



HAL
open science

Modélisation micromécanique du comportement thermoélastoplastique des tôles revêtues

Idriss Ilali

► **To cite this version:**

Idriss Ilali. Modélisation micromécanique du comportement thermoélastoplastique des tôles revêtues. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ002S . tel-01748941

HAL Id: tel-01748941

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748941v1>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6 162643

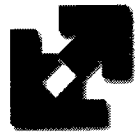
S/112



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à l'



UNIVERSTE DE METZ

Par

Idriss ILALI

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de l'UNIVERSITE de METZ

Spécialité : Sciences de l'Ingénieur
Option : Mécanique

"MODELISATION MICROMECHANIQUE DU
COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE
DES TOLES REVETUES"

Soutenu le 12 janvier 2000 devant le jury composé de :

Marcel BERVEILLER, Professeur à l'ENSAM de Metz
Mohammed CHERKAOUI, Chargé de Recherches au CNRS
François SIDOROFF, Professeur à l'École Centrale de Lyon
Maurice TOURATIER
Ahmed BENALLAL,
Xavier LEMOINE, Ingénieur
Christophe MAGNY,

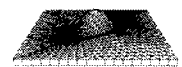
Directeur de thèse
Codirecteur de thèse
Rapporteur
Rapporteur
Examinateur
Examinateur
Examinateur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 318027 3

S-Cachan
JOLLAC
JOLLAC



A

Marlène,

Mes parents,

Mon frère et ma sœur,

Et à nos familles et nombreux amis.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - - METZ	
N° inv	2000 0685
Cote	S/M3 00/2
Loc	Magasin

Idriss ILALI

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon Directeur de THESE Monsieur le professeur Marcel BERVEILLER qui a accepté de diriger ce travail. Je le remercie pour la confiance qu'il m'a témoignée pendant mon DEA et mes trois années de THESE. Ses précieux conseils m'ont permis de mener à bien cette étude. Travailler avec M. BERVEILLER fut un grand plaisir.

Ma reconnaissance et ma gratitude s'adressent également à Monsieur Mohammed CHERKAOUI qui fut un excellent codirecteur de thèse, mais avant tout un grand ami. Il m'a apporté un soutien considérable tant au niveau scientifique qu'au niveau moral. Je ne le remercierai jamais assez pour le coencadrement de cette thèse et pour la formation scientifique qu'il m'a apportée.

Les résultats obtenus dans cette THESE sont les fruits d'un grand travail d'équipe en collaboration avec les ingénieurs et chercheurs du LEDEPP (SOLLAC/USINOR). Je remercie Monsieur Christophe MAGNY et Monsieur Xavier LEMOINE pour leur participation à l'élaboration de ce projet de recherche et pour leur sympathie.

C'est un grand honneur pour moi de présenter ce travail devant Messieurs les membres du jury, rapporteurs et examinateurs : Monsieur François SIDOROFF, Monsieur Maurice TOURATIER et Monsieur Ahmed BENALLAL, qui ont bien voulu évaluer mon travail.

Toutes mes amitiés aux membres de notre équipe et du LPMM, étudiants et permanents, qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

SOMMAIRE

CHAPITRE I

Page 1

I. INTRODUCTION

- I. 1. Généralités sur les matériaux : cas des aciers.....1
- I. 2. Les revêtements : domaines d'applications
et procédés de fabrication.....3
- I. 3. Réflexion sur le problème de modélisation.....12

CHAPITRE II

Page 17

II. ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA MODELISATION MICROMECHANIQUE

- II. 1. Introduction.....17
- II. 2. Techniques de localisation et d'homogénéisation.....18
 - II. 2. 1. **Concept du Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)**.....18
 - II. 2. 2. **Techniques de localisation des contraintes
et des déformations**.....19
 - II. 2. 3. **Techniques d'homogénéisation**.....22
- II. 3. Opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides
en élastoplasticité.....23
 - II. 3. 1. **Conditions d'application**.....23
 - II. 3. 2. **Saut des déformations**.....24
 - II. 3. 3. **Saut des contraintes**.....27
- II. 4. Elastoplasticité anisotrope.....28
 - II. 4. 1. **Surface de charge et règle d'écrouissage**.....29
 - II. 4. 2. **Critère de plasticité pour les matériaux anisotropes**.....31
 - II.4. 2. 1. **Critère de Hill**.....31

II.4. 2. 2. Contrainte et déformation équivalentes au sens de Hill.....	33
II.4. 2. 3. Loi de comportement élastoplastique pour un matériau de Hill.....	35
II. 5. Synthèse des techniques de modélisation.....	38
II. 6. Conclusion.....	40

III. SYNTHÈSE ET APPLICATION DU MODÈLE BIPHASE A LA TÔLE REVÊTUE

III. 1. Introduction.....	42
III. 2. Modèle biphasé de la tôle revêtue.....	43
III. 2. 1. Expressions des tenseurs de localisation des déformations.....	44
III. 2. 2. Expression de la loi macroscopique de comportement élastoplastique du "M.H.E."	47
III. 3. Applications du modèle biphasé au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues.....	49
III. 3. 1. Comportement élastique isotrope.....	49
III. 3. 1. 1. Quelques expressions analytiques : calcul direct.....	49
<i>III. 3. 1. 1. 1. Expressions analytiques des opérateurs interfaciaux.....</i>	<i>49</i>
<i>III. 3. 1. 1. 2. Expressions analytiques des tenseurs de localisation des contraintes et des déformations.....</i>	<i>50</i>
<i>III. 3. 1. 1. 3. Expression analytique de la loi de comportement macroscopique : tenseur des modules élastiques du "M.H.E."</i>	<i>51</i>
III. 3. 1. 2. Identification des modules d'élasticité d'élasticité du "M.H.E." : méthode directe.....	53
III. 3. 1. 3. Vérification du modèle Biphase par le code d'éléments finis ABAQUS.....	56
III. 3. 2. Comportement élastoplastique anisotrope.....	59
III. 3. 2. 1. Identification des paramètres de plasticité : coefficients d'anisotropie de Hill et Coefficients d'écrouissage.....	59
<i>III. 3. 2. 1. 1. Coefficients de Hill (F, G, H, L, M et N)</i>	<i>59</i>
<i>III. 3. 2. 1. 2. Coefficients d'écrouissage (n et K)</i>	<i>62</i>
III. 3. 2. 2. Application aux tôles d'acier revêtues d'alliage ZnNi : méthode inverse.....	64

III. 3. 2. 2. 1. Effet du revêtement de ZnNi sur le comportement élastoplastique anisotrope de la tôle d'acier.....	65
III. 3. 2. 2. 2. Effet du revêtement de ZnNi sur l'évolution des contraintes locales dans les deux phases de la tôle d'acier revêtue.....	67
III. 3. 2. 2. 3. Effet du revêtement de ZnNi sur l'apparition des contraintes résiduelles après décharge élastique.....	69
III. 3. 2. 2. 4. Effet du revêtement de ZnNi sur l'anisotropie plastique de la tôle d'acier.....	70
III. 3. 2. 2. 5. Effet de l'épaisseur du revêtement de ZnNi sur le comportement élastoplastique de la tôle d'acier.....	72
III. 4. Conclusion.....	76

CHAPITRE IV

Page 78

IV. EXTENSION AU MODELE TRIPHASE DE LA TOLE REVETUE : SYNTHESE ET APPLICATION

IV. 1. Introduction.....	78
IV. 2. Modèle triphasé de la tôle revêtue.....	79
IV. 2. 1. Expressions des tenseurs de localisation des déformations.....	80
IV. 2. 2. Expression de la loi macroscopique de comportement élastoplastique du "M.H.E.".....	84
IV. 3. Application du modèle triphasé au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues.....	84
IV. 3. 1. Comportement élastique isotrope.....	84
IV. 3. 2. Comportement élastoplastique anisotrope.....	87
IV. 3. 2. 1. Application aux tôles d'acier revêtues de ZnNi et contenant une interphase de Nickel.....	87
IV. 3. 2. 1. 1. Effet de l'interphase sur le comportement élastoplastique.....	88
IV. 3. 2. 1. 2. Effet de l'interphase sur la répartition des contraintes locales.....	88
IV. 3. 2. 1. 3. Effet de l'interphase sur l'anisotropie plastique de la tôle.....	90
IV. 3. 2. 2. Application aux tôles d'acier revêtues de Nickel et contenant une interphase de ZnNi : effet de l'ordre des couches sur les propriétés mécaniques et la répartition des contraintes locales.....	91
IV. 3. 2. 3. Application aux tôles d'acier revêtues de ZnNi et contenant une interphase de Zinc : effet de l'épaisseur de l'interphase.....	93
IV. 4. Conclusion.....	95

V. EFFET DE L'ENDOMMAGEMENT SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DE LA TOLE REVETUE

V. 1.	Introduction.....	97
V. 2.	Modèle biphasé de la tôle à revêtement endommagé.....	100
V. 2. 1.	Topologie de la tôle à revêtement endommagé.....	100
V. 2. 2.	Mécanique de l'endommagement.....	101
V. 2. 3.	Généralisation du Critère de Hill aux Matériaux élastoplastiques endommagés	102
V. 2. 3. 1.	Critère de plasticité anisotrope de Hill avec endommagement.....	102
V. 2. 3. 2.	Loi de comportement élastoplastique avec endommagement : cinétique de l'endommagement.....	103
V. 2. 4.	Application de la mécanique de l'endommagement au modèle biphasé de la tôle revêtue : mesure expérimentale et identification des paramètres d'endommagement.....	107
V. 3.	Application au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues endommagées.....	112
V. 3. 1.	Analyse de la courbe expérimentale d'endommagement et identification des paramètres.....	112
V. 3. 2.	Propriétés mécaniques de la tôle d'acier à revêtement ZnNi endommagé.....	114
V. 3. 3.	Effet de l'endommagement sur les propriétés élastiques du "M.H.E."	115
V. 3. 4.	Effet de l'endommagement sur le comportement élastoplastique du "M.H.E."	117
V. 3. 5.	Effet de l'endommagement sur l'évolution des contraintes locales dans chacune des phases.....	118
V. 3. 6.	Courbes Limites d'Endommagement (CLE).....	119
V. 3. 7.	Effets de l'épaisseur du revêtement d'alliage ZnNi endommagé.....	120
V. 3. 7. 1.	Effet de l'épaisseur du revêtement sur le comportement élastoplastique du "M.H.E."	122
V. 3. 7. 2.	Effet de l'épaisseur du revêtement sur l'évolution des contraintes locales.....	123

V. 4. Conclusion.....	124
-----------------------	-----

CHAPITRE VI

Page 126

VI. CONCLUSION

ANNEXES

Page 128

ANNEXES

A. 1. EXTENSION DU MODELE BIPHASE DE LA TOLE REJETUE AU CAS D'UN COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE.....	128
A. 2. RAPPELS DE QUELQUES GENERALITES.....	145

BIBLIO

Page 155

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

(les noms des auteurs sont classés par ordre alphabétique)

NOTATIONS

u_i	Champ des déplacements
r	Vecteur position
V	Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)
V^*	Volume de la phase * (S)ubstrat, (I)nterphase et (R)evêtement (ou Coating)
f^*	Fraction volumique de la phase *
Σ_{ij}	Tenseur des contraintes macroscopiques
E_{ij}	Tenseur des déformations macroscopiques
ΔT	Variation de température imposée
σ_{ij}	Tenseur des contraintes locales
σ_e	Contrainte équivalente au sens de Hill
ε_{ij}	Tenseur des déformations totales locales
ε_{ij}^e	Tenseur des déformations élastiques locales
ε_{ij}^p	Tenseur des déformations plastiques locales
ε_{ij}^{th}	Tenseur des déformations thermiques locales
ε_e^p	Déformation équivalente au sens de Hill
C_{ijkl}	Tenseur des modules élastiques
S_{ijkl}	Tenseur des modules de souplesse
C_{ijkl}^{ep}	Tenseur des modules élastoplastiques ou module tangent
α_{ij}^{thep} et β_{ij}^{thep}	Tenseurs des modules thermoélastoplastiques
E	Module de Young
ν	Coefficient de Poisson
λ	Coefficient de Lamé
μ	Module de cisaillement

α_{ij} et β_{ij}	Tenseurs des coefficients de dilatation thermique
σ_0	Limite élastique
n et K	Coefficients d'écrouissage plastique
$\mathbf{n}(n_i)$	Normale unitaire aux interfaces
K_{ij}	Matrice de Christoffel
L_{ijkl}	Opérateur interfacial spécifique aux déformations
P_{ijkl}	Opérateur interfacial spécifique aux contraintes
$d\zeta_i$	Incrément du saut des déformations au passage d'une interface
A_{ijkl}	Tenseur de localisation des déformations mécaniques
a_{ij}	Tenseur de localisation des déformations thermiques
B_{ijkl}	Tenseur de localisation des contraintes mécaniques
b_{ij}	Tenseur de localisation des contraintes mécaniques
$f(\sigma_{ij}, \kappa)$	Fonction de charge
κ	Variable d'écrouissage
F, G, H, L, M, N	Coefficients d'anisotropie plastique de Hill
$d\lambda$	Incrément du multiplicateur plastique
$f(\sigma_{ij}, \kappa, D)$	Fonction de charge dépendant de l'endommagement
$f(\sigma_{ij}, \kappa, T)$	Fonction de charge dépendant de la température
\vec{n}_{ij}	Normale unitaire à la surface de charge
D	Variable de l'endommagement
D_0	Valeur initiale de l'endommagement
D_C	Valeur critique de l'endommagement
F	Potentiel inélastique
Y	Force thermodynamique associée à l'endommagement
S_0	Paramètre d'endommagement

s_0	Paramètre d'endommagement
$\rho\psi$	Energie élastique libre
dx ou dx_{ij}	Incrément de la variable scalaire, x , ou tensorielle x_{ij}
$x_{i,j}$	Gradient de la variable x
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
I_{ijkl}	Identité d'ordre 4
X^{-1}	Inverse du scalaire ou du tenseur X (d'ordre 2 ou 4)
$[X] = X^+ - X^-$	Saut du tenseur X

I. INTRODUCTION

I. 1. Généralités sur les matériaux : cas des aciers

Les matériaux constituent la base sur laquelle se sont développées les industries, les économies, les civilisations. Ce sont eux qui qualifient les âges de l'humanité (âge de pierre, de bronze, de fer, etc.). Depuis l'antiquité, l'homme a créé, de par sa propre imagination, des matériaux composites afin d'obtenir les propriétés les plus importantes de chacun des constituants tout en neutralisant leurs faiblesses. Le torchis (terre renforcée de paille) et le papier en sont deux exemples parmi tant d'autres.

A la fin du XIX^e siècle sont apparus les premiers composites industriels tels le béton armé, les contre-plaqués, etc. Depuis, les progrès de la technologie des matériaux sont tels que le chercheur et l'ingénieur ont à leur disposition des matériaux modernes qui rivalisent, du point de vue mécanique, avec les meilleurs aciers et alliages Ferreux ou non. Toutefois, les aciers par leur vaste domaine d'utilisation sont d'une importance vitale ; leur suprématie est incontestée.

Un matériau résulte de la combinaison de procédés de fabrication (mise en forme, traitement thermique, traitement de surface, assemblage, etc.), de microstructure (hétérogénéités, inclusions, porosités, etc.) et de propriétés mécaniques et physico-chimiques (module d'élasticité, coefficient de dilatation thermique, limite d'élasticité, résistance à l'usure, résistance à la corrosion, résistance à l'oxydation, etc.). Les porosités représentent un élément indésirable conduisant à la ruine du matériau ; l'art du fabricant sera de les minimiser, voire les éliminer.

La façon d'élaborer les matériaux (de les couler, de les fritter, de les laminier, de les extruder, de les forger et de les usiner) leur procure une certaine microstructure qui, à son tour, détermine les propriétés chimiques, physiques et mécaniques. En se limitant à ce triangle, une quatrième dimension est souvent oubliée : c'est leur performance. Les matériaux doivent s'adapter aux différentes applications auxquelles ils sont destinés : leur fiabilité, leur durabilité, leur absence de nocivité, leur aspect, leur coût, leur capacité d'être recyclés, etc.

Les aciers jouent un rôle déterminant dans la vie économique mondiale. Ils font partie de notre univers quotidien. Grâce à la diversité de leurs propriétés, nous les trouvons dans l'automobile, l'électroménager, le bâtiment, les emballages, etc.

On peut classer les aciers en deux grandes catégories. La première catégorie est celle des aciers inoxydables et des aciers spéciaux à forte teneur en éléments d'alliages (Cr, Ni, Mo en particulier). En raison de leurs domaines d'applications spécifiques (le nucléaire, le biomédical, l'industrie chimique et pétrochimique, etc.), grâce à leurs propriétés mécaniques très élevées et à leur grande résistance à la corrosion, ils sont considérés comme des aciers "nobles". La deuxième catégorie concerne les aciers à basse teneur en carbone et en éléments d'addition (aciers au carbone peu alliés) considérés à tort comme des aciers "ordinaires". Cette caractéristique, étant en elle-même une qualité, leur permet d'être laminés sous forme de tôles minces et embouties (Figure. I. 1.), ce qui leur procure un très large domaine d'application.

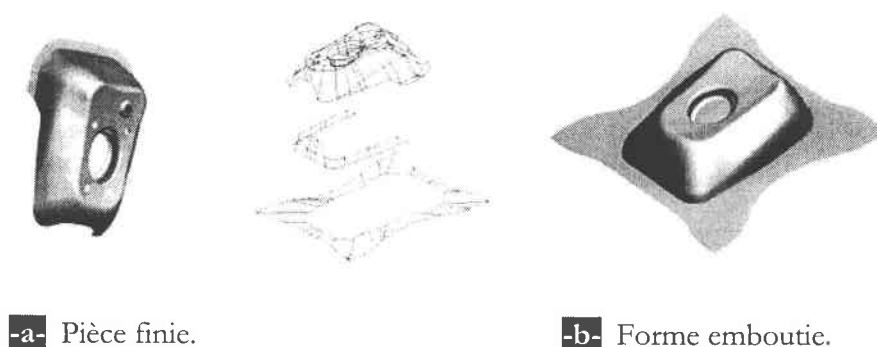


Figure. I. 1. Schéma présentant un exemple de tôle emboutie [50].

La maîtrise des matériaux et de leurs richesses métallurgiques permettent de leur conférer une extrême diversité de caractéristiques d'usage. Limite d'élasticité, résistance, ductilité, résistance à la fatigue et à l'abrasion, soudabilité, déformabilité, emboutissabilité en sont quelques-unes, combinables semble-t-il à l'infini.

Cependant, ces matériaux peuvent présenter des faiblesses qui apparaissent pendant le service qui les soumet à des sollicitations pouvant faire apparaître leur côté inconvenient. C'est le cas des aciers à faible teneur en carbone qui sont très sensibles à la corrosion. Pour remédier à ce problème, des couches de propriétés mécaniques bien précises sont appliquées de manière à corriger les défauts de fonctionnement (grandes concentrations de contraintes, apparitions de la rouille, etc.). Ainsi, sont apparus les matériaux multicouches à caractère multifonctionnel qui rassemblent légèreté, faible coût, résistance mécanique et thermique, résistance à la corrosion, etc.

Le fait d'utiliser des revêtements métalliques de hautes propriétés mécaniques permet de s'affranchir, entre autres, du problème d'apparition de rouille. Ces revêtements sont susceptibles de procurer à l'acier une grande résistance à la corrosion, propriété dont il ne disposait pas d'une manière intrinsèque. Ainsi, les revêtements (monocouches ou multicouches) permettent d'améliorer les performances des aciers vis-à-vis des sollicitations externes (mécaniques, thermiques, chimiques, etc.) en leur procurant un caractère multifonctionnel. L'utilisation des revêtements permet de profiter des hautes performances de l'acier tout en neutralisant ses défauts.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux tôles d'aciers revêtues de matériaux métalliques, aux domaines d'applications, aux procédés d'élaboration et par la suite à la modélisation de leurs comportements mécanique et thermique.

I. 2. Les revêtements : domaines d'applications et procédés de fabrication

De nouveaux matériaux se sont développés, tout d'abord, grâce aux efforts de recherche fondamentale et appliquée consentis par les grands centres industriels de recherche, tels que ceux de l'IRSID et SOLLAC (notamment le LEDEPP spécialisé dans les produits plats). Des résultats plus fondamentaux, acquis par les chercheurs d'universités et de grandes écoles d'ingénieurs, ont aussi contribué à ces progrès.

L'objectif de ce travail de thèse est de modéliser le comportement des tôles revêtues pour résoudre les problèmes de l'endommagement et de la localisation de la déformation accompagnant les procédés de mise en forme de ces matériaux. Ces revêtements connaissent de très larges applications dans différents domaines et leur production est en augmentation continue (Figure. I. 2.).

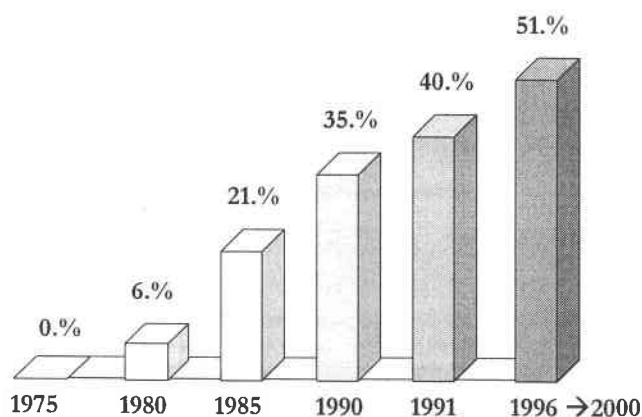


Figure. I. 2. Schématisation de la production des tôles revêtues dans les trois dernières décennies [50].

Mais, abordons, tout d'abord, les différents domaines d'application des revêtements ou des couches minces plus généralement. On peut, en première approche, citer les applications suivantes, par grandes classes techniques [50] :

- fonctions optiques
 - Optiques pour lasers (réflexion et transmission), couches sur verres pour constructions d'immeubles, miroirs, rétroviseurs, couches réfléchissantes et anti-reflets, couches optiques absorbantes, lunetterie, etc.
- fonctions électriques
 - Conducteurs ou isolants électriques, transistors, circuits intégrés, cellules solaires, etc.
- fonctions mécaniques
 - Couches résistant à l'érosion ou à l'usure, barrières de diffusion, couches dures pour outils de coupe, etc.
- fonctions chimiques
 - Couches résistant à la corrosion, couches catalytiques, dépôts sur pièces de moteurs et de réacteurs, dépôts sur matériels marins, etc.
- fonctions décoratives
 - Bijouterie, montures de lunettes, horlogerie, pièces pour l'automobile, etc.
- fonctions biomédicales
 - Protection des pièces implantées dans le corps humain telles que les valves cardiaques, prothèse diverses, etc.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons, tout particulièrement, aux revêtements métalliques ; leurs procédés d'élaboration, ainsi que leurs caractéristiques physiques et mécaniques dans le but d'étudier leurs comportements vis-à-vis des sollicitations externes (mécaniques et/ou thermiques).

Grâce aux progrès liés à l'élaboration, à la coulée continue, aux traitements thermomécaniques lors du laminage, aux recuits et aux procédés de revêtements, la gamme de produits est renouvelée en permanence. La grande faiblesse du Fer et des aciers peu alliés était la sensibilité à la corrosion par formation de rouille. La généralisation, dans de nombreuses applications, des tôles revêtues de Zinc, ZnNi, etc. donne à l'acier au carbone la durabilité qui lui faisait défaut.

C'est en bonne partie grâce à ces développements que les constructeurs d'automobiles peuvent donner une garantie de douze ans de tenue à la corrosion. Une autre conséquence des progrès réalisés dans les revêtements des aciers, afin de lutter contre la corrosion, est la mise au point de nouveaux revêtements, minéraux ou organiques, de finition (peintures, vernis, laques, émaux, etc.). D'où, de nombreuses et nouvelles applications dans le bâtiment, le génie civil, dans "l'habillement" de nombreux

équipements, en particulier dans l'électroménager. Les revêtements permettent un gain de poids important tout en ayant des propriétés supérieures à celles des matériaux classiques.

Un bon exemple de la conjugaison du choix des nouvelles nuances, de la maîtrise des procédés de laminage et des revêtements contre la corrosion, est celui des développements de l'emballage des produits alimentaires (boissons et autres). Emboutir une feuille d'acier de 0,12 mm d'épaisseur est un tour de force qui permet aux aciers pour emballage de concurrencer avec succès les emballages en verre ou plastique.

Les situations ne sont pas figées, et l'évolution permanente de la science des matériaux et de leur mise en oeuvre permet une adaptation fonctionnelle croissante des matériaux dans l'objectif de pouvoir répondre aux applications les plus porteuses du marché. Il est frappant de voir combien il est possible d'étendre le champ d'applications d'un matériau de base par l'adaptation fonctionnelle. Mais, les fonctionnalités des produits sont souvent complexes. Il convient de les traduire en termes de fonctions des matériaux constitutifs, et de trouver les solutions qui permettront d'y répondre.

L'une des formes multiples des adaptations fonctionnelles des matériaux concerne les traitements de surfaces de toutes natures, permettant d'ajouter des fonctions de protection contre la corrosion, l'usure, les chocs, la température et de faciliter l'interface avec les autres matériaux (colaminage, revêtements céramiques, métalliques et organiques, dépôts sous vide etc.).

L'une des propriétés importantes des revêtements métalliques, c'est qu'ils assurent une protection "active" contre les agents externes générateurs de corrosion comme dans le cas du revêtement de Zinc (utilisation sacrificielle du Zinc (Figure. I. 3. a.)). Les revêtements organiques n'assurent qu'une protection "passive" à cause de la formation de rouille dès qu'ils sont endommagés (Figure. I. 3. b.).

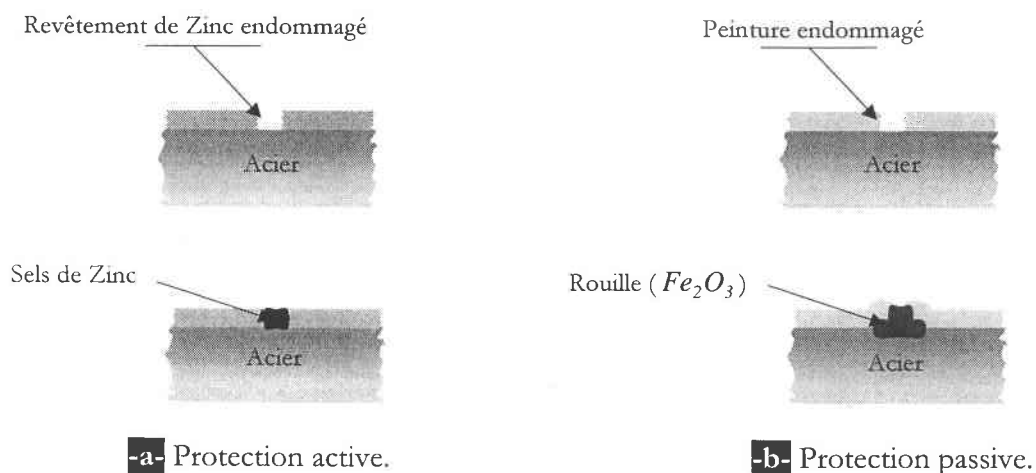


Figure. I. 3. Schéma comparatif d'un revêtement métallique à un revêtement organique [50].

Dans la construction automobile, par exemple, les objectifs recherchés, en se basant sur différents critères mécaniques, socio-économiques, etc., sont :

- la haute performance (moteur performant, châssis résistant et carrosserie légère) assurée par les matériaux à haute résistance spécifique,
- l'absence de pollution en assurant une grande résistance à la corrosion (revêtements métalliques), diminution de la pollution sonore (matériaux composites absorbant le bruit, multicouches...),
- le faible coût (amélioration du rendement du moteur, une grande longévité et une facilité d'entretien) grâce aux matériaux à haute résistance à l'usure et à l'oxydation,
- la sécurité en utilisant des matériaux à haute capacité d'absorption d'énergie et de chocs (limite d'élasticité élevée) et haute résistance aux frottements.

Dans certains cas, les conditions de fabrication de ces pièces, faisant appel à des emboutissages très sévères, se sont tournées vers des aciers super-emboutissables avec des revêtements parfaitement adaptés aux très importantes déformations : les revêtements "Galfan[®]" (Zinc + Aluminium) ont su faire leurs preuves. Les revêtements électrozingués "légers" (à faible teneur en Zinc), sont particulièrement adaptés aux pièces internes (ou d'habillage) des appareils audio et vidéo.

Lorsqu'il faut allier contraintes mécaniques élevées et résistance aux agents chimiques les plus corrosifs (cas des appareils électroménagers), les aciers revêtus, galvanisés ou électrozingués, savent relever le défi.

Les revêtements semblent avoir apporté beaucoup de solutions à de nombreux problèmes :

- sauvegarde de l'écorce terrestre,
- économie des ressources en énergie et matières premières,
- suppression des nuisances dues à l'accumulation des déchets (nuisances olfactives, visuelles, contamination, encombrement).

L'obtention de tels résultats nécessite un travail laborieux des ingénieurs et chercheurs afin de mettre en conformité les aciers avec le cahier des charges.

Comment fabrique-t-on ces revêtements si essentiels ? Et quelles sont les étapes et les mécanismes de dépôt des revêtements sur l'acier (Figure. I. 4.) ?

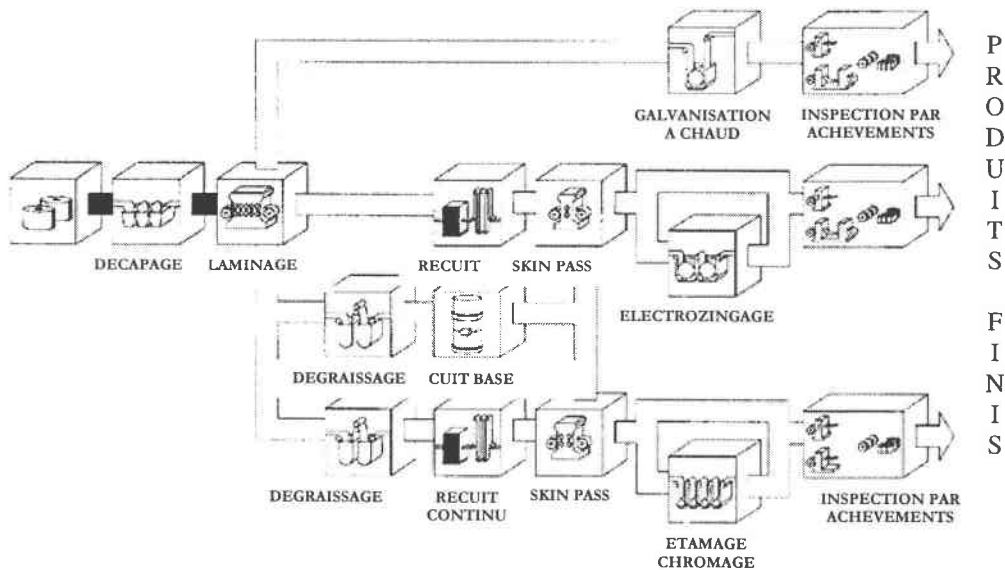


Figure. I. 4. Schéma représentant les différents procédés industriels de revêtements [50].

L'une des étapes importantes précédant le dépôt du revêtement est le décapage : il consiste à éliminer les oxydes (ou calamines) formés au cours du refroidissement après laminage à chaud. Cette opération occupe une place privilégiée dans le processus de fabrication de l'acier revêtu : située à l'interface entre le laminage à chaud et le laminage à froid, c'est une étape importante, où la surface de l'acier est mise à nu.

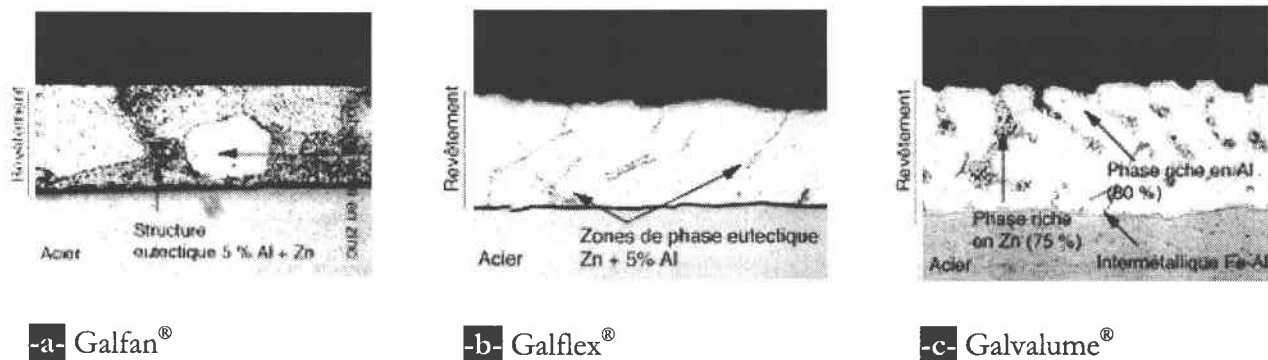
L'opération d'enlèvement des calamines s'effectue le plus souvent en combinant deux actions :

- une action mécanique (ou décalaminage) dont le but est de fissurer la calamine,
- une action chimique, qui élimine les oxydes et nettoie la surface.

Après vient l'opération de rinçage pour éliminer de la surface de la tôle les sels sulfuriques ou chlorhydriques, générateurs de rouille.

La galvanisation et l'aluminiage s'accompagnent de réactivités très complexes vu la diversité des phénomènes impliqués : mouillage du solide par le liquide, dissolution du premier dans le second, précipitation de phases intermétalliques aux interfaces solide-liquide, transformations des phases formées par diffusion à l'état solide dans celles-ci.

Tout cela nécessite une parfaite maîtrise des paramètres clés du procédé et des mécanismes de réactivité ce qui permet de garantir la qualité et la reproductibilité des revêtements fabriqués par galvanisation, galvannealing, galvanisation en bain riche d'Aluminium (Galfan[®], Galfex[®] et Galvalume[®]) (Figure. I. 5.).



**Figure. I.5. Schéma représentant quelques aciers revêtus (aciers SOLLAC)
(coupe micrographique x 1 000) [50].**

La mise en contact direct d'une tôle d'acier avec du Zinc liquide entraîne une précipitation à sa surface de composés intermétalliques Fe-Zn d'une épaisseur de quelques microns pour un temps de séjour dans le bain de quelques secondes. C'est cette propriété qui est mise à profit dans le procédé de galvanisation discontinu au trempé de pièces déjà mises en forme. La résistance à la corrosion de ces pièces est assurée par l'épaisseur du revêtement obtenue par la croissance de quatre phases intermétalliques Fe-Zn entre la Ferrite (α) et le Zinc pur (η) durant l'immersion.

Le but du procédé de galvanisation en continu de bobines d'acier est de livrer des tôles planes revêtues pour la mise en œuvre. Il n'est plus question, dans ces conditions, de tolérer la croissance pendant l'immersion de composés intermétalliques épais. En effet, la fragilité intrinsèque de ceux-ci induit des fissures dans le revêtement, voire des pertes de celui-ci (écaillage) lors des opérations de pliage ou d'emboutissage. Il est donc nécessaire d'empêcher leur formation en limitant la réaction Fe-Zn. Ceci permet également de contrôler l'épaisseur des revêtements et d'obtenir des revêtements minces, compatibles avec les contraintes d'emboutissage, par une simple opération d'essorage du Zinc liquide sous lames d'air ou d'azote.

L'utilisation des tôles "galvannealed" ou "galvanisées alliées" (Galvialia®), obtenue par diffusion réactive du Fer dans le revêtement de Zinc augmente l'adhérence du revêtement au substrat grâce aux phases intermétalliques du système Fe-Zn se succédant dans le revêtement depuis les phases les plus riches en Fer (Γ et Γ_1) du côté de l'interface acier/revêtement jusqu'aux phases les plus riches en Zinc (δ et ζ) en surface du revêtement. La diffusion réactive (ou alliation) entre le Fer et le Zinc est toujours réalisée jusqu'à la disparition complète de la phase η -Zn, et selon le fait qu'elle soit plus ou moins prononcée, les phases δ ou ζ occupent respectivement la surface.

Les exigences du marché du bâtiment et des équipements domestiques ont conduit au développement de produits résistant aux déformations par pliage et présentant une résistance à la corrosion encore améliorée. Ces fonctions sont remplies en réalisant des revêtements par galvanisation dans des bains, plus riches en Aluminium : Galflex[®], Galfan[®] et Galvalume[®] (Tableau. I. 1.).

Galflex [®]	obtenu par galvanisation dans un bain de Zinc contenant 1. % d'Aluminium
Galfan [®]	obtenu par galvanisation dans un bain de Zinc contenant 5. % d'Aluminium
Galvalume [®]	obtenu par galvanisation dans un bain contenant 55. % d'Aluminium et un faible pourcentage de Silicium

Tableau. I. 1. Quelques revêtements[®] SOLLAC[®] riches en Aluminium [50].

Quand il s'agit de répondre à la fois à des contraintes de résistance à la corrosion et de résistance à l'oxydation à chaud, les revêtements aluminisés (Alupur[®] et Alusi[®] (Tableau. I. 2.)) sont plus adéquats que les revêtements galvanisés. En effet, l'Aluminium par son point de fusion plus élevé (660.°C) que celui du Zinc (419.°C) garantit une meilleure résistance à chaud des revêtements aluminisés.

Alupur [®]	obtenu par aluminage dans un bain chaud d'aluminium
Alusi [®]	obtenu par immersion dans un bain chaud d'aluminium contenant 10. % de silicium

Tableau. I. 2. Quelques revêtements[®] SOLLAC[®] obtenus par aluminage [50].

Le revêtement Alupur[®], caractérisé par l'existence de six composés intermétalliques à caractère dur et fragile, présente une excellente résistance à la corrosion, mais son aptitude à la déformation est insuffisante dans certaines applications (réservoirs d'automobiles, lignes de gaz d'échappement, etc.). Un ajout de 10. % de silicium dans le bain d'aluminium réduit l'épaisseur de la couche d'alliage responsable de la fragilité.

Le processus d'électrolyse assure une parfaite homogénéité de la couche protectrice de Zinc, une épaisseur régulière du dépôt tant sur la largeur que sur la longueur de la bande, ainsi que la possibilité de réaliser des épaisseurs de Zinc différentes sur les deux faces, ce qui conduit aux tôles électrozinguées à revêtement différentiel.

Au niveau des dépôts de Zinc allié obtenus par électrolyse, les plus couramment rencontrés comportent, soit du Nickel, soit du Fer ; le dépôt étant réalisé en monocouche ou en multicouche.

L'intérêt de ces dépôts d'alliages réside dans le fait qu'à épaisseur identique à un dépôt de Zinc, ils assurent une amélioration du comportement en corrosion et pour une résistance à la corrosion identique à un dépôt de Zinc, ils nécessitent une épaisseur moindre.

L'une des caractéristiques de l'alliage ZnNi est la régularité de l'épaisseur, pour un revêtement de 6 μm et un pourcentage en nickel compris entre 11.0 et 13.5 %. Ce revêtement est constitué par la juxtaposition très compacte de nodules d'alliage, laissant apparaître quelques micro-fissures dues à la dureté du revêtement.

La teneur en Nickel de l'alliage ZnNi a été optimisée pour conduire à de meilleures performances, en particulier dans le domaine de la corrosion ; la plage concernée se situe entre 10. et 13. % de Nickel, zone dans laquelle l'alliage est principalement monophasé (Figure. I. 6.).

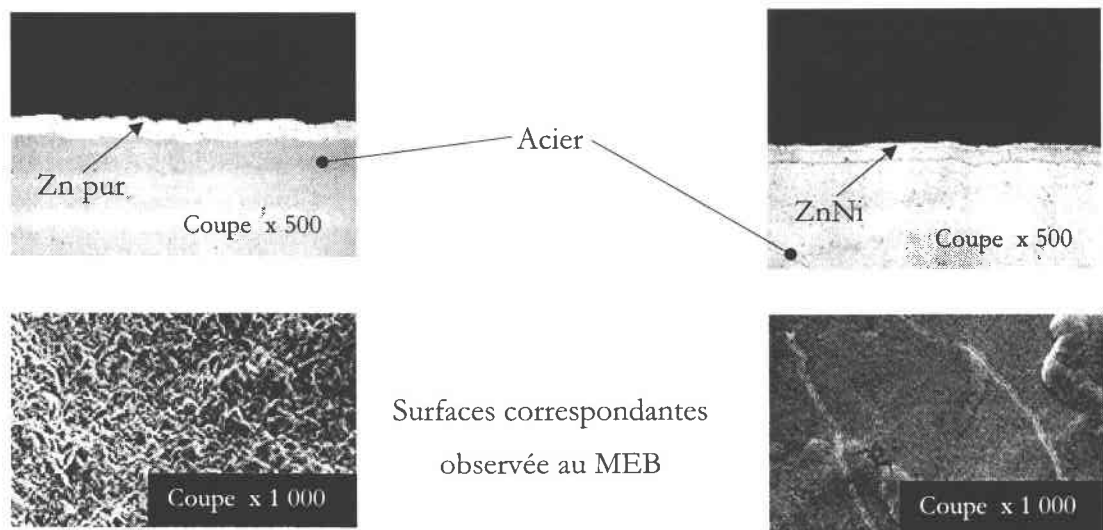


Figure. I. 6. Revêtements électrozingués (coupe micrographique) [42 ,50].

Les revêtements électrodéposés à base de Zinc et de ZnNi trouvent leurs applications dans le domaine de l'automobile alors que ceux à base d'étain et de chrome sont destinés aux emballages alimentaires (boîtes de boissons, boîtes de conserves, bouchons, etc.) et industriels (aérosols, boîtes de peintures, bidons d'huile, etc.).

Le chromage de l'acier pour une utilisation en emballage alimentaire s'effectue électrolytiquement à partir d'un bain d'acide chromique. On obtient ainsi le Fer chromé composé d'un revêtement de chrome métallique et d'oxydes de chrome. Le procédé utilisé tient compte des exigences suivantes : revêtement métallique à coût réduit, relative facilité d'électrodéposition, bonne protection du Fer contre la corrosion atmosphérique, bonne adhérence des vernis et innocuité vis-à-vis des produits conservés.

Depuis maintenant plusieurs années, les techniques de dépôts sous vide se sont développées pour la fabrication industrielle de produits de haute qualité (films ultra-minces pour la fabrication de circuits intégrés, dépôts de films magnéto-optiques sur disquettes ou bandes magnétiques, revêtements sur verre pour l'automobile ou le bâtiment pour l'isolation thermique, la conductivité électrique ou le filtrage UV, etc.). En ce qui concerne ces produits, seul un traitement de surface sous vide fait au défilé en fin d'élaboration pouvait permettre leur réalisation.

Les principaux objectifs généraux poursuivis au niveau de ces produits sont :

- la grande variété de matériaux à déposer : métaux purs, alliages métalliques, céramiques,
- la possibilité de réaliser des dépôts d'alliages à gradient de composition et des multicouches,
- la facilité d'obtention des revêtements monoface ou biface, au besoin de nature différente,
- la diminution du coût des produits finis (productivité, énergie, etc.),
- le respect de l'environnement.

D'une façon générale, la technologie des procédés d'élaboration de revêtements secs par dépôt sous vide fait appel à trois composantes :

- une source à partir de laquelle la matière à déposer va partir sous forme d'ions, d'atomes ou groupement d'atomes ou de molécules,
- un substrat, c'est-à-dire la pièce à revêtir et qui est le siège du phénomène de condensation : la matière issue de la source vient se fixer pour former des germes (nucléation), lesquels se développent progressivement (croissance) pour conduire à une couche plus ou moins ordonnée (Figure. I. 7.).

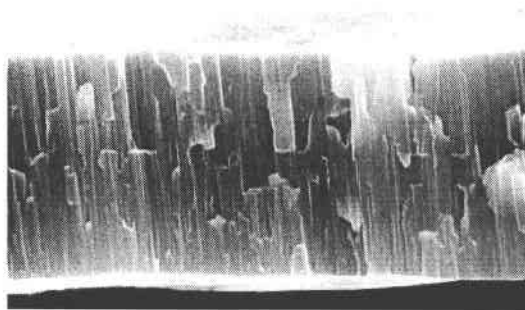


Figure. I. 7. Schéma présentant la microstructure d'un dépôt d'aluminium élaboré par évaporation sous vide [50].

I. 3. Réflexion sur le problème de modélisation

Après une introduction au domaine matériau avec ses enjeux scientifiques et technologiques, nous abordons le problème de la modélisation du comportement mécanique des tôles à revêtements métalliques considérés comme des matériaux hétérogènes dont la microstructure, la géométrie et la morphologie sont maintenant connues.

Le comportement macroscopique des matériaux hétérogènes est influencé par différents paramètres tels la microstructure, le comportement des constituants et les interfaces, ce qui offre aux concepteurs une certaine liberté dans le choix de la composition et de la structure interne (ou locale) des matériaux pour obtenir un comportement donné. Cependant, pour répondre à un cahier des charges bien défini, il est nécessaire de connaître l'influence de chaque paramètre définissant le matériau sur son comportement global (ou macroscopique). D'où la nécessité de prévoir l'effet de chaque paramètre sur les performances du produit et cela n'est possible que par des techniques de modélisation basées sur des théories solides.

Pour étudier le comportement mécanique de tels matériaux, trois méthodes peuvent être envisagées. La première, consiste en une approche phénoménologique basée sur des lois standards définies à partir d'essais expérimentaux macroscopiques, afin d'identifier les paramètres du problème sans tenir compte de la structure locale du matériau (Lemaitre, 1975) [33]. La deuxième est l'approche physique qui repose sur l'analyse des phénomènes locaux (cohésion de l'interface, évaluation des contraintes internes à l'interface par l'intermédiaire de la physique des dislocations, etc.) (Neumann et Haasen, 1970) [47]. La troisième méthode ne consiste pas à décrire le comportement du matériau à partir de considérations macroscopiques, mais à déterminer son comportement global à partir du comportement local et de sa microstructure en se basant sur des mécanismes élémentaires de déformation et/ou d'endommagement. Ce type d'approche, plus riche que les précédents, évite non-seulement le recours systématique à l'identification des paramètres macroscopiques, mais permet également une meilleure description du comportement pour une microstructure bien définie, en raison de son caractère prédictif. Cette approche offre, ainsi, la possibilité de résoudre les problèmes inverses d'optimisation de la microstructure pour obtenir un comportement macroscopique donné. Aussi les résultats importants obtenus avec ce type de modélisation n'ont-ils pas prouvé l'efficacité et la richesse de cette méthode de modélisation ? L'étude de l'hétérogénéité élémentaire réalisée par Eshelby (1961) [14], a permis d'illustrer l'importance des phénomènes de concentration des contraintes d'origines élastique, plastique et thermique. Grâce à cette réalisation et au-delà des modèles simples de Voigt (1889) [51], Reuss (1929) [48] et Hill (1965) [19], d'autres modèles se sont développés en se basant sur des méthodes

statistiques systématiques faisant intervenir l'ensemble des fonctions de corrélations des constantes élastiques des constituants (Kröner, 1980) [31]. D'autres méthodes intermédiaires développées par Kröner (1958) [30], Berveiller et Zaoui (1980) [4], ont vu le jour. Ces dernières méthodes fournissent des résultats exacts dans le cas des matériaux parfaitement désordonnés ; elles constituent la base des modèles autocohérents.

On peut également cité les travaux de Cherkaoui et Berveiller (1994-1995) [10, 11, 12] concernant la résolution du problème de l'inclusion enrobée en utilisant ces mêmes techniques de modélisation micromécanique.

Les méthodes de transitions d'échelles basées sur les techniques de localisation et d'homogénéisation ont fait leur preuve dans différents domaines d'application, qu'il s'agisse de micromécanique pure (interactions entre cellules de dislocations, interactions entre inclusions à l'échelle du grain, etc.) ou à une échelle plus grande comme dans le cas des structures composites (interactions fibres-matrice, interactions inclusions-renforts-matrice, matériaux sandwich, etc.). Ils permettent une bonne évaluation du comportement effectif global à l'échelle macroscopique à partir des mécanismes physiques de déformation à l'échelle microscopique (ou locale). Deux grandes étapes sont nécessaires à l'application de cette approche :

- La première consiste à établir des relations entre les champs locaux et les conditions imposés à la frontière de l'élément de volume représentant la structure. C'est l'étape de localisation.
- La deuxième consiste à déterminer le comportement effectif à partir d'opérations de moyennes volumiques. C'est l'étape d'homogénéisation.

Dans ce travail, nous avons essayé de trouver un compromis entre l'approche phénoménologique et l'approche micromécanique en combinant les deux afin de décrire et reproduire, le mieux possible, les résultats expérimentaux par la simulation numérique. Ainsi, l'étude du comportement mécanique ou thermomécanique de la tôle revêtue se fait dans le cadre de la méthodologie générale de localisation et d'homogénéisation en mécanique des milieux continus, en petites perturbations (§. II. 2).

On considère le cas de tôles revêtues symétriques (revêtements non-différentiels), c'est-à-dire revêtues du même matériau des deux côtés et d'épaisseurs identiques de manière à négliger les effets de courbures. Ces tôles sont soumises à des chargements mécaniques en mode membrane, c'est-à-dire dans le plan de la tôle (pas de flexion).

Les fluctuations à l'échelle des grains (phases métallurgiques) sont négligées de manière à considérer l'acier, le revêtement et éventuellement les interphases comme des milieux continus et homogènes. Les épaisseurs du revêtement et des interphases sont suffisamment faibles devant celle de l'acier pour pouvoir considérer des champs locaux de contraintes et de déformations homogènes par phase.

Les transferts de charges (ou contraintes) entre les différentes phases sont assurés par des interfaces (zones d'accolement entre deux phases de nature différente) supposées parfaites. La présence d'interfaces engendre des discontinuités au niveau des champs locaux de contraintes et de déformations qui sont considérés comme uniformes par phase, mais subissent des sauts au passage de ces interfaces. La résolution de ce problème de discontinuité se fait par l'intermédiaire des techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides.

L'étude de l'écoulement plastique dans les matériaux métalliques nécessite l'adoption d'un critère de plasticité à variable(s) interne(s). Cette plasticité est souvent accompagnée d'un écrouissage anisotrope mis en évidence par des réponses différentes du matériau d'une direction à l'autre suite à des essais expérimentaux.

Par ailleurs, les observations expérimentales ont mis en évidence le caractère endommageable des revêtements pendant l'élaboration et l'usage. La prise en compte de ce phénomène se fait de manière très phénoménologique par l'introduction d'une variable supplémentaire (variable interne d'endommagement) dans le critère d'écoulement plastique.

Comme première approche de modélisation du comportement mécanique des tôles revêtues, un premier modèle dit biphasé est considéré dans le cas où l'application d'un revêtement métallique sur le substrat n'entraînerait pas la création d'interphases entre les deux. C'est le cas du revêtement de Zinc constitué par la juxtaposition de cristaux de Zinc très couvrants et ne nécessitant pas création d'une couche d'alliage entre le Zinc et l'acier pour obtenir une bonne adhérence.

La codéposition électrolytique de l'alliage ZnNi est caractérisée par le dépôt préférentiel du métal le plus noble, c'est-à-dire du Nickel dans ce cas précis, tout en contrôlant le phénomène de diffusion et la teneur en Nickel, qui est optimisée pour conduire aux meilleures performances.

En effet, durant les procédés de mise en œuvre des revêtements, plusieurs facteurs peuvent contribuer à la formation d'une ou plusieurs interphases. Ces dernières modifient profondément les mécanismes de transfert de charges entre le revêtement et le substrat et affectent à la fois les propriétés thermomécaniques macroscopiques, ainsi que les concentrations des contraintes. De ce fait, elles jouent un rôle non-négligeable dans les problèmes d'optimisation de la microstructure des tôles revêtues. Pour tenir compte de la présence de cette interphase, un deuxième modèle dit triphasé est proposé.

L'un des avantages de cette méthode d'approche est de pouvoir l'utiliser comme problème inverse pour caractériser les revêtements en considérant que les caractéristiques mécaniques et rhéologiques des tôles avant électrozingage (par ex) sont faiblement affectées par l'opération de revêtement. Cette dernière ne nécessite pas de températures élevées ; les températures des solutions utilisées sur la ligne n'atteignent jamais 100. °C.

Le but de cette modélisation micromécanique est d'établir des lois de comportement macroscopique reliant la vitesse des contraintes macroscopiques, $\dot{\Sigma}$, à la vitesse des déformations d'ensemble, \dot{E} , sous la forme suivante :

$$\dot{\Sigma} = (?) \cdot \dot{E}$$

ou encore, sous une forme incrémentale, en considérant des phénomènes mécaniques indépendants du temps :

$$d\Sigma = (?) \cdot dE$$

où le terme entre parenthèse contient toutes les informations géométriques, morphologiques et mécaniques (caractéristiques mécaniques des constituants), ainsi que les états de contraintes et les histoires des chargements.

Dans le cas d'un chargement thermomécanique (dE , dT), la loi de comportement macroscopique se met sous la forme suivante :

$$d\Sigma = (?) \cdot dE + (?) \cdot dT$$

Dans le chapitre (§. II), nous nous attachons à la description de la méthodologie de résolution du problème de comportement mécanique des tôles revêtues dans le cas général des matériaux multiphasés élastoplastiques anisotropes. Elle sera suivie d'une synthèse des techniques de modélisation utilisées, à savoir : les techniques de localisation et d'homogénéisation, les opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides et la plasticité anisotrope de Hill.

On se propose dans le chapitre (§. III) d'appliquer la méthode de modélisation, mise en œuvre au chapitre (§. II), au modèle biphasé de la tôle revêtue. Le but est de mettre en évidence le rôle important du revêtement sur le comportement de la tôle d'acier (ilali. et al., 1999 [22]).

Le quatrième chapitre (§. IV) propose une extension du modèle biphasé dans le cas où la tôle revêtue renfermerait une troisième phase, dite interphase, localisée entre le substrat et le revêtement. L'effet de cette interphase sur le comportement élastoplastique de la tôle revêtue est introduit par un modèle triphasé.

Dans le chapitre (§. V), nous proposons un modèle biphasé avec endommagement, plus réaliste que le premier, tenant compte du caractère endommageable du revêtement et de son effet sur le comportement élastoplastique global de la tôle revêtue (ilali. et al., 1998, 1999 [23, 24]).

Enfin, une extension des techniques de modélisation au comportement thermoélastoplastique du modèle biphasé de la tôle revêtue est proposée aux annexes (§. A.1), afin de ne pas alourdir l'exposé principal. L'étude de l'effet de la température sur le comportement des tôles revêtues nécessite l'introduction d'une autre variable de contrôle (température) conduisant à des déformations thermiques hétérogènes selon les propriétés thermiques (dilatations thermiques) des différentes phases qui constituent le matériau. Ainsi, la loi locale de comportement thermoélastoplastique dépend du couplage thermoplastique par l'intermédiaire de l'écrouissage. Dans une telle situation, le comportement macroscopique dépend du chargement mécanique et thermique, ainsi que des caractéristiques thermomécaniques de chacune des phases.

Des précisions supplémentaires concernant l'anisotropie plastique et les techniques des opérateurs interfaciaux sont proposées dans les annexes (§. A.2).

II. ELEMENTS CONSTITUTIFS DE LA MODELISATION MICROMECHANIQUE

II. 1. Introduction

La résolution du problème des tôles revêtues se fait dans le cadre de la mécanique des milieux continus faisant appel à plusieurs techniques de modélisation, en raison de la nature polyphasique de ces matériaux et des propriétés mécaniques de chacune des phases. Certains aspects les plus importants des tôles revêtues sont l'hétérogénéité et l'anisotropie élastique et plastique qui sont souvent indépendants l'un de l'autre.

Les tôles revêtues sont considérées comme des matériaux hétérogènes (polyphasés) dont les constituants (monophasés) ont des propriétés physico-chimiques différentes. Ainsi, chacune des phases a un comportement mécanique différent de celui de l'autre.

La réponse macroscopique du matériau étudié, suite à plusieurs types de sollicitations mécaniques et/ou thermiques, est fortement dépendante des propriétés mécaniques et/ou thermiques des constituants. Les techniques permettant la détermination de la loi de comportement mécanique des matériaux hétérogènes à l'échelle macroscopique à partir des lois de comportement des constituants à l'échelle locale (ou microscopique par abus de nomenclature) sont appelées techniques de transition d'échelles (micro-MACRO) ou encore techniques de localisation et d'homogénéisation.

Les différentes phases du matériau étudié sont reliées entre elles par des interfaces assurant le contact et le transfert de charge entre phases. Les champs mécaniques locaux, dus aux chargements imposés à la frontière de l'élément de volume, subissent des discontinuités au passage de ces interfaces. Pour évaluer ces sauts au niveau des interfaces, les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique du solide sont utilisées. Ces techniques, combinées à celles de localisation et d'homogénéisation, permettent la résolution du problème d'hétérogénéité des champs mécaniques locaux.

Le comportement mécanique macroscopique dépend directement des comportements mécaniques locaux des différentes phases. La nature métallique des constituants et les résultats des observations expérimentales annoncent un comportement mécanique élastoplastique anisotrope. Ainsi l'étude du comportement local d'une phase nécessite l'utilisation d'un critère de plasticité anisotrope. Pour ce faire, on utilise le critère de plasticité anisotrope de Hill.

Pour étudier le comportement mécanique de tels matériaux hétérogènes, il est utile de connaître la relation entre la contrainte, Σ_{ij} , et la déformation, E_{ij} macroscopiques imposées à la frontière (dite loi de comportement global ou macroscopique). La connaissance du comportement macroscopique et des comportements locaux permet de décrire la répartition des contraintes et des déformations locales afin de prédire les phénomènes de concentration de contraintes qui conduisent à l'apparition du phénomène d'endommagement par fissuration (par ex).

La partie (§. II. 2) de ce chapitre introduit les techniques de localisation et d'homogénéisation pour résoudre le problème d'hétérogénéité élastique et plastique dans le but de formuler une loi macroscopique applicable au comportement élastoplastique des tôles revêtues. Le problème des sauts des champs locaux de contraintes et de déformations est exposé et analysé dans le paragraphe (§. II. 3). La formulation des lois locales de comportement élastoplastique, à partir du critère de plasticité anisotrope de Hill, est exposée dans le paragraphe (§. II. 4).

L'ensemble de ces techniques de modélisation est ensuite synthétisé dans le paragraphe (§. II. 5), en vue de résoudre le problème du comportement élastoplastique anisotrope des tôles revêtues développé dans le chapitre (§. III).

Les équations du problème sont développées dans le cas général de milieux élastoplastiques anisotropes à partir d'une formulation tensorielle incrémentale.

II. 2. Techniques de localisation et d'homogénéisation

II. 2. 1. Concept du Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.)

Les techniques de localisation et d'homogénéisation (ou micro-MACRO) consistent à remplacer un matériau hétérogène réel par un matériau homogène fictif appelé Matériau Homogène Equivalent (M.H.E.) (ou milieu effectif) dont les caractéristiques mécaniques effectives sont déduites à partir des propriétés mécaniques et morphologiques locales des constituants.

Considérons un Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R.) d'un matériau hétérogène de volume, V , et de frontière externe, ∂V , dont la configuration de référence est supposée libre de contrainte. Hashin (1964, 1983) [17], Hill (1965) [19], Kröner (1958, 1980) [30, 31] et Nemat-Nasser (1986) ont introduit le concept de "V.E.R." qui contient suffisamment d'informations sur les mécanismes de micro-contraintes et de micro-déformations. Ce "V.E.R." doit être grand par rapport à l'échelle des hétérogénéités de la microstructure et suffisamment petit par rapport à celle de la structure elle-même afin de prêter à un traitement par la mécanique des milieux continus (Figure. II. 1.).

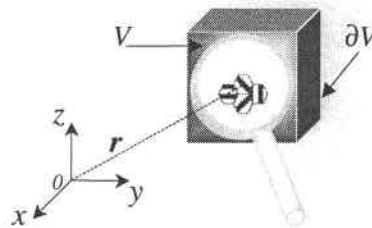


Figure. II. 1. Schéma d'un "V.E.R." d'un matériau hétérogène.

II. 2. 2. Techniques de localisation des contraintes et des déformations

L'incrément du champ des déplacements, $du_i(x_j)$, en un point, $\mathbf{r}(x_i)$, du "V.E.R.", V , est considéré comme continu, et l'incrément de la déformation totale, $d\epsilon_{ij}(\mathbf{r})$, qui en résulte s'écrit avec l'Hypothèse des Petites Perturbations (H.P.P.) :

$$d\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) \quad (\text{II. 1})$$

où $d\epsilon_{ij}$ est l'incrément de la déformation totale obtenu par symétrisation du gradient des incréments des déplacements par rapport aux indices i et j .

En considérant l'incrément du champ des déplacements, $du_i^d = dE_{ij} x_j$, imposé à la frontière externe, ∂V , du "V.E.R.", V , l'incrément de la déformation d'ensemble, dE_{ij} , peut s'écrire comme une

moyenne volumique des incréments des déformations locales, $d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ (homogènes par phase), comme suivant :

$$dE_{ij} = \frac{1}{V} \int_V d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{II. 2})$$

Par ailleurs, les incompatibilités des déformations inélastiques irréversibles (plastiques, dans ce cas), $d\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r})$, donnent naissance à un champ de déformations élastiques réversibles, $d\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r})$, ce qui donne le champ des déformations totales :

$$d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = d\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + d\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) \quad (\text{II. 3})$$

La contrainte macroscopique, $d\Sigma_{ij}$, résultant de la déformation d'ensemble, dE_{ij} , est la moyenne volumique des champs locaux de contraintes, $d\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, au sein du matériau hétérogène :

$$d\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{II. 4})$$

L'incrément des contraintes locales, $d\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, est relié à celui des déformations élastiques locales, $d\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r})$, selon la relation linéaire biunivoque appelée loi de Hooke :

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}(\mathbf{r}) d\varepsilon_{kl}^e(\mathbf{r}) \quad (\text{II. 5})$$

où le tenseur d'ordre 4, $C_{ijkl}(\mathbf{r})$, est appelé tenseur des modules élastiques.

Cette loi n'est plus valable dans le cas où l'application d'une contrainte modifie une ou plusieurs variable(s) définissant l'équilibre du système, ce qui conduit à l'apparition des déformations permanentes ou irréversibles. L'évolution d'un état d'équilibre vers un autre entraîne une variation de la déformation totale due au couplage entre les différentes variables $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ et $\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r})$ dans le cas d'un comportement élastoplastique.

Pour décrire le comportement local d'un matériau élastoplastique, il faut tenir compte de l'état de contrainte, $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, et de l'histoire de chargement $\varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r})$. Ainsi, en introduisant le module tangent, $C_{ijkl}^{ep}(\mathbf{r})$ (son expression est donnée explicitement dans le paragraphe (§. II. 4)), la loi locale de comportement élastoplastique devient :

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^{ep}(\mathbf{r}) d\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \quad (\text{II. 6})$$

Les variations dans la composition chimique entre les constituants ou d'autres sources d'hétérogénéité du matériau hétérogène conduisent à des différences dans le comportement mécanique local et, par conséquent à des concentrations de contraintes changeantes d'une phase à l'autre. Ainsi, l'incrément du champ local des contraintes, $d\sigma_{ij}(\mathbf{r})$, est relié au chargement macroscopique, $d\Sigma_{ij}$, par la relation qui suit :

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = B_{ijkl}(\mathbf{r}) d\Sigma_{kl} \quad (\text{II. 7})$$

où le tenseur d'ordre 4, $B_{ijkl}(\mathbf{r})$, est appelé tenseur de localisation (ou de concentration) des contraintes.

En introduisant la relation (II. 7) dans la relation (II. 4), on obtient la condition suivante (qui doit être vérifiée par les tenseurs de localisation des contraintes) :

$$\frac{1}{V} \int_V B_{ijkl}(\mathbf{r}) dV = I_{ijkl} \quad (\text{II. 8})$$

où I_{ijkl} est l'identité d'ordre 4, qui s'écrit en termes du symbole de Kronecker, δ_{ij} , comme suivant :

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II. 9})$$

avec

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall i, j \in \{1, 2, 3\} / i = j \\ 0, & \forall i, j \in \{1, 2, 3\} / i \neq j \end{cases}$$

Une relation similaire à celle obtenue pour les contraintes donne l'incrément de la déformation totale locale, $d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$, en fonction de la déformation macroscopique, dE_{ij} , de la manière suivante :

$$d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = A_{ijkl}(\mathbf{r}) dE_{kl} \quad (\text{II. 10})$$

où le tenseur d'ordre 4, $A_{ijkl}(\mathbf{r})$, est appelé tenseur de localisation des déformations.

En introduisant la relation (II. 10) dans la relation (II. 2), on obtient la condition suivante vérifiée par les tenseurs de localisation des déformations :

$$\frac{1}{V} \int_V A_{ijkl}(\mathbf{r}) dV = I_{ijkl} \quad (\text{II. 11})$$

II. 2. 3. Techniques d'homogénéisation

Après l'étape de localisation des contraintes et des déformations dans les différentes phases du matériau hétérogène, suit l'étape d'homogénéisation. En introduisant l'équation (II. 10) dans l'équation (II. 6), on obtient une relation qui relie la contrainte locale dans une phase donnée à la déformation d'ensemble comme suivant :

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijmn}^{ep}(\mathbf{r}) A_{mnkl}(\mathbf{r}) dE_{kl} \quad (\text{II. 12})$$

En introduisant la relation (II. 12) dans la relation (II. 4), et par application de la moyenne volumique aux tenseurs locaux, on obtient la loi macroscopique de comportement élastoplastique du Milieu Homogène Equivalent "M.H.E." :

$$d\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) dE_{kl} \quad (\text{II. 13})$$

ou encore la loi inverse :

$$dE_{ij} = S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) d\Sigma_{kl} \quad (\text{II. 14})$$

où $C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.)$ représente le tenseur, d'ordre 4, des modules élastoplastiques du "M.H.E." ou module tangent du milieu effectif et $S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = (C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.))^{-1}$ son inverse. Les expressions de ces deux tenseurs sont données respectivement par :

$$C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = \frac{1}{V} \int_V C_{ijmn}^{ep}(\mathbf{r}) A_{mnkl}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{II. 15})$$

et

$$S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = \frac{1}{V} \int_V S_{ijmn}^{ep}(\mathbf{r}) B_{mnkl}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{II. 16})$$

Ceci constitue l'étape d'homogénéisation.

D'après la définition des propriétés effectives du "V.E.R.", qui font intervenir les tenseurs de localisation moyens dans chacune des phases, les contraintes et les déformations moyennes locales sont déterminées à partir de l'hypothèse d'uniformité des champs mécaniques selon l'épaisseur.

La détermination du module tangent du "M.H.E." nécessite d'une part la connaissance des modules tangents locaux, et d'autre part la connaissance des tenseurs de localisation des déformations de chaque phase. L'utilisation d'un critère d'écoulement plastique permet la détermination des modules tangents à partir des propriétés mécaniques, de l'état de contrainte et de l'histoire de chargement du matériau considéré. La détermination des tenseurs de localisation des déformations ou de contraintes nécessite l'utilisation des techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique du solide. Ceci fera l'objet du paragraphe suivant (§. II. 3).

II. 3. Opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides en élastoplasticité

II. 3. 1. Conditions d'application

On considère une interface entre deux phases homogènes. Cette interface est considérée comme parfaite, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de formation de vide (pas de décohésion), ni de recouvrement de la matière (pas de phénomène de diffusion), etc. Les propriétés mécaniques changeantes d'une phase à

l'autre sont données par les modules tangents, $C_{ijkl}^{ep(1)}$ et $C_{ijkl}^{ep(2)}$, de la phase 1 et la phase 2 respectivement.

En plus de l'existence d'une discontinuité des champs de contraintes et de déformations aux passages des interfaces, le champ local dans une phase (ou couche) varie de manière complexe. Mais, lorsque les épaisseurs de ces couches sont faibles, il est possible d'admettre raisonnablement que les champs de contraintes et de déformations sont uniformes par morceaux selon les épaisseurs des différentes couches. Ainsi pour un chargement macroscopique $d\Sigma_{ij}$ ou dE_{ij} , les deux phases subissent des contraintes, $(d\sigma_{ij}^1, d\sigma_{ij}^2)$, et des déformations, $(d\varepsilon_{ij}^1, d\varepsilon_{ij}^2)$, différentes (Figure. II. 2.).

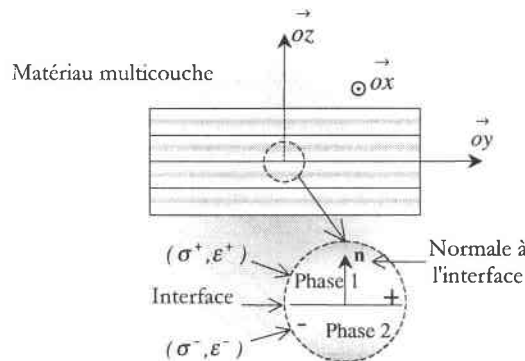


Figure. II. 2. Schématisation du problème d'interfaces dans les matériaux multicouches.

II. 3. 2. Saut des déformations

Hill (1983) [20] et Walpole (1967) [52] ont introduit le concept des opérateurs interfaciaux en mécanique des solides dans le but d'évaluer les sauts que subissent les champs de contraintes et de déformations au passage d'une interface parfaite.

En effet, le fait de supposer qu'il s'agit d'une liaison parfaite entre les deux phases (pas de glissement interfacial), conduit à une continuité du champ des déplacements, du_i , et du vecteur contrainte, $dT_i = d\sigma_{ij} n_j$, en tout point du matériau, y compris à l'interface, ce qui se traduit par :

$$[du_i] \equiv du_i^1(\mathbf{r}^+) - du_i^2(\mathbf{r}^-) = 0 \quad (\text{II. 17})$$

$$[d\sigma_{ij}]n_j \equiv (d\sigma_{ij}^1(\mathbf{r}^+) - d\sigma_{ij}^2(\mathbf{r}^-))n_j = 0 \quad (\text{II. 18})$$

où n_i sont les composantes de la normale unitaire, \mathbf{n} , à l'interface.

En un point arbitraire, $\mathbf{r}(x_i)$, de l'interface, la condition de compatibilité, $du_i = u_{i,j} dx_j$, ajoutée à la condition de continuité des déplacements le long de l'interface, imposent la condition suivante au saut du gradient des déplacements :

$$[du_{i,j}]dx_j \equiv (du_{i,j}^1(\mathbf{r}^+) - du_{i,j}^2(\mathbf{r}^-))dx_j = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Avec la condition, $n_i dx_i = 0$, l'équation (II. 19) conduit à la relation suivante :

$$[du_{i,j}] \equiv du_{i,j}^1(\mathbf{r}^+) - du_{i,j}^2(\mathbf{r}^-) = d\zeta_i n_j \quad (\text{II. 20})$$

Par symétrisation du saut de l'incrément du gradient des déplacements par rapport aux indices i et j , on obtient le saut de l'incrément des déformations locales :

$$[d\varepsilon_{ij}] \equiv d\varepsilon_{ij}^1(\mathbf{r}^+) - d\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{r}^-) = 1/2(d\zeta_i n_j + d\zeta_j n_i) \quad (\text{II. 21})$$

où $d\zeta_i$ sont les composantes du vecteur de proportionnalité correspondant à l'amplitude du saut, $d\vec{\zeta}$, et dont l'expression est complètement déterminée par la condition qui suit :

$$C_{ijkl}^{ep(1)} d\varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^{ep(2)} d\varepsilon_{kl}^2 n_j \quad (\text{II. 22})$$

déduite à partir de (II. 18) et des deux lois locales de comportements élastoplastiques :

$$d\sigma_{ij}^1(\mathbf{r}^+) = C_{ijkl}^{ep(1)} d\varepsilon_{kl}^1(\mathbf{r}^+) \quad (\text{II. 23})$$

et

$$d\sigma_{ij}^2(\mathbf{r}^-) = C_{ijkl}^{ep(2)} d\varepsilon_{kl}^2(\mathbf{r}^-) \quad (\text{II. 24})$$

Le vecteur de proportionnalité, $d\bar{\zeta}$, peut être ainsi évalué à partir des composantes du champ des déformations dans chacune des phases. En choisissant la phase 2 comme milieu de référence, on obtient l'expression du vecteur de proportionnalité, $d\bar{\zeta}$, en fonction de la déformation dans la phase 2 :

$$d\zeta_m = (K_{im}^1)^{-1} \Delta C_{ijkl}^{ep(2-1)} d\varepsilon_{kl}^2 n_j \quad (\text{II. 25})$$

où $\Delta C_{ijkl}^{ep(2-1)} = C_{ijkl}^{ep(2)} - C_{ijkl}^{ep(1)}$ et $(K_{ij}^1)^{-1}$ représente l'inverse de la matrice de Christoffel dont les composantes sont données par la relation :

$$K_{ik}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) = C_{ijkl}^{ep(1)} n_j n_l \quad (\text{II. 26})$$

Le tenseur de Christoffel, $K_{ik}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)})$, dépend de la normale unitaire, \mathbf{n} , à l'interface, ainsi que du module tangent isotrope ou anisotrope, $C_{ijkl}^{ep(1)}$, qui dépend à son tour des propriétés mécaniques, de l'état actuel de contrainte et de l'histoire de chargement de la phase considérée (§. II. 3). Son rôle est fondamental dans la mesure où les sauts de contraintes et de déformations en dépendent à chaque instant du chargement.

Les trois équations (II. 21), (II. 25) et (II. 26), ainsi que les trois symétries du module tangent, $C_{ijkl}^{ep(1)} = C_{ijlk}^{ep(1)} = C_{jikl}^{ep(1)} = C_{klij}^{ep(1)}$, dont la troisième est assurée par la condition d'écoulement plastique associé (§. II. 3), donnent le saut de l'incrément des déformations par l'intermédiaire des deux expressions équivalentes (§. A. 2) :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^1(\mathbf{r}^+) - d\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{r}^-) = L_{ijmn}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(2-1)} d\varepsilon_{kl}^2(\mathbf{r}^-) \\ d\varepsilon_{ij}^2(\mathbf{r}^-) - d\varepsilon_{ij}^1(\mathbf{r}^+) = L_{ijmn}^2(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(2)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(1-2)} d\varepsilon_{kl}^1(\mathbf{r}^+) \end{cases} \quad (\text{II. 27})$$

Cette équivalence est confirmée par l'identité :

$$L_{ijmn}^1 (C_{mnpq}^{ep(2)} - C_{mnpq}^{ep(1)}) L_{pqkl}^2 = L_{ijkl}^1 - L_{ijkl}^2 \quad (\text{II. 28})$$

Le tenseur d'ordre 4, $L_{ijkl}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(*)})$, est appelé opérateur interfacial associé aux déformations. Il dépend de la normale unitaire, \mathbf{n} , à l'interface et du module tangent, $C_{ijkl}^{ep(*)}$, du milieu de référence (*=1 ou 2). Son expression est donnée par :

$$L_{ijmn}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(*)}) = 1/4 \left((K_{im}^*)^{-1} n_j n_n + (K_{in}^*)^{-1} n_j n_m + (K_{jm}^*)^{-1} n_i n_n + (K_{jn}^*)^{-1} n_i n_m \right) \quad (\text{II. 29})$$

II. 3. 3. Saut des contraintes

Les deux lois locales de comportement élastoplastique (relations (II. 23) et (II. 24)) avec les deux relations permettant d'évaluer le saut des déformations (relation (II. 27)), donnent le saut de l'incrément des contraintes par les deux expressions équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} d\sigma_{ij}^1(\mathbf{r}^+) - d\sigma_{ij}^2(\mathbf{r}^-) = P_{ijmn}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) \Delta S_{mnl}^{ep(2-1)} d\sigma_{kl}^2(\mathbf{r}^-) \\ d\sigma_{ij}^2(\mathbf{r}^-) - d\sigma_{ij}^1(\mathbf{r}^+) = P_{ijmn}^2(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(2)}) \Delta S_{mnl}^{ep(1-2)} d\sigma_{kl}^1(\mathbf{r}^+) \end{cases} \quad (\text{II. 30})$$

où $S_{ijkl}^{ep(*)} = (C_{ijkl}^{ep(*)})^{-1}$ est l'inverse du module tangent et $P_{ijkl}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(*)})$ est l'opérateur interfacial associé aux contraintes et qui s'écrit en fonction de celui associé aux déformations, ainsi que du module tangent du milieu considéré :

$$P_{ijkl}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(*)}) = C_{ijkl}^{ep(*)} - C_{ijmn}^{ep(*)} L_{mnpq}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(*)}) C_{pqkl}^{ep(*)} \quad (\text{II. 31})$$

Ces techniques permettent l'évaluation des sauts des contraintes et des déformations au passage d'une interface parfaite entre deux milieux de propriétés mécaniques différentes et, par la suite, la détermination des tenseurs de localisation des contraintes et des déformations dans chacune des phases d'un matériau hétérogène.

Dans le cas d'un comportement élastique, une simple connaissance des propriétés élastiques (C_{ijkl} isotrope ou anisotrope) permet de formuler la loi de comportement élastique local (loi de Hooke) et d'appliquer par la suite les techniques des opérateurs interfaciaux au milieu étudié. Mais, dans le cas

d'un comportement élastoplastique anisotrope, il est nécessaire d'établir la loi de comportement local à partir d'un critère de plasticité anisotrope. Cela fera l'objet du paragraphe qui suit (§. II. 4).

II. 4. Elastoplasticité anisotrope

Un comportement est dit élastoplastique, lorsque les déformations ne sont pas totalement réversibles pour un état de contrainte situé au-delà de la limite élastique du matériau étudié.

En développant les lois de comportement des matériaux écrouissables, deux approches fondamentales sont utilisées. Le premier type de formulation est la théorie de déformation, c'est-à-dire la relation contrainte-déformation (Chen, 1988, 1994) [8, 9]. Cette théorie est basée sur le fait que, pendant une déformation plastique ininterrompue, la connaissance de l'état de contrainte permet la détermination de celui de déformation et durant le chargement, on a :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e = f(\sigma_{ij}) \quad (\text{II. 32})$$

Le deuxième type de formulation correspond à la théorie incrémentale ou théorie d'écoulement. Ce type de formulation relie l'incrément de la déformation plastique, $d\varepsilon_{ij}^p$, à celui de la contrainte, $d\sigma_{ij}$, et à l'état de contrainte σ_{ij} .

Le concept de la fonction de charge permet de déterminer la réponse d'un matériau dont l'état de contrainte peut se trouver sur la surface de charge initiale. Cette réponse est décrite par une nouvelle surface évoluant au cours du chargement (plusieurs chargements infinitésimaux). La relation qui spécifie cette évolution est connue sous le nom de "règle d'écrouissage".

Les considérations fondamentales sur lesquelles est basée la théorie incrémentale pour les matériaux élastoplastiques écrouissables sont :

- L'existence d'une surface de charge initiale définissant la limite élastique du matériau dans un état de contraintes multiaxiales,
- La règle d'écrouissage qui décrit l'évolution de la surface de charge,
- La règle d'écoulement, qui est reliée à la fonction du potentiel plastique, et qui définit la direction de l'incrément du tenseur de déformation plastique, $d\varepsilon_{ij}^p$, dans l'espace des déformations.

II. 4. 1. Surface de charge et règle d'écroissage

La surface de charge est généralement représentée par une fonction, f , qui dépend de l'état de contrainte, σ_{ij} , et de l'histoire du chargement à travers le paramètre d'écroissage, k , qui dépend à son tour de la variable interne K :

$$f(\sigma_{ij}, k(\kappa)) = 0 \quad (\text{II. 33})$$

Pour un chargement uniaxial, le concept de "charge" ou de "décharge" est évident (Figure. II. 3 a.). Mais, ce n'est pas le cas pour un chargement multiaxial. La surface de charge, elle-même, est essentielle pour définir la charge et la décharge. Alors, on obtient un état de charge ou un écoulement plastique, uniquement, lorsque l'état de contrainte se trouve sur la surface de charge et l'incrément du tenseur des contraintes est dirigé suivant le sens extérieur à la surface de charge actuelle (Figure. II. 3 b.). Pour mieux définir l'état de charge, on introduit un vecteur unitaire, \vec{n}^f , normal à la surface de charge dans l'espace des contraintes à 9 dimensions. Les composantes de ce vecteur sont données par :

$$n_{ij}^f = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{\mu}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{\mu}}}} \quad (\text{II. 34})$$

où $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ représente la dérivée partielle de la fonction de charge, f , par rapport à la contrainte σ_{ij} .

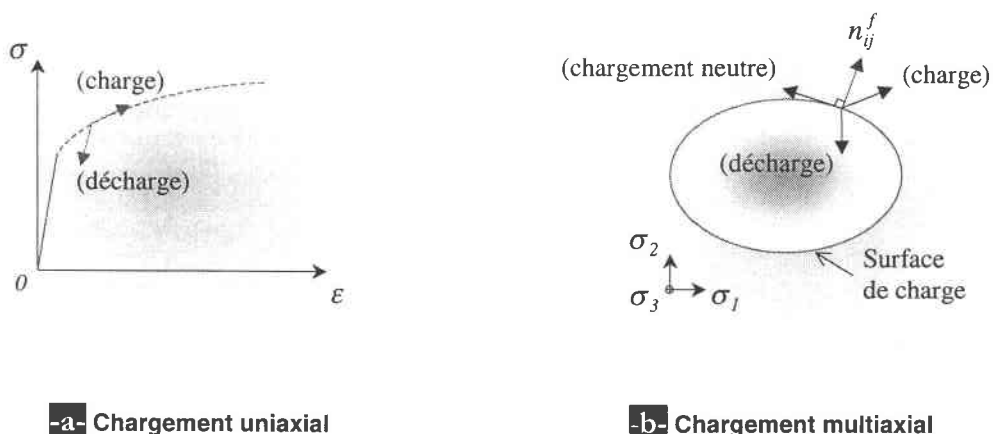


Figure. II. 3. Schémas présentant le critère de charge pour les matériaux écouissables.

- Si $f = 0$ et $n_{ij}^f d\sigma_{ij} = 0$ alors $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, (chargement neutre).
- Si $f = 0$ et $n_{ij}^f d\sigma_{ij} > 0$ alors $d\varepsilon_{ij}^p \neq 0$, (charge).
- Si $f = 0$ et $n_{ij}^f d\sigma_{ij} < 0$ alors $d\varepsilon_{ij}^p = 0$, (décharge).

L'écroûissage d'un matériau, qui est représenté par la variable interne, κ , tend à introduire des anisotropies dans ce dernier pouvant être initialement isotrope. Ainsi, il n'est pas toujours suffisant de représenter une surface de charge "anisotrope" dans l'espace des contraintes principales. La surface de charge sera donc représentée dans l'espace des contraintes à 9 ou 6 dimensions.

Connaissant la fonction de charge initiale, il est nécessaire de suivre son évolution au cours de l'écoulement plastique et durant le chargement. La règle d'écroûissage permet sa détermination à chaque instant de l'écoulement. La forme la plus générale de la fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = F(\sigma_{ij}) - k^2(\kappa) = 0 \tag{II. 35}$$

où $k^2(\kappa)$ représente la taille de la surface de charge, et $F(\sigma_{ij})$ définit la forme de cette surface.

- Surface de charge initiale : $f(\sigma_{ij}, \kappa)$
- - - Surface de charge actuelle : $f(\sigma_{ij}, \kappa) + df$
- Etat de contrainte

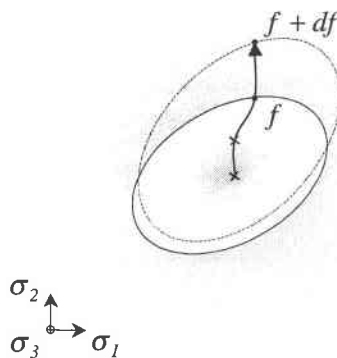


Figure. II. 4. Schéma présentant l'évolution de la surface de charge au cours de l'écoulement plastique pour un trajet de chargement complexe.

II. 4. 2. Critère de plasticité pour les matériaux anisotropes

En étudiant l'écoulement plastique de certains matériaux, il faut tenir compte de l'anisotropie que peuvent manifester ces derniers. Un premier traitement de l'écoulement plastique dans les matériaux anisotropes a été fait par Hill (1950) [18]. Ce dernier propose une fonction de charge avec une expression quadratique des contraintes. Ce critère se réduit à celui de von Mises lorsque le degré d'anisotropie est nul ($3F = 3G = 3H = L = M = N$). Des relations similaires ont été proposées par Jackson, Smith et Lankford (1948) [25], Dorn (1949) [13], et Hu (1956) [21].

Des théories plus générales, qui combinent l'écroutissement isotrope et l'écroutissement cinématique, sont données par Baltov et Sawczuk (1965) [1].

En se basant sur des développements classiques, Yamada (1968,1969) [53, 54] a reformulé les lois de comportement pour les matériaux écroutissables orthotropes. Cette approche convient très bien pour les applications en éléments finis.

En raison de l'approche utilisée dans cette étude, basée sur des lois locales qui tiennent compte de l'anisotropie plastique, on ne s'intéressera qu'au critère de Hill. Cela fera l'objet du paragraphe suivant.

II. 4. 2. 1. Critère de Hill

D'après Hill, la fonction de charge pour les matériaux élastoplastiques écroutissables anisotropes, est définie comme suivant :

$$f^H(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2(F+G+H)} \left[F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 + 2N\tau_{xy}^2 \right] = k(\kappa) \quad (\text{II. 36})$$

Les directions x, y et z sont prises comme axes principaux d'anisotropie du matériau. La fonction d'écroutissement plastique, $k(\kappa)$, représentant la taille de la surface de charge, f^H , s'exprime en terme de l'énergie plastique ($\kappa = w^p$) ou en terme de la contrainte équivalente ($\kappa = \sigma_e$) qui, à son tour, dépend de la déformation plastique cumulée (ou équivalente) ε_e^p . Les six coefficients d'anisotropie de Hill, F, G, H, L, M et N , qui sont des paramètres du matériau, peuvent dépendre de l'état de contrainte et de la déformation plastique. Dans cette étude, ils sont considérés comme constants durant l'écoulement plastique et sont déterminés expérimentalement, à partir des résultats des essais de traction, de

compression et de cisaillement dans les différentes directions du repère principal, $\mathfrak{R}(o, x, y, z)$, associé au matériau.

La fonction implicite de Hill s'écrit :

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p) = f^H(\sigma_{ij}) - k(\varepsilon_e^p) = 0 \quad (\text{II. 37})$$

On considère une règle d'écoulement associé, c'est-à-dire que la fonction du potentiel plastique, g , coïncide avec la fonction de charge ($g = f$). L'incrément du tenseur de déformation plastique, $d\varepsilon_{ij}^p$, est ensuite déterminé à partir de celui du multiplicateur plastique, $d\lambda$ (positif durant l'écoulement plastique), et de la dérivée de la fonction de charge par rapport à la contrainte $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$.

Ainsi, la loi d'écoulement plastique, appelée aussi règle de normalité, s'écrit :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (\text{II. 38})$$

Les différentes composantes de $d\varepsilon_{ij}^p$ sont données par les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_{11}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} = d\lambda \frac{[H(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + G(\sigma_{11} - \sigma_{33})]}{(F + G + H)} \\ d\varepsilon_{22}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} = d\lambda \frac{[F(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + H(\sigma_{22} - \sigma_{11})]}{(F + G + H)} \\ d\varepsilon_{33}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} = d\lambda \frac{[G(\sigma_{33} - \sigma_{11}) + F(\sigma_{33} - \sigma_{22})]}{(F + G + H)} \\ d\varepsilon_{23}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} = d\lambda \frac{L\sigma_{23}}{(F + G + H)} \\ d\varepsilon_{31}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{31}} = d\lambda \frac{M\sigma_{31}}{(F + G + H)} \\ d\varepsilon_{12}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} = d\lambda \frac{N\sigma_{12}}{(F + G + H)} \end{array} \right. \quad (\text{II. 39})$$

Remarque :

Dans le cas de la plasticité isotrope, c'est-à-dire ($3F = 3G = 3H = L = M = N$), les composantes de la dérivée de la fonction de charge, f , par rapport à la contrainte, σ_{ij} , se réduisent à celles du déviateur des contraintes, s_{ij} , donné par :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II. 40})$$

II. 4. 2. 2. Contrainte et déformation équivalentes au sens de Hill

Identiquement à la théorie de von Mises dans le cas isotrope, la contrainte équivalente (ou effective), σ_e , dans le cas anisotrope est définie au sens de Hill de cette manière :

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} \frac{F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(L\sigma_{23}^2 + M\sigma_{31}^2 + N\sigma_{12}^2)}{(F + G + H)} \right)^{1/2} \quad (\text{II. 41})$$

L'incrément du travail plastique est donné par définition :

$$dw^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (\text{II. 42})$$

En remplaçant dans cette équation les incréments de la déformation plastique par leurs expressions en fonction de $d\lambda$ et $d\sigma_{ij}$, on obtient :

$$dw^p = \frac{2}{3} \sigma_e^2 d\lambda \quad (\text{II. 43})$$

En utilisant la règle d'écoulement et le théorème d'Euler pour des fonctions homogènes de degré 2, on aboutit au même résultat :

$$dw^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = 2f d\lambda = \frac{2}{3} \sigma_e^2 d\lambda \quad (\text{II. 44})$$

avec

$$f = \frac{1}{3} \sigma_e^2 \quad (\text{II. 45})$$

Par ailleurs, l'incrément de la déformation plastique équivalente, $d\varepsilon_e^p$, est défini à partir du travail plastique, comme suivant :

$$dw^p = \sigma_e d\varepsilon_e^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \frac{2}{3} \sigma_e^2 d\lambda \quad (\text{II. 46})$$

D'où la relation :

$$d\varepsilon_e^p = \frac{2}{3} \sigma_e d\lambda \quad (\text{II. 47})$$

Afin d'exprimer l'incrément de la déformation plastique équivalente, $d\varepsilon_e^p$, en fonction de celui du tenseur des déformations plastiques, $d\varepsilon_{ij}^p$, on procède aux manipulations suivantes de (II. 39) :

$$G d\varepsilon_{22}^p - H d\varepsilon_{33}^p = \frac{(FG + GH + HF)}{(F + G + H)} (\sigma_{22} - \sigma_{33}) d\lambda \quad (\text{II. 48})$$

Ce qui donne :

$$(\sigma_{22} - \sigma_{33}) = \frac{(G d\varepsilon_{22}^p - H d\varepsilon_{33}^p) (F + G + H)}{(FG + GH + HF) d\lambda} \quad (\text{II. 49})$$

En appliquant les mêmes techniques de calcul aux autres termes, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sigma_{33} - \sigma_{11}) = \frac{(H d\varepsilon_{33}^p - F d\varepsilon_{11}^p) (F + G + H)}{(FG + GH + HF) d\lambda} \\ (\sigma_{11} - \sigma_{22}) = \frac{(F d\varepsilon_{11}^p - G d\varepsilon_{22}^p) (F + G + H)}{(FG + GH + HF) d\lambda} \\ \sigma_{23} = \frac{d\varepsilon_{23}^p (F + G + H)}{L d\lambda} \\ \sigma_{31} = \frac{d\varepsilon_{31}^p (F + G + H)}{M d\lambda} \\ \sigma_{12} = \frac{d\varepsilon_{12}^p (F + G + H)}{N d\lambda} \end{array} \right. \quad (\text{II. 50})$$

En remplaçant chacun des termes par son expression dans la relation de la contrainte équivalente, σ_e (relation (II. 41)), on obtient une nouvelle expression en terme des incréments de la déformation plastique comme suivant :

$$\sigma_e = \left[\frac{3}{2} \frac{(F+G+H)}{(d\lambda)^2} \left(\frac{F(Gd\varepsilon_{22}^p - Hd\varepsilon_{33}^p)^2 + G(Hd\varepsilon_{33}^p - Fd\varepsilon_{11}^p)^2 + H(Fd\varepsilon_{11}^p - Gd\varepsilon_{22}^p)^2}{(FG+GH+HF)^2} + \frac{2(d\varepsilon_{23}^p)^2}{L} + \frac{2(d\varepsilon_{31}^p)^2}{M} + \frac{2(d\varepsilon_{12}^p)^2}{N} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II. 51})$$

En combinant les deux équations (II. 47) et (II. 51), on obtient la relation ci-dessous, qui donne l'incrément de la déformation plastique équivalente, $d\varepsilon_e^p$, au sens de Hill en fonction des six coefficients d'anisotropie plastique :

$$d\varepsilon_e^p = \left[\frac{2}{3} (F+G+H) \left(\frac{F(Gd\varepsilon_{22}^p - Hd\varepsilon_{33}^p)^2 + G(Hd\varepsilon_{33}^p - Fd\varepsilon_{11}^p)^2 + H(Fd\varepsilon_{11}^p - Gd\varepsilon_{22}^p)^2}{(FG+GH+HF)^2} + \frac{2(d\varepsilon_{23}^p)^2}{L} + \frac{2(d\varepsilon_{31}^p)^2}{M} + \frac{2(d\varepsilon_{12}^p)^2}{N} \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II. 52})$$

II. 4. 2. 3. Loi de comportement élastoplastique pour un matériau de Hill

La fonction d'écrouissage plastique, $k(\varepsilon_e^p)$, étant définie à partir de la contrainte équivalente, σ_e , est donnée par la relation :

$$k(\varepsilon_e^p) = \frac{1}{3} \sigma_e^2(\varepsilon_e^p) \quad (\text{II. 53})$$

Dans ce cas, la fonction de charge, f , et la condition de consistance (traduisant le fait qu'au cours de l'écoulement plastique, l'état de contrainte se trouve sur la surface de charge et y reste), s'écrivent :

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p) = f^H(\sigma_{ij}) - \frac{1}{3} \sigma_e^2(\varepsilon_e^p) = 0 \quad (\text{II. 54})$$

et

$$\dot{f}(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p) = 0 \quad (\text{II. 55})$$

En négligeant la dépendance du temps, la condition de consistance peut s'écrire sous forme d'une différentielle comme suivant :

$$df(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \quad \forall f, \text{ différentielle totale exacte.} \quad (\text{II. 56})$$

Les variables dont dépend la fonction de charge, f , correspondent au tenseur des contraintes (variable de contrôle), σ_{ij} , et à la déformation plastique équivalente ε_e^p (paramètre d'écroissage qui est une variable interne). Ceci permet d'écrire la condition de consistance (indépendante du temps) sous cette forme :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_e^p} d\varepsilon_e^p = 0 \quad (\text{II. 57})$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial \varepsilon_e^p} = \frac{\partial k}{\partial \sigma_e} \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e^p} \\ \frac{\partial k}{\partial \sigma_e} = \frac{2}{3} \sigma_e \end{cases} \quad (\text{II. 58})$$

En considérant les équations (II. 57) et (II. 58) et en utilisant la loi de Hooke (II. 5), on obtient la condition de consistance sous la forme suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^p - \frac{4}{9} \sigma_e^2 H_p d\lambda = 0 \quad (\text{II. 59})$$

où C_{ijkl} est le tenseur, d'ordre 4, des modules élastiques et $H_p = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e^p}$ est le module d'écroissage plastique.

La relation ci-après, obtenue à partir des équations (II. 38) et (II. 59), permet la détermination de l'incrément du multiplicateur plastique $d\lambda$:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{4}{9} H_p \sigma_e^2 \right) d\lambda = 0 \quad (\text{II. 60})$$

D'où l'expression du multiplicateur plastique $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ij\,kl} d\varepsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mn\,pq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{4}{9} H_p \sigma_e^2} \quad (\text{II. 61})$$

L'incrément du multiplicateur plastique, $d\lambda$, étant connu, on obtient une expression permettant d'obtenir l'incrément du tenseur des déformation plastiques, $d\varepsilon_{ij}^p$, en fonction de celui des déformations totales $d\varepsilon_{ij}$:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mn\,kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pq\,rs} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{4}{9} H_p \sigma_e^2} d\varepsilon_{kl} \quad (\text{II. 62})$$

Utilisant la loi de Hooke pour un comportement élastoplastique en petites perturbations,

$$d\sigma_{ij} = C_{ij\,kl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (\text{II. 63})$$

on obtient la loi incrémentale et tensorielle de comportement élastoplastique (pas-à-pas) pour un matériau écrouissable anisotrope :

$$d\sigma_{ij} = C_{ij\,kl}^{ep} d\varepsilon_{kl} \quad (\text{II. 64})$$

où $C_{ij\,kl}^{ep}$ est le tenseur des modules élastoplastiques, appelé aussi module tangent, qui dépend de l'état de contrainte, σ_{ij} , et de l'histoire de chargement ε_e^p . Il est donné par l'expression tensorielle suivante :

$$C_{ij\,kl}^{ep}(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p) = C_{ij\,mn} \left[I_{mn\,kl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pq\,kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rs\,tu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{4}{9} H_p \sigma_e^2} \right] \quad (\text{II. 65})$$

où l'identité d'ordre 4, I_{ijkl} , qui s'exprime en fonction du symbole de Kronecker, δ_{ij} , est donnée par l'expression (II. 9).

A partir d'un essai de traction réalisé expérimentalement, on détermine la courbe "contrainte-déformation" dont l'équation est donnée par une loi puissance (Ludwik, 1909) [41], reliant la contrainte équivalente, σ_e , à la déformation plastique équivalente, ε_e^p , par l'intermédiaire des paramètres d'écrouissage du matériau, n et K , pour tout état de contrainte situé au-delà de la limite élastique σ_0 :

$$\sigma_e = \sigma_e(\varepsilon_e^p) = \sigma_0 + K(\varepsilon_e^p)^n \quad (\forall \sigma_e \geq \sigma_0) \quad (\text{II. 66})$$

où n représente l'exposant d'écrouissage et K le paramètre d'écrouissage plastique.

Le module d'écrouissage plastique, H_p , est ensuite déduit par simple dérivation de la contrainte équivalente, σ_e , par rapport à la déformation plastique équivalente, ε_e^p , comme suivant :

$$H_p(\varepsilon_e^p) = H_p(\sigma_e) = nK(\varepsilon_e^p)^{n-1} = nK^{1/n}(\sigma_e - \sigma_0)^{(n-1)/n} \quad (\text{II. 67})$$

L'identification des paramètres d'écrouissage plastique, n et K , se fait à partir d'un seul essai de traction réalisé expérimentalement sur une seule éprouvette découpée dans une des directions principales liées au matériau. Par contre, l'identification des six coefficients de Hill nécessite plusieurs essais de traction, de compression et de cisaillement dans les différentes directions. La méthode d'identification expérimentale utilisée dans ce travail est discutée dans le chapitre (§. III).

II. 5. Synthèse des techniques de modélisation

Les techniques de modélisation présentées dans ce chapitre (à savoir : les techniques de localisation et d'homogénéisation, les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides, ainsi que la plasticité anisotrope de Hill) représentent l'outil micromécanique permettant de résoudre le problème des tôles revêtues.

Pour expliquer les étapes suivies dans la résolution du problème, on considère le cas d'une tôle revêtue soumise à un chargement mécanique $d\Sigma_{ij}$ (Figure. II. 5).

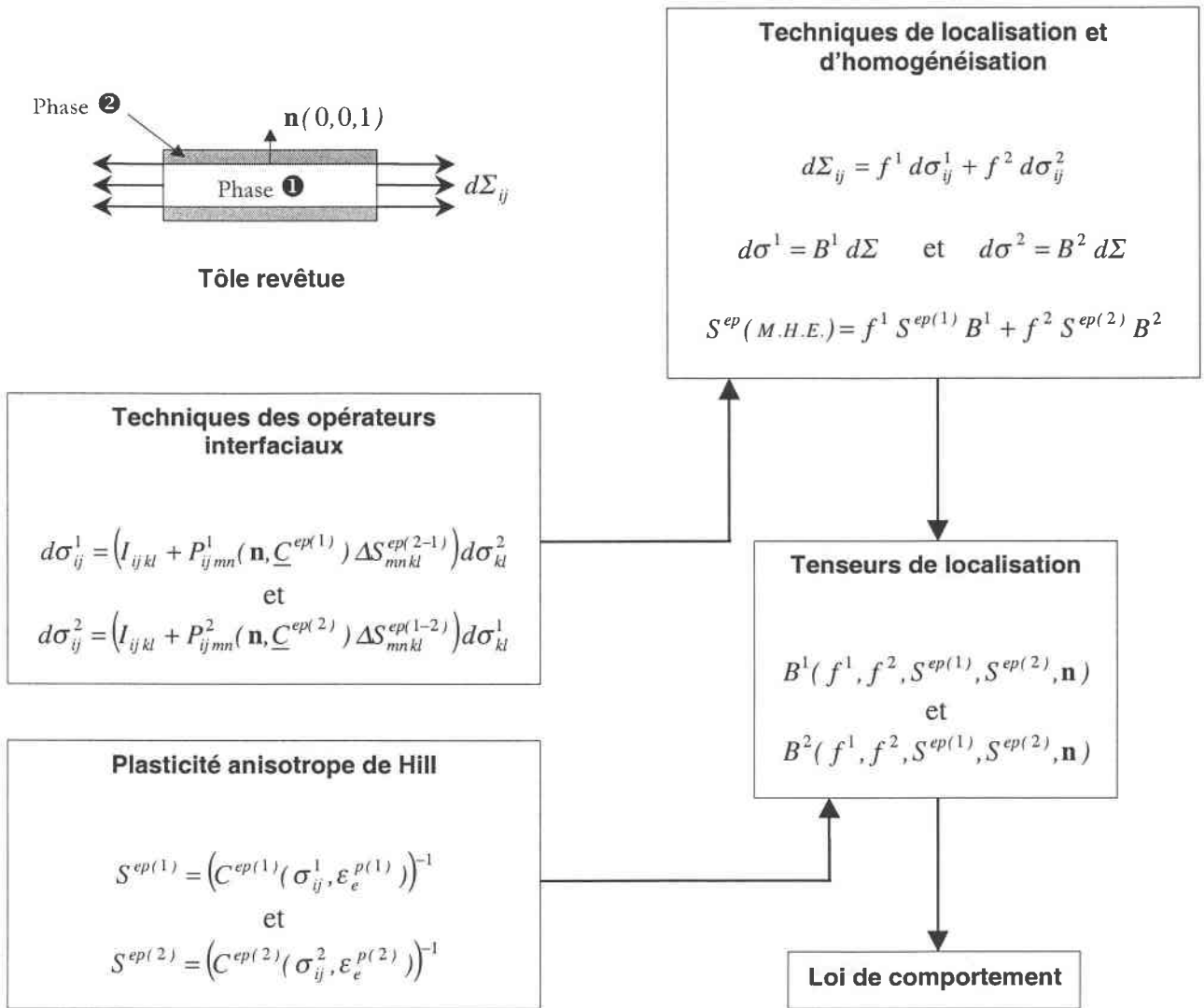


Figure. II. 5. Schéma de synthèse des techniques de modélisation

La démarche micromécanique adoptée pour l'étude du comportement élastoplastique anisotrope des tôles revêtues repose sur une méthode numérique incrémentale (Newton-Raphson). Elle consiste à imposer un incrément de chargement macroscopique, $d\Sigma_{ij}$ ou dE_{ij} , à la frontière du "V.E.R." et à calculer les incréments des champs locaux correspondants, $d\sigma_{ij}$ et $d\varepsilon_{ij}$, par l'intermédiaire des tenseurs de localisations des contraintes, B_{ijkl} , et des déformations, A_{ijkl} , qui sont initialement purement élastiques. Ces tenseurs de localisation font intervenir les caractéristiques géométriques (fractions volumiques), mécaniques élastiques (module(s) de Young, coefficient(s) de Poisson) et plastiques

(coefficients d'écroutissage, coefficients de Hill, etc.) selon le comportement local, qui est déterminé pour chacune des phases à l'aide du critère de charge défini au paragraphe (§. II. 3). Dans le cas où le comportement de l'une des phases deviendrait plastique, la variable interne, ε_e^p , associée à l'écroutissage plastique, rentre en jeu et commence à évoluer avec l'état de contrainte, σ_{ij} , qui à partir de cet instant ne dépend plus linéairement de la déformation. Dans ce cas, les tenseurs de localisation dépendent des états de contraintes locales, σ_{ij} , et des histoires de chargements, ε_e^p , ainsi que la normale unitaire, \mathbf{n} , aux interfaces à travers les modules tangents et les opérateurs interfaciaux. Connaissant le comportement local de chacune des phases, il suffit de calculer le module tangent du "M.H.E." et d'en déduire, par la suite, la loi de comportement macroscopique, c'est-à-dire la réponse du "V.E.R." au chargement externe.

Les états actuels de contraintes et de déformations sont maintenant différents des états initiaux. Il faut réactualiser alors toutes les variables du problème et refaire un autre pas de chargement macroscopique jusqu'à l'atteinte du taux de déformation souhaité.

Cette méthode numérique de résolution est applicable à tous les modèles proposés dans ce travail.

II. 6. Conclusion

La combinaison des trois techniques de modélisation mécanique proposées dans ce chapitre permet de résoudre le problème de comportement mécanique des tôles revêtues en respectant toutes les hypothèses de base citées au fur et à mesure dans ce chapitre (§. II), ainsi que dans celui qui suit (§. III).

En considérant les tôles revêtues comme des matériaux multiphasés, il faut tenir compte de la contribution mécanique de chacune des phases dans le comportement global de ces matériaux. Les différences dans les propriétés physico-chimiques des constituants conduisent à des comportements mécaniques changeants d'une phase à l'autre. Ainsi, le comportement mécanique local d'une phase donnée peut être décrit par une loi élastoplastique tenant compte des anisotropies élastiques (C_{ijkl} au lieu de E et ν) et plastiques (critère de Hill : F, G, H, L, M et N).

Les techniques d'homogénéisation permettent de déterminer le comportement effectif du "M.H.E." à partir de ceux des constituants. L'étape de localisation, qui permet d'évaluer les champs locaux de contraintes et de déformations dans chaque phase, nécessite la détermination des tenseurs de localisation correspondants.

Pour résoudre ce problème, on a eu recours aux techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides, qui par l'intermédiaire de tenseurs d'ordre 4 (dits opérateurs interfaciaux), permettent d'évaluer les sauts des champs de contraintes et de déformations aux passages des interfaces. Ceci permet de résoudre complètement le problème.

Une première application de ces techniques de modélisation micromécanique au comportement des tôles à revêtements métalliques est proposée dans le chapitre (§. III) à partir d'un modèle à deux phases (dit "biphasé") qui ne tient pas compte de la présence d'une éventuelle interphase.

Une deuxième application de l'ensemble de ces techniques à un modèle plus général, tenant compte de la présence d'une interphase localisée entre le substrat et le revêtement, est également proposée dans le chapitre (§. IV).

III. SYNTHESE ET APPLICATION DU MODELE BIPHASE A LA TOLE REVETUE

III. 1. Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de modéliser le comportement élastoplastique des tôles revêtues à partir d'un premier modèle "biphase", en appliquant les techniques établies au chapitre précédent (§. II), sans tenir compte de la présence d'une éventuelle interphase entre le substrat et le revêtement.

Les techniques de modélisation élaborées sont applicables en formulant un certain nombre d'hypothèses sur le modèle micromécanique proposé. L'une de ces hypothèses de base est la symétrie du modèle assurée par des revêtements identiques et de mêmes épaisseurs des deux côtés (ou faces) de la tôle. Ceci permet de négliger l'effet de courbure, c'est-à-dire les moments pouvant intervenir en cas de dissymétrie (cas du bilame).

Les revêtements appliqués doivent être assez minces devant l'épaisseur initiale de la tôle nue (c'est le cas de nombreuses applications industrielles) de façon à ce que les champs locaux de contraintes et de déformations soient approximativement uniformes.

Le milieu étudié est considéré comme infini de façon à négliger les effets de bord pouvant introduire des perturbations dans le comportement.

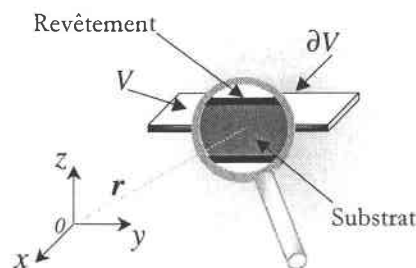
Les interfaces assurant le contact et le transfert de charge entre les deux phases constitutives du matériau sont supposées planes et parfaites, c'est-à-dire que les phénomènes de formation de vides par décohésion interfaciale, de recouvrement de la matière par diffusion, de glissement interfacial, etc. sont négligés.

L'ensemble de ces hypothèses permet d'appliquer l'approche micromécanique établie au chapitre précédent (§. II) dans le but de résoudre plusieurs problèmes tels que ceux des anisotropies élastique et plastique, des concentrations de contraintes et des contraintes résiduelles dans le but de mettre en évidence l'effet important du revêtement sur le comportement global de la tôle revêtue.

L'application du modèle "biphasé" au cas des tôles d'aciers revêtus de Zinc ou d'alliages ZnNi se fait analytiquement par calcul direct pour des comportements élastiques isotropes des deux phases. Cependant, les calculs dans le cas élastoplastique isotrope ou anisotrope exige une méthode itérative numérique, en raison de la non-linéarité des équations du problème, tout en tenant compte des états réactualisés des variables de contrôle et des variables internes à chaque pas du chargement.

III. 2. Modèle biphasé de la tôle revêtue

Considérons un "V.E.R.", V , d'une tôle mince revêtue des deux côtés d'un matériau métallique de très faible épaisseur par rapport à la tôle initiale non-revêtue. La topologie de ce modèle "biphasé" symétrique de la tôle revêtue suppose un "substrat" (tôle nue) de module élastoplastique, $C_{ijkl}^{ep(S)}$, et de volume, V^S , revêtu des deux côtés d'une mince couche de "revêtement" de module élastoplastique, $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et de volume V^C (Figure. III. 1.). L'interface substrat/revêtement est considérée comme plane et parfaite ; elle correspond à une surface de contact entre les deux phases de manière à négliger la présence d'une éventuelle "interphase". Avec l'hypothèse de la planéité de l'interface, la normale unitaire à cette dernière est dirigée suivant la direction $\vec{o}z$ d'un repère orthonormé et suivant l'épaisseur de la tôle, c'est-à-dire $\mathbf{n}(0,0,1)$.



-a-

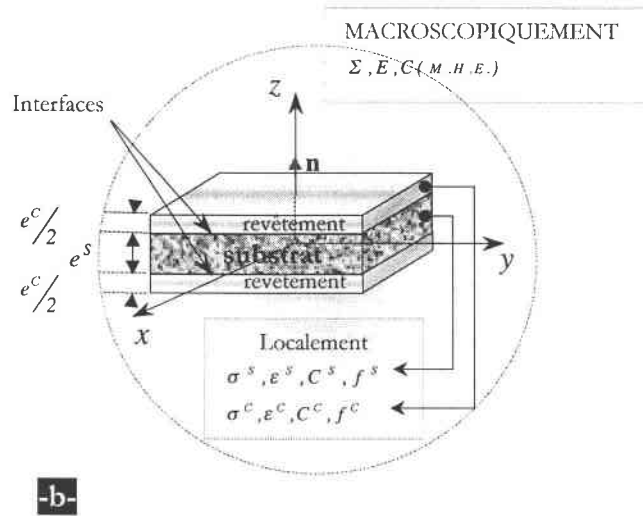


Figure. III. 1. Schéma d'un "V.E.R." du modèle biphasé symétrique de la tôle revêtue.

III. 2. 1. Expressions des tenseurs de localisation des déformations

Pour n'importe quelle constante ou variable, $X(\mathbf{r})$, du problème définie en un point, \mathbf{r} , du matériau, on a :

$$\forall X, \quad X(\mathbf{r}) = \begin{cases} X^s, & \text{si } \mathbf{r} \in V^s \\ X^c, & \text{si } \mathbf{r} \in V^c \end{cases} \quad (\text{III. 1})$$

avec $V = V^s + V^c$ le volume total du "V.E.R.", V^s le volume du "substrat" noté "s" et V^c le volume total du "revêtement" noté "c".

La morphologie de la tôle revêtue suppose des surfaces de substrat, S^s , et de revêtement, S^c , identiques à celle, S , du "V.E.R.", ce qui conduit à une écriture des fractions volumiques uniquement en fonction des épaisseurs :

$$f^s = V^s/V = \frac{S^s \times e^s}{S \times e} = e^s/e \quad \text{et} \quad f^c = V^c/V = \frac{S^c \times e^c}{S \times e} = e^c/e \quad (\text{III. 2})$$

où $e = e^s + e^c$ est l'épaisseur totale de la tôle revêtue, ce qui impose aux fractions volumiques de vérifier la condition nécessaire suivante:

$$f^S + f^C = 1 \quad (\text{III. 3})$$

En considérant que les champs locaux de contraintes et de déformations sont homogènes par phase, les relations (II. 2) et (II. 4), appelées aussi lois des mélanges, s'écrivent dans le cas du modèle biphasé de la tôle revêtue de la manière suivante :

$$dE_{ij} = f^S d\varepsilon_{ij}^S + f^C d\varepsilon_{ij}^C \quad (\text{III. 4})$$

$$d\Sigma_{ij} = f^S d\sigma_{ij}^S + f^C d\sigma_{ij}^C \quad (\text{III. 5})$$

En choisissant le substrat comme milieu de référence (par ex), on arrive à évaluer les sauts des déformations aux passages des interfaces par l'intermédiaire des opérateurs interfaciaux (§. II. 3). Ainsi, les incréments des déformations locales dans chaque phase sont reliés de part et d'autre de l'interface, d'après l'expression (II. 29), par les relations :

$$d\varepsilon_{ij}^S = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right) d\varepsilon_{kl}^C \quad (\text{III. 6})$$

$$d\varepsilon_{ij}^C = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-C)} \right) d\varepsilon_{kl}^S \quad (\text{III. 7})$$

où les termes $\Delta \underline{C}^{ep(C-S)} = \underline{C}^{ep(C)} - \underline{C}^{ep(S)}$ et $\Delta \underline{C}^{ep(S-C)} = \underline{C}^{ep(S)} - \underline{C}^{ep(C)}$ représentent les différences entre les modules tangents des deux phases dont les expressions sont données à partir de la relation (II. 65). Ces termes de différence font apparaître l'hétérogénéité élastoplastique du matériau. Les tenseurs d'ordre 4, $L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)})$ et $L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)})$, représentent les opérateurs interfaciaux associés aux déformations dans les deux phases, "s" et "c", de la tôle revêtue.

Par application des techniques de localisation et d'homogénéisation au modèle biphasé de la tôle revêtue et d'après la relation (II. 10), les incréments locaux des déformations, $d\varepsilon_{ij}^S$ et $d\varepsilon_{ij}^C$, dans le substrat et le revêtement respectivement sont reliés directement au champ macroscopique correspondant, soit la déformation macroscopique, dE_{ij} , par l'intermédiaire des tenseurs de localisation des déformations :

$$d\epsilon_{ij}^S = A_{ijkl}^S dE_{kl} \quad (\text{III. 8})$$

$$d\epsilon_{ij}^C = A_{ijkl}^C dE_{kl} \quad (\text{III. 9})$$

où les deux tenseurs d'ordre 4, A_{ijkl}^S et A_{ijkl}^C , représentent respectivement les tenseurs de localisation des déformations dans le substrat et dans le revêtement.

En remplaçant l'incrément des déformations locales dans le substrat, $d\epsilon_{ij}^S$, par son expression en fonction de celui des déformations locales dans le revêtement, $d\epsilon_{ij}^C$ (III. 6), dans la loi des mélanges (relation (III. 4)), on obtient :

$$dE_{ij} = \left(I_{ijkl} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right) d\epsilon_{kl}^C \quad (\text{III. 10})$$

Ainsi, la déformation locale dans le revêtement, $d\epsilon_{ij}^C$, est déduite par simple inversion tensorielle de l'expression précédente (équation (III. 10)) :

$$d\epsilon_{ij}^C = \left(I_{ijkl} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right)^{-1} dE_{kl} \quad (\text{III. 11})$$

Ce qui permet d'en déduire l'expression du tenseur de localisation des déformations dans le revêtement:

$$A_{ijkl}^C = \left(I_{ijkl} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right)^{-1} \quad (\text{III. 12})$$

En remplaçant l'incrément des déformations locales dans le revêtement, $d\epsilon_{ij}^C$, par son expression en fonction de celui des déformations locales dans le substrat, $d\epsilon_{ij}^S$ (III. 7), dans la loi des mélanges (relation (III. 4)), on obtient :

$$dE_{ij} = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-C)} \right) d\epsilon_{kl}^S \quad (\text{III. 13})$$

Ainsi, la déformation locale dans le substrat, $d\epsilon_{ij}^S$, est déduite de la même manière que celle dans le revêtement, $d\epsilon_{ij}^C$, par une simple inversion tensorielle de l'expression (III. 13) :

$$d\epsilon_{ij}^S = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-C)} \right)^{-1} dE_{kl} \quad (\text{III. 14})$$

En identifiant les deux relations (III. 14) et (III. 8), on obtient l'expression du tenseur de localisation des déformations dans le substrat comme suivant :

$$A_{ijkl}^S = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-C)} \right)^{-1} \quad (\text{III. 15})$$

ou encore en fonction du tenseur de localisation des déformations dans le revêtement, A_{ijkl}^C , en considérant l'équation (II. 11) dans le cas du modèle biphasé de la tôle revêtue :

$$A_{ijkl}^S = \frac{1}{f^S} \left(I_{ijkl} - f^C A_{ijkl}^C \right) \quad (\text{III. 16})$$

III. 2. 2. Expression de la loi macroscopique de comportement élastoplastique du "M.H.E."

En considérant les relations (II. 13), (II. 15) et (III. 16), la loi élastoplastique de comportement global du "M.H.E." reliant les champs macroscopiques de contraintes, $d\Sigma_{ij}$, et de déformations, dE_{ij} , par l'intermédiaire du tenseur des modules élastoplastiques effectifs, $C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.)$, s'écrit sous la forme tensorielle :

$$d\Sigma_{ij} = \left\{ C_{ijkl}^{ep(S)} + f^C \Delta C_{ijmn}^{ep(C-S)} A_{mnkl}^C \right\} dE_{kl} \quad (\text{III. 17})$$

où le tenseur, d'ordre 4, des modules élastoplastiques du "M.H.E." s'écrit explicitement, en remplaçant le tenseur de localisation des déformations dans le revêtement, A_{ijkl}^C , par son expression (III. 12) :

$$C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = C_{ijkl}^{ep(S)} + f^C \Delta C_{ijmn}^{ep(C-S)} \left(I_{ijkl} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right)^{-1} \quad (\text{III. 18})$$

où l'opérateur interfacial, L_{ijkl}^S , est donné d'après l'expression (II. 29) par :

$$L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) = 1/4 \left((K_{im}^S)^{-1} n_j n_n + (K_{in}^S)^{-1} n_j n_m + (K_{jm}^S)^{-1} n_i n_n + (K_{jn}^S)^{-1} n_i n_m \right) \quad (\text{III. 19})$$

La matrice de Christoffel, K_{ij}^S , déjà définie par la relation (II. 26), s'écrit en fonction du module tangent, $C_{ijkl}^{ep(S)}$, et des composantes de la normale unitaire, $\mathbf{n}(0,0,1)$, à l'interface :

$$K_{ik}^S = C_{ijkl}^{ep(S)} n_j n_l \quad (\text{III. 20})$$

La loi macroscopique de comportement élastoplastique de la tôle revêtue est déterminée dans le cas général où les constituants auraient des comportements individuels élastoplastiques isotropes ou anisotropes. Le module tangent du "M.H.E." dépend des fractions volumiques, f^S et f^C , des états de contraintes, σ_{ij}^S et σ_{ij}^C , et des histoires de chargements, ε_{ij}^S et ε_{ij}^C , par l'intermédiaire des modules tangents des deux phases, $C_{ijkl}^{ep(S)}$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}$, ainsi que des composantes de la normale unitaire, $\mathbf{n}(0,0,1)$, à l'interface substrat/revêtement.

La détermination de la loi élastoplastique de comportement macroscopique de la tôle revêtue peut aussi se faire en déterminant les expressions des tenseurs de localisation des contraintes pour chaque phase du matériau biphasé. Cela permet de déterminer la loi élastoplastique de comportement macroscopique sous une forme inverse :

$$dE_{ij} = S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) d\Sigma_{kl} \quad (\text{III. 21})$$

où le tenseur d'ordre 4, $S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = \left(C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) \right)^{-1}$, est défini comme étant l'inverse du module tangent du "M.H.E."

III. 3. Applications du modèle biphasé au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues

Deux classes de comportement sont abordées dans ce chapitre : le comportement élastique linéaire et le comportement plastique naturellement non-linéaire. Au problème de l'hétérogénéité géométrique s'ajoutent les anisotropies élastique et plastique locales (ou microscopiques) et globales (ou macroscopiques).

La résolution du problème des tôles revêtues peut se faire par méthode directe quand les comportements individuels des constituants sont connus, ce qui n'est pas toujours le cas. Pour y remédier, le modèle proposé peut aussi être utilisé comme méthode inverse.

III. 3. 1. Comportement élastique isotrope

III. 3. 1. 1. Quelques expressions analytiques : calcul direct

Les lois locales et globales de comportement mécanique peuvent être développées analytiquement, dans le cas où les constituants auraient des comportements élastiques isotropes. Dans une telle situation, les modules tangents se réduisent à leurs parties élastiques qui s'expriment en fonction des coefficients de Lamé ou du module de Young et du coefficient de Poisson de la phase (* = S ou C) considérée comme suivant :

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^* = \frac{E^* \nu^*}{(1+\nu^*)(1-2\nu^*)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E^*}{(1+\nu^*)} I_{ijkl} \quad (\text{III. 22})$$

Le fait de remplacer les tenseurs des modules élastiques des deux phases par leurs expressions isotropes, ainsi que la normale unitaire, $\mathbf{n}(n_i)$, par ses composantes, $\mathbf{n}(0,0,1)$, permet de déduire les expressions analytiques des opérateurs interfaciaux et, par la suite, celles des tenseurs de localisations et du module tangent du "M.H.E." (ou milieu effectif).

III. 3. 1. 1. 1. Expressions analytiques des opérateurs interfaciaux

L'opérateur interfacial associé aux déformations dans la phase (* = S ou C) est donné dans le cas de l'élasticité isotrope par :

$$L_{ijkl}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^*) = \left(-\frac{1+\nu^*}{E^*(1-\nu^*)} \right) n_i n_j n_k n_l + \left(\frac{1+\nu^*}{2E^*} \right) (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) \quad (\text{III. 23})$$

L'opérateur interfacial associé aux contraintes s'écrit alors :

$$P_{ijkl}^*(\mathbf{n}, \underline{C}^*) = \left(-\frac{2}{E^*(1-\nu^*)} \right) \left((\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{kl} - n_k n_l) \right) \\ + \left(\frac{E^*}{2(1+\nu^*)} \right) \left((\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{jk} - n_j n_k) - (\delta_{ij} - n_i n_j)(\delta_{kl} - n_k n_l) \right) \quad (\text{III. 24})$$

III. 3. 1. 1. 2. Expressions analytiques des tenseurs de localisation des contraintes et des déformations

En remplaçant les opérateurs interfaciaux par leurs expressions analytiques dans les différentes équations du problème, on arrive à déterminer explicitement les tenseurs de localisation associés aux champs de contraintes et de déformations et, par la suite, la loi macroscopique de comportement élastique. Pour faciliter les calculs analytiques, il était nécessaire de supposer que les coefficients de Poisson du substrat et du revêtement sont identiques ($\nu^S = \nu^C = \nu$).

Tout calcul fait, les déformations locales dans le substrat et dans le revêtement s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij}^S = \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{f^C (E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j \delta_{kl} \right. \\ + \left(\left(-\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{f^C (E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j n_k n_l \\ \left. + \left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{f^C (E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) \right\} E_{kl} \quad (\text{III. 25})$$

et

$$\varepsilon_{ij}^C = \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(-\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j \delta_{kl} \right. \\ + \left(\left(\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j n_k n_l \\ \left. + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) \right\} E_{kl} \quad (\text{III. 26})$$

Les contraintes locales dans le substrat et dans le revêtement sont données par les expressions analytiques suivantes :

$$\sigma_{ij}^S = \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{f^C (E^C - E^S)}{E^S + f^C (E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k n_l \right. \\ \left. + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{f^C (E^C - E^S)}{E^S + f^C (E^C - E^S)} \right) \left((\delta_{ik} - n_i n_k) (\delta_{jk} - n_j n_k) + (\delta_{il} - n_i n_l) (\delta_{jk} - n_j n_k) \right) \right\} \Sigma_{kl} \quad (\text{III. 27})$$

et

$$\sigma_{ij}^C = \left\{ I_{ijkl} - \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + f^C (E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k n_l \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + f^C (E^C - E^S)} \right) \left((\delta_{ik} - n_i n_k) (\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{il} - n_i n_l) (\delta_{jk} - n_j n_k) \right) \right\} \Sigma_{kl} \quad (\text{III. 28})$$

III. 3. 1. 1. 3. Expression analytique de la loi de comportement macroscopique : tenseur des modules élastiques du "M.H.E."

Ainsi, en introduisant le tenseur de souplesse du "M.H.E.", $S_{ijkl}(M.H.E.)$, la loi macroscopique de comportement élastique pour des constituants isotrope s'écrit :

$$E_{ij} = \left\{ \left(\frac{-\nu}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + (1+\nu) \left(f^C \frac{1}{E^C} + (1-f^C) \frac{1}{E^S} \right) I_{ijkl} \right. \\ - \left(\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{f^C (1-f^C) (E^C - E^S)^2}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) n_i n_j n_k n_l \\ \left. - \left(\left(\frac{1+\nu}{2} \right) \frac{f^C (1-f^C) (E^C - E^S)^2}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \left((\delta_{ik} - n_i n_k) (\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{il} - n_i n_l) (\delta_{jk} - n_j n_k) \right) \right\} \Sigma_{kl} \quad (\text{III. 29})$$

En adoptant la notation indicielle de Voigt à deux indices (§. A. 2), les composantes de ce tenseur s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_{11}(M.H.E.) = \frac{1}{E_1} = S_{22}(M.H.E.) = \frac{1}{E_2} = \frac{1}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \\
 S_{33}(M.H.E.) = \frac{1}{E_3} = \frac{1}{E^S} + f^C \left(\frac{1}{E^C} - \frac{1}{E^S} \right) \left(1 - \left(\frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \left(\frac{f^C (1-f^C) (E^S - E^C)}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \right) \\
 S_{12}(M.H.E.) = \frac{-\nu_{12}}{E_1} = \frac{-\nu}{f^C E^C + (1-f^S) E^S} \\
 S_{13}(M.H.E.) = \frac{-\nu_{13}}{E_1} = \frac{-\nu}{f^C E^C + (1-f^S) E^S} \\
 S_{44}(M.H.E.) = \frac{1}{2\mu_{23}} = S_{55}(M.H.E.) = \frac{1}{2\mu_{13}} = \frac{1+\nu}{2} \left(f^C \frac{1}{E^C} + (1-f^C) \frac{1}{E^S} \right) \\
 S_{66}(M.H.E.) = \frac{1}{2\mu_{12}} = \frac{1+\nu_{12}}{E_1} = \frac{1+\nu}{f^C E^C + (1-f^C) E^S}
 \end{array} \right. \quad (III. 30)$$

Le "M.H.E." dont les propriétés mécaniques élastiques sont maintenant définies, présente une isotropie transverse suivant la normale unitaire aux interfaces, c'est-à-dire autour de la direction $\vec{o}z$.

Ainsi, le "M.H.E." est caractérisé par 5 coefficients indépendants d'isotropie transverse :

- 2 modules de Young : E_1 et E_3 ,
- 2 coefficients de Poisson : ν_{12} et ν_{13} ,
- et 1 module de cisaillement : μ_{13} .

Pour un essai de traction uniaxiale suivant la direction 11, Σ_{11} , les contraintes locales correspondantes, dans le substrat et dans le revêtement, sont données par :

$$\sigma_{11}^S = \left(\frac{E^S}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \Sigma_{11} \quad \text{et} \quad \sigma_{11}^C = \left(\frac{E^C}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \Sigma_{11} \quad (III.31)$$

Avec l'hypothèse des revêtements très minces, $0 \leq f^C \ll f^S \leq 1$, on obtient, par approximation, des expressions analytiques (plus simples) des deux contraintes locales, mais importantes :

$$\sigma_{11}^S \approx \Sigma_{11} \quad \text{et} \quad \sigma_{11}^C = \left(\frac{E^C}{E^S} \right) \Sigma_{11} \quad (III.32)$$

On peut prédire alors, pour une très faible fraction volumique du revêtement, une contrainte locale, σ_{11}^S , dans le substrat du même ordre de grandeur que la contrainte appliquée, Σ_{11} , et une contrainte locale dans le revêtement, qui dépend du rapport des modules de Young, $\frac{E^C}{E^S}$, des deux phases. Ainsi,

pour un revêtement mince et moins dure que le substrat (c'est-à-dire $E^C \leq E^S$), la contrainte locale dans le revêtement est inférieure à la contrainte appliquée ($\sigma_{11}^C \leq \Sigma_{11}$).

Avec la même approximation, le module de Young du "M.H.E." dans le plan de la tôle est du même ordre de grandeur que celui du substrat :

$$E_1 = E_2 = f^C E^C + (1 - f^C) E^S \approx E^S \quad (\text{III.33})$$

Cela constitue un résultat très important, dans la mesure où le problème d'optimisation de la microstructure, pour obtenir le meilleur comportement macroscopique, devient complètement résoluble.

Dans le cas, général où les constituants sont anisotropes, il devient impossible d'explicitier les calculs, ce qui exige l'utilisation d'un calcul numérique. Si en plus le revêtement est difficile à caractériser expérimentalement, le problème ne pourrait se résoudre que par méthode numérique inverse. Cela fera l'objet des paragraphes qui suivent (§. III. 3. 1. 2, etc.).

III. 3. 1. 2. Identification des modules d'élasticité du "M.H.E." : méthode directe

Comme première application du modèle biphasé au comportement mécanique des tôles revêtues, on considère le cas d'un comportement élastique linéaire d'une tôle d'acier S15 revêtue des deux côtés d'une mince couche de Zinc électrodéposée (produit[®] SOLLAC[©]). La tôle revêtue est soumise à un chargement mécanique macroscopique, Σ_{11} (traction uniaxiale), à température ambiante et sans dépasser les limites d'élasticité des deux phases de façon à rester en régime élastique.

En supposant que les caractéristiques mécaniques élastiques de l'acier et du revêtement sont connues, il est facile d'en déduire celles du "M.H.E." par méthode directe, mais, ce n'est pas toujours le cas. En effet, l'une des difficultés du problème est la caractérisation du revêtement de Zinc (par ex) qui possède des propriétés mécaniques différentes de celle du Zinc pur donc inaccessibles expérimentalement (§. I). Cela est dû au processus d'électrodéposition qui s'accompagne de phénomènes physico-chimiques assez complexes (diffusion, par ex).

Le modèle proposé permet de résoudre ce problème moyennant une méthode inverse, généralement numérique, à condition de connaître les caractéristiques mécaniques de l'acier aux états nu et revêtu. Mais, en manque de résultats expérimentaux fiables pour pouvoir appliquer cette approche, il était

convenu de considérer les caractéristiques élastiques de l'acier nu et du revêtement de Zinc comme connus et d'identifier par méthode directe les caractéristiques élastiques de la tôle revêtue.

La tentative d'identification du module de Young du revêtement à l'aide d'un dispositif expérimentale, dit GRINDOSONIC (développé à l'école des mines de Nancy, S. SANCHETTE et M. NIVOIT), utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernouilli en comportement dynamique, n'a pas abouti. En effet, ce procédé étant basé sur la mesure des fréquences propres de vibration en flexion, ne permet pas d'identifier les modules de Young en traction !

Pour réduire la difficulté du problème, on considère le cas où les deux phases de la tôle revêtue sont élastiques isotropes, c'est-à-dire que les modules de Young, ainsi que les coefficients de Poisson dans les différentes directions sont identiques ($E_1^* = E_2^* = E_3^*$ et $\nu_{12}^* = \nu_{13}^* = \nu_{23}^*$). Les données du problème sont alors les caractéristiques mécaniques (modules de Young et coefficients de Poisson) et géométriques (épaisseurs) de l'acier nu et du revêtement (valeurs issues de la littérature). Les caractéristiques mécaniques du "M.H.E." sont calculées et regroupées dans le tableau ci-dessous (Tableau. III. 1.).

	Epaisseurs	Modules de Young	Coefficients de Poisson	$\sigma_{11}^S, \sigma_{11}^C, \Sigma_{11}$ (MPa)
	$e^S, e^C/2, e$	E_1, E_2, E_3 (GPa)	$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	MODELE
Substrat (Acier)	0.8 mm	210.0	0.2900	50.65
Revêtement (Zinc)	10. μ m	99.2	0.2600	23.74
"M.H.E." (MODELE)	0.82 mm	207.3	0.2896	50.00
		207.3	0.2891	
		204.8	0.2891	

Tableau. III. 1. Propriétés mécaniques élastiques du substrat, du revêtement de Zinc, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE.

L'un des résultats les plus importants est l'isotropie transverse autour de l'axe \vec{oz} que présente le "M.H.E." pour des phases élastiques isotropes ((§. III. 3. 1. 1. 3) et (§. A. 2)).

Les résultats donnés dans le tableau ci-dessus (Tableau. III. 1.) montre l'effet du revêtement sur la répartition des contraintes locales, pour une faible fraction volumique du revêtement ($f^C \approx 2.44\%$). La contrainte locale dans le substrat est de même ordre de grandeur que celle appliquée ($\sigma_{11}^S \approx \Sigma_{11}$), mais elle est beaucoup plus faible dans le revêtement ($\sigma_{11}^C \ll \Sigma_{11}$), en raison du module de Young peu élevé par rapport à celui de l'acier (§. III. 3. 1. 1. 3).

Pour mettre en évidence l'effet du module de Young, E^C , du revêtement sur le comportement élastique macroscopique du "M.H.E.", un autre type de revêtement d'alliage ZnNi (90.% Zinc + 10.% Nickel) de module de Young plus élevé que le Zinc est étudié.

Ainsi, les caractéristiques mécaniques (modules de Young et coefficients de Poisson) et géométriques (épaisseurs) du "M.H.E." sont calculées par méthode directe à partir de celles de l'acier et du revêtement et regroupées dans le tableau ci-dessous (Tableau. III. 2.).

	Epaisseurs	Modules de Young	Coefficients de Poisson	$\sigma_{11}^S, \sigma_{11}^C, \Sigma_{11}$ (MPa)
	$e^S, e^C/2, e$	E_1, E_2, E_3 (GPa)	$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	MODELE
Substrat (Acier)	0.8 mm	210.0	0.2900	50.60
Revêtement (ZnNi)	10. μ m	108.3	0.2630	25.89
"M.H.E." (MODELE)	0.82 mm	207.5	0.2896	50.00
		207.5	0.2892	
		205.6	0.2892	

Tableau. III. 2. Propriétés mécaniques élastiques du substrat, du revêtement ZnNi, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE.

Donc, un module de Young plus élevé du revêtement a pour effet d'augmenter le module de Young du "M.H.E." et de perturber moins l'état de contrainte dans le substrat (σ_{11}^S (en présence du ZnNi) $<$ σ_{11}^S (en présence du Zinc)).

Le saut des contraintes locales dépend étroitement des modules de Young des deux phases ; il est d'autant plus important que la différence entre les modules de Young des deux phases est importante. Un revêtement d'alliage ZnNi (plus dure que le Zinc) fait augmenter la contrainte locale (de type "élastique") dans le revêtement (σ_{11}^C (Zinc) $<$ σ_{11}^C (ZnNi)) ce qui fait baisser la valeur du saut.

En manque de résultats expérimentaux et surtout de méthode expérimentale pour la validation de notre modèle dans le cas élastique, nous proposons d'utiliser le code de calcul d'éléments finis ABAQUS comme moyen de vérification. En effet, le calcul analytique dans le cas de l'élasticité isotrope ne constitue qu'une méthode de validation des calculs numériques.

III. 3. 1. 3. Vérification du modèle Biphase par le code d'éléments finis ABAQUS

Le fait de comparer notre modèle micromécanique à ABAQUS (pris comme référence) représente une méthode de validation largement utilisée dans les grandes industries comme au LEDEPP (SOLLAC).

Pour ce faire, on a choisit des éléments rectangulaires 2D à 4 points de Gauss pour les deux phases de la tôle revêtue. L'éprouvette est encastree d'un seul côté avec des nœuds pouvant se déplacer suivant l'axe d'encastrement de manière à minimiser les effets de bord. L'ensemble est soumis à une traction uniaxiale, $\Sigma_{11} = 50$. MPa, dans le plan de la tôle (la Figure. III. 2. correspond à une épaisseur $e^c/2 = 0.1$ mm/face, alors que la Figure III. 3. correspond à une épaisseur de 10. μm /face).

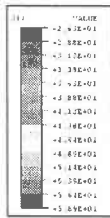
Les propriétés mécaniques locales (de l'acier et du revêtement de Zinc) représentent les données du problème. Les caractéristiques effectives (du "M.H.E.") issues du modèle, ainsi que les résultats de la simulation par ABAQUS sont regroupés dans le tableau ci-dessous (Tableau. III. 3.).

	Epaisseurs $e^s, e^c/2, e$	Modules de Young E_1, E_2, E_3 (GPa)	Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	$\sigma_{11}^s, \sigma_{11}^c, \Sigma_{11}$ (MPa)	
				MODELE	ABAQUS
Substrat (Acier)	0.8 mm	210.0	0.2900	50.65	51.20
Revêtement (Zinc)	10. μm	99.2	0.2600	23.74	23.90
"M.H.E." (MODELE)	0.82 mm	207.3	0.2896	50.00	---
		207.3	0.2891		
		204.8	0.2891		
"M.H.E." (ABAQUS)	0.82 mm	207.2	---	---	50.00

Tableau. III. 3. Propriétés mécaniques élastiques du substrat, du revêtement de Zinc, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE comparées à celles obtenues par le CEF (ABAQUS).

Les résultats obtenus en élasticité à partir du modèle biphase de la tôle revêtue correspondent bien à ceux obtenus par le CEF (code d'éléments finis) ABAQUS, qui est rentré dans les mœurs grâce à une large utilisation dans les industries pour le calcul de structures.

ABAQUS



Program = biphas 0.8-E_acier=210000 MPa 0.01-E_revet=99250 MPa E_eff=207160 MPa
 TIME COMPLETED IN THIS STEP 1.00 TOTAL ACCUMULATED TIME 1.00
 ABAQUS VERSION: 5.6-1 DATE: 03-FEB-99 TIME: 14:53:25 TOLLALI: .12mm

Figure. III. 2. Résultats obtenus par le CEF ABAQUS pour un essai de TUDL.

ABAQUS

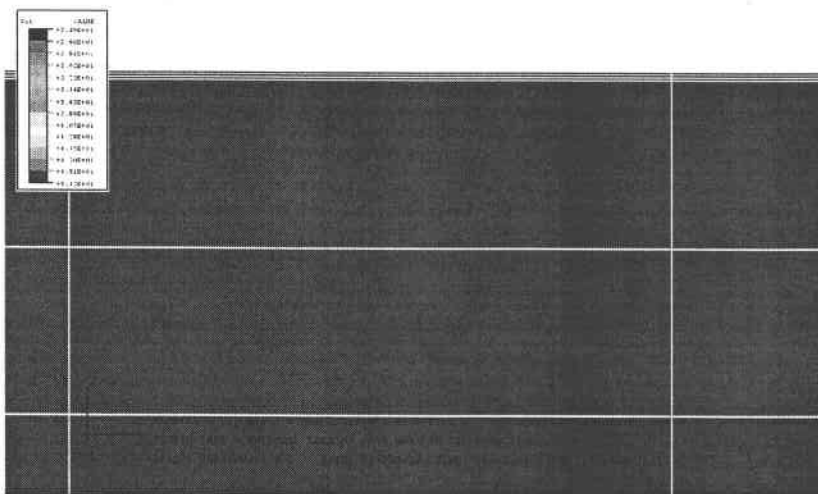


Figure. III. 3. Résultats obtenus par le CEF ABAQUS.

III. 3. 2. Comportement élastoplastique anisotrope

Comme deuxième application du modèle biphasé au comportement mécanique des tôles revêtues, on considère le cas d'un comportement élastoplastique d'une tôle d'acier S15 revêtue des deux côtés d'une mince couche de Zinc ou d'alliage ZnNi électrodéposée (produit[®] SOLLAC[®] connu sous le nom A1198). La tôle revêtue est soumise à un chargement mécanique macroscopique, Σ_{ij} , au-delà des limites d'élasticité des deux phases de façon à rentrer en régime plastique et atteindre des pourcentages de déformation assez significatifs (10.%, par ex.).

III. 3. 2. 1. Identification des paramètres de plasticité : coefficients d'anisotropie de Hill et Coefficients d'écrouissage

III. 3. 2. 1. 1. Coefficients de Hill (*F, G, H, L, M et N*)

L'identification des six coefficients d'anisotropie plastique de Hill nécessite la réalisation de plusieurs essais expérimentaux de traction, de compression et de cisaillement dans toutes les directions principales du matériau. Mais, dans le cas de tôles minces, il devient très délicat d'accéder à certains paramètres à partir de l'expérience.

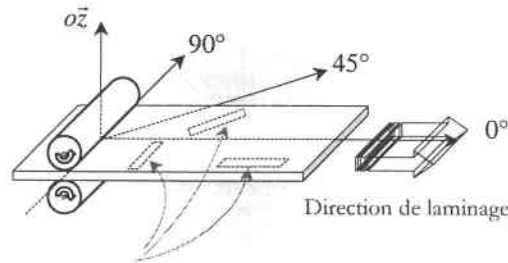
En respectant la forme d'écriture du critère de Hill, on peut écarter la possibilité de réaliser des essais de traction et de compression, σ_{33} , suivant l'axe principal \vec{oz} ou de cisaillement, σ_{13} et σ_{23} , autour des axes \vec{ox} et \vec{oy} . Cela permet de négliger les deux coefficients de Hill, *L* et *M*, afin de respecter les conditions de contraintes planes, c'est-à-dire de chargement en mode membrane. Toutefois, il est possible de résoudre ce problème par simulation numérique à partir de considérations cristallographiques basées sur les orientations des textures, en utilisant le logiciel SOLCRYST^{®(1)} développé au LEDEPP (SOLLAC).

Dans ce qui suit, on ne tiendra compte que des quatre coefficients d'anisotropie, *F*, *G*, *H* et *N*, dans le cas général d'anisotropie orthotrope. Leur identification se fait à partir des coefficients de Lankford à 0, 45 et 90 degrés de la direction de laminage de la tôle (Figure. III. 4.).

En combinant les résultats expérimentaux et les résultats théoriques de l'expression établie par Lankford [25], on obtient une bonne estimation des valeurs des coefficients de Hill. Pour ce faire, trois

⁽¹⁾ X. LEMOINE et M. BERVEILLER.

essais uniaxiaux de tractions suivant la direction 11 ou DL (Direction Long à 0° de la direction de laminage), la direction 22 ou DT (Direction Travers à 90° de la direction de laminage) et la direction DD (Direction Diagonale à 45° de la direction de laminage) sont nécessaires.



Eprouvettes d'essais découpées à 0° , 45° et 90° de la direction de laminage

Figure. III. 4. Schéma présentant des échantillons de tractions découpés dans une tôle laminée.

L'expression du coefficient de Lankford, r_α , suivant l'angle de sollicitation, α° , est donnée par Jackson et al. (1948) [25] et Yamada (1969) [54] (§. A.2) :

$$r_\alpha = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha} \quad (\text{III. 22})$$

Ainsi, pour trois essais de traction uniaxiale ($\alpha = 0^\circ$, 90° et 45°), on obtient les expressions suivantes :

$$r_{0^\circ} = \frac{H}{G}, \quad r_{90^\circ} = \frac{H}{F} \quad \text{et} \quad \frac{N}{H} = \left(r_{45^\circ} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right), \quad (\text{III. 23})$$

ainsi que la relation importante, qui relie les coefficients de Hill (F , G , H et N) aux valeurs des contraintes uniaxiales à 10.% de déformation plastique (Chen, 1988) [8] :

$$\frac{1}{\sigma_{0^\circ}^2} : \frac{1}{\sigma_{90^\circ}^2} : \frac{1}{\sigma_{45^\circ}^2} = (G + H) : (F + H) : \left(\frac{F + G + 2N}{4} \right) \quad (\text{III. 24})$$

Ainsi, on obtient un système de quatre équations (III. 23 et III. 24) à quatre inconnues (F , G , H et N), ce qui permet de déduire les quatre coefficients d'anisotropie plastique de Hill dans le cas de contraintes planes, comme suivant :

$$F = 2 \left(\frac{\sigma_{90^\circ}}{\sigma_{0^\circ} \sigma_{45^\circ}} \right)^2 \left(\frac{(1 + r_{90^\circ})}{r_{90^\circ}^2 (1 + r_{45^\circ}) \left(1 + \frac{1}{r_{0^\circ}} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right)} \right),$$

$$G = 2 \left(\frac{\sigma_{90^\circ}}{\sigma_{0^\circ} \sigma_{45^\circ}} \right)^2 \left(\frac{(1 + r_{90^\circ})}{r_{0^\circ} r_{90^\circ} (1 + r_{45^\circ}) \left(1 + \frac{1}{r_{0^\circ}} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right)} \right),$$

$$H = 2 \left(\frac{\sigma_{90^\circ}}{\sigma_{0^\circ} \sigma_{45^\circ}} \right)^2 \left(\frac{(1 + r_{90^\circ})}{r_{90^\circ} (1 + r_{45^\circ}) \left(1 + \frac{1}{r_{0^\circ}} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right)} \right),$$

et

$$N = 2 \left(\frac{\sigma_{90^\circ}}{\sigma_{0^\circ} \sigma_{45^\circ}} \right)^2 \left(\frac{(1 + r_{90^\circ}) \left(\frac{1}{2} + r_{45^\circ} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right)}{r_{90^\circ} (1 + r_{45^\circ}) \left(1 + \frac{1}{r_{0^\circ}} \right) \left(\frac{1}{r_{0^\circ}} + \frac{1}{r_{90^\circ}} \right)} \right) \quad (\text{III. 25})$$

Une fois calculés, ces quatre coefficients de Hill servent à déterminer la courbe de la contrainte équivalente, σ_e , en fonction de la déformation plastique équivalente, ε_e^p , ce qui permet d'identifier les coefficients d'écrouissage plastique n et K . Cela fera l'objet du paragraphe qui suit.

III. 3. 2. 1. 2. Coefficients d'écroutissage (n et K)

L'identification des coefficients d'écroutissage plastique, dans le cas d'un comportement élastoplastique anisotrope, ne se fait pas directement à partir du résultat brut de l'essai expérimental de traction uniaxiale, comme dans le cas d'un matériau de von Mises. Dans le cas d'un matériau anisotrope de Hill, les taux de déformations plastiques dans les trois directions principales, pour un essai de traction suivant 11 (ou TUDL), par exemple, ne sont pas identiques, c'est-à-dire $d\epsilon_{22}^p \neq d\epsilon_{33}^p$ mais, vérifient toujours la condition d'incompressibilité plastique $d\epsilon_{ii}^p = 0$. Donc, il devient aberrant de confondre la déformation plastique équivalente, $d\epsilon_e^p$, avec la déformation plastique suivant 11, $d\epsilon_{11}^p$, ainsi que la contrainte équivalente, σ_e , avec la contrainte de traction, σ_{11} , et d'identifier directement, n et K . Pour résoudre ce problème, il convient de faire un calcul permettant de passer de la courbe $\epsilon_{11}^p - \sigma_{11}$ à la courbe $\epsilon_e^p - \sigma_e$, en faisant intervenir les coefficients d'anisotropie de Hill. Cela permet de respecter la loi-puissance expérimentale de Ludwik (eqn (II. 66)) apparaissant dans le critère de plasticité comme force critique et faisant intervenir la contrainte et la déformation équivalente et non pas les tenseurs correspondants.

Un seul essai de traction suffit alors pour identifier les coefficients d'écroutissage, n et K , ainsi que la limite élastique, σ_0 , prise par convention comme étant la contrainte à $R_p = 0.02\%$ de déformation plastique.

La courbe expérimentale contrainte-déformation est donnée par un polynôme de degré 6 en $\epsilon_{uniaxiale}^p$ comme suivant :

$$\sigma_{uniaxiale} = \sum_{l=0}^6 A_l \epsilon_{uniaxiale}^p{}^l \quad (\text{III. 26})$$

où A_l ($l=1,2, \dots,6$) représente les six coefficients du polynôme.

Sachant que les coefficients de Hill sont connus, l'identification des coefficients d'écroutissage, n et K , de la loi-puissance de Ludwik (II. 66) se fait à partir de la courbe $\sigma_e - \epsilon_e^p$, en utilisant l'algorithme suivant (Algorithme. III. 1.) :

Exemple de la traction uniaxiale suivant 11 (TUDL)

A chaque incrément $d\varepsilon_{11}^p$ correspond des incréments $d\varepsilon_{22}^p$ et $d\varepsilon_{33}^p$, afin que l'hypothèse d'incompressibilité plastique, $d\varepsilon_{11}^p + d\varepsilon_{22}^p + d\varepsilon_{33}^p = 0$, soit vérifiée.

Etat initial : $\sigma_{11}^m, \varepsilon_{11}^{p^m}, \sigma_e^m, \varepsilon_e^{p^m}$

[imposer] : $d\varepsilon_{11}^p$

[calculer] : $d\varepsilon_{22}^p = \frac{-H}{H+G} d\varepsilon_{11}^p,$

$d\varepsilon_{33}^p = \frac{-G}{H+G} d\varepsilon_{11}^p$ et $d\varepsilon_e^p$

[calculer] : $\sigma_{11} = \sum_{l=0}^6 A_l \varepsilon_{11}^{p^l}$

iter=iter+1

avec $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = \sigma_{12} = 0$

[calculer] : $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{(G+H)}{(F+G+H)}} \sigma_{11}$

$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^{p^{m+1}} \leftarrow \varepsilon_{ij}^{p^m} + d\varepsilon_{ij}^p \\ \varepsilon_e^{p^{m+1}} \leftarrow \varepsilon_e^{p^m} + d\varepsilon_e^p \end{cases}$ et $\begin{cases} \sigma_{ij}^{m+1} \leftarrow \sigma_{ij} \\ \sigma_e^{m+1} \leftarrow \sigma_e \end{cases}$

Etat réactualisé : $\sigma_{11}^{m+1}, \varepsilon_{11}^{p^{m+1}}, \sigma_e^{m+1}, \varepsilon_e^{p^{m+1}}$

Algorithme. III. 1. Méthode d'obtention de la courbe $\sigma_e - \varepsilon_e^p$ permettant l'identification des coefficients d'écroutissage n et K .

III. 3. 2. 2. Application aux tôles d'acier revêtues d'alliage ZnNi : méthode inverse

On considère le cas d'une tôle d'acier d'épaisseur, $e^s = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche d'alliage ZnNi d'épaisseur $e^c = 0.01$ mm/face.

Les caractéristiques élastiques du "M.H.E" sont calculées par méthode directe à partir de celles de l'acier et du revêtement qui sont supposées connues. Cependant, les caractéristiques plastiques du revêtement sont complètement inconnues ; seules les caractéristiques mécaniques de la tôle nue et de la tôle revêtue sont accessibles après un traitement (§. III. 2. 1) des résultats des essais expérimentaux réalisés au LEDEPP (SOLLAC). Pour remédier à ce problème, on utilise le modèle biphasé de la tôle revêtue comme méthode inverse, afin de déterminer le comportement mécanique du revêtement de ZnNi de façon à reproduire les résultats obtenus expérimentalement pour la tôle nue et la tôle revêtue.

Ainsi, les caractéristiques mécaniques élastiques (modules de Young et coefficients de Poisson) et géométriques (épaisseurs ou fractions volumiques) pour l'acier et le revêtement (données du problème), ainsi que celles du "M.H.E." (calculées par méthode directe) sont regroupées dans le premier tableau (Tableau. III. 4.a.).

Les caractéristiques mécaniques plastiques (coefficients de Lankford, coefficients de Hill, limites d'élasticité et coefficients d'érouissage) de la tôle nue et de la tôle revêtue (données du problème), ainsi que celles du revêtement de ZnNi (calculées par méthode inverse) sont regroupées dans le deuxième tableau (Tableau. III. 4.b.).

	Substrat	Revêtement	"M.H.E." (MODELE)
	(Acier)	(ZnNi)	(ZnNi+Acier+ZnNi)
Epaisseurs $e^s, e^c/2, e$ (mm)	0.80	0.01	0.82
Modules de Young E_1, E_2, E_3 (MPa)	208 000.	108 300.	205 572.
	---	---	205 572.
	---	---	203 717.
Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	0.3	0.2630	0.2995
			0.2989
			0.2989

Tableau. III. 4.a. Propriétés mécaniques élastiques du substrat, du revêtement ZnNi, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE (méthode directe).

	Substrat (Acier)	Revêtement (ZnNi)	"M.H.E." (MODELE) (ZnNi+Acier+ZnNi)
Coefficients de Lankford $r_{0^\circ}, r_{45^\circ}, r_{90^\circ}$	1.85	0.10	1.70
	1.92	1.00	1.71
	2.45	0.10	1.78
Coefficients de HILL F, G, H, N (MPa ⁻²)	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$
	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.08 \cdot 10^{-6}$
	$5.73 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.24 \cdot 10^{-6}$
	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
Limites élastiques σ_0 (MPa)	146.	100.	148.
Coefficients d'écroutissage plastique n, K	0.51	0.14	0.53
	757.	650.	735.

Tableau. III. 4.b. Propriétés mécaniques plastiques du substrat, du revêtement ZnNi, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE (méthode inverse).

Dans les paragraphes qui suivent, on se propose de discuter en détail les résultats des simulations numériques du comportement élastoplastique de la tôle d'acier revêtue d'alliage ZnNi.

III. 3. 2. 2. 1. Effet du revêtement de ZnNi sur le comportement élastoplastique anisotrope de la tôle d'acier

La plasticité anisotrope de l'acier nu, du revêtement et du "M.H.E." peut être étudiée pour différents trajets de chargements à partir des surfaces de charges associées données par le critère de Hill. Ainsi, pour différents types de tractions biaxiales dans le plan de la tôle, les trois surfaces de charge, à 10.% de déformation plastique équivalente, ε_p^p , sont données par la figure (Figure. III. 5.).

Les axes principaux des ellipses (ou surfaces de charges) d'anisotropie plastique de la tôle nue et de la tôle revêtue sont légèrement inclinés par rapport à la diagonale principale ($x = y$) du repère. Cela révèle le caractère anisotrope du matériau étudié. Cette anisotropie plastique doit être atténuée par la présence d'un revêtement isotrope dans le plan de la tôle, mais pour une faible fraction volumique, $f^c \approx 2.44\%$, du revêtement, il est difficile de distinguer entre les surfaces de plasticité de l'acier nu et de l'acier revêtu.

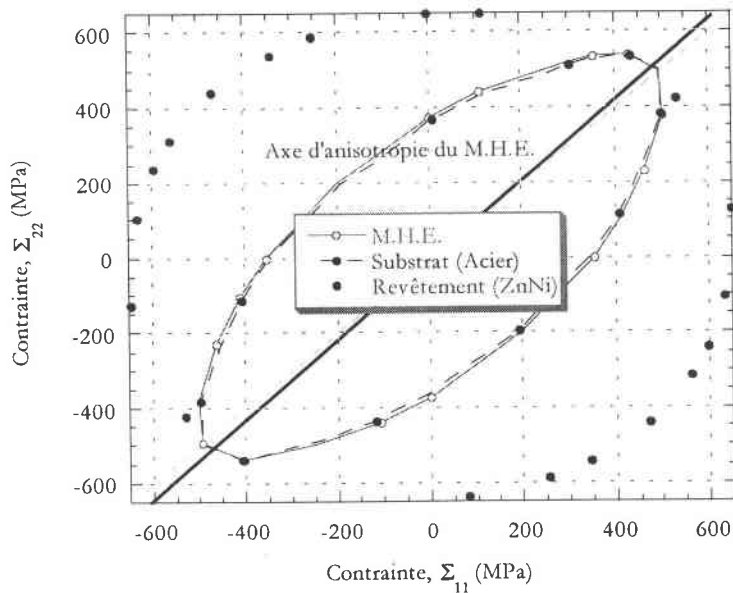


Figure. III. 5. Surface de charge de l'acier, du revêtement et du "M.H.E." à 10.0% de déformation plastique équivalente ϵ_e^p .

Les courbes de traction correspondant à un essai uniaxial suivant 11 (ou TUDL) révèlent le caractère plus rigide de l'acier revêtu par rapport à l'acier nu. Ceci est dû à une très grande rigidité (ou dureté) du revêtement de ZnNi dont le comportement élastoplastique est déterminé par méthode inverse (Figure. III. 6). L'effet n'est pas trop important, en raison de la très faible épaisseur du revêtement d'où une faible fraction volumique, $f^C \approx 2.44\%$, et une importante fraction volumique, $f^S \approx 97.56\%$, pour l'acier.

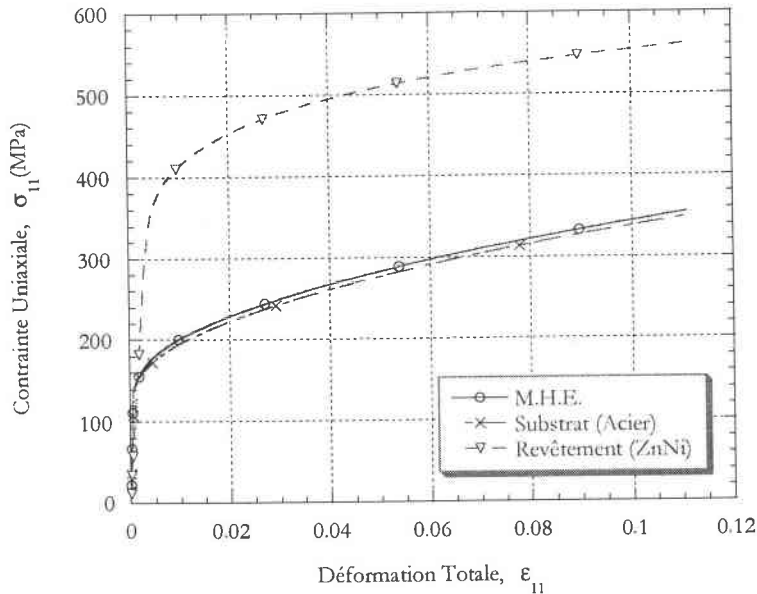


Figure. III. 6. Comportement élastoplastique de l'acier, du revêtement et du "M.H.E." pour un essai TUDL.

III. 3. 2. 2. Effet du revêtement de ZnNi sur l'évolution des contraintes locales dans les deux phases de la tôle d'acier revêtue

Les contraintes locales dans l'acier, σ_{ij}^S , et dans le revêtement, σ_{ij}^C , n'évoluent pas de la même manière, ce qui justifie la discontinuité du champ de contraintes au passage des interfaces (saut de contraintes). On peut distinguer entre deux zones différentes (élastique et plastique) : la première constitue une situation dans laquelle la contrainte dans le revêtement est moins importante que celle dans l'acier ; cela s'explique par une forte dépendance des contraintes locales des modules d'élasticité locaux (modules de Young, E^S et E^C). La deuxième représente une situation inverse correspondant à une contrainte dans le revêtement, σ_{11}^C , beaucoup plus importante que celle dans l'acier σ_{11}^S ; ceci est dû à un important écrouissage plastique du revêtement, en raison de son caractère dur. Cependant, pour une très faible épaisseur du revêtement, la contrainte locale dans l'acier reste du même ordre de grandeur que la contrainte macroscopique Σ_{11} (Figure. III. 7.).

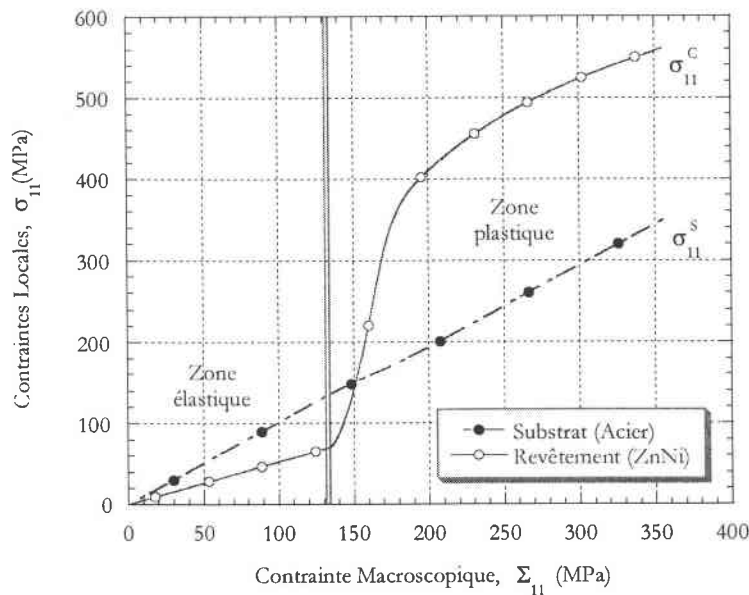


Figure. III. 7. Evolution des contraintes locales en fonction du chargement pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL.

Pendant les procédés de mise en forme (par emboutissage, par ex), la tôle d'acier peut être sollicitée dans le plan (\vec{ox}, \vec{oy}) suivant plusieurs directions correspondants à différents rapports de contraintes $c = \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_{22}}$. La localisation de la déformation est ensuite prédite à l'aide des courbes limite de formage (CLF) dans le plan des déformations principale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ (par convention).

$$\Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Sigma_{22} = \Sigma_{11}/c$$

Ainsi, pour simuler différents trajets de chargements dans le plan de la tôle, on a considéré des types de chargements biaxiaux pour différents rapports de contraintes macroscopiques :

- TUDL ($\Sigma_{11} \neq 0$ et $\Sigma_{22} = 0 \Rightarrow c = +\infty$)
- Traction Biaxiale ($\Sigma_{11} \neq 0$ et $\Sigma_{22} \neq 0 \Rightarrow c = +2$.)
- Traction Equibiaxiale ($\Sigma_{11} \neq 0$ et $\Sigma_{22} \neq 0 \Rightarrow c = +1$.)
- TUDT ($\Sigma_{11} = 0$ et $\Sigma_{22} \neq 0 \Rightarrow c = 0$)

Les états locaux de contraintes dans chacune des phases dépendent des trajets de chargements macroscopiques, et le saut de contraintes atteint son minimum pour le chargement équi-biaxial ($c = +1$). Les courbes limite locales en terme de contraintes sont données par la figure ci-dessous (Figure. III.8.).

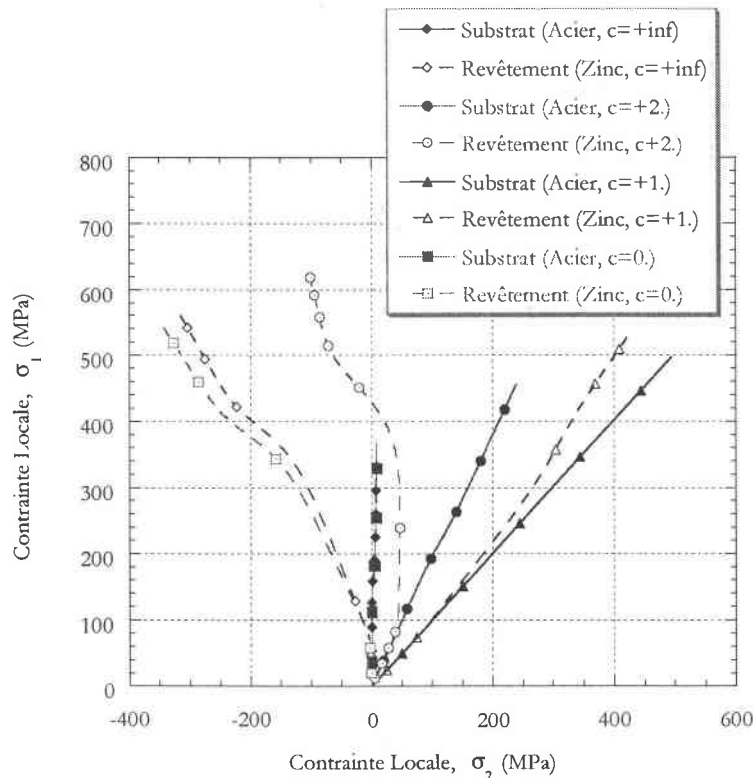


Figure. III. 8. Evolution des contraintes locales pour différents trajets de chargements jusqu'à 10.% de déformation plastique.

III. 3. 2. 2. 3. Effet du revêtement de ZnNi sur l'apparition des contraintes résiduelles après décharge élastique

Dans le cas d'un matériau homogène, la décharge élastique jusqu'à contrainte nulle, après un chargement élastoplastique, se fait sans laisser la moindre contrainte résiduelle, ce qui est loin d'être le cas pour les matériaux hétérogènes. L'existence de plusieurs phases de propriétés mécaniques et morphologiques différentes dans un matériau hétérogène, conduit à des concentrations de contraintes, qui diffèrent d'une phase à l'autre et, par la suite, à l'apparition des contraintes résiduelles après décharge.

Le fait de soumettre la tôle d'acier revêtue de ZnNi à un chargement mécanique monotone (TUDL) conduisant à une réponse élastoplastique et de supprimer la contrainte appliquée par décharge élastique,

après 10.% de plasticité, entraîne l'apparition de contraintes résiduelles. Après décharge et à contrainte macroscopique nulle, $\Sigma_{11} = 0$. MPa, le substrat se trouve dans un état de très légère compression, $\sigma_{11}^s \approx -10$. MPa (contrainte résiduelle dans le substrat), alors que le revêtement se trouve dans un état d'une importante traction $\sigma_{11}^c \approx +380$. MPa (contrainte résiduelle dans le revêtement) (Figure. III. 9).

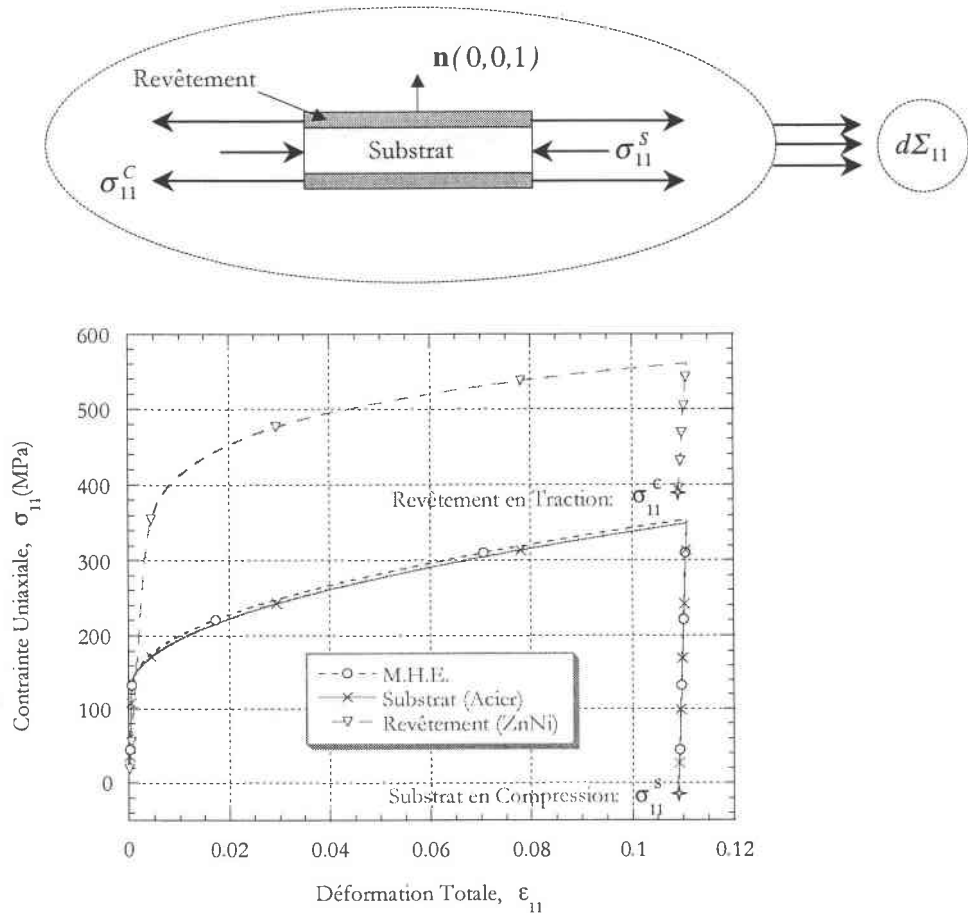


Figure. III. 9. Etat de contraintes locales résiduelles après décharge pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL.

III. 3. 2. 2. 4. Effet du revêtement de ZnNi sur l'anisotropie plastique de la tôle d'acier

L'étude de l'anisotropie plastique représente un intérêt particulier, dans la mesure où la maîtrise de la mise en forme, qui nécessite des trajets de chargements complexes, en dépend directement. Cette anisotropie plastique est mise en évidence par des réponses élastoplastiques changeantes avec la direction de sollicitation. Ainsi, pour la nuance d'acier nu connue sous le nom de laboratoire S15, et la

même nuance d'acier à l'état revêtu (revêtement de ZnNi) connue sous le nom A1198, les courbes de tractions uniaxiales suivant 11 et 22 (TUDL et TUDT) ne sont pas identiques (Figure. III. 10.).

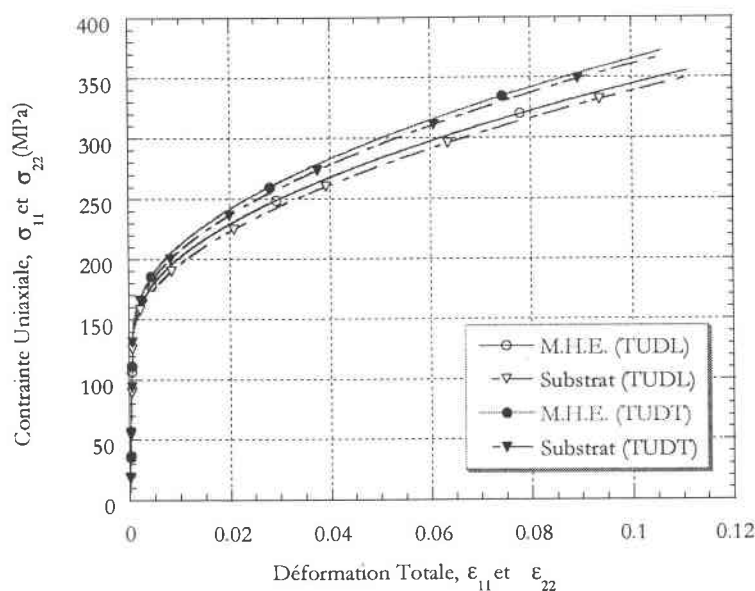


Figure. III. 10. Comportement élastoplastique de l'acier nu et revêtu pour des essais TUDL et TUDT.

L'anisotropie plastique est donnée par les coefficients de Lankford, r_α , calculés à partir des coefficients de Hill semi-expérimentaux (III. 25), ou bien par calcul expérimental des taux de déformations plastiques.

L'acier nu présente une anisotropie plastique assez importante, en raison des traitements thermomécaniques (laminage, etc.), qui déterminent sa texture cristallographique finale. Cette même nuance d'acier présente, à l'état revêtu, une anisotropie moins forte. D'où l'effet important du revêtement qui, en plus de son rôle protecteur contre la corrosion, possède aussi un rôle non négligeable dans le comportement mécanique.

Les techniques d'élaboration du revêtement suppose une répartition uniforme de la couche de ZnNi, de façon à bien couvrir toute la surface de la tôle d'acier sans qu'il y ait de directions privilégiées dans le plan de la tôle, c'est-à-dire pas d'anisotropie plastique dans le plan.

L'acier nu est caractérisé par une plus forte anisotropie plastique que l'acier revêtu, d'où un coefficient de Lankford plus important que celui de l'acier revêtu, en raison d'une très faible anisotropie du revêtement (Tableau. III. 4). Le fait de considérer des coefficients de Hill indépendants de l'état de contrainte (ou constants pendant la déformation) conduit à des coefficients de Lankford constants. Le coefficient de Lankford du "M.H.E.", à 0° de la direction de laminage et à 10.% de déformation plastique équivalente, tend à se stabiliser aux alentours de 1.7, dès que l'acier et le revêtement rentrent en plasticité (Figure. III. 11.).

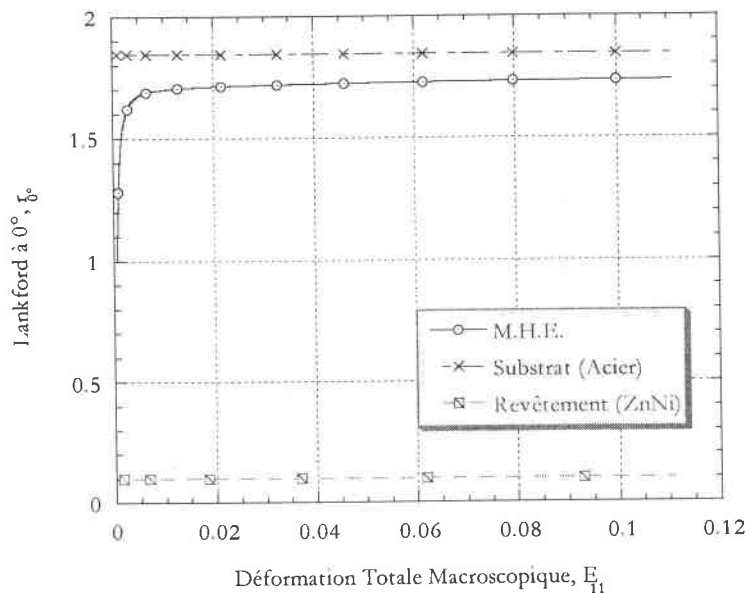


Figure. III. 11. Evolution du coefficient de Lankford à 0° de la direction de laminage pour un essai TUDL.

III. 3. 2. 2. 5. Effet de l'épaisseur du revêtement de ZnNi sur le comportement élastoplastique de la tôle d'acier

Le contrôle de l'épaisseur du revêtement pendant son élaboration est très important, mais assez difficile, en raison des différents facteurs qui peuvent intervenir durant le processus de fabrication (§. I).

L'épaisseur du revêtement influence directement les propriétés mécaniques du "M.H.E." et, par la suite, le comportement macroscopique. L'effet de l'épaisseur de l'acier est évident, d'où l'intérêt de tenir compte, dans les calculs, des fractions volumiques qui contiennent des informations sur les épaisseurs des différents constituants de la tôle revêtue.

Pour la mise en évidence de cet effet, on considère différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi, en supposant que ses propriétés mécaniques élastiques et plastiques, déjà déterminées, restent inchangées, c'est-à-dire indépendantes de son épaisseur.

L'une des remarques les plus importantes est que le module de Young du "M.H.E." est inversement proportionnel à l'épaisseur (ou fraction volumique) du revêtement dont le module est assez faible par rapport à celui de l'acier nu (Figure. III. 12.).

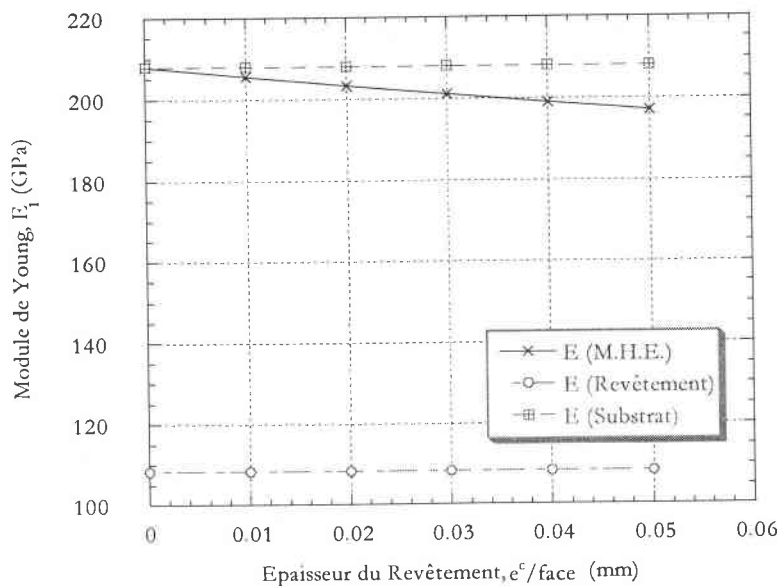


Figure. III. 12. Evolution du module de Young du "M.H.E." suivant la direction 11 en fonction de l'épaisseur du revêtement de ZnNi.

La caractérisation du revêtement de ZnNi par méthode inverse révèle le caractère très dur de ce matériau par rapport à l'acier (Figure. III. 6.). Cette propriété mécanique du revêtement conduit à une amélioration de la dureté de l'acier, surtout pour des épaisseurs du revêtement assez conséquentes (ou pour de faibles épaisseurs de l'acier).

Pour la mise en évidence de cet effet, on considère les résultats des essais de traction uniaxiale suivant la direction de laminage (TUDL), pour différentes épaisseurs du revêtement et à épaisseur constante de l'acier (Figure. III. 13.). On suppose que le fait d'augmenter l'épaisseur du revêtement n'a

pas d'incidence ni sur sa qualité et ses propriétés ni sur celles de l'acier tout en respectant l'hypothèse de minceur du revêtement par rapport à l'acier.

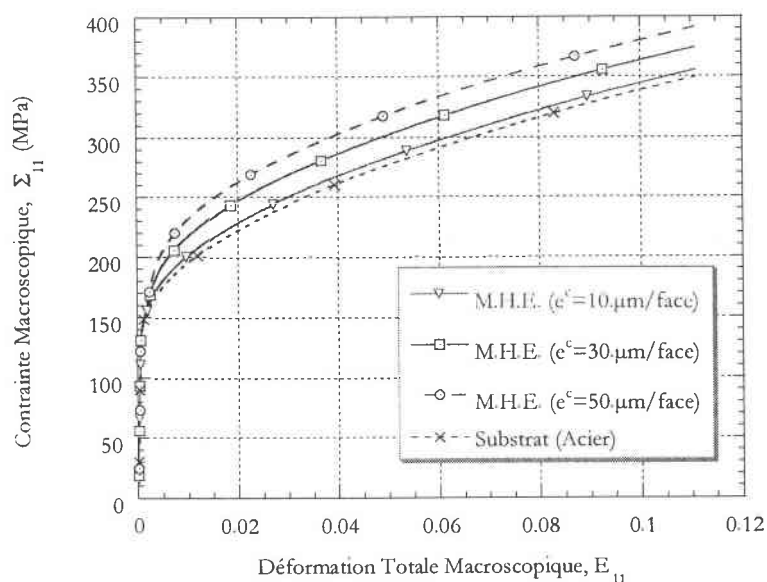


Figure. III. 13. Comportement élastoplastique du "M.H.E." pour un essai TUDL et pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi.

L'épaisseur du revêtement a également des effets très importants sur la concentration des contraintes, c'est-à-dire sur la répartition des contraintes locales de type "élastique" et de type "plastique" dans les deux phases de la tôle revêtue.

On considère toujours le cas d'une tôle d'acier revêtue des deux côtés de ZnNi, dont les caractéristiques mécaniques sont déjà identifiées par méthode inverse. Cette tôle est soumise à un chargement macroscopique uniaxial TUDL.

Le fait d'augmenter l'épaisseur du revêtement de ZnNi a un effet direct sur les caractéristiques mécaniques du "M.H.E.". Cela entraîne une baisse de la concentration des contraintes dans la zone plastique. Cependant, les contraintes locales d'origine "élastique" augmentent avec l'épaisseur dans les deux phases du matériau (Figure. III. 14. et III. 15.).

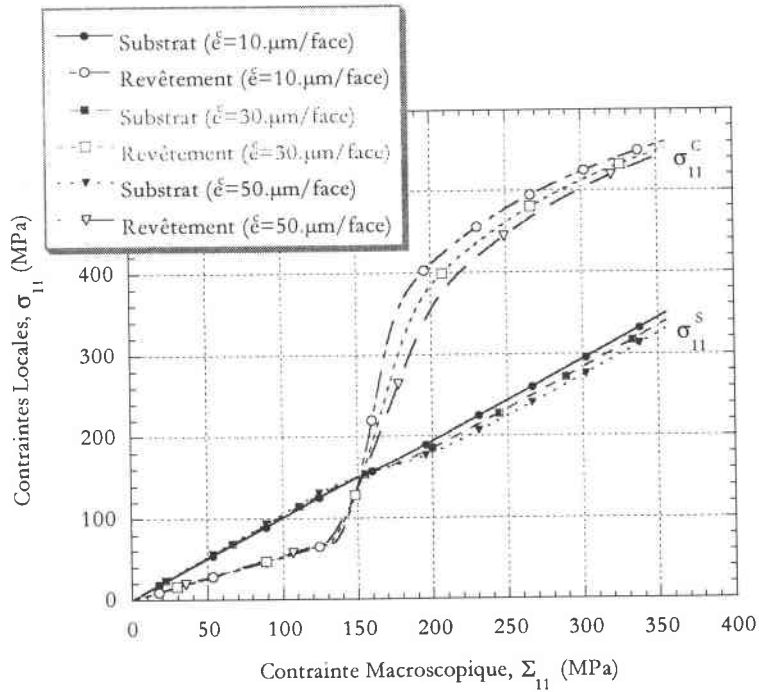


Figure. III. 14. Evolution des contraintes locales en fonction du chargement pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL et pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi.

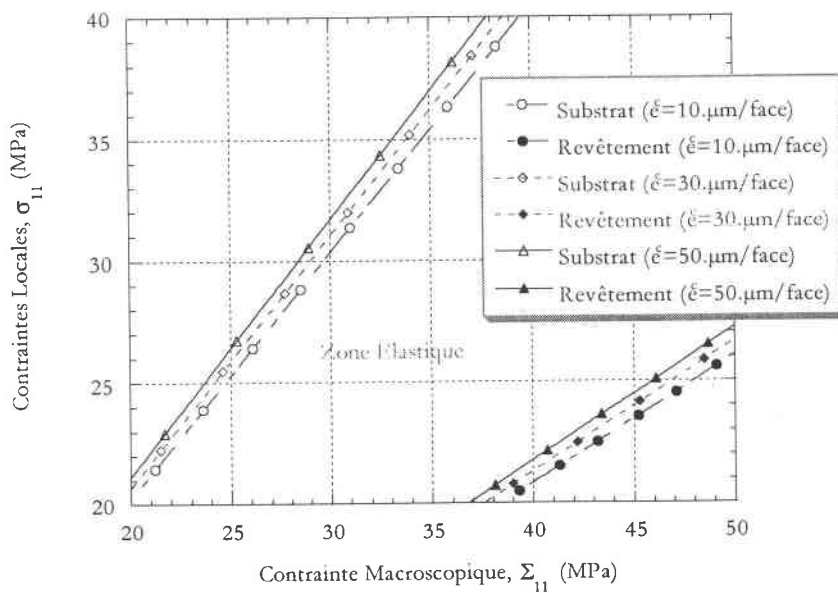


Figure. III. 15. Zoom sur la zone élastique des courbes TUDL.

L'effet du revêtement sur l'anisotropie plastique de l'acier est d'autant plus important que l'épaisseur du revêtement est importante. Cela se traduit par un coefficient de Lankford (suivant la direction de laminage (DL)) qui baisse avec l'épaisseur (Figure. III. 16.). Plus le revêtement est épais, moins l'acier est anisotrope, en raison de l'isotropie plane du revêtement, d'où la nécessité de contrôler l'épaisseur de ce dernier pendant son élaboration afin de maîtriser l'anisotropie plastique de l'ensemble acier + revêtement.

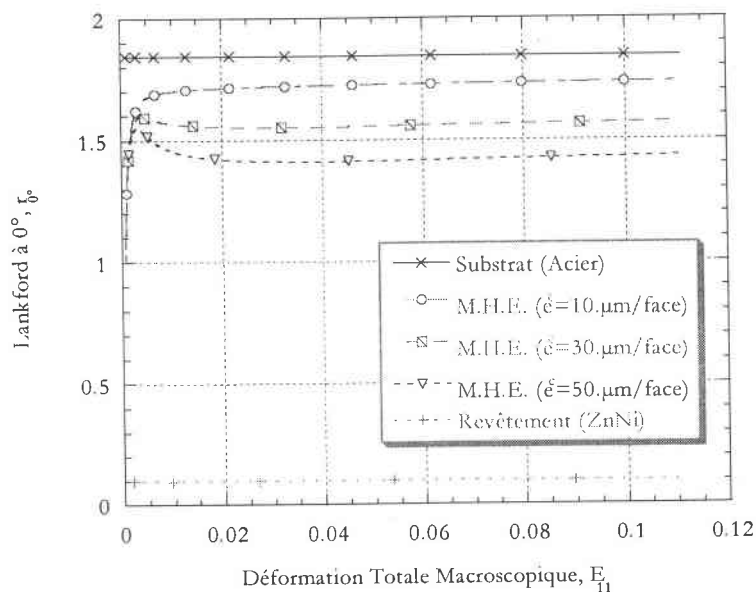


Figure. III. 16. Evolution du coefficient de Lankford à 0° de la direction de laminage pour un essai TUDL et pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi.

III. 4. Conclusion

Le fait d'adapter les techniques de localisation et d'homogénéisation, les techniques des opérateurs interfaciaux, ainsi que le critère de plasticité anisotrope de Hill au modèle biphasé de la tôle revêtue, permet de déterminer la loi de comportement mécanique de la tôle revêtue dans le but de résoudre un certain nombre de problèmes rencontrés pendant les procédés de mise en forme de ces matériaux.

Ainsi, la démarche micromécanique mise en œuvre dans le chapitre précédent (§. II), et appliquée dans ce chapitre au modèle biphasé de la tôle revêtue, permet de prévoir le comportement mécanique élastoplastique du "M.H.E." (l'ensemble substrat + revêtement) à partir du comportement des

constituants : c'est la méthode directe. Toutefois, le revêtement est souvent difficile à caractériser, en raison des traitements thermo-chimiques qu'il subit pendant son élaboration. Ce problème est résolu en utilisant le modèle biphasé en méthode inverse.

Le résultat du calcul numérique obtenu pour des constituants élastiques isotropes est validé analytiquement dans le paragraphe (§. III. 3. 1. 1), et vérifié par le code de calcul d'éléments finis ABAQUS (§. III. 3. 1. 3).

Les résultats obtenus par la modélisation (analytiquement dans le cas d'un comportement élastique isotrope et numériquement pour un comportement élastoplastique anisotrope) permettent de répondre, d'une manière aussi quantitative que qualitative, à plusieurs questions. Ainsi, le modèle présenté dans ce chapitre illustre bien l'effet important des revêtements (même très minces) sur le comportement des tôles d'acier. Ces effets apparaissent à travers :

- les caractéristiques élastiques du "M.H.E.", qui sont affectées par celles du revêtement, ainsi que par sa fraction volumique,
- la réponse élastique du "M.H.E.", qui présente une isotropie transverse pour un substrat et un revêtement à élasticité isotrope,
- la répartition des contraintes locales de type "élastique" et de type "plastique", qui dépend des propriétés mécaniques du matériau utilisé comme revêtement, ainsi que de sa fraction volumique,
- les contraintes internes (ou résiduelles) après décharge élastique, qui sont directement liées à l'hétérogénéité du matériau (biphasé),
- l'anisotropie plastique (donnée par les coefficients de Lankford) du "M.H.E.", qui baisse en présence du revêtement, en raison de sa faible anisotropie.

Au terme de ce chapitre, nous avons élaboré et validé (au moins dans le cas élastique) un modèle permettant de prévoir le comportement mécanique de la tôle revêtue, dans le but d'optimiser la microstructure à partir des propriétés mécaniques (modules d'élasticité, modules d'écrouissage, etc.) et géométriques (épaisseurs) et, ainsi, obtenir le meilleur comportement possible.

IV. EXTENSION AU MODELE TRIPHASE DE LA TOLE REVETUE : SYNTHESE ET APPLICATION

IV. 1. Introduction

Le modèle “biphasé” de la tôle revêtue, étudié au chapitre précédent, ne tient pas compte de la présence d’interphases (ou couches) entre le substrat et le revêtement métalliques. Dans la réalité, il existe au moins une troisième phase pouvant, par exemple, naître pendant les processus d’élaboration des revêtements.

Dans ce chapitre, on s’intéresse au cas où la tôle revêtue renfermerait une interphase de propriétés chimiques et mécaniques différentes de celles des deux autres phases (substrat et revêtement), et de faible épaisseur par rapport à celle du substrat.

Durant les procédés de mise en œuvre des tôles revêtues, plusieurs facteurs peuvent contribuer à la formation d’une interphase. En effet, la plupart des matériaux composites ou hétérogènes (cas des matériaux revêtus) peut être considérée comme des milieux chimiquement non équilibrés dans lesquels il existe un gradient de potentiel chimique du revêtement au substrat. Cette différence de potentiel est l’élément moteur des phénomènes de diffusion et des réactions chimiques à hautes températures (pendant la fabrication ou en service).

Les réactions chimiques prenant naissance à l’interface revêtement/substrat sont à l’origine de la formation des interphases. Cependant, la formation d’une interphase n’est pas uniquement limitée aux conséquences de la mise en œuvre des tôles revêtues. Une interphase peut être, également, introduite systématiquement et délibérément pendant l’élaboration du revêtement (cas des multicouches) dans le but d’augmenter les performances mécaniques de la tôle revêtue.

Les trois phases constitutives de la tôle revêtue sont considérées dans le cas où les comportements élastoplastiques locaux seraient isotropes ou anisotropes (cas général). L’étude est restreinte, comme dans le cas du modèle “biphasé”, au cas de matériaux ne représentant pas de discontinuité du vecteur contrainte et des déplacements aux passages des interfaces. Les épaisseurs de l’interphase et du revêtement sont supposées faibles devant l’épaisseur caractéristique du substrat.

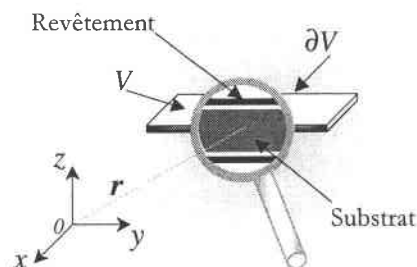
Le modèle “triphase” de la tôle revêtue, proposé dans ce travail, permet, en outre de la mise en évidence de l’effet que peut avoir une interphase sur le comportement mécanique global de la tôle revêtue, d’optimiser la microstructure (épaisseurs et propriétés mécaniques des différentes phases) du matériau. Ainsi, il permet de prédire la réponse macroscopique pour différents types de matériaux (utilisés comme interphase ou comme revêtement) pour obtenir un comportement global optimisé.

L’extension du modèle “biphase” au modèle “triphase” symétrique de la tôle revêtue est immédiate à condition de respecter certaines hypothèses de base discutées aux chapitres précédents (§. II et III).

L’application du modèle “triphase” au comportement mécanique de tels matériaux peut se faire analytiquement dans le cas où les constituants seraient élastiques isotropes, mais en raison des expressions analytiques trop “lourdes”, il devient nécessaire de faire un calcul numérique dans le cas général (matériaux élastiques et élastoplastiques anisotropes).

IV. 2. Modèle triphasé de la tôle revêtue

Considérons un “V.E.R.”, V , d’une tôle mince revêtue des deux côtés d’un matériau métallique de très faible épaisseur par rapport à celle de la tôle initiale (non-revêtue). La topologie du modèle triphasé symétrique de la tôle revêtue suppose un “substrat” (tôle nue) de module élastoplastique, $C_{ijkl}^{ep(S)}$, et de volume, V^S , revêtu des deux côtés d’une mince couche de “revêtement” de module élastoplastique, $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et de volume V^C . Entre ces deux phases, il existe une “interphase” de module élastoplastique, $C_{ijkl}^{ep(I)}$, et de volume V^I (Figure. IV. 1.). Les interfaces substrat/interphase et interphase/revêtement sont considérées comme planes et parfaites. Avec l’hypothèse de la planéité des interfaces, la normale unitaire à ces dernières est dirigée en permanence suivant la direction $\vec{\sigma}_z$ d’un repère orthonormé et suivant l’épaisseur de la tôle, c’est-à-dire $\mathbf{n}(0,0,1)$.



-a-

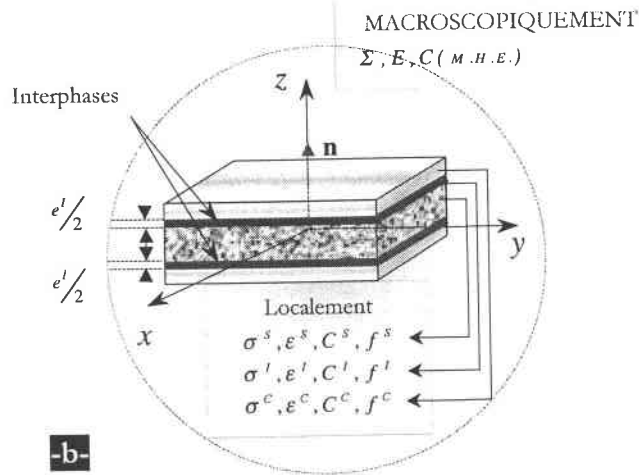


Figure. IV. 1. Schéma d'un "V.E.R." du modèle triphasé symétrique de la tôle revêtue.

IV. 2. 1. Expressions des tenseurs de localisation des déformations

Pour n'importe quelle constante ou variable, $X(\mathbf{r})$, du problème définie en un point, \mathbf{r} , du matériau, on a :

$$\forall X, \quad X(\mathbf{r}) = \begin{cases} X^S, & \text{si } \mathbf{r} \in V^S \\ X^I, & \text{si } \mathbf{r} \in V^I \\ X^C, & \text{si } \mathbf{r} \in V^C \end{cases} \quad (\text{IV. 1})$$

avec $V = V^S + V^I + V^C$ le volume total du "V.E.R.", V^S le volume du "substrat" noté "s", V^I le volume totale de "l'interphase" notée "I" et V^C le volume totale du "revêtement" noté "c".

La morphologie de la tôle revêtue, dans le cas du modèle triphasé, suppose des surfaces de substrat, S^S , d'interphase, S^I , et de revêtement, S^C , identiques à celle, S , du "V.E.R.", ce qui permet d'écrire les fractions volumiques des constituants en fonction des épaisseurs comme suivant :

$$f^S = V^S/V = \frac{S^S \times e^S}{S \times e} = e^S/e, \quad f^I = V^I/V = \frac{S^I \times e^I}{S \times e} = e^I/e \quad \text{et} \quad f^C = V^C/V = \frac{S^C \times e^C}{S \times e} = e^C/e \quad (\text{IV. 2})$$

où $e = e^S + e^I + e^C$ est l'épaisseur totale de la tôle revêtue. D'où la condition nécessaire que doivent vérifier les fractions volumiques :

$$f^S + f^I + f^C = 1 \quad (\text{IV. 3})$$

En considérant que les champs locaux de contraintes et de déformations sont homogènes par phase, les relations (II. 2) et (II. 4) (ou lois des mélanges) donnent dans le cas du modèle triphasé de la tôle revêtue :

$$dE_{ij} = f^S d\varepsilon_{ij}^S + f^I d\varepsilon_{ij}^I + f^C d\varepsilon_{ij}^C \quad (\text{IV. 4})$$

$$d\Sigma_{ij} = f^S d\sigma_{ij}^S + f^I d\sigma_{ij}^I + f^C d\sigma_{ij}^C \quad (\text{IV. 5})$$

Les incréments des déformations locales dans chaque phase sont reliés de part et d'autre des interfaces par l'intermédiaire des relations suivantes déduites à partir des relations données par (II. 27) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Revêtement-Interphase} \\ \text{Interphase-Revêtement} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}^C = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-C)} \right) d\varepsilon_{kl}^I \\ d\varepsilon_{ij}^I = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-I)} \right) d\varepsilon_{kl}^C \end{array} \quad (\text{IV. 6})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Interphase-Substrat} \\ \text{Substrat-Interphase} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}^I = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-I)} \right) d\varepsilon_{kl}^S \\ d\varepsilon_{ij}^S = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right) d\varepsilon_{kl}^I \end{array} \quad (\text{IV. 7})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Interphase-Substrat} \\ \text{Substrat-Interphase} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}^I = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-I)} \right) d\varepsilon_{kl}^S \\ d\varepsilon_{ij}^S = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right) d\varepsilon_{kl}^I \end{array} \quad (\text{IV. 8})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Interphase-Substrat} \\ \text{Substrat-Interphase} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}^I = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(S-I)} \right) d\varepsilon_{kl}^S \\ d\varepsilon_{ij}^S = \left(I_{ijkl} + L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right) d\varepsilon_{kl}^I \end{array} \quad (\text{IV. 9})$$

où les termes $\Delta \underline{C}^{ep(I-C)} = \underline{C}^{ep(I)} - \underline{C}^{ep(C)}$, $\Delta \underline{C}^{ep(C-I)} = \underline{C}^{ep(C)} - \underline{C}^{ep(I)}$, $\Delta \underline{C}^{ep(S-I)} = \underline{C}^{ep(S)} - \underline{C}^{ep(I)}$ et $\Delta \underline{C}^{ep(I-S)} = \underline{C}^{ep(I)} - \underline{C}^{ep(S)}$ font apparaître l'hétérogénéité élastoplastique du matériau. Les tenseurs d'ordre 4, $C_{ijkl}^{ep(S)}(\sigma_{ij}^S, \varepsilon_e^{p(S)})$, $C_{ijkl}^{ep(I)}(\sigma_{ij}^I, \varepsilon_e^{p(I)})$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}(\sigma_{ij}^C, \varepsilon_e^{p(C)})$, ainsi que les tenseurs, $L_{ijkl}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)})$, $L_{ijkl}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)})$ et $L_{ijkl}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)})$, représentent respectivement les modules tangents élastoplastiques et les opérateurs interfaciaux associés aux déformations dans les trois phases de la tôle revêtue. Leurs expressions sont données respectivement par les équations (II. 65) et (II. 29).

Par application des techniques de localisation et d'homogénéisation au modèle triphasé de la tôle revêtue et d'après la relation (II. 10), les incréments locaux des déformations, $d\varepsilon_{ij}^S$, $d\varepsilon_{ij}^I$, et $d\varepsilon_{ij}^C$, dans le substrat, l'interphase et le revêtement sont reliés directement au champ macroscopique correspondant,

soit la déformation macroscopique, dE_{ij} , par l'intermédiaire des tenseurs de localisation des déformations de la manière suivante :

$$d\varepsilon_{ij}^S = A_{ijkl}^S dE_{kl} \quad (\text{IV. 10})$$

$$d\varepsilon_{ij}^I = A_{ijkl}^I dE_{kl} \quad (\text{IV. 11})$$

$$d\varepsilon_{ij}^C = A_{ijkl}^C dE_{kl} \quad (\text{IV. 12})$$

où les trois tenseurs d'ordre 4, A_{ijkl}^S , A_{ijkl}^I , et A_{ijkl}^C , représentent respectivement les tenseurs de localisation des déformations dans le substrat, l'interphase et le revêtement.

En remplaçant l'incrément des déformations locales dans le substrat, $d\varepsilon_{ij}^S$ (IV. 9), ainsi que celui des déformations locales dans l'interphase, $d\varepsilon_{ij}^I$ (IV. 7), par leurs expressions en fonction de celui des déformations locales dans le revêtement, $d\varepsilon_{ij}^C$, dans la loi des mélanges (relation (IV. 4)), on obtient :

$$dE_{ij} = \left(I_{ijkl} + (f^S + f^I) L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-1)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right. \\ \left. + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnpq}^{ep(I-S)} L_{pqrs}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{rskl}^{ep(C-1)} \right) d\varepsilon_{kl}^C \quad (\text{IV. 13})$$

Ainsi, la déformation locale dans le revêtement, $d\varepsilon_{ij}^C$, est déduite par simple inversion tensorielle de l'expression précédente (équation (IV. 13)) :

$$d\varepsilon_{ij}^C = \left(I_{ijkl} + (f^S + f^I) L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-1)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right. \\ \left. + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnpq}^{ep(I-S)} L_{pqrs}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{rskl}^{ep(C-1)} \right)^{-1} dE_{kl} \quad (\text{IV. 14})$$

Ceci permet de déduire l'expression du tenseur de localisation des déformations dans le revêtement, A_{ijkl}^C , par identification des deux équations (IV. 14) et (IV. 12) :

$$A_{ijkl}^C = \left(I_{ijkl} + (f^S + f^I) L_{ijmn}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-1)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right. \\ \left. + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnpq}^{ep(I-S)} L_{pqrs}^I(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(I)}) \Delta C_{rskl}^{ep(C-1)} \right)^{-1} \quad (\text{IV. 15})$$

Pour déterminer l'expression du tenseur de localisation des déformations dans l'interphase, A_{ijkl}^I , il suffit de remplacer les déformations locales dans le substrat, $d\varepsilon_{ij}^S$, et dans le revêtement, $d\varepsilon_{ij}^C$, dans la loi des mélanges (relation (IV. 4)) par leurs expressions en fonction des déformations locales dans l'interphase ((IV. 9) et (IV. 6)), ce qui donne :

$$dE_{ij} = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-C)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right) d\varepsilon_{kl}^I \quad (\text{IV. 16})$$

Ainsi, la déformation locale dans l'interphase, $d\varepsilon_{ij}^I$, est déduite de la même manière que la déformation locale dans le revêtement par une simple inversion tensorielle de l'équation (IV. 16) :

$$d\varepsilon_{ij}^I = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-C)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right)^{-1} dE_{kl} \quad (\text{IV. 17})$$

Ce qui permet d'en déduire l'expression du tenseur de localisation des déformations dans l'interphase comme suivant :

$$A_{ijkl}^I = \left(I_{ijkl} + f^C L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-C)} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(I-S)} \right)^{-1} \quad (\text{IV. 18})$$

Le tenseur de localisation des déformations dans le substrat, A_{ijkl}^S , peut être déduit en fonction de ceux des déformations dans l'interphase et dans le revêtement à partir de (II. 11) qui donne, dans le cas du modèle triphasé de la tôle revêtue, la relation suivante :

$$A_{ijkl}^S = \frac{1}{f^S} \left(I_{ijkl} - f^I A_{ijkl}^I - f^C A_{ijkl}^C \right) \quad (\text{IV. 19})$$

Il peut, également, être déterminé explicitement en utilisant les mêmes techniques de calcul que dans le cas du tenseur de localisation des déformations dans le revêtement.

IV. 2. 2. Expression de la loi macroscopique de comportement élastoplastique du "M.H.E."

En considérant les relations (II. 13), (II. 15) et (IV. 19), la loi élastoplastique de comportement macroscopique s'écrit sous la forme tensorielle suivante :

$$d\Sigma_{ij} = \left\{ C_{ijkl}^{ep(S)} + f^I \Delta C_{ijmn}^{ep(I-S)} A_{mnkl}^I + f^C \Delta C_{ijmn}^{ep(C-S)} A_{mnkl}^C \right\} dE_{kl} \quad (IV. 20)$$

où les tenseurs de localisation des déformations dans l'interphase et dans le revêtement, A_{ijkl}^I et A_{ijkl}^C , sont donnés respectivement par les deux expressions (IV. 18) et (IV. 15).

Le module tangent du "M.H.E." dépend des fractions volumiques, f^S , f^I et f^C , des états de contraintes et des histoires de chargements par l'intermédiaire des modules tangents, $C_{ijkl}^{ep(S)}(\sigma_{ij}^S, \epsilon_e^{p(S)})$, $C_{ijkl}^{ep(I)}(\sigma_{ij}^I, \epsilon_e^{p(I)})$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}(\sigma_{ij}^C, \epsilon_e^{p(C)})$, ainsi que des composantes de la normale unitaire, $\mathbf{n}(0,0,1)$, aux interfaces substrat/interphase et interphase/revêtement.

La loi macroscopique de comportement élastoplastique de la tôle revêtue est déterminée dans le cas où les trois phases du matériau auraient des comportements individuels élastoplastiques isotropes ou anisotropes.

IV. 3. Applications du modèle triphasé au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues

Deux classes de comportement sont abordées dans ce chapitre : le comportement élastique linéaire et le comportement plastique à écrouissage non-linéaire. Au problème de l'hétérogénéité géométrique s'ajoutent les anisotropies élastique et plastique locales des constituants et globales du "M.H.E."

La résolution du problème des tôles revêtues à trois phases peut se faire par méthode directe quand les comportements individuels des constituants (acier, interphase et revêtement) sont connus ou par méthode inverse dans le cas contraire.

IV. 3. 1. Comportement élastique isotrope

Comme première application du modèle triphasé au comportement mécanique des tôles revêtues, on considère le cas d'un comportement élastique linéaire d'une tôle d'acier S15 revêtue des deux côtés

d'une mince couche de ZnNi électrodéposée donnant naissance à une interphase de Nickel entre les deux (pendant l'élaboration, le métal le plus noble se dépose en premier). La tôle revêtue est soumise à un chargement mécanique macroscopique, Σ_{11} , à température ambiante et sans dépasser les limites d'élasticité des trois phases de façon à rester en régime élastique.

Les trois phases sont supposées avoir des comportements élastiques isotropes, ce qui conduit à des modules de Young et des coefficients de Poisson identiques dans les différentes directions ($E_1^* = E_2^* = E_3^*$ et $\nu_{12}^* = \nu_{13}^* = \nu_{23}^*$). Les propriétés élastiques des trois phases sont supposées connues, ce qui permet d'en déduire celles du "M.H.E." par méthode directe.

Les caractéristiques mécaniques (modules de Young et coefficients de Poisson) et géométriques (épaisseurs) sont regroupées dans le tableau ci-dessous (Tableau. IV. 1.).

	Epaisseurs $e^S, e^I/2, e^C/2$	Fractions Volumiques(%) f^S, f^I, f^C	Modules de Young (GPa) E_1, E_2, E_3	Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	$\sigma_{11}^S, \sigma_{11}^I, \sigma_{11}^C, \Sigma_{11}$ (MPa)
					MODELE
Substrat (Acier)	0.8 mm	96.4	208.000	0.3000	50.64
Interphase (Nickel)	5. μm	1.2	190.530	0.2900	46.24
Revêtement (ZnNi)	10. μm	2.4	108.300	0.2630	26.09
"M.H.E." (MODELE)	0.83 mm	100.0	205.391	0.2994	50.00
			205.391	0.2988	
			203.549	0.2988	

Tableau. IV. 1. Propriétés mécaniques élastiques du Substrat, de l'interphase, du Revêtement, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE triphasé (à température ambiante).

L'un des résultats les plus importants est l'isotropie transverse autour de l'axe \vec{oz} que présente le "M.H.E." pour des constituants à élasticité isotrope (§. A. 2). Le tableau ci-dessus (Tableau. IV. 1.) montre l'effet du revêtement et de l'interphase sur la répartition des contraintes locales pour de faibles fractions volumiques ($f^I \approx 1.2\%$ et $f^C \approx 2.4\%$). La contrainte locale dans le substrat est de même ordre de grandeur que celle appliquée ($\sigma_{11}^S \approx \Sigma_{11}$), mais beaucoup plus faible dans le revêtement ($\sigma_{11}^C \ll \Sigma_{11}$), en raison de son module de Young peu élevé (§. A. II). La contrainte dans l'interphase est assez importante ($\sigma_{11}^C \ll \sigma_{11}^I$), en raison du module de Young du Nickel avoisinant celui de l'acier.

En inversant l'ordre des deux couches (Nickel à la place du ZnNi et vis-versa), tout en gardant la même géométrie de la tôle revêtue (les mêmes épaisseurs pour l'interphase et le revêtement), on obtient les résultats donnés par le tableau ci-dessous (Tableau. IV. 2.).

	Epaisseurs	Fractions Volumiques(%)	Modules de Young (GPa)	Coefficients de Poisson	$\sigma_{II}^S, \sigma_{II}^I, \sigma_{II}^C, \Sigma_{II}$ (MPa)
	$e^S, e^I/2, e^C/2$	f^S, f^I, f^C	E_1, E_2, E_3	$\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	MODELE
Substrat (Acier)	0.8 mm	096.4	208.000	0.3000	50.34
Interphase (ZnNi)	5. μ m	001.2	108.300	0.2630	25.96
Revêtement (Nickel)	10. μ m	002.4	190.530	0.2900	46.02
"M.H.E." (MODELE)	0.83 mm	100.0	206.380	0.29955	50.00
			206.380	0.29924	
			205.416	0.29924	

Tableau. IV. 2. Propriétés mécaniques élastiques du Substrat, de l'interphase, du Revêtement, ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE triphasé (à température ambiante).

En comparant les résultats des deux tableaux (Tableau. IV. 1 et IV. 2), les pourcentages (ou fractions volumiques) de Nickel et de ZnNi dans la tôle revêtue semblent avoir un effet sur les caractéristiques élastiques du "M.H.E." sans trop influencer les états locaux de contraintes dans les trois phases.

Pour de faibles fractions volumiques de l'interphase et du revêtement, l'état de contrainte "élastique" dans une phase semble dépendre seulement du module de Young et non de la position relative par rapport à l'ensemble des phases.

En supposant que les caractéristiques mécaniques élastiques de l'acier, de l'interphase et du revêtement sont connues, il est facile d'en déduire celles du "M.H.E." par méthode directe. Mais, ce n'est pas toujours le cas à cause de la difficulté de caractérisation du revêtement et maintenant de l'interphase dont les propriétés mécaniques sont inaccessibles expérimentalement (§. I et §. III).

En se basant sur les résultats du modèle biphasé, obtenus au chapitre précédant (§. III), on peut considérer que le comportement mécanique du revêtement est déjà déterminé et que l'introduction d'une interphase ne modifie pas ses caractéristiques mécaniques, ce qui permettrait de caractériser l'interphase par méthode inverse. Cela nécessite donc une utilisation des deux modèles biphasé et triphasé comme méthode inverse pour identifier le revêtement et par la suite l'interphase à condition de connaître les propriétés de la tôle nue et revêtue.

Remarque :

Dans les applications qui suivent, nous supposons que les propriétés mécaniques élastiques et plastiques des constituants sont connues, ce qui permet un accès, par méthode directe, aux caractéristiques mécaniques élastoplastiques du "M.H.E."

IV. 3. 2. Comportement élastoplastique anisotrope

IV. 3. 2. 1. Application aux tôles d'acier revêtues de ZnNi et contenant une interphase de Nickel

Comme deuxième application du modèle triphasé au comportement mécanique des tôles revêtues, nous considérons le cas d'un comportement élastoplastique d'une tôle d'acier S15 d'épaisseur, $e^s = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche d'alliage ZnNi électrodéposée d'épaisseur, $e^c = 10$ $\mu\text{m}/\text{face}$, et contenant une interphase de Nickel d'épaisseur $e^i = 5$ $\mu\text{m}/\text{face}$. La tôle revêtue est soumise à un chargement mécanique macroscopique, Σ_{11} , au-delà des limites d'élasticité des trois phases et pour des pourcentages de déformation assez conséquents (10.%, par ex.).

Les caractéristiques mécaniques des trois phases (modules de Young, coefficients de Poisson, coefficients de Hill, limites d'élasticité et coefficients d'érouissage) et géométriques (épaisseurs ou fractions volumiques) sont supposées connues (Tableau. IV. 3.), ce qui permet d'utiliser le modèle triphasé en méthode directe et déduire, par la suite, les caractéristiques du "M.H.E."

	Substrat (Acier)	Interphase (Nickel)	Revêtement (ZnNi)	"M.H.E." (MODELE) Acier+Nickel+ZnNi
Epaisseurs $e^s, e^i/2, e^c/2, e$ (mm)	0.80	0.005	0.01	0.83
Modules de Young E_1, E_2, E_3 (MPa)	208 000.	190 530.	108 300.	205 391.
	---	---	---	205 391.
	---	---	---	203 549.
Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	0.3	0.2900	0.2630	0.2994
				0.2988
				0.2988
Coefficients de Lankford $r_{0^\circ}, r_{45^\circ}, r_{90^\circ}$	1.85	1.00	0.10	1.71
	1.92	1.00	1.00	1.73
	2.45	1.00	0.10	2.24
Coefficients de HILL F, G, H, N (MPa ⁻²)	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$
	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.08 \cdot 10^{-6}$
	$5.73 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.24 \cdot 10^{-6}$
	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
Limites élastiques σ_0 (MPa)	146.	200.	100.	---
Coefficients d'érouissage plastique n, K	0.51	0.13	0.14	---
	757.	780.	650.	---

Tableau. IV. 3. Propriétés mécaniques élastiques et plastiques du substrat (acier), de l'interphase (Nickel), du revêtement (ZnNi), ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE (méthode directe).

IV. 3. 2. 1. 1. Effet de l'interphase sur le comportement élastoplastique

Les courbes de traction correspondant à un essai uniaxial suivant 11 (ou TUDL) révèlent un caractère rigide de l'acier revêtu contenant une interphase par rapport à l'acier nu, et même par rapport à l'acier revêtu sans interphase (modèle biphasé du chapitre précédant (§. III)). Ceci est dû à une grande rigidité (ou dureté) de l'interphase de Nickel et du revêtement de ZnNi dont le comportement élastoplastique a été déjà déterminé par méthode inverse à partir du modèle biphasé (Figure. III. 6.). Cependant, l'effet sur la réponse macroscopique (courbe de traction du "M.H.E.") n'est pas trop important, en raison des très faibles épaisseurs (ou fractions volumiques) du revêtement et de l'interphase, mais l'effet de l'interphase de Nickel reste, quand même, évident (Figure. IV. 2.).

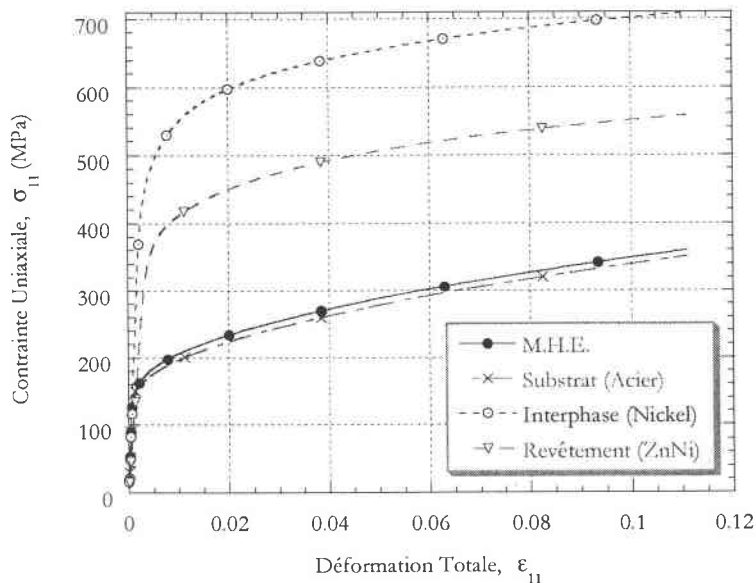


Figure. IV. 2. Comportement élastoplastique de l'acier, de l'interphase, du revêtement et du "M.H.E." pour un essai TUDL.

IV. 3. 2. 1. 2. Effet de l'interphase sur la répartition des contraintes locales

Le modèle biphasé de la tôle revêtue montre que les contraintes locales dans l'acier, σ_{ij}^S , et dans le revêtement, σ_{ij}^C , n'évoluent pas de la même manière, ce qui justifie la discontinuité du champ de contraintes au passage des interfaces.

Il est facile de distinguer entre deux zones différentes (élastique et plastique) : la première constitue une situation dans laquelle les contraintes locales présentent une forte dépendance des modules d'élasticité locaux (modules de Young, E^S , E^I et E^C). La deuxième représente une situation dans laquelle les contraintes locales présentent une forte sensibilité à l'écroutissement plastique, et notamment celui de l'interphase et du revêtement, en raison de leur dureté. Cependant, la contrainte locale dans l'acier reste du même ordre de grandeur que la contrainte macroscopique Σ_{11} (Figure. IV. 3.).

L'introduction de l'interphase de Nickel entre l'acier et le revêtement de ZnNi est susceptible de modifier le transfert de charge entre les différentes phases. Ainsi, pour une contrainte macroscopique $\Sigma_{11} = 355$ MPa, les contraintes locales dans le substrat et dans le revêtement qui valaient $\sigma_{11}^S = 349.23$ MPa et $\sigma_{11}^C = 560.38$ MPa, en absence de l'interphase, passe à $\sigma_{11}^S = 345.64$ MPa et $\sigma_{11}^C = 554.30$ MPa, en présence de l'interphase de Nickel dont l'état de contrainte vaut $\sigma_{11}^I = 705.22$ MPa. On peut alors s'attendre à ce que l'état de contrainte dans le substrat soit de moins en moins important pour des fractions volumiques assez conséquentes de l'interphase et du revêtement. L'interphase pourra servir à "encaisser" les contraintes et à soulager le substrat pendant que le revêtement assure son rôle protecteur vis-à-vis des agressions extérieures.

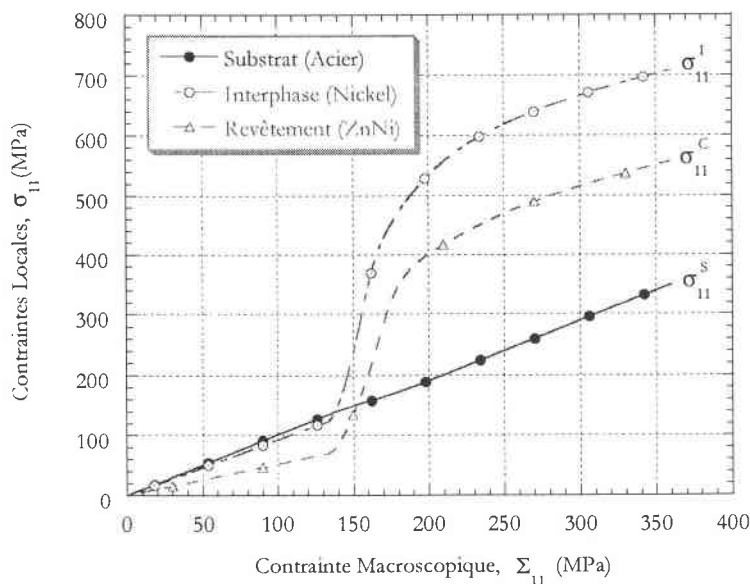


Figure. IV. 3. Evolution des contraintes locales en fonction du chargement pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL.

IV. 3. 2. 1. 3. Effet de l'interphase sur l'anisotropie plastique de la tôle

L'acier utilisé dans cette application présente une anisotropie plastique initiale assez importante. L'anisotropie plastique de cette même nuance d'acier à l'état revêtu devient moins forte, en raison des très faibles anisotropies de l'interphase et du revêtement. D'où l'effet important du revêtement et de l'interphase qui, en plus de leurs rôles protecteurs contre la corrosion et la concentration des contraintes, possèdent aussi un rôle non négligeable dans le comportement mécanique global.

Le fait de considérer des coefficients de Hill constants pendant la déformation conduit à des coefficients de Lankford constants. Le coefficient de Lankford du "M.H.E.", à 0° de la direction de laminage et à 10.% de déformation plastique équivalente, tend à se stabiliser aux alentours de $r_{0^\circ}(M.H.E.) = 1.7$, alors que celui de l'acier nu vaut $r_{0^\circ} = 1.85$ (Figure. VI. 4.).

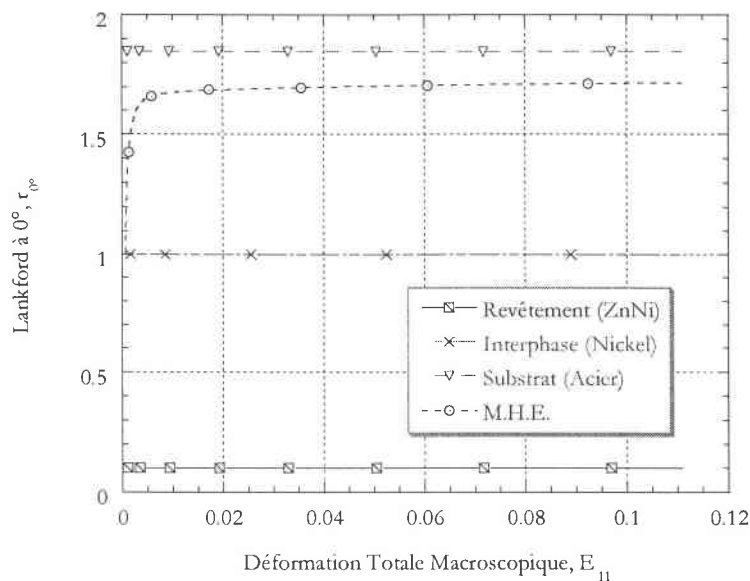


Figure. IV. 4. Evolution du coefficient de Lankford à 0° de la direction de laminage pour un essai TUDL.

Les résultats obtenus montre un effet important de l'interphase et du revêtement sur le comportement élastoplastique de la tôle revêtu, mais quel est maintenant l'effet de l'ordre de la disposition de ces "couches" sur le comportement ?

Cela fera l'objet du paragraphe suivant dans le souci de résoudre les problèmes d'optimisation de la microstructure.

IV. 3. 2. 2. Application aux tôles d'acier revêtues de Nickel et contenant une interphase de ZnNi : effet de l'ordre des couches sur les propriétés mécaniques et la répartition des contraintes locales

Pour cette application, on considère le cas d'une tôle d'acier d'épaisseur, $e^S = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche de Nickel d'épaisseur $e^C = 0.01$ mm/face, et entre ces deux phases, il existe une interphase d'alliage ZnNi d'épaisseur $e^I = 0.005$ mm/face.

On suppose que le fait d'invertir l'ordre des "couches" n'a pas d'effet sur leurs propres caractéristiques mécaniques. Seules les propriétés mécaniques du "M.H.E." doivent être affectées, en raison de leur dépendance des fractions volumiques de chacune des phases.

Les caractéristiques mécaniques élastiques et plastiques des trois phases, ainsi que celles du "M.H.E." (obtenues par calcul direct) sont regroupées dans le tableau ci-dessous (Tableau. IV. 4.).

	Substrat (Acier)	Interphase (ZnNi)	Revêtement (Nickel)	"M.H.E." (MODELE) <i>Acier+ZnNi+Nickel</i>
Epaisseurs $e^S, e^I/2, e^C/2, e$ (mm)	0.80	0.005	0.01	0.83
Modules de Young E_1, E_2, E_3 (MPa)	208 000.	108 300.	190 530.	205 572.
	---	---	---	205 572.
	---	---	---	203 717.
Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	0.3	0.2630	0.2900	0.2995
				0.2989
				0.2989
Coefficients de Lankford $r_{0^\circ}, r_{45^\circ}, r_{90^\circ}$	1.85	0.10	1.00	1.71
	1.92	1.00	1.00	1.73
	2.45	0.10	1.00	2.24
Coefficients de HILL F, G, H, N (MPa ⁻³)	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$
	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3.08 \cdot 10^{-6}$
	$5.73 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.24 \cdot 10^{-6}$
	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
Limites élastiques σ_0 (MPa)	146.	100.	200.	---
Coefficients d'écroutissage plastique n, K	0.51	0.14	0.13	---
	757.	650.	780.	---

Tableau. IV. 4. Propriétés mécaniques élastiques et plastiques du substrat (acier), de l'interphase (ZnNi), du revêtement (Nickel), ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE (méthode directe).

A première vue, les contraintes locales dans chacune des phases ne semblent dépendre que de leurs propriétés intrinsèques. Leurs courbes d'évolutions en fonction du chargement macroscopique, pour un essai de traction uniaxiale, sont données par la figure ci-dessous (Figure. IV. 5).

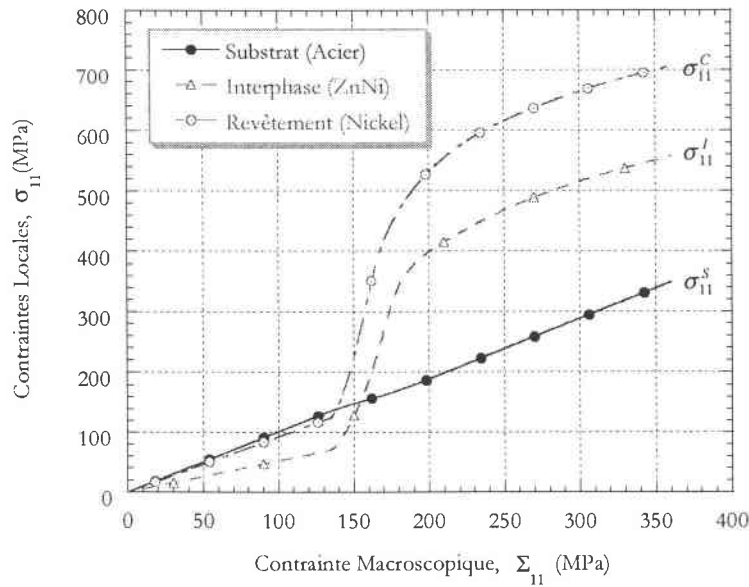


Figure. IV. 5. Evolution des contraintes locales en fonction du chargement pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL.

Le fait d'invertir l'ordre des couches, tout en gardant les mêmes fractions volumiques que l'application précédente (§. IV. 3. 2. 1), conduit à un léger changement dans les valeurs des contraintes locales des trois phases, pour la même valeur de la contrainte macroscopique Σ_{11} (Tableau. IV. 5)

$\Sigma_{11}^* = 355. \text{ MPa}$ (TUDL)	Substrat, σ_{11}^S (MPa)	Interphase, σ_{11}^I (MPa)	Revêtement, σ_{11}^C (MPa)
	$e^S = 0.8 \text{ mm}$	$e^I/2 = 5.0 \text{ }\mu\text{m}$	$e^C/2 = 10.0 \text{ }\mu\text{m}$
"M.H.E." ¹ (Acier+Nickel+ZnNi)	345.64	705.22	554.30
"M.H.E." ² (Acier+ZnNi+Nickel)	343.82	553.24	702.89

Tableau. IV. 5. Etat de contraintes locales dans les trois phases et pour des dispositions différentes des couches de la tôle revêtue (acier+Nickel+ZnNi et acier+ZnNi+Nickel).

IV. 3. 2. 3. Application aux tôles d'acier revêtues de ZnNi et contenant une interphase de Zinc : effet de l'épaisseur de l'interphase

En vue de mettre en évidence l'effet de la fraction volumique de l'interphase sur le comportement global du "M.H.E.", on considère le cas d'une tôle d'acier d'épaisseur, $e^s = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche de ZnNi d'épaisseur $e^c = 0.01$ mm/face, et entre ces deux phases, il existe une interphase de Zinc d'épaisseur $e^l = 0.005$ mm/face. On fera augmenter l'épaisseur de cette interphase jusqu'à 0.1 mm, pour mettre en évidence l'effet de la fraction volumique de l'interphase sur le comportement macroscopique.

Les caractéristiques mécaniques élastiques isotropes et plastiques anisotropes des trois phases, ainsi que celle du "M.H.E." sont regroupées dans le tableau ci-dessous (Tableau. IV. 6.).

	Substrat	Interphase	Revêtement	"M.H.E." (MODELE)
	(Acier)	(Zinc)	(ZnNi)	Acier+Zinc+ZnNi
Epaisseurs $e^s, e^l/2, e^c/2, e$ (mm)	0.80	0.005	0.01	0.83
Modules de Young E_1, E_2, E_3 (MPa)	208 000.	99 250.	108 300.	204 293.
	---	---	---	204 293.
	---	---	---	201 343.
Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	0.3	0.2600	0.2630	0.2993
				0.2984
				0.2984
Coefficients de Lankford $r_{0^\circ}, r_{45^\circ}, r_{90^\circ}$	1.85	1.00	0.10	1.72
	1.92	1.00	1.00	1.73
	2.45	1.00	0.10	2.26
Coefficients de HILL F, G, H, N (MPa ⁻²)	$2.29 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.03 \cdot 10^{-6}$
	$3.10 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$3.08 \cdot 10^{-6}$
	$5.73 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$5.24 \cdot 10^{-6}$
	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-5}$
Limites élastiques σ_0 (MPa)	146.	80.	100.	---
Coefficients d'écroutissage plastique n, K	0.51	0.14	0.14	---
	757.	635.	650.	---

Tableau. IV. 6. Propriétés mécaniques élastiques et plastiques du substrat (acier), de l'interphase (Zinc), du revêtement (ZnNi), ainsi que celles du "M.H.E." issues du MODELE (méthode directe).

Le fait de simuler les courbes de traction suivant la direction de laminage (TUDL), pour différentes épaisseurs de l'interphase de Zinc, permet de mettre en évidence l'effet important que peut avoir la

fraction volumique de cette dernière sur la réponse macroscopique de la tôle revêtue. Les courbes de traction obtenues révèlent le caractère rigide de l'acier revêtu par rapport à l'acier nu. Ceci est dû à une grande rigidité (ou dureté) du revêtement de ZnNi, ainsi que de l'interphase de Zinc.

Pour des fractions volumiques importantes de l'interphase, le comportement élastoplastique du "M.H.E." devient de plus en plus différent de celui de l'acier nu. Le "M.H.E." acquiert une importante rigidité, qui croît avec l'épaisseur, e^I , de l'interphase (Figure. IV. 6).

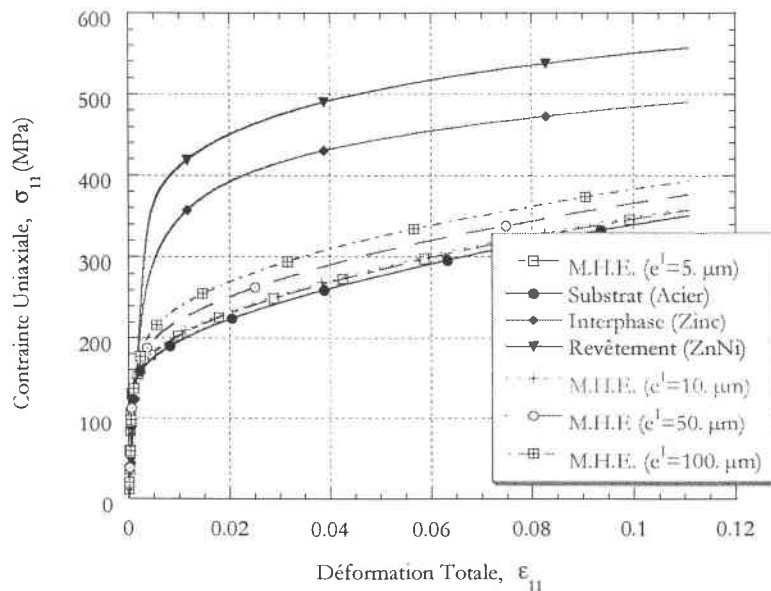


Figure. IV. 6. Comportement élastoplastique du "M.H.E." pour un essai TUDL et pour différentes épaisseurs de l'interphase de Zinc.

L'effet de l'interphase sur l'anisotropie plastique de l'acier est d'autant plus important que l'épaisseur de l'interphase est importante. Plus l'épaisseur de l'interphase est importante, moins la tôle revêtue est anisotrope. Cela se traduit par un coefficient de Lankford (suivant la direction de laminage (DL)) du "M.H.E." qui baisse avec l'épaisseur, en raison de l'isotropie plastique de l'interphase (Figure. IV. 7).

Ayant un rôle déterminant dans la mise en forme des tôles, l'anisotropie plastique doit être parfaitement maîtrisée. D'où la nécessité de contrôler l'épaisseur de l'interphase pendant l'élaboration des revêtements.

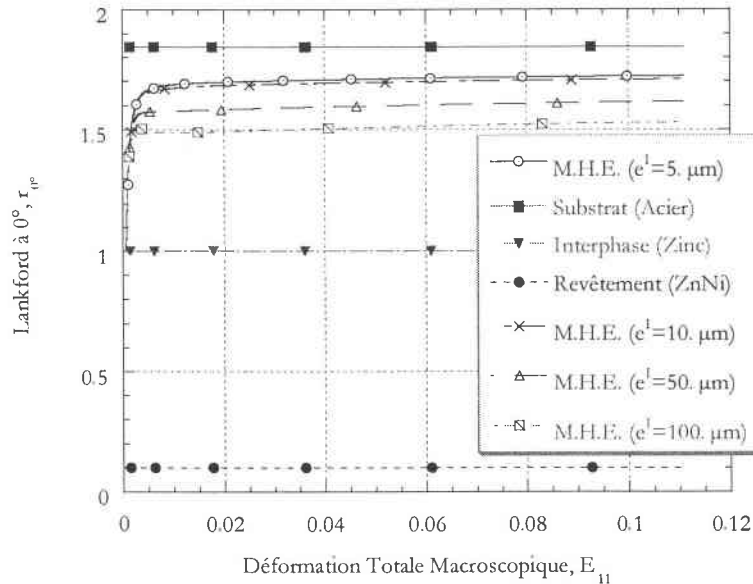


Figure. IV. 7. Evolution du coefficient de Lankford à 0° de la direction de laminage pour un essai TUDL et pour différentes épaisseurs de l'interphase de Zinc.

IV. 4. Conclusion

Ce chapitre (§. IV) a été consacré à la résolution du problème de comportement élastoplastique de la tôle revêtue en présence d'une interphase entre le substrat et le revêtement.

La démarche micromécanique mise en œuvre dans le chapitre (§. II) est appliquée ici au modèle triphasé de la tôle revêtue. Ce modèle permet de prévoir le comportement mécanique du "M.H.E." à partir des comportements des constituants (substrat, interphase et revêtement) par méthode directe dans le cas où leurs caractéristiques mécaniques seraient connues. C'est le cas où l'interphase est introduite délibérément avec des caractéristiques mécaniques bien définies.

Toutefois, le revêtement, ainsi que l'interphase sont souvent difficiles à caractériser, en raison des traitements thermo-chimiques qui accompagnent les procédés d'élaboration des revêtements. Ce problème est résolu en utilisant le modèle biphasé en méthode inverse pour caractériser le revêtement, ce qui doit permettre, par la suite, la détermination du comportement de l'interphase par méthode inverse à partir du modèle triphasé.

Le fait d'introduire une troisième phase (interphase entre le substrat et le revêtement), de caractéristiques mécaniques précises (différentes de celles des autres phases), modifie profondément le transfert de charges d'une phase à l'autre. Ces effets apparaissent clairement à travers :

- les caractéristiques élastiques du "M.H.E." qui sont affectées par celles de l'interphase et du revêtement, ainsi que par leurs fractions volumiques,
- la réponse élastique du "M.H.E.", qui présente une isotropie transverse pour des constituants à élasticité isotrope,
- la répartition des contraintes locales de type "élastique" et de type "plastique", qui dépend des propriétés mécaniques des matériaux utilisés comme interphase et revêtement, ainsi que de leurs fractions volumiques,
- l'anisotropie plastique (donnée par les coefficients de Lankford) du "M.H.E.", qui baisse en présence de l'interphase et du revêtement, en raison de leurs faibles anisotropies.

Le modèle triphasé étudié dans ce chapitre illustre bien le rôle important que peuvent avoir l'interphase et, bien sûr, le revêtement sur le comportement des tôles d'acier revêtues.

Les résultats issus du modèle permettent de prévoir le comportement mécanique des tôles revêtues dans le but d'optimiser la microstructure à partir des propriétés mécaniques (modules d'élasticité, modules d'écroutissage, etc.) et géométriques (épaisseurs), afin d'améliorer le comportement mécanique de ces matériaux vis-à-vis des sollicitations externes. Ainsi l'interphase pourra servir à "encaisser" les contraintes et soulager le substrat des grandes concentrations de contraintes pendant que le revêtement assure son rôle protecteur vis-à-vis des agressions extérieures.

V. EFFET DE L'ENDOMMAGEMENT SUR LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DE LA TOLE REVETUE

V. 1. Introduction

Le phénomène d'endommagement se manifeste par une altération progressive des propriétés mécaniques (module de Young, module d'écroutissage, etc.) du "V.E.R." soumis à différents types de sollicitations mécaniques et/ou thermiques. Il est le résultat de la formation et de la croissance de microfissures et de microcavités par coalescence de défauts qui conduisent à la ruine du matériau et à sa rupture. Les phénomènes d'endommagement doivent être couplés à ceux de déformation pour décrire le comportement mécanique du matériau d'une manière plus réelle.

Pour comprendre le phénomène d'endommagement, il est nécessaire de comprendre les mécanismes élémentaires de création de nouvelles surfaces par rupture des liaisons interatomiques : par clivage, par glissement cristallographique avec décohésion et par cavitation (Figure. V. 1.).

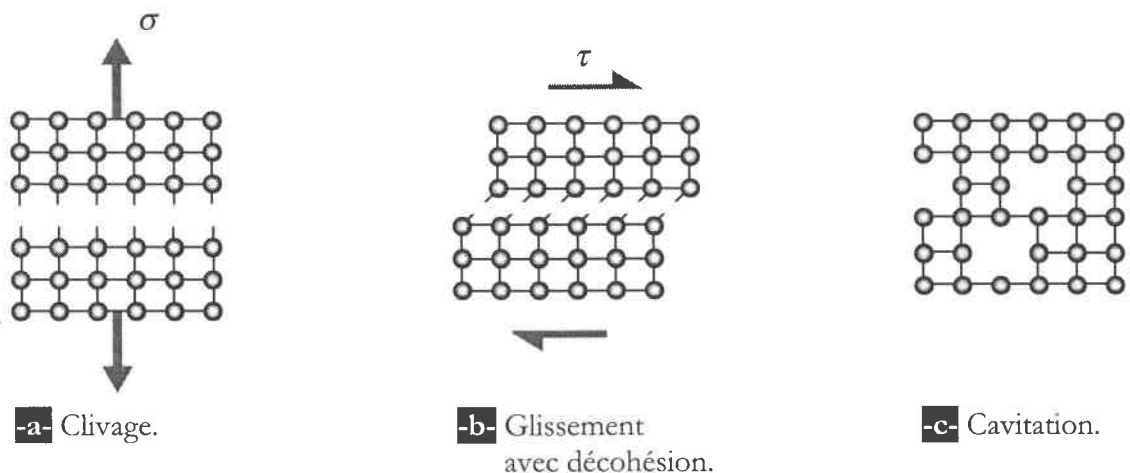


Figure. V. 1. Schéma représentatif des trois principaux mécanismes d'endommagement à l'échelle atomique.

L'endommagement par clivage intervient dans les solides cristallins tels que les métaux et les céramiques. Le glissement le long d'un plan cristallographique dit "facile" conduit à l'apparition de la

plasticité et même de l'endommagement jusqu'à rupture complète du monocristal. C'est le cas du Zinc (hexagonal compact) dont le glissement se fait suivant le plan basal (0001). Souvent, l'endommagement se manifeste, dans un monocristal, par un phénomène d'amincissement local (striction) par apparition d'une instabilité plastique (localisation de la déformation) avant la rupture complète. Le phénomène d'endommagement par localisation de la déformation sous forme de striction est également très fréquent dans les matériaux polycristallins ductiles. Le troisième mode d'endommagement par apparition et coalescence de cavités aux niveaux des inclusions (ou défauts) est un phénomène lié à la déformation plastique (souvent par fluage à haute température) conduisant à de fortes instabilités locales par formation de cupules, comme dans le cas des aciers austénitiques (François et al., 1991/1992) [15]. Ces trois modes d'endommagement sont très liés à l'apparition de différents types de dislocations et à leurs mouvements, qui constituent l'élément moteur de la plasticité dans les matériaux.

Ces phénomènes d'endommagement ont une influence considérable sur la plasticité à cause de la surface élémentaire de résistance qui diminue comme le nombre de liaisons interatomiques. Cependant, les mécanismes de glissement le long des plans cristallographiques ne sont pas affectés ; seule la contrainte effective décroît, ce qui conduit à un couplage indirect dit "cinétique" entre la plasticité et l'endommagement.

Dans cette étude d'endommagement des revêtements, on ne s'intéressera pas aux aspects micromécaniques responsables de ce phénomène (arrangements de la matière, interactions entre les défauts ponctuels et les dislocations, etc.). Seul l'aspect phénoménologique est retenu tout en se basant sur des considérations thermodynamiques dans le cadre des processus irréversibles.

Pour décrire l'évolution de l'endommagement, on introduit une variable interne d'endommagement, notée D , dans le comportement des différentes couches constituant la tôle revêtue. Cette démarche très primitive, devra, par la suite, être complétée par une étude "matériau" puis micromécanique.

Plusieurs modèles basés sur les phénomènes d'apparition et de croissance de microcavités et de microfissures ont vu le jour, notamment grâce aux travaux de McClintock (1968) et de Rice et Tracey (1969)[49]. L'introduction d'une variable scalaire, notée, D (variable interne), par Kachanov (1958) [27] permet de décrire la progression de l'endommagement à partir d'un état non endommagé, $D=0$ (matériau sain), jusqu'à la rupture, $D=1$ (matériau complètement endommagé). Toutefois, un matériau peut être initialement endommagé, $D=D_0 \geq 0$, et la rupture peut intervenir à n'importe quel moment à partir d'une valeur critique, $D=D_C \leq 1$, de l'endommagement (Figure. V. 2.). Dans le cas d'un endommagement isotrope (matériau s'endommageant de la même manière dans toutes les directions), cette variable scalaire, D , suffit pour décrire ce phénomène, pour n'importe quel état de contrainte. Après, ont suivi les travaux de Lemaitre et al. (1971-1996) [29, 32-40], Murakami (1981) [46], Cordebois

et Sidoroff (1982) [7], Billardon (1989) [5], Benallal (1984 et 1992) [2, 3], etc., basés sur la thermodynamique des processus irréversibles et des considérations phénoménologiques tenant compte du couplage plasticité isotrope-endommagement isotrope ou anisotrope.

Pour modéliser le comportement mécanique des tôles d'acier à revêtements endommagés, il était convenu d'introduire un critère d'endommagement ductile isotrope dans le modèle "biphasé" en comportement élastoplastique anisotrope, tout en tenant compte du couplage anisotropie plastique-endommagement.

Les observations expérimentales montrent que le phénomène d'endommagement est caractérisé par l'altération des propriétés mécaniques du matériau (Lemaitre et Dufailly, 1987) [37]. La mesure expérimentale de ces caractéristiques mécaniques permet d'évaluer le degré d'endommagement à chaque instant de la déformation. Ainsi, la mesure de l'endommagement dans les matériaux ductiles peut s'effectuer expérimentalement à partir d'essais uniaxiaux de charge-décharge et de mesures répétitives du module de Young, qui baisse à cause de la perte de raideur (Figure. V. 2.). Il existe également d'autres méthodes comme celles de micrographie, des ultrasons ou de résistance électrique.

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (\text{V. 1})$$

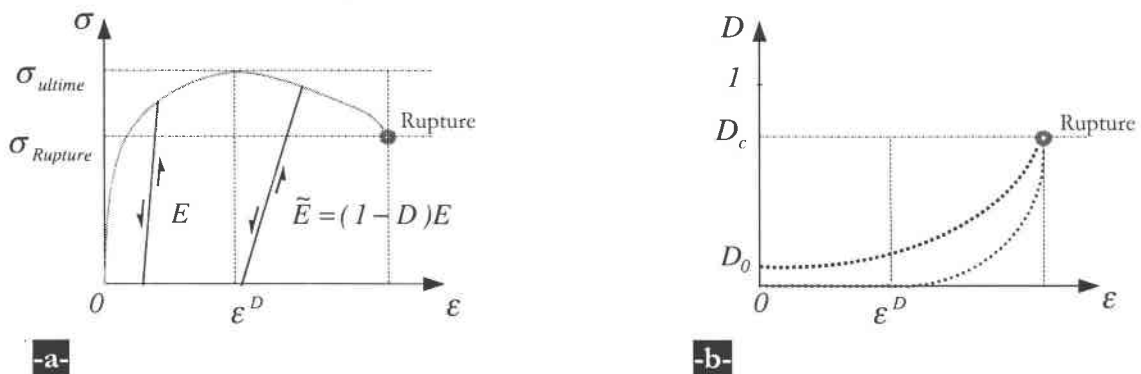


Figure. V. 2. Schéma représentant l'effet de l'endommagement sur le comportement élastoplastique.

La méthode d'identification expérimentale adoptée dans ce travail repose sur les techniques d'observation au MEB⁽¹⁾ utilisées au LEDEPP (SOLLAC).

La nouveauté qu'apporte ce modèle par rapport à ceux de la bibliographie, est l'incorporation de

⁽¹⁾ Microscope Electronique à Balayage.

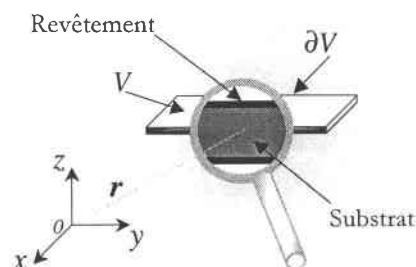
l'endommagement, ainsi mesuré, dans le critère de plasticité anisotrope de Hill à la place du critère de plasticité isotrope de von Mises.

Les équations déjà établies au chapitre (§. III) restent entièrement valables mis à part l'introduction d'une nouvelle variable d'endommagement, D (variable interne), dans la loi de comportement élastoplastique du revêtement. Pour des considérations et des besoins industriels, l'endommagement n'atteint pas l'acier. Donc, le but recherché n'est pas la détermination des CLF (Courbes Limites de Formage) pour résoudre les problèmes de formage liés à l'emboutissage des tôles, mais la prédiction des CLE (Courbes Limites d'Endommagement) du revêtement (ou des tôles revêtues) dans le but de contrôler l'endommagement pendant la mise en forme.

V. 2. Modèle biphasé de la tôle à revêtement endommagé

V. 2. 1. Topologie de la tôle à revêtement endommagé

Considérons un "V.E.R.", V , d'une tôle mince revêtue des deux côtés d'un matériau métallique de très faible épaisseur par rapport à la tôle initiale non-revêtue. La topologie de ce modèle "biphasé" symétrique de la tôle à revêtement endommagé suppose que le "substrat" de module élastique, $C_{ijkl}^{ep(S)}$, et de volume, V^S , est non endommageable et est revêtu des deux côtés d'une mince couche de "revêtement" endommageable de module élastique, $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et de volume, V^C (Figure. V. 3). L'interface substrat/revêtement est toujours considérée comme plane et parfaite de manière à ce que les vecteurs contrainte et déplacement, $dT_i = d\sigma_{ij} n_j$ et du_i , restent continus. La présence d'une éventuelle "interphase" n'est pas prise en compte.



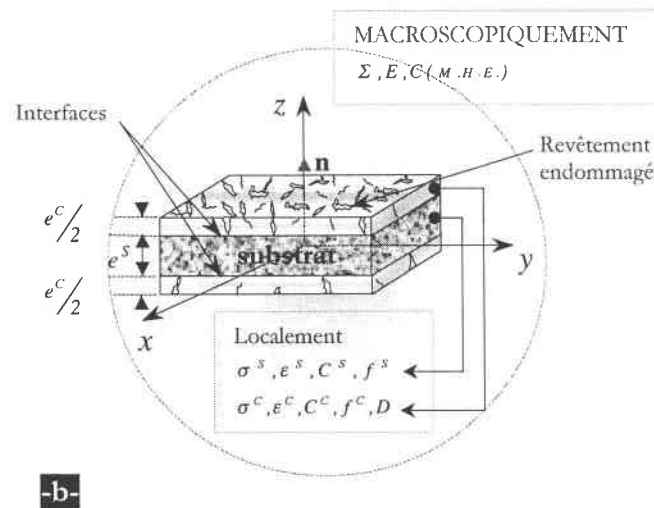


Figure. V. 3. Schéma d'un "V.E.R." du modèle biphasé symétrique de la tôle à revêtement endommagé.

V. 2. 2. Mécanique de l'endommagement

L'endommagement dans les matériaux ductiles intervient progressivement par création et croissance de discontinuités surfaciques et/ou volumiques pendant la déformation. Avec le concept de la contrainte effective, $\tilde{\sigma}_{ij}$, (Lemaitre, 1983) et dans le cas d'un endommagement isotrope, la variable scalaire, D , est définie à partir de la surface, S_D , ou du volume, V_D , endommagé (Figure. V. 4).

$$D = \frac{S_D}{S} \quad \text{avec} \quad 0 \leq D_0 \leq D \leq D_C \leq 1 \quad (\text{V. 2})$$

où D_0 et D_C correspondent respectivement aux valeurs initiale et critique de l'endommagement.

Pour une contrainte appliquée, $\sigma = \frac{F}{S}$, la contrainte effective correspondant à la surface, $(S - S_D)$, résistant au chargement est donnée par :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (\text{V. 3})$$

Ce qui donne le tenseur de la contrainte effective, $\tilde{\sigma}_{ij}$, en fonction de la variable d'endommagement :

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-D} \quad (\text{V. 4})$$

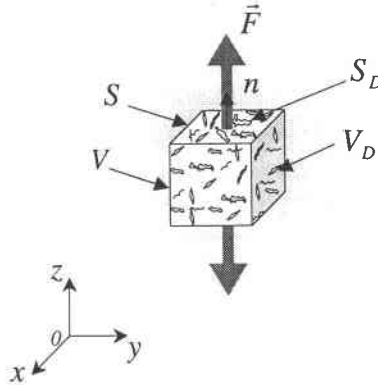


Figure. V. 4. Schéma d'un "V.E.R." endommagé.

V. 2. 3. Généralisation du critère de Hill aux matériaux élastoplastiques endommagés

V. 2. 3. 1. Critère de plasticité anisotrope de Hill avec endommagement

Par analogie avec le critère de von Mises pour les matériaux écrouissables isotropes endommagés (Benallal, Ju, Krajcinovic, Lemaitre,...) [2, 26, 28, 39,...] et en tenant compte du concept de la contrainte effective, on propose une extension du critère de plasticité anisotrope de Hill au cas des matériaux endommagés. Ainsi, le critère de Hill, tenant compte du couplage anisotropie plastique-endommagement isotrope, s'écrit :

$$f^{HD}(\sigma_{ij}, D) = \frac{1}{(1-D)} \left(\frac{3}{2(F+G+H)} \left[F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \right)^{1/2} = k(\epsilon_e^p) \quad (\text{V. 5})$$

avec $k(\epsilon_e^p) = \sigma_e(\epsilon_e^p)$ la loi d'écrouissage plastique (ou force critique) définie au chapitre (§. II).

La fonction implicite de Hill, dépendant de l'état de contrainte (variable de contrôle), σ_{ij} , de l'histoire de chargement (première variable interne), ε_e^p , ainsi que de l'état d'endommagement (deuxième variable interne), D , s'écrit alors :

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, D) = f^{HD}(\sigma_{ij}, D) - \sigma_e(\varepsilon_e^p) = 0 \quad (\text{V. 6})$$

V. 2. 3. 2. Loi de comportement élastoplastique avec endommagement : cinétique de l'endommagement

Maintenant, les deux phases (substrat et revêtement) n'obéissent plus à la même loi de comportement élastoplastique définie au chapitre (§. II). En effet, la loi de comportement mécanique du revêtement doit tenir compte du couplage "plasticité anisotrope-endommagement isotrope" et dans ce cas, il vient s'ajouter à la première variable interne de plasticité, ε_e^p , une deuxième variable interne, D , évoluant au cours de l'écoulement plastique et décrivant l'état d'endommagement dans cette phase.

Avec l'hypothèse des petites perturbations, la loi locale de comportement élastoplastique avec endommagement en un point, $\mathbf{r}(x_i)$, du matériau (tôle revêtue) s'écrit :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = (1 - D(\mathbf{r})) C_{ijkl}(\mathbf{r}) (\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) - \varepsilon_{kl}^p(\mathbf{r})) \quad (\text{V. 7})$$

ou encore, par introduction du tenseur des modules élastoplastiques à partir du critère de Hill avec endommagement, ainsi que la condition de consistance, $\dot{f} = 0$, comme suivant :

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^{ep}(\sigma_{ij}(\mathbf{r}), \varepsilon_e^p(\mathbf{r}), D(\mathbf{r})) d\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) \quad (\text{V. 8})$$

Pour ne pas alourdir les équations, le vecteur position, $\mathbf{r}(x_i)$, défini au chapitre (§. II) (équation (II.1)), sera ignoré dans le reste du texte.

L'énergie élastique libre, $\rho\psi$, d'un système endommageable subissant une contrainte, σ_{ij} , qui conduit à des déformations élastiques, ε_{ij}^e , et plastiques, ε_{ij}^p , s'écrit :

$$\rho\psi = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) (1 - D) C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (\text{V. 9})$$

où ρ représente la densité (ou masse volumique) du matériau.

En plus de la force thermodynamique, $\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$, associée à la déformation, il existe une deuxième force, notée Y , associée à l'endommagement, D , et qui dérive de l'énergie élastique $\rho \psi$. Son expression est donnée par :

$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D}, \quad (\text{V. 10})$$

c'est-à-dire
$$Y = -\frac{S_{ijkl} \sigma_{kl} \sigma_{ij}}{2(1-D)}$$

où $S_{ijkl} = C_{ijkl}^{-1}$ représente l'inverse du tenseur des modules élastiques.

Dans le cas de l'élastoplasticité isotrope ($C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl}$) (ou bien en fonction du module de Young, E , et du Coefficient de Poisson ν (§. A.2) ou (§. III)), cette force thermodynamique devient :

$$Y = \frac{\sigma_e^2 R_\nu}{2E(1-D)^2} \quad (\text{V. 11})$$

avec
$$R_\nu = \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e} \right)^2 \quad (\text{V. 12})$$

où σ_H représente la pression hydrostatique et σ_e la contrainte équivalente.

La plasticité et l'endommagement évoluent respectivement selon les deux lois incrémentales (règles de normalité) qui suivent :

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\ dD = d\lambda \frac{\partial F}{\partial Y} \quad (\text{si } \varepsilon_e^p \geq \varepsilon_e^{pD}) \end{cases} \quad (\text{V. 13})$$

où $d\lambda$ représente l'incrément du multiplicateur plastique et la fonction, F , représente le potentiel inélastique donné par la relation suivante, qui fait intervenir les deux forces thermodynamiques, σ_{ij} et Y , associées à la déformation et à l'endommagement respectivement :

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, D, Y) = f(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, D) + \frac{S_0}{(1+s_0)(1-D)} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{(1+s_0)} \quad (\text{V. 14})$$

où s_0 est le coefficient de la non linéarité associée à l'endommagement, et S_0 est un paramètre d'endommagement pouvant dépendre de la déformation plastique équivalente ε_e^p . Ils sont identifiables expérimentalement.

L'incrément du travail plastique est donné par :

$$dw^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda = f d\lambda = \frac{\sigma_e}{(1-D)} d\lambda = \sigma_e d\varepsilon_e^p \quad (\text{V. 15})$$

Ainsi, le multiplicateur plastique, $d\lambda$, peut s'exprimer à partir de celui de la déformation plastique équivalente comme suivant :

$$d\lambda = (1-D) d\varepsilon_e^p \quad (\text{V. 16})$$

D'après l'expression du potentiel inélastique (V. 14) et la relation (V. 16), l'incrément de la variable d'endommagement s'écrit :

$$dD = \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} d\varepsilon_e^p, \quad (\text{V. 17})$$

Dans le cas où l'élasticité est isotrope, l'équation (V. 16) devient :

$$dD = \left(\frac{\sigma_e^2 R_v}{2 E S_0 (1-D)^2} \right)^{s_0} d\varepsilon_e^p \quad (\text{V. 18})$$

La formulation de la loi incrémentale de comportement élastoplastique local, tenant compte du couplage plasticité-endommagement, nécessite la détermination de l'incrément du multiplicateur plastique, $d\lambda$, à partir de la condition de consistance :

$$df(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, D) = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_e^p} \right) d\varepsilon_e^p + \left(\frac{\partial f}{\partial D} \right) dD = 0 \quad (\text{V. 19})$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f^{HD}}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_e^p} = H_p \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial D} = \frac{f^{HD}}{(1-D)}$$

L'incrément du tenseur des contraintes, $d\sigma_{ij}$, est donné par la loi de Hooke (V. 7), l'incrément de la déformation plastique équivalente, $d\varepsilon_e^p$, est donné en fonction de celui du multiplicateur plastique, $d\lambda$, par la relation (V. 16), et l'incrément de l'endommagement, dD , est remplacé par son expression générale (V. 17). Et en tenant compte de la règle de normalité (V. 13), on obtient l'expression suivante :

$$d\lambda = \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (1-D) C_{ijkl}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} (1-D) C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \right) + \left(\frac{H_p}{(1-D)} \right) - \left(\frac{\sigma_e}{(1-D)^3} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \right)} \right\} d\varepsilon_{kl} \quad (\text{V. 20})$$

La connaissance de $d\lambda$ permet de relier l'incrément de la déformation plastique à celui de la déformation totale par l'intermédiaire de la règle de normalité et, par la suite, la détermination de la loi locale de comportement élastoplastique avec endommagement :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep}(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, D) d\varepsilon_{kl} \quad (\text{V. 21})$$

où C_{ijkl}^{ep} représente le module tangent local (relatif à une phase) donné par :

$$C_{ijkl}^{ep} = (1-D)C_{ijkl} - \left[\frac{(1-D)C_{ijmn} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} (1-D)C_{klpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} (1-D)C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} \right) + \left(\frac{H_p}{(1-D)} \right) - \left(\frac{\sigma_e}{(1-D)^3} \left(\frac{Y}{S_0} \right)^{s_0} \right)} \right] \quad (V. 22)$$

Le module tangent local dépend non seulement de l'état de contrainte, σ_{ij} , et de l'histoire du chargement, ε_e^p , mais aussi de l'état d'endommagement D . Il est donné dans le cas général où les comportements élastique et plastique seraient isotropes ou anisotropes.

V. 2. 4. Application de la mécanique de l'endommagement au modèle biphasé de la tôle revêtue : mesure expérimentale et identification des paramètres d'endommagement

Suite aux essais expérimentaux réalisés au LEDEPP (SOLLAC), les résultats des observations expérimentales au MEB par Christophe MAGNY [42], montrent, dans le cas des revêtements d'alliages ZnNi, que les fissures sont débouchantes, c'est-à-dire qu'elles traversent entièrement le revêtement d'une manière uniforme sur toute la surface, mettant ainsi à nu le substrat (Figure. V. 5. et V. 6.).

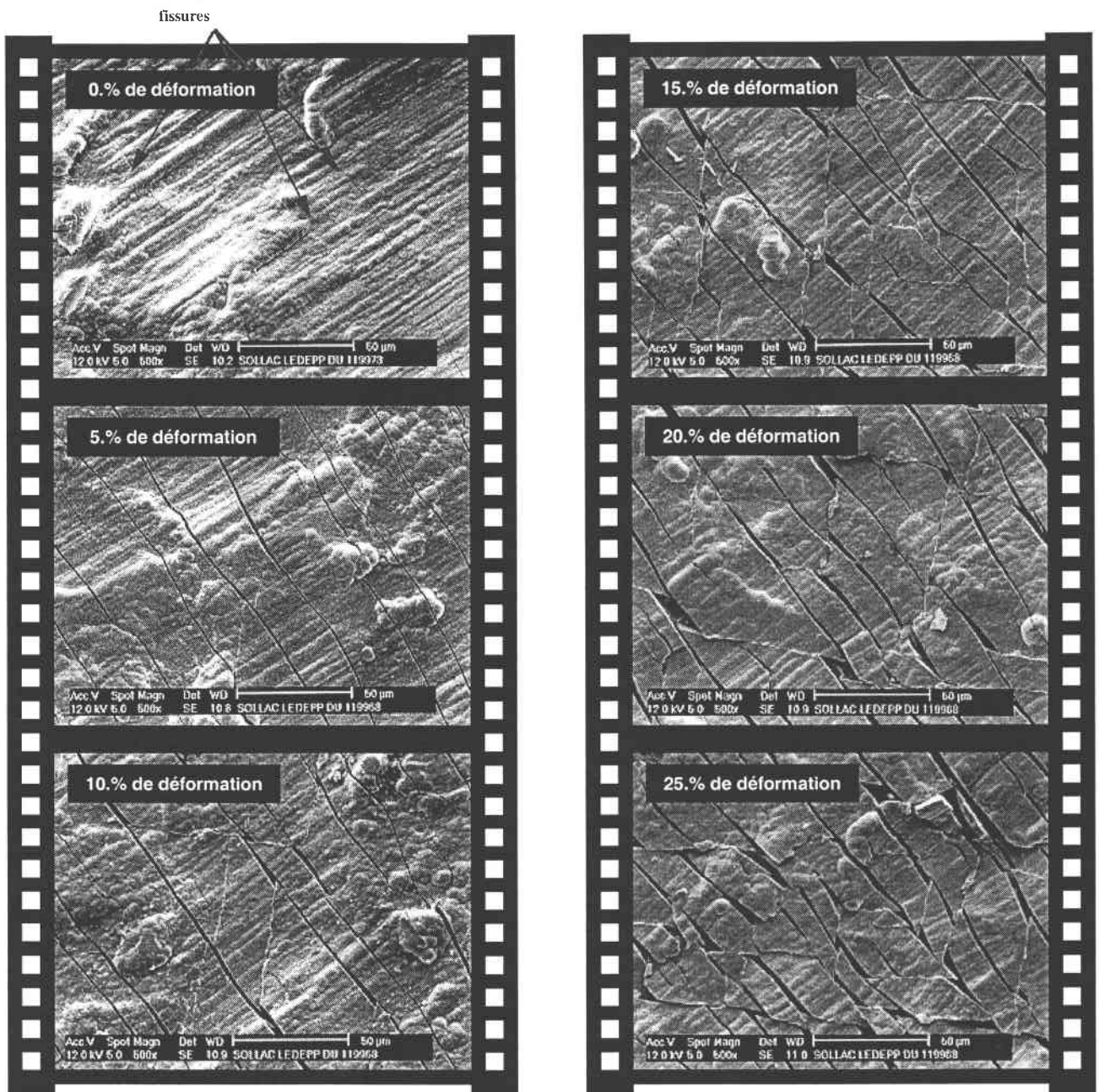


Figure. V. 5. Endommagement du revêtement ZnNi (6. µm/face) par fissuration pendant la déformation suivant la direction 11 (micrographies au MEB).

Ce type d'endommagement du revêtement ne permet pas d'appliquer le concept de la variable unique d'endommagement, D (cas isotrope). Il faudrait donc utiliser une variable tensorielle D_{ij} (cas anisotrope) au lieu de la variable scalaire D . Mais, nous maintenons, cependant, la variable scalaire pour des raisons de simplicité et de temps.

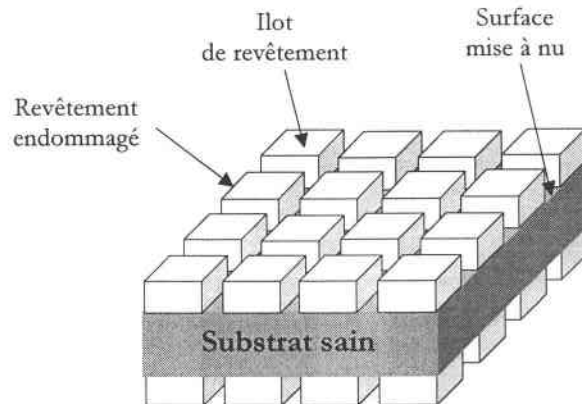


Figure. V. 6. Endommagement du revêtement par formation d'îlots (fissures débouchantes).

Une bonne adhérence du revêtement au substrat permet de négliger le phénomène d'endommagement par décohésion interfaciale, et les fissures dans le revêtement sont réparties d'une manière uniforme sur toute la surface (Figure. V. 5.).

$$D^C = D = \frac{V_D}{V^C} = \frac{S_D \times e^C}{S^C \times e^C} = \frac{S_D}{S^C} \quad (\text{V. 23})$$

Le substrat est considéré comme non endommageable, $D^S = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'endommagement propre au substrat, et les fissures dans le revêtement s'arrêtent au niveau de l'interface et ne la traversent pas.

La loi macroscopique du comportement élastoplastique du "M.H.E.", tenant compte de l'endommagement du revêtement, est donnée par la relation (III. 17) :

$$d\Sigma_{ij} = \left\{ C_{ijkl}^{ep(S)} + f^C \Delta C_{ijmn}^{ep(C-S)} A_{mnkl}^C \right\} dE_{kl} \quad (\text{V. 24})$$

où le seul changement intervient au niveau de la loi locale de comportement élastoplastique du revêtement, c'est-à-dire au niveau du module tangent du revêtement, $C_{ijkl}^{ep(C)}(\sigma_{ij}^C, \varepsilon_e^{p(C)}, D)$, ainsi qu'au niveau du tenseur de localisation des déformations dans le revêtement A_{ijkl}^C .

Pour gérer le phénomène d'adoucissement lié à l'endommagement, il est nécessaire de procéder à un chargement mixte, c'est-à-dire en contrainte, $d\Sigma_{ij}$, et puis en déformation, dE_{ij} , dès le début de l'endommagement pour s'affranchir des problèmes de divergence des calculs.

Pour caractériser l'endommagement du revêtement, un traitement particulier des résultats expérimentaux de l'observation de la surface de la tôle revêtue au MEB, conduit à une loi phénoménologique dont les paramètres sont identifiés à partir d'une loi exponentielle donnant l'évolution de l'endommagement, D , en fonction de la déformation plastique équivalente ε_e^p .

L'estimation de la surface mise à nu, pendant le chargement, en fonction de l'allongement de l'éprouvette d'essai permet d'évaluer le taux d'endommagement du revêtement (alliage ZnNi), pour différentes valeurs de la déformation conventionnelle ε_c (Figure. V. 5.). Le passage à la déformation vraie, ε_v , et par la suite à la déformation plastique équivalente, ε_e^p , se fait selon l'algorithme (Algorithme. V. 1.).

L'identification, par la suite, des deux paramètres d'endommagement, s_0 et S_0 , se fait directement à partir des deux relations (V. 17) et (V. 26) de l'Algorithme. (V. 1.).

Les observations expérimentales au MEB révèlent un caractère endommageable du revêtement de ZnNi même à l'état non déformé ($\sigma_{ij} = 0$ et $\varepsilon_e^p = 0$). Cette valeur initiale de l'endommagement notée, D_0 , est relevée directement à partir de la courbe expérimentale donnant l'évolution de l'endommagement en fonction de l'allongement (cinétique de l'endommagement). Sa valeur intervient dans la loi phénoménologique donnée par la relation (V. 25).

Exemple de la traction uniaxiale suivant 11 (TUDL)

La loi phénoménologique associée à l'endommagement est déterminée à l'aide de l'algorithme suivant :

Etat Initial : $\varepsilon_{11}^{p^m}, \varepsilon_e^{p^m}, D^m$

[imposer] : $d\varepsilon_c \Rightarrow d\varepsilon_{11}^p$

[calculer] : $d\varepsilon_{22}^p = \frac{-H}{H+G} d\varepsilon_{11}^p, d\varepsilon_{33}^p = \frac{-G}{H+G} d\varepsilon_{11}^p$ et $d\varepsilon_e^p$

$D = D_0 + A\varepsilon_c$ avec $\varepsilon_v = Ln(1 + \varepsilon_c)$
(en fonction de la déformation conventionnelle)

[calculer] : $D = D_0 + A_v (e^{B_v \varepsilon_v} - 1)$
(en fonction de la déformation vraie)

iter=iter+1

ou encore, en négligeant la déformation élastique, $\varepsilon_{ij}^e \ll \varepsilon_{ij}^p$,
et en passant à la déformation plastique équivalente

$D = A_p + B_p e^{C_p \varepsilon_e^p}$ avec $D_0 = A_p + B_p$ (V. 25)

et pour chaque $d\varepsilon_c$ ou $d\varepsilon_e^p$, on a :

$dD = A d\varepsilon_c$ ou $dD = B_p C_p e^{C_p \varepsilon_e^p} d\varepsilon_e^p$ (V. 26)

$$\begin{cases} \varepsilon_i^{p^{m+1}} \leftarrow \varepsilon_{ij}^{p^m} + d\varepsilon_{ij}^p \\ \varepsilon_e^{p^{m+1}} \leftarrow \varepsilon_e^{p^m} + d\varepsilon_e^p \\ D^{m+1} \leftarrow D^m + dD \end{cases}$$

Etat réactualisé : $\varepsilon_{11}^{p^{m+1}}, \varepsilon_e^{p^{m+1}}, D$

Algorithme. V. 1. Méthode d'obtention de la courbe $D(\varepsilon_e^p)$ permettant l'identification des paramètres d'endommagement s_0 et S_0 .

En identifiant les deux équations (V. 26) et (V.17) associées aux lois phénoménologique et thermodynamique, donnant l'évolution de l'endommagement, D , en fonction de la déformation plastique équivalente, ε_e^p , on obtient l'expression du paramètre S_0 :

$$S_0 = S_0(\varepsilon_e^p) = \frac{Y}{(B_p C_p e^{C_p \varepsilon_e^p})^{\frac{1}{s_0}}} \quad (\text{V. 27})$$

En remplaçant la force thermodynamique, Y , associée à l'endommagement par son expression dans le cas où l'élasticité est isotrope (équation (V. 11)), on obtient dans le cas d'un essai uniaxial (TUDL) $R_v = 1$, et en considérant le cas où $s_0 = 1$, (valeur couramment utilisée par les expérimentateurs) :

$$S_0 = S_0(\varepsilon_e^p) = \frac{\sigma_e^2}{2E(1-D)^2} \left(B_p C_p e^{C_p \varepsilon_e^p} \right)^{-1}, \quad (\forall \varepsilon_e^p \geq \varepsilon_e^{pD} \geq 0) \quad (\text{V. 28})$$

La plupart des auteurs considère le paramètre S_0 comme constant durant l'évolution de l'endommagement. Mais pour plus de précision dans les calculs, son expression générale, donnée par la relation (V. 27), est utilisée dans le code de calcul du modèle biphasé de la tôle revêtue endommagée.

V. 3. Applications au comportement élastoplastique des tôles d'acier revêtues d'alliage ZnNi endommagé

Le but de cette application est l'étude de l'effet d'un revêtement endommagé sur le comportement élastoplastique de la tôle revêtue. Pour ce faire, on considère le cas d'une tôle d'acier d'épaisseur, $e^s = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche d'alliage ZnNi d'épaisseur $e^c = 6$ $\mu\text{m}/\text{face}$ (produit[®] SOLLAC[®] connu sous le nom de laboratoire S1305). L'élément de volume de la tôle revêtue est soumis à sa frontière à un chargement mécanique mixte ($d\Sigma_{ij}$ avant le début de la localisation de la déformation et dE_{ij} après) à température constante (ambiante).

V. 3. 1. Analyse de la courbe expérimentale d'endommagement et identification des paramètres

La première étape de l'étude de l'endommagement du revêtement de ZnNi est l'analyse de la

courbe expérimentale donnant le pourcentage de la surface mise à nu, $\frac{S_D}{S}$ (Figure. V. 5.), en fonction de l'allongement, $\Delta L(\%)$, de l'éprouvette, c'est-à-dire l'endommagement, D , en fonction de la déformation conventionnelle ε_c . Pour en déduire la "vraie" loi phénoménologique associée à ce phénomène, il faut passer à la déformation plastique uniaxiale et ensuite à la déformation plastique équivalente, en faisant l'hypothèse que les deux phases (acier et revêtement) se déforment de la même façon. On peut confondre alors la déformation mesurée expérimentalement avec celle du revêtement et en déduire par la suite la déformation plastique équivalente (la déformation élastique étant négligée), tout en tenant compte de l'isotropie plastique plane du revêtement (Algorithme. V. 1.).

La courbe, $D(\varepsilon_e^p)$ (Figure. V. 7.), donnant la loi d'évolution de l'endommagement du revêtement de ZnNi, permet d'identifier les paramètres, s_0 et S_0 , associés à l'endommagement, et de les introduire dans le code de calcul du modèle.

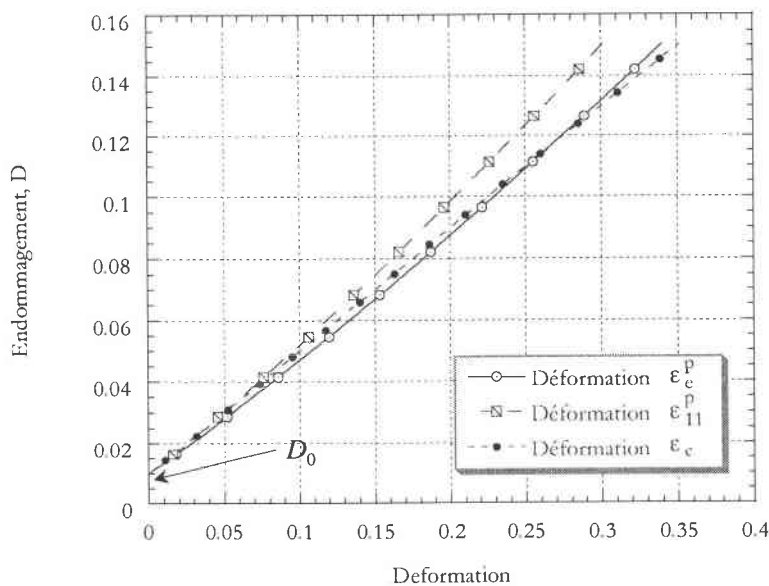


Figure. V. 7. Courbes expérimentales donnant l'évolution de l'endommagement dans le revêtement de ZnNi pendant la déformation (Figure. V. 5).

La loi phénoménologique associée à cette courbe est donnée par l'équation (V. 25), ce qui permet de déduire la valeur initiale, $D_0 = D(\sigma_{ij} = 0 \text{ et } \varepsilon_e^p = 0)$, de l'endommagement à partir des paramètres A_p , B_p et C_p , comme suivant (Tableau. V. 1.) :

	A_p	B_p	C_p	$D_0 = A_p + B_p$ (%)
Revêtement d'Alliage ZnNi	-0.3900	0.4000	0.8864	0.01=1. %

Tableau. V. 1. Paramètres de la loi phénoménologique d'endommagement du revêtement (ZnNi).

V. 3. 2. Propriétés mécaniques de la tôle d'acier à revêtement ZnNi endommagé

L'identification des différentes propriétés de chacune des phases constitutives de la tôle revêtue exige beaucoup d'essais expérimentaux sur des éprouvettes, de la tôle nue et de la tôle revêtue, découpées dans les trois directions (DL ou 0° , DD ou 45° et DT ou 90°), en raison de l'anisotropie plastique. Cela nécessite d'importantes compagnes d'essais et beaucoup de temps pour le dépouillement des courbes, afin d'identifier les différents paramètres du problème. Il était convenu donc de reprendre les propriétés mécaniques obtenues par le modèle biphasé sans endommagement. L'endommagement du revêtement étant identifié à partir des observations expérimentales au MEB, il devient facile de l'intégrer dans le code de calcul du modèle biphasé à revêtement endommagé ce qui permet de prévoir le comportement du "M.H.E." par méthode directe.

Les caractéristiques mécaniques (modules de Young, coefficients de Poisson, coefficients de Hill, limites d'élasticité et coefficients d'écrouissage) et géométriques (épaisseurs ou fractions volumiques) sont regroupées dans le tableau (Tableau. V. 2.).

	Substrat	Revêtement	"M.H.E." (MODELE)	
	(Acier)	(ZnNi)	(ZnNi+Acier+ZnNi)	
Épaisseurs $e^s, e^c/2, e$ (mm)	0.80	0.006	0.812	
Modules de Young E_1, E_2, E_3 (MPa)	208 000.	107 217.	206 512.	
	---	---	206 512.	
	---	---	205 333.	
Coefficients de Poisson $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$	0.3	0.2630	0.2997	
			0.2993	
			0.2993	
Coefficients de Lankford $r_{0^\circ}, r_{45^\circ}, r_{90^\circ}$	1.85	0.10	1.73	
			1.92	1.74
			2.45	1.79
Coefficients de HILL F, G, H, N (MPa ²)	2.29 10 ⁻⁶	1. 10 ⁻⁵	3.03 10 ⁻⁶	
			3.10 10 ⁻⁶	3.08 10 ⁻⁶
			5.73 10 ⁻⁶	5.24 10 ⁻⁶
			1.31 10 ⁻⁵	1.39 10 ⁻⁵
Limites élastiques σ_0 (MPa)	146.	100.	---	
Coefficients d'écroutissage plastique n, K	0.51	0.14	---	
			757.	650.

Tableau. V. 2. Propriétés mécaniques élastiques et plastiques du substrat (Acier), du revêtement (ZnNi), ainsi que celles du "M.H.E." tenant compte de l'endommagement initial, D_0 , du revêtement.

V. 3. 3. Effet de l'endommagement sur les propriétés élastiques du "M.H.E."

L'endommagement influence directement les caractéristiques mécaniques du revêtement de ZnNi et par la suite celles du "M.H.E.". Pour mettre en évidence cet effet, on a étudié l'évolution des valeurs des modules de Young du revêtement et du "M.H.E." suivant la direction 11 (DL) en fonction de l'endommagement. Le substrat est supposé non endommageable, donc son module de Young reste inchangé pendant la déformation.

Le module de Young du revêtement décroît d'une manière très importante en fonction de l'endommagement, alors que celui du "M.H.E." ne doit pas être trop influencé, en raison de la minceur du revêtement (Figure. V. 8.).

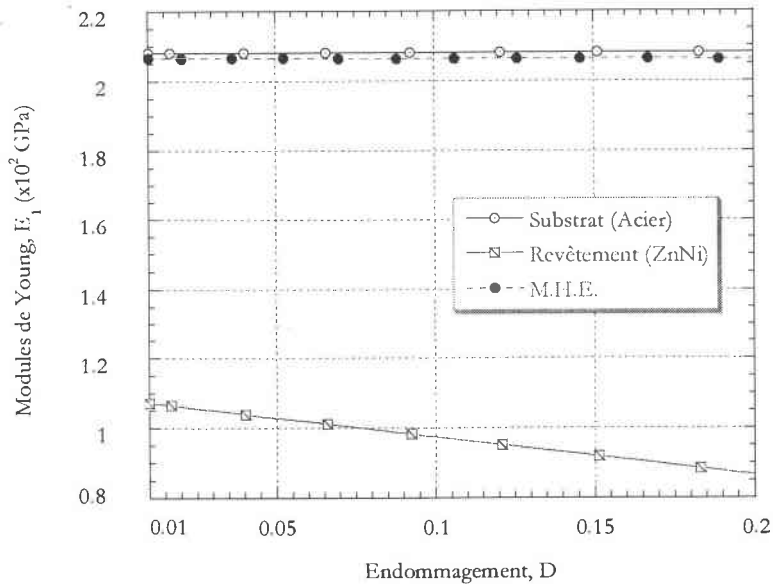


Figure. V. 8. Evolution du module de Young suivant la direction 11 en fonction de l'endommagement.

Pour voir l'effet de l'endommagement du revêtement sur le module de Young de la tôle revêtue, il suffit d'agrandir l'échelle du graphique. La courbe obtenue montre bien la chute de l'élasticité du "M.H.E." en fonction de l'endommagement.(Figure. V. 9). Toutefois, cette baisse reste faible pour un revêtement de 6. μm d'épaisseur.

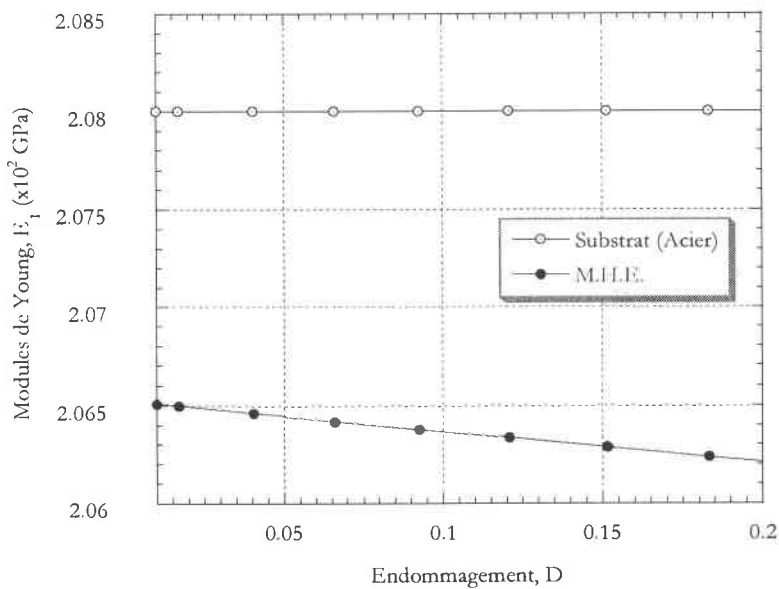


Figure. V. 9. Evolution du module de Young du M.H.E. suivant la direction 11 en fonction de l'endommagement.

Une épaisseur plus importante du revêtement de ZnNi doit faire apparaître, d'une façon plus importante, l'effet de l'endommagement de ce dernier sur le comportement élastoplastique de la tôle revêtue. Cela sera discuté dans les paragraphes qui suivent.

V. 3. 4. Effet de l'endommagement sur le comportement élastoplastique du "M.H.E."

Les courbes contraintes-déformations obtenues pour un essai TUDL sur la tôle d'acier revêtue de ZnNi montrent un revêtement très affecté par l'apparition et l'évolution de l'endommagement. Cet effet se manifeste par un important adoucissement lié à la détérioration des propriétés mécaniques du revêtement. Dans une telle situation, la courbe de réponse élastoplastique du "M.H.E." reste très proche de celle de l'acier qui n'est pas endommagé (Figure V. 10.).

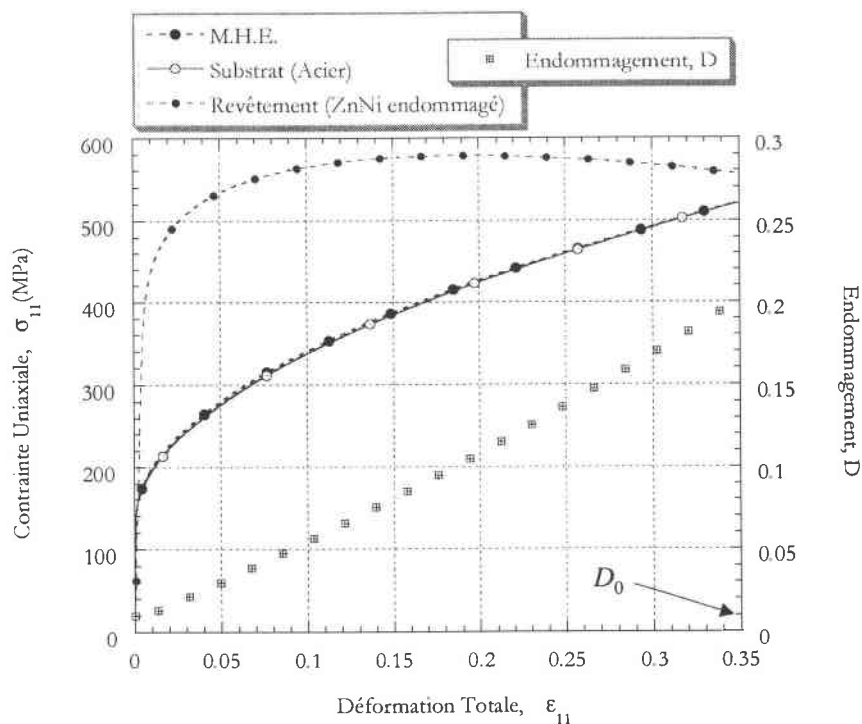


Figure. V. 10. Comportement élastoplastique de l'acier, du revêtement et du "M.H.E." pour un essai TUDL.

L'endommagement du revêtement responsable du phénomène d'adoucissement étant quantifié expérimentalement, le modèle micromécanique élaboré dans ce chapitre (§. V) permet de le reproduire

par simulation numérique. Ainsi, les courbes numérique (calculée à partir de la formulation thermodynamique) et expérimentale (loi phénoménologique) donnant l'évolution de l'endommagement (cinétique de l'endommagement) dans le revêtement de ZnNi en fonction de la déformation plastique équivalente se superposent parfaitement (Figure. V. 11.).

L'endommagement démarre à partir de la valeur initiale, $D_0 = 1.0\%$, à contrainte macroscopique nulle ($\Sigma_{ij} = 0.$), et s'amorce avec la plasticité du revêtement sous l'effet de la contrainte de traction uniaxiale Σ_{11} (TUDL).

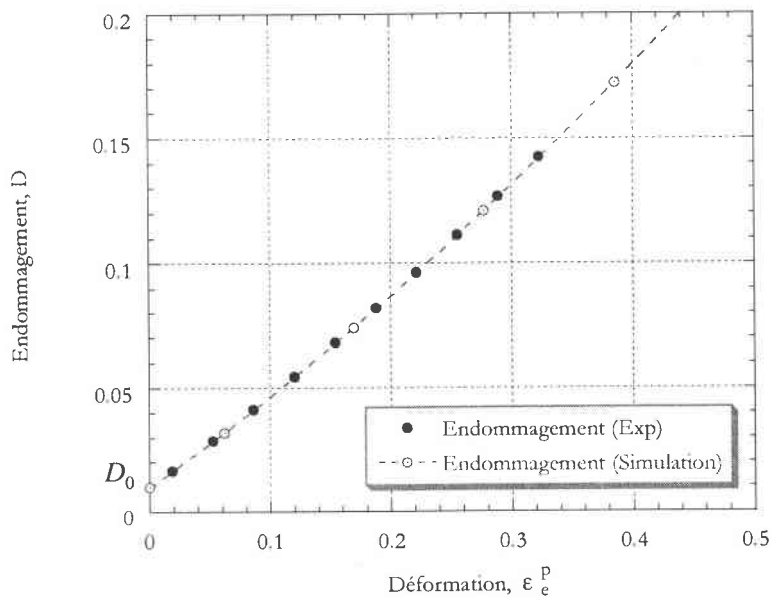


Figure. V. 11. Comparaison entre la courbe expérimentale d'endommagement et la courbe obtenue par simulation numérique pour un essai TUDL.

V. 3. 5. Effet de l'endommagement sur l'évolution des contraintes locales dans chacune des phases

Le modèle biphasé de la tôle revêtue non endommagée (traité au chapitre (§. III)) avait mis en évidence la différence existant entre les valeurs des contraintes locales (le saut que subissent les contraintes, en raison des différences dans les propriétés mécaniques des deux phases). Mais, l'endommagement ajoute un effet supplémentaire lié au phénomène d'adoucissement, qui se manifeste

par une importante chute de la contrainte locale, σ_{11}^C , dans le revêtement, en raison de la perte de rigidité (un écoulement en baisse) (Figure. V. 12.).

La contrainte locale dans le substrat reste du même ordre de grandeur que la contrainte macroscopique appliquée, Σ_{11} , donc non influencée par l'endommagement du revêtement pour sa faible épaisseur $e^C = 6. \mu\text{m}/\text{face}$.

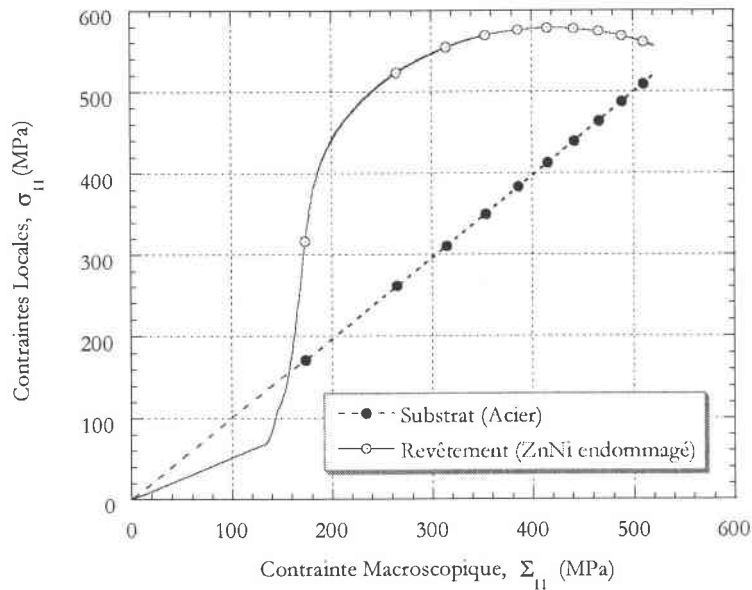


Figure. V. 12. Evolution des contraintes locales dans les deux phases en fonction de la contrainte macroscopique pour un essai TUDL.

L'évolution des contraintes locales est d'une grande importance dans les procédés de mise en forme, dans la mesure où les grandes concentrations de contraintes peuvent conduire à la localisation de la déformation ou à l'endommagement du matériau et sa ruine, ce qui représente un résultat indésirable. Ce point fera l'objet du paragraphe suivant intitulé Courbes Limites d'Endommagement (§. V. 3. 6).

V. 3. 6. Courbes Limites d'Endommagement (CLE)

Le formage des métaux par emboutissage (par ex) est un processus très complexe faisant intervenir plusieurs paramètres difficilement contrôlables. Une grande connaissance du matériau et une parfaite

maîtrise de sa formabilité sont nécessaires pour rationaliser les procédés de mise en œuvre et obtenir un fonctionnement dans des conditions optimales.

Les courbes limites de formage (CLF) permettent d'appréhender l'emboutissabilité des aciers qui met en jeux des trajets de chargements complexes, donnant lieu à une localisation de la déformation (par apparition de strictions). Mais, dans le cas des aciers revêtus, cette méthode devient insuffisante. En effet, les revêtements doivent permettre d'améliorer la résistance des aciers vis-à-vis des sollicitations mécaniques et surtout les mettre à l'abri de la corrosion, c'est-à-dire qu'il faut éviter de trop endommager le revêtement pour qu'il assure au mieux son rôle protecteur. Cela devient possible en contrôlant le pourcentage d'endommagement du revêtement pendant la mise en forme à partir des courbes limites d'endommagement (CLE).

Pour ce faire, on considère toujours le cas de la tôle d'acier revêtue de $6 \mu\text{m}/\text{face}$ d'alliage ZnNi. Le "V.E.R." est soumis à sa frontière à plusieurs trajets de chargements mécaniques dans le plan de la tôle.

Les courbes obtenues pour différents rapports, $c = \frac{\Sigma_{22}}{\Sigma_{11}}$, de contraintes macroscopiques sont ensuite rapportées sur les axes principaux de déformations, avec $E_{11} \geq E_{22}$ (par convention) (Figure. V. 13.).

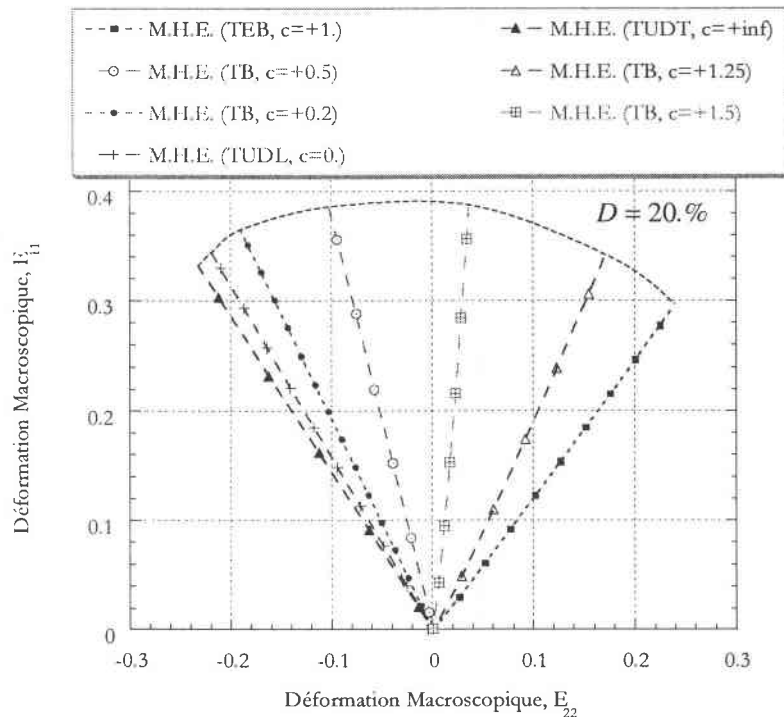


Figure. V. 13. Courbe Limite d'Endommagement (CLE) du "M.H.E." obtenue à 20. % d'endommagement pour différents trajets de chargements.

La CLE, ainsi obtenue, permet de prévoir l'endommagement du revêtement pendant la mise en forme des tôles revêtues, non pas en terme de déformation plastique équivalente ou en terme de localisation de la déformation (cas des CLF), mais en terme du taux d'endommagement atteint dans le revêtement. Cela doit permettre de gérer au mieux le problème d'endommagement des revêtements pendant la déformation. Cette technique permet également de prévoir les CLE pour différents taux d'endommagement, qu'on peut comparer aux CLF obtenues expérimentalement ou par simulation pour avoir une idée sur la qualité du produit en terme de localisation des déformations dans l'acier et en terme d'endommagement du revêtement. Ainsi, on obtient dans le cas de la tôle d'acier revêtue de ZnNi les CLE correspondant à 10. % et 20. % d'endommagement, D , qu'on compare à une courbe CLD (Courbe Limite de Déformation) obtenue à partir d'un critère fixé en taux de déformation plastique équivalente (par ex, à 25.% de ε_e^p de l'acier) (Figure. V. 14.).

Les courbes obtenues montrent qu'en fixant une valeur critique, $D_c = 10\%$, de l'endommagement (valeur à partir de laquelle le revêtement ne remplirait plus son rôle protecteur), on sous-estimerait l'importance du taux d'endommagement atteint dans le revêtement pendant la mise en forme de l'acier à cause du critère d'endommagement qui est atteint avant le critère de déformation. Cela peut conduire à l'obtention de bons produits de point de vue formabilité, mais très mauvais de point de vue résistance à la corrosion (revêtement surendommagé).

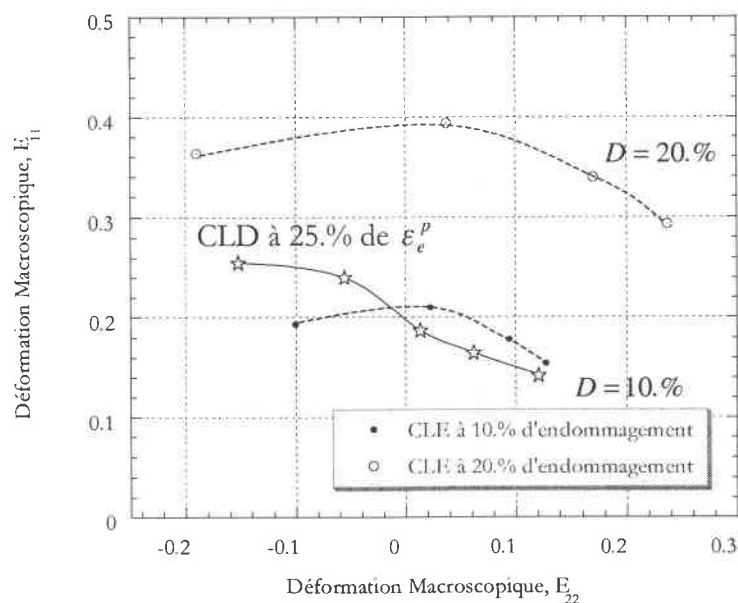


Figure. V. 14. Courbes Limites d'Endommagement (CLE) du "M.H.E." obtenue à 10. % et 20. % d'endommagement du revêtement pour différents trajets de chargements.

Dans, le cas où l'endommagement critique vaut $D_c = 20\%$, la mise en forme de la tôle revêtue pourrait se faire sans soucis, en raison du critère de déformation (CLD) qui est atteint avant celui d'endommagement (CLE).

V. 3. 7. Effets de l'épaisseur du revêtement d'alliage ZnNi endommagé

V. 3. 7. 1. Effet de l'épaisseur du revêtement sur le comportement élastoplastique du "M.H.E."

Les chapitres précédants ont montré l'effet important de l'épaisseur du revêtement sur la réponse élastoplastique macroscopique du "M.H.E.". Cet effet se manifeste par une grande sensibilité des caractéristiques mécaniques élastiques et plastiques à la fraction volumique du revêtement.

Mais, dans le cas des revêtements endommagés, l'effet doit être encore plus important, en raison de l'adoucissement introduit par l'endommagement. Les courbes de tractions uniaxiales (TUDL), obtenues pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi, montrent une importante sensibilité du comportement élastoplastique à l'épaisseur du revêtement. Les courbes obtenues n'ont plus tendance à s'éloigner de la courbe de l'acier (cas du modèle biphasé sans endommagement (Figure. III. 12.), mais s'y approchent au fur est à mesure que l'endommagement devient important (Figure. V. 15.).

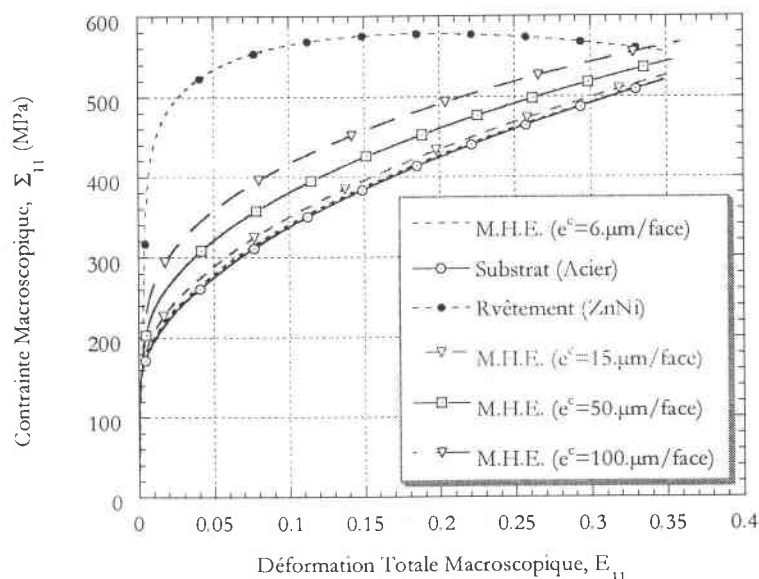


Figure. V. 15. Comportement élastoplastique du "M.H.E." pour un essai TUDL et pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi.

V. 3. 7. 2. Effet de l'épaisseur du revêtement sur l'évolution des contraintes locales

Après avoir étudié l'effet de l'épaisseur du revêtement endommagé sur la réponse macroscopique du "M.H.E.", nous nous proposons dans ce paragraphe d'étudier son influence sur l'ordre de grandeur des contraintes locales dans les deux phases du matériau.

L'endommagement du revêtement est considéré comme non influencé par l'épaisseur du ZnNi, ce qui ne correspond pas forcément à la réalité expérimentale. Cependant, cette hypothèse reste acceptable, et permet de mettre en évidence l'effet de l'épaisseur du revêtement sur le comportement.

Les effets de l'épaisseur sur les caractéristiques mécaniques du "M.H.E.", et sur la concentration des contraintes de types "élastique" et "plastique", ont été discutés en détail au chapitre (§. III), mais il reste à voir quel effet l'endommagement du revêtement apporte-t-il de plus sur la répartition des contraintes locales de type "plastique".

Les résultats de simulation des essais de traction TUDL, pour différentes épaisseurs du revêtement, montrent que les contraintes locales dans le revêtement (dans la zone plastique) sont beaucoup plus importantes que celles dans le substrat, en raison de l'écroutissage du ZnNi qui est plus élevé. Ce dernier commence à céder dès l'apparition de l'endommagement (phénomène d'adoucissement). Avec des revêtements plus épais, l'effet de l'endommagement commence de plus en plus tard, en raison des contraintes locales dans le revêtement qui sont de moins en moins importantes. En effet, plus l'épaisseur du revêtement est grande, plus l'endommagement est tardif, ce qui laisse le "temps" à l'écroutissage de continuer d'évoluer normalement dans le revêtement, et de passer au dessus des autres courbes (obtenues pour des épaisseurs moins importantes) avant de s'adoucir (Figure. V. 16.).

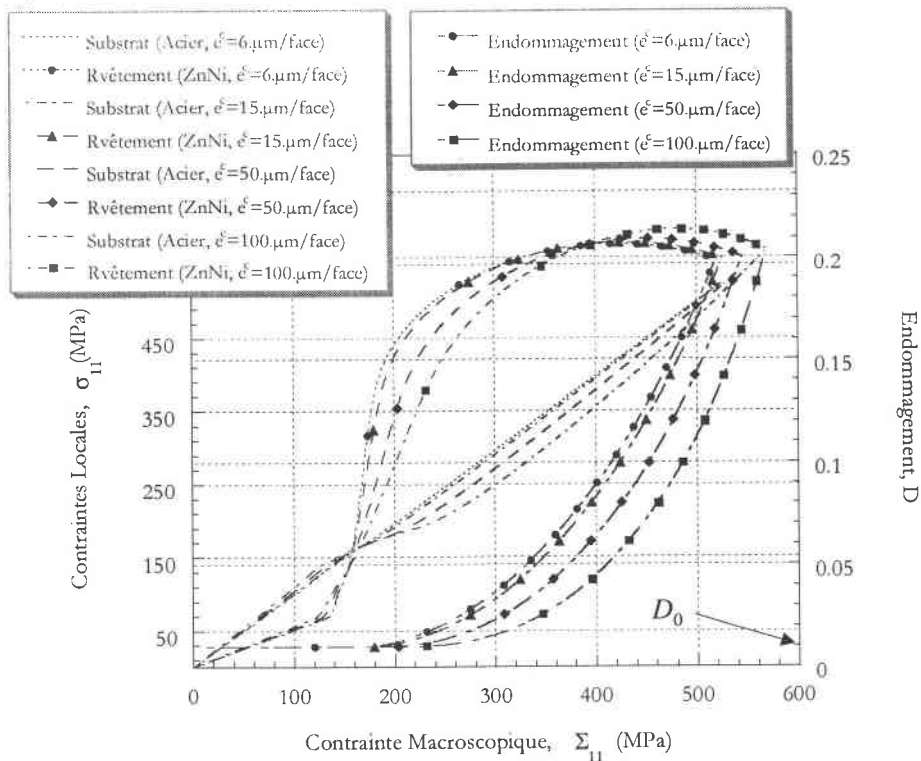


Figure. V. 16. Evolution des contraintes locales et de l'endommagement en fonction du chargement pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL et pour différentes épaisseurs du revêtement de ZnNi.

V. 4. Conclusion

La démarche micromécanique mise en œuvre dans le chapitre (§. II), et appliquée dans les deux chapitres précédents (§. III et IV) aux modèles biphasé et triphasé de la tôle revêtue, permet de prévoir le comportement mécanique élastoplastique du "M.H.E." à partir du comportement des constituants sans tenir compte de l'endommagement du revêtement.

Le modèle biphasé de la tôle revêtue présenté dans ce chapitre tient compte de l'endommagement du revêtement et de ses effets agissant sur le comportement élastoplastique macroscopique et notamment sur la concentration des contraintes locales, qui sont l'élément moteur du phénomène d'endommagement, et de ruine des matériaux à l'échelle microscopique, et des structures à l'échelle macroscopique.

L'endommagement est un phénomène qui intervient pendant la mise en forme des tôles d'acier revêtues : on a vu que dans le cas de l'alliage ZnNi l'endommagement peut atteindre des pourcentages assez conséquents. Cela peut constituer un vrai handicap, dans la mesure où le rôle protecteur que doit assurer le revêtement devient menacé par l'endommagement. Pour contrôler cet endommagement des revêtements, les Courbes Limites d'Endommagement (CLE) peuvent être une solution efficace. Cette technique consiste à contrôler l'évolution du taux d'endommagement du revêtement (le pourcentage de la surface mise à nu) pendant la déformation pour différents trajets de chargements. Connaissant la valeur critique de l'endommagement à partir de laquelle le revêtement n'assure plus son rôle, on peut savoir à quel moment il faut arrêter la déformation, comme dans le cas des courbes limites de formage (CLF).

Le problème de caractérisation du revêtement n'a pas été soulevé dans ce chapitre, dans la mesure où les propriétés mécaniques élastiques et plastiques du revêtement ont été supposées connues (identifiées par méthode inverse, (§. III)) à partir des résultats du modèle biphasé sans endommagement, mais ces propriétés se retrouvent affectées par l'endommagement dès leur introduction dans le modèle, à cause de l'endommagement initial du revêtement. Toutefois, le modèle proposé ici permet de résoudre le problème de caractérisation du revêtement par méthode inverse, basée sur la connaissance des comportements élastoplastiques de l'acier nu et revêtu.

Le modèle micromécanique biphasé de la tôle revêtue endommagée, présenté dans ce chapitre, illustre bien l'effet important des revêtements endommageables (même très minces) sur le comportement des tôles d'acier. Ces effets apparaissent à travers :

- les caractéristiques élastiques du "M.H.E.", qui sont affectées par celles du revêtement, par son endommagement, ainsi que par sa fraction volumique,
- la réponse élastique du "M.H.E.", qui présente une isotropie transverse pour un substrat et un revêtement à élasticité isotrope,
- la répartition des contraintes locales de type "élastique" et de type "plastique" qui dépend des propriétés mécaniques du matériau utilisé comme revêtement, de son état d'endommagement, ainsi que de sa fraction volumique.

Les résultats obtenus permettent, ainsi, de prévoir le comportement mécanique de la tôle revêtue endommagée, dans le but d'optimiser la microstructure et d'éviter, par la suite, les erreurs et les défauts de conception.

VI. CONCLUSION

L'objectif de cette thèse était la mise au point de théories et de logiciels à partir de modèles "micromécaniques" basés sur les techniques d'homogénéisation, afin de permettre au LEDEPP (SOLLAC) de posséder un outil informatique permettant de résoudre les problèmes de comportements des tôles revêtues et de leur mise en forme.

Le choix d'un produit revêtu est un problème complexe, chaque revêtement présentant des avantages et des inconvénients propres ; il fera donc l'objet d'un compromis où la qualité et le coût sont des paramètres importants. Un revêtement doit être particulièrement performant, tout en assurant le meilleur rapport qualité/prix.

Les tôles revêtues ont la particularité de garder la plupart des propriétés de leurs phases constitutives, auxquelles s'ajoutent des effets de synergie et des propriétés nouvelles. Il devient donc possible de concilier la rigidité du revêtement et la ductilité de l'acier pour obtenir un nouveau matériau qui combine les deux et qui résiste mieux à la corrosion.

Les revêtements, par leurs caractéristiques mécaniques importantes, permettent une bonne adaptation fonctionnelle des aciers et de larges applications dans différents domaines.

Nous avons présenté notre travail dans l'ordre chronologique de son cours. Ainsi, le premier modèle élastoplastique "biphasé" proposé au chapitre (§. III) a évolué vers un second modèle "triphasé", qui tient compte de la présence d'une éventuelle interphase entre le substrat et le revêtement (§. IV). Puis, un troisième modèle élastoplastique "biphasé-endommagé" faisant intervenir l'effet adoucissant qu'apportent les revêtements endommagés sur le comportement global de la tôle revêtue (§. V). On propose finalement dans les annexes un modèle "biphasé" supplémentaire tenant compte de l'effet de la température et des déformations thermiques, qui en résultent, sur la réponse macroscopique (§. A.1).

La méthode de résolution du problème de comportements des tôles revêtues, mise en œuvre dans ce travail, est basée sur les techniques de localisation et d'homogénéisation, les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides, ainsi que le critère d'écoulement plastique anisotrope de Hill avec ou sans endommagement.

Cette méthode de modélisation a été appliquée en formulant plusieurs hypothèses simplificatrices (§. I) : tôles symétriques à revêtements et épaisseurs identiques des deux côtés, revêtements très minces,

etc. Ceci permet la connaissance du comportement macroscopique et des comportements locaux, ainsi que la description de la répartition des contraintes et des déformations locales, afin de prédire les phénomènes de concentrations des contraintes conduisant à l'apparition du phénomène d'endommagement (surtout dans le revêtement) par fissuration par exemple.

Les équations du problème ont été développées dans le cas général de milieux élastoplastiques et thermoélastoplastiques anisotropes et résolues numériquement, et analytiquement dans le cas de l'élasticité isotrope.

La complexité du problème réside dans la difficulté de caractérisation du revêtement dont les propriétés mécaniques sont expérimentalement inaccessibles (cas du revêtement de ZnNi (§. III)). Pour contourner ce problème, on a proposé une utilisation du modèle élastoplastique biphasé en méthode inverse. Dans le cas du modèle triphasé, le problème est encore plus complexe, en raison de la présence d'une interphase souvent de caractéristiques mécaniques inconnues (formation par diffusion du Fer dans le Zinc pendant l'électrozingage, par ex.). Pour remédier à ces problèmes, on peut se baser sur les résultats du modèle biphasé pour identifier les caractéristiques du revêtement, et ensuite identifier le comportement de l'interphase par méthode inverse à partir du modèle triphasé. Cela nécessite beaucoup d'essais expérimentaux sur des éprouvettes, découpées dans différentes directions d'anisotropie des tôles nues et revêtues. C'est donc assez compliqué pour être rapidement réalisé.

Toutefois, la qualité des résultats obtenus semble satisfaisante, même si la validation de nos modèles n'est que partielle : elle est réalisée seulement dans le cas d'un comportement élastique isotrope, qui a été validé par le code d'éléments finis ABAQUS.

Les perspectives immédiates de ce travail seraient donc d'élargir la base de données expérimentales en multipliant les essais pour différents types de revêtements.

Néanmoins, il serait intéressant d'affiner les différents modèles proposés en considérant des matériaux multiphasés, qui tiennent compte de la présence de plusieurs interphases entre le substrat et le revêtement. L'endommagement de ce dernier, généralement anisotrope, a été traité d'une manière très phénoménologique (et à la limite d'une approche "milieux continus"), doit être intégré dans le modèle à partir de considérations plus micromécaniques (mieux fondées physiquement) que phénoménologiques. Ce qui ouvre de larges perspectives à la modélisation du comportement thermomécanique des tôles revêtues.

A. 1. EXTENSION DU MODELE BIPHASE DE LA TOLE REJETUE AU CAS DU COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE

A. 1. 1. Introduction

Les tôles revêtues, utilisées comme éléments de structure dans différents domaines de hautes technologies, sont soumises pendant de nombreuses situations (pendant l'élaboration des revêtements ou pendant le service) à des sollicitations thermiques très importantes. Les différents constituants de ces matériaux répondent différemment suite à une sollicitation thermique, c'est-à-dire qu'ils ne se dilatent pas de la même manière. Cela est dû à une différence dans les coefficients de dilatation thermique, qui engendre des contraintes thermiques pouvant atteindre des valeurs importantes et conduire à la plastification et des fois à la rupture totale de la structure. Ceci justifie alors la nécessité d'établir des lois de comportement thermomécaniques à partir des propriétés mécaniques et thermiques des constituants (substrat et revêtement). La modélisation micromécanique permet de comprendre au mieux le comportement thermoélastoplastique des constituants et de prévoir celui du "M.H.E." à l'échelle macroscopique.

Ainsi, la technique de modélisation micromécanique élaborée dans ce travail permet une extension du modèle "biphasé" de la tôle revêtue au cas d'un comportement thermoélastoplastique. Cela nécessite l'introduction d'équations supplémentaires permettant de tenir compte des déformations thermiques et de leurs effets sur l'écroutissage plastique du matériau.

Le fait d'imposer un champ thermomécanique, $(d\Sigma_{ij}, dT)$ ou (dE_{ij}, dT) , conduit à l'apparition de déformations thermiques locales, ce qui modifie la loi de comportement macroscopique du "M.H.E." par l'apparition d'un nouveau terme "thermique" (ou plutôt "thermoélastoplastique", en raison du couplage thermomécanique) :

$$d\Sigma = (?) \cdot dE + (?) \cdot dT$$

Dans les paragraphes qui suivent, on va établir la loi locale de comportement thermoélastoplastique établie à partir du critère de plasticité anisotrope de Hill, qui tient compte de l'effet de la température sur l'érouissage du matériau par l'intermédiaire de lois phénoménologiques. La connaissance des lois locales de comportement des constituants permet de déduire la loi macroscopique à l'aide des techniques de localisation et d'homogénéisation, par l'intermédiaire des tenseurs de localisation des contraintes et des déformations mécaniques et thermiques. Ces tenseurs de localisation sont complètement déterminés par les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides, qui tiennent compte des sauts des contraintes et des déformations élastique, plastique et thermique au passage des interfaces (considérées comme planes et parfaites).

Les équations du problème sont formulées dans le cadre des petites perturbations, en régime quasi-statique, sans force de volume et pour des constituants thermoélastoplastiques anisotropes.

Une application est ensuite proposée dans le cas d'une tôle d'acier revêtue des deux côtés de ZnNi est soumise à un chargement thermomécanique.

A. 1. 2. Modèle thermoélastoplastique biphasé de la tôle revêtue

A. 1. 2. 1. Loi locale de comportement thermoélastoplastique

On considère un matériau érouissable ayant un comportement thermoélastoplastique anisotrope. Ce matériau est soumis à un chargement mécanique, $d\sigma_{ij}$, et un chargement thermique, dT . La loi décrivant le comportement de ce matériau est déterminée à partir d'une formulation incrémentale. Avec l'hypothèse des petites perturbations (HPP), l'incrément de la déformation totale, $d\epsilon_{ij}$, s'écrit comme une somme de trois termes : le premier est d'origine "élastique", le second est d'origine "plastique" et le troisième est d'origine "thermique" :

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p + d\epsilon_{ij}^{th} \quad (\text{A.1. 1})$$

La déformation thermique, $d\epsilon_{ij}^{th}$, s'écrit en fonction du tenseur des coefficients linéaires de dilatation thermique, α_{ij} , et du chargement thermique, dT , comme suivant :

$$d\epsilon_{ij}^{th} = \alpha_{ij} dT \quad (\text{A.1. 2})$$

où le coefficient de dilatation thermique s'écrit $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ dans le cas isotrope.

La loi de Hooke s'écrit dans le cas d'un comportement thermoélastoplastique :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} (d\varepsilon_{ij} - d\varepsilon_{ij}^p - d\varepsilon_{ij}^{th}) \quad (\text{A.1.3})$$

Pour formuler cette loi en fonction du module tangent, C_{ijkl}^{ep} , comme dans le cas élastoplastique, il faut tenir compte de la température, qui influence profondément la limite élastique et l'écroissage plastique du matériau.

Le critère de Hill pour un matériau anisotrope dont l'écroissage, k , dépend de deux variables (une variable interne, qui est la déformation plastique équivalente, ε_e^p , et une variable de contrôle, qui est la température T), s'écrit de la forme suivante :

$$f(\sigma_{ij}, k) = f^H(\sigma_{ij}) - k(\varepsilon_e^p, T) = 0 \quad (\text{A.1.4})$$

La condition de consistance s'écrit en fonction des dérivées partielles de la fonction implicite de Hill, f , par rapport aux variables σ_{ij} et k de la manière suivantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0$$

c'est-à-dire

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \left(\frac{\partial k}{\partial \varepsilon_e^p} d\varepsilon_e^p + \frac{\partial k}{\partial T} dT \right) = 0 \quad (\text{A.1.5})$$

L'écroissage, k , s'écrit en fonction des deux variables, ε_e^p et T , comme suivant :

$$k = k(\varepsilon_e^p, T) = \frac{1}{3} \sigma_e^2(\varepsilon_e^p, T) = \frac{1}{3} (\sigma_0(T) + K(T)(\varepsilon_e^p)^n)^2 \quad (\text{A.1.6})$$

où la limite élastique, σ_0 , et le paramètre d'écroissage, K , sont donnés expérimentalement à différentes température à partir de lois phénoménologiques.

L'écouissage mécanique est donné par la relation suivante :

$$\frac{\partial k}{\partial \varepsilon_e^p} = \frac{2}{3} H_p \sigma_e \quad \text{avec} \quad H_p = \frac{\partial \sigma_e}{\partial \varepsilon_e^p} \quad (\text{A.1. 7})$$

La règle de normalité, $d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$, pour un écoulement associé, l'incrément de la déformation plastique équivalente, $d\varepsilon_e^p = \frac{2}{3} \sigma_e d\lambda$ (dédit du travail plastique), la loi de Hooke (relation (A.1. 3)), ainsi que la condition de consistance (équation (A.1. 5)), permettent de déduire l'expression de l'incrément du multiplicateur plastique à partir de l'expression suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \alpha_{kl} + \frac{\partial k}{\partial T} \right) dT - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2 \right) d\lambda = 0 \quad (\text{A.1. 8})$$

Ce qui donne l'incrément du multiplicateur plastique, $d\lambda$, en fonction de ceux de la déformation totale, $d\varepsilon_{ij}$, et de la température, dT , comme suivant :

$$d\lambda = \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right\} d\varepsilon_{kl} + \left\{ \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \alpha_{kl} + \frac{\partial k}{\partial T}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right\} dT \quad (\text{A.1. 9})$$

La dépendance du coefficient d'écouissage, k , de la température, T , résulte du fait que la limite élastique, σ_0 , ainsi que l'écouissage, K , en dépendent.

$$\frac{\partial k}{\partial T} = \frac{2}{3} \left(\sigma_0(T) + K(T) (\varepsilon_e^p)^n \right) H_{th} \quad (\text{A.1. 10})$$

avec l'écouissage "thermique" $H_{th} = \frac{\partial \sigma_e}{\partial T} = \left(\frac{\partial \sigma_0(T)}{\partial T} + \frac{\partial K(T)}{\partial T} (\varepsilon_e^p)^n \right)$

Cette dépendance de la température est formulée par des lois phénoménologiques déduites des mesures expérimentales, qui montrent une limite élastique et un écrouissage plastique décroissants dès que la température augmente.

En remplaçant l'équation (A.1. 9) dans la règle de normalité, on obtient l'incrément du tenseur des déformations plastiques, $d\varepsilon_{ij}^p$, en termes de ceux du tenseur des déformations totales, $d\varepsilon_{ij}$, et de la température, dT :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{uv}} C_{uvkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right) d\varepsilon_{kl} - \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{uv}} C_{uvkl} \alpha_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} + \frac{\frac{2}{3} \sigma_e H_{th} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right) dT \quad (\text{A.1. 11})$$

La loi incrémentale de comportement thermoélastoplastique est déduite à partir des deux expressions (A.1. 3) et (A.1. 11) par la relation tensorielle suivante :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}^{thep} dT \quad (\text{A.1. 12})$$

avec les deux modules élastoplastique, C_{ijkl}^{ep} , et thermoélastoplastique, $\beta_{ij}^{thep} = C_{ijkl}^{ep} \alpha_{kl}^{thep}$, qui sont donnés par :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^{ep}(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p) = C_{ijmn} \left[I_{mnkl} - \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} C_{rstu} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right] \quad (\text{A.1. 13})$$

et

$$\alpha_{ij}^{thep} = \alpha_{ij}^{thep}(\sigma_{ij}, \varepsilon_e^p, T) = \alpha_{ij} - C_{ijkl}^{ep-1} \left[\frac{\frac{2}{3} \sigma_e H_{th} C_{klrs} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} + \frac{2}{9} H_p \sigma_e^2} \right]$$

La loi de comportement inverse s'écrit comme suivant :

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^{ep} d\sigma_{kl} + \alpha_{ij}^{thep} dT \quad (\text{A.1. 14})$$

où $S_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^{ep}{}^{-1}$ représente l'inverse du module élastoplastique.

A. 1. 2. 2. Loi macroscopique de comportement thermoélastoplastique de la tôle revêtue

A. 1. 2. 2. 1. Techniques de localisation et d'homogénéisation

On se propose de déterminer la loi de comportement thermoélastoplastique global de la tôle d'acier revêtue (ou "M.H.E.") à partir d'un modèle "biphasé". Cela permettrait de comprendre l'effet des comportements locaux sur la réponse macroscopique du matériau et sur les concentrations des contraintes locales et résiduelles suite à un chargement thermomécanique ($d\Sigma_{ij}, dT$). Les deux phases (substrat et revêtement) du matériau sont décrites par les fractions volumiques, f^S et f^C , leurs tenseurs des modules élastoplastiques, $C_{ijkl}^{ep(S)}$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et leurs coefficients des dilatations thermiques, α_{ij}^S et α_{ij}^C , respectifs.

A partir des propriétés locales, ainsi définies, nous cherchons à établir une loi de comportement global reliant le champ de contraintes macroscopiques, $d\Sigma_{ij}$, aux champs de déformations, dE_{ij} , et de température, dT , correspondants. Cette loi s'écrit sous la forme :

$$d\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) dE_{kl} - \beta_{ij}^{thep}(M.H.E.) dT \quad (\text{A.1. 15})$$

ou encore sous sa forme inverse :

$$dE_{ij} = S_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) d\Sigma_{kl} + \alpha_{ij}^{thep}(M.H.E.) dT \quad (\text{A.1. 16})$$

où $C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.)$ et $\beta_{ij}^{thep}(M.H.E.) = C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) \alpha_{kl}^{thep}(M.H.E.)$ représentent les propriétés élastoplastiques et thermoélastoplastiques du "M.H.E."

La généralisation des techniques de localisation et d'homogénéisation au cas d'un comportement thermoélastoplastique se fait par l'introduction du tenseur de localisation, a_{ij} (d'ordre 2), des déformations thermiques. Ce qui permet d'écrire la relation de localisation des déformations sous la forme suivante :

$$d\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = A_{ijkl}(\mathbf{r}) dE_{kl} + a_{ij}(\mathbf{r}) dT \quad (\text{A.1. 17})$$

La température, dT , imposée à la frontière du "V.E.R." est supposée uniforme (identique dans toutes les phases), mais conduit à des dilatations thermiques et des déformations différentes d'une phase à l'autre.

Ces déformations locales sont reliées aux contraintes locales par la loi de comportement thermoélastoplastique établie au paragraphe précédant (§. A. 1. 2. 1).

$$d\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^{ep}(\mathbf{r}) d\varepsilon_{kl}(\mathbf{r}) - \beta_{ij}^{thep}(\mathbf{r}) dT \quad (\text{A.1. 18})$$

Les deux équations (A.1. 17) et (A.1. 18) permettent, par application de la moyenne volumique, de déduire la loi de comportement global du "M.H.E." (relation (A.1. 15)) prédite par les techniques d'homogénéisation.

La connaissance des tenseurs de localisation mécaniques et thermiques permet de déduire les propriétés thermomécaniques du "M.H.E." à partir de ceux des constituants par l'intermédiaire de relations de moyennes volumiques :

$$C_{ijkl}^{ep}(M.H.E.) = \frac{1}{V} \int_V C_{ijmn}^{ep}(\mathbf{r}) A_{mnkl}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{A.1. 19})$$

et

$$\beta_{ij}^{thep}(M.H.E.) = \frac{1}{V} \int_V \left\{ \beta_{ij}^{thep}(\mathbf{r}) - C_{ijkl}^{ep}(\mathbf{r}) a_{ij}(\mathbf{r}) \right\} dV$$

Par application de la moyenne volumique à (A.1. 17), on déduit les deux relations importantes :

$$\frac{1}{V} \int_V A_{ijkl}(\mathbf{r}) dV = I_{ijkl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{V} \int_V a_{ij}(\mathbf{r}) dV = 0 \quad (\text{A.1. 20})$$

Ces deux conditions vérifiées par les tenseurs de localisation des déformations mécaniques, A_{ijkl} , et thermiques, a_{ij} , permettent, dans le cas du modèle biphasé, de réduire le nombre d'inconnues du problème à 2 au lieu de 4, c'est-à-dire qu'il suffit de connaître A_{ijkl}^C et a_{ij}^C pour déterminer la loi de comportement. Les deux autres tenseurs de localisation, A_{ijkl}^S et a_{ij}^S , spécifiques aux déformations dans le substrat sont ensuite déduits à partir des relations données par (A. 1. 20) comme suivant :

$$A_{ijkl}^S = \frac{1}{f^S} (I_{ijkl} - f^C A_{ijkl}^C) \quad \text{et} \quad a_{ij}^S = -\frac{f^C}{f^S} a_{ij}^C \quad (\text{A.1. 21})$$

En tenant compte de ces deux relations, on peut écrire la loi macroscopique de comportement thermoélastoplastique (A.1. 15), dans le cas du modèle biphasé de la tôle revêtue, de la façon suivante :

$$d\Sigma_{ij} = \left[C_{ijkl}^{ep(S)} + f^C (C_{ijkl}^{ep(C)} - C_{ijkl}^{ep(S)}) A_{klmn}^C \right] dE_{mn} - \left[\beta_{ij}^{thep(S)} + f^C (\beta_{ij}^{thep(C)} - \beta_{ij}^{thep(S)}) + f^C (C_{ijpq}^{ep(C)} - C_{ijpq}^{ep(S)}) a_{pq}^C \right] dT \quad (\text{A.1. 22})$$

où les modules élastoplastiques, $C_{ijkl}^{ep(S)}$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et thermoélastoplastiques, $\beta_{ij}^{thep(S)} = C_{ijkl}^{ep(S)} \alpha_{kl}^{thep(S)}$ et $\beta_{ij}^{thep(C)} = C_{ijkl}^{ep(C)} \alpha_{kl}^{thep(C)}$, des deux phases sont donnés par les relations (équations (A.1. 13)). Les tenseurs de localisation des déformations mécaniques, A_{ijkl}^C , et thermiques, a_{ij}^C , sont déterminés en utilisant les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides. Cela fera l'objet du paragraphe ci-après.

A. 1. 2. 2. 2. Opérateurs interfaciaux en thermoélastoplasticité

Les champs locaux de contraintes et de déformations subissent des sauts au passage de l'interface substrat/revêtement. Cette dernière est toujours considérée comme plane et parfaite, ce qui entraîne une continuité du vecteur contrainte et du champ des déplacements.

On suppose que la température est uniforme partout dans le matériau hétérogène, et que le fait d'imposer un champ thermique, dT , à la frontière du "V.E.R." entraîne des dilatations thermiques des phases, α^1 et α^2 , différentes. Dans ce cas, les techniques des opérateurs interfaciaux de la mécanique

des solides sont toujours valables, à condition de tenir compte des hypothèses discutées dans le chapitre (§. II). Le seul changement intervient au niveau des lois locales de comportement (A.1. 12).

En tout point, $\mathbf{r}^+(x_i)$, de l'interface substrat/revêtement vu du côté du revêtement, la normale unitaire à la surface extérieur du substrat s'écrit $\mathbf{n}(0,0,1)$. Dans le cas d'un revêtement de très faible épaisseur, les déformations totales du côté du revêtement, $d\epsilon_{ij}(\mathbf{r}^+) = d\epsilon_{ij}^C$, en un point très proche de l'interface sont supposées uniformes dans cette phase. Cela permet de relier les champs des déformations locales, $d\epsilon_{ij}^C$ et $d\epsilon_{ij}(\mathbf{r}^-) = d\epsilon_{ij}^S$, de part et d'autre de l'interface en utilisant les opérateurs interfaciaux.

En effet, les déformations thermoélastoplastiques dans les deux phases vérifient la condition de compatibilité suivante :

$$d\epsilon_{ij}^C(\mathbf{r}^+) - d\epsilon_{ij}^S(\mathbf{r}^-) = \frac{1}{2}(d\zeta_i n_j + d\zeta_j n_i) \quad (\text{A. 1. 23})$$

où $\overline{d\zeta}$ est un vecteur quelconque, défini au chapitre (§. II), et décrivant la discontinuité du champ, $d\epsilon_{ij}$, cinématiquement admissible.

En tenant compte des déformations thermiques, qui s'ajoutent aux déformations élastoplastiques, la relation (II. 22) traduisant la continuité du vecteur contrainte, $d\sigma_{ij} n_j$, à l'interface donne :

$$C_{ijkl}^{ep(S)} (d\epsilon_{kl}^S - \alpha_{kl}^{thep(S)} dT) n_j = C_{ijkl}^{ep(C)} (d\epsilon_{kl}^C - \alpha_{kl}^{thep(C)} dT) n_j \quad (\text{A. 1. 24})$$

Les équations ci-dessus permettent de déterminer l'expression du vecteur $\overline{d\zeta}$:

$$d\zeta_m = (K_{mi}^C)^{-1} n_j (\Delta C_{ijkl}^{ep(S-C)} d\epsilon_{kl}^S + \Delta \beta_{ij}^{thep(C-S)} dT) \quad (\text{A. 1. 25})$$

avec $K_{ik}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) = C_{ijkl}^{ep(C)} n_j n_l$ la matrice de Christoffel définie dans la phase revêtement,

$$\Delta C_{ijkl}^{ep(S-C)} = C_{ijkl}^{ep(S)} - C_{ijkl}^{ep(C)} \text{ et } \Delta \beta_{ij}^{thep(C-S)} = \beta_{ij}^{thep(C)} - \beta_{ij}^{thep(S)}.$$

En substituant $d\zeta_i$ par son expression (A.1. 25) dans la relation (A.1. 23), on obtient pour le saut des déformations :

$$d\epsilon_{ij}^C - d\epsilon_{ij}^S = L_{ijmn}^C(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(C)}) (\Delta C_{mnkl}^{ep(S-C)} d\epsilon_{kl}^S + \Delta \beta_{mn}^{thep(C-S)} dT) \quad (\text{A.1. 26})$$

De la même manière, on obtient l'expression duale de la relation (A.1. 26) :

$$d\varepsilon_{ij}^S - d\varepsilon_{ij}^C = L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) (\Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} d\varepsilon_{kl}^C + \Delta \beta_{mn}^{thep(S-C)} dT) \quad (\text{A.1. 27})$$

Les expressions des sauts de déformations, ainsi déterminées, permettront avec les techniques de localisation et d'homogénéisation, ainsi que le critère de thermoélastoplasticité de Hill, de formuler la loi thermoélastoplastique de comportement global du "M.H.E."

A. 1. 2. 2. 3. Tenseurs de localisation et loi de comportement

Les tenseurs de localisation associés aux déformations mécaniques et thermiques sont déterminés en utilisant les mêmes techniques de calcul introduites dans le concept du modèle biphasé élastoplastique (chapitre (§. III)).

La loi des mélanges (II. 2) appliquée au modèle thermoélastoplastique biphasé de la tôle revêtue donne :

$$dE_{ij} = f^C d\varepsilon_{ij}^C + f^S d\varepsilon_{ij}^S \quad (\text{A.1. 28})$$

En remplaçant l'incrément de la déformation totale, $d\varepsilon_{ij}^S$, dans le substrat en fonction de celui de la déformation, $d\varepsilon_{ij}^C$, dans le revêtement, on obtient une expression qui relie la déformation dans le revêtement à la déformation d'ensemble (ou macroscopique), dE_{ij} , ce qui donne en tenant compte de la relation (A.1. 17) :

$$A_{ijkl}^C = \left(I_{ijkl} + f^S L_{ijmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(C-S)} \right)^{-1} \quad (\text{A.1. 29})$$

et

$$a_{ij}^C = (1 - f^C) A_{ijkl}^C L_{klmn}^S(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(S)}) \Delta \beta_{mn}^{thep(C-S)}$$

où les modules élastoplastiques, $C_{ijkl}^{ep(S)}$ et $C_{ijkl}^{ep(C)}$, et thermoélastoplastiques, $\beta_{ij}^{thep(S)} = C_{ijkl}^{ep(S)} \alpha_{kl}^{thep(S)}$ et $\beta_{ij}^{thep(C)} = C_{ijkl}^{ep(C)} \alpha_{kl}^{thep(C)}$, des deux phases sont donnés par les équations (A.1. 13). Ce qui permet de

d'identifier complètement la loi macroscopique de comportement thermoélastoplastique du "M.H.E." (expression (A.1. 22)).

A. 1. 3. Application à la tôle d'acier revêtue de ZnNi

A. 1. 3. 1. Comportement thermoélastique isotrope

A. 1. 3. 1. 1. Quelques expressions analytiques

Les lois locales et globales de comportement thermomécanique peuvent être développées analytiquement dans le cas où les constituants auraient des comportements thermoélastiques isotropes. Dans une telle situation, les coefficients des dilatations thermiques s'écrivent $\alpha_{ij}^* = \alpha^* \delta_{ij}$, et les modules tangents se réduisent à leurs parties élastiques qui s'expriment en fonction du module de Young, E^* , et du coefficient de Poisson, ν^* , de la phase ($*=s$ ou c) considérée.

En remplaçant les opérateurs interfaciaux par leurs expressions analytiques (III. 23) et (III. 24) (déterminées dans le chapitre (§. III)) dans les équations du problème, on détermine explicitement les tenseurs de localisation thermomécaniques associés aux champs de contraintes et de déformations et par la suite la loi macroscopique de comportement thermoélastique. Pour faciliter les calculs analytiques, il était nécessaire de supposer que les coefficients de Poisson du substrat et du revêtement sont identiques ($\nu^s = \nu^c = \nu$).

Tout calcul fait, les déformations thermoélastiques locales dans le substrat et dans le revêtement s'écrivent en fonction du chargement thermomécanique (E_{ij} , ΔT) :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^s = & \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{f^c (E^c - E^s)}{E^s + (1-f^c)(E^c - E^s)} \right) n_i n_j \delta_{kl} \right. \\ & + \left(\left(-\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{f^c (E^c - E^s)}{E^s + (1-f^c)(E^c - E^s)} \right) n_i n_j n_k n_l \\ & + \left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{f^c (E^c - E^s)}{E^s + (1-f^c)(E^c - E^s)} \right) \left(\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k \right) \left. \right\} E_{kl} \\ & + \left\{ - \left(\frac{2\nu+3}{1-2\nu} \right) \frac{f^c (E^c \alpha^c - E^s \alpha^s)}{E^s} \right\} \left(\frac{E^s + 2(1-f^c)(E^c - E^s)}{E^s + (1-f^c)(E^c - E^s)} \right) n_i n_j \Delta T \end{aligned} \quad (\text{A.1. 30})$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^C = & \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(-\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j \delta_{kl} \right. \\
& + \left(\left(\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j n_k n_l \\
& + \left. \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ik} n_j n_l + \delta_{il} n_j n_k + \delta_{jk} n_i n_l + \delta_{jl} n_i n_k) \right\} E_{kl} \\
& + \left\{ \left(\left(\frac{2\nu+3}{1-2\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C \alpha^C - E^S \alpha^S)}{E^S} \right) \left(\frac{E^S + 2(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + (1-f^C)(E^C - E^S)} \right) n_i n_j \right\} \Delta T
\end{aligned} \quad (A.1.. 31)$$

Les contraintes thermomécaniques locales dans le substrat et dans le revêtement sont données en fonction du chargement thermomécanique, $(\Sigma_{ij}, \Delta T)$, par les expressions analytiques suivantes :

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^S = & \left\{ I_{ijkl} + \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{f^C(E^C - E^S)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k n_l \right. \\
& + \left(\left(-\frac{1}{2} \right) \frac{f^C(E^C - E^S)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) ((\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{jk} - n_j n_k) + (\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{jk} - n_j n_k)) \right\} \Sigma_{kl} \\
& + \left\{ \left(-\left(\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{f^C E^C E^S (\alpha^S - \alpha^C)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) \right\} \Delta T
\end{aligned} \quad (A.1. 32)$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^C = & \left\{ I_{ijkl} - \left(\left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k n_l \right. \\
& + \left(\left(\frac{1}{2} \right) \frac{(1-f^C)(E^C - E^S)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) ((\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{il} - n_i n_l)(\delta_{jk} - n_j n_k)) \right\} \Sigma_{kl} \\
& + \left\{ \left(\left(\frac{1}{1-\nu} \right) \frac{(1-f^C)E^C E^S (\alpha^S - \alpha^C)}{E^S + f^C(E^C - E^S)} \right) (\delta_{ij} - n_i n_j) \right\} \Delta T
\end{aligned} \quad (A.1. 33)$$

Dans le cas d'un comportement thermoélastique linéaire, la loi macroscopique s'écrit de la manière suivante :

$$E_{ij} = S_{ijkl}(M.H.E.)\Sigma_{kl} + \alpha_{ij}(M.H.E.)\Delta T \quad (A.1. 34)$$

Les propriétés élastiques de la tôle revêtue ayant été discutées en détail au chapitre (§. III), on ne s'intéressera ici qu'aux propriétés thermiques du "M.H.E."

Ainsi, le tenseur des coefficients de dilatations thermiques du "M.H.E." est donné, dans le cas où les dilatations thermiques des constituants seraient isotropes ($\alpha_{ij}^S = \alpha^S \delta_{ij}$ et $\alpha_{ij}^C = \alpha^C \delta_{ij}$), par :

$$\alpha_{ij}(M.H.E.) = \left[\alpha^S + f^C (\alpha^C - \alpha^S) \left(\frac{E^C}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \right] \delta_{ij} - \left[\left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{f^C (1-f^C) (E^C - E^S)}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) (\alpha^C - \alpha^S) \right] n_i n_j \quad (A.1.35)$$

Dans le cas d'un comportement thermoélastique linéaire isotrope des constituants, le "M.H.E." présente un isotropie transverse suivant la normale unitaire, $\mathbf{n}(0,0,1)$, à l'interface. Cela est confirmé par des dilatations thermiques, α_{11} et α_{22} , suivant 11 et 22 qui sont identiques, mais qui sont différentes de celle suivant la direction 33 :

$$\alpha_{11}(M.H.E.) = \alpha_{22}(M.H.E.) = \alpha^S + f^C (\alpha^C - \alpha^S) \left(\frac{E^C}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \quad (A.1.36)$$

et

$$\alpha_{33}(M.H.E.) = \alpha^S + \left(\frac{f^C (\alpha^C - \alpha^S)}{f^C E^C + (1-f^C) E^S} \right) \left(E^C - \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) (1-f^C) (E^C - E^S) \right)$$

Ainsi, le "M.H.E." est caractérisé, dans le cas d'un comportement thermoélastique linéaire isotrope, par 7 coefficients indépendants : 5 coefficients d'élasticité (E_1 , E_3 , ν_{12} , ν_{13} et μ_{13}) et 2 coefficients de dilatations thermiques (α_{11} et α_{33}).

A. 1. 3. 1. Comportement thermoélastoplastique anisotrope

On considère le cas d'une tôle d'acier d'épaisseur, $e^S = 0.8$ mm, revêtue des deux côtés d'une mince couche d'alliage ZnNi d'épaisseur $e^C = 0.01$ mm/face.

Pour réduire la difficulté du problème, on considère le cas où les deux phases de la tôle revêtue sont "élastiquement" et "thermiquement" isotropes, c'est-à-dire que les modules de Young et les coefficients de Poisson, ainsi que les coefficients des dilatations thermiques dans les différentes directions sont identiques ($E_1^* = E_2^* = E_3^*$, $\nu_{12}^* = \nu_{13}^* = \nu_{23}^*$ et $\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^* = \alpha_{33}^*$, avec $*$ = S ou C).

L'écroissage plastique étant dépendant de la température, T , par l'intermédiaire de la limite élastique, $\sigma_0(T)$, et le paramètre d'écroissage, $K(T)$, on considère les lois phénoménologiques suivantes qui mettent en évidence la baisse de σ_0 et K dès que la température augmente :

$$\sigma_0(T) = \frac{a_{\sigma_0}}{b_{\sigma_0} + T} \quad \text{et} \quad K(T) = \frac{a_K}{b_K + T} \quad (\text{A.1. 37})$$

ce qui permet d'explicitier la relation (A.1. 10) qui représente l'écroissage thermique.

Les caractéristiques mécaniques (modules de Young, coefficients de Poisson, coefficients de Hill, limites d'élasticité et coefficients d'écroissage) sont données à température ambiante dans le tableau (Tableau. III. 4). Les propriétés thermiques sont regroupées dans le tableau (Tableau. A. 1. 1.).

	Substrat (Acier)	Revêtement (ZnNi)	"M.H.E." (MODELE) (ZnNi+Acier+ZnNi)
Epaisseurs $e^s, e^c/2, e$ (mm)	0.80	0.01	0.82
Coefficients de dilatation thermique $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}$ ($^{\circ}\text{K}^{-1}$)	$16. 10^{-6}$	$27. 10^{-6}$	$16.13 10^{-6}$
	---	---	$16.13 10^{-6}$
	---	---	$16.34 10^{-6}$
a_{σ_0} (MPa $^{\circ}\text{K}$)	71978.	49300.	---
b_{σ_0} ($^{\circ}\text{K}$)	200.	200.	---
a_K (MPa $^{\circ}\text{K}$)	335457.	287950.	---
b_K ($^{\circ}\text{K}$)	150.	150.	---

Tableau. A. 1. 1. Coefficients des dilatations thermiques du "M.H.E." calculés à partir de ceux du substrat (acier) et du revêtement (ZnNi) (méthode directe).

Les coefficients des dilatations thermiques du "M.H.E." correspondent à ceux d'un matériau isotrope transverse et les valeurs obtenues par calculs numérique et analytique correspondent bien.

Pour mettre en évidence l'effet de la température sur le comportement de la tôle d'acier revêtue de ZnNi, on considère le cas d'un chargement mécanique TUDL, Σ_{11} , à température constante, $T = 293. ^{\circ}\text{K}$, suivi d'une décharge élastique jusqu'à contrainte nulle $\Sigma_{11} = 0$. Ceci entraîne l'apparition de contraintes résiduelles de traction et de compression dans la phase revêtement et dans la phase acier respectivement. Ensuite, on chauffe le matériau sous contrainte macroscopique nulle, $\Sigma_{ij} = 0$, jusqu'à une certaine température T_{max} . Les résultats de cet essai sont rapportés sur les deux figures qui suivent :

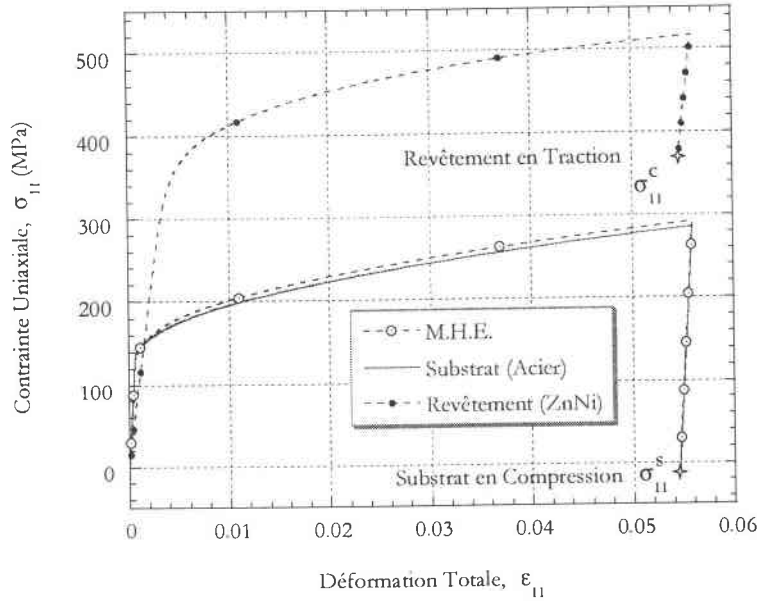


Figure. A. 1. 1. Etat de contraintes résiduelles après décharge (T=cte) pour un comportement élastoplastique correspondant à un essai TUDL.

La décharge élastique, jusqu'à contrainte macroscopique nulle, laisse des contraintes résiduelles de compression, $\sigma_{11}^s \leq 0$, dans l'acier et de traction, $\sigma_{11}^c \geq 0$, dans le revêtement (Figures. A.1. 1.). Cela est dû à l'hétérogénéité du matériau et à la différence qui existe entre les propriétés mécaniques des deux phases.

Après décharge, on obtient de nouvelles limites élastiques (plus élevées) pour les deux phases, en raison de l'écrouissage plastique. Ces limites élastiques, ainsi que les modules d'écrouissage décroissent en fonction de la température, ce qui conduit à une diminution de la force critique et, par la suite, à l'atteinte du critère de plasticité (à nouveau).

En absence de chargement mécanique, $d\Sigma_{ij} = 0$, les déformations macroscopiques résultent uniquement du chargement thermique, $dT \neq 0$ (d'après la loi de comportement macroscopique (A.1. 16)). Les relations de localisation (A.1. 17) permettent de déduire les déformations locales qui résultent de ce chargement et, par la suite, les contraintes locales associées.

Le fait de soumettre la tôle revêtue prédéformée à un chargement thermique, $293^\circ K \leq T \leq T_{max}$, a pour effet de libérer les contraintes résiduelles qui sont apparues après la décharge. En effet, les contraintes, compressive dans le substrat et attractive dans le revêtement, ont tendance à diminuer

($d\sigma_{ij}^C < 0$ et $d\sigma_{ij}^S > 0$) sous l'effet de la température jusqu'à atteindre des valeurs proches de 0 MPa au alentour de $T \approx 500.^\circ K$, soit $T \approx 227.^\circ C$ (Figure. A.1. 2).

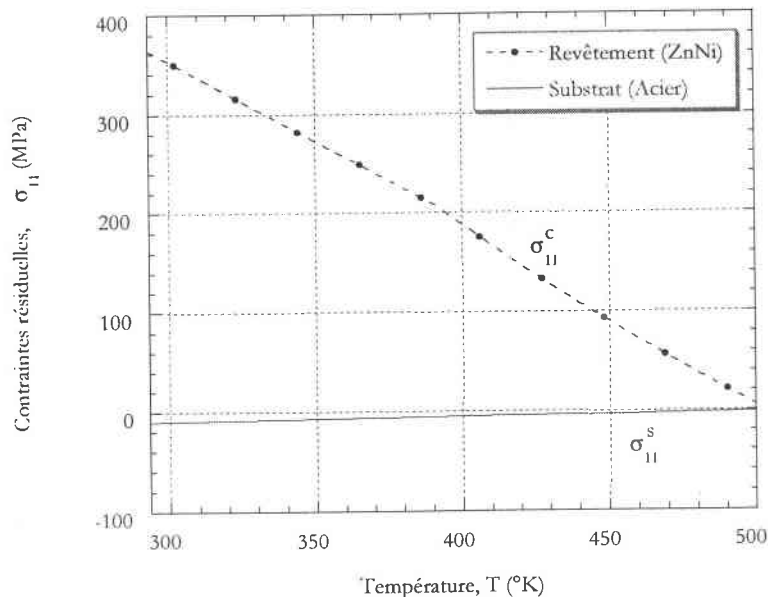


Figure. A. 1. 2. Etat de contraintes résiduelles sous l'effet de la température après décharge élastique.

A. 1. 4. Conclusion

Dans ce paragraphe, on a proposé une extension du modèle élastoplastique biphasé de la tôle revêtue au cas d'un comportement thermoélastoplastique.

L'effet de la température se manifeste localement par l'apparition de déformations thermiques, $\alpha_{ij} dT$, qui s'ajoutent aux déformations élastiques et plastiques, ainsi que par une forte dépendance en température de l'écroutissage plastique. Cette dépendance apparaît à travers des limites d'écoulement et des coefficients d'écroutissage, qui décroissent quand la température augmente.

Macroscopiquement, l'effet de la température entraîne l'apparition d'un nouveau terme (dit thermique ou plutôt thermoélastoplastique, en raison du couplage plasticité-température) au niveau de la loi de comportement macroscopique du "M.H.E.". Il devient donc nécessaire d'établir une description, aussi précise que possible, de la répartition des contraintes et des déformations in situ. Ainsi, on définit, par l'intermédiaire des tenseurs de localisations mécaniques et thermiques, un lien entre la "microstructure" (ou différentes phases) et le comportement macroscopique.

L'application des techniques des opérateurs interfaciaux, dans le cas thermoélastoplastique, se fait aisément en tenant compte de l'hétérogénéité thermique (coefficients de dilatation différents) qui apparaît lors de l'application d'un champ thermique uniforme dans tout le matériau.

Une application, dans le cas où un chargement mécanique élastoplastique suit d'une décharge élastique entraîne l'apparition de contraintes résiduelles, permet de mettre en évidence l'effet de la température, qui fait dissiper ces contraintes.

A. 2. RAPPELS DE QUELQUES GENERALITES

A. 2. 1. Lois de comportements

Le but est de déterminer le champ des déplacements, u_i , résultant de l'application d'un champ de contraintes, σ_{ij} , à la frontière, ∂V , d'un élément de volume, V , tel que :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad \forall i, j, k, \dots \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.2. 1})$$

où \underline{C} est le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques.

La déformation élastique, ε_{ij}^e , s'écrit dans le cas d'un comportement thermoélastoplastique comme suivant :

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^{th} \quad (\text{A.2. 2})$$

avec ε_{ij}^{th} la déformation thermique résultant de la variation de température, ΔT , et qui s'écrit en fonction du coefficient de dilatation thermique :

$$\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha_{ij} \Delta T \quad (\text{A.2. 3})$$

Les champs des contraintes, σ_{ij} , et des déformations totales, ε_{ij} , dans le volume, $V = \int_V dV$, vérifient les symétries suivantes :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (\text{A.2. 4})$$

L'équation d'équilibre quasi-statique sans force de volume s'écrit de la manière suivante :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \chi_i$$

c'est-à-dire

$$\sigma_{ij,j} = 0$$

(A.2. 5)

D'où les équations de champs ([16], [40], [43], [55]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{cinématique} \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{description du mouvement par } u_i \rightarrow u_i^d = E_{ij} x_j \text{ sur } \partial V \\ \circ \text{mesure des déformations en HPP par } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \end{array} \right. \\ \bullet \text{statique} \left\{ \begin{array}{l} \circ \text{champ de contrainte } \sigma_{ij} \rightarrow T_i^d = \Sigma_{ij} n_j \text{ sur } \partial V \\ \circ \text{équilibre (théorème de la divergence) } \sigma_{ij,j} = 0 \end{array} \right. \\ \bullet \text{thermodynamique} \left\{ \begin{array}{l} \circ 1^{\text{er}} \text{ principe (positivité de la dissipation)} \rightarrow D \geq 0 \\ \circ 2^{\text{ème}} \text{ principe (conservation de l'énergie)} \\ \circ \text{forces thermodynamiques} \rightarrow F_i = \frac{\partial \psi}{\partial \chi_i} (\chi_1, \chi_2, \dots \text{variables internes}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{A.2. 6})$$

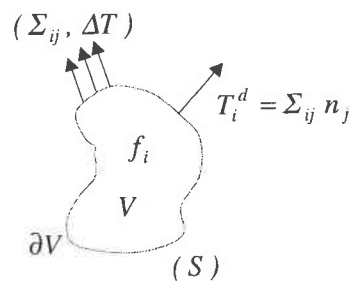


Figure. A. 2. 1 Conditions aux limites d'un élément de volume subissant un chargement thermomécanique $(\Sigma_{ij}, \Delta T)$.

Dans le cas isotrope, le tenseur des modules élastiques vérifiant les trois symétries, $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{kl ij}$ (en raison des symétries de σ_{ij} , de ε_{ij} et de la symétrie énergétique) s'écrit en fonction des coefficients de Lamé, λ et μ , de la manière suivante :

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu I_{ijkl} \quad (\text{A.2. 7})$$

ou encore en fonction du module de Young, E , et du coefficient de Poisson, ν , comme suivant :

$$C_{ijkl} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{(1+\nu)} I_{ijkl} \quad (\text{A.2. 8})$$

avec

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

Dans le cas de l'anisotropie orthotrope, le tenseur des modules élastiques ne peut s'écrire sous une forme contractée comme dans le cas isotrope, et dans ce cas on a ([16], [9]) :

$$C_{ijkl}^{-1} = S_{ijkl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}}{E_3} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\mu_{12}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2. 9})$$

$$\text{avec } \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \quad \text{et} \quad \frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad (\text{A.2. 10})$$

Avec ces conditions de symétrie que doit vérifier un matériau élastique de Green, on a 9 coefficients indépendants permettant de le caractériser :

- 3 modules de Young, E_1 , E_2 et E_3 , dans les trois directions d'orthotropie,
- 3 modules de cisaillement, μ_{23} , μ_{31} et μ_{12} ,
- 3 coefficients de Poisson, ν_{23} , ν_{31} et ν_{12} .

Dans le cas de l'isotropie transverse par rapport à l'axe $\vec{o}z$ (cas de certains alliages obtenus par solidification orientée, certains composites et tôles revêtues, etc.), le matériau n'est plus caractérisé que par 5 coefficients d'élasticité, en raison des égalités suivantes :

$$E_1 = E_2, \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad \mu_{13} = \mu_{23} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\mu_{12}} = \frac{1+\nu_{12}}{E_1} \quad (\text{A.2. 11})$$

A. 2. 2. Anisotropie plastique

Dans le cas de contraintes planes, le critère de Hill s'écrit de la façon suivante :

$$f^H(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2(F+G+H)} \left[F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 2N\sigma_{xy}^2 \right] = k(\kappa) \quad (\text{A.2. 13})$$

Les quatre coefficients de Hill, F , G , H et N , sont déterminés à partir d'essais de traction dans le plan de la tôle.

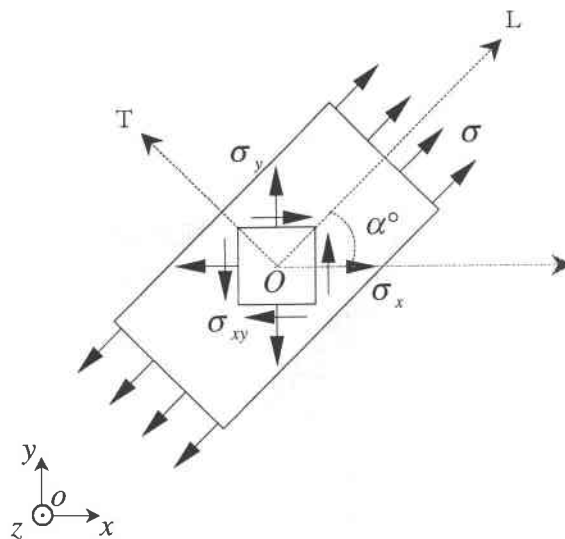


Figure. A. 2. 2. Identification des coefficients de Hill à partir d'un état de contraintes planes.

Supposons que \vec{x} et \vec{y} sont les axes principaux d'orthotropie de la tôle et que l'éprouvette d'essai est découpée dans une direction faisant un angle α° avec l'axe \vec{x} (Figure. A. 2. 2.). Si on soumet cette éprouvette à une contrainte, σ , l'état de contraintes par rapport au repère principal (o, \vec{x}, \vec{y}) serait :

$$\sigma_{xx} = \sigma \cos^2 \alpha \quad \sigma_{yy} = \sigma \sin^2 \alpha \quad \sigma_{xy} = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \quad (\text{A.2. 14})$$

En effet, le passage du repère, (O, T, L) , lié à l'éprouvette à celui lié à la tôle, (o, \vec{x}, \vec{y}) , se fait par l'intermédiaire de la matrice de passage, P , donnée par :

$$P = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2. 15})$$

L'état de contrainte, σ_{ij} , dans le repère principal est ensuite déduit de la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P \sigma_{TL} P^t \quad (\text{A.2. 16})$$

avec

$$\sigma_{TL} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D'après la règle de normalité, $d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$, et en considérant les relations (A.2. 14), on a :

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{xx}^p &= \frac{\sigma}{F+G+H} \left((G+H) \cos^2 \alpha - H \sin^2 \alpha \right) d\lambda, & d\varepsilon_{yy}^p &= \frac{\sigma}{F+G+H} \left((F+H) \sin^2 \alpha - H \cos^2 \alpha \right) d\lambda \\ d\varepsilon_{zz}^p &= \frac{\sigma}{F+G+H} \left(-F \sin^2 \alpha - G \cos^2 \alpha \right) d\lambda & \text{et} & & d\varepsilon_{xy}^p &= \frac{\sigma}{F+G+H} (2N \sin \alpha \cos \alpha) d\lambda \end{aligned} \quad (\text{A.2. 17})$$

L'incrément de la déformation plastique suivant la direction T est déterminé par la transformation suivante :

$$d\epsilon_T^p = d\epsilon_{xx}^p \sin^2 \alpha + d\epsilon_{yy}^p \cos^2 \alpha - d\epsilon_{xy}^p \cos \alpha \sin \alpha$$

c'est-à-dire
$$d\epsilon_T^p = \frac{\sigma}{F+G+H} \left(-H - (2N - 4H - F - G) \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right) d\lambda \quad (\text{A.2. 18})$$

Ainsi, à partir de (A.2. 17) et (A.2. 18), on obtient l'expression du coefficient de Lankford transverse par rapport à la contraction suivant l'épaisseur :

$$r_\alpha = \frac{d\epsilon_T^p}{d\epsilon_{zz}^p} = \frac{H + (2N - F - G - 4H) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{F \sin^2 \alpha + G \cos^2 \alpha} \quad (\text{A.2. 19})$$

L'identification des quatre coefficients de Hill, F , G , H et N , se fait alors à partir des trois coefficients de Lankford, r_{0° , r_{45° et r_{90° , qui sont identifiés expérimentalement à partir de trois essais de traction (Figure. A. 2. 3.) et en considérant la relation supplémentaire (III. 24) formulée en fonction des seuils d'écoulements.

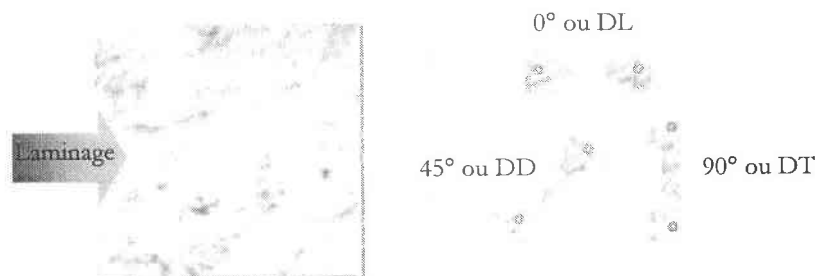


Figure. A. 2. 3. Schéma représentant les éprouvettes de traction découpées à 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de la minage (0° ou DL).

A. 2. 3. Opérateurs interfaciaux

A. 2. 3. 1. Saut des déformations au passage d'une interface parfaite

On considère une parfaite interface entre deux milieux continus et homogènes. Ces deux milieux sont caractérisés par leurs tenseurs de modules élastoplastiques $\underline{C}^{ep(1)}$ et $\underline{C}^{ep(2)}$ (Figure. A.2. 4).

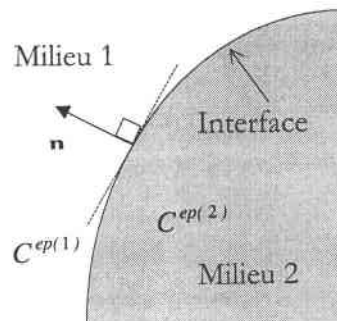


Figure. A.2. 4. Schématisation du problème d'interface dans les matériaux hétérogènes.

Le saut des déformations au passage de l'interface s'écrit :

$$[d\varepsilon_{ij}] \equiv d\varepsilon_{ij}^1 - d\varepsilon_{ij}^2 = \frac{1}{2}(d\zeta_i n_j + d\zeta_j n_i) \quad (\text{A.2. 20})$$

Le vecteur de proportionnalité du saut, $\overrightarrow{d\zeta}$, est calculé en fonction du champ, $d\varepsilon^1$, ou du champ, $d\varepsilon^2$, de part et d'autre de l'interface en prenant respectivement le milieu 1 ou le milieu 2 comme référence. Il est déterminé complètement par la condition suivante :

$$C_{ijkl}^{ep(1)} d\varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^{ep(2)} d\varepsilon_{kl}^2 n_j \quad (\text{A.2. 21})$$

Cette condition s'obtient à partir de la condition de continuité du vecteur contrainte au passage de l'interface et en utilisant la loi de comportement élastoplastique de chacune des phases.

Ainsi, en choisissant le milieu 2 comme référence, l'équation (A.2. 20) permet d'éliminer le champ $d\varepsilon^1$ dans l'équation (A.2. 21), ce qui donne :

$$C_{ijkl}^{ep(2)} d\varepsilon_{kl}^2 n_j = C_{ijkl}^{ep(1)} (d\varepsilon_{kl}^2 + d\zeta_k n_l) n_j$$

ou encore

(A.2.. 22)

$$(C_{ijkl}^{ep(2)} - C_{ijkl}^{ep(1)}) d\varepsilon_{kl}^2 n_j = C_{ijkl}^{ep(1)} n_l n_j d\zeta_k$$

En introduisant la matrice de Christoffel, $K_{ik}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) = C_{ijkl}^{ep(1)} n_j n_l$, la relation précédente (A.2. 22) devient :

$$K_{ik}^1 d\zeta_k = (C_{ijkl}^{ep(2)} - C_{ijkl}^{ep(1)}) d\varepsilon_{kl}^2 n_{jk} \quad (\text{A.2. 23})$$

A partir de cette relation, on peut déduire $\overrightarrow{d\zeta}$ sous la forme suivante :

$$d\zeta_i = (K_{ik}^1)^{-1} \Delta C_{ijkl}^{ep(2-1)} d\varepsilon_{kl}^2 n_j \quad (\text{A.2. 24})$$

En remplaçant, $d\zeta_i$, par son expression (A.2. 24) dans la relation (A.2. 20), on obtient :

$$d\varepsilon_{ij}^1 - d\varepsilon_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left(K_{ik}^1{}^{-1} n_j n_l + K_{jk}^1{}^{-1} n_i n_l \right) \Delta C_{mnkl}^{ep(2-1)} d\varepsilon_{kl}^2 \quad (\text{A.2. 25})$$

En tenant compte des trois symétries de $C_{ijkl}^{ep(1)}$, on formule l'expression de l'opérateur interfacial, \underline{L}^1 , spécifique aux déformations comme suivant :

$$L_{ijmn}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) = \frac{1}{4} \left((K_{im}^1)^{-1} n_j n_n + (K_{in}^1)^{-1} n_j n_m + (K_{jm}^1)^{-1} n_i n_n + (K_{jn}^1)^{-1} n_i n_m \right) \quad (\text{A.2. 26})$$

Ce qui donne l'expression du saut des déformations au passage de l'interface :

$$d\varepsilon_{ij}^1 - d\varepsilon_{ij}^2 = L_{ijmn}^1(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(1)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(2-1)} d\varepsilon_{kl}^2 \quad (\text{A.2. 28})$$

En prenant le milieu 1 comme référence, on obtient l'expression analogue suivante :

$$d\varepsilon_{ij}^2 - d\varepsilon_{ij}^1 = L_{ijmn}^2(\mathbf{n}, \underline{C}^{ep(2)}) \Delta C_{mnkl}^{ep(1-2)} d\varepsilon_{kl}^1 \quad (\text{A.2. 29})$$

A. 2. 3. 2. Propriétés des opérateurs interfaciaux

L'opérateur interfacial, \underline{L} , a été introduit par Hill pour décrire les discontinuités des champs de contraintes et des déformations au passage d'une interface. Cet opérateur dépend, dans le cas élastoplastique, du tenseur des modules élastoplastiques et des composantes de la normale unitaire à l'interface.

L'opérateur interfacial, \underline{L} , présente des propriétés importantes qui peuvent être mises en évidence par l'intermédiaire des opérateurs suivants :

$$M_{ijkl} = \frac{1}{2} \left((\delta_{ik} - n_i n_k) (\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{il} - n_i n_l) (\delta_{jk} - n_j n_k) \right) \quad (\text{A.2. 30})$$

et

$$N_{ijkl} = \frac{1}{2} \left((\delta_{ik} - n_i n_k) n_j n_l + (\delta_{il} - n_i n_l) n_j n_k + (\delta_{jl} - n_j n_l) n_i n_k + (\delta_{jk} - n_j n_k) n_i n_l \right)$$

\underline{M} et \underline{N} sont des opérateurs interfaciaux orthogonaux qui apparaissent dans la décomposition suivante :

$$t_{ij} = M_{ijkl} t_{kl} + N_{ijkl} t_{kl} \quad (\text{A.2. 31})$$

où t_{ij} est un tenseur quelconque d'ordre 2.

Les deux opérateurs \underline{M} et \underline{N} vérifient les propriétés suivantes :

$$M_{ijkl} + N_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) = I_{ijkl} \quad (\text{A.2. 32})$$

$$M_{ijkl} M_{klmn} = M_{ijmn}, \quad N_{ijkl} N_{klmn} = N_{ijmn}, \quad M_{ijkl} N_{ijkl} = N_{mnpq} M_{mnpq} = 0$$

On peut aussi déduire les relations suivantes :

$$M L = L M = 0, \quad N L = L N = L, \quad (N C^{ep} N) L = L (N C^{ep} N) = N \quad (\text{A.2. 33})$$

Par ailleurs, l'équivalence entre les deux expressions du saut des déformations (A.2. 28) et (A.2. 29) est confirmée par l'égalité suivante :

$$L^1 \Delta C^{(2-1)} L^2 = L^1 - L^2 \quad (\text{A.2. 34})$$

En utilisant les propriétés (A.2. 32) et (A.2. 33) vérifiées par les opérateurs \underline{M} et \underline{N} , on obtient :

$$\begin{aligned} L^1 (C^{ep(2)} - C^{ep(1)}) L^2 &= L^1 (M + N) (C^{ep(2)} - C^{ep(1)}) (M + N) L^2 \\ &= L^1 N C^{ep(2)} N L^2 - L^1 N C^{ep(1)} N L^2 \\ &= L^1 N - N L^2 \\ &= L^1 - L^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2. 35})$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] ▶ Baltov, A., et Sawczuk, A. (1965), "A rule of Anisotropic Hardening," *Acta Mechanica*, Vol. 1, N° 2, Springer, Wien-New York, pp. 81-92.
- [2] ▶ Benallal, A., Billardon, R., et Lemaitre, J. (1984), "Failure Analysis of Structures by Continuum Damage Mechanics," ed., S. R. Valluri et al., *Pergamon Press*, Vol. 5, 3669-3676.
- [3] ▶ Benallal, A., Comi, C., et Lemaitre, J. (1992), "Critical Damage States at Crack Initiation," ed., J. W. Ju et K. C. Valanis, *Damage Mechanics and Localization (ASME)*, AMD-Vol. 142/MD-Vol. 34, pp. 13-23.
- [4] ▶ Berveiller, M., et Zaoui, A. (1980), "Méthodes Self-Consistentes en Mécanique des Solides Hétérogènes," *XV^e Colloque du Groupe Français de Rhéologie. Comportement Rhéologique des Matériaux*, pp. 175-199.
- [5] ▶ Billardon, R. (1989), "Etude de la Rupture par la Mécanique de l'Endommagement," *Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris 6*.
- [6] ▶ Brunet, M., Sabourin, F., et Mguil-Touchal, S. (1996), "The Prediction of Necking and Failure in 3D. Sheet Forming Analysis Using Damage Variable," *Journal de Physique IV, Colloque C6, Supplément au Journal de Physique III*, Vol. 6, pp. 473-482.
- [7] ▶ Cordebois, J. P., et Sidoroff, F. (1982), "Endommagement Anisotrope en Elasticité et Plasticité," *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, N° Spécial.
- [8] ▶ Chen, W. F., et Han, D. J. (1988), "Plasticity For Structural Engineers," *Springer-Verlag*, New York Inc.

- [9] ▶ Chen, W. F., et Saleeb, A. F. (1994), "Constitutive Equations for Engineering Materials," Studies in Applied Mechanics: Vol. 1, Elasticity and Modeling, et Vol. 2, Plasticity and Modeling. *Elsevier*, Amsterdam-London-New York-Tokyo.
- [10] ▶ Cherkaoui, M., Sabar, H., et Berveiller, M. (1994), "Micromechanical Approach of the Coated Inclusion Problem and Applications to Composite Materials," *Journal of Engineering Materials and Technology*. Vol. 116, pp. 274-278.
- [11] ▶ Cherkaoui, M., Sabar, H., et Berveiller, M. (1995), "Elastic Composites with Coated Reinforcements: A Micromechanical Approach for Nonhomothetic Topology," communiqué par E. Kröner. *Int. J. Engng Sci.* Vol. 33, No. 6, pp. 829-843.
- [12] ▶ Cherkaoui, M. (1995), "Comportement Thermoélastique des Composites à Renforts Enrobés : Modélisation Micromécanique et Applications," *Thèse de Doctorat (Ph.D.)*, Université de Metz.
- [13] ▶ Dorn, J. E. (1949), "Stress-Strain Relations for Anisotropic Flow," *Journal of Applied Physics*, Vol. 20.
- [14] ▶ Eshelby, J. D. (1961), "Elastic Inclusions and Inhomogeneities," *Prog. in Solid Mech.*, Amsterdam.
- [15] ▶ François, D., Pineau, A., et Zaoui, A. (1993), "Comportement Mécanique des Matériaux," *Viscoplasticité, Endommagement, Mécanique de la Rupture, Mécanique du contact*. Ed. Hermès., Paris.
- [16] ▶ François, D., Pineau, A., et Zaoui, A. (1991/1992), "Comportement Mécanique des Matériaux," *Elasticité et Plasticité*. Ed. Hermès., Paris.
- [17] ▶ Hashin, Z. (1964), "Theory of mechanical behavior of heterogeneous media," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 17, pp. 1-9.

- [18] ▶ Hill, R. (1950), "The Mathematical Theory of Plasticity," *Oxford University Press*, London.
- [19] ▶ Hill, R. (1965), "Continuum Micro-mechanisms of Elastoplastique Polycrystals," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13.
- [20] ▶ Hill, R. (1983), "Interfacial Operators in the Mechanics of Composite Media," *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 31.
- [21] ▶ Hu, L. W. (1956), "Studies on Plastic Flow of Anisotropic Metals," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 12.
- [22] ▶ Ilali, I., Cherkaoui, M., et Berveiller, M. (1999), "Micromechanical Modelling of the Elastoplastique Behavior of the Coated Steel Sheets Materials," *Journal of Engineering Materials and Technology* (soumise le 04 juin 1999).
- [23] ▶ Ilali, I., et Cherkaoui, M. (1999), "Micromechanical Modeling of the Coated Steel Sheets Thermomechanical Behavior," *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik (GAMM99)*, Metz., Communication de 2 pages, *Journal ZAMM*.
- [24] ▶ Ilali, I., Cherkaoui, M., et Berveiller, M. (1999), "Modélisation du Comportement Elastoplastique des Tôles Revêtues," *XIV^e Congrès Français de Mécanique, AUM-AFM99*, Communication de 6 pages, Toulouse.
- [25] ▶ Jackson, L. R., Smith, K. F., et Lankford, W. T. (1948), "Plastic Flow in Anisotropic Sheet Metal," *Metal Technology*, T.P., 2440.
- [26] ▶ Ju, J. W. (1989), "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories : Constitutive Modeling and Computational Aspects," *Int. J. Solids Structures*, Vol. 25, N°7, pp.803-833.
- [27] ▶ Kachanov, L. M. (1958), "Time of Rupture Processs under Creep Conditions," *TVZ Akad Nauk SSR. Otd Techn. Nauk.*, Vol. 8.

- [28] ▶ Krajcinovic, D. (1983), "Constitutive Equations for Damaging Materials," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 50., pp. 355-360.
- [29] ▶ Krajcinovic, D., et Lemaitre, J. (1984), "Continuum Damage Mechanics : Theory and Applications," *CISM. Courses and Lectures N°295. International Center for Mechanics Sciences. Springer-Verlag*, Wien-New York.
- [30] ▶ Kröner, E. (1958), "Berechnung der Elastischen Konstanten des Vielkristalles aus den Konstanten des Einkristalls," *Z. Phys.*, Vol. 157.
- [31] ▶ Kröner, E. (1980), "Graded and Perfect Disordered in Random Media Elasticity," *J. Engng. Mech. Division*, Vol. EM5.
- [32] ▶ Lemaitre, J. (1971), "Evaluation of Dissipation and Damage in Metals," *Proc. I. C. M. (1)*, Kyoto, Japan.
- [33] ▶ Lemaitre, J. (1975), "Modèles Rhéologiques et Lois d'Écoulement," *Ecole d'Été de Métallurgie Physique de Villars-sur-ollon, Edition du CNRS*, France.
- [34] ▶ Lemaitre, J., et Dufailly, J. (1977), "Modélisation et Identification de l'Endommagement Plastique des Métaux," *III^e Congrès Français de Mécanique*, Grenoble.
- [35] ▶ Lemaitre, J., et Chaboche, J.-L. (1978), "Aspects Phénoménologiques de la Rupture par Endommagement," *J. Méc. Appl*, Vol. 2., pp. 317-365.
- [36] ▶ Lemaitre, J., Cordebois, J. P., et Dufailly, J. (1979), "Sur le Couplage Endommagement-Elasticité," *Compte Rendu à l'Académie des Sciences*, Paris, B. 391.
- [37] ▶ Lemaitre, J., Dufailly, J. (1987), "Damage Measurements," *Eng. Frac. Mech.*, Vol. 28, N°5/6, pp. 643-661.

- [38] ▶ Lemaitre, J., et Chaboche, J.-L. (1988), "Mechanics of Solid Materials," *Cambridge University Press*.
- [39] ▶ Lemaitre, J. (1992), "A Cours on Damage Mechanics," *Springer Verlag Eds.*, Allemagne-New York.
- [40] ▶ Lemaitre, J., et Chaboche, J.-L. (1996), "Mécanique des Matériaux Solides," Publié avec le concours du GRECO- CNRS-ONERA., 2^e Ed., *Dunod*, Paris.
- [41] ▶ Ludwik, P. (1909), "Elemente der Technischen Mechanik," *Julius Springer*, Berlin.
- [42] ▶ Magny, C. (1999), "Endommagement d'une Tôle Revêtue de ZnNi," *Communication Interne du LEDEPP (SOLLAC-USINOR)*, Florange.
- [43] ▶ Mandel, J. (1966), "Cours de Mécanique des Milieux Continus," *Tomes I et II.*, *Gautier-Villars.*, Paris.
- [44] ▶ Marquis, D., et Lemaitre, J. (1988), "Constitutive Equations for the Coupling Between Elastoplasticity Damage and Aging," *Revue Phys. Appl.*, Vol. 23, 615-624.
- [45] ▶ Montheillet, F., et Moussy, F. (1986), "Physique et Mécanique de l'Endommagement," *Groupe de Réflexion Endommagement., RCP Endommagement., GRECO Grandes Déformations., les Editions de Physique.*, France.
- [46] ▶ Murakami, S. (1981), "Effects of Cavity Distribution in Constitutive Equations of Creep and Creep Damage," *EUROMECH Colloquium on Damage Mechanics*, Cachan, France.
- [47] ▶ Neumann, P., et Hassen, P. (1970), "Work-hardening Theory of Fibre Reinforced Composites," *Institut Für Metallphysik, Universität Gottingen*, Germany, pp. 285-291.
- [48] ▶ Reuss, A. (1929), "Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristall," *Z. Ang. Math. Mech.*, Vol. 9.

- [49] ▶ Rice, J., et Tracey, D. (1969), "On Ductile Enlargement of Voids in Triaxial Stress Fields," *Journal of Mechanics Physics of Solids*, Vol. 17.
- [50] ▶ Sollac[®] (1997), "Le Livre de l'Acier," *Groupe USINOR*, RBC., Paris.
- [51] ▶ Voigt, W. (1889), "Über die Beziehung Zwischen den Beiden Elastizitäts Konstanten Isotroper Körper," *Wied, Ann*, Vol. 38.
- [52] ▶ Walpole, L. J. (1967), "The Elastic Field of an Inclusion in an Anisotropic Medium," *Proc. Roy. Soc.* 300, 270.
- [53] ▶ Yamada, Y., Yoshimura, N., et Sakurai, T. (1968), "Plastic Stress-Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by Finite Element Method," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 10, pp. 343-354.
- [54] ▶ Yamada, Y. (1969), "Recent Japanese Developments in Matrix Displacement Method for Elastoplastic Problems," *Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design*, Tokyo, Japan.
- [55] ▶ Zaoui, A., "Rappels des Notions de Base de la Mécanique des Milieux Continus," *Centre Scientifique et Polytechnique.*, Saint-Denis, France.