

Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique

Massamaesso Bilasse

▶ **To cite this version:**

Massamaesso Bilasse. Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2010. Français. NNT : 2010METZ032S . tel-01748929

HAL Id: tel-01748929
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748929

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Université Paul Verlaine – Metz
UFR M.I.M

École doctorale EMMA

Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 07 octobre 2010

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz

Spécialité : Mécanique

par

Massamaesso BILASSE

Composition du jury

Rapporteurs :	Prof.Dr Erasmo CARRERA	Ecole Polytechnique de Torino, Italie
	Prof.Dr Bruno COCHELIN	Ecole Centrale de Marseille, France
Examinateurs :	Prof.Dr Lahcen AZRAR	Faculté des Sciences et Techniques de Tanger, Maroc
	Prof.Dr Noureddine BOUHADDI	Université Franche Comté, France
	Prof.Dr Jean-François DEÜ	Conservatoire National des Arts et Métiers, France
	Prof.Dr Paolo VANNUCCI	Université de Versailles et St-Quentin, France
Directeur :	Prof.Dr El Mostafa DAYA	Université Paul Verlaine de Metz, France

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux — FRE CNRS 3236

L P M M

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse ont été menés d'octobre 2007 à septembre 2010 à l'Université Paul Verlaine de Metz au sein de l'équipe *Mécanique Numérique* du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, futur LEM3.

Je tiens à remercier tout d'abord mon Directeur de thèse Monsieur El Mostafa DAYA de m'avoir accueilli et de m'avoir confié ce sujet de thèse. Durant ce parcours, il m'a fait découvrir le domaine passionnant de l'amortissement et du contrôle des vibrations. Je voudrais lui témoigner ma profonde gratitude pour sa disponibilité, sa rigueur scientifique et pour l'ambiance conviviale de travail qui a règné au cours du déroulement de la thèse. Il m'a beaucoup apporté dans l'aboutissement de ce travail par ses encouragements, ses éclaircissements ainsi que nos précieux échanges tant d'un point de vue numérique que théorique.

J'adresse mes remerciements à Madame Isabelle CHARPENTIER et à Monsieur Yao KOUTSAWA pour leur aide et leurs conseils en matière de différentiation automatique sur laquelle repose une grande partie de mon travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Lahcen AZRAR pour son expertise qu'il m'a apporté en vibration non linéaire et pour la motivation sans faille qu'il a instigué en moi, ce fut un grand plaisir d'avoir travaillé ensemble.

Je remercie vivement Messieurs Erasmo CARRERA et Bruno COCHELIN pour avoir accepté la lourde charge de rapporter mes travaux de thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres de jury associés Messieurs Noureddine BOUHADDI, Jean-François DEÜ et Paolo VANNUCCI pour avoir accepté d'examiner mes travaux de thèse. Qu'il me soit permis de leur exprimer ici ma profonde gratitude.

Je remercie personnellement Monsieur Sonnou TIEM qui a initié cette ouverture vers la préparation d'un doctorat sans oublier le Ministère Français de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche pour l'Allocation de Recherche octroyée et qui a permis le déroulement de la thèse dans de bonnes conditions matérielles.

Mes chaleureux remerciements vont à toute ma famille pour son soutien moral indéfectible, à mes collègues Monsieur Komlanvi LAMPOH pour m'avoir aidé à dépanner les problèmes courants d'informatique et Monsieur Komlan APEDO pour ses encouragements réguliers. Enfin, je voudrais remercier tout le personnel du LPMM et mes collègues doctorants pour les services rendus par les uns et les autres et pour le cadre et l'ambiance de travail.

Je dédie cette thèse

à mes parents,

à mes frères et sœurs

Table des matières

Table des figures ix

Liste des tableaux xiii

Listes des symboles et abréviations xv

Introduction générale 1

Chapitre 1 Etude bibliographique et positionnement du sujet de la thèse 9

1.1 Introduction . . . 11
1.2 Rappels sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement . . 11
1.2.1 Principes fondamentaux en viscoélasticité . . . 11
1.2.2 Notion d'amortissement . . . 16
1.2.3 Modèles rhéologiques usuels en viscoélasticité linéaire . . . 20
1.2.4 Dépendance en fréquence et en température des matériaux viscoélastiques . . . 24
1.3 Modélisation des vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques . . . 30
1.3.1 Modèles cinématiques pour l'amortissement passif . . . 31
1.3.2 Méthodes de résolution du problème des vibrations linéaires . . . 34
1.4 Etude des vibrations non linéaires des sandwichs viscoélastiques . . . 47
1.5 Bilan et positionnement du sujet . . . 52

Chapitre 2 Une approche générique pour le calcul des propriétés amortissantes 57

2.1 Introduction . . . 59

2.2 Formulation élément fini du problème de vibrations libres des structures sandwichs 60
2.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement 60
2.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement 64
2.2.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis 65
2.3 L'approche *diamant* pour les problèmes non linéaires 67
2.3.1 De la méthode asymptotique numérique à l'approche *diamant* . 68
2.3.2 La boîte à outil *diamant* en bref 71
2.4 Résolution générique du problème de vibrations libres des structures sandwichs 72
2.4.1 Technique d'homotopie 74
2.4.2 Procédure de continuation 75
2.4.3 Valeurs propres et vecteurs propres 76
2.4.4 Solveur *diamant* et son implémentation 78
2.5 Validation numérique et discussion 80
2.5.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant 81
2.5.2 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement faible . 83
2.5.3 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement élevé . 85
2.6 Conclusion 87

Chapitre 3 Une méthode numérique pour l'étude des vibrations non linéaires 89

3.1 Introduction 91
3.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires de poutres sandwichs 92
3.2.1 Hypothèses cinématiques et lois de comportement 92
3.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement 94
3.3 Discrétisation par élément fini et modes de vibrations linéaires 96
3.4 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire 99
3.4.1 Problème d'équilibre dans le plan 100
3.4.2 Equation d'amplitude non linéaire 101
3.5 Analyse des vibrations linéaires et non linéaires par l'équation d'amplitude 102
3.5.1 Approche simplifiée 103
3.5.2 Approche générale 105
3.6 Tests numériques et analyse 106
3.6.1 Tests numériques du modèle viscoélastique constant 108

3.6.2 Tests numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence . . . 114
3.7 Conclusion . . . 124

Chapitre 4 Analyse par modes complexes des vibrations non linéaires 127
4.1 Introduction . . . 129
4.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires des plaques sandwichs 130
4.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement . . . 130
4.2.2 Equation du mouvement . . . 133
4.3 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire . . . 136
4.3.1 Formulation du problème d'équilibre dans le plan . . . 137
4.3.2 Formulation de l'équation d'amplitude . . . 138
4.4 Discrétisation par la méthode des éléments finis . . . 140
4.4.1 Problème de valeur propre . . . 140
4.4.2 Problème d'équilibre dans le plan . . . 142
4.4.3 Coefficients de l'équation d'amplitude . . . 144
4.5 Résultats numériques . . . 145
4.5.1 Résultats numériques du modèle viscoélastique constant . . . 147
4.5.2 Résultats numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence . . . 155
4.6 Conclusion . . . 165

Conclusion générale et perspectives 167

Annexes 173

Annexe A Caractérisation des matériaux viscoélastiques 173

Annexe B Solutions analytiques du problème de vibration linéaire 177
B.1 Structure sandwich poutre en appui simple . . . 177
B.2 Structure sandwich plaque en appui simple . . . 178

Annexe C Elément fini sandwich poutre 179
C.1 Matrices élémentaires . . . 179
C.2 Rigidité non linéaire pour une poutre sandwich à bords axialement immobiles . . . 180

Annexe D Elément fini sandwich plaque **183**

D.1 Matrices de comportement 183

D.2 Matrices élémentaires 184

D.3 Rigidité non linéaire 185

Annexe E Méthode Asymptotique Numérique (MAN) **187**

E.1 Technique de perturbation 188

E.2 Définition du paramètre de chemin 190

Bibliographie **191**

Table des figures

1 Configuration de contrôle passif, actif et hybride 3

1.1 Déphasage entre contrainte et déformation 19
1.2 Hystérèse contrainte-déformation en fonction de η 20
1.3 Modèles rhéologiques standards classiques 21
1.4 Modèles rhéologiques fractionnaires de base 23
1.5 Module et facteur de perte en fonction de la température 25
1.6 Module et facteur de perte en fonction de la fréquence et de la température 26
1.7 Sandwich à âme viscoélastique et cinématique en flexion 30
1.8 Modèles cinématiques 32
1.9 Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes 41

2.1 Structure sandwich viscoélastique 60
2.2 Graphe d'appel du solveur *diamant* 78

3.1 Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1.5$ . . . 113
3.2 Réponses linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1$ et $\eta_c = 1.5$ 113
3.3 Phases linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1$ et $\eta_c = 1.5$ 114

3.4 Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C et un cœur en PVB à 20°C . 119
3.5 Réponses linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 20°C 119
3.6 Phases linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 20°C 120
3.7 Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich en appui simple avec un cœur en ISD112 à 20°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$ 121
3.8 Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich encastrée-appuyée avec un cœur en ISD112 à 27°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$ . . 122
3.9 Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich en appui simple avec un cœur en ISD112 à 27°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$ 123

4.1 Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la plaque sandwich CSCS avec un cœur en polymère à module constant pour $\eta_c = 1$ 152
4.2 Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich SSSS avec un cœur en polymère à module constant, $f(L/2, l/2) = 5N$ 153
4.3 Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CCCC avec un cœur en polymère à module constant, $f(L/2, l/2) = 10N$ 154
4.4 Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la plaque sandwich CFCF avec un cœur en ISD112 à 27°C 156
4.5 Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CCCC avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$ 158

4.6 Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CSCS avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$ 159
4.7 Réponses et phases linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$ 160
4.8 Réponses et phases non linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$ 161
4.9 Variation de l'amortissement linéaire en fonction de la température . . 163
4.10 Réponses et phases non linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich SSSS avec un cœur en DYAD606, $f(L/2, l/2) = 1N$ 164

A.1 Essai de fluage 173
A.2 Essai de relaxation 174
A.3 Essai de recouvrance 175
A.4 Essai d'effacement 175

E.1 Schéma descriptif de la MAN 188

Liste des tableaux

1.1 Lois de comportement et modules opérationnels des modèles standards 22

2.1 Algorithme de continuation du solveur *diamant*, calcul des séries par DA 79

2.2 Caractéristiques de la poutre sandwich aluminium/polymère/aluminium 82

2.3 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/polymère/aluminium 83

2.4 Caractéristiques de la poutre sandwich verre/PVB/verre 84

2.5 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich bi-encastrée verre/PVB/-verre à 20°C 85

2.6 Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour l'ISD112 à 27°C et 20°C 86

2.7 Caractéristiques de la poutre sandwich aluminium/ISD112/aluminium 86

2.8 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/ISD112/aluminium à 27°C 87

3.1 Caractéristiques de la poutre sandwich avec différents modèles viscoélastiques pour le cœur 108

3.2 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre, cœur à module complexe constant 109

3.3 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich en appui simple, cœur à module complexe constant 110

3.4 Coefficients de rigidité non linéaire de la poutre sandwich, cœur à module complexe constant . . . 112
3.5 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre avec un cœur en IDS112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$) . . . 115
3.6 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich bi-encastrée avec un cœur en IDS112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$) . . . 116
3.7 Coefficients de rigidité non linéaire de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$) . . . 118

4.1 Caractéristiques de la plaque sandwich avec différents modèles viscoélastiques pour le cœur . . . 146
4.2 Propriétés amortissantes de la poutre sandwich avec un cœur en polymère à module constant : comparaison avec le modèle poutre à une dimension . . . 148
4.3 Coefficients de rigidité non linéaire C^R et C^I de la poutre sandwich avec un cœur en polymère à module constant : comparaison avec le modèle poutre à une dimension . . . 149
4.4 Propriétés amortissantes de la plaque sandwich avec un cœur en polymère à module constant pour le facteur de perte $\eta_c = 0.5$ . . . 150
4.5 Propriétés modales de la plaque sandwich avec un cœur en polymère à module constant . . . 151
4.6 Propriétés modales de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $\omega \approx \omega_0$ . . . 157
4.7 Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour le DYAD606 . . . 162
4.8 Propriétés modales correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en DYAD606, $\omega \approx \omega_0$ . . . 163

Listes des symboles et abréviations

Symboles alphabétiques

A	:	amplitude complexe de module a
a	:	paramètre de chemin, désigne aussi le module de A
a_{max}	:	rayon de convergence
B,B_x,B_y	:	mode de rotation
B_l	:	matrice d'interpolation des déformations
B^*	:	rigidité équivalente en flexion
C_m,C_{2m},C^*_{2m}	:	matrice de comportement en membrane
C_f,C_{2f},C^*_{2f}	:	matrice de comportement en flexion
C_{2s},C^*_{2s}	:	matrice de comportement en cisaillement
C^R, C^I	:	coefficient de rigidité non linéaire
$\mathcal{C}$	:	opérateur de la transformation de Carson
D^α	:	opérateur de la dérivation non-entière d'ordre α
E_a	:	énergie d'activation de la relaxation
E_d	:	énergie dissipée
E_p	:	énergie potentielle maximale
E^*_c, E^*	:	module d'Young complexe du cœur
E_0, E_c	:	module d'Young d'élasticité retardée du cœur
E_f	:	module d'Young des faces
$E(\omega)$, $E(\lambda)$	:	fonction de la dépendance en fréquence du module d'Young

F	:	vecteur des sollicitation harmoniques imposées
f	:	force harmonique imposée
F_n	:	second membre du problème de la MAN
$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$	:	fonctionnelles
G_c^*, G^*	:	module de cisaillement complexe du cœur
G_0, G_2	:	module de cisaillement d'élasticité retardée du cœur
g	:	paramètre de cisaillement
h	:	épaisseur totale du sandwich
h_c	:	épaisseur du cœur
h_f	:	épaisseur des faces
h_i	:	épaisseur de la couche i
$\mathcal{H}$	:	fonction échelon unité de Heaviside
I_d	:	vecteur identité
I_c	:	moment quadratique de la section droite du cœur
I_f	:	moment quadratique de la section droite des faces
$\mathcal{J}$	:	fonction de fluage
$\mathcal{J}^*$	:	complaisance opérationnelle
k, k_{nl}	:	rigidités modales
K^e, K, K_v^e, K_v, K_0^e, K_0	:	matrices de rigidité
k_i^e, m^e	:	matrices d'intégration des fonctions de forme
$\mathcal{L}$	:	opérateur de la transformation de Laplace
L	:	longueur du sandwich
l	:	largeur du sandwich
L_t	:	opérateur linéaire tangent du problème de la MAN
m	:	masse modale
M^e, M	:	matrices de masse
M_i, M_β, M_w	:	moments fléchissants
N_i, N, N_0, $N_{2\omega}$	:	efforts normaux

N_w, N_β,$N_{\beta x}$,$N_{\beta y}$,N_u,N_v	:	matrices des fonctions de forme
Q	:	force modale
$\mathcal{R}$	:	fonction de relaxation
$\mathcal{R}^*$	:	module opérationnel
T, Q_i	:	effort tranchant de cisaillement
t	:	variable temporelle
$\mathscr{R}(U,\lambda)$, $S(U,\lambda)$, $T(U,\lambda)$	:	vecteurs résidu
$\mathscr{R}_n$, S_n, T_n, U_n, λ_n	:	coefficients de Taylor de $\mathscr{R}$, S, T, U et λ à l'ordre n
r	:	norme du résidu $\mathscr{R}$
S_c	:	aire de la section droite du cœur
S_f	:	aire de la section droite des faces
$\underline{u}$	:	vecteur champ de déplacement
U_i, u_i, u, u_0, $u_{2\omega}$	:	déplacement longitudinal suivant (Ox)
V_i, v_i, v, v_0, $v_{2\omega}$	:	déplacement longitudinal suivant (Oy)
U^e,U^e_{i0}, U^e_{i2},	:	vecteur élémentaire des déplacements nodaux
U, U_0, U^a_0, U_r, U_c	:	vecteur propre, mode propre
W	:	mode de flexion
w	:	déplacement transversal suivant (Oz)
Y	:	paramètre de géométrie

Symboles grecs

$-\alpha$	:	phase du mode de flexion W
α_T	:	facteur de décalage
$\alpha_T\omega$	:	fréquence réduite
β, β_i, β_x, β_y	:	rotations
(Δ_j, Ω_j)	:	paramètres du modèle de Maxwell généralisé
η_2, η_c	:	facteur de perte du cœur

η, η_l, η_{nl}	:	amortissement ou facteur de perte structurel
ε	:	paramètre de précision pour le problème de la MAN
ε_i, $\underline{\underline{\varepsilon}}$	:	déformation normale, tenseur de déformation
σ_i, $\underline{\underline{\sigma}}$	:	contrainte normale, tenseur de contrainte
ξ_2	:	tenseur de déformation en cisaillement
Γ_i, Γ_{i0}, Γ_{i2}	:	tenseur de déformation linéaire en membrane
κ_i, κ	:	tenseur de déformation linéaire en flexion
Γ^{nl}, Γ_0^{nl}, $\Gamma_{2\omega}^{nl}$	:	tenseur de déformation non linéaire en flexion
ν_c	:	coefficient de Poisson du cœur
ν_f	:	coefficient de Poisson des faces
ρ_c	:	densité massique du cœur
ρ_f	:	densité massique des faces
χ	:	multiplicateur de Lagrange
ψ	:	coefficient de frottement interne
Ω, Ω_l, Ω_{nl}	:	fréquence de résonance ou pulsation amortie
ω, ω_0, ω_0^a	:	fréquence ou pulsation
θ	:	phase de l'amplitude A

Abréviations

ADF	:	Anelastic Displacement Field
DA	:	Différentiation Automatique
DKT	:	Discrete Kirchhoff Triangle
diamant	:	DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée
EF	:	Elément Fini
GHM	:	Golla Hughes MacTavish
MAN	:	Méthode Asymptotique Numérique

MCA	:	Mode Complexe Approché
MCE	:	Mode Complexe Exact
MR	:	Mode Réel
MRA	:	Mode Réel Amélioré
MSER	:	Modal Strain Energy mode Réel
MSEC	:	Modal Strain Energy mode Complexe
PVB	:	Polyvinyl de Butyral

Notations

$\delta(\bullet)$	:	quantité virtuelle
δP_{int}	:	puissance virtuelle des efforts intérieurs
δP_{ext}	:	puissance virtuelle des efforts extérieurs
δP_{acc}	:	puissance virtuelle des efforts d'inertie
$\bullet_{,x} = \partial \bullet / \partial x$	:	dérivée spatiale
$\dot{\bullet} = \partial \bullet / \partial t$	:	dérivée temporelle
$\bullet^R$, $\mathbf{Re}(\bullet)$	:	partie réelle
$\bullet^I$, $\mathbf{Im}(\bullet)$	:	partie imaginaire
$(*)$	:	opérateur du produit de convolution
$\overline{\bullet}$, CC	:	conjugué du nombre complexe
$\lvert\bullet\rvert$	:	module du nombre complexe

Introduction générale

Contexte

Afin de préserver les structures et les édifices contre la fatigue et la rupture, il est indispensable de caractériser et ensuite de contrôler leur comportement vibratoire. L'une des causes de rupture est la fatigue structurale due au rayonnement acoustique et l'ampleur des amplitudes de vibration en réponse à une excitation forcée déterministe ou aléatoire. L'étude ou l'analyse des vibrations n'est pas une science récente et pourtant elle connaît depuis quelques années un regain d'intérêt pour des besoins de conception et de dimensionnement des structures répondant aux meilleures conditions de fonctionnement, de sécurité, d'économie, d'esthétique et d'isolation acoustique. Face à ces exigences, les matériaux composites paraîssent une solution idéale grâce à leur multifonctionnalité intégrée. On s'y intéresse fortement dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatial, la construction navale, la construction automobile, l'électroménager, le génie civil, le génie nucléaire, l'acoustique et bien d'autres. Pour réduire et contrôler le rayonnement acoustique et l'amplitude des vibrations, trois types de solutions existent. La première solution consiste à éliminer le bruit engendré par la vibration et non la vibration elle-même. Pour ce faire, la technique utilisée est une production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire de sorte à parvenir à l'annulation des deux sources opposées. La deuxième solution est une isolation consistant à éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans toutefois éliminer la source émettrice elle-même. Enfin,

la troisième solution est une technique d'atténuation ou d'amortissement utilisée pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système par intégration des matériaux absorbants ou adaptatifs depuis la conception. Cette dernière solution est la plus répandue et utilise trois principes d'amortissement. Le principe dit "passif" est introduit par l'intégration ou l'ajout des matériaux possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure de sorte à amortir les vibrations de façon passive c'est-à-dire sans aucune intervention extérieure. Dans la pratique, ce principe est réalisé en associant une fine couche de polymère viscoélastique entre deux parements métalliques (figure 1) permettant de fabriquer des tôles composites à fort pouvoir amortissant tout en conservant les caractéristiques de résistance et de rigidité. L'amortissement de la structure est apporté par le polymère viscoélastique présent dans la tôle sandwich grâce à sa propriété de passer d'un état peu rigide (caoutchouteux) à un état rigidifié (vitreux) selon les températures, transformant ainsi l'énergie de déformation en énergie thermique qui dissipe sous forme de chaleur l'énergie vibratoire de la structure. Le principe dit "actif" consiste à intégrer à la structure des capteurs et des actionneurs couplés à un système de contrôle. Ainsi, selon les mesures fournies par le capteur, le système de contrôle après un traitement approprié envoie un signal à l'actionneur qui modifie le comportement vibratoire de la structure pour l'adapter au comportement recquis. Dans la pratique, les capteurs et actionneurs sont fabriqués à partir des matériaux adaptatifs ou dits "intélligents" qui sont généralement des céramiques piézo-électriques ou à mémoire de forme capables de transformer l'énergie de déformation en énergie électrique et vice versa. L'amortissement passif est connu pour être efficace en moyennes et hautes fréquences alors que les performances de l'amortissement actif sont meilleures en basses fréquences. Pour contrôler les vibrations dans une large gamme de fréquence, il existe le principe dit "actif-passif" ou "hybride" qui est un couplage du principe "actif" et du principe "passif". Ainsi la structure intègre à la fois les capteurs, les actionneurs et le polymère viscoélastique. Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à l'amortissement passif des structures sandwichs trois couches à âme viscoélastique.

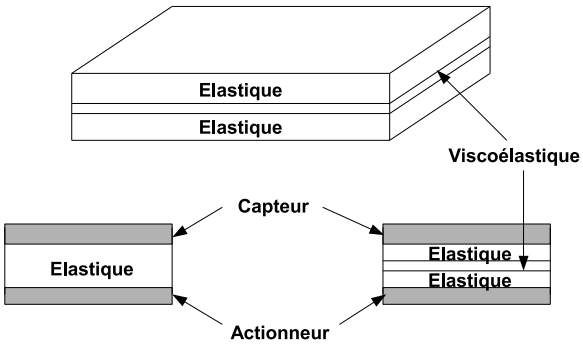


FIG. 1 – Configuration de contrôle passif, actif et hybride

Motivations et objectifs

La configuration passive de contrôle des vibrations des tôles sandwichs offre d'importants avantages technologiques (faible poids, grande rigidité, automatisation facile de la fabrication, facilité de mise œuvre, faible coût de revient...etc). Les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique assurant la fonction amortissante dépendent généralement de la température et de la fréquence. D'un point de vue mécanique, l'amortissement passif des tôles sandwichs se traduit par un cisaillement important de la couche viscoélastique dû à la différence entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur viscoélastique.

Pour les vibrations linéaires, une large gamme de techniques et de logiciels sont dédiés à la modélisation expérimentale et numérique des structures sandwichs en particulier l'analyse modale qui constitue un puissant outil pour la caractérisation et la détermination avec un coût de calcul raisonnable des propriétés amortissantes à savoir le facteur de perte (ou amortissement) et la fréquence amortie associés à chaque mode de vibration. Quoique les concepts et méthodes d'analyse des vibrations de ces structures sandwichs soient bien maîtrisés dans le cas linéaire, les modèles utilisés font généralement abstraction de la dépendance en fréquence et en température des propriétés du matériau viscoélastique. C'est pourquoi depuis quelques années, des travaux ont été

initiés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, puis des algorithmes de résolution utilisant la méthode asymptotique numérique ont été développés pour prendre en compte la dépendance en fréquence du comportement de ces structures. Néanmoins, la pénibilité de mise en œuvre de ces algorithmes due au calcul manuel des dérivées de haut dégré reste à palier pour des besoins de souplesse d'utilisation et d'extension à des modèles viscoélastiques variés quelle que soit la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique.

En revanche, pour des applications industrielles, les vibrations des structures sandwichs soumises aux grands déplacements, contact, frottement, jeu, etc... et avec des géométries ou conditions aux limites complexes posent un problème de modélisation. Quelles que soient les non linéarités considérées, géométriques, matérielles, conditions aux limites ou autres, le contraste est flagrant et on se trouve rapidement limité d'où le besoin d'un effort de recherche. Bien que l'étude des vibrations non linéaires (au sens géométrique) des structures classiques a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années, seulement très peu de chercheurs se sont interessés aux structures sandwichs surtout avec une prise en compte de l'amortissement de type viscoélastique dans la modélisation des vibrations non linéaires. En présence des non linéarités géométriques, le facteur de perte et la fréquence amortie dépendent de l'amplitude des vibrations, ce qui diffère largement du comportement linéaire, d'où la nécessité des modèles capables de prédire la réponse de ces structures à une sollicitation avec une mise en œuvre et un coût de calcul modeste. Ainsi, pour les vibrations non linéaires des structures sandwichs, le peu de travaux existant montre que le domaine mérite encore d'être exploré, la difficulté étant de coupler à la fois les non linéarités géométriques induites par les grands déplacements et les non linéarités matérielles introduites par la dépendance en fréquence et en température du comportement viscoélastique conduisant à des équations complexes et où les analyses sont généralement faites pour des géométries et des conditions aux limites simples.

La modélisation des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs

viscoélastiques demeure un axe de recherche au sein du laboratoire où on souhaite progresser surtout à l'aide de la différentiation automatique pour le traitement des problèmes non linéaires. Ainsi au regard des précédents travaux réalisés au sein de l'équipe de recherche, les principaux objectifs du présent travail s'articulent en deux points à savoir :

• la mise en place d'un algorithme numérique de calcul des modes propres et des propriétés amortissantes des structures sandwichs prenant en compte la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique et cela, quelle que soit la loi de comportement viscoélastique ;

• l'élaboration d'un modèle numérique efficace pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des poutres et plaques sandwichs avec la prise en compte de la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique et ce, sur des géométries et conditions aux limites variées en faisant usage de la méthode des éléments finis.

En clair, il s'agit ici d'une part d'améliorer la mise en œuvre des algorithmes de résolution existant basés sur la méthode asymptotique numérique pour la détermination des fréquences propres et facteurs de perte sans limitation sur les modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence en utilisant les techniques de différentiation automatique, et d'autre part d'établir un modèle prédictif de la réponse linéaire et non linéaire des structures sandwichs soumises à des sollicitations harmoniques en utilisant la technique d'équilibrage harmonique et la méthode de Galerkin à un mode.

Organisation de la thèse

Les travaux réalisés au cours de cette thèse sont présentés dans ce mémoire et s'intitulent en quatre chapitres :

Au chapitre 1, nous présentons un rappel de la théorie de la viscoélasticité linéaire des matériaux non vieillissants et faisons le lien avec le phénomène de dissipation, source de l'amortissement dans ces matériaux. Nous illustrons la dépendance en fréquence des

lois de comportement des matériaux viscoélastiques obtenues par la théorie de la thermodynamique ou par analogie aux modèles rhéologiques. Une étude bibliographique sur l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs est menée pour relever les travaux manquants, puis un bilan de cette revue bibliographique effectué en fin de chapitre permet de bien définir la problématique et le cadre de notre étude ainsi que les moyens utilisés.

Au chapitre 2, nous utilisons un élément fini de type poutre pour formuler le problème de vibration libre linéaire des structures sandwichs viscoélastiques puis nous développons une approche générique de résolution en combinant la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique. A partir de ces développements, nous élaborons un solveur numérique en langage Matlab pour le calcul direct et exact des propriétés amortissantes des sandwichs. Des simulations numériques sont menées et validées sur des structures sandwichs poutres avec diverses lois viscoélastiques pour montrer la simplicité, la généricité, l'efficacité et les performances de cette approche quelle que soit la dépendance en fréquence du modèle viscoélastique.

Au chapitre 3, nous abordons l'étude des vibrations non linéaires des structures sandwichs en commençant par le cas des poutres. Ainsi, nous élaborons une méthode numérique pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs viscoélastiques permettant de prendre en compte la dépendance en fréquence de l'amortissement. Cette méthode est basée sur une approche élément fini et utilise la technique d'équilibrage harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. L'attention est portée particulièrement sur le choix de la base de Galerkin en proposant différentes approximations numériques pour les modes de vibration linéaire : les modes réels (ou non visqueux) et les modes complexes (ou visqueux). Ensuite, une équation d'amplitude gouvernant les vibrations non linéaires est établie et sa résolution permet de caractériser les propriétés amortissantes et les courbes de réponse des structures

sandwichs. Des calculs numériques sont effectués sur une poutre sandwich avec différents modèles viscoélastiques pour le cœur et pour diverses conditions aux limites. La comparaison des résultats obtenus pour chaque approximation du mode permet de discuter la validité des modes réels classiquement utilisés dans la base de Galerkin pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs.

Au chapitre 4, nous proposons une modélisation par éléments finis des vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs basée sur des modes complexes. Il s'agit d'étendre le modèle numérique d'analyse des vibrations non linéaires de poutres sandwichs développé dans le chapitre 3 à l'étude des plaques sandwichs en utilisant un élément fini bidimensionnel. Mais contrairement aux modes réels classiquement utilisés, la base de Galerkin est améliorée en utilisant des modes complexes afin d'accroître l'efficacité du modèle. Des simulations numériques sont menées sur des structures sandwichs poutre et plaque avec des modèles viscoélastiques à différentes températures et pour différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus permettent de valider la méthode et aussi de mettre en évidence l'effet des non linéarités géométriques, des conditions aux limites et de la température sur les propriétés modales et sur les réponses des structures sandwichs viscoélastiques.

Chapitre 1

Etude bibliographique et positionnement du sujet de la thèse

Sommaire

1.1 Introduction 11

1.2 Rappels sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement 11

1.2.1 Principes fondamentaux en viscoélasticité 11

1.2.2 Notion d'amortissement 16

1.2.3 Modèles rhéologiques usuels en viscoélasticité linéaire 20

1.2.4 Dépendance en fréquence et en température des matériaux viscoélastiques 24

1.3 Modélisation des vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques 30

1.3.1 Modèles cinématiques pour l'amortissement passif 31

1.3.2 Méthodes de résolution du problème des vibrations linéaires . 34

1.4 Etude des vibrations non linéaires des sandwichs viscoélastiques 47

1.5 Bilan et positionnement du sujet 52

1.1 Introduction

La modélisation des tôles sandwichs utilisées pour amortir et contrôler les vibrations a retenu l'attention d'un grand nombre de chercheurs ces dernières années. Cependant, les matériaux viscoélastiques responsables de l'amortissement dans ces structures possèdent un comportement non linéaire sous l'effet des sollicitations et des facteurs environnementaux, en l'occurence leur dépendence en fréquence et en température conduisant à des lois de comportement non linéaires et à variables complexes. Afin de mieux appréhender la thématique des structures sandwichs viscoélastiques, nous effectuons dans ce chapitre tout d'abord un rappel sur le formalisme utilisé pour la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques. Ensuite, le reste du chapitre sera consacré à l'étude bibliographique sur la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques. Cette étude bibliographique est formulée en trois grandes parties :

• les modèles cinématiques utilisés pour l'amortissement passif des sandwichs ;

• les modèles analytiques et numériques pour l'étude des vibrations linéaires des sandwichs ;

• les modèles analytiques et numériques d'analyse des vibrations non linéaires des sandwichs.

Un bilan de toute cette revue bibliographique sera fait à la fin du chapitre permettant ainsi de poser le problème et de définir le cadre de notre étude.

1.2 Rappels sur les matériaux viscoélastiques et notion d'amortissement

1.2.1 Principes fondamentaux en viscoélasticité

La viscoélasticité est définie comme caractérisant un comportement mécanique particulier intermédiaire entre le comportement d'un solide idéal dit "Hookéen" et celui d'un liquide idéal dit "Newtonien". La réponse d'un matériau viscoélastique à une dé-

formation est alors un couplage entre la réponse d'un fluide visqueux (contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation) et celle d'un solide élastique (contrainte proportionnelle à la déformation). Cela revient à considérer que les propriétés mécaniques observées sont de façon générale dépendantes du temps ou de ses quantités dérivées. Ainsi, une contrainte appliquée engendre une déformation dans le temps et vice versa, ce qui traduit que les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique évoluent dans le temps et dépendent de l'histoire des sollicitations. Quatre essais fondamentaux permettent de mettre en évidence le comportement viscoélastique des matériaux : essai de fluage, de relaxation, de recouvrance et d'effacement. Ils sont illustrés à l'Annexe A dans le cas d'une sollicitation uniaxiale. Nous présentons ci-après une formulation tridimensionnelle en s'inspirant des ouvrages de Mandel [1], de Christensen [2] et de Salençon [3].

Formulation de la loi de comportement d'un matériau viscoélastique

La formulation fonctionnelle permet d'établir la loi mathématique liant la réponse du matériau à une sollicitation. Puisqu'une contrainte appliquée au matériau engendre une déformation dans le temps et inversément, alors à chaque instant t, la déformation dépend de l'histoire de la contrainte depuis $-\infty$ jusqu'à cet instant et inversément. Il existe alors des fonctionelles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ qui lient les contraintes aux déformations.

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \mathcal{F}\left[\varepsilon_{kl}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] \\ \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{G}\left[\sigma_{kl}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] \end{cases} \tag{1.1}$$

Viscoélasticité linéaire :

Le matériau viscoélastique est dit linéaire, s'il y a une correspondance fonctionnelle linéaire entre les histoires de contraintes et de déformations. Cette linéarité se traduit par le fait que par exemple pour deux états de déformation distincts $\varepsilon^{(1)}$ et $\varepsilon^{(2)}$, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{F}\left[\varepsilon_{kl}^{(1)}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right) + \varepsilon_{kl}^{(2)}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] = \mathcal{F}\left[\varepsilon_{kl}^{(1)}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] + \mathcal{F}\left[\varepsilon_{kl}^{(2)}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] \\ \mathcal{F}\left[\lambda\varepsilon_{kl}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right] = \lambda\mathcal{F}\left[\lambda\varepsilon_{kl}\left(\tau_{-\infty}^{t}\right)\right], \qquad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1.2}$$

Dans ce cas, pour un échelon de contrainte σ^0_{kl} appliquée à l'instant t_0 (respectivement un échelon de déformation ε^0_{kl} appliquée à l'instant t_0), la fonction de fluage $\mathcal{J}$ (respectivement de relaxation $\mathcal{R}$) est indépendante de σ^0_{kl} (respectivement de ε^0_{kl}). Ainsi, pour un matériau viscoélastique linéaire, les réponses en déformation et en contrainte (1.1) illustrées à l'Annexe A par les relations (A.1) et (A.2) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0)\sigma^0_{kl} \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0)\varepsilon^0_{kl} \end{cases} \tag{1.3}$$

Principe de superposition de Boltzmann :

La linéarité du comportement permet d'exprimer la réponse du matériau à toute histoire de sollicitation à partir de la connaissance des fonctions de fuage ou de relaxation. Ainsi, une histoire de contrainte $\sigma_{kl}(t)$ peut être considérée comme la superposition d'échelons infiniment petits $d\sigma_{kl}(\tau)\mathcal{H}(t-\tau)$ (où $\mathcal{H}$ est la fonction échelon unité de Heaviside) et éventuellement des sauts notés $[\![\sigma_{kl}]\!]_n$ aux instants τ_n. La réponse $\varepsilon_{ij}(t)$ sera alors d'après la définition de la linéarité, la superposition des réponses $d\varepsilon_{ij}(t)$ produites par ces échelons, soit :

$$d\varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)d\sigma_{kl}(\tau) \tag{1.4}$$

En tenant compte des sommes continues et discrètes, on déduit que :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)d\sigma_{kl}(\tau) + \sum_n \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau_n)[\![\sigma_{kl}]\!]_n \tag{1.5}$$

En notant par $\dot{\sigma}_{kl}(\tau)$ la dérivée de $\sigma_{kl}(\tau)$ par rapport τ au sens des distributions et $\delta\tau_n$ la distribution de Dirac en τ_n, c'est-à-dire

$$\dot{\sigma}_{kl}(\tau) = \begin{cases} \dfrac{d\sigma_{kl}(\tau)}{d\tau}, & \text{si } \sigma_{kl}(\tau) \text{ est dérivable en } \tau \\ [\![\sigma_{kl}]\!]_n\delta\tau_n & \text{en } \tau = \tau_n \text{ où il y a un saut de contrainte} \end{cases} \tag{1.6}$$

alors l'intégrale de Boltzmann (1.5) peut être réécrite sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

Inversément, cette relation s'écrit en contrainte en utilisant la fonction de relaxation :

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{R}_{ijkl}(t,\tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau)d\tau \tag{1.8}$$

En intégrant par partie l'expression (1.7), on peut constater que la réponse est la somme d'une élasticité instantanée et d'un effet de mémoire tenant compte de l'histoire de la contrainte σ_{kl}.

$$\varepsilon_{ij}(t) = \underbrace{\mathcal{J}_{ijkl}(t,t)\sigma_{kl}(t)}_{\text{élasticité instantanée}} \underbrace{- \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \mathcal{J}_{ijkl}(t,\tau)}{\partial \tau}\sigma_{kl}(\tau)d\tau}_{\text{effet de mémoire}} \tag{1.9}$$

On montre de la même façon en permutant les rôles de σ et de ε que :

$$\sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t,t)\varepsilon_{kl}(t) - \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \mathcal{R}_{ijkl}(t,\tau)}{\partial \tau}\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

Matériau non vieillissant :

Un matériau est dit non vieillissant si ses propriétés n'évoluent pas dans le temps [4]. Cela signifie que sa réponse à l'instant t pour une sollicitation à l'instant τ antérieur à t est la même que sa réponse à l'instant $t + \Delta\tau$ pour la même sollicitation appliquée à l'instant $\tau + \Delta\tau$. D'après cette définition, les fonctions de fluage et de relaxation ne dépendent donc que de l'intervalle de temps séparant l'effet et la cause c'est-à-dire $t - \tau$. Dans ce cas, les équations (1.9) et (1.10) s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(0)\sigma_{kl}(t) + \int_{-\infty}^{t} \dfrac{\partial \mathcal{J}_{ijkl}(t-\tau)}{\partial \tau}\sigma_{kl}(\tau)d\tau \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_{-\infty}^{t} \dfrac{\partial \mathcal{R}_{ijkl}(t-\tau)}{\partial \tau}\varepsilon_{kl}(\tau)d\tau \end{cases} \tag{1.11}$$

Les fonctions de fluage et de relaxation possèdent les propriétés $\mathcal{J}_{ijkl}(t-\tau) = 0$ et $\mathcal{R}_{ijkl}(t-\tau) = 0$ pour $t < \tau$. Ainsi pour un matériau viscoélastique non vieillissant, les lois de comportement (1.7) et (1.8) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{J}_{ijkl}(t-\tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau)d\tau \\ \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathcal{R}_{ijkl}(t-\tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau)d\tau \end{cases} \tag{1.12}$$

Mathématiquement, ce sont des produits de convolution de Riemann que nous noterons $(*)$ et qui pour deux fonctions f et g sont définis par :

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \tag{1.13}$$

Les formules précédentes montrent que pour les matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants, les calculs de lois de comportement s'effectuent dans l'algèbre de convolution de Riemann. L'expression (1.12) est équivalente en terme de produit de convolution à :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(t) \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t) \end{cases} \tag{1.14}$$

Rappelons que comme pour le tenseur d'élasticité, les fonctions de fluage et de relaxation possèdent des propriétés de symétrie c'est-à-dire $\mathcal{J}_{ijkl} = \mathcal{J}_{klij} = \mathcal{J}_{jikl} = \mathcal{J}_{ijlk}$ et $\mathcal{R}_{ijkl} = \mathcal{R}_{klij} = \mathcal{R}_{jikl} = \mathcal{R}_{ijlk}$.

Dans le domaine fréquentiel, la formulation fonctionnelle de la viscoélasticité s'introduit grâce à l'usage de la transformation de Laplace et de la transformation de Carson. L'opérateur $\mathcal{L}$ de la transformation de Laplace et l'opérateur $\mathcal{C}$ de la transformation de Carson sont définis pour une fonction $f(t)$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = f(s), \qquad s \in \mathbb{C} \\ \mathcal{C}[f(t)] = s\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = f^*(s) \end{cases} \tag{1.15}$$

où $f(s)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$ et $f^*(s)$ la transformée de Carson de $f(t)$. Il en découle que :

$$\begin{cases} f^*(s) = sf(s) \\ \mathcal{C}[f(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] \end{cases} \tag{1.16}$$

La transformée de Laplace possède les propriétés suivantes sur le produit de convolution de deux fonctions $f(t), g(t)$ et sur la dérivée :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)]\,\mathcal{L}[g(t)] = f(s)g(s) \\ \mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = s\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{C}[f(t)] = f^*(s) \end{cases} \tag{1.17}$$

En se servant des propriétés (1.17), les lois de comportement (1.14) s'écrivent respectivement dans l'espace de Laplace et de Carson comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = s\mathcal{J}_{ijkl}(s)\sigma_{kl}(s) \\ \sigma_{ij}(s) = s\mathcal{R}_{ijkl}(s)\varepsilon_{kl}(s) \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\begin{cases} \varepsilon^*_{ij}(s) = \mathcal{J}^*_{ijkl}(s)\sigma^*_{kl}(s) \\ \sigma^*_{ij}(s) = \mathcal{R}^*_{ijkl}(s)\varepsilon^*_{kl}(s) \end{cases} \tag{1.19}$$

La combinaison de (1.18) et (1.19) permet d'écrire tout simplement :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = \mathcal{J}^*_{ijkl}(s)\sigma_{kl}(s) \\ \sigma_{ij}(s) = \mathcal{R}^*_{ijkl}(s)\varepsilon_{kl}(s) \end{cases} \tag{1.20}$$

où $\mathcal{R}^*_{ijkl}$ est le tenseur d'ordre 4 des modules opérationnels et $\mathcal{J}^*_{ijkl}$ le tenseur d'ordre 4 des complaisances opérationnelles. D'après la relation (1.19) ou (1.20), on en déduit que :

$$\mathcal{R}^*_{ijkl}(s) = \left[\mathcal{J}^*_{ijkl}(s)\right]^{-1} \tag{1.21}$$

Ainsi, grâce à l'hypothèse de non vieillissement du matériau viscoélastique, les calculs intégraux sont transformés en calculs opérationnels. Les équations précédentes sont analogues à la loi de Hooke généralisée reliant les contraintes aux déformations en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1.22}$$

où C_{ijkl} est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques. C'est le principe de correspondance élastique-viscoélastique pour lequel la résolution d'un problème de viscoélasticité peut se ramener à la résolution d'un problème élastique équivalent.

1.2.2 Notion d'amortissement

Ce paragraphe présente la notion d'amortissement en se basant sur les lois de comportement des matériaux viscoélastiques soumis à des sollicitations harmoniques.

Loi de comportement pour une sollicitation harmonique

Considérons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant subissant des sollicitations harmoniques de la forme :

$$\sigma_{kl}(t) = \mathbf{Re}\left[\sigma^0_{kl} e^{i\omega t}\right] = \sigma^0_{kl} cos(\omega t) \tag{1.23}$$

où **Re** désigne la partie réelle, ω la pulsation, et $i^2 = -1$. D'après l'équation (1.14), les déformations résultantes sont de la forme :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma^0_{kl} \int_{-\infty}^{t} \mathcal{J}_{ijkl}(t-\tau)\mathbf{Re}\left[i\omega e^{i\omega\tau}\right] d\tau \tag{1.24}$$

En posant $s = i\omega$ et $u = t - \tau$ dans l'intégrale, la réponse en déformation du matériau soumis aux sollicitations harmoniques s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \sigma^0_{kl}\mathbf{Re}\left[\mathcal{J}^*_{ijkl}(i\omega)e^{i\omega t}\right] \\ \mathcal{J}^*_{ijkl}(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{ijkl}(t)e^{-i\omega t}dt \end{cases} \tag{1.25}$$

Le tenseur $\mathcal{J}^*_{ijkl}(i\omega)$ peut être décomposé en sa partie réelle et imaginaire

$$\mathcal{J}^*_{ijkl}(i\omega) = \mathcal{J}^{'}_{ijkl}(\omega) + i\mathcal{J}^{''}_{ijkl}(\omega) \tag{1.26}$$

où $\mathcal{J}^{'}_{ijkl}(\omega)$ est appelé la complaisance de stockage et $\mathcal{J}^{''}_{ijkl}(\omega)$ la complaisance de perte. Inversément, pour une déformation harmonique de la forme

$$\varepsilon_{kl}(t) = \mathbf{Re}\left[\varepsilon^0_{kl} e^{i\omega t}\right] = \varepsilon^0_{kl} cos(\omega t) \tag{1.27}$$

la loi de comportement duale de (1.25) correspondant à la réponse en contrainte s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \varepsilon^0_{kl}\mathbf{Re}\left[\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega)e^{i\omega t}\right] \\ \mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{R}_{ijkl}(t)e^{-i\omega t}dt \end{cases} \tag{1.28}$$

avec la définition des parties réelle et imaginaire

$$\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega) = \mathcal{R}^{'}_{ijkl}(\omega) + i\mathcal{R}^{''}_{ijkl}(\omega) \tag{1.29}$$

où $\mathcal{R}^{'}_{ijkl}(\omega)$ est appelé le module de stockage et $\mathcal{R}^{''}_{ijkl}(\omega)$ le module de perte.

Déphasage et amortissement

Le tenseur de complaisances opérationelles $\mathcal{J}^*_{ijkl}$ et le tenseur de modules opérationels $\mathcal{R}^*_{ijkl}$ définis par les relations (1.26) et (1.29) peuvent s'écrire en adoptant la notation de nombre complexe comportant un module et une phase, soit :

$$\begin{cases} \mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega) = \left|\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega)\right| e^{i\varphi(\omega)} \\ tan\left(\varphi(\omega)\right) = \dfrac{\mathbf{Im}\left(\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega)\right)}{\mathbf{Re}\left(\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega)\right)} = \dfrac{\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega)}{\mathcal{R}'_{ijkl}(\omega)} = \eta(\omega) \end{cases} \tag{1.30}$$

où **Re** et **Im** représentent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire et $|\bullet|$ le module du nombre complexe. En utilisant cette formulation, les lois de comportement (1.27) et (1.28) donnent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon^0_{kl} cos(\omega t) \\ \sigma_{ij}(t) = \varepsilon^0_{kl} \left|\mathcal{R}^*_{ijkl}(i\omega)\right| cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right) \end{cases} \tag{1.31}$$

Cette relation traduit bien comme illustrée sur la figure 1.1 que pour une sollicitation harmonique, la contrainte et la déformation sont déphasées d'un angle $\varphi(\omega)$. L'amortissement $\eta(\omega)$ du matériau est défini par la tangente de cet angle, équation (1.30).

Frottement interne et amortissement

Pour illustrer la dissipation de l'énergie dans un matériau viscoélastique en rapport avec l'amortissement, on se ramène au cas d'une sollicitation harmonique uniaxiale sur des matériaux viscoélastiques linéaires homogènes isotropes et non vieillissants. Dans ces conditions, la loi de comportement (1.31) s'écrit alors tout simplement :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon^0 cos(\omega t) \\ \sigma(t) = \varepsilon^0 \left|\mathcal{R}^*(i\omega)\right| cos\left(\omega t + \varphi(\omega)\right) \end{cases} \tag{1.32}$$

où $\mathcal{R}^*(i\omega) = E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$ représente le module d'Young complexe dans le cas d'une traction (compression) par exemple et $\eta(\omega) = tan\left(\varphi(\omega)\right) = E''(\omega)/E'(\omega)$.

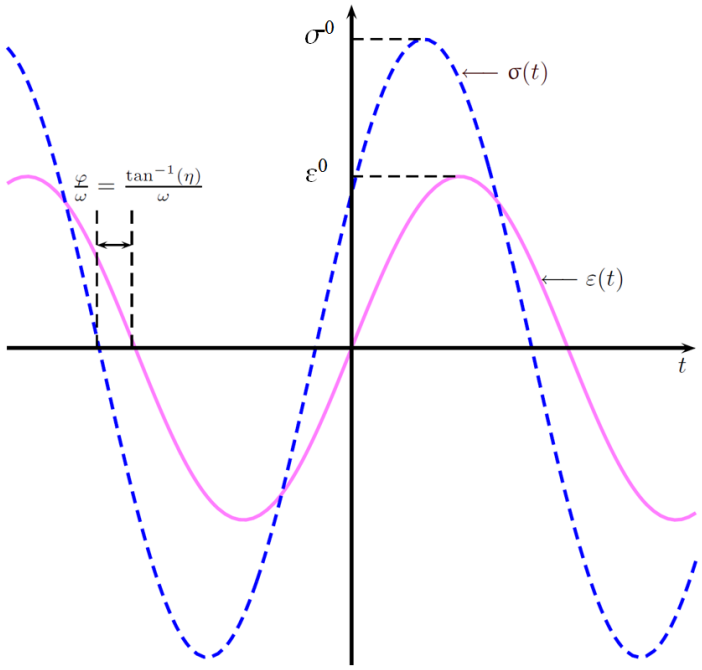


FIG. 1.1 – Déphasage entre contrainte et déformation

De l'équation (1.32), en tirant

$$\begin{cases} sin(\omega t) = \dfrac{1}{\eta\varepsilon^0}\left[\varepsilon(t) - \dfrac{\sigma(t)}{E'(\omega)}\right] \\ cos(\omega t) = \dfrac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^0} \end{cases} \tag{1.33}$$

le déphasage φ se traduit par une hystérésis dans la plan de charge $(\sigma - \varepsilon)$ où la relation contrainte-déformation décrit une ellipse (figure 1.2) d'équation

$$\left(\frac{1}{\eta\varepsilon^0}\left[\varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E'(\omega)}\right]\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^0}\right)^2 = 1 \tag{1.34}$$

et dont l'aire représente l'énergie dissipée au cours d'un cycle de sollicitation :

$$E_d = \int_0^{T=2\pi/\omega} \sigma(t)\dot{\varepsilon}(t)dt = \eta E'\left(\varepsilon^0\right)^2 \omega \int_0^{T=2\pi/\omega} sin^2(\omega t)dt = \eta E'\left(\varepsilon^0\right)^2 \pi \tag{1.35}$$

Cette quantité rapportée à l'énergie potentielle maximale $E_p = E'\left(\varepsilon^0\right)^2/2$ définit le coefficient de frottement interne ψ [4] :

$$\psi = \frac{E_d}{E_p} = 2\pi\eta \tag{1.36}$$

C'est ce coefficient de frottement qui caractérise la capacité d'un matériau viscoélastique à dissiper sous forme de chaleur l'énergie de déformation reçue. En outre, l'amortissement η encore appelé facteur de perte n'est rien d'autre que le rapport de l'énergie dissipée E_d sur un cycle de déformation par 2π fois l'énergie potentielle maxiamle E_p. La forme de l'ellipse décrivant un cycle d'hystérésis change avec l'évolution du facteur de perte η. L'équation (1.35) montre que plus le facteur de perte η est grand, plus l'énergie dissipée E_d est grande et plus la surface de l'hystérésis devient importante.

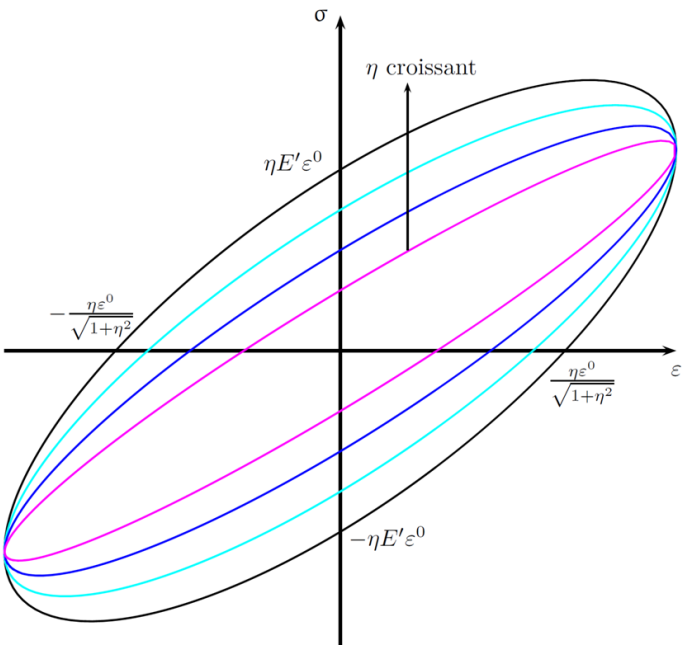


FIG. 1.2 – Hystérèse contrainte-déformation en fonction de η

1.2.3 Modèles rhéologiques usuels en viscoélasticité linéaire

Les modèles rhéologiques sont une représentation analogique à l'aide d'une combinaison d'éléments mécaniques discrets permettant de décrire le comportement viscoélastique d'un solide. Cette combinaison peut se faire du plus simple en associant un ressort et un amortisseur en série et ou en parallèle (modèles de base) jusqu'au plus complexe en associant en serie et ou en parallèle plusieurs modèles de bases (modèles composés ou généralisés). Le ressort représente un élément élastique idéal, la contrainte

est proportionnelle à la déformation et est définie par la loi de Hooke : $\sigma(t) = E\varepsilon(t)$, où E représente le module d'élasticité. L'amortisseur représente un élément visqueux dissipatif, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation et est définie par la loi de frottement visqueux de Newton : $\sigma(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$, où η représente la viscosité. Les modèles rhéologiques constituent donc un bon outil pour modéliser la relation entre contrainte et déformation dans un comportement uniaxial. Deux grandes familles de modèles rhéologiques sont couramment utilisés :

Modèles standards linéaires

L'analogie se fait par la combinaison de ressorts et amortisseurs linéaires comme représentés sur la figure 1.3. Quel que soit le modèle standard linéaire considéré, la

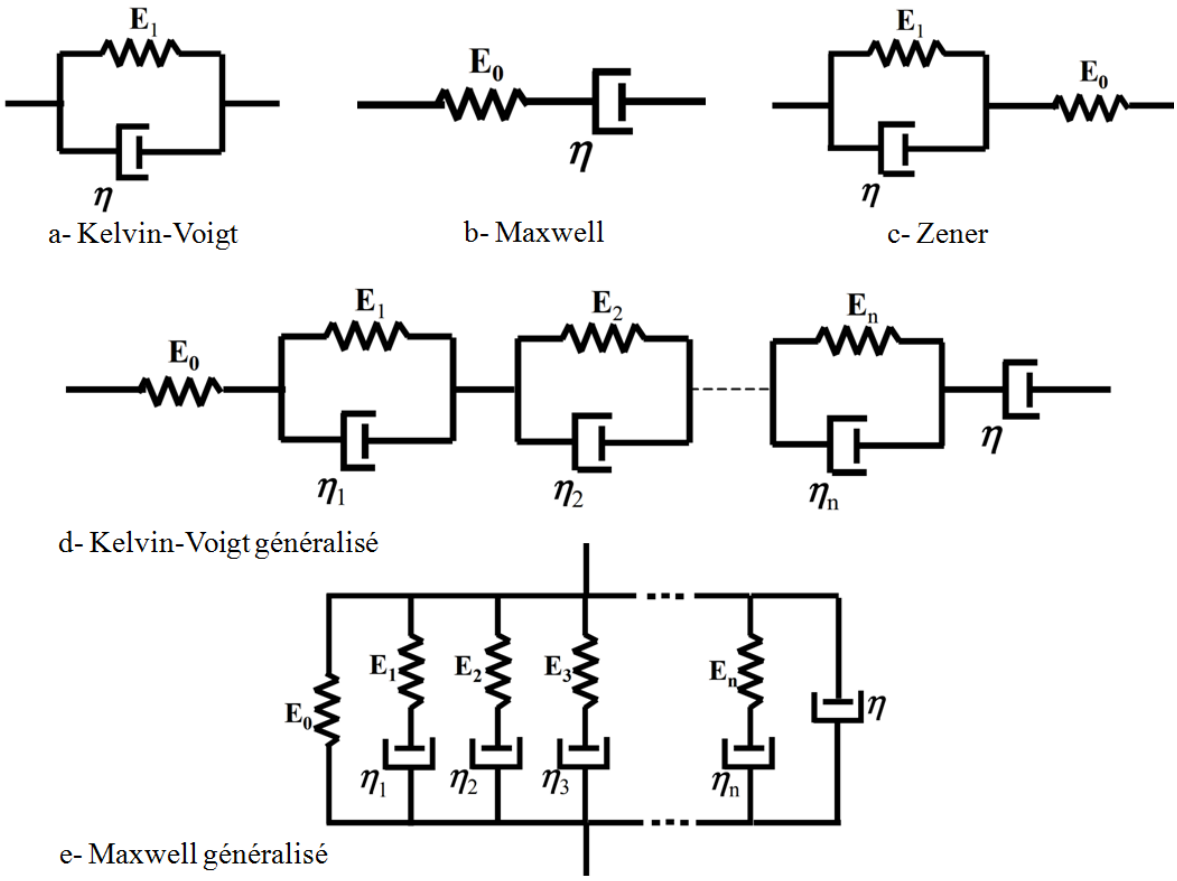


FIG. 1.3 – Modèles rhéologiques standards classiques

loi de comportement ainsi que le module complexe du solide viscoélastique linéaire constitué s'écrivent de façon générale :

$$\begin{cases} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k \dfrac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = b_0 \varepsilon(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_2} b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} \\ \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = \dfrac{b_0 + \sum_{k=1}^{N_2} b_k (i\omega)^k}{1 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k (i\omega)^k} \end{cases} \tag{1.37}$$

où N_1 et N_2 sont des entiers, a_k et b_k sont des coefficients caractéristiques du matériau. Les lois de comportement et les modules complexes des modèles standards usuels présentés à la figure 1.3 sont regroupés dans le tableau 1.1.

Modèle rhéologique	Loi de comportement	Module opérationnel $\mathcal{R}^*(i\omega)$
Kelvin-Voigt	$\sigma(t) = E_1 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$	$E_1 + i\omega\eta$
Maxwell	$\sigma(t) + \dfrac{\eta}{E_0}\dot{\sigma}(t) = \eta\dot{\varepsilon}(t)$	$\dfrac{i\omega\eta E_0}{E_0 + i\omega\eta}$
Zener	$(E_0 + E_1)\,\sigma(t) + \eta\dot{\sigma}(t)$ $= E_0\,(E_1\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t))$	$\dfrac{E_0\,(E_1 + i\omega\eta)}{E_0 + E_1 + i\omega\eta}$
Kelvin-Voigt généralisé	Loi (1.37)	$\left[\dfrac{E_0 + i\omega\eta}{i\omega E_0 \eta} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k}\right]^{-1}$
Maxwell généralisé	Loi (1.37)	$E_0 + i\omega\eta + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{i\omega\eta_k E_k}{E_k + i\omega\eta_k}$

TAB. 1.1 – Lois de comportement et modules opérationnels des modèles standards

Modèles fractionnaires

On introduit dans les modèles standards linéaires un élément mécanique analogique à mémoire appelé spring-pot et ayant un comportement rhéologique intermédiaire entre celui d'un ressort élastique (spring) et celui d'un amortisseur visqueux (dashpot). Le spring-pot est supposé avoir une loi de comportement et un module complexe de la forme :

$$\begin{cases} \sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t), \qquad 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = E\,(i\omega\tau)^\alpha \end{cases} \tag{1.38}$$

où D^α désigne l'opérateur de la dérivation non entière d'ordre α et qui est définit pour une fonction $\varepsilon(t)$ par [5, 6] :

$$D^\alpha \varepsilon(t) = \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \tag{1.39}$$

où Γ représente la fonction gamma et est définie pour tout réel z strictement positif par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx$. Dans l'équation (1.38), τ est le temps de relaxation du modèle. Pour $\alpha = 0$, on retrouve un ressort de module d'élasticité E et pour $\alpha = 1$, on retrouve un amortisseur visqueux de viscosité $\eta = E\tau$. Le paramètre de mémoire α permet une transition continue entre le solide élastique idéal (ressort ou spring) et le fluide idéal (amortisseur visqueux ou dashpot). Ainsi, en remplaçant dans les modèles standards linéaires vus précédemment l'amortisseur visqueux par le spring-pot, on obtient des modèles rhéologiques fractionnaires (figure 1.4). Les modules complexes correspondant

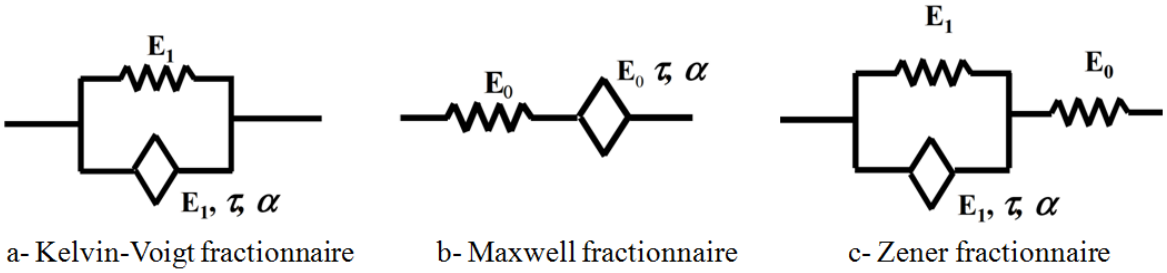


FIG. 1.4 – Modèles rhéologiques fractionnaires de base

sont donnés par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}^*(i\omega) = E_1 \left[1 + (i\omega\tau)^\alpha\right] & \text{Kelvin-Voigt fractionnaire} \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = \dfrac{E_0 (i\omega\tau)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, & \text{Maxwell fractionnaire} \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = \dfrac{E \left[1 + (i\omega\tau)^\alpha\right]}{1 + \frac{E}{E_0}(i\omega\tau)^\alpha}, & \text{Zener fractionnaire} \end{cases} \tag{1.40}$$

avec $E = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0}$.

Quant aux modèles fractionnaires composés avec un assemblage quelconque de modèles fractionnaires de base, on montre que la loi de comportement généralisée du matériau résultant ainsi que le module complexe obtenu par transformée de Laplace et de Carson

s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k \dfrac{d^{\alpha_k}\sigma(t)}{dt^{\alpha_k}} = b_0\varepsilon(t) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N_2} b_k \frac{d^{\beta_k}\varepsilon(t)}{dt^{\beta_k}} \\ \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = \dfrac{b_0 + \sum_{k=1}^{N_2} b_k (i\omega)^{\beta_k}}{1 + \sum_{k=1}^{N_1} a_k (i\omega)^{\alpha_k}} \end{cases} \tag{1.41}$$

où N_1 et N_2 sont des entiers, α_k et β_k sont des valeurs non entières comprises entre 0 et 1, a_k et b_k sont des coefficients caractéristiques du matériau. En se basant sur des essais expérimentaux, Bagley et Torvik [7, 8, 9] ont montré que les premiers termes de chaque serie étaient suffisants pour modéliser un grand nombre de matériaux viscoélastiques.

1.2.4 Dépendance en fréquence et en température des matériaux viscoélastiques

Dans le cadre d'une sollicitation harmonique uniaxiale sur des matériaux viscoélastiques linéaires homogènes isotropes et non vieillissants, le module opérationnel $\mathcal{R}^*(s)$ dans l'espace fréquentiel correspond tout simplement au module d'Young complexe s'il s'agit d'une traction (compression) et au module de cisaillement complexe s'il s'agit d'un cisaillement pur :

$$\mathcal{R}^*(s) = \mathcal{R}^*(i\omega) = \begin{cases} E^*(i\omega) = E^{'}(\omega) + iE^{''}(\omega) & \text{traction (compression)} \\ G^*(i\omega) = G^{'}(\omega) + iG^{''}(\omega) & \text{cisaillement pur} \end{cases} \tag{1.42}$$

Il est généralement admis que le facteur de perte $\eta(\omega)$ qui est le rapport entre la partie imaginaire et la partie réelle du module est le même en traction (compression) qu'en cisaillement. Quant au coefficient de Poisson ν^* qui est défini par le rapport de la déformation latérale à la déformation axiale, il est également complexe et dépendant de la fréquence [10], mais sa mesure pose des problèmes d'ordre expérimental. Dans la pratique, c'est le module d'Young ou de cisaillement qui est mesuré et le coefficient de Poisson est supposé constant [11]. Outre la dépendence en fréquence, des observations expériementales ont montré que parmi de nombreux facteurs environnementaux (humidité, prédéformation statique,..etc), la température est le facteur le plus important.

A fréquence fixée, le profil de variation du module et du facteur de perte des matériaux viscoélastiques en fonction de la température (figure 1.5) montre quatre états différents :

Le domaine vitreux (a) correspondant aux plus faibles températures est caractérisé par un module de stockage atteignant sa valeur maximale et un facteur de perte atteignant sa valeur minimale. Dans cette zone, le facteur de perte varie très rapidement contrairement au module de stockage qui varie très peu avec la température.

Le domaine de transition (b) est caractérisé par un module de stockage décroissant très fortement avec la température et un facteur de perte atteignant son maximum au milieu de la zone et correspondant à la température de transition vitreuse du matériau. Il est plutôt utile de solliciter le matériau au voisinage de cette zone afin d'optimiser l'amortissement vu que dans la dite zone, le facteur de perte atteint sa valeur maximale.

Le domaine caoutchoutique (c) est caractérisé par un module de stockage et un facteur de perte relativement faibles et variant très peu avec la température.

Le domaine d'écoulement ou terminal (d) correspond à un état fluide du matériau où on observe des instabilités dans le comportement du matériau.

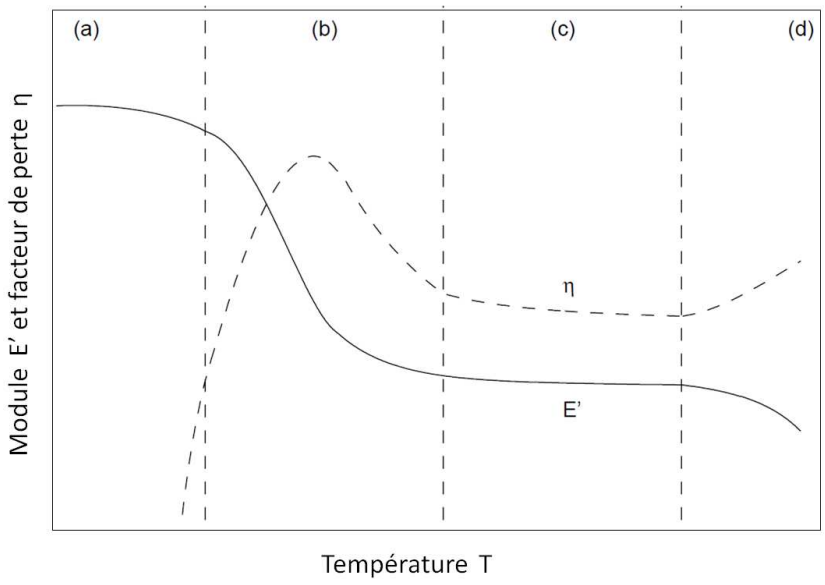
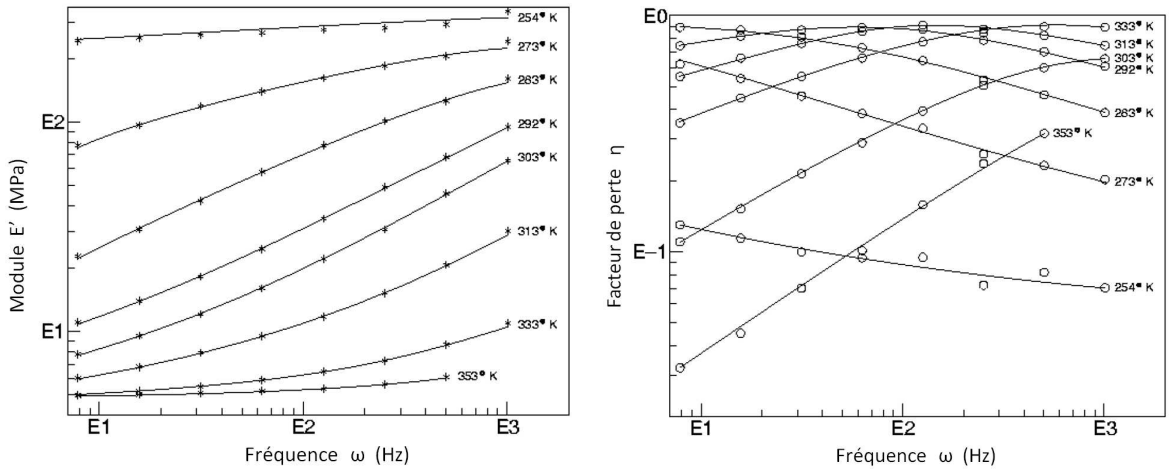


FIG. 1.5 – Module et facteur de perte en fonction de la température

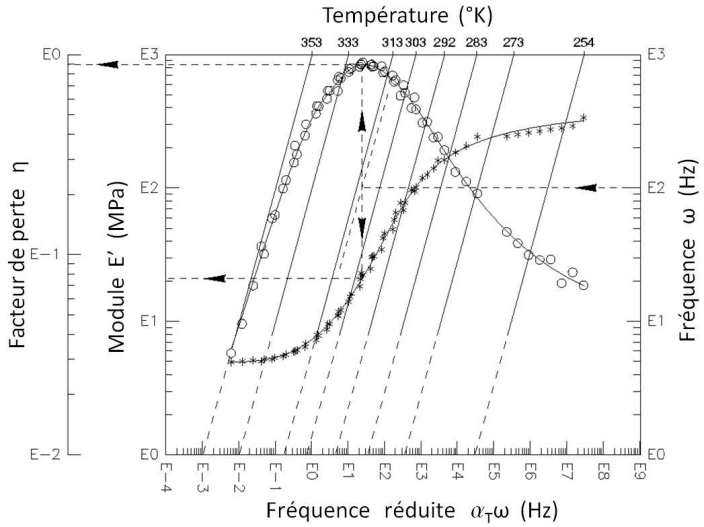
Principe de superposition fréquence/température

Des observations expérimentales montrent que pour une température donnée, si l'on effectue des essais à différentes fréquences, le profil de variation du module et du facteur de perte en fonction de la fréquence (figures 1.6(a) et 1.6(b)) présente la même allure que celui obtenu dans une expérience à fréquence fixe en faisant varier la température (figure 1.5). Cette similitude de comportement a amené à postuler une équivalence



(a) Module de stockage

(b) Facteur de perte



(c) Nomogramme en fréquence réduite

FIG. 1.6 – Module et facteur de perte en fonction de la fréquence et de la température

fréquence/température [12] qui se traduit par la possibilité de superposer les courbes à différentes températures sur une des courbes choisie comme référence (température de référence T_0). Cela s'effectue par une translation horizontale d'un facteur (dit facteur de décalage α_T) et correspondant à un changement d'échelle de fréquence (dit fréquence réduite $\alpha_T\omega$) sur la nouvelle courbe superposée (figure 1.6(c)). Cette résultante des courbes superposées est appelée courbe maîtresse ou nomogramme. Elle est obtenue expérimentalement et permet de donner dans un seul diagramme, la variation du module de stockage et du facteur de perte en fonction des deux variables, température et fréquence. La figure 1.6(c) présente l'utilisation de ce diagramme :

• on choisit sur l'échelle verticale à droite la fréquence réelle à laquelle on désire connaître les valeurs de $E^{'}$ ou η ;

• on suit la droite horizontale jusqu'à croiser la ligne oblique correspondant à la température choisie ;

• à partir de ce point, on suit une verticale jusqu'à croiser la courbe expérimentale de $E^{'}(\omega)$ ou $\eta(\omega)$;

• la valeur correspondant à ce point, lue sur l'échelle de gauche est celle du paramètre recherché c'est-à-dire $E^{'}$ ou η.

Ainsi pour des besoins de calcul, on peut modéliser l'évolution du module et du facteur de perte sous forme de fonctions analytiques par interpolation des courbes maîtresses :

$$E^*(\omega,T) = E^{'}(\omega,T)\,[1+i\eta(\omega,T)] = E^{'}(\alpha_T\omega)\,[1+i\eta(\alpha_T\omega)] \tag{1.43}$$

où $\alpha_T = \alpha(T)$ est une fonction dépendant de la température et permettant le passage de l'échelle des fréquences réelles à l'échelle des fréquences réduites. Il existe plusieurs formules empiriques permettant de transformer tout point de la courbe $E'(\omega_k, T_k)$ (respectivement $\eta(\omega_k, T_k)$) à la fréquence ω_k et à la température T_k en un point de la courbe $E'(\alpha_T\omega_k, T)$ (respectivement $\eta(\alpha_T\omega_k, T)$) à la fréquence $\omega = \alpha_T.\omega_k$ et à la température T. Plusieurs lois empiriques permettent de déterminer dans le domaine thermorhéologiquement simple le facteur de décalage α_T en échelle logarithmique, entre autres :

−la loi de Williams-Landel-Ferry (WLF) [13, 14]

$$Log(\alpha_T) = \frac{C_1^0 (T - T_0)}{C_2^0 + T - T_0} \tag{1.44}$$

où C_1^0 et C_2^0 sont des caractéristiques du matériau qui sont données en fonction de la température de référence choisie T_0.

−la loi d'Arrhenius basée sur la théorie de la thermodynamique et qui prend la forme :

$$Log(\alpha_T) = \frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) \tag{1.45}$$

où R est la constante des gaz parfaits et E_a l'énergie d'activation de la relaxation.

Représentation paramétrique du module

A partir des nomogrammes, on peut établir des tables donnant pour chaque fréquence et température les valeurs du module de stockage ou du facteur de perte. Cependant, pour des besoins de calculs analytiques et numériques, l'utilisation des tables ou des nomogrammes paraît peu adaptée puisqu'elle implique à chaque fréquence et température, la lecture sur les courbes maîtresses ou dans des tables des valeurs correspondantes du module et du facteur de perte. La représentation paramétrique est alors utilisée et il existe divers types d'approches. L'approche classique du module complexe (section 1.2.2) est basée sur des sollicitations harmoniques et permet de définir pour une fréquence fixée le module par sa partie réelle et sa partie imaginaire. L'approche rhéologique (section 1.2.3) consiste à modéliser à l'aide des modèles rhéologiques usuels la loi analytique du module reproduisant fidèlement l'évolution des courbes maîtresses. Cette approche rhéologique peut être faite aussi bien à l'échelle des fréquences réduites qu'à l'échelle des fréquences réelles (voir équation (1.43)). Un travail similaire a été effectué dans la thèse de J. Landier [15] pour la détermination des paramètres du modèle standard de Maxwell généralisé d'un polymère industriel. L'approche à variables internes est basée sur la théorie de la thermodynamique des systèmes irréversibles comme la viscoélasticité. Quelques unes des modèles de fonctions issues de cette approche pour

la représentation paramétrique du module de cisaillement complexe sont présentées ci-dessous.

$$G^*(s) = G_0 + \frac{E_1 s^\alpha - E_0 b s^\beta}{1 + b s^\alpha}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1 \qquad \text{Bagley et Torvik [8]} \tag{1.46a}$$

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{a_j s}{s + b_j} \qquad \text{Biot [16]} \tag{1.46b}$$

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{\Delta_j s}{s + \Omega_j} \qquad \text{Lesieutre [17]} \tag{1.46c}$$

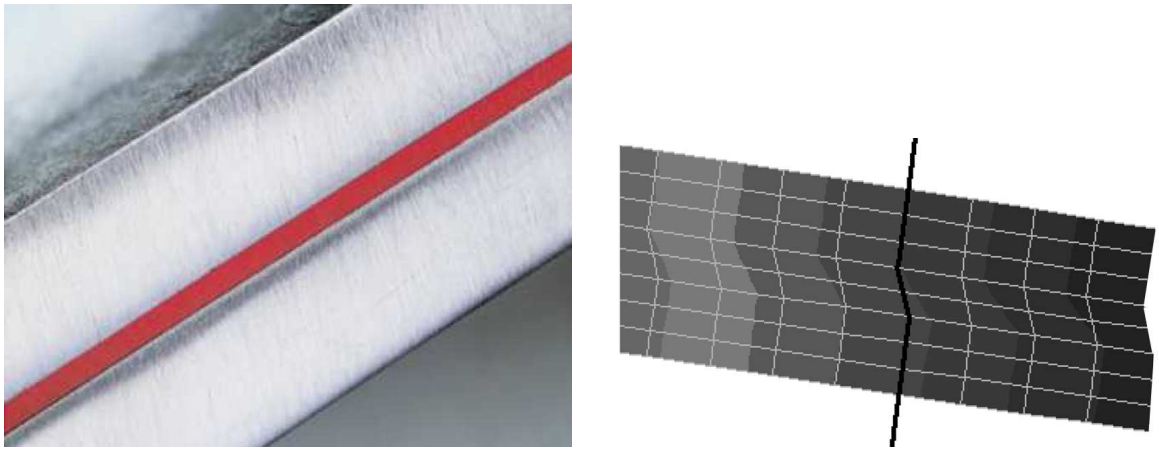
$$G^*(s) = G_0 + G_0 \sum_j \frac{\alpha_j s^2 + \beta_j s}{s^2 + \beta_j s + \delta_j} \qquad \text{McTavish et Hughes [18]} \tag{1.46d}$$

$$G^*(s) = G_0 + G_0 \left(\tau_0 s + \sum_j \frac{\alpha_j \tau_j s}{\tau_j s + 1} \right) \qquad \text{Yiu [19]} \tag{1.46e}$$

où G_0 représente le module statique. Excepté la variable complexe s, les autres paramètres sont les coefficients réels caractéristiques du modèle. Le modèle de Lesieutre [17] utilise la théorie des champs de déplacement anélastique et est connu sous le nom de Anelastic Displacement Field (ADF). Le modèle de MacTavish et Hughes [18] représente le module par des termes mini-oxillateurs et est connu sous le nom de Golla Hughes MacTavish (GHM). On peut constater que les modèles rhéologiques à dérivées fractionnaires peuvent se mettre sous la forme de l'équation (1.46a) et les modèles rhéologiques standards sous la forme (1.46b), (1.46c), (1.46d) ou (1.46e). Trindade [20, 21, 22] a utilisé les modèles ADF et GHM pour identifier le comportement des polymères ISD112 et DYAD606 à l'aide d'une serie à trois et à cinq termes. Galucio et al. [23] identifient le comportement du polymère ISD112 avec seulement quatre paramètres en utilisant l'approche fractionnaire de Bagley et Torvik. Un grand nombre de travaux de Pritz [24, 25] a été consacré à l'identification du comportement des matériaux viscoélastiques à l'aide du modèle à dérivées fractionnaires à quatre et à cinq paramètres. Enfin, l'approche par identification inverse [26] consiste à identifier les paramètres d'un modèle rhéologique associé à un matériau viscoélastique à partir de la mesure de la réponse fréquentielle d'une structure comportant le matériau viscoélastique.

1.3 Modélisation des vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques

Les structures sandwichs utilisées pour le contrôle passif des vibrations sont généralement constituées d'une couche viscoélastique intercallée entre deux couches élastiques (figure 1.7(a)). Dans cette configuration, bien que la couche viscoélastique apporte sa fonction amortissante à la structure en mettant à profit la dissipation dans le matériau, l'amortissement se traduit par un cisaillement important dans cette couche dû à l'écart entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur (figure1.7(b)). La modélisation des structures sandwichs viscoélastiques pose



(a) Sandwich à âme viscoélastique

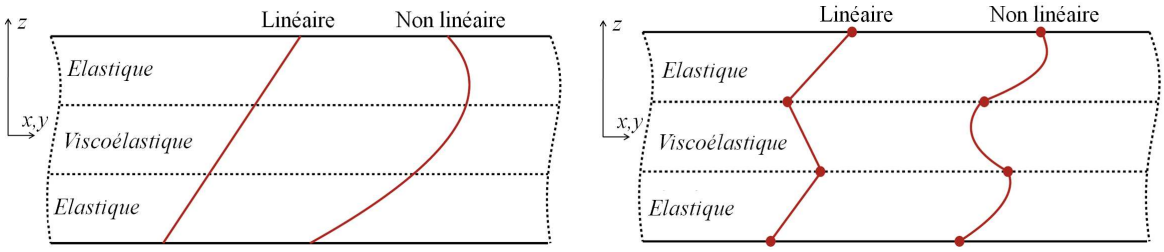
(b) Déformation en flexion par cisaillement de la couche viscoélastique

FIG. 1.7 – Sandwich à âme viscoélastique et cinématique en flexion

deux types de problèmes. Le premier est lié au modèle cinématique qui doit rendre compte du cisaillement dans la couche viscoélastique. Le deuxième est lié à la dépendance en fréquence de la rigidité. Cette dépendance en fréquence est généralement non linéaire, ce qui rend difficile la recherche des propriétés amortissantes.

1.3.1 Modèles cinématiques pour l'amortissement passif

Au départ, les modèles cinématiques utilisés dans l'étude des structures sandwichs reposaient sur la cinématique des structures classiques monocouches utilisant les approximations de Kirchhoff-Love [27] ou de Reissner-Mindlin [28]. Dans leurs hypothèses, la déformation de cisaillement était considérée comme suffisament faible par rapport aux autres déformations pour être négligée. Ces hypothèses qui admettent une variation linéaire du champ de déplacement dans l'épaisseur de la structure en considérée monocouche, ont conduit à la théorie classique des stratifiées qui n'est cependant pas adaptée lorsque la structure est très molle comme par exemple un sandwich à âme viscoélastique molle. Ainsi pour une description enrichie du cisaillemment, divers modèles ont été proposés pour une variation non linéaire ou d'ordre supérieur du champ de déplacement dans l'épaisseur. En déhors des modèles linéaires de Kirchhoff-Love [27] et de Reissner-Mindlin [28], Mindlin [29] propose une autre variation linéaire du champ de déplacement dans l'épaisseur et permet de décrire une déformation de cisaillement non nulle dans la structure. Reddy [30] a proposé un modèle basé sur une description cubique du champ de déplacement dans l'épaisseur de la structure tandis que Touratier [31] décrit une variation sinusoïdale pour le champ de déplacement. Ces nouveaux modèles ont été largement utilisés pour le calcul des structures sandwichs stratifiées et ont permis une bonne estimation des propriétés des sandwichs (rigidité, flèche, fréquence propre, amortissement...etc). Dans les modèles précités, les auteurs ont traité la structure sandwich comme étant une seule couche permettant ainsi de faire des simplifications dans l'analyse. Cette approche monocouche qui affecte simultanément une seule description cinématique aux trois couches de la structure est connue sous le nom de modèle non zigzag et décrit un champ de déplacement continu aux interfaces cœur-peaux (figure 1.8(a)). Cependant, afin d'améliorer et rendre précise la modélisation des sandwichs, il est plutôt interessant de décrire le champ de déplacement couche par couche, ce qui conduit alors à des modèles de type zigzag dans lesquels la continuité du champ de déplacement est imposée aux interfaces cœur-peaux (figure 1.8(b)).



(a) Modèles non zigzag (b) Modèles zigzag

FIG. 1.8 – Modèles cinématiques

Modèles non zigzag

Pour une structure sandwich trois couches d'épaisseur h_f pour les faces, h_c pour le cœur et d'épaisseur totale h, le champ de déplacement est exprimé par l'expression générale :

$$U(x,z,t) = U^0(x,t) - z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + f(z)\beta(x,t) \tag{1.47}$$

où U est le déplacement longitudinal, U^0 le déplacement de la surface médiane, β la rotation de la normale à la surface médiane et f la fonction de cisaillement :

- $f(z) = 0$, modèle de Kirchhoff-Love [27], équivalent au modèle d'Euler-Bernouilli pour le cas des poutres ;
- $f(z) = z$, modèle de Mindlin [29], équivalent au modèle de Timoshenko pour le cas des poutres ;
- $f(z) = z - \dfrac{4z^3}{3h^2}$, modèle de Reddy [30] ;
- $f(z) = \dfrac{h}{\pi} sin(\dfrac{\pi z}{h})$, modèle de Touratier [31].

Modèles zigzag

Classiquement, le modèle de Kirchhoff-Love est retenu pour les faces. Un modèle adapté est utilisé dans le cœur pour rendre compte du cisaillement. Ainsi le champ de

déplacement s'écrit de façon générale pour chaque couche :

$$\begin{cases} U_1(x,z,t) = U_1^0(x,t) - (z - \dfrac{h_f + h_c}{2})\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}, & \dfrac{h_c}{2} < z \leq \dfrac{h}{2} \\ U_2(x,z,t) = U_2^0(x,t) - z\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(z)\beta_i(x,t), & -\dfrac{h_c}{2} \leq z \leq \dfrac{h_c}{2} \\ U_3(x,z,t) = U_3^0(x,t) - (z + \dfrac{h_f + h_c}{2})\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x}, & -\dfrac{h}{2} \leq z < -\dfrac{h_c}{2} \end{cases} \tag{1.48}$$

où U_k est le déplacement longitudinal de la couche k, U_k^0 le déplacement de la ligne médiane de la couche k, l'indice $k = 1, 3$ étant affecté aux faces et l'indice $k = 2$ au cœur. β_i sont les rotations additionnelles :

- $n = 1, f_1(z) = z$, modèle de Rao [32] ;
- $n = 1, f_1(z) = z - \dfrac{4z^3}{3h^2}$, modèle de Bickford [30] ;
- $n = 2, f_1(z) = z, f_2(z) = z^3$, modèle mixte.

Hu et al. [33] ont effectué une évaluation des modèles zigzag classiques par des tests statiques et dynamiques et leur analyse montre que le modèle zigzag de Rao est performant dans les conditions de rapport $h_c/h_f \leq 10$ et $E_c/E_f \leq 0.01$ où E_f et E_c représentent respectivement le module d'Young statique des faces et du cœur.

Une autre façon non classique d'élaborer des modèles zigzag est de traiter la structure sandwich comme étant une seule couche en modèle non zigzag classique, mais en ajoutant au champ de déplacement une fonction dite "fonction zigzag" [34]. Carrera [35] et Brischetto et al. [36] ont montré que l'introduction de cette fonction dans les théories classiques a l'avantage non seulement d'introduire les effets zigzag (discontinuité de la première dérivée du champ de déplacement aux interfaces), mais aussi la simplicité d'implémentation et l'amélioration des théories existantes pour l'étude des structures sandwichs.

Après un choix approprié du modèle cinématique pour l'étude des structures sandwichs, une étape importante dans la conception de ces structures est l'estimation des propriétés amortissantes. Nous présentons dans la sous section suivante une revue bibliographique des travaux réalisés et des méthodes élaborées pour la détermination des propriétés amortissantes des sandwichs.

1.3.2 Méthodes de résolution du problème des vibrations linéaires

Dans l'étude des vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques, on s'intéresse au calcul des propriétés amortissantes à savoir la fréquence de résonance Ω et de l'amortissement modal η d'un point de vue de l'ingénieur. Ces paramètres modaux peuvent être calculés en résolvant le problème des vibrations libres ou le problème des vibrations harmoniques forcées. Les travaux de la littérature peuvent être classés selon deux types d'approches : approches analytiques et approches numériques.

Approches analytiques

Historiquement parlant, les premières études sur les structures sandwichs à cœur viscoélastique ont été entreprises vers les années 1959 par Kerwin [37] et Ross [38]. Ils ont considéré une poutre de base surmontée d'une couche viscoélastique pour l'amortissement et d'une couche précontrainte. Pour la poutre en appui simple, ils considèrent un amortissement faible pour la couche viscoélastique et la rigidité en flexion de la couche précontrainte est supposée négligeable par rapport à celle de la structure de base. Ainsi, en considérant les effets de membrane dans les trois couches et l'effet de cisaillement uniquement dans la couche centrale, ils remplacent par analogie dans l'équation différentielle ordinaire d'ordre 4 du mouvement transversal des poutres les rigidités réelles par les rigidités complexes équivalentes $B^* = B_0(1+i\eta)$ puis établissent une expression analytique relativement simple du facteur de perte en fonction des caractéristiques de la structure.

Par suite, Ungar [39] en se basant sur les travaux de Kerwin et de Ross s'intéresse à établir l'expression générale du facteur de perte des structures composites en fonction des facteurs de perte en traction et en cisaillement des sous-structures constitutives. Il applique son étude au cas pratique des poutres sandwichs trois couches à cœur viscoélastique pour établir l'expression du facteur de perte en fonction des propriétés de

chaque couche où il considère négligeables les facteurs de perte dans les couches élastiques et la rigidité de la couche viscoélastique.

Pour améliorer l'approche analogique de Kerwin et Ross dont l'analyse ne reposait que sur les équations classiques de mouvement des poutres, Yu [40] propose une approche basée sur l'élaboration des équations du mouvement adaptées aux structures sandwichs. Ainsi, il effectue une reformulation générale du problème dans le cas bidimensionnel puis établit une équation différentielle d'ordre 4 relative à la fèche et régissant le mouvement des sandwichs en utilisant la théorie des plaques. Dans son analyse, les effets d'inertie et le cisaillement sont pris en compte dans chaque couche et il ne fait aucune restriction sur le rapport entre les densités, les modules et les épaisseurs des trois couches. Ce qui rend sa théorie applicable aux sandwichs trois couches symétriques.

DiTaranto [41] s'intéresse à la description du mouvement des poutres sandwichs en vibration libre soumises à des conditions aux limites arbitraires. Il utilise les hypothèses de base de Kerwin puis établit une équation différentielle complexe d'ordre 6 sur le déplacement longitudinal du plan moyen des couches élastiques externes lui permettant de définir indépendamment des conditions aux limites la pulsation propre complexe de la structure sous la forme générale :

$$\omega^2 = \Omega^2(1 + i\eta) \tag{1.49}$$

Il conclut que la relation entre le facteur de perte η et la pulsation amortie Ω ne dépend pas des conditions aux limites mais plutôt de la géométrie et des propriétés de la structure.

En adoptant la même méthodologie que DiTaranto, Mead et Markus [42] établissent une équation différentielle d'ordre 6 mais plutôt relative à la flèche. En considérant un chargement harmonique relatif aux modes normaux, ils montrent à l'issue de cette équation différentielle relative à la flèche que la pulsation complexe définie par la formule de DiTaranto est obtenue non pas en vibration libre mais plutôt grâce à une forme particulière de vibration forcée pour laquelle le chargement est harmonique et parallèle aux modes normaux de la structure amortie. Ils ont établi des équations auxquelles

obéit la flèche selon diverses conditions aux limites. En combinant l'équation différentielle de mouvement avec les équations de conditions aux limites, Mead et Markus dans leur travaux suivants [43] se sont intéressés à déterminer l'équation caractéristique dont les solutions permettent d'estimer les propriétés amortissantes (pulsation amortie et facteur de perte). Les solutions sont alors cherchées à l'aide d'une méthode itérative qui est une sorte de méthode de Newton-Raphson modifiée avec correction à chaque pas. Ils proposent ensuite une méthode approchée pour estimer la pulsation amortie et le facteur de perte pour un sandwich encastré à ses deux extrémités et une méthode exacte pour un sandwich en appui simple. En effectuant des études paramétriques pour les deux cas de conditions aux limites, ils montrent l'influence des propriétés du sandwich et des conditions aux limites sur la pulsation amortie et le facteur de perte, d'où ils contredirent l'assertion de DiTaranto selon laquelle la pulsation amortie et le facteur de perte ne dépendraient que des propriétés physiques et non des conditions aux limites.

Yan et Dowell [44] s'intéressent à établir une forme simplifiée de l'équation différentielle du mouvement des poutres et plaques sandwichs asymétriques constituées de matériaux homogènes, linéaires et isotropes. Ils considèrent l'hypothèse de contrainte plane, la continuité du champ de déplacement et de la contrainte de cisaillement aux interfaces. En appliquant le principe des travaux virtuels, l'équation dynamique obtenue pour les poutres est d'ordre 4 et relative à la flèche grâce à la simplification introduite sur la rigidité du cœur supposée faible par rapport celle des peaux. Ils déduisent les relations associées à diverses conditions aux limites. La fréquence de résonance et le facteur de perte prédits par leur équation sont similaires à ceux obtenus par les équations de Mead et Markus [42] mais observent une différence de 5% sur la fréquence de résonance et 19% sur le facteur de perte par comparaison des résultats expérimentaux issus des essais sur une poutre en appui simple.

Rao et Nakra [45] effectuent une étude des poutres et plaques sandwichs asymétriques mais en prenant en compte en plus de l'inertie transversale, les inerties longitudinale

et rotationnelle. Ils montrent l'apport des effets d'inertie longitudinale et rotationnelle sur la réponse forcée de sandwichs soumis à une excitation harmonique.

Ovarsky et al. [46] proposent une méthode approhée pour le calcul des fréquences propres et des facteurs de perte des sandwichs. Cette méthode est une technique de perturbation qui consiste à linéariser les équations de poutres sandwichs amorties autour de celles de poutres sandwichs non amorties (facteur de perte du cœur nul). Cette méthode est appliquée pour déterminer de façon approchée les propriétés amortissantes pour une poutre sandwich encastrée-libre.

Afin de fournir une base de données pour une conception optimisée des structures sandwichs, Rao [32] a mené une étude paramétrique pour déterminer les caractéristiques des sandwichs en termes de masse, propriétés mécaniques, dimensions, conditions aux limites qui donneraient une valeur maximale pour le facteur de perte de la structure. Il utilise une approche énergetique et le principe de Hamilton pour établir les équations différentielles de mouvement des poutres sandwichs relatives au déplacement longitudinal et au déplacement transversal. L'équation relative à la flèche est résolue de façon exacte et il en déduit pour diverses conditions aux limites symétriques et non symétriques une expression analytique du facteur de perte et de la pulsation amortie en fonction des propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sandwich.

Mead [47] compare les théories de vibration des sandwichs établies par Yan et Dowell [44], DiTaranto [41] et Mead et Markus [42] et déduit que l'équation différentielle du mouvement relative à la flèche est d'ordre 4 ou 6 selon l'hypothèse sur le cisaillement. En incluant le cisaillement dans les faces et en prenant en compte les effets d'inertie longitudinale, l'équation du mouvement demeure d'ordre 6 pour un sandwich symétrique mais passe à l'ordre 8 pour un sandwich asymétrique.

He et Ma [48] présentent des équations simplifiées gouvernant les vibrations transversales des plaques sandwichs asymétriques. Pour parvenir à cette forme simplifiée, ils supposent dans leur analyse que les matériaux des faces ont des coefficients de Poisson voisins et que les effets d'inertie plane étaient négligeables. En utilisant la formulation

énergetique et le principe de Hamilton, les équations différentielles relatives aux déplacements longitudinaux sont d'ordre 4 dans le plan et l'équation différentielle relative à la flèche est d'ordre 8 dans le plan. Ils établissent ensuite les équations associées aux différentes conditions aux limites. En utilisant la méthode de perturbation initialement proposée par Ovarsky [46], ils effectuent un développement asymptotique des inconnues intervenant dans l'équation différentielle relative à la flèche. En resolvant les systèmes linéaires résultant au regard des conditions aux limites et d'orthogonalité des modes propres, ils obtiennent les termes asymptotiques pour la pulsation amortie et le facteur de perte. Pour un développement asymptotique au premier ordre, ils montrent que l'approche est similaire à la méthode d'énergie de déformation modale (cette méthode sera présentée dans les paragraphes suivants). Ainsi un développement d'ordre élevé permet d'augmenter la précision de la méthode.

Au regard des différents travaux analytiques, on peut répertorier les hypothèses communes suivantes :

- le sandwich est constitué de matériaux homogènes, linéaires et isotropes ;
- les faces sont purement élastiques et ne supportent pas de déformation de cisaillement alors que le cœur est viscoélastique non vieillissant et se déforme principalement en cisaillement. Son module d'Young ou de cisaillement est supposé complexe et constant, donc ne dépendant pas de la fréquence ;
- la linéarité au sens géométrique du champ de déformation est admise, les études sont alors faites dans l'hypothèse des petites perturbations ;
- les inerties longitudinales et rotationnelles sont négligeables vis-à-vis des inerties transversales de flexion ;
- tous les points sur une normal à la poutre ou à la plaque ont le même déplacement transverse ;
- aucun glissement entre les couches n'est permis, assurant ainsi la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux.

A l'aide de ces hypothèses, des formules analytiques pour la détermination exacte de

la fréquence de résonance Ω et du facteur de perte η des poutres et plaques sandwichs en appui simple ont été établies par les auteurs [32, 43, 48] par résolution directe de l'équation différentielle du mouvement. Elles sont présentées à l'Annexe B.

Bien que les modèles analytiques soient simples de mise en œuvre et servent toujours de référence, cependant, ils ne permettent pas de modéliser des structures à géométries et conditions aux limites complexes avec une prise en compte de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique. La formulation aboutit généralement à des équations complexes non linéaires difficilement solvables. Ainsi, les techniques de calcul par éléments finis apparaissent comme un outil robuste pour la modélisation des structures complexes avec la prise en compte de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique du cœur.

Approches numériques

Une modélisation complète des structures sandwichs par la technique des éléments finis consisterait à discrétiser chacune des trois couches par des éléments volumiques tridimensionnels. Cependant, cette forme de discrétisation volume/volume/volume pour les trois couches de la strcuture engendrerait un nombre considérable de dégrés de liberté et en conséquence un temps de calcul énorme, et pour l'espace mémoire des machines la difficulté de stockage des données. Pour ces raisons, les auteurs ont proposé d'introduire des simplifications dans l'analyse pour passer à une représentation coque/volume/coque ou plaque/volume/plaque, les faces élastiques étant représentées par l'état du plan de leur surface moyenne. Néanmoins, la représentation du cœur viscoélastique par des éléments volumiques a pour but de bien prendre en compte le cisaillement responsable de l'amortissement dans cette couche.

Lu et al. [49] proposent un modèle dans lequel le cœur viscoélastique est discrétisé par des éléments volumiques linéaires isoparamétriques à 8 nœuds tandis que les faces élastiques sont discrétisées dans leur plan moyen par des éléments plaques quadrilatères à 4 nœuds.

Johnson et al. [50, 51] proposent de définir la couche centrale par des éléments volumiques hexaédriques à 8 nœuds et les couches élastiques par des éléments coques quadrilatéraux à 4 nœuds excentrés dans le plan interfacial.

En utilisant une formulation similaire, Soni [52] propose de définir la couche centrale par des éléments 3D à 16 nœuds et les couches élastiques par des éléments coques à 8 nœuds.

Daya et Potier-Ferry [53] ont construit un élément fini coque par assemblage des éléments de type coque/volume/coque. Cet élément fini est construit en associant des hypothèses simplificatrices à l'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux permettant d'exprimer les dégrés de liberté aux nœuds uniquement dans les faces élastiques. L'élément fini coque utilisé pour les faces élastiques est un triangle à 3 nœuds (DKT).

Duigou et al. [54] adoptent la même modélisation coque/volume/coque développée par Daya et Potier-Ferry [53], mais proposent pour les faces élastiques un élément fini coque quadrilatère à 8 nœuds afin d'améliorer l'interpolation de la déformation en membrane.

Une difficulté liée à la modélisation coque/volume/coque ou plaque/volume/plaque est l'incompatibilité entre le champ de déplacement des faces et celui du cœur. Ainsi, une autre approche est d'adopter une modélisation coque/coque/coque ou plaque/plaque/-plaque (poutre/poutre/poutre) en ramenant la discrétisation dans le plan de la surface moyenne de chaque couche. Cette approche est plutôt bien adaptée pour la modélisation des structures sandwichs en flexion où la flèche est supposée être commune aux trois couches et la rotation identique dans les couches élastiques. En plus, la prise en compte de l'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces cœur-peaux permet de réduire considérablement le nombre de dégré de liberté par nœud, en général ces degrés de liberté aux nœuds pouvant être exprimés uniquement soit dans les deux faces élastiques soit dans le cœur viscoélastique [55, 56, 57].

Quelle que soit la méthode de discrétisation utilisée, la formulation élément fini du problème de vibrations linéaires des structures sandwichs viscoélastiques sous sollicitations

harmoniques résulte en une équation dynamique matricielle de la forme :

$$\Big([K(\omega)] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = \{F\} \tag{1.50}$$

où $[K(\omega)]$ est la matrice de rigidité dépendant de la fréquence ω, $[M]$ la matrice de masse, $\{U\}$ le vecteur regroupant les degrés de liberté aux nœuds et représentant les modes propres nodaux complexes et $\{F\}$ le vecteur des forces nodales. La dépendance en fréquence de la matrice de rigidité est introduite par la loi de comportement du matériau viscoélastique du cœur. La formulation numérique de cette équation sera démontrée au chapitre 2. L'équation (1.50) permet d'estimer les propriétés amortissantes notamment la pulsation amortie Ω et le facteur de perte η dans le cas $F = 0$ (vibrations libres) et dans le cas $F \neq 0$ (vibrations forcées). Trois types d'analyses sont utilisées pour la détermination des ces propriétés amortissantes.

– **Analyse de la réponse fréquentielle**

Cette technique utilise l'équation (1.50) pour le calcul des courbes de réponses en imposant une excitation harmonique $\{F\}$ de sorte à exciter les modes d'intérêt. L'excitation de l'ensemble des modes s'obtient en imposant toutes les composantes de $\{F\}$ non nulles. Les courbes de réponses en déplacement $\{U(\omega)\}$ sont cherchées par assemblage et inversion de la matrice dynamique complexe $([K(\omega)] - \omega^2[M])$ pour chaque pulsation ω (figure 1.9). La pulsation amortie Ω est déterminée au pic de la résonance puis le facteur de perte η à l'aide de la méthode des bandes passantes à 3db [52] en utilisant

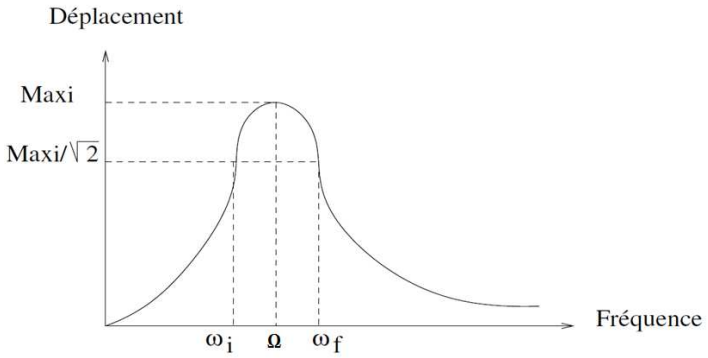


FIG. 1.9 – Calcul d'amortissement par la méthode des bandes passantes

l'expression :

$$\eta = \frac{\omega_f - \omega_i}{\Omega} \tag{1.51}$$

où $\omega_i \leq \omega_f$ sont les pulsations correspondant au rapport du déplacement maximal par $\sqrt{2}$. Cette technique initialement destinée à estimer la pulsation amortie et le facteur de perte à partir du tracé des résultats expérimentaux s'implémente bien quelle que soit la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Cependant, l'assemblage et l'inversion de la matrice dynamique pour plusieurs fréquences [52] engendrent un temps de calcul considérable pour les systèmes de grande taille. Afin de réduire ce coût de calcul, Abdoun et al. [58] dans leurs travaux ont développé une méthode asymptotique numérique pour le calcul direct de la réponse en transformant le problème (1.50) sous la forme :

$$\Big([K(0)] + E(\omega)[K_v] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = \{F\} \tag{1.52}$$

où $E(\omega)$ est la fonction traduisant la dépendance en fréquence du module d'Young complexe du matériau viscoélastique qui se met sous la forme $E^*(\omega) = E^*(0) + E(\omega)$. La matrice $[K_v]$ est purément réelle et issue de la décomposition de la matrice de rigidité $[K(\omega)]$. Les inconnues (ω, U) et la fonction $E(\omega)$ sont développées en séries de Taylor et en remplaçant ces développements dans le problème initial, une suite récurrente de problèmes linéaires est obtenue dont la résolution permet de calculer directement la réponse $\{U\}$. La technique des bandes passantes donne des résultats très satisfaisants, cependant elle n'est applicable que pour des amortissements faibles et des fréquences propres suffisamment séparées.

– **Analyse modale, module complexe constant**

Les deux dernières catégories d'analyse sont l'analyse modale qui consiste à estimer l'amortissement de la structure en vibration libre ($F = 0$) par calcul direct des modes propres de vibration. Cette analyse peut être menée aussi bien dans l'hypothèse d'un module complexe constant que dans le cas d'un module variable dépendant non linéairement de la fréquence. Dans l'hypothèse d'un module complexe constant, la matrice

de rigidité est complexe et constante et le problème de vibration libre des structures sandwichs viscoélastiques se ramène à un problème de valeur propre complexe linéaire :

$$\Big([K] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = 0 \tag{1.53}$$

C'est cette forme qui est largement utilisée dans la littérature pour la modélisation des structures sandwichs [59, 60]. Le problème de valeur propre linéaire (1.53) est résolu en utilisant les algorithmes classiques de valeurs propres entre autre la méthode QR [61], la méthode itérative des sous espaces [62], la méthode de Lanczos [63], la méthode de Krylov-Arnoldi [64] qui sont implémentées dans l'environnement de certains codes de calcul comme les fonctions de Matlab "eig" implémentant la méthode QR et "eigs" implémentant la méthode d'Arnoldi. La partie réelle et la partie imaginaire de la valeur propre ω^2 permettent de déterminer la pulsation propre Ω et le facteur de perte η en utilisant la formule de DiTaranto (1.49). Toutes ces méthodes sont exactes mais leur inconvénient est qu'elles sont limitées au cas d'un module constant et ne peuvent donc être appliquées lorsque la matrice de rigidité dépend de la fréquence.

– **Analyse modale, module complexe dépendant de la fréquence**

Lorsque le module complexe du matériau viscoélastique est dépendant de la fréquence ω, la matrice de rigidité $[K]$ l'est également et le problème de vibration libre des structures sandwichs viscoélastiques devient un problème aux valeurs propres complexes non linéaire :

$$\Big([K(\omega)] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = 0 \tag{1.54}$$

Face à la difficulté de résolution de ce problème non linéaire, certains auteurs ont proposé des méthodes approchées et d'autres des méthodes quasi-exactes :

• Méthodes approchées

La méthode d'énergie de déformation modale ou modal strain energy method (MSE) a été proposée par Johnson et al. [50]. Elle est basée sur la répartition de l'énergie de déformation dans la structure et définit l'amortissement structurel comme étant la

somme des facteurs de perte des sous-structures constitutives pondérée de leur fraction d'énergie de déformation :

$$\eta = \sum_k \eta_k \frac{S_k}{\sum_k S_k} \tag{1.55}$$

où η_k et S_k sont respectivement le facteur de perte et l'énergie de déformation de la sous-structure k. Cette méthode peut s'appliquer à deux niveaux selon la précision désirée en utilisant soit des modes réels soit des modes complexes :

La modal strain energy mode réel (MSER) repose sur l'hypothèse que le mode propre U du sandwich est proportionnel au mode propre U_r de la structure non amortie vérifiant le problème aux valeurs propres réelles :

$$\left([K(0)] - \omega_0^2[M]\right)\{U_r\} = 0 \tag{1.56}$$

où $[K(0)]$ est la matrice de rigidité construite en ne considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique. En résolvant l'équation (1.56), le couple (ω_0, U_r) est obtenu. Ensuite on approxime $[K(\omega)]$ par $[K(\omega_0)]$, ce qui permet de réécrire le problème initial (1.54) sous la forme :

$$\left([K(\omega_0)] - \omega^2[M]\right)\{U_r\} = 0 \tag{1.57}$$

On obtient ainsi une approximation de la pulsation amortie et du facteur de perte à l'aide du rapport :

$$\omega^2 = \frac{{}^{\intercal}\{U_r\}\,[K(\omega_0)]\,\{U_r\}}{{}^{\intercal}\{U_r\}\,[M]\,\{U_r\}} = \Omega^2\,(1 + i\eta) \tag{1.58}$$

Cette méthode a un coût de calcul relativement faible puisqu'elle permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels. Cependant, elle ne donne des résultats précis que pour des structures faiblement amorties [53].

La modal strain energy mode complexe (MSEC) est une version corrective de la MSER permettant d'améliorer les estimations de Ω et de η. Elle consiste à remplacer U par une autre approximation du mode complexe U_c obtenu en résolvant le système linéaire forcé suivant :

$$\left([K(\omega_0)] - \omega_0^2[M]\right)\{U_c\} = \{F\} \tag{1.59}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des amplitudes des forces harmoniques imposées. Ainsi, la pulsation amortie et le facteur de perte sont donnés par le rapport :

$$\omega^2 = \frac{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}_c\right\}[K(\omega_0)]\{U_c\}}{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}_c\right\}[M]\{U_c\}} = \Omega^2(1+i\eta) \tag{1.60}$$

• Méthodes quasi-exactes

Les méthodes répertoriées jusqu'à ce jour pour la résolution quasi-exacte du problème (1.54) peuvent être classées en quatre variantes :

Approche asymptotique : Ma et He [56]

Elle consiste à remplacer $\omega^2 = \Omega^2(1+i\eta)$ dans le problème initial (1.54) pour l'exprimer en fonction des inconnues Ω^2, η et U :

$$\Big([K(\Omega^2,\eta)] - \Omega^2(1+i\eta)[M]\Big)\{U\} = 0 \tag{1.61}$$

Les inconnues Ω^2, η et U sont alors développées en séries entières d'un paramètre choisi de façon approprié. Les nouvelles expressions injectées dans l'équation (1.61) conduisent à une suite récurrente de problèmes linéaires. Ces problèmes linéaires sont résolus en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes. Les termes des séries ainsi calculés permettent d'estimer Ω et η. Dans le cas d'un module variable, les séries ne convergent généralement pas et une méthode de continuation est nécessaire. Jusqu'alors cette méthode n'a été appliquée que dans le cas particulier d'un module complexe constant où la matrice de rigidité se met sous la forme $[K] = [K_1] + [K_2](1+i\beta)$ et où le paramètre de développement en série vaut $i\beta$ [56]. La méthode n'est donc valable que pour des valeurs petites de β. L'auteur a montré que la solution asymptotique au 1^{er} ordre est équivalente à celle de la modal strain energy.

Méthode d'itération-réduction : Chen et al. [65]

Lorsque les propriétés du matériau viscoélastique sont dépendant de la fréquence, le module de cisaillement peut se mettre sous la forme $G^*(\lambda) = G(\lambda)(1+i\beta(\lambda))$ avec $\lambda = \omega^2$. En décomposant la matrice de rigidité globale en sa partie élastique et sa partie viscoélastique, le problème initial (1.54) se met sous la forme :

$$([K(G(\lambda))] + i\beta(\lambda)[K_2(G(\lambda))] - \lambda[M])\{U\} = 0 \tag{1.62}$$

La méthode d'itération-réduction consiste à résoudre le problème (1.62) en deux pas. Le premier pas consiste à supposer un amortissement nul $\beta = 0$ et à obtenir une solution asymptotique $(\tilde{\lambda}_r, \tilde{U}_r)$ à l'ordre 1 du problème aux valeurs propres réelles non linéaire résultant $[K(G(\lambda)) - \lambda M]U = 0$, l'approximation à l'ordre 0 (λ_r, U_r) étant obtenue par résolution directe du problème aux valeurs propres réelles linéaire $[K(G_0) - \lambda M]U = 0$, où G_0 est une valeur fixée de G et r le rang du mode.

$$\begin{cases} K(G(\lambda_r)) = K(G_0) + \dfrac{\partial K}{\partial G}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0) \\ \tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \dfrac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0) + \dfrac{\partial^2 \lambda_r}{\partial G^2}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0)^2 + ... \\ \tilde{U}_r = U_r + \dfrac{\partial U_r}{\partial G}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0) + \dfrac{\partial^2 U_r}{\partial G^2}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0)^2 + ... \end{cases} \tag{1.63}$$

En remettant ces développements dans le problème aux valeurs propres réelles non linéaire et en considérant la condition d'orthogonalité des modes, la solution asymptotique obtenue à l'ordre 1 vaut :

$$\tilde{\lambda}_r = \lambda_r + \frac{\partial \lambda_r}{\partial G}|_{G=G_0} (G(\lambda_r) - G_0) = \lambda_r + {}^{\intercal}U_r \left[\frac{\partial K}{\partial G}|_{G=G_0}\right] U_r (G(\lambda_r) - G_0) \tag{1.64}$$

Le deuxième pas consiste à la résolution du problème (1.62) au mode r pour $\lambda = \tilde{\lambda}_r$ dans K, K_2 et β ramenant alors l'équation à un problème aux valeurs propres complexes linéaire. La résolution est faite en utilisant l'algorithme itératif de Lanczos [63] couplé à une base réduite. Cette méthode nécessite beaucoup d'itérations, ce qui augmente le temps de calcul pour les structures de grande taille.

Méthode asymptotique numérique (MAN) : Daya et Potier-Ferry [66]

C'est une méthode de cheminement qui est basée sur la technique de perturbation et celle d'homotopie et pour laquelle une procédure de continuation est proposée. En posant $\lambda = \omega^2$, le module variable peut se mettre sous la forme $E^*(\lambda) = E^*(0) + E(\lambda)$ et le problème initial (1.54) est transformé en injectant un paramètre p d'homotopie :

$$([K(0)] + pE(\lambda)[K_v] - \lambda[M])\{U\} = 0 \tag{1.65}$$

où $[K(0)]$ est la matrice de rigidité construite en considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique, $[K_v]$ la matrice purement réelle issue de la décomposition de la matrice de rigidité $[K(\lambda)]$ et $E(\lambda)$ la fonction traduisant la dépendance

en fréquence du module d'Young du matériau viscoélastique. Les inconnues (λ, U) et la fonction $E(\lambda)$ sont développées en séries de Taylor du paramètre p dont les valeurs de départ (λ_0, U_0) sont solutions du problème aux valeurs propres réelles obtenu de l'équation (1.65) pour $p = 0$. En remplaçant ces développements dans le problème initial, une suite récurrente de problèmes linéaires est obtenue dont la résolution permet de calculer directement les valeurs des inconnus (λ, U) pour $p = 1$. Deux autres algorithmes itératifs d'ordre élevé basés sur la MAN ont été proposés par Duigou et al. [54] afin de réduire le nombre d'inversion de matrice dans la procédure de continuation, les approximants de Padé sont utilisés pour améliorer la convergence des séries.

Méthode d'Arnoldi non linéaire :

La méthode d'Arnoldi non linéaire [67] est une technique de résolution des problèmes de valeurs propres non linéaires creux et de grande taille se mettant de façon générale sous la forme :

$$T(\lambda)x = 0, \qquad T(\lambda) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad x \in \mathbb{C}^{n} \tag{1.66}$$

La technique consiste à résoudre le problème (1.66) en le projetant dans des sous-espaces de Krylov. Les problèmes linéaires résultant de la projection sont alors de taille réduite et sont résolus par des techniques itératives. Une bonne revue de cette méthode est présentée dans les travaux de Voss [67].

1.4 Etude des vibrations non linéaires des sandwichs viscoélastiques

Comme toute structure, lorsque les structures sandwichs viscoélastiques sont soumises aux grands déplacements comme dans le cas d'un chargement sévère, l'hypothèse des petites perturbations dans laquelle seuls les termes linéaires du champ de déformation sont considérés n'est plus admise. Dans ce cas, les termes d'ordre élevé (termes de non linéarité géométrique) apparaissant dans le tenseur de Green-Lagrange ne peuvent

être négligés :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}[grad(\underline{u}) + {}^{\intercal}grad(\underline{u}) + \underbrace{{}^{\intercal}grad(\underline{u}) \times grad(\underline{u})}_{\text{non linéaire}}] \tag{1.67}$$

Ces termes de non linéarité géométrique lorsqu'ils sont considérés influencent largement le comportement de la structure qui diffère alors de son comportement linéaire comme observé expérimentalement sur les structures classiques par White [68].

Historiquement parlant, les premières études sur les vibrations non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques ont été initiées dans les années 1971 par Kovac et al. [69]. Ils effectuent une étude analytique et expérimentale de la réponse forcée d'une poutre sandwich viscoélastique encastrée à ses deux extrémités. La loi de comportement choisie pour le cœur viscoélastique du sandwich est celle d'un solide viscoélastique du type Kelvin-Voigt où le module complexe varie linéairement en fonction de la fréquence. Ils établissent la théorie d'étude des vibrations non linéaires des structures sandwichs trois couches à cœur viscoélastique en utilisant la technique d'équilibrage harmonique et la méthode de Galerkin à un mode. Ils aboutissent à une équation d'amplitude-fréquence d'ordre 6 gouvernant les vibrations non linéaires des sandwichs viscoélastiques. Les fréquences propres obtenues en résolvant numériquement cette équation pour de faibles chargements et celles obtenues par la théorie des vibrations linéaires sont comparées aux fréquences propres mesurées expérimentalement. La différence maximale est de 17.5% avec la théorie linéaire et de 8.1% avec la théorie non linéaire.

Hyer et al. [70, 71] ont continué les travaux de Kovac et al. [69] en menant des études analytiques sur les poutres sandwichs trois couches à cœur viscoélastique et axialement immobilisées à leurs extrémités. Dans [70], ils établissent les équations approchées du mouvement forcé des sandwichs viscoélastiques. Ils considèrent un chargement constitué d'une force constante augmentée d'un terme oxillatoire. Leurs études ont montré que pour un tel chargement, la réponse de la poutre sandwich s'exprime en fonction des multiples de la fréquence d'excitation. Cette théorie sera plus tard confirmée dans leurs expériences [71] où la poutre sandwich excitée à la moitié de sa fréquence de résonance

répond à des superharmoniques.

Iu et al. [72] adoptent une approche numérique pour l'étude des vibrations non linéaires et s'intéressent en général aux poutres sandwichs viscoélastiques multicouches en régime périodique. Le champ de déplacement est décrit dans les couches élastiques par la théorie d'Euler-Bernouilli et dans les couches viscoélastiques par le modèle cinématique de Timoshenko incluant les effets d'inertie rotationnelle. Ils développent la théorie de la méthode incrémentale des éléments finis qui propose de résoudre l'équation non linéaire du mouvement en décomposant les variables de déplacement axial u, transversale w, de chargement F et de fréquence ω par la somme de leur état initial u^0, w^0, F^0, ω^0 avec un petit incrément Δu, Δw, ΔF, $\Delta\omega$ respectivement. La théorie ainsi établie est appliquée dans leurs travaux suivants [73] pour étudier les vibrations forcées des sandwichs. Cependant à l'époque, par manque de données suffisantes dans la description de l'amortissement des structures viscoélastiques vibrant en grand déplacement, ils n'ont considéré que le cas simplifié d'un amortissement de type visqueux pour lequel le module du matériau viscoélastique varie linéairement en fonction de la fréquence.

Iu et Cheung [74] élargissent les travaux de Iu et al. [72, 73] au cas des plaques sandwichs viscoélastiques multicouches et élaborent la théorie de la méthode incrémentale des éléments finis pour l'étude des plaques sandwichs orthotropes. Le modèle cinématique de Love-Kirchhoff est adopté pour les couches élastiques et le modèle de Mindlin pour les couches viscoélastiques. Ils introduisent dans leur analyse une base réduite composée de vecteurs propres issus du problème de vibration libre linéaire afin de réduire l'ordre des équations résultant par rapport au modèle initial [72] élaboré pour l'étude des poutres sandwichs. Cette théorie est ensuite appliquée dans [75] pour l'étude des vibrations non linéaires forcées des plaques sandwichs avec un amortissement visqueux.

Xia et Lukasiewicz [76] effectuent une étude analytique des vibrations libres non linéaires des plaques sandwichs asymétriques. L'amortissement dans le cœur viscoélastique est pris en compte par le modèle de Kelvin-Voigt et la méthode itérative de Runge-Kutta est utilisée pour la résolution numérique de l'équation du mouvement. Ils

étudient l'influence des rapports d'épaisseurs et des propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sur les propriétés amortissantes des sandwichs. La même étude est faite dans leurs travaux suivants [77] sur les panneaux sandwichs cylindriques.

Ganapathi et al. [78] utilisent une approche éléments finis pour l'analyse des vibrations libres linéaires et non linéaires de poutres sandwichs viscoélastiques. L'équation dynamique de valeur propre complexe incluant la matrice de rigidité non linéaire est obtenue, puis résolue en utilisant une technique itérative basée sur l'algorithme QR. Des études paramétriques sont menées pour montrer l'évolution du facteur de perte linéaire résultant selon l'élancememnt relatif à l'épaisseur totale, le rapport des épaisseurs cœur-peaux et le rapport des modules d'Young cœur-peaux. Ils introduisent le concept de la dépendance en amplitude du facteur de perte non linéaire sur la base des fréquences propres obtenues pour différentes amplitudes. Cependant, la principale limitation de leur analyse réside dans le modèle viscoélastique du cœur représenté par un module complexe constant.

Ribeiro et Petyt [79] s'intéressent à la précision et à l'optimisation du temps de calcul dans la modélisation numérique des vibrations non linéaires des structures amorties impliquant généralement un grand nombre de degré de liberté. Ainsi, au lieu d'utiliser la version classique de la méthode des éléments finis dans laquelle la précision est obtenue en raffinant le maillage, ils proposent d'améliorer la modélisation en utilisant la méthode des éléments finis hiérarchiques [79] dans laquelle, sans toutefois raffiner le maillage, la précision et un faible coût de calcul sont obtenus en introduisant beaucoup plus de fonctions de forme et d'ordre plus élevé. En couplant la méthode des éléments finis hiérarchiques et la méthode d'équilibrage harmonique, ils étudient les vibrations non linéaires libres et forcées des plaques minces composites à deux couches complètement encastrées aux bords, et modélisées par un amortissement de type hystérésis proportionnel à la masse. L'équation non linéaire du mouvement est résolue en utilisant une méthode de continuation à phase de prédiction-correction. Ribeiro [80] applique la même technique pour étudier les vibrations non linéaires des plaques amorties en

appui simple à leurs bords. Dans ces derniers travaux, les plaques sont modélisées par un amortissement proportionnel à la rigidité.

Amabili [81] effectue une étude numérique et expérimentale des plaques rectangulaires avec un amortissement visqueux soumises à une excitation harmonique et pour diverses conditions aux limites. L'équation non linéaire de mouvememnt est résolue en utilisant un code basé sur la méthode de continuation.

Daya et al. [82] ont présenté un modèle analytique pour l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs viscoélastiques. La dépendance en fréquence du module viscoélastique est prise en compte de façon générale. En associant la méthode d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode, ils établissent une équation d'amplitude complexe non linéaire dont les coefficients dépendent de la fréquence. L'analyse a été menée sur une poutre sandwich en appui simple et axialement immobilisée à ses deux extrémités, et ce pour différentes températures du cœur dont le module est représenté par le modèle de Maxwell généralisé. La base de Galerkin est approchée par des modes propres réels issus de la résolution du problème de valeur propre de la structure non amortie, mais tenant compte de l'élasticité retardée du cœur viscoélastique. En approximant les propriétés du matériau viscoélastique autour de la fréquence propre de la structure non amortie, les coefficients de l'équation d'amplitude deviennent constants, ce qui permet de résoudre analytiquement l'équation d'amplitude. Pour les vibrations libres non linéaires, ils retrouvent le concept de la dépendance en amplitude de la fréquence et du facteur de perte introduit plus tôt par Ganapathi et al. [78].

La même approche a été prolongée par Boutyour et al. [83, 84] à l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des plaques et coques. Dans leurs travaux, le problème de valeurs propres et les coefficients de l'équation d'amplitude sont obtenus analytiquement [83] puis numériquement [84] en utilisant la méthode des éléments finis. L'analyse est illustrée sur une plaque sandwich viscoélastique et sur un anneau circulaire viscoélastique. Le modèle viscoélastique utilisé est représenté par un module complexe constant.

Récemment, Boumediene et al. [85] ont effectué une étude numérique des vibrations

non linéaires forcées des plaques rectangulaires amorties en utilisant la méthode asymptotique numérique. L'équation du mouvement est établie en utilisant le principe de Hamilton et la méthode d'équilibrage harmonique, puis les déplacements, les contraintes et la fréquence sont développés en séries entières d'un paramètre de chemin conduisant à une suite recurrente de problèmes linéaires à résoudre. Dans leurs travaux, la modélisation est effectuée en utilisant simplement l'amortissement classique de type Raleigh qui est une combinaison de l'amortissement proportionnel à la masse et de l'amortissememnt proportionnel à la rigidité.

Il existe aussi d'autres travaux comme ceux de Azrar et al. [86, 87] opérant sur la méthode asymptotique numérique pour l'étude des vibrations non linéaires, cependant l'amortissement n'a pas été pris en compte dans ces travaux. De même, Arquier et al. [88] ont développé deux méthodes de calcul des modes non linéaires pour l'étude des systèmes mécaniques vibrant en grand déplacement, mais l'étude est limitée aux vibrations non linéaires des systèmes mécaniques non amortis.

1.5 Bilan et positionnement du sujet

Les rappels effectués en début de ce chapitre sur les matériaux viscoélastiques ont montré que leurs propriétés varient fortement en fonction de la température et de la fréquence. Par conséquent, lorsqu'ils sont utilisés dans les structures sandwichs, cette dépendance en fréquence et en température influence inévitablement les propriétés amortissantes ainsi que la réponse de ces structures et devrait être pris en compte dans la modélisation. Mais cette prise en compte de la dépendance en fréquence surtout en présence des lois de comportement viscoélastiques non linéaires pose un problème numérique de résolution pour la détermination des propriétés amortissantes (pulsation amortie et le facteur de perte). Force est de constater que jusqu'alors, aucun code de calcul industriel comme Abaqus par exemple ne permet de calculer ces deux quantités de façon directe et exacte avec la dépendance en fréquence de la loi viscoélastique.

La revue bibliographique montre que beaucoup de travaux ont été réalisés pour la modélisation des vibrations linéaires. Malgré que la plupart de ces travaux utilisent l'hypothèse d'un module complexe constant pour le matériau viscoélastique, néanmoins des efforts remarquables ont été faits dans le développement des méthodes quasi-exactes [56, 65, 66, 67] permettant de prendre en compte dans la résolution la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. Cependant, parmi ces méthodes numériques, aucun algorithme n'a encore été mis sous forme d'un code de calcul pour permettre de déterminer de façon directe et générique les propriétés amortissantes des sandwichs quelle que soit la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence de la loi de comportement viscoélastique. Quant à l'algorithme de résolution utilisant la méthode asymptotique numérique, elle commence par connaître un début de modernisation grâce aux techniques de différentiation automatique permettant le calcul des dérivées de haut degré sous des codes informatiques. Des codes de différentiation automatique ont été d'ores et déjà élaborés au sein du Laboratoire pour le traitement des problèmes non linéaires. La version C++ a été développée par Charpentier et al. [89], la version Fortran 90 par Charpentier et Potier-Ferry [90] et la version Matlab par Koutsawa et al. [91]. Ces boîtes à outils de différentiation automatique apporteront sans doute une facilité et une souplesse dans la mise en œuvre de l'algorithme de résolution du problème de valeur propre utilisant la méthode asymptotique numérique dès lors que l'on est en mesure de calculer automatiquement les dérivées d'ordre élevé quelle que soit la non linéarité de la loi de comportement viscoélastique.

Pour les structures sandwichs vibrant en grand déplacement, la modélisation du comportement de ces structures nécessite la prise en compte de deux types de non linéarités à savoir les non linéarités géométriques induites par les grands déplacements et les non linéarités matérielles introduites par la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique du cœur. Ceci conduit généralement à des équations couplées fortement non linéaires et difficilement solvables. L'étude bibliographique montre que relativement très peu de chercheurs se sont intéressés à l'analyse des vibrations non linéaires des

structures sandwichs surtout avec la prise en compte de la dépendance en fréquence et même en température du comportement du matériau viscoélastique. En général, la plupart des auteurs font des hypothèses simplificatrices sur le comportement viscoélastique en adoptant des lois de comportememnt linéaires et parfois constantes : modèle viscoélastique de type Kelvin-Voigt [69, 70, 71, 76, 77], amortissement visqueux [72, 73, 74, 75, 81], hypothèse d'un module complexe constant [78], amortissement proportionnel à la masse et ou à la rigidité [79, 80, 85]. Cependant, le module complexe constant n'est valide que dans une plage de fréquence où les propriétés du matériau viscoélastique varient très peu. Il est clair que ces modèles linéaires simplifiés ne sont guère réalistes puisqu'ils ne peuvent représenter fidèlement le comportement du matériau viscoélastique (asymptote en haute et basse fréquence pour le module de stockage, variation non linéaire pour le module de stockage et le facteur de perte). Seuls les modèles de Daya et al. [82] et de Boutyour et al. [83, 84] permettent de prendre en compte de façon générale un amortissement structurel dépendant de la fréquence dans l'analyse des vibrations non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques. Il est cependant clair que ces modèles analytiques [82, 83] trouveraient rapidement leur limite quand il s'agit de modéliser les vibrations non linéaires des structures sandwichs à géométries et conditions aux limites complexes. L'autre limitation de ces modèles [82, 83, 84] est l'utilisation d'une base de Galerkin à modes réels où l'effet de l'amortissement dans l'espace (viscosité dans le mode propre) a été négligé, ce qui n'est pas réaliste surtout en présence d'un amortissement élevé. En plus, l'analyse de la réponse à travers l'équation d'amplitude a été restreinte au voisinage de la fréquence de résonance de la structure sandwich non amortie en estimant les propriétés viscoélastiques uniquement autour de cette fréquence, alors qu'il serait utile d'étendre l'analyse sur une large gamme de fréquence.

Pour répondre à cette problématique, le travail mené dans cette thèse consistera dans un premier temps, en utilisant la méthode asymptotique numérique [66] et la boîte à outil de différentiation automatique [91], à mettre en place un outil numérique de

résolution permettant le calcul direct et exact des modes complexes et ce faisant, les propriétés amortissantes (pulsation amortie et facteur de perte) quelle que soit la loi de comportement viscoélastique. Dans un second temps, il s'agit en couplant la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode complexe, d'élaborer un modèle d'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs permettant de prendre en compte le comportement viscoélastique quelle que soit sa dépendance en fréquence, et aussi de traiter des géométries et des conditions aux limites complexes en faisant usage de la méthode des éléments finis. Cette modélisation sera faite non seulement sur des structures sandwichs poutres, mais aussi sur des structures sandwichs plaques en étendant l'analyse de la réponse au voisinage de n'importe quelle fréquence. Enfin, ces travaux permettront le développement d'outils performants de conception et d'optimisation des structures sandwichs viscoélastiques.

Chapitre 2

Une approche générique pour le calcul des propriétés amortissantes des structures sandwichs viscoélastiques

Sommaire

2.1 Introduction 59

2.2 Formulation élément fini du problème de vibrations libres des structures sandwichs 60

2.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement 60

2.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement 64

2.2.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis 65

2.3 L'approche *diamant* pour les problèmes non linéaires . . 67

2.3.1 De la méthode asymptotique numérique à l'approche *diamant* 68

2.3.2 La boîte à outil *diamant* en bref 71

2.4 Résolution générique du problème de vibrations libres des structures sandwichs 72

2.4.1 Technique d'homotopie 74
2.4.2 Procédure de continuation 75
2.4.3 Valeurs propres et vecteurs propres 76
2.4.4 Solveur *diamant* et son implémentation 78
2.5 Validation numérique et discussion 80
2.5.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant 81
2.5.2 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement faible 83
2.5.3 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement élevé 85
2.6 Conclusion 87

2.1 Introduction

Dans le chapitre bibliographique, il a été mis en évidence la difficulté de résolution de l'équation dynamique régissant les vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques due à la dépendance en fréquence et en température de la matrice de rigidité introduite par le comportement viscoélastique. En dépit des méthodes quasi-exactes qui ont été développées pour la résolution du problème [56, 65, 66, 67], certaines ont connu moins d'enthousiasme pour leur limitation de mise en œuvre. L'objectif du présent chapitre est de montrer comment ce problème de valeur propre non linéaire peut être résolu de façon souple et générique en utilisant l'algorithme de résolution basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN) développé par Daya et Potier-Ferry [66] et la boîte à outil de différentiation automatique (DA) conçue par Koutsawa et al. [91] pour le calcul des séries de Taylor. Par ce biais, des modes propres complexes exacts, des fréquences propres complexes exactes et par suite l'amortissement des structures sandwichs peuvent être déterminés quelle que soit la dépendance en fréquence de la loi de comportement du matériau viscoélastique.

Dans un premier temps, nous formulons le problème numérique de vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques. Ensuite, nous décrivons les principes et formalismes de la nouvelle approche connue sous le nom de *diamant* [90] et dédiée à la résolution des problèmes non linéaires. Puis, cette approche est appliquée à la résolution du problème de vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques et est implémentée en utilisant le code de calcul Matlab et la boîte à outil de différentiation automatique [91, 92]. En guise de validation, des simulations numériques sont menées sur des structures sandwichs avec différentes géométries et des lois de comportement viscoélastiques variées pour tester les performances de cette approche. La contribution principale est de disposer d'un code de calcul numérique permettant après discrétisation élément fini d'une strcuture sandwich viscoélastique de géométrie et de conditions aux limites données, de résoudre le problème des vibrations libres linéaires pour l'extraction

des modes propres et des fréquences propres quelle que soit la non linéarité introduite par la dépendance en fréquence de la loi de comportement du matériau viscoélastique.

2.2 Formulation élément fini du problème de vibrations libres des structures sandwichs

Dans ce chapitre, le problème de vibrations libres linéaires des structures sandwichs est formulé dans le cadre des poutres sandwichs viscoélastiques, la formulation dans le cadre des plaques sandwichs sera donnée plus loin dans le chapitre 4.

2.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement

On considère une structure sandwich symétrique rectangulaire trois couches à cœur viscoélastique telle que représentée sur la figure 2.1. Dans le système de coordonnées

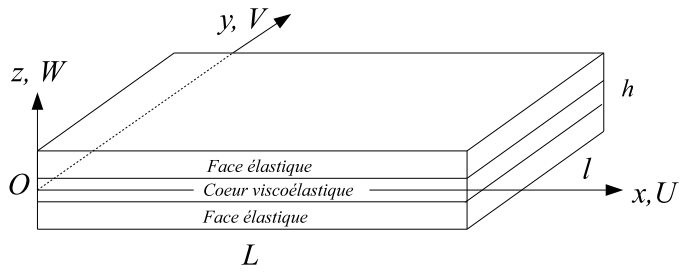


FIG. 2.1 – Structure sandwich viscoélastique

(O, x, y, z), L représente la longueur dans la direction (Ox), l la largeur dans la direction (Oy) et h l'épaisseur totale dans la direction (Oz). Dans ce qui suit, l'indice $i = 1$ est lié à la couche supérieure, $i = 2$ à la couche centrale et $i = 3$ à la couche inférieure. Pour leurs propriétés, les faces externes $i = 1, 3$ seront aussi indexées par la lettre f et la couche centrale $i = 2$ par la lettre c. On note par z_i l'ordonnée du plan moyen de la couche i par rapport à la référence $z = 0$. Les faces externes sont supposées être identiques et parfaitement élastiques tandis que le cœur est supposé

viscoélastique. Tous les matériaux constitutifs du sandwich sont supposés isotropes, linéaires, homogènes ; celui du cœur viscoélastique est non vieillissant. Les propriétés communes des faces sont telles que h_f désigne leur épaisseur, S_f l'aire de leur section droite, E_f leur module d'Young, ν_f leur coefficient de Poisson et ρ_f leur masse volumique. Il en est de même pour la couche centrale dont h_c représente l'épaisseur, S_c l'aire de la section droite, E_c^* le module d'Young complexe dépendant de la fréquence en régime harmonique, ν_c le coefficient de Poisson et ρ_c la masse volumique. La configuration spatiale de la structure sandwich représentée à la figure 2.1 ainsi que les notations et conventions décrites ci-dessus relativement à la désignation des couches externes et de la couche centrale y compris leurs propriétés spatiales, mécaniques, matérielles et dimensionnelles seront adoptées pour toutes les structures sandwichs étudiées dans le présent manuscrit. Dans l'étude qui sera menée ici, la structure sandwich de la figure 2.1 est assimilée à une poutre et la description cinématique utilisée est le modèle zigzag de Rao [32] dans laquelle la théorie d'Euler-Bernouilli est appliquée aux faces élastiques et la théorie de Timoshenko au cœur viscoélastique. L'analyse est menée dans les conditions de performance du modèle établies par les travaux évaluatifs de Hu et al. [33] c'est-à-dire $h_c/h_f \leq 10$ et $E_c^*/E_f \leq 0.01$. La structure sandwich est considérée dans le cadre des petites perturbations et les hypothèses communes à plusieurs auteurs [32, 42, 53, 56, 60] sont utilisées pour l'étude en flexion :

- pour chaque couche du sandwich, les sections planes transverses initialement normales au plan moyen demeurent planes et normales au plan moyen durant la flexion ;
- la contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est très faible comparativement à la contrainte normale axiale dans la direction (Ox) ;
- les effets d'inertie axiale et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transversale pour l'étude en flexion ;
- l'effet de cisaillement est pris en compte dans la couche centrale viscoélastique, mais ignoré dans les faces élastiques ;
- les trois couches du sandwich sont parfaitement collées entre elles assurant la conti-

nuité du champ de déplacement aux interfaces ;

- le déplacement transverse w est le même dans les trois couches.

On adoptera dans ce manuscrit la convention $\partial \bullet / \partial x = \bullet_{,x}$ pour la dérivée spatiale. En se basant sur les hypothèses cinématiques décrites ci-dessus, les champs de déplacement et de déformation s'expriment pour les faces élastiques $i = 1, 3$:

$$\begin{aligned} U_i(x,z,t) &= u_i(x,t) - (z - z_i) w_{,x} \\ W_i(x,z,t) &= w(x,t) \\ \varepsilon_i(x,z,t) &= u_{i,x} - (z - z_i) w_{,xx} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où U_i est le déplacement longitudinal dans la couche i, u_i le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i, $W_i = w$ le déplacement transversal commun dans les trois couches et ε_i la déformation normale dans la couche i obtenue de la formule de Green-Lagrange (1.67) en ignorant les termes de non linéarités géométriques. Le repère (O, x, y, z) coïncidant avec le plan moyen de la couche centrale permet d'exprimer l'ordonnée du plan moyen de chaque couche : $z_2 = 0$ et $z_1 = -z_3 = (h_f + h_c)/2$. Les champs de déplacement et de déformation relatifs à la couche centrale $i = 2$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} U_2(x,z,t) &= u(x,t) + z\beta(x,t) \\ W_2(x,z,t) &= w(x,t) \\ \varepsilon_2(x,z,t) &= u_{,x} + z\beta_{,x} \\ \xi_2(x,z,t) &= \beta + w_{,x} \end{aligned} \tag{2.2}$$

où u est le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche centrale, β la rotation de la normale au plan moyen de la couche centrale et ξ_2 la déformation de cisaillement dans la couche centrale. L'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces permet d'exprimer la relation entre les déplacements longitudinaux des plans moyens des couches externes et celui de la couche centrale :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \left[\frac{h_c}{2}\beta - \frac{h_f}{2} w_{,x} \right] \\ u_3 &= u - \left[\frac{h_c}{2}\beta - \frac{h_f}{2} w_{,x} \right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

En utilisant la loi de Hooke généralisée (1.22), les lois de comportement de la structure s'expriment à travers l'effort normal N_i et le moment fléchissant M_i de chaque couche i du sandwich :

$$\begin{aligned} N_i(x,t) &= \iint_{s_i} \sigma_i ds = E_f S_f u_{i,x}, \qquad \text{i=1,3} \\ M_i(x,t) &= \iint_{s_i} (z - z_i)\sigma_i ds = E_f I_f w_{,xx} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où σ_i et s_i représentent respectivement la contrainte normale et l'aire de la section droite de la couche i, et I_f le moment quadratique de la section droite des couches externes.

Quant à la loi de comportement du matériau viscoélastique de la couche centrale, on admettra qu'elle est déterminée pour des sollicitations harmoniques. Dans ce cas, le module d'Young complexe du matériau de la couche centrale en viscoélasticité linéaire correspond tout simplement au module opérationnel $\mathcal{R}^*$ dans le domaine fréquentiel exprimé par la formule (1.28) :

$$E_c^*(\omega) = \mathcal{R}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{R}(t) e^{-i\omega t} dt \tag{2.5}$$

où $\mathcal{R}(t)$ représente la fonction de relaxation du matériau viscoélastique du cœur. En utilisant les relations contrainte-déformation (1.14) dans le domaine temporel, l'effort normal N_2 et le moment fléchissant M_2 dans la couche centrale viscoélastique s'écrivent également en termes de produit de convolution de Riemann :

$$\begin{aligned} N_2(x,t) &= \iint_{s_2} \sigma_2 ds = S_c \mathcal{R}(t) * \dot{u}_{,x} \\ M_2(x,t) &= \iint_{s_2} z\sigma_2 ds = I_c \mathcal{R}(t) * \dot{\beta}_{,x} \end{aligned} \tag{2.6}$$

où I_c représente le moment quadratique de la section droite de la couche centrale. Il est adopté dans le présent manuscrit les conventions (*) pour le produit de convolution et $\dot{X} = \partial X/\partial t$ pour la dérivée temporelle. L'effort tranchant de cisaillement T induit par la déformation de cisaillement ξ_2 dans la couche centrale s'exprime également en termes de produit de convolution :

$$T(x,t) = \iint_{s_2} \tau_2 ds = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)} \mathcal{R}(t) * \left(\dot{w}_{,x} + \dot{\beta}\right) \tag{2.7}$$

où τ_2 désigne la contrainte de cisaillement dans la couche centrale.

2.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement

L'état d'équilibre de la poutre sandwich est décrit par le principe des puissances virtuelles appliqué à l'ensemble des trois couches constitutives. Dans le cas des vibrations libres, les composantes du principe des puissances virtuelles sont réduites à deux et s'écrivent de façon générale :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} - \iiint_{v_i} \underline{\underline{\sigma}} : \delta\underline{\underline{\varepsilon}} dv \\ \delta P_{acc} &= \textstyle\sum_{i=1}^{3} \iiint_{v_i} \rho\ddot{\underline{u}}\delta\underline{u} dv \end{aligned} \tag{2.8}$$

où δP_{int} représente la puissance virtuelle des efforts intérieurs, δP_{acc} la puissance virtuelle des efforts d'inertie, $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{\varepsilon}}$ le tenseur des déformations, $\underline{u}$ le vecteur champ de déplacement, ρ la masse volumique et v le volume du domaine représentant la couche. Comme supposé précédemment, les effets d'enertie longitudinale et rotationnelle sont négligés dans la présente formulation et seuls les effets d'inertie transversale sont pris en compte. La relation (2.3) traduisant la continuité du champ de déplacement aux interfaces permet de définir les déplacements généralisés ramenés dans la couche centrale à l'aide de trois fonctions indépendantes u, w et β représentant respectivement le déplacement longitudinal, le déplacement transversal (flèche) et la rotation du plan moyen de la couche centrale. Ainsi, les deux composantes (2.8) du principe des puissances virtuelles peuvent s'exprimer seulement en fonction des trois déplacements généralisés $\{u, w, \beta\}$ du plan moyen de la couche centrale :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} &= -\int_0^L \left[N\delta u_{,x} + M_\beta \delta\beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta)\right] dx \\ \delta P_{acc} &= (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w}\delta w dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

où $\{\delta u, \delta w, \delta\beta\}$ sont les déplacements et rotations virtuels. L'effort normal résultant N et les moments fléchissants résultants M_β et M_w s'expriment en fonction des déplacements généralisés en utilisant les équations (2.3), (2.4) et (2.6) :

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 = 2E_f S_f u_{,x} + S_c \mathcal{R} * \dot{u}_{,x} \\ M_\beta &= M_2 + (N_1 - N_3)\frac{h_c}{2} = I_c \mathcal{R} * \dot{\beta}_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2}\left(h_c \beta_{,x} - h_f w_{,xx}\right) \\ M_w &= M_1 + M_3 + (N_3 - N_1)\frac{h_f}{2} = \left(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}\right) w_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2}\beta_{,x} \end{aligned} \tag{2.10}$$

L'équation générale gouvernant le mouvement de la structure sandwich est alors obtenue en assemblant les deux composantes du principe des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} &-\delta P_{int} + \delta P_{acc} = 0 \\ &\int_0^L \left[N\delta u_{,x} + M_\beta \delta\beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)\ddot{w}\delta w\right] dx = 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.2.3 Discrétisation par la méthode des éléments finis

L'équation (2.11) décrit un couplage entre le mouvement membranaire et le mouvement de flexion. Cependant, elle peut être découplée en une équation d'équilibre dans le plan

$$\int_0^L N\delta u_{,x} dx = 0 \tag{2.12}$$

et une équation du mouvement de flexion

$$\int_0^L \left[M_\beta \delta\beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)\ddot{w}\delta w\right] dx = 0 \tag{2.13}$$

Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'au mouvement de flexion, l'équation (2.12) ne sera pas discrétisée. Notre problème d'intérêt est l'équation (2.13) qui permet l'analyse des vibrations libres en flexion. Les fonctions de déplacement et de rotation $\{w, \beta\}$ sont alors cherchées sous la forme harmonique :

$$\begin{cases} w(x,t) = W(x)e^{i\omega t} \\ \beta(x,t) = B(x)e^{i\omega t} \end{cases} \tag{2.14}$$

où $\{W, B\}$ représente le mode propre de vibration linéaire. En remplaçant l'équation (2.14) dans l'équation (2.13), on obtient le problème à discrétiser, fonction uniquement des variables d'espace $\{W, B\}$ et de la fréquence ω :

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[I_c E_c^*(\omega) B_{,x}\delta B_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2}\left(h_c B_{,x} - h_f W_{,xx}\right)\delta B_{,x}\right] dx \\ &+ \int_0^L \left[\left(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}\right) W_{,xx}\delta W_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2} B_{,x}\delta W_{,xx}\right] dx \\ &+ \int_0^L \left[\frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)}\left(W_{,x} + B\right)\left(\delta W_{,x} + \delta B\right) - \omega^2(2\rho_f S_f + \rho_c S_c) W\delta W\right] dx = 0 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Par suite, nous proposons un élément fini unidimensionnel pour la discrétisation de l'équation (2.15). L'élément fini choisi est à deux nœuds, chaque nœud possédant trois degrés de liberté : la flèche (W), la pente ($W_{,x}$) et la rotation (B). Ainsi, pour un élément délimité par les nœuds 1 et 2, le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{U^e\} = {}^{\intercal}[W_1 \quad W_{1,x} \quad B_1 \quad W_2 \quad W_{2,x} \quad B_2] \tag{2.16}$$

Le déplacement transversal (W) et la rotation (B) sont interpolés dans le problème (2.15) sur chaque élément en utilisant les matrices d'interpolation $[N_w]$ et $[N_\beta]$ contenant les fonctions de forme polynomiale classiques [93] :

$$\begin{cases} W = [N_w]\,\{U^e\} \\ B = [N_\beta]\,\{U^e\} \end{cases} \tag{2.17}$$

Les matrices d'interpolation $[N_w]$ et $[N_\beta]$ ainsi que les fonctions de forme utilisées sont données à l'Annexe C.1. En insérant la relation (2.17) dans la relation (2.15), on obtient le problème de valeur propre élémentaire suivant :

$$\Big([K^e(\omega)] - \omega^2[M^e]\Big)\,\{U^e\} = 0 \tag{2.18}$$

où $[M^e]$ et $[K^e]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité élémentaire :

$$\begin{aligned} [M^e] =& (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)\,[m^e] \\ [K^e] =& \left(I_c E_c^*(\omega) + \frac{E_f S_f h_c^2}{2}\right)[k_1^e] - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2}\,[k_2^e] \\ &+ \left(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}\right)[k_3^e] + \frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)}\,[k_4^e] \end{aligned} \tag{2.19}$$

Les matrices $[m^e]$ et $[k_i^e]_{\ 1\leq i\leq 4}$ sont les matrices d'intégration des fonctions de forme données à l'Annexe C.1. L'assemblage des matrices élémentaires $[M^e]$ et $[K^e]$ conduit au problème de valeur propre non linéaire suivant :

$$\Big([K(\omega)] - \omega^2[M]\Big)\,\{U\} = 0 \tag{2.20}$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité globales de la structure et $\{U\}$ le mode complexe de vibration regroupant l'ensemble des degrés

de liberté aux nœuds. L'équation (2.20) caractérise les vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques. Cette équation est difficile à résoudre à cause de la dépendance en fréquence de la matrice de rigidité.

Dans l'approche classique de résolution [66] utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN), le calcul des séries de Taylor se faisait manuellement et les étapes de résolution impliquant la loi de comportement viscoélastique $E^*(\omega)$ sont reformulées à chaque fois que l'on change de loi viscoélastique. Cela engendrerait des difficultés (temps de calcul et espace mémoire) de mise en œuvre dans les cas de conception des structures sandwichs amortissantes. En utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN), on se propose ici de résoudre ce problème plutôt de façon générique et souple quelle que soit la loi de comportement viscoélastique. Les séries de Taylor seront calculées automatiquement sous des codes informatiques en faisant usage des techniques de différentiation automatique (DA).

2.3 L'approche *diamant* pour les problèmes non linéaires

L'approche *diamant*, acronyme de "*DIfférentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée*" [90] est une approche générique de résolution des problèmes non linéaires résiduels utilisant la méthode asymptotique numérique (MAN) et les procédures de différentiation automatique (DA) réalisables dans les langages de programmation orientés-objet comme C++, Fortran 90 ou Matlab où l'on peut reprogrammer le calcul des séries de Taylor par des formules de recurrence. Nous présentons dans cette section la philosophie de l'approche *diamant* en partant des bases de la méthode asymptotique numérique. Ensuite, une brève description est donnée sur le principe d'élaboration et de fonctionnement de la boîte à outil *diamant* [91, 92] utilisée pour le calcul des séries.

2.3.1 De la méthode asymptotique numérique à l'approche *diamant*

Le problème (2.20) de vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques peut se mettre comme certaines classes de problèmes non linéaires, sous la forme résiduelle :

$$\mathscr{R}(U,\lambda) = 0 \tag{2.21}$$

où $\mathscr{R}(U,\lambda) \in \mathbb{C}^p$ est le vecteur résidu dépendant du vecteur inconnu $U \in \mathbb{C}^p$ et du paramètre $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour le problème de vibrations libres traité ici, $\lambda = \omega^2$. La méthode asymptotique numérique (MAN)[94] est une méthode de cheminement qui consiste à approcher à l'aide d'un paramètre de chemin a la solution $(U(a), \lambda(a))$ par un développement en series entières tronquées à l'ordre N :

$$U(a+\delta_a) = \sum_{n=0}^{N} \delta_a^n U_n(a), \quad \text{et} \quad \lambda(a+\delta_a) = \sum_{n=0}^{N} \delta_a^n \lambda_n(a) \tag{2.22}$$

où δ_a est l'incrément du paramètre de chemin a, $U_n(a) = \dfrac{U^{(n)}}{n!}(a) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n U}{\partial a^n}(a)$ et $\lambda_n(a) = \dfrac{\lambda^{(n)}}{n!}(a) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n \lambda}{\partial a^n}(a)$ sont les coefficients de Taylor de U et λ à l'ordre n évalués au point a. Le système sous déterminé (2.21) est complété par une condition supplémentaire, par exemple l'équation définissant le paramètre de chemin par la pseudo longueur d'arc [94] :

$$a = [U(a) - U(0)]\,\frac{\partial U}{\partial a}(0) + [\lambda(a) - \lambda(0)]\,\frac{\partial \lambda}{\partial a}(0) \tag{2.23}$$

correspondant à la projection de l'incrément sur la direction tangente $(\dfrac{\partial U}{\partial a}(0), \dfrac{\partial \lambda}{\partial a}(0))$. Les séries entières (2.22) sont introduites dans le problème résiduel (2.21) et l'identification des puissances entières en a permet d'obtenir des séquences de N systèmes linéaires :

$$L_t(U_n, \lambda_n) = F_n \tag{2.24}$$

où L_t est un opérateur linéaire tangent et F_n le second membre. Ces systèmes linéaires peuvent être résolus à chaque ordre n en conjonction avec la condition supplémentaire obtenue en remplaçant les séries (2.22) dans l'équation du paramètre de chemin (2.23). Les problèmes linéaires (2.24) ont la même matrice linéaire tangente à chaque ordre n et les seconds membres F_n contiennent les coefficients de Taylor de U et λ aux ordres antérieurs impliquant des formules de dérivation de degré élevé (voir Annexe E pour plus de détails). Le schéma classique itératif de la MAN alterne donc à chaque ordre n le calcul manuel des séries et du second membre F_n avec la résolution des systèmes linéaires. Les formules de dérivation de haut degré apparaissant dans le second membre F_n sont un peu différentes des formules de récurrence apparaissant habituellement dans la différentiation classique du fait qu'il leur manque des termes utilisés dans la construction de la matrice linéaire tangente. Les bases théoriques de l'approche *diamant* reposent sur la formule de récurrence de Fáa di Bruno pour la différentiation de haut degré de la composée de fonction qui permet, pour une fonction analytique $f(a) = \phi \circ x(a)$, d'écrire les coefficients de Taylor de f à l'ordre n comme suit :

$$f_n = (\phi \circ x)_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{n!} \frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}(x_0) B_{n,m}\left(x^{(1)}, \cdots, x^{(n-m+1)}\right) \tag{2.25}$$

où $x_0 = x(0)$ et $B_{n,m}$ sont les polynômes de Bell [91]. Le principe générique de l'approche *diamant* réside dans le fait que le coefficient de Taylor (2.25) de f à l'ordre n est décomposable en deux parties moyennant des initialisations appropriées :

$$f_n = \{f_{1|x_1=1}\} x_n + \{f_{n|x_n=0}\} \tag{2.26}$$

D'une part, le premier terme $\{f_{1|x_1=1}\}$ est la dérivée linéaire tangente f_1 évaluée avec $x_1 = 1$ et d'autre part, le deuxième terme $\{f_{n|x_n=0}\}$ est le coefficient de Taylor f_n évalué avec $x_n = 0$ pour annuler la contribution de $\{f_{1|x_1=1}\}$. La décomposition (2.26) lorsqu'elle est appliquée au second membre des problèmes linéaires (2.24) permet de gérer les termes manquants dans F_n par des initialisations appropriées et ainsi de conjecturer une forme générique pour le second membre F_n. L'approche *diamant* utilisant les

démarches (2.22), (2.25) et (2.26) lorsqu'elle est appliquée au problème résiduel (2.21) permet d'exprimer le coefficient de Taylor à l'ordre n du résidu $\mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}_n = \{\mathscr{R}_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\}U_n + \{\mathscr{R}_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}\lambda_n + \{\mathscr{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} = 0 \tag{2.27}$$

où $\{\mathscr{R}_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\}$ est la matrice linéaire tangente. La notation "$U_1 = Id$" traduit le fait que la matrice linéaire tangente peut être calculée en évaluant p fois le premier coefficient de Taylor $\mathscr{R}_1$ et en choisissant le vecteur U_1 dans la base cononique de $\mathbb{R}^P$. De la même façon, le terme linéaire tangent $\{\mathscr{R}_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}$ est obtenu en initialisant $U_1 = 0$ et $\lambda_1 = 1$. L'utilisation des coefficients de Taylor U_n et λ_n nuls dans le dernier terme $\{\mathscr{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\}$ permet d'annuler la contribution des deux termes linéaires tangents précédents. En utilisant la formulation (2.27), les N systèmes linéaires relatifs à l'équation (2.24) de la MAN traditionnelle peuvent s'écrire sous la forme générique suivante :

$$\{\mathscr{R}_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\}U_n + \{\mathscr{R}_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}\lambda_n = -\{\mathscr{R}_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} \tag{2.28}$$

Dans la MAN classique, le calcul du coefficient de Taylor $\mathscr{R}_n$ du résidu $\mathscr{R}$ apparaissant dans l'équation (2.28) se faisait essentiellement par des développements manuels, tâche lourde pour l'utilisateur. Une amélioration informatique utile a été apportée par Charpentier et Potier-Ferry [90] qui proposent en utilisant les langages de programmation orientés-objet et les techniques de différentiation automatique, d'élaborer des codes informatiques calculant les dérivées d'un code source. Ainsi, dans le cas des problèmes linéaires génériques (2.28), les coefficients de Taylor à chaque ordre peuvent alors être générés. Il suffit à l'utilisateur de fournir au code informatique le code source qui est le résidu $\mathscr{R}$. Bien que des codes informatiques pour la différentiation automatique ont été développés sous différents langages de programmation comme C++ [89] et Fortran 90 [90], nous utiliserons ici pour nos travaux le code informatique en version Matlab développé par Koustawa et al. [91]. Nous décrivons brièvement dans la section suivante les principes sur lesquels fonctionnent ces boîtes à outil de différentiation automatique.

2.3.2 La boîte à outil *diamant* en bref

L'élaboration de la boîte à outil *diamant* repose sur deux principes fondamentaux : les formules de récurrence pour la différentiation de haut dégré et les techniques de surcharge d'opérateurs.

Dans le cadre de la différentiation de haut degré, des formules de récurrence sont fournies permettant le calcul des séries de Taylor. Ainsi pour une composée de fonction $Z = \varphi(u, v)$, les séries de Taylor de la fonction Z à l'ordre n peuvent être calculées en utilisant les séries de Taylor des fonctions u et v [95] :

$$Z = u + v, \qquad Z_n = u_n + v_n \tag{2.29a}$$

$$Z = u \times v, \qquad Z_n = \sum_{j=0}^{n} u_j v_{n-j} \tag{2.29b}$$

$$Z = u/v, \qquad Z_n = \frac{1}{v_0}\left[u_n - \sum_{j=0}^{n-1} Z_j v_{n-j}\right] \tag{2.29c}$$

$$Z = \sqrt{u}, \qquad Z_n = \frac{1}{2u_0}\left[u_n - \sum_{j=1}^{n-1} Z_j Z_{n-j}\right] \tag{2.29d}$$

où Z_n, u_n et v_n sont les coefficients de Taylor respectifs de Z, u et v à l'ordre n.

D'un point de vue informatique et par analogie aux langages de programmation dans leur version basique, un vecteur $V(x_i)_{1\leq i\leq k}$ est un objet de la classe "*vecteur*" possédant les propriétés associées comme *dimension* notée par exemple $V.dim = k$, *composante* notée $V.x_i = x_i$, *norme* notée $V.norm = \sqrt{\sum_{i=1}^{V.dim}(V.x_i)^2}$, ...etc. Dans le code informatique de la boîte à outil *diamant* en langage Matlab [91, 92], il a été ajouté une nouvelle classe d'objets nommée "$TaylorCoef$" qui confère désormais aux objets de ce type les propriétés des séries de Taylor. Ainsi, pour un objet donné Z de cette classe, il lui a été associé trois propriétés. La propriété *value* pour $Z.value$ est le coefficient de Taylor à l'ordre $n = 0$ de l'objet. La propriété $coef$ pour $Z.coef$ contient les coefficients de Taylor aux ordres supérieurs $n = 1...N$. Enfin, la propriété *order* pour $Z.order$ est l'ordre maximal de troncature des séries, c'est-à-dire N.

La technique de surcharge d'opérateurs dans le cadre de l'approche *diamant* consiste à attacher le calcul de dérivées aux opérateurs arithmétiques $(+, -, \times, /, <, >, \circ, ...)$

et aux fonctions mathématiques intrinsèques au langage de programmation. Dans le code informatique de la boîte à outil *diamant*, des formules de récurrence comme celles données dans l'équation (2.29) ont été programmées en amont pour propager le calcul des séries de Taylor. Ainsi, pour $Z = u \times v$ où u et v sont des objets de classe "$TaylorCoef$", l'opération arithmétique ($\times$) n'exécute pas la multiplication habituelle, mais plutôt la formule (2.29b) pour calculer les séries de Taylor Z_n et conférer les propriétés $coef$ à l'objet Z en utilisant celles des objets u et v (c'est-à-dire Z_n se calcule par propagation des u_j et v_j). De même, l'opération de division $Z = u/v$ confère à l'objet Z des propriétés $coef$ qui sont des séries de Taylor Z_n calculées en exécutant la formule de propagation (2.29c).

Dans le cadre du problème résiduel (2.21), tous les coefficients de Taylor apparaisssant dans la résolution des problèmes linéaires (2.28) peuvent être calculés automatiquement en utilisant la boîte à outil *diamant* étant donné que le résidu $\mathscr{R}(U, \lambda)$ est une composée de U et de λ. Pour ce faire, il suffit à l'opérateur de coder le résidu $\mathscr{R}(U, \lambda)$ en déclarant ses variables U et λ comme étant des objets de classe "$TaylorCoef$" et avec les initialisations requises. D'autres détails plus fournis sur la conception et l'utilisation de la boîte à outil *diamant* en version Matlab peuvent être trouvés dans les références [91, 92]. Dans ce travail, nous nous contenterons d'utiliser la boîte à outil *diamant* en version Matlab pour le calcul des séries dans la résolution du problème aux valeurs propres complexes non linéaire (2.20) régissant les vibrations libres en flexion des structures sandwichs viscoélastiques.

2.4 Résolution générique du problème de vibrations libres des structures sandwichs

Notre problème d'intérêt est le problème aux valeurs propres complexes non linéaire (2.20) obtenu par assemblage du problème élémentaire (2.18) dont les matrices élémentaires sont données dans l'équation (2.19). Le module d'Young complexe de la

couche centrale viscoélastique du sandwich peut toujours être décomposé sous la forme $E_c^*(\omega) = E_c^*(0) + E(\omega)$, où $E_c^*(0)$ est le module d'Young statique ou d'élasticité retardée et $E(\omega)$ la fonction scalaire complexe décrivant la dépendance en fréquence du module d'Young. Elle possède la propriété $E(0) = 0$ à la fréquence nulle. Avec cette décomposition, la matrice de rigidité élémentaire de l'équation (2.19) se met sous la forme :

$$[K^e(\omega)] = [K_0^e] + E(\omega)\,[K_v^e] \tag{2.30a}$$

$$\begin{aligned}[K_0^e] = [K^e(0)] = &\left(I_c E_c^*(0) + \frac{E_f S_f h_c^2}{2}\right)[k_1^e] - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2}\,[k_2^e] \\ &+ \left(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}\right)[k_3^e] + \frac{S_c E_c^*(0)}{2(1+\nu_c)}\,[k_4^e]\end{aligned} \tag{2.30b}$$

$$[K_v^e] = I_c\,[k_1^e] + \frac{S_c}{2(1+\nu_c)}\,[k_4^e]$$

où les matrices $[K_0^e]$ et $[K_v^e]$ sont réelles. Puisque la fonction $E(\omega)$ est une fonction scalaire, l'assemblage des matrices du problème élémentaire (2.30a) permet d'obtenir la matrice de rigidité assemblée du problème (2.20) sous la forme :

$$[K(\omega)] = [K_0] + E(\omega)\,[K_v] \tag{2.31}$$

où $[K_0] = [K(0)]$ est la matrice de rigidité globale d'élasticité retardée obtenue par assemblage de la matrice élémentaire $[K_0^e] = [K^e(0)]$ et $[K_v]$ la matrice obtenue par assemblage de la matrice élémentaire $[K_v^e]$. La décomposition (2.31) de la matrice de rigidité dans l'équation (2.20) permet de mettre le problème de vibrations libres sous la forme simple suivante :

$$\left[K_0 + E(\omega)K_v - \omega^2 M\right] U = 0 \tag{2.32}$$

Nous décrivons dans les paragraphes qui suivent la résolution de cette équation avec l'approche *diamant*.

2.4.1 Technique d'homotopie

La technique d'homotopie [66] dans la MAN consiste à transformer le problème initial à résoudre (2.32) en y injectant le paramètre de chemin a de sorte à mener la résolution en partant d'un problème aux valeurs propres réelles que l'on sait résoudre par les méthodes classiques (méthode des sous-espaces, de Lanczos,...etc) vers le problème aux valeurs propres complexes à résoudre. En posant $\lambda = \omega^2$, le problème (2.32) se met sous la forme résiduelle :

$$\mathscr{R}(U,\lambda) = [K_0 + E(\lambda)K_v - \lambda M]\,U = 0 \tag{2.33}$$

Le résidu $\mathscr{R}(U,\lambda)$ est ensuite décomposé en deux sous-résidus $S(U,\lambda)$ et $T(U,\lambda)$:

$$\begin{cases} \mathscr{R}(U,\lambda) = S(U,\lambda) + T(U,\lambda) = 0 \\ S(U,\lambda) = [K_0 - \lambda M]\,U \\ T(U,\lambda) = E(\lambda)K_v U \end{cases} \tag{2.34}$$

Le problème résiduel (2.33) ne pouvant être résolu de façon directe, le paramètre de chemin a est introduit

$$\mathscr{R}(U,\lambda,a) = S(U,\lambda) + aT(U,\lambda) = 0, \quad a \in [0 \quad 1] \tag{2.35}$$

afin de mener la résolution en partant du problème aux valeurs propres réelles de la structure sandwich non amortie

$$S(U,\lambda) = [K_0 - \lambda M]\,U = 0 \tag{2.36}$$

correspondant à $a = 0$, vers le problème aux valeurs propres complexes (2.33) correspondant à $a = 1$. Au lieu de la condition supplémentaire introduite habituellement par l'équation de la pseudo longueur d'arc (2.23), ici le système sous déterminé (2.35) est complété par la condition d'orthogonalité des modes propres [66] :

$${}^{\intercal}U_0\,(U - U_0) = 0 \tag{2.37}$$

où (U_0, λ_0) est une solution triviale du problème (2.35).

2.4.2 Procédure de continuation

Afin de résoudre le problème (2.35) en partant du problème aux valeurs propres réelles (2.36) vers le problème aux valeurs propres complexes (2.33), une procédure de continuation est élaborée en construisant pour le paramètre de chemin a, une suite monotone $\{a_{(j)}\}_{j=1,..,J}$ rangée de $a_{(1)} = 0$ à $a_{(J)} = 1$ (la séquence J étant à déterminer). Chaque sous-branche $(a_{(j)}, a_{(j+1)})$ est caclculée en résolvant le problème (2.38) à travers la MAN :

$$\mathscr{R}(U, \lambda, \delta_a + a_{(j)}) = S(U, \lambda) + (\delta_a + a_{(j)})T(U, \lambda) = 0 \tag{2.38}$$

où δ_a désigne l'incrément du paramètre de chemin. On note $(U_{(j)}, \lambda_{(j)}) = (U_0, \lambda_0)$ la solution de départ calculée en $a_{(j)}$ pour la sous-branche $(a_{(j)}, a_{(j+1)})$. Comme dans (2.22), les inconnues U et λ ainsi que les sous-résidus S et T sont développés en séries entières tronquées à l'ordre N de l'incrément δ_a :

$$S(a + \delta_a) = \sum_{n=0}^{N} \delta_a^n S_n(a), \quad \text{et} \quad T(a + \delta_a) = \sum_{n=0}^{N} \delta_a^n T_n(a) \tag{2.39}$$

où $S_n(a) = \dfrac{S^{(n)}}{n!}(a) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n S}{\partial a^n}(a)$ et $T_n(a) = \dfrac{T^{(n)}}{n!}(a) = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\partial^n T}{\partial a^n}(a)$ sont les coefficients de Taylor de S et T à l'ordre n évalués au point a. L'introduction de ces séries dans le problème (2.38)

$$\sum_{n=0}^{N} (\delta_a)^n S_n + (\delta_a + a_{(j)}) \sum_{n=0}^{N} (\delta_a)^n T_n = 0, \tag{2.40}$$

et l'identification des puissances entières en δ_a conduit à un système de $N+1$ équations :

$$\begin{aligned} &S_0 + a_{(j)} T_0 = 0, \quad \text{pour } n = 0 \\ &S_n + a_{(j)} T_n + T_{n-1} = 0, \quad \text{pour } n = 1, ..., N. \end{aligned} \tag{2.41}$$

où le décalage en indice de T_n et T_{n-1} est dû à l'homotopie. En écrivant les termes du système d'équations (2.41) suivant la décomposition (2.26) du principe générique de l'approche *diamant* de sorte à faire apparaître les séries de Taylor U_n, on obtient les systèmes linéaires génériques à implémenter avec *diamant* en présence de l'homotopie.

Ces systèmes linéaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&\Big[\{S_{0|U_0=Id}\} + a_{(j)}\{T_{0|U_0=Id}\}\Big]\, U_0 = 0, \quad n = 0 \\
&\Big[\{S_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\} + a_{(j)}\{T_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\}\Big]\, U_n = -\{S_{n|U_n=0}\} - a_{(j)}\{T_{n|U_n=0}\} - T_{n-1}, \quad n \geq 1
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Dans l'équation (2.42), les variables $\{S_{n|U_n=0}\}$ et $\{T_{n|U_n=0}\}$ sont les coefficients de Taylor de S et T à l'ordre n évalués en initialisant U_n à 0, tandis que la matrice $[A] = \Big[\{S_{1|u_1=Id,\lambda_1=0}\} + a_{(j)}\{T_{1|u_1=Id,\lambda_1=0}\}\Big]$ est la matrice linéaire tangente. Nous discutons dans le paragraphe suivant les équations génériques des coefficients de Taylor U_n et λ_n pour la détermination de la solution (U, λ).

2.4.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Les développements précédents sont exploités pour déterminer la solution du problème aux valeurs propres complexes (2.33). Dans un premier temps, la linéarité en U des fonctions résidues $\mathscr{R}$, S et T permet de déduire l'égalité suivante qui traduit le fait que les problèmes linéaires (2.42) possèdent tous la même matrice linéaire tangente :

$$\begin{aligned}
[A] =& [\{S_{0|U_0=Id}\} + a_{(j)}\{T_{0|U_0=Id}\}] = [\{S_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\} + a_{(j)}\{T_{1|U_1=Id,\lambda_1=0}\}] \\
=& \Big[K_0 - \lambda_0 M + a_{(j)} E(\lambda_0) K_v\Big]
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Dans un deuxième temps, l'équation à l'ordre $n = 0$ du système linéaire générique (2.42)

$$[\{S_{0|U_0=Id}\} + a_{(j)}\{T_{0|U_0=Id}\}]U_0 = [A]U_0 = 0 \tag{2.44}$$

est identiquement satisfaite vu que $(U_0, \lambda_0) = (U_{(j)}, \lambda_{(j)})$ est solution de (2.35). La matrice $[A]$ est singulière et en utilisant les développements en séries de U, la condition d'orthogonalité des modes (2.37) se traduit par ${}^{\intercal}U_0 U_n = 0$ pour $n \geq 1$. Le multiplicateur de Lagrange χ est introduit [66] pour déduire l'équation linéaire générique pour le calcul du coefficient de Taylor U_n :

$$\begin{bmatrix} [A] & U_0 \\ {}^{\intercal}U_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_n \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\{S_{n|U_n=0}\} - a_{(j)}\{T_{n|U_n=0}\} - \{T_{n-1}\} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.45}$$

Par la suite, nous noterons $[B]$ la matrice apparaissant dans le terme de gauche de l'équation (2.45). Comme la matrice $[A]$ est singulière, l'équation à l'ordre $n \geq 1$ du système linéaire générique (2.42) ne possède de solution que si elle satisfait à la condition de solvabilité sur le second membre [66] :

$$ {}^{\intercal}U_0 \left[\{S_{n|U_n=0}, \} + a_{(j)} \{T_{n|U_n=0}\} + T_{n-1} \right] = 0 \tag{2.46} $$

On peut alors faire apparaître le coefficient de Taylor λ_n dans cette équation en reécrivant les termes $\{S_{n|U_n=0}, \}$ et $\{T_{n|U_n=0}\}$ suivant la décomposition (2.26) du principe générique de l'approche *diamant* :

$$ \begin{cases} \{S_{n|U_n=0}\} = \{S_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} + \{S_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}\lambda_n \\ \{T_{n|U_n=0}\} = \{T_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} + \{T_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}\lambda_n \end{cases} \tag{2.47} $$

L'introduction des termes (2.47) ainsi décomposés dans l'équation de solvabilité (2.46) permet de déduire l'équation générique pour le calcul du coefficient de Taylor λ_n :

$$ \lambda_n = -\frac{{}^{\intercal}U_0 \left[\{S_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} + a_{(j)} \{T_{n|U_n=0,\lambda_n=0}\} + T_{n-1} \right]}{{}^{\intercal}U_0 [\{S_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\} + a_{(j)} \{T_{1|U_1=0,\lambda_1=1}\}]}. \tag{2.48} $$

Dans la pratique, l'équation en λ_n (2.48) est résolue en premier, ensuite l'équation en U_n (2.45) à cause du fait que les termes du second membre de cette dernière dépendent du coefficient λ_n.

Dans la méthode asymptotique numérique [94], le dernier terme U_N des séries est généralement utilisé pour estimer le rayon de convergence en exigeant qu'il soit très petit devant le premier terme U_1 :

$$ a_{max} = \left(\varepsilon \frac{\|U_1\|}{\|U_N\|} \right)^{\frac{1}{N-1}} \tag{2.49} $$

où ε est un paramètre de précision à choisir par l'utilisateur. Ainsi, pour la procédure de continuation exécutant le calcul des sous branches $(a_{(j)}, a_{(j+1)})$ et des series de Taylor (U_n, λ_n), le point de départ pour la première itération $j = 1$ est $a_{(1)} = 0$ et les coefficients de départ (U_0, λ_0) sont les solutions du problème de valeur propre réel (2.36) de la structure non amortie. Mais, le point de départ pour l'itération $j + 1 > 1$

est $a_{(j+1)} = a_{(j)} + a_{max}$ et les coefficients de départ sont les solutions $(U_{(j)}, \lambda_{(j)})$ estimée à l'itération précédente j c'est-à-dire :

$$U_{(j)} = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - a_{(j)}\right)^n U_n, \quad \text{et} \quad \lambda_{(j)} = \sum_{n=0}^{N} \left(1 - a_{(j)}\right)^n \lambda_n \tag{2.50}$$

L'algorithme itératif de la continuation prend fin lorsqu'à la séquence J

$$a_{(J)} = a_{(j)} + a_{max} > 1 \tag{2.51}$$

2.4.4 Solveur *diamant* et son implémentation

Les développements théoriques effectués dans les sections 2.4.2 et 2.4.3 sont utilisés pour automatiser la résolution du problème de valeur propre complexe (2.32) sous un code de calcul numérique en langage Matlab. Pour ce faire, nous avons élaboré un solveur qui fonctionne en liaison avec la boîte à outil de différentiation automatique et des routines utilisateurs comme le montre le graphe d'appel de la figure 2.2. Dans



FIG. 2.2 – Graphe d'appel du solveur *diamant*

ce graphe d'appel, les routines en gras sont les routines utilisateurs. Une flèche de la gauche vers la droite signifie que la routine de gauche dans son exécution fait appel à la routine de droite. La routine **E** permet à l'utilisateur de définir la loi de la dépendance en fréquence du module d'Young c'est-à-dire la fonction $E(\lambda)$ représentant le modèle viscoélastique. Les routines **S** et **T** permettent à l'utilisateur de définir les sous-résidus correspondant à la relation (2.34). La routine **EF** permet à l'utilisateur de définir son modèle élément fini (K_0, K_v, M), la solution de départ (U_0, λ_0), l'ordre de troncature N et le paramètre de précision ε. Les matrices (K_0, K_v, M) sont passées aux routines **S** et **T** alors que la solution de départ (U_0, λ_0), l'ordre de troncature

N et le paramètre de précision ε sont passés à la routine Continuation. Celle-ci exécute la procédure itérative de continuation pour générer la solution (U, λ) du problème (2.32) en utilisant les séries de Taylor S_n et T_n. Ces séries sont calculées par la routine Calcul de séries qui représente la boîte à outil *diamant*. Pour ce faire, les inconnues (U, λ) sont déclarées comme des objets de classe "$TaylorCoef$". Ainsi, les fonctions $E(\lambda)$, $S(U, \lambda)$ et $T(U, \lambda)$ deviennent aussi des objects de classe "$TaylorCoef$" et sont différentiées implicitement à travers les formules de propagation des dérivées, équation (2.29) du fait qu'elles sont des composées de fonctions avec les objets (U, λ) de la classe "$TaylorCoef$". Le resumé de la procédure de continuation impliquant le calcul des séries par différentiation automatique (DA) pour la résolution du problème de valeur propre complexe (2.32) est résumé sous forme algorithmique dans le tableau 2.1. Le

1. Calculs préliminaires
solution du problème aux valeurs propres réelles (2.36)
Construction de la matrice $[B]$ selon (2.45)
Construction du dénominateur de (2.48)
Evaluation de T_0
2. Calcul des séries, pour $n = 1, .., N$
Evaluation de $\{S_n \vert U_n = 0\}, \{T_n \vert U_n = 0\}$ par DA
Evaluation de λ_n selon (2.48)
Solution de (2.45) pour le calcul de U_n
Actualisation de S_n et T_n par DA
3. Test de convergence
Estimation du rayon de convergence (2.49)
Si $a_{(j)} + a_{max} \leq 1$ alors retour à l'étape 1, ligne 2

TAB. 2.1 – Algorithme de continuation du solveur *diamant*, calcul des séries par DA

solveur ainsi élaboré a l'avantage d'occulter complètement les procédures de différentiation et de résolution, il suffit à l'utilisateur de fournir au solveur le modèle élément fini et le modèle viscoélastique du problème pour générer la solution correspondante. Nous proposons dans la section suivante des tests de validation sur des structures sandwichs poutres de diverses géométries et conditions aux limites.

2.5 Validation numérique et discussion

Les solutions (U, λ) obtenues à l'issue de la résolution du problème (2.20) de vibrations libres linéaires des structures sandwichs vicoélastiques permettent de caractériser les propriétés amortissantes de la structure. En effet, le vecteur U représente le mode propre complexe exact et le scalaire λ le carré de la pulsation propre complexe exacte. Ces deux quantités permettent de définir la pulsation amortie Ω et le facteur de perte η de la structure sous la forme :

$$\lambda = \omega^2 = \frac{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}[K(\omega)]\{U\}}{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}[M]\{U\}} = \Omega^2(1+i\eta) \tag{2.52}$$

Rappelons que la difficulté de résolution du problème (2.20) est due à la dépendance en fréquence de la loi viscoélastique. Ainsi, pour tester la généricité, l'éfficacité et les performances de la présente approche, des calculs numériques de propriétés amortissantes sont menés sur des structures sandwichs poutres de diverses géométries et conditions aux limites avec trois lois de comportement viscoélastique pour le cœur : une loi à module complexe constant avec différents facteurs de perte du matériau viscoélastique, une loi à module complexe variable induisant un amortissement faible et une loi à module complexe variable induisant un amortissement élévé. Les structures sandwichs considérées sont discrétisées en utilisant l'élément fini poutre à une dimension proposé dans la section 2.2.3. D'autres validations seront menées sur les structures sandwichs plaques plus loin dans le chapitre 4. Cependant, il est à noter que la procédure de résolution proposée ici est indépendante du maillage élément fini, des conditions aux limites et de la nature de la structure sandwich étant donné que, quelle que soit la structure considérée (poutre, plaque ou coque), le problème de vibration libre linéaire se ramène toujours sous la forme (2.20). A l'issue de la résolution, la norme r du résidu $\mathscr{R}(U, \lambda)$ est évaluée afin de mesurer le degré de précision de la présente méthode :

$$r = \|[K_0 + E(\lambda)K_v - \lambda M]\,U\| \tag{2.53}$$

Pour le modèle élément fini, un maillage de 100 éléments est effectué dans la direction de la longueur de la poutre sandwich. S'agissant des paramètres utilisés dans la méthode asymptotique numérique, l'ordre de troncature des séries est fixé à $N = 20$ et le paramètre de précision pour l'estimation du rayon de convergence à $\varepsilon = 10^{-6}$. Ces valeurs resteront inchangées pour tous les résultats calculés par la MAN dans le présent manuscrit. L'estimation de départ (U_0, λ_0) est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres réelles (2.36) à l'aide de la méthode d'Arnoldi [64] implémentant la fonction "*eigs*" de Matlab.

2.5.1 Modèle viscoélastique à module complexe constant

Dans le cas d'un modèle viscoélastique à module complexe constant, le module d'Young complexe de la couche centrale viscoélastique de la structure sandwich est modélisé par une loi constante de la forme :

$$E_c^*(\omega) = E_0\,(1 + i\eta_c) \tag{2.54}$$

où $E_c^*(0) = E_0$ est le module d'Young d'élasticité retardée et η_c le facteur de perte du cœur. La formulation (2.54) est très largement utilisée dans la littérature mais demeure une hypothèse qui n'est valide que dans un domaine où le module de stockage et le facteur de perte du matériau viscoélastique varient très peu en fonction de la fréquence. Dans cette formulation, la fonction scalaire complexe $E(\omega)$ se réduit simplement à une constante $E(\omega) = iE_0\eta_c$, ramenant alors le problème (2.20) à un problème de valeur propre complexe linéaire (1.53) qui pourrait aussi être résolu par les méthodes classiques. Les calculs sont menés sur une poutre sandwich encastrée-libre largement étudiée dans la littérature [50, 51, 52, 54, 58]. Les faces élastiques sont en aluminium et le cœur viscoélastique est un polymère dont le facteur de perte est varié comme suit $\eta_c \in \{0.1, 0.6, 1, 1.5\}$. Les propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sandwich aluminium/polymère/aluminium sont regroupées dans le tableau 2.2.

Les propriétés amortissantes en termes de fréquence de résonance Ω, de facteur de perte

normalisé η/η_c ainsi que l'erreur résiduelle r sont présentées dans le tableau 2.3 pour les six premiers modes de vibration de la poutre sandwich. Puis, elles sont comparées aux résultats analytiques fournis par Soni [52] et aux résultats numériques fournis par Daya et Potier-Ferry [66]. Rappelons que les résultats numériques de Daya et Potier-Ferry [66] sont obtenus par la MAN en utilisant une discrétisation bidimensionnelle dans l'épaisseur du sandwich à l'aide d'un élément fini quadrangulaire à 8 nœuds. On observe une très bonne corrélation entre les valeurs modales obtenues par la présente approche et les valeurs modales analytiques et numériques. Des résultats identiques ont été trouvés par Duigou et al. [54] en utilisant des algorithmes itératifs MAN d'ordre élevé et un élément sandwich de type coque/volume/coque. Ce qui valide le modèle élément fini poutre proposé dans la section 2.2.3 et la présente méthode de résolution. Pour les six premiers modes de vibration, l'erreur résiduelle obtenue par l'approche *diamant* est inférieure à 2×10^{-3}, ce qui confirme bien la précision de la présente méthode. En particulier, pour le premier mode de vibration, l'erreur résiduelle est de l'ordre de 10^{-4} et dans ce cas, les résultats analytiques et numériques sont exactement les mêmes. Pour les six modes de vibrations, la convergence des résultats est obtenue au bout d'une itération pour $\eta_c \in \{0.1, 0.6\}$ et au bout de deux itérations pour $\eta_c \in \{1, 1.5\}$.

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 6.9 \times 10^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Densité massique	$\rho_f = 2766 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 1.524 mm$
Cœur viscoélastique	Module d'Young	$E_0 = 1794 \times 10^3 Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.3$
	Densité massique	$\rho_c = 968.1 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.127 mm$
Dimensions du sandwich	Longueur	$L = 177.8 mm$
	Largeur	$l = 12.7 mm$

TAB. 2.2 – Caractéristiques de la poutre sandwich aluminium/polymère/aluminium

	Approche *diamant*			Analytique [52]		Numérique [66]	
η_c	$\Omega(Hz)$	η/η_c	erreur r	$\Omega(Hz)$	η/η_c	$\Omega(Hz)$	η/η_c
0.1	64.1	0.281	3.28×10^{-4}	64.1	0.281	64.2	0.281
	296.7	0.242	1.21×10^{-3}	296.4	0.242	296.9	0.242
	744.5	0.154	1.58×10^{-3}	743.7	0.154	745.5	0.153
	1395.7	0.089	1.64×10^{-3}	1393.9	0.088	1398.5	0.088
	2264.5	0.057	1.68×10^{-3}	2261.1	0.057	2271.2	0.056
	3349.8	0.039	1.69×10^{-3}	3343.6	0.039	3363.4	0.038
0.6	65.5	0.246	3.28×10^{-4}	65.5	0.246	65.6	0.246
	299.2	0.232	1.21×10^{-3}	298.9	0.232	299.5	0.232
	746.3	0.153	1.58×10^{-3}	745.5	0.152	747.3	0.152
	1396.6	0.089	1.64×10^{-3}	1394.9	0.088	1399.5	0.088
	2265.2	0.057	1.68×10^{-3}	2261.7	0.057	2271.8	0.056
	3350.2	0.039	1.69×10^{-3}	3344	0.039	3363.8	0.038
1.0	67.5	0.202	3.28×10^{-4}	67.4	0.202	67.5	0.202
	303.1	0.218	1.21×10^{-3}	302.8	0.217	303.3	0.217
	749.4	0.150	1.58×10^{-3}	748.6	0.150	750.4	0.150
	1398.3	0.088	1.64×10^{-3}	1396.6	0.088	1404.2	0.087
	2266.3	0.057	1.68×10^{-3}	2262.8	0.057	2273.0	0.056
	3350.9	0.039	1.69×10^{-3}	3345	0.038	3364.5	0.038
1.5	69.9	0.153	3.28×10^{-4}	69.8	0.153	70.0	0.153
	309.1	0.198	1.21×10^{-3}	308.8	0.197	309.4	0.197
	755.2	0.146	1.58×10^{-3}	754	0.146	756.2	0.145
	1401.4	0.087	1.64×10^{-3}	1399.7	0.087	1404.3	0.086
	2268.5	0.057	1.68×10^{-3}	2265	0.056	2275.1	0.056
	3352.3	0.039	1.69×10^{-3}	3346	0.038	3365.9	0.038

TAB. 2.3 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/-polymère/aluminium

2.5.2 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement faible

L'approche *diamant* est utilisée pour déterminer les propriétés amortissantes d'une poutre sandwich avec un cœur viscoélastique dont le module varie fortement en fonction de la fréquence. Le matériau du cœur est le Polyvinyl de Butyral (PVB) et la poutre sandwich considérée représente un pare brise en verre/PVB/verre encastré à ses deux extrémités comme étudié dans les travaux de Asik et Tezcan [96] et de Koutsawa et

al. [91, 92]. Le matériau viscoélastique PVB est modélisé par un modèle à dérivées fractionnaires dont la loi d'évolution du module de cisaillement complexe est donnée par [92] :

$$G_c^*(\omega) = G_\infty + (G_0 - G_\infty)[1 + (i\omega\tau)^{1-\alpha}]^{-\beta} \tag{2.55}$$

Le Polyvinyl de Butyral est considéré à la température de 20°C et les coefficients associés à la loi (2.55) pour cette température sont $G_0 = 479 \times 10^3 Pa$, $G_\infty = 2.35 \times 10^8 Pa$, $\tau = 0.3979$, $\alpha = 0.46$ et $\beta = 0.1946$. Rappelons que le module d'Young complexe et le module de cisaillement complexe sont liés par la relation $E_c^*(\omega) = 2\,(1 + \nu_c)\,G_c^*(\omega)$. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la poutre sandwich verre/PVB/verre étudiée sont données dans le tableau 2.4.

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 6.45 \times 10^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.22$
	Densité massique	$\rho_f = 2737 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 5mm$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.4$
	Densité massique	$\rho_c = 999 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.76mm$
Dimensions du sandwich	Longueur	$L = 1m$
	Largeur	$l = 0.1m$

TAB. 2.4 – Caractéristiques de la poutre sandwich verre/PVB/verre

Les fréquences de résonance ainsi que les facteurs de perte déterminés par l'approche *diamant* sont présentés dans le tableau 2.5 pour les six premiers modes de vibration. En guise de comparaison, nous avons effectué parallèlement l'analyse de la réponse fréquentielle en excitant les modes d'intérêt dans la plage de fréquences concernées puis, nous avons déduit les fréquences de résonance et les facteurs de perte correspondant en appliquant la technique des bandes passantes à 3db. Les résultats obtenus par l'approche *diamant* sont en adéquation avec ceux obtenus par la méthode des bandes passantes. L'erreur résiduelle inférieure à 2×10^{-3} montre la précision de l'approche

	Approche *diamant*			Méthode des bandes passantes	
Modes	$\Omega(Hz)$	η	erreur r	$\Omega(Hz)$	η
1	53.74	9.11×10^{-3}	1.38×10^{-3}	53.74	9.07×10^{-3}
2	145.26	1.37×10^{-2}	1.57×10^{-3}	145.25	1.36×10^{-2}
3	278.39	1.80×10^{-2}	2.77×10^{-3}	278.33	1.80×10^{-2}
4	448.59	2.21×10^{-2}	2.08×10^{-3}	448.56	2.20×10^{-2}
5	651.94	2.58×10^{-2}	8.52×10^{-4}	652.85	2.63×10^{-2}
6	884.80	2.90×10^{-2}	8.43×10^{-4}	884.92	2.89×10^{-2}

TAB. 2.5 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich bi-encastrée verre/PVB/-verre à 20°C

diamant. Les résultats ainsi présentés sont obtenus avec moins de dix itérations dans la procédure de continuation.

Comme le montre les facteurs de perte présentés dans le tableau 2.5, la loi de comportement viscoélastique (2.55) induit un amortissement relativement faible, de l'ordre de 10^{-2}. Cependant, il est aussi nécessaire de tester les performances de l'approche *diamant* en présence d'une loi viscoélastique induisant un amortissement élevé, ce que nous discutons dans la dernière section.

2.5.3 Modèle viscoélastique à module variable, amortissement élevé

L'analyse des vibrations libres de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/-polymère/aluminium [50, 51, 52, 54, 58] étudiée dans le premier exemple 2.5.1 pour un modèle viscoélastique à module complexe constant est reconduite ici en présence d'une loi viscoélastique du cœur dépendant fortement de la fréquence et induisant un amortissement élevé. Pour cela, le polymère choisi pour le cœur est l'ISD112 dont la loi d'évolution du module de cisaillement complexe est représentée par le modèle de Maxwell généralisé [21, 22] :

$$G_c^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j} \right) \tag{2.56}$$

où G_0 est le module de cisaillement d'élasticité retardée et (Δ_j, Ω_j) sont les paramètres du modèle obtenus par lissage des courbes maîtresses. Tous ces coefficients du modèle donnés à la température de 27°C [21] et 20°C [22] sont regroupés dans le tableau 2.6. Les caractéristiques de la poutre sandwich aluminium/ISD112/aluminium

	27°C			20°C		
j	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^{-1})$	$G_0(Pa)$	Δ_j	$\Omega_j(rad.s^{-1})$
1	0.5×10^6	0.746	468.7	0.0511×10^6	2.8164	31.1176
2		3.265	4742.4		13.1162	446.4542
3		43.284	71532.5		45.4655	5502.5318

TAB. 2.6 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour l'ISD112 à 27°C et 20°C

sont données dans le tableau 2.7. L'étude de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/ISD112/aluminium est menée à la température de 27°C et nous comparons dans le tableau 2.8 les fréquences de résonance et les facteurs de perte obtenus par l'approche *diamant* à ceux obtenus par la méthode des bandes passantes à 3db pour les six premiers modes de vibration. Ces deux types de résultats sont en accord pour les cinq premiers modes de vibration, sauf pour le sixième mode où on observe un écart important sur les valeurs des facteurs de perte. Ceci est dû à la méthode des bandes passantes qui devient imprécise pour des amortissements élevés où un large pic de résonance est obtenu dans la courbe de réponse de la structure. Néanmoins, l'approche *diamant* demeure une méthode précise puisque l'erreur résiduelle obtenue

Faces élastiques	Module d'Young	$E_f = 6.9 \times 10^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Densité massique	$\rho_f = 2766 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_f = 1.524 mm$
Cœur viscoélastique	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.5$
	Densité massique	$\rho_c = 1600 Kg.m^{-3}$
	Epaisseur	$h_c = 0.127 mm$
Dimensions du sandwich	Longueur	$L = 177.8 mm$
	Largeur	$l = 12.7 mm$

TAB. 2.7 – Caractéristiques de la poutre sandwich aluminium/ISD112/aluminium

	Approche *diamant*			Méthode des bandes passantes	
Modes	$\Omega(Hz)$	η	erreur r	$\Omega(Hz)$	η
1	65.23	1.71×10^{-1}	5.67×10^{-4}	65.28	1.71×10^{-1}
2	323.30	3.04×10^{-1}	1.36×10^{-3}	324.87	3.01×10^{-1}
3	846.82	3.32×10^{-1}	1.61×10^{-3}	870.62	3.08×10^{-1}
4	1555.29	3.15×10^{-1}	1.66×10^{-3}	1563.45	2.85×10^{-1}
5	2490.27	3.03×10^{-1}	1.69×10^{-3}	2492.26	2.91×10^{-1}
6	3671.23	2.88×10^{-1}	1.70×10^{-3}	3683.16	4.55×10^{-1}

TAB. 2.8 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre aluminium/ISD112/aluminium à 27°C

est inférieure à 2×10^{-3}. Pour les deux premiers modes de vibration, les résultats ont convergé au bout de deux itérations et pour le reste en moins de six itérations. Ceci montre l'efficacité et la performance de l'approche *diamant* non seulement pour des lois viscoélastiques variables, mais aussi en présence d'un amortissement élevé.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une approche générique pour la détermination directe et très précise des propriétés amortissantes des structures sandwichs a été développée en combinant la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique. Le problème numérique de vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques a été formulé en se basant sur les hypothèses cinématiques classiques et en utilisant un élément fini unidimensionnel. Par suite, le principe de l'approche *diamant* a été présenté pour la résolution générique de l'équation dynamique du problème de valeur propre complexe non linéaire. A cette fin, un solveur numérique a été élaboré en langage Matlab en utilisant la boîte à outil de différentiation automatique et a été implémenté pour la détermination directe et exacte des solutions propres servant à estimer les propriétés amortissantes des sandwichs. Ce solveur a l'avantage d'occulter complètement les aspects de différentiation et de résolution qui sont indépendants du modèle élément fini utilisé. Des simulations numériques sont menées sur des structures

sandwichs poutres avec un modèle viscoélastique à module complexe constant et deux modèles viscoélastiques à module complexe variable, l'un induisant un amortissement faible, et l'autre un amortissement élevé. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats analytiques et aux résultats numériques obtenus par la méthode des bandes passantes. Ils ont permis dans un premier temps, de valider l'élément fini proposé et dans un deuxième temps, de mettre en évidence la simplicité, la généricité, l'éfficacité et la performance de l'approche *diamant* pour la résolution du problème de vibration libre quelle que soit la non linéarité matérielle introduite par la dépendance en fréquence du modèle viscoélastique.

Chapitre 3

Une méthode numérique pour l'étude des vibrations non linéaires des poutres sandwichs viscoélastiques

Sommaire

3.1 Introduction 91

3.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires de poutres sandwichs 92

3.2.1 Hypothèses cinématiques et lois de comportement 92

3.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement 94

3.3 Discrétisation par élément fini et modes de vibrations linéaires 96

3.4 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire 99

3.4.1 Problème d'équilibre dans le plan 100

3.4.2 Equation d'amplitude non linéaire 101

3.5 Analyse des vibrations linéaires et non linéaires par l'équation d'amplitude 102

3.5.1 Approche simplifiée 103

3.5.2 Approche générale 105

3.6 Tests numériques et analyse 106

3.6.1 Tests numériques du modèle viscoélastique constant 108

3.6.2 Tests numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence 114

3.7 Conclusion 124

3.1 Introduction

L'étude bibliographique menée au chapitre 1 a montré que très peu de chercheurs se sont intéressés à la modélisation des vibrations non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques surtout avec une prise en compte de la dépendance en fréquence de l'amortissement. La difficulté de résolution en présence des lois de comportement dépendant non linéairement de la fréquence conduit les auteurs à ne considérer que des formes très simples d'amortissement : modèle constant [78], modèle visqueux [72, 73, 74, 75, 81], modèle linéaire de type Kelvin-Voigt [69, 70, 71, 76, 77]. La prise en compte d'un comportement viscoélastique général dépendant de la fréquence n'a été faite que dans le cadre des modèles analytiques [82] et semi-numériques [83, 84] basés sur la méthode de Galerkin à un mode réel. Quoique la précision des résultats obtenus n'ait été démontrée que dans le cadre linéaire pour des structures faiblement amorties et pour le modèle viscoélastique constant [53], cependant jusqu'alors cette hypothèse de mode indépendant de la viscosité n'a été évaluée vis-à-vis d'un comportement viscoélastique dépendant de la fréquence. De plus, ces modèles analytiques ne permettent de traiter que des conditions aux limites simples et leur validité est limitée au voisinage des fréquences de résonance de la structure non amortie. L'objectif du présent chapitre est d'élaborer un modèle d'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs permettant de prendre en compte un amortissement dépendant de la fréquence quelle que soit la non linéarité de la loi de comportement viscoélastique et aussi de traiter des conditions aux limites génériques. Le modèle est basé sur une approche élément fini et utilise la technique d'équilibrage harmonique couplée à la méthode de Galerkin à un mode. Le modèle est développé ici dans le cas des structures sandwichs poutres, mais sera étendu aux structures sandwichs plaques plus loin dans le chapitre 4.

Après avoir formulé le problème de vibrations non linéaires de poutres sandwichs, une analyse préliminaire est menée, d'abord dans le cadre linéaire en considérant différents niveaux d'approximation du mode de vibration linéaire formant la base de Galerkin :

approximation en mode réel (mode propre de la structure non amortie) et approximation en mode complexe (mode propre de la structure amortie). Ensuite, une équation d'amplitude gouvernant les vibrations non linéaires est établie et dont les coefficients dépendent de la base de Galerkin. Cette équation est résolue dans un cadre général permettant d'analyser les réponses linéaires et non linéaires des structures sandwichs avec prise en compte d'un amortissement dépendant de la fréquence. Des simulations numériques sont menées sur une poutre sandwich avec différentes lois de comportement viscoélastiques au cœur et pour diverses conditions aux limites. Enfin, l'influence du choix de la base de Galerkin sur les propriétés amortissantes et sur les réponses linéaires et non linéaires des structures sandwichs est discutée afin d'établir la limite de validité de l'approximation en mode réel dans l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires.

3.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires de poutres sandwichs

3.2.1 Hypothèses cinématiques et lois de comportement

La structure sandwich trois couches à cœur viscoélastique représentée à la figure 2.1 précédemment étudiée au chapitre 2 (section 2.2.1) est considérée dans la même configuration spatiale relativement au système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z). Comme précédemment, elle est assimilée à une poutre dans la présente analyse. Les notations et conventions déjà utilisées à la section 2.2.1 relativement à la désignation des couches externes et de la couche centrale ainsi que leurs propriétés spatiales, mécaniques, matérielles et dimensionnelles sont reconduites ici pour l'analyse et restent valables pour tout le manuscrit. Hormis l'hypothèse des petites perturbations, la poutre sandwich est considérée dans les mêmes hypothèses cinématiques déjà décrites à la section 2.2.1, mais l'étude est menée ici dans le cadre des grands déplacements et des rotations modérées. Le champ de déplacement est décrit en utilisant le modèle ciné-

matique zigzag [32] et comme dans [82], les non linéarités géométriques dans le champ de déformation sont prises en compte selon la théorie classique de Von Karman. Dans ces conditions, les déplacements longitudinaux U_i et les déplacements transversaux W_i dans chaque couche i du sandwich sont donnés par les formulations suivantes :
pour les faces externes élastiques $i = 1, 3$:

$$\begin{aligned} U_i(x,z,t) &= u_i(x,t) - (z - z_i)w_{,x} \\ W_i(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

où u_i représente le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche i et w la flèche commune aux trois couches. Les ordonnées z_i des plans moyens sont données par $z_1 = -z_3 = (h_f + h_c)/2$, où h_f représente l'épaisseur des couches externes et h_c l'épaisseur de la couche centrale.
pour la couche centrale viscoélastique $i = 2$:

$$\begin{aligned} U_2(x,z,t) &= u(x,t) + z\beta(x,t) \\ W_2(x,z,t) &= w(x,t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

où u est le déplacement longitudinal du plan moyen de la couche centrale et β la rotation de la normale au plan moyen de la couche centrale. Le champ de déformation non linéaire s'exprime pour les trois couches de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(x,z,t) &= u_{i,x} + \tfrac{1}{2}(w_{,x})^2 - (z - z_i)w_{,xx} \qquad \text{i=1,3} \\ \varepsilon_2(x,z,t) &= u_{,x} + \tfrac{1}{2}(w_{,x})^2 + z\beta_{,x} \\ \xi_2(x,z,t) &= \beta + w_{,x} \end{aligned} \tag{3.3}$$

ε_i est la déformation normale dans la couche i et ξ_2 la déformation de cisaillement dans la couche centrale, toutes obtenues en utilisant la formule de Green-Lagrange (1.67).
En utilisant la loi de Hooke généralisée (1.22), les lois de comportement des couches élastiques de la poutre sandwich sont établies en calculant les efforts normaux N_i et les moments fléchissants M_i :

$$\begin{aligned} N_i(x,t) &= E_f S_f \left[u_{i,x} + \tfrac{1}{2}(w_{,x})^2\right], \qquad \text{i=1,3} \\ M_i(x,t) &= E_f I_f w_{,xx} \end{aligned} \tag{3.4}$$

où E_f représente le module d'Young des faces, S_f et I_f respectivement l'aire et le moment quadratique de leur section droite. L'effort normal et le moment fléchissant dans la couche centrale viscoélastique $i = 2$ sont donnés par des produits de convolution :

$$\begin{aligned} N_2(x,t) &= S_c \mathcal{R}(t) * \left[\dot{u}_{,x} + \tfrac{1}{2}(\dot{w_{,x}})^2\right] \\ M_2(x,t) &= I_c \mathcal{R}(t) * \dot{\beta}_{,x} \end{aligned} \tag{3.5}$$

où S_c et I_c représentent respectivement l'aire et le moment quadratique de la section droite de la couche centrale et $\mathcal{R}(t)$ la fonction de relaxation du matériau viscoélastique de cette couche. Quant à l'effort tranchant induit par la déformation de cisaillement de la couche centrale, il s'écrit comme établi dans l'équation (2.7) :

$$T(x,t) = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)} \mathcal{R}(t) * \left(\dot{w}_{,x} + \dot{\beta}\right) \tag{3.6}$$

Nous présentons dans la section suivante la formulation variationnelle du problème de vibrations non linéaires permettant d'établir l'équation du mouvement de la poutre sandwich.

3.2.2 Formulation variationnelle et équation du mouvement

Pour établir l'équation générale du mouvement de la poutre sandwich, le principe des puissances virtuelles est appliqué aux trois couches constitutives. Comme supposé précédemment au chapitre 2 section 2.2.1, les effets d'inertie longitudinale et rotationnelle sont négligés et seuls les effets d'inertie tranversale sont pris en compte. L'hypothèse de la continuité du champ de déplacement aux interfaces traduite par la relation (2.3) permet de définir les déplacements généralisés $\{u, w, \beta\}$ ramenés dans le plan moyen de la couche centrale. En utilisant les relations (2.8), les trois composantes du principe des puissances virtuelles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \delta P_{int} &= -\int_0^L \left[N\left(\delta u_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x}\right) + M_\beta \delta\beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta)\right] dx \\ \delta P_{ext} &= \int_0^L F\delta w dx \\ \delta P_{acc} &= (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w}\delta w dx \end{aligned} \tag{3.7}$$

où δP_{int}, δP_{ext} et δP_{acc} sont la puissance virtuelle respectivement des efforts intérieurs, extérieurs et d'inertie. $\{\delta u, \delta w, \delta\beta\}$ sont les déplacements virtuels généralisés. Il est considéré que la poutre est soumise à un effort extérieur $F = F(x,t)$ et N représente l'effort normal, M_β et M_w les moments fléchissants résultants dans la poutre. Ils sont exprimés en fonction des déplacements généralisés en utilisant la relation (2.3) de continuité des déplacements aux interfaces, puis les relations (3.4) et (3.5) :

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 = 2E_fS_f\left[u_{,x} + \tfrac{1}{2}(w_{,x})^2\right] + S_c\mathcal{R} * \left[\dot{u}_{,x} + \tfrac{1}{2}(\dot{w_{,x}})^2\right] \\ M_\beta &= M_2 + (N_1 - N_3)\frac{h_c}{2} = I_c\mathcal{R} * \dot{\beta}_{,x} + \frac{E_fS_fh_c}{2}\left(h_c\beta_{,x} - h_fw_{,xx}\right) \\ M_w &= M_1 + M_3 + (N_3 - N_1)\frac{h_f}{2} = \left(2E_fI_f + \frac{E_fS_fh_f^2}{2}\right)w_{,xx} - \frac{E_fS_fh_fh_c}{2}\beta_{,x} \end{aligned} \tag{3.8}$$

En assemblant les trois composantes (3.7) du principe des puissances virtuelles, on obtient l'équation générale gouvernant les vibrations non linéaires de la poutre sandwich :

$$\begin{aligned} &-\delta P_{int} + \delta P_{acc} = \delta P_{ext} \\ &\int_0^L \left[N\delta u_{,x} + Nw_{,x}\delta w_{,x} + M_\beta\delta\beta_{,x} + M_w\delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta) + (2\rho_fS_f + \rho_cS_c)\ddot{w}\delta w\right]dx \\ &= \int_0^L F\delta w dx \end{aligned} \tag{3.9}$$

Cette équation traduit un couplage entre les effets membrane et les effets de flexion. Puisque les termes d'inertie axiale et les composantes axiales de l'effort extérieur F sont négligés, alors la solution d'équilibre dans le plan peut être obtenue en résolvant l'équation :

$$\int_0^L N\delta u_{,x}dx = 0 \tag{3.10}$$

La réponse en flexion de la poutre sandwich sera alors obtenue en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[Nw_{,x}\delta w_{,x} + M_\beta\delta\beta_{,x} + M_w\delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta\beta) + (2\rho_fS_f + \rho_cS_c)\ddot{w}\delta w\right]dx \\ &= \int_0^L F\delta w dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

Comme l'équation différentielle non linéaire (3.11) n'admet pas de solutions analytiques, seules des solutions approchées seront cherchées en utilisant une discrétisation

élément fini et la méthode de Galerkin à un mode. Nous discutons dans la section qui suit les différentes approximations des modes de la base de Galerkin.

3.3 Discrétisation par élément fini et modes de vibrations linéaires

Les modes de vibrations linéaires de la poutre sandwich sont déterminés en résolvant l'équation différentielle (3.11) du mouvement de flexion, mais dans le cadre des vibrations libres linéaires. Ainsi en ignorant dans cette équation les termes de non linéarités géométriques et d'excitation extérieure, on retrouve le problème (2.13) de vibrations libres linéaires déjà étudié dans le chapitre 2 (section 2.2.3). Les fonctions de déplacement et de rotation $\{w, \beta\}$ sont cherchées sous la forme harmonique en fonction du mode propre $\{W, B\}$ comme dans la relation (2.14) et le problème des vibrations libres linéaires est discrétisé en adoptant exactement la même procédure de discrétisation et le même élément fini unidimensionnel à deux nœuds utilisé dans la section 2.2.3. Rappelons que dans cette discrétisation, les degrés de liberté interpolés aux nœuds sont la flèche w, la pente $w_{,x}$ et la rotation β. L'assemblage du problème ainsi discrétisé conduit au même problème de valeurs propres complexes non linéaire obtenu à la relation (2.20) :

$$\Big([K(\omega)] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = 0 \tag{3.12}$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité globales de la structure, $\{U\}$ le mode de vibration linéaire regroupant l'ensemble des degrés de liberté aux nœuds et ω la fréquence propre. Les détails de la discrétisation ainsi que les matrices élémentaires relatives au problème (3.12) sont donnés à la section 2.2.3 du chapitre 2. Cette équation dynamique est non linéaire à cause de la dépendance en fréquence de la matrice de rigidité. Cependant suivant la mise en œuvre de la procédure de résolution et le coût de calcul, la solution peut être déterminée selon

différents niveaux d'approximation. Nous proposons ici quatre niveaux d'approximation des modes propres constituant la base de Galerkin à un mode pour résoudre le problème des vibrations non linéaires :

- **Mode réel : MR**

Pour les modes réels qui sont classiquement utilisés dans le cadre de la *Modal Strain Energy Method* [50] pour estimer les propriétés amortissantes, ils sont solutions du problème aux valeurs propres réelles suivant :

$$\left([K(0)] - \omega_0^2[M]\right)\{U_0\} = 0 \tag{3.13}$$

où $[K(0)]$ est la matrice de rigidité construite en ne considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique de la couche centrale. La fréquence propre ω_0 et le mode propre U_0 ainsi calculés sont tous des quantités réelles. Vu que la matrice $[K]$ ne dépend pas de la fréquence ω, cette résolution a avantageusement un coût numérique relativement faible en utilisant les méthodes classiques de calcul de valeurs propres (méthode QR [61], méthode des sous espaces [62], méthode de Lanczos [63]). Notons que ce type de mode a été déjà utilisé comme base de Galerkin par les auteurs [82, 83, 84] dans l'analyse des vibrations non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques.

- **Mode réel amélioré : MRA**

Comme déjà dit, les modes réels obtenus en résolvant le problème (3.13) sont communément utilisés pour estimer les propriétés amortissantes dans le cadre de la *Modal Strain Energy Method*, mais la précision des résultats obtenus n'a été démontrée que pour des structures faiblement amorties et pour des lois viscoélastiques constantes [53]. Cependant, dans le cas des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence, on ignore si cette méthode peut conduire à des résulats erronnés. Pour améliorer l'approximation du mode réel, la matrice de rigidité complexe $[K(\omega)]$ du problème initial (3.12) est approchée par sa partie réelle au voisinage de la fréquence reélle ω_0 obtenue à l'issue de

la résolution du problème (3.13). Le mode réel amélioré est alors obtenu en résolvant le problème de valeur propre réelle suivant :

$$\Big(\mathbf{Re}[K(\omega_0)] - \omega_0^{a2}[M]\Big)\{U_0^a\} = 0 \tag{3.14}$$

où **Re** désigne la partie réelle, ω_0^a et U_0^a sont respectivement la fréquence propre réelle améliorée et le mode propre réel amélioré. Il est à noter que la formulation (3.13) du mode réel et la formulation (3.14) du mode réel amélioré sont identiques dans le cas particulier d'un modèle viscoélastique à module complexe constant.

• Mode complexe approché : MCA

Le problème de valeur propre complexe non linéaire (3.12) doit être résolu de manière à prendre en compte la dépendance en fréquence introduite par la loi de comportement viscoélastique. Pour ce faire, la matrice de rigidité $[K(\omega)]$ est approchée au voisinage de la fréquence ω_0 obtenue du problème (3.13). En remplaçant $[K(\omega)]$ par $[K(\omega_0)]$, le problème de valeur propre complexe non linéaire (3.12) devient alors un problème de valeur propre complexe linéaire et peut être résolu par les méthodes classiques (méthode QR, méthode de Lanczos,...etc) :

$$\Big([K(\omega_0)] - \omega^2[M]\Big)\{U\} = 0 \tag{3.15}$$

La résolution du problème (3.15) permet d'obtenir les fréquences propres ω et les modes propres $U = U(\omega_0)$ qui sont tous des quantités complexes.

• Mode complexe exact : MCE

Il s'agit de résoudre rigoureusement le problème de valeur propre non linéaire (3.12) sans aucune approximation. La résolution est faite ici en utilisant l'approche *diamant* qui combine la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique. Cette procédure de résolution générique implémentée dans le solveur *diamant* a été déjà présentée et discutée dans la section 2.4 du chapitre 2. Les séries de

Taylor approximant le mode propre complexe exact U et la fréquence propre complexe exacte ω sont données respectivement dans les formules (2.45) et (2.48). Les détails peuvent aussi être retrouvés dans les travaux de Bilasse et al. [97]. Dans le cas particulier d'un module complexe constant, la formulation du mode complexe exact (3.12) est identique à celle du mode complexe approché (3.15).

Les quatres types de modes proposés ci-dessus peuvent alors être utilisés pour estimer les propriétés amortissantes de la structure dans le cadre de la *Modal strain Energy* :

$$\omega^2 = \Omega_l^2 \left(1 + i\eta_l\right) = \frac{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}\left[K(\omega_0)\right]\left\{U\right\}}{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}\left[M\right]\left\{U\right\}} \tag{3.16}$$

qui diffère alors de la formulation exacte (2.52) obtenue par l'approche *diamant*. Dans la présente formulation, Ω_l représente la pulsation amortie linéaire et η_l le facteur de perte linéaire de la structure. Lorsque le mode réel est utilisé, l'estimation (3.16) est exactement la *Modal Strain Energy mode réel* (MSER). Mais lorsque les autres modes sont utilisés, la *Modal Strain Energy mode réel* est améliorée et particulièrement pour des lois viscoélastiques dépendant de la fréquence. Tous ces modes seront utilisés comme base de Galerkin pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires de la poutre sandwich et les résultats obtenus pour différentes lois viscoélastiques permettront d'établir la validité de chacune des approximations du mode.

3.4 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire

Le modèle d'analyse des vibrations linéaires et non linéaires de poutres sandwichs viscoélastiques proposé ici est basé sur des réponses périodiques libres ou forcées de la structure soumise à des excitations harmoniques de la forme $F(x,t) = f(x)e^{i\omega t}$. Ainsi, la réponse de la poutre est supposée également harmonique dans le temps et parallèle au mode de vibration linéaire dans l'espace par une amplitude complexe arbitraire. En utilisant la méthode de Galerkin à un mode, la réponse non linéaire, solution de

l'équation de flexion (3.11) est cherchée sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} w(x,t) \\ \beta(x,t) \end{array} \right\} = A \left\{ \begin{array}{c} W(x) \\ B(x) \end{array} \right\} e^{i\omega t} + CC \tag{3.17}$$

où A représente l'amplitude complexe inconnue et dépendant ω des vibrations non linéaires et CC désigne le complexe conjugué. Le vecteur $\{W, B\}$ est la base de Galerkin approximant la variation spatiale du mode de vibration linéaire. Cette base de Galerkin $\{W, B\}$ sera déterminée numériquement par approche élément fini en utilisant les différentes approximations de mode proposées dans la section précédente 3.3. Mais avant de résoudre le problème de flexion (3.11), nous résolvons d'abord le problème (3.10) d'équilibre dans le plan. Par suite l'équation d'amplitude gouvernant les vibrations non linéaires sera établie en utilisant la méthode d'équilibrage harmonique.

3.4.1 Problème d'équilibre dans le plan

Le problème (3.10) d'équilibre dans le plan doit être résolu pour la détermination de l'éffort normal N et du déplacement longitudinal u qui permettront de calculer la réponse non linéaire, solution du problème de flexion (3.11). Avec la décomposition modale (3.17), les déformations non linéaires (3.3) induisent les harmoniques 0 et $\pm 2\omega$. En utilisant cette décompostion modale, l'effort normal et le déplacement longitudinal donnés dans l'équation (3.8) s'écrivent en fonction des deux harmoniques :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= |A|^2 u_0(x) + \{A^2 u_{2\omega}(x) e^{i2\omega t} + CC\} \\ N(x,t) &= |A|^2 N_0(x) + \{A^2 N_{2\omega}(x) e^{i2\omega t} + CC\} \end{aligned} \tag{3.18}$$

où u_0 et N_0 sont respectivement les amplitudes de u et N à l'harmonique 0 alors que $u_{2\omega}$ et $N_{2\omega}$ sont respectivement les amplitudes de u et N à l'harmonique 2ω. En utilisant la décomposition (3.18) dans la relation (3.8), l'on obtient les amplitudes N_0 et $N_{2\omega}$ de l'effort normal N :

$$\begin{aligned} N_0(x) &= \left(2E_f S_f + S_c E_c^*(0)\right)\left(u_{0,x} + |W_{,x}|^2\right) \\ N_{2\omega}(x) &= \left(2E_f S_f + S_c E_c^*(2\omega)\right)\left(u_{2\omega,x} + \tfrac{1}{2}\left(W_{,x}\right)^2\right) \end{aligned} \tag{3.19}$$

En introduisant les relations (3.18) et (3.19) dans le problème (3.10) d'équilibre dans le plan, les composantes u_0 et $u_{2\omega}$ du déplacement axial s'expriment en fonction du mode de vibration linéaire W par les deux problèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned} &\int_0^L u_{0,x}(x)\delta u_{,x}dx = -\int_0^L |W_{,x}|^2\delta u_{,x}dx \\ &\int_0^L u_{2\omega,x}\delta u_{,x}dx = -\int_0^L \tfrac{1}{2}\left(W_{,x}\right)^2\delta u_{,x}dx \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ces deux problèmes linéaires peuvent être résolus numériquement par approche élément fini pour obtenir les valeurs numériques des composantes u_0 et $u_{2\omega}$ et par suite les valeurs numériques des composantes N_0 et $N_{2\omega}$ (relation (3.19)).

3.4.2 Equation d'amplitude non linéaire

La méthode de Galerkin à un mode est appliquée à la résolution du problème de flexion (3.11) en cherchant les réponses non linéaires sous la forme (3.17). En utilisant la méthode d'équilibrage harmonique, les déplacements et rotations virtuels sont choisis dans la même base d'approximation que $\{w, \beta\}$ c'est-à-dire $^{\intercal}\{\delta w, \delta\beta\} = ^{\intercal}\left\{\overline{W}, \overline{B}\right\} e^{-i\omega t}$. En remplaçant chaque membre de l'équation (3.11) par son expression et en ne retenant que les termes indépendants du temps, on obtient une équation reliant l'amplitude A et la pulsation ω :

$$-\omega^2 mA + kA + k_{nl}\overline{A}A^2 = Q \tag{3.21}$$

où m, k, k_{nl} et Q sont respectivement la masse modale, la rigidité modale linéaire, la rigidité modale non linéaire et la force modale. Leurs expressions analytiques sont données par :

$$\begin{aligned} m &= \int_0^L (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)|W|^2 dx \\ k &= \int_0^L \left[\left(I_c E_c^*(\omega) + \frac{E_f S_f h_c^2}{2}\right)|B_{,x}|^2 - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2}\left(W_{,xx}\overline{B}_{,x} + \overline{W}_{,xx}B_{,x}\right)\right] dx \\ &\quad + \int_0^L \left[\left(2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2}\right)|W_{,xx}|^2 + \frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)}|W_{,x} + B|^2\right] dx \\ k_{nl} &= \int_0^L \left[N_0|W_{,x}|^2 + N_{2\omega}(\overline{W}_{,x})^2\right] dx \\ Q &= \int_0^L f\overline{W} dx \end{aligned} \tag{3.22}$$

Ces coefficients sont calculés numériquement par l'approche élément fini en utilisant la formulation suivante :

$$\begin{aligned} m &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} [M] \{U\} \\ k &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} [K(\omega)] \{U\} \\ k_{nl} &= k_{nl}(\omega) \\ Q &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} \{F\} \end{aligned} \tag{3.23}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des forces nodales imposées. Dans cette formulation, $[M]$ est la matrice de masse, $[K(\omega)]$ la matrice de rigidité et $\{U\}$ le mode de vibration linéaire, tous relatifs au problème de valeur propre (3.12). Cependant pour l'analyse dans le cadre des non linéarités géométriques, on ne considérera que le cas des poutres sandwichs à bords axialement immobiles et le calcul d'abord analytique de k_{nl} en fonction de W puis numérique en fonction de $\{U\}$ sont détaillés à l'Annexe C.2 :

$$k_{nl}(\omega) = \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(0)}{L} \left({}^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} [k_5] \{U\}\right)^2 + \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(2\omega)}{2L} |{}^{\intercal} \{U\} [k_5] \{U\}|^2 \tag{3.24}$$

où $[k_5]$ est la matrice relative au problème élémentaire (C.4). Dès lors, les coefficients (3.23) et (3.24) de l'équation d'amplitude peuvent être calculés en considérant les différentes approximations du mode propre $\{U\}$ proposées dans la section 3.3 et la résolution de l'équation d'amplitude permet d'analyser les vibrations linéaires et non linéaires.

3.5 Analyse des vibrations linéaires et non linéaires par l'équation d'amplitude

Dans cette section, nous discutons la résolution de l'équation d'amplitude (3.21) pour l'estimation des propriétés amortissantes et le calcul des réponses linéaires et non linéaires de la structure sandwich viscoélastique. Les coefficients de l'équation d'amplitude établis par les formules (3.23) et (3.24) sont dépendants de la fréquence

en l'occurrence les rigidités k et k_{nl} :

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k^R(\omega) + ik^I(\omega) \\ k_{nl}(\omega) &= k_{nl}^R(\omega) + ik_{nl}^I(\omega) \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $\bullet^R = \mathbf{Re}(\bullet)$ représente la partie réelle et $\bullet^I = \mathbf{Im}(\bullet)$ la partie imaginaire. Cette dépendance en fréquence des rigidités introduite par le module viscoélastique $E_c^*(\omega)$ de la couche centrale du sandwich fait que l'équation d'amplitude est fortement non linéaire en ω. Nous proposons ci-après deux approches pour la résolution de l'équation d'amplitude non linéaire. Dans un premier temps une approche simplifiée au voisinage de la fréquence ω_0 constante et dans un second temps une approche générale au voisinage de la fréquence ω variable.

3.5.1 Approche simplifiée

Dans l'approche simplifiée, on admet que la fréquence ω est très proche de la fréquence ω_0 réelle, solution du problème de valeur propre réelle (3.13) construit en ne considérant que l'élasticité retardée. Les rigidités k et k_{nl} sont approchées au voisinage de cette fréquence c'est-à-dire $k \approx k(\omega_0)$ et $k_{nl} \approx k_{nl}(\omega_0)$ et deviennent alors constantes. L'équation d'amplitude est résolue pour estimer les propriétés amortissantes au voisinage de cette fréquence. Dans le cadre des vibrations libres et linéaires ($Q = 0, k_{nl} = 0$), l'équation d'amplitude permet de retrouver la formulation (3.16) établie plus haut en utilisant la *Modal Strain Energy* :

$$\omega^2 = \frac{k(\omega_0)}{m} = \frac{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}[K(\omega_0)]\{U\}}{{}^{\intercal}\left\{\overline{U}\right\}[M]\{U\}} = \Omega_l^2\,(1 + i\eta_l) \tag{3.26}$$

où Ω_l et η_l sont respectivement la pulsation amortie linéaire et le facteur de perte linéaire donnés par :

$$\begin{cases} \Omega_l = \sqrt{\dfrac{k^R(\omega_0)}{m}} \\ \\ \eta_l = \dfrac{k^I(\omega_0)}{k^R(\omega_0)} \end{cases} \tag{3.27}$$

Pour les vibrations libres non linéaires ($Q = 0$), l'équation d'amplitude permet d'établir la dépendance en amplitude des propriétés amortissantes de la structure :

$$\begin{cases} \omega^2 = \Omega_{nl}^2 \left(1 + i\eta_{nl}\right) \\ \Omega_{nl}^2 = \Omega_l^2 \left(1 + \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 C^R(\omega_0)\right) \\ \eta_{nl} = \eta_l \dfrac{1 + \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 C^I(\omega_0)}{1 + \left(\dfrac{a}{h}\right)^2 C^R(\omega_0)} \end{cases} \tag{3.28}$$

où $a = |A|$ est le module de l'amplitude, $h = (2h_f + h_c)$ l'épaisseur totale de la structure sandwich, Ω_{nl} la pulsation amortie non linéaire et et η_{nl} le facteur de perte non linéaire. C^R et C^I sont les coefficients de rigidité non linéaire donnés par :

$$C^R(\omega_0) = h^2 \frac{k_{nl}^R(\omega_0)}{k^R(\omega_0)}, \qquad C^I(\omega_0) = h^2 \frac{k_{nl}^I(\omega_0)}{k^I(\omega_0)} \tag{3.29}$$

Pour la structure sandwich sous sollicitation, l'équation d'amplitude doit être résolue avec le terme de chargement Q non nul. En considérant $A = ae^{i\theta}$, $k = |k|\, e^{i\varphi}$, $k_{nl} = |k_{nl}|\, e^{i\psi}$, $Q = |Q|\, e^{i\alpha}$ et en utilisant la décomposition (3.25), l'on obtient des relations amplitude-fréquence $a(\omega)$ et phase-fréquence $\theta(\omega)$:

$$\begin{aligned} &|k_{nl}(\omega_0)|^2 a^6 + 2\left[k^R(\omega_0)k_{nl}^R(\omega_0) + k^I(\omega_0)k_{nl}^I(\omega_0) - \omega^2 m k_{nl}^R(\omega_0)\right] a^4 \\ &+ \left[|k(\omega_0)|^2 - 2\omega^2 m k^R(\omega_0) + \omega^4 m^2\right] a^2 = |Q|^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$tan(\theta - \alpha) = \frac{-k^I(\omega_0) - a^2 k_{nl}^I(\omega_0)}{-\omega^2 m + k^R(\omega_0) + a^2 k_{nl}^R(\omega_0)} \tag{3.31}$$

où θ est la phase de l'amplitude A et $-\alpha$ la phase du mode de flexion W. Cette phase $-\alpha$ est généralement négligée dans l'hypothèse de mode réel.

L'équation (3.30) est de degré 3 en a^2, mais de degré 2 en ω^2 et peut donc être résolue directement pour obtenir la fréquence en fonction de l'amplitude :

$$\omega(a) = \sqrt{\left(k^R(\omega_0) + a^2 k_{nl}^R(\omega_0) \pm \sqrt{\frac{|Q|^2}{a^2} - a^4 {k_{nl}^I}^2(\omega_0) - 2a^2 k^I(\omega_0) k_{nl}^I(\omega_0) - {k^I}^2(\omega_0)}\right)/m} \tag{3.32}$$

Les formulations (3.30) ou (3.32) permettent d'obtenir les courbes de réponses en amplitude en fonction de la fréquence et la formulation (3.31) les courbes de phases en fonction de la fréquence. Notons que cette approche a été utilisée dans [82, 83, 84] pour l'analyse des vibrations non linéaires des structures sandwichs viscoélastiques.

3.5.2 Approche générale

Dans le cas général, les rigidités k et k_{nl} ne sont pas constantes comme supposé dans l'approche simplifiée, mais varient en fonction de la fréquence et l'équation d'amplitude doit être résolue de façon exacte et sans approximation. Rappelons que le mode complexe exact $\{U\}$ calculé par l'approche *diamant* est valable pour toute fréquence car il satisfait à la formulation exacte (2.52) lorsque la fréquence ω est complexe ; ce qui diffère de la formulation approchée (3.16) qui estime les propriétés amortissantes au voisinage de la fréquence réelle ω_0. Ainsi, l'équation d'amplitude peut être résolue dans un cadre général au voisinage de la fréquence ω variable. En utilisant la décomposition (3.25) et en posant $r = a^2$, on obtient une équation générale pour l'amplitude :

$$f_3(\omega)r^3 + f_2(\omega)r^2 + f_1(\omega)r + f_0 = 0 \tag{3.33}$$

où les coefficients f_0,f_1,f_2 et f_3 sont donnés par :

$$\begin{aligned}
f_3(\omega) &= {k_{nl}^R}^2(\omega) + {k_{nl}^I}^2(\omega) \\
f_2(\omega) &= 2\left[k_{nl}^R(\omega)\left(-\omega^2 m + k^R(\omega)\right) + k^I(\omega)k_{nl}^I(\omega)\right] \\
f_1(\omega) &= \left(-\omega^2 m + k^R(\omega)\right)^2 + {k^I}^2(\omega) \\
f_0 &= -|Q|^2
\end{aligned} \tag{3.34}$$

L'équation (3.33) est d'ordre 3 et peut être résolue pour toute fréquence ω donnée. La résolution est faite ici en utilisant la méthode de Sotta [http://fr.wikipedia.org]. Etant donné que les conditions $(3f_3(\omega)f_1(\omega) - {f_2}^2(\omega) \neq 0)$ et $(3f_0f_2(\omega) - {f_1}^2(\omega) \neq 0)$ sont satisfaites pour les fréquences considérées, les trois solutions de l'équation d'am-

plitude (3.33) sont données par :

$$r_1(\omega) = \frac{\delta_1(\omega)\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_1(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)}{\delta_2(\omega)\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_2(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)}$$

$$r_2(\omega) = \frac{\delta_1(\omega)j\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_1(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)}{\delta_2(\omega)j\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_2(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)} \tag{3.35}$$

$$r_3(\omega) = \frac{\delta_1(\omega)j^2\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_1(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)}{\delta_2(\omega)j^2\delta^{1/3}(\omega) - \gamma_2(\omega)\gamma^{1/3}(\omega)}$$

avec

$$\begin{aligned} j &= e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \delta(\omega) &= {\gamma_2}^3(\omega)f_2(\omega) + 3\gamma_1(\omega){\gamma_2}^2(\omega)f_3(\omega) \\ \gamma(\omega) &= {\delta_2}^3(\omega)f_2(\omega) + 3\delta_1(\omega){\delta_2}^2(\omega)f_3(\omega) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dans la procédure de résolution par la méthode de Sotta, les coefficients $\delta_1, \delta_2, \gamma_1, \gamma_2$ sont tels que les rapports $\delta_1/\delta_2, \gamma_1/\gamma_2$ soient les racines de la résolvante de Sotta :

$$\left[3f_3(\omega)f_1(\omega) - {f_2}^2(\omega)\right] X^2 + \left[9f_3(\omega)f_0 - f_2(\omega)f_1(\omega)\right] X + 3f_2(\omega)f_0 - {f_1}^2(\omega) = 0 \tag{3.37}$$

Pour des raisons de simplicité, nous choisirons ici pour la résolution les coefficients $\delta_2 = \gamma_2 = 1$. Après l'obtention des solutions (3.35), la phase associée peut être évaluée pour chaque amplitude $a^2(\omega) = r(\omega)$:

$$tan(\theta - \alpha) = \frac{-k^I(\omega) - a^2 k^I_{nl}(\omega)}{-\omega^2 m + k^R(\omega) + a^2 k^R_{nl}(\omega)} \tag{3.38}$$

Les formules établies précédemment à la section 3.5.1 en utilisant l'approche simplifiée sont intégralement retrouvées en utilisant l'approche générale à condition de prendre $\omega = \omega_0$ dans les rigidités k et k_{nl}. Cependant dans le cas particulier d'un modèle viscoélastique constant, l'approche générale et l'approche simplifiée sont exactement les mêmes.

3.6 Tests numériques et analyse

La méthode numérique développée dans ce chapitre est appliquée pour analyser les vibrations linéaires et non linéaires d'une poutre sandwich avec différentes lois visco-

élastiques au cœur et pour des conditions aux limites variées. Pour le modèle élément fini poutre, la même procédure de discrétisation et le même élément fini unidimensionnel proposé et validé dans le chapitre 2 sont adoptés avec le même maillage de 100 éléments dans la direction de la longueur de la poutre. Pour les non linéarités géométriques, les déplacements axiaux sont fixés aux deux extrémités de la structure c'est-à-dire $u(0) = u(L) = 0$. Les résultats sont calculés avec les différentes approximations des modes de la base de Galerkin et sont présentés ici en termes de propriétés amortissantes, courbes de réponses et de phases dont la comparaison permet d'établir la limite de validité de chaque approximation du mode. Pour des besoins de comparaison avec d'autres travaux, les modes U de la base de Galerkin et les modes de flexion W ont été normalisés par rapport à la flèche c'est-à-dire :

$$\begin{cases} U = \dfrac{U}{|W(x_0)|} \\ \\ W = \dfrac{W}{|W(x_0)|} \end{cases} \tag{3.39}$$

où $W(x_0)$ représente la flèche au point d'abscisse x_0 sur la longueur de la poutre. Pour les conditions aux limites en appui simple, bi-encastrée et encastrée-appuyée, les modes seront normalisés en $x_0 = \{L/2, L/4, L/6, L/8, L/10, L/12\}$ correspondant respectivement aux 6 premiers modes de vibration. Par contre pour les conditions aux limites encastrée-libre, les modes seront normalisés en $x_0 = L$ quel que soit le rang du mode de vibration. L'étude est menée sur la structure sandwich poutre dont les caractéristiques figurent dans le tableau 3.1. Les faces élastiques en aluminium ainsi que les dimensions du sandwich sont figées, mais le matériau viscoélastique du cœur est varié successivement : un cœur en polymère [52, 58, 66] modélisé par le module complexe constant (2.54), un cœur de type ISD112 [21, 22] modélisé par le modèle de Maxwell généralisé (2.56) et un cœur en Polyvinyl de Butyral (PVB) [91, 92, 96] modélisé par le modèle à dérivées fractionnaires (2.55).

Dimension du sandwich		**Faces élastiques en aluminium**	
Longueur	$L = 177.8mm$	Module d'Young	$E_f = 6.9 \times 10^{10} Pa$
Largeur	$l = 12.7mm$	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
Epaisseur faces	$h_f = 1.524mm$	Densité massique	$\rho_f = 2766 Kg.m^{-3}$
Epaisseur cœur	$h_c = 0.127mm$		
Cœur viscoélastique varié			
Cœur en polymère		Module d'Young	Loi (2.54) $E_0 = 1794 \times 10^3 Pa$
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.3$
		Densité massique	$\rho_c = 968.1 Kg.m^{-3}$
Cœur en ISD112		Module de cisaillement	Loi (2.56)
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.5$
		Densité massique	$\rho_c = 1600 Kg.m^{-3}$
Cœur en PVB		Module de cisaillement	Loi (2.55)
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.4$
		Densité massique	$\rho_c = 999 Kg.m^{-3}$

TAB. 3.1 – Caractéristiques de la poutre sandwich avec différents modèles viscoélastiques pour le cœur

3.6.1 Tests numériques du modèle viscoélastique constant

On considère la structure sandwich du tableau 3.1 avec un cœur en polymère dont le module d'Young est modélisé par la loi constante (2.54). Le facteur de perte du polymère varie comme suit : $\eta_c \in \{0.1, 0.6, 1, 1.5\}$. Nous présentons dans le tableau 3.2 les propriétés amortissantes (pulsation amortie linéaire Ω_l et facteur de perte linéaire normalisé η_l/η_c) correspondant aux 6 premiers modes de vibration de la poutre sandwich encastrée-libre et pour différentes valeurs du facteur de perte η_c du cœur. Ces résultats sont présentés pour les différentes approximations du mode puis sont comparés aux résultats analytiques fournis dans [52] et aux résultats numériques obtenus par [58] en réponse harmonique forcée en utilisant la méthode asymptotique numérique et la technique des bandes passantes. Rappelons que ces deux auteurs ont utilisé une approche par mode complexe. Les mêmes types de résultats correspondant aux différentes approximations du mode sont présentés dans le tableau 3.3 pour la poutre sandwich en appui simple. Pour des besoins de comparaison, nous avons également

	MR/MRA		MCA/MCE		Analytique [52]		Numérique [58]	
η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c
0.1	64.1	0.283	64.1	0.281	64.1	0.281	64.5	0.281
	296.6	0.243	296.7	0.242	296.4	0.242	298.9	0.242
	744.3	0.154	744.5	0.154	743.7	0.154	746.5	0.154
	1395.2	0.089	1395.7	0.089	1393.9	0.088	1407.7	0.089
	2263.4	0.057	2264.5	0.057	2261.1	0.057	2286.2	0.057
	3347.3	0.039	3349.8	0.039	3343.6	0.039	3385.7	0.039
0.6	64.1	0.283	65.5	0.246	65.5	0.246	65.9	0.247
	296.6	0.243	299.2	0.232	298.9	0.232	303.1	0.224
	744.3	0.154	746.3	0.153	745.5	0.152	752.3	0.150
	1395.2	0.089	1396.6	0.089	1394.9	0.088	1412.7	0.088
	2263.4	0.057	2265.2	0.057	2261.7	0.057	2290.6	0.057
	3347.3	0.039	3350.2	0.039	3344.0	0.039	3389.5	0.039
1	64.1	0.283	67.5	0.202	67.4	0.202	67.8	0.204
	296.6	0.243	303.1	0.218	302.8	0.217	309.1	0.201
	744.3	0.154	749.4	0.150	748.6	0.150	761.1	0.142
	1395.2	0.089	1398.3	0.088	1396.6	0.088	1420.6	0.086
	2263.4	0.057	2266.3	0.057	2262.8	0.057	2297.9	0.057
	3347.3	0.039	3350.9	0.039	3345.0	0.038	3395.9	0.037
1.5	64.1	0.283	69.9	0.153	69.8	0.153	70.3	0.155
	296.6	0.243	309.1	0.198	308.8	0.197	317.4	0.176
	744.3	0.154	755.2	0.146	754.0	0.146	777.2	0.131
	1395.2	0.089	1401.4	0.087	1399.7	0.087	1432.8	0.083
	2263.4	0.057	2268.5	0.057	2265.0	0.056	2310.1	0.056
	3347.3	0.039	3352.3	0.039	3346.0	0.038	3307.0	0.039

TAB. 3.2 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre, cœur à module complexe constant

calculés les propriétés amortissantes de la poutre sandwich en utilisant la formule analytique exacte (B.1) de Mead [43] et de Rao [32] donnée à l'Annexe B. Rappelons que dans le cas particulier du module complexe constant, l'approche du mode réel (MR) est identique à l'approche du mode réel amélioré (MRA) et l'approche du mode complexe approché (MCA) est identique à l'approche du mode complexe exact (MCE). Dans ces deux tableaux, on observe une très bonne correlation entre les valeurs modales des approches MCA/MCE et les valeurs modales analytiques exactes. En plus de la validation déjà effectuée dans le chapitre 2, ces résultats permettent de valider une

	MR/MRA		MCA/MCE		Formule (B.1) [32, 43]	
η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c
0.1	148.45	0.3507	148.51	0.3502	148.51	0.3502
	488.45	0.1958	488.48	0.1958	488.47	0.1958
	1034.73	0.1071	1034.75	0.1071	1034.69	0.1071
	1795.31	0.0652	1795.32	0.0652	1795.13	0.0653
	2771.97	0.0434	2771.98	0.0434	2771.49	0.0434
	3965.31	0.0308	3965.32	0.0308	3964.28	0.0308
0.6	148.45	0.3507	150.71	0.3328	150.71	0.3329
	488.45	0.1958	489.76	0.1943	489.75	0.1944
	1034.73	0.1071	1035.44	0.1069	1035.38	0.1069
	1795.31	0.0652	1795.74	0.0652	1795.54	0.0652
	2771.97	0.0434	2772.26	0.0434	2771.76	0.0434
	3965.31	0.0308	3965.51	0.0308	3964.47	0.0308
1	148.45	0.3507	154.42	0.3052	154.42	0.3052
	488.45	0.1958	492.07	0.1918	492.06	0.1918
	1034.73	0.1071	1036.69	0.1065	1036.63	0.1065
	1795.31	0.0652	1796.50	0.0651	1796.30	0.0651
	2771.97	0.0434	2772.76	0.0433	2772.27	0.0434
	3965.31	0.0308	3965.87	0.0308	3964.83	0.0308
1.5	148.45	0.3507	160.72	0.2626	160.72	0.2626
	488.45	0.1958	496.50	0.1870	496.49	0.1871
	1034.73	0.1071	1039.13	0.1059	1039.07	0.1059
	1795.31	0.0652	1797.98	0.0650	1797.78	0.0650
	2771.97	0.0434	2773.74	0.0433	2773.25	0.0433
	3965.31	0.0308	3966.56	0.0307	3965.52	0.0308

TAB. 3.3 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich en appui simple, cœur à module complexe constant

fois encore l'élément fini utilisé pour l'étude des vibrations des structures sandwichs poutres. En analysant les résultats des tableaux 3.2 et 3.3, on remarque que les valeurs modales obtenues par les approches MR/MRA demeurent constantes quelle que soit la valeur du facteur de perte η_c du cœur. Par contre, les valeurs modales obtenues par les approches MCA/MCE et par la méthode analytique varient en fonction du facteur de perte. Pour des facteurs de perte faibles en l'occurrence $\eta_c \in \{0.1, 0.6\}$, les valeurs modales obtenues par les approches MR/MRA sont proches de celles obtenues par les approches MCA/MCE et aussi de celles obtenues par la méthode analytique. Mais

lorsque le facteur de perte augmente comme par exemple pour $\eta_c \in \{1, 1.5\}$, des différences apparaissent dans les résultats. Comparativement aux approches MCA/MCE, l'utilisation des approches MR/MRA surestime l'amortissement η_l et sous-estime la pulsation amortie Ω_l. Cette différence dans les résultats est prononcée davantage pour les modes de rangs faibles. On peut alors déduire que les approches MR/MRA ne sont équivalentes aux approches MCA/MCE que pour le cas particulier des amortissements faibles. Les approches MR/MRA ne sont donc adaptées qu'à l'étude des structures sandwichs faiblement amorties et donnent dans ce cas une bonne estimation des propriétés amortissantes. Cependant dans le cas d'un amortissement élevé, les approches MR/MRA peuvent conduire à des estimations erronnées des propriétés amortissantes. Le tableau 3.4 présente les coefficients de rigidité non linéaire C^R et C^I obtenus par les différentes approximations du mode pour la poutre sandwich sous plusieurs conditions aux limites : appui simple, bi-encastrée, encastrée-appuyée. On remarque que les coefficients de rigidité obtenus par les approches MR/MRA demeurent constants quelle que soit la valeur du facteur de perte du cœur, mais varient avec le facteur de perte dans les approches MCA/MCE. On observe des différences entre ces deux types de valeurs au fûr et à mesure que le facteur de perte augmente. Ces constatations similaires à celles déjà effectuées dans les tableaux précédents 3.2 et 3.3 montrent que les performances des approches MR/MRA (cas des amortissements faibles) et leurs insuffisances (cas des amortissements élevés) sont à considérer non seulement pour les vibrations linéaires mais aussi pour les vibrations non linéaires.

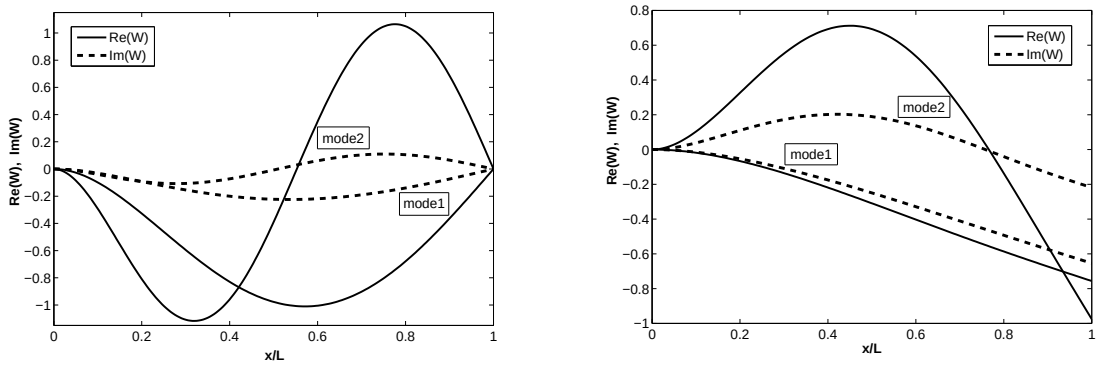
Nous présentons sur la figure 3.1 les parties réelle et imaginaire des modes complexes exacts de flexion obtenus par l'approche MCE pour la poutre sandwich encastrée-appuyée et encastrée-libre avec un cœur à module complexe constant et pour le facteur de perte $\eta_c = 1.5$. Ces modes sont normalisés (voir relation (3.39)) et les coordonnées sont aussi normalisées par rapport à la longueur de la poutre. Les parties réelle et imaginaire possèdent toutes la même forme du mode, mais diffèrent en amplitude suivant l'amortissement induit dans la structure. La partie imaginaire du mode qui est

	MR/MRA		MCA/MCE	
η_c	C^R	C^I	C^R	C^I
appui simple				
0.1	20.83	2.14×10^{-5}	20.81	2.15×10^{-5}
	30.80	5.68×10^{-5}	30.79	5.68×10^{-5}
0.6	20.83	2.14×10^{-5}	20.21	2.19×10^{-5}
	30.80	5.68×10^{-5}	30.63	5.69×10^{-5}
1	20.83	2.14×10^{-5}	19.25	2.28×10^{-5}
	30.80	5.68×10^{-5}	30.34	5.71×10^{-5}
1.5	20.83	2.14×10^{-5}	17.77	2.44×10^{-5}
	30.80	5.68×10^{-5}	29.80	5.75×10^{-5}
bi-encastrée				
0.1	7.34	1.40×10^{-5}	7.34	1.40×10^{-5}
	18.54	6.15×10^{-5}	18.54	6.15×10^{-5}
0.6	7.34	1.40×10^{-5}	7.30	1.40×10^{-5}
	10.34	6.15×10^{-5}	18.49	6.16×10^{-5}
1	7.34	1.40×10^{-5}	7.22	1.41×10^{-5}
	18.54	6.15×10^{-5}	18.42	6.18×10^{-5}
1.5	7.34	1.40×10^{-5}	7.08	1.42×10^{-5}
	18.54	6.15×10^{-5}	18.28	6.22×10^{-5}
encastrée-appuyée				
0.1	13.89	1.92×10^{-5}	13.89	1.92×10^{-5}
	27.18	6.72×10^{-5}	27.18	6.72×10^{-5}
0.6	13.89	1.92×10^{-5}	13.67	1.93×10^{-5}
	27.18	6.72×10^{-5}	27.11	6.73×10^{-5}
1	13.89	1.92×10^{-5}	13.30	1.95×10^{-5}
	27.18	6.72×10^{-5}	26.98	6.75×10^{-5}
1.5	13.89	1.92×10^{-5}	12.68	1.99×10^{-5}
	27.18	6.72×10^{-5}	26.74	6.80×10^{-5}

TAB. 3.4 – Coefficients de rigidité non linéaire de la poutre sandwich, cœur à module complexe constant

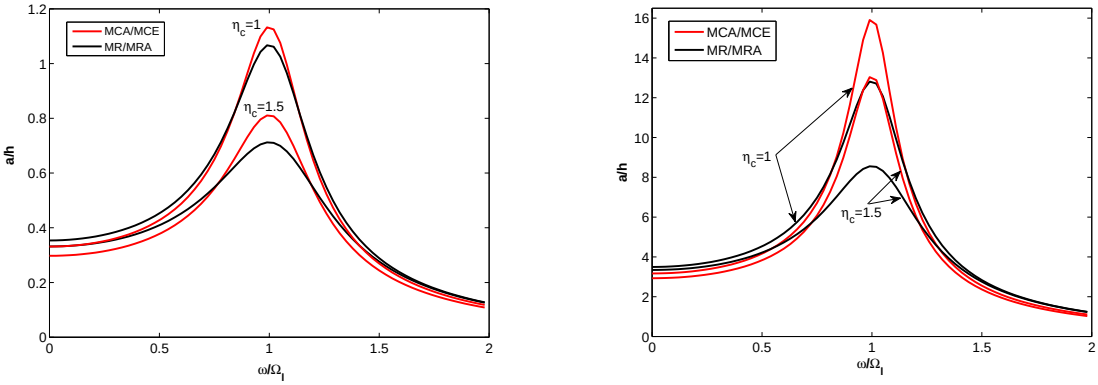
communément ignorée dans l'approche MR [82, 83, 84] peut devenir considérable en présence d'un amortissement élevé. On voit bien sur la figure 3.1(b) que pour la poutre sandwich encastrée-libre vibrant en mode 1, la partie imaginaire du mode est aussi prépondérante que la partie réelle. Dans ce cas, il n'est pas judicieux de négliger la partie imaginaire du mode et l'utilisation des modes complexes s'avère nécessaire pour bien prendre en compte tout l'amortissement induit dans la structure.

La figure 3.2 présente les variations en amplitude du premier mode de vibration linéaire de la poutre sandwich en appui simple et encastrée-libre avec un cœur à module



(a) Encastrée-appuyée (b) Encastrée-libre

FIG. 3.1 – Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1.5$

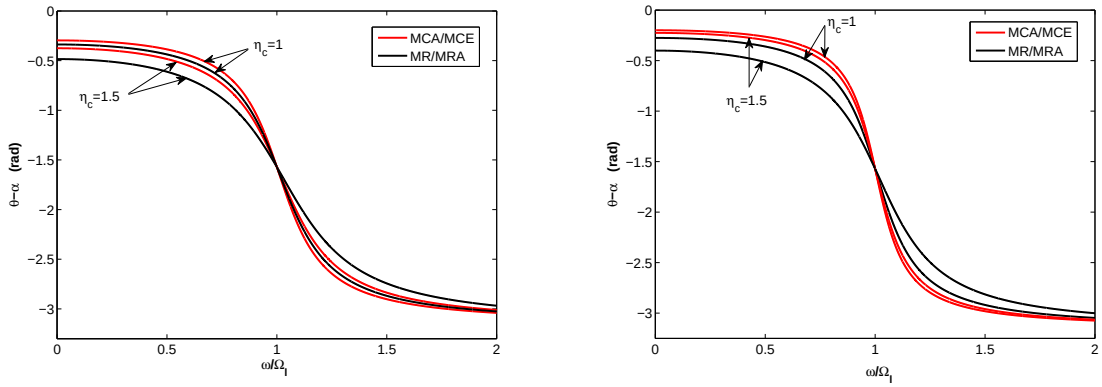


(a) Appui simple : $f(L/2) = 10N$ (b) Encastrée-libre : $f(L) = 10N$

FIG. 3.2 – Réponses linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1$ et $\eta_c = 1.5$

complexe constant pour les facteurs de perte $\eta_c = 1$ et $\eta_c = 1.5$, en réponse à une sollicitation harmonique concentrée. L'amplitude est normalisée à l'épaisseur totale de la poutre et la fréquence est normalisée à la pulsation amortie linéaire. Lorsque la fréquence est loin de la fréquence de résonance, les réponses en amplitude obtenues par les approches MCA/MCE sont proches de celles obtenues par les approches MR/MRA. Mais au voisinage de la résonance, on observe un décalage entre les deux types de ré-

ponses. Comparées aux approches MCA/MCE, les approches MR/MRA sous-estiment l'amplitude de résonance et peuvent conduire à une prédiction erronnée des réponses de la structure. Les phases linéaires associées sont présentées à la figure 3.3 et montrent clairement les mêmes constatations. En effet, le décalage entre les phases obtenues par les approches MR/MRA et celles obtenues par les approches MCA/MCE devient de plus en plus important au fur et à mesure que l'amortissement augmente. Ce qui prouve que l'usage du mode réel n'est pas adapté surtout en présence d'un amortissement élevé. Les modes complexes sont donc recommandés pour une prédiction exacte et précise des réponses et des phases dans l'étude des vibrations des structures sandwichs viscoélastiques.



(a) Appui simple

(b) Encastrée-libre

FIG. 3.3 – Phases linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur à module complexe constant pour $\eta_c = 1$ et $\eta_c = 1.5$

3.6.2 Tests numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence

Le but de cette dernière section est d'étudier les vibrations linéaires et non linéaires de la poutre sandwich du tableau 3.1 en présence des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence. Pour cela, la poutre sandwich est considérée successivement avec

un cœur en ISD112 et un cœur en Polyvinyl de Butyral (PVB) dont les modules viscoélastiques varient fortement en fonction de la fréquence. Le module de cisaillement de l'ISD112 est modélisé par le modèle de Maxwell généralisé (2.56) dont les coefficients à la température de 27°C et de 20°C sont donnés dans le tableau 2.6 [21, 22]. Quant au PVB, son module de cisaillement est modélisé par le modèle à dérivées fractionnaires (2.55) dont les coefficients y sont fournis dans la relation à la température de 20°C [91, 92]. L'analyse est menée dans un premier temps au voisinage de la fréquence ω_0 constante en utilisant l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude et dans un second temps au voisinage de la fréquence ω variable en utilisant l'approche générale.

Analyse au voisinage de la fréquence ω_0 constante

Les résultats numériques sont calculés avec les différentes approximations du mode et en admettant que la fréquence ω est très proche de la fréquence réelle ω_0 comme décrit dans les sections 3.3 et 3.5.1. Pour chaque matériau viscoélastique du cœur cité plus haut (ISD112 et PVB), les propriétés amortissantes (pulsation amortie linéaire

MR		MRA		MCA		MCE	
$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l
Cœur en ISD112 à 27°C							
63.74	2.39×10^{-1}	63.38	1.86×10^{-1}	65.04	1.59×10^{-1}	65.34	1.56×10^{-1}
317.33	4.06×10^{-1}	312.34	3.02×10^{-1}	322.47	2.60×10^{-1}	326.08	2.55×10^{-1}
827.62	4.19×10^{-1}	814.19	3.25×10^{-1}	839.97	2.88×10^{-1}	849.49	2.78×10^{-1}
1540.09	3.52×10^{-1}	1523.79	2.91×10^{-1}	1556.38	2.70×10^{-1}	1567.53	2.69×10^{-1}
Cœur en ISD112 à 20°C							
65.97	7.32×10^{-1}	58.31	3.61×10^{-1}	61.96	2.62×10^{-1}	63.07	1.96×10^{-1}
340.04	3.98×10^{-1}	309.04	2.16×10^{-1}	314.58	1.98×10^{-1}	316.54	1.87×10^{-1}
845.85	2.51×10^{-1}	813.76	1.75×10^{-1}	821.85	1.69×10^{-1}	823.29	1.60×10^{-1}
1562.42	1.26×10^{-1}	1526.99	9.71×10^{-2}	1530.85	9.63×10^{-2}	1530.60	9.48×10^{-2}
Cœur en PVB à 20°C							
488.78	2.12×10^{-1}	81.78	1.54×10^{-3}	81.80	1.48×10^{-3}	81.79	1.37×10^{-3}
2082.08	1.55×10^{-1}	503.95	6.12×10^{-3}	504.17	5.98×10^{-3}	504.16	5.43×10^{-3}
4183.69	1.29×10^{-1}	1379.56	1.04×10^{-2}	1380.38	1.02×10^{-2}	1380.34	9.38×10^{-3}
6090.64	1.13×10^{-1}	2626.08	1.48×10^{-2}	2627.92	1.46×10^{-2}	2627.87	1.36×10^{-2}

TAB. 3.5 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich encastrée-libre avec un cœur en IDS112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$)

MR		MRA		MCA		MCE	
$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l
Cœur en ISD112 à 27°C							
288.11	2.91×10^{-1}	286.88	2.59×10^{-1}	291.38	2.47×10^{-1}	292.70	2.49×10^{-1}
774.38	3.05×10^{-1}	768.85	2.61×10^{-1}	781.34	2.46×10^{-1}	784.94	2.45×10^{-1}
1485.64	2.79×10^{-1}	1476.96	2.44×10^{-1}	1492.02	2.34×10^{-1}	1502.34	2.34×10^{-1}
2412.39	2.62×10^{-1}	2401.45	2.34×10^{-1}	2428.93	2.26×10^{-1}	2436.94	2.27×10^{-1}
Cœur en ISD112 à 20°C							
289.24	2.28×10^{-1}	285.06	1.88×10^{-1}	287.38	1.83×10^{-1}	288.07	1.80×10^{-1}
781.95	1.77×10^{-1}	769.52	1.42×10^{-1}	773.39	1.39×10^{-1}	774.05	1.36×10^{-1}
1494.62	9.70×10^{-2}	1480.16	8.21×10^{-2}	1482.51	8.17×10^{-2}	1482.42	8.09×10^{-2}
2398.41	4.88×10^{-2}	2385.10	4.31×10^{-2}	2386.03	4.31×10^{-2}	2385.94	4.30×10^{-2}
Cœur en PVB à 20°C							
1631.84	1.56×10^{-1}	506.46	9.14×10^{-3}	506.79	8.94×10^{-3}	506.77	8.03×10^{-3}
3382.00	1.28×10^{-1}	1357.71	1.38×10^{-2}	1358.75	1.36×10^{-2}	1358.71	1.25×10^{-2}
5280.18	1.11×10^{-1}	2579.46	1.79×10^{-2}	2581.56	1.77×10^{-2}	2581.50	1.65×10^{-2}
7241.05	9.88×10^{-2}	4120.84	2.14×10^{-2}	4124.21	2.12×10^{-2}	4124.14	2.00×10^{-2}

TAB. 3.6 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich bi-encastrée avec un cœur en IDS112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$)

Ω_l et facteur de perte linéaire η_l) sont présentées dans le tableau 3.5 pour la poutre sandwich encastrée-libre et dans le tableau 3.6 pour la poutre sandwich bi-encastrée. Les résultats de ces deux tableaux montrent que les pulsations amorties linéaires et les facteurs de perte linéaires obtenus par l'approche MCA sont similaires à ceux obtenus par l'approche MCE quelle que soit la loi viscoélastique utilisée. Cette équivalence entre l'approche MCA et l'approche MCE, déjà établie dans le cas du modèle viscoélastique constant (section 3.6.1) est encore démontrée ici pour des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence. Pour les trois lois viscoélastiques utilisées, les résultats obtenus par l'approche MR sont complètement différents de ceux obtenus par les approches MCA et MCE. Comme vu précédemment pour le modèle viscoélastique constant, l'approche MR surestime l'amortissement et le cas le plus défavorable est observé ici pour le cœur en PVB à 20°C où les propriétés amortissantes prédites par l'approche MR sont plus du double de celles prédites par les approches MCA et MCE. Ceci montre que même si l'approche MR donne des résulats précis dans le cas des modèles viscoélastiques constants avec amortissement faible, elle n'est cependant pas valide dans le

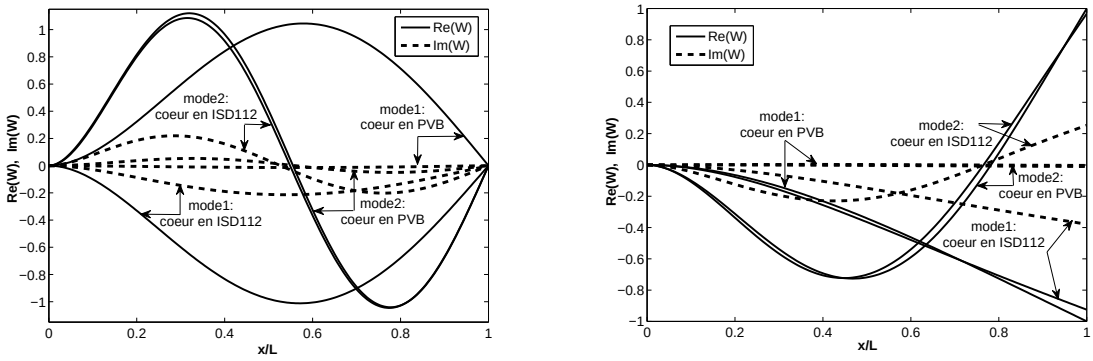
cas des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence. En outre, les tableaux 3.5 et 3.6 montrent que les résultats de l'approche MR peuvent être améliorés en utilisant l'approche MRA et on voit bien que les propriétés amortissantes prédites par l'approche MRA sont proches de celles obtenues par les approches MCA et MCE.

Le tableau 3.7 présente les coefficients de rigidité non linéaire C^R et C^I obtenus par les différentes approximations du mode de la base de Galerkin pour la poutre sandwich sous diverses conditions aux limites. On retrouve presque les mêmes résultats pour l'approche MCA que pour l'approche MCE. Ces observations déjà effectuées dans le cadre linéaire pour les propriétés amortissantes (tableaux 3.5 et 3.6) montrent que les approches MCA et MCE sont aussi équivalentes entre elles dans le cadre de l'analyse non linéaire. On constate un grand écart entre les résultats de l'approche MR et les résultats des approches MCA et MCE. Dans le cas des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence, l'approche MR peut conduire à des résultats erronnés, d'où la nécessité de l'améliorer en proposant l'approche MRA.

La figure 3.4 présente les parties réelle et imaginaire des modes complexes exacts de flexion de la poutre sandwich encastrée-appuyée et encastrée-libre avec un cœur en ISD112 à 27°C et un cœur en PVB à 20°C. Ces modes sont normalisés (relation (3.39)) et les coordonnées sont aussi normalisées par rapport à la longueur de la poutre. Bien que les parties réelle et imaginaire possèdent toutes la même forme du mode, elles diffèrent en amplitude suivant l'amortissement du cœur. La partie imaginaire du mode pour la loi viscoélastique de l'ISD112 est plus importante en amplitude comparée à celle obtenue avec la loi du PVB. Ceci explique pourquoi dans les tableaux 3.5 et 3.6, les facteurs de perte linéaires de la structure sont plus grands lorsque le cœur est en ISD112 et plus petits lorsque le cœur est en PVB. La figure 3.4(b) montre que pour la poutre sandwich encastrée-libre avec un cœur en ISD112 et vibrant en mode 1, l'amplitude de la partie imaginaire du mode est environ la moitié de celle de la partie réelle. La non considération de la partie imaginaire du mode dans l'approche MR [82, 83, 84] n'est donc pas réaliste car celle-ci peut devenir prépondérante selon la loi viscoélastique.

	MR		MRA		MCA		MCE	
	C^R	C^I	C^R	C^I	C^R	C^I	C^R	C^I
Appui simple								
ISD112 27°C	18.93	3.48×10^{-5}	19.36	4.48×10^{-5}	18.10	4.75×10^{-5}	17.72	4.70×10^{-5}
	25.67	9.71×10^{-5}	26.16	1.17×10^{-4}	24.69	1.20×10^{-4}	24.01	1.20×10^{-4}
ISD112 20°C	18.20	1.84×10^{-5}	20.61	3.15×10^{-5}	19.42	3.30×10^{-5}	19.09	3.56×10^{-5}
	25.27	6.65×10^{-5}	26.44	8.80×10^{-5}	25.84	8.90×10^{-5}	25.59	9.22×10^{-5}
PVB 20°C	0.31	1.86×10^{-5}	8.77	3.58×10^{-2}	8.76	3.70×10^{-2}	8.76	4.09×10^{-2}
	8.09	5.46×10^{-5}	9.09	1.25×10^{-2}	9.08	1.28×10^{-2}	9.08	1.41×10^{-2}
Bi-encastrée								
ISD112 27°C	6.68	2.54×10^{-5}	6.69	2.85×10^{-5}	6.46	2.89×10^{-5}	6.41	2.85×10^{-5}
	15.94	1.05×10^{-4}	15.88	1.23×10^{-4}	15.28	1.25×10^{-4}	15.12	1.24×10^{-4}
ISD112 20°C	6.69	1.93×10^{-5}	6.78	2.38×10^{-5}	6.66	2.39×10^{-5}	6.62	2.41×10^{-5}
	15.76	5.87×10^{-5}	15.84	7.37×10^{-5}	15.66	7.42×10^{-5}	15.59	7.55×10^{-5}
PVB 20°C	0.21	1.35×10^{-5}	2.16	2.36×10^{-3}	2.15	2.41×10^{-3}	2.16	2.68×10^{-3}
	0.84	6.01×10^{-5}	5.06	3.33×10^{-3}	5.06	3.37×10^{-3}	5.07	3.68×10^{-3}
Encastrée-appuyé								
ISD112 27°C	12.68	3.40×10^{-5}	12.66	4.01×10^{-5}	11.98	4.10×10^{-5}	11.80	4.03×10^{-5}
	23.01	1.15×10^{-4}	22.91	1.34×10^{-4}	21.83	1.37×10^{-4}	21.45	1.36×10^{-4}
ISD112 20°C	12.57	3.22×10^{-5}	13.03	3.20×10^{-5}	12.57	3.25×10^{-5}	12.43	3.31×10^{-5}
	22.77	7.20×10^{-5}	22.99	9.08×10^{-5}	22.62	9.15×10^{-5}	22.42	9.38×10^{-5}
PVB 20°C	0.28	1.78×10^{-5}	4.74	8.27×10^{-3}	4.73	8.48×10^{-3}	4.74	9.47×10^{-3}
	0.94	6.54×10^{-5}	7.46	6.65×10^{-3}	7.45	6.75×10^{-3}	7.46	7.42×10^{-3}

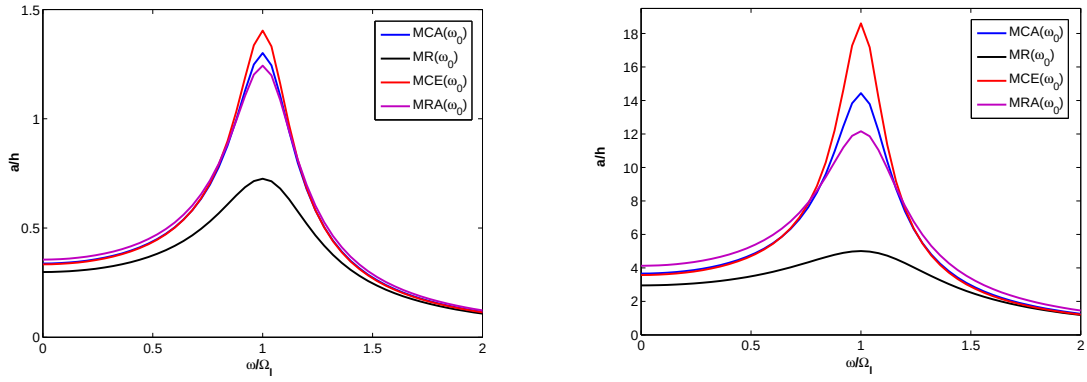
Tab. 3.7 – Coefficients de rigidité non linéaire de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 et un cœur en PVB ($\omega \approx \omega_0$)



(a) Encastrée-appuyée (b) Encastrée-libre

FIG. 3.4 – Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C et un cœur en PVB à 20°C

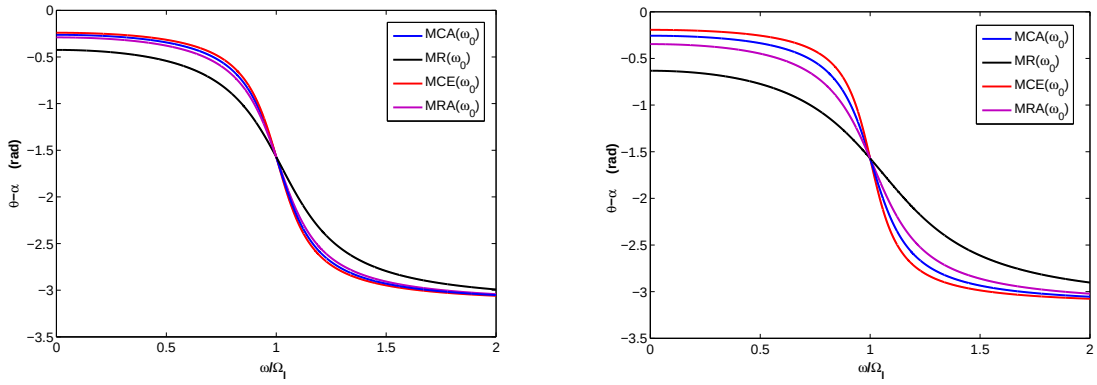
Les réponses linéaires en amplitude correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 20°C et sous une sollicitation harmonique concentrée sont présentées sur la figure 3.5 pour les différentes approximations du mode. L'étude est menée pour des conditions aux limites en appui simple et encastrée-libre. Dans les deux cas, on constate que la réponse prédite par l'approche MCA est proche de celle prédite par l'approche MCE. Comparativement aux approches MCA et MCE,



(a) Appui simple : $f(L/2) = 10N$ (b) Encastrée-libre : $f(L) = 10N$

FIG. 3.5 – Réponses linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 20°C

on voit bien que l'amplitude de la réponse de la structure est largement sous-estimée lorsque qu'elle est calculée avec l'approche MR. Cependant l'approche MRA fait tendre la réponse de l'approche MR vers celle des approches MCA et MCE. Dans le cas des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence, l'approche MRA permet d'améliorer les prédictions de l'approche MR. Les mêmes observations sont faites pour les phases linéaires correspondantes présentées à la figure 3.6 où les courbes prédites par l'approche MR sont clairement décalées de celles prédites par les approches MRA, MCA et MCE.



(a) Appui simple

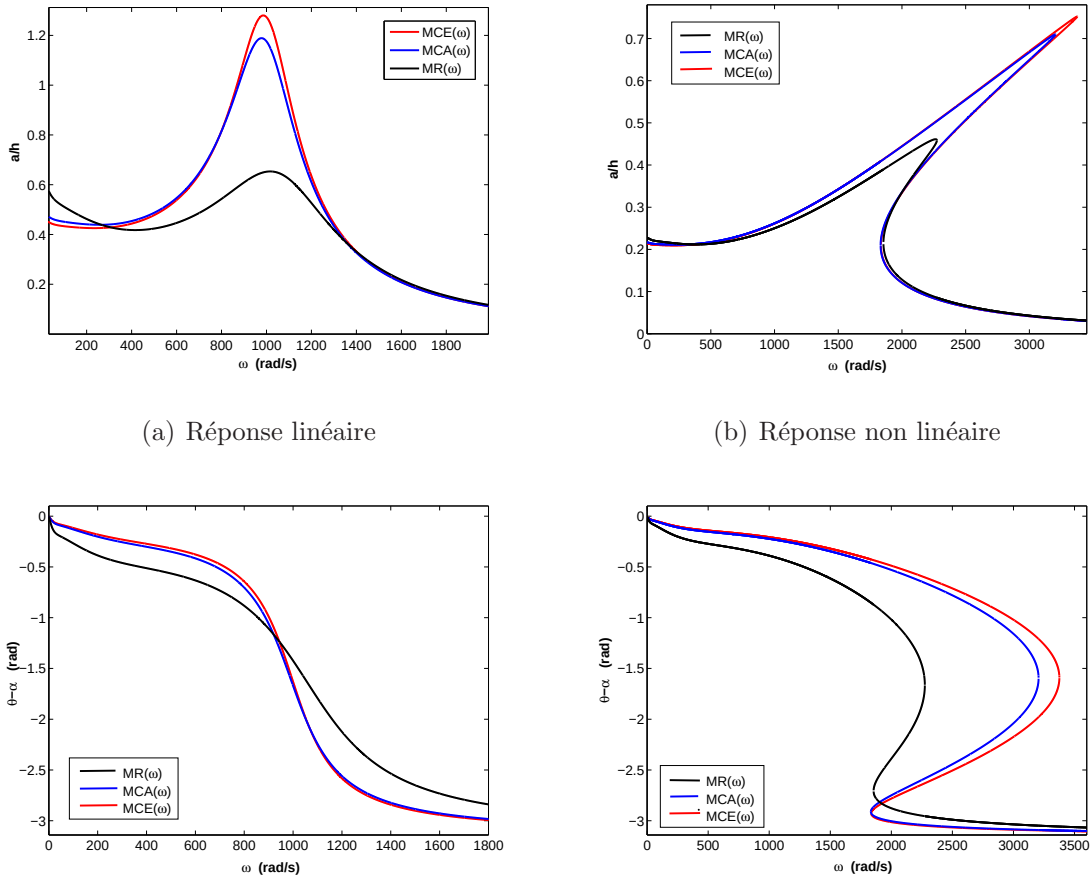
(b) Encastrée-libre

FIG. 3.6 – Phases linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich avec un cœur en ISD112 à 20°C

Analyse au voisinage de la fréquence ω variable

Contrairement à l'analyse simplifiée menée précédemment au voisinage de la fréquence ω_0 constante, l'analyse est menée ici dans un cadre général au voisinage de la fréquence ω variable et sans aucune approximation en suivant l'approche générale de l'équation d'amplitude présentée à la section 3.5.2. L'accent est mis particulièrement sur les trois approximations principales du mode c'est-à-dire le mode réel (MR), le mode complexe approché (MCA) et le mode complexe exact (MCE) pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires.

Nous présentons respectivement sur les figures 3.7(a) et 3.7(b) les courbes de réponses linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich en appui simple avec un cœur en ISD112 à 20°C, sous une sollicitation harmonique concentrée. On remarque que les réponses prédites par les approches MCA et MCE coïncident entre elles, mais pas avec les réponses prédites par l'approche MR qui sont complètement décalées des deux autres. Avant la zone de résonance, les réponses MR se trouvent au-dessus des réponses MCA et MCE, mais reviennent en dessous au fur et à mesure que la fréquence s'approche de la fréquence de résonance. A la résonance,



(a) Réponse linéaire

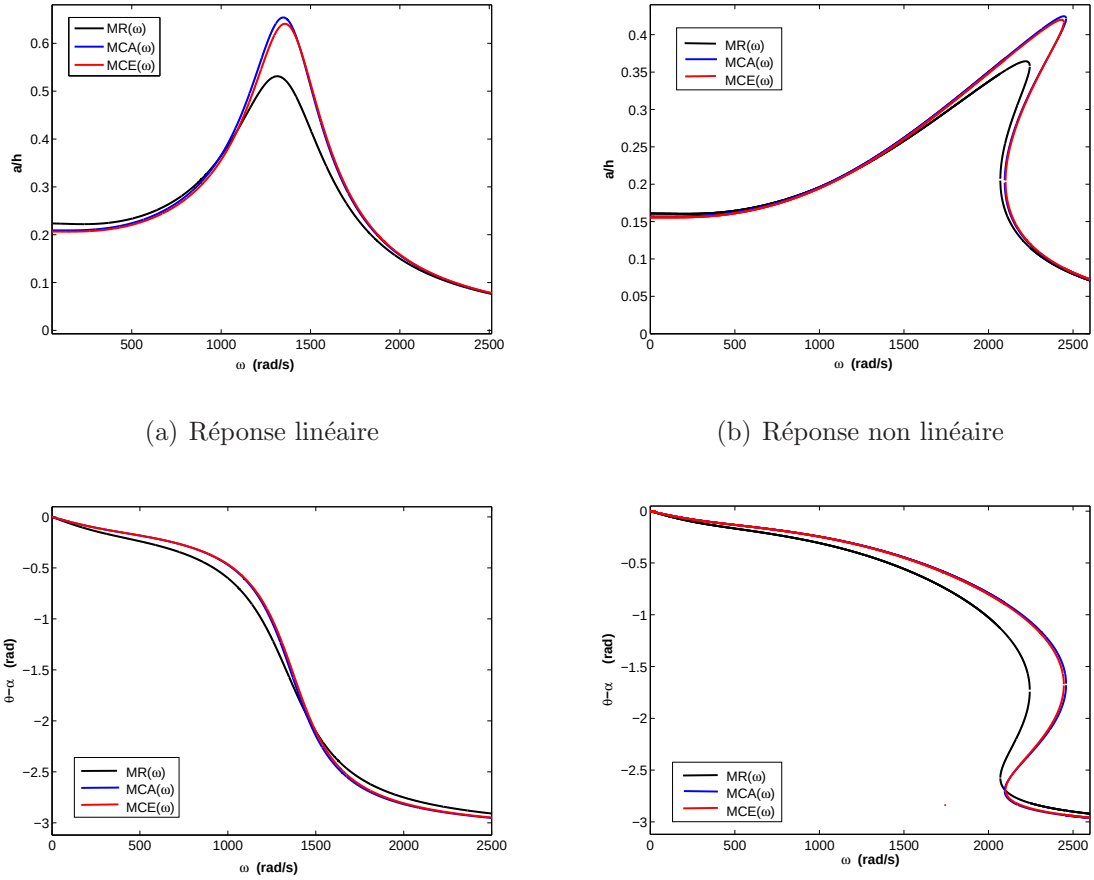
(b) Réponse non linéaire

(c) Phase linéaire

(d) Phase non linéaire

FIG. 3.7 – Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich en appui simple avec un cœur en ISD112 à 20°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$

l'approche MR sous-estime l'amplitude des vibrations, d'où le nécessité d'utiliser des modes complexes pour une prédiction exacte et pricise des réponses linéaires et non linéaires de la structure. Les figures 3.7(c) et 3.7(d) présentent les phases linéaires et non linéaires correspondantes. Les courbes de phases obtenues par les approches MCA et MCE sont pratiquement similaires, mais différentes de celles obtenues par l'approche MR. Pour les vibrations linéaires, les phases prédites par l'approche MR sont sous-estimées avant la résonance mais surestimées après la résonance comparativement aux phases prédites par les approches MCA et MCE.



(a) Réponse linéaire

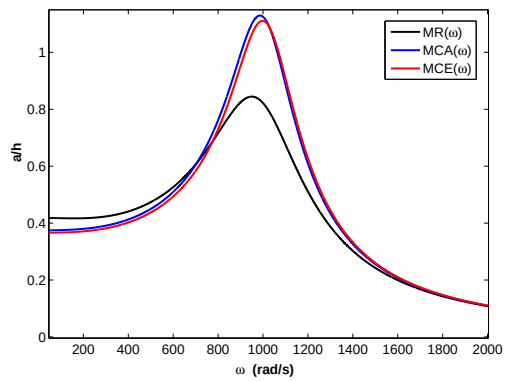
(b) Réponse non linéaire

(c) Phase linéaire

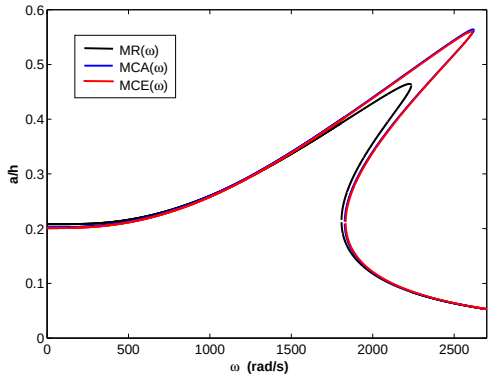
(d) Phase non linéaire

FIG. 3.8 – Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich encastrée-appuyée avec un cœur en ISD112 à 27°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$

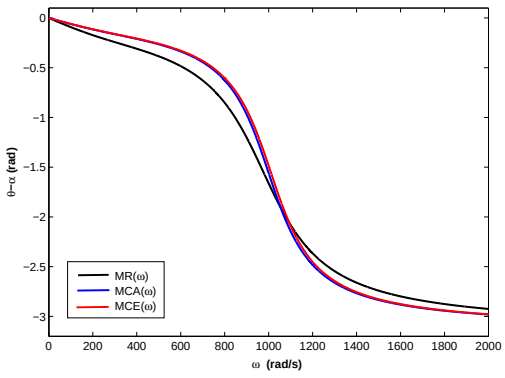
Les trois approximations du modes sont aussi testées en variant le matériau du cœur et les conditions aux limites. Les résultats sont présentés sur la figure 3.8 pour la poutre sandwich encastrée-appuyée avec un cœur en ISD112 à 27°C. Les courbes de réponses et de phases pour la même poutre en appui simple sont données à la figure 3.9. Malgré le changement de la loi viscoélastique et des conditions aux limites, l'on retrouve les mêmes constatations faites à la figure 3.7. Il ressort alors de cette étude que pour les modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence, l'usage du mode réel est insuffisant et doit être fait avec méfiance dans la mesure où les modes réels peuvent donner lieu



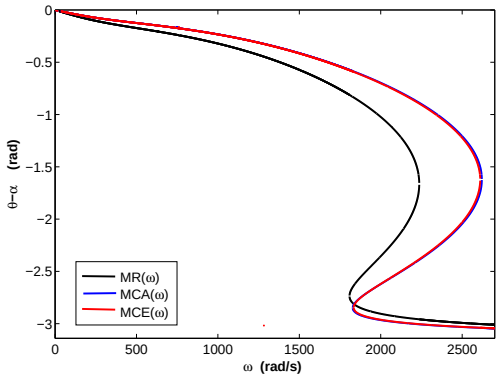
(a) Réponse linéaire



(b) Réponse non linéaire



(c) Phase linéaire



(d) Phase non linéaire

FIG. 3.9 – Réponses et phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la poutre sandwich en appui simple avec un cœur en ISD112 à 27°C, force harmonique concentrée $f(L/2) = 10N$

à des prédictions erronnées des propriétés amortissantes, des réponses et des phases caractérisant le comportement des structures sandwichs viscoélastiques. L'utilisation des modes complexes s'avère nécessaire pour établir la base de Galerkin efficace dans l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs. Ces modes complexes peuvent être calculés par l'approche MCA ou MCE dès lors que la présente étude a montré l'équivalence entre les deux approches. Bien que l'approche MCA soit une méthode approchée, l'étude a montré qu'elle donne des résultats assez précis. D'un point de vue de mise en œuvre de la procédure, l'approche MCA offre l'avantage d'être moins coûteuse car dans cette approche, les modes complexes sont calculés en ne résolvant qu'un problème de valeur propre complexe linéaire (relation (3.15)) contrairement à l'approche MCE dans laquelle on résout un problème de valeur propre complexe non linéaire (relation (3.12)).

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode numérique a été présentée pour l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs permettant de prendre en compte de façon générale la dépendance en fréquence de l'amortissement. Cette méthode est basée sur l'approche élément fini et combine la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode. Une équation d'amplitude gouvernant les vibrations de la structure sandwich a été établie dont les coefficients dépendent des modes choisis pour la base de Galerkin. Ce choix peut se faire selon quatre niveaux d'approximation du mode de vibration linéaire : le mode réel (MR), le mode réel amélioré (MRA), le mode complexe approché (MCA) et le mode complexe exact (MCE). L'analyse a été menée en résolvant l'équation d'amplitude d'abord dans un cadre simplifié puis dans un cadre général. Afin d'établir la validité de la présente méthode pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires, des calculs numériques ont été élaborés sur une poutre sandwich avec différents modèles viscoélastiques et pour diverses conditions aux

limites. La comparaison des résultats obtenus en termes de propriétés amortissantes, courbes de réponses et de phases pour les différentes approximations du mode de la base de Galerkin a montré que pour les modèles viscoélastiques constants :

• l'approche MR et l'approche MRA sont identiques ;

• l'approche MCA et l'approche MCE sont identiques ;

• l'approche MR ou MRA ne donne des résultats similaires à l'approche MCA ou MCE que pour un amortissement faible ;

• l'approche MR ou MRA n'est pas adaptée lorsque l'amortissement est élevé et conduit dans ce cas à des résultats erronnés.

Pour les modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence, l'analyse a montré que :

• l'approche MCA et l'approche MCE donnent des résultats similaires et sont donc équivalentes entre elles ;

• l'approche MR conduit à des résultats erronnées mais ces résultats peuvent être améliorés en utilisant l'approche MRA.

Il ressort de cette étude que le choix d'une base de Galerkin à modes réels n'est pas réaliste surtout en présence des lois viscoélastiques dépendant de la fréquence. Dès lors, il est judicieux pour l'efficacité de la méthode numérique développée ici, de choisir une base de Galerkin à modes complexes pour bien prendre en compte l'amortissement dans l'espace et en fonction de la fréquence. Puisque la présente analyse montre l'équivalence entre le mode complexe approché et le mode complexe exact, les modes complexes de la base de Galerkin peuvent dorénavant être calculés en utilisant simplement l'approche MCA qui a l'avantage d'opérer sur les méthodes classiques de résolution.

Chapitre 4

Analyse par modes complexes des vibrations non linéaires des plaques sandwichs viscoélastiques

Sommaire

4.1 Introduction 129

4.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires des plaques sandwichs 130

4.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement 130

4.2.2 Equation du mouvement 133

4.3 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire 136

4.3.1 Formulation du problème d'équilibre dans le plan 137

4.3.2 Formulation de l'équation d'amplitude 138

4.4 Discrétisation par la méthode des éléments finis 140

4.4.1 Problème de valeur propre 140

4.4.2 Problème d'équilibre dans le plan 142

4.4.3 Coefficients de l'équation d'amplitude 144

4.5 Résultats numériques 145

4.5.1 Résultats numériques du modèle viscoélastique constant . . . 147
4.5.2 Résultats numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence . . . 155
4.6 Conclusion . . . 165

4.1 Introduction

Au chapitre 3, une méthode numérique a été présentée pour l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs avec la prise en compte de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique de manière générale. Cette méthode qui associe la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode est efficace et a permis de caractériser les propriétés amortissantes, les réponses et les phases linéaires et non linéaires des poutres sandwichs avec des lois viscoélastiques génériques pour le cœur. L'évaluation des différentes approximations des modes de la base de Galerkin vis-à-vis d'un comportement viscoélastique dépendant de la fréquence a montré l'inadéquation des modes réels dans le choix de la base de Galerkin pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs [98]. Nous proposons dans ce chapitre une modélisation des vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs basée sur des modes complexes. L'objectif est d'étendre le modèle numérique de type poutre précédemment développé au chapitre 3 à l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs viscoélastiques.

Comme au chapitre 3, la procédure de résolution de l'équation d'amplitude non linéaire obtenue est adoptée pour l'estimation des propriétés amortissantes, la prédiction des réponses et des phases. Les coefficients de l'équation d'amplitude sont formulés dans le cadre élément fini à l'aide des modes complexes de vibration linéaire. L'élément fini utilisé pour la discrétisation est un élément fini de type plaque et les modes complexes sont obtenus numériquement par résolution exacte d'un problème de valeur propre en utilisant l'approche *diamant* [97]. Des simulations numériques sont menées sur des structures sandwichs avec des modèles viscoélastiques à différentes températures et pour différentes conditions aux limites. Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence l'effet des non linéarités géométriques, des conditions aux limites et de la température sur les propriétés modales et sur les réponses des structures sandwichs viscoélastiques de type plaques.

4.2 Formulation du problème de vibrations non linéaires des plaques sandwichs

Dans cette partie, nous commençons par formuler le problème de vibrations non linéaires des plaques sandwichs viscoélastiques. A partir des hypothèses cinématiques classiques, les champs de déplacement et de déformation tenant compte des non linéarités géométriques sont présentés. Le principe des puissances virtuelles est utilisé pour établir les équations du mouvement gouvernant les vibrations non linéaires des plaques sandwichs. La formulation de ces équations est effectuée en utilisant des lois de convolution afin de prendre en compte de façon générale un comportement viscoélastique dépendant de la fréquence.

4.2.1 Modèle cinématique et lois de comportement

On considère une structure sandwich rectangulaire trois couches à cœur viscoélastique relativement au système de coordonnées cartésiennes (O, x, y, z) comme représentée à la figure 2.1. Contrairement à l'étude menée au chapitre 2 (section 2.2.1) et au chapitre 3 (section 3.2.1) pour laquelle la structure était initialement assimilée à une poutre, dans la présente étude, cette structure sera plutôt assimilée à une plaque mince. Néanmoins, toutes les conventions et notations déjà utilisées à section 2.2.1 relativement à la désignation des couches externes, de la couche centrale ainsi que leurs propriétés spatiales, mécaniques, matérielles et dimensionnelles sont reconduites ici pour l'étude de la structure sandwich plaque. L'étude en flexion est menée dans les hypothèses cinématiques suivantes communes à plusieurs auteurs [53, 56, 59] :

- tous les points sur une normale au plan moyen de la plaque ont le même déplacement transverse ;

- tous les points sur une normale au plan moyen des couches élastiques externes ont la même rotation ;

- la continuité du champ de déplacement aux interfaces est requise en admettant que

les trois couches du sandwich sont parfaitement collées entre elles ;
- la contrainte normale transverse dans la direction (Oz) est très faible comparativement aux contraintes normales dans les directions (Ox) et (Oy) ;
- la déformation de cisaillement est prise en compte dans la couche centrale viscoélastique, mais ignorée dans les faces élastiques externes ;
- les effets d'inertie plane et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transverse pour l'étude en flexion ;
- les matériaux constitutifs de la plaque sandwich sont supposés homogènes, isotropes, linéaires et celui du cœur est supposé être viscoélastique non vieillissant.

Le modèle cinématique adopté est le modèle de Love-Kirchhoff appliqué aux faces élastiques et le modèle de Mindlin appliqué au cœur viscoélastique. Le modèle de Mindlin au cœur est choisi afin de mieux prendre en compte le cisaillement dans cette couche. L'étude est menée dans le cadre des grands déplacements et des rotations modérées. Comme dans [84, 86, 87], les non linéarités géométriques sont prises en compte selon la théorie de Von Karman. En se basant sur ces hypothèses, le champ de déplacement s'écrit pour les couches élastiques externes $i = 1, 3$:

$$\begin{aligned} U_i(x, y, z, t) &= u_i(x, y, t) - (z - z_i)w_{,x} \\ V_i(x, y, z, t) &= v_i(x, y, t) - (z - z_i)w_{,y} \\ W_i(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

où U_i et V_i sont les déplacements longitudinaux dans les directions (Ox) et (Oy) d'un point de la couche i ; u_i et v_i sont les déplacements longitudinaux dans les directions (Ox) et (Oy) du plan moyen de la couche i. $W_i = w$ représente le déplacement transversal commun aux trois couches. Le repère (O, x, y, z) coïncidant avec le plan moyen de la couche centrale permet d'écrire pour l'ordonnée du plan moyen de chaque couche $z_2 = 0$, $z_1 = -z_3 = (h_f + h_c)/2$, où h_f représente l'épaisseur des faces élastiques et h_c l'épaisseur du cœur viscoélastique. Le champ de déformation non linéaire dans les couches élastiques $i = 1, 3$ est décrit en utilisant la formule de Green-Lagrange (1.67)

dans le cadre de la théorie de Von Karman :

$$\{\varepsilon_i\} = \{\Gamma_i\} + (z - z_i)\{\kappa\} + \left\{\Gamma^{nl}\right\} \tag{4.2}$$

où $\{\Gamma_i\}$ représente le tenseur de déformation linéaire en membrane, $\{\kappa\}$ le tenseur de déformation linéaire en flexion et $\left\{\Gamma^{nl}\right\}$ le tenseur de déformation non linéaire en flexion. Les composantes de ces tenseurs sont données par :

$$\begin{aligned}
\{\Gamma_i\} &= {}^{\intercal}\{u_{i,x}, \quad v_{i,y}, \quad u_{i,y} + v_{i,x}\} \\
\{\kappa\} &= {}^{\intercal}\{-w_{,xx}, \quad -w_{,yy}, \quad -2w_{,xy}\} \\
\left\{\Gamma^{nl}\right\} &= \tfrac{1}{2}{}^{\intercal}\{(w_{,x})^2, \quad (w_{,y})^2, \quad 2w_{,x}w_{,y}\}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Le champ de déplacement dans la couche centrale viscoélastique $i = 2$ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
U_2(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z\beta_x(x, y, t) \\
V_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z\beta_y(x, y, t) \\
W_2(x, y, z, t) &= w(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

où u et v sont les déplacements longitudinaux dans les directions (Ox) et (Oy) du plan moyen de la couche centrale ; β_x et β_y les rotations autour de (Oy) et (Ox) de la normale au plan moyen de la couche centrale. En utilisant la formule de Green-Lagrange (1.67), le champ de déformation dans le plan pour la couche centrale $i = 2$ s'écrit de la façon suivante :

$$\{\varepsilon_2\} = \{\Gamma_2\} + z\{\kappa_2\} + \left\{\Gamma^{nl}\right\} \tag{4.5}$$

où $\{\Gamma_2\}$ représente le tenseur de déformation linéaire en membrane et $\{\kappa_2\}$ le tenseur de déformation linéaire en flexion. Ils sont donnés par :

$$\begin{aligned}
\{\Gamma_2\} &= {}^{\intercal}\{u_{,x}, \quad v_{,y}, \quad u_{,y} + v_{,x}\} \\
\{\kappa_2\} &= {}^{\intercal}\{\beta_{x,x}, \quad \beta_{y,y}, \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x}\}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Le champ de déformation de cisaillement dans la couche centrale est de la forme :

$$\{\xi_2\} = {}^{\intercal}\{w_{,x} + \beta_x, \quad w_{,y} + \beta_y\} \tag{4.7}$$

Pour les lois de comportement, on admet que les efforts et les moments induits dans la plaque sandwich sont dus aux déformations linéaires et non linéaires en membrane et en flexion. En utilisant la formule de Hooke généralisée (1.22), les efforts normaux N_i, les moments fléchissants M_i et les efforts tranchants Q_i sont définis par unité de longueur pour chaque couche i :

$$\begin{aligned} \{N_i\} &= {}^{\intercal}\{N_{ixx}, \quad N_{iyy}, \quad N_{ixy}\} = [C_m]\left\{\Gamma_i + \Gamma^{nl}\right\}, \qquad i = 1,3 \\ \{M_i\} &= {}^{\intercal}\{M_{ixx}, \quad M_{iyy} \quad M_{ixy}\} = [C_f]\{\kappa\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

où $[C_m]$ et $[C_f]$ sont respectivement les matrices de comportement en membrane et en flexion des couches externes élastiques $i = 1, 3$. Ces matrices sont données à l'Annexe D.1. Pour la couche centrale viscoélastique, le matériau constitutif étant supposé homogène, isotrope, linéaire et non vieillissant, le module d'Young et le module de cisaillement correspondant sont des quantités complexes et dépendant de la fréquence. Dans ce cas, les lois de comportement définissant les efforts et les moments dans la couche centrale s'écrivent en termes de produit de convolution :

$$\begin{aligned} \{N_2\} &= {}^{\intercal}\{N_{2xx}, \quad N_{2yy}, \quad N_{2xy}\} = [C_{2m}(t)] * \left\{\dot{\Gamma}_2 + \dot{\Gamma}^{nl}\right\} \\ \{M_2\} &= {}^{\intercal}\{M_{2xx}, \quad M_{2yy}, \quad M_{2xy}\} = [C_{2f}(t)] * \{\dot{\kappa_2}\} \\ \{Q_2\} &= {}^{\intercal}\{Q_{2xz}, \quad Q_{2yz}\} = [C_{2s}(t)] * \left\{\dot{\xi}_2\right\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $(*)$ représente l'opérateur du produit de convolution, $[C_{2m}]$, $[C_{2f}]$ et $[C_{2s}]$ sont respectivement les matrices de comportement en membrane, en flexion et en cisaillement de la couche centrale viscoélastique $i = 2$. Ces matrices de comportement sont données à l'Annexe D.1 Nous présentons dans la section suivante la formulation variationnelle du problème de vibrations non linéaires permettant d'établir l'équation du mouvement de la plaque sandwich.

4.2.2 Equation du mouvement

L'équation du mouvement de la plaque sandwich est obtenue du principe des puissances virtuelles en assemblant les puissances virtuelles associées à chaque couche. En

utilisant la formulation générale (2.8), les trois composantes du principe des puissances virtuelles sont :

$$\begin{aligned}
\delta P_{int} &= -\iint_s \left(\sum_{i=1}^{3} {}^{\intercal}\{N_i\} \left\{ \delta\Gamma_i + \delta\Gamma^{nl} \right\} + \sum_{i=1,3} {}^{\intercal}\{M_i\} \{\delta\kappa\} \right) ds \\
&\quad - \iint_s \left({}^{\intercal}\{M_2\} \{\delta\kappa_2\} + {}^{\intercal}\{Q_2\} \{\delta\xi_2\} \right) ds \\
\delta P_{ext} &= \iint_s F(x,y,t)\delta w ds \\
\delta P_{acc} &= \iint_s (2\rho_f h_f + \rho_c h_c)\ddot{w}\delta w ds
\end{aligned} \tag{4.10}$$

où δP_{int}, δP_{ext} et δP_{acc} représentent la puissance virtuelle respectivement des efforts intérieurs, extérieurs et d'inertie. $F(x,y,t)$ est la force transversale d'excitation extérieure, ρ_f et ρ_c sont les densités massiques des faces et du cœur puis s l'aire de la section plane de la plaque sandwich. Rappelons que dans cette formulation, les inerties plane et rotationelle sont négligées et seule l'inertie transversale est prise en compte. La condition de continuité du champ de déplacement aux interfaces entre les trois couche se traduit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
u_1 &= u + \tfrac{h_c}{2}\beta_x - \tfrac{h_f}{2}w_{,x} \\
v_1 &= v + \tfrac{h_c}{2}\beta_y - \tfrac{h_f}{2}w_{,y} \\
u_3 &= u - \tfrac{h_c}{2}\beta_x + \tfrac{h_f}{2}w_{,x} \\
v_3 &= v - \tfrac{h_c}{2}\beta_y + \tfrac{h_f}{2}w_{,y}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ceci permet de définir les déplacements généralisés ramenés dans la couche centrale viscoélastique à l'aide de cinq fonctions indépendantes $\{u, v, w, \beta_x, \beta_y\}$. La condition de continuité du champ de déplacement aux interfaces s'exprime alors pour les tenseurs de déformation (4.3) et (4.6) par :

$$\begin{aligned}
\{\Gamma_1\} &= \{\Gamma_2\} + \tfrac{h_c}{2}\{\kappa_2\} + \tfrac{h_f}{2}\{\kappa\} \\
\{\Gamma_3\} &= \{\Gamma_2\} - \tfrac{h_c}{2}\{\kappa_2\} - \tfrac{h_f}{2}\{\kappa\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

En utilisant ces conditions aux interfaces dans les composantes (4.10) du principe des puissances virtuelles, la formulation variationnelle peut être écrite uniquement en

fonction des déplacements généralisés du cœur :

$$\begin{aligned}
&-\delta P_{int} = \delta P_{ext} - \delta P_{acc} \\
&\iint_s \left({}^{\intercal}\{N\}\{\delta\Gamma_2\} + {}^{\intercal}\{N\}\left\{\delta\Gamma^{nl}\right\} + {}^{\intercal}\{M_\beta\}\{\delta\kappa_2\} + {}^{\intercal}\{M_w\}\{\delta\kappa\} + {}^{\intercal}\{Q_2\}\{\delta\xi_2\}\right) ds \\
&= \iint_s F\delta w ds - \iint_s (2\rho_f h_f + \rho_c h_c)\ddot{w}\delta w ds
\end{aligned} \tag{4.13}$$

où $\{N\}$ est la résultante des forces de membrane, $\{M_w\}$ et $\{M_\beta\}$ les résultantes des moments fléchissants dans la plaque sandwich. Elles sont données par :

$$\begin{aligned}
\{N\} &= \{N_1 + N_2 + N_3\} = 2\,[C_m]\left\{\Gamma_2 + \Gamma^{nl}\right\} + [C_{2m}(t)] * \left\{\dot{\Gamma}_2 + \dot{\Gamma}^{nl}\right\} \\
\{M_\beta\} &= \{M_2\} + \tfrac{h_c}{2}\{N_1 - N_3\} = [C_{2f}(t)] * \{\dot{\kappa}_2\} + h_c\,[C_m]\left(\tfrac{h_c}{2}\{\kappa_2\} + \tfrac{h_f}{2}\{\kappa\}\right) \\
\{M_w\} &= \{M_1 + M_3\} + \tfrac{h_f}{2}\{N_1 - N_3\} = 2\,[C_f]\{\kappa\} + h_f\,[C_m]\left(\tfrac{h_c}{2}\{\kappa_2\} + \tfrac{h_f}{2}\{\kappa\}\right)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

La formulation (4.13) représente l'équation générale gouvernant les vibrations non linéaires de la plaque sandwich. Puisque les composantes de l'inertie dans le plan ainsi que les composantes de l'effort dans le plan sont négligées, alors les composantes planes (u, v) des déplacements généralisés seront obtenues en fonction du déplacement transversal w en résolvant le problème d'équilibre dans le plan :

$$\iint_s {}^{\intercal}\{N\}\{\delta\Gamma_2\}\, ds = 0 \tag{4.15}$$

Les autres composantes transversales (w, β_x, β_y) seront obtenues indépendamment en résolvant le problème de flexion suivant :

$$\begin{aligned}
&\iint_s \left({}^{\intercal}\{N\}\left\{\delta\Gamma^{nl}\right\} + {}^{\intercal}\{M_\beta\}\{\delta\kappa_2\} + {}^{\intercal}\{M_w\}\{\delta\kappa\} + {}^{\intercal}\{Q_2\}\{\delta\xi_2\}\right) ds \\
&= \iint_s F\delta w ds - \iint_s (2\rho_f h_f + \rho_c h_c)\ddot{w}\delta w ds
\end{aligned} \tag{4.16}$$

L'équation de flexion (4.16) est un problème non linéaire qui n'admet pas de solutions analytiques. Cependant seules des solutions approchées seront cherchées en utilisant la méthode de Galerkin à un mode et une discrétisation élément fini des deux problèmes (4.15) et (4.16). Nous présentons dans la section suivante la formulation analytique détaillée de ces deux problèmes. A l'issue de cette formulation, une équation d'amplitude

sera élaborée permettant d'analyser les vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs. La formulation numérique de ces deux problèmes ainsi que la procédure de résolution seront présentées plus loin dans la section 4.4.

4.3 Formulation de l'équation d'amplitude non linéaire

Comme dans le cas de la poutre sandwich viscoélastique, le modèle d'étude des vibrations non linéaires proposé ici est limité à l'analyse des réponses périodiques de la plaque sandwich soumise à des excitations harmoniques transversales de la forme $F(x,y,t) = f(x,y)e^{i\omega t}$, cependant la formulation de l'équation d'amplitude est basée sur des modes complexes. La réponse non linéaire en flexion, solution du problème (4.16) est supposée harmonique dans le temps et parallèle au mode complexe de vibration linéaire dans l'espace par une amplitude complexe arbitraire. Pour le calcul de cette réponse non linéaire en flexion, d'abord le mode complexe de vibration linéaire ${}^{\intercal}\{w,\beta_x,\beta_y\} = {}^{\intercal}\{W,B_x,B_y\}\,e^{i\omega t}$ sera obtenu en résolvant numériquement le problème de flexion (4.16) dans le cadre restreint des vibrations libres linéaires, c'est-à-dire en ignorant les termes de non linéarités géométriques et d'excitation extérieure. En suite, la méthode de Galerkin à un mode est utilisée pour approximer la réponse non linéaire à l'aide du mode complexe de vibration linéaire en cherchant la solution du problème (4.16) sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} w(x,y,t) \\ \beta_x(x,y,t) \\ \beta_y(x,y,t) \end{array}\right\} = A \left\{\begin{array}{c} W(x,y) \\ B_x(x,y) \\ B_y(x,y) \end{array}\right\} e^{i\omega t} + CC \tag{4.17}$$

où A est l'amplitude complexe inconnue des vibrations non linéaires, ${}^{\intercal}\{W,B_x,B_y\}$ le mode complexe des vibrations linéaires dans l'espace et CC le complexe conjugué. En utilisant la formulation (4.17), les composantes (u,v) intervenant dans la résultante des

efforts de membrane $\{N\}$ du problème (4.16) seront obtenues en fonction du mode complexe des vibrations linéaires dans l'espace $^{\intercal}\{W, B_x, B_y\}$ en résolvant numériquement le problème (4.15) d'équilibre dans le plan. Enfin la méthode d'équilibrage harmonique couplée à la formulation (4.17) permettra d'établir l'équation d'amplitude gouvernant la réponse non linéaire.

4.3.1 Formulation du problème d'équilibre dans le plan

La résultante des efforts de membrane $\{N\}$ intervenant dans le problème de flexion non linéaire (4.16) est fonction des déplacements longitudinaux (u, v). Ces déplacements doivent être calculés pour la détermination de cette résultante qui permettra par suite de résoudre le problème de flexion (4.16). Les déplacements (u, v) sont calculés en résolvant le problème (4.15) d'équilibre dans le plan. Avec la décomposition modale (4.17), la déformation non linéaire $\left\{\Gamma^{nl}(W, W)\right\}$ induit les harmoniques 0 et $\pm 2\omega$ comme suit :

$$\left\{\Gamma^{nl}(x, y, t)\right\} = 2\left|A\right|^2 \left\{\Gamma_0^{nl}(x, y)\right\} + A^2 \left\{\Gamma_{2\omega}^{nl}(x, y)\right\} e^{i2\omega t} + CC \tag{4.18}$$

où la notation $|\bullet|$ représente le module du nombre complexe $(\bullet)$. $\left\{\Gamma_0^{nl}\right\}$ et $\left\{\Gamma_{2\omega}^{nl}\right\}$ sont les composantes de la déformation non linéaire en flexion respectivement aux harmoniques 0 et 2ω. Ces composantes sont données par :

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma_0^{nl}\right\} &= \tfrac{1}{2}{}^{\intercal}\left\{W_{,x}\overline{W}_{,x}, \quad W_{,y}\overline{W}_{,y}, \quad W_{,x}\overline{W}_{,y} + \overline{W}_{,x}W_{,y}\right\} \\ \left\{\Gamma_{2\omega}^{nl}\right\} &= \tfrac{1}{2}{}^{\intercal}\left\{(W_{,x})^2, \quad (W_{,y})^2, \quad 2W_{,x}W_{,y}\right\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

où la notation $\overline{\bullet}$ désigne le complexe conjugué de $(\bullet)$. Ainsi, la solution (u, v) du problème plan et la déformation linéaire en membrane $\{\Gamma_2\}$ sont cherchées sous la forme :

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= 2\left|A\right|^2 u_0(x, y) + A^2 u_{2\omega}(x, y) e^{i2\omega t} + CC \\ v(x, y, t) &= 2\left|A\right|^2 v_0(x, y) + A^2 v_{2\omega}(x, y) e^{i2\omega t} + CC \\ \{\Gamma_2(x, y, t)\} &= 2\left|A\right|^2 \{\Gamma_{20}(x, y)\} + A^2 \{\Gamma_{22}(x, y)\} e^{i2\omega t} + CC \end{aligned} \tag{4.20}$$

où (u_0, v_0) sont les amplitudes de la réponse à l'harmonique 0 et $(u_{2\omega}, v_{2\omega})$ les amplitudes de la réponse à l'harmonique 2ω. $\{\Gamma_{20}\}$ et $\{\Gamma_{22}\}$ sont les composantes du tenseur de déformation linéaire en membrane associées à (u_0, v_0) et $(u_{2\omega}, v_{2\omega})$ respectivement. En insérant l'équation (4.20) dans l'équation (4.15) d'équilibre dans la plan et en utilisant la formulation (4.14) de l'effort normal, les composantes $\{\Gamma_{20}\}$ et $\{\Gamma_{22}\}$ du tenseur de déformation linéaire en membrane sont obtenues en résolvant numériquement les deux problèmes linéaires suivants :

$$\begin{aligned}
\iint_s {}^{\intercal} \{\Gamma_{20}\} \left[2C_m + C^*_{2m}(0)\right] \{\delta\Gamma_{20}\}\, ds &= -\iint_s {}^{\intercal} \left\{\Gamma^{nl}_0\right\} \left[2C_m + C^*_{2m}(0)\right] \{\delta\Gamma_{20}\}\, ds \\
\iint_s {}^{\intercal} \{\Gamma_{22}\} \left[2C_m + C^*_{2m}(2\omega)\right] \{\delta\Gamma_{22}\}\, ds &= -\iint_s {}^{\intercal} \left\{\Gamma^{nl}_{2\omega}\right\} \left[2C_m + C^*_{2m}(2\omega)\right] \{\delta\Gamma_{22}\}\, ds
\end{aligned} \tag{4.21}$$

où $[C_m]$ et $[C^*_{2m}]$ sont les matrices de comportement en membrane données à l'Annexe D.1. Rappelons que cette résolution numérique nécessite uniquement la discrétisation des degrés de liberté (u, v). La formulation (4.14) permet de décomposer la résultante des efforts de membrane $\{N\}$ suivant (4.18) et (4.20) en fonction des deux harmoniques 0 et $\pm 2\omega$:

$$\{N(x,y,t)\} = 2\,|A|^2 \{N_0(x,y)\} + A^2 \{N_{2\omega}(x,y)\}\, e^{i2\omega t} + CC \tag{4.22}$$

où $\{N_0\}$ et $\{N_{2\omega}\}$ sont les amplitudes de $\{N\}$ aux harmoniques 0 et 2ω données par :

$$\begin{aligned}
\{N_0(x,y)\} &= \left[2C_m + C^*_{2m}(0)\right] \left\{\Gamma_{20}(x,y) + \Gamma^{nl}_0(x,y)\right\} \\
\{N_{2\omega}(x,y)\} &= \left[2C_m + C^*_{2m}(2\omega)\right] \left\{\Gamma_{22}(x,y) + \Gamma^{nl}_{2\omega}(x,y)\right\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

4.3.2 Formulation de l'équation d'amplitude

La méthode de Galerkin à un mode complexe permet de résoudre le problème de flexion (4.16) en cherchant la réponse non linéaire sous la forme approchée (4.17). En utilisant cette décomposition modale, les tenseurs de déformation linéaire en flexion $\{\kappa\}$, $\{\kappa_2\}$ et en cisaillement $\{\xi_2\}$ définis dans les équations (4.3) et (4.6) s'écrivent

aussi sous la forme harmonique en fonction de l'amplitude A :

$$\begin{aligned}
\{\kappa(x,y,t)\} &= A\{\kappa(x,y)\}e^{i\omega t} + CC \\
\{\kappa_2(x,y,t)\} &= A\{\kappa_2(x,y)\}e^{i\omega t} + CC \\
\{\xi_2(x,y,t)\} &= A\{\xi_2(x,y)\}e^{i\omega t} + CC
\end{aligned} \tag{4.24}$$

où les composantes spatiales de ces tenseurs sont données par :

$$\begin{aligned}
\{\kappa(x,y)\} &= {}^{\intercal}\{-W_{,xx}, \quad -W_{,yy}, \quad -2W_{,xy}\} \\
\{\kappa_2(x,y)\} &= {}^{\intercal}\{B_{x,x}, \quad B_{y,y}, \quad B_{x,y}+B_{y,x}\} \\
\{\xi_2(x,y)\} &= {}^{\intercal}\{W_{,x}+B_x, \quad W_{,y}+B_y\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

En utilisant la méthode d'équilibrage harmonique, les déplacements et rotations virtuels du problème (4.16) sont choisis sous la forme ${}^{\intercal}\{\delta w, \delta\beta_x, \delta\beta_y\} = {}^{\intercal}\left\{\overline{W}, \overline{B}_x, \overline{B}_y\right\}e^{-i\omega t}$. En remplaçant chaque membre de l'équation (4.16) par son expression et en ne retenant que les termes indépendants du temps, on retrouve l'équation d'amplitude non linéaire (3.21) précédemment établie au chapitre 3 dans le cadre de l'étude des poutres sandwichs :

$$\left(k - \omega^2 m\right)A + k_{nl}|A|^2 A = Q \tag{4.26}$$

La masse modale m, la rigidité modale linéaire k, la rigidité modale non linéaire k_{nl} et la force modale Q sont données analytiquement par :

$$\begin{aligned}
m &= \iint_s (2\rho_f h_f + \rho_c h_c) W\overline{W}\,ds \\
k &= \iint_s \left(2^{\intercal}\left(\frac{h_c}{2}\{\overline{\kappa}_2\} + \frac{h_f}{2}\{\overline{\kappa}\}\right)[C_m]\left(\frac{h_c}{2}\{\kappa_2\} + \frac{h_f}{2}\{\kappa\}\right) + 2^{\intercal}\{\overline{\kappa}\}[C_f]\{\kappa\}\right) ds \\
&\quad + \iint_s \left({}^{\intercal}\{\overline{\kappa}_2\}\left[C^*_{2f}(\omega)\right]\{\kappa_2\} + {}^{\intercal}\left\{\overline{\xi}_2\right\}[C^*_{2s}(\omega)]\{\xi_2\}\right) ds \\
k_{nl} &= \iint_s \left(4^{\intercal}\left\{\Gamma_0^{nl}\right\}[2C_m + C^*_{2m}(0)]\left\{\Gamma_{20} + \Gamma_0^{nl}\right\}\right) ds \\
&\quad + \iint_s \left(2^{\intercal}\left\{\overline{\Gamma}_{2\omega}^{nl}\right\}[2C_m + C^*_{2m}(2\omega)]\left\{\Gamma_{22} + \Gamma_{2\omega}^{nl}\right\}\right) ds \\
Q &= \iint_s f(x,y)\overline{W}\,ds
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Les matrices de comportement $[C_m]$, $[C^*_{2m}]$, $[C_f]$, $\left[C^*_{2f}\right]$ et $[C^*_{2s}]$ sont données à l'Annexe D.1. Comme dans le cas des poutres sandwichs étudié au chapitre 3, l'équation d'amplitude (4.26) permet d'analyser les vibrations linéaires et non linéaires des plaques

sandwichs. Les coefficients (4.27) de l'équation d'amplitude dépendent des modes complexes de vibrations linéaires ${}^{\intercal}\{W, B_x, B_y\}$ et des réponses (u, v) dans le plan. Ces coefficients seront calculés numériquement en utilisant une discrétisation par la méthode des éléments finis.

4.4 Discrétisation par la méthode des éléments finis

Le modèle numérique d'étude des vibrations non linéaires développé ici implique la formulation élément fini de trois problèmes. Le premier est le problème de valeur propre complexe non linéaire obtenu de l'équation de flexion (4.16) en ignorant les termes de non linéarités géométriques et d'excitation extérieure ($\Gamma^{nl} = 0, F = 0$). La résolution de ce problème de valeur propre permettra de déterminer numériquement les modes propres complexes ${}^{\intercal}\{W, B_x, B_y\}$ et les fréquences propres complexes ω associés à ces modes de vibration. Le deuxième est le problème d'équilibre dans le plan dont les deux membres de droite de l'équation (4.21) dépendent du mode complexe de flexion W. La résolution de ce problème permet de déterminer numériquement les réponses (u, v) dans le plan en fonction du mode de flexion W calculé. En fin, le troisième concerne la formulation élément fini des coefficients (4.27) de l'équation d'amplitude en fonction du mode linéaire et de la réponse dans la plan calculés numériquement. Dans notre étude, l'élément fini quadrangulaire à quatre nœuds [93] sera utilisé pour la discrétisation de la structure sandwich plaque dans le plan moyen de la couche centrale.

4.4.1 Problème de valeur propre

La discrétisation du problème de flexion (4.16) considéré dans le cadre des vibrations libres linéaires à l'aide de l'élément fini quadrangulaire à quatre nœuds nécessite seulement l'interpolation de cinq degrés de liberté en chacun des nœuds : le déplacement transversal W, les pentes $(W_{,x}, W_{,y})$ et les rotations (B_x, B_y). Ainsi, pour chaque élément entouré des nœuds $k = 1, 2, 3, 4$, le vecteur élémentaire des déplacements nodaux

s'écrit :

$$\{U^e\} =^{\intercal} \{W_k \; W_{,xk} \; W_{,yk} \; B_{xk} \; B_{yk}\} \tag{4.28}$$

Chaque élement possède donc 20 degrés de liberté et le vecteur $\{U^e\}$ est un vecteur 20×1. Le déplacement transversal W ainsi que les rotations B_x et B_y sont interpolés sur chaque élément en utilisant les matrices $[N_w]$, $[N_{\beta x}]$ et $[N_{\beta y}]$ qui sont des matrices 1×20 contenant les fonctions de forme bidimensionnelles classiques de degré 4 pour le déplacement transversal et de degré 2 pour les rotations [93]. Le vecteur des déplacements pour chaque élément s'écrit alors :

$$\begin{Bmatrix} W \\ B_x \\ B_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_w \\ N_{\beta x} \\ N_{\beta y} \end{bmatrix} \{U^e\} \tag{4.29}$$

En insérant l'équation (4.29) dans le problème (4.16) dans lequel $\Gamma^{nl} = 0$ et $F = 0$, on obtient le problème de valeur propre élémentaire suivant :

$$\left([K^e(\omega)] - \omega^2 [M^e]\right) \{U^e\} = 0 \tag{4.30}$$

où $[M^e]$ et $[K^e]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité élémentaires ; ω la fréquence propre. Ces matrices élémentaires sont données à l'Annexe D.2. L'assemblage des problèmes élémentaires (4.30) conduit à un problème de valeur propre complexe non linéaire qui se met sous la même forme des problèmes (2.20) et (3.12) déjà traités dans les chapitres 2 et 3 à savoir :

$$\left([K(\omega)] - \omega^2 [M]\right) \{U\} = 0 \tag{4.31}$$

où $[M]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse et de rigidité globales ; $\{U\}$ le mode propre complexe regroupant l'ensemble des degrés de liberté aux nœuds. Puisqu'une base de Galerkin à mode complexe est requise pour une analyse efficace des vibrations linéaires et non linéaires [98], alors le mode complexe $\{U\}$ sera déterminé numériquement et de façon exacte en utilisant l'approche *diamant* [97] développée au

chapitre 2. Rappelons qu'une fois le problème est mis sous la forme (4.31), la résolution par le solveur *diamant* est automatique et indépendante de la structure étudiée et de la discrétisation élément fini utilisée. Il suffit de décomposer la matrice de rigidité sous la forme (2.31) :

$$[K(\omega)] = [K_0] + E(\omega)\,[K_v] \tag{4.32}$$

où $E(\omega)$ est la fonction analytique décrivant la dépendance en fréquence du module d'Young du matériau viscoélastique de la couche centrale. Les matrices élémentaires $[K_0^e]$ et $[K_v^e]$ relatives aux matrices globales $[K_0]$ et $[K_v]$ de la décomposition (4.32) pour la plaque sandwich sont données à l'Annexe D.2. Rappelons que la résolution par le solveur *diamant* est basée sur la méthode asymptotique numérique [94] avec comme point de départ la solution (ω_0, U_0) du problème de valeurs propres réelles correspondant au problème de vibrations libres de la structure sandwich non amortie :

$$\Big([K(0)] - \omega_0^2\,[M]\Big)\,\{U_0\} = 0 \tag{4.33}$$

où $[K(0)] = [K_0]$ est la matrice de rigidité construite en ne considérant que l'élasticité retardée pour le matériau viscoélastique de la couche centrale.

4.4.2 Problème d'équilibre dans le plan

La discrétisation des deux problèmes linéaires (4.21) relatifs à la réponse dans le plan à l'aide de l'élément fini quadrangulaire à quatre nœuds nécessite seulement l'interpolation de deux degrés de liberté en chacun des nœuds : le déplacement u suivant (Ox) et le déplacement v suivant (Oy). Pour cette discrétisation relative à la réponse dans le plan, chaque élément possède donc 8 dégrés de liberté et le vecteur élémentaire 8×1 des déplacements aux nœuds $k = 1, 2, 3, 4$, s'écrit :

$$\{U_2^e\} =^{\intercal} \{u_k \quad v_k\} \tag{4.34}$$

Le vecteur des déplacements pour chaque élément s'écrit en fonction des matrices 1×8 d'interpolation $[N_u]$ et $[N_v]$ contenant les fonctions de forme bidimensionnelles clas-

siques de degré 2 [93] :

$$\left\{ \begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} N_u \\ N_v \end{bmatrix} \{U_2^e\} \tag{4.35}$$

En insérant l'équation (4.35) dans l'équation (4.21), on obtient les deux problèmes linéaires élémentaires suivants correspondant aux harmoniques 0 et 2ω :

$$\begin{aligned} &[K_{20}^e]\,\{U_{20}^e\} = \{F_{20}^e\} \\ &[K_{22}^e]\,\{U_{22}^e\} = \{F_{22}^e\} \end{aligned} \tag{4.36}$$

où $\{U_{20}^e\}$ et $\{U_{22}^e\}$ représentent le vecteur élémentaire $\{U_2^e\}$ aux harmoniques respectives 0 et 2ω. Les matrices et vecteurs élémentaires du problème (4.36) sont donnés par :

$$\begin{aligned} &[K_{20}^e] = \iint_{s_e}{}^{\intercal}\,[B_l]\,[2C_m + C_{2m}^*(0)]\,[B_l]\,ds \\ &\{F_{20}^e\} = -\iint_{s_e}{}^{\intercal}\,[B_l]\,[2C_m + C_{2m}^*(0)]\left\{\Gamma_0^{nle}\right\} ds \\ &[K_{22}^e] = \iint_{s_e}{}^{\intercal}\,[B_l]\,[2C_m + C_{2m}^*(2\omega)]\,[B_l]\,ds \\ &\{F_{22}^e\} = -\iint_{s_e}{}^{\intercal}\,[B_l]\,[2C_m + C_{2m}^*(2\omega)]\left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\} ds \end{aligned} \tag{4.37}$$

où $[B_l]$ est la matrice d'interpolation des déformations linéaires en membrane $\{\Gamma_2\}$. Elle contient les dérivées des matrices de fonctions de forme $[N_u]$ et $[N_v]$. Il est à noter que les tenseurs élémentaires de déformation non linéaire en flexion $\left\{\Gamma_0^{nle}\right\}$ et $\left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\}$ sont relatifs aux tenseurs $\left\{\Gamma_0^{nl}\right\}$ et $\left\{\Gamma_{2\omega}^{nl}\right\}$ donnés à la relation (4.19) et dépendent du mode complexe de flexion W obtenu à l'issue de la résolution du problème de valeur propre complexe (4.31). Les détails sur la matrice $[B_l]$ et les vecteurs $\left\{\Gamma_0^{nle}\right\}$ et $\left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\}$ sont donnés à l'Annexe D.3. La matrice élémentaire $[K_{22}^e]$ et le vecteur élémentaire $\{F_{22}^e\}$ sont complexes et dépendants de la fréquence à cause de la dépendence en fréquence de la matrice de comportement $[2C_m + C_{2m}^*(2\omega)]$. L'assemblage des problèmes élémentaires (4.36) permet d'obtenir les deux problèmes linéaires à résoudre :

$$\begin{aligned} &[K_{20}]\,\{U_{20}\} = \{F_{20}\} \\ &[K_{22}(2\omega)]\,\{U_{22}\} = \{F_{22}(2\omega)\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

Pour une fréquence donnée ω, les solutions $\{U_{20}\}$ et $\{U_{22}\}$ sont obtenues simplement par inversion de matrice et sont utilisées pour le calcul des coefficients de l'équation d'amplitude, en l'occurence la rigidité non linéaire.

4.4.3 Coefficients de l'équation d'amplitude

Les coefficients de l'équation d'amplitude (4.26) peuvent être calculés numériquement par approche élément fini. Après la résolution du problème de valeur propre (4.31) et des problèmes linéaires (4.38), les ceofficients (4.27) de l'équation d'amplitude sont obtenus par la formulation élément fini suivante :

$$\begin{aligned} m &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} [M] \{U\} \\ k &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} [K(\omega)] \{U\} \\ k_{nl} &= \textstyle\sum_e k_{nl}^e(\omega) \\ Q &=^{\intercal} \left\{\overline{U}\right\} \{F\} \end{aligned} \tag{4.39}$$

où $\{F\}$ est le vecteur des forces nodales imposées. Dans cette formulation, $[M]$ est la matrice masse, $[K(\omega)]$ la matrice de rigidité et $\{U\}$ le mode propre complexe de vibration linéaire, tous relatifs au problème (4.31). La rigidité modale non linéaire élémentaire k_{nl}^e relative à la rigidité modale non linéaire k_{nl} est donnée à l'Annexe D.3. L'équation d'amplitude (4.26) est fortement non linéaire en ω à cause de la dépendance en fréquence des rigidités k et k_{nl} introduite par le module viscoélastique. Ces rigidités sont évaluées numériquement et de manière itérative pour chaque fréquence ω donnée. Pour la résolution de l'équation d'amplitude, les rigidités sont décomposées en parties réelle et imaginaire comme dans (3.25) :

$$\begin{aligned} k(\omega) &= k^R(\omega) + ik^I(\omega) \\ k_{nl}(\omega) &= k_{nl}^R(\omega) + ik_{nl}^I(\omega) \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dans ce travail, la résolution de l'équation d'amplitude (4.26) pour la détermination des propriétés amortissantes, des courbes de réponses et de phases des plaques sandwichs sera basée sur l'approche simplifiée (analyse au voisinage de la fréquence ω_0 constante), et sur l'approche générale (analyse au voisinage de la fréquence ω variable) présentées précédemment dans les sections 3.5.1 et 3.5.2 du chapitre 3.

4.5 Résultats numériques

Le modèle numérique développé dans ce chapitre est utilisé pour analyser les vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs poutres et plaques avec différentes lois viscoélastiques pour le cœur. Tous les paramètres nécessaires à l'analyse sont établis dans le cadre élément fini. Pour l'analyse des vibrations linéaires, en utilisant l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude comme établie à la section 3.5.1 du chapitre 3, la formulation (3.27) permet d'obtenir la pulsation linéaire amortie Ω_l et le facteur de perte linéaire η_l associés à chaque mode de vibration. Pour les vibrations non linéaires, la formulation (3.28) permet d'établir la dépendance en amplitude de la pulsation amortie non linéaire Ω_{nl} et du facteur de perte non linéaire η_{nl}. Les relations amplitude-fréquence (3.30) et phase-fréquence (3.31) permettent d'obtenir les courbes de réponses et de phases au voisinage de la fréquence ω_0 constante. Ces courbes sont obtenues au voisinage de la fréquence ω variable et de manière itérative en utilisant les formulations (3.33) et (3.38) de l'approche générale.

Les calculs numériques ici sont menés sur les structures sandwichs présentées dans les tableaux 2.2 et 4.1. Pour valider la présente analyse, la poutre sandwich du tableau 2.2 étudiée aux chapitres 2 et 3 est considérée. En effet, cette poutre sandwich aluminium/polymère/aluminium est modélisable par des éléments finis de type poutre ou des éléments finis de type plaque. Le module viscoélastique du cœur est complexe et constant. Par la suite, la plaque sandwich présentée dans le tableau 4.1 est considérée dont les faces élastiques sont figées mais le cœur viscoélastique variant successivement : un cœur en polymère modélisé par un module complexe constant, un cœur en ISD112 et un cœur en DYAD606 dont les modules d'Young varient fortement en fonction de la fréquence, tous deux modélisés par le modèle de Maxwell généralisé. La poutre sandwich du tableau 2.2 est discrétisée avec un maillage de 56×4 éléments dans les directions respectives de la longueur et de la largeur. La plaque sandwich du tableau 4.1 est discrétisée avec un maillage de 32×28 éléments dans les directions respectives

Dimension de la plaque sandwich		**Faces élastiques**	
Longueur	$L = 348mm$	Module d'Young	$E_f = 6.89 \times 10^{10} Pa$
Largeur	$l = 304.8mm$	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
Epaisseur faces	$h_f = 0.762mm$	Densité massique	$\rho_f = 2740 Kg.m^{-3}$
Epaisseur cœur	$h_c = 0.254mm$		
Cœur viscoélastique varié			
Cœur en polymère		Module d'Young	Loi (4.42)
			$E_0 = 2670.08 \times 10^3 Pa$
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.49$
		Densité massique	$\rho_c = 999 Kg.m^{-3}$
Cœur en ISD112		Module de cisaillement	Loi (4.43)
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.5$
		Densité massique	$\rho_c = 1600 Kg.m^{-3}$
Cœur en DYAD606		Module de cisaillement	Loi (4.43)
		Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.29$
		Densité massique	$\rho_c = 1104 Kg.m^{-3}$

TAB. 4.1 – Caractéristiques de la plaque sandwich avec différents modèles viscoélastiques pour le cœur

de la longueur et de la largeur. Pour chaque structure sandwich, les quatres bords sont considérés nominativement dans le repère (O, x, y, z) comme suit : bord 1 ($x = 0$), bord 2 ($y = 0$), bord 3 ($x = L$) et bord 4 ($y = l$). Afin de désigner plus simplement les conditions aux limites appliquées à chaque bord, il est adopté ici la convention traditionnelle anglaise "Simple supported", "Clamped" et "Free" : (S) pour un bord en appui simple, (C) pour un bord encastré et (F) pour un bord libre. Les structures sandwichs étudiées sont supposées être axialement immobilisées au bord 1 et au bord 3 c'est-à-dire $u(0, y) = v(0, y) = 0$ et $u(L, y) = v(L, y) = 0$. Pour des besoins de comparaison avec d'autres travaux, les modes U de la base de Galerkin et les modes de flexion W ont été normalisés par rapport à la flèche :

$$\begin{cases} U = \dfrac{U}{|W(x_0, y_0)|} \\ \\ W = \dfrac{W}{|W(x_0, y_0)|} \end{cases} \tag{4.41}$$

où $W(x_0, y_0)$ représente la flèche au point de coordonnées (x_0, y_0). Pour la poutre sandwich du tableau 2.2 sous les conditions aux limites SFSF, CFCF et CFSF, les modes sont normalisés en $(L/2, l/2)$, $(L/4, l/2)$, $(L/6, l/2)$, $(L/8, l/2)$ correspondant respectivement aux quatre premiers modes de vibration, alors que pour la même poutre sous la condition aux limites CFFF, la normalisation est faite en $(L, l/2)$ pour tous les modes de vibration. Pour la plaque sandwich du tableau 4.1, la normalisation est faite en $(L/2, l/2)$ pour le premier mode, $(L/4, l/2)$ ou $(L/2, l/4)$ pour le deuxième ou troisième mode et $(L/4, l/4)$ pour le quatrième mode et ce pour toutes les conditions aux limites considérées. Les résultats obtenus permettent d'analyser les effets de non linéarités géométriques dus aux grands déplacements, les effets des conditions aux limites et les effets de température sur les propriétés amortissantes ainsi que les réponses et phases des structures sandwichs étudiées.

4.5.1 Résultats numériques du modèle viscoélastique constant

Le module d'Young du cœur viscoélastique de la structure sandwich est modélisé par la loi constante (2.54) :

$$E_c^*(\omega) = E_0 \left(1 + i\eta_c\right) \tag{4.42}$$

où E_0 est le module d'Young d'élasticité retardée et η_c le facteur de perte du cœur. L'analyse est menée dans un premier temps sur la poutre sandwich du tableau 2.2 et dans un second temps sur la plaque sandwich du tableau 4.1 pour lesquelles le cœur de la structure est modélisé par un module complexe constant.

• Premier test de validation

On considère la poutre sandwich du tableau 2.2 avec un cœur en polymère dont le module d'Young est constant et représenté par la loi (4.42). Le facteur de perte du cœur est varié comme suit : $\eta_c \in \{0.1, 0.6, 1, 1.5\}$. Pour les vibrations linéaires, le tabeau 4.2 présente les pulsations amorties linéaires Ω_l et les facteurs de perte linéaires normalisés

	Présent modèle		Formule (B.1) [32, 43]		Présent modèle		Modèle EF [97]	
	plaque : SFSF		poutre 1-D : SS		plaque : CFFF		poutre 1-D : CF	
η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l/η_c
0.1	148.56	0.3500	148.51	0.3502	64.3	0.281	64.1	0.281
	489.28	0.1954	488.47	0.1958	298.1	0.242	296.7	0.242
	1038.74	0.1066	1034.69	0.1071	749.0	0.153	744.5	0.154
	1807.57	0.0647	1795.13	0.0653	1406.9	0.088	1395.7	0.089
0.6	150.75	0.3327	150.71	0.3329	65.7	0.245	65.5	0.246
	490.56	0.1940	489.75	0.1944	300.6	0.232	299.2	0.232
	1039.43	0.1064	1035.38	0.1069	750.7	0.152	746.3	0.153
	1807.99	0.0646	1795.54	0.0652	1407.8	0.088	1396.6	0.089
1	154.47	0.3051	154.42	0.3052	67.7	0.202	67.5	0.202
	492.87	0.1914	492.06	0.1918	304.5	0.217	303.1	0.218
	1040.69	0.1060	1036.63	0.1065	753.9	0.149	749.4	0.150
	1808.75	0.0646	1796.30	0.0651	1409.5	0.087	1398.3	0.088
1.5	160.77	0.2625	160.72	0.2626	70.2	0.153	69.9	0.153
	497.30	0.1867	496.49	0.1871	310.6	0.197	309.1	0.198
	1043.13	0.1054	1039.07	0.1059	759.7	0.145	755.2	0.146
	1810.23	0.0644	1797.78	0.0650	1412.6	0.086	1401.4	0.087

TAB. 4.2 – Propriétés amortissantes de la poutre sandwich avec un cœur en polymère à module constant : comparaison avec le modèle poutre à une dimension

η_l/η_c correspondant aux quatre premiers modes de vibration de la poutre sandwich pour les conditions aux limites SFSF et CFFF. Ils sont comparés aux résultats du modèle poutre à une dimension (1-D) obtenus par la formule analytique exacte (B.1) donnée à l'Annexe B, puis aux résultats numériques obtenus par l'élément fini poutre 1-D proposé au chapitre 2 [97]. En utilisant une modélisation élément fini de type plaque, le choix d'un maillage faible dans la direction de la largeur de la structure permet pour la condition aux limites SFSF de retrouver les résulats de la poutre 1-D pour la condition aux limites SS. De même, on observe une bonne corrélation entre les résultats obtenus à l'aide de la modélisation de type plaque sous la condition aux limites CFFF et ceux obtenus par le modèle poutre 1-D sous la condition aux limites CF. Pour les vibrations non linéaires, le tableau 4.3 présente les coefficients de rigidité non linéaire (3.29) de la poutre sandwich correspondant aux deux premiers modes de vibration.

η_c	Présent modèle C^R	Présent modèle C^I	Modèle EF [98] C^R	Modèle EF [98] C^I
	plaque : SFSF		poutre 1-D : SS	
0.1	20.87	2.15×10^{-5}	20.81	2.15×10^{-5}
	30.96	5.72×10^{-5}	30.79	5.68×10^{-5}
0.6	20.27	2.20×10^{-5}	20.21	2.19×10^{-5}
	30.80	5.73×10^{-5}	30.63	5.69×10^{-5}
1	19.31	2.28×10^{-5}	19.25	2.28×10^{-5}
	30.51	5.75×10^{-5}	30.34	5.71×10^{-5}
1.5	17.82	2.45×10^{-5}	17.77	2.44×10^{-5}
	29.97	5.79×10^{-5}	29.80	5.75×10^{-5}
	plaque : CFCF		poutre 1-D : CC	
0.1	7.31	1.40×10^{-5}	7.34	1.40×10^{-5}
	18.30	6.15×10^{-5}	18.54	6.15×10^{-5}
0.6	7.27	1.40×10^{-5}	7.30	1.40×10^{-5}
	18.26	6.16×10^{-5}	18.49	6.16×10^{-5}
1	7.20	1.41×10^{-5}	7.22	1.41×10^{-5}
	18.18	6.18×10^{-5}	18.42	6.18×10^{-5}
1.5	7.06	1.42×10^{-5}	7.08	1.42×10^{-5}
	18.05	6.21×10^{-5}	18.28	6.22×10^{-5}
	plaque : CFSF		poutre 1-D : CS	
0.1	13.86	1.92×10^{-5}	13.89	1.92×10^{-5}
	26.86	6.69×10^{-5}	27.18	6.72×10^{-5}
0.6	13.65	1.93×10^{-5}	13.67	1.93×10^{-5}
	26.80	6.70×10^{-5}	27.11	6.73×10^{-5}
1	13.28	1.95×10^{-5}	13.30	1.95×10^{-5}
	26.67	6.72×10^{-5}	26.98	6.75×10^{-5}
1.5	12.66	1.99×10^{-5}	12.68	1.99×10^{-5}
	26.44	6.76×10^{-5}	26.74	6.80×10^{-5}

TAB. 4.3 – Coefficients de rigidité non linéaire C^R et C^I de la poutre sandwich avec un cœur en polymère à module constant : comparaison avec le modèle poutre à une dimension

Ces coefficients sont quasiment identiques à ceux obtenus par le modèle numérique du chapitre 3 [98] en utilisant l'élément fini 1-D. La concordance des résultats des tableaux 4.2 et 4.3 avec les résultats analytiques et numériques du modèle poutre 1-D montre que le modèle numérique développé ici avec l'élément fini de type plaque peut aussi être utilisé pour la modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs poutres. Il suffit de réduire le maillage de la structure dans la direction de la largeur par rapport au maillage dans la direction de la longueur.

- **Deuxième test de validation**

On considère la plaque sandwich du tableau 4.1 avec un cœur en polymère modélisé par le module constant (4.42). Le facteur de perte du cœur est varié comme suit $\eta_c \in \{0.5, 1\}$. Cette plaque a déjà fait l'objet de nombreuses études [51, 54, 59]. Les pulsations amorties linéaires et les facteurs de perte linéaires associés correspondant aux six premiers modes de vibration de la plaque sandwich SSSS et CCCC pour le facteur de perte du cœur $\eta_c = 0.5$ sont présentés dans le tableau 4.4. Les résultats

Présent modèle		Modèle analytique [51]		Présent modèle		Modèle EF [54]	
		SSSS				CCCC	
$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l	$\Omega_l(Hz)$	η_l
58.0	0.170	60.3	0.190	87.4	0.189	87.4	0.189
113.8	0.193	115.4	0.203	148.9	0.164	148.9	0.165
129.5	0.192	130.6	0.199	170.3	0.153	169.9	0.154
177.2	0.172	178.7	0.181	223.9	0.139	223.9	0.139
194.6	0.169	195.7	0.174	241.1	0.134	241.0	0.134
232.9	0.156	-	-	291.3	0.118	289.8	0.118

TAB. 4.4 – Propriétés amortissantes de la plaque sandwich avec un cœur en polymère à module constant pour le facteur de perte $\eta_c = 0.5$

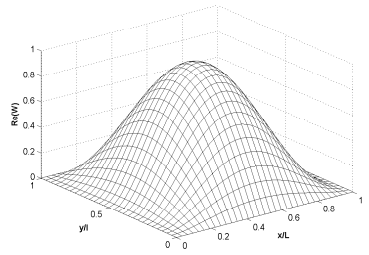
analytiques présentés dans [51] et les résultats numériques présentés dans [54] y sont reportés pour des besoins de comparaison. On voit bien que les résultats obtenus par le présent modèle pour la plaque SSSS sont très proches des résultats de la littérature. Les résultats du présent modèle pour la plaque CCCC sont identiques au résulats du modèle élément fini développé dans [54]. Ceci permet de valider notre modèle numérique, du moins pour l'étude des vibrations linéaires des structures sandwichs plaques. Le tableau 4.5 présente les propriétés modales correspondant aux quatre premiers modes de vibration de la plaque sandwich pour les deux facteurs de perte du cœur ($\eta_c = 0.5, \eta_c = 1$) et pour plusieurs conditions aux limites. Pour les vibrations linéaires, on constate que la pulsation amortie Ω_l et l'amortissement η_l augmentent avec le facteur de perte quel que soit le mode et la condition aux limites considérés. Le choix d'un matériau du cœur avec un facteur de perte élevé permet donc d'accroître les propriétés

	η_c	$\Omega_l(Hz)$	η_l	C^R	C^I
SSSS	0.5	58.00	0.170	2.74	1.91×10^{-5}
		113.80	0.193	9.60	5.91×10^{-5}
		129.55	0.192	2.04	1.21×10^{-5}
		177.20	0.172	6.00	4.13×10^{-5}
	1	60.44	0.278	2.52	2.15×10^{-5}
		117.32	0.347	9.03	6.17×10^{-5}
		133.11	0.353	1.93	1.24×10^{-5}
		180.62	0.324	5.78	4.21×10^{-5}
CCCC	0.5	87.47	0.189	3.77	2.69×10^{-5}
		148.94	0.164	8.32	6.63×10^{-5}
		170.38	0.153	9.99	8.40×10^{-5}
		223.91	0.138	9.95	9.72×10^{-5}
	1	89.85	0.346	3.56	2.77×10^{-5}
		151.46	0.312	7.99	6.71×10^{-5}
		172.76	0.294	9.67	8.47×10^{-5}
		226.29	0.268	9.69	9.76×10^{-5}
CSCS	0.5	71.19	0.185	2.32	1.47×10^{-5}
		136.22	0.187	2.15	1.31×10^{-5}
		139.70	0.167	8.00	5.67×10^{-5}
		196.66	0.156	5.64	4.22×10^{-5}
	1	73.66	0.324	2.15	1.56×10^{-5}
		139.65	0.347	2.04	1.33×10^{-5}
		142.37	0.315	7.65	5.75×10^{-5}
		199.60	0.299	5.46	4.26×10^{-5}
CFCF	0.5	51.30	0.197	4.58	2.68×10^{-5}
		62.63	0.176	6.23	4.02×10^{-5}
		114.92	0.170	5.52	3.70×10^{-5}
		120.85	0.172	13.74	9.22×10^{-5}
	1	51.80	0.347	4.24	2.83×10^{-5}
		64.56	0.314	5.86	4.25×10^{-5}
		118.74	0.294	5.08	3.94×10^{-5}
		123.24	0.324	13.07	9.33×10^{-5}

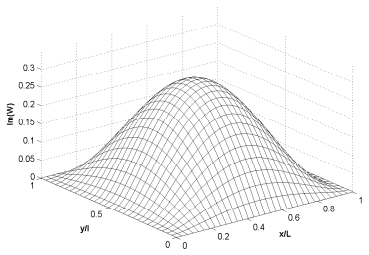
TAB. 4.5 – Propriétés modales de la plaque sandwich avec un cœur en polymère à module constant

amortissantes de la structure. Pour les vibrations non linéaires, le coefficient C^R diminue avec le facteur de perte, ce qui n'est pas le cas pour le coefficient C^I qui augemente avec le facteur de perte.

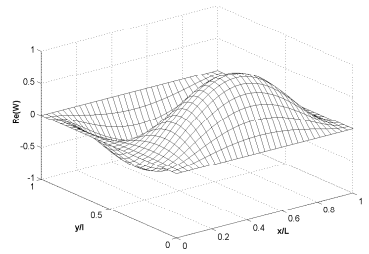
La figure 4.1 présente les parties réelle et imaginaire des quatre premiers modes com-



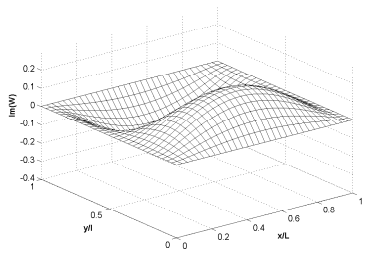
(a) Mode 1, partie réelle



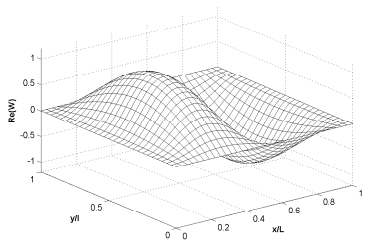
(b) Mode 1, partie imaginaire



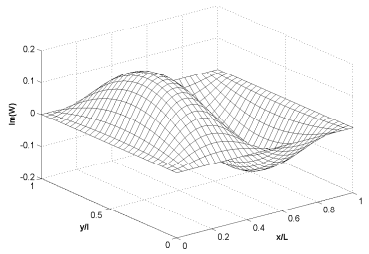
(c) Mode 2, partie réelle



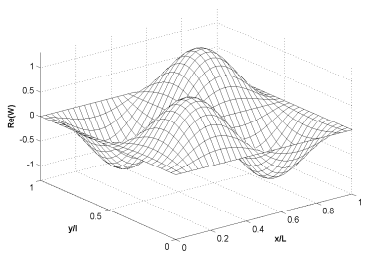
(d) Mode 2, partie imaginaire



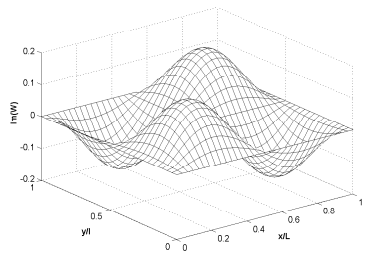
(e) Mode 3, partie réelle



(f) Mode 3, partie imaginaire



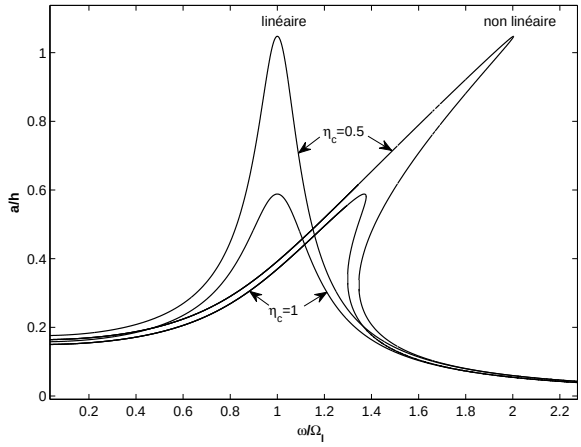
(g) Mode 4, partie réelle



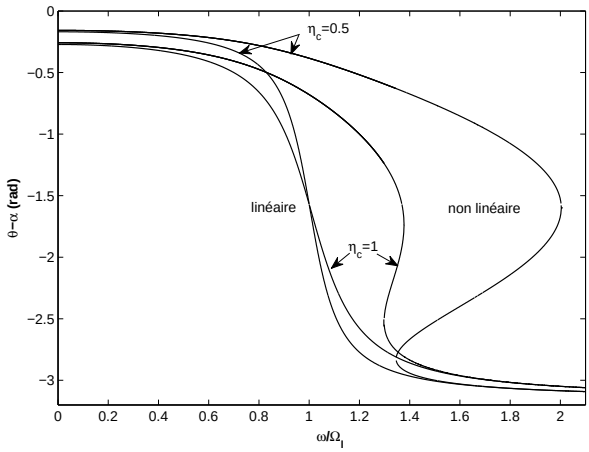
(h) Mode 4, partie imaginaire

FIG. 4.1 – Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la plaque sandwich CSCS avec un cœur en polymère à module constant pour $\eta_c = 1$

plexes de flexion de la plaque sandwich CSCS avec un cœur en polymère à module constant pour $\eta_c = 1$. Ces modes sont normalisés (voir relation (4.41)) et les coordonnées sont aussi normalisées par rapport aux dimensions de la plaque sandwich. Les parties réelle et imaginaire possèdent la même forme du mode, mais diffèrent en amplitude selon l'amortissement induit dans la structure. On constate que la partie imaginaire est relativement faible en amplitude comparée à la partie réelle. Cependant

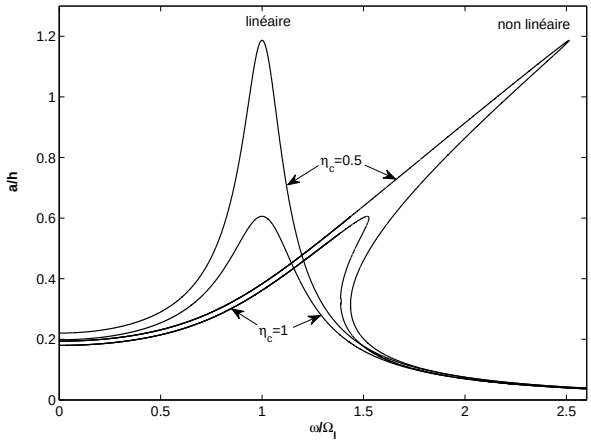


(a) Amplitude en fonction du rapport ω/Ω_l

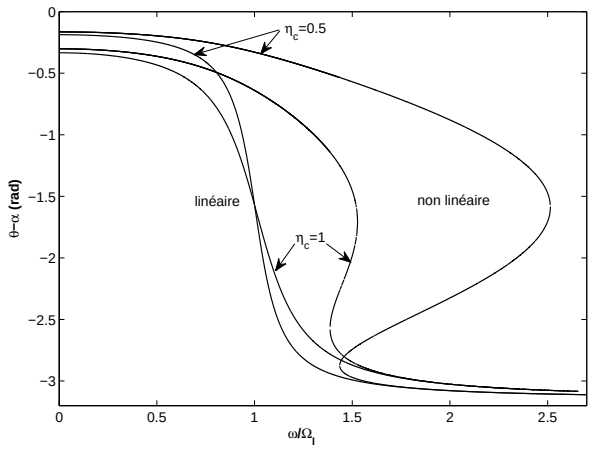


(b) Phase en fonction du rapport ω/Ω_l

FIG. 4.2 – Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich SSSS avec un cœur en polymère à module constant, $f(L/2, l/2) = 5N$



(a) Amplitude en fonction du rapport ω/Ω_l



(b) Phase en fonction du rapport ω/Ω_l

FIG. 4.3 – Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CCCC avec un cœur en polymère à module constant, $f(L/2, l/2) = 10N$

cette partie imaginaire qui est communément ignorée dans l'approche en mode réel [82, 83, 84] peut devenir aussi prépondérante que la partie réelle surtout en présence d'un amortissement élevé.

Les courbes de réponses et de phases linéaires et non linéaires correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich SSSS et CCCC avec un cœur en polymère à module constant pour les deux facteurs de perte ($\eta_c = 0.5, \eta_c = 1$) sont présentées res-

pectivement sur les figures 4.2 et 4.3. Ces courbes sont obtenues pour une sollicitation harmonique concentrée $f(L/2, l/2) = 5N$ pour la plaque SSSS et $f(L/2, l/2) = 10N$ pour la plaque CCCC. L'amplitude de la réponse est d'autant plus faible que le facteur de perte du cœur η_c est plus élevé. Les réponses et phases non linéaires sont très différentes des réponses et phases linéaires. Ces figures montrent clairement l'effet des non linéarités géométriques qui ne peut être négligé pour prédire l'évolution des amplitudes et des phases en fonction de la fréquence d'excitation.

4.5.2 Résultats numériques du modèle viscoélastique dépendant de la fréquence

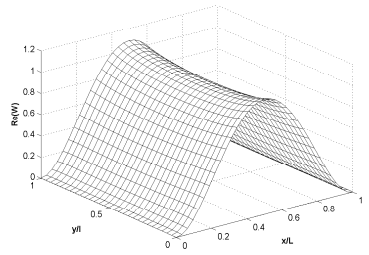
L'étude est menée exclusivement sur la structure sandwich plaque du tableau 4.1 dans un premier temps pour un cœur en ISD112 [21, 22] puis dans un second temps pour un cœur en DYAD606 [20]. Les modules de cisaillement des deux matériaux du cœur sont dépendants de la fréquence et modélisés par le modèle de Maxwell généralisé :

$$G_c^*(\omega) = G_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_j \omega}{\omega - i\Omega_j} \right) \tag{4.43}$$

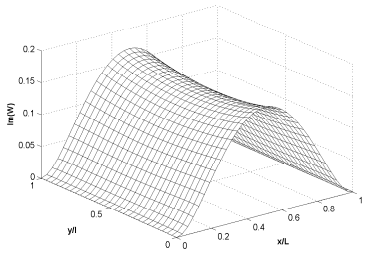
où G_0 représente le module de cisaillement d'élasticité retardée et (Δ_j, Ω_j) les paramètres du modèle.

• Etude de la plaque sandwich avec cœur en ISD112

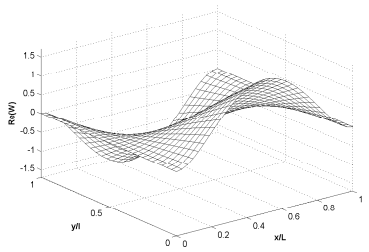
On considère la plaque sandwich du tableau 4.1 avec un cœur en ISD112 à la température de 27°C dont le module de cisaillement à cette température est modélisé par le modèle de Maxwell généralisé (4.43) à trois paramètres. Le module G_0 d'élasticité retardée ainsi que les paramètres (Δ_j, Ω_j) du modèle à la température de 27°C sont donnés dans le tableau 2.6 [21, 22]. La figure 4.4 présente les parties réelle et imaginaire des quatre premiers modes complexes de flexion de la plaque sandwich CFCF. La partie imaginaire du mode possède la même forme que la partie réelle, mais les deux diffèrent en amplitude suivant l'amortissement induit par la loi viscoélastique. On voit bien que



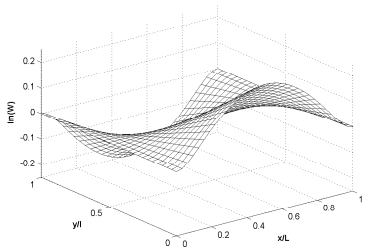
(a) Mode 1, partie réelle



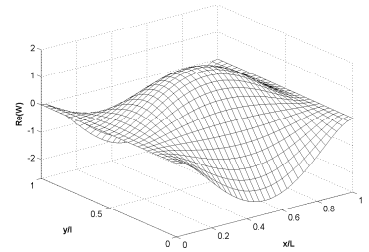
(b) Mode 1, partie imaginaire



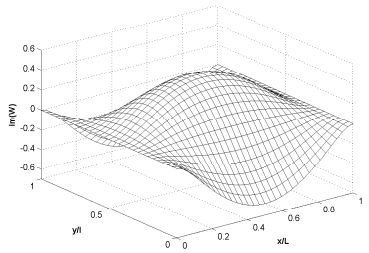
(c) Mode 2, partie réelle



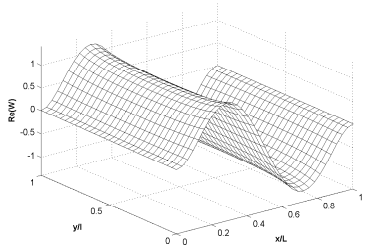
(d) Mode 2, partie imaginaire



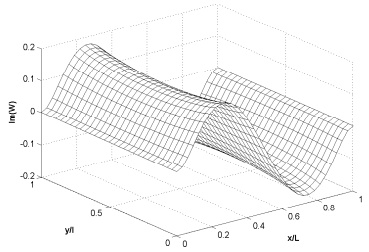
(e) Mode 3, partie réelle



(f) Mode 3, partie imaginaire



(g) Mode 4, partie réelle



(h) Mode 4, partie imaginaire

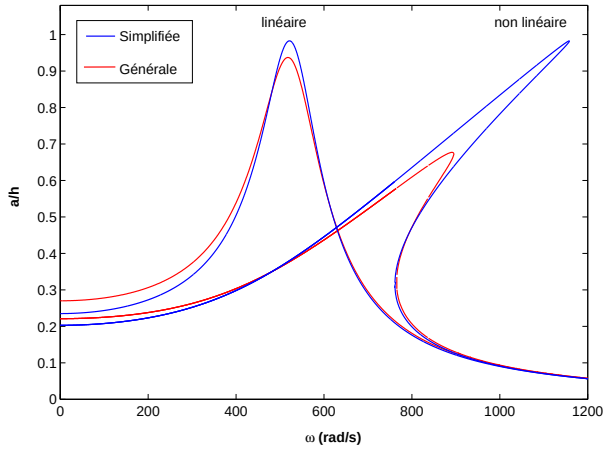
FIG. 4.4 – Parties réelle et imaginaire des modes complexes de flexion de la plaque sandwich CFCF avec un cœur en ISD112 à 27°C

le mode de flexion avec la loi viscoélastique de l'ISD112 à 27°C possède une partie imaginaire non négligeable et doit être prise en compte dans l'analyse des vibrations. Les carctéristiques vibratoires de la plaque sandwich sont analysées au voisinage de la fréquence ω_0, solution du problème d'élasticité retardée (4.33). Ainsi, le tableau 4.6 présente les propriétés modales estimées au voisinage de la fréquence ω_0 en utilisant l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude pour les quatre premiers modes de vibration de la plaque sandwich et pour différentes conditions aux limites. Pour la plaque CCCC vibrant en mode 1, les courbes de réponses en amplitude et les courbes de phases obtenues au voisinage de la fréquence ω_0 constante en utilisant l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude et celles obtenues au voisinage de la fréquence ω variable en utilisant l'approche générale sont présentées ensemble sur la figure 4.5. Ces courbes sont obtenues pour une sollicitation harmonique concentrée au milieu de la plaque $f(L/2, l/2) = 10N$. Les mêmes courbes pour la plaque CSCS sont présentées sur la

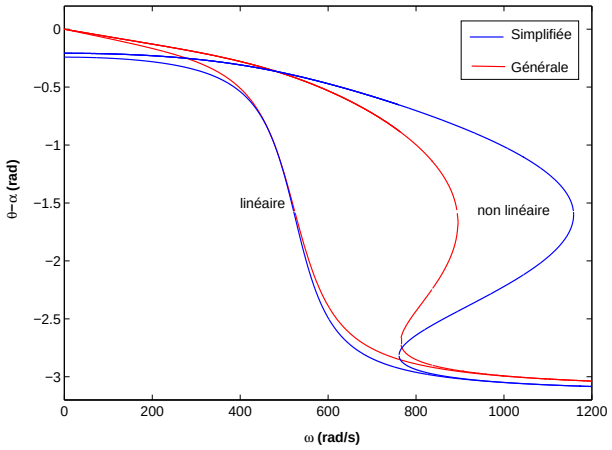
	$\omega_0(rad/s)$	$\Omega_l(Hz)$	η_l	C^R	C^I
SSSS	314.84	53.77	0.213	3.08	2.26×10^{-5}
	622.18	110.31	0.272	9.87	8.76×10^{-5}
	712.09	126.72	0.283	2.06	1.85×10^{-5}
	992.11	176.97	0.289	5.82	6.81×10^{-5}
CCCC	481.58	83.01	0.246	4.07	3.84×10^{-5}
	839.07	146.61	0.258	8.28	1.06×10^{-4}
	967.88	168.92	0.257	9.81	1.38×10^{-4}
	1285.48	225.27	0.270	9.43	1.65×10^{-4}
CSCS	388.54	66.71	0.231	2.57	1.95×10^{-5}
	752.37	133.66	0.282	2.16	2.03×10^{-5}
	783.79	137.11	0.256	8.03	8.96×10^{-5}
	114.70	197.13	0.280	5.42	7.05×10^{-5}
CFCF	277.91	46.62	0.218	5.37	3.49×10^{-5}
	344.75	58.28	0.209	6.93	5.26×10^{-5}
	631.56	112.25	0.238	5.62	5.51×10^{-5}
	675.82	117.43	0.249	14.06	1.41×10^{-4}

TAB. 4.6 – Propriétés modales de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $\omega \approx \omega_0$

figure 4.6. Ces figures montrent que les réponses et phases prédites par l'approche simplifiée ($\omega \approx \omega_0$) sont bien différentes de celles prédites par l'approche générale (ω variable). Cette différence est due à la dépendance en fréquence de l'amortissement qui est prise en compte dans l'approche générale, mais ignorée dans l'approche simplifiée. Néanmoins, lorsque la fréquence ω atteint la valeur ω_0 comme indiquée dans le tableau 4.6, les courbes obtenues par l'approche générale et celles obtenues par l'ap-

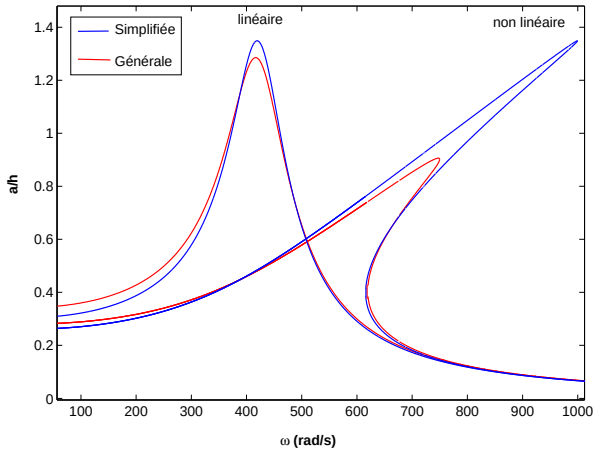


(a) Amplitude en fonction de la fréquence

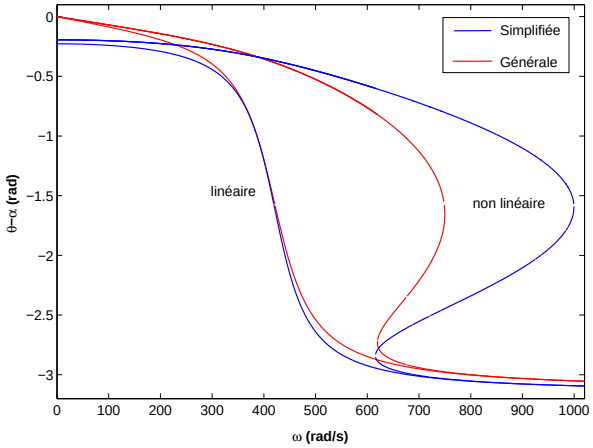


(b) Phase en fonction de la fréquence

FIG. 4.5 – Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CCCC avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$



(a) Amplitude en fonction de la fréquence



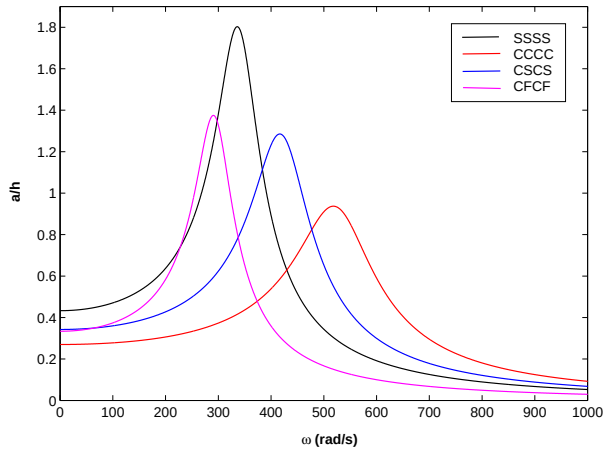
(b) Phase en fonction de la fréquence

FIG. 4.6 – Réponses et phases correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich CSCS avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$

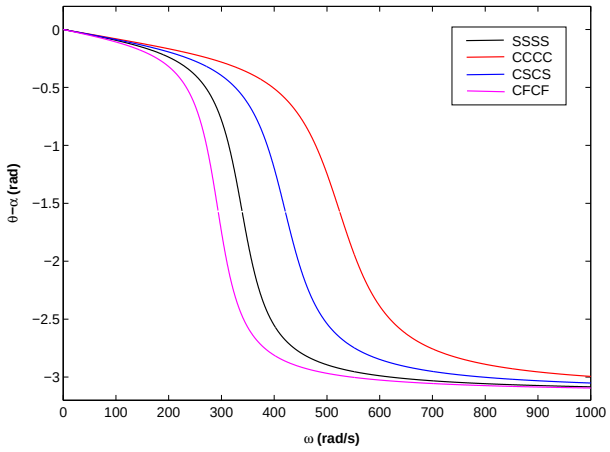
proche simplifiée s'entrecoupent. L'approche générale de l'équation d'amplitude permet une prédiction exacte et sans approximation des réponses et des phases de la structure sandwich. Les figures 4.5(a) et 4.6(a) montrent qu'au voisinage de la résonance, l'écart entre les pics de résonance prédits par les deux approches est moins important dans le cas linéaire, mais devient plus important dans le cas non linéaire. En conséquence, pour les vibrations linéaires et au voisinage de la résonance, l'approche simplifiée est

suffisante pour offrir une bonne prédiction des réponses et des phases. Par contre dans le cas non linéaire, elle surestime largement les pics de résonance et ne peut donc être utilisée dans le cadre des vibrations non linéaires.

Les courbes de réponses et de phases linéaires et non linéaires obtenues par l'approche générale pour la plaque sandwich vibrant en mode 1 sont regroupées sur les figures 4.7 et 4.8 pour les quatre conditions aux limites : SSSS, CCCC, CSCS et CFCF. L'ana-

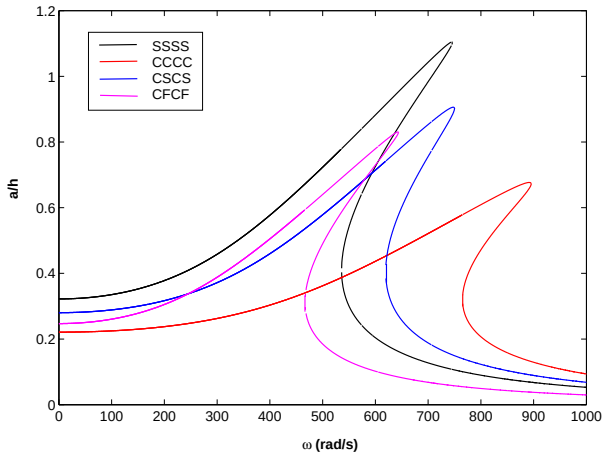


(a) Amplitude linéaire en fonction de la fréquence

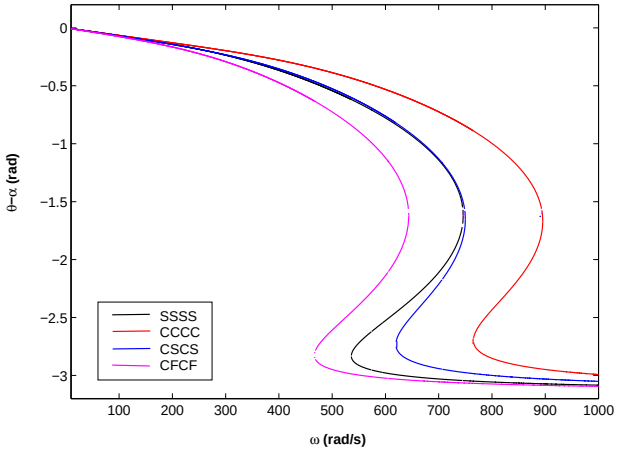


(b) Phase linéaire en fonction de la fréquence

FIG. 4.7 – Réponses et phases linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$



(a) Amplitude non linéaire en fonction de la fréquence



(b) Phase non linéaire en fonction de la fréquence

FIG. 4.8 – Réponses et phases non linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en ISD112 à 27°C, $f(L/2, l/2) = 10N$

lyse de ces courbes montre que la plaque CCCC possède la plus grande fréquence de résonance (comme le montrent les valeurs de Ω_l dans le tableau 4.6) et l'amplitude de résonance la plus faible. Ce qui permet de déduire que pour le premier mode de vibration de la plaque sandwich, la condition aux limites de type CCCC offre les propriétés amortissantes les plus optimales.

- **Etude de la plaque sandwich avec cœur en DYAD606**

La plaque sandwich du tableau 4.1 est considérée cette fois-ci avec un cœur en DYAD606 [20] à plusieurs températures : 10°, 25°, 30° et 38°C. Le module de cisaillement dépendant de la fréquence est donné par le modèle de Maxwell généralisé (4.43) à cinq paramètres. Le module d'élasticité retardée G_0 ainsi que les paramètres (Δ_j, Ω_j) du modèle pour ces températures sont donnés dans le tableau 4.7 [20]. Le tableau 4.8

j	1	2	3	4	5
T=10°C, $G_0 = 5.94 \times 10^6 Pa$					
Δ_j	5.88	13.66	8.94	6.47	34.52
$\Omega_j(rad/s)$	5.85	2345.09	331.70	50.65	25033.79
T=25°C, $G_0 = 2.02 \times 10^6 Pa$					
Δ_j	9.89	3.14	18.94	35.06	165.97
$\Omega_j(rad/s)$	58.18	6.75	403.00	3097.38	57244.00
T=30°C, $G_0 = 2.09 \times 10^6 Pa$					
Δ_j	5.40	14.15	1.43	28.33	128.85
$\Omega_j(rad/s)$	73.06	453.34	8.83	3406.80	52781.28
T=38°C, $G_0 = 1.74 \times 10^6 Pa$					
Δ_j	1.15	3.55	11.79	24.41	113.12
$\Omega_j(rad/s)$	27.02	213.35	1257.50	7585.29	92517.87

TAB. 4.7 – Paramètres du modèle de Maxwell généralisé pour le DYAD606

présente les propriétés modales du premier mode de la plaque estimées au voisinage de la fréquence ω_0 en utilisant l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude pour différentes températures du cœur. On constate que l'amortissement linéaire η_l et le coefficient C^I sont très sensibles aux variations de température, contrairement à la pulsation amortie linéaire Ω_l et le coefficient C^R qui varient moins avec la température. Les valeurs du tableau 4.8 ont permis de tracer le graphe de la variation de l'amortissement η_l en fonction de la température. La figure 4.9 montre que pour le matériau DYAD606 utilisé et pour la plage des températures considérées, l'amortissement linéaire augmente avec la température. En se référant au profil de variation du facteur de perte en fonction de la température présenté à la figure 1.5, la plage des températures considérées se situerait dans la zone de transition vitreuse où le facteur de perte du matériau augmente pour atteindre sa valeur maximale. Dans la plage des températures considérées

	T(°C)	$\omega_0(rad/s)$	$\Omega_l(Hz)$	η_l	C^R	C^I
SSSS	10	461.98	82.76	9.49×10^{-3}	1.34	1.59×10^{-2}
	25	408.61	81.86	2.09×10^{-2}	1.37	5.27×10^{-3}
	30	410.61	81.24	3.05×10^{-2}	1.39	2.95×10^{-3}
	38	399.63	79.20	6.25×10^{-2}	1.46	8.26×10^{-4}
CCCC	10	777.44	152.00	9.44×10^{-3}	1.28	1.74×10^{-2}
	25	640.01	150.26	2.31×10^{-2}	1.30	5.16×10^{-3}
	30	644.44	148.94	3.56×10^{-2}	1.32	2.75×10^{-3}
	38	620.82	144.26	7.87×10^{-2}	1.38	7.50×10^{-4}
CSCS	10	606.28	114.01	9.16×10^{-3}	0.94	1.24×10^{-2}
	25	513.82	112.75	2.21×10^{-2}	0.96	3.71×10^{-3}
	30	516.98	111.82	3.37×10^{-2}	0.97	1.99×10^{-3}
	38	499.97	108.56	7.51×10^{-2}	1.01	5.27×10^{-4}
CFCF	10	441.18	81.05	7.06×10^{-3}	1.98	3.14×10^{-2}
	25	373.40	80.32	1.87×10^{-2}	2.01	8.52×10^{-3}
	30	375.79	79.77	2.99×10^{-2}	2.03	4.30×10^{-3}
	38	362.87	77.61	7.37×10^{-2}	2.11	9.65×10^{-4}

TAB. 4.8 – Propriétés modales correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich avec un cœur en DYAD606, $\omega \approx \omega_0$

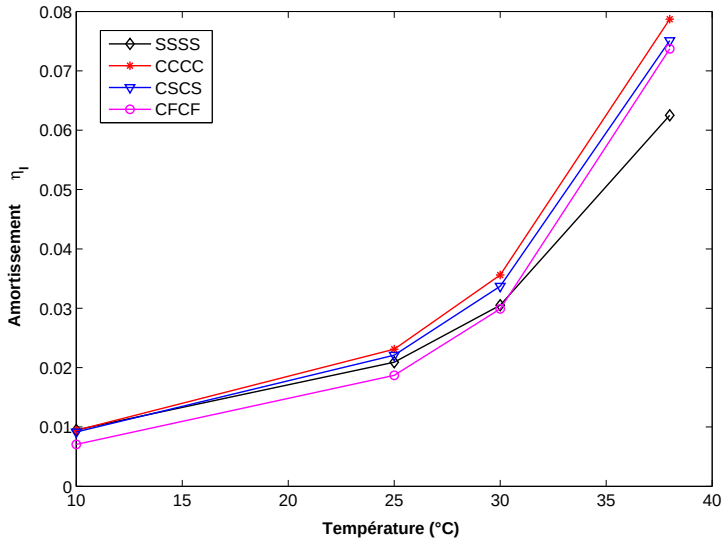
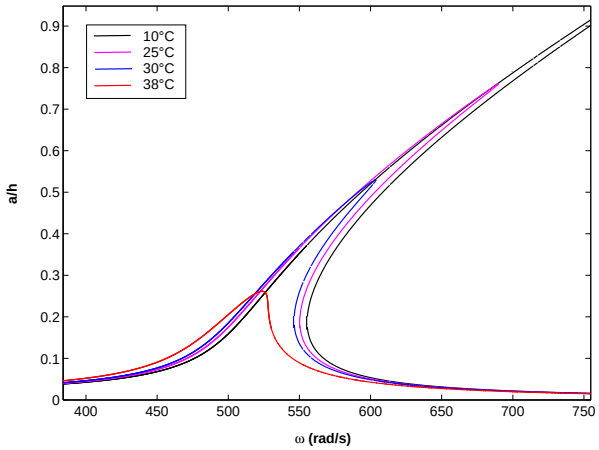
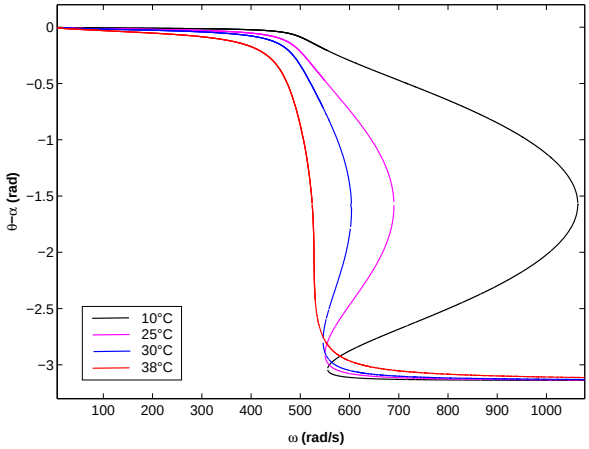


FIG. 4.9 – Variation de l'amortissement linéaire en fonction de la température



(a) Amplitude non linéaire en fonction de la fréquence



(b) Phase non linéaire en fonction de la fréquence

FIG. 4.10 – Réponses et phases non linéaires par approche générale correspondant au premier mode de vibration de la plaque sandwich SSSS avec un cœur en DYAD606, $f(L/2, l/2) = 1N$

ici, l'amortissement le plus élevé est obtenu à 38°C. Les courbes de réponses et de phases non linéaires correspondant au mode 1 de la plaque sandwich SSSS obtenues par l'approche générale de l'équation d'amplitude sont présentées sur la figure 4.10. Ces courbes confirment bien que la plus faible amplitude de la réponse est obtenue à 38°C, température à laquelle la structure est beaucoup plus amortie. Par contre à la

température de 10°C, la structure est très faiblement amortie, d'où l'amplitude de la réponse devient plus importante.

4.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs viscoélastiques basée sur la technique d'équilibrage harmonique et la méthode de Galerkin à un mode complexe. Le problème de vibration non linéaire est formulé dans un cadre général permettant de prendre en compte la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. L'équation d'amplitude gouvernant les vibrations non linéaires est déterminée numériquement et nécessite la discrétisation élément fini et la résolution numérique de trois problèmes : un problème de valeur propre complexe non linéaire et deux problèmes linéaires. Une amélioration importante a été apportée dans la modélisation en utilisant une base de Galerkin à mode complexe pour une meilleure représentation de la viscosité dans l'espace. L'équation d'amplitude est résolue en adoptant soit l'approche simplifiée, soit l'approche générale. Des tests numériques ont été menés sur une structure sandwich poutre et sur une structure sandwich plaque avec différents modèles viscoélastiques au cœur. Dans un premier temps, les résultats numériques obtenus ont permis de valider le présent modèle par comparaison avec les résultats analytiques et numériques disponibles dans la littérature. Dans un second temps, ils ont permis de mettre en évidence l'effet des non linéarités géométriques, des conditions aux limites et de la température sur les propriétés modales, les réponses et les phases des structures sandwichs. Ces résultats ont montré l'efficacité du présent modèle numérique pour la caractérisation des propriétés modales, des réponses et des phases des structures sandwichs quelle que soit la dépendance en fréquence de la loi de comportement viscoélastique. Quoiqu'au voisinage de la résonance l'approche simplifiée de l'équation d'amplitude permette une bonne estimation des réponses et des phases dans le cas linéaire, l'approche générale

demeure cependant indispensable pour une prédiction exacte et précise des réponses et des phases dans le cas non linéaire.

Conclusion générale et perspectives

La thématique abordée dans ces travaux de thèse est la modélisation numérique des structures sandwichs trois couches à âme viscoélastique utilisées pour l'amortissement passif et le contrôle des vibrations. La dépendance en fréquence et en température du comportement viscoélastique introduit une complexité dans la modélisation de ces structures pour la détermination directe et exacte des propriétés amortissantes et pour la prédiction des réponses. A ces non linéarités matérielles viennent se coupler les non linéarités géométriques lorsqu'il s'agit de modéliser ces structures en grands déplacements. Le chapitre 1 a été dédié à l'état de l'art sur la modélisation des vibrations des structures sandwichs viscoélastiques d'abord dans le cadre linéaire et ensuite dans le cadre non linéaire. Cette revue bibilographique a montré qu'à cause des difficultés de résolution, les modèles couramment établis font généralement abstraction de la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique ou lorsque celle-ci est prise en compte, elle est restreinte à des lois de comportement linéaires. La prise en compte de ces deux types de non linéarités (fréquentielle et géométrique) dans la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques a été au cœur de la problématique de la thèse. Ainsi l'objectif visé a été de mettre en œuvre un cadre de modélisation des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs avec la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. C'est le lieu de récapituler les contributions apportées par les travaux réalisés dans cette thèse ainsi que les perspectives vers d'autres axes de recherches. Ces contributions peuvent également être consultées dans les publications [97, 98, 99].

Bilan

Les travaux menés pour répondre à la problématique de la thèse ont été développés principalement autour de trois chapitres. Au chapitre 2, il a été proposé et validé un élément fini unidimensionnel pour la modélisation des poutres sandwichs viscoélastiques. Ensuite, nous avons développé un algorithme générique de résolution du problème de valeur propre complexe non linéaire régissant les vibrations libres linéaires des structures sandwichs. L'algorithme est basé sur la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique. La méthode asymptotique numérique associe les techniques d'homotopie et de perturbation à une procédure de continuation. En utilisant la boîte à outil de différentiation automatique pour le calcul informatique des séries de Taylor, l'algorithme a été entièrement automatisé en élaborant un solveur numérique en langage Matlab qui permet pour une structure sandwich donnée, de déterminer de façon directe et exacte les propriétés amortissantes quelle que soit la non linéarité en fréquence introduite par la loi de comportement viscoélastique. Ce solveur est indépendant du modèle élément fini et occulte complètement les aspects de différentiation et de résolution, ce qui introduit une grande souplesse dans son utilisation. Ceci représente une amélioration importante vis-à-vis des précédents algorithmes mannuels traditionnels [66, 54]. Le solveur ainsi élaboré a été implémenté avec succès sur des lois viscoélastiques constantes et des lois viscoélastiques variables représentées par le modèle de Maxwell généralisé et par le modèle à dérivées fractionnaires. Le chapitre 3 a été consacré à la modélisation des vibrations des poutres sandwichs ; cependant, il interagit avec le chapitre 2. En effet, le même élément fini est adopté pour la modélisation et le solveur numérique est utilisé pour le calcul des modes propres de vibration linéaire. Ainsi, il a été proposé une méthode numérique pour l'étude des vibrations linéaires et non linéaires des poutres sandwichs permettant de prendre en compte de façon générale la dépendance en fréquence de l'amortissement. Cette méthode basée sur l'approche élément fini combine la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode et permet de réduire le problème de vibration non linéaire des structures

sandwichs à une équation d'amplitude complexe non linéaire. Cette équation est résolue d'abord dans un cadre simplifié, puis dans un cadre général et les solutions permettent de caractériser les propriétés modales et les réponses. Une attention particulière a été portée sur le choix de la base de Galerkin en proposant quatre niveaux d'approximation du mode de vibration linéaire : le mode réel (MR), le mode réel amélioré (MRA), le mode complexe approché (MCA) et le mode complexe exact (MCE). L'évaluation de la base de Galerkin à mode réel vis-à-vis d'un comportement viscoélastique constant et vis-à-vis d'un comportement viscoélastique dépendant de la fréquence pour l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires constitue une nouveauté comparativement à l'évaluation initialement faite [53] dans le cadre linéaire et pour un modèle viscoélastique constant. Cette évaluation a permis d'établir clairement que pour l'éfficacité de la méthode numérique proposée, le choix d'une base de Galerkin à mode complexe est indispensable afin de mieux prendre en compte la viscosité dans le mode. C'est pourquoi au chapitre 4 nous avons proposé une modélisation des vibrations linéaires et non linéaires des plaques sandwichs basée sur des modes complexes. L'idée a été d'étendre le modèle numérique d'étude des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs de type poutre précédemment développé au chapitre 3 à l'étude des structures sandwichs de type plaques, mais en utilisant des modes complexes. Ces modes complexes sont calculés toujours à l'aide du solveur numérique élaboré au chapitre 2 même si l'élément fini adopté cette fois-ci est de type plaque. Les résultats obtenus ont permis dans un premier temps de valider le modèle et dans un second temps de mettre en évidence l'effet des non linéarités géométriques, des conditions aux limites et de la température sur les propriétés modales et les réponses des structures sandwichs. En outre, l'évaluation des deux approches de l'équation d'amplitude a montré l'intérêt de la prise en compte générale de la dépendance en fréquence de l'amortissement surtout dans la modélisation des vibrations non linéaires. Hormis l'avantage de traiter des conditions aux limites génériques, le présent modèle offre plus d'efficacité sur deux points comparativement aux modèles analytiques [82] et semi-numériques [83, 84] ini-

tialement proposés par les auteurs. Le premier point est l'usage d'une base de Galerkin enrichie par des modes complexes contrairement aux modes réels classiquement utilisés. Le second point est la prise en compte générale de la dépendance en fréquence dans la caractérisation des réponses des structures sandwichs contrairement à la caractérisation classiquement faite au voisinage de la fréquence réelle de la structure sandwich non amortie. La représentation spatiale de la viscosité par des modes complexes constitue également un nouvel aspect dans les résultats qui ont été présentés.

Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche :

Du point de vue expérimental

Les résultats présentés dans ce manuscrit ont permis certes de valider les méthodes numériques proposées par comparaison avec les résultats de la littérature en particulier dans le cas d'un modèle viscoélastique constant et dans le cadre des vibrations linéaires. Cependant pour les modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence et surtout dans le cadre des vibrations non linéaires, les données expérimentales sont rares. C'est pourquoi, vu la nature purement théorique des résultats présentés ici, il serait envisageable de mener des essais expérimentaux surtout pour des modèles viscoélastiques dépendant de la fréquence afin de corroborer l'efficacité et l'exactitude des méthodes numériques proposées.

Du point de vue théorique

Les améliorations suivantes sont envisageables :

Modèle élément fini :

Dans les présents travaux, les structures sandwichs ont été modélisées en utilisant un élément fini de type poutre et un élément fini de type plaque. Il serait souhaitable de

développer un élément fini de type coque tenant compte des courbures afin de modéliser des structures sandwichs de géométrie plus complexe.

Approximation de la réponse non linéaire :

Dans la théorie d'étude des vibrations non linéaires qui a été présentée, la réponse non linéaire est approchée dans l'espace par le mode de vibration linéaire. Une autre issue à explorer consisterait à approcher la réponse non linéaire à l'aide du mode non linéaire. Dans ce cas, la nouvelle donne serait d'abord d'élaborer des stratégies de calcul du mode non linéaire avec la dépendance en fréquence des rigidités. Ces approches qui sont restreintes au voisinage d'un seul mode peuvent aussi être étendues à une analyse multimodale qui approcherait la réponse non linéaire au voisinage de plusieurs modes. Ceci permettrait alors d'obtenir des courbes de réponses sur une bande de fréquence plus élargie.

Dépendance en fréquence et en température :

L'analyse qui a été menée ici ne tient compte que de la dépendance en fréquence du matériau viscoélastique, la température étant considérée comme fixe. Mais dans la réalité, les deux varient simultanément. Alors, il serait envisageable de prendre en compte ce couplage fréquence-température dans la modélisation.

Annexe A

Caractérisation des matériaux viscoélastiques

Quatre types d'essais permettent de caractériser le comportement viscoélastique d'un matériau :

Essai de fluage :

L'expérience de fluage (figure A.1) consiste à appliquer au matériau viscoélastique à l'instant t_0 une contrainte maintenue constante dans le temps et à suivre l'évolution de la déformation en fonction du temps. La déformation élastique observée par un saut instantané est suivie d'une déformation différée appelée aussi déformation de fluage. Ainsi, pour un échelon de contrainte appliquée d'amplitude σ_{kl}^0 à partir de l'instant t_0,

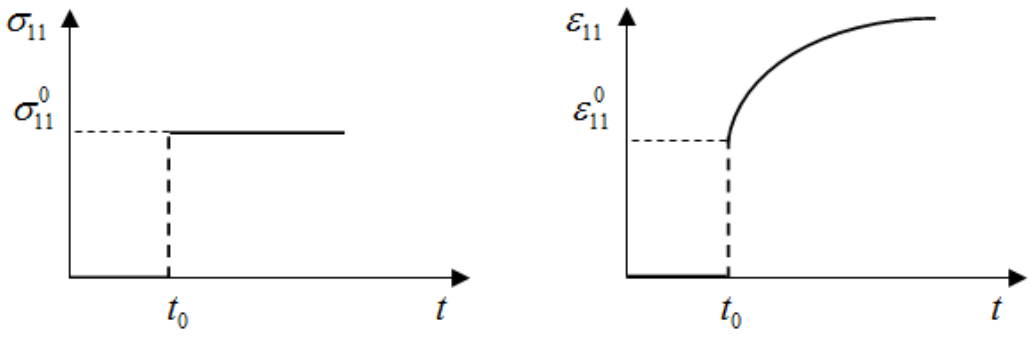


FIG. A.1 – Essai de fluage

l'évolution de la déformation en fonction du temps est définie par la fonction de fluage ou de retard :

$$\begin{cases} \sigma_{kl}(t) = \mathcal{H}(t - t_0)\sigma^0_{kl} \\ \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma^0_{kl})\sigma^0_{kl} \end{cases} \tag{A.1}$$

où $\mathcal{H}$ est la fonction échelon unité de Heaviside et $\mathcal{J}$ la fonction de fluage ou de retard qui est nulle pour $t < t_0$ et croissante pour $t \geq t_0$.

Essai de relaxation :

L'essai de relaxation (figure A.2) consiste à imposer instantanément au matériau une déformation constante dans le temps et à suivre l'évolution de la contrainte en fonction du temps. On observe une diminution de la contrainte dans le temps qui tend vers une limite asymptotique. On parle de relaxation de la contrainte. Ainsi pour une

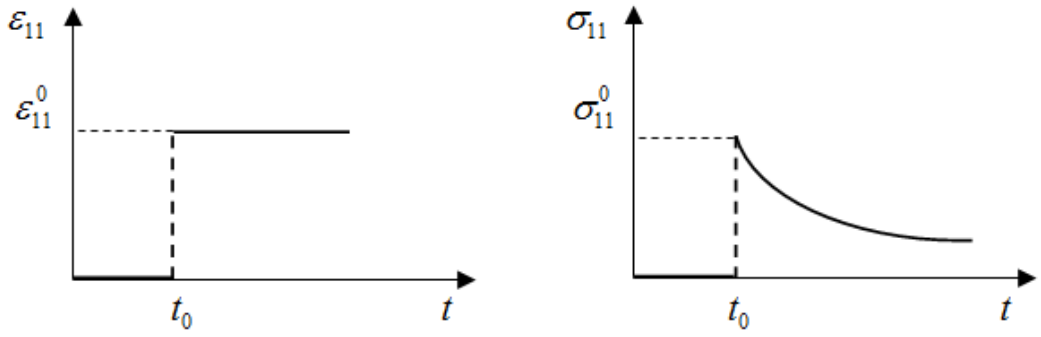


FIG. A.2 – Essai de relaxation

déformation échelon imposée d'amplitude ε^0_{kl} à partir de l'instant t_0, l'évolution de la contrainte en fonction du temps est définie par la fonction de relaxation :

$$\begin{cases} \varepsilon_{kl}(t) = \mathcal{H}(t - t_0)\varepsilon^0_{kl} \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon^0_{kl})\varepsilon^0_{kl} \end{cases} \tag{A.2}$$

La fonction de relaxation $\mathcal{R}$ est nulle pour $t < t_0$ et décroissante pour $t \geq t_0$.

Essai de recouvrance :

L'essai de recouvrance (figure A.3) consiste à appliquer un créneau de contrainte d'amplitude σ^0_{kl} entre deux instants t_0 et t_1 puis à déterminer l'évolution de la déformation dans le temps.

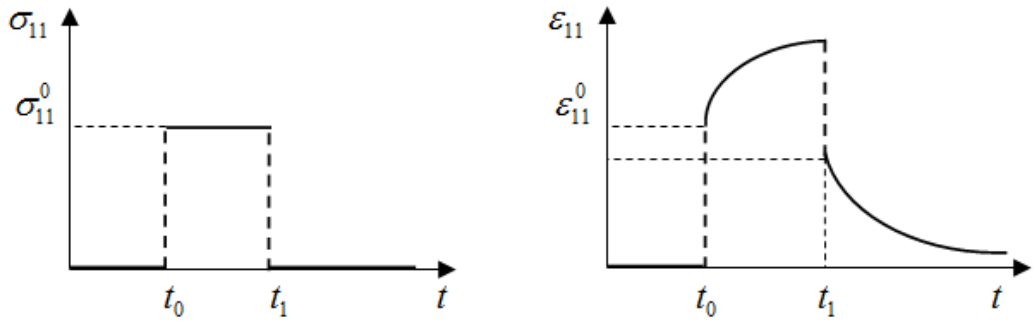


FIG. A.3 – Essai de recouvrance

$$\sigma_{kl}(t) = [\mathcal{H}(t-t_0) - \mathcal{H}(t-t_1)]\,\sigma^0_{kl}, \qquad t_0 < t_1 \tag{A.3}$$

On remarque que pour $t < t_1$, on retrouve l'expérience de fluage. Mais pour $t = t_1$ correspondant au relâchement de la contrainte, on assiste à un retour instantané élastique de la déformation. Enfin pour $t > t_1$, il y a apparition de la récouvrance jusqu'à l'annulation de la déformation et retour à l'état initial.

Essai d'effacement :

L'essai d'effacement (figure A.4) consiste à imposer au matériau un créneau de déformation d'amplitude ε^0_{kl} entre deux instants t_0 et t_1 puis à déterminer l'évolution de la contrainte dans le temps.

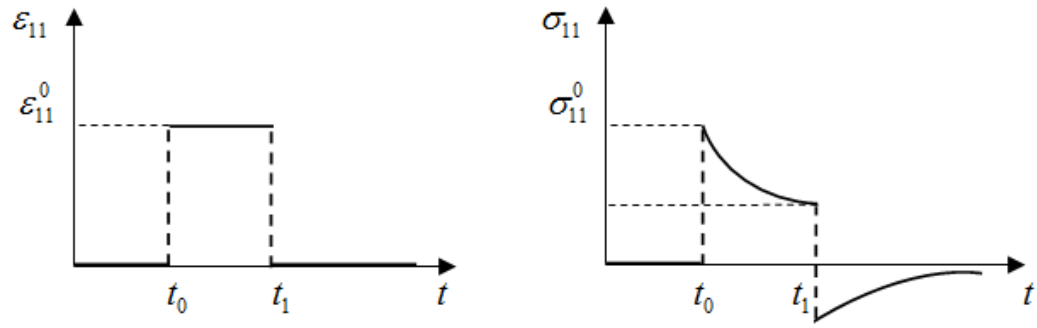


FIG. A.4 – Essai d'effacement

$$\varepsilon_{kl}(t) = [\mathcal{H}(t-t_0) - \mathcal{H}(t-t_1)]\,\varepsilon^0_{kl}, \qquad t_0 < t_1 \tag{A.4}$$

Pour $t < t_1$, on retrouve l'essai de relaxation. Mais pour $t = t_1$ correspondant à la

suppression de la déformation, on observe un saut instantané inverse égal au saut initial et correspondant à l'élasticité du matériau. Enfin pour $t > t_1$, la contrainte change alors de signe et diminue en valeur absolue pour s'annuler peu à peu.

Annexe B

Solutions analytiques du problème de vibration linéaire

On considère une structure sandwich trois couches de longueur L, de largeur l, d'epaisseurs h_k $(1 \leq k \leq 3)$, de modules d'Young statiques E_k, de coefficients de Poisson ν_k, de densités massiques ρ_k, les indices $k = 1, 2, 3$ étant affectés respectivement à la couche supérieure, à la couche centrale et à la couche inférieure. Pour un cœur modélisé par un module de cisaillement complexe constant $G_2^* = G_2(1 + i\eta_2)$ où G_2 est le module statique et η_2 le facteur de perte du cœur, les formules analytiques exactes donnant les propriétés amortissantes de la structure sont établies par les auteurs [32, 43, 48].

B.1 Structure sandwich poutre en appui simple

La pulsation amortie Ω et le facteur de perte η associés au mode de vibration de rang n sont donnés par [32, 43] :

$$\begin{cases} \Omega^2 = \dfrac{(n\pi)^4 \left[(n\pi)^4 + (n\pi)^2(2+Y)g + (1+\eta_2^2)(1+Y)g^2\right](E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3)}{12L^4 \left[(n\pi)^4 + 2(n\pi)^2 g + (1+\eta_2^2)g^2\right](\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3)} \\ \\ \eta = \dfrac{(n\pi)^2 g Y \eta_2}{(n\pi)^4 + (n\pi)^2(2+Y)g + (1+\eta_2^2)(1+Y)g^2} \end{cases} \tag{B.1}$$

où Y est appelé le paramètre de géométrie et g le paramètre de cisaillement. Ils sont donnés par :

$$\begin{cases} Y = \dfrac{12\left[h_2 + (h_1+h_3)/2\right]^2 E_1 h_1 E_3 h_3}{\left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right)\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)} \\ \\ g = \dfrac{G_2 L^2 \left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)}{h_2 E_1 h_1 E_3 h_3} \end{cases} \tag{B.2}$$

B.2 Structure sandwich plaque en appui simple

La pulsation amortie et le facteur de perte pour le mode de rang (n, m) d'une plaque sandwich dont les faces ont un coefficient de Poisson commun ν sont donnés par [48] :

$$\begin{cases} \Omega^2 = \alpha_{nm}^2 \left\{ 1 + \dfrac{Yg\left[\alpha_{nm} + g(1+\eta_2^2)\right]}{(\alpha_{nm}+g)^2 + g^2\eta_2^2} \right\} \\ \\ \eta = \dfrac{\alpha_{nm} Y g \eta_2}{(\alpha_{nm}+g)^2 + Yg(\alpha_{nm}+g) + (1+Y)g^2\eta_2^2} \end{cases} \tag{B.3}$$

où le paramètre de géométrie Y, le paramètre de cisaillement g et le coefficient α_{nm} sont donnés par :

$$\begin{cases} Y = \dfrac{12\left[h_2 + (h_1+h_3)/2\right]^2 E_1 h_1 E_3 h_3}{\left(E_1 h_1^3 + E_3 h_3^3\right)\left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)} \\ \\ g = \dfrac{G_2 L^2 \left(E_1 h_1 + E_3 h_3\right)(1-\nu^2)}{h_2 E_1 h_1 E_3 h_3} \\ \\ \alpha_{nm} = (n\pi)^2 + (m\pi L/l)^2 \end{cases} \tag{B.4}$$

Annexe C

Elément fini sandwich poutre

C.1 Matrices élémentaires

En désignant par L^e la longueur de l'élément et en posant $\xi = \frac{2x}{L^e} - 1$, pour $x \in [0 \quad L^e]$ et $\xi \in [-1 \quad 1]$, les fonctions de forme polynomiale classiques utilisées dans la section 2.2.3 sont données par [93] :

$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \frac{(1-\xi)^2(2+\xi)}{4} \\
N_2(\xi) &= \frac{L^e(1-\xi)^2(1+\xi)}{8} \\
N_3(\xi) &= \frac{(1+\xi)^2(2-\xi)}{4} \\
N_4(\xi) &= -\frac{L^e(1+\xi)^2(1-\xi)}{8} \\
N_5(\xi) &= \frac{1-\xi}{2} \\
N_6(\xi) &= \frac{1+\xi}{2}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Les matrices d'interpolation utilisées dans l'équation (2.17) sont :

$$\begin{aligned}
[N_w] &= [N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad 0 \quad N_3(\xi) \quad N_4(\xi) \quad 0] \\
[N_\beta] &= [0 \quad 0 \quad N_5(\xi) \quad 0 \quad 0 \quad N_6(\xi)]
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Les matrices d'intégration des fonctions de forme utilisées dans l'équation (2.19) sont :

$$\begin{aligned}
[m^e] &= \int_{L^e} {}^{\intercal}[N_w]\,[N_w]\,dx \\
[k_1^e] &= \int_{L^e} {}^{\intercal}[N_{\beta,x}]\,[N_{\beta,x}]\,dx \\
[k_2^e] &= \int_{L^e} \left({}^{\intercal}[N_{\beta,x}]\,[N_{w,xx}] + {}^{\intercal}[N_{w,xx}]\,[N_{\beta,x}]\right) dx \\
[k_3^e] &= \int_{L^e} {}^{\intercal}[N_{w,xx}]\,[N_{w,xx}]\,dx \\
[k_4^e] &= \int_{L^e} \left({}^{\intercal}[N_{w,x}]\,[N_{w,x}] + {}^{\intercal}[N_\beta]\,[N_{w,x}] + {}^{\intercal}[N_{w,x}]\,[N_\beta] + {}^{\intercal}[N_\beta]\,[N_\beta]\right) dx
\end{aligned} \tag{C.3}$$

On notera $[k_5]$ la matrice obtenue par assemblage de la matrice élémentaire

$$[k_5^e] = \int_{L^e} {}^{\intercal}[N_{w,x}]\,[N_{w,x}]\,dx \tag{C.4}$$

et sera utilisée dans le problème (C.8)

C.2 Rigidité non linéaire pour une poutre sandwich à bords axialement immobiles

Dans le cas particulier où les deux extrémités de la poutre sandwich sont axialement immobilisées, le déplacement axial est nul à ses bords, c'est-à-dire $u(0) = u(L) = 0$. Une intégration par partie des problèmes linéaires (3.20) permet d'exprimer les amplitudes u_0 et $u_{2\omega}$ en fonction du déplacement transversal W :

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \frac{x}{L}\int_0^L |W_{,s}(s)|^2 ds - \int_0^x |W_{,s}(s)|^2 ds \\
u_{2\omega}(x) &= \frac{x}{2L}\int_0^L \left(W_{,s}(s)\right)^2 ds - \int_0^x \frac{1}{2}\left(W_{,s}(s)\right)^2 ds
\end{aligned} \tag{C.5}$$

En utilisant l'équation (C.5) dans la relation (3.19), on obtient l'expression des amplitudes N_0 et $N_{2\omega}$ en fonction du déplacement transversal W :

$$\begin{aligned}
N_0(x) &= \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(0)}{L}\int_0^L |W_{,s}(s)|^2 ds \\
N_{2\omega}(x) &= \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(2\omega)}{2L}\int_0^L \left(W_{,s}(s)\right)^2 ds
\end{aligned} \tag{C.6}$$

En utilisant cette relation, la rigidité modale non linéaire apparaissant dans l'équation (3.22) s'écrit analytiquement en fonction du déplacement transversal W :

$$k_{nl} = \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(0)}{L} \left(\int_0^L |W_{,x}|^2 dx \right)^2 + \frac{2E_f S_f + S_c E_c^*(2\omega)}{2L} \left| \int_0^L (W_{,x})^2 \, dx \right|^2 \quad \text{(C.7)}$$

Les intégrales apparaissant dans la rigidité non linéaire (C.7) sont calculées numériquement en utilisant le mode de vibration linéaire $\{U\}$ relatif au problème de valeur propre (3.12) et la matrice $[k_5]$ relative au problème élémentaire (C.4) :

$$\begin{aligned} &\int_0^L |W_{,x}|^2 dx =^{\intercal} \left\{ \overline{U} \right\} [k_5] \{U\} \\ &\int_0^L (W_{,x})^2 \, dx =^{\intercal} \{U\} [k_5] \{U\} \end{aligned} \quad \text{(C.8)}$$

En remplaçant (C.8) dans (C.7), on retrouve la formulation numérique de la rigidité modale non linéaire (3.24).

Annexe D

Elément fini sandwich plaque

D.1 Matrices de comportement

Les matrices de comportement utilisées dans le chapitre 4 sont données pour les faces élastiques $i = 1, 3$:

$$[C_m] = \frac{E_f h_f}{1-\nu_f^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_f & 0 \\ \nu_f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_f}{2} \end{bmatrix}, \qquad [C_f] = \frac{h_f^2}{12}[C_m] \tag{D.1}$$

où E_f, ν_f et h_f sont respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et l'épaisseur des faces élastiques. Les matrices de comportement pour le cœur viscoélastique $i = 2$ sont :

$$\begin{aligned} [C_{2m}^*(\omega)] &= i\omega \int_0^{+\infty} [C_{2m}(t)]\, e^{-i\omega t} dt = \frac{E_c^*(\omega) h_c}{1-\nu_c^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_c}{2} \end{bmatrix} \\ \left[C_{2f}^*(\omega)\right] &= i\omega \int_0^{+\infty} [C_{2f}(t)]\, e^{-i\omega t} dt = \frac{h_c^2}{12}[C_{2m}^*(\omega)] \end{aligned} \tag{D.2}$$

$$[C_{2s}^*(\omega)] = i\omega \int_0^{+\infty} [C_{2s}(t)]\, e^{-i\omega t} dt = \frac{E_c^*(\omega) h_c}{2(1+\nu_c)}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $E_c^*(\omega)$, ν_c et h_c sont respectivement le module d'Young complexe, le coefficient de Poisson et l'épaisseur de la couche centrale. En décomposant le module d'Young complexe sous la forme $E_c^*(\omega) = E_c^*(0) + E(\omega)$, les matrices de comportement (D.2) sont décomposables comme suit :

$$\begin{cases} \left[C_{2f}^*(\omega)\right] = \left[C_{2f}^*(0)\right] + E(\omega)\,[C_{2f}] \\ \left[C_{2s}^*(\omega)\right] = \left[C_{2s}^*(0)\right] + E(\omega)\,[C_{2s}] \end{cases} \tag{D.3}$$

où les nouvelles matrices $[C_{2f}]$ et $[C_{2s}]$ sont données par :

$$[C_{2f}] = \frac{h_c^3}{12(1-\nu_c^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu_c}{2} \end{bmatrix}, \qquad [C_{2s}] = \frac{h_c}{2(1+\nu_c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.4}$$

D.2 Matrices élémentaires

Les matrices élémentaires de masse et de rigidité utilisées dans le problème (4.30) de la section 4.4.1 sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} [K^e(\omega)] = &\iint_{s_e} \left(2^{\intercal}\,[N_{wm}]\,[C_m]\,[N_{wm}] + 2^{\intercal}\,[N_{wf}]\,[C_f]\,[N_{wf}]\right) ds \\ &+ \iint_{s_e} \left({}^{\intercal}\,[N_{2f}]\left[C_{2f}^*(\omega)\right][N_{2f}] + {}^{\intercal}\,[N_{2s}]\,[C_{2s}^*(\omega)]\,[N_{2s}]\right) ds \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$[M^e] = \iint_{s_e} (2\rho_f h_f + \rho_c h_c)^{\intercal}\,[N_w]\,[N_w]\,ds$$

où s_e désigne l'aire de la section plane élémentaire. Les matrices $[N_{wm}]$, $[N_{wf}]$, $[N_{2f}]$ et $[N_{2s}]$ sont exprimées à l'aide des matrices 1×20 de fonctions de forme $[N_w]$, $[N_{\beta x}]$ et $[N_{\beta y}]$:

$$[N_{wf}] = \begin{bmatrix} -N_{w,xx} \\ -N_{w,yy} \\ -2N_{w,xy} \end{bmatrix} \qquad [N_{2f}] = \begin{bmatrix} N_{\beta x,x} \\ N_{\beta y,x} \\ N_{\beta x,y} + N_{\beta y,x} \end{bmatrix} \tag{D.6}$$

$$[N_{2s}] = \begin{bmatrix} N_{w,x} + N_{\beta x} \\ N_{w,y} + N_{\beta y} \end{bmatrix} \qquad [N_{wm}] = \tfrac{h_c}{2}\,[N_{2f}] + \tfrac{h_f}{2}\,[N_{wf}]$$

En utilisant la décomposition (D.3), les matrices élémentaires relatives aux matrices $[K_0]$ et $[K_v]$ de la décomposition (4.32) sont données par :

$$\begin{aligned}[K_0^e] = &\iint_{s_e} \left(2^{\intercal} [N_{wm}] [C_m] [N_{wm}] + 2^{\intercal} [N_{wf}] [C_f] [N_{wf}]\right) ds \\ &+ \iint_{s_e} \left({}^{\intercal} [N_{2f}] \left[C_{2f}^*(0)\right] [N_{2f}] + {}^{\intercal} [N_{2s}] [C_{2s}^*(0)] [N_{2s}]\right) ds\end{aligned} \tag{D.7}$$

$$[K_v^e] = \iint_{s_e} \left({}^{\intercal} [N_{2f}] [C_{2f}] [N_{2f}] + {}^{\intercal} [N_{2s}] [C_{2s}] [N_{2s}]\right) ds$$

D.3 Rigidité non linéaire

$[N_w]$, $[N_u]$ et $[N_v]$ étant respectivement les matrices d'interpolation des déplacements W, u et v, la matrice d'interpolation des déformations linéaires en membrane $\{\Gamma_2\}$ utilisée dans la relation (4.37) s'écrit :

$$[B_l] = \begin{bmatrix} N_{u,x} \\ N_{v,y} \\ N_{u,y} + N_{v,x} \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

Le vecteur élémentaire des déplacements nodaux $\{U^e\}$ défini dans l'équation (4.28) peut être extrait du vecteur propre $\{U\}$ une fois que le problème de valeur propre (4.31) est résolu. Ainsi les tenseurs élémentaires de déformation non linéaire en flexion $\left\{\Gamma_0^{nle}\right\}$ et $\left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\}$ sont utilisés dans l'équation (4.37) pour la résolution des problèmes linéaires (4.38) :

$$\left\{\Gamma_0^{nle}\right\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} {}^{\intercal} \left\{\overline{U}^e\right\}^{\intercal} [N_{w,x}] [N_{w,x}] \{U^e\} \\ {}^{\intercal} \left\{\overline{U}^e\right\}^{\intercal} [N_{w,y}] [N_{w,y}] \{U^e\} \\ {}^{\intercal} \left\{\overline{U}^e\right\} \left({}^{\intercal} [N_{w,x}] [N_{w,y}] + {}^{\intercal} [N_{w,y}] [N_{w,x}]\right) \{U^e\} \end{Bmatrix} \tag{D.9}$$

$$\left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} {}^{\intercal} \{U^e\}^{\intercal} [N_{w,x}] [N_{w,x}] \{U^e\} \\ {}^{\intercal} \{U^e\}^{\intercal} [N_{w,y}] [N_{w,y}] \{U^e\} \\ {}^{\intercal} \{U^e\} \left(2^{\intercal} [N_{w,x}] [N_{w,y}]]\right) \{U^e\} \end{Bmatrix}$$

Les vecteurs des déplacements élémentaires $\{U_{20}^e\}$ et $\{U_{22}^e\}$ définis dans l'équation (4.34) sont extraits des vecteurs $\{U_{20}\}$ et $\{U_{22}\}$ calculés à l'issue de la résolution des problèmes linéaires (4.38). Ils permettent de calculer la rigidité modale non linéaire élémentaire utilisée dans l'équation (4.39) :

$$\begin{aligned} k_{nl}^e(\omega) = & \iint_{s_e} \left(4^\intercal \left\{\Gamma_0^{nle}\right\} \left[2C_m + C_{2m}^*(0)\right] \left[B_l\right] \left\{U_{20}^e\right\}\right) ds \\ & + \iint_{s_e} \left(2^\intercal \left\{\overline{\Gamma}_{2\omega}^{nle}\right\} \left[2C_m + C_{2m}^*(2\omega)\right] \left[B_l\right] \left\{U_{22}^e\right\}\right) ds \\ & + \iint_{s_e} \left(4^\intercal \left\{\Gamma_0^{nle}\right\} \left[2C_m + C_{2m}^*(0)\right] \left\{\Gamma_0^{nle}\right\}\right) ds \\ & + \iint_{s_e} \left(2^\intercal \left\{\overline{\Gamma}_{2\omega}^{nle}\right\} \left[2C_m + C_{2m}^*(2\omega)\right] \left\{\Gamma_{2\omega}^{nle}\right\}\right) ds \end{aligned} \tag{D.10}$$

Annexe E

Méthode Asymptotique Numérique (MAN)

Le traitement de certains problèmes de la physique se ramène à la résolution de problèmes non linéaires qui peuvent se mettre sous la forme résiduelle :

$$R(U, \Theta) = 0 \tag{E.1}$$

où $U \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur inconnu et $R \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur résidu rassemblant "n" équations et qui est supposé être une fonction "suffisament régulière" de ses arguments U et Θ.

L'idée principale de la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) est de tracer numériquement la branche de solutions de l'équation (E.1) en générant non pas une séquence de points, mais une séquence de "morceaux" de branches : branche^1, branche^2, branche^3, ..., branche^j, branche^{j+1}, ... (voir figure E.1). Le principe de la MAN consiste à générer une succession de morceaux de branches, chaque nouveau morceau de branche est déterminé par une représentation en séries à partir d'un point de départ.

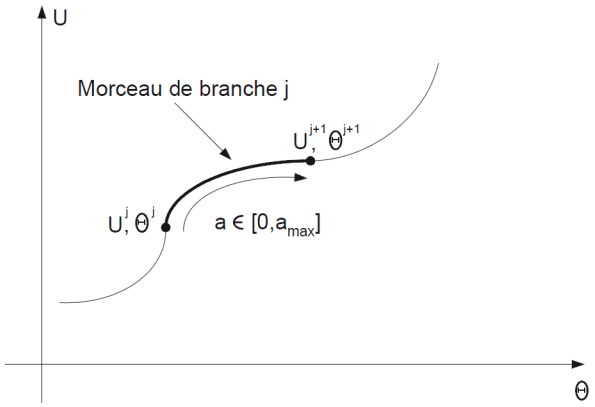


FIG. E.1 – Schéma descriptif de la MAN

E.1 Technique de perturbation

Partant d'un point solution connu (U^j, Θ^j), on génère un nouveau morceau de branche en cherchant sa représentation en séries entières par rapport à un paramètre de chemin a :

$$\begin{cases} U(a) = U^j + \sum_{p=1}^{\infty} a^p U_p = U^j + aU_1 + a^2 U_2 + ... \\ \\ \Theta(a) = \Theta^j + \sum_{p=1}^{\infty} a^p \Theta_p = \Theta^j + a\Theta_1 + a^2 \Theta_2 + ... \end{cases} \tag{E.2}$$

Cette branche (E.2) doit être solution de l'équation (E.1), ce qui se traduit par :

$$0 = R(U^j + aU_1 + a^2 U_2 + ..., \Theta^j + a\Theta_1 + a^2 \Theta_2 + ...)$$

$$= R(U^j, \Theta^j) + \frac{\partial R}{\partial U}|_j (aU_1 + a^2 U_2 + ...) + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j (a\Theta_1 + a^2 \Theta_2 + ...) \tag{E.3}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 R}{\partial U^2}|_j (aU_1 + a^2 U_2 + ...)(aU_1 + a^2 U_2 + ...) + ...$$

En utilisant le fait que $R(U^j, \Theta^j) = 0$ et en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes de a, l'équation précédente se réécrit :

$$
\begin{aligned}
0 = & \; a \left\{ \frac{\partial R}{\partial U}|_j U_1 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j \Theta_1 \right\} \\
& + a^2 \left\{ \frac{\partial R}{\partial U}|_j U_2 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j \Theta_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial U^2}|_j U_1 U_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial \Theta^2}|_j \Theta_1^2 + \frac{\partial^2 R}{\partial U \partial \Theta}|_j \Theta_1 U_1 \right\} \\
& + a^3 \left\{ \frac{\partial R}{\partial U}|_j U_3 + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j \Theta_3 + \text{termes dépendants de} \quad U_1, U_2, \Theta_1, \Theta_2 \right\} \\
& + ... \\
& + a^p \left\{ \frac{\partial R}{\partial U}|_j U_p + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j \Theta_p + \underbrace{\text{termes dépendants de} \quad U_1, ..., U_{p-1}, \Theta_1, ..., \Theta_{p-1}}_{F_p} \right\} \\
& + ...
\end{aligned}
\tag{E.4}
$$

ou bien sous forme condensée,

$$
R\left(U(a), \Theta(a)\right) = aR_1 + a^2 R_2 + ... + a^p R_p + ... = 0 \tag{E.5}
$$

Cette relation devant être vérifiée pour toute valeur de a, on en déduit une infinité d'équations permettant de définir successivement les termes de la série (E.2) :

$$
R_p = 0 \quad \text{pour} \quad p \geq 1 \tag{E.6}
$$

A chaque ordre p, l'équation (E.6) est un système linéaire en U_p, Θ_p qui s'écrit sous la forme :

$$
\frac{\partial R}{\partial U}|_j U_p + \frac{\partial R}{\partial \Theta}|_j \Theta_p = F_p \tag{E.7}
$$

où le second membre F_p ne dépend que des termes aux ordres précédents.

E.2 Définition du paramètre de chemin

En réalité, le problème (E.7) n'est pas bien posé puisque c'est un système de n équations à $n+1$ inconnues. Comme dans les méthodes de prédiction-correction, il faut une condition supplémentaire à chaque ordre. Cette condition est la définition du paramètre de chemin a intervenant dans les séries (E.2). On définit le paramètre de chemin a comme étant la pseudo-longueur d'arc :

$$a = (U - U^j)U_1 + (\Theta - \Theta^j)\Theta_1 \tag{E.8}$$

qui correspond à la projection de l'incrément sur la direction tangente (U_1, Θ_1). En reportant les séries (E.2) dans l'équation (E.8), on obtient la condition supplémentaire cherchée à chaque ordre p :

$$\begin{cases} \|U_1\|^2 + \Theta_1^2 = 1 \\ \\ U_p U_1 + \Theta_p \Theta_1 = 0 \end{cases} \tag{E.9}$$

Si N représente l'ordre de troncature des séries, alors le calcul de la branche^j demande le calcul de N seconds membres F_p et la résolution de N problèmes linéaires (E.7) et (E.9). A la différence des méthodes de prédiction-correction, une seule matrice tangente $\frac{\partial R}{\partial U}|_j$ doit être calculée et inversée pour résoudre tous les problèmes linéaires (E.7). L'avantage se situe au niveau du temps de calcul vu que le temps de traitement du second membre est relativement faible à celui d'une matrice jacobienne. La principale difficulté dans le traitement des séries de la MAN est le calcul des seconds membres F_p.

Bibliographie

[1] J. Mandel. *Sur les corps viscoélastiques linéaires à comportement linéaire.* C.R. As. Sc. Paris, 1955.

[2] R. M. Christensen. *Theory of viscoelasticity : an introduction.* Academic Press, New York, 1982.

[3] J. Salençon. *Viscoélasticité.* Presse de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.

[4] B. Persoz. *La rhéologie.* Masson & Cie, 1969.

[5] K. B. Oldham and J. Spanier. *The fractional calculus.* Academic Press, New York, 1974.

[6] A. Oustaloup. *La dérivation non entière, théorie, synthèse et applications.* Hermes, London, UK, 1999.

[7] P. J. Torvik and R. L. Bagley. Fractional derivatives in the description of damping. *Air Force Institute of Technology, Ohio*, pages 125–135, 1955.

[8] R. L. Bagley and P. J. Torvik. Fractional calculus- a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 21 :741–748, 1983.

[9] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour. *Journal of Rheology*, 30 :133–155, 1986.

[10] T. Pritz. Frequency dependences of complex moduli and complex poisson's ratio of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 214 (1) :83–104, 1998.

[11] G. Kergoulay. *Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoelastiques : application à une enceinte acoustique.* PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2004.

[12] A. D. Nashif, D. I. G. Jones, and J. P. Henderson. *Vibration damping.* John Wiley and Sons, 1985.

[13] M. L. Williams, R. F. Landel, and J. D. Ferry. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. *Journal of American Chemical Society*, 77 :3701–3707, 1955.

[14] J. D. Ferry. *Viscoelastic properties of polymers.* John Wiley and Sons, 1980.

[15] J. Landier. *Modélisation et étude expérimentale des propriétés amortissantes des tôles sandwich*. PhD thesis, Université de Metz, 1993.

[16] M. A. Biot. Variational principles in irreversible thermodynamics with application to viscoelasticity. *Physical Review*, 97 :1463–1469, 1955.

[17] G. A. Lesieutre. Finite element for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency dependent material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 29 :1567–1579, 1992.

[18] D. J. McTavish and P. C. Hughes. Modeling of linear viscoelastic space structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115 :103–110, 1993.

[19] Y. C. Yiu. Finite element analysis of structures with classical viscoelastic materials. In *Proceedings of the 34th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, 1993.

[20] M. A. Trindade. *Contrôle hybride actif-passif des vibrations des structures par des matériaux piezoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwichs multicouches intelligentes*. PhD thesis, CNAM Paris, 2000.

[21] M.A. Trindade, A. Benjeddou, and R. Ohayon. Modeling of frequency dependent viscoelastic materials for active-passive vibration damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, 122 (2) :169–174, 2000.

[22] M. A. Trindade. Reduced-order finite element models of viscoelastically damped beams through internal variables projection. *Journal of Vibration and Acoustics*, 128 :501–508, 2006.

[23] A. C. Galucio, J. F. Deü, and R. Ohayon. Finite element formulation of viscoelsatic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, 33 :282–291, 2004.

[24] T. Pritz. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *Journal of Sound and Vibration*, 195 :103–115, 1996.

[25] T. Pritz. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. *Journal of Sound and Vibration*, 265 :935–952, 2003.

[26] S. Kim and D. Lee. Identification of fractional-derivative-model parameters of viscoelastic materials from measured frfs. *Journal of Sound and Vibration*, 324 :570–586, 2009.

[27] A. E. H. Love. *The mathematical theory of elasticity, 4th edition*. Cambridge University Press, 1927.

[28] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 12 :69–76, 1945.

[29] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia effect and shear deformation in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :1031–1036, 1951.

[30] J. N. Reddy. A simple higher-order theory of laminated composite plate. *Journal of Applied Mechanics*, 51 :745–752, 1984.

[31] M. Touratier. An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29 :901–916, 1991.

[32] D.K. Rao. Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions. *Mechanical Engineering Science*, 20 :271–282, 1978.

[33] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. M. Daya. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Composite Structures*, 84(3) :282–292, July 2008.

[34] H. Murakami. Laminated composite plate theory with improved in-plane responses. *Journal of Applied Mechanics*, 53 :661–666, 1986.

[35] E. Carrera. On the use of murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, 82 :541–554, 2004.

[36] S. Brischetto, E. Carrera, and L. Demasi. Improved bending analysis of sandwich plates using a zig-zag function. *Composites Structures*, 89 :408–415, 2009.

[37] E. M. Kerwin. Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 31(7) :952–962, 1959.

[38] D. Ross and E. M. Kerwin. Damping of flexural vibration in plates by free and constrained viscoelastic layers. Technical report, BBN Report 623, 1959.

[39] E. E. Ungar. Loss factors of viscoelastically damped beam structures. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34 :1082–1089, 1962.

[40] Y. Y. Yu. Damping of flexural vibrations of sandwich plates. *Journal of Aerospace Science*, 29 :790–803, 1962.

[41] R.A. DiTaranto. Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams. *Transactions of of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics*, 87 :881–886, 1965.

[42] D.J. Mead and S. Markus. The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 10 (2) :163–175, 1969.

[43] D.J. Mead and S. Markus. Loss factors and resonant frequencies of encastré damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 12 :99–112, 1970.

[44] M. J. Yan and E. H. Dowell. Governing equations for vibrating constrained-layer damping of sandwich plates and beams. *Journal of Applied Mechanics*, 39 :1041–1046, 1972.

[45] Y. V. K. Sadasiva Rao and B.C. Nakra. Vibrations of unsymmetrical sandwich beams and plates with viscoelastic cores. *Journal of Sound and Vibration*, 34 (3) :309–326, 1974.

[46] V. Oravsky, S. Markus, and O. Simkova. A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever. *Journal of Sound and Vibration*, 33 :335–352, 1974.

[47] D.J. Mead. A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 83(3) :363–377, 1982.

[48] J. F. He and B.A. Ma. Analysis of flexural vibration of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 126 :37–47, 1988.

[49] Y. P. Lu, J. W. Killian, and G. C. Everstine. Vibrations of three layered damped sandwich plate composites. *Journal of Sound and Vibration*, 64 :63–71, 1979.

[50] C. D. Johnson, D. A. Kienholz, and L. C. Rogers. Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers. *Shock and Vibration Bulletin*, 51 :71–81, 1981.

[51] C.D. Johnson and D.A. Kienholz. Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 20 :1284–1290, 1982.

[52] M. L. Soni. Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures. *Shock and Vibration Bulletin*, 55 (1) :97–109, 1981.

[53] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11 :39–56, 2002.

[54] L. Duigou, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry. Iterative algorithms for nonlinear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :1323 – 1335, 2003.

[55] E. Ioannides and P. Grootenhuis. A finite element analysis of the harmonic response of damped three-layer plates. *Journal of Sound and Vibration*, 67(2) :203–218, November 1979.

[56] B.A. Ma and J.F. He. A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 152(1) :107–123, 1992.

[57] R. Rickards, A. Chate, and E. Barkanov. Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites. *Computers and Structures*, 47(6) :1005–1015, 1993.

[58] F. Abdoun, L. Azrar, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. Forced harmonic response of viscoelastic structures by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 87 :91–100, 2009.

[59] P. Cupial and J. Niziol. Vibration and damping analysis of a three-layered composite plate with a viscoelastic mid-layer. *Journal of Sound and Vibration*, 183(1) :99–114, 1995.

[60] M. G. Sainsbury and Q. J. Zhang. The Galerkin element method applied to the vibration of damped sandwich beams. *Computers and Structures*, 71(3) :239–256, 1999.

[61] K. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.

[62] A. Y. T. Leung. Subspace iterations for complex symmetric eigenproblems. *Journal of Sound and Vibration*, 184 :627–637, 1995.

[63] C. Lanczos. An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal on Research of the National Bureau of Standards*, 45 :255–282, 1950.

[64] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9 :17–29, 1951.

[65] X. Chen, H. L. Chen, and X. L. Hu. Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach. *Journal of Sound and Vibration*, 222(5) :803–812, 1999.

[66] E. M. Daya and M. Potier-Ferry. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79(5) :533–541, 2001.

[67] H. Voss. An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems. *BIT Numerical Mathematics*, 444 :387–401, 2004.

[68] R. G. White. Effects of non-linearity due to large deflections in the resonance testing of structures. *Journal of Sound and Vibration*, 16 :255–267, 1971.

[69] E. J. Kovac, W.J. Anderson, and R.A. Scott. Forced nonlinear vibrations of damped sandwich beam. *Journal of Sound and Vibration*, 17(1) :25–39, 1971.

[70] M.W. Hyer, W.J. Anderson, and R.A. Scott. Nonlinear vibrations of three-layer beams with viscoelastic core I : theory. *Journal of Sound and Vibration*, 46(1) :121–136, 1976.

[71] M. W. Hyer, W. J. Anderson, and R. A. Scott. Nonlinear vibrations of three-layer beams with viscoelastic core II :experiment. *Journal of Sound and Vibration*, 61 :25–30, 1978.

[72] V. P. Iu, Y.K. Cheung, and S.L. Lau. Non-linear vibration analysis of multilayer beams by incremental finite elements, Part I : Theory and numerical formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 100(3) :359–372, 1985.

[73] V. P. Iu, Y. K. Cheung, and S.L. Lau. Non-linear vibration analysis of multilayer beams by incremental finite elements, Part II : Damping and forced vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 100(3) :373–382, 1985.

[74] V. P. Iu and Y. K. Cheung. Non-linear vibration analysis of multilayer sandwich plates by incremental finite elements : 1. theoretical development. *Engineering Computers*, 3 :36–42, 1986.

[75] V. P. Iu and Y. K. Cheung. Non-linear vibration analysis of multilayer sandwich plates by incremental finite elements : 2. solution techniques and examples. *Engineering Computers*, 3 :43–52, 1986.

[76] Z. Q. Xia and S. Lukasiewicz. Non-linear, free, damped vibrations of sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*, 175(2) :219 – 232, 1994.

[77] Z. Q. Xia and S. Lukasiewicz. Non-linear analysis of damping properties of cylindrical sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 186(1) :55 – 69, 1995.

[78] M. Ganapathi, B. P. Patel, P. Boisse, and O. Polit. Flexural loss factors of sandwich and laminated composite beams using linear and nonlinear dynamic analysis. *Composites Part B : Engineering*, 30(3) :245–256, 1999.

[79] P. Ribeiro and M. Petyt. Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method. *Composite Structures*, 46 :197–208, 1999.

[80] P. Ribeiro. Nonlinear vibrations of simply-supported plates by the p-version finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 41 :911–924, 2005.

[81] M. Amabili. Nonlinear vibrations of rectangular plates with different boundary conditions : theory and experiments. *Computers and Structures*, 82 :2587–2605, 2004.

[82] E. M. Daya, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. An amplitude equation for the nonlinear vibration of viscoelastically damped sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5) :789–813, April 2004.

[83] E.H. Boutyour, E.M. Daya, and M. Potier-Ferry. A harmonic balance method for the non-linear vibration of viscoelastic shells. *Comptes Rendus Mécanique*, 334(1) :68–73, 2006.

[84] E.H. Boutyour, E.M. Daya, L. Azrar, and M. Potier-Ferry. An approximated harmonic balance method for nonlinear vibration of viscoelastic structures. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 128 (3) :330–334, 2006.

[85] F. Boumediene, A. Miloudi, J. M. Cadou, L. Duigou, and E. H. Boutyour. Nonlinear forced vibration of damped plates by an asymptotic numerical method. *Computers and Structures*, 87 :1508–1515, 2009.

[86] L. Azrar, R. Benamar, and M. Potier-Ferry. An asymptotic numerical method for large-amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 220 :695–727, 1999.

[87] L. Azrar, E.H. Boutyour, and M. Potier-Ferry. Non-linear forced vibrations of plates by an asymptotic-numerical method. *Journal of Sound and Vibration*, 252 :657–674, 2002.

[88] R. Arquier, S. Bellizzi, R. Bouc, and B. Cochelin. Two methods for the computation of nonlinear modes of vibrating systems at large amplitudes. *Computers and Structures*, 84 :1565–1576, 2006.

[89] I. Charpentier, A. Lejeune, and M. Potier-Ferry. The diamant library for an efficient automatic differentiation of the asymptotic numerical method. *Advances in Automatic Differentiation, in Lecture Notes in Computational Science and engineering*, 64 :139–149, 2008.

[90] I. Charpentier and M. Potier-Ferry. Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l'approche Diamant. *Comptes rendus Mécanique*, 336 :336–340, 2008.

[91] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E.M. Daya, and M. Cherkaoui. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I : The Diamant toolbox. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(3-4) :572–577, 2008.

[92] Y. Koutsawa. *Modélisation et conception multi-échelles des matériaux : de la description atomique discrète aux modèles du continu. Application aux propriétés amortissantes des pare-brises*. PhD thesis, Université de Metz, 2008.

[93] G. Dhatt and G. Touzot. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. 2ème édition, 1984.

[94] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode Asymptotique Numérique*. Hermes Science Publications, 2007.

[95] A. Griewank and A. Walther. *Evaluating Derivatives. Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. 2008.

[96] M. Z. Asik and S. Tezcan. A methematical model for the behavior of laminated glass beams. *Computers and Structures*, 83 :1742–1753, 2005.

[97] M. Bilasse, I. Charpentier, E. M. Daya, and Y. Koutsawa. A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II : Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,*, 198 :3999–4004, 2009.

[98] M. Bilasse, E. M. Daya, and L. Azrar. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams. *Journal of Sound and Vibration*, 329 :4950–4969, 2010.

[99] M. Bilasse, L. Azrar, and E. M. Daya. Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations. *submitted to Computers and Structures*, 2010.

Résumé

On s'intéresse à la modélisation numérique des structures sandwichs trois couches à âme viscoélastique utilisées pour l'amortissement passif et le contrôle des vibrations. La complexité de la modélisation en dynamique de ces structures est liée d'une part aux non linéarités matérielles dues à la dépendance en fréquence et en température de la rigidité et d'autre part aux non linéarités géométriques dues aux grands déplacements. Nous proposons dans ce travail un cadre de modélisation des vibrations linéaires et non linéaires des poutres et des plaques sandwichs avec la dépendance en fréquence du comportement viscoélastique. En couplant la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique, nous avons développé un algorithme générique de résolution du problème numérique de valeur propre complexe gouvernant les vibrations libres linéaires des structures sandwichs viscoélastiques. L'algorithme est implémenté sous un solveur numérique en langage Matlab et permet pour une structure sandwich donnée, de déterminer de façon directe et exacte les propriétés amortissantes et les modes propres de vibration, quelle que soit la non linéarité en fréquence de la loi viscoélastique. L'efficacité de l'algorithme est illustrée sur trois modèles viscoélastiques différents : le modèle à module constant, le modèle de Maxwell généralisé et le modèle à dérivées fractionnaires. Puis, nous avons présenté une théorie basée sur la méthode des éléments finis pour la modélisation des vibrations non linéaires des poutres sandwichs. Cette théorie combine la technique d'équilibrage harmonique à la méthode de Galerkin à un mode et permet de réduire le problème de vibration non linéaire à une équation d'amplitude complexe. La résolution de l'équation d'amplitude permet de caractériser les propriétés modales et les réponses en amplitude. L'évaluation du choix de la base de Galerkin pour différentes approximations des modes a permis de montrer l'inadéquation des modes réels classiquement utilisés dans l'analyse des vibrations linéaires et non linéaires. Enfin, la théorie est appliquée pour modéliser les vibrations non linéaires des plaques sandwichs. Les coefficients de l'équation d'amplitude gouvernant les vibrations non linéaires sont formulés dans le cadre élément fini et nécessitent la résolution numérique de trois problèmes : un problème de valeur propre complexe non linéaire et deux problèmes linéaires. Pour l'efficacité de la méthode numérique ainsi proposée, la base de Galerkin est améliorée en utilisant des modes complexes afin de prendre en compte l'amortissement dans les modes de vibration. Les résultats obtenus montrent l'effet des non linéarités géométriques, des conditions aux limites et de la température sur les propriétés modales et les réponses en amplitude.

Mots-clés: sandwich viscoélastique, vibration non linéaire, amortissement, élément fini, fréquence propre, mode réel, mode complexe, équation d'amplitude, méthode asymptotique numérique, différentiation automatique

Abstract

The problem of interest is the numerical modeling of three layered viscoelastic sandwich structures used for passive damping and vibration control. The complexity in the dynamic modeling of these structures lies in the presence on the one hand of the material nonlinearities due to the frequency and temperature dependence of the stiffness and on the other hand of the geometrical nonlinearities due to large amplitude vibrations. We propose in this work a modeling framework of linear and nonlinear vibrations of viscoelastic sandwich beams and plates that takes into account the frequency dependent behaviour. Coupling the asymptotic numerical method to automatic differentiation techniques, we developed a generic algorithm for the solution of the complex eigenvalue problem governing the linear free vibrations of viscoelastic sandwich structures. The algorithm is implemented using Matlab language and a numerical solver has been designed for direct and exact computation of damping properties and vibration modes, whatever the dependence on frequency of the viscoelastic law. The efficiency of the algorithm is illustrated on three different viscoelastic models : the constant modulus model, the generalized Maxwell model and the fractional derivative model. Then, we presented a finite element based theory for nonlinear vibration analysis of viscoelastic sandwich beams. This theory combines the harmonic balance technique to one mode Galerkin's procedure and allows to reduce the nonlinear vibration problem in a complex amplitude equation. Solving the amplitude equation yields the modal properties and the amplitude responses. An assessment of the Galerkin's basis choice for various eigenmodes approaches shows the inaccuracy of the classical real eigenmodes used for linear and nonlinear vibration analysis. The theory is applied to model the nonlinear vibrations of viscoelastic sandwich plates. The amplitude equation coefficients are established in the finite element framework by numerically solving three problems : a nonlinear complex eigenvalue problem and two linear problems. For the efficiency of the proposed method, the Galerkin's basis has been improved using complex eigenmodes in order to take account the damping in the vibration modes. The obtained results show the effects of geometrical nonlinearities, boundary conditions and temperature on the modal properties and amplitude responses.

Keywords: viscoelastic sandwich, nonlinear vibration, damping, finite element, eigenfrequency, real eigenmode, complex eigenmode, amplitude equation, asymptotic numerical method, automatic differentiation.