premiers termes correspondent à la transmission jusqu'à *z* du rayonnement issu d'une paroi, (*z=0* ou *z=e*) ; les seconds termes aux effets cumulés des rayonnements émis par les tranches de murs (*z',z'+dz'*) et transmis jusqu'au plan *z*.

Les relations permettant d'exprimer $L_\nu^+(0)$ et $L_\nu^-(e)$ sont, pour des parois opaques à propriétés radiatives isotropes, avec les notations de la **Figure 27** :

$$L_\nu^+(0) = \varepsilon_{1\nu} n^2 L_\nu^0(T_1) + (1 - \varepsilon_{1\nu}) L_\nu^-(0) \tag{194}$$

$$L_\nu^-(e) = \varepsilon_{2\nu} L_\nu^0(T_2) + (1 - \varepsilon_{2\nu}) n^2 L_\nu^+(e) \tag{195}$$

$$\pi L_\nu^-(0) d\nu = d\varphi_\nu^{R-}(0) \tag{196}$$

$$\pi L_\nu^+(e) d\nu = d\varphi_\nu^{R+}(e) \tag{197}$$

Les quatre luminances $L_\nu^+(0)$, $L_\nu^+(0)$, $L_\nu^+(0)$ et $L_\nu^+(0)$ s'obtiennent par résolution du système linéaire associé à chaque valeur de la fréquence.

- **Expression des puissances**

En utilisant la relation différentielle :

$$\frac{d}{dx}\int_0^z f(z,z')dz' = \int_0^z \frac{\partial f}{\partial z}(z,z')dz' + \lim_{z'\to z} f(z,z') \tag{198}$$

La puissance radiative volumique $P^R(z)$ est donnée par l'équation (186) :

$$\begin{aligned} P^R(z) = & \int_0^\infty \pi \left[\underbrace{L_\nu^-(e)\frac{\partial}{\partial z}\tau_{\nu ez}}_{(1)} - \underbrace{L_\nu^+(0)\frac{\partial}{\partial z}\tau_{\nu ez}}_{(2)} \right] d\nu \\ & + \int_0^\infty \left\{ \underbrace{\pi L_\nu^0(z)\left(\lim_{z'\to z^+}\frac{\partial}{\partial z'}\tau_{\nu z'z}\right)}_{(3)} - \underbrace{\pi L_\nu^0(z)\left(\lim_{z'\to z^-}\frac{\partial}{\partial z'}\tau_{\nu z'z}\right)}_{(4)} \right\} d\nu \\ & + \underbrace{\int_0^\infty d\nu \int_e^z \pi L_\nu^0(z')\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\tau_{\nu z'z}dz'}_{(5)} - \underbrace{\int_0^\infty d\nu \int_0^z \pi L_\nu^0(z')\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\tau_{\nu z'z}dz'}_{(6)} \end{aligned} \tag{199}$$

Les différents termes de cette équation correspondent aux puissances :

(1) : partant de la paroi z=e et absorbée en z (>0) ;

(2) : partant de la paroi z=0 et absorbée en z (>0) ;

(3) : émise par la tranche en z vers les z'>z (<0) ;

(4) : émise par la tranche en z vers les z'<z (<0) ;

(5) : émise par la tranche en z' (z'>z) et absorbée par la tranche en z (>0) ;

(6) : émise par la tranche en z' (z'<z) et absorbée par la tranche en z (>0)

En utilisant les propriétés des fonctions intégro-exponentielles, cette équation s'écrit de façon plus explicite :

$$
\begin{aligned}
P^R(z) = & \int_0^\infty 2\pi\kappa_\nu(z)\left[\underbrace{L_\nu^-(e)E_2[e_\nu(z,e)]}_{(1)} - \underbrace{L_\nu^+(0)E_2[e_\nu(0,z)]}_{(2)}\right]d\nu \\
& + \int_0^\infty \left\{\underbrace{4\pi\kappa_\nu(z)L_\nu^0(z)}_{(3)\ et\ (4)}\right\}d\nu \\
& + \underbrace{\int_0^\infty d\nu \int_e^z 2\pi L_\nu^0(z')\kappa_\nu(z)\kappa_\nu(z')E_1[e_\nu(z,z')]dz'}_{(5)} \\
& - \underbrace{\int_0^\infty d\nu \int_0^z 2\pi L_\nu^0(z')\kappa_\nu(z)\kappa_\nu(z')E_1[e_\nu(z',z)]dz'}_{(6)}
\end{aligned}
\tag{200}
$$

Les expressions précédentes, bien qu'un petit peu austères, ont été détaillées dans la mesure où le cas du mur plan traité précédemment est l'un des seuls cas réalistes qui conduisent à une solution (presque) analytique, avec des champs monodimensionnels de température, de coefficients d'absorption et d'indices. Il constitue un cas-test classique et redoutable pour les codes de transfert bi- et tridimensionnels.

- ***Approximation conductive (sans diffusion)***

On considère un milieu tel que sur une distance, dépendant de la fréquence ν notée η_ν et vérifiant :

$$\eta_\nu > 3/\kappa_\nu \tag{201}$$

Les quantités $\kappa_\nu, T, \partial T/\partial x$, peuvent être considérées comme uniformes. Le milieu est alors localement optiquement épais, sur une distance de l'ordre de η_ν et le flux radiatif prend une forme remarquablement simple. On a alors :

$$\forall z > \eta_\nu \qquad E_n[e_\nu(0,z)] \approx 0 \qquad n = 3,4 \tag{202}$$

Si on pose, d'après l'équation (181) :

$$z' < z \qquad u = e_\nu(z',z) \rightarrow du = -\kappa_\nu(z')dz' \tag{203}$$

$$\int_0^z E_3\left[e_\nu(z',z)\right]dz' = -\frac{1}{\kappa_\nu}\int_{e_\nu(0,z)}^0 E_3(u)du = \frac{E_4(0)}{\kappa_\nu} = \frac{1}{3\kappa_\nu} \tag{204}$$

$$z < z' \qquad u = e_\nu(z,z') \rightarrow du = \kappa_\nu(z')dz' \tag{205}$$

$$\int_e^z E_3\left[e_\nu(z,z')\right]dz' = \frac{1}{\kappa_\nu}\int_{e_\nu(z,e)}^0 E_3(u)du = \frac{-E_4(0)}{\kappa_\nu} = -\frac{1}{3\kappa_\nu} \tag{206}$$

Dans ces conditions, les équations (190) et (192) deviennent, pour $z > \eta_\nu$:

$$\varphi^{R+}(z) = \int_0^\infty \pi n^2 L_\nu^0(z)d\nu - \frac{2\pi}{3}\left[\int_0^\infty \frac{n^2}{\kappa_\nu}\frac{d}{dT}L_\nu^0(T)d\nu\right]\frac{\partial}{\partial z}T \tag{207}$$

$$\varphi^{R-}(z) = \int_0^\infty \pi n^2 L_\nu^0(z)d\nu + \frac{2\pi}{3}\left[\int_0^\infty \frac{n^2}{\kappa_\nu}\frac{d}{dT}L_\nu^0(T)d\nu\right]\frac{\partial}{\partial z}T \tag{208}$$

Soit :

$$\varphi^R(z) = \varphi^{R+} - \varphi^{R-} = -\lambda_R(T)\frac{\partial T}{\partial z} \tag{209}$$

Expression remarquable : A cette limite des milieux optiquement épais le phénomène de transfert radiatif devient diffusif ; $\lambda_R(T)$ est une conductivité radiative, très fortement dépendante de la température locale :

$$\lambda_R(T) = \frac{4\pi}{3}n^2\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu}\frac{d}{dT}L_\nu^0(T)d\nu = \frac{16n^2}{3\kappa_R}\sigma T^3 \tag{210}$$

Cette relation qui définit la *moyenne de Rosseland* κ_R du coefficient d'absorption. A température élevée, la conductivité radiative devient pour des matériaux tels que les verres et certains réfractaires beaucoup plus importante que la conductivité phonique, à laquelle elle s'ajoute.

Il est important de souligner que l'obtention de l'équation (210) ne résulte pas d'un hasard providentiel. Il y a une analogie très complète entre transport d'énergie cinétique par les molécules d'un gaz monoatomique, pour simplifier, qui mène à la conductivité thermique et le transport de quanta d'énergie $h\nu$ par des photons qui mène à la conductivité radiative. Dans un milieu optiquement épais, les conditions du champ de rayonnement sont proches de celle de l'équilibre thermodynamique local : c'est-à-dire que le champ ne diffère que par une petite perturbation, d'ordre 1, d'un état d'équilibre radiatif tangent, caractérisé par la luminance $L_\nu^0[T(z)]$ dans toutes les directions au point $M(z)$. En effet, les premiers termes des expressions des flux φ^{R+} et φ^{R-} dans les équations (207) et (208) correspondent aux contributions d'équilibre. Or c'est précisément au voisinage de l'*E.T.L* pour la matière, et uniquement dans ce cas, que le flux conductif peut-être exprimé grâce à l'hypothèse de fermeture de Fourier : voir (FERZIER et KAPER 72 ; TAINE 00), par exemple.

L'équation (210) se généralise à trois dimensions sous la forme de la loi de Fourier radiative :

$$\varphi^R(z) = -\lambda_R(T).\nabla T \tag{211}$$

A condition que l'indice optique local du milieu soit isotrope ; dans le cas contraire, on obtient un tenseur de conductivité, comme en conduction thermique. Notons que la très forte dépendance de $\lambda_R(T)$ avec la température rend les problèmes de conduction radiative fortement non linéaires en T.

Il convient d'autre part de veiller à ce que la condition $\eta_\nu > 3/\kappa_\nu$ soit bien vérifiée en tout point du système et pour toutes les zones spectrales jouant thermiquement un rôle appréciable. Au voisinage des parois, dans les couches limites d'un fluide semi-transparent comme un verre en élaboration dans un bain, même si le mouvement est très faible, cette condition est rarement vérifiée ; il est alors nécessaire de recourir à un traitement exact à partir des équations (190) et (192). Un modèle monodimensionnel est généralement approprié, de façon locale, et ne pose aucune difficulté. Dans le cas d'un gaz, le milieu n'est jamais optiquement épais sur tout le spectre utile.

- ***Extension du modèle à d'autres conductivités radiatives***

Dans le modèle mis en place dans le paragraphe précédent qui suppose un milieu à très grand épaisseur optique, nous avons pu interpréter le transfert de chaleur dans le milieu comme étant le « superposition » d'un transfert purement conductif et d'un transfert radiatif. Nous avons vu alors que le transfert radiatif pouvait être pris en compte, à l'aide d'une simple résistance thermique. Par analogie avec le transfert conductif, il a été possible ensuite de définir une conductivité radiative, fonction des propriétés optiques du matériau (absorption) et de ses parois (réflexion, absorption et émission).

L'objet de cette partie sera d'étendre ce type de modèles à des milieux d'épaisseurs optique moyennes, en proposant d'autres expressions pour la conductivité radiative.

- ***Très faible épaisseur optique :*** $\tau_0 = Ke << 1$ (modèle sans couplage)

Sous l'hypothèse d'une faible épaisseur optique, nous supposons que les transferts conductif et radiatif sont parfaitement découplés au sein du milieu. Ce qui signifie en particulier pas d'absorption, et donc pas de réémission dans le milieu (flux radiatif constant). Le couplage entre flux radiatif et conductif a lieu dans ce cas, uniquement au niveau de la paroi. L'expression pour la conductivité radiative s'écrit :

$$\lambda_r = \frac{4n^2 e}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \sigma T^3 \tag{212}$$

- ***Modèle de Rosseland :*** $\tau_0 >> 1$ ***(forte interaction)***

Dans ce modèle, on cherche à interpréter l'équation de transfert radiatif comme une équation de diffusion pure. Le milieu est supposé suffisamment épais pour que les parois ne puissent pas interagir entre elles. Donc, les propriétés optiques des parois (réflexion et émission) n'interviennent pas. On a :

$$\lambda_r = \frac{16n^2}{3\beta} \sigma T^3 \qquad (\beta = \kappa + \sigma) \tag{213}$$

- ***Modèle de Poltz-Jugel :*** $\tau_0 \approx 1$

La détermination de la conductivité radiative s'effectue là encore en cherchant à interpréter le transfert radiatif comme un processus de diffusion thermique, en linéarisant la fonction de *Planck* au premier ordre en température. L'auteur suppose également un faible gradient de température dans le milieu.

On trouve alors ($\tau_0 = \beta e$) :

$$\lambda_r = \frac{16n^2 Y}{3\beta}\sigma T^3 \tag{214}$$

Avec :

$$Y = 1 - \frac{3}{4\tau_0}(1 - 4E_5(\tau_0)) - \frac{2}{3\tau_0}\frac{(1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2 - 2\rho_1\rho_2 E_3(\tau_0))}{1-4\rho_1\rho_2 E_3(\tau_0)^2}(1-3E_4(\tau_0))^2 \tag{215}$$

Cas limites :

$\tau_0 \to \infty$: il est clair que lorsque l'épaisseur optique est grande, $Y \to 1$. On retrouve la conductivité de *Rosseland.*

$\tau_0 \to 0$: dans ce cas, si on développe la fonction Y au premier ordre en τ_0 :

$$\widetilde{Y} = \frac{3}{4}\tau_0 \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{1-\rho_1\rho_2} \qquad \to \qquad \lambda_r = 4n^2 e \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{1-\rho_1\rho_2}\sigma T^3 \tag{216}$$

L'expression de *Poltz-Jugel* tend vers la conductivité donnée par le modèle des très faibles épaisseurs optiques.

- ***Modèle de l'équilibre radiatif (Equilibre Thermique Local) :*** $\tau_0 = Ke << 1$

Ce modèle repose sur l'hypothèse d'un milieu où les gradients de température sont peu importants. On a la conductivité radiative :

$$\lambda_r = \frac{4n^2 e}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \beta e} \sigma T^3 \tag{217}$$

- ***Modèle de Dessler (Rosseland modifié) :***

Il est clair que le modèle précédent ne permet pas de retrouver le cas limite des fortes épaisseurs optiques ($\beta e \to \infty$). L'idée développée par *Dessler* consiste à mettre en place un modèle hybride qui serait valable quelle que soit l'épaisseur du milieu considérée. Il consiste à faire l'approximation de *Rosseland* dans le milieu et celle de l'état stationnaire au voisinage des parois (E.T.L). Il trouve alors une expression pour la conductivité radiative qui a la forme suivante :

$$\lambda_r = \frac{4n^2 e}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{3}{4}\beta e} \sigma T^3 \tag{218}$$

Ce modèle donne d'excellents résultats sur une large gamme d'épaisseur optique mais reste imparfait, notamment pour les très faibles épaisseurs optiques.

- ***Modèle de l'équilibre radiatif modifié :***

Pour rendre compte de l'imperfection du modèle de *Dessler*, une correction à été proposée. Elle consiste en une fonction de correction $K(\beta e)$ qui vaut 1 pour de faibles épaisseurs optiques (conforme à *l'E.T.L*) et 4/3 pour de fortes épaisseurs optiques (modèle de *Rosseland*) :

$$\lambda_r = \frac{4n^2 e}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{\beta e}{K(\beta e)}} \sigma T^3 \tag{219}$$

avec :

$$K(\beta e) = 4/3 - 0.175\, exp(-0.56865.\beta e) - (1/3 - 0.175).exp(-5.6114\beta e) \tag{220}$$

Les deux conductivités radiatives qui sont permettent d'obtenir un large domaine de validité sont le modèle de *Poltz-Jugel* et le modèle de *l'équilibre radiatif modifié*.

Les autres modèles peuvent s'obtenir facilement à partir de ces expressions en faisant les hypothèses adéquates. Nous donnons notre préférence pour la première méthode. En effet, bien que les deux modèles présentent le même comportement pour les faibles épaisseurs optiques, il semble cependant que le modèle de *Poltz-jugel* permette de mieux décrire le passage des faibles aux fortes épaisseurs optiques. En particulier, dans le cas de deux parois réfléchissantes, on ne retrouve pas *Rosseland* par le modèle de *l'équilibre radiatif*.

4. Validation

Dans le chapitre précédent, on a présenté le remplissage des moules du verre fondu dans le cas idéal isotherme, c'est à dire dans le cas où seules les équations de Navier-Stokes et d'Advection ont été résolues. Dans cette partie, nous allons introduire la thermo-dépendance des grandeurs physiques (en particulier pour la viscosité et la conductivité thermique) et couplé avec la mécanique des fluides et le transfert thermique et prendre en compte la paroi solide. Une validation numérique sera effectuée par comparaison de deux codes : Aquilon et Femlab (Comsol Multiphysics).

4.1. Viscosité dépendante de la température

Dans le code de calcul numérique Aquilon que l'on utilise pour simuler le remplissage des moules, on résout l'équation d'énergie couplée aux équations de Navier-Stokes. Dans ces équations, les propriétés thermophysiques des fluides et des matériaux sont constantes.

Pour prendre en compte la thermodépendance des différentes propriétés, notamment pour la conductivité thermique et de la viscosité, on a écrit un nouveau module (« Aquilem.f90 »).

Pour valider ce module, nous avons choisi un cas test dont la configuration est présentée dans la **Figure 28**. Il s'agit d'un écoulement de fluide visqueux entre deux plans infinis (écoulement de type Poisseule) d'un fluide soumis à un gradient de température.

On impose au fluide une vitesse uniforme à l'entrée du canal. Les conditions aux limites thermiques sont indiquées sur la figure.

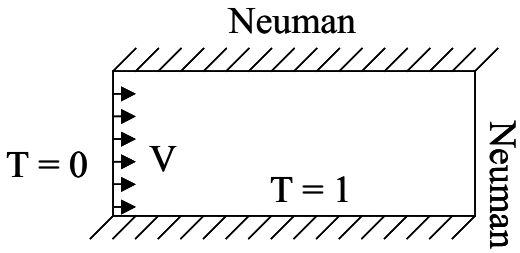


Figure 28 : *Condition aux limites pour les cas où la viscosité et la conductivité thermique dépendent de la température*

Quand la viscosité est constante, on retrouve un champ de vitesse classique sous forme de profils paraboliques symétriques (**Figure 29**). Par contre, lorsque la viscosité du fluide est fonction de la température ($\mu(T) = \mu_0 / \exp(T^5)$), les profils sont modifiés et deviennent asymétriques (**Figure 30**). En effet, lorsque la température augmente, la viscosité du fluide diminue et la vitesse du fluide augmente.

La comparaison Aquilon-Femlab montre une parfaite concordance, ce qui valide le module et la faculté d'Aquilon de pouvoir traiter des problèmes non linéaires comme la prise en compte de propriétés thermophysiques fortement thermodépendantes.

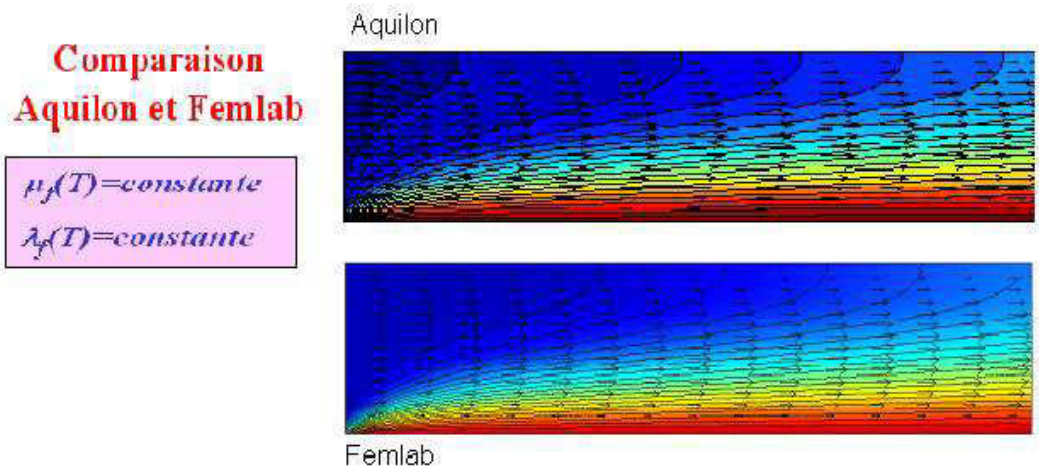


Figure 29 : *Champs de température et profils de vitesse dans le cas d'une conductivité*

thermique et d'une viscosité dynamique constantes

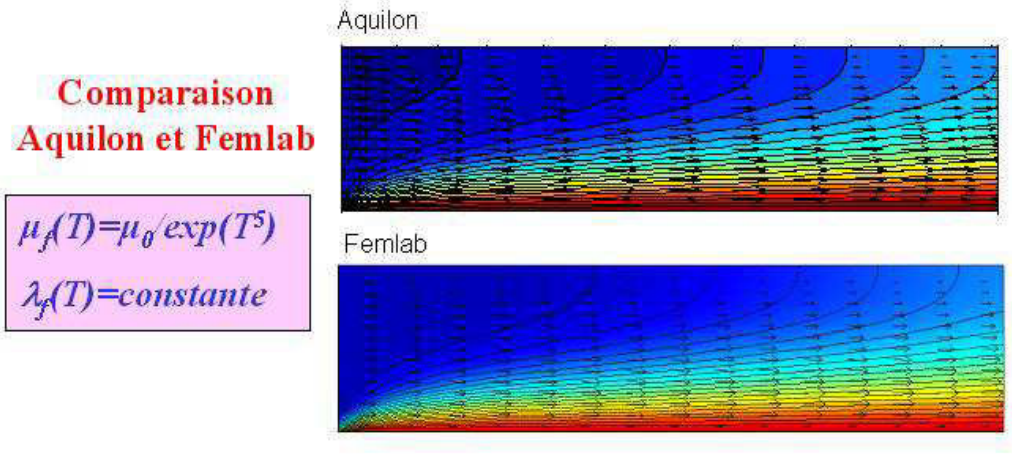


Figure 30 : *Champs de température et profils de vitesse dans le cas d'une conductivité thermique constante et d'une viscosité dynamique thermodépendante*

4.2. Conductivité dépendante de la température

Le problème de la thermodépendance de la conductivité est très importante, car une des méthodes pour résoudre l'E.T.R consiste à utiliser une conductivité radiative équivalente, qui en général, est une fonction du troisième ordre de la température T^3. Pour prendre en compte cette non-linéarité, nous avons introduit la prise en compte de cette thermodépendance dans « Aquilem.f90 ».

La validation de cette fonctionnalité est faite comme précédemment par intercomparaison des résultats obtenus par Aquilon et Femlab. La configuration est la même que précédemment (**Figure 28**).

La conductivité choisie est donnée par : $\lambda(T) = \lambda_0\left(1 + 5T^3\right)$.

La **Figure 31** montre les résultats obtenus. La concordance entre les deux codes est bonne, ce qui valide le module.

On constate en particulier, que lorsque la température augmente, le flux thermique est plus élevé puisque la conductivité est plus grande (comparaison des **Figure 30** et **Figure 31**).

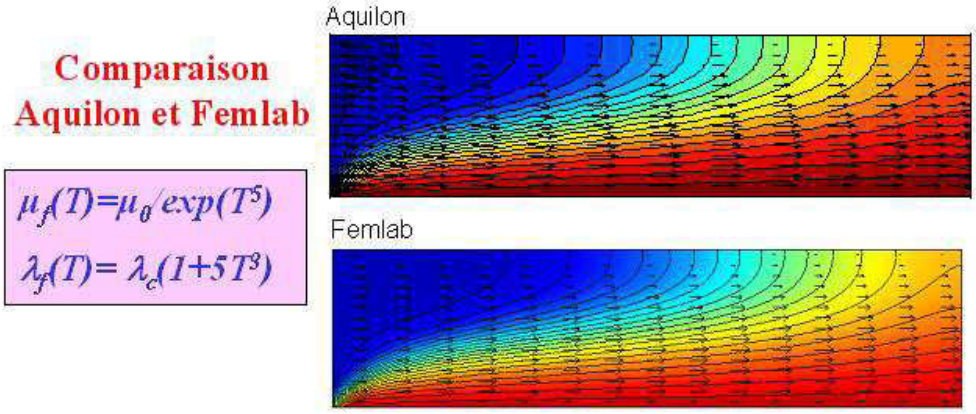


Figure 31 : *Conductivité dépendante de la température :* $\lambda(T)=\lambda_0\left(1+5T^3\right)$

4.3. Source radiative « ∇q_r »

Nous avons vu que le couplage de l'équation de la chaleur avec l'E.T.R se traduisait dans l'équation de la chaleur par l'apparition d'un terme source égal à la divergence du flux radiatif : ∇q_r. Une façon simple de prendre compte ce couplage est d'exprimer cette divergence comme un phénomène de diffusion : $\nabla q_r = \nabla\left(-\lambda_{rad}\nabla T\right)$ (voir notion de conductivité radiative équivalente).

Numériquement, exprimée ainsi le flux radiatif se traite de la même manière que le flux conductif en définissant une conductivité apparente comme étant la somme de la conductivité phonique et de la conductivité radiative : $\lambda_{app}(T)=\lambda_{ph}+\lambda_{rad}(T)$ avec $\lambda_{rad}(T)=\lambda_{ph}T^3$.

Cette approche n'est qu'une approximation du transfert radiatif. Si on veut prendre en compte de façon plus précise le rayonnement, il est nécessaire de traiter ∇q_r comme un véritable terme source. Pour cela, nous avons rajouté dans Aquilon un module pour le calcul du flux radiatif et de sa divergence.

Pour la validation de ce nouveau module, nous avons considéré un cas simple en posant $q_r = -\lambda_{rad}\nabla T$ avec : $\lambda_{rad}(T)=\lambda_{ph}T^3$. Formellement, le problème à résoudre est le même que précédemment mais numériquement il est traité différent. Il doit cependant conduire au même résultat, ce qui est le cas si on compare les résultats obtenus sur les **Figure 32** et **Figure 33**.

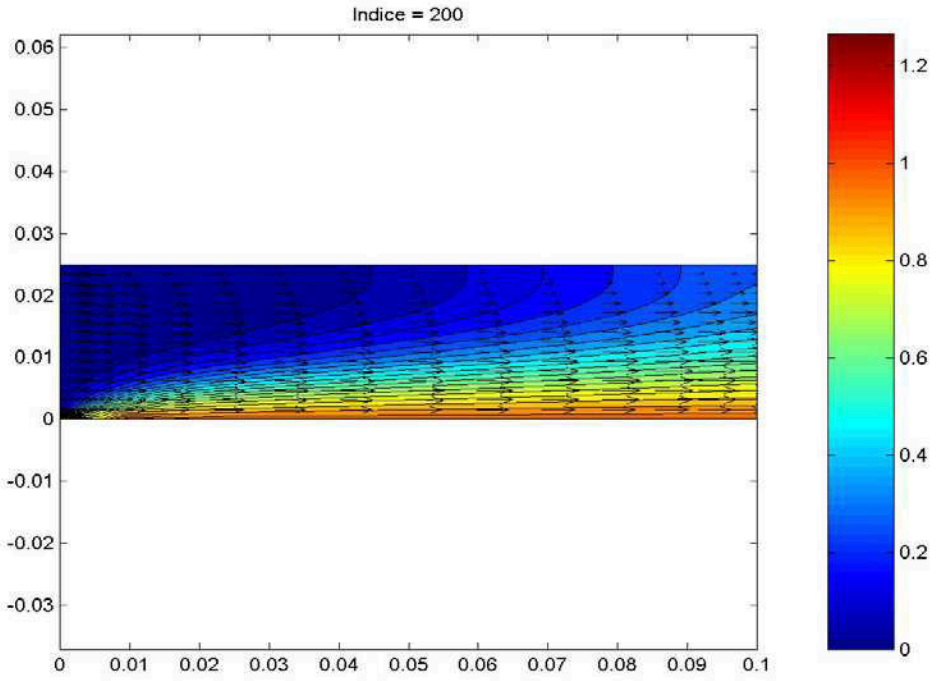


Figure 32 : $\lambda_{app}(T) = \lambda_{ph} + \lambda_{rad}(T)$ *et* $\lambda_{rad}(T) = \lambda_{ph} T^3$ *(Conductivité radiative)*

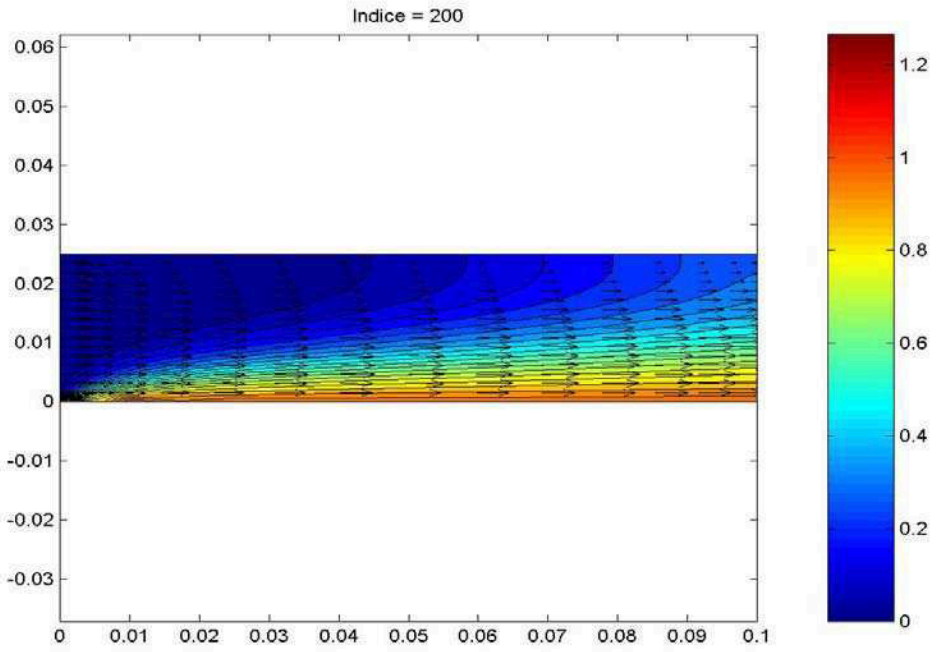


Figure 33 : $\lambda = \lambda_{ph} = const$ *et* $q_{rad} = -\lambda_{rad} \nabla T = -\lambda_{ph} T^3 \nabla T$ *(Terme source)*

4.4. Couplage thermique entre solide et fluide

L'étude du couplage thermique un fluide et une paroi joue un rôle important les transferts thermiques. Dans la littérature, différents modèles ont été mis en place pour prendre en compte cet effet : résistance thermique ou coefficient d'échange par exemple. Ces modèles sont certes intéressants mais dans certaines situations ils sont parfaitement inconnus.

Il paraît judicieux alors de prendre en compte la présence de la paroi dans la simulation du remplissage de moules. Pour cela, il faut traiter le couplage thermique ente un milieu solide et un fluide. Le cas test est décrit sur la **Figure 34**. Dans l'écoulement de Poiseuille entre deux plans, on a placé une inclusion solide dont la température est imposée. Les conditions aux limites sont données sur la **Figure 34**. Les résultats des calculs Aquilon sont donnés sur la **Figure 35**.

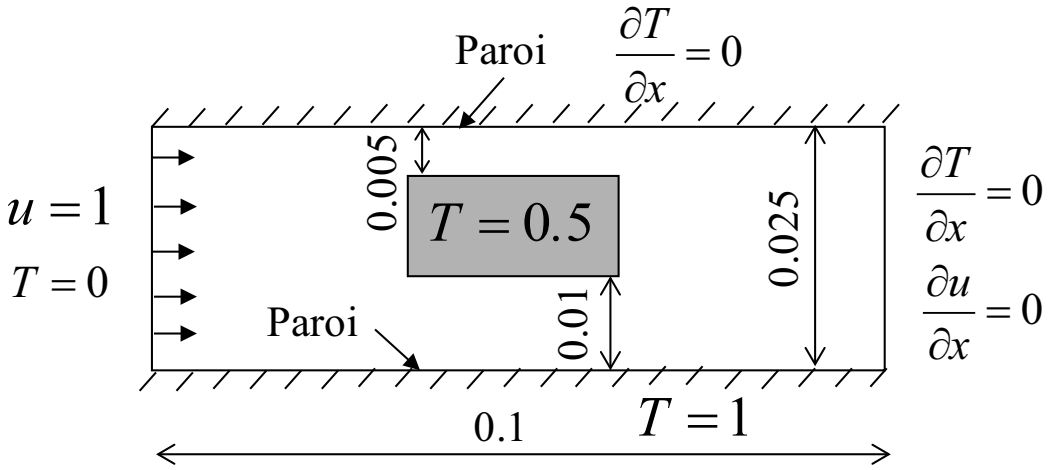


Figure 34 : *Conditions aux limites*

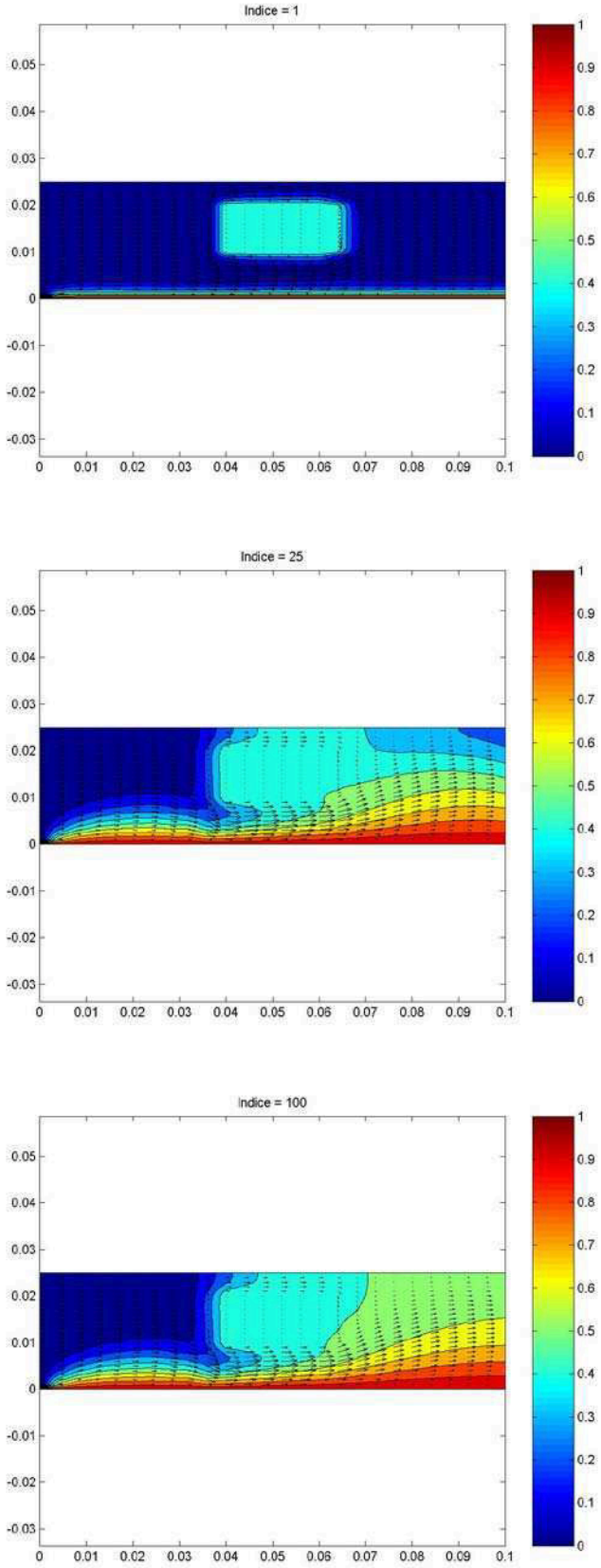


Figure 35 : *Couplage thermique entre solide et fluide*

4.5. Remplissage d'un moule en forme de « U » par gravité par du verre fondu (cas aisotherme)

Dans cette partie, on étudie un cas plus complexe (**Figure 36**) du remplissage de moules par du verre fondu. Ici, on prend en compte l'ensemble des phénomènes physiques étudiés précédemment : l'écoulement diphasique avec l'utilisation du modèle à 1 fluide, le couplage thermique entre solide et fluide avec la résolution du couplage des équations physiques et prise en compte le transfert radiatif dans le transfert thermique en utilisant la conductivité radiative.

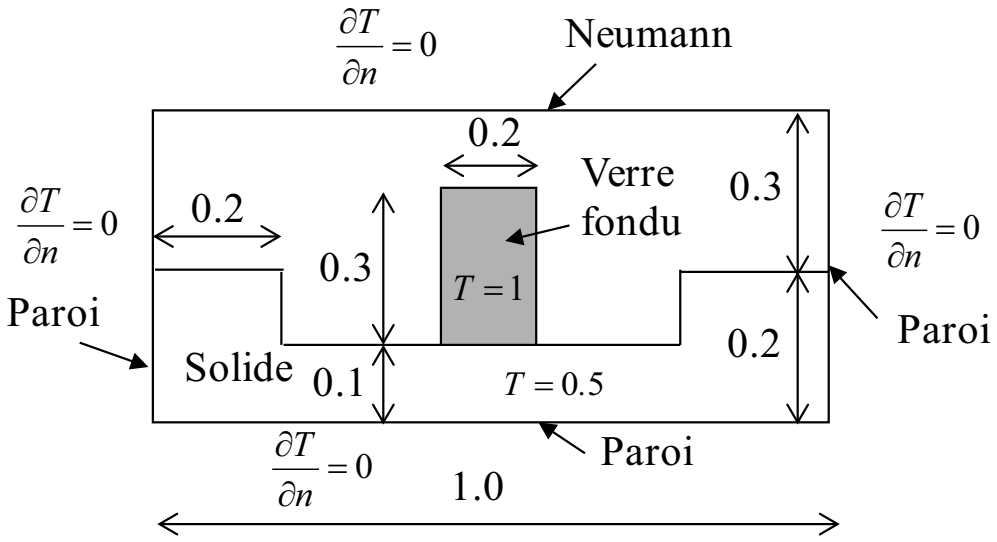


Figure 36 : *Conditions aux limites*

Comme condition initiale, on place une quantité du verre de forme rectangulaire avec une température initiale réduite de 1 sur un moule d'acier en forme de U et avec une température initiale à 0.5. Les caractéristiques des matériaux sont présentées dans le **Tableau 5** et les résultats du calcul Aquilon (Température et champ de vitesse) sont présentés sur la **Figure 37**.

	Verre fondu	**Acier**	**Air**
λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	1	40	0.0263
μ ($Pa.s$)	100	-	1.85×10^{-5}
ρ ($kg.m^{-3}$)	2500	2000	1.177

Tableau 5 : *Caractéristique des matériaux*

On observe l'échauffement du moule au contact de la pâte de verre, la diffusion et convection de la chaleur dans l'air, ainsi que la mise en œuvre d'un mouvement convectif dans l'air.

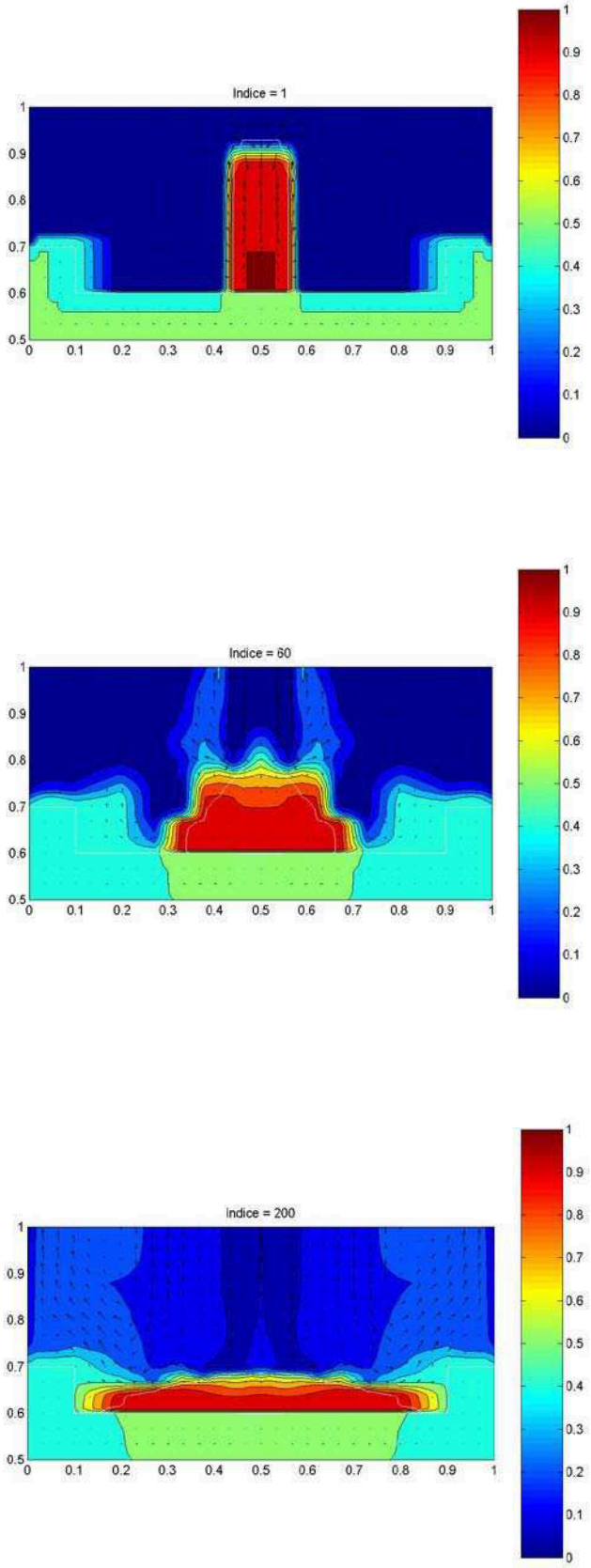


Figure 37 : *Ecoulement du verre fondu par gravité (anisotherme)*

Conclusion

Dans ce chapitre a été abordé le problème du transfert radiatif et de son couplage aux autres modes de transfert.

Une approche « conductivité radiative » a été mise en place dans le code Aquilon.

Un module « Aquilem.f90 » a été développé pour prendre en compte la thermodépendance des propriétés thermophysiques, en particulier de la viscosité dynamique et conductivité thermique du fluide, ainsi que la prise en compte du couplage de l'équation de la chaleur et de l'E.T.R à travers le terme source ∇q_r. Ce module a pu être validé par inter-comparaison des résultats obtenus par Aquilon et Femlab.

Enfin, la résolution d'un cas complexe de remplissage de moules verriers par gravité a montré la capacité du code à traiter les couplages écoulement diphasique-thermique et écoulement diphasique-parois entre l'air, la pâte de verre liquide et les parois du moule solide.

Chapitre III

Résolution générale de l'E.T.R :

« Méthode explicite directe »

Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les méthodes de résolution de l'E.T.R. Après une première partie où les différentes méthodes approchées et fines seront présentées, nous décrirons plus en détail la méthode dite « explicite directe » (méthode fine) que nous proposons d'utiliser pour résoudre l'E.T.R.

Nous présenterons le principe de cette méthode dans le cas général 3D, puis nous l'appliquerons dans le cas particulier 1D d'un mur d'extension infinie et d'un mur d'extension fini 2D. Ces cas simples nous servirons de cas de validation pour valider la méthode approchée que nous proposons d'utiliser et qui sera présentée dans le Chapitre suivant.

1. Les méthodes existantes pour résoudre l'E.T.R

1.1. Les méthodes approchées

- ***Approximation de Rosseland***

L'approximation de Rosseland est apparue pour la première fois dans le domaine de l'astrophysique ([ROSSELAND 36]). Rosseland suppose que le milieu semi-transparent considéré est optiquement épais, en d'autres thermes que l'épaisseur du milieu est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des photons. A partir de cette hypothèse, l'équation du transfert radiatif se simplifie considérablement pour donner une équation, similaire à la loi de Fourrier, faisant intervenir le flux radiatif ([OZISIK 73]) :

$$\varphi^R(z) = -\lambda_R(T)\frac{\partial T}{\partial z} \tag{221}$$

où λ_R est la *conductivité radiative* donnée par :

$$\lambda_R(T) = \frac{16n^2}{3\beta}\sigma T^3 \tag{222}$$

σ est la constante de Stefan-Boltzmann. β est le coefficient d'extinction. La formulation proposée par cette méthode n'est valable rigoureusement que dans le cas d'un milieu diffusant de façon isotrope. De plus, on peut noter que cette approximation ne s'applique correctement que loin des frontières du milieu. Aussi, cette approximation reste très limitée dans son champ d'application.

- ***Le modèle à deux flux***

Cette approximation a été proposée pour la première fois par Schuster et Schwartzchild ([CHANDRASEKHAR 60]).

L'hypothèse simplificatrice consiste à décomposer la luminance en deux composantes, supposées constantes par demi-espace.

L'E.T.R se ramène alors à un système de deux équations différentielles, l'une pour la composante positive du flux dans l'hémisphère positif et l'autre pour la composante négative dans l'hémisphère négatif. Dans son travail de thèse, Guilbert a utilisé cette méthode [GUILBERT 85].

Les méthodes approchées que nous venons d'exposer ont l'avantage de représenter le transfert radiatif comme un phénomène diffusif, permettant ainsi de définir par analogie avec la conduction une conductivité radiative. Le problème d'un transfert couplé radiatif et conductif peut alors être traité comme un transfert conductif par additivité simple des flux. Cependant, selon TONG et TIEN, LEE et UNY, ces méthodes sont insuffisantes pour représenter de façon précise le transfert radiatif, en particulier dans des milieux semi-transparents qui présentent une diffusion fortement anisotrope.

1.2. Les méthodes numériques fines ou détaillées

- ***La méthode des zones***

Cette méthode a été proposée pour la première fois par [HOTTEL et COHEN 58]. Elle consiste à diviser le milieu en un nombre fini de zones volumiques isothermes et les surfaces entourant le milieu en un nombre fini de zones surfaciques isothermes. L'E.T.R est modélisée en écrivant un bilan d'énergie sur chaque zone. Ce bilan fait intervenir des facteurs d'échange directs qui représentent la fraction d'énergie radiative quittant une zone et absorbée par une autre zone. Les échanges pouvant intervenir sont du type surface-surface, volume-surface ou volume-volume.

La procédure qui consiste à écrire un bilan énergétique sur chaque zone conduit à la résolution d'un système d'équations algébriques non linéaires en fonction de la température. La matrice de ce système est complètement pleine. Elle est par conséquent difficile à inverser. De plus dans le cas non-gris, chaque facteur de forme doit être recalculé car il dépend de la température des zones considérées à travers la fraction d'émission du corps noir. Toutefois, la méthode des zones permet d'obtenir des résultats d'une bonne précision si le nombre de zones choisies est suffisamment important.

- ***La méthode de Monte Carlo***

La méthode de Monte Carlo fournit une approche statistique pour résoudre l'E.T.R en invoquant une description probabiliste des processus d'échanges radiatifs. Cette méthode consiste à suivre le chemin de paquets d'énergie depuis leur émission jusqu'à leur absorption dans le milieu ou jusqu'à leur sortie du milieu. Le paquet peut subir au sein du milieu une absorption, une diffusion ou encore une réflexion. Tous ces événements sont choisis de manière probabiliste par utilisation de nombres aléatoires. Les différents choix possibles appartiennent à une distribution statistique respectant les propriétés radiatives du milieu considéré. La méthode de Monte Carlo permet de traiter des problèmes à géométrie complexe. Cependant, des erreurs statistiques peuvent apparaître si le caractère aléatoire des nombres générés n'est pas garanti et de plus, le temps de calcul est relativement important ainsi que la taille mémoire requise. La précision de cette méthode peut être améliorée en augmentant le temps de calcul, d'après [AL ABED et SACADURA 83]. Pour une présentation détaillée de la méthode de Monte Carlo, on peut citer [HOWELL 68], [HAJI-SHEIKH 88] et [WALTERS et BUCKIUS 17].

- ***Les méthodes Multiflux***

Le principe de ces méthodes repose sur une discrétisation de l'espace angulaire et, dans les différents angles solides formés, la luminance est considérée uniforme. La forme la plus simple de discrétisation consiste à utiliser l'hypothèse simplificatrice de l'isotropie hémisphérique de la luminance. Il s'agit du modèle à deux flux que nous avons déjà évoqué. Ce modèle peut être étendu à des modèles à quatre ou six flux pour des géométries multidimensionnelles et si on affine encore la discrétisation angulaire, nous obtenons la méthode des ordonnées discrètes.

- ***La méthode des ordonnées discrètes***

Cette méthode a été proposée pour la première fois par [CHANDRASEKHAR 60] pour résoudre les problèmes de transfert radiatif mono-dimensionnel dans le domaine de l'astrophysique. Depuis, son application à la résolution de l'E.T.R a connu un certain succès et a été utilisée par plusieurs auteurs pour différents cas de géométrie, milieux et conditions aux limites. La méthode des ordonnées discrètes consiste à approcher le terme intégral de l'E.T.R par une formule de quadrature, soit :

$$\int_{\Omega=4\pi} f(\Omega)d\Omega \cong \sum_{k=1}^{N} f_k \cdot \omega_k \tag{223}$$

Où ω_k est le poids d'intégration associé à chaque direction. En écrivant l'E.T.R pour chaque direction, nous obtenons alors un système d'équation aux dérivées partielles qui se résout en utilisant une discrétisation spatiale, une méthode aux différences finies par exemple. La méthode des ordonnées discrètes est aussi appelée approximation S_N où N indique l'ordre de la quadrature qui est reliée aux nombres de directions. [JAMALUDDIN et SMITH 88] montre qu'en géométrie bidimensionnelle, les approximations S_4, S_6 et S_8 permettent de modéliser le transfert radiatif dans un milieu diffusant, émissif et absorbant avec une précision acceptable. De manière générale, S_2 donne souvent des résultats assez mauvais, S_4 peut suffire dans certains problèmes couplés, S_6 voire S_8 ne sont en général pas très pénalisants à utiliser. Pour une présentation détaillée de la méthode de ordonnées discrètes, on peut citer [CARLSON et LATHROP 68], [FIVELAND 82-84], [STAMMES 88], et [KUMAR 90].

- ***La méthode des harmoniques sphériques ou méthode PN***

Un autre type d'approximation consiste à développer la distribution angulaire de la luminance en une série d'harmoniques sphériques. La série peut être tronquée arbitrairement à N termes. On parle de la méthode P_N et l'E.T.R se réduit, comme l'approximation S_N, à un système d'équations aux dérivées partielles. Cette méthode fut proposée la première fois par [JEANS 17] qui étudiait le transfert radiatif dans le domaine de l'astrophysique. La complexité mathématique de cette méthode augmente rapidement avec l'ordre de l'approximation. Ainsi, les approximations les plus souvent utilisées sont P_1 et P_3. L'approximation P_1 a le mérite de remplacer l'équation aux dérivées partielles en un système plus simple ; cependant, des problèmes de précisions numériques peuvent apparaître pour certaines géométries dans la limite des milieux optiquement minces ([MODEST 93]). [BAYAZITOGLU et HYGENYI 79] ont constaté ce genre de problèmes alors que pour un milieu à faces parallèles, la différence entre P_1 et P_3 est négligeable. Pour les approximations d'ordre supérieur, la précision numérique gagnée est relativement faible en comparaison de l'augmentation de la difficulté analytique et du temps de calcul.

- ***La méthode des éléments finis ou volumes finis***

La méthode des éléments finis a également été utilisée pour résoudre l'E.T.R, pour un problème couplé conducto-radiatif, dans un milieu gris non diffusant contenu dans une enceinte rectangulaire (modèle 2D). Les auteurs [RAZZAQUE 83] reconnaissent certaines difficultés de mise en œuvre. [ROUX 83] ont utilisé la méthode des éléments finis pour résoudre l'E.T.R sur un milieu isolant fibreux absorbant, diffusant, émissif et l'ont comparé à la méthode aux ordonnées discrètes. Ils en concluent que les résultats obtenus sont en très bon accord. L'intérêt de ces méthodes est qu'il est possible d'utiliser le même maillage pour lé résolution de l'équation de Fourier et l'E.T.R .

Enfin, nous allons présenter une dernière méthode dite matricielle.

- ***La méthode matricielle***

C'est une méthode qui s'applique seulement dans le cas d'une géométrie mono-dimensionnelle. Le point de départ des méthodes matricielles est, comme pour l'approximation S_N, d'approcher l'intégrale de l'E.T.R par une quadrature numérique afin d'obtenir, pour les directions choisies, un système d'équations différentielles ordinaires. Le système se réduit dans le cas du transfert mono-dimensionnel pour la direction (Ox) a un système différentielle du type :

$$\frac{dL_\lambda(x)}{dx} = A_\lambda \cdot L_\lambda(x) + E_\lambda^0(x) \tag{224}$$

Où L_λ est le vecteur dont les composantes sont les luminances dans les différentes directions discrètes retenues pour l'étude. Dans sa thèse, [BOULET 92] a généralisé les travaux de [GUILBERT 85] en passant d'un modèle deux flux à un modèle multi-flux. Pour résoudre l'E.T.R dans ce cas, il a utilisé la méthode matricielle. Partant du système d'équations différentielles obtenues, la solution immédiate est celle qui consiste à utiliser les exponentielles de matrices.

Il existe également des combinaisons des méthodes appelées méthodes hybrides permettant de pallier les inconvénients de chacune tout en profitant des avantages des autres.

1.3. Conclusion

Quoi qu'il en soit, il n'existe pas de méthodes universelles. Les problèmes industriels que l'on peut rencontrer sont très diversifiés, notamment par la nature du milieu à étudier et par la variété des conditions aux limites qui peuvent être traitées. Aussi, le choix d'une méthode est le plus souvent conditionné par le type d'applications et c'est généralement un compromis entre les exigences de l'utilisateur en termes de difficulté de mise en œuvre, de précision et de coût en place mémoire et temps de calcul.

Nous avons déjà évoqué le cas des méthodes approchées dans le chapitre précédent (notion de conductivité radiative). Parmi les méthodes fines, nous avons écarté malgré sa simplicité, la méthode de Monte-Carlo beaucoup trop gourmande en temps de calcul, ainsi que les méthodes multi-flux et d'ordonnées discrètes car elles nécessitent un maillage spécifique. Les méthodes de type éléments finis ou volumes finis sont intéressantes car elles peuvent utiliser la même discrétisation que celle utilisée pour résoudre l'équation de la chaleur. Bien que ces dernières méthodes soient très précises, notre choix s'est orienté vers la méthode des harmoniques sphériques pour des raisons de temps de calcul qui peuvent devenir prohibitifs sur des problèmes à frontière libres ou interfaces mobiles. Ceci est un point important car très souvent dans des applications industrielles, le temps de calcul des méthodes fines est incompatible avec les contraintes du monde industriel et on préfère s'orienter vers des méthodes approchées de type modèle de Rosseland ou Rosseland modifié.

2. Résolution du couplage conducto-radiatif dans les milieux semi-transparents

Dans cette partie, nous allons évoquer la résolution de l'E.T.R couplée avec l'équation de la chaleur tout d'abord dans le cas général, avant d'aborder sa résolution par une méthode explicite directe dans deux cas simples 1D et 2D qui serviront de validation par la suite.

Cette méthode [HOTTEL et SAROFIM 72] généralise la méthode des flux incidents et partants [JEAN 03] ou méthode des radiosités à des milieux semi-transparents absorbants, diffusants et émissifs.

2.1. Résolution du problème de couplage dans le cas général 3D

Le problème que nous avons à résoudre est un problème où l'équation de la chaleur et l'équation du transfert radiatif (E.T.R) qui décrivent les lois d'évolution de la température T et de la luminance L dans le milieu sont couplées.

- ***Cas général***

Si on considère un milieu semi-transparent, le flux en un point r est constitué d'une composante conductive $\boldsymbol{q}^{cd}$, d'une composante convective $\boldsymbol{q}^{cv}$ et d'une composante radiative $\boldsymbol{q}^{R}$ telles que : $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}^{cd} + \boldsymbol{q}^{cv} + \boldsymbol{q}^{r}$.

L'équation de transfert radiatif (E.T.R) est alors couplée avec l'équation générale de l'énergie (équation de la chaleur) :

$$-\vec{\nabla}.\left(\boldsymbol{q}^{cd} + \boldsymbol{q}^{cv} + \boldsymbol{q}^{R}\right) + P(s,t) = \rho C_p \frac{\partial T(s,t)}{\partial t} \tag{225}$$

$\rho C_p \dfrac{\partial T(s,t)}{\partial t}$ représente le taux de variation de l'énergie interne dû aux apports d'énergie par :

(1) La création ou la perte locale d'énergie par unité de volume et de temps représentée par $P(s,t)$.

(2) La densité de flux de conduction $\boldsymbol{q}^{cd}$ donnée par la loi de Fourier :

$$\boldsymbol{q}^{cd}(s,t) = -\lambda \nabla T(s,t) \tag{226}$$

(3) La densité de flux convectif $\boldsymbol{q}^{cv}$ donnée par le terme d'advection. $\vec{V}$ est soit nulle dans le cas d'un milieu solide, soit imposée par un écoulement indépendant de la température (scalaire passif), ou un écoulement thermo-dépendant donné par les équations de NS :

$$\boldsymbol{q}^{cv}(s,t) = \rho C_p \vec{V}(s,t).T(s,t) \tag{227}$$

(4) La densité de flux de rayonnement $\boldsymbol{q}^R$:

$$\boldsymbol{q}^R(s,t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} L'_\nu(s,\vec{\Delta})\vec{\Delta}\, d\omega\, d\nu \tag{228}$$

où $L'_\nu(s,\vec{\Delta})$ est la luminance monochromatique dans la direction $\vec{\Delta}$, solution de l'équation de transfert radiatif :

$$\frac{1}{\beta_\nu(s)}\frac{dL'_\nu(s,\vec{\Delta})}{ds} + L'_\nu(s,\vec{\Delta}) = (1-\omega_\nu)L^0_\nu(T) + \frac{\omega_\nu}{4\pi}\int_0^{4\pi} p(\Delta' \to \Delta)L'_\nu(s,\vec{\Delta'})d\Omega' \tag{229}$$

Il faut remarquer que l'E.T.R est écrite ici sous forme stationnaire (pas de terme transitoire). Ceci ne signifie pas que la luminance donc le flux radiatif ne varie pas avec le temps car ces grandeurs dépendent implicitement du temps à travers le terme de réémission de Planck $L^0_\nu(T(s,t))$. Si le milieu est purement diffusant ($\omega_\nu = 1$ pour toutes les fréquences), l'E.T.R n'est plus couplée avec l'équation de la chaleur, sauf à travers les conditions aux limites si les parois sont opaques ou semi-transparentes.

Dans le cas d'un milieu absorbant-émettant, l'E.T.R ne peut être résolue tant que la distribution de température n'est pas calculée et réciproquement. Il est toutefois possible d'obtenir des expressions explicites de la luminance et du flux radiatif en fonction du champ de température dans le milieu $T(s,t)$. Ces expressions sont à la base de la méthode dite explicite directe.

L'équation de la chaleur (225) peut s'écrire :

$$\vec{\nabla}.(\lambda(s)\nabla T(s,t)) - \vec{\nabla}.(\rho C_p \vec{V}.T) - \vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R) + P(s,t) = \rho C_p \frac{\partial T(s,t)}{\partial t} \tag{230}$$

ou sous sa forme conservative $(\nabla \vec{V} = 0)$:

$$\vec{\nabla}.(\lambda(s)\nabla T(s,t)) - \rho C_p \vec{V}.\nabla T - \vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R) + P(s,t) = \rho C_p \frac{\partial T(s,t)}{\partial t} \tag{231}$$

Cette donc à travers le terme $\vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R)$ qu'apparaît le coulage entre l'E.T.R et l'équation de la chaleur. Ce terme apparaît comme un terme source dans l'équation de la chaleur.

- ***Milieu gris solide absorbant-émettant (non diffusant), sans source interne***

Dans le cas d'un milieu solide, $\vec{v} = 0$ (pas de transport convectif), sans source interne, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\vec{\nabla}.(\lambda(s)\nabla T(s,t)) - \vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R) = \rho C_p \frac{\partial T(s,t)}{\partial t} \tag{232}$$

Le flux radiatif $\boldsymbol{q}^r$ s'obtient à partir de la luminance L'_ν et $\boldsymbol{q}^R(r,t) = \int_0^\infty \int_{4\pi} L'_\nu(s,\vec{\Delta})\vec{\Delta}\, d\Omega\, d\nu$.

Pour simplifier, nous supposerons que le milieu est gris (luminance indépendante de la longueur d'onde λ ou de la fréquence ν). On se place également dans le cas particulier d'un milieu non diffusant. L'E.T.R devient :

$$\frac{dL'(s,\vec{\Delta})}{ds} + \kappa L'(s,\vec{\Delta}) = \kappa L_\nu^0(T(s,t)) \tag{233}$$

s désigne ici l'abscisse curviligne et κ le coefficient d'absorption du matériau Le premier terme à gauche de l'équation traduit les variations de luminance dues à une perte d'énergie par absorption tandis que le second terme traduit une gain d'énergie lié à la réémission du matériau (loi d'émission du corps noir qui dépend de la température du matériau au point considéré).

Le principe de la méthode explicite directe consiste à exprimer la luminance, le flux radiatif et sa divergence en fonction d'un champ de température arbitraire $T(s,t)$. Il est donc ainsi possible de découpler l'E.T.R et l'équation de la chaleur. L'avantage de cette méthode est qu'il est alors possible de résoudre l'E.T.R de façon explicite et il n'y a plus alors qu'à résoudre de façon numérique l'équation de la chaleur en prenant en compte le terme source

$\vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R)$ dans l'équation de la chaleur et le flux radiatif $\boldsymbol{q}^R$ dans les conditions aux limites associées à cette équation.

- ***Expression générale de la divergence du flux radiatif*** $\vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R)$

On rappelle que le flux radiatif $\vec{q}_r$ en un point d'abscisse curviligne s est donné par l'intégration sur un solide 4π de la luminance totale directionnelle selon la direction $\vec{\Delta}$:

$$\boldsymbol{q}^R(s,t) = \int_{4\pi} L'(s,\vec{\Delta})\vec{\Delta}\, d\omega \tag{234}$$

Le flux radiatif dans un direction donné $\vec{n}$ est le produite scalaire de $\boldsymbol{q}^r$ avec $\vec{n}$.

$$q_r = \boldsymbol{q}^R{}_{,\vec{n}} = \boldsymbol{q}^R.\vec{n} = \int_{4\pi} L'(s,\vec{\Delta})\vec{\Delta}.\vec{n}\, d\omega \tag{235}$$

D'après l'*E.T.R* (233), la divergence du flux radiatif peut s'écrire de la manière suivante :

$$\vec{\nabla}\boldsymbol{q}^R = \int_{4\pi} \frac{dL'}{ds} d\omega = -\kappa\int_{4\pi} L'\, d\omega + \kappa\int_{4\pi} L_0(T)\, d\omega \tag{236}$$

On définit la luminance moyenne $\overline{L}$ telle que :

$$\overline{L} = \int_{4\pi} L'\, d\Omega \tag{237}$$

On a également la luminance du corps noir $L_0 = n^2\sigma T^4/\pi$ qui est isotrope, d'où :

$$\vec{\nabla}\boldsymbol{q}^R = -4\pi\kappa\overline{L} + 4\pi\kappa L_0 = 4\pi\kappa(L_0 - \overline{L}) \tag{238}$$

On voit ainsi que si le milieu n'est pas absorbant alors $\vec{\nabla}.(\boldsymbol{q}^R) = 0$. Il n'y donc couplage de l'E.T.R avec l'équation de la chaleur. Il est intéressant de noter que ce terme source est isotrope (indépendant de θ et φ) car il est fonction uniquement de l'émission du corps noir L_O et de la luminance moyenne $\overline{L}$ (moyenne de la luminance directionnelle L').

L'objet de la section qui suit va consister à donner le forme générale de $\overline{L}$, ainsi que du flux radiatif $\boldsymbol{q}^R$ dont on aura besoin pour expliciter les conditions aux limites conducto-radiatives.

- ***Luminance moyenne $\overline{L}$ et flux radiatif q^R dans le cas général 3D***

Les expressions du flux radiatif et de la luminance moyenne sont données dans le cas général d'un milieu tridimensionnel par les relations suivantes :

➢ ***Luminance moyenne :***

$$\overline{L}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_A L'(r_0)\frac{\vec{n}.(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}\exp\left(-\kappa|\vec{r}-\vec{r}_0|\right)dA + \frac{\kappa}{4\pi}\int_V L'(r^*)\frac{\exp\left(-\kappa|\vec{r}-\vec{r}^*|\right)}{|\vec{r}-\vec{r}^*|^2}dV^* \qquad (239)$$

➢ ***Flux radiatif*** :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{q}^R(\vec{r}) = &\int_A L'(r_0)[\vec{n}.(\vec{r}-\vec{r}_0)]\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^4}\exp\left(-\kappa|\vec{r}-\vec{r}_0|\right)dA \\ &+\kappa\int_V L'(r^*)\frac{\vec{r}-\vec{r}^*}{|\vec{r}-\vec{r}^*|^3}\exp\left(-\kappa|\vec{r}-\vec{r}^*|\right)dV^*\end{aligned} \qquad (240)$$

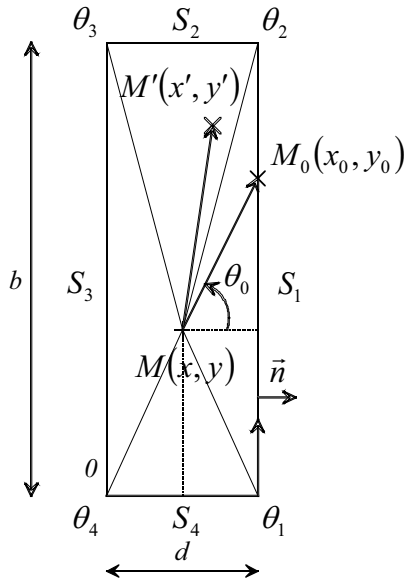


Figure 38 : *Repérage des points M, M' et M_0*

κ représente le coefficient d'absorption *moyen* du milieu semi-transparent de surface A et de volume V. $\boldsymbol{q}^R(\vec{r})$ et $\overline{L}(\vec{r})$ représentent le flux radiatif et la luminance *moyenne* en un point $M(x,y,z)$ du volume V, repéré par rapport au centre du repère O par son rayon vecteur $\vec{r}$. Un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de la surface A est repéré par son rayon vecteur $\vec{r}_0$. Les vecteurs $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ et $\vec{r}^*$ permettent de localiser les positions des surfaces et volumes élémentaires dA, dV et dV^*.

Il est important de noter que compte-tenu des effets à *"distance"* du transfert radiatif, la luminance moyenne en un point donné est fonction de l'ensemble des températures du milieu et des températures des frontières. Elle dépend donc de la géométrie du milieu.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat général dans le cas d'un mur à faces planes parallèles d'extension infinie (cas 1D) et finie (cas 2D).

2.2. Résolution de l'E.T.R par la méthode explicite dans le cas 1D

Dans cette partie, nous abordons l'étude du transfert couplé conduction-rayonnement dans le cas d'un milieu semi-transparent à faces planes parallèles. Nous nous plaçons ici dans la configuration d'une mur plan d'extension semi-infinie (b et $h \to \infty$).

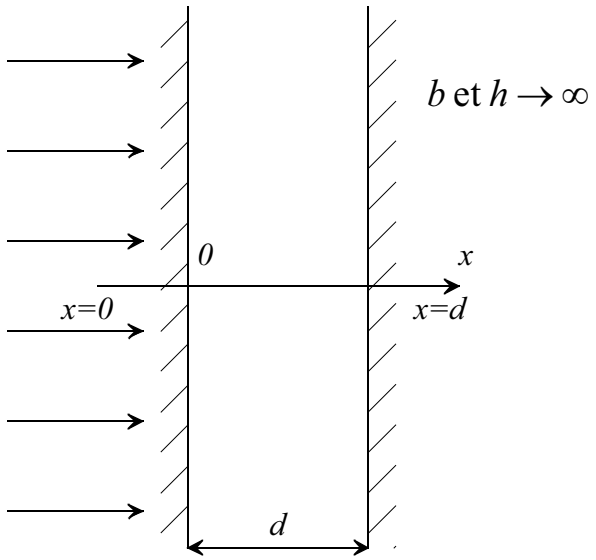


Figure 39 : *Mur à faces planes parallèles, d'extension infinie*

- ***Luminance moyenne***

La luminance moyenne est constituée de deux contributions : une intégrale de volume que l'on notera L_{V-V} (échange entre deux volumes élémentaires) et des intégrales de surface notée L_{S_i-V} et L_{S_j-V} (échange entre les surface S_i ou S_j et un volume élémentaire V).

➢ ***Pour l'intégrale de volume :***

$$L_{V-V} = \int_V L'(r^*) \frac{\exp\left(-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|^2} dV^* \quad \text{avec : } dV^* = \rho^* d\rho^* d\theta^* dx^* \tag{241}$$

Compte-tenu de la géométrie du problème, on a la symétrie en θ, d'où :

$$L_{V-V} = 2\pi \int_{x^*=0}^{d} L'(x^*) \int_{\rho^*=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|^2} \rho^* d\rho^* dx^* \tag{242}$$

On effectue ensuite le double changement de variables suivant :

$$\xi^* = \frac{\rho^*}{\left|x-x^*\right|}, \text{ puis } t = \left(1+\xi^{*2}\right)^{1/2} \tag{243}$$

On trouve en utilisant la définition des fonctions intégro-exponentielles $E_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{1}{t^n} \exp(-xt) dt$ (Voir **Annexe C** pour plus de détails sur ces fonctions) :

$$L_{V-V} = 2\pi \int_{x^*=0}^{d} \frac{n^2 \sigma T^4(x^*)}{\pi} E_1\left(\kappa\left|x-x^*\right|\right) dx^* \tag{244}$$

➢ ***Pour les intégrales de surface :***

$$\boxed{L_{S-V} = \int_A L'(r_0) \frac{\vec{n}.\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^3} \exp\left(-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|\right) dA} \quad \text{avec : } dA = 2\pi\rho_0 d\rho_0 \tag{245}$$

Nous avons ensuite deux intégrales de surfaces à calculer en $x = 0$ et $x = d$. Pour calculer ces deux intégrales, nous appliquons le double changement de variables :

$$\xi_0^{\ *} = \frac{\rho_0^{\ *}}{|x|}, \quad \text{puis } t_0 = \left(1 + \xi_0^{\ *2}\right)^{1/2} \tag{246}$$

On trouve ainsi en utilisant les fonctions exponentielles intégrales

$$\boxed{L_{S_1-V} = 2\pi L(0) E_2(\kappa x) = 2\pi \frac{n^2 \sigma T(0)^4}{\pi} E_2(\kappa x)} \tag{247}$$

et

$$\boxed{L_{S_2-V} = 2\pi L(d) E_2(\kappa(d-x)) = 2\pi \frac{n^2 \sigma T(d)^4}{\pi} E_2(\kappa(d-x))} \tag{248}$$

d'où le résultat :

$$\begin{aligned} 4\pi \overline{L}(x) &= 2n^2 \sigma T(0)^4 E_2(\kappa x) + 2n^2 \sigma T(d)^4 E_2(\kappa(d-x)) \\ &\quad + 2\kappa n^2 \sigma \int_{x^*=0}^{d} T^4(x^*) E_1\left(\kappa \left|x - x^*\right|\right) dx^* \end{aligned} \tag{249}$$

D'après l'expression de la divergence du flux radiatif, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla(\boldsymbol{q}^R) &= 4\kappa n^2 \sigma T^4(x) - \left(2\kappa n^2 \sigma T(0)^4 E_2(\kappa x) + 2\kappa n^2 \sigma T(d)^4 E_2(\kappa(d-x))\right) \\ &\quad - 2\kappa^2 n^2 \sigma \int_{x^*=0}^{d} T^4(x^*) E_1\left(\kappa \left|x - x^*\right|\right) dx^* \end{aligned}} \tag{250}$$

- ***Flux radiatif***

Compte-tenu de la géométrie du problème, nous aurons besoin de connaître pour résoudre le problème couplé que l'expression du flux radiatif selon la direction *x*, c'est à dire $\boldsymbol{q}^R{}_{,x} = \boldsymbol{q}^R . \vec{x}$.

Le calcul du flux radiatif s'effectue de la même façon que pour la luminance moyenne (mêmes changements de variables). On trouve ainsi :

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{q}^{R}{}_{,x}(x) &= 2n^2\sigma T^4(0)E_3(\kappa x) - 2n^2\sigma T^4(d)E_3(\kappa(d-x)) \\ &+ 2\kappa n^2\sigma\left[\int_{x^*=0}^{x} T^4(x^*)E_2(\kappa|x-x^*|)dx^* - \int_{x^*=x}^{d} T^4(x^*)E_2(\kappa|x^*-x|)dx^*\right] \end{aligned}} \tag{251}$$

Dans le pratique, nous n'aurons besoin que de connaître le flux radiatif en $x = 0$ et $x = d$.

2.3. Résolution de l'E.T.R par la méthode explicite dans le cas 2D

Considérons le système de 2D présenté sur la **Figure 40**. On va donner l'expression de la luminance moyenne et du flux radiatif au point *M* qui est de la somme des flux radiatifs échangés entre ce point et tous les autres points interne au milieu L_{V-V} et les 4 surfaces L_{S-V}.

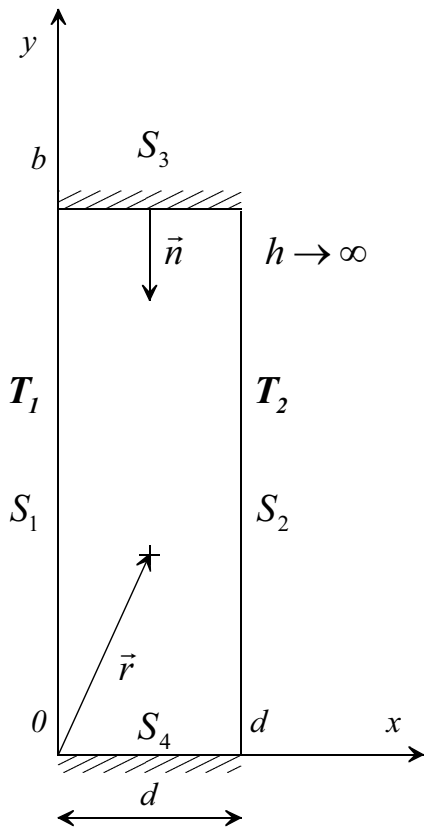


Figure 40 : *Mur à faces planes parallèles, d'extension finie*

- ***Luminance moyenne***

➢ ***Pour l'intégrale de volume :***

$$L_{V-V} = \int_V L'(r^*) \frac{\exp\left(-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^*\right|^2} dV^* \qquad \text{avec : } dV^* = dx^* dy^* dz^* \tag{252}$$

$$L_{V-V} = 2\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} L'(x^*, y^*) \int_{z^*=0}^{\infty} \frac{\exp\left(-\kappa\left((x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2\right)^{1/2}\right)}{\left((x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2\right)^{1/2}} dz^* dy^* dx^* \tag{253}$$

Pour calculer cette intégrale, on pose le double changement de variables suivants :

$$\xi^* = \frac{z^*}{\left((x-x^*)^2+(y-y^*)^2\right)^{1/2}} = \frac{z^*}{\rho^*}, \text{ puis } \quad t^* = \left(1+\xi^{*2}\right)^{1/2} \tag{254}$$

En utilisant la définition des fonctions intégro-exponentielles généralisées $S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty} \frac{\exp(-xt)}{t^n\left(t^2-1\right)^{1/2}} dt$, on trouve finalement :

$$\boxed{L_{V-V} = \pi \int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{n^2\sigma T^4(x^*, y^*)}{\pi} \frac{S_1(\kappa\rho^*)}{\rho^*} dy^* dx^* = \int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} n^2\sigma T^4(x^*, y^*) \frac{S_1(\kappa\rho^*)}{\rho^*} dy^* dx^*} \tag{255}$$

➢ ***Pour les intégrales de surface :***

Les termes d'échange Surface-Volume sont au nombre 4 (domaine constitué de 4 parois).

- ***Surface supérieure*** S_3

Pour la surface supérieure S_3 dont la normale est $\vec{n}(0,-1,0)$, on va calculer le flux radiatif du point $M_0(x_0, y_0 = b, z_0)$ au point $M(x, y, 0)$. Le terme surfacique s'écrit :

$$L_{S_3-V} = \int_A L'(r_0) \frac{\vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r_0}\right|^3} e^{-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r_0}\right|} dA$$
$$= 2\int_{x_0=0}^{d} L'(x_0,b) \int_{z_0=0}^{\infty} \frac{(b-y)}{\left(\rho_0^2+z_0^2\right)^{3/2}} e^{-\kappa\left(\rho_0^2+z_0^2\right)^{1/2}} dz_0 dx_0 \tag{256}$$

avec : $\rho_0 = \left[(x-x_0)^2+(y-b)^2\right]^{1/2}$

$$dA = dx_0 dz_0 \tag{257}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r_0}\right) = (b-y) \tag{258}$$

En appliquant le changement de variables ci-dessus, on a :

$$L_{S_3-V} = 2(b-y)\int_{x_0=0}^{d} L'(x_0,b) \int_{\zeta_0=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\rho_0\left(1+\zeta_0^2\right)^{1/2}}}{\rho_0^3\left(1+\zeta_0^2\right)^{3/2}} \rho_0 d\zeta_0 dx_0$$
$$= 2(b-y)\int_{x_0=0}^{d} \frac{L'(x_0,b)}{\rho_0^2} \int_{t_0=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\rho_0 t_0}}{t_0^3\left(t_0^2-1\right)^{1/2}} t_0 dt_0 dx_0 \tag{259}$$

ou :

$$\boxed{L_{S_3-V} = (b-y)\int_{x_0=0}^{d} n^2\sigma T^4(x_0,b) \frac{S_2(\kappa\rho_0)}{\rho_0^2} dx_0} \tag{260}$$

avec : $\rho_0 = \left[(x-x_0)^2+(y-b)^2\right]^{1/2}$

et :

$$S_2(\kappa\rho_0) = \frac{2}{\pi}\int_{t_0=1}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\rho_0 t_0}}{t_0^3\left(t_0^2-1\right)^{1/2}} t_0 dt_0 \tag{261}$$

- ***Surface gauche*** S_1

Pour la surface gauche S_1 dont la normale est $\vec{n}(1,0,0)$, on calcule le flux radiatif du point $M_0(0, y_0, z_0)$ au point $M(x, y, 0)$. Le terme surfacique s'écrit :

$$\begin{aligned} L_{S_1-V} &= 2x\int_{y_0=0}^{b} L'(0, y_0)\int_{\zeta_0=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\rho_0\left(1+\zeta_0^2\right)^{1/2}}}{\rho_0^3\left(1+\zeta_0^2\right)^{3/2}}\rho_0 d\zeta_0 dx_0 \\ &= x\int_{y_0=0}^{b} n^2\sigma T_1^4(0, y_0)\frac{S_2(\kappa\rho_0)}{\rho_0^2}dy_0 \end{aligned} \tag{262}$$

ou :

$$\boxed{L_{S_1-V} = x\int_{y_0=0}^{b} n^2\sigma T_1^4(0, y_0)\frac{S_2(\kappa\rho_0)}{\rho_0^2}dy_0} \tag{263}$$

avec : $\rho_0(0, y_0) = \left(x^2 + (y - y_0)^2\right)^{1/2}$

- ***Surface droite*** S_2

Pour la surface droite S_2 dont la normale est $\vec{n}(-1,0,0)$, on calcule le flux radiatif du point $M_0(d, y_0, z_0)$ au point $M(x, y, 0)$. Le terme surfacique s'écrit :

$$\boxed{L_{S_2-V} = (d - x)\int_{y_0=0}^{b} n^2\sigma T_2^4(d, y_0)\frac{S_2(\kappa\rho_0)}{\rho_0^2}dy_0} \tag{264}$$

avec : $\rho_0(d, y_0) = \left((x - d)^2 + (y - y_0)^2\right)^{1/2}$

- ***Surface inférieure*** S_4

Pour la surface inférieure S_4 dont la normale est $\vec{n}(0,1,0)$, on calcule le flux radiatif du point $M_0(x_0, 0, z_0)$ au point $M(x, y, 0)$. Le terme surfacique s'écrit :

$$\boxed{L_{S_4-V} = y\int_{x_0=0}^{d} n^2\sigma T^4(x_0,0)\frac{S_2(\kappa\rho_0)}{\rho_0^2}dx_0} \tag{265}$$

avec : $\rho_0(x_0,0) = \left((x-x_0)^2 + y^2\right)^{1/2}$

On en déduit finalement l'expression de la luminance moyenne :

$$\begin{aligned}
4\pi\overline{L}(x,y) &= L_{S_1-V} + L_{S_2-V} + L_{S_3-V} + L_{S_4-V} + \kappa L_{V-V} \\
&= (b-y)\int_{x_0=0}^{d} n^2\sigma T^4(x_0,b)\frac{S_2(\kappa\rho_0(x_0,b))}{\rho_0^2(x_0,b)}dx_0 \\
&+ (d-x)\int_{y_0=0}^{b} n^2\sigma T_2^4(d,y_0)\frac{S_2(\kappa\rho_0(d,y_0))}{\rho_0^2(d,y_0)}dy_0 \\
&+ y\int_{x_0=0}^{d} n^2\sigma T^4(x_0,0)\frac{S_2(\kappa\rho_0(x_0,0))}{\rho_0^2(x_0,0)}dx_0 \\
&+ x\int_{y_0=0}^{b} n^2\sigma T_1^4(0,y_0)\frac{S_2(\kappa\rho_0(0,y_0))}{\rho_0^2(0,y_0)}dy_0 \\
&+ \kappa\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} n^2\sigma T^4(x^*,y^*)\frac{S_1(\kappa\rho^*)}{\rho^*}dy^*dx^*
\end{aligned} \tag{266}$$

- ***Flux radiatif***

Pour traiter les conditions aux limites, il est nécessaire de connaître le flux radiatif à chaque paroi.

Pour la paroi S_1, le terme d'échange du flux radiatif s'écrit :

$$\boldsymbol{q}^R{}_{,1} = \int_V L'(x^*,y^*)\frac{d\vec{x}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r^*}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r^*}\right|^3}e^{-\kappa\left|\vec{r}-\vec{r^*}\right|}dV^* \tag{267}$$

où :

$$d\vec{x} = (1,0,0) \qquad \text{et} \qquad \left(\vec{r}-\vec{r^*}\right) = \left(0-x^*, y-y^*, 0-z^*\right) \tag{268}$$

Donc, on a :

$$\boldsymbol{q}^{R}{}_{,1} = 2\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} L'\left(x^*, y^*\right)\int_{z^*=0}^{\infty} \frac{-x^*}{\left[\left(x^*\right)^2 + \left(y-y^*\right)^2 + \left(z^*\right)^2\right]^{3/2}} e^{-\kappa\rho^*\left[1+\left(\frac{z^*}{\rho^*}\right)^2\right]^{1/2}} dz^* dy^* dx^*$$

$$= 2\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{-x^*}{\rho^*(0,y)^3} L'\left(x^*, y^*\right)\int_{\zeta^*=0}^{\infty} \frac{e^{-\kappa\rho^*\left(1+\zeta^{*2}\right)^{1/2}}}{\left(1+\zeta^{*2}\right)^{3/2}} \rho^*(0,y) d\zeta^* dy^* dx^* \tag{269}$$

$$= \int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{-x^*}{\rho^*(0,y)^2} L'\left(x^*, y^*\right)\pi S_2\left(\kappa\rho^*\right) dy^* dx^*$$

avec : $\rho^* = \left[\left(x^*\right)^2 + \left(y-y^*\right)^2\right]^{1/2}$ et $\zeta^* = \dfrac{z^*}{\rho^*}$

On a alors :

$$\boxed{\boldsymbol{q}^{R}{}_{,1} = n^2\sigma\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{-x^*}{\rho^*(0,y)^2} S_2\left(\kappa\rho^*\right) T^4\left(x^*, y^*\right) dy^* dx^*} \tag{270}$$

Par analogie, le terme d'échange du flux radiatif pour la surface S_3 a pour expression :

$$\boxed{\boldsymbol{q}^{R}{}_{,3} = n^2\sigma\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{\left(b-y^*\right)}{\rho^*(x,b)^2} S_2\left(\kappa\rho^*\right) T^4\left(x^*, y^*\right) dy^* dx^*} \tag{271}$$

Pour la surface S_2 :

$$\boxed{\boldsymbol{q}^{R}{}_{,2} = n^2\sigma\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{\left(d-x^*\right)}{\rho^*(d,y)^2} S_2\left(\kappa\rho^*\right) T^4\left(x^*, y^*\right) dy^* dx^*} \tag{272}$$

Pour la surface S_4 :

$$\boxed{\boldsymbol{q}^{R}{}_{,4} = n^2\sigma\int_{x^*=0}^{d}\int_{y^*=0}^{b} \frac{-y^*}{\rho^*(x,0)^2} S_2\left(\kappa\rho^*\right) T^4\left(x^*, y^*\right) dy^* dx^*} \tag{273}$$

Conclusion

Dans cette partie, on a présenté les différentes méthodes existantes pour la résolution de l'E.T.R. Pour la résolution fine de l'E.T.R, notre choix s'est porté sur la méthode explicite. Nous avons donné son développement dans le cas général 3D, puis les expressions de la luminance moyenne et des flux radiatifs aux parois dont nous aurons besoin pour résoudre les cas de validation 1D et 2D en géométrie simple (cellule plane et rectangulaire).

Chapitre IV

Résolution de l'E.T.R par la méthode d'approximation polynomiale ou méthode PN

Introduction

Dans ce chapitre, on va présenter en détail la méthode PN que nous proposons d'utiliser pour résoudre l'E.T.R. Dans une première partie, nous présenterons le principe général de la méthode *PN*. Nous appliquerons ensuite cette méthode pour mettre en place des modèles approchés *P1* et *P3* tout d'abord en géométries cartésiennes 1D, 2D et 3D, puis en géométrie cylindrique 2D avec symétrie de révolution.

1. Résolution de l'E.T.R par la méthode PN

Considérons le transfert radiatif au point *M(r)* dans un milieu semi-transparent. La variation de la luminance L'_ν au point *M(r)* selon la direction ***s*** (**Figure 41**) est modélisée par l'équation de transfert radiatif (E.T.R) générale suivante :

1.1. Equations à résoudre dans le cas général 3D

$$\frac{dL'_\nu}{ds} = \kappa_\nu L_\nu^0(T) - (\kappa_\nu + \sigma_\nu)L'_\nu + \frac{\sigma_\nu}{4\pi}\int_{\omega_i=0}^{4\pi} L'_\nu(s,\omega_i)\,p(\nu,\omega,\omega_i)\,d\omega_i \tag{274}$$

avec :

$$L'_\nu = L'_\nu(\nu, s, \omega) \tag{275}$$

$$L_\nu^0(T) = \frac{1}{\pi}\frac{C_1\nu^5}{\exp(C_2\nu/T)-1} \quad \text{avec :} \quad \begin{matrix} C_1 = 3{,}741.10^{-16} W.m^2 \\ C_2 = 0{,}014388 m.K \end{matrix} \tag{276}$$

- $p(\nu,\omega,\omega_i)$: fonction de phase
- κ_ν : coefficient monochromatique d'absorption
- σ_ν : coefficient monochromatique de diffusion

Pour le milieu gris avec des coefficients d'absorption et de diffusion uniformes, l'E.T.R intégrée sur toute la longueur d'onde a la forme suivante :

$$\frac{dL'}{ds} = \kappa L'_0 - (\kappa + \sigma)L' + \frac{\sigma}{4\pi}\int_{\omega_i=0}^{4\pi} L'(s,\omega_i)\,d\omega_i \tag{277}$$

- ***Cas particulier d'un milieu absorbant-émettant***

Dans le cas où le milieu est absorbant et émettant (i.e non diffusant), l'équation de transfert radiatif est présentée par l'expression suivante :

$$\frac{dL'}{ds} = -\kappa L'(s) + \kappa L^0(T) \tag{278}$$

Comme le verre fondu qu'on considère dans notre étude est en fait un milieu sans diffusion, nous ne prendrons en compte pour le calcul du flux radiatif que des phénomènes d'absorption et d'émission comme indiqué dans l'équation ci-dessus.

En coordonnées cartésiennes, la différentielle d'une fonction le long d'un chemin optique d'abscisse curviligne ***s*** revêt la forme suivante :

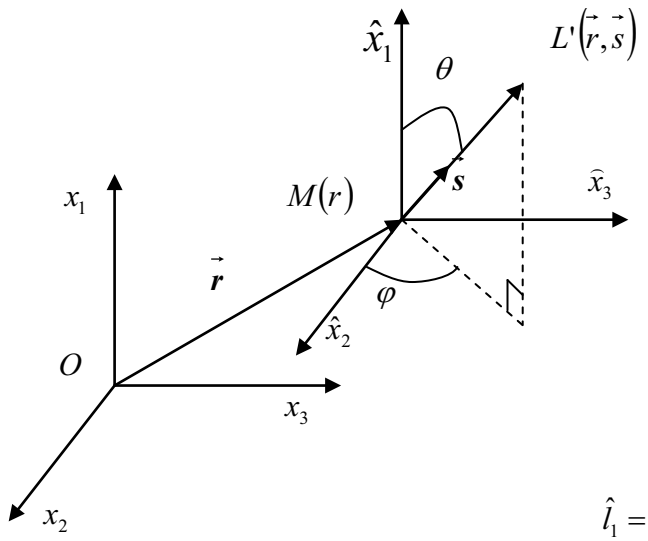
$$\frac{d}{ds} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\theta\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x_2} + \sin\theta\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x_3} = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{279}$$

Ici, l_1, l_2 et l_3 désignent les cosinus directeurs de ***s*** par rapport aux trois directions principales Ox_1, Ox_2, Ox_3, qui vérifient :

$$l_1 = \cos\theta \tag{280}$$

$$l_2 = \sin\theta\cos\varphi \tag{281}$$

$$l_3 = \sin\theta\sin\varphi \tag{282}$$



*Les cosinus directeurs de **s** :*

$$\hat{l}_1 = \cos\theta$$
$$\hat{l}_2 = \cos\varphi\sin\theta$$
$$\hat{l}_3 = \sin\varphi\sin\theta$$

Figure 41 : *Description de la luminance au point M dépendant de la position et de l'angle solide dans un système de coordonnées cartésiennes 3D* (x_1, x_2, x_3)

- ***Recherche d'une solution sous forme d'une série d'harmoniques sphériques***

En utilisant l'équation (279), l'équation de transfert radiatif (278) a pour expression :

$$\sum_{1}^{3} l_i \frac{\partial L^{'}}{\partial x_i} = -\kappa L^{'}(r) + \kappa L^{0}(T) \tag{283}$$

Une des difficultés essentielles des transferts radiatifs est de prendre en compte le champ directionnel de la luminance $L_{\nu}^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$, en tout point *M(**r**)*, pour tout intervalle spectral ν, et pour toute direction caractérisée par $\boldsymbol{s}(\theta,\varphi)$. Une approche mathématiquement séduisante consiste à décomposer $L_{\nu}^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ sur une base complète de fonctions dépendant séparément de ***r*** et ***s***, et de convergence rapide vis à vis de $\boldsymbol{s}(\theta,\varphi)$. La référence est la base complète des harmoniques sphérique $Y_l^m(\theta,\varphi)$ ([ABRAMOVITZ 65]), telle que :

$$\int_{\Omega=0}^{4\pi} Y_l^m Y_{l'}^{m'^{*}} \partial\Omega = \delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{284}$$

où l'exposant « * » désigne le nombre complexe conjugué et $\delta_{mm'}, \delta_{ll'}$ des fonctions Dirac.

Partant de cette idée, le principe de la méthode *PN* consiste à exprimer la luminance *L'* sous forme d'une série d'harmoniques sphériques et à transformer l'équation différentielle du transfert radiatif en un système d'équations aux moments. Ces équations aux moments sont obtenues en multipliant l'E.T.R par les puissances respectives du cosinus directeur de la luminance ($\mu = \cos\theta$). A partir de ce système d'équations aux moments, on obtient une expression analytique de la luminance $L^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$.

Dans ses travaux, [JEAN 17] propose de décrire la luminance sous la forme suivante :

$$L^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} A_l^m(\boldsymbol{r}) Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{285}$$

C'est cette représentation que nous avons choisie de retenir.

Les fonctions $Y_l^m(\omega)$ dépendant uniquement de l'angle solide ω (harmoniques sphériques normalisées) et donc des variables angulaires θ et φ et s'expriment de fonctions parfaitement connues, les polynômes de Legendre de 1ière espèce $P_l^m(\mu = \cos\theta)$:

$$Y_l^m(\omega) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} e^{jm\varphi} P_l^m(\cos\theta) \qquad \left(j = \sqrt{-1}\right) \tag{286}$$

avec :

$$P_l^m(\mu = \cos\theta) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l\, l!}\frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}}(\mu^2 - 1)^l \tag{287}$$

P_l^m et P_l^{-m} sont liés par la relation suivante :

$$P_l^{-m}(\mu) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) \tag{288}$$

Les expressions de polynôme de Legendre $P_l^m(\cos\theta)$ pour $0 \le l \le 3$ sont présentées dans le **Tableau 6**.

l	***m=0***	***m=1***	***m=2***	***m=3***
0	1.0	-	-	-
1	$\cos\theta$	$\sin\theta$	-	-
2	$(3\cos^2\theta - 1)/2$	$3\cos\theta\sin\theta$	$3\sin^2\theta$	-
3	$(1/2)(5\cos^2\theta - 3)\cos\theta$	$(3/2)(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta$	$15\cos\theta\sin^2\theta$	$15\sin^3\theta$

Tableau 6 : *Expressions des polynômes de Legendre* $P_l^m(\cos\theta)$

Les $A_l^m(\boldsymbol{r})$ sont des fonctions inconnues qui ne dépendent de la position. Le principe de la méthode PN consiste à identifier ces différentes fonctions à partir d'un système d'équations aux moments.

Il faut naturellement autant d'équations aux moments que d'inconnues pour que le problème soit bien posé.

La méthode *P1* consiste à arrêter le développement à l'ordre $l = 1$, *P3* à l'ordre $l = 3$. Les coefficients $A_l^m(\boldsymbol{r})$ sont calculés à partir des moments de la luminance $L_\nu^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ par rapport aux harmoniques sphériques :

$$A_{l\nu}^m(\boldsymbol{r}) = \int_0^{4\pi} L_\nu^{'} Y_l^{m^*} d\Omega \tag{289}$$

La série infinie (285) qui définit la luminance doit être tronquée. Dans la méthode *PN*, le nombre de termes retenu est fixé à : $l = N$. La méthode qui initialement est une méthode fine devient alors une méthode approchée du fait de cette troncature. En pratique, la luminance est tronquée à l'ordre 1 (méthode *P1, l=0 et 1*) ou 3 (méthode *P3, l=0, 1, 2 et 3*). On parle alors de méthodes *P1* et *P3*.

[SIEGEL 01] a montré qu'il était possible de développer la luminance à des ordres plus élevés mais le nombre d'inconnues lié aux différents moments de la luminance augmente très rapidement, réduisant ainsi considérablement l'intérêt de la méthode. Heureusement, la méthode converge très rapidement et même pour des ordres peu élevés, elle donne de très bons résultats.

L'approche d'ordre *pair* (*P2*, *P4*…) est peu utilisée car elle est moins précise que pour les ordres *impairs*. Il est également plus difficile d'écrire les conditions aux limites (voir par exemple [DAVISON 58]).

Pour ces raisons, on se limitera dans ce travail aux méthodes *PN* d'ordre *impair*, en particulier aux méthodes *P1* et *P3*. Nous montrerons dans le chapitre suivant consacré à la validation que bien étant approchés, les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants. Comme expliqué précédemment, les coefficients $A_l^m(\boldsymbol{r})$ s'expriment en fonction des moments de la luminance qui seront déterminées à partir d'un système d'équations aux moments.

Ces équations aux moments sont obtenues en multipliant l'E.T.R par des puissances (seules ou combinaisons) des cosinus directeurs l_i et en l'intégrant sur tout l'angle solide ω. Les différents moments de la luminance sont définis comme suit.

- ***Les moments de la luminance***

Le *moment d'ordre 0*, L_0 correspond à la luminance moyenne.

$$L_0(\boldsymbol{r}) = \int_{\omega=0}^{4\pi} L'(\boldsymbol{r},\omega)d\omega \tag{290}$$

Les *moments d'ordre 1*, L_1, L_2 et L_3 représentent les composantes du flux radiatif selon les différentes directions x_i du système de coordonnées $(x_1, x_2 \text{ et } x_3)$.

$$L_i(\boldsymbol{r}) = \int_{\omega=0}^{4\pi} l_i L'(\boldsymbol{r},\omega)d\omega \qquad (i = 1,2,3) \tag{291}$$

Les *moments d'ordre 2* représentent les dérivées des composantes du tenseur des pressions radiatives, par analogie au tenseur des pressions de la mécanique des fluides.

$$L_{ij}(\boldsymbol{r}) = \int_{\omega=0}^{4\pi} l_i l_j L'(\boldsymbol{r},\omega)d\omega \qquad (i, j = 1,2,3) \tag{292}$$

Les *moments d'ordre plus élevé* n'ont par d'interprétation physique mais sont définis par généralisation des autres moments.

$$L_{ijkl}(\boldsymbol{r}) = \int_{\omega=0}^{4\pi} l_i l_j l_k l_l L'(\boldsymbol{r},\omega)d\omega \quad (i, j, k, l = 1,2,3) \tag{293}$$

- ***Principe général de résolution***

Pour exprimer les coefficients $A_l^m(\boldsymbol{r})$ en fonction des différents moments de la luminance, le développement de la luminance en harmoniques sphériques (285) est tout d'abord tronqué à l'ordre souhaité. On utilise ensuite la définition des moments de la luminance pour obtenir un système d'équations algébriques reliant les moments de la luminance aux coefficients $A_l^m(\boldsymbol{r})$.

En résolvant ce système, on peut ainsi exprimer les coefficients $A_l^m(\boldsymbol{r})$ en fonction des moments (Voir **Annexe D**), et en substituant ces expressions dans la série (285), on va pouvoir exprimer la luminance $L^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s})$ en fonction de ses moments.

- ***Expressions approchées de la luminance en fonction de ses moments***

Pour la méthode *P3*, l'expression de la luminance est la suivante ([RATZEL 81]) :

$$\begin{aligned}
4\pi L^{'}(r,\theta,\varphi) = {} & L_0 + 3L_1\cos\theta + 3L_2\sin\theta\cos\varphi + 3L_3\sin\theta\sin\varphi \\
& + \frac{5}{4}\left(3L_{11} - L_0\right)\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
& + 15\left(3L_{12}\cos\varphi + L_{13}\sin\varphi\right)\cos\theta\sin\theta \\
& + \frac{15}{4}\left[\left(L_{22} - L_{33}\right)\cos 2\varphi + 2L_{23}\sin 2\varphi\right]\sin^2\theta \\
& + \frac{7}{4}\left(5L_{111} - 3L_1\right)\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) \\
& + \frac{21}{8}\left[\left(5L_{211} - L_2\right)\cos\varphi + \left(5L_{311} - L_3\right)\sin\varphi\right]\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta \\
& + \frac{105}{4}\left[\left(L_{122} - L_{133}\right)\cos 2\varphi + 2L_{123}\sin 2\varphi\right]\cos\theta\sin^2\theta \\
& + \frac{35}{8}\left[\left(L_{222} - 3L_{233}\right)\cos 3\varphi - \left(L_{333} - 3L_{322}\right)\sin 3\varphi\right]\sin^3\theta
\end{aligned} \tag{294}$$

A partir de la relation précédente, on obtient les relations suivantes entre les moments de la luminance :

$$L_0 = L_{11} + L_{22} + L_{33} \tag{295}$$

$$L_1 = L_{111} + L_{122} + L_{133} \tag{296}$$

$$L_2 = L_{211} + L_{122} + L_{133} \tag{297}$$

$$L_3 = L_{311} + L_{322} + L_{333} \tag{298}$$

Pour la méthode *P1*, l'expression de la luminance n'est fonction que des moments d'ordre 0 et 1 et se restreint aux quatre premiers termes de la relation (294) :

$$L^{'}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}(L_0 + 3L_1\cos\theta + 3L_2\cos\varphi\sin\theta + 3L_3\sin\varphi\sin\theta) \tag{299}$$

La relation (294) montre que la luminance peut s'exprimer en fonction uniquement de ses moments. Il reste à mettre en place le système d'équations aux moments pour les déterminer.

- ***Mise en place du système d'équations aux moments***

Comme expliqué précédemment, ces équations s'obtiennent en multipliant l'E.T.R par les différents cosinus directeurs l_i définis par (280)-(282) et leurs différentes puissances pour des méthodes supérieurs à l'ordre 1 et en l'intégrant les différentes équations ainsi obtenues sur tout l'angle solide ω.

Pour la méthode P3, on va obtenir les équations suivantes :

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L_i}{\partial x_i} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \tag{300}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i} = -\kappa L_j \qquad \text{(3 équations : } j=1,\ 2,\ 3\text{)} \tag{301}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L_{ijk}}{\partial x_i} = -\kappa L_{jk} + \frac{4\pi}{3}\delta_{jk}\left(\kappa L^0\right) \qquad \text{(9 équations : } j,\ k=1,\ 2,\ 3\text{)} \tag{302}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L_{ijkl}}{\partial x_i} = -\kappa L_{jkl} \qquad \text{(27 équations : } j,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3\text{)} \tag{303}$$

Notons que dans le système des équations ci-dessus, il apparaît de nouvelles variables inconnues L_{ijkl} (voir équation (303)) qui correspondent aux moments d'ordre 4 de la luminance.

Il y a donc plus d'inconnues que d'équations.

Pour résoudre ce système, nous avons besoin d'introduire des équations dites de « fermeture » qui consiste à exprimer ces moments d'ordre 4 (pour la méthode *P3*) en fonction des moments d'ordres inférieurs (moments d'ordre 0, 1 et 2 pour *P3*). Pour les obtenir, on utilise la définition du moment d'ordre 4 définie par (293) dans lesquels on remplace l'expression de la luminance par son expression approchée (294) ou (299).

Pour la méthode *P3*, l'équation de fermeture revêt la forme suivante :

$$\begin{aligned} L_{ijkl} &= \frac{1}{7}\left(L_{ij}\delta_{kl} + L_{ik}\delta_{jl} + L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} + L_{kl}\delta_{ij} + L_{jl}\delta_{ik}\right) \\ &- \frac{1}{35}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right)L_0 \end{aligned} \tag{304}$$

Pour la méthode *P1*, la *relation de fermeture* a pour expression :

$$L_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}L_0 \tag{305}$$

En remplaçant les moments d'ordre 4 par leurs expressions approchées (304) pour la méthode *P3* et les moments d'ordre 2 par (304) pour la méthode *P1*), le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations et le problème est lors bien posé.

Il reste à écrire les conditions aux limites correspondantes.

1.2. Conditions aux limites pour la méthode *PN*

Dans le cas général d'une paroi opaque, de réflectivité diffuse et spéculaire, la condition aux limites est obtenue en considérant la luminance quittant la surface. La luminance dans la direction ω a pour expression :

$$L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega) = \varepsilon_p L_p^0(\boldsymbol{r}) + \rho_{sp}L^{'}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\rho_{dp}}{\pi}\int_{\omega_{inc}=2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega_{inc})\left|\boldsymbol{n}\cdot\omega_{inc}\right| d\omega_{inc} \tag{306}$$

avec :

- ε_p : coefficient d'émissivité de la paroi
- ρ_{sp} : coefficient de réflectivité spéculaire

- ρ_{dp} : coefficient de réflectivité diffuse
- ω_{inc} : angle formé par la luminance incidente et la normale à la paroi.

Ces grandeurs doivent satisfaire à la relation suivante qui traduit la conservation de l'énergie :

$$\varepsilon_p + \rho_{sp} + \rho_{dp} = 1 \tag{307}$$

Pour la méthode *PN*, nous avons besoin d'écrire des conditions aux limites similaires mais qui doivent porter sur les moments de la luminance. En substituant le développement en harmoniques sphériques de la luminance (294) ou (299) dans la condition aux limites (306), on obtient une nouvelle condition qui dépend certes des moments de la luminance mais aussi de la direction à travers θ et φ. C'est un problème car, de part le principe même de la méthode, les équations aux moments ne dépendant pas de la direction.

Pour lever cette difficulté, plusieurs auteurs ont proposé des approches différentes. Celle que nous avons retenue est la méthode de Marshak ([MARSHAK 47]) qui semble la plus adaptée sur le plan technique (écriture des conditions aux limites) et des résultats (voir le Chapitre de validation qui suit).

Pour les autres méthodes, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de [POMRANING 64], [ROWLANDS 61], [MARK 45] et [SHOKAIR 81].

La méthode proposée par Marshak est de projeter la luminance sur la base des fonctions harmoniques sphériques. Pour cela, on multiplie la condition aux limites (306) par une fonction de cette base que l'on intègre ensuite sur le demi-espace correspondant à la paroi.

La condition aux limites générale de Marshak a pour expression :

$$\begin{aligned}&\int_{\omega=0}^{2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega) Y_l^m(\omega) d\omega = \\ &\int_{\omega=0}^{2\pi} \left[\varepsilon_p L_p^0(\boldsymbol{r}) + \rho_{sp} L^{'}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\omega_{inc}=2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega_{inc}) \left| \boldsymbol{n} \cdot \omega_{inc} \right| d\omega_{inc} \right] Y_l^m(\omega) d\omega\end{aligned} \qquad (l = 1,3,5...N) \tag{308}$$

Pour simplifier la condition (308), [BAYAZITOGLU 79] a proposé de remplacer les fonctions $Y_l^m(\cos\theta)$ par les différents cosinus directeurs de la luminance l_i.

Dans le cas *1D*, la condition aux limites de Marshak revêt la forme suivante :

$$\int_{\omega=0}^{2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega) l_i^{2n-1} d\omega = \int_{\omega=0}^{2\pi} \left[\varepsilon_p L_p^0(\boldsymbol{r}) + \rho_{sp} L^{'}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\omega_{inc}=2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega_{inc}) \left| \boldsymbol{n} \cdot \omega_{inc} \right| d\omega_{inc} \right] l_i^{2n-1} d\omega \qquad (l = 1,3,5...N) \qquad (309)$$

Pour la méthode *P3*, dans les cas *2D* et *3D*, les harmoniques sphériques normalisées $Y_l^m(\cos\theta)$ de l'équation (308) sont remplacées par les cosinus directeurs et leurs produits :

$$Y_1^m(\cos\theta) \approx l_i \qquad (i = 1,2,3) \qquad (310)$$

$$Y_3^m(\cos\theta) \approx l_i l_j l_k \qquad (i, j, k = 1,2,3) \qquad (311)$$

Notons que dans les cas de *2D* et *3D*, le nombre de conditions aux limites obtenu en prenant en compte l'ensemble des combinaisons possibles entre les cosinus directeurs est plus important que le nombre d'équations des moments.

On peut naturellement choisir arbitrairement les conditions aux limites que l'on va retenir pour la résolution mais il faut garder à l'esprit que ce choix n'est pas anodin car il a une influence non seulement sur les temps de calcul mais aussi la précision des résultats. [DAVISON 58] par exemple suggère de ne conserver que les équations obtenues à partir des normales aux surfaces du domaine et de leurs puissances.

Compte-tenu de son importance, ce point là fera l'objet d'une discussion particulière dans le Chapitre de validation.

2. Résolution de l'E.T.R dans le cas 1D par les méthodes *P1* et *P3*

Dans cette partie, on va résoudre l'E.T.R par les méthodes *P1* et *P3* dans le cas 1D d'un plan infini dont la configuration est présentée sur la **Figure 42**. Pour une meilleure compréhension de la méthode *PN*, nous allons développer pas à pas la méthode *P1*.

2.1. Cas de la méthode *P1*

- ***Equations différentielles***

L'équation de transfert radiatif a pour expression :

$$\cos\theta \frac{\partial L'}{\partial x} = \kappa L^0 - \kappa L' \tag{312}$$

avec :

$L^0 = \dfrac{n^2 \sigma T^4}{\pi}$	: luminance du corps noir
n	: indice optique du milieu
$\sigma = 5{,}67.10^{-8}\left(W.m^{-2}.K^{-4}\right)$	: constante de Stefan-Boltzmann

En développant la luminance $L'(x,\theta)$ en série d'harmoniques sphériques, on obtient la relation suivante :

$$L'(x,\theta) = \frac{1}{4\pi}\left(L_0 + 3L_1 \cos\theta\right) \tag{313}$$

avec:

$$L_0 = \int_{\omega=0}^{4\pi} L'(x,\theta) d\omega \tag{314}$$

$$L_1 = \int_{\omega=0}^{4\pi} \cos\theta L'(x,\theta) d\omega \tag{315}$$

Pour obtenir la luminance $L'(x,\theta)$, il faut donc déterminer les 2 moments inconnus L_0 (luminance moyenne) et L_1 (flux radiatif selon la direction x) à partir des équations aux moments de l'E.T.R.

En multipliant l'E.TR par «1» et le cosinus directeur « $l_1 = \cos(\theta)$ » de la luminance et en intégrant sur tout l'angle solide ω, on obtient le système d'équations des moments suivant :

$$\int_{\omega=0}^{4\pi} \cos\theta \frac{\partial L'}{\partial x}(\times 1)d\omega + \int_{\omega=0}^{4\pi} \kappa L'(\times 1)d\omega = \int_{\omega=0}^{4\pi} \kappa L^0(\times 1)d\omega \tag{316}$$

$$\int_{\omega=0}^{4\pi} \cos\theta \frac{\partial L'}{\partial x}(\times \cos\theta)d\omega + \int_{\omega=0}^{4\pi} \kappa L'(\times \cos\theta)d\omega = \int_{\omega=0}^{4\pi} \kappa L'_0(\times \cos\theta)d\omega \tag{317}$$

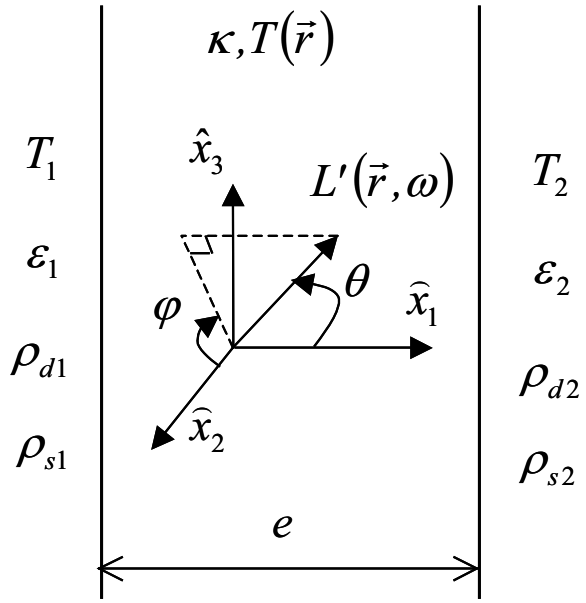


Figure 42 : *Méthode PN dans le cas 1D*

On remarque que le terme de gauche de l'équation (317) n'est autre que le moment d'ordre 2 de la luminance, soit : $L_{11} = \int_{\omega=0}^{4\pi} l_1 l_1 L'(x,\theta)d\omega = \int_{\omega=0}^{4\pi} \cos^2\theta L'(x,\theta)d\omega$. On a donc le système d'équations des moments suivant à résoudre :

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} + \kappa L_0 = 4\pi\kappa L^0 \tag{318}$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x} + \kappa L_1 = 0 \tag{319}$$

A partir de la définition du moment d'ordre 2, en injectant l'expression approchée (313) de la luminance dans cette définition, on obtient la *relation de fermeture* suivante:

$$L_{11} = \int_{\omega=0}^{4\pi} L'(x,\theta)\cos^2\theta d\omega = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\omega=0}^{4\pi} L_0 \cos^2\theta d\omega + \int_{\omega=0}^{4\pi} 3L_1 \cos^3\theta d\omega\right) \tag{320}$$

En remplaçant l'angle solide élémentaire $d\omega$ par son expression $d\omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$:

$$L_{11} = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} L_0 \, cos^2\theta \, sin\theta d\theta d\varphi + \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} 3L_1 \, cos^3\theta \, sin\theta d\theta d\varphi\right) = \frac{1}{3}L_0 \tag{321}$$

Enfin, en substituant l'expression (321) dans l'équation (319), on obtient le système d'équations aux moments suivant en $\{L_0, L_1\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} + \kappa L_0 = 4\pi\kappa L^0 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x} + \kappa L_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{3\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} - L_0 = -4\pi L^0 \\ \dfrac{1}{\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_1}{\partial x^2} - 3L_1 = 4\pi\dfrac{\partial L^0}{\partial x} \end{cases} \tag{322}$$

Il est important de remarquer que le nouveau système d'équations ainsi obtenu est un système d'équations différentielles du second ordre avec sources, beaucoup plus simple à résoudre sur le plan numérique qu'un système d'équations du premier ordre.

De plus, en pratique, seule l'équation différentielle portant sur la variable L_0 que nous appellerons *équation génératrice* devra être résolue :

$$\frac{1}{3\kappa^2}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} - L_0 = -4\pi L^0 \tag{323}$$

En effet, une fois la luminance moyenne L_0 déterminée, il est facile d'en déduire le flux radiatif L_1 à l'aide de la relation :

$$\frac{1}{3}\frac{\partial L_0}{\partial x} + \kappa L_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_1 = -\frac{1}{3\kappa}\frac{\partial L_0}{\partial x} \tag{324}$$

- ***Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1***

Pour résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 (323), on doit écrire deux conditions aux limites portant sur L_0. Pour cela, on écrit la condition aux limites de Marshak sous la forme proposée par [RATZEL 81] :

Pour la paroi gauche, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} L'_{p1}(0,\theta)\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_1 L^0_{p1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi \\
&+\rho_{sp1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} L'_{p1}\left(0,\theta^*\right)\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi \\
&-\frac{\rho_{dp1}}{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\cos^n\theta\sin\theta d\theta\int_{\theta^*=\pi/2}^{\pi} L'_{p1}\left(0,\theta^*\right)\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^*\right)d\varphi
\end{aligned} \tag{325}$$

Pour la paroi droite, on a la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} L'_{p2}(e,\theta)\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_2 L^0_{p2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi \\
&+\rho_{sp2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} L'_{p2}\left(e,\theta^*\right)\cos^n\theta\sin\theta d\theta\right)d\varphi \\
&+\frac{\rho_{dp2}}{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\cos^n\theta\sin\theta d\theta\int_{\theta^*=0}^{\pi/2} L'_{p2}\left(e,\theta^*\right)\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^*\right)d\varphi
\end{aligned} \tag{326}$$

avec :

$$\theta^* = \pi - \theta$$

$$\varepsilon_p + \rho_{sp} + \rho_{dp} = 1$$

En posant *n=1* et en remplaçant la luminance par son développement *P1* en harmoniques sphériques dans les deux relations (325) et (326), on obtient les conditions aux limites suivantes :

- **La condition limite à gauche :**

$$\varepsilon_1 L_0 + 2(2-\varepsilon_1)L_1 = 4\pi\varepsilon_1 L^0 \qquad \Rightarrow \qquad L_0 = 4\pi L^0 - \frac{2(2-\varepsilon_1)L_1}{\varepsilon_1} \tag{327}$$

- **La condition limite à droite :**

$$\varepsilon_2 L_0 - 2(2-\varepsilon_2)L_1 = 4\pi\varepsilon_2 L^0 \qquad \Rightarrow \qquad L_0 = 4\pi L^0 + \frac{2(2-\varepsilon_2)L_1}{\varepsilon_2} \tag{328}$$

Là aussi, il est intéressant de noter que la les conditions aux limites sont de type Dirichlet (première espèce) donc plu simple à traiter que des conditions aux limites de deuxième ou troisième espèces. Cependant, il faut itérer car les conditions aux limites dépendent de L_1 qui ne peut être calculé qu'une fois L_0 déterminée.

Il est possible à l'aide de la relation (324) d'obtenir de nouvelles conditions aux limites de troisième espèce non homogènes qui ne portent alors que sur L_0.

- **La condition limite à gauche :**

$$L_0 = 4\pi L^0 - \frac{2(2-\varepsilon_1)L_1}{\varepsilon_1} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{3\kappa}\frac{2(2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}\frac{\partial L_0}{\partial x} = 4\pi L^0 - L_0 \tag{329}$$

➢ **La condition limite à droite :**

$$L_0 = 4\pi L^0 + \frac{2(2-\varepsilon_2)L_1}{\varepsilon_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{3\kappa}\frac{2(2-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}\frac{\partial L_0}{\partial x} = 4\pi L^0 - L_0 \tag{330}$$

2.2. Cas de la méthode *P3*

- ***Equations différentielles***

A partir de l'expression (294), l'expression approchée *P3* de la luminance dans le cas 1D a la forme suivante:

$$L^{'}(x,\theta) = \frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} L_0 + 3L_1\cos\theta + \frac{5}{4}(3L_{11} - L_0)(3\cos^2\theta - 1) \\ + \frac{7}{4}(5L_{111} - 3L_1)(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \end{bmatrix} \tag{331}$$

On doit déterminer les 4 inconnues $\{L_0, L_1, L_{11}, L_{111}\}$. A partir des équations de (300) à (303), on a le système d'équations aux moments suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L_1}{\partial x} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \frac{\partial L_{11}}{\partial x} = -\kappa L_1 \\ \frac{\partial L_{111}}{\partial x} = -\kappa L_{11} + \frac{4\pi}{3}\kappa L^0 \\ \frac{\partial L_{1111}}{\partial x} = -\kappa L_{111} \end{cases} \tag{332}$$

A partir de la condition de fermeture (304), on a la *relation de fermeture* suivante :

$$L_{1111} = \frac{6}{7}L_{11} - \frac{3}{35}L_0 \tag{333}$$

En substituant l'équation (333) dans le système (332), on obtient le système de 4 équations à 4 inconnues $\{L_0, L_1, L_{11}, L_{111}\}$ suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \dfrac{\partial L_{11}}{\partial x} = -\kappa L_1 \\ \dfrac{\partial L_{111}}{\partial x} = -\kappa L_{11} + \dfrac{4\pi}{3}\kappa L^0 \\ \dfrac{6}{7}\dfrac{\partial L_{11}}{\partial x} - \dfrac{3}{35}\dfrac{\partial L_0}{\partial x} = -\kappa L_{111} \end{cases} \tag{334}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on va transformer ce système de 4 équations du second ordre en un système de 2 équations différentielles d'ordre 2, fonction de 2 inconnues $\{L_0, L_{11}\}$.

Après différentiation et substitution, on aboutit au système d'équations différentielles du second ordre non homogènes couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{3}{35\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} - \dfrac{6}{7\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_{11}}{\partial x^2} + L_{11} - \dfrac{4\pi}{3}L^0 = 0 \\ \dfrac{1}{\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_{11}}{\partial x^2} - L_0 + 4\pi L^0 = 0 \end{cases} \tag{335}$$

Les deux inconnues restantes que sont la composante du flux radiatif L_1 selon la direction x et L_{111} peuvent se déduire des équations (334) et de $\{L_0, L_{11}\}$:

$$\begin{cases} L_1 = -\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial L_{11}}{\partial x} \\ L_{111} = -\dfrac{1}{\kappa}\left(\dfrac{6}{7}\dfrac{\partial L_{11}}{\partial x} - \dfrac{3}{35}\dfrac{\partial L_0}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{336}$$

- ***Conditions aux limites de Marshak pour la méthode P3***

Pour résoudre le système d'équations (335), on a besoin de quatre conditions aux limites : deux pour L_0 et deux pour L_{11} que l'on obtient en écrivant la condition aux limites de Marshak sur les deux parois du domaine.

En posant n=1 et n=3 et en remplaçant la luminance par son développement en harmoniques sphériques *P3* dans les deux conditions aux limites (325) et (326), on obtient les quatre conditions aux limites suivantes ([RATZEL 81]) :

- **Condition limite à gauche :**

$$3L_0 + 15L_{11} + 16(1+2E_i)L_1 = 32\pi L^0 \tag{337}$$

$$-(2+R_i)L_0 + 16R_iL_1 + 15(2+R_i)L_{11} + 32(1+2E_i - R_i)L_{111} = 32\pi L^0 \tag{338}$$

- **Condition limite à droite :**

$$3L_0 + 15L_{11} - 16(1+2E_i)L_1 = 32\pi L^0 \tag{339}$$

$$-(2+R_i)L_0 - 16R_iL_1 + 15(2+R_i)L_{11} - 32(1+2E_i - R_i)L_{111} = 32\pi L^0 \tag{340}$$

avec :

$$E_i = \frac{1-\varepsilon_1}{\varepsilon_i} = \frac{\rho_{si} + \rho_{di}}{\varepsilon_i} \tag{341}$$

$$R_i = \frac{\rho_{di}}{\varepsilon_i} \qquad (i = 1,2) \tag{342}$$

3. Résolution de l'E.T.R dans le cas de 2D par la méthode *P1*

- ***Equations différentielles***

Dans cette partie, on va résoudre l'E.T.R par la méthode *P1* dans le cas d'une cavité rectangulaire telle que décrire sur la **Figure 43**.

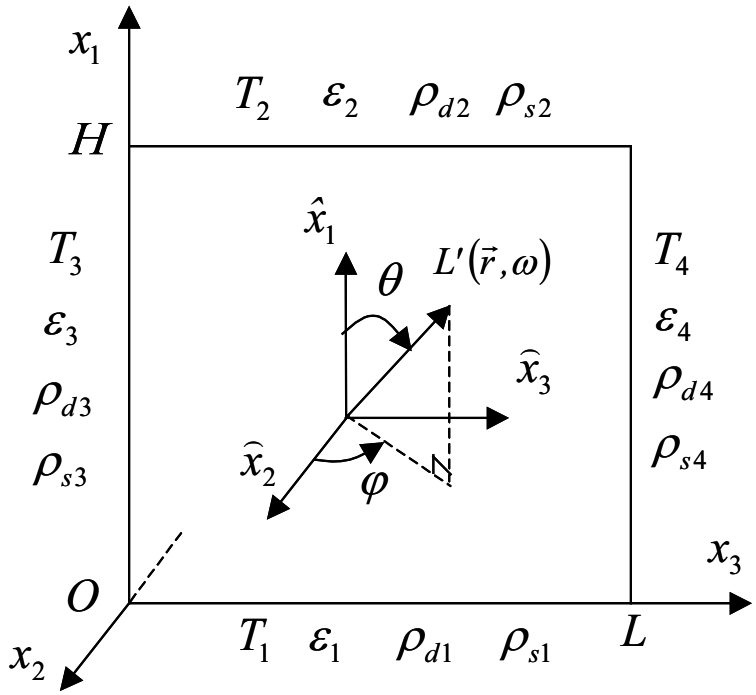


Figure 43 : *Méthode P1 dans le cas 2D*

L'expression approchée *P1* de la luminance dans le cas de 2D se déduit de l'expression *P1* ou *P3* dans le cas 3D (299) en posant $L_2 = 0$ et en supprimant les moments d'ordre supérieur à 1, soit :

$$L'(x_1, x_3, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\left(L_0 + 3L_1 \cos\theta + 3L_3 \sin\theta \sin\varphi\right) \tag{343}$$

A partir du système d'équations (300)-(301), on en déduit le système d'équations aux moments du premier ordre à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_3}{\partial x_3} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \dfrac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{13}}{\partial x_3} = -\kappa L_1 \\ \dfrac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{33}}{\partial x_3} = -\kappa L_3 \end{cases} \tag{344}$$

A partir des conditions de fermeture (305), on a :

$$L_{13} = 0 \tag{345}$$

$$L_{11} = L_{33} = \frac{1}{3} L_0 \tag{346}$$

En utilisant ces relations de fermeture, le système d'équations aux moments à résoudre devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_3}{\partial x_3} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} = -\kappa L_1 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_3} = -\kappa L_3 \end{cases} \tag{347}$$

On procède de la même manière que dans le cas 1D par une méthode de dérivation-substitution pour faire apparaître l'équation génératrice d'ordre 2 en $\{L_0\}$ et les deux relations permettant de calculer les composantes du flux radiatif dans les deux directions de l'espace $\{L_1, L_3\}$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\kappa^2}\left(\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_1{}^2} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_3{}^2}\right) + L_0 - 4\pi L^0 = 0 \\ L_1 = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} \\ L_3 = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_3} \end{cases} \tag{348}$$

- ***Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1***

Pour résoudre l'équation du second ordre du système (348), on a besoin de quatre conditions aux limites sur L_0, deux dans chaque direction de l'espace.

On utilise pour cela la méthode proposée par [RATZEL 81] :

- **Pour la paroi inférieure :**

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} L'_{p1}(0,x_3,\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_1 L^0_{p1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2}\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi$$
$$+\rho_{s1}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} L'_{p1}(0,x_3,\pi-\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi \qquad (349)$$
$$-\frac{\rho_{d1}}{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{\varphi^*=0}^{2\pi}\int_{\theta^*=\pi/2}^{\pi} L'_{p1}(0,x_3,\theta^*,\varphi^*)\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^* d\varphi^*\right)\overline{F}\sin\theta d\theta d\varphi$$

- **Pour la paroi supérieure :**

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} L'_{p2}(H,x_3,\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_2 L^0_{p2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi$$
$$+\rho_{s2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} L'_{p2}(H,x_3,\pi-\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi \qquad (350)$$
$$+\frac{\rho_{d2}}{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\left(\int_{\varphi^*=0}^{2\pi}\int_{\theta^*=0}^{\pi/2} L'_{p2}(H,x_3,\theta^*,\varphi^*)\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^* d\varphi^*\right)\overline{F}\sin\theta d\theta d\varphi$$

- **Pour la paroi gauche :**

$$\int_{\varphi=0}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,0,\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_3 L^0_{p3}\int_{\varphi=0}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi$$
$$+\rho_{s3}\int_{\varphi=0}^{\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,0,\theta,\varphi+\pi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi \qquad (351)$$
$$-\frac{\rho_{d3}}{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi^*=\pi}^{2\pi}\int_{\theta^*=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,0,\theta^*,\varphi^*)\sin\varphi^*\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^* d\varphi^*\right)\overline{F}\sin\theta d\theta d\varphi$$

➢ **Pour la paroi droite :**

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,L,\theta,\varphi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi = \varepsilon_4 L^0_{p4}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi$$
$$+\rho_{s4}\int_{\varphi=\pi}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,L,\theta,\varphi-\pi)\overline{F}\sin\theta d\theta\right)d\varphi \qquad (352)$$
$$+\frac{\rho_{d4}}{\pi}\int_{\varphi=\pi}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{\varphi^*=0}^{\pi}\int_{\theta^*=0}^{\pi} L'_{p1}(x_1,0,\theta^*,\varphi^*)\sin\varphi^*\cos\theta^*\sin\theta^* d\theta^* d\varphi^*\right)\overline{F}\sin\theta d\theta d\varphi$$

On remplace ensuite $\overline{F}=l_1$ pour les parois inférieure et supérieure (cosinus directeur correspondant à la normale de la surface), $\overline{F}=l_3$ pour les parois gauche et droite.

En substituant la luminance par son développement en harmoniques sphériques *P1* dans les quatre expressions au-dessus, on va obtenir la condition aux limites suivante :

$$L_0 \pm 2(1+2E_i)L_1 = 4\pi L^0 \qquad (i=1,2) \qquad (353)$$

Le signe (+) correspond à la surface 1 et le signe (-) est relatif à la surface 2.

$$L_0 \pm 2(1+2E_i)L_3 = 4\pi L^0 \qquad (i=3,4) \qquad (354)$$

avec :

$$E_i = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \qquad (i=1,2,3,4) \qquad (355)$$

Le signe (+) correspond à la surface 3 et le signe (-) est relatif à la surface 4.

4. Résolution de l'E.T.R dans le cas de 3D par la méthode *P1* et *P3*

Dans cette partie, nous allons écrire les équations à résoudre et les conditions aux limites associées dans le cas 3D par la méthode *P1* et *P3*.

4.1. Cas de la méthode *P1*

- ***Equations différentielles***

On rappelle l'expression approchée *P1* de la luminance dans le cas de 3D :

$$L^{'}(x_1, x_2, x_3, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\left(L_0 + 3L_1 \cos\theta + 3L_2 \sin\theta \cos\varphi + 3L_3 \sin\theta \sin\varphi\right) \tag{356}$$

De même, le système d'équations des moments à résoudre (voir équations (300)-(301)) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_3}{\partial x_3} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \dfrac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_{13}}{\partial x_3} = -\kappa L_1 \\ \dfrac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_{23}}{\partial x_3} = -\kappa L_2 \\ \dfrac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_{33}}{\partial x_3} = -\kappa L_3 \end{cases} \tag{357}$$

A partir de l'équation de fermeture *P1* (305), on obtient les relations de fermeture suivantes :

$$L_{13} = L_{12} = L_{23} = 0 \tag{358}$$

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = \frac{1}{3} L_0 \tag{359}$$

En utilisant ces relations, le système d'équations aux moments devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_3}{\partial x_3} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} = -\kappa L_1 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_2} = -\kappa L_2 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_3} = -\kappa L_3 \end{cases} \tag{360}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\kappa^2}\left(\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_1{}^2} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_2{}^2} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_3{}^2}\right) + L_0 - 4\pi L^0 = 0 \\ L_1 = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} \\ L_2 = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_2} \\ L_3 = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_3} \end{cases} \tag{361}$$

Il reste donc à résoudre une seule équation d'ordre 2 qui ne dépend plus que $\{L_0\}$ (équation génératrice). Les différentes composantes du flux radiatif $\{L_1, L_2, L_3\}$ se déduisent de $\{L_0\}$ à partir des 3 équations différentielles du premier ordre restantes.

- ***Condition aux limites de Marshak pour la méthode P1***

Elles s'obtiennent en appliquant la même procédure que pour les cas 1D et 2D :

$$L_0 \pm 2(1 + 2E_i)L_1 = 4\pi L^0 \qquad (i = 1,2) \tag{362}$$

Le signe (+) correspond à la surface 1 et le signe (-) est relatif à la surface 2.

$$L_0 \pm 2(1 + 2E_i)L_2 = 4\pi L^0 \qquad (i = 3,4) \tag{363}$$

Le signe (+) correspond à la surface 3 et le signe (-) est relatif à la surface 4.

$$L_0 \pm 2(1+2E_i)L_3 = 4\pi L^0 \qquad (i=5,6) \tag{364}$$

Le signe (+) correspond à la surface 5 et le signe (-) est relatif à la surface 6.

Avec :

$$E_i = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \qquad \left(i=\overline{1,6}\right) \tag{365}$$

4.2. Cas de la méthode *P3*

- ***Equations différentielles***

L'expression approchée P3 de la luminance dans le cas 3D est :

$$L'(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\left[\begin{array}{l} L_0 + 3L_1\cos\theta + 3L_2\sin\theta\cos\varphi + 3L_3\sin\theta\sin\varphi \\ +\frac{5}{4}(3L_{11}-L_0)(3\cos^2\theta-1) \\ +15(L_{12}\cos\varphi + L_{13}\sin\varphi)\cos\theta\sin\theta \\ +\frac{15}{4}[(L_{22}-L_{33})\cos 2\varphi + 2L_{23}\sin 2\varphi]\sin^2\theta \\ +\frac{7}{4}(5L_{111}-3L_1)(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ +\frac{21}{8}[(5L_{211}-L_2)\cos\varphi + (5L_{311}-L_3)\sin\varphi](5\cos^2\theta-1)\sin\theta \\ +\frac{105}{4}[(L_{122}-L_{133})\cos 2\varphi + 2L_{123}\sin 2\varphi]\cos\theta\sin^2\theta \\ +\frac{35}{8}[(L_{222}-3L_{233})\cos 3\varphi - (L_{333}-3L_{322})\sin 3\varphi]\sin^3\theta \end{array}\right] \tag{366}$$

On a aussi les relations suivantes entre les moments de la luminance :

$$L_0 = L_{11} + L_{22} + L_{33} \tag{367}$$

$$L_1 = L_{111} + L_{122} + L_{133} \tag{368}$$

$$L_2 = L_{211} + L_{122} + L_{133} \tag{369}$$

$$L_3 = L_{311} + L_{322} + L_{333} \tag{370}$$

On a un système de 40 équations aux moments à résoudre :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i} = -\kappa L_j \qquad (j = 1,2,3) \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L_{ijk}}{\partial x_i} = -\kappa L_{jk} + \frac{4\pi}{3}\delta_{jk}\left(\kappa L^0\right) \qquad (j,k = 1,2,3) \\ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial L_{ijkl}}{\partial x_i} = -\kappa L_{jkl} \qquad (j,k,l = 1,2,3) \end{cases} \tag{371}$$

A partir de la définition des moments, on obtient les *conditions de fermeture* suivantes :

$$\begin{aligned} L_{ijkl} &= \frac{1}{7}\left(L_{ij}\delta_{kl} + L_{ik}\delta_{jl} + L_{jk}\delta_{il} + L_{il}\delta_{jk} + L_{kl}\delta_{ij} + L_{jl}\delta_{ik}\right) \\ &- \frac{1}{35}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl}\right)L_0 \end{aligned} \tag{372}$$

En appliquant la méthode de substitution-différentiation, on obtient un système de 7 équations génératrices du second ordre à 7 inconnues principales $\{L_0, L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial {x_1}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial {x_3}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial {x_3}^2}\right) \\ &+\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1 \partial x_3}\right) - \left(\frac{3}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_1}^2} + \frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_3}^2}\right) \\ &= \kappa^2 L_{11} - \frac{4\pi}{3}\kappa^2 L^0 \end{aligned} \tag{373}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial {x_1}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial {x_3}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial {x_2}^2}\right) \\ &+\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_2 \partial x_3}\right) - \left(\frac{3}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_2}^2} + \frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_1}^2} + \frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial {x_3}^2}\right) \\ &= \kappa^2 L_{22} - \frac{4\pi}{3}\kappa^2 L^0 \end{aligned} \tag{374}$$

$$\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_3{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_1{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_2{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x_3{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial x_3{}^2}\right)$$
$$+\left(\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{6}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1\partial x_3}\right)-\left(\frac{3}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_3{}^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_1{}^2}+\frac{1}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_2{}^2}\right) \tag{375}$$
$$=\kappa^2 L_{33}-\frac{4\pi}{3}\kappa^2 L^0$$

$$\left(\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1{}^2}+\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_2{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_3{}^2}\right)+\left(\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_2\partial x_3}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_1\partial x_2}\right)=\kappa^2 L_{12} \tag{376}$$

$$\left(\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_2{}^2}+\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_3{}^2}\right)+\left(\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_2\partial x_3}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_1\partial x_2}\right)=\kappa^2 L_{13} \tag{377}$$

$$\left(\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_2{}^2}+\frac{1}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_1{}^2}+\frac{3}{7}\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_3{}^2}\right)+\left(\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{2}{7}\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1\partial x_3}\right)$$
$$-\left(\frac{2}{35}\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_1\partial x_2}\right)=\kappa^2 L_{23} \tag{378}$$

$$\left(\frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2 L_{22}}{\partial x_2{}^2}+\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial x_3{}^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 L_{12}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 L_{13}}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 L_{23}}{\partial x_2\partial x_3}\right)=\kappa^2 L_0-4\pi\kappa^2 L^0 \tag{379}$$

Les autres moments inconnus peuvent se calculer à partir des 7 inconnues principales à l'aide par relations suivantes :

$$L_1=-\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial L_{13}}{\partial x_3}\right) \tag{380}$$

$$L_2 = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_3}\right) \tag{381}$$

$$L_3 = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{33}}{\partial x_3}\right) \tag{382}$$

$$L_{111} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{6}{7}\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_3} - \frac{3}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_1}\right) \tag{383}$$

$$L_{222} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{6}{7}\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_3} - \frac{3}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_2}\right) \tag{384}$$

$$L_{111} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{6}{7}\frac{\partial L_{33}}{\partial x_3} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{3}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} - \frac{3}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_3}\right) \tag{385}$$

$$L_{211} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{11}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_3} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_2}\right) \tag{386}$$

$$L_{311} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{11}}{\partial x_3} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{33}}{\partial x_3} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_3}\right) \tag{387}$$

$$L_{122} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{22}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_3} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_1}\right) \tag{388}$$

$$L_{133} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_3} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{33}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_1}\right) \tag{389}$$

$$L_{233} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_3} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{33}}{\partial x_2} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_2}\right) \tag{390}$$

$$L_{322} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{3}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{33}}{\partial x_3} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{22}}{\partial x_3} - \frac{1}{35}\frac{\partial L_0}{\partial x_3}\right) \tag{391}$$

$$L_{123} = -\frac{1}{\kappa}\left(\frac{1}{7}\frac{\partial L_{23}}{\partial x_1} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{13}}{\partial x_2} + \frac{1}{7}\frac{\partial L_{12}}{\partial x_3}\right) \tag{392}$$

- ***Condition aux limites de Marshak pour le cas P3***

Elles s'obtiennent en appliquant la même procédure que précédemment.

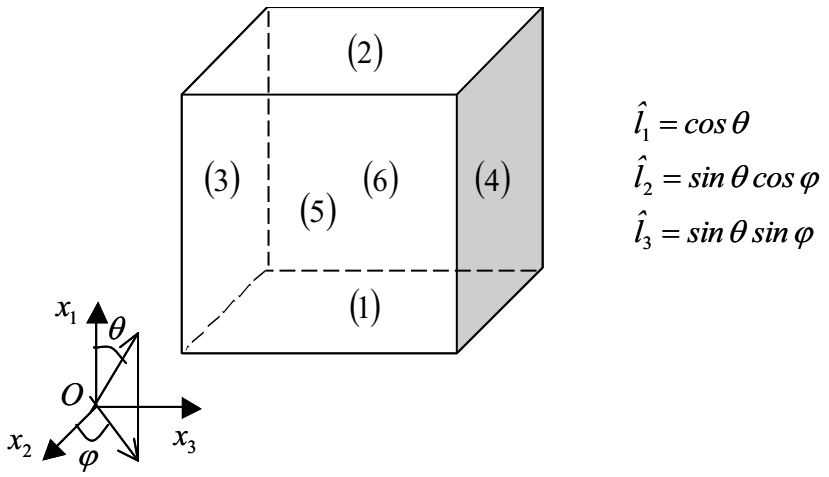


Figure 44 : *Condition aux limites de Marshak dans le cas 3D*

En utilisant des multiplicateurs dans le **Tableau 7** et la relation entre des moments de la luminance, suivant des étapes comme paragraphes au-dessus, on va obtenir les conditions aux limites suivantes :

Faces	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
L_0	1	1	1	1	1	1
L_{11}	$\hat{l}_1$	$\hat{l}_1$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_2$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_2$
L_{22}	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_1$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_1$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_2$	$\hat{l}_2$
L_{33}	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_1$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_1$	$\hat{l}_3$	$\hat{l}_3$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_2$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_2$
L_{12}	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_2$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_2$	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_1$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_1$
L_{13}	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_1\hat{l}_3$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_1$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_1$	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$
L_{23}	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_1\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_2$	$\hat{l}_3\hat{l}_3\hat{l}_2$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_3$	$\hat{l}_2\hat{l}_2\hat{l}_3$

Tableau 7 : *Multiplicateurs remplaçant le terme* $Y_l^m(\omega)$ *pour la condition aux limites de type Marshak*

Pour la face inférieure (1) :

$$L_0 = -\frac{45}{16} L_1 + \frac{35}{16} L_{111} + 4\pi L^0 \tag{393}$$

$$L_{11} = -\frac{121}{240} L_1 - \frac{7}{16} L_{111} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{394}$$

$$L_{22} = -\frac{7}{240} L_1 + \frac{7}{16} L_{111} - \frac{16}{5} L_{122} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{395}$$

$$L_{33} = -\frac{7}{240} L_1 + \frac{7}{16} L_{111} - \frac{16}{5} L_{133} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{396}$$

$$L_{12} = -\frac{8}{5} L_{211} \tag{397}$$

$$L_{12} = -\frac{8}{5} L_{311} \tag{398}$$

$$L_{23} = -\frac{16}{5} L_{123} \tag{399}$$

Pour la face extérieure (2) :

$$L_0 = \frac{45}{16} L_1 - \frac{35}{16} L_{111} + 4\pi L^0 \tag{400}$$

$$L_{11} = \frac{121}{240} L_1 + \frac{7}{16} L_{111} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{401}$$

$$L_{22} = \frac{7}{240} L_1 - \frac{7}{16} L_{111} + \frac{16}{5} L_{122} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{402}$$

$$L_{33} = \frac{7}{240} L_1 - \frac{7}{16} L_{111} + \frac{16}{5} L_{133} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{403}$$

$$L_{12} = \frac{8}{5} L_{211} \tag{404}$$

$$L_{12} = \frac{8}{5} L_{311} \tag{405}$$

$$L_{23} = \frac{16}{5} L_{123} \tag{406}$$

Pour la face gauche (3):

$$L_0 = -\frac{45}{16} L_3 + \frac{35}{16} L_{333} + 4\pi L^0 \tag{407}$$

$$L_{33} = -\frac{121}{240} L_3 - \frac{7}{16} L_{333} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{408}$$

$$L_{22} = -\frac{7}{240} L_3 + \frac{7}{16} L_{333} - \frac{16}{5} L_{322} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{409}$$

$$L_{11} = -\frac{7}{240} L_3 + \frac{7}{16} L_{333} - \frac{16}{5} L_{311} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{410}$$

$$L_{12} = -\frac{16}{5} L_{123} \tag{411}$$

$$L_{13} = -\frac{8}{5} L_{133} \tag{412}$$

$$L_{23} = -\frac{8}{5} L_{123} \tag{413}$$

Pour la face droite (4) :

$$L_0 = \frac{45}{16} L_3 - \frac{35}{16} L_{333} + 4\pi L^0 \tag{414}$$

$$L_{33} = \frac{121}{240} L_3 + \frac{7}{16} L_{333} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{415}$$

$$L_{22} = \frac{7}{240} L_3 - \frac{7}{16} L_{333} + \frac{16}{5} L_{322} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{416}$$

$$L_{11} = \frac{7}{240} L_3 - \frac{7}{16} L_{333} + \frac{16}{5} L_{311} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{417}$$

$$L_{12} = \frac{16}{5} L_{123} \tag{418}$$

$$L_{13} = \frac{8}{5} L_{133} \tag{419}$$

$$L_{23} = \frac{8}{5} L_{123} \tag{420}$$

Pour la face arrière (6):

$$L_0 = -\frac{45}{16} L_2 + \frac{35}{16} L_{222} + 4\pi L^0 \tag{421}$$

$$L_{22} = -\frac{121}{240} L_2 - \frac{7}{16} L_{222} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{422}$$

$$L_{33} = -\frac{7}{240} L_2 + \frac{7}{16} L_{222} - \frac{16}{5} L_{233} + \frac{4}{3} \pi L^0 \tag{423}$$

$$L_{11} = -\frac{7}{240}L_2 + \frac{7}{16}L_{222} - \frac{16}{5}L_{211} + \frac{4}{3}\pi L^0 \tag{424}$$

$$L_{12} = -\frac{8}{5}L_{122} \tag{425}$$

$$L_{13} = -\frac{16}{5}L_{132} \tag{426}$$

$$L_{23} = -\frac{8}{5}L_{322} \tag{427}$$

Pour la face avant (5):

$$L_0 = \frac{45}{16}L_2 - \frac{35}{16}L_{222} + 4\pi L^0 \tag{428}$$

$$L_{22} = \frac{121}{240}L_2 + \frac{7}{16}L_{222} + \frac{4}{3}\pi L^0 \tag{429}$$

$$L_{33} = \frac{7}{240}L_2 - \frac{7}{16}L_{222} + \frac{16}{5}L_{233} + \frac{4}{3}\pi L^0 \tag{430}$$

$$L_{11} = \frac{7}{240}L_2 - \frac{7}{16}L_{222} + \frac{16}{5}L_{211} + \frac{4}{3}\pi L^0 \tag{431}$$

$$L_{12} = \frac{8}{5}L_{122} \tag{432}$$

$$L_{13} = \frac{16}{5}L_{132} \tag{433}$$

$$L_{23} = \frac{8}{5}L_{322} \tag{434}$$

5. Résolution de l'E.T.R dans le cas 2D cylindrique avec symétrie de révolution par la méthode *P1*

Dans cette partie, on va établir les équations aux moments en coordonnées cylindriques pour résoudre l'E.T.R par la méthode *P1* dans le cas 2D avec symétrie de révolution. La configuration est décrite sur la **Figure 43**.

- ***Equations différentielles***

En transformant l'E.T.R du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées cylindriques (Cf. **Annexe E**), on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned} &sin\,\beta\, cos\,\theta \frac{\partial L'}{\partial r} - \frac{1}{r} sin\,\beta\, sin\,\phi \frac{\partial L'}{\partial \phi} + \frac{1}{r} sin\,\beta\, sin\,\phi \frac{\partial L'}{\partial \theta} + cos\,\beta \frac{\partial L'}{\partial z} \\ &= \kappa L_0 - (\kappa + \sigma) L' + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega^*=0}^{4\pi} L^* d\omega^* \end{aligned} \tag{435}$$

où : $L' = L'(r, \theta, z, \beta, \phi)$

En utilisant des termes de cosinus directeurs, l'équation de transfert radiatif va devenir :

$$l_r \frac{\partial L'}{\partial r} - \frac{1}{r} l_\theta \left(\frac{\partial L'}{\partial \phi} - \frac{\partial L'}{\partial \theta} \right) + l_z \frac{\partial L'}{\partial z} = \kappa L_0 - (\kappa + \sigma) L' + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega^*=0}^{4\pi} L^* d\omega^* \tag{436}$$

avec :

$$l_r = sin\,\beta\, cos\,\phi \tag{437}$$

$$l_\theta = sin\,\beta\, sin\,\phi \tag{438}$$

$$l_z = cos\,\beta \tag{439}$$

$\{l_r, l_\theta, l_z\}$ représentent les cosinus directeurs dans le système de coordonnées cylindriques.

Comme dans le cas cartésien, la luminance directionnelle peut être exprimée en coordonnées cylindriques sous la forme d'une série en harmoniques sphériques :

$$L'(r,\theta,z,\beta,\phi)=\frac{1}{4\pi}\left(L_0+3L_z\cos\beta+3L_r\cos\phi\sin\beta+3L_\theta\sin\phi\sin\beta\right) \tag{440}$$

Dans le cas 2D avec symétrie azimutale où la luminance ne dépend pas de θ, on a $L_\theta=0$, donc l'expression ci-dessus devient :

$$L'(r,z,\beta,\phi)=\frac{1}{4\pi}\left(L_0+3L_z\cos\beta+3L_r\cos\phi\sin\beta\right) \tag{441}$$

Pour obtenir le système d'équations aux moments, on multiplie chaque membre de l'E.T.R par les cosinus directeurs pour la méthode P1 et leurs puissances pour des méthodes d'ordre plus élevé, et on intègre ensuite chaque équation sur tout l'angle solide ω.

On obtient ainsi le système d'équations des moments suivant :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s_i}\left(h_i L_{s_i}\right)=\kappa\left(4\pi L^0-L_0\right) \tag{442}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s_j}\left(h_j L_{s_i s_j}\right)+\frac{1}{r}\left(\delta_{rs_i}+\delta_{\theta s_i}\right)L_{rs_i}-\frac{1}{r}\left(L_0-L_{zz}\right)\delta_{rs_i}=-\left(\kappa+\sigma\right)L_{s_i} \tag{443}$$

où :

$$i,j=1,2,3 \qquad s_1=r, \qquad s_2=\theta, \qquad s_3=z \tag{444}$$

A partir de la définition des moments de la luminance, on obtient les *équations de fermeture* suivantes :

$$L_{s_i s_j}=\int_\Omega L' l_{s_i} l_{s_j}\, d\Omega=\frac{1}{3}L_0\delta_{ij} \tag{445}$$

Dans le cas symétrique axial, le système d'équations des moments revêt la forme suivante :

$$\begin{cases} L_r + r\dfrac{\partial L_r}{\partial r} + \dfrac{\partial L_z}{\partial z} = 4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0 \\ L_r = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial r} \\ L_z = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial z} \end{cases} \tag{446}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial L_0}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial z^2} = -3\kappa\left(4\pi\kappa L^0 - \kappa L_0\right) \\ L_r = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial r} \\ L_z = -\dfrac{1}{3\kappa}\dfrac{\partial L_0}{\partial z} \end{cases} \tag{447}$$

Comme dans le cas cartésien, on obtient pour la méthode *P1* qu'une seule équation différentielle du second ordre à résoudre avec pour inconnue principale la luminance moyenne $\{L_0\}$. Il est ensuite possible de remonter aux composantes $\{L_r, L_z\}$ du flux radiatif à partir des deux équations différentielles du premier ordre restantes en $\{L_0\}$.

- ***Condition aux limites de Marshak***

Cette condition a pour expression suivante :

$$\left(1 - \rho_{dp} - \rho_{sp}\right)L_0 \pm 2\left(1 + \rho_{dp} + \rho_{sp}\right)L_{s_i} = 4\pi\varepsilon_p L_p^0 \qquad \left(s_i = r, z\right) \tag{448}$$

Le signe « + » correspond à la paroi basse (respectivement gauche) et le signe « - » est relatif à la paroi supérieure (droite).

avec :

- ε_p : coefficient d'émissivité de la paroi
- ρ_{sp} : coefficient de réflectivité spéculaire
- ρ_{dp} : coefficient de réflectivité diffuse

Ces grandeurs doivent satisfaire à la relation de conservation de l'énergie suivante :

$$\varepsilon_p + \rho_{sp} + \rho_{dp} = 1 \tag{449}$$

6. Résolution de l'E.T.R dans le cas non gris – Modèle Multi-Bandes à 2 bandes

Dans ce paragraphe, on présente le principe général de résolution de l'E.T.R dans le cas d'un milieu semi-transparent dont les propriétés radiatives (absorption, émission, réflexion …) dépendent de la longueur d'onde (cas non gris). Le principe est présenté dans le cas d'un modèle à deux bandes mais peut facilement être généralisé pour un nombre de bandes quelconque.

6.1. Calcul de $\vec{\nabla}\left(\boldsymbol{q}^R\right)$

Comme on le sait, à l'équilibre thermique, l'émittance du milieu $M_\lambda^0(T) = \pi L_\lambda^0(T)$ ne dépend que de la température et de la longueur d'onde et obéit à la loi de Planck :

$$M_\lambda^0(T) = C_1 \lambda^{-5}\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1\right]^{-1} \qquad (n = 1) \tag{450}$$

avec :

$$C_1 = 2\pi h c_0{}^2 = 3{,}741.10^{-16}\left(W.m^2\right) \text{ et } C_2 = \frac{h c_0}{k_B} = 0{,}014388\left(m.K\right)$$

h et k_B désignent les constantes universelles de Planck et Boltzmann et c_0 la célérité du rayonnement (vitesse de la lumière) dans le vide :

$$k_B = 1{,}3805.10^{-23}\left(J/K\right) \tag{451}$$

$$h = 6{,}626.10^{-34}\left(J.s\right) \tag{452}$$

$$c_0 = 2{,}998.10^8 (m/s) \tag{453}$$

Compte tenu de la dépendance spectrale, l'équation de transfert radiatif dans un milieu semi-transparent absorbant et émettant, a pour expression :

$$\frac{dL'_\lambda}{ds} = -\kappa_\lambda L'_\lambda(s) + \kappa_\lambda L^0{}_\lambda(T) \tag{454}$$

On définit les grandeurs suivantes :

- Pour la bande spectrale $(0, \lambda_c)$:

$$\kappa_{0-\lambda} = \kappa_\alpha = C^{Ste} \tag{455}$$

$$L_\alpha = \int_0^{\lambda_c} L_\lambda d\lambda \tag{456}$$

- Pour la bande (λ_c, ∞) :

$$\kappa_{\lambda_c - \infty} = \kappa_\beta = C^{Ste} \tag{457}$$

$$L_\beta = \int_{\lambda_c}^{\infty} L_\lambda d\lambda \tag{458}$$

La divergence du flux radiatif s'exprime par :

$$\begin{aligned} div(q^R) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \int_{\Omega=0}^{4\pi} \frac{dL'_\nu}{ds} d\Omega = \int_{\Omega=0}^{4\pi} \left(\int_0^{\lambda_c} \frac{dL'_\lambda}{ds} d\lambda + \int_{\lambda_c}^{\infty} \frac{dL'_\lambda}{ds} d\lambda \right) d\Omega \\ &= \int_0^{4\pi} \left[\left(-\kappa_\alpha L_\alpha + \kappa_\alpha \int_0^{\lambda_c} L^0_\lambda d\lambda \right) + \left(-\kappa_\beta L_\beta + \kappa_\beta \int_{\lambda_c}^{\infty} L^0_\nu d\lambda \right) \right] d\Omega \end{aligned} \tag{459}$$

6.2. Fraction d'émittance du corps noir $F_{0-\lambda_c T}$

- ***Définition***

Pour le calcul L_λ^0 dans la bande spectrale (λ_1, λ_2), on utilise la définition de la fraction de l'émittance du corps noir ([ANDRE 92], [PATCH 67]). Cette fraction est désignée par $F_{\lambda_1-\lambda_2}$ et est définie par le rapport :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0 d\lambda} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda}{\sigma T^4} \tag{460}$$

Soit :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda^0 d\lambda = \frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \pi L_\lambda^0 d\lambda = \frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} C_1 \lambda^{-5}\left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right)-1\right]^{-1} d\lambda \tag{461}$$

En posant le changement de variable $u = \lambda T$, on peut aussi écrire cette fraction sous la forme :

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = \frac{1}{\sigma}\int_{\lambda_1 T}^{\lambda_2 T} \frac{C_1}{u^5\left(\exp\left(\frac{C_2}{u}\right)-1\right)} du \tag{462}$$

Le terme $F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T}$ peut s'exprimer sous la somme de deux intégrales dans lesquelles la borne inférieure est nulle (relation de Shales) :

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda_2 T} \frac{C_1}{u^5\left(\exp\left(\frac{C_2}{u}\right)-1\right)} du - \frac{1}{\sigma}\int_0^{\lambda_1 T} \frac{C_1}{u^5\left(\exp\left(\frac{C_2}{u}\right)-1\right)} du = F_{0-\lambda_2 T} - F_{0-\lambda_1 T} \tag{463}$$

- ***Calcul de $F_{0-\lambda_c T}$ et expression approchée***

Le calcul de $F_{0-\lambda_c T}$ peut se faire analytiquement à partir de l'intégrale de la Luminance ou Emittance monochromatique $M_\lambda^0(T)$. On a en effet :

$$\begin{aligned}\int M_\lambda^0(T)d\lambda = &\frac{1}{4}\frac{C_1}{\lambda^4} + \frac{C_1}{C_2\lambda^3}\text{Polylog}(1,\exp(C_2/\lambda T)).T - \frac{3C_1}{C_2{}^2\lambda^2}\text{Polylog}(2,\exp(C_2/\lambda T)).T^2 \\ &+ \frac{6C_1}{C_2{}^3\lambda}\text{Polylog}(3,\exp(C_2/\lambda T)).T^3 - \frac{6C_1}{C_2{}^4}\text{Polylog}(4,\exp(C_2/\lambda T)).T^4\end{aligned} \tag{464}$$

où : $\text{Polylog}(a,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}$

avec les propriétés suivantes sur la fonction « Polylog » :

- $\text{Polylog}(4,1) = \frac{\pi^2}{90}$

Et les équivalences de cette fonction lorsque $x \to \infty$:

- $\underset{x\to\infty}{\text{Polylog}}(1,x) \approx -\ln(x) - I\pi$
- $\underset{x\to\infty}{\text{Polylog}}(2,x) \approx -\frac{1}{2}\ln(x)^2 - I\pi\ln(x) + \frac{1}{3}\pi^2$
- $\underset{x\to\infty}{\text{Polylog}}(3,x) \approx -\frac{1}{6}\ln(x)^3 - \frac{1}{2}I\pi\ln(x)^2 + \frac{1}{3}\pi^2\ln(x)$
- $\underset{x\to\infty}{\text{Polylog}}(4,x) \approx -\frac{1}{24}\ln(x)^4 - \frac{1}{6}I\pi\ln(x)^3 + \frac{1}{6}\pi^2\ln(x)^2 + \frac{\pi^4}{45}$

Dans notre cas, $x = \exp(C_2/\lambda T)$, d'où :

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ (x\to 1)}}\int M_\lambda^0(T)d\lambda = -\frac{6C_1}{C_2{}^4}\frac{\pi^4}{90}.T^4 \tag{465}$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0 \\ (x\to\infty)}}\int M_\lambda^0(T)d\lambda = -\frac{2}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2{}^4}T^4 \tag{466}$$

On a alors :

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} M_{\lambda}^{0} d\lambda = -\frac{6C_1}{C_2^{\,4}}\frac{\pi^4}{90}.T^4 - \left(-\frac{2}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2^{\,4}}T^4\right) = \frac{1}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2^{\,4}}T^4 = \sigma T^4 \tag{467}$$

On retrouve la loi de Stefan-Boltzmann. Le résultat final est le suivant :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_{\lambda}^{0} d\lambda = {} & \frac{1}{4}\frac{C_1}{\lambda_c^{\,4}} + \frac{C_1}{C_2\lambda_c^{\,3}}\mathrm{Polylog}(1,\exp(C_2/\lambda_c T)).T \\ & -\frac{3C_1}{C_2^{\,2}\lambda_c^{\,2}}\mathrm{Polylog}(2,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^2 + \frac{6C_1}{C_2^{\,3}\lambda_c}\mathrm{Polylog}(3,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^3 \\ & -\frac{6C_1}{C_2^{\,4}}\mathrm{Polylog}(4,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^4 - \left(-\frac{2}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2^{\,4}}T^4\right)\end{aligned} \tag{468}$$

et qui conduit à :

$$\begin{aligned}F_{0-\lambda_c T} &= \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_{\lambda}^{0} d\lambda}{\sigma T^4} \\ &= \frac{1}{\sigma T^4}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4}\frac{C_1}{\lambda_c^{\,4}} + \frac{C_1}{C_2\lambda_c^{\,3}}\mathrm{Polylog}(1,\exp(C_2/\lambda_c T)).T \\ -\frac{3C_1}{C_2^{\,2}\lambda_c^{\,2}}\mathrm{Polylog}(2,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^2 + \frac{6C_1}{C_2^{\,3}\lambda_c}\mathrm{Polylog}(3,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^3 \\ -\frac{6C_1}{C_2^{\,4}}\mathrm{Polylog}(4,\exp(C_2/\lambda_c T)).T^4 - \left(-\frac{2}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2^{\,4}}T^4\right)\end{array}\right)\end{aligned} \tag{469}$$

Le problème est que la fonction « Polylog » n'est pas toujours implémentée dans les bibliothèques mathématiques des codes de calcul.

Pour le calcul numérique de $F_{0-\lambda T}$, on peut utiliser des approximations polynômiales. Une bonne approximation est donnée dans la littérature par [GRANT 65] :

$$F_{0-\lambda T} = \frac{15}{\pi^4}\sum_{m=1,2,\ldots}\frac{e^{-mv}}{m^4}[[(mv+3)mv+6]mv+6] \qquad (v \geq 2) \tag{470}$$

$$F_{0-\lambda T} = 1 - \frac{15}{\pi^4} v^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{v}{8} + \frac{v^2}{60} - \frac{v^4}{5040} + \frac{v^6}{272160} - \frac{v^8}{13305600} \right) \quad (v < 2) \tag{471}$$

Avec : $v = \dfrac{C_2}{\lambda T}$

La difficulté de l'approximation proposée est que son expression change en fonction de la valeur de T à travers la variable v.

C'est pourquoi, nous proposons une nouvelle approximation sous forme d'une série, valable quelle que soit le produit $\lambda.T$. Elle est obtenue à partir de l'approximation de Wien qui suppose que : $\exp(C_2/\lambda T) >> 1$ pour les basses et moyennes températures. On peut alors écrire :

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T) - 1} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T)} . \left(\frac{1}{1 - \exp(-C_2/\lambda T)} \right) \tag{472}$$

On pose : $\varepsilon = \exp(-C_2/\lambda T)$ un infiniment petit. La loi de Wien suppose que $\varepsilon = 0$.

Nous proposons de na pas faire cette hypothèse mais d'utiliser le développement à l'infini de $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, soit :

$$\underset{\varepsilon \to 0}{DL} \left(\frac{1}{1-\varepsilon} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \tag{473}$$

$$M_\lambda^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T) - 1} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2/\lambda T)} . \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n.C_2/\lambda T) \tag{474}$$

qui donne finalement :

$$M_\lambda^0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_1 \lambda^{-5} . \exp(-n.C_2/\lambda T) \tag{475}$$

Cette série s'intègre facilement pour donner :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_\lambda^0\, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} C_1\lambda^{-5}.\exp\left(-n.C_2/\lambda T\right)d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1 T}{n^4 C_2{}^4\lambda_c{}^3}\left(n^3 C_2{}^3 + 3n^2 C_2{}^2\left(\lambda_c T\right) + 6nC_2\left(\lambda_c T\right)^2 + 6\left(\lambda_c T\right)^3\right)\exp\left(-n.C_2/\lambda_c T\right)\end{aligned} \tag{476}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}F_{0-\lambda T} &= \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_\lambda^0\, d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda^0\, d\lambda} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_1 T}{n^4 C_2{}^4\lambda_c{}^3}\left(n^3 C_2{}^3 + 3n^2 C_2{}^2\left(\lambda_c T\right) + 6nC_2\left(\lambda_c T\right)^2 + 6\left(\lambda_c T\right)^3\right)\exp\left(-n.C_2/\lambda_c T\right)}{6\frac{C_1 T^4}{C_2{}^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\end{aligned} \tag{477}$$

Comme : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$,

On retrouve bien la loi de Stefan :

$$6\frac{C_1 T^4}{C_2{}^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{15}\frac{C_1\pi^4}{C_2{}^4}T^4 = \sigma T^4 \tag{478}$$

On peut simplifier cette expression :

$$\begin{aligned}F_{0-\lambda_c T} &= \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_\lambda^0\, d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda^0\, d\lambda} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6}\frac{1}{n^4\left(\lambda_c T\right)^3}\left(n^3 C_2{}^3 + 3n^2 C_2{}^2\left(\lambda_c T\right) + 6nC_2\left(\lambda_c T\right)^2 + 6\left(\lambda_c T\right)^3\right)\exp\left(-n.C_2/\lambda_c T\right)}{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}}\end{aligned} \tag{479}$$

Ou encore :

$$F_{0-\lambda_c T} = \frac{\int_{\lambda=0}^{\lambda_c} M_\lambda^0 \, d\lambda}{\int_{\lambda=0}^{\infty} M_\lambda^0 \, d\lambda} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left(\frac{1}{6} \frac{n^3 C_2^{\,3}}{(\lambda_c T)^3} + \frac{1}{2} \frac{n^2 C_2^{\,2}}{(\lambda_c T)^2} + \frac{n C_2}{(\lambda_c T)} + 1 \right) . \exp\left(-n.C_2/\lambda_c T\right)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}} \tag{480}$$

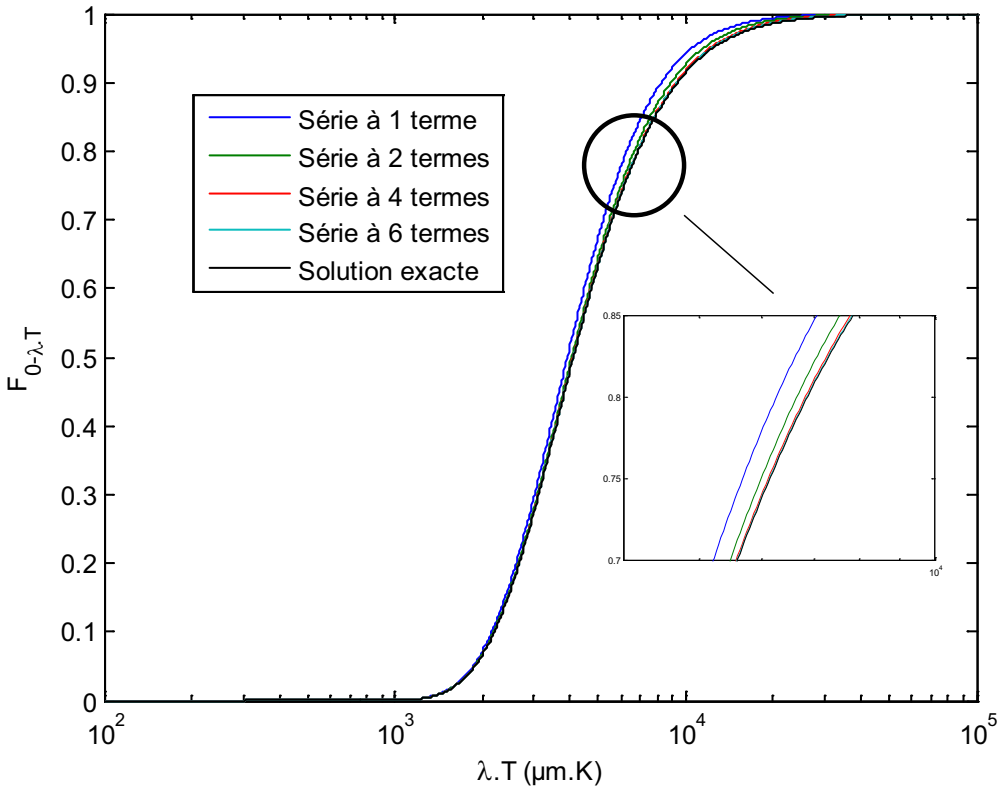


Figure 45 : *Fraction d'émission du corps noir* $F_{0-\lambda_c T}$ *(approximation série)*

L'intérêt de cette expression série est qu'elle converge très rapidement comme le montre la **Figure 45**. Même pour de grandes valeurs du produit λT, la série tronquée à 4 ou 6 termes suffit. C'est donc cette dernière expression que nous allons retenir pour la suite.

- ***Expression de*** $\vec{\nabla}\left(\boldsymbol{q}^R\right)$ ***en fonction de*** $F_{0-\lambda_c T}$

En utilisant la fraction d'émission du corps noir $F_{0-\lambda_c T}$, on a la divergence du flux radiatif :

$$
\begin{aligned}
div\left(q^R\right) &= \int_0^{4\pi}\left[\left(-\kappa_\alpha L_\alpha + \kappa_\alpha \int_0^{\lambda} L_\lambda^0 d\lambda\right) + \left(-\kappa_\beta L_\beta + \kappa_\beta \int_\lambda^{\infty} L_\nu^0 d\lambda\right)\right] d\Omega \\
&= -4\pi\left(\kappa_\alpha \overline{L}_\alpha + \kappa_\beta \overline{L}_\beta\right) + 4\kappa_\alpha n^2 \sigma T^4 F_{0-\lambda T} + 4\kappa_\beta n^2 \sigma T^4 \left(1 - F_{0-\lambda T}\right)
\end{aligned}
\tag{481}
$$

avec :

$$
\overline{L}_i = \frac{1}{4\pi}\int_0^{4\pi} L_i d\Omega \qquad \left(i = \alpha, \beta\right) \tag{482}
$$

- ***Equations différentielles***

En appliquant la méthode *PN* (approximation *P1*) sur chaque bande spectrale, on obtient le système d'équations suivant :

- Pour la bande spectrale $\left(0, \lambda_c\right)$:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L_{\alpha 1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{\alpha 2}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_{\alpha 3}}{\partial x_3} = 4\kappa_\alpha n^2 \sigma T^4 F_{0-\lambda_c T} - \kappa_\alpha L_{\alpha 0} \\
\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_1} = -\kappa_\alpha L_{\alpha 1} \\
\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_2} = -\kappa_\alpha L_{\alpha 2} \\
\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_3} = -\kappa_\alpha L_{\alpha 3}
\end{cases}
\tag{483}
$$

ou :

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{3{\kappa_\alpha}^2}\left(\dfrac{\partial^2 L_{\alpha 0}}{\partial {x_1}^2} + \dfrac{\partial^2 L_{\alpha 0}}{\partial {x_2}^2} + \dfrac{\partial^2 L_{\alpha 0}}{\partial {x_3}^2}\right) + L_{\alpha 0} - 4n^2 \sigma T^4 F_{0-\lambda T} = 0 \\
L_{\alpha 1} = -\dfrac{1}{3\kappa_\alpha}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_1} \\
L_{\alpha 2} = -\dfrac{1}{3\kappa_\alpha}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_2} \\
L_{\alpha 3} = -\dfrac{1}{3\kappa_\alpha}\dfrac{\partial L_{\alpha 0}}{\partial x_3}
\end{cases}
\tag{484}
$$

- Pour la bande spectrale (λ_c, ∞) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_{\beta 1}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial L_{\beta 2}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial L_{\beta 3}}{\partial x_3} = 4\kappa_\beta n^2 \sigma T^4 \left(1 - F_{0-\lambda_c T}\right) - \kappa_\beta L_{\beta 0} \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\beta 0}}{\partial x_1} = -\kappa_\beta L_{\beta 1} \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\beta 0}}{\partial x_2} = -\kappa_\beta L_{\beta 2} \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_{\beta 0}}{\partial x_3} = -\kappa_\beta L_{\beta 3} \end{cases} \tag{485}$$

Avec :

$$L_{i0} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} L_i d\Omega = \overline{L}_i \qquad (i = \alpha, \beta) \quad \text{: moment d'ordre 0} \tag{486}$$

$$L_{ij} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_j L_{ij} d\Omega \qquad (i = \alpha, \beta; j = 1,2,3) \text{ : moment d'ordre 1} \tag{487}$$

- ***Conditions aux limites de Marshak***

En utilisant la condition aux limites de Marshak avec $(n = 0)$, on obtient les conditions aux limites suivantes:

- Pour la bande spectrale $(0, \lambda_c)$:

$$L_{\alpha 0} \pm \frac{3}{2}(1 + 2E_i) L_{\alpha 1} = 4\sigma T_i^4 F_{0-\lambda_c T} \qquad (i = 1,2) \tag{488}$$

$$L_{\alpha 0} \pm \frac{3}{2}(1 + 2E_i) L_{\alpha 2} = 4\sigma T_i^4 F_{0-\lambda_c T} \qquad (i = 3,4) \tag{489}$$

$$L_{\alpha 0} \pm \frac{3}{2}(1 + 2E_i) L_{\alpha 3} = 4\sigma T_i^4 F_{0-\lambda_c T} \qquad (i = 5,6) \tag{490}$$

- Pour la bande spectrale (λ_c, ∞) :

$$L_{\beta 0} \pm \frac{3}{2}(1+2E_i)L_{\beta 1} = 4\sigma T_i^4 \left(1 - F_{0-\lambda_c T}\right) \quad (i = 1,2) \tag{491}$$

$$L_{\beta 0} \pm \frac{3}{2}(1+2E_i)L_{\beta 2} = 4\sigma T_i^4 \left(1 - F_{0-\lambda_c T}\right) \quad (i = 3,4) \tag{492}$$

$$L_{\beta 0} \pm \frac{3}{2}(1+2E_i)L_{\beta 3} = 4\sigma T_i^4 \left(1 - F_{0-\lambda_c T}\right) \quad (i = 5,6) \tag{493}$$

avec :

$$E_i = \frac{1-\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \quad \left(i = \overline{1,6}\right) \tag{494}$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le principe général de la méthode *PN* pour la résolution de l'E.T.R. La méthode *P1* a été exposée en détails dans les cas 1D, 2D et 3D en coordonnées cartésiennes et dans le cas 2D avec symétrie de révolution en coordonnées cylindriques. Ce dernier cas est en effet souvent utilisé pour valider des codes numériques sur des expériences réalisées sur des objets 3D avec des formes simples : cylindrique ou sphère. Numériquement, ces cas tests nécessitent peu de mémoire et de temps de calcul car l'équation à résoudre est 2D en espace et seule la section droite de la pièce doit être maillée.

Pour des besoins de validation, nous avons présenté également la méthode *P3*. Nous montrerons dans le chapitre de validation qu'il y a très peu de différences entre les résultats *P1* et *P3*. Il est en fait plus important d'accorder de l'importance aux conditions aux limites dont l'écriture n'est pas unique. Enfin, nous avons présenté la méthode *P3* dans le cas général 3D qui selon nous représente la limite raisonnable d'application de cette méthode.

Le choix de la méthode *PN* semble pertinent si on peut se contenter d'un développement de la luminance en harmoniques sphériques d'ordres peu élevés : *P1* ou *P3*. En effet, le nombre d'équations à résoudre croît très rapidement. On passe d'un système de 4 équations aux moments du premier ordre couplées pour la méthode *P1-3D* à un système de 40 équations aux moments pour la méthode *P3-3D*.

Nous avons montré qu'il était possible de réduire le nombre d'équations pas une méthode de dérivation-substitution en une seule équation différentielle du second ordre pour la méthode *P1* avec pour inconnues principales $\{L_0\}$ dans les cas 1D, 2D et 3D, en deux équations différentielles en $\{L_0, L_{11}\}$ pour *P3* dans le cas 1D et sept équations différentielles en $\{L_0, L_{11}, L_{22}, L_{33}, L_{12}, L_{13}, L_{23}\}$ pour *P3* dans le cas 3D. Il faut remarquer que le problème est alors mieux posé car il consiste à résoudre des équations du second ordre, présentant la même forme qu'une équation de diffusion stationnaire avec source.

Chapitre V

Validation du modèle radiatif et application du modèle dans des cas complexes

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter différents résultats de simulations numériques pour des cas 1D, 2D et 3D, permanent et transitoire, gris et non gris.

Tout d'abord, des exemples de validation :

- Pour les cas 1D permanent, on va comparer les résultats de la méthode quasi-analytique (méthode explicite directe) et ceux des méthodes *P1*, *P3* et *P1*, *P3* modifiées.
- Pour le cas 1D transitoire, on utilise comme exemple deux configurations : une configuration de type Flash (densité de flux imposée) et une configuration de type température imposée.
- Pour le cas 2D en régime permanent, on montre l'influence du rayonnement dans une cavité chauffée différentiellement.

La deuxième partie du chapitre décrit des applications verrières :

- Convection naturelle avec rayonnement dans une cavité 2D.
- Convection naturelle avec rayonnement dans une cavité 2D avec obstacle opaque.
- Convection naturelle avec rayonnement dans une cavité en forme de « L » avec obstacle opaque (2D).
- Convection naturelle avec rayonnement dans une cavité complexe avec obstacle semi-transparent (2D).

- Un exemple en géométrie cylindrique (2D axi-symétrique).
- Un exemple 3D en géométrie simple.
- Enfin, un cas non gris (1D).

1. Validation du modèle conducto-radiatif en 1D (régime permanent et transitoire) et 2D en régime permanent

1.1. Résolution du couplage conducto-radiatif dans le cas 1D permanent

Dans ce paragraphe, on va considérer le couplage conducto-radiatif dans le cas 1D permanent. Considérons la configuration de la **Figure 46** : deux parois infinies planes et parallèles, séparées par un milieu semi-transparent. Pour simplifier le problème, on fait l'hypothèse que les deux parois sont des corps noirs et le milieu semi-transparent est absorbant, émettant, isotrope et ne diffuse pas. La caractéristique du milieu sont données **Tableau 8**.

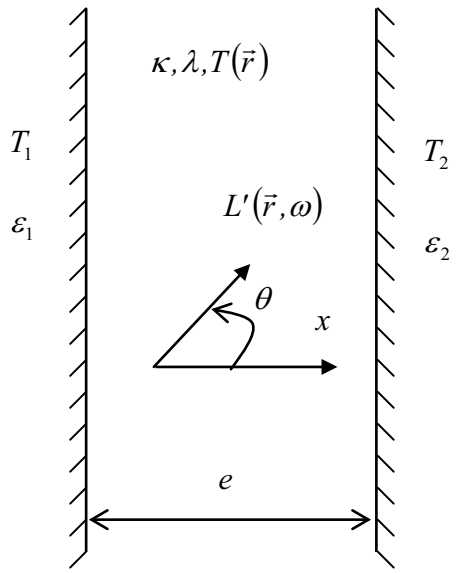


Figure 46 : *Modèle utilisé dans le cas 1D*

Epaisseur d'échantillon (e) (m)	$2.10^{-3}(m)$
Conductivité thermique (λ) (W/m°C)	$1.0(W/m^0C)$
ρC_P	$2.10^{-6}(J/m^{3\,0}C)$
Température de la paroi 1 (T_1)	$400(K)$
Température de la paroi 2 (T_2)	$800(K)$
Emissivité de la paroi 1 (ε_1)	1
Emissivité de la paroi 2 (ε_2)	1
Absorptivité de milieu (κ)	$\kappa = \tau_0 / e$

Tableau 8 : *Caractéristiques du matériau*

Pour comparer les résultats de la simulation, on va utiliser les variables adimensionnelles suivantes :

$t^* = \dfrac{at}{e^2}$ Temps réduit ($a = \dfrac{\lambda}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique) (495)

$\tau = \int_0^x \beta dx$ Profondeur optique (dans notre cas : $\beta = \sigma + \kappa = \kappa$) (496)

$\tau_0 = \int_0^e \beta dx$ Épaisseur optique (497)

Dans notre cas, $\beta = \kappa = constante$, alors : $\tau = \kappa x$ et $\tau_0 = \kappa e$

$$\theta = \frac{T}{T_2} \tag{498}$$

$$\theta_1 = \frac{T_1}{T_2} \tag{499}$$

$N_{pl} = \dfrac{\lambda\beta}{4n^2\sigma T_2^3}$ Paramètre d'interaction conduction / rayonnement. (500)

Dans ce qui suit, on va présenter la distribution de température au sein du matériau, à travers la variable θ, en fonction de l'épaisseur optique τ_0 et du paramètre d'interaction entre conduction et rayonnement N_{pl}. Les résultats des différentes méthodes vont être présentés sur les mêmes figures.

On rappelle l'équation conducto-radiative couplée :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t^*}\left(\tau, t^*\right) = \tau_0^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2} - \frac{\tau_0^2}{T_2\lambda\kappa}\frac{d\boldsymbol{q}^R}{d\tau} \tag{501}$$

Le couplage conduction et rayonnement est pris en compte à travers le terme de la divergence du flux radiatif $\left(\frac{d\boldsymbol{q}^R}{d\tau}\right)$ qui est donnée à partir de la résolution de l'E.T.R :

$$\frac{dL'}{ds} = -\kappa L'(s) + \kappa L^0(T) \tag{502}$$

On a :

$$div\left(\boldsymbol{q}^R\right) = \int_{\Omega=0}^{4\pi} \frac{dL'}{ds} d\Omega = -\kappa \int_{\Omega=0}^{4\pi} L'(s) d\Omega + \kappa \int_{\Omega=0}^{4\pi} L^0(T) d\Omega \tag{503}$$

$$div\left(\boldsymbol{q}^R\right) = -4\pi\kappa\overline{L} + 4\pi\kappa L_0 = 4\pi\kappa\left(L_0 - \overline{L}\right) \tag{504}$$

Alors :

$$\frac{d\boldsymbol{q}^R}{d\tau} = 4\pi\left(L_0 - \overline{L}\right) \tag{505}$$

Avec :

$$L^0 = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi} \quad (\sigma = 5{,}67.10^{-8}\left(W.m^{-2}.K^{-4}\right) : \text{Constante de Stefan-Boltzmann}) \tag{506}$$

$$\overline{L} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega=0}^{4\pi} L'(s) d\Omega \tag{507}$$

Sur la **Figure 47**, nous comparons les méthodes *P1* et *P3* en utilisant les conditions aux limites de Marshak compte tenu de notre choix pour la puissance du cosinus directeur utilisé (*P1 Non-Linéaire – Modèle Conducto-Radiatif ou CR – Ordre 1* (LEMTA*)* et Méthode *P3 Non-Linéaire CR – Ordre 3 (LEMTA))*. La méthode de résolution a été donnée en détail dans le chapitre précédent. Nous allons détailler les conditions aux limites pour mieux comprendre l'intérêt de notre modèle.

Pour la méthode *P1* (ou modèle *Non-linear CR Model – Ordre 1*), on a besoin de résoudre le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\kappa^2}\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} - L_0 = -4\pi L^0 \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial L_0}{\partial x} + \kappa L_1 = 0 \end{cases} \tag{508}$$

Et on a l'expression de la luminance en série d'harmoniques sphériques pour la méthode *P1* :

$$L^{'}(x,\theta) = \frac{1}{4\pi}\left(L_0 + 3L_1 \cos\theta\right) \tag{509}$$

Comme décrit dans le chapitre précédent, la condition aux limites générale de Marshak a pour expression :

$$\begin{aligned} &\int_{\omega=0}^{2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega) Y_l^m(\omega) d\omega = \\ &\int_{\omega=0}^{2\pi} \left[\varepsilon_p L_p^0(\boldsymbol{r}) + \rho_{sp} L^{'}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\omega_{inc}=2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega_{inc}) \left|\boldsymbol{n}\cdot\omega_{inc}\right| d\omega_{inc} \right] Y_l^m(\omega) d\omega \end{aligned} \tag{510}$$

avec : $(l = 1,3,5...N)$

Pour simplifier cette condition, le terme $Y_l^m(\cos\theta)$ est remplacé par les cosinus directeurs de la luminance. Donc, pour le cas *1D*, la condition aux limites de Marshak revêt la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\int_{\omega=0}^{2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega) l_i^{2n-1} d\omega = \\ &\int_{\omega=0}^{2\pi} \left[\varepsilon_p L_p^0(\boldsymbol{r}) + \rho_{sp} L^{'}(\boldsymbol{r},\omega) + \frac{\rho_{dp}}{\pi} \int_{\omega_{inc}=2\pi} L_p^{'}(\boldsymbol{r},\omega_{inc}) \left|\boldsymbol{n}\cdot\omega_{inc}\right| d\omega_{inc} \right] l_i^{2n-1} d\omega \end{aligned} \tag{511}$$

$(l = 1,3,5...N)$

Pour la méthode *P1*, en posant $n = 1$ et en substituant le développement de la luminance en série d'harmonique sphérique dans (511), on va obtenir les conditions aux limites suivantes :

La condition limite à gauche : $L_0 + 2L_1 = 4\pi L^0$ (512)

La condition limite à droite : $L_0 - 2L_1 = 4\pi L^0$ (513)

Ces conditions aux limites sont celles utilisées classiquement par [SIEGEL 01] et [RATZEL 81] pour la résolution de l'E.T.R par la méthode *PN*. Cependant, on peut remarquer que l'équation génératrice étant en L_0, il nous paraît naturel pour écrire les conditions aux limites de prendre l'ordre du moment correspond à la variable de l'équation génératrice soit ici $n = 0$. On va appeler cette condition, la condition du *LEMTA*. Donc, en posant $n = 0$ et en substituant le développement de la luminance en série d'harmoniques sphériques dans (511), on va obtenir la condition aux limites de *P1 (LEMTA)* suivante :

La condition limite à gauche : $L_0 + \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (514)

La condition limite à droite : $L_0 - \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (515)

Pour la méthode *P3*, on a besoin de résoudre le système de deux équations différentielles du second ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{3}{35\kappa^2} \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^2} - \frac{6}{7\kappa^2} \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x^2} + L_{11} - \frac{4\pi}{3} L^0 = 0 \\ \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^2 L_{11}}{\partial x^2} - L_0 + 4\pi L^0 = 0 \end{cases} \quad (516)$$

Et on a l'expression de la luminance en série d'harmoniques sphériques pour la méthode *P3* :

$$L^{'}(x,\theta)=\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} L_0+3L_1\cos\theta+\frac{5}{4}(3L_{11}-L_0)(3\cos^2\theta-1) \\ +\frac{7}{4}(5L_{111}-3L_1)(5\cos^3\theta-3\cos\theta) \end{bmatrix} \tag{517}$$

avec :

$$L_1=-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial L_{11}}{\partial x} \tag{518}$$

$$\frac{\partial L_{111}}{\partial x}=-\kappa L_{11}+\frac{4\pi}{3}\kappa L^0 \tag{519}$$

Pour les conditions aux limites, [SIEGEL 01] a choisit les valeurs $n=1$ et $n=3$. Mais, pour les mêmes raisons que précédemment, nous préférons choisir $n=0$ et $n=2$.

Les conditions aux limites classiques et modifiées sont données dans le **Tableau 9**.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures qui suivent.

Sur la **Figure 47**, on présente l'influence de la température au paramètre d'interaction conduction-rayonnement N_{pl} en utilisant les méthodes *P1 (LEMTA)* et *P3 (LEMTA)* pour une valeur de $\tau_0=1$.

Condition aux limites	Pour la paroi gauche	Pour la paroi droite
[SIEGEL 01] $(n=1;3)$	$L_0=-4L_1+4L_{111}+4\pi L^0$	$L_0=4L_1-4L_{111}+4\pi L^0$
	$L_{11}=-\frac{4}{5}L_{111}-\frac{4}{15}L_1+\frac{4}{3}\pi L^0$	$L_{11}=\frac{4}{5}L_{111}+\frac{4}{15}L_1+\frac{4}{3}\pi L^0$
LEMTA $(n=0;2)$	$L_0=-\frac{45}{16}L_1+\frac{35}{16}L_{111}+4\pi L^0$	$L_0=\frac{45}{16}L_1-\frac{35}{16}L_{111}+4\pi L^0$
	$L_{11}=-\frac{35}{18}L_{111}-\frac{5}{16}L_1+\frac{4}{3}\pi L^0$	$L_{11}=\frac{35}{48}L_{111}+\frac{5}{16}L_1+\frac{4}{3}\pi L^0$

Tableau 9 : *Différentes écritures des conditions aux limites (SIEGEL et LEMTA)*

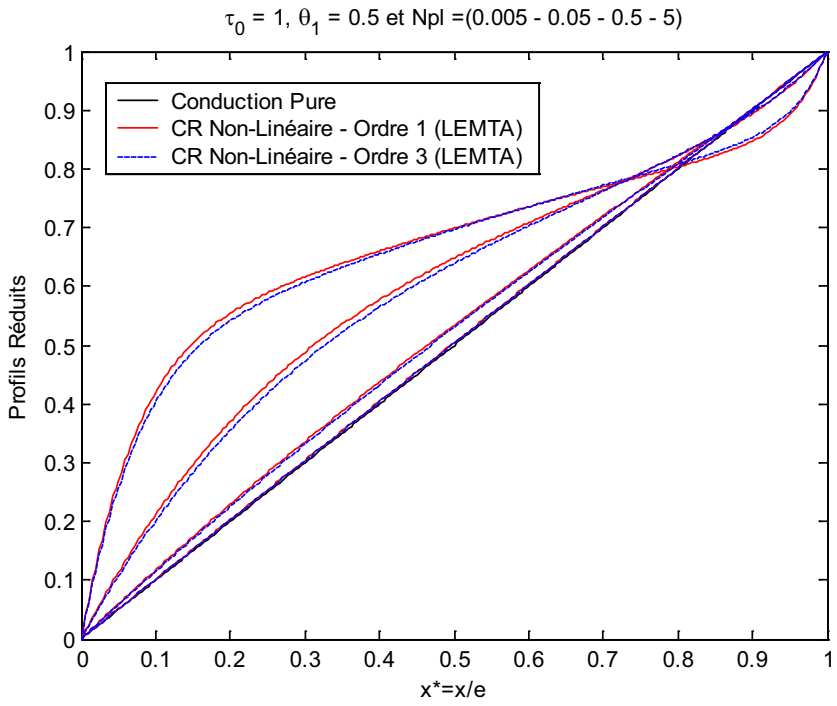


Figure 47 : *Influence du paramètre d'interaction conduction- rayonnement (Nombre de Planck Npl) sur la distribution de la température du matériau*

On peut remarquer qu'il y a en fait peu de différences entre les modèles *P1* et *P3*. Comme la solution s'exprime sous le forme d'une série d'harmoniques sphériques, cela signifie que l'erreur entre la méthode *P3* et les méthodes d'ordre plus élevés sont donc plus faibles que l'erreur entre *P1* et *P3*. On peut constater que cette erreur diminue lorsque *Npl* augmente car la part du transfert radiatif est alors plus faible.

Sur la **Figure 48**, on compare la méthode *P1 (LEMTA), P3 (LEMTA)* et la méthode fine (résultats obtenus par la méthode explicite directe). On constate que le gain de précision apporté par la méthode *P3* n'est pas forcément justifié comparée à la difficulté de mise en œuvre, en particulier en 3D (7 équations couplées au lieu d'une seule équation).

Sur la **Figure 49**, on présente la distribution de température en fonction du paramètre d'interaction *Npl* obtenue à partir des méthodes *P1 (LEMTA)*, *P1 (SIEGEL)*, fine (ou exacte) et Rosseland. On constate que la méthode *P1 (LEMTA)* est plus proche de la solution fine que celle de SIEGEL. On remarque que le modèle de Rosseland (courbes en vert) est très loin de la solution fine.

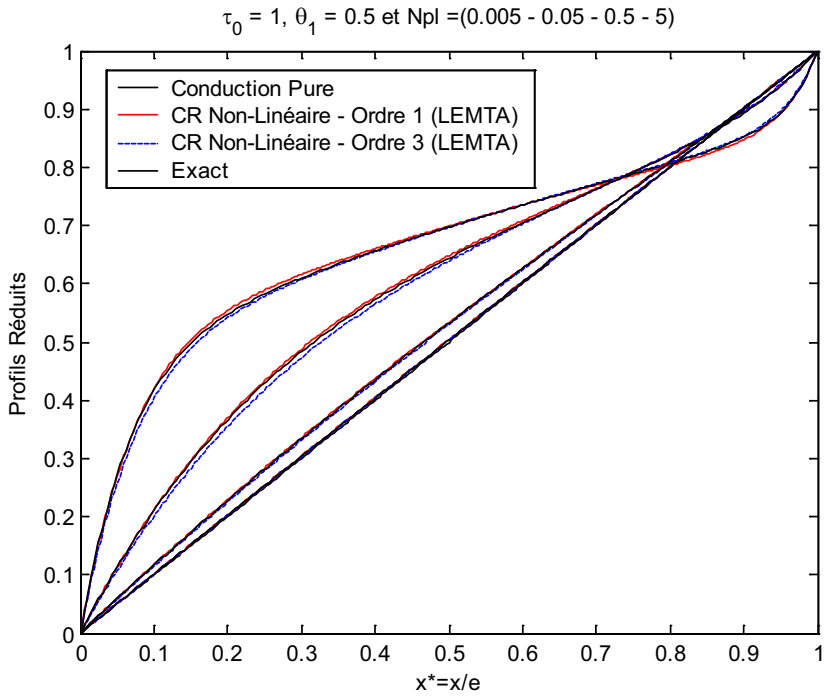


Figure 48 : Distribution de la température en fonction du paramètre d'interaction de conduction-rayonnement par les méthodes *P1 (LEMTA), P3 (LEMTA)* et fine (exacte).

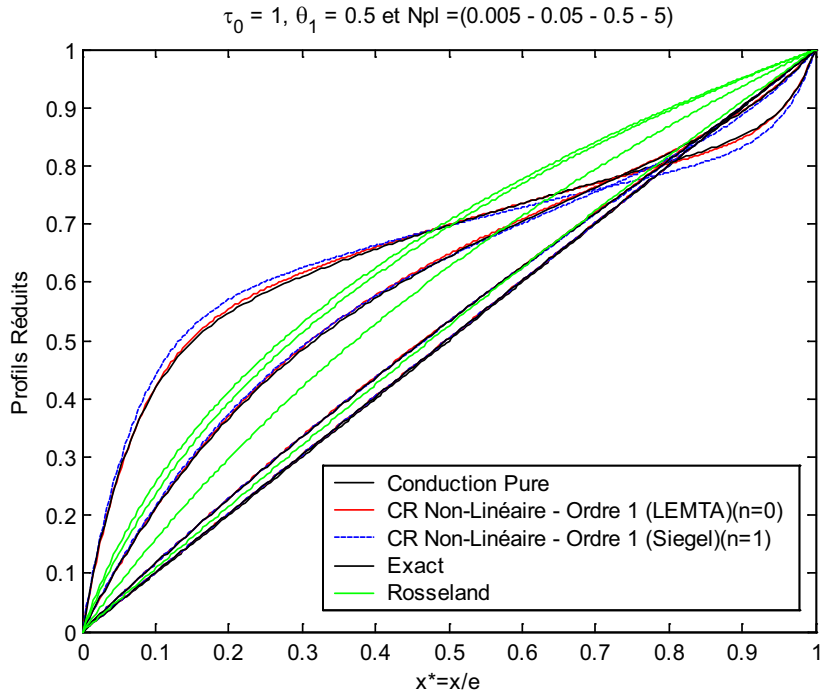


Figure 49 : Comparaison entre les méthodes *P1 (LEMTA)*, *P1 (SIEGEL)*, fine (exacte) et Rosseland

Une autre modification importante de la méthode *PN* est de prendre en compte la modèle de « Lick » qui consiste à remplacer le coefficient d'absorption k par un coefficient effectif $k' = \frac{3}{2}k$ au lieu de $k' = \sqrt{3}.k$. Cette modification permet au modèle *P1* modifié LEMTA d'être meilleur que le modèle *P3* classique (voir **Figure 48** et **Figure 50**).

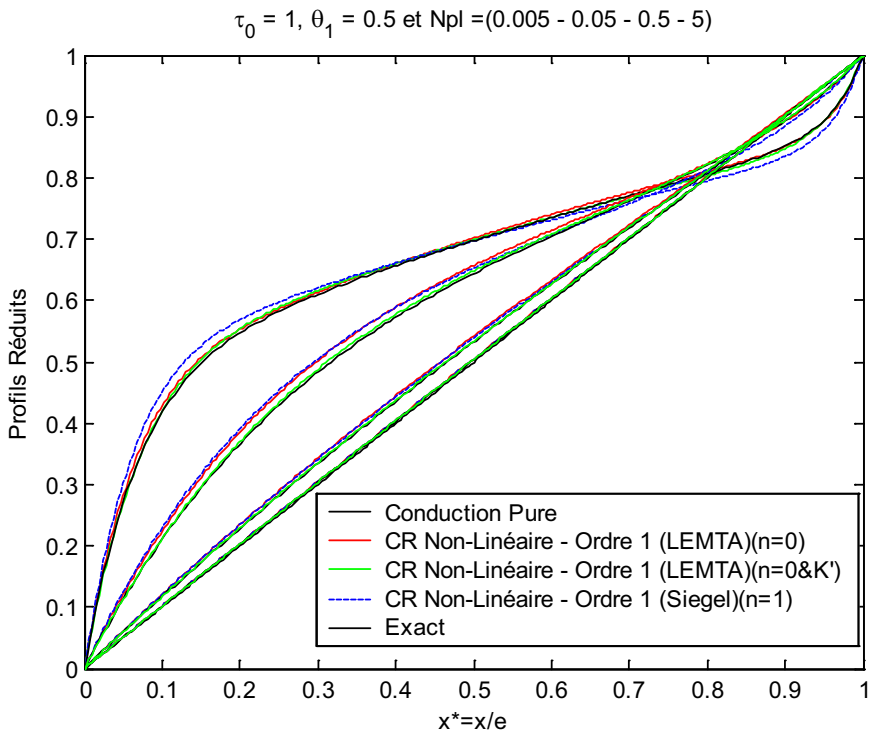


Figure 50 : Comparaison entre la méthode *P1 (LEMTA)* $(n=0)$ et celle de *SIEGEL* $(n=1)$

La **Figure 51** présente les résultats obtenus en fonction de l'épaisseur optique $\tau_0 = \kappa e$. La courbe noire correspond au cas conduction pure, les courbes rouges au cas non-linéaire et les courbes bleues au cas linéaire (faibles gradients de température). Ces résultats sont conformes à ceux de la **Figure 52** qui présente les profils de température en fonction de l'épaisseur optique obtenus par ([SIEGEL 01]) et notre modèle explicite directe (méthode fine).

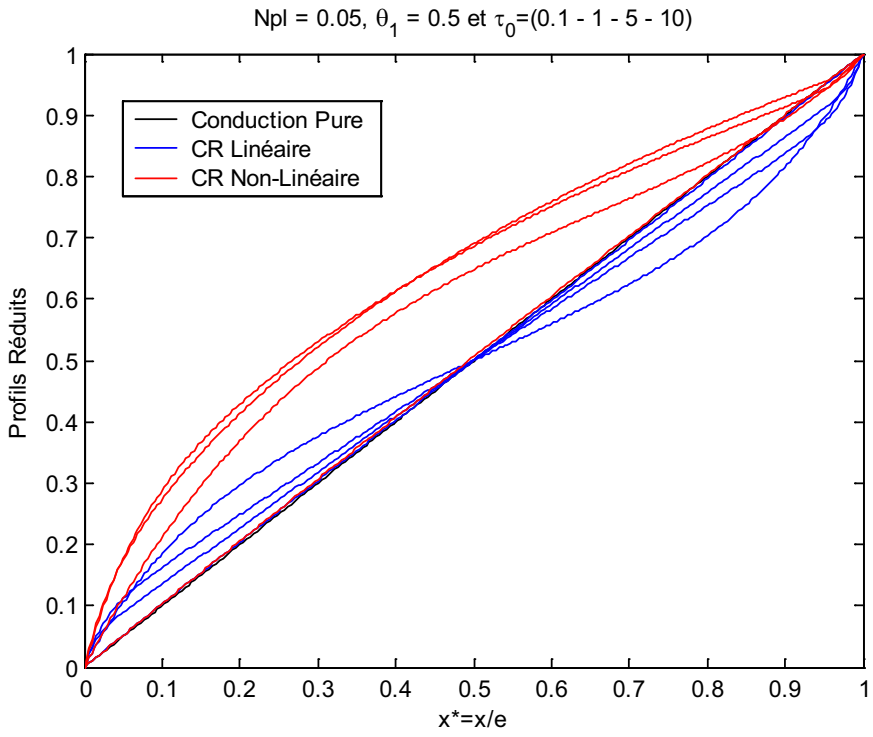


Figure 51 : *Influence de la température par rapport à l'épaisseur optique*

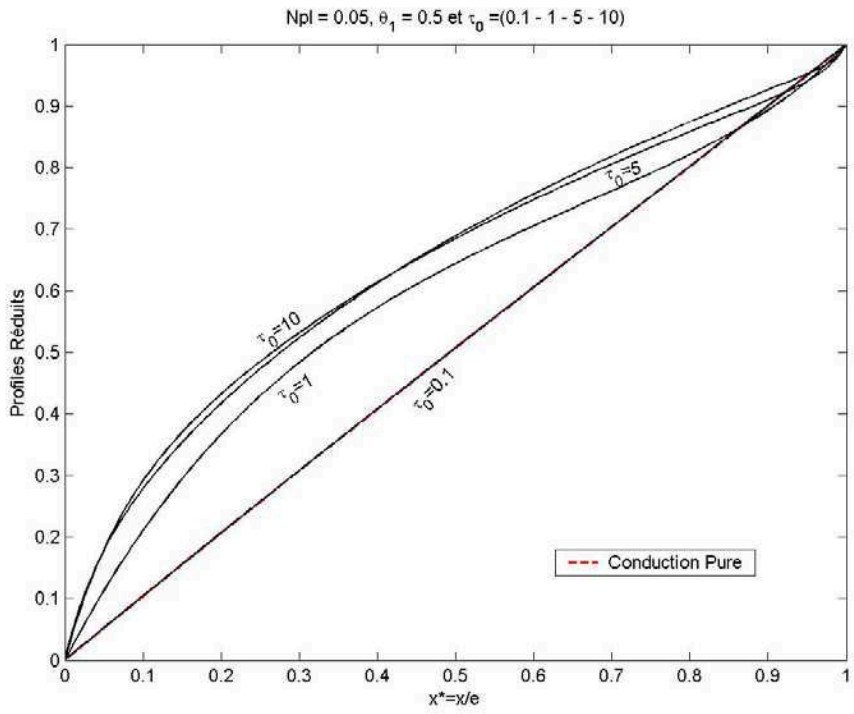


Figure 52 : *Profils de température en fonction de l'épaisseur optique donnés par la littérature ([SIEGEL 01])*

La **Figure 53** compare la méthode *P1 modifiée (LEMTA)* $(n=0)$, celle de Siegel$(n=1)$ la méthode fine (exacte) et la méthode de Rosseland en tenant compte du changement de la coefficient d'absorption du matériau : $\kappa' = \frac{3}{2}\kappa$ au lieu de $\kappa' = \sqrt{3}\kappa$. La courbe rouge correspondant à la méthode *P1 modifiée (LEMTA)* est plus proche de la courbe noire (méthode fine) que la courbe bleue de la méthode P1 classique *(SIEGEL)*.

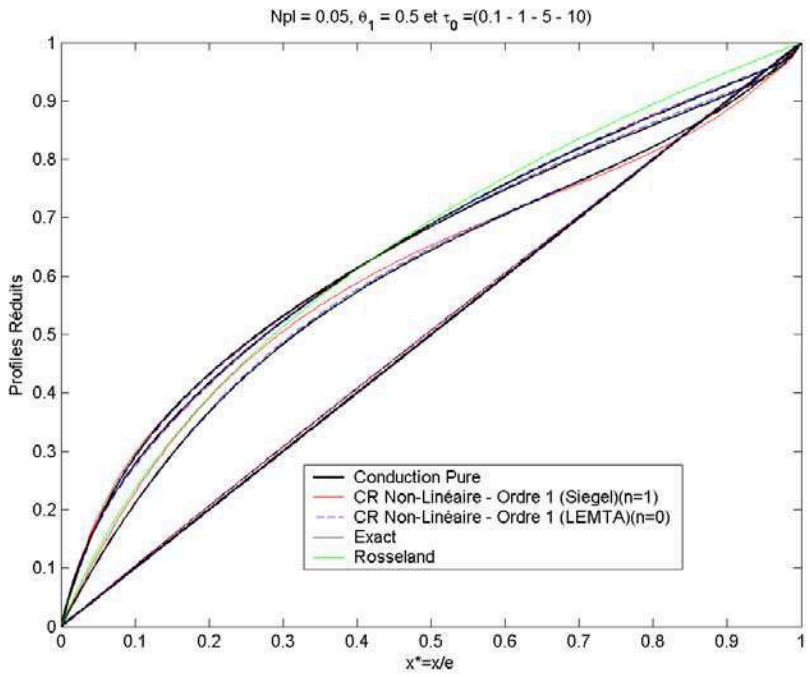


Figure 53 : Distribution de la température en fonction de l'épaisseur optique modélisée par la méthode *P1 modifiée (LEMTA)*, celle de SIEGEL et la méthode fine (exacte) en tenant compte du changement du coefficient d'absorption $\kappa' = \frac{3}{2}\kappa$.

Enfin, sur la **Figure 54**, on calcule le champ de la température en fonction de l'épaisseur optique par les méthodes *P1 modifiée (LEMTA)*, *P3 modifiée (LEMTA)* et fine (exacte).

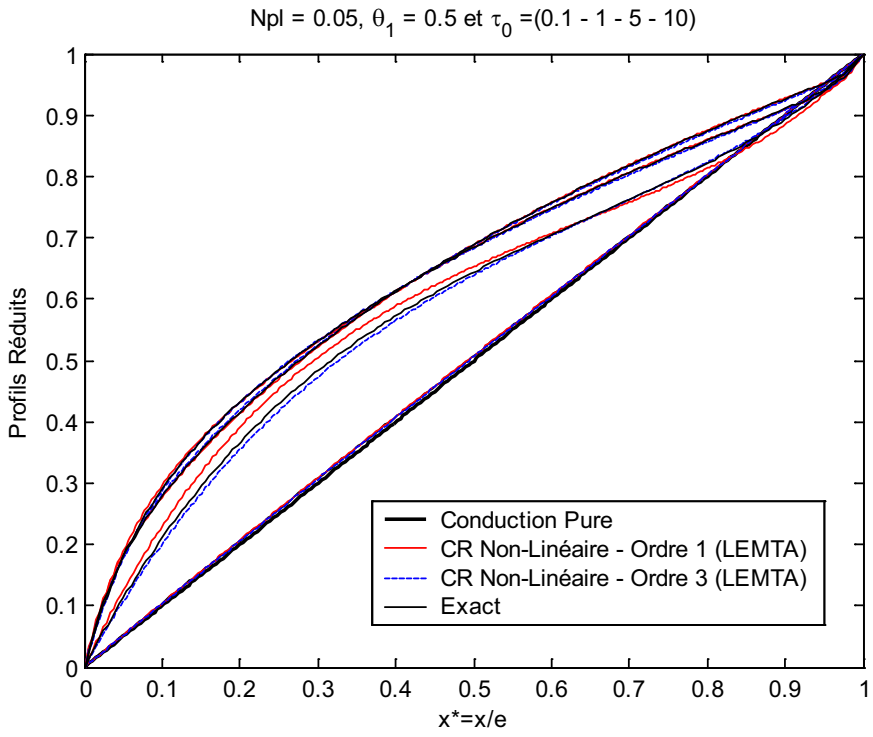


Figure 54 : *Comparaison entre la méthode P1 modifiée (LEMTA), P3 modifiée (LEMTA) et méthode fine (exacte)*

Tous les cas précédents ont été traités avec un maillage de 80 cellules. Le temps CPU nécessaire pour obtenir un profil de température sur un ordinateur personnel de type Pentium IV - 3 GHz est de 1s environ (l'erreur relative sur la température étant fixée à 10^{-3}).

Les différents résultats ont été obtenus sans aucun problème particulier, même pour de fortes épaisseurs optiques pour lesquelles les méthodes classiques requièrent des maillages plus fins et des temps de calcul plus importants.

1.2. Résolution du couplage conducto-radiatif par la méthode *PN* dans le cas 1D transitoire

Dans cette partie, on va présenter la résolution du couplage conducto-radiatif par la méthode *P1 modifiée (LEMTA)* dans le cas 1D en régime transitoire. On considère le cas de la méthode Flash (les caractéristiques du matériau sont données dans le **Tableau 10**) et le cas d'un mur initialement à une température T_1 et soumis à une élévation brutale de sa température en face arrière (température T_2). Pour ce cas, les données sont dans le **Tableau 8**.

Epaisseur d'échantillon (e) (m)	$2.10^{-3}(m)$
Conductivité thermique (λ) (W/m°C)	$1.0(W/m^0C)$
ρC_P	$2.10^{-6}(J/m^{3\,0}C)$
Température initiale $(T_1 = T_{réf})$	$800(K)$
Température finale (T_2)	$801(K)$ou $810(K)$
Emissivité de la paroi 1 (ε_1)	1
Emissivité de la paroi 2 (ε_2)	1
Absorptivité de milieu (κ)	$\kappa = \tau_0 / e$
Epaisseur optique (τ_0)	0.05 - 0.75 - 4

Tableau 10 : *Caractéristique du matériau (cas de la méthode Flash)*

Les résultats de ces deux cas sont donnés sur la **Figure 55** et **Figure 57**. Dans les deux cas, le maillage est composé de 80 cellules et de 4000 points en temps. La simulation est arrêtée lorsque le régime permanent est atteint. L'erreur relative maximale sur la température est fixée à 10^{-3}.

Sur la **Figure 55** sont données les variations de température en face arrière (ou thermogrammes) obtenus pour un milieu semi-transparent avec des frontières opaques et émissives (peinture noire) dans le cas de la méthode « Flash ». Les différentes épaisseurs optiques considérées sont : $\tau_0 = (0.05 - 0.75 - 4)$. La méthode « Flash » est une méthode couramment utilisée pour la mesure de la diffusivité thermique de matériau [PARKER 61, DEGIOVANNI 88 et BALAGEAS 94]. Elle consiste à stimuler un matériau plan, initialement à une température de référence $T_{réf}$ par une excitation de type Dirac en face avant et à observer ensuite la réponse en température induite par cette excitation en face arrière de l'échantillon. La mesure du temps de demi-montée $t_{1/2}$ du thermogramme face-arrière, qui dépend de la nature du matériau, permet de remonter à l'aide d'un modèle adapté à la diffusivité thermique du matériau. Dans le cas d'un matériau opaque bon conducteur (sans pertes), une relation simple relie la diffusivité thermique au temps $t_{1/2}$: $t_{1/2}^{\ *} = at_{1/2} / e^2 = 0.139$ (modèle de Parker).

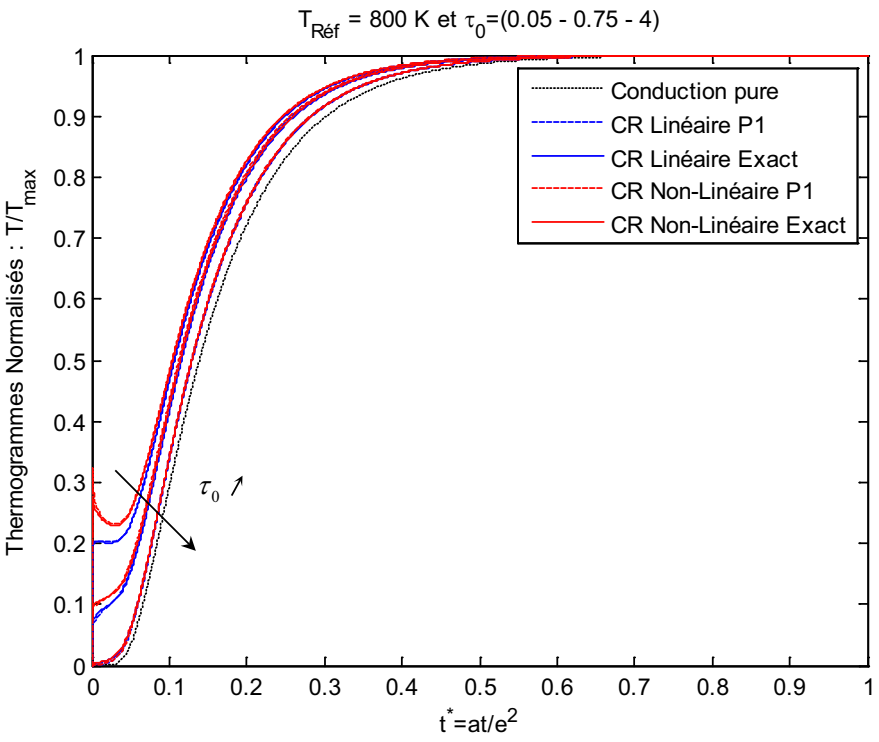


Figure 55 : *Variations de la température en face arrière en fonction de l'épaisseur optique (Méthode Flash)*

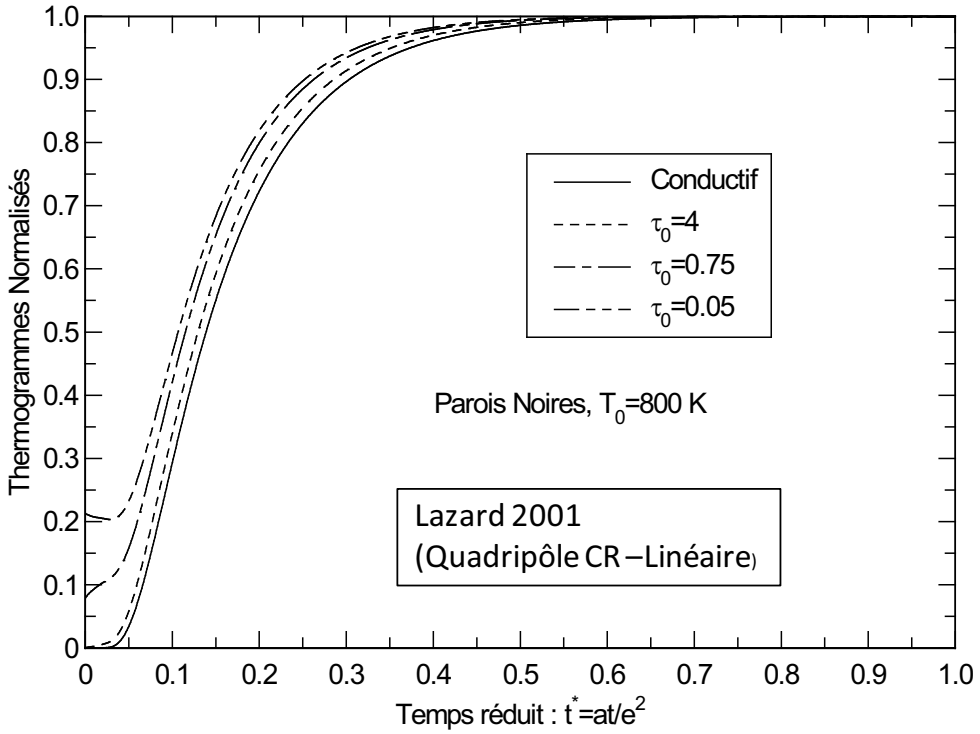


Figure 56 : *Variations de la température en face arrière en fonction de l'épaisseur optique obtenues par quadripôle conducto-radiatif (modèle linéaire)*

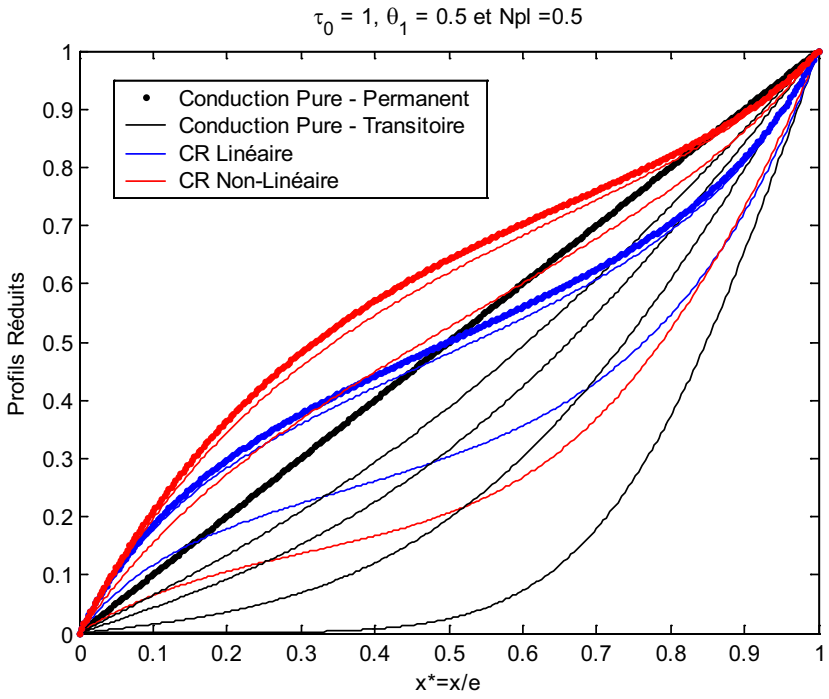


Figure 57 : *Distribution de la température en tenant compte du couplage conducto-radiatif dans le cas 1D en régime transitoire par la méthode P1 modifiée (LEMTA)*

La température initiale du matériau Verre est fixée à $T_1 = T_{réf} = 800K$. L'énergie déposée permet d'élever la température du milieu soit de 1°C degré $(T_2 = 801K)$ dans le cas linéaire ou de 10°C dans le cas non linéaire $(T_2 = 810K)$.

Les résultats obtenus dans le cas non-linéaire sont en rouge et dans le cas linéaire en bleu. Les différences entre le modèle fin et le modèle P1 approché sont très faibles. Ces résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par [ANDRE 95], [REMY 98] et [LAZARD 01] avec un modèle quadripôle conducto-radiatif linéaire (Voir également la **Figure 56**). Le thermogramme le plus lent correspond au cas conductif pur (courbe noire). Inversement, en présence de rayonnement, les thermogrammes sont plus rapides. On observe un « saut » de température aux temps courts de plus en plus important pour de faibles épaisseurs optiques. Ces « sauts » de température s'expliquent par un transfert direct d'énergie par photons (transfert radiatif) entre les faces avant et arrière du matériau. La température diminue ensuite (présence d'un minimum) due au refroidissement de la face arrière avec la partie interne du matériau encore froide (l'absorption en volume est faible pour un matériau à faible épaisseur optique). Enfin, le flux de chaleur conductif atteint la face arrière. Sa température augmente de nouveau jusqu'à atteindre sa température adiabatique.

Sur la **Figure 57**, on présente l'évolution temporelle du profil de température dans un matériau semi-transparent, initialement à l'équilibre de température avec l'environnement et soumis brutalement à un gradient de température. Ce cas transitoire correspond au cas stationnaire présenté dans la première partie de ce chapitre dans le cas $\tau_0 = 1$ et $N_{pl} = 0.5$. Les profils en « noir » correspondent aux profils dans le cas conductif pur et les profils en « bleu » et « rouge » les profils conducto-radiatif dans les cas linéaire et non-linéaire.

Dans les deux cas transitoires, les temps de calcul sont de l'ordre de la seconde pour obtenir un thermogramme que ce soit dans le cas conductif pur ou conducto-radiatif.

1.3. Résolution du couplage conducto-radiatif dans le cas 2D en régime permanent

On considère un milieu semi-transparent gris, absorbant et émettant comme décrit sur la **Figure 58**. Les parois sont opaques avec des émissions et réflexions diffuses. Les propriétés conductives et radiatives (verre solide) sont données dans le **Tableau 11**.

Largeur d'échantillon (e) (m)	$1.0(m)$
Conductivité thermique (λ) (W/m°C)	$1.0(W/m^0C)$
ρC_P	$2.10^{-6}(J/m^{3\,0}C)$
Température de la paroi 1 (T_1)	$400(K)$
Température de la paroi 2 (T_2)	$800(K)$
Emissivité de la paroi 1 (ε_1)	1.0
Emissivité de la paroi 2 (ε_2)	1.0
Infraction du milieu (n)	1.0
Absorptivité de milieu (κ)	$\kappa = \tau_0 / e$
Epaisseur optique (τ_0)	1.0
N_{pl}	$0.005 - 0.05 - 0.5$

Tableau 11 : *Caractéristique du matériau*

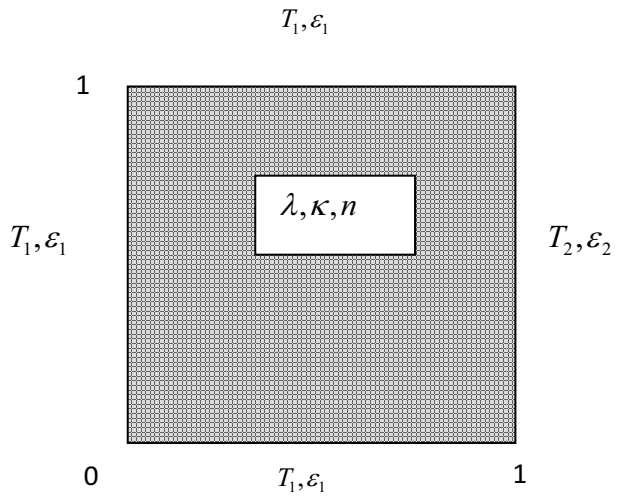


Figure 58 : *Configuration du cas étudié en 2D*

En appliquant la méthode *P1 modifiée (LEMTA)*, on obtient le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3\kappa'^2}\left(\dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_1^{\,2}} + \dfrac{\partial^2 L_0}{\partial x_3^{\,2}}\right) + L_0 - 4\pi L^0 = 0 \\ L_1 = -\dfrac{1}{3\kappa'}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_1} \\ L_3 = -\dfrac{1}{3\kappa'}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_3} \end{cases} \tag{520}$$

Avec : $\kappa' = \dfrac{3/2}{\sqrt{3}}\kappa$ (521)

On a l'expression de la luminance dans le milieu :

$$L'(x_1, x_3, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\left(L_0 + 3L_1 \cos\theta + 3L_3 \sin\theta \sin\varphi\right) \tag{522}$$

Pour résoudre ce problème, on a besoin des conditions aux limites suivantes - *P1 (LEMTA)* :

La condition limite à gauche : $L_0 + \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (523)

La condition limite à droite : $L_0 - \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (524)

La condition pour la paroi inférieure : $L_0 + \frac{3}{2} L_3 = 4\pi L^0$ (525)

La condition pour la paroi supérieure : $L_0 - \frac{3}{2} L_3 = 4\pi L^0$ (526)

Les isothermes obtenues dans les cas conductif pur et conducto-radiatif sont données respectivement sur la **Figure 59** et **Figure 60**. On remarque alors qu'en présence de rayonnement, les gradients de température dans le milieu diminuent.

Pour valider ces résultats, nous avons comparé les résultats donnés par la méthode *P1* avec la solution donnée par la méthode explicite directe. Le champ de température obtenu dans le cas $\tau_0 = 1$ et $Npl = 0.05$ est donné sur la **Figure 63**. Qualitativement, les résultats sont assez proches. Pour une comparaison plus fine, nous avons tracé les profils de température au centre de la cellule en $y^* = 0.5$ (là où on s'attend à observer les écarts les plus grands), obtenus par différentes méthodes : explicite directe, *P1* Siegel et *P1 LEMTA* (**Figure 64**). Les résultats les plus proches de la solution exacte sont donnés pas le la méthode *P1 LEMTA*. Il faut remarquer que les profils ne sont pas parfaitement superposés. Ceci peut s'expliquer parce que la méthode *P1 LEMTA* qui utilise l'approximation de *Lick*, n'est valable rigoureusement que dans le cas 1D. Pour améliorer ces résultat, il faudrait donc proposer des approximations plus adaptées dans les cas 2D et 3D.

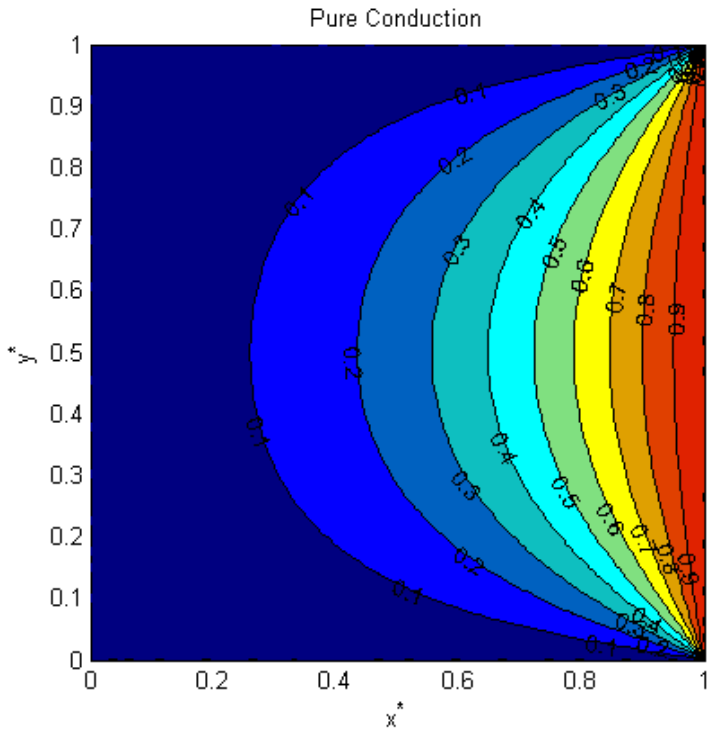


Figure 59 : *Champ de la température dans le cas 2D en régime permanent* (*conduction pure)*

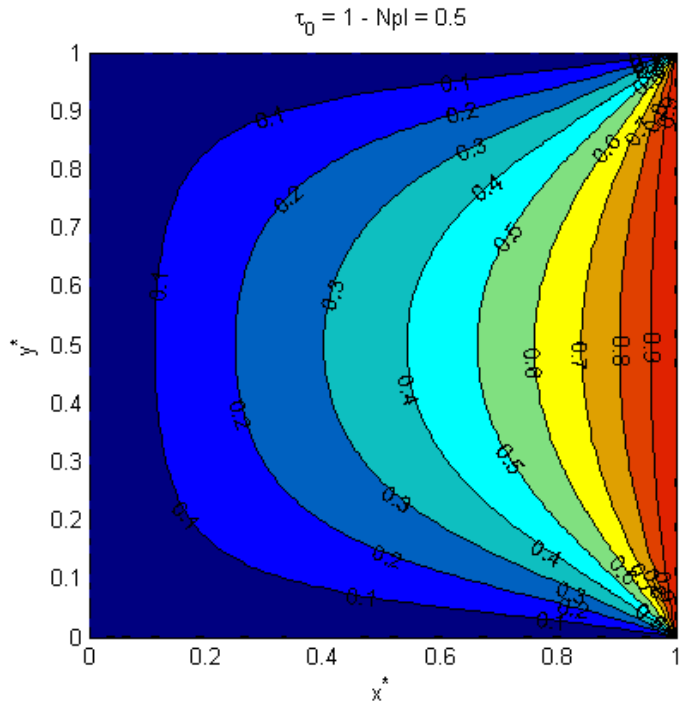


Figure 60 : *Couplage conducto-radiatif par la méthode P1 modifiée (LEMTA)*

avec : $\tau_0 = 1 \,\&\, N_{pl} = 0.5$

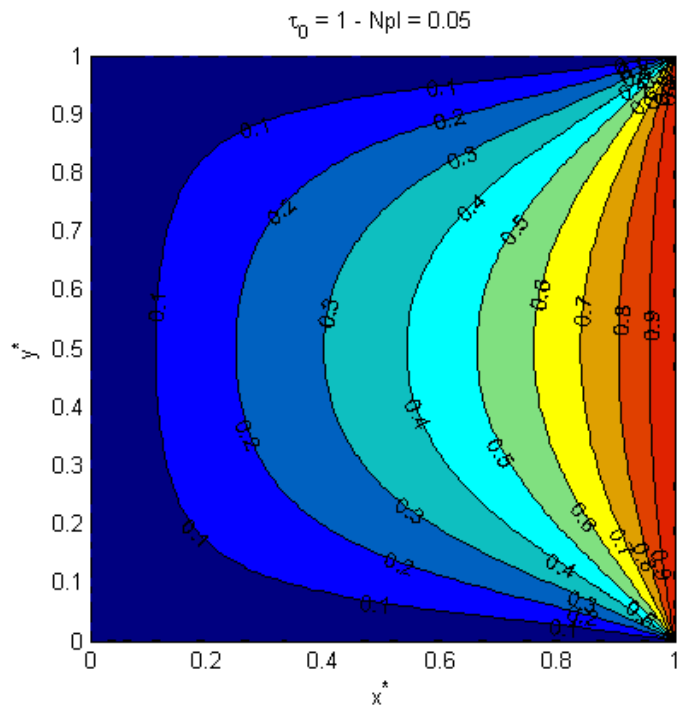


Figure 61 : *Couplage conducto-radiatif par la méthode P1 modifiée (LEMTA)*

avec : $\tau_0 = 1$ & $N_{pl} = 0.05$

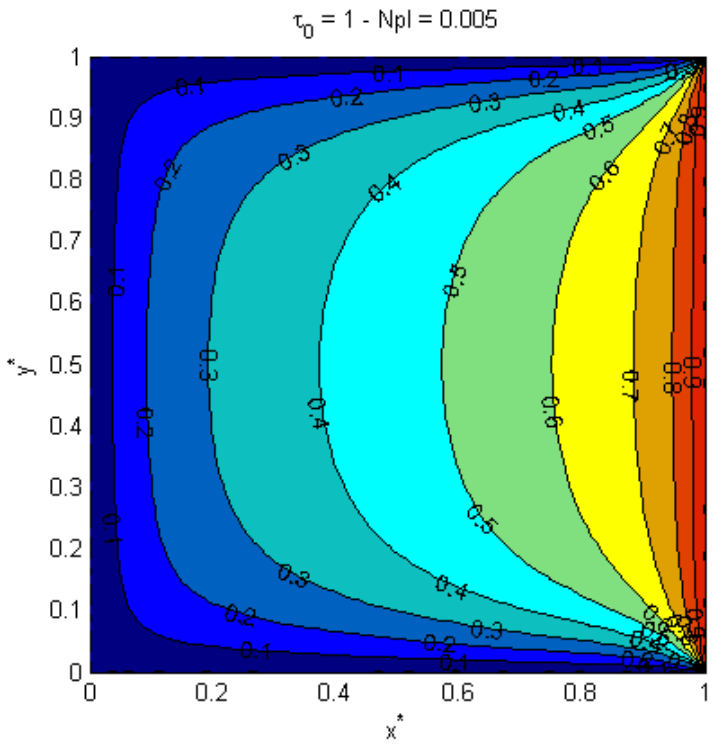


Figure 62 : *Couplage conducto-radiatif par la méthode P1 modifiée (LEMTA)*

avec : $\tau_0 = 1$ & $N_{pl} = 0.005$

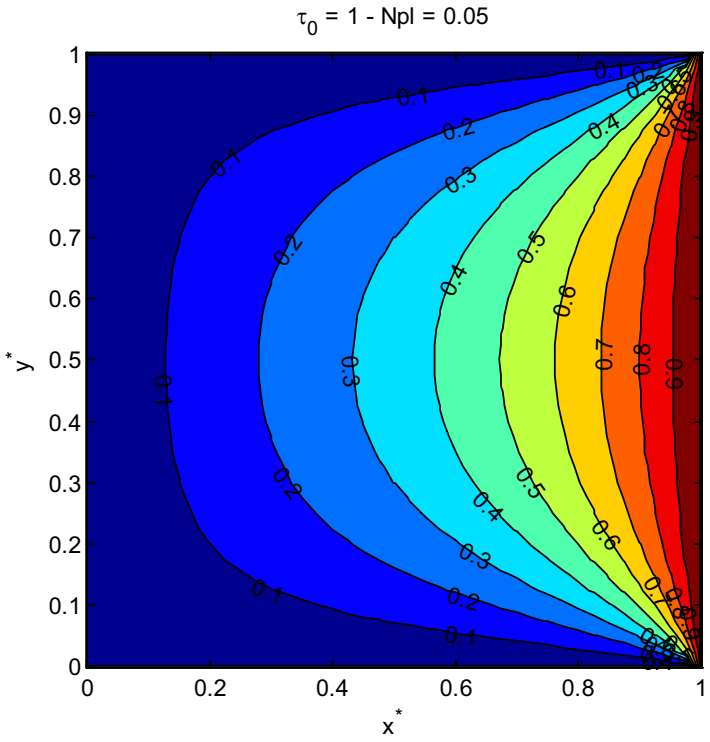


Figure 63 : *Solution obtenue par la méthode explicite directe (maillage : 1600 cellules)*

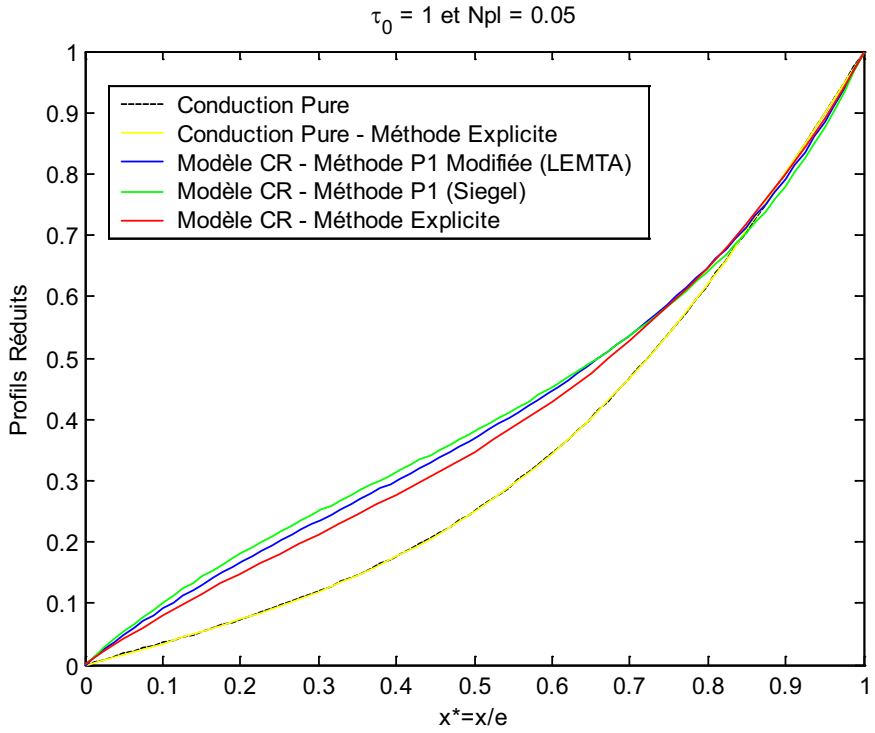


Figure 64 : *Comparaison entre la méthode P1 modifiée (LEMTA) et la méthode explicite (Profils de température au centre de la cellule en* $y^* = 0.5$*)*

2. Application du modèle radiatif dans des cas complexes

2.1. Résolution d'un problème de « Convection Naturelle » avec couplage des trois modes de transfert (conduction, convection et rayonnement) par la méthode *P1 modifiée (LEMTA)*

Dans cette partie, on va aborder la résolution d'un problème de couplage conducto-convecto-radiatif par la méthode *P1 modifiée (LEMTA)*. La configuration étudiée est présentée sur la **Figure 65**. Les caractéristiques du milieu qui correspond ici à un matériau semi-transparent gris absorbant émettant sont données dans le **Tableau 12**.

Le but de cette partie est de montrer qu'il est possible de traiter de façon efficace un problème de convection naturelle en présence de rayonnement. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème classique de la cavité chauffée différentiellement en prenant en compte le transfert radiatif. Il s'agit d'un cas intéressant pour tester le couplage des équations de Navier-Stokes, de la chaleur et du transfert radiatif.

Pour la résolution des équations de Navier-Stokes, nous avons fais l'hypothèse de Boussinesq : densité ρ suppose constante dans toutes les équations sauf pour Navier-Stokes où $\rho(T) = \rho_2(1 - \beta(T - T_2))$.

La cavité carrée est soumise à un gradient de température de 50K et la température de référence est fixée à une température $T_2 = 1500K$ (Verre liquide). Du fait de la variation de densité avec la température, une boucle de convection prend naissance dans la cellule.

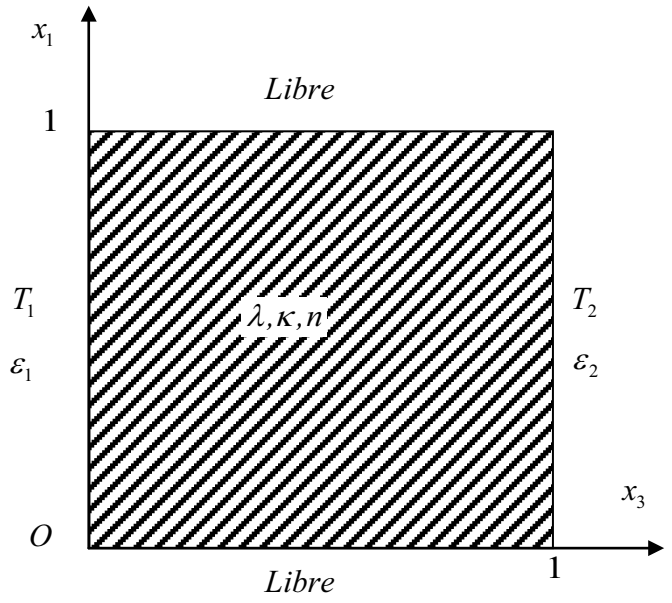


Figure 65 : *Configuration étudiée*

Température (T_1)	1450 K
Température (T_2)	1500 K
Densité (ρ)	2000 Kg/m^3
Capacité calorifique (C_p)	1000 J/Kg.K
Conductivité thermique (k)	1 W/m K
Diffusivité thermique (a)	5.10^{-7} m²/s
Viscosité dynamique (μ)	20 Pa.s
Viscosité cinématique ($\nu = \mu / \rho$)	0,01 m²/s
Indice de réfraction (n)	1,4
Coefficient d'absoprtion (κ)	7,5 m^{-1}
Coefficient de dilatation (β)	2,3 10^{-4} K^{-1}
Epaisseur (e)	0,13 m
Epaisseur optique ($\tau_0 = \kappa e$)	1
Nombre de Planck $N_{pl} = \dfrac{k.\kappa}{4n^2 \sigma T_2^3}$	0,005

$$Ra = \frac{g\beta \Delta T e^3}{a.\nu} = 5.10^4 \ \textbf{et} \ \Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{\nu}{a} = 2.10^4$$

Tableau 12 : *Caractéristique du fluide*

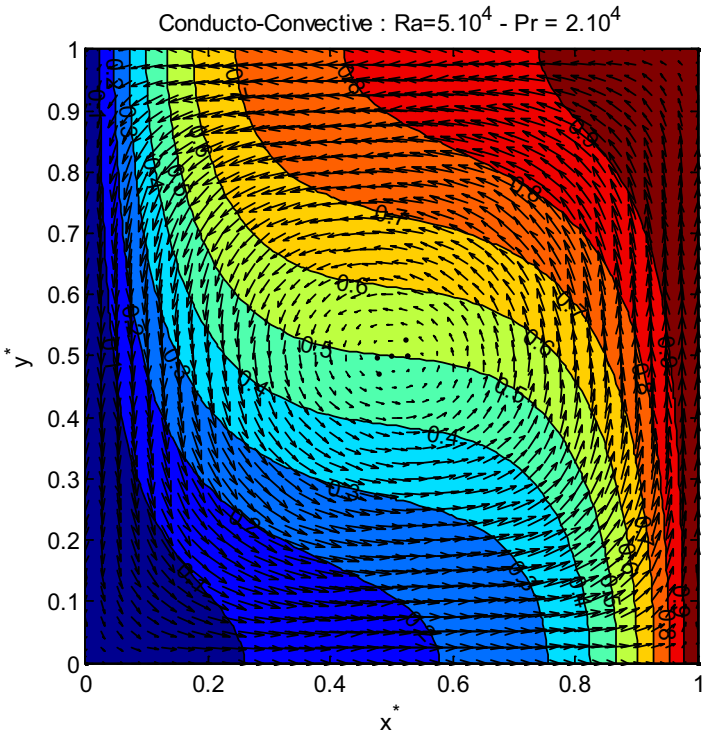


Figure 66 : *Solution stationnaire (conduction + convection)*

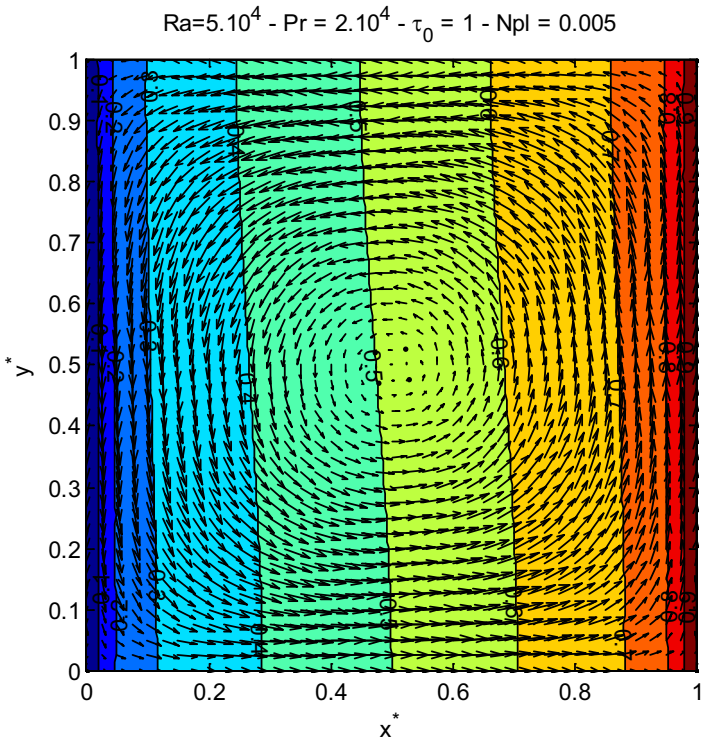


Figure 67 : *Solution stationnaire (conduction + convection + rayonnement)*

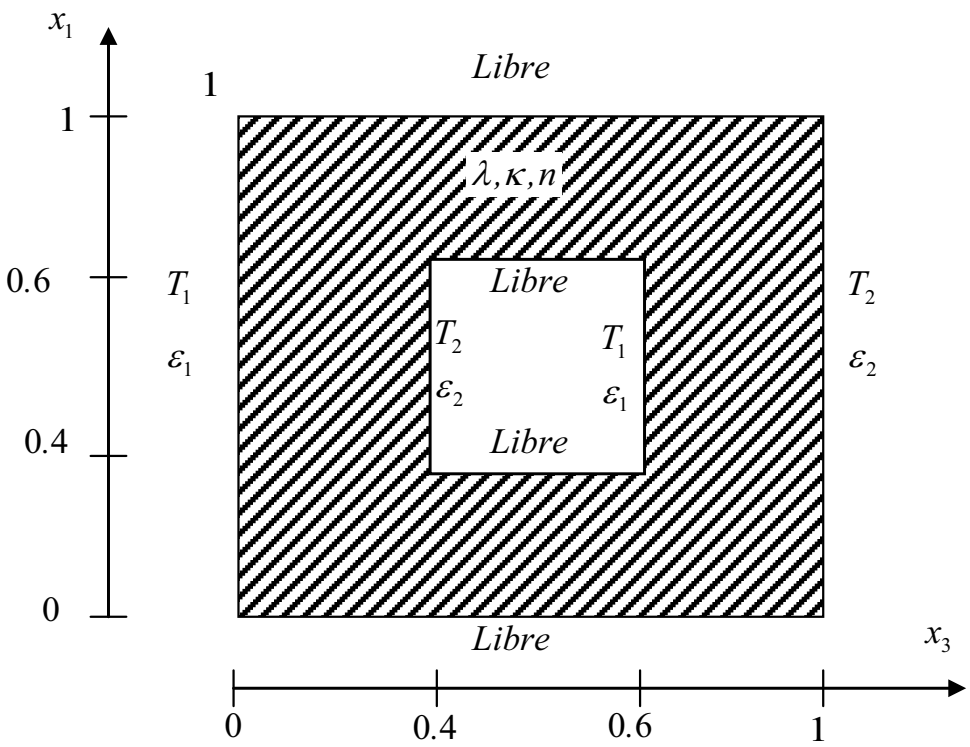
Les équations ont été résolues en régimes permanent et transitoire. Les isothermes et champs de vitesse obtenus en régime permanent sont donnés sur la **Figure 66** pour le cas conducto-convectif et sur la **Figure 67** pour le cas conducto-convecto-radiatif.

La grille est constituée de 484 cellules. En régime permanent, le temps CPU pour résoudre le problème conducto-convectif est de 8s et de 14s avec prise en compte du rayonnement lorsque le champ de température est initialisé à une température uniforme T_1 et un champ de vitesse nulle. Ces temps chutent respectivement à 2s et 4s si on utilise des champs de température et de vitesse déjà convergés pour d'autres valeur de Ra et Pr. En régime transitoire (100 points en temps), la solution est obtenue en 184s dans le cas conducto-convectif et 189s avec prise en compte du rayonnement. L'erreur limite sur la température étant fixée à 10^{-3}.

On remarque qu'en présence de rayonnement, la vitesse de la boucle convective diminue. En effet, comme nous l'avons fait remarquer dans le cas traité précédemment, le rayonnement a pour effet de réduire les gradients de température dans le milieu. Ainsi, la force motrice qui dépend des gradients de densité du fluide, proportionnels au gradient de température diminue, la vitesse de l'écoulement également.

2.2. Résolution d'un problème de convection naturelle conducto-convecto-radiatif dans une cavité avec obstacle par la méthode P1 modifiée (LEMTA).

Dans cette partie, nous considérons le même cas 2D que celui traité dans la section précédente (un liquide semi-tansparent gris absorbant-émettant avec des parois à émission et réflexions diffuses) mais avec des géométries plus complexes. Pour montrer la faculté de notre modèle à s'adapter à des géométries quelconques, nous considérerons deux géométries avec un obstacle interne et des frontières avec des formes plus ou moins complexes. Les propriétés du fluide sont les mêmes que celles données dans le **Tableau 12**. Du point de vue des aspects conductif et radiatif, ce cas n'est pas vraiment plus compliqué que le précédent mais il est en fait généralement difficile pour l'aspect radiatif puisque compte-tenu des interactions à grande distance du rayonnement, la température en un point du milieu est influencé directement ou indirectement par toutes les autres températures. La difficulté est d'autant plus grande en présence de frontières cachées et de parois internes comme celles considérées sur la **Figure 68**.



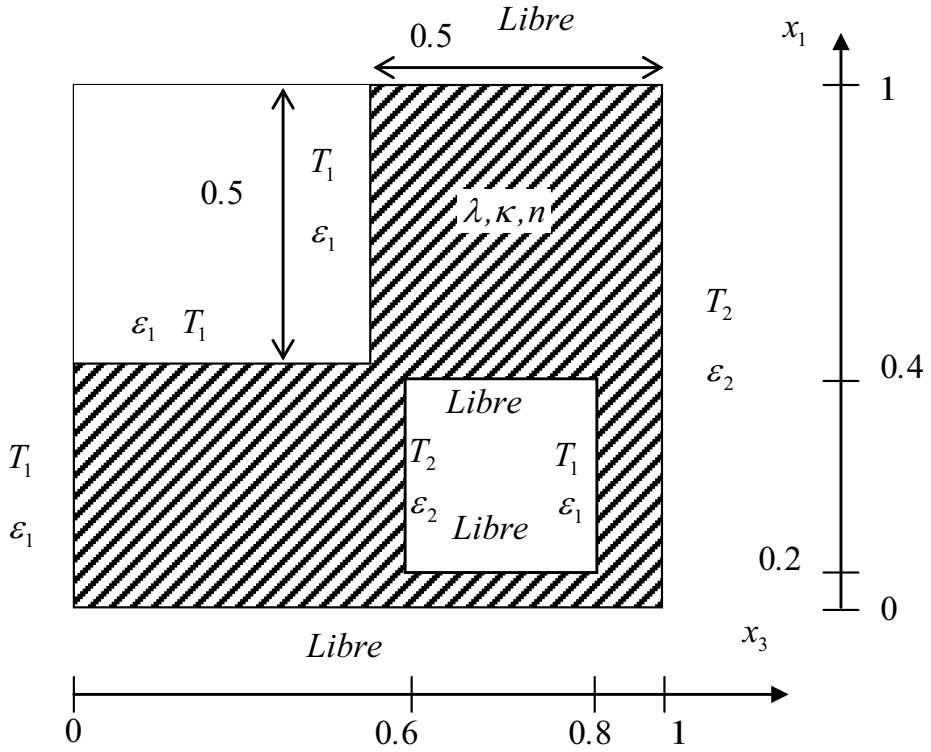


Figure 68 : *Cas de la cavité carrée et en forme de « L » avec présence d'un obstacle*

$Ra = 5.10^4$, $\Pr = 2.10^4$

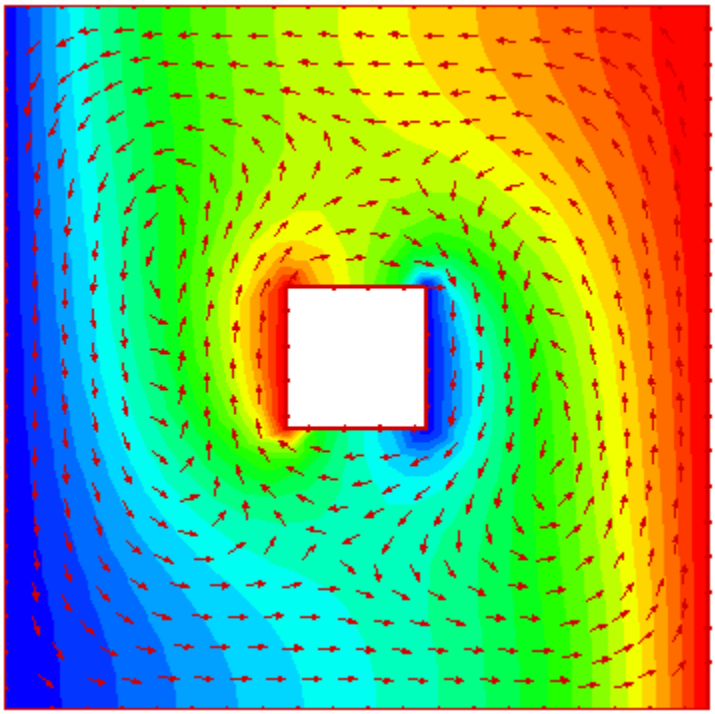


Figure 69 : *Champs de température et de vitesse (cas conducto-convectif)*

$Ra = 5.10^4$ **,** $\Pr = 2.10^4$ **,** $\tau_0 = 1$ **et** $N_{Pl} = 0.005$

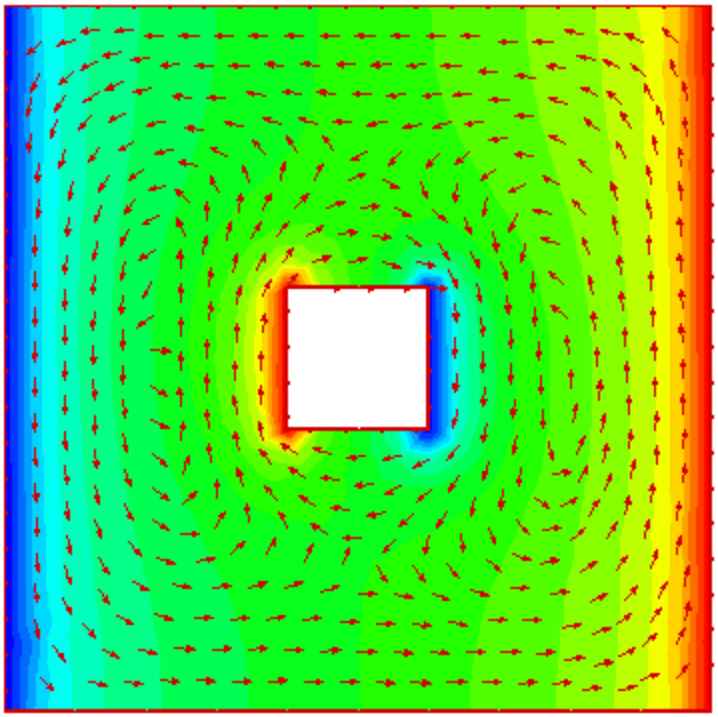


Figure 70 : *Champs de température et de vitesse (cas conducto-convecto-radiatif)*

$Ra = 5.10^4$, $\Pr = 2.10^4$

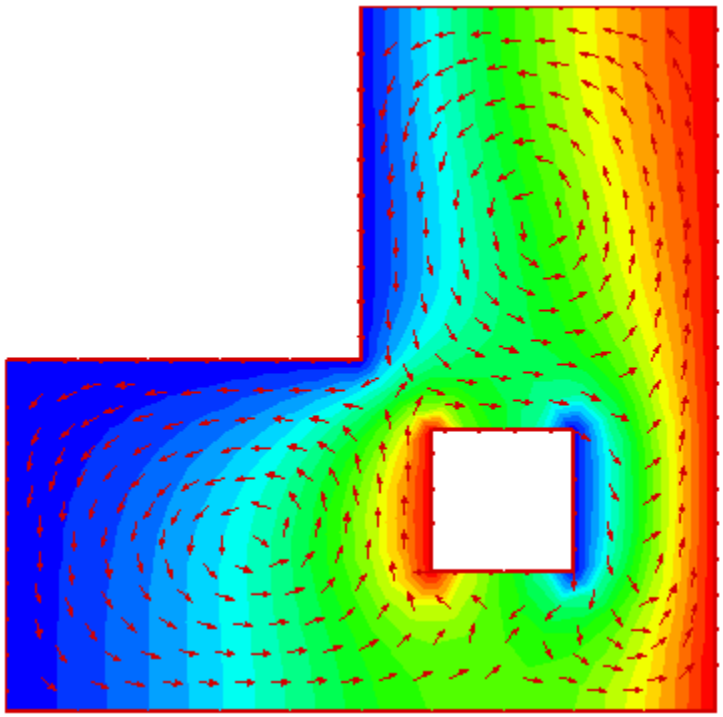


Figure 71 : *Champs de température et de vitesse (cas conducto-convectif)*

$Ra = 5.10^4$, $\Pr = 2.10^4$, $\tau_0 = 1$ et $N_{Pl} = 0.005$

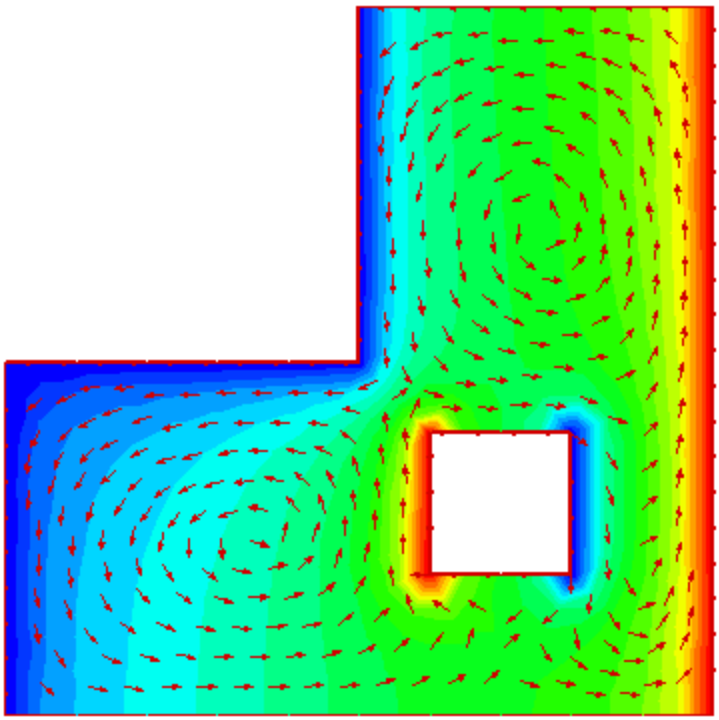


Figure 72 : *Champs de température et de vitesse (cas conducto-convecto-radiatif)*

Ces deux problèmes ont étés résolus en régimes permanent et transitoire. Les solutions stationnaires ont été représentées sur les quatre figures précédentes.

Dans la première configuration, nous avons utilisé environ 484 cellules. La solution est obtenue en 27s pour le problème conducto-convectif et 16s seulement avec prise en compte du rayonnement (respectivement 178s et 184s en régime transitoire for 100 points en temps).

Dans la deuxième configuration, nous avons environ 400 cellules. La solution est obtenue en 12s pour le problème conducto-convectif et 7s avec prise en compte du rayonnement (respectivement 132s et 136s en régime transitoire avec 100 points en temps). Encore une fois, on peut constater que le transfert radiatif à pour effet de réduire les gradients de température dans le milieu et donc l'amplitude du champ de vitesse (boucle de convection).

On peut remarque que dans ces cas complexes, la prise en compte du rayonnement n'est pas préjudiciable. Les temps de calcul sont du même ordre de grandeur que dans le cas conducto-convectif. Ceci peut s'expliquer par le fait que dans le cas du rayonnement, les gradients de température étant plus faibles, on atteint plus rapidement le critère de convergence sur la température (10^{-3} ici en valeur relative). Il n'y pas de phénomène de couche limite thermique ou de « saut » de température à la paroi.

2.3. Convection naturelle en tenant compte du couplage conducto-convecto-radiatif dans le cas d'un milieu complexe avec interface inclinée et présence d'un obstacle solide semi-transparent

Dans cette partie, on va appliquer la méthode P1 modifiée (LEMTA) pour la résolution du couplage conducto-convecto-radiatif dans deux configurations différentes.

Un premier cas où nous avons une paroi inclinée et un deuxième cas où on a la présence d'une inclusion (milieu solide semi-transparent). Ce dernier cas est également un cas complexe car il faut traiter l'interface semi-tansparente entre le verre solide et liquide. Les configurations sont décrites sur la **Figure 73** et les caractéristiques sont données dans le **Tableau 13**.

Pour résoudre ce problème, on a besoin d'écrire les conditions aux limites *P1 (LEMTA)* suivantes :

La condition limite à gauche : $L_0 + \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (527)

La condition limite à droite : $L_0 - \frac{3}{2} L_1 = 4\pi L^0$ (528)

La condition à la paroi inférieure : $L_0 + \frac{3}{2} L_3 = 4\pi L^0$ (529)

La condition à la paroi supérieure : $L_0 - \frac{3}{2} L_3 = 4\pi L^0$ (530)

La condition à la paroi inclinée : $L_0 + \frac{3}{2}\left(\left(cos\, 45^0\right) L_3 - \left(sin\, 45^0\right) L_1\right) = 4\pi L^0$ (531)

Conductivité thermique (λ) (W/m°C)	$1.0\left(W / m^0 C\right)$
ρC_P	$2.10^{-6}\left(J / m^{3\,0} C\right)$
Température de la paroi 1 $\left(T_1\right)$	$400\left(K\right)$
Température de la paroi 2 $\left(T_2\right)$	$800\left(K\right)$
Emissivité de la paroi 1 $\left(\varepsilon_1\right)$	1.0
Emissivité de la paroi 2 $\left(\varepsilon_2\right)$	1.0
Infraction du milieu $\left(n\right)$	1.4
Absorptivité de milieu $\left(\kappa\right)$	$\kappa = \tau_0 / e$
Epaisseur optique $\left(\tau_0\right)$	1.0
N_{pl}	0.005
Nombre de Grashof	10^4
Nombre de Prandtl $\left(Pr\right)$	10

Tableau 13 : Caractéristique des matériaux

Les champs de température et de vitesse obtenus sont donnés pour les deux cas étudiés sur la **Figure 74** et **Figure 75**. Les résultats ont été obtenus pour le premier cas en 6s avec un maillage de 1156 cellules et pour le deuxième cas en 7s avec un maillage de 1296 cellules.

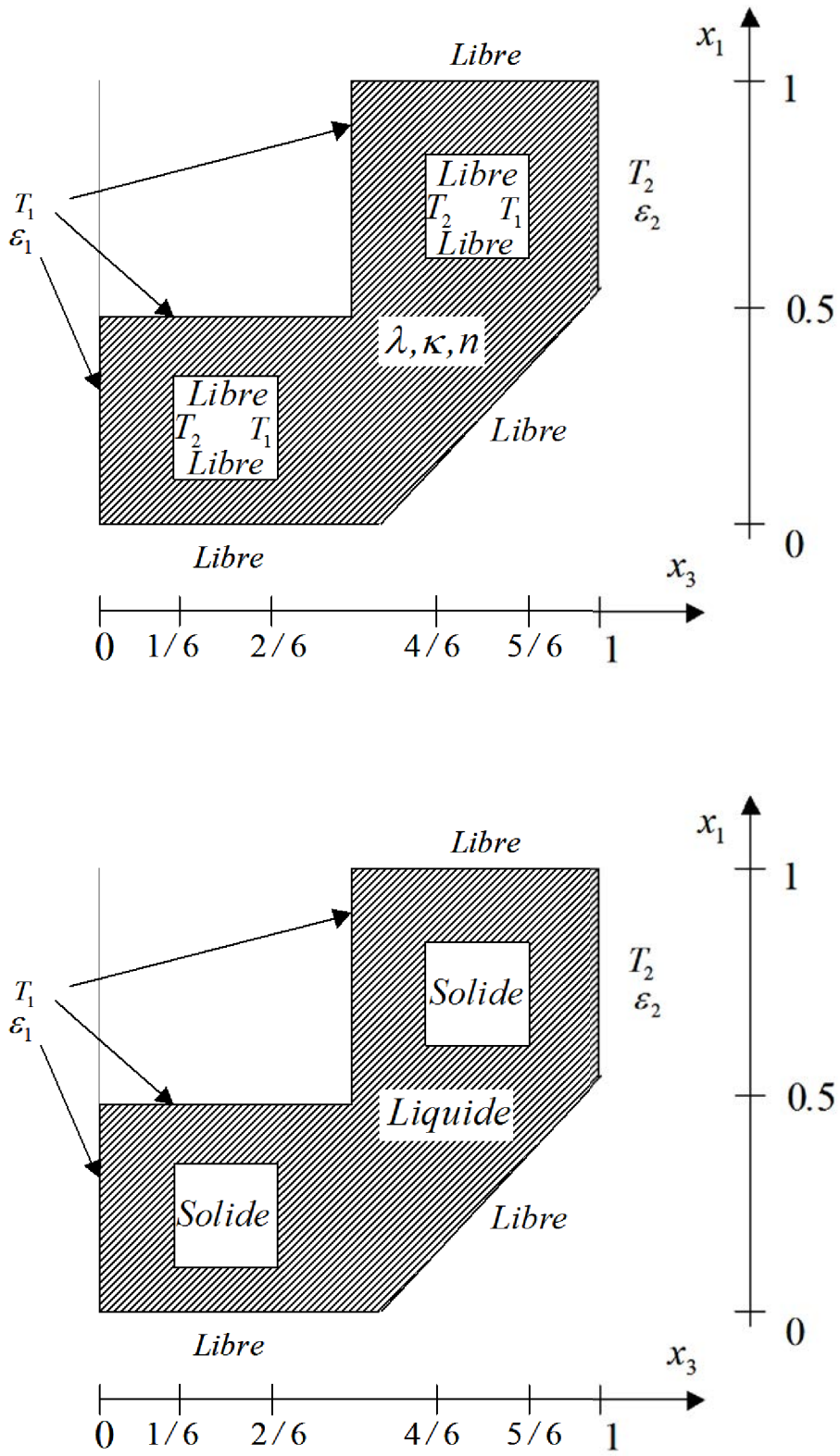


Figure 73 : *Description des cas étudiés*

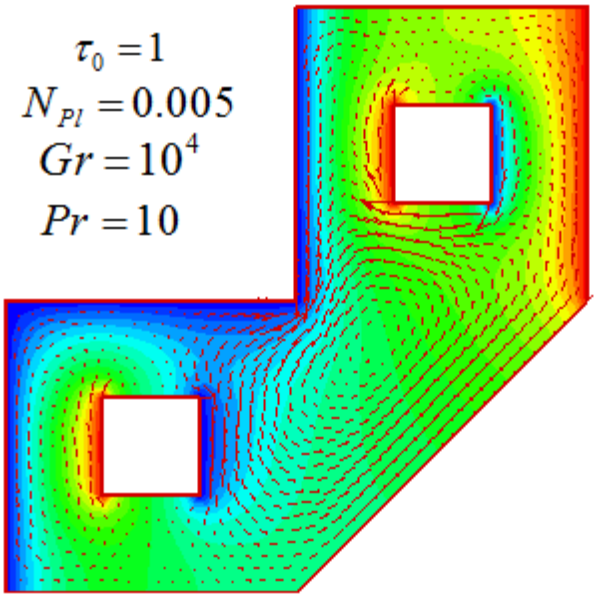


Figure 74 : Champs de température et de vitesse dans une cavité remplie d'un liquide semi-transparent avec une paroi inclinée

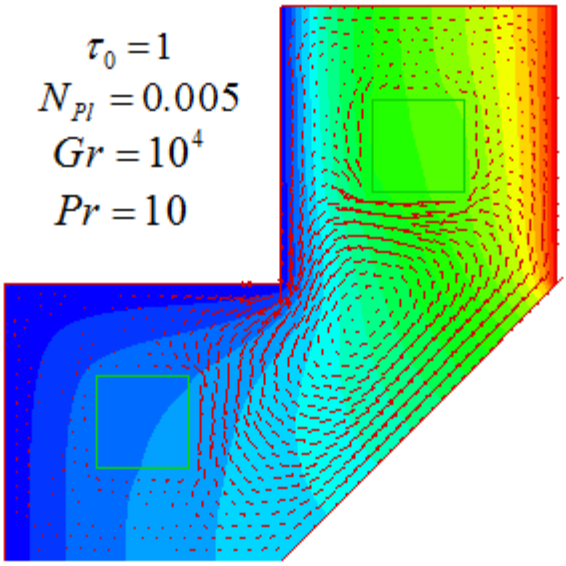


Figure 75 : Champs de température et de vitesse dans une cavité remplie d'un liquide semi-transparent et présence d'une inclusion solide semi-transparente (verre solide)

2.4. Résolution d'un problème de couplage conducto-radiatif en coordonnées cylindriques (2D axi-symétrique) par la méthode P1 modifiée (LEMTA)

Dans la partie précédente, en utilisant la méthode P1 modifiée (LEMTA) pour la résolution de l'équation de transfert radiatif dans le milieu semi-transparent (absorbant et émettant), on a résolu le problème des couplages conducto-convecto-rayonnement pour diverses géométries (carrée, cube, en forme de « L »…) dans le système de coordonnées cartésiennes.

Dans cette partie, on va valider la méthode *P1* modifiée (LEMTA) présentée dans le **Chapitre IV** en coordonnées cylindriques. On considère un cylindre creux de rayons intérieur r_1 et extérieur r_2 (**Figure 76**). Le milieu est identique à celui du mur plan infini étudié dans la partie précédente. Les conditions aux limites sont : température T_1 sur la face intérieure r_1 et T_2 sur la face extérieure r_2. On utilise des variables adimensionnelles pour faciliter la comparaison entre les différents modèles : $T^* = \dfrac{T - T_1}{T_2 - T_1}$ et $r^* = \dfrac{r - r_1}{r_2 - r_1}$.

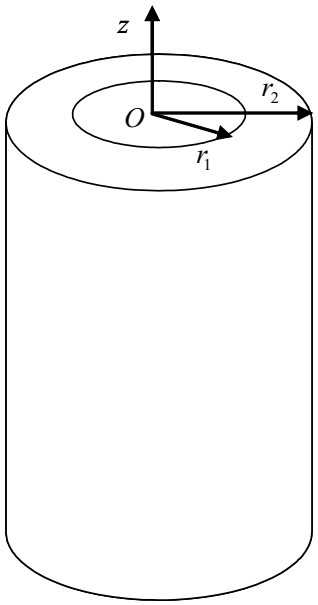


Figure 76 : *Configuration d'un cylindre creux*

Pour valider la méthode *P1* modifiée (LEMTA) dans le système de coordonnées cylindriques, on considère un cylindre creux avec de grands rayons $(r_1 = 99, r_2 = 100)$ de telle sorte que $(r_2 - r_1)/r_1 << 1$.

La **Figure 77** compare les résultats obtenus en cylindrique avec les résultats précédents obtenus pour le mur plan infini. On constate une bonne concordance entre les profils donnés par les modèles cartésien et cylindrique, ce qui normal ici compte tenu du faible rayon de courbure.

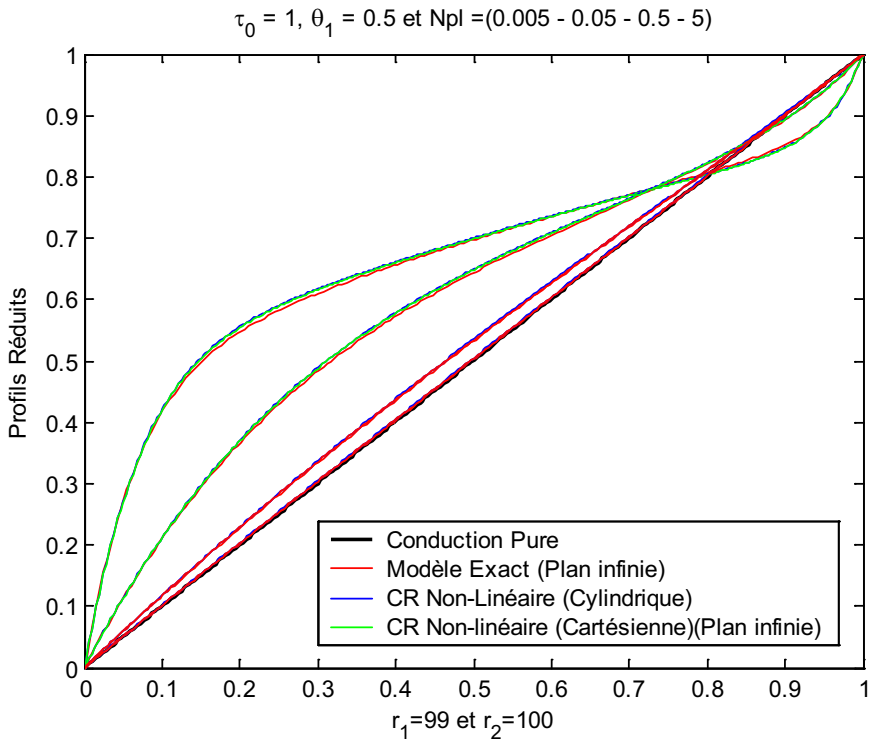


Figure 77 : *Comparaison du profil de température (modèles cartésien et cylindrique)*

Sur la **Figure 78** et la **Figure 79**, on représente le profil de température dans un cylindre infini en fonction du paramètre d'interaction conduction - rayonnement N_{pl} (cas 1D cylindrique) pour la résolution du couplage conduction et rayonnement dans le cas 1D. Les résultats sont analogues aux résultats obtenus dans le cas cartésien. Les profils sont un peu plus courbés pour prendre en compte le profil logarithmique de la température en conduction pure.

Sur la **Figure 80** et la **Figure 81**, on compare les profils de température dans la section droite d'un cylindre creux d'extension finie ($r_1 = 1$, $r_2 = 2$ et $z = 1$) soumis à un gradient de température ($T_1 = 400K$ sur la face interne et les faces supérieure et inférieure, T_2 sur la face externe). On observe que l'effet radiatif réduit le gradient de la température au sein du matériau.

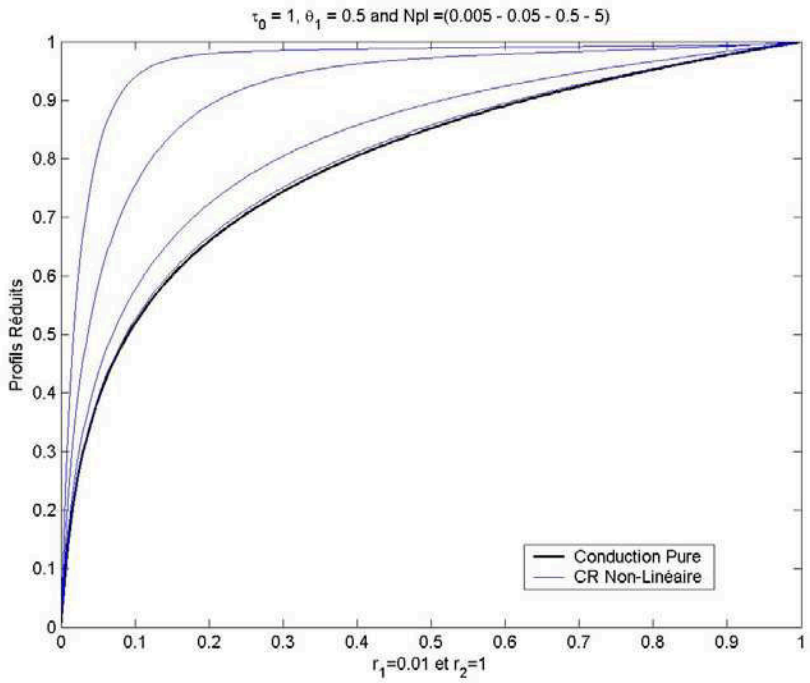


Figure 78 : *Profil de température dans un cylindre* $(r_1 = 0.01, r_2 = 1)$ *en fonction du paramètre d'interaction conduction/rayonnement*

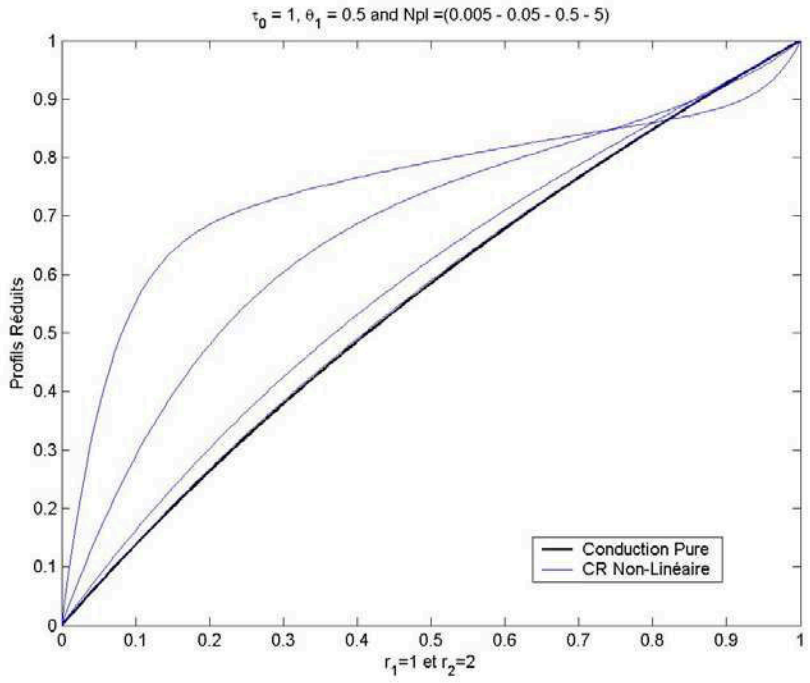


Figure 79 : *Profil de température d'un cylindre de petits rayons* $(r_1 = 1, r_2 = 2)$ *en fonction du paramètre d'interaction conduction/rayonnement*

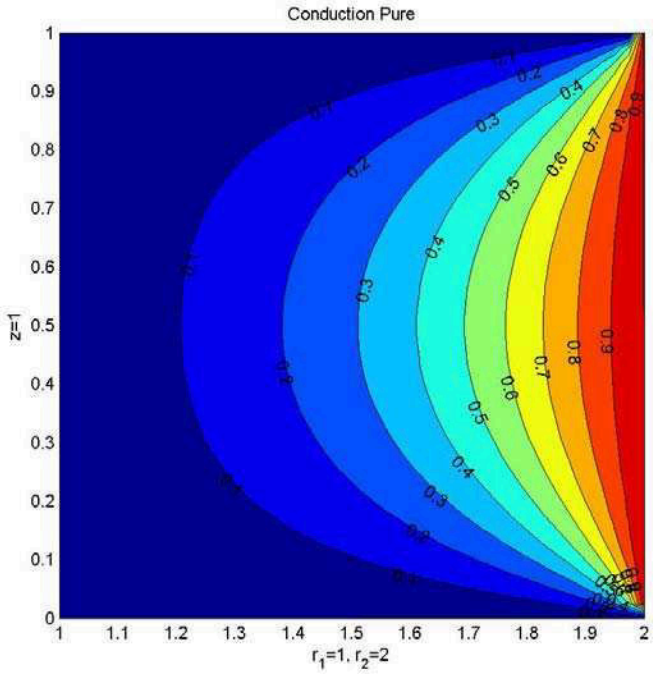


Figure 80 : *Profil réduit de température dans la section droite d'un cylindre (conduction pure 2D)*

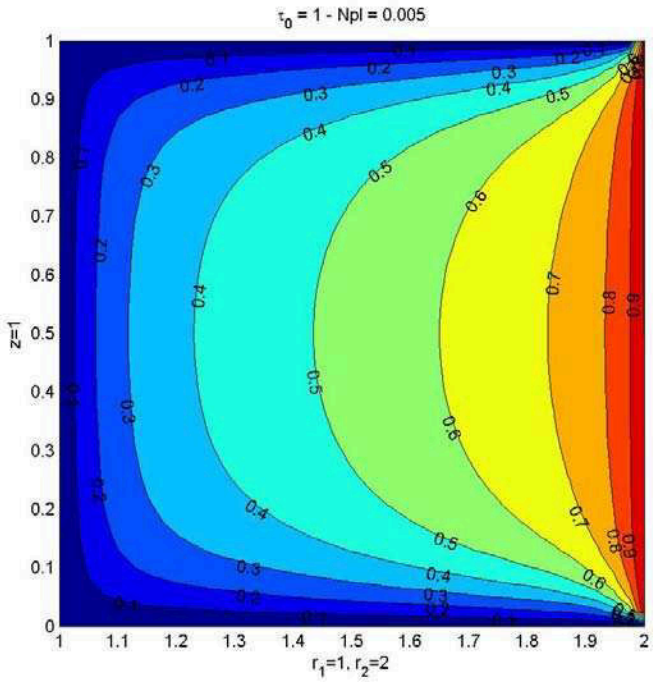


Figure 81 : *Profil réduit de température dans la section droite d'un cylindre (conducto-radiatif 2D)*

2.5. Résolution d'un problème de couplage conducto-radiatif dans le cas 3D par la méthode P1 modifiée (LEMTA)

Dans cette partie, on va valider la méthode *P1* modifiée (LEMTA) pour la résolution du couplage conducto-radiatif dans le cas 3D. On considère la configuration d'un cube (**Figure 82**) dont la caractéristique du matériau est la même que pour le cas 2D (**Tableau 11**). On impose des conditions aux limites de type Dirichlet comme indiquée sur la **Figure 82**. La température de la face droite est $T_2 = 800K$ et toutes les autres faces sont à $T_1 = 400K$.

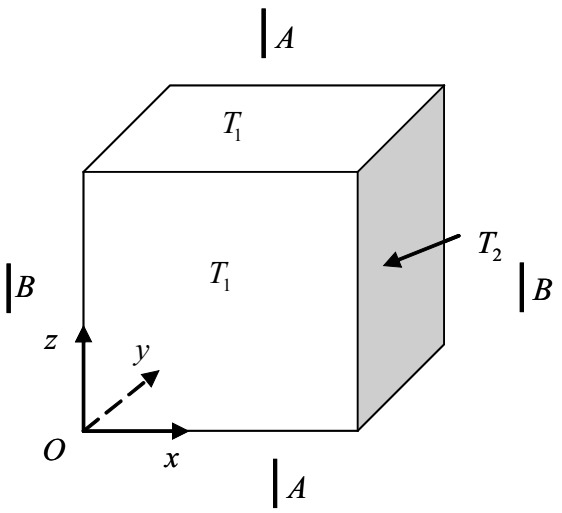


Figure 82 : *Configuration géométrique considérée*

En appliquant la méthode *P1* modifiée (LEMTA) pour ce modèle avec une épaisseur optique $\tau_0 = 1$ et un paramètre d'interaction conduction-rayonnement $Npl = 0{,}005$, on obtient les champs de température selon les coupes A-A et B-B donnés sur la **Figure 83** et la **Figure 84**. Les résultats obtenus sont conformes à ceux attendus. Pour 100 pas de temps, les temps de calcul sont de 69s pour un maillage 12^3 et 92s pour un maillage 16^3 en conductif pur. En conducto-radiatif, ils sont de 189s en 16^3 et 414s en 20^3. La forte augmentation du temps de calcul s'explique par la difficulté d'obtenir un premier champ solution dans le cas conducto-radiatif.

En perspectives, il reste à étendre le code pour des géométries 3D plus complexes.

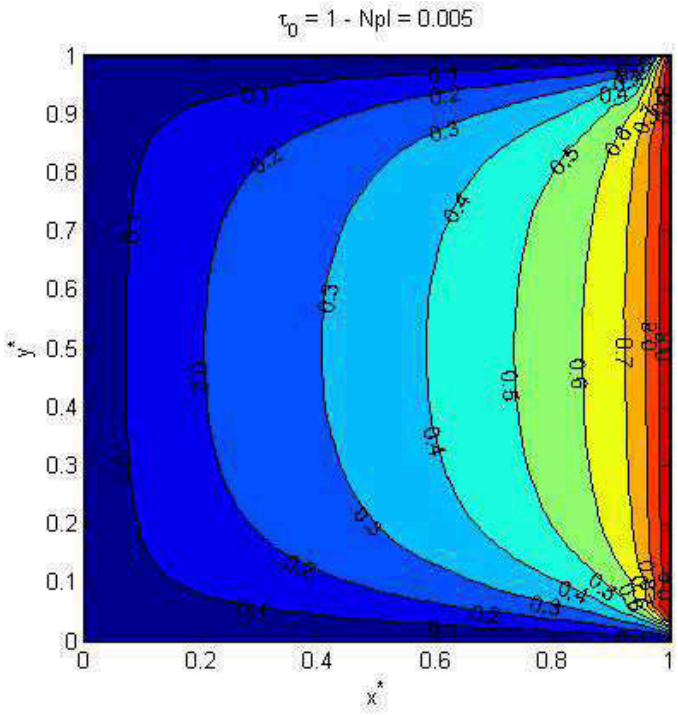


Figure 83 : *Profil de température selon la coupe B-B*

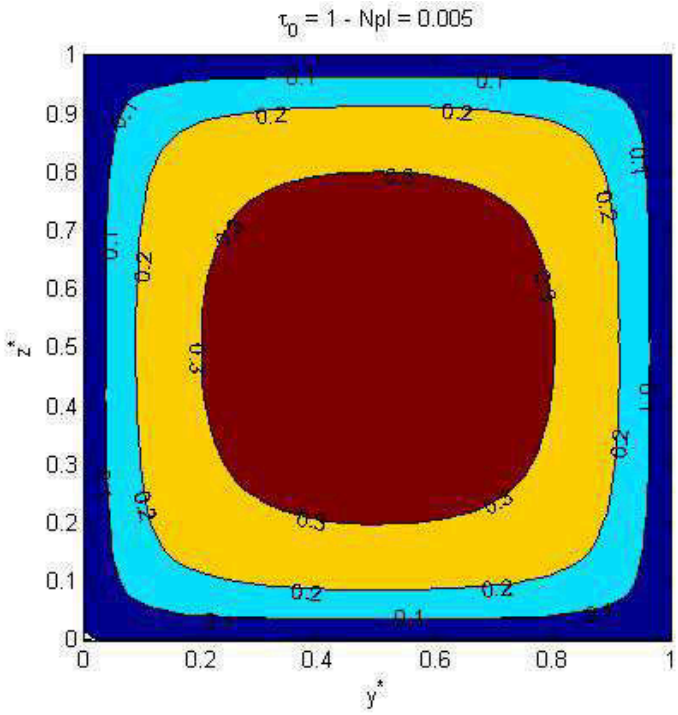


Figure 84 : *Profil de température selon la coupe A-A*

2.6. Résolution d'un problème conducto-radiatif 1D dans le cas d'un matériau semi-transparent non gris (modèle à 2 bandes) par la méthode P1 modifiée (LEMTA)

Le Verre est un matériau semi-transparent qui présente une fréquence de « coupure » $\lambda_c = 2.5\mu m$. En première approximation, on peut donc considérer qu'il est totalement transparent en dessous de cette longueur d'onde et totalement opaque au dessus. Le but de cette section est de montrer qu'il est possible de prendre en compte le caractère non gris de ce matériau par méthode *PN* (voir Chapitre précédent pour le modèle) et de voir quelle est l'influence du comportement non gris du matériau sur le profil de température du milieu. L'étude a été faite ici en 1D mais son extension à des géométries 3D ne posent aucun problème particulier.

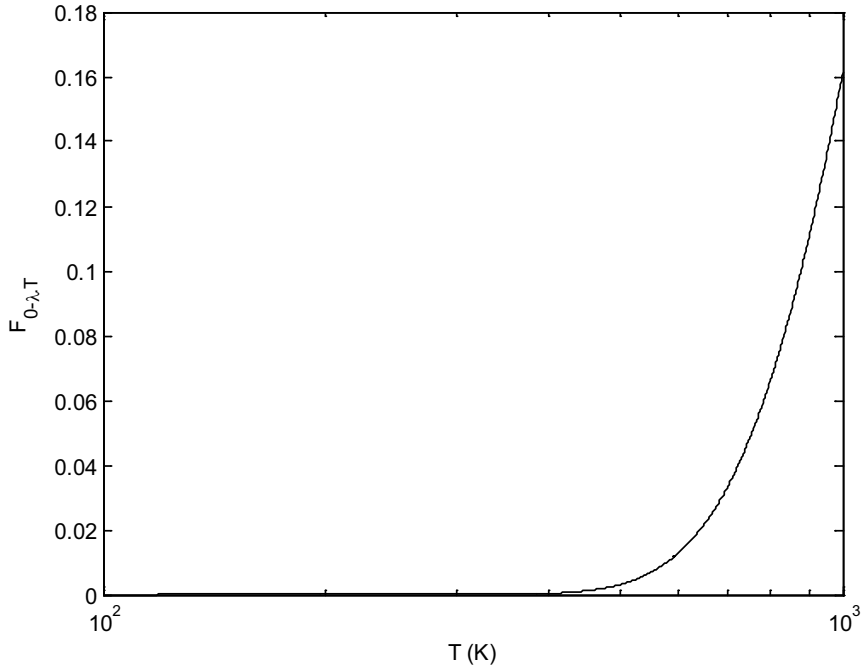


Figure 85 : *Fraction d'émission du corps noir* $F_{0-\lambda_c T}$ *avec* $\lambda_c = 2.5\mu m$

On remarque alors qu'à température ambiante $T = 300\,K$, le Verre est totalement opaque car $F_{0-\lambda T} \simeq 0$ et que pour une température $T = 1000\,K$, soit 727°C environ, 16% de l'énergie du corps noir est transmise par le Verre tandis que le complément (74%) est absorbé. On peut noter également que l'on est situé dans une partie de la courbe où la fraction d'énergie transmise va augmenter très rapidement avec la température. L'effet non-gris lié aux variations de propriétés optiques du Verre va prendre de plus en plus d'importance.

La **Figure 86** montre les profils de température obtenus dans le cas d'un matériau semi-transparent qui se comporte comme du Verre (transparent en dessous d'une longueur d'onde de coupure λ_c et opaque au dessus) pour $\lambda_c = \{1\mu m, 2\mu m, 5\mu m, 10\mu m \text{ et } 60\mu m\}$.

Nous avons également représenté sur la même figure le profil de température dans le cas conductif pur et le cas gris. Nous pouvons déjà remarquer que pour $\lambda_c = 1\mu m$, le profil obtenu par le modèle 2 bandes est proche d'un profil conductif pur. Ceci est dû aux caractéristiques optiques du matériau dans la seconde bande (bande b) $\{\tau_{0b} = 1000, Npl_b = 8{,}61\}$. Pour $\lambda_c = 60\mu m$, le profil de température 2 bandes est proche du cas gris avec pour propriétés optiques celles du matériau dans la première bande (bande a) $\{\tau_{0b} = 1, Npl_b = 0{,}00861\}$.

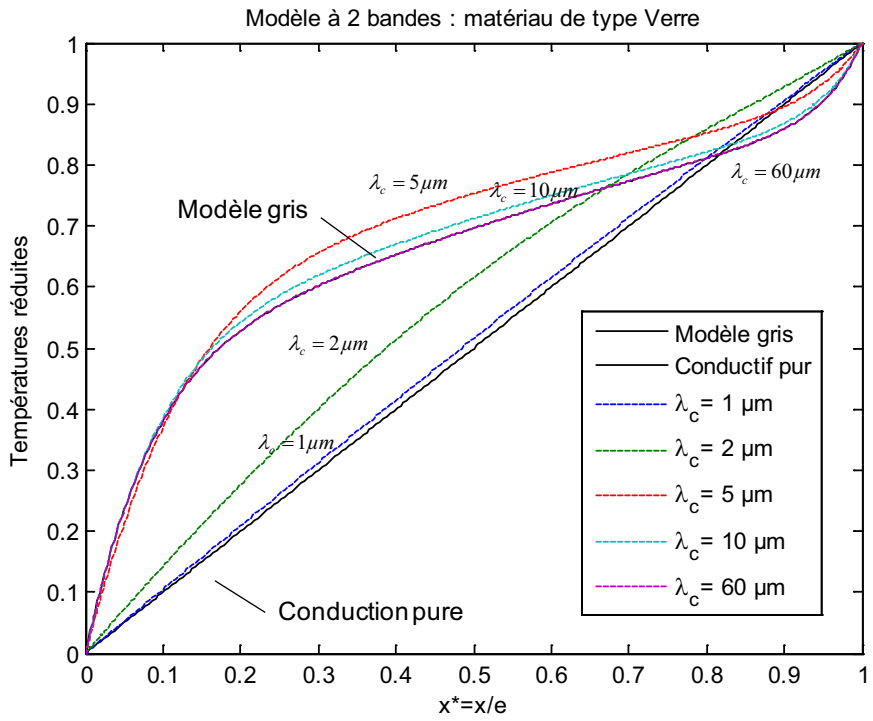


Figure 86 : *Comparaison modèle à 2 bandes / modèle gris pour différentes valeurs de* λ_c

Pour expliquer cela plus précisément, il est intéressant de représenter la loi de Planck (émission du corps noir $M_\lambda^0(T)$ pour les deux températures extrêmes du mur, respectivement $T_1 = 400\ K$ et $T_2 = 800\ K$.

Nous avons représenté également l'émission pour une température moyenne $T_m = (T_1 + T_2)/2 = 600K$.

On rappelle que le maximum d'émission du corps est donné par la loi de Wien :

$$\lambda_{pic}.T = 2898\ \mu m.K \tag{532}$$

et que 98% de l'énergie du corps noir est émis entre $\left[\lambda_{\min} = \lambda_{pic}/2 - \lambda_{\max} = 8\lambda_{pic}\right]$ (étendue « utile » du spectre).

Ainsi, les longueurs d'onde de maximum d'émission et les étendues utiles pour les trois températures considérées sont respectivement :

Température	λ_{pic} **(µm)**	**Etendue « utile » du spectre**
$T_1 = 400\ K$	$7.5\mu m$	$[3.75\mu m - 60\mu m]$
$T_m = 600K$	$5\mu m$	$[2.5\mu m - 40\mu m]$
$T_2 = 800\ K$	$3.75\mu m$	$[1.875\mu m - 30\mu m]$

Tableau 14 : *Maximum d'émission et étendue utile du spectre d'émission pour différentes températures*

Sur la **Figure 87**, nous avons tracé la limite $\lambda_c = 2\mu m$ en dessous de laquelle le matériau est relativement transparent (épaisseur optique $\tau = 1$) et au dessus de laquelle il est pratiquement opaque (épaisseur optique $\tau = 1000$).

Pour $\lambda_c = 2\mu m$, on voit alors que toute l'énergie du milieu est émise majoritairement à des longueurs d'onde où le matériau est fortement absorbant. Le profil de température dans le milieu est alors assez proche d'un profil conductif pur. Naturellement, ce profil s'en rapproche d'avantage si la fréquence de coupure diminue (voir profil pour $\lambda_c = 1\mu m$).

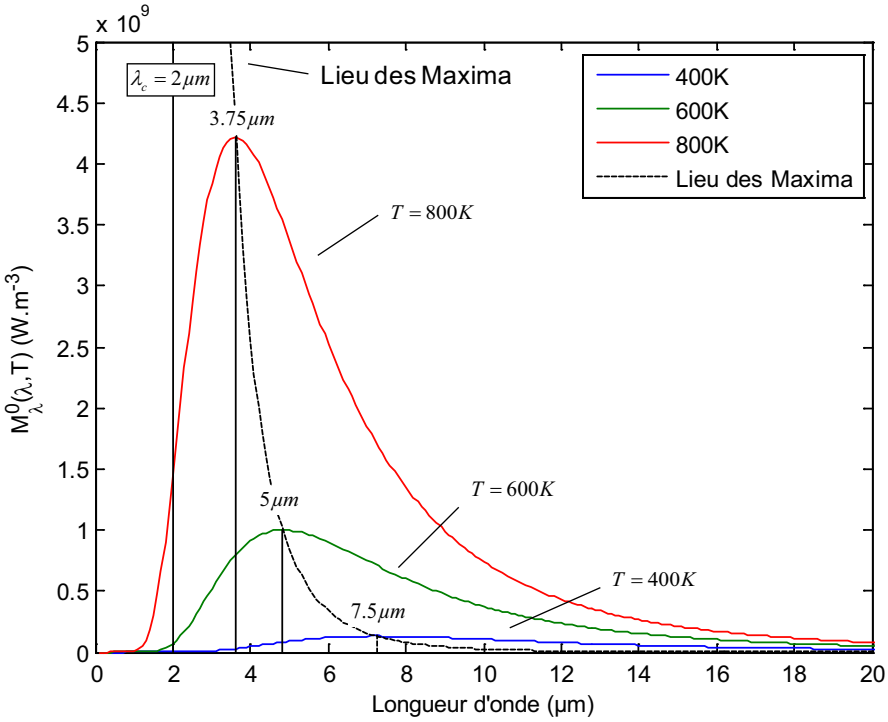


Figure 87 : *Emittance* $M_\lambda^0(T)$ *du corps noir pour différentes températures (maximum d'émission et étendue utile de spectre)*

A l'inverse, si on augmente la valeur de λ_c, l'énergie est émise dans les deux bandes du matériau. Plus λ_c est grande, plus l'énergie émise dans la zone de transparence du matériau est importante. Le profil de température donné par le modèle à 2 bandes tend vers le profil de température du cas gris $\{\tau_{0b} = 1, Npl_b = 0{,}00861\}$ lorsque $\lambda_c = 60\mu m$. En effet, dans ce dernier cas, toute l'énergie du matériau est émise en dessous de λ_c et seule la première bande du spectre du matériau est sollicitée (Voir le **Tableau 14**).

Cet exemple montre la possibilité d'étendre la méthode *PN* au cas non gris mais surtout la nécessité de prendre en compte le caractère non gris du Verre. En effet, même si elles vont s'estomper pour des températures élevées, les différences entre le cas $\lambda_c = 2\mu m$ et le cas gris sont importantes.

Conclusions

Ce chapitre a permis de valider la méthode choisie pour traiter le couplage conducto-convecto-radiatif.

La méthode *P1* modifiée (LEMTA) est un excellent compromis entre précision de calcul et temps de calcul. Elle répond au problème posé dans la Thèse puisqu'elle est assez facilement incorporée dans des codes de calculs commerciaux, sans alourdir fortement les temps de calcul.

La Chapitre a permis de valider cette méthode et de traiter des applications complexes.

Un deuxième résultat important est qu'il est indispensable dans le cas du verre à haute température de prendre en compte son caractère non gris, ce qui est possible avec la méthode mise en place.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail, nous avons proposé un modèle pour la simulation du remplissage de moules verriers permettant de prendre en compte l'aspect mécanique des fluides (écoulement avec frontières libres) et les aspects thermiques spécifiques au Verre (viscosité thermodépendante et transfert radiatif). Des méthodes numériques adaptées ont été proposées pour le traitement de l'écoulement (Méthode VOF, projection vectorielle et méthode du Lagrangien augmenté) et du transfert radiatif (notion de conductivité radiative équivalente, méthode explicite directe et méthode des harmoniques sphériques ou méthode *PN*).

Nous avons montré la pertinence de la bibliothèque numérique Aquilon pour traiter les problèmes de remplissage de moules par gravité ou par pression, ainsi que les couplages thermiques entre la pâte de Verre, l'air en présence dans le moule et les parois du moule en fonte ou en acier. Cet aspect est souvent négligé dans les approches classiques où on néglige généralement la présence de l'air et où les parois sont traitées comme de simples conditions aux limites : température imposée, résistance de contact ou résistance convective. Dans certains cas, ces grandeurs dépendent du temps et de l'espace et requièrent une approche empirique pour leur détermination.

Pour le traitement du transfert radiatif, nous avons proposé des approches plus ou moins fines. Les méthodes de type conductivité radiative équivalente sont souvent employées dans l'Industrie verrière car elles peuvent facilement être prises en compte dans des codes spécifiques ou encore des codes commerciaux (Voir modèle de Rosseland modifié par exemple). Mis à part certains cas très particuliers où cela s'avère indispensable, les approches plus fines comme les méthodes d'ordonnées discrètes, d'éléments finis, de volumes finis ou encore la méthode de zones sont très rarement employées car elles sont très couteuses en temps non seulement dans leur mise en œuvre mais aussi en terme de temps de calcul.

C'est pourquoi, il nous paraissait important de proposer une approche alternative comme la méthode des harmoniques sphériques. Certes, telle que présentée ici, il s'agit d'une méthode approchée (développement au premier ou au troisième ordre). Nous avons montré cependant en comparant les résultats données par la méthode P1 avec ceux obtenus par la méthode explicite directe (modèle fin) que les résultats obtenus sont très proches dans des cas 1D et 2D en régimes permanent et transitoire. Nous avons montré que le problème de transfert radiatif pouvait se modéliser en P1 par une simple équation de diffusion stationnaire, comparable à l'équation de la chaleur que ce soit en géométries 1D, 2D ou 3D. Pour la méthode P3, nous avons 2 équations en 1D, 4 équations en 2D et 7 équations en P3.

La méthode peut s'alourdir très rapidement si on cherche à travailler à des ordres très élevés. Elle perd donc tout de son intérêt si cela s'avère nécessaire. Néanmoins, dans de très nombreux cas, la méthode P1 est très satisfaisante. De façon inconditionnelle, elle est meilleure qu'une approche de type Rosseland modifiée et les écarts avec des méthodes fines sont du même ordre que les incertitudes du modèle, les hypothèses simplificatrices posées pour résoudre le problème, la simplification de la géométrie ou encore la précision de la base de données. Il permet de décrire fidèlement tous les aspects radiatifs observés avec des modèles fins et cela avec une bonne précision tout à fait acceptable.

Numériquement l'implémentation de ce modèle dans des codes comme Aquilon, FlexPDE ou encore Comsol Multiphysics est aisée. Sa résolution ne pose pas de problèmes numériques particuliers et les temps de calcul restent faibles. Il est de l'ordre d'un facteur deux entre un problème stationnaire conductif pur et conducto-radiatif. Dans certains cas, il peut être plus faible car la prise en compte du rayonnement minimise les gradients dans le milieu, ce qui rend le problème plus simple à résoudre. Dans le cas d'un problème transitoire, la différence entre les temps de calcul est encore plus réduite car à l'équation transitoire du problème conductif, on ne rajoute qu'une équation stationnaire supplémentaire à résoudre pour traiter le rayonnement. La différence est encore plus faible lorsque l'on cherche à prendre en compte le rayonnement dans des problèmes conducto-convectif.

Ce modèle radiatif a pu être mise en œuvre dans des géométries simples et complexes en 1D, 2D et 3D, en coordonnées cartésiennes et cylindriques avec symétrie de révolution et avec prise en compte de parois et d'obstacles opaques et semi-transparents.

Nous avons pu prendre en compte également avec succès le caractère non gris du matériau semi-transparent (matériau à 2 bandes comme le Verre).

Nous avons pu ainsi proposer un modèle radiatif répondant au cahier des charges initial, c'est à dire un modèle qui soit assez fin pour décrire fidèlement le comportement radiatif du Verre, et avec une mise en œuvre et des temps de calcul compatibles avec les contraintes de l'Industrie.

Les perspectives sont tout d'abord de valider ce modèle radiatif dans des cas et des géométries plus complexes et de le tester en particulier sur des problèmes à frontières libres, ce que nous n'avons pas pu faire dans le cadre de cette étude. Tous les éléments techniques semblent cependant réunis pour que cela puisse se faire sans difficultés majeures. Nous n'avons recensé aucun problème qui nous interdirait l'implémentation de ce modèle radiatif pour traiter ce type de cas.

Une dernière perspective serait ensuite de valider les résultats numériques sur des essais expérimentaux de remplissage de moules. Des essais de remplissage de moules par gravité et par pression ont été réalisés ou sont en cours de réalisation chez Daum et Baccarat dans des géométries simples de type sphérique et cylindrique (symétrie de révolution).

Bibliographie

[ANDERSON 71] E.E. Anderson, R. Viskanta. *Effective Conductivity for Conduction-Radiation by Taylor Series Expansion*. Int. J. Heat Mass Transfer, 14, 1971, p.1216-1220.

[ANDRE 92] S. André. *Identification de la diffusivité phonique du verre par méthode Flash de 20°C à 500°C.* Thèse de Doctorat, I.N.P.N Nancy, France, 1992.

[ANGOT 89] P. Angot. *Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexe, application aux composants électroniques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I, 1989.

[ASHGRIZ 91] N. Ashgriz, J. Y. Poo. *FLAIR : Flux line-segment model for advection and interface reconstruction.* J. Comput. Phys., vol. 93, p. 449-468, 1991.

[AZUMI 81] T. Azumi and Y. Takajashi. *Novel Finite Pulse-Width Correction in Flash Thermal Diffusivity Measurement.* Rev. Sci. Instrum., 52, p.1411-1413, 1981.

[BALAGEAS 82] D. Balageas. *Nouvelle méthode d'interprétation des thermogrammes pour la détermination de la diffusivité thermique par la méthode impulsionnelle.* Rev. Phys. Appl., 17, p.227-237, 1982.

[BALAGEAS 94] D. Balageas. *Mesure de la diffusivité thermique par la méthode Flash.* Les Techniques de l'Ingénieur – traité « Diffusivité thermique », R2 955 1994.

[BAR 74] R. D. Bar. *Fundamentals of the KRAKEN code.* Technical report, 1974.

[BAYAZITOGLU 79] Y. Bayazitoglu et J. Higenyi. Higher-order differential equations of radiative transfer: P3 approximation. AIAA Journal. Vol. 17, p. 424-431, 1979.

[BLANCO 95] A. Blanco. *Quelques aspects de l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'une bulle déformable : une analyse par simulation directe.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, Toulouse, FR, 1995.

[BOULET 92] P. Boulet. *Etude du transfert par rayonnement à travers les milieux fibreux*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1992.

[BRACKBILL 92] J. U. Brackbill, D.B. Kothe, C. Zemach. *A continuum method for modeling surface tension*. J. Comput. Phys., vol. 100, p. 335-354, 1992.

[CALTAGIRONE 95] J. P. Caltagirone, K. Khadra, P. Angot. *Sur une méthode de raffinement local multigrille pour la résolution des équations de Navier-Stokes.* C. R. Acad. Sci., vol. 320, p. 295-302, 1995.

[CALTAGIRONE 99] J. P. Caltagirone, J. Breil. *Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de Navier Stokes*. C. R. Acad. Sci. Paris, Serie II b, Mécanique des fluides numérique, vol. 327, p. 1179-1184, 1999.

[CARLSON 68] B. G. Carlson and K. D. Lathrop. Transport Theory – The Method of Discrete Ordinates. In Computing Methods in Reactor Physics, eds. H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, Gordon and Breach, New York, 1968.

[CHAI 93] J. C. Chai, H. S. Lee, S. V. Patankar. *Ray effect and false scattering in the discrete ordinates method.* Number Heat Transfer B, vol. 24, p. 373-389, 1993.

[CHANDRASEKHAR 60] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Dover publications, Inc. New York, 1960.

[CHAPMAN 70] S. Chapman, T. Cooling. *The mathematical theory of nonuniform gases*. Cambridge University Press, 1970.

[CHORIN 80] J. Chorin. *Flame advection and propagation algorithms.* J. Comput. Phys., vol. 35, p. 1-11,1980.

[CLOUET 97] J. F. Clouet. *The Rosseland Approximation For Radiative Transfer Problems in Heterogenous Media*. J. Quant. Spectrosc. Radiat . Transfer, Vol. 58, No. 1, pp. 33-43, 1997.

[DALY 69] B. J. Daly. *A technique for incuding surface tension effects in hydrodynamic calculations.* J. Comput. Phys., Vol. 4, p. 97-117, 1969.

[DAVISON 58] B. Davison. *Neutron transport theory.* London: Oxford University Press, 1958.

[DEGIOVANNI 77] A. Degiovanni. *Diffusivité et méthode Flash.* Rev. Gén. Therm., p.420-441, 1977.

[DEGIOVANNI 84] A. Degiovanni, G. Sinicki et M. Laurent. *Heat Pulse Thermal Diffusivity Measurements. Thermal Properties Temperature Dependence and Non-uniformity.* Thermal Conductivity 18, New-York: Plenum Press, p.537-551, 1984.

[DEGIOVANNI 86] A. Degiovanni et M. Laurent. *Une nouvelle technique d'identification de la diffusivité thermique par la méthode flash.* Rev. Phys. Appl., 21, p.229-237, 1986.

[DEGIOVANNI 87] A. Degiovanni. *Correction de la longueur d'impulsion pour la mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash.* Int. J. Heat Mass. Transfer., 30 (10), p.2199-2200, 1987.

[DEGIOVANNI 88] A. Degiovanni. *Diffusivité et Conductivité thermique : Matériaux non Homogènes.* Mesucora, Congrès, 1988.

[DEISSLER 67] R.G. Deissler. *Diffusion Approximation for Thermal Radiation in Gases with Jump Boundary Conditions*. J. Heat Mass Transfer, 86 C, 1967, p.240-p.246.

[DELHAYE 74] J. M. Delhaye. *Jump conditions and entropy sources in two phase systems. Local instant formulation*. Int. J. Multiphase Flow, vol. 1, p. 395-409, 1974.

[DONALDSON 75] A. B. Taylor et R. E. Donaldson. *Thermal Diffusivity Measurement by a Radial Heat Flow Method.* J. Appl. Phys., 46, p.4584—p.4589, 1975.

[FERZIGER 72] J. Ferziger, M. G. Kaper. *Mathematical theory of transport processes in gases.* North Holland, 1972.

[FIFUE 96] J. F. Figué. *Modélisation numérique des écoulements compressibles en milieu poreux. Application à la détente de Joule-Thompson*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Talence, FR, 1996.

[FIVELAND 82] W. A. Fiveland. A Discrete Ordinates Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymetric Enclosures. ASME Paper 82-HT-20, 1982.

[FIVELAND 84] W. A. Fiveland. Discrete Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures. ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 106, pp. 699-706, 1984.

[FORTIN 82] C. Fortin, R. Glowinsky. *Méthodes de Lagrangien augmenté. Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.

[GOUNOD 94] J.Gounod et J. L. Battaglia. *Thermal Diffusivity Identification and Measurement Noise.* Hight Temperatures – Hight Pressures, 26, p.177-182, 1994.

[GRANT 65] I. P. Grant. *On the Representation of Frequency Dependence in Non-grey Radiative Transfer.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. Vol.5, pp227-243, 1965.

[GUILBERT 85] G. Guilbert. *Etude des caractéristiques optiques des milieux poreux semi-transparents*. Thèse de 3ème Cycle, Université Henri Poincaré, Nancy I, France, 1985.

[HAJI-SHEIKH 88] A. Haji-Sheikh. Monte Carlo Methods. In Handbook of Numerical Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, pp. 673-722, 1988.

[HARLOW 65] H. Harlow, J. E. Welch. *Numerical calculation of timedependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*. Phys. Fluids, vol. 8, p. 2182-2189, 1965.

[HIRSCH 90] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows,volume 2 : computational methods for inviscid and viscous flows*. John Wiley and Sons, Chichester, 1990.

[HIRCHFELDER 64] J. Hirchfelder, C. Curtis, R. Bird. *Molecular theory of gases and liquids*. N. Y., John Wiley, 1964.

[HOTTEL 58] H.C. Hottel at E.S. Cohen. *Radiant heat exchange in a gas-filled enclosure : allowance for nonuniformity of gas temperature*. A. I. Ch. E. Journal. Vol. 4, p. 3-14, 1958.

[HOTTEL 72] H. Hottel et A. Sarofim. *Radiative Transfer.* N.-Y. : Mc Graw Hill, 1972.

[HOWELL 68] J. R. Howell. Application of Monte Carlo to Heat Transfer Problems. In Advances in Heat Transfer, eds. J. P. Hartnett and T. F. Irvine, vol. 5, Academic Press, New York, 1968.

[KATAOKA 86] I. Kataoka. Local *instant formulation of two phase flow*. Int. J. Multiphase Flow, vol. 12, p. 745_758, 1986.

[KHADRA 90] K. Khadra. *Préconditionnement d'une matrice quelconque.* Rapport de DEA, Université de Bordeaux I, 1990.

[KHADRA 94] K. Khadra. *Méthodes adaptatives de raffinement local multigrille, applications aux équations de Navier-Stokes et de l'énergie*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1994.

[KOFINK 59] W. Kofink. *Complete spherical harmonics solution of the Boltzmann equation for neutron transport in homogeneous media with cylindrical geometry.* Nucl. Sci. Eng., vol. 6, p. 473-486, 1959.

[KUMAR 90] S. Kumar, A. Majumdar and C. L. Tien. The differential Discrete Ordinate Method for Solutions of the Equation of Radiative Transfer. ASME Journal of Heat Transfer, Vol. 112, no. 2, pp. 424-429, 1990.

[JAMALUDDIN 88] A.S. Jamaluddin et P.J. Smith. Predicting radiative heat transfer in rectangular enclosures using the discrete ordinates method. Combust. Sci. and Tech.. Vol. 59, p. 321-340, 1988.

[JEANS 17] J.H. Jeans. The equations of radiative transfer of energy. Monthly Notices Roy. Astron. Soc.. Vol. 78, p. 28-36, 1917.

[JEROME] B. Jérôme. *Modélisation du remplissage en propergol de moteur à propulsion solide*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2001.

[LACHI 91] M. Lachi. *Détermination de diffusivités thermiques des matériaux composites par méthode flash bidirectionnelle.* Thèse de Doctorat I.N.P.L. Nancy, 1991.

[LARSON 67] K. B. Larson et K. Koyama. *Correction for Finite-Pulse-Time Effects in Very Thin Samples Using the Flash Method of Measuring Thermal Diffusivity.* J. Appl. Phys., 38, p.465-474, 1967.

[LAURIAT 76] M.G. Lauriat. *Transferts d'énergie par rayonnement thermique*. Ecole d'été G.U.T., Perpignan, Chapitre 4, 1976.

[LAZARD 01] M. Lazard, S. André, D. Maillet. *Transient coupled radiative-conductive heat transfer in a gray planar medium with anisotropic scattering*. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, vol. 69, pp. 23-33, 2001.

[LEE 88] S.C. Lee. *Radiation heat–transfer model for fibers oriented parallel to diffuse boundaries*. Journal of Thermophysics. Vol. 2, p. 303–308, 1988.

[LEONARD 79] B. P. Leonard. *A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., vol. 19, p. 59-98, 1979.

[LEVEQUE 90] R. J. Leveque. *Numerical methods for conservation laws*. Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser, 1990.

[MAGNAUDET 96] J. Magnaudet & A. Blanco. *A numerical investigation of the rise of a deformable bubble.* In 19nd Int. Conf. On Theoretical and Appl. Mech.,Kyoto, Japan, 1996.

[MAGNAUDET 97] J. Magnaudet. *Méthodes numériques pour les problèmes d'interfaces.* Cours de l'école de printemps de mécanique des fluides numériques, 1997.

[MENGUC 85] M. P. Mengüç, R.Viskanta. *Radiative transfer in three-dimensional rectangular enclosures containing inhomogeneous. Anisotropically scattering media*. *JQSRT*, 33(6):533-49, 1985.

[MODEST 93] M. F. Modest. *Radiative heat transfer*. Mc Graw-Hill International Ed., Mechanical Engineering Series, 1993.

[MODEST 03] M.F. Modest. *Radiative heat transfer, 2nd ed*, New York: Academic Press, 2003.

[NICHOLS 73] B. D. Nichols & C. W. Hirt. *Calculating three-dimensionnal free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures.* J. Comput. Phys., vol. 12, p. 234-246, 1973.

[NOH 76] W. F. Noh, P. Woodward. *SLIC (Simple Line Interface Calculations.* Lecture Notes in Physics, vol. 59, p. 330-340, 1976.

[OSHER 88] S. Osher, J. A. Sethian. *Fronts propagating with curvature-dependant speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation.* J. Comput. Phys., vol. 79, p. 12-49, 1988.

[OU 82] S. C. S. Ou, K. N. Liou. *Generalization of the spherical harmonic method to radiative transfer in multi-dimensional space.* JQSRT, 28(4):271-88, 1982.

[OZISIK 73] M. N. Ozisik. *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*. Wiley-Interscience publication, New-York, 1973.

[PARKER 61] W. J. Parker, R. J. Jenkins, C. P. Butler and G. L. Abbott. *Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity and Thermal Conductivity.* J. App. Phys., 32 (9), p.1679-1684, 1961.

[PATANKAR 80] S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, New York (USA), 1980.

[PATCH 67] R. W. Patch. *Effective Absorption Coefficients for Radiant Energy Transport in Nongray, Nonscattering Gases.* J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. Vol.7, pp611-635, 1967.

[PEYRET 83] R. Peyret, T. D. Taylor. *Computational methods for fluid flows*. Springer series in computational physics, Springer, Verlag, New York edition, 1983.

[POLTZ 67] H. Poltz, R. Jugel. *The thermal dependence of thermal conductivity*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 10, p. 1075-1088, 1967.

[RATZEL 83] A. C. Ratzel, J. R. Howell. *Two-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the P-N approximation*. ASME J. Heat Transfer, 105:333-40, 1983.

[RAZZAQUE 83] M. M. Razzaque, J. R. Howell et D. E. Klein. Finite element solution of radiative heat transfer in a two-dimensional rectangular enclosure with a grey participating media. ASME J. Heat Transfer. Vol. 105, p. 933-936, 1983.

[REMY 98] B. Rémy. *Mesure de propriétés thermophysiques de matériaux minces et de dépôts par méthode Flash : Aplication aux films polycristallins de diamant*, Thèse de doctorat, INPL-Nancy, 1998.

[RITZ 97] J.B. Ritz. *Modélisation numérique des écoulements fluideparticule définition d'un modèle de simulation directe application à la sédimentation*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1997.

[ROUX 83] J. A. Roux, H.Y. Yeh, A.M. Smith and S.Y. Wang. Finite element analysis of radiative transport in fibrous insulation. J. Energy. vol. 7 (6), p. 702-709, 1983.

[ROSSELAND 36] S. Rosseland. *Theoretical Astrophysics: Atomic Theory and the Analysis of Stellar Atmospheres and Envelopes.* Clarendon Press, Oxford, 1936.

[SACADURA 83] A. Al Abed et J. F. Sacadura. *A Monte Carlo finite difference method for coupled radiation conduction heat transfer in semi-transparent media*. J. Heat Transfer, Vol. 105, p. 931-933, 1983.

[SIEGEL 72] R. Siegel, J. R. Howell. *Thermal radiation heat transfer*, McGraw-Hill, 1972.

[SILLIMAN 80] W. J. Silliman & L. E. Sciven. *Separating flow near a static contact line: slip at wall and shape of a free surface.* J. Comput. Phys., vol. 34, page 287-313, 1980.

[SOIHILI 83] Z. Soihili et A. Degiovanni. *Influence de la non-linéarité dans la mesure de la diffusivité thermique par la méthode flash.* Rev. Gén. Therm., 262, p.649-661, 1983.

[STAMMES 88] K. Stammes, S. C. Tsay, W. J. Wiscombe and K. Jayaweera. Numerically Stable Algorithm for Discrete Ordinate Method Radiative Transfer in Multiple Scattering and Emitting Layered Media. Applied Optics, Vol. 27, no.12, pp. 2502-2509, 1988.

[SUSSMAN 94] M. Sussman, P. Smereka & S. Osher. *A Level Set approach for computing solutions to incompressible two-phase flows*. J. of Comput. Phys., vol. 114, p. 146-159, 1994.

[THEODOR 86] R. Théodort, P. Lascaux. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*. Volumes 1 et 2. Masson, Paris, 1986.

[THERMITUS 97] M. A. Thermitus and M. Laurent. *New Logarithmic Technique in the Flash Method.* Int. J. Heat. Mass. Transfer, Vol. 40, n°17, p.4183-4190, 1997.

[TONG 83] T.W. Tong et C.L. Tien. *Radiative heat transfer in fibrous insulation. Part 1 : Analytical Study*. J. of Heat Transfer, trans. of the A.S.M.E.. Vol. 105, p. 70-75, 1983.

[TONG 87] T. W. Tong, P. S.Swathi. *Radiative heat transfer in emitting-absorbing-scattering spherical media.* J Thermoph Heat Transfer, 1(2):162-70, 1987.

[UNY 86] G. Uny. *Modélisation du transfert couplé rayonnement-convection au sein de matériaux poreux et identification de leurs propriétés radiatives. Application aux laines de verre*. Thèse de 3ème Cycle, INSA Lyon, France, 1986.

[VANDERVORST 92] H. A. Vandervorst. *A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of non-symetric linear systems*. SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol. 13(2), p. 631-644, 1992.

[VINCENT 99] S. Vincent. *Modélisation d'écoulements incompressibles de fluides non-miscibles*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 1999.

[WALTERS 92] D. V. Walters and R. O. Buckius. Monte Carlo Methods for Radiative Heat Transfer in Scattering Media. In Annual Review of Heat Transfer. Vol. 5, Hemisphere, New York, 1992.

[YANG 07] J. Yang, M. F. Modest. *Elliptic PDE formulation of general, three-dimensional hig-order PN- approximations for radiative transfer*. JQSRT, 104:217-27, 2007.

[YEE 87] H. C. Yee. *Upwind and symmetric Shock-Capturing Schemes.* NASA, 1987.

[YOUNGS 82] D. L. Youngs. *Time-dependent multimaterial flow with large fluid distorsion*. K. W. Morton and M. J. Baines, New York (USA), 1982.

[ZALESKI] S. Zaleski. *Computation of multiphase flow by volume of fluid and high-order front tracking methods*.

Annexe A : *« Présentation des fichiers de données de l'interface du code de calcul numérique Aquilon »*

On présente ci-dessous une partie de fichiers du code de calcul Aquilon, utilisé pour obtenir les résultats présentés dans le Chapitre 1.

Le fichier ***« aquilon.dat »*** est relatif au choix du fichier dans lequel on écrit des paramètres pour la simulation numérique. En supprimant le signe "-" devant le nom du fichier, on active le problème physique à traiter.

```
-----------------------------------------------------------------------
- Solutions analytiques Navier-Stokes
-----------------------------------------------------------------------
-FICHIER_DONNEE      hydrostatique.don
-FICHIER_DONNEE      pois2d.don
-FICHIER_DONNEE      pois2dcop.don
-FICHIER_DONNEE      pois2dcor.don
-FICHIER_DONNEE      pois2dcot.don
-FICHIER_DONNEE      poiscomp.don
-FICHIER_DONNEE      pois2dper.don
-FICHIER_DONNEE      poisinst2d.don
-FICHIER_DONNEE      poismuvar.don
-----------------------------------------------------------------------
                CAS AU LEMTA
-----------------------------------------------------------------------
-FICHIER_DONNEE      coule_obs_carre.don
-FICHIER_DONNEE      coule_obs_carre_gra.don
-FICHIER_DONNEE      pois2d_LEMTA.don
-FICHIER_DONNEE      pois2d_LEMTA_vis.don
-FICHIER_DONNEE      coule_obs_temp_mesh.don
-FICHIER_DONNEE      coule_obs_temp_mesh_II.don
-FICHIER_DONNEE      coule_obs_temp_mesh_coin.don
-FICHIER_DONNEE      laplacien_lemta.don
```

-FICHIER_DONNEE pois2d_LEMTA_test.don
FICHIER_DONNEE coup_cond_ray_P1.don
-FICHIER_DONNEE Terme_Source.don

Le fichier ***caract.par*** concerne la définition des propriétés physiques du matériau. Il y a deux types du matériau : le fluide est caractérisé par le mot clé CARACT_FLUIDE et solide par CARACT_SOLIDE.

```
CARACT_FLUIDE        AIR

MASSE                1.176829268D0
VISCOSITE            1.85D-5
COMPRESSIBILITE      9.8692327D-6
CAPACITE_CAL         1006.D0
CONDUCTIVITE         0.0263D0
DILATATION           3.333333D-3
GAMMA                1.4D0
CONST_GP             287.D0
RAYON_PART           0.D0
CONTRAINTE_SEUIL     0.D0
RHEOFLUIDIFIANCE     0.0D0
LOI_ETAT             GAZ_PARFAIT
RHEOLOGIE            NEWTON

CARACT_FLUIDE        FLUX_LEMTA

MASSE                1.0D
VISCOSITE            6.0D4
CAPACITE_CAL         1.D
COMPRESSIBILITE      9.8692327D-26
CONDUCTIVITE         1.31D0
DILATATION           1.D-6
GAMMA                1.D0
```

```
CONST_GP            287.D0
LOI_ETAT            LIQUIDE
RHEOLOGIE           NEWTON

CARACT_FLUIDE       VERRE_BACCARAT

MASSE               2865.D0
VISCOSITE           6.0D4
CAPACITE_CAL        890.D0
COMPRESSIBILITE     9.8692327D-26
CONDUCTIVITE        1.63D
DILATATION          1.D-6
GAMMA               1.D0
CONST_GP            287.D0
LOI_ETAT            LIQUIDE
RHEOLOGIE           NEWTON

CARACT_FLUIDE       VERRELIQ

MASSE               2500.D0
VISCOSITE           100.D0
CAPACITE_CAL        900.D0
COMPRESSIBILITE     9.8692327D-26
CONDUCTIVITE        1.0D0
DILATATION          1.D-6
GAMMA               1.D0
CONST_GP            287.D0
LOI_ETAT            LIQUIDE
RHEOLOGIE           NEWTON

CARACT_SOLIDE ACIER_INOX_18_8

MASSE               2000.D0
```

CAPACITE_CAL 400.D0
CONDUCTIVITE 40.D0
PERMEABILITE 1.D-90

Le fichier « ***defaut.don »*** est relatif aux données par défaut.

- PARAMETRES TEMPORELS

SCHEMA TEMPS GEA1

- EQUATIONS RESOLUES

NAVIER NON
NAVIER_RHO NON
NAVIER_ENERGIE NON
DARCY NON
ENERGIE NON
ENERPHASE NON
KE NON
RNG NON
V2F NON
KL NON
ADVECTION NON
TRANSPORT NON
PARTICULE NON
SOLIDE NON
CHIMIE NON

- PARAMETRES NAVIER-STOKES

```
INCOMPRESSIBLE      OUI
PRESSION            TOTALE
TENSION_SUP         NON

-PRESSION           MOTRICE
-LOI_ETAT           GAZ_PARFAIT
-RHEOLOGIE          NEWTON

INTERPOLATION       VISCOSITE       GEOMETRIQUE
INTERPOLATION       MASSE           LINEAIRE
INTERPOLATION       PERMEABILITE    GEOMETRIQUE
INTERPOLATION       COMPRESSIBILITE LINEAIRE

METHODE             NAVIER          PROJECT_VECT
SCHEMA              NAVIER          HYBRIDE
SOLVEUR             NAVIER          BICG
PRECONDITIONNEMENT  NAVIER          ILU
RESIDU              NAVIER          1.D-16
ITERATION           LAGRANGIEN      2
ITERATION  BICG     NAVIER          30
ITERATION  BICG     PROJECTION      10
PRECONDITIONNEMENT  PROJECTION  ILU
RESIDU              PROJECTION      1.D-16
DIVERGENCE          1.D-16
PARAMETRE  DPDR     1.D0

-------------------------------------------------------------------------------
- PARAMETRES ENERGIE
-------------------------------------------------------------------------------
SCHEMA              ENERGIE         CENTRE
SOLVEUR             ENERGIE         BICG
PRECONDITIONNEMENT  ENERGIE         MILU
ITERATION  BICG     ENERGIE         30
```

RESIDU ENERGIE 1.D-15
INTERPOLATION CONDUCTIVITE GEOMETRIQUE
CONDUCTIVITE ISOTROPE OUI
-RES_THERMIQUE NON
PRODUCTION_VISQUEUSE NON

VARIATION CONTINUE MASSE
VARIATION CONTINUE VISCOSITE
VARIATION CONTINUE CONDUCTIVITE
VARIATION CONTINUE CAPACITE
VARIATION CONTINUE DILATATION
VARIATION CONTINUE COMPRESSIBILITE

- PARAMETRES PARTICULE

-SCHEMA PARTICULE TVD
-SOLVEUR PARTICULE BICG
-PRECONDITIONNEMENT PARTICULE MILU
-ITERATION BICG PARTICULE 30
-RESIDU PARTICULE 1.D-15
-INTERPOLATION PARTICULE GEOMETRIQUE

- PARAMETRES TURBULENT

SCHEMA TURBULENT HYBRIDE
SOLVEUR TURBULENT BICG
PRECONDITIONNEMENT TURBULENT MILU
ITERATION BICG TURBULENT 30
RESIDU TURBULENT 1.D-15
INTERPOLATION TURBULENT LINEAIRE

- PARAMETRES TRANSPORT

SCHEMA	TRANSPORT	HYBRIDE
SOLVEUR	TRANSPORT	BICG
PRECONDITIONNEMENT	TRANSPORT	MILU
ITERATION BICG	TRANSPORT	30
RESIDU	TRANSPORT	1.D-15
INTERPOLATION	DIFFUSION	GEOMETRIQUE
INTERPOLATION	CARACTERISTIQUE	GEOMETRIQUE

- PARAMETRES ADVECTION

-SCHEMA	ADVECTION	TVD

- PARAMETRES PHYSIQUES DE REFERENCE

REFERENCE	TEMPERATURE	300.D0
REFERENCE	PRESSION	101325.D0

- CHOIX DU FLUIDE

-FLUIDE	AIR

- GRAVITE

GRAVITE	STANDARD	9.81D0
INCLINAISON	X1X2	0.D0

```
INCLINAISON          X2X3              0.D0

-------------------------------------------------------------------------------
- ADIMENSIONNEMENT
-------------------------------------------------------------------------------
ADIM                 HAUTEUR           1.D0
ADIM                 VITESSE           1.D0
ADIM                 TEMPERATURE       1.D0
ADIM                 PRESSION          1.D0
ADIM                 TRANSPORT         1.D0

-----------------------------------------------------------------------
-  PARAMETRES SOLVEUR BICG
-----------------------------------------------------------------------
PARAM_KIT            NAVIER            OMEGA            0.01D0
PARAM_KIT            NAVIER            TOLERANCE        1.D-15
PARAM_KIT            NAVIER            DIM_STOCKAGE     10
PARAM_KIT            NAVIER            REMPLISSAGE_ILUK  3

PARAM_KIT            ENERGIE           OMEGA            0.01D0
PARAM_KIT            ENERGIE           TOLERANCE        1.D-15
PARAM_KIT            ENERGIE           DIM_STOCKAGE     10
PARAM_KIT            ENERGIE           REMPLISSAGE_ILUK  3

PARAM_KIT            TRANSPORT         OMEGA            0.01D0
PARAM_KIT            TRANSPORT         TOLERANCE        1.D-15
PARAM_KIT            TRANSPORT         DIM_STOCKAGE     10
PARAM_KIT            TRANSPORT         REMPLISSAGE_ILUK  3

PARAM_KIT            TURBULENT         OMEGA            0.01D0
PARAM_KIT            TURBULENT         TOLERANCE        1.D-15
PARAM_KIT            TURBULENT         DIM_STOCKAGE     10
PARAM_KIT            TURBULENT         REMPLISSAGE_ILUK  3
```

```
PARAM_KIT        PROJECTION    OMEGA            0.01D0
PARAM_KIT        PROJECTION    TOLERANCE        1.D-15
PARAM_KIT        PROJECTION    DIM_STOCKAGE     10
PARAM_KIT        PROJECTION    REMPLISSAGE_ILUK 8

-----------------------------------------------------------------
-                PARAMETRES VERSION PARALLELE
-----------------------------------------------------------------
-BICGSTAB1        OUI
BICGSTAB2         OUI
RESIDU_LOCAL      1.D-12
ITERATION_LOCAL   100
RECOUVREMENT      0
RESTRICTED        OUI
```

Le fichier « ***coule_obs_temp_mesh_coin.don »*** que nous présentons est relatif au calcul du remplissage du moule en forme « U ».

```
=*****************************************************************
=      Coulee de propergol 2D + Obstacle + Mesh optimisé + au coin
=*****************************************************************
-----------------------------------------------------------------
-              DEFINITION DU TYPE DE MAILLAGE
-----------------------------------------------------------------
CALCUL      2D          CARTESIEN
-----------------------------------------------------------------
-              DIMENSIONS DU DOMAINE PHYSIQUE
-----------------------------------------------------------------
DIM_MIN     0.0D0   0.0D0
DIM_MAX     1.0D0   1.0D0
-----------------------------------------------------------------
-                  GRILLE
```

```
-----------------------------------------------------------------------
MAILLAGE     25        25
GRILLE       CONSTANTE
-----------------------------------------------------------------------
-                EQUATIONS RESOLUES
-----------------------------------------------------------------------
NAVIER       OUI
ENERGIE      OUI
ADVECTION    OUI
-----------------------------------------------------------------------
-                FLUIDE et PRODUITS
-----------------------------------------------------------------------
FLUIDE       AIR
PRODUIT      VERRELIQ
-----------------------------------------------------------------------
-                CONDITIONS AUX LIMITES
-----------------------------------------------------------------------
LIMITE       VITESSE    SUP       NEUMAN
LIMITE       VITESSE    INF       PAROI
LIMITE       VITESSE    GAUCHE    PAROI
LIMITE       VITESSE    DROITE    PAROI

LIMITE       TEMPERATURE    SUP       NEUMAN
LIMITE       TEMPERATURE    INF       NEUMAN
LIMITE       TEMPERATURE    GAUCHE    NEUMAN
LIMITE       TEMPERATURE    DROITE    NEUMAN

INITIALISE   VERRELIQ    RECTANGLE  PT1 0.4D0 0.1D0 PT2 0.6D0 0.7D0  VAL
1.0D0
INITIALISE   TEMPERATURE RECTANGLE  PT1 0.4D0 0.1D0 PT2 0.6D0 0.7D0  VAL
1.0D0
ORDRE_LIMITE        DEUX
-----------------------------------------------------------------------
```

```
-                    OBSTACLES
-----------------------------------------------------------------------
OBSTACLE   ACIER_INOX_18_8   RECTANGLE   PT1   0.0D0   0.0D0      PT2   0.1D0
0.4D0
OBSTACLE   ACIER_INOX_18_8   RECTANGLE   PT1   0.1D0   0.0D0      PT2   0.9D0
0.1D0
OBSTACLE   ACIER_INOX_18_8   RECTANGLE   PT1   0.9D0   0.0D0      PT2   1.0D0
0.4D0

INITIALISE  TEMPERATURE RECTANGLE  PT1 0.0D0  0.0D0  PT2  0.1D0  0.4D0  val
0.5d0
INITIALISE  TEMPERATURE RECTANGLE  PT1 0.1D0  0.0D0  PT2  0.9D0  0.1D0  val
0.5d0
INITIALISE   TEMPERATURE  RECTANGLE   PT1  0.9D0   0.0D0    PT2   1.0D0   0.4D0
VAL 0.5D0
-----------------------------------------------------------------------
-                    PARAMETRES TEMPORELS
-----------------------------------------------------------------------
ITERATION       TEMPS    100
-----------------------------------------------------------------------
-                    PARAMETRES NAVIER-STOKES
-----------------------------------------------------------------------
PAS_DE_TEMPS                NAVIER          0.01D0
METHODE                     NAVIER          PROJECT_VECT
ITERATION                   LAGRANGIEN      1
PARAMETRE                   DPDR            1.D3
SCHEMA                      NAVIER          DOUBLE
SOLVEUR                     NAVIER          BICG
PRECONDITIONNEMENT          NAVIER          ILU
SOLVEUR                     PROJECTION      BICG
PRECONDITIONNEMENT          PROJECTION      ILU
ITERATION                   BICG            NAVIER          500
ITERATION                   BICG            PROJECTION      10
```

```
RESIDU                          PROJECTION     1.D-13
RESIDU                          NAVIER         1.D-16
-----------------------------------------------------------------------
-                    PARAMETRES ENERGIE
-----------------------------------------------------------------------
PAS_DE_TEMPS                    ENERGIE        0.01D0
SCHEMA ENERGIE                  HYBRIDE
SOLVEUR                         ENERGIE        BICG
PRECONDITIONNEMENT              ENERGIE        ILU
ITERATION                       BICG           ENERGIE        500
RESIDU                          ENERGIE        1.D-16
-----------------------------------------------------------------------
-                    PARAMETRES ADVECTION
-----------------------------------------------------------------------
PAS_DE_TEMPS                    ADVECTION      0.01D0
SCHEMA                          ADVECTION      VOF
-----------------------------------------------------------------------
-                     TESTS D'ARRETS
-----------------------------------------------------------------------
TEST_ARRET                      NON            FREQUENCE        10
-----------------------------------------------------------------------
-                      IMPRESSIONS
-----------------------------------------------------------------------
CHEMIN c:\Aquilon\Output\Coule_Obs_Temp_Mesh_coin\

IMPRESSION          TECPLOT
IMPRESSION          AQUILON
IMPRESSION          MATLAB

IMPRIME             VITESSE          1
IMPRIME             PRESSION         1
IMPRIME             DIVERGENCE       1
IMPRIME             MASSE            0
```

```
IMPRIME          MASSE_DYN        0
IMPRIME          VISCOSITE        1
IMPRIME          PERMEABILITE     0
IMPRIME          FCT_COUR         1
IMPRIME          COULEUR          1
IMPRIME          TEMPERATURE      1
--------------------------------------------------------------------------------
-                    UTILITAIRES
--------------------------------------------------------------------------------
-CFL    1.D0
VOLUME OUI
-DEBUG  OUI
VALIDATION    UTILITAIRE    VOLUME    VALEUR_REF    0.1446769408163492E+00
PRECISION 8
```

Annexe B : *« Solution analytique de l'écoulement de Poiseuille diphasique »*

On considère un écoulement laminaire de fluides visqueux non-miscibles entre deux plans parallèles fixes de longueur L et séparés d'une distance H. Le mouvement est généré par un gradient de pression :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_d - p_g}{L} = \Delta p \tag{1}$$

Dans la direction x et le champ de vitesse qui en résulte possède uniquement une composante dans la cette même direction. Le système d'équations de Navier-Stokes peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0 \\ &\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \left[\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

D'après le système (2), $u(u_x,0,0) = (u_x(y,t),0,0)$ et $p = p(x,t)$. Si on suppose de plus que l'écoulement est stationnaire, on obtient alors l'équation suivante, qui est valable dans les fluides 1 et 2 :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} \right] \tag{3}$$

Soit après intégration de (3) :

$$\begin{aligned} u_{x,1}(y) &= \frac{\Delta p}{2\mu_1} y^2 + C_1 y + C_1^{'} \\ u_{x,2}(y) &= \frac{\Delta p}{2\mu_2} y^2 + C_2 y + C_2^{'} \end{aligned} \tag{4}$$

Où $u_{x,1}$ et $u_{x,2}$ sont les composantes respectives de la vitesse des fluides 1 et 2 dans la direction x. Si on ajoute des conditions aux limites d'adhérence aux parois et des relations de saut à l'interface :

$$u_{x,1} = 0 \quad \text{en} \quad y = 0 \tag{5}$$

$$u_{x,2} = 0 \quad \text{en} \quad y = H \tag{6}$$

$$[u_x] = u_{x,2} - u_{x,1} = 0 \quad \text{sur l'interface } fluide_1 / fluide_2 \tag{7}$$

$$\left[\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right] = \mu_2 \frac{\partial u_{x,2}}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial u_{x,1}}{\partial y} = 0 \quad \text{sur l'interface } fluide_1 / fluide_2 \tag{8}$$

Il est alors possible de trouver une solution analytique des champs de pression et de vitesse pour le problème de Poiseuille diphasique (3)-(8). Pour cela, il faut déterminer les constantes C_1, $C_1^{'}$, C_2 et $C_2^{'}$ grâce à (4)-(8). On peut réécrire (8) en utilisant l'expression (4) :

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial u_{x,1}}{\partial y} &= \mu_1 \left(\frac{1}{\mu_1} \Delta p y + C_1 \right) \\ \mu_2 \frac{\partial u_{x,2}}{\partial y} &= \mu_2 \left(\frac{1}{\mu_2} \Delta p y + C_2 \right) \end{aligned} \tag{9}$$

Si d est la distance entre l'interface et le plan inférieur du canal, on a ainsi :

$$\Delta p d + \mu_1 C_1 = \Delta p d + \mu_2 C_2 \tag{10}$$

Soit,

$$C_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} C_2 \tag{11}$$

La condition limite sur la plaque du bas (5) nous permet de déterminer $C_1^{'}$:

$$C_1^{'} = 0 \tag{12}$$

On exprime de plus $C_2^{'}$ en fonction de C_2 grâce à la condition (6) sur $u_{x,2}$:

$$C_2^{'} = -\frac{1}{2\mu_2}\Delta p H^2 - C_2 H \tag{13}$$

En injectant l'expression des vitesses $u_{x,1}$ et $u_{x,2}$ dans (7), on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{1}{2\mu_1}\Delta p d^2 + C_1 d = \frac{1}{2\mu_2}\Delta p d^2 - C_2 d + C_2^{'} \tag{14}$$

Soit en remplaçant C_1 et $C_2^{'}$ par leurs valeurs respectives dans l'expression (14), on aboutit alors à une équation qui ne décrit plus que la constante C_2 :

$$C_2 = \frac{\Delta p}{2\mu_2}\left(\frac{\mu_1\left(d^2 - H^2\right) - \mu_2 d^2}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)}\right) \tag{15}$$

En identifiant la valeur de $C_2^{'}$ donnée par l'expression (15) dans le système (11)-(13), on détermine alors complètement l'ensemble des constantes qui définissent $u_{x,1}$ et $u_{x,2}$:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\Delta p}{2\mu_1}\left(\frac{\mu_1\left(d^2 - H^2\right) - \mu_2 d^2}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)}\right) \\
C_1^{'} &= 0 \\
C_2 &= \frac{\Delta p}{2\mu_2}\left(\frac{\mu_1\left(d^2 - H^2\right) - \mu_2 d^2}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)}\right) \\
C_2^{'} &= \frac{\Delta p H}{2\mu_2}\left(\frac{\left(\mu_2 - \mu_1\right)\left(d^2 - H^2\right)}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)}\right)
\end{aligned} \tag{16}$$

On peut ainsi exprimer analytiquement la vitesse de l'écoulement de Poiseuille stationnaire 2D dans chaque fluide par :

$$\begin{aligned} u_{x,1} &= \frac{\Delta p}{2\mu_1}\left(y^2 + \frac{\mu_1\left(d^2 - H^2\right) - \mu_2 d^2}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)} y \right) \\ u_{x,2} &= \frac{\Delta p}{2\mu_2}\left(y^2 + \frac{\left(\mu_1\left(d^2 - H^2\right) - \mu_2 d^2\right) y + H\left(d^2 - Hd\right)\left(\mu_2 - \mu_1\right)}{\mu_2 d - \mu_1\left(H - d\right)} \right) \end{aligned} \tag{17}$$

La solution analytique de la pression découle directement de l'équation (3) dans laquelle on injecte la solution théorique du champ de vitesse (17). On peut aussi directement intégrer l'expression (1) :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \Delta p x + K_1 \\ p_2(x) &= \Delta p x + K_2 \end{aligned} \tag{18}$$

Où K_1 et K_2 sont des constantes d'intégration par rapport à x. Or $p_1(x) = p_2(x)$ en $y = H / d$, donc $K_1 = K_2$. On a de plus $p = p_g$ en $x = 0$ et $p = p_d$ en $x = L$.

D'où la solution en pression :

$$p(x) = \frac{\left(p_d - p_g\right)}{L} x + p_g \tag{19}$$

Annexe C : « Fonction Intégro-exponentielle »

- ***Définition de l'exponentielle intégrale:***

Pour des valeurs de x positives, l'exponentielle intégrale d'ordre $n(n > 0)$ est définie par :

$$E(x) = \int_0^1 \mu^{n-2} \, exp(-x/\mu) d\mu \, (20)$$

- ***Dérivée des exponentielles intégrales :***

$$\frac{d}{dx} E_n(x) = -E_{n-1}(x) \qquad n \geq 2 \, (21)$$

$$\frac{d}{dx} E_1(x) = -\frac{1}{x} exp(-x) (22)$$

- ***Intégrale des fonctions intégro-exponentielles :***

$$\int E_n(x) dx = -E_{n+1}(x) (23)$$

- ***Relation de récurrence :***

$$nE_{n+1}(x) = exp(-x) - xE_n(x) = exp(-x) + x \frac{d}{dx} E_{n+1}(x) \qquad n \geq 1 \, (24)$$

- ***Valeurs en 0 :***

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} \qquad n \geq 2 \, (25)$$

$$E_1(0) = +\infty \, (26)$$

- ***Limites à l'infini :***

$$E_n(x) = \frac{exp(-x)}{x}\left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3} + \ldots\right] (27)$$

$$\lim_{x\to\infty} E_n(x) \to \frac{exp(-x)}{x} \to 0 \ (28)$$

- ***Développement série :*** $n \geq 2$

$$E_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!}\left[-ln(x) + \psi(n)\right] - \sum_{\substack{m=0 \\ (m\neq n-1)}}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!} (29)$$

où : $\psi(1) = -\gamma$ et $\psi(n) = -\gamma + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$ (30)

$\gamma = 0.577216$: Constante d'Euler.

- ***Représentation des fonctions*** $E_2(x)$ ***et*** $E_3(x)$ ***:***

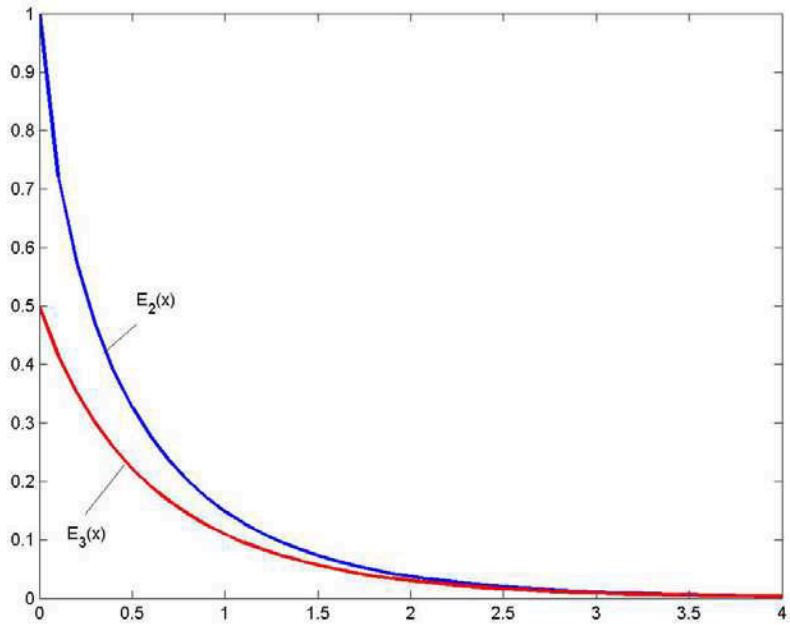


Figure I : Fonctions intégro-exponentielles

Annexe D : *« Présentation des coefficients spatiaux A_m^l en fonction des moments de la luminance pour la méthode P3 »*

La luminance radiative est transformée en série harmonique sphérique sous forme :

$$L^{'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_l^m(\boldsymbol{r}) Y_l^m(\theta,\varphi) \tag{1}$$

avec :

$$Y_l^m(\omega) = \left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{\frac{1}{2}} e^{jm\varphi} P_l^m(\cos\theta) \; (j = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

où :

$P_l^m(\mu = \cos\theta)$: Polynômes de Legendre de 1ère espèce

En développant la luminance en série avec $(l = 3)$ (méthode *P3*), on obtient l'expression suivante :

$$L^{'}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \begin{bmatrix} A_0^0 + \sqrt{3}A_1^0 \cos\theta - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin\theta\left(\left(A_1^1 - A_1^{-1}\right)\cos\varphi + j\left(A_1^1 + A_1^{-1}\right)\sin\varphi\right) \\ + \sqrt{\frac{15}{8}} \sin^2\theta\left(\left(A_2^2 - A_2^{-2}\right)\cos 2\varphi + j\left(A_2^2 + A_2^{-2}\right)\sin 2\varphi\right) \\ - \sqrt{\frac{15}{2}} \cos\theta \sin\theta\left(\left(A_2^1 - A_2^{-1}\right)\cos\varphi + j\left(A_2^1 + A_2^{-1}\right)\sin\varphi\right) \\ + \sqrt{\frac{5}{9}}\left(3\cos^2\theta - 1\right)A_2^0 + \sqrt{\frac{7}{4}}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)A_3^0 \\ - \sqrt{\frac{35}{16}} \sin^3\theta\left(\left(A_3^3 - A_3^{-3}\right)\cos 3\varphi + j\left(A_3^3 + A_3^{-3}\right)\sin 3\varphi\right) \\ + \sqrt{\frac{105}{8}} \cos\theta \sin^2\theta\left(\left(A_3^2 - A_3^{-2}\right)\cos 2\varphi + j\left(A_3^2 + A_3^{-2}\right)\sin 2\varphi\right) \\ - \sqrt{\frac{21}{16}}\left(5\cos^2\theta - 1\right)\sin\theta\left(\left(A_3^1 - A_3^{-1}\right)\cos\varphi + j\left(A_3^1 + A_3^{-1}\right)\sin\varphi\right) \end{bmatrix} \tag{3}$$

En substituant l'expression de la luminance ci-dessus dans l'équation de la définition des moments de la luminance, on obtient des relations entre les coefficients spatiaux A_m^l et les moments de la luminance :

$$L_{i,j,k} = f\left(A_l^m\right) \tag{4}$$

Pour la méthode *P3*, on a relations couplées. En inversant ces relations, on obtient les expressions des coefficients spatiaux en fonction des moments de la luminance :

$$A_0^0 = \beta L_0 \tag{5}$$

$$A_1^0 = \sqrt{3}\beta L_1 \tag{6}$$

$$A_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\beta\left(L_2 + jL_3\right) \tag{7}$$

$$A_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}\beta\left(L_2 - jL_3\right) \tag{8}$$

$$A_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4}}\beta\left(L_{11} - L_0\right) \tag{9}$$

$$A_2^{-1} = \sqrt{\frac{15}{2}}\beta\left(L_{12} + jL_{13}\right) \tag{10}$$

$$A_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{2}}\beta\left(L_{12} - jL_{13}\right) \tag{11}$$

$$A_2^{-2} = \sqrt{\frac{15}{8}}\beta\left(2jL_{23} + L_{22} - L_{33}\right) \tag{12}$$

$$A_2^2 = \sqrt{\frac{15}{8}}\beta\left(L_{22} - 2jL_{23} - L_{33}\right) \tag{13}$$

$$A_3^0 = \sqrt{\frac{7}{4}}\beta\left(5L_{111} - 3L_1\right) \tag{14}$$

$$A_3^{-1} = \sqrt{\frac{21}{16}}\beta\left[\left(5L_{211} - L_2\right) + j\left(5L_{311} - L_3\right)\right] \tag{15}$$

$$A_3^1 = \sqrt{\frac{21}{16}}\beta\left[\left(5L_{211} - L_2\right) - j\left(5L_{311} - L_3\right)\right] \tag{16}$$

$$A_3^{-2} = \sqrt{\frac{105}{8}}\beta\left(2L_{122} - L_1 + L_{111} + 2jL_{123}\right) \tag{17}$$

$$A_3^2 = \sqrt{\frac{105}{8}}\beta\left(2L_{122} - L_1 + L_{111} - 2jL_{123}\right) \tag{18}$$

$$A_3^{-3} = \sqrt{\frac{35}{16}}\beta\left[L_{222} - 3L_{233} - j\left(L_{333} - 3jL_{322}\right)\right] \tag{19}$$

$$A_3^3 = \sqrt{\frac{35}{16}}\beta\left[L_{222} - 3L_{233} + j\left(L_{333} - 3jL_{322}\right)\right] \tag{20}$$

où : $\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$

En utilisant la relation entre des moments d'ordre élevé et de celle de 0, 1, on va obtenir quatre expressions intéressantes suivantes :

$$L_0 = L_{11} + L_{22} + L_{33} \tag{21}$$

$$L_1 = L_{111} + L_{122} + L_{133} \tag{22}$$

$$L_2 = L_{211} + L_{222} + L_{233} \tag{23}$$

$$L_0 = L_{311} + L_{322} + L_{333} \tag{24}$$

Annexe E : « *Opérateurs mathématiques dans les différents systèmes de coordonnées* »

1. Divergence d'un vecteur

1.1. Coordonnées cartésiennes

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial}{\partial x} V_x + \frac{\partial}{\partial y} V_y + \frac{\partial}{\partial z} V_z \tag{1}$$

1.2. Coordonnées cylindriques

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial}{\partial r}\left(r V_r\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} V_\theta + \frac{\partial}{\partial z} V_z \tag{2}$$

1.3. Coordonnées sphériques

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 V_r\right) + \frac{1}{r\,sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(V_\theta\, sin\,\theta\right) + \frac{1}{r\,sin\,\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} V_\varphi \tag{3}$$

2. Gradient d'un scalaire

2.1. Coordonnées cartésiennes

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{4}$$

2.2. Coordonnées cylindriques

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{5}$$

2.3. Coordonnées sphériques

$$\nabla T = \left(\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}, \frac{1}{r\,sin\,\theta}\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) \tag{6}$$

3. Laplacien d'un scalaire

3.1. Coordonnées cartésiennes

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{7}$$

3.2. Coordonnées cylindriques

$$\Delta T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{8}$$

3.3. Coordonnées sphériques

$$\nabla T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \tag{9}$$

4. Opérateur $\frac{dL(\boldsymbol{r},\beta,\phi)}{ds}$

On définit ici le cosinus directeur : $\vec{l} = (\sin\beta\cos\phi, \sin\beta\sin\phi, \cos\beta)$

4.1. Coordonnées cartésiennes

$$\frac{dL}{ds} = \sin\beta\cos\phi\frac{\partial L}{\partial x} + \sin\beta\cos\phi\frac{\partial L}{\partial y} + \cos\beta\frac{\partial L}{\partial z} \tag{10}$$

4.2. Coordonnées cylindriques (r,θ,z)

$$\frac{dL}{ds} = \sin\beta\cos\phi\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\beta\sin\phi\left(\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial L}{\partial \theta}\right) + \cos\beta\frac{\partial L}{\partial z} \tag{11}$$

4.3. Coordonnées sphériques (r,θ,φ)

$$\frac{dL}{ds} = \cos\beta\frac{\partial L}{\partial r} + \sin\beta\cos\phi\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{\sin\beta\sin\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\sin\beta}{r}\frac{\partial L}{\partial \beta} - \frac{\sin\beta\sin\phi}{r\tan\theta}\frac{\partial L}{\partial \phi} \tag{12}$$

Titre : Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : *« prise en compte du transfert radiatif »*

Résumé : L'objet de ce travail est de proposer un modèle adapté pour la simulation du remplissage de moules qui réponde au meilleur compromis entre temps de calcul et précision des résultats. La difficulté est double. Il faut prendre en compte le phénomène de remplissage qui est un problème complexe à frontières libres et les spécificités liées au Verre : viscosité fortement thermodépendante et température de fusion élevée qui nécessite de prendre en compte le rayonnement. Le Chapitre I est consacrée à la partie écoulement du Verre liquide. La bibliothèque numérique Aquilon/Thétis, adaptée pour traiter ce type de problèmes et les couplages thermique air/verre/parois, a été utilisée (Méthode V.O.F pour le suivi de l'interface, méthodes de type Lagrangien augmenté/Projection vectorielle pour le couplage Vitesse-Pression). Pour l'aspect radiatif, différentes approches sont proposées : conductivité radiative équivalente (Chapitre II), méthode explicite directe pour la validation (Chapitre III) et méthode d'harmoniques sphériques ou méthode PN (Chapitre IV). Dans le Chapitre V, la méthode PN retenue est validée dans des cas simples et est appliquée ensuite à des cas avec couplage convectif en géométries complexes et obstacles semi-transparents (1D, 2D et 3D, 2D axi-symétrique et milieu non gris). Une version P1 modifiée est présentée. Les résultats sont assez proches de ceux donnés par la méthode P3 avec des temps de calcul modestes. L'intérêt de ce modèle est qu'il est facilement intégrable dans des codes numériques existants : une seule équation différentielle du second ordre stationnaire à résoudre en 3D.

Mots-clés : Remplissage moules verriers, Matériaux semi-transparents, Méthode VOF, Lagrangien augmenté, Projection vectorielle, Transferts radiatifs, Conductivité radiative équivalente, Méthode explicite directe, Méthode des harmoniques sphériques, Méthode PN.

Title: Modelling and simulation of glass mould filling taking into account radiative transfer

Abstract: The aim of this study is to propose an adapted model for the simulation of mould filling that must be a compromise solution between computational time and results accuracy. The double difficulty is to take into account the filling phenomenon that is a complex problem due to the presence of free boundaries and to the Glass specificities: viscosity that is highly thermal dependant and high melting temperature that requires taking into account radiation effects. Chapter I is devoted to the melting Glass flow. The numerical libraries Aquilon/Thétis, adapted for solving such type of problems and the thermal coupling between Air/Glass/Walls, has been used. (V.O.F method for front tracking, Augmented Lagrangian/Vector Projection methods for solving Pressure/Velocity coupling). For radiative aspect, different approaches are proposed: equivalent radiative conductivity (Chapter II), direct explicit method for validation (Chapter III) and spherical harmonics method or PN method (Chapter IV). In the Chapter V, the selected PN method is validated through simple cases and is then applied in other cases with convective coupling in complex geometries including semi-transparent inclusions (1D, 2D and 3D, 2D axi-symmetric and non grey medium). A P1 modified version is presented. The results are close to those given by P3 method but with reduced computational time. The main interest of this model is that it can be easily implemented in existing numerical codes: a single stationary second order partial differential equation to solve in 3D.

Key-words: Glass Mould Filling, Semi-Transparent Materials, VOF Method, Augmented Lagrangian, Vector Projection, Radiative Transfer, Equivalent Thermal Conductivity, Direct Explicit Method, Spherical Harmonics Method, PN Method.

INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur Jean-Paul CALTAGIRONE, Professeur, Lab. Trefle, ENSCPB, Pessac
Monsieur Didier DELAUNAY, Directeur de Recherche, Polytech, Nantes

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur NGUYEN Hoang Quan

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Modélisation et simulation du remplissage de moules verriers : "*Prise en compte du transfert radiatif*"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Mécanique et Energétique** »

Fait à Vandoeuvre, le 17 septembre 2009
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDŒUVRE CEDEX

TEL. 33/03.83.59.59.59
FAX. 33/03.83.59.59.55