HAL
open science

Études théorique et expérimentale du transport de fluides miscibles en cellule Hele-Shaw

Hung Truong Trieu

To cite this version:

Hung Truong Trieu. Études théorique et expérimentale du transport de fluides miscibles en cellule Hele-Shaw. Autre. Institut National Polytechnique de Lorraine, 2011. Français. NNT : 2011INPL027N . tel-01748931

HAL Id: tel-01748931

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748931v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

École Doctorale Sciences et Ingénierie Ressources Procédés Produits Environnement

École Nationale Supérieure de Géologie de Nancy

LAboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 4 mai 2011 en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'I.N.P.L.

Spécialité : Mécanique - Génie Civil

par

TRIEU Hung-Truong

ÉTUDES THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTALE DU TRANSPORT DE FLUIDES MISCIBLES EN CELLULE HELE-SHAW

Membres du jury :

Philippe ACKERER	- Président
François LEHMANN	- Rapporteur
Huaqing WANG	- Rapporteur
Michel BUÈS	- Directeur de thèse
Jean-Régis ANGILELLA	- Co-Directeur de thèse
Constantin OLTEAN	- Co-Directeur de thèse

QUALITÉS ET SPÉCIALITÉS DES MEMBRES DU JURY

Philippe ACKERER - *Président*

Directeur de Recherche CNRS
Spécialité : Hydrodynamique et Transferts en Milieux Poreux
Laboratoire d'Hydrologie et de Géochimie de Strasbourg
1, rue Blessig, 67084 STRASBOURG Cédex

François LEHMANN - *Rapporteur*

Maître de Conférences (HDR) à l'UDS
Spécialité : Hydrodynamique et Transferts en Milieux Poreux
Laboratoire d'Hydrologie et de Géochimie de Strasbourg
1, rue Blessig, 67084 STRASBOURG Cédex

Huaqing WANG - *Rapporteur*

Professeur Université du Havre
Spécialité : Hydrogéologie - Modélisation Numérique
CNRS FRE3102, LOMC (Laboratoire Ondes et Milieux Complexes)
Université du Havre
53, Rue Prony, BP540, 76058 Le Havre Cédex

Michel BUÈS - *Directeur de thèse*

Professeur INPL
Spécialité : Hydrodynamique et Transferts en Milieux Poreux
LAEGO - ENSG
Rue du Doyen Marcel Roubault, Bât. E, B.P. 40,
54501 VANDOEUVRE-Lès-NANCY

Jean-Régis ANGILELLA - *Co-directeur de thèse*

Spécialité : Mécanique des Fuides et Systèmes Dynamiques
Maître de conférences (HDR) à l'INPL
LAEGO - ENSG
Rue du Doyen Marcel Roubault, Bât. E, B.P. 40,
54501 VANDOEUVRE-Lès-NANCY

Constantin OLTEAN - *Co-directeur de thèse*

Spécialité : Hydrodynamique et Transferts en Milieux Poreux
Maître de conférences (HDR) à l'INPL
LAEGO - ENSG
Rue du Doyen Marcel Roubault, Bât. E, B.P. 40,
54501 VANDOEUVRE-Lès-NANCY

À toute ma famille,

À ma fille, Cam Tu et ma femme Thu Hang !

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire Environnement, Géomécanique et Ouvrages (LAEGO), unité de recherche au sein de l'INPL, grâce à un financement des gouvernements vietnamien et français dans le cadre de la coopération éducative entre les deux pays, et avec le soutien financier de l'Association Scientifique pour la Géologie et ses Applications (ASGA, région Lorraine, France) dans le cadre d'un contrat de recherche et d'enseignement. Je les remercie vivement pour leur soutien financier.

Je tiens à remercier sincèrement mon directeur de thèse, M. BUÈS Michel et mes co-directeurs de thèse, M. ANGILELLA Jean-Régis et M. OLTÉAN Constantin, qui m'ont toujours aidé, soutenu et encouragé au cours de mon travail. Je remercie également Eric Lefèvre (technicien du laboratoire LAEGO) pour sa collaboration et son soutien dans la construction du modèle expérimental qui a contribué à la réussite de cette thèse.

Je tiens également à remercier la directrice, l'ensemble du personnel, les doctorants et les stagiaires du LAEGO qui m'ont permis d'évoluer dans des conditions favorables et qui ont coopéré activement au bon déroulement de mes travaux de recherche.

De même, je tiens à remercier les rapporteurs, M. François LEHMANN et M. Huaqing WANG, pour leurs suggestions et commentaires.

Je remercie également M. Philippe ACKERER, M. François LEHMANN, M. Huaqing WANG, M. Michel BUÈS, M. Jean-Régis ANGILELLA et M. Constantin OLTEAN d'avoir été membres du jury et d'avoir reconnu les résultats de mes recherches dans le cadre de cette thèse.

Je tiens à dire merci aux dirigeants, aux enseignants et à mes collègues de l'Ecole des Mines et de Géologie de Hanoi au Vietnam qui ont créé les meilleures conditions afin que je puisse venir compléter mes études en France.

Je remercie également mes amis doctorants pour leur soutien et leur encouragement durant toute cette aventure : Jon, Laurent, Gaëtan, Tiangoua, Phi, Bien, Théophile, Javad, Mohamed, …

Je dédie ce travail à ma femme, Thu Hang ; ma fille, Cam Tu ; mes parents et toute ma famille comme la marque de ma grande reconnaissance.

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENTS 5
LISTE DE FIGURES 8
LISTE DE TABLEAUX 11
CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE 13
1.1. OBJECTIFS DE LA THÈSE 13
1.2. APPROCHES EXPÉRIMENTALES 14
1.2.1. Modèles expérimentaux 14
1.2.1. Méthodologie des mesures expérimentales 19
1.3. ÉQUATIONS DE BASE - APPROCHES THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE 24
1.4. PRÉSENTATION DU TRAVAIL DE THÈSE 28
CHAPITRE 2 : EXPÉRIENCES 30
2.1. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX ET MÉTHODOLOGIE DE MESURES 30
2.2. VÉRIFICATION QUANTITATIVE DE LA VALIDITÉ DU MODÈLE EXPÉRIMENTAL 37
2.2.1. Sur le champ des vitesses en l'absence de soluté 37
2.2.2. Sur les paramètres expérimentaux par injection de traceur 39
2.3. VALIDATION DE LA MÉTHODOLOGIE 40
2.3.1. Sur la conservation de la masse 40
2.3.2. Sur la répétabilité des mesures 43
2.4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX 45
CHAPITRE 3 : SIMULATIONS NUMÉRIQUES 54
3.1. ÉQUATIONS APPROCHÉES POUR LES SIMULATIONS 54
3.2. DESCRIPTION DU DOMAINE ÉTUDIÉ D'UN POINT DE VUE NUMÉRIQUE 55
3.3. RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES 58
3.3.1. Simulations des panaches dans la *configuration stable* 58
3.3.2. Simulations des panaches dans la *configuration «faiblement» instable* 61
3.3.3. Simulations des panaches dans la configuration «fortement» instable 65

3.4. INFLUENCE DU TENSEUR DE DISPERSION SUR LA PROPAGATION DU PANACHE 70
3.4.1. Tenseur isotrope de diffusion 70
3.4.2. Tenseur anisotrope 73
3.5. ANALYSE DU CHAMP DES VITESSES DANS L'ÉCOULEMENT 78
3.6. INLUENCE DE VISCOSITÉ DANS LE MODÈLE NUMÉRIQUE 81
CHAPITRE 4 : ANALYSE DE STABILITÉ 86
4.1. INTRODUCTION 86
4.2. ÉCOULEMENT DE BASE 90
4.3. PERTURBATION - LINÉARISATION DES ÉQUATIONS 91
4.4. ANALYSE DE STABILITÉ SPATIALE - MODES NORMAUX 93
4.5. TAUX DE CROISSANCE ET LONGUEUR D'ONDE THÉORIQUES AVEC TENSEUR ISOTROPE. 99
4.6. GÉNÉRALISATION AU CAS D'UN TENSEUR DE DISPERSION ANISOTROPE 101
4.6.1. Équation linéarisée avec tenseur de dispersion anisotrope 101
4.6.2. Effet de l'anisotropie sur l'instabilité 104
4.7. INFLUENCE DES DIVERS PARAMÈTRES SUR LA STABILITÉ DU PANACHE 106
4.7.1. Effet de la concentration d'injection 107
4.7.2. Effet du débit d'injection 108
4.7.3. Effet du nombre de Peclet 110
4.8 CONCLUSION – CRITÈRE DE STABILITÉ 111
CONCLUSIONS GÉNÉRALES 115
PERSPECTIVES 118
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 120
RÉSUMÉ 130
ABSTRACT: 130

LISTE DE FIGURES

Figure 1.1 : *Propagation des polluants en milieu poreux*..... 13
Figure 1.2 : *Modèle de milieu poreux utilisé par Dane et al.* [16]..... 15
Figure 1.3 : *Modèle de milieu poreux utilisé par Schincariol et Schwartz* [57]..... 16
Figure 1.4 : *Schéma de la cellule de Hele-Shaw*..... 16
Figure 1.5 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Tsay et Hoopes* [68]..... 17
Figure 1.6 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Felder* [19] 17
Figure 1.7 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Fernandez et al.* [20]..... 18
Figure 1. 8: *Modèle Hele-Shaw utilisé par Cooper et al.* [12] 18
Figure 1.9 : *Système de TDEM utilisé par Levi et al.* [36]..... 20
Figure 1.10 : *Principe de mesure par absorption lumineuse de Felder* [19]..... 21
Figure 1.11 : *Principe de mesure de PIV* [www.dantecdynamics.com]. 22
Figure 1.12 : *Principe de mesure de LIF* [*www.dantecdynamics.com*]..... 23
Figure 1.13 : *Principe du couplage LIF/PIV* [*www.dantecdynamics.com*]..... 24
Figure 2.1 : *Cellule de Hele-Shaw*..... 30
Figure 2.2 : *Schéma du dispositif expérimental*..... 31
Figure 2.3 : *Méthode de mesure.* 32
Figure 2.4 : *Profil d'intensité lumineuse de la tache de laser.* 33
Figure 2.5 : *Fonction d'étalonnage bijective des images moyennes.* 34
Figure 2.6 : *Différence de température dans le modèle.* 35
Figure 2.7 : *Effet de la différence de température sur le panache de traceur* 35
Figure 2.8 : *Système expérimental immergé dans un aquarium transparent.* 35
Figure 2.9 : *Homogénéisation de la température dans le modèle expérimental* 36
Figure 2.10 : *Écoulement dans la cellule Hele-Shaw sans et avec aquarium.* 36
Figure 2.11 : *Dispositifs expérimentaux* 37
Figure 2.12 : *Deux images des particules dans la cellule prises aux temps T_1 , T_2*.. 38
Figure 2.13 : *Champ de vitesse dans la cellule obtenu par PIV, en l'absence de soluté.* 38
Figure 2.14 : *Écoulement autour d'une source placée dans un écoulement uniforme* 39
Figure 2.15 : *Largeur expérimentale et analytique du panache de traceur* 39
Figure 2.16 : *Vérification de la conservation de la masse* 41
Figure 2.17 : *Répétition des expériences dans la configuration stable* 44

Figure 2.18 : *Répétition des expériences dans la configuration instable*.....44
Figure 2.19 : *Erreurs locales de planéité intérieure de la cellule*.....45
Figure 2.20 : *Plage de variation des paramètres expérimentaux*.....45
Figure 2.21 : *Résultats expérimentaux (configurations typiques)*.....46
Figure 2.22 : *Résultats expérimentaux (effet de la vitesse)*.....48
Figure 2.23 : *Distribution de la concentration du panache*.....49
Figure 3.1 : *Géométrie et conditions aux limites du modèle numérique*.....56
Figure 3.2 : *Maillage du modèle numérique*.....56
Figure 3.3 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration stable*...59
Figure 3.4 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration faiblement instable (V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L et Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')*.....62
Figure 3.5 : *Propagation spatio-temporelle du panache numérique et expérimental*63
Figure 3.6 : *Influence de nombre Pe_{cell}*.....65
Figure 3.7 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration fortement instable*.....66
Figure 3.8 : *Instabilité du panache numérique obtenue par modification de tolérance*.....68
Figure 3.9 : *Propagation spatio-temporelle de la configuration fortement instable*...69
Figure 3.10 : *Influence de la forme du tenseur de dispersion (Pe =14.7)*.....71
Figure 3.11 : *Influence de la forme de tenseur de dispersion (Pe=22)*.....72
Figure 3.12 : *Influence de la forme du tenseur de dispersion.*.....73
Figure 3.13 : *Influence du contraste de masse volumique dans le tenseur de dispersion (V_∞ = 0.16 mm/s ; C_{inj} = 3.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=4')*.....75
Figure 3.14 : *Comparaison des simulations utilisant une dispersivité constante ou variable*.....76
Figure 3.15 : *Changement de morphologie du panache vs dispersivité*.....77
Figure 3.16 : *Effet stabilisateur de la dispersivité*.....78
Figure 3.17 : *Champ des vitesses du panache*.....79
Figure 3.18 : *Composante horizontale du champ des vitesses du panache*.....80
Figure 3.19 : *Composante verticale du champ des vitesses du panache*.....80
Figure 3.20 : *Influence de la vitesse d'injection.*.....81
Figure 3.21 : *Influence de la variation de viscosité.*.....81
Figure 3.22 : *Influence du contraste de viscosité dans le tenseur de dispersion*.....82
Figure 3.23 : *Effet stabilisant de l'augmentation de viscosité.*.....82

Figure 3.24 : *Effet déstabilisant de la diminution viscosité.* 83
Figure 4.1 : *Schéma du problème simplifié* 89
Figure 4.2 : *Exemples de champs de concentration obtenus par résolution du problème aux valeurs propres avec C_{inj}=0,2 g/L, V_∞=0.06 mm/s, Q_{inj}=2 mL/h, pour deux pulsations ω différentes. Configuration instable (à gauche) et stable (à droite).* 99
Figure 4.3 : *Taux de croissance spatial $-k_i$ et nombre d'onde k_r de la perturbation vs. ω (V_∞ = 0.06mm/s, Q_{inj} = 0.5 mL/h, C_{inj} =0.1 ; 0.2 ; 0.3 g/L)* 100
Figure 4.4 *: Taux de croissance spatial (à gauche) et nombre d'onde (à droite) pour un tenseur de dispersion isotrope (α_L = 0) et anisotrope ($\alpha_L \neq 0$),* 105
Figure 4.5 *: Illustration de l'effet de l'anisotropie sur la longueur d'onde.* 106
Figure 4.6 *: Taux de croissance $-k_i$ (à gauche) et nombre d'onde (à droite), lorsque la concentration d'injection varie.* 107
Figure 4.7 *: Taux de croissance maximal en fonction de Vg.* 108
Figure 4.8 *: Nombre d'onde k_r^{max} du mode le plus instable.* 108
Figure 4.9 : *Taux de croissance $-k_i$ (à gauche) et nombre d'onde (à droite), pour divers débits d'injection, lorsque Pe=22.* 109
Figure 4.10 : *Nombre d'onde et taux de croissance du mode le plus instable, pour Pe=22.* 109
Figure 4.11 : *Illustration expérimentale de l'invariance de la longueur d'onde du mode le plus instable lorsque le débit d'injection varie (V_∞=0,16mm/s ; C_{inj}=1,0g/L).* 110
Figure 4.12 *: Taux de croissance $-k_i$ (à gauche) et nombre d'onde (à droite), pour diverses vitesses d'écoulement zonal.* 110
Figure 4.13 *: Taux de croissance et nombre d'onde du mode le plus instable, lorsque Pe varie.* 111

LISTE DE TABLEAUX

Tableau 2.1 : *Résultats de calculs des masses théoriques et mesurées* 42
Tableau 2.2 : *Résultats d'observation sur le statut du panache.* 51
Tableau 3.1 : *Grandeurs physiques du problème*.....58

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GÉNÉRALE

1.1. OBJECTIFS DE LA THÈSE

La détermination de la propagation de soluté en milieu poreux est une problématique très importante que l'on rencontre dans des contextes divers. Elle est en effet liée à de nombreux problèmes environnementaux tels que la contamination des eaux souterraines, l'intrusion saline dans les aquifères côtiers, les fuites des stockages de déchets radioactifs, le développement de l'énergie géothermique, les interactions eau de surface/eau souterraine, … (figure 1.1). À titre d'exemple, lors d'une contamination accidentelle ou naturelle des eaux souterraines, la prédiction de la propagation spatio-temporelle de polluant peut nous aider à mettre au point des opérations de restauration et/ou de protection de la qualité des eaux souterraines.

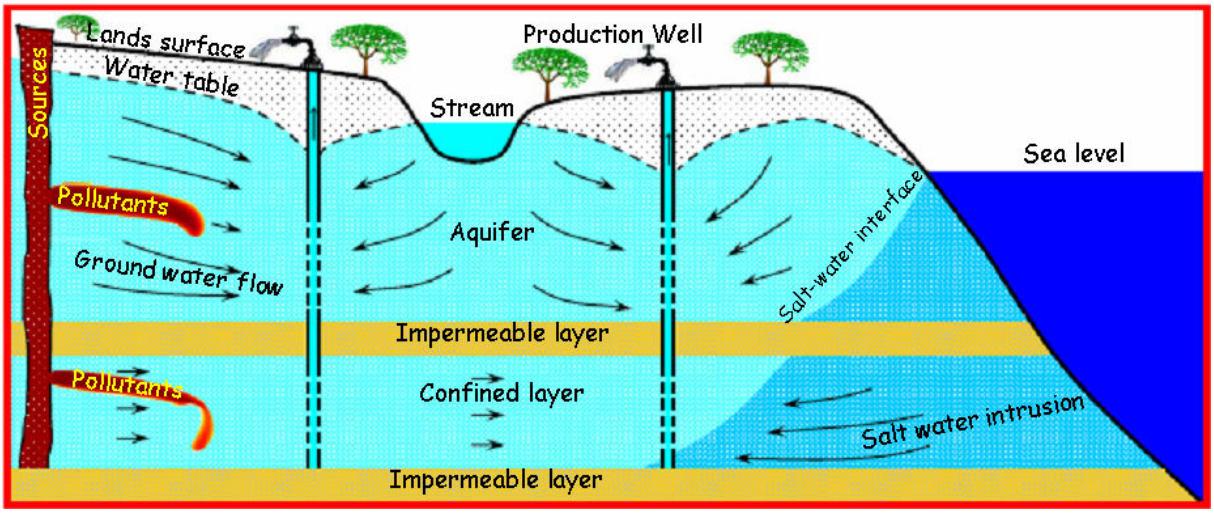


Figure 1.1 : *Propagation des polluants en milieu poreux*

Pour les contaminants non réactifs miscibles, les propriétés physiques comme la masse volumique et/ou la viscosité dynamique du fluide varient avec la concentration. Ces paramètres physiques peuvent modifier les propriétés hydrodynamiques des aquifères, et donc la dispersion hydrodynamique qui constitue l'un des principaux facteurs dans le développement et la propagation de la zone de mélange.

Les objectifs de cette thèse sont donc :

(i) valider un modèle standard d'expérience en laboratoire avec une cellule transparente de Hele-Shaw et l'utiliser pour analyser le transport de soluté dans un écoulement ambiant en milieu poreux ;

(ii) comparer la propagation spatio-temporelle de polluants avec les précédents résultats numériques et expérimentaux publiés [58] [39][27] [44] ;

(iii) vérifier la possibilité d'appliquer le logiciel commercial COMSOL à notre problème [11] ;

(iv) vérifier la validité des critères de stabilité publiés précédemment [11] [27] [44] et proposer un critère semi-empirique de stabilité ;

(v) réaliser une étude théorique linéaire afin d'analyser les conditions d'instabilité des écoulements.

1.2. APPROCHES EXPÉRIMENTALES

1.2.1. Modèles expérimentaux

Le problème du transport en écoulement gravitationnel dans un milieu poreux est délicat à traiter. Ainsi, pour la fiabilité de résultats, les solutions numériques et analytiques sont souvent directement comparées aux résultats expérimentaux [8] [19] [38] [44] [49] [56] [68]. Les expériences d'écoulement gravitationnel dans un milieu poreux sont réalisées aussi bien à l'échelle du terrain qu'à l'échelle du laboratoire.

1.2.1.1. Expérience à l'échelle du terrain

La réalisation des expériences sur sites est une méthode pertinente parce qu'elle reflète très bien les conditions réelles du problème. Les résultats obtenus peuvent être appliqués directement à la réalité. Toutefois, ces expériences sont coûteuses, difficiles à réaliser, et sont très chronophages. Pourtant, il s'agit de démarches choisies dans quelques cas particuliers. Par exemple, Simpson et Herczeg [60] ont réalisé des mesures de la composition en isotopes stables de l'eau et de la concentration en chlorure à 26 stations sur la rivière Murray en Australie durant 6 mois pour déterminer le flux de soluté, l'écoulement de drainage dans le sous-sol ainsi que l'évaporation.

Killey et Moltyaner [34] ont réalisé une expérience à l'échelle du terrain sur le site de Twin Lake au Canada. Un traceur radioactif a été injecté dans un aquifère

sableux. La mesure de la distribution du traceur a permis d'étudier la répartition de la conductivité hydraulique et les caractéristiques de dispersion de ce système.

1.2.1.2. Expérience à l'échelle du laboratoire

Dues aux difficultés de réaliser une expérience à échelle du terrain, les études expérimentales de l'écoulement dans un milieu poreux sont souvent mises en œuvre à l'échelle du laboratoire sous la forme d'un modèle physique de milieu poreux de dimensions réduites ou d'un modèle analogue de milieux poreux.

- ***Modèle de milieu poreux en miniature :***

Le modèle de milieu poreux miniature est souvent formé d'un réservoir contenant un milieu poreux naturel (*e.g.* : sables, graviers, … [16]) ou un milieu poreux artificiel constitué des billes de verre [57].

Dane *et al*. [16] ont utilisé un modèle de milieu poreux sableux afin d'étudier le transport de soluté avec une source d'injection se situant sur la partie supérieure du modèle (figure 1.2), tandis que Schincariol *et al*. [57] ont utilisé un modèle avec une source d'injection située au bord latéral du modèle (figure 1.3).

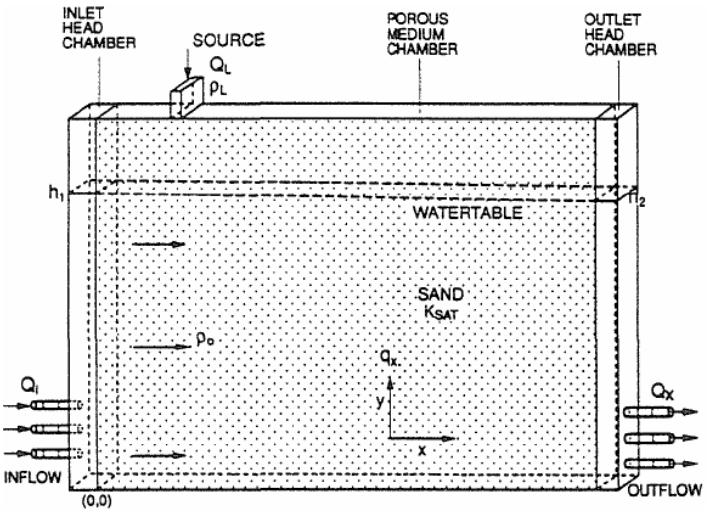


Figure 1.2 : *Modèle de milieu poreux utilisé par Dane et al.* [16]

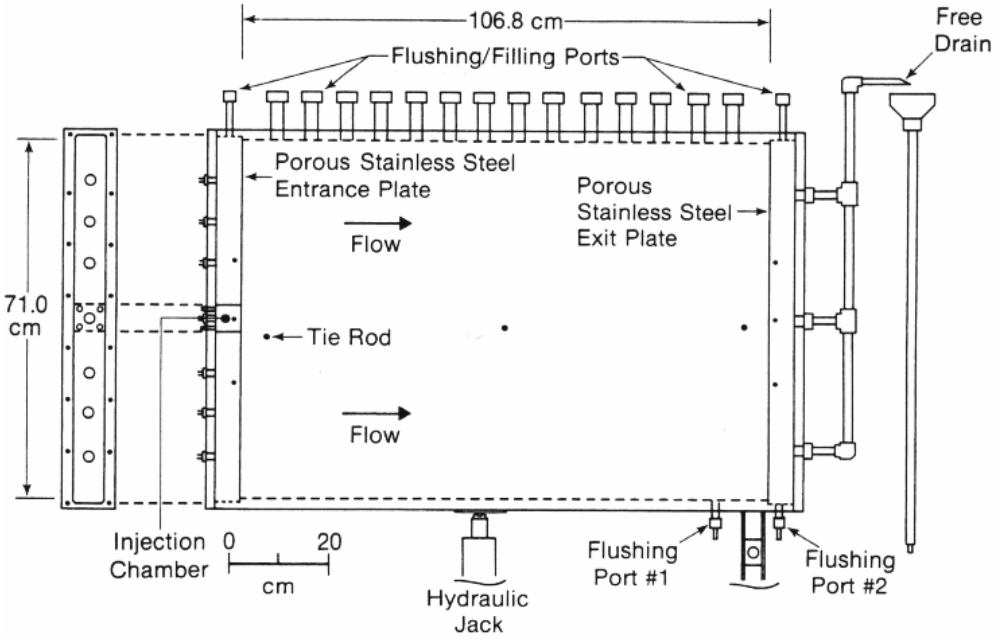


Figure 1.3 : *Modèle de milieu poreux utilisé par Schincariol et Schwartz* [57].

- ***Modèle analogue de milieu poreux :***

De nombreuses études expérimentales sont réalisées avec une cellule de Hele-Shaw, modèle analogue de milieux poreux. Elle est constituée de deux plaques parallèles transparentes ou non avec un espacement b entre les deux suffisamment petit pour que les gradients de vitesse suivant les directions x et z soit beaucoup plus petits que les gradients suivant la direction y (figure 1.4)

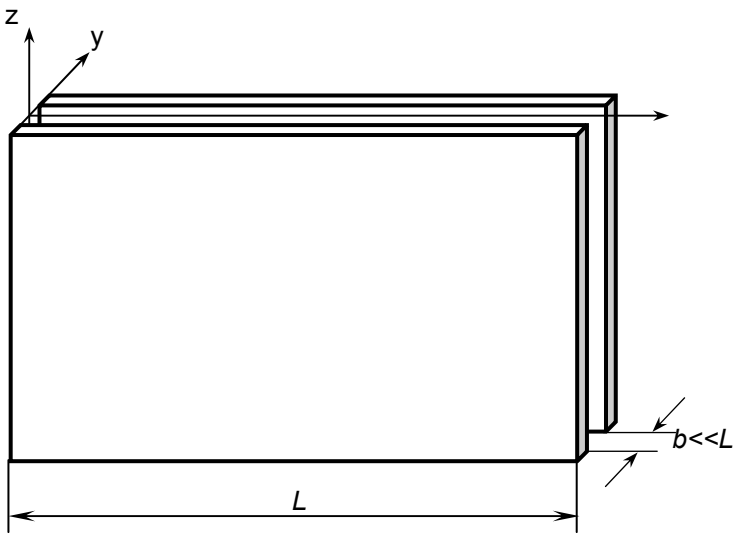


Figure 1.4 : *Schéma de la cellule de Hele-Shaw*

Les équations de l'écoulement dans ce modèle sont analogues à celles d'un milieu poreux bidimensionnel ayant une perméabilité intrinsèque $k_0 = b^2/12$.

Tsay et Hoopes [68] ont utilisé un modèle de Hele-Shaw pour analyser des battements de nappe (figure 1.5).

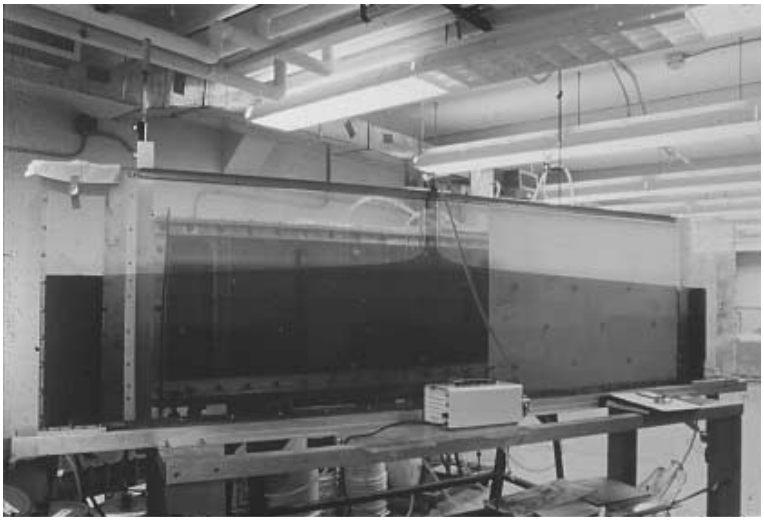


Figure 1.5 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Tsay et Hoopes* [68]

Felder *et al*. [19] et Mainhagu *et al*. [41] ont utilisé un modèle Hele-Shaw pour étudier le transport d'un soluté injecté ponctuellement par l'intermédiaire d'une seringue sous une condition sans écoulement (figure 1.6).

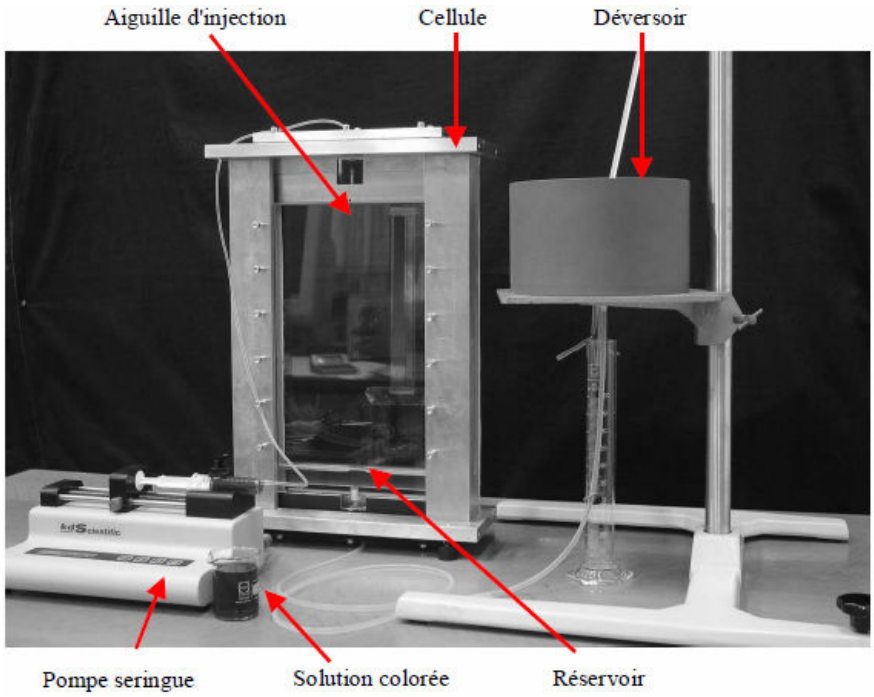


Figure 1.6 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Felder* [19]

Fernandez *et al*. [20] ont utilisé un modèle Hele-Shaw pour réaliser une étude sur les instabilités entre deux fluides miscibles, dans le cas d'un fluide plus dense superposé à un fluide plus léger (figure 1.7).

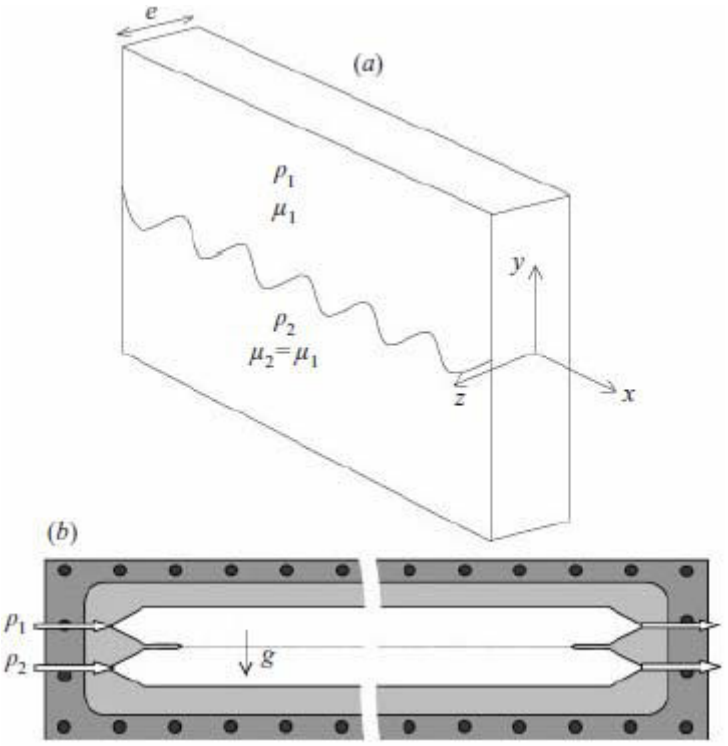


Figure 1.7 : *Modèle Hele-Shaw utilisé par Fernandez et al.* [20]

(a) Vue schématique de la cellule de Hele-Shaw. (b) Le canal est divisé en deux sections mesurant chacune 3 cm de haut et 53 cm de long.

Une expérience similaire à celle de Fernandez *et al*. [20] permettant de tester le critère de stabilité de Nield [47] dans des conditions de convection double-diffusive a été mise en place par Cooper et *al.* [12][13]. Dans ces expériences (figure 1.8), le fluide le plus léger, *i.e.* l'eau, a été remplacé par une solution sucrée.

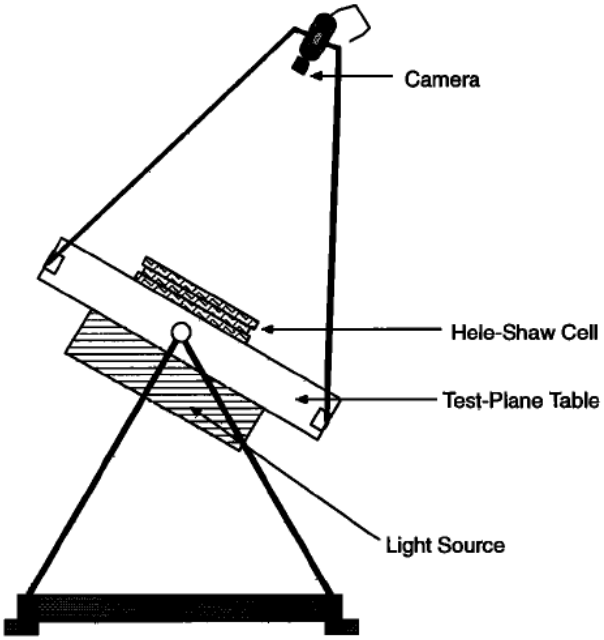


Figure 1. 8: *Modèle Hele-Shaw utilisé par Cooper et al.* [12]

Citons également d'autres auteurs qui ont mis en œuvre ce modèle comme : Wooding [75][74], Homsy [30], Azaiez et Singh [5], Maes *et al* [40], …

Notons qu'un des avantages majeurs d'un modèle analogue du type Hele-Shaw réside dans l'utilisation de technique de mesures innovantes et non intrusives pour déterminer les champs de grandeurs pertinentes comme la vitesse et la concentration.

1.2.1. Méthodologie des mesures expérimentales

Si certains paramètres (*e.g.* : la masse volumique et la viscosité de l'eau pure, la concentration de polluants, la perméabilité, la porosité, …) peuvent être mesurés directement par des méthodes simples en laboratoire sur des échantillons étudiés ou référencés dans la littérature (*e.g.* [71]), d'autres, comme le champ des vitesses, le champ des concentrations et/ou le champ des pressions, nécessitent la mise en place de méthodes de mesures particulières.

Pour les expériences à l'échelle du terrain, bien que plus représentatives des conditions réelles du problème étudié, les mesures sont influencées par de nombreux facteurs naturels extérieurs. Les informations sur les variables mesurées sont faibles parce qu'elles sont obtenues en des points discrets du domaine étudié. La méthode électromagnétique est souvent utilisée pour les expérimentations à l'échelle du terrain. Cette méthode concerne la mesure de la résistivité électrique du sol qui reflète la valeur de variables mesurées dans le domaine étudié. Par exemple, Levi *et al*. [36] ont utilisé un système géophysiques de TDEM (*time domain electromagnetic*) pour tracer la distribution spatiale de la salinité des eaux souterraines sous le désert de Judée, en Israël (figure 1.9).

Figure 1.9 : *Système de TDEM utilisé par Levi et al.* [36]

Pour les expériences à l'échelle du laboratoire, trois méthodes principales de mesure peuvent être appliquées afin de déterminer les champs des variables du problème : la *méthode électrique* [32] [54], la *méthode par résonance magnétique* [70] [52] et *la méthode optique*. La *méthode optique* est efficace pour les modèles transparents et homogènes, particulièrement pour un modèle analogue du type Hele-Shaw. Ainsi, cette méthode est actuellement une des méthodes les plus utilisées pour les expériences à l'échelle du laboratoire menées sur un tel dispositif. Pour cette configuration, il existe plusieurs techniques : par absorption lumineuse [19], la PIV (*Particle Image Velocimetry*) [63], la LIF (Laser Induced Fluorecence) [41] et le couplage de LIF/PIV [31]

- ***Technique par absorption lumineuse :***

Cette technique est utilisée afin de déterminer le champ des concentrations dans un écoulement. La solution étudiée est mélangée avec un colorant. La lumière émise par une source en traversant ce mélange sera absorbée par le colorant. Le niveau d'absorption dépend de la concentration du colorant dans la solution. Un traitement d'images ad' hoc permet alors d'obtenir le champ des concentrations et aussi l'évolution spatio-temporelle du panache de colorant dans l'écoulement (figure 1.10) [45] [19].

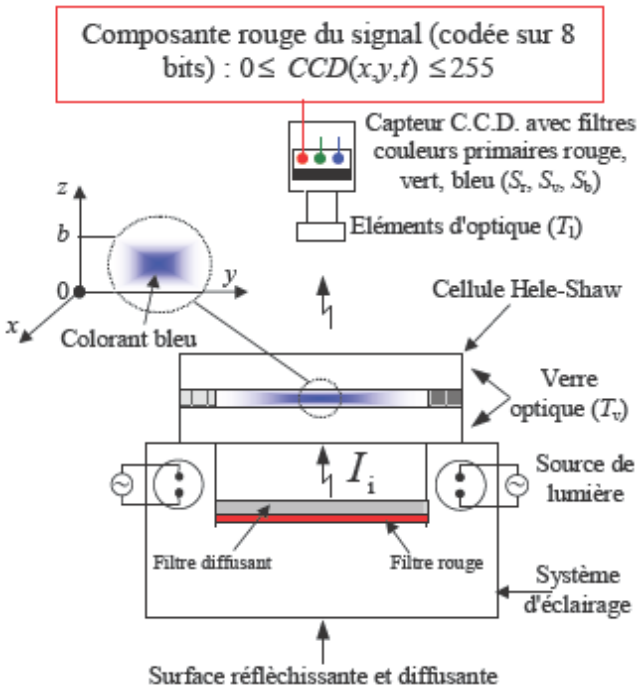


Figure 1.10 : *Principe de mesure par absorption lumineuse de Felder* [19].

➢ ***Technique de mesure PIV :***

La PIV (*Particle Image Velocimetry*) est une technique non intrusive pour mesurer le champ des vitesses d'un écoulement de fluide. Des particules fluorescentes sont ensemencées dans le champ de l'écoulement puis excitées par un laser pulsé. Les positions des particules sont suivies et enregistrées pour chaque intervalle de temps Δt par une caméra numérique. Ensuite, le logiciel intégré dans le système PIV traitera les images contenant les données de positions et les temps d'enregistrement des particules et précisera la valeur et la direction de la vitesse des particules. In fine, après dépouillement, le champ des vitesses de l'écoulement sera quantifié dans le domaine considéré (figure 1.11).

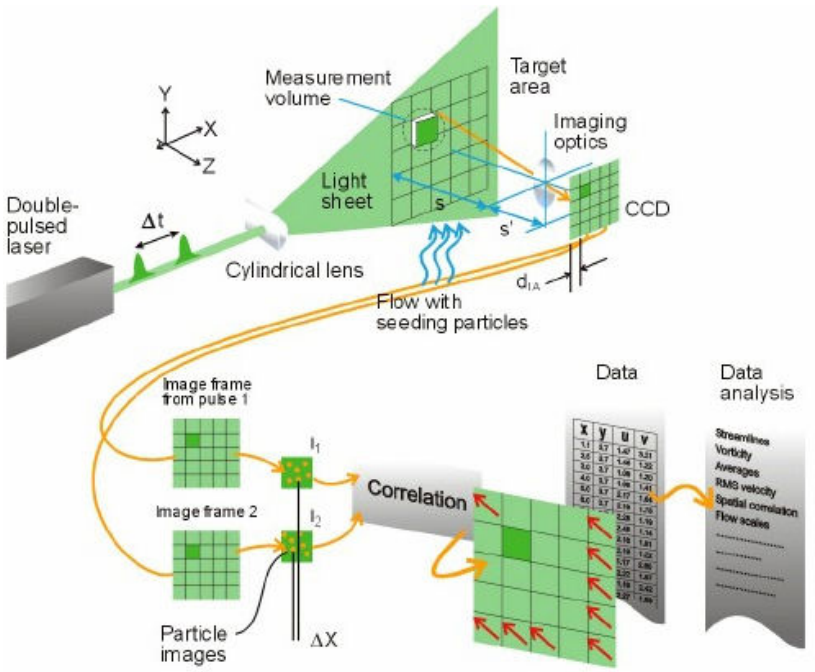


Figure 1.11 : *Principe de mesure de PIV* [www.dantecdynamics.com].

➢ ***Technique de mesure LIF :***

La LIF (*Laser Induced Fluorescence*) est une technique de mesure non intrusive utilisée pour mesurer le champ des concentrations ou des températures dans l'écoulement d'un fluide. Un traceur (*e.g.* la rhodamine 6G dans nos travaux) est mélangé au liquide étudié. Par excitation due au laser, ce traceur réémet une lumière ayant une longueur d'onde détectable. En comparant l'intensité de chaque pixel de l'image enregistrée à la courbe d'étalonnage, la LIF nous donne un champ de concentration ou de température dans le domaine étudié (figure 1.12).

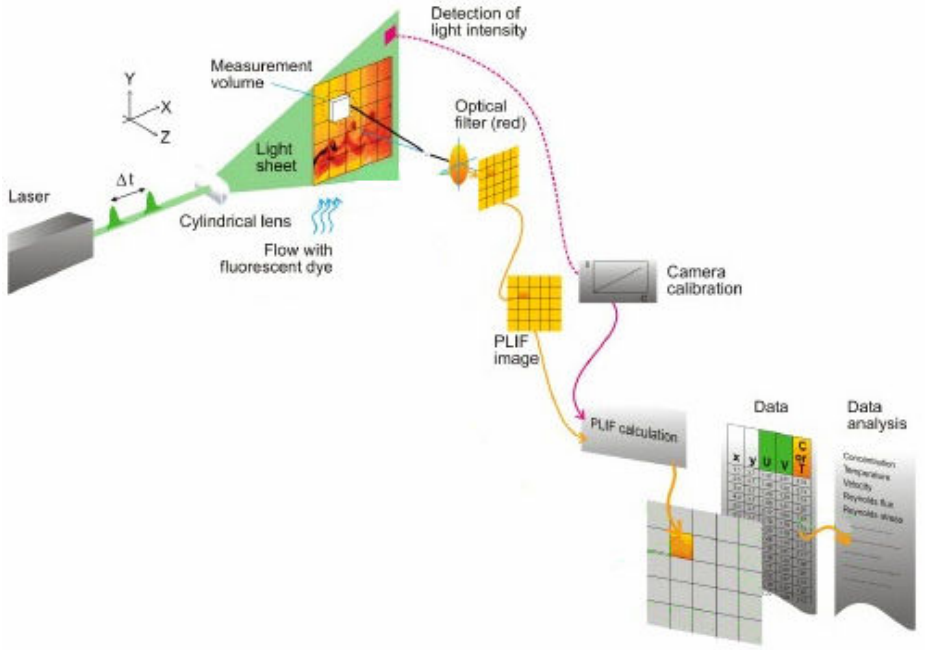


Figure 1.12 : *Principe de mesure de LIF* [*www.dantecdynamics.com*].

➢ ***Couplage LIF/PIV :***

Un couplage des techniques LIF et PIV permet de mesurer à la fois le champ des concentrations et des vitesses. Des particules fluorescentes et un traceur sont mélangés dans le fluide dont on étudie l'écoulement. Par excitation due au laser, les particules fluorescentes et le traceur réémettent des lumières ayant des longueurs d'onde différentes. L'utilisation de filtres optiques appropriés permet à chaque caméra de capter la lumière émise spécifiquement par les particules fluorescentes ou le traceur. Les images des particules sont analysées par la PIV, tandis que les images du traceur sont interprétées par la LIF. Au final, on peut obtenir à la fois le champ des vitesses et le champ des concentrations (figure 1.13).

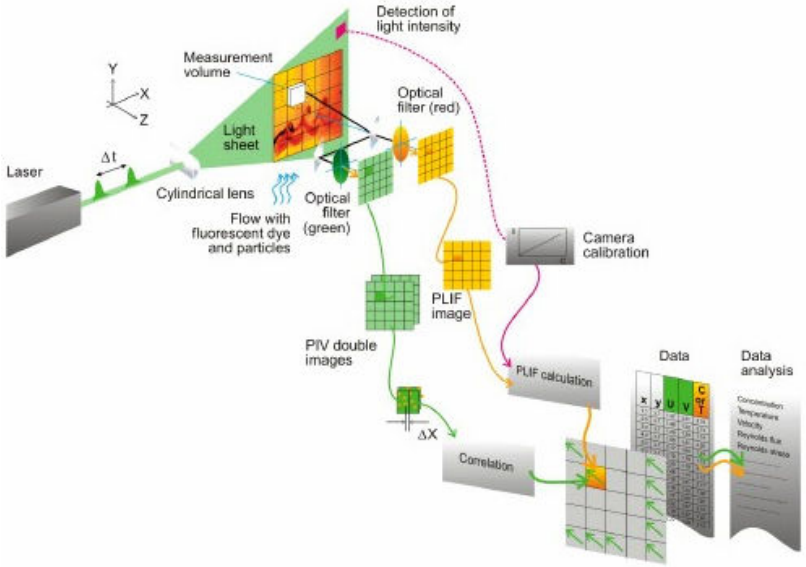


Figure 1.13 : *Principe du couplage LIF/PIV* [*www.dantecdynamics.com*].

Dans cette thèse, afin de : (i) visualiser et mesurer la distribution spatio-temporelle du champ des vitesses et des concentrations et (ii) afin de minimiser les perturbations induites par les hétérogénéités locales inhérentes à tout milieu poreux, nous allons utiliser un modèle expérimental du type cellule de Hele-Shaw transparente afin de mettre en œuvre les techniques non-intrusives décrites précédemment, *i.e.* : la LIF et la PIV.

1.3. ÉQUATIONS DE BASE - APPROCHES THÉORIQUE ET NUMÉRIQUE

Le déplacement d'un soluté non réactif en milieu poreux saturé est décrit par un système d'équations constitué de l'équation de bilan de masse de fluide, celle du bilan de masse de soluté et la loi de Darcy [6] :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \nabla.\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right) = \rho Q_p \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\varepsilon C_m\right)}{\partial t} + \nabla.(\rho\vec{V}\varepsilon C_m) - \nabla.[\rho\varepsilon\overline{\overline{\mathbb{D}}}\nabla C_m] = \rho Q_p C_{m0} \tag{1.2}$$

$$\vec{V} = -\frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon\mu}\left(\nabla P + \rho g \nabla z\right) \tag{1.3}$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles est couplé aux équations d'état décrivant la variation de la masse volumique et/ou de la viscosité dynamique en fonction de la concentration :

$$\rho = \rho_0(1+\gamma C_m) \tag{1.4}$$

$$\mu = \mu_0\left(1+\beta C_m\right) \tag{1.5}$$

où :

- ρ_0 et ρ sont, respectivement, la masse volumique du fluide ambiant et la masse volumique du fluide dans la zone de mélange [M/L^3] ;
- μ_0 et μ sont respectivement, la viscosité dynamique de fluide ambiante et celle du fluide de la zone de mélange [$ML^{-1}T^{-1}$] ;
- γ, β des constantes expérimentales [-] (Weast [71]) ;
- ε porosité [-] ;
- $\vec{V}$ le champ des vitesses [LT^{-1}] ;
- C_m [-] la concentration massique de soluté ;
- C_{m0} [-] la concentration massique de soluté dans la source/puits ;
- $\bar{\bar{k}}$ le tenseur de perméabilité intrinsèque [L^2] ;
- Q_p le terme de source/puits [T^{-1}];
- g l'accélération de la pesanteur [LT^{-2}] ;
- t le temps [T] ;
- z l'altitude [L] ;
- $\bar{\bar{\mathbb{D}}}$ le tenseur de dispersion hydrodynamique et de diffusion moléculaire [L^2T^{-1}] ;

Selon Scheidegger [55], le tenseur de dispersion en milieu poreux est défini par :

$$\bar{\bar{\mathbb{D}}} = \left(D_m + \alpha_T\left|\vec{V}\right|\right)\mathbb{I} + \frac{(\alpha_L - \alpha_T)\vec{V}\otimes\vec{V}}{\left|\vec{V}\right|}\ , \tag{1.6}$$

où : D_m est le coefficient de diffusion moléculaire [L^2T^{-1}]; α_L, α_T sont la dispersivité longitudinale et transversale [L] ; $\mathbb{I}$ le tenseur unité.

Les analyses mathématiques de Taylor [62] et Aris [4] réalisées dans un tube cylindrique ont montré que la dispersion longitudinale est une fonction quadratique de la vitesse moyenne de l'écoulement, tandis que la dispersion transversale est égale à zéro, ce qui conduit à un tenseur de dispersion de la forme suivante :

$$\overline{\overline{\mathbb{D}}} = D_m \mathbb{I} + \frac{b^2\left(\vec{V} \otimes \vec{V}\right)}{210 D_m} \tag{1.7}$$

Oltéan *et al*. [49] [50] ont analysé théoriquement le phénomène de convection-dispersion dans une cellule de Hele-Shaw dans le cas d'un contraste de masse volumique et ils ont proposé une forme modifiée du tenseur de Taylor, qui dépend de la concentration en soluté. L'analogie entre la dispersion en milieu poreux et la dispersion en cellule de Hele-Shaw est alors obtenue en remplaçant, dans (1.6), α_T par (α_T =0) et α_L par une expression dépendant de la vitesse et de la concentration du soluté :

$$\alpha_L = \frac{b^2 |V|}{210 D_m}\left[1 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right] \tag{1.8}$$

Dans cette thèse, nous avons utilisé les équations (1.1) - (1.8) pour analyser le phénomène de transport dans le cas général d'une variation de masse volumique et de viscosité dynamique en fonction de la concentration en soluté.

Comme nous le savons, une solution analytique pour l'écoulement et le transport avec un contraste de masse volumique n'est pas envisageable en raison de la multiplicité et la complexité des géométries et de la non-linéarité des équations. Dans ces conditions, il est préférable d'opter pour une méthode de résolution numérique. Les résultats numériques obtenus sont généralement vérifiés par comparaison avec des résultats expérimentaux ou avec des benchmarks.

Elder [21] et Wooding [73] sont parmi les premiers auteurs qui ont utilisé les méthodes numériques pour estimer les effets des processus de convection en milieu poreux 2D. A partir de là, de plus en plus de scientifiques ([22] [14] [64] [16] [72] [38] [17] [35] [23] [56] [43] [3] [29]…) ont utilisé des méthodes numériques pour résoudre les problèmes de l'écoulement en présence du champ de pesanteur (en particulier dans le cas instable) avec des techniques différentes telles que les éléments finis,

les différences finies, ou encore les volumes finis. On peut citer ici quelques études typiques selon leur chronologie.

Mendoza et Frind [43] ont utilisé un code aux éléments finis (VapourT) pour simuler le transport de vapeurs denses dans une zone saturée. Ensuite, Schincariol et Schwartz [56] ont utilisé ce code pour analyser les instabilités dans l'écoulement de fluides miscibles.

Liu et Dane [38] ont aussi étudié les aspects numériques de l'écoulement instable dans un milieu poreux tridimensionnel et les ont comparés aux résultats expérimentaux de Schincariol et Schwartz [57].

Tsay *et* Hoopes [68] ont utilisé la méthode des différences finies pour calculer un buttage d'eaux souterraines et puis ont comparé les résultats numériques aux résultats expérimentaux obtenus dans une cellule de Hele-Shaw de grandes dimensions.

Ackerer *et al*. [1] ont proposé un modèle numérique pour modéliser l'écoulement et le transport de soluté dans un milieu poreux. Ce modèle est basé sur une combinaison entre la méthode des éléments finis mixtes hybrides (MHFEM) et la méthode des éléments finis discontinus (DFEM).

Ensuite, Buès *et* Oltéan [8] [48] ont développé un code numérique FRIPE (Fluide Réacifs ou Inertes en Poreux hEterogènes) pour simuler le déplacement de deux fluides miscibles dans un milieu poreux saturé (configuration bidimensionnelle). Ce code utilise aussi une combinaison de la méthode des éléments finis mixtes hybrides (MHFEM) et de la méthode des éléments finis discontinus (DFEM). La MHFEM est appliquée à la loi de Darcy, à l'équation de continuité et au terme de dispersion de l'équation de transport ; tandis que la DFEM, couplée avec une technique de limiteur de pente [24] est utilisée pour résoudre le terme d'advection de l'équation du bilan de masse du soluté. Felder *et al*. [19], Mainhagu *et al*. [41] ont aussi utilisé ce code pour simuler le transport du soluté dans une cellule de Hele-Shaw.

Musuuza *et al* [44] ont utilisé la méthode de volumes finis pour tester un critère de stabilité de l'écoulement gravitationnel.

Dans cette thèse, le système précédent sera résolu en utilisant le pack COMSOL Multiphysics [11]. Les résultats numériques seront comparés directement

à nos résultats expérimentaux obtenus dans la cellule verticale de Hele-Shaw avec un écoulement latéral.

On remarque ainsi qu'il y a peu d'études expérimentales en cellule de Hele-Shaw avec écoulement zonal. Un des objectifs de la thèse est de réaliser des expériences fiables qui pourront être utilisées à la vérification et/ou à la validation des solutions numériques.

1.4. PRÉSENTATION DU TRAVAIL DE THÈSE

Notre étude porte sur la sédimentation d'un soluté dans un milieu analogue de milieu poreux, avec écoulement zonal horizontal.

Dans le chapitre 1, nous avons introduit les informations générales concernant les études de l'écoulement gravitationnel dans un milieu poreux et les objectifs de la thèse.

Dans le chapitre 2, nous présenterons le dispositif expérimental, la méthodologie de mesure, la mise au point expérimentale des caractéristiques de l'écoulement en cellule de Hele-Shaw verticale, ainsi que les résultats expérimentaux. Après analyse des résultats expérimentaux, nous proposerons un critère expérimental pour caractériser la stabilité de l'écoulement gravitationnel dans une cellule de ce type.

Le chapitre 3 sera consacré aux simulations numériques dans le but de reproduire les résultats expérimentaux.

A la vue des résultats expérimentaux et numériques, un modèle théorique simple sera choisi pour mimer les instabilités expérimentales sous la forme d'une instabilité spatiale convective (chapitre 4).

Ce travail s'achèvera par des conclusions reprenant les principaux résultats pertinents. *In fine*, des perspectives ouvriront les nouvelles directions de recherche et soulèveront les questions restées ouvertes.

CHAPITRE 2

EXPÉRIENCES

CHAPITRE 2 : EXPÉRIENCES

Dans cette partie nous allons présenter le modèle physique de laboratoire (cellule de Hele-Shaw) qui nous permet d'analyser l'évolution spatio-temporelle d'une solution saline injectée dans un champ d'écoulement zonal horizontal, reproduisant celui d'une formation aquifère. Les résultats expérimentaux seront par la suite comparés avec les résultats numériques et théoriques.

2.1. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX ET MÉTHODOLOGIE DE MESURES

Le modèle physique est une cellule de Hele-Shaw, similaire à celle utilisée par Oltéan *et al*. [49] et Mainhagu *et al.* [41]. Elle est constituée de deux plaques parallèles transparentes disposées verticalement et placées dans une enceinte en aluminium utilisée pour définir l'ouverture du canal d'écoulement entre les plaques (dans notre cas, l'ouverture est fixée à 0,55 mm). Notons que cette ouverture fixe la perméabilité intrinsèque du milieu poreux analogue. Les plaques sont en verre optique de 200 mm de hauteur, 300 mm de largeur et 10 mm d'épaisseur (fig. 2.1).

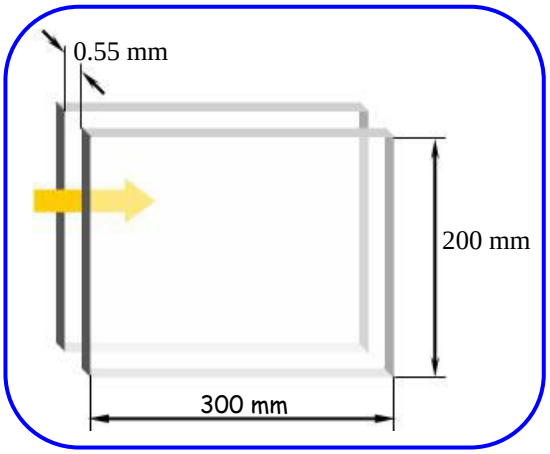


Figure 2.1 : *Cellule de Hele-Shaw*

Une aiguille (diamètre intérieur = 0,26 mm, diamètre extérieur = 0,46 mm) placée à l'intérieur de la cellule (figure 2.2) est utilisée pour injecter le flux massique. Afin d'assurer un flux constant, l'aiguille est reliée à un pousse seringue mis en mouvement par un moteur électrique pas à pas. Comme notre étude concerne l'écoulement des eaux souterraines dans une nappe confinée, les limites supérieure et inférieure de la cellule ont été rendues étanches à l'eau tandis que les limites

latérales sont reliées à deux grands réservoirs assurant une charge constante. Le champ des vitesses uniforme à l'intérieur du canal est assuré par un dispositif particulier, conçu par E. Lefèvre, technicien au LAEGO, mis en place entre les deux réservoirs. Deux tiges partiellement immergées dans chaque réservoir et entraînées par un système de roues motorisées sont utilisées pour maintenir un gradient hydraulique constant entre les deux réservoirs. Cela permet de créer un champ de vitesse horizontal uniforme dans la cellule, dont la composante s'obtient en écrivant la conservation du débit :

$$V_{cell} = \frac{\frac{\pi D_{tige}^2}{4} \times \pi \phi_m n}{b.H_{cell}} \qquad (2.1)$$

où V_{cell} est la vitesse dans la cellule ; D_{tige} est le diamètre de la tige immergée ; ϕ_m est le diamètre de l'arbre moteur ; n est la vitesse de rotation du moteur ; b et H_{cell} sont, respectivement, l'épaisseur et la hauteur du canal d'écoulement dans la cellule (figure 2.2).

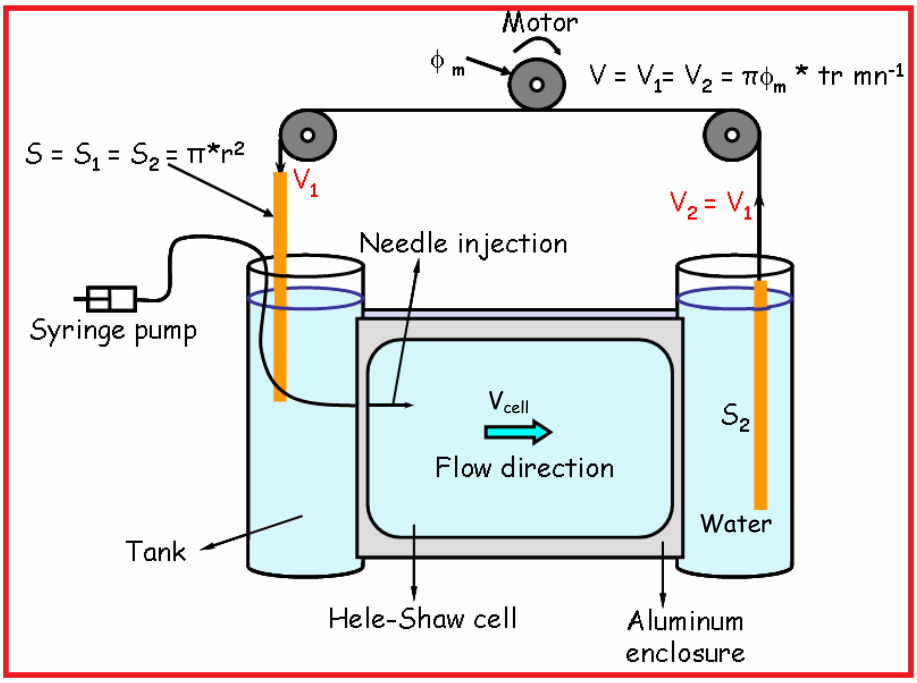


Figure 2.2 : *Schéma du dispositif expérimental*

La méthode de mesure que nous avons utilisée est la LIF (Laser Induced Fluorescence). Elle est basée sur l'excitation d'un traceur fluorescent (dans notre cas, la rhodamine 6G) mélangé au liquide étudié. Une solution saline, jouant le rôle

d'un polluant, est injectée dans la cellule de Hele-Shaw via l'aiguille d'injection. La zone de mélange ainsi développée est excitée par un laser pulsé à double cavité (longueur d'onde de 532 nm). Le déplacement du panache a été suivi et enregistré par une caméra numérique avec une résolution de 12 bits. Toutefois, il faut noter qu'avec la condition expérimentale présentée ici, cette technique soulève des difficultés supplémentaires. En effet, comme l'espacement entre les deux plaques ne permet pas de placer un plan laser à l'intérieur de la cellule, nous avons opté pour une solution d'excitation identique à celle utilisée par Mainhagu *et al* [41], *i.e.*, sous la forme d'un cône laser. Il est bien évident que, dans cette configuration, le plan laser n'est plus perpendiculaire à l'axe de la caméra comme pour la méthode standard LIF (figure 2.3).

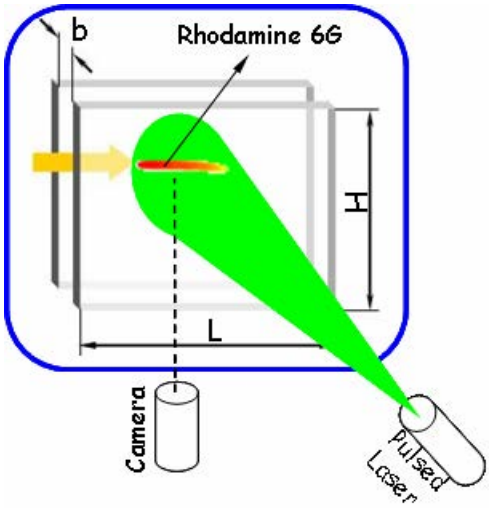
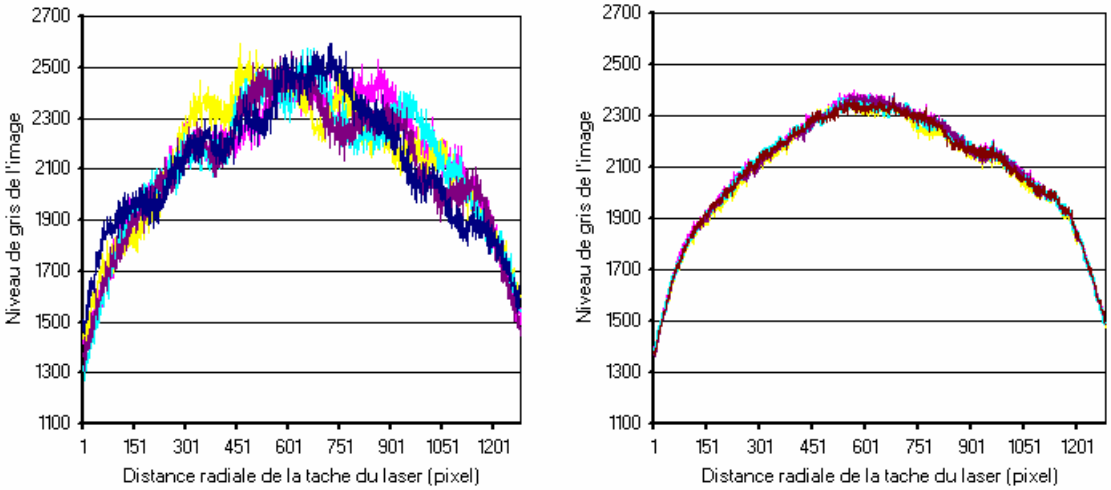


Figure 2.3 : *Méthode de mesure.*

Par conséquent, cette configuration spécifique exige de prendre en considération deux aspects : (i) la répartition spatio-temporelle de l'énergie est irrégulière et (ii) l'énergie de la lumière à travers un faisceau laser n'est pas constante mais a une répartition gaussienne par rapport à l'axe du rayon. Cela signifie que non seulement le niveau d'énergie de la tache laser est non uniforme, mais elle varie aussi d'une impulsion à l'autre, ce qui conduit donc à une distribution d'intensité lumineuse spatio-temporelle complètement aléatoire. Dans certains pixels, l'erreur relative d'intensité entre les pulsations atteint 20%. Ceci conduit à une fonction d'étalonnage non bijective.

Afin de surmonter ces effets, nous avons utilisé la même méthodologie que Mainhagu *et al*. [41] en moyennant un ensemble d'images consécutives. Le

phénomène physique étudié a donc été analysé en utilisant une image moyenne résultant de dix images brutes consécutives. Toutefois, contrairement aux expériences de Mainhagu *et al*. [41], nos expériences ont été menées avec l'écoulement latéral dans la cellule de Hele Shaw. Par conséquent, les paramètres de l'écoulement varient rapidement. Pour garantir une analyse précise de la propagation du panache, au lieu d'utiliser 2,5 secondes pour enregistrer 10 images consécutives comme Mainhagu *et al*. [41], nous avons utilisé le temps d'acquisition le plus faible pour enregistrer les 10 images, soit 1,25 secondes (2 fois plus court que Mainhagu *et al*. [41]). Il est évident que lors de l'enregistrement de ces dix images nous avons supposé que le panache était dans un état quasi-permanent. Par contre, nous avons constaté que l'erreur entre les impulsions du laser est inférieure à 3%, au lieu d'être inférieure à 1% comme observé par Mainhagu *et al*. [41] (figure 2.4b). Toutefois, comme Mainhagu *et al*. [41], la fonction d'étalonnage reste bijective (figure 2.5) ce qui est une condition préalable pour mesurer précisément le champ des concentrations.



a) Images brutes *b) Images moyennes de 10 images brutes*

Figure 2.4 : *Profil d'intensité lumineuse de la tache de laser.*

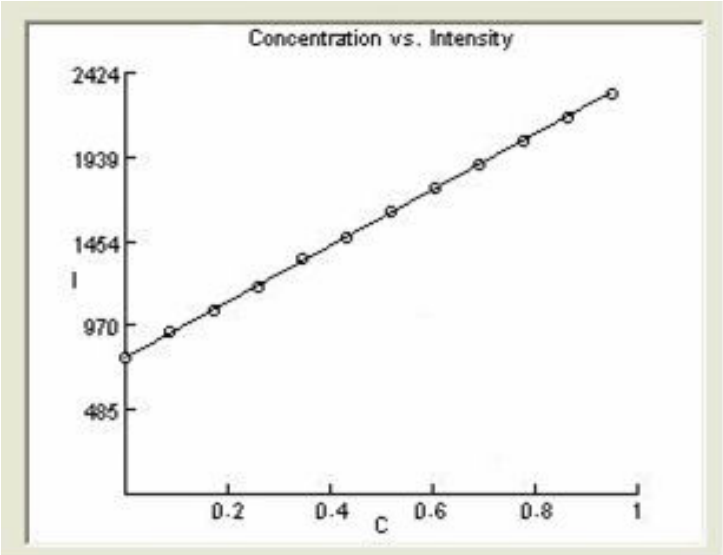
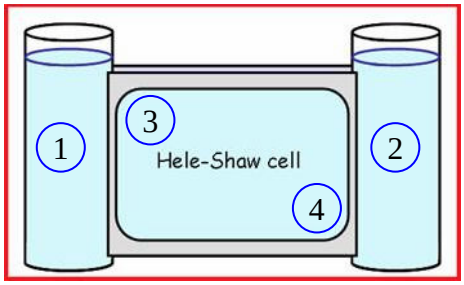
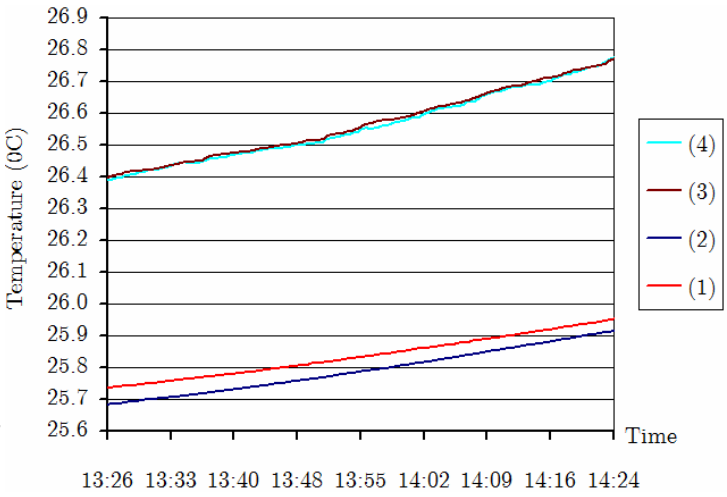


Figure 2.5 : *Fonction d'étalonnage bijective des images moyennes.*

Pour que l'écoulement dans la cellule de Hele-Shaw puisse mimer l'écoulement dans un milieu poreux (*e.g.*, nappe souterraine confinée), une autre difficulté liée à notre configuration expérimentale doit être résolue. En fait, afin d'assurer un écoulement quasiment uniforme dans la cellule, le volume des réservoirs latéraux doit être largement supérieur à celui contenu dans le chenal d'écoulement. Comme le dispositif expérimental n'est pas isolé du milieu ambiant, ces volumes d'eau pourraient présenter une variation de température avec une influence non négligeable sur le déplacement du panache. Afin de vérifier cette hypothèse, nous avons analysé le déplacement d'un traceur. En même temps, nous avons enregistré les températures en 4 points distincts (figure 2.6). Malgré un écart de température inférieur à 1°C, le traceur est caractérisé par un déplacement légèrement ascensionnel (figure 2.7). Autrement dit, l'influence de la température joue un rôle non-négligeable sur l'évolution spatiale du panache. Afin de pallier cet inconvénient, le système a été immergé dans un aquarium transparent (figure 2.8) et l'expérience répétée. Dans cette nouvelle configuration, nous avons constaté que la température reste pratiquement la même (figure 2.9) et que l'écoulement du traceur reste horizontal ce qui est tout à fait en accord avec la théorie (figure 2.10).



a) Position des capteurs de température.



b) Diagramme de température

Figure 2.6 : *Différence de température dans le modèle.*

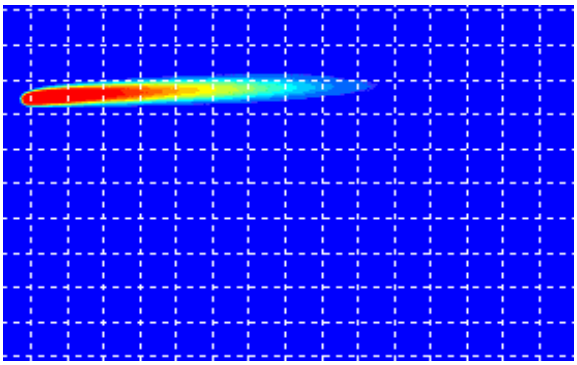


Figure 2.7 : *Effet de la différence de température sur le panache de traceur*

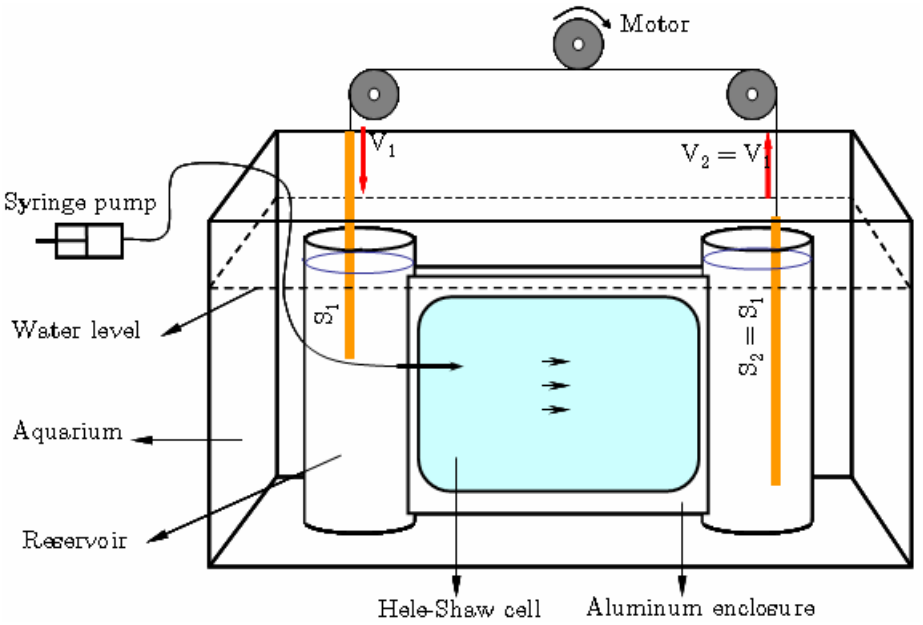
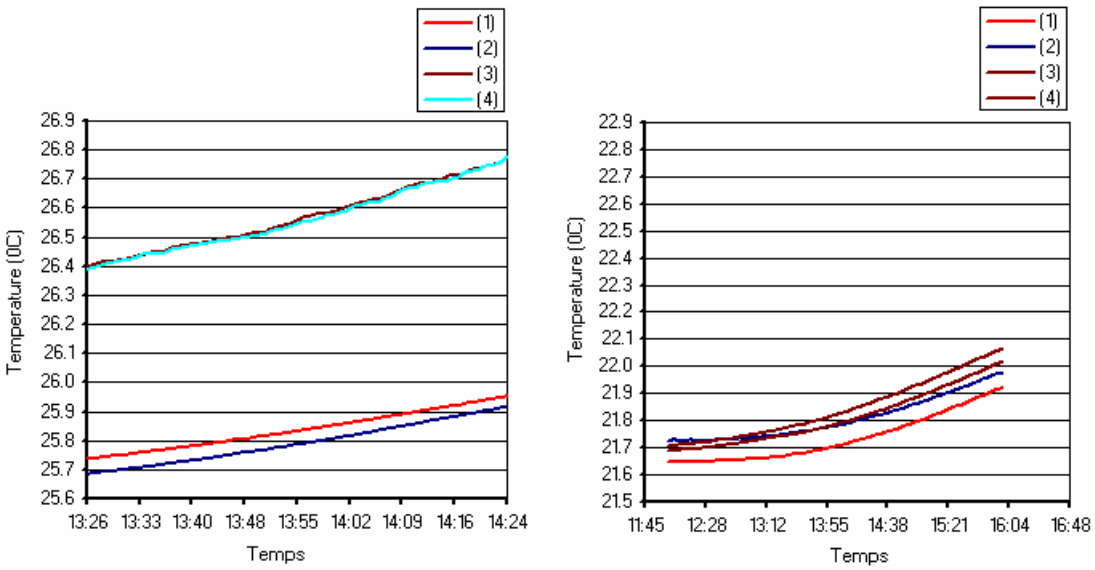
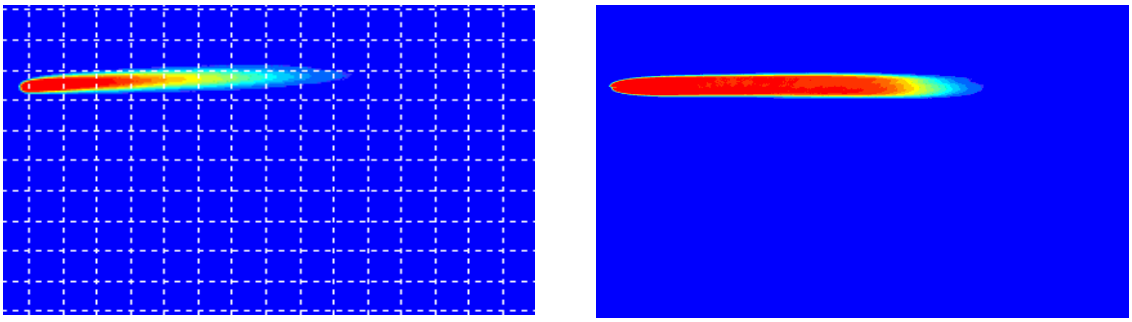


Figure 2.8 : *Système expérimental immergé dans un aquarium transparent.*



a) Sans aquarium *b) Avec aquarium*

Figure 2.9 : *Homogénéisation de la température dans le modèle expérimental*



a) Sans aquarium *b) Avec aquarium*

Figure 2.10 : *Écoulement dans la cellule Hele-Shaw sans et avec aquarium.*

Ci-dessous, nous présentons une photographie du dispositif expérimental utilisé dans cette thèse (figure 2.11).

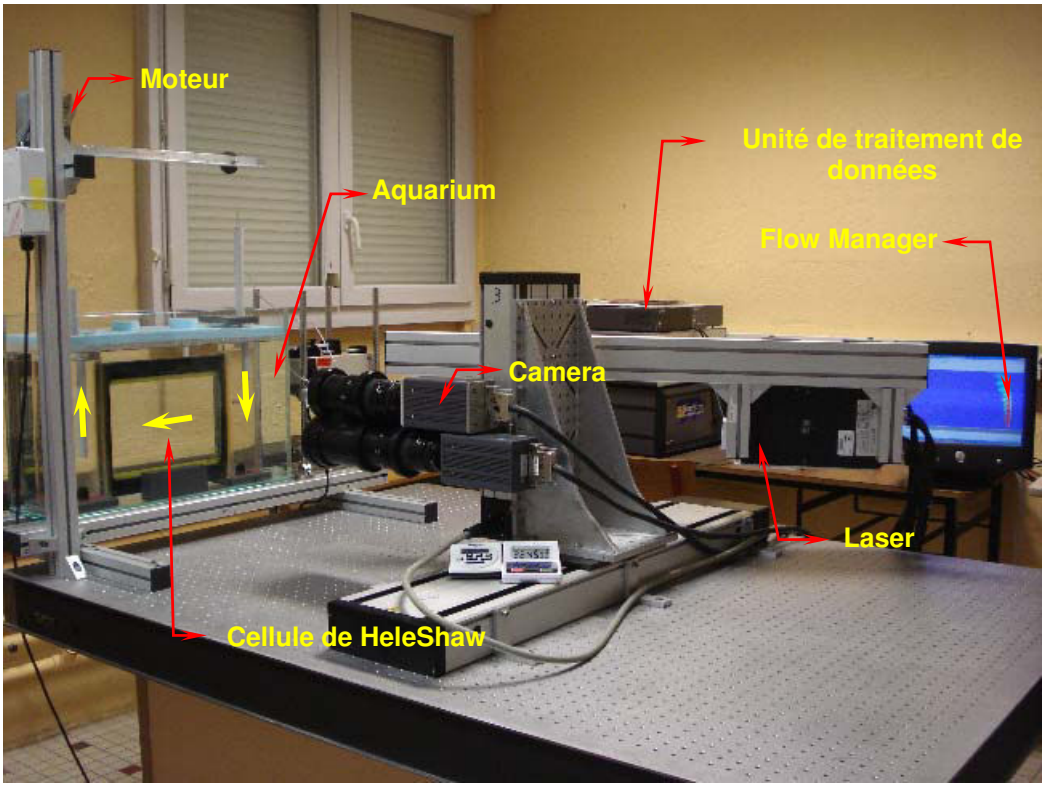


Figure 2.11 : *Dispositifs expérimentaux*

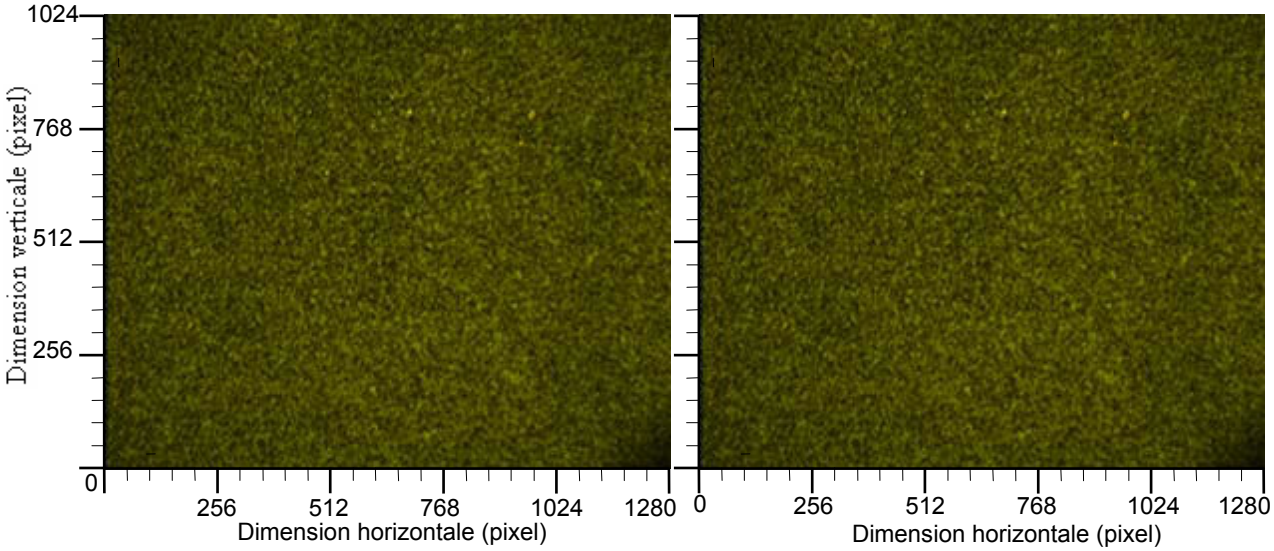
2.2. VÉRIFICATION QUANTITATIVE DE LA VALIDITÉ DU MODÈLE EXPÉRIMENTAL

Comme indiqué ci-dessus, nous utilisons la cellule de Hele-Shaw, un modèle analogue de milieu poreux, afin d'étudier, d'un point de vue expérimental, la « sédimentation » d'un soluté en présence d'un écoulement horizontal.

2.2.1. Sur le champ des vitesses en l'absence de soluté

Pour déterminer le champ des vitesses, nous avons utilisé la technique PIV (Particle Image Velocimetry). Ainsi, nous avons ensemencé l'eau contenue dans un des réservoirs par des particules fluorescentes ayant un diamètre moyen d'environ 10 μm. Les particules sont excitées par un laser pulsé et leurs positions sont enregistrées à des pas de temps différents (T_1 et T_2) par une caméra numérique (même système que dans la figure 2.11). Ensuite, les données des images enregistrées sont traitées par un algorithme intégré dans le logiciel « Flow Manager » pour la technique PIV. Il est ainsi possible d'évaluer la valeur et la direction de la vitesse de chaque particule fluorescente et par conséquent, le champ des vitesses

dans chaque zone balayée et donc dans l'intégralité du domaine étudié. La figure 2.13 montre le champ des vitesses de l'écoulement déterminé par la technique PIV dans la cellule de Hele-Shaw pour un écoulement horizontal sans injection ponctuelle de polluant.



a) Nuage particules à l'instant T_1 *b) Nuage particules à l'instant T_2*

Figure 2.12 : *Deux images des particules dans la cellule prises aux temps T_1 , T_2*

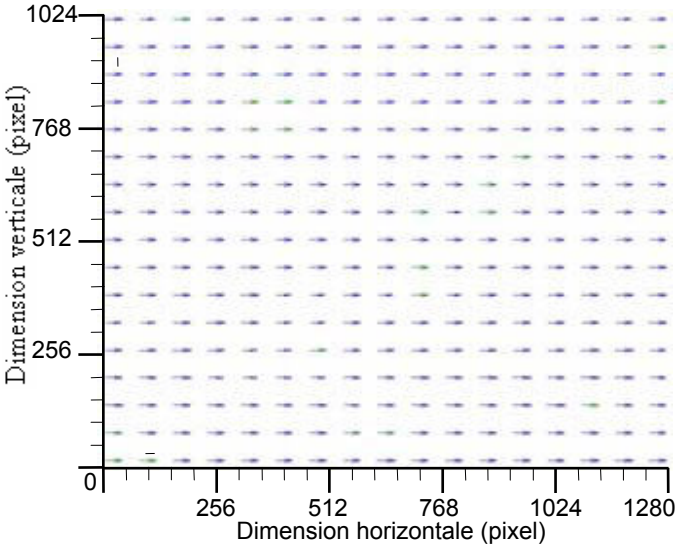


Figure 2.13 : *Champ de vitesse dans la cellule obtenu par PIV, en l'absence de soluté.*

On peut noter que le champ de vitesse est parfaitement horizontal, en accord avec le champ de vitesse théorique donné par la loi de Darcy. D'un point de vue quantitatif, la vitesse mesurée par la PIV est, à 1% près, identique à celle estimée par la formule (2.1). On peut donc conclure que le dispositif particulièrement innovant mis en place entre les deux réservoirs permet de créer un écoulement horizontal dans la cellule qui satisfait à nos exigences.

2.2.2. Sur les paramètres expérimentaux par injection de traceur

Dans un second temps, nous avons comparé la configuration expérimentale, obtenue par l'injection ponctuelle d'un traceur dans un champ d'écoulement uniforme, avec son homologue théorique (figure 2.14), souvent utilisé en hydrodynamique souterraine, pour déterminer les limites latérales de la zone d'influence d'une source d'injection (équation (2.2)) :

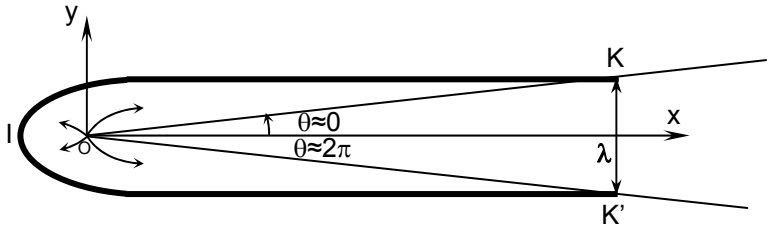


Figure 2.14 : *Écoulement autour d'une source placée dans un écoulement uniforme*

$$\lambda = KK' = \frac{Q_{inj}}{V_{\infty}.b} \qquad (2.2)$$

où Q_{inj} $[L^3T^{-1}]$ représente le débit de la source ; V $[LT^{-1}]$ la vitesse horizontale uniforme du champ d'écoulement et b [L] l'ouverture du canal d'écoulement. Cette comparaison est présentée sur la figure 2.15.

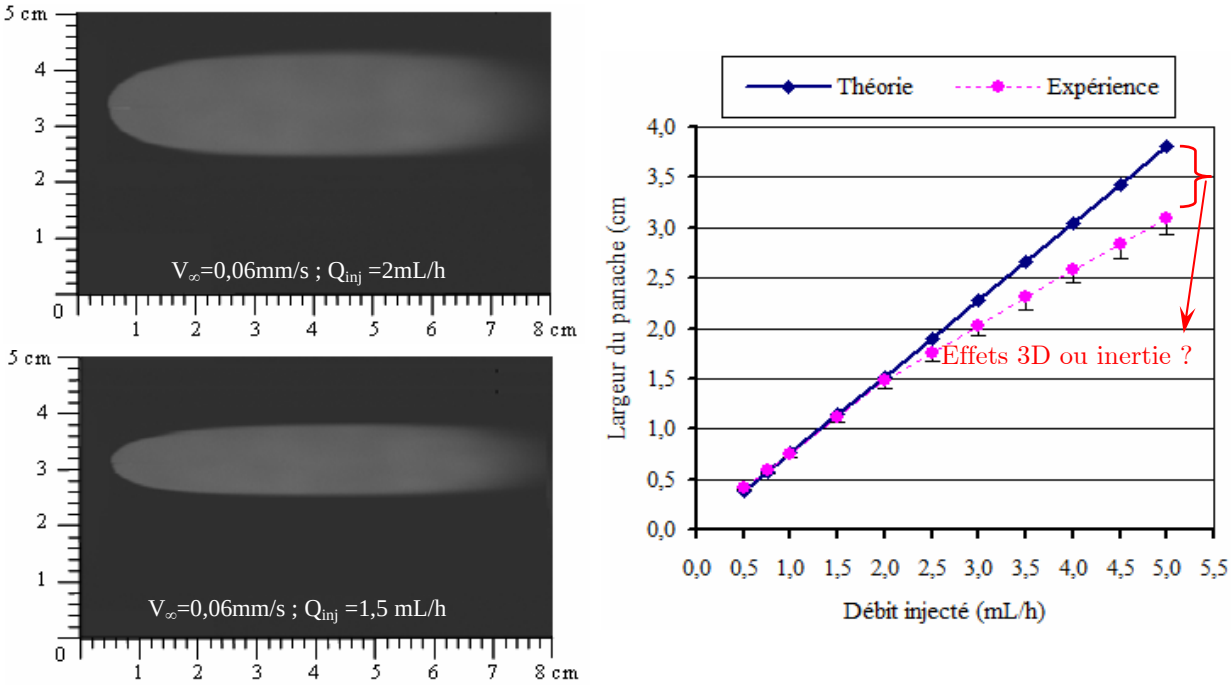


Figure 2.15 : *Largeur expérimentale et analytique du panache de traceur*

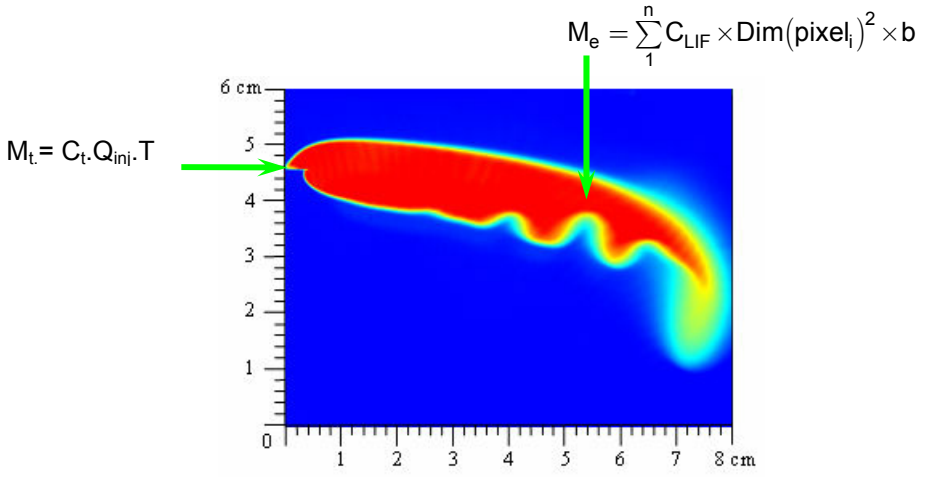
En analysant cette figure, nous pouvons constater que la largeur du panache expérimental est en très bon accord avec la solution analytique tant que $Q_{inj} \leq 2$ mL/h. Ce débit correspond aussi à un nombre de Reynolds, basé sur la vitesse à la sortie de l'aiguille ($Re_{inj} = \rho V_{inj} b/\mu$), inférieur à 5.5. Pour 2 mL/h < Q_{inj} < 5.5 mL/h, les résultats expérimentaux et théoriques divergent. Ceci pourrait être dû à un effet 3D et/ou d'inertie, puisque Re_{inj} est alors compris entre 5 et 10 environ. Prenant en compte ces considérations, nous pouvons conclure que l'analogie entre les deux systèmes est valable tant que les débits injectés $Q_{inj} \leq 2$ mL/h. Ce résultat est pratiquement identique à celui trouvé par Oltéan *et al*. [50] qui ont étudié numériquement le domaine de validité concernant l'analogie milieu poreux - cellule de Hele-Shaw, mais sans écoulement latéral [67][66][65]. Remarquons cependant que, même si Re_{inj} est d'ordre unité, le nombre de Reynolds basé sur la vitesse zonale ($Re_\infty = \rho V_\infty b/\mu$) sera toujours petit dans nos expériences.

2.3. VALIDATION DE LA MÉTHODOLOGIE

Afin de vérifier, d'un point de vue quantitatif, la fiabilité de nos expériences nous avons tout d'abord déterminé la masse expérimentale (masse localisée à l'intérieur de la zone de mélange). Ensuite, nous nous sommes focalisés sur la répétabilité des mesures sur des expériences ayant les mêmes conditions initiales et aux limites. Le respect de la conservation de la masse et la répétabilité des mesures constituent un préalable à toute exploitation des données.

2.3.1. Sur la conservation de la masse

La masse expérimentale M_e (figure 2.16) a été déterminée via le champ des concentrations (C_{LIF}) expérimental, les dimensions de chaque pixel ($Dim(pixel_i)$) et l'espacement (b) entre les plaques supposé constant. La masse théorique M_t durant un intervalle du temps donné (T) est le produit entre le débit (Q_{inj}) et la concentration (C_t) injectés.



(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L et Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

Figure 2.16 : *Vérification de la conservation de la masse*

La comparaison entre les masses expérimentale et théorique pour l'ensemble de nos expériences est présentée dans le tableau 2.2. De l'analyse de ce tableau, il ressort que la masse mesurée expérimentalement est, globalement, inférieure de 8% à la masse théorique. Bien que cette erreur puisse être imputée aux incertitudes sur les paramètres difficilement mesurables, *i.e.*, le débit et la concentration injectés, l'espacement entre les plaques, nous sommes convaincus qu'elle est principalement due au calibrage de notre système de mesure basé sur des images moyennées. Cependant, compte tenu des études de Felder [19] qui observait des pertes de masse sur la durée de l'expérience de 10 à 30% (méthode de mesure par absorption lumineuse) et ceux de Mainhagu *et al*. [41] qui observait des pertes de masse sur la durée de l'expérience entre de 2 à 12% (en utilisant la même méthodologie que nous, mais sans écoulement latéral), on peut conclure que les données quantitatives présentées ici peuvent être considérées comme plus que satisfaisantes [67] [66] [65].

Un des moyens, et peut être le seul, pour minimiser l'erreur sur la masse expérimentale serait d'utiliser un laser continu d'intensité lumineuse quasi-constante.

Tableau 2.1 : *Résultats de calculs des masses théoriques et mesurées*

Code d'expérience	Q_{inj} (mL/h)	Temps_inj (mn)	C_{inj} (g/L)	Masse théorique (g)	Masse mesurée (g)	Erreur (%)
D00.05.35.05.1	0,5	35	0,5	**0,00014583**	**0,00014075**	**3,49**
D12.02.28.05.1	0,5	28	0,2	**0,00004667**	**0,00004680**	**0,28**
D12.02.28.05.2	0,5	28	0,2	**0,00004667**	**0,00004338**	**7,04**
D12.02.33.20.1	2,0	33	0,2	**0,00022000**	**0,00021139**	**3,91**
D12.02.35.10.1	1,0	35	0,2	**0,00011667**	**0,00010789**	**7,52**
D16.02.22.05.1	0,5	22	0,2	**0,00003667**	**0,00003690**	**0,63**
D16.02.22.05.2	0,5	22	0,2	**0,00003667**	**0,00003616**	**1,37**
D16.02.22.10.1	1,0	22	0,2	**0,00007333**	**0,00006898**	**5,94**
D16.02.22.10.2	1,0	22	0,2	**0,00007333**	**0,00007082**	**3,43**
D16.02.22.20.1	2,0	22	0,2	**0,00014667**	**0,00014316**	**2,39**
D20.02.15.05.1	0,5	15	0,2	**0,00002500**	**0,00002333**	**6,68**
D20.02.15.05.2	0,5	15	0,2	**0,00002500**	**0,00002336**	**6,56**
D20.02.15.20.1	2,0	15	0,2	**0,00010000**	**0,00009050**	**9,50**
D20.02.15.20.2	2,0	15	0,2	**0,00010000**	**0,00009232**	**7,68**
D20.05.14.10.1	1,0	14	0,5	**0,00011667**	**0,00011973**	**2,63**
D20.05.14.20.1	2,0	14	0,5	**0,00023333**	**0,00023181**	**0,65**
D20.05.14.20.2	2,0	14	0,5	**0,00023333**	**0,00022572**	**3,26**
D20.10.12.10.2	1,0	12	1,0	**0,00020000**	**0,00018704**	**6,48**
D20.10.12.10.3	1,0	12	1,0	**0,00020000**	**0,00019384**	**3,08**
D25.05.08.05.1	0,5	8	0,5	**0,00003333**	**0,00003038**	**8,87**
D25.05.08.05.2	0,5	8	0,5	**0,00003333**	**0,00003151**	**5,48**
D25.05.10.10.1	1,0	10	0,5	**0,00008333**	**0,00007907**	**5,12**
D25.05.10.10.2	1,0	10	0,5	**0,00008333**	**0,00007929**	**4,85**
D32.05.05.20.1	2,0	5	0,5	**0,00008333**	**0,00008009**	**3,90**
D32.05.05.20.2	2,0	5	0,5	**0,00008333**	**0,00007951**	**4,59**
D32.05.06.05.1	0,5	6	0,5	**0,00002500**	**0,00002312**	**7,51**
D32.35.05.20.1	2,0	5	3,5	**0,00058333**	**0,00057340**	**1,70**
D32.35.05.20.2	2,0	5	3,5	**0,00058333**	**0,00056075**	**3,87**
D32.35.05.20.3	2,0	5	3,5	**0,00058333**	**0,00057171**	**1,99**
D32.35.05.50.1	5,0	5	3,5	**0,00145833**	**0,00142824**	**2,06**
D32.35.05.50.2	5,0	5	3,5	**0,00145833**	**0,00148575**	**1,88**
D32.35.06.05.1	0,5	6	3,5	**0,00017500**	**0,00016727**	**4,42**
D32.35.06.05.2	0,5	6	3,5	**0,00017500**	**0,00016743**	**4,33**
D32.35.06.05.3	0,5	6	3,5	**0,00017500**	**0,00017247**	**1,44**

2.3.2. Sur la répétabilité des mesures

Pour vérifier la fiabilité des données obtenues, chaque expérience a été répétée au moins trois fois avec les mêmes conditions initiales et aux limites. Néanmoins, avant d'envisager une analyse critique sur la répétabilité de nos solutions expérimentales, notons que l'injection ponctuelle (à différents débits) d'une solution saline (à différentes concentrations) dans un écoulement latéral (à différentes vitesses) a mis en évidence deux types de configurations : stable et instable. Ainsi, nous avons constaté que :

- tant que les panaches présentent une configuration stable, la répartition spatio-temporelle de la zone de mélange est tout à fait reproductible. Cette reproductibilité a été étudiée à travers la forme de la zone de mélange, son inclinaison par rapport à l'axe horizontal et sa vitesse de propagation (figure 2.17).

- pour les configurations instables, des différences relativement légères ont pu être constatées au niveau des digitations (lobes) développées dans la partie inférieure du panache (figure 2.18). Ces différences pourraient être dues aussi bien aux conditions initiales (différence de position et/ou inclinaison de tête de l'aiguille d'injection) qu'aux conditions expérimentales (l'existence, malgré nos précautions, d'un faible gradient de température entre les fluides ambiant et/ou injecté... [19]). Il est bien évident que ces hypothèses sont envisageables tant que, entre deux expériences consécutives, la cellule n'a pas été démontée, nettoyée et ensuite remontée. Dans ce dernier cas, les différences observées pourraient être principalement dues à la variation spatiale de l'espacement de la cellule qui contrôle la variation de la perméabilité intrinsèque. En fait, en raison d'erreurs sur la planéité de la cellule (figure 2.19), la perméabilité locale pourrait varier après une action de démontage et remontage s'il existe, par rapport aux expériences initiales, un décalage (même très faible) entre les plaques. Toutefois, notons que tous les autres paramètres comme la forme générale, le nombre de lobes et le taux de croissance des instabilités, ainsi que l'inclinaison, l'extension et la vitesse de propagation du panache sont toujours bien reproduites comme dans le cas de la configuration stable. Dans ces conditions, nos expériences peuvent être considérées comme tout à fait reproductibles [67] [66] [65].

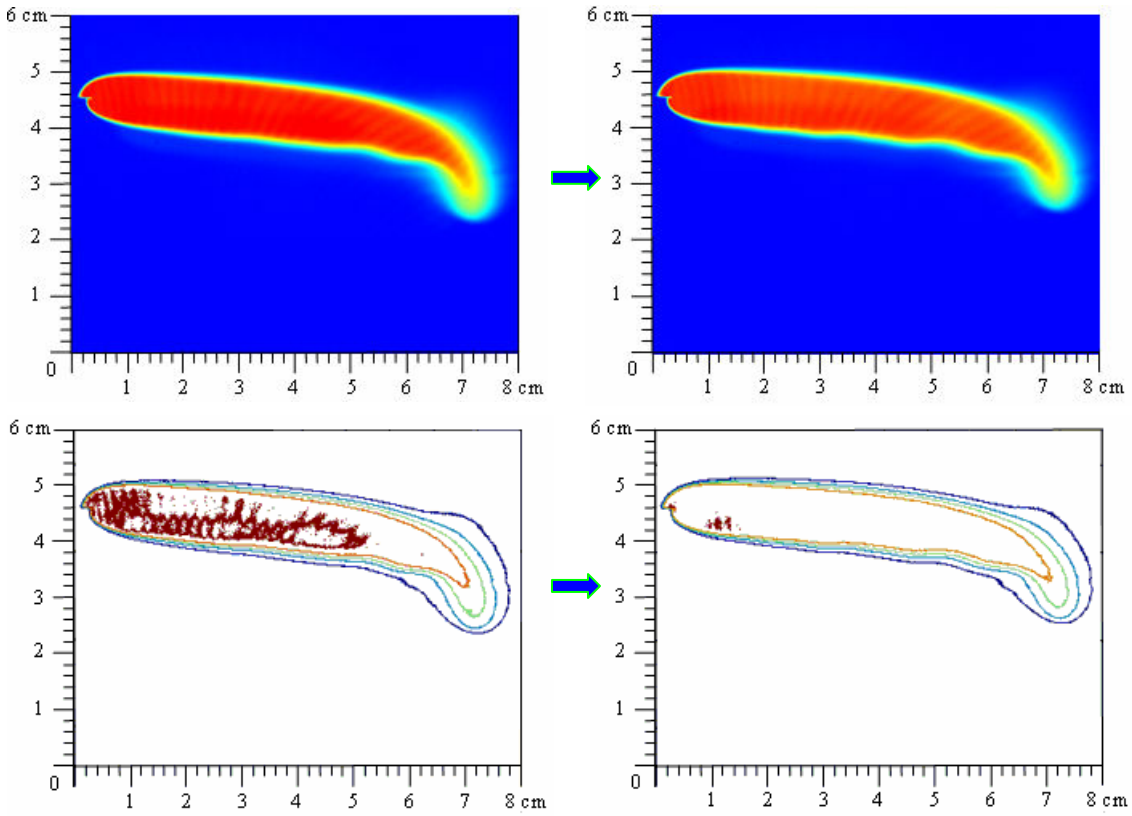


Figure 2.17 : *Répétition des expériences dans la configuration stable*

(V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L ; Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')

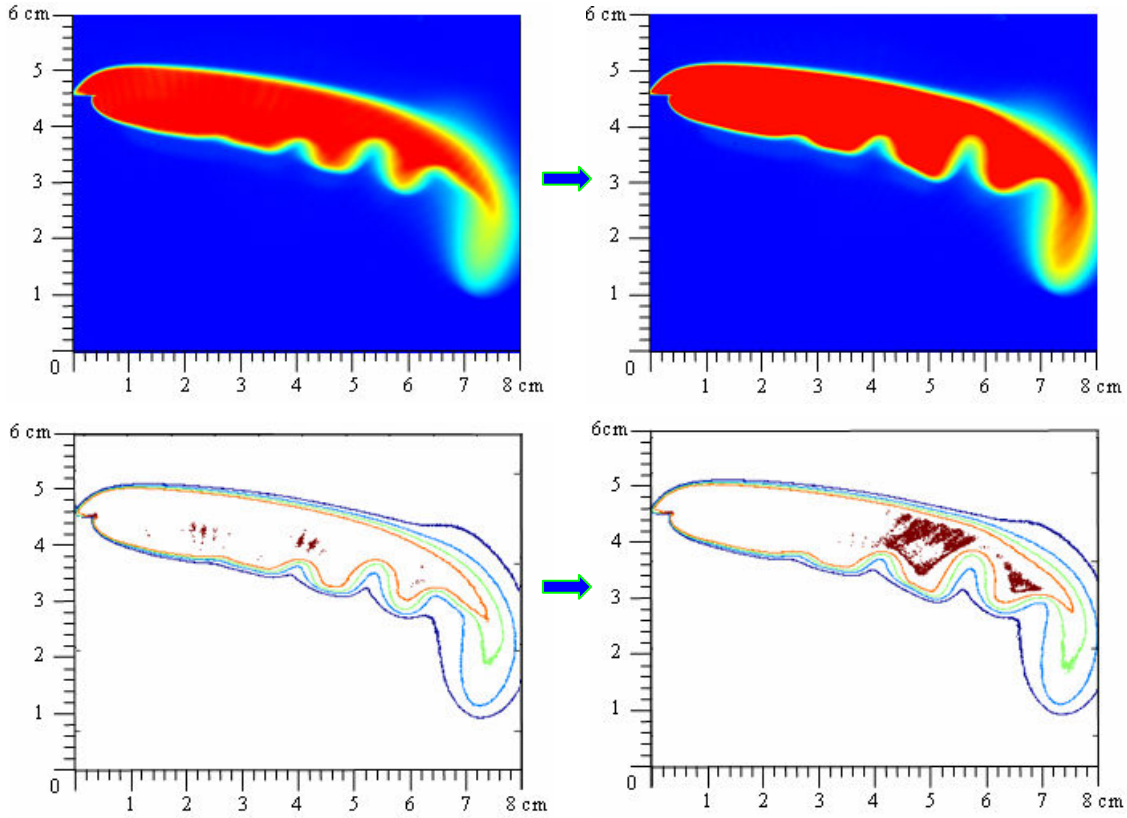


Figure 2.18 : *Répétition des expériences dans la configuration instable*

($V\infty$ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L et Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

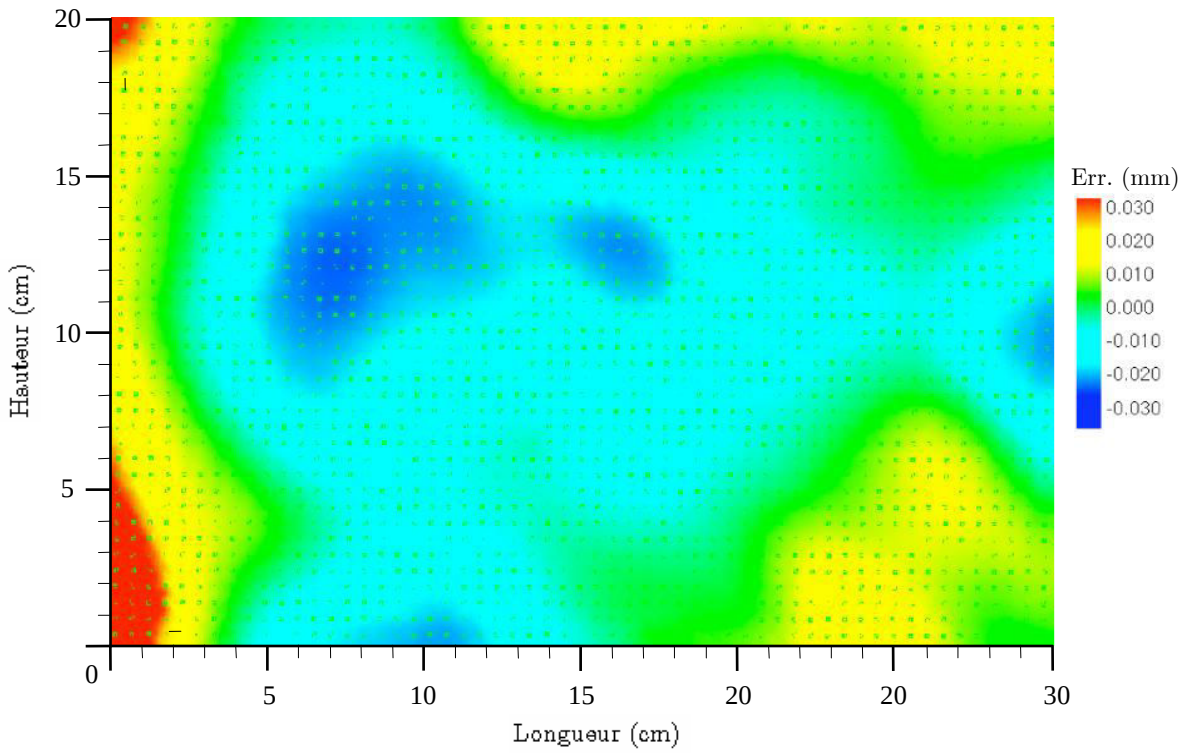


Figure 2.19 : *Erreurs locales de planéité intérieure de la cellule*

2.4. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Après avoir vérifié la fiabilité de notre système expérimental ainsi que les conditions d'analogie cellule Hele-Shaw/milieu poreux, nous pouvons passer à l'étape suivante qui portera sur l'interprétation de nos expériences. Les discussions concerneront uniquement les expériences réalisées avec des débits d'injection $Q_{inj} \leq 2$mL/h (régime Darcien). Autrement dit, dans ce paragraphe nous analyserons les expériences menées pour une concentration injectée variant entre C_{inj} = 0.1÷3.5 g/L alors que le débit injecté varie entre Q_{inj} = 0.5÷2.0 mL/h et la vitesse d'écoulement latéral varie entre V_{∞}= 0.02÷0.16mm/s (figure 2.20).

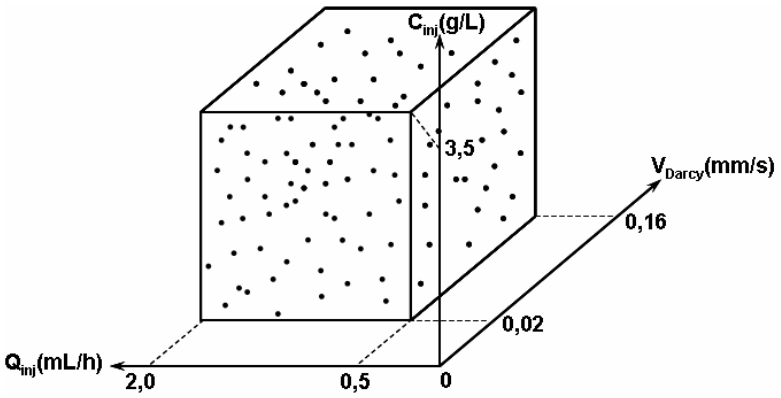


Figure 2.20 : *Plage de variation des paramètres expérimentaux*

Sur la figure 2.21 nous retrouvons les configurations typiques des résultats expérimentaux.

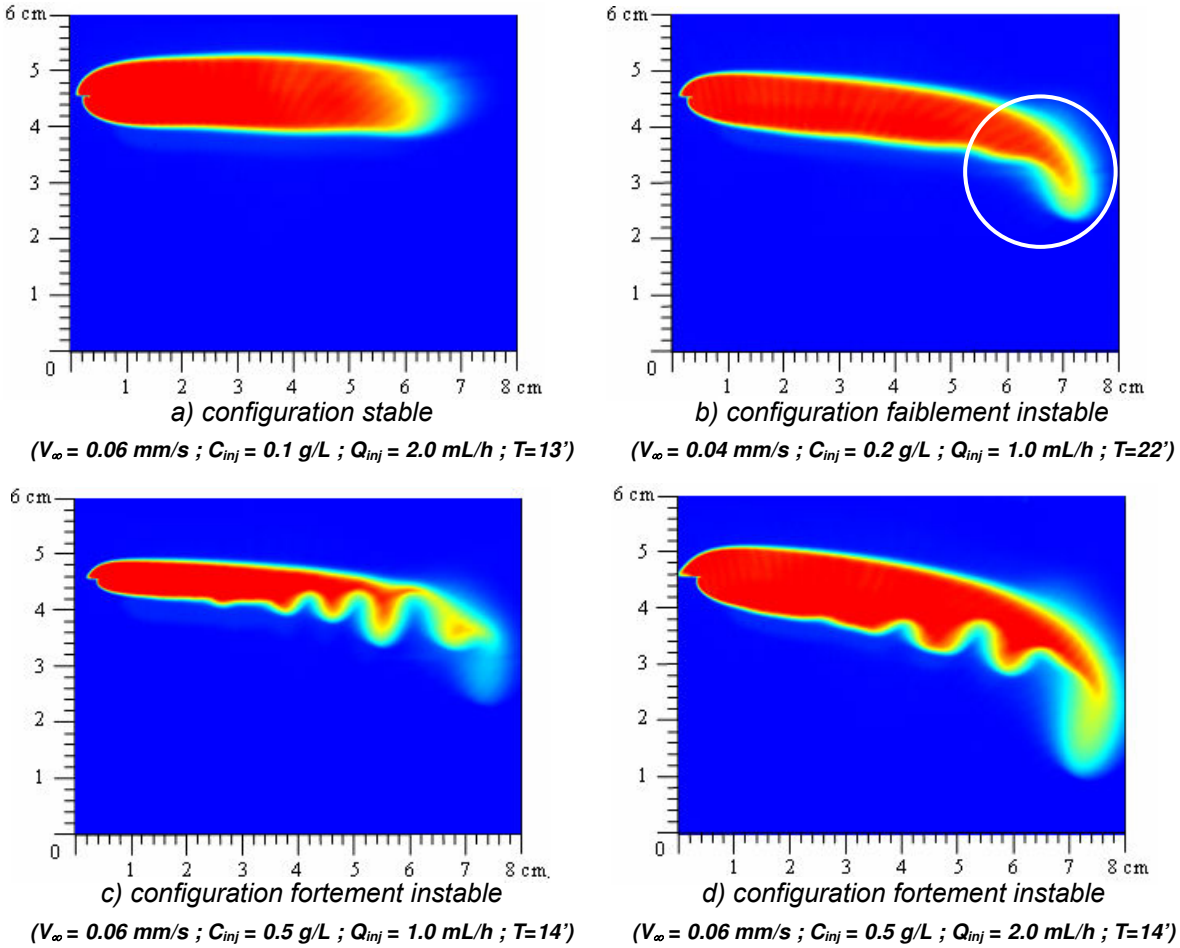


Figure 2.21 : *Résultats expérimentaux (configurations typiques)*

En analysant les résultats expérimentaux (figure 2.21) de façon qualitative, nous avons constaté deux configurations typiques de panaches : stable et instable. Selon la distribution spatio-temporelle de la zone de mélange la configuration instable peut être traitée à travers le nombre des digitations (lobes) : avec un seul doigt et avec des digitations multiples.

Les configurations du panache stable sans doigt (figure 2.21a) désormais appelées «*configurations stables*», se produisent dans les cas d'un contraste de concentration très faible. La concentration de la solution saline injectée est d'environ 0,1 g/L et les panaches restent pratiquement horizontaux.

Les configurations du panache instables avec un seul doigt (figure 2.21b), seront appelées par la suite «*configurations faiblement instables*». Elles apparaissent

pour des concentrations injectées supérieures ou égales à environ 0,2 g/L et sont caractérisées par un déplacement légèrement descendant. Toutefois, l'effet de la gravité est surtout perceptible à la pointe des panaches et se traduit par l'apparition et le développement d'un seul et unique doigt (zone cerclée sur la figure 2.21b). En outre, au voisinage du doigt sur l'interface inférieure, nous pouvons constater l'apparition des instabilités gravitationnelles de très faible amplitude.

Les configurations du panache instables avec plusieurs doigts sont caractérisées par l'apparition et le développement sur l'interface inférieure de train d'ondes fortement amplifiées (figure 2.21c, d). Nous les appellerons dorénavant «*configurations fortement instables*». Elles se produisent dans les cas où les concentrations injectées sont supérieures ou égales à 0,3 g/L. Dans ces cas, l'effet de la gravité est représenté non seulement par l'existence d'un doigt à la pointe du panache, mais aussi par le développement d'instabilités gravitationnelles à l'interface inférieure du panache. Le taux de croissance de ces instabilités augmente avec l'augmentation du contraste de masse volumique entre la solution injectée et le fluide ambiant. Il faut cependant noter que, à proximité du point d'injection, la configuration du nuage de polluant est semblable à celle d'une configuration « faiblement instable ». Le développement des digitations commence à partir d'une certaine distance par rapport au point d'injection, distance qui augmente avec la diminution du contraste de masse volumique. En outre, cette instabilité prend vite la forme d'une instabilité spatiale convective. Ce point sera analysé en détail au chapitre 4.

D'une manière générale, les caractéristiques des panaches analysés ainsi que la limite stabilité/instabilité sont fortement influencés par les conditions aux limites comme la concentration injectée qui contrôle le contraste de masse volumique, la vitesse d'écoulement et le débit d'injection. L'augmentation de la concentration conduit à l'augmentation du taux de croissance de l'instabilité du panache (figure 2.21a, d), tandis que l'augmentation de la vitesse latérale d'entraînement conduit à la diminution du taux de croissance de l'instabilité du panache ainsi que de la surface de dispersion du polluant (figure 2.22) [44]. Si le débit d'injection a peu d'effet sur la formation des digitations du panache, sa variation ne peut pas, cependant, être négligée dans notre analyse. Selon nos observations, l'augmentation du débit injecté semble augmenter aussi bien l'épaisseur de panache que la vitesse d'avancée du

polluant (figure 2.21c, d). Ce point sera débattu à travers l'analyse théorique développée dans le chapitre 4.

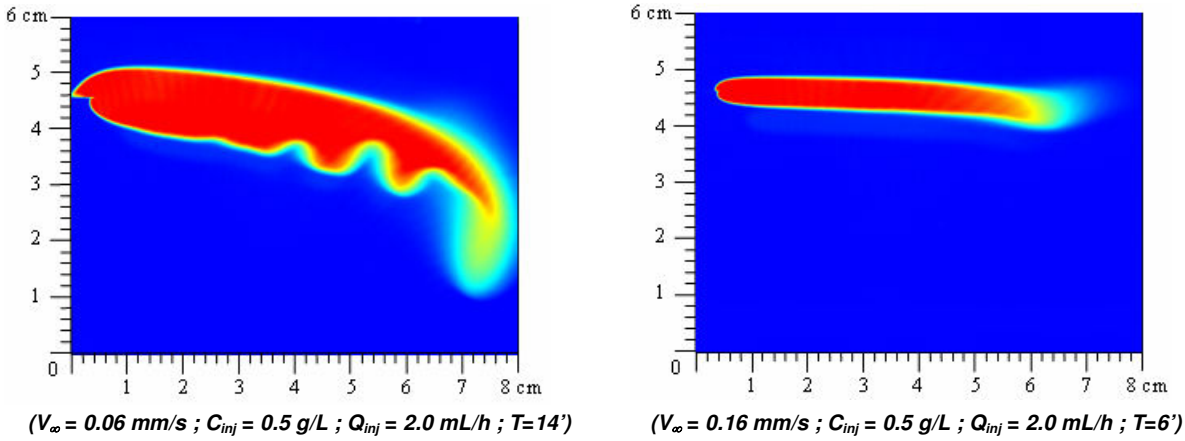


Figure 2.22 : *Résultats expérimentaux (effet de la vitesse)*

Utilisons maintenant l'analyse quantitative des résultats expérimentaux afin d'étudier l'évolution de la concentration dans la zone centrale du panache (zone en rouge). Des figures 2.23a, b, c, il ressort que le solvant (eau pure) est remplacé totalement par le soluté (solution injectée). Cela signifie qu'il semble exister une zone caractérisée par une concentration constante et égale à la concentration de la solution injectée. La vitesse de déplacement de cette zone est alors régie aussi bien par la vitesse injectée que par la vitesse d'entraînement. En outre, on constate que plus on est proche de la source, plus l'épaisseur de la zone de mélange est petite. Cela signifie que plus on s'éloigne de la source, plus le gradient de concentration à l'interface est faible. Nous allons utiliser cette constatation afin d'analyser l'instabilité du panache de façon théorique dans le chapitre 4. Ces résultats expérimentaux sont comparables, d'un point de vue qualitatif, avec ceux publiés par Schincariol et Schwartz [58].

Toutefois, par l'analyse quantitative du champ de concentration (figure 2.23 b, c), nous constatons aussi que la concentration réduite maximale mesurée au niveau du point d'injection n'est pas unitaire. Cela signifie que la concentration maximale mesurée du panache n'est pas égale à celle de l'injection. Cela peut être dû à deux causes :

- une erreur sur la mesure de la masse (δ_m) de sel lors de la préparation de la solution injectée (δ_m= 0.1%) ;

- une incertitude dans la méthodologie de la LIF due à la perte de masse même si nous avons utilisé les images moyennes pour minimiser l'erreur (tableau 2.2).

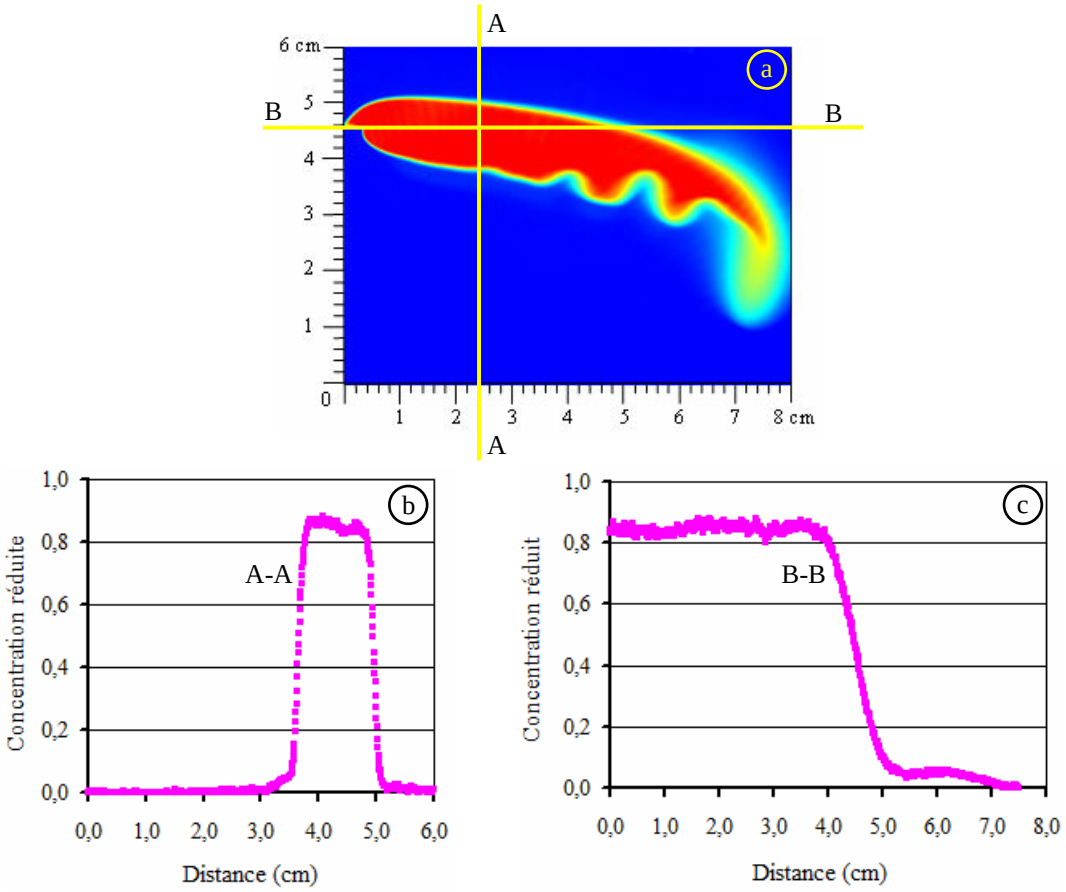


Figure 2.23 : *Distribution de la concentration du panache*

Avant de clore ce chapitre, une question demeure : pouvons-nous utiliser l'analyse expérimentale afin de prévoir l'apparition et le développement des instabilités ?

D'un point de vue expérimental, des nombreux auteurs ont essayé d'utiliser des nombres adimensionnels afin de faire apparaître un critère de stabilité adaptable à leurs expériences. Il s'agit soit du nombre de Rayleigh classique, soit d'un nombre de Rayleigh modifié (Ra*, R_m), soit de nombres notés par G ou G*, soit encore noté par π. Souvent, ces nombres caractérisent la compétition entre les effets gravitaires et les effets visqueux et/ou convectifs (Buès & Aachib [9] ; Güven *et al.* [26] ; Oostrom *et al.* [51] ; Liu et Dane [39] ; Oltéan [48] ; Oltéan *et al.* [50] ; Greenkorn *et al.*, [25]…). Bien que tous ces critères de stabilité aient été utilisés pour des milieux poreux réels et/ou artificiels, nous avons été tentés de les appliquer à nos résultats

expérimentaux. Ainsi, nous considérons le nombre adimensionnel G, défini comme la vitesse de sédimentation typique rapportée à la vitesse zonale :

$$G = \frac{b^2 \rho_0 \gamma g \bar{C}_{inj}}{\mu_0 V_\infty} \tag{2.3}$$

où $\bar{C}_{inj}$ est la concentration massique de la solution injectée [-]. Ce nombre est égal à 12 fois le nombre π_1 de Güven *et al*. [26].

Sur la base de l'analyse des résultats expérimentaux obtenus, nous avons constaté que :

$$\begin{cases} si\, G \leq G_1,\ où\ G_1 \approx 10.5,\ le\ panache\ reste\ stable \\ si\, G \geq G_2,\ où\ G_2 \approx 12.2,\ le\ panache\ devient\ instable\ après\ quelques\ minutes. \end{cases} \tag{2.4}$$

où G_1 et G_2 peuvent être considérés comme étant les limites supérieure et inférieure du domaine de transition entre la configuration stable et la configuration instable.

Cependant, l'analyse du tableau 2.2 fait ressortir l'existence d'une expérience (pour Pe = 7.3) qui ne respecte pas le critère de stabilité proposé. Dans ces conditions, s'agit-il : (i) d'un artéfact ou (ii) d'une erreur d'interprétation ? Comme chaque expérience a été répétée au minimum 3 fois il est difficile d'envisager une réponse via l'erreur expérimentale. Si on privilégie la seconde interprétation, alors on peut envisager que le critère proposé ne convient pas pour des nombres de Péclet inférieurs à 10. Cela suggère un effet stabilisant de Q_{inj} lorsque la vitesse zonale est petite. Ce point sera abordé à nouveau dans l'étude théorique linéaire du chapitre 4.

Rappelons que la notion de "stabilité" dont il est question ici n'est pas la notion usuelle. En effet, il n'y a pas d'état d'équilibre dans notre système (*i.e* pas d'écoulement permanent). Dans ce contexte, nous dirons simplement que l'instabilité correspond à l'apparition de digitations issues de la croissance plus ou moins rapide des ondes prenant naissance sur l'interface inférieure du panache. Ces ondes seront analysées en détail dans le chapitre 4.

Tableau 2.2 : *Résultats d'observation sur le statut du panache.*

No	Q_{inj}	V_{Darcy}	C_{inj}	V_{inj}	ρ_a	$\Delta\rho$	μ_a	Pe	G	Stable ?
	(mL/h)	m/s	kg/m3	m/s	kg/m3	-	Pa.s			
1	0,50	0,00006	0,10	0,000585	998,23	0,071	0,001002	22,0	3,50	**Stable**
2	2,00	0,00006	0,10	0,002340	998,23	0,071	0,001002	22,0	3,50	**Stable**
3	0,50	0,00010	0,30	0,000585	998,23	0,213	0,001002	36,7	6,31	**Stable**
4	1,00	0,00010	0,30	0,001170	998,23	0,213	0,001002	36,7	6,31	**Stable**
5	2,00	0,00010	0,30	0,002340	998,23	0,213	0,001002	36,7	6,31	**Stable**
6	0,50	0,00016	0,50	0,000585	998,23	0,355	0,001002	58,7	6,57	**Stable**
7	2,00	0,00016	0,50	0,002340	998,23	0,355	0,001002	58,7	6,57	**Stable**
8	0,50	0,00006	0,20	0,000585	998,23	0,142	0,001002	22,0	7,01	**Stable**
9	1,00	0,00006	0,20	0,001170	998,23	0,142	0,001002	22,0	7,01	**Stable**
10	2,00	0,00006	0,20	0,002340	998,23	0,142	0,001002	22,0	7,01	**Stable**
11	0,75	0,00010	0,35	0,000877	998,23	0,248	0,001002	36,7	7,36	**Stable**
12	2,00	0,00010	0,35	0,002340	998,23	0,248	0,001002	36,7	7,36	**Stable**
13	0,50	0,00010	0,40	0,000585	998,23	0,284	0,001002	36,7	8,41	**Stable**
14	1,00	0,00010	0,40	0,001170	998,23	0,284	0,001002	36,7	8,41	**Stable**
15	2,00	0,00010	0,40	0,002340	998,23	0,284	0,001002	36,7	8,41	**Stable**
16	0,75	0,00006	0,25	0,000877	998,23	0,177	0,001002	22,0	8,76	**Stable**
17	1,00	0,00006	0,25	0,001170	998,23	0,177	0,001002	22,0	8,76	**Stable**
18	0,50	0,00010	0,45	0,000585	998,23	0,319	0,001002	36,7	9,46	**Stable**
19	2,00	0,00010	0,45	0,002340	998,23	0,319	0,001002	36,7	9,46	**Stable**
20	1,50	0,00006	0,30	0,001755	998,23	0,213	0,001002	22,0	10,51	**Stable**
21	1,75	0,00006	0,30	0,002047	998,23	0,213	0,001002	22,0	10,51	**Stable**
22	2,00	0,00006	0,30	0,002340	998,23	0,213	0,001002	22,0	10,51	**Stable**
23	1,00	0,00010	0,50	0,001170	998,23	0,355	0,001002	36,7	10,51	**Stable**
24	1,50	0,00010	0,50	0,001755	998,23	0,355	0,001002	36,7	10,51	**Stable**
25	2,00	0,00010	0,50	0,002340	998,23	0,355	0,001002	36,7	10,51	**Stable**
26	0,75	0,00004	0,20	0,000877	998,23	0,142	0,001002	14,7	10,51	**Stable**
27	1,00	0,00004	0,20	0,001170	998,23	0,142	0,001002	14,7	10,51	**Stable**
28	2,00	0,00004	0,20	0,002340	998,23	0,142	0,001002	14,7	10,51	**Stable**
29	0,75	0,00006	0,35	0,000877	998,23	0,248	0,001002	22,0	12,26	**Instable**
30	1,00	0,00006	0,35	0,001170	998,23	0,248	0,001002	22,0	12,26	**Instable**
31	1,25	0,00006	0,35	0,001462	998,23	0,248	0,001002	22,0	12,26	**Instable**
32	1,25	0,00004	0,25	0,001462	998,23	0,177	0,001002	14,7	13,14	**Instable**
33	1,50	0,00004	0,25	0,001755	998,23	0,177	0,001002	14,7	13,14	**Instable**
34	2,00	0,00004	0,25	0,002340	998,23	0,177	0,001002	14,7	13,14	**Instable**
35	1,00	0,00016	1,00	0,001170	998,23	0,710	0,001002	58,7	13,14	**Instable**
36	1,50	0,00016	1,00	0,001755	998,23	0,710	0,001002	58,7	13,14	**Instable**
37	2,00	0,00016	1,00	0,002340	998,23	0,710	0,001002	58,7	13,14	**Instable**
38	0,50	0,00006	0,50	0,000585	998,23	0,355	0,001002	22,0	17,52	**Instable**
39	1,00	0,00006	0,50	0,001170	998,23	0,355	0,001002	22,0	17,52	**Instable**
40	2,00	0,00006	0,50	0,002340	998,23	0,355	0,001002	22,0	17,52	**Instable**
41	1,00	0,00010	1,00	0,001170	998,23	0,710	0,001002	36,7	21,03	**Instable**
42	1,50	0,00010	1,00	0,001755	998,23	0,710	0,001002	36,7	21,03	**Instable**
43	2,00	0,00010	1,00	0,002340	998,23	0,710	0,001002	36,7	21,03	**Instable**
44	0,50	0,00002	0,20	0,001755	998,23	0,142	0,001002	7,3	21,03	**Instable**
44	1,50	0,00002	0,20	0,001755	998,23	0,142	0,001002	7,3	21,03	**Instable**
45	2,00	0,00002	0,20	0,002340	998,23	0,142	0,001002	7,3	21,03	**Stable**
46	1,00	0,00006	1,00	0,001170	998,23	0,710	0,001002	22,0	35,04	**Instable**
47	0,50	0,00016	3,50	0,000585	998,23	2,485	0,001002	58,7	45,99	**Instable**
48	1,00	0,00016	3,50	0,001170	998,23	2,485	0,001002	58,7	45,99	**Instable**
49	2,00	0,00016	3,50	0,002340	998,23	2,485	0,001002	58,7	45,99	**Instable**

En conclusion de cette partie, les remarques suivantes peuvent être formulées :

1. Le développement d'un modèle expérimental de type cellule de Hele-Shaw nous permet d'analyser l'évolution spatio-temporelle d'une solution saline injectée dans un champ d'écoulement reproduisant une configuration réaliste d'écoulement souterrain (figure 2.2, 2.11 et 2.13).
2. Les panaches expérimentaux ont trois configurations typiques, que nous avons qualifiées arbitrairement, «*configuration stable*» (sans digitations), «*configuration faiblement instable*» (une digitation unique) et «*configuration fortement instable*» (plusieurs digitations) (figure 2.21).
3. Ces configurations sont influencées par les paramètres comme le contraste de masse volumique, la vitesse d'écoulement et le débit d'injection (figure 2.21 et 2.22).
4. Le débit de la source a peu d'effet sur l'apparition des instabilités (figure 2.21).
5. Dans la *configuration fortement instable,* le taux de croissance de l'instabilité augmente avec le contraste de masse volumique entre la solution injectée et le fluide ambiant (figure 2.21a, d) et diminue avec la vitesse d'écoulement zonal (figure 2.22).
6. L'interface inférieure est toujours rectiligne entre l'aiguille et les premières digitations. Cela suggère l'apparition d'une instabilité convective et l'absence d'instabilité absolue (pour les paramètres analysés ici).
7. Il existe toujours une zone du cœur de panache qui a une concentration constante et égale à la concentration de la solution injectée.
8. Le critère de stabilité uniquement expérimental basé sur la valeur du nombre G est adapté à notre système.

CHAPITRE 3

SIMULATIONS NUMERIQUES

CHAPITRE 3 : SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Comme indiqué dans la deuxième partie de ce manuscrit, l'objectif de ce chapitre est plutôt d'analyser et d'expliquer les différences qui pourraient être observées entre les simulations numériques et les expériences physiques. Ces différences seront analysées à travers, aussi bien, la variation des "paramètres" numériques (discrétisation spatiale, le nombre de Péclet de maille, erreur induite par la discrétisation et la résolution des équations utilisées) que des "paramètres" physiques dont la fiabilité de mesure peut être mise en doute (débit, conductivité hydraulique d'injection, composantes du tenseur de dispersion…).

Comme outil numérique nous avons utilisé COMSOL Multiphysics®. Dans ce logiciel, les équations aux dérivées partielles décrivant les phénomènes physiques étudiés sont résolues par la méthode classique des éléments finis [11].

3.1. ÉQUATIONS APPROCHÉES POUR LES SIMULATIONS

Le transport dans un milieu poreux saturé d'un polluant non-réactif à propriétés physiques variables est souvent décrit par un système d'équations incluant les équations de bilan de masse global et du soluté, les lois de Darcy généralisées et de Fick ainsi que les équations d'état :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}+\nabla.\left(\rho\varepsilon\vec{V}\right)=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial\left(\rho\varepsilon C_m\right)}{\partial t}+\nabla.(\rho\vec{V}\varepsilon C_m+\vec{J})=0 \tag{3.2}$$

$$\vec{V}=-\frac{\overline{\overline{k}}}{\varepsilon\mu}\left(\nabla P+\rho g\nabla z\right) \tag{3.3}$$

$$\vec{J}=-\rho\varepsilon\overline{\overline{D}}\nabla C_m$$

$$\rho=\rho_0(1+\gamma C_m) \tag{3.4}$$

$$\mu=\mu_0\left(1+\beta C_m\right) \tag{3.5}$$

où :

- ρ_0 et ρ sont, respectivement, la masse volumique du fluide ambiant et la masse volumique du fluide dans la zone de mélange [M/L^3] ;
- μ_0 et μ sont respectivement, la viscosité dynamique du fluide ambiant et celle de la zone de mélange [$ML^{-1}T^{-1}$] ;
- γ, β des constantes expérimentales (Weast [71]) ;
- ε porosité [-] ;
- $\vec{V}$ le champ des vitesses [LT^{-1}] ;
- C_m [-] la concentration massique de soluté ;
- $\overline{\overline{k}}$ le tenseur de perméabilité [L^2] ;
- g l'accélération de la pesanteur [LT^{-2}] ;
- t le temps [T] ;
- z l'altitude [L] ;

$\overline{\overline{\mathbb{D}}}$ le tenseur de dispersion dont les composantes D_{ij} s'expriment sous la forme préconisée par Scheidegger [55];

$$\overline{\overline{\mathbb{D}}} = \left(D_m + \alpha_T \left|\vec{V}\right|\right) \mathbb{I} + \frac{(\alpha_L - \alpha_T)\vec{V} \otimes \vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} , \qquad (3.6)$$

où :

D_m est le coefficient de diffusion moléculaire [L^2T^{-1}] ;

α_L, α_T sont la dispersivité longitudinale et transversale [L] et $\mathbb{I}$ le tenseur unité.

3.2. DESCRIPTION DU DOMAINE ÉTUDIÉ D'UN POINT DE VUE NUMÉRIQUE

Les dimensions du domaine étudié, ainsi que les conditions initiales et aux limites, ont été fixées comme celles du dispositif expérimental (figure 3.1). Ainsi, le domaine simulé, représenté sous la forme d'un rectangle de dimensions 299×189,2 mm^2, est divisé en 26631 éléments triangulaires correspondant à 13537 nœuds (figure 3.2).

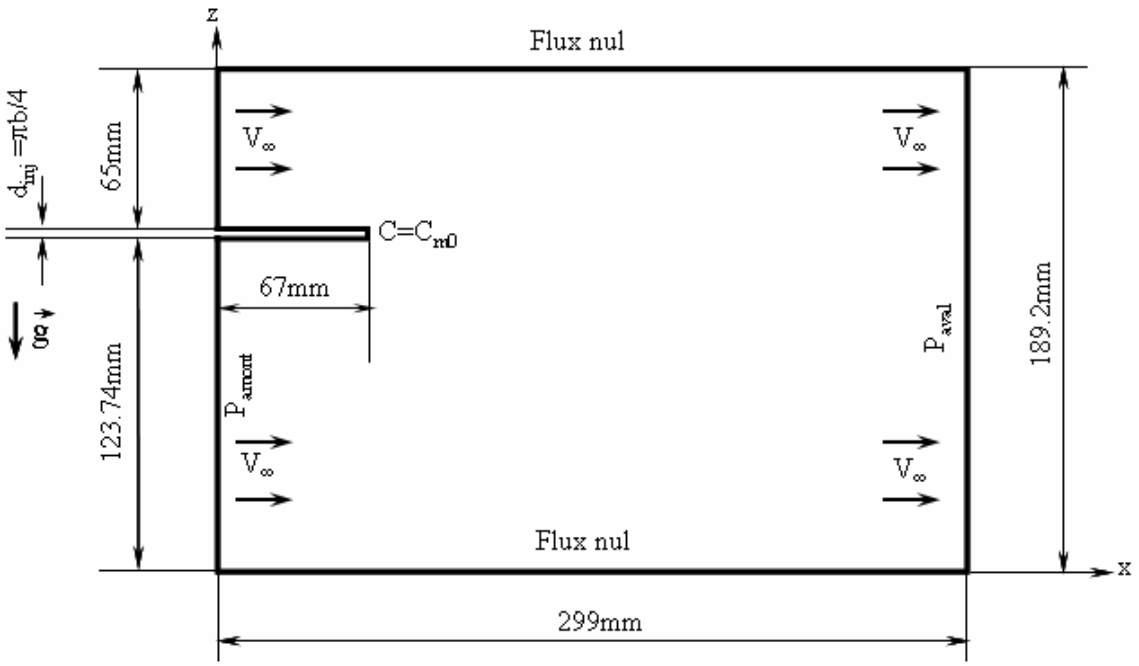


Figure 3.1 : *Géométrie et conditions aux limites du modèle numérique*

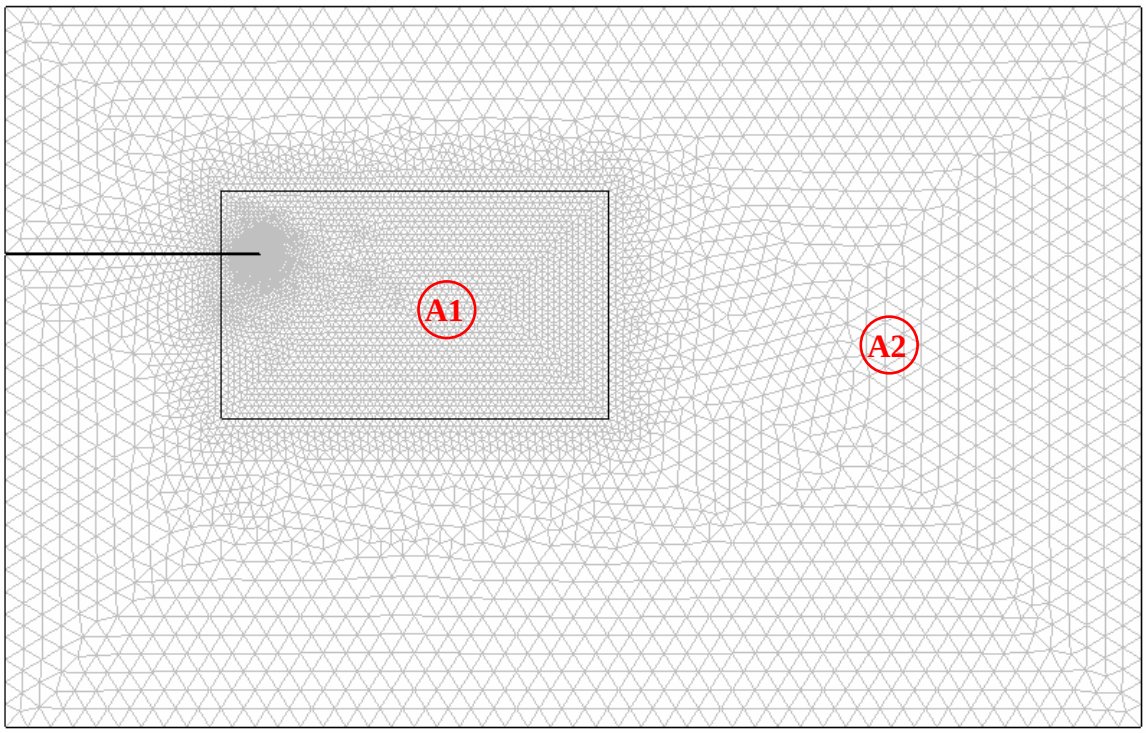


Figure 3.2 : *Maillage du modèle numérique*

Afin d'éviter les oscillations numériques, nous avons utilisé une discrétisation spatiale irrégulière en divisant le domaine en deux. Dans le domaine d'observation du panache (zone A1), le maillage est très fin avec 16913 éléments triangulaires. La finesse diminue régulièrement à partir du point d'injection. La taille maximale des

éléments du maillage dans le domaine A1 est de 2 mm tandis que celle minimale (autour de la tête de l'aiguille d'injection) est de 8.5E-2 mm. Hors du domaine d'observation du panache (zone A2), le maillage est grossier avec 9718 éléments triangulaires ayant une taille maximale de 6.4 mm (figure 3.2).

Quant aux conditions initiales et aux limites, elles sont appliquées de la manière suivante :

- les bords supérieur et inférieur sont considérés comme imperméables :

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{V} = 0 \\ \vec{n}.\vec{J} = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

où : $\vec{n}$ est le vecteur normal orienté vers l'extérieur du domaine.

- l'écoulement dans le domaine étudié est assuré par une différence de charge piézométrique entre le bord amont et le bord aval, *i.e.*,

+ bord amont : $P_{am} = \rho_0 g h_{am}$

+ bord aval : $P_{av} = \rho_0 g h_{av}$

tandis que le flux de soluté est considéré nul. P_{am} et h_{am} sont, respectivement, la pression hydrostatique et la hauteur de la colonne d'eau du bord amont. P_{av} et h_{av} sont, respectivement, la pression hydrostatique et la hauteur de colonne d'eau du bord aval

- l'injection du polluant est réalisée via une aiguille représentée par une discontinuité localisée sur la partie gauche du domaine. Cette discontinuité présente une longueur identique à la profondeur de pénétration de l'aiguille dans la cellule (l_{inj} = 67mm) et une largeur d_{inj} estimée selon [50], *i.e.*, $d_{inj} = \pi b/4$. Les parties supérieure et inférieure de cette discontinuité sont considérées comme imperméables tandis que sa partie droite est soumise à un débit d'injection Q_{inj} et une concentration C_{inj}.

Tous les autres paramètres physiques pris en compte dans nos simulations sont résumés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : *Grandeurs physiques du problème*

Paramètres physiques	Symbole	Dimension	Valeur
Viscosité dynamique de l'eau pure	μ	[Pa.s]	1,002E-3
Masse volumique de l'eau pure	ρ	[kg.m^{-3}]	998,23
Concentration de la solution injectée	C_{inj}	[kg.m^{-3}]	0,2÷3,5
Diffusion moléculaire de la solution saline	D_m	[m^{2}s^{-1}]	1,5E-9
Epaisseur de la cellule	b	[m]	0,55E-3
Perméabilité intrinsèque du milieu poreux	$k=b^2/12$	[m^2]	2,52E-8
Débit injecté	Q_{inj}	[mL.h^{-1}]	0,5÷2
Température	Temp.	^{o}C	20

Afin d'assurer les conditions d'analogie entre la cellule de Hele-Shaw et le domaine étudié considéré comme un milieu poreux homogène, isotrope et saturé, nous avons utilisé le même tenseur de dispersion que celui appliqué par Oltéan *et al.* [42], *i.e.* :

$$\alpha_T = 0 \text{ et } \alpha_L = \frac{b^2\left|\vec{V}\right|}{210\ D_m}\left[1+\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\langle C\rangle}\frac{\langle C\rangle}{\langle\rho\rangle}\right] \tag{3.11}$$

où <x> représente la valeur moyenne de la variable x selon l'ouverture de la cellule.

3.3. RÉSULTATS DES SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Les premières simulations porteront sur les configurations dites stables. Elles permettront de « calibrer » certains paramètres afin d'obtenir des solutions numériques mimant du mieux possible les expériences physiques. Dans une seconde partie, nous traiterons les écoulements instables afin d'expliquer les éventuelles différences entre les solutions numériques et expérimentales.

3.3.1. Simulations des panaches dans la *configuration stable*

Les simulations numériques présentées dans ce paragraphe concernent les expériences présentant un panache **sans digitations** (*configuration dite "stable"*). La figure 3.3 compare les résultats numériques et expérimentaux pour les conditions suivantes : V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.1 g/L et Q_{inj} = 2.0 mL/h.

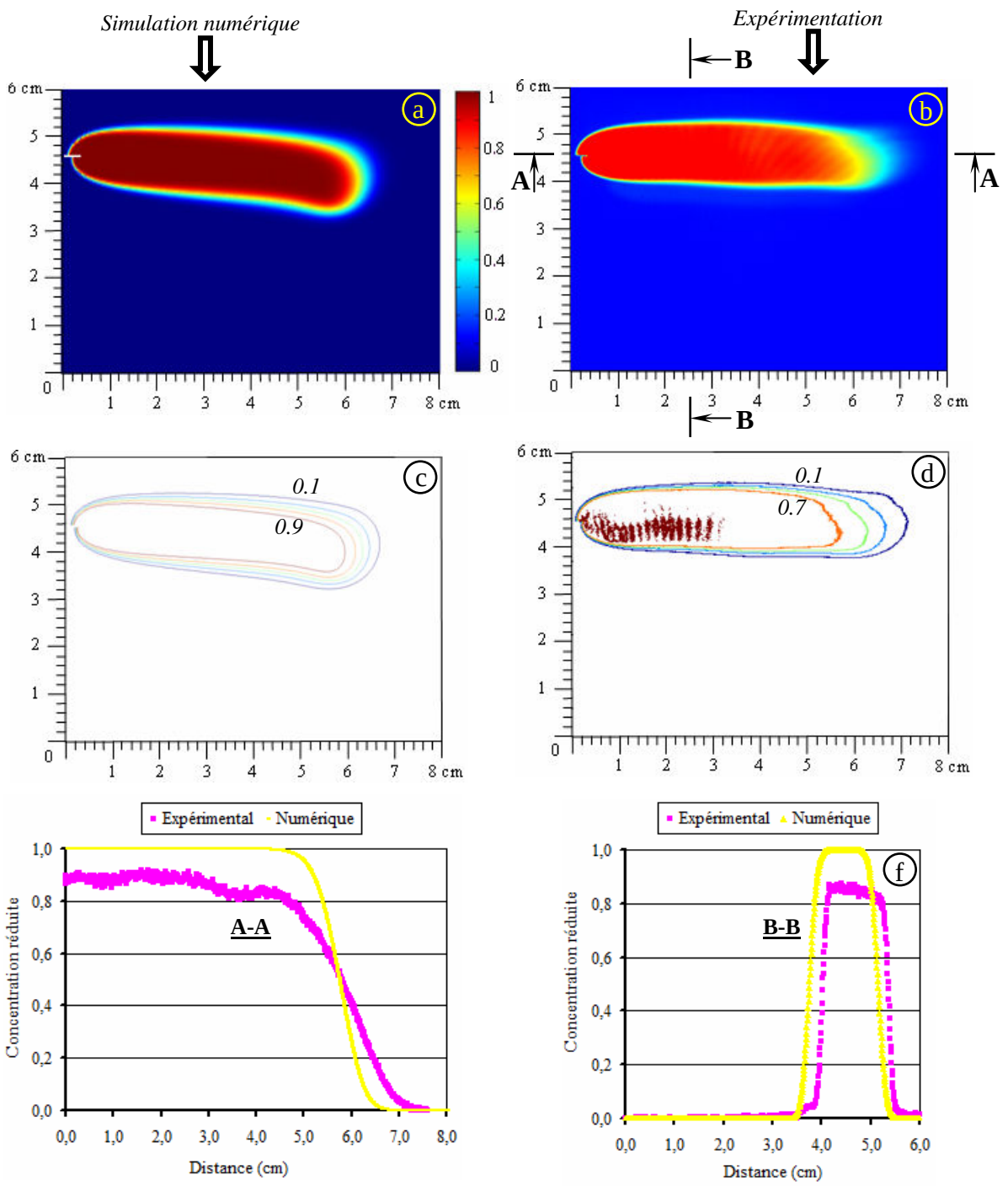


Figure 3.3 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration stable*

(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.1 g/L ; Q_{inj} = 2..0 mL/h ; T=13')

L'analyse qualitative de l'évolution spatio-temporelle de la zone de mélange suggère un bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux. D'un point de vue quantitatif, nous pouvons effectuer les remarques suivantes :

- la concentration maximale dans l'expérience est toujours inférieure à celle de la simulation numérique ;

- le panache simulé numériquement est légèrement plus incliné que le nuage expérimental ;

- l'avancée longitudinale de la zone de mélange numérique semble, en général, plus réduite que celle observée expérimentalement ;

- si l'extension longitudinale du noyau du panache numérique est légèrement inférieure à celle obtenue expérimentalement, l'extension numérique latérale, estimée via l'isoconcentration de 0.1, semble surestimer l'extension expérimentale latérale (figure 3.3f). Cette observation permet d'envisager que le gradient de concentration numérique à l'interface inférieure et/ou supérieure du panache soit plus petit que celui déterminé par voie expérimentale. Par contre, à la pointe du panache, cette tendance est complètement inversée : la zone de mélange expérimentale définie arbitrairement entre les isoconcentrations 0.1 à 0.7 est largement plus étendue que celle fournie par le modèle numérique.

Les faibles différences décrites ci-dessus proviennent, sans aucun doute, des incertitudes sur les variables et/ou les paramètres utilisés aussi bien dans le modèle numérique que physique :

❖ Dans le modèle physique, ces incertitudes peuvent provenir :

✓ d'une erreur sur la mesure de la masse de sel lors de la préparation de la solution injectée ;

✓ d'une erreur de mesure sur l'espacement « b » entre les plaques de la cellule qui pourrait entraîner une erreur sur la perméabilité d'environ 11% (figure 2.19) ;

✓ d'un gradient de température entre la solution injectée et l'eau distillée saturant la cellule (figure 2.9b) qui pourrait expliquer la différence d'inclinaison entre le panache expérimental et numérique ;

✓ d'une erreur sur les concentrations maximales mesurées par la méthodologie décrite dans le chapitre 2 (figure 3.3e) ;

✓ d'une erreur sur le calcul de la vitesse d'entraînement latérale estimée d'après la formule (2.1). Cette erreur pourrait servir à expliquer la différence entre les avancées expérimentale et numérique des panaches.

❖ D'un point de vue numérique, les écarts entre les solutions numérique et expérimentale peuvent être dus aux oscillations numériques introduites par la méthode implémentée dans COMSOL aux tolérances absolue et relative des solveurs mis en œuvre pour la résolution du système d'équations différentielles 3.1 à 3.5 ou encore à la forme du tenseur de dispersion choisi. Nous continuerons à analyser ces aspects dans les sections suivantes.

Malgré les différences mises en exergue ci-dessus, nous pouvons considérer que les simulations numériques reproduisent de façon plus que satisfaisante les expériences physiques lorsque le panache est caractérisé par la *configuration dite stable*.

3.3.2. Simulations des panaches dans la *configuration «faiblement» instable*

Dans le chapitre 2, nous avons constaté que lorsque la concentration de solution injectée dépasse une valeur critique estimée à environ 0.2 g/L, le panache passe d'une configuration stable à une configuration faiblement instable caractérisée par l'apparition et le développement d'un doigt à la pointe du panache. Ce paragraphe sera donc consacré aux simulations numériques effectuées pour les expériences ayant un panache présentant une *configuration faiblement instable*. La figure 3.5 présente les résultats numériques et expérimentaux avec les paramètres expérimentaux suivants : V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2g/L et Q_{inj} = 1.0 mL/h.

Qu'il s'agisse d'une analyse qualitative ou quantitative, la figure 3.4. fait ressortir pratiquement les mêmes différences entre les deux solutions, expérimentale et théorique, que celles citées dans le paragraphe précédent, *i.e.*, configuration stable. En outre, nous pouvons constater que le « doigt numérique » sédimente plus rapidement que le « doigt expérimental ». Autrement dit, nous pouvons conclure que, les solutions numérique et expérimentale sont en bon accord tant que notre comparaison concerne la partie « stable » du panache, *i.e.*, localisé près du point d'injection. En revanche, à partir d'une distance par rapport à la source et pour des temps supérieurs à un temps limite propre à chaque expérience (ici, T > 10', figure 3.5), nous pouvons clairement détecter un écart sur la sédimentation du doigt et sur l'avancée longitudinale de l'interface (isoconcentration de 0.1) entre les deux solutions.

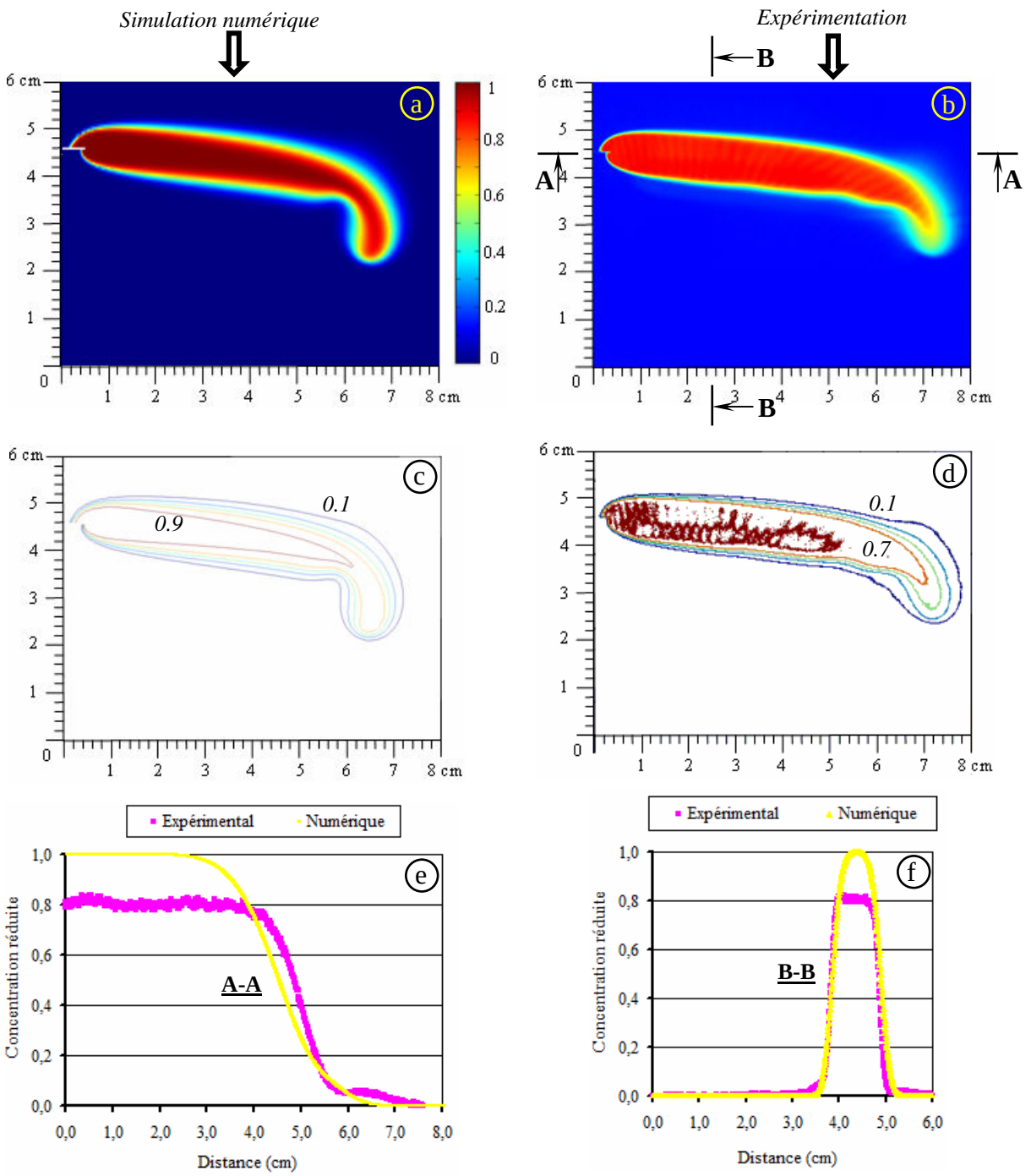
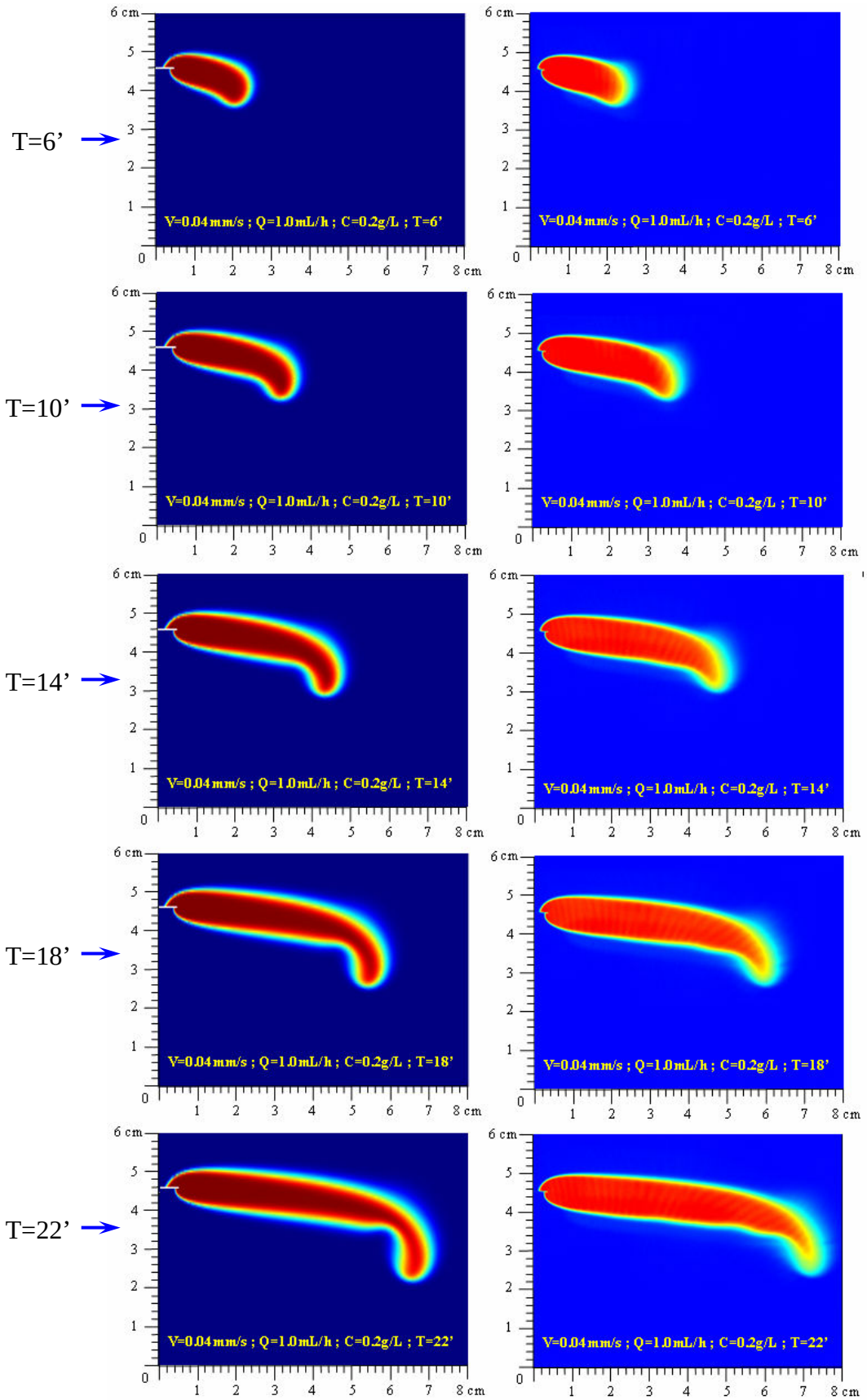


Figure 3.4 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration faiblement instable (V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L et Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')*



a) Numérique *b) Expérimental*

(V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L et Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')

Figure 3.5 : *Propagation spatio-temporelle du panache numérique et expérimental*

Afin de vérifier si ces différences ne proviennent pas d'une mauvaise discrétisation du maillage, nous avons estimé la précision d'un point de vue numérique à travers le nombre de Péclet de maille Pe_{cell} défini sous la forme [11] :

$$Pe_{cell} = \frac{h|V|^3}{D_{xx}u^2 + D_{yy}v^2 + D_{xy}uv + D_{yx}vu} \tag{3.13}$$

où h représente la taille maximale de la maille analysée, D_{ij} les composantes du tenseur de dispersion et (u et v) les composantes horizontale et verticale du champ des vitesse.

Il est bien connu que, afin de diminuer les oscillations numériques des solutions estimées par la méthode des éléments finis, le Pe_{cell} doit être inférieur à 2 [33][56]. Dans ce contexte, nous avons vérifié la convergence de notre solution en l'analysant sur deux discrétisations spatiales différentes du domaine d'étude. La première implique un Pe_{cell} = 1.62 tandis que la seconde un Pe_{cell} = 9.93. Comme les résultats, présentés sur la figure 3.6, ne révèlent pas de différences significatives, nous pouvons supposer que la solution numérique converge effectivement vers la solution exacte.

Les différences entre les solutions numérique et expérimentale peuvent aussi provenir d'une sur ou sous-estimation des composantes du tenseur de dispersion utilisé dans le modèle numérique. À titre d'exemple, lorsqu'il s'agit d'un écoulement purement diffusif, une surestimation de la diffusion moléculaire peut entraîner une surestimation de la largeur de la zone de mélange avec des effets significatifs sur le gradient de concentration (lissage). Par contre, lors d'un écoulement convectif, une sous-estimation de la vitesse latérale d'entraînement peut conduire à une dispersion inférieure à la dispersion physique avec des conséquences sur l'avancée longitudinale du panache et donc sur la sédimentation du doigt. Nous analyserons donc l'influence de la forme de tenseur de dispersion sur la solution numérique dans le paragraphe suivant.

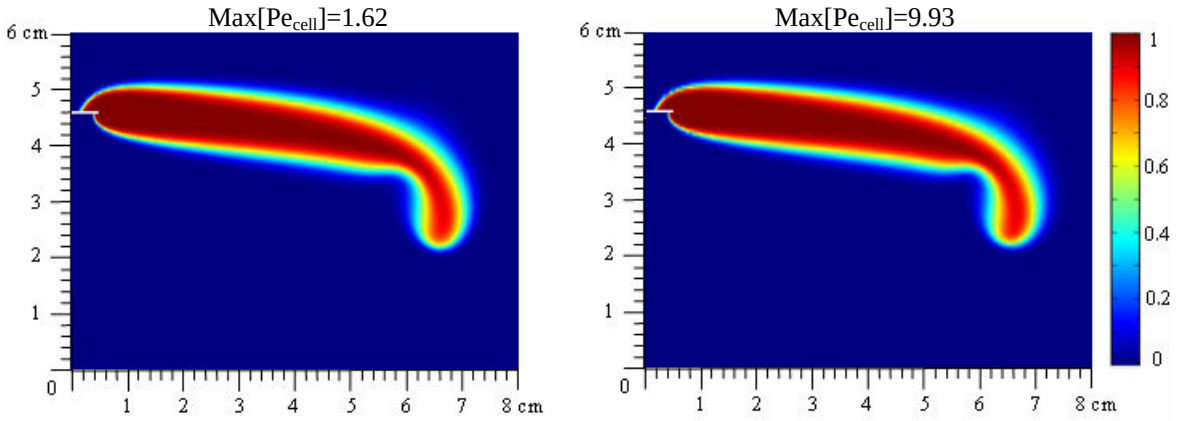


Figure 3.6 : *Influence de nombre Pe_{cell}*

(V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L et Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')

3.3.3. Simulations des panaches dans la configuration «fortement» instable

Dans cette partie, les simulations numériques concerneront les expériences dans lesquelles apparaissent de multiples digitations, dites : « *configurations fortement instables* ». La figure 3.7 présente les résultats numériques et expérimentaux pour les conditions suivantes : V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h.

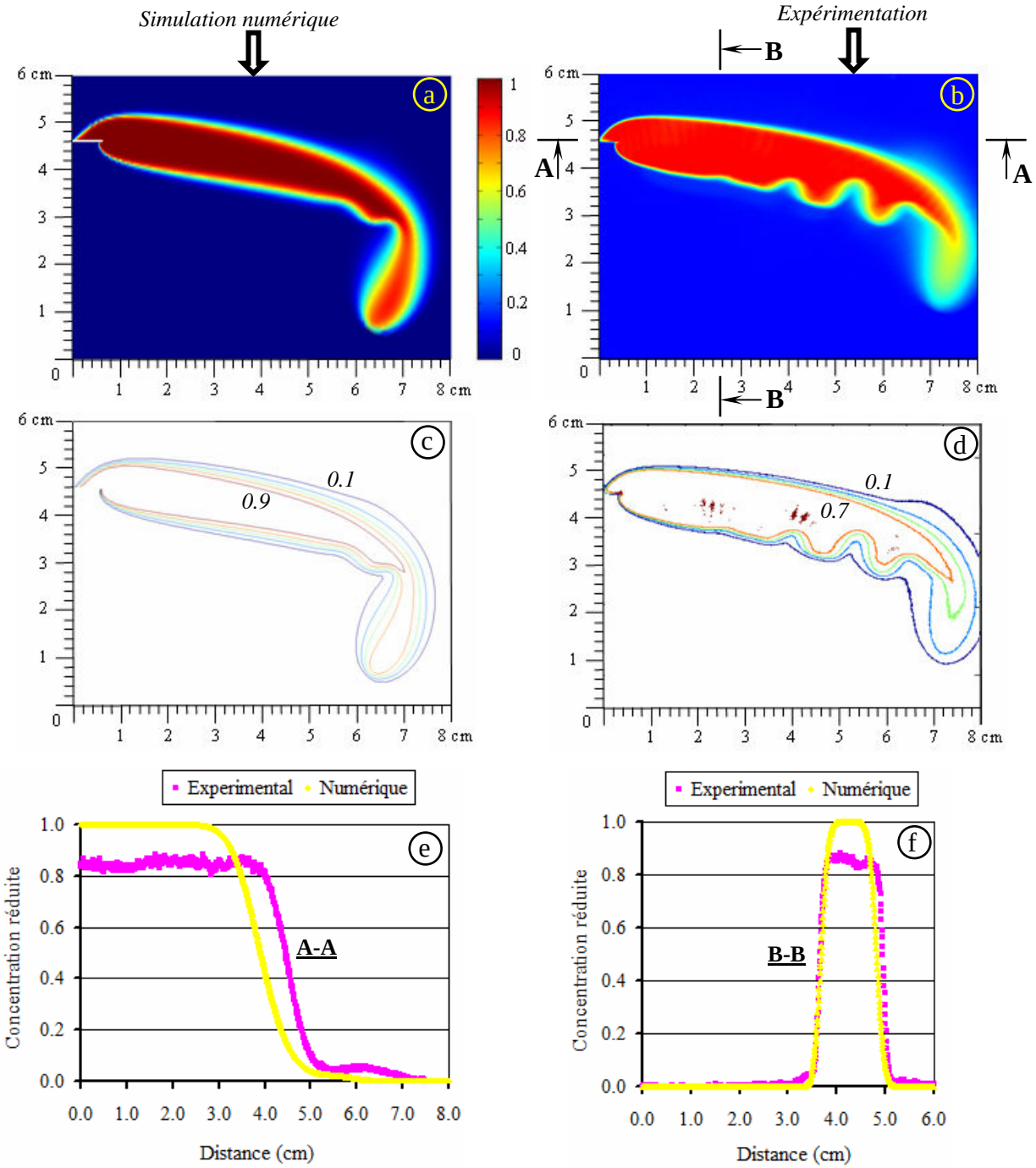


Figure 3.7 : *Résultats numériques et expérimentaux pour la configuration fortement instable*

(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

Dans les sections situées au voisinage du point d'injection, *i.e.*, dans le nuage « stable », on retrouve les mêmes commentaires que ceux développés dans les paragraphes 3.3.1 et 3.3.2. Par contre, dès que l'on s'approche de la pointe du panache, la solution numérique s'éloigne de plus un plus de la solution expérimentale. Le nombre de digitations simulé est différent de celui obtenu expérimentalement.

D'une manière générale, l'instabilité gravitationnelle d'un panache peut être définie comme étant la réaction du système physique aux perturbations induites par les variables de l'écoulement. Si les perturbations initiales décroissent au fil du temps, le système est considéré comme stable. Par contre, si les perturbations se développent au cours du temps, le système est considéré comme instable [37] [42] [56]. D'un point de vue expérimental, chaque expérience est caractérisée par des perturbations appropriées, difficiles à déterminer. Dans notre système expérimental, outre le contraste de masse volumique, ces perturbations peuvent être directement liées aux variations spatiales de l'espacement entre les plaques et/ou aux faibles variations du débit et/ou de la concentration injectés. D'un point de vue numérique, elles sont souvent artificielles et produites par les bruits numériques [38] [56] (oscillations, dispersion numérique, solveurs, maillage, …). Afin de quantifier l'influence de ces bruits sur notre solution, nous proposons dans ce qui suit d'analyser sa sensibilité.

Sur cette base, nous avons effectué plusieurs simulations en modifiant, dans un premier temps, la tolérance relative d'un des solveurs intégrés dans COMSOL. La convergence de la solution numérique est assurée lorsque [11] :

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i}\left(\frac{|E_i|}{A_i + R|U_i|}\right)\right]^{1/2} < 1 \qquad (3.14)$$

où :

- U est le vecteur des solutions correspondant à la solution recherchée lors d'une itération temporelle et E est l'estimation de l'erreur de U selon le pas de temps considéré ;

- N est le nombre de degrés de liberté ;

- A_i est la tolérance absolue pour le degré de liberté i et R est la tolérance relative.

La figure 3.8 montre que la tolérance relative imposée dans la résolution de notre système d'équations différentielles (3.1 à 3.5) joue un rôle non-négligeable dans l'apparition et le développement des « instabilités » numériques. Ainsi, avec une tolérance relative 10 fois plus grande que celle initialement imposée, la solution numérique est plus proche du panache expérimental ! Dans ces conditions, on peut

réellement s'interroger sur la capacité d'un modèle numérique de prévoir et de reproduire l'apparition et le développement des instabilités physiques.

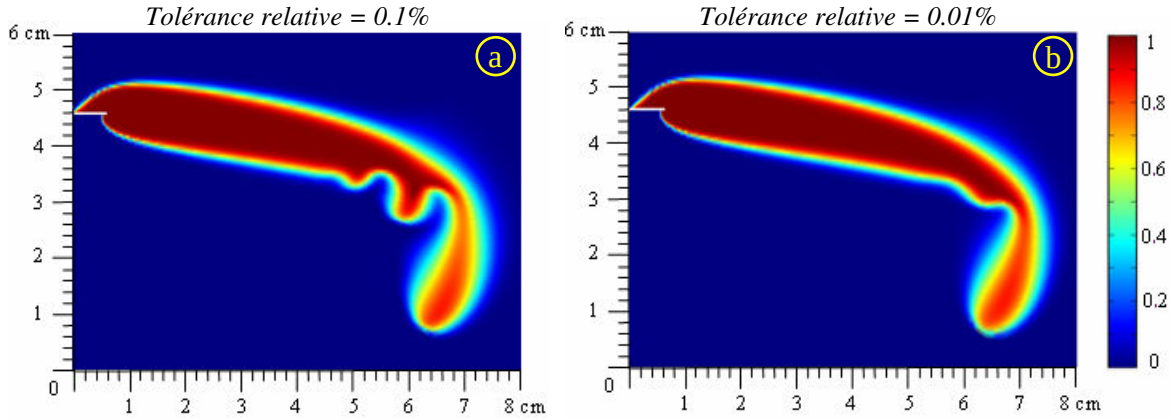


Figure 3.8 : *Instabilité du panache numérique obtenue par modification de tolérance*

(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

En analysant les figures 3.7, 3.8 et 3.9, nous avons constaté que les différences entre les simulations numériques et l'expérience se situent principalement au niveau des lobes d'instabilité localisé à l'interface inférieure du panache, tandis que la morphologie générale est semblable. La raison la plus plausible devrait être que la perturbation imposée dans le modèle numérique ne peut pas refléter correctement la(les) perturbation(s) physique(s).

Théoriquement, l'instabilité physique peut être reproduite par la simulation numérique si les perturbations numériques sont semblables aux perturbations physiques. En outre, le panache présentant initialement une *configuration faiblement instable* (sans digitation, figure 3.8b) peut passer à une *configuration fortement instable* (avec digitations, figure 3.8a) via la modification de la tolérance relative. Par conséquent, d'un point de vue numérique, le concept de « *stable* » ou « *instable* » n'a qu'un sens relatif.

Ces derniers commentaires suggèrent que le critère de stabilité proposé dans le chapitre 2 ne pourrait pas être valide sur des solutions obtenues par voie numérique. Il caractérise uniquement les instabilités physiques. Cela explique aussi pourquoi des différences sont obtenues entre notre résultat et ceux des autres études [28] [38] [44] [51] [57] [56] [23]. Ce point sera discuté au chapitre 4, dans le cadre de l'étude de stabilité linéaire.

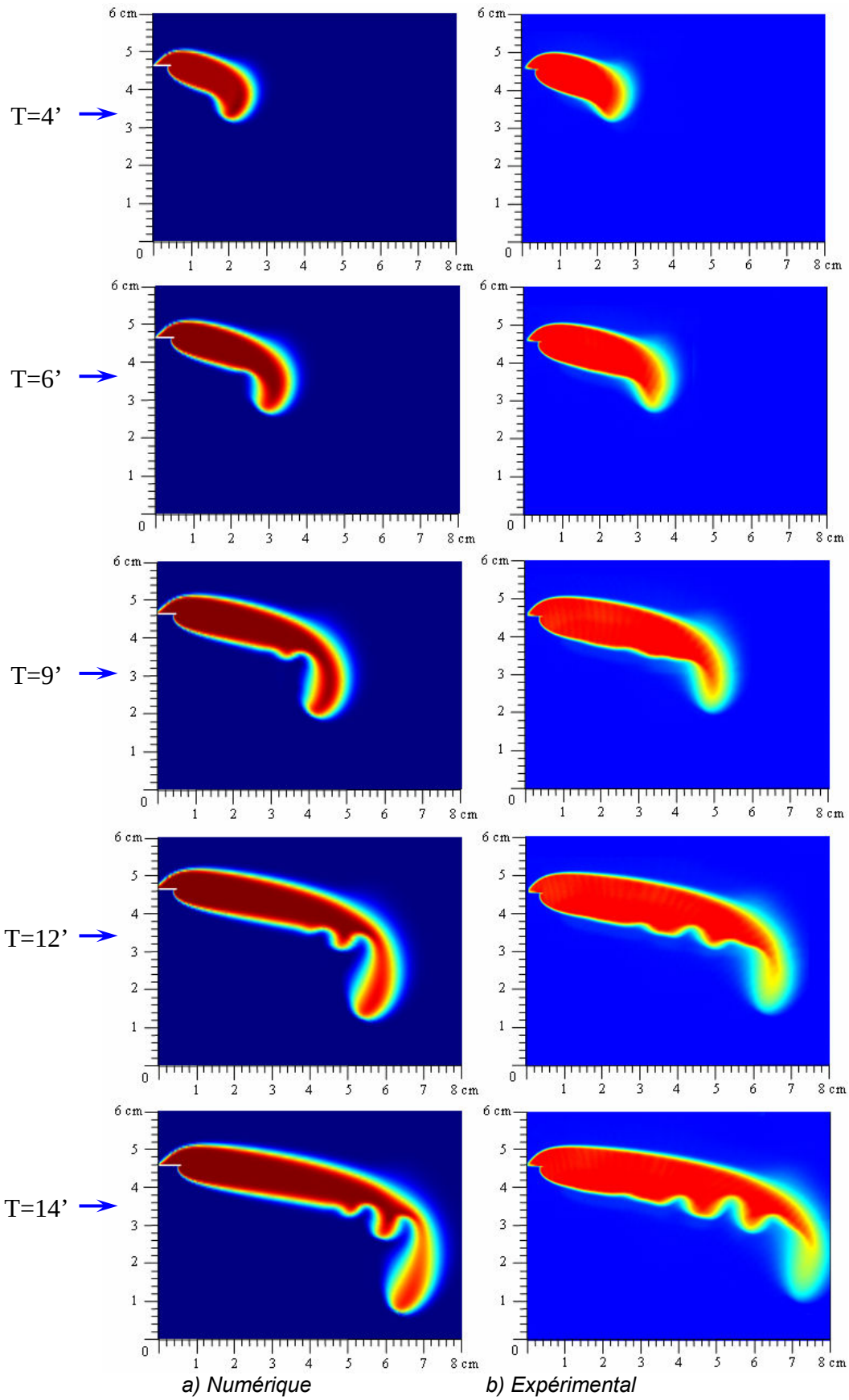


Figure 3.9 : *Propagation spatio-temporelle de la configuration fortement instable*

(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

3.4. INFLUENCE DU TENSEUR DE DISPERSION SUR LA PROPAGATION DU PANACHE

Dans cette partie notre attention est portée sur l'influence du tenseur de dispersion sur la solution numérique. Ainsi, pour les simulations numériques ci-dessus, nous avons utilisé le tenseur général de dispersion (3.6) qui dépend aussi bien du champ des vitesses que du contraste de masse volumique. Cette forme de tenseur de dispersion semble être en accord avec les processus de dispersion-diffusion développés dans les milieux poreux [4][19][50][62]. La sensibilité de la solution numérique a été testée à travers différentes formes de ce tenseur.

3.4.1. Tenseur isotrope de diffusion

Les premières simulations effectuées dans cette section utilisent un tenseur de dispersion 2D sphérique pour lequel les effets diffusifs sont prépondérants devant les effets dispersifs. Autrement dit, nous avons conduit ces simulations en considérant les effets dispersifs négligeables ($\alpha_L = \alpha_T = 0$) par rapport à la diffusion moléculaire ($D_{ij} = D_m \delta_{ij}$) :

$$\overline{\overline{\mathbb{D}}} = \begin{pmatrix} D_m & 0 \\ 0 & D_m \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Sur les figures 3.10 et 3.11 nous retrouvons deux solutions numériques obtenues avec un nombre de Péclet moléculaire Pe = 14.7 et Pe = 22 $\left(Pe = V_\infty b / D_m\right)$ pour deux configurations distinctes : *faiblement instable* et *fortement instable*. Ces solutions sont comparées avec celles obtenues en utilisant la forme générale du tenseur de dispersion (3.6. couplée à 3.11).

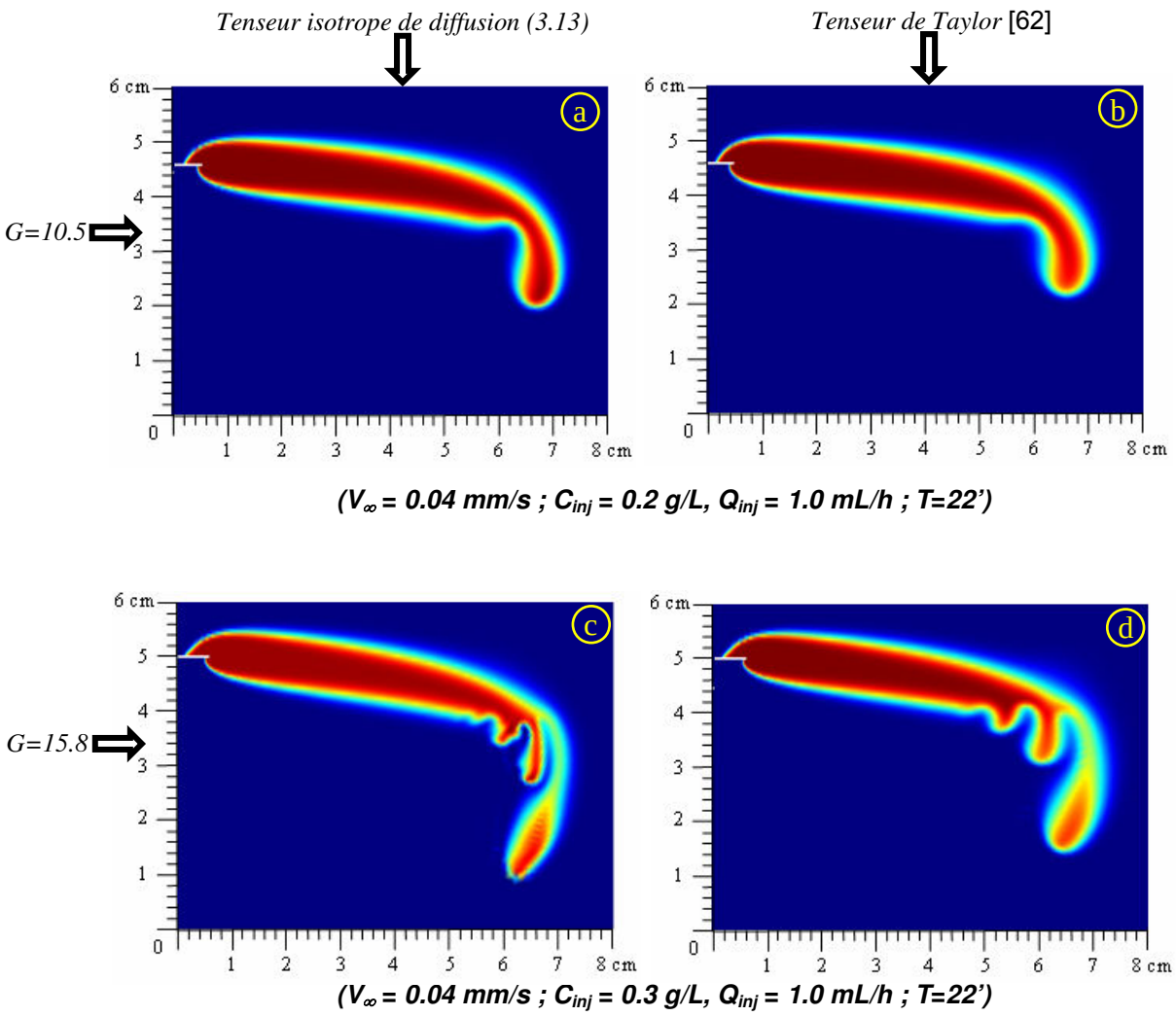


Figure 3.10 : *Influence de la forme du tenseur de dispersion (Pe =14.7)*

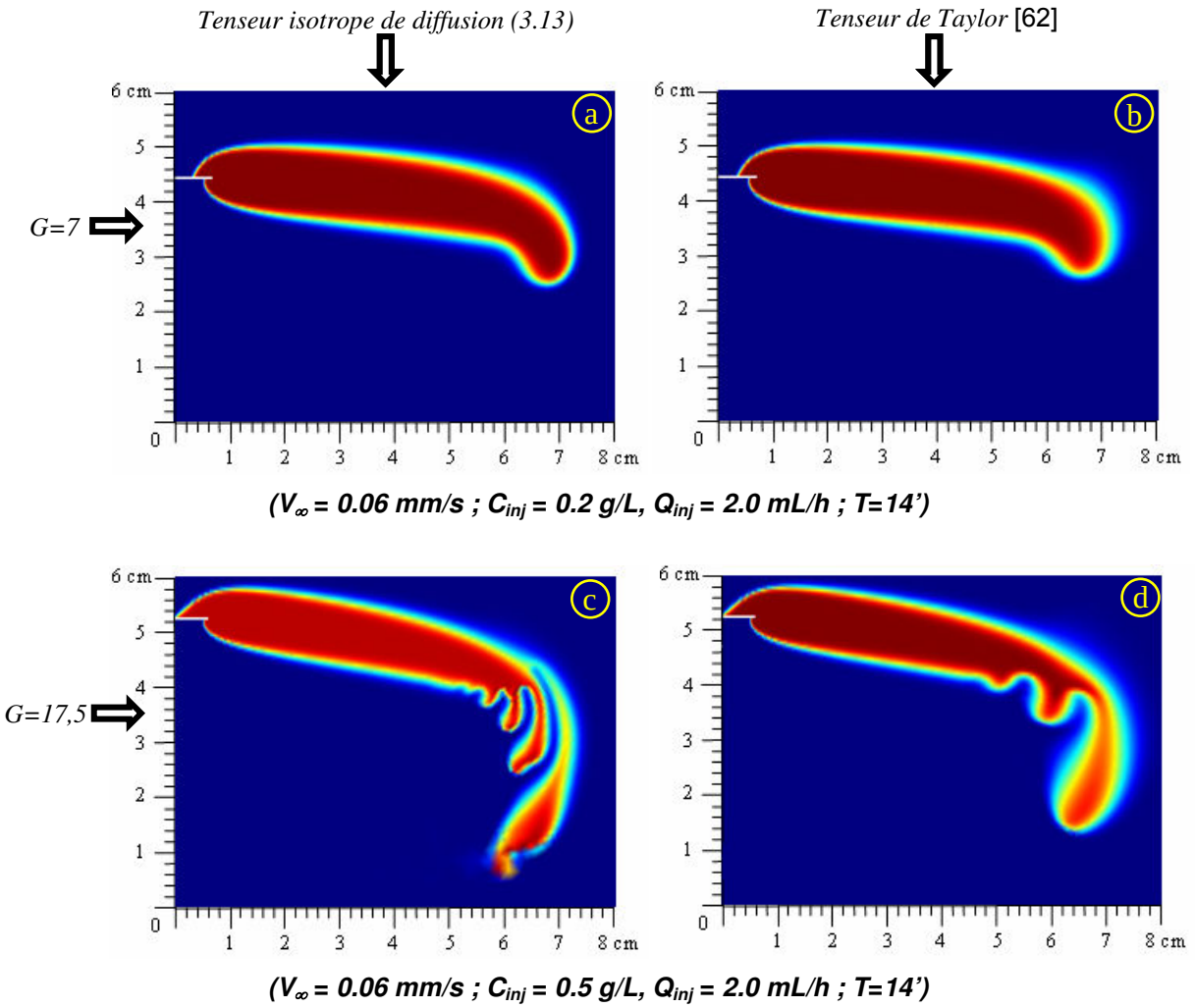


Figure 3.11 : *Influence de la forme de tenseur de dispersion (Pe=22)*

L'analyse qualitative de ces figures montre que pour les configurations *fortement instables*, le panache dans les simulations utilisant le tenseur sphérique (figure 3.10c et 3.11c) présente un nuage *plus instable* que celui prenant en compte la forme générale du tenseur de dispersion (figure 3.10d et 3.11d). L'instabilité du nuage semble être accentuée avec l'augmentation de G. Toutes ces tendances sont en accord avec l'analyse de stabilité linéaire du chapitre 4.

L'utilisation uniquement de la diffusion moléculaire génère sous COMSOL des erreurs non-négligeables sur l'estimation de la concentration (*e.g.*, la concentration maximale réduite dépasse la valeur unitaire). Selon Liu et Dane [39], l'absence des dispersivités intrinsèques dans le tenseur de dispersion peut entraîner une augmentation du gradient de concentration entre les éléments adjacents qui favorise l'apparition des oscillations numériques et donc, une forte variation de la concentration calculée. En outre, les solutions numériques présentées ci-dessus

semblent s'écarter de la solution expérimentale. Ceci signifie que l'étude numérique sur la propagation du soluté dans notre dispositif expérimental doit être menée avec un tenseur de dispersion prenant en compte aussi bien les effets diffusifs que dispersifs. On peut ainsi supposer que plus les nombres de Pe et G sont grands, plus l'influence du terme dispersif dans le tenseur de dispersion est importante.

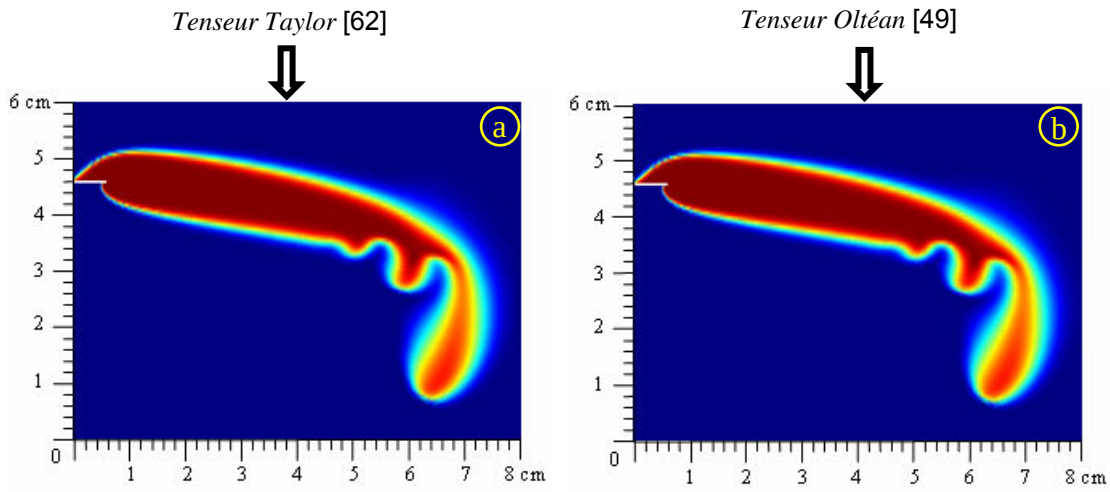
Concernant les *configurations stable et faiblement instable*, nous ne constatons pas de différences significatives entre les simulations utilisant le tenseur isotrope (figures 3.10a et 3.11a) et celles utilisant le tenseur anisotrope (figure 3.10b et 3.11b). Néanmoins, si de faibles différences persistent, elles sont localisées au niveau du doigt de la pointe du panache.

3.4.2. Tenseur anisotrope

Suite aux conclusions du paragraphe précédent, nous analyserons par la suite la sensibilité de la solution numérique aux différentes formes du tenseur de dispersion.

- ***Les simulations utilisant le tenseur de dispersion de Taylor*** [62] ***:***

La figure 3.12a présente la simulation utilisant le tenseur de dispersion de Taylor (le terme dispersif est indépendant du contraste de masse volumique (1.8) [62]). La solution numérique ainsi obtenue est comparée avec celle utilisant le tenseur général (avec une dispersivité intrinsèque dépendant du contraste de masse volumique, cf. la formule (3.6) [50]) (figure 3.12b).



(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

Figure 3.12 : *Influence de la forme du tenseur de dispersion.*

De cette figure, il ressort que la répartition spatio-temporelle de la zone de mélange est identique. Pratiquement, nous ne détectons aucune différence entre les simulations impliquant des tenseurs de dispersion différents. Cette remarque est similaire à celle observée sur une autre simulation où la concentration injectée est de 3.5g/L (figure 3.13b, c). Ce résultat provient du fait que le terme $\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial\langle C\rangle}\frac{\langle C\rangle}{\langle\rho\rangle}$ intervenant dans l'expression 3.10 est négligeable devant 1. Autrement dit, pour nos faibles contrastes de densité $\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)$, la formulation de Taylor est plus que satisfaisante pour décrire le phénomène de dispersion dans une cellule de Hele-Shaw. Il faut cependant noter que, quel que soit le tenseur de dispersion pris en compte, cette simulation ne reproduit pas parfaitement les résultats expérimentaux. D'une part, la solution numérique, contrairement aux autres simulations traitées jusqu'à maintenant, se propage plus rapidement par rapport à la solution expérimentale et d'autre part, la sédimentation numérique du doigt "principal" est nettement plus visible que celle observée expérimentalement. Le seul paramètre qui peut être considéré comme identique est l'inclinaison du panache. Pouvons-nous, dans ces conditions, supposer que les fortes différences remarquées entre les solutions numérique et expérimentale sont engendrées par les effets 3D et/ou inertiels ? Hypothétiquement, la réponse à cette question aurait pu être trouvée à travers d'autres simulations numériques menées autour de ces mêmes conditions initiales et aux limites. En outre, ces simulations auraient éventuellement permis de déterminer la valeur seuil à partir de laquelle le contraste de masse volumique joue son rôle dans le tenseur général de dispersion.

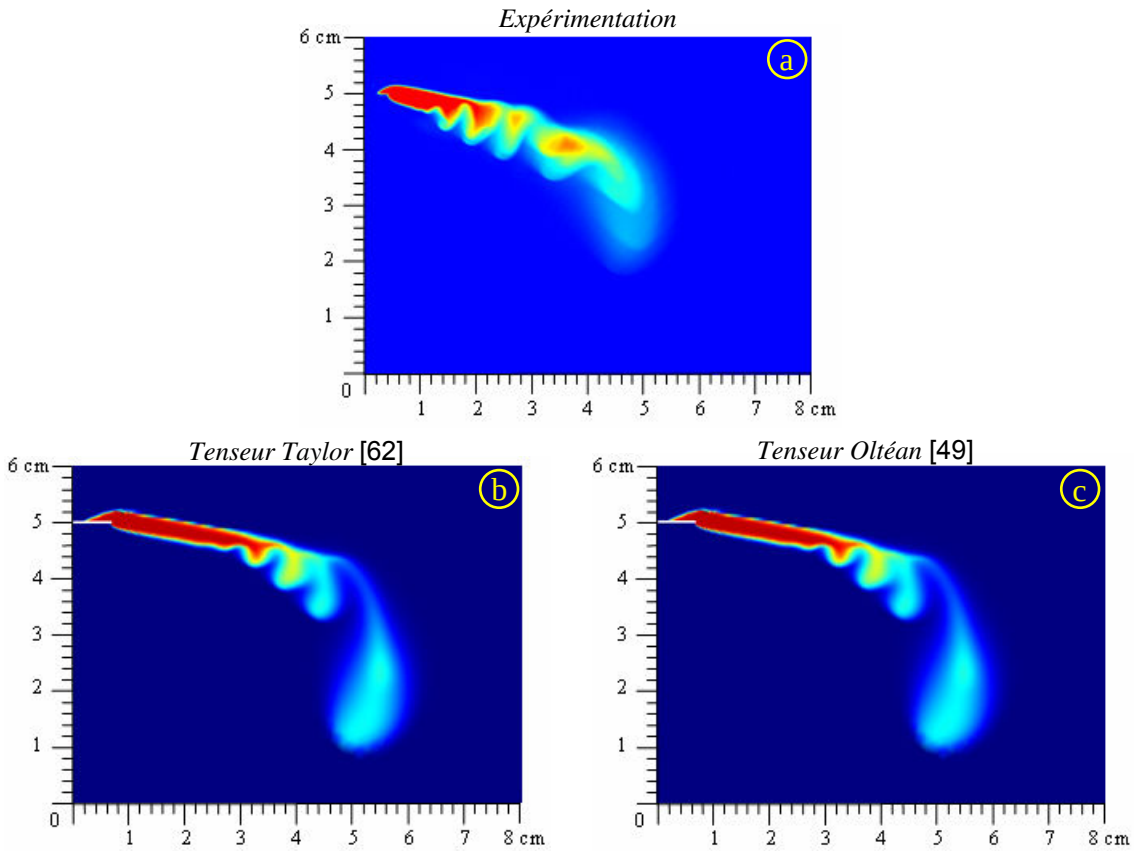


Figure 3.13 : *Influence du contraste de masse volumique dans le tenseur de dispersion (V_∞ = 0.16 mm/s ; C_{inj} = 3.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=4')*

➢ ***Les simulations utilisant une dispersivité constante :***

D'après Simmons *et al.*, [59], les simulations numériques des expériences menées dans une cellule de Hele-Shaw pourraient être également menées en utilisant, comme pour un milieu poreux, des valeurs de dispersivités intrinsèques constantes. Afin de vérifier cette hypothèse, dans les simulations présentées ci-dessous (figure 3.14a et c), nous avons considéré une dispersivité longitudinale $\alpha_L = 7.10^{-5}$ m et une dispersivité transversale $\alpha_T = 0$. Comme d'habitude, les résultats de ces simulations sont comparés avec ceux obtenus en utilisant des dispersivités estimées à travers l'expression 3.6 (figure 3.14b et d). Contrairement à nos attentes, nous constatons que ces résultats sont pratiquement identiques : l'influence de la dispersivité intrinsèque longitudinale semble être négligeable. Il faut cependant noter que ces commentaires ne sont pas valables pour toutes les expériences simulées.

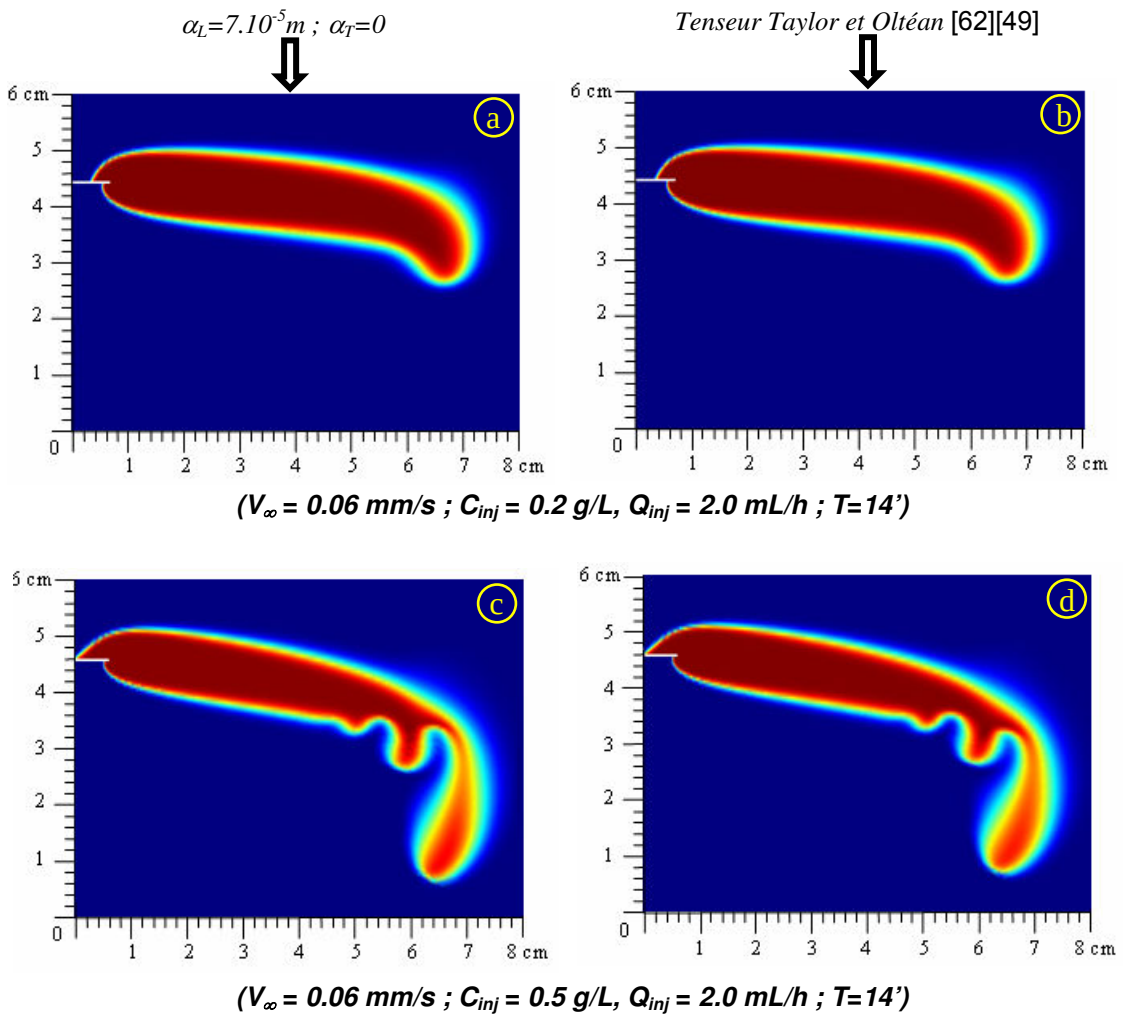


Figure 3.14 : *Comparaison des simulations utilisant une dispersivité constante ou variable*

En fait, pour certaines configurations fortement instables, l'utilisation de l'hypothèse de *Simmons et al*. [59] conduit à un écart appréciable entre les deux solutions numériques (figure 3.15, c et d). Tandis que le tenseur de dispersion proposé par Oltéan *et al*., [49] conduit à l'apparition et le développement de 3 digitations sur l'interface inférieure du panache, le tenseur de dispersion classique n'entraîne qu'une digitation "majeure" et une digitation qu'on pourrait appeler "mineure". Sous ces conditions, nous pouvons conclure que :

- pour la *configuration faiblement instable,* le phénomène de dispersion dans la cellule de Hele-Shaw peut être simulé aussi bien à travers une dispersion constante qu'une dispersion dépendante de la vitesse (figure 3.14 a et b ou figure 3.15a et b) ;

- pour la *configuration fortement instable*, la diminution de Péclet semble engendrer des différences notables concernant le nombre de digitations. Ainsi, la configuration initiale fortement instable peut basculée vers une configuration faiblement stable (figure 3.15c et d).

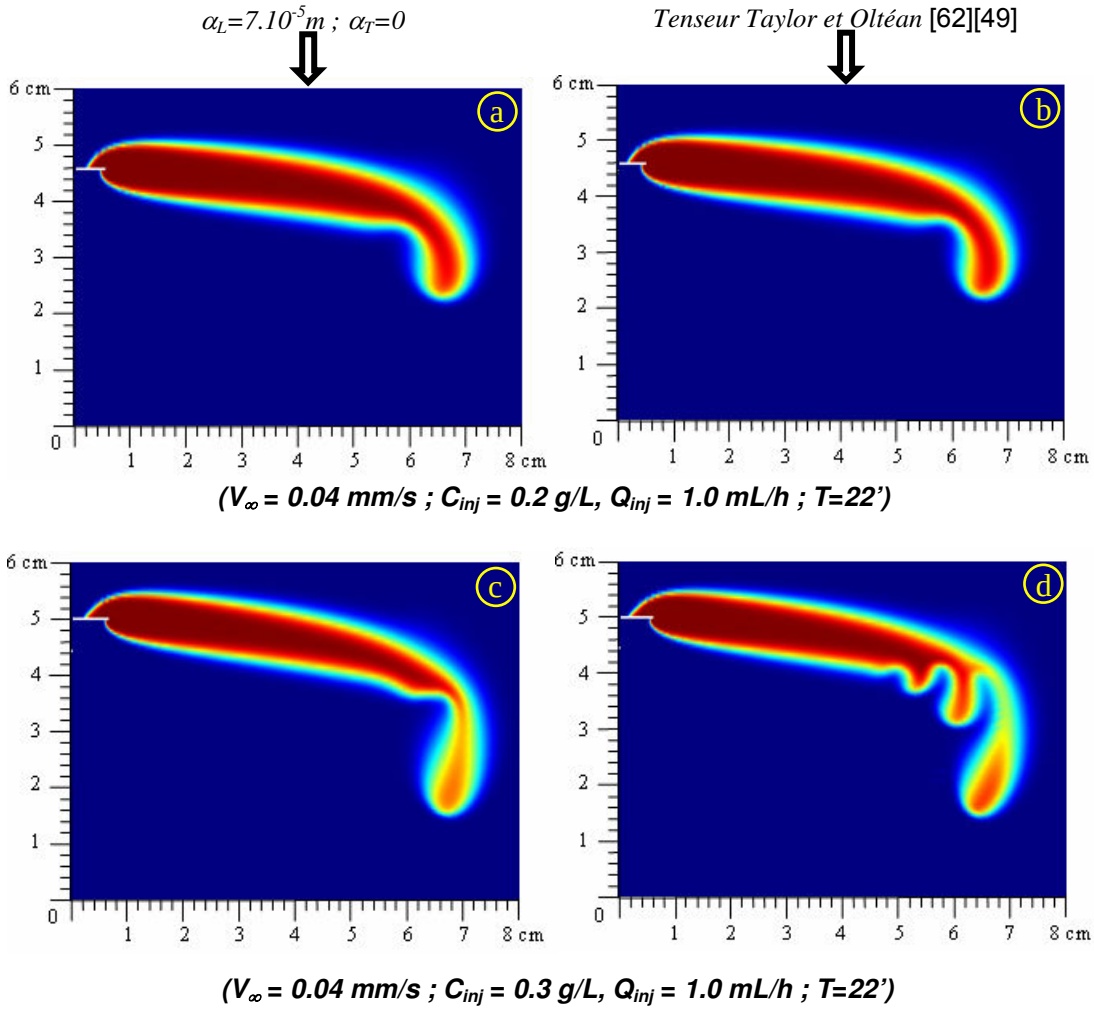
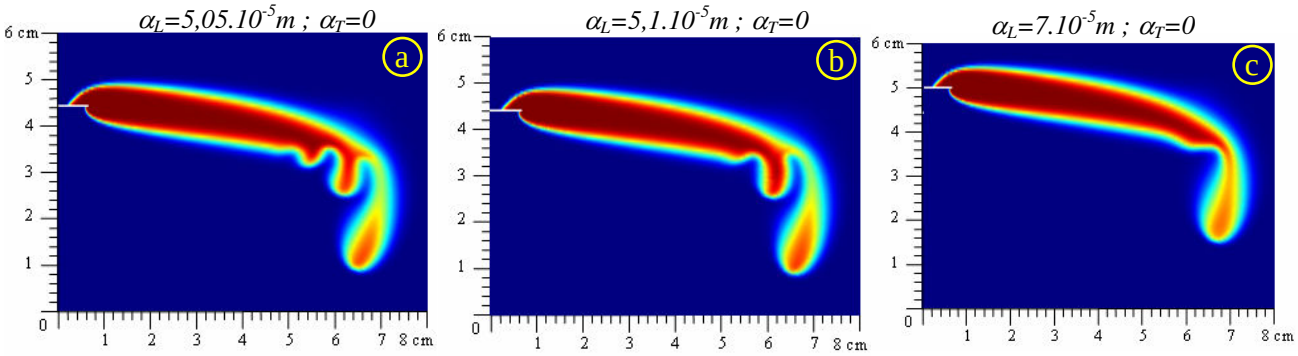


Figure 3.15 : *Changement de morphologie du panache vs dispersivité*

Cependant, avant de clore ce paragraphe, il nous est apparu opportun d'analyser également la réponse numérique du panache à la variation des dispersivités intrinsèques longitudinales. À titre d'exemple, nous avons utilisé les données expérimentales de la configuration fortement instable correspondant à la figure 3.15 et nous avons effectué deux autres simulations avec des dispersivités longitudinales de $5{,}05.10^{-5}$ m et $5{,}1.10^{-5}$ m. De la figure 3.16, il ressort que l'augmentation de la dispersivité longitudinale a un effet stabilisateur. Néanmoins, comme les valeurs choisies sont relativement proches, une question demeure : s'agit-il d'un effet "physique" ou numérique ? Comme la réponse à cette question ne concerne pas directement notre travail, nous nous contentons uniquement de noter

que l'instabilité des panaches est difficilement contrôlable d'un point de vue numérique et qu'elle est très sensible à la valeur de la dispersivité utilisée.



(V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.3 g/L, Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')

Figure 3.16 : *Effet stabilisateur de la dispersivité*

3.5. ANALYSE DU CHAMP DES VITESSES DANS L'ÉCOULEMENT

Analysons dans ce paragraphe la distribution du champ des vitesses aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du panache. L'objectif affiché est d'étudier l'influence de l'écoulement ambiant sur la stabilité du panache. Ainsi, sur la figure 3.17 nous présentons le champ des vitesses numériques obtenu pour l'expérience caractérisée par un Pe = 22 et G=17,5. Les composantes horizontales et verticales de ce champ des vitesses sont tracées sur les figures 3.18 et 3.19. De la figure 3.17, nous pouvons noter que les vitesses à l'intérieur de la zone de mélange (zone jaune) sont légèrement plus élevées que celles correspondant à l'écoulement ambiant. Si maintenant notre attention est portée sur la distribution spatiale de la composante horizontale du champ des vitesses, nous pouvons remarquer qu'après une zone de transition localisée au voisinage de la source (rouge foncé), la vitesse au cœur du panache diminue relativement vite vers une valeur pratiquement constante (figure 3.20 - section A-A de la figure 3.18) légèrement plus élevée que celle générée par l'écoulement latéral imposé. On peut ainsi supposer qu'à partir d'une certaine distance par rapport à la source, la vitesse horizontale dominante sera la vitesse ambiante. En outre, l'analyse de cette même composante au niveau des digitations montre l'existence de deux zones : de forte et de faible vitesse. La première est localisée au sommet des lobes (rouge pâle) tandis que la seconde à la base des lobes (bleu pâle). La diminution de la vitesse horizontale dans la zone bleu pâle semble être compensée par une augmentation de la composante verticale (figure

3.19 - zone rouge), composante qui contrôle la (in)stabilité du panache. Autrement dit, la (in)stabilité de la zone de mélange est gérée par la compétition entre la composante verticale du champ des vitesses, directement reliée au contraste de masse volumique, et la composante horizontale de l'écoulement ambiant.

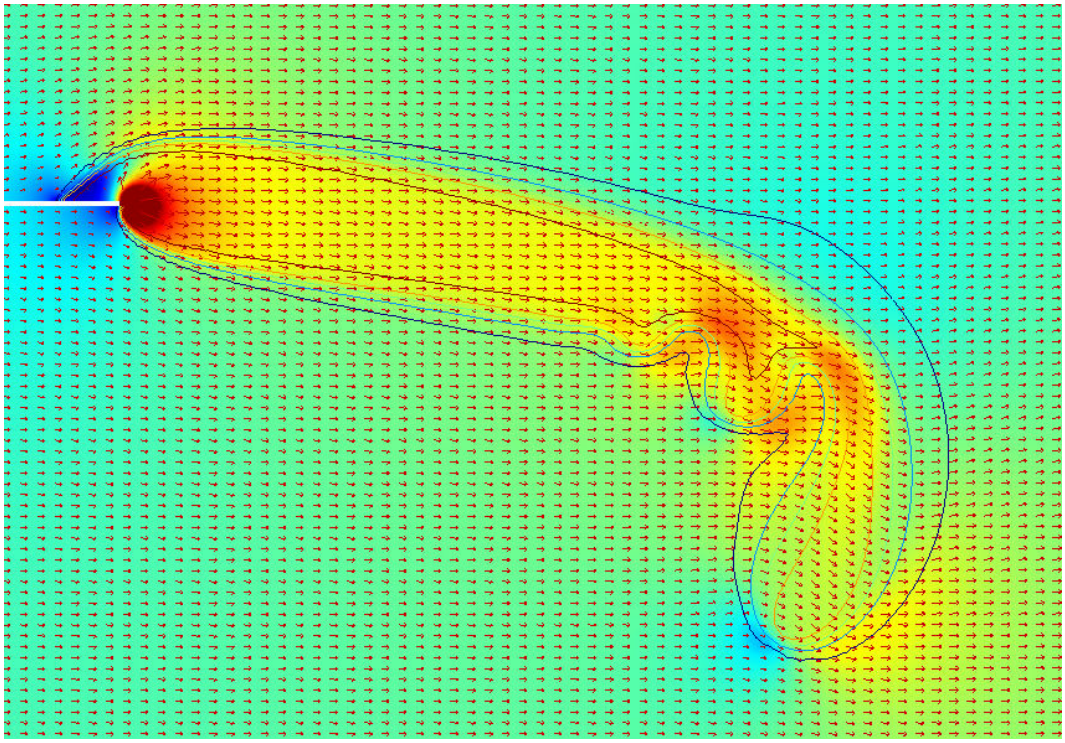


Figure 3.17 : *Champ des vitesses du panache*

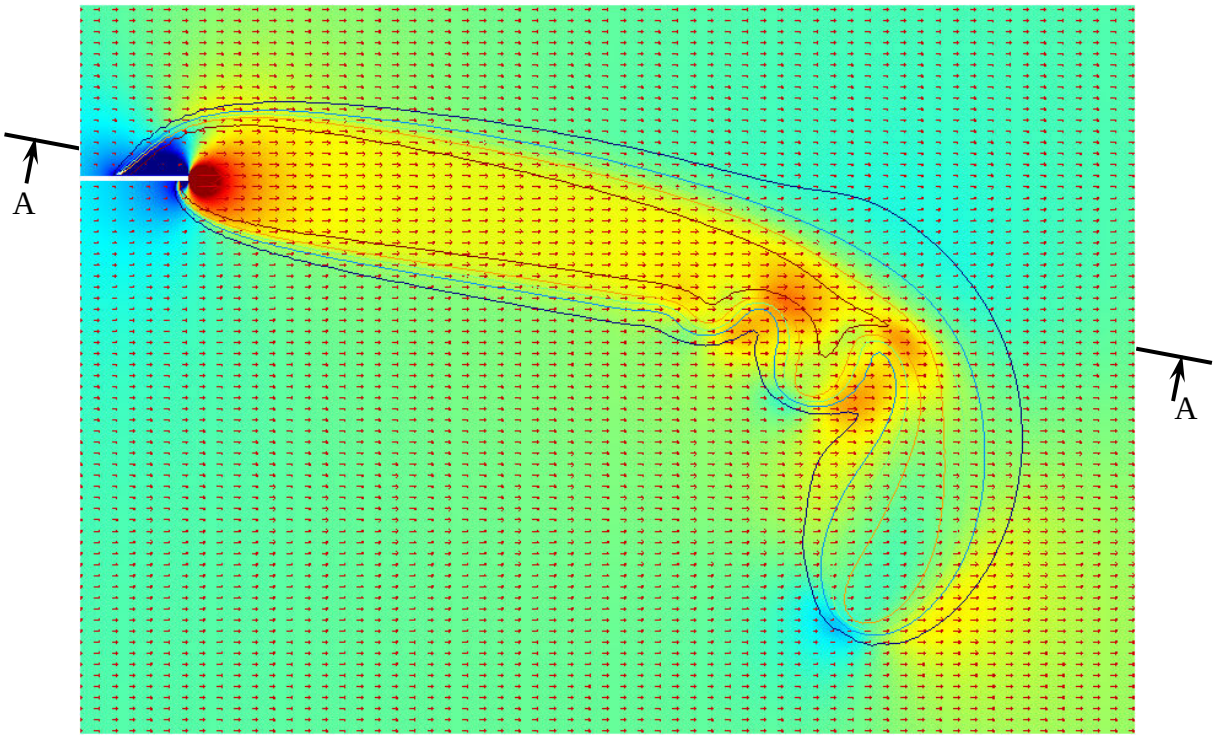


Figure 3.18 : *Composante horizontale du champ des vitesses du panache*

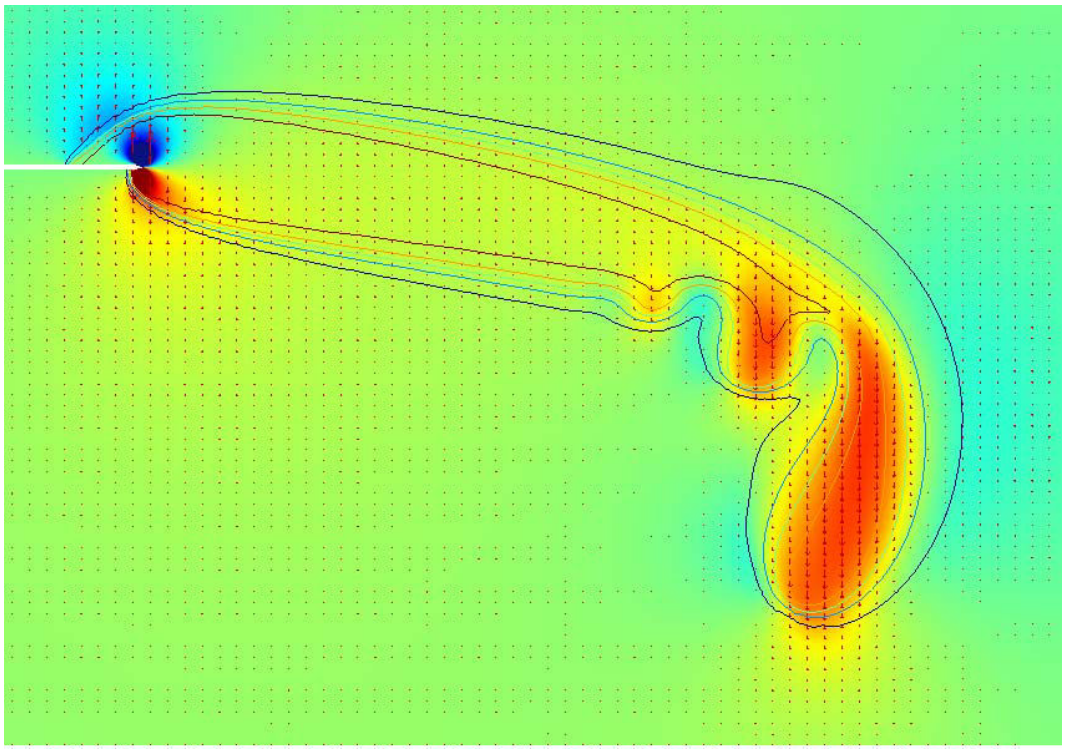


Figure 3.19 : *Composante verticale du champ des vitesses du panache*

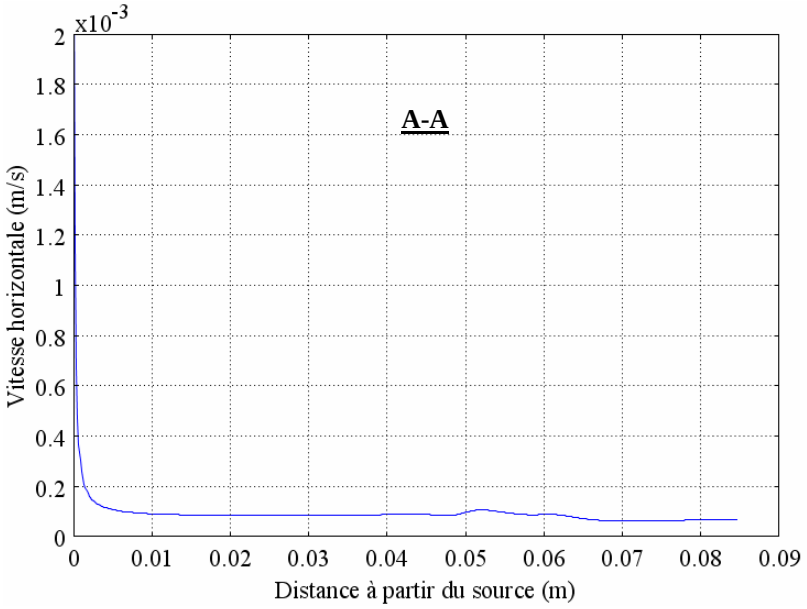


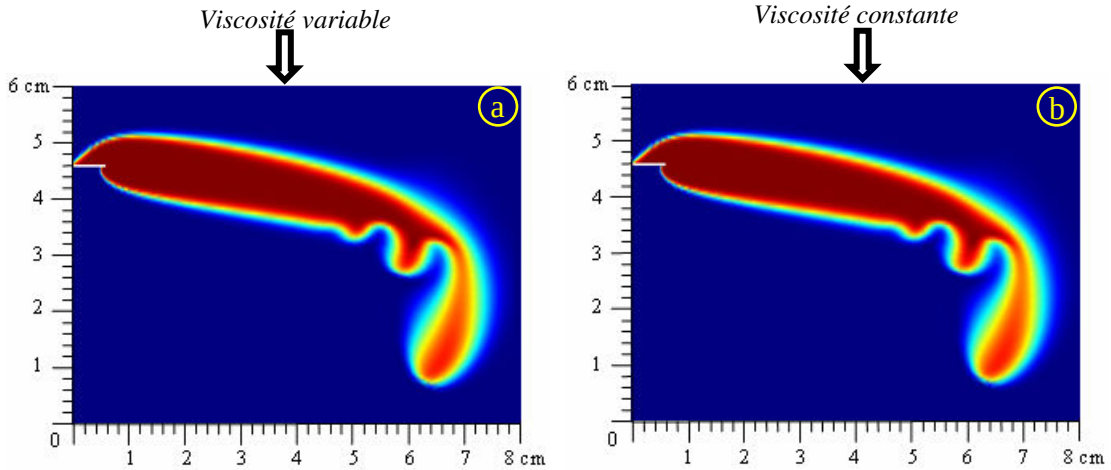
Figure 3.20 : *Influence de la vitesse d'injection.*

3.6. INLUENCE DE VISCOSITÉ DANS LE MODÈLE NUMÉRIQUE

Le dernier paragraphe de ce chapitre portera sur l'influence de la viscosité dynamique sur la stabilité de la zone de mélange.

- ***Simulations utilisant la viscosité dépendante de la concentration de la masse de soluté :***

Les figures 3.21 et 3.22 présentent une comparaison entre la simulation utilisant la variation de la viscosité dynamique en fonction de la concentration massique du soluté (cf. la formule (1.5) [44] [71]) avec celle utilisant une viscosité constante.



(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

Figure 3.21 : *Influence de la variation de viscosité.*

Comme on aurait pu l'imaginer, les résultats de ces simulations numériques sont parfaitement identiques. En fait, le faible contraste de masse volumique utilisé dans nos expériences ne modifie pas la viscosité dynamique d'une manière significative pour qu'elle puisse affecter l'allure des panaches. Par conséquent, l'utilisation dans nos simulations d'une viscosité dynamique constante est tout à fait justifiée.

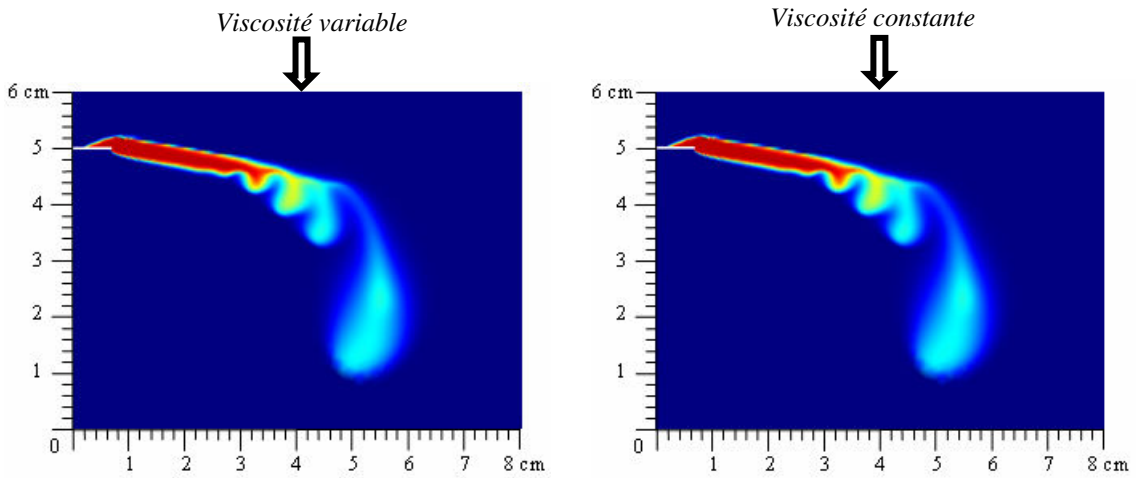
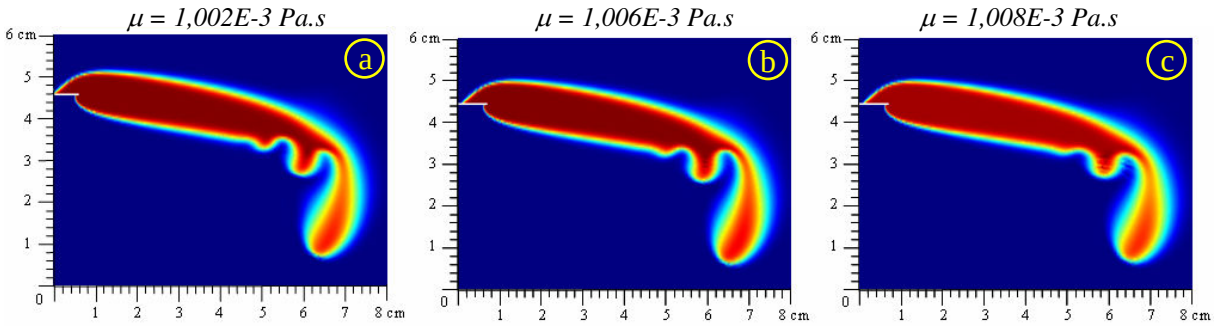


Figure 3.22 : *Influence du contraste de viscosité dans le tenseur de dispersion*

(V_∞ = 0.16 mm/s ; C_{inj} = 3.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=4')

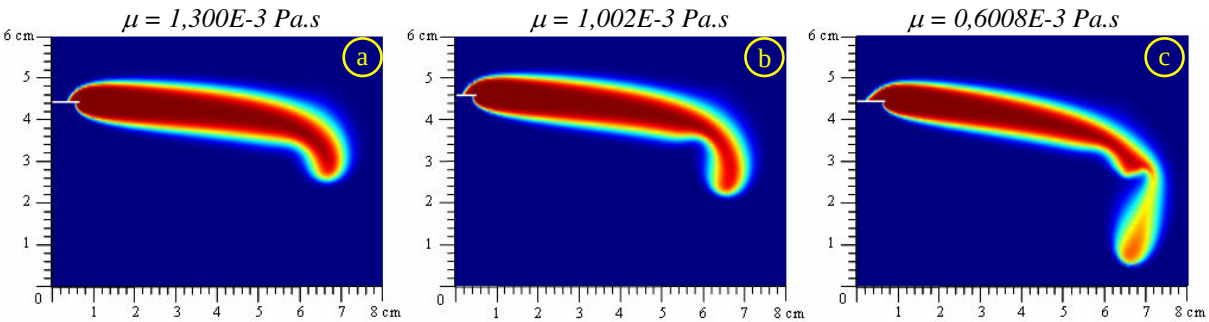
- ***Simulations utilisant une viscosité constante :***

Afin d'étudier l'influence de la viscosité sur l'apparition des digitations, nous avons mimé le comportement du nuage de polluant en prenant en considération plusieurs valeurs de viscosités dynamiques, sans contraste de viscosité. Il est clair qu'augmenter μ revient à diminuer G, donc à stabiliser l'écoulement. Les résultats de ces simulations sont présentés sur les figures 3.23 et 3.24, et l'effet stabilisant est clairement visible.



(V_∞ = 0.06 mm/s ; C_{inj} = 0.5 g/L, Q_{inj} = 2.0 mL/h ; T=14')

Figure 3.23 : *Effet stabilisant de l'augmentation de viscosité.*



(V_∞ = 0.04 mm/s ; C_{inj} = 0.2 g/L, Q_{inj} = 1.0 mL/h ; T=22')

Figure 3.24 : *Effet déstabilisant de la diminution viscosité.*

En conclusion de cette partie, nous résumons les remarques sur la base de l'analyse des résultats numériques précédents :

1. En général, les simulations numériques peuvent reproduire l'écoulement gravitationnel dans un modèle analogue d'un milieu poreux représenté par une cellule Hele-Shaw. L'écart entre les simulations numériques et les résultats expérimentaux se situe principalement au niveau de la pointe du panache caractérisée par l'apparition et le développement des digitations ;
2. L'instabilité du panache numérique peut être créée de façon artificielle [38] [56] à travers une modification soit de la tolérance relative (qui contrôle l'erreur sur les variables du problème étudié), soit des composantes du tenseur de dispersion ;
3. En général, l'instabilité du panache numérique créée artificiellement ne correspond pas à l'instabilité physique. Toutefois, dans notre cas particulier, en utilisant un maillage très fin, les instabilités numériques sont comparables aux instabilités obtenues expérimentalement ;
4. La stabilité numérique du panache dépend non seulement des variables du problème comme le contraste de masse volumique, la vitesse, … mais également des « bruits » numériques ;
5. D'un point de vue numérique, le concept de « *panache stable* » ou « *panache instable* » est à prendre avec précautions, parce qu'avec les mêmes conditions initiales et aux limites, le panache peut prendre une *configuration stable* ou *instable* en fonction des propriétés de la perturbation artificielle et du

schéma numérique. Ce comportement est classique lorsqu'on simule une situation instable.

6. En reproduisant correctement l'expérience par une simulation utilisant le tenseur anisotrope (figure 3.11d), on peut constater que le processus de propagation du soluté dans l'écoulement gravitationnel doit comprendre à la fois le terme de diffusion et de dispersion. D'un point de vue numérique, le terme dispersif a un effet stabilisateur sur l'écoulement gravitationnel [38] [56] [23] et il influe sur la morphologie et la dynamique du panache [19] ;
7. Avec un contraste de masse volumique inférieur à 0.3%, le phénomène de dispersion dans la cellule de Hele-Shaw peut être estimé à travers le tenseur de dispersion de Taylor. De même, la viscosité dynamique peut être considérée comme étant indépendante de la concentration massique de soluté ;
8. Pour des configurations stables ou faiblement instables, le processus de dispersion dans une cellule Hele-Shaw peut être aussi simulé par un modèle classique de dispersion avec des dispersivités intrinsèques constantes, *e.g.*, $\alpha_L=7.10^{-5}m$; $\alpha_T=0$. Pour des configurations fortement instables, l'augmentation forcée de la dispersivité intrinsèque longitudinale peut entraîner un basculement vers une configuration faiblement instable voire stable [1] [8] [10] [38] [46] [56] [23] ;
9. Le champ des vitesses dans la cellule de Hele-Shaw est caractérisé par une distribution relativement complexe. La (in)stabilité de la zone de mélange semble être gérée par la compétition entre la composante verticale du champ des vitesses, directement reliée au contraste de masse volumique, et la composante horizontale de l'écoulement ambiant.

CHAPITRE 4

ANALYSE DE STABILITE

CHAPITRE 4 : ANALYSE DE STABILITÉ

4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous étudions théoriquement la stabilité du panache en analysant sa réaction à des perturbations de faible amplitude. Si les perturbations initiales décroissent au fil du temps, le système sera considéré comme stable. Inversement, si elles se développent au cours du temps, le système sera considéré comme instable (Betchov et Criminale [7], Drazin et Reid [18]). D'un point de vue expérimental, chaque expérience est caractérisée par des perturbations différentes. Elles peuvent être liées aux hétérogénéités du milieu poreux ou aux autres bruits physiques aléatoires des grandeurs du problème.

Les résultats expérimentaux (*Cf. chapitre 2*) suggèrent que le panache est convectivement instable, c'est-à-dire que des perturbations générées à l'amont du dispositif vont se développer tout en étant transportées vers l'aval. Nous allons donc utiliser un modèle théorique simple d'instabilité spatiale convective pour analyser l'instabilité observée lors des expériences.

Même si l'écoulement considéré dans ce chapitre est beaucoup plus simple que celui analysé dans l'expérience, nous pensons que cette étude améliorera notre compréhension sur comportement du panache.

En effet, la détermination d'un critère pour prédire l'instabilité d'un écoulement gravitationnel est toujours un défi auquel se sont intéressé de nombreux scientifiques. Toutefois, dans l'état actuel des connaissances, il n'existe pas encore des critères appropriés pouvant être appliqué pour tous les cas étudiés. Nous en décrivons quelques uns dans les lignes suivantes.

<u>Quelques critères de stabilité issus de la littérature</u>.

Un premier critère de stabilité a été proposé par Güven *et al*. [26] et Oostrom *et al*. [51], par une approche empirique. Ces auteurs ont proposé un nombre adimensionnel (π_l) pour déterminer la condition de stabilité dans le champ d'écoulement gravitationnel en milieu poreux comme suit :

$$\pi_1 = K_{sat} \frac{\Delta\rho / \rho_0}{q_x} \tag{4.1}$$

où, K_{sat} [LT^{-1}] est la conductivité hydraulique à saturation dans la direction verticale ; $\Delta\rho$ [ML^{-3}] la différence de masse volumique entre la solution contaminée et l'eau ambiante ; ρ_0 la masse volumique de l'eau ambiante ; q_x la vitesse horizontale de Darcy. En analysant des résultats expérimentaux, ils ont constaté que le champ de l'écoulement devient habituellement instable si π_1 est supérieur à 0.3-0.35. Toutefois, ce critère n'est pas toujours valable. Dans certains cas, le panache est resté stable même pour la valeur de $\pi_l \approx 0.5$ (Dane *et al*. [15][16]).

En introduisant un nombre modifié de Péclet (P_e^*) et en le combinant avec le critère π_1, Liu et Dane [39] ont proposé un critère plus général qui s'écrit comme suit :

$$\Delta\pi = \pi_1 - \pi_c, \tag{4.2}$$

où :

$$\pi_c = \begin{cases} 0.26 & \text{si } P_e^* \geq 0.018 \\ 0.8 - 30P_e^* & \text{si } P_e^* < 0.018 \end{cases} \tag{4.3}$$

P_e^* est le nombre modifié de Péclet, $P_e^* = \dfrac{q_x\sqrt{k}}{D_m}$ (4.4)

k est la perméabilité intrinsèque verticale du milieu poreux et D_m est la diffusion moléculaire.

Selon Liu et Dan [39], le comportement du panache devient instable si $\Delta\pi \geq 0$; à l'inverse, il se maintient stable. En appliquant ce critère à leurs résultats (Liu et Dane [39] ; Dane *et al*. [15] ; Güven *et al*. [26] et Oostrom *et al*. [51]), il se montre plus approprié que celui originel parce qu'il implique le nombre de Péclet modifié P_e^* qui prend en compte la diffusion moléculaire (D_m).

En utilisant une méthode à deux échelles, et, dans le but de généraliser le critère de stabilité développé par Held *et al*. [27], Musuuza *et al*. [44] ont proposé le critère de stabilité suivant :

$$\Lambda_0 = \frac{L}{D_{\|}}\left(v_0^g G_2 + v_0^p G_1\right)\left[\left(\alpha - \beta\right) + \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)\alpha\right] \tag{4.5}$$

où *α* et *β* sont respectivement les coefficients déterminant la viscosité et la masse volumique relative maximales de; v_0^p la composante de vitesse due à la pression

dans l'échelle macroscopique ; v_0^g la composante de vitesse générée par la gravité ; *a* le rapport $\frac{v_0^g}{v_0^p}$; $D_{\|}$ la dispersion longitudinale; *L* la dimension du domaine simulé et G_1, G_2 les gradients maximaux de concentration dans les directions orthogonale et parallèle à la gravité, respectivement.

Ce critère a été testé par des simulations numériques basées sur le modèle expérimental de Schincariol et Schwartz [58]. Il vient alors : la configuration du panache de polluant est stable si $\Lambda_0 > 0$, à l'inverse, elle est instable si $\Lambda_0 < 0$. Comme spécifié par Mussuza *et al*. [15], si les données d'entrée sont caractérisées par v_0^p très petit, l'équation (4.1) peut être réduite et l'écoulement reste stable tant que $(2\alpha - \beta) < 0$. En prenant en compte les valeurs de α et β (Weast [71]), il en résulte que l'écoulement n'est instable que pour des concentrations injectées supérieures à environ 2,5 g/L. Nous avons constaté que ce critère est incompatible avec nos résultats expérimentaux (Cf. chapitre 2). Cela signifie que le critère de stabilité proposé par les auteurs mentionnés ci-dessus n'est pas universellement valide.

En observant les critères de stabilité de Güven *et al*. [26] et Oostrom [51] et celui modifié de Liu et Dane [39] ainsi que le critère de Musuuza *et al* [44], nous avons constaté que ces critères ne sont pas en accord avec nos résultats expérimentaux (cf. chapitre 2).

Ces constats montrent que la recherche d'un critère général de stabilité est toujours une question ouverte. Afin d'apporter une contribution à ce problème, nous allons étudier dans ce chapitre un modèle théorique linéaire pour analyser l'instabilité, puis comparer les conditions obtenues avec les résultats expérimentaux du chapitre 2.

Le modèle de nappe de soluté rectiligne. Notre modèle porte sur la stabilité spatiale d'une nappe de soluté rectiligne d'épaisseur donnée (figure 4.1), transportée par un écoulement uniforme et horizontal, avec un nombre de Péclet fini [2]. L'écoulement de base est brièvement décrit sur la figure 4.1 : comme mentionné plus haut, cette configuration est différente de celle de nos expérimentations, mais présente certaines similitudes, en particulier pour les concentrations relativement

faibles (ou les vitesses assez fortes). En effet, dans ces cas le panache est allongé et pratiquement horizontal, avec une vitesse relativement uniforme loin de l'aiguille et du front.

<u>L'objectif de ce travail est double</u> :

(i) Étudier la stabilité de cet écoulement, qui est relativement peu documenté dans la littérature. À notre connaissance, l'étude spatiale n'a pas été faite. L'étude temporelle est plus classique (Homsy [30], Fernandez et al. [20], Plouraboué & Hinch [53]), mais n'a été appliquée que dans le cas d'une zone de mélange simple (soluté/eau) et non double comme ici (eau/soluté/eau).

(ii) Montrer que cet écoulement présente certaines similitudes avec celui de nos expérimentations. En particulier, ces deux écoulements sont contrôlés par les trois mêmes paramètres : la vitesse de l'écoulement zonal $V_\infty \vec{e}_x$, le débit volumique de soluté injecté Q_{inj} (lié à l'épaisseur λ de la nappe par la relation $Q_{inj} = V_\infty \lambda b$) et la concentration de soluté injecté C_{inj}. On ne recherche pas d'accord quantitatif pour l'instant : nous voulons montrer que ces deux écoulements sont convectivement instables, et étudier l'effet stabilisant ou déstabilisant des paramètres de contrôle.

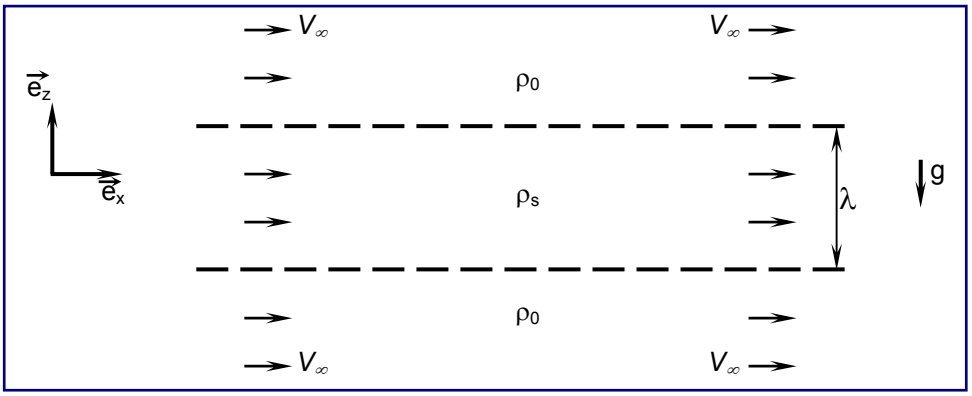


Figure 4.1 : *Schéma du problème simplifié*

4.2. ÉCOULEMENT DE BASE

L'écoulement est supposé régi par les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Darcy), dans l'approximation de Boussinesq :

$$\nabla.\vec{V}=0 \tag{4.6}$$

$$\vec{V}(x,t)=-\frac{k_0}{\mu}\left(\vec{\nabla}\hat{P}-\rho_0\gamma C_m\vec{g}\right) \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}+\nabla.(C_m\vec{V})=\nabla.(\mathbb{D}\vec{\nabla}C_m) \tag{4.8}$$

où $\vec{V}(\vec{x},t)$ est la vitesse locale du fluide, $\hat{P}=P+\rho_0 gy$ est la pression modifiée, et $C_m(\vec{x},t)$ est la concentration massique de la solution saline. La perméabilité équivalente du milieu est $k_0 = b^2/12$ (avec *b* l'épaisseur de la cellule de Hele-Shaw). La masse volumique du soluté augmente linéairement avec la concentration massique :

$$\rho=\rho_0\left(1+\gamma C_m\right) \tag{4.9}$$

où ρ_a est la masse volumique de l'eau pure et γ est une constante expérimentale, qui vaut environ 0.7 pour une solution saline (Weast [71]).

Dans ce chapitre, on considère un écoulement unidirectionnel horizontal $(\vec{V}^0,\hat{P}^0,C_m^0)$, de la forme :

$$\vec{V}^0=u^0(y)\vec{e}_x;\quad C_m^0=C_m^0(y,t) \tag{4.10}$$

En injectant ces expressions dans les équations du mouvement et de transport et en considérant $\mathbb{D}=D_m\mathbb{I}$ obtient :

$$\frac{\partial\hat{P}^0}{\partial x}=\text{constante} \tag{4.11}$$

$$\vec{V}^0=-\frac{k_0}{\mu}\frac{\partial\hat{P}^0}{\partial x}\vec{e}_x=V_\infty\vec{e}_x \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial C_m^0}{\partial t}=D_m\frac{\partial^2 C_m^0}{\partial y^2} \tag{4.13}$$

Ainsi, même si l'écoulement est permanent et uniforme, le champ de concentration du soluté n'est ni permanent ni uniforme, et a la forme classique :

$$C_m^0(y,t) = \frac{\alpha_s}{2}\left(\text{erf}\,\frac{y+(\lambda/2)}{2\sqrt{D_m t}} - \text{erf}\,\frac{y-(\lambda/2)}{2\sqrt{D_m t}}\right) \tag{4.14}$$

où : erf(x) est la fonction d'erreur ; α_s la fraction massique maximale de soluté dans la nappe ; notons que ρ_s, initialement égale à un créneau, et lissée par la diffusion moléculaire.

Notons enfin que l'hypothèse de Boussinesq est nécessaire pour obtenir cet écoulement de base très simple.

4.3. PERTURBATION - LINÉARISATION DES ÉQUATIONS

La solution de base n'est pas à l'équilibre, mais on supposera qu'elle évolue suffisamment lentement pour la considérer quasi-stationnaire. Ceci implique que le taux de croissance des perturbations devra être beaucoup plus rapide que le temps de diffusion de la solution de base. C'est une pratique courante, souvent utilisée dans le cas miscible [44][69][18][23]. Nous considérerons ainsi des temps courts devant le temps de diffusion dans la nappe :

$$t \ll \frac{\lambda^2}{D_m} \tag{4.15}$$

et supposerons que la zone de mélange entre le soluté et l'eau pure reste petite devant λ.

On peut décomposer tous les champs apparaissant dans (4.6)-(4.8) en une somme représentant la solution de base quasi-stationnaire plus la perturbation :

$$\vec{V}(x,y,t) = \vec{V}^0 + \vec{V}^1(x,y,t) \tag{4.16}$$

$$\hat{P}(x,y,t) = \hat{P}_0(x,y) + \hat{P}^1(x,y,t) \tag{4.17}$$

$$C_m(x,y,t) = C_m^0(y) + C_m^1(x,y,t) \tag{4.18}$$

où : $$\vec{V}^0 = \left[u^0, 0\right]^T ; \vec{V}^1 = \left[u^1(x,y,t), v^1(x,y,t)\right]^T \tag{4.19}$$

En injectant (4.16) dans l'équation (4.6), on obtient :

$$\nabla.\vec{V}=\nabla.\vec{V}^0+\nabla.\vec{V}^1=0 \tag{4.20}$$

$$\Rightarrow \nabla.\vec{V}^1=0 \tag{4.21}$$

En injectant (4.16) et (4.17) dans l'équation (4.7), il vient :

$$\vec{V}^0+\vec{V}^1=-\frac{k_0}{\mu}\left(\vec{\nabla}\hat{P}^0+\vec{\nabla}\hat{P}^1+\rho_0\gamma C_m^0 g\vec{e}_y+\rho_0\gamma C_m^1 g\vec{e}_y\right) \tag{4.22}$$

or :

$$\vec{V}^0=-\frac{k_0}{\mu}\left(\vec{\nabla}\hat{P}^0+\rho_0\gamma C_m^0 g\vec{e}_y\right) \tag{4.23}$$

Donc :

$$\vec{V}^1=-\frac{k_0}{\mu}\left(\vec{\nabla}\hat{P}^1+\rho_0\gamma C_m^1 g\vec{e}_y\right) \tag{4.24}$$

Et, *in fine*, en injectant (4.16) et (4.18) dans l'équation (4.8) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_m^0}{\partial t}+\frac{\partial C_m^1}{\partial t}+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^0\right)+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^1\right)+\nabla.\left(C_m^1\vec{V}^0\right)+\nabla.\left(C_m^1\vec{V}^1\right)&=\\ =D_m\Delta C_m^0+D_m\Delta C_m^1&\end{aligned} \tag{4.25}$$

où apparaît la solution de base :

$$\frac{\partial C_m^0}{\partial t}+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^0\right)=D_m\Delta C_m^0 \tag{4.26}$$

De plus, en supposant la perturbation de faible amplitude, nous négligeons le terme quadratique $\left[\nabla.(C_m^1\vec{V}^1)\right]$, et (4.25) se ramène alors à une équation linéaire :

$$\frac{\partial C_m^1}{\partial t}+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^1\right)+\nabla.\left(C_m^1\vec{V}^0\right)=D_m\Delta C_m^1 \tag{4.27}$$

En rassemblant (4.21), (4.24) et (4.27) on obtient le système d'équations linéaires pour les perturbations des champs de vitesse et de concentration :

$$\begin{cases}\nabla.\vec{V}^1=0\\ \vec{V}^1=-\frac{k_0}{\mu}\left(\nabla\hat{P}^1+\rho_0\gamma C_m^1 g\vec{e}_y\right)\\ \frac{\partial C_m^1}{\partial t}+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^1\right)+\nabla.\left(C_m^1\vec{V}^0\right)=D_m\Delta C_m^1\end{cases} \tag{4.28}$$

Les conditions aux limites associées correspondent à l'absence de perturbation à l'infini :

$$C_m^1(x, y = \pm\infty) = u_1(x, y = \pm\infty) = v_1(x, y = \pm\infty) = 0 \qquad (4.28a)$$

4.4. ANALYSE DE STABILITÉ SPATIALE - MODES NORMAUX

On suppose que les perturbations ont la forme de *« modes normaux »* (Betchov et Criminale [7], Drazin et Reid [18]) :

$$u_1(x, y, t) = q(y)e^{i(kx-\omega t)} + q^*(y)e^{-i(k^*x-\omega t)} \qquad (4.29)$$

$$v_1(x, y, t) = p(y)e^{i(kx-\omega t)} + p^*(y)e^{-i(k^*x-\omega t)} \qquad (4.30)$$

$$C_m^1(x, y, t) = f(y)e^{i(kx-\omega t)} + f^*(y)e^{-i(k^*x-\omega t)} \qquad (4.31)$$

Les conditions aux limites deviennent :

$$f(\pm\infty) = q(\pm\infty) = p(\pm\infty) = 0 \qquad (4.32)$$

Dans ces équations $f^*(y)$, $q^*(y)$, $p^*(y)$ et k^* désignent les complexes conjugués de f(y), q(y), p(y) et k ; k est un nombre d'onde complexe ($k = k_r + ik_i$). L'amplitude de la perturbation croîtra ou décroîtra avec x comme $\exp(-k_i x)$, et la longueur d'onde sera $\frac{2\pi}{k_r}$. Enfin, ω est la pulsation de l'excitation (nombre réel).

Notons, néanmoins, que l'équation de Darcy utilisée ici n'est valable que si l'échelle typique des gradients de vitesses suivant x et y est grande devant *b*. Nos calculs n'auront de sens que si :

$$b \ll \frac{2\pi}{k_r} \text{ et } \frac{2\pi}{k_i} \qquad (4.33)$$

Remarquons que l'épaisseur du front de la zone de mélange δ entre le soluté et l'eau ne vérifie pas cette hypothèse.

En injectant la décomposition modale (4.29) et (4.30) dans la première équation de (4.28), il vient :

$$\left[p'(y) + ikq\right]e^{i(kx-\omega t)} + \left[p^{*\prime}(y) + ik^*q^*(y)\right]e^{-i(k^*x-\omega t)} = 0 \qquad (4.34)$$

où p'(y) est la dérivée de p(y) par rapport à y. En multipliant par $\left(e^{-ikx}\right)$ et en intégrant (4.34) sur une longueur d'onde $\left(0 \div \frac{2\pi}{k_r}\right)$, on obtient :

$$p' + ikq = 0 \tag{4.35}$$

En prenant le rotationnel de la loi de Darcy (Eq. 4.28), on a :

$$\vec{rot}\vec{V}^1 = \left(\frac{\partial v^1}{\partial x} - \frac{\partial u^1}{\partial y}\right)\vec{e}_z = \vec{0} - \frac{k_0}{\mu}\rho_0\gamma\vec{rot}(C_m^1\vec{g})$$

car $\vec{rot}(\vec{\nabla}P^1) = 0$; et il vient :

$$\frac{\partial v^1}{\partial x} - \frac{\partial u^1}{\partial y} = -\frac{k_0}{\mu}\rho_0\gamma g\frac{\partial C_m^1}{\partial x} \tag{4.36}$$

En injectant les modes normaux (4.29)÷ (4.31) dans (4.37), il vient :

$$\begin{aligned} ikpe^{i(kx-\omega t)} - ik^*p^*e^{-i(k^*x-\omega t)} - q'e^{i(kx-\omega t)} - q^{*\prime}e^{-i(k^*x-\omega t)} &= \\ = -\frac{k_0}{\mu}\rho_0\gamma g\left(ikfe^{i(kx-\omega t)} - ik^*fe^{-i(k^*x-\omega t)}\right) \end{aligned} \tag{4.36a}$$

Par une procédure identique à celle utilisée pour (4.34) (multiplication par e^{-ikx} et intégration sur une longueur d'onde $\left(0 \div \frac{2\pi}{k_r}\right)$), l'équation (4.36a) devient :

$$ikp - q' + \frac{k_0}{\mu}\rho_0\gamma gikf = 0 \tag{4.37}$$

Intéressons-nous maintenant au bilan de masse du soluté. En injectant la décomposition modale (4.29) ÷ (4.31) dans la 3ème équation de (4.28), et après multiplication par $\left(e^{-ikx}\right)$ et intégration sur une longueur d'onde, on obtient :

$$-i\omega f + C_{m,y}^0 p + u_0 ikf = D_m[-k^2 f + f''] \tag{4.38}$$

où, pour simplifier l'écriture les équations, la virgule désigne une dérivation, c'est-à-dire : $C_{m,y}^0 = \frac{\partial C_m^0}{\partial y}$.

Les équations linéarisées pour les modes normaux sont ainsi :

$$\begin{cases} p' + ikq = 0 \\ ikp - q' + \dfrac{k_0}{\mu}\rho_0\gamma gikf = 0 \\ -i\omega f + C^0_{m,y}p + u_0 ikf = D_m\left(-k^2 f + f''\right) \end{cases} \tag{4.39}$$

avec les conditions aux limites données en (4.32).

Afin d'adimensionner ces équations par une longueur et une vitesse de référence que nous préciserons ultérieurement (L_0, V_0), et par la concentration initiale de la nappe α_s, on définit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{cases} \bar{k} = kL_0; \bar{\omega} = \omega\dfrac{L_0}{V_0}; \bar{u}_0 = \dfrac{u_0}{V_0}; \bar{x} = \dfrac{x}{L_0}; \bar{y} = \dfrac{y}{L_0}; \\ \bar{C}^0_m(\bar{y}) = \dfrac{C^0_m(y)}{\alpha_s}; \bar{f}(\bar{y}) = \dfrac{f(y)}{\alpha_s}; \bar{q}(\bar{y}) = \dfrac{q(y)}{V_0}; \bar{p}(\bar{y}) = \dfrac{p(y)}{V_0} \end{cases} \tag{4.40}$$

En injectant les variables adimensionnelles (4.40) dans les équations linéarisées pour les modes normaux (4.39), il vient :

$$\begin{cases} \bar{p}' + i\bar{k}\bar{q} = 0 \\ i\bar{k}\bar{p} - \bar{q}' + \dfrac{k_0\rho_0\gamma g\alpha_s}{\mu V_0} i\bar{k}\bar{f} = 0 \\ \left(\bar{u}_0 i\bar{k} - i\bar{\omega}\right)\bar{f} + \bar{C}^0_{m,\bar{y}}\bar{p} = \dfrac{D_m}{V_0 L_0}\left[-\bar{k}^2\bar{f} + \bar{f}''\right] \end{cases} \tag{4.41}$$

Soit :

$$P_e = \frac{V_0 L_0}{D_m} \tag{4.42}$$

$$V_g = \frac{k_0\rho_0\gamma g\alpha_s}{\mu V_0} \tag{4.43}$$

où : Pe est le nombre de Péclet (le rapport entre le temps diffusif et le temps convectif) ; Vg est un nombre adimensionnel représentant le rapport entre les forces dues à la gravité et celles dues aux effets visqueux, et n'est autre que le paramètre

π_1 de Güven *et al.* [26]. Il est aussi égal à G/12, où G est le nombre adimensionnel introduit au chapitre 2.

Pour simplifier les notations, les barres sur les variables réduites seront omises, les équations adimensionnelles (4.41) deviennent alors :

$$\begin{cases} p' + ikq = 0 \\ ikp - q' + V_g ikf = 0 \\ (u_0 ik - i\omega) f + C^0_{m,y} p = \dfrac{1}{Pe}\left[-k^2 f + f''\right] \end{cases} \tag{4.44}$$

Ce système peut maintenant être résolu par voie numérique. Soit L la largeur du domaine d'écoulement (figure 4.1), supposée grande devant la largeur λ du panache initial, mais non-infinie. En prenant en compte l'échelle de longueur L_0, le domaine d'étude $\{-L \le y \le L\}$ et les conditions aux limites <u>*approchées*</u> s'écrivent :

$$\left\{-\bar{L} = -\frac{L}{L_0} \le \bar{y} \le \frac{L}{L_0} = \bar{L}\right\}; f(\pm\bar{L}) = q(\pm\bar{L}) = p(\pm\bar{L}) \approx 0 \tag{4.45}$$

On peut mettre nos équations sous forme d'un système linéaire en posant :

$$\vec{X}(y) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} f & f' & q & p \end{pmatrix}^T \tag{4.46}$$

et il vient :

$$\frac{d\vec{X}(y)}{dy} = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ k^2 X_1 + Pe\left[(u_0 k - \omega) i X_1 + C^0_{m,y} X_4\right] \\ ik\left(X_4 + V_g X_1\right) \\ -ikX_3 \end{pmatrix} \tag{4.47}$$

En maillant le domaine d'étude comme suit :

$$-\bar{L} = y_1 < \ldots < y_{i-1} < y_i < y_{i+1} < \ldots < y_n = \bar{L} \tag{4.48}$$

et en considérant un vecteur $\vec{Y} \in \mathbb{R}^{4n}$ défini par :

$$\vec{Y} = \left\{X_1(y_1)\ldots X_1(y_n)\ X_2(y_1)\ldots X_2(y_n)\ X_3(y_1)\ldots X_3(y_n)\ X_4(y_1)\ldots X_4(y_n)\right\}^T \tag{4.49}$$

et en utilisant des différences finies d'ordre 2, les équations linéarisées d'écrivent :

$$X_1'(y_i) \simeq \frac{X_1(y_{i+1})-X_1(y_{i-1})}{2\delta y} = X_2(y_i)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{i+1}-Y_{i-1}}{2\delta y} - Y_{n+i} = 0 \tag{4.50}$$

$$X_2'(y_i) \simeq \frac{X_2(y_{i+1})-X_2(y_{i-1})}{2\delta y} =$$

$$= k^2 X_1(y_i) + Pe\left[(u_0 k-\omega) i X_1(y_i) + C^0_{m,y}(y_i) X_4(y_i)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{i+n+1}-Y_{i+n-1}}{2\delta y} + i\omega Pe Y_i - Pe C^0_{m,y}(y_i) Y_{i+3n} = k^2 Y_i + k i u_0 Pe Y_i \tag{4.51}$$

$$X_3'(y_i) \simeq \frac{X_3(y_{i+1})-X_3(y_{i-1})}{2\delta y} = ik\left[X_4(y_i) + V_g X_1(y_i)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{i+2n+1}-Y_{i+2n-1}}{2\delta y} = ikY_{i+3n} + ikV_g Y_i \tag{4.52}$$

$$X_4'(y_i) \simeq \frac{X_4(y_{i+1})-X_4(y_{i-1})}{2\delta y} = -ikX_3(y_i)$$

$$\Rightarrow \frac{Y_{i+3n+1}-Z_{i+3n-1}}{2\delta y} = -ikY_{i+2n} \tag{4.53}$$

Les conditions aux limites consistent à annuler les Y_i à l'extérieur du domaine [-L , L] : elles seront automatiquement vérifiées lors du remplissage de la matrice ci-dessous.

En écrivant le système (4.50)÷ (4.53) sous la forme de matrices, nous avons :

$$\mathbb{A}_{(4nx4n)}\vec{Y} = k\mathbb{B}_{(4nx4n)}\vec{Y} + k^2\mathbb{C}_{(4nx4n)}\vec{Y} \tag{4.54}$$

où $\mathbb{A},\mathbb{B},\mathbb{C}$ sont les matrices creuses 4nx4n contenant les coefficients du système (4.50) ÷ (4.53). Ici, nous voyons qu'il s'agit d'un problème aux valeurs propres quadratiques, de valeur propre k. Pour en faciliter sa résolution, transformons (4.54) en un problème aux valeurs propres classiques en posant le vecteur $\vec{\mathbb{Z}}$ (voir par exemple Suslov [61]) :

$$\vec{Z} = \left(\vec{Y} \quad k\vec{Y}\right)^T \in \mathbb{R}^{8n} \tag{4.55}$$

avec $i = 1 \div n$, on a :

$$\begin{cases} Z_{jn+i} = Y_{jn+i} = X_{j+1}(y_i) \text{avec } j = 0 \div 3 \\ Z_{jn+i} = kZ_{(j-4)n+i} = kY_{(j-4)n+i} = kX_{(j-3)}(y_i) \text{avec } j = 4 \div 7 \end{cases} \tag{4.56}$$

D'où, l'équation (4.54) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \dots \\ Z_{8n} \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \mathbb{B} & \mathbb{C} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \dots \\ Z_{8n} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbb{G}_{(8nx8n)}\vec{Z} = k\mathbb{H}_{(8nx8n)}\vec{Z} \tag{4.57}$$

Ainsi, le problème a été transformé sous la forme d'un problème classique aux valeurs propres classique. $\mathbb{O}$ est la matrice des zéros ; $\mathbb{I}$ la matrice unité ; $\mathbb{G}, \mathbb{H}$ sont des matrices modifiées contenant les coefficients du système (4.57), avec :

$$\frac{Z_{i+1}\text{-}Z_{i\text{-}1}}{2\delta y} - Z_{n+i}(y_i)\text{=}0 \tag{4.58}$$

$$\frac{Z_{i+n+1}\text{-}Z_{i+n\text{-}1}}{2\delta y} - iu_0 PeZ_{i+4n} + i\omega PeZ_i - PeC^0_{m,y}(y_i)Z_{i+3n} = kZ_{i+4n} \tag{4.59}$$

$$\frac{Z_{i+2n+1}\text{-}Z_{i+2n\text{-}1}}{2\delta y} - iZ_{i+7n} - iV_g Z_{i+4n} = 0 \tag{4.60}$$

$$\frac{Z_{i+3n+1}\text{-}Z_{i+3n\text{-}1}}{2\delta y} + iZ_{i+6n} = 0 \tag{4.61}$$

Notons que : $Z_{jn} = Z_{jn+1} = 0; (j = 0 \div 8)$ (conditions aux limites)

En résolvant le système (4.58) ÷ (4.61), on obtient les fonctions propres des vitesses et des concentrations correspondant à la valeur propre des modes normaux (4.29)÷ (4.31), pour une pulsation ω et des paramètres Vg et Pe donnés. On obtient alors des champs de concentration comme ceux montrés à titre d'exemple sur la figure 4.2.

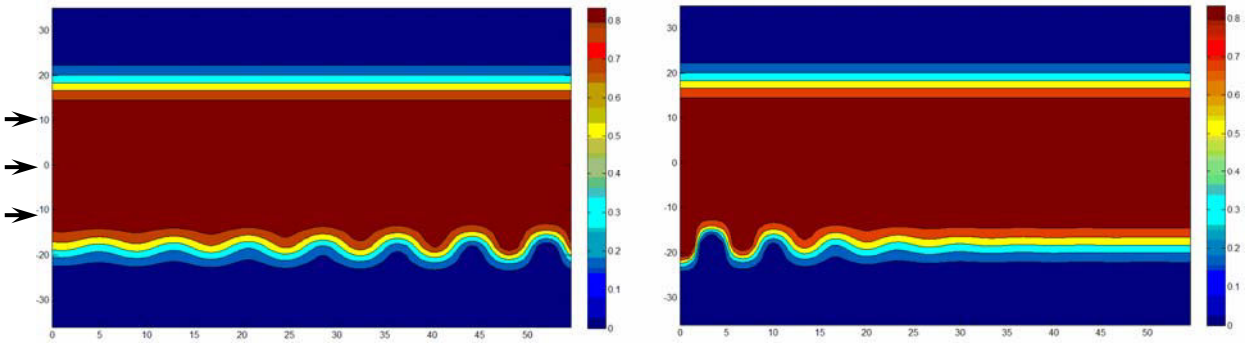


Figure 4.2 : *Exemples de champs de concentration obtenus par résolution du problème aux valeurs propres avec C_{inj}=0,2 g/L, V_∞=0.06 mm/s, Q_{inj}=2 mL/h, pour deux pulsations ω différentes. Configuration instable (à gauche) et stable (à droite).*

La figure 4.2 de gauche montre un cas instable, où des digitations apparaissent et se développent sur le front inférieur du panache. Le graphe de droite est un exemple de mode stable, pour lequel la perturbation décroît spatialement. Le taux de croissance et la longueur d'onde de ces perturbations seront étudiés en détail dans la section suivante.

4.5. TAUX DE CROISSANCE ET LONGUEUR D'ONDE THÉORIQUES AVEC TENSEUR ISOTROPE.

Dans la suite de ce travail nous choisissons comme longueur et vitesse de référence :

$$\begin{cases} V_0 = V_\infty \\ L_0 = b \end{cases} \tag{4.62}$$

On considère, de plus, des paramètres issus de nos expériences :

$$\begin{cases} V_\infty = 0{,}06\,\text{mm/s} \\ Q_{inj} = 0{,}5\,\text{mL/h} \\ C_{inj} = 0{,}1\,;\,0{,}2\,;\,0{,}3\ \ \text{g/L} \\ b = 0{,}55\,\text{mm} \end{cases} \tag{4.63}$$

qui correspondent aux paramètres adimensionnels :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ Pe = 22\,;\,\overline{\lambda} = 7{,}6 \\ Vg = 0{,}29\,;\,0{,}58\,;\,0{,}86 \end{cases} \tag{4.64}$$

On fait ainsi varier C_{inj}, tous les autres paramètres étant fixés. Les résultats sont montrés sur la figure 4.3.

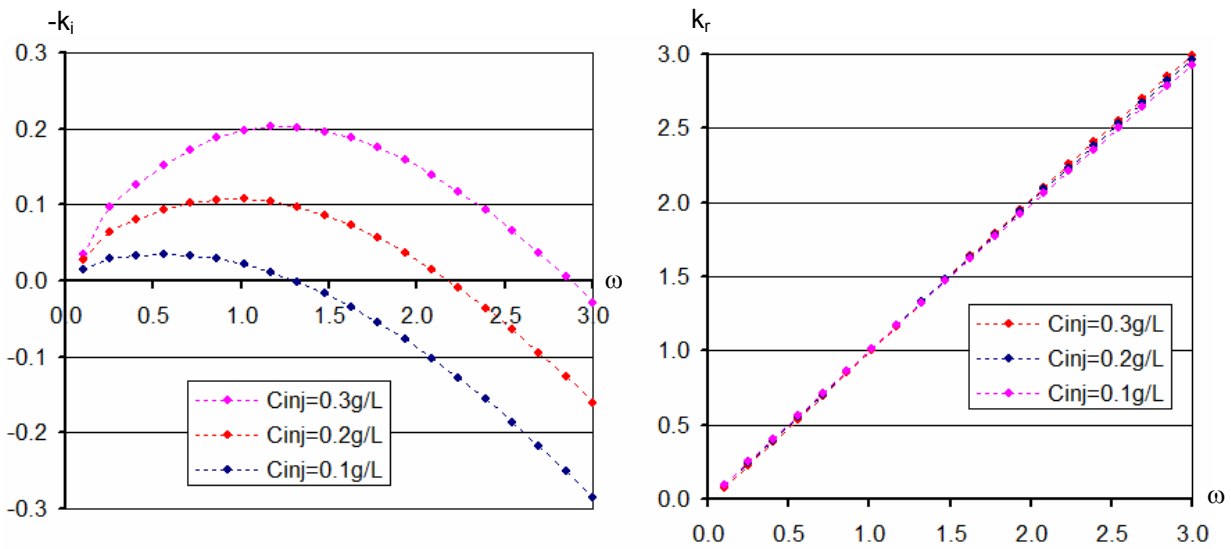


Figure 4.3 : *Taux de croissance spatial $-k_i$ et nombre d'onde k_r de la perturbation vs. ω (V_∞ = 0.06mm/s, Q_{inj} = 0.5 mL/h, C_{inj} =0.1 ; 0.2 ; 0.3 g/L)*

On constate que, pour les paramètres considérés ici, il existe toujours un intervalle de pulsations ω où le signe de $-k_i$ est positif. Cela signifie que l'écoulement est instable. On observe de plus que la stabilité de l'écoulement dépend étroitement de la concentration d'injection.

La courbe $-k_i$ vs. ω *présente toujours un maximum en une pulsation notée* ω_{pic}. *La valeur maximale de* $-k_i$ *sera notée* $-k_i^{max}$ *par la suite de ce document. Le nombre d'onde de ce mode (appelé « mode le plus instable »), sera noté* k_r^{max}.

On observe sur la figure 4.3 l'effet déstabilisant de la concentration du soluté, puisque le taux de croissance $-k_i^{max}$ du mode le plus instable augmente avec C_{inj}. L'intervalle de pulsations temporelles ω instables augmente aussi avec la concentration. Lorsque C_{inj} décroît, $-k_i^{max}$ (le plus instable) décroît aussi vers 0, ce qui est naturel puisque l'injection de traceur 'parfait' ne peut déclencher d'instabilité gravitationnelle. Toutefois, quelle que soit C_{inj} non-nul, il existe toujours un intervalle de pulsations pour lesquelles $-k_i^{max} > 0$. En particulier, *on ne peut pas dire que l'écoulement soit stable, même si le panache de soluté est peu déformé : la perturbation croît tout en étant convectée vers l'aval.* À la rigueur, on pourra dire que l'écoulement est "apparemment stable", lorsque le taux de croissance spatial est trop

faible pour faire apparaître des ondes avant l'extrémité de la cellule de Hele-Shaw. Remarquons que pour $\omega > 3$, k_r n'est plus petit devant 2π, les valeurs de k_r avec $\omega > 3$ ne sont donc plus physiques.

Le graphe de la figure 4.3 (droite) montre que le nombre d'onde k_r est proportionnel à ω, avec un coefficient de proportionnalité pratiquement égal à 1, et ceci quelle que soit la concentration C_{inj}. Ainsi la vitesse de phase (adimensionnelle) des ondes est égale à 1 :

$$c = \frac{\omega}{k_r} \simeq 1 \qquad \forall\ \omega \tag{4.65}$$

c'est-à-dire que le phénomène n'est pas dispersif, et les ondes se déplacent avec la vitesse zonale. Nous verrons plus loin que ce n'est plus le cas si le tenseur de dispersion $\mathbb{D}$ est anisotrope.

En effet nous n'avons pas tenu compte de la dispersion de Taylor dans le modèle théorique jusqu'ici, et nous n'avons utilisé que la diffusion moléculaire. Or il est bien connu que le tenseur de dispersion joue un rôle important dans l'apparition des instabilités en cellule de Hele-Shaw (voir par exemple Oltéan *et al.* [50]). Ce point est discuté dans la section suivante, où un tenseur de dispersion anisotrope est utilisé.

4.6. GÉNÉRALISATION AU CAS D'UN TENSEUR DE DISPERSION ANISOTROPE

4.6.1. Équation linéarisée avec tenseur de dispersion anisotrope

Afin de tenir compte de la dispersion de Taylor [62] dans la cellule de Hele-Shaw nous avons utilisé le tenseur de dispersion proposé par Oltéan *et al*. [49] :

$$\mathbb{D} = \left(D_m + \alpha_T \left|\vec{V}\right|\right) \mathbb{I} + \frac{(\alpha_L - \alpha_T)\vec{V} \otimes \vec{V}}{\left|\vec{V}\right|} \tag{4.66}$$

où :

$$\alpha_L = \frac{b^2 \left|\vec{V}\right|}{210 D_m}\left[1 + \frac{\rho - \rho_0}{\rho}\right] ;\ \alpha_T = 0 \tag{4.67}$$

L'équation de transport (4.8) devient :

$$\frac{\partial C_m}{\partial t}+\nabla.(C_m\vec{V})=\nabla.\left\{\left[D_m\mathbb{I}+\frac{b^2}{210D_m}\left(1+\frac{\rho-\rho_a}{\rho}\right)\left(\vec{V}\otimes\vec{V}\right)\right]\vec{\nabla}C_m\right\} \quad (4.68)$$

où, avec γC_m petit, on peut écrire :

$$1+\frac{\rho-\rho_0}{\rho}=1+\frac{\gamma C_m}{1+\gamma C_m}\approx 1+\gamma C_m \quad (4.69)$$

D'autre part, on peut constater qu'avec un tenseur de dispersion non-isotrope, l'écoulement de base est inchangé parce que l'on a :

$$\left(\vec{V}^0\otimes\vec{V}^0\right)\vec{\nabla}C_m^0=\vec{V}^0\left(\vec{V}^0.\vec{\nabla}C_m^0\right)=\vec{V}^0\left(u_0\vec{e}_x.C_{m,y}^0\vec{e}_y\right)=0 \quad (4.70)$$

Donc, l'écoulement de base (4.12)-(4.13) est toujours valable sous cette hypothèse. En appliquant les développements des équations (4.27) et (4.69), l'équation (4.68) devient :

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C_m^1}{\partial t}+\nabla.\left(C_m^0\vec{V}^1\right)+\nabla.\left(C_m^1\vec{V}^0\right)=\\&\quad=D_m\Delta C_m^1+\frac{b^2}{210D_m}\nabla.\left[\left(1+\gamma C_m\right)(\vec{V}\otimes\vec{V})\nabla\vec{C}_m\right].\end{aligned} \quad (4.71)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned}&\left(\vec{V}\otimes\vec{V}\right)\vec{\nabla}C_m=\vec{V}\left(\vec{V}.\vec{\nabla}C_m\right)=\\&\quad=\left(\vec{V}^0+\vec{V}^1\right)\left[\left(\vec{V}^0+\vec{V}^1\right).\left(\vec{\nabla}C_m^0+\vec{\nabla}C_m^1\right)\right]\simeq u_0\vec{e}_x\left(u_0C_{m,x}^1+v_1C_{m,y}^0\right)\end{aligned} \quad (4.72)$$

en négligeant les termes quadratiques et cubiques apparaissant dans le développement.

En injectant (4.72) dans (4.71), on obtient l'équation de transport du soluté linéarisée pour le tenseur de dispersion anisotrope **:**

$$\begin{aligned}&\frac{\partial C_m^1}{\partial t}+\vec{V}^1.\nabla C_m^0+\vec{V}^0.\nabla C_m^1=\\&=D_m\Delta C_m^1+\frac{b^2}{210D_m}u_0\left(1+\gamma C_m^0\right)(u_0C_{m,xx}^1+C_{m,y}^0v_{1,x});\end{aligned} \quad (4.73)$$

où, là encore, la virgule désigne une dérivation partielle. En injectant la décomposition en modes normaux (4.29) ÷ (4.31) dans l'équation (4.71), nous obtenons l'équation linéarisée pour les modes normaux tenant compte du tenseur de dispersion anisotrope :

$$-i\omega f + C^0_{m,y}p + u_0 ikf = D_m[-k^2 f + f''] + \\ + \frac{b^2}{210 D_m} u_0 \left(1 + \gamma C^0_m\right)\left(-u_0 k^2 f + ikC^0_{m,y}p\right) \tag{4.74}$$

En adimensionnant ces équations de façon similaire à la section précédente, et en utilisant l'approximation $\left(1 + \gamma \bar{C}^0_m \alpha_s \approx 1\right)$, on obtient :

$$(\bar{u}_0 i\bar{k} - i\bar{\omega})\bar{f} + \bar{C}^0_{m,\bar{y}}\bar{p} = \frac{D_m}{V_0 L_0}\left[-\bar{k}^2\bar{f} + \bar{f}''\right] + \frac{\bar{b}^2}{210}\frac{V_0 L_0}{D_m}\bar{u}_0\left[-\bar{u}_0\bar{k}^2\bar{f} + i\bar{k}\bar{C}^0_{m,\bar{y}}\bar{p}\right] \tag{4.75}$$

Là encore on choisit la vitesse et la longueur caractéristiques : $V_0 = V_\infty$, L_0=b, puis, en omettant les barres sur les variables adimensionnelles :

$$\left(ik - i\omega\right)f + C^0_{m,y}p = \frac{1}{Pe}\left[-k^2 f + f''\right] + \frac{Pe}{210}\left[-k^2 f + ikC^0_{m,y}p\right] \tag{4.76}$$

En remarquant que les équations de continuité et de Darcy (4.28) sont inchangées, les équations adimensionnelles linéarisées pour les modes normaux, tenant compte de *l'anisotropie du tenseur de dispersion,* sont finalement :

$$\begin{cases} p' + ikq = 0 \\ ikp - q' + V_g ikf = 0 \\ \left(ik - i\omega\right)f + pC^0_{m,y} = \frac{1}{Pe}\left[-k^2 f + f''\right] + \frac{Pe}{210}\left[-k^2 f + ikpC^0_{m,y}\right] \end{cases} \tag{4.77}$$

En développant la troisième équation de (4.77), il vient :

$$f'' = \left(1 + \frac{Pe^2}{210}\right)k^2 f + Pe\left(k - \omega\right)if + Pe\left(1 - ik\frac{Pe}{210}\right)C^0_{m,y}p \tag{4.78}$$

La résolution numérique s'effectue comme dans la section précédente, en posant :

$$\vec{\mathbb{X}}(y) = \left(X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4\right)^T = \left(f \quad f' \quad q \quad p\right)^T$$

et il vient :

$$\begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ X_3' \\ X_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 \\ \left(1+\frac{Pe^2}{210}\right)k^2X_1 + Pe\left(k\text{-}\omega\right)iX_1 + Pe\left(1\text{-}ik\frac{Pe}{210}\right)C^0_{m,y}X_4 \\ ik\left(X_4 + V_gX_1\right) \\ \text{-}ikX_3 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Nous définissons le vecteur $\vec{Z}$ comme précédemment, et les équations (4.58) ÷ (4.61) deviennent, avec i = (1 ÷ n) :

$$\frac{Z_{i+1}\text{-}Z_{i\text{-}1}}{2\delta y} - Z_{n+i}(y_i)=0 \quad (4.80)$$

$$\frac{Z_{i+n+1}\text{-}Z_{i+n\text{-}1}}{2\delta y} - iPeZ_{i+4n}+i\omega PeZ_i - PeC^0_{m,y}(y_i)Z_{i+3n} + \\ +i\frac{Pe^2}{210}C^0_{m,y}(y_i)Z_{i+7n} = (1+\frac{Pe^2}{210})kZ_{i+4n} \quad (4.81)$$

$$\frac{Z_{i+2n+1}\text{-}Z_{i+2n\text{-}1}}{2\delta y} - iZ_{i+7n} - iV_gZ_{i+4n} = 0 \quad (4.82)$$

$$\frac{Z_{i+3n+1}\text{-}Z_{i+3n\text{-}1}}{2\delta y} + iZ_{i+6n} = 0 \quad (4.83)$$

Notons que les conditions limites sont $Z_{jn} = Z_{jn+1} = 0;(j = 0 \div 8)$

4.6.2. Effet de l'anisotropie sur l'instabilité

Afin d'analyser l'effet de l'anisotropie, nous avons résolu numériquement le nouveau système (4.80)÷(4.83) dans le cas : u_0 = 1 ; Pe = 22 ; $\bar{\lambda}$=7.6 ; Vg = 0.58**.** Les résultats sont montrés sur la figure 4.4.

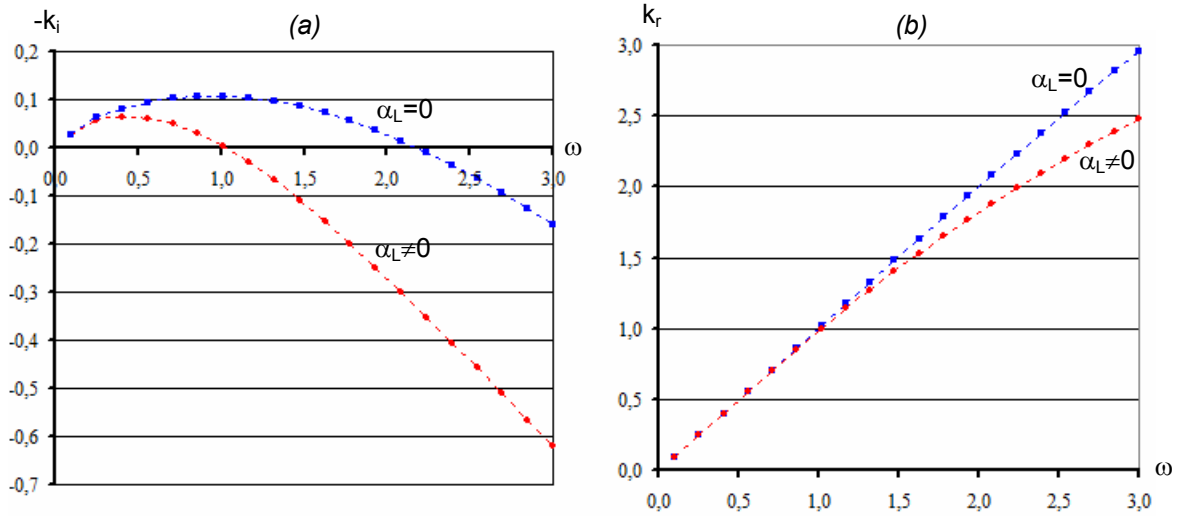


Figure 4.4 *: Taux de croissance spatial (à gauche) et nombre d'onde (à droite) pour un tenseur de dispersion isotrope ($\alpha_L = 0$) et anisotrope ($\alpha_L \neq 0$), pour u0 = 1 ; Pe = 22 ; $\bar{\lambda}$=7.6 ; Vg = 0.58.*

On observe sur la figure 4.4b que la vitesse de phase n'est plus constante si $\alpha_L \neq 0$, et celle-ci n'est plus égale à la vitesse de groupe :

$$c = \frac{\omega}{k_r} \neq \frac{d\omega}{dk_r} \tag{4.84}$$

Le phénomène est donc dispersif ici.

On observe de plus que le taux de croissance spatial $-k_i$ est lui aussi sensible à l'anisotropie (figure 4.4a) : *l'anisotropie a un effet stabilisant.* Cela est en conformité avec les simulations du chapitre 3. De plus, la figure 4.4a montre que la pulsation du mode le plus instable est elle aussi modifiée : la courbe rouge présente un pic à $\omega \approx 0.5$ au lieu de $\omega \approx 1$ dans le cas isotrope. Le nombre d'onde adimensionnel correspondant se lit sur la figure 4.4b : $k_r \approx 0.5$. Il est inférieur de moitié au nombre d'onde que nous aurions obtenu avec un tenseur isotrope (courbe bleue). L'anisotropie conduit donc à une longueur d'onde plus grande, et plus proche des résultats expérimentaux. La figure 4.5 ci-dessous montre le panache théorique (obtenu au moyen des vecteurs propres du système linéaire ci-dessus), dans les cas anisotrope (à gauche) et isotrope (à droite).

Dans la suite nous effectuons tous nos calculs avec un tenseur de dispersion anisotrope.

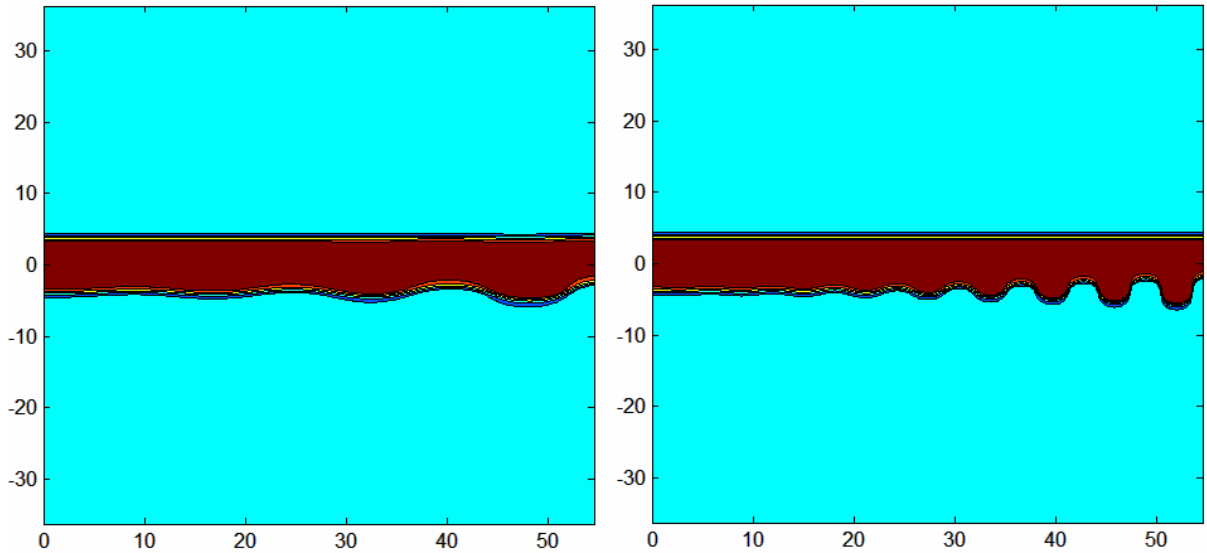


Figure 4.5 *: Illustration de l'effet de l'anisotropie sur la longueur d'onde. Champ de concentration du mode le plus instable, pour un tenseur de dispersion anisotrope (à gauche) et isotrope (à droite), avec u0 = 1 ; Pe = 22 ;* $\bar{\lambda}$ *=7.6 ; Vg = 0.58. (Voir aussi la figure 3.12 (c) et (d) du chapitre 3)*

4.7. INFLUENCE DES DIVERS PARAMÈTRES SUR LA STABILITÉ DU PANACHE

Dans cette section nous analysons l'influence des 3 paramètres expérimentaux principaux (concentration, vitesse de l'écoulement zonal, débit d'injection, ou de leurs analogues adimensionnels Vg, Pe, $\bar{\lambda}$) sur le comportement du panache. Nous avons choisi de fixer 2 paramètres de façon arbitraire, et de faire varier le troisième. *Cette procédure ne nous donnera des informations que sur une petite partie de l'espace des paramètres, mais nous permettra cependant de tirer des conclusions pertinentes. Dans tous les cas, le tenseur de dispersion est anisotrope.*

4.7.1. Effet de la concentration d'injection

Nous fixons $Pe = 22$ et $\overline{\lambda} = 7{,}6$ et faisons varier Vg de 0.14 à 1.44, ce qui correspond à une concentration d'injection variant de 0.05 g/L à 0.5 g/L. Les résultats sont montrés sur la figure 4.6.

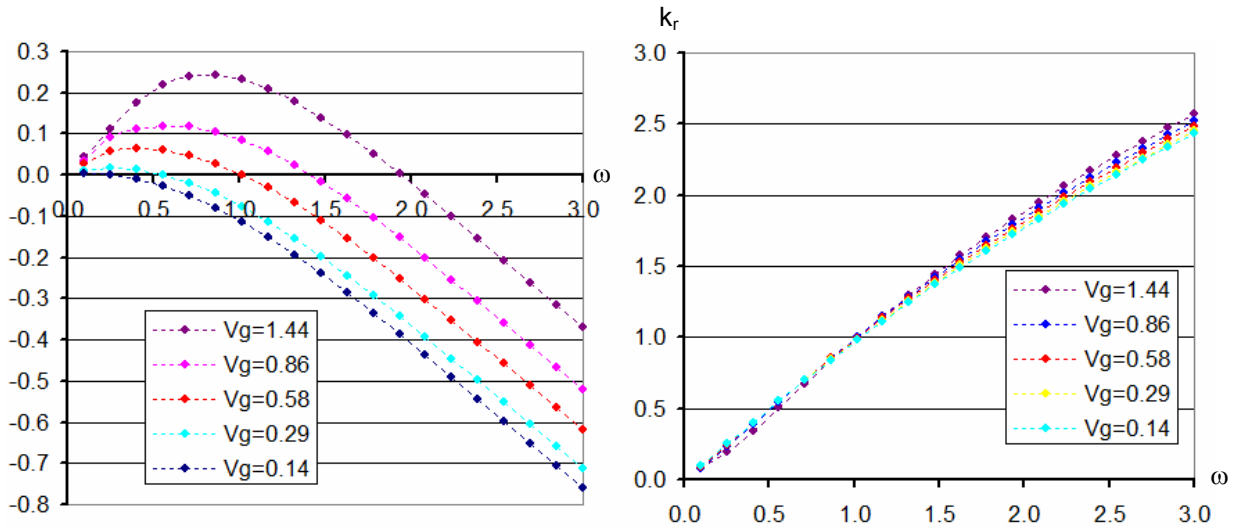


Figure 4.6 *: Taux de croissance -k_i (à gauche) et nombre d'onde (à droite), lorsque la concentration d'injection varie.*

On observe là encore l'effet déstabilisant de la concentration d'injection, puisque, en augmentant C_{inj}, on augmente le taux de croissance de la perturbation ainsi que la plage de fréquences instables. De plus, on n'a jamais $-k_i^{max} < 0$ (figure 4.6), de sorte que le panache est toujours convectivement instable, comme dans le cas isotrope. Le graphe de droite montre que les ondes sont dispersives (car c= ω /k_r est non constant)**.** Cependant la vitesse de phase c dépend peu de Vg. L'observation des deux graphes de la figure 4.6 montre que le nombre d'onde k_r^{max} du mode le plus instable augmente avec Vg. En effet, la pulsation ω_{pic} de ce mode augmente avec Vg, et le graphe 4.6 de gauche permet d'obtenir le nombre d'onde correspondant. Celui-ci est montré sur la figure 4.8. On observe ainsi que la longueur d'onde du mode le plus instable diminue avec la concentration, ce qui est en accord avec nos expériences.

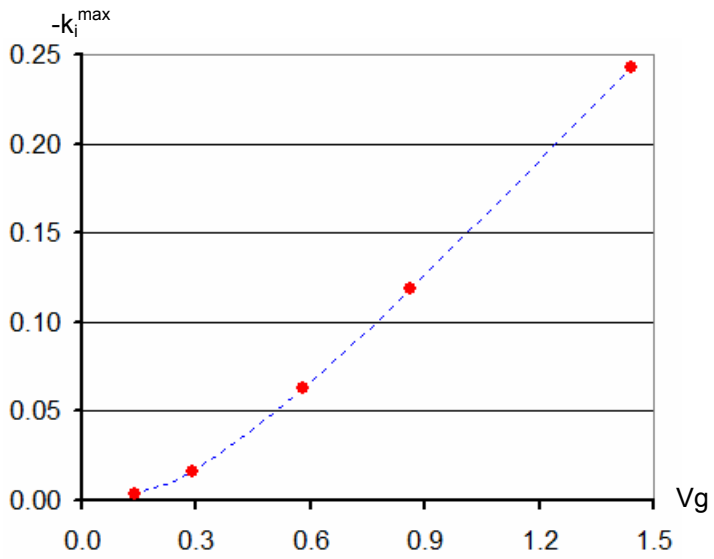


Figure 4.7 *: Taux de croissance maximal en fonction de Vg.*

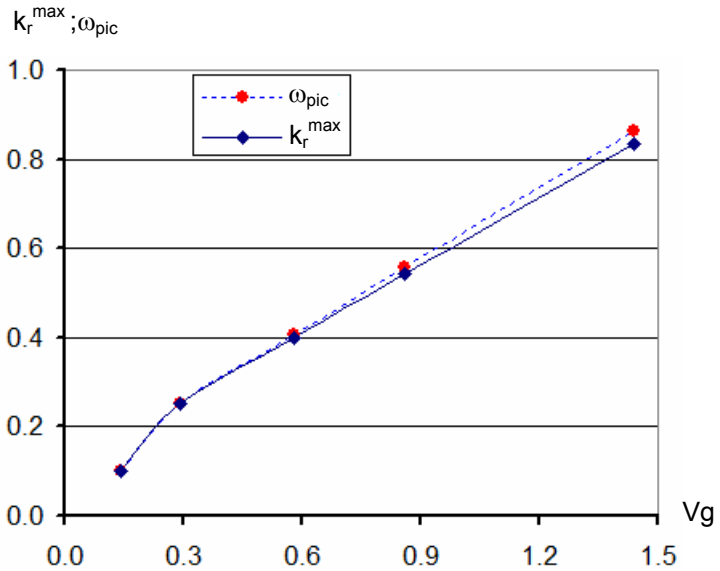


Figure 4.8 *: Nombre d'onde k_r^{max} du mode le plus instable.*

4.7.2. Effet du débit d'injection

Nous fixons Pe=22 et Vg=0.58, et faisons varier $\bar{\lambda}$ de 7.6 à 30.4, ce qui correspond à un débit d'injection variant de 0.5 mL/h à 2 mL/h.

La figure 4.9 montre que le débit a peu d'effet sur le taux de croissance et le nombre d'onde des perturbations. La figure 4.10 montre ces deux grandeurs en fonction de $\bar{\lambda}$, qui restent quasiment constantes alors que le débit volumique a été multiplié par 4.

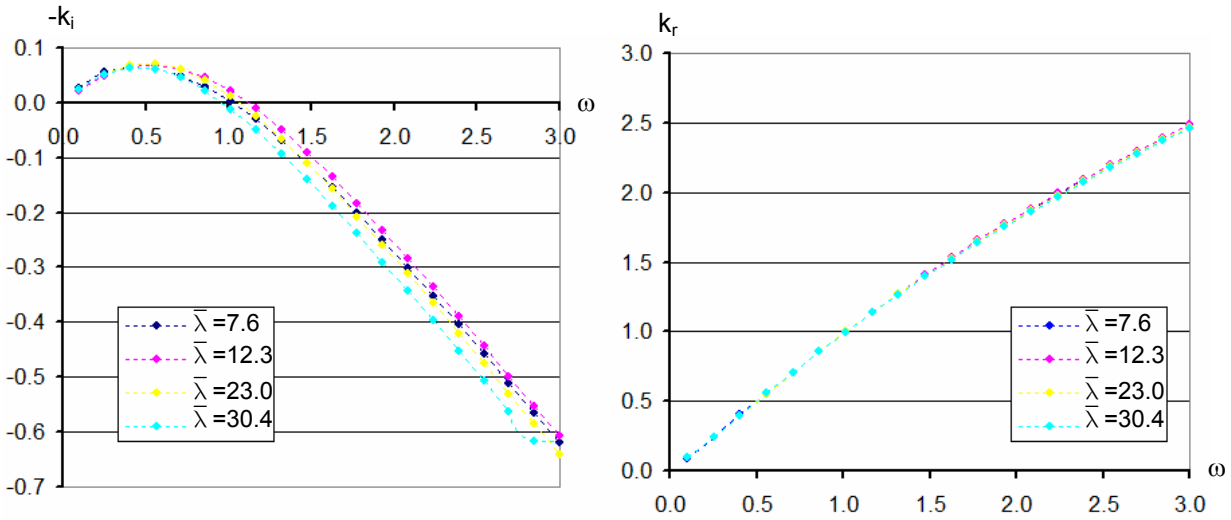


Figure 4.9 : *Taux de croissance -k_i (à gauche) et nombre d'onde (à droite), pour divers débits d'injection, lorsque Pe=22.*

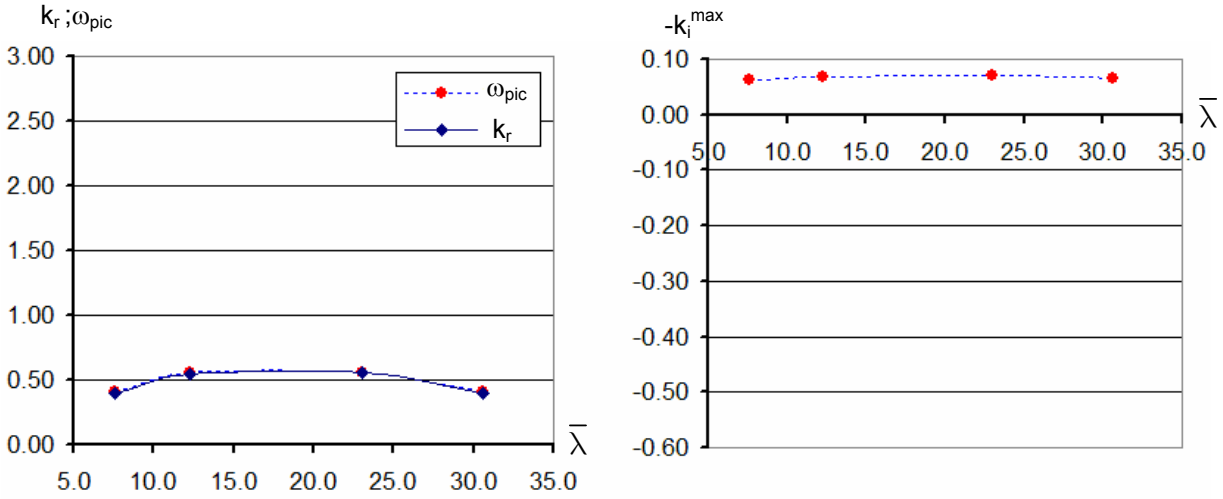
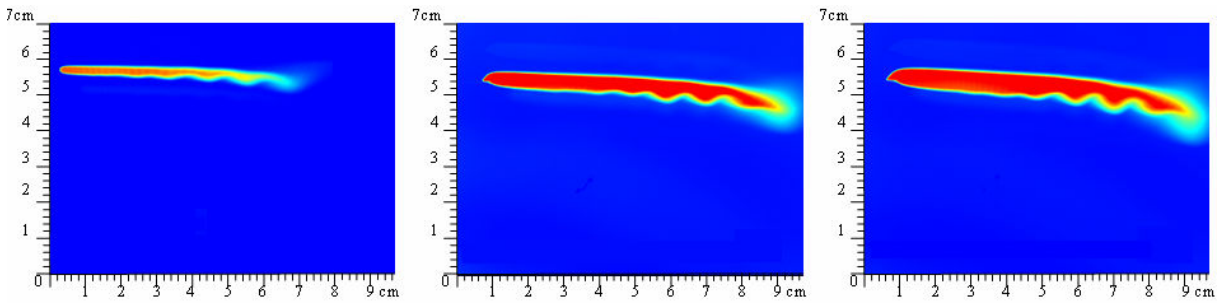


Figure 4.10 : *Nombre d'onde et taux de croissance du mode le plus instable, pour Pe=22.*

Cette tendance est en accord avec les expériences et les simulations (chapitre 3). La figure 4.11 ci-dessous montre des panaches expérimentaux pour trois débits différents, les autres paramètres étant fixés : la longueur d'onde du mode qui se développe reste de l'ordre de 1cm dans les trois cas, alors que le débit a été multiplié par 4.



Q_{inj}=0,5mL/h Q_{inj}=1,5mL/h Q_{inj}=2,0mL/h

Figure 4.11 : *Illustration expérimentale de l'invariance de la longueur d'onde du mode le plus instable lorsque le débit d'injection varie (V_∞=0,16mm/s ; C_{inj}=1,0g/L).*

4.7.3. Effet du nombre de Peclet

Nous fixons $\overline{\lambda} = 7.6$ et Vg=0.58, et faisons varier Pe de 14.7 à 36.7. On observe, sur la figure 4.12, que Pe a un effet stabilisant, puisque le taux de croissance du mode le plus instable diminue avec Pe. Ainsi, si Pe augmente, le mode le plus instable a un taux de croissance plus faible, et une plus grande longueur d'onde (k_r^{max} décroît avec Pe, figure 4.13). Ceci est tout à fait conforme à nos observations expérimentales (chapitre 2).

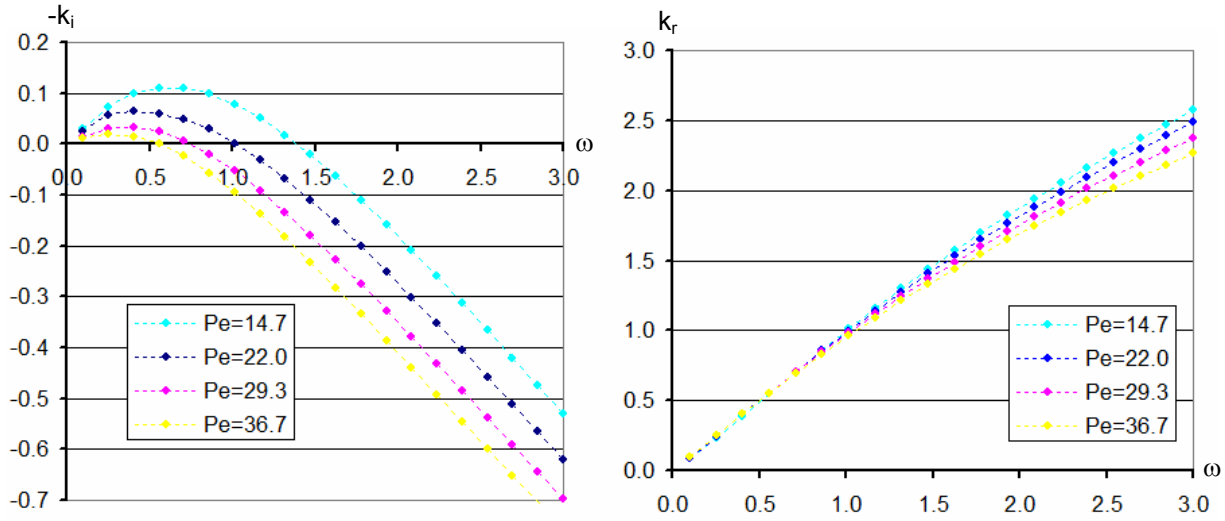


Figure 4.12 *: Taux de croissance -k_i (à gauche) et nombre d'onde (à droite), pour diverses vitesses d'écoulement zonal.*

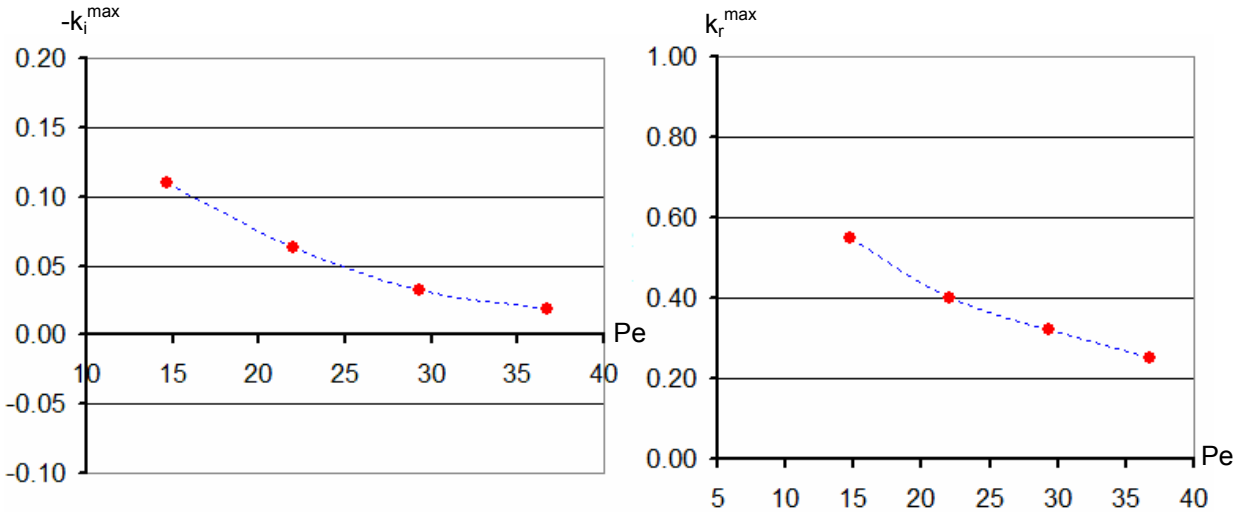


Figure 4.13 *: Taux de croissance et nombre d'onde du mode le plus instable, lorsque Pe varie.*

4.8 CONCLUSION – CRITÈRE DE STABILITÉ

L'analyse de stabilité linéaire spatiale décrite dans ce chapitre montre que l'apparition de l'instabilité dépend de façon complexe de deux paramètres principaux Vg et Pe. *Nous avons observé que, pour les paramètres analysés ici, le panache est toujours convectivement instable, car le taux de croissance du mode le plus instable* $-k_i^{max}$ *est strictement positif dans tous les cas où* $C_{inj} > 0$.

Comme mentionné dans les sections précédent, on pourra dire à la rigueur que l'écoulement est "apparemment stable", lorsque le taux de croissance spatial est trop faible pour faire apparaître des ondes, visibles à l'œil nu, avant l'extrémité de la cellule de Hele-Shaw.

Nous avons analysé l'influence de chaque paramètre, les deux autres étant fixés. Comme précisé plus haut, il est clair que cette procédure ne nous a éclairé que sur une petite partie de l'espace des paramètres, mais elle a permis de tirer des conclusions intéressantes et de mettre a jour des comportements assez proches, qualitativement, de ceux observés dans les expériences et les simulations.

Nous avons tout d'abord écrit les équations de la perturbation dans le cas d'un tenseur de dispersion isotrope. La résolution de ces équations permet d'obtenir le taux de croissance et la longueur d'onde des perturbations, et montre que dans ce cas les ondes sont non-dispersives. La longueur d'onde du mode le plus instable prédite par ce modèle est en général très inférieure à celle obtenue dans nos expériences.

Afin de tenir compte de la dispersion de Taylor, nous avons généralisé cette étude, toujours linéaire, au cas d'un tenseur anisotrope. Nous avons observé que l'anisotropie avait une forte influence sur le taux de croissance, le nombre d'onde, et la vitesse de phase des ondes. Le mode le plus instable a un taux de croissance plus faible, et une longueur d'onde plus grande (et plus proche des résultats expérimentaux), que dans le cas isotrope. In fine, notons que les ondes deviennent dispersives, alors qu'elles ne le sont jamais dans le cas isotrope. Aucune instabilité absolue n'a été remarquée pour les valeurs des paramètres considérées.

En restant dans le cas d'un tenseur de diffusion/dispersion anisotrope, nous avons également analysé l'effet séparé de la concentration d'injection, du débit d'injection, et de la vitesse zonale, sur la stabilité. La concentration a clairement un effet déstabilisant (figure 4.7), alors que l'augmentation du débit est pratiquement sans effet sur le taux de croissance des perturbations, ainsi que sur leur longueur d'onde. Toutefois, pour nos plus faibles vitesses zonales (Pe $\approx$ 7), nous avons constaté théoriquement et expérimentalement que l'augmentation du débit avait un effet stabilisant. Enfin, l'augmentation de la vitesse zonale, pour un débit et un contraste de densité fixés, a un effet stabilisant. Tous ces résultats sont en accord avec les observations expérimentales.

Critère de stabilité. Comme signalé dans l'introduction de ce chapitre, il existe dans la littérature divers critères de stabilité pour ce problème. Le seul critère rigoureux que l'on pourrait proposer suite à notre étude théorique serait que le panache est toujours convectivement instable. Cependant, si le taux de croissance spatial est trop faible pour que les ondes soient suffisamment grandes (donc visibles) avant l'extrémité de la cellule de Hele-Shaw, le panache sera qualifié, comme nous l'avons dit, «d'apparemment stable». Le taux de croissance du mode le plus instable de notre étude théorique est donné par la figure 4.7 lorsque Vg varie (la vitesse amont et le débit étant fixés et tels que $V_\infty = 0.06\,\mathrm{mm/s}$ et Q_{inj}=0.5 mL/h). L'amplitude A de la perturbation au bout de la zone test de la cellule de Hele-Shaw (de longueur L_x = 145 b) sera alors égale à $A = A_0 \exp(-k_i^{max} L_x)$, où A_0 (inconnue et très faible) est l'amplitude des perturbations prenant naissance à l'entrée de la cellule (au voisinage de l'aiguille). On peut calculer, grâce à la figure 4.7, que cette exponentielle est d'ordre 1 si Vg = 0.14, d'ordre 10 si Vg=0.3, d'ordre 6000 si Vg=0.6, et d'ordre 3.10^7 si Vg = 0.86. Ainsi, l'amplitude des perturbations est

pratiquement inchangée si Vg < 0.1, et multipliée par plusieurs millions si Vg dépasse 0.8 (en supposant que les termes non-linéaires restent négligeables sur tout le trajet, ce qui n'est sans doute pas le cas puisqu'ils viendront saturer l'instabilité lorsque l'amplitude des perturbations n'est plus infinitésimale). Ceci explique, peut-être, pourquoi le panache de nos expériences est apparemment stable si Vg est inférieur à un nombre d'ordre 1 (chapitre 2), et instable sinon. Remarquons aussi que Güven *et al*. [26] affirment que leur panache expérimental est "instable" si $\pi_1 > 0{,}35$. Or leur paramètre π_1 est égal à notre Vg : compte tenu du fait que ces auteurs travaillent avec un milieu poreux (et non-pas une cellule de Hele-Shaw), cette valeur reste d'un ordre de grandeur acceptable.

CONCLUSIONS GENERALES & PERSPECTIVES

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

La mise en place d'un modèle expérimental du type cellule de Hele-Shaw nous a permis d'étudier l'évolution spatio-temporelle d'une solution saline injectée dans un écoulement uniforme reproduisant celui d'une formation aquifère. Le champ des vitesses et le champ des concentrations du soluté au sein de la cellule ont été déterminés grâce à l'utilisation des techniques de mesure non intrusives (*i.e.* : PIV - Particle Image Velocimetry et LIF - Laser Induced Fluorescence).

Les résultats expérimentaux décrits dans le chapitre 2 de ce manuscrit ont montré trois configurations typiques : stable, faiblement instable et fortement instable. La première configuration est caractérisée par un nuage allongé dans la direction de l'écoulement dont les bords sont parfaitement lisses. La deuxième est identique à la première à l'exception de la pointe du panache où on observe l'apparition et le développement d'un seul et unique doigt. Quant à la troisième configuration, elle est représentée par un panache dont l'interface inférieure est caractérisée par l'apparition et le développement de digitations (ondes). Ces configurations ont été obtenues à travers la variation des conditions expérimentales, à savoir : la concentration injectée, le débit injecté et la vitesse de l'écoulement ambiant. De l'analyse de ces résultats il ressort que la (l'in)stabilité du panache dépend essentiellement de deux facteurs : le contraste de masse volumique induit par la concentration injectée et la vitesse d'écoulement. Si l'augmentation du contraste de masse volumique amplifie les instabilités, l'augmentation de la vitesse de l'écoulement joue un rôle stabilisateur. Notons également que le débit d'injection n'influe pas (ou peu) sur la stabilité du panache. L'analyse qualitative des expériences nous a permis d'établir un critère de stabilité empirique basé sur G, la vitesse typique de sédimentation rapportée à la vitesse de l'écoulement zonal. Ainsi, tant que $G < 10.5$ le transport convectif de panache reste stable. Pour $G > 12.2$, il devient instable.

L'étude numérique menée dans le chapitre 3 de ce manuscrit nous a permis, dans un premier temps, de mimer les résultats expérimentaux. Les solutions numériques, obtenues à l'aide du logiciel COMSOL Multiphysics®, semblent bien reproduire aussi bien l'écoulement gravitationnel stable que faiblement instable dans une cellule de Hele-Shaw. Pour la configuration instable, les différences entre les

solutions numériques et expérimentales se situent principalement au niveau des digitations apparaissant sur l'interface inférieure du panache. Cependant, comme l'instabilité numérique est souvent créée artificiellement par des erreurs numériques, la seconde partie de ce chapitre a été alors consacrée à une étude purement numérique. Il s'agit d'étudier la sensibilité de la solution numérique vis-à-vis des oscillations numériques introduites par la méthode des éléments finis utilisée par COMSOL, des tolérances absolue et relative des solveurs utilisés dans la résolution des équations de transport, ou encore de la forme du tenseur de dispersion utilisé. Les conclusions de cette étude peuvent être considérées plus que satisfaisantes. Elles dénotent que la morphologie et la dynamique du panache dépend fortement : (i) du raffinement de maillage, (ii) du choix de terme dispersif et (iii) de la valeur de la viscosité dynamique. Ainsi, l'utilisation d'un maillage approprié nous a permis d'obtenir des solutions numériques comparables aux résultats expérimentaux. Pour des configurations fortement instables, nous avons pu montrer que l'augmentation forcée de la dispersivité intrinsèque longitudinale peut entraîner un basculement vers une configuration faiblement stable voire stable. *In fine*, pour une configuration fortement instable, l'augmentation du rapport des viscosités dynamiques joue un rôle stabilisateur. Pour une configuration faiblement instable, la diminution de la viscosité dynamique du soluté injecté engendre, souvent, l'apparition et le développement d'instabilités.

Nous avons clos cette thèse par une étude théorique portant sur la stabilité de l'interface de la zone de mélange, en analysant sa réaction à des perturbations de faible amplitude (chapitre 4). L'écoulement de base considéré dans cette étude est une nappe horizontale de soluté transportée par un écoulement horizontal parfaitement uniforme. Il est supposé soumis à des perturbations sinusoïdales susceptibles de se développer spatialement. L'amplitude de ces ondes est solution d'un problème aux valeurs propres que nous avons résolu numériquement. Même si l'écoulement de base est assez différent de celui observé dans nos expériences (qui n'est ni unidirectionnel, ni établi suivant x), ce modèle théorique présente des similitudes intéressantes : il est contrôlé par les mêmes paramètres que l'écoulement expérimental (vitesse zonale, contraste de densité, débit d'injection).

Cette étude théorique montre que le panache est toujours convectivement instable, pour les paramètres que nous avons considérés. En outre, elle permet de

retrouver et de quantifier quatre résultats mis en évidence aux chapitres 2 et 3 : l'effet stabilisant de la dispersivité longitudinale, l'effet déstabilisant du contraste de densité, l'effet stabilisant de la vitesse zonale.

L'étude théorique linéaire conforte le critère d'instabilité basé sur le nombre G. Comme G = 12 π_1 (où π_1 est le nombre adimensionnel introduit par Güven *et al.* [26]), ce critère n'est pas si éloigné de celui de Güven *et al.* [26]. En effet, ces auteurs observent l'apparition de digitations si π_1 dépasse un nombre d'ordre unité. D'après le modèle linéaire, lorsque π_1 (noté Vg au chapitre 4) est inférieur à 0.1, l'amplitude des perturbations prenant naissance à l'entrée de la cellule est multipliée par 1 environ à l'autre extrémité de la zone test, donc pratiquement inchangée, ce qui explique pourquoi le panache est apparemment stable. Au contraire, si π_1 s'approche de 1 (G d'ordre 10), cette amplitude est multipliée par un très grand coefficient, ce qui peut rendre les perturbations visibles, même si elles seront nécessairement saturées par les termes non-linéaires que nous avons négligés dans l'analyse théorique [26].

Le modèle linéaire permet aussi d'analyser l'influence des divers paramètres sur la longueur d'onde des digitations : l'augmentation de la dispersivité longitudinale conduit à des ondes plus longues, ce qui est en accord avec les résultats numériques du chapitre 3. Nous avons remarqué de plus que l'utilisation d'un tenseur isotrope conduisait à des ondes non-dispersives (vitesse de phase indépendante de la pulsation). Inversement, avec un tenseur anisotrope le phénomène ondulatoire devient dispersif.

PERSPECTIVES

Des expériences avec un plus fort contraste de densité pourront être réalisées dans la suite, afin de déterminer l'influence de ce contraste sur la dispersivité longitudinale, comme prévu théoriquement par Oltéan *et al.* [49]. Ces nouvelles expériences permettront, de plus, d'analyser l'apparition de possibles effets 3D rendant l'écoulement non-darcien.

Le couplage PIV/LIF est une perspective pertinente pour la suite de ce travail. Cette technique permettra d'obtenir simultanément des champs de vitesse et de concentration, que nous comparerons alors aux résultats des simulations réalisées dans cette thèse.

L'étude linéaire proposée au chapitre 4 peut être prolongée de diverses façons. Il serait sans doute opportun de reformuler le problème linéaire avec une dispersivité longitudinale constante et quelconque, afin d'analyser l'influence de ce paramètre sur les caractéristiques de l'instabilité, et de comparer ces résultats avec ceux obtenus dans les simulations du chapitre 3.

Il serait aussi instructif d'analyser la possible apparition d'une instabilité absolue dans cet écoulement, afin de déterminer si celle-ci peut apparaître si on augmente G. Enfin, l'étude non-linéaire (à l'aide d'une équation d'amplitude), permettrait d'obtenir l'amplitude des ondes lorsque celles-ci ont été saturées par les termes non-linéaires que nous avons négligés au chapitre 4.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1]. Ackerer Ph., Younes A. and Mosé R., "*Modeling variable density flow and solute transport in porous medium, Numerical model and verification*", Transport in Porous Media, 35, 345-373 (1999).

[2]. Angilella J.R., *"Analyse de stabilité spatiale d'une nappe horizontale de soluté"*, Rapport de recherche Interne du LAEGO, Nancy, septembre 2010.

[3]. Angilella J.R., Oltéan C. & Buès M.A., *"Analytical and numerical investigation of solute sedimentation in porous media using contour dynamics"*, In proceedings of Mamern09 , 3rd Conference on Approximation Methods in Environment and Natural Ressources, Pau (France), 8-12 june 2009.

[4]. Aris R., *"On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube"*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, 235, Issue 1200, 67-77 (1956)

[5]. Azaiez J., Singh B., *"Stability of miscible displacements of shear-thinning fluids in a Hele-Shaw cell"*. Physics of Fluids, 14, 1557-1571 (2002).

[6]. Bear J., *"Hydraulics of Groundwater"*, McGraw-Hill, New-York (1979).

[7]. Betchov R. and Criminale W.O, *"Stability of parallel flows"*, Academic Press, New York, London, 1967.

[8]. Buès M.A. and C. Oltéan M.A., *"Numerical simulations for saltwater intrusion by the mixed hybrid finite element method and discontinuous finite element method"*, Transport in Porous Media, 40, 171-200 (2000).

[9]. Buès M.A. and Aachib M., *"Influence of the heterogeneity of the parameters of miscible displacement in a saturated porous media"*, Experiments in Fluids, 11, 25-32 (1991).

[10]. Chang, S.-H. and Slanery J.C., *"A linear stability analysis for miscible displacements"*, Transport Porous Media, 1, 179-199 (1986).

[11]. *Comsol Multiphysics User's Guide*, Version 3.5a, November 2008.

[12]. Cooper C.A., Robert J. Glass and Scott W. Tyler, *"Experimental investigation of the stability boundary for double-diffusive finger convection in a Hele-Shaw cell"*, Water Resources Research 33, No.4, 517-526 (1997).

[13]. Cooper C.A., Robert J. Glass and Scott W. Tyler, *"Effect of buoyancy ratio on the development of double-diffusive finger convection in a Hele-Shaw cell"*, Water Resources Research 37, No.9, 2323-2332 (2001).

[14]. Dagan G., *"Flow and Transport in Porous Formations"*, Springer, New York, (1989).

[15]. Dane, J.H., Güven, O. and Missildine B.C., *"Flow visualization studies of dense aqueous leaches plumes in a course and fine sand"*, Ala. Agric. Exp. Stn., Auburn Univ., Auburn, AL, Spec. Rep. (1994).

[16]. Dane, J.H., Güven, O., Oostrom M., HayWorth S. and Leijnse A., *"Dense aqueous phase contaminant plume behaviour in porous media near the groundwater table"*, Future Groundwater Resources at Risk (Proceedings of the Helsinki Conference, June 1994). IAHS Publ. No. 222 (1994).

[17]. Diersch H.J.G. et Kolditz O., *"Variable-density flow and transport in porous media, approaches and challenges"*, Advances in Water Resources, 25, 899-944 (2002).

[18]. Drazin P.G. and Reid W.H., *"Hydrodynamic stability"*. Cambridge University Press (1999).

[19]. Felder C. *"Transport d'une solution saline en cellule de Hele-Shaw - Expérience et simulations numériques"*, Doctorat INPL, 173 pp (2003).

[20]. Fernandez J., Kurowski P., Limat L., Jeans P. and Meiburg E., *"Density-driven unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell"*, Fluid Mechanics, 451, 239-260 (2002).

[21]. Elder J.W., *"Transient convection in a porous medium"*. Fluid Mechanics, 27, 609-623 (1967).

[22]. Gelhar L.W., *"Stochastic Subsurface Hydrology"*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1993).

[23]. Ghesmat K and Azaiez J., *"Viscous fingering instability in porous media, effect of anisotropic velocity-dependent dispersion tensor"*, Transport in Porous Media 73, 297-318 (2008).

[24]. Gowda V. and Jaffré J., *"A discontinuous finite element method for scalar nonlinear conservation laws"*, Rapport de recherche INRIA (1993).

[25]. Greenkorn R. A., Matar J.E. and Smith R.C., *"Two-phase flow in Hele-Shaw models"*, AIChE Journal, 13, Issue 2, 273-279 (1967).

[26]. Güven O., Dane J.H., Hill W.E. and Melville J.G., *"Mixing and plume penetration depth at the groundwater table"*, Elec. Power Res. Inst., Palo Alto, CA, Rep. EPRI TR-10056 (1992).

[27]. Held R., Attingger S. and Kingzelbach W., *"Homogenization and effective parameters for problem in heterogeneous formations"*, Water Resources Research, 41, W114420 (2005).

[28]. Heller J.P., *"Onset of instability pattern between miscible fluids in porous media"*, Applied Physics, 37, 1566-1579, (1966).

[29]. Holzbecher EO, *"Modelling density-driven flow in porous media, principles, numerics, software"*, Berlin, Springer (1998).

[30]. Homsy M., *"Viscous fingering in porous media"*, Annual Review of Fluid Mechanics, 19, 271-311, (1987).

[31]. Horváth I., Beeck J.V. and Buchlin J.M., *"Mesures de Vitesse et de Concentration Simultanées et Instantanées"*, Congrès Francophone de Techniques Laser, CFTL 2010, Vandœuvre lès nancy, 14-17 septembre 2010.

[32]. Huang K., Toride N. and Genuchten M. *"Experimental investigation of solute transport in large homogeneous and heterogeneous saturated soil columns"*, Transport in Porous Media, 18, 283-302 (1995).

[33]. Huyakorn P.S. and Pinder G.F, *"Computational Methods in Subsurface Flow*", 471 pp, Academic Press, San Diego, Calif. (1983).

[34]. Killey R. W. D. and Moltyaner G. L. *"Twin Lake Tracer Tests, Setting, Methodology, and Hydraulic Conductivity Distribution"*, Water Resources Research, 24, No. 10, 1585-1612 (1988).

[35]. Konz M., Younes A., Ackerer P., Fahs M., Huggenberger P. and Zechner E., *"Variable-density flow in heterogeneous porous media - Laboratory experiments and numerical simulations"*, Contaminant Hydrology, 108, Issues 3-4, 168-175 (2009)

[36]. Levi E., Goldman M., Hadad A. and Gvirtz M., *"Spatial delineation of groundwater salinity using deep time domain electromagnetic geophysical measurements, A feasibility study"*, Water Resources Research, 44, W12404, (2008).

[37]. List E.J., *"The stability and mixing of a density-stratified horizontal flow in a saturated porous medium"*, Rep KH - R - 11, Calif. Inst. of Technol., Pasadena, 170 pp (1965).

[38]. Liu H.H. and Dane J.H, *"A numerical study on gravitational instabilities of dense aqueous phase lumes in three -dimensional porous media"*, Hydrology, 194, 126-142 (1997).

[39]. Liu H.H. and Dane J.H., *"An interpolation-corrected modified method of characteristics to solve advection dispersion equations"*, Advances in Water Resources, 19, 359-368 (1996).

[40]. Maes R., Rousseaux G., Scheid B, Mishra M., Colinet P., and De Wit A., *"Experimental study of dispersion end miscible viscous fingering of initially circular samples in Hele-Shaw cells"*, Physics of Fluids, 22, 123104, 12 pp, (2010).

[41]. Mainhagu J., Oltéan C., Golfier F. and Buès M.A., *"Measurement by laser induced fluorescence on miscible density driven flows in a Hele-Shaw cell, settings and preliminary results"*, Comptes Rendus Mecanique, 335, 105-112 (2007).

[42]. Marle C.M, *"Multiphase Flow in Porous Media"*, 257 pp., Gulf, Houston, Tex., (1981).

[43]. Mendoza C.A. and Frind E.O., *"Advective -dispersive transport of dense organic vapour in the saturated zone, 1, Model development"*, Water Resources Research., 26(3), 379-387 (1990).

[44]. Musuuza J.L., Attinger S. and Radu F.A., *"An extended stability criterion for density-driven flows in homogenous porous media"*, Advances in Water Resources, 32, 796-808 (2009).

[45]. Nakamura I., Miyata M. and Sakai Y., *"On a method of the concentration measurement by the use of light absorption law"*, Bulletin of the Japan Society Mechanical Engineers, 26, 1357-1365 (1983).

[46]. Nick H.M., Schotting R., Gutierrez-Neri M. and Johannsen K., *"Modeling transverse dispersion and variable density flow in porous media"*, Transport in Porous Media, 78, 11-35 (2009).

[47]. Nield D. A., "*Onset of thermohaline convection in a porous medium*", Water Resources Research 4, 553-560 (1968).

[48]. Oltéan C., *"Comportement du déplacement d'un front d'eau douce/eau salée en milieu poreux saturé , modélisations physiques et numériques"*, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Institut de Mécanique des Fluides, Strasbourg, France, 198 pp (1995).

[49]. Oltéan C., Felder Ch., Panfilov M. and Buès M.A., *"Transport with a very low density contrast in Hele-Shaw cell and porous media, evolution of the mixing zone"*, Transport in Porous Media, 55, 339-360 (2004).

[50]. Oltéan C., Golfier F. and Buès M.A., *"Experimental and Numerical study of the validity of Hele-Shaw cell as analogue modèle for variable-density flow in homogeneous porous media"*. Advances in Water Resources, 31, 82-95 (2008).

[51]. Oostrom M., Hayworth J.S., Dane J.H. and Guven O., *"Behavior of dense aqueous phase leachatc plumes in homogeneous porous media"*, Water Resources Research, 28, 2123-2134 (1992).

[52]. Oswald S., Kinzelbach W., Greiner A. and Brix G., *"Observation of flow and transport processes in artificial porous media via magnetic resonance imaging in three dimensions"*, Geoderma, 80, 417-429 (1997).

[53]. Plouraboue F. and Hinch E.J., *"Kelvin-Helmholtz instability in a Hele-Shaw cell"*, Physics of Fluids, 14(3), 922-929 (2002).

[54]. Ruch M., *"Transfert d'un pollutant non reactif en milieu poruex saturé, Etude sur modèle physiques tridimensionnelles et simulations"*, Thèse de l'Université Louis Pasteur, Institut de Mécanique des Fluides, Strasbourg, France, 162 pp (1992).

[55]. Scheidegger A.E., *"General theory of dispersion in porous media"*, Geophysical Research, 66, No.10, 3273-3278 (1961).

[56]. Schincariol R.A. and Schwartz F.W. *"On the generation of instabilities in variable density flow"*, Water Resources Research, 30, No.4, 913-927 (1994).

[57]. Schincariol R.A. and Schwartz F.W., *"An experimental investigation of variable density flow and mixing in homogeneous and heterogeneous media"*, Water Resources Research, 26, No. 10, 2317-2329 (1990).

[58]. Schincariol R.A., *"Dispersive mixing dynamics of dense miscible plumes, natural perturbation initiation by local - scale heterogeneities"*, Contaminant Hydrology, 34, 247-271 (1998).

[59]. Simmons C.T., Narayan K.A. and Wooding R.A.,*"On a test case for density dependent groundwater flow and solute transport models, the salt lake problem"*, Water Resources Research, 35, No. 12, 3607-3620, (1999).

[60]. Simpson H.J. and Herczeg A.L., *"Stable Isotopes as an Indicator of Evaporation in River Murray, Australia"*, Water Resources Research, 27, No. 8, 1925-1935 (2008).

[61]. Suslov S.A., *"Numerical aspects of searching convective/absolute instability transition"*, Computational Physics, 212,188-217 (2006).

[62]. Taylor G.I., *"Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube"*, Proceedings of the royal society, Section A, 219, 186-203 (1953).

[63]. Thierry M.F., Thach H., Basley J., Pastur L.R. and Lusseyran F., *"Moyenne de phase spatiale appliquée à des champs PIV résolus en temps"*, Congrès Francophone de Techniques Laser, CFTL 2010, Vandoeuvre-lès-Nancy, 14 - 17 septembre 2010.

[64]. Tompson, A.F.B., *"Numerical simulation of chemical migration in physically and chemically heterogeneous porous media"*, Water Resources Research, 29, 3709-3726 (1993).

[65]. Trieu H. T., Angilella J.R., Oltéan C., et Buès M. A, *"Transport de fluides miscible en milieu poreux, apports théorique et expérimental"*, Poster au séminaire de l'école doctorale RP2E, Nancy, France (2011).

[66]. Trieu H. T., Oltéan C., Golfier F., and Buès M. A., *"Laboratory and numerical investigations of variable density-flow and transport in Hele-Shaw cell"*, In proceedings of CMWR 2010, XVIII International Conference on Computational Methods in Water Resources, Barcelona, Spain., June 21-24, 2010.

[67]. Trieu H.T., Mainhagu J., Oltéan C., Golfier F. et Buès M.A. *"Transport de polluants inertes miscibles à l'eau et à propriétés physiques variables*", 9èmes Journées d´Etude sur les Milieux Poreux, JEMP 2009, Paris, 21-22 Octobre 2009.

[68]. Tsay T.S. and Hoopes J.A., *"Numerical simulation of ground water mounding and its verification by Hele -Shaw modèle"*, Computers & Geosciences, 24, No. 10, 979-990 (1998).

[69]. Ursino N., *"Linear stability analysis of infiltration, analytical and numerical solution"*, Transport in Porous Media, 38, 261-271 (2000).

[70]. Van A.S., Van H., Dusschoten, D., *"NMR methods for imaging of transport processes in micro-porous system"*, Geoderma, 80, 389-403 (1997).

[71]. Weast R.C., *"CRC Handbook of Chemistry and Physics"*, 58th ed., Chemical Rubber Company Press, Boca Raton (1977).

[72]. Welty C. and Gelhar L.W., *"Stochastic analysis of the effects of fluid density and viscosity variability on macrodispersion in heterogeneous porous media"*, Water Resources Research, 27, 2061-2075 (1991).

[73]. Wooding R.A., *"Steady state free thermal convection of liquid in a saturated permeable medium"*, Fluid Mechanics, 2, 273-285 (1957).

[74]. Wooding R.A., Tyler S.W., White I. and Anderson P.A., *"Convection in groundwater below evaporating salt lake, 2. Evolution of fingers or plumes*", Water Resources Research, 33, No.6, 1219-1228 (1997).

[75]. Wooding R.A., Tyler S.W. and White I., *"Convection in groundwater below evaporating salt lake, 1. Onset of instability"*, Water Resources Research 33, No.6, 1199-1217 (1997).

Nancy-Université
INPL

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :
Monsieur François LEHMANN, Maître de Conférences, Laboratoire d'Hydrologie et de Géochimie de Strasbourg

Monsieur Huaquing WANG, Professeur des Universités, Laboratoire Ondes et Milieux Complexes, Université du Havre

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur TRIEU Hung Truong

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse intitulée :

"Etude théorique et expérimentale du transport de fluides miscibles en cellule HELE-SHAW. "

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : **« Mécanique - Génie Civil »**

Fait à Vandoeuvre, le 20 avril 2011
Le Président de l'I.N.P.L.,
F. LAURENT

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE - NANCY

Institut National Polytechnique de Lorraine
inpl@inpl-nancy.fr | www.inpl-nancy.fr

2 av. de la Forêt de Haye | BP 3
54501 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
FRANCE
Tél. : +33(0)3 83 59 59 59
Fax : +33(0)3 83 59 59 55

RÉSUMÉ

Études théorique et expérimentale du transport de fluides miscibles en cellule Hele-Shaw

Dans cette thèse, nous avons étudié expérimentalement, numériquement et théoriquement la sédimentation d'un soluté en cellule de Hele-Shaw, modèle analogue de milieu poreux, avec un écoulement zonal horizontal. Une cellule, alimentée par deux grands réservoirs assurant un écoulement zonal uniforme, a été réalisée au laboratoire. La vitesse a été mesurée par PIV. L'injection d'une solution saline dans cet écoulement permet de visualiser la propagation du panache de pollution, et de mesurer le champ de concentration par LIF. Trois configurations typiques ont été observées : panache sans digitation (« stable »), avec une seule digitation (« faiblement instable »), et avec de nombreuses digitations (« fortement instable »). L'influence du contraste de densité, de la vitesse zonale, et du débit d'injection sur la stabilité du panache a été analysée. Ces résultats ont été comparés à des simulations numériques sous COMSOL Multiphysics®. Les champs de concentration simulés sont en accord quantitatif avec les champs expérimentaux. Ces simulations ont de plus permis d'étudier l'influence de l'anisotropie du tenseur de dispersion sur la stabilité du panache. Une étude théorique linéaire, effectuée à partir d'un écoulement de base unidirectionnel et quasi-stationnaire, est venue compléter ces résultats. Elle montre que le panache est toujours convectivement instable pour les valeurs des paramètres considérées, et permet de retrouver et de quantifier les principaux résultats mis en évidence lors des études expérimentale et numérique, comme l'effet stabilisant de la dispersivité longitudinale ou l'effet déstabilisant du contraste de densité.

MOTS-CLÉS : *Milieu poreux, cellule Hele-Shaw, solution saline, contraste de densité, instabilité, expériences et simulation numérique.*

ABSTRACT:

Theoretical and experimental study of fluid transport in miscible Hele-Shaw cell

This thesis is an experimental and numerical investigation of solute transport and sedimentation in a Hele-Shaw cell with zonal flow. A vertical cell joining two large tanks has been built to provide a uniform horizontal flow, the velocity of which has been measured by using PIV. The concentration field of a solute injected in this flow has been measured by using LIF. Three typical plume configurations have been observed: without digitations ("stable"), with a single digitation ("weakly unstable"), and with various digitations appearing at the lower interface ("unstable plume"). The influence of density contrast, zonal flow and solute flow rate on the appearance of the various configurations has been investigated. These results have been compared to numerical simulations using the COMSOL Multiphysics® software. The numerical concentration fields are in qualitative agreement with the experimental ones. In addition, these simulations allowed us to investigate the effect of the anisotropy of the dispersion tensor on the occurrence of unstable configurations. A linear stability analysis based on a uniform parallel flow superposed to a quasi-steady horizontal layer of solute has been performed. It shows that the plume is convectively unstable for the parameters considered here, and confirms the various behaviors observed in both the experimental and the numerical analyses, like the stabilizing effect of the longitudinal dispersivity or the destabilizing effect of the solute concentration.

KEYWORDS: *Porous media, Hele-Shaw cell, solute transport, density-driven flows, instability, experiments and numerical simulations.*