



Modélisation et étude numérique du plissement des tôles dans les processus d'emboutissage profond

João Pedro de Magalhães Correia

► To cite this version:

João Pedro de Magalhães Correia. Modélisation et étude numérique du plissement des tôles dans les processus d'emboutissage profond. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 2001. Français. NNT : 2001METZ025S . tel-01748963

HAL Id: tel-01748963

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748963>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ
Par

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2001074S
Cote	S/MZ 01/25
Loc	Magasin

João Pedro DE MAGALHÃES CORREIA

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ**SPECIALITE :** *Sciences de l'ingénieur***OPTION :** *Mécanique des Matériaux*

Modélisation et étude numérique du plissement des tôles dans les processus d'emboutissage profond

Soutenue le 14 décembre 2001 à 14h15 à la SALLE DES ASSEMBLEES
devant le jury composé de :

J.L. BATOZ	Professeur à l'InSIC	Rapporteur
M. BRUNET	Professeur à l'INSA de Lyon	Rapporteur
G. FERRON	Professeur à l'Université de Metz	Directeur de thèse
M. GUEURY	Professeur à l'ESSTIN	Examineur
X. LEMOINE	Ingénieur de recherches chez USINOR/SOLLAC	Examineur
M. POTIER-FERRY	Professeur à l'Université de Metz	Examineur

*Je dédie ce travail à mon père
décédé le 8 septembre 1999*

Remerciements

Le travail exposé dans ce mémoire a été réalisé au sein du *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux* de l'Université Metz.

Mes remerciements s'adressent tout particulièrement à Monsieur le Professeur Gérard FERRON, directeur de thèse, pour l'expérience et les conseils dont il m'a fait profiter.

Je tiens également à remercier Messieurs les membres du jury (Messieurs les Professeurs BATOZ, BRUNET, GUEURY, POTIER-FERRY et Monsieur LEMOINE) qui ont accepté d'examiner ce travail.

Par ces mots, j'exprime toute ma gratitude à mes parents et, plus particulièrement, à Mademoiselle Josiane CREMEL pour son soutien sans faille.

Table des matières générale

TABLE DES MATIÈRES GÉNÉRALE	1
INTRODUCTION GÉNÉRALE	5
CHAPITRE 1: ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	7
1 INTRODUCTION	9
2 MISE EN ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DU PLISSEMENT	9
2.1 Essai Yoshida	9
2.2 Essai d'emboutissage tronconique	11
2.3 Essais d'emboutissage sans serre-flan	13
3 ETUDES ANALYTIQUES DU PLISSEMENT	15
3.1 Formulation basée sur l'équilibre	15
3.2 Formulations variationnelles	17
3.2.1 Critère de bifurcation et d'unicité de Hill	17
3.2.2 Critère de bifurcation de Hutchinson	19
3.2.3 Application au plissement des tôles	20
3.2.4 Définition de courbes limites de plissement	22
3.2.5 Prise en compte des conditions aux limites	24
3.3 Formulation énergétique de Cao et Wang (1997) ^a	26
4 ETUDES NUMÉRIQUES DU PLISSEMENT	27
4.1 Introduction de défauts dans le maillage du flan	28
4.2 Utilisation d'un critère de plissement dans les codes de calcul par éléments finis	29
4.2.1 Critère de plissement de Nordlund et Haggblad (1997)	29
4.2.2 Critère de plissement de Wang et Cao (2000)	30
4.2.3 Utilisation de la fonctionnelle et du critère de bifurcation de Hill	33
4.2.4 Utilisation de la méthode incrémentale de Riks (1979)	34
4.3 Visualisation directe du plissement	39
5 CONCLUSION	42

CHAPITRE 2: ETUDE DU PLISSEMENT D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE	43
1. INTRODUCTION	45
2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME	45
3. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES CRITIQUES DE PLISSEMENT	47
3.1. Détermination des équations de plissement	47
3.2. Plissement dans une seule direction	48
4. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE	49
4.1. Equations de base	49
4.2. Détermination du module tangent	50
4.2.1. Théorie de l'écoulement	50
4.2.2. Théorie de la déformation	51
4.2.3. Cas d'un état de contraintes planes	52
4.3. Présentation du modèle de plasticité	53
5. ANALYSE DES RÉSULTATS	56
5.1. Caractéristiques d'anisotropie des matériaux étudiés	56
5.1.1. Matériaux isotropes	56
5.1.2. Matériaux à anisotropie normale	57
5.1.3. Matériaux à anisotropie transverse	58
5.2. Cas de la compression uniaxiale	59
5.2.1. Matériaux isotropes	60
5.2.2. Matériaux à anisotropie normale	63
5.2.3. Matériaux à anisotropie transverse	65
5.2.4. Bilan des résultats	68
5.3. Cas général $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$	68
5.3.1. Matériaux isotropes	70
5.3.2. Matériaux à anisotropie normale	71
5.3.3. Matériaux à anisotropie transverse	73
6. CONCLUSION	74
CHAPITRE 3: ETUDE DU PLISSEMENT D'UNE COQUE DOUBLEMENT COURBÉE ORTHOTROPE	75
1. INTRODUCTION	77

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME	77
3. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES CRITIQUES DE PLISSEMENT	79
3.1. Détermination des équations de plissement	79
3.2. Conditions d'apparition du plissement	82
4. ANALYSE DES RÉSULTATS	83
4.1. Définition des matériaux et des géométries étudiés	83
4.2. Influence de la géométrie et du chargement (cas des matériaux isotropes)	85
4.2.1. Cas $R_1 = 10$ mm et $R_2 = 100$ mm	86
4.2.2. Cas $R_1 = 110$ mm et $R_2 = 213$ mm	89
4.2.3. Cas $R_1 = -10$ mm et $R_2 = 290$ mm	93
4.2.4. Bilan des résultats	96
4.3. Influence de l'anisotropie normale	96
4.4. Influence de l'anisotropie transverse	99
5. CONCLUSION	101
 CHAPITRE 4: ETUDE NUMÉRIQUE DE L'APPARITION DU PLISSEMENT ET COMPARAISON AVEC LES PRÉVISIONS ANALYTIQUES	 103
 1 INTRODUCTION	 105
2 ANALYSE DU PLISSEMENT DANS L'ESSAI DE COUPELLE TRONCONIQUE	105
2.1 Modélisation par éléments finis	105
2.2 Influence du maillage et du code de calcul	107
2.3 Influence de l'anisotropie	110
2.3.1 Matériaux isotropes	110
2.3.2 Matériaux à anisotropie normale	111
2.3.3 Matériaux à anisotropie transverse	116
2.4 Comparaisons avec les résultats analytiques	119
2.4.1 Matériaux isotropes	119
2.4.2 Matériaux à anisotropie normale	124
2.4.3 Matériaux à anisotropie transverse	128
2.5 Comparaisons avec les résultats expérimentaux de Ellagoune et Boivin (1988)	133
 3 ANALYSE DU PLISSEMENT DANS L'ESSAI D'EMBOUTISSAGE PROFOND SANS SERRE-FLAN	 134

3.1	Modélisation par éléments finis	134
3.2	Comparaison avec les résultats expérimentaux	138
4	CONCLUSION	146
	CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES	147
	RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	149

Introduction générale

La mise en forme des tôles métalliques comporte un certain nombre de procédés de fabrication employés dans l'industrie tels que : le pliage, l'emboutissage, etc. La technique de déformation de tôles la plus utilisée en grande série est l'emboutissage à froid. L'emboutissage à froid permet l'obtention de pièces, appelées emboutis, dont la forme est constituée de surfaces non développables, à partir de tôles planes prédécoupées, appelées flans. L'outillage employé lors d'un emboutissage est constitué, en général, d'un poinçon, d'une matrice et d'un serre-flan. Sous l'action du poinçon, la tôle métallique se déforme. La déformation de la tôle peut être contrôlée par l'action du serre-flan. Les emboutis ainsi obtenus ne doivent pas présenter de défauts tels que : un amincissement localisé, appelé striction, ou des ondulations, appelées plis.

La formation de plis, ou plissement, peut survenir sur la collerette, partie se situant entre le serre-flan et la matrice, ou/et sur le brin libre de l'embouti. Une compression circonférentielle, induite par l'avalement du flan, est observée dans ces deux zones. Sur la photographie de l'embouti, figure [0-1], sont présentées les zones où apparaît le plissement. Le plissement survient lorsque la contrainte compressive atteint un seuil critique. L'apparition du plissement est devenue un défaut fréquent en raison de la tendance vers une diminution de l'épaisseur des tôles métalliques, favorable à l'allègement des structures. Cette diminution d'épaisseur est obtenue par l'utilisation de tôles à haute limite élastique. Cette augmentation de la limite élastique, combinée à la diminution des épaisseurs de tôles, accentue le risque de plissement. Les plis augmentent le taux de rebuts des pièces embouties et peuvent, de plus, endommager les matrices. Pour toutes ces raisons, la prévision du plissement est devenue un enjeu majeur pour les industriels, emboutisseurs et fournisseurs de tôle.

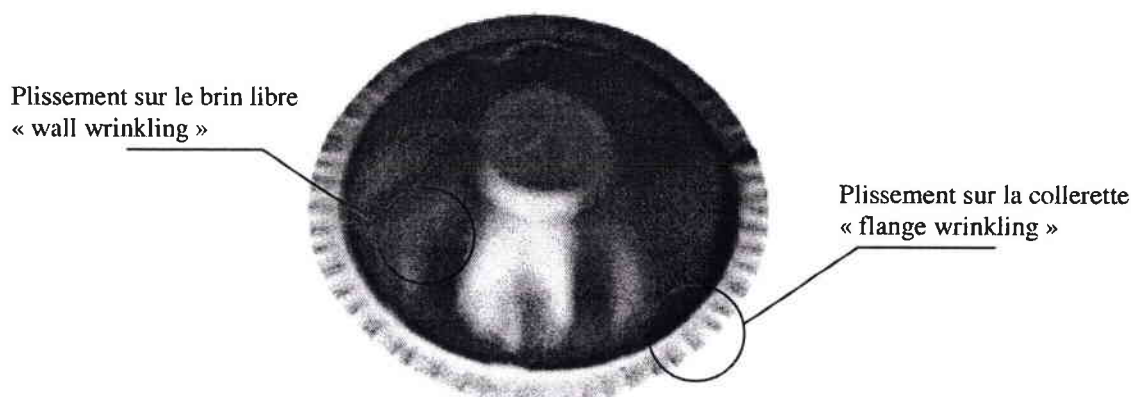


Figure [0-1] : embouti obtenu par Kawka et al (2001)

L'objet de cette étude est de **prévoir l'apparition et les caractéristiques du plissement en fonction des propriétés d'anisotropie plastique du matériau**. Deux méthodes de prévision du plissement ont été mises en œuvre. La première méthode s'appuie sur une analyse locale du plissement d'une coque orthotrope. La seconde méthode utilise les capacités des simulations par éléments finis à prévoir le plissement en emboutissage. Les résultats issus de ces deux méthodes seront comparés entre eux et par rapport aux résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Ce travail s'organise autour de quatre chapitres. Le premier chapitre, consacré à l'étude bibliographique, récapitule les différents moyens mis en œuvre pour étudier l'apparition et le

développement du plissement durant un procédé d'emboutissage. Nous présentons tout d'abord les essais réalisés pour étudier le phénomène du plissement. Ces essais peuvent être classés en deux catégories : l'essai Yoshida et les essais d'emboutissage profond. Parallèlement aux essais, des formulations analytiques ont été développées par différents auteurs à partir d'études portant sur le flambage plastique des coques doublement courbées. Ces travaux ont débouché sur le concept de courbe limite de plissement, comparable au concept de courbe limite de formage pour les problèmes de striction. Les différentes formulations analytiques disponibles dans la littérature sont résumées dans ce chapitre. Avec le développement de l'outil informatique, les simulations par éléments finis sont devenues un puissant outil pour comprendre et résoudre les problèmes liés à l'emboutissage. Ces dernières années, la littérature abonde en études numériques du plissement en emboutissage. Les modélisations employées pour visualiser le plissement durant une simulation par éléments finis d'un procédé d'emboutissage sont donc présentées.

Le deuxième chapitre présente une modélisation locale du plissement d'une plaque orthotrope. Nous déterminons des courbes limites de plissement à partir de l'expression de la contrainte critique de plissement. Des courbes limites de plissement sont tracées pour différents matériaux : isotropes, à anisotropie normale et à anisotropie transverse. Nous constatons qu'une forte valeur du coefficient d'anisotropie normale R tend à augmenter les contraintes critiques de plissement.

Nous développons, dans le troisième chapitre, une analyse de plissement locale appliquée à une coque orthotrope doublement courbée correspondant à des portions de tôles susceptibles d'être rencontrées sur un flan subissant un emboutissage profond. La géométrie de la coque est définie par les rayons de courbure principaux locaux des portions de tôles envisagées. Pour cette géométrie nous tracerons des courbes limites de plissement. Les courbes limites de plissement sont déterminées à partir de la fonctionnelle et du critère de bifurcation proposé par Hutchinson (1974) pour l'étude du flambage plastique des coques minces. Nous envisagerons à nouveau trois types de matériaux : matériaux isotropes, à anisotropie normale et à anisotropie transverse.

Il apparaît intéressant de comparer les capacités prédictives des courbes limites de plissement obtenues par une étude locale, aux prévisions d'une simulation par éléments finis. C'est l'objet du quatrième chapitre qui compare les prévisions obtenues à l'aide des courbes limites de plissement à celles provenant de simulations par éléments finis. Nous avons choisi de simuler l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique proposé par Ellagoune et Boivin (1988) avec un code de calcul commercial (ABAQUS/Explicit). Nous verrons que les résultats analytiques concordent avec les résultats numériques du point de vue de la détection de la bifurcation. Une brève étude comparative des résultats numériques et des résultats expérimentaux d'emboutissage profond sans serre-flan de Narayanasamy et Sowerby (1995) a également été menée. Cette étude met en évidence l'efficacité des éléments finis à prédire les phénomènes de plissement par des simulations de procédés d'emboutissage. Elle permet également d'analyser l'influence de l'anisotropie sur l'apparition du plissement.

Chapitre 1:

Etude bibliographique

Table des matières

1	INTRODUCTION	9
2	MISE EN ÉVIDENCE EXPÉRIMENTALE DU PLISSEMENT	9
2.1	Essai Yoshida	9
2.2	Essai d'emboutissage tronconique	11
2.3	Essais d'emboutissage sans serre-flan	13
3	ETUDES ANALYTIQUES DU PLISSEMENT	15
3.1	Formulation basée sur l'équilibre	15
3.2	Formulations variationnelles	17
3.2.1	Critère de bifurcation et d'unicité de Hill	17
3.2.2	Critère de bifurcation de Hutchinson	19
3.2.3	Application au plissement des tôles	20
3.2.4	Définition de courbes limites de plissement	22
3.2.5	Prise en compte des conditions aux limites	24
3.3	Formulation énergétique de Cao et Wang (1997) ^a	26
4	ETUDES NUMÉRIQUES DU PLISSEMENT	27
4.1	Introduction de défauts dans le maillage du flan	28
4.2	Utilisation d'un critère de plissement dans les code de calcul par éléments finis	29
4.2.1	Critère de plissement de Nordlund et Haggblad (1997)	29
4.2.2	Critère de plissement de Wang et Cao (2000)	30
4.2.3	Utilisation de la fonctionnelle et du critère de bifurcation de Hill	33
4.2.4	Utilisation de la méthode incrémentale de Riks (1979)	34
4.3	Visualisation directe du plissement	39
5	CONCLUSION	42

1 Introduction

Ce chapitre présente les trois axes de recherche mis en œuvre pour appréhender les phénomènes de plissement en emboutissage. Ces trois axes correspondent à des approches expérimentale, analytique et numérique.

Dans un premier temps, nous décrivons les différents essais mis en œuvre pour étudier l'apparition et l'évolution du plissement. Puis, nous présentons les différents critères analytiques développés pour détecter l'apparition des plis, ainsi que les résultats de ces modélisations, généralement présentés sous la forme de courbes limites de plissement. Enfin, des opérations d'emboutissage complexes ont été simulées à l'aide de code de calcul par éléments finis. Ceci nous conduit à présenter les différentes méthodes développées pour visualiser le plissement au cours d'une simulation par éléments finis d'un procédé d'emboutissage.

Ce chapitre nous permettra de faire un bilan des différents outils actuellement disponible pour étudier l'apparition du plissement durant un emboutissage.

2 Mise en évidence expérimentale du plissement

Deux principaux essais permettent de caractériser le comportement d'un matériau au plissement : l'essai Yoshida et l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique.

L'essai Yoshida consiste à étirer une plaque carrée suivant l'une de ses diagonales. Une déflexion hors plan se produit alors dans une zone située au centre de la plaque. Cette déflexion est semblable à un pli.

L'essai d'emboutissage de coupelle tronconique s'apparente à l'essai d'emboutissage de coupelle cylindrique, ou essai Swift. Cependant, le poinçon utilisé pour l'essai de coupelle tronconique possède un rayon plus petit que le rayon d'ouverture de la matrice. Par conséquent, la paroi de l'embouti formé est conique, et n'entre pas en contact avec le poinçon. Sous certaines conditions, le plissement se forme sur cette paroi.

Enfin, des essais d'emboutissage profond, sans serre-flan, ayant pour but de former des godets cylindriques, donnent également lieu à la formation de plis.

Nous présentons successivement ces différents essais.

2.1 Essai Yoshida

L'essai Yoshida a été développé spécialement pour étudier l'apparition et le développement du plissement. Cet essai, présenté sur la figure [I-1], consiste à étirer lentement une plaque carrée le long de l'une de ses diagonales. La traction unidirectionnelle provoque, dans la partie centrale de la plaque, l'apparition de contraintes compressives, non-uniformes. Ces contraintes se développent perpendiculairement à la direction de traction et peuvent provoquer l'apparition d'un pli.

L'essai Yoshida est normalisé. L'éprouvette utilisée lors de l'essai est une plaque carrée de 100 mm de côté. Cette plaque est soumise à une traction le long de sa diagonale verticale à l'aide de mors fixés symétriquement de part et d'autre de la diagonale horizontale de la plaque, notée AA sur la figure [I-1]. Ces mors ont une largeur de 40 mm et sont distants de 100 mm. L'allongement se mesure sur un segment de longueur initiale 75 mm, noté GL sur la figure [I-1]. La mesure de la hauteur du pli, h_2 , s'effectue au milieu d'un segment de longueur 25 mm, porté par la diagonale horizontale. La hauteur de pli h_2 n'est pas mesurée au début du plissement, mais pour un allongement de 2%, car Szacinski et Thomson (1984) montrent qu'il est plus facile de caractériser distinctement le comportement des matériaux au plissement pour un allongement de 2%.

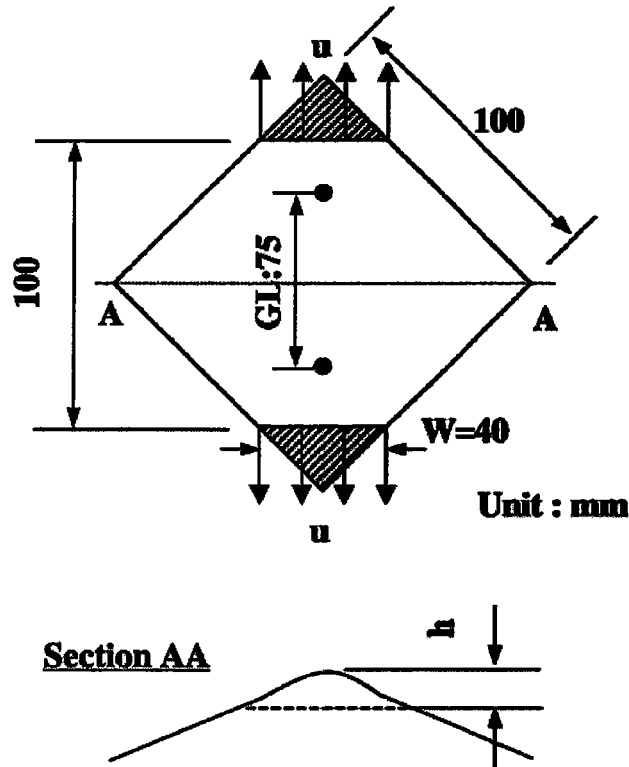


figure [I-1]: schéma représentant l'essai Yoshida

Cet essai a été réalisé sur de nombreux matériaux ferreux et non ferreux, à différentes températures. Différents auteurs ont donc cherché des relations entre la hauteur du pli et les propriétés des matériaux. Szacinski et Thomson (1984) montrent que l'essai Yoshida n'est pas approprié pour les alliages d'aluminium, parce que les éprouvettes atteignent la limite de rupture avant l'apparition de plis. Ceci les a amenés à la conception d'autres essais pour ces matériaux (Szacinski et Thomson (1991)). Ces auteurs ont également étudié l'influence du retour élastique sur le plissement.

Certains chercheurs ont comparé résultats expérimentaux et résultats numériques. C'est le cas de Tomita et Shindo (1988), qui effectuent des essais et des simulations numériques par éléments finis dans le cas de matériaux orthotropes. Ils concluent que l'anisotropie influence légèrement le comportement au plissement du matériau. Les travaux de Tomita et Shindo (1988) ont été poursuivis par Wang et Lee (1989) pour des valeurs de déformation plus grandes. Wang et Lee (1989) indiquent qu'une valeur élevée du coefficient d'anisotropie normale R tend à retarder le processus de plissement lors de la traction de l'éprouvette. Ceci est en accord avec les observations connues en emboutissage. Wang et Lee (1989) montrent que l'essai Yoshida n'est pas suffisant pour appréhender les phénomènes de plissement

rencontrés dans les problèmes plus complexes d'emboutissage et de mise en forme. Szacinski et Thomson (1984) aboutissent à la même conclusion : l'essai Yoshida leur paraît peu efficace pour prévoir le comportement au plissement des matériaux au cours d'un emboutissage.

2.2 Essai d'emboutissage tronconique

L'essai d'emboutissage tronconique consiste à emboutir une plaque, de contour circulaire, à l'aide d'un poinçon cylindrique passant à travers une matrice dont l'ouverture est de section circulaire. Contrairement à l'essai Yoshida, l'essai d'emboutissage tronconique n'est pas normalisé.

Le poinçon possède un fond plat circulaire. En général, son rayon extérieur est inférieur de 25% au rayon intérieur de la matrice. Durant cet essai, il est possible d'utiliser un serre-flan, lequel maintient la tôle en contact avec la matrice (figure [I-4]). Une force de serrage est alors appliquée à la tôle par l'intermédiaire du serre-flan. Lorsque cette force de serrage est faible, le plissement se produit sur la collerette (première zone sur la figure [I-2]). Puis si la force de serrage augmente, le plissement sur la collerette est supprimé mais celui-ci se produit alors sur la paroi du flan, qui est libre de tout contact. Ce phénomène est causé par les contraintes de compression suivant la direction circonférentielle à la paroi, générées par la réduction du diamètre du flan au fur et à mesure de l'enfoncement du poinçon. Pour des valeurs plus importantes de la force de serrage, le phénomène critique correspond alors à l'apparition d'une striction localisée au niveau du rayon de raccordement du nez du poinçon. Cette striction conduit à la rupture du flan. Nous pouvons ainsi définir, pour un enfoncement donné, l'intervalle de variation de la force de serrage permettant d'obtenir un embouti sans défauts (figure [I-2]).

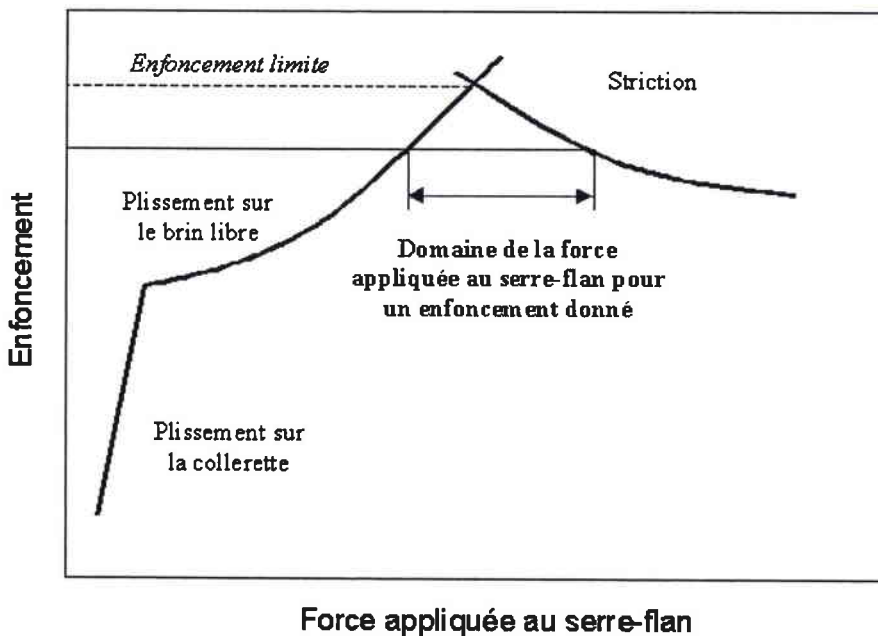


figure [I-2]: diagramme représentant les limites de plissement et de striction

Comme pour la striction, où les courbes limites de formage sont représentées dans le plan des déformations principales du plan de la tôle, il est possible de représenter des courbes limites de plissement dans ce même plan.

La courbe limite de plissement est valable pour une géométrie et des conditions d'emboutissage données. Les propriétés mécaniques du matériau, comme par exemple l'anisotropie, ont, bien sur, une influence sur l'apparition et la croissance des plis au cours de l'essai. Une grande valeur du coefficient d'anisotropie normale R ou une faible anisotropie plane conduisent à la réduction du risque de flambage, dans la collerette et les parois du flan. Mais la déformation critique de plissement est également influencée par la lubrification, la force de serrage du serre-flan, les dimensions de la tôle et de l'outillage. A la différence de l'essai Yoshida, l'essai d'emboutissage tronconique prend ces éléments en considération.

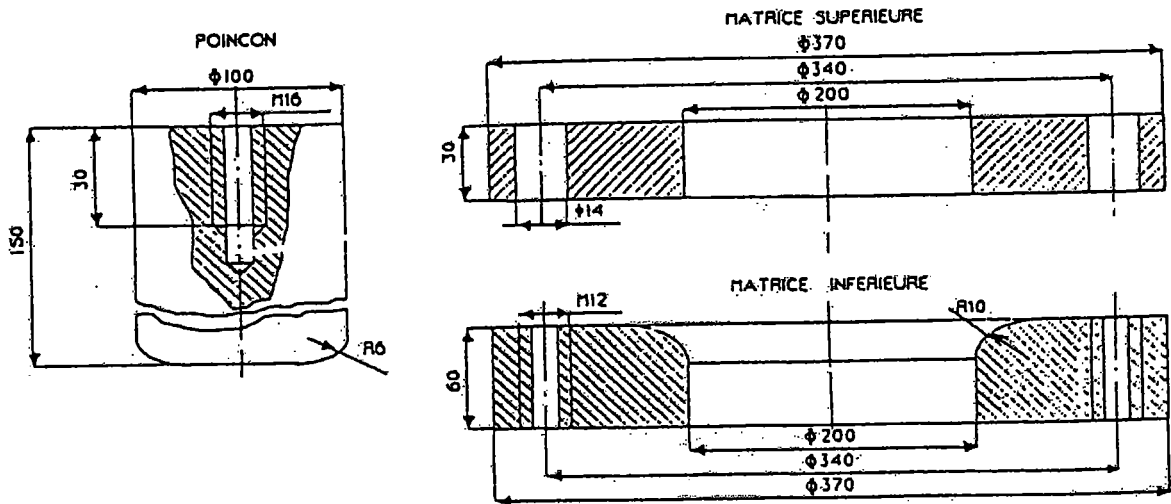


figure [I-3]: outillage utilisé par Ellagoune et Boivin (1988)

Ellagoune et Boivin (1988) proposent un essai pour étudier l'apparition du plissement sur le brin libre d'une coupelle tronconique (figure [I-3]). L'outillage utilisé par Ellagoune et Boivin (1988) se compose d'un poinçon de forme circulaire et d'un serre-flan maintenu sur la matrice par l'intermédiaire de 12 boulons serrés avec une clé dynamométrique.

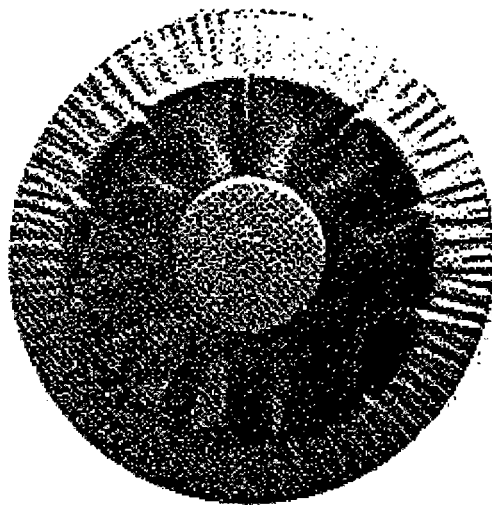


Figure [I-4] : coupelle obtenue par Ellagoune et Boivin (1988)

Les essais menés par Ellagoune et Boivin (1988) sont réalisés sur différentes nuances d'aciers, comme, par exemple, des aciers doux avec différents traitements thermiques, et pour

une géométrie donnée. Le plissement se produit sur le brin libre de l'embouti (figure [I-4]). Il est détecté au toucher. La descente du poinçon est stoppée à l'apparition des plis et la hauteur d'emboutissage est alors mesurée. Ellagoune et Boivin (1988) trouvent que la hauteur critique d'emboutissage varie linéairement et de façon décroissante en fonction de la limite d'élasticité. De plus, ils constatent que le plissement est retardé lorsque la tôle a une épaisseur plus forte.

2.3 Essais d'emboutissage sans serre-flan

Il est possible de réaliser le même type d'essais d'emboutissage de coupelle sans utiliser de serre-flan. Mais cela implique, pour une épaisseur donnée, une diminution de la hauteur d'emboutissage avant rupture ce qui, par conséquent, réduit les possibilités d'étude du plissement. Des chercheurs ont alors développé d'autres essais d'emboutissage permettant d'étudier le plissement d'un embouti sans serre-flan. C'est ainsi que Sowerby et al (1981) effectuent une étude expérimentale du plissement lors de l'emboutissage d'un godet cylindrique à travers une matrice conique. L'outillage utilisé par Sowerby et al (1981) s'apparente à celui utilisé par Narayanasamy et Sowerby (1995), lequel est présenté sur la figure [I-5]. Le flan testé est fixé sur le poinçon. Ce dernier a un mouvement de déplacement vertical descendant à travers une matrice possédant un évidement conique.

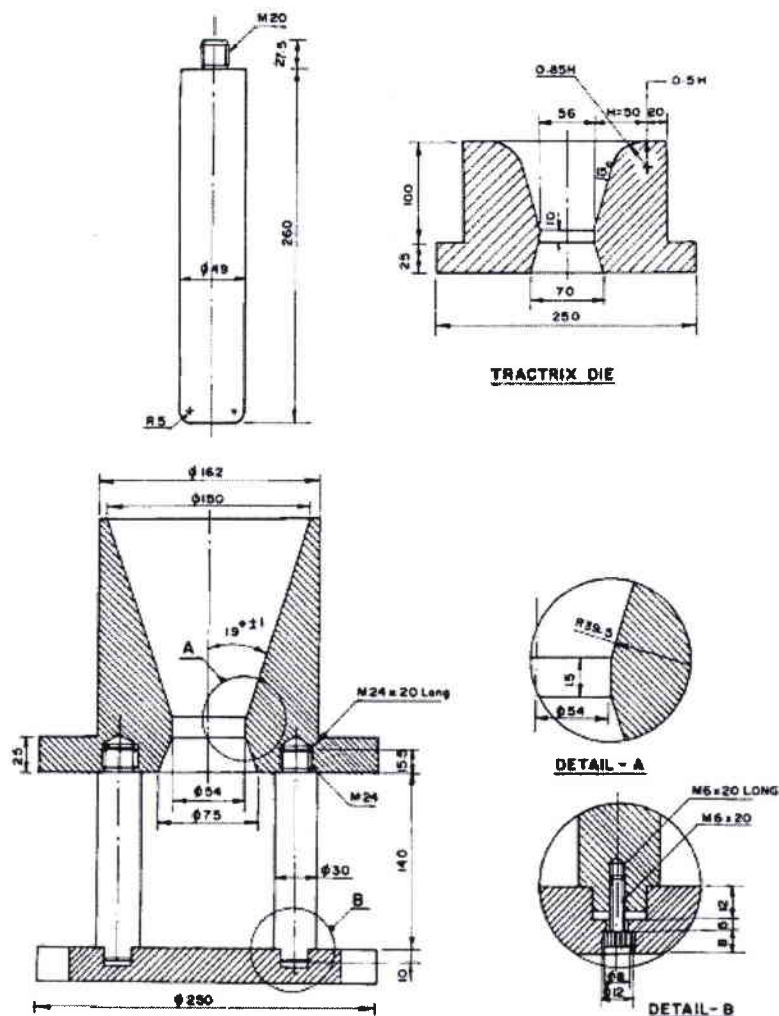


figure [I-5]: outillage utilisé par Narayanasamy et Sowerby (1995)

Dans l'industrie, ce procédé a tout d'abord été utilisé pour l'emboutissage de boîtes de conserve ou de boisson en aluminium. Il a, par la suite, également été employé avec des

aciers. Sowerby et al (1981) montrent qu'il existe différents modes de plissement. Ils observent un premier mode qui peut se produire en début d'expérience pendant la phase de flexion de l'embouti. Durant cette phase, 4 plis locaux, positionnés symétriquement, apparaissent sur la périphérie de l'embouti. Ces plis ne grandissent pas forcément et peuvent même disparaître. Cependant, pour une géométrie donnée du flan, les plis peuvent se développer jusqu'à la rupture de la pièce durant la descente du poinçon. Un autre mode de plissement, plus rare, peut se produire dans la zone libre de tout contact de l'embouti. Ce deuxième mode de plissement se produit plus tardivement au cours de la déformation, dans une phase où une partie de l'embouti est en contact avec la matrice et où, par conséquent, l'embouti a commencé à se déformer plastiquement. Huit plis se forment alors et se répartissent de façon symétrique sur le brin libre. Si l'amplitude de l'un des plis augmente, le pli se propage alors jusqu'au bord extérieur, suivant la direction de la génératrice du pli (direction radiale), ce qui provoque la ruine de la pièce. Un troisième mode de plissement est observé à un stade tardif de la déformation, c'est à dire lorsque le flan a pris la forme de la paroi de la matrice : deux plis se forment et se développent avec la descente du poinçon.

Sowerby et al (1981) montrent également que la géométrie de la matrice joue un rôle important sur l'état de préflambage et, par conséquent, sur l'apparition du plissement.

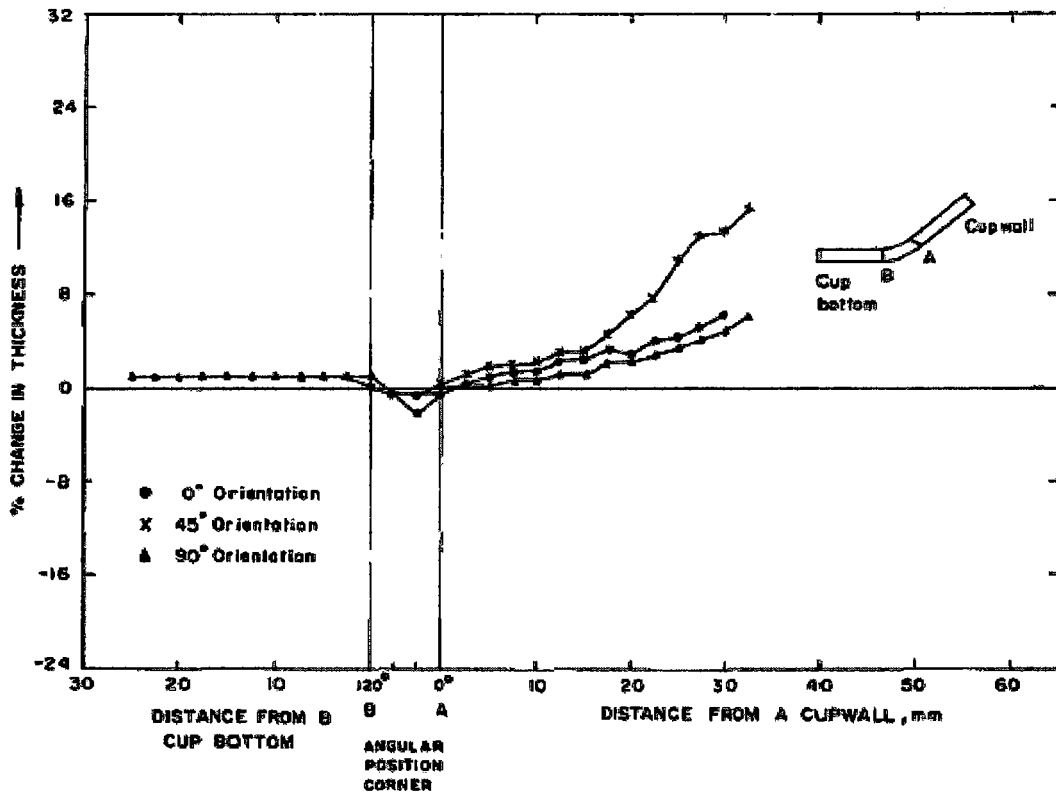


Figure [I-6] : variations de la déformation suivant l'épaisseur pour une coupelle partiellement emboutie, possédant des plis à 45°, de diamètre initial 114,90 mm, et obtenue avec un poinçon cylindrique à fond plat (aluminium commercial) Narayanasamy et Sowerby (1995)

Narayanasamy et Sowerby (1995) ont poursuivi les travaux de Sowerby et al (1981). L'outillage utilisé est présenté sur la figure [I-5]. Ces auteurs testent deux matériaux : un aluminium et un alliage de cuivre. Ils trouvent que la déformation suivant l'épaisseur mesurée à l'apparition des plis est la même quel que soit le diamètre initial du flan et quelle que soit la géométrie du poinçon utilisé. Cette déformation est maximum, d'après Narayanasamy et Sowerby (1995), dans les directions où apparaissent les plis.

Narayanasamy et Sowerby (1995) obtiennent une déformation critique suivant l'épaisseur égale à 15% pour le cas de l'aluminium, figures [I-6, I-7]. Les plis apparaissent suivant une direction proche de la direction correspondant à la plus forte valeur du coefficient d'anisotropie. Par contre, pour l'alliage de cuivre, l'orientation des plis observés est, la plupart du temps, proche de la direction qui présente la plus faible valeur du coefficient d'anisotropie.

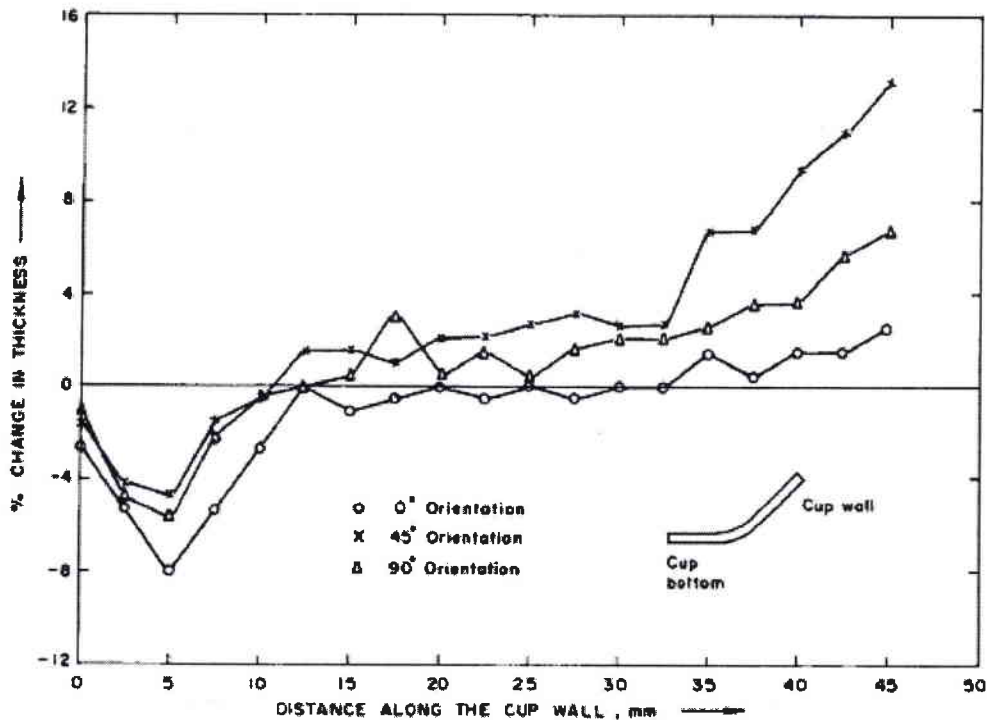


Figure [I-7] : variations de la déformation suivant l'épaisseur pour une coupelle partiellement emboutie, possédant des plis à 45°, de diamètre initial 90 mm, et obtenue avec un poinçon à fond hémisphérique (aluminium commercial) Narayanasami et Sowerby (1995)

Les essais d'emboutissage de coupelle fournissent donc des résultats sur l'apparition et le développement du plissement. Ces résultats sont cependant dépendant de la géométrie de l'essai et, parfois, contradictoires en ce qui concerne, en particulier, l'influence de l'anisotropie de la tôle.

Une différence importante entre les résultats obtenus avec les essais d'emboutissage de coupelle et l'essai Yoshida concerne les niveaux de contraintes et de déformations critiques, qui sont faibles dans l'essai Yoshida, et forts dans les essais d'emboutissage. On note également que la géométrie avant bifurcation est celle d'une plaque pour l'essai Yoshida, alors qu'elle est celle d'une coque dans les essais d'emboutissage (à l'exception de la collerette).

3 Etudes analytiques du plissement

3.1 Formulation basée sur l'équilibre

La connaissance de la charge limite d'instabilité en compression d'une structure permet de définir son aptitude à résister au flambage. Les travaux de Zghal et al (1997) permettent de

déterminer la charge critique des plaques minces élasto-plastiques sous compression uniaxiale en tenant compte des conditions aux limites, de l'influence de l'épaisseur, etc. .

L'équation qui gouverne l'équilibre d'une plaque rectangulaire mince sous compression uniaxiale s'exprime, en fonction du déplacement transversal u_3 :

$$\frac{h^3}{12} \cdot [L_{1111}u_{3,1111} + 2(2L_{1212} + L_{1122})u_{3,1122} + L_{2222}u_{3,2222}] - h\sigma_{11}u_{3,11} = 0 \quad (I-1)$$

où h est l'épaisseur de la plaque, σ_{11} la contrainte de compression appliquée et L_{ijkl} les composantes du tenseur des souplesses incrémentales. Zghal et al (1997) supposent que les bords sont simplement appuyés. Le champ de déplacement incrémental est pris sous la forme :

$$u = u_3^0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x_1\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}x_2\right) \quad (I-2)$$

où u_3^0 est l'amplitude du déplacement, m est un nombre d'ondes, a est la longueur et b la largeur de la plaque. (x_1, x_2) sont les coordonnées d'un point courant du plan moyen de la plaque. Le comportement du matériau est décrit par la matrice de complaisance élasto-plastique incrémentale, écrite dans les axes d'orthotropie, qui permet de relier les vitesses de déformations aux vitesses de contraintes :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{E_1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\nu_{21} \cdot \frac{E_1}{E_2} & 0 \\ -\nu_{12} & \frac{E_1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & E_1/G_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (I-3)$$

Dans ces conditions, Zghal et al (1997) déterminent l'expression de la contrainte critique sous la forme :

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{12} \left(\frac{h}{b} \right)^2 \pi^2 E_1 \cdot Kc \quad (I-4)$$

avec le coefficient Kc qui est égal à :

$$Kc = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \cdot \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + 2 \frac{\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} + 4 \frac{G_{12}}{E_1} + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \cdot \left(\frac{ma}{b} \right)^2 \quad (I-5)$$

Le nombre d'onde m est déterminé pour minimiser la fonction $Kc(mb/a)$ dans l'expression (I-5). Les simulations numériques effectuées par Zghal et al (1997) utilisent deux théories phénoménologiques de la plasticité : la théorie de l'écoulement et la théorie de la déformation. Les résultats confirment que les valeurs de contrainte critique sont nettement plus faibles avec la théorie de la déformation.

3.2 Formulations variationnelles

3.2.1 Critère de bifurcation et d'unicité de Hill

L'approche développée par Hill s'appuie sur le principe des travaux virtuels (PTV), dans lequel les forces de volume sont négligées. Hill choisit d'écrire le PTV dans un système de coordonnées convectives x^i où l'exposant i prend successivement les valeurs 1, 2 et 3. La configuration de référence est la configuration non-déformée. Les quantités contravariantes sont notées à l'aide d'un exposant et les quantités covariantes par un indice. Le PTV s'exprime :

$$\int_V \tau^{ij} \delta \eta_{ij} dV = \int_S T^i \delta u_i dS \quad (I-6)$$

où dV et dS représentent respectivement le volume élémentaire et la surface élémentaire du corps non-déformé, δu_i une variation du champ de déplacement admissible u_i et T^i les composantes du vecteur contrainte $\mathbf{T}$ modélisant l'action des forces de surface. Les composantes T^i sont écrites dans la base de vecteurs non-déformés. Celles-ci s'expriment en fonction des composantes contravariantes du tenseur des contraintes de Kirchhoff, lequel est écrit dans la base de vecteurs déformés. Les composantes du vecteur $\mathbf{T}$ s'expriment :

$$T^i = (\tau^{ij} + \tau^{kj} u_{,k}^i) n_j \quad (I-7)$$

où n_j désigne, dans la base de vecteurs non-déformés, la composante covariante de la normale à la surface S . Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit à partir des composantes u_i du champ de déplacement. Ses composantes sont données par :

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} u_{,i}^k u_{k,j} \quad (I-8)$$

A la variation δu_i du champ de déplacement u_i correspond une variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange, définie par :

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{,i}^k \delta u_{k,j} + u_{,j}^k \delta u_{k,i}) \quad (I-9)$$

Pour déterminer un critère d'unicité et de bifurcation, Hill pose le problème sous forme incrémentale. Le principe des travaux virtuels s'exprime sous la forme incrémentale suivante :

$$\int_V (\dot{\tau}^{ij} \delta \eta_{ij} + \tau^{ij} \dot{u}_{,i}^k \delta u_{k,j}) dV = \int_S \dot{T}^i \delta u_i dS \quad (I-10)$$

où les quantités marquées d'un point désignent les dérivées par rapport au temps. Les taux de contraintes, $\dot{\tau}^{ij}$, s'expriment en fonction des vitesses de déformations, $\dot{\eta}_{kl}$, par l'intermédiaire des relations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{\tau}^{ij} &= L^{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \text{ en chargement élasto-plastique} \\ \dot{\tau}^{ij} &= E^{ijkl} \dot{\eta}_{kl} \text{ en décharge élastique}\end{aligned}\quad (\text{I-11})$$

où les modules élastiques sont notés E^{ijkl} et les modules élasto-plastiques L^{ijkl} . Les vitesses de déformations sont données par :

$$\dot{\eta}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \right) + \frac{1}{2} \left(u_{,j}^k \dot{u}_{k,i} + u_{,i}^k \dot{u}_{k,j} \right) \quad (\text{I-12})$$

Hill suppose ensuite que la bifurcation est possible et qu'il existe deux solutions au moins, u_i^a et u_i^b , à n'importe quelle étape de la déformation. Les différences entre les deux solutions sont notées :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= u_i^b - u_i^a \\ \tilde{\eta}_{ij} &= \eta_{ij}^b - \eta_{ij}^a \\ \tilde{T}^i &= T_b^i - T_a^i\end{aligned}\quad (\text{I-13})$$

A partir des expressions (I-13), Hill écrit le principe des travaux virtuels (I-10) sous la forme :

$$\int_S \tilde{T}^i \tilde{u}_i dS = \int_V (\tilde{\tau}^{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \tau_0^{ij} \tilde{u}_{,i}^k \tilde{u}_{k,j}) dV \quad (\text{I-14})$$

Les conditions aux limites pour les contraintes et les déplacements sont définies par l'annulation de $\tilde{T}^i$ sur la frontière notée S^T et de $\tilde{u}_i$ sur la frontière notée S^U . Les intégrales précédentes sont donc égales à zéro, et la fonctionnelle H définie ci-dessous s'annule :

$$H = \int_V (\tilde{\tau}^{ij} \tilde{\eta}_{ij} + \tau_0^{ij} \tilde{u}_{,i}^k \tilde{u}_{k,j}) dV = 0 \quad (\text{I-15})$$

Pour un état de chargement caractérisé par le paramètre λ , Hill définit les modules L_c^{ijkl} d'un solide élastique de comparaison. Les modules L_c^{ijkl} sont égaux aux modules élasto-plastiques L^{ijkl} lorsque la contrainte se situe sur la frontière du domaine d'élasticité ; ils sont égaux à E^{ijkl} lorsque la contrainte est à l'intérieur du domaine d'élasticité. Hill définit la fonctionnelle :

$$F(\lambda, \tilde{\mathbf{u}}) = \int_V (L_c^{ijkl} \tilde{\eta}_{kl} \tilde{\eta}_{ij} + \tau_0^{ij} \tilde{u}_{,i}^k \tilde{u}_{k,j}) dV \quad (\text{I-16})$$

et montre que $H \geq F$. L'unicité de la solution est obtenue lorsque $F(\lambda, \tilde{\mathbf{u}})$ est positif pour tout champ $\tilde{u}_i$ non nul. La bifurcation est possible quand H s'annule c'est à dire quand F s'annule. Hill en déduit le critère de bifurcation suivant :

$$F(\lambda_c, \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (\text{I-17})$$

où λ_c correspond à la plus faible valeur propre de F .

3.2.2 Critère de bifurcation de Hutchinson

Le critère de bifurcation développé par Hutchinson (1974) s'appuie sur le critère général de Hill. Il s'applique plus particulièrement aux plaques et coques. La théorie utilisée pour modéliser le comportement des coques et plaques est celle de Donnell-Mushtari-Vlasov. Cette théorie s'applique aux cas où les déformations et les rotations sont supposées faibles et où la longueur d'onde caractéristique de la déformation est grande comparée à l'épaisseur de la coque, mais faible, par rapport aux rayons de courbure du plan moyen de celle-ci. Hutchinson (1974) utilise le système de coordonnées convectives x^α avec $\alpha = 1, 2$ dans le plan moyen et x^3 suivant la normale au plan moyen. Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'exprime sous la forme :

$$\eta_{\alpha\beta} = E_{\alpha\beta} + x^3 K_{\alpha\beta} \quad (\text{I-18})$$

où $E_{\alpha\beta}$ correspondent aux déformations de membrane et $K_{\alpha\beta}$ aux déformations de flexion. Ces déformations s'expriment en fonction des composantes du déplacement :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} u_3 + \frac{1}{2} u_{3,\alpha} u_{3,\beta} \\ K_{\alpha\beta} &= -u_{3,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{I-19})$$

où $b_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur des courbures de la surface moyenne non déformée. La virgule marque une dérivation covariante par rapport aux coordonnées x^α . En accord avec la théorie de Donnell-Mushtari-Vlasov, Hutchinson (1974) exprime le travail des efforts intérieurs par :

$$\int_V \tau^{ij} \delta \eta_{ij} dv \equiv \int_A (M^{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta} + N^{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta}) dA \quad (\text{I-20})$$

où dA représente l'élément de surface non déformé du plan moyen, $M^{\alpha\beta}$ sont les moments de flexion et $N^{\alpha\beta}$ les efforts résultants, définis par :

$$\begin{aligned} M^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} x^3 dx^3 \\ N^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau^{\alpha\beta} dx^3 \end{aligned} \quad (\text{I-21})$$

où h est l'épaisseur non déformée de la coque. Hutchinson (1974) suppose qu'un état de contraintes planes s'applique à n'importe quel point à travers l'épaisseur de la coque. Le tenseur des taux de contraintes s'exprime alors :

$$\dot{\tau}^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta kl} \dot{\eta}_{kl} \quad (\text{I-22})$$

où $L^{\alpha\beta kl}$ représentent les modules élasto-plastiques exprimés pour un état de contraintes planes.

En supposant, comme Hill, que la bifurcation est possible et qu'il existe deux solutions au moins, notées a et b, à n'importe quelle étape de la déformation, Hutchinson (1974) obtient, dans le cadre de la théorie de Donnell-Mushtari-Vlasov, la fonctionnelle F définie par :

$$F = \int (H_{(3)}^{\alpha\beta kl} \tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{kl} + 2H_{(2)}^{\alpha\beta kl} \tilde{E}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{kl} + H_{(1)}^{\alpha\beta kl} \tilde{E}_{\alpha\beta} \tilde{E}_{kl} + N_0^{\alpha\beta} \tilde{u}_{3,\alpha} \tilde{u}_{3,\beta}) dA \quad (I-23)$$

avec

$$H_{(i)}^{\alpha\beta kl} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} L_c^{\alpha\beta kl} (x^3)^{i-1} dx^3 \quad (I-24)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\tilde{u}_{\alpha,\beta} + \tilde{u}_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} \tilde{u}_3 + \frac{1}{2} (u_{3,\alpha}^0 \tilde{u}_{3,\beta} + u_{3,\beta}^0 \tilde{u}_{3,\alpha}) \\ \tilde{K}_{\alpha\beta} &= -\tilde{u}_{3,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (I-25)$$

Le critère de bifurcation proposé par Hutchinson (1974) est identique au critère (I-17) défini par Hill, c'est à dire :

$$F(\lambda_c, \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (I-26)$$

3.2.3 Application au plissement des tôles

Suite aux travaux de Hutchinson (1974), Hutchinson et Neale (1985) effectuent une analyse locale du plissement pour l'emboutissage des tôles. La mise en place d'un critère de plissement s'effectue sur les bases des connaissances du flambage plastique. Hutchinson et Neale (1985) supposent que la région de la tôle susceptible de plisser a atteint, au cours d'une étape courante du procédé d'emboutissage, un état doublement courbé avec des rayons de courbure principaux R_1 , R_2 . Ces rayons de courbure sont supposés être constants sur une région S de la tôle. Hutchinson et Neale (1985) limitent leur étude aux régions de la tôle qui ne sont pas en contact avec l'outillage. Toutes les interactions entre la tôle, la matrice et le poinçon sont négligées. Hutchinson et Neale (1985) posent plusieurs autres hypothèses pour obtenir un critère analytique simple de plissement. Ces hypothèses sont les suivantes :

- La tôle est supposée isotrope, avec un domaine d'élasticité décrit par le critère de von Mises.
- Durant le procédé d'emboutissage, l'état de contrainte avant flambage (ou avant plissement) est supposé être un état de contrainte de membrane uniforme sur la région S.
- Les axes principaux de contraintes avant flambage sont supposés coïncider avec les axes principaux de courbure de la tôle et sont notés ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$).

La fonctionnelle employée par Hutchinson et Neale (1985) pour déterminer l'apparition du plissement est déduite de la fonctionnelle (I-23) proposé par Hutchinson (1974) pour l'étude du flambage plastique :

$$F(\dot{\mathbf{u}}_i) = \int_S \left[\frac{h^3}{12} L^{\alpha\beta\kappa\gamma} \dot{K}_{\alpha\beta} \dot{K}_{\kappa\gamma} + h L^{\alpha\beta\kappa\gamma} \dot{E}_{\alpha\beta} \dot{E}_{\kappa\gamma} + N^{\alpha\beta} \dot{u}_{3,\alpha} \dot{u}_{3,\beta} \right] dS \quad (I-27)$$

S désigne la région de la surface moyenne de la tôle sur laquelle survient le plissement. Les vitesses de déformations sont obtenues à partir des approximations faites pour les coques faiblement courbées :

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha} \right) + b_{\alpha\beta} \dot{u}_3 \\ \dot{K}_{\alpha\beta} &= -\dot{u}_{3,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{I-28})$$

Pour un plissement avec une faible longueur d'onde, Hutchinson et Neale (1985) considèrent le champ de vitesses de déplacement suivant comme correspondant à la solution bifurquée :

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = Ah \cos\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\xi}\right) \cos\left(\frac{\lambda_2 x_2}{\xi}\right) \\ \dot{u}_1 = Bh \sin\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\xi}\right) \cos\left(\frac{\lambda_2 x_2}{\xi}\right) \\ \dot{u}_2 = Ch \cos\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\xi}\right) \sin\left(\frac{\lambda_2 x_2}{\xi}\right) \end{cases} \quad (\text{I-29})$$

avec $\xi = \sqrt{Rh}$, R étant égal au rayon principal de courbure R_1 ou au rayon principal de courbure R_2 . λ_1 et λ_2 sont des nombres d'ondes sans dimension. Les constantes A , B et C sont les amplitudes relatives des déplacements. En utilisant un tel champ de vitesses de déplacement, Hutchinson et Neale (1985) anticipent sur le fait que le plissement se produira sur une région S de la tôle. L'analyse suivie est locale et les conditions de contact ou de continuité avec le reste de la tôle sont négligées. La matrice des courbures $b_{\alpha\beta}$ s'exprime sous la forme :

$$[b] = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I-30})$$

Hutchinson et Neale (1985) introduisent le champ de déplacement (I-29) dans la fonctionnelle (I-27) puis ils intègrent sur la surface S où se produira le plissement. Avec $N^{11} = h\sigma_1$ et $N^{22} = h\sigma_2$, Hutchinson et Neale (1985) aboutissent à l'expression suivante de la fonctionnelle F , présentée sous la forme de produits de matrices :

$$F(\dot{u}_i) = \beta Sh \left(\frac{h}{\xi} \right)^2 (A \quad B \quad C) \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad (\text{I-31})$$

Les termes de la matrice $[M]$ s'expriment en fonction des modules élasto-plastiques et des nombres d'ondes λ_1 et λ_2 du mode de flambage. La valeur de β dépend des nombres d'ondes λ_1 et λ_2 .

$$\left. \begin{aligned} \int_S \left[\cos\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\xi}\right) \cos\left(\frac{\lambda_2 x_2}{\xi}\right) \right]^2 dS \\ \int_S \left[\sin\left(\frac{\lambda_1 x_1}{\xi}\right) \sin\left(\frac{\lambda_2 x_2}{\xi}\right) \right]^2 dS \end{aligned} \right\} = \beta S \quad (\text{I-32})$$

Si λ_1 et λ_2 sont non nuls alors β est égal à 1/4; si un des nombres d'onde est nul alors β est égal à 1/2. La condition de bifurcation (I-26) conduit à :

$$\det[M]=0 \quad (\text{I-33})$$

Pour déterminer les contraintes critiques de plissement, Hutchinson et Neale (1985) minimisent le déterminant de la matrice $[M]$ par rapport aux nombres d'ondes λ_1 et λ_2 . Les valeurs des nombres d'ondes ainsi obtenues décrivent le mode critique de plissement correspondant.

$$\frac{\partial \det[M]}{\partial \lambda_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial \det[M]}{\partial \lambda_2} = 0 \quad (\text{I-34})$$

Hutchinson et Neale (1985) étudient le cas particulier du plissement suivant l'axe c_1 , ce qui implique que le nombre d'ondes λ_2 est nul. La seule composante de contrainte intervenant dans le calcul ($\det[M]=0$) se trouve suivant l'axe c_1 . La condition (I-33) de bifurcation fournit une expression de la contrainte σ_1 qui dépend de λ_1 . En minimisant la contrainte σ_1 par rapport au nombre d'ondes λ_1 , Hutchinson et Neale (1985) obtiennent l'expression (I-35) de la contrainte critique de plissement puis l'expression (I-36) de la longueur d'onde critique correspondante :

$$\sigma_1^{cr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{h}{R_2} \right) (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)^{1/2} \quad (\text{I-35})$$

$$\lambda_1^{cr} = \left[\frac{2\sqrt{3} (L_{11} L_{22} - L_{12}^2)}{L_{11}} \right]^{1/2} \quad (\text{I-36})$$

3.2.4 Définition de courbes limites de plissement

Neale et Tugcu (1990) considèrent que le plissement se produit, pendant une opération de formage complexe, suivant une seule direction et que celui-ci est souvent confiné à une région localisée de la tôle. Le mode de flambage est alors un mode local qui dépend des courbures locales, de l'épaisseur, de l'état de contrainte local et des propriétés mécaniques du matériau. Pour déterminer l'apparition du plissement, Neale et Tugcu (1990) s'appuient sur les travaux de Hutchinson et Neale (1985). Ils isolent donc un élément de tôle, de surface S , où le plissement est susceptible de se produire. La figure [I-8] montre l'élément de la tôle considérée à une étape courante du procédé. Neale et Tugcu (1990) supposent en outre que le plissement se produit suivant une direction inconnue orientée d'un angle θ par rapport à la direction x_1 , définie sur la figure [I-8], et correspondant à la direction de rayon principal de courbure R_1 . Ils supposent enfin que les axes principaux de contraintes sont orientés d'un

angle ϕ par rapport aux axes principaux de courbures. Cette étude généralise donc l'étude réalisée par Hutchinson et Neale (1985).

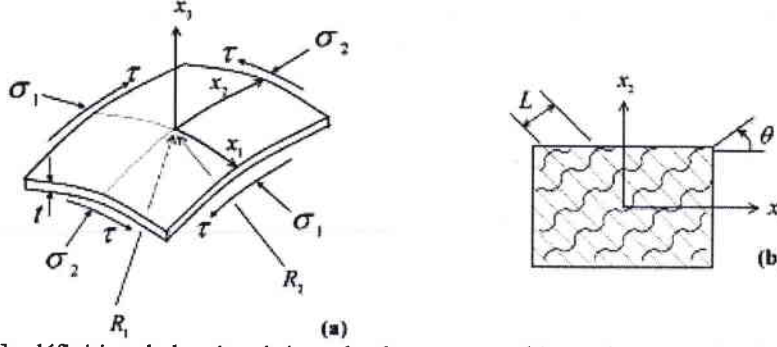


Figure [I-8] : définition de la géométrie et du chargement subie par la coque, Neale et Tugcu (1990)

Neale et Tugcu (1990) postulent le champ de déplacement défini par :

$$\begin{cases} u_3 = Ah \cos \left[\frac{\lambda}{\xi} (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \right] \\ u_1 = Bh \sin \left[\frac{\lambda}{\xi} (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \right] \\ u_2 = Ch \sin \left[\frac{\lambda}{\xi} (x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta) \right] \end{cases} \quad (\text{I-37})$$

Ce champ, exprimé dans le système d'axes (x_1, x_2, x_3) , découle du champ de déplacement (I-29), utilisé par Hutchinson et Neale (1985), où λ_2 est pris égal à 0. La longueur d'onde, L , est liée au nombre d'ondes sans dimension λ par :

$$L = \frac{2\pi\xi}{\lambda} \quad (\text{I-38})$$

Pour déterminer la contrainte critique de plissement ainsi que la longueur d'onde critique, Neale et Tugcu (1990) utilisent la fonctionnelle (I-23) proposée par Hutchinson (1974). En introduisant le champ de déplacement (I-37) dans la fonctionnelle (I-27) Neale et Tugcu (1990) peuvent donc exprimer la fonctionnelle proposée par Hutchinson (1974) sous une forme matricielle comparable à (I-31). Le critère de bifurcation (I-26) est exprimé sous la forme des trois équations suivantes :

$$\begin{aligned} \det[M] &= 0 \\ \frac{\partial \det[M]}{\partial \lambda} &= 0 \text{ et } \frac{\partial \det[M]}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-39})$$

A partir des équations (I-39), Neale et Tugcu (1990) déterminent les contraintes critiques et la longueur d'onde critique de plissement. Ils choisissent de présenter leurs résultats dans les axes des contraintes principales σ_1, σ_2 . Ils définissent ainsi des courbes limites de plissement selon une approche rappelant celle menée pour les courbes limites de formage à striction (celles-ci étant toutefois généralement présentées dans les axes de déformations principales).

Kim et Son (2000) s'appuient sur les travaux de Neale et Tugcu (1990) pour étudier l'influence de différentes caractéristiques mécaniques des matériaux sur l'apparition du plissement. Ils résolvent le système d'équations (I-39) à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Le nombre d'onde λ et l'angle θ , définissant l'orientation des plis, déduits des équations (I-39) déterminent les caractéristiques du plissement. Nous présentons, figure [I-9], un exemple de courbes limites de plissement obtenues par ces auteurs pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie normale, R . Afin d'obtenir les courbes de la figure [I-9], Kim et Son (2000) utilisent le critère de plasticité de Hosford (1979) pour modéliser le comportement anisotrope normal du matériau.

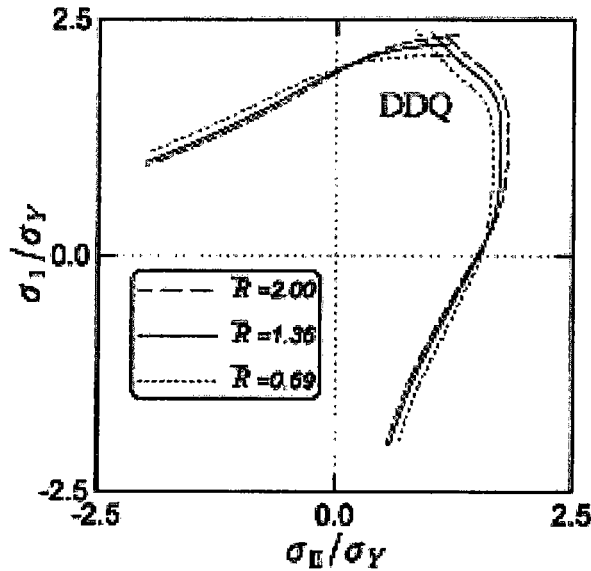


Figure [I-9] : courbes limites de plissement obtenues pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie R (Kim et Son (2000))

Des travaux de Kim et Son (2000) il résulte que : pour un rapport de contraintes positif (les contraintes σ_1 et σ_2 sont des contraintes compressives), la contrainte critique de plissement augmente lorsque la valeur du coefficient d'anisotropie R augmente ; pour un rapport de contraintes négatif (les contraintes σ_1 et σ_2 sont de signe opposé), la contrainte critique de plissement augmente lorsque la valeur du coefficient d'anisotropie R diminue. Kim et Son (2000) estiment cependant que l'effet du coefficient d'anisotropie R est de moindre importance que celui d'autres paramètres matériels.

3.2.5 Prise en compte des conditions aux limites

Jusqu'à présent nous nous sommes penchés sur des études locales du plissement pour lesquelles les conditions aux limites et les conditions de continuité sont négligées. Un travail détaillé a été réalisé dans le cas élastique par Shahwan et Waas (1994). Ces auteurs considèrent une plaque mince élastique reposant sur une surface plane modélisée comme étant une fondation élastique. Cette plaque est soumise à un chargement uniforme en compression uniaxiale.

La fondation élastique est modélisée par une relation non-linéaire entre l'effort et le déplacement transversal u_3 , ce qui induit une non-linéarité conduisant à des difficultés de résolution analytique. Shahwan et Waas (1994) ont posé le problème sous une forme énergétique, en recherchant la stationnarité de l'énergie potentielle totale.

Une application de la fonctionnelle de Hutchinson (1974) à un problème d'emboutissage a été effectuée par Triantafyllidis et Needleman (1980). Les essais d'emboutissage montrent en effet que le plissement peut apparaître entre la matrice et le serre-flan. Triantafyllidis et Needleman (1980) présentent donc une étude du plissement de la collerette d'un embouti au cours d'un essai d'emboutissage de Swift (figure [I-10]). L'étude de Triantafyllidis et Needleman (1980) inclut la prise en compte des conditions aux limites dans l'utilisation du critère de bifurcation (I-26) proposé par Hutchinson (1974).

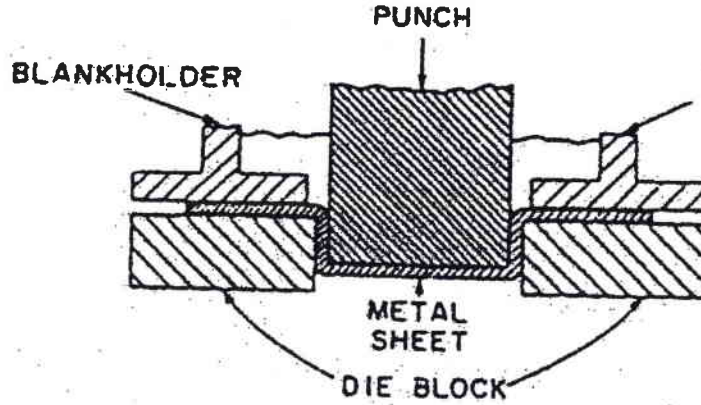


Figure [I-10]: Schéma de l'essai d'emboutissage de Swift (Triantafyllidis et Needleman (1980))

Dans le cas du plissement d'une tôle mince au cours d'un essai d'emboutissage profond d'un godet cylindrique, Triantafyllidis et Needleman (1980) se concentrent sur la partie du flan comprise entre le serre-flan et la matrice. Ils modélisent cette partie de la tôle par une couronne d'épaisseur h , de rayon intérieur a et de rayon extérieur b . Compte-tenu de la géométrie du problème un système de coordonnées polaires est utilisé. La fonctionnelle F s'exprime alors :

$$F = \int_S \left[\frac{h^3}{12} L_{ijkl} \dot{K}_{ij} \dot{K}_{kl} + h \sigma_{ij} \dot{u}_{3,i} \dot{u}_{3,j} + k \dot{u}_3^2 \right] r dr d\theta \quad (\text{I-40})$$

La figure [I-11] présente la géométrie de la couronne ainsi que les conventions de notations proposées par Triantafyllidis et Needleman (1980). La contrainte radiale est notée σ_{11} et la contrainte circonférentielle σ_{22} .

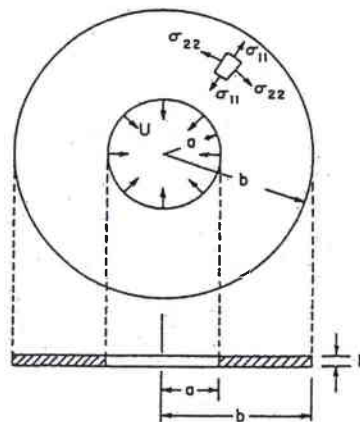


Figure [I-11]: géométrie de la couronne (Triantafyllidis et Needleman (1980))

Les forces de frottement s'exerçant sur les faces de la couronne sont négligées. Triantafyllidis et Needleman (1980) traduisent le chargement de la couronne par un champ de déplacement U croissant de façon monotone et appliqué au contour intérieur de la couronne. Le contour extérieur de la couronne est supposé libre. L'état de prébifurcation est un état de déformations planes. Les conditions aux limites sont définies par :

$$\begin{aligned}\dot{u}_r(a) &= -\dot{U} \\ \dot{\sigma}_{11}(b) &= 0\end{aligned}\tag{I-41}$$

Le déplacement normal u_3 correspondant à la bifurcation est pris sous la forme d'une série de Fourier :

$$\dot{u}_3(r, \theta) = U_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r) \cos(n\theta)\tag{I-42}$$

Triantafyllidis et Needleman (1980) obtiennent finalement une fonctionnelle de bifurcation écrite sous la forme d'une série :

$$F(u_3) = F_0(U_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(U_n)\tag{I-43}$$

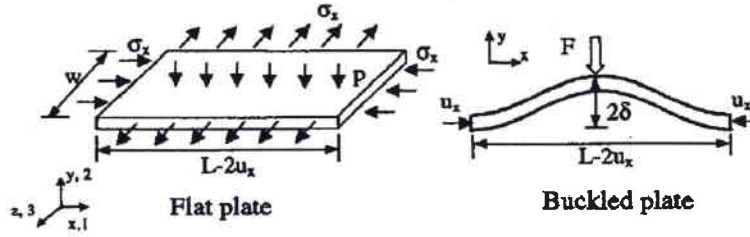
La condition de bifurcation (I-26) est exprimée sous la forme :

$$\delta F_n(U_n) \cdot F_n(U_n) = 0\tag{I-44}$$

L'étude de Triantafyllidis et Needleman (1980) est un exemple de l'utilisation du critère de bifurcation proposé par Hutchinson (1974) pour résoudre des problèmes de plissement dans une approche globale prenant en compte les conditions aux limites du procédé.

3.3 Formulation énergétique de Cao et Wang (1997)^a

Le critère de plissement proposé par Cao et Boyce (1997)^a tient compte de la force de serrage appliquée à la tôle par l'intermédiaire du serre-flan. Durant une opération d'emboutissage, une contrainte compressive se développe dans le plan de la tôle sous le serre-flan. Elle est due à l'avalement imposé par la descente du poinçon. L'intensité de cette contrainte compressive dépend de la géométrie de l'outillage et de la force de serrage appliquée par l'intermédiaire du serre-flan. Bien que la distribution de la contrainte compressive ne soit pas uniforme, Cao et Boyce (1997)^a supposent que l'apparition du plissement est un phénomène local. Par conséquent, à chaque point matériel compris dans la zone susceptible de développer des plis, Cao et Boyce (1997)^a modélisent le problème en analysant le plissement d'une plaque rectangulaire (figure [I-12]). Cette plaque est soumise à un chargement décrit par un état de traction/compression dans le plan et une pression normale au plan qui représente l'action du serre-flan.

Figure [I-12] : modélisation adoptée par Cao et Boyce (1997)^a

L'idée de Cao et Boyce (1997)^a est que, dans le cas où la force de serrage n'est pas suffisante pour empêcher le déplacement transversal de la tôle, le plissement se déclenche. Cao et Boyce (1997)^a supposent que, pour un déplacement u_x entraînant une variation de la contrainte compressive dans le plan, l'énergie de déformation d'une plaque plane, E_0 , est supérieure à l'énergie de déformation d'une plaque courbée, E_w . La différence entre les deux énergies est égale au travail que devrait fournir la force de serrage pour éliminer le plissement. Cette analyse conduit à l'équation :

$$W_n = E_0 - E_w = \int_0^{2\delta} F du_y \quad (\text{I-45})$$

où n est le mode de flambage, u_y le déplacement transversal, δ le déplacement transversal maximal obtenu pour un déplacement latéral u_x et F la force de serrage qui est déduite de l'action du serre-flan sur la collerette. Cao et Boyce (1997)^a déterminent la contrainte critique et la longueur d'onde critique caractérisant le plissement d'une plaque soumise à une force normale connue. Ils obtiennent finalement les évolutions de la contrainte critique de plissement en fonction de la force de serrage.

4 Etudes numériques du plissement

Depuis quelques années le nombre d'études numériques augmente sans cesse. Avec les progrès des outils informatiques il a été possible de passer des modélisations 2D de procédés d'emboutissage à des modélisations 3D de plus en plus complexes. Les études 2D antérieures ont été effectuées avec des codes de calcul par éléments finis statiques implicites. Le passage à des études 3D ne pouvait se faire avec des codes statiques implicites gourmands en temps de calcul. La plupart des simulations 3D s'effectuent donc avec des codes de calcul dynamiques explicites. La progression dans la simulation des procédés d'emboutissage a naturellement poussé les chercheurs à étudier l'apparition du plissement et de la striction. Différentes stratégies ont été mises en œuvre pour visualiser et étudier l'apparition et le développement du plissement. Ces stratégies peuvent être classées en trois catégories. La première consiste à employer un code de calcul dynamique explicite parce que celui-ci est capable de générer des plis au cours de la simulation de l'opération d'emboutissage sans aucun artifice. Certains auteurs ont affirmé que les plis engendrés par les codes dynamiques explicites sont dus aux approximations de calcul (Cao et Boyce (1997)^b). Partant de cette idée une seconde méthode a donc été développée. Celle-ci consiste à introduire des défauts géométriques dans la modélisation du flan à emboutir. La troisième méthode, quant à elle, consiste à introduire un critère de bifurcation dans l'analyse par éléments finis. Le critère utilisé permet de déterminer les zones où le plissement est susceptible de se produire. Dans les sous-paragraphes suivants nous récapitulons les différentes stratégies employées ainsi que les résultats obtenus.

4.1 Introduction de défauts dans le maillage du flan

Partant de l'idée qu'une tôle métallique possède des défauts géométriques et que le matériau qui la constitue présente des hétérogénéités, Cao et Boyce (1997)^b introduisent des défauts dans leur modélisation afin d'étudier le plissement de la collerette d'un flan au cours de l'emboutissage d'un godet cylindrique et d'une boîte carrée. Deux types de défauts locaux sont considérés par Cao et Boyce (1997)^b : un amincissement et une courbure. Les défauts locaux, zones noircies sur la figure [I-13], sont répartis périodiquement sur le flan. Ce choix d'une répartition périodique fait suite à une étude antérieure de Cao et Boyce (1997)^a. C'est à l'aide d'une méthode permettant de générer aléatoirement la distribution d'imperfections que l'apparition du plissement, ainsi que son développement, sont étudiés. Cao et Boyce (1997)^b utilisent un code de calcul statique implicite (ABAQUS/ Standard). Le serre-flan exerce une force de serrage constante au cours de l'emboutissage. Le matériau étudié est supposé être isotrope. Les auteurs aboutissent à des résultats en accord avec les expériences en ce qui concerne le nombre de plis (figure [I-14]). La profondeur d'emboutissage croît lorsque la force de serrage du serre-flan augmente, ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux. Mais si la force de serrage du serre-flan est trop importante la striction apparaît au niveau du rayon de poinçon. Cao et Boyce (1997)^b proposent alors d'utiliser une force de serrage variable pour contrer l'apparition des plis en début d'enfoncement et pour éliminer les problèmes de striction en fin d'emboutissage.

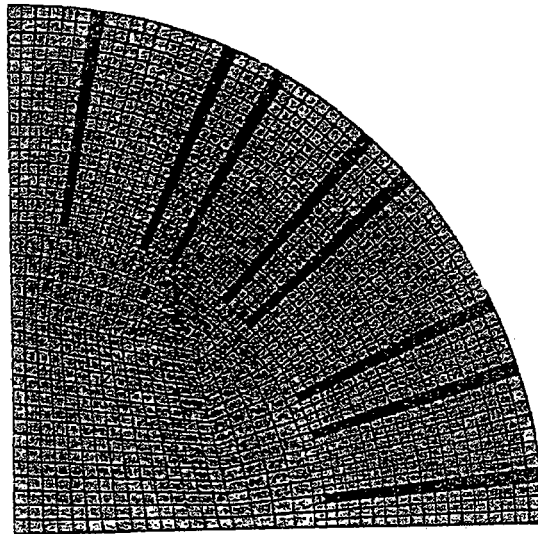


Figure [I-13] : maillage du flan avec un exemple de distribution des imperfections, indiquées par des zones noircies, utilisé par Cao et Boyce (1997)^b

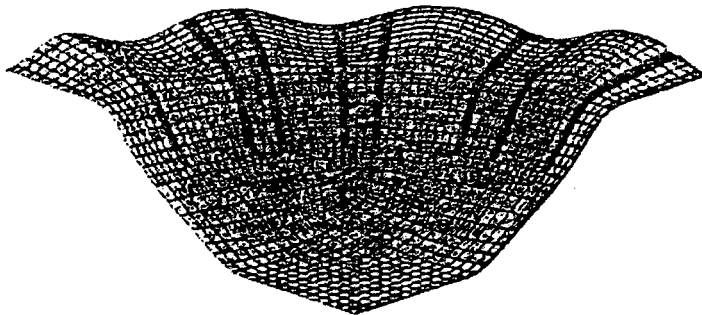


Figure [I-14] : maillage déformé pour un déplacement du poinçon de 20 mm et pour une force de serrage constante de 2,2 kN (Cao et Boyce (1997)^b)

L'inconvénient de cette méthode d'introduction de défauts est que le résultat final semble dépendre de l'amplitude et de la nature du défaut employé pour modéliser le flan initial.

4.2 Utilisation d'un critère de plissement dans les codes de calcul par éléments finis

Certains auteurs ont préféré développer des critères de plissement plutôt que d'introduire des défauts dans la modélisation de l'opération d'emboutissage. Ces critères de plissement peuvent être des critères de bifurcation ou des critères basés sur des principes énergétiques. Nous présentons, dans ce sous-paragraphe, plusieurs critères mis en place pour détecter le plissement.

4.2.1 Critère de plissement de Nordlund et Hagbblad (1997)

L'idée de Nordlund et Hagbblad (1997) est de détecter l'apparition du plissement à l'aide de la valeur locale de la variation de la puissance des efforts intérieurs. Nordlund et Hagbblad (1997) partent du principe des travaux virtuels exprimé au temps t dans un repère de coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) :

$$\int_{V_t} {}^tP_{ij} \delta u_{j,i} dV = \int_{V_t} {}^t f_i^b \delta u_i dV + \int_{S_t} {}^t f_i^s \delta u_i dS \quad (I-46)$$

Dans cette écriture un exposant à gauche désigne la configuration courante et un indice à gauche la configuration de référence ; tV est le volume du domaine étudié, tS_f la surface sur laquelle s'exerce le chargement. Le chargement extérieur se compose de forces volumiques f_i^b et de forces surfaciques f_i^s . Nordlund et Hagbblad (1997) utilisent une formulation Lagrangienne réactualisée avec comme configuration de référence la configuration à l'instant t qui est connue. ${}^tP_{ij}$ désigne le tenseur nominal des contraintes à l'instant t et δu_i le déplacement virtuel. La configuration de référence coïncidant avec la configuration courante, les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy sont égales aux composantes du tenseur des contraintes nominales :

$${}^t\sigma_{ij} = {}^tP_{ij} \quad (I-47)$$

Nordlund et Hagbblad (1997) expriment respectivement le travail des efforts extérieurs et des efforts intérieurs pour un incrément de temps Δt , pendant lequel les forces extérieures varient de Δf_i^b et Δf_i^s . Les exposants et indices à gauche étant supprimés, Nordlund et Hagbblad (1997) obtiennent, pour le travail des efforts extérieurs :

$$W_{ext} \approx \int_{V_t} \left(f_i^b + \frac{1}{2} \Delta f_i^b \right) \Delta u_i dV + \int_{S_t} \left(f_i^s + \frac{1}{2} \Delta f_i^s \right) \Delta u_i dS \quad (I-48)$$

et, pour le travail des efforts intérieurs :

$$W^{int} = \int_{V_t} P_{ij} \Delta u_{j,i} dV + \frac{\Delta t}{2} \int_{V_t} \left(\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k} \right) \Delta u_{j,i} dV \quad (I-49)$$

avec la vitesse de déplacement définie par $v_i = \frac{\Delta u_i}{\Delta t}$.

En effectuant l'égalité des travaux des efforts extérieurs et des efforts intérieurs et en utilisant le principe des travaux virtuels avec $\delta u_i = \Delta u_i$, nous parvenons à l'expression de la variation de puissance des efforts intérieurs :

$$I = \int_V \left(\dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} v_{k,k} - \sigma_{kj} v_{i,k} \right) \Delta u_{j,i} dV = \int_V \dot{f}_i^b v_i dV + \int_{S_f} \dot{f}_i^s v_i dV \quad (\text{I-50})$$

Cette variation s'exprime sous la forme tensorielle :

$$I = \int_V \text{tr} \left(\dot{\tau} D + \sigma (-DD^T + DW + W^T D + WW^T) \right) dV \quad (\text{I-51})$$

où $\dot{\tau}$ désigne la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Kirchhoff, D et W sont respectivement les tenseurs des taux de déformation et de rotation.

Nordlund et Hagbblad (1997) démontrent que pour que le flambage se produise il est nécessaire que le scalaire I prenne une valeur négative. Les auteurs proposent l'approche qui consiste à calculer le scalaire I sur des régions locales du flan, c'est à dire, en pratique, sur chaque élément du maillage utilisé pour modéliser ce flan. L'élément de volume correspondant est alors le volume d'un élément. Les zones favorables à l'apparition du plissement sont trouvées lorsque le scalaire I devient négatif. Nordlund et Hagbblad (1997) précisent que c'est une condition nécessaire mais pas suffisante. Le critère de plissement ainsi développé peut être introduit dans un code de calcul par éléments finis. Nordlund et Hagbblad (1997) introduisent leur critère de plissement dans un code de calcul par éléments finis explicite, et modélisent l'essai Yoshida et un essai d'emboutissage. Nordlund (1998) introduit ce critère de plissement avec un code de calcul implicite. Pour cerner plus précisément l'apparition des plis il utilise une technique de raffinement du maillage couplée au critère de plissement. Ainsi lorsque le plissement est détecté le maillage est raffiné là où les plis commencent à se développer.

Le critère de plissement de Nordlund et Hagbblad (1997) fournit des indications sur l'apparition et la distribution des plis. Ces informations peuvent, par exemple, être utilisées pour interrompre une analyse lorsque les plis apparaissent. Ce critère présente par ailleurs de nombreux avantages : il est indépendant de la modélisation utilisée pour le comportement du matériau et il a été établi sans aucune hypothèse concernant la forme ainsi que la distribution des plis. Ce critère peut, de plus, être introduit dans un code de calcul explicite ou implicite ainsi que le prouvent les études de Nordlund et Hagbblad (1997) et Nordlund (1998).

4.2.2 Critère de plissement de Wang et Cao (2000)

Wang et Cao (2000) établissent une formulation générale d'un critère de plissement basé sur une méthode énergétique. Le critère de plissement développé par Wang et Cao (2000) est établi pour détecter l'apparition de plis sur le brin libre d'un embouti. Cette zone de l'embouti est modélisée par une coque ou une plaque suivant la géométrie du poinçon. Les équations dont découle le critère de plissement sont développées sous les hypothèses de la théorie des

coques et plaques minces (théorie des coques de Donnell-Mushtari-Vlasov). Dans leur analyse, Wang et Cao (2000) emploient la théorie de la déformation puisqu'ils supposent que le chargement est proportionnel avant flambage.

La méthode énergétique utilisée par Wang et Cao (2000) consiste à comparer l'énergie interne d'une plaque ou d'une coque après flambage, ΔU , avec le travail des efforts de membrane dans le plan, ΔT . Si l'énergie interne pour n'importe quelle déflexion supposée est supérieure au travail produit par les efforts de membranes, alors la tôle est supposée dans un état d'équilibre stable. Wang et Cao (2000) écrivent donc la condition de stabilité suivante :

$$\Delta T \leq \Delta U \quad (\text{I-52})$$

Wang et Cao (2000) adoptent une loi de comportement de la forme :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \bar{L}_{\alpha\beta\kappa\gamma} \varepsilon_{\kappa\gamma} \quad (\text{I-53})$$

Les déformations et les efforts résultants pour une coque doublement courbée sont définis par :

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} u_3 \quad K_{\alpha\beta} = -u_{3,\alpha\beta} \quad (\text{I-54})$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 = t \bar{L}_{\alpha\beta\kappa\gamma} E_{\kappa\gamma} \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 = \frac{t^3}{12} \bar{L}_{\alpha\beta\kappa\gamma} K_{\kappa\gamma} \quad (\text{I-55})$$

Wang et Cao (2000) écrivent l'énergie de déformation (I-56) à partir des expressions (I-54) et (I-55) :

$$\Delta U = \int_S (M_{\alpha\beta} dK_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} dE_{\alpha\beta}) dS \quad (\text{I-56})$$

où S est la région du plan moyen de la tôle sur laquelle les plis surviennent. Wang et Cao (2000) posent que le déplacement virtuel u_α ($\alpha = 1, 2$) est égal à 0; de plus, ils utilisent la théorie de la déformation ce qui leur permet d'obtenir l'expression de l'énergie interne sous la forme :

$$\Delta U = \frac{t^3}{24} \int_S \bar{L}_{\alpha\beta\kappa\gamma} u_{3,\kappa\gamma} u_{3,\alpha\beta} dS + \frac{t}{2} \int_S \bar{L}_{\alpha\beta\kappa\gamma} b_{\alpha\beta} b_{\kappa\gamma} u_3^2 dS \quad (\text{I-57})$$

Le travail des efforts extérieurs de membrane agissant sur le plan moyen de la tôle est exprimé par :

$$\Delta T = \frac{1}{2} \int_S (N_{11} u_{3,1}^2 + N_{22} u_{3,2}^2) dS \quad (\text{I-58})$$

Wang et Cao (2000) déterminent alors la contrainte critique de plissement en posant que $\Delta U = \Delta T$ et en choisissant la forme déformée de la tôle qui est en accord avec les conditions aux limites. L'expression de la contrainte critique, déterminée à partir de l'égalité des expressions (I-56) et (I-58), est intégrée dans un code de calcul par éléments finis. Puisqu'à tout instant, au

cours de la simulation, les contraintes principales sont connues à chaque point d'intégration, Wang et Cao (2000) prévoient l'apparition des plis dans les régions libres de tout contact en comparant la valeur de la contrainte critique, calculée à partir de leur modélisation, à la contrainte compressive actuelle appliquée dans la zone du brin libre où est susceptible de se produire le plissement.

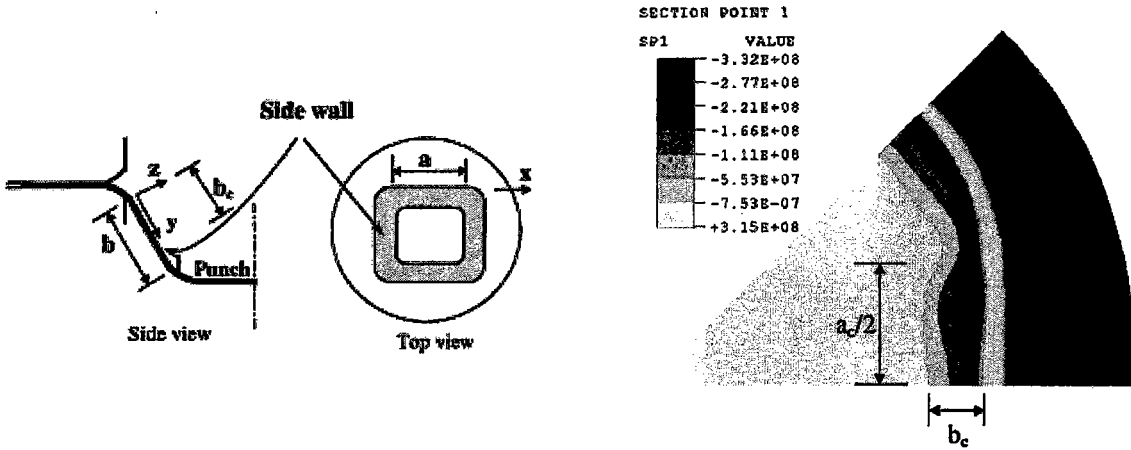


Figure [I-15] : définition par Wang et Cao (2000) de la zone susceptible de développer des plis

Wang et Cao (2000) simulent, avec un code de calcul par éléments finis implicite, différents problèmes d'emboutissage pour illustrer l'application de leur critère de plissement. Les deux exemples présentés ici sont :

- L'emboutissage d'une boîte carrée,
- L'emboutissage d'un godet tronconique.

Dans ces deux exemples, Wang et Cao (2000) examinent la région du brin libre de l'embouti. Pour l'emboutissage d'une boîte carrée, la zone susceptible de développer des plis (figure [I-15]) est modélisée par une plaque rectangulaire dont les 4 côtés sont encastres. La longueur de la plaque, a_c , est égale à la longueur finale, a , de la boîte carrée, tandis que la largeur de la plaque, b_c , est égale à la largeur maximale suivant laquelle s'exercent les contraintes compressives circonférentielles dans la zone du brin libre lors de l'emboutissage.

Wang et Cao (2000) postulent le champ de déplacement transversal associé à la bifurcation :

$$u_3 = \frac{u_3^0}{4} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi}{a_c} x\right) \right) \left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{b_c} y\right) \right) \text{ avec } n, m = 1, 2, \dots \quad (\text{I-59})$$

En introduisant le champ de déplacement (I-59) dans les expressions (I-56) et (I-58), ils obtiennent l'expression de la contrainte critique à partir de l'équation que $\Delta U = \Delta T$. En comparant, à chaque incrément, la contrainte critique, calculée avec leur critère de bifurcation, à la contrainte compressive, obtenue par la simulation par éléments finis, Wang et Cao (2000) déterminent, par exemple, les enfoncements critiques à l'apparition du plissement (figure [I-16]).

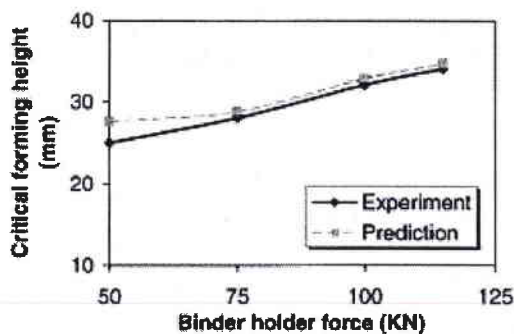


Figure [I-16] : enfoncements critiques en fonction de la force de serrage obtenus par Wang et Cao (2000)

Dans le cas d'un emboutissage de coupelle tronconique, la zone susceptible de développer du plissement est modélisée par Wang et Cao (2000) comme une coque doublement courbée dont les côtés sont encastrés. Wang et Cao (2000) définissent les dimensions de la coque (figure [I-17]), c'est à dire les rayons r_{1c} et r_{2c} dans la zone où s'exercent les contraintes compressives circonférentielles. Ils supposent que la coque a un rayon de courbure infini suivant la direction radiale et un rayon de courbure R_2 suivant la direction circonférentielle.

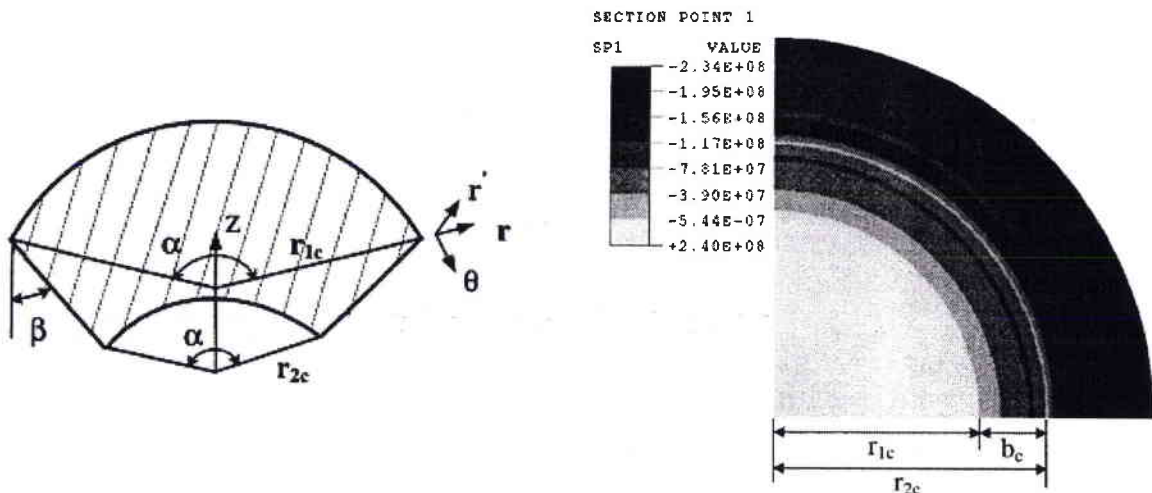


Figure [I-17] : définition par Wang et Cao (2000) de la zone susceptible de développer des plis

Comme pour l'étude du plissement de la boîte carrée, Wang et Cao (2000) définissent à nouveau un champ de déplacement transversal pour déterminer la contrainte critique. Ils considèrent uniquement les modes de plissement symétriques (c'est à dire un nombre de plis pair). Par conséquent le champ de déplacement bifurqué est exprimé sous la forme :

$$u_3 = \frac{u_3^0}{2} \left(\cos(m\theta) \right) \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{r - r_{2c}}{r_{1c} - r_{2c}} \right) \right) \quad (I-60)$$

où θ est la position angulaire et r est le rayon polaire dans le système de coordonnées polaires adopté par Wang et Cao (2000) (figure [I-17]). Comme dans l'exemple précédent, l'expression de la contrainte critique est obtenue à partir de l'équation que $\Delta U = \Delta T$.

4.2.3 Utilisation de la fonctionnelle et du critère de bifurcation de Hill

Tomita et Shindo (1988) étudient l'apparition des plis et le développement du plissement à partir de simulations par éléments finis de l'essai de flambage de Yoshida. Ces auteurs

utilisent une théorie de développement d'un coin (vertex) sur la surface de charge. Pour prévoir l'apparition du plissement dans les simulations par éléments finis, Tomita et Shindo (1988) utilisent le critère de bifurcation de Hill pour les solides élasto-plastiques que nous rappelons ci-dessous :

$$\delta I = 0 \text{ avec } I = \int_V \left(\dot{S}_{ij}^* + \sigma_{ij} v_{i,j}^* \right) v_{i,j}^* dV \quad (\text{I-61})$$

où l'astérisque identifie la différence entre la solution fondamentale et la solution bifurquée, S_{ij} le tenseur de contraintes de Kirchhoff, σ_{ij} le tenseur de contrainte de Cauchy et v_i les vitesses de déplacement.

Tomita et Shindo (1988) supposent dans leur étude que la solution bifurquée est une solution du type flexion hors plan. Ils notent la différence de vitesse entre la solution fondamentale et la solution bifurquée par $\mathbf{v}^*$, et expriment le vecteur $\mathbf{v}^*$ à l'aide de la théorie des plaques minces de Mindlin. Les coordonnées du vecteur $\mathbf{v}^*$ sont exprimées à partir du déplacement transversal w et des rotations suivants les axes x et y du plan moyen de la plaque, notées par ω_x^* et ω_y^* . Le vecteur $\mathbf{v}^*$ s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{v}^* = \begin{pmatrix} v_x^* & v_y^* & v_z^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -z\omega_x^* & -z\omega_y^* & w^* \end{pmatrix}^T \quad (\text{I-62})$$

Lorsque la plaque se déforme en contraintes planes, Tomita et Shindo (1988) obtiennent la solution fondamentale à partir de la méthode des éléments finis et de la loi de comportement du matériau. Ils utilisent la condition (I-61) pour définir la bifurcation. Leur analyse est complétée par des études où est introduit un défaut de forme (gonflement initial), similaire au mode de flambement détecté. La croissance rapide du défaut sert à définir une borne inférieure pour l'apparition du plissement.

4.2.4 Utilisation de la méthode incrémentale de Riks (1979)

Kim et al (2000) ont étudié le plissement dans le cas de l'emboutissage d'une tôle par un poinçon hémisphérique. Le but de leur analyse est de déterminer l'apparition du plissement et d'étudier la croissance des plis au cours de l'emboutissage. Pour ce faire, Kim et al (2000) utilisent l'approche incrémentale développée par Riks (1979).

Les travaux initiaux de Riks (1979) portent sur l'étude de la stabilité élastique des structures. Ces travaux s'appuient sur l'hypothèse que l'intensité des différents chargements est proportionnelle à un seul paramètre. Riks (1979) se concentre sur la détermination des états d'équilibre critiques (points de bifurcation, points limites) et le calcul des chemins solutions après ces états d'équilibre critiques. Les deux cas étudiés par Riks (1979) sont présentés sur la figure [I-18].

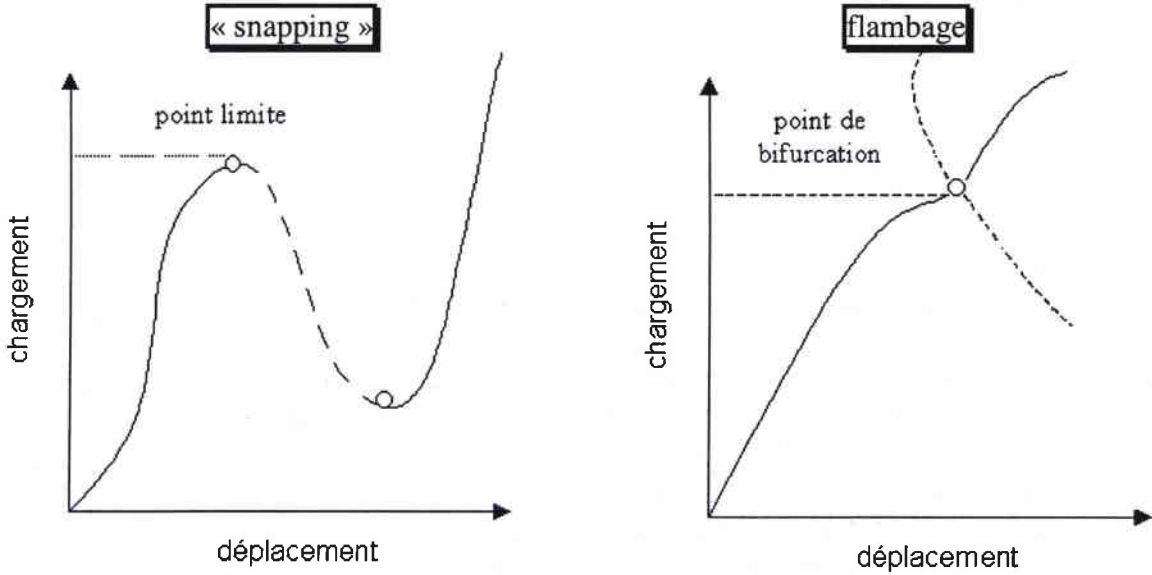


Figure [I-18] : présentation des types de problèmes étudiés par Riks (1979)

L'étude d'un problème de stabilité à partir de la méthode des éléments finis implique la résolution de grands systèmes d'équations non linéaires. Deux méthodes ont été développées pour déterminer les solutions à ces systèmes d'équations : la méthode des perturbations et, plus récemment, grâce à l'évolution des outils informatiques, la méthode incrémentale (consistant à résoudre les équations pas à pas). Dans un problème où il se produit une bifurcation, la matrice de rigidité devient singulière au point de bifurcation et la recherche de solutions par la méthode de Newton-Raphson ne peut être menée. Riks (1979) développe donc une méthode incrémentale qui permet de détecter les états d'équilibre critiques et de déterminer le chemin de la solution bifurquée.

La variation de l'énergie potentielle totale $\Delta\Pi$ due à une variation admissible du déplacement $\delta\mathbf{u}$ s'écrit pour un système conservatif :

$$\Delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \frac{\partial\Pi}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j + \dots \quad (\text{I-63})$$

Pour un état d'équilibre, la première variation de l'énergie potentielle est nulle et la seconde variation de l'énergie potentielle totale est définie positive lorsque cet état d'équilibre est stable. Les deux conditions énoncées ci-dessus s'écrivent :

$$\frac{\partial\Pi}{\partial u_i} \delta u_i = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2\Pi}{\partial u_i \partial u_j} \delta u_i \delta u_j = K_{ij} \delta u_i \delta u_j > 0 \quad (\text{I-64})$$

où K_{ij} définit la rigidité tangente. La limite de stabilité est atteinte à un point où la rigidité tangente cesse d'être définie positive, ce qui se traduit donc par :

$$\det[\mathbf{K}] = 0 \quad (\text{I-65})$$

Lorsque l'état critique est atteint, nous sommes soit en présence d'un point limite, soit en présence d'un point de bifurcation. Riks (1979) écrit les conditions qui permettent de définir

un point limite et un point de bifurcation à partir de l'étude du comportement de la solution au voisinage de l'état critique. Kim et al (2000) s'intéressent aux points de bifurcation puisqu'ils étudient le plissement.

La solution bifurquée parcourt un deuxième chemin solution qui est différent du premier chemin correspondant à la solution fondamentale. La méthode incrémentale développée par Riks (1979) permet de déterminer cette seconde branche solution. Kim et al (2000) posent, en accord avec les travaux de Riks (1979), une prédiction de l'incrément de déplacement nodal le long du second chemin solution de la forme :

$$\Delta \mathbf{u}^s = a(\Delta \mathbf{u}^p + b\mathbf{v}) \quad (\text{I-66})$$

où a et b sont des constantes positives à déterminer, $\mathbf{v}$ un vecteur propre au point de bifurcation que Kim et al (2000) calculent à partir de l'équation (I-67).

$$[\mathbf{K}]\mathbf{v} = 0 \quad (\text{I-67})$$

Kim et al (2000) déterminent la constante a de manière à minimiser l'énergie de déformation totale. La constante b , quant à elle, est déterminée à partir de la condition que le second chemin solution est orthogonal au premier. Kim et al (2000) posent donc que :

$$\Delta \mathbf{u}^p \Delta \mathbf{u}^s = 0 \text{ donc } b = -\frac{\Delta \mathbf{u}^p \Delta \mathbf{u}^p}{\Delta \mathbf{u}^p \mathbf{v}} \quad (\text{I-68})$$

si $\mathbf{v}$ est orthogonal au premier chemin solution, comme c'est le cas dans la plupart des problèmes de bifurcation, alors la constante b ne peut être calculée. Kim et al (2000) ont donc posé :

$$\Delta \mathbf{u}^s = a \mathbf{v} \quad (\text{I-69})$$

L'approximation (I-69) n'a pas beaucoup d'importance puisque Kim et al (2000) se concentrent uniquement sur la solution postbifurcation, et non au point de bifurcation. La prédiction (I-69) de l'incrément de déplacement nodal est donc utilisée par Kim et al (2000) comme incrément de départ pour une résolution de type Newton suivant la branche de la solution bifurquée.

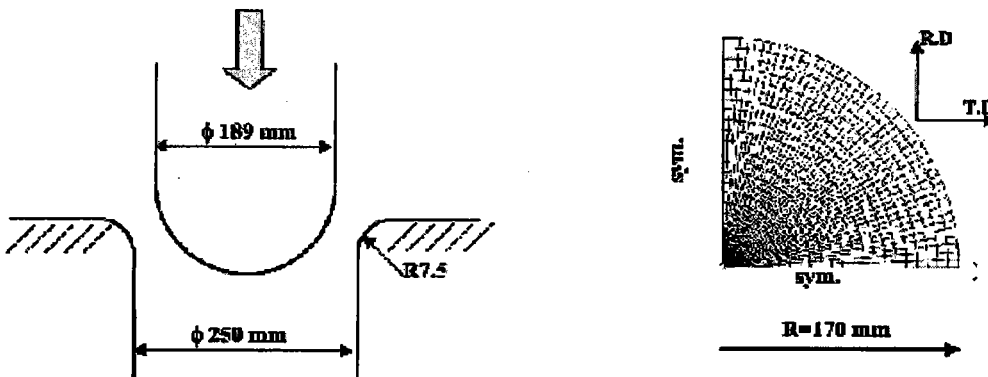


Figure [I-19] : outils et maillage utilisés par Kim et al (2000)

La géométrie de l'essai d'emboutissage par un poinçon hémisphérique, utilisée par Kim et al (2000), est présentée sur la figure [I-19]. L'élément de coque utilisé pour modéliser le flan est un élément de coque à 4 nœuds employé pour des coques soumises à de grandes déformations et de grandes rotations. Cet élément, appelé « Continuum Based Resultant shell element » (CBR shell element), est présenté plus en détail dans les travaux de Kim et al (2000).

La tôle a une épaisseur de 0,9144 mm et est composée d'un alliage d'aluminium A6114-T4 dont les caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau [I-1].

Tableau [I-1] : caractéristiques mécaniques du matériau employé par Kim et al (2000)

Limite d'élasticité	Module d'Young E	Coefficient de Poisson ν	R_0	R_{45}	R_{90}
185,92 MPa	69 GPa	0,330	0,832	0,861	1,422

Pour des raisons de symétrie ainsi que pour réduire le temps de calcul, Kim et al (2000) modélisent un quart du flan seulement. Ils étudient ensuite l'influence de l'anisotropie sur le plissement, en modélisant le comportement anisotrope du matériau à partir de deux modèles de plasticité : celui de Hill (1948) et celui de Barlat et al (1991).

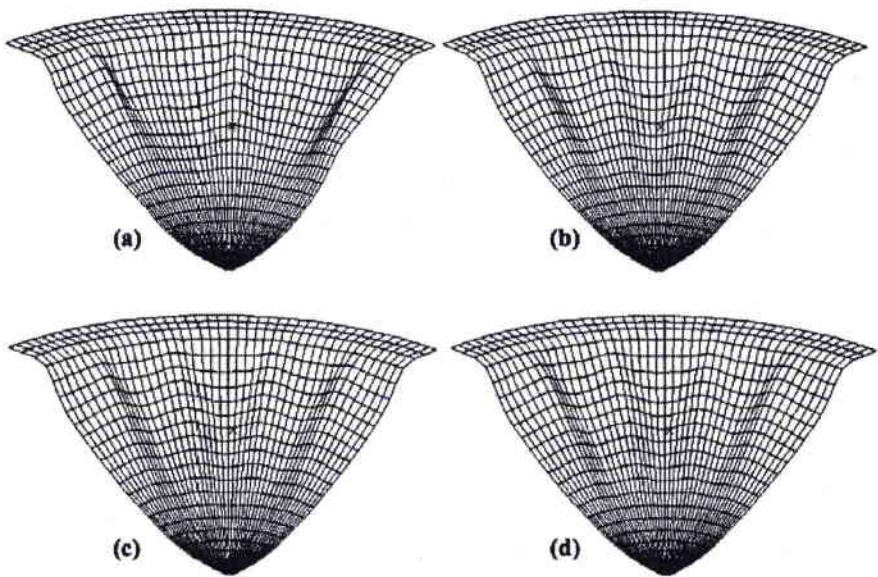


Figure [I-20] : nombre de plis pour un enfoncement de 80 mm (Kim et al (2000)) en fonction de la valeur du coefficient de Lankford : (a) $R = 0,6$; (b) $R = 1$; (c) $R = 1,5$; (d) $R = 2$

Kim et al (2000) déterminent à partir de simulations par éléments finis (exemple de résultats figure [I-20]), pour un enfoncement et pour une valeur du rayon du flan, la différence entre la valeur du rayon radial et la valeur du rayon radial moyen à chaque nœud. Ils tracent ensuite la variation de cette différence en fonction de l'angle polaire définissant la position du nœud. Ils parviennent ainsi aux profils de plissement présentés sur les figures [I-21, I-22].

Kim et al (2000) concluent donc que l'amplitude des plis est plus faible lorsque la valeur du coefficient de Lankford R est faible. Pour un coefficient de Lankford R égal à 0,6 ils trouvent que le nombre de plis est constant au cours de l'emboutissage tandis que pour les valeurs de R égales à 1,0, 1,5 et 2,0 le nombre de plis augmente au cours de l'enfoncement du poinçon. Le changement du nombre de plis intervient plus facilement lorsque le coefficient R est égal à 1.

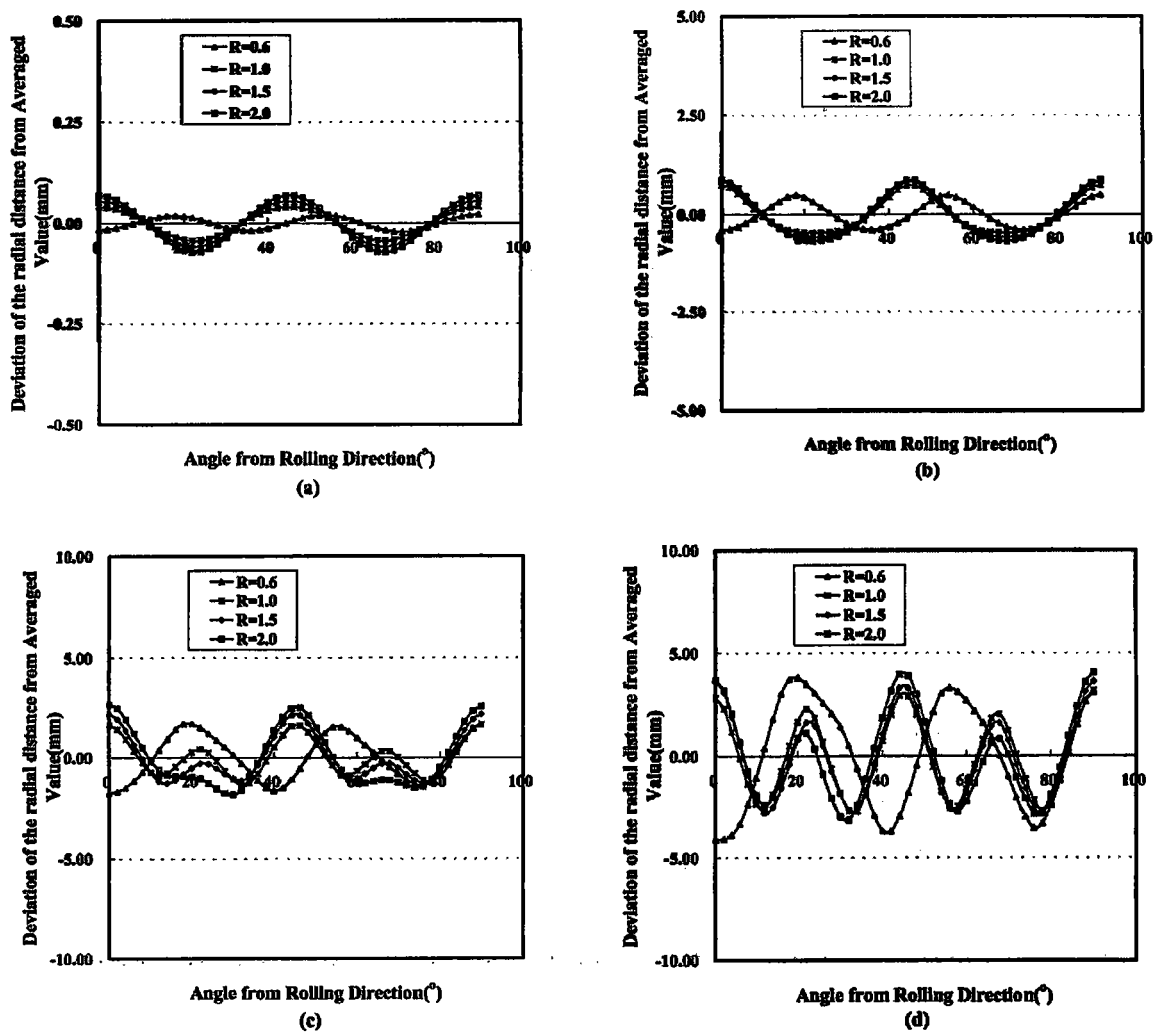
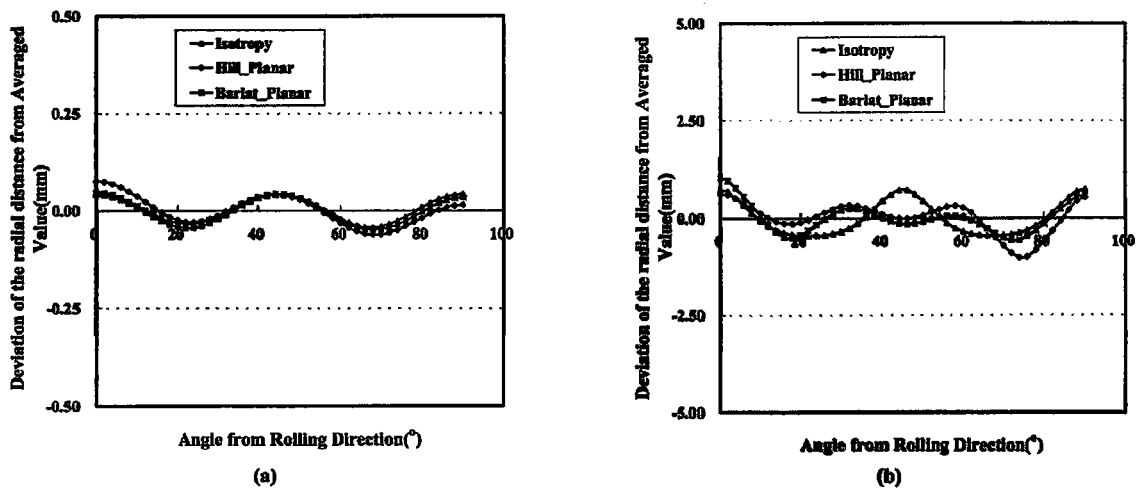


Figure [I-21] : profil du plissement pour différentes valeurs du coefficient de Lankford R
Pour un enfoncement (a) de 15 mm, (b) de 30 mm, (c) de 50 mm et (d) de 80 mm (Kim et al (2000))

Kim et al (2000) obtiennent, figure [I-22], que le plissement se développe avec un nombre de plis plus faible pour des matériaux anisotropes transverses que pour des matériaux isotropes. Ils attribuent ceci au fait que l'anisotropie transverse joue le rôle d'imperfection et que par conséquent le plissement débute plus facilement avec un nombre de plis plus faible en anisotropie plane par rapport à l'isotropie.



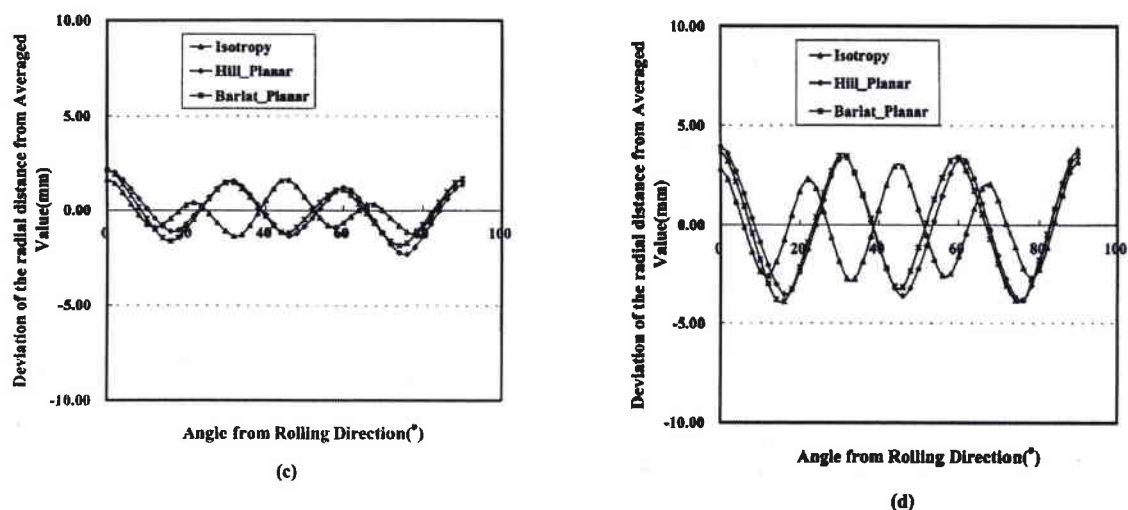


Figure [I-22] : profil du plissement pour différents modèles de plasticité
Pour un enfoncement (a) de 15 mm, (b) de 30 mm, (c) de 50 mm et (d) de 80 mm (Kim et al (2000))

4.3 Visualisation directe du plissement

Nous avons vu dans les paragraphes précédents différentes techniques mises en œuvre pour prévoir l'apparition de plis dans les simulations numériques des procédés d'emboutissage. Mais plusieurs études montrent qu'il est possible de visualiser la formation de plis avec des codes de calcul par éléments finis, sans introduire de critère ou de méthode de détection particulière.

Proubet (1994) semble être parmi les premiers à utiliser des simulations par éléments finis pour prévoir l'apparition du plissement. Son étude a pour but de déterminer la formation des plis à l'aide de simulations tridimensionnelles d'une opération d'emboutissage de coupelles tronconiques. Il obtient avec un code de calcul par éléments finis de type dynamique explicite (*OPTRIS*) des résultats en accord avec les expériences réalisées par Havranek (1977).

Traversin et Kergen (1995), avec le même code de calcul, montrent aussi que des plis se forment sur la collerette de l'embouti lorsque la force de serrage du serre-flan est insuffisante. Ils obtiennent des prévisions en accord avec les résultats expérimentaux et concluent, comme Proubet (1994), que le code calcul est capable de prévoir la formation de plis au cours d'une opération d'emboutissage.



Figure [I-23] : visualisation du plissement obtenu par Traversin et Kergen (1995)

Les simulations réalisées par Proubet (1994) et Traversin et Kergen (1995) sont réalisées avec des codes de calcul employant la technique d'intégration explicite.

Certains chercheurs affirment qu'il est impossible de visualiser l'apparition du plissement avec un code de calcul implicite. Récemment Hematian et Wild (2000) montrent que, en simulant une opération d'emboutissage avec un code de calcul implicite (logiciel commercial *MARC*), le plissement apparaît durant la simulation sur le brin libre de l'embouti. Mais, par contre, ils montrent aussi que, lorsque le chargement est dans le plan de la tôle, comme dans le cas de la collerette de l'embouti, le plissement ne survient pas durant la simulation du procédé. Pour pouvoir visualiser l'apparition de plis sur la collerette de l'embouti, Hematian et Wild (2000) introduisent alors des défauts pour que le code de calcul génère des plis.

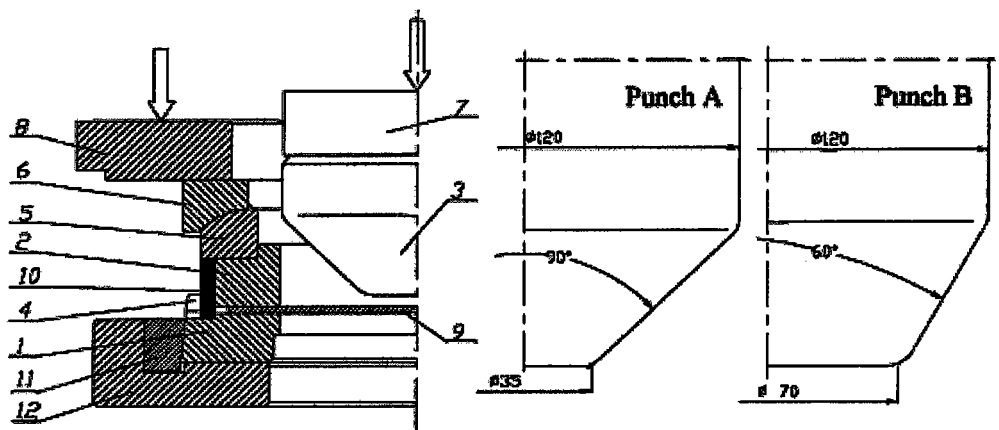


Figure [I-24] : expérience d'emboutissage de coupelle proposée par Kawka et al (2001)

Enfin, Kawka et al (2001) présentent une expérience d'emboutissage de coupelle tronconique (figure [I-24]) afin de comparer les résultats expérimentaux aux résultats obtenus avec deux codes de calcul par éléments finis différents. Le plissement se produit expérimentalement sur le brin libre de l'embouti. Les codes de calcul utilisés sont *ABAQUS/Explicit* (analyse de type dynamique explicite) et *ITAS3D* (analyse de type statique explicite). Kawka et al (2001) comparent l'influence du type de maillage du flan sur le résultat des simulations. Le matériau est supposé orthotrope et modélisé avec le critère quadratique de Hill (1948).

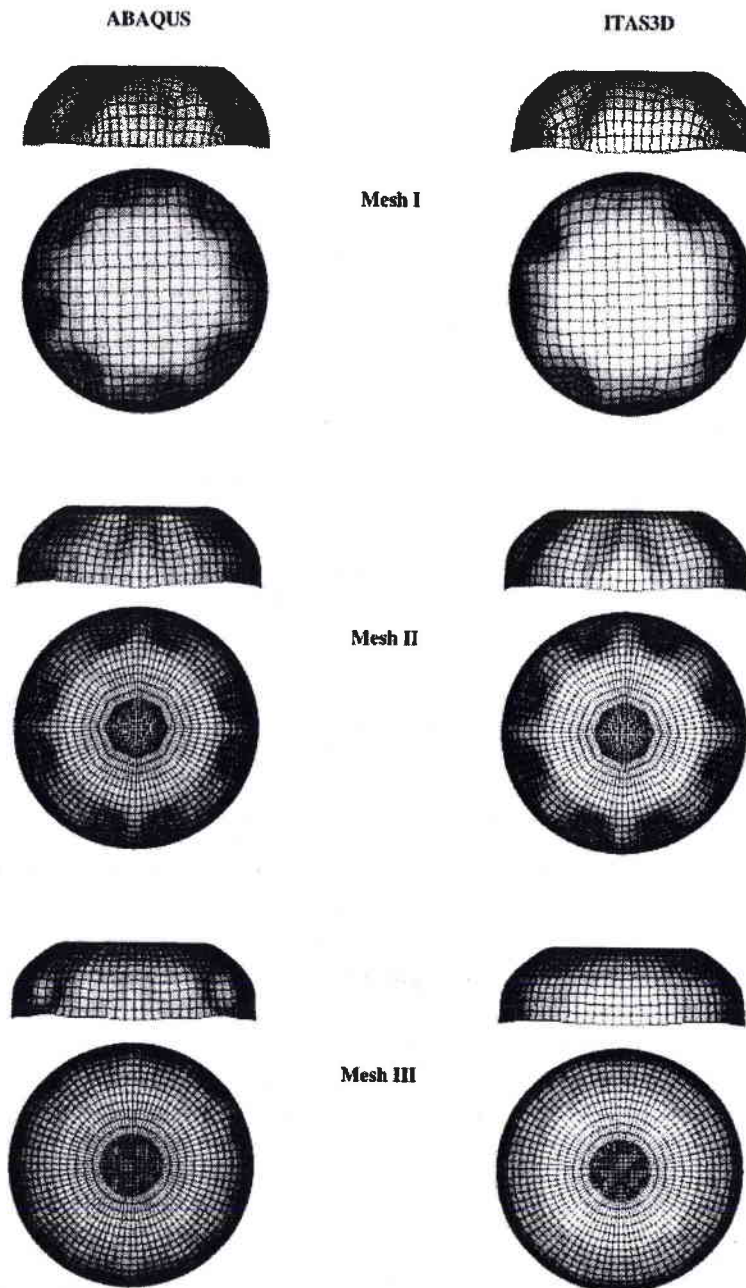


Figure [I-25] : résultats des simulations réalisées par Kawka et al (2001)

De leurs travaux, Kawka et al (2001) concluent que les résultats obtenus par éléments finis sont très sensibles au maillage employé pour modéliser le flan (figure [I-25]). De plus les codes testés par Kawka et al (2001) prévoient, dans les mêmes conditions d'essai, des résultats différents concernant les caractéristiques du plissement, telle que le nombre, la distribution et la forme des plis (figure [I-26]). Les travaux de Kawka et al (2001) montrent également que les simulations par éléments finis constituent un outil à manipuler avec précaution quant aux résultats qu'ils fournissent.

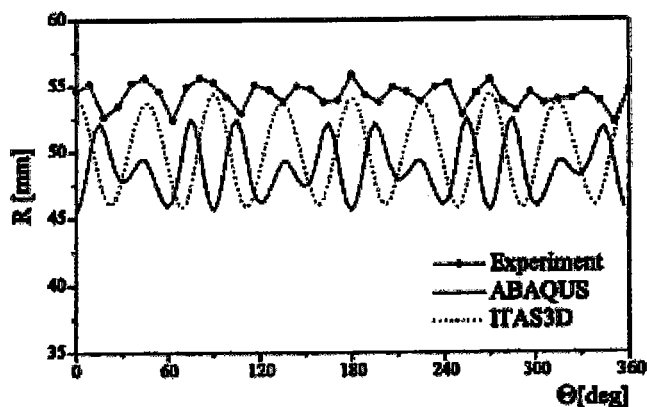


Figure [I-26] : comparaison entre résultats expérimentaux et simulations d'après Kawka et al (2001)

5 Conclusion

Ces dernières années de nombreux travaux ont été publiés sur les phénomènes de plissement en emboutissage. Les travaux expérimentaux ont permis dans un premier temps d'isoler les différents paramètres, concernant le matériau et la géométrie, influant sur l'apparition et le développement du plissement. Mais ces essais ne sont que des représentations de cas particuliers de sollicitations et de géométries. Les résultats issus de ces expériences ne peuvent être totalement transposés à des situations réelles d'emboutissage.

Parallèlement aux études expérimentales, des études analytiques ont été développées. Ces études sont généralement des études locales qui ont permis de poser le concept de courbes limites de plissement (Neale et Tugçü (1990)). Les courbes limites de plissement sont obtenues à partir d'un critère de bifurcation pour le flambage plastique des coques (Hutchinson (1974)). Néanmoins le concept de courbe limite de plissement n'a pas été appliqué à des cas concrets d'emboutissage.

Les simulations par éléments finis sont devenues un outil essentiel dans la conception des gammes et outils d'emboutissage. Il semble qu'elles permettent de visualiser les phénomènes de plissement dans des opérations d'emboutissage (Hematian et Wild (2000)). Mais la prédictivité des simulations éléments finis est influencée par de nombreux paramètres tels que le maillage, le type de code employé, etc..

Chapitre 2:

Etude du plissement d'une plaque orthotrope

Table des matières

1. INTRODUCTION	45
2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME	45
3. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES CRITIQUES DE PLISSEMENT	47
3.1. Détermination des équations de plissement	47
3.2. Plissement dans une seule direction	48
4. MODÉLISATION DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE	49
4.1. Equations de base	49
4.2. Détermination du module tangent	50
4.2.1. Théorie de l'écoulement	50
4.2.2. Théorie de la déformation	51
4.2.3. Cas d'un état de contraintes planes	52
4.3. Présentation du modèle de plasticité	53
5. ANALYSE DES RÉSULTATS	56
5.1. Caractéristiques d'anisotropie des matériaux étudiés	56
5.1.1. Matériaux isotropes	56
5.1.2. Matériaux à anisotropie normale	57
5.1.3. Matériaux à anisotropie transverse	58
5.2. Cas de la compression uniaxiale	59
5.2.1. Matériaux isotropes	60
5.2.2. Matériaux à anisotropie normale	63
5.2.3. Matériaux à anisotropie transverse	65
5.2.4. Bilan des résultats	68
5.3. Cas général $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$	68
5.3.1. Matériaux isotropes	70
5.3.2. Matériaux à anisotropie normale	71
5.3.3. Matériaux à anisotropie transverse	73
6. CONCLUSION	74

1. Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les études analytiques visant à définir l'apparition du plissement pouvaient s'appuyer sur un critère de bifurcation ou sur les équations d'équilibre. Comme pour le problème de striction, où les déformations limites sont généralement présentées sous la forme de courbes limites de formage dans le plan des déformations principales, il est possible de définir des courbes limites de plissement (Neale et Tugçü (1990)). Ces courbes limites de plissement sont représentées dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2).

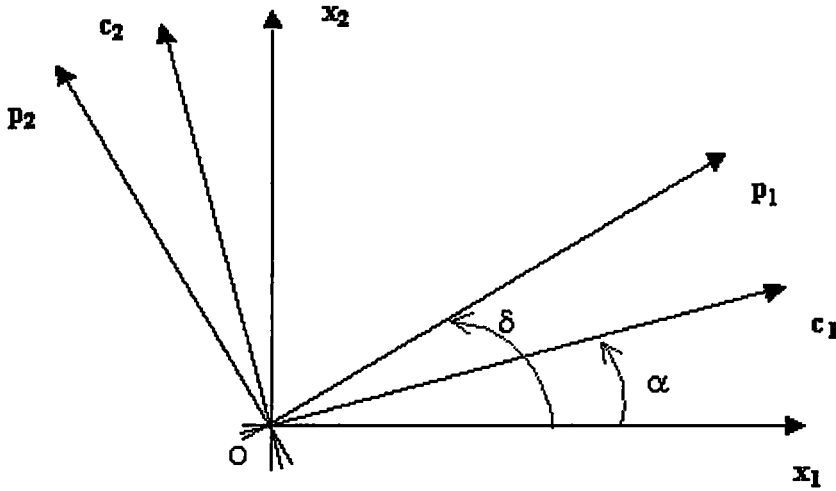
L'objectif de ce chapitre est d'analyser, par l'intermédiaire des courbes limites de plissement, l'influence de l'anisotropie plastique sur l'apparition du plissement des plaques. Nous avons choisi de développer une analyse du plissement plastique des plaques orthotropes à partir de l'équation d'équilibre d'une plaque exprimée en fonction du déplacement transversal u_3 . Cette analyse peut être appliquée à n'importe quelle forme analytique de la surface de charge. Nous avons choisi le modèle proposé par Ferron et al (1994), qui permet de modéliser des matériaux isotropes, à anisotropie normale et à anisotropie transverse. Nous avons déterminé ainsi l'expression de la contrainte critique de plissement, puis, nous avons tracé, pour différents matériaux modèles, des courbes limites de plissement dans le plan des contraintes principales.

2. Présentation du problème

Le domaine étudié est une portion de plaque d'épaisseur h . Cette plaque est constituée d'un matériau qui possède un comportement élasto-plastique. Le comportement élastique est supposé isotrope et le comportement plastique est décrit par la fonction de charge f . Cette fonction f , dans le cas le plus général, sera supposée correspondre à un matériau orthotrope. Par conséquent, nous pouvons définir les axes d'orthotropie de ce matériau ; ce système d'axes sera noté (x_1, x_2, x_3). L'axe x_3 correspond à la direction normale au plan de la tôle.

Les différents systèmes d'axes utiles sont présentés sur la figure [II-1]. La plaque est sollicitée en contraintes planes. Les directions principales de contraintes dans le plan de la plaque sont notées c_1 et c_2 ; elles sont inclinées d'un angle α par rapport aux directions d'orthotropie x_1 et x_2 . Les directions de plissement p_1 et p_2 sont inclinées d'un angle δ par rapport à x_1 et x_2 .

Les contraintes principales sont notées σ_1 et σ_2 , tandis que les composantes de contraintes dans les axes (p_1, p_2) sont notées ($\sigma_{11}^\delta, \sigma_{22}^\delta, \sigma_{12}^\delta$) (figure [II-2]). Les composantes dans les axes d'orthotropie sont notées ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$).



Figure[II-1] : Présentation des différents systèmes d'axes
 α : angle entre l'axe d'orthotropie x_1 et l'axe principal de contrainte c_1
 δ : angle entre l'axe d'orthotropie x_1 et l'axe de plissement p_1 .

Nous définissons la position du point courant P du plan moyen par le vecteur $\overrightarrow{OP}$. Ce vecteur sera exprimé, selon les besoins, par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 \\ \overrightarrow{OP} &= c_1 \mathbf{c}_1 + c_2 \mathbf{c}_2 \\ \overrightarrow{OP} &= p_1 \mathbf{p}_1 + p_2 \mathbf{p}_2\end{aligned}\tag{II-1}$$

où (x_1, x_2) , (c_1, c_2) et (p_1, p_2) sont les coordonnées du point P, respectivement, dans les repères $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $(O, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ et $(O, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.

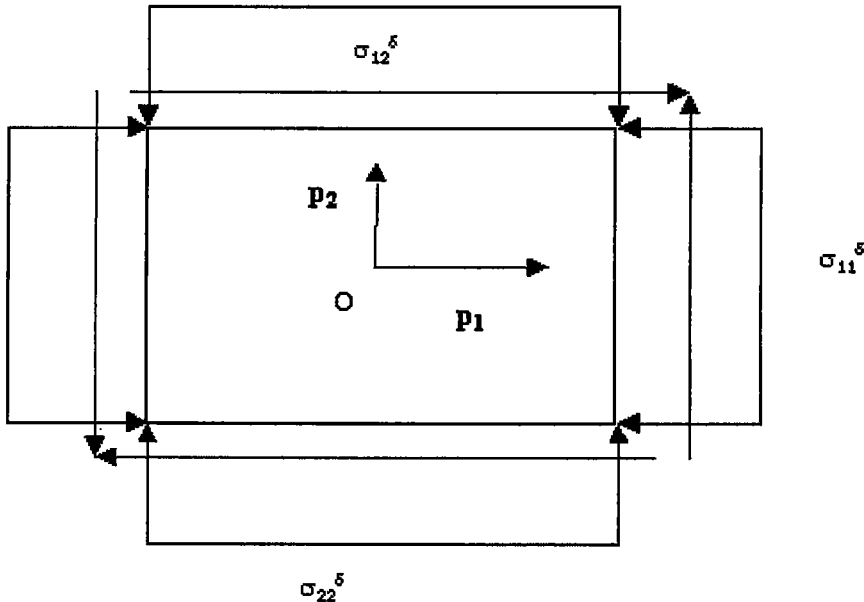


Figure [II-2] : Chargement imposé à la plaque étudiée.

Nous supposons que lorsque la plaque étudiée a atteint un niveau de chargement critique, le plissement survient suivant le système d'axes $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Nous ne tenons pas compte des conditions aux limites imposées sur le domaine étudié, ce qui revient à supposer que les

longueurs d'ondes sont petites par rapport aux dimensions de la plaque. Notre travail consistera donc en une étude locale de l'apparition du plissement.

3. Détermination des contraintes critiques de plissement

3.1. Détermination des équations de plissement

Nous partons de l'équation (II-2) exprimant l'équilibre d'une plaque pour un état de contraintes planes. Cette équation fait intervenir les composantes de rigidité L_{ij} et les dérivées partielles du champ de déplacement transversal u_3 par rapport aux coordonnées dans le plan :

$$\frac{h^3}{12} [L_{11}u_{3,1111} + 2(L_{16} + L_{61})u_{3,1112} + (L_{12} + L_{21} + 4L_{66})u_{3,1122} + 2(L_{26} + L_{62})u_{3,1222} + L_{22}u_{3,2222}] = h[\sigma_{11}u_{3,11} + \sigma_{22}u_{3,22} + 2\sigma_{12}u_{3,12}] \quad (\text{II-2})$$

Nous postulons un champ de déplacement transversal incrémental u_3 correspondant à la solution bifurquée de la forme :

$$u_3 = u_{30} \cos\left(\frac{2m\pi}{a} p_1\right) \cos\left(\frac{2n\pi}{b} p_2\right) \quad (\text{II-3})$$

Les nombres entiers m et n représentent les nombres d'ondes suivant les directions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$ respectivement ; pour une plaque de dimensions a selon la direction $\mathbf{p}_1$ et b selon la direction $\mathbf{p}_2$. u_{30} représente l'amplitude du déplacement transversal u_3 .

Le système d'axes le plus approprié pour exploiter l'équation (II-2), correspond aux axes de plissement ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$). L'équation d'équilibre (II-2) s'exprime alors :

$$\frac{h^3}{12} [L_{11}^\delta u_{3,1111} + 2(L_{16}^\delta + L_{61}^\delta)u_{3,1112} + (L_{12}^\delta + L_{21}^\delta + 4L_{66}^\delta)u_{3,1122} + 2(L_{26}^\delta + L_{62}^\delta)u_{3,1222} + L_{22}^\delta u_{3,2222}] = h[\sigma_{11}^\delta u_{3,11} + \sigma_{22}^\delta u_{3,22} + 2\sigma_{12}^\delta u_{3,12}] \quad (\text{II-4})$$

où L_{ij}^δ désignent les composantes de rigidité exprimées dans les axes de plissement ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$), et où le champ u_3 est défini par (II-3). Les dérivées partielles sont prises par rapport aux coordonnées p_1 , p_2 .

En calculant les différentes dérivées partielles du déplacement transversal u_3 nous observons que l'équation d'équilibre conduit, par identification des termes en $\cos\left[\frac{2m\pi}{a} p_1\right] \cos\left[\frac{2n\pi}{b} p_2\right]$ d'une part et en $\sin\left[\frac{2m\pi}{a} p_1\right] \sin\left[\frac{2n\pi}{b} p_2\right]$ d'autre part, à deux équations qui devraient être vérifiées simultanément.

La première équation s'écrit :

$$\frac{h^3}{3} \left[L_{11}^{\delta} m^4 + (L_{12}^{\delta} + L_{21}^{\delta} + 4L_{66}^{\delta}) m^2 n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 + L_{22}^{\delta} n^4 \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right] = -h \left[\sigma_{11}^{\delta} m^2 + \sigma_{22}^{\delta} n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (\text{II-5})$$

Lorsque les nombres d'ondes m et n sont tous deux différents de zéro, la deuxième équation s'écrit :

$$\frac{h^3}{3} \left[(L_{16}^{\delta} + L_{61}^{\delta}) m^2 + (L_{62}^{\delta} + L_{26}^{\delta}) n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] = h a^2 \sigma_{12}^{\delta} \quad (\text{II-6})$$

Le champ de déplacement transversal postulé peut ne pas être satisfaisant si les deux équations (II-5) et (II-6) ne sont pas vérifiées simultanément. Toutefois nous limitons notre étude au cas du plissement dans une seule direction, ce qui correspond aux situations couramment rencontrées dans la pratique. La solution bifurquée supposée conduit alors de façon exacte à la définition d'un état de contrainte critique.

3.2. Plissement dans une seule direction

L'hypothèse de plissement suivant une direction se traduit par la condition que l'un des nombre d'ondes m ou n doit être nul. Par conséquent le plissement se produira uniquement suivant $\mathbf{p}_1$ ou $\mathbf{p}_2$. Dans cette étude nous choisirons le nombre d'ondes n égal à zéro, ce qui correspond à un plissement selon la direction notée $\mathbf{p}_1$. Une seule équation subsiste alors. Elle correspond à l'équation (II-5) où le nombre d'ondes n est nul. Dans ces conditions cette équation s'écrit :

$$-\frac{h^2}{3} L_{11}^{\delta} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 = \sigma_{11}^{\delta} \quad (\text{II-7})$$

Nous exprimons maintenant les résultats dans les axes principaux de contraintes ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$). La contrainte σ_{11}^{δ} s'exprime alors en fonction des contraintes principales σ_1 et σ_2 :

$$\sigma_{11}^{\delta} = \sigma_1 \cos^2 \gamma + \sigma_2 \sin^2 \gamma \quad (\text{II-8})$$

où $\gamma = \delta - \alpha$ définit l'orientation des axes de plissement ($\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$) par rapport aux axes principaux de contraintes ($\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$) (figure [II-1]). En injectant la relation (II-8) dans (II-7), nous obtenons l'expression de la contrainte critique de plissement :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \frac{L_{11}^{\delta}}{\cos^2(\delta - \alpha) + R_{\sigma} \sin^2(\delta - \alpha)} \quad (\text{II-9})$$

où $R_{\sigma} = \sigma_2 / \sigma_1$ est le rapport des contraintes principales.

Dans le cas particulier d'une compression uniaxiale suivant l'axe principal de contrainte c_1 , le rapport des contraintes R_σ est nul et l'expression (II-9) de la contrainte principale critique de plissement se simplifie :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{3} \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \frac{L_{11}^\delta}{\cos^2(\delta - \alpha)} \quad (\text{II-10})$$

Dans cette étude le rapport géométrique de l'épaisseur h par la longueur d'onde (a/m) a été fixé à 1/20. Cette valeur correspond à la longueur d'onde observée expérimentalement sur la collerette d'un embouti tronconique profond (Ellagoune et Boivin (1988)).

4. Modélisation du comportement élasto-plastique

La résolution de l'équation (II-10), donnant la contrainte critique de plissement, nécessite que, dans un premier temps, les composantes de rigidité incrémentales dans les axes d'orthotropie soient déterminées. Nous présentons, dans ce paragraphe, la méthode de détermination de ces composantes dans le cas général tridimensionnel puis dans le cas d'un état de contraintes planes. Nous envisagerons successivement un matériau obéissant à la théorie de l'écoulement et à la théorie de la déformation. Nous présenterons ensuite le modèle de comportement plastique orthotrope utilisé.

4.1. Equations de base

Le matériau qui constitue le système étudié est supposé posséder un comportement élasto-plastique. Celui-ci est décrit par les composantes L_{ijkl} du tenseur de rigidité qui relie les vitesses de contrainte $\dot{\sigma}_{ij}$ aux vitesses de déformation totale $\dot{\epsilon}_{kl}$:

$$\dot{\sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{II-11})$$

Pour de petites déformations élastiques, les vitesses de déformation totale $\dot{\epsilon}_{kl}$ se décomposent de façon additive en vitesses de déformation élastique $\dot{\epsilon}_{kl}^e$ et en vitesses de déformation plastique $\dot{\epsilon}_{kl}^p$:

$$\dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{kl}^e + \dot{\epsilon}_{kl}^p \quad (\text{II-12})$$

Les vitesses de déformation élastique $\dot{\epsilon}_{kl}^e$ sont reliées linéairement aux vitesses de contrainte $\dot{\sigma}_{mn}$ par le tenseur des complaisances élastiques S^e :

$$\dot{\epsilon}_{kl}^e = S_{klmn}^e \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{II-13})$$

Nous supposons que le matériau s'écrouit de manière isotrope. Par conséquent, la fonction de charge f peut s'exprimer sous la forme :

$$f = F(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma} \quad (\text{II-14})$$

où $\bar{\sigma}$ désigne la contrainte équivalente et où F est une fonction homogène des contraintes σ_{ij} de degré 1. La sollicitation étant supposée élasto-plastique au cours du chargement, la relation de consistance selon laquelle l'état de contrainte reste à chaque instant sur la surface de charge ($\dot{f} = 0$) conduit à :

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\sigma}_{ij} - \dot{\bar{\sigma}} = 0 \quad (\text{II-15})$$

4.2. Détermination du module tangent

4.2.1. Théorie de l'écoulement

Dans le cadre de la théorie de l'écoulement, le principe du travail maximum conduit à la règle de normalité définissant les vitesses de déformation plastique $\dot{\epsilon}_{kl}^p$:

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \quad (\text{II-16})$$

Compte tenu de la présentation choisie pour la fonction de charge (équation (II-14)), le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ s'identifie à la vitesse de déformation plastique équivalente $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ conjuguée de $\bar{\sigma}$. Les vitesses de déformation plastique s'expriment alors par :

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \dot{\bar{\epsilon}}^p F_{,kl} \quad (\text{II-17})$$

où la notation abrégée $F_{,kl} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}$ est utilisée. En introduisant le module plastique tangent H_t , défini par la relation :

$$H_t = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^p} = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\dot{\bar{\epsilon}}^p} \quad (\text{II-18})$$

et en utilisant les relations (II-17) et (II-18), les vitesses de déformation plastique deviennent :

$$\dot{\epsilon}_{kl}^p = \frac{1}{H_t} \cdot F_{,kl} \cdot F_{,mn} \cdot \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{II-19})$$

Nous déduisons de la propriété d'additivité (II-12) l'expression des vitesses de déformation totale :

$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \left(S_{klmn}^e + \frac{1}{H_t} F_{,kl} F_{,mn} \right) \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{II-20})$$

Le terme entre parenthèses définit les complaisances élasto-plastiques S_{klmn} :

$$S_{klmn} = S_{klmn}^e + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,kl} \cdot F_{,mn} \quad (\text{II-21})$$

4.2.2. Théorie de la déformation

La théorie de la déformation utilise les déformations plastiques obtenues sous forme intégrée :

$$\varepsilon_{kl}^p = \bar{\varepsilon}^p \cdot F_{,kl} \quad (\text{II-22})$$

où $\bar{\varepsilon}^p$ est la déformation plastique cumulée. Les vitesses de déformation plastique sont alors obtenues en dérivant (II-22) par rapport au temps, ce qui nous donne :

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \dot{\bar{\varepsilon}}^p F_{,kl} + \bar{\varepsilon}^p F_{,klmn} \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{II-23})$$

où $F_{,klmn} = \frac{\partial^2 F}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{mn}}$. En utilisant le module plastique sécant H_s défini par la relation suivante :

$$H_s = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}^p} \quad (\text{II-24})$$

et le module plastique tangent H_t défini précédemment (relation (II-18)), les vitesses de déformation plastique s'expriment alors sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^p = \frac{1}{H_t} \cdot F_{,kl} \cdot F_{,mn} \cdot \dot{\sigma}_{mn} + \frac{1}{H_s} \cdot F_{,klmn} \cdot \dot{\sigma}_{mn} \quad (\text{II-25})$$

L'additivité des vitesses de déformation (II-12) et la relation (II-25) reliant les vitesses de déformation plastique aux vitesses de contrainte nous permettent d'exprimer les complaisances élasto-plastiques, en théorie de la déformation, sous la forme :

$$S_{klmn} = S_{klmn}^e + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,kl} \cdot F_{,mn} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,klmn} \quad (\text{II-26})$$

4.2.3. Cas d'un état de contraintes planes

Le système étudié est supposé soumis à un état de contraintes planes décrit par les composantes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} dans les axes d'anisotropie transverse (x_1 , x_2). La fonction de charge s'exprime alors sous la forme :

$$f = F(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}) - \bar{\sigma} \quad (\text{II-27})$$

Les relations liant les vitesses de contraintes aux vitesses de déformation totale sont exprimées sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{26} \\ S_{61} & S_{62} & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{II-28})$$

Les vitesses de déformation élastique sont liées aux vitesses de contrainte par la loi de Hooke isotrope :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11}^e &= \frac{1}{E} \left(\dot{\sigma}_{11} - \nu \dot{\sigma}_{22} \right) \\ \dot{\varepsilon}_{22}^e &= \frac{1}{E} \left(\dot{\sigma}_{22} - \nu \dot{\sigma}_{11} \right) \\ 2\dot{\varepsilon}_{12}^e &= \frac{1}{\mu} \dot{\sigma}_{12} \end{aligned} \quad (\text{II-29})$$

où E désigne le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et μ le module de cisaillement.

Ainsi les expressions (II-21) et (II-26) des complaisances élasto-plastiques s'expriment, en théorie de l'écoulement, sous la forme :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,11} \\ S_{22} &= \frac{1}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,22} \cdot F_{,22} \\ S_{66} &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,12} \cdot F_{,12} \\ S_{12} = S_{21} &= -\frac{\nu}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,22} \\ S_{16} = S_{61} &= \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,12} \\ S_{26} = S_{62} &= \frac{1}{H_t} \cdot F_{,12} \cdot F_{,22} \end{aligned} \quad (\text{II-30})$$

et, en théorie de la déformation, sous la forme:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,11} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,1111} \\
 S_{22} &= \frac{1}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,22} \cdot F_{,22} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,2222} \\
 S_{66} &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,12} \cdot F_{,12} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,1212} \\
 S_{12} &= S_{21} = -\frac{\nu}{E} + \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,22} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,1122} \\
 S_{16} &= S_{61} = \frac{1}{H_t} \cdot F_{,11} \cdot F_{,12} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,1112} \\
 S_{26} &= S_{62} = \frac{1}{H_t} \cdot F_{,12} \cdot F_{,22} + \frac{\bar{\sigma}}{H_s} \cdot F_{,2212}
 \end{aligned} \tag{II-31}$$

Les composantes de rigidité élasto-plastiques L_{ij} se déduisent des complaisances élasto-plastiques S_{ij} par une opération d'inversion de matrice.

4.3. Présentation du modèle de plasticité

Pour déterminer les différentes dérivées partielles $F_{,ij}$ et $F_{,ijkl}$, figurant dans les expressions (II-30) et (II-31) des complaisances élasto-plastiques, nous devons définir un modèle de plasticité. L'état de contraintes planes auquel est soumise la plaque, ainsi que l'orthotropie du matériau, nous conduisent à utiliser le modèle de plasticité proposé par Ferron et al (1994). Ce modèle s'appuie sur une représentation paramétrique de la surface de charge ($f = 0$). La surface de charge est tracée dans le plan des contraintes principales σ_1, σ_2 . Une représentation polaire de la surface de charge est visualisée sur la figure [II-3].

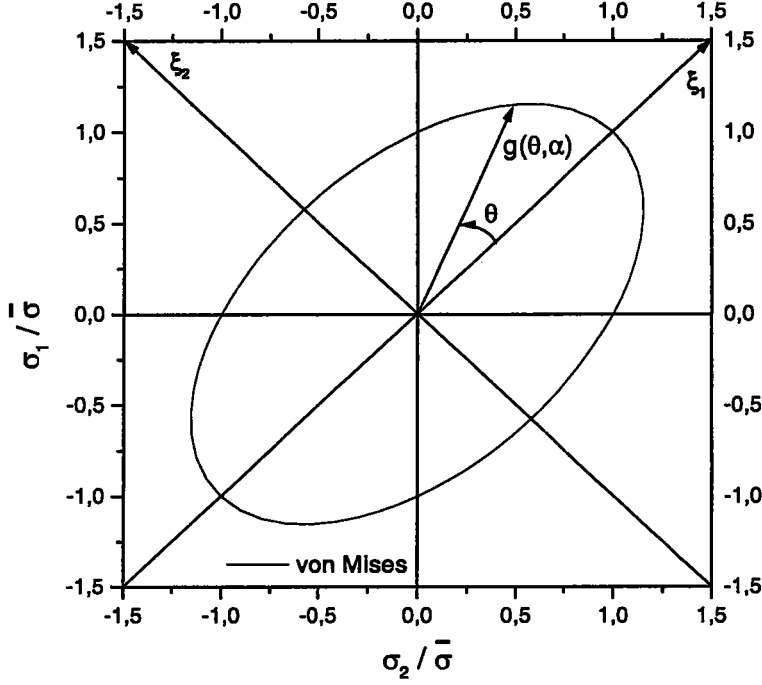


Figure [II-3] : Représentation polaire de la surface de charge dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2)

L'angle θ représenté sur la figure [II-3] correspond à l'angle polaire associé à la description polaire définie par :

$$\xi_1 = G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \cos \theta \quad \text{et} \quad \xi_2 = G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) \sin \theta \quad (\text{II-32})$$

où les variables ξ_1 et ξ_2 sont définies par :

$$\xi_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad \xi_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (\text{II-33})$$

L'écroutissage étant supposé isotrope la fonction $G(\theta, \alpha, \bar{\sigma})$ s'écrit sous la forme :

$$G(\theta, \alpha, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} g(\theta, \alpha) \quad (\text{II-34})$$

où la fonction $g(\theta, \alpha)$ correspond au rayon polaire d'un point courant de la surface de charge normée par la contrainte équivalente $\bar{\sigma}$. L'angle α définit, quant à lui, l'orientation des axes principaux de contraintes (c_1, c_2) par rapport aux axes d'orthotropie (x_1, x_2).

Dans un premier temps, Ferron et al (1994) ont défini une expression du rayon polaire $g(\theta)$ pour les matériaux isotropes transverses. Ils ont ensuite généralisé leur étude aux matériaux anisotropes transverses. Pour un matériau isotrope transverse Ferron et al (1994) ont exprimé le rayon polaire $g(\theta)$ à l'aide de l'expression :

$$(1 - k)g(\theta) = (\cos^2 \theta + A \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{II-35})$$

où A et B sont des constantes positives sans dimension et k un réel. Cette expression constitue une extension du critère isotrope de Drucker (1949), pour lequel les valeurs des constantes A et B sont égales à 3 et 9, respectivement. Le critère quadratique de Hill (1948) est obtenu comme un cas particulier avec le coefficient k égal à 0. Le critère isotrope de von Mises est retrouvé avec $k=0$ et $A=3$.

Le rayon polaire $g(\theta, \alpha)$, utilisé par Ferron et al (1994), pour définir la surface de charge d'un matériau anisotrope transverse est une extension de l'expression (II-35) et s'écrit sous la forme :

$$g(\theta, \alpha)^{-m} = g(\theta)^{-m} + 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta \cos 2\alpha + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (\text{II-36})$$

où m, n, p et q sont des entiers positifs et où a et b sont des coefficients sans dimension. Les coefficients a et b caractérisent l'anisotropie du matériau. Le critère quadratique de Hill (1948) est obtenu comme cas particulier avec le coefficient k égal à 0 et les exposants m égal à 2 et n, p et q égaux à 1. Dans le cas de l'isotropie transverse les coefficients a et b sont nuls. La fonction $g(\theta, \alpha)$ se ramène à $g(\theta)$.

La fonction de charge f peut s'exprimer en fonction des variables (ξ_1, ξ_2) . Elle s'écrit alors de manière équivalente :

$$f = \psi(\xi_1, \xi_2, \alpha) - \bar{\sigma} \quad (\text{II-37})$$

Pour une valeur du coefficient m égale à 2 la fonction $\psi(\xi_1, \xi_2, \alpha)$ s'écrit sous la forme :

$$\psi(\xi_1, \xi_2, \alpha) = \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{(\xi_1^2 + A\xi_2^2)^3 - k\xi_1^2(\xi_1^2 - B\xi_2^2)^2}{1-k} \right]^{\frac{1}{3}} \\ & - \frac{2a}{(1-k)^{\frac{1}{3}}} \frac{\xi_2 \xi_1^{2n-1}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{n-1}} \cos 2\alpha \\ & + \frac{b}{(1-k)^{\frac{1}{3}}} \frac{\xi_2^{2p}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^{p-1}} \cos^{2q} 2\alpha \end{aligned} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II-38})$$

L'intérêt du critère de plasticité proposé par Ferron et al (1994) a été discuté dans plusieurs articles portant sur l'étude de la striction (Mesrar et al (1998)) ou sur les simulations en emboutissage (Moreira et al (2000)). Ce critère permet, d'une part, d'obtenir un aplatissement de la surface de charge au voisinage de la déformation plane et du cisaillement en introduisant une valeur positive du coefficient k , et, d'autre part, de diminuer la sensibilité des contraintes d'écoulement à l'orientation α du chargement, pour une anisotropie définie à partir des valeurs du coefficient d'anisotropie transverse $R(\alpha)$.

5. Analyse des résultats

Nous allons analyser l'influence de l'anisotropie sur les contraintes critiques de plissement en envisageant un certain nombre de matériaux modèles, classés de la manière suivante :

- matériaux isotropes,
- matériaux isotropes transverses,
- matériaux anisotropes transverses.

Pour tous ces matériaux la loi d'écrouissage est définie par la relation de Ludwik :

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 + K\bar{\epsilon}^N$$
 (II-39)

où σ_0 , K et N sont des constantes. La contrainte et la déformation plastique équivalentes sont identifiées par les valeurs obtenues en traction (ou compression) uniaxiale. Les caractéristiques mécaniques des matériaux étudiés sont précisées dans le tableau [II-1].

Tableau [II-1] : Caractéristiques mécaniques des matériaux étudiés

Module de Young E	Coefficient de Poisson ν	K	Exposant d'écrouissage N	Limite d'élasticité σ ₀
2.10 ⁵ MPa	0,3	400MPa ou 200MPa	0,2	100 MPa

Dans un premier temps, nous nous placerons dans une configuration de chargement particulière correspondant à un état de compression uniaxiale. Cette première analyse nous permettra de dégager certaines conclusions qui pourront être généralisées pour un état de contraintes bidimensionnel.

5.1. Caractéristiques d'anisotropie des matériaux étudiés

Les matériaux étudiés diffèrent par les critères de plasticité utilisés et les surfaces de charge associées.

5.1.1. Matériaux isotropes

Les matériaux isotropes étudiés correspondent aux critères de plasticité de von Mises et de Drücker. Le tableau [II-2] fournit les valeurs des coefficients utilisés dans l'équation (II-35).

Tableau [II-2] : valeurs des coefficients de la fonction de charge (II-35)
dans le cas des matériaux isotropes

	von Mises	Drücker
A	3	3
B	-	9
k	0	0.2

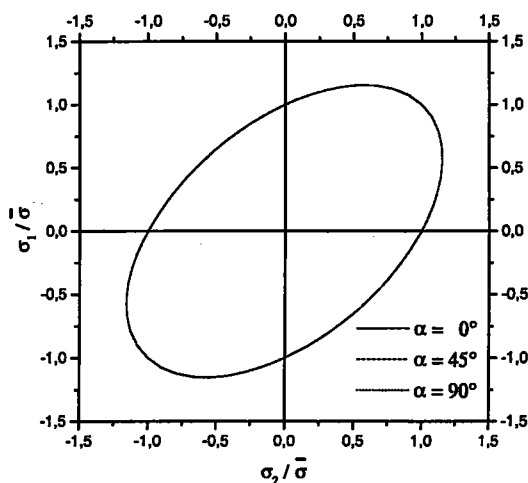


Figure [II-4] : Surface de charge obtenue avec le critère de von Mises

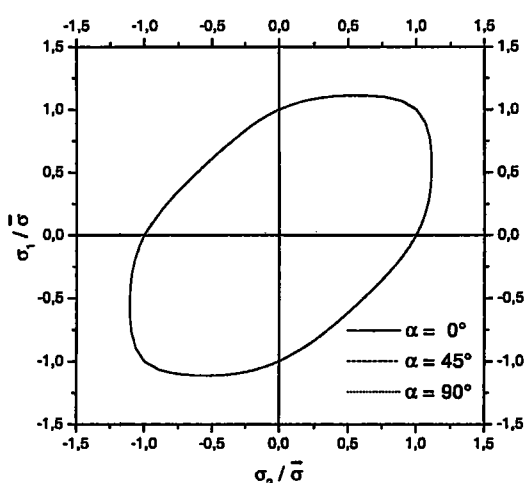


Figure [II-5] : Surface de charge obtenue avec le critère de Drucker

5.1.2. Matériaux à anisotropie normale

Dans le cas des matériaux à anisotropie normale, l'anisotropie est généralement caractérisée par la valeur du coefficient d'anisotropie normale R . Le modèle de plasticité présenté au paragraphe 4-3, de ce chapitre, nous permet de définir deux types de matériaux à anisotropie normale. D'une part, avec des valeurs du coefficient k nulles, nous obtenons des matériaux dont les surfaces de charge sont elliptiques, et correspondent au critère quadratique de Hill (1948). Et, d'autre part, avec une valeur du coefficient k positive, nous obtenons des matériaux dont les surfaces de charge présentent un aplatissement au voisinage de la compression plane et du cisaillement, et qui ont ainsi une allure similaire à celle du critère de Drucker (1949).

- Pour le coefficient d'anisotropie normale R égal à 0,5 :

Tableau [II-3] : valeurs des coefficients de la fonction de charge (II-35) dans le cas où le coefficient d'anisotropie normale R est égal à 0.5

	Hill quadratique (1948)	Ferron et al (1994)
A	2	2.218
B	-	6.655
k	0	0.2

- Pour le coefficient d'anisotropie normale R égal à 2 :

Tableau [II-4] : valeurs des coefficients de la fonction de charge (II-35) dans le cas où le coefficient d'anisotropie normale R est égal à 2

	Hill quadratique (1948)	Ferron et al (1994)
A	5	4.326
B	-	12.978
k	0	0.2

- Pour le coefficient d'anisotropie normale R égal à 4 :

Tableau [II-5] : valeurs des coefficients de la fonction de charge (II-35)
dans le cas où le coefficient d'anisotropie normale R est égal à 4

	Hill quadratique (1948)	Ferron et al (1994)
A	9	6.582
B	-	19.746
k	0	0.2

Les surfaces associées aux critères de plasticité de Hill (1948) et de Ferron et al (1994) sont représentées, pour chaque valeur du coefficient d'anisotropie normale R , sur les figures [II-6, II-7] ci-dessous.

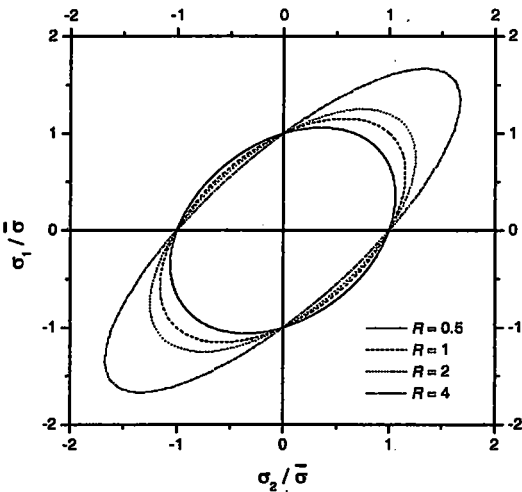


Figure [II-6] : Surfaces de charge obtenues avec le critère quadratique de Hill (1948)

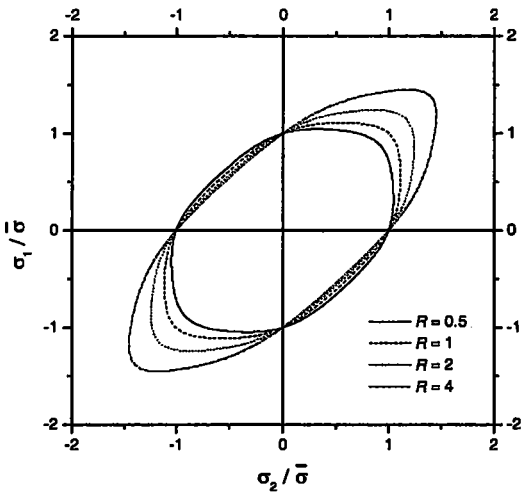


Figure [II-7] : Surfaces de charge obtenues avec le modèle de Ferron et al (1994)

5.1.3. Matériaux à anisotropie transverse

Dans le cas des matériaux à anisotropie transverse, l'anisotropie peut être caractérisée par les valeurs des coefficients d'anisotropie transverse R_0 , R_{45} et R_{90} . Nous avons choisi de définir un matériau représentatif des aciers destinés à l'emboutissage (par exemple : un acier IF), en « amplifiant » légèrement l'anisotropie du matériau. Les valeurs des coefficients d'anisotropie ont donc été prises égales à $R_0 = 2$, $R_{45} = 1,5$ et $R_{90} = 3$. Le modèle de plasticité permet de définir différentes formes de surface de charge. En prenant une valeur du coefficient k nulle et les exposants n , p et q égaux à 1, nous obtenons des surfaces de charge correspondant au critère quadratique de Hill (1948). Pour une valeur de k positive, nous obtenons un aplatissement de surfaces de charge au voisinage de la compression plane et du cisaillement. Pour des valeurs de n et p égales à 2 et q égale à 1, nous obtenons une diminution de la sensibilité des contraintes d'écoulement à l'orientation α du chargement. La surface de charge ainsi définie est en bon accord avec de nombreux résultats expérimentaux (Moreira et al (2000)). Le tableau [II-6] fournit les valeurs des coefficients utilisés dans l'équation (II-36).

Tableau [II-6] : valeurs des coefficients de la fonction de charge (II-36)
dans le cas des matériaux anisotropes transverses

	Hill quadratique (1948)	Ferron et al (1994)
A	4	3.690
B	-	11.067
a	-0.2	-0.115
b	1.8	0.723
k	0	0.2
m	2	2
n	1	2
p	1	2
q	1	1

Les surfaces associées sont représentées sur les figures [II-8, II-9].

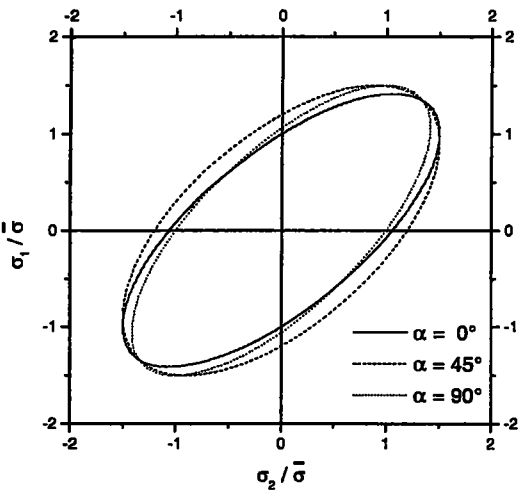


Figure [II-8] : Surfaces de charge obtenues avec le critère quadratique de Hill (1948)

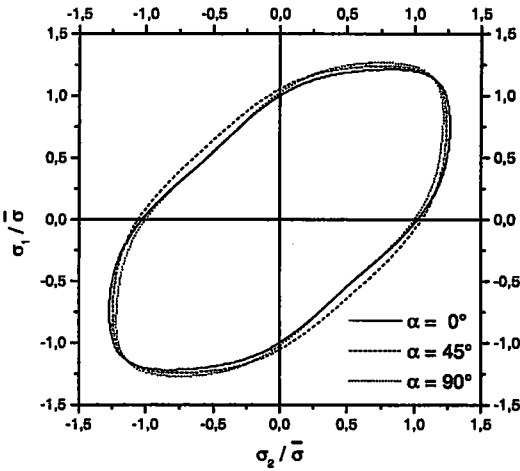


Figure [II-9] : Surfaces de charge obtenues avec le modèle de Ferron et al (1994)

5.2. Cas de la compression uniaxiale

Nous supposons que la plaque subit une compression uniaxiale suivant l'axe c_1 . Lorsque la plaque a atteint un niveau de contrainte critique, le plissement se produit suivant la direction p_1 . Nous chercherons à déterminer ce niveau de contrainte critique pour les différents matériaux présentés dans le paragraphe précédent.

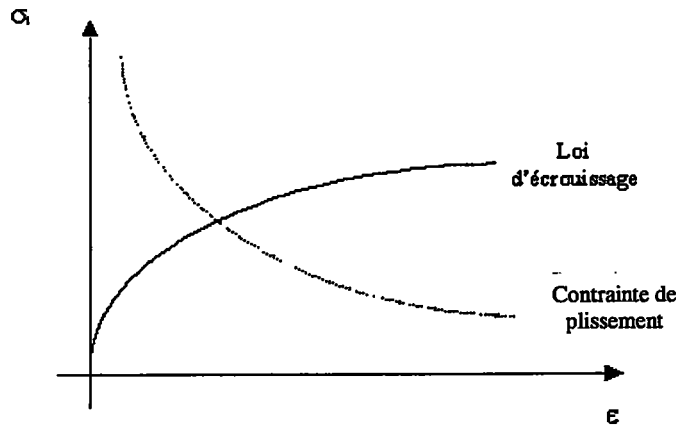
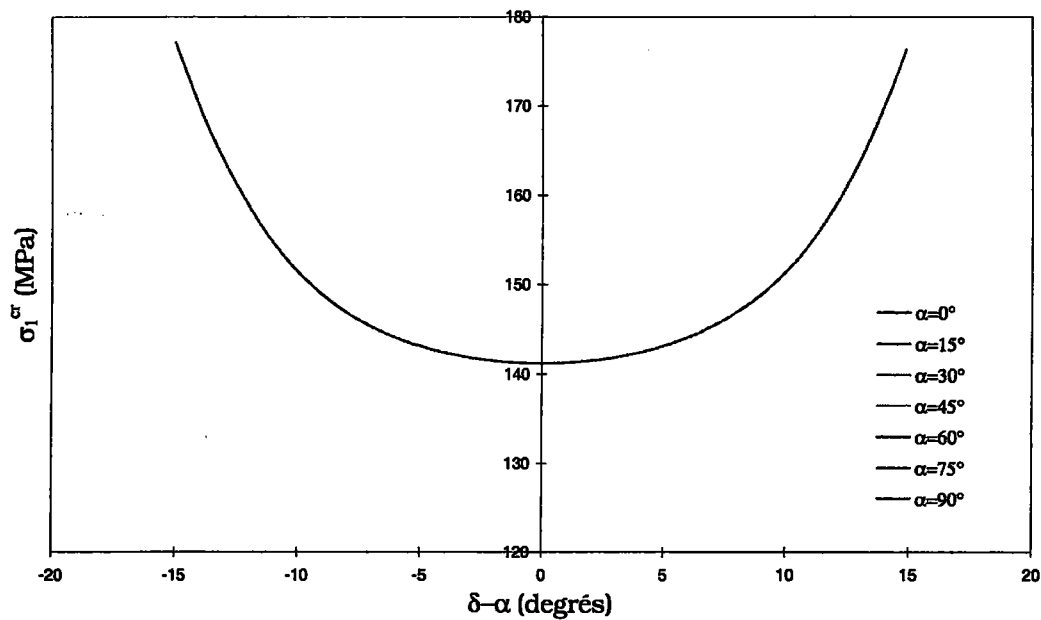


Figure [II-10] : détermination de la contrainte principale critique de plissement.

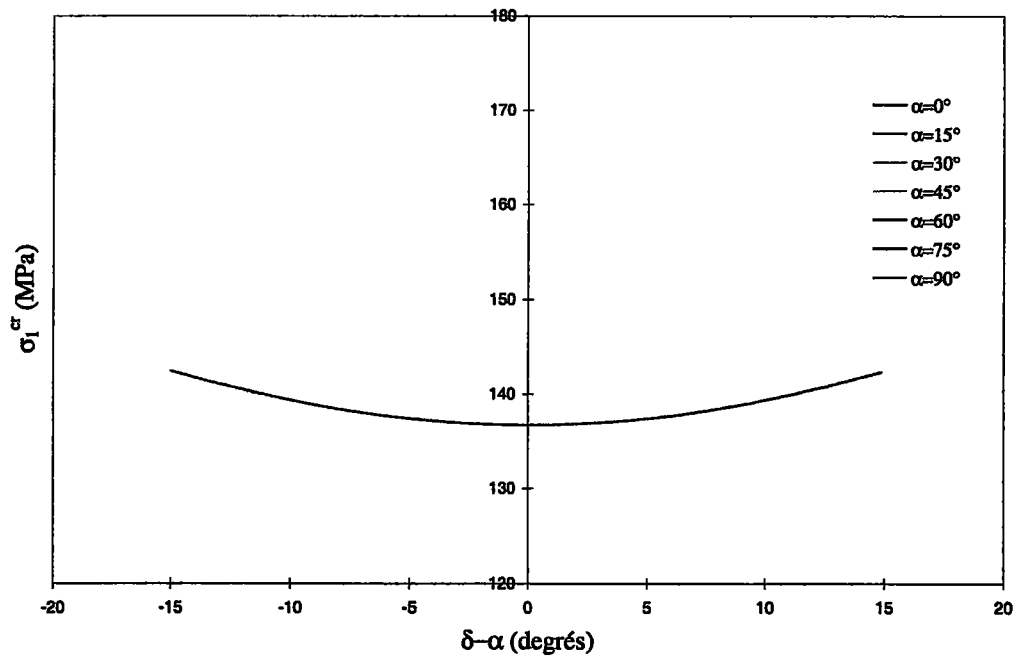
Au cours du chargement, la contrainte de compression, obtenue à partir de la loi d'écrouissage (II-39), augmente tandis que la contrainte critique de plissement, définie par la relation (II-10), diminue en valeur absolue. Nous pouvons visualiser ces tendances sur la figure [II-10]. Nous définissons la contrainte principale de compression critique comme étant le point, au cours du chargement, où la contrainte critique de plissement (II-10) devient égale à la contrainte de compression issue de la loi d'écrouissage (II-39) ; c'est à dire l'intersection des deux courbes tracées sur la figure [II-8]. La contrainte principale critique ainsi définie est déterminée, pour différentes valeurs de l'inclinaison α du chargement, par une méthode itérative. Pour une inclinaison α du chargement nous déterminons ainsi la variation de la contrainte principale de compression critique en envisageant différentes valeurs de l'orientation δ du pli. L'orientation selon laquelle survient effectivement le plissement est celle qui minimise la contrainte critique de plissement.

5.2.1. Matériaux isotropes

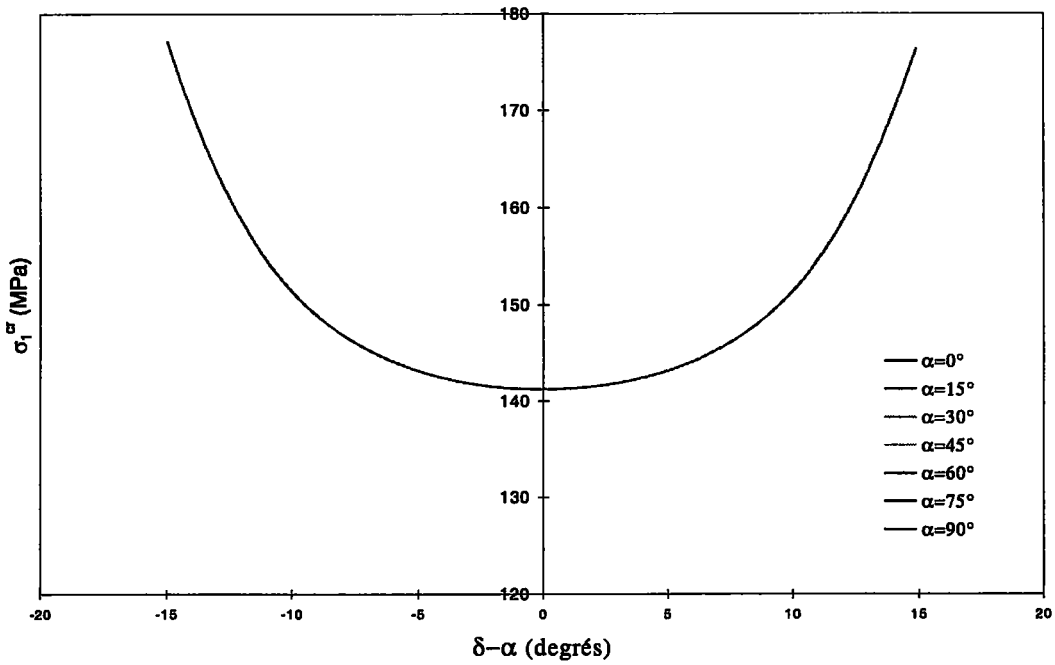
Les figures [II-11, II-12, II-13, II-14] présentent, pour les deux surfaces de charge étudiées, les variations de la contrainte critique de plissement en fonction de la différence angulaire $\delta - \alpha$. Les courbes tracées sur les figures [II-11, II-12, II-13, II-14] ont été obtenues pour des valeurs de l'inclinaison α du chargement variant de 0° à 90° . La différence angulaire $\delta - \alpha$, entre la direction de compression et la direction de plissement, varie de -15° à 15° . La valeur du coefficient K dans la loi d'écrouissage (II-39), a été prise égale à 200 MPa (tableau [II-1]).



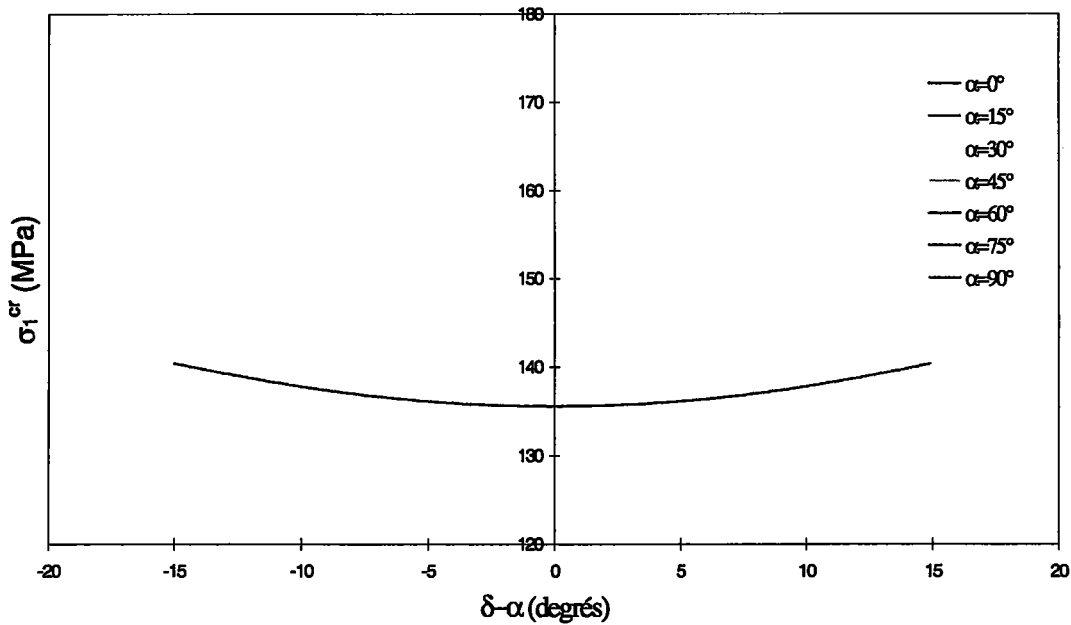
Figure[II-11] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Modèle de plasticité de von Mises, théorie de l'écoulement



Figure[II-12] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Modèle de plasticité de von Mises, théorie de la déformation



Figure[II-13] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Modèle de plasticité de Drucker (1949), théorie de l'écoulement



Figure[II-14] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Modèle de plasticité de Drucker (1949), théorie de la déformation

Nous constatons, à partir des figures [II-11, II-12, II-13, II-14], un certain nombre de propriétés directement liées à l'isotropie du matériau : tout d'abord, les courbes calculées sont superposées pour les différentes valeurs de l'inclinaison α du chargement. Cette insensibilité à l'inclinaison α constitue une validation du programme, puisque les directions principales d'orthotropie pour lesquelles l'inclinaison du chargement est définie sont en fait indéterminées.

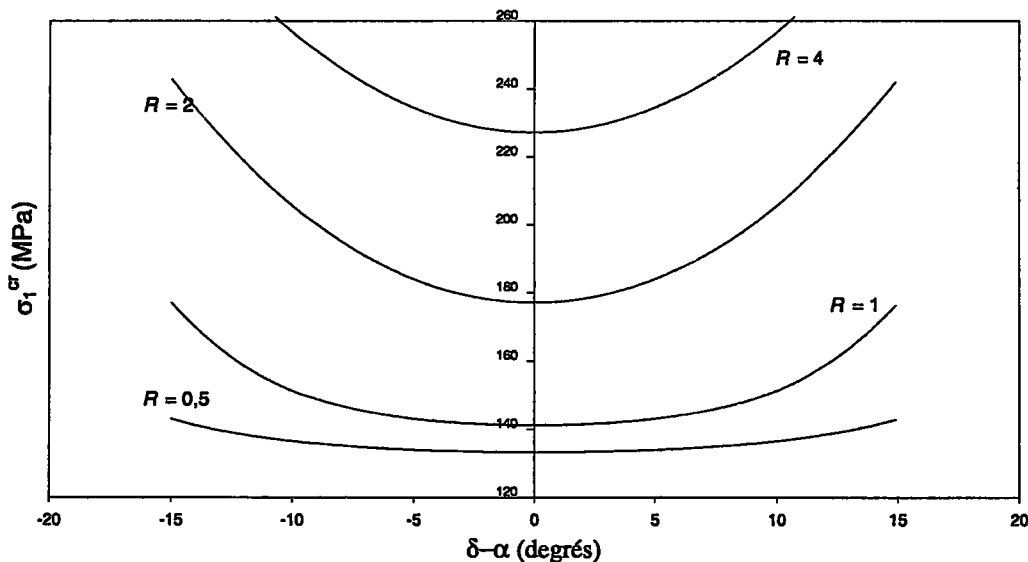
D'autre part, les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées et présentent un minimum pour une désorientation $\delta-\alpha$ nulle. En conséquence, pour un matériau isotrope soumis à une compression uniaxiale, l'axe suivant lequel s'effectue la compression est la direction la plus favorable à l'apparition du plissement.

Les résultats sont pratiquement insensibles à la surface de charge choisie (von Mises ou Drücker (1949)). Par contre, les résultats obtenus en théorie de l'écoulement sont sensiblement plus forts que ceux obtenus en théorie de la déformation.

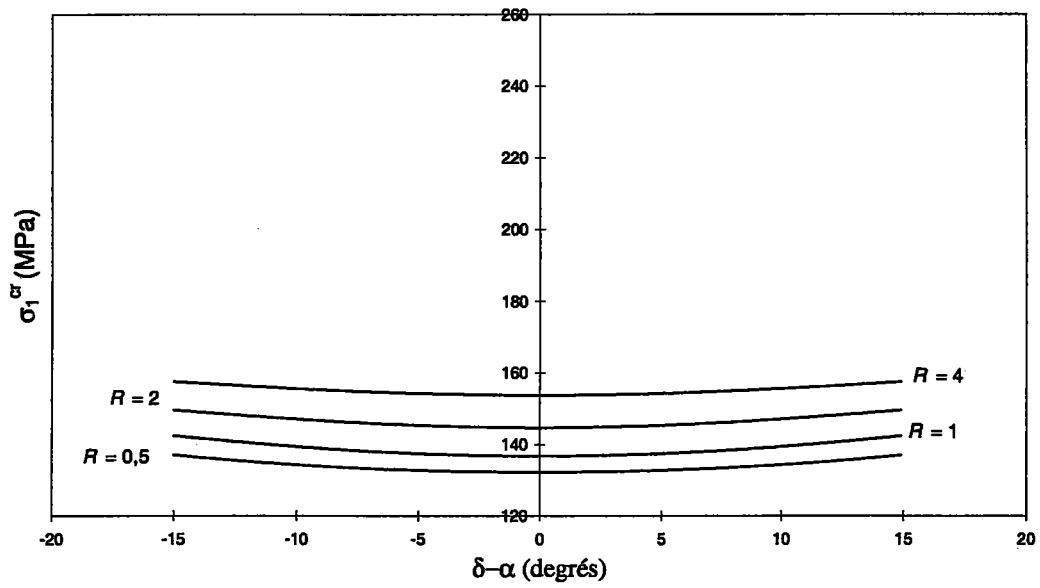
5.2.2. Matériaux à anisotropie normale

Les matériaux à anisotropie normale possèdent un comportement isotrope dans le plan (x_1, x_2). Par conséquent, les propriétés d'invariance des résultats vis à vis de l'inclinaison α du chargement et de la symétrie des courbes de contraintes en fonction de la désorientation ($\delta-\alpha$), constatées pour les matériaux isotropes, doivent être à nouveau vérifiées. Nous nous sommes donc assurés en premier lieu que, pour chaque surface seuil, les valeurs de la contrainte principale de compression critique, σ_1^{cr} , ne dépendaient que de la désorientation ($\delta-\alpha$) du pli par rapport à la direction de compression, indépendamment de la valeur affichée pour α .

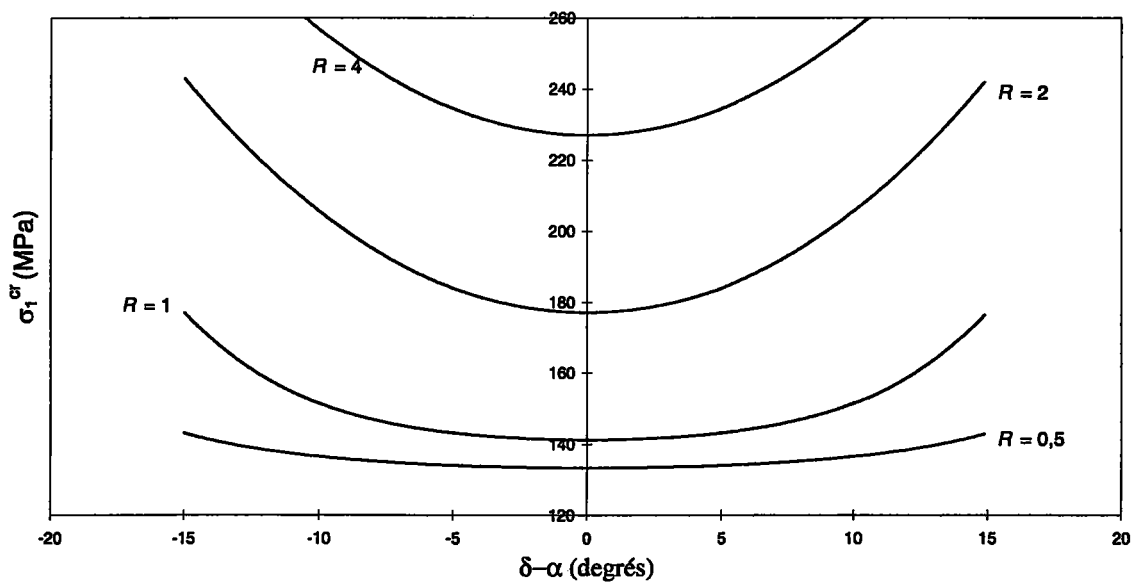
Les figures [II-15, II-16, II-17, II-18] montrent les variations de la contrainte compressive critique pour les différentes valeurs du coefficient d'anisotropie normale R , pour les deux surfaces de charge envisagées et pour les deux lois phénoménologiques utilisées : théorie de l'écoulement et théorie de la déformation. Ces figures nous permettent de vérifier que les contraintes critiques obtenues sont égales pour des valeurs opposées $\delta-\alpha$, et que le minimum de la contrainte de compression critique est obtenu pour une valeur de la différence angulaire $\delta-\alpha$ égale à zéro ; c'est à dire pour une direction de plissement parallèle à la direction de compression.



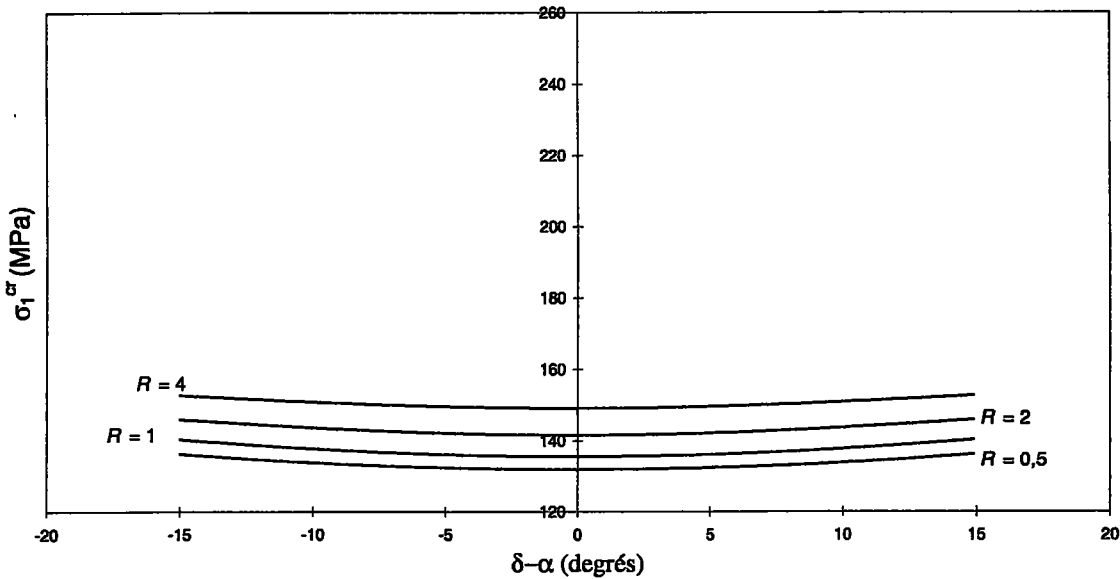
Figure[II-15] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta-\alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Hill (1948), théorie de l'écoulement



Figure[II-16] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Hill (1948), théorie de la déformation



Figure[II-17] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Ferron et al (1994), théorie de l'écoulement



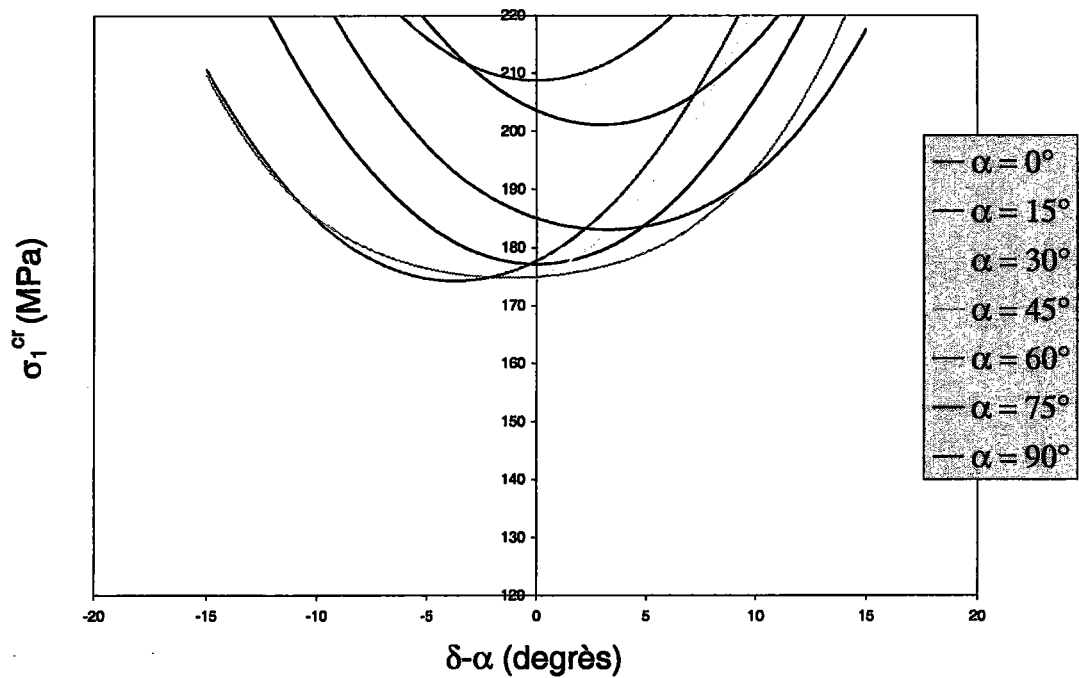
Figure[II-18] : variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Ferron et al (1994), théorie de la déformation

Comme dans le cas de l'isotropie, nous observons une très faible influence de la surface de charge pour une valeur donnée du coefficient d'anisotropie normale R . De même, la contrainte critique obtenue en théorie de l'écoulement est supérieure à la contrainte obtenue en théorie de la déformation. Les courbes font, par contre, apparaître une nette augmentation de la contrainte compressive critique lorsque le coefficient d'anisotropie normale R augmente (voir figures [II-15] et [II-17] d'une part ; figures [II-16] et [II-18] d'autre part).

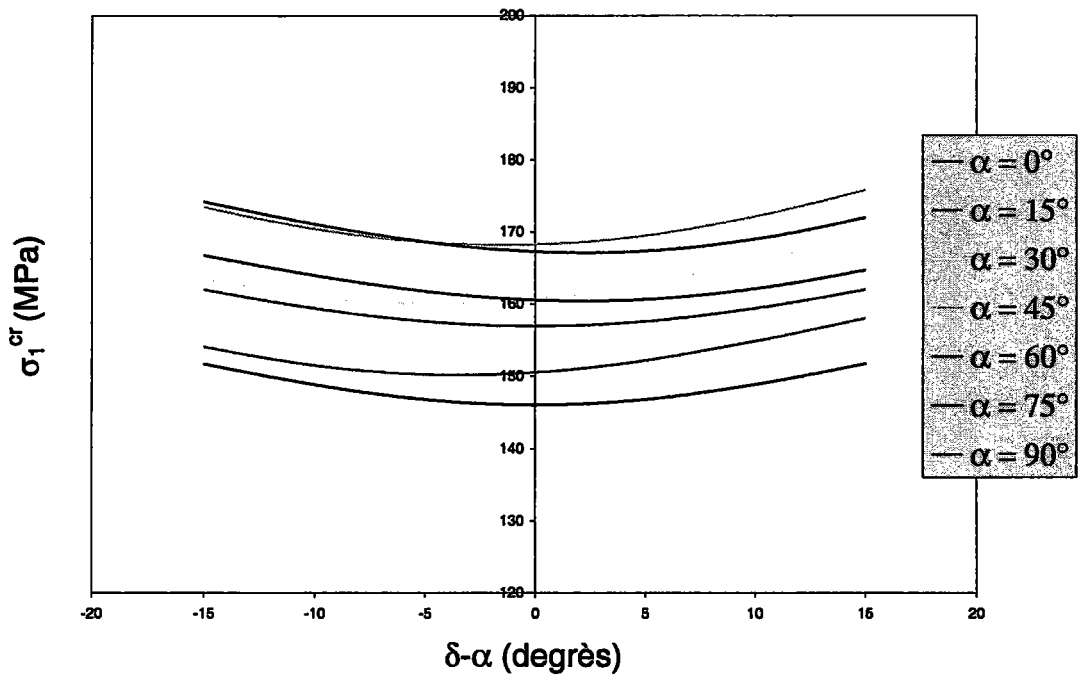
5.2.3. Matériaux à anisotropie transverse

Nous étudions ici l'apparition du plissement pour le matériau présenté au paragraphe 5-1-3. Les caractéristiques mécaniques sont fournies dans le tableau [II-6]. Nous rappellerons, pour mémoire, les valeurs du coefficient d'anisotropie : $R_0=2$, $R_{45}=1.5$, $R_{90}=3$.

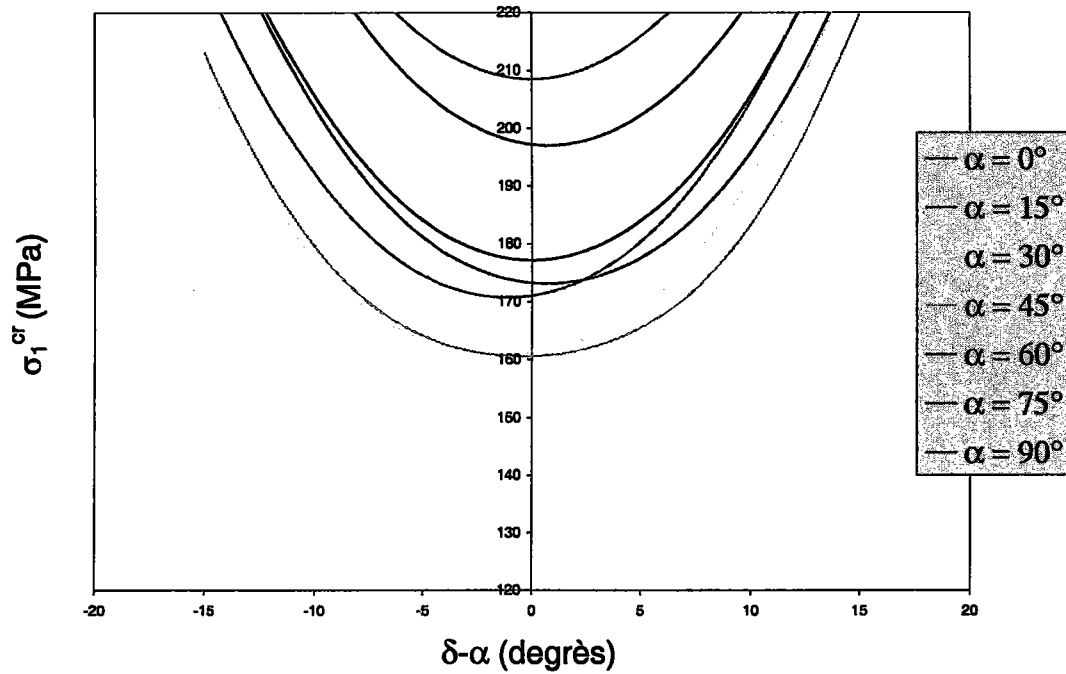
Les figures [II-19, II-20, II-21, II-22] présentent la variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation ($\delta - \alpha$) pour différentes orientations α de la contrainte de compression par rapport à l'axe d'orthotropie x_1 . L'anisotropie transverse du matériau à plusieurs conséquences sur l'apparition du plissement. D'une part, la contrainte critique de plissement dépend de l'inclinaison α du chargement. D'autre part, la direction la plus favorable au plissement est légèrement désorientée par rapport à la direction compressive ; par conséquent, l'axe ($\delta - \alpha$) n'est plus axe de symétrie des courbes σ_1^{cr} . De plus, nous observons que la dissymétrie des courbes est plus prononcée pour le critère quadratique de Hill (1948) que pour le modèle de Ferron et al (1994). Cette désorientation peut atteindre 8° (figure [II-17]). Ainsi, les contraintes critiques de plissement ne dépendent pas uniquement de la valeur de $R(\alpha)$ dans la direction de la contrainte compressive mais, sont affectées par l'anisotropie transverse du matériau.



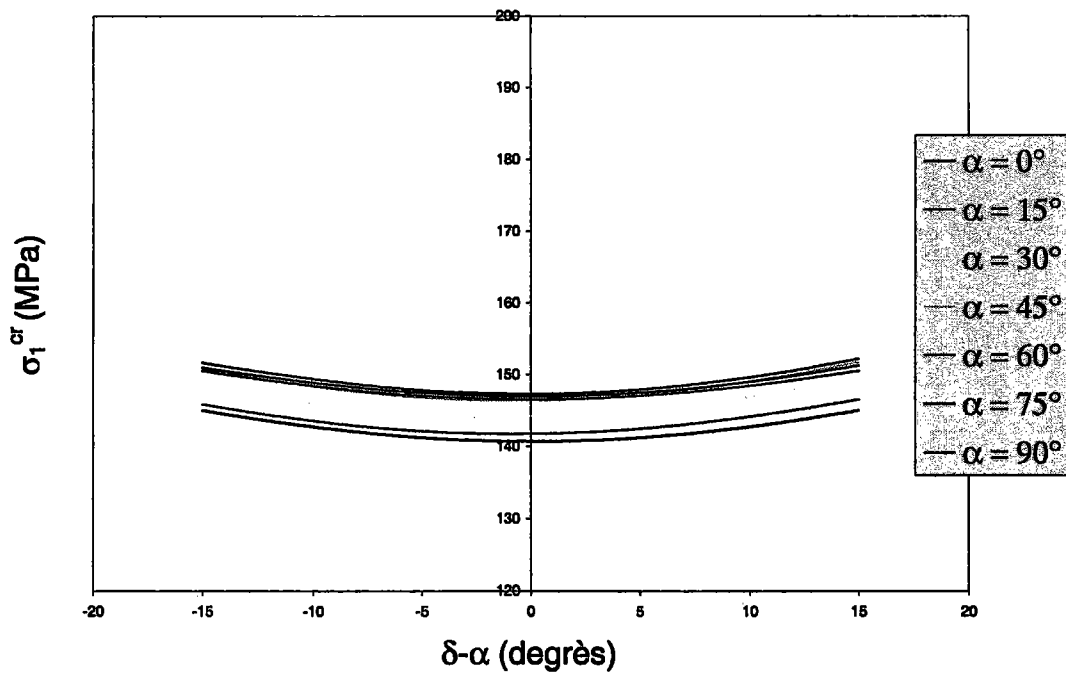
Figure[II-19]: variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Hill (1948) anisotrope, théorie de l'écoulement



Figure[II-20]: variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Hill (1948) anisotrope, théorie de la déformation



Figure[II-21]: variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Ferron et al (1994) anisotrope, théorie de l'écoulement



Figure[II-22]: variation de la contrainte critique de plissement en fonction de la désorientation $\delta - \alpha$ entre la direction de compression et la direction de plissement
Critère de plasticité de Ferron et al (1994) anisotrope, théorie de la déformation

5.2.4. Bilan des résultats

La figure [II-23] résume les observations précédentes en ce qui concerne l'influence de l'anisotropie normale et transverse sur la contrainte critique de plissement.

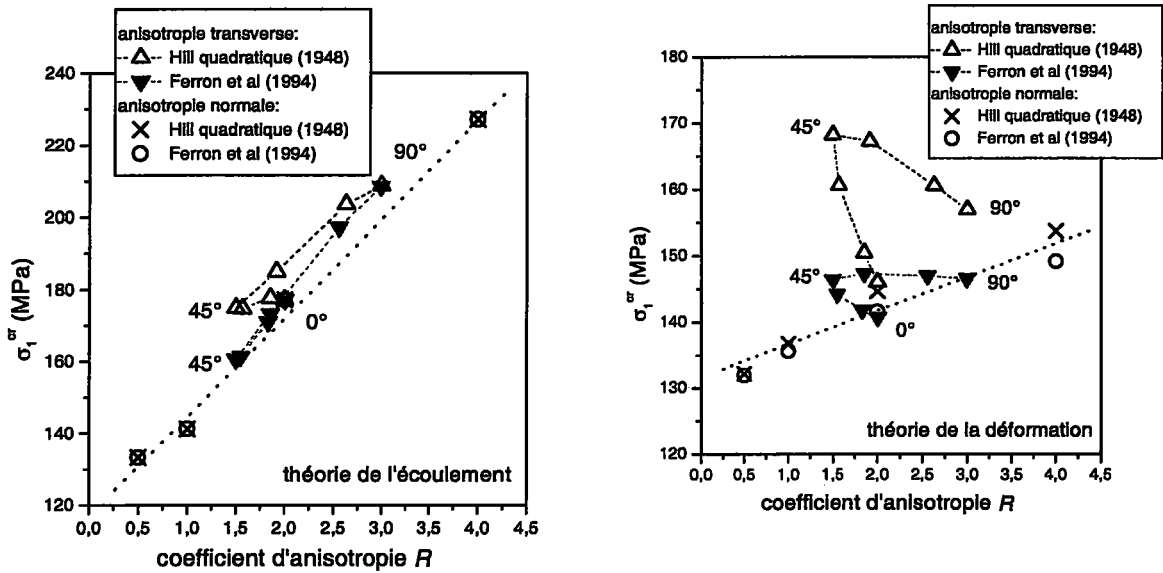


Figure [II-23] : variation de la contrainte compressive critique minimale en fonction du coefficient d'anisotropie R

La tendance générale est une augmentation de la contrainte critique lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente. Cette sensibilité à l'anisotropie est beaucoup plus forte en théorie de l'écoulement. Pour les matériaux à anisotropie normale la courbe σ_1^{cr} en fonction de R est monotone croissante et indépendante de la description de la surface de charge en théorie de l'écoulement, alors qu'elle dépend légèrement de celle-ci en théorie de la déformation. Pour le matériau à anisotropie transverse, la contrainte critique σ_1^{cr} est affectée par l'anisotropie transverse du matériau. En théorie de l'écoulement, la contrainte critique de plissement σ_1^{cr} est minimum lorsque la contrainte compressive est portée par la direction présentant la plus faible valeur de $R(\alpha)$. En théorie de la déformation, la contrainte critique σ_1^{cr} présente une corrélation très médiocre avec le coefficient d'anisotropie $R(\alpha)$ dans la direction de la contrainte de compression.

5.3. Cas général $\sigma_1 + \sigma_2 < 0$

Nous généralisons maintenant cette étude à un ensemble d'états de contraintes correspondant au domaine défini par :

$$\sigma_1 + \sigma_2 < 0 \quad (\text{II-40})$$

La représentation polaire de la surface de charge nous permet de définir un état de contraintes par l'angle polaire θ , visualisé sur les figures [II-3, II-24], et défini à l'aide du changement de variable (II-32). Dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2), représenté sur la figure [II-24], les états de contraintes situés sous la deuxième bissectrice (axe ξ_2) correspondent au

domaine d'étude. Ces états de contraintes correspondent à des angles polaires θ compris entre -90° et -270° .

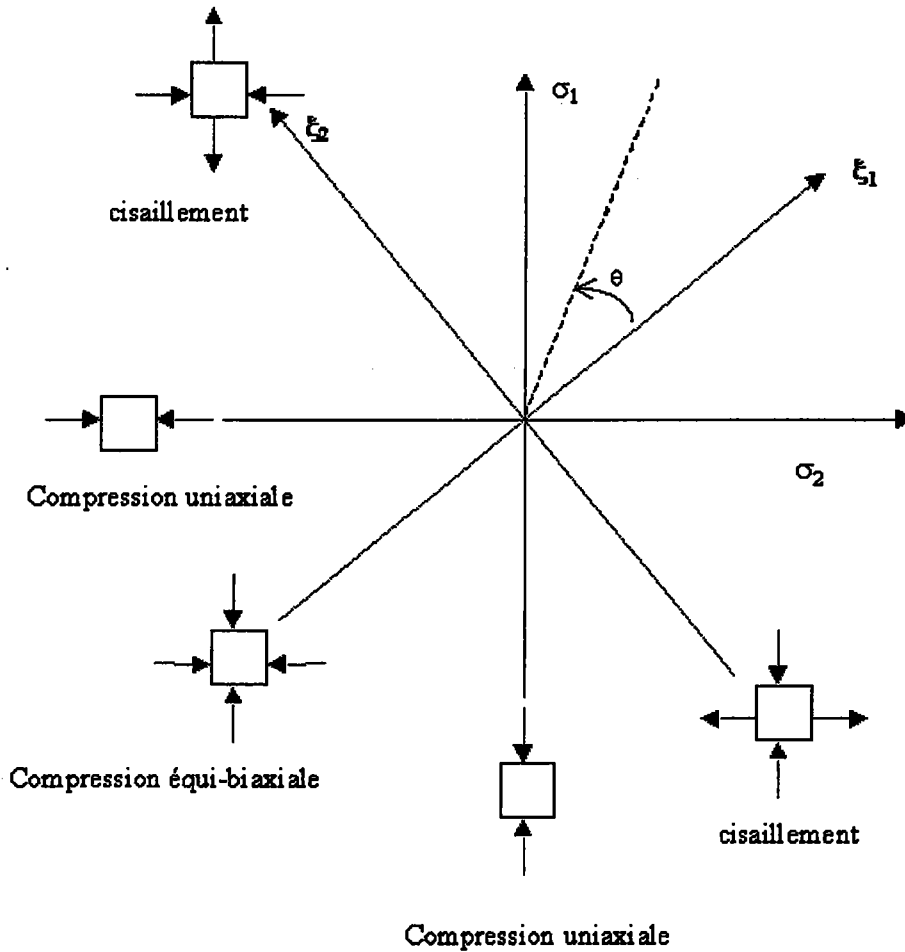


Figure [II-24]: états de contraintes étudiés

Nous avons indiqué sur la figure [II-24] quelques sollicitations particulières. Ces sollicitations sont repérées par :

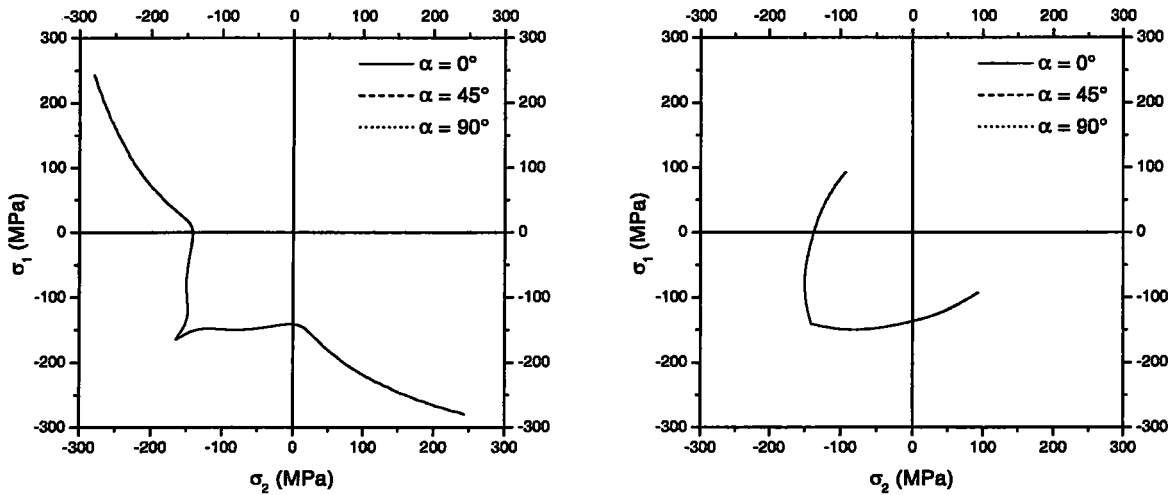
$\theta = -270^\circ$ ou $\theta = -90^\circ$	cisaillement
$\theta = -225^\circ$ ou $\theta = -135^\circ$	compression uniaxiale
$\theta = -180^\circ$	compression équi-biaxiale

Le domaine ainsi défini couvre une grande variété d'états de contraintes. Chaque point de la courbe limite de plissement est recherché en imposant le rapport de contraintes et donc une valeur de l'angle θ . Pour une inclinaison α du chargement nous déterminons d'une façon analogue au paragraphe 5-2 les contraintes principales critiques σ_1^c et σ_2^c . Nous recherchons ensuite l'orientation δ qui minimise la contrainte critique équivalente déduite des valeurs de σ_1^c et σ_2^c . Nous obtenons ainsi un couple (σ_1^c, σ_2^c) de contraintes qui définit la position du point critique dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2) .

Nous représentons donc nos résultats dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2) . Nous adoptons ainsi une démarche similaire à celle entreprise par Neale et Tugçü (1990). Les courbes que nous avons tracées dans le plan des contraintes principales seront appelées « courbes limites de plissement ». Nous cherchons à déterminer les courbes limites de plissement des matériaux présentés dans le paragraphe 5-1.

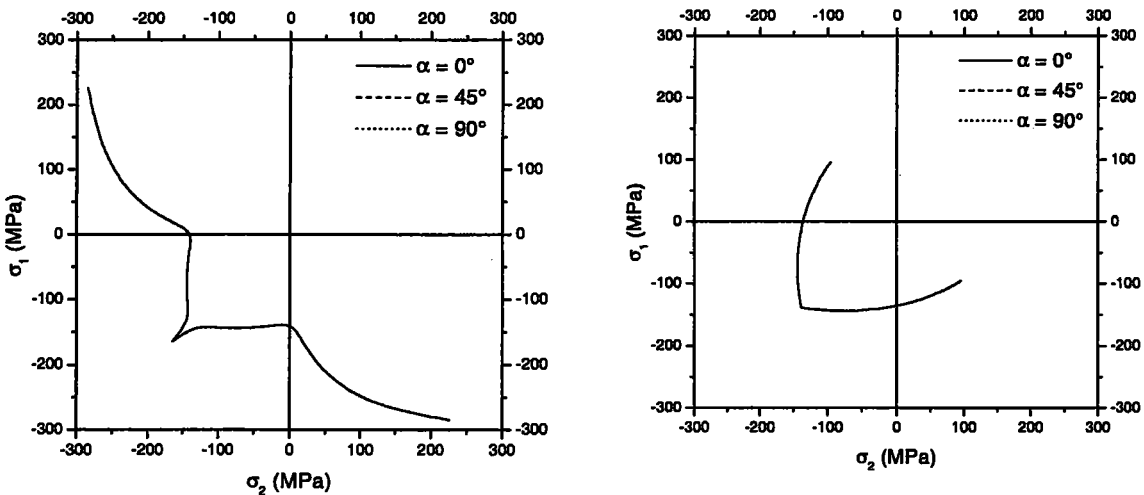
5.3.1. Matériaux isotropes

Les figures [II-24, II-26] présentent les courbes limites de plissement obtenues pour les matériaux isotropes définis dans le paragraphe 5-1-1. Evidemment, les courbes limites de plissement sont indépendantes de l'orientation α du chargement. Elles sont également symétriques par rapport à la première bissectrice ξ_1 du plan des contraintes principales, en raison de l'isotropie du matériau.



théorie de l'écoulement **théorie de la déformation**

Figure [II-25]: Courbe limite de plissement en contrainte, critère de plasticité de von Mises



théorie de l'écoulement

Figure [II-26]: Courbe limite de plissement en contrainte, critère de plasticité de Drucker (1949)

Nous observons, dans les domaines de traction-compression, et en théorie de l'écoulement, des limites de plissement légèrement plus élevées pour le critère de Drücker (1949) que pour

celui de von Mises. Les contraintes obtenues en théorie de l'écoulement sont toujours plus fortes que celles obtenues en théorie de la déformation, et ce, quel que soit le chargement suivi. Les écarts sont toutefois relativement modérés dans le domaine de compression-compression, et deviennent très forts en traction-compression.

La figure [II-27], qui rassemble les valeurs de $\delta-\alpha$ (correspondant à la contrainte critique minimale) obtenues pour l'ensemble des simulations, nous indique que l'inclinaison critique correspond à 0° ou à 90° selon l'angle θ définissant le chargement. Ceci correspond finalement à une direction de plissement coïncidant toujours avec la direction de contrainte principale compressive la plus intense. Ces résultats correspondent à ceux obtenus par Neale et Tugcu (1990) puis Améziane-Hassani et Neale (1991) pour le plissement des coques suivant une direction.

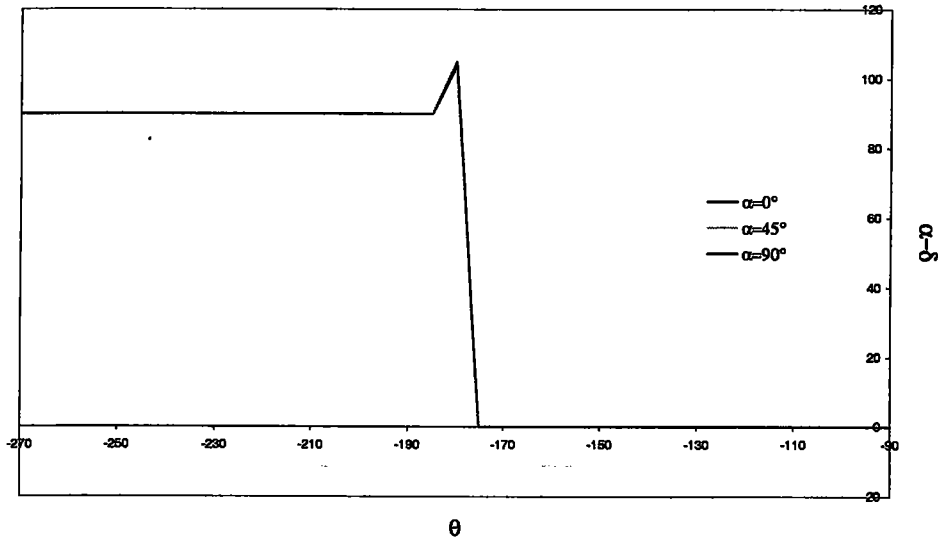
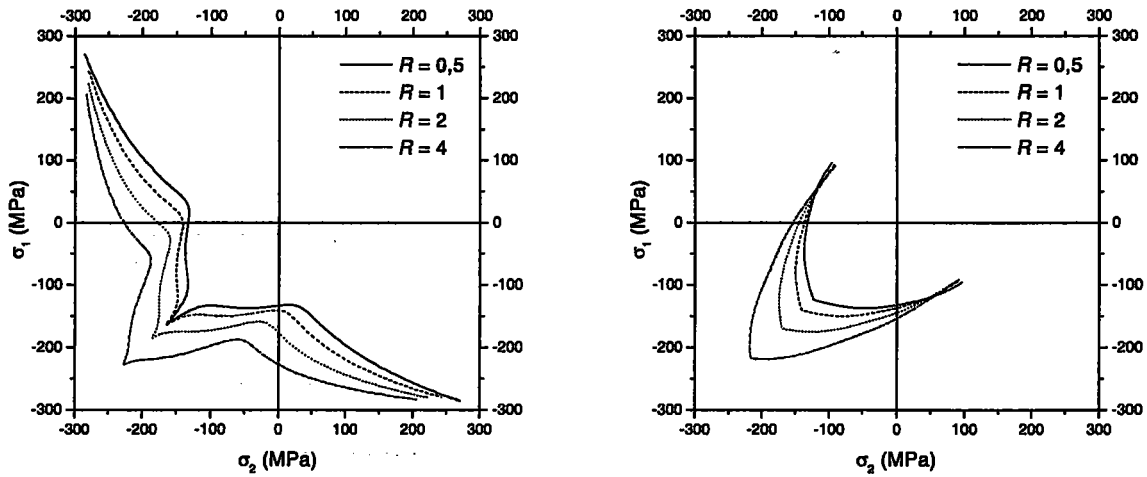


Figure [II-27]: Variation de la différence $\alpha-\delta$ en fonction de l'angle θ

5.3.2. Matériaux à anisotropie normale

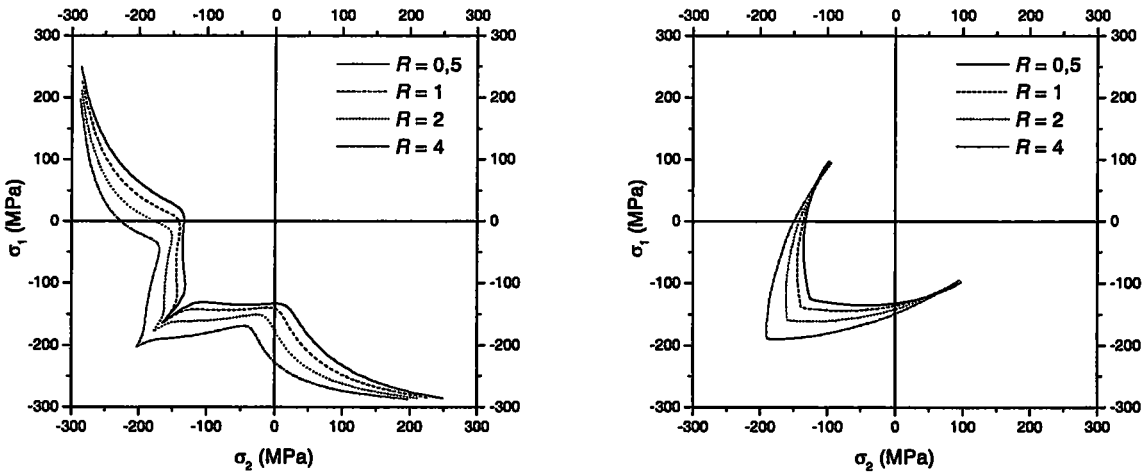
Les matériaux dont nous allons maintenant étudier le comportement ont été présentés dans le paragraphe 5-1-2. Nous rappelons ici les différentes valeurs prises par le coefficient d'anisotropie normale R : 0.5, 1, 2 et 4. De nouveau, nous avons vérifié que les résultats étaient insensibles à l'inclinaison α du chargement, en raison des propriétés d'isotropie dans le plan.



théorie de l'écoulement

théorie de la déformation

Figure [II-28]: Courbe limite de plissement en contrainte
Critère de plasticité quadratique de Hill (1948)



théorie de l'écoulement

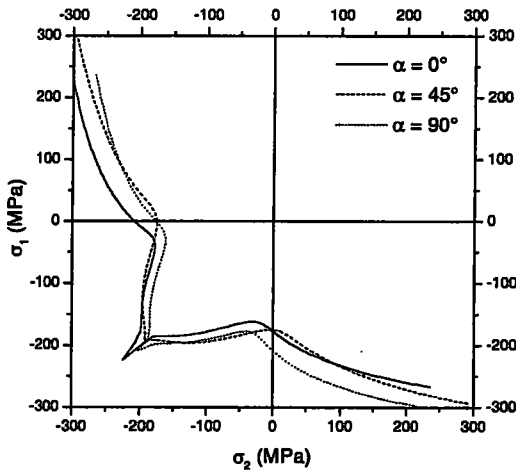
théorie de la déformation

Figure [II-29]: Courbe limite de plissement en contrainte
Critère de plasticité de Ferron et al (1994)

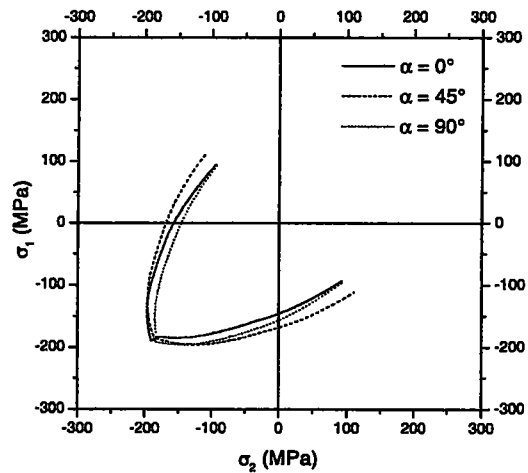
Nous remarquons, dans un premier temps, que les courbes limites de plissement, tracées sur les figures [II-28, II-29], présentent une symétrie par rapport à la bissectrice ξ_1 du plan des contraintes principales. Ceci est due aux propriétés d'isotropie dans le plan des matériaux étudiés. En théorie de l'écoulement l'augmentation (en valeur absolue) de la contrainte critique de plissement lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente (ce que nous avons observée en compression uniaxiale) est mise en évidence quel que soit l'état de contraintes. L'influence de R se retrouve donc en théorie de la déformation. Toutefois, dans ce cas, l'influence de R sur la contrainte critique de plissement devient de plus en plus faible lorsque l'état de contrainte varie de la compression équi-biaxiale au cisaillement.

5.3.3. Matériaux à anisotropie transverse

Les figures [II-30, II-31] présentent les courbes limites de plissement obtenues pour le matériau anisotrope transverse défini dans le paragraphe 5-1-3. Les coefficients d'anisotropie transverse ont pour valeur : $R_0 = 2$, $R_{45} = 1.5$, $R_{90} = 3$.

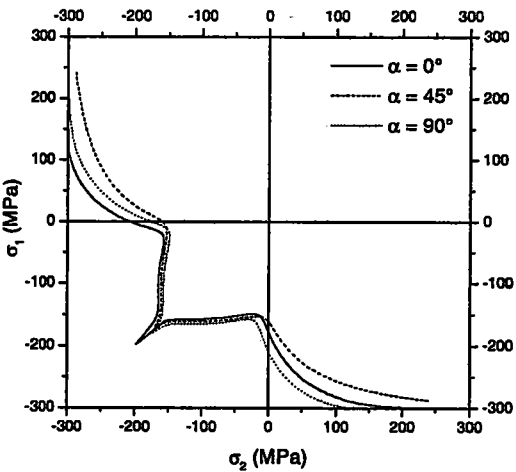


théorie de l'écoulement

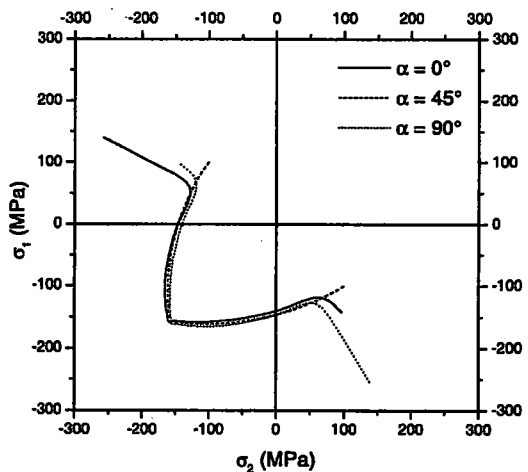


théorie de la déformation

Figure [II-30]: Courbe limite de plissement en contrainte
Critère de plasticité quadratique de Hill (1948)



théorie de l'écoulement



théorie de la déformation

Figure [II-31]: Courbe limite de plissement en contrainte
Critère de plasticité de Ferron et al (1994)

Nous vérifions tout d'abord que les courbes pour $\alpha=45^\circ$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, et que les courbes pour $\alpha=0^\circ$ et 90° sont « échangées » par symétrie par rapport à la première bissectrice, puisque les sollicitations appliquées sont alors les mêmes.

L'influence de l'orientation du chargement sur les contraintes critiques est faible pour un état de contrainte de compression- compression (quadrant inférieur gauche sur les figures [II-30, II-31]), tout particulièrement pour le critère de Ferron et al (1994) pour lequel le niveau des contraintes d'écoulement dépend peu de l'orientation (figure[II-9]). L'allure surprenante des

courbes obtenues en théorie de la déformation avec le modèle de Ferron dans le domaine de traction-compression pour $\alpha = 0^\circ$ et 90° est sans doute due à la faible courbure des surfaces de charge lorsqu'on approche du cisaillement, figure [II-9].

Plaçons nous maintenant dans le quadrant inférieur droit des courbes limites de plissement des figures [II-30, II-31]. La contrainte principale σ_1 est une contrainte de compression. Nous constatons, pour le modèle de Ferron et al (1994), et en théorie de l'écoulement (figure [II-31]), que le chargement selon une inclinaison α égale à 45° fournit les contraintes critiques les plus faibles, alors que le chargement selon une inclinaison α égale à 90° fournit les contraintes critiques les plus fortes. Nous pouvons donc conclure que la contrainte principale critique de plissement est la plus forte lorsque la direction de compression est parallèle à la direction qui présente la plus forte valeur du coefficient d'anisotropie transverse R_α . Cette remarque est équivalente au résultat obtenu en anisotropie normale. Toutefois ces constatations ne sont pas totalement observées sur les courbes limites de plissement obtenues avec le critère quadratique de Hill (1948) (figures [II-30]), ce qui recoupe les résultats de la figure [II-23], obtenue en compression uniaxiale.

Enfin, nous retrouvons de nouveau la différence de résultats observée entre la théorie de l'écoulement et la théorie de la déformation. Cette dernière prévoit toujours des niveaux de contraintes inférieurs à ceux obtenus en théorie de l'écoulement.

6. Conclusion

Une étude analytique locale du plissement plastique a été développée en utilisant l'équation d'équilibre d'une plaque. L'analyse du plissement des plaques orthotropes présentée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence une influence non négligeable de l'anisotropie plastique. Pour les matériaux à anisotropie normale, cette influence va dans le sens d'une augmentation des niveaux de contraintes critiques lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente. Cette augmentation est relativement plus importante en théorie de l'écoulement ; les contraintes critiques sont toujours plus élevées en théorie de l'écoulement qu'en théorie de la déformation. Dans le cas de l'anisotropie transverse, les résultats sont influencés par cette dernière, et les résultats ne peuvent être corrélés de façon satisfaisante à la seule valeur du coefficient d'anisotropie $R(\alpha)$ dans la direction compressive. La tendance est une augmentation de la contrainte critique lorsque le coefficient d'anisotropie dans la direction compressive augmente, mais cette corrélation n'est pas toujours vérifiée, en particulier avec le critère quadratique de Hill (1948).

Par ailleurs, la direction de plissement est toujours portée selon la direction compressive (ou la plus fortement compressive) dans le cas des matériaux isotropes ou anisotropes normaux. De légères désorientations de quelques degrés peuvent être obtenues dans le cas de l'anisotropie transverse.

Cette étude locale du plissement a été effectuée en supposant que la longueur d'ondes du pli était connue. Elle pourrait donc être facilement adaptée au cas où les conditions aux limites d'une plaque simplement appuyée ou encastrée sur son contour seraient prises en compte. Par contre, l'étude analytique du plissement dans la collerette d'un embouti nécessiterait la définition d'un champ de déplacement transversal prenant en compte les conditions aux limites du procédé, comme cela a été proposé par Triantafyllidis et Needleman (1980).

Chapitre 3:

Etude du plissement d'une coque doublement courbée orthotrope

Table des matières

1. INTRODUCTION	77
2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME	77
3. DÉTERMINATION DES CONTRAINTES CRITIQUES DE PLISSEMENT	79
3.1. Détermination des équations de plissement	79
3.2. Conditions d'apparition du plissement	82
4. ANALYSE DES RÉSULTATS	83
4.1. Définition des matériaux et des géométries étudiés	83
4.2. Influence de la géométrie et du chargement (cas des matériaux isotropes)	85
4.2.1. Cas $R_1 = 10$ mm et $R_2 = 100$ mm	86
4.2.2. Cas $R_1 = 110$ mm et $R_2 = 213$ mm	89
4.2.3. Cas $R_1 = -10$ mm et $R_2 = 290$ mm	93
4.2.4. Bilan des résultats	96
4.3. Influence de l'anisotropie normale	96
4.4. Influence de l'anisotropie transverse	99
5. CONCLUSION	101

1. Introduction

Nous avons vu au chapitre II qu'il était possible de déterminer des courbes limites de plissement pour une plaque orthotrope soumise à des chargements quelconques. Cette étude analytique locale a permis de montrer l'influence de l'anisotropie du matériau sur l'apparition du plissement plastique. Toutefois, au cours d'un procédé d'emboutissage, les zones de l'embouti où un plissement plastique est le plus pénalisant correspondent le plus souvent à des brins libres, modélisables par des coques doublement courbées.

Nous développons donc, dans ce chapitre, une analyse de plissement qui s'appuie sur la fonctionnelle et le critère de bifurcation proposé par Hutchinson (1974) pour l'étude du flambage plastique des coques minces. Cette analyse du plissement plastique sera appliquée à une coque orthotrope doublement courbée correspondant à des portions de tôles susceptibles d'être rencontrées sur un embouti subissant un essai d'emboutissage de coupelle tronconique. La géométrie de la coque est définie par les rayons de courbure principaux locaux des portions de tôles envisagées. Nous définissons un domaine utile de chargements susceptibles d'être rencontrés lors d'un essai d'emboutissage profond.

Nous déterminons ainsi des courbes limites de plissement que nous pourrons comparer, par la suite, à des prévisions de plissement issues de simulations par éléments finis.

2. Présentation du problème

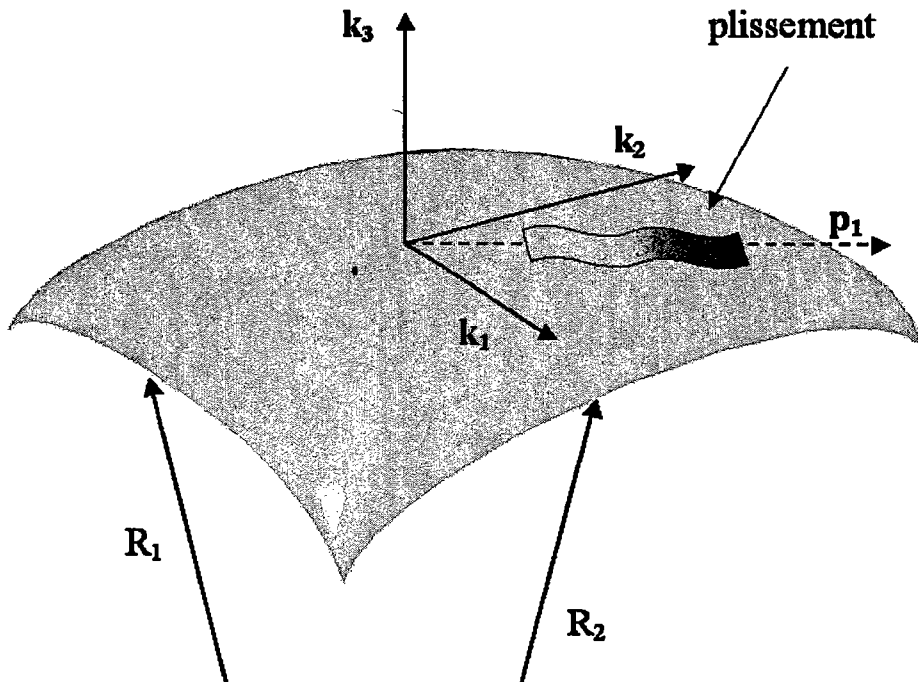


Figure [III-1] : Définition géométrique de la coque avec apparition du plissement suivant p_1

Nous supposons une coque d'épaisseur h et de rayons de courbures principaux R_1 et R_2 . Cette coque est soumise à un chargement biaxial de traction et/ou compression. Le chargement est appliqué de façon quelconque, à la fois, par rapport aux axes principaux de courbure (k_1 , k_2) et par rapport aux axes d'orthotropie (x_1 , x_2). Nous supposons en outre que le plissement se

développe suivant une direction privilégiée $\mathbf{p}_1$ d'orientation inconnue a priori. La figure [III-1] présente la géométrie du problème et la figure [III-2] définit les différents systèmes d'axes utilisés.

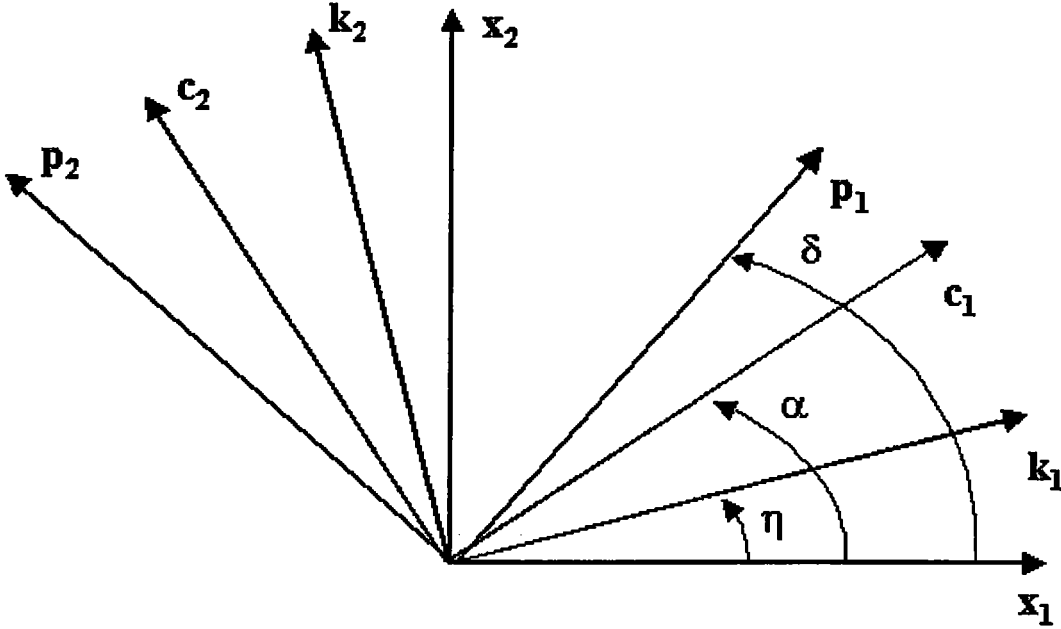


Figure [III-2]: définition des axes pour une coque à double courbure

Comme dans le cas du plissement d'une plaque (chapitre II) les axes $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ sont les axes d'orthotropie, les axes $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ les axes principaux des contraintes et $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ les directions privilégiées de plissement. L'angle α définit l'orientation des axes principaux de contraintes $(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ par rapport aux axes d'orthotropie $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$. L'angle δ définit l'orientation la plus favorable à l'apparition du plissement. En outre, pour cette coque, nous définissons les axes principaux de courbures $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ et leur orientation est définie par l'angle η par rapport aux axes d'orthotropie $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

La position d'un point courant P de la surface moyenne de la coque définie ci-dessus sera représentée par le vecteur $\mathbf{OP}$ qui s'exprime selon les besoins par :

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} &= x_1 \mathbf{x}_1 + x_2 \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{OP} &= c_1 \mathbf{c}_1 + c_2 \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{OP} &= p_1 \mathbf{p}_1 + p_2 \mathbf{p}_2 \end{aligned} \quad (\text{III-1})$$

où (x_1, x_2) , (c_1, c_2) et (p_1, p_2) sont les coordonnées du point P, respectivement, dans les repères $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, $(O, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ et $(O, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$. Les coordonnées (p_1, p_2) sont reliées aux coordonnées (x_1, x_2) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 \cos \eta + x_2 \sin \eta \\ p_2 &= -x_1 \sin \eta + x_2 \cos \eta \end{aligned} \quad (\text{III-2})$$

Pour le problème défini ci-dessus, les composantes du tenseur des courbures principales s'expriment en fonction des rayons de courbure principaux suivant les relations :

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{R_1} \\
 b_2 &= \frac{1}{R_2} \\
 b_{12} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III-3}$$

Les composantes du tenseur des courbures, exprimées dans les axes de plissement ($\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$), sont définies par :

$$\begin{aligned}
 b_{11}^\delta &= \cos^2(\delta - \eta)b_1 + \sin^2(\delta - \eta)b_2 = \cos^2(\delta - \eta)\frac{1}{R_1} + \sin^2(\delta - \eta)\frac{1}{R_2} \\
 b_{22}^\delta &= \sin^2(\delta - \eta)b_1 + \cos^2(\delta - \eta)b_2 = \sin^2(\delta - \eta)\frac{1}{R_1} + \cos^2(\delta - \eta)\frac{1}{R_2} \\
 b_{12}^\delta &= \cos(\delta - \eta)\sin(\delta - \eta)(b_2 - b_1) = \cos(\delta - \eta)\sin(\delta - \eta)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)
 \end{aligned}
 \tag{III-4}$$

Le problème étant posé, nous pouvons maintenant procéder à la détermination des contraintes critiques de plissement.

3. Détermination des contraintes critiques de plissement

3.1. Détermination des équations de plissement

Avant de débiter l'analyse proprement dite du plissement pour une coque, nous allons poser quelques hypothèses qui vont nous aider à résoudre le problème. Nous allons supposer que la coque est dans un état de contraintes planes. De plus, nous allons étudier le plissement comme un phénomène local. Nous supposons donc que les conditions aux limites sont négligées. Les conditions de continuité avec le reste de la coque ne sont donc pas prises en compte et la tôle est supposée libre de tout contact.

Nous adoptons dans cette étude un champ de vitesse de déplacement exprimé dans les axes de plissement sous la forme :

$$\begin{cases}
 u_3 = Ah \cos\left(\frac{\lambda_1}{l} p_1\right) \cos\left(\frac{\lambda_2}{l} p_2\right) \\
 u_1 = Bh \sin\left(\frac{\lambda_1}{l} p_1\right) \cos\left(\frac{\lambda_2}{l} p_2\right) \\
 u_2 = Ch \cos\left(\frac{\lambda_1}{l} p_1\right) \sin\left(\frac{\lambda_2}{l} p_2\right)
 \end{cases}
 \tag{III-5}$$

où $l = \sqrt{Rh}$, avec la courbure R qui prendra la valeur R_1 ou R_2 . A, B, C sont des constantes représentant les amplitudes relatives du déplacement. λ_1 et λ_2 sont des nombres d'ondes respectivement dans les directions $\mathbf{p}_1$ et $\mathbf{p}_2$.

Les plis sont supposés être perpendiculaires à une direction, c'est à dire que le plissement se produit suivant une seule direction, dans cette étude suivant $\mathbf{p}_1$. Le nombre d'onde λ_2 est considéré égal à zéro. Le champ de vitesse de déplacement (III-5) se réduit alors à :

$$\begin{cases} \dot{u}_3 = Ah \cos\left(\frac{\lambda_1}{l} p_1\right) \\ \dot{u}_1 = Bh \sin\left(\frac{\lambda_1}{l} p_1\right) \\ \dot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

Le plissement est étudié comme un phénomène de bifurcation plastique. Par conséquent, nous utilisons la fonctionnelle de bifurcation développée par Hutchinson (1974) pour les coques. Cette fonctionnelle s'exprime dans les axes de plissement par :

$$F(\dot{u}_1, \dot{u}_3) = \int_S \left\{ \frac{h^3}{12} L_{ijkl}^\delta \dot{K}_{ij} \dot{K}_{kl} + h L_{ijkl}^\delta \dot{E}_{ij} \dot{E}_{kl} + N_{ij}^\delta \dot{u}_{3,i} \dot{u}_{3,j} \right\} dS \quad (\text{III-7})$$

où les indices i, j, k et l prennent successivement les valeurs 1 et 2. L_{ijkl}^δ désignent les modules élasto-plastiques exprimés dans les axes de plissement $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$. Les efforts résultants N_{ij}^δ s'écrivent à l'aide des contraintes σ_{ij}^δ exprimées dans les axes de plissement sous la forme :

$$N_{ij}^\delta = h \sigma_{ij}^\delta \quad (\text{III-8})$$

Les termes $\dot{E}_{ij}$ définissent les incréments de déformation de membrane et $\dot{K}_{ij}$ les incréments de déformation en flexion. Ces incréments de déformation s'écrivent sous la forme :

$$\dot{K}_{ij} = -\dot{u}_{3,ij} \quad (\text{III-9})$$

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} \right) + b_{ij}^\delta \dot{u}_3 \quad (\text{III-10})$$

où b_{ij}^δ désigne le tenseur des courbures dans les axes de plissement $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$. Les dérivées partielles des vitesses de déplacement sont prises par rapport aux coordonnées p_1 et p_2 .

En introduisant les termes définis ci-dessus, calculés avec le champ de vitesses de déplacement (III-6) dans la fonctionnelle (III-7), nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 F(\dot{u}_1, \dot{u}_3) = & \frac{h^5}{12} A^2 L_{11}^\delta \left(\frac{\lambda_1}{l} \right)^4 \int_S \cos^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS + h^3 \sigma_{11}^\delta A^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} \right)^2 \int_S \sin^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS \\
 & + h^3 A^2 \left(L_{11}^\delta b_{11}^{\delta^2} + L_{22}^\delta b_{22}^{\delta^2} + 2b_{11}^\delta b_{22}^\delta L_{12}^\delta \right) \int_S \cos^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS \\
 & + 4h^3 A^2 \left(L_{66}^\delta b_{12}^{\delta^2} + b_{11}^\delta b_{12}^\delta L_{16}^\delta + b_{22}^\delta b_{12}^\delta L_{26}^\delta \right) \int_S \cos^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS \\
 & + B^2 L_{11}^\delta \left(\frac{\lambda_1}{l} \right)^2 \int_S \cos^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS \\
 & + 2AB \left(L_{11}^\delta b_{11}^\delta + 2L_{16}^\delta b_{12}^\delta + 2L_{12}^\delta b_{22}^\delta \right) \left(\frac{\lambda_1}{l} \right) \int_S \cos^2 \left(\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right) dS
 \end{aligned} \quad (\text{III-11})$$

Nous avons supposé, dans le cadre de cette étude, que la valeur de l'épaisseur h de la coque est très inférieure aux valeurs des rayons de courbures principaux R_1 et R_2 (théorie de Donnell-Musthtari-Vlasov pour les coques à faible courbure). Le nombre d'ondes du plissement, λ_1 , est supposé grand devant l . Nous obtenons ainsi :

$$\int_S \sin^2 \left[\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right] dS = \frac{S}{2} \quad (\text{III-12})$$

$$\int_S \cos^2 \left[\frac{\lambda_1}{l} p_1 \right] dS = \frac{S}{2} \quad (\text{III-13})$$

où S est la surface suivant laquelle survient le plissement. En explicitant les différents termes, la fonctionnelle (III-11) s'écrit finalement sous la forme du produit de matrices suivant :

$$F = \frac{1}{2} Sh^3 u \cdot [M] \cdot u' \quad (\text{III-14})$$

où $u = (A, B)$ est le vecteur des amplitudes de déplacement, où les termes de la matrice $[M]$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 M_{11} = & \sigma_{11}^\delta \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 + \frac{h^2}{12} L_{11}^\delta \left(\frac{\lambda}{l} \right)^4 + L_{11}^\delta b_{11}^{\delta^2} + L_{22}^\delta b_{22}^{\delta^2} + 2L_{12}^\delta b_{11}^\delta b_{22}^\delta \\
 & + 4 \left(L_{66}^\delta b_{12}^{\delta^2} + L_{16}^\delta b_{11}^\delta b_{12}^\delta + L_{26}^\delta b_{22}^\delta b_{12}^\delta \right) \\
 M_{12} = & \left(\frac{\lambda}{l} \right) \left[L_{11}^\delta b_{11}^\delta + L_{12}^\delta b_{22}^\delta + 2L_{16}^\delta b_{12}^\delta \right] \\
 M_{22} = & L_{11}^\delta \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2
 \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

et où $\lambda = \lambda_1$. La condition de plissement $F = 0$ se traduit par deux équations : le déterminant de la matrice $[M]$ et la dérivée partielle de ce déterminant par rapport au nombre d'onde sans dimension λ doivent être nuls. Ceci s'écrit :

$$\det[M] = 0 \quad (\text{III-16})$$

et

$$\frac{\partial \det[M]}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{III-17})$$

Nous obtenons ainsi deux équations et nous avons trois inconnues : la contrainte critique de plissement, l'orientation et le nombre d'ondes. Nous pouvons déterminer à l'aide des équations (III-16, III-17) la contrainte critique ainsi que le nombre d'ondes du plissement en fonction de l'orientation du plissement.

3.2. Conditions d'apparition du plissement

La composante σ_{11}^δ de la contrainte de plissement s'obtient à partir de l'équation (III-17). Elle s'exprime sous la forme :

$$\sigma_{11}^\delta = -\frac{h^2 L_{11}^\delta}{6} \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2 \quad (\text{III-18})$$

En introduisant la relation (II-8) dans l'expression (III-18), nous obtenons l'expression de la contrainte principale critique de plissement :

$$\sigma_1 = -\frac{h}{6R \cos^2(\delta - \alpha) + R_\sigma \sin^2(\delta - \alpha)} \frac{L_{11}^\delta}{\lambda^2} \quad (\text{III-19})$$

où $R_\sigma = \sigma_2 / \sigma_1$ est le rapport des contraintes principales. Nous constatons que l'orientation δ du plissement intervient directement dans les fonctions trigonométriques et indirectement dans l'expression du module tangent L_{11}^δ , qui est exprimé dans les axes de plissement. L'équation (III-16) et l'expression (III-18) de la contrainte critique nous permettent de déterminer le nombre d'ondes critique λ^{cr} en fonction des modules élasto-plastiques écrits dans les axes de plissement :

$$\lambda^{cr} = \sqrt[4]{\frac{12R^2}{L_{11}^{\delta^2}} [L_{11}^\delta A - B]} \quad (\text{III-20})$$

où R est égal à la courbure principale R_2 ou R_1 et avec les termes A et B définis par :

$$\begin{aligned} A &= L_{11}^\delta b_{11}^{\delta^2} + L_{22}^\delta b_{22}^{\delta^2} + 2L_{12}^\delta b_{11}^\delta b_{22}^\delta + 4(L_{66}^\delta b_{12}^{\delta^2} + L_{16}^\delta b_{11}^\delta b_{12}^\delta + L_{26}^\delta b_{22}^\delta b_{12}^\delta) \\ B &= (L_{11}^\delta b_{11}^\delta + L_{12}^\delta b_{22}^\delta + 2L_{16}^\delta b_{12}^\delta)^2 \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

L'orientation δ du plissement intervient dans l'expression des termes A et B par l'intermédiaire des courbures et des modules élasto-plastiques exprimés dans les axes de plissement. L'orientation la plus favorable au plissement est obtenue en minimisant $|\sigma_1|$ par rapport à δ . La longueur d'onde L du pli est définie par la relation suivante :

$$L = 2\pi \left(\frac{l}{\lambda_1^{cr}} \right) \quad (\text{III-22})$$

4. Analyse des résultats

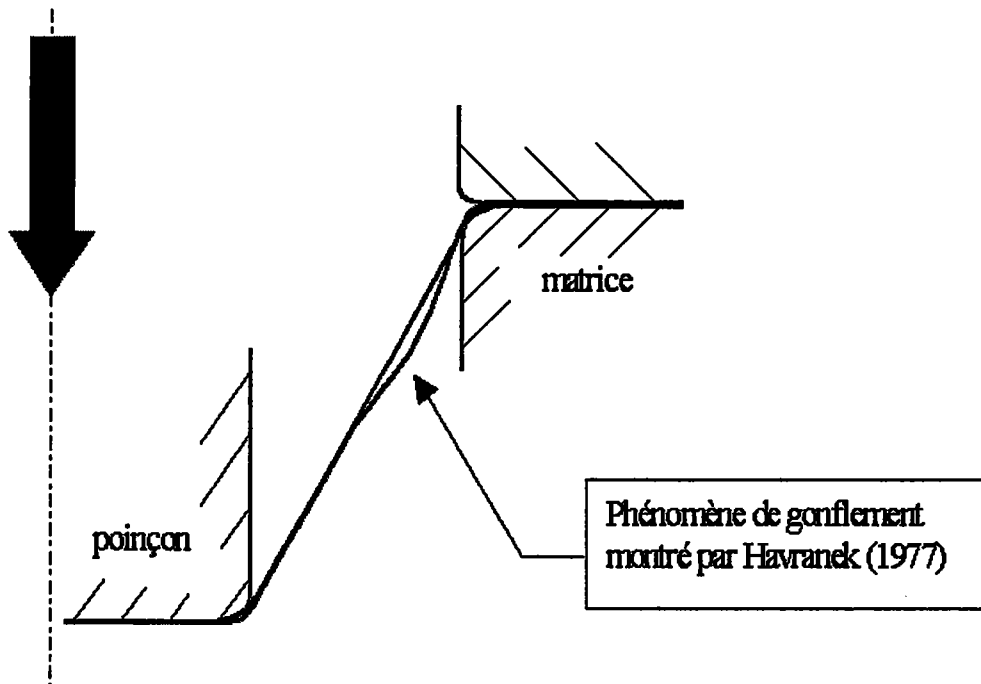
4.1. Définition des matériaux et des géométries étudiés

L'expression (III-19) de la contrainte critique de plissement fait intervenir le module élasto-plastique L_{II}^δ et les rayons de courbure principaux. Nous devons donc définir le comportement des matériaux modèles étudiés ainsi que les caractéristiques géométriques de la coque, c'est à dire R_1 et R_2 . Les matériaux étudiés ont été présentés dans le cas du plissement d'une plaque (chapitre II, paragraphe 5-1). Pour mémoire, ces matériaux se classent en trois catégories :

- matériaux isotropes,
- matériaux isotropes transverses,
- matériaux anisotropes transverses.

Nous avons adopté, pour cette étude, une valeur du coefficient K , dans la loi d'écrouissage (II-39), égale à 400 MPa. Les autres caractéristiques mécaniques sont inchangées.

Pour définir la géométrie des coques nous allons nous placer dans les conditions rencontrées au cours d'une opération d'emboutissage, par exemple, l'essai d'emboutissage d'une coupelle tronconique avec serre-flan représenté sur la figure [III-3].



Figure[III-3] : schéma présentant l'emboutissage d'une coupelle tronconique

Lors de l'emboutissage d'une coupelle trois régions particulières peuvent être distinguées. Ces trois régions sont la zone sous le rayon de poinçon, le brin libre de la coupelle et la zone sur le rayon de matrice. La direction k_1 suit le profil de l'embouti et la direction k_2 la

circonférence de l'embouti. Pour ces trois régions les rayons de courbure principaux R_1 et R_2 peuvent être définis. Nous avons représenté les rayons principaux de courbure sur la figure [III-4] :

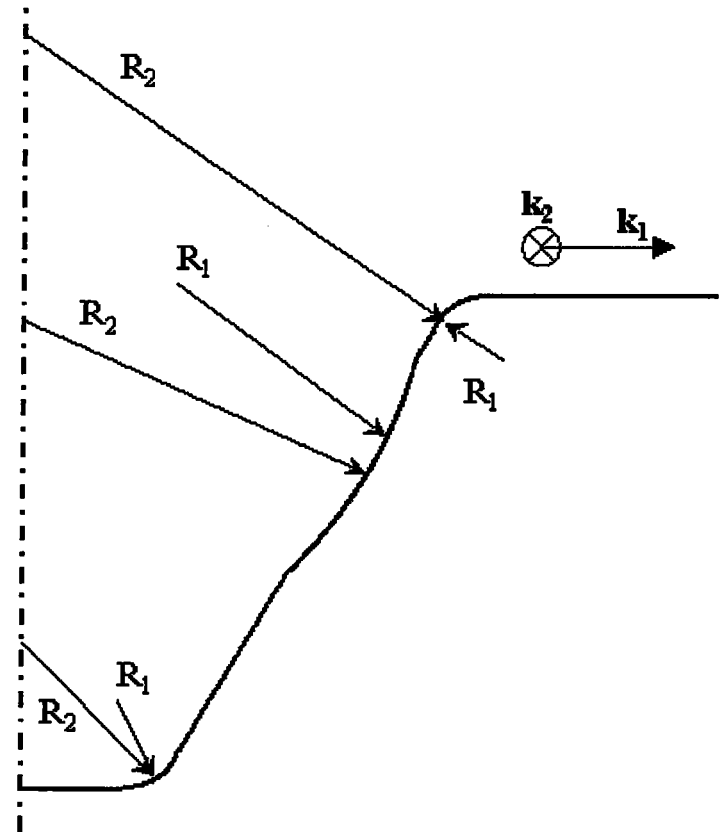


Figure [III-4] : profil de l'embouti, et rayons de courbure associés

Le rayon R_2 est le rayon de courbure suivant la direction circumférentielle et le rayon R_1 est le rayon de courbure du profil de la tôle. Pour donner des valeurs à ces rayons nous nous sommes inspirés de la géométrie et des dimensions de l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique présenté par Ellagoune et Boivin (1988). Par conséquent, nous avons choisi, pour chaque région, des valeurs pour les rayons de courbure principaux qui sont récapitulées dans le tableau [III-1]. L'épaisseur h de la coque est égale à 0,7 mm.

Tableau [III-1] : valeurs des rayons principaux de courbure utilisés dans les simulations

	Rayon poinçon	Brin libre	Rayon matrice
R_1	10 mm	110 mm	-10 mm
R_2	100 mm	213 mm	290 mm

Lors d'essais d'emboutissage de coupelles tronconiques, Havranek (1977) a mis en évidence l'apparition, sur le brin libre, d'un gonflement qui précède le début du plissement. Ce gonflement est le résultat des contraintes circumférentielles compressives (figure [III-3]). Par conséquent, la valeur du rayon R_1 est prise égale sur le brin libre à la valeur associée à ce gonflement. Nous prendrons, en accord avec les simulations numériques présentées au chapitre IV, une valeur de R_1 égale à 110 mm.

Les rayons de courbure étant définis, nous allons tracer les courbes limites de plissement dans le plan des contraintes principales (σ_1, σ_2) . Nous devons balayer l'ensemble des états de contrainte susceptibles d'être rencontrés le long du profil de l'embouti au cours de l'essai.

Lors de l'emboutissage d'une coupelle, l'état de contrainte varie d'un état de compression uniaxiale suivant la direction circonférentielle au bord du flan à un état de traction équi-biaxiale sous le poinçon. Le domaine défini est représenté dans le plan des contraintes principales sur la figure [III-5].

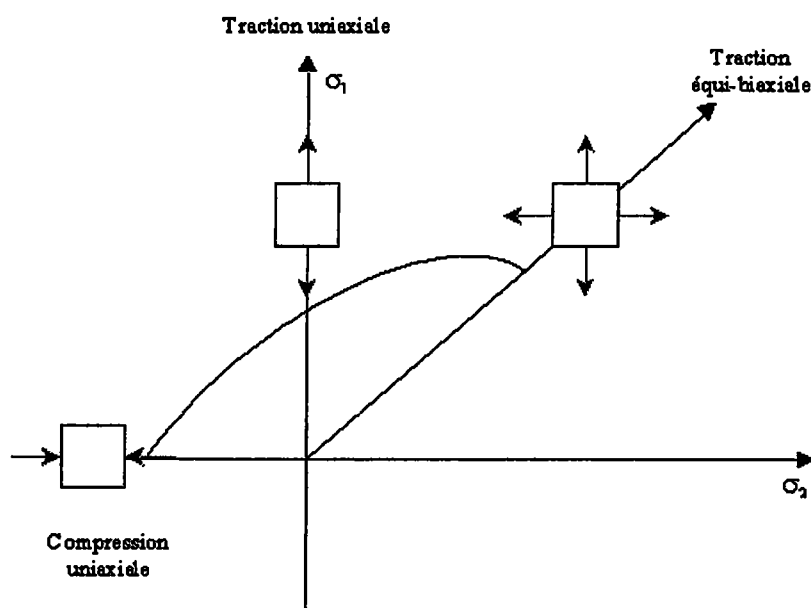


Figure [III-5] : domaine d'états de contrainte rencontrés au cours d'un emboutissage de coupelle

Lors des expériences d'emboutissage de coupelle réalisées par Ellagoune et Boivin (1988) ou par Havranek (1977) le plissement s'est toujours produit sur le brin libre de l'embouti. Nous envisagerons néanmoins l'éventualité du plissement dans les trois zones définies sur la figure [III-4]. Nous verrons a posteriori si le plissement est réellement possible dans ces différentes zones.

4.2. Influence de la géométrie et du chargement (cas des matériaux isotropes)

Dans ce paragraphe nous présentons les résultats obtenus pour le critère de plasticité de von Mises et celui de Drücker (1949), pour les trois cas de géométrie définis au paragraphe 4-1 (tableau [III-1]). Les coques étant supposées isotropes, les directions d'orthotropie, représentées sur la figure [III-2], ne sont pas définies. Seule compte alors l'orientation relative (α - η) des contraintes principales par rapport aux directions principales de courbure.

Les calculs sont effectués avec η égal à 0° et trois valeurs de α sont considérées : $\alpha = 0^\circ, 45^\circ$ et 90° . Nous présentons sur la figure [III-6] les trois types de configuration de chargement pour lesquels les courbes limites de plissement ont été déterminées. L'intensité relative des contraintes σ_1 et σ_2 est spécifiée par la valeur de l'angle θ , défini dans le paragraphe 4-3 du chapitre II.

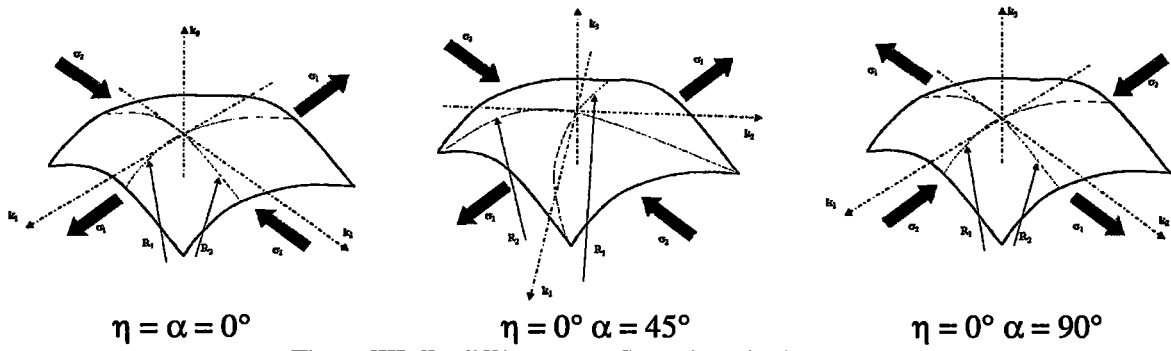


Figure [III-6] : différentes configurations de chargement

4.2.1. Cas $R_1 = 10 \text{ mm}$ et $R_2 = 100 \text{ mm}$

Ce cas, avec deux rayons de courbure de même signe et de valeurs très différentes, correspond à la géométrie qui peut être rencontrée sur le rayon de poinçon.

Nous avons considéré les états de contrainte allant de la traction équi-biaxiale ($\sigma_1 = \sigma_2 > 0$) à la compression uniaxiale ($\sigma_2 < 0$ et $\sigma_1 = 0$). Une bifurcation a pu être obtenue à partir de notre modélisation seulement dans le quadrant ($\sigma_2 < 0$ et $\sigma_1 > 0$). Pour des états de traction biaxiale, le plissement n'est pas obtenu (les calculs sont arrêtés pour une déformation équivalente égale à 1). Les valeurs choisies pour les rayons de courbure principaux, permettent de nous placer dans le cas réel qui consisterait à dire que nous nous trouvons au niveau du rayon du nez du poinçon. Dans le cas d'une opération d'emboutissage, l'état de contrainte à ce niveau est un état de traction biaxiale. L'analyse effectuée ne prévoit pas de plissement dans ces conditions. C'est bien ce qui se passe dans la réalité, il ne se produit pas de plissement sur le rayon de poinçon dans les opérations d'emboutissage.

En poursuivant néanmoins l'analyse théorique dans le domaine du rétreint, nous observons tout d'abord (figures [III-8] et [III-10]) qu'en théorie de l'écoulement la longueur d'onde critique augmente fortement à proximité de la traction uniaxiale. Ceci n'est pas observé en théorie de la déformation (figures [III-12] et [III-14]).

La longueur d'onde critique, L , observée à partir des figures [III-8, III-10, III-12, III-14] est minimum pour une valeur de α égale à 0° . En se reportant à la figure [III-6], ceci correspond à la contrainte compressive σ_2 portée par la direction k_2 , dont le rayon de courbure R_2 est dans ce cas supérieur à R_1 . La longueur d'onde critique est donc minimale lorsque la contrainte compressive est portée par la direction qui possède le rayon de courbure de valeur la plus élevée.

Nous constatons également que, pour les deux surfaces de plasticité et pour les deux lois phénoménologiques employées, la direction de plissement p_1 se présente toujours suivant la direction de la contrainte compressive σ_2 qui s'exerce suivant c_2 , et ceci pour les valeurs de l'angle α égales à 0° et 90° . Lorsque le chargement est appliqué à 45° par rapport aux axes principaux de courbure, le plissement survient selon une direction $(p_1, c_1) = \delta - \alpha$ pouvant s'écarter de 15° à 30° de la valeur 90° qui correspond à un plissement dans la direction de la contrainte compressive.

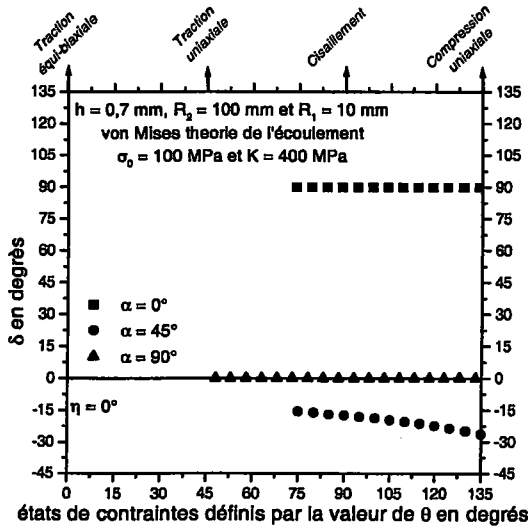


Figure [III-7] : variation de l'angle δ en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

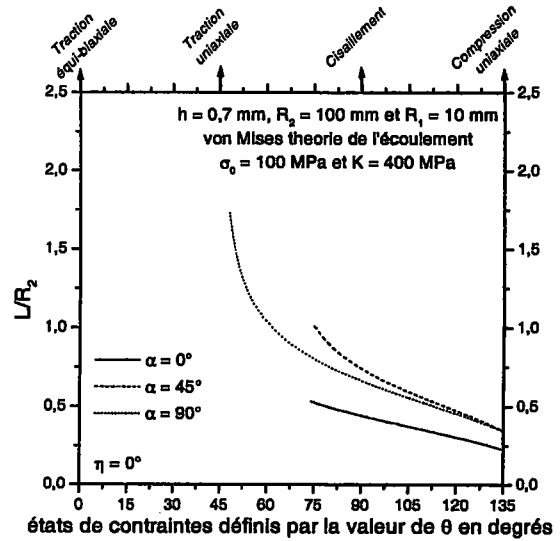


Figure [III-8] : variation de la longueur d'onde L en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

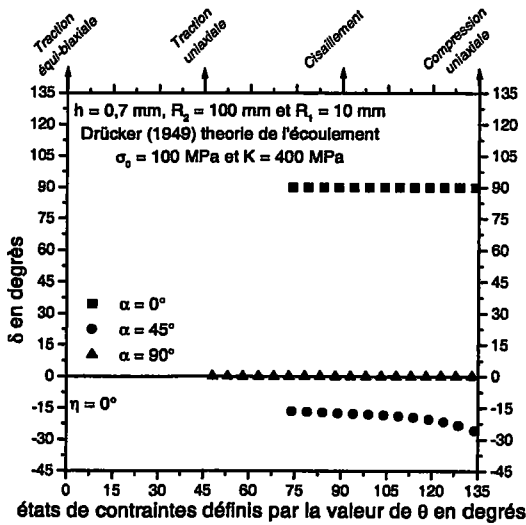


Figure [III-9] : variation de l'angle δ en théorie de l'écoulement, critère de Drucker (1949)

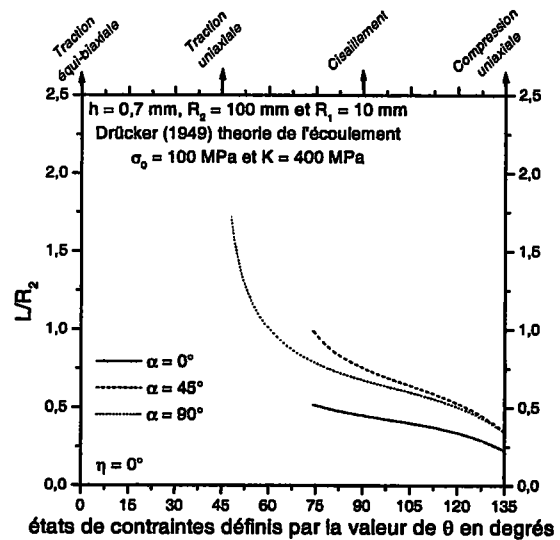


Figure [III-10] : variation de la longueur d'onde L en théorie de l'écoulement, critère de Drucker (1949)

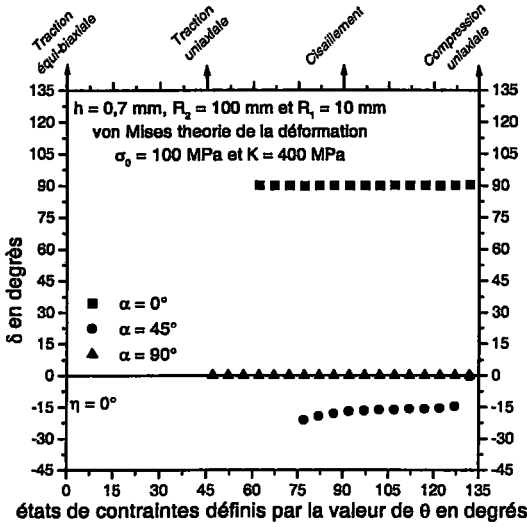


Figure [III-11] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de von Mises

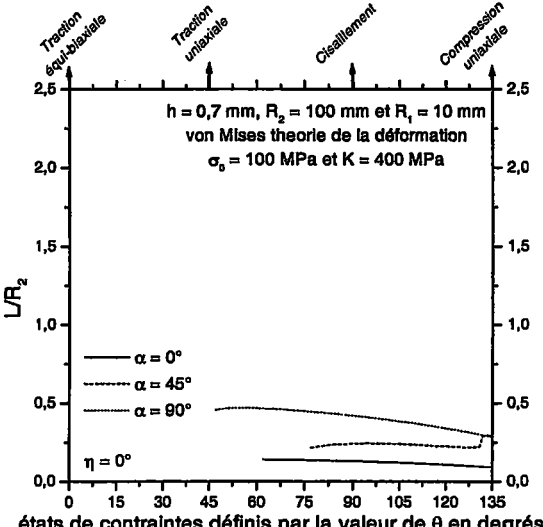


Figure [III-12] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de von Mises

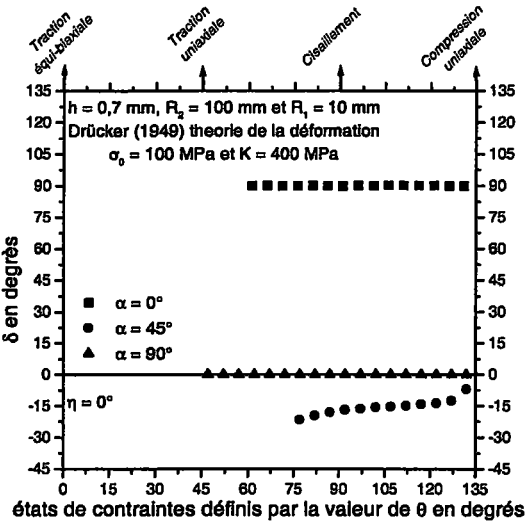


Figure [III-13] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

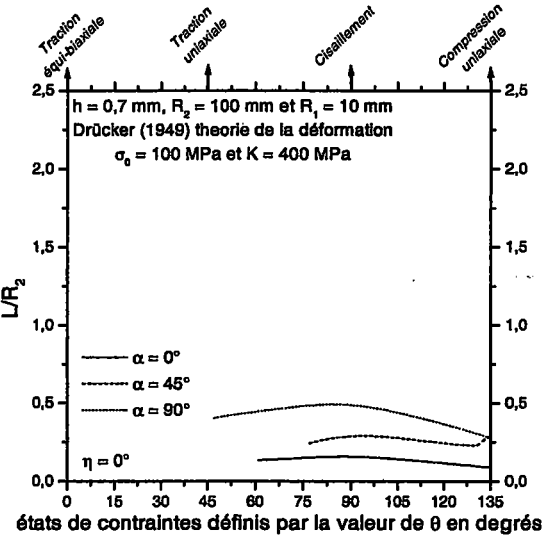


Figure [III-14] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

Les courbes limites de plissement obtenues (figures [III-15, III-16, III-17, III-18]) présentent toutes une asymptote verticale à l'approche de la traction uniaxiale. Elles présentent toutes la même allure pour les différentes valeurs de l'orientation α . Lorsque l'angle α augmente, c'est à dire lorsque l'axe suivant lequel s'exerce la contrainte compressive se rapproche de la direction principale de plus forte courbure k_1 , le niveau de la contrainte critique diminue. Par conséquent, les contraintes critiques sont les plus faibles lorsque la contrainte compressive est suivant la direction qui présente la plus faible valeur du rayon de courbure.

Nous remarquons également que les niveaux de contraintes ainsi que les longueurs d'ondes prévus en théorie de la déformation sont inférieurs à ceux prévus par la théorie de l'écoulement. Nous notons assez peu de différences entre les courbes limites de plissement obtenues avec la surface de plasticité de von Mises et celle de Drucker (1949).

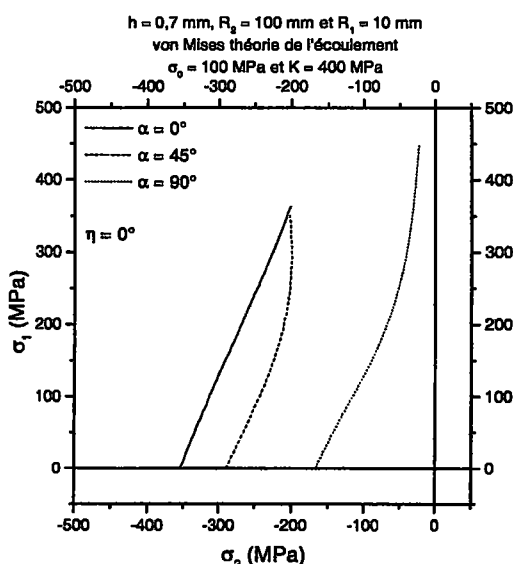


Figure [III-15] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

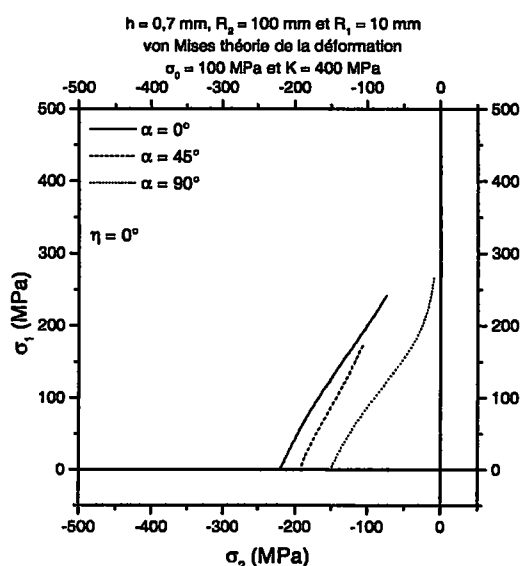


Figure [III-16] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère de von Mises

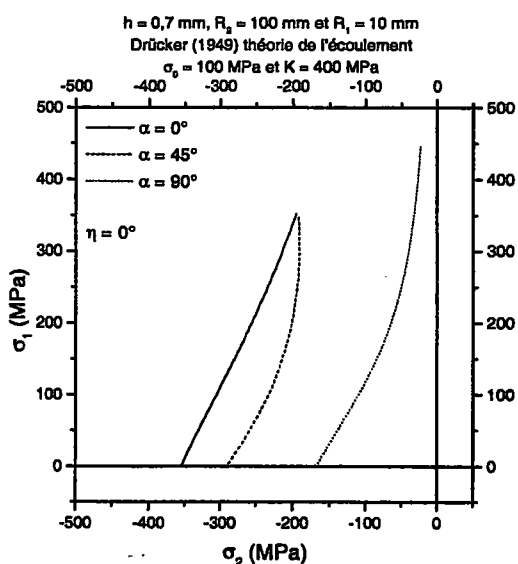


Figure [III-17] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère de Drucker (1949)

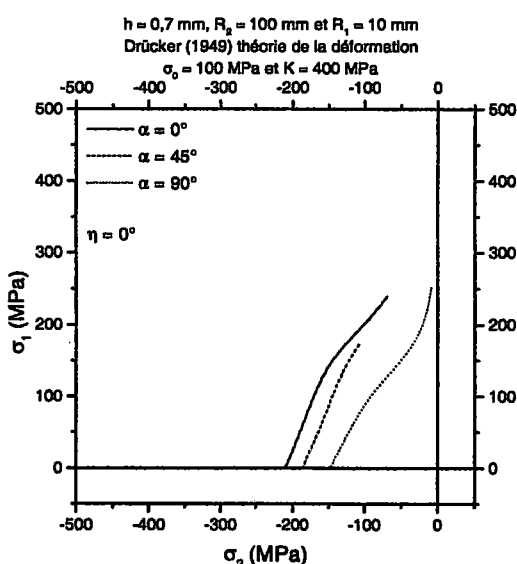


Figure [III-18] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

4.2.2. Cas $R_1 = 110 \text{ mm}$ et $R_2 = 213 \text{ mm}$

Ce cas, caractérisé par deux rayons de courbure de même signe et de valeurs assez peu différentes, correspond à la géométrie qui peut être rencontrée sur le brin libre d'un embouti tronconique. Les remarques effectuées dans le paragraphe précédent restent valables pour cette configuration. Néanmoins, nous constatons une faible variation des niveaux de contrainte et des longueurs d'onde critiques pour les différentes valeurs de l'angle α . Contrairement au cas précédent, ce rapprochement des courbes est lié aux valeurs relativement rapprochées des rayons de courbure.

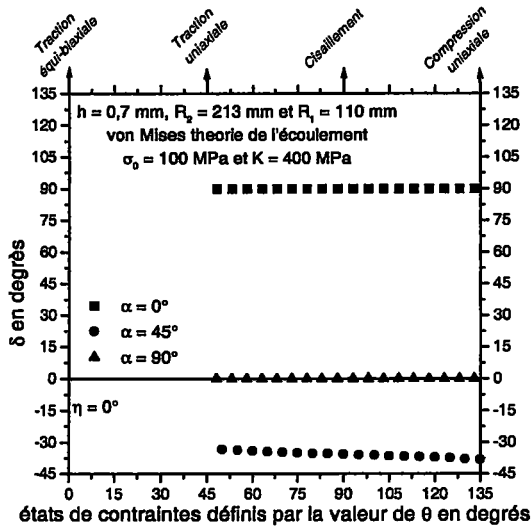


Figure [III-19] : variation de l'angle δ en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

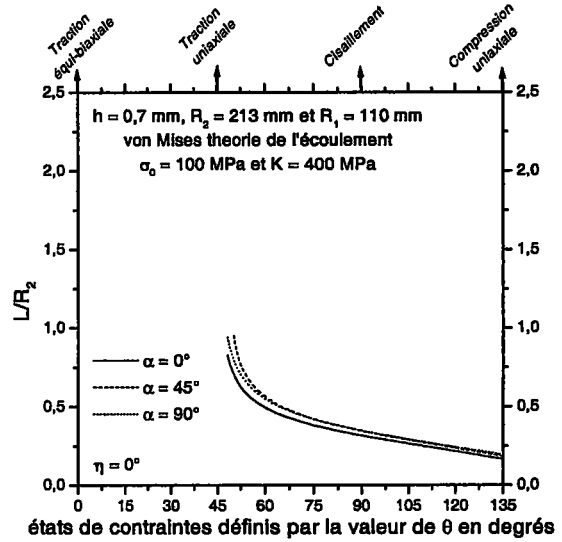


Figure [III-20] : variation de la longueur d'onde L en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

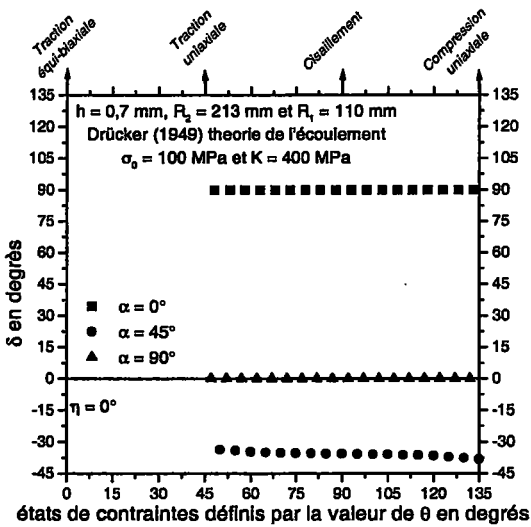


Figure [III-21] : variation de l'angle δ en théorie de l'écoulement, critère de Drucker (1949)

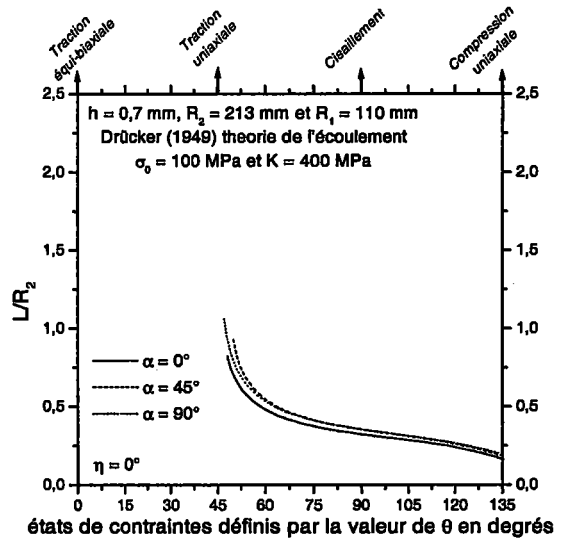
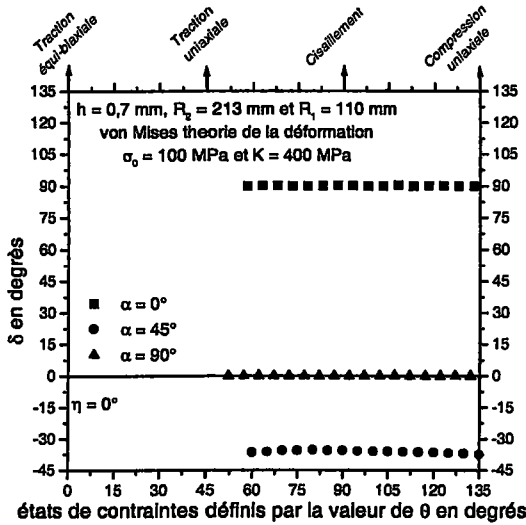
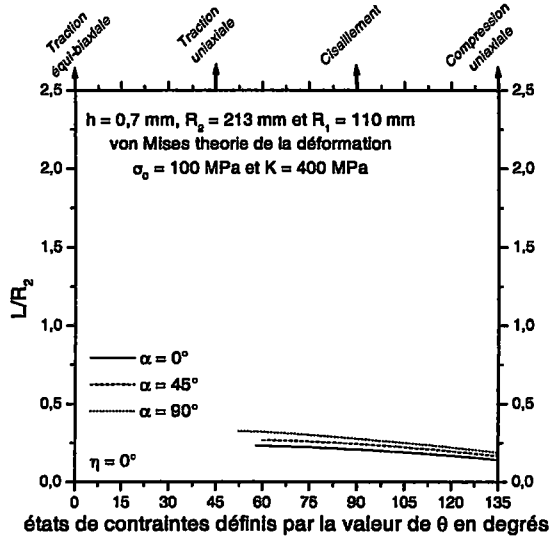
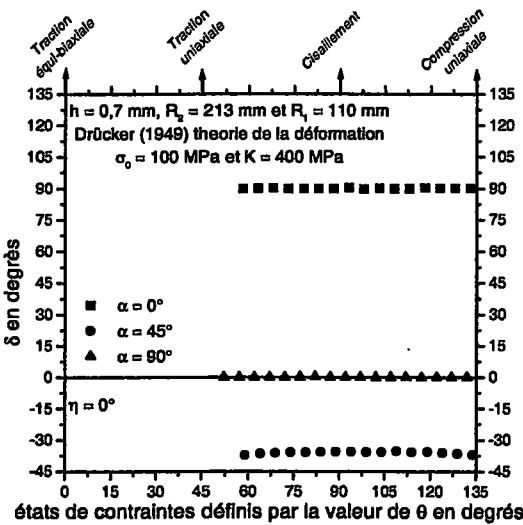
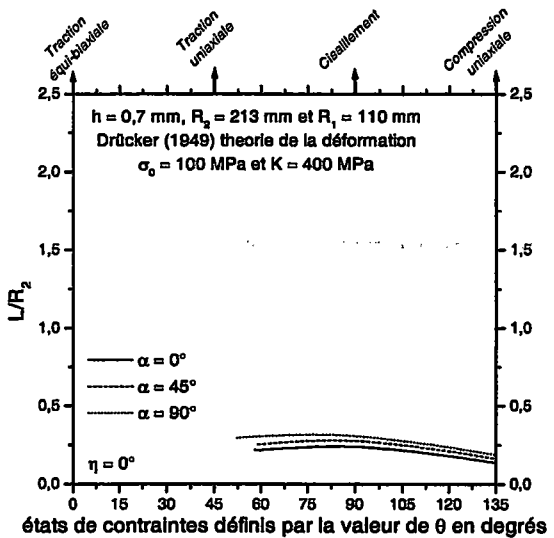


Figure [III-22] : variation de la longueur d'onde L en théorie de l'écoulement, critère de Drucker (1949)

Pour les mêmes raisons, lorsque le chargement est appliqué à 45° par rapport aux axes principaux de courbure, la désorientation de la direction de plissement par rapport à la direction de la contrainte compressive est plus faible que précédemment. Elle n'excède jamais une dizaine de degrés.


 Figure [III-23] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de von Mises

 Figure [III-24] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de von Mises

 Figure [III-25] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

 Figure [III-26] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

Comme pour la géométrie précédente, le plissement n'est prévu que lorsque la coque est soumise à une contrainte compressive au cours de son chargement. Or, lors de l'emboutissage d'une coupelle, le brin libre est soumis à un état de contrainte composé d'une traction radiale et d'une compression circonférentielle. Nous pourrions donc prévoir (à l'aide de notre modélisation) le déclenchement du plissement sur le brin libre de l'embouti. Les plis apparaissant sur le brin libre sont parallèles à la direction radiale, c'est à dire que le plissement se propage suivant la direction circonférentielle et donc suivant la direction compressive. Dans la configuration de l'essai, les axes principaux de contraintes (c_1 , c_2) coïncident avec les axes principaux de courbures (k_1 , k_2) ; ce qui correspond à une valeur de l'angle α égal à 0° . Cette hypothèse est rigoureusement vérifiée pour les matériaux isotropes et isotropes transverses qui seront étudiés ci-après. Ceci résulte de la symétrie de révolution de l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique. Nous observons dans ces conditions que les orientations δ du plissement prévues sur les figures [III-19, III-21, III-23, III-25] sont

égales à 90° suivant la direction compressive. Les prévisions concordent donc avec l'expérience.

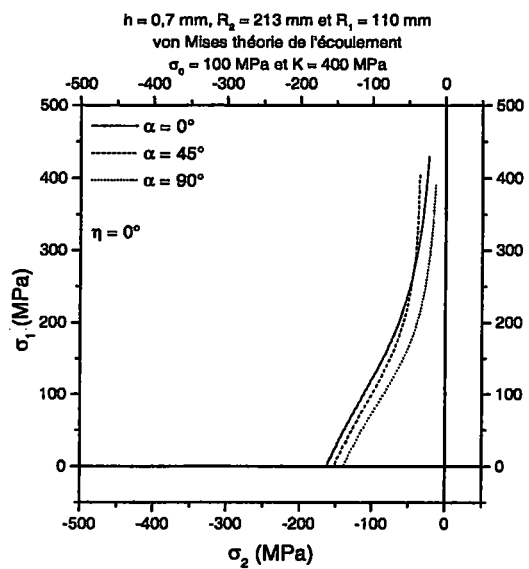


Figure [III-27] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère de von Mises

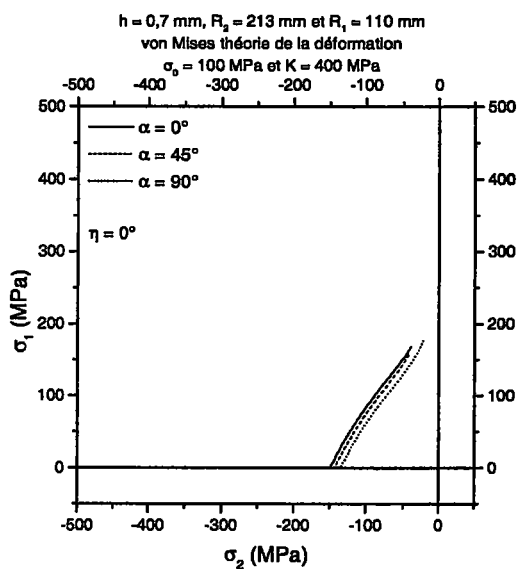


Figure [III-28] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère de von Mises

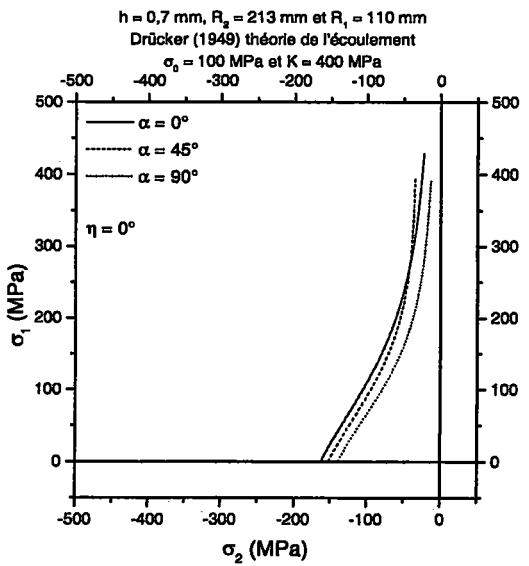


Figure [III-29] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère de Drücker (1949)

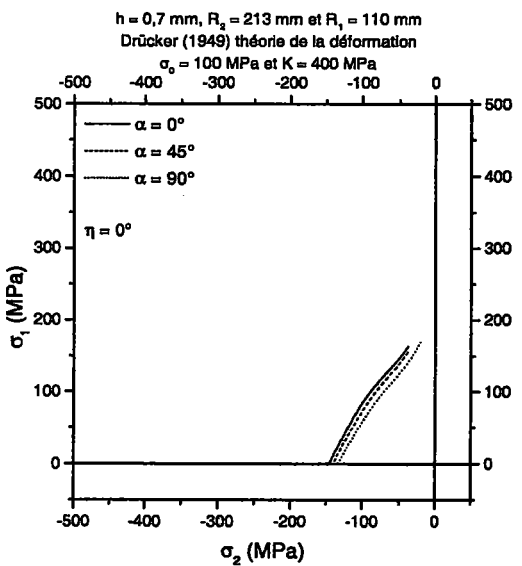
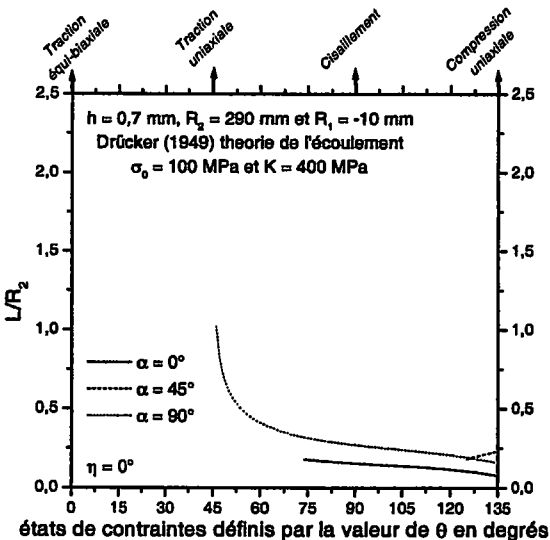
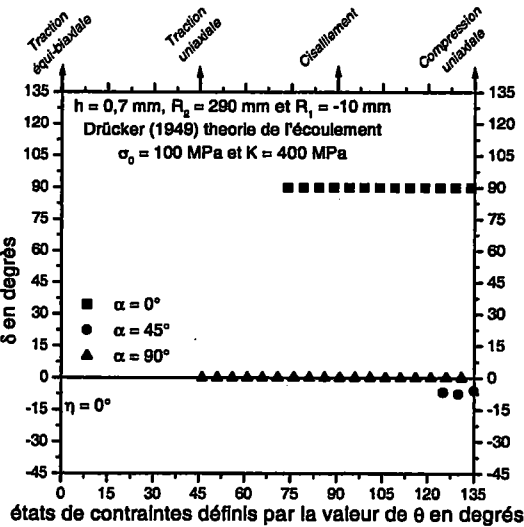
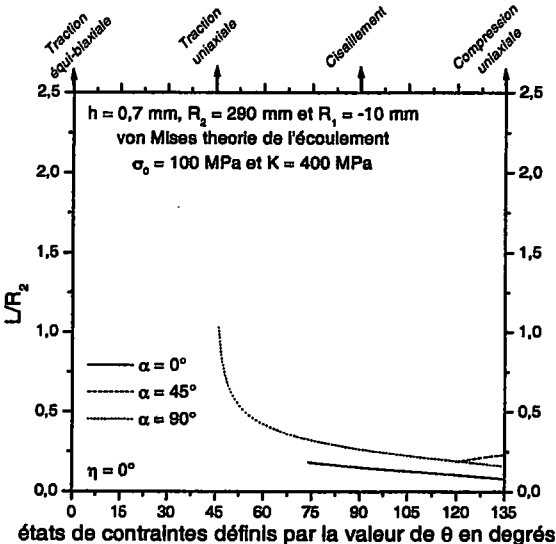
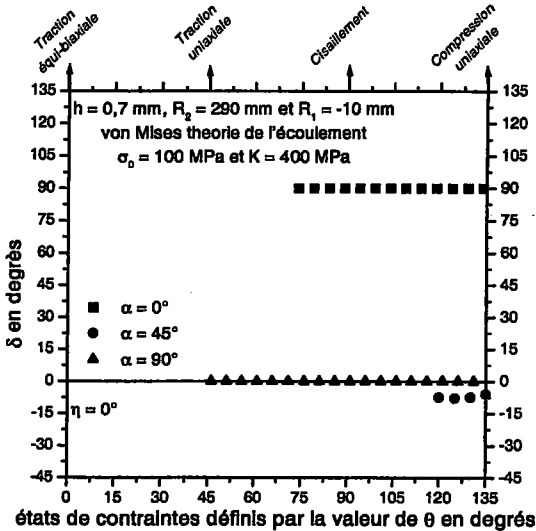
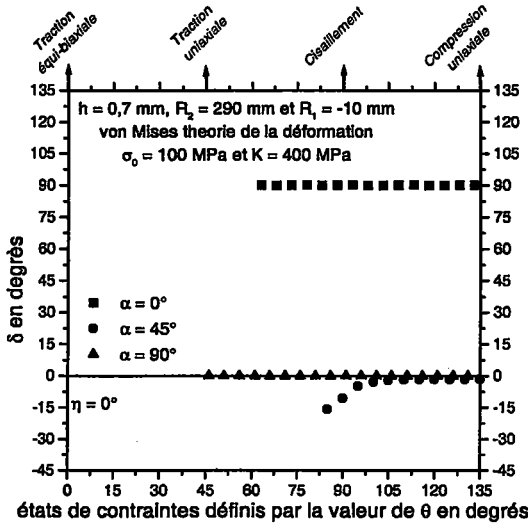
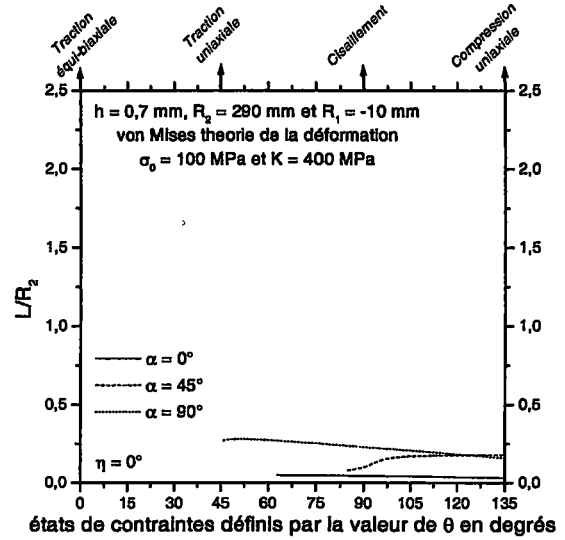
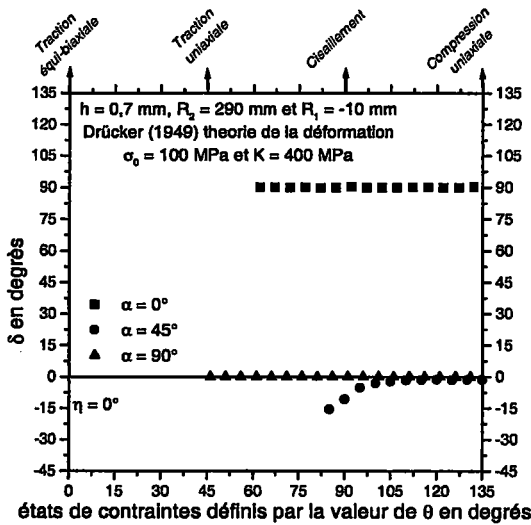
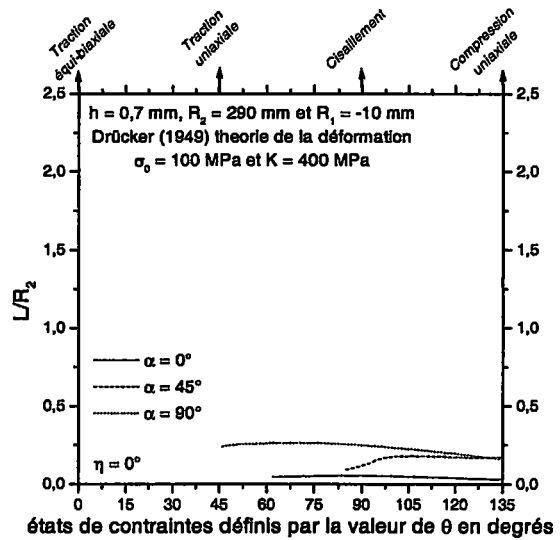


Figure [III-30] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère de Drücker (1949)

4.2.3. Cas $R_1 = -10$ mm et $R_2 = 290$ mm

Ce cas, avec deux rayons de courbure de signe opposé et d'ordre de grandeur très différent, correspond à la géométrie qui peut être rencontrée sur le rayon de matrice.




 Figure [III-35] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de von Mises

 Figure [III-36] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de von Mises

 Figure [III-37] : variation de l'angle δ en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

 Figure [III-38] : variation de la longueur d'onde L en théorie de la déformation, critère de Drucker (1949)

L'apparition du plissement en théorie de l'écoulement dans le cas où le chargement est orienté à 45° par rapport aux axes principaux de courbure ne semble possible que pour des états de contraintes proches de la compression uniaxiale. En théorie de la déformation, et pour $\alpha=45^\circ$, la modélisation prévoit l'apparition du plissement jusqu'au voisinage du cisaillement. L'orientation du plissement par rapport à la direction c_1 est proche de 45° pour un état de la compression uniaxiale, et atteint 60° en théorie de la déformation pour un état proche du cisaillement. Pour des chargements à 0° et à 90° par rapport aux axes principaux de courbure, les résultats obtenus sont comparables à ceux obtenus dans le premier cas considéré ($R_1 = 10$ mm et $R_2 = 100$ mm).

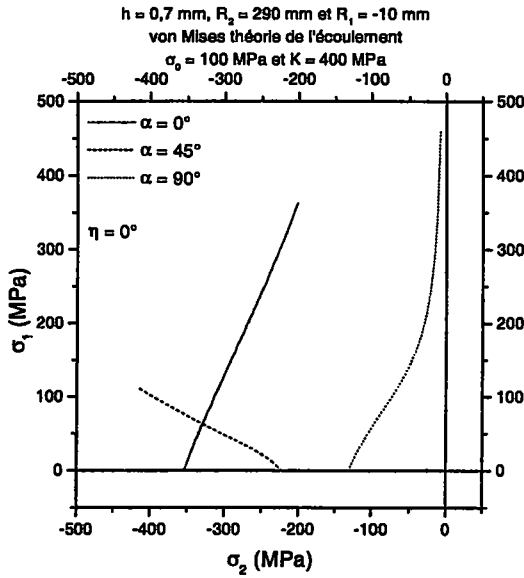


Figure [III-39] : courbes limites de plissement, théorie de l'écoulement, critère de von Mises

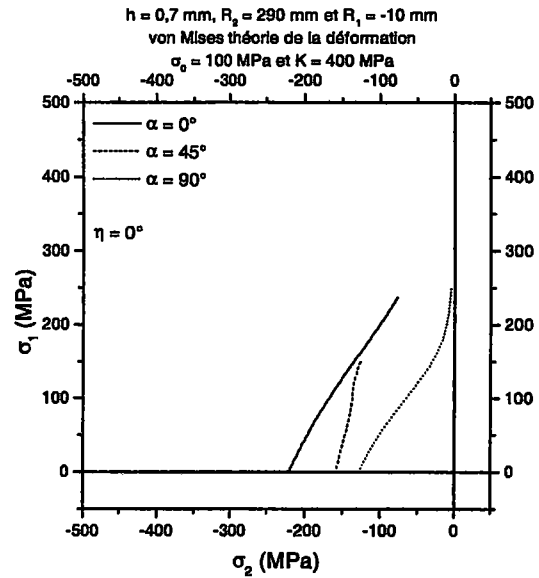


Figure [III-40] : courbes limites de plissement, théorie de la déformation, critère de von Mises

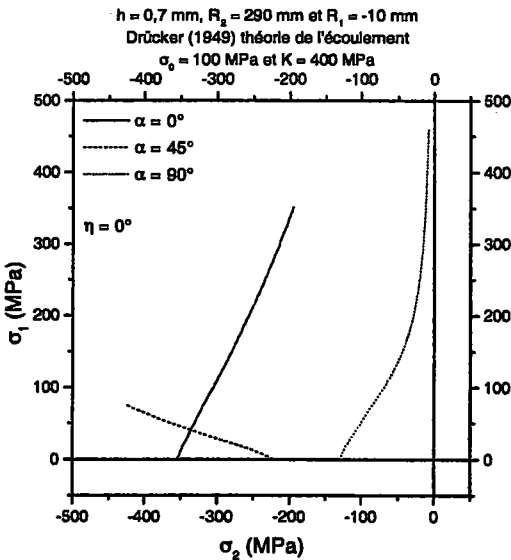


Figure [III-41] : courbes limites de plissement, théorie de l'écoulement, critère de Drücker (1949)

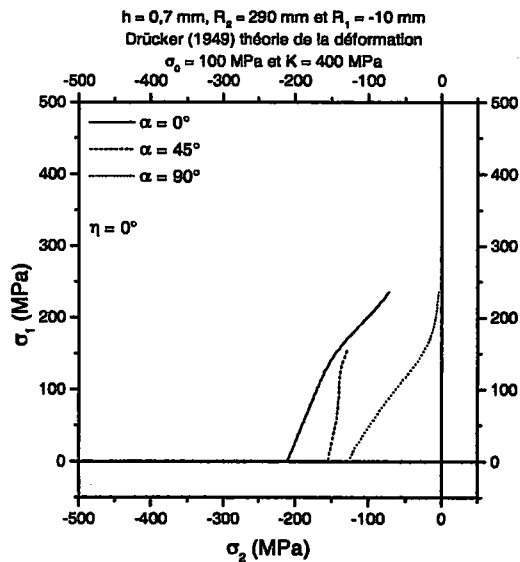


Figure [III-42] : courbes limites de plissement, théorie de la déformation, critère de Drücker (1949)

Comme pour les deux autres géométries considérées, les contraintes critiques de plissement sont les plus faibles lorsque la direction compressive est portée par la direction qui possède le plus faible rayon de courbure (en valeur absolue), ici R_1 qui est égal à -10 mm .

L'état de contrainte, au cours d'un procédé d'emboutissage de coupelle, au voisinage du rayon de matrice est un état de forte compression circonférentielle et de traction radiale. Les courbes limites de plissement obtenues à l'aide de notre modélisation semblent donc être capables de prédire l'apparition du plissement. Mais, dans cette zone, l'apparition du

plissement est influencée par d'autres conditions qui ne sont pas prises en compte dans notre modélisation comme les effets des contacts.

4.2.4. Bilan des résultats

En rassemblant l'ensemble des résultats obtenus pour les trois géométries étudiées, nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

Pour un chargement dans les directions principales de courbure, le plissement survient toujours selon la direction de la contrainte compressive. Des désorientations sont observées dans le cas d'un chargement hors des directions principales de courbure, ces désorientations étant d'autant plus fortes que les rayons de courbure sont plus nettement différents.

Pour une géométrie et une orientation du chargement données, en théorie de l'écoulement la longueur d'onde critique augmente lorsque l'état de contraintes varie de la compression uniaxiale à la traction uniaxiale. Les longueurs d'onde sont plus faibles en théorie de la déformation, et varient moins fortement en fonction de l'état de contraintes.

Pour un rapport de contraintes donné la longueur d'onde diminue lorsque la contrainte compressive est dirigée selon une direction présentant un rayon de courbure plus élevé.

Les courbes limites de plissement présentent toutes la même allure, tout au moins pour les chargements dans les directions principales de courbure. Le niveau de ces courbes augmente lorsque le rayon de courbure dans la direction normale à la direction de compression diminue. Cependant, les courbes limites de plissement ne dépendent pas du rayon de courbure dans la direction de la contrainte compressive ; cela peut être constaté en comparant les cas ($R_1 = 10$ mm ; $R_2 = 100$ mm ; $\alpha - \eta = 0^\circ$) et ($R_1 = -10$ mm ; $R_2 = 290$ mm ; $\alpha - \eta = 0^\circ$) ou ($R_1 = 10$ mm ; $R_2 = 100$ mm ; $\alpha - \eta = 90^\circ$) et ($R_1 = 110$ mm ; $R_2 = 213$ mm ; $\alpha - \eta = 0^\circ$).

L'influence du choix de la surface de charge est faible. Par contre, les résultats obtenus en théorie de la déformation conduisent à des contraintes critiques nettement plus faibles qu'avec la théorie de l'écoulement.

4.3. Influence de l'anisotropie normale

Nous limitons ici la présentation des résultats au cas où les valeurs de α et η sont égales, c'est-à-dire où les axes principaux de contraintes (c_1 , c_2) sont confondus avec les axes principaux de courbures (k_1 , k_2). Nous nous plaçons donc dans le cas réel d'un procédé de formage axisymétrique.

Nous ne présentons pas les résultats relatifs à l'orientation du plissement car celui-ci survient toujours dans la direction compressive en raison de l'isotropie transverse des matériaux. Par contre, nous présentons, d'une part, les variations de la longueur d'onde critique, et d'autre part, les courbes limites de plissement pour quatre valeurs du coefficient d'anisotropie normale.

Nous limitons, en outre, la présentation des résultats au cas $R_1 = 110$ mm et $R_2 = 213$ mm, représentatif de la géométrie rencontrée sur le brin libre d'une coupelle tronconique.

Les figures [III-43, III-44] obtenues avec la théorie de l'écoulement, montrent que les longueurs d'onde normalisées diminuent légèrement lorsque le coefficient d'anisotropie R

augmente pour des états de contraintes entre la traction uniaxiale et le cisaillement, c'est-à-dire pour des valeurs de θ inférieures à 90° . Entre le cisaillement et la compression uniaxiale, les longueurs d'onde augmentent lorsque la valeur de R augmente. En théorie de la déformation, figures [III-45, III-46], les longueurs d'onde critiques sont légèrement plus élevées lorsque la valeur de R est plus forte et ceci indépendamment de l'état de contraintes. Pour les deux lois phénoménologiques, la tendance est donc plutôt à une diminution du nombre de plis lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente, puisque la longueur d'onde est inversement proportionnelle au nombre de plis.

De plus, les résultats tendent à montrer que le choix du critère de plasticité n'a qu'une faible influence sur les valeurs de la longueur d'onde critique et ceci pour chacune des deux lois phénoménologiques employées. Par contre, les longueurs d'onde critiques obtenues en théorie de l'écoulement présentent des valeurs supérieures aux longueurs d'onde critiques calculées à partir de la théorie de la déformation.

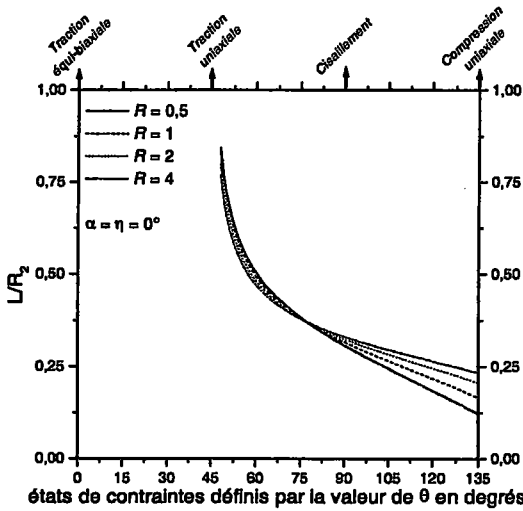


Figure [III-43] : variation de la longueur d'onde par rapport à l'état de contrainte en théorie de l'écoulement, critère quadratique Hill (1948)

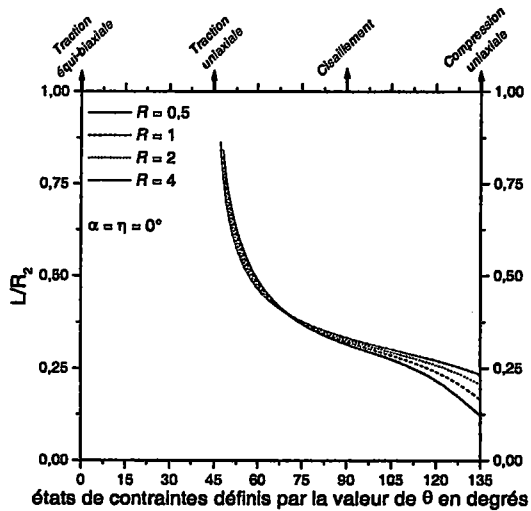


Figure [III-44] : variation de la longueur d'ondes par rapport à l'état de contrainte en théorie de l'écoulement, modèle proposé par Ferron et al (1994)

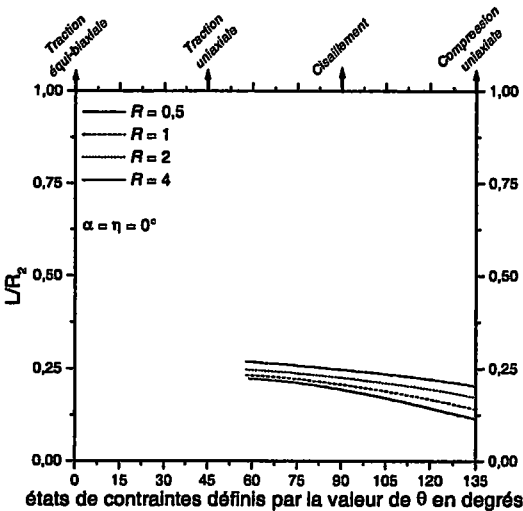


Figure [III-45] : variation de la longueur d'onde par rapport à l'état de contrainte en théorie de la déformation, critère quadratique Hill (1948)

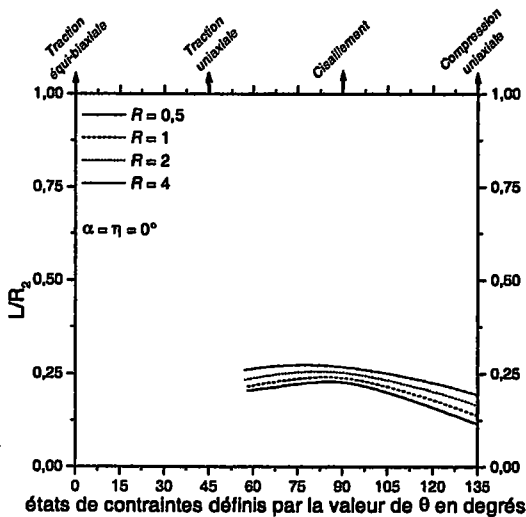


Figure [III-46] : variation de la longueur d'ondes par rapport à l'état de contrainte en théorie de la déformation, modèle proposé par Ferron et al (1994)

En théorie de l'écoulement, figures [III-47, III-48], et en théorie de la déformation, figures [III-49, III-50], la contrainte critique de plissement diminue faiblement lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente. L'évolution de la contrainte critique de plissement, par rapport aux valeurs de R , est globalement identique pour les deux lois phénoménologiques employées.

En théorie de l'écoulement, les surfaces de plasticité employées fournissent des courbes limites de plissement proches. Par contre, en théorie de la déformation, la courbe limite de plissement obtenue avec le modèle de plasticité de Ferron et al (1994), figure [III-50], présente une forme légèrement différente de celle obtenue avec le modèle de Hill (1948) entre le cisaillement et la compression uniaxiale.

Enfin, les contraintes critiques de plissement obtenues en théorie de l'écoulement sont toujours supérieures à celles obtenues en théorie de la déformation.

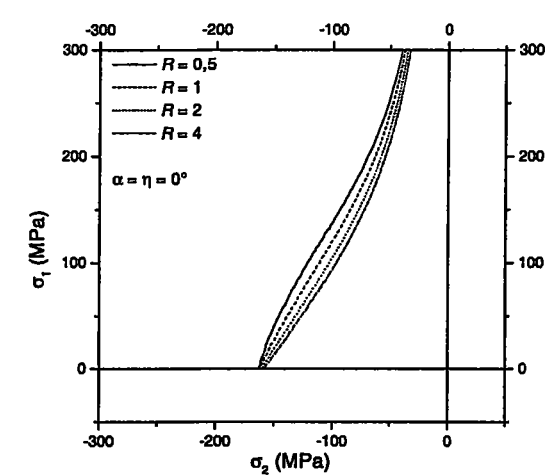


Figure [III-47] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère quadratique Hill (1948)

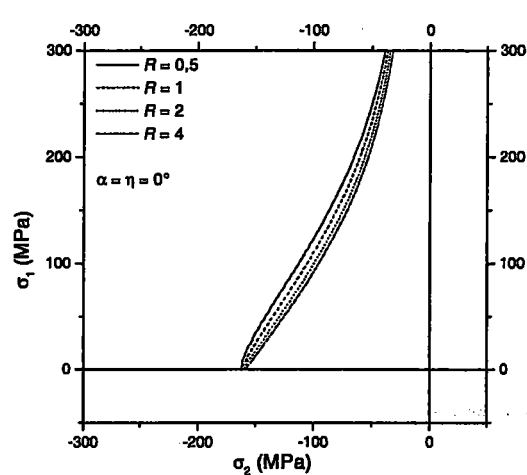


Figure [III-48] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, modèle proposé par Ferron et al (1994)

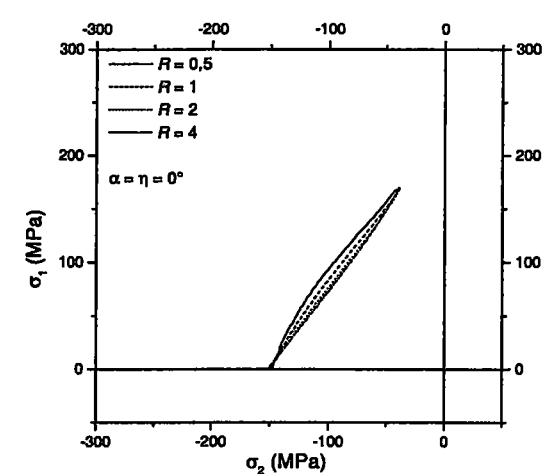


Figure [III-49] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère quadratique Hill (1948)

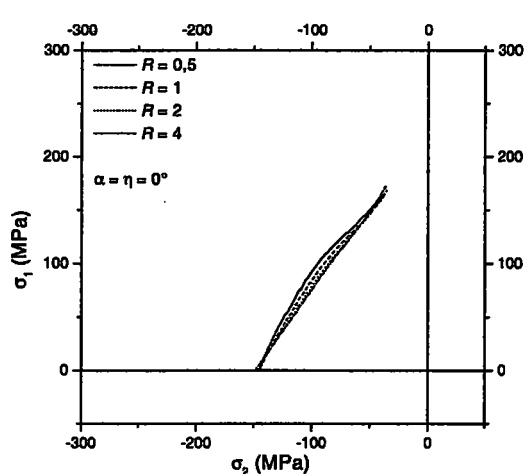


Figure [III-50] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, modèle proposé par Ferron et al (1994)

En conclusion, et en considérant les résultats obtenus pour les autres géométries, non reportés ici, l'influence de l'anisotropie normale sur l'apparition du plissement est globalement relativement faible pour des conditions locales de géométrie et de chargement données. En théorie de l'écoulement, le niveau des courbes limites de plissement augmente lorsque le coefficient d'anisotropie R diminue. Un comportement similaire est observé en théorie de la déformation. Néanmoins, en théorie de la déformation, l'influence de R sur les courbes limites de plissement est atténuée pour des états de contraintes proches de la compression ou de la traction uniaxiale (figures [III-39, III-40]). Avec les deux théories, la longueur d'onde augmente lorsque R augmente (à l'exception du domaine compris entre le cisaillement et la traction uniaxiale, en théorie de l'écoulement) et pour des rayons de courbure de valeurs rapprochées.

4.4. Influence de l'anisotropie transverse

Nous nous plaçons à nouveau dans le cas où les axes principaux de courbures (k_1, k_2) et les axes principaux de contraintes (c_1, c_2) sont confondus ($\alpha = \eta$). La direction principale c_2 de la contrainte compressive σ_2 est par conséquent confondue avec la direction principale k_2 de rayon de courbure R_2 . Nous rappelons que cette hypothèse est rigoureusement vérifiée pour les procédés géométriquement axisymétriques, et pour les matériaux isotropes ou isotropes transverses. Cette hypothèse est une approximation raisonnable pour des procédés géométriquement axisymétriques appliqués à des matériaux à anisotropie transverse, suffisamment loin des bords du flan.

Par contre, nous allons maintenant préciser l'orientation des axes principaux de courbures et de contraintes par rapport aux directions d'anisotropie, afin de tenir compte de la position circonférentielle de la zone étudiée dans un embouti réel.

Nous ne présentons pas les résultats relatifs à l'orientation du plissement, en effet, nous avons obtenu que le plissement survienne toujours selon une direction très proche de la direction compressive dans le cas $\alpha = \eta$. Nous présentons donc uniquement les longueurs d'onde et les courbes limites de plissement obtenues pour $\alpha = \eta$.

Afin de visualiser l'influence de l'anisotropie transverse, nous avons représenté, sur les figures ci-dessous, les longueurs d'onde et les courbes limites de plissement obtenues pour la contrainte de traction dans la direction de laminage ($\alpha = \eta = 0^\circ$), la direction diagonale ($\alpha = \eta = 45^\circ$) et la direction transverse ($\alpha = \eta = 90^\circ$). Nous rappelons les valeurs des coefficients d'anisotropie transverse du matériau modèle étudié : $R_0 = 2$; $R_{45} = 1,5$ et $R_{90} = 3$.

Comme précédemment, nous limitons la présentation des résultats au cas, $R_1 = 110$ mm et $R_2 = 213$ mm, associé à la géométrie rencontrée sur le brin libre d'une coupelle tronconique.

L'influence de l'anisotropie transverse est globalement faible. Aussi bien en théorie de l'écoulement qu'en théorie de la déformation, la longueur d'onde critique est très légèrement plus forte lorsque la contrainte compressive σ_2 est portée par la direction x_2 , qui correspond à la plus forte valeur du coefficient d'anisotropie ($R_{90} = 3$). Avec les deux théories, les limites de plissement sont les plus faibles lorsque la contrainte compressive σ_2 est portée par la direction x_2 , correspondant à la plus forte valeur du coefficient d'anisotropie ($R_{90} = 3$).

De plus, en théorie de la déformation et pour le modèle de plasticité proposé par Ferron et al (1994), la modélisation ne prévoit pas l'apparition de plis pour des états de contrainte au

voisinage du cisaillement, θ compris entre 75° et 105° , lorsque la contrainte compressive est portée par la direction transverse ou la direction de laminage. La très faible courbure de la surface de charge dans cette région (proche de la limite de convexité) peut être à l'origine de ce comportement.

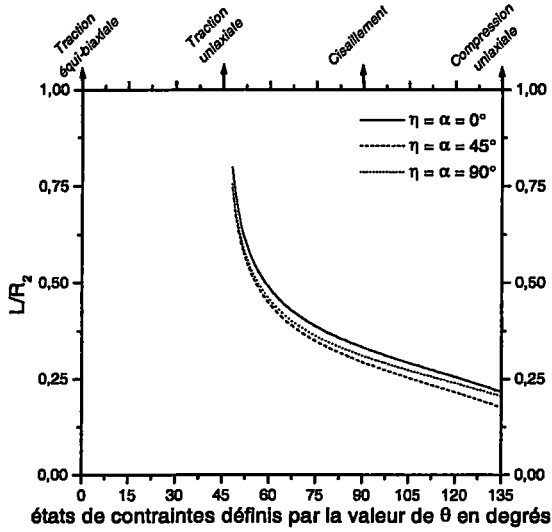
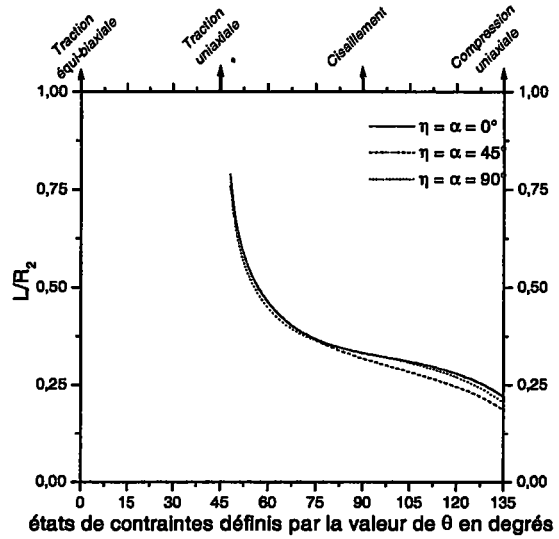


Figure [III-51] : variation de la longueur d'onde par rapport à l'état de contrainte en théorie de l'écoulement, critère quadratique Hill (1948)



Figure[III-52] : variation de la longueur d'ondes par rapport à l'état de contrainte en théorie de l'écoulement, modèle proposé par Ferron et al (1994)

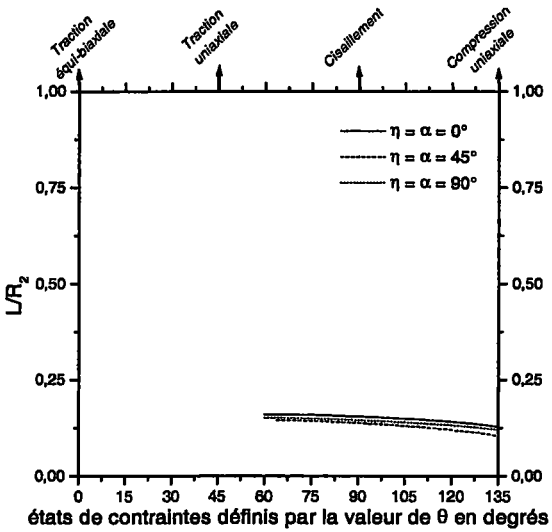
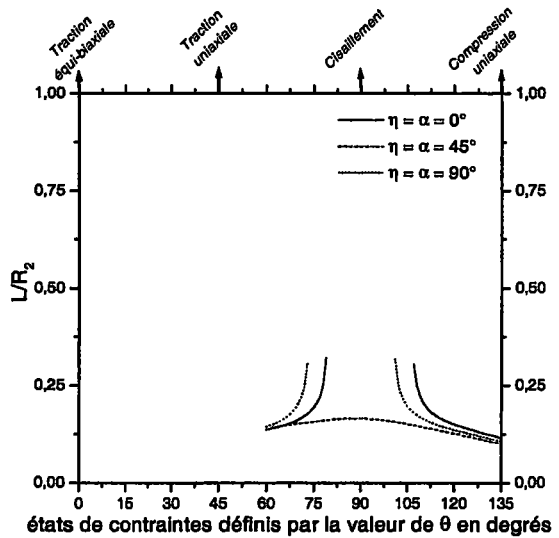


Figure [III-53] : variation de la longueur d'onde par rapport à l'état de contrainte en théorie de la déformation, critère quadratique Hill (1948)



Figure[III-54] : variation de la longueur d'ondes par rapport à l'état de contrainte en théorie de la déformation, modèle proposé par Ferron et al (1994)

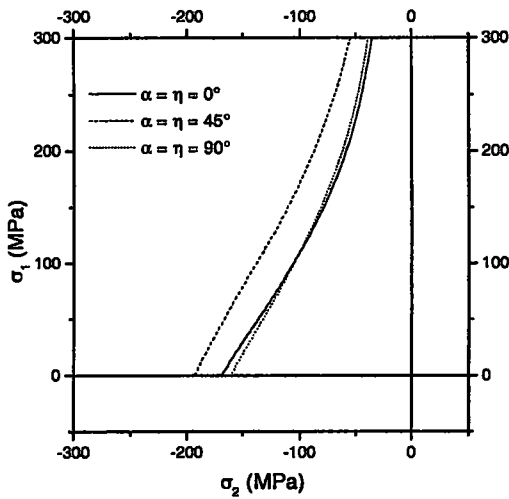


Figure [III-55] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, critère quadratique Hill (1948)

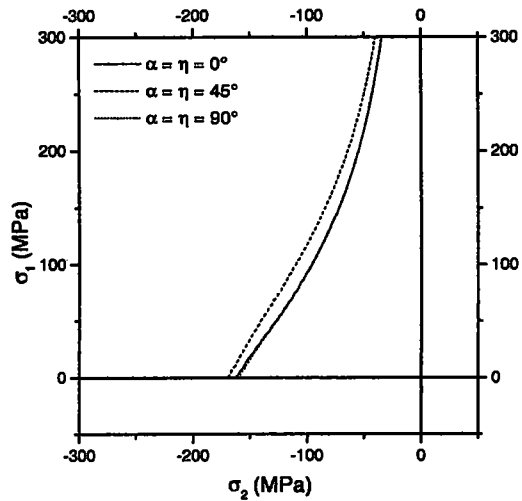


Figure [III-56] : courbes limites de plissement en théorie de l'écoulement, modèle proposé par Ferron et al (1994)

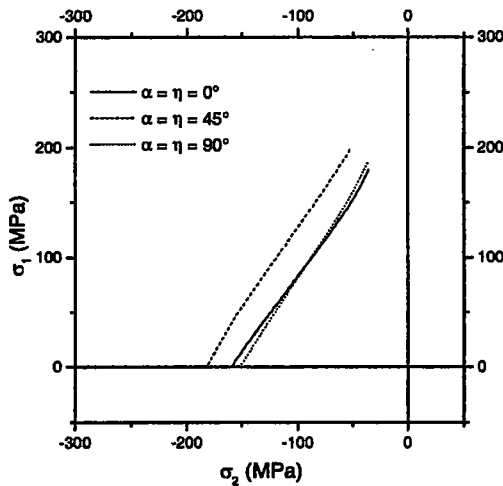


Figure [III-57] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, critère quadratique Hill (1948)

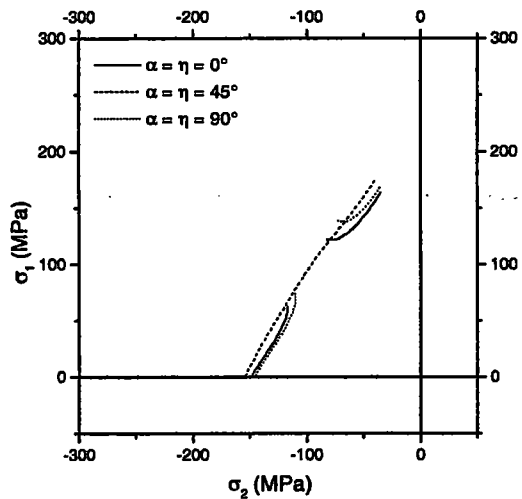


Figure [III-58] : courbes limites de plissement en théorie de la déformation, modèle proposé par Ferron et al (1994)

5. Conclusion

Nous avons analysé, dans ce chapitre les conditions d'apparition d'un plissement plastique pour des coques doublement courbées, correspondant à des portions de tôles susceptibles d'être rencontrées sur un embouti. La géométrie étant définie par les rayons de courbure principaux locaux, nous avons envisagé des chargements quelconques (hors des axes principaux de courbure) et, pour les matériaux à anisotropie transverse, des chargements hors des axes d'orthotropie.

Pour un chargement dans les axes principaux de courbure, et pour les matériaux à anisotropie normale, la longueur d'onde critique augmente lorsque le coefficient d'anisotropie R

augmente, sauf en théorie de l'écoulement, entre le cisaillement et la traction uniaxiale, où la tendance inverse est observée. Les contraintes critiques de plissement diminuent légèrement en théorie de l'écoulement et en théorie de la déformation lorsque R augmente.

Pour le matériau anisotrope transverse simulé, la longueur d'onde augmente et la contrainte critique de plissement diminue lorsque le coefficient d'anisotropie dans la direction de la contrainte compressive augmente. Cet effet est plus fortement marqué lorsque le critère de plasticité utilisé présente une plus forte sensibilité des contraintes d'écoulement à l'orientation du chargement.

Il apparaît particulièrement intéressant d'analyser les capacités prédictives des courbes limites de plissement en les comparant à celles des outils de simulations que sont les codes de calcul par éléments finis.

Chapitre 4:

**Etude numérique
de l'apparition du plissement
et
comparaison avec les prévisions
analytiques**

Table des matières

1	INTRODUCTION	105
2	ANALYSE DU PLISSEMENT DANS L'ESSAI DE COUPELLE TRONCONIQUE	105
2.1	Modélisation par éléments finis	105
2.2	Influence du maillage et du code de calcul	107
2.3	Influence de l'anisotropie	110
2.3.1	Matériaux isotropes	110
2.3.2	Matériaux à anisotropie normale	111
2.3.3	Matériaux à anisotropie transverse	116
2.4	Comparaisons avec les résultats analytiques	119
2.4.1	Matériaux isotropes	119
2.4.2	Matériaux à anisotropie normale	124
2.4.3	Matériaux à anisotropie transverse	128
2.5	Comparaisons avec les résultats expérimentaux de Ellagoune et Boivin (1988)	133
3	ANALYSE DU PLISSEMENT DANS L'ESSAI D'EMBOUTISSAGE PROFOND SANS SERRE-FLAN	134
3.1	Modélisation par éléments finis	134
3.2	Comparaison avec les résultats expérimentaux	138
4	CONCLUSION	146

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous effectuons des simulations numériques ayant pour but de visualiser les conditions d'apparition et le développement du plissement en emboutissage. Nous avons utilisé le code de calcul par éléments finis ABAQUS, dans sa version *Standard* (statique implicite) et dans sa version *Explicit* (dynamique explicite).

Un des objectifs consiste à comparer les conditions d'apparition du plissement déduites des simulations par éléments finis, avec les prévisions analytiques utilisant la modélisation décrite au chapitre III pour les coques doublement courbées. L'analyse des résultats analytiques et numériques nous permettra également de discuter l'influence de l'anisotropie du matériau sur l'apparition du plissement.

Nous avons, de plus, choisi deux essais pour lesquels des résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature, de façon à pouvoir apprécier la validité des prévisions analytiques et des simulations numériques. Ces deux essais sont : l'essai de coupelle tronconique, qui sera analysé avec la géométrie utilisée par Ellagoune et Boivin (1988), et l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan, avec la géométrie utilisée par Narayanasamy et Sowerby (1995).

2 Analyse du plissement dans l'essai de coupelle tronconique

Nous reprenons dans ce paragraphe la géométrie utilisée dans les essais effectués par Ellagoune et Boivin (1988). Ces essais ont été décrits dans le chapitre I, paragraphe 2-2. La géométrie des outillages est définie sur la figure [I-3] du chapitre I.

2.1 Modélisation par éléments finis

Quelques simulations ont été effectuées avec une description complète de l'outillage et de la tôle. La plupart ont été effectuées avec un quart de la structure (figure [IV-1]). L'outillage, constitué par un poinçon, une matrice et un serre-flan, a été modélisé en utilisant des éléments rigides (R3D4 dans la documentation ABAQUS/*Explicit*). Le flan, d'un rayon initial de 150 mm et d'épaisseur 0,7 mm, a été modélisé avec des éléments à quatre nœuds de type coque à intégration réduite (S4R dans la documentation ABAQUS/*Explicit*). Nous avons choisi d'utiliser la théorie de l'écoulement pour réaliser nos simulations. Celle-ci fournit de bons résultats pour les simulations de procédés de formage, par exemple en ce qui concerne les répartitions des déformations. Notons également que la théorie de l'écoulement est plus apte à rendre compte des mécanismes de la déformation plastique, particulièrement pour des trajets de contraintes fortement non linéaires tels que ceux qui seront obtenus au cours des procédés étudiés.

Les aspects techniques de la modélisation par éléments finis dans ABAQUS sont détaillés en annexe.

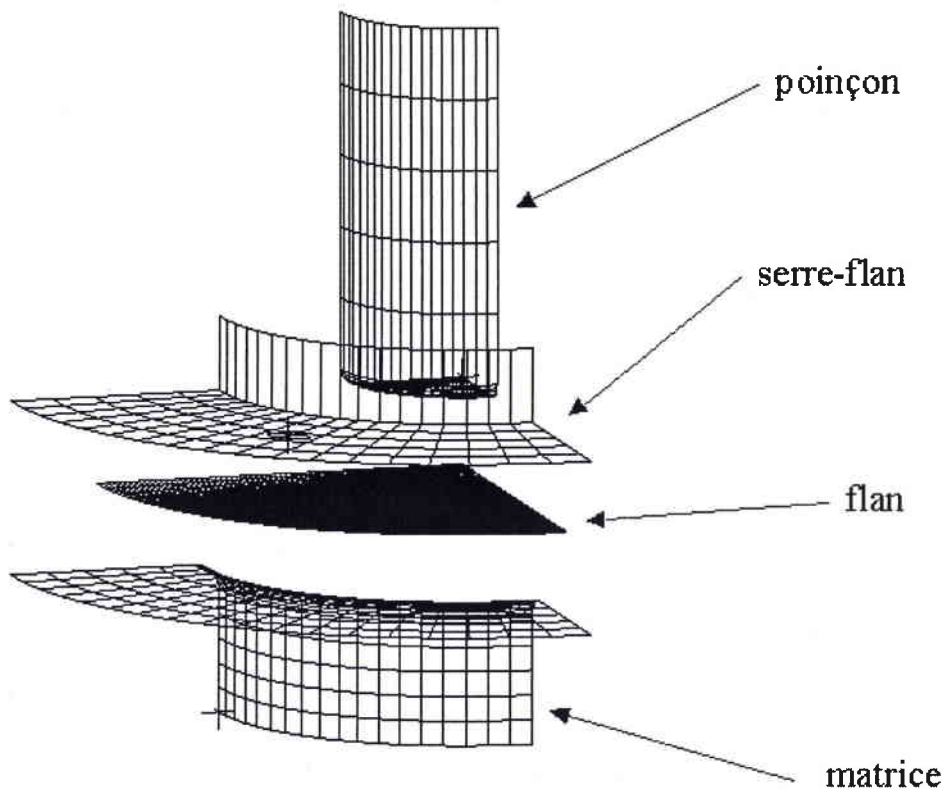
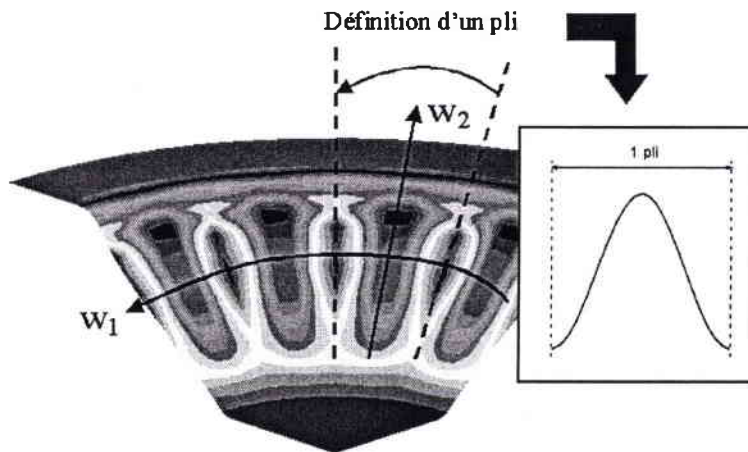


Figure [IV-1] : modélisation de l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique proposé par Ellagoune et Boivin (1988)

Les valeurs du coefficient de frottement f entre le poinçon et le flan et entre le flan et la matrice ont été prises égales à 0,15, tandis que la valeur de f entre le serre-flan et le flan a été prise égale à 0. Le serre-flan exerce sur le flan une force de serrage constante de 10 kN tout au long de l'enfoncement. La simulation est arrêtée lorsque le poinçon a atteint un enfoncement de 52 mm. Le flan est en acier, les constantes élastiques sont prises égales à $E = 210\,000$ MPa et $\nu = 0,3$. La masse volumique est égale à 7800 kg/m^3 . Le comportement du matériau est modélisé avec la loi d'écrouissage de Ludwig (équation [II-39], chapitre II) avec $\sigma_0 = 100$ MPa, $K = 400$ MPa et $N = 0,3$. Les différents matériaux étudiés (isotropes, anisotropes normaux et anisotropes transverses) ont été présentés dans le chapitre II, paragraphe 5-1. Les paramètres de comportement des différents matériaux étudiés sont introduits dans le code de calcul ABAQUS/Explicit par l'intermédiaire du sous-programme VUMAT. Le modèle de plasticité développé par Ferron et al (1994) a été implanté dans ce sous-programme par Moreira et al (2000).

Sur la figure [IV-2], nous présentons un quart de flan obtenu par simulation pour un matériau isotrope obéissant au critère de von Mises. Nous avons choisi de reporter ici, et sur les différentes figures de ce paragraphe, la distribution de la contrainte circonférentielle, σ_2 , afin de mieux visualiser la présence de plis. Les zones en bleu correspondent aux zones fortement compressives tandis que les zones rouges correspondent aux zones faiblement compressives ou en traction. Chacune des zones bleues correspondent à un mont d'un pli et les zones rouges à une vallée d'un pli. Sur ce quart de flan apparaissent quatre plis dans la zone du brin libre. Les plis sont allongés dans la direction radiale w_2 , leur extension radiale étant limitée par les contacts avec les outils (rayons de poinçon et de matrice). Par rapport à une analyse locale négligeant les conditions aux limites, il est raisonnable de dire que le plissement survient selon une seule direction, c'est à dire, dans cet essai, la direction circonférentielle (w_1 sur la

figure [IV-2]). La direction de plissement est parallèle à la direction compressive, en accord avec les résultats de l'étude analytique présentée au chapitre III.



w_1 : direction de plissement
 w_2 : génératrice du pli

Figure [IV-2] : visualisation des plis sur un quart de la tôle

Nous étudions maintenant les influences du maillage, du code de calcul et du comportement du matériau sur l'apparition du plissement.

2.2 Influence du maillage et du code de calcul

Nous avons effectué tout d'abord des simulations numériques avec deux maillages différents, le maillage (a) et le maillage (b) présentés sur la figure [IV-3]. Le maillage (a) a été utilisé par Moreira et al (2000) pour des simulations numériques de l'emboutissage profond d'un godet cylindrique. Moreira et al (2000) obtiennent de bons résultats avec le maillage (a) pour la prévision des cornes d'emboutissage. Le maillage (b) a été choisi parce qu'il ne respecte pas les conditions géométriques de symétrie de révolution de l'essai.

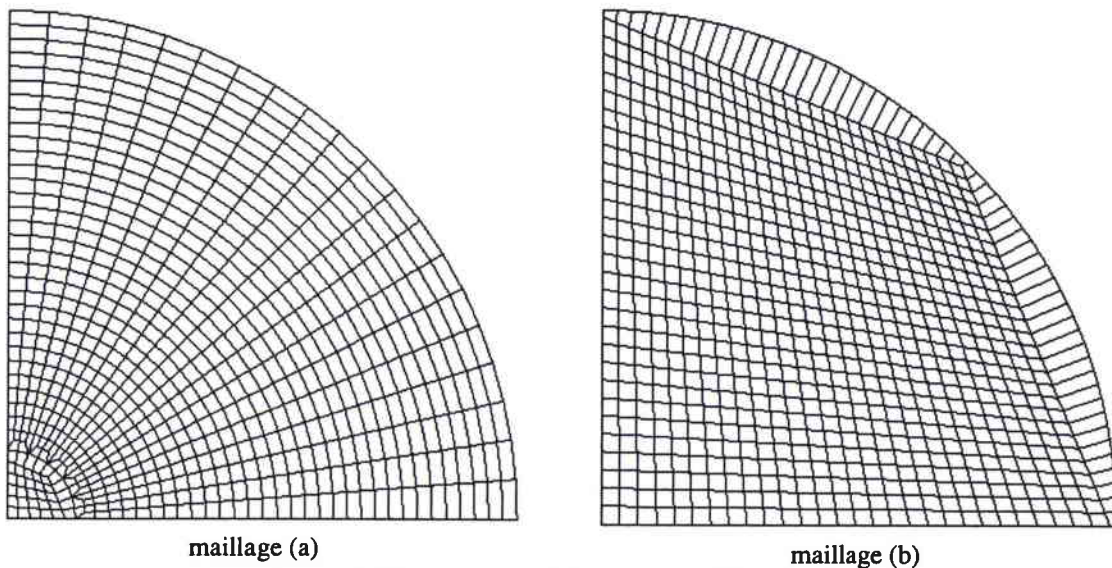
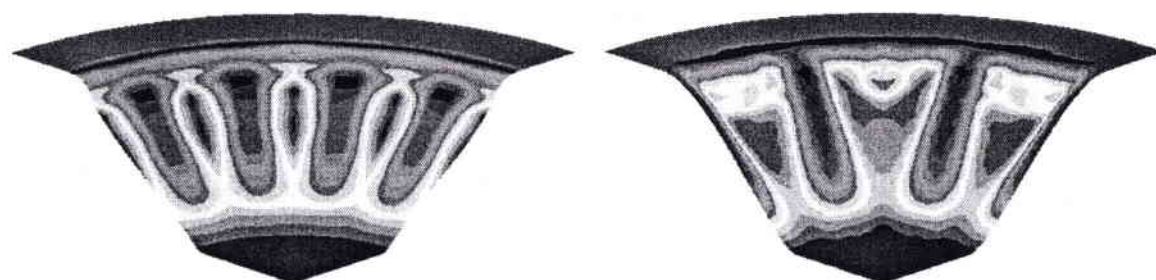


Figure [IV-3] : maillages utilisés pour modéliser le flan

Nous avons simulé l'essai proposé avec le code de calcul ABAQUS/*Explicit*, utilisant un algorithme de calcul de type dynamique explicite. Pour un matériau isotrope obéissant au critère de von Mises nous avons obtenu pour un enfoncement de 52 mm les emboutis présentés sur les figures [IV-4, IV-5].

Nous observons, figure [IV-4], quatre plis répartis périodiquement sur le brin libre de l'embouti pour le maillage (a), tandis que pour le maillage (b), nous obtenons, figure [IV-4], trois plis répartis périodiquement sur le brin libre. Par conséquent, le maillage (a) prévoit 16 plis sur le flan complet. Le maillage (b), quant à lui, prévoit 12 plis. Le maillage a donc une influence sur les prévisions de plissement pour des matériaux isotropes dans le plan. Ces résultats sont à comparer aux 11 plis observés expérimentalement sur le brin libre par Ellagoune et Boivin (1988), figure [IV-6].



maillage (a) maillage (b)

Figure [IV-4] : résultats obtenus pour un matériau isotrope (von Mises)
pour un enfoncement $H = 52 \text{ mm}$

Nous avons obtenu pour un enfoncement de 52 mm, pour un matériau à forte anisotropie dans le plan ($R_0 = 2$, $R_{45} = 1,5$ et $R_{90} = 3$), les emboutis présentés sur la figure [IV-5]. Pour les deux maillages, nous observons sur la figure [IV-5] la présence de trois plis sur le brin libre.

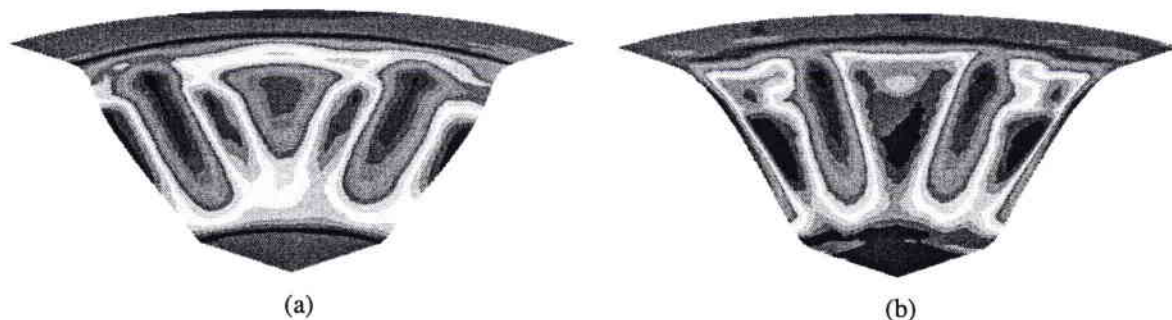


Figure [IV-5] : résultats obtenus pour un matériau à anisotropie transverse (Hill quadratique)
pour un enfoncement $H = 52$ mm

En conséquence, pour le flan complet, les deux maillages prévoient 12 plis. Il semble donc qu'une forte anisotropie efface l'influence du maillage sur le nombre de plis. Néanmoins, les parties sortantes des plis sont positionnées à 22,5°, 45° et 67,5° pour le maillage (a), tandis que ce sont les parties rentrantes qui occupent ces positions pour le maillage (b).

Nous observons, avec les deux maillages et pour les différents matériaux simulés, que la collerette de l'embouti ne présente pas de pli. Or, expérimentalement les emboutis peuvent présenter de nombreux plis sur la collerette. Par conséquent, il semble que les éléments finis ne prévoient pas de plis lorsque le chargement est dans le plan de l'embouti. Cette

observation, déjà faite par Hematian et Wild (2000), avait conduit ces auteurs à introduire des défauts géométriques dans la collerette pour générer l'apparition du plissement.

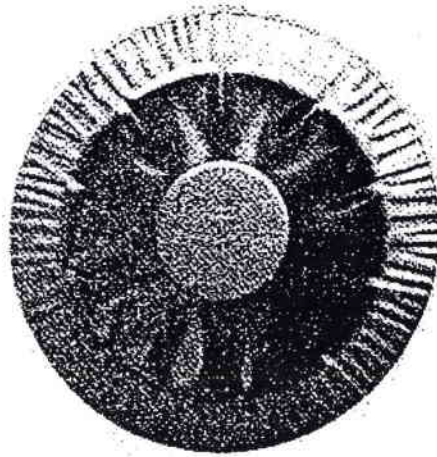


Figure [IV-6] : embouti obtenu par Ellagoune et Boivin (1988)

Afin de valider les résultats présentés antérieurement, nous avons simulé la totalité de l'essai avec ABAQUS/*Explicit* pour le maillage (a). Nous avons observé, pour un enfoncement de 52 mm, 16 plis sur la partie supérieure du brin libre dans le cas d'un matériau isotrope (von Mises). Les résultats de cette simulation sont en accord avec ceux obtenus pour un quart de la géométrie. Nous avons également effectué des simulations sur le quart de la structure, avec les maillages (a) et (b), en introduisant une faible anisotropie transverse définie par : $R_0 = 0,99$, $R_{45} = 0,98$ et $R_{90} = 1,05$; et par : $R_0 = 1,99$, $R_{45} = 1,98$ et $R_{90} = 2,01$. Cette anisotropie peut être considérée comme un « défaut mécanique ou métallurgique » susceptible de provoquer une modification du comportement au plissement de l'embouti. Le nombre de plis obtenu pour le matériau possédant cette faible anisotropie est identique à celui obtenu avec le matériau isotrope ($R = 1$) ou isotrope transverse ($R = 2$), respectivement, pour chacun des deux maillages employés. L'introduction d'un défaut semble donc ne pas affecter le nombre de plis obtenu sur le brin libre de l'embouti. Nous poursuivons finalement cette étude en ne modélisant qu'un quart de la structure.

Après avoir étudié l'influence du maillage sur le plissement, nous nous sommes interrogés sur l'influence du code de calcul sur notre problème. Nous avons ainsi simulé l'essai de coupelle tronconique avec le code ABAQUS/*Standard* qui utilise un algorithme de calcul de type statique implicite. Les simulations menées alors avec les deux maillages (a) et (b) nous ont donné des résultats différents pour un matériau isotrope avec un enfoncement de 52 mm. Le brin libre ne présentait aucun pli pour le maillage (a) tandis que trois plis étaient présents pour le maillage (b). Ces résultats sont partiellement en désaccord avec ceux obtenus avec ABAQUS/*Explicit*. Les résultats obtenus sur le plissement en emboutissage dépendent des types de codes de calcul utilisés, ce qui a déjà été noté par Kawka et al (2001).

Les simulations réalisées, pour un même matériau et un même maillage, sont plus lentes avec le code ABAQUS/*Standard* qu'avec le code ABAQUS/*Explicit*. Pour la suite de cette étude, nous avons utilisé le code de calcul ABAQUS/*Explicit*. Par commodité, nous avons choisi d'utiliser le maillage (a) pour modéliser le flan. Ce maillage est plus approprié pour analyser les variations de variables, telles que la contrainte circonférentielle, en fonction de la position angulaire des nœuds.

2.3 Influence de l'anisotropie

2.3.1 Matériaux isotropes

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont obtenus pour un matériau isotrope obéissant au critère de von Mises. Pour illustrer l'apparition du plissement, nous avons choisi de visualiser, en fonction de l'enfoncement, l'évolution de deux variables pour un ensemble de nœuds. Les variables observées sont le rayon définissant la position radiale courante des nœuds et la valeur de la contrainte circonférentielle. L'ensemble des nœuds choisis se situent sur un rayon initial égal à 104,5 mm. Pour un enfoncement de 52 mm, ils se trouvent sur la partie supérieure du brin libre, là où est obtenue l'amplitude maximale des plis. Pour cet ensemble de nœuds, nous présentons les variations angulaires du rayon et de la contrainte circonférentielle en fonction de l'enfoncement du poinçon.

La figure [IV-7] présente la variation du rayon en fonction de l'enfoncement du poinçon. Bien sûr, le rayon diminue lorsque l'enfoncement augmente. Le rayon garde une valeur uniforme pour des enfoncements inférieurs à 32,80 mm. Mais pour des enfoncements supérieurs à 45,60 mm, le rayon présente nettement quatre ondulations, autrement dit quatre plis sont présents sur le quart de la structure. L'amplitude des différents plis est pratiquement identique, et les plis sont répartis périodiquement sur le brin libre. L'amplitude des plis croît lorsque l'enfoncement du poinçon augmente. La position des plis ne varie pas avec l'enfoncement du poinçon.

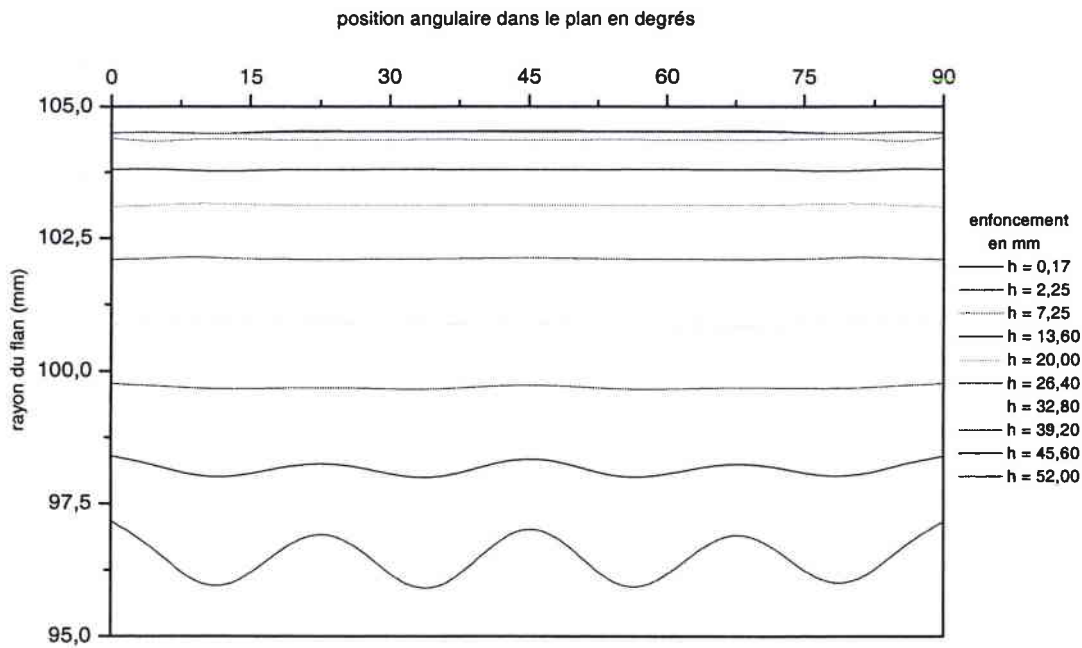


Figure [IV-7] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (von Mises)

En parallèle nous observons, figure [IV-8], la variation de la contrainte circonférentielle, σ_2 , pour le même ensemble de nœuds. Cette contrainte est une contrainte compressive. La contrainte circonférentielle présente une distribution uniforme pour de faibles enfoncements

($H < 13,60$ mm). La variation de la contrainte circonférentielle comporte deux ondulations lorsque l'enfoncement a atteint la valeur de 20 mm, ce qui peut suggérer l'apparition du plissement avec deux plis sur le quart de la structure, donc huit plis sur la totalité. Néanmoins pour cet enfoncement, aucune variation du rayon n'est observée, donc, il n'y a pas de présence de plis. Les deux ondulations observées se transforment en quatre ondulations pour un enfoncement de 39,20 mm. A partir de cet enfoncement, les distributions circonférentielles de la contrainte σ_2 sont en correspondance avec les variations du rayon. Les distributions circonférentielles de σ_2 représentent donc bien le comportement du flan vis à vis du plissement. L'étude de l'apparition du plissement peut donc s'effectuer à partir des distributions circonférentielles des contraintes, qui présentent une plus grande sensibilité que le rayon courant.

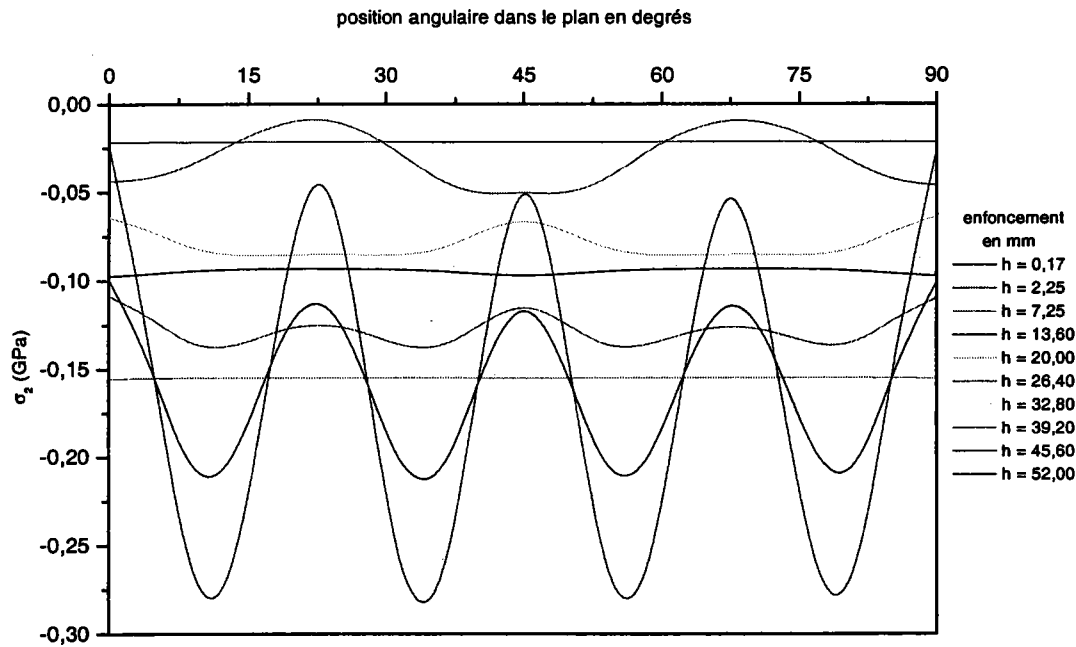


Figure [IV-8] : variation de la contrainte circonférentielle σ_2 en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (von Mises)

2.3.2 Matériaux à anisotropie normale

Nous avons observé, pour toutes les simulations effectuées avec les matériaux à anisotropie normale, une répartition périodique des plis et un nombre de plis toujours pair sur le quart de flan. Comme pour le matériau isotrope, nous présentons la variation angulaire du rayon pour un ensemble de nœuds situés sur un rayon initial de 104,5 mm. Nous présentons les résultats obtenus pour des matériaux dont les valeurs du coefficient d'anisotropie normale R sont égales à 0,5 et à 4.

Nous remarquons, figure [IV-9], que le nombre de plis, pour la totalité de la structure et pour un enfoncement de 52 mm, est égal à 16 pour $R = 0,5$. Par contre, le nombre de plis, pour le même enfoncement de 52 mm, est égal à 8 pour $R = 4$ (figure [IV-10]). Les figures [IV-9, IV-10] semblent donc montrer que le nombre de plis obtenu pour un enfoncement donné diminue

lorsque la valeur du coefficient d'anisotropie normale R augmente. De plus, pour un même enfoncement du poinçon, l'amplitude des plis diminue lorsque R augmente.

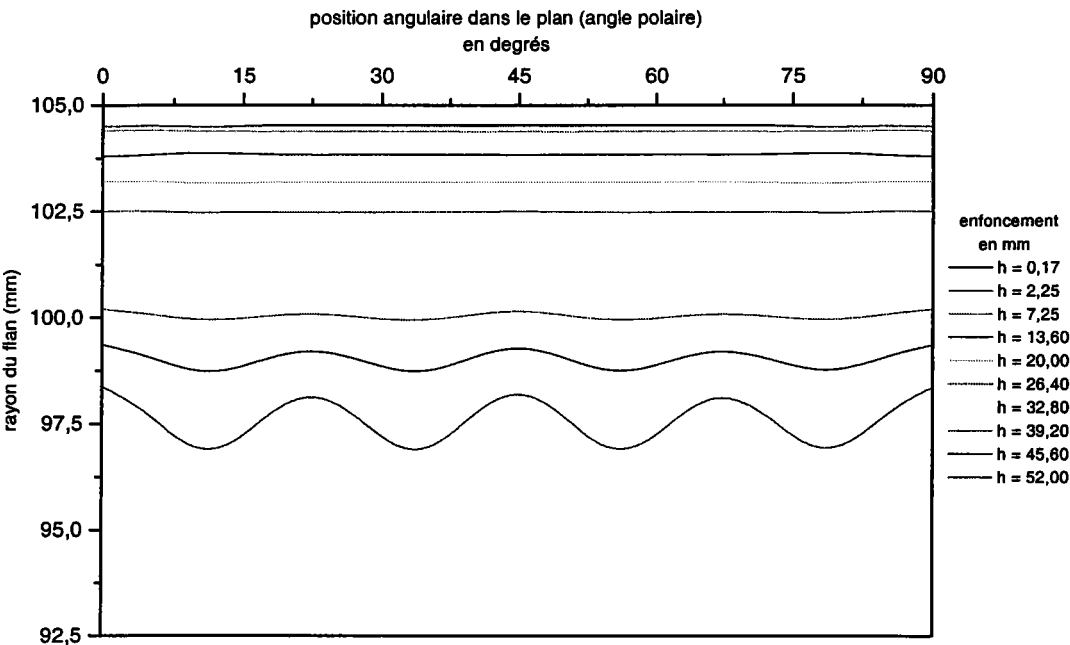


Figure [IV-9] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (modèle quadratique de Hill (1948), $R = 0,5$)

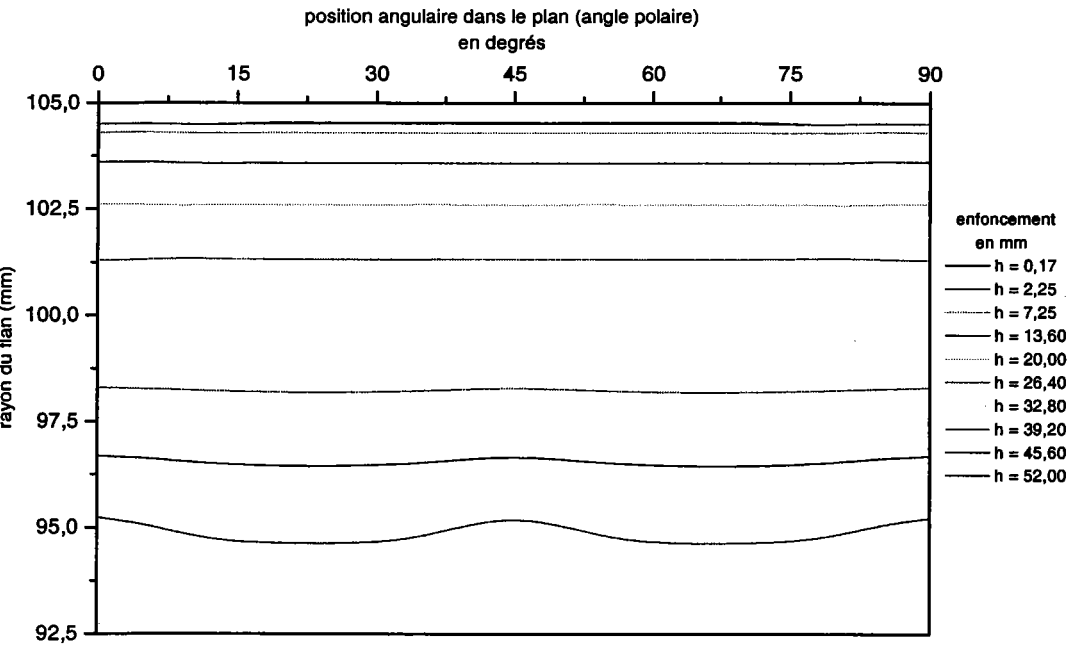


Figure [IV-10] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (modèle quadratique de Hill (1948), $R = 4$)

L'enfoncement critique pour lequel apparaît le plissement déduit de la figure [IV-9], $R = 0,5$, est voisin de la valeur 32,80 mm, tandis que la figure [IV-10] nous indique un enfoncement critique proche de 39,20 mm pour $R = 4$. Par conséquent, il semble qu'une augmentation du coefficient d'anisotropie R tend à retarder l'apparition du plissement dans l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique. Ce résultat est à première vue en contradiction avec les observations faites sur les courbes limites de plissement du chapitre III qui prévoient, pour une même géométrie, une contrainte critique de plissement légèrement plus faible lorsque la valeur du coefficient d'anisotropie R augmente.

Comme pour le matériau isotrope, les évolutions périodiques de la contrainte circonférentielle sont en correspondance directe avec le plissement. Ainsi, pour $R = 0,5$, figure [IV-9], les quatre plis observés géométriquement sont en correspondance avec quatre ondulations de la contrainte circonférentielle. Pour $R = 4$, figure [IV-10], les deux plis observés géométriquement sont en correspondance avec deux ondulations de la contrainte circonférentielle.

Nous retrouvons avec le modèle proposé par Ferron et al (1994) les mêmes résultats qu'avec le modèle quadratique de Hill (1948) ; c'est à dire un retard à l'apparition du plissement et une diminution du nombre des plis pour les fortes valeurs de R (figures [IV-11, IV-12]). Néanmoins, la sensibilité de l'amplitude des plis au coefficient d'anisotropie R est moins marquée pour le modèle de Ferron et al (1994). Cette observation est à mettre en correspondance avec les surfaces de charge tracées au chapitre II, qui montrent que les contraintes d'écoulement dépendent plus fortement du coefficient d'anisotropie R avec le modèle quadratique de Hill (1948) qu'avec le modèle proposé par Ferron et al (1994).

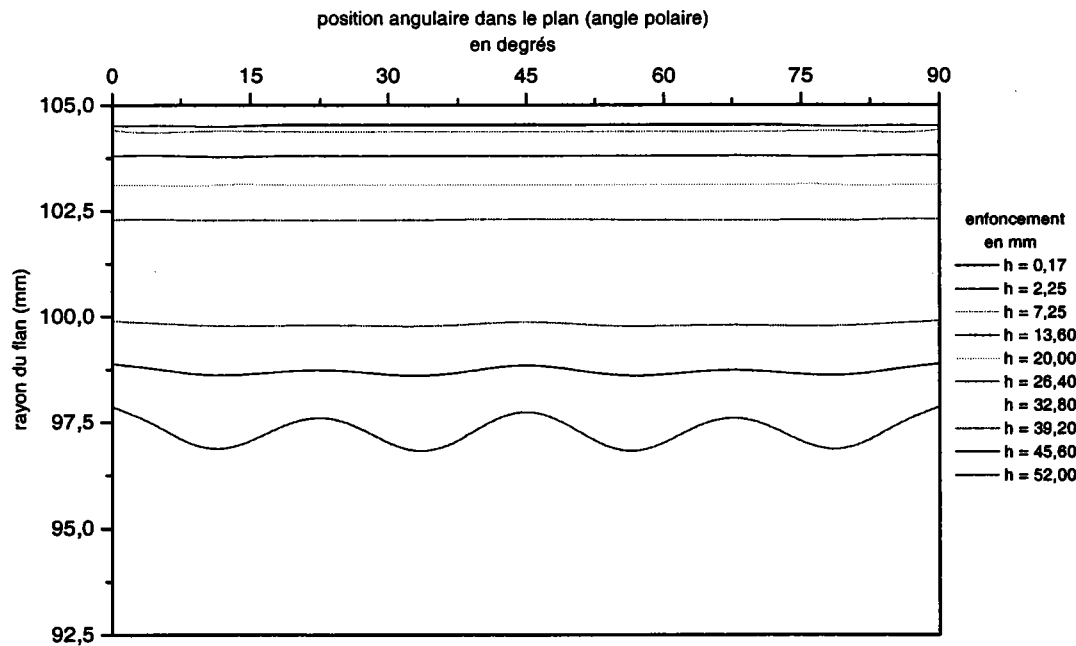


Figure [IV-11] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (modèle proposé par Ferron et al (1994), $R = 0,5$)

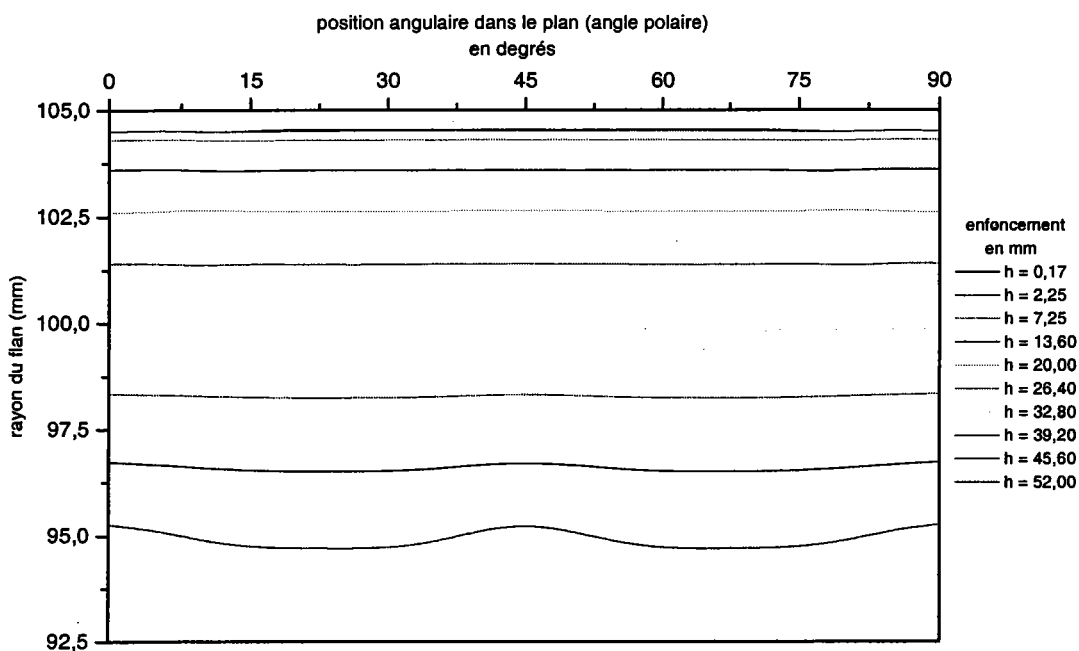


Figure [IV-12] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (modèle proposé par Ferron et al (1994), $R = 4$)

L'analyse, avec le modèle de Ferron et al (1994), de l'évolution de la distribution des contraintes circonférentielles, confirme que l'apparition du plissement est retardée lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente (figure [IV-13, IV-14]). Comme pour le matériau isotrope, les variations de la contrainte circonférentielle σ_2 obtenues pour $R = 0,5$, figure [IV-13], présentent dans un premier temps, deux ondulations sans qu'il y ait présence de plis, puis, dans un second temps, quatre ondulations sont visibles et correspondent aux plis observés sur le quart de la structure. Pour le matériau possédant un coefficient d'anisotropie $R = 4$, nous observons, figure [IV-14], deux ondulations correspondant aux deux plis observés sur le quart de la structure. Mais pour ce matériau, il semble que pour un enfoncement de 52 mm les deux ondulations évoluent vers une seconde étape où la variation de la contrainte σ_2 comporterait quatre ondulations. Ces constatations ont été aussi faites pour le modèle de Hill (1948). A partir de l'examen des variations de la contrainte circonférentielle, il semble donc que le plissement apparaît d'abord avec deux ondulations, puis, avec la progression de l'enfoncement du poinçon, celles-ci se transforment en quatre autres ondulations. Pour de faibles valeurs du coefficient d'anisotropie le mode à 4 plis sur le quart de la structure est directement observé.

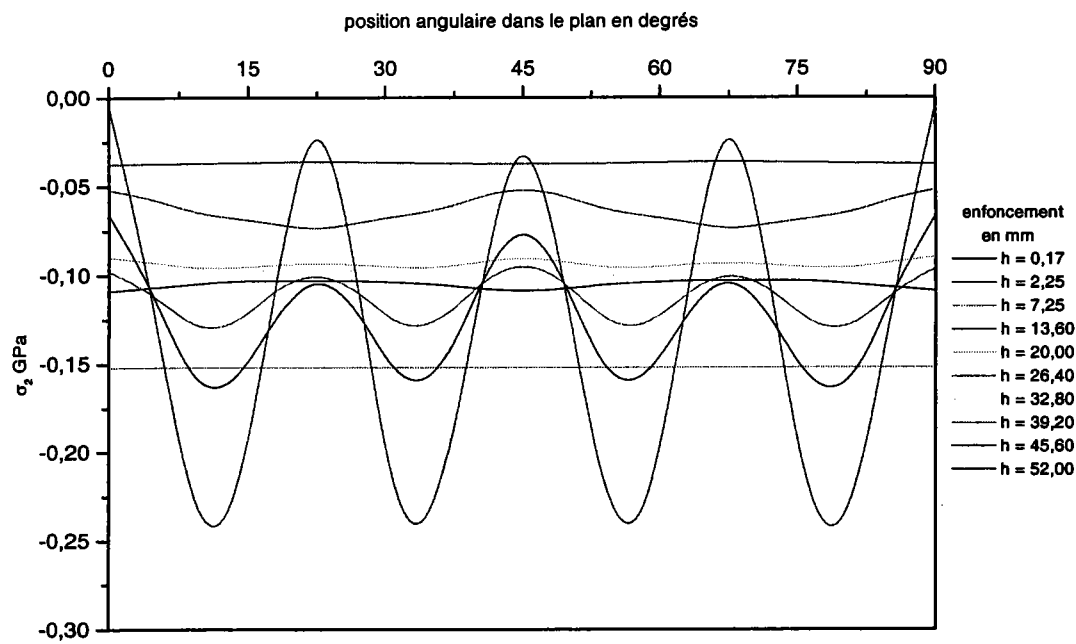


Figure [IV-13] : variation de la contrainte circonférentielle σ_2 en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (Ferron et al (1994), $R = 0,5$)

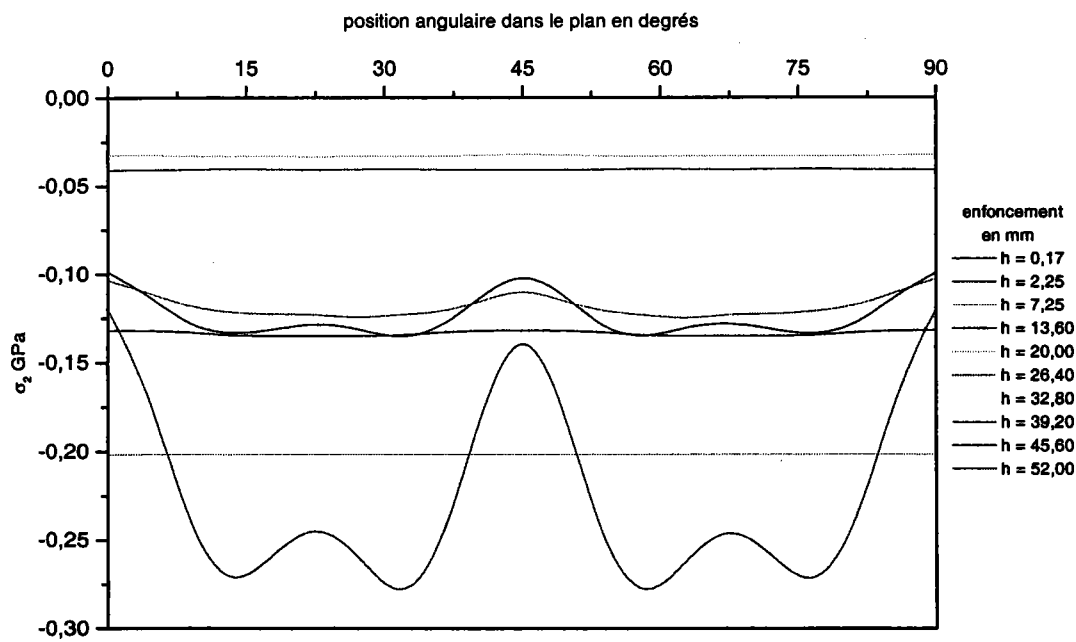


Figure [IV-14] : variation de la contrainte circonférentielle σ_2 en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (Ferron et al (1994), $R = 4$)

2.3.3 Matériaux à anisotropie transverse

Nous avons choisi de simuler un matériau modèle, représentatif d'un acier, et possédant une forte anisotropie. Les valeurs des coefficients d'anisotropie du matériau sont rappelées dans le tableau [IV-1].

Tableau [IV-1] : valeurs des coefficients d'anisotropie pour le matériau modèle

R_0	R_{45}	R_{90}
2	1,5	3

Les surfaces de charge utilisées correspondent respectivement au critère quadratique de Hill (1948) et au modèle de plasticité de Ferron et al (1994). Ces surfaces de charge sont présentées dans le paragraphe 5-1 du chapitre II. Les figures [IV-15, IV-16, IV-17, IV-18] présentent les variations angulaires du rayon polaire et la distribution de la contrainte circonférentielle σ_2 , respectivement avec chacun des deux modèles.

Avec le critère quadratique de Hill (1948), figure [IV-15], la diminution du rayon s'effectue de façon uniforme pour de faibles enfoncements (c'est à dire pour $H < 13,60$ mm). Un pli apparaît sur le brin libre de l'embouti lorsque l'enfoncement a atteint la valeur de 20 mm. La génératrice de la partie rentrante du pli est dirigée approximativement suivant la direction diagonale, c'est à dire à 45° par rapport à la direction de laminage de la tôle. L'amplitude de ce pli augmente avec la descente du poinçon. Puis, pour un enfoncement de 45,60 mm, ce premier pli laisse la place à trois plis, dont les génératrices sont orientées respectivement à 15° , 45° et 75° par rapport à la direction de laminage. Les amplitudes de ces trois plis sont différentes suivant les directions considérées. Le pli de plus faible amplitude est celui dont la génératrice est orientée suivant la direction diagonale (à 45° par rapport à la direction de laminage). La simulation étant réalisée pour le quart de la structure, nous obtenons donc l'apparition de 12 plis pour la totalité de la structure.

Nous pouvons d'ailleurs noter que l'initiation d'un seul pli en début d'enfoncement peut n'être que le résultat de l'anisotropie transverse du matériau, et ne pas correspondre au développement d'une instabilité.

Les variations angulaires de la contrainte circonférentielle σ_2 par rapport à la direction de laminage, figure [IV-16], sont à première vue complexes. Ces variations circonférentielles de contraintes par rapport à la direction de laminage sont, au moins en partie, dues à l'anisotropie transverse du matériau. Néanmoins, pour un enfoncement du poinçon égal à 45,60 mm, nous observons trois ondulations au niveau de la contrainte circonférentielle. Ces trois ondulations ont des amplitudes différentes. Leurs positions angulaires sur le brin libre correspondent aux positions occupées par les plis. L'apparition du plissement à partir des évolutions de la contrainte circonférentielle σ_2 présentée sur la figure [IV-16] reste toutefois difficile à définir.

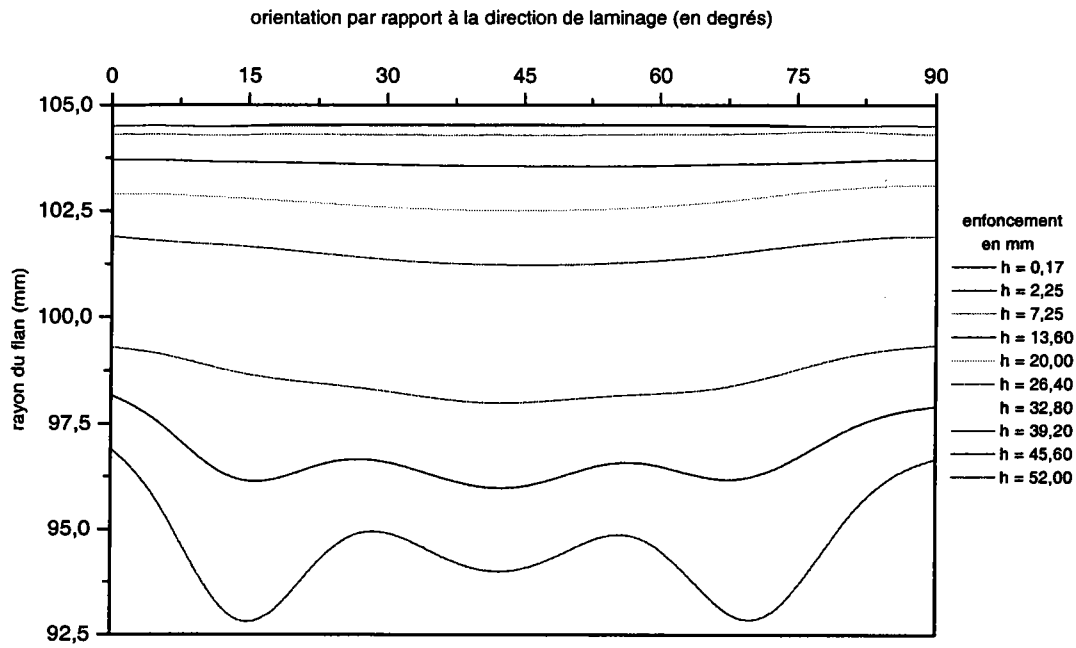


Figure [IV-15] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (Hill quadratique (1948))

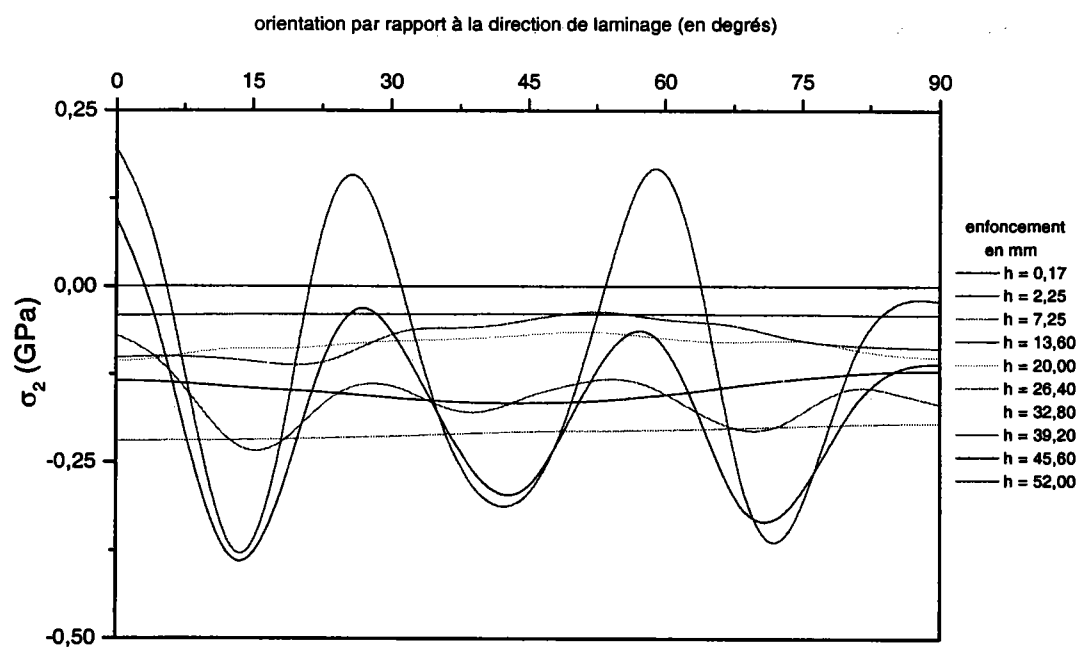


Figure [IV-16] : variation de la contrainte circonférentielle σ_2 en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (Hill quadratique)

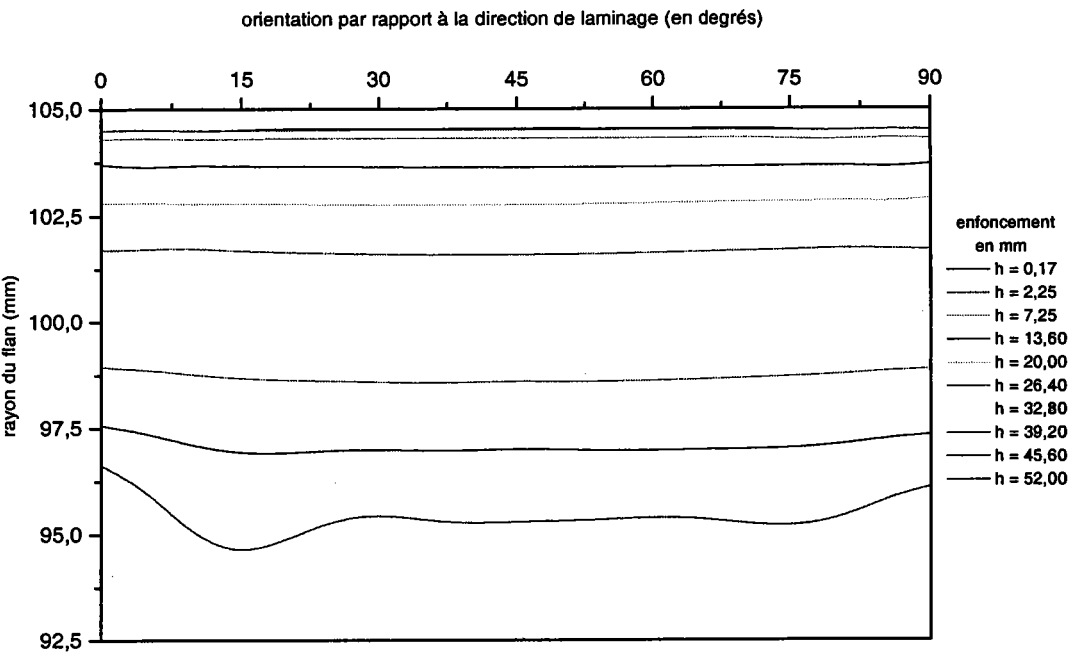


Figure [IV-17] : variation du rayon en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial de 104,5 mm (Ferron et al (1994))

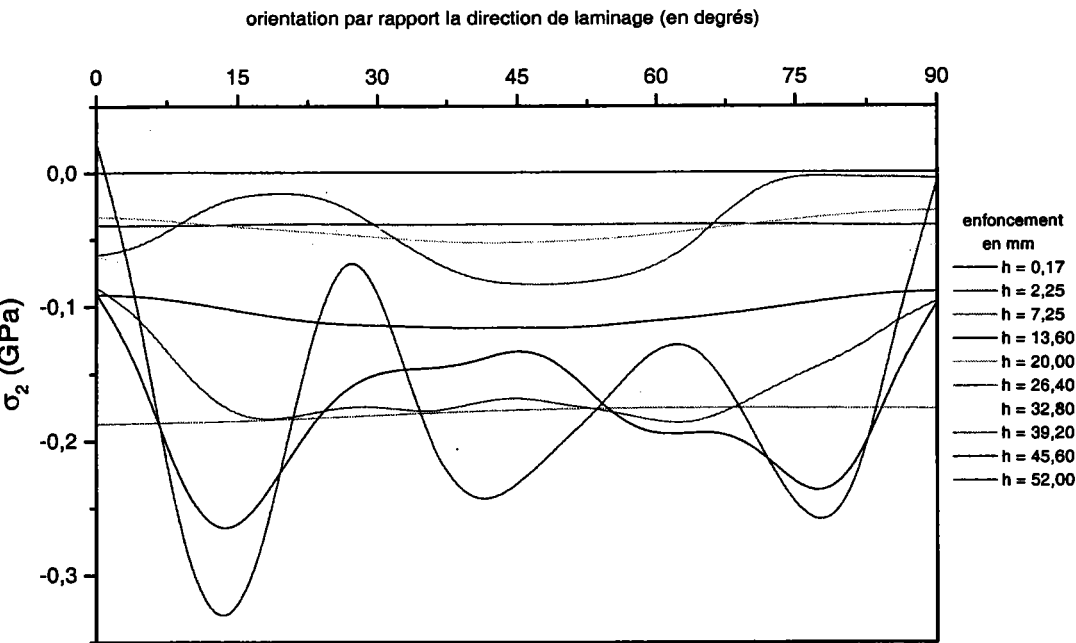


Figure [IV-18] : variation de la contrainte circonférentielle σ_2 en fonction de l'enfoncement pour un ensemble de nœuds se situant sur un rayon initial $R_0 = 104,5$ mm (Ferron et al (1994))

Les résultats de simulations du même type obtenus avec le modèle de Ferron et al (1994) soulignent un développement du plissement plus lent qu'avec le modèle quadratique de

Hill (1948). Nous observons, figure [IV-17], que les plis apparaissent plus tardivement et avec des amplitudes plus faibles. Les variations angulaires de la contrainte circonférentielle, figure [IV-18] sont également atténuées avec le modèle de Ferron et al (1994). Le passage d'un seul pli à trois plis, observé avec le modèle de Hill (1948), est conservé avec le modèle de Ferron et al (1994).

En conclusion, pour les deux modèles, nous obtenons le même nombre de plis pour la totalité de la structure : 12 plis.

2.4 Comparaisons avec les résultats analytiques

Les courbes limites de plissement, présentées dans ce paragraphe, ont été obtenues en théorie de l'écoulement afin de pouvoir être comparées aux résultats issus des simulations par éléments finis.

2.4.1 Matériaux isotropes

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que l'évolution de la contrainte circonférentielle, σ_2 , en fonction de la position angulaire sur le quart de flan constitue un bon indicateur de l'apparition et du développement du plissement. Avec le critère de von Mises la contrainte σ_2 présente deux ondulations pour un enfoncement de 20 mm et quatre ondulations pour un enfoncement de 45,60 mm.

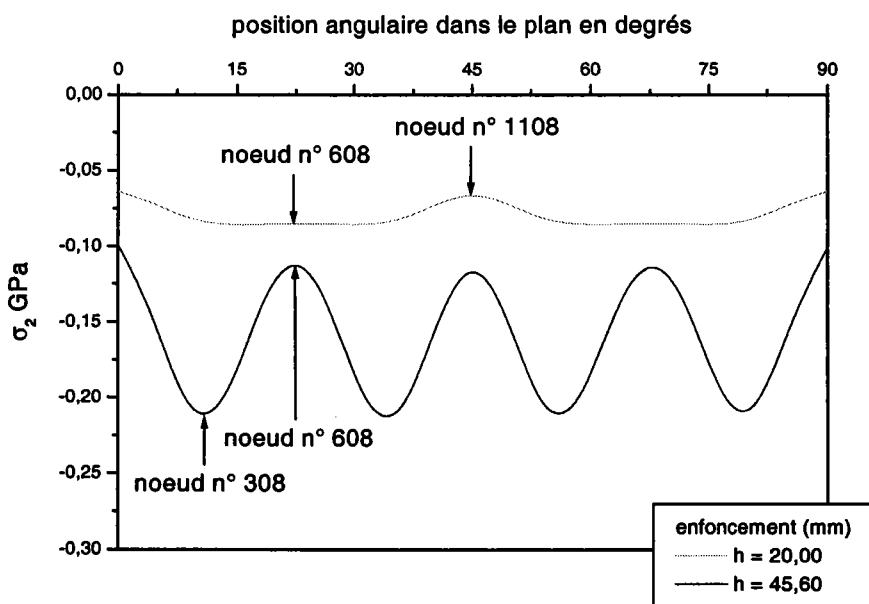


Figure [IV-19] : définition des nœuds utilisés pour le tracé des trajectoires des contraintes

Nous avons représenté sur la figure [IV-19] l'évolution de la contrainte σ_2 pour les enfoncements particuliers : $H = 20$ mm et $H = 45,60$ mm. Pour chacun des enfoncements, nous pouvons définir des extrema associés respectivement, à un point sortant (maximum de σ_2) et à un point rentrant d'un pli (minimum de σ_2). A ces points sont associés des nœuds que nous avons indiqués sur la figure [IV-19]. Pour un enfoncement $H = 20$ mm, nous avons

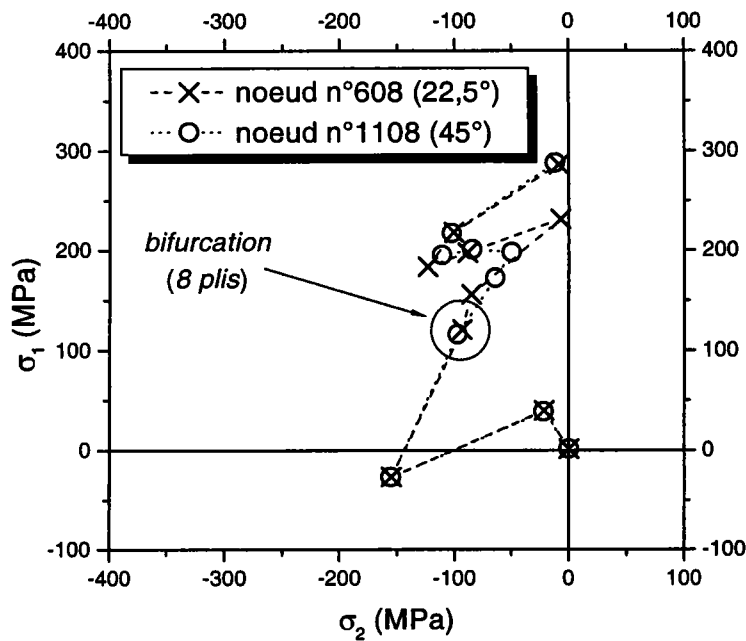
choisi le couple de nœuds numérotés 608 et 1108. Pour $H = 45,60$ mm, nous avons choisi le couple de nœuds 308 et 608. A chaque nœud, à l'enfoncement considéré, est attaché un couple de contraintes (σ_1 , σ_2). Si nous traçons l'évolution de (σ_1 , σ_2) pour ces deux couples de nœuds en fonction de l'enfoncement dans le plan des contraintes principales, nous obtenons alors les courbes présentées sur les figures [IV-20, IV-21].

Nous observons sur les figures [IV-20, IV-21] des trajectoires de contraintes complexes, associées à la position des points matériels considérés, d'abord dans la collerette, puis sur le rayon de matrice et enfin sur la partie supérieure du brin libre.

Dans un premier temps, nous allons nous concentrer sur les trajectoires de contraintes pour les nœuds 608 et 1108, figure [IV-20]. Pour de faibles enfoncements, les nœuds 608 et 1108 ont des états de contrainte pratiquement superposés. Puis, à partir d'un enfoncement de 13,60 mm, leurs états de contrainte respectifs divergent. Le plissement débute avec un nombre de plis sur la totalité de la structure égal à huit (l'évolution de la contrainte circonférentielle présente alors deux ondulations sur le quart de la structure). Mais avec l'augmentation de l'enfoncement du poinçon, les états de contrainte des nœuds 608-1108 convergent à nouveau pour des enfoncements supérieurs à 32,80 mm. Le mode de plissement à huit plis s'efface. Par ailleurs, pour des enfoncements inférieurs à 32,80 mm, le brin libre ne présente encore aucun pli décelable sur le rayon courant. L'étude des contraintes tend à nous montrer un phénomène d'hésitation par rapport à l'apparition et au nombre des plis sur le brin libre. Cette hésitation n'est pas visible géométriquement sur le rayon des nœuds.

La figure [IV-21] montre les trajectoires des état de contrainte pour les nœuds 308 et 608. Nous identifions très nettement sur la figure [IV-21] un point de bifurcation, définissant l'apparition du plissement. Ce point correspond à un enfoncement du poinçon égal à 32,80 mm. Sur le brin libre de l'embouti apparaissent alors 16 plis au-delà de cet enfoncement.

Ce type de graphe montre donc avec précision l'apparition du plissement. La figure [IV-21] nous permet ainsi de définir le point de bifurcation et par conséquent de connaître l'état prébifurqué. Nous avons tracé le profil de l'embouti pour un enfoncement de 32,80 mm correspondant à la géométrie avant l'apparition des plis. Ce profil est reproduit sur la figure [IV-22]. Nous observons sur le profil la présence d'un gonflement sur la partie supérieure du brin libre. Ce gonflement, présent sur toute la périphérie du brin libre, est indépendant de la position angulaire. Havranek (1977) a observé l'apparition d'un tel gonflement avant plissement sur des essais d'emboutissage de coupelle tronconique. Les simulations réalisées sont donc en accord avec les observations expérimentales de Havranek (1977).



(a)

Figure [IV-20] : trajectoires des contraintes obtenues par simulation numérique pour les nœuds 608-1108 (von Mises)

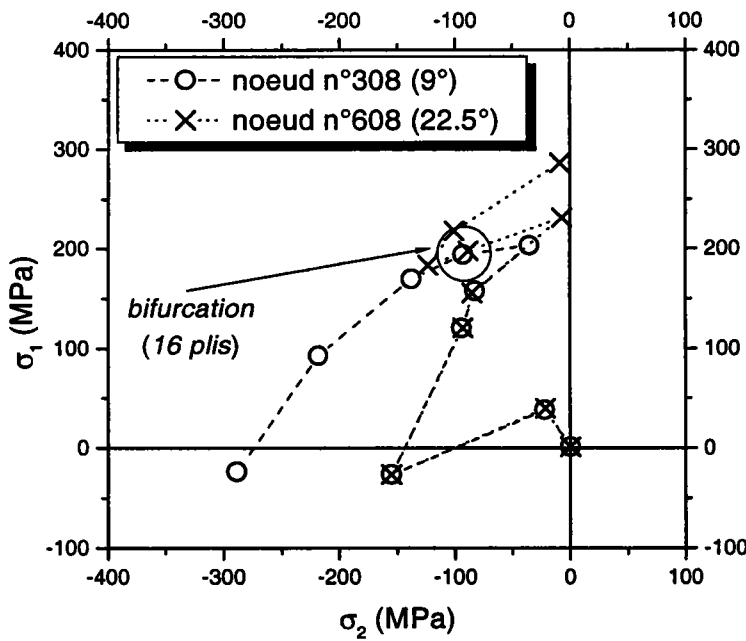


Figure [IV-21] : trajectoires des contraintes obtenues par simulation numérique pour les nœuds 308-608 (von Mises)

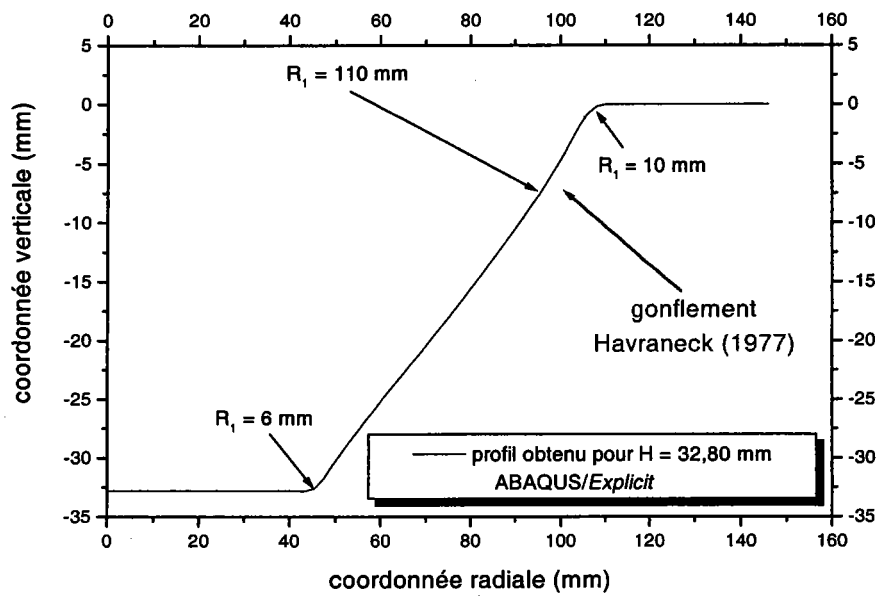


Figure [IV-22] : profil de l'embouti (H = 32,80 mm) permettant de définir la géométrie prébifurquée

Nous présentons, figure [IV-23], la distribution des contraintes radiales et circonférentielles, suivant la direction radiale, pour l'enfoncement de 32,80 mm ; c'est à dire pour la géométrie prébifurquée. La contrainte circonférentielle, notée σ_θ sur la figure [IV-23], est une contrainte compressive sur la partie supérieure du brin libre. Le gonflement apparaît dans cette zone où la contrainte circonférentielle devient négative.

Nous considérons maintenant la géométrie locale de la partie supérieure du brin libre proche du rayon matrice. En effet, cette zone est soumise à une contrainte circonférentielle compressive susceptible d'engendrer des plis. A partir du profil de l'embouti, figure [IV-22], nous estimons localement les valeurs des rayons de courbure principaux R_1 et R_2 . Connaissant les rayons de courbure nous pouvons alors tracer la courbe limite de plissement déduite de l'étude locale réalisée au chapitre III. Nous comparons sur la figure [IV-24] les trajectoires des contraintes des nœuds 308-608 et la courbe limite de plissement tracée en tenant compte du profil à l'état prébifurqué.

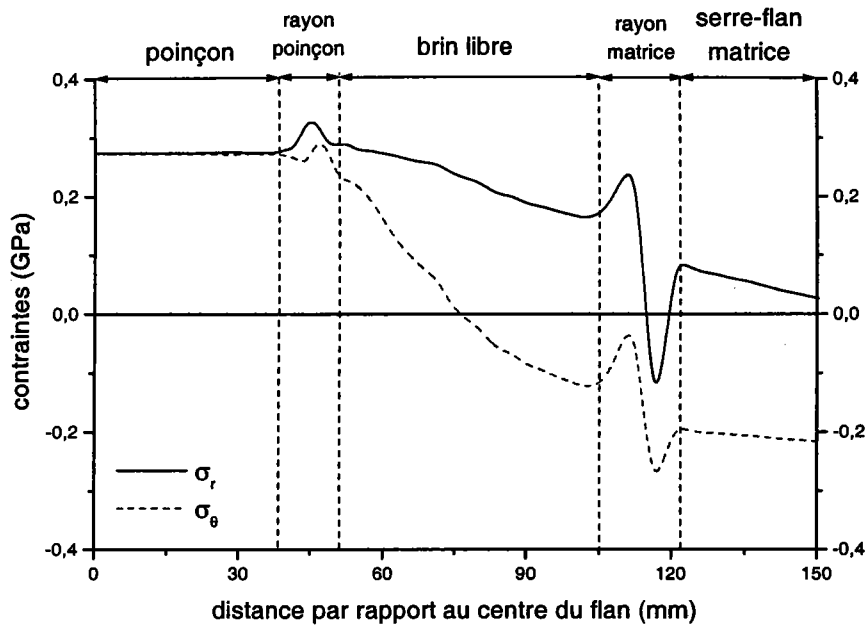


Figure [IV-23] : distribution des contraintes le long du profil de l'embouti pour la géométrie prébifurquée

Le point de bifurcation défini par les trajectoires de contraintes (résultats numériques) est proche de la courbe limite de plissement, notée « CLP » (résultat analytique). Nous obtenons ainsi une bonne concordance entre les prévisions analytiques et numériques. La longueur d'onde associée, prévue analytiquement, conduit à un nombre de plis sensiblement égal à 10, valeur à comparer aux 8 puis 16 plis obtenus numériquement.

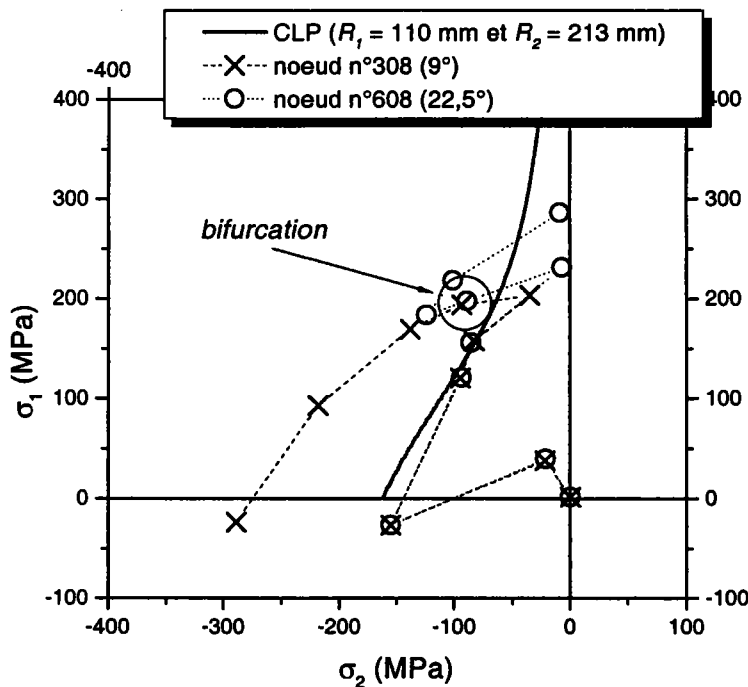


Figure [IV-24] : trajectoires des contraintes obtenues par simulation numérique pour les nœuds 308-608 comparées à la courbe limite de plissement déduite de la géométrie prébifurquée

2.4.2 Matériaux à anisotropie normale

Comme pour le matériau isotrope, nous allons observer les trajectoires de contraintes d'un couple de nœuds représentatif du comportement du flan vis à vis du plissement. Le couple de nœuds est défini en fonction du nombre de plis qui apparaissent sur le brin libre. Lorsque, pour le quart de la structure, quatre plis sont présents sur le brin libre, nous choisissons d'étudier le couple de nœuds 308-608. Si deux plis apparaissent sur le brin libre, nous choisissons le couple de nœuds 608-1108.

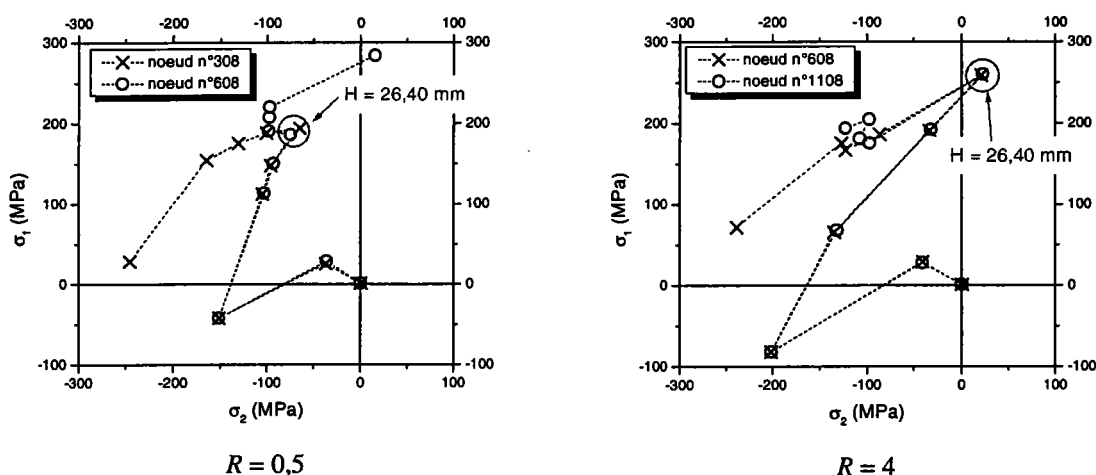


Figure [IV-25] : influence de l'anisotropie sur les trajectoires des états de contrainte obtenues par simulation numérique (modèle de Ferron et al (1994))

Pour illustrer nos propos, nous avons choisi de présenter les trajectoires de contraintes pour deux matériaux à anisotropie normale, avec deux valeurs du coefficient d'anisotropie normale R différentes, les surfaces de charge étant décrites par le modèle proposé par Ferron et al (1994). Nous observons, tout d'abord, que l'anisotropie normale a une influence forte sur les trajectoires de contraintes. Nous constatons qu'une augmentation du coefficient d'anisotropie R tend à amplifier les changements de direction des trajectoires de contrainte avant bifurcation ; les points matériels considérés passent de la collerette au rayon de matrice et enfin au brin libre. Ainsi pour un même enfoncement H égal à 26,40 mm (avant bifurcation), l'état de contrainte varie de la traction uniaxiale pour un matériau avec $R = 4$ à un état proche du cisaillement pour un matériau avec $R = 0,5$.

Considérons maintenant huit matériaux présentant quatre valeurs de R , et dont les surfaces de charge sont susceptibles d'être représentées par le modèle quadratique de Hill (1948) ou le modèle de Ferron et al (1994). Pour ces différents matériaux nous traçons les trajectoires des contraintes et identifions les points de bifurcation. A partir des points de bifurcation nous définissons précisément les enfoncements critiques. Nous avons résumé, figure [IV-26], les enfoncements critiques obtenus avec les deux modèles de plasticité.

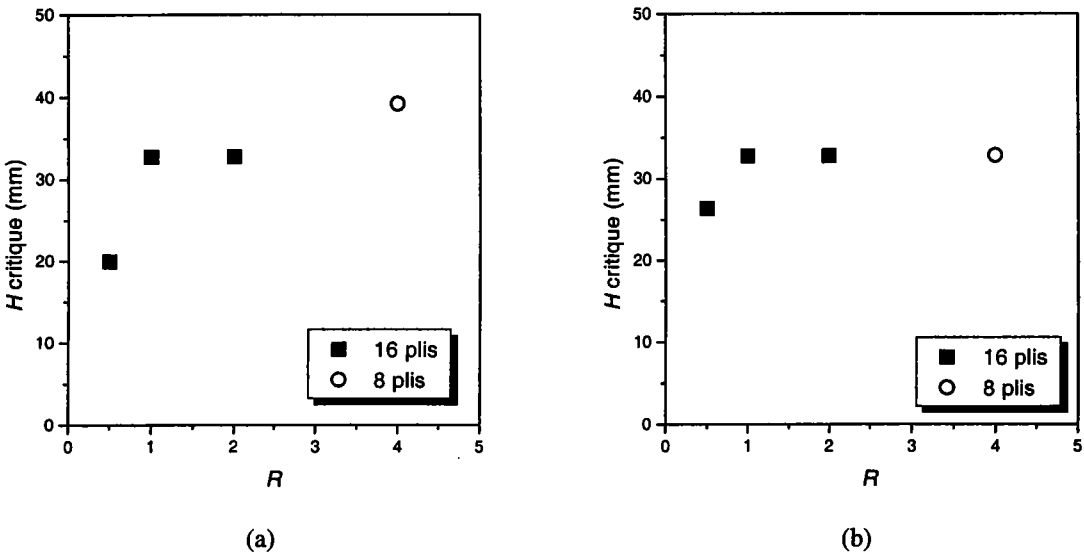


Figure [IV-26] : variation de l'enfoncement H critique en fonction du coefficient d'anisotropie r pour le modèle de plasticité de Hill (1948) (a) et le modèle proposé par Ferron et al (1994) (b)

Nous observons, figure [IV-26], que, pour les deux modèles de plasticité, l'enfoncement critique augmente lorsque la valeur du coefficient d'anisotropie R augmente. Une forte valeur du coefficient d'anisotropie R tend à retarder l'apparition du plissement, conformément aux tendances expérimentales. Nous constatons également que le nombre de plis diminue lorsque la valeur de R augmente. La sensibilité à R est toutefois moins forte avec le modèle de Ferron et al (1994).

Les résultats des simulations par éléments finis semblent contredire les observations effectuées sur les courbes limites de plissement qui prévoient, chapitre III, que la contrainte critique de plissement diminue légèrement lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente. Or le résultat obtenu (figures [III-47, III-48]) est valable pour une géométrie donnée, c'est à dire pour des valeurs données des rayons de courbure R_1 et R_2 . Nous avons également constaté, chapitre III, que le niveau de la contrainte critique de plissement dépend fortement de la valeur du rayon dans la direction orthogonale à la direction compressive. Dans l'essai modélisé le rayon de courbure qui nous intéresse est le rayon de courbure, noté R_1 , suivant la direction radiale. Sur le tableau [IV-2], nous avons reporté les valeurs du rayon de courbure R_1 estimé à partir des profils obtenus par simulation au point de bifurcation. A chaque matériau, c'est à dire à chaque valeur de R , correspond une géométrie prébifurquée du brin libre, c'est à dire des valeurs locales de R_1 et R_2 . Le tableau [IV-2] montre que le rayon de courbure R_1 diminue lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente. A partir des valeurs du tableau [IV-2], nous avons tracé, pour chaque matériau, la courbe limite de plissement correspondant à la géométrie de prébifurcation associée à ce matériau.

Tableau [IV-2] : récapitulatif des valeurs du rayon de courbure R_1 en fonction du coefficient d'anisotropie normale R

	$R = 0,5$	$R = 1$	$R = 2$	$R = 4$
Hill quadratique	$R_1 = 219 \text{ mm}$	$R_1 = 110 \text{ mm}$	$R_1 = 84 \text{ mm}$	$R_1 = 74 \text{ mm}$
Ferron et al (1994)	$R_1 = 199 \text{ mm}$	$R_1 = 119 \text{ mm}$	$R_1 = 101 \text{ mm}$	$R_1 = 106 \text{ mm}$

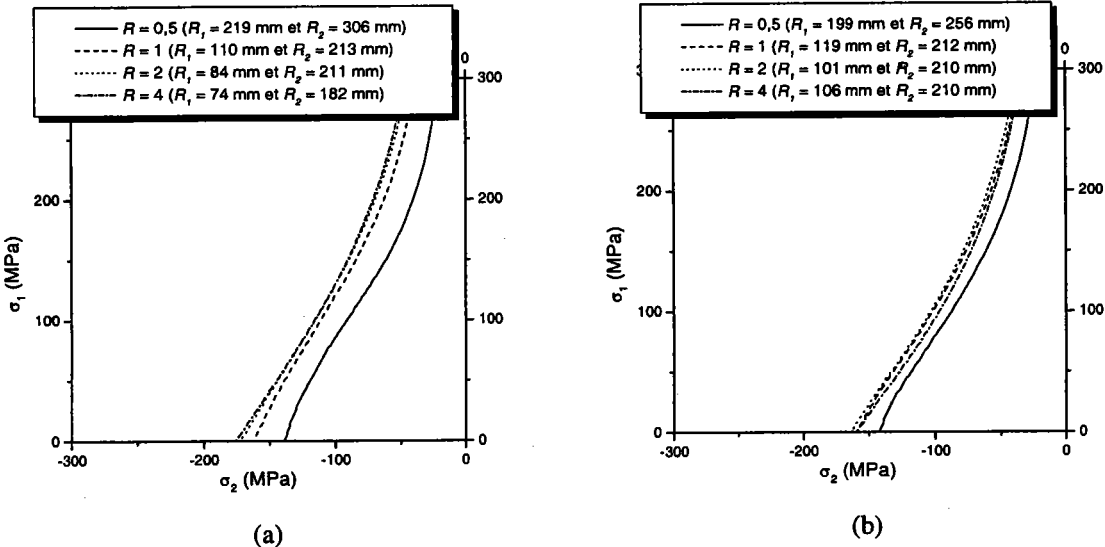
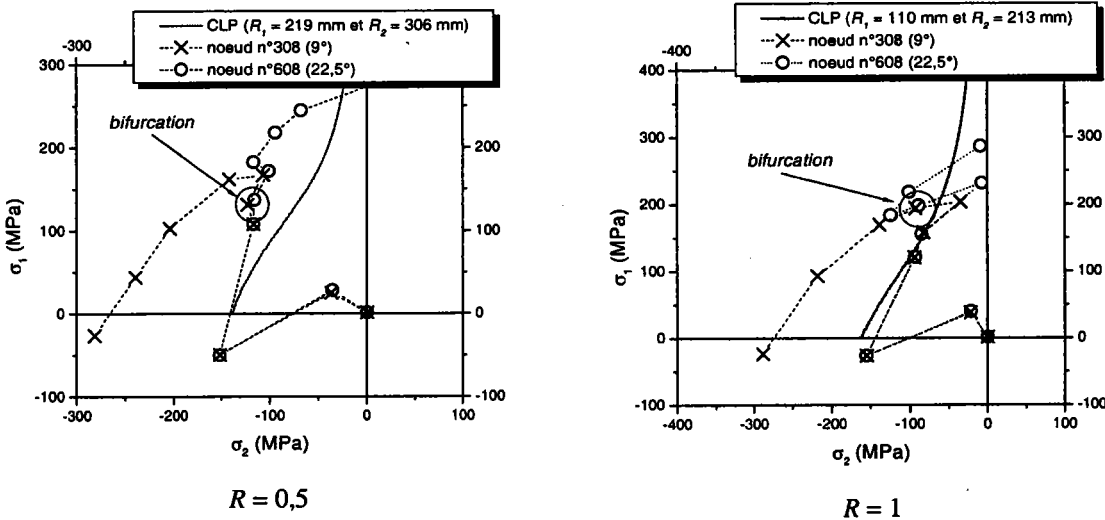


Figure [IV-27] : courbes limites de plissement relatives à la géométrie prébifurquée, pour le modèle de plasticité de Hill (1948) (a) et le modèle proposé par Ferron et al (1994) (b)

Chaque courbe limite de plissement, figure [IV-27], est donc définie pour un matériau, et pour la géométrie du brin libre obtenue par simulation au point de bifurcation. Dans ces conditions la contrainte critique de plissement, figure [IV-27], augmente lorsque que le coefficient d'anisotropie R augmente. En effet, lorsque R augmente le rayon de courbure R_1 au point de bifurcation diminue, tableau [IV-2]. Nous pouvons en conclure que le coefficient d'anisotropie R agit fortement sur le niveau de la contrainte critique de plissement via la géométrie du brin libre avant bifurcation. Cette influence du coefficient d'anisotropie R est plus faible avec le modèle de Ferron et al (1994).

Nous présentons maintenant de façon regroupée les trajectoires de contraintes (obtenues numériquement) et les courbes limites de plissement obtenues analytiquement pour la géométrie locale définie à l'état de prébifurcation pour chaque matériau. Nous constatons, à partir des figures [IV-28, IV-29], un assez bon accord entre les résultats obtenus avec les simulations par éléments finis et les courbes limites de plissement tracées avec la géométrie locale de l'état de prébifurcation. Dans un certain nombre de cas, les contraintes critiques de plissement prévues par la modélisation analytique sont toutefois légèrement inférieures aux prévisions numériques.



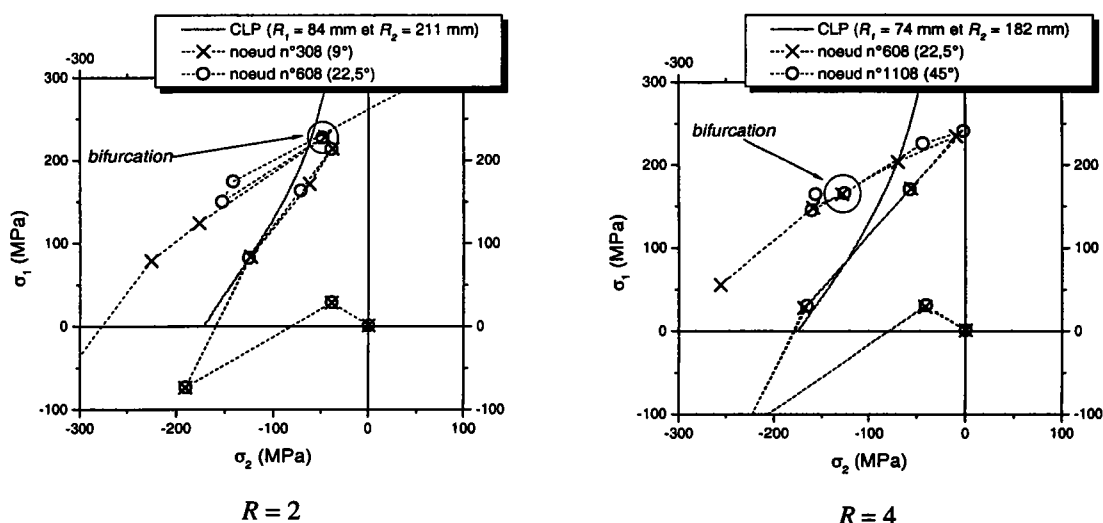
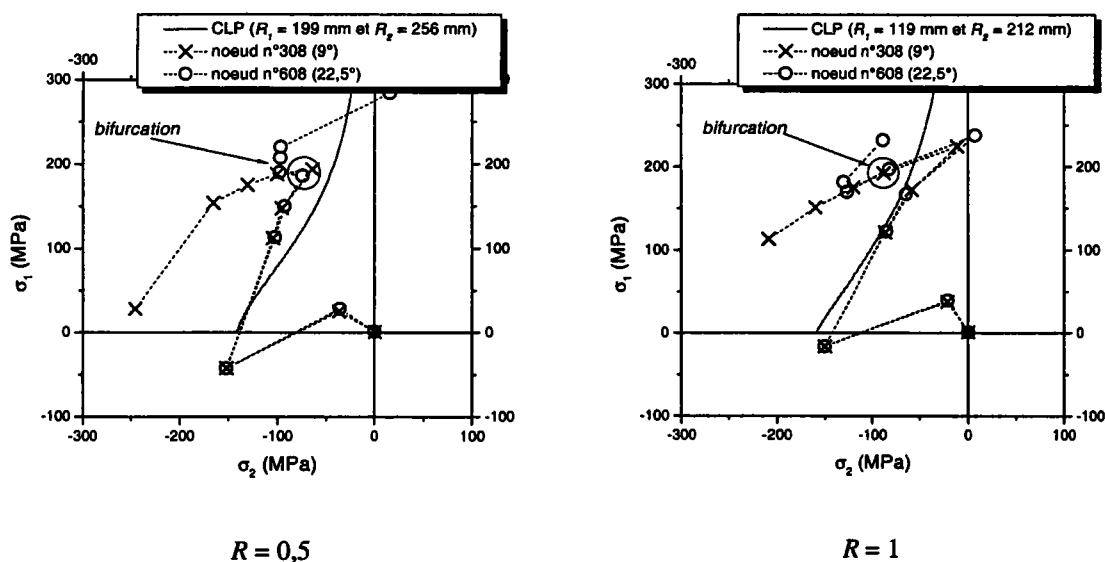


Figure [IV-28] : comparaison entre la courbe limite de plissement et les trajectoires des états de contrainte obtenues par simulation numérique (Hill quadratique (1948))

En résumé, l'anisotropie influence sur l'état de contrainte et sur la géométrie prébifurquée. En effet, l'état de contrainte dans les zones critiques de l'embouti dépend fortement du coefficient R . Une augmentation de R favorise des trajectoires des contraintes proches de la traction uniaxiale, éloignant ainsi l'état de contrainte du brin libre des états critiques de plissement (traction-compression). En outre, de fortes valeurs de R conduisent à des valeurs du rayon de courbure R_1 plus faibles dans la partie supérieure du brin libre. La diminution du rayon R_1 entraîne une augmentation du niveau des contraintes critiques de plissement. Les états de contraintes critiques de traction-compression sont donc atteints pour des enfoncements plus forts lorsque R augmente.

Les longueurs d'onde déterminées avec la méthode analytique varient de 87 à 65 mm, ce qui correspond à un nombre de plis variant de 8 à 10 lorsque le coefficient d'anisotropie R varie de 0,5 à 4. La tendance est donc inverse de celle obtenue avec le maillage (a). Rappelons toutefois que le maillage (b) conduit toujours à 12 plis.



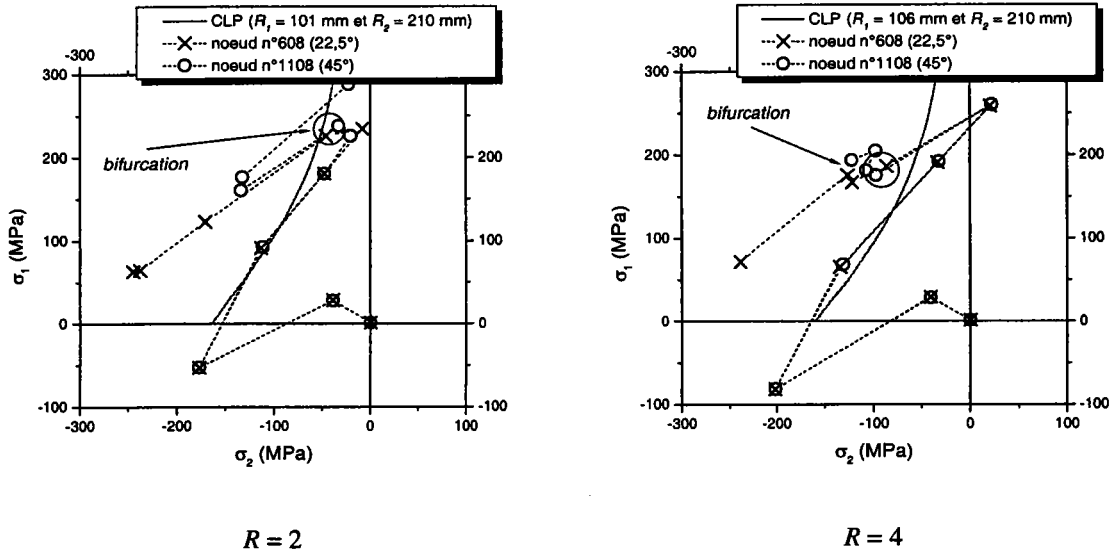


Figure [IV-29] : comparaison entre la courbe limite de plissement et les trajectoires des états de contrainte obtenues par simulation numérique (Ferron et al (1994))

2.4.3 Matériaux à anisotropie transverse

Nous ne pouvons pas appliquer pour les matériaux à anisotropie transverse la comparaison entre les courbes limites de plissement et les trajectoires des états de contrainte. Puisque nous avons adopté, dans le chapitre III, une analyse locale du plissement. L'analyse utilisée pour tracer les courbes limites de plissement suppose en effet l'apparition d'un grand nombre de plis sur le brin libre suivant l'orientation choisie. Or, dans la réalité de l'essai, un faible nombre de plis apparaît sur le brin libre si l'on considère séparément les trois orientations privilégiées qui sont: 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. Néanmoins nous présentons dans ce paragraphe les trajets des états de contrainte pour différents couples de nœuds afin de déterminer les points de bifurcation.

Le matériau étudié dans ce paragraphe est présenté dans le chapitre II au paragraphe 5-1-3. Nous avons observé pour un enfoncement de 52 mm, lors des simulations du quart de la structure, la présence de trois plis sur le brin libre lorsque le matériau possédait un comportement à anisotropie plane. Nous avons aussi observé que le plissement semble survenir tout d'abord avec un seul pli dont la génératrice est portée par la direction diagonale, à 45° par rapport à la direction de laminage. Puis, avec la progression de l'enfoncement du poinçon, trois plis se développent et leurs génératrices sont respectivement proches de : la direction de laminage, la direction diagonale et la direction transverse. Ces observations sont valables lorsque le comportement plastique est décrit avec le modèle quadratique de Hill (1948) ou avec le modèle proposé par Ferron et al (1994). Nous traçons les trajectoires des états de contrainte pour un ensemble de couples de nœuds susceptibles de nous renseigner sur la prévision du plissement.

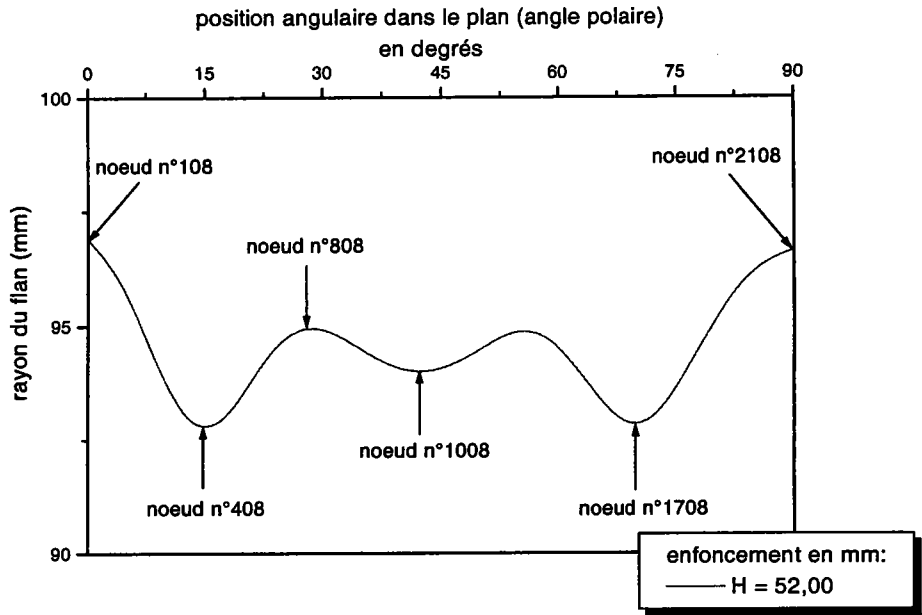


Figure [IV-30] : visualisation des nœuds 108, 408, 808, 1008, 1708 et 2108

A partir de la géométrie du brin libre obtenue pour un enfoncement de 52 mm, sur laquelle nous visualisons les trois plis, nous avons défini pour chaque pli un couple de nœuds, figure [IV-30]. Le couple de nœuds 108-408, figure [IV-30], correspond au pli dont la génératrice est proche de la direction de laminage. Le couple 808-1008, figure [IV-30], correspond au pli dont la génératrice est proche de la direction diagonale, à 45° par rapport à la direction de laminage. Le couple 1708-2108, figure [IV-30], correspond au pli dont la génératrice est proche de la direction transverse. Les trajectoires des états de contrainte tracées sur les figure [IV-31, IV-32, IV-33] ont été obtenues à partir du modèle quadratique de Hill (1948).

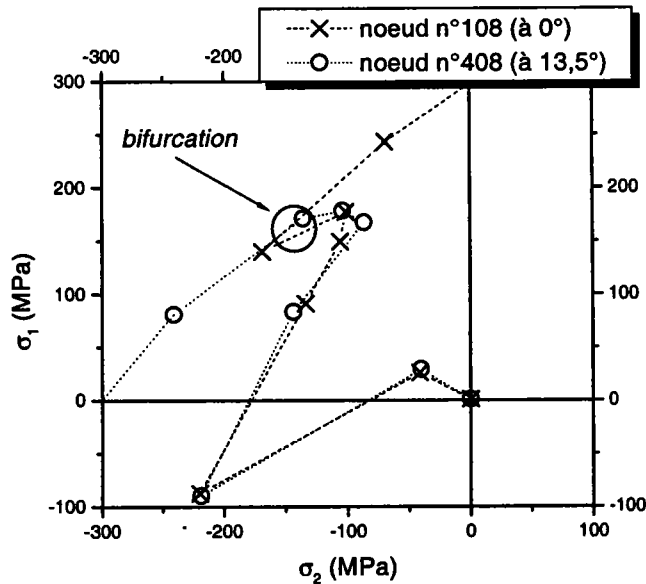


Figure [IV-31] : trajectoires des états de contrainte dans la direction de laminage (Hill quadratique (1948))

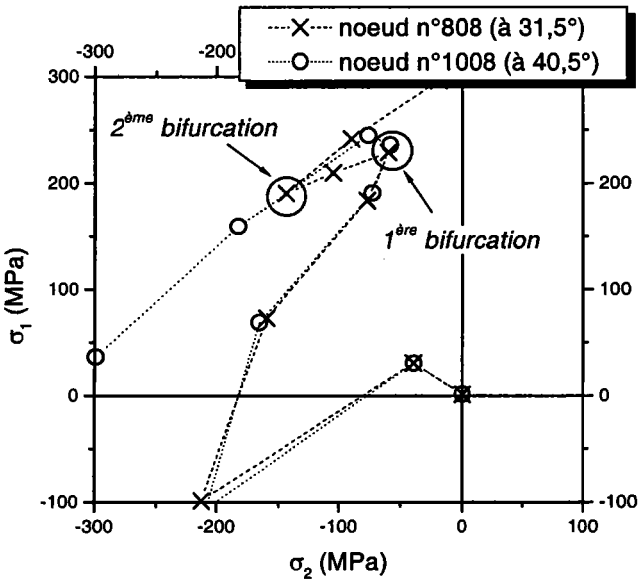


Figure [IV-32] : trajectoires des états de contrainte dans la direction diagonale, c'est à dire à 45° par rapport à la direction de laminage (Hill quadratique (1948))

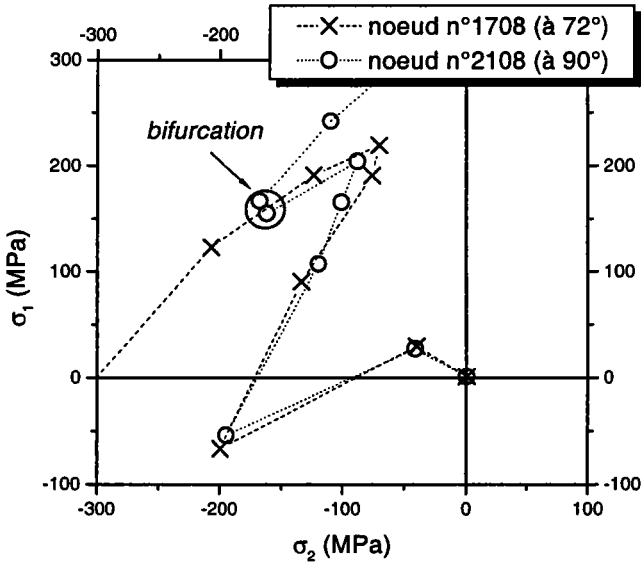


Figure [IV-33] : trajectoires des états de contrainte dans la direction transverse, c'est à dire à 90° par rapport à la direction de laminage (Hill quadratique (1948))

Pour un même enfoncement, les nœuds se situant sur un même rayon possèdent le même état de contrainte lorsque le matériau est isotrope dans le plan. Par contre pour un matériau orthotrope, l'état de contrainte des nœuds dépend de l'orientation de ces nœuds par rapport à la direction de laminage. La trajectoire des états de contraintes du nœud 108 est donc légèrement différente de la trajectoire des états de contraintes du nœud 408 avant bifurcation, figure [IV-31]. La bifurcation peut être définie lorsque l'état de contrainte du nœud 108 est très différent de celui du nœud 408. Les remarques formulées ci-dessus s'appliquent aussi au couple de nœuds 808-1008, figure [IV-32], et au couple 1708-2108, figure [IV-33].

En observant les trajets des états de contrainte des nœuds 808 (à $31,5^\circ$ par rapport à la direction de laminage) et 1008 (à $40,5^\circ$ par rapport à la direction de laminage), nous constatons qu'il est possible qu'une première bifurcation apparaisse pour un enfoncement H égal à 26,40 mm, figure [IV-32]. Cette possibilité de bifurcation correspondrait alors à l'apparition d'un pli dont la génératrice suit la direction diagonale (45° par rapport à la direction de laminage). Avec la progression de l'enfoncement du poinçon, les états de contrainte pour les nœuds 808 et 1008 se rapprochent jusqu'à être à nouveau identiques. Ce mode de plissement ne semble donc pas être stable. Les états de contrainte des nœuds 808 et 1008 divergent à nouveau pour des enfoncements supérieurs à 45,60 mm ce qui correspond à l'apparition des trois plis sur le quart de la structure, figure [IV-32].

Pour les couples 108-408 et 1708-2108, leurs trajectoires de contraintes ne présentent qu'un seul point de bifurcation correspondant à de forts enfoncements du poinçon. En effet l'apparition de plis dont la génératrice est proche de la direction de laminage ou de la direction transverse s'effectue après l'apparition du pli central.

Comme nous l'avons fait pour le modèle quadratique de Hill (1948), nous allons maintenant étudier les trajets de contrainte des couples de nœuds 108-408, 808-1008 et 1708-2108 obtenus avec le modèle proposé par Ferron et al (1994). Les trajectoires des états de contrainte tracées sur les figures [IV-34, IV-35, IV-36] ont été obtenues à partir du modèle proposé par Ferron et al (1994).

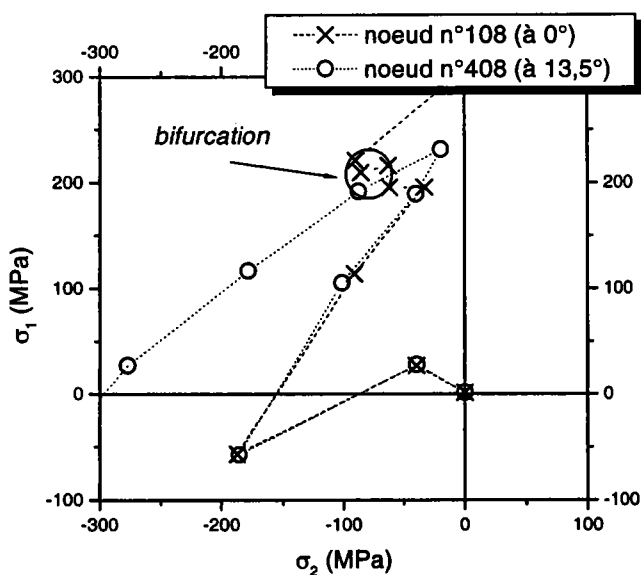


Figure [IV-34] : trajectoires des états de contrainte dans la direction de laminage (Ferron et al (1994))

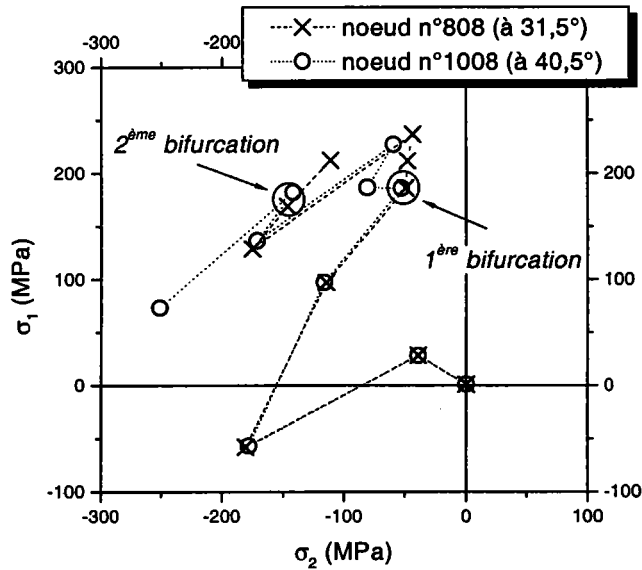


Figure [IV-35] : trajectoires des états de contrainte dans la direction diagonale, c'est à dire à 45° par rapport à la direction de laminage (Ferron et al (1994))

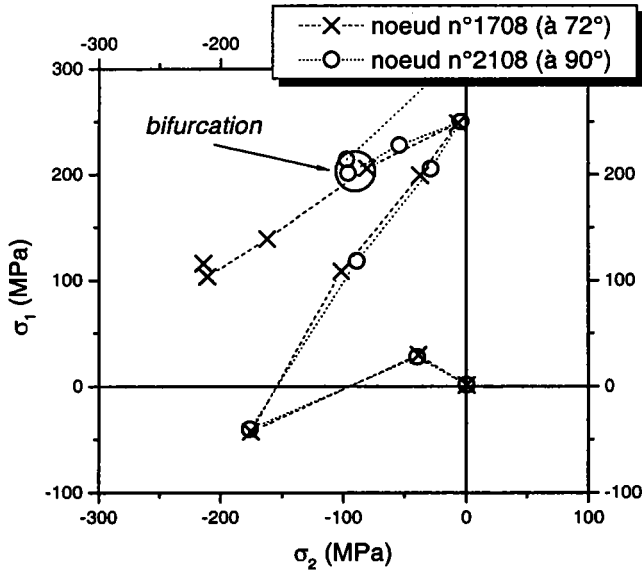


Figure [IV-36] : trajectoires des états de contrainte dans la direction transverse, c'est à dire à 90° par rapport à la direction de laminage (Ferron et al (1994))

Les observations effectuées à partir du modèle quadratique de Hill (1948) sont vérifiées avec le modèle proposé par Ferron et al (1994). Toutefois, les trajectoires des états de contrainte obtenues avec le modèle proposé par Ferron et al (1994) semblent moins sensibles à l'anisotropie que celles obtenues avec le modèle quadratique de Hill (1948).

En conclusion, l'étude du trajet des états de contrainte permet de déterminer le comportement au plissement de la tôle orthotrope. Le plissement semble débiter, pour cet essai et pour ce matériau ($R_0 = 2$, $R_{45} = 1,5$ et $R_{90} = 3$), dans la direction où la contrainte d'écoulement est la plus élevée. En effet, un pli apparaît tout d'abord dans la direction diagonale. Or, pour ce matériau, les surfaces de plasticité, tracées au chapitre II (figure [II-8] pour Hill (1948) et

figure [II-9] pour Ferron et al (1994)), nous indiquent que la contrainte d'écoulement est la plus élevée dans la direction diagonale dans le domaine utile des états de contrainte définis pour cet essai.

2.5 Comparaisons avec les résultats expérimentaux de Ellagoune et Boivin (1988)

Ellagoune et Boivin (1988) ont obtenu des résultats expérimentaux en ce qui concerne les enfoncements critiques définis à l'apparition du plissement. Ils ont travaillé sur des aciers doux présentant des limites élastiques variées. Ces propriétés élastiques différentes sont le résultat d'histoires thermomécaniques distinctes, conduisant à des variations de 100 à 280 MPa des limites élastiques. Les résultats d'Ellagoune et Boivin (1988) soulignent que l'enfoncement critique diminue nettement lorsque la limite élastique augmente.

Nous simulons ici les essais d'emboutissage de coupelle tronconique effectués par Ellagoune et Boivin (1988), en recherchant l'apparition du plissement à partir de l'examen des trajectoires de contraintes. Ne connaissant pas avec précision les caractéristiques du comportement plastique des matériaux utilisés, nous avons introduit dans les simulations des valeurs vraisemblables pour ces matériaux. L'écrouissage est décrit par la loi de Ludwig. Nous supposons que les aciers possèdent un comportement plastique isotrope. Les surfaces de charge sont décrites par le critère de von Mises. Nous avons défini trois aciers, notés A, B et C. Chacun possède des limites d'élasticité différentes. Les caractéristiques de l'écrouissage de ces aciers sont rapportées dans le tableau [IV-3].

Tableau [IV-3] : récapitulatif des caractéristiques d'écrouissage des trois aciers simulés

	Limite d'élasticité σ_0 (MPa)	K (MPa)	Exposant d'écrouissage N
Acier A	100	200	0,2
Acier B	200	200	0,2
Acier C	280	200	0,2

Les flans ont pour épaisseur 0,7 mm. Les simulations de l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique pour les trois aciers modèles ainsi définis ont montré l'apparition de quatre plis sur la partie supérieure du brin libre pour les quarts de flans simulés. Nous avons observé que ces plis se produisaient plus rapidement lorsque la limite d'élasticité augmente.

Pour préciser ces premières constatations, nous avons tracé les trajectoires de contraintes des nœuds 308-608 pour les trois aciers. Nous observons des trajectoires de contraintes ainsi que des points de bifurcation très différents pour les trois aciers (figures [IV-37, IV-38, IV-39]). Les points de bifurcation, déterminés à partir des trajectoires de contrainte nous permettent de définir les enfoncements critiques. Ceux-ci sont reportés sur la figure [IV-40] en fonction de la limite d'élasticité. Nous avons fait de même pour les points expérimentaux obtenus par Ellagoune et Boivin (1988). Nous constatons un bon recoupement avec les résultats expérimentaux. En outre, nous nous sommes assurés que des variations raisonnables du coefficient K de la loi d'écrouissage (entre 150 et 300 MPa) ne modifiaient pas de façon sensible les résultats obtenus.

Cette sensibilité à la limite élastique, σ_0 , s'explique qualitativement par le fait que les modules tangents, et par conséquent la contrainte critique de plissement, ne sont pas affectés par les variations de σ_0 . Les courbes d'écrouissage, quant à elles, dépendent directement de la valeur

de σ_0 . Les contraintes atteintes au cours de l'emboutissage (contraintes dues à la déformation de l'embouti) sont alors plus grandes lorsque σ_0 est élevé. L'état critique d'apparition des plis est inchangé par l'augmentation de σ_0 . Le plissement survient donc pour des déformations critiques plus faibles, et par conséquent des enfoncements plus faibles, lorsque la limite élastique σ_0 augmente.

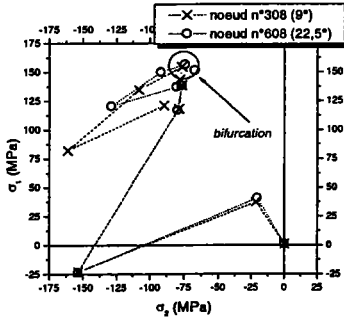


Figure [IV-37] : trajectoires de contraintes pour l'acier A

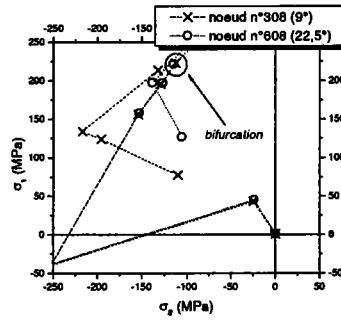


Figure [IV-38] : trajectoires de contraintes pour l'acier B

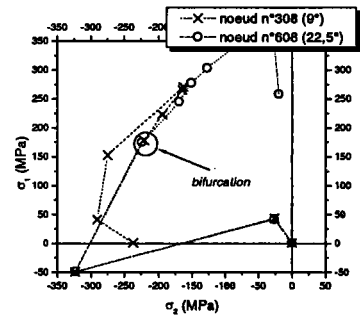


Figure [IV-39] : trajectoires de contraintes pour l'acier C

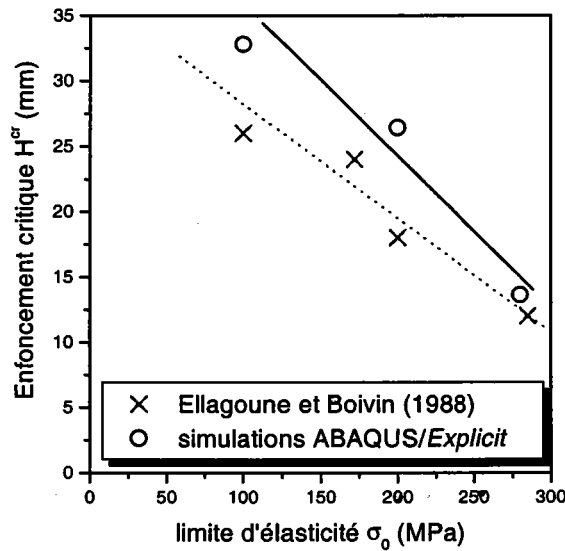


Figure [IV-40] : variation de l'enfoncement critique en fonction de la limite d'élasticité (ABAQUS/Explicit)
Comparaison avec les résultats expérimentaux de Ellagoune et Boivin (1988)

3 Analyse du plissement dans l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan

L'essai étudié dans ce sous-chapitre a été proposé par Narayanasamy et Sowerby (1995). La géométrie de l'outillage est présentée sur la figure[I-5] du chapitre I.

3.1 Modélisation par éléments finis

Un quart de l'essai proposé par Narayanasamy et Sowerby (1995) est modélisé en tenant compte des propriétés de symétrie de l'essai (figure [IV-41]). Les simulations sont réalisées

avec le code de calcul ABAQUS/Explicit. L'outillage, constitué par un poinçon et une matrice, est modélisé en utilisant des éléments rigides (R3D3 dans la documentation ABAQUS/Explicit). Le flan, qui peut présenter différentes valeurs d'épaisseur et de rayon initial, est modélisé avec des éléments à quatre nœuds de type coque à intégration réduite (S4R dans la documentation ABAQUS/Explicit). Le quart de flan est modélisé avec le maillage (a), figure [IV-3]. Les valeurs du coefficient de frottement entre le poinçon et le flan et entre le flan et la matrice sont égales à 0,15.

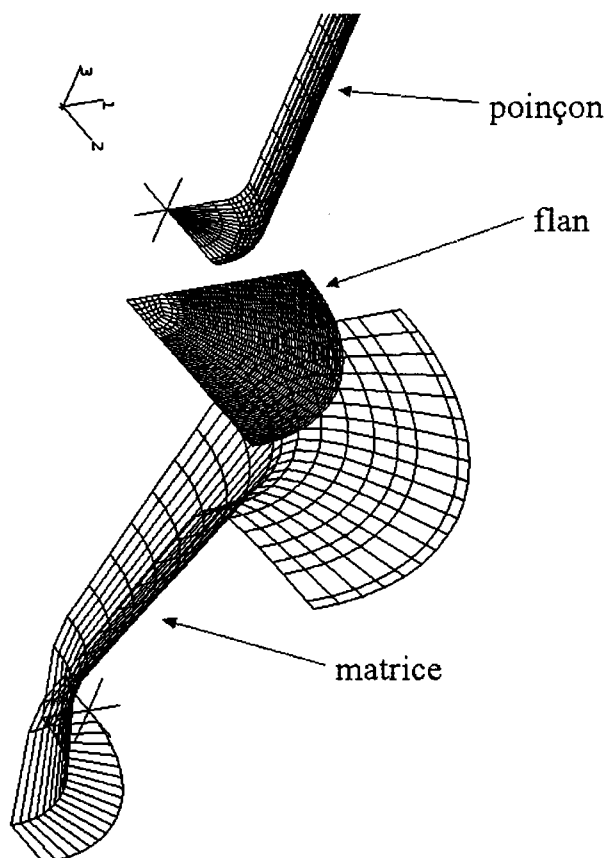


Figure [IV-41] : modélisation de l'essai d'emboutissage de coupelle proposé par Narayanasamy et Sowerby (1995)

Le déplacement du poinçon est défini pour chaque diamètre initial du flan. Avant enfoncement du poinçon, le flan repose librement sur la paroi intérieure de la matrice.

Expérimentalement, Narayanasamy et Sowerby (1995) arrêtent l'enfoncement du poinçon dès l'apparition du plissement. Le diamètre extérieur de l'embouti obtenu est alors mesuré. Narayanasamy et Sowerby (1995) définissent un pourcentage de déformation d'avalement (« draw deformation ») qui représente l'état de progression du poinçon :

$$\% \text{ "draw deformation" } = \frac{\phi_{\text{initial}} - \frac{\phi_{\text{extérieur courant}} + 56}{2}}{\phi_{\text{initial}} - 56} \cdot 100 \quad (\text{IV-1})$$

Le diamètre extérieur de l'embouti à l'apparition du plissement est comparé dans la relation (IV-1) au diamètre extérieur final que devrait avoir l'embouti dans le cas d'un emboutissage complet, c'est à dire 56 mm. Si aucun problème ne surgit durant l'enfoncement du poinçon le pourcentage de déformation d'avalement est donc égal à 100 %.

Les flans testés sont en aluminium. Le module d'Young E est égal à 69 000 MPa, et le coefficient du poinçon ν est égal à 0,3. La masse volumique est égale à 2700 kg/m³. La loi d'écrouissage est supposée être la loi de Swift, définie par :

$$\sigma = K(\epsilon_0 + \epsilon^p)^N$$

(IV-2)

où $K = 127,829$ Mpa, $\epsilon_0 = 0,003$ et l'exposant d'écrouissage $N = 0,03$. Les différentes caractéristiques mécaniques sont présentées dans le tableau [IV-4].

Tableau [IV-4] : caractéristiques mécaniques de l'aluminium utilisé par Narayanasamy et Sowerby (1995)

Limite d'élasticité pour une déformation $\epsilon_0 = 0,03\%$	Coefficients d'anisotropie plastique		
	R_0	R_{45}	R_{90}
99,83 MPa	0,17	0,58	0,46

Comme dans les différents cas précédemment traités nous avons choisi de modéliser le comportement plastique de l'aluminium, utilisé par Narayanasamy et Sowerby (1994), avec le critère quadratique de Hill (1948) et avec le modèle de Ferron et al (1994). Les valeurs des coefficients définissant l'anisotropie du matériau (cf. équation (II-36) du chapitre II) sont données dans le tableau [IV-5]. Les surfaces de charge associées sont présentées sur la figure [IV-42].

Tableau [IV-5] : valeurs des paramètres du modèle de Ferron et al (1994)

	A	B	a	b
Hill quadratique	2,16	6,48	-0,46	-0,66
Ferron et al (1994)	2,35	7,05	-0,20	-0,50

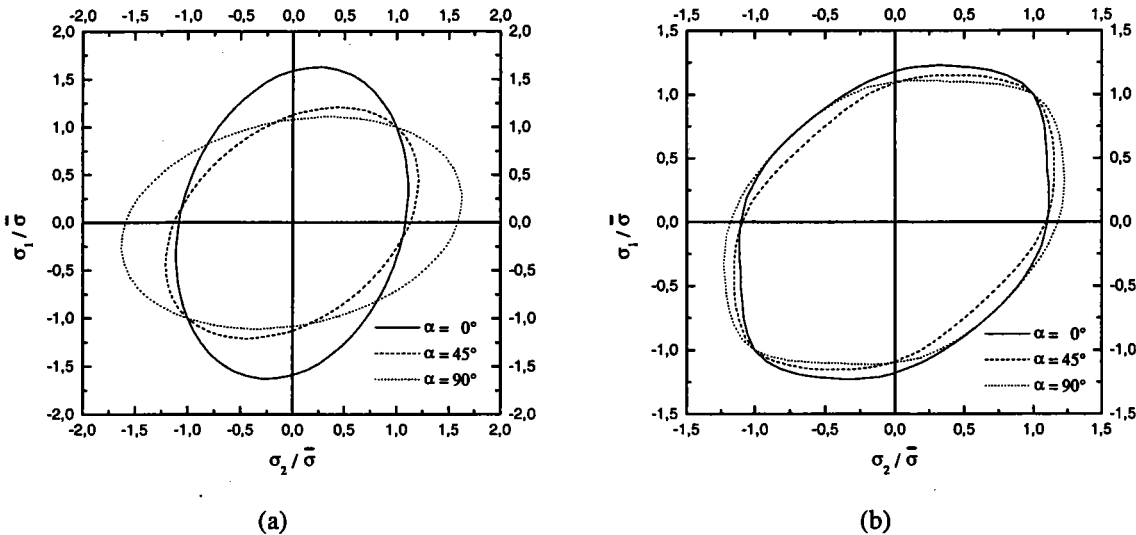


Figure [IV-42] : surfaces de plasticité de l'aluminium utilisé par Narayanasamy et Sowerby (1995) avec le modèle quadratique de Hill (1948) (a) et le modèle proposé par Ferron et al (1994) (b)

Nous observons, figure [IV-42], que le modèle quadratique de Hill (1948) conduit pour ce matériau à de très fortes variations des contraintes d'écoulement en fonction de l'orientation du chargement. De nombreux alliages d'aluminium présentent un coefficient d'anisotropie moyen, R , inférieur à 1 ; mais la contrainte d'écoulement équi-biaxiale de ces matériaux est supérieure à la contrainte d'écoulement uniaxiale. C'est ce qu'on a appelé le comportement anormal de l'aluminium. Le modèle orthotrope quadratique de Hill (1948) ne peut pas reproduire ce type de comportement.

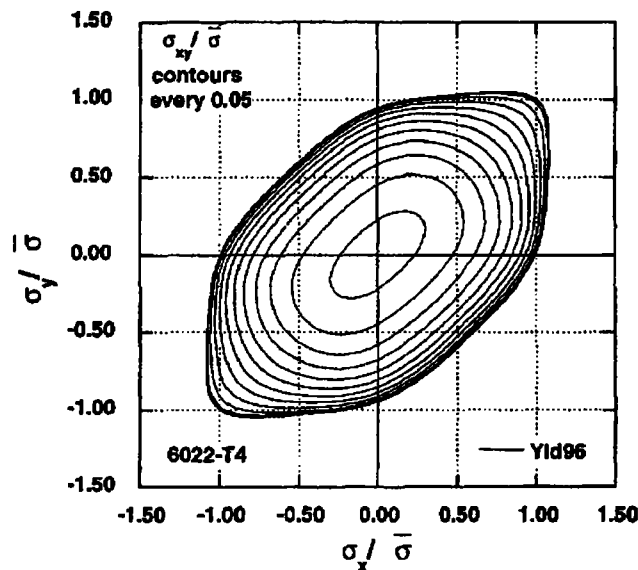


Figure [IV-43] : surface de plasticité obtenu par Barlat et al (1997) pour un alliage d'aluminium dont la variation du coefficient d'anisotropie $R(\alpha)$ est présentée sur la figure []

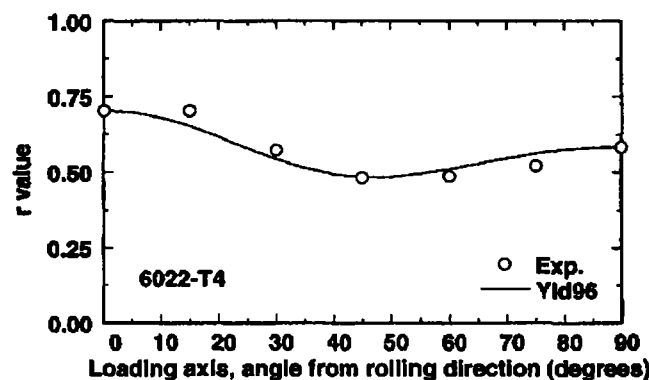


Figure [IV-44] : variation du coefficient d'anisotropie $R(\alpha)$ de l'alliage d'aluminium étudié par Barlat et al (1997)

Barlat et al (1997) ont étudié et modélisé le comportement plastique de l'aluminium, ou d'alliages légers, présentant de très fortes variations du coefficient d'anisotropie transverse. Le modèle de plasticité proposé par Barlat et al (1997) est capable de modéliser le comportement anormal des alliages d'aluminium. Nous présentons, figure [IV-43], les surfaces de charge obtenues par Barlat et al (1997) pour un alliage d'aluminium commercial (6022-T4). Nous observons, figure [IV-44], que pour cet alliage le coefficient d'anisotropie transverse présente de fortes variations. Les surfaces de charge, représentées sur la figure [IV-43], ressemblent à celles obtenues avec le modèle de Ferron et al (1994) pour l'alliage d'aluminium dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau [IV-4].

3.2 Comparaison avec les résultats expérimentaux

La figure [IV-45] présente un quart d'embouti obtenu en simulant l'essai d'emboutissage de Narayanasamy et Sowerby (1995). Nous distinguons clairement un pli dont la génératrice est inclinée sensiblement à 45° par rapport à la direction de laminage. Le plissement sur ce quart d'embouti s'est développé sans aucun artifice de calcul.

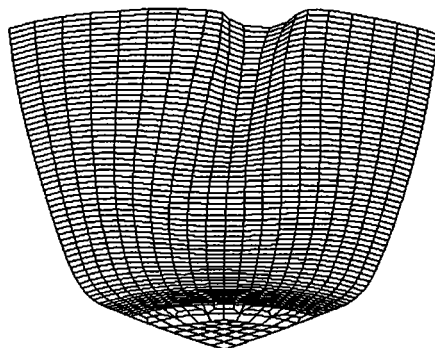


Figure [IV-45] : quart d'embouti présentant un pli à 45° obtenu par simulation d'un flan de diamètre initial de 104,94 mm (Hill quadratique (1948))

Pour illustrer nos propos, nous présentons les résultats numériques obtenus pour un flan dont le rayon initial est égal à 84,90 mm. Les observations faites pour ce diamètre initial du flan restent dans l'ensemble valides pour tous les autres diamètres initiaux de flans. Nous présentons sur les figures [IV-46, IV-47] les variations du rayon extérieur courant pour les deux surfaces de charge utilisées. Le rayon extérieur courant est quasiment constant sur le quart du flan lors des premiers enfoncements. Puis, pour un enfoncement critique, le rayon extérieur courant de l'embouti présente une variation d'allure sinusoïdale. Cette variation caractérise l'apparition d'un pli sur le quart du flan. Le rayon extérieur courant présente un minimum à 45° par rapport à la direction de laminage (direction à 0°). Nous obtenons donc un pli « rentrant » dont la génératrice est dirigée suivant la direction de plus forte anisotropie ($R_{45} > R_0$ et $R_{45} > R_{90}$). L'amplitude du pli est plus forte pour le modèle quadratique de Hill, figure [IV-46], que pour le modèle de Ferron et al (1994), figure [IV-47]. Ce résultat peut être lié au fait que les surfaces de charge obtenues avec le modèle quadratique de Hill sont plus sensibles à l'orientation du chargement (figure [IV-42]). Le plissement est donc plus sévère avec le modèle quadratique de Hill.

Nous obtenons ainsi quatre plis sur un flan complet. Les plis sont orientés à $+ ou - 45^\circ$ par rapport à la direction de laminage. Ces observations sont en accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Narayanasamy et Sowerby (1995).

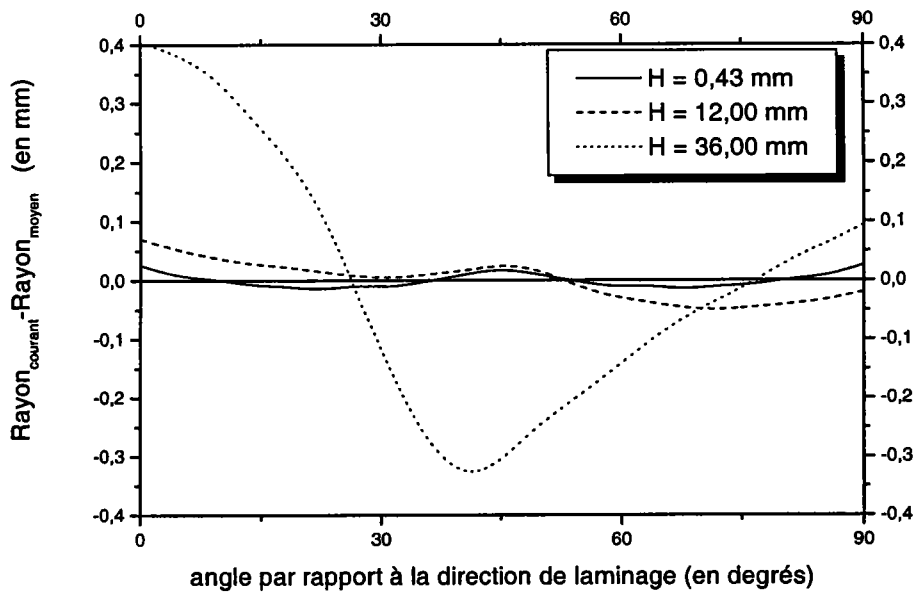


Figure [IV-46] : variation du rayon extérieur courant par rapport au rayon extérieur moyen pour un diamètre initial de flan égal à 84,90 mm (Hill quadratique)

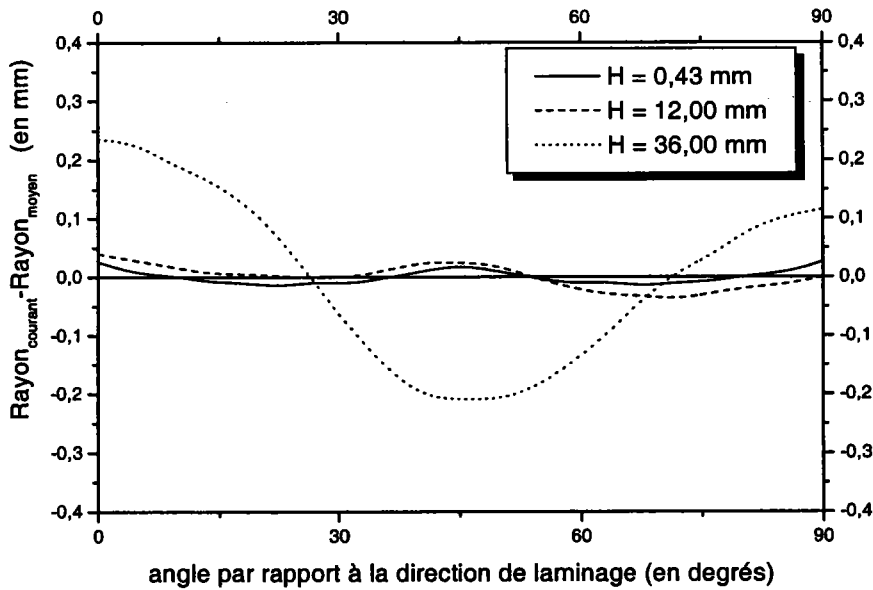


Figure [IV-47] : variation du rayon extérieur courant par rapport au rayon extérieur moyen pour un diamètre initial de flan égal à 84,90 mm (Ferron et al (1994))

Narayanasamy et Sowerby (1995) n'indiquent pas clairement le mode de détection du plissement. Mais ils observent, figure [IV-48], un épaississement du bord du flan qui atteint 12% à 15% dans la direction diagonale lorsque le plissement survient. Ils constatent que cet épaississement est valable pour tous les diamètres initiaux de flan. Narayanasamy et Sowerby (1995) concluent donc qu'un épaississement de 12% à 15% est une valeur critique pour l'apparition du plissement dans cet essai.

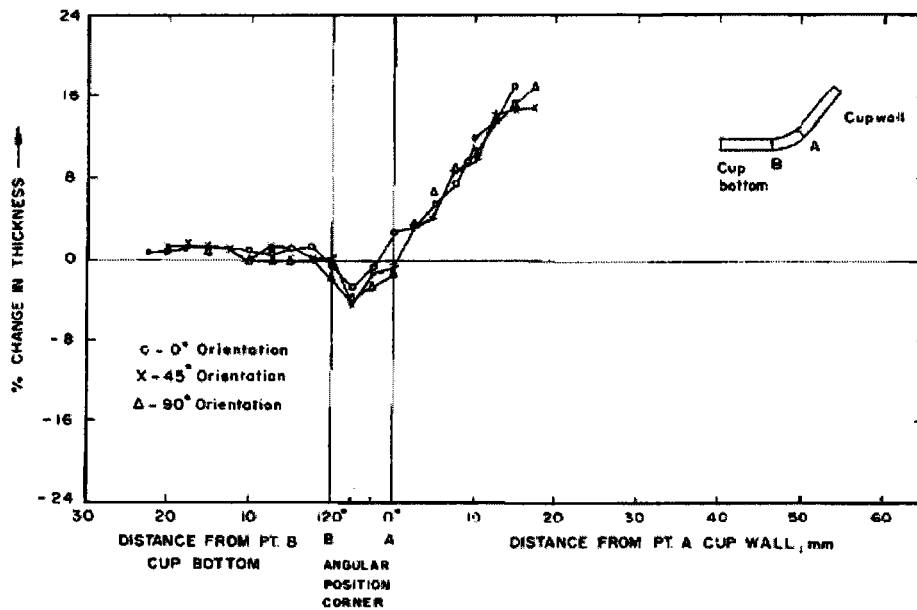


Figure [IV-48] : variation de l'épaisseur obtenue expérimentalement par Narayanasamy et Sowerby (1995) pour un flan de diamètre initial égal à 84,90 mm, à l'apparition du plissement

Les distributions d'épaisseur obtenues numériquement pour un flan de diamètre initial égal à 84,90 mm, et pour un enfoncement de 36 mm, proche de la valeur critique, sont reportées sur la figure [IV-49] pour le modèle quadratique de Hill, et sur la figure [IV-50] pour le modèle de Ferron et al (1994). Dans les deux cas le flan présente une striction au niveau du nez du poinçon, beaucoup plus marquée que dans les expériences de Narayanasamy et Sowerby (1995) (figure [IV-47]). Cette striction ne diminue pas lorsque le coefficient de frottement entre le flan et la matrice est nul. Une meilleure modélisation du comportement plastique du matériau permettrait de résoudre ce problème de striction dans les simulations. Pour les deux modèles, le bord du flan présente un épaississement de 10% à 15% dans la direction diagonale. Par contre, l'épaississement sur le bord du flan est peu dépendant de la position angulaire avec le modèle de Ferron et al (1994) [c'est également le cas pour les expériences menées par Narayanasamy et Sowerby (1995) (figure [IV-47])], alors qu'il est nettement dépendant de l'orientation angulaire pour le modèle quadratique de Hill.

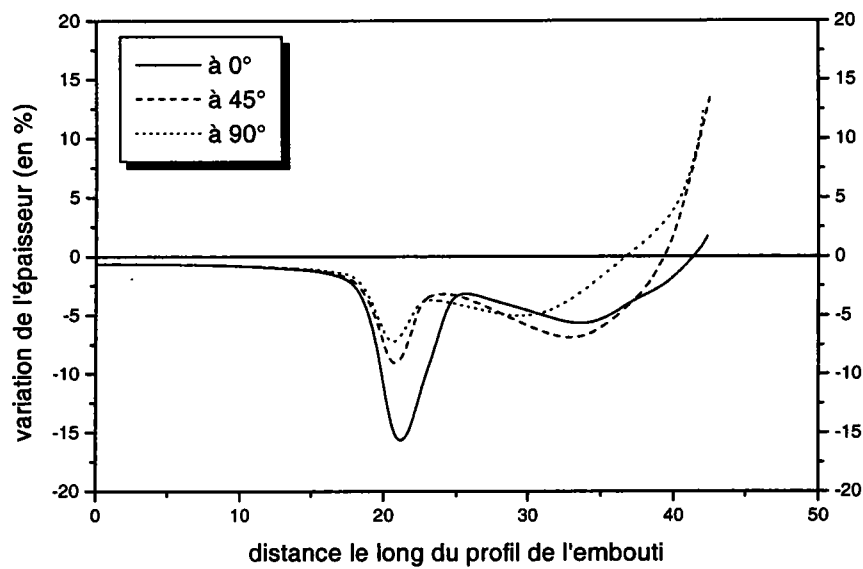


Figure [IV-49] : variation de l'épaisseur le long du profil de l'embouti pour un enfoncement de 36 mm et pour un diamètre initial de flan égal à 84,90 mm (Hill quadratique)

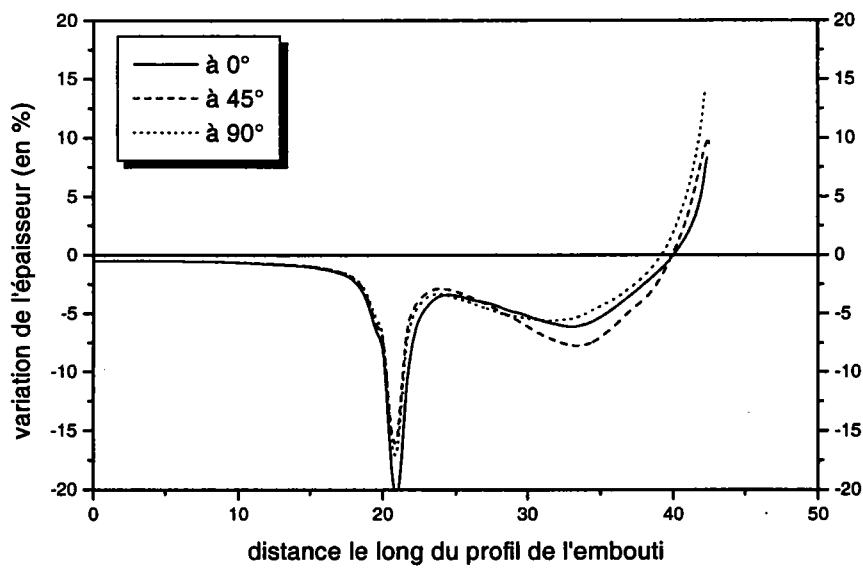


Figure [IV-50] : variations de l'épaisseur le long du profil de l'embouti pour un enfoncement de 36 mm et pour un diamètre initial de flan égal à 84,90 mm (Ferron et al (1994))

Les résultats obtenus par Narayanasamy et Sowerby (1995) pour un diamètre de flan plus important de 114,90 mm, figure [IV-51], diffèrent des précédents par une distribution angulaire non uniforme des variations d'épaisseur. Un épaissement de 15% est retrouvé dans la direction diagonale ; les épaissements à 0° et 90° sont moins importants.

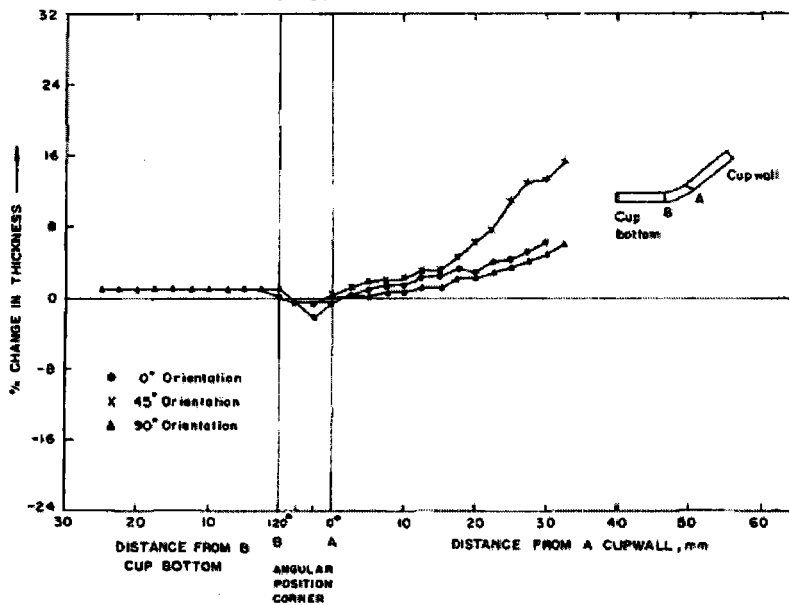


Figure [IV-51] : variations de l'épaisseur obtenues expérimentalement par Narayanasamy et Sowerby (1995) pour un flan de diamètre initial égal à 114,90 mm à l'apparition du plissement

A nouveau, nous avons tracé les distributions d'épaisseur obtenues numériquement pour le diamètre de flan égal à 114,90 mm à l'apparition du plissement. L'enfoncement est de 28 mm, valeur proche de la valeur critique d'apparition du plissement. Les résultats, reportés sur les figures [IV-52] et [IV-53], montrent des variations angulaires de l'épaississement sur le bord du flan. L'épaississement maximum est atteint selon la direction diagonale ; ceci est en accord avec les résultats expérimentaux de la figure [IV-51]. Toutefois, les variations angulaires d'épaississement sont moins fortes avec le modèle de Ferron et al (1994). Elles se rapprochent donc des résultats expérimentaux de Narayanasamy et Sowerby (1995).

Ainsi, la valeur critique d'épaississement sur le bord du flan, de l'ordre de 12 à 15% dans la direction diagonale, selon laquelle apparaît le plissement, est retrouvée dans les simulations numériques. Toutefois les variations angulaires de l'épaississement obtenues avec le modèle de Ferron et al (1994) sont plus proches des résultats expérimentaux de Narayanasamy et Sowerby (1995).

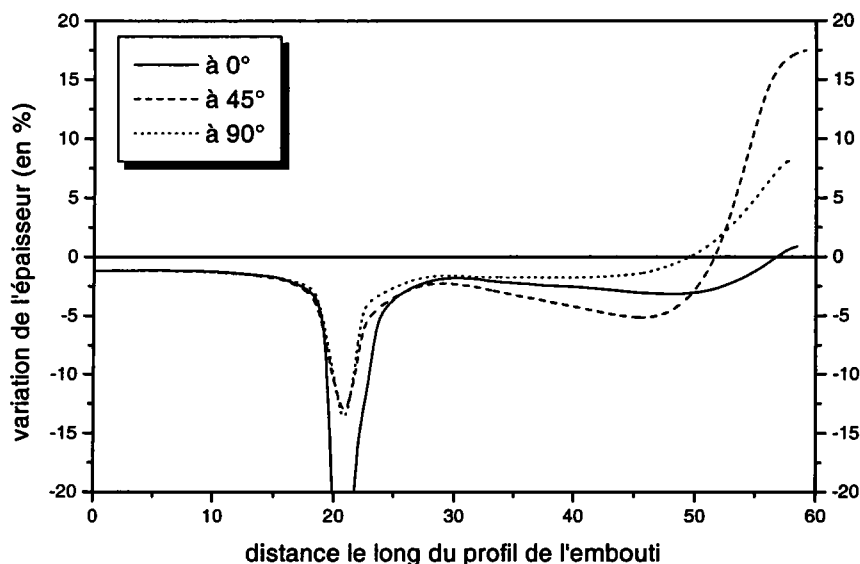


Figure [IV-52] : variations de l'épaisseur le long du profil de l'embouti pour un enfoncement de 28 mm et pour un diamètre initial de flan égal à 114,90 mm (Hill quadratique)

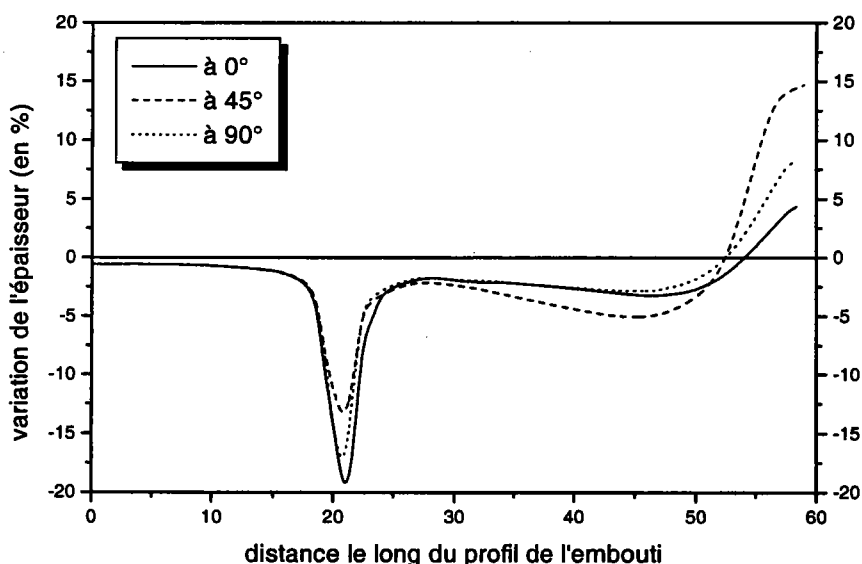


Figure [IV-53] : variations de l'épaisseur le long du profil de l'embouti pour un enfoncement de 28 mm et pour un diamètre initial de flan égal à 114,90 mm (Ferron et al (1994))

Comme dans le paragraphe précédent, nous essayons de déterminer l'apparition du plissement en analysant les trajets des contraintes d'un couple de nœuds. Nous avons choisi d'étudier les trajets des contraintes des nœuds numérotés 122 et 1122. Ces deux nœuds sont sur un même rayon initial très proche du bord de l'embouti. Le premier se situe dans la direction de laminage et le second dans la direction diagonale ; c'est à dire sur la génératrice du pli. Les états de contraintes de ces deux nœuds sont proches de la compression uniaxiale.

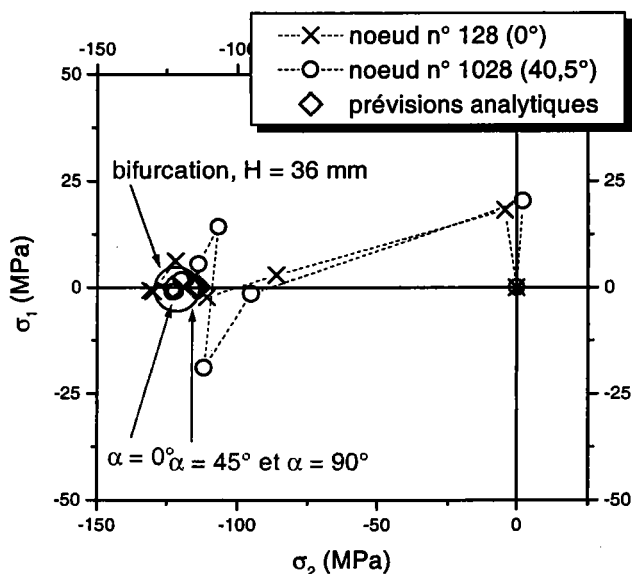


Figure [IV-54] : trajectoires des états de contrainte obtenues pour un flan de diamètre initial égal à 84,90 mm (Ferron et al (1994))

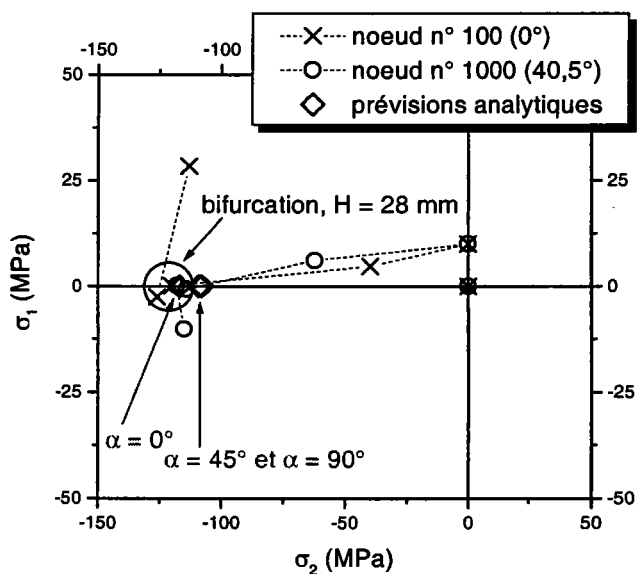


Figure [IV-55] : trajectoires des états de contrainte obtenues pour un flan de diamètre initial égal à 114,90 mm (Ferron et al (1994))

Nous présentons, sur la figure [IV-54], les trajectoires des états de contrainte pour le flan de diamètre initial égal à 84,90 mm et, sur la figure [IV-55], celles obtenues pour un flan de diamètre initial égal à 114,90 mm. Nous avons indiqué sur ces figures l'enfoncement pour lequel nous avons visualisé un pli. Nous constatons, pour les deux diamètres initiaux de flan, que les états de contrainte, pour un même enfoncement, varient sensiblement en fonction de la position angulaire des noeuds considérés à l'état prébifurqué. Ces variations sont dues aux fortes propriétés d'anisotropie que possède le matériau étudié. Il nous est apparu difficile de visualiser la présence d'un point de bifurcation. Nous ne disposons pas du critère de détection du plissement utilisé expérimentalement par Narayanasamy et Sowerby (1995). D'autre part, l'examen des trajectoires de contrainte pour différentes positions angulaires, que nous avons

proposé pour l'essai de coupelle tronconique, ne fournit pas de réponse précise à l'apparition du plissement. Nous avons, par conséquent, décidé de définir numériquement les déformations d'avalement critiques (et donc l'enfoncement critique) en estimant que le plissement apparaît lorsque l'amplitude de la variation angulaire du rayon extérieur courant atteint une valeur critique égale à ± 2 mm. Nous avons représenté sur les figures [IV-54, IV-55] la position du point de bifurcation défini à partir de la variation angulaire du rayon extérieur courant. Nous avons également tracé, figure [IV-54, IV-55], les prévisions analytiques, issues de l'expression de la contrainte critique de plissement (III-18), obtenues en compression uniaxiale pour la géométrie définie à l'enfoncement critique. Les prévisions analytiques et les résultats numériques concordent.

La tendance expérimentale de diminution de la déformation d'avalement lorsque le diamètre initial du flan augmente est bien reproduite numériquement, figure [IV-56]. Le développement du plissement étant moins rapide avec le modèle de Ferron et al (1994), la déformation d'avalement est plus forte avec ce même modèle.

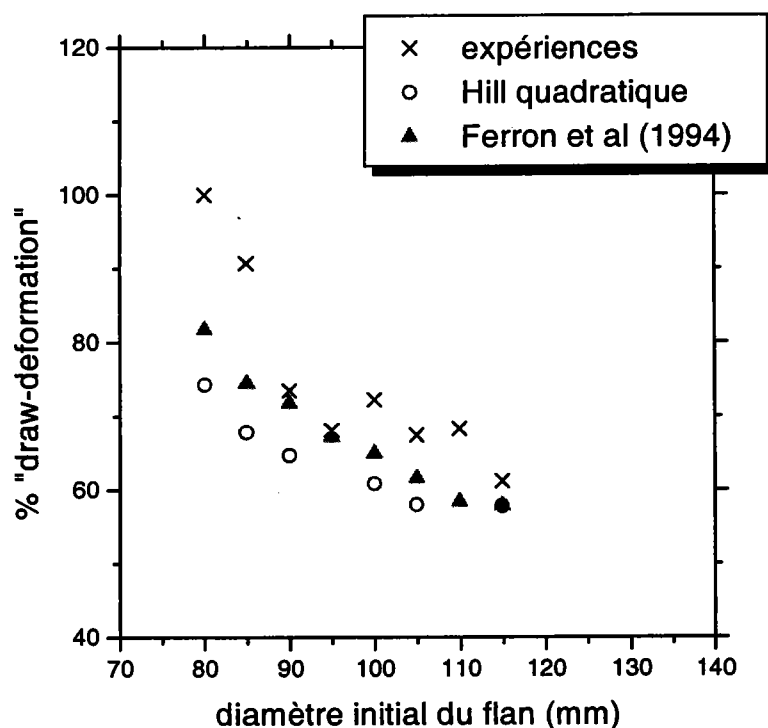


Figure [IV-56] : pourcentage de déformation d'avalement dans l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan, en fonction du diamètre initial du flan

Nous observons que le pourcentage de déformation d'avalement (« draw deformation ») diminue lorsque le diamètre initial du flan augmente, figure [IV-56]. Ceci corrobore la tendance expérimentale constatée par Narayanasamy et Sowerby (1995).

4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu constater que les simulations par éléments finis permettent de visualiser le développement de plis dans les essais d'emboutissage. Les simulations numériques ont effectivement reproduit les tendances expérimentales constatées par Ellagoune et Boivin (1988), pour l'essai de coupelle tronconique, et par Narayanasamy et Sowerby (1995), pour l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan. Le nombre de plis prévu par les simulations numériques n'est cependant pas un résultat fiable puisque nous avons montré, pour l'essai de coupelle tronconique, que le nombre de plis est dépendant du maillage, du code de calcul utilisé.

En ce qui concerne l'essai de coupelle tronconique, les variations de la contrainte circonférentielle, σ_2 , fournissent des informations précises sur l'apparition et le développement du plissement. Nous avons également étudié la bifurcation à partir de l'histoire des états de contrainte d'un couple de nœuds associé à un pli. L'examen des trajets de contraintes permet de définir, avec une bonne précision, l'apparition du plissement pour les simulations de l'essai de coupelle tronconique. Les prévisions analytiques concernant les courbes limites de plissement (CLP) et les observations des trajectoires des états de contrainte issues des simulations par éléments finis présentent des résultats concordants pour cet essai. Le nombre de plis déduit des longueurs d'onde obtenues par la modélisation analytique est proche du nombre de plis obtenu expérimentalement. La modélisation analytique est donc plus fiable que les simulations numériques au regard de la prévision du nombre de plis. L'étude conjointe des trajets de contrainte ainsi que des CLP nous a permis de montrer que plusieurs facteurs concourent à l'apparition du plissement. Pour une géométrie donnée, les CLP prévoient qu'une augmentation de R diminue la valeur de la contrainte critique de plissement. Cependant, les simulations numériques nous ont montré que la trajectoire des contraintes ainsi que les courbures du profil dépendent fortement de R avant la bifurcation (le rayon de courbure R_f diminue lorsque R augmente). La combinaison de ces deux effets nous permet de conclure que lorsque R augmente, il y a augmentation des enfoncements critiques.

L'examen des trajets des états de contrainte a été difficile à mener en ce qui concerne les simulations de l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan. Ce type d'analyse montre ses limites pour les matériaux possédant une forte anisotropie transverse. La définition d'un critère géométrique de plissement est alors une autre solution permettant de détecter l'apparition du plissement. Les contraintes critiques obtenues numériquement et par l'analyse de bifurcation sont ici encore en bonne concordance. Les déformations critiques d'avalement estimées sont également en bon accord avec les résultats expérimentaux de Narayanasamy et Sowerby (1995).

Conclusion générale et perspectives

Ces vingt dernières années, de nombreuses études analytiques ont été menées sur le plissement en emboutissage. Ces études s'appliquent aux coques métalliques et utilisent généralement des critères de bifurcation. Plus récemment, des codes de calcul par éléments finis ont été utilisés dans le but de prévoir le plissement lors d'un processus d'emboutissage. Les études les plus récentes combinent analyse de bifurcation et simulation par éléments finis. Nous avons choisi d'explorer chacun des deux axes de recherche portant sur le plissement en emboutissage. Ceci nous a permis de comparer les résultats obtenus par chacune des méthodes (analytique ou numérique) employées. Notre travail consiste donc en une étude analytique du plissement d'une plaque puis d'une coque, suivie par une étude numérique du plissement dans deux processus d'emboutissage profond.

Nous développons, tout d'abord, une analyse locale du plissement pour des plaques puis, pour des coques doublement courbées. Dans le cas d'une plaque, nous détectons l'apparition du plissement en nous appuyant sur les équations d'équilibre. Pour les coques, nous employons le critère de bifurcation de Hutchinson (1974). La géométrie des coques étudiées correspond à des portions de tôles susceptibles d'être rencontrées sur un embouti subissant un essai d'emboutissage profond. Le comportement plastique des matériaux étudiés est modélisé à l'aide du modèle proposé par Ferron et al (1994). L'analyse locale du plissement débouche, pour les plaques et les coques, sur le tracé de courbes limites de plissement (CLP).

Pour une plaque, les CLP montrent qu'une forte valeur du coefficient d'anisotropie moyen R tend à augmenter la contrainte critique de plissement. Ceci reste vrai en théorie de l'écoulement pour les matériaux à anisotropie transverse, en considérant le coefficient d'anisotropie $R(\alpha)$ dans la direction de compression. Pour une coque, une faible valeur du coefficient d'anisotropie moyen R tend à augmenter la contrainte critique de plissement dans le domaine utile des états de contrainte correspondant au rétreint. De plus, la contrainte critique de plissement diminue et la longueur d'ondes augmente lorsque le coefficient d'anisotropie dans la direction de la contrainte compressive augmente.

Nous avons, ensuite, conduit une étude numérique de l'apparition du plissement. Nous avons simulé deux essais d'emboutissage. Le plissement apparaît lors des simulations ; celles-ci concordent globalement avec les expériences. Nous constatons toutefois que le maillage du flan, ainsi que le type de code calcul utilisé, influent sur le comportement au plissement de la tôle ; ce qui corrobore les travaux de Kawka et al (2001).

L'étude des variations de la contrainte circonférentielle, σ_2 , nous informe sur l'apparition et le développement du plissement. Nous pouvons prévoir l'apparition du plissement à partir de l'histoire des états de contrainte d'un couple de nœuds associé à un pli. L'examen des trajets des états de contrainte définit, avec une bonne précision, l'apparition du plissement pour les matériaux à anisotropie normale. Les simulations indiquent que l'enfoncement critique augmente lorsque le coefficient d'anisotropie R augmente.

Nous constatons néanmoins que l'examen des trajets des états de contrainte n'est pas approprié pour les matériaux possédant une forte anisotropie transverse (les trajets des états de contrainte dépendent de l'orientation par rapport à la direction de laminage avant bifurcation). Nous définissons alors un critère géométrique de plissement. Notre étude révèle l'efficacité

d'un tel critère à définir les déformations à avalement dans les simulations de l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan.

Nous obtenons un accord correct entre les contraintes critiques prévues analytiquement et la bifurcation identifiée à partir des simulations par éléments finis. De plus, ces prévisions analytiques et numériques sont en bonne concordance avec les expériences de Ellagoune et Boivin (1988), pour l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique, et de Narayanasamy et Sowerby (1995), pour l'essai d'emboutissage profond sans serre-flan.

Contrairement aux courbes limites de formage, qui dépendent uniquement des propriétés du matériau, les courbes limites de plissement dépendent des propriétés du matériau mais également, de la géométrie locale. Les simulations de l'essai de coupelle tronconique montrent que les trajets des états de contrainte, ainsi que la géométrie (courbures) de la zone de la structure où se produit le plissement, dépendent fortement de l'anisotropie du matériau. Ainsi l'influence de l'anisotropie sur l'apparition du plissement dans un processus réel d'emboutissage s'exerce au travers de plusieurs facteurs : l'influence de l'anisotropie sur les trajets des états de contrainte et sur la géométrie locale du flan, l'influence de l'anisotropie et de la géométrie locale sur les contraintes critiques de plissement. Le coefficient d'anisotropie R influe sur l'enfoncement critique par l'intermédiaire des variations des facteurs précédemment cités. Il en résulte que les enfoncements critiques dans l'essai de coupelle tronconique augmentent lorsque R augmente, même si les CLP pour une géométrie donnée présentent des niveaux qui diminuent lorsque R augmente.

A partir de cette étude, nous pouvons envisager d'introduire dans un code de calcul par éléments finis ouvert à l'utilisateur, par l'intermédiaire d'un sous-programme, la modélisation analytique présentée pour les coques. Pour chacun des éléments du maillage, l'état de contrainte sera comparé à la contrainte critique de plissement (dédue analytiquement des données issues de la simulation). Nous pourrions ainsi, à chaque pas de calcul, détecter les éléments du maillage qui ont atteint la bifurcation. Cette implantation permettra de prévoir l'apparition du plissement dans les zones critiques de l'embouti, au fur et à mesure de l'enfoncement du poinçon.

Références bibliographiques

ABAQUS/Explicit, Version 5.8 Manuals, 1998, Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc., Pawtucket, RI 02860, USA.

H. Améziane-Hassani, K. W. Neale, On the analysis of sheet metal wrinkling, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 33, pp. 13-30 (1991)

F. Barlat, D. J. Lege, J. C. Brem, A six-component yield function for anisotropic metals, *International Journal of Plasticity*, vol. 7, pp.693-712 (1991)

F. Barlat, Y. Maeda, K. Chung, M. Yanagawa, J. C. Brem, Y. Hayashida, D. J. Lege, K. Matsui, S. J. Murtha, S. Hattori, R. C. Becker, S. Makosey, Yield function development for aluminium alloy sheets, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 45, pp. 1727-1763 (1997)

J. Cao, M. C. Boyce, Wrinkling behaviour of rectangular plates under lateral constraint, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, n°2, pp. 153-176 (1997)

J. Cao, M. C. Boyce, A predictive tool for delaying wrinkling and tearing failures in sheet metal forming, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 119, pp. 354-369 (1997)

D.C. Drucker, Relation of experiments to mathematical theories of plasticity, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 16, pp. 349-360 (1949)

S. Ellagoune, M. Boivin, Critère d'apparition des plis en emboutissage, *Mémoires et Etudes Scientifiques, Revue de Métallurgie*, vol. 85, pp.211-221 (1988)

G. Ferron, R. Makkouk, J. Morreale, A parametric description of orthotropic plasticity in metal sheets, *International Journal of Plasticity*, vol. 10, pp. 431-449 (1994)

J. Hematian, P. M. Wild, Initial imperfections and the initiation of wrinkling in finite element modelling of deep drawing, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E, Journal of Process Mechanical Engineering*, vol. 214, pp. 63-73 (2000)

R. Hill, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. R. Soc. London A193*, pp. 281-297 (1948)

W. F. Hosford, On yield loci of anisotropic cubic metals, *Proceedings of 7th North American Metalworking Res. Conf.*, pp. 191-196 (1979)

- W. F. Hosford, On yield loci of anisotropic cubic metals, Proceedings of 7th North Americ. Metalworking Res. Conf., pp. 191-196 (1979)
- J.W. Hutchinson, Plastic Buckling, Advances in Applied Mechanics, edited by Chia-Shun Yih, vol. 14, pp. 67-144 (1974)
- J.W. Hutchinson, K.W. Neale, Wrinkling of curved thin sheet metal, Proceeding of Int. Symposium on Plastic Instability, Considere Memorial, Presses des Ponts et Chaussées, Paris, pp. 71-78 (1985)
- M. Kawka, L. Olejnik, A. Rosochowski, H. Sunaga and A. Makinouchi, Simulation of wrinkling in sheet metal forming, Journal of Materials Processing Technology, vol. 109, n°3, pp. 283-289 (2001)
- Y. Kim, Y. Son, Study on wrinkling limit diagram of anisotropic sheet metals, Journal of Materials Processing Technology, vol. 97, n°1-3, pp. 88-94 (2000)
- J.-B. Kim, D.-Y. Yang, J.-W. Yoon, F. Barlat, The effect of plastic anisotropy on compressive instability in sheet metal forming, International Journal of Plasticity, vol. 16, pp. 649-676 (2000)
- R. Mesrar, S. Fromentin, R. Makkouk, M. Martiny, G. Ferron, Limits to the ductility of metal sheets submitted to complex strain-paths, International Journal of Plasticity, vol.14, pp. 391-411 (1998)
- L.P. Moreira, G. Ferron, G. Ferran, Experimental and numerical analysis of the cup drawing test for orthotropic metal sheets, Journal of Materials Processing Technology, vol. 108, pp. 78-86 (2000)
- R. Narayanasamy, R. Sowerby, Wrinkling behaviour of cold-rolled sheet metals when drawing trough a tractrix die, Journal of Materials Processing Technology, vol. 49, pp. 199-211 (1995)
- K. W. Neale, P. Tugcu, A numerical analysis of wrinkle formation tendencies in sheet metals, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp. 1595-1608 (1990)
- P. Nordlund, Adaptivity and wrinkle indication in sheet metal-forming, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 161, pp. 127-143 (1998)
- P. Nordlund, B. Häggblad, Prediction of wrinkle tendencies in explicit sheet metal-forming simulations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 4079-4095 (1997)
- J. Proubet, Numerical simulations of wall wrinkling in food can drawing, Journal of Materials Processing Technology, vol. 45, pp. 223-228 (1994)
- K. Shahwan, A. M. Waas, A mechanical model for the buckling of unilaterally constrained rectangular plates, International Journal of Solids and Structures, vol. 31, n°1, pp.75-87 (1994)

- R. Sowerby, M. Karima, P.C. Chakravarti, Wrinkling when deep drawing cylindrical cups without a blank holder: some experimental results, *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 6, n°1, pp. 35-50 (1981)
- A.M. Szacinski, P.F. Thomson, The effect of mechanical properties on the wrinkling behaviour of sheet materials in the Yoshida test, *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 10, pp. 87-102 (1984)
- A.M. Szacinski, P.F. Thomson, Comparison of effect of material properties on growth of wrinkles in sheet metal during forming and their removal, *Materials Science and Technology*, vol. 7, pp. 224-227 (1991)
- E. Riks, Incremental Approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 15, n°7, pp.529-551 (1979)
- Y. Tomita, A. Shindo, Onset and growth of wrinkles in thin square plates subjected to diagonal tension, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 30, n°12, pp. 921-931 (1988)
- M. Traversin, R. Kergen, Closed-loop control of blankholder force in deep drawing : finite-element modelling of its effects and advantages, *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 50, n°1-4, pp. 306-317 (1995)
- N. Triantafyllidis, A. Needleman, An analysis of wrinkling in the swift cup test, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 102, pp. 241-248 (1980)
- X. Wang, J. Cao, On the prediction of side-wall wrinkling in sheet metal forming processes, *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 42, n°12, pp. 2369-2394 (2000)
- X. Wang, L.H.N. Lee, Postbifurcation behaviour of wrinkles in square metal sheets under Yoshida test, *International Journal of Plasticity*, vol. 9, pp. 1-19 (1989)
- A. Zghal, M. Potier-Ferry, A. Naddari, Analyse du flambage basée sur plasticité polycristalline, 3ème Congrès de Mécanique du Maroc, Tétouan, tome 1a, pp. 482-487 (1997)

Annexe

Annexe

Dans cette annexe, nous détaillons les procédures suivies lors des simulations d'emboutissage présentées dans le chapitre 4.

Le flan est modélisé avec des éléments linéaires de type coque à intégration réduite. Ces éléments sont appelés *S4R* dans la documentation ABAQUS. Ils possèdent cinq points d'intégration à travers l'épaisseur. Le maillage (a) est composé de 655 ou 1255 éléments tandis que le maillage (b) est composé de 841 éléments.

Le comportement du matériau a été introduit par la commande *USER MATERIAL*. Ceci nous a permis d'utiliser le sous-programme *VUMAT* avec le logiciel ABAQUS/*Explicit* et le sous-programme *UMAT* avec le logiciel ABAQUS/*Standard*. Nous rappelons que le comportement du matériau a été défini à l'aide du modèle de plasticité proposé par Ferron et al (1994). Ce modèle a été programmé dans les sous programmes *VUMAT* et *UMAT* par Moreira et al (2000).

Lors des simulations avec ABAQUS/*Explicit*, les outils (un poinçon, une matrice et un serre-flan) ont été définis à l'aide de la commande *RIGID BODY*. Ils ont été modélisés avec des éléments rigides quadrangulaires à 4 nœuds employés pour des analyses tridimensionnelles. Ces éléments sont appelés *R3D4* dans la documentation ABAQUS. Pour les simulations avec ABAQUS/*Standard*, les outils ont été définis comme des surfaces rigides à l'aide de la commande *RIGID SURFACE*.

Pour modéliser l'interaction de type Coulomb entre les surfaces de contact nous avons utilisé l'option *FRICTION*. Les valeurs du coefficient de frottement f sont égales à 0,15 lorsque le flan est en contact avec le poinçon et la matrice ; elles sont égales à zéro lorsque le flan est en contact avec le serre-flan.

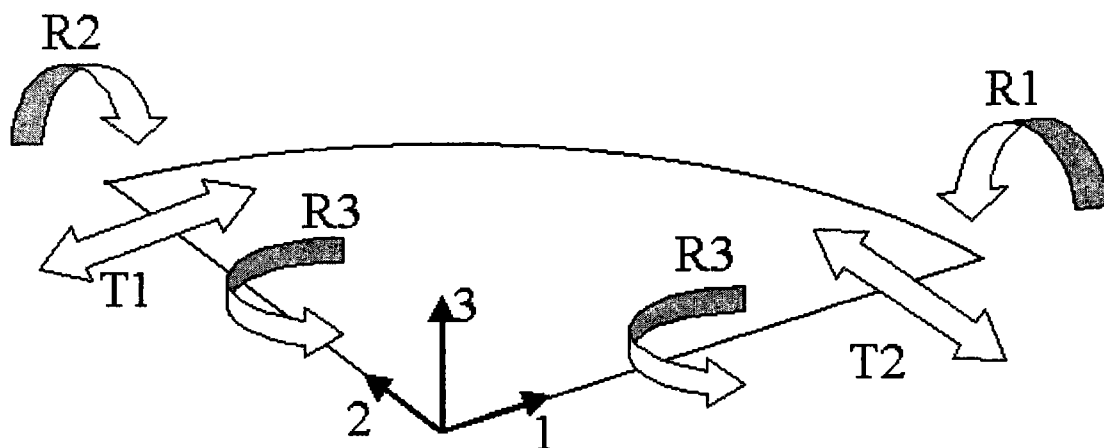


Figure [A-1] : conditions aux limites définies pour le flan

Les propriétés de symétrie des essais nous ont permis de ne modéliser qu'un quart de la structure pour chacune des géométries envisagées dans le chapitre 4. Les conditions aux

limites imposées sur le quart de flan ont été définies à l'aide de l'option *BOUNDARY*. Les conditions aux limites appliquées au flan sont présentées sur la figure [A-1]. Comme il est indiqué sur la figure [A-1], les rotations suivant l'axe 1 et l'axe 3 ainsi que la translation suivant l'axe 2 ne sont pas permises à l'ensemble des nœuds se situant sur le bord du flan parallèle à la direction 1. De même les rotations suivant l'axe 2 et l'axe 3 ainsi que la translation suivant l'axe 1 ne sont pas permises à l'ensemble des nœuds se situant sur le bord du flan parallèle à la direction 2.

Pour l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique la force de serrage exercée par le serre-flan sur le flan est constante durant toute l'analyse. Elle est égale à 10 kN pou le quart de la structure. Cette force a été définie à l'aide de l'option *CLOAD*.

Lorsque nous avons utilisé *ABAQUS/Standard* nous avons défini l'enfoncement du poinçon (par exemple 52 mm pour l'essai d'emboutissage de coupelle tronconique) et estimé la taille du premier incrément de temps (par exemple 0,01 ms). Avec *ABAQUS/Explicit* nous avons défini le temps total d'analyse (par exemple 3,2 ms) et la vitesse du poinçon. Pour diminuer le temps de calcul avec *ABAQUS/Explicit* nous pouvions faire varier artificiellement la masse volumique du matériau ou bien la vitesse d'enfoncement du poinçon. Nous avons choisi de garder constante la densité du matériau. Nous avons, par conséquent, augmenté la vitesse d'enfoncement du poinçon. La vitesse du poinçon a été définie, en utilisant l'option *AMPLITUDE*, sous la forme d'une fonction du temps représentée sur la figure [A-2]. La vitesse maximale atteinte est égale à 20 m/s.

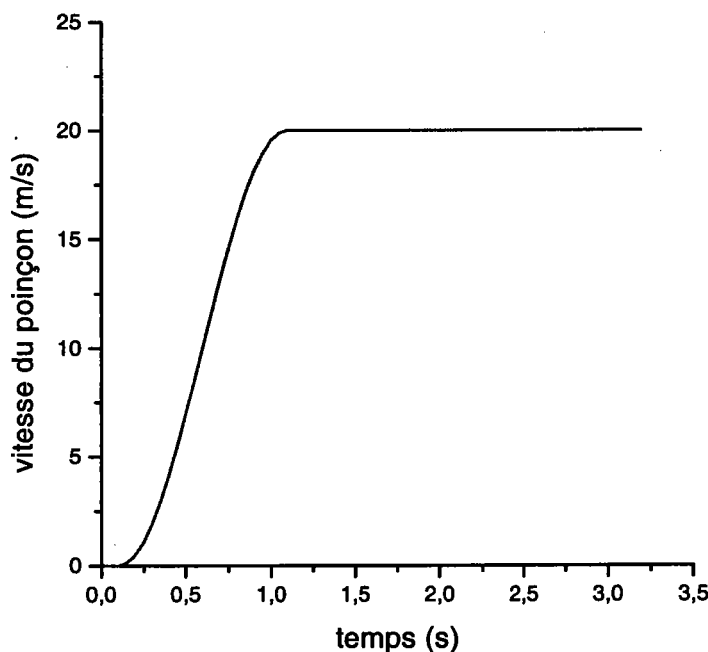


Figure [A-2] : définition de la vitesse du poinçon en fonction du temps

Pour vérifier qu'il n'y avait pas de problème de vibrations dans l'analyse dynamique des simulations des deux essais d'emboutissage (*ABAQUS/Explicit*), nous avons tracé l'effort du poinçon en fonction du temps d'analyse. Lors des deux essais, pour tous les matériaux simulés, les variations de l'effort du poinçon pour le quart de la structure, figure [A-3], ne présentent pas de bruit. Les phénomènes vibratoires ne se sont donc pas décelables.

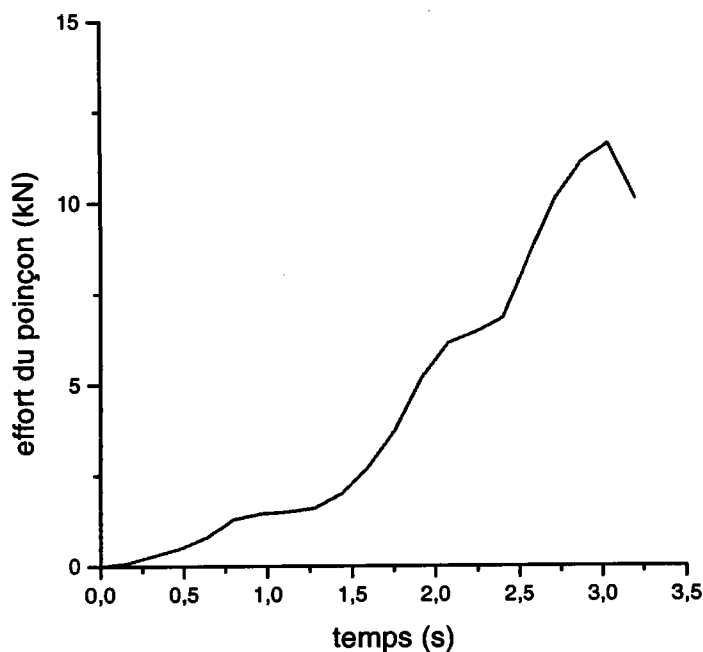


Figure [A-3] : effort exercé par le poinçon pour l'essai de coupelle tronconique matériau isotrope (von Mises) avec le maillage (a) et avec ABAQUS/Explicit

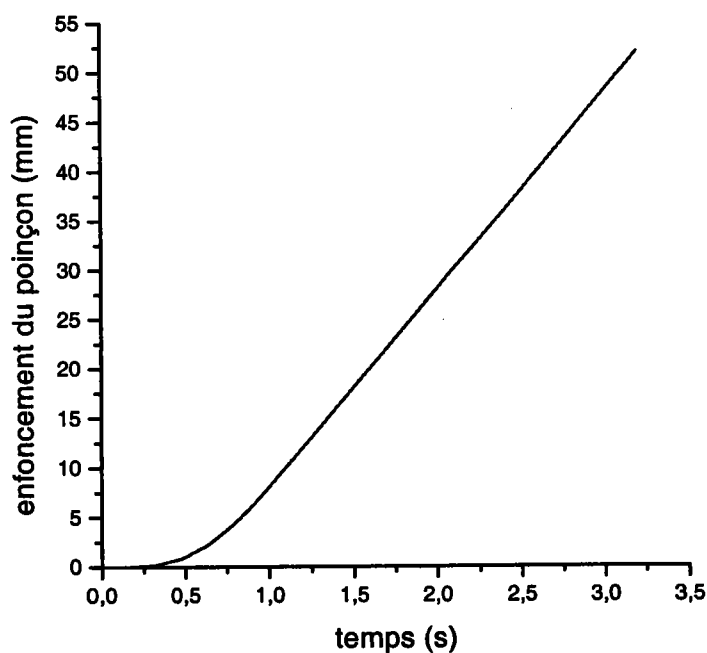


Figure [A-4] : enfonceement du poinçon pour l'essai de coupelle tronconique matériau isotrope (von Mises) avec ABAQUS/Explicit

L'enfonceement du poinçon, présenté sur la figure [A-4], est déduit de la vitesse d'enfonceement du poinçon. Nous avons obtenu avec ABAQUS/Explicit un enfonceement de 52 mm pour un temps d'analyse égal à 3,2 ms.

Pour les simulations réalisées avec ABAQUS/Explicit nous avons vérifié que l'analyse était quasi-statique. Pour que l'analyse soit considérée comme quasi-statique, conformément aux

prescriptions de la documentation ABAQUS, nous avons vérifié, pour chaque matériau et pour les deux essais d'emboutissage simulés, que l'énergie totale de déformation était bien supérieure à l'énergie cinétique, figure [A-4].

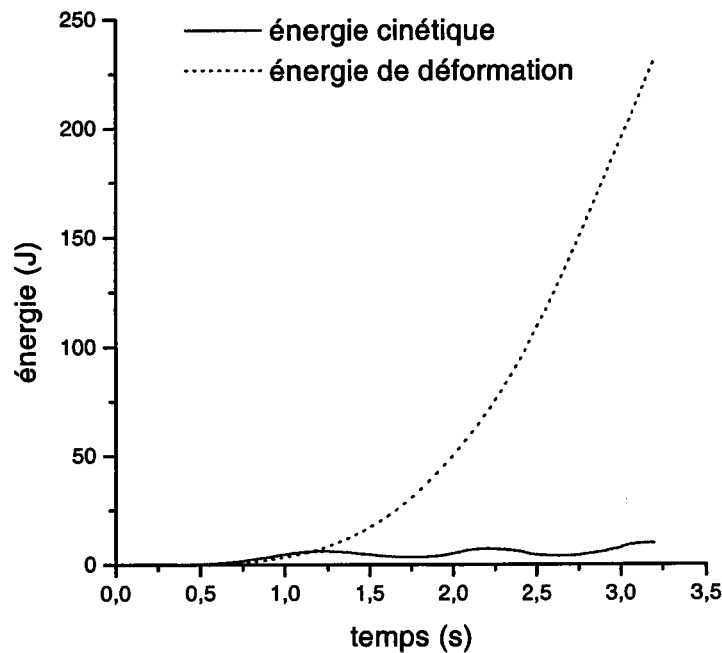


Figure [A-4] : variation de l'énergie cinétique et de l'énergie de déformation pour tout le système en fonction du temps, exemple de l'essai de coupelle tronconique (von Mises) avec le maillage (a)

Pour comparer les deux types de code de calcul ainsi que l'influence du sous programme *VUMAT* sur le temps de calcul, nous présentons les temps CPU et la taille de l'incrément, tableau [A-1], pour la simulation d'un emboutissage de coupelle tronconique d'un matériau isotrope. Nous observons que le temps de calcul est plus faible avec ABAQUS/*Explicit*. L'utilisation du sous programme *VUMAT* augmente le temps de calcul sans augmenter le nombre d'incréments.

Tableau[A-1] : indications relatives au temps CPU et au nombre d'incréments pour l'essai de coupelle tronconique, pour un matériau isotrope (von Mises) avec le maillage (a) et pour un enfoncement de 52 mm

	Temps CPU	Nombre d'incréments
ABAQUS/ <i>Explicit</i> avec <i>VUMAT</i>	10 mm 13 s	9754
ABAQUS/ <i>Explicit</i> sans <i>VUMAT</i>	4 mm 47 s	9776
ABAQUS/ <i>Standard</i> sans <i>UMAT</i>	62 mm 15 s	202

Résumé

L'apparition de plis au cours des procédés d'emboutissage des tôles métalliques est devenu un défaut fréquent en raison de la tendance vers une diminution de l'épaisseur, favorable à l'allégement des structures.

L'objet de cette étude est de **prévoir l'apparition et les caractéristiques du plissement en fonction des propriétés d'anisotropie plastique du matériau**. Deux méthodes de prédiction du plissement ont été mises en œuvre. Nous développons tout d'abord une étude analytique de l'apparition du plissement afin de déterminer des courbes limites de plissement (CLP) pour une plaque puis pour une coque doublement courbée. La seconde méthode utilise ensuite les capacités des simulations par éléments finis à prévoir le plissement en emboutissage. Nous présentons les prévisions obtenues par éléments finis pour deux essais d'emboutissage profond. Enfin nous comparons les prévisions numériques aux prévisions analytiques et aux résultats expérimentaux.

L'influence de l'anisotropie normale et de l'anisotropie transverse sur les CLP est discutée. L'influence de l'anisotropie sur l'apparition du plissement dans un processus réel d'emboutissage est aussi discutée. Nous obtenons un accord correct entre les prévisions analytiques et la bifurcation identifiée à partir des simulations par éléments finis. De plus, ces prévisions analytiques et numériques sont en bonne concordance avec les expériences.

Mots clés :

plissement, anisotropie, emboutissage, bifurcation, coques minces

Abstract

The development of wrinkles in sheet metal stamping processes is a defect which becomes more and more frequent, owing to the trend in decreasing sheet thicknesses, so as to decrease the weight of structures.

The aim of this work is **the prediction of wrinkling. The influence of plastic anisotropy on wrinkling behaviour** is also investigated. Two methods are developed in order to capture the initiation of wrinkling. An analytical study of wrinkling is first developed, which allows us to determine wrinkling limit curves (WLC) for a plate and for a doubly-curved shell. The ability of finite element (FE) simulations to capture the onset of wrinkling is also explored. Finite element simulations of real deep drawing processes are then presented. The finite element results are finally compared with the predictions of the analytical WLC and with the experiments.

The influence of normal and planar anisotropy on the WLC is discussed. The influence of anisotropy on the wrinkling in a real deep drawing process is also discussed. We obtain a good agreement between analytical predictions and the bifurcation estimated from the FE simulations. Moreover, analytical and numerical predictions are in fair agreement with experiments

Keywords:

wrinkling, anisotropy, deep drawing, bifurcation, thin shells