



**HAL**  
open science

# Calcul analytique du module élastoplastique des matériaux cristallins et applications

Tassadit Hariz

► **To cite this version:**

Tassadit Hariz. Calcul analytique du module élastoplastique des matériaux cristallins et applications. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2000. Français. NNT : 2000METZ024S . tel-01748944

**HAL Id: tel-01748944**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748944>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**

Présentée à

**UNIVERSITE DE METZ**

Par

**Tassadit HARIZ**

Pour l'obtention du grade de :

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ****SPECIALITE :** Sciences de l'ingénieur  
**OPTION :** Mécanique des matériaux**CALCUL ANALYTIQUE DU MODULE ELASTOPLASTIQUE  
DES MATERIAUX CRISTALLINS ET APPLICATIONS**

Soutenue le 10 Juillet 2000 à 14 h 30, devant le jury composé de :

Dr M. DARRIEULAT	ENSM, Saint-Etienne	Examineur
Prof. P. LIPINSKI	LPMM-ISGMP, Université de Metz	Examineur
Dr J. RAPHANEL	Ecole Polytechnique, Palaiseau	Rapporteur
HDR L. SIAD	LPMM-ISGMP, Université de Metz	Examineur
Prof. H. STÜWE	Erich-Schmid Istitut, Autriche	Rapporteur
Prof. L. TÓTH	LPMM-ISGMP, Université de Metz	Dir. thèse
Prof. P. VAN HOUTTE	Dép. MTM, Université Leuven, Belgique	Examineur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° Inv.	2000 006 S
Cote	S/M3 00/24
Loc	Magasin

# Sommaire

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Vers une modélisation du comportement élastoplastique des métaux</b>	<b>7</b>
1.1 Généralités . . . . .	7
1.1.1 Les équations d'équilibre . . . . .	7
1.1.2 Les équations de compatibilité . . . . .	8
1.2 Les modèles rhéologiques . . . . .	9
1.3 Les observations expérimentales . . . . .	9
1.4 Approche phénoménologique ou macroscopique . . . . .	13
1.5 Approche microscopique . . . . .	15
1.6 Différents modèles micro-macro en plasticité cristalline . . . . .	16
1.6.1 Généralités . . . . .	16
1.6.2 Modèles statiques . . . . .	20
1.6.3 Modèles de type Taylor . . . . .	20
1.6.4 Les modèles auto-cohérents . . . . .	25
<b>2 Formulation pour le calcul analytique des modules élastoplastiques des polycristaux</b>	<b>32</b>
2.1 Introduction . . . . .	32
2.2 De la plasticité microscopique à la plasticité macroscopique . . . . .	33
2.2.1 Le critère . . . . .	34
2.2.2 Ecrouissage intracristallin . . . . .	35
2.2.3 Lois constitutives du monocristal . . . . .	37

2.2.4	Rotation du réseau cristallographique . . . . .	38
2.2.5	Relations incrémentales entre contraintes et déformations pour le monocristal . . . . .	40
2.2.6	Représentation analytique de la surface de charge des mono- cristaux . . . . .	44
2.3	Conclusion . . . . .	58
<b>3</b>	<b>Calcul à partir de la forme analytique de la surface de charge</b> . . . . .	<b>60</b>
3.1	Introduction . . . . .	60
3.2	Formulation analytique . . . . .	60
3.3	Procédure du chargement incrémental . . . . .	65
3.3.1	Correction de l'état de contrainte . . . . .	67
3.4	Transitions d'échelles . . . . .	68
3.5	Conclusion . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Applications et validation du modèle</b> . . . . .	<b>72</b>
4.1	Introduction . . . . .	72
4.2	Caractéristiques du polycristal sollicité . . . . .	72
4.3	Application à l'essai de cisaillement simple avec écrouissage intracris- tallin nul . . . . .	73
4.3.1	Position du problème . . . . .	73
4.3.2	Conditions aux limites . . . . .	73
4.3.3	Résultats et apports du modèle . . . . .	74
4.4	Etude de la transition élastoplastique d'un tube à paroi mince sollicité en torsion-traction combinées . . . . .	77
4.4.1	Position du problème . . . . .	77
4.4.2	Résultats . . . . .	78
4.5	Application à la plasticité cyclique - Essai de traction-compression . . . . .	80
4.5.1	Position du problème . . . . .	80
4.5.2	Caractéristiques du polycristal sollicité . . . . .	83
4.5.3	Résultats et apports du modèle . . . . .	84

4.6	Expérience de Hohenemser - Essai de torsion-traction . . . . .	86
4.6.1	Description de l'expérience . . . . .	86
4.6.2	Etude à partir du critère de Von Mises . . . . .	89
4.6.3	Etude à partir du modèle analytique . . . . .	93
4.6.4	Résultats . . . . .	94
4.7	Conclusion . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Applications aux grandes déformations</b>	<b>97</b>
5.1	Introduction . . . . .	97
5.2	Première méthode: Etude selon l'activité des systèmes de glissement .	98
5.2.1	Comportement en cisaillement simple . . . . .	101
5.2.2	Comportement en traction . . . . .	107
5.3	Deuxième méthode: Calcul mixte rigide-plastique et élastoplastique .	111
5.3.1	Etude des courbes contrainte-déformation . . . . .	114
5.3.2	Comparaison des textures cristallographiques . . . . .	116
5.3.3	Comparaison des paramètres internes . . . . .	118
5.4	Conclusion . . . . .	122
	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>Annexes</b>	<b>125</b>
	<b>A Définition de la notation vectorielle</b>	<b>126</b>
	<b>B Eléments d'informations sur le code numérique polycristallin : <u>POLYCRIST129</u></b>	
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>137</b>

# Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux à l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique de l'Université de Metz sous la direction du Professeur Lászlo S. Tóth.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Lászlo Tóth pour ses directives afin que ce travail trouve son aboutissement dans les meilleures conditions. Ses conseils ainsi que les discussions scientifiques avec lui étaient très enrichissants et m'ont permis d'apprendre beaucoup. Sa disponibilité était totale et ceci en dépit des différentes responsabilités dont il avait la charge en dehors de l'encadrement de mon travail de thèse. Je tiens donc à lui adresser toute ma reconnaissance.

J'adresse mes vifs remerciements à Messieurs M. DARRIEULAT, P. LIPINSKI, J. RAPHANEL, H. STUWE et P. Van HOUTTE de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury, de juger ce travail et d'y avoir apporté des remarques très constructives.

Je remercie enfin, et avec beaucoup d'émotions ceux dont le soutien n'a jamais fait défaut pendant toutes ces années : Michel mon futur mari et ma grande amie Malika. Je tiens aussi à remercier ma famille, aussi bien celle établie en France que ceux restés en Algérie. Que ma mère, ma soeur Cécile, mon oncle Rémi, mon père Boumerfeg à Alger, mes tante et oncle Rabiha et Cherif MEGUEDDEM ainsi que ma tante Dalila trouvent ici l'expression de mes vifs remerciements et de toute ma reconnaissance. Leurs encouragements étaient constants malgré parfois un éloignement géographique important.

# Introduction générale

## Présentation générale

La connaissance des lois de comportement des matériaux représente à l'heure actuelle un enjeu important, dans le sens où cette connaissance permet, entre autres, de prédire la tenue et le comportement mécanique des matériaux avant d'engager la production de produits coûteux. D'autre part, la connaissance de ce comportement passe par sa modélisation. C'est à dire par l'établissement d'une formulation capable d'affronter des problèmes réels et de reproduire un ensemble de phénomènes expérimentaux largement observés.

Il existe deux démarches pour modéliser le comportement des matériaux :

1. La première consiste à considérer le matériau comme un milieu homogène. Les lois de comportement sont alors posées à une échelle macroscopique et sont de nature phénoménologiques : elles sont déduites de l'expérimentation macroscopique.
2. La deuxième démarche consiste à réaliser un passage du microscopique au macroscopique. Le comportement global est déterminé à partir de la description de la microstructure et des mécanismes élémentaires de déformation, puis de leurs intégrations dans des schémas de changement d'échelle.

La première démarche est la plus utilisée, notamment par l'industrie. En effet, on lui reconnaît une grande facilité de mise en place. Pour beaucoup de cas, cette approche permet de fournir des résultats corrects avec des temps de calculs qui restent



raisonnables.

Il n'en demeure pas moins que les modèles phénoménologiques présentent des inconvénients que l'on ne peut pas nier :

- Ces modèles nécessitent de nombreuses identifications expérimentales afin de déterminer leur domaine de validité. Aussi, ils ne peuvent pas fournir une prédiction correcte du comportement du matériau pour une situation de chargement qui n'aurait pas été prévue au préalable.
- Il est bien établi que les textures cristallines sont la cause principale de l'anisotropie du comportement plastique. Pourtant, les modèles phénoménologiques ne peuvent pas prendre en compte l'évolution de la texture cristallographique.
- Ils ne permettent pas d'accéder aux contraintes internes au niveau des grains.
- Ils ne semblent pas adaptés aux procédés de mise en forme nécessitant des chargements complexes de types séquentiels où le comportement dans chaque étape de chargement dépend fortement des étapes précédentes. En effet, en dehors de l'élasticité parfaite, le comportement mécanique des matériaux se caractérise par cette propriété même d'hérédité qui entraîne, que sa réponse ne dépend pas seulement de son chargement actuel, mais de toute l'histoire qu'il aurait subit antérieurement.

La deuxième démarche permet, en se basant sur des phénomènes physiques essentiels définis à une échelle petite, de décrire le comportement global d'un matériau pour une microstructure donnée. Comparée à l'approche phénoménologique, cette voie paraît plus "réaliste", du moins plus fondée physiquement.

En effet, ces modèles permettent de relier directement la microstructure et le comportement local au comportement global. Aussi, la propriété d'hérédité que nous avons mentionné plus haut est décrite par une dépendance par rapport à des variables internes (tels que contraintes internes, texture, cissions critiques sur les systèmes de glissement) qui permettent de décrire l'état du matériau et dont nous connaissons les lois d'évolution.

De ce fait, ces modèles fournissent effectivement de meilleures prédictions du comportement mécanique. Par contre, les modèles numériques polycristallins se caractérisent par leur complexité et la difficulté de leur mise en place. Aussi, ils nécessitent des temps de calculs souvent importants, ce qui les rend peu utilisés.

L'objet du présent travail est de trouver un compromis entre ces deux approches. Le but est de proposer une approche microscopique qui requiert des temps de calculs les plus faibles possibles.

## Contenu de la thèse

Ce mémoire comprend cinq parties auxquelles sont attachées deux annexes.

**Le chapitre 1** décrit les deux façons dont peut être appréhendé le comportement du matériau par les mécaniciens. Un point de vue consiste à considérer le matériau comme un milieu homogène; alors les questions du critère de charge, de l'écoulement et des lois d'écoulement sont établies à une échelle macroscopique et sont essentiellement basées sur des lois phénoménologiques. Nous présentons les lois macroscopiques les plus utilisées. La deuxième partie du chapitre présente l'autre démarche; celle-ci consiste à puiser à l'échelle de la microstructure les informations nécessaires à la compréhension du comportement global du matériau. Dans ce cas, les questions du critère, de l'écoulement et des lois d'écoulement doivent être d'abord posées à une échelle microscopique. La détermination du comportement global est trouvée par l'utilisation d'une transition d'échelle micro-macro. Les différents modèles micro-macro utilisés en plasticité cristalline sont alors présentés.

**Le chapitre 2** pose à l'échelle du grain (échelle microstructurale) les questions du critère de charge, de l'écoulement et des lois constitutives décrivant le comportement du grain. Dans ce chapitre, le critère de charge adopté est celui énoncé par Schmid en 1924 [45]. Celui-ci conduit à la surface de charge de Bishop et

Hill [8]. L'intégration de la loi de comportement est entreprise, mais les calculs aboutissent à une ambiguïté quant au choix des systèmes actifs. Cette ambiguïté est due à l'existence de vertex (points anguleux) sur le polyèdre de Bishop et Hill. En vérité, le critère de Schmid représente un point de vue très simplifié pour expliquer les processus de déformation qui ont lieu au niveau du monocristal ; en réalité, quand la déformation plastique a lieu, plusieurs systèmes de glissement sont activés simultanément (alors que le critère de Schmid n'en prévoit qu'un seul). Cela suppose que la surface de charge soit arrondie. Plusieurs travaux ont été menés dans ce sens. Nous présentons quelques études de ce type : toutes avaient pour but commun de proposer des surfaces de charge qui soient à la fois arrondies mais aussi proches que possible du polyèdre de Bishop et Hill.

**Le chapitre 3** présente la démarche que nous adoptons afin de décrire le comportement élastoplastique d'un matériau polycristallin. Nous adoptons la forme arrondie de la surface de charge inspirée de la fonction analytique (proposée par Tóth et al. [50]) décrivant le potentiel viscoplastique du monocristal. Les équations constitutives régissant le comportement du grain sont développées en tenant compte de l'évolution de l'écroutissage et de la réorientation du réseau cristallin. Une forme analytique du module élastoplastique est proposée pour le grain. Le comportement global du matériau est déterminé en introduisant cette formulation dans le modèle de Taylor-Lin [37] des polycristaux.

**Le chapitre 4** consiste en des applications du modèle à différents types de chargement. Dans un premier temps, le modèle est appliqué à des essais monotones et l'écroutissage intracristallin est négligé. Cette étude nous a permis de comprendre des phénomènes observables au niveau macroscopique. Dans la deuxième partie du chapitre, le modèle est appliqué à des chargements complexes avec changement dans le trajet de sollicitation. Les résultats des simulations sont comparés aux résultats d'études précédentes et à des résultats expérimentaux.

**Le chapitre 5** traite de l'application du modèle aux grandes déformations; nous sommes alors confrontés à des temps de calcul assez importants. Deux méthodes sont alors proposées afin d'accélérer les calculs. La première méthode consiste à augmenter le pas de chargement en fonction de l'activité des systèmes de glissement. La deuxième méthode propose de simuler le chargement grâce à un calcul mixte: rigide-plastique et élastoplastique. Les résultats donnés par cette méthode sont comparés aux résultats fournis par le calcul élastoplastique formulé entièrement en petites déformations.

## CHAPITRE 1

# Vers une modélisation du comportement élastoplastique des métaux

### 1.1 Généralités

La détermination de la loi de comportement passe par la détermination des champs de contraintes ou de déformation induits par tel ou tel type de sollicitations. Les équations d'équilibre des contraintes fournissent 3 relations pour 6 inconnues. Les relations de compatibilité des déformations donnent 3 équations pour 6 inconnues. Il faut alors, utiliser les équations de comportement (qui relient ces deux séries d'équations) et les conditions aux limites pour avoir assez d'équations pour déterminer les champs de contraintes et de déformation.

#### 1.1.1 Les équations d'équilibre

Les équations d'équilibre traduisent le fait que si l'on découpe par la pensée un corps déformable, chaque partie doit être en équilibre. C'est à dire que le moment résultant et la force résultante doivent être nuls.

Les composantes de la contrainte doivent vérifier les équations d'équilibre.

Nullité du moment résultant :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

Nullité de la force résultante :

$$\sigma_{ij,j} = \rho(\gamma_i - g_i) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$\vec{\gamma}$  est le vecteur accélération et  $\vec{g}$  le vecteur des forces volumiques par unité de masse,  $\rho$  étant la densité. On néglige les forces de masse et les forces d'inertie. Alors l'équation d'équilibre s'écrit:

$$\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij,j} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

### 1.1.2 Les équations de compatibilité

Au cours de la déformation, le matériau étudié doit rester un milieu continu. L'hypothèse de continuité impose des conditions aux champs de déformation qui se traduisent par des équations de compatibilité.

Soient  $X_1, X_2, X_3$  les coordonnées d'un point du milieu exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes.  $u_1, u_2, u_3$  sont les coordonnées du champ de déplacement. Alors, le gradient de déplacement est donné par :

$$L_{ij} = u_{i,j} = \frac{du_i}{dX_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.4)$$

Pour que le milieu ne perde pas son caractère continu, il faut que le gradient de déplacement vérifie la condition de Cauchy, à savoir :

$$L_{ij,k} = L_{ik,j} \quad (1.5)$$

ou encore :

$$\epsilon_{ijk} \left( \frac{\partial L_{ij}}{\partial X_k} \right) = 0 \quad (1.6)$$

$\epsilon_{ijk}$  est le tenseur de permutation de Ricci.

## 1.2 Les modèles rhéologiques

Les équations rhéologiques servent à caractériser le comportement du matériau : elles décrivent la façon dont les contraintes et les paramètres internes sont reliés localement aux déformations. Ces équations sont aussi appelées équations constitutives. Cette modélisation peut être abordée selon deux approches.

La première approche consiste à appréhender le matériau tel qu'il est en réalité, c'est à dire comme un milieu non homogène, constitué d'un assemblage de cristaux d'orientations différentes [38, 17]. La méthodologie consiste à poser les équations constitutives régissant un cristal isolé. Le comportement global du polycristal est ensuite déterminé grâce à l'utilisation d'une approche basée sur la transition d'échelles. A cet effet, il existe différents modèles qui permettent le passage du comportement microscopique au comportement macroscopique ; ils sont communément appelés modèles micro-macro. Ceci représente jusqu'à nos jours un axe de recherche qui reste largement ouvert. Notre travail se situe dans ce domaine.

La deuxième approche consiste à considérer le matériau à une échelle globale comme un milieu homogène [9, 44]. Les lois constitutives qui sont alors proposées décrivent le comportement du matériau à une échelle macroscopique. Cette méthode consiste en quelque sorte à homogénéiser le comportement local de chaque cristal.

Quoiqu'il en soit, dans un cas comme dans l'autre, l'obtention des équations constitutives nécessite une approche phénoménologique.

En effet, c'est grâce à des tests simples tels que les essais de traction ou de torsion qu'il est possible d'identifier la loi de comportement du métal.

## 1.3 Les observations expérimentales

Lorsqu'on déforme à froid une éprouvette cylindrique de métal par une traction monoaxiale, l'évolution de la contrainte en fonction du déplacement suit l'allure indiquée sur la figure 1.1. En dessous d'un certain seuil de contrainte  $\sigma_0$  (correspondant sur la courbe contrainte-déformation au point  $A_0$ ), la réponse est linéairement

élastique et la décharge du matériau suit le chemin de chargement initial. La déformation de l'éprouvette est totalement réversible. La partie  $O - A_0$  correspond au domaine élastique. Le comportement du matériau dans cette partie est indépendant du trajet de chargement et à partir d'un état de contrainte on détermine la déformation correspondante de façon unique et vice versa.

L'état de contrainte au point  $A_0$  est appelé limite élastique. Pour des états de contrainte et de déformation se trouvant au-delà du point  $A_0$  et dans la région  $A_0 - C$ , le matériau devient élastoplastique et des déformations irréversibles viennent se superposer aux déformations réversibles. Au cours de la déformation la limite élastique peut évoluer, ce phénomène s'appelle l'écrouissage. Les faits expérimentaux montrent donc que la déformation totale se divise en une partie élastique  $\varepsilon^e$  réversible et une partie inélastique  $\varepsilon^p$  irréversible. Cette partition est également justifiée par la physique des solides et la thermodynamique des processus irréversibles. Celle-ci montre que la déformation élastique correspond à une variation des distances interatomiques sans modification de sites [4]. Tandis que la déformation plastique correspond à un mouvement des dislocations avec modification des liaisons interatomiques [56].

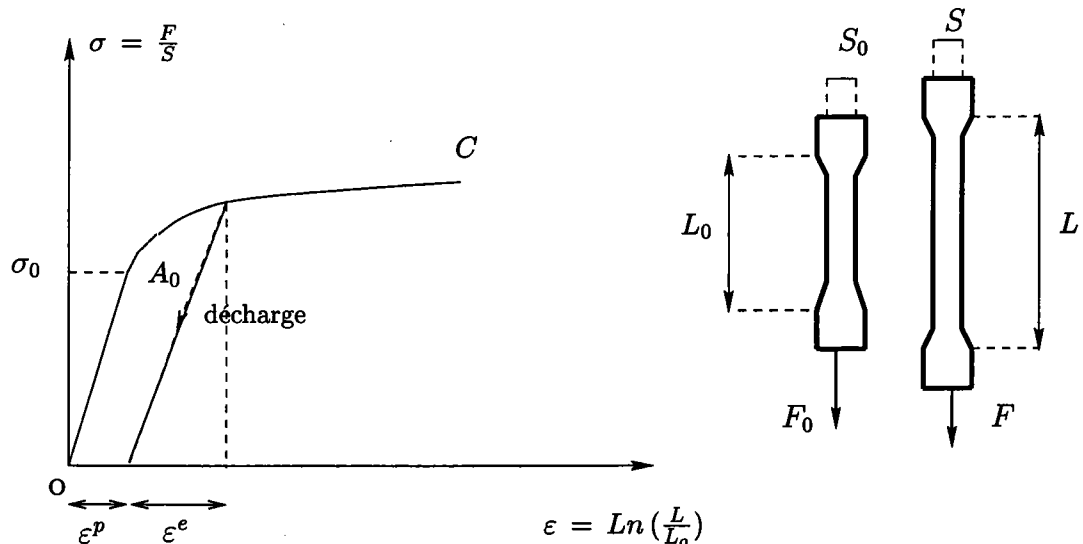


FIG. 1.1 - Courbe de traction d'un métal à froid



## **Théorie des dislocations et la déformation plastique des cristaux**

Au cours des années 20, le développement des méthodes d'études grâce aux rayons X a permis d'établir la nature atomique et périodique des matériaux cristallins. On sut alors que les cristaux étaient constitués d'un arrangement périodique d'atomes. Aussi, il était aisé de trouver de façon théorique la valeur de cisaillement nécessaire pour produire une déformation plastique (déformation permanente) d'un cristal. On peut alors montrer que la limite théorique de cisaillement simple est égale à  $\frac{G}{2\pi}$ . Or, il a été constaté dans les faits que plusieurs matériaux cristallins pouvaient être déformés plastiquement sous l'influence de contraintes beaucoup plus faibles que la limite théorique.

De façon générale, tous les métaux ont une limite d'élasticité bien inférieure à celle que le calcul théorique prévoit. Cette divergence (parfois, de l'ordre de  $10^3$ ) entre ce à quoi on devait s'attendre et ce qui se passait en fait stimula la curiosité des scientifiques. En 1934, trois d'entre-eux établirent indépendamment la cause de la divergence. G.I. Taylor, E. Orowan et M. Polanyi postulèrent qu'une "imperfection cristalline" pouvait exister dans le réseau cristallin. Pour de faibles valeurs de contrainte cette imperfection pouvait se mettre en mouvement et provoquer une déformation. Cette imperfection est la dislocation.

C'est donc l'existence des dislocations et leurs possibilités de mouvement qui permettent la déformation plastique et qui assurent la compatibilité des déformations macroscopiques de l'éprouvette et des déformations des cristaux qui la composent. Au cours de la déformation du métal on observe une augmentation du nombre de dislocations. Celles-ci s'assemblent en cellules ce qui rend plus difficile leur mouvement : c'est le phénomène d'écrouissage. Aux premiers stades de la déformation, le phénomène d'écrouissage est prépondérant. Cependant, parallèlement à l'augmentation des dislocations, on observe un phénomène d'annihilation des dislocations. Aux grandes déformations le phénomène d'annihilation peut être pratiquement équivalent au phénomène d'augmentation des dislocations, si bien qu'on peut observer un décroissement progressif de la pente de la courbe contrainte-déformation. Si l'on chauffe le métal, les mécanismes de réarrangement et d'annihilation des dislocations deviennent prépondérants.

Le matériau se "radoucit" et ce phénomène vient alors contrebalancer l'effet de l'écroutissage.

Un autre aspect caractéristique de la déformation élastoplastique des métaux est l'effet Bauschinger. Comme le montre la figure 1.2, il se traduit par la diminution de la limite d'élasticité en compression après un chargement préalable en traction. Ce phénomène apparaît aussi si l'on change l'ordre de la sollicitation.

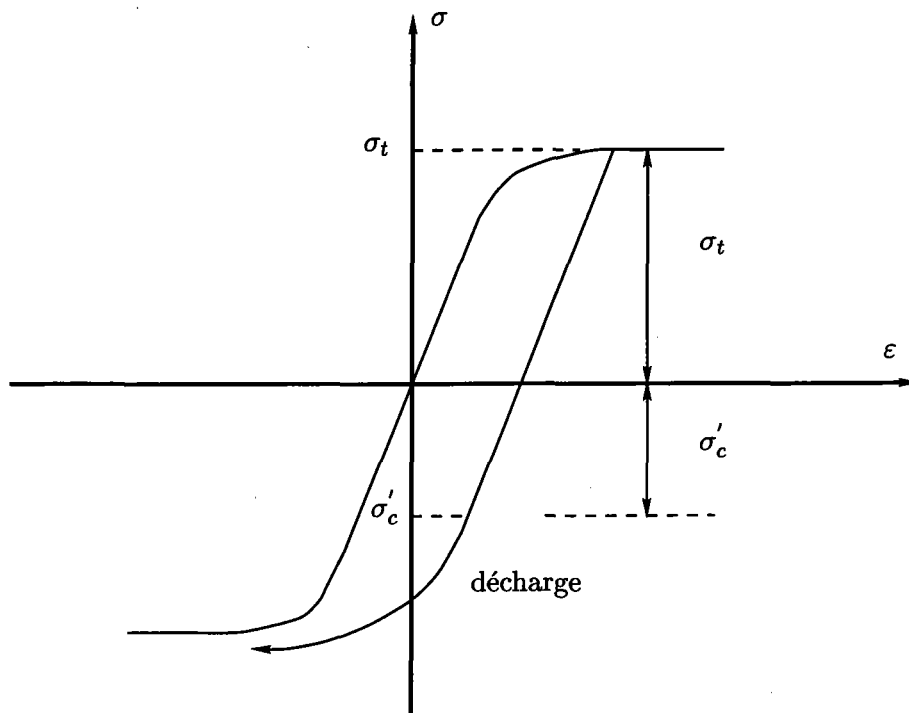


FIG. 1.2 – Effet Bauschinger

A ce stade, il apparaît clairement que l'objectif d'une description rhéologique du comportement plastique vise à répondre à trois types de questions :

1. Rechercher pour le matériau un critère de plasticité permettant de déterminer ses conditions de plastification. Il s'agit en fait de définir une fonction scalaire  $f(\underline{\sigma})$  dite fonction de charge et telle que la réponse reste élastique tant que  $f(\underline{\sigma}) < 0$ , la réponse plastique apparaissant dès que  $f(\underline{\sigma}) = 0$ .

2. La description des lois d'écoulement permettant de déterminer la déformation correspondant à un chargement donné et vice versa.
3. La description de l'écrouissage et son évolution au cours de l'écoulement plastique.

## 1.4 Approche phénoménologique ou macroscopique

Dans ce qui va suivre, nous allons passer brièvement en revue les façons dont sont appréhendées généralement ces trois questions à l'échelle macroscopique. Rappelons qu'ici le matériau est considéré comme un milieu homogène et son comportement mécanique est décrit en faisant appel aux seules variables macroscopiques.

### Le critère

Le seuil d'écoulement plastique  $\sigma_0$  est défini comme la contrainte  $\frac{F}{S}$  à partir de laquelle il se produit des déformations irréversibles. Cette définition est valable pour un essai uniaxial, mais peut être étendue au cas du chargement complexe en introduisant la notion de "contrainte monoaxiale équivalente"  $\sigma_{eq}$ . Le domaine élastique est alors défini par :

$$\sigma_{eq} < \sigma_0 \quad (1.7)$$

Les critères les plus couramment utilisés sont :

- Le critère de Tresca, qui s'écrit dans le repère principal :

$$\max_{ij} |s_i - s_j| \leq \sigma_0 \quad (1.8)$$

où  $S_1 = S_{11}$ ,  $S_2 = S_{22}$  et  $S_3 = S_{33}$  sont les composantes de la contrainte déviatorique principale.

- Le critère de Von-Mises, qui s'écrit dans le repère principal :

$$\sqrt{\frac{3}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)} \leq \sigma_0 \quad (1.9)$$

et dans un repère quelconque :

$$\sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \leq \sigma_0 \quad (1.10)$$

## La loi d'écoulement

La loi d'écoulement est la relation qui permet de relier la contrainte à la déformation plastique. Le choix d'un critère étant réalisé on peut lui associer une loi d'écoulement.

Si

$$f(\underline{\sigma}) = \sigma_0 \quad (1.11)$$

représente le critère de plasticité, alors la loi d'écoulement s'écrit:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{avec} \quad \lambda_p \geq 0 \quad (1.12)$$

Dans cette relation,  $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$  représente géométriquement la normale à la surface de charge  $f(\underline{\sigma})$ . Ce qui signifie que la déformation plastique est portée par la normale à la surface de charge.

## L'écrouissage

On distingue principalement deux modèles d'écrouissage:

1. L'écrouissage isotrope.
2. L'écrouissage cinématique.

Dans le modèle de l'écrouissage isotrope, l'évolution du seuil de plasticité  $\sigma_0$  ne dépend que d'un seul paramètre. Cet écrouissage se traduit par un gonflement uniforme de la surface de charge. Ce modèle ne peut pas reproduire l'effet Baushinger que l'on observe sur les métaux.

Dans le modèle de l'écrouissage cinématique, on suppose que la surface de charge est déplacée en bloc par translation.

Des études menées sur des métaux déformés à froid sous chargements complexes montrent qu'en réalité l'écrouissage serait une combinaison d'un écrouissage cinématique

non linéaire et d'un écrouissage isotrope.

Les modèles macroscopiques sont en effet couramment utilisés. On leur reconnaît effectivement une très grande facilité de mise en place, notamment pour des applications dans les codes d'éléments finis. D'autre part, ils permettent de fournir des prévisions satisfaisantes et ceci pour des temps de calculs qui restent raisonnables.

Cependant, on leur fait souvent le reproche de ne pas permettre d'accéder aux contraintes internes au niveau des grains. De ce fait, ils ne paraissent pas adaptés aux simulations de procédés de mise en forme nécessitant des chargements complexes ( par exemple, décharge suivie d'un autre chargement, ou encore chargements avec changement dans les directions de sollicitation).

Par contre l'accès à de telles informations peut être obtenu par l'utilisation d'une approche microscopique.

## 1.5 Approche microscopique

Nous avons passé brièvement en revue la façon dont pouvaient être abordées les questions du critère, de l'écoulement et de l'écrouissage du point de vue du mécanicien qui appréhende le matériau à une échelle macroscopique comme un milieu homogène.

Notre travail se situe dans une autre optique. Le matériau est considéré comme un milieu non homogène constitué d'un assemblage de cristaux d'orientations différentes. Notre démarche consiste à puiser à l'échelle de la microstructure les informations qui nous permettront de décrire le comportement global du matériau. Aussi faut-il au préalable définir l'entité microscopique qui constituera le point de départ de la modélisation. La majorité des études micro-macro adoptent le grain comme entité microscopique. Nous adoptons aussi cette échelle de travail. Ce choix implique que tout ce qui se situe en dessous de cette échelle sera décrit par des variables phénoménologiques. Nous verrons par exemple que lorsqu'il s'agira de décrire l'écrouissage intracristallin, nous serons contraints d'avoir recours à des paramètres phénoménologiques, alors qu'une modélisation plus correcte devrait faire intervenir la théorie des dislocations, car nous savons que c'est la multiplication des dislocations

et l'évolution de leur répartition spatiale qui est responsable de l'écroutissement intracristallin.

Notre démarche sera la suivante :

A l'échelle du grain, poser les questions du critère, de l'écoulement et de l'écroutissement de façon à dégager une loi de comportement capable de décrire l'évolution des contraintes et des paramètres internes au cours de la déformation plastique.

Afin de décrire le comportement global du matériau, la transition d'échelle est effectuée grâce aux modèles micro-macro. Dans ce qui va suivre, nous passerons en revue les différents modèles micro-macro utilisés en plasticité cristalline. La modélisation du comportement à l'échelle du grain sera présentée plus en détail dans le chapitre suivant.

## **1.6 Différents modèles micro-macro en plasticité cristalline**

### **1.6.1 Généralités**

Parmi tous les modèles existants qui essaient de prédire le comportement macroscopique de matériaux polycristallins à partir du comportement microscopique, il se dégage principalement trois types de modèles :

1. Les modèles statiques.
2. Les modèles de type Taylor.
3. Les modèles auto-cohérents.

Les deux premiers consistent à poser d'emblée des hypothèses sur les contraintes ou les déformations.

Quant au troisième type de modèles, ils consistent en une modélisation de l'interaction d'un grain en particulier avec tous les autres grains.

Aussi, avant de passer à la présentation de ces modèles, il faut noter que tous reposent sur l'hypothèse selon laquelle chaque monocristal constituant le matériau obéit à la loi de Schmid [45]. C'est à dire que le glissement sur un plan cristallin ne se produit que lorsque la contrainte de cisaillement projetée sur la direction de glissement atteint une

valeur critique  $\tau_c$  (Fig.1.3).

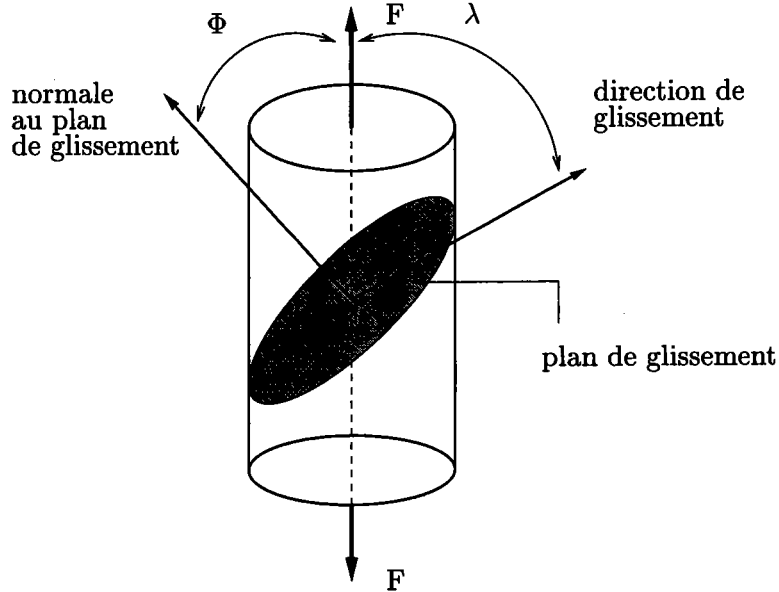


FIG. 1.3 – Déformation d'un monocristal

La loi de Schmid et Boas [54] se traduit par :

$$\sigma_0 \cos \Phi \cos \lambda = \tau_c \quad (1.13)$$

$\sigma_0$  est la limite élastique en traction pour le monocristal.

D'une manière générale, la loi de Schmid s'écrit [45] :

$$\tau^s = M_{ij}^s \sigma_{ij} \leq \tau_c^s \quad (1.14)$$

avec :

$$M_{ij}^s = \frac{1}{2} (b_i^s n_j^s + b_j^s n_i^s) \quad (1.15)$$

Cela signifie qu'un système de glissement  $s$  (caractérisé par sa normale  $\vec{n}^s$  au plan de glissement et la direction  $\vec{b}^s$  qui lui est associée) se déforme plastiquement sous une contrainte  $\underline{\sigma}$  si la contrainte résolue  $\tau^s$  sur ce système de glissement atteint une

valeur critique  $\tau_c^s$ .

Nous avons vu au chapitre [1.3] que le déplacement des dislocations produit la déformation plastique. Deux propriétés importantes des dislocations sont à signaler :

1. Les dislocations glissent toujours sur des plans cristallographiques simples. Par exemple dans le cas des métaux C.F.C., on observe expérimentalement que les glissements se font sur les plans  $\{111\}$ . (Dans un réseau cubique, le groupe de plans  $\{111\}$  est formé des plans normaux aux directions  $\pm \vec{i} \pm \vec{j} \pm \vec{k}$  (Fig.1.5)). La déformation plastique des cristaux C.F.C. se produit donc par cisaillement parallèlement aux plans  $\{111\}$  et il en existe quatre. La connaissance de ces quatre plans de glissement permet de définir les normales  $\vec{n}^s$  utilisées dans la loi de Schmid.
2. Lorsque les atomes sont déplacés par rapport à leur position normale, ceux-ci voient leur énergie augmenter. Afin de minimiser l'énergie totale, la dislocation doit être la plus courte possible. On voit sur la figure Fig.1.5 que les atomes sont plus serrés dans les différentes directions  $\langle 110 \rangle$ . Par conséquent nous constatons que le plus petit vecteur de Burgers<sup>1</sup> possible dans les matériaux cristallins C.F.C pointe dans les différentes directions  $\langle 110 \rangle$ . (Dans un réseau cubique à faces centrées, le groupe de directions cristallographiques  $\langle 110 \rangle$  sont les directions parallèles à l'un des vecteurs  $\pm \vec{i} \pm \vec{j}$ ;  $\pm \vec{i} \pm \vec{k}$ ;  $\pm \vec{j} \pm \vec{k}$ ). Les cristaux C.F.C. se déforment donc plastiquement par glissement le long des directions  $\langle 110 \rangle$  qui sont les directions les plus denses. Dans les matériaux C.F.C., on dénombre six directions de glissement, puisqu'on distingue les deux sens de glissement cela conduit à ne considérer que trois directions de glissements. Ces directions définissent les trois vecteurs  $\vec{b}^s$  possibles, s'appliquant chacun à l'un des plans de glissement définis plus haut.

Ces propriétés essentielles des dislocations permettent donc de statuer quant au nombre et à la nature des systèmes de glissement. La structure C.F.C. possède 12

---

1. Le vecteur de Burgers noté  $\vec{b}$  caractérise la direction et la distance  $b$  dont se déplace la partie supérieure du cristal par rapport à la partie inférieure quand la dislocation traverse le cristal de part en part.



systèmes de glissement de la famille  $\{111\} \langle 110 \rangle$ . De la même façon, on définit les plans de glissement et les directions possibles pour les cristaux C.C.

En annexe, nous donnons une liste des vecteurs  $(\vec{n}^s, \vec{b}^s)$  correspondant aux différentes familles de systèmes de glissement pour les matériaux de structure C.F.C.

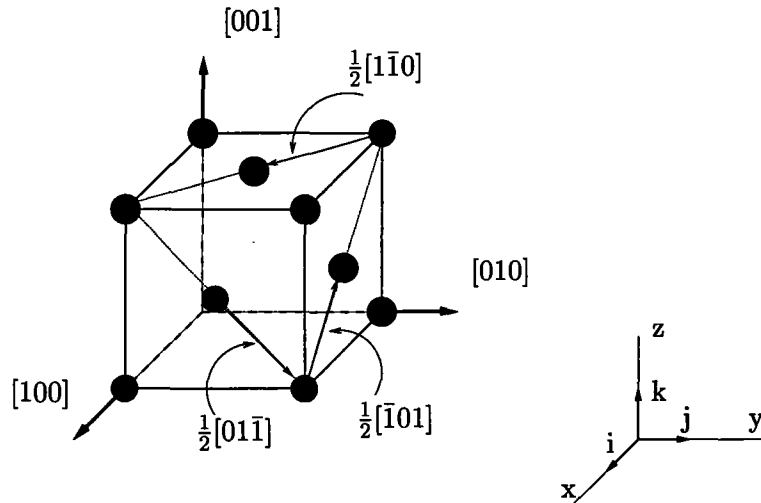


FIG. 1.4 – Maille élémentaire du réseau cubique à faces centrées et vecteurs de Burgers sur le plan (111).

D'autre part, quand un agrégat polycristallin est soumis à un système de forces à ses frontières, celui-ci engendre un champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  et de déformation  $\underline{\epsilon}$  au sein du matériau. En pratique, vu la nature hétérogène des matériaux cristallins, ces champs de contrainte et de déformation ne sont pas uniformes d'un grain à un autre. Pour que le milieu préserve sa continuité, la déformation totale doit satisfaire les conditions de compatibilité (1.6).

Par ailleurs, le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  doit vérifier les équations d'équilibre qui s'écrivent en l'absence de forces de volume :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (1.16)$$

Les relations (1.6) et (1.16) sont les équations de base qu'il faut résoudre en adoptant, en général, des hypothèses simplificatrices. Néanmoins, nous verrons que selon les

modèles, il arrive que les hypothèses fortes sur lesquelles se base le modèle font que l'une ou l'autre de ces conditions soit complètement ignorée.

## 1.6.2 Modèles statiques

Ce modèle repose sur l'hypothèse selon laquelle l'état de contrainte dans le monocristal est identique à l'état de contrainte macroscopique de l'agrégat [6].

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} \quad (1.17)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\Sigma}}$  sont respectivement la contrainte dans le grain et celle macroscopique de l'agrégat.

L'hypothèse qui est adoptée dans ce modèle signifie que les équations d'équilibre sont vérifiées. Cependant, les relations de compatibilité sont ici totalement ignorées.

L'application de ce type de modèle pour un matériau obéissant à la loi de Schmid implique, en général, qu'un seul système de glissement est actif par grain (sauf pour les orientations symétriques). Compte tenu de la désorientation relative des grains, celui-ci ne sera pas le même d'un grain à l'autre.

Ainsi, même si la cission microscopique est prise identique sur les systèmes de glissement activés, la déformation plastique sera différente d'un grain à l'autre. Il se crée alors des incompatibilités dues au nombre insuffisant de systèmes actifs. D'autre part, il est très improbable que la déformation d'un polycristal puisse être accommodée par un glissement simple au niveau des grains qui le constituent.

## 1.6.3 Modèles de type Taylor

### Modèle de Taylor

Proposé par Taylor en 1938 [47] pour les matériaux rigides plastiques, le modèle a été aussi développé par Bishop et Hill [8]. Ce modèle repose aussi sur une hypothèse forte qui consiste à supposer que la déformation plastique dans chaque grain constituant le polycristal est uniforme et identique à celle de l'agrégat.

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p = \underline{\underline{E}}^p \quad (1.18)$$

$\underline{\underline{\epsilon}}^p$  et  $\underline{\underline{E}}^p$  sont respectivement la déformation plastique dans le grain et celle macroscopique de l'agrégat. Ce modèle suppose qu'un grain va se déformer suivant le nombre de systèmes de glissement nécessaires pour préserver la compatibilité. Pour accommoder les cinq composantes indépendantes d'un incrément de déformation plastique incompressible, il est nécessaire que cinq systèmes de glissement au plus soient actifs. Ceux-ci doivent vérifier l'équation suivante :

$$\frac{1}{2} \sum_s (M_{ij}^s + M_{ji}^s) \dot{\gamma}^s = \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (1.19)$$

où  $\dot{\gamma}^s$  est la vitesse de glissement sur le système  $s$ . L'hypothèse forte qui est adoptée dans ce modèle a pour conséquence que les relations d'équilibre sont ici totalement négligées. Il est aussi à noter que le modèle de Taylor, en imposant toutes les composantes de la déformation plastique aux cristaux qui constituent le polycristal, entraîne une restriction quant aux conditions aux limites imposées.

## Généralisation du modèle de Taylor

### Méthodologies des déformations partiellement imposées

Les premières modifications apportées au modèle de Taylor, ont été initiées par Honneff et Mecking [24]. Ces modifications se sont essentiellement basées sur la relaxation de certaines composantes de la déformation imposée. Cette modification se basait sur le fait que lorsque les cristaux sont soumis à de grandes déformations, ceux-ci subissent des changements considérables quant à leur forme et l'on peut alors constater que certaines composantes de la déformation peuvent être différentes de celles imposées à l'agrégat.

Ainsi, Honneff et Mecking font les premiers cette constatation.

Pour un essai de laminage, les auteurs relaxent certaines composantes de la déformation imposée et obtiennent une meilleure prédiction des textures cristallographiques aux grandes déformations. Plus tard, l'idée de relaxer certaines composantes de la déformation et de tolérer certaines incompatibilités de la déformation fut généralisée par Kocks et Canova (1981) [28] pour d'autres types de chargement.

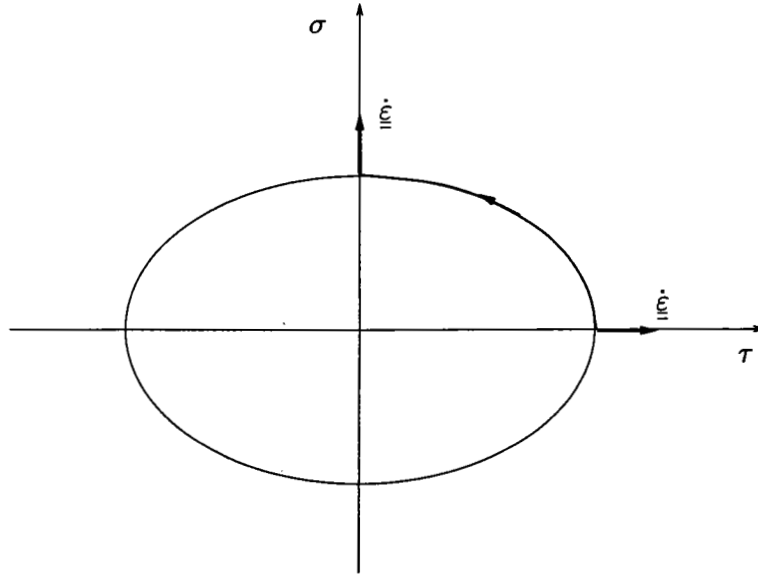


FIG. 1.5 – Rôle de l'élasticité lors d'un chargement complexe.

### Modèle de Taylor-Lin

Dans sa version originale, le modèle de Taylor néglige les déformations élastiques et sert à prédire le comportement des matériaux rigides plastiques.

Afin de prendre en compte les déformations élastiques, Lin [37] généralise le modèle de Taylor en imposant l'uniformité de l'incrément de déformation totale. Si l'on se place dans l'hypothèse des petites déformations, on écrit alors :

$$d\varepsilon_{ij}^t = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p = dE_{ij}^e + dE_{ij}^p = dE_{ij}^t \quad (1.20)$$

Si l'on suppose l'élasticité isotrope et les déformations plastiques isovolumiques, la loi de Hooke se résume à :

$$\underline{\underline{S}} = 2\mu\underline{\underline{\varepsilon}}^e \quad (1.21)$$

En utilisant la relation (1.20) et (1.21), on obtient une loi d'interaction de la forme :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + 2\mu(dE_{ij}^p - d\varepsilon_{ij}^p) \quad (1.22)$$

Le terme  $2\mu(dE_{ij}^p - d\varepsilon_{ij}^p)$  représente l'incrément de contraintes internes liées aux hétérogénéités dans la répartition de la déformation. Dans la relation (1.22), la différence entre les déformations plastiques au niveau du grain et celle macroscopique au niveau du polycristal est de l'ordre des déformations élastiques qui sont elle-mêmes généralement très faibles. Cela signifie que l'interaction entre le grain et la matrice est de nature élastique. Le module élastique ayant généralement une valeur très élevée, au vu de la relation (1.22), il est clair que ce modèle aboutit à une surestimation des contraintes internes.

### Choix des systèmes actifs

Le modèle de Taylor pose un problème d'ambiguïté quant au choix des systèmes de glissement actifs. En effet, rappelons que ce modèle consiste à imposer l'uniformité de la vitesse de déformation plastique. Pour accommoder les cinq composantes imposées, il faut qu'au plus cinq systèmes de glissement soient actifs. Tous, vérifient l'équation (1.19).

Dans les structures cristallines cubiques, il existe un grand nombre de combinaisons de cinq systèmes de glissement indépendants pour accommoder la déformation plastique imposée. Il se pose alors, un problème d'ambiguïté quant au choix de la combinaison des systèmes de glissements actifs. Afin de lever cette ambiguïté, Taylor a proposé le critère du travail minimum :

Les systèmes de glissement  $s$  choisis sont ceux qui vérifient d'une part la relation (1.19) et qui de plus minimisent le travail plastique interne  $dW_i$  :

$$dW_i = \sum_s \tau_c^s d\gamma^s = \text{minimum} \quad (1.23)$$

où  $\tau_c^s$  est la contrainte de cisaillement résolue sur le système de glissement "s" et  $d\gamma^s$  est l'incrément de glissement cristallographique. Mais là encore, on se trouve confronté à un problème d'ambiguïté quant au choix des systèmes actifs car il arrive que plus d'une combinaison de systèmes de glissement peuvent vérifier le critère (1.23).

D'autre part, en admettant que la déformation plastique à froid du monocristal obéisse à la loi de Schmid (1.14), Bishop et Hill [8] montrent que lorsque cinq systèmes de

glissement sont exigés pour accommoder la déformation plastique, la surface de charge d'un monocristal C.F.C présente 56 sommets, qui peuvent correspondre à l'état de contrainte du monocristal. L'étape consiste à établir une liste des états de contraintes qui placent toutes les combinaisons de cinq systèmes de glissement en état critique. Parmi tous les états de contrainte possibles, l'état de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  choisi est celui qui, associé à l'incrément de déformation plastique, maximise le travail plastique externe  $dW_e$  :

$$dW_e = \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{E}}^p = \text{maximum} \quad (1.24)$$

Cependant, le problème de l'ambiguïté dans le choix des systèmes de glissement actifs peut se poser dans ce cas aussi ; il peut arriver que pour une déformation plastique donnée, plusieurs états de contraintes maximisent le travail plastique externe. C'est notamment le cas pour des états de contrainte situés sur une même facette de la surface de charge : associés à une vitesse de déformation donnée, ceux-ci conduiront au même travail plastique externe.

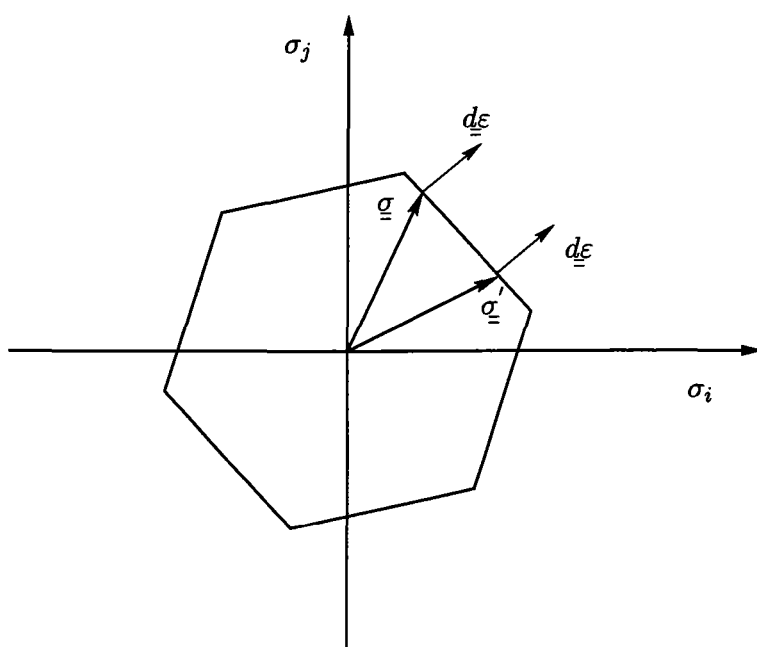


FIG. 1.6 – Ambiguïté dans les contraintes

Toutefois, il faut savoir que le problème de l'ambiguïté quant au choix des systèmes actifs est un problème intrinsèque à la plasticité indépendante du temps. Ce problème est surmonté dès lors qu'on adopte une loi d'écoulement viscoplastique. Dans la réalité, le glissement cristallographique est effectivement dépendant du temps. Hutchinson [25] a introduit une loi d'écoulement viscoplastique afin de caractériser le glissement cristallographique :

$$\frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_0^s} = \left| \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \right|^{\frac{1}{m}} \text{Sign}(\tau^s) \quad (1.25)$$

Dans une telle loi d'écoulement viscoplastique, la notion de seuil de plasticité (au sens de la plasticité indépendante du temps) disparaît et l'on parle alors plutôt de potentiel viscoplastique. La loi (1.25) signifie que tout système de glissement  $s$  glisse avec une vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^s$  qui dépend de la cission résolue  $\tau^s$  qui lui est appliquée et de sa résistance au glissement  $\tau_0^s$ .

$m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse, compris entre 0 et 1. Lorsque  $m \rightarrow 0$  on retrouve le comportement qui est prédit par la théorie de la plasticité indépendante du temps. Aussi, il est courant de négliger la sensibilité à la vitesse de déformation dans le cas de déformations à froid.

#### 1.6.4 Les modèles auto-cohérents

Les modèles auto-cohérents visent à quantifier les réactions entre le grain et son environnement. La mise en place de tels modèles se fait en deux étapes :

1. La résolution d'un problème d'interaction entre un grain et un milieu homogène équivalent.
2. Un traitement statistique sur l'ensemble des grains en prenant certaines hypothèses simplificatrices.

##### Modèle d'Eshelby

En 1957, Eshelby [13] considère une inclusion ellipsoïdale soumise à une déformation élastique  $\underline{\underline{\epsilon}}^*$  arbitraire uniforme. L'inclusion est noyée dans un milieu infini non chargé, élastiquement isotrope.

Il propose les équations suivantes afin de décrire les champs de déformation et de

contraintes induits par  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ .

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = S\underline{\underline{\varepsilon}}^* \quad \underline{\underline{\sigma}} = C(S - I)\underline{\underline{\varepsilon}}^* \quad (1.26)$$

$S$  est le tenseur d'Eshelby. Celui-ci dépend de la forme et des coefficients élastiques de l'inclusion. Dans ce cas, ceux-ci sont égaux à ceux de la matrice.  $C$  est le tenseur des modules élastiques et  $I$  le tenseur identité.

### Modèle de Kröner

Kröner [34], en se basant sur les résultats d'Eshelby étend le calcul au cas où la matrice subit aussi une déformation plastique. La loi d'interaction s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} + \frac{2\mu(7-5\nu)}{15(1-\nu)} (\underline{\underline{E}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (1.27)$$

ou encore sous une forme plus condensée :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Sigma}} + 2\mu(1-\beta)(\underline{\underline{E}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \quad (1.28)$$

avec  $\beta = \frac{2(4-\nu)}{15(1-\nu)}$ ,  $\mu$  est le module élastique de cisaillement, tandis que  $\nu$  est le coefficient de Poisson.

$\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}^p$  sont les contraintes et déformations plastiques macroscopiques,  $\underline{\underline{\sigma}}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  étant celles du grain.

### Modèle de Hill

En 1965, Hill [22, 21] a donné une formulation plus générale du problème en l'étendant au cas où les interactions ne sont plus seulement purement élastiques, mais plutôt de type élastoplastique. Pour cela, il a utilisé dans sa formulation des tenseurs élastoplastiques des modules tangents qui dépendent de l'état de déformation.

L'interaction grain-matrice s'écrit :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + L_{ijkl}^*(dE_{kl}^p - d\varepsilon_{kl}^p) \quad (1.29)$$



où  $L^*$  est obtenu en résolvant le problème de l'inclusion dans une matrice. En désignant par  $l$  et  $L$  les tenseurs des modules tangents respectivement du grain et de l'agrégat,  $L^*$  est calculé en résolvant l'équation intégrale suivante :

$$\underline{L} = \langle \underline{l} + ((\underline{l}) + (\underline{L}))^{-1}(\underline{L} + \underline{L}^*) \rangle \quad (1.30)$$

où  $\langle \rangle$  indique la moyenne volumique sur la population de grains qui constitue l'agrégat.

### Modèle de Berveiller et Zaoui

Toujours pour décrire l'interaction grain-matrice de type plastique et afin de simplifier les calculs proposés par Hill, Berveiller et Zaoui [7] ont modifié l'approche de Kröner en y introduisant un paramètre scalaire  $\alpha$ .

La loi d'interaction s'écrit alors :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1 - \beta)\alpha(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (1.31)$$

Pour  $\nu = \frac{1}{3}$  (ce qui donne approximativement  $\beta = 0.5$ ), l'équation s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \alpha\mu(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p) \quad (1.32)$$

Le facteur  $\alpha$  assure le relâchement des contraintes internes et dépend de la déformation plastique. Il est déterminé à partir de la théorie de la déformation et s'écrit :

$$\alpha = \frac{1}{1 + 3\mu \frac{\bar{E}^p}{2\Sigma}} \quad (1.33)$$

### Modèle de Molinari et al.

Molinari et al. [39] ont formulé un modèle auto-cohérent viscoplastique en grandes déformations. Ce modèle néglige le comportement élastique du polycristal. Cette approximation peut être justifiée si l'on s'intéresse à la prédiction des textures aux grandes déformations. Ce modèle aboutit à une loi d'interaction entre le grain et la

matrice qui s'écrit :

$$\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{\Gamma}}^{-1} + \underline{\underline{A}}^0)(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{D}}) \quad (1.34)$$

$\underline{\underline{s}}$  et  $\underline{\underline{S}}$  sont les contraintes déviatoriques du grain et de l'agrégat, tandis que  $\underline{\underline{d}}$  et  $\underline{\underline{D}}$  sont les vitesses de déformation du grain et de l'agrégat.  $\underline{\underline{\Gamma}}$  est le tenseur d'interaction du quatrième ordre et  $\underline{\underline{A}}^0$  est le tenseur de quatrième ordre des modules tangents. Les résultats de textures en traction, compression, laminage et torsion des métaux C.F.C sont en bon accord avec les résultats expérimentaux. Les résultats obtenus par cette méthode sont encore plus réalistes que ceux fournis par le modèle de Taylor. Par ailleurs, il est à noter que dans ce cas, l'utilisation d'une loi d'écoulement viscoplastique lève toute ambiguïté quant au choix des systèmes de glissements actifs. Néanmoins cette approche ne peut être appliquée qu'à la prédiction des textures en chargement monotone, les chargements complexes ne pouvant pas être testés puisque les interactions élastiques ne sont pas prises en compte.

Gilormini et Germain(1987) ont effectué des calculs de simulation par la méthode des éléments finis dans le cas d'une inclusion sphérique noyée dans un milieu infini. Le comportement de l'inclusion et de la matrice est considéré viscoplastique. En se basant sur ces résultats, Molinari et Tóth [40] ont introduit un paramètre scalaire dans la loi d'interaction de Molinari et al. (1.34) qui permet de calibrer les prédictions du modèle auto-cohérent viscoplastique avec ceux obtenus grâce à l'analyse par éléments finis présentée par Gilormini et Germain. La nouvelle loi d'interaction du modèle auto-cohérent viscoplastique avec le facteur de calibrage proposé par Molinari et Tóth est donnée par :

$$\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{S}} = \alpha (\underline{\underline{\Gamma}}^{s-1} + \underline{\underline{A}}^s)(\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{D}}) \quad (1.35)$$

$\underline{\underline{\Gamma}}^s$  est le tenseur d'interaction de quatrième ordre et  $\underline{\underline{A}}^s$  est le tenseur de quatrième ordre des modules sécants de l'agrégat. Molinari et Tóth [40] montrent que :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\Gamma}} &= m \underline{\underline{\Gamma}}^s \\ \underline{\underline{A}}^0 &= m \underline{\underline{A}}^s \end{cases}$$

En faisant varier le paramètre  $\alpha$ , il est possible de retrouver différents modèles :

- $\alpha = 0 \quad \longrightarrow$  Modèle statique
- $\alpha = m \quad \longrightarrow$  Formulation tangente
- $\alpha = 1 \quad \longrightarrow$  Formulation sécante
- $\alpha = \infty \quad \longrightarrow$  Modèle de Taylor

Le paramètre de calibrage  $\alpha$  est fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  et s'écrit, dans le cas isotrope :

$$\alpha = 1 - 0.4(m - 1)^2 \quad (1.36)$$

Appliqué à un essai de torsion d'une barre en grandes déformations, ce nouveau modèle donne de meilleures prédictions des textures de déformations comparées au modèle auto-cohérent avec formulation tangente. Dans cette modélisation, la déformation élastique est négligée. Aussi, ce modèle ne permet pas de reproduire l'effet Bauschinger.

### Modèle de Kouddane et al.

Kouddane et al. [30, 31] proposent en 1993 une solution analytique pour un problème d'inclusion de comportement viscoplastique linéaire dans une matrice de même comportement. Dans une première étape, ils résolvent le problème de l'inclusion viscoélastique linéaire dans une matrice newtonienne sollicitée de façon uniforme à l'infini. Ils résolvent le problème en ayant recours à la technique des fonctions de Green qui est plus générale que la technique des transformées de Laplace.

La loi d'interaction obtenue est de la forme :

$$\underline{\underline{\dot{s}}} - \underline{\underline{\dot{S}}} + \frac{\mu^0}{\eta^0} (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{S}}) = 3\mu^0 (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{d}}) \quad (1.37)$$

Les modules  $\mu^0$  et  $\eta^0$  sont ceux de la matrice,  $\underline{\underline{D}}$  et  $\underline{\underline{d}}$  sont les vitesses de déformation appliquées à l'infini et celle de l'inclusion respectivement.  $\underline{\underline{s}}$  et  $\underline{\underline{S}}$  sont les contraintes

déviatoriques de la matrice et de l'inclusion respectivement. Cette loi d'interaction tient compte d'une réponse élastique instantanée caractérisée par une loi analogue à la loi incrémentale de Kröner pour l'élasticité et d'une réponse différée caractérisée par une loi similaire à celle proposée par Molinari et al.

En effet, pour le problème de l'inclusion élastique et pour des modules de viscosité de la matrice et de l'inclusion tendant vers l'infini, la relation (1.37) donne :

$$\underline{\underline{\dot{\underline{s}}}} - \underline{\underline{\dot{\underline{S}}}} = 3\mu^0 (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{d}}) \quad (1.38)$$

Cette loi d'interaction est effectivement analogue à celle proposée par Kröner [33] en 1958.

Cependant, pour une vitesse de déformation macroscopique constante, une relaxation visqueuse est prédominante pour des temps relativement longs :

$$\underline{\underline{\underline{s}}} - \underline{\underline{\underline{S}}} = 3\eta^0 (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{d}}) \quad (1.39)$$

Un schéma d'homogénéisation est proposé qui consiste à considérer que les propriétés élastiques sont homogènes, que le comportement de l'agrégat est isotrope et qu'il obéit à une loi de type Maxwell. Les auteurs aboutissent alors à une loi d'interaction de la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\underline{s}}}} - \underline{\underline{\dot{\underline{S}}}} + \frac{\mu}{\eta^0(t)} (\underline{\underline{\underline{s}}} - \underline{\underline{\underline{S}}}) = 3\mu (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{d}}) \quad (1.40)$$

$\eta^0(t)$  est la viscosité de l'agrégat. Elle est prise comme paramètre interne et dépend de l'histoire de la déformation.

L'extension du modèle aux cas des matériaux dont le comportement est élastoviscoplastique a été étudié. La loi d'interaction est de la forme :

$$\underline{\underline{\dot{\underline{s}}}} - \underline{\underline{\dot{\underline{S}}}} + B^0 : (\underline{\underline{\underline{s}}} - \underline{\underline{\underline{S}}}) = [\underline{\underline{\underline{\Gamma}}}^{-1} + \underline{\underline{\underline{C}}}^0] : (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{d}}) \quad (1.41)$$

Cette loi est similaire à la loi (1.37) pour les matériaux viscoélastiques linéaires. Quand l'élasticité est négligée ( $C^0 \rightarrow \infty$ ) on retrouve la loi d'interaction proposée par Molinari et al. [39] pour le cas des matériaux rigides plastiques.

## CHAPITRE 2

# Formulation pour le calcul analytique des modules élastoplastiques des polycristaux

### 2.1 Introduction

Nous nous proposons ici, d'analyser le comportement global du polycristal en passant par la modélisation du comportement des monocristaux qui le constituent et l'étude de leur influence sur la réponse macroscopique.

Le problème peut alors être posé en ces termes :

Soit un matériau polycristallin dont nous ne connaissons pas le comportement et pour lequel nous cherchons à déterminer la réponse en contrainte suite à une déformation donnée.

Pour cela nous procédons en deux étapes :

- A une échelle microstructurale, nous recherchons le comportement des constituants (monocristaux). Pour cela nous établissons une formulation analytique afin de calculer le module élastoplastique associé au monocristal.
- Celui-ci est ensuite intégré dans le modèle de Taylor-Lin des polycristaux, selon lequel la déformation totale dans chaque grain est uniforme et identique à la déformation totale imposée au polycristal.

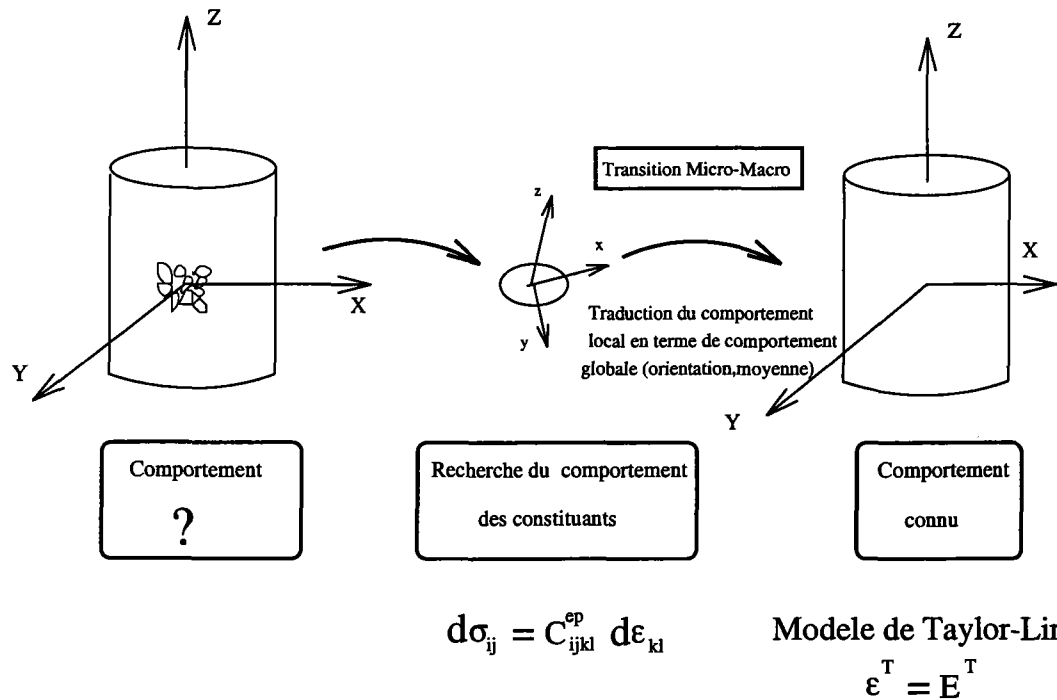


FIG. 2.1 – Schéma de transition du comportement microscopique au comportement macroscopique.

## 2.2 De la plasticité microscopique à la plasticité macroscopique

La question se pose de passer de l'aspect microscopique de la plasticité à une description macroscopique de ce comportement.

L'objectif d'une description rhéologique du comportement plastique se concrétise sur trois types de questions :

1. Rechercher pour un élément de volume de matière un **critère** de plasticité permettant de déterminer ses conditions de plastification : nous voulons savoir pour quels états de contrainte  $\underline{\sigma}$ , la réponse est purement élastique et pour quels états, l'écoulement plastique devient possible. Le problème revient à rechercher une fonction scalaire  $f(\underline{\sigma})$  dite fonction de charge telle que, par convention, la réponse reste élastique tant que  $f(\underline{\sigma}) < 0$ , la réponse plastique pouvant

apparaître dès lors que  $f(\underline{\sigma}) = 0$ .

2. La description de l'**écrouissage** et de son évolution : au cours de l'écoulement plastique, le critère de plasticité évolue et cette évolution n'est pas seulement due à l'état de contraintes. Il faut pouvoir décrire cette évolution en fonction de l'état interne du matériau : quels sont les paramètres d'écrouissage qu'il faut prendre en compte et comment ces paramètres évoluent-ils eux-mêmes au cours de la déformation plastique?
3. Etablir les **lois constitutives** qui permettent de déterminer la réponse en déformation à toute histoire de trajet de chargement (et vice versa).

A l'échelle du monocristal, et à l'aide des mécanismes élémentaires de la plasticité, nous allons poser, dans ce qui va suivre les questions du critère, de l'écrouissage et de l'écoulement.

### 2.2.1 Le critère

#### Critère de Schmid

Pour décrire le critère de charge du monocristal, très souvent, le critère simple de Schmid [45] est adopté selon lequel le glissement cristallographique ne se produit que si la cission résolue ( $\tau^s = M_{ik}^s \sigma_{ik}$ ) atteint une valeur critique  $\tau_c$ .

Ce critère aboutit directement à la surface de charge (polyèdre) de Bishop et Hill [8].

Cette surface de charge consiste en des sections d'hyperplans de type :

$$\tau_c = M_{ik}^s \sigma_{ik} \quad (2.1)$$

avec :

$$M_{ik}^s = \frac{1}{2}(b_i^s n_k^s + b_k^s n_i^s) \quad (2.2)$$



où,  $M_{ik}^s$  est défini par l'orientation cristallographique du système de glissement.

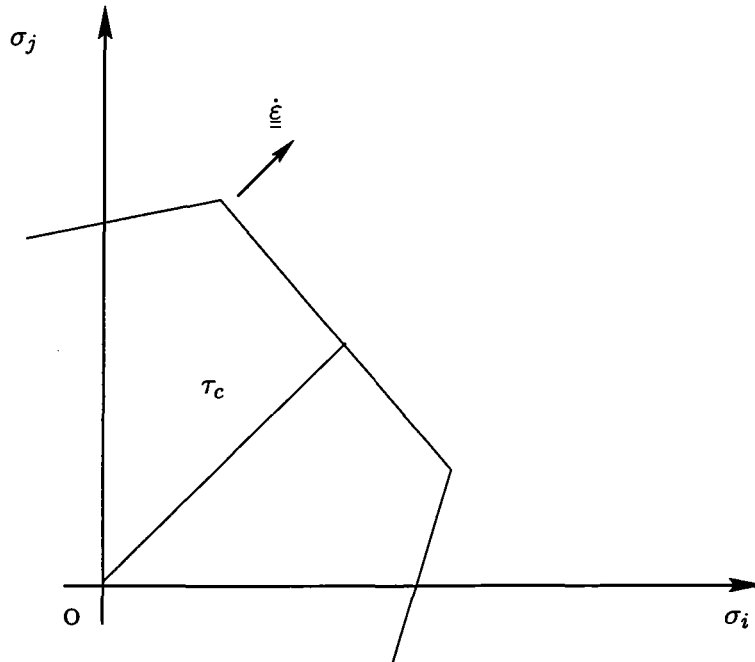


FIG. 2.2 – Représentation schématique du polyèdre de Bishop et Hill

### 2.2.2 Ecrouissage intracristallin

Tout d'abord, rappelons la définition même de l'écrouissage : il se traduit par l'évolution de la résistance à la déformation (évolution du seuil de déformation plastique) tout au long du chargement.

A l'échelle intracristalline, la multiplication des dislocations et l'évolution de leur répartition spatiale sont responsables de l'écrouissage intracristallin.

En effet, l'observation des matériaux métalliques à une échelle microscopique ( $1 \mu\text{m}$ ) révèle qu'à partir de quelques pour-cent de déformation, les grains ne sont plus homogènes, mais présentent généralement une sous-structure de dislocations caractéristique du chargement appliqué.

Durant la déformation plastique, les dislocations s'organisent progressivement pour former des cellules de dislocations et engendrent ainsi une hétérogénéisation intragranulaire.

Une modélisation correcte de l'écroutissage serait celle qui effectue la transition d'échelle entre les dislocations et le monocristal et qui relierait directement l'état disloqué intragranulaire au comportement du monocristal. Ceci représente un domaine de recherche encore ouvert et les travaux en cours sont très nombreux (voir par exemple [14, 42, 46, 5, 15] ).

D'autre part, comme nous l'avons mentionné au chapitre (I), le fait de choisir le grain comme entité microscopique a pour conséquence que tout ce qui se situe en dessous de cette échelle sera ignoré et sera décrit par des variables macroscopiques. Dans notre travail, l'écroutissage intracristallin est décrit au moyen d'une matrice d'écroutissage  $H^{\alpha\beta}$  dont les paramètres sont de nature phénoménologique. Ceux-ci peuvent être déduits des mesures expérimentales de l'écroutissage latent [16] mais, là encore, la détermination précise et complète de cette matrice reste à faire. En l'absence d'outils plus complets et précis, nous adopterons cette approche pour décrire le comportement intracristallin. Cette matrice d'écroutissage relie la vitesse de la cission critique sur le système de glissement  $\alpha$  à la vitesse de glissement plastique des systèmes actifs.

Suite à l'écroutissage intracristallin, la cission critique sur le système de glissement  $\alpha$  évolue selon la relation suivante :

$$\dot{\tau}_c^\alpha = \sum_{\beta} H^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^\beta| \quad (2.3)$$

$H^{\alpha\beta}$  est la matrice d'écroutissage dont les coefficients peuvent évoluer au cours de la déformation selon une loi supposée de la forme suivante [10] :

$$H^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} h_0 \left[ 1 - \frac{\tau_c^\beta}{\tau_{sat}} \right]^a \quad (2.4)$$

où  $\tau_c^\beta$  est la cission critique initiale du système de glissement.

$q^{\alpha\beta}$  est une matrice ( $n \times n$ ),  $n$  étant le nombre total de systèmes de glissement.  $q^{\alpha\beta}$  est donnée en annexe C pour le cas des structures C.F.C //

Chaque élément occupant la diagonale de la matrice d'écroissage  $H^{\alpha\beta}$  représente l'auto-durcissement du système de glissement correspondant. Les éléments non diagonaux de la matrice d'écroissage  $H^{\alpha\beta}$  traduisent le durcissement latent, c'est à dire qu'ils expriment l'influence du glissement d'un système  $\alpha$  sur l'écroissage des autres systèmes de glissement  $\beta$ , éventuellement non activés.

### 2.2.3 Lois constitutives du monocristal

Nous nous intéressons dans ce travail à la prédiction du comportement mécanique des polycristaux en petites déformations. Nous pouvons alors décomposer la déformation totale en une partie élastique et une partie plastique :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (2.5)$$

La déformation plastique est mise en évidence par la déformation résiduelle après relâchement des contraintes.

On suppose que la déformation plastique n'est due qu'au glissement irréversible de certains plans cristallographiques par rapport aux autres. Le gradient de vitesse plastique s'écrit alors :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^P = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \underline{M}^{\alpha} \quad (2.6)$$

$\dot{\gamma}^{\alpha}$  est la vitesse de glissement du système  $\alpha$ . Dans une approche viscoplastique, elle est donnée par la loi d'écoulement ( Hutchinson [25]):

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\tau^{\alpha}}{\tau_0^{\alpha}} \right|^{\frac{1}{m}} \text{sign}(\tau^{\alpha}) \quad (2.7)$$

$\dot{\gamma}_0$  est la vitesse de glissement de référence, tandis que  $\tau_0^{\alpha}$  est la cission de référence sur le système de glissement  $\alpha$ . Cette cission de référence désigne la résistance au glissement du système  $\alpha$ .  $m$  est la sensibilité à la vitesse de déformation.

### 2.2.4 Rotation du réseau cristallographique

L'orientation de chaque cristallite est caractérisée par un triplet d'angles d'Euler  $(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$  (notation de Bunge). Ce triplet permet le passage du repère macroscopique  $(X, Y, Z)$  lié au polycristal au repère microscopique  $(x, y, z)$  lié au grain (Fig. 2.3).

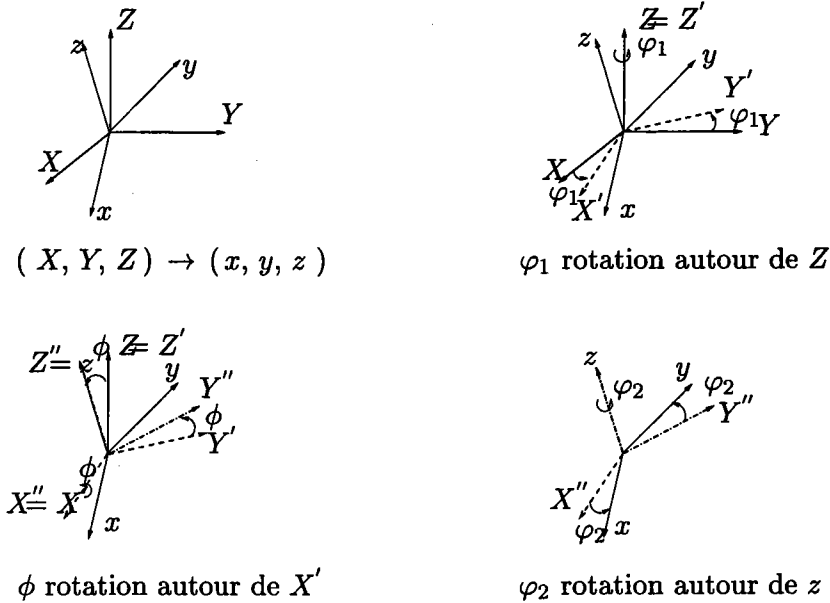


FIG. 2.3 – Définition des angles d'Euler.

Au niveau de la maille élémentaire, les directions  $[100]$ ,  $[010]$  et  $[001]$  définissent un repère lié au cristal. Ce repère cristallographique est noté  $R_c$ . L'orientation cristallographique d'un grain sera définie par la matrice de passage à un repère macroscopique lié à l'échantillon et noté  $R_e$ .

Le passage du repère lié au monocristal au repère lié à l'échantillon peut s'écrire :

$$R_e \xrightarrow{T} R_c \quad (2.8)$$

De telle sorte, qu'un vecteur  $\vec{V}_c$  dans le repère  $R_c$  lié au monocristal s'écrit  $\vec{V}_e$  dans le repère  $R_e$  lié à l'échantillon :

$$\vec{V}_c = \underline{T} \vec{V}_e \quad (2.9)$$

Avec  $\underline{\underline{T}}$  définie comme suit :

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_2 \sin \phi \\ -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \phi & -\cos \varphi_2 \sin \phi \\ \sin \varphi_1 \sin \phi & -\cos \varphi_1 \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Connaissant l'orientation initiale du monocristal, et par suite, la position des vecteurs  $\vec{b}_0^\alpha$  et  $\vec{n}_0^\alpha$  définissant l'orientation de ses systèmes de glissement, nous pouvons suivre à chaque instant  $t$  l'évolution de l'orientation cristallographique du grain au cours de la déformation plastique.

En effet, le calcul permet de connaître à chaque pas de chargement le champ de déformation plastique ainsi que les déformations et rotations élastiques dans chaque grain [50].

$$\dot{\beta}_{ij} = \dot{L}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.11)$$

où  $\dot{\beta}_{ij}$  est la vitesse de rotation rigide imposée par le test.

D'autre part, il y a une autre rotation rigide qui est produite par le glissement plastique et qui est définie par une relation similaire à 2.11 :

$$\dot{\Omega}_{ij} = \dot{g}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.12)$$

avec :

$$\dot{g}_{ij} = \sum b_i^s n_j^s \dot{\gamma}^s \quad (2.13)$$

La vitesse de rotation du réseau cristallographique est définie par :

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{\beta}_{ij} - \dot{\Omega}_{ij} \quad (2.14)$$

En utilisant les équations 2.11, 2.12 et 2.13 dans l'équation 2.14, on obtient :

$$\dot{\omega}_{ij} = \dot{L}_{ij} - \sum_s b_i^s n_j^s \dot{\gamma}^s \quad (2.15)$$

Ces rotations sont responsables de la formation de textures de déformations.

A chaque pas de chargement, l'orientation de chaque cristallite est recalculée en fonction du champ de vitesse de rotation du réseau  $\dot{\omega}_{ij}$  [?].

$$\underline{\dot{T}} = \underline{\dot{\omega}} \underline{T} \quad (2.16)$$

A partir de cette relation, l'évolution de l'orientation de chaque cristallite peut être calculée. Celle-ci s'écrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= -\dot{\omega}_{23} \frac{\sin(\varphi_1)}{\sin(\phi)} + \dot{\omega}_{31} \frac{\cos(\varphi_1)}{\sin(\phi)} \\ \dot{\phi} &= -\dot{\omega}_{23} \cos(\varphi_1) - \dot{\omega}_{31} \sin(\varphi_1) \\ \dot{\varphi}_1 &= -\dot{\omega}_{12} - \dot{\varphi}_2 \cos(\phi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.2.5 Relations incrémentales entre contraintes et déformations pour le monocristal

Dans un premier temps, afin de simplifier les calculs, on se place dans le cas de la déformation élastique-plastique (sans écrouissage).

Rappelons que le critère de charge adopté dans ce chapitre est celui de Bishop et Hill.

L'incrément de déformation plastique est donné par :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) signifie que la déformation plastique dérive d'un potentiel plastique  $g$ . Dans le cas non viscoplastique  $g$  est pris égal à  $f$ . D'autre part, l'équation (2.18) traduit le postulat de la normalité ; à savoir que le vecteur de déformation plastique est normal à la surface de charge.

$d\lambda$  : est à déterminer.

L'incrément de déformation imposé se décompose d'une partie élastique et d'une partie plastique :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (2.19)$$

La loi de Hooke lie la déformation élastique à la contrainte :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^e \quad (2.20)$$

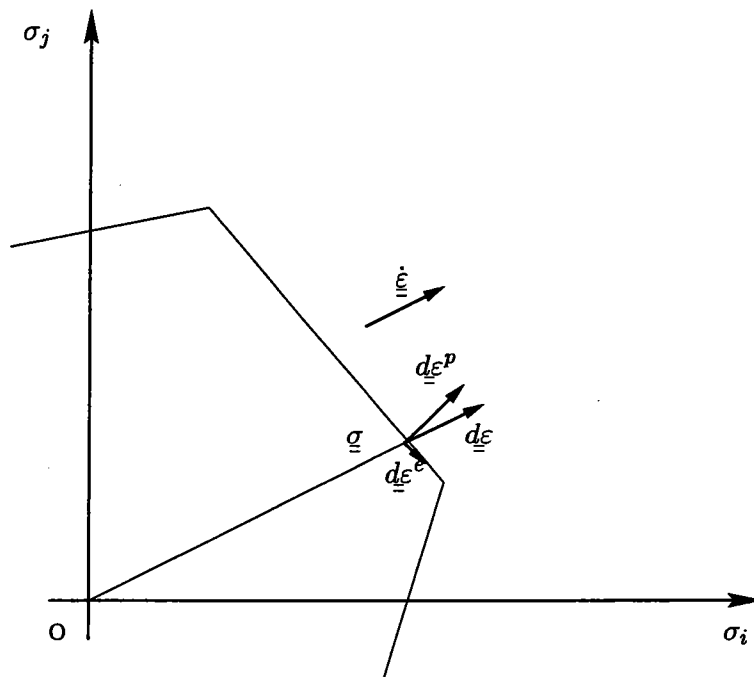


FIG. 2.4 – Décomposition de la déformation et postulat de la normalité

En utilisant (2.18) et (2.19) dans (2.20), on obtient :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (2.21)$$

Au cours de la déformation plastique, le point de charge reste sur la surface de charge et le critère ne peut être violé (le point de charge ne peut pas être à l'extérieur de la

surface de charge) ; ce qui peut s'exprimer comme suit (condition de consistance) :

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad \text{et} \quad f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.22)$$

On en déduit que :

$$df(\sigma_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (2.23)$$

Si l'on utilise (2.21) dans (2.23), on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.24)$$

Et si l'on pose :

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.25)$$

$d\lambda$  s'écrit de la façon suivante :

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (2.26)$$

En réécrivant  $d\lambda$  avec des indices différents :

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqmn} d\varepsilon_{mn} \quad (2.27)$$

et en le remplaçant dans l'expression de  $d\sigma_{ij}$  dans (2.21), on obtient :

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} - C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqmn} d\varepsilon_{mn} \quad (2.28)$$

Dans le deuxième terme, on procède à une transformation des indices et on obtient l'expression suivante reliant l'incrément de contrainte à l'incrément de déformation :

$$d\sigma_{ij} = \left[ C_{ijkl} - \frac{1}{H} C_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl} \right] d\varepsilon_{kl} \quad (2.29)$$



Le potentiel de charge  $g$  est pris égal à la fonction de charge  $f$  :

$$g = f \quad (2.30)$$

Si dans l'expression (2.29), on adopte la notation suivante :

$$P_{mn} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} , P_{pq} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} , \text{etc...} \quad (2.31)$$

et en posant :

$$\begin{cases} H = P_{ij} C_{ijkl} P_{kl} \\ H_{ij}^* = C_{ijmn} P_{mn} \\ H_{kl} = P_{pq} C_{pqkl} \end{cases} \quad (2.32)$$

l'équation incrémentale (2.29) s'écrit :

$$d\sigma_{ij} = [C_{ijkl} - \frac{1}{H} H_{ij}^* H_{kl}] d\varepsilon_{kl} \quad (2.33)$$

ou encore :

$$d\sigma_{ij} = [C_{ijkl} - \frac{1}{H} C_{ijmn} P_{mn} P_{pq} C_{pqkl}] d\varepsilon_{kl} \quad (2.34)$$

D'où l'on déduit le module élasto-plastique :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{H} C_{ijmn} P_{mn} P_{pq} C_{pqkl} \quad (2.35)$$

avec :

$$H = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.36)$$

Rappelons que dans l'expression (2.35) les quantités  $P_{pq}$ ,  $P_{mn}$ , etc.. désignent :

$$P_{mn} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} , P_{pq} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} , \text{etc...} \quad (2.37)$$

Le calcul de ces quantités se ramène donc au calcul de la normale à la surface de charge  $f$  (ou au potentiel de charge  $g$ ) au point de charge  $\sigma_{pq}, \sigma_{mn}, \text{etc...}$

Quand le point de charge se trouve sur un des vertexes du polyèdre de Bishop et Hill, nous nous trouvons confrontés à une ambiguïté : il n'est plus possible de déterminer une normale unique à la surface de charge en ce point.

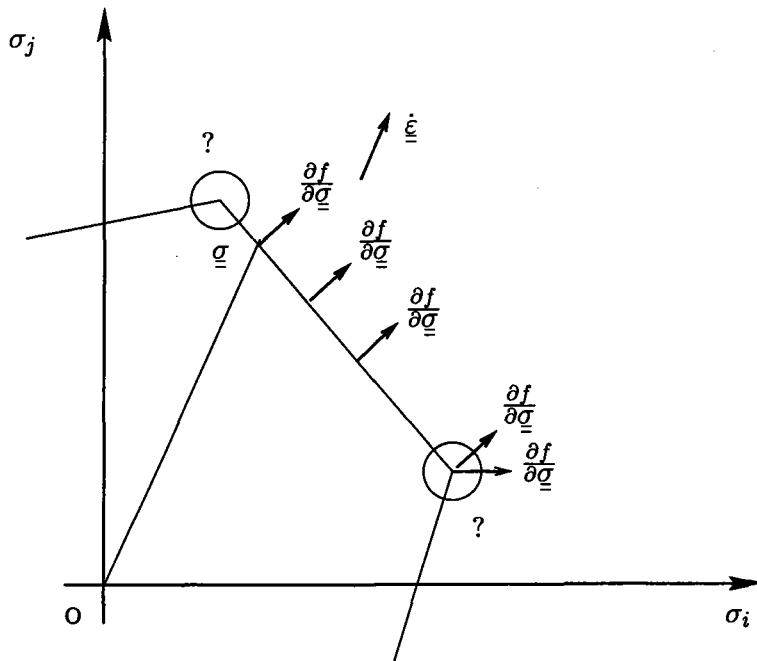


FIG. 2.5 – Illustration de l'ambiguïté quant au choix de la normale à la surface de charge.

Afin de contourner cette difficulté, nous nous proposons d'adopter une nouvelle surface de charge pour le monocristal.

### 2.2.6 Représentation analytique de la surface de charge des monocristaux

Jusque dans les années soixantes dix environ, la surface de charge des monocristaux était basée sur la loi de Schmid.

Cette loi simple permettait alors de comprendre plusieurs phénomènes expérimentaux. Néanmoins, elle posait plusieurs problèmes d'ambiguïté quant au choix des systèmes de glissement actifs quand un glissement multiple est nécessaire pour accommoder la déformation imposée.

Schmid considérait une cission critique unique dans le système de glissement au-delà de laquelle le glissement plastique était activé. Ceci représente un point de vue très simplifié du processus de déformation plastique qui a lieu au niveau du monocristal. Cette déformation plastique résulte en fait du mouvement de plusieurs dislocations. Dans un système de glissement donné, il existe plusieurs types de dislocations. Ces dislocations ont des formes très différentes. Notamment, à cause des différences dans leurs courbures, elles ne sont pas activées pour un même niveau de contrainte. Évidemment, les plus "faciles" commencent à glisser les premières. La loi de Schmid pourrait être acceptée pour des dislocations individuelles, mais en prenant pour chacune d'elles une cission critique différente. Pour cette raison, quand le matériau est chargé, l'activation du glissement a lieu simultanément dans plusieurs systèmes de glissement.

Du point de vue de la plasticité théorique, ceci est possible seulement si la surface de charge est arrondie.

Plusieurs travaux de recherche ont, en effet, été menés dans ce sens [2, 3, 36]; tous avaient pour but de trouver une représentation analytique d'une surface de charge qui soit arrondie tout en restant aussi proche que possible de la surface de charge de référence (polyèdre de Bishop et Hill).

### Critère d'Arminjon et Imbault

Dans le cas de la loi de Schmid usuelle, la sélection des systèmes de glissement actifs est basée sur trois règles :

1. La cission résolue  $\tau_k(\underline{\sigma}) = \sigma_{ij} \frac{1}{2} (b_i^k n_j^k + b_j^k n_i^k)$  ne peut excéder la cission critique  $\tau_k^c$  ( $|\tau_k| \leq \tau_k^c$ ;  $|\tau_k| = \tau_k^c$  si le système est actif; c.-à-d. si  $\dot{\gamma}_k \neq 0$ ).
2. La cission résolue  $\tau_k(\underline{\sigma})$  et la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}_k$  ont le même signe.

De sorte que chaque système actif  $k$  contribue au taux de travail par unité de

$$\text{volume } \tau_k \dot{\gamma}_k = \tau_k^c |\dot{\gamma}_k| > 0$$

3. Les systèmes de glissement retenus sont les systèmes nécessaires pour accommoder la déformation imposée ; c.-à-d. ceux qui satisfont la relation :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n (M_{ij}^s \dot{\gamma}^s).$$

La surface de charge exprimée dans l'espace des contraintes pour un cristal obéissant à la loi de Schmid est notée  $f_\infty^k(\underline{\sigma})$ , où  $f_\infty^k(\underline{\sigma}) = \tau_k(\underline{\sigma}) - \tau_k^c = 0$ .

La surface de charge est définie par l'enveloppe intérieure de l'ensemble des 12 systèmes de glissement pour le cas d'un C.F.C. La fonction  $f_\infty(\underline{\sigma})$  est homogène de degré 1 :  $f(\alpha \underline{\sigma}) = \alpha f(\underline{\sigma})$ , de sorte que pour chaque direction algébrique dans l'espace des contraintes, il existe une contrainte unique  $\underline{\sigma}$  qui respecte les règles 1 et 2.

La forme régulière de la loi de Schmid proposée par Arminjon et Imbault [1, 26] aboutit à une fonction de charge  $f_n(\underline{\sigma})$  différente de la forme classique trouvée précédemment  $f_\infty(\underline{\sigma})$ .

Cette nouvelle fonction de charge donne lieu à une surface de charge arrondie qui s'exprime comme suit :

$$f_n(\underline{\sigma}) = \sum_{k=1}^K \left( \frac{|\tau_k(\underline{\sigma})|}{\tau_k^c} \right)^n = 1 \quad (2.38)$$

La surface de charge est l'ensemble des tenseurs de contrainte  $\underline{\sigma}$  tels que  $f_n(\underline{\sigma}) = 1$ . De sorte que cette fonction est homogène de degré  $n$ . Chaque direction dans l'espace des contraintes intercepte la surface de charge en un point unique ( c.-à-d. pour tout état de contrainte  $\underline{\sigma}$ , il n'existe qu'une valeur unique  $\alpha > 0$  telle que  $f_n(\alpha \underline{\sigma}) = 1$ ). La première propriété est que  $f_n(\alpha \underline{\sigma})$  tend vers  $f_\infty(\underline{\sigma})$  quand l'exposant  $n$  décroît. De plus, la forme arrondie de cette surface de charge permet de lever l'ambiguïté dans le choix des systèmes de glissement actifs, sans pour autant avoir à introduire la sensibilité de la contrainte à la vitesse de glissement. La nouvelle surface de charge est présentée Fig. 2.6 pour 2 valeurs différentes de l'exposant  $n$  ( $n = 8$  et  $n = 32$ ). L'effet de l'exposant  $n$  est ici clairement apparent.

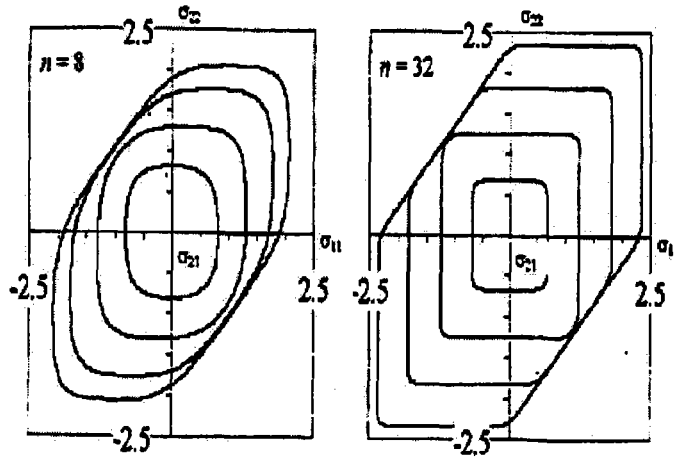


FIG. 2.6 – Section de la surface de charge dans l'espace des contraintes  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ , et  $\sigma_{21}$  [26].

### Critère de Montheillet, Gilormini et Jonas

D'autre part une forme générale décrivant le critère de charge de matériaux anisotropes fut proposé par Hill [20, 19]. Dans ce modèle, si les axes principaux d'anisotropie sont choisis comme axes de références, le critère de Hill s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}) = f(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + g(\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + h(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2l\sigma_{yz}^2 + 2m\sigma_{zx}^2 + 2n\sigma_{xy}^2 = 1 \quad (2.39)$$

où  $\sigma_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  et  $f, g, h, l, m$  et  $n$  sont des constantes caractérisant l'état courant d'anisotropie. En 1984, Montheillet, Gilormini et Jonas [41] proposent d'utiliser ce critère tout en adoptant les hypothèses suivantes :

- 1- Adopter les directions  $\langle 100 \rangle$  de l'orientation idéale comme axes principaux de l'anisotropie.
- 2- Choisir les paramètres  $f, g, h, l, m$  et  $n$  de telle façon que l'équation (2.39) approche au mieux la surface de charge de Bishop et Hill [8] du monocristal représentant l'orientation idéale.

Les variables introduites par Bishop et Hill sont alors utilisées :

$$A = \sigma_{yy} - \sigma_{zz}; B = \sigma_{zz}; F = \sigma_{yz}; G = \sigma_{zx}; H = \sigma_{xy} \quad (2.40)$$

ici, les composantes du déviateur des contraintes  $\underline{\sigma}$  sont référées aux axes cristallo-graphiques  $\langle 100 \rangle$ .

Bishop et Hill montrent que dans l'espace à 5 dimensions défini par les variables indépendantes  $A, B, F, G$  et  $H$  la surface de charge des monocristaux cubiques est un polyèdre avec 56 vertexes et 24 faces [8]. En utilisant les variables de Bishop et Hill, l'équation (2.39) peut s'exprimer de la façon suivante :

$$F = (f + h) A^2 + (g + h) B^2 + 2h AB + 2l F^2 + 2m G^2 + 2n H^2 = 1 \quad (2.41)$$

L'équation de cet ellipsoïde doit ensuite être "fitté" avec le polyèdre de Bishop et Hill. Compte tenu de la symétrie cubique, les surfaces de charge dans le cas de traction unidimensionnelle ou en cisaillement simple sont identiques pour les trois directions  $\langle 100 \rangle$ . Ce qui mène aux conditions :

$$f = g = h \text{ et } l = m = n \quad (2.42)$$

La démarche est ensuite la suivante :

Si  $\sigma_i$  ( $i = 1, 56$ ) représentent les vertexes du polyèdre de Bishop et Hill et  $\sigma'_i$  les intersections des  $O\sigma_i$  avec l'ellipsoïde donné par l'équation (2.41) (voir Fig2.7), la somme :

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{56} |\sigma_i \sigma'_i|^2 \quad (2.43)$$

peut être calculée en utilisant l'équation (2.41).

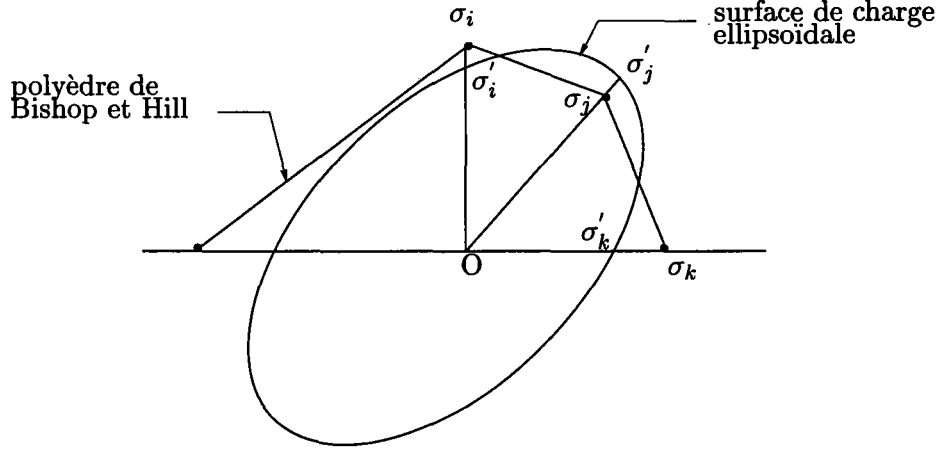


FIG. 2.7 – Représentation schématique d'une section bidimensionnelle de la surface de charge cristallographique

L'équation de l'ellipsoïde est ensuite déterminée par le biais d'une minimisation de  $\Sigma$  par rapport aux variables  $f, g, h, l, m$  et  $n$ . Des calculs numériques donnent :

$$f = g = h = \frac{\alpha}{6\tau_c^2} \quad \text{et} \quad l = m = n = \frac{\beta}{6\tau_c^2} \quad (2.44)$$

Où  $\alpha = 0.49 \simeq \frac{1}{2}$ ,  $\beta = 0.66 \simeq \frac{2}{3}$ .  $\tau_c$  est la cission résolue critique, prise identique sur tous les systèmes de glissement.

L'équation(2.39) s'écrit alors :

$$6\tau_c^2 F(\sigma) = \alpha[(\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2] + 2\beta(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) = 6\tau_c^2 \quad (2.45)$$

Or puisque  $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 0$ , et en prenant  $\sqrt{6}\tau_c$  comme unité de contrainte :

$$F(\sigma) = 3\alpha(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + 2\beta(\sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2) = 1 \quad (2.46)$$

Ce critère de charge est appelé critère de charge "CMTP" (Continuum Mechanics of Textured Polycrystals).

La surface de charge ainsi obtenue circonscrit de façon assez satisfaisante le polyèdre critique de Bishop et Hill. Cette nouvelle forme de la surface de charge donne une assez bonne approximation des vecteurs contraintes correspondant aux "vertexes", par contre les vecteurs associés aux faces planes sont surestimés.

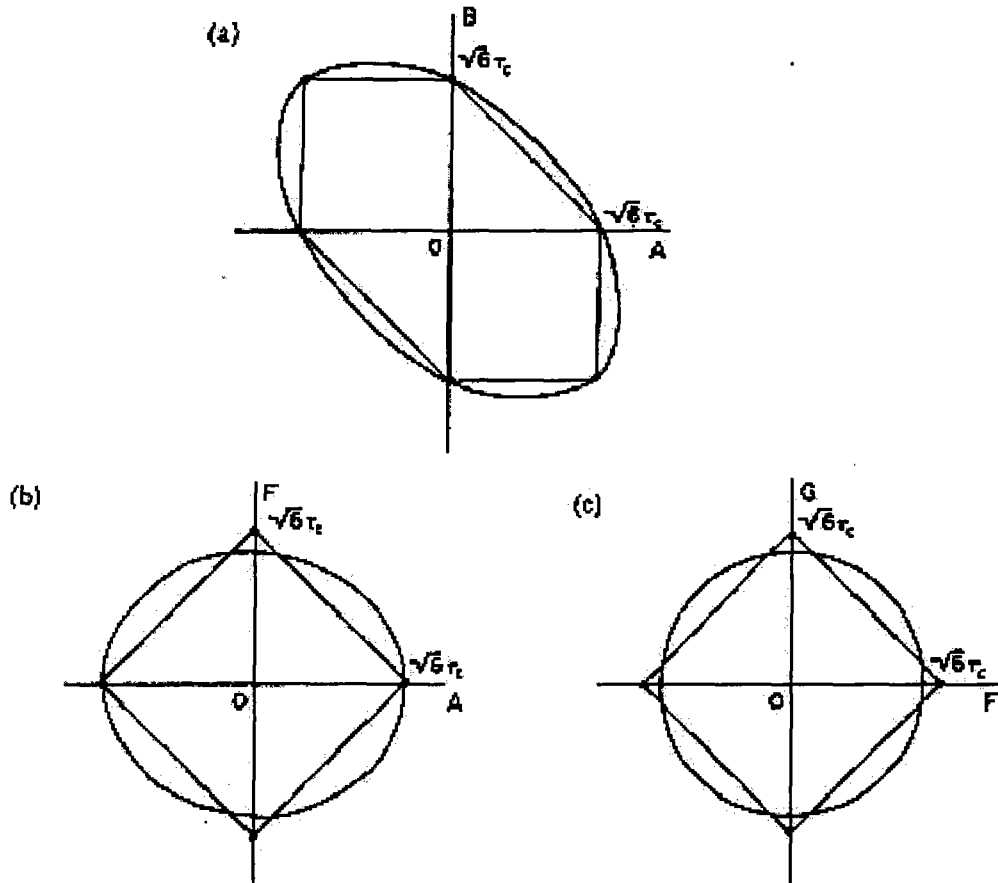


FIG. 2.8 - Intersection du polyèdre critique et de la surface de charge ellipsoïdale CMTP avec les plans (a) (A, B), (b) (A, F) et (c) (F, G) dans l'espace des contraintes à cinq dimensions (A, B, F, G, H) [41].

Les figures Fig. 2.8 (a), (b) et (c) illustrent les intersections des deux surfaces de charge: le polyèdre de Bishop et Hill et la surface de charge CMTP avec les plans (A,B), (A,F), et (F,G) de l'espace des contraintes à 5 dimensions (A, B, F, G, H). Nous pouvons remarquer que les deux surfaces de charge peuvent différer considérablement pour certaines directions de la contrainte. Cette divergence est due au fait que l'on compare l'ellipsoïde CMTP à la surface de charge du monocristal qui



représente l'orientation idéale. Néanmoins, les auteurs notent que si cette comparaison est faite entre l'ellipsoïde CMTP et la partie régulière de la surface de charge obtenue pour un agrégat fortement texturé (constitué d'un certain nombre de cristaux dont l'orientation ne s'éloigne que très légèrement de l'orientation idéale), il apparaît une réduction sensible des divergences notées plus haut [11]. La méthode CMTP a ensuite fait l'objet de plusieurs études [12, 35]

### Approche de Tóth, Gilormini et Jonas

Tóth et ses collaborateurs [50] adoptent comme point de départ la théorie de la sensibilité à la vitesse de glissement cristallographique donnée par la loi constitutive de Hutchinson. Celle-ci permet de relier au niveau d'un système de glissement  $s$  la vitesse de glissement  $\dot{\gamma}^s$  à la cission résolue  $\tau^s$ .

$$\tau^s = \tau_0^s \text{Sign}(\dot{\gamma}^s) \left| \frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_0^s} \right|^m = \tau_0 \frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_0} \left| \frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_0} \right|^{m-1} \quad (2.47)$$

avec :

$$\tau^s = M_{ij}^s \sigma_{ij} \quad (2.48)$$

Les quantités  $M_{ij}^s$  décrivent les orientations des systèmes de glissement définies par la normale au plan de glissement  $\vec{n}^s$  et la direction de glissement  $\vec{b}^s$  et sont données par l'équation (1.15) du chapitre [1.6.1].

Tóth et ses collaborateurs montrent qu'il existe une fonction potentiel plastique qui est incurvée, strictement convexe et dont le cas limite  $m$  tendant vers zéro est identique à la surface de charge indépendante de la vitesse de glissement (Bishop et Hill). En effet, grâce aux équations (2.47) et (2.48) il est possible de relier les composantes du tenseur des vitesses de déformation  $\underline{\dot{\epsilon}}$  aux composantes du tenseur de contrainte  $\underline{\sigma}$ .

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_s \frac{1}{2} (M_{ij}^s + M_{ji}^s) \dot{\gamma}^s = \sum_s \frac{\dot{\gamma}_0^s}{(\tau_0^s)^{\frac{1}{m}}} \frac{1}{2} (M_{ij}^s + M_{ji}^s) M_{kl}^s \sigma_{ij} |M_{pq}^s \sigma_{pq}|^{\frac{1}{m}-1} \quad (2.49)$$

Ici,  $\dot{\gamma}_0^s$  et  $\tau_0^s$  sont respectivement la vitesse de glissement et la cission résolue de référence sur le système de glissement  $s$ .  $\dot{\gamma}_0^s$  est prise identique sur tous les systèmes de glissement et égale à  $\dot{\gamma}_0$ .

$m$  est l'exposant indiquant la sensibilité à la vitesse de déformation,  $\tau_s$  est la cission résolue sur le système de glissement  $s$ .

Une telle fonction de potentiel de charge peut être représentée schématiquement (en ligne continue) sur la figure Fig. 2.9. Les courbes correspondant à  $m = 1, 0.2, 0.1, 0.05$  sont localisées à des distances croissantes par rapport au centre de chaque figure. Les lignes discontinues indiquent les sections respectives du polyèdre de Bishop et Hill. Les valeurs de  $\tau_0$  et  $\dot{\gamma}_0$  sont prises égales à 1.

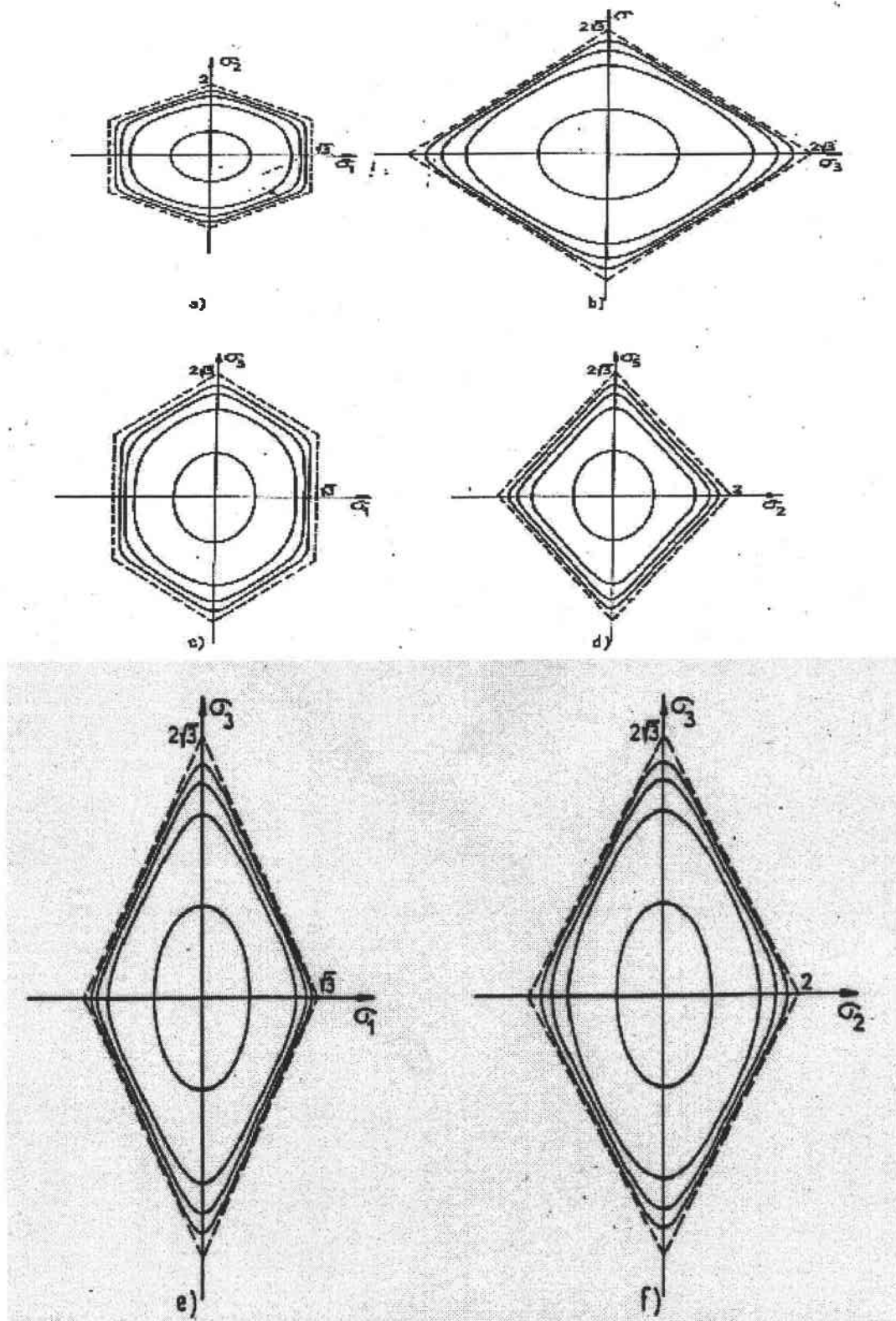


FIG. 2.9 – Sections des equipotentiels pour différentes valeurs de  $m$  [50].

Il doit être remarqué que la vitesse de déformation peut être déduite du potentiel plastique :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial g(\underline{\sigma})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.50)$$

avec :

$$g(\underline{\sigma}) = \frac{m}{m+1} \dot{\gamma}_0 \tau_0^{\frac{1}{m}} \sum_s \frac{1}{(\tau_0^s)^{\frac{1}{m}}} \left| \frac{1}{2} (M_{ij}^s + M_{ij}^s) \sigma_{ij} \right|^{(\frac{1}{m})+1} = \frac{m}{m+1} \dot{W}(\underline{\sigma}) \quad (2.51)$$

En s'inspirant de l'expression analytique de cette fonction potentiel de charge et en l'appliquant au cas non viscoplastique, le critère de charge suivant sera adopté dans le chapitre 3 pour un monocristal :

$$f(\sigma_{ij}, \tau_0^s) = \sum_{s=1}^n \frac{|M_{ij}^s \sigma_{ij}|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h} - \tau_0 = 0 \quad (2.52)$$

Dans l'expression de  $f(\sigma_{ij}, \tau_0^s)$ ,  $h$  décrit la forme de la surface de charge, tandis que  $\tau_0$  décrit la taille de la surface de charge. Cette fonction est légèrement différente de celle proposée par Arminjon et Imbault [1, 26], voir équation (2.38).

En fait, le critère d'Arminjon consiste en une régularisation du critère de Schmid tandis que Tóth, Gilormini et Jonas partent du potentiel viscoplastique. Ils l'appliquent au cas non viscoplastique et proposent cette nouvelle surface de charge.

L'accent doit être mis sur deux propriétés essentielles de cette surface de charge :

- D'une part  $f$  est strictement convexe :

En effet, le tenseur Hessian déduit de  $f$

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} = h(h+1) \sum_{s=1}^n M_{ij}^s M_{kl}^s \frac{|\tau_s|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h} \quad (2.53)$$

montre que la surface de charge est strictement convexe :

$$x_{ij} H_{ijkl} x_{kl} = x_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} x_{kl} = h(h+1) \sum_{s=1}^n (M_{pq}^s x_{pq})^2 \frac{|\tau_s|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h} > 0 \quad (2.54)$$

$\underline{\underline{x}}$  représente tout état de contrainte dans le voisinage de  $\underline{\underline{\sigma}}$

- D'autre part,  $f$  approche la surface de charge de Bishop et Hill d'autant plus que  $h \rightarrow \infty$  (ou  $m \rightarrow 0$ ) et quand pour tout  $s$  :  $\tau_0^s = \tau_0$ .

A ce propos, considérons un état de containte  $\sigma_{ij}^{BH}$  se trouvant sur la surface de Bishop et Hill. Si  $\sigma_{ij}^{BH}$  ne se trouve pas sur un vertexe, il n'existe qu'un seul système de glissement  $s = s^*$  pour lequel  $M_{ij}^{s^*} \sigma_{ij} = \tau_0$ .

Pour tous les autres systèmes de glissement :

$$|\tau^s| = |M_{ij}^s \sigma_{ij}| < \tau_0 \quad (2.55)$$

Il existe alors un scalaire  $\lambda > 0$  pour lequel  $\lambda \sigma_{ij}^{BH} = \sigma_{ij}$ , où  $\sigma_{ij}$  satisfait (2.52). De (2.52) nous pouvons exprimer  $\lambda$  comme suit :

$$\lambda = \tau_0^{\frac{1}{1+h}} \left[ \tau_0 + \sum_{s=1}^n \left| \frac{\tau^s}{\tau_0} \right|^h |\tau^s| \right]^{\frac{1}{1+h}} \quad (2.56)$$

La somme dans (2.56) tend vers 0 quand  $h \rightarrow \infty$ . En conséquence, le terme à l'intérieur de la parenthèse dans (2.56) tend vers  $\tau_0$ . Dans le même temps, le terme exposant  $\frac{1}{1+h} \rightarrow 0$ , donc  $\lambda \rightarrow 1$  ce qui implique que  $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{ij}^{BH}$ , ce qui signifie que  $f$  approche la surface de charge de Bishop et Hill.

### Critère de Tóth, Van Houtte et Van Bael

Afin de prendre en compte l'évolution de la texture pendant la déformation et dans le but d'incorporer l'évolution de cette texture dans un code élément fini, Tóth, Van Houtte et Van Bael [53] proposent une nouvelle fonction de charge analytique pour les polycristaux de la forme :

$$f(S_i) = \sum_s^N \frac{|P_i^s S_i|^{h+1}}{W_s^h} \quad (2.57)$$

Cette nouvelle formulation est née du constat des caractéristiques communes des surfaces de charge du polycristal et du monocristal.

En effet, la surface de charge peut être obtenue comme l'enveloppe intérieure ( Fig. 2.10 (a) ) des hyperplans tangents d'équation [55] :

$$\tau_c \bar{M} = \dot{E}_k S_k \quad (2.58)$$

$\tau_c$  est la cission critique et  $\bar{M}$  est le facteur de Taylor moyen du polycristal.  $\dot{E}_k = \frac{\dot{\epsilon}_k}{\dot{\epsilon}_{eqv}}$  est le vecteur vitesse de déformation de norme 1.  $\dot{\epsilon}_k$  est la vitesse de déformation imposée et  $\dot{\epsilon}_{eqv}$  est la vitesse de déformation équivalente.

Cette surface de charge est arrondie et tangente à chaque hyperplan donné par (2.58).

En comparant l'expression (2.57) et l'équation (2.52), les auteurs suggèrent, de décrire la surface de charge du polycristal par une fonction similaire à celle du potentiel viscoplastique du monocristal.

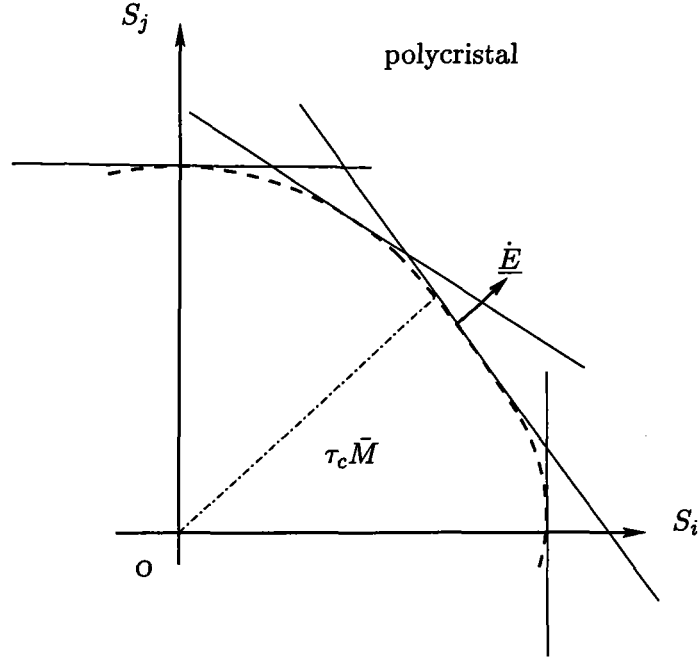


FIG. 2.10 – Surface de charge schématique des polycristaux [53].

Nous rappelons ici l'expression de ce potentiel viscoplastique :

$$f(S) = \sum_s \frac{|m_i^s S_i|^{\frac{1}{m}+1}}{(\tau_0^s)^{\frac{1}{m}}} = \tau_0^{ref} \quad (2.59)$$

La modification de l'équation (2.59) et son application au polycristal est obtenue en considérant les plans tangents données par l'équation (2.58) comme des "systèmes de glissement". Si l'on remplace les valeurs de  $m_i^s$  par les vecteurs  $\dot{E}_k$  prescrits dans le cas d'un polycristal et  $\tau_c$  par  $\tau_c \bar{M}$ , l'équation (2.59) devient :

$$\sum_{s=1}^N \frac{|P_i^s S_i|^{h+1}}{W_s^h} = \tau_0^{ref} \quad (2.60)$$

où  $W_s = \tau_c \bar{M}$ ,  $P_i = \dot{E}_i^s$  et  $h = \frac{1}{m}$ .

Afin d'explorer la forme de la surface de charge,  $W_s$  doit être calculé pour un grand nombre de directions du vecteur vitesse de déformation  $\dot{E}_i^s$ . Les paramètres  $P_i^s$  sont alors obtenus en résolvant le système d'équations établi pour les  $N$  points de surface

de charge connus. La valeur du paramètre  $h$  est choisie de telle sorte que  $h \gg 1$  ( ou  $m \ll 1$  ). Pour chaque direction de déformation, le travail plastique est obtenu par une méthode basée sur le développement en série des facteurs de Taylor. Dans cette méthode la texture expérimentale peut être utilisée comme donnée directe pour obtenir les quantités  $W_s$ .

## 2.3 Conclusion

Ce chapitre avait pour but d'établir une formulation analytique pour décrire le comportement mécanique d'un matériau polycristallin. Le point de départ de la formulation étant la détermination du comportement de ses constituants, nous avons commencé par poser les questions du critère de charge, de l'écroutissage et les lois constitutives à l'échelle du monocristal.

A cet effet, nous avons commencé par adopter le critère de Schmid [45] comme critère de charge pour le monocristal. Ce critère simple aboutit directement au polyèdre de Bishop et Hill [8] qui définit le domaine d'élasticité du monocristal.

Cependant, le développement de la formulation analytique aboutit à une ambiguïté due à l'existence de vertexes anguleux sur le polyèdre de Bishop et Hill et qui rend le calcul du module élastoplastique du monocristal impossible.

Afin de surmonter cette difficulté, nous envisageons d'adopter un nouveau critère de charge pour le monocristal.

En effet, plusieurs études ont été menées dans ce sens. Toutes avaient pour but de proposer un critère qui aboutisse à une surface de charge qui soit, d'une part, arrondie, mais qui reste, d'autre part, aussi proche que possible de la surface de charge de référence (le polyèdre de Bishop et Hill).

Montheillet, Gilormini et Jonas [41] ont proposé en 1985 une méthode appelée CMTF qui permet de relier l'anisotropie du matériau à sa texture cristallographique au moyen d'une approche phénoménologique par la mécanique des milieux continus. Cette méthode permet de décrire la surface de charge de polycristaux anisotropes.

Toujours, pour décrire la surface de charge des polycristaux, Tóth, Van Houtte et Van Bael [53] proposent un critère de charge inspiré de la forme arrondie des potentiels



viscoplastiques des monocristaux donnée par Tóth, Gilormini et Jonas [50].

En nous inspirant de la forme analytique de ce potentiel de charge viscoplastique et d'une proposition avancée par Arminjon [1], concernant une modification de la loi de Schmid, nous proposons un nouveau critère pour décrire la surface de charge du monocristal dans le cas non-viscoplastique. Ce nouveau critère aboutit à une surface de charge arrondie, qui pour des cas limites, approche le polyèdre de Bishop et Hill. Ce nouveau critère de charge (semblable à celui proposé par Arminjon) permet de lever l'ambiguïté dans le choix des systèmes de glissement actifs.

Effectivement, notre formulation repose sur une interprétation plus physique de la loi de Schmid et consiste en une généralisation de ce critère sur l'ensemble des systèmes de glissement.

## CHAPITRE 3

# Calcul à partir de la forme analytique de la surface de charge

### 3.1 Introduction

Nous nous proposons d'adopter dans ce chapitre, un nouveau critère pour décrire la surface de charge des monocristaux. Ce nouveau critère aboutit à une surface de charge arrondie qui permet de lever l'ambiguïté quant au choix des systèmes actifs. Sur cette nouvelle base, nous développons la formulation analytique en vue de l'intégration de la loi de comportement. Dans cette partie, nous prenons en compte l'écroutissage intracristallin que nous représentons grâce à une loi semi-phénoménologique.

### 3.2 Formulation analytique

En nous inspirant de la fonction analytique proposée par Tóth, Gilormini et Jonas [50] pour décrire le potentiel viscoplastique des monocristaux et de la proposition avancée par Arminjon [1] pour modifier la loi de Schmid [45], le critère de charge suivant est adopté pour le monocristal dans le cas non viscoplastique :

$$f(\sigma_{ij}, \tau_0^s) = \sum_{s=1}^n \frac{|M_{ij}^s \sigma_{ij}|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h} - \tau_0 = 0 \quad (3.1)$$

Rappelons que le terme :

$$M_{ij}^s \sigma_{ij} = \tau^s \quad (3.2)$$

représente la cission résolue sur le système de glissement  $s$ .

Concernant la vitesse de déformation plastique, la loi de normalité est adoptée :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.3)$$

En utilisant (3.1) et (3.2), la dérivée en (3.3) peut être obtenue comme suit :

$$P_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = (h+1) \sum_{s=1}^n r^s M_{ij}^s \quad (3.4)$$

où la notation suivante est introduite :

$$r^s = \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \left| \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \right|^{h+1} \quad (3.5)$$

La loi de normalité (3.3) s'écrit alors :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} (h+1) \sum_{s=1}^n r^s M_{ij}^s \quad (3.6)$$

La vitesse de déformation plastique s'écrit alors comme la somme des vitesses des systèmes de glissement :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sum_{s=1}^n \frac{1}{2} (M_{ij}^s + M_{ji}^s) \dot{\gamma}^s \quad (3.7)$$

Les équations (3.6) et (3.7) donnent :

$$\sum_{s=1}^n M_{ij}^s [\dot{\lambda} (h+1) r^s - \dot{\gamma}^s] = 0 \quad (3.8)$$

Il faut bien noter que la relation précédente est valable pour toute combinaison des indices  $ij$  et quel que soit l'état de contrainte. Ce qui signifie que l'expression à l'intérieur de la parenthèse dans (3.8) est nulle pour tous les systèmes de glissement

s. Ce qui conduit à l'expression suivante des vitesses de glissement :

$$\dot{\gamma}^s = \dot{\lambda}(h+1)r^s \quad (3.9)$$

$\dot{\lambda}$  peut être obtenu en utilisant la condition de consistance :

$$\dot{f} = 0 \quad (3.10)$$

Et si l'on se reporte à l'expression de  $f$  dans (3.1), alors :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial \tau_0^s} \dot{\tau}_0^s = 0 \quad (3.11)$$

Ou encore :

$$P_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \sum_{s=1}^n \frac{\partial f}{\partial \tau_0^s} \dot{\tau}_0^s = 0 \quad (3.12)$$

Concernant l'écroissance des systèmes de glissement (écroissance intracristallin), celui-ci est décrit au moyen d'une matrice d'écroissance  $H^{s\beta}$  qui décrit à la fois l'auto-écroissance (écroissance d'un système de glissement  $\alpha$  provoqué par son glissement propre) et l'écroissance latent (écroissance du système de glissement  $\alpha$  sous l'effet du glissement de tous les autres systèmes de glissement  $\beta$ ).

Cette matrice d'écroissance ( $H^{s\beta}$ ) permet de déterminer l'évolution de la cission critique  $\tau_0^s$  sur un système de glissement  $s$  en fonction du taux de glissement  $\dot{\gamma}^\beta$  de tous les systèmes de glissement  $\beta$  (y compris  $s$ ).

$$\dot{\tau}_0^s = \sum_{\beta=1}^n H^{s\beta} |\dot{\gamma}^\beta| \quad (3.13)$$

En utilisant l'expression (3.1) du potentiel plastique, la dérivée de  $f$  par rapport à  $\tau_0^s$  s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_0^s} = -h r^s \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \quad (3.14)$$

En utilisant les expressions (3.9), (3.13), et (3.14), nous pouvons réécrire l'expression (3.12) :

$$P_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\lambda} h (h + 1) \sum_{s=1}^n r^s \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \sum_{\beta=1}^n H^{s\beta} |r^\beta| = 0 \quad (3.15)$$

En introduisant la notation suivante :

$$H = h (h + 1) \sum_{s=1}^n r^s \frac{\tau^s}{\tau_0^s} \sum_{\beta=1}^n H^{s\beta} |r^\beta| \quad (3.16)$$

l'équation (3.15) peut être écrite de la façon suivante :

$$P_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\lambda} H = 0 \quad (3.17)$$

Si l'on se place dans le cas d'un calcul où les contraintes sont contrôlées, c'est-à-dire quand  $\dot{\sigma}_{ij}$  est imposé,  $\dot{\lambda}$  peut être obtenu à partir des équations (3.17) et (3.4) :

$$\dot{\lambda} = \frac{h + 1}{H} \sum_{s=1}^n r^s M_{ij}^s \dot{\sigma}_{ij} \quad (3.18)$$

Il faut noter que cette formule n'est valable que dans le cas où l'écroutissage est non nul (c.-à-d. si  $H \neq 0$ ).

Dans ce cas, quand la vitesse de déformation est imposé,  $\dot{\lambda}$  peut être obtenu de la façon suivante :

Tout d'abord, nous décomposons la vitesse de déformation totale en une partie élastique et une partie plastique :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.19)$$

Concernant la partie élastique, le module élastique peut être utilisé :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (3.20)$$

En introduisant (3.19) dans (3.20), on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) \quad (3.21)$$

En utilisant dans (3.21) l'expression en (3.3) de  $\dot{\epsilon}_{kl}^p$ , on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} P_{kl}) \quad (3.22)$$

Cette expression de  $\dot{\sigma}_{ij}$  est remplacée dans (3.17) :

$$P_{ij} C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\lambda} P_{kl}) - \dot{\lambda} H = 0 \quad (3.23)$$

$\dot{\lambda}$  s'exprime alors comme suit :

$$\dot{\lambda} = \frac{P_{ij} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{H + P_{ij} C_{ijkl} P_{kl}} \quad (3.24)$$

La notation suivante est introduite :

$$J = P_{ij} C_{ijkl} P_{kl} \quad (3.25)$$

Alors,  $\dot{\lambda}$  s'écrit aussi :

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H + J} P_{mn} C_{mnpq} \dot{\epsilon}_{pq} \quad (3.26)$$

Ici, il faut noter que dans ce cas (calcul en déformations contrôlées),  $\dot{\lambda}$  est défini aussi lorsqu'il n'y a pas d'écrouissage.

Maintenant, si l'on remplace l'expression de  $\dot{\lambda}$  dans (3.22), on obtient :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left[ \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{H + J} P_{mn} C_{mnpq} \dot{\epsilon}_{pq} P_{kl} \right] \quad (3.27)$$

Cette équation peut être réécrite de la façon suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = [C_{ijkl} - \frac{1}{H+J} C_{ijpq} P_{mn} C_{mnkl} P_{pq}] \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.28)$$

D'où l'on déduit l'expression du module élastoplastique :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{H+J} C_{ijpq} P_{mn} C_{mnkl} P_{pq} \quad (3.29)$$

Le module élastoplastique obtenu dans l'expression (3.29) s'écrit aussi :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{C_{ijpq} P_{pq} P_{mn} C_{mnkl}}{H + P_{ij} C_{ijkl} P_{kl}} \quad (3.30)$$

A ce stade, pour une direction de chargement donnée, il est possible de suivre le trajet de chargement du monocristal point par point en tenant compte de l'écroutissage intracristallin par un calcul entièrement analytique. D'autre part, le calcul donne à chaque pas de chargement la réorientation du monocristal.

### 3.3 Procédure du chargement incrémental

#### •Informations initiales concernant un grain

- orientation:  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$
- cissions critiques sur les  $n$  systèmes de glissement :  $\tau_0^s (s = 1, n)$
- vitesse de glissement initiale :  $\dot{\gamma}_0^s (s = 1, n)$
- état de contrainte initial :  $\vec{\sigma}$
- facteur de taille de la surface de charge :  $Y = \tau_0$

$\dot{\underline{\epsilon}}, \underline{\epsilon}_{\text{imposé}}$  donnés

#### •chargement incrémental : pas de temps $dt$ .

#### •Calcul de $\tau^s (s = 1, n)$

• Calcul de  $S = \sum_{i=1}^n \frac{|\tau^s|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h}$

si  $S < Y$ , alors :

Etat élastique

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl} dt$$

$$d\epsilon_{ij}^e = d\epsilon_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij} dt$$

$$d\epsilon_{ij}^p = 0$$

$$\dot{\gamma}^s = 0$$

$$\dot{\tau}_0^s = 0$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\phi} = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = 0$$

sinon :

$$S \simeq Y \text{ (à 0.001 près}^1 \text{ )}$$

Etat plastique → intégration de la loi de comportement.

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} dt$$

$$\dot{\tau}_0^s \rightarrow d\tau_0 = \dot{\tau} dt$$

$$\dot{\gamma}^s = f(\underline{\dot{\epsilon}}, \dots)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = f(\dot{\gamma}^s, \dots) \rightarrow d\epsilon_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^p dt$$

$$d\epsilon_{ij}^e = d\epsilon_{ij} - d\epsilon_{ij}^p$$

$$\dot{\varphi}_1, \dot{\phi}, \dot{\varphi}_2$$

• mise à jour des variables

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + d\underline{\underline{\sigma}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^p = \underline{\underline{\epsilon}}^p + d\underline{\underline{\epsilon}}^p$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}^e = \underline{\underline{\epsilon}}^e + d\underline{\underline{\epsilon}}^e$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^p$$

$$\dot{\gamma}^s$$

---

1. Dans le cas où la contrainte estimée viole le critère, une projection sur le critère doit être effectuée



$$\tau_0^s = \tau_0^s + d\tau_0^s$$

$$\varphi_1 = \varphi_1 + d\varphi_1, \quad \phi = \phi + d\phi, \quad \varphi_2 = \varphi_2 + d\varphi_2$$

• **test d'arrêt**

**si**  $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}_{\text{imposé}}^{\text{totale}}$  **alors**

arrêt des calculs

**sinon**

nouvelle incrémentation

### 3.3.1 Correction de l'état de contrainte

Lors de l'incrémentation du chargement (de  $i$  à  $i + 1$ ), la contrainte passe de l'état  $\sigma_i$  ( $\sigma_i$  étant la solution du pas précédent, prise comme état initial pour le pas de chargement actuel) à l'état  $\sigma_{i+1}$ . Cet état de contrainte estimée peut être soit à l'intérieur du critère ou sur le critère (Fig. 3.1), aux quels cas cette contrainte estimée est plastiquement admissible, soit à l'extérieur du critère (Fig. 3.2). Dans ce cas, il y a eu plastification mais la contrainte estimée viole le critère et une correction sur cet état de contrainte doit être effectuée.

Pour obtenir une contrainte admissible, on procède à la reprojction de la contrainte par la méthode du retour radial voir (Fig.3.1 et Fig.3.2).

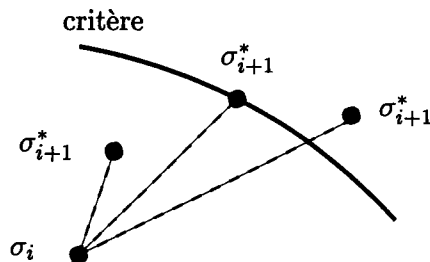


FIG. 3.1 – Détermination de l'état initial de plastification

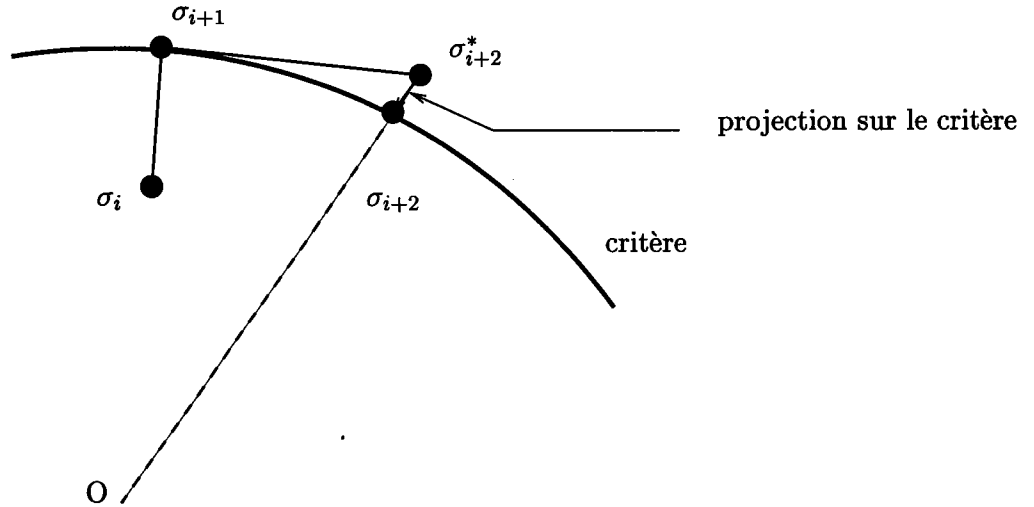


FIG. 3.2 – Correction par la méthode du retour radial

La valeur de  $\underline{\underline{\sigma}}$  projetée sur le critère est donnée par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left( \frac{Y}{S} \right)^{\frac{1}{1+n}} \underline{\underline{\sigma}}^* \quad (3.31)$$

Les expressions de  $Y$  et  $S$  étant celles données au chapitre [3.3].

### 3.4 Transitions d'échelles

Les équations de comportement local étant précisées, il est nécessaire, pour déterminer le comportement global, d'effectuer des transitions d'échelles permettant de relier les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques.

Plusieurs méthodes, partant de points de vue différents, ont été développées.

L'approche de Hill ou de Mandel consiste à introduire formellement un tenseur localisation ( ou concentration) de la déformation ou de la contrainte reliant  $\underline{\underline{\epsilon}}$  (ou  $\underline{\underline{\sigma}}$ ) à  $\underline{\underline{E}}$  (ou  $\underline{\underline{\Sigma}}$ ) par la relation :

$$\underline{\underline{\epsilon}}(r) = \underline{\underline{A}}(r) \underline{\underline{E}} \quad (3.32)$$

$\underline{\underline{A}}(r)$  étant supposé connu, la relation entre  $\underline{\underline{\Sigma}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  peut être alors facilement déduite de relations de moyenne. Un point de vue consiste à faire d'emblée des hypothèses sur les tenseurs de localisation en leur affectant des valeurs données. Ainsi, dans le modèle de Taylor [47], la déformation élastique est négligée et la déformation plastique locale est supposée être égale à la déformation macroscopique, ce qui revient à écrire :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \underline{\underline{E}}^p \quad (3.33)$$

Ce modèle est particulièrement adapté pour la prédiction du comportement mécanique des polycristaux en grande déformation (comportement rigide-plastique) car les déformations élastiques peuvent alors être considérées comme négligeables.

En 1957, Lin [37] propose une extension du modèle de Taylor pour inclure les déformations élastiques. Cette hypothèse suppose que la déformation totale dans chaque grain constituant le polycristal est uniforme et identique à celle de l'agrégat :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^T = \underline{\underline{E}}^T \quad (3.34)$$

$\underline{\underline{\varepsilon}}^T$  et  $\underline{\underline{E}}^T$  sont respectivement la déformation totale dans le grain et celle macroscopique de l'agrégat.

Notre travail s'intéresse à la prédiction du comportement des polycristaux en petites déformations. Aussi, nous adoptons le modèle de Taylor-Lin pour effectuer les transitions d'échelles micro-macro.

La contrainte macroscopique du polycristal  $\underline{\underline{\Sigma}}$  est donnée par la moyenne volumique sur les grains qui constituent le polycristal.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N f_k} \sum_{k=1}^N f_k \underline{\underline{\sigma}}_k \quad (3.35)$$

où  $N$  représente le nombre de grains constituant le polycristal,  $f_k$  la fraction volumique du  $k^{\text{ième}}$  grain, tandis que  $\underline{\underline{\sigma}}_k$  désigne sa contrainte de Cauchy.

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi une formulation analytique qui permet, à partir d'un polycristal modèle constitué de  $N$  grains monocristallins de comportement et d'orientation connus, de calculer la réponse élasto-plastique de chaque grain au chargement macroscopique. Le comportement global du matériau est déterminé en tenant compte des modifications microstructurales, au moyen de la transition d'échelle micro-macro.

Afin de procéder aux simulations, un code de calcul est mis en place. Son principe de fonctionnement est schématisé sur la figure suivante :

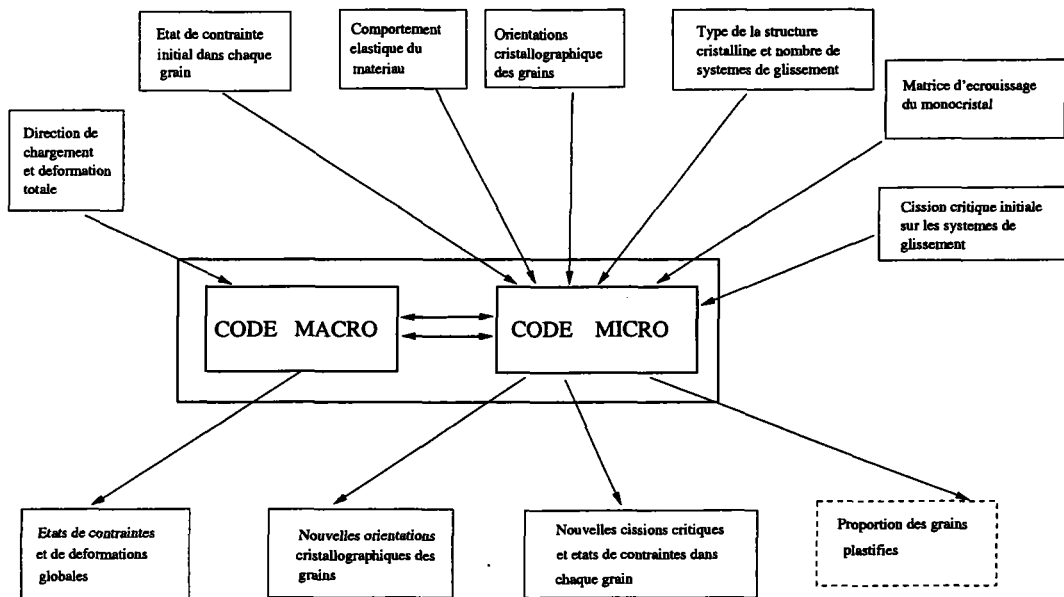


FIG. 3.3 – Schéma de fonctionnement du code de calcul

Les calculs s'effectuent en définissant au préalable :

1. le comportement élastique du monocristal,
2. l'orientation cristallographique des grains,

3. le nombre de systèmes de glissement suivant la structure cristalline
4. les cissions critiques initiales (elles peuvent être prises identiques ou non sur tous les systèmes),
5. la matrice d'écroissage du monocristal.

Il est maintenant possible, pour une direction de chargement donnée et par un calcul entièrement analytique de déterminer le trajet de chargement du polycristal point par point en tenant compte de la réorientation des grains ainsi que de l'écroissage du matériau.

## CHAPITRE 4

# Applications et validation du modèle

### 4.1 Introduction

Dans une première étape, nous nous limiterons à l'étude de trajets de chargement monotone ; en l'occurrence nous choisissons le cas du cisaillement simple. Dans cette partie nous négligeons l'écroutissement intracristallin et nous nous proposons d'étudier l'évolution de l'écroutissement global du polycristal au cours du chargement.

Notre modèle étant particulièrement adapté à l'étude des transitions élastoplastiques, nous appliquons ensuite le modèle à des trajets de chargements plus complexes ; cas de chargements avec changement dans le trajet de sollicitation. La première application est faite à l'essai cyclique de traction-compression. Dans une deuxième étape, nous cherchons à confirmer par le modèle des résultats expérimentaux obtenus à partir d'essais de torsion-traction.

### 4.2 Caractéristiques du polycristal sollicité

Le matériau utilisé pour les simulations est le cuivre OFHC polycristallin. Ses propriétés élastiques sont considérées homogènes et isotropes. Chaque monocristal est caractérisé par les modules élastiques que nous résumons dans le tableau suivant :

$\mu$ (GPa)	$\lambda$ (GPa)
46.5	93.

TAB. 4.1 – Constantes d'élasticité utilisées pour le cuivre

Dans les simulations par le modèle le matériau est représenté par un agrégat constitué de 500 grains dont la distribution initiale est aléatoire. La structure cristallographique initiale du matériau est donc considérée isotrope et est obtenue par une génération aléatoire de 500 triplets des angles d'Euler  $(\varphi_1, \phi, \varphi_2)$ .

La structure du monocristal est de type cubique à faces centrées (C.F.C), elle possède 12 systèmes de glissement, si on distingue les deux sens de glissement, cette famille de glissement est définie par les 12 systèmes de glissement de plan  $\{111\}$  et de direction  $\langle 110 \rangle$ .

Dans chaque grain, la cission critique est prise identique sur tous les systèmes de glissement :  $\tau_0^s = 16$  MPa. Le facteur de forme de la surface de charge est pris tel que :  $h = 20$ .

## 4.3 Application à l'essai de cisaillement simple avec écrouissage intracristallin nul

### 4.3.1 Position du problème

Grâce au modèle, nous simulons un essai de cisaillement simple. L'écrouissage intracristallin est considéré comme nul et la valeur de  $h_0$  dans l'expression de la matrice d'écrouissage est prise égale à zéro. Cette partie a pour but de mettre en évidence l'écrouissage macroscopique et d'étudier son évolution tout au long du chargement.

### 4.3.2 Conditions aux limites

Dans le but de tenir compte de la compressibilité élastique du matériau, nous devons tout d'abord poser correctement les conditions aux limites relatives aux contraintes macroscopiques pour ce type de sollicitations. Nous devons alors déterminer le gradient de déformation totale à imposer et qui produirait une contrainte macroscopique

satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\langle \sigma_{11} \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (4.1)$$

Les composantes du gradient de la vitesse de déformation totale imposées ( $\dot{L}_{12}, \dot{L}_{13}, \dot{L}_{21}, \dot{L}_{23}, \dot{L}_{31}, \dot{L}_{32}, \dot{L}_{33}$ ) et les conditions décrites par la relation (4.1) constituent un problème aux conditions aux limites mixtes. Il est résolu d'une manière itérative en imposant à chaque incrément les composantes  $\dot{L}_{11}$  et  $\dot{L}_{22}$  au polycristal et en cherchant la combinaison de ces deux composantes qui satisfait les conditions décrites par la relation (4.1). Pour cela, nous utilisons une méthode de Newton-Raphson que nous intégrons au code de calculs.

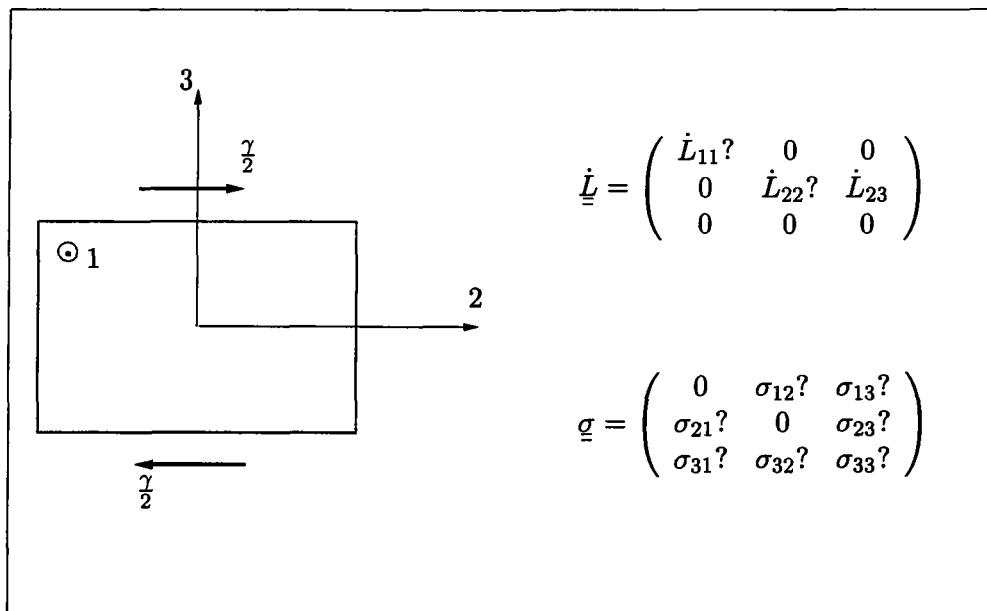


FIG. 4.1 - Cisaillement simple et conditions aux limites mixtes.

### 4.3.3 Résultats et apports du modèle

Dans un premier temps, l'écroissage intracristallin est considéré comme nul et  $h_0$  dans l'expression de la matrice d'écroissage est pris tel que :  $h_0 = 0$ .

Les simulations par le modèle donnent les résultats suivants :



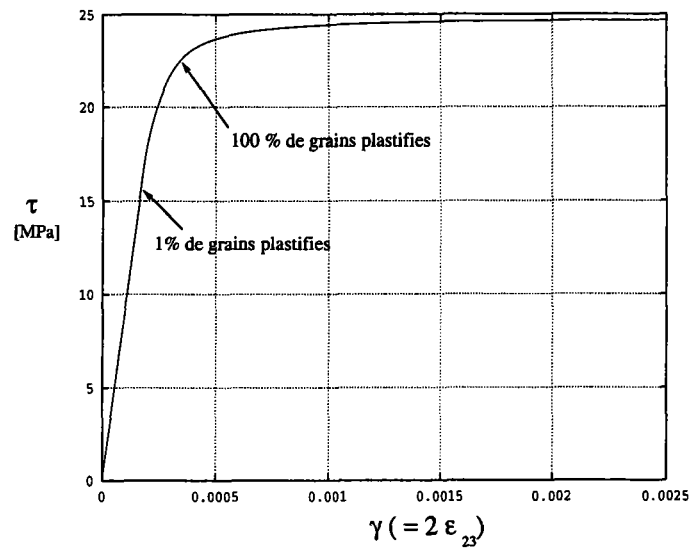


FIG. 4.2 – Cisaillement simple du cuivre polycristallin. Ecroissage intracristallin nul.

Nous pouvons voir sur cette courbe d'écroissage que le comportement du matériau demeure élastique tant qu'aucun grain n'est plastifié, ensuite le comportement devient élastoplastique. Mais il est intéressant de constater que l'écroissage macroscopique continue à évoluer bien après que tous les grains soient plastifiés. Ceci est particulièrement visible sur la figure suivante où l'on montre l'évolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la fraction volumique des grains plastifiés.

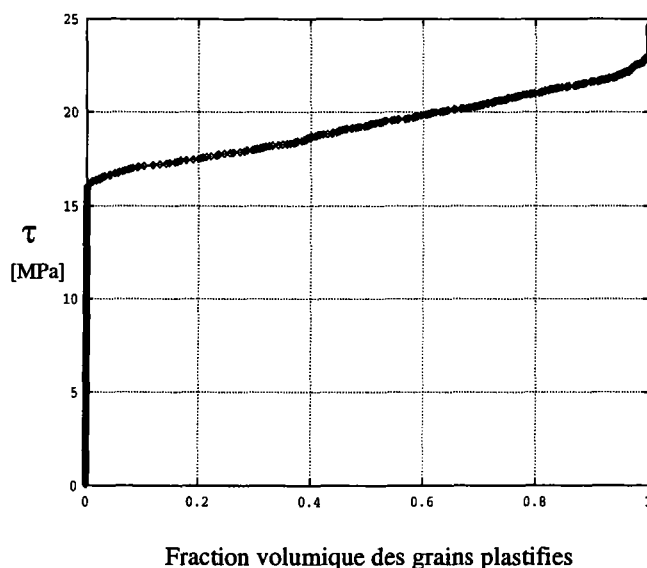
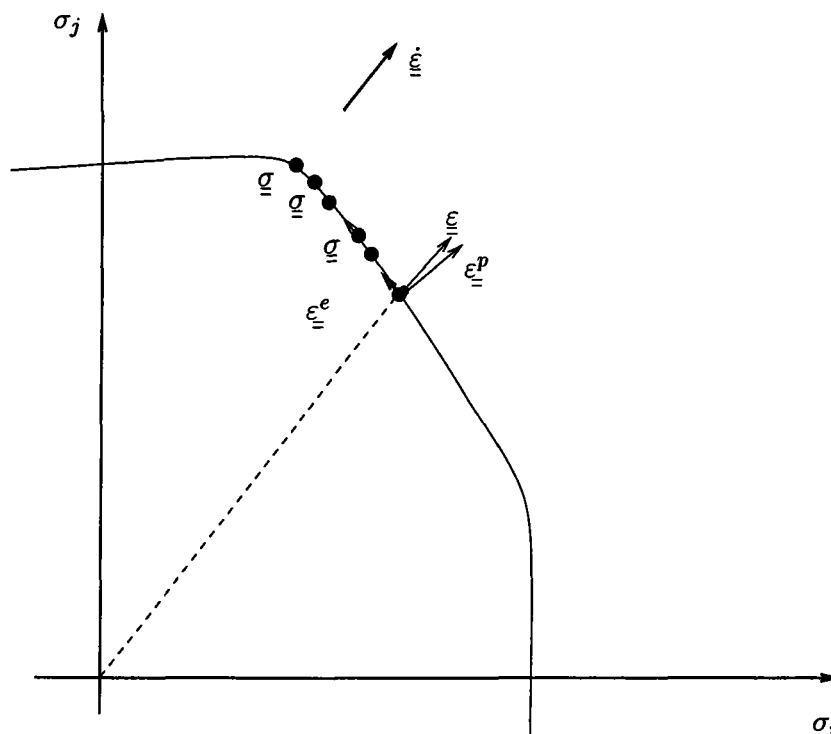


FIG. 4.3 – Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction de la fraction volumique des grains plastifiés. Ecouissage intracristallin nul.

Cette évolution de l'écrouissage macroscopique au-delà de la plastification totale de tous les grains peut être expliquée par l'écrouissage cinématique qui a lieu au niveau de chaque grain : nous considérons que le grain est plastifié dès que le point de charge se trouve sur la surface de charge. L'état de contrainte  $\underline{\sigma}$  au niveau du grain satisfait alors la relation  $f(\underline{\sigma}) = 0$ . L'écrouissage intracristallin étant pris comme nul, cette surface de charge reste figée et n'évolue pas. Mais si le chargement est maintenu le point de charge peut continuer à parcourir la surface de charge ; ceci représente l'écrouissage cinématique (voir Fig. 4.4). Cet écouissage s'arrête quand le point de charge rencontre un vertexe. Lors de l'évolution du point de charge dans chaque grain le long de la surface de charge, les contraintes internes au niveau des grains peuvent alors augmenter, ce qui se traduit à l'échelle macroscopique par un écouissage global du polycristal. Aussi, il est intéressant de voir sur la figure Fig.4.3 que l'évolution de l'écrouissage en fonction du nombre de grains plastifiés est pratiquement linéaire. Ceci est probablement dû au fait que la texture initiale est prise parfaitement aléatoire.

FIG. 4.4 – *Ecrouissage cinématique au niveau du monocristal.*

## 4.4 Etude de la transition élastoplastique d'un tube à paroi mince sollicité en torsion-traction combinées

### 4.4.1 Position du problème

Nous simulons un essai de torsion-traction combinées effectué sur un tube à paroi mince. Comme nous l'avons fait précédemment pour l'essai de cisaillement, afin de se placer dans des conditions qui soient les plus proches possibles des conditions expérimentales, nous devons poser à l'échelle macroscopique les conditions aux limites mixtes sur les contraintes et les déformations : les composantes de la contrainte macroscopique  $\langle \sigma_{rr} \rangle$  et  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle$  (prises égales à la moyenne volumique des contraintes sur tous les grains) doivent être prises égales à zéro. Le calcul étant effectué en déformation imposée, les composantes du tenseur vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}_{zz}$ ,  $\dot{\epsilon}_{r\theta}$ ,  $\dot{\epsilon}_{rz}$ ,  $\dot{\epsilon}_{\theta z}$  sont imposées. Les composantes  $\dot{\epsilon}_{rr}$ ,  $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$  sont laissées libres ; ces deux composantes sont les inconnues qu'il faut déterminer pour trouver la vitesse de

déformation qu'il faut imposer au polycristal. Celles-ci sont obtenues de manière itérative par le biais d'une procédure numérique de type Newton-Raphson ; les valeurs de  $\dot{\epsilon}_{rr}$ ,  $\dot{\epsilon}_{\theta\theta}$  varient jusqu'à ce que les conditions aux limites concernant les contraintes soient vérifiées, c'est à dire :  $\langle \sigma_{rr} \rangle = 0$  et  $\langle \sigma_{\theta\theta} \rangle = 0$ .

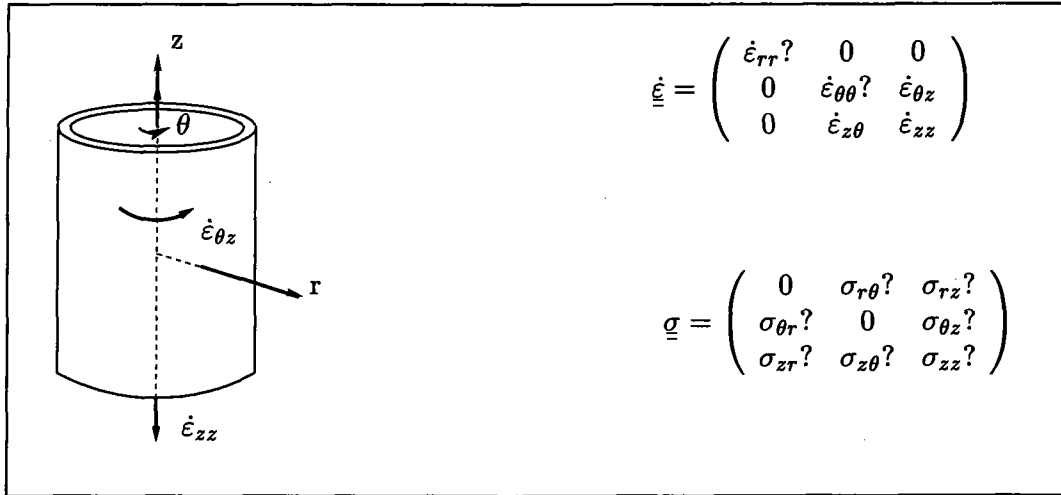


FIG. 4.5 - Traction-torsion combinées et conditions aux limites mixtes.

#### 4.4.2 Résultats

L'écroutissage intracristallin est pris comme nul ( $h_0 = 0$ ).

Nous calculons les surfaces de charge pour trois conditions de plastification :

1. Quand un seul grain dans le polycristal commence à se plastifier.
2. Quand tous les grains (500) du polycristal sont plastifiés.
3. Quand l'état de contrainte est saturé dans tous les grains.

Nous pouvons ainsi suivre l'évolution de la surface de charge lors de la transition élastoplastique et ce, jusqu'à saturation des contraintes. Ces surfaces de charge sont représentées dans l'espace des contraintes ( $\sigma$ ,  $\tau$ ) (Fig. 4.6).

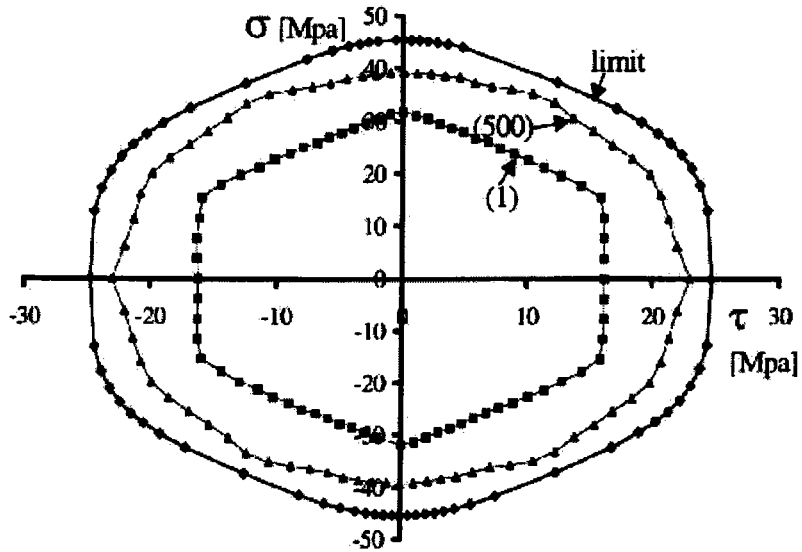


FIG. 4.6 – Evolution de la surface de charge au cours d'un essai de torsion-traction.

Sur la figure (Fig. 4.6), la courbe désignée par (1) représente la surface de charge du polycristal quand un seul grain commence à se plastifier. Cette surface de charge a une forme hexagonale. La seconde courbe, désignée par (500) correspond aux états de contrainte quand tous les grains du polycristal sont plastifiés. Cette surface de charge possède une forme irrégulière. La troisième courbe est obtenue quand l'état de contrainte est saturé. La surface de charge est alors parfaitement convexe [52]. Ici, il faut noter que l'écroissage intracristallin étant nul, l'expansion de la surface de charge n'est due qu'à l'écroissage cinématique qui a lieu au niveau de chaque grain (voir chapitre 1.3.3).

Il est à noter que le rapport des contraintes à la limite d'élasticité en traction et en cisaillement est égale à 2.0, quand le premier grain est plastifié. Ceci peut suggérer que le critère de Tresca s'applique à ce problème. Ce n'est pas le cas. On peut montrer facilement que la surface de charge pour le critère de Tresca en traction-torsion combinée est une ellipse et non un hexagone. La forme hexagonale de la surface de charge est due à la nature cristalline de la déformation.

## 4.5 Application à la plasticité cyclique - Essai de traction-compression

Dans les parties qui vont suivre, nous nous proposons d'appliquer le modèle à des trajets de chargements complexes afin d'étudier l'effet de l'élasticité dans les chargements avec changements dans le trajet de sollicitation.

La première application est faite à la plasticité cyclique : celle-ci traduit la réponse inélastique des matériaux suite à des chemins de chargement fermés et répétés dans le temps.

Dans une étude de plasticité cyclique des polycristaux, Zouhal et al. [58, 57, 59, 32] ont analysé l'effet de l'érouissage et de l'élasticité sur la fatigue des matériaux en utilisant le modèle viscoplastique de Taylor-Lin. La démarche reposait sur un calcul entièrement itératif. Nous nous proposons de comparer nos résultats [51] (courbes contraintes-déformations et temps de calculs) à ceux fournis par cette étude.

### 4.5.1 Position du problème

Nous nous plaçons dans le cas de chargements cycliques proportionnels, c'est à dire le cas où la déformation imposée garde la même direction durant toute la durée de la sollicitation cyclique.

D'autre part, le chargement cyclique uniaxial peut être contrôlé soit en déformation ou bien en contraintes. Dans le premier cas, on peut imposer le cyclage en fixant les déformations maximales  $\varepsilon^+$  et minimales  $\varepsilon^-$ , ce qui revient à fixer une amplitude de déformation  $\varepsilon_a$  autour d'une déformation moyenne  $\varepsilon_m$ .

La sollicitation cyclique uniaxiale contrôlée en déformation, peut être schématisée de la façon suivante :

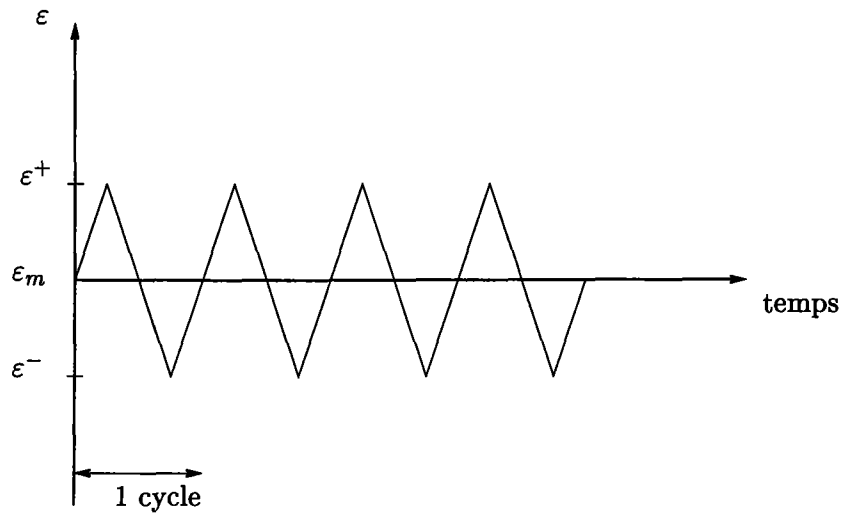


FIG. 4.7 – Illustration schématique de la sollicitation cyclique uniaxiale contrôlée en déformations.

Les valeurs de  $\varepsilon_a$  et  $\varepsilon_m$  sont alors données par les relations suivantes :

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}|\varepsilon^+ - \varepsilon^-| \quad ; \quad \varepsilon_m = \frac{1}{2}(\varepsilon^+ + \varepsilon^-) \quad (4.2)$$

Pour notre part, nous nous proposons de simuler grâce au modèle l'essai cyclique en traction-compression. Cette sollicitation cyclique uniaxiale sera contrôlée en déformation.

Nous imposons au matériau une amplitude de déformation totale  $\varepsilon_a = 0.1\%$ , le cyclage étant effectué autour d'une déformation moyenne nulle,  $\varepsilon_m = 0$ .

25 cycles sont simulés. L'essai tel qu'il est simulé par le modèle peut être schématisé de la façon suivante :

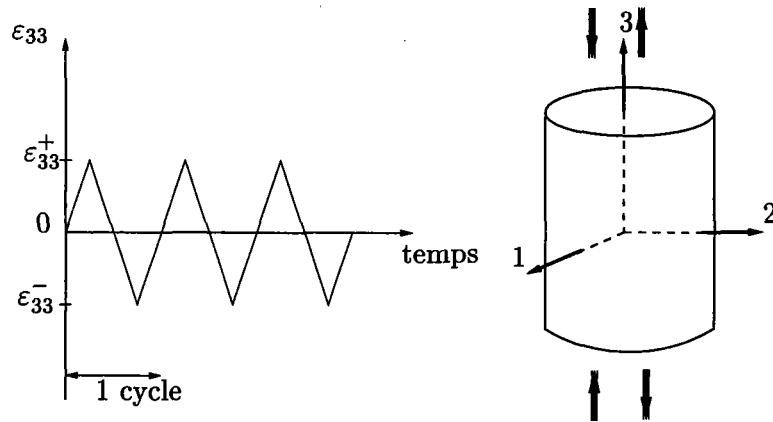


FIG. 4.8 – *Illustration schématique de la sollicitation cyclique en traction compression.*

### Conditions aux limites mixtes

Néanmoins, avant de commencer les calculs, et dans le but de tenir compte de la compressibilité élastique du matériau, nous devons poser les conditions aux limites mixtes concernant les contraintes et les déformations macroscopiques, à savoir que les contraintes normales à l'axe de chargement doivent être nulles. Il en découle la relation suivante :

$$\langle \sigma_{11} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \sigma_{22} \rangle = 0 \quad (4.3)$$

A chaque incrément de déformation, le code cherche de manière itérative la combinaison des composantes  $\dot{\epsilon}_{11}$  et  $\dot{\epsilon}_{22}$  qui satisfait les conditions décrites par la relation (4.3).



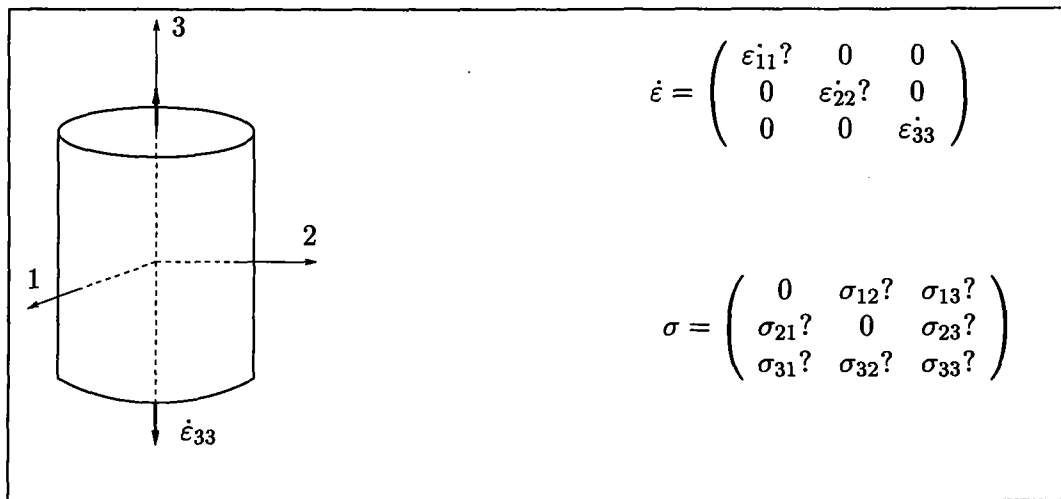


FIG. 4.9 – Conditions aux limites mixtes en traction-compression.

### 4.5.2 Caractéristiques du polycristal sollicité

Le matériau utilisé pour les simulations est le cuivre OFHC dont les caractéristiques ont été données en (1.2.3). Pour la simulation de cet essai cyclique, le nombre de grains a été réduit par un souci de gain en temps de calcul ; le matériau est représenté par un agrégat constitué de 100 grains dont la distribution initiale est aléatoire et représente l'espace d'Euler total.

Aussi, dans ce cas, nous prenons en compte l'érouissage du matériau et le paramètre  $h_0$  dans l'expression de la matrice d'érouissage est pris égal à  $180\text{MPa}$ . La cission critique  $\tau_0$  est prise identique sur tous les systèmes de glissement et dans tous les grains ;  $\tau_0 = 16\text{MPa}$ . Au cours de la déformation plastique, la cission critique sur les systèmes de glissement évolue selon la loi phénoménologique donnée au chapitre 2.2.2. Nous reprenons les paramètres d'érouissage donnés par Kalidindi et al. [27] identifiés grâce à un essai de compression uniaxiale en grandes déformations. Ces paramètres d'érouissage sont résumés dans le tableau suivant :

$\tau_0$ (MPa)	$h_0$ (MPa)	$\tau_{sat}$ (MPa)	q	a
16	180	148	1.4	2.25

TAB. 4.2 – Paramètres d'érouissage donnés par Kalidindi et al [27].

### 4.5.3 Résultats et apports du modèle

La simulation de l'érouissage cyclique en traction-compression du cuivre polycristallin donne les courbes d'érouissages suivantes :

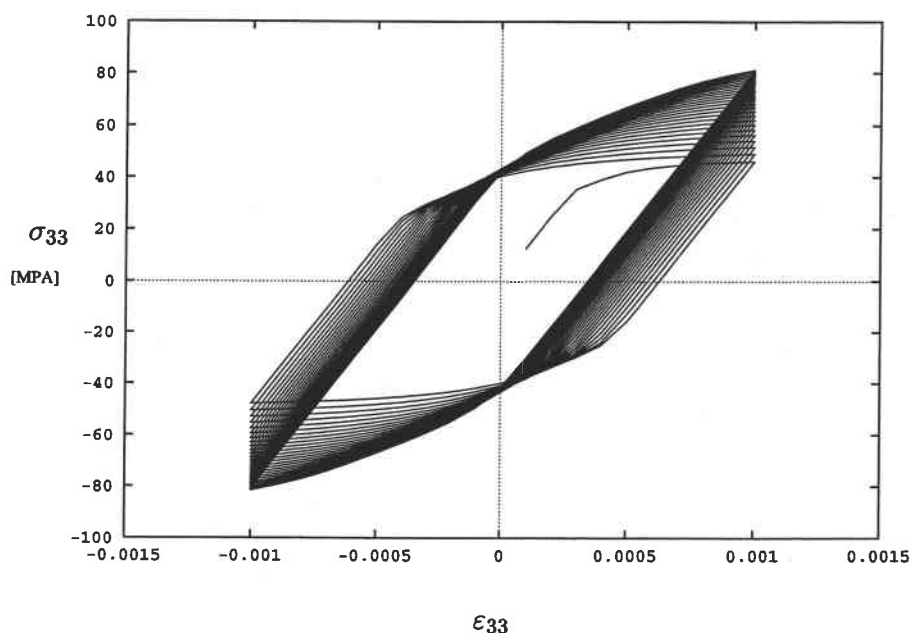


FIG. 4.10 – Erouissage cyclique du cuivre polycristallin, 25 cycles sont simulés avec une amplitude de déformation de 0.1%.

Nous constatons que le modèle reproduit bien les phénomènes observés lors des sollicitations cycliques uniaxiales, tels que : l'effet Bauschinger ou la stabilisation des boucles d'hystérésis aux grands nombres de cycles.

Effet Bauschinger : celui-ci se traduit par une diminution de la limite d'élasticité en compression après chargement préalable en traction ; c'est un phénomène expérimental caractéristique de la sollicitation cyclique en traction-compression.

Si l'on considère le résultat de la simulation d'un cycle de traction-compression (Fig. 4.11), on illustre approximativement par  $y^t$  la limite élastique en traction (la réponse en traction étant représentée par le trajet OA).

Ensuite, on procède à une décharge élastique (trajet AO'), suivie d'une compression (réponse O'B). Si l'on illustre approximativement la limite élastique en compression par le point  $y^c$ , on constate effectivement que la contrainte (en valeur absolue) correspondant au point  $y^c$  est bien inférieure à la contrainte correspondant au point  $y^t$ . L'interprétation de l'effet Bauschinger a été étudiée par Zouhal et al. [58, 57].

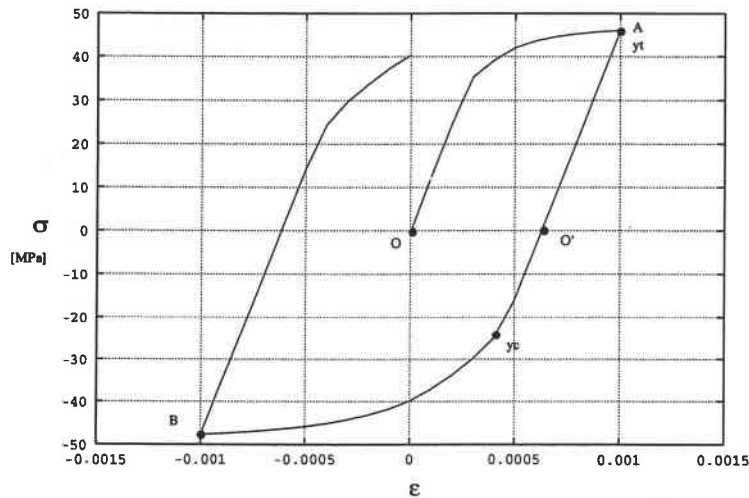


FIG. 4.11 – Sollicitation du polycristal en traction-compression (1 cycle).

Toutefois, il faut noter que dans le modèle, on considère que la résistance au glissement est la même dans les deux sens de glissement. Il n'y a donc pas d'effet Bauschinger au niveau du glissement.

Si l'on compare nos résultats (Fig. 4.10) avec ceux fournis par Zouhal et al. [58] (Fig.4.12), nous constatons que ceux-ci sont pratiquement identiques. Notre démarche présente néanmoins l'avantage de fournir des résultats avec des temps de calculs beaucoup plus courts que ceux qui étaient requis dans l'étude de Zouhal. Cette diminution des temps de calculs est due au fait que notre démarche est basée sur une formulation entièrement analytique, tandis que les calculs de Zouhal étaient de nature itérative.

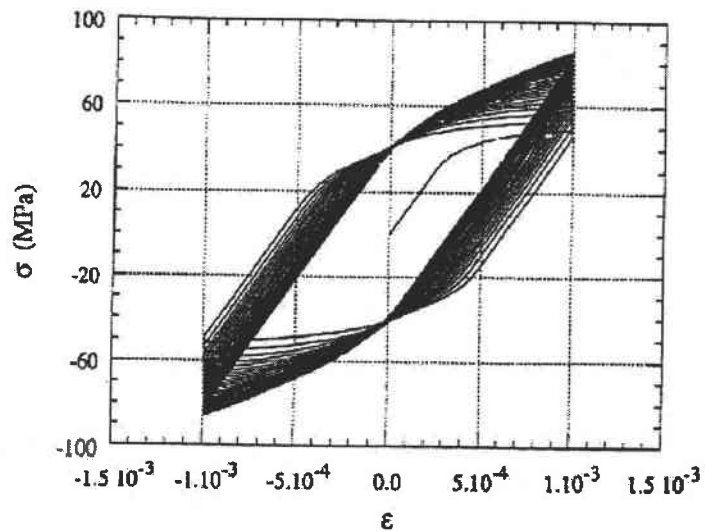


FIG. 4.12 – *Ecrouissage cyclique du cuivre polycristallin. Résultats donnés par Zouhal [57]*

## 4.6 Expérience de Hohenemser - Essai de torsion-traction

### 4.6.1 Description de l'expérience

Lors d'une expérience réalisée sur des tubes à parois minces en métal en 1931, Hohenemser [23] observait que la contrainte de cisaillement diminuait graduellement lors de la sollicitation en traction des tubes, ceux-ci ayant été précédemment sollicités en torsion et sans avoir subi aucune décharge.

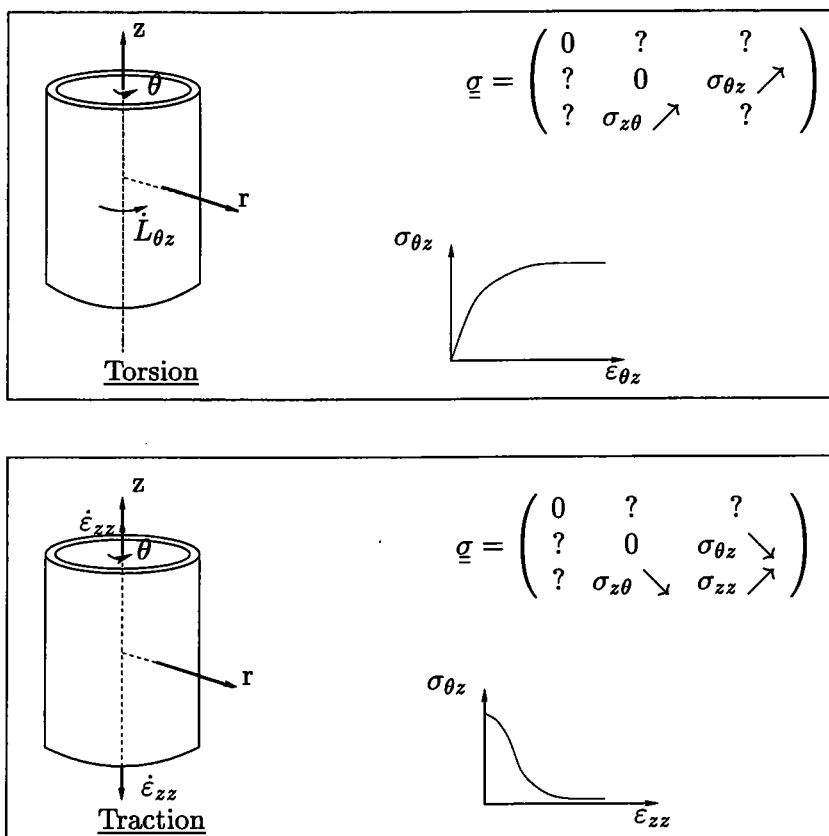


FIG. 4.13 – Expérience de Hohenemser

Les résultats expérimentaux ainsi obtenus étaient alors comparés avec les résultats donnés par la théorie de la plasticité de Reuss [43] et celle de Hencky [18].

La théorie de Hencky repose sur le critère de Von Mises et consiste en un modèle d'élasticité non-linéaire. Celle-ci relève de la théorie de la déformation totale.

La loi d'écoulement s'écrit :

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{S_{ij} \epsilon_{ij}^p}{2 \tau_j^2} dS_{ij} + \frac{dS_{ij} \epsilon_{ij}^p}{2 \tau_j^2} S_{ij} + \frac{S_{ij} d\epsilon_{ij}^p}{2 \tau_j^2} S_{ij} \quad (4.4)$$

La théorie de Reuss, quand à elle, est identique à celle de Von Misès et relève de la théorie incrémentale associée a une loi d'écoulement de type :

$$\dot{\underline{\epsilon}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}_{ij}} \quad (4.5)$$

La loi d'écoulement s'écrit alors :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{S_{ij} d\varepsilon_{ij}^p}{2\tau_j^2} S_{ij} \quad (4.6)$$

En introduisant les variables sans dimensions  $e$ ,  $p$  et  $t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} = e \\ \frac{\sigma}{K} = p \\ \sqrt{3} \frac{\tau}{K} = t \end{array} \right. \quad (4.7)$$

$\varepsilon_f$  est la valeur déformation en traction simple à l'écoulement, tandisque  $\varepsilon$  est la valeur de la déformation en déformation multiaxiale.

avec

$$\varepsilon_f = \frac{K}{E}$$

on obtient dans le cadre de ces deux théories, la relation suivante permettant de déterminer  $t$  en fonction de  $p$  et vice versa (l'écroutissement est négligé) :

$$t^2 + p^2 = 1 \quad (4.8)$$

La figure 4.14(a) donne l'évolution de  $p$  en fonction de  $e$  tandis que la figure 4.14(b) donne l'évolution de  $t$  en fonction de  $e$ . Les résultats apportés par la théorie de Reuss sont représentés par la courbe (R2), tandis que la courbe (H2) traduit les résultats donnés par la théorie de Hencky.

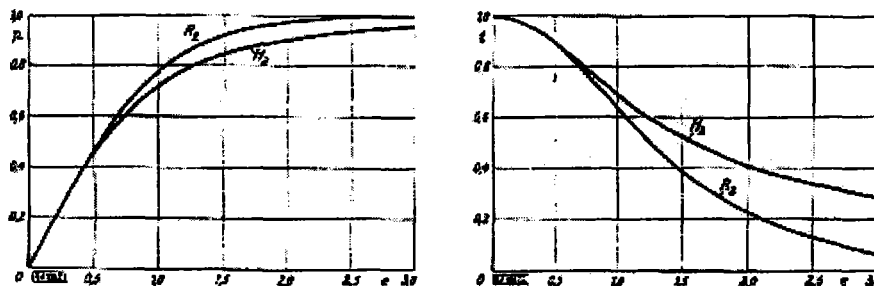


FIG. 4.14 – Comparaison entre les résultats donnés par les théories de Hencky et de Reuss.

La figure (Fig. 4.15) présente les résultats expérimentaux de Hohenemser sur l'acier, représentés par des points, comparés à chaque fois aux courbes théoriques de Reuss ( $R_2$ ) et de Hencky ( $H_2$ ).

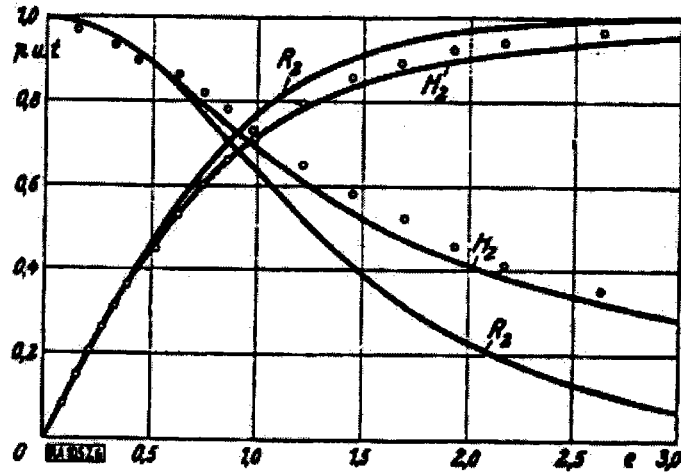


FIG. 4.15 – Comparaison des résultats expérimentaux de Hohenemser et ceux donnés par les théories de Hencky et de Reuss.

#### 4.6.2 Etude à partir du critère de Von Mises

Pour notre part, nous commencerons dans une première étape par adopter pour le matériau le critère de charge de Von Mises. Sur cette base, nous procédons à l'intégration de l'équation incrémentale :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.9)$$

Le tube à parois minces est d'abord sollicité en torsion jusqu'à une déformation plastique suffisante. Dans une deuxième étape, sans procéder à aucune décharge, on procède à un changement dans le trajet de sollicitation au cours duquel le tube est sollicité en traction.

#### Traction du tube (torsion bloquée):

Tout d'abord nous devons poser les conditions aux limites et les conditions initiales concernant les déformations et les contraintes :

### Les déformations

$$\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}\dot{=} \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_{\theta\theta} & \frac{\dot{\gamma}}{2} \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}}{2} & \dot{\varepsilon}_{zz} = \dot{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

### Les contraintes

$$\underline{\dot{\underline{\sigma}}}\dot{=} \frac{d\underline{\underline{\sigma}}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\tau} \\ 0 & \dot{\tau} & \dot{\sigma}_{zz} = \dot{\sigma} \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Si l'on vectorise  $\underline{\dot{\underline{\sigma}}}$  et  $\underline{\dot{\underline{\varepsilon}}}$ , l'on obtient :

$$\underline{\dot{\sigma}} = (0, 0, \dot{\sigma}, \dot{\tau}, 0, 0) \quad (4.12)$$

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = (\dot{\varepsilon}_{rr}, \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}, \dot{\varepsilon}_{zz}, \frac{\dot{\gamma}}{2}, 0, 0) \quad (4.13)$$

La torsion étant bloquée:  $\gamma$  est constante, ce qui implique que:  $\dot{\gamma} = 0$ .

La vitesse de déformation est donc sous la forme :

$$\underline{\dot{\varepsilon}} = (\dot{\varepsilon}_{rr}, \dot{\varepsilon}_{\theta\theta}, \dot{\varepsilon}_{zz}, 0, 0, 0) \quad (4.14)$$

D'autre part,  $\underline{\dot{\sigma}}$  et  $\underline{\dot{\varepsilon}}$  sont reliés grâce au module élastoplastique par la relation incrémentale :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (4.15)$$

où les composantes  $C_{ijkl}^{ep}$  de la matrice des modules élastoplastiques sont à déterminer.

Par un calcul analytique identique à celui présenté au chapitre 3, on trouve :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{1}{H} H_{ij}^* H_{kl} \quad (4.16)$$



$C_{ijkl}$  étant les composantes de la matrice des modules élastiques.

$$\begin{aligned} H &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \\ H_{ij}^* &= C_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{mn}} \\ H_{kl} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} C_{pqkl} \end{aligned}$$

$f$  est la fonction de charge, tandis que  $g$  est le potentiel de charge

Nous adoptons pour le matériau le critère de charge de Von Mises qui s'exprime comme suit :

$$f = J_2 - \tau_0^2 \quad (4.17)$$

$J_2$  est le deuxième invariant de  $f$  et s'exprime sous la forme suivante :

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{kl} \quad (4.18)$$

Généralement,  $g$  est pris égale à  $f$ . Dans ce cas, on trouve :

$$\begin{cases} H = 4\mu \tau_0^2 \\ H_{ij}^* = 2\mu S_{ij} \\ H_{kl} = 2\mu S_{kl} \end{cases} \quad (4.19)$$

avec  $\mu = G$ , le module élastoplastique s'exprime comme suit :

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl} - \frac{G}{\tau_0} S_{ij} S_{kl} \quad (4.20)$$

avec par définition :

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} tr \underline{\underline{\sigma}} \delta_{ij} \quad (4.21)$$

Toutes les composantes du module élastoplastique étant parfaitement définies, et en tenant compte des conditions initiales et aux limites, nous procédons à l'intégration de la relation incrémentale suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl}$$

où  $\sigma_{zz} = \sigma$  et  $\tau$  sont à déterminer en fonction de  $\varepsilon$ .

Après intégration, on obtient :

$$\sigma = \sqrt{c} \operatorname{th}\left(\frac{4G\sqrt{c}}{9\tau_0^2} \varepsilon\right) \quad (4.22)$$

$$\tau = \tau_0 e^{-\frac{2G\sqrt{c}}{3\tau_0^2} \int_0^\varepsilon \operatorname{th}\left(\frac{4G\sqrt{c}}{9\tau_0^2} \varepsilon\right) d\varepsilon} \quad (4.23)$$

avec :

$$c = 3\tau_0^2 \left( \frac{3K}{4G} + 1 \right) \quad (4.24)$$

Sur la figure suivante (Fig. 4.16), nous représentons l'évolution de  $\sigma$  et  $\tau$  (rapportées toute deux à leurs valeurs limites :  $\sigma_0$  et  $\tau_0$ ) en fonction de  $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f}$ .  $\varepsilon_f$  est la déformation correspondant à la limite d'élasticité en traction simple.

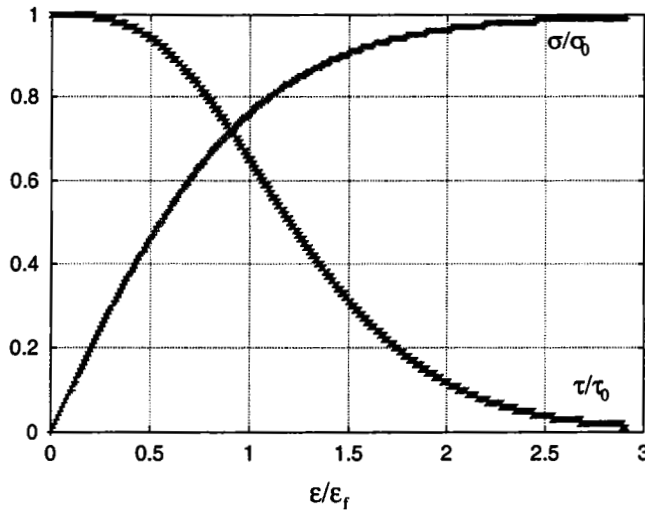


FIG. 4.16 – Evolution de la contrainte normale et de la composante de cisaillement au cours de la traction obtenue à partir du critère de Von Mises.

Nous remarquons une différence dans l'évolution de la composante de cisaillement par rapport au calcul de Reuss donné par Hohenemeser.

### 4.6.3 Etude à partir du modèle analytique caractéristiques du polycristal sollicité

Dans les simulations par le modèle, le matériau est représenté par un agrégat constitué de 500 grains dont la distribution initiale est aléatoire.

La structure du monocristal est de type cubique centré (C.C), ce qui nous conduit à considérer 24 systèmes de glissement: 12 de la famille  $\{112\} \langle 111 \rangle$  et 12 de la famille  $\{110\} \langle 111 \rangle$ . Les cissions critiques sont prises identiques sur tous les systèmes de glissement. Ces deux familles de glissement approchent relativement bien la situation du "pencil glide" Conditions aux limites mixtes

- En torsion

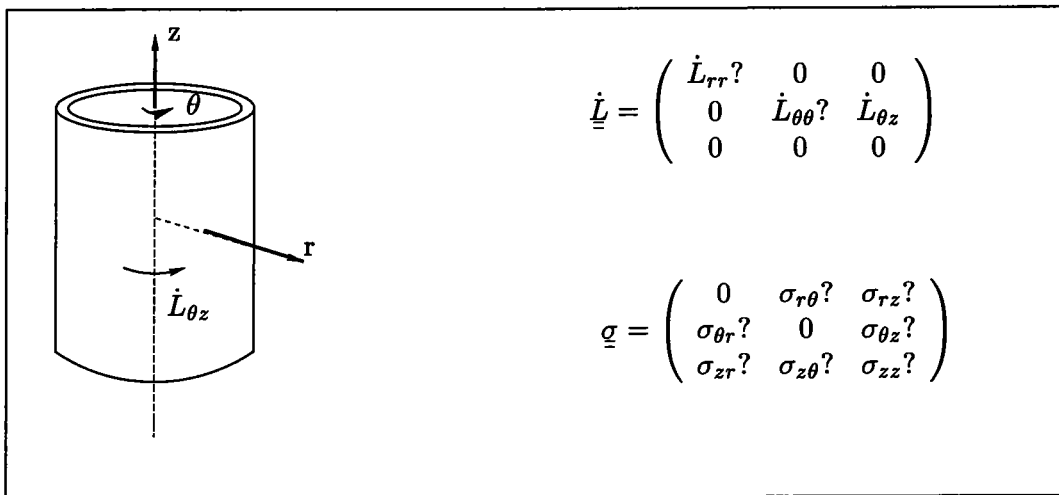


FIG. 4.17 – Conditions aux limites mixtes en torsion.

#### Conditions aux limites mixtes

- En traction

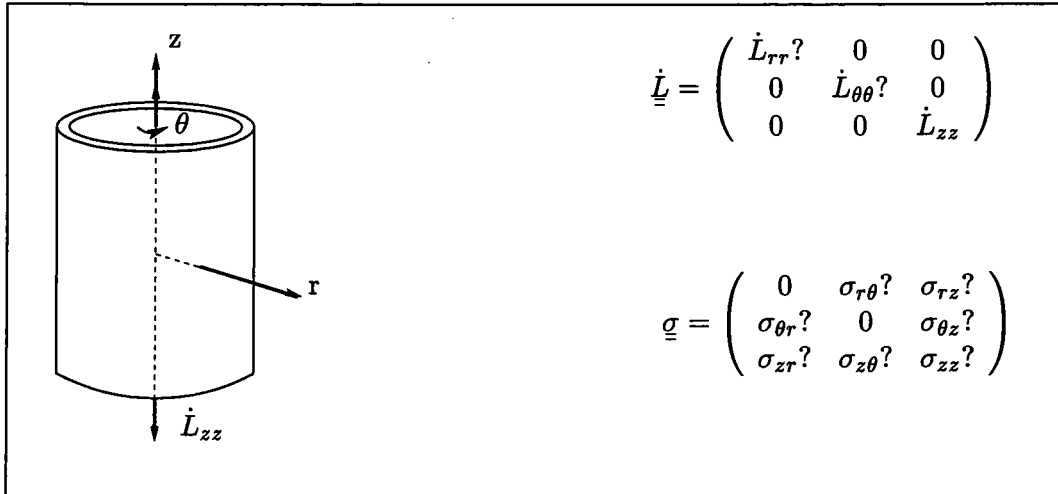


FIG. 4.18 – Conditions aux limites mixtes en traction.

#### 4.6.4 Résultats

L'évolution de la contrainte de traction et de cisaillement ( rapportées toute deux par rapport à leurs valeurs limites) au cours de l'essai de traction est représentée sur la Fig. 4.19.

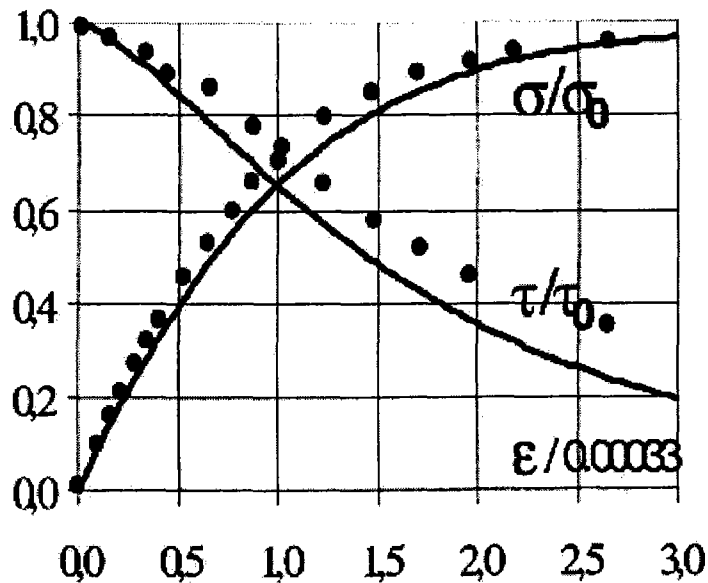


FIG. 4.19 – Comparaison entre les résultats donnés par la simulation et les résultats expérimentaux de Hohenemser.

Nous pouvons voir que le modèle reproduit bien le phénomène expérimental : les résultats de la simulation sont assez proches des résultats expérimentaux de Hohenemser, représentés sur la Fig. 4.19 par des points. Les différences entre les deux résultats peuvent provenir d'une texture cristallographique qui était peut-être présente au sein des échantillons de Hohenemser.

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la formulation établie au chapitre 3 à différents types de chargements. Le but de cette partie n'était pas seulement de comparer de façon quantitative nos résultats avec des résultats expérimentaux, mais aussi de mettre l'accent sur la généralité des applications possibles qui pouvaient être simulées par le modèle.

Dans la première partie du chapitre, nous avons vu que le fait de puiser l'information à une échelle microscopique, et d'avoir ainsi accès à certains paramètres internes,

permet une meilleure compréhension de certains phénomènes visibles à l'échelle macroscopique (voir chapitres 4.3 et 4.4).

Dans la deuxième partie du chapitre, nous avons montré l'avantage même que présente notre formulation : celle-ci tient compte de l'élasticité qui, comme nous l'avons vu au chapitres 4.5 et 4.6, joue un rôle important dans certains types de chargements, tels que les chargements avec changement dans le trajet de sollicitation. Il existe évidemment d'autres études formulées en élastoplasticité, mais notre démarche entièrement analytique présente l'avantage sur ces dernières de recourir à des temps de calculs beaucoup plus faibles.

## CHAPITRE 5

# Applications aux grandes déformations

### 5.1 Introduction

Au chapitre 3, nous avons développé une formulation analytique afin de décrire le comportement mécanique des matériaux polycristallins. Au chapitre 4, nous avons présenté quelques applications de ce modèle et ceci pour des chargements jusqu'à des déformations petites (1% à 2% de déformation).

Néanmoins, il est nécessaire d'investir dans le domaine des grandes déformations, si l'on veut aboutir à une représentation fondamentale satisfaisante, répondant aux conditions réelles rencontrées par les ingénieurs sur le terrain.

Afin de généraliser autant que possible les applications possibles du modèle, nous avons voulu chercher des applications aux grandes déformations, c'est à dire à des chargements allant, bien au-delà des 2%, jusqu'à des déformations totales de 100% ou même plus. Mais si l'on utilise le code de calcul tel qu'il est, nous nous trouvons confrontés à des temps de calculs extrêmement longs. La méthode que nous proposons devient presque inapplicable devant les codes existants (rigides-plastiques) formulés aux grandes déformations et qui fournissent des résultats quasi instantanés.

D'autre part, notre formulation par le fait qu'elle prend en compte la déformation élastique présente des avantages indéniables par rapport aux codes rigides-plastiques existants : la possibilité de procéder à la décharge élastique du matériau, l'accès aux contraintes internes,...sont des atouts majeurs qui caractérisent cette nouvelle formulation analytique.

Il devenait alors nécessaire de trouver des moyens afin de diminuer les temps de calculs et de modifier le code en conséquence.

## 5.2 Première méthode : Etude selon l'activité des systèmes de glissement

Une idée consiste à dire que le pas de calcul peut être augmenté selon l'emplacement du point de charge sur la surface de charge du monocristal (dans ce qui va suivre, les calculs seront menés, dans une première étape à une échelle microscopique : celle du grain).

En effet, si le point de charge se trouve sur la surface de charge à un emplacement qui correspondrait à une face plane (voir Fig. 5.1), on ne peut pas augmenter le pas de temps de calcul sans risquer de voir apparaître des instabilités sur la courbe contraintes-déformations. Par contre, si le point de charge est à proximité d'un vertex, le pas de temps de calcul peut être augmenté sans risquer que les calculs donnent des contraintes estimées trop à l'extérieur de la surface de charge (voir Fig. 5.2).

Aussi, il faut noter que pendant un incrément de déformation faible, la réorientation du réseau cristallographique change, mais très faiblement. De plus, cet effet est considéré dans le code de calcul.



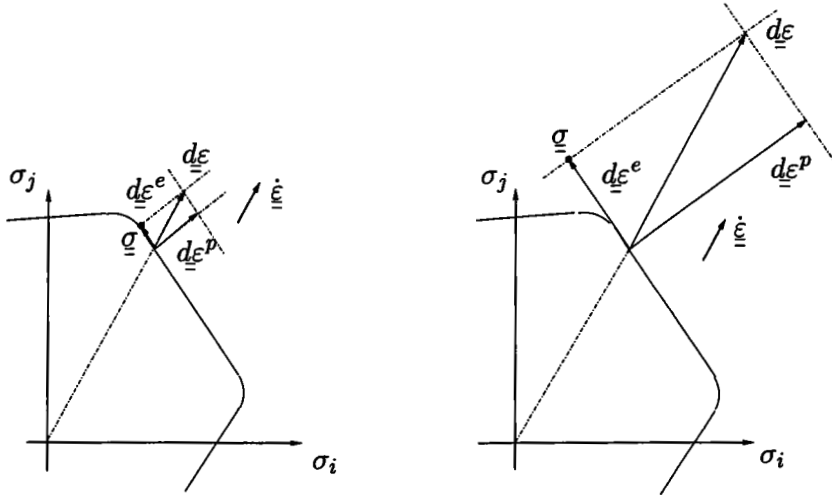


FIG. 5.1 – Augmentation du pas de temps de calcul quand le point de charge se trouve sur une face plane.

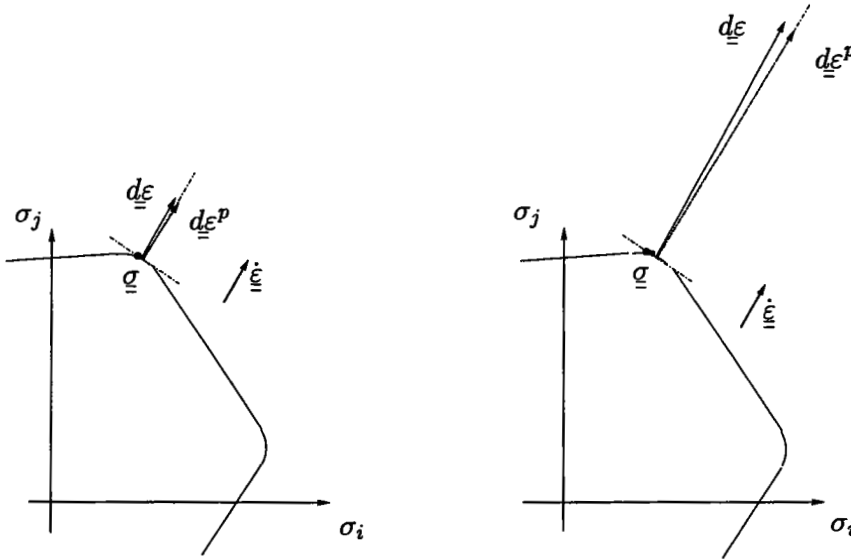


FIG. 5.2 – Augmentation du pas de temps de calcul quand le point de charge est à proximité d'un vertexe.

D'autre part, en suivant, à chaque incrément de déformation, l'évolution du nombre moyen de systèmes actifs, il est possible de statuer quant à l'emplacement du point

de charge sur la surface de charge du monocristal.

En effet, les faces planes de la surface de charge correspondent à des états où seul un système de glissement est actif. Par contre, si le point de charge se rapproche d'un vertex le nombre de systèmes de glissement actifs dans le grain sera de plus en plus grand.

Sur la courbe suivante nous donnons, pour un grain donné et une déformation donnée, l'allure générale de la distribution des activités ( $\dot{\gamma}$ ) dans les systèmes de glissement. Ici, les systèmes de glissement sont classés par ordre décroissant d'activité ; le système de glissement 1 étant celui qui présente l'activité maximale ( $\dot{\gamma}_{max}$ ). Nous constatons, d'une part, que l'activité des systèmes de glissement suit une allure Gaussienne, de plus, nous pouvons voir que bien que tous les systèmes soient potentiellement actifs, il n'en existe guère que 5 ou tout au plus 6 qui aient réellement une activité significative (c.-à-d.  $|\frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_{max}}| \geq 0.05$ ).

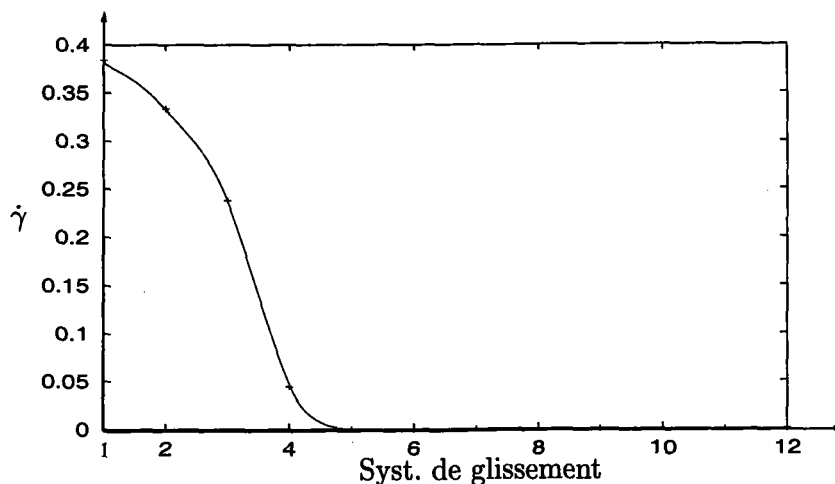


FIG. 5.3 – Distribution de l'activité des systèmes de glissement du grain d'orientation  $\varphi_1 = 246.49$ ,  $\phi = 57.51$ ,  $\varphi_2 = 224.68$ . Chargement en cisaillement simple, déformation totale accumulée  $\varepsilon = 0.2$ .

Afin de déterminer le nombre de systèmes de glissement actifs dans un grain, nous utilisons la mesure suivante [49] :

$$n_{act} = \sum_{s=1}^n \left| \frac{\dot{\gamma}^s}{\dot{\gamma}_{max}} \right| \quad (5.1)$$

Ici,  $\dot{\gamma}_{max}$  est la vitesse de glissement dans le système de glissement le plus actif, dans le grain considéré. La sommation est faite sur le nombre total  $n$  de systèmes de glissement. Il faut noter que la définition (5.1) est valable aussi bien dans les deux cas viscoplastique et non-viscoplastique.

## 5.2.1 Comportement en cisaillement simple

### Résultats

Sur les courbes suivantes, nous représentons les résultats de simulation d'essais de cisaillement sur des monocristaux jusqu'à une déformation totale accumulée  $\varepsilon^t = 1.0$ . Les courbes (Fig. 5.5, 5.6, 5.7, 5.9, 5.10) donnent l'évolution de la contrainte de cisaillement ainsi que l'évolution du nombre de systèmes de glissement actifs (donnée par l'équation 5.1) tout au long de la déformation plastique. Le chargement est maintenu jusqu'à une déformation totale accumulée  $\varepsilon^t = 1.0$ . Ces courbes sont données pour des grains d'orientations différentes.

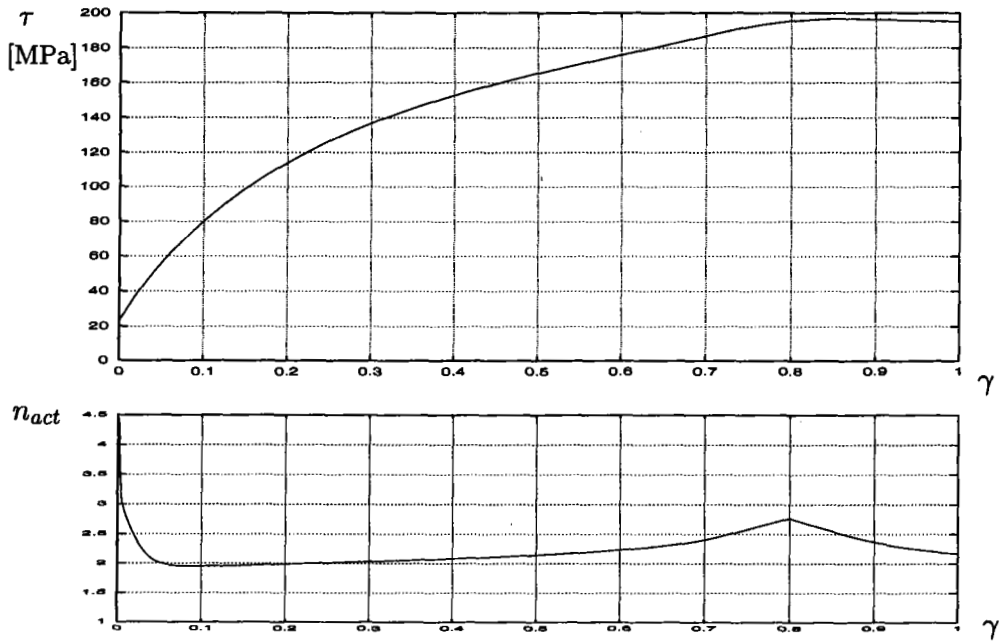


FIG. 5.4 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (1) :  $\varphi_1 = 191.17$ ,  $\phi = 65.60$ ,  $\varphi_2 = 155.75$  en cisaillement simple.

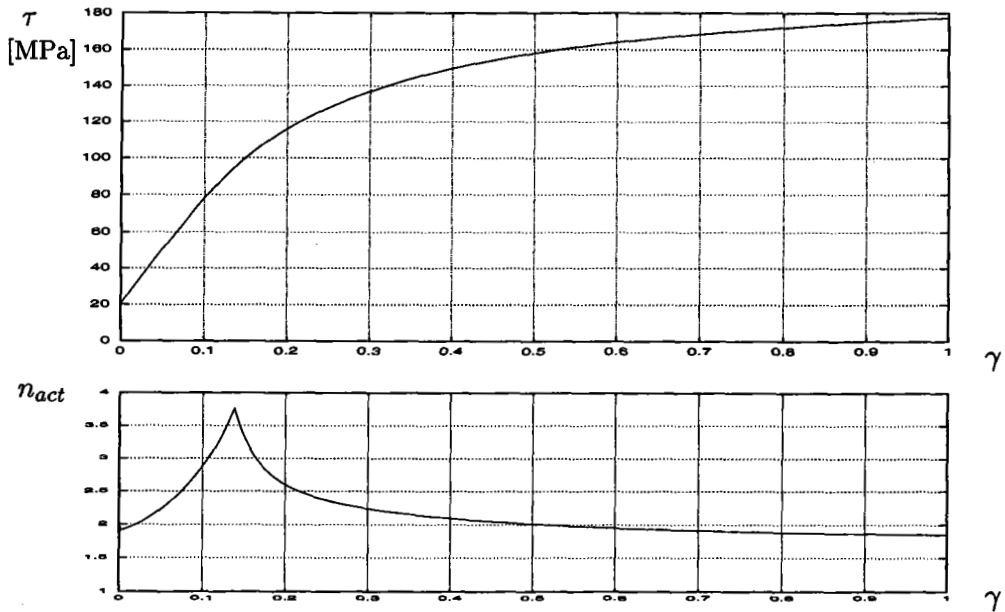


FIG. 5.5 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (2) :  $\varphi_1 = 55.13$ ,  $\phi = 52.89$ ,  $\varphi_2 = 36.98$  en cisaillement simple.

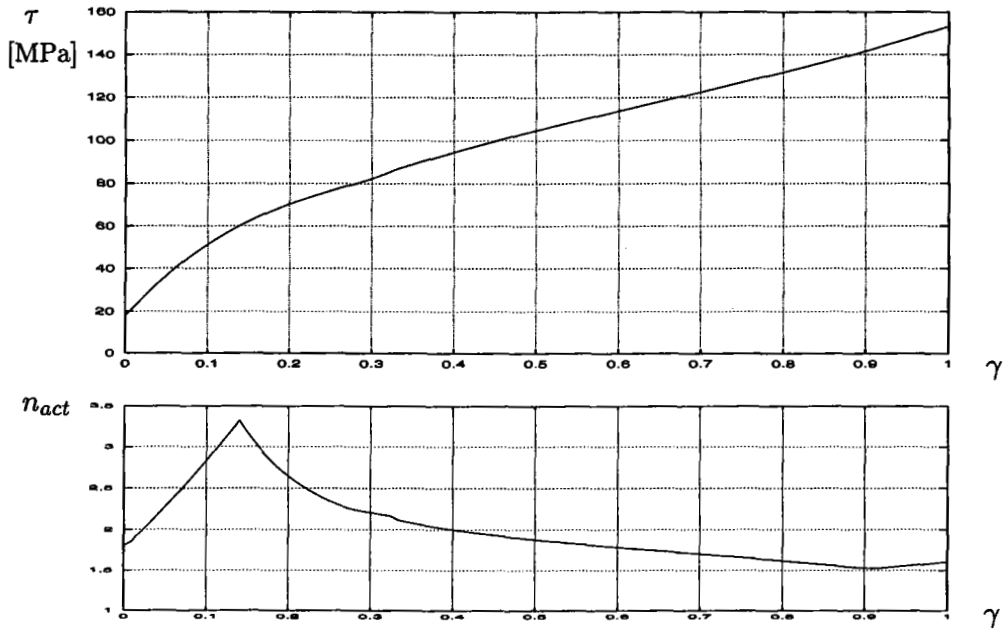


FIG. 5.6 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (3) :  $\varphi_1 = 246.49$ ,  $\phi = 57.51$ ,  $\varphi_2 = 224.68$  en cisaillement simple.

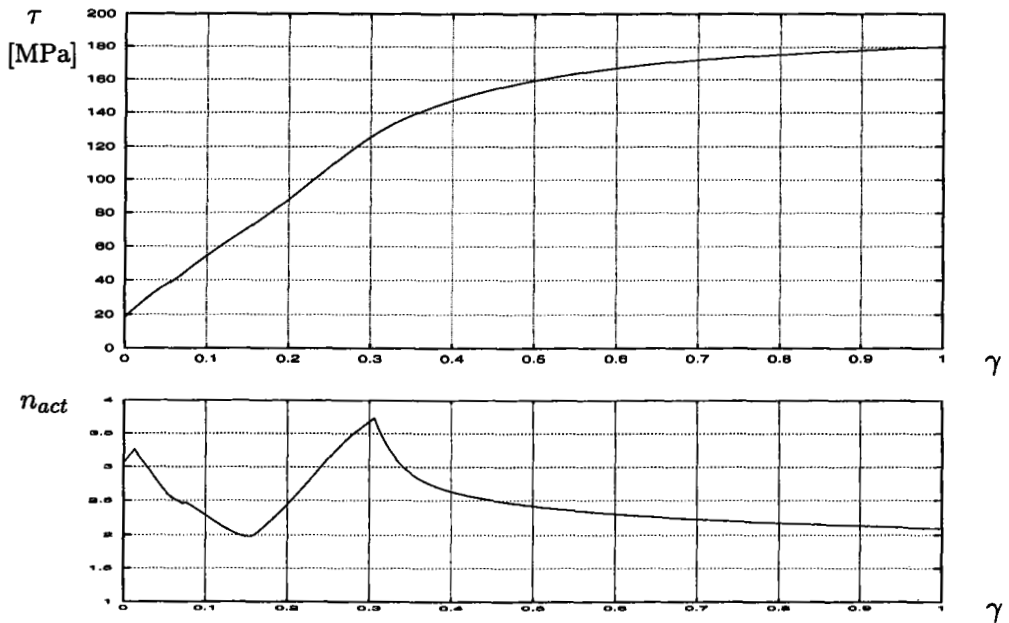


FIG. 5.7 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (4) :  $\varphi_1 = 50.56$ ,  $\phi = 53.38$ ,  $\varphi_2 = 59.01$  en cisaillement simple.

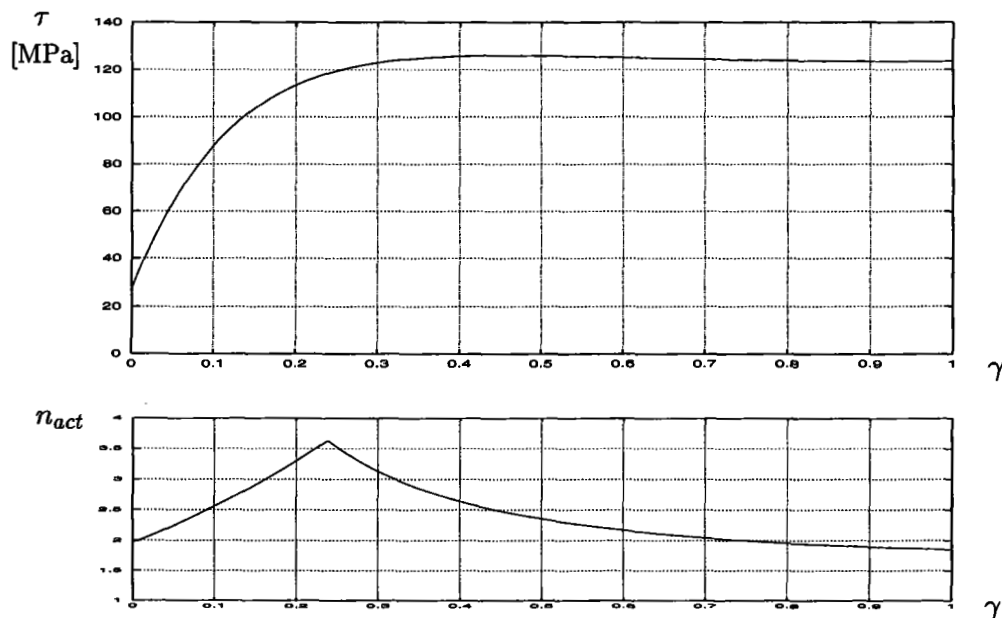


FIG. 5.8 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (5) :  $\varphi_1 = 132.07$ ,  $\phi = 7.04$ ,  $\varphi_2 = 7.04$  en cisaillement simple.

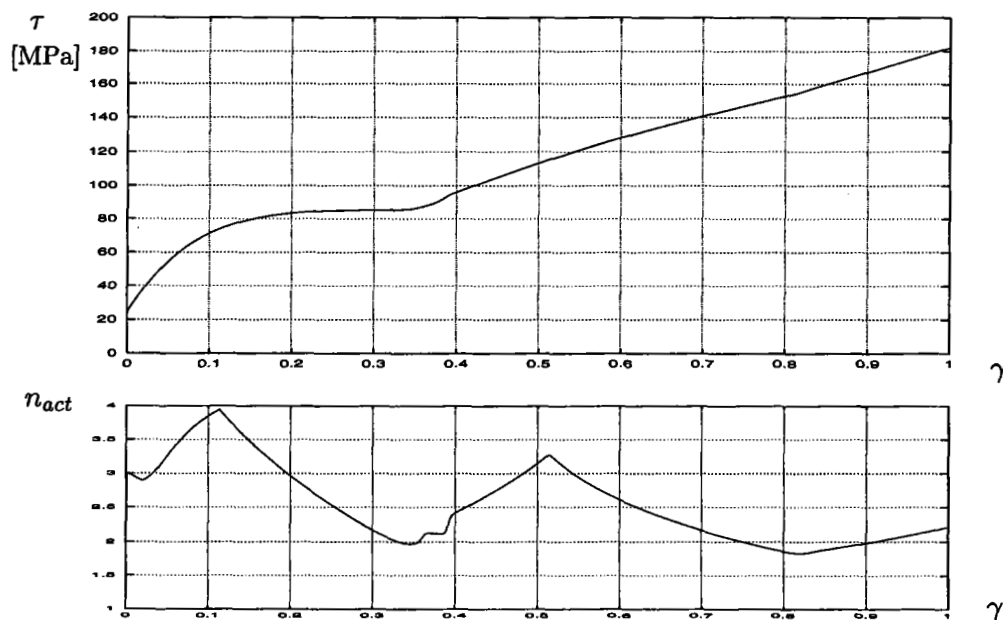


FIG. 5.9 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (6) :  $\varphi_1 = 3.91$ ,  $\phi = 68.44$ ,  $\varphi_2 = 65.22$  en cisaillement simple.

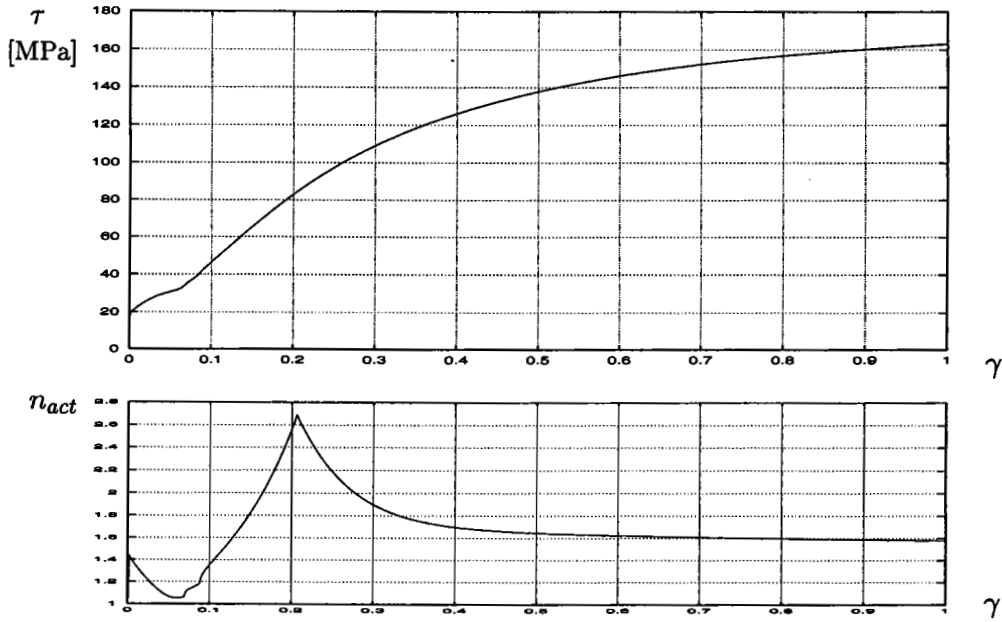


FIG. 5.10 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (7) :  $\varphi_1 = 88.60$ ,  $\phi = 54.30$ ,  $\varphi_2 = 52.05$  en cisaillement simple.

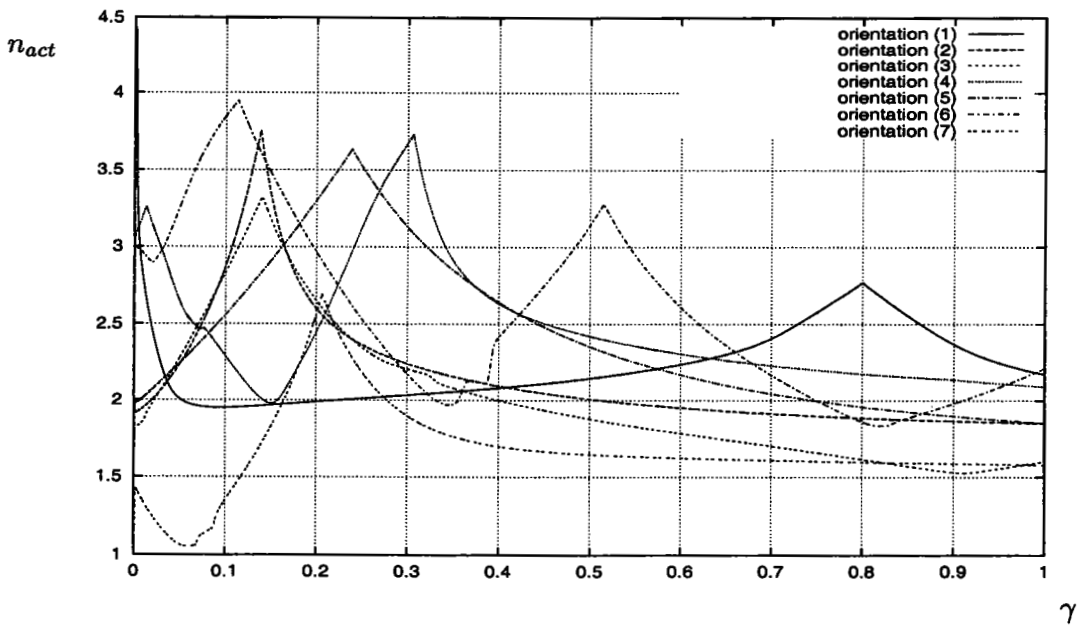


FIG. 5.11 – Evolution de l'activité des systèmes de glissement tout au long de la déformation plastique dans différents grains.

## Discussion des résultats

Il ressort principalement deux constatations de l'analyse des courbes Fig. 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10) :

- Les pics, correspondant à une augmentation rapide du nombre de systèmes de glissement actifs, correspondent à des changements de courbure sur les courbes contraintes-déformations. En contrepartie, la chute du nombre de systèmes actifs s'accompagne d'une stabilisation de la pente des courbes. La fluctuation du nombre de systèmes actifs est due au fait, qu'en cisaillement, le point de charge cherche une position stable sur l'une des faces planes de la surface de charge du monocristal.
- D'autre part, nous pouvons remarquer que le nombre de systèmes de glissement actifs n'excède pas 5 systèmes.

En analysant l'évolution de l'activité des systèmes de glissement tout au long de la déformation dans les différents grains (Fig. 5.11), on peut constater que pour un état de déformation donné, le nombre de systèmes actifs sera différent d'un grain à l'autre. Cela signifie que pour un même stade de déformation le point de charge peut aussi bien être sur une face plane de la surface de charge dans un grain, et à proximité d'un vertexe dans un autre grain.

Le pas de temps  $dt$  peut donc être augmenté pour des grains individuels en fonction du nombre plus ou moins grand des systèmes actifs. Cette augmentation peut aller jusqu'à un facteur de 10 et celle-ci entraîne effectivement une accélération significative des calculs. Mais du fait que nous sommes tenus par l'adoption du modèle de Taylor-Lin d'imposer le même incrément de déformation à tous les grains, si nous augmentons le pas de temps (donc l'incrément de déformation) dans un grain, celui-ci est automatiquement augmenté dans tous les autres : nous voyons alors apparaître des instabilités sur les courbes contraintes-déformations de certains grains qui affectent nécessairement la courbe d'écrouissage globale du matériau.



## 5.2.2 Comportement en traction

### Résultats

Sur les courbes suivantes, nous représentons les résultats de simulation d'essais de traction sur des monocristaux jusqu'à une déformation totale accumulée  $\varepsilon^t = 1.0$ . Les conditions limites mixtes de la traction simple décrites dans le paragraphe (4.5.1) ont été appliquées pour les monocristaux. Les courbes (Fig. 5.12, 5.13, 5.14, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18) donnent l'évolution de la contrainte axiale et du nombre de systèmes actifs tout au long de la déformation plastique.

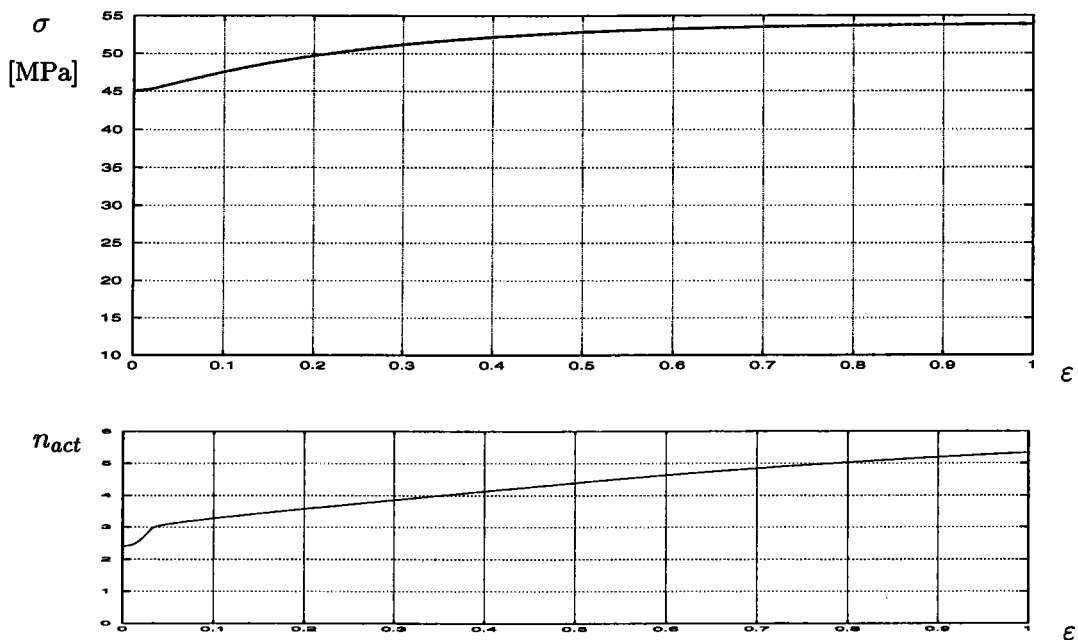


FIG. 5.12 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (1) :  $\varphi_1 = 191.17$ ,  $\phi = 65.60$ ,  $\varphi_2 = 155.75$  en traction.

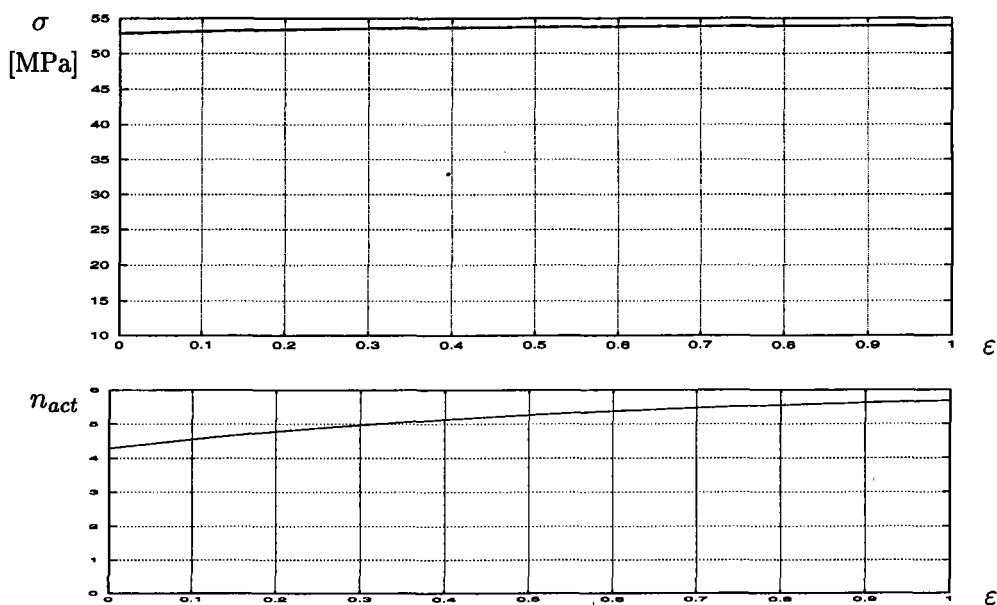


FIG. 5.13 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (2) :  $\varphi_1 = 55.13$ ,  $\phi = 52.89$ ,  $\varphi_2 = 36.98$  en traction.

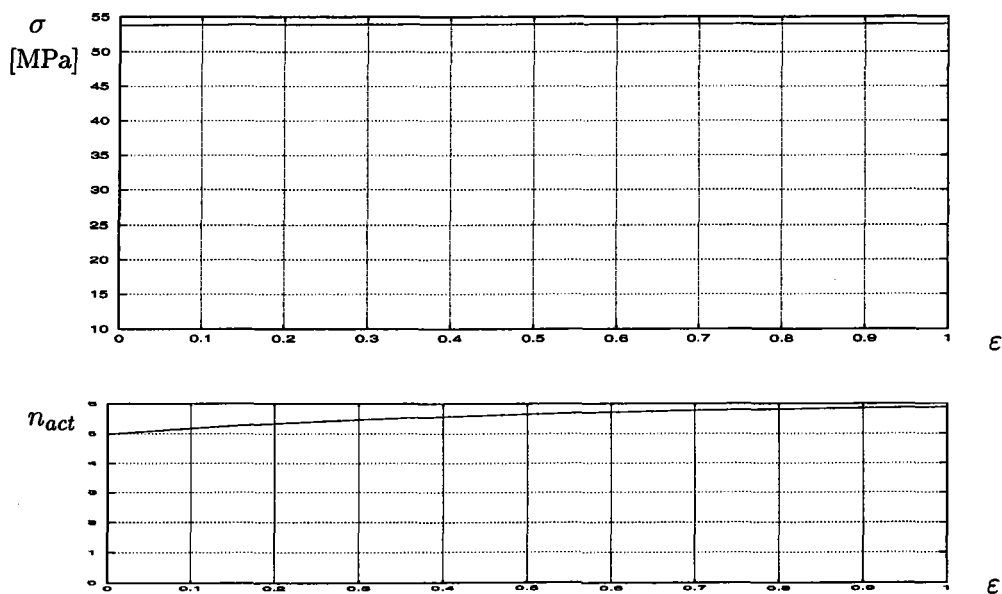


FIG. 5.14 - Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (3) :  $\varphi_1 = 246.49$ ,  $\phi = 57.51$ ,  $\varphi_2 = 224.68$  en traction.

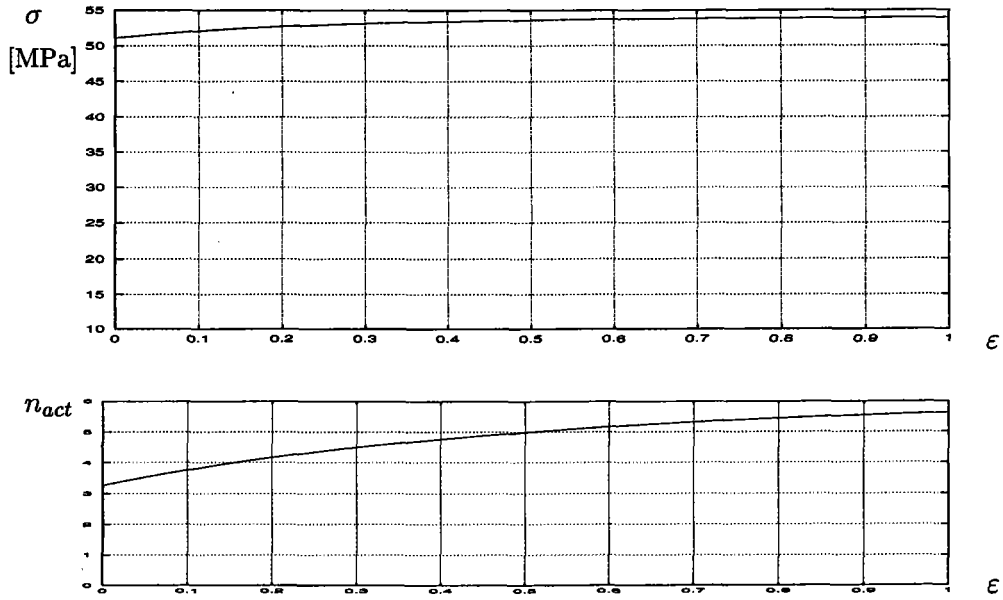


FIG. 5.15 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (4) :  $\varphi_1 = 50.56$ ,  $\phi = 53.38$ ,  $\varphi_2 = 59.01$  en traction.

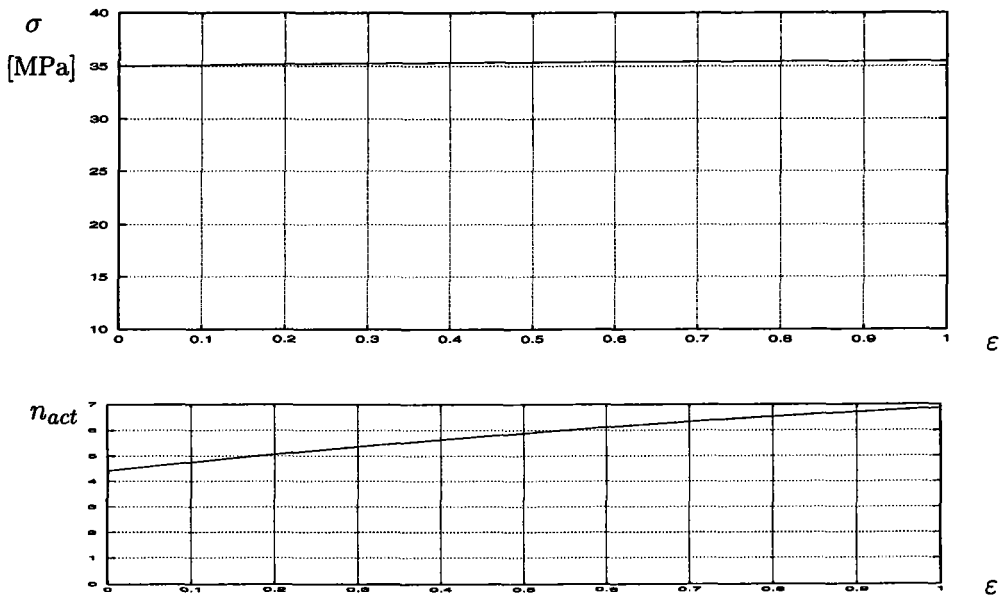


FIG. 5.16 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (5) :  $\varphi_1 = 132.07$ ,  $\phi = 7.04$ ,  $\varphi_2 = 7.04$  en traction.

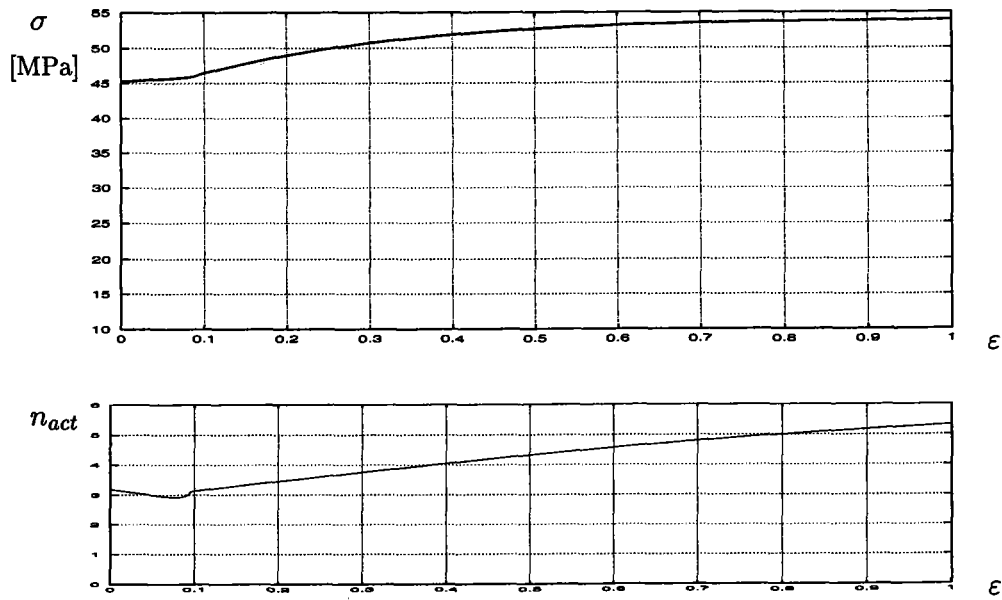


FIG. 5.17 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (6) :  $\varphi_1 = 3.91$ ,  $\phi = 68.44$ ,  $\varphi_2 = 65.22$  en traction.

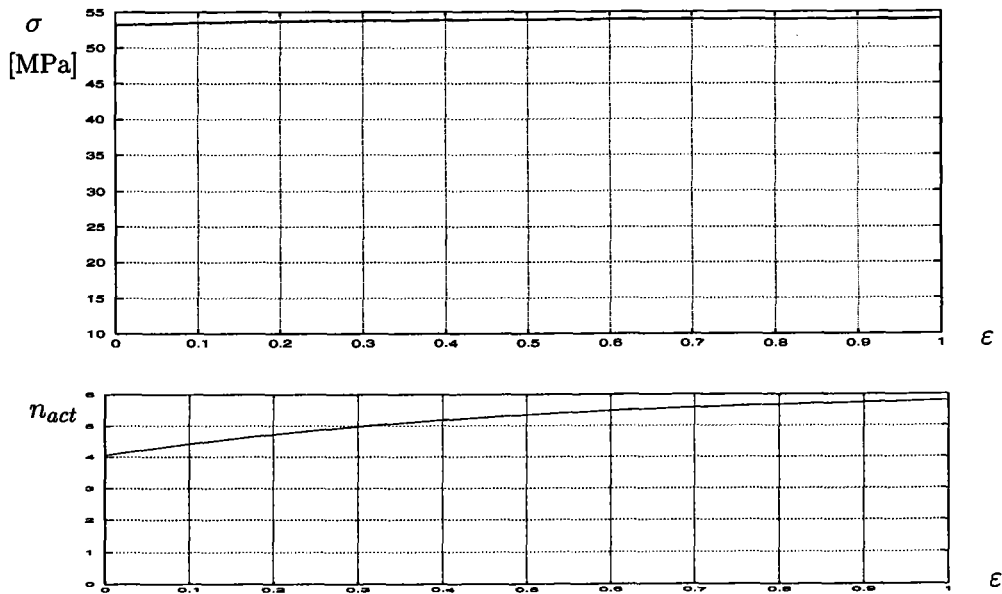


FIG. 5.18 – Courbe contrainte-déformation et évolution de l'activité des systèmes de glissement pour le grain d'orientation (7) :  $\varphi_1 = 88.60$ ,  $\phi = 54.30$ ,  $\varphi_2 = 52.05$  en traction.

## Discussion des résultats

De l'analyse des courbes ci-dessus, nous pouvons faire ressortir les constatations suivantes :

- L'évolution du nombre de systèmes actifs suit une allure monotone, toujours croissante. En effet, en traction, le point de charge cherche une position stable sur un vertexe ; une fois celui-ci atteint, généralement, on n'observe plus d'évolution du point de charge sur la surface de charge (si l'écrouissage est nul).
- De façon générale, le nombre de systèmes actifs dans le cas de la traction est plus élevé que pour le cisaillement. Aux grandes déformations ce nombre dépasse cinq systèmes de glissement et atteint parfois sept systèmes.

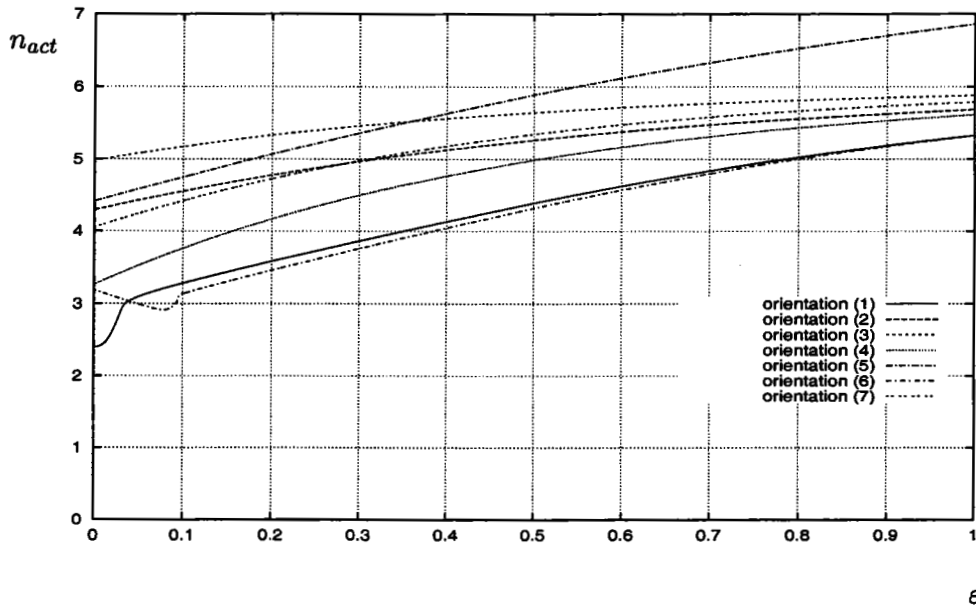


FIG. 5.19 – Evolution de l'activité des systèmes de glissement tout au long de la déformation plastique dans différents grains.

## 5.3 Deuxième méthode: Calcul mixte rigide-plastique et élastoplastique

Une autre méthode consiste à réaliser un gros pourcentage de la déformation grâce à un calcul rigide-plastique. Après décharge complète du matériau, la déformation

totale du matériau est achevée grâce au calcul élastoplastique.

Nous conjugons ainsi la rapidité du calcul rigide-plastique et l'accès à certaines informations ( telles que les états des contraintes internes ) apporté par le calcul élastoplastique.

La méthodologie que nous proposons peut être schématisée comme suit:

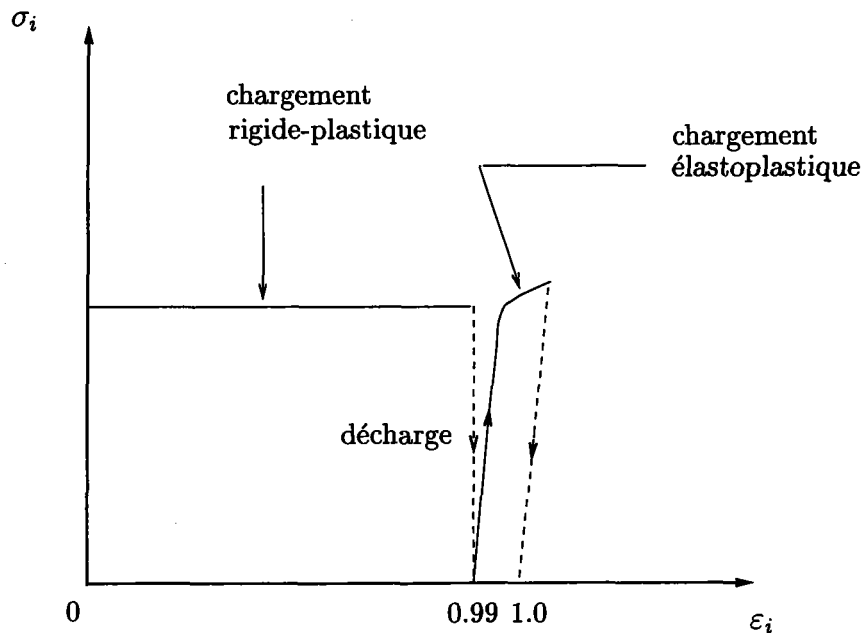


FIG. 5.20 – schéma du calcul mixte : rigide-plastique et élastoplastique.

Le calcul rigide-plastique est réalisé grâce au code de calcul formulé à partir du modèle de Taylor viscoplastique [48] dans lequel la sensibilité à la vitesse de déformation est prise quasiment négligeable.

Dans la première partie de la simulation du chargement par le modèle, l'élasticité est donc entièrement négligée. Ce chargement est réalisé jusqu'à une déformation totale accumulée arbitraire. Dans notre cas, nous avons pris  $\epsilon_1^t = 0.99$ .

Après que le matériau a été chargé jusqu'à cette déformation, celui-ci est déchargé. A ce stade, la contrainte macroscopique est nulle, la déformation totale accumulée est  $\epsilon_1^t$  et nous disposons des nouvelles orientations cristallographiques induites par le

chargement.

Ces données sont utilisées afin de procéder à la simulation d'un nouveau chargement sur le matériau en utilisant cette fois le modèle élastoplastique formulé en petites déformations (chapitre 3). Ce modèle nécessite effectivement de considérer des incréments de déformation très petits. Ce nouveau chargement est réalisé jusqu'à atteindre la déformation totale finale choisie.

Dans ce cas, comme pour les cas précédents, la déformation totale imposée est  $\varepsilon^t = 1.0$ . La deuxième partie du chargement est donc entreprise pour une déformation totale  $\varepsilon_2^t = 0.01$  ; ce qui est, d'une part, suffisant pour atteindre une plastification du matériau et, d'autre part, réalisé en un temps de calcul très court.

Grâce à ce procédé, nous simulons un essai de compression sur le cuivre polycristallin. Le matériau est représenté par un agrégat de 500 grains. En marge de ce calcul, la simulation de l'essai de compression jusqu'à la même déformation  $\varepsilon^t = 1.0$  est simulée entièrement grâce au code élastoplastique formulé en petites déformations. Nous comparons les résultats fournis par chacune de ces deux démarches (l'avantage de notre modèle résidant dans l'accès qu'il permet à la décharge ainsi qu'aux variables internes, le matériau sera dans les deux cas totalement déchargé après que  $\varepsilon^t = 1.0$  ait été atteinte et certaines variables internes fournies par les deux calculs seront comparées).

### 5.3.1 Etude des courbes contrainte-déformation

- Calcul élastoplastique

La courbe suivante (Fig. 5.21) donne les résultats du chargement complet en compression jusqu'à  $\varepsilon^t = 1.0$  suivi de la décharge du matériau réalisés grâce au modèle élastoplastique formulé en petites déformations. La décharge est terminée lorsque la contrainte macroscopique est nulle.

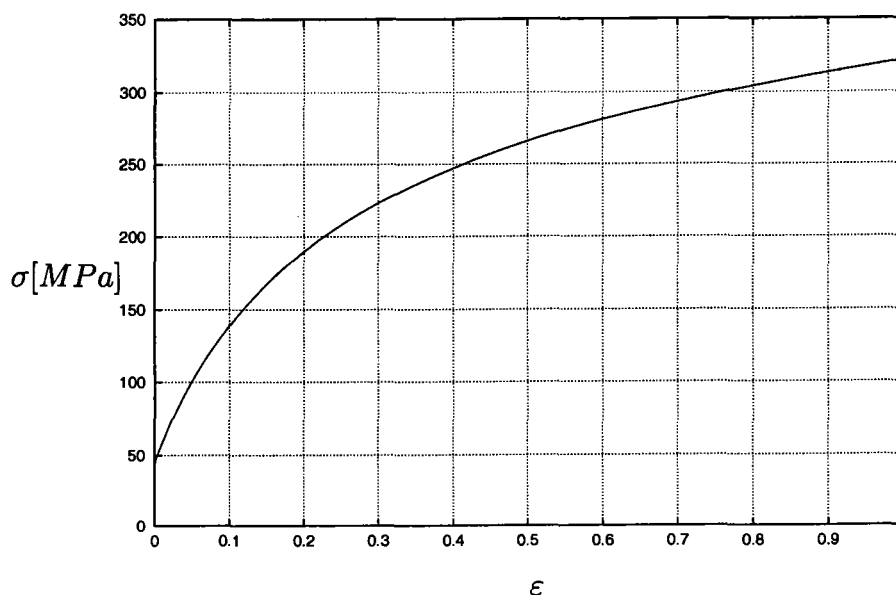


FIG. 5.21 – Chargement jusqu'à  $\varepsilon^t = 1.0$  et décharge complète du matériau. Calcul en petites déformations.

La figure suivante (Fig. 5.22) est un agrandissement de la partie finale de la courbe précédente (Fig. 5.21). Nous pouvons alors voir après la décharge que la déformation accumulée est  $\varepsilon^p = 0.9974$ .



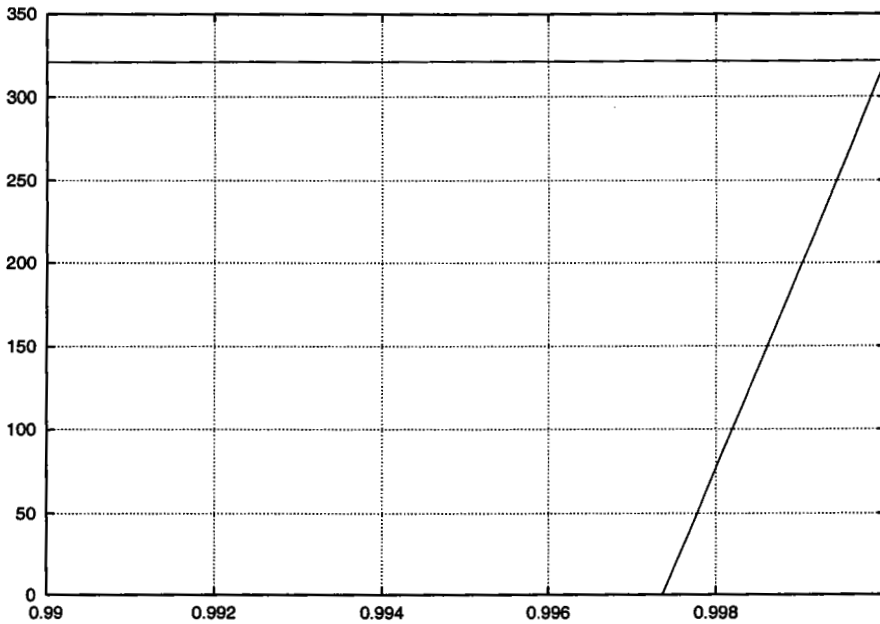


FIG. 5.22 – *Partie finale du chargement et décharge complète du matériau. Calcul en petites déformations.*

### • Calcul mixte : rigide-plastique et élastoplastique

Sur la courbe (Fig. 5.21) ne sont représentés que les résultats de la simulation du deuxième chargement élastoplastique ainsi que la décharge du matériau. Comme précédemment, on considère la décharge achevée quand la contrainte macroscopique  $\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = 0$ . Rappelons que la simulation de ce chargement fait suite à un autre calcul : le matériau a été au préalable chargé plastiquement jusqu'à une déformation totale  $\epsilon^t = 0.99$ , puis déchargé.

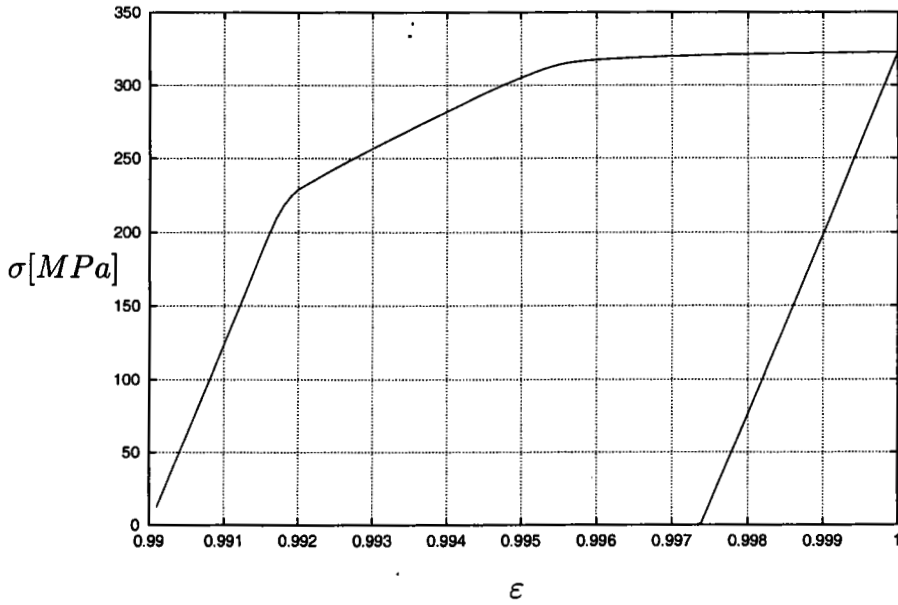


FIG. 5.23 – *Après décharge du matériau à  $\epsilon^t = 0.99$ , chargement jusqu'à  $\epsilon^t = 1.0$  et décharge complète du matériau. Calcul mixte : rigide-plastique et élastoplastique.*

Nous pouvons voir, dans ce cas aussi (Fig. 5.23), que la déformation plastique accumulée est  $\epsilon^t = 0.9974$ .

### 5.3.2 Comparaison des textures cristallographiques

Les figures Fig. 5.24 et 5.25 présentent les figures de pôles  $\{110\}$  du matériau déchargé pour les deux types de chargements : la figure Fig. 5.24 correspond au calcul effectué entièrement en petites déformations, la figure Fig. 5.25 pour le calcul mixte rigide-plastique et élastoplastique.

Nous pouvons remarquer que les deux figures de pôles sont pratiquement identiques.

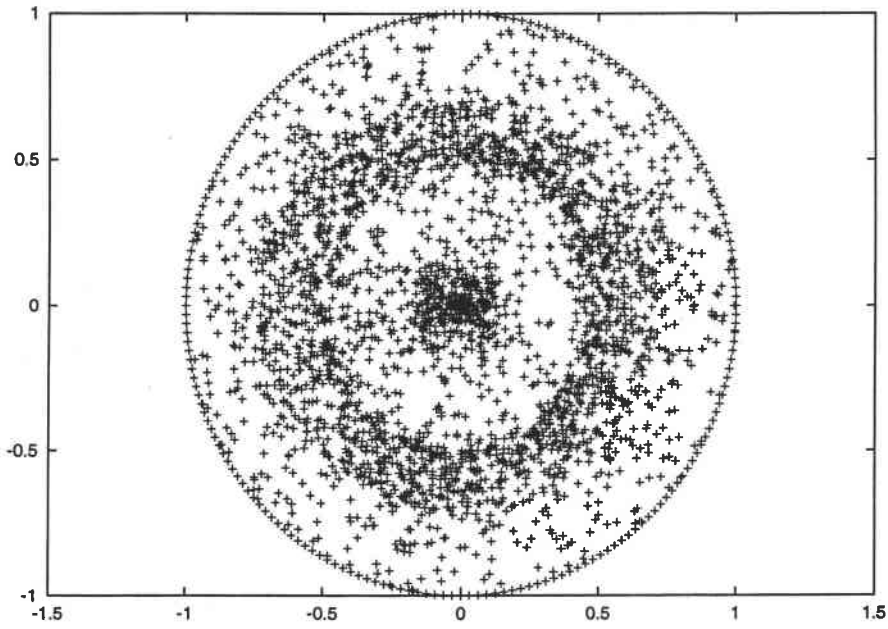


FIG. 5.24 – *Figure de pôles {110} donnée par le calcul en petites déformations.*

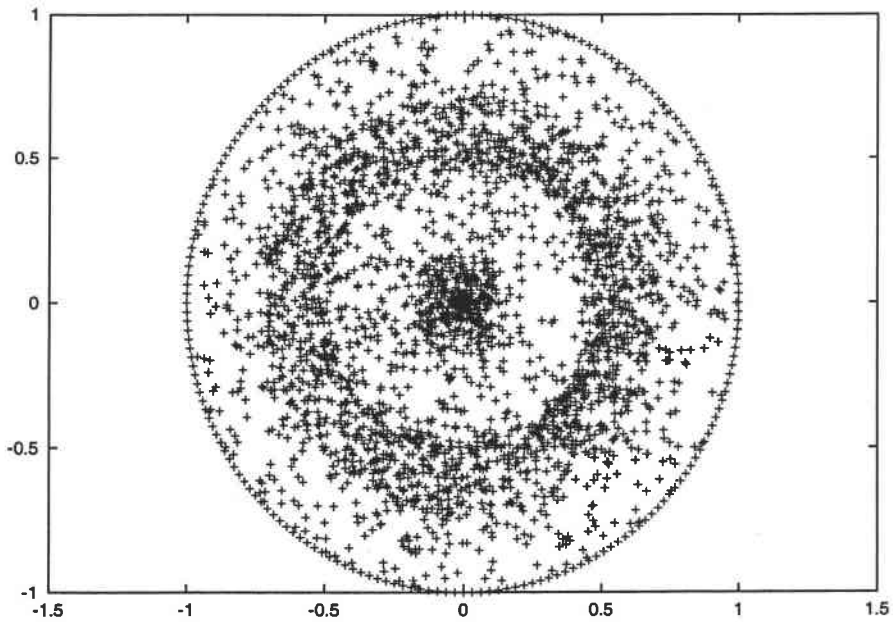


FIG. 5.25 – *Figure de pôles {110} donnée par le calcul mixte.*

### 5.3.3 Comparaison des paramètres internes

Dans cette partie, nous comparons les paramètres internes fournis après chargement et déchargement du matériau par les deux calculs.

Nous notons (1) le calcul élastoplastique formulé en petites déformations. Aussi, tous les paramètres internes découlant de ce type de chargement seront notés  $( )^1$ .

Le calcul mixte rigide-plastique et élastoplastique est noté (2) et de la même façon tous les paramètres qui s'y rattachent seront surmontés de l'indice 2:  $( )^2$ .

- La première comparaison entreprise concerne les orientations cristallographiques des grains induites par les deux types de chargements. Si  $\theta^1$  représente l'orientation  $(\varphi_1^1, \phi^1, \varphi_2^1)$  et  $\theta^2$  l'orientation  $(\varphi_1^2, \phi^2, \varphi_2^2)$ , alors nous calculons pour chaque grain la différence  $\theta^1 - \theta^2$  que nous notons  $\theta$ . Cette différence est exprimée en degrés.
- Nous avons ensuite cherché à comparer la composante  $\sigma_{33}$  de la contrainte interne dans chaque grain, induite à chaque fois par le chargement (1) et (2). On note  $\delta$  la différence  $|\sigma_{33}^1 - \sigma_{33}^2|$  rapportée à la contrainte macroscopique que l'on calcule pour chaque grain. Cette différence est exprimée en % par rapport à la contrainte macroscopique avant la décharge.
- Enfin, nous comparons les différences d'orientations des tenseurs contraintes internes induits au cours des deux types de chargements:

$$\omega = \text{acos} \left( \frac{\underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^2}{\sqrt{(\underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\sigma}}^1)(\underline{\underline{\sigma}}^2 : \underline{\underline{\sigma}}^2)}} \right), \omega \text{ est donné en degrés.}$$

Dans le tableau suivant (Tab.5.1), nous donnons les valeurs de ces différences pour les trente premiers grains.

$N^0$ du grain	$\theta$ [deg]	$\delta$ [%]	$\omega$ [deg]
1	2.6554	14.0089	36.0630
2	2.6094	3.8704	6.7413
3	1.3594	3.8321	6.7710
4	0.8115	1.5810	2.7322
5	0.2049	2.0596	2.2963
6	4.6214	4.9655	15.7242
7	0.3890	0.0857	2.8895
8	1.5611	2.8444	4.6670
9	0.9159	4.2607	7.1352
10	2.9166	3.3083	6.3934
11	1.7257	2.0407	3.5033
12	1.3969	9.8040	28.4112
13	0.6920	8.4997	27.4431
14	1.8379	3.8596	7.2352
15	0.9846	3.4043	5.6793
16	0.7998	0.0406	3.0454
17	2.2160	4.3382	26.6262
18	1.7834	3.5802	6.5227
19	2.1003	2.2014	4.2551
20	1.3202	1.2780	3.5792
21	0.4899	1.7674	1.9845
22	2.9778	1.7184	5.1538
23	0.8545	4.3823	7.1462
24	2.7474	14.4106	36.5605
25	2.4657	2.8506	38.4645
26	1.7904	4.9904	20.2909
27	1.0518	2.7457	3.8471
28	2.6508	0.5601	3.9790
29	1.3426	2.3295	3.6075
30	2.1176	3.4244	6.1483

TAB. 5.1 – Différence entre les triplets d'angles d'Euler, les valeurs des contraintes internes et leurs orientations données par les deux calculs.

Nous pouvons voir sur le tableau 5.1 que les deux calculs (élastoplastique et mixte) donnent des prévisions des orientations cristallographiques très proches l'une de l'autre. En effet, la différence  $\theta$  entre les orientations des grains données par chacune des deux simulations est à peu près de 2 degrés ; ce qui est relativement faible. Les valeurs des différences  $\theta$  dans chaque grain permettent de quantifier un résultat déjà trouvé lors de la comparaison des figures de pôles données par les deux calculs en (1.3.2). Nous avons effectivement constaté que les deux types de calculs donnaient des figures de pôle très proches l'une de l'autre, sans pour autant être vraiment identiques.

L'interprétation des résultats donnés dans la 3<sup>ième</sup> et la 4<sup>ième</sup> colonne est moins évidente. Les valeurs de  $\delta$  et de  $\omega$  permettent de comparer les états de contraintes internes fournis par les deux calculs après décharge du matériau.

La différence  $\delta$  (qui représente la différence entre les composantes dans l'axe de sollicitation des contraintes internes données par les deux types de simulations, rapportée à la contrainte macroscopique moyenne) est relativement faible. Sur les 30 grains considérés, la différence maximale enregistrées est de 14%.

Quant à la valeur  $\omega$ , celle-ci exprime la différence (en degrés) entre les orientations des tenseurs contraintes internes fournis par les deux calculs. Cette différence est quelquefois non négligeable ; elle est de 36 ou 38 degrés pour certains grains (grains  $N^0 1$  et  $N^0 25$ ). De plus il faut remarquer que les différences notées plus haut semble n'avoir aucune corrélation entre elles. En effet, nous pouvons voir que pour certains grains, la différence  $\omega$  est relativement élevée bien que les différences  $\theta$  et  $\delta$  soient assez faibles.

Les figures suivantes (Fig. 5.26 et 5.27) représentent la distribution des contraintes internes dans les grains après chargement jusqu'à une déformation totale  $\varepsilon = 1$ . et décharge complète du matériau par les deux types de calculs (élastoplastique et rigide-plastique).

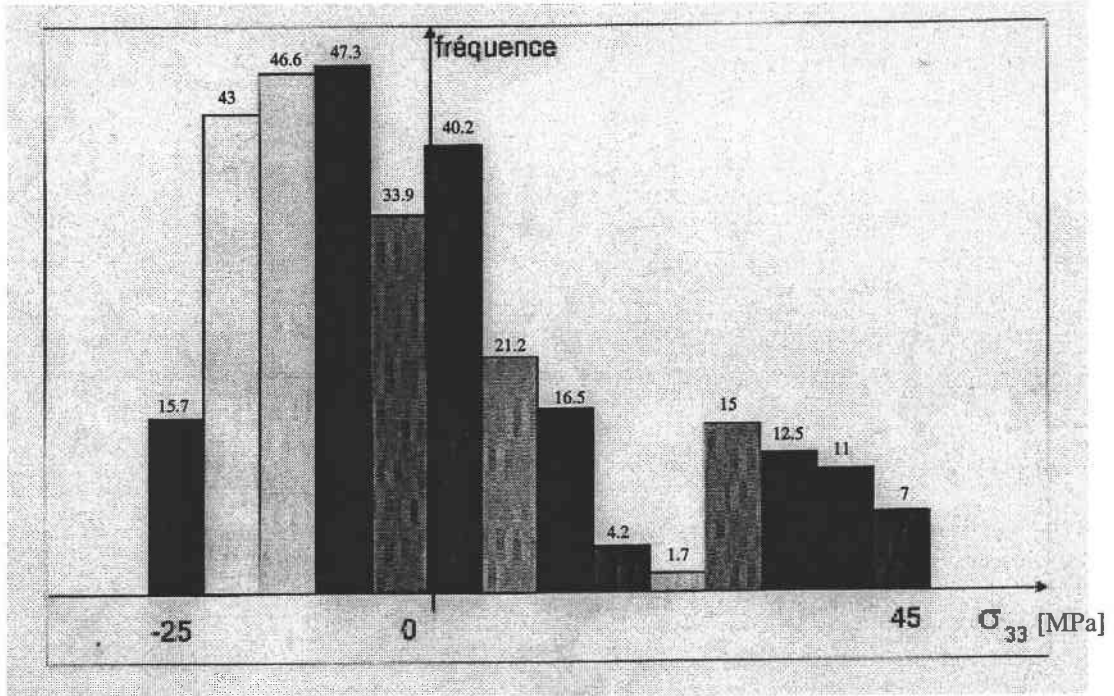


FIG. 5.26 – Distribution des contraintes internes donnée par le calcul élastoplastique.

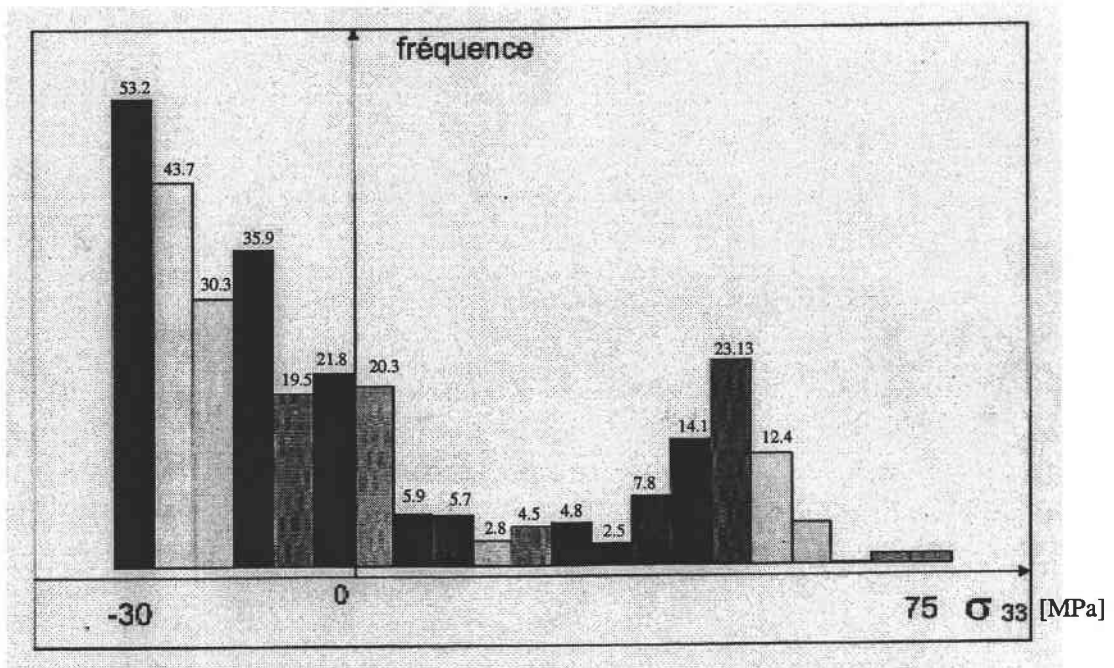


FIG. 5.27 – Distribution des contraintes internes donnée par le calcul mixte.

La contrainte interne, dans les deux cas, est globalement nulle dans le polycristal. Mais la distribution des contraintes est sensiblement différente selon que le calcul a été simulé par le chargement élastoplastique ou rigide-plastique.

Dans le deuxième cas, il semblerait que le chargement induit deux groupes de contraintes internes.

## 5.4 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de diminuer les temps de calculs du code polycristallin en vue de l'application de notre modèle aux grandes déformations.

La première méthode proposée est basée sur l'étude de l'activité des systèmes de glissement. L'idée est d'augmenter le pas de chargement quand le point de charge se trouve à proximité d'un vertexe et que le nombre de systèmes de glissement actifs devient important. L'étude montre, qu'en cisaillement simple, l'activité des systèmes de glissement fluctue, de plus est, différemment d'un grain à un autre. Par l'adoption du modèle de Taylor-Lin, nous sommes tenus d'augmenter uniformément le pas de chargement (donc l'incrément de déformation) dans tout les grains, si on le fait pour l'un d'eux. Ceci entrainerait des instabilités sur les courbes contrainte-déformation. L'étude en traction, montre que l'activité des systèmes de glissement croît régulièrement tout au long du chargement. Dans ce cas, la méthode préconisée pourrait être utilisée.

Nous avons présenté une deuxième méthode qui consiste à réaliser le chargement grâce à une calcul mixte : rigide-plastique et élastoplastique. Nous obtenons effectivement des temps de calculs très courts, et cette démarche permet (comparée aux formulations rigide-plastiques) de procéder à la décharge élastique et à certaines variables internes, tels que les contraintes internes. Les résultats fournis par le calcul mixte sont comparés aux résultats que donne le calcul élastoplastique formulé entièrement aux petites déformations. Les résultats fournis par les deux calculs sont assez proches.



# Conclusion et perspectives

Ce travail consistait à présenter une nouvelle approche analytique pour l'étude du comportement élastoplastique de matériaux cristallins.

En s'inspirant de l'expression du potentiel viscoplastique proposée par Tóth et al. et d'une proposition avancée antérieurement par Arminjon qui consiste en une modification de la loi de Schmid, un nouveau critère de charge est adopté pour décrire la surface de charge du monocristal dans le cas de la plasticité indépendante du temps. Ce nouveau critère consiste en une généralisation de la loi de Schmid sur tous les systèmes de glissement. Il aboutit à une surface de charge arrondie qui, pour des cas limites, approche la surface de référence de Bishop et Hill. Il présente de plus l'avantage de fournir une solution unique pour l'état de contrainte et la distribution des systèmes de glissement. Ceci permet de lever l'ambiguïté dans le choix des systèmes actifs que pose l'adoption du critère de Schmid.

Cette nouvelle fonction est utilisée pour obtenir une expression analytique du module élastoplastique pour le monocristal. Cette formulation permet de déterminer directement l'incrément de contrainte ou de déformation durant le chargement sans procéder à aucune itération. Les calculs numériques s'en trouvent simplifiés et les temps de calculs réduits.

Le comportement global du matériau est déterminé en intégrant le module élastoplastique du monocristal dans le modèle de Taylor-Lin des polycristaux. L'un des grands avantages de ce nouveau modèle réside dans sa prise en compte de l'effet élastique qui peut, entre autres, se produire lors de chargements avec changement dans le trajet de sollicitation (cas des trajets séquentiels dans les procédés de mise en forme).

Aussi, nous avons procédé à des applications du modèle à ce type de chargements. Dans ce cadre, les simulations d'essais cycliques en traction-compression et d'un essai

de torsion-traction ont été entrepris.

Les phénomènes de base observés expérimentalement en plasticité cyclique ont été reproduits fidèlement par le modèle et ceci pour des temps de calculs bien inférieurs à ceux qui étaient requis par des études précédentes. Il en est de même pour l'essai de torsion-traction pour lequel les résultats de la simulation ont été comparés de façon quantitative aux résultats expérimentaux. Ces différents résultats démontrent le pouvoir prédictif de ce modèle concernant ce type de chargement.

En marge de ces simulations, des applications ont été faites à des chargements monotones pour lesquels l'écroutissement intracristallin était négligé. On montre alors que le fait de puiser l'information à une échelle microscopique et d'avoir accès à certaines variables internes permet de mieux comprendre des phénomènes observables à une échelle macroscopique.

A ce stade de l'étude, nous montrons que la simplicité des lois de comportement adoptés n'affecte en aucun cas la généralité des applications de notre modélisation. De plus, comparée à des études précédentes, notre approche présente l'avantage de produire des résultats concrets et facilement exploitables en réalisant des économies considérables en temps de calculs. Mais il faut noter que les applications entreprises jusque là étaient réalisées jusqu'à des déformations petites : de l'ordre de 1 à 2%.

Conscients qu'une représentation fondamentale satisfaisante se doit d'investir dans le domaine des grandes déformations, nous avons cherché à appliquer le modèle aux grandes déformations ; c'est à dire à des chargements allant jusqu'à des déformations totales de l'ordre de 100% ou même plus.

En utilisant le code tel qu'il était, nous nous sommes trouvés confrontés à des temps de calculs très importants rendant son utilisation rébarbative au vue des codes existants (rigides-plastiques) formulés aux grandes déformations et qui fournissent des résultats quasi instantanés.

D'autre part, notre formulation par le fait qu'elle prend en compte la déformation élastique présente des avantages indéniables par rapport aux codes rigides-plastiques existants : la possibilité de procéder à la décharge élastique du matériau, l'accès aux contraintes internes, ... sont des atouts majeurs qui caractérisent cette nouvelle for-

mulation analytique. Nous avons alors cherché des moyens afin de diminuer les temps de calculs et de modifier le code en conséquence. A ce propos, deux méthodes ont été proposées. La première est basée sur l'étude de l'activité des systèmes de glissement, l'idée étant d'augmenter le pas de chargement quand le point de charge se trouve à proximité d'un vertexe et que le nombre de systèmes de glissement actifs est important.

L'étude montre que cette méthode ne peut pas être directement exploitable à l'échelle du polycristal pour tous les types de chargement.

Nous présentons alors une deuxième méthode qui consiste à réaliser le chargement grâce à un calcul mixte : rigide-plastique et élastoplastique. Un gros pourcentage de la déformation est réalisé grâce au calcul rigide-plastique. Après décharge complète du matériau, la déformation totale est achevée grâce au calcul élastoplastique. Nous conjugons ainsi la rapidité du calcul rigide-plastique aux avantages qu'offre le calcul élastoplastique : possibilité de procéder à la décharge élastique, accès aux contraintes internes, etc... Les textures cristallographiques, ainsi que d'autres variables internes fournies par ce calcul, sont comparées aux résultats donnés par le calcul élastoplastique formulé entièrement aux petites déformations. Les résultats fournis par les deux méthodes sont très proches.

Plusieurs perspectives sont envisagées pour ce travail, la première d'entre elles étant l'intégration de cette nouvelle formulation analytique dans des codes d'éléments finis. D'autre part, des efforts doivent être déployés pour une modélisation plus correcte de l'écroutissage intracristallin qui permettrait de relier directement l'état disloqué intragranulaire au comportement du monocristal.

## ANNEXE A

## Définition de la notation vectorielle

L'incrément de déformation et la contrainte sont des tenseurs symétriques d'ordre deux. La vectorisation de ces tenseurs peut quelques fois s'avérer nécessaire: c'est notamment le cas, lorsqu'on étudie la déformation des monocristaux et que le calcul fournit une longue liste d'états de contrainte et d'incrément de déformation.

Afin de procéder à la vectorisation, nous supposons que les vecteurs contrainte et incrément de déformation doivent satisfaire le critère suivant: l'incrément de travail doit être égal au produit de la contrainte et de l'incrément de déformation [29].

Cette condition s'écrit :

$$\sigma_k d\varepsilon_k = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (k = 1 \text{ à } 6; i, j = 1 \text{ à } 3) \quad (\text{A.1})$$

La forme la plus généralement utilisée et qui remplit la condition (A.1) est :

$$\vec{\sigma} = (\sigma_k) = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}) \quad (\text{A.2})$$

$$\vec{d\varepsilon} = (d\varepsilon_k) = (d\varepsilon_{11}, d\varepsilon_{22}, d\varepsilon_{33}, 2d\varepsilon_{23}, 2d\varepsilon_{31}, 2d\varepsilon_{12}) \quad (\text{A.3})$$

D'autre part, la loi de Schmid [45] qui s'écrit :

$$M_{ij}^s \sigma_{ij} = \tau^s \quad (\text{A.4})$$

peut aussi être exprimée sous une forme vectorielle :

$$m_k^s \sigma_k = \tau^s \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$(m_k) = (M_{11}, M_{22}, M_{33}, M_{23} + M_{32}, M_{13} + M_{31}, M_{12} + M_{21}) \quad (\text{A.6})$$

Dans ce cas, les composantes  $m_k$  s'écrivent en fonction des composantes de  $\vec{b}$  et  $\vec{n}$  comme suit ( $\vec{b}$  est le vecteur caractérisant la direction de glissement et  $\vec{n}$  le vecteur normal au plan de glissement) :

$$\vec{m} = (m_k) = (b_1 n_1, b_2 n_2, b_3 n_3, b_2 n_3 + b_3 n_2, b_3 n_1 + b_1 n_3, b_1 n_2 + b_2 n_1) \quad (\text{A.7})$$

De telle sorte que l'incrément de déformation plastique peut être exprimé en fonction de la vitesse de glissement sous une forme vectorielle, telle que :

$$d\varepsilon_k = \sum_s m_k^s d\gamma^s \quad (\text{A.8})$$

Dans le tableau suivant nous donnons la liste des composantes  $m_k$  correspondant aux différents systèmes de glissement (de type  $\{111\} \langle 1\bar{1}0 \rangle$ ) d'une structure cristalline de type C.F.C.

Numéro du syst. de gliss.	Direction de gliss.	Plan de gliss.	$M_{ij} \sqrt{6}$								
			11	12	13	21	22	23	31	32	33
1	0 1 1	1 1 -1	0	0	0	1	1	-1	1	1	-1
2	1 0 1	1 1 -1	1	1	-1	0	0	0	1	1	-1
3	1 -1 0	1 1 -1	1	1	-1	-1	-1	1	0	0	0
4	0 1 -1	1 -1 -1	0	0	0	1	-1	-1	-1	1	1
5	1 0 1	1 -1 -1	1	-1	-1	0	0	0	1	-1	-1
6	1 1 0	1 -1 -1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	0	0
7	0 1 1	1 -1 1	0	0	0	1	-1	1	1	-1	1
8	1 0 -1	1 -1 1	1	-1	1	0	0	0	-1	1	-1
9	1 1 0	1 -1 1	1	-1	1	1	-1	1	0	0	0
10	0 1 -1	1 1 1	0	0	0	1	1	1	-1	-1	-1
11	1 0 -1	1 1 1	1	1	1	0	0	0	-1	-1	-1
12	1 -1 0	1 1 1	1	1	1	-1	-1	-1	0	0	0

TAB. A.1 - Liste des composantes  $M_{ij}$ .

Numéro		Direction de gliss. $\vec{b}_i(\sqrt{2})$	Plan de gliss. $\vec{n}_i(\sqrt{3})$	$m_i \sqrt{6}$					
Pos.	Neg.			$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$
1	13	0 1 1	1 1 -1	0	1	-1	0	1	1
2	14	1 0 1	1 1 -1	1	0	-1	1	0	1
3	15	1 -1 0	1 1 -1	1	-1	0	1	-1	0
4	16	0 1 -1	1 -1 -1	0	-1	1	0	-1	1
5	17	1 0 1	1 -1 -1	1	0	-1	-1	0	-1
6	18	1 1 0	1 -1 0	1	-1	0	-1	-1	0
7	19	0 1 1	1 -1 1	0	-1	1	0	1	1
8	20	1 0 -1	1 -1 1	1	0	-1	1	0	-1
9	21	1 1 0	1 -1 1	1	-1	0	1	1	0
10	22	0 1 -1	1 1 1	0	1	-1	0	-1	1
11	23	1 0 -1	1 1 1	1	0	-1	-1	0	1
12	24	1 -1 0	1 1 1	1	-1	0	-1	1	0

TAB. A.2 - Liste des composantes  $m_k$ .

## ANNEXE B

# Eléments d'informations sur le code numérique polycristallin : POLYCRIST

Le code numérique mis en place permet pour une direction de chargement donnée  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et une déformation totale donnée  $\underline{\underline{\epsilon}}$  de suivre le trajet de chargement point par point pour des pas de chargement  $d\epsilon$  au plus égales à  $10^{-5}$ . Le code permet de prendre en compte tout type de structure cristallographique: C.F.C., C.C., ou même H.C. L'incrément de déformation totale n'est pas totalement imposée: certaines composantes peuvent être relaxées afin de pouvoir satisfaire les conditions aux limites sur les contraintes imposées au polycristal. Le code permet aussi d'inclure l'érouissage intracristallin.

POLYCRIST est donc un code de calcul élastoplastique non viscoplastique. Le critère de charge utilisé dans le code consiste en une généralisation de la loi de Schmid sur tout les systèmes de glissements :

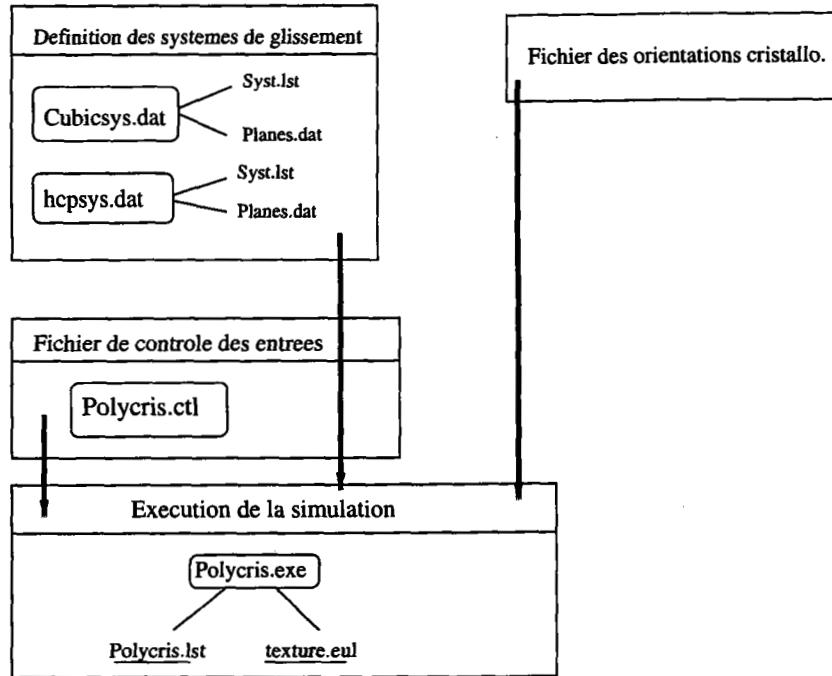
$$f(\underline{\underline{g}}, \tau_0^s) = \sum_s \frac{|M_{ij}^s \sigma_{ij}|^{h+1}}{(\tau_0^s)^h} - \tau_0 = 0$$

Ce nouveau critère permet de lever l'ambiguïté quand au choix des systèmes de glissement actifs et donne une solution unique pour les systèmes de glissement actifs et l'état de contrainte.

La valeur  $h$  décrit la forme de la surface de charge. Pour les valeurs élevées de  $h$ , la surface de charge  $f(\underline{\underline{g}}, \tau_0^s)$  approche avec un degrés suffisant le polyèdre de Bishop et Hill. La valeur de  $h$  doit être introduite dans le fichier de controle POLYCRIS.ctl.

Dans le code,  $h$  est pris assez élevé:  $h = 20...100$

## Organigramme du code de calculs



## Définition des systèmes de glissement

La définition des systèmes de glissement se fait par le biais du fichier CUBICSYS.dat. Ce fichier contient les familles de glissement possible dans les structures cubiques. Aussi, l'addition d'autres familles est possible. Le fichier CUBICSYS.dat se présente comme suit :

### Systèmes de glissement cubiques

Paramètres d'écroutissage:

1.e + 0 180. 148. 2.25 : gam0, h0, tausat, a

1. 1.4 1.4 1.4 : q1: coplanaires, q2: colinéaires, q3: perpendic. ,q4:autres



(111) < 110 > ..... 12

Cission critique résolue et déformation de cisaillement

16. 0.

- 1 11 - 1 011
- 2 11 - 1 101
- 3 11 - 1 1 - 10
- 4 1 - 1 - 1 01 - 1
- 5 1 - 1 - 1 101
- 6 1 - 1 - 1 110
- 7 1 - 11 011
- 8 1 - 11 10 - 1
- 9 1 - 11 110
- 10 111 01 - 1
- 11 111 10 - 1
- 12 111 1 - 10

(110) < 111 >..... 12

Cission critique résolue et déformation de cisaillement

0. 0.

- 1 0 1 1 1 1 -1
- 2 1 0 1 1 1 -1
- 3 1 -1 0 1 1 -1
- 4 0 1 -1 1 -1 -1
- 5 1 0 1 1 -1 -1
- 6 1 1 0 1 -1 -1
- 7 0 1 1 1 -1 1
- 8 1 0 -1 1 -1 1
- 9 1 1 0 1 -1 1
- 10 0 1 -1 1 1 1

11 1 0 -1 1 1 1

12 1 -1 0 1 1 1

(112) < 111 >..... 12

Cission critique résolue et déformation de cisaillement

0. 0.

1 2 -1 1 1 1 -1

2 1 -2 -1 1 1 -1

3 1 1 2 1 1 -1

4 2 1 1 1 -1 -1

5 1 2 -1 1 -1 -1

6 1 -1 2 1 -1 -1

7 2 1 -1 1 -1 1

8 1 2 1 1 -1 1

9 1 -1 -2 1 -1 1

10 2 -1 -1 1 1 1

11 1 -2 1 1 1 1

12 1 1 -2 1 1 1

(123) < 111 >..... 24

Cission critique résolue et déformation de cisaillement

0. 0.

1 1 2 3 1 1 -1

2 1 2 -3 1 1 1

3 1 -2 3 -1 1 1

4 -1 2 3 1 -1 1

5 1 3 2 1 -1 1

6 1 3 -2 -1 1 1

7 1 -3 2 1 1 1

8 -1 3 2 1 1 -1

9 2 3 1 1 -1 1  
 10 2 3 -1 -1 1 1  
 11 2 -3 1 1 1 1  
 12 -2 3 1 1 1 -1  
 13 2 1 3 1 1 -1  
 14 2 1 -3 1 1 1  
 15 2 -1 3 -1 1 1  
 16 -2 1 3 1 -1 1  
 17 3 1 2 -1 1 1  
 18 3 1 -2 1 -1 1  
 19 3 -1 2 1 1 -1  
 20 -3 1 2 1 1 1  
 21 3 2 1 -1 1 1  
 22 3 2 -1 1 -1 1  
 23 3 -2 1 1 1 -1  
 24 -3 2 1 1 1 1

(332) < 113 > twinning..... 12

Cission critique résolue et déformation de cisaillement

0. 3.5178  
 1 3 3 -2 1 1 3  
 2 -3 3 2 -1 1 -3  
 3 -3 -3 -2 -1 -1 3  
 4 3 -3 2 1 -1 -3  
 5 3 -2 3 1 3 1  
 6 -3 -2 -3 -1 3 -1  
 7 -3 2 3 -1 -3 1  
 8 3 2 -3 1 -3 -1  
 9 -2 3 3 3 1 1  
 10 2 3 -3 -3 1 -1

11 2 -3 3 -3 -1 1

12 -2 -3 -3 3 -1 -1

fin des systèmes de glissement

Les familles de glissement les plus généralement rencontrées sont définies dans ce fichier ; mais d'autres familles supplémentaires peuvent aussi être rajoutées. Une famille de systèmes de glissement peut être sélectionnée en lui affectant une valeur de cission critique initiale non nulle.

**L'écrouissage intracristallin** peut être inclus dans les simulations. L'auto-écrouissage et l'écrouissage latent des systèmes de glissement est pris en compte en adoptant la loi d'écrouissage suivante :

$$\dot{\tau}_0^\alpha = \sum_{\beta} H^{\alpha\beta} |\dot{\gamma}^\beta|, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n.$$

avec

$$H^{\alpha\beta} = q^{\alpha\beta} h_0 \left[1 - \frac{\tau_c^\alpha}{\tau_{sat}}\right]^a$$

$q^{\alpha\beta}$  est une matrice  $n \times n$ ,  $n$  étant le nombre total de systèmes de glissement.  $q^{\alpha\beta}$  est définie telle que  $q^{\alpha\beta} = q1$  pour les systèmes coplanaires,  $q^{\alpha\beta} = q2$  pour les systèmes linéaires,  $q^{\alpha\beta} = q3$  pour les systèmes perpendiculaires, et  $q^{\alpha\beta} = q4$  pour tout les autres systèmes.

$\tau_c^\alpha$  est la cission critique initiale du système de glissement.

L'ensemble de ces paramètres doivent être définis au début des calculs dans le fichier **CUBICSYS.dat**.

Pramètres d'écrouissage :

1.e + 0 180. 148. 2.25 : gam0, h0, tausat, a

1. 1.4 1.4 1.4 : q1: coplanaires, q2: colineaires, q3: perpendic. ,q4:autres.

Ici gam0 =  $\gamma_0$ , h0 =  $h_0$ , tausat =  $\tau_{sat}$ , et a =  $a$ . Les paramètres de la matrice  $q^{\alpha\beta}$  sont définis à travers q1, q2, q3 et q4. Si toute ses paramètres sont égales à zéro, l'écrouissage n'est pas pris en compte.

## Contrôle de la simulation

Le pilotage de la simulation se fait par le biais du fichier **POLYCRIS.ctl** qui se

présente comme suit :

initial.eul

-3

cubicsys.dat

First test modulus elastic-plastic

20.

16.

46.5d + 3 93.d + 3 1

0

60 90 150 350 500 1000

0.001

0.00001

0.0001

Facteurs permettant l'identification des composantes de la deformation:

3 3

Gradient de deformation totale

.000 .0 .000000

.000000 0.00 .000000

.000000 .000000 1.000

1.d<sup>-2</sup>

- Prem. ligne : nom du fichier qui contient la distribution cristallographique à introduire. Celle-ci est spécifiée par les angles d'Euler. Le format de ce fichier est le suivant :

Première ligne; nombre de grains.

les lignes suivantes sont : Ligne 1 : i (numéro du grain), f(i) (fraction volumique du grain i),  $\varphi_1, \phi, \varphi_2$

Ligne 2:  $\tau_c^g$  pour les  $n$  systèmes de glissement.

Ligne 3 :  $\dot{\gamma}_0$  pour les  $n$  systèmes de glissement.

Le nombre de grains est illimité.

- Deux. ligne : ce nombre définis à quels incréments le fichier de sortie **POLYCRIS.LST** doit être produit. Le fichier **POLYCRIS.LST** contient des informations détaillées sur la distribution du glissement, l'état de contrainte et l'état de déformation, le pourcentage de grains plastifiés, etc...
- Trois. ligne : nom du fichier contenant la liste des systèmes de glissements potentiellement actifs. (cubicsys.dat ou hcpsys.dat)
- quatr. ligne : titre du calcul actuel.
- cinq. ligne : paramètre décrivant la forme de la surface de charge ( $h > 1$ ).
- six. ligne : paramètre décrivant la taille de la surface de charge.
- sept. ligne : coefficients de Lamé.  $G$  et  $\lambda$  en MPa.
- huit. ligne : nombre de points représentatifs de la texture.
- neuf. ligne : points représentatifs de la texture.
- dixie. ligne : composante maximale du gradient de la déformation.
- onzie. ligne : incrément de déformation dans une étape.
- douzie. ligne : incrément de déformation entre deux sauvegardes.
- quator. ligne : facteurs permettant d'identifier les composantes de la déformation.

- six., dix-sept. et dix-huit. ligne : tenseur du gradient de déformation imposé.
- dix-neuf. ligne : précision requise pour les conditions aux limites.

Concernant le code de calculs **POLYCRIST**, celui-ci est constitué des sous-routines suivantes :

**POLYCR.f** (programme principal)

**CMODUL**

**MILLER**

**EULER**

**CRISTAL**

# Références bibliographiques

- [1] ARMINJON M. A regular form of the schmid law : Application to the ambiguity problem. In *9th International Conference on Textures of Materials : In Textures of Materials*, Avignon, France, Avril 10-13 1995.
- [2] ARMINJON M. and BACROIX B. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function. *Acta Mech.*, 88:219–243, 1991.
- [3] ARMINJON M., BACROIX B., IMBAULT D., and RAPHANEL J. L. A fourth-order plastic potential for anisotropic metals and its analytical calculation from the texture function. *Acta Mech.*, 107:33–51, 1994.
- [4] JONES D. R. H. ASHBY M. F. *Matériaux: propriétés et applications*. Dunod, 1996.
- [5] AUBERT I. Effet de l'hétérogénéisation plastique intragranulaire sur le comportement des aciers doux polycristallins lors de chargements complexes. Thèse de Doctorat, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, Université de Metz, 1998.
- [6] BATDROF S. B and BUDIANSKY B. *A Mathematical Theory of plasticity based on the Concept of Slip*. NACA TN, 1949.
- [7] BERVEILLER M. and ZAOUÏ A. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 42:325, 1979.
- [8] BISHOP J. F. W and HILL R. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal. *Phil. Mag.*, page 1298, 1951.
- [9] BRAUDEL H. J. Modélisation des grandes transformations élastoplastiques d'un solide isotrope par la méthode des éléments finis. application à la forge à froid des métaux. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I, 1986.



- [10] BRONKHORST C. A., KALIDINDI S. R., and ANAND L. Polycrystalline plasticity and the evolution of crystallographic texture in f.c.c. metals. *Trans. Royal. Soc. London, A* 341:433, 1992.
- [11] CANOVA G. R., KOCKS U. F., TOMÉ C. N., and JONAS J. J. The yield surface of textured polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 33:371, 1985.
- [12] DARRIEULAT M. Préviation du comportement plastique anisotrope des polycristaux texturés par la mécanique des milieux continus. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris et Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 1993.
- [13] ESHELBY J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proc. R. Soc. London.*, A175(43), 1957.
- [14] ESTRIN Y., TÓTH L. S., MOLINARI A., and BRÉCHET Y. A dislocation-based model for all hardening stages in large strain deformation. *Acta mater.*, 46(15):5509–5522, 1998.
- [15] FRANCIOSI P. Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux métalliques se déformant par glissement: Modélisation pour un chargement complexe quasi statique. Thèse de Doctorat, Université de Paris Nord, 1984.
- [16] FRANCIOSI P. The concept of latent hardening and strain hardening in metallic single crystals. *Acta Met.*, 33:1601, 1985.
- [17] PINEAU A. FRANÇOIS D. and ZAOUÏ A. *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, 1991.
- [18] HENCKY H. *Zeits. Ang. Math. Mech.*, 4:323, 1924.
- [19] HILL R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proc. R. Soc. Lond.*, A193:281, 1948.
- [20] HILL R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, Oxford, U.K., 1950.
- [21] HILL R. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:89, 1965.

- [22] HILL R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13:213, 1965.
- [23] HOHENEMESER K. Fließversuche and rohren aus stahl bei kombinierter zug und torsionsbeanspruchung. *Zeits. Ang. Math. Mech.*, 11:15, 1931.
- [24] HONNEFF H. and MECKING H. In *Proc. ICOTOM5*, Aachen, Germany, March 28-31 1978.
- [25] HUTCHINSON J. W. Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. *Proc. R. Soc. Lond.*, A348(101), 1976.
- [26] IMBAULT D. and ARMINJON M. Deformation textures of fcc materials predicted with a regular form of the schmid law. *Materials Science Forum*, 273-275:371-376, 1998.
- [27] KALIDINDI S. R., BRONKHORST C. A., and ANAND L. Crystallographic texture evolution in bulk deformation procession of fcc metals. *J. Mech. Phys. Solids*, 40:537, 1992.
- [28] KOCKS U. F. and CANOVA G. R. In *RisΦ Tnter. Sympos.*, volume 35, 1981.
- [29] KOCKS U. F., CANOVA G. R., and JONAS J. J. Yield vectors in f.c.c. crystals. *Acta Metall.*, 31(8):1243-1252, 1983.
- [30] KOUDDANE R. Approche autocohérente en élastoviscoplasticité des matériaux hétérogènes. Thèse de Doctorat, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, Université de Metz, 1994.
- [31] KOUDDANE R., CANOVA G. R., and MOLINARI A. In *Larg. Plas. Def.*, Balkema, Rotterdam, 1993.
- [32] KOUDDANE R., ZOUHAL N., MOLINARI A., and CANOVA G. R. Complex loading of viscoplastic materials: Micro-macro modelling. *Materials Science and Engineering*, A175:31-36, 1994.
- [33] KRÖNER E. Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Z. Physik*, page 151, 1958.
- [34] KRÖNER E. Zur plastischen verformung des vielkristalls. *Acta Metall.*, 9:155, 1961.

- [35] LEQUEU PH. Comparaison of crystallographic and continuum yield surface for textured polycrystals. Ph. D. Thesis, McGill University, Montreal, Canada, 1986.
- [36] LEQUEU Ph., GILORMINI P., MONTHEILLET F., BACROIX B., and JONAS J. J. Yield surface for textured polycrystals- i. crystallographic approach. *Acta Metall.*, 35(2):439-451, 1987.
- [37] LIN T. H. Analysis of elastic and plastic strains of a face-centered cubic crystal. *J. Mech. Phys. Solids*, 5:143, 1957.
- [38] LIPINSKI P., KRIER J., and BERVEILLER M. Elastoplasticité des métaux en grandes déformations: comportement global et évolution de la structure interne. *Physics Abstracts*, 25:361-388, 1990.
- [39] MOLINARI A., CANOVA G. R., and AHZI S. A self consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity. *Acta Metall.*, 35:2983, 1987.
- [40] MOLINARI A. and TÓTH L. S. Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results -i. modeling. *Acta Met. Mater.*, 42:2453, 1994.
- [41] MONTHEILLET F., GILORMINI P., and JONAS J. J. Relation between axial stresses and texture development during torsion testing: a simplified theory. *Acta metall*, 33(4):705-717, 1985.
- [42] MULLER D. Influence de l'écroûissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins. Thèse de Doctorat, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, Université de Metz, 1994.
- [43] REUSS A. *Zeits. Ang. Math. Mech.*, 10:266, 1930.
- [44] HALPHEN B. SALENÇON J. *Elasto-plasticité*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1987.
- [45] SCHMID E. In *Proc. Int. Congr. Appl. Mech.*, Delft, Netherlands, 1924.
- [46] SQALLI HOUSSAINI A. Champs thermiques et mécaniques induits par le mouvement des dislocations. Thèse de Doctorat, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, Université de Metz, 1996.
- [47] TAYLOR G. I. Plastic strain in metals. *J. Inst. Metals*, 62:307-324, 1938.
- [48] TÓTH L. S. *Rate sensitive Taylor software*. University of Metz, 1993.

- [49] TÓTH L. S. Texture related effects in the mechanics of torsion. In *J. J. Jonas Symposium on Thermomechanical Processing, Texture and Formability of Steel*, Ottawa, Canada, August 9-13 2000.
- [50] TÓTH L. S., GILORMINI P., and JONAS J. J. Effect of rate sensitivity on the stability of torsion textures. *Acta metall.*, 36(12):3077–3091, 1988.
- [51] TÓTH L. S. and HARIZ T. Calcul analytique du module élastoplastique des matériaux cristallins et applications la déformation cyclique des polycristaux. In *4<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique*, volume 1, Université Hassan II Mohammadia, faculté des Sciences et techniques, Maroc, Avril 13-16 1999.
- [52] TÓTH L. S. and HARIZ T. A new analytic approach of crystal plasticity and its applications in polycrystal modeling. In *ICOTOM*, volume 12, Montréal, Canada, August 9-13 1999.
- [53] VAN HOUTTE P. TÓTH L. S. and VAN BAELE A. Analytical representation of polycrystal yield surfaces. In *Proc. of Plasticity'91: The third Int. Symp. Plasticity*, Grenoble, France, August 12-16 1989.
- [54] SCHMID E. und BOAS N. *Kristallplastizität mit besonderer Berücksichtigung der Metalle*. Springer-Verlag, Berlin, 1935.
- [55] VAN HOUTTE P. Calculation of the yield locus of textured polycrystals using the Taylor and the relaxed Taylor theories. *Textures and Microstructures*, 7(1):29, 1987.
- [56] WEERTMAN J. R. WEERTMAN J. *Elementary dislocation theory*. Oxford University press, 1992.
- [57] ZOUHAL N. Comportement mécanique des polycristaux sous sollicitations complexes : approche micro-macro. Thèse de Doctorat, Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, Université de Metz, 1996.
- [58] ZOUHAL N., MOLINARI A., and TÓTH L. S. Elastic-plastic effects during cyclic loading as predicted by the Taylor-Lin model of polycrystal elasto-viscoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 10, 1996.
- [59] TÓTH L. S. ZOUHAL N. and MOLINARI A. Chargement cyclique des cristaux élastoviscoplastiques : Approche micro-macro. In *2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique*,

volume 1, Casablanca, Maroc, Avril 10-13 1995.