



HAL
open science

Lois de plasticité non locales et propagation des bandes de déformation associées à l'effet Portevin-Le Chatelier

Véronique Jeanclaude

► **To cite this version:**

Véronique Jeanclaude. Lois de plasticité non locales et propagation des bandes de déformation associées à l'effet Portevin-Le Chatelier. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1993METZ004S . tel-01748954

HAL Id: tel-01748954

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748954>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET
PRODUCTIQUE
UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19930115
Cote	S/M3 93/4
Loc	Magasin

THESE

présentée à l'UNIVERSITE de METZ par

Véronique JEANCLAUDE

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ
en SCIENCES pour l'INGENIEUR**

**LOIS DE PLASTICITE NON LOCALES ET
PROPAGATION DES BANDES DE DEFORMATION
ASSOCIEES A L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER**

à soutenir le 2 février 1993 devant la commission d'Examen composée de

Y. BRECHET
G. CANOVA
C. FRESSENGEAS
L.P. KUBIN
A. MOLINARI
A. ZAOUÏ

Rapporteur
Rapporteur

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux U.R.A. CNRS 1215
I.S.G.M.P., Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01

Avant de vous présenter ce travail, je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué, de loin ou de près, à son avènement.

Cette étude a été réalisée au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz sous la direction de Monsieur Claude Fressengeas.

Ma gratitude et une profonde reconnaissance s'adressent tout d'abord à Claude qui a accepté de diriger cette thèse et auprès de qui j'ai trouvé des conditions exceptionnelles de travail. C'est avec patience et gentillesse qu'il m'a initiée à la recherche, et grâce à lui, j'ai beaucoup appris. Sans son infatigable rigueur, sa totale disponibilité, son dynamisme ..., ce travail n'aurait vu le jour.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Ladislav P. Kubin qui nous a constamment prodigué son amical soutien, et tout son savoir et jugement scientifique. Si j'osais comparer l'aboutissement de ce travail à l'éclosion d'une plante, je pourrais sans nul doute affirmer que Claude a été le jardinier qui l'a entourée de soins vigilants et l'a fait pousser dans la bonne direction, et que Ladislav a fourni les éléments indispensables à sa croissance.

Je tiens à exprimer mon amicale reconnaissance à Monsieur Gilles Canova qui a bien voulu se charger de la lourde tâche de rapporteur, et qui m'a fait profiter de son dynamisme et enthousiasme fort stimulants, ainsi que de sa gentillesse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Yves Bréchet qui a accepté d'être rapporteur.

Je suis très reconnaissante à Monsieur Alain Molinari et Monsieur André Zaoui de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ces travaux et de leur participation au jury.

Je tiens à associer à ce travail tous les enseignants de Mécanique, tous les collègues du Laboratoire, aussi bien pour l'ambiance sympathique dans laquelle s'est déroulée cette thèse, que pour leur disponibilité.

Enfin je remercie Mademoiselle Véronique Boine qui m'a aidée dans la frappe du Chapitre 3 de ce texte.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

CHAPITRE 1 : Présentation de l'effet Portevin-Le Châtelier

I-1 Introduction.....	4
I-2 Aspects expérimentaux.....	5
I-2-1 Caractérisation de l'effet PLC sur les courbes de traction techniques expérimentales.....	6
a- Techniques expérimentales pour l'obtention des courbes de traction.....	6
b- Machine dure.....	8
c- Etude critique des expériences sur machine dure.....	10
d- Machine douce.....	11
I-2-2 Caractérisation macroscopique de l'effet PLC autres techniques expérimentales.....	12
I-2-3 Conclusion.....	14
I-3 Aspects microphysiques.....	15
I-3-1 Interactions des dislocations entre elles et avec des impuretés.....	15
I-3-2 Application à l'effet PLC modèle de vieillissement dynamique.....	17
I-3-3 Conclusions.....	22
I-4 Aspects mécaniques.....	23
I-4-1 Modèle de Penning.....	23
I-4-2 Modèle de Kubin et Estrin.....	27
I-4-3 Conclusion.....	33

CHAPITRE 2 : Modèles non locaux

II-1 Introduction.....	34
II-2 Deux lois de plasticité non locales.....	35

II-2-1 Loi de plasticité avec second gradient	35
II-2-2 Loi de plasticité avec pseudo-diffusion.....	37
II-3 Deux modèles mécaniques susceptibles de décrire la progression des bandes.....	43
II-3-1 Modèle de second gradient	44
II-3-2 Modèle de pseudo-diffusion.....	45
II-3-3 Analogies mécaniques, électriques et chimiques	46
a) Quelques mécanismes de type “stick-slip”	47
b) Phénomènes de réaction-diffusion.....	50
c) L’effet Gunn	51
II-4 Conclusion.....	53

CHAPITRE 3 : L’approche second gradient

III-1 Recherche de solutions propageantes.....	54
III-1-1 Solution fondamentale uniforme	54
III-1-2 Solutions propageantes.....	57
a- Equation de Rayleigh.....	57
b) Equation de Liénard.....	59
c) Système autonome équivalent à l’équation de Rayleigh.....	59
d) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase	63
III-1-3 Condition nécessaire et suffisante d’existence d’une solution périodique	65
III-2 Vitesse de propagation.....	65
III-2-1 Critère de stabilité marginale	65
III-2-2 Obtention numérique exacte	68
III-3 Stabilité des solutions propageantes.....	70
III-4 Conclusion.....	72

Chapitre 4 : L’approche par glissement dévié

IV-1 Recherche de solutions propageantes.....	75
IV-1-1 Solution fondamentale uniforme	75
IV-1-2 Solutions propageantes.....	77
a) Equation de type réaction-diffusion.....	77

b) Système autonome équivalent.....	79
c) Cas non diffusif $D=0$	80
d) Cas diffusif $D\neq 0$	82
e) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase	85
f) Phénomène de couche limite	86
g) Conclusion.....	88
IV-1-3 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution propageante.....	88
IV-2 Modèle approché bi-linéaire.....	90
IV-2-1 Solution propageante	90
IV-2-2 Calcul de la largeur de bande	92
IV-2-3 Calcul de la vitesse de propagation.....	94
IV-3 Vitesse de propagation des bandes de déformation	95
IV-3-1 Obtention numérique exacte	95
IV-3-2 Comparaison avec le modèle bi-linéaire approché.....	97
IV-4 Morphologie des solutions propageantes.....	98
IV-5 Stabilité des solutions propageantes périodiques	102
IV-5-1 Stabilité linéaire.....	102
IV-5-2 Stabilité non linéaire.....	107

Conclusion.....111

Bibliographie.....114

Annexe.....117

INTRODUCTION

L'écoulement plastique des matériaux métalliques, bien qu'inhomogène à l'échelle des dislocations, apparaît comme macroscopiquement homogène dans un large intervalle de déformation. Cependant, à certains stades de l'histoire de la déformation plastique, un régime d'écoulement uniforme peut devenir instable, et laisser place à un régime de déformation localisée. C'est le cas par exemple des sollicitations de traction simple et de cisaillement simple qui donnent éventuellement lieu aux zones de localisation intense de la déformation plastique que sont les strictions et les bandes de cisaillement. Ces dernières peuvent avoir des effets catastrophiques sur la mise en forme des matériaux, ou sur la durée de vie des structures car elles sont susceptibles de conduire à la rupture ductile.

Nous nous intéressons dans ce travail aux instabilités de la déformation plastique, moins sévères que la striction ou les bandes de cisaillement, qu'engendre l'effet Portevin-Le Châtelier (PLC).

L'effet PLC se manifeste par la génération et la propagation de bandes de déformation plastique localisée le long d'une éprouvette de traction. Il conduit à une ductilité et à une tenacité réduites ainsi qu'à l'apparition d'états de surface rugueux irréductibles et insensibles au polissage dans certains alliages d'aluminium, ce qui est très dommageable, notamment dans l'industrie aérospatiale. En effet, la rugosité du fuselage entraîne une traînée accrue des appareils, et par suite une consommation et un coût d'exploitation supérieurs.

Les bandes de Lüders, souvent plus connues, ne doivent pas être confondues avec les bandes associées à l'effet PLC. La déformation plastique est elle aussi propagée par les bandes de Lüders, mais il s'agit de fronts après lesquels la déformation est de nouveau homogène ; en outre, les bandes de Lüders constituent un phénomène transitoire lié à l'existence d'une limite inférieure et d'une limite supérieure d'élasticité, alors que l'effet PLC peut être observé sur une grande plage de déformation.

L'effet PLC se produit dans certaines conditions de température et de vitesse de déformation pour des matériaux tels que les alliages d'aluminium (Al-Mg, Al-Cu, Al-Zn ...) et les aciers doux, matériaux

contenant soit des éléments à forte teneur en position substitutionnelle, soit des impuretés interstitielles.

Cette instabilité de la déformation plastique uniforme se manifeste sur les courbes de traction soit par des oscillations, qui parfois semblent périodiques lorsque l'on tire à vitesse de déformation constante, soit par une succession de paliers de déformation lors d'une traction à taux de contrainte constant. Chaque décrochement de la courbe, ou chaque segment vertical reliant les paliers, est associé au passage d'une bande de déformation plastique localisée se propageant le long de l'éprouvette. Cependant l'effet PLC se produit aussi au cours de l'étirement biaxial des tôles ou en cisaillement simple.

L'interprétation physique de ce phénomène est liée au vieillissement dynamique, c'est à dire à la diffusion des atomes de soluté vers les dislocations durant leur temps d'attente sur les obstacles, et au régime particulier d'ancrage et de désancrage des dislocations qui en résulte. Cette explication locale en termes microstructuraux doit être confrontée à des phénomènes observés au niveau macroscopique : du comportement de la dislocation isolée ou d'un paquet de dislocations, il faut arriver aux propriétés mécaniques de l'échantillon étudié. Les modèles locaux sont en tout état de cause incapables de rendre compte du phénomène de propagation de la déformation plastique.

Il est actuellement couramment admis que la valeur négative de la sensibilité à la vitesse qui correspond au vieillissement dynamique permet de prévoir qualitativement la structure macroscopique de la déformation plastique non-homogène. C'est dans la zone de sensibilité à la vitesse négative que se produisent les oscillations dans la courbe de traction et la propagation des bandes de localisation de la déformation plastique. Cependant les modèles locaux intégrant ce concept de sensibilité à la vitesse négative sont incapables de rendre compte quantitativement du phénomène de propagation car ils manquent d'un mécanisme d'interaction spatiale permettant de propager la déformation plastique.

Nous nous sommes attachés au cours de ce travail à déterminer quel mécanisme d'interaction spatiale doit être utilisé pour rendre compte de la propagation des bandes de déformation plastique localisée. Pour des raisons de simplicité, nous nous sommes cantonnés à une étude en traction simple à vitesse de chargement constante. Le plan adopté pour ce travail est le suivant :

Dans une première partie, après une étude bibliographique des approches expérimentales permettant de saisir la complexité de l'effet PLC, nous décrivons les mécanismes microscopiques et les modèles microstructuraux associés. Les modèles macroscopiques locaux, éventuellement motivés par des modèles microstructuraux, seront ensuite étudiés. On montrera leur pouvoir explicatif, mais aussi leurs limites liées à l'absence de mécanismes de propagation de la déformation plastique.

Dans une seconde partie, nous introduirons deux lois de plasticité non locales. L'une, appelée loi de second gradient, s'appuie sur des mécanismes d'interaction par contraintes internes à courte distance. La seconde utilise un mécanisme de propagation par glissement dévié, formellement assimilable à une diffusion de la déformation plastique. Ceci nous conduira donc à deux modèles susceptibles de décrire la propagation des bandes de déformation associées à l'effet PLC. Il sera alors intéressant de faire quelques analogies avec d'autres domaines où une source continue d'énergie produit également des oscillations, dites auto-entretenues.

Au chapitre 3, nous décrivons les solutions propageantes relatives à la loi de second gradient. La vitesse de propagation déduite d'une analyse linéarisée basée sur l'hypothèse de stabilité marginale [2, 7] sera discutée; une analyse non linéaire permettant une détermination "exacte" sera présentée, et les résultats seront confrontés aux tendances expérimentales observées.

Dans une quatrième partie, nous étudierons le modèle utilisant un mécanisme de pseudo-diffusion, ce qui nous conduira à une équation non-locale de type réaction-diffusion. Nous résoudrons cette équation au moyen d'une analyse non-linéaire "exacte", ce qui permettra d'évaluer numériquement la vitesse de propagation des bandes de déformation associées à l'effet PLC; l'utilisation d'une méthode asymptotique conduira à une expression analytique de la vitesse qui sera discutée. Enfin, nous étudierons la question de la stabilité de la solution propagative établie, pour conclure, en précisant quelle est celle des deux approches qui paraît le mieux décrire l'effet PLC. Cependant, il est clair que ces deux modèles ne sauraient être exclusifs, et que d'autres mécanismes d'interaction spatiale pourraient être mis en oeuvre, par exemple à l'échelle du polycristal.

CHAPITRE 1 :

Présentation de l'effet PLC

I-1 Introduction.....	4
I-2 Aspects expérimentaux.....	5
I-2-1 Caractérisation de l'effet PLC sur les courbes de traction techniques expérimentales.....	6
a- Techniques expérimentales pour l'obtention des courbes de traction.....	6
b- Machine dure.....	8
c- Etude critique des expériences sur machine dure.....	10
d- Machine douce	11
I-2-2 Caractérisation macroscopique de l'effet PLC autres techniques expérimentales	12
I-2-3 Conclusion	14
I-3 Aspects microphysiques	15
I-3-1 Interactions des dislocations entre elles et avec des impuretés.....	15
I-3-2 Application à l'effet PLC modèle de vieillissement dynamique.....	17
I-3-3 Conclusions	22
I-4 Aspects mécaniques.....	23
I-4-1 Modèle de Penning.....	23
I-4-2 Modèle de Kubin et Estrin.....	27
I-4-3 Conclusion.....	33

CHAPITRE 1 :

Présentation de l'effet PLC

I-1 Introduction

C'est en 1909 que F. Le Châtelier [8] met le premier en évidence la génération et la propagation de bandes de déformation plastique localisée le long d'une éprouvette de traction en acier doux entre 80°C et 250°C; en 1923, associé à A. Portevin [9], il observe le même phénomène dans des alliages légers (Al-Cu-Mn et Al-Cu-Mg-Mn) au cours de leur traction à température ambiante. C'est pourquoi le nom d'effet Portevin-Le Châtelier (PLC) a été donné à ce phénomène, connu cependant bien auparavant des métallurgistes sous le nom de "blue brittleness" des aciers doux. La figure I-1 illustre l'effet PLC en montrant une bande visible à l'oeil nu sur un spécimen en alliage Al-5%Mg à température ambiante. L'effet PLC n'a lieu pour un matériau donné que dans un intervalle précis de température et de vitesse de déformation, et pour des matériaux spécifiques tels que les alliages d'aluminium et les aciers doux, matériaux de structure fcc ou bcc contenant soit des éléments à forte teneur en position substitutionnelle, soit des impuretés interstitielles.

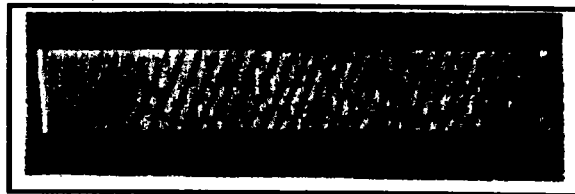


Figure I-1 :

Photographie de la morphologie des bandes PLC dans un Al-5%Mg à

température ambiante ($\dot{\epsilon} = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$). [1]

Nous allons donc au cours de ce chapitre caractériser l'effet PLC de façon expérimentale, puis nous attacher aux aspects microphysiques qui

conduisent à une interprétation du phénomène [5,6] au niveau du comportement des dislocations. Les modèles microstructuraux ne permettant pas de décrire le comportement mécanique, nous examinerons ensuite les modèles macroscopiques proposés.

I-2 Aspects expérimentaux

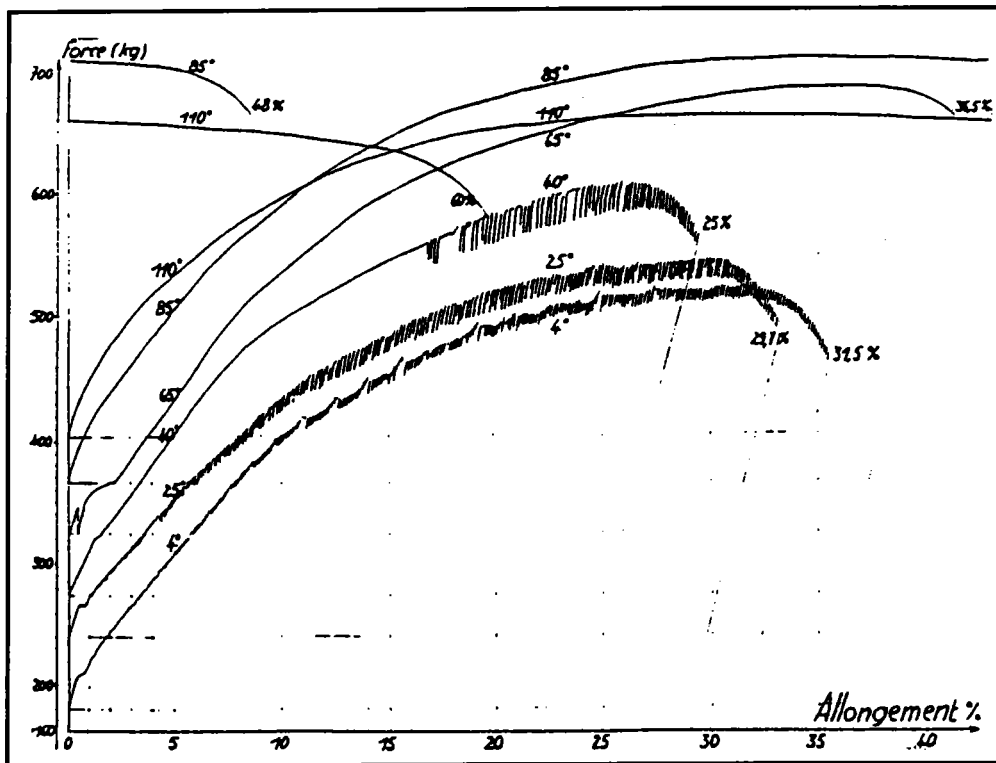


Figure I-2 :

Courbes de traction sur machine dure d'alliages Al-3%Mg sollicités à température croissante à $\dot{\epsilon} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. [12]

Les figures I-2 et I-3 issues de [12] sont obtenues pour un Al-3%Mg. Les premières de ces courbes de traction ont été tracées en utilisant une machine dure qui impose une vitesse de déformation constante à l'éprouvette : on y observe des décrochements successifs de la contrainte. La figure I-3 illustre quant à elle un essai sur une machine douce, où la contrainte appliquée croît linéairement au cours du temps. Des paliers de taille de plus en plus importante ponctuent alors la courbe de traction. Nous allons décrire ci-dessous les techniques expérimentales couramment utilisées et qui provoquent l'apparition du phénomène PLC. Puis nous

nous intéresserons aux observations macroscopiques de la propagation des bandes de déformation plastique, dans le but d'obtenir des renseignements sur la morphologie des bandes, par exemple sur leur largeur, leur périodicité et leur amplitude, et sur leur propagation.

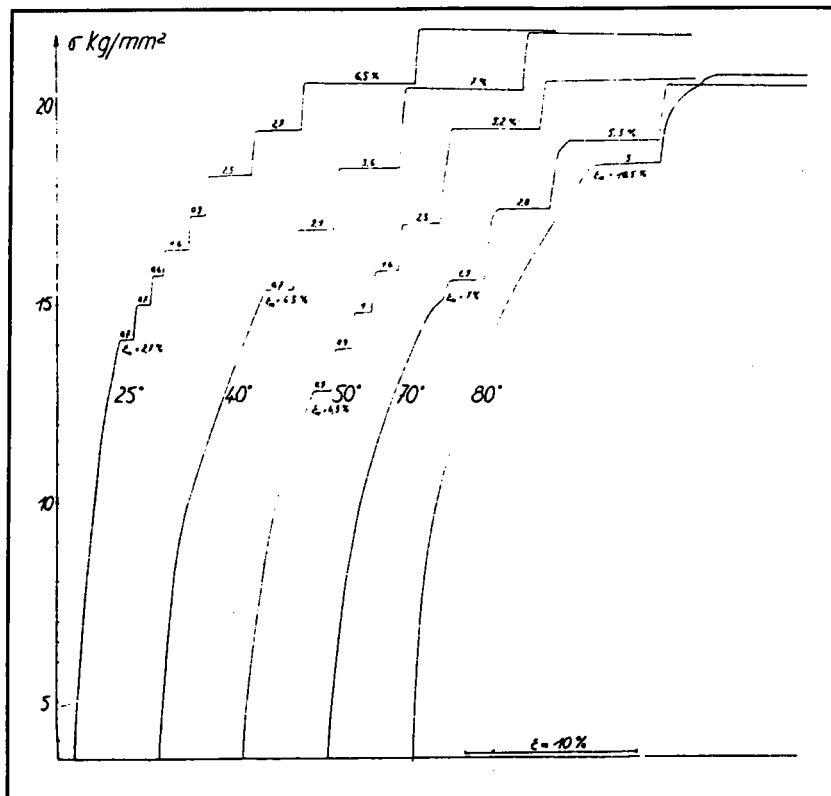


Figure I-3 :

Courbes de traction sur machine molle d'un alliage Al-3%Mg déformé à température croissante (de 25 à 80 °C) à la vitesse $d\sigma/dt$ égale à $9,33\text{g/mm}^2/\text{sec}$. [12]

I-2-1 Caractérisation de l'effet PLC sur les courbes de traction : techniques expérimentales

a- Techniques expérimentales pour l'obtention des courbes de traction

Lors d'un essai de traction dans lequel on impose une vitesse de déformation constante, la contrainte varie généralement de façon monotone dans la phase de durcissement, et l'on enregistre une courbe de traction régulière. Mais pour des matériaux sujets à l'effet PLC, la courbe

de traction n'est plus monotone et son aspect est alors différent selon les caractéristiques de la machine utilisée.

Le type de courbe observé est fonction de la rigidité de la machine définie par la rigidité du bâti, de la traverse et des lignes d'amarrage (Kd).

Lorsqu'une bande de déformation plastique produisant un écrouissage $d\epsilon$, se déplace d'une longueur l dans l'éprouvette en un temps dt , le point A (Figure I- 4) se déplace d'une quantité $AA' = ld\epsilon$, tandis que le point B se déplace de $BB' = vdt$ où v est la vitesse de déplacement de la traverse de la machine.

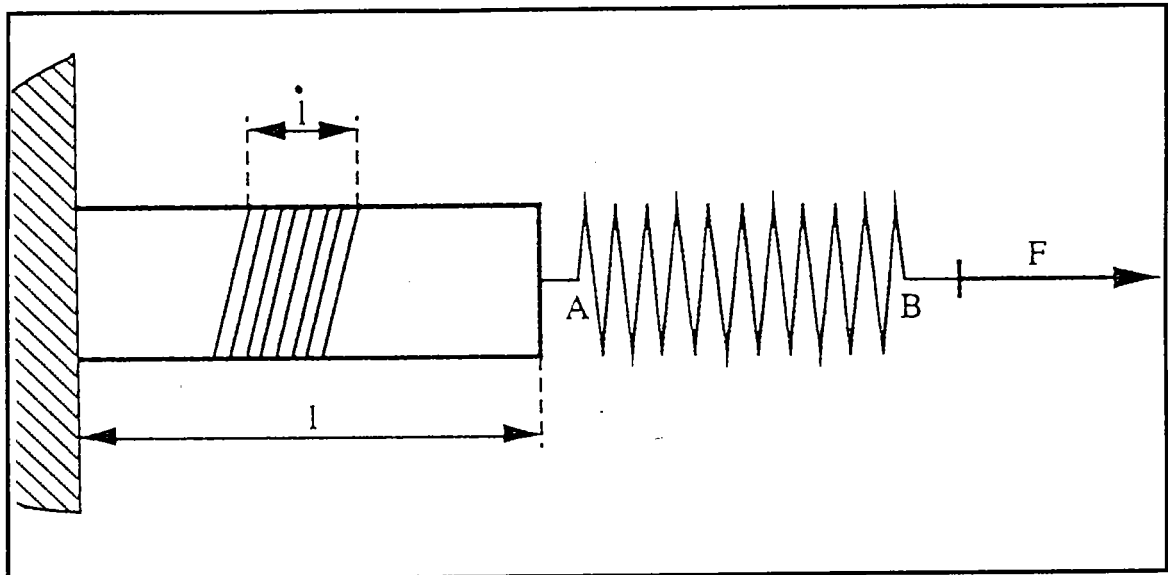


Figure I-4 :

Schéma d'une machine de traction.

La force de traction au cours du temps dt est modifiée de la quantité :
 $dF = Kd (BB' - AA')$ c'est à dire $dF = Kd (vdt - ld\epsilon)$ ou encore :

$$dF = Kd (v - ld\epsilon/dt) dt \quad (I-1)$$

où $d\epsilon/dt$ est la vitesse de déformation de l'éprouvette en A.

On peut interpréter l'allure des différentes courbes de traction à l'aide de la relation (I-1) :

- pour un essai de traction à vitesse de déformation imposée sur un matériau ne présentant pas d'effet PLC, la vitesse de la traverse v augmente pour que $d\epsilon/dt$ reste constant de sorte que le terme entre parenthèses ainsi que dF restent toujours positifs ;

- en revanche, pour un matériau sujet à l'effet PLC, $l.d\epsilon/dt$ augmente brutalement lors du passage d'une bande et devient supérieur à v , de sorte qu'une décharge élastique se produit et que dF/dt devient temporairement négatif.

Selon la rigidité de la machine, on peut distinguer deux cas :

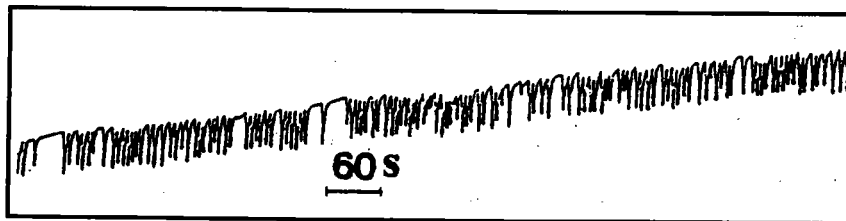
* $K_d \neq 0$ correspond à une machine dure où la force est appliquée à l'éprouvette par l'intermédiaire d'un dynamomètre supportant un pont de jauges ;

* $K_d = 0$ correspond à une machine appelée généralement machine douce où la force de traction est asservie de façon à ne pas décroître et le plus souvent à augmenter linéairement au cours du temps. Dans le cas limite d'une vitesse de chargement nulle qui correspond à une contrainte appliquée constante, il s'agit d'un essai de fluage.

b- Machine dure

Sur une machine dure, c'est la traverse de la machine qui, en se déplaçant à une vitesse v , impose une vitesse de déformation constante à l'éprouvette de traction. Supposons qu'à un instant donné de l'essai, l'éprouvette se déforme élastiquement, ou que sa déformation plastique soit trop faible pour qu'elle suive le déplacement de traverse imposé; le bâti de la machine et le dynamomètre de mesure subissent alors une déformation élastique, et la contrainte appliquée augmente progressivement jusqu'à l'apparition d'une bande de déformation plastique localisée. Celle-ci se propage très rapidement et produit un brusque allongement plastique de l'éprouvette. Au cours de cet allongement beaucoup plus rapide que le déplacement de la traverse, la machine se décharge élastiquement (l'énergie élastique accumulée pendant quelques instants se trouve brusquement libérée au moment où l'éprouvette se déforme plastiquement), et la contrainte appliquée décroît. La vitesse de déformation plastique de l'éprouvette diminue brutalement et la machine se recharge par déplacement de la traverse jusqu'à ce que la contrainte atteinte soit telle qu'une nouvelle bande apparaisse. L'ensemble des cycles ainsi décrits fait apparaître des décrochements sur la courbe $\sigma - \epsilon$, dont la forme dépend de la rigidité propre de la machine et de celle de son dynamomètre, ainsi que des caractéristiques mécaniques de l'éprouvette.

L'amplitude des décrochements augmente avec l'écroutissage de l'éprouvette. Les figures I-5 et I-6 issues de [13] montrent des enregistrements typiques sur deux éprouvettes à l'état recuit et non recuit pour des déformations comprises entre 5 et 10%.



5 MPa

Figure I-5

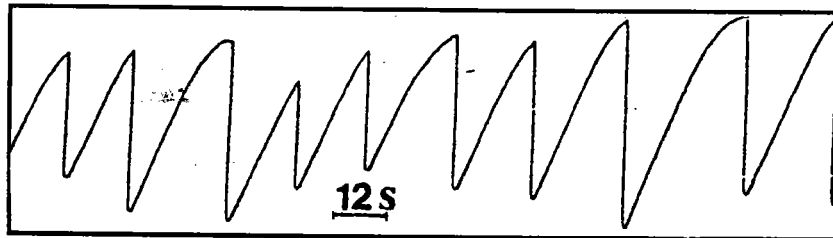


Figure I-6

Phénomène PLC en machine dure pour des échantillons Al-Mg recuits (Fig. I-5), non recuits (Fig. I-6), à température ambiante

et à $\dot{\epsilon}_a = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. [13]

Les décrochements (appelés encore "striations" ou "serrations") peuvent apparaître de façon irrégulière au début de la déformation plastique, parfois postérieurement à des bandes de Lüders, puis des serrations de différents types sont obtenues. En général, un accroissement de la vitesse de déformation joue un rôle équivalent à celui d'une faible diminution de la température sur l'amplitude, le nombre, la distance des décrochements et le seuil de déformation (déformation critique) où se déclenchent les premiers décrochements, ce que représente schématiquement la figure I-7 [13]. Classen Neck Ludowa [10] avait d'ailleurs signalé dès 1929 l'influence de la température, puis Manjoine [11] celle de la vitesse de déformation.

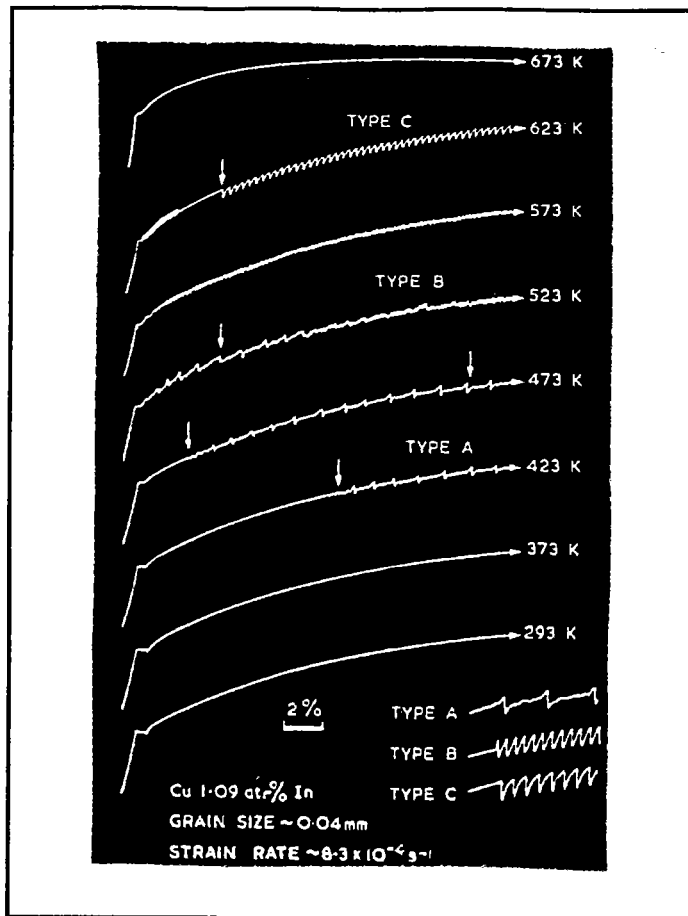


Figure I- 7 :

Courbes schématiques contrainte-déformation montrant la variation de formes des décrochements avec la température croissante d'un alliage Cu-In. [13]

c- Etude critique des expériences sur machine dure

Le phénomène de déformation hétérogène sur une machine dure est influencé par les caractéristiques de cette dernière entre autres parce que l'énergie élastique accumulée dans le bâti de la machine et dans le dynamomètre de l'installation se libère rapidement au moment où la déformation plastique de l'éprouvette se produit.

Par suite l'enregistrement du phénomène d'instabilité obtenu à l'aide de la courbe de traction n'est pas caractéristique du seul comportement de l'éprouvette car les caractéristiques élastiques de la machine y sont elles aussi transcrites.

De plus, la vitesse de déformation imposée à l'éprouvette n'est pas réellement constante malgré l'asservissement du fait du brusque saut de la

vitesse de déformation et des effets d'inertie du montage. Après une brusque instabilité, la contrainte d'équilibre est obtenue au bout d'un certain temps t_e , qui doit être comparé à la durée caractéristique de l'instabilité Δt_i . Les effets dynamiques seront significatifs si ces deux temps sont comparables [18]. Il est alors possible que le système de traction soit sollicité suivant ses modes de vibration propres, et que les effets d'inertie affectent l'enregistrement du comportement de la contrainte en fonction du temps.

d- Machine douce

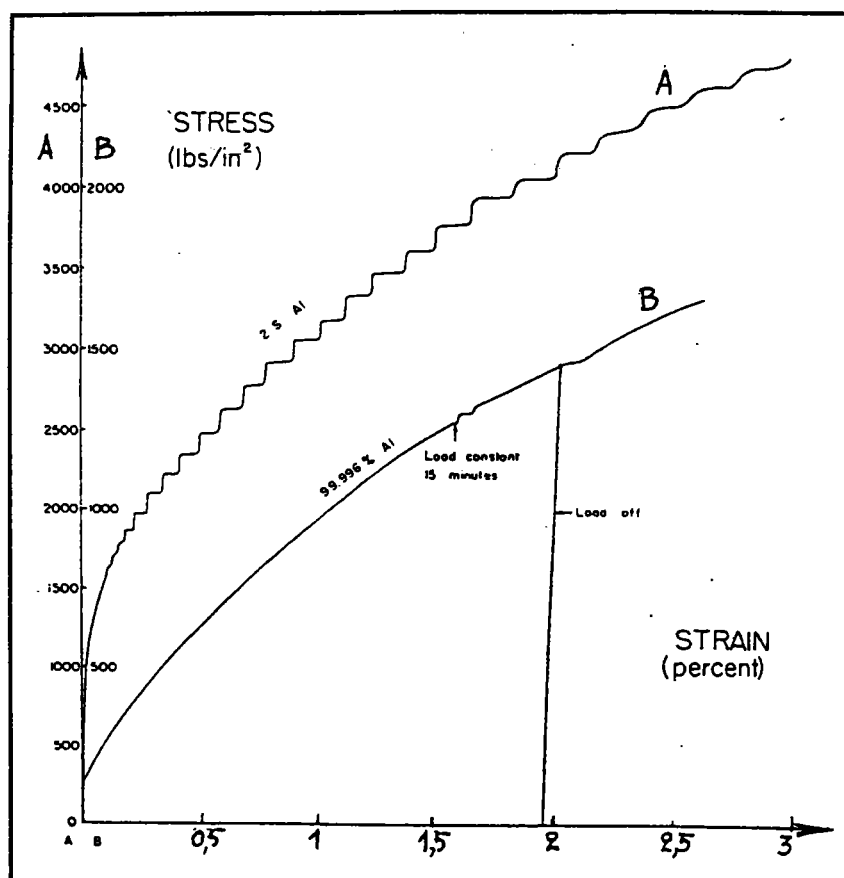


Figure I- 8 :

Courbes de traction sur machine douce d'un aluminium commercial (Al 99,5) et d'un aluminium de haute pureté (Al 99,996). [15]

Une machine douce idéale impose une vitesse de chargement $\dot{\sigma}$ constante. Comme on l'a déjà mentionné, la courbe de déformation comporte alors une série de "marches" comme celles représentées sur la figure I-8. La longueur des paliers horizontaux augmente avec la

déformation de l'éprouvette. Cette figure représente les premiers essais effectués par Mac Reynolds [15] sur deux aluminiums de pureté différente. Caisso [12] observe la même forme de décrochements sur les alliages Al-Mg entre 25 et 80 °C (figure I-3).

En pratique, il existe plusieurs manières de s'approcher des conditions idéales correspondant à une vitesse de chargement imposée. Une technique utilisée consiste à charger l'échantillon au moyen d'un fluide ou de billes de faible diamètre versées à débit constant (Karimi [16], Caisso [12], Cuddy et Leslie [17], Mac Reynolds [15]). L'inconvénient est que dans certains cas, l'inertie du bac contenant le fluide peut provoquer des régimes transitoires parasites en contrainte vers la fin d'une instabilité. Mais le procédé le plus simple consiste à intercaler un élément de faible rigidité, ressort ou soufflet dans un montage rigide. Cependant, des moyens plus modernes peuvent être mis en oeuvre en utilisant un logiciel de pilotage de la machine de traction qu'il est possible de programmer à vitesse de chargement constante. Dans ce dernier cas, les temps de réponse de l'asservissement sont satisfaisants vis-à-vis de la durée d'une instabilité [16].

On peut caractériser les bandes PLC par leurs conséquences sur les courbes de traction comme ci-dessus, ou plus directement, en observant leur propagation et leur morphologie à la surface d'un échantillon à l'aide de méthodes optiques ou extensométriques.

I-2-2 Caractérisation macroscopique de l'effet PLC : autres techniques expérimentales

Il est possible de visualiser les bandes de localisation de la déformation plastique, dont l'allure est schématisée figure I-9, au moyen d'une caméra électronique visant la surface de l'éprouvette de traction dans des conditions précises d'éclairage et avec une intensité réfléchie suffisante (lumière diffuse, éclairage indirect) (Chihab [13]) : le profil d'une bande présente deux facettes inclinées symétriquement par rapport à la surface de l'échantillon. On observe soit la lumière réfléchie sur une facette (bandes claires), soit l'ombre portée par l'autre facette (bandes sombres). La largeur de bande visible est donc en général seulement la moitié de la

largeur réelle de la bande. On pourrait ainsi, en suivant une bande avec l'objectif, faire une mesure instantanée de sa vitesse de propagation. Cela apparaît pourtant difficile du fait des problèmes expérimentaux liés aux conditions très précises de l'éclairage de la bande.

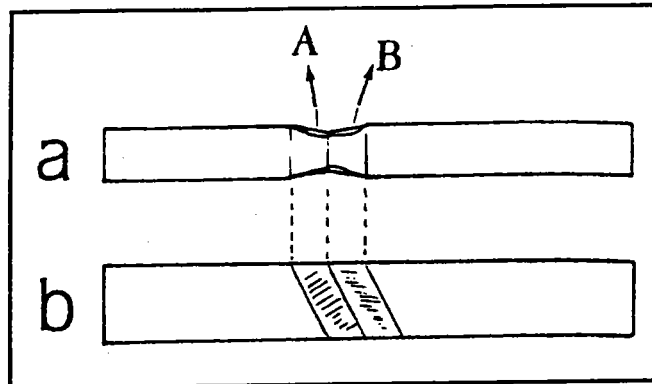


Figure I-9 :

Shématisation d'une éprouvette contenant une bande de déformation. [13]

(a) Vue de profil. (b) Vue de face.

Les méthodes d'interférométrie utilisant des films holographiques à double exposition semblent plus prometteuses. Les techniques d'interférométrie ont d'ailleurs été utilisées par Iricibar et al [45, 46] pour mesurer la vitesse de propagation des bandes de Lüders; elles sont basées sur les différences de rugosité provoquées par le passage de la bande.

Une mesure locale de la vitesse est possible à l'aide de peintures résistives déposées sur l'échantillon. Une autre méthode de détermination de la vitesse de propagation des bandes consiste à mesurer la durée des instabilités et leur intervalle d'apparition en reliant la sortie de deux capteurs de déplacement à un ordinateur programmé pour acquérir une courbe de déformation comportant une échelle de temps très dilatée. On peut alors obtenir la vitesse moyenne entre les deux capteurs ainsi que la largeur des bandes de déformation en fonction des conditions expérimentales. La variation de la vitesse de propagation des bandes sur machine douce en fonction de la vitesse de chargement ainsi obtenue par Karimi [16] est montrée sur la figure I-10. On y observe **une décroissance monotone de la vitesse de propagation lorsque le taux de contrainte augmente**. Aux plus faibles vitesses de sollicitation, la vitesse des bandes est de l'ordre de 20 à 60 m/s dans les

alliages Al-5%Mg; elle s'abaisse jusqu'à quelques mm/s aux fortes vitesses de déformation. Karimi [16] a également montré qu'une faible vitesse de chargement ou une température élevée provoquent un accroissement de l'amplitude du saut de vitesse de déformation et de la déformation plastique qui en résulte.

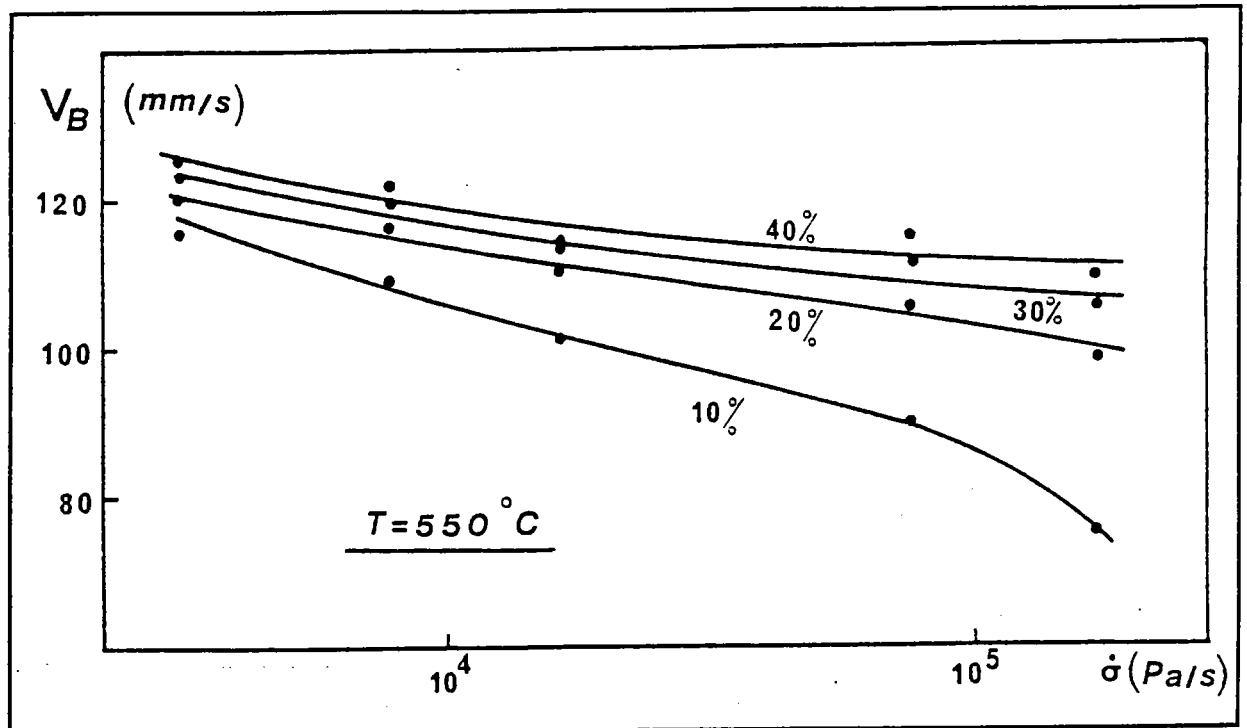


Figure I-10 :

Variation de la vitesse de bande V en fonction de la vitesse de déformation pour un acier austénitique 316L en machine douce. [16]

Par ailleurs, la figure I-11 montre la morphologie des bandes et leur largeur, allure qui pourra être comparée ultérieurement à celles que l'on obtiendra à l'aide des modèles des Chapitres 3 et 4.

I-2-3 Conclusion

Deux méthodes de caractérisation de l'effet PLC ont été discutées : l'une par l'étude des courbes de traction, l'autre par l'observation optique ou extensométrique de la propagation de bandes de localisation de la déformation plastique. Cette dernière permet, ce qui intéresse cette étude, de mesurer la largeur des bandes, et leur vitesse de propagation en machine douce, c'est-à-dire à vitesse de chargement constante. Il existe

cependant encore une troisième méthode de caractérisation, par l'examen de la microstructure observable à l'aide du microscope électronique, et qui conduit à une interprétation microphysique du phénomène PLC au niveau des dislocations.

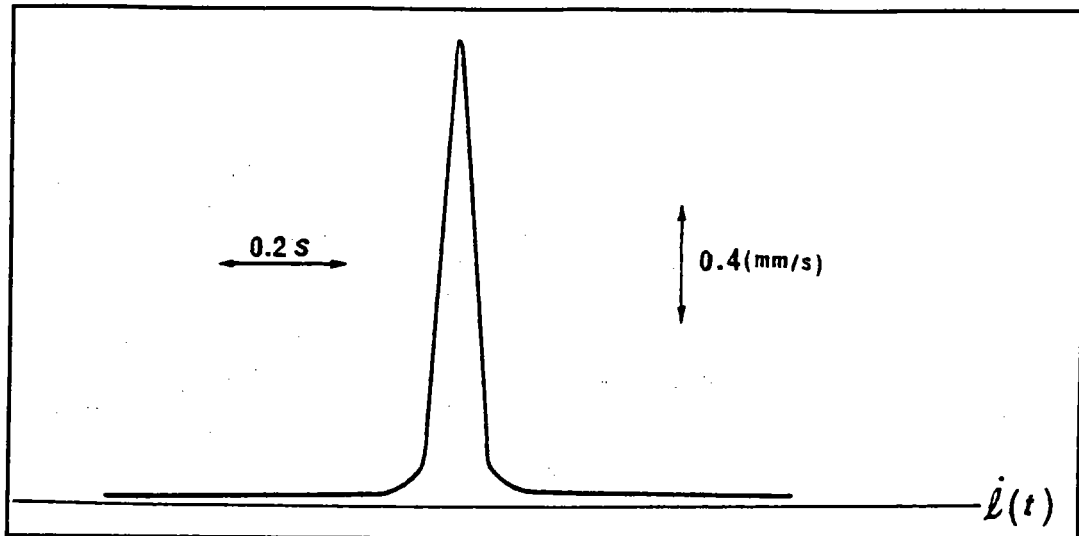


Figure I-11 :

Allure et largeur des bandes PLC obtenues sur machine douce. [16]

I-3 Aspects microphysiques

I-3-1 Interactions des dislocations entre elles et avec des impuretés

La notion de dislocations a été introduite par Taylor et Orowan [24, 25] entre 1930 et 1940 pour tenter de comprendre le comportement des réseaux atomiques dans un cristal au cours de sa déformation plastique. Une dislocation (comme une lacune) est un défaut cristallin qui peut se déplacer dans le réseau, et c'est son mouvement à travers le cristal qui provoque la déformation plastique. On peut dire que les dislocations sont les porteuses de la déformation plastique.

La dislocation, perturbation locale de l'arrangement cristallin, est définie par une ligne (ligne de la dislocation) et par un vecteur déplacement \vec{b} : le vecteur de Burgers [26]. Ce vecteur \vec{b} se conserve le

long de la ligne de dislocation. Si le vecteur de Burgers est tangent à la ligne de dislocation, il s'agit d'une dislocation vis : la ligne de dislocation est parallèle à la direction du glissement. La présence d'une dislocation vis dans le cristal transforme l'ensemble des plans atomiques qui lui sont perpendiculaires en une rampe hélicoïdale, d'où son nom. En revanche, si le vecteur de Burgers est perpendiculaire au vecteur tangent à la ligne de dislocation, le défaut cristallin est appelé dislocation coin. La figure I-12 reproduit ces deux types de dislocation.

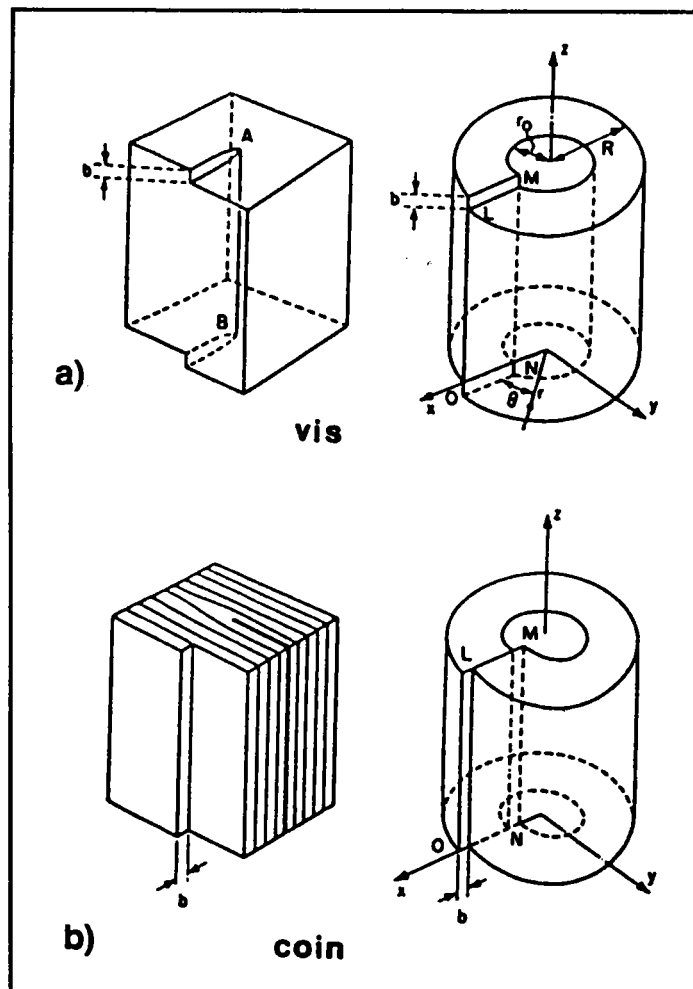


Figure I-12 :

Cisaillement associé à une dislocation : a) vis b) coin.

Dans le cas le plus général, la ligne de dislocation est une courbe quelconque. En chaque point de celle-ci, on peut définir la tangente à la ligne et donc décomposer le vecteur \vec{b} caractéristique de la dislocation en une composante coin et une composante vis. Une ligne de dislocation doit,

ou se refermer sur elle-même, ou aboutir à une autre imperfection : surface, joint, dislocation ...

Sous l'action des contraintes appliquées et des contraintes dues aux interactions internes, une dislocation peut se déplacer soit par glissement dans des plans préférentiels de plus forte densité, soit hors de son plan de glissement par montée, ou par glissement dévié.

Les dislocations interagissent entre elles et avec tous les défauts existant dans le réseau cristallin (tels les précipités, les atomes de soluté, les impuretés, les forêts de dislocations) qui sont autant d'obstacles. Les interactions se situent à deux niveaux : il existe des interactions directes avec les particules, et des interactions à distance dûes aux champs de contrainte introduits par les impuretés du fait de leurs caractéristiques élastiques différentes de celles de la matrice, et par les dislocations elles-mêmes.

I-3-2 Application à l'effet PLC : modèle de vieillissement dynamique

Dans le cas de l'effet PLC, on s'intéresse à l'interaction dynamique entre les dislocations mobiles et les atomes de soluté, qui sont également mobiles grâce à des mécanismes de diffusion.

Si on introduit une dislocation coin dans une solution solide désordonnée, les atomes étrangers vont diffuser vers la dislocation et se réarranger autour d'elle en créant un "nuage" dit *nuage* ou *atmosphère de Cottrell*. La formation de nuages nécessite la diffusion d'atomes sur de grandes distances : elle dépend donc fortement de la température. L'instabilité due à l'effet PLC est alors décrite en termes d'ancrage et de désancrage des dislocations sur le nuage d'impuretés. Cette première interprétation est due à Cottrell [5]; elle détermine une vitesse maximale des dislocations prisonnières des nuages d'impuretés. Friedel [6] définit quant à lui une vitesse minimale nécessaire au désancrage des dislocations. Ces deux vitesses ont parfois été considérées comme les limites d'apparition du phénomène PLC, jusqu'à ce que l'on ait démontré expérimentalement que ce n'était pas toujours vérifié [16].

De fait, ces modèles s'appuient sur un mouvement continu des dislocations, alors qu'en fait ce mouvement est discontinu.

Schématiquement, une dislocation mobile dans son plan de glissement peut être temporairement arrêtée devant un obstacle, par exemple une forêt de dislocations. Le temps moyen d'attente t_w ("waiting time") est le temps nécessaire aux dislocations pour franchir l'obstacle avec l'aide d'activations thermiques. Si l'on appelle t_v le temps moyen de vol, on a :

$$t_w + t_v = l/v \quad (\text{I-2})$$

où l est la distance moyenne entre obstacles et v la vitesse de la dislocation considérée.

En général le temps de vol est considéré comme négligeable devant le temps d'attente ($t_w \gg t_v$), et c'est le temps d'attente qui détermine la vitesse des dislocations. Celle-ci est alors proportionnelle à $1/t_w$. Durant ce temps d'attente, les atomes de solutés diffusent vers la dislocation arrêtée.

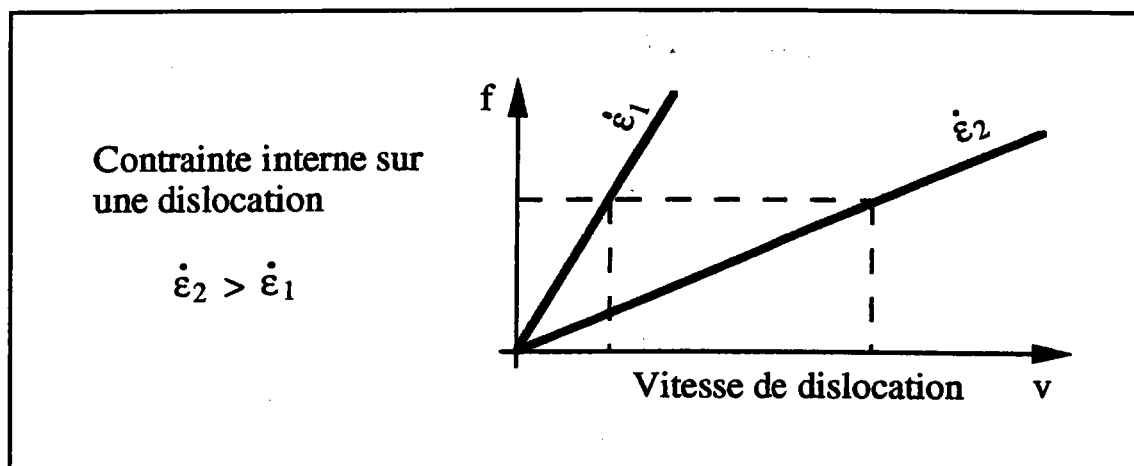


Figure I-13 :

Contraintes internes exercées sur une dislocation mobile en fonction de sa vitesse pour deux valeurs différentes de la vitesse de déformation imposée dans des conditions normales (pas de vieillissement dynamique).

Aux basses vitesses de déformation et dans les conditions "normales" sans vieillissement dynamique, les atomes de soluté disposent d'assez de temps pour diffuser vers les dislocations arrêtées, empêchant ainsi leur désancrage. Au contraire, aux fortes vitesses, ce frein au désancrage est supprimé car le temps d'attente des dislocations aux obstacles est trop bref pour que la diffusion des atomes de soluté soit significative. Ces deux régimes de vitesse sont caractérisés par différentes pentes des courbes $f(v)$, c'est-à-dire différents régimes de frottement visqueux : il résulte du processus de diffusion des solutés que cette pente est forte aux basses

vitesse de déformation car les dislocations mobiles ont à vaincre un frottement visqueux important de la part des atomes de solutés, et qu'elle est faible aux grandes vitesses de déformation car les dislocations mobiles sont libérées de l'atmosphère de solutés.

En revanche, dans les matériaux soumis à l'effet PLC, il existe un domaine intermédiaire dans lequel la dépendance de $f(v)$ est négative, c'est-à-dire pour lequel la diffusion des solutés est d'autant plus efficace que la vitesse de déformation est plus grande. L'évolution de f en fonction de v est alors schématisée sur la figure I-14.

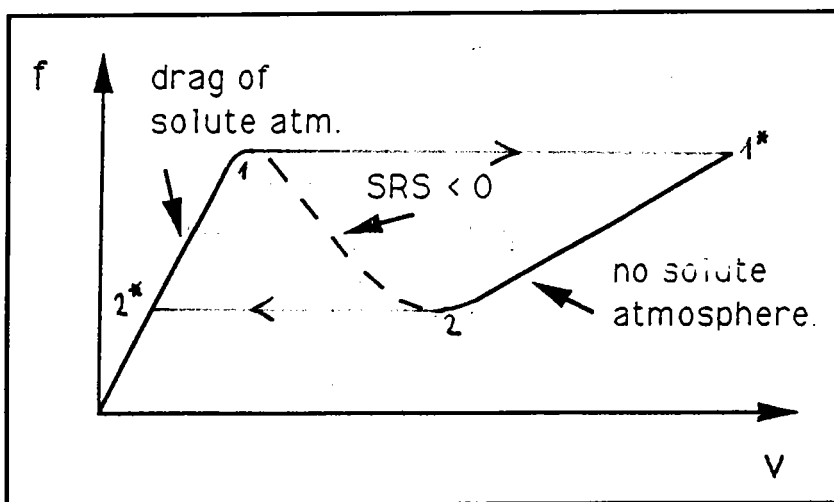


Figure I-14 :

Contraintes internes exercées sur une dislocation mobile en fonction de sa vitesse : vieillissement dynamique dans la région où $df/dv < 0$.

Comme précédemment, les atomes de soluté ont assez de temps aux faibles vitesses pour diffuser vers les dislocations temporairement arrêtées. Au contraire, aux fortes vitesses, le temps d'attente des dislocations est trop court pour que les processus diffusionnels soient opérants. Ces deux régimes sont caractérisés sur la courbe de la figure I-14 par deux inclinaisons différentes : forte dans la région des basses vitesses, et faible pour les hautes vitesses où les dislocations sont libres des atmosphères de soluté. C'est la région où la dépendance de f avec v est négative qui est relative au vieillissement dynamique. Le mécanisme qui gère le mouvement des dislocations est alors le suivant : si la contrainte appliquée à une dislocation augmente sur la branche basse de la courbe, le point 1 est atteint, un saut se produit alors jusqu'au point 1* sur la branche rapide où la dislocation est désancrée. Lorsque au contraire la

contrainte appliquée à une dislocation désancrée sur la branche rapide diminue, un saut ($2-2^*$) se produit jusqu'à la branche lente et correspond à l'ancrage de la dislocation ("stick-slip mechanism"). La région intermédiaire où $df/dv < 0$ est une région interdite aux dislocations, qui doivent être soit ancrées (branche 1-1*) soit désancrées (branche 2-2*).

Il serait beaucoup trop complexe de distinguer ici toutes les variétés de dislocations possibles (vis, coin, vecteurs de Burgers différents...), et d'exprimer le nombre et la nature des systèmes de glissement actifs qui peuvent interagir. Un compromis qui est apparu raisonnable à de nombreux auteurs [19, 20, 21, 22, 23] consiste à regrouper les dislocations de tous caractères et tous systèmes de glissement confondus en deux espèces : les dislocations mobiles (de densité ρ_m) et les dislocations fixes (de densité ρ_f) qui agissent comme des obstacles sur les dislocations mobiles. Dans ce cas, soit l la distance moyenne entre deux obstacles supposée de la forme :

$$l = \rho_f^{-1/2} \quad (\text{I-3})$$

à une constante multiplicative près : en utilisant la loi d'Orowan [25] exprimant que la vitesse de déformation est proportionnelle à la densité locale de dislocations mobiles

$$d\varepsilon/dt = \Phi \rho_m b v = \Phi \rho_m b l / t_w \quad (\text{I-4})$$

on obtient, au facteur géométrique Φ près,

$$d\varepsilon/dt = (\rho_m b \rho_f^{-1/2}) / t_w = \Omega(\varepsilon) / t_w \quad (\text{I-5})$$

Ω représente l'incrément de déformation élémentaire obtenu quand toutes les dislocations mobiles accomplissent un pas d'activation jusqu'à l'obstacle suivant.

D'autre part, Kubin et Estrin [20] montrent que la contrainte f due à l'interaction avec les atomes de soluté peut être représentée par :

$$f = f_0 \{ 1 - \exp[-(t_w/\tau)^{2/3}] \} \quad (\text{I-6})$$

où τ est le temps caractéristique de diffusion; f_0 , proportionnel à la concentration en soluté, représente l'accroissement maximal de saturation de la contrainte associé au vieillissement dynamique.

On peut décomposer la contrainte σ nécessaire au mouvement d'une dislocation dans son plan de glissement en :

$$\sigma = \sigma_d^{\text{th}} + \sigma_d^{\text{a}} + f \quad (\text{I-7})$$

où σ_d^{th} est la partie influencée par la température, et σ_d^{a} la partie athermique. Cette loi constitutive peut être considérée comme l'intégration de la forme différentielle générale [18] :

$$d\sigma = h d\varepsilon + S d(\ln\dot{\varepsilon}) \quad (\text{I-8})$$

lorsque h est indépendant de $\dot{\varepsilon}$ et S de ε ; elle introduit ainsi le taux de durcissement $h = (\partial\sigma/\partial\varepsilon)\dot{\varepsilon}$ et la sensibilité à la vitesse $S = (\partial\sigma/\partial \ln\dot{\varepsilon})_{\varepsilon}$.

Comme on l'a déjà vu, la mobilité des dislocations est déterminée par une "compétition" entre deux mécanismes adverses. Le procédé normal d'activation tend à réduire la contrainte d'écoulement lorsque le temps d'attente augmente. A ce procédé est associée la sensibilité à la vitesse S_0 qui est considérée comme une constante durant un essai de traction :

$$S_0 = (\partial\sigma_d^{\text{th}}/\partial \ln\dot{\varepsilon})_{\varepsilon} = kT/\gamma \quad (\text{I-9})$$

où k est la constante de Boltzmann, et γ le volume d'activation thermique nécessaire au franchissement des obstacles localisés.

Au contraire, le vieillissement par les atomes de soluté durcit l'obstacle avec l'augmentation du temps d'attente, et, par définition, sa contribution à la sensibilité à la vitesse est :

$$S_{\text{ageing}} = (\partial f/\partial \ln\dot{\varepsilon})_{\varepsilon} = -df/d \ln t_w \quad (\text{I-10})$$

La sensibilité à la vitesse peut être considérée alors comme la somme de ces deux contributions

$$S = S_0 + S_{\text{ageing}} \quad (\text{I-11})$$

La sensibilité à la vitesse

$$S = S_0 - df/ d \ln [\Omega(\epsilon)/\dot{\epsilon}] \quad (\text{I-12})$$

est donc, durant le vieillissement, une fonction de la déformation, de la vitesse de déformation, de la température et de la concentration en soluté. Elle peut devenir négative si la contribution du vieillissement est suffisamment importante : c'est dans cette zone de température et de vitesse de déformation que se produisent les oscillations dans la courbe de traction et la propagation des bandes de localisation plastique dues à l'effet PLC.

I-3-3 Conclusions

Le vieillissement dynamique se traduit au niveau macroscopique par un coefficient de sensibilité à la vitesse négative.

Les modèles de vieillissement dynamique permettent d'expliquer l'existence de déformations critiques pour l'apparition et la disparition de la déformation instable, leur évolution à forte vitesse de déformation et à basse température, et d'en obtenir une évaluation de façon semi-quantitative [20]. Ces déformations critiques sont définies à partir de la condition de disparition de la sensibilité à la vitesse négative.

Les modèles de vieillissement dynamique permettent d'établir des lois constitutives du comportement mécanique à partir desquelles des modèles macroscopiques peuvent être constitués. Les modèles de dislocations envisagés ne décrivent pas le comportement mécanique à l'échelle macroscopique car ils ne prennent pas en compte l'existence et la propagation des bandes de déformation ainsi que leurs effets sur la réponse mécanique en raison de leur caractère local.

Au chapitre 2, le glissement dévié des dislocations vis permettra d'introduire une variation non locale de la densité des dislocations mobiles; à la suite d'une opération de moyenne, on fera de même apparaître une variable macroscopique non locale dans les modèles mécaniques.

I-4 Aspects mécaniques

La sensibilité à la vitesse négative, traduisant macroscopiquement le concept de vieillissement dynamique, va permettre d'exprimer une relation locale entre la contrainte et la vitesse de déformation, sous forme d'une fonction $F(\dot{\epsilon})$, décroissante dans un certain domaine de vitesses de déformation, et qui reproduit la forme en N caractéristique de la figure I-14. Le modèle de Kubin-Estrin [3, 19] relie les aspects microscopiques et macroscopiques et construit une telle fonction $F(\dot{\epsilon})$. Il reprend le modèle de Penning [4] qui, le premier, a utilisé la sensibilité à la vitesse négative comme critère d'apparition du phénomène PLC, et en a déduit la forme cubique de $F(\dot{\epsilon})$, mais de façon purement phénoménologique et qualitative.

Le comportement macroscopique local est obtenu en sommant les contributions de toutes les dislocations de la section droite à la vitesse de déformation totale locale. On suppose cette opération de moyenne valable indépendamment sur chaque section droite pour pouvoir écrire une loi locale **monodimensionnelle**.

Dans une première partie, nous examinerons le modèle de Penning et ses résultats, et dans la seconde partie, celui de Kubin-Estrin après avoir établi l'expression de la fonction $F(\dot{\epsilon})$ à partir de celle de la sensibilité à la vitesse donnée dans le paragraphe I-3-2.

I-4-1 Modèle de Penning

Penning [4] a été le premier à montrer clairement que l'instabilité mécanique due à l'effet PLC est le résultat nécessaire d'une sensibilité à la vitesse négative. Bien qu'il ait considéré seulement le cas des essais en machine dure, donc à vitesse de déformation imposée $\dot{\epsilon}_a$, son modèle phénoménologique a le mérite de lier l'existence de bandes de déformation à un domaine de vitesses de déformation interdites et à des sauts de la vitesse de déformation de part et d'autre de ce domaine.

Le modèle de Penning, comme tous ceux qui vont être utilisés dans la suite, sont **monodimensionnels** : on ne s'intéresse pas à l'inclinaison de

la bande sur l'éprouvette, et on néglige les phénomènes de striction car la déformation plastique résultant d'une bande est très faible.

La traverse de la machine se déplace à une vitesse v_0 ; en supposant donc les déformations plastiques ε faibles dans la section droite et les variations de section transversale négligeables, la vitesse de déformation appliquée $\dot{\varepsilon}_a$ s'écrit en fonction de la vitesse de déformation locale $\dot{\varepsilon}$ et du taux de contrainte $\dot{\sigma}$:

$$\frac{\dot{\sigma}}{M} + \frac{1}{L} \int_0^L \dot{\varepsilon} dx = \frac{v_0}{L} = \dot{\varepsilon}_a \quad (\text{I-13})$$

où L est la longueur de l'éprouvette, M le module de la machine de traction et de l'éprouvette.

Cette relation exprime que la vitesse de déformation appliquée est la somme de la vitesse de déformation élastique et de la vitesse de déformation plastique moyenne.

Pour simplifier le problème, Penning fait alors l'hypothèse que σ est fonction de ε et $\dot{\varepsilon}$:

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} + \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \ddot{\varepsilon} \quad (\text{I-14})$$

où l'on retrouve le taux de durcissement $\partial \sigma / \partial \varepsilon$ et le durcissement par la vitesse de déformation $\partial \sigma / \partial \dot{\varepsilon}$. En supposant de plus que σ soit additivement séparable en ε et $\dot{\varepsilon}$, et que $\partial \sigma / \partial \varepsilon = h$ reste constant et positif durant le court intervalle de déformation correspondant au passage d'une bande, la relation (I-14) entraîne :

$$\sigma = h \varepsilon + F(\dot{\varepsilon}) \quad (\text{I-15})$$

F doit passer par un maximum et un minimum quand $\dot{\varepsilon}$ croît pour qu'il y ait déformation non homogène. Penning montre que cette forme cubique de F est à l'origine des sauts de la vitesse de déformation locale. Les valeurs $\dot{\varepsilon}_1$ et $\dot{\varepsilon}_2$ de $\dot{\varepsilon}$ aux extrémums (figure I-15), valeurs limites de la région de sensibilité à la vitesse négative, sont les vitesses de déformations critiques d'apparition et disparition de l'effet PLC.

En combinant (I-13) et (I-15) pour éliminer la contrainte, on obtient :

$$M \dot{\epsilon}_a = h \dot{\epsilon} + \ddot{\epsilon} \frac{dF(\dot{\epsilon})}{d\dot{\epsilon}} + \frac{M}{L} \int_0^L \dot{\epsilon} dx \quad (\text{I-16})$$

Cette équation intégral-différentielle ne peut être résolue que de façon approchée si la déformation est non uniforme; elle a toutefois une solution stationnaire ($\ddot{\epsilon} = 0$) et uniforme ($\partial\epsilon/\partial x = 0$) :

$$\dot{\epsilon}_s = M \dot{\epsilon}_a / (h + M) \quad \text{et} \quad \dot{\sigma}_s = h \dot{\epsilon}_s \quad (\text{I-17})$$

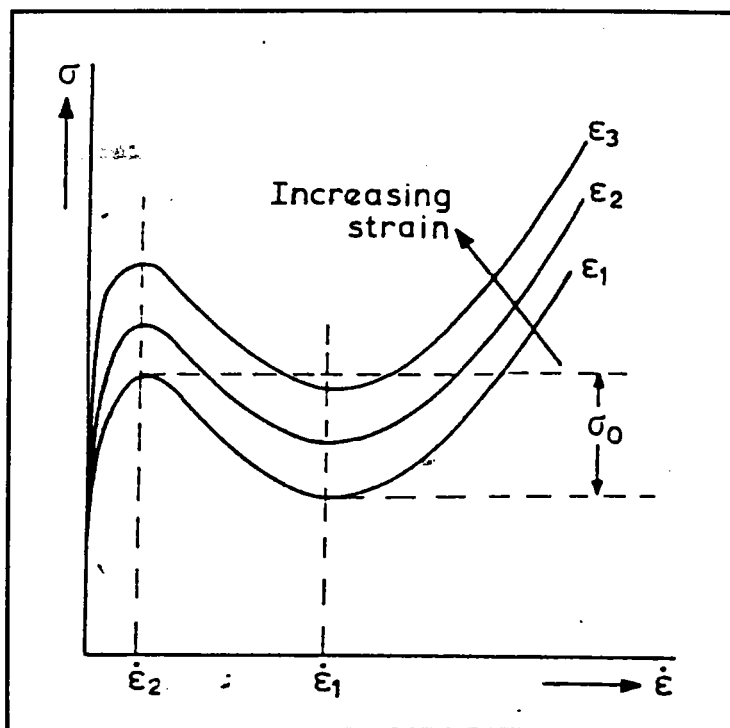


Figure I-15 :

Graphe des fonctions $\sigma(\dot{\epsilon})$ à des taux de déformations croissants. La sensibilité à la vitesse de déformation est négative pour $\dot{\epsilon}_1 \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_2$. [4]

Penning introduit deux solutions simplifiées : des bandes de déformation se déplaçant par sauts discontinus où toute la déformation est concentrée, et des bandes de déformation qui se propagent continuellement à vitesse constante.

Dans l'un et l'autre cas, il montre que, chaque fois que la vitesse de déformation de la bande atteint la valeur $\dot{\epsilon}_1$ ou $\dot{\epsilon}_2$ sur une branche de pente positive de la courbe $\sigma(\dot{\epsilon})$, elle doit "sauter" instantanément, à contrainte constante, à la valeur correspondante de vitesse de déformation sur l'autre branche de pente positive (figure I-16). La région où la sensibilité à la vitesse est négative n'est donc jamais atteinte.

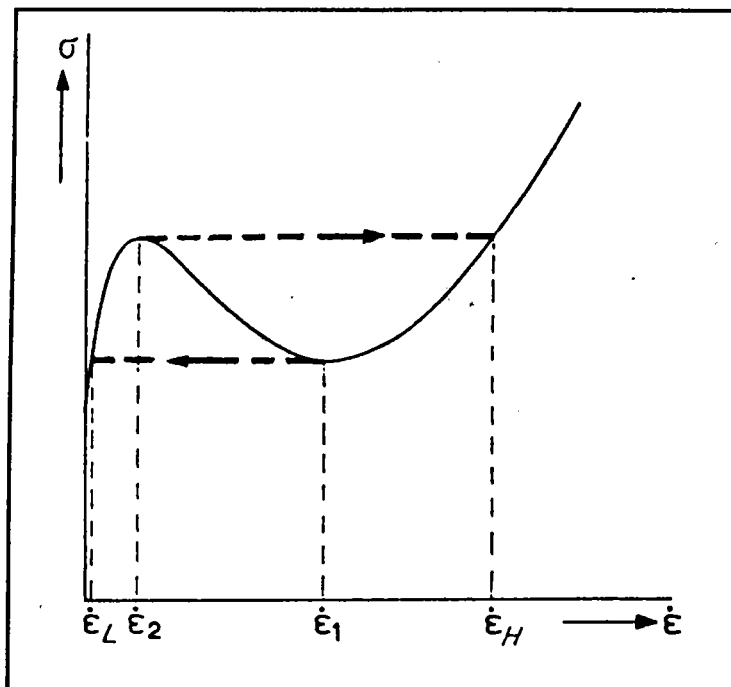


Figure I-16 :

Evolution en fonction du temps de la vitesse de déformation dans la bande de déformation associée à l'effet PLC. Un saut de vitesse apparaît dès que les valeurs correspondant au maximum ou au minimum sont atteintes. [4]

Dans le premier cas, il examine qualitativement l'allure des courbes $\dot{\epsilon}(t)$. Elles présentent des décrochements d'amplitude variable selon la vitesse de déformation imposée; dans le second cas, il donne l'allure des bandes se propageant à la vitesse V constante (figure I-17). La branche comprise entre $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_H$ est la branche rapide. En $\dot{\epsilon}_1$, la branche lente est atteinte.

Le modèle de Penning est justifié à l'aide d'arguments de nature mathématique. Kubin et Estrin [3, 18, 19], avec les mêmes hypothèses (à savoir ε considérée comme une variable d'état, séparation additive des variables ε et $\dot{\varepsilon}$, et taux de durcissement h supposé constant et positif), lui donnent un support microphysique en y intégrant le concept de vieillissement dynamique associé à une sensibilité à la vitesse négative.

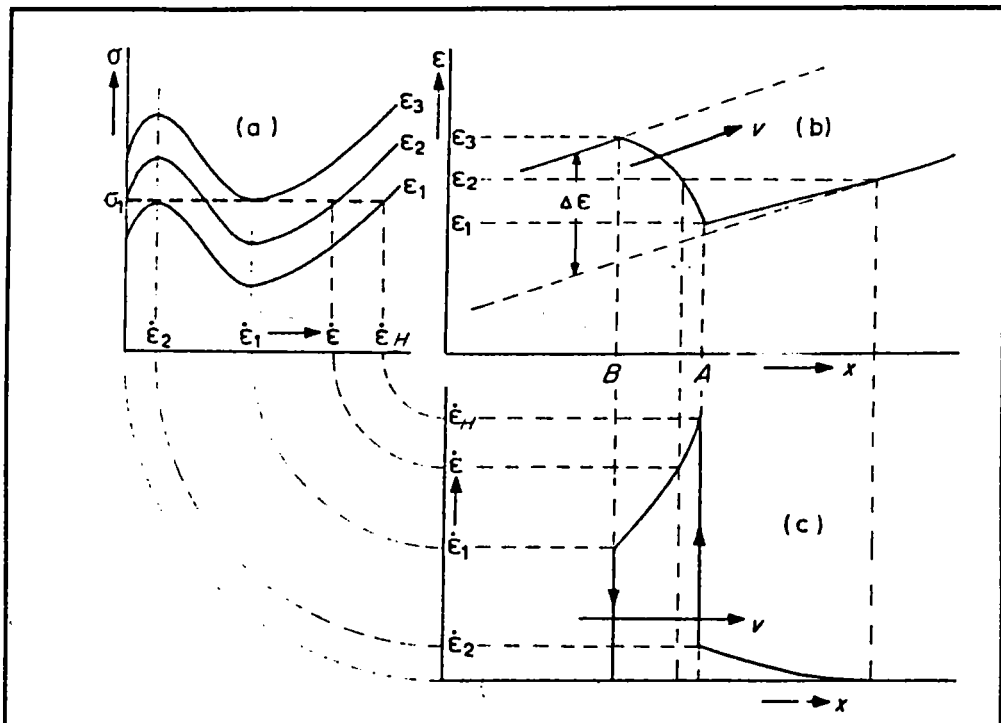


Figure I-17 :

Profil, se déplaçant à vitesse constante V , des vitesses de déformation en fonction de la position x sur l'axe de traction de l'éprouvette. [4]

I-4-2 Modèle de Kubin et Estrin

Le modèle de Kubin et Estrin [3, 18, 19] utilise la loi constitutive de

Penning :

$$\sigma = h \varepsilon + F(\dot{\varepsilon})$$

avec les même approximations, qui apparaissent admissibles tant que les déformations plastiques sont petites, ce qui est le cas lors du passage d'une bande de déformation dans une section de l'échantillon. Il établit

l'expression de la fonction viscoplastique $F(\dot{\epsilon})$ à partir de celle de la sensibilité à la vitesse (I-12).

La contrainte f due à l'interaction avec les atomes de soluté donnée par l'équation (I-6) peut être exprimée en fonction de $\Omega(\epsilon)/\dot{\epsilon}$ sachant d'après (I-5) que $t_w = \Omega(\epsilon)/\dot{\epsilon}$. On obtient donc aisément sa dérivée et l'expression de la sensibilité à la vitesse suivante :

$$S = S_0 - \frac{2}{3} f_0 \left(\frac{\Omega(\epsilon)}{\tau \dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{3}} \exp \left[- \left(\frac{\Omega(\epsilon)}{\tau \dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (\text{I-18})$$

Par définition, la sensibilité à la vitesse est $S = (\partial\sigma/\partial \ln \dot{\epsilon})\epsilon$. En supposant que ϵ est une variable lente par rapport à $\dot{\epsilon}$, on peut l'intégrer pour obtenir la contribution de la vitesse de déformation à la contrainte :

$$F(\dot{\epsilon}) = S_0 \ln \dot{\epsilon} - f_0 \exp \left[- \left(\frac{\Omega(\epsilon)}{\tau \dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + F_0 \quad (\text{I-19})$$

qui correspond à la partie $\sigma_d^{\text{th}} + f$ de (I-7) et qui a la même forme caractéristique en N que la courbe $f(v)$ de la figure I-14. Pour une machine douce, la vitesse de chargement constante $\dot{\sigma}_0$ influe sur le mécanisme microscopique. Un terme $S_{II} = 1/2 [\dot{\sigma}_0 / (h \dot{\epsilon}) - 1]$ (II pour "loading"), qui prend en compte l'évolution de la composante thermique de la sensibilité à la vitesse de déformation avec la vitesse de chargement, est alors à rajouter à l'expression (I-18) de la sensibilité à la vitesse [27]. En intégrant cette nouvelle expression, on aboutit à la contrainte viscoplastique :

$$F(\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}_0) = S_0 \ln \dot{\epsilon} - f_0 \exp \left[- \left(\frac{\Omega(\epsilon)}{\tau \dot{\epsilon}} \right)^{\frac{2}{3}} \right] + F_0 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k} - \text{Log } k \right)$$

$$\text{avec } k = \frac{h\dot{\epsilon}}{\dot{\sigma}_0} \quad (\text{I-20})$$

Cette correction s'applique jusqu'au minimum de la fonction F car, aux fortes vitesses de déformation, la déformation n'est plus thermiquement activée : elle a notamment pour effet de diminuer le maximum atteint par la contrainte viscoplastique en $\dot{\epsilon}_1$ lorsque $\dot{\sigma}_0$ croît.

Les courbes caractéristiques $F(\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}_0)$ pour un alliage Al-5%Mg à 350 K obtenues d'après ce modèle sont tracées en figure I-18.

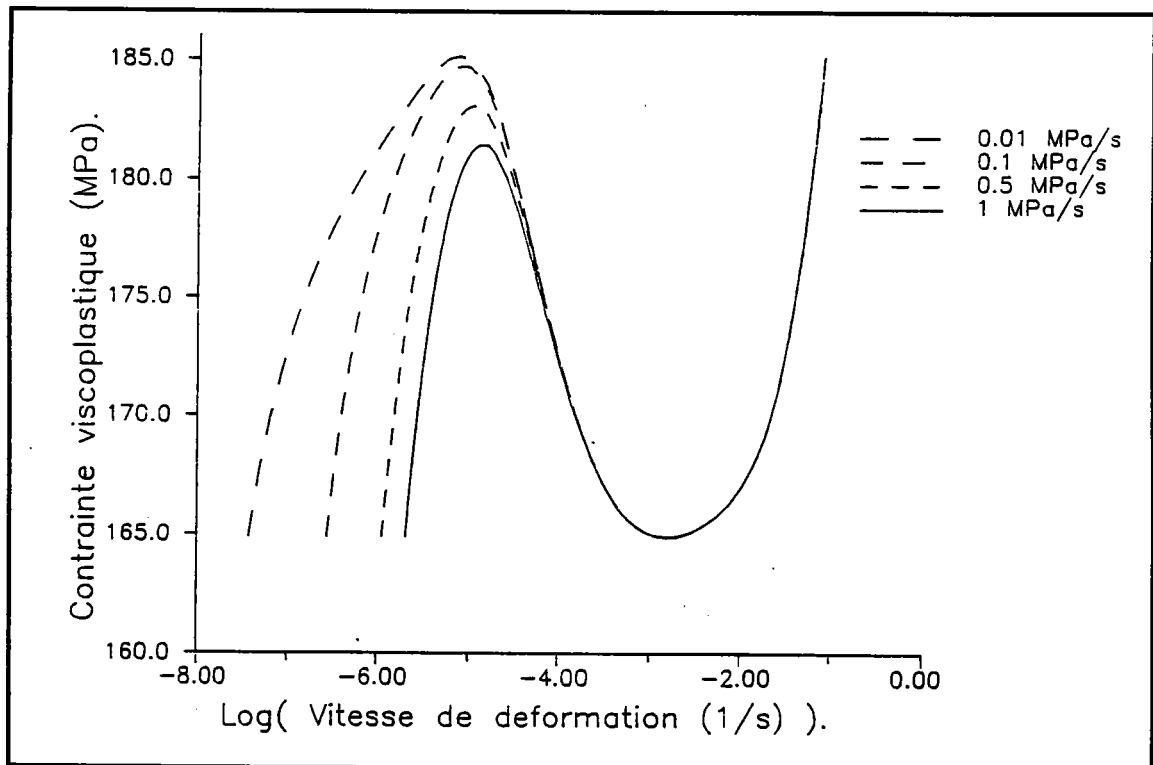


Figure I-18 :
Courbes caractéristiques de l'effet PLC à différentes vitesses de chargement $\dot{\sigma}_0$.

A vitesse de chargement constante $\dot{\sigma}_0$, la contrainte uniaxiale peut s'exprimer par $\sigma = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0$, et le modèle est entièrement contenu dans l'équation :

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0 = h \epsilon + F(\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}_0) \quad (\text{I-21})$$

relative à une section x de l'échantillon en traction.

Si l'on dérive cette expression par rapport au temps, on obtient le régime permanent ($\ddot{\epsilon} = 0$) uniforme ($\partial\epsilon/\partial x = 0$) :

$$\dot{\sigma}_s = h \dot{\epsilon}_s \quad (\text{I-22}).$$

L'analyse de stabilité linéaire de Kubin-Estrin [3] montre que cette solution uniforme est stable si le point $M_s = (\dot{\epsilon}_s, \sigma_s)$ se trouve sur les branches ascendantes de la fonction viscoplastique F . En revanche, lorsque $\dot{\epsilon}_s$ est dans la région de vitesses de déformation comprises entre $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$ (figure I-19), la solution uniforme est instable et un mode de déformation non uniforme se substitue à elle. Le point correspondant sur la branche descendante de la courbe F n'est jamais atteint au cours de la déformation non uniforme. On retrouve donc que la région de sensibilité à la vitesse négative, c'est-à-dire le domaine de vitesses de déformation $[\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2]$ correspondant à la branche descendante de la courbe F , est une région interdite au système.

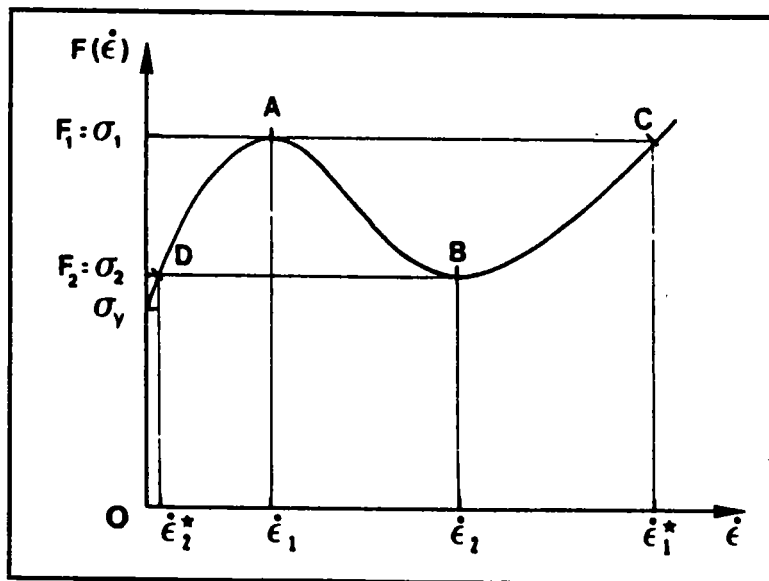


Figure I-19 :

Schématisme d'un cycle décrit par une section au cours d'une instabilité de l'effet PLC pour une vitesse de chargement donnée constante. [3]

Kubin et Estrin décrivent comme Penning un cycle parcouru par une section droite de l'échantillon lorsque la vitesse de déformation imposée se situe dans la zone interdite : la vitesse de déformation croît sur la branche lente (2*,1) jusqu'à $\dot{\epsilon}_1$, passe brutalement à contrainte constante sur la branche rapide de pente positive de la courbe en $\dot{\epsilon}_1^*$, décroît sur cette branche (1*,2) jusqu'à $\dot{\epsilon}_2$, et saute de nouveau à contrainte constante en $\dot{\epsilon}_2^*$ sur la branche lente (figure I-19). A chaque fois que ce cycle est décrit, une bande de déformation plastique localisée obtenue sous la forme $\dot{\epsilon}(x-Vt)$ se propage le long de l'éprouvette à vitesse constante mais arbitraire V (figures I-20 et I-21).

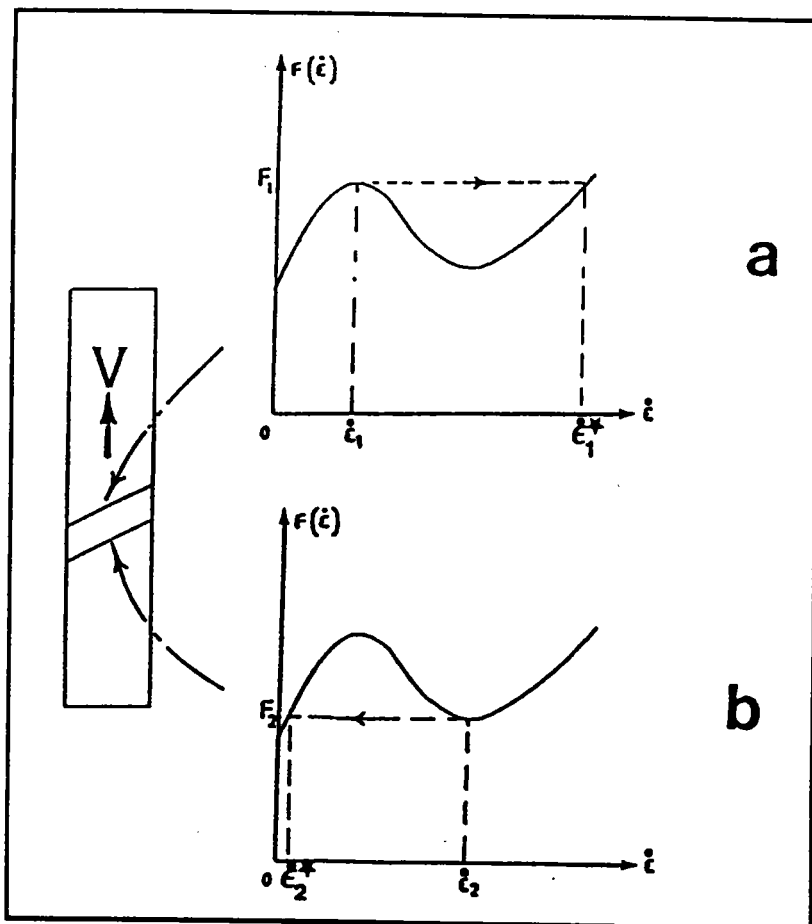


Figure I-20 :

Bande de déformation associée au phénomène PLC :
 a) front avant de la bande, b) front arrière de la bande.

En avant de la bande, les dislocations sont encore ancrées et se situent sur la portion à faible vitesse de $F(\dot{\epsilon})$. Il en va de même à l'arrière de la bande où les dislocations ont été réancrées. Les fronts de la bande de déformation correspondent aux sauts de vitesse des dislocations lors du désancrage (front avant) et lors du réancrage (front arrière).

On peut considérer ce cycle comme un cycle limite décrit dans l'espace de phase de la section considérée, les variables de phase étant définies par:

$$u_1 = \epsilon - \epsilon_s = \frac{F(\dot{\epsilon}_s) - F(\dot{\epsilon})}{h}$$

$$u_2 = \frac{du_1}{d\xi} = -\frac{1}{V} \frac{du_1}{dt} = -\frac{1}{V} (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_s) \quad \text{avec } \xi = x - Vt \quad (\text{I-23})$$

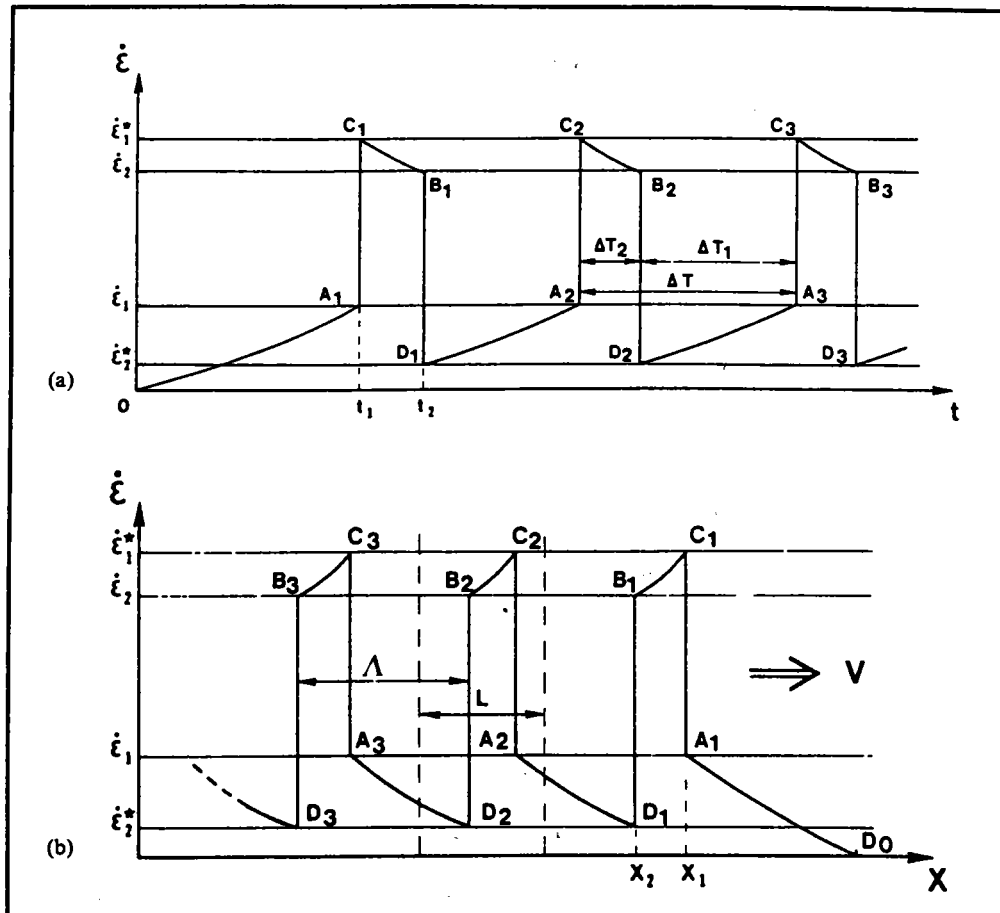


Figure I-21 :

Profil des vitesses de déformation [3] :

- (a) en fonction du temps dans une section x de l'échantillon,
 (b) à un instant donné dans un échantillon de longueur L .

Au vu du profil donné figure I-21, et connaissant la fonction viscoplastique F , on peut calculer diverses quantités à partir de l'équation (I-21) dérivée par rapport au temps :

- le temps mis par la bande pour traverser une section de l'échantillon $\Delta T_2 = w/V$ donné par :

$$\Delta T_2 = \frac{1}{h} \int_{\dot{\epsilon}_1^*}^{\dot{\epsilon}_2} \frac{dF}{\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_s} \quad (\text{I-24})$$

- le temps qui s'écoule entre deux apparitions de bandes dans la même section $\Delta T_1 = l/V$ donné par :

$$\Delta T_1 = \frac{1}{h} \int_{\dot{\epsilon}_2^*}^{\dot{\epsilon}_1} \frac{dF}{\dot{\epsilon}_s - \dot{\epsilon}} \quad (\text{I-25})$$

- la somme de ces deux quantités qui donne la périodicité de passage des bandes $\Delta T = \Lambda/V$. Ceci permet de déterminer les caractéristiques spatiales l , w et Λ au facteur V près qui demeure inconnu.

I-4-3 Conclusion

Pas plus que le modèle de Penning, ce modèle ne permet de rendre compte quantitativement de la propagation des sauts de vitesse de déformation. En effet, l'analyse de Kubin-Estrin ne donne pas la possibilité de déterminer la vitesse de propagation V qui demeure une quantité arbitraire. Cela résulte du fait que seules des équations locales sont écrites et qu'aucune échelle de longueur n'apparaît, car les interactions spatiales ne sont pas décrites par le modèle

C'est pourquoi nous allons introduire deux mécanismes d'interaction spatiale différents au chapitre 2, ce qui permettra de formuler des lois de comportement non locales et de décrire de façon quantitative les oscillations observées.

CHAPITRE 2 :

Modèles non locaux

II-1 Introduction.....	34
II-2 Deux lois de plasticité non locales.....	35
II-2-1 Loi de plasticité avec second gradient.....	35
II-2-2 Loi de plasticité avec pseudo-diffusion.....	37
II-3 Deux modèles mécaniques susceptibles de décrire la progression des bandes.....	43
II-3-1 Modèle de second gradient.....	44
II-3-2 Modèle de pseudo-diffusion.....	45
II-3-3 Analogies mécaniques, électriques et chimiques	46
a) Quelques mécanismes de type “stick-slip”	47
b) Phénomènes de réaction-diffusion	50
c) L’effet Gunn	51
II-4 Conclusion.....	53

CHAPITRE 2 :

Modèles non locaux

II-1 Introduction

Le chapitre 1 a rappelé la nécessité d'écrire des équations non locales pour décrire la propagation des bandes PLC.

A cet effet, on a pu penser utiliser des effets géométriques de gradient de déformation structuraux; c'est le cas notamment de Mac Cormick [37] qui interprète les bandes PLC à l'aide d'un mécanisme de striction de l'éprouvette. Cependant les bandes PLC sont également observées dans une expérience de torsion [38], ce qui semble exclure ce type d'explication.

Les modèles utilisés dans ce travail postulent au contraire qu'il s'agit d'une instabilité matérielle reposant sur le caractère non-local des lois de plasticité employées. La formulation de lois non locales découle de l'observation selon laquelle la déformation plastique est de nature inhomogène à l'échelle des dislocations

Il faut en effet se souvenir que les variables "locales" habituellement utilisées, comme la masse volumique, le tenseur des contraintes ou la vitesse de déformation plastique, sont en fait des moyennes effectuées sur un volume "élémentaire" dont on suppose les propriétés suffisamment homogènes pour que le résultat puisse être affecté en son centre.

A ce niveau, c'est donc le comportement collectif des dislocations et son éventuelle non-uniformité qui sont significatifs du caractère non-local des lois de plasticité.

L'existence de forts gradients entraîne qu'une condition nécessaire à l'étude de la distribution spatiale de la vitesse de déformation plastique est que les variables d'espace apparaissent dans les lois de comportement.

II-2 Deux lois de plasticité non locales

II-2-1 Loi de plasticité avec second gradient

L'organisation collective des dislocations dans le temps et dans l'espace est à son tour un problème pour lequel il existe une solution uniforme, pouvant dans certaines conditions devenir instable, et céder sa place à une distribution non uniforme organisée en structures de dislocations.

Kratochvil [31] interprète ainsi l'apparition de murs et de veines parallèles de dislocations lors d'un essai de traction, à l'aide d'équations aux dérivées partielles des densités de dislocations, faisant intervenir des flux en plus des variations locales.

Aifantis [30] interprète de même l'existence des bandes de glissement persistantes en termes d'équations de réaction-diffusion des densités de dislocations.

La transposition sur le plan macroscopique d'interactions non uniformes à l'échelle des populations de dislocations a fait appel aux lois de type second gradient, introduites auparavant de manière phénoménologique par Truesdell et Eringen [39]. Le terme de second gradient permet alors de prendre en compte un écrouissage non local à faible distance.

On supposera dans la suite qu'une opération de moyenne est possible sur une section droite, et que le résultat peut être affecté à l'abscisse x . Les termes non-locaux seront donc interprétés en termes d'interactions entre sections droites voisines. Une interprétation mono-dimensionnelle des interactions par contraintes internes est alors la suivante : la contrainte d'écoulement en x est supposée être de la forme

$$\sigma = \sigma_l + \sigma_{nl} \quad (\text{II-1})$$

où σ_l est la variable locale, et où la partie non locale σ_{nl} est donnée par

$$\sigma_{nl}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} M(r) [\varepsilon(r) - \varepsilon(0)] dr \quad ; \quad r = x - x' \quad (\text{II-2})$$

Cette relation postule que la déformation plastique ε au point x' différent de x affecte la contrainte d'écoulement en x au travers d'une fonction

d'influence $M(r)$. Il est naturel de supposer que $M(r)$ est une fonction paire, tendant vers 0 lorsque $r \rightarrow \infty$. On négligera les interactions à longue distance en considérant une distance de coupure R telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} M(r) [\varepsilon(r) - \varepsilon(0)] dr \simeq \int_{-R}^{+R} M(r) [\varepsilon(r) - \varepsilon(0)] dr \quad (\text{II-3})$$

R est supposé assez petit pour que

$$M(r) = M(0) + \frac{r^2}{2} M''(0) + o(r^2) \quad (\text{II-4})$$

En outre, on suppose la variation de $\varepsilon(r)$ assez faible pour que

$$\varepsilon(r) - \varepsilon(0) = \frac{r^2}{2} \varepsilon_{,xx}(0) + o(r^3) \quad (\text{II-5})$$

On en déduit que

$$\sigma_{nl}(x) \simeq \int_{-R}^{+R} M(0) \frac{r^2}{2} \varepsilon_{,xx}(0) dr = \frac{1}{3} R^3 M(0) \varepsilon_{,xx}(0) \quad (\text{II-6})$$

de sorte que le terme d'écrouissage non local est approché par

$$\sigma_{nl} = K \frac{d^2\varepsilon}{dx^2}, \quad K = \frac{1}{3} M(0) R^3 \quad (\text{II-7})$$

et d'après (II-1)

$$\sigma = \sigma_l + K \frac{d^2\varepsilon}{dx^2} \quad (\text{II-8})$$

Le coefficient K s'exprime directement en fonction de la distance de coupure R . Cette approche non locale par l'addition d'un terme de second gradient détermine une longueur caractéristique : c'est la distance critique

au delà de laquelle on peut considérer que les interactions n'interviennent plus de manière significative.

La contrainte locale est :

$$\sigma_l = h \varepsilon + F(\dot{\varepsilon}) \quad (\text{II-9})$$

d'après la loi de comportement viscoplastique locale de Penning.

On obtient alors une contrainte uniaxiale dans la section transversale de coordonnée x , de la forme :

$$\sigma = h \varepsilon + F(\dot{\varepsilon}) + K \varepsilon_{,xx} \quad (\text{II-10})$$

où le terme de second gradient $K\varepsilon_{,xx}$ traduit un écrouissage non local faible [30, 31]. Nous appellerons la relation (II-10) **loi de second gradient** où h est le taux d'écrouissage supposé constant, ε est la déformation plastique, K est une constante, et F est la fonction viscoplastique caractéristique de l'effet PLC de forme cubique, calculée au chapitre précédent et donnée en figure I-18 pour un Al-5%Mg à 350 K.

Cette loi non locale a été utilisée par Zbib et Aifantis [29] pour une première tentative de détermination de la vitesse de propagation des bandes de déformation associées à l'effet PLC.

II-2-2 Loi de plasticité avec pseudo-diffusion

Les échanges de dislocations mobiles entre éléments adjacents du matériau par glissement dévié [19, 34, 35] constituent un autre mécanisme d'interaction susceptible de conduire à la formulation de lois non-locales.

Les interactions des dislocations ont été entrevues au chapitre 1 en I-3-1, mais il apparaît maintenant utile d'en développer certains mécanismes, parmi lesquels le glissement dévié.

Le franchissement des précipités est un cas particulier d'interaction directe; il se fait par cisaillement, une fois que la dislocation a vaincu les forces d'interaction à distance : la dislocation traverse de part en part les précipités, ce qui accroît la contrainte d'écoulement du matériau; il peut se faire aussi par contournement si la dislocation ne peut cisailer le précipité. Deux mécanismes de contournement sont susceptibles

d'intervenir : le mécanisme d'Orowan où la dislocation se courbe entre les particules et se libère en laissant une boucle autour de chaque précipité, et le mécanisme du double glissement dévié. Sur la dislocation se forment alors des segments de dislocation vis au voisinage de la particule, segments qui sous l'action des forces résultant de l'interaction élastique répulsive à courte distance dislocation-particule vont quitter le plan de glissement de la ligne de dislocation et se déplacer dans des plans de glissement dévié. Ces segments, étant de vecteurs de Burgers de sens opposé, vont s'attirer et éventuellement s'annihiler, laissant d'une part une boucle autour de la particule, et d'autre part un cran sur la ligne de dislocation.

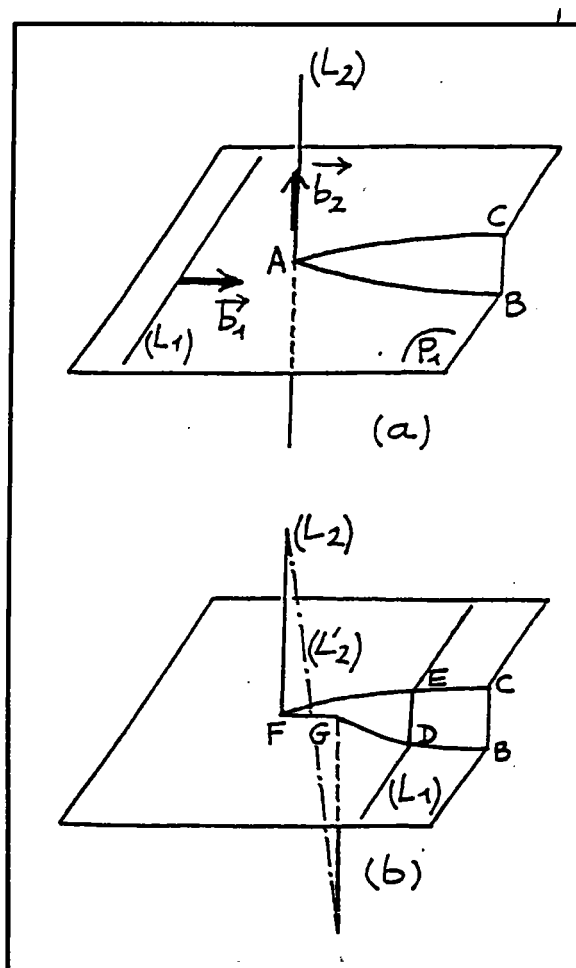


Figure II-1 :

Intersection de la dislocation coin L_1 se déplaçant dans son plan de glissement P_1 , avec la dislocation vis L_2 perpendiculaire à P_1 : formation d'une marche DE , cran sur la ligne L_1 .

La formation de crans a également lieu quand les dislocations mobiles rencontrent d'autres dislocations mobiles ou ancrées. Les crans résultent de l'intersection de deux dislocations non parallèles. Voir l'exemple donné en figure II-1 d'une dislocation coin (L1) se déplaçant dans son plan de glissement (P1) qui rencontre une dislocation vis (L2) perpendiculaire à (P1) : il se forme une marche ABC de hauteur égale au module de \vec{b}_2). Dans le cas où le cran et la dislocation ont des plans de glissement différents, le cran ne pourra suivre le mouvement de la dislocation que par montée, c'est-à-dire en prenant la place d'une lacune. Si la montée ne peut se produire, le cran reste bloqué, alors que la dislocation se déplace, et il se crée alors un dipôle, puis une boucle (figure II-2).

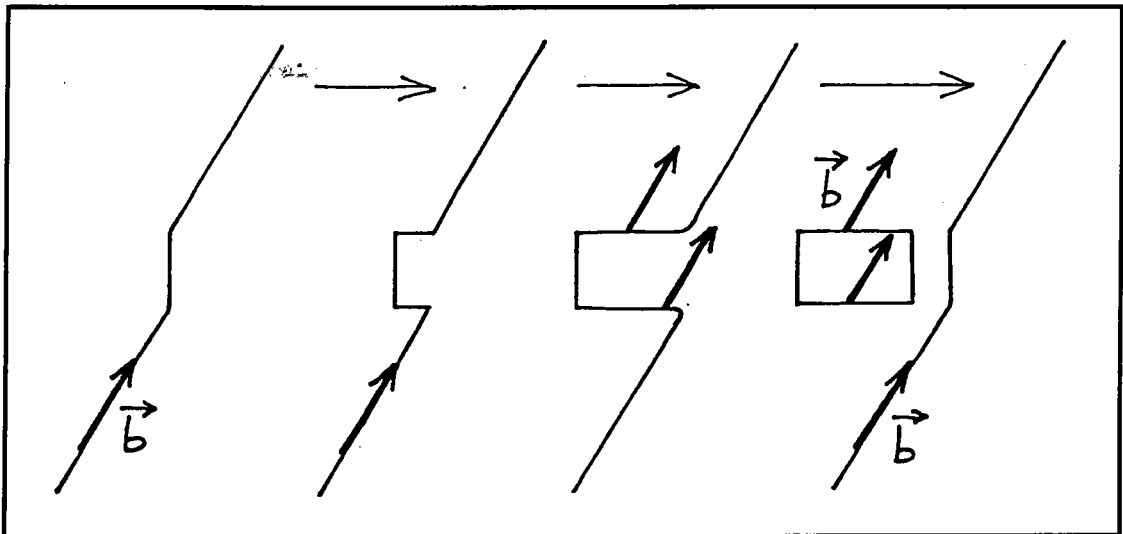


Figure II-2 :

Formation d'une boucle lorsque le cran et la ligne de dislocation ont des plans de glissement différents.

La montée est le mouvement non conservatif de la composante coin d'une dislocation hors de son plan de glissement. Elle s'effectue à haute température par diffusion en faisant intervenir le mouvement thermiquement activé des lacunes émises ou absorbées par les crans sur les dislocations. Lorsque la contrainte sur la dislocation est forte, il peut y avoir montée cinétique. La montée se produit donc soit sous variation de température en l'absence de contrainte, soit sous contrainte.

La composante vis de la dislocation peut quant à elle sortir de son plan de glissement par le mécanisme du double glissement dévié. Le

glissement dévié d'un plan de glissement à un autre n'est possible que si les deux plans sont parallèles à \vec{b} , direction de glissement : c'est pourquoi seule la partie vis de la dislocation peut être ainsi déviée. Celui-ci peut se produire dans d'autres cas que celui déjà présenté du contournement d'obstacles, par exemple quand deux dislocations vis de vecteurs de Burgers de même sens interagissent. Appelons λ la distance critique pour laquelle deux dislocations vis de vecteurs de Burgers de sens opposés s'annihilent. Si la distance entre les plans de glissement des deux dislocations vis de vecteur de Burgers de même sens devient inférieure à λ , leur interaction répulsive est plus importante que la force qui les fait bouger dans leur plan de glissement: elles commencent alors à glisser hors de leur plan de glissement sur des plans de glissement dévié jusqu'à ce que leur distance devienne plus grande que λ , propageant ainsi la déformation plastique dans un volume encore non déformé (figure II-3).

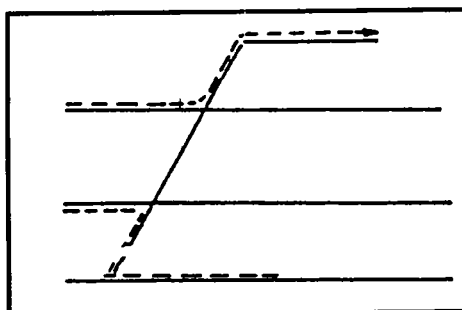


Figure II-3 :

Glissement dévié induit par l'interaction de deux dislocations vis de vecteur de Burgers de même sens. [35]

Le double glissement dévié introduit ainsi un couplage spatial le long de la direction x normale au plan de glissement. Bréchet et Louchet [34] décrivent la forme générale de ce couplage en faisant l'hypothèse d'un seul plan de glissement actif et en partageant le cristal en zones de glissement normales à la direction x . Ils écrivent alors un bilan des échanges dus aux interactions entre plans de glissement voisins d'un plan de glissement donné, ce qui leur permet de montrer que de telles interactions se ramènent formellement à une équation de diffusion, lorsqu'elles opèrent à courte distance.

D'une façon générale, toujours en supposant qu'il existe un plan de glissement préférentiel dominant, un bilan des glissements déviés va nous permettre de mettre en évidence un coefficient de diffusion D , valable

pour tout mécanisme de glissement dévié [29]. Appelons $\rho_m(x,t)$ la densité de dislocations mobiles dans un plan x à l'instant t , x_c la distance maximum de glissement dévié supposée faible (voir la figure II-4), Γ la probabilité de glissement dévié exprimée en nombre d'événements par m^2 , et v la vitesse des dislocations. On cherche la variation non locale de $\rho_m(x,t)$ due au glissement dévié, quelle que soit son origine, vers le plan x ; elle peut s'écrire :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t}(x,t) = \int_{-x_c}^{x_c} \Gamma v (\rho_m(r,t) - \rho_m(0,t)) dr \quad ; \quad r = x - x' \quad (\text{II-11})$$

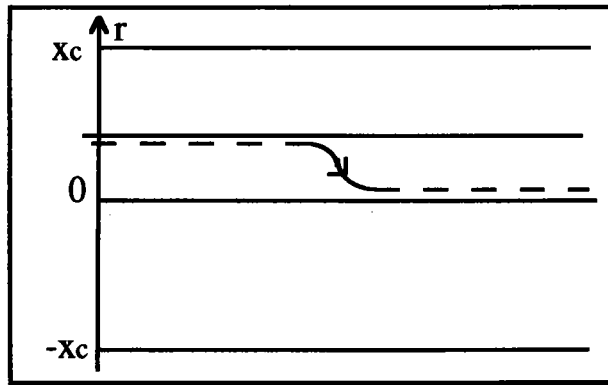


Figure II-4 :

Mécanisme de glissement dévié, en supposant les plans de glissement tous parallèles à l'axe des x , la distance maximum de glissement dévié étant x_c .

On peut faire par ailleurs un développement limité de $\rho_m(r,t)$ autour de $r = 0$, les valeurs de r étant faibles ($r \leq x_c$) :

$$\rho_m(r,t) = \rho_m(0,t) + \frac{\partial \rho_m(0,t)}{\partial x} r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_m(0,t)}{\partial x^2} r^2 + o(r^2) \quad (\text{II-12})$$

Pour des raisons de symétrie par rapport à $x = 0$, on a :

$$\frac{\partial \rho_m(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-13})$$

En combinant les équations (II-11), (II-12) et (II-13), on obtient :

$$\frac{\partial \rho_{m_{nl}}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Gamma v \int_{-x_c}^{x_c} r^2 \frac{\partial^2 \rho_m}{\partial x^2}(0,t) dr + o(r^2) \quad (\text{II-14})$$

et en intégrant :

$$\frac{\partial \rho_{m_{nl}}(x,t)}{\partial t} \approx \frac{1}{3} \Gamma v x_c^3 \frac{\partial^2 \rho_m(x,t)}{\partial x^2} = D \frac{\partial^2 \rho_m(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{II-15})$$

au second ordre près, avec $D = \frac{1}{3} \Gamma v x_c^3$.

Or la variation totale $\frac{\partial \rho_m(x,t)}{\partial t}$ de la densité de dislocations mobiles est la somme de la variation non locale (II-15) exprimée à l'aide d'un coefficient D analogue à un coefficient de diffusion, et de la variation locale $\frac{\partial \rho_{m_l}(0,t)}{\partial t}$ relative à la multiplication et l'annihilation des dislocations. Donc la variation locale de $\rho_m(x,t)$ due à d'autres facteurs que le glissement dévié, est :

$$\frac{\partial \rho_{m_l}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial \rho_m(x,t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \rho_m(x,t)}{\partial x^2} \quad (\text{II-16})$$

Les ordres de grandeur permettant de donner une valeur numérique au coefficient de pseudo-diffusion D déterminé en (II-15) sont, pour la probabilité de glissement dévié par unité de surface $\Gamma = 1 \text{ mm}^{-2}$, pour la vitesse moyenne des dislocations $v = 10^2 \text{ m/s}$, et pour la distance maximum de glissement dévié $x_c = 1 \text{ mm}$. Après calcul, la valeur de D est trouvée égale à $3,33 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. La longueur caractéristique du phénomène est la distance maximale de glissement dévié x_c .

Les interactions spatiales à courte distance par glissement dévié peuvent donc être prises en compte grâce à la relation (II-16). La loi locale d'Orowan, résultant d'une opération de moyenne sur une section droite, dans laquelle on substitue la variable locale $Y = \dot{\epsilon} - D \epsilon_{,xx}$ à $\dot{\epsilon}$ devient :

$$\dot{\epsilon} - D \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \dot{\epsilon} - D \epsilon_{,xx} = \Phi \rho_m b v \quad (\text{II-17})$$

Elle prend la forme d'une équation de réaction-diffusion. Notre hypothèse de travail est que l'on peut également substituer $\dot{\epsilon}$ à ϵ dans la loi utilisée par le modèle de Kubin-Estrin; on obtient la loi de plasticité

$$\sigma = h \epsilon + F(\dot{\epsilon} - D \epsilon_{,xx}) \quad (\text{II-18})$$

loi que nous appellerons **loi avec pseudo-diffusion**, où σ représente la contrainte dans une section x de l'échantillon, ϵ la déformation plastique, $\dot{\epsilon}$ la vitesse de déformation, D le coefficient de pseudo-diffusion défini ci-dessus, et F la fonction viscoplastique définie en I-4-2 pour un Al-5%Mg.

II-3 Deux modèles mécaniques susceptibles de décrire la progression des bandes

A partir des deux lois de plasticité non locales définies ci-dessus et faisant intervenir des échelles de longueur caractéristique différentes, deux modèles mécaniques peuvent être mis en oeuvre en vue de décrire la propagation des bandes associées à l'effet PLC obtenues à vitesse de contrainte $\dot{\sigma}_0$ constante.

Si l'on suppose que la déformation plastique est quasi-statique et que l'aire d'une section transversale est constante en négligeant tout effet de striction, l'équilibre de la section s'exprime par :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0 \quad (\text{II-19})$$

Tant que la déformation plastique reste suffisamment faible, on peut admettre que la section droite reste constante. C'est le cas lors du passage d'une bande de déformation. Quant aux effets d'inertie, même s'ils peuvent être significatifs durant les sauts de vitesse de déformation où des accélérations importantes se produisent, ils ne sont pas responsables du phénomène PLC, et ils ne seront donc pas considérés en première approximation.

La vitesse de contrainte constante $\dot{\sigma}_0$ est imposée à l'extrémité de l'éprouvette. Par conséquent, en utilisant (II-19), la contrainte σ dans une section x peut se mettre sous la forme:

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0 \quad (\text{II-20})$$

où σ_0 est la valeur initiale de la contrainte.

II-3-1 Modèle de second gradient

D'après (II-20), le modèle non local utilisant la loi de second gradient (II-10) est entièrement contenu dans l'équation non linéaire aux dérivées partielles :

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0 = h \varepsilon + K \varepsilon_{,xx} + F(\dot{\varepsilon}) \quad (\text{II-21})$$

où K caractérise la "non-localité" de la loi constitutive.

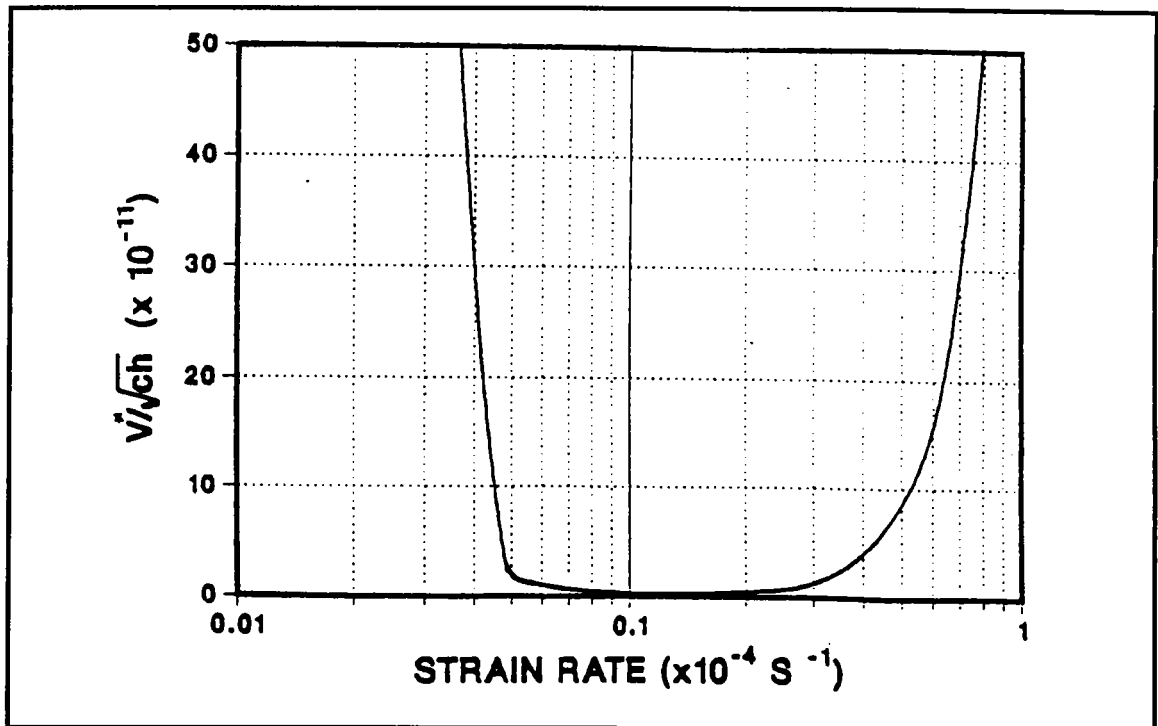


Figure II-5 :

Vitesse de propagation des bandes PLC en fonction de la vitesse de contrainte pour un alliage Al-5%Mg, calculée au moyen d'une analyse linéarisée de stabilité marginale. [7]

Dans [7], la vitesse de propagation des bandes à vitesse de contrainte constante est déterminée dans le cadre d'une analyse linéarisée employant le critère de stabilité marginale [2]. La vitesse calculée décroît tout d'abord, pour croître ensuite lorsque la vitesse de contrainte augmente, dans le domaine de sensibilité à la vitesse négative (figure II-5). Ces résultats sont en contradiction avec les courbes expérimentales (voir I-2-2) qui présentent une décroissance monotone de la vitesse de bande en fonction de la vitesse de contrainte appliquée.

La non concordance des résultats établis par [7] avec ceux obtenus expérimentalement peut provenir :

- soit de la linéarisation inhérente à l'analyse de stabilité marginale (la structure de déformation localisée est en général éloignée de l'état uniforme à partir duquel se fait la linéarisation),

- soit de la forme même de l'équation non locale constitutive (II-12) utilisée, c'est-à-dire d'une mauvaise identification du mécanisme d'interaction spatiale responsable de la propagation des bandes.

Pour déterminer quelle est de ces deux causes possibles celle qui est responsable de la disparité observée, une analyse non linéaire nous est apparue nécessaire. C'est ce que nous ferons au chapitre 3.

II-3-2 Modèle de pseudo-diffusion

D'après les équations (II-18) et (II-20) et en employant la notation Z pour la partie viscoplastique de la contrainte :

$$Z = \sigma - h \varepsilon = \sigma_0 + \dot{\sigma}_0 t - h \varepsilon \quad (\text{II-22})$$

le modèle de pseudo-diffusion s'exprime par l'équation aux dérivées partielles :

$$Z = F(Y) \quad \text{où} \quad Y = \dot{\varepsilon} - D \varepsilon_{,xx} \quad (\text{II-23})$$

Y et Z sont des variables locales; lorsque $D=0$, on retrouve le modèle de Kubin-Estrin.

D'après le théorème des fonctions implicites, il est possible de prendre l'inverse de la fonction F là où $F' \neq 0$: soit G_1 pour les points de la branche lente ($2^*, 1$) que l'on appellera dorénavant la **branche I**, et G_2 pour les points de la branche rapide ($2, 1^*$) appelée **branche II** (figure

II-6). Alors $Y = F(Z)$ peut être écrit également sous la forme d'un couple d'équation non linéaires de type réaction-diffusion :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = G_1(\sigma - h\epsilon) \quad \text{pour } \dot{\epsilon}_{2^*} \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_1 \quad (\text{II-24})$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = G_2(\sigma - h\epsilon) \quad \text{pour } \dot{\epsilon}_2 \leq \dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_{1^*}$$

La branche instable (2, 2*) n'est pas atteinte et ne sera pas nécessaire dans la suite de l'analyse de pseudo-diffusion.

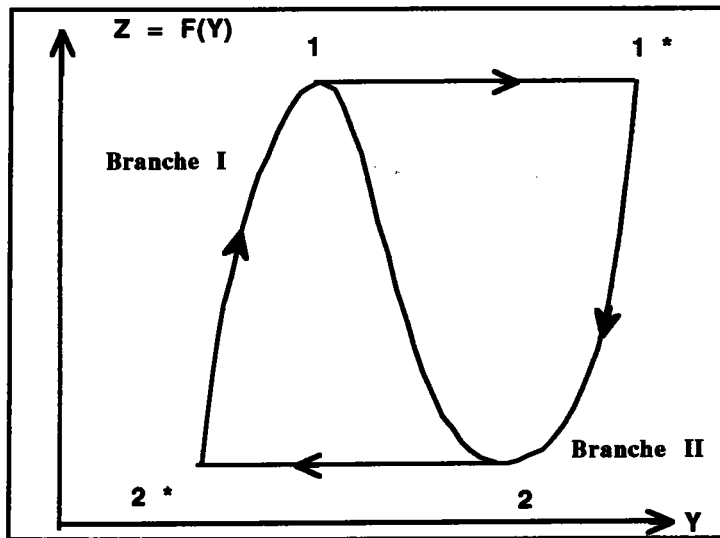


Figure II-6 :

Définition des branches I et II (lente et rapide): $Y = G_1(Z)$ branche I
 $G_2(Z)$ branche II

Les équations de réaction-diffusion interviennent dans la description de beaucoup d'autres phénomènes non linéaires. C'est pourquoi, dans le paragraphe suivant, nous allons développer quelques exemples présentant des analogies avec l'effet PLC.

II-3-3 Analogies mécaniques et électriques

Dans beaucoup de domaines différents, il existe des phénomènes où une source continue d'énergie transforme un effet fondamentalement aperiodique en oscillations periodiques auto-entretenues. Parmi ceux-ci, nous allons examiner plus particulièrement :

- des phénomènes connus dans le domaine des systèmes mécaniques sous le nom de "stick-slip" ;
- des phénomènes obéissant à des lois de réaction-diffusion comparables aux équations (II-24), où un système, contrôlé de manière à ce que son état se situe en moyenne dans une région instable interdite, réagit par une distribution des variables d'état dans des régions stables éloignées;
- l'effet Gunn, basé sur un effet de résistivité négative.

a) Quelques mécanismes de type "stick-slip"

Les mécanismes de type "stick-slip" produisant des oscillations de relaxation sont tels que la sortie du système oscille entre deux valeurs déterminant un intervalle de temps court en passant abruptement de l'une à l'autre, et un intervalle de temps long, composant ainsi la période des oscillations.

Un modèle simple [36], destiné à introduire le phénomène de "stick-slip", est celui d'une masse déposée sur une courroie se déplaçant à la vitesse constante v_0 , et attachée à un support fixe grâce à un ressort linéaire (figure II-7-a); l'équation du mouvement est :

$$mx'' = -kx + T(x' - v_0) \Leftrightarrow mx'' + T(x' - v_0) + kx = 0 \quad (\text{II-25})$$

où la force de frottement T dépend non linéairement de la vitesse de glissement $(x' - v_0)$ (figure II-7-b).

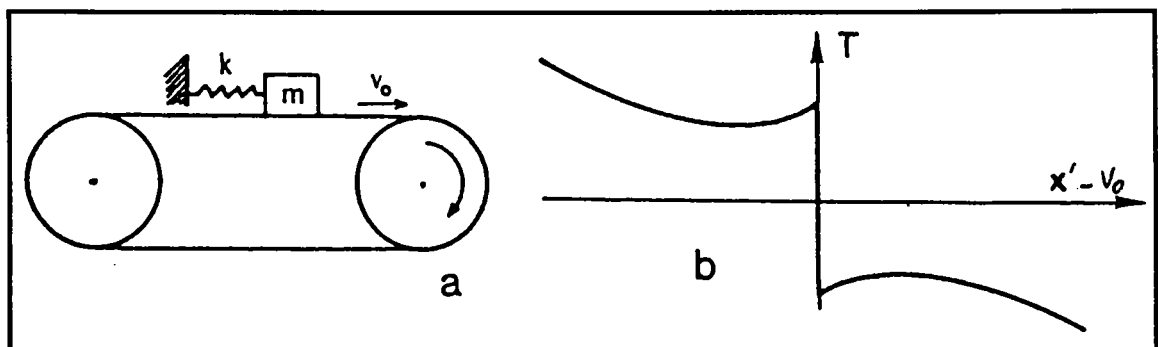


Figure II-7 :

- (a) Schéma d'un modèle simple de type "stick-slip" : masse reliée à un ressort et déposée sur une courroie qui se déplace à vitesse constante v_0 .
- (b) Force de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

Si $x' - v_0 > 0$, alors $T < 0$. Si par contre $x' - v_0 < 0$, alors $T > 0$. Pour $x' - v_0 = 0$, $|T| < fmg$ si f est le coefficient de frottement statique : le seuil de glissement n'est pas atteint. Pour de faibles vitesses de glissement, le coefficient de frottement dynamique diminue; il augmente pour de plus grandes vitesses de glissement (figure II-7-b).

Prenons la variable u définie comme suit :

$$u = x + T(-v_0)/k \quad (\text{II-26})$$

L'équation du mouvement (II-25) peut s'écrire alors :

$$m u'' + T(u' - v_0) + k u - T(-v_0) = 0 \quad (\text{II-27})$$

et en posant $F(u') = T(u' - v_0) - T(-v_0)$, on obtient :

$$m u'' + F(u') + k u = 0 \quad (\text{II-28})$$

C'est une équation de Rayleigh; en dérivant par rapport au temps, et en posant $v' = u$, on obtient de manière équivalente une équation de Liénard:

$$m v'' + f(v) v' + k v = 0 ; \quad f(v) = F'(v) \quad (\text{II-29})$$

Nous reverrons ces deux types d'équation dans le chapitre 3.

Le système présente des oscillations de relaxation si v_0 est choisie de sorte que $\frac{dF}{du'}(v_0) < 0$, de manière à ce que l'état correspondant soit instable.

De la même façon, le déroulement d'un rouleau de scotch [36], exemple d'adhésion aux interfaces de deux solides viscoplastiques, peut être modélisé sous la forme d'une équation de Liénard. La figure II-8 reproduit la variation expérimentale du taux de restitution de l'énergie de déformation G avec la vitesse de déroulement v .

On constate l'existence d'une zone interdite du taux de restitution, inaccessible à l'expérience, et celle de deux branches stables entre lesquelles le système oscille. Un comportement chaotique est signalé [36] lorsque la vitesse se situe dans la zone interdite.

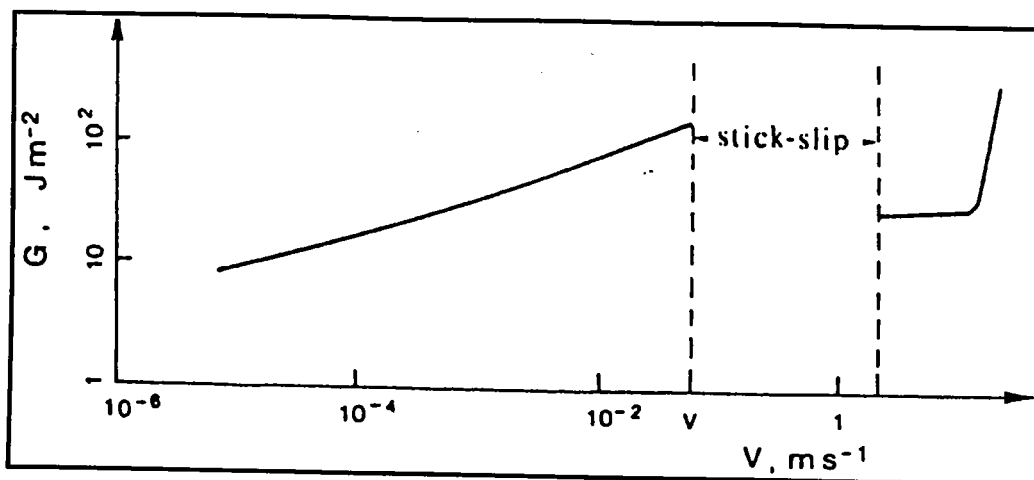


Figure II-8 :

Déroulement d'un rouleau de scotch. Courbe expérimentale $G(v)$, où G représente le taux de restitution de l'énergie de déformation, et v la vitesse de déroulement. [36]

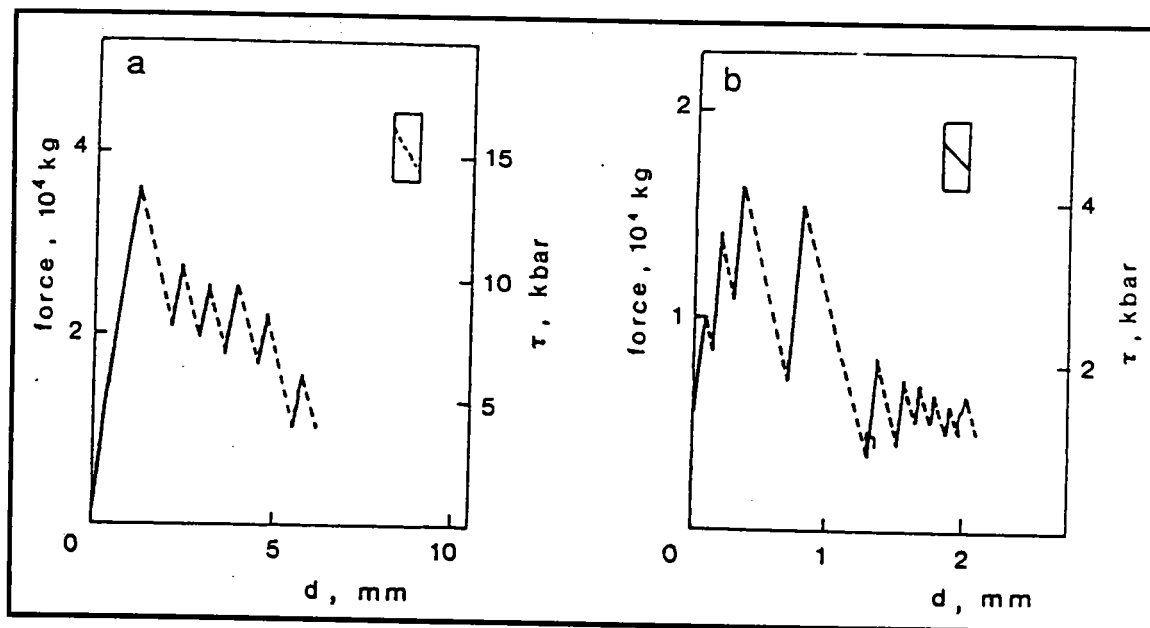


Figure II-9 :

Mécanisme de "stick-slip" et tremblement de terre [36]. Courbes force-déplacement pour des éprouvettes cylindriques de granit Westerley :

(a) originellement non fracturées

(b) avec une fente initiale

Bien qu'on ne puisse pas encore l'assurer de façon certaine, il existe de fortes raisons de penser que les tremblements de terre obéissent également à des lois de type "stick-slip". Ainsi les expériences de cisaillement réalisées sur des éprouvettes cylindriques en granit [36] indiquent-elles des oscillations de la contrainte de cisaillement (figure II-

9). L'adhésion aux interfaces le long des fautes (fractures caractérisées essentiellement par l'hétérogénéité de la résistance à la friction) semble indiquer un régime "statique" d'adhésion et un régime "dynamique" de mouvement plus facile. L'énergie de déformation élastique stockée durant la première phase serait libérée durant le saut vers la branche dynamique.

b) Phénomènes de réaction-diffusion

De façon générale, les équations de réaction-diffusion s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = D(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} + F(\mathbf{u}) \quad (\text{II-30})$$

où $\mathbf{u}(x,t)$ est une fonction vectorielle à valeurs dans \mathbf{R}^n définie pour la variable x parcourant un ouvert Ω de \mathbf{R}^n ; F est une fonction non linéaire définie sur \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R}^n . Δ désigne le laplacien, et $D(\mathbf{u})$ est une matrice symétrique définie positive.

Les équations de réaction-diffusion mettent en jeu la compétition entre des phénomènes non linéaires locaux et des phénomènes relatifs à une diffusion en espace. Leur étude permet notamment d'analyser l'apparition de solutions qui se propagent à cause de la diffusion en conservant leur forme à cause de la non linéarité.

On les rencontre en particulier dans l'analyse de la dynamique des populations et de la propagation de l'influx nerveux.

L'équation de Fisher [44] est utilisée pour décrire la dynamique des populations ou encore la propagation d'une flamme (combustion d'une mèche); elle est de la forme :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \quad (\text{II-31})$$

avec $f(u)$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, par exemple $f(u) = -u(\alpha - u)(1 - u)$, $0 < \alpha < 1$. Seules sont significatives de la non linéarité les propriétés géométriques globales de f , à savoir l'annulation de f en trois points et l'existence d'un maximum et d'un minimum intercalés entre ces trois points.

Dans le cas de la dynamique des populations, $u(x,t)$ représente une densité relative des chromosomes [42, 44]. Aronson et Weinberger [42] envisagent des solutions propageantes de la forme $u(\xi)$; $\xi = x - Ct$. Dans le plan de phase $(u, du/d\xi)$, le point $(\alpha, 0)$ est instable; déposé initialement dans cette configuration, le système réagit par l'organisation d'une structure spatio-temporelle stable mais propagative : Aronson et Weinberger montrent l'existence d'un front, onde solitaire stable, de vitesse C^* caractéristique du problème, correspondant à la trajectoire connectant les points $(\alpha, 0)$ et $(0, 0)$ du plan de phase.

Un deuxième exemple est le modèle de Hodgkin et Huxley [43] relatif à la propagation de l'influx nerveux et basé sur les observations suivantes :

- il existe un seuil d'excitation : toute excitation inférieure à ce seuil ne produit pas de phénomène visible;
- au dessus du seuil d'excitation, on obtient un signal qui a une forme constante et se propage à une vitesse constante.

Hodgkin et Huxley ont conjecturé que ce comportement était dû à l'interaction de la diffusion ionique et d'un potentiel électrostatique de membrane, et que ce mécanisme était contrôlé par un système d'équations de réaction-diffusion. Les solutions de ce système ont effectivement un comportement conforme à l'expérience : on montre l'existence d'un seuil et l'apparition d'ondes solitaires stables.

c) L'effet Gunn

Lorsqu'on soumet un semiconducteur à un champ électrique très élevé, divers phénomènes d'instabilité apparaissent, qui peuvent donner naissance à des oscillations de courant à très haute fréquence dans la gamme de 10 à 100 GHz. De tels dispositifs sont utilisés comme générateurs d'hyperfréquences : c'est par exemple le cas de la diode à effet Gunn qui utilise l'apparition d'oscillations à très haute fréquence dans un monocristal d'arsénure de gallium soumis à un champ électrique supérieur à 3000 V/cm. Le mécanisme de base en est le phénomène de résistance différentielle négative qui représente l'analogie de la sensibilité à la vitesse négative pour l'effet PLC.

D'après la loi d'Ohm, les porteurs de charge, de vitesse \bar{v} sous l'action d'un champ électrique E , produisent une densité de courant

$$j = q n \bar{v} \quad (\text{II-34})$$

où q est la charge et n la densité des électrons. Pour qu'il y ait effet Gunn, il faut que la caractéristique $j(E)$ possède une région de résistance différentielle négative. En comparant cette caractéristique (figure II-11) et la courbe caractéristique $F(\dot{\epsilon})$ de l'effet PLC (figure I-18), on peut établir les correspondances suivantes :

- . la vitesse unidirectionnelle des porteurs de charge \bar{v} et la densité de courant j correspondent à la contrainte viscoplastique $F(\dot{\epsilon})$,
- . le champ électrique E est l'analogue de la vitesse de déformation plastique $\dot{\epsilon}$,

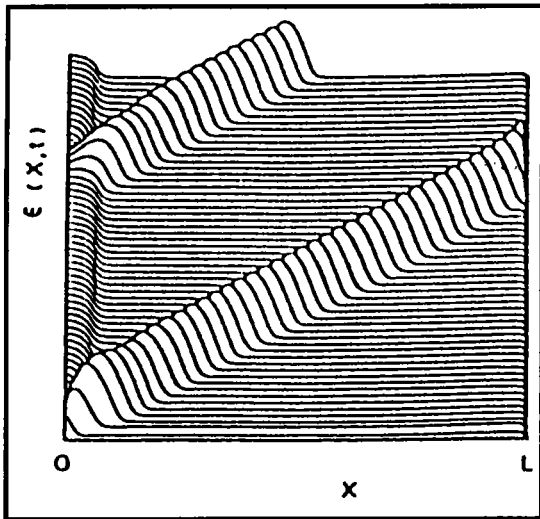


Figure II-10

Figure II-10 : Ondes propageantes de champ électrique dans l'effet Gunn. La longueur du spécimen est L ; le contact ohmique de la cathode se trouve en $x = 0$. [42].

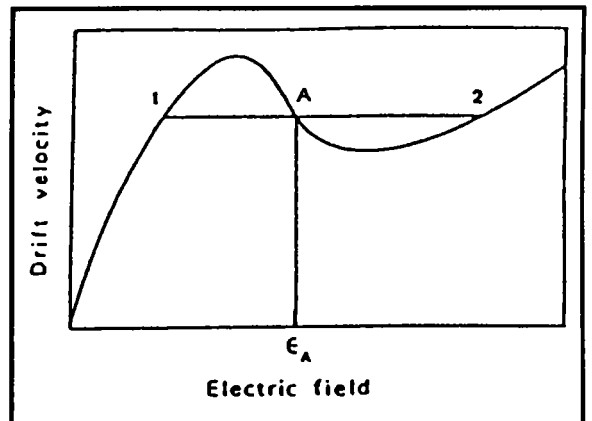


Figure II-11

Figure II-11 : Résistance différentielle négative et effet Gunn. Vitesse unidirectionnelle des électrons en fonction du champ électrique.

Les expériences relatives à l'effet Gunn peuvent être réalisées en imposant des conditions sur le champ électrique (ce qui correspond pour l'effet PLC à une vitesse de déformation constante) ou sur la densité de courant (ce qui est analogue à des essais à vitesse de contrainte imposée).

Pour des champs électriques appliqués appartenant à la région de résistance négative, des ondes de champ électrique se propagent de façon analogue aux bandes PLC (figure II-10).

II-4 Conclusion

Dans ce chapitre, deux modèles macroscopiques introduisant des interactions spatiales différentes ont été mis en place. L'un introduit une forme faible de non localité décrite par un second gradient de la déformation plastique. Le coefficient constant K de l'équation (II-10) est en effet relié à une distance de coupure au delà de laquelle les interactions sont supposées négligeables. Cette distance de coupure et la non uniformité en deçà de la coupure sont supposées assez faibles pour que la loi de type second gradient (II-10) soit justifiée.

L'autre s'appuie sur une interaction spatiale par double glissement dévié des dislocations vis, traduite par une pseudo-diffusion de la déformation plastique. Le coefficient de pseudo-diffusion D de l'équation (II-17) est fonction de la distance maximum de glissement dévié. Il conduit à une équation de type réaction-diffusion.

Ces deux types de modèle ont été retrouvés dans la description d'autres phénomènes présentant des analogies avec l'effet PLC, la principale étant une région de pente négative dans les courbes caractéristiques. L'analogie la plus étroite est celle qui lie l'effet PLC et l'effet Gunn, notamment en raison de leurs aspects propagatifs. Cependant l'effet PLC présente des spécificités qui ne trouvent pas d'analogie : ainsi, le modèle de pseudo-diffusion est-il constitué par deux équations de réaction-diffusion utilisées alternativement.

La démarche adoptée dans la suite consiste à identifier les mécanismes microscopiques non locaux à l'oeuvre dans l'effet PLC grâce aux caractéristiques de la réponse macroscopique qui en résulte.

De manière plus précise, l'évolution prévue par les différents modèles pour la vitesse de propagation des bandes en fonction du taux de chargement sera confrontée à la tendance observée à une décroissance monotone.

CHAPITRE 3 :

L'approche second gradient

III-1 Recherche de solutions propageantes	54
III-1-1 Solution fondamentale uniforme.....	54
III-1-2 Solutions propageantes	57
a- Equation de Rayleigh	57
b) Equation de Liénard	59
c) Système autonome équivalent à l'équation de Rayleigh.....	59
d) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase	63
III-1-3 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution périodique	65
III-2 Vitesse de propagation	65
III-2-1 Critère de stabilité marginale	65
III-2-2 Obtention numérique exacte	68
III-3 Stabilité des solutions propageantes.....	70
III-4 Conclusion	72

CHAPITRE 3 :

Approche second gradient.

III-1 Recherche de solutions propagées

III-1-1 Solution fondamentale uniforme

Dans le second chapitre, nous avons établi un modèle de second gradient à vitesse de chargement constante $\dot{\sigma}_0$:

$$\sigma = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0 = h \varepsilon + F(\dot{\varepsilon}) + K \varepsilon_{,xx} \quad (\text{III-1})$$

L'équation aux dérivées partielles (III-1) admet la solution uniforme fondamentale :

$$\varepsilon_e = \dot{\varepsilon}_e t ; \dot{\varepsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}_0}{h} ; \sigma_0 = F(\dot{\varepsilon}_e) \quad (\text{III-2})$$

$\dot{\varepsilon}_e$ est une vitesse de déformation uniforme constante, et σ_0 représente la contrainte de traction simple uniaxiale; en dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$K \dot{\varepsilon}_{,xx} + \ddot{\varepsilon} F'(\dot{\varepsilon}) + h (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) = 0 \quad (\text{III-3})$$

Les observations expérimentales indiquent que l'état de déformation non uniforme peut être caractérisé par des bandes de déformation se propageant à vitesse constante C . Cela suggère que certaines solutions de l'équation (III-3) puissent être recherchées sous la forme d'ondes de profil stationnaire dans un repère en translation à la vitesse C :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} (Ct - x) \quad (\text{III-4})$$

Par souci de simplification, nous utiliserons la variable normalisée :

$$\eta = \sqrt{\frac{h}{K}} (Ct - x) \quad (\text{III-5})$$

En définissant un coefficient $\alpha = \sqrt{Kh}$, on transforme la relation (III-3) en:

$$\dot{\varepsilon}_{,\eta}\eta + \alpha \dot{\varepsilon}_{,\eta} F'(\dot{\varepsilon}) + (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) = 0 \quad (\text{III-6})$$

C'est une équation différentielle de Liénard qui conduit à des oscillations de relaxation auto-entrenues si F' et $\dot{\varepsilon}_e$ remplissent les conditions évoquées au paragraphe II-3-3-a.

Nous allons dans ce qui suit reprendre l'analyse de stabilité linéarisée de Zbib-Aifantis [7] qui permet de déterminer les conditions dans lesquelles la solution uniforme (III-2) est instable, c'est-à-dire les conditions déterminant l'apparition de l'effet PLC.

En utilisant la perturbation $u = \varepsilon - \varepsilon_e$ et sa dérivée $v = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e$, l'équation (III-6) peut se mettre sous la forme d'un système différentiel :

$$\begin{aligned} v_{,\eta} &= w \\ w_{,\eta} &= \alpha F'(v + \dot{\varepsilon}_e) w - v \end{aligned} \quad (\text{III-7})$$

(v, w) est alors le plan de phase. Le point critique pour lequel $v_{,\eta} = w_{,\eta} = 0$ est l'origine $v = w = 0$ du plan de phase. On peut linéariser le système (III-7) autour du point critique, et en utilisant la notation F'_e pour $F'(\dot{\varepsilon}_e)$, on obtient sous forme matricielle :

$$\begin{array}{lcl} v_{,\eta} & = & \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -\alpha F'_e \end{array} \begin{array}{l} v \\ w \end{array} \end{array}$$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{U}_{,\eta} = A \vec{U} \quad (\text{III-8})$$

où A est une matrice constante.

Les solutions de (III-8) sont de la forme $\vec{U}(\eta) = \exp(\omega\eta) \vec{u}$ où ω est une valeur propre de la matrice d'évolution linéaire A et \vec{u} le vecteur propre correspondant. L'équation caractéristique est alors :

$$\det \begin{pmatrix} -\omega & 1 \\ -1 & -\omega - \alpha F'_e \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{c'est-à-dire } \omega^2 + \alpha F'_e \omega + 1 = 0 \quad (\text{III-9})$$

Les racines de cette équation sont données par :

$$\omega = \frac{-\alpha F'_e \pm \sqrt{(\alpha F'_e)^2 - 4}}{2} \quad (\text{III-10})$$

Il s'ensuit que la stabilité de l'équilibre de la solution uniforme $\dot{\epsilon}_e$ dépend de la valeur de $F'(\dot{\epsilon}_e)$.

La partie réelle de la valeur propre ω détermine la croissance ou décroissance de la perturbation en fonction du signe de F'_e , c'est-à-dire de la pente au point $M_e = (\dot{\epsilon}_e, F(\dot{\epsilon}_e))$. Si $F'(\dot{\epsilon}_e) \leq 0$, la partie réelle de ω est positive et la solution uniforme est instable, sa perturbation croissant exponentiellement au cours du temps. Au contraire, si $F'_e \geq 0$, la solution uniforme est stable.

D'après la caractéristique $F(\dot{\epsilon})$ de la figure I-18, ceci implique que, si $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0/h$ se trouve dans la région où F est de pente négative ($F'_e < 0$) c'est-à-dire si $\dot{\epsilon}_1 \leq \dot{\epsilon}_e \leq \dot{\epsilon}_2$, la solution uniforme est instable.

Cela correspond au domaine où la sensibilité à la vitesse est négative et détermine les vitesses de chargement conduisant à l'effet PLC. Nous

supposerons donc dans tout ce qui suit, que ce critère $\dot{\epsilon}_1 \leq \dot{\epsilon}_e \leq \dot{\epsilon}_2$ d'apparition de l'effet PLC est satisfait.

L'analyse linéarisée qui vient d'être rappelée est suffisante pour prévoir l'apparition d'une instabilité. En revanche, elle ne peut prétendre décrire la solution non uniforme qui se substitue à la solution (III-2), car l'écart entre ces deux solutions est en général non infiniment petit. C'est pourquoi une analyse de perturbations non linéaires sera utilisée dans la suite.

III-1-2 Solutions propageantes

Nous allons de nouveau chercher des solutions propageantes de l'équation (III-1). Pour ce faire, nous allons tout d'abord la mettre sous forme adimensionnelle.

a- Equation de Rayleigh

En utilisant la perturbation $u = \epsilon - \epsilon_e$, on peut transformer l'équation (III-1) en :

$$K u_{,xx} + F(\dot{\epsilon}_e + u_{,t}) - F(\dot{\epsilon}_e) + h u = 0 \quad (\text{III-11})$$

Pour obtenir une équation sans dimension, nous introduisons les quantités adimensionnelles suivantes :

$$x = \frac{x}{L}, \quad t = t \dot{\epsilon}_e, \quad F = \frac{F}{\Delta F} = \frac{F}{\mu h}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{du}{dt} \frac{1}{\dot{\epsilon}_e} = \dot{u}$$

où L et ΔF représentent respectivement la longueur de l'échantillon étudié et la différence de contrainte entre les extrémités de la fonction caractéristique F . L'équation gouvernant l'effet PLC (III-11) peut se mettre maintenant sous la forme :

$$K u_{,xx} + f(\dot{u}) + u = 0 \quad (\text{III-12})$$

avec les quantités adimensionnelles

$$\kappa = \frac{K}{hL^2}, \quad f(\dot{u}) = \mu [F(\dot{\epsilon}_e(1+\dot{u})) - F(\dot{\epsilon}_e)]$$

κ caractérise la non-localité de la loi constitutive. D'après II-2-1, κ est fonction de la distance de coupure des interactions à distance. κ peut donc être considéré comme un petit paramètre.

Si l'on cherche des solutions se propageant à vitesse constante C et gardant un profil stationnaire, de la forme

$$u(x,t) = u(\xi) \quad \text{où} \quad \xi = x - Ct$$

$$\text{avec} \quad \dot{u} = -C \frac{du}{d\xi} = -C u' \quad \text{et} \quad u_{,xx} = \frac{d^2u}{d\xi^2} = u'' \quad (\text{III-13})$$

l'équation (III-12) se réduit à l'équation différentielle ordinaire :

$$\kappa u'' + f(u') + u = 0 \quad (\text{III-14})$$

appelée équation de Rayleigh, et où la fonction f dépend implicitement de la vitesse de propagation C car :

$$f(u') = f(-C u') \quad (\text{III-15})$$

Les conditions aux limites sont remplacées par des conditions de périodicité à l'infini.

On remarque que l'équation (III-14) est équivalente à l'équation (II-30) établie pour le mouvement d'un solide attaché par l'intermédiaire d'un ressort à un support fixe et glissant sur une courroie qui se déplace à vitesse imposée v_0 . Les analogies suivantes peuvent donc être considérées : la position repérant le solide est représentée par u ; elle est fonction du temps qui correspond à la variable ξ ; la masse du solide est à comparer à κ ; la vitesse constante de la courroie est l'analogie de la vitesse de

déformation $\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}_0}{h}$; la force de frottement $F(u')$ comporte comme la courbe caractéristique $f(u')$ une région de pente négative.

Le problème consiste à déterminer le frottement pour que le solide ait un mouvement périodique. On recherche de manière analogue la vitesse C et la fonction f de façon à ce que des bandes de déformation PLC se produisent.

b) Equation de Liénard

En dérivant l'équation (III-12) par rapport au temps et en remplaçant \dot{u} par v , on aboutit de façon équivalente à l'équation :

$$\kappa v_{,xx} + \frac{df}{dv}(v) \dot{v} + v = 0 \quad (\text{III-16})$$

Si l'on considère des solutions se propageant à vitesse constante C et gardant un profil stationnaire, l'équation (III-16) conduit à l'équation de Liénard (III-6) établie pour l'analyse de stabilité de la solution uniforme :

$$\kappa v'' - C \frac{df}{dv}(v) v' + v = 0 \quad (\text{III-17})$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'équation de Rayleigh (III-14).

c) Système autonome équivalent à l'équation de Rayleigh

En employant les variables (u_1, u_2) définissant le plan de phase :

$$\begin{aligned} u_1 &= u \\ u_2 &= u' \end{aligned} \quad (\text{III-18})$$

l'équation (III-14) est équivalente au système différentiel autonome :

$$u'_1 = u_2$$

$$ku'_2 = -u_1 - f(u_2)$$

(III-19)

Les fonctions f et f' sont tracées sur la figure III-1 pour une valeur C arbitraire.

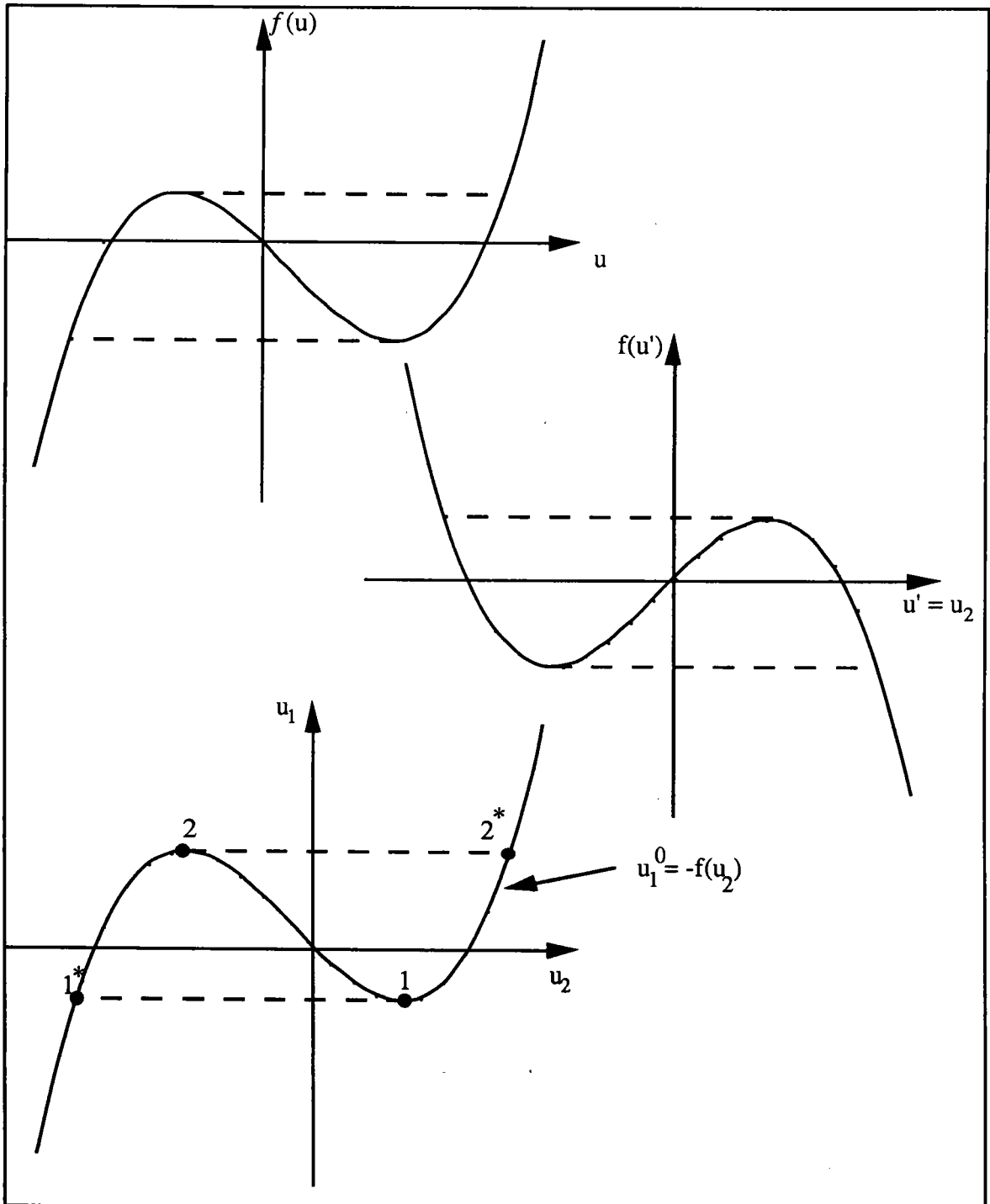


Figure III-1 :

Graphes des différentes fonctions et définition du plan de phase.

Si l'on considère $u_1^\circ = -f(u_2)$, et en exprimant u_2' par :

$$u_2' = \frac{du_2}{du_1} \frac{du_1}{d\xi} = u_2 \frac{du_2}{du_1},$$

on obtient une expression équivalente à (III-19) :

$$Ku_2 \frac{du_2}{du_1} = u_1^\circ - u_1 \quad (\text{III-20})$$

Le plan de phase et la fonction $u_1^\circ = -f(u_2)$ sont représentés sur la figure III-1. La relation (III-20) permet de déterminer le signe de la dérivée $\frac{du_2}{du_1}$ des solutions dans le plan de phase. Nous allons examiner tous les cas possibles, correspondant aux différentes régions du plan de phase représentées sur la figure III-2.

- . Si $u_2 = 0$, l'équation (III-20) donne deux possibilités : soit $u_1 = u_1^\circ$ qui correspond à la solution uniforme instable, origine du plan de phase, soit $du_1 = 0$. Donc la tangente à la solution $u_1(u_2)$ est horizontale aux points A et B de l'axe (O, \vec{u}_1) : A pour $u_1 > 0$, et B pour $u_1 < 0$.
- . Si $u_1 = u_1^\circ$, on retrouve une des possibilités du cas précédent à savoir $u_2 = 0$ qui correspond à l'origine. On peut avoir également $du_2 = 0$, d'où une tangente verticale à la solution quand elle coupe la courbe caractéristique u_1° . Les points C et D illustrent cette possibilité.
- . Lorsque u_2 est positif avec $u_1^\circ > u_1$, ce qui correspond à la région (a) sur la figure III-2, l'équation III-20 donne une dérivée $\frac{du_2}{du_1} > 0$. La tangente au point E de la région (a) est représentée en conséquence.

- . En revanche, si u_2 est positif mais $u_1^\circ < u_1$ (région (b) de la figure III-2), on obtient une dérivée $\frac{du_2}{du_1} < 0$ (point F).
- . Maintenant, si l'on considère u_2 négatif avec $u_1^\circ > u_1$ (région (c)), la dérivée $\frac{du_2}{du_1}$ doit être de nouveau négative (point G).
- . Il reste la possibilité où u_2 est négatif et $u_1^\circ < u_1$ (région (d)) : la dérivée $\frac{du_2}{du_1}$ est alors positive. Le point H correspond à ce dernier cas.

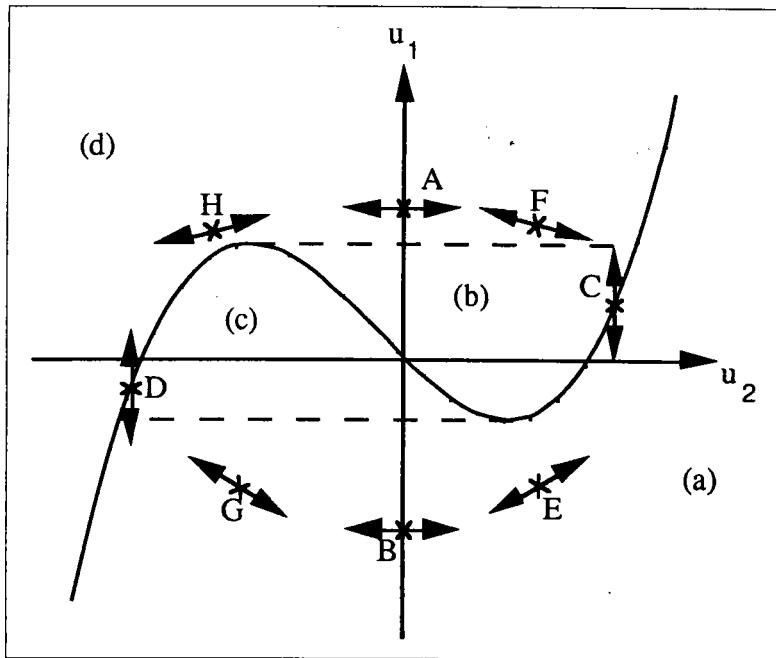


Figure III-2 :
Tangentes à la solution $u_1(u_2)$
dans les différentes régions du plan de phase.

Par ailleurs, si l'on suppose κ petit ($\kappa \ll 1$), et si on considère un point n'appartenant ni à l'axe (O, \vec{u}_1) ni à la courbe $u_1^\circ = -f(u_2)$ par exemple un point de la région (b), l'équation (III-20) donne :

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{u_1^\circ - u_1}{\kappa u_2} \gg 1$$

donc la tangente en ce point est quasi-horizontale. Au voisinage de la courbe caractéristique $u_1^0 = -f(u_2)$, on a un changement très rapide de la pente; la tangente devient verticale sur la courbe caractéristique et un phénomène de couche limite se produit.

Il en résulte qu'une trajectoire passant par les points C ou D suit la courbe caractéristique dans les régions (a) et (d), et s'en éloigne rapidement dans les régions (b) et (c) (figure III-3).

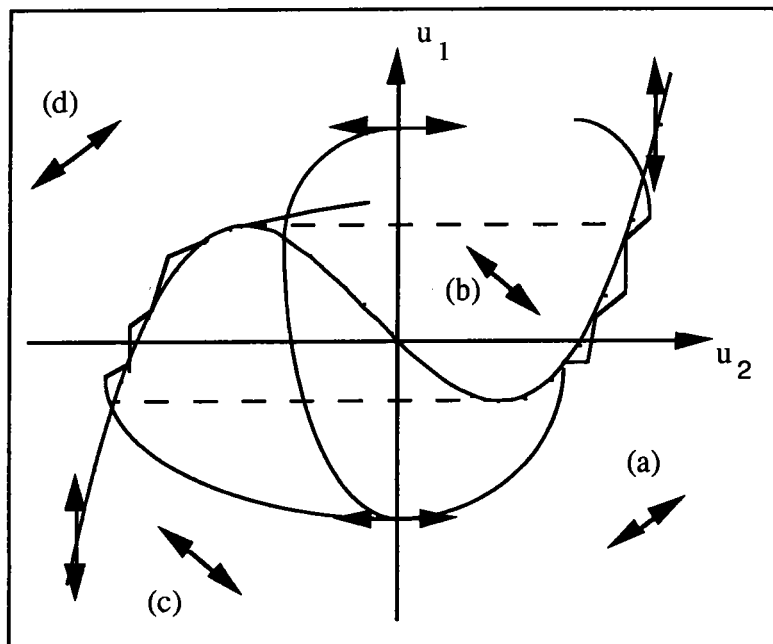


Figure III-3 :

Allures possibles d'une trajectoire coupant la branche I.

d) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase

Une autre façon d'obtenir l'allure des trajectoires dans le plan de phase est d'utiliser une construction graphique dérivée de celle de Liénard.

Prenons un point A (u_1, u_2) du plan de phase, et les deux points G et H définis par (figure III-4)

$$\overline{GA} = u_2, \quad \overline{HA} = u_1 - u_1^0$$

l'équation (III-20) s'écrit :

$$\overline{HA} du_1 + \kappa \overline{GA} du_2 = 0$$

Soit G_K point défini par $\overline{G_K A} = \kappa \overline{GA}$, et B_K caractérisé par $\overline{AB_K} = \overline{AG_K} + \overline{AH}$. La tangente $\overline{du} = (du_1, du_2)$ à la trajectoire en A est orthogonale au vecteur $\overline{AB_K}$:

$$\overline{du} \cdot \overline{AB_K} = 0$$

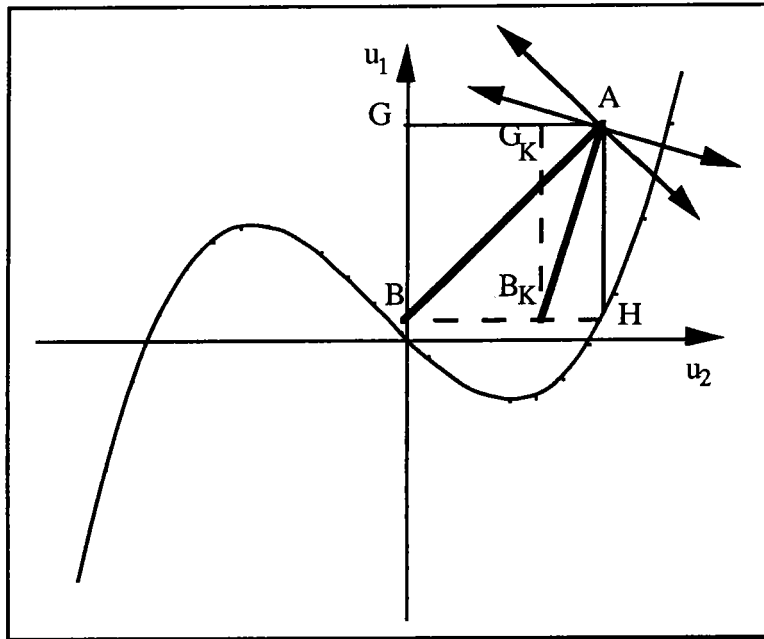


Figure III-4 :

Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase.

Cette construction graphique permet de visualiser le phénomène de couche limite lorsque κ est petit : le vecteur $\overline{AB_K}$ passe d'une position quasi-parallèle à u_1 à une position parallèle à u_2 lorsque A tend vers la courbe caractéristique.

La quantité \overline{HA} mesure une distance du point représentatif A à la courbe caractéristique, indifféremment au fait que le point H appartienne à la partie stable ou à la partie instable de cette courbe. Il en résulte que les résultats obtenus à l'aide du modèle de second gradient dépendent des valeurs de la fonction caractéristique dans sa partie instable. Il s'agit là d'un inconvénient sérieux du modèle, car cette portion de courbe ne peut pas être atteinte directement par les mesures expérimentales.

III-1-3 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution périodique

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution de (III-12) propageante et une solution de (III-14) périodique est obtenue en écrivant que les trajectoires dans le plan de phase, solutions de (III-19), forment un cycle fermé.

En multipliant (III-19-a) par u_1 , et (III-19-b) par u_2 , puis en faisant leur somme membre à membre, on obtient :

$$\frac{1}{2} (u_1^2 + K u_2^2)' = -u_2 f(u_2) \quad (\text{III-21})$$

En intégrant (III-21) le long d'une trajectoire (γ) comprise entre deux points arbitraires A et B du plan de phase, il s'ensuit :

$$\left[\frac{1}{2} (u_1^2 + K u_2^2) \right]_{\gamma} = - \int_{\gamma} u_2 f(u_2) d\xi = - \int_{\gamma} f(u_2) du_1 \quad (\text{III-22})$$

Alors, une condition nécessaire et suffisante pour que (γ) forme un cycle fermé est que $A = B$ ce qui conduit à :

$$\int_{\gamma} f(u_2) du_1 = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma} f(u_2) du_1 = 0 \quad (\text{III-23})$$

où f dépend de la vitesse de propagation C [53].

III-2 Vitesse de propagation

III-2-1 Critère de stabilité marginale

Le critère de stabilité marginale [2] évoqué en II-3-1 constitue une méthode de sélection des vitesses de propagation de fronts d'onde. Il

repose sur une décomposition linéaire du front; il en résulte que sa validité n'est pas assurée en général, et notamment dans le cas de l'effet PLC où la non linéarité est importante. Pour sa mise en oeuvre, on suppose la perturbation autour de l'état uniforme décomposable en modes de la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + u \quad \text{avec } u = \hat{\varepsilon} \exp(ikx + \omega t) \quad (\text{III-24})$$

où u est petit, k est le nombre d'onde, et ω est le taux de variation. Alors l'équation dimensionnelle (III-11) fournit la relation de dispersion :

$$-K k^2 + \omega F'(\varepsilon_e) + h = 0 \quad (\text{III-25})$$

On considère un observateur fixe par rapport à un repère en translation uniforme de vitesse C^* , à l'abscisse $x = C^*t$. Au bout d'un temps t assez long, et à une distance x assez grande, l'observateur admet que la perturbation peut être représentée par sa composante harmonique de plus forte croissance, c'est-à-dire celle dont le nombre d'onde k^* est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} (ikC^* + \omega(k)) t &= 0 \\ \text{soit } iC^* + \frac{d\omega}{dk} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-26-a})$$

L'hypothèse de stabilité marginale [2] consiste à affirmer que la vitesse de propagation de l'onde est celle d'un repère en translation uniforme de vitesse C^* dans lequel l'observateur ne voit ni croître ni décroître l'onde de nombre k^* . La vitesse ainsi sélectionnée vérifie donc :

$$\begin{aligned} \text{Re}(ik^*C^*t + \omega t) &= 0 \\ \text{c'est-à-dire} \\ \text{Re}(ik^*C^* + \omega) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-26-b})$$

Il y a donc stabilité marginale de l'onde si les relations (III-26) qui peuvent également s'écrire

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(\omega - k^* \frac{d\omega}{dk}\right) &= 0 \\ C^* &= i \frac{d\omega}{dk} \end{aligned} \quad (\text{III-27})$$

sont satisfaites. La relation de dispersion (III-25) fournit la fonction $\omega(k)$

$$\omega = - \frac{h - Kk^2}{F'(\dot{\epsilon}_e)} = \frac{h - Kk^2}{|F'(\dot{\epsilon}_e)|} \quad (\text{III-28})$$

et en substituant dans (III-27), on obtient :

$$C^* = \frac{2 \sqrt{Kh}}{|F'(\dot{\epsilon}_e)|} \quad (\text{III-29})$$

En prenant les valeurs $K = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Pa} \cdot \text{m}^2$, $h = 10^9 \text{ Pa}$, et en faisant varier $\dot{\sigma}_0 = h \dot{\epsilon}_e$ pour $\dot{\epsilon}_e$ compris entre $\dot{\epsilon}_1$ et $\dot{\epsilon}_2$, on obtient la courbe tracée en figure III-5. F est la fonction caractéristique (I-20) fournie en I-4-2. Pour un Al-5%Mg, elle est donnée en MPa par [29] :

$$F(\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}_0) = a_0 \ln(\dot{\epsilon}) - a_1 \exp[-(a_2/\dot{\epsilon})^{2/3}] + a_3 + a_4 a_5 \operatorname{th}[a_6(\dot{\epsilon}_2 - \dot{\epsilon})] [1 - 1/k - \operatorname{Log}(k)]$$

$$\text{où } k = \frac{h \dot{\epsilon}}{\dot{\sigma}_0}, \quad (\text{III-30})$$

$$a_0 = 2.27, a_1 = 37, a_2 = 5 \cdot 10^{-5}, a_3 = 213, a_5 = 5 \cdot 10^{-1}, a_6 = 50,$$

$$a_4 = 0 \text{ pour } \dot{\epsilon} > \dot{\epsilon}_2, a_4 = 1 \text{ pour } \dot{\epsilon} < \dot{\epsilon}_2$$

$\dot{\epsilon}_2$ est obtenue numériquement en résolvant

$$\frac{dF}{d\dot{\epsilon}}(\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}_0) = \{a_0 - a_1 \exp[-(a_2/\dot{\epsilon}_2)^{2/3}]\} / \dot{\epsilon}_2 = 0 \quad (\text{III-31})$$

Par la suite, nous considérerons toujours le cas des alliages Al-5%Mg et nous utiliserons implicitement cette fonction caractéristique (III-31).

Le critère de stabilité marginale donne une vitesse de propagation qui, pour des valeurs croissantes de la vitesse de chargement, commence par décroître et atteint un minimum pour $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0 / h = 2.10^{-5} \text{ s}^{-1}$, puis se met à augmenter. D'après (III-29), C^* tend vers l'infini quand $\dot{\epsilon}_e$ tend vers $\dot{\epsilon}_1$, ou vers $\dot{\epsilon}_2$, car $F'(\dot{\epsilon}_e) = 0$. Ceci explique la forme en U de la courbe de la figure III-5.

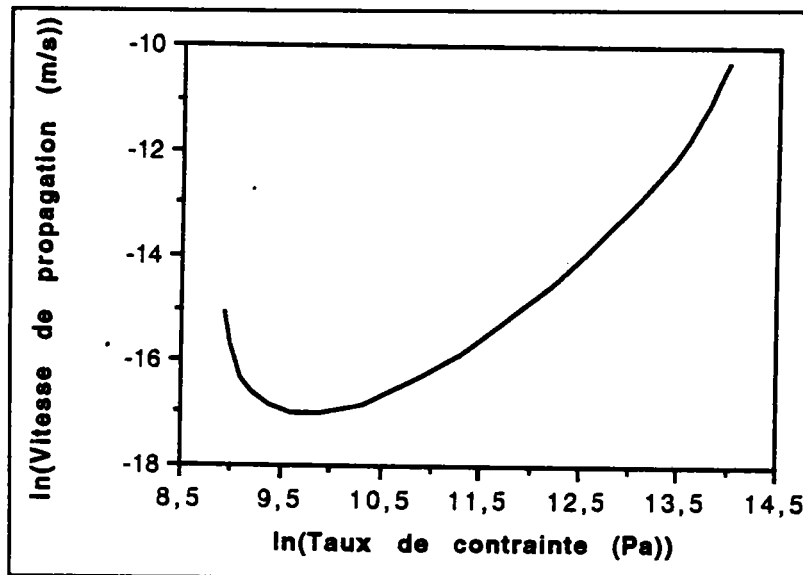


Figure III-5 :

Vitesses de propagation en fonction du taux de contrainte obtenues par le critère de stabilité marginale pour un alliage Al-5%Mg.

Le mécanisme de sélection de la vitesse ainsi décrit dépend uniquement des propriétés linéarisées de l'état instable. Il est clair qu'il ne peut en être toujours ainsi. Pour tester la validité de l'hypothèse de stabilité marginale, il s'avère donc nécessaire de la compléter maintenant par une analyse non linéaire.

III-2-2 Obtention numérique exacte

La vitesse C est déterminée à partir du système différentiel autonome (III-19) où κ et $\dot{\sigma}_0$ sont fixés, et de la condition de fermeture (III-23), de la façon suivante : une valeur de C quelconque étant choisie, l'intégration

numérique de (III-19) donne une trajectoire (γ) dans le plan de phase (le programme utilise une méthode de type prédicteur - correcteur).

(γ) n'est pas en général une trajectoire fermée, et la condition de fermeture (III-23) n'est pas satisfaite. La valeur de C est alors modifiée par une méthode de dichotomie, et le système (III-19) intégré, jusqu'à ce que (III-23) soit vérifiée avec une précision suffisante. Un exemple des cycles obtenus est tracé sur la figure III-6.

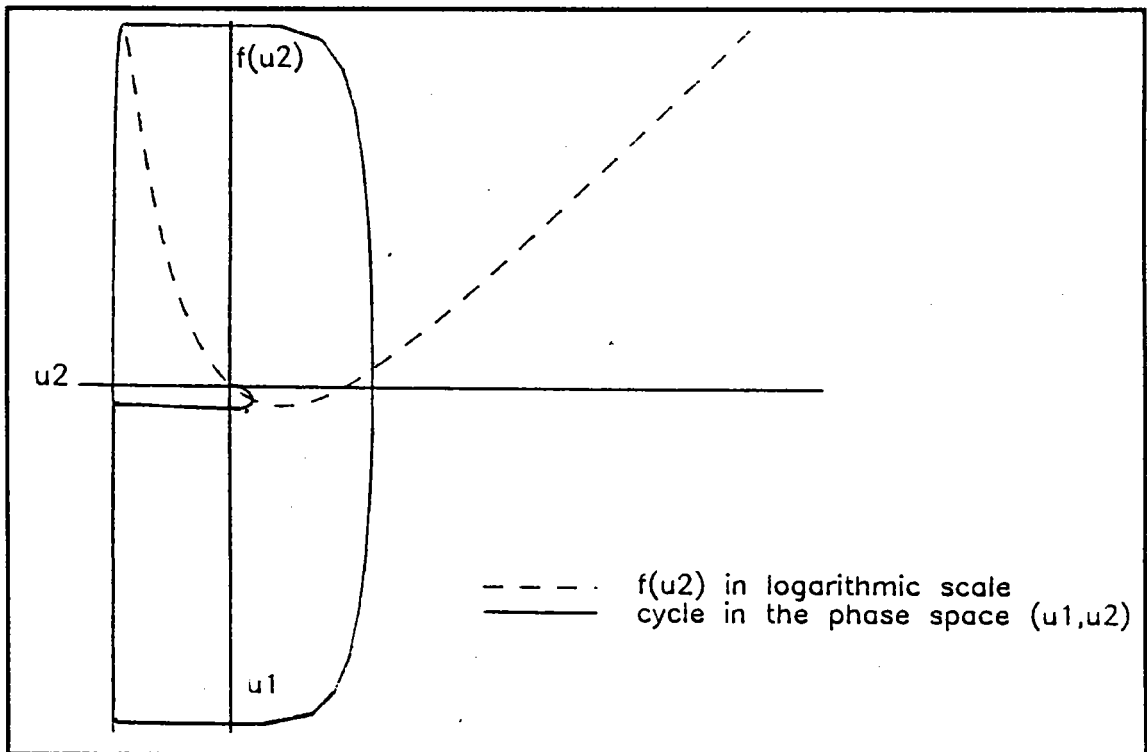


Figure III-6 :

Exemple de cycle obtenu par intégration numérique dans le plan de phase [53].

Les résultats pour différentes valeurs de la vitesse de chargement sont reportés sur la figure (III-7) avec ceux que l'on a obtenus par le critère de stabilité marginale.

On observe tout d'abord une faible décroissance de la vitesse de bande aux faibles valeurs de σ_0 , puis une augmentation très nette et importante, lorsque la vitesse de contrainte augmente. L'allure générale de cette courbe en U ressemble donc à celle qui a été déduite du critère de stabilité marginale.

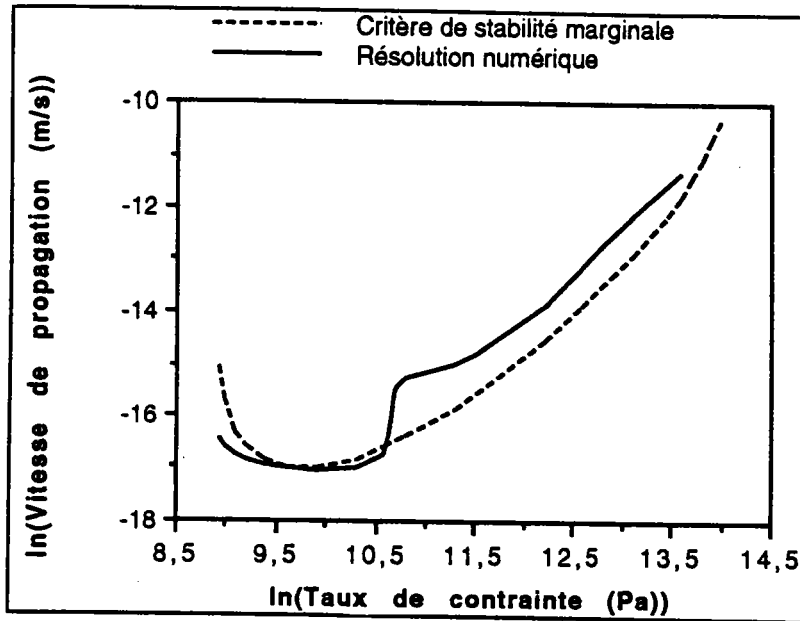


Figure III-7 :

Vitesses de propagation en fonction du taux de chargement pour un alliage Al-5%Mg.

III-3 Stabilité des solutions propageantes

Nous avons déterminé une solution propageante de (III-12) lorsque la condition (III-23) est satisfaite. L'application d'un théorème dû à La Salle [52] va permettre d'en étudier la stabilité non linéaire. L'énoncé de ce théorème est le suivant :

Considérons l'équation :

$$\frac{d^2\chi}{d\tau^2} - G'(\chi) \frac{d\chi}{d\tau} + \delta \chi = 0 \quad (\text{III-32})$$

où δ est une constante telle que $0 < \delta < \delta_0$ et où $G(\chi)$ satisfait les conditions :

- (i) $G'(\chi)$ est continue pour tout χ , et $G(0) = 0$
- (ii) il existe des points $a_1 < a_2 < 0 < a_3 < a_4$ tels que
 - a) $G(a_1) = G(a_3)$ et $G(a_2) = G(a_4)$
 - b) $G(a_2) < G(\chi) < G(a_3)$ pour $a_1 < \chi < a_4$
 - c) $G'(a_1) < 0$ et $G'(a_4) < 0$

Alors, pour $0 < \delta < \delta_0$, un compact $E(a, \delta)$ contenant une solution périodique non linéairement stable de (III-32) peut être construit. L'allure de la fonction $G(\chi)$ est montrée sur la figure III-8-a.

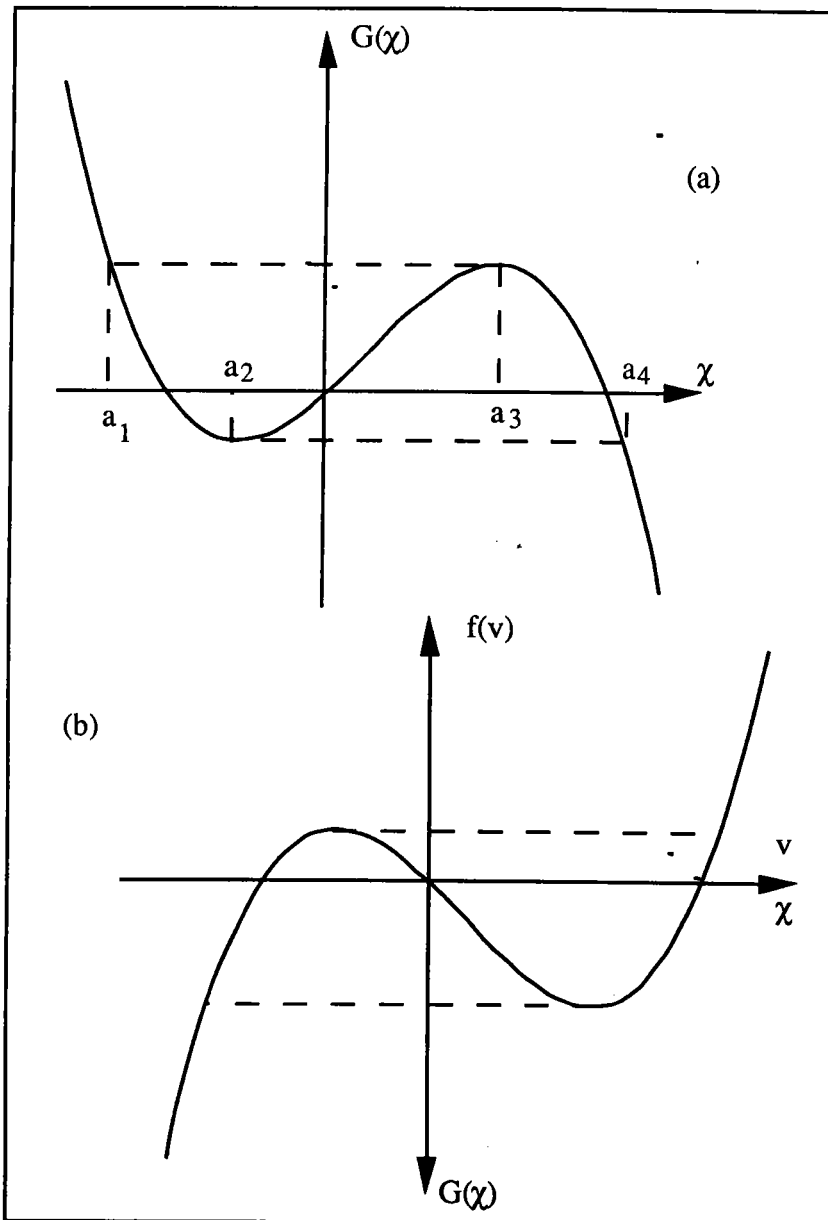


Figure III-8 :

(a) Fonction $G(\chi)$ du théorème de La Salle, (b) fonction $f(v)$.

En analysant l'équation de Liénard (III-17), une correspondance avec l'équation (III-32) du théorème de La Salle peut être établie. En effet, en prenant :

$$v = \chi, \quad \xi = -\tau, \quad -\frac{C}{K} f'(v) = G'(\chi), \quad \delta = \frac{1}{K} > 0 \quad (\text{III-33})$$

l'équation (III-17) est identique à l'équation (III-32).

Pour pouvoir appliquer le théorème de La Salle, il faut donc vérifier que l'intégrale de la fonction $G'(\chi) = -\frac{C}{K} f'(v)$ satisfait les conditions (i) et (ii) du théorème. En intégrant, on obtient :

$$-\frac{C}{K} f(v) = \frac{C}{K} \mu [F(\dot{\epsilon}_e) - F(\dot{\epsilon}_e (1+v))] \quad (\text{III-34})$$

dont le graphe se trouve en figure III-8-b. La fonction f étant continue avec $f(0) = 0$, la condition (i) est réalisée. En comparant les deux graphes $G(\chi)$ et $-\frac{C}{K} f(v)$, on peut identifier v_2^* avec a_1 , v_1 avec a_2 , v_2 avec a_3 et v_1^* avec a_4 ; (v_2^* , v_1 , v_2 et v_1^*) satisfont les relations données en (ii)

Les conditions (i) et (ii) du théorème sont donc vérifiées. On peut alors énoncer que l'équation (III-17), de même que l'équation de Rayleigh (III-14) dont elle est dérivée, comporte une solution périodique non linéairement stable devant par ailleurs satisfaire la condition (III-23). On constate en effet que les trajectoires du plan de phase calculées numériquement en résolvant le système (III-19) pour des conditions initiales quelconques convergent rapidement vers la trajectoire fermée obtenue pour la vitesse C satisfaisant (III-23).

III-4 Conclusion

On a montré l'existence de solutions propageantes stables dans le cadre d'un modèle de second gradient. La vitesse de propagation a été déterminée à l'aide de l'hypothèse de stabilité marginale, ainsi que par une méthode non linéaire.

On observe que, en dépit de non linéarités importantes, l'hypothèse de stabilité marginale s'applique avec succès à ce problème; les tendances qu'elle prévoit sont assez proches de celles qui ressortent de l'analyse non linéaire "exacte".

Cependant, comme cela a déjà été souligné auparavant en (I-2-2) et (II-3-1), les données expérimentales indiquent que la vitesse de bande décroît de façon monotone avec l'augmentation de la vitesse de contrainte dans le domaine de sensibilité à la vitesse négative. Très clairement, ce n'est pas ce qui est obtenu à partir du modèle de second gradient.

Il semble donc que les interactions spatiales faibles traduites par un modèle de type second gradient ne permettent pas de rendre compte de la propagation des bandes de déformation localisées dues à l'effet PLC. Deux causes peuvent être invoquées : soit les interactions spatiales sont mal représentées sous la forme d'un second gradient, soit le mécanisme proposé n'est pas celui qui engendre l'effet PLC (ou il n'est pas prédominant lors de l'effet PLC).

Plus fondamentalement, il apparaît que les résultats obtenus pour la vitesse de propagation dépendent fortement de la partie instable de la courbe caractéristique, inaccessible à l'expérience et de forme assez largement arbitraire (voir III-1-2-d).

Pour illustrer cet argument, envisageons le travail de P. Hähner [23] qui schématise la fonction f à l'aide de quatre segments de droite de la façon suivante (figure III-10) :

- la branche I est modélisée par un segment vertical reliant les points 2^* à 1,
- la partie instable du point 1 au point 2 est également un segment de droite,
- la branche II comporte tout d'abord un plateau horizontal reliant le point 2 ($\epsilon_2, f(\epsilon_2)$) à un point ($2\epsilon_2, f(\epsilon_2)$),
- puis un segment de droite de pente m allant jusqu'au point 1^* .

Hähner obtient une vitesse de propagation qui, en accord avec les données expérimentales [16], décroît avec la vitesse de contrainte. Cependant, ce résultat utilise la partie instable inaccessible à l'expérience. L'arbitraire qui sévit dans le choix de la représentation de la caractéristique instable se transpose donc au niveau des résultats obtenus et il conviendrait de s'assurer des conséquences d'un autre choix sur la vitesse de propagation.

Cette remarque s'applique aussi bien au résultat non-linéaire qu'aux résultats linéarisés; elle concerne la méthode de second gradient elle-

même. Dans le chapitre 4, nous verrons que l'approche de pseudo-diffusion ne nécessite pas la connaissance de la zone caractéristique instable.

Chapitre 4 :

L'approche par glissement dévié

IV-1 Recherche de solutions propageantes.....	75
IV-1-1 Solution fondamentale uniforme	75
IV-1-2 Solutions propageantes	77
a) Equation de type réaction-diffusion	77
b) Système autonome équivalent	79
c) Cas non diffusif $D=0$	80
d) Cas diffusif $D\neq 0$	82
e) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase	85
f) Phénomène de couche limite.....	86
g) Conclusion.....	88
IV-1-3 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution propageante.....	88
IV-2 Modèle approché bi-linéaire	90
IV-2-1 Solution propageante	90
IV-2-2 Calcul de la largeur de bande.....	92
IV-2-3 Calcul de la vitesse de propagation.....	94
IV-3 Vitesse de propagation des bandes de déformation	95
IV-3-1 Obtention numérique exacte	95
IV-3-2 Comparaison avec le modèle bi-linéaire approché	97
IV-4 Morphologie des solutions propageantes	98
IV-5 Stabilité des solutions propageantes périodiques.....	102
IV-5-1 Stabilité linéaire	102
IV-5-2 Stabilité non linéaire	107

Chapitre 4 :

L'approche par glissement dévié.

IV-1 Recherche de solutions propagées

IV-1-1 Solution fondamentale uniforme

Dans le second chapitre, nous avons établi un modèle de pseudo-diffusion à vitesse de chargement constante $\dot{\sigma}_0$ en considérant les échanges de dislocations vis mobiles entre éléments adjacents du matériau par glissement dévié. Il s'exprime par l'équation aux dérivées partielles (II-23) :

$$Z = F(Y) \quad \text{où} \quad Y = \dot{\epsilon} - D \epsilon_{,xx} \quad (\text{II-23})$$

Y et Z étant des variables locales; Z représente la partie viscoplastique de la contrainte

$$Z = \sigma - h \epsilon = \sigma_0 + \dot{\sigma}_0 t - h \epsilon \quad (\text{II-22})$$

L'équation (II-23) admet la solution d'équilibre

$$Y_e = \dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}_0}{h} ; \quad Z_e = \sigma_0 = F(\dot{\epsilon}_e) \quad (\text{IV-1})$$

qui correspond à l'état de déformation plastique uniforme :

$$\sigma_e = \sigma_0 + \dot{\sigma}_0 t ; \quad \epsilon_e = \dot{\epsilon}_e t \quad (\text{IV-2})$$

Pour étudier la stabilité de l'état d'équilibre, Kubin et Estrin [3] introduisent la perturbation :

$$u = \varepsilon - \varepsilon_e = \hat{\varepsilon} \exp(\omega t + ikx) \quad (\text{IV-3})$$

u est une quantité supposée petite; k est le nombre d'onde et ω est le taux de variation. En substituant $\varepsilon = \varepsilon_e + u$ dans l'équation (II-23) et en linéarisant, on obtient la relation de dispersion :

$$(\omega + Dk^2) F'(\dot{\varepsilon}_e) + h = 0 \quad (\text{IV-4})$$

qui fournit la fonction

$$\omega(k) = -\frac{h}{F'(\dot{\varepsilon}_e)} - Dk^2 \quad (\text{IV-5})$$

Si $F'(\dot{\varepsilon}_e) = F'_e$ est positif, $\omega(k)$ est négatif quel que soit k (figure IV-1-a), et la petite fluctuation de l'état d'équilibre uniforme diminue avec le temps. En revanche, si F'_e est négatif, c'est-à-dire si $\dot{\varepsilon}_1 < \dot{\varepsilon}_e < \dot{\varepsilon}_2$, domaine où la sensibilité à la vitesse est négative, l'état d'équilibre uniforme est instable. En effet, il existe alors des valeurs de k pour lesquelles $\omega(k)$ est positif (figure IV-1-b).

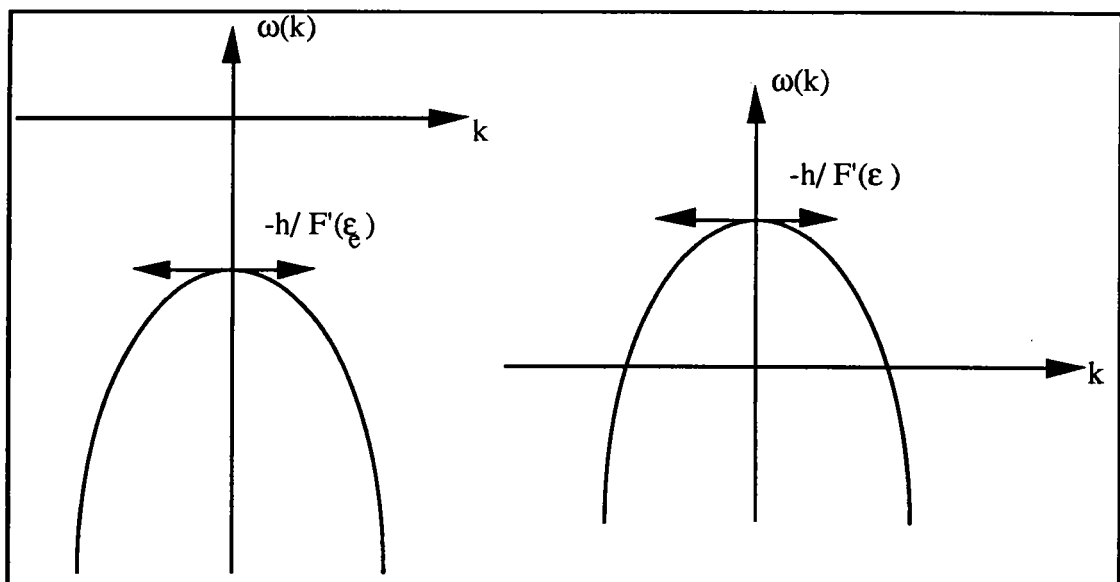


Figure IV-1 :
Taux de variation ω en fonction du nombre d'onde k .

Le point $M_e = (\dot{\epsilon}_e, \sigma_e)$ correspondant sur la branche descendante de la courbe F n'est pas atteint au cours de l'état non uniforme de déformation qui se met alors en place. Cette analyse de perturbation linéaire, bien que permettant de prévoir si une instabilité se produit, est incapable de rendre compte des caractéristiques essentielles du mode de déformation non uniforme qui se substitue à (IV-2). La raison en est que la perturbation du mode uniforme n'est en fait pas petite, mais au moins du même ordre de grandeur que la solution fondamentale (de même que en III-1-1).

Dans ce qui suit, nous supposons que $\dot{\epsilon}_1 < \dot{\epsilon}_e < \dot{\epsilon}_2$: le mode uniforme est alors instable, et nous introduisons une analyse de l'instabilité basée sur le concept de perturbations non linéaires finies de la déformation plastique uniforme.

IV-1-2 Solutions propageantes

a) Equation de type réaction-diffusion

Considérons donc les perturbations non uniformes z et y de l'état d'équilibre (IV-1 et 2), placé à l'origine des figures IV-2

$$z = Z - Z_e, \quad y = Y - Y_e \quad (\text{IV-6})$$

D'après (II -23), leur évolution est gouvernée par l'équation différentielle

$$z = F(Y_e + y) - F(Y_e) = f(y) \quad (\text{IV-7})$$

En utilisant la perturbation de la déformation plastique à l'équilibre $u = \epsilon - \epsilon_e$, (IV-7) s'écrit :

$$u = -\frac{z}{h} = f_h(y) \quad (\text{IV-8})$$

Les graphes des fonctions f et f_h sont représentés sur la figure IV-2. Comme cela a déjà été exprimé en II-3-2, il est possible d'après le

théorème des fonctions implicites de prendre l'inverse de la fonction f_h là où $f'_h \neq 0$. L'inversion de (IV-8), légitime séparément sur chaque branche stable de f_h , permet d'écrire génériquement une équation aux dérivées partielles $y=g(u)$, de type réaction-diffusion [47]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g^I(u) \text{ pour la branche I } (2^*, 1)$$

$$g^{II}(u) \text{ pour la branche II } (2, 1^*) \quad (\text{IV-9})$$

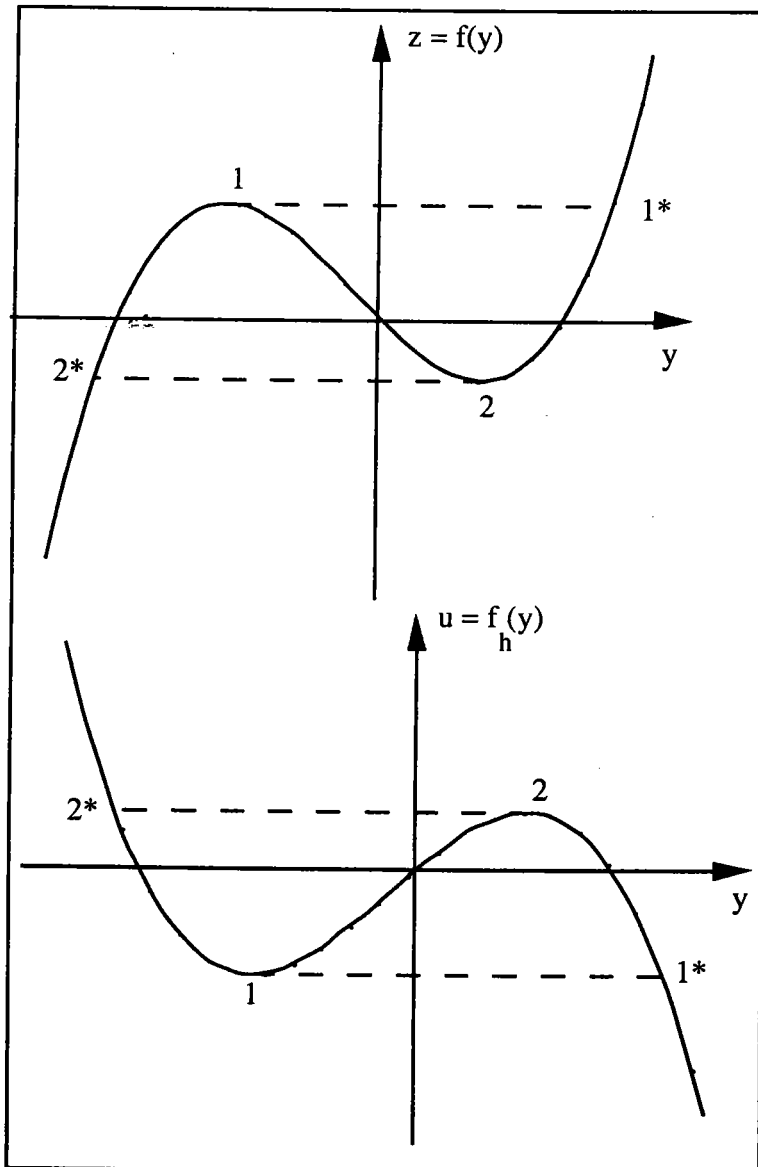


Figure IV-2 :

(a) Fonction $z = f(y)$

(b) Fonction $u = f_h(y) = -z/h$

Seules les déterminations g^I et g^{II} de $g(u)$ correspondant aux branches stables sont à considérer alternativement (figure IV-3); la branche instable (1,2) n'est jamais atteinte au cours du processus de déformation, et au contraire du modèle de second gradient, ne sera pas utilisée dans la suite.

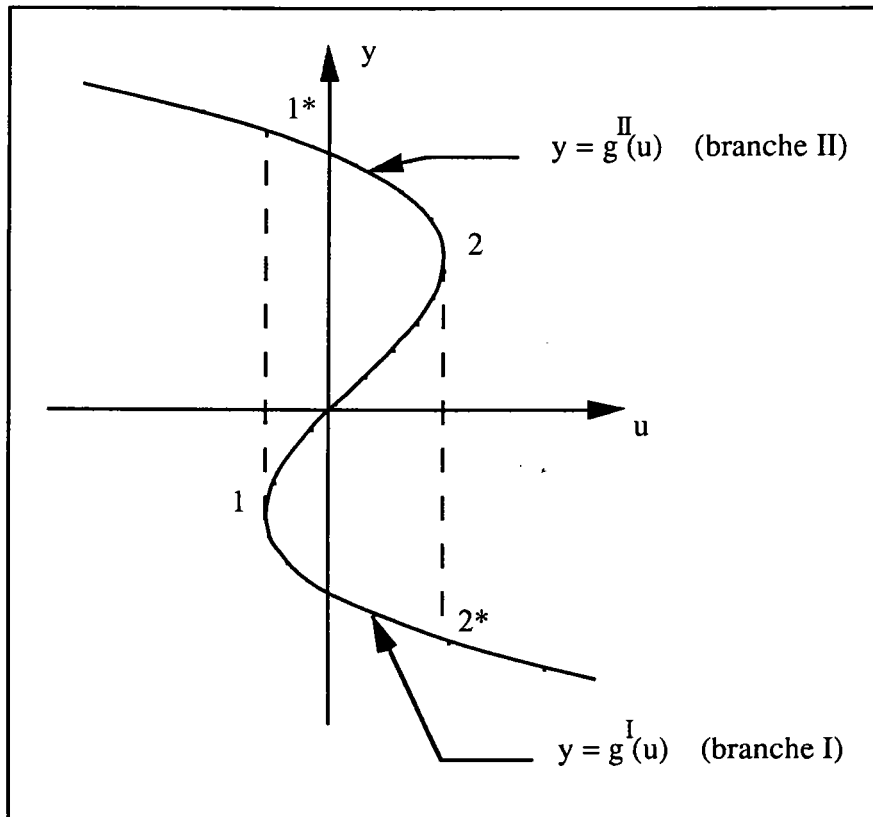


Figure IV-3 :
Définition des fonctions $g^I(u)$ et $g^{II}(u)$.

b) Système autonome équivalent

Comme on recherche des solutions propageantes, les conditions aux limites sont remplacées par des conditions de périodicité à l'infini. Plus particulièrement, on s'intéresse à une solution du couple d'équations de réaction-diffusion (IV-9) sous la forme d'une onde stationnaire dans un repère se déplaçant à la vitesse constante $c > 0$; dans ce repère, cette onde dépend uniquement de la variable $\xi = x - ct$.

En effectuant le changement de variables :

$$u(x,t) = u(\xi) ; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c u' ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'' \quad (\text{IV-10})$$

où le (') signifie la dérivation par rapport à ξ , on réduit (IV-9) à l'équation différentielle ordinaire du second ordre

$$Du'' + cu' + g(u) = 0 \quad (\text{IV-11})$$

où g est employé pour g^I et g^{II} . En utilisant les variables de phase (u_1, u_2)

$$u_1 = u \quad \text{et} \quad u_2 = u' \quad (\text{IV-12})$$

(IV-11) peut également s'écrire sous la forme d'un système autonome de deux équations différentielles du premier ordre

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_2 \\ Du'_2 &= -c u_2 - g(u_1) \end{aligned} \quad (\text{IV-13})$$

A l'origine $O(0,0)$ du plan de phase, on a $u'_1=0$ et $u'_2=0$, de sorte que O est un point critique (et c'est le seul); il est associé au mode de déformation uniforme instable. Dans le diagramme de phase (u_1, u_2), on peut écrire

$$u'_2 = u_2 \frac{du_2}{du_1} \quad (\text{IV-14})$$

et le système autonome (IV-13) devient l'équation différentielle ordinaire

$$D u_2 \frac{du_2}{du_1} = -c u_2 - g(u_1) \quad (\text{IV-15})$$

dont les solutions sont les orbites $u_2(u_1)$ du système dans le plan de phase (u_1, u_2). Dans une première approche pour déterminer les orbites, nous allons considérer le cas non diffusif $D = 0$ où le modèle se réduit à celui de Kubin-Estrin [3, 18, 19].

c) Cas non diffusif $D=0$

Pour $D=0$, l'équation différentielle (IV-15) dégénère en une équation algébrique; selon la détermination de g , deux solutions stables u_2 sont possibles pour un u_1 donné

$$u_{20I} = -\frac{g^I(u)}{c} ; \quad u_{20II} = -\frac{g^{II}(u)}{c} \quad (IV-16)$$

sur chacune des branches stables I et II. L'affixe décrit l'orbite périodique constituée par les branches I et II parcourues alternativement et par les sauts discontinus 11^* et 22^* . C'est le cycle discontinu décrit par Kubin-Estrin [3, 18, 19] et déjà relaté dans I-4-2 (figure I-19). Il permet de préciser l'allure qualitative des profils (\dot{u}, t) déjà donnée en figure I-21 et tracée en figure IV-4 pour définir les valeurs ξ_1 et ξ_2 : ξ_1 est la valeur de ξ pour laquelle le saut $1-1^*$ de la branche I à la branche II se produit, et ξ_2 correspond au deuxième saut de la branche II en 2 à la branche I en 2^* .

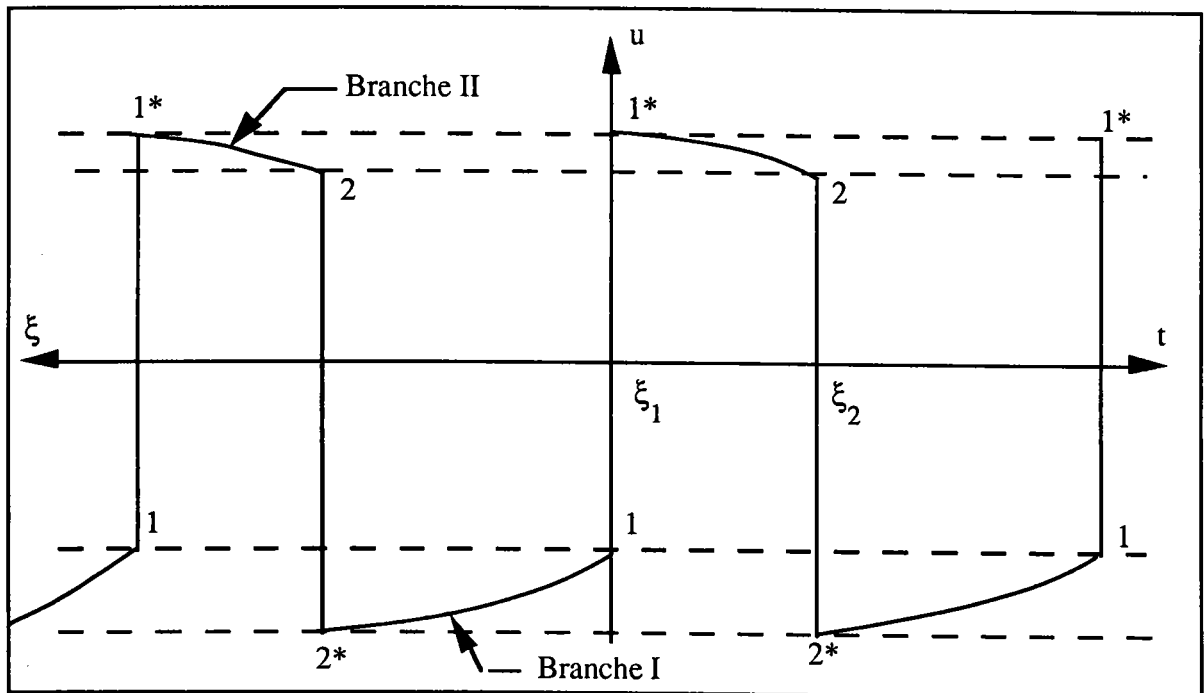


Figure IV-4 :

Profils (\dot{u}, t) dans le cas non diffusif.

Comme on l'a mentionné auparavant, l'état d'équilibre de la déformation plastique (l'origine O) n'est jamais atteint, et la perturbation du mode

uniforme n'est pas petite en général. Le plan de phase (u_1, u_2) , les fonctions définies en (IV-16) et le cycle de Kubin-Estrin apparaissent sur la figure IV-5. Nous allons voir maintenant que l'introduction de la diffusion élimine les sauts discontinus de la variable u_2 .

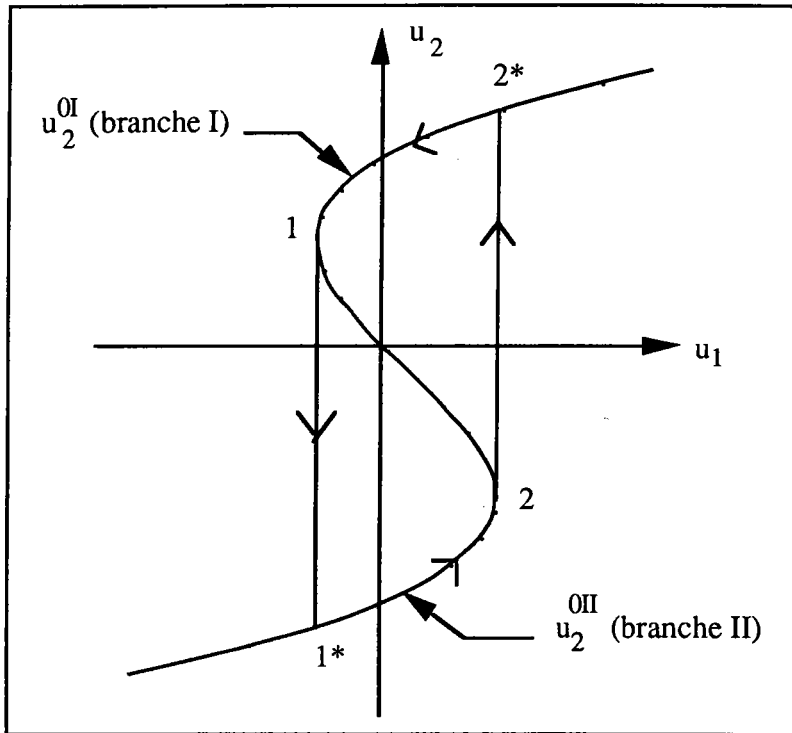


Figure IV-5 :
Plan de phase, cycle non-diffusif,
et définition des fonctions u_2^{0I} et u_2^{0II} .

d) Cas diffusif $D \neq 0$

L'équation (IV-15) s'écrit alternativement, selon la détermination choisie pour g

$$D u_2 \frac{du_2}{du_1} = -c u_2 - g^I(u_1) = c (u_2^{0I} - u_2) \quad (\text{IV-17-a})$$

ou bien

$$D u_2 \frac{du_2}{du_1} = -c u_2 - g^{II}(u_1) = c (u_2^{0II} - u_2) \quad (\text{IV-17-b})$$

Les relations (IV-17) permettent d'obtenir des informations sur les trajectoires dans le plan de phase en considérant le signe de du_2/du_1 .

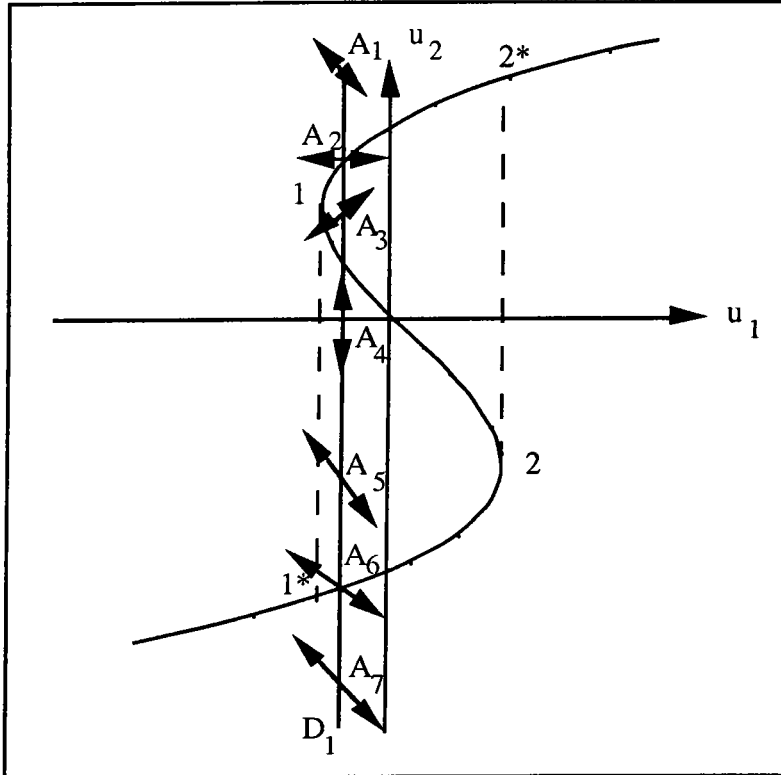


Figure IV-6 :

Tangentes à la trajectoire relative à la branche I.

Regardons tout d'abord le chemin I, solution pour la branche I de (IV-17-a). Si l'on trace une droite D_1 parallèle à l'axe des u_2 , les régions suivantes sont à examiner :

- la zone où $u_2 > u_2^{0I} > 0$: l'équation (IV-17-a) donne une dérivée du_2/du_1 négative. La tangente au point A_1 est représentée en conséquence sur la figure IV-6;
- le point où $u_2 = u_2^{0I}$: dans ce cas, $du_2 = 0$, la tangente en A_2 est horizontale;
- la région où $0 < u_2 < u_2^{0I}$: on obtient une dérivée $du_2/du_1 > 0$ (point A_3);
- le point d'intersection avec l'axe des u_1 , A_4 tel que $u_2 = 0$. Alors l'équation (IV-17-a) impose $du_1 = 0$, donc la tangente au chemin I en A_4 est parallèle à l'axe des u_2 ;
- et enfin les points tels que $u_2 < 0$: la dérivée du_2/du_1 doit être négative (points A_5 , A_6 et A_7).

Les trajectoires I forment des arcs **intérieurs** au cycle décrit par Kubin-Estrin (figure IV-7) en ce sens que $u_2^{0I} - u_2 > 0$ et $u_2^{0II} - u_2 < 0$ pour un u_1 donné; un chemin extérieur au cycle divergerait, ce qui n'est pas

conforme aux observations. En outre, une croissance en valeur absolue de la variable locale u_2 serait thermodynamiquement inadmissible; en effet la diffusion produit des flux qui tendent à diminuer la valeur locale. Pour cette raison, le cycle diffusif appartient à l'ouvert défini par l'intérieur du cycle non diffusif (1, 1*, 2, 2*), à l'exclusion de la fermeture constituée par le cycle lui-même.

De même que le point 1, extrémité de la branche stable I, n'est pas atteint par l'affixe lorsque $D=0$ en raison de son instabilité, de même le point $E_I = (u_1(1), 0)$ n'est pas atteint lorsque $D \neq 0$. Il en résulte, d'après les caractéristiques des tangentes énoncées ci-dessus, que le chemin I solution de (IV-17-a) possède une tangente verticale au voisinage immédiat de E_I , et qu'il coupe la branche stable II en un point que l'on appellera 1'. En une abscisse u_1 donnée, la différence $u_2^{0I} - u_2$ représente l'intensité du processus de diffusion.

De la même façon, le chemin II solution de (IV-17-b) passant au voisinage immédiat du point $E_{II} (u_1(2), 0)$ à tangente verticale doit donner une intersection avec la branche I en un point appelé 2'.

Les trajets de phase sont donc nécessairement sous forme d'arcs I ou II illustrés en figure IV-7.

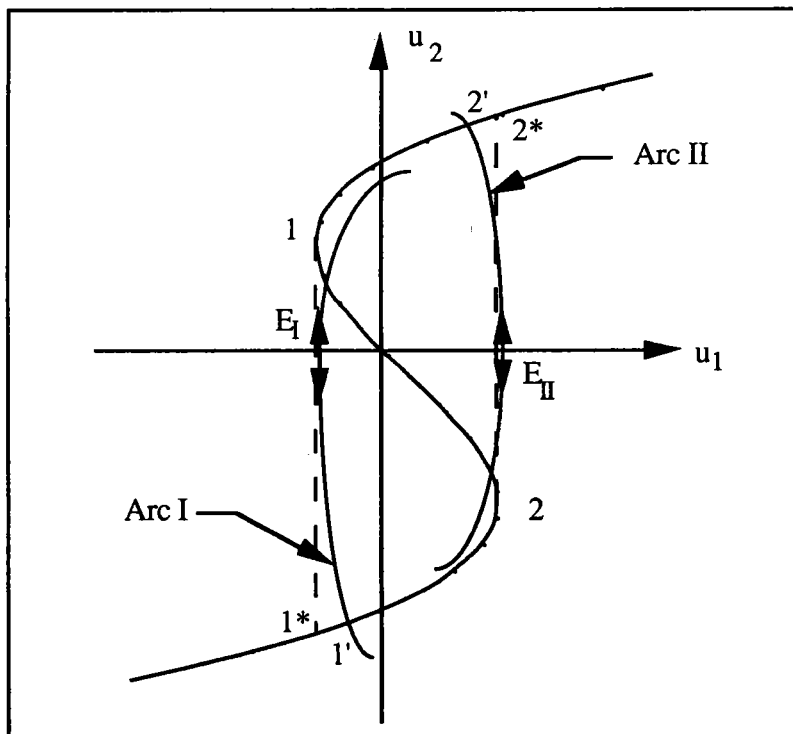


Figure IV-7 :
Allure des trajets de phase (arcs I et II).

e) Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase

L'allure des trajectoires dans le plan de phase peut être obtenue à l'aide d'une construction graphique qui permet également de visualiser le phénomène de couche limite.

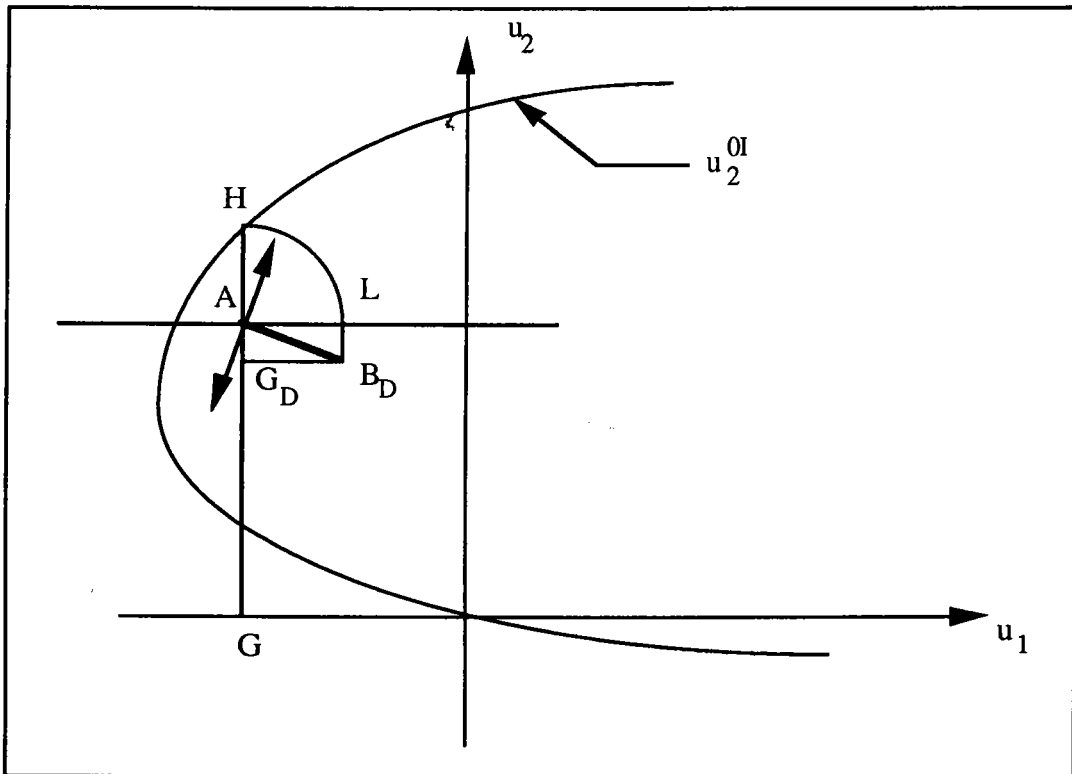


Figure IV-8 :

Construction graphique des trajectoires dans le plan de phase.

Prenons un point $A(u_1, u_2)$ du plan de phase, et les trois points G, H et L (figure IV-8) définis par

$$\overline{GA} = u_2, \overline{HA} = u_2 - u_2^{0I} = \overline{LA}$$

où \overline{GA} et \overline{HA} sont parallèles à l'axe des u_2 et \overline{LA} parallèle à l'axe des u_1 .
L'équation (IV-17-a) s'écrit alors :

$$\overline{LA} du_1 + \frac{D}{c} \overline{GA} du_2 = 0$$

Soit G_D le point défini par $\vec{G_D A} = \frac{D}{c} \vec{G A}$, et B_D caractérisé par

$$\vec{A B_D} = \vec{A G_D} + \vec{A L}$$

La tangente $\vec{du} = (du_1, du_2)$ au chemin I en A est orthogonale au vecteur $\vec{A B_D}$:

$$\vec{du} \cdot \vec{A B_D} = 0$$

On pourrait faire le même type de construction pour l'arc II.

f) Phénomène de couche limite

Le coefficient de diffusion D a été déterminé en II-2-2. Son ordre de grandeur est de 10^{-5} m²/s; il peut donc être considéré comme un petit paramètre. En conséquence, l'équation différentielle (IV-11) ou (IV-17) fait apparaître un phénomène de couche limite car le coefficient de la dérivée d'ordre le plus élevé est très petit. Nous présenterons seulement une approche qualitative de la couche limite, dans la mesure où une analyse de perturbations singulières conduit finalement à une solution numérique.

L'équation (IV-17) peut être mise sous la forme :

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{c}{D} \frac{u_2^{0I} - u_2}{u_2} \quad (\text{IV-18})$$

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{c}{D} \frac{u_2^{0II} - u_2}{u_2} \quad (\text{IV-19})$$

Soit un point n'appartenant ni à l'axe (O, \vec{u}_1) ($u_2 \neq 0$) ni aux branches I et II ($u_2^0 - u_2 \neq 0$). D étant petit, il résulte de (IV-18) que $du_2/du_1 \gg 1$.

Par suite la tangente en M est pratiquement parallèle à l'axe (O, \vec{u}_2) . Lorsque le point M tend vers la branche I (équation (IV-18)) ou la branche II (équation (IV-19)), la pente de tangente devient très

rapidement finie, de sorte que le terme $D u_2 \frac{du_2}{du_1}$ devient négligeable, et que la trajectoire de M devient très proche de la courbe d'équation :

$$c u_0' + g^I(u_0) = 0 \quad (\text{IV-20})$$

ou

$$c u_0' + g^{II}(u_0) = 0 \quad (\text{IV-21})$$

c'est-à-dire de la solution non diffusive décrite en III-1-2-c, que l'on appellera aussi "solution extérieure" dans le contexte de la couche limite.

L'allure qualitative des profils (\dot{u}, t) correspondants est représentée sur la figure IV-4. Les sauts ont lieu pour $\xi = \xi_1$ et $\xi = \xi_2$.

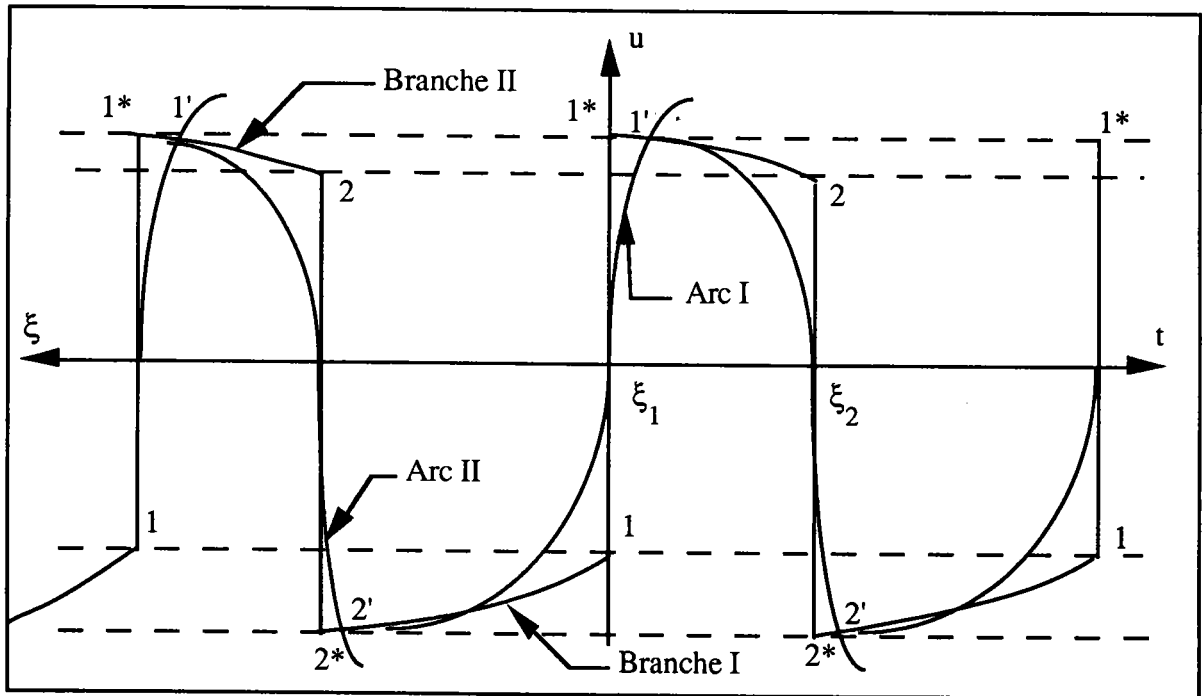


Figure IV-9 :

Phénomène de couche limite en \dot{u} : profil (\dot{u}, t) .

En $\xi = \xi_1$, la solution intérieure valide lorsque les effets de diffusion $(u_2^{0I} - u_2)$ sont importants au désancrage, est proche du saut 1-1* (figures IV-9 et IV-10). Son extrapolation coupe la branche II au point 1'; dans le sens des ξ croissants, la solution intérieure tend vers la branche I où le raccordement avec la solution extérieure s'effectue.

De la même façon, les effets de diffusion ($u_2^{0II} - u_2$) sont importants lors du désancrage, et une "solution intérieure" peut être mise en évidence en $\xi = \xi_2$, et raccordée à la "solution extérieure" constituée par la branche II (figures IV-9 et IV-10).

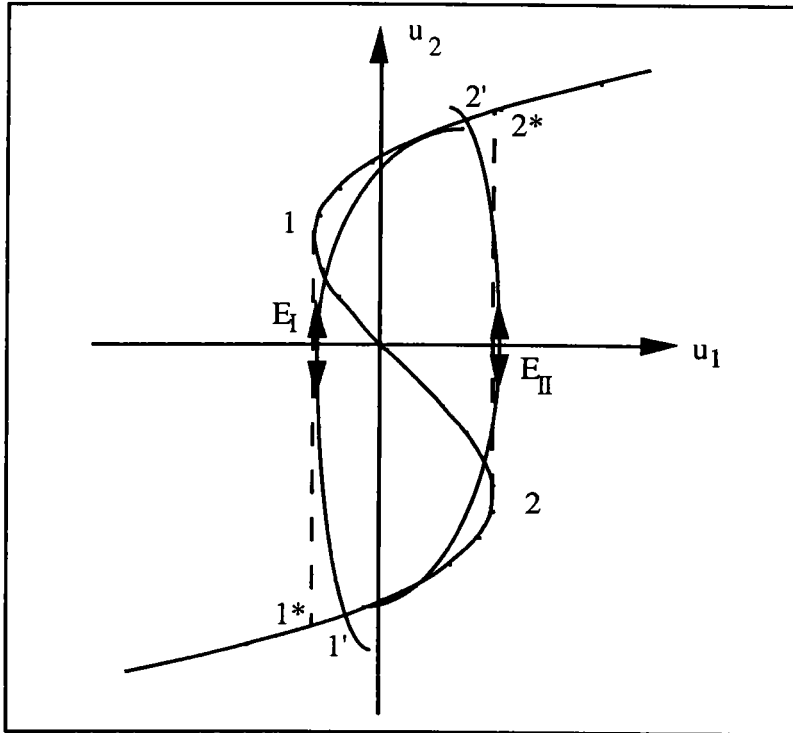


Figure IV-10 :

Phénomène de couche limite dans le plan de phase.

g) Conclusion

On a mis en évidence les caractéristiques suivantes des trajets I et II solutions de (IV-17-a et b) dans le plan de phase pour un couple arbitraire (c, D) :

- un trajet de phase I ou II a une forme d'arc (figure IV-7) qui coupe respectivement la branche II au point 1' et la branche I au point 2'. Les points de tangence verticale sont obtenus pour $u_2 = 0$ (d'où les points E_I et E_{II});
- par construction, ces deux arcs restent à l'intérieur du cycle non diffusif ($2^*, 1, 1^*, 2$) du plan de phase.

IV-1-3 Condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution propageante

On cherche à construire un cycle dans l'espace de phases à partir des arcs I et II parcourus alternativement. On dira, par abus de langage, que la connexion a lieu aux points 1' et 2'; en réalité elle n'a pas lieu sur la fermeture du cycle, mais dans l'ouvert, au voisinage des points 1' et 2', en des points d'autant plus proches de 1' et 2' que la diffusion est plus faible. Le cycle ainsi défini est non-analytique en ce sens que les courbes intégrales, tout en étant continues, admettent des dérivées premières discontinues aux points de connexion 1' et 2' : les points 1' et 2' sont singuliers.

Cette méthode s'apparente à la théorie des "conséquents" de Poincaré [49], utilisée en outre par Minorsky [48].

Le couple (c, D) commun aux deux arcs n'est pas quelconque; en effet, intégrons maintenant les équations (IV-16) le long de ces deux arcs. Pour le chemin I, on obtient

$$\frac{1}{2} D(u_2^2(1') - u_2^2(2')) = - \int_{2'}^{1'} g^I(u_1) du_1 - c \int_{2'}^{1'} u_2^I du_1 \quad (\text{IV-22-a})$$

et pour le chemin II

$$\frac{1}{2} D(u_2^2(1') - u_2^2(2')) = - \int_{2'}^{1'} g^{II}(u_1) du_1 - c \int_{2'}^{1'} u_2^{II} du_1 \quad (\text{IV-22-b})$$

Par différence entre (IV-22-a) et (IV-22-b), on observe que l'orbite périodique construite comme un polygone curviligne à l'aide des arcs I et II parcourus alternativement, peut s'établir si l'équation non linéaire

$$\int_{2'}^{1'} (g^I - g^{II}) du_1 = c \int_{2'}^{1'} (u_2^{II} - u_2^I) du_1 \quad (\text{IV-23})$$

à l'inconnue c est satisfaite. En d'autres termes, le bilan sur un cycle des actions de diffusion doit être nul pour qu'existe un régime périodique. Dès lors, (IV-11) admet une solution périodique, et (IV-9) une solution propageante. C'est la "non-analyticité" et la permutation d'une équation différentielle à l'autre qui donnent naissance au phénomène périodique, en autorisant le repliement de l'orbite d'un arc à l'autre [47].

IV-2 Modèle approché bi-linéaire

IV-2-1 Solution propageante

Le système autonome (IV-13) ou l'équation différentielle ordinaire du second ordre (IV-11) ne peuvent être résolus analytiquement, les fonctions g^I et g^{II} inverses des branches I et II de la fonction f n'étant pas elles-mêmes connues analytiquement. En revanche, si l'on considère que g^I et g^{II} peuvent être approchées par des droites reliant respectivement les points 2^*-1 et les points $2-1^*$ (figure IV-11), on pourra résoudre directement l'équation différentielle (IV-11). Soit

$$\begin{aligned} g^I(u) &\approx g^1(u) = A_1 u + B_1 \quad \text{pour la branche I } (2^*, 1) \\ g^{II}(u) &\approx g^2(u) = A_2 u + B_2 \quad \text{pour la branche II } (2, 1^*) \end{aligned} \quad (\text{IV-23})$$

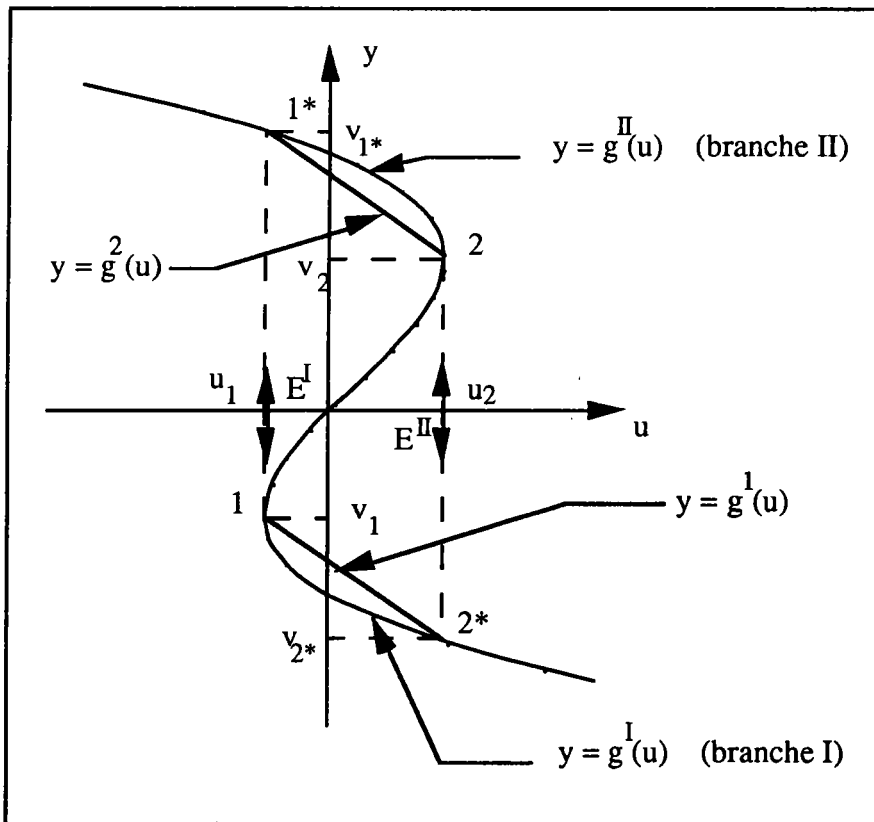


Figure IV-11 :
Modèle approché bi-linéaire.

Une telle approximation semble raisonnable car l'allure des fonctions g^I et g^{II} n'est pas fondamentalement altérée. Au lieu de l'équation (IV-11), on a alors à résoudre alternativement :

$$\begin{aligned} Du'' + cu' + A_1u &= -B_1 \text{ pour la branche I} \\ Du'' + cu' + A_2u &= -B_2 \text{ pour la branche II} \end{aligned} \quad (\text{IV-24})$$

Ce sont deux équations différentielles linéaires; la non-linéarité du problème est conservée globalement, car les deux équations sont satisfaites séquentiellement. Les solutions de (IV-24-a) sont de la forme :

$$u^I(\xi) = -\frac{B_1}{A_1} + \alpha \exp(r_1\xi) + \beta \exp(r_2\xi) \quad (\text{IV-25})$$

$$\begin{aligned} \text{où } r_1 &= -\frac{c}{2D} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4A_1D}{c^2}} \right] \\ r_2 &= -\frac{c}{2D} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4A_1D}{c^2}} \right] \end{aligned}$$

En prenant comme conditions initiales

$$\begin{aligned} u^I(\xi=0) &= u_1 \\ \frac{du^I}{d\xi}(\xi=0) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui représente le point E_I du plan de phase, on obtient les valeurs de α et β suivantes

$$\alpha = \left(u_1 + \frac{B_1}{A_1}\right) \frac{r_2}{r_2 - r_1}, \quad \beta = \left(u_1 + \frac{B_1}{A_1}\right) \frac{r_1}{r_1 - r_2}$$

et on peut écrire

$$u^I(\xi) = -\frac{B_1}{A_1} + \left(u_1 + \frac{B_1}{A_1}\right) \frac{r_2 \exp(r_1\xi) - r_1 \exp(r_2\xi)}{r_2 - r_1}$$

$$\frac{du^I}{d\xi}(\xi) = \left(u_1 + \frac{B_1}{A_1}\right) \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} [\exp(r_1\xi) - \exp(r_2\xi)] \quad (\text{IV-26})$$

De même, la solution de (IV-24-b) pour la branche II est, en prenant comme conditions initiales $u^{II}(\xi_p) = u_2$, $\frac{du^{II}}{d\xi}(\xi_p) = 0$ (point E_{II} du plan de phase) :

$$u^{\text{II}}(x) = -\frac{B_2}{A_2} + (u_2 + \frac{B_2}{A_2}) \frac{r_4 \exp(r_3 \xi) - r_3 \exp(r_4 \xi)}{r_4 - r_3}$$

$$\frac{du^{\text{II}}}{d\xi}(\xi) = (u_2 + \frac{B_2}{A_2}) \frac{r_3 r_4}{r_4 - r_3} [\exp(r_3 \xi) - \exp(r_4 \xi)]$$

(IV-27)

$$\text{avec } r_3 = -\frac{c}{2D} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4A_2 D}{c^2}} \right]$$

$$r_4 = -\frac{c}{2D} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4A_2 D}{c^2}} \right]$$

IV-2-2 Calcul de la largeur de bande

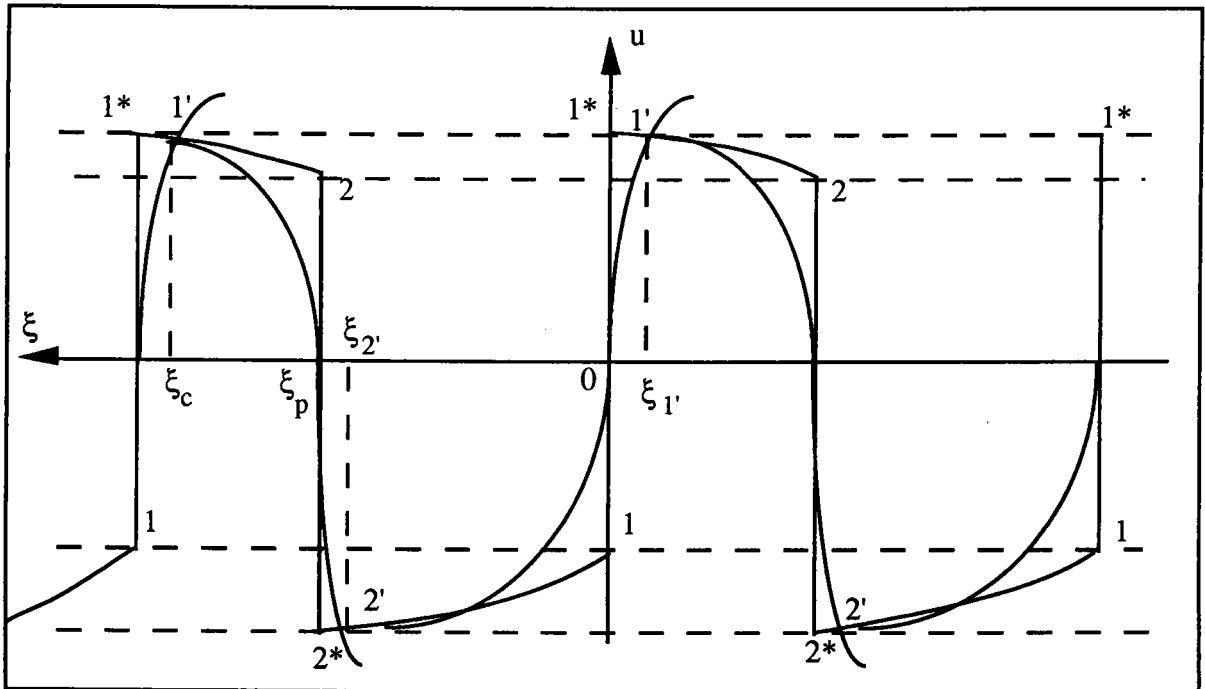


Figure IV-12 :
Définition des valeurs ξ_1' , ξ_2' , ξ_p , et ξ_c .

Les solutions u^{I} et u^{II} de (IV-24) doivent remplir la condition d'existence d'un cycle (IV-22). Il faut donc trouver les points 1' et 2' intersection respectivement du chemin I (u^{I} , $du^{\text{I}}/d\xi$) avec la branche II (u , $u' = -g^2(u)/c$), et du chemin II (u^{II} , $du^{\text{II}}/d\xi$) avec la branche I (u , $u' = -g^1(u)/c$). Pour le point 1', ξ_1' est donc défini par :

intersection respectivement du chemin I ($u^I, du^I/d\xi$) avec la branche II ($u, u' = -g^2(u)/c$), et du chemin II ($u^{II}, du^{II}/d\xi$) avec la branche I ($u, u' = -g^1(u)/c$). Pour le point 1', $\xi_{1'}$ est donc défini par :

$$\frac{du^I}{d\xi}(\xi_{1'}) = -\frac{1}{c} [A_2 u^I(\xi_{1'}) + B_2], \quad \xi_{1'} < 0$$

c'est-à-dire, en remplaçant u^I et $du^I/d\xi$ par leurs valeurs (IV-26) :

$$(r_2 - r_1) \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 u_1 + B_1} = (A_2 r_2 + \frac{A_1 c}{D}) \exp(r_1 \xi_{1'}) - (A_2 r_1 + \frac{A_1 c}{D}) \exp(r_2 \xi_{1'})$$

$$\text{avec } \xi_{1'} < 0 \quad (IV-28)$$

On ne peut résoudre analytiquement cette équation sans approximations. Si l'on suppose $\xi_{1'} \ll 1$ (le passage d'une branche à une autre doit être rapide), et le paramètre adimensionnel $\varepsilon = \frac{A_1 D}{c^2}$ également faible (puisque D est petit), on peut mettre $\xi_{1'}$ sous la forme :

$$\xi_{1'} = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \varepsilon^i = \lambda_1 \varepsilon + \lambda_2 \varepsilon^2 + \lambda_3 \varepsilon^3 + \dots$$

Alors la résolution de (IV-28) est possible par identification des puissances de ε à partir du développement limité en ε de (IV-28) et en remarquant que r_1 et r_2 sont également fonction de ε . On obtient ainsi les coefficients λ_i et donc $\xi_{1'}$ à l'ordre de développement souhaité. Les calculs ont utilisé le programme de calcul formel MAPLE. On s'aperçoit que pour exprimer la condition d'existence d'un cycle (IV-22), il est nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 5.

On peut obtenir de la même façon $\xi_{2'} - \xi_p$. Les résultats sont donnés en annexe.

Les coordonnées du point 1' sont calculables sous forme de développement limité en ε ; on note $u^I(\xi_{1'}) = u_{1'}$, et pour le point 2' $u^{II}(\xi_{2'}) = u_{2'}$. Les points 1' et 2' sont alors parfaitement déterminés.

Pour exprimer la condition d'existence d'un cycle (IV-22), il faut de plus définir la valeur $\xi_{2'}$ de ξ au point 2' (on a jusqu'à présent obtenu $\xi_{2'} - \xi_p$), et la valeur de ξ nécessaire à la fermeture du cycle en 1' : ξ_c (figure IV-12). On exprime que

Les équations (IV-29) sont résolues sous les hypothèses : $\varepsilon = \frac{A_1 D}{c^2}$ petit, et $\xi_{2'}$ ou ξ_c de la forme

$$\xi_{2'} = \sum_{i=0}^{i=5} \mu_i \varepsilon^i = \mu_0 + \mu_1 \varepsilon + \mu_2 \varepsilon^2 + \dots$$

En employant les notations (figure IV-11) :

$$v_1 = A_1 u_1 + B_1, v_1^* = A_2 u_1 + B_2, v_2 = A_2 u_2 + B_2, v_2^* = A_1 u_2 + B_1$$

les premiers ordres calculés sont les suivants :

$$\begin{aligned} \xi_{1'} &= \lambda_1 \varepsilon = -\frac{D}{c} \ln\left(1 - \frac{v_1^*}{v_1}\right) \\ \xi_{2'} &= \mu_0 = -\frac{c}{A_1} \ln\left(\frac{v_2^*}{v_1}\right) \\ \xi_p &= \frac{D}{c} \ln\left(1 - \frac{v_2^*}{v_2}\right) - \frac{c}{A_1} \ln\left(\frac{v_2^*}{v_1}\right) \\ \xi_c &= -\frac{c}{A_2} \ln\left(\frac{v_1^*}{v_2}\right) - \frac{c}{A_1} \ln\left(\frac{v_2^*}{v_1}\right) + \frac{D}{c} \ln\left(1 - \frac{v_2^*}{v_2}\right) \end{aligned} \quad (\text{IV-30})$$

La largeur de bande est donnée par ξ_p , et la périodicité de passage d'une bande par

$$\frac{\xi_c - \xi_{1'}}{c} = -\frac{1}{A_2} \ln\left(\frac{v_1^*}{v_2}\right) - \frac{1}{A_1} \ln\left(\frac{v_2^*}{v_1}\right) \quad (\text{IV-31})$$

IV-2-3 Calcul de la vitesse de propagation

La relation d'existence d'un cycle (IV-22) s'écrit

$$\int_{u_2'}^{u_1'} [g^1(u) - g^2(u)] du = c \left[\int_{\xi_{2'}}^{\xi_c} \left(\frac{du^{II}}{d\xi}\right)^2 d\xi - \int_{\xi_{2'}}^{\xi_{1'}} \left(\frac{du^I}{d\xi}\right)^2 d\xi \right] \quad (\text{IV-32})$$

avec les fonctions g^1 et g^2 définies en (IV-23). Une fois l'intégration et les développements limités à l'ordre 5 effectués, l'équation (IV-32) se réduit à l'expression suivante :

$$\frac{c^2}{D} = -\frac{\beta}{\alpha} \quad (\text{IV-33})$$

avec $\alpha = 2A_2(v_1^*)^2 + 2A_1(v_2^*)^2$

$$\beta = 9(A_2)^2(v_1^*)^2 + 9(A_1)^2(v_2^*)^2 + 4(A_2)^2 v_1 v_1^* \ln\left(1 - \frac{v_1^*}{v_1}\right) + 4(A_1)^2 v_2 v_2^* \ln\left(1 - \frac{v_2^*}{v_2}\right)$$

Ce résultat sera discuté ci-dessous, au paragraphe IV-3-2.

IV-3 Vitesse de propagation des bandes de déformation

IV-3-1 Obtention numérique exacte

Pour déterminer la vitesse de propagation c , en même temps que les points (1',2'), il faut :

- intégrer numériquement pour un rapport c/D arbitraire le système différentiel (IV-13) tout d'abord avec $g = g^I$, puis pour $g = g^{II}$.
- contrôler que les solutions u_2^I et u_2^{II} trouvées vérifient la condition d'existence d'un cycle (IV-23) en intégrant numériquement (IV-22).

Si c'est effectivement le cas, la valeur de c/D est obtenue; sinon, une nouvelle valeur du rapport c/D est envisagée par dichotomie, et le processus est itéré jusqu'à ce que la condition (IV-23) soit réalisée avec une précision suffisante.

Il est en outre possible de donner des expressions plus suggestives du rapport c/D . En effet, les relations (IV-15) et (IV-17) conduisent à

$$\frac{c}{D} = \frac{1}{2} \frac{u_2^2(1') - u_2^2(2')}{\int_{2'}^{1'} (u_2^0 - u_2) du_1} \quad (\text{IV-34})$$

En employant les variables physiques ε et $\dot{\varepsilon}$, (IV-34) peut se mettre sous la forme

$$\frac{c^2}{D} = \frac{1}{2} \frac{\{\dot{\epsilon}(1') - \dot{\epsilon}(2')\} \{\dot{\epsilon}(1') + \dot{\epsilon}(2') - 2\dot{\epsilon}_e\}}{\int_{2'}^{1'} (\dot{\epsilon}^0 - \dot{\epsilon}) d(\epsilon - \epsilon_e)} \quad (\text{IV-35})$$

qu'une intégration par parties permet d'écrire également :

$$\frac{c^2}{D} = \frac{h\dot{\epsilon}_m\Delta\dot{\epsilon}}{\Delta P} ; \dot{\epsilon}_m = \frac{1}{2} (\dot{\epsilon}(1') + \dot{\epsilon}(2') - 2\dot{\epsilon}_e) ; \Delta P = h \int_{2'}^{1'} (\dot{\epsilon}^0 - \dot{\epsilon}) d(\epsilon - \epsilon_e) \quad (\text{IV-36})$$

$\dot{\epsilon}_m$ représente une perturbation moyenne de la vitesse de déformation, et $\Delta\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}(1') - \dot{\epsilon}(2')$; ΔP est la différence entre le travail plastique dissipé au cours d'un cycle sans diffusion, et celui dissipé au cours d'un cycle avec diffusion. De même, une intégration directe de l'équation (IV-11) entre les points 1' et 2' fournit tout d'abord pour le trajet I

$$D\Delta u' + c \Delta u + \int_{2'}^{1'} g^I(u_1(\xi)) d\xi = 0 \quad (\text{IV-37-a})$$

puis pour le trajet II

$$D\Delta u' + c \Delta u + \int_{2'}^{1'} g^{II}(u_1(\xi)) d\xi = 0 \quad (\text{IV-37-b})$$

Les deux intégrales sont égales si (1',2') ont été sélectionnés à l'aide de (IV-18). D'après les relations (IV-15)

$$c\Delta u^0 + \int_{2'}^{1'} g(u_1(\xi)) d\xi = 0 \quad (\text{IV-38})$$

Combinant (IV-37) et (IV-38) et revenant aux variables physiques ϵ et $\dot{\epsilon}$, on trouve

$$\frac{c^2}{D} = \frac{\Delta\dot{\epsilon}}{\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^0} \quad (\text{IV-39})$$

$\Delta\epsilon$ (resp. $\Delta\epsilon^0$) est la déformation plastique accumulée sur les trajets I et II (resp. les branches I et II avec $D=0$).

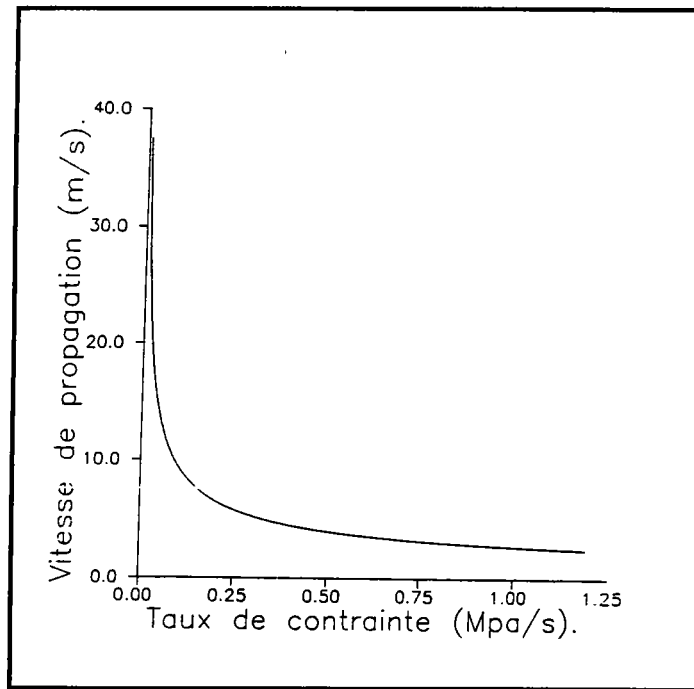


Figure IV-13 :

Vitesse de propagation dans un alliage Al-5%Mg [47].

La valeur du coefficient de diffusion D a été ajustée indépendamment de l'expression (II-15) de manière à obtenir une vitesse de bandes de 40 m/s au taux de contrainte minimum $\dot{\sigma}_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ MPa/s; on obtient $D=3.33 \cdot 10^{-5}$ m²/s. Le reste de la courbe tracée avec cette valeur sur la figure IV-13, montre une décroissance monotone de la vitesse, en accord avec la tendance expérimentale. De plus, la valeur de D est compatible avec l'estimation obtenue à l'aide du bilan des échanges de dislocations par glissement dévié entre plans de glissement (II-15) qui a permis de trouver également $D=3.33 \cdot 10^{-5}$ m²/s.

L'identité des valeurs doit être considérée comme une coïncidence heureuse, seule est significative l'identité des ordres de grandeur.

IV-3-2 Comparaison avec le modèle bi-linéaire approché

De la même façon que pour l'analyse numérique non linéaire précédente, la valeur du coefficient de diffusion D a été ajustée de manière à obtenir une vitesse de bandes de 40 m/s pour le taux de contrainte minimal $\dot{\sigma}_0 = 8 \cdot 10^{-3}$ MPa/s. Nous avons alors trouvé $D = 91$ m²/s chiffre astronomique qui paraît aberrant. De plus, la vitesse est très faiblement décroissante : la plus basse vitesse de propagation vaut en effet 39,3 m/s pour le taux de contrainte maximal $\dot{\sigma}_0 = 1.2$ MPa/s.

Ce résultat surprenant met en évidence la sensibilité des solutions à la forme de la fonction caractéristique. D'ailleurs, l'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être prouvées pour toute fonction F en forme de N .

Cependant, contrairement au modèle second gradient du chapitre 3, cette étude n'utilise que les parties stables de la fonction caractéristique, accessibles à l'expérience. Pour l'alliage Al-5%Mg, les valeurs de la vitesse décroissent de façon monotone lorsque le taux de chargement est accru, ce qui est conforme à la tendance observée expérimentalement. Elles sont de plus numériquement satisfaisantes pour une valeur plausible du coefficient de diffusion.

IV-4 Morphologie des solutions propageantes

L'intégration numérique du système (IV-13) avec $g = g^I$ puis $g = g^{II}$ pour les valeurs c et D déterminées en IV-3-1 en fonction de la vitesse de chargement $\dot{\sigma}_0$ est réalisée à ξ croissant et permet donc de déterminer les profils $\dot{\epsilon}(x)$ ou $\dot{\epsilon}(t)$.

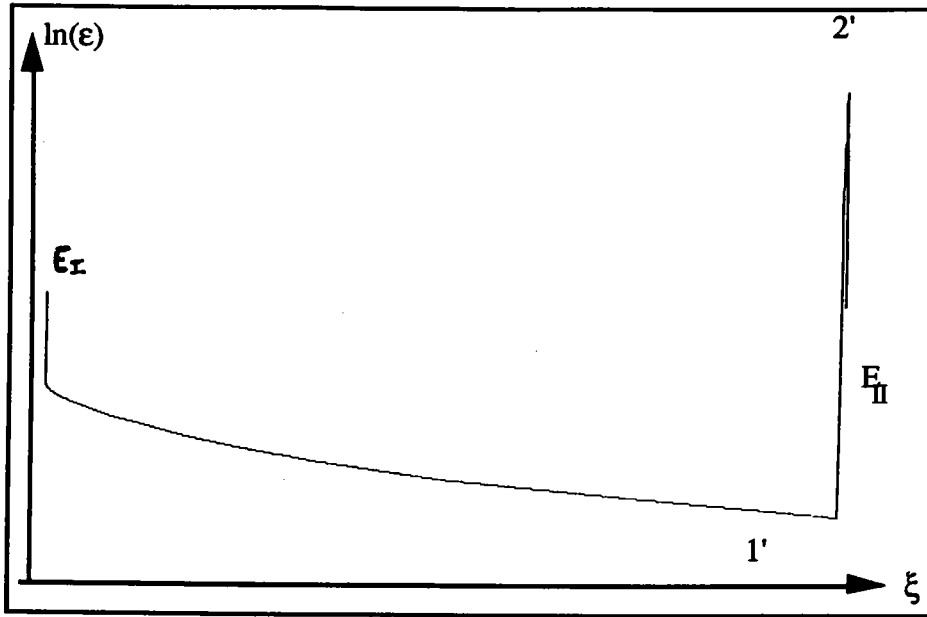


Figure IV-14 :

Profil $(\dot{\epsilon}, \xi)$ pour $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0/h = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

La figure IV-14 obtenue pour $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0/h = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ en est un exemple. Elle donne la largeur de bande w . Elle permet de calculer l'intervalle l entre deux bandes, le temps $\Delta T_1 = \frac{l}{c}$ qui s'écoule entre deux passages de bandes dans une section de l'éprouvette, le temps $\Delta T_2 = \frac{w}{c}$ mis par la bande pour traverser la section considérée, ainsi que la période d'un cycle $\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{l+w}{c} = \frac{\Lambda}{c}$ (voir I-4-2 et la figure I-11). Pour $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0/h = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, on obtient :

$$w = 0,909 \text{ m}; l = 1,99 \cdot 10^3 \text{ m}; \Delta T_1 = 192,94 \text{ s}; \Delta T_2 = 0,081 \text{ s}; \\ \Lambda = 2 \cdot 10^3 \text{ m}; \Delta T = 193,84 \text{ s}.$$

Les valeurs numériques obtenues pour la largeur de bande et l'intervalle entre bandes ne doivent pas surprendre. En effet elles sont beaucoup plus fortes que celles que l'on obtient en machine dure; la largeur de bande est alors de l'ordre de $100 \mu\text{m}$. Il est en fait impossible d'appréhender l'intégralité d'une bande en machine douce en raison de la longueur limitée des échantillons. Le paramètre sur lequel peuvent être basées les confrontations avec les prévisions du modèle est plutôt la durée ΔT_2 de passage d'une bande en une section donnée de l'éprouvette. On verra ci-

dessous que les valeurs obtenues sont en accord avec les résultats expérimentaux.

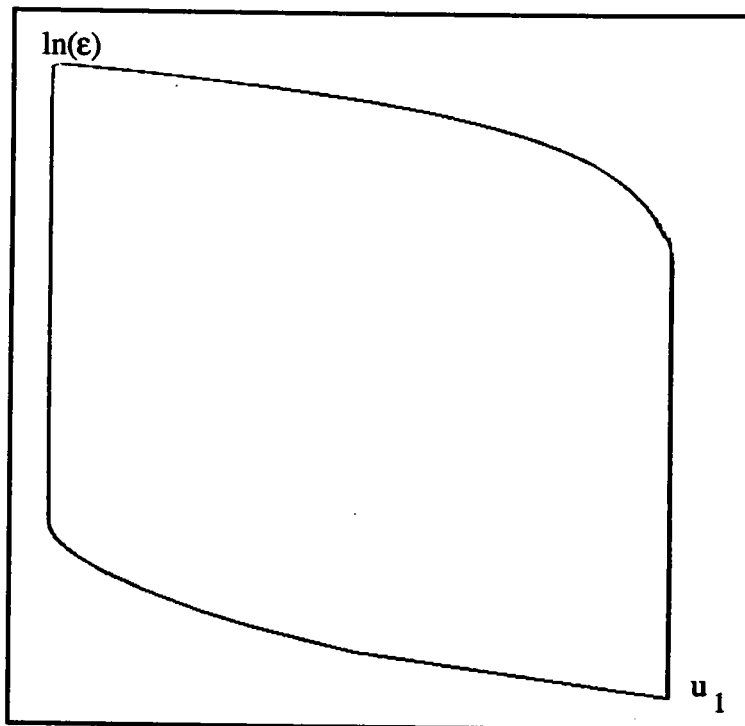


Figure IV-15 :

Cycle diffusif dans l'espace de phase pour $\dot{\epsilon}_e = \dot{\sigma}_0/h = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

La trajectoire, correspondant à ce profil (figure IV-15) dans l'espace de phase, est très peu différente de celle du cas non diffusif $D = 0$ (il n'y a pas de différence visible sur le tracé). On remarque que l'intégration numérique à t croissant de (IV-16) où $D = 0$ donne sensiblement les mêmes résultats. En effet, on trouve :

$$w = 1,1 \text{ m}; l = 2,09 \cdot 10^3 \text{ m}; \Delta T_1 = 203 \text{ s}; \Delta T_2 = 0,106 \text{ s}; \\ \Lambda = 2,091 \cdot 10^3 \text{ m}; \Delta T = 203,10 \text{ s}.$$

La déformation laissée dans une section par le passage d'une bande :

$$\Delta \epsilon_B = \int_{2'}^{1'} \dot{\epsilon} dt = \int_{pic} \dot{\epsilon} dt = \epsilon(1') - \epsilon(2')$$

est trouvée égale à $1,963 \cdot 10^{-2}$.

L'allure des profils trouvés expérimentalement [13] (voir figure I-11) est comparable à celle que nous avons déterminée numériquement. De plus, les valeurs calculées respectent des ordres de grandeur élémentaires. En effet, soit ΔF la différence entre le maximum et le minimum de la courbe caractéristique; lors du passage d'une bande, $\dot{\sigma}_0 t - h\epsilon$ chute de ΔF , donc

$$\dot{\sigma}_0 \Delta T_2 - h \Delta \epsilon_B = - \Delta F \quad (\text{IV-40})$$

$\dot{\sigma}_0 \Delta T_2$ représente le chargement de l'échantillon pendant le temps ΔT_2 . D'après les profils de Karimi [13] (dont celui de la figure I-11), ΔT_2 est de l'ordre de 0,1 s ce qui est conforme aux prévisions du modèle, et pendant le passage d'une bande, on peut considérer la contrainte comme sensiblement constante. D'où

$$\Delta \epsilon_B \approx \frac{\Delta F}{h} \approx \frac{20 \text{ MPa}}{10^3 \text{ MPa}} = 2 \cdot 10^{-2}$$

ce qui est très voisin de la valeur annoncée ci-dessus.

Par ailleurs, la déformation est produite principalement pendant le passage de la bande avec ΔT peu différent de ΔT_1 :

$$\dot{\epsilon}_e = \frac{\dot{\sigma}_0}{h} = \frac{\Delta \epsilon_B}{\Delta T_1} \quad \text{d'où} \quad \Delta T_1 = \frac{\Delta F}{\dot{\sigma}_0}$$

Pour la valeur considérée de $\dot{\sigma}_0 = 10^{-1} \text{ MPa/s}$, cette relation donne $\Delta T_1 \approx 200 \text{ s}$, valeur voisine de celles calculées pour les cas diffusif et non diffusif. Expérimentalement, Chihab [16] relève des temps ΔT_1 entre deux passages de bandes variant de quelques secondes à 1000 secondes suivant la valeur du taux de chargement $\dot{\sigma}_0$.

IV-5 Stabilité des solutions propageantes périodiques

IV-5-1 Stabilité linéaire

Une solution périodique $\vec{U} = (U_1, U_2)$ du système autonome (IV-13) et un cycle limite dans le plan de phase ont été mis en évidence en IV-3. Par conséquent, un mode de déformation non uniforme se propageant le long de l'éprouvette à vitesse constante c déterminée a été défini. Cependant, il apparaît nécessaire de s'assurer de la stabilité de cette solution.

Soit X la période de la solution $\vec{U} = (U_1, U_2)$:

$$\vec{U}(\xi+X) = \vec{U}(\xi) \quad (\text{IV-41})$$

Considérons une perturbation $\vec{v}(\xi) = (v_1, v_2)$ de cette solution; puisque nous faisons une étude de stabilité linéaire de la solution \vec{U} , on suppose \vec{v} petit par rapport à \vec{U} . \vec{v} , étant fonction de ξ , accompagne les bandes de déformation dans leur mouvement. Substituons l'inconnue $\vec{u} = (u_1, u_2)$ dans le système (IV-13) :

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{v} \quad (\text{IV-42})$$

Si on se limite au premier ordre en \vec{v} , on obtient le système linéaire homogène :

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\xi} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{d\xi} &= -\frac{g'}{D} v_1 - \frac{c}{D} v_2 \end{aligned} \quad (\text{IV-43-a})$$

qui peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\frac{d\vec{v}}{d\xi} = A \vec{v}$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g'}{D} & -\frac{c}{D} \end{pmatrix} \quad (\text{IV-43-b})$$

La matrice A est X-périodique avec

$$g' = \frac{dg}{du_1}(U_1(\xi)) \quad (\text{IV-44})$$

D'après la théorie des systèmes périodiques de Floquet [50], on recherche une solution \vec{v} du système (IV-43) de la forme :

$$\vec{v}(\xi) = \exp(s\xi) \vec{w}(\xi) \quad (\text{IV-45})$$

où \vec{w} est X-périodique; $\lambda = \exp(s\xi)$ est un multiplicateur de Floquet, s, nombre complexe constant, est un exposant de Floquet. Cela revient à considérer une "X-stroboscopie" de la perturbation \vec{v} . Puisque

$$\vec{v}(\xi+X) = \lambda \vec{v}(\xi), \quad \lambda = \exp(sX) \quad (\text{IV-46})$$

le multiplicateur de Floquet λ apparaît comme un indicateur de la stabilité [51]: la solution périodique \vec{U} est instable si le multiplicateur sort du disque unité dans le plan complexe. La substitution de la perturbation (IV-45) dans le système linéaire (IV-43) conduit au problème aux valeurs propres s en \vec{w} :

$$s \vec{w} + \frac{d\vec{w}}{d\xi} = A \vec{w} \quad (\text{IV-47})$$

Puisque \vec{w} est X-périodique, il est décomposable en série de Fourier

$$\vec{w} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \vec{w}_k; \quad \vec{w}_k = \exp(i\omega_k X) \vec{w}_k^0; \quad \omega_k = \frac{2\pi k}{X} \quad (\text{IV-48})$$

En raison de la linéarité, chaque composante \vec{w}_k est elle-même solution du problème aux valeurs propres (IV-47); en utilisant le développement (IV-48), l'équation (IV-47) devient :

$$A \vec{w}_k = (s + i\omega_k) \vec{w}_k \quad (\text{IV-49})$$

où \vec{w}_k est vecteur propre, et $(s + i\omega_k)$ valeur propre de la matrice A . Or, d'après (IV-43-b), les valeurs propres de la matrice A sont solutions de l'équation algébrique :

$$v^2 + \frac{c}{D} v + \frac{g'}{D} = 0 \quad (\text{IV-50})$$

Sur les branches stables de la fonction g , la dérivée g' est négative. Par conséquent, les racines v_1, v_2 de (IV-50) sont réelles. Si l'on choisit v_1 positif et v_2 négatif, on a :

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{c}{2D} \left[-1 + \sqrt{1 - 4g' \frac{D}{c^2}} \right] \approx -\frac{g'}{c} \\ v_2 &= -\frac{c}{2D} \left[1 + \sqrt{1 - 4g' \frac{D}{c^2}} \right] \approx -\frac{c}{D} \end{aligned} \quad (\text{IV-51})$$

D'après (IV-48), les exposants de Floquet correspondant sont donc :

$$\lambda_{1k} = \exp(v_1 X), \quad \lambda_{2k} = \exp(v_2 X) \quad (\text{IV-52})$$

La perturbation est croissante lorsqu'une des valeurs propres est **négative**. En effet, le temps t croît lorsque ξ décroît. Le multiplicateur de Floquet λ_{1k} reste à l'intérieur du disque unité du plan complexe, alors que λ_{2k} en sort quel que soit le mode k considéré. Le cycle limite est donc hyperbolique, chaque point étant un point-selle, et la solution périodique \vec{U} est linéairement instable. Le taux de croissance de la perturbation est proportionnel à $\frac{c}{D}$. Il croît au voisinage des extrémums de la fonction caractéristique; il en résulte que la probabilité de croissance d'une perturbation est plus forte en ces points.

L'instabilité des points du cycle peut être illustrée de la façon suivante.

Soient \vec{V}_1, \vec{V}_2 les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres v_1, v_2 de la matrice A . Ils peuvent être choisis en fonction de (\vec{e}_1, \vec{e}_2) base unitaire du plan de phase (u_1, u_2) comme suit :

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{e}_1 + v_1 \vec{e}_2 \\ \vec{V}_2 &= -\vec{e}_1 - v_2 \vec{e}_2\end{aligned}\tag{IV-53}$$

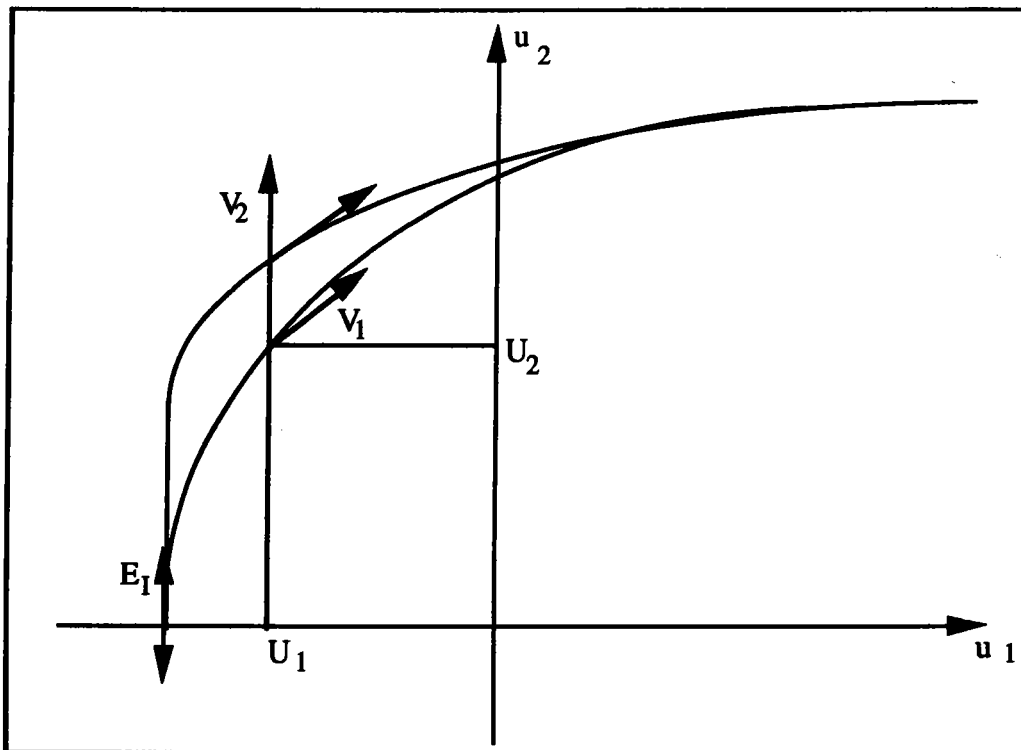


Figure IV-16 :

Définition des vecteurs propres (IV-53) dans le plan de phase.

On remarque que \vec{V}_1 est un vecteur tangent à la courbe non-diffusive définie par (IV-16) $cu_2^0 + g(u_1) = 0$. En effet, cette dernière expression donne $c du_2^0 + g' du_1 = 0$ c'est-à-dire $\frac{du_2^0}{du_1} = -\frac{g'}{c}$. Par ailleurs, on peut considérer $\vec{V}_2 = -v_2 \vec{e}_2 = \frac{c}{D} \vec{e}_2$ car $\frac{c}{D} \gg 1$. Les vecteurs propres \vec{V}_1 ,

\vec{V}_2 , sont représentés dans le plan de phase sur la figure IV-16 en un point quelconque du cycle limite diffusif étudié. A t croissant (donc ξ décroissant), le cycle perturbé au point considéré diverge comme cela est indiqué sur la figure IV-17.

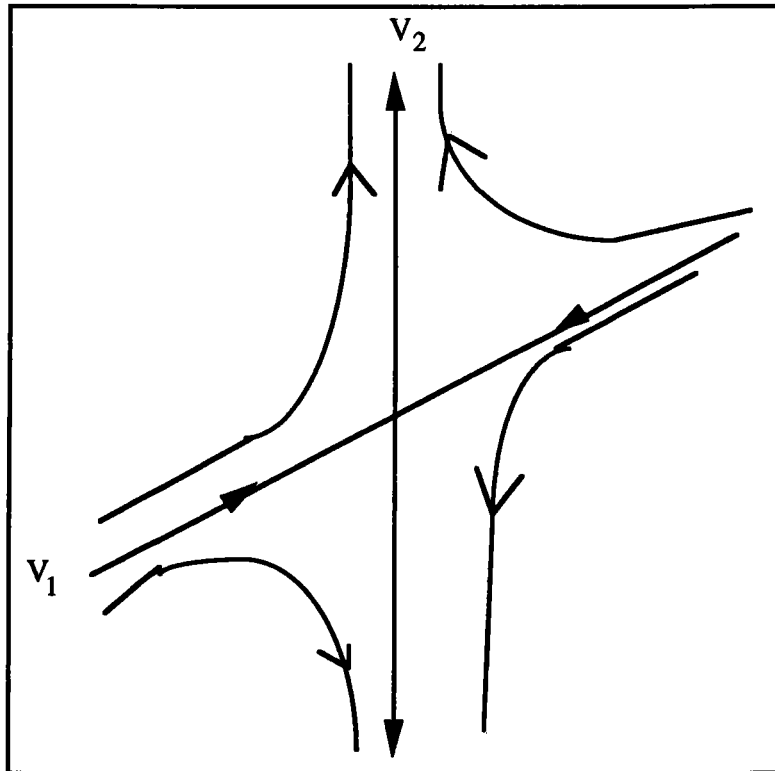


Figure IV-17 : Point selle.

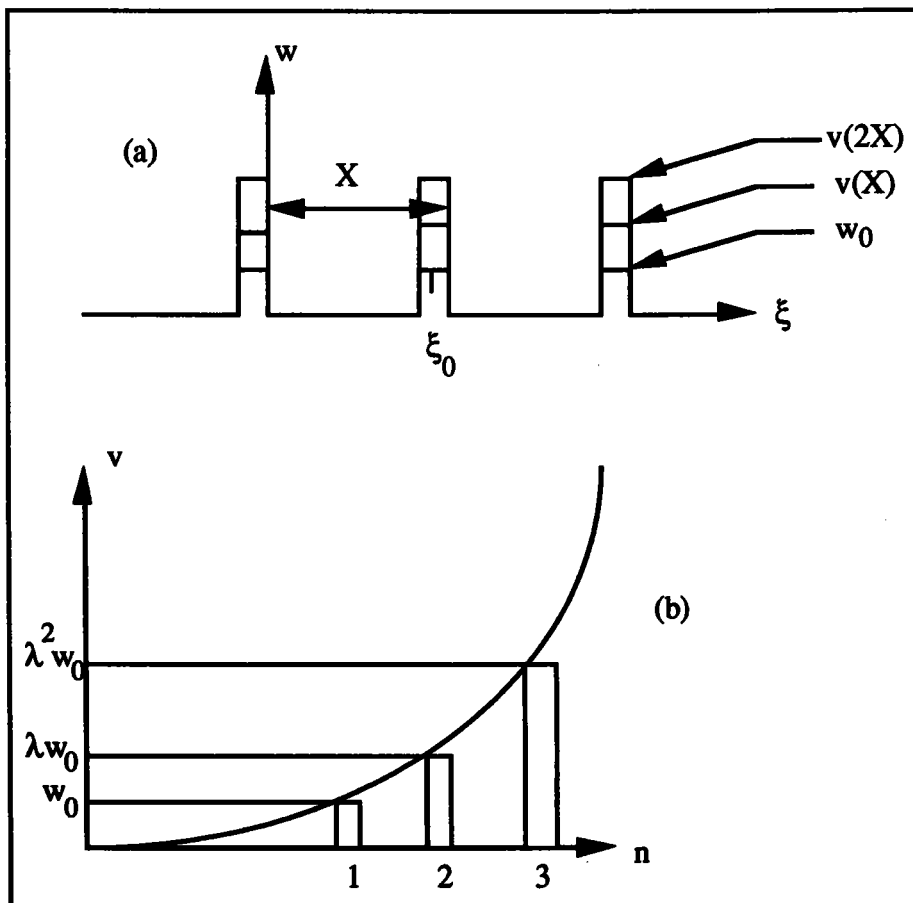


Figure IV-18 : Croissance d'une perturbation et X-stroboscopie.

La périodicité du cycle limite ainsi que la vitesse de propagation des bandes ne sont pas remises en cause, si la perturbation \vec{v} reste suffisamment faible. Seule l'amplitude de la solution perturbée (u_1, u_2) est alors dérégularisée (figure IV-18). Puisque toutes les observations expérimentales indiquent que l'amplitude des perturbations en fonction du temps reste bornée, les effets non linéaires devraient avoir une influence stabilisante. Comme le comportement final de la perturbation dépend des effets non linéaires, non considérés dans la théorie de Floquet, une analyse non linéaire de la stabilité sera effectuée dans ce qui suit.

IV-5-2 Stabilité non linéaire

L'équation (IV-15) où g est égale alternativement à g^I ou à g^{II} peut également s'écrire :

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{c}{D} \left(\frac{u_2^0}{u_2} - 1 \right) \quad (\text{IV-54})$$

Considérons alors un point A (U_1, U_2) du cycle périodique solution du système autonome (IV-13) (figure IV-19). La dérivée au point A est alors:

$$\frac{dU_2}{dU_1} = \frac{c}{D} \left(\frac{u_2^{0I}}{U_2} - 1 \right) \quad (\text{IV-55})$$

Sur la droite D_A parallèle à l'axe des u_2 passant par le point A, le point B défini par $u_2 = 0$ est tel que $du_1 = 0$; donc une solution passant par B possède une tangente verticale. D'après l'équation (IV-15), la dérivée en un point D sur la droite D_A tel que $u_2 < U_2$ est : $\frac{du_2}{du_1} (D) > \frac{dU_2}{dU_1}$. Pour un point E de D_A où $u_2 > U_2$, $\frac{du_2}{du_1} (E) < \frac{dU_2}{dU_1}$.

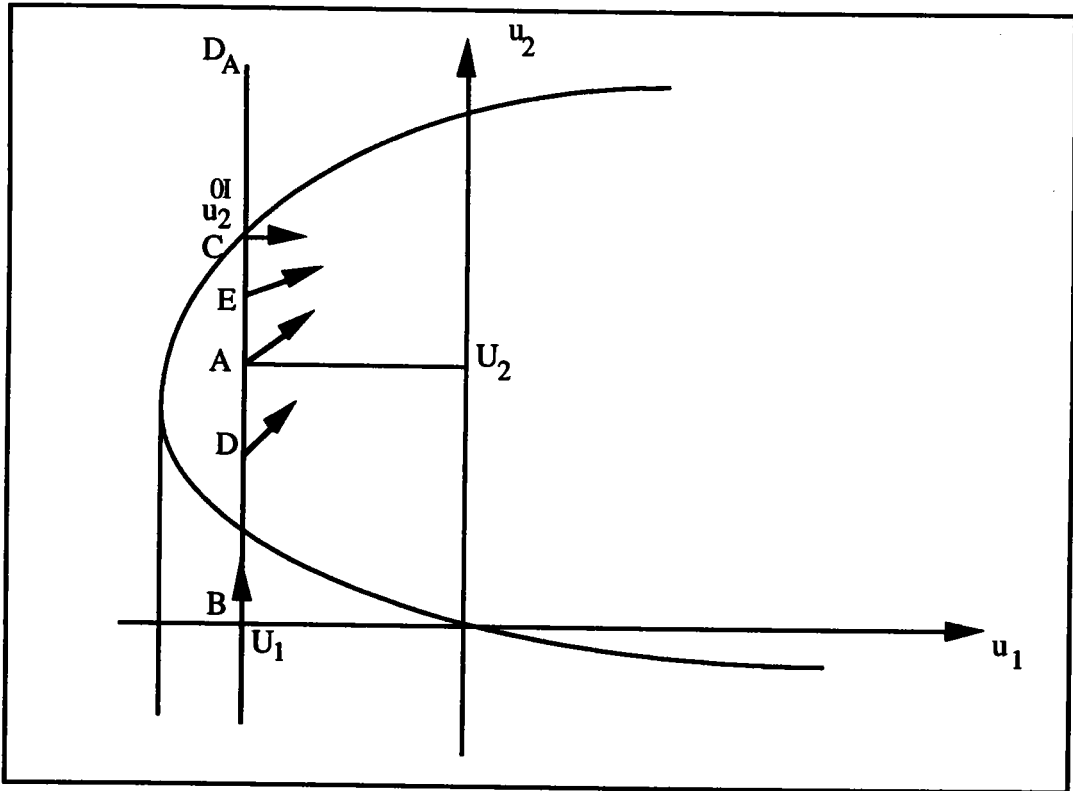


Figure IV-19 :
Tangentes à u_1 constant.

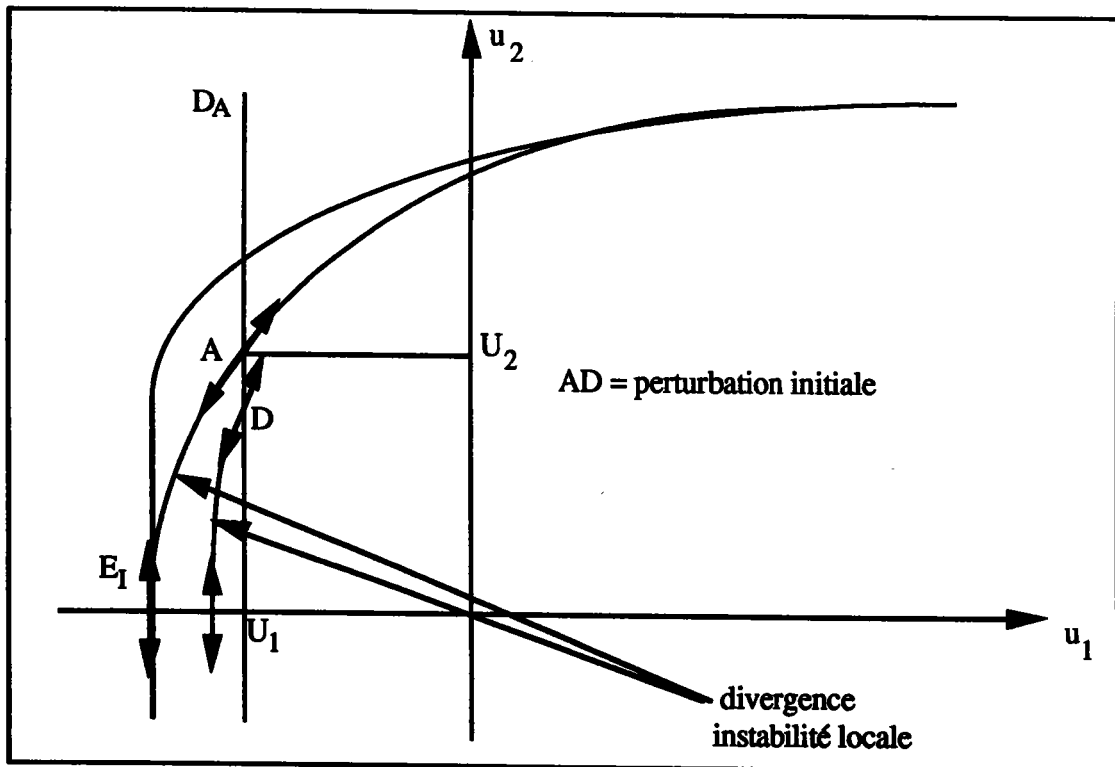


Figure IV-20 :
Instabilité non linéaire locale.

Ce faisceau de tangentes permet de mettre en évidence l'instabilité non linéaire locale du cycle limite. En effet, si une perturbation locale en A du cycle est effectuée de sorte que la solution perturbée passe en D, la tangente en D impose à la solution perturbée de s'écarter de la solution initiale (figure IV-20). Le point de tangence verticale de la solution perturbée sera différent du point E_I , et le point d'intersection avec la branche II différent de $1'$ (figure IV-21). Cependant, une fois ce point atteint, c'est la détermination g^{II} qui est à considérer pour le système IV-13 : le cycle perturbé passe sur l'autre chemin, ce qui le renvoie près du point initial. Le repliement de l'orbite perturbée par l'arc suivant la ramène au voisinage du point de départ.

En conséquence, si les effets non linéaires ont une influence localement déstabilisante (une perturbation locale entraîne une divergence), ils sont globalement stabilisants du fait de l'alternance entre les arcs I et II.

Il résulte de ce comportement localement instable mais globalement stable que des orbites non périodiques sont susceptibles de se produire au voisinage de l'orbite calculée. La vitesse de propagation, déterminée à partir d'une orbite périodique, pourra donc subir des variations d'apparence aléatoire. L'absence de données expérimentales précises rend difficile l'étude de ce phénomène.

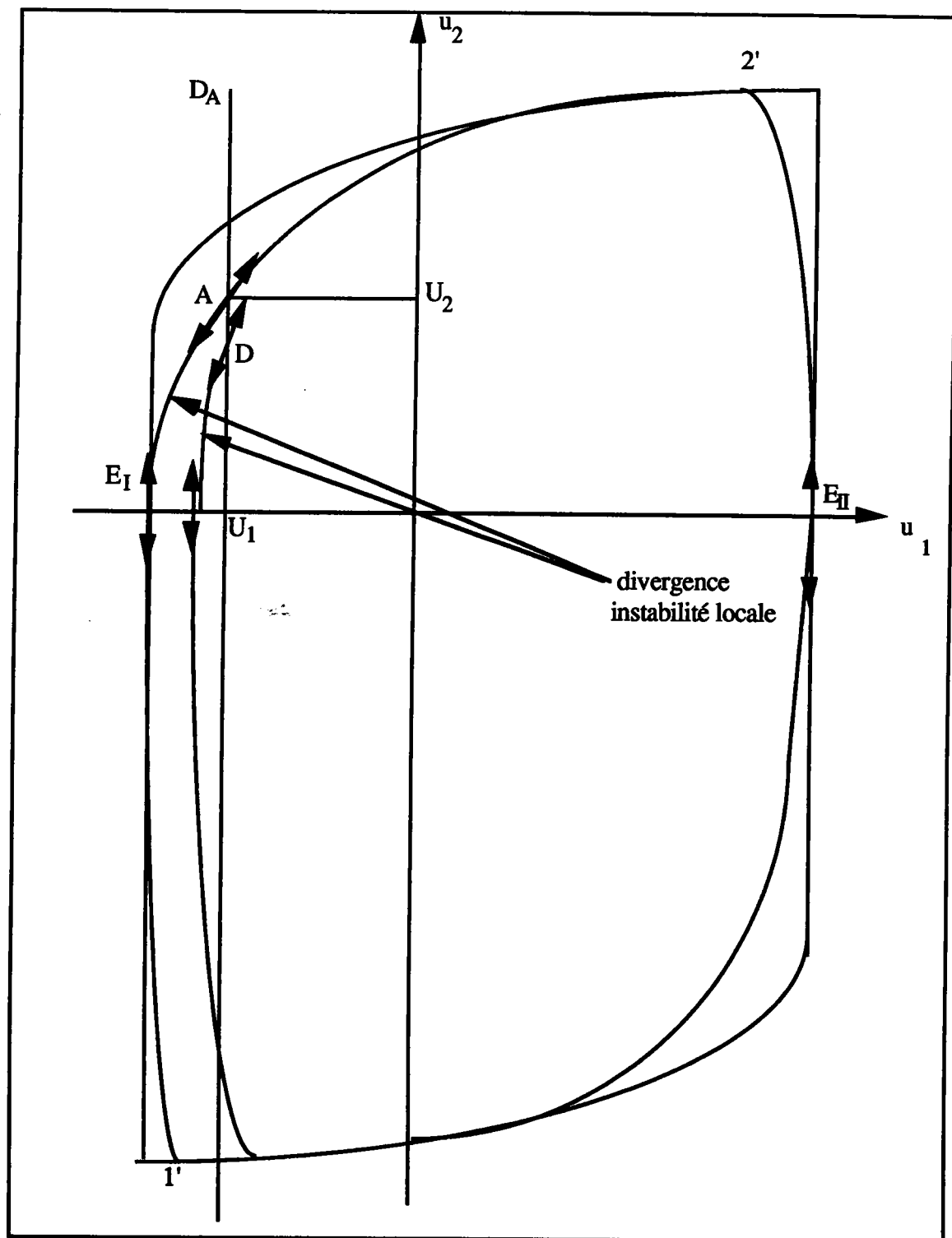


Figure IV-21 :
Stabilité non linéaire globale.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à formuler un modèle qui rende compte de la propagation des bandes de déformation associées à l'effet PLC lors de la traction à taux de contrainte constant. Les résultats expérimentaux sont clairs : ils font apparaître une décroissance monotone de la vitesse de propagation en fonction de la vitesse de chargement sur machine douce. C'est sur la reproduction de cette tendance expérimentale qu'est fondée la discrimination des modèles présentés.

Les modèles locaux utilisent le concept de sensibilité à la vitesse négative pour interpréter le phénomène de déformation plastique non homogène. Cependant, si ces modèles permettent d'expliquer qualitativement la formation des bandes, ils sont incapables de rendre compte quantitativement de la propagation des sauts de vitesse de déformation. Cela résulte de leur caractère local : aucune échelle de longueur n'y apparaît car aucun mécanisme d'interaction spatiale permettant de propager la déformation plastique n'a été employé.

Nous avons considéré deux modèles non locaux utilisant deux mécanismes d'interaction spatiale différents, ce qui se traduit par l'introduction de variables d'espace de deux manières différentes.

Le premier modèle emploie un terme de second gradient relatif à des interactions entre sections droites voisines par contraintes internes. La longueur caractéristique est la distance critique au delà de laquelle on peut considérer que les interactions n'interviennent plus de manière significative. Le modèle utilise la zone de sensibilité à la vitesse négative instable et inaccessible à l'expérience : les résultats obtenus aussi bien par une analyse linéarisée que non linéaire sont donc arbitraires, car ils dépendent de la forme supposée de la partie instable. Le modèle de vieillissement dynamique [19, 20] conduit pour un alliage Al-5%Mg à une variation inadéquate de la vitesse de propagation en fonction de la vitesse de chargement.

Le second modèle s'appuie quant à lui sur un mécanisme de propagation par glissement dévié formellement assimilable à une diffusion de la déformation plastique. La longueur caractéristique est alors la distance maximale de glissement dévié. Un couple d'équations de type réaction-diffusion résulte de l'analyse non linéaire. Du fait de la forme cubique de la contrainte viscoplastique, la fonction de réaction se décompose en deux déterminations stables. Chacune est considérée alternativement ce qui donne naissance à un mouvement périodique et mène à la construction d'un cycle limite dans le plan de phase. La partie instable de la courbe n'est pas utilisée par le modèle. La condition de périodicité exprime la nullité du bilan des effets de la diffusion sur un cycle. Elle permet de déterminer la vitesse des bandes, dont l'évaluation est obtenue numériquement en fonction de la vitesse de chargement.

La vitesse de chargement décroît de façon monotone, ce qui est conforme à la tendance observée expérimentalement. De plus, les valeurs trouvées pour un alliage Al-5%Mg sont quantitativement satisfaisantes pour une valeur plausible du coefficient de pseudo-diffusion.

Il faut souligner que l'existence de la solution dépend de la fonction caractéristique F représentant la contrainte viscoplastique; l'existence et l'unicité des résultats ne sont pas prouvées en général. Ainsi la forme de la fonction F joue étroitement sur les résultats obtenus pour la vitesse de propagation : le modèle bi-linéaire du chapitre 4 en est la preuve.

La théorie de Floquet montre que ce cycle est linéairement instable. Cependant, la périodicité du cycle et la vitesse de bandes ne sont pas remises en cause par la solution perturbée dans l'approximation linéaire. Les effets non linéaires sont localement déstabilisants, mais globalement stabilisants; la combinaison de l'instabilité linéaire et de la relaxation non linéaire peut conduire à des mouvements non périodiques, peu éloignés de l'orbite périodique. Cette caractéristique du modèle est intéressante, car si les paliers sur les courbes de traction donnent parfois l'impression d'apparaître de façon périodique, ils semblent souvent se produire de manière aléatoire. Un tel comportement n'est pas interdit par le modèle de pseudo-diffusion. Au contraire, la stabilité locale d'une orbite déduite du modèle de second gradient interdit ces comportements plus complexes. L'étude [54] de l'enregistrement (d'allure non régulière) d'un essai de traction à vitesse constante par des méthodes de traitement du signal n'a

pas permis de conclure quant à l'existence d'un régime chaotique. Le signal étudié, comportant le bruit de la machine, est fondamentalement apériodique. La séparation du bruit de fond aléatoire devra intervenir pour qu'une conclusion nette puisse être formulée.

Le modèle de pseudo-diffusion, contrairement à celui de second gradient, donne donc des résultats convenables. Une confirmation de ce point de vue pourrait venir de la simulation [28] du comportement des dislocations dans le cristal, dans les conditions de l'effet PLC; l'observation de l'initiation et de la propagation éventuelles de bandes de localisation de la déformation plastique permettrait de tester l'hypothèse du glissement dévié de manière indépendante. En toute éventualité, il serait nécessaire d'avoir de plus amples informations expérimentales sur la vitesse de propagation dans les alliages Al-5%Mg, choisis pour cette étude parce que leur courbe caractéristique est bien déterminée.

La non-localité prise en compte dans cette étude provient de la non-uniformité des densités de dislocations mobiles, et de l'existence de structures de dislocations intracristallines. Il n'est pas exclu que la non-localité d'origine polycristalline soit physiquement significative. Cependant elle n'est pas bien représentée par les formes différentielles faibles utilisées dans ce travail. Une représentation à l'aide des méthodes auto-cohérentes serait également problématique en raison de l'homogénéisation qui leur est inhérente. Ce problème semble donc être ouvert.

Le mérite des deux modèles non locaux envisagés est qu'ils ont permis de mettre en évidence les paramètres caractéristiques : vitesse de propagation, largeur de bande ... des structures internes qui se substituent à la solution uniforme en cas de localisation intense de la déformation plastique. La discrimination et la hiérarchisation des modèles non-locaux, basées sur les caractéristiques morphologiques des structures de déformation qui en résultent, constituent l'apport essentiel de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. Estrin and L.P. Kubin, *Res Mechanica* 23, 197-221, 1988
- [2] G. Dee, J.S. Langer, *Phys. Rev. Lett.*, 50, 383, 1983
- [3] L.P. Kubin, Y. Estrin, *Acta Metall.* 33, 3, 397-407, 1985
- [4] P. Penning, *Acta Metall.*, 20, 1169-1175, 1972
- [5] A.H. Cottrell, *Dislocations and plastic flow in crystals*, Clarendon Press, Oxford, 1953
- [6] J. Friedel, *Dislocations*, Pergamon Press, Oxford, 1964
- [7] H.M. Zbib and E.C. Aifantis, *Scripta Metall.*, 22, 1331-1336, 1988
- [8] F. Le Châtelier, *Rev. Metall.* 6, 914, 1909
- [9] A. Portevin, F. Le Châtelier, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 167, 507, 1923
- [10] M. Classen-Neck Ludowa, *Z. Für. Phys.*, 55, 555, 1929
- [11] M. Manjoine, *J. Applied, Mech. A* 211, 11, 1944
- [12] J. Caisso, *Thesis, Poitiers*, 1958
- [13] K. Chihab, *Thesis, Poitiers*, 1986
- [14] P.J. Worthington, *Ph. D. Thesis, Univ. Sheffield.*, 1962
- [15] Mac Reynolds, *J. of Metals*, 4, 32-45, 1949
- [16] A. Karimi, *Thesis, Ecole des Mines de Paris*, 1982
- [17] L.J. Cuddy, W.C. Leslie, *Acta Metall.* 20, 1157, 1972
- [18] L.P. Kubin, Y. Estrin, *Rev. Phys. Appl.* 23,4, 1988
- [19] Y. Estrin, L.P. Kubin, "Collective dislocation behaviour in dilute alloys and the PLC effect"
- [20] L.P. Kubin, Y. Estrin, "Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the PLC effect"
- [21] L.P. Kubin, Y. Estrin, G. Canova, "Dislocation patterns and plastic instabilities"
- [22] G. Ananthakrishna, *Solid State Phenomena*, Vol.3&4, pp.357-368, 1988
- [23] P. Hähner, *European Research Conference : Plasticity of Materials*, Ascoma, 1992
- [24] G.I. Taylor, *Proc. Roy. Soc. London, A* 145, 1934
- [25] E. Orowan, *Dislocation in plasticity*, The Sorby Centennial Symposium on the history of metallurgy, Ed. Cyril Stanley Smith, MIT, Cordon and Breach, p.359, 1965

- [26] J.M. Burgers, K. Ned. Akad. Wet. 42, p.293, 1939
- [27] L.P. Kubin, K. Chihab, Y. Estrin, Acta Metal., 36, 2707, 1988
- [28] L.P. Kubin, G. Canova, M. Condat, B. Devincre, V. Pontikis, Y. Bréchet, Solid State Phenomena, Vol. 23&24, pp. 455-472, 1992
- [29] L.P. Kubin : Communication privée.
- [30] E.C. Aifantis, Trans. ASME, J. Eng. Mat. Tech., 106, 326-330, 1984
- [31] J. Kratochvil, Rev. Phys. Appl., 23, 419, 1988
- [32] A. Kochendörfer, Plastische Eigenschaften von Kristallen und metallischen Werkstoffen, Springer, Berlin, 1941
- [33] E. Kröner, Acta Metall., 9, 155, 1961
- [34] Y. Bréchet, F. Louchet, Solid State Phenomena, Vol. 3&4, pp. 347-356, 1988
- [35] Y. Bréchet, F. Louchet, Non linear phenomena in materials science, L.P. Kubin et G. Martin éd., pp. 347-356, Trans. Tech. Publications, Aedermannodorf, Switzerland, 1988
- [36] L.P. Kubin, J.P. Poirier, Solid State Phenomena, Vol. 3&4, pp. 473-482, 1988
- [37] Y. Estrin, C.P. Ling, P.G. Mac Cormick, Acta metall. mater., Vol. 39, No. 11, pp. 2943-2949, 1991
- [38] U.F. Kocks, Progress in Materials Science, Chalmers Anniversary, p. 185, Pergamon Press, Oxford, 1981
- [39] C. Truesdell, R.A. Toupin, Principles of classical mechanics and field theories. Encyclopedia of Physics, Vol. III/1 (Edited by S. Flugge). C. Truesdell, W. Noll, The non linear field theories of mechanics. Encyclopedia of Physics, Vol. III/3 (Edited by S. Flugge). Springer Berlin (1965). A.C. Eringen (Ed.), Continuum Physics, Vol. I-IV; Academic Press, New York (1976) (Vol. I), (1975) (Vol. II), (1976) (Vol. III, IV).
- [40] L.P. Kubin, Y. Estrin, Journal de Physique, "A non linear aspect of crystal plasticity : the PLC effect"
- [41] M.P. Shaw, H.L. Grubin, P.R. Solomon, The Gunn-Hilsun Effects, Academic Press, New York, 1979
- [42] P.G. Aronson, H.F. Weinberger, in Partial Differential Equations and Related Topics, ed. I.A. Goldstein (Springer), 1975
- [43] A.L. Hodgkin, A.F. Huxley, J. Physiol., 117, 500-544, 1952
- [44] A.R. Fisher, Ann. of Eugenics, 7, 355-369, 1937
- [45] R. Iricibar, J. Mazza, A. Cabo, Acta Met. 25, 1163, 1977
- [46] R. Iricibar, G. Panizza, J. Mazza, Acta Met. 25, 1169, 1977

- [47] V. Jeanclaude, C. Fressengeas, C.R.A.S. Paris, 315, 7-13, 1992
- [48] N. Minorsky, Théorie des oscillations, Mémorial des Sciences Mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1967
- [49] H. Poincaré, Sur les courbes définies par une équation différentielle, Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1928
- [50] G. Iooss, D.D. Joseph, Elementary stability and bifurcation theory, Springer Verlag, 1980
- [51] V. Jeanclaude, C. Fressengeas, L.P. Kubin, in Nonlinear phenomena in materials science II, L.P. Kubin et G. Martin éd., 403-416, Trans. Tech. Publications, Aedermannsdorf, Switzerland, 1992
- [52] La Salle, Relaxation oscillations, Quart. Appl. Math., Vol VII, n°1, 1-19, 1949
- [53] V. Jeanclaude, C. Fressengeas, C.R.A.S. Paris, accepté pour publication
- [54] J.L. Minot, "Analyse d'un essai de traction à vitesse imposée d'un alliage Al-5%Cu; aspects déterministes/aléatoires de l'effet PLC", Rapport de D.E.A. de l'Université de Metz, 1992

ANNEXE

Les résultats donnés par le logiciel de calcul formel MAPLE pour le modèle bi-linéaire approché de pseudo-diffusion en ce qui concerne les valeurs de ξ_1' , ξ_2' , $\xi_2'-\xi_p$ et ξ_c définies dans le chapitre 4 en IV-2-2 ne sont pas simplifiées.

Les notations employées sont les suivantes :

$$x = \frac{D}{c^2}$$

$$\xi_1' = k_1 x + k_2 x^2 + k_3 x^3 + k_4 x^4 + k_5 x^5$$

$$\xi_2' = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + n_3 x^3 + n_4 x^4 + n_5 x^5$$

$$\xi_2'-\xi_p = l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4 + l_5 x^5$$

$$\xi_c = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3 + m_4 x^4 + m_5 x^5$$

$$v_1 = A_1 u_1 + B_1 = v_1 = A_1 u_1 + B_1$$

$$v_2 = A_2 u_2 + B_2 = v_2 = A_2 u_2 + B_2$$

$$v_{1s} = A_2 u_1 + B_2 = v_{1*} = A_2 u_1 + B_2$$

$$v_{2s} = A_1 u_2 + B_1 = v_{2*} = A_1 u_2 + B_1$$

Les valeurs de k_5 , n_4 , n_5 , l_5 , m_4 , m_5 n'ont pas été transcrites dans ce qui suit en raison de leur "volume" très important.

$$k_1 = \frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{- \ln\left(\frac{A_1 u_1 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right)} C$$

$$k_2 = \frac{C (-v_1 s A_2 + 2 A_1 v_1 s)}{-v_1 + v_1 s}$$

$$+ \frac{C ((2 A_1 - A_2) v_1 - A_1 v_1 s) \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{A_1 u_1 + B_1}\right)}{-v_1 + v_1 s}$$

$$k_3 = \frac{C (-v_1 s^2 A_2^2 - 4 v_1 s^2 A_2 A_1 + 18 A_1^2 v_1 s^2 - 12 v_1 A_1 v_1 s + 6 A_1 v_1 s A_2 B_1 - 6 A_1^2 v_1 s B_2)}{(2 v_1^2 - 4 v_1 v_1 s + 2 v_1 s^2) + C (12 v_1 A_1^2 v_1 s - 6 A_1^2 v_1 s - 6 v_1^2 A_1^2 - 4 A_1 v_1 s A_2 B_1 + 3 A_1^2 B_1 v_1 s + 3 B_1^2 A_2 A_1 + 4 A_1^2 v_1 s B_2 - 3 B_2 A_1^2 v_1 - 3 B_1 A_1^2 B_2) \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{A_1 u_1 + B_1}\right)}{(v_1^2 - 2 v_1 v_1 s + v_1 s^2) + C (A_1 v_1 s A_2 B_1 - A_1^2 B_1 v_1 s + A_2^2 B_1^2 - B_1^2 A_2 A_1 - A_1^2 v_1 s B_2 + B_2 A_1^2 v_1 - 2 A_2 B_1 A_1 B_2 + B_1 A_1^2 B_2 + A_1^2 B_1^2) \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{A_1 u_1 + B_1}\right)}$$

$$k_4 = \frac{C (-2 v_1 s^3 A_2^3 - 6 v_1 s^3 A_2^2 A_1 - 30 v_1 s^3 A_2 A_1^2 + 220 A_1^3 v_1 s^3 - 300 v_1 A_1^3 v_1 s + 120 v_1^2 A_1^2 v_1 s + 3 v_1^2 B_1 A_2^3 + 108 v_1^2 A_1^3 B_2 - 60 A_1^3 B_1 v_1 s - 60 v_1^2 A_1^2 - 3 v_1^2 s^2 A_2 A_1 B_2 - 108 A_1^3 v_1 s B_2 + 60 v_1^3 A_1^2 v_1 s B_2 + 60 A_1^3 B_1 v_1 s B_2)}{(-6 v_1^3 + 18 v_1^2 v_1 s - 18 v_1 v_1 s^2 + 6 v_1 s^3) + C (60 v_1^3 A_1^2 v_1 s - 60 v_1^2 A_1^3 v_1 s - 20 A_1^3 v_1 s + 20 v_1^2 A_1^3 + v_1^2 B_1 A_2^2 A_1 - 18 v_1^2 A_1^2 B_2 + 26 A_1^3 B_1 v_1 s - 10 A_1^2 B_1 v_1 v_1 s + v_1^2 B_1^2 A_2^2 - 3 A_1^2 v_1 s A_2 B_1)}$$

$$\begin{aligned}
& + 26 \xi_1 - 10 A_1^3 B_1^2 v_1 s - 10 A_2^2 A_1^3 B_1 - A_1^2 B_2^2 v_1 s A_2 + 18 A_1^3 v_1 s \\
& - 26 v_1 A_1^3 v_1 s B_2 + 10 v_1^2 B_2 A_1^3 - 2 v_1 s B_1 A_2^2 A_1 B_2 \\
& + 6 A_1^2 v_1 s A_2 B_1 B_2 - 26 A_1^3 B_1 v_1 s B_2 + 10 v_1^3 B_2 A_1^3 B_1 + 10 A_1^3 B_2 B_1 \\
& + A_1^2 B_2^2 v_1 s A_2 - 3 A_1^3 v_1 s B_2) \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{A_1 u_1 + B_1}\right) \\
& / \\
& / \left(-v_1^3 + 3 v_1^2 v_1 s - 3 v_1^2 v_1 s + v_1 s^3 \right) + C \left(7 \xi_2 - 13 A_1^3 B_1 v_1 s \right. \\
& + 6 A_1^3 B_1 v_1 v_1 s + 8 A_1^2 v_1 s A_2^2 B_1 - 19 \xi_1 + 6 A_1^3 B_1 v_1 s + A_2^3 B_1^3 \\
& - 6 A_2^2 A_1^3 B_1 + 6 A_2^2 A_1^3 B_1 - 7 A_1^3 v_1 s B_2 + 13 v_1 A_1^3 v_1 s B_2 \\
& - 6 v_1^2 B_2 A_1^3 - 16 A_1^2 v_1 s A_2^2 B_1 B_2 + 25 A_1^3 B_1 v_1 s B_2 - 6 v_1 B_2 A_1^3 B_1 \\
& - 3 B_2 A_2^2 B_1 A_1 + 18 A_2^2 B_2 A_1^2 B_1 - 6 A_1^3 B_2 B_1 + 8 A_1^3 v_1 s B_2 \\
& - 6 B_2 A_1^2 v_1 + 3 A_2^2 A_1^2 B_2 B_1 - 12 A_1^3 B_2 B_1 - A_1^3 B_2^3) \\
& \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2^2}{A_1 u_1 + B_1}\right) \\
& / \\
& / \left(-2 v_1^3 + 6 v_1^2 v_1 s - 6 v_1^2 v_1 s + 2 v_1 s^3 \right) + C \left(-\xi_2 + 2 A_1^3 B_1 v_1 s \right. \\
& - A_1^3 B_1 v_1 v_1 s - 3 A_1^2 v_1 s A_2^2 B_1 + 5 \xi_1 - A_1^3 B_1 v_1 s - 2 A_2^3 B_1^3 \\
& + 3 A_2^2 A_1^3 B_1 - A_2^2 A_1^3 B_1 + A_1^3 v_1 s B_2 - 2 v_1 A_1^3 v_1 s B_2 + v_1^2 B_2 A_1^3 \\
& + 70 A_1^4 B_1^3 v_1 s + 70 A_2^3 A_1^4 B_1 + 560 v_1^3 A_1^4 v_1 s - 72 \xi_{22} - 268 \xi_{21} \\
& - 840 v_1^2 A_1^4 v_1 s + 560 v_1^4 A_1^3 v_1 s + 172 A_1^4 v_1 s B_2 + 354 A_1^4 B_1 v_1 s \\
& - 140 A_1^4 v_1 s - 140 v_1^4 A_1^4 + 268 \xi_{20} + 13 v_1 s^2 B_1 A_2^2 A_1 \\
& - 26 v_1 s^2 B_1 A_2^2 A_1 B_2 - 268 \xi_{19} + 268 \xi_{18} - 354 \xi_{17} - 172 \xi_{16} \\
& + 268 A_1^4 B_1 v_1 v_1 s B_2 - 268 \xi_{15} + 392 \xi_{14} - 430 \xi_{13} + 13 A_1^3 B_2^2 v_1 s A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 13 v_1^3 A_2^2 A_1^2 B_1 - 13 v_1^3 A_2 A_1^3 B_2 - 72 v_1^2 A_2^3 + 144 v_1^3 \\
& + v_1^3 A_2^3 A_1 B_1 - v_1^3 A_2^3 A_1^2 B_2 + v_1^2 A_2^2 A_1^2 B_2 + 38 v_1^3 \\
& - 70 A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 + 70 v_1^4 A_2^2 + 38 v_1^3 A_2^2 - 114 v_1^2 A_2^3 - 2 v_1^2 A_1^3 B_2 + 76 v_1^3 \\
& - 12 v_1^4 A_2^3 + 36 v_1^4 A_1^2 B_1 v_1 B_2 + 70 v_1^3 A_2^3 - 36 v_1^2 A_2^2) v_1 \\
& / (2 v_1^4 - 8 v_1^3 v_1 A_2 + 12 v_1^2 v_1 A_2^2 - 8 v_1 v_1 A_2^3 + 2 v_1^4) + C (\\
& - 16 A_1^4 v_1^3 B_2 + 18 A_1^4 B_1^3 B_2 + 29 B_2^2 v_1^2 A_1^4 + 29 A_2^2 A_1^2 B_1^4 \\
& + 29 A_1^4 B_1^3 B_2 + 29 B_2^3 v_1^3 A_1^4 - 29 A_1^4 B_1^3 v_1^3 - 2 v_1^3 B_1^3 A_2^4 \\
& - 29 A_2^3 A_1^3 B_1^4 - 6 A_2^3 A_1^4 B_1^4 + 57 v_1^4 A_2^3 + 6 A_1^4 B_2^3 v_1 + 87 A_1^4 B_1^2 B_2^2 \\
& + 125 v_1^4 A_2^3 - 41 A_1^4 v_1^3 B_2 - 107 A_1^4 B_1^3 v_1^3 - 212 v_1^2 A_2^3 - 3 v_1^2 B_1^2 A_2^3 \\
& + 6 v_1^2 B_1^2 A_2^2 A_1^2 B_2 + 154 v_1^2 A_2^2 - 96 v_1^2 A_2^3 + 107 v_1^2 A_2^2 + 41 v_1^2 A_2^3 \\
& - 154 A_1^4 B_1^3 v_1 v_1 A_2^2 B_2 + 96 v_1^3 A_2^3 - 186 v_1^3 A_2^2 + 265 v_1^3 A_2^3 - 3 A_1^3 B_2^2 v_1^2 A_2^2 \\
& - v_1^3 A_2^2 A_1^2 B_1 + v_1^3 A_2^3 A_1^3 B_2 + 57 v_1^3 A_2^3 - 114 v_1^3 A_2^2 - 79 v_1^3 A_2^3 \\
& + 29 A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 - 29 v_1^4 A_2^2 - 85 v_1^3 A_2^3 + 255 v_1^2 A_2^4 - 176 v_1^2 A_2^3 + 16 v_1^2 A_2^4 - 48 v_1^2 A_2^3 \\
& + 29 A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 - 29 v_1^4 A_2^3 + 48 v_1^3 A_2^4 + 58 v_1^2 A_2^4 A_1^2 B_1 + 24 A_2^2 B_2^2 A_1^2 B_1 \\
& - 36 A_2^3 A_1^2 B_2^2 B_1 - 6 v_1^2 B_1^2 A_2^2 A_1^2 B_2 - 116 A_2^3 A_1^3 B_1^2 B_2 \\
& + 2 A_1^3 B_2^3 v_1^3 A_2^2 + 6 v_1^2 B_1^2 A_2^3 A_1^2 B_2) v_1 \\
& / (2 v_1^4 - 8 v_1^3 v_1 A_2 + 12 v_1^2 v_1 A_2^2 - 8 v_1 v_1 A_2^3 + 2 v_1^4) + C (\\
& 28 A_1^4 v_1^3 B_2 - 66 A_1^4 B_1^3 B_2 - 27 B_2^2 v_1^2 A_1^4 - 27 A_2^2 A_1^2 B_1^4 \\
& - 9 A_1^4 B_1^3 B_2 - 9 B_2^3 v_1^3 A_1^4 + 9 A_1^4 B_1^3 v_1^3 + 9 A_2^3 A_1^3 B_1^4 \\
& + 22 A_2^3 A_1^4 B_1 - 33 v_1^4 A_2^3 - 22 A_1^4 B_2^3 v_1 - 81 A_1^4 B_1^2 B_2^2 - 55 v_1^4 A_2^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10 A_1^4 v_1^3 B_2 + 29 A_1^4 B_1 v_1^3 - 5 A_2^4 B_1 - 5 A_1^4 B_2 + 136 \%20 \\
& - 82 \%19 + 28 \%18 - 29 \%17 - 10 \%16 + 82 A_1^4 B_1 v_1 v_1^3 B_2 - 28 \%15 \\
& + 89 \%14 - 149 \%13 - 33 \%12 + 66 \%11 + 60 \%10 - 9 A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 + 9 \%9 \\
& + 82 \%8 - 246 \%7 + 186 \%6 - 28 \%5 + 84 \%4 - 9 A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 + 9 \%3 - 84 \\
& - 54 v_1^2 B_2^4 A_1 B_1 - 88 A_2^2 B_2^2 A_1 B_1^3 + 132 A_2^3 A_1^2 B_2^2 B_1^2 \\
& + 108 A_2^3 A_1^3 B_1 B_2 + 20 A_2^3 A_1 B_2 B_1^3 + 20 A_2^3 A_1^3 B_2 B_1^3 \\
& - 30 A_2^2 A_1^2 B_2^2 B_1^3) \%1
\end{aligned}$$

$$/ (6 v_1^4 - 24 v_1^3 v_1^3 + 36 v_1^2 v_1^2 - 24 v_1^3 v_1^3 + 6 v_1^4) + C ($$

$$\begin{aligned}
& - 12 A_1^4 v_1^3 B_2^3 + 36 A_1^4 B_1 B_2^3 + 7 B_2^2 v_1^2 A_1^4 + 7 A_2^2 A_1^2 B_1^4 \\
& + A_1^4 B_1^3 B_2 + B_2^3 v_1^3 A_1^4 - A_1^4 B_1^3 v_1^3 - A_2^3 A_1^4 B_1^3 - 12 A_2^3 A_1^3 B_1^4 \\
& + 7 \%22 + 12 A_1^4 B_2^3 v_1 + 21 A_1^4 B_1^2 B_2^2 + 10 \%21 - A_1^4 v_1^3 B_2^3 \\
& - 3 A_1^4 B_1^3 v_1^3 + 6 A_2^4 B_1^4 + 6 A_1^4 B_2^4 - 31 \%20 + 17 \%19 - 3 \%18 + 3 \%1 \\
& + \%16 - 17 A_1^4 B_1 v_1 v_1^3 B_2 + 3 \%15 - 17 \%14 + 31 \%13 + 7 \%12 - 14 \%11 \\
& - 14 \%10 + A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 - \%9 - 26 \%8 + 78 \%7 - 64 \%6 + 12 \%5 - 36 \%4 \\
& + A_1^4 B_1^2 v_1 B_2 - \%3 + 36 \%2 + 14 v_1^2 B_2^4 A_1 B_1 + 48 A_2^2 B_2^2 A_1^2 B_1^3 \\
& - 72 A_2^3 A_1^2 B_2^2 B_1^3 - 28 A_2^3 A_1^3 B_1^3 B_2^3 - 24 A_2^3 A_1^3 B_2^3 B_1^3 \\
& - 24 A_2^3 A_1^3 B_2^3 B_1^4 + 36 A_2^2 A_1^2 B_2^2 B_1^4) \%1
\end{aligned}$$

$$/ (24 v_1^4 - 96 v_1^3 v_1^3 + 144 v_1^2 v_1^2 - 96 v_1^3 v_1^3 + 24 v_1^4)$$

$$\%1 := \ln\left(\frac{-A_2 u_1 + A_1 u_1 + B_1 - B_2}{A_1 u_1 + B_1}\right)$$

$$\%2 := A_1^3 v_1^2 A_2 B_1 B_2$$

```

%3 :=          4      2
              A1 B1 v1 v1s

%4 :=          2      2      2
              A1 v1s A2 B1 B2

%5 :=          3      3
              A1 v1s A2 B1

%6 :=          4      2
              A1 B1 v1s B2

%7 :=          3      2
              A1 B1 v1s A2 B2

%8 :=          2      3      2
              A1 B1 v1s A2

%9 :=          4      2
              A1 B1 v1 v1s

%10 :=         4      2
              v1 A1 v1s B2

%11 :=         3      2
              A1 v1s A2 B1 B2

%12 :=         2      2      2      2
              A1 v1s A2 B1

%13 :=         4      2
              A1 B1 v1s B2

%14 :=         3      2      2
              A1 B1 v1s A2

%15 :=         4      2
              A1 B1 v1 v1s

%16 :=         3      3
              A1 v1s A2 B1

%17 :=         4      2
              v1 A1 v1s B2

%18 :=         2      4
              v1 A1 v1s B2

%19 :=         3      3
              A1 B1 v1s A2

%20 :=         4      2
              A1 B1 v1s B2

%21 :=         4      2      2
              A1 B1 v1s

%22 :=         4      2      2
              A1 v1s B2

```

$$\Pi_0 = \frac{\ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) C}{A_1}$$

$$\Pi_1 = \frac{\left(\ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + 1\right) v_2 s}{A_1 u_1 + B_1}$$

$$+ \frac{\ln\left(\frac{A_1 u_2 - A_2 u_2 - B_2 + B_1}{A_2 u_2 + B_2}\right) - 1 - \frac{A_1 u_2 - A_2 u_2 - B_2 + B_1}{A_2 u_2 + B_2}}{A_2 u_2 + B_2} v_2 C$$

v2s

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-2 \xi_2 - 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2} - 2 \xi_3 - \frac{\xi_1 C}{(A_2 u_2 + B_2)} - \xi_4 - C}{(A_2 u_2 + B_2)} \right) \frac{A_2 B_1 v_2 s v_2}{A_2 B_1 v_2 s v_2}$$

$$+ \frac{2 \xi_2 + 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2} + 2 \xi_3 + \frac{\xi_1 C}{(A_2 u_2 + B_2)} + \xi_4 + C}{(A_2 u_2 + B_2)} \frac{A_1 B_2 v_2 s}{A_1 B_2 v_2 s}$$

$$+ \frac{2 \xi_2 + 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2} + 2 \xi_3 + \frac{\xi_1 C}{(A_2 u_2 + B_2)} + \xi_4 + C}{(A_2 u_2 + B_2)} \frac{B_2 A_2 v_2 s}{B_2 A_2 v_2 s}$$

$$+ \frac{-2 \xi_2 - 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2} - 2 \xi_3 - \frac{\xi_1 C}{(A_2 u_2 + B_2)} - \xi_4 - C}{(A_2 u_2 + B_2)} \frac{A_2 B_1 v_2 s B}{A_2 B_1 v_2 s B}$$

$$+ \frac{-4 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2} - 5 C + 4 \xi_3 - 2 \xi_2 + \frac{\xi_1 C}{(A_2 u_2 + B_2)}}{(A_2 u_2 + B_2)} \frac{v_2 v_2 s A_2}{v_2 v_2 s A_2}$$

$$+ \frac{-2 C - 2 \xi_2 - 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2}}{A_2 u_2 + B_2} \frac{A_2 B_1 v_2 s}{A_2 B_1 v_2 s}$$

$$+ \frac{2 C + 2 \xi_2 + 2 \frac{\xi_1 C}{A_2 u_2 + B_2}}{A_2 u_2 + B_2} \frac{A_1 B_2 v_2 s}{A_1 B_2 v_2 s} + (2 ($$

$$(-2 A_2 v_2 s + A_2 B_1 - A_1 B_2 + 2 v_2 A_2) C \ln\left(\frac{\xi_1}{A_2 u_2 + B_2}\right)$$

$$- v_2 + v_2 s$$

$$+ \frac{(-v2s A1 + 2 A2 v2s) C}{-v2 + v2s} C + 2 \frac{1}{C} ($$

$$\frac{(-2 A2 v2s + A2 B1 - A1 B2 + 2 v2 A2) C \ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right)}{-v2 + v2s}$$

$$+ \frac{(-v2s A1 + 2 A2 v2s) C}{-v2 + v2s} / (A2 u2 + B2) v2s^2 v2$$

$$+ \sqrt[2]{\frac{2 C^2 + 2 \frac{1}{C} + 2 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2}}{A2 v2s^3}}$$

$$+ \sqrt[2]{\frac{A1 u2 + B1}{A1 u1 + B1}} C + 3 C \sqrt[2]{\frac{v2s A1}{(C v2s)^3}}$$

$$\%1 := A1 u2 - A2 u2 - B2 + B1$$

$$\%2 := \ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2$$

$$\%3 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2}{A2 u2 + B2}$$

$$\%4 := \ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2$$

$$\Omega_3 = - (10) \frac{A1^3 (A1 u2 + B1) u1}{A1 u1 + B1} + 10 \frac{A1^2 (A1 u2 + B1) B1}{A1 u1 + B1} - \frac{A1^2 (A1 u2 + B1) u1 \frac{1}{C}}{C (A1 u1 + B1) v2s^3}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(A1 u2 + B1) A1 B1 \frac{1}{C} \frac{1}{C}}{C (A1 u1 + B1) v2s^3} + \frac{u2 A2 \frac{1}{C} \frac{1}{C}}{C (A2 u2 + B2)^4}$$

$$- \frac{1}{2} \frac{u2 A2 \frac{1}{C} \ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right)}{A2 u2 + B2}$$

$$+ \frac{5}{2} \frac{A1^2 (A1 u2 + B1) B1 \ln\left(\frac{A1 u2 + B1}{A1 u1 + B1}\right)}{A1 u1 + B1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{6} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{A_1 u_1 + B_1} \\
& + \frac{1}{6} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{6} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{A_1 u_1 + B_1} \\
& + \frac{5}{2} \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{5}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{A_1 u_1 + B_1} \\
& + 10 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + 10 \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{A_1 u_1 + B_1} \\
& + 10 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + 10 \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{A_1 u_1 + B_1} + \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1^2 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} - \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& - 6 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + 6 \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} - \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1^2 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right)}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} + \frac{1}{2} \\
& - 4 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) u_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right)}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} + \frac{B_2 \ln 4}{C} \\
& - 6 A_2 B_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) - \frac{1}{6} B_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) \\
& - \frac{1}{6} u_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) - 6 A_2 u_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) \\
& - \frac{3}{2} B_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) - \frac{3}{2} u_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) \\
& - 4 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) B_1 \ln\left(\frac{A_1 u_2 + B_1}{A_1 u_1 + B_1}\right)}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} + \frac{3}{2} \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) B_1 \ln 5}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& + \frac{3}{2} \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) u_1 \ln 5}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} - \frac{1}{6} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 B_1 \ln 5}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} \\
& - \frac{1}{6} \frac{(A_1 u_2 + B_1) A_1 u_1 \ln 5}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} - 6 \frac{A_1 (A_1 u_2 + B_1) u_1 \ln 5}{C (A_1 u_1 + B_1) v_2 s} + \frac{u_2 A_2 \ln 4}{C} \\
& + 2 \frac{A_2 u_2 \ln 2}{C} + 2 \frac{A_2 B_2 \ln 2}{C} + 2 \frac{A_2 B_2 \ln 1 \ln 2}{C (A_2 u_2 + B_2)} \\
& + 4 \frac{B_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right)}{A_2 u_2 + B_2} - \frac{B_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right)}{C (A_2 u_2 + B_2)} \\
& + 4 \frac{u_2 A_2 \ln\left(\frac{A_2 u_2 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right)}{A_2 u_2 + B_2} - \frac{1}{2} \frac{u_2 A_2 \ln 2}{C (A_2 u_2 + B_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u^2 A^2 \int_1^2 \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) \int_2}{C (A^2 u^2 + B^2)} + \frac{B^2 A^2 \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) \int_2}{C} \\
& + \frac{u^2 A^2 \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) \int_2}{C} + 2 \frac{A^2 u^2 \int_1 \int_2}{C (A^2 u^2 + B^2)} + \frac{B^2 \int_1 \int_4}{C (A^2 u^2 + B^2)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{B^2 \int_1 \int_2}{C (A^2 u^2 + B^2)} - \frac{1}{2} \frac{B^2 A^2 \int_1 \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) \int_2}{A^2 u^2 + B^2} - 10 \frac{A^2 u^2 \int_1}{A^2 u^2 + B^2} \\
& - 10 \frac{A^2 B^2 \int_1}{A^2 u^2 + B^2} - 10 A^2 u^2 - 10 A^2 B^2
\end{aligned}$$

$$\frac{\int_1 \int_2 (A^2 u^2 + B^2) A^2 u^2}{C (A^2 u^2 + B^2)} = \frac{\int_1 \int_2 (A^2 u^2 + B^2) B^2}{C (A^2 u^2 + B^2)}$$

$$\int_1 := A^2 u^2 - A^2 u^2 - B^2 + B^2$$

$$\int_2 := \frac{(-2 A^2 v^2 s + A^2 B^2 - A^2 B^2 + 2 v^2 A^2) C \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right)}{-v^2 + v^2 s}$$

$$+ \frac{(-v^2 s A^2 + 2 A^2 v^2 s) C}{-v^2 + v^2 s}$$

$$\int_3 := 2 v^2 - 4 v^2 s v^2 + 2 v^2 s^2$$

$$\begin{aligned}
\int_4 := & C (6 A^2 A^2 B^2 v^2 s - 12 A^2 v^2 s v^2 - 6 A^2 v^2 s B^2 + 18 A^2 v^2 s^2 \\
& - 4 A^2 v^2 s A^2 - A^2 v^2 s^2) / \int_3 + C (-3 B^2 A^2 B^2 + 3 A^2 v^2 s B^2 \\
& - 4 A^2 A^2 B^2 v^2 s - 3 A^2 B^2 v^2 - 6 v^2 A^2 + 12 A^2 v^2 s v^2 + 4 A^2 v^2 s B^2 \\
& - 6 A^2 v^2 s + 3 A^2 B^2 A^2) \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) / (v^2 - 2 v^2 s v^2 + v^2 s^2) \\
& + C (B^2 A^2 B^2 - A^2 v^2 s B^2 - 2 A^2 A^2 B^2 B^2 + A^2 A^2 B^2 v^2 s + A^2 B^2 v^2 \\
& + A^2 B^2 - A^2 v^2 s B^2 + A^2 B^2 - A^2 B^2 A^2) \ln\left(-\frac{\int_1}{A^2 u^2 + B^2}\right) / \int_3
\end{aligned}$$

$$\%5 := \frac{\sqrt{\ln\left(\frac{A1 u2 + B1}{A1 u1 + B1}\right) C + C} \sqrt{v2s} + \sqrt{\ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C - C - \frac{\%1 C}{A2 u2 + B2}} \sqrt{v2}$$

$$\%6 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2}{A2 u2 + B2}$$

$$\%7 := \frac{2 C^2 + 2 \%6 + 2 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2}}{A2 u2 + B2}$$

$$\%8 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2}{A2 u2 + B2}$$

$$\%9 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) C^2}{A2 u2 + B2}$$

$$\%10 := -2 \%6 - 2 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2} = 2 \%8 - \frac{\%1 C^2}{(A2 u2 + B2)^2} = \%9 - C^2$$

$$\%11 := 2 \%6 + 2 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2} + 2 \%8 + \frac{\%1 C^2}{(A2 u2 + B2)^2} + \%9 + C^2$$

$$\%12 := \%10 A2 B1 v2s v2 + \%11 A1 B2 v2s + \%11 B2 A2 v2s + \%10 A2 B1 v2s B2$$

$$+ \frac{\sqrt{-4 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2} - 5 C^2 + 4 \%8 - 2 \%6 + \frac{\%1 C^2}{(A2 u2 + B2)^2}} \sqrt{v2} \sqrt{v2s} A2}{(A2 u2 + B2) /}$$

$$+ \frac{\sqrt{-2 C^2 - 2 \%6 - 2 \frac{\%1 C^2}{A2 u2 + B2}} \sqrt{A2 B1 v2s} + \%7 A1 B2 v2s}{A2 u2 + B2 /}$$

$$+ \frac{\sqrt{2 \%2 C + 2 \frac{\%1 C \%2}{A2 u2 + B2}} \sqrt{v2s} \sqrt{v2} + \%7 A2 v2s^3}{A2 u2 + B2 /}$$

$$+ \frac{\sqrt{2 \ln\left(\frac{A1 u2 + B1}{A1 u1 + B1}\right) C + 3 C} \sqrt{v2s} A1}{A1 u1 + B1 /}$$

$$l_1 = - \ln\left(- \frac{A_1 u^2 - A_2 u^2 - B_2 + B_1}{A_2 u^2 + B_2}\right) C$$

$$l_2 = \frac{(- \sqrt{2s} A_1 - 2 (\%1 - 1) A_2 \sqrt{2s} - \%1 A_1 B_2 + 2 \%1 \sqrt{2} A_2 + A_2 \%1 B_1) C}{- \sqrt{2} + \sqrt{2s}}$$

$$\%1 := \ln\left(- \frac{A_1 u^2 - A_2 u^2 - B_2 + B_1}{A_2 u^2 + B_2}\right)$$

$$l_3 = (- \sqrt{2s} A_1^3 - A_2 B_1 \sqrt{2s} A_1^2 - 3 A_2 \sqrt{2s} A_1 + \sqrt{2s} A_1^2 B_2 + 12 \%1 \sqrt{2} A_2^3 - 2 (- 11 + 6 \%1) A_2^2 \sqrt{2s} - \%1 A_1^2 B_2^3 + 2 (3 - 7 \%1 + \%1^2) \sqrt{2s} A_2^2 B_1 \sqrt{2} + 6 (6 \%1 - 5) \sqrt{2} \sqrt{2s} A_2^2 - 12 (3 \%1 - 1) \sqrt{2} \sqrt{2s} A_2^2 - (6 - 14 \%1 + 3 \%1^2) A_2 \sqrt{2s} A_1 B_2^2 - (\%1^2 - 8 \%1 + 10) \sqrt{2s} A_2^2 B_1 + \%1 (\%1 - 6) A_2 \sqrt{2s} B_2 \sqrt{2} + \%1 (\%1 - 6) A_2^2 \sqrt{2s} B_2^2 + \%1 (\%1 - 6) A_1 B_2^3 + (\%1^2 - 8 \%1 + 10) A_1 A_2 \sqrt{2s} B_2^2 + \%1 A_1^2 B_2^2 \sqrt{2s} - 2 (3 - 7 \%1 + \%1^2) A_2^2 \sqrt{2s} B_2^2 - \%1 (\%1 - 6) A_2^2 B_1 \sqrt{2} + 2 (3 - 7 \%1 + 2 \%1^2) B_2 A_2 \sqrt{2s} B_1 - \%1 (\%1 - 6) A_2^2 B_1 B_2^2 - \%1 (\%1 - 6) B_2 \sqrt{2} A_2^2 B_1 + 3 \%1 A_1 B_2^2 A_2 B_1 - \%1 \sqrt{2} A_2^2 B_1 + A_2 \sqrt{2s} \%1^2 B_1 - 2 B_2 A_2^2 \%1 B_1 - 2 B_1 A_2 \sqrt{2s} \%1 A_1 B_2) C$$

$$/$$

$$/ (- 2 \sqrt{2} + 6 \sqrt{2} \sqrt{2s} - 6 \sqrt{2} \sqrt{2s} + 2 \sqrt{2s}^3)$$

$$/$$

$$\%1 := \ln\left(- \frac{A_1 u^2 - A_2 u^2 - B_2 + B_1}{A_2 u^2 + B_2}\right)$$

$$l_4 = (2 A_1 A_2^3 + A_2^4 \ln\left(- \frac{\%1}{A_2 u^2 + B_2}\right) + 2 A_2^4 \ln\left(- \frac{\%1}{A_2 u^2 + B_2}\right) + 1/6 A_2^4 \ln\left(- \frac{\%1}{A_2 u^2 + B_2}\right) + 4 \frac{A_2^4 B_1}{A_2 u^2 + B_2} - 2 \frac{A_1 A_2^3 \%1}{A_2 u^2 + B_2} - 4 \frac{A_2^3 A_1 B}{A_2 u^2 + B_2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{A_2^2 u^2 + B_2^2}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} - \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2 u^2 + B_2^2}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} + \frac{2}{A_2 u^2 + B_2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} + \frac{A_2^2 A_1 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{-v^2 + v_2 s} \\
& - \frac{A_2^3 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{-v^2 + v_2 s} + \frac{A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2) u^2} \\
& - \frac{A_1 A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} - \frac{1}{6} \frac{A_2^4 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} \\
& - 2 \frac{A_2^4 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} + \frac{A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} \\
& - \frac{1}{6} \frac{A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} - \frac{A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} - \frac{1}{2} \frac{A_1 A_2^3 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} \\
& - \frac{1}{6} A_2^3 A_1 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right) - \frac{A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{-v^2 + v_2 s} + \frac{A_2 A_1 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{u^2} \\
& + \frac{A_2^4 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{A_2 u^2 + B_2} + \frac{A_2^3 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} u^2 \\
& - \frac{1}{2} \frac{A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2)(-v^2 + v_2 s)} + \frac{A_1 A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{2(A_2 u^2 + B_2) u^2} + \frac{A_2^2 u^2 \ln\left(-\frac{u^2}{A_2 u^2 + B_2}\right)}{(A_2 u^2 + B_2) u^2} \\
& (A_2 u^2 + B_2) C / (A_2 u^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\%1 &:= A1 u2 - A2 u2 - B2 + B1 \\
\%2 &:= -2 v2^3 + 6 v2^2 v2s - 6 v2 v2s^2 + 2 v2s^3 \\
\%3 &:= \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) - 6 \\
\%4 &:= \ln\left(-\frac{\%1^2}{A2 u2 + B2}\right) \\
\%5 &:= 3 - 7 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) + \%4 \\
\%6 &:= \%4 - 8 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) + 10 \\
\%7 &:= -v2s^3 A1^2 - A2 B1 v2s^2 A1 - 3 A2 v2s^3 A1 + v2s^2 A1^2 B2 \\
&+ 12 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) v2^3 A2^2 - 2 \sqrt{-11 + 6 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right)} A2^2 v2s^3 \\
&- \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) A1^2 B2 + 2 \%5 v2s^2 A2^2 B1 v2 \\
&+ 6 \sqrt{6 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) - 5} v2^2 v2s^2 A2^2 \\
&- 12 \sqrt{3 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) - 1} v2^2 v2s^2 A2^2 \\
&- \sqrt{6 - 14 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) + 3 \%4} A2^2 v2s^2 A1 B2 - \%6 v2s^2 A2^2 B1 \\
&+ \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 A2^2 v2s^2 B2 v2 + \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 A2^2 v2s^2 B2 \\
&+ \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 A1 B2 A2^3 + \%6 A1 A2 v2s^2 B2 \\
&+ \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) A1^2 B2^2 v2s^2 - 2 \%5 A2^2 v2s^2 B2 \\
&- \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 A2^2 B1 v2 \\
&+ 2 \sqrt{3 - 7 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) + 2 \%4} B2 A2^2 v2s^2 B1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 A2^2 B1 B2^2 - \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) \%3 B2 v2 A2^2 B1^2 \\
& + 3 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) A1 B2^2 A2 B1^2 - \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) v2 A2^2 B1^2 \\
& + A2^2 v2s \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) B1^2 - 2 B2 A2^2 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) B1^2
\end{aligned}$$

$$- 2 B1 A2 v2s \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) A1 B2^2$$

$$\begin{aligned}
\%8 := & - v2s A1 - 2 \sqrt{\ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right)} - 1 \sqrt{A2 v2s - \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) A1 B2} \\
& + 2 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) v2 A2 + A2 \ln\left(-\frac{\%1}{A2 u2 + B2}\right) B1
\end{aligned}$$

$$m_0 = \frac{\ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) C}{A2}$$

$$\begin{aligned}
m_1 = & \left(\sqrt{-\ln\left(\frac{-A2 u1 + A1 u1 + B1 - B2}{A1 u1 + B1}\right)} - 1 + \frac{-A2 u1 + A1 u1 + B1 - B2}{A1 u1 + B1} \right) v1 \\
& + \sqrt{\ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) + 1} \sqrt{v1s} C/v1s
\end{aligned}$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\left(2 \%3 + \%4 + 6 C^2 + 4 \%2 - 6 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1} \right) A2 B1 v1s v1}$$

$$+ \sqrt{\left(2 \%3 + \%4 + 6 C^2 + 4 \%2 - 6 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1} \right) A2 B1 v1 B2}$$

$$+ \sqrt{\left(-2 \%3 - \%4 - 6 C^2 - 4 \%2 + 6 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1} \right) A1 B2^2 v1}$$

$$+ \sqrt{\left(-2 \%3 - \%4 - 6 C^2 - 4 \%2 + 6 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1} \right) A2 B2^2 v1}$$

$$+ \sqrt{\left(-5 C^2 + \frac{\%1 C^2}{(A1 u1 + B1)^2} + 4 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1} - 2 \%2 - 4 \%3 \right) v1s v1 A2^2}$$

$$+ \frac{\sqrt{-2} \sqrt{A1 u1 + B1} \sqrt{C} + 2 \sqrt{2} \sqrt{C} \sqrt{v1s} \sqrt{v1} A2}{\sqrt{A1 u1 + B1}}$$

$$+ \frac{\sqrt{3} C \sqrt{A2 u1 + B2} + 2 \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) C \sqrt{v1s} A2}{\sqrt{A2 u2 + B2}}$$

$$- 2 \frac{\sqrt{C} \sqrt{-v1 + v1s} \sqrt{C} \left((2 A1 - A2) v1 - A1 v1s \right) \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right)}{\sqrt{-v1 + v1s}}$$

$$+ 2 \frac{\sqrt{C} \sqrt{-v1 + v1s} \sqrt{C} \left((2 A1 - A2) v1 - A1 v1s \right) \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right)}{\sqrt{-v1 + v1s}}$$

$$\sqrt{v1 v1s} \sqrt{C} \sqrt{v1s}$$

$$\%1 := - A2 u1 + A1 u1 + B1 - B2$$

$$\%2 := \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) C$$

$$\%3 := \frac{\sqrt{A1 u1 + B1} \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) C}{A1 u1 + B1}$$

$$\%4 := \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) C$$

$$m3 = - \left(-10 A1^3 u1 - 10 A1^2 B1 + 10 \frac{A1 B1 \sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1} + 10 \frac{A1 u1 \sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1} \right)$$

$$+ 10 \frac{A2 (A2 u1 + B2) u2}{A2 u2 + B2} + 10 \frac{A2 (A2 u1 + B2) B2}{A2 u2 + B2}$$

$$- 3/2 u1 A1^3 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) - 3/2 B1 A1^2 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right)$$

$$- 1/6 B1 A1^2 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) - 1/6 u1 A1^3 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right)$$

$$- 6 A1^2 B1 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) - 6 A1^3 u1 \ln\left(\frac{\sqrt{A1 u1 + B1}}{A1 u1 + B1}\right) + \frac{B1 \sqrt{A1 u1 + B1}}{C}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 u2 \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) \text{\%8}}{C (A2 u2 + B2) v1s} - \frac{1}{2} \frac{u1 A1 \text{\%1} \text{\%11}}{C (A1 u1 + B1)} \\
& - 2 \frac{A1 B1 \text{\%1} \text{\%2}}{C (A1 u1 + B1)} - 2 \frac{A1^2 u1 \text{\%1} \text{\%2}}{C (A1 u1 + B1)} + \frac{B1 A1 \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right) \text{\%2}}{C} \\
& + \frac{u1 A1 \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right) \text{\%2}}{C} + \frac{u1 A1 \text{\%1} \text{\%2} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{C (A1 u1 + B1)} \\
& - 4 \frac{u1 A1 \text{\%1} \text{\%1} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{A1 u1 + B1} + \frac{1}{2} \frac{u1 A1 \text{\%1} \text{\%2}}{C (A1 u1 + B1)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{u1 A1 \text{\%1} \text{\%1} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{A1 u1 + B1} - \frac{B1 \text{\%1} \text{\%11}}{C (A1 u1 + B1)} \\
& - 4 \frac{B1 A1 \text{\%1} \text{\%1} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{A1 u1 + B1} + \frac{1}{2} \frac{B1 \text{\%1} \text{\%2}}{C (A1 u1 + B1)} \\
& + \frac{B1 A1 \text{\%1} \text{\%2} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{C (A1 u1 + B1)} + \frac{1}{2} \frac{B1 A1 \text{\%1} \text{\%1} \ln\left(\frac{\text{\%1}}{A1 u1 + B1}\right)}{A1 u1 + B1} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 u2 \text{\%9} \text{\%8}}{C (A2 u2 + B2) v1s} + \frac{u1 A1 \text{\%11}}{C} + 2 \frac{A1^2 u1 \text{\%2}}{C} + 2 \frac{A1 B1 \text{\%2}}{C} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 u2 \text{\%9} \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(A2 u1 + B2) A2 B2 \text{\%9} \text{\%8}}{C (A2 u2 + B2) v1s} - \frac{(A2 u1 + B2) A2 B2 \text{\%8}}{C (A2 u2 + B2) v1s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2^2 \ln^3 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} - 1/6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^3 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& - 6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} - 1/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& - 1/6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^3 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} - 4 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& - 1/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} + 3/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& - 4 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} + 3/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& - 1/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& + 1/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} + \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{C (A2 u2 + B2) v1s} \\
& + 10 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{A2 u2 + B2} \\
& + 5/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{A2 u2 + B2} \\
& + 5/2 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln^2 \left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2} \right)}{A2 u2 + B2}
\end{aligned}$$

$$+ 10 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) + 10 \frac{A2^2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}}{A2 u2 + B2}$$

$$+ 1/6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^3 u2 \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) + 1/6 \frac{A2^3 u1 + B2^3}{A2 u2 + B2}}{A2 u2 + B2}$$

$$+ 1/6 \frac{(A2 u1 + B2) A2^2 B2 \ln\left(\frac{A2 u1 + B2}{A2 u2 + B2}\right) + 1/6 \frac{A2^2 u1 + B2^3}{A2 u2 + B2}}{A2 u2 + B2}$$

$$\frac{\frac{(A2 u1 + B2) A2 u2}{C (A2 u2 + B2)} - \frac{(A2 u1 + B2) B2}{C (A2 u2 + B2)}}{\frac{(A2 u1 + B2) A2 u2}{C (A2 u2 + B2)} - \frac{(A2 u1 + B2) B2}{C (A2 u2 + B2)}}$$

$$\%1 := - A2 u1 + A1 u1 + B1 - B2$$

$$\%2 := \frac{C (-v1s A2 + 2 A1 v1s) \ln\left(\frac{\%1}{A1 u1 + B1}\right) + \frac{C ((2 A1 - A2) v1 - A1 v1s) \ln\left(\frac{\%1}{A1 u1 + B1}\right)}{-v1 + v1s}}{-v1 + v1s}$$

$$\%3 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A1 u1 + B1}\right) C}{A1 u1 + B1}$$

$$\%4 := \frac{\%1 \ln\left(\frac{\%1}{A1 u1 + B1}\right) C}{A1 u1 + B1}$$

$$\%5 := \frac{\ln\left(\frac{\%1}{A1 u1 + B1}\right)^2 C}{A1 u1 + B1}$$

$$\%6 := - 2 \%4 - \%5 - 6 C^2 - 4 \%3 + 6 \frac{\%1 C^2}{A1 u1 + B1}$$

$$\%7 := 2 \%4 + \%5 + 6 C^2 + 4 \%3 - 6 \frac{\%1 C}{A1 u1 + B1}$$

$$\%8 := \%7 A2 B1 v1s v1 + \%7 A2 B1 v1 B2 + \%6 A1 B2^2 v1 + \%6 A2 B2 v1^2$$

$$\frac{\frac{2}{5} C^2 + \frac{\%1 C^2}{(A1 u1 + B1)^2} + 4 \frac{\%1 C}{A1 u1 + B1}}{\frac{2}{5} C^2 + \frac{\%1 C^2}{(A1 u1 + B1)^2} + 4 \frac{\%1 C}{A1 u1 + B1}} = 2 \%3 - 4 \%4 \frac{v1s v1}{A2}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}} + 2 \sqrt{3} + 2 C \sqrt{v_1 s} \sqrt{v_1 A_2}$$

$$\frac{\sqrt{3 C^2 + 2 \ln\left(\frac{A_2 u_1 + B_2}{A_2 u_2 + B_2}\right) C}}{\sqrt{A_2 u_2 + B_2}} \sqrt{v_1 s} \sqrt{A_2} + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}} + 2 \sqrt{2} C \sqrt{v_1 v_1}$$

$$\%9 := \frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}} C - C + \frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}} \sqrt{v_1} + \frac{\sqrt{A_2 u_1 + B_2}}{\sqrt{A_2 u_2 + B_2}} C + C \sqrt{v_1 s}$$

$$\%10 := 2 v_1^2 - 4 v_1 s v_1 + 2 v_1 s^2$$

$$\%11 := C^2 (-A_2^2 v_1 s^2 - 4 v_1 s A_2 A_1 + 18 A_1^2 v_1 s^2 - 12 v_1 A_1 v_1 s^2$$

$$+ 6 A_1 v_1 s A_2 B_1 - 6 A_1^2 v_1 s B_2) / \%10 + C^2 (12 v_1 A_1 v_1 s^2 - 6 A_1^2 v_1 s^2$$

$$- 6 v_1 A_1^2 - 4 A_1 v_1 s A_2 B_1 + 3 A_1^2 B_1 v_1 s + 3 B_1^2 A_2 A_1 + 4 A_1^2 v_1 s B_2$$

$$- 3 B_2 A_1 v_1 - 3 B_1 A_1 B_2) \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}}\right) / (v_1^2 - 2 v_1 s v_1 + v_1 s^2)$$

$$C (A_1 v_1 s A_2 B_1 - A_1^2 B_1 v_1 s + A_2^2 B_1^2 - B_1^2 A_2 A_1 - A_1^2 v_1 s B_2 + B_2 A_1^2$$

$$- 2 A_2 B_1 A_1 B_2 + B_1 A_1^2 B_2 + A_1^2 B_2^2) \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2} C^2}}{\sqrt{A_1 u_1 + B_1}}\right) / \%10$$