

Problèmes d'homogénéisation pour des matériaux hétérogènes viscoplastiques

Fouad El-Houdaigui

▶ **To cite this version:**

Fouad El-Houdaigui. Problèmes d'homogénéisation pour des matériaux hétérogènes viscoplastiques. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2001. Français. NNT : 2001METZ018S . tel-01748964

HAL Id: tel-01748964
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748964

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

THESE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ

N° inv.	2001053S
Cote	S/Mz 01/18
Loc	Magasin

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

Par

Fouad EL-Houdaigui

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : *Sciences de l'ingénieur*
OPTION : *Mécanique*

Problèmes d'homogénéisation pour des matériaux hétérogènes viscoplastiques

Soutenue le 8 novembre 2001 devant le jury composé de :

M. Cherkaoui	Professeur à l'université de Metz	Président
S. AHZI	Professeur à l'université de Strasbourg	Rapporteur
J. C. Michel	Chargé de recherche (L.M.A) à Marseille	Rapporteur
Y. Germain	Chercheur à FINA Research S. A.	Examinateur
A. Molinari	Professeur à l'université de Metz	Directeur
L. S Toth	Professeur à l'université de Metz	Co-Directeur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U.M.R. C.N.R.S. N°7554

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ
Par

Fouad EL-Houdaigui

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : *Sciences de l'ingénieur*
OPTION : *Mécanique*

Problèmes d'homogénéisation pour des matériaux hétérogènes viscoplastiques

Soutenue le 8 novembre 2001 devant le jury composé de :

M. Cherkaoui	Professeur à l'université de Metz	Président
S. AHZI	Professeur à l'université de Strasbourg	Rapporteur
J. C. Michel	Chargé de recherche (L.M.A) à Marseille	Rapporteur
Y. Germain	Chercheur à FINA Research S. A.	Examinateur
A. Molinari	Professeur à l'université de Metz	Directeur
L. S Toth	Professeur à l'université de Metz	Co-Directeur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U.M.R. C.N.R.S. N°7554

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz, sous la direction de Monsieur le Professeur Alain Molinari et Monsieur le Professeur Laszlo Toth. Je tiens à leur exprimer ma sincère reconnaissance pour les conseils qu'ils m'ont apportés ainsi que pour la confiance et le soutien qu'ils m'ont prodigués au cours de mes travaux.

Je tiens à remercie également le membres de jury:
Mr M. Cherkaoui a bien voulu accepter la présidence de ce jury.
Mr S. Ahzi et Mr J. C. Michel d'avoir accepté la charge de rapporteurs de ce travail et d'avoir bien voulu faire partie du jury.
Mr Y.Germain d'avoir accepter de participer au jury de cette thèse.

Je tiens également à remercier celles et ceux qui ont contribué de prés ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Merci enfin à mes parents qui voient dans la qualité de mon travail l'aboutissement de leurs efforts et de leur éducation.

Table des matières

Introduction générale 4

1 Revue bibliographique 7

1.1 Principales étapes lors de l'élaboration d'un modèle de passage de l'échelle micro à l'échelle macro 7

1.1.1 Distribution statistique des constituants 7

1.1.2 Localisation 8

1.1.3 Homogénéisation 9

1.2 Différents modèles micro-macro 9

1.2.1 Modèle de Sachs et modèle statique 10

1.2.2 Modèle de Taylor 10

1.2.3 Généralisation du modèle de Taylor 11

1.3 Modèles autocohérents 11

1.3.1 Solution d'Eshelby 12

1.3.2 Modèle de Kröner 13

1.3.3 Formulation générale de Hill 14

1.3.4 Autres modèles 15

1.4 Modèle autocohérent de Molinari et al. 16

1.4.1 Approche autocohérente viscoplastique 16

1.4.2 Approche autocohérente élastoviscoplastique 18

2 Problème de l'inclusion, bibliographie 20

2.1 Loi de comportement viscoplastique 20

2.2 Approche analytique 21

2.3 Méthode variationnelle et méthode des éléments finis 23

2.3.1 Méthode variationnelle 23

2.3.2 Méthode des éléments finis de Gilormini et Germain 24

2.3.2.1 Formulation variationnelle de la méthode 24
2.3.2.2 Maillage 25
2.3.2.3 Limitation intrinsèque de la méthode 26
2.3.2.4 Problème de convergence 27
2.4 Résolution par éléments finis du problème d'inclusion à l'aide du code de calcul ABAQUS . . . 27
2.4.1 Modélisation du problème par la méthode des éléments finis 27
2.4.2 Résultat des calculs 29
2.5 Conclusion, bilan des trois approches 30

3 Validation du modèle tangent anisotrope dans le problème de l'inclusion 35
3.1 Introduction 35
3.2 Problème de l'inclusion 36
3.2.1 Problème de l'inclusion linéaire 36
3.2.1.1 Position du problème 36
3.2.1.2 Loi de localisation 38
3.2.2 Problème de l'inclusion non linéaire 42
3.2.2.1 Position du problème 42
3.2.2.2 Loi de localisation tangente 44
3.2.2.3 Approche sécante 45
3.3 Solution du problème de l'inclusion par une approche tangente anisotrope 46
3.3.1 Formulation du problème 46
3.3.1.1 Approche tangente 46
3.3.1.2 Approche sécante 48
3.3.2 Comparaison avec les résultats des éléments finis pour différents chargements et formes d'inclusions 49
3.3.2.1 Compression axisymétrique 49
3.3.2.2 Compression plane 55
3.3.3 Rapport de rigidité critique 58
3.3.4 Cas où la sensibilité à la vitesse de déformation est différente dans l'inclusion et la matrice ($m_I \neq m_M$) 59
3.3.5 Comparaison entre la compression axisymétrique et la compression plane 60
3.3.6 Comparaison des modèles sécants et tangent 61
3.3.7 Effet du rapport de forme de l'inclusion 62
3.4 Conclusion 63

4 Modélisations des matériaux composites viscoplastiques **65**

4.1 Modèles différentiels, bibliographie 65
4.1.1 Approche de Briottet et al. 65
4.1.2 Etude de Phan-Tiem & Pham 67
4.2 Modélisation de la rigidité effective du composite par la méthode différentielle 69
4.2.1 Description du schéma différentiel 69
4.2.2 Fraction volumique d'inclusion ajoutée 70
4.2.3 Equation différentielle vérifiée par le module μ 71
4.2.3.1 Préliminaires 71
4.2.3.2 Procédure incrémentale 72
4.2.4 Résultats et discussions 74
4.2.4.1 Effet de la sensibilité à la vitesse de déformation 75
4.3 Modélisation de la sensibilité à la vitesse de déformation effective du composite 78
4.3.1 Préliminaires 79
4.3.2 Lois de localisation 80
4.3.3 Contrôle en vitesse 81
4.3.4 Contrôle en contrainte 83
4.3.5 Sensibilité à la vitesse de déformation effective en utilisant la méthode différentielle . . . 84
4.4 Applications 86
4.4.1 Application sur l'alliage de Titane; TA5E 86
4.4.1.1 Données expérimentales 86
4.4.1.2 Résultats et discussions 87
4.4.2 Application au matériau polycristallin biphasé Camphor + OCP 88
4.4.2.1 Données expérimentales 88
4.4.2.2 Résultats et discussions 90

Conclusion générale **94**

Annexe A : Calcul des tenseurs d'interaction **97**

Annexe B : Problème de l'inclusion élastique **100**

Références bibliographiques **105**

Introduction générale

Le problème de l'inclusion ellipsoïdale dans une matrice infinie joue un rôle important pour la connaissance du comportement mécanique des matériaux. Ce problème a été abordé par différents auteurs et pour différents comportements mécaniques des matériaux (élasticité, viscoélasticité, élastoplasticité, plasticité et viscoplasticité), pour différentes géométries (différentes formes d'inclusion, matrice infinie ou non infinie).

L'élasticité a été un domaine de prédilection pour aborder le problème de l'inclusion. Vu son caractère linéaire, des solutions analytiques ont été obtenues. C'est dans ce cadre que se situent les travaux d'Eshelby dont l'importance est capitale. En 1957, Eshelby a résolu le problème de l'inclusion ellipsoïdale élastique isolée dans une matrice élastique de dimension infinie. La solution d'Eshelby montre que la déformation est homogène à l'intérieur de l'inclusion. Une extension en élasticité anisotrope a été égalemant proposée par Konishita (1971) et Laws (1977).

Une application typique du problème de l'inclusion se trouve dans le modèle autocohérent pour déterminer le comportement d'un agrégat. Ce modèle a été proposé pour la première fois par Hershey (1954) et ensuite par Kröner (1961) pour estimer les propriétés élastiques d'un polycristal, à partir des travaux d'Eshelby sur l'inclusion. Le principe du schéma autocohérent utilisé pour la modélisation des matériaux hétérogènes repose sur l'évaluation des interactions entre un grain particulier (l'inclusion) et un milieu homogène équivalent (la matrice) qui représente l'ensemble des autres grains. Une synthèse bibliographique des différentes approches autocohérentes est proposée dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 est consacré à une synthèse bibliographique du problème de l'inclusion. Dans le cas d'une matrice newtonienne d'extension infinie et d'une inclusion ellipsoïdale viscoplastique, on peut obtenir une solution analytique exacte du problème de l'inclusion du fait de la

linéarité du comportement de la matrice. Gilormini & Montheillet (1984,1986) ont calculé de manière entièrement analytique le champ de vitesse à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale viscoplastique isotrope, située dans une matrice infinie viscoplastique linéaire isotrope.

Dans le cas d'une matrice de comportement viscoplastique on ne peut pas dégager une solution analytique du problème de l'inclusion. En 1987, Gilormini et Germain ont étudié le problème d'une inclusion ellipsoïdale de révolution viscoplastique isolée dans une matrice viscoplastique isotrope. Ils se sont intéressés au calcul des contraintes à l'amorçage de l'endommagement et aux calculs de la localisation de la vitesse de déformation pour différentes formes d'inclusion et pour différents types de chargement.

La première partie du chapitre 2 s'attache à dégager de la littérature les différents résultats du problème de l'inclusion et en particulier ceux concernant la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion. Les différentes méthodes sont classées en :

- Méthode analytique
- Méthode variationnelle
- Méthode par éléments finis (Gilormini & Germain (1987) et Gilormini & Michel (1999))

Dans la deuxième partie du chapitre 2, nous réalisons à l'aide de la version implicite du code ABAQUS, une étude sur le problème de l'inclusion viscoplastique. La loi puissance est implémentée dans la version implicite du code à l'aide du sous programme utilisateur UMAT. Nous nous limittons aux résultats donnés par Gilormini & Michel (1999) pour tester l'implémentation de la loi puissance dans le code ABAQUS.

Le chapitre 3 est organisé en deux parties. Dans la première partie, nous considérons une inclusion ellipsoïdale située dans une matrice infinie, dans le cas où la matrice et l'inclusion ont un comportement linéaire incompressible (Solution d'Eshelby). Une extension de ce problème dans le cas non linéaire est considérée, en utilisant l'approche tangente de Molinari et al. (1987), pour approcher le comportement non linéaire de la matrice.

L'objet de la deuxième partie du troisième chapitre est l'étude de la localisation de la déformation dans une inclusion viscoplastique ellipsoïdale entourée par une matrice viscoplastique infinie, sollicitée en compression axisymétrique et en compression plane. L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation d'un module tangent anisotrope dans la formulation tangente viscoplastique pour le problème de l'inclusion non linéaire. L'influence de différents paramètres (rapport de rigidité de l'inclusion et de la matrice, rapport de forme de l'inclusion et sensibilité à la vitesse de déformation) sur la localisation de la vitesse de déformation peut être

éxaminée. Les résultats obtenus à l'aide du modèle tangent sont confrontés aux prédictions des différentes approches citées dans le chapitre 2.

Il est à noter que l'inclusion et la matrice n'ont pas nécessairement la même sensibilité à la vitesse de déformation. Nous avons étendu la formulation tangente au cas où la sensibilité à la vitesse de déformation est différente dans l'inclusion et dans la matrice. Ces résultats seront confrontés à ceux de Vernusse (1993).

Dans le chapitre 4, nous présentons une méthode différentielle pour estimer le comportement effectif d'un matériau composite viscoplastique constitué d'inclusions à grande concentration dispersées dans une matrice. Les inclusions sont supposées de formes et d'orientations identiques. Le principe du schéma différentiel pour la modélisation d'un composite biphasé est le suivant : la première phase représente la matrice, l'autre (phase inclusionnaire) est ajoutée incrémentalement de manière à ce que le matériau ajouté soit toujours en concentration diluée.

Le chapitre 4 est organisé en trois parties. Dans un premier temps, nous étudions l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation m sur la rigidité effective k_{eff} du milieu homogénéisé en fonction de la fraction volumique d'inclusions et pour différents rapport de rigidités η. La sensibilité à la vitesse de déformation m est identique dans les deux phases et égale à celle du milieu homogénéisé. Nous nous limitons ici au cas de la compression axisymétrique.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à un développement théorique permettant de calculer la sensibilité à la vitesse de déformation effective m lorsque les différentes phases ont des sensibilités à la vitesse de déformation différentes. A cet effet, deux types de chargement, en vitesse de déformation et en contrainte sont considérés. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à deux applications pour valider ces résultats théoriques.

Chapitre 1

Revue bibliographique

1.1 Principales étapes lors de l'élaboration d'un modèle de passage de l'échelle micro à l'échelle macro

L'homogénéisation des milieux hétérogènes s'appuie sur une méthodologie commune à une grande variété de milieux (polycristaux, composites, milieux poreux ...). Les principales étapes sont les suivantes :

- Etape de la définition des phases constitutives et de leur distribution statistique.
- Etape de modélisation mécanique dite de localisation, consistant à relier les grandeurs mécaniques locales et globales.
- Etape d'homogénéisation proprement dite, reposant sur des opérations de moyenne et conduisant à la détermination du comportement global (ou comportement du "milieu homogène équivalent").

1.1.1 Distribution statistique des constituants

Avant de résoudre tout problème, il faut s'assurer de la connaissance de la loi de comportement mécanique en tout point de la structure, d'une bonne description géométrique et de la détermination sans ambiguité des conditions aux limites. Sur le plan pratique, il est impossible de parvenir à une description statistique complète d'une structure donnée d'agrégats. L'information expérimentale la plus souvent utilisée pour des matériaux multiphasés est la

fraction volumique.

Pourtant, Bretheau et al. (1988) mettent en évidence l'influence de la distribution spatiale des phases sur la limite d'élasticité et la contrainte d'écoulement d'un agrégat Fer/Argent. De même, par la méthode des éléments finis, Ankem & Margolin (1982) soulignent l'influence de la taille des inclusions sur la contrainte d'écoulement du biphasé. Berveiller, Canova & Tiem (1985) montrent que la forme des grains peut affecter de manière significative les contraintes internes et jouer un rôle important sur l'écoulement plastique.

Dans cette première étape, il faut également définir le comportement mécanique de chaque phase et proposer un modèle mathématique décrivant ce comportement. Par exemple, dans le cas de l'élastoplasticité en petites déformations, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_i &= L_i\, \dot{\varepsilon}_i \\ \dot{\varepsilon}_i &= M_i\, \dot{\sigma}_i \end{aligned} \tag{1.1}$$

où L_i et M_i sont les tenseurs du quatrième ordre des modules ou des compliances élastoplastique instantanés.

1.1.2 Localisation

L'étape de localisation s'appuie essentiellement sur le problème de l'inclusion résolu par Eshelby. C'est à ce stade que les différents modèles polycristallins se différencient. Il s'agit de modéliser les contraintes internes et les hétérogénéités de déformation d'une phase à l'autre. Un matériau polycristallin, ou multiphasé, soumis à un chargement homogène, du fait de sa constitution hétérogène est le siège de champs mécaniques qui présente une variation significative d'une phase à l'autre. Pour cela, il faut définir les relations qui lient les valeurs microscopiques aux valeurs macroscopiques.

Par exemple, pour un polycristal :

$$\dot{\varepsilon}_i\,(\overrightarrow{r},\Omega) = A_i(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\Omega,\Omega').\,\dot{E} \tag{1.2}$$

$$\dot{\sigma}_i\,(\overrightarrow{r},\Omega) = B_i(\overrightarrow{r},\overrightarrow{r}',\Omega,\Omega').\,\dot{\Sigma} \tag{1.3}$$

où $\dot{\varepsilon}_i$ et $\dot{\sigma}_i$ désignent les quantités locales, au point $\overrightarrow{r}$ de la phase Ω, $\dot{E}$ et $\dot{\Sigma}$ les quantités globales correspondantes et A_i et B_i les opérateurs de localisation et de concentration dépendant également des autres phases.

1.1.3 Homogénéisation

La dernière étape est l'homogénéisation. Cela correspond à l'établissement de relations exprimant les grandeurs globales comme les moyennes des grandeurs locales.

Par exemple en élastoplasticité, les modules et compliances instantanés du milieu homogène équivalent, soient L et M, s'obtiennent par les relations :

$$\Sigma = \langle \sigma_i \rangle = \langle L_i \varepsilon_i \rangle = \langle L_i A_i E \rangle = \langle L_i A_i \rangle E \tag{1.4}$$

$$E = \langle \varepsilon_i \rangle = \langle M_i \sigma_i \rangle = \langle M_i B_i \Sigma \rangle = \langle M_i B_i \rangle \Sigma \tag{1.5}$$

d'où

$$L = \langle L_i A_i \rangle \tag{1.6}$$

$$M = \langle M_i B_i \rangle \tag{1.7}$$

le symbole $\langle\ \rangle$, désignant la moyenne sur tout le volume.

Ces relations paraissent simple, mais dans certains cas peuvent être complexes. Il faut souligner que l'on suppose dans cette méthologie les contraintes et les déformations homogènes dans chaque phase. Les connaissances actuelles des hétérogénéités de déformation dans chaque phase sont insuffisantes pour pouvoir les prendre en compte.

1.2 Différents modèles micro-macro

Plusieurs modèles ont été utilisées pour prédire le comportement (Σ, E) de matériaux multiphasés. Le plus simple, et le plus souvent utilisé est le modèle de Taylor (1938) qui suppose l'uniformité de la déformation dans le matériau. Un autre modèle, tout aussi simple, mais moins utilisé est le modèle statique, qui considère l'homogénéité des contraintes.

1.2.1 Modèle de Sachs et modèle statique

L'une des premières tentatives pour modéliser la plasticité des polycristaux a été faite par Sachs (1928). Il suppose une relation proportionnelle entre l'etat de contrainte du monocristal et celle macroscopique de l'agrégat. Le modèle de Sachs a été simplifié par Batdrof & Budiansky (1949) qui imposent l'uniformité de la contrainte :

$$\underline{\sigma} = \underline{\Sigma} \tag{1.8}$$

où $\underline{\sigma}$ et $\underline{\Sigma}$ sont respectivemnt la contrainte dans le grain et celle macroscopique de l'agrégat.

La relation (1.8) signifie que les équations d'équilibre sont vérifiées. On a donc un champ de contrainte statiquement admissible, d'où le nom de modèle "statique". Cependant, les relations de compatibilité sont totalement négligées.

Ce modèle statique a été utilisé par Leffers (1968) avec succés pour prédire l'évolution de la texture de laiton dans un essai de laminage. Un tel modèle peut donc masquer certains phénomènes physiques et donner un résultat correct pour des raison non expliquées.

1.2.2 Modèle de Taylor

Proposé par Taylor en 1938 pour les matériaux rigides plastiques (déformation élastique négligée), le modèle a été aussi développé par Bishop & Hill (1951). Ce modèle reste l'un des plus utilisé pour la prédiction des textures en grandes déformations.

Il suppose en fait l'uniformité de la déformation plastique en d'autres termes, la déformation plastique microscopique ε^p est égale à la déformation plastique macroscopique E^p, ce qui permet d'écrire la relation tensorielle suivante :

$$\varepsilon^p_{ij} = E^p_{ij} \tag{1.9}$$

Dans ce modèle, en revanche, les relations d'équilibre sont totalement négligées et les contraintes internes sont surestimées.

1.2.3 Généralisation du modèle de Taylor

Lin (1957) a généralisé le modèle de Taylor en supposant l'uniformité de l'incrément de déformation totale, tout en prenant en compte l'élasticité :

$$d\varepsilon^t = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = dE^e + dE^p = dE^t \tag{1.10}$$

Si l'on suppose l'élasticité isotrope et les déformations plastiques incompressibles on obtient une loi d'interaction de la forme :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + 2\mu(dE^p_{ij} - d\varepsilon^p_{ij}) \tag{1.11}$$

où le terme $2\mu(dE^p_{ij} - d\varepsilon^p_{ij})$ représente l'incrément de contraintes internes liées aux hétérogénéités de déformations plastiques.

Il est à noter que pour des matériaux rigides plastiques ($\mu \longmapsto \infty$) on retrouve bien le modèle de Taylor $dE^p_{ij} - d\varepsilon^p_{ij} = 0$.

Malgré le succès de la théorie de Taylor et de Bishop & Hill (1951), les résultats de textures de déformation dans certains cas montrent leurs limites.

1.3 Modèles autocohérents

Une nouvelle approche pour caractériser le comportement des milieux hétérogènes a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières années : il s'agit du modèle autocohérent. Cette méthode a été utilisée par Hershey (1954) et ensuite par Krôner (1961) pour estimer les propriétés élastique d'un polycristal, à partir des travaux d'Eshelby concernant l'inclusion noyée dans une matrice infinie. Puis, Budiansky & Wu (1963) ont proposé une formulation élastoplastique simple du modèle. Pour prendre en compte l'interaction plastique, Hill (1965) a formulé une approche plus générale. Cette approche a été simplifiée par Berveiller & Zaoui (1980).

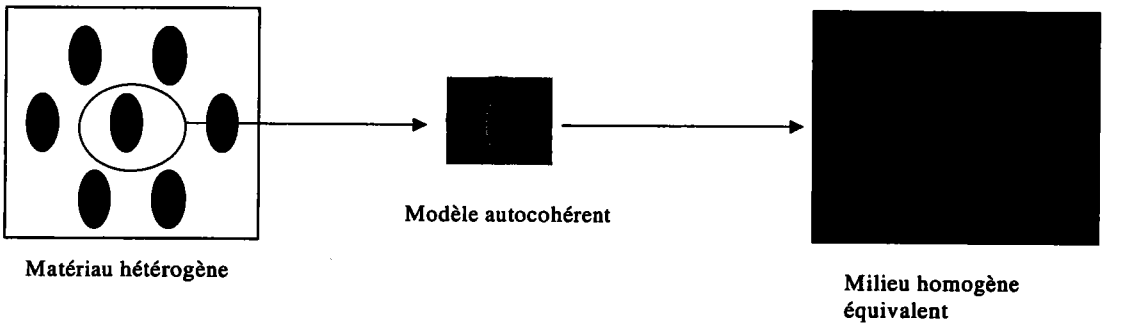


Figure 1.1 : *principe du schéma autocohérent*

On peut décrire l'esprit de cette approche de la façon suivante : considérons un corps hétérogène (multiphasé par exemple) dont on connaît les caractéristiques et les distributions des constituants. Le raisonnement consiste à analyser les interactions entre chaque phase et un milieu fictif (appelé milieu homogène équivalent) dont les caractéristiques sont les inconnues à déterminer. Ces caractéristiques sont ensuite calculées en exprimant les relations de moyenne entre les propriétés mécaniques locales (que l'on vient de déterminer) et globales (à déterminer). La première étape est couramment nommée localisation, la deuxième constituant l'homogénéisation.

1.3.1 Solution d'Eshelby

Eshelby (1957) a résolu le problème de l'inclusion ellipsoïdale, plastifiée de façon uniforme dans une matrice élastique infinie non chargée. La déformation totale ϵ^T de l'inclusion dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, lorsque l'élasticité est homogène et isotrope, peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}^t = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^p \tag{1.12}$$

où S le tenseur d'Eshelby dépendant des caractéristiques élastiques du milieu et de la forme

de l'inclusion. A titre d'exemple, pour une inclusion sphérique on obtient, lorsque $\varepsilon^p_{kk} = 0$

$$\varepsilon^t_{ij} = \beta \varepsilon^p_{ij} \tag{1.13}$$

avec

$$\beta = \frac{2}{15}\frac{4-5\nu}{1-\nu} \tag{1.14}$$

d'où, pour les contraintes internes dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon^e_{ij} - (\frac{\nu}{1-2\nu})\delta_{ij}) \tag{1.15}$$

avec

$$\varepsilon^e_{ij} = \varepsilon^t_{ij} - \varepsilon^p_{ij} = -(1-\beta)\varepsilon^p_{ij} \tag{1.16}$$

soit

$$\sigma_{ij} = -2\mu(1-\beta)\varepsilon^p_{ij} \tag{1.17}$$

μ est le module de cisaillement et ν le coefficient de Poisson.

1.3.2 Modèle de Kröner

En se basant sur les résultats d'Eshelby, Kröner (1961) considère le cas d'une inclusion ellipsoïdale déformée plastiquement dans une matrice infinie ayant subie la déformation plastique uniforme $\underline{E}^P$. Pour une déformation plastique $\underline{\varepsilon}^p$ homogène dans une inclusion de forme sphérique, Krôner obtient alors les contraintes internes $\underline{\sigma}$ dans l'inclusion :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\mu(1-\beta)(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}) \tag{1.18}$$

où β est donné par l'équation (1.14) et μ le module élastique de cisaillement et Σ la contrainte uniforme à l'infinie. Eq. (1.18) constitue la loi d'interaction. Il est à noter que pour $\underline{\Sigma} = 0$ et $\underline{E}^p = 0$, on retrouve bien le résultat d'Eshelby (1.15).

Dans ce modèle, le problème d'inclusion correspondant suppose en effet que le milieu ne réagit qu'élastiquement à l'incompatibilité plastique imposée : cela est évident dans le problème d'Eshelby où la matrice n'est pas déformée plastiquement et ne peut accommoder qu'élas-

tiquement l'incompatibilité plastique ε_{ij}^p ; il en va tout autant du cas plus général envisagé par Krôner, où, bien que déformée plastiquement, la matrice n'accommode qu'élastiquement l'incompatibilité $(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$. La déformation plastique de la matrice reste uniforme alors que toute accommodation en partie plastique perturberait l'uniformité initiale de la déformation plastique.

Une conséquence majeure de cette hypothèse implicite d'accommodation élastique réside dans la forte surestimation des contraintes internes donnée par la formule (1.18) et qui se manifeste par l'intervention du module élastique μ aux valeurs très grandes (le coefficient $2(1-\beta)$ est proche de l'unité). Pratiquement, les contraintes internes ainsi évaluées sont si élevées que, selon ce modèle, l'agrégat réagira en minimisant la source d'incompatibilité plastique $(E_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^p)$, et donc en uniformisant la déformation plastique d'un grain à l'autre ; en conséquence, les prévisions du modèle de Kröner se rapprocheront de celles du modèle de Taylor, comme cela a pu être démontrer dans le cas élastique par Zaoui (1972), à partir d'un raisonnement dû à Hashin (1969) .

1.3.3 Formulation générale de Hill

Pour prendre en compte l'interaction plastique et non purement élastique, Hill (1965) a formulé une théorie plus générale. Il obtient la loi d'interaction sous la forme :

$$d\sigma_{ij} = d\Sigma_{ij} + \pounds^*_{ijkl}(dE^p_{kl} - d\varepsilon^p_{kl}) \tag{1.19}$$

où $\pounds^*$ est un tenseur d'interaction d'ordre quatre donné par l'équation intégrale suivante :

$$\pounds^* = \langle \pounds^c(\pounds^c + \pounds)^{-1}(\pounds - \pounds^*)\rangle \tag{1.20}$$

avec $\pounds^c$ et $\pounds$ sont les tenseurs des modules tangents respectivement du grain (cristallite) et de la matrice (agrégat) et "$\langle\ \rangle$" indique la moyenne volumique sur tous les grains formant le polycristal. Ce modèle nécessite des calculs numériques très lourds (Hutchinson (1970)).

Pour tenir compte des interactions plastiques d'une façon plus simple que la formulation générale de Hill. Berveiller & Zaoui (1979) ont introduit dans la loi d'interaction de Kröner

un facteur d'accommodation plastique α. La loi d'interaction s'écrit quand $\beta = 0.5$ (ce qui est une bonne approximation pour $\nu = 1/3$) :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + \alpha\mu(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}) \tag{1.21}$$

Le facteur α est déterminé à partir de la théorie de la déformation. L'expression simplifiée de α est donnée par :

$$\alpha = \frac{1}{1 + \mu\overline{h}} \tag{1.22}$$

où $\overline{h}$ depend de l'état de plastification de la matrice à l'infini.

1.3.4 Autres modèles

Azaro & Needleman (1985) ont proposé un modèle élastoviscoplastique en grandes déformations. Ce modèle de type Taylor-Lin suppose l'uniformité du gradient de déformation totale :

$$F_{ij} = \overline{F}_{ij} \tag{1.23}$$

où F et $\overline{F}$ sont respectivement le gradient de déformation totale dans l'inclusion et celui macroscopique de l'agrégat. Ce modèle a l'avantage, du fait de la dépendance de la vitesse de déformation, de lever l'ambiguïté sur le choix des systèmes actifs.

Plus tard, Nemat-Nasser & Obata (1986) ont proposé une approche autocohérente en élastoviscoplasticité. Il s'agit d'une généralisation du modèle de Iwakuma & Nemat-Nasser (1984). Ils ont appliqué ce modèle uniquement au cas plan. Harren (1991) a utilisé ce modèle afin de déterminer l'évolution de la texture. Les résultats obtenus sont identiques à ceux trouvés en utilisant la théorie de Taylor-Lin. Ceci est dû en fait à une "rigidification" des interactions entre les constituants et le milieu effectif. ($\underline{\dot{E}}^{vp}$ est pris uniforme en dehors de l'inclusion, il n'y a donc pas de relaxation viscoplastique)

Une approche autocohérente pour les grandes déformations en élastoplasticité a été proposée par Lipinski, Berveiller & Carmasol (1987). Cette approche est basée sur la loi du

monocristal donnée par Nemat-Nasser & Obata (1986) qui s'écrit :

$$\dot{n}_{ij} = \pounds_{ijkl} \nu_{k,l} \tag{1.24}$$

où $\dot{n}$ est la vitesse de la contrainte nominale, $\nu_{k,l}$ le gradient de vitesse de déplacement et $\pounds$ le tenseur des modules instantanés du monocristal. Ce modèle prend en compte les interactions entre les grains, l'élasticité, l'effet de forme et l'écrouissage. Néanmoins, le problème d'ambiguïtés pour le choix des systèmes actifs n'est pas résolu.

Turner & Tomé (1993) ont développé une approche afin de prédire le comportement au fluage et à l'expansion des polycristaux sous irradiation. Leur formulation est basée sur l'approche autocohérente qui consiste à considérer une inclusion viscoélastique placée dans un milieu viscoélastique homogène (agrégat). Par un traitement standard en viscoélasticité, ils décrivent la réponse de l'inclusion et du milieu homogène équivalent dans l'espace de la transformée de Laplace en se basant sur la solution donnée par Eshelby. Enfin, ils utilisent une méthode de collocation pour décrire l'évolution de la réponse du polycristal et celle du grain au cours du temps. Toutefois, cette formulation est restreinte au cas linéaire et s'avère inopérante lorsque les propriétés du polycristal sont dépendantes du temps.

Rougier et al. (1994) ont proposé une nouvelle approche autocohérente en élastoviscoplasticité. Cette formulation consiste à ramener le problème à traiter, grâce à une linéarisation tangente le long d'un trajet de chargement et en utilisant la transformation de Laplace-Carson, à un problème d'élasticité hétérogène avec déformations initiales. Toutefois, les calculs numériques sont fastidieux.

1.4 Modèle autocohérent de Molinari et al.

1.4.1 Approche autocohérente viscoplastique

Molinari, Canova & Ahzi (1987) ont formulé un modèle viscoplastique en grandes déformations viscoplastiques, pour prédire l'évolution des textures de déformation. La déformation élastique est négligée et les auteurs considèrent le comportement tangent de la loi de comportement non linéaire. Cette formulation tient compte à la fois des effets de forme, de l'interaction

entre les grains, de l'anisotropie géométrique et de l'écrouissage. Bien que la vitesse de déformation ne soit pas uniforme à l'intérieur des grains, les auteurs la supposent homogène. Le schéma est du même type que celui développé par Diderichs & Zeller (1973) pour l'élasticité hétérogène. Cette approche est différente de l'approche incrémentale de Nemat-Nasser & Obata (1986) ainsi que de celle de Hutchinson (1976).

Ils établissent une relation qui donne la différence entre les déviateurs de contrainte $\underline{\underline{s}}^g - \underline{\underline{S}}$ à la différence entre les vitesses de déformation $\underline{\underline{d}}^g - \underline{\underline{D}}$:

$$\underline{\underline{s}}^g - \underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{\underline{A}}}^{tg} + \underline{\underline{\underline{P}}}^{tg^{-1}})(\underline{\underline{d}}^g - \underline{\underline{D}}), \tag{1.25}$$

où $\underline{\underline{s}}^g$ et $\underline{\underline{S}}$ sont respectivement, les déviateurs de contrainte microscopique (grain) et macroscopique (matrice). $\underline{\underline{d}}^g$ et $\underline{\underline{D}}$ représentent respectivement, les vitesses de déformation du grain et de la matrice. $\underline{\underline{\underline{A}}}^{tg}$ est le module tangent macroscopique et $\underline{\underline{\underline{P}}}^{tg}$ un tenseur d'interaction du quatrième ordre qui dépend de la forme des grains.

Le module tangent de la matrice représenté par le tenseur $\underline{\underline{\underline{A}}}^{tg}$ vaut (comportement tangent de la matrice exprimé par développement de Taylor au premier ordre) :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{\underline{A}}}^{tg}(\underline{\underline{D}}) : \underline{\underline{D}}^* + S^0(\underline{\underline{D}}) \tag{1.26}$$

avec

$$S^0(\underline{\underline{D}}) = \underline{\underline{S}}(\underline{\underline{D}}) - A^{tg}(\underline{\underline{D}}) : \underline{\underline{D}} \tag{1.27}$$

L'approche à 1 site et l'approche à n sites ont été développées. Les résultats de texture en traction, compression, laminage et torsion des métaux C.F.C sont en bon accord avec les résultats expérimentaux en déformation à froid. Pour le laminage, une texture de type cuivre est obtenue. La comparaison des résultats avec ceux de Taylor viscoplastique montrent qu'ils sont améliorés, *cf.* Ahzi et al. (1990), Wenk et al. (1989), Wenk et al. (1991), Takishita (1990) et Dahon (1990). Un autre avantage essentiel de cette approche autocohérente viscoplastique réside dans la vitesse de traitements des données.

Molinari & Toth (1994) ont introduit un paramètre α dans le comportement tangent (1.19). La matrice a un module pseudo-linéaire $\alpha\underline{\underline{\underline{A}}}^{tg}(\underline{\underline{D}})$, et le comportement s'écrit alors sous la forme

suivante :

$$\underline{S}(\underline{D}) = \alpha \underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) : \underline{D}^* + S^0_\alpha(\underline{D}) \tag{1.28}$$

avec

$$S^0_\alpha(\underline{D}) = \underline{S}(\underline{D}) - \alpha A^{tg}(\underline{D}) : \underline{D} \tag{1.29}$$

La loi d'interaction (1.25) est calibré également par un facteur α. La valeur de α est déterminée au vue des résultats des calculs d'éléments finis obtenus par Gilormini & Germain (1987). La nouvelle loi d'interaction du modèle autocohérent viscoplastique avec un facteur de calibrage α est alors donnée par :

$$\underline{s}^g - \underline{S} = \alpha(\underline{\underline{A}}^{tg} + \underline{\underline{P}}^{tg^{-1}})(\underline{d}^g - \underline{D}) \tag{1.30}$$

Pour certaines valeurs du paramètre α, différentes formulations sont obtenues : $\alpha = 0$, modèle statique ; $\alpha = 1$, modèle tangent ; $\alpha = 1/m$, modèle sécant ; $\alpha = \infty$, modèle de Taylor.

1.4.2 Approche autocohérente élastoviscoplastique

Dans le but de formuler un modèle simple et opérationnel en petites déformations qui puisse tenir compte de l'élasticité, de l'interaction entre les grains et qui évite le problème des ambiguïtés liées au système de glissements, un modèle autocohérent élastoviscoplastique a été proposé par Kouddane et al. (1994). La loi constitutive macroscopique est représentée par le comportement viscoplastique tangent

$$\underline{S} = \underline{\underline{A}}^{tg} : \underline{D}^{an} + \underline{S}^0 \tag{1.31}$$

$\underline{D}^{an}$ étant la vitesse de déformation anélastique dans la matrice. Le comportement élastique dans la matrice est régie par la loi constitutive suivante :

$$\dot{\underline{S}} = \underline{\underline{C}}^0 : \underline{D}^e \tag{1.32}$$

où $\dot{\underline{S}}$ représente la vitesse des contraintes déviatoriques.

En combinant (1.31) et (1.32) on tire la loi de comportement élastoviscoplastique de la

matrice qui s'écrit comme suit :

$$\underline{S} = \underline{\underline{A}}^{tg} : \underline{D} - \underline{\underline{H}}^{0} : \overset{\bullet}{\underline{S}} + \underline{S}^{0} \tag{1.33}$$

avec

$$\underline{\underline{H}}^{\circ} = \underline{\underline{A}}^{tg} : \underline{\underline{C}}^{\circ -1} \tag{1.34}$$

$$\underline{\underline{B}}^{\circ} = \underline{\underline{H}}^{\circ -1} \tag{1.35}$$

La loi d'interaction élastoviscoplastique obtenue est donnée par :

$$\overset{\bullet}{\underline{s}} - \overset{\bullet}{\underline{S}} + \underline{\underline{B}}^{0} : (\underline{s} - \underline{S}) = (\underline{\underline{P}}^{tg^{-1}} + \underline{\underline{C}}^{0})(\underline{d} - \underline{D}), \tag{1.36}$$

Dans cette loi d'interaction, On tient compte d'une réponse élastique instantanée et d'une relaxation viscoplastique différée. En outre, quand l'élasticité est négligée ($\underline{\underline{C}}^{\circ} \longrightarrow \infty$), cette même loi est identique à celle obtenue par Molinari et al. (équation (1.25)) dans le cadre d'une formulation viscoplastique en grandes déformations.

Dans le cas d'un chargement monotone, les résultats obtenus par l'approche tangente élastoviscoplastique sont en bon accord avec ceux obtenus par l'approche tangente viscoplastique de Molinari et al.(1987). Suite à ces résultats le paramètre de calibrage α a aussi été introduit dans la loi d'interaction élastoviscoplastique (1.36).

Chapitre 2

Problème de l'inclusion, bibliographie

2.1 Loi de comportement viscoplastique

Le matériau considéré est constitué d'une inclusion éllipsoïdale isolée dans une matrice de dimension infinie (voir figure 2.1). la loi de comportement viscoplastique est donnée par la relation suivante qui relie le déviateur de contrainte $\underline{s}$ à la vitesse de déformation $\underline{\dot{\varepsilon}}$:

$$\underline{s} = 2\mu(\dot{\varepsilon}^{eq})\ \underline{\dot{\varepsilon}} \tag{2.1}$$

où $\dot{\underline{\varepsilon}}^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\underline{\dot{\varepsilon}} : \underline{\dot{\varepsilon}}}$ est la vitesse de déformation équivalente au sens de von Mises.

Le module μ est fonction de la vitesse de déformation équivalente :

$$\mu(\dot{\varepsilon}^{eq}) = \frac{1}{3}k(\dot{\varepsilon}^{eq})^{m-1} \tag{2.2}$$

où k désigne la rigidité du matériau, il prend la valeur k_I dans l'inclusion et k_M dans la matrice. m la sensibilité à la vitesse de déformation, $m = m_I$ dans l'inclusion et $m = m_M$ dans la matrice.

Dans le cas newtonien ($m = 1$) la relation (2.1) se réduit à :

$$\underline{s} = 2\mu\ \underline{\dot{\varepsilon}} \tag{2.3}$$

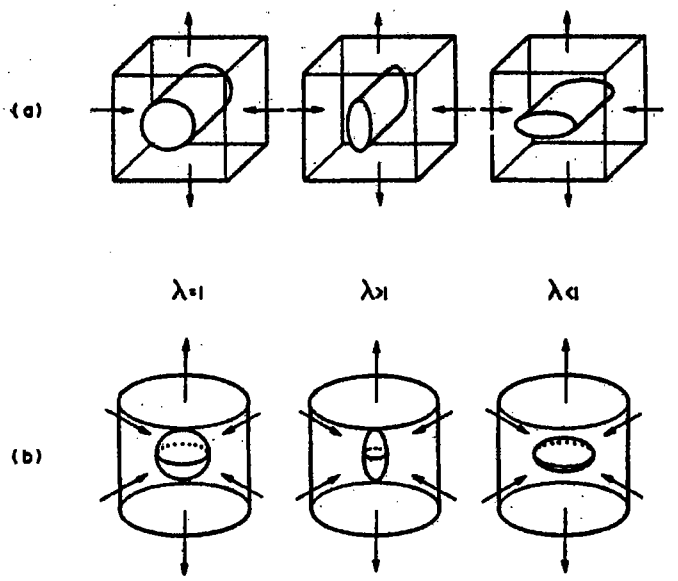


Figure 2.1 : *Géométrie du problème et déformation de la matrice à l'infini en déformation plane (a) et en déformation axisymétrique (b).*

2.2 Approche analytique

Dans le cas d'une matrice newtonienne d'extension infini et d'une inclusion ellipsoïdale viscoplastique, on peut obtenir une solution analytique exacte du problème de l'inclusion du fait de la linéarité du comportement de la matrice. Gilormini & Montheillet (1984,1986) ont calculé de manière entièrement analytique le champ de vitesse à l'intérieur d'une inclusion ellipsoïdale viscoplastique isotrope, située dans une matrice infinie viscoplastique linéaire isotrope. Dans ce cas, le champ de vitesse est uniforme à l'intérieur de l'inclusion. Deux types de chargement ont été considérés : déformation plane (inclusion cylindrique de section elliptique), déformation axisymétrique (inclusion ellipsoïdale de révolution). Dans les deux cas les axes principaux de l'inclusion coïncident avec ceux de la sollicitation imposée à l'infini. Ces auteurs ont établi l'équation (2.4) donnant la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion $\delta = \dot{\varepsilon}^{eq} \,/\, \dot{E}^{eq}$ (où $\dot{\varepsilon}^{eq}$ et $\dot{E}^{eq}$sont respectivement les vitesses de déformation équivalente au sens de von Mises dans l'inclusion et à l'infini) en fonction du rapport de forme de l'inclusion (allongée (resp. aplatie) pour $\lambda > 1$ (resp. $\lambda < 1$)) (voir figure (2.1)) et du rapport des

rigidités de l'inclusion et de la matrice ($\eta = k_I/k_M$):

$$F(\lambda)\,(\eta.\delta^{m_I} - 1) + \delta - 1 = 0 \tag{2.4}$$

où m_I est la sensibilité à la vitesse de déformation de l'inclusion.

Le caractère analytique ne dépend que de la linéarité de la matrice, pour certaines valeurs de m la solution de cette équation est analytique. Dans le cas où $m = 1$ (comportement newtonien de l'inclusion) la solution s'écrit alors :

$$\delta = \frac{1 + F(\lambda)}{1 + \eta F(\lambda)} \tag{2.5}$$

Les auteurs ont proposé des expressions pour la fonction $F(\lambda)$ pour deux types de chargements. Dans le cas d'un chargement axisymétrique (inclusion ellipsoïdale de révolution), il vient

$$F(\lambda) = \frac{-3}{1+2\lambda^2}\,\frac{\lambda^2 - 1 + (1+2\lambda^2)Q}{\lambda^2 - 1 + 3Q} \tag{2.6}$$

avec

$$Q = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\cosh^{-1}(\lambda) \qquad \text{si} \quad \lambda > 1 \tag{2.7}$$

$$Q = 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}\cos^{-1}(\lambda) \qquad \text{si} \quad \lambda < 1$$

$F(\lambda)$ atteint un maximum ($F_{\max} = 0.74$) pour une inclusion légèrement aplatie ($\lambda_{\max} = 0.64$) et non pour une sphère.

Dans le cas de la compression plane (inclusion cylindrique) $F(\lambda)$ vaut :

$$F(\lambda) = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} \tag{2.8}$$

Ainsi, en introduisant cette dernière relation dans (2.5), la localisation de la vitesse de déformation δ vaut alors :

$$\delta = \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda^2 + 2\eta\lambda + 1} \tag{2.9}$$

$F(\lambda)$ atteint un maximum ($F_{\max} = 1$) pour une inclusion cylindrique de section circulaire ($\lambda_{\max} = 1$).

Si l'inclusion est parfaitement plastique ($m_I = 0$), on retrouve l'existence d'une valeur critique du rapport de rigidité η_c au delà de laquelle l'inclusion ne se déforme pas ($\delta = 0$), à partir de (2.4) il vient :

$$\eta_c = \frac{(1+\lambda)^2}{2\lambda} \tag{2.10}$$

$$\eta_c = 1 + \frac{1}{F(\lambda)} \tag{2.11}$$

respectivement en compression plane et en compression axisymétrique.

Par exemple, dans le cas d'un cylindre (déformation plane) de section circulaire $\eta_c = 2$ et dans le cas de la sphère (déformation axisymétrique) on trouve la valeur de $\eta_c = 2.5$ puisque $F(1) = 2/3$.

2.3 Méthode variationnelle et méthode des éléments finis

La non linéarité du comportement de la matrice semble exclure l'approche analytique. Ainsi, différentes méthodes numériques ont été développées pour résoudre le problème de l'inclusion viscoplastique dans une matrice viscoplastique.

2.3.1 Méthode variationnelle

Un principe variationel est adapté au problème de l'inclusion viscoplastique ellipsoïdale isolée au sein d'une matrice viscoplastique sollicitée de façon uniforme à l'infini (Gilormini & Montheillet, 1986). Dans la suite I désigne l'inclusion de forme ellipsoïdale et M la matrice.

Le principe variationnel établi par Hill (1956) assure que le champ de vitesse solution dans la matrice minimise la fonctionnelle :

$$G_M = \int_M \frac{k_M}{m_M+1} (\dot{\varepsilon}^{eq})^{m_M+1} dV - \int_{\partial M} \sigma_{ij}^{\infty} n_j' \, \dot{u}_i \, dS' + \int_{\partial I} \sigma_{ij} n_j \, \dot{u}_i \, dS \tag{2.12}$$

où $\dot{u}$ est un champ de vitesse cinématiquement admissible vérifiant la condition d'incompressibilité dans la matrice et $\dot{\varepsilon}^{eq}$désigne la vitesse de déformation équivalente. k_M , m_M sont la rigidité et la sensibilité à la vitesse de déformation dans la matrice. σ_{ij}^{∞} sont les composantes du tenseur des contraintes imposé à la surface extérieure de la matrice ∂M (de normale extérieure

n'_j) et $\sigma_{ij}n_j$ sont les composantes du vecteur contrainte appliqué à la surface de l'inclusion ∂I (de normale extérieure n_j).

De même, le champ de vitesse solution dans l'inclusion minimise la fonctionnelle :

$$G_I = \int_I \frac{k_I}{m_I+1}(\dot{\varepsilon}^{eq})^{m_I+1}dV - \int_{\partial I} \sigma_{ij}n_j\, \dot{u}_i\, dS \tag{2.13}$$

où $\dot{u}$ désigne un champ de vitesse cinématiquement admissible vérifiant la condition d'incompressibilité dans l'inclusion. k_I , m_I désignent la rigidité et la sensibilité à la vitesse de déformation dans l'inclusion.

Le contact est supposé collant entre l'inclusion et la matrice (continuité de la vitesse et du vecteur contrainte à l'interface). Finalement, le champ de vitesse solution dans l'inclusion et dans la matrice minimise la fonctionnelle :

$$G = \int_M \left[\frac{1}{m_M+1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}^{eq}}{\dot{\varepsilon}^{eq}_\infty}\right)^{m_M+1} - \frac{(2/3)\,\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}^{\infty}_{ij}}{\left(\dot{\varepsilon}^{eq}_\infty\right)^2}\right]dV + \int_I \left[\frac{\eta}{m_I+1}\left(\frac{\dot{\varepsilon}^{eq}}{\dot{\varepsilon}^{eq}_\infty}\right)^{m+1} - \frac{(2/3)\,\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}^{\infty}_{ij}}{\left(\dot{\varepsilon}^{eq}_\infty\right)^2}\right]dV \tag{2.14}$$

La résolution de cette équation permet de calculer la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion pour différentes formes d'inclusion et pour différents types de chargement. A noter que, dans la méthode variationnelle, la vitesse de déformation est considérée homogène dans l'inclusion. Une extension de la méthode dans le cas où les sensibilités à la vitesse de déformation sont différentes dans l'inclusion et dans la matrice a été réalisée par Vernusse (1993).

2.3.2 Méthode des éléments finis de Gilormini et Germain

2.3.2.1 Formulation variationnelle de la méthode

Gilormini & Germain (1987) ont abordé le problème de l'inclusion ellipsoïdale viscoplastique dans une matrice infinie viscoplastique. La recherche de la solution du problème de la déformation d'un corps viscoplastique et de dimension finie, lorsque les conditions aux limites portent uniquement sur les vitesses, peut se ramener à minimiser la quantité suivante :

$$F(\dot{u}) = \int_V \frac{k}{m+1}\left(\dot{\varepsilon}^{eq}\right)^{m+1} dV \tag{2.15}$$

où $\dot{u}$ est un champ de vitesse incompressible :

$$\dot{u}_{i,i=} 0 \tag{2.16}$$

Afin de pouvoir utiliser une famille de champs de vitesse incluant des éléments qui ne vérifient pas la condition d'incompressibilité, la méthode de pénalisation est utilisée et consiste à ajouter à F un terme qui devient très grand lorsque l'incompressibilité n'est pas satisfaite. La fonctionnelle à minimiser est alors la suivante :

$$G(\dot{u}) = F(\dot{u}) + \frac{1}{2}\int_V \rho(div\ \dot{u})^2 dV \tag{2.17}$$

où ρ est un scalaire. La minimisation de G donne la même solution que la minimisation de F quand ρ tend vers l'infini.

La méthode de pénalisation utilisée pour la détermination du champ de vitesse revient à considérer le matériau comme compressible avec un module de compressibilité égal à $1/\rho$.

Des méthodes numériques ont été utilisées d'une part pour la recherche des zéros d'une fonction vectorielle et d'autre part pour le calcul des intégrales.

2.3.2.2 Maillage

Dans le cas d'une matrice contenant une inclusion ellipsoïdale de révolution (ou cylindrique de section elliptique) sollicitée en compression axisymétrique (ou compression plane), dont les axes principaux sont parallèles à ceux de la sollicitation. La symétrie du problème permet de ne considérer qu'un quart de section plane. Le maillage de forme carré, est raffiné à l'interface inclusion-matrice, (voir figure 2.2).

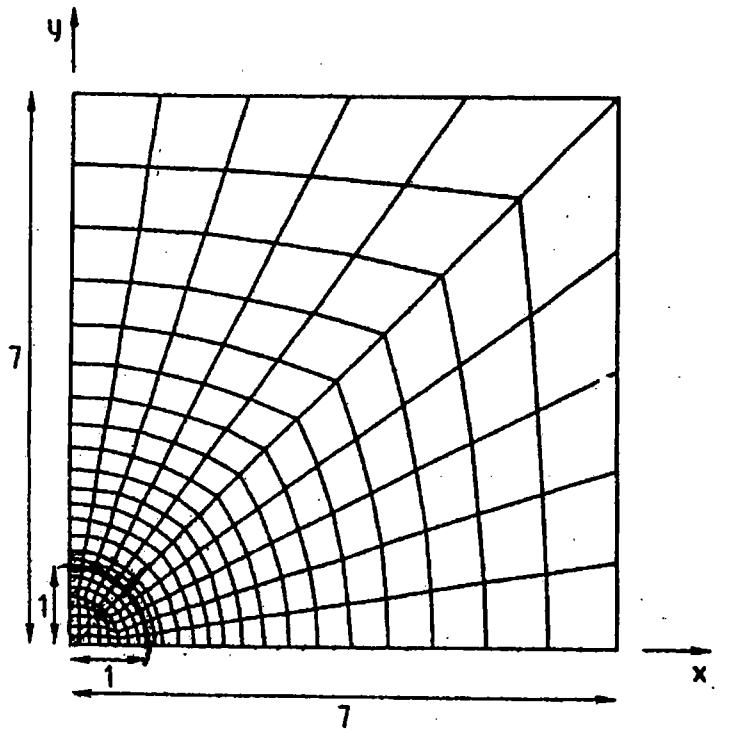


Figure 2.2 : *Maillage utilisé par Gilormini & Germain (1987).*

2.3.2.3 Limitation intrinsèque de la méthode

Le choix des champs de vitesse, la méthode de pénalisation, la méthode de minimisation et l'évaluation des intégrales permettent d'appréhender les limites intrinsèques de la méthode des éléments finis utilisée et les approximations mises en jeu.

Tout d'abord, le nombre de noeuds et leur répartition influencera la valeur de la solution obtenue. L'étude du problème de l'inclusion matrice sera d'autre part limitée par les dimensions nécessairement finies du maillage et le contour polygonal de l'inclusion.

Concernant la méthode de pénalisation, celle-ci introduit une approximation supplémentaire dans le champ de vitesse obtenue si la solution exacte n'appartient pas à la famille de champs de vitesse étudiée puisque une valeur finie est attribuée à ρ. La méthode de minimisation de la fonctionnelle ne donne, dans le cas général, qu'une approximation du minimum.

Finalement la méthode d'évaluation des intégrales nécessaires à la résolution du problème ne permet d'avoir la valeur exacte d'une partie d'entre elles que dans le cas de matériaux newtoniens en déformation plane.

Malgré ces approximations, la méthode des éléments finis permet d'obtenir une précision suffisante dans bien des cas pratiques et reste un des outils disponibles pour aborder des problèmes complexes par leur géométrie ou leur rhéologie. L'existence d'une solution analytique dans des cas simples permet de tester les performances du code très précisément.

2.3.2.4 Problème de convergence

Comme constaté par Gilormini et Germain, lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation m décroît, le calcul par éléments finis converge de plus en plus difficilement, ce qui se traduit d'abord par des temps de calcul de plus en plus longs puis par une absence de résultats pour des valeurs de m inférieures à 0.1. Une des raisons pouvant expliquer cette divergence réside dans l'initialisation du calcul par un champ de vitesse correspondant au cas linéaire, lors de l'application de la méthode de Newton -Raphson.

D'autres problèmes de convergence se posent également pour les duretés relatives extrêmes. La valeur $\eta = 0.001$ a été choisi comme représentatif des inclusions très molles, une valeur plus faible de η menant à des résultats aberrants. Le cas de l'inclusion indéformable ($\eta \to \infty$) ne peut non plus être considéré puisque la matrice paraît alors extrêmement molle.

2.4 Résolution par éléments finis du problème d'inclusion à l'aide du code de calcul ABAQUS

Dans cette partie, la loi puissance viscoplastique est implémentée dans la version implicite du code Abaqus à l'aide d'un sous programme UMAT.

2.4.1 Modélisation du problème par la méthode des éléments finis

Abaqus est un code aux éléments finis en formulation lagrangienne. Deux versions du code sont disponibles :

* la première appelée version standard utilise comme algorithme d'intégration temporelle, le schéma de Newmark. Ce schéma étant implicite, il conduit à un système d'équations cinématique non linéaires dont la résolution nécessite l'utilisation de méthodes itératives telles

que la méthode de Newton-Raphson ou l'une des méthodes équivalentes à celle-ci permettant de réduire le temps de calcul.

* la deuxième version appelée explicite utilise, comme l'indique son nom, un schéma d'intégration explicite dans le temps. Ce schéma qui correspond à la méthode des différences finies centrées, conduit à un système d'équations linéaires dont la résolution est directe, ne nécessitant aucun processus itératif.

Nous utilisons la version implicite du code Abaqus pour étudier le problème de l'inclusion viscoplastique dans une matrice viscoplastique infinie. La loi de comportement rigide viscoplastique (voir Eq. 2.1) n'est pas disponible dans ce code (la loi qui existe est la loi élasto-viscoplastique). La possibilité d'implémentation de cette loi de comportement est offerte au moyen du sous programme utilisateur UMAT. Cependant, un comportement élastique non linéaire, incompressible et isotrope est implémenté. Et l'analogie classique, qui existe entre l'élasticité et la viscosité, est utilisée. En effet les deux champs de déplacement et de déformation seront simplement interprétés respectivement en vitesse et en vitesse de déformation.

Nous reprenons le maillage utilisé dans le travail de Gilormini & Germain (1987). Les éléments du maillage 2D sont des éléments à 4 noeuds avec une interpolation linéaire. Ces éléments sont codifiés dans le document théorique du logiciel par les initiales CPE4RH dans le cas de la compression plane et par CAX4RH dans le cas de la compression axisymétrique (R et H indiquent respectivement l'intégration réduite et l'élément hybride).

Les conditions aux limites correspondent à un encastrement imposé à tous les noeuds de la surface définie par ($x = 0$ et $y = 0$). Un champ de vitesse ou de contrainte est imposé à tous les noeuds de la surface définie par ($y = 7$). Pour tenir compte des symétries, la surface définie par ($x = 7$) reste libre (voir figure 2.3).

L'un des buts de cette implémentation, était de tester la possibilité de ce code de fournir des résultats concernant la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion, pour des faibles sensibilités à la vitesse de déformation. En utilisant ce code, des problèmes de convergence similaires à ceux rencontrés par Gilormini & Germain (1987) sont apparus. La limitation en sensibilité à la vitesse de déformation est m = 0.1. En dessous de cette valeur la convergence est de plus en plus difficile. Nous nous limitons aux résultats donnés par Gilormini & Michel (1999) pour tester l'implémentation de la loi puissance dans le code ABAQUS.

Quelques résultats que nous avons obtenu par ce code sont présentés dans le chapitre 3.

2.4.2 Résultat des calculs

Le problème considéré est défini par trois paramètres, la sensibilité à la vitesse de déformation m (la même dans l'inclusion et dans la matrice), le rapport de rigidité entre l'inclusion et la matrice η et le rapport de forme de l'inclusion λ. Deux types de chargement ont été considérés : en vitesse ($v = \dot{E}\ x$) et en contrainte ($t = \Sigma n$). Dans le cas d'une compression axisymétrique, Gilormini & Michel (1999) ont défini le coefficient de localisation δ comme le rapport des composantes axiales (axe 1) des vitesses de déformation dans l'inclusion et à l'infini $\delta = \frac{\langle \dot{\epsilon}_{11} \rangle}{\dot{\epsilon}_{11}^{\infty}}$, Sur le tableau 2.1, nous avons représenté les résultats concernant la localisation de la vitesse de déformation pour différents rapports de rigidités et pour une sensibilité à la vitesse de déformation $m = 0.3$. La comparaison éffectuée entre le code ABAQUS (Gilormini & Michel), et le code développé par Gilormini & Germain (1987) montre que les résultats sont très similaires. Ces résultats sont donnés pour différents types d'éléments disponibles dans le code ABAQUS. On constate également, à la lecture du tableau 2.1, des petites différences entre les éléments à quatre noeuds CAX4RH et ceux à huit noeuds CAX8RH dans le cas axisymétrique.

	< ABAQUS				>
η	CAX4RH	CAX4H	CAX8RH	CAX8H	J.C.M
2	0.462	0.462	0.463	0.466	0.464
2.5	0.303	0.303	0.304	0.307	0.305
5	0.047	0.047	0.048	0.048	0.048

Tableau 2.1 : Influence du type d'éléments utilisés par le code Abaqus sur la localisation de la vitesse de déformation, comparaison des résultats des éléments finis de Gilormini et Germain (J.C.M) (1987) et ceux de Gilormini & Michel (1999) pour $m = 0.3$.

Dans le cas linéaire, les résultats concernant la localisation de la vitesse de déformation

dans l'inclusion sont représentés dans le tableau 2.2. Ces résultats sont obtenus par le code ABAQUS pour différents chargements et pour différentes fractions volumiques d'inclusion. Ces auteurs ont montrés que le type de chargement appliqué (en vitesse ou en contrainte) a peut d'influence sur les résultats obtenus. Concernant la teneur en inclusion, deux fractions volumiques d'inclusion ont été considérées 0.1 et 0.01. Les différences ont tendance a croître dans le cas des inclusions molles. De plus, la précision du calcul sur la localisation de la vitesse de déformation est meilleure pour une faible fraction volumique de l'inclusion.

η	fra. vol. de l'inclusion	ch. en vitesse	ch. en contrainte	Résultats analytique
0.1	0.1	1.557	1.568	1.563
0.1	0.01	1.562	1.563	1.563
10	0.1	0.218	0.216	0.217
10	0.01	0.218	0.217	0.217

Tableau 2.2 : Influence du passage d'un chargement en vitesse à un chargement en contrainte et l'effet de la fraction volumique sur la localisation de la vitesse de déformation. Inclusion et matrice newtoniennes (Gilormini & Michel).

A partir de ces deux tests, on peut conclure que les résultats obtenus par le code ABAQUS sont très similaire à ceux de Gilormini & Germain (1987). L'implémentation de la loi puissance (rigide viscoplastique) dans le code ABAQUS est considéré comme satisfaisante.

2.5 Conclusion, bilan des trois approches

* La méthode analytique a été utilisée pour résoudre le problème d'une inclusion viscoplastique ellipsoïdale isolée dans une matrice de comportement newtonien sollicitée de façon uniforme à l'infini. Dans le cas particulier de l'inclusion newtonienne, le tenseur de vitesse de

déformation dans l'inclusion est donné par :

$$\dot{\varepsilon}= \left[I - \left(I - \frac{k_I}{k_M} I\right) S\right]^{-1} \dot{\varepsilon}_\infty \tag{2.18}$$

Cette relation est analogue à la relation d'Eshelby établie en élasticité :

$$\varepsilon = \left[I + S\left(L^{-1}L' - I\right)\right]^{-1} \varepsilon_\infty \tag{2.19}$$

où L et L′ sont les tenseurs de compliance élastique de la matrice et de l'inclusion, I le tenseur identité du quatrième ordre et S le tenseur d'Eshelby.

Bien que limitée au cas très particulier de la matrice newtonienne, cette approche analytique a permis de dégager les résultats suivants (Gilormini (1985)) :

- Existence d'une valeur critique du rapport de rigidité (localisation nulle dans l'inclusion) pour une inclusion parfaitement plastique dans une matrice newtonienne.

- Localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion qui tend vers l'unité (borne de Taylor) lorsque celle ci est très allongée ou très aplatie.

* La méthode variationnelle a été développée par Gilormini & Montheillet (1986) à partir d'un principe variationnel établi pour le cas d'une inclusion viscoplastique située dans une matrice viscoplastique infinie. Cette méthode a permis de généraliser les résultats acquis avec la méthode analytique. La solution ainsi développée par cette méthode va permettre d'engendrer une famille de champs de vitesse qui sera utilisée par la méthode des éléments finis. Ls ymbole Σ sur les figures 2.3-2.5 représente la même chose que le symbole η utilisé dans le texte.

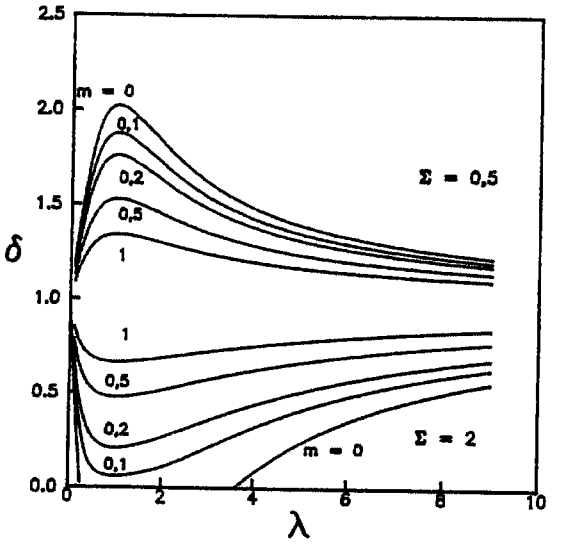


Figure 2.3 : *Variation de la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion dure* ($\Sigma = 2$) *ou molle* ($\Sigma = 0.5$) *en fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation, dans le cas de la compression plane (Vernusse (1993)).*

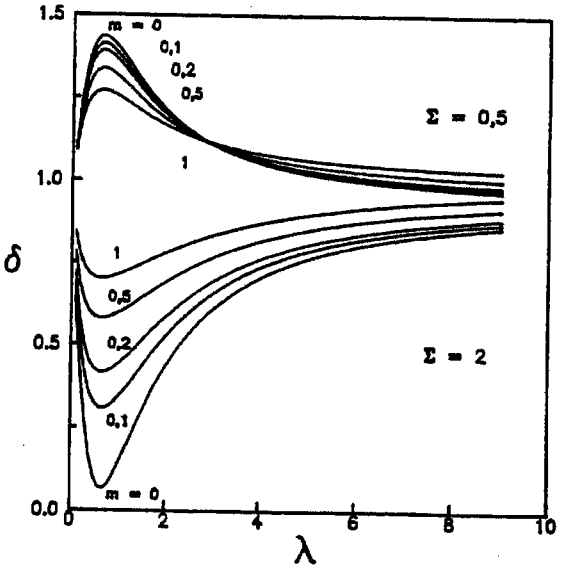


Figure 2.4 : *Variation de la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion dure* ($\Sigma = 2$) *ou molle* ($\Sigma = 0.5$) *en fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation, dans le cas de la compression axisymétrique (Vernusse (1993)).*

Les figures 2.3-2.4 présentent l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion en fonction du rapport de forme pour une inclusion dure ($\Sigma = 2$) ou molle ($\Sigma = 0.5$), en déformation plane et axisymétrique, respectivement. En conclusion, on remarque que ce sont les sections globulaires : inclusion sphérique (compression axisymétrique) et inclusion cylindrique de section circulaire (compression plane), qui perturbent le plus l'écoulement de la matrice. Par contre, les cas où l'inclusion soit aplatie ou allongée perturbent moins l'écoulement.

* La méthode des éléments finis a été utilisée pour aborder également le problème de l'inclusion viscoplastique située dans une matrice viscoplastique. L'optimisation du maillage a été menée à partir de la solution analytique. L'homogénéité de la vitesse de déformation dans l'inclusion n'est plus vérifiée lorsque la matrice a un comportement visqueux non linéaire. Des informations sur la distribution de la vitesse de déformation dans l'inclusion peuvent être obtenues par la méthode des éléments finis. Cette méthode montre que l'hétérogénéité de la vitesse de déformation à l'intérieur de l'inclusion cylindrique ou sphérique dans le cas viscoplastique, ne se manifeste de façon notable que pour une sensibilité à la vitesse de déformation faible ($m < 0.25$). Gilormini et Germain ont montré que la vitesse de déformation a une tendance à se localiser au centre de l'inclusion (où la vitesse de déformation est plus élevée que la moyenne, que l'inclusion soit dure ou molle) et sur les bissectrices des axes principales en déformation plane (pour les inclusions dures uniquement). La figures 2.5 présentent l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion en fonction du rapport de rigidité Σ (Briottet et al).

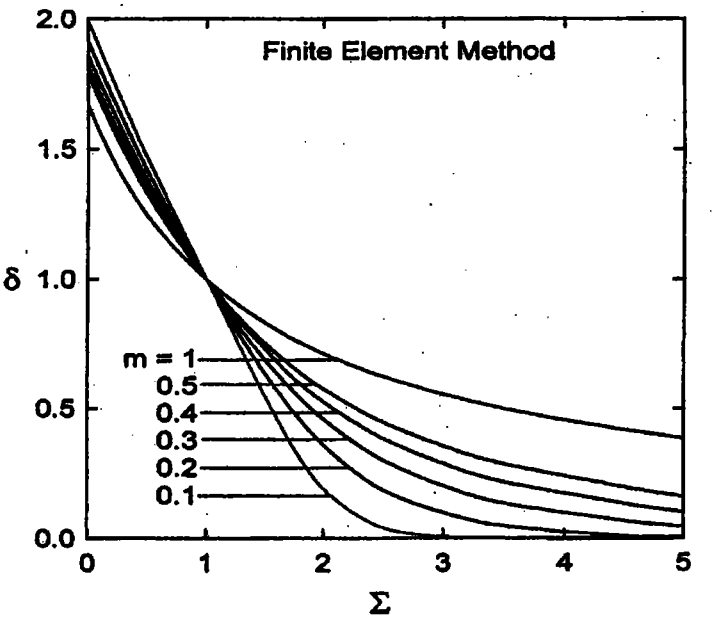


Figure 2.5 : *Variation de la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion en fonction du rapport de rigidité et pour différentes valeur de sensibilité à la vitesse de déformation, dans le cas de la compression axisymétrique (Briottet et al. (1999)).*

Le chapitre 3 sera par ailleurs l'occasion de présenter des résultats plus détaillés fournis par l'approche analytique, la méthode variationnelle et la méthode des éléments finis, lors de la comparaison de ces trois méthodes avec l'approche tangente.

Chapitre 3

Validation du modèle tangent anisotrope dans le problème de l'inclusion

3.1 Introduction

Le problème de l'inclusion ellipsoïdale isolée dans une matrice de dimension infinie a été plusieurs fois abordé par différents auteurs. En 1957, Eshelby a résolu le problème de l'interaction entre une inclusion ellipsoïdale soumise à une déformation inélastique libre uniforme et noyée dans un milieu infini non chargé. Son travail a donné lieu à de nombreuses extensions.

Dans le cas d'une inclusion viscoplastique ellipsoïdale isolée au sein d'une matrice chargée à l'infinie, une solution analytique pour un comportement non linéaire ne peut être obtenue. Gilormini et Germain (1987) ont abordé pour la première fois, à l'aide de la méthode des éléments finis le problème de l'inclusion-matrice pour un comportement rigide viscoplastique. Ces résultats ont été utilisés ensuite par Stringfellow et Parks (1991) pour valider leur modèle. En se basant sur cette analyse par éléments finis, Molinari et Tóth (1994) ont introduit un paramètre scalaire dans la loi d'interaction, originellement proposée par Molinari et al. (1987) afin de faire coïncider les prédictions du modèle autocohérent viscoplastique avec ceux des éléments finis réalisés par Gilormini et Germain (1987). Très récemment, Molinari, El-

Houdaigui & Tóth (2000) ont utilisé à nouveau les résultats des calculs par éléments finis pour valider le modèle tangent anisotrope dans le cas d'une inclusion sphérique viscoplastique entourée d'une matrice viscoplastique infinie.

L'objet de ce chapitre est l'étude de la localisation de la vitesse de déformation dans une inclusion viscoplastique ellipsoïdale entourée par une matrice viscoplastique infinie, sollicitée en compression axisymétrique et en compression plane. L'originalité de ce travail réside dans l'utilisation d'un module tangent anisotrope dans la formulation tangente viscoplastique pour le problème inclusion-matrice. Les résultats obtenus à l'aide du modèle tangent sont confrontés aux prédictions des éléments finis de Gilormini et Germain (1987). Cette étude est réalisée pour différents rapports de rigidité de l'inclusion et de la matrice, et pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation. Il est à noter que l'inclusion et la matrice n'ont pas nécessairement la même sensibilité à la vitesse de déformation. Différentes formes d'inclusions sont prises en compte : sphérique, allongée et aplatie.

3.2 Problème de l'inclusion

3.2.1 Problème de l'inclusion linéaire

3.2.1.1 Position du problème

Considérons une inclusion ellipsoïdale newtonienne dans une matrice homogène newtonienne chargée à l'infini (*fig.* 3.1). Le gradient de la vitesse locale $\underline{l}$ est défini par :

$$\underline{l}(\underline{x}) = \underline{grad}\underline{v}(\underline{x}) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} \tag{3.1}$$

où $\underline{v}$ est le vecteur vitesse et $\underline{x}$ le vecteur position.

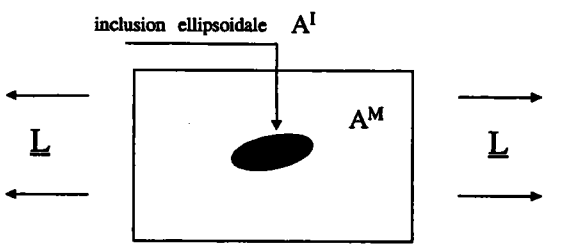


Figure 3.1 : *Problème de l'inclusion linéaire.*

Dans le cas linéaire, le comportement newtonien supposé incompressible dans l'inclusion et dans la matrice est donné par les relations suivantes :

$$\underline{s} = \underline{\underline{A}}^I : \underline{d} \tag{3.2}$$

$$\underline{S} = \underline{\underline{A}}^M : \underline{D} \tag{3.3}$$

où $\underline{s}$ et $\underline{S}$ sont respectivement les déviateurs des contraintes liés à l'inclusion et à la matrice. $\underline{d}$ et $\underline{D}$ sont respectivement, les vitesses de déformation dans l'inclusion et dans la matrice et sont reliées respectivement aux gradients de vitesse dans l'inclusion $\underline{l}^I$ et celui appliqué à l'infini $\underline{L}$ par les relations suivantes :

$$\underline{d} = \frac{1}{2}(\underline{l}^I + (\underline{l}^I)^T) \tag{3.4}$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{L} + (\underline{L})^T) \tag{3.5}$$

$\underline{\underline{A}}^I$ et $\underline{\underline{A}}^M$ désignent les modules homogènes de l'inclusion et de la matrice, ces deux tenseurs du quatrième ordre satisfont les conditions de symétries mineures et majeures suivantes :

$$A^i_{ijkl} = A^i_{jikl} = A^i_{ijlk} \qquad \text{avec} \qquad i = I, M \tag{3.6}$$

$$A^i_{ijkl} = A^i_{klij} \qquad \text{avec} \qquad i = I, M \tag{3.7}$$

Dans la suite, nous recherchons à connaître la relation de localisation entre le gradient de vitesse dans l'inclusion ($\underline{l} = \underline{l}^I$) et le gradient de vitesse uniforme ($L_{ij} = V_{i,j}$) imposé à l'infini. La solution de ce problème est similaire à la solution d'Eshelby dans le cas d'un comportement élastique ($cf.$ Annexe B) Cette solution montre que la déformation est uniforme dans l'inclusion.

3.2.1.2 Loi de localisation

En l'absence de forces de volume, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \tag{3.8}$$

En utilisant les lois de comportement (3.2) ou (3.3) suivant le point matériel considéré (inclusion ou matrice), on obtient la relation suivante :

$$(A_{ijkl} v_{k,l})_{,j} + p_{,i} = 0 \tag{3.9}$$

avec $\underline{\underline{A}}$ le module local, $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^I$ dans l'inclusion et $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^M$ dans la matrice. Un gradient de vitesse uniforme $\underline{L}$ et une pression P sont appliqués à l'infini :

$$\lim_{x \to \infty} \underline{l} = \underline{L} \tag{3.10}$$

$$\lim_{x \to \infty} p = P \tag{3.11}$$

avec $p = \frac{1}{3} tr\, \underline{\sigma}$, $\underline{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy.

Avec les définitions suivantes :

$$\delta \underline{\underline{A}}^M(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}^I - \underline{\underline{A}}^M \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Inclusion} \tag{3.12}$$

$$\delta \underline{\underline{A}}^M(\underline{x}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Matrice} \tag{3.13}$$

l'équation (3.9) conduit à l'équation de type Navier :

$$A^M_{ijkl} v_{k,lj} + p_{,i} + f_i = 0 \tag{3.14}$$

où f_i peut être considéré comme une force volumique fictive :

$$f_i = (\delta A^M_{ijkl} v_{k,l})_{,j} \tag{3.15}$$

Puisque la matrice et l'inclusion sont supposées incompressibles, il vient la relation supplé-

mentaire suivante :

$$v_{i,i} = 0 \tag{3.16}$$

Les équations (3.14) et (3.16) représentent un système qui peut être résolu par la méthode des fonctions de Green. Les fonctions de Green G_{ik} et H_k associées respectivement à v_i et p sont des solutions du système d'équations suivant :

$$A^M_{ijkl} G_{km,lj}(\underline{x} - \underline{x}') + H_{m,i}(\underline{x} - \underline{x}') + \delta_{im}\delta(\underline{x} - \underline{x}') = 0 \tag{3.17}$$

$$G_{km,k}(\underline{x} - \underline{x}') = 0 \tag{3.18}$$

Nous considérons que le milieu est infini et on suppose qu'à l'infini $G_{km} = 0$ et $H_m = 0$. $\delta(\underline{x} - \underline{x}')$ désigne la fonction de Dirac en $\underline{x}'$. Pour m fixé, le terme $\delta_{im}\delta(\underline{x} - \underline{x}')$ représente la $i^{ème}$ composante d'une force unité concentrée au point $\underline{x}'$ et parallèle à la direction m.

A partir des fonctions de Green, il est possible d'en déduire à la fois les champs de vitesse v_i et de pression p. En effet il vient.

$$v_n(\underline{x}) = V_n + \int_{R^s} G_{ni}(\underline{x} - \underline{x}') f_i(\underline{x}') d\underline{x}' \tag{3.19}$$

$$p(\underline{x}) = P + \int_{R^s} H_i(\underline{x} - \underline{x}') f_i(\underline{x}') d\underline{x}' \tag{3.20}$$

où le champ de vitesse V_n et de pression P définissent les conditions aux limites.

En supposant que le gradient de la vitesse $\underline{l}^I$ est uniforme à l'intérieur de l'inclusion ellipsoïdale, et sachant que $\delta\underline{\underline{A}}^M(x) = 0$ à l'extérieur de l'inclusion, on obtient ($cf.$ Annexe B) :

$$\underline{f} = div(\delta\underline{\underline{A}}^M : \underline{grad}\underline{v}) = -(\underline{\underline{A}}^I - \underline{\underline{A}}^M) : \underline{l}^I . \underline{n}\delta(\partial I) \tag{3.21}$$

avec $\delta(\partial I)$ est la distribution de Dirac associée à la surface ∂I de l'inclusion. En substituant l'expression de $\underline{f}$ dans l'équation (3.19) il vient :

$$l_{nk}(\underline{x}) = v_{n,k}(\underline{x}) = L_{nk} + \left(\int_I G_{ni,jk}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) (A^I_{ijpq} - A^M_{ijpq}) l^I_{pq} \tag{3.22}$$

De la même façon, $p(x)$ est donnée par :

$$p(\underline{x}) = P + \left(\int_I H_{i,j}(\underline{x} - \underline{x}')d\underline{x}' \right) (A^I_{ijpq} - A^M_{ijpq}) l^I_{pq} \tag{3.23}$$

On introduit maintenant les notations suivantes :

$$T_{nkij} = \int_I G_{ni,jk}(\underline{x} - \underline{x}')d\underline{x}' \tag{3.24}$$

$$\Delta_{ij} = \int_I H_{i,j}(\underline{x} - \underline{x}')d\underline{x}' \tag{3.25}$$

On peut montrer que ces deux quantités ne dépendent pas de $\underline{x}$, pour tout point dans l'inclusion.

En introduisant la relation (3.24) dans (3.22), on obtient sous forme tensorielle le gradient de vitesse en tout point :

$$\underline{l}(\underline{x}) = \underline{L} + \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}}^I - \underline{\underline{A}}^M) : \underline{l}^I \tag{3.26}$$

Par conséquent, le gradient de vitesse $\underline{l}^I$ dans l'inclusion est donné par :

$$\underline{l}^I = \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{T}} : (\underline{\underline{A}}^I - \underline{\underline{A}}^M)\right]^{-1} : \underline{L} \tag{3.27}$$

A noter que la condition : "$\underline{l}^I$ est uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale" est vérifiée puisque $\underline{\underline{T}}$ définie par (3.24), ne dépend pas de $\underline{x}$ pour $\underline{x}$ décrivant l'inclusion.

En utilisant les lois de comportement (3.2) et (3.3), la relation (3.27) devient :

$$\underline{l}^I - \underline{L} = \underline{\underline{T}} \left[\underline{s} - \underline{S} - \underline{\underline{A}}^M : (\underline{d} - \underline{D})\right] \tag{3.28}$$

En définissant les tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{B}}$ possédant les symétries mineure et majeure comme suit :

$$P_{ijkl} = -\frac{1}{4}(T_{ijkl} + T_{jikl} + T_{ijlk} + T_{jilk}) \tag{3.29}$$

$$B_{ijkl} = \frac{1}{4}(T_{ijkl} - T_{jikl} + T_{ijlk} - T_{jilk}) \tag{3.30}$$

et en prenant séparément les parties symétrique et antisymétrique de la relation (3.28), il est

possible de définir la différence des vitesses de déformation $\underline{d} - \underline{D}$ et des vitesses de rotation $\underline{\omega} - \underline{\Omega}$ par les relations suivantes :

$$\underline{d} - \underline{D} = -\underline{\underline{P}}_M \left[\underline{s} - \underline{S} - \underline{\underline{A}}^M : (\underline{d} - \underline{D})\right] \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \underline{\omega} - \underline{\Omega} &= \underline{\underline{B}} \left[\underline{s} - \underline{S} - \underline{\underline{A}}^M : (\underline{d} - \underline{D})\right] \\ &= -\underline{\underline{B}}\, \underline{\underline{P}}_M^{-1} : (\underline{d} - \underline{D}) \end{aligned} \tag{3.32}$$

où $\underline{\omega}$ et $\underline{\Omega}$ représentent, respectivement, les tenseurs de rotation dans l'inclusion et dans la matrice, définies par :

$$\underline{\omega} = \frac{1}{2}(\underline{l}^I - (\underline{l}^I)^T) \tag{3.33}$$

$$\underline{\Omega} = \frac{1}{2}(\underline{L} - (\underline{L})^T) \tag{3.34}$$

Après arrangement, la relation (3.31) conduit à :

$$\underline{s} - \underline{S} = \left[\underline{\underline{A}}^M - \underline{\underline{P}}_M^{-1}\right] : (\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.35}$$

Nous avons ainsi relié la différence de déviateurs de contrainte $\underline{s} - \underline{S}$ à la différence de vitesses de déformation $\underline{d} - \underline{D}$. Cette loi d'interaction permettra de calculer les vitesses de déformation dans l'inclusion.

En effet, en utilisant les lois de comportement (3.2) et (3.3), la loi d'interaction (3.31) fournit la loi de localisation suivante :

$$\underline{d} = \left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{P}}_M : (\underline{\underline{A}}^M - \underline{\underline{A}}^I)\right]^{-1} \underline{D} \tag{3.36}$$

Elle exprime la vitesse de déformation dans l'inclusion en fonction de la vitesse de déformation appliquée à l'infini.

Des expressions analytiques peuvent être obtenues quand le comportement de la matrice newtonienne est isotrope. Dans ce cas, le module de viscosité de la matrice s'écrit :

$$\underline{\underline{A}}^M = 2\mu_M \underline{\underline{K}} \tag{3.37}$$

Le tenseur $\underline{\underline{P}}_M$ donné par la relation (3.29), vaut alors pour une inclusion sphérique :

$$\underline{\underline{P}}_M = \frac{1}{5\mu_M}\underline{\underline{K}} \tag{3.38}$$

La relation (3.35) devient ainsi :

$$\underline{s} - \underline{S} = -3\mu_M : (\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.39}$$

De plus, si l'inclusion a un comportement isotrope ($\underline{s} = 2\mu_I \underline{d}$) $\left[\underline{\underline{A}}^I = 2\mu_I \underline{\underline{K}}\right]$, la loi de localisation (3.36) s'écrit simplement :

$$\underline{d} = \frac{5\mu^M}{2\mu^I + 3\mu^M}\underline{D} \tag{3.40}$$

La relation ainsi obtenue dans le cas newtonien est identique à celle énoncée par Eshelby dans le cas élastique (*cf.* Annexe B).

3.2.2 Problème de l'inclusion non linéaire

3.2.2.1 Position du problème

Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale newtonienne située au sein d'une matrice newtonienne, la vitesse de déformation est homogène dans l'inclusion. Par contre, si la matrice est non linéaire, cette propriété n'est plus conservée puisque le comportement de la matrice perd sa linéarité. Celle-ci apparaît comme une des conditions nécessaires à l'homogénéité de la vitesse de déformation dans l'inclusion.

Dans la suite, l'hypothèse d'uniformité de la vitesse de déformation $\underline{d}$ dans l'inclusion est admise dans une approche tangente avec un développement au premier ordre de la loi de comportement non linéaire.

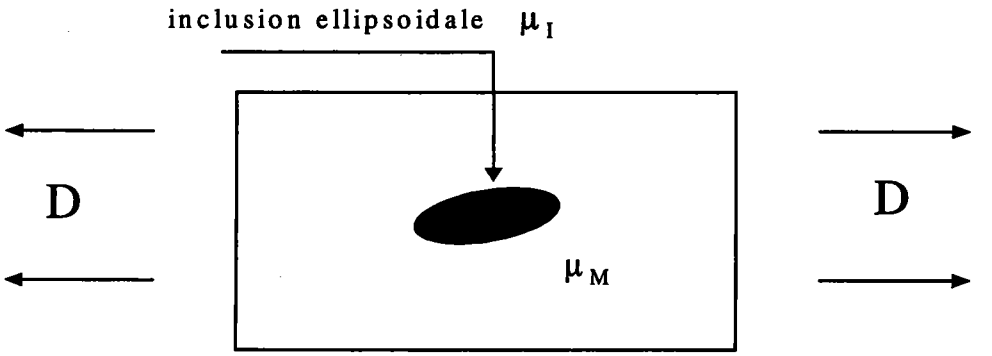


Figure 3.2 : *Problème d'inclusion ellipsoidale dans une matrice infinie.*

Après avoir développé le problème de l'inclusion-matrice pour des comportements linéaires, nous allons nous attacher à résoudre ce même problème lorsque à la fois l'inclusion et la matrice ont un comportement non linéaire (*fig.* 3.2). Les comportements non linéaires respectivement dans l'inclusion et dans la matrice sont donnés sous la forme suivante :

$$d_{ij} = \frac{1}{2\mu_I(d^{eq})} s_{ij} \tag{3.41}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2\mu_M(D^{eq})} S_{ij} \tag{3.42}$$

où $d^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\underline{d} : \underline{d}}$ et $D^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\underline{D} : \underline{D}}$ sont respectivement les vitesses de déformation équivalentes dans l'inclusion et dans la matrice au sens de von Mises.

Dans le cas non linéaire, les coefficients μ_I et μ_M sont donnés par :

$$\mu_I(d^{eq}) = \frac{1}{3} k_I (d^{eq})^{m_I - 1} \tag{3.43}$$

$$\mu_M(D^{eq}) = \frac{1}{3} k_M (D^{eq})^{m_M - 1} \tag{3.44}$$

où k_I et k_M représentent, respectivement, les rigidités de l'inclusion et de la matrice, m_I et m_M respectivement, les sensibilités à la vitesse de déformation de l'inclusion et de la matrice.

Pour $m_I = m_M = m = 1$, le comportement est linéaire et la vitesse de déformation dans

l'inclusion $\underline{d}$ est uniforme, et la loi de localisation a été obtenue dans la section 2.1 (relation (3.40)).

La loi d'interaction tangente va être obtenue par un calcul similaire à celui présenté dans la section 2.1 pour le cas linéaire.

3.2.2.2 Loi de localisation tangente

Le comportement tangent de la matrice est obtenu par développement de Taylor au premier ordre de la loi de comportement non linéaire (3.42) autour d'une vitesse de déformation appliquée à l'infini $\underline{D}^*$:

$$\underline{S}(\underline{D}) = \underline{\underline{A}}^{tg}_M(\underline{D}) : \underline{D}^* + \underline{S}^{\circ}_M(\underline{D}) \tag{3.45}$$

avec

$$\underline{S}^{\circ}_M(\underline{D}) = \underline{S}(\underline{D}) - \underline{\underline{A}}^{tg}_M(\underline{D}) : \underline{D} \tag{3.46}$$

De la même façon que (3.45) on peut écrire dans le cas de l'inclusion :

$$\underline{s}(\underline{d}) = \underline{\underline{A}}^{tg}_I(\underline{d}) : \underline{d} + \underline{s}^{\circ}_I(\underline{d}) \tag{3.47}$$

Avec la définition suivante de $\delta\underline{\underline{A}}^{tg}$:

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{x}) &= \underline{\underline{A}}^{tg}_I(\underline{d}) - \underline{\underline{A}}^{tg}_M(\underline{D}) \quad \text{pour} \quad \underline{x} \in \text{Inclusion} \\ \delta\underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{x}) &= 0 \quad \text{pour} \quad \underline{x} \in \text{Matrice} \end{aligned} \tag{3.48}$$

et de $\delta\underline{S}^0$

$$\begin{aligned} \delta\underline{S}^0(\underline{x}) &= \underline{S}^0_I(\underline{d}) - \underline{S}^0_M(\underline{D}) \quad \text{pour} \quad \underline{x} \in \text{Inclusion} \\ \delta\underline{S}^0(\underline{x}) &= 0 \quad \text{pour} \quad \underline{x} \in \text{Matrice} \end{aligned} \tag{3.49}$$

l'équation de type Navier (3.14) devient :

$$A^{tg}_{Mijkl} v_{k,lj} + p_{,i} + f_i = 0 \tag{3.50}$$

où la force fictive f_i est donnée par :

$$f_i = (\delta A^{tg}_{Mijkl} v_{k,l} + \delta S^0_{ij})_{,j} \tag{3.51}$$

Par analogie avec la solution précedente, en remplaçant $\underline{\underline{A}}_M$ (resp. $\underline{\underline{P}}_M^{-1}$) par $\underline{\underline{A}}^{tg}_M(\underline{\underline{D}})$ (resp. $\underline{\underline{P}}^{tg-1}_M$) dans l'équation (3.35), la loi d'interaction s'écrit :

$$\underline{s} - \underline{S} = \left[\underline{\underline{A}}^{tg}_M(\underline{\underline{D}}) - \underline{\underline{P}}^{tg-1}_M\right] : (\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.52}$$

Elle sera le centre de la formulation tangente proposée dans la section suivante.

3.2.2.3 Approche sécante

Dans le cas isotrope, le module sécant de la matrice peut être défini à partir de la relation (3.42) par :

$$\underline{\underline{A}}^s_M(\underline{\underline{D}}) = 2\mu_M(D^{eq})\underline{\underline{K}} \tag{3.53}$$

De la même façon de la section précedente, en remplaçant dans l'équation (3.35) $\underline{\underline{A}}_M$ (resp. $\underline{\underline{P}}_M^{-1}$) par $\underline{\underline{A}}^s_M$ (resp. $\underline{\underline{P}}^{s-1}_M$), on obtient la loi d'interaction sécante suivante :

$$\underline{s} - \underline{S} = \left[\underline{\underline{A}}^s_M - \underline{\underline{P}}^{s-1}_M\right] : (\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.54}$$

En utilisant les relations (3.41) et (3.42), cette loi d'interaction sécante devient :

$$\begin{aligned} \underline{s} - \underline{S} &= 2\mu_I(d^{eq})\underline{d} - 2\mu_M(D^{eq})\underline{D} \\ &= \left[2\mu_M(D^{eq})\underline{\underline{K}} - \underline{\underline{P}}^{s-1}_M\right] : (\underline{d} - \underline{D}) \end{aligned} \tag{3.55}$$

La relation (3.35) fournit un système d'équations à cinq inconnus. Qui sont les composantes du vecteur vitesse de déformation $\underline{d}$ obtenues par vectorisation de la matrice $\underline{d}$ (Ahzi (1987)).

En introduisant les notations suivantes :

$$\eta = k_I/k_M \qquad et \qquad \delta = d^{eq}/D^{eq} \tag{3.56}$$

Et en injectant les relations (3.43) et (3.44) dans (3.55), la localisation de la vitesse de défor-

mation s'exprime simplement de la manière suivante :

$$\delta = \frac{5}{2\eta\delta^{m-1} + 3} \tag{3.57}$$

cette relation est similaire à celle obtenue par Stringfellow & Parks (1991).

3.3 Solution du problème de l'inclusion par une approche tangente anisotrope

3.3.1 Formulation du problème

Dans cette partie, on présente la solution du problème d'une inclusion viscoplastique ellipsoïdale de révolution au sein d'une matrice viscoplastique infinie (*fig.* 3.2). L'inclusion et la matrice ont un comportement viscoplastique modélisé par les lois puissances données par (3.41) et (3.42).

Une vitesse de déformation macroscopique $\underline{D}$ est appliquée à l'infini ; ce tenseur vérifie la condition d'incompressibilité ($D_{ii} = 0$). Sous ce chargement uniforme, on cherche à déterminer la vitesse de déformation $\underline{d}$ dans l'inclusion, supposée uniforme. Il n'existe pas une solution exacte du problème nonlinéaire considéré. Cependant lorsqu'une procédure de linéarisation est utilisée pour approcher le comportement non linéaire de la matrice, une solution explicite peut être obtenue (loi d'interaction (3.52)). La formulation tangente présentée ici est basée sur cette loi d'interaction générale.

3.3.1.1 Approche tangente

On choisit ici d'approcher le comportement non linéaire :

$$\underline{D}^* \longmapsto \underline{S}^* = 2\mu_M(D^{*eq})\underline{D}^* \tag{3.58}$$

par l'approche tangente obtenue à partir d'un développement de Taylor au premier ordre autour de la vitesse de déformation appliquée à l'infini $\underline{D}$:

$$\underline{D}^* \longmapsto \underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) : \underline{D}^* + \underline{S}^0(\underline{D}) \tag{3.59}$$

avec

$$\underline{S}^0(\underline{D}) = 2\mu_M(D^{eq})\underline{D} - \underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) : \underline{D} \tag{3.60}$$

Le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D})$ désignant le module tangent viscoplastique associé à $\underline{D}$ est défini par :

$$\underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) = \frac{\partial S^*}{\partial D^*}(\underline{D}) \tag{3.61}$$

En utilisant la réponse affine (3.59) à la place de (3.58), la loi d'interaction tangente obtenue est :

$$\underline{s} - \underline{S} = (\underline{\underline{A}}^{tg} - \underline{\underline{P}}^{tg^{-1}})(\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.62}$$

Les fonctions de Green G_{ki} et H_m associées au module tangent $\underline{\underline{A}}^{tg}$ sont solutions du système d'équations suivant :

$$A^{tg}_{ijkl}G^{tg}_{km,lj}(\underline{r} - \underline{r}') + H^{tg}_{m,i}(\underline{r} - \underline{r}') + \delta_{im}\delta(\underline{r} - \underline{r}') = 0 \tag{3.63}$$

$$G^{tg}_{km,k} = 0 \tag{3.64}$$

Le tenseur d'interaction $\underline{\underline{P}}^{tg}$ figurant dans (3.62) dépend de la fonction de Green G_{ki} et de la forme de l'inclusion par l'intermédiaire d'une intégration sur le volume V_I de l'inclusion :

$$T^{tg}_{ijkl} = \int_{V_I} G^{tg}_{ij,kl}(\underline{r} - \underline{r}')dr' \tag{3.65}$$

$$P^{tg}_{ijkl} = -\frac{1}{4}(T^{tg}_{ijkl} + T^{tg}_{jikl} + T^{tg}_{ijlk} + T^{tg}_{jilk}) \tag{3.66}$$

La loi d'interaction (3.62) est applicable à tous les matériaux rigides viscoplastiques. Dans le cas particulier de la loi viscoplastique (3.58), le module tangent anisotrope est donné par :

$$A^{tg}_{ijkl}(D) = 2\mu_M.(D^{eq})^{-2}\left[\frac{2}{3}(m-1)D_{ij}D_{kl} + (D^{eq})^2 K_{ijkl}\right] \tag{3.67}$$

avec

$$K_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{3.68}$$

Le module tangent venant d'être défini (3.67), les tenseurs de Green G_{ki} et H_m sont déduits

du système d'équations (3.63, 3.64). Ainsi le tenseur d'interaction $\underline{\underline{P}}^{tg}$ peut être calculé grace aux relations (3.65, 3.66), le calcul est développé dans l'Annexe A. Dans l'équation (3.62), les quantités $\underline{s}$ et $\underline{S}$ sont respectivement liées à $\underline{d}$ et $\underline{D}$ par les relations (3.41) et (3.42). Finalement, l'inconnu du problème, à savoir la vitesse de déformation dans l'inclusion $\underline{d}$, est obtenu en résolvant l'équation non linéaire (3.62) par la méthode de Newton-Raphson.

Il est à noter que la vitesse de déformation dans l'inclusion a été supposée uniforme dans l'inclusion, même si, dans le cas d'un comportement non linéaire cette hypothèse est mise en défaut. Par la suite, la comparaison des résultats de l'approche tangente avec les résultats des éléments finis, indique que l'hypothèse d'uniformité de la vitesse de déformation dans l'inclusion est satisfaisante, lorsqu'on s'intéresse qu'au calcul de la vitesse de déformation moyenne dans l'inclusion.

3.3.1.2 Approche sécante

Si à présent le comportement de la matrice est linéarisé autour de $\underline{D}$ à l'aide d'une approche sécante, la relation (3.59) est alors remplacée par :

$$\underline{D}^* \longmapsto \underline{\underline{A}}^S(\underline{D}) : \underline{D}^* \tag{3.69}$$

Le module sécant peut être défini de deux façon différentes. L'équation (3.58), fournit l'expression suivante :

$$\underline{\underline{\tilde{A}}}^S(\underline{D}) = 2\mu_M(D^{eq})\underline{\underline{K}} \tag{3.70}$$

D'autre part, en utilisant la relation démontrée par Hutchinson (1978), qui relie le module tangent et sécant, $\underline{\underline{A}}^S(\underline{D})$ peut valoir aussi :

$$\underline{\underline{A}}^S(\underline{D}) = \frac{1}{m_M}\underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) \tag{3.71}$$

Les deux modules sécants conduisent à la même contrainte macroscopique :

$$\underline{S} = \underline{\underline{A}}^S(\underline{D}) : \underline{D} = \underline{\underline{\tilde{A}}}^S(\underline{D}) : \underline{D} \tag{3.72}$$

En utilisant (3.71), Molinari & Tôth (1994) ont montré également que :

$$\underline{\underline{P}}^S = m_M \underline{\underline{P}}^{tg}. \tag{3.73}$$

La loi d'interaction (3.54) associée à l'approche sécante est :

$$\underline{s} - \underline{S} = (\underline{\underline{A}}^S - \underline{\underline{P}}^{S^{-1}})(\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.74}$$

En introduisant (3.71) et (3.73) dans la relation (3.74), la deuxième loi d'interaction sécante s'écrit :

$$\underline{s} - \underline{S} = \frac{1}{m_M}(\underline{\underline{A}}^{tg} - \underline{\underline{P}}^{tg^{-1}})(\underline{d} - \underline{D}) \tag{3.75}$$

La comparaison de cette équation avec la loi d'interaction tangente (3.62) indique la présence du scalaire $(\frac{1}{m_M})$. Cette approche sécante coïncide avec le modèle de Taylor pour un matériau parfaitement plastique ($m_M = 0$) , et avec le modèle tangent dans le cas linéaire $m_M = 1$. Il est clair que cette loi d'interaction (3.75), qui simule de fortes interactions est plus rigide que la loi d'interaction tangente (3.62).

3.3.2 Comparaison avec les résultats des éléments finis pour différents chargements et formes d'inclusions

Dans ce paragraphe, la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion est obtenue avec l'approche tangente pour différentes formes d'inclusions et pour différents rapports de rigidité. Deux cas relativement simples abordés dans les différentes approches citées dans le chapitre 2 sont étudiés : inclusion cylindrique de section elliptique dans un milieu infini (déformation plane), et inclusion ellipsoïdale de révolution dans un milieu infini (déformation axisymétrique). Dans les deux cas, les axes principaux de l'inclusion coïncident avec ceux de la sollicitation imposée à l'infini. Ces résultats seront comparés avec ceux présentés par Gilormini & Germain (1987) en appliquant la méthode des éléments finis. La sensibilité à la vitesse de déformation a la même valeur dans l'inclusion et dans la matrice ($m_I = m_M = m$).

3.3.2.1 Compression axisymétrique

On considère un repère cartésien (Ox_1, x_2, x_3). L'inclusion I est un ellipsoïde de révolu-

tion autour de Ox_1, dont les axes coïncident avec les directions principales de la sollicitation imposée à l'infini (*fig.* 3.3).

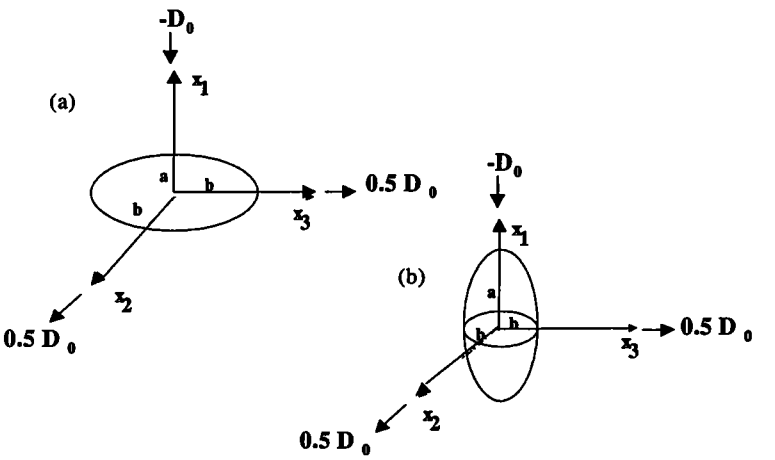


Figure 3.3 : *Schémas d'orientation pour une inclusion (a) aplatie et (b) allongée dans un repère cartésien* (Ox_1, x_2, x_3). Une compression axisymétrique suivant la direction Ox_1 est appliquée.

Pour une inclusion allongée (resp. aplatie) a est la longueur du demi axe majeur (resp. mineur) suivant la direction Ox_1, et b la longueur du demi axe mineur (resp. majeur) suivant les directions Ox_2, Ox_3.

Le rapport des demi-axes est noté :

$$\lambda = \frac{a}{b} \tag{3.76}$$

Ainsi, l'inclusion ellipsoïdale est allongée (resp. aplatie) pour $\lambda = \frac{a}{b} > 1$ (resp. $\lambda < 1$).

Pour une compression axisymétrique suivant la direction Ox_1, le tenseur vitesse de déformation macroscopique $\underline{D}$ appliqué à l'infini est de la forme :

$$D_{ij} = D_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +0.5 & 0 \\ 0 & 0 & +0.5 \end{pmatrix}$$

où D_o est la vitesse de déformation de référence $D_o = 1s^{-1}$.

La localisation de la vitesse de déformation δ, est définie comme étant le rapport de la vitesse de déformation équivalente dans l'inclusion d^{eq} sur la vitesse de déformation équivalente D^{eq} imposée à l'infini :

$$\delta = \frac{d^{eq}}{D^{eq}}$$

Dans le modèle tangent présenté dans le paragraphe précédent, la vitesse de déformation dans l'inclusion donnée par la loi de localisation (3.67) est uniforme. Cependant il est à noter que la propriété remarquable d'homogénéité de la vitesse de déformation dans l'inclusion n'est plus vérifiée lorsque la matrice a un comportement visqueux non linéaire. Des information sur la distribution de la vitesse de déformation dans l'inclusion peuvent être obtenues par la méthode des éléments finis (Chapitre 2). Sur les figures 3.4 – 3.6 nous présentons la variation de la localisation de la vitesse de déformation δ dans l'inclusion en fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation m (valeurs identiques dans l'inclusion et dans la matrice) dans le cas axisymétrique. Nous avons choisi de considérer trois formes différentes définies par ($\lambda = 0.5$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 1$) et différentes valeurs du rapport de rigidité η ; cette dernière est définie comme le rapport entre les rigidités de l'inclusion et de la matrice :

$$\eta = \frac{k_I}{k_M}$$

La localisation de la vitesse de déformation obtenue par la méthode des élément finis de Gilormini & Germain (1987) est représentée sur les figures 3.4 – 3.6, comme étant le rapport de la vitesse de déformation équivalente moyenne dans l'inclusion sur celle imposée à l'infini (points). Cette quantité inclue toutes les composantes du champs de vitesse de déformation $\delta = \frac{\langle d_i^{eq} \rangle}{D^{eq}}$. Gilormini & Michel (1999) ont défini le coefficient de localisation δ comme le rapport des composantes axiales (axe 1, axe de révolution) des vitesses de déformation de l'inclusion et à l'infini $\delta = \frac{\langle d_{11} \rangle}{D_{11}}$.

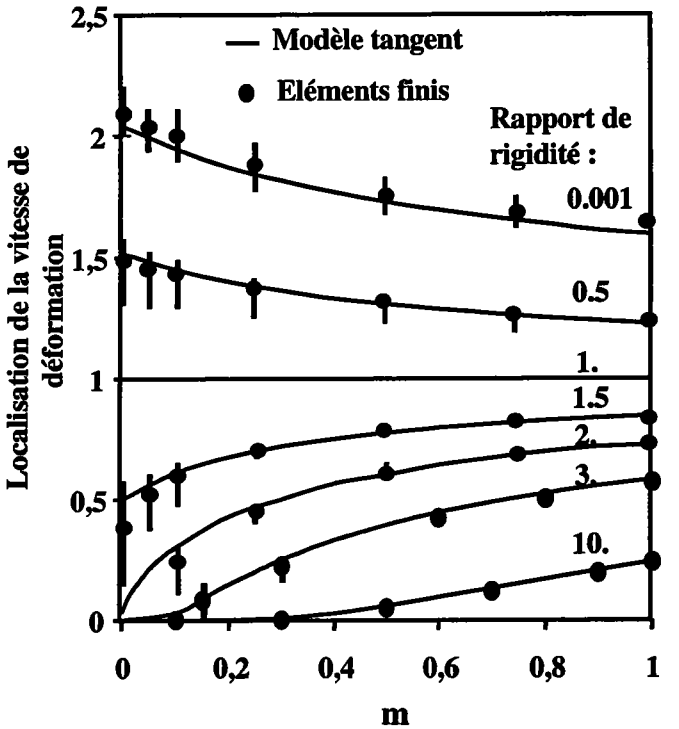


Figure 3.4 : *Localisation de la vitesse de déformation en fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation, dans le cas d'une compression axisymétrique et pour différents rapports de rigidité. Les résultats de l'approche tangente sont comparés à ceux des éléments finis de Gilormini et Germain pour* ($\eta = 0.001, 0.5, 1.5, 2.$), *ainsi que ceux obtenus par Gilormini et Michel pour* ($\eta = 10$). *Nous avons effectué les calculs par éléments finis pour* ($\eta = 3$). *Les barres verticales centrées sur les résultats des élements finis, illustrent la dispersion de la vitesse de déformation équivalente par rapport à la moyenne.*

Ces auteurs ont montré que les deux définitions fournissent des résultats identiques à 1% prés. D'autre part, les barres représentent la dispersion de la vitesse de déformation lorsque la valeur de la sensibilité à la vitesse de déformation varie dans la matrice et dans l'inclusion. Cette hétérogénéité ne se manifeste de façon notable que pour une sensibilité à la vitesse de déformation inférieur à 0.25.

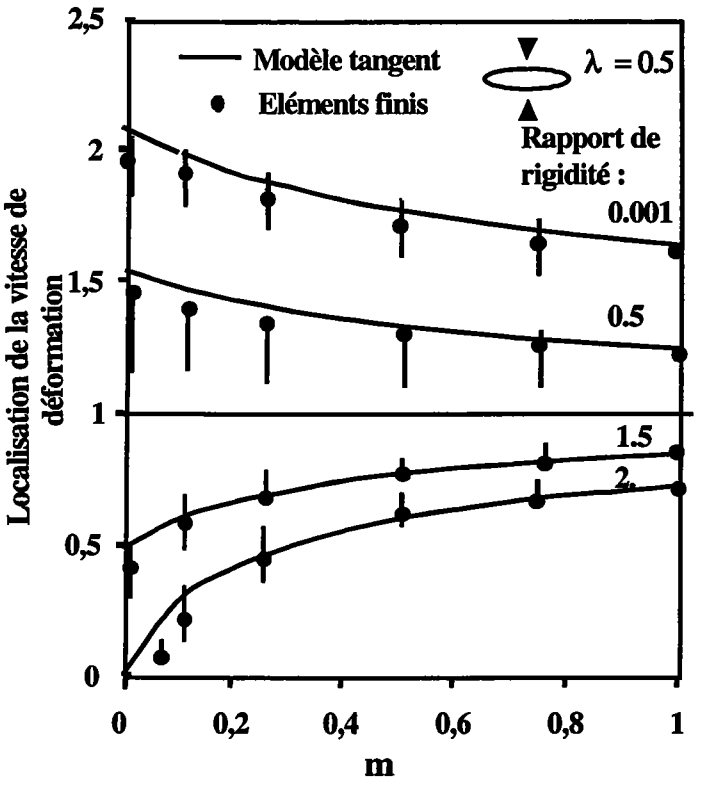


Figure 3.5 : *Comparaison des résultats du modèle tangent (trait continu) en compression axisymétrique, avec ceux des éléments finis pour une inclusion aplatie. Les résultats des éléments finis sont ceux de Gilormini et Germain.*

Rappelons que le calcul par la méthode des éléments finis se rapporte au cas d'une matrice de dimension finie alors que le modèle tangent prend en compte une matrice infinie.

Les résultats du modèle tangent sont donnés par la ligne continue (chaque ligne est associée à un rapport de rigidité défferent $\eta = \frac{k_I}{k_M}$).

Sur la figure 3.4, le cas d'une inclusion sphérique ($\lambda = 1$) est considéré. Les résultats des éléments finis, sont ceux de Gilormini & Germain pour ($\eta = 0.001, 0.5, 1.5, 2.$), ainsi que ceux obtenus par Gilormini & Michel pour ($\eta = 10$). Pour compléter les données, nous avons effectué les calculs par éléments finis pour ($\eta = 3$). On constate un bon accord entre les résultats donnés par la méthode des éléments finis et la méthode tangente en ce qui concerne la moyenne de

la vitesse de déformation dans l'inclusion quelque soit le rapport de rigidité η. Cependant les résultats ont tendance à s'écarter lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation diminue.

Les calculs par éléments finis permettent de constater que l'hétérogénéité de la vitesse de déformation au sein de l'inclusion croît lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation décroît. La propriété d'homogénéité de la vitesse de déformation dans l'inclusion n'est plus vérifiée lorsque la matrice a un comportement visqueux non linéaire. Cela justifie les différences entre les deux méthodes pour les faibles sensibilités à la vitesse de déformation. En effet il faut rappeler que la vitesse de déformation était supposée homogène à l'intérieur de l'inclusion dans le modèle tangent.

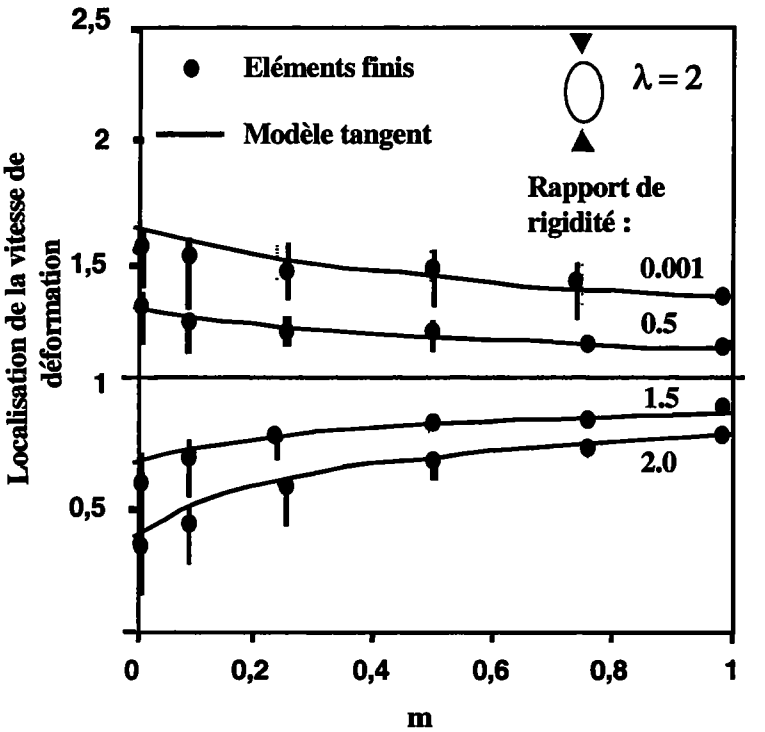


Figure 3.6 : *Comparaison des resultats du modèle tangent (trait continu) en compression axisymétrique, avec ceux des éléments finis pour une inclusion allongée. Les résultats des éléments finis sont ceux de Gilormini et Germain.*

Lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation décroît, le calcul par éléments finis converge

difficilement. En particulier pour m inférieur à 0.1, ce qui se traduit par des temps de calcul de plus en plus longs. Par contre, on constate que le modèle tangent anisotrope donne sans problème des résultats raisonnables pour les valeurs de m inférieures à $0,1$.

Sur les deux figures 3.5 et 3.6, nous considérons, respectivement, une inclusion aplatie ($\lambda = 0.5$) et une inclusion allongée ($\lambda = 2$). On constate un bon accord général entre les résultats donnés par les deux méthodes en ce qui concerne la moyenne de la vitesse de déformation dans l'inclusion.

Dans le cas des inclusions molles, pour une valeur de dureté relative ($\eta = 0.001$), les résultats obtenus par la méthode des éléments finis montrent que la vitesse de déformation dans l'inclusion devient très hétérogène. Ainsi l'hypothèse d'uniformité est loin d'être vérifiée, ceci permet d'expliquer l'écart entre les deux méthodes.

Signalons enfin, que les résultats obtenus, concernant la localisation de la vitesse de déformation, dans le cas d'une inclusion molle est beaucoup moins influencée par m que dans le cas d'une inclusion dure.

3.3.2.2 Compression plane

On cherche à modéliser le cas d'une inclusion cylindrique d'axe Ox_3 soumise à une compression plane dans la direction Ox_1. Pour mettre en oeuvre la méthode tangente, on remplace l'inclusion cylindrique par un ellipsoïde, allongé selon la direction Ox_3 . On prend un rapport de forme $\frac{c}{a} = 10$. Les axes de l'inclusion coïncident avec les axes principaux de la sollicitation imposée à l'infini (figure 3.7) .

La section de l'inclusion ellipsoïdale ($fig.$ 3.7), est définie par le rapport de forme $\lambda = \frac{a}{b}$. Pour $\lambda = 1$: section circulaire, pour $\frac{a}{b} = 2$ et $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$: sections elliptiques.

Pour une compression plane dans le plan (Ox_1, Ox_2) suivant la direction Ox_1, le tenseur vitesse de déformation macroscopique $\underline{D}$ appliqué à l'infini vaut :

$$D = D_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où D_o est la vitesse de déformation de référence $D_o = 1s^{-1}$.

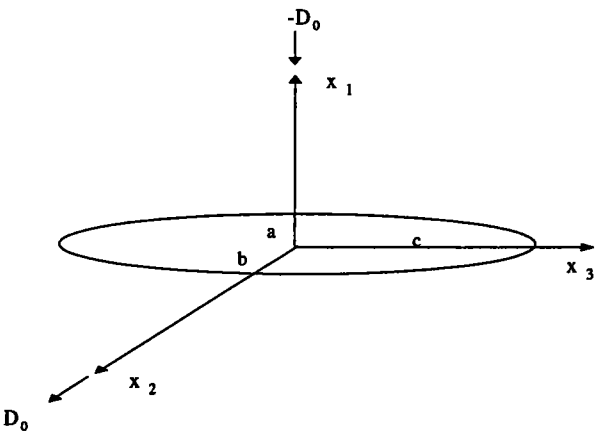


Figure 3.7 : *Inclusion ellipsoïdale allongée selon l'axe Ox_3, la direction de compression est Ox_1.*

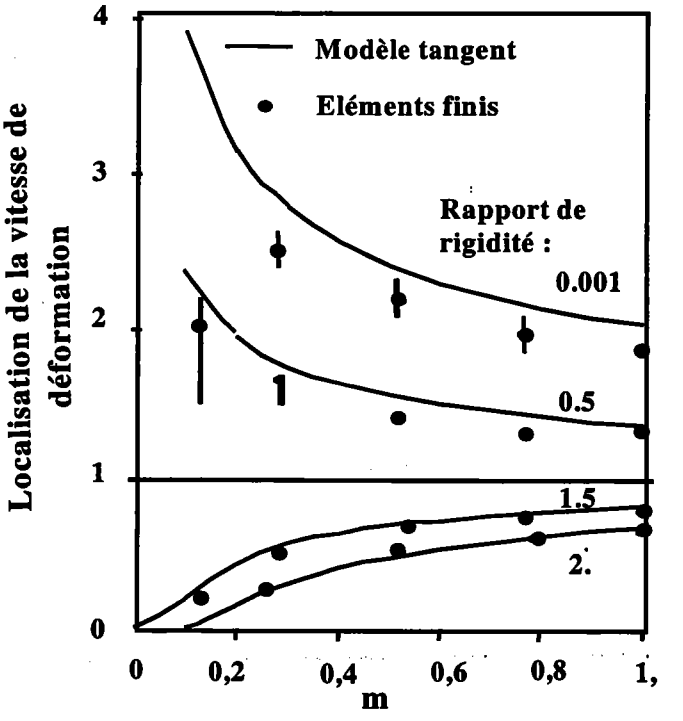


Figure 3.8 : Evolution de la vitesse de déformation (points) et de ses variations (barres verticales) dans l'inclusion par la méthode des éléments finis pour une inclusion cylindrique. Comparaison avec le modèle tangent (trait continu) en compression plane, pour une ellipsoïde très allongée ($\frac{c}{a} = 10$) suivant Ox_3, et pour $\frac{a}{b} = 1$ (section circulaire)

Les résultats obtenus avec l'approche tangente pour une ellipsoïde très allongée suivant Ox_3

(inclusion cylindrique), sont représentés sur la figure 3.8 pour $\frac{a}{b} = 1$ (section circulaire), et sur la figure 3.9 pour $\frac{a}{b} = 2$ et $\frac{a}{b} = 0.5$ (section elliptique). A cause d'un chargement symétrique, les deux sections elliptiques représentées sur la figure 3.9 donnent les même résultats.

Les résultats obtenus par l'approche tangente, avec l'inclusion ellipsoïdale définie précédemment, sont confrontés aux résultats fournis par la méthode des éléments finis avec une inclusion cylindrique. On constate un bon accord entre les résultats donnés par la méthode des éléments finis et la méthode tangente en ce qui concerne la moyenne de la vitesse de déformation dans l'inclusion pour des inclusions dures. Des résultats raisonnables sont obtenus pour des inclusions molles.

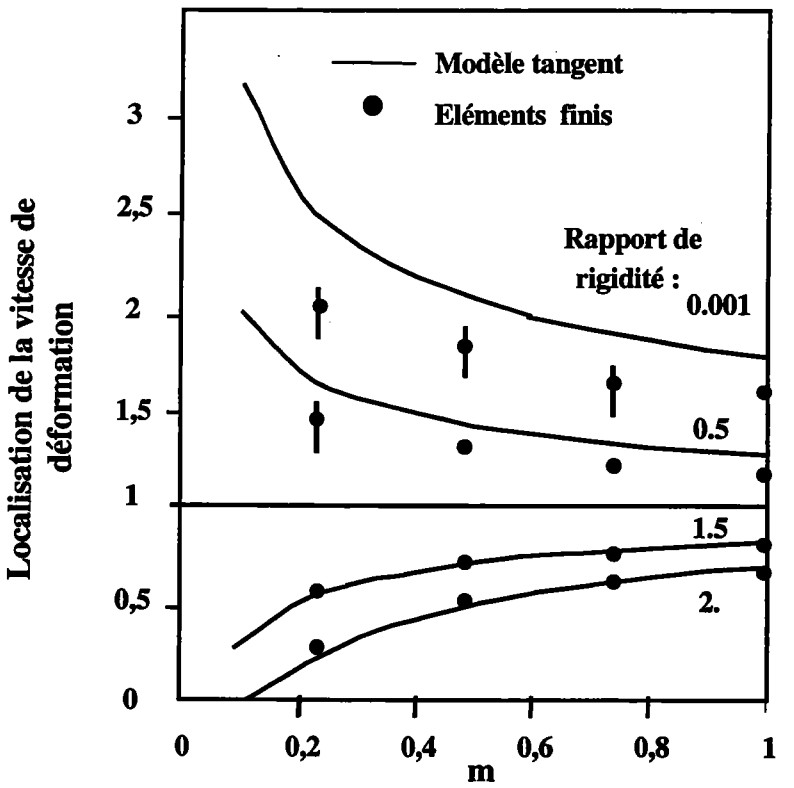


Figure 3.9 : *Evolution de la vitesse de déformation (points) et de ses variations (barres verticales) dans l'inclusion par la méthode des éléments finis pour une inclusion cylindrique. Comparaison avec le modèle tangent (trait continu) en compression plane,* pour un ellipsoïde très allongé ($\frac{c}{a} = 10$) suivant Ox_3, avec $\frac{a}{b} = 2$ et $\frac{a}{b} = 0.5$ (section elliptique).

3.3.3 Rapport de rigidité critique

Dans le cas d'une inclusion parfaitement plastique (m=0) située au sein d'une matrice parfaitement plastique, on retrouve la notion du rapport de rigidité critique η_c au-delà de laquelle l'inclusion ne se déforme pas ($\delta = 0$). La figure 3.10 décrit les variations de cette quantité η_c en fonction du rapport de forme de l'inclusion. La condition ($\delta = 0$) est remplacée par une valeur faible fixée 0.001. Deux types de chargement sont considérés :

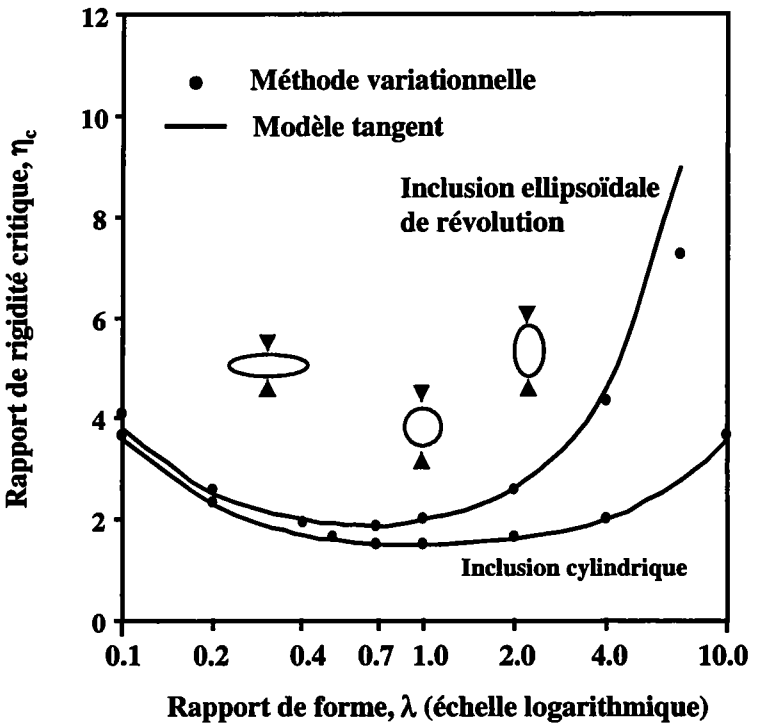


Figure 3.10 : *Evolution du rapport de rigidité critique η_c en fonction du rapport de forme de l'inclusion supposée parfaitement plastique au sein d'une matrice parfaitement plastique. Les valeurs de η_c* correspondent à une localisation de la vitesse de déformation de l'ordre de 0.001.

- Compression axisymétrique : Inclusion ellipsoïdale de révolution d'axe Ox_1, *fig.* 3.3.
- Compression plane dans le plan Ox_1, Ox_2 : Inclusion ellipsoïdale allongée selon la direction

Ox_3, *fig.* 3.7.

Les résultats de l'approche tangente sont confrontés à ceux obtenus par la méthode variationnelle (Briottet et al. (1999)). On constate une bonne corrélation entre les deux méthodes et pour différents rapports de forme. La comparaison entre les deux modes de déformation montre que la dureté relative critique dans le cas de la compression plane est plus faible que celle de la compression axisymétrique, pour toutes valeurs du rapport de forme de l'inclusion. Comme le montre la figure 3.10, les inclusions parfaitement plastiques noyées dans une matrice parfaitement plastique, allongées ($\lambda << 1$) ou aplaties ($\lambda >> 1$) restent déformables pour des valeurs élevées de η alors que les plus globulaires (sphérique ou circulaire) deviennent indéformables à partir de η_c de l'ordre de 1.5. Dans le cas de la compression plane, la valeur minimale (1.5) de η_c est obtenue pour $\lambda = 1$; (*fig* 3.10). Dans le cas d'une compression axisymétrique le minimum (2.0) de η_c est obtenu pour $\lambda = 0.64$; (*fig* 3.10). Ces résultats sont confirmés par l'approche analytique de Gilormini & Montheillet (1986) dans le cas d'une inclusion parfaitement plastique noyée dans une matrice newtonienne. Pour des inclusions très aplaties et très allongées, la condition $\delta = 0.001$ est de plus en plus difficile à satisfaire.

3.3.4 Cas où la sensibilité à la vitesse de déformation est différente dans l'inclusion et la matrice ($m_I \neq m_M$)

L'approche tangente développée précédemment peut être appliquée dans le cas où les sensibilités à la vitesse de déformation dans l'inclusion et dans la matrice sont différentes.

Dans le Tableau 3. 1, la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion $\delta = \frac{d^{eq}}{D^{eq}}$ est obtenue pour une inclusion ellipsoïdale aplatie ($b = c$, $\lambda = \frac{a}{b} = 2$) et pour un rapport de rigidité $\eta = \frac{k_I}{k_M} = 2$, dans le cas d'un chargement axisymétrique. Les résultats de l'approche tangente sont confrontés à ceux de la méthode variationnelle (Vernuse (1993)) pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation de la matrice et de l'inclusion. Les deux approches mènent à des résultats similaires.

δ (approche tangente)	δ (approche variationelle)	sensibilité à la vitesse
0.64	0.63	$m_I = m_M = 0.3$
0.671	0.65	$m_I = 0.3$, $m_M = 0.5$
0.685	0.68	$m_I = 0.5$, $m_M = 0.3$
0.7	0.69	$m_I = m_M = 0.5$

Tableau 3.1 : Localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion δ obtenue par l'approche tangente et par la méthode variationnelle (Vernusse (1993)) pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation de la matrice et de l'inclusion ; $\eta = 2$ et $\lambda = 2$.

3.3.5 Comparaison entre la compression axisymétrique et la compression plane

On propose de comparer les résultats du modèle tangent en compression axisymétrique et en compression plane, dans le cas d'une inclusion sphérique. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.11, pour deux valeurs du rapport de rigidité ($\eta = 2.$ et $\eta = 0.5$). Nous constatons que, les différences sont faibles pour les grandes sensibilités à la vitesse de déformation.

Il est à noter que pour les faibles sensibilités à la vitesse de déformation, et en particulier pour le cas où le comportement de l'inclusion et de la matrice sont parfaitement plastiques ($m = 0$), de fortes localisations de la vitesse de déformation dans l'inclusion en compression plane sont observées pour $\eta = 0.5$ (inclusion molle). Dans le cas des inclusions dures ($\eta = 2$), la localisation de la vitesse de déformation s'annule en compression plane pour $m < 0.04$, contrairement à la compression axisymétrique à $m = 0$.

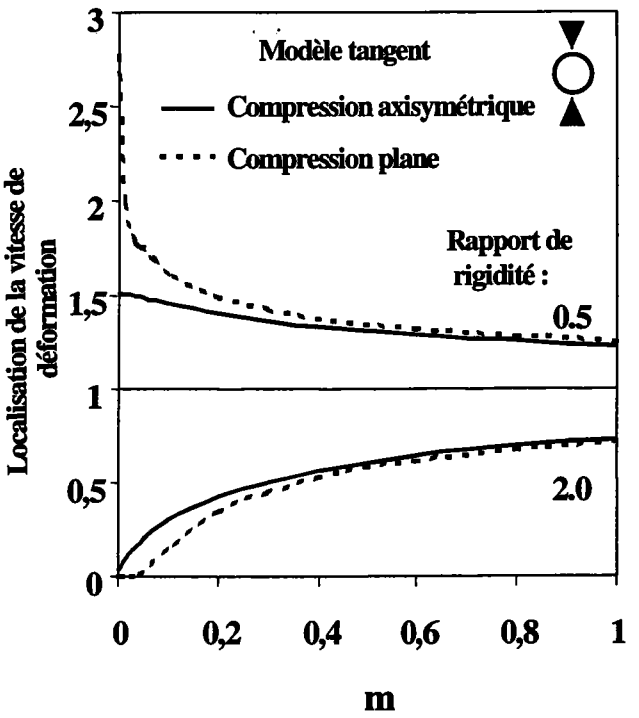


Figure 3.11 : *Comparaison des résultats de l'approche tangente dans le cas de la compression axisymétrique et de la compression plane.*

3.3.6 Comparaison des modèles sécants et tangent

En utilisant les deux modules sécants définis dans les équations (3.72) et (3.73), deux approches sécantes ont été définies dans la section 3.3.1. La comparaison entre les deux modèles sécants et le modèle tangent est présentée sur la figure 3.12 pour deux rigidités relatives $\eta = 1.5$ et $\eta = 0.5$, dans le cas d'une compression axisymétrique.

Les deux approches sécantes et l'approche tangente donnent des résultats tout à fait réaliste. A partir de la figure 3.12 une déviation progressive des résultats des modèles sécants par rapport au modèle tangent est observée lorsque la sensibilité à la vitesse de déformation m diminue.

Lorsque $m \rightarrow 0$, on constate que le modèle sécant utilisant l'équation (3.77) converge bien vers le modèle de Taylor. Cela peut être vérifié facilement à partir de l'équation (3.77) qui devient: $\underline{\underline{d}} - \underline{\underline{D}} = 0$.

On peut conclure de cette comparaison que la localisation de la vitesse déformation d'une inclusion dans une matrice infinie est mieux représentée par l'approche tangente (cf. fig. (3.4)).

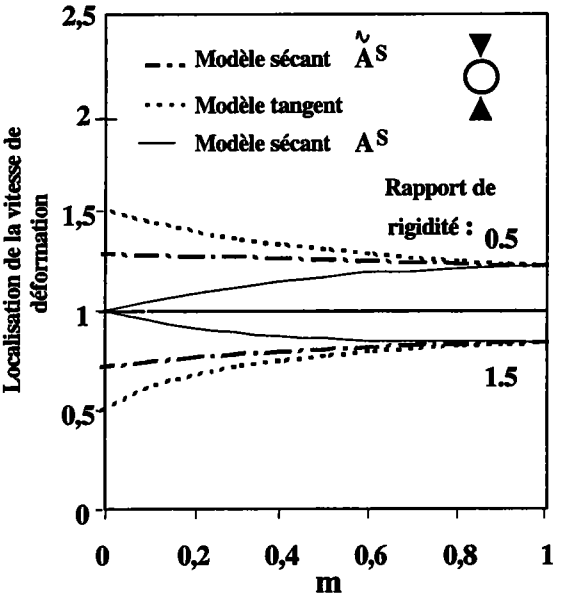


Figure 3.12 : *Comparaison des résultats de l'approche tangente avec les différentes approches sécantes.*

3.3.7 Effet du rapport de forme de l'inclusion

Afin de tester la précision des calculs par éléments finis, ceux-ci sont cenfrontés à la solution exacte du problème d'Eshelby dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale pour un comportement linéaire newtonien de la matrice et de l'inclusion). On étudie l'influence de la forme de l'inclusion sur la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion, pour une dureté relative $\eta = 0.5$ (inclusion molle). Les résultats du modèle tangent anisotrope pour deux modes de déformation (compression axisymétrique et compression plane) ainsi que les résultats des éléments finis sont regroupés sur la figure 3.13. Les résultats du modèle tangent sont en bon accord avec ceux des éléments finis. Par ailleurs, les résultats d'Eshelby dans le cas de la compression axisymétrique et de la compression plane coïncident parfaitement pour le cas des inclusions aplaties ($\lambda < 1$). Ils ont tendance à s'écarter progressivement lorsque l'inclusion est plus allongée ($\lambda > 1$).

A noter que pour des rapports de formes très élevés (inclusion très aplatie ou allongée) les

résultats d'Eshelby et des éléments finis convergent vers le modèle de Taylor (localisation de la vitesse de déformation proche de l'unité).

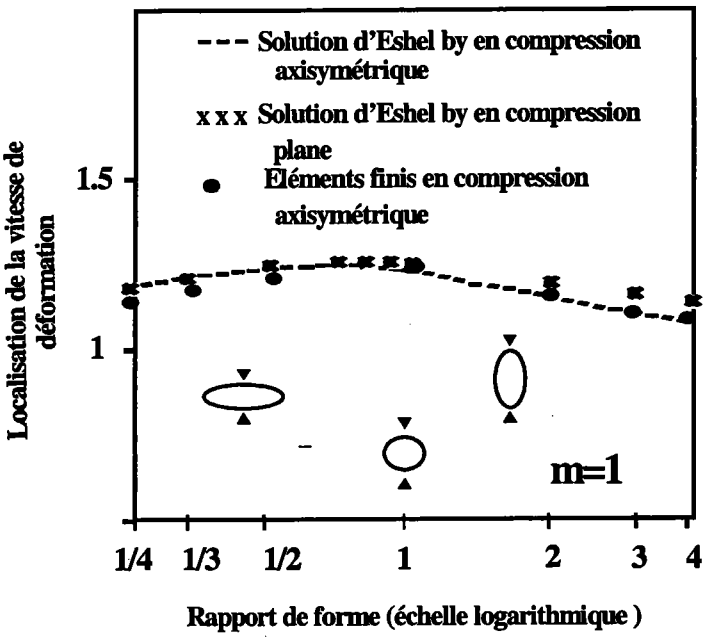


Figure 3.13 : *Influence du rapport de forme de l'inclusion sur la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion. Inclusion newtonienne molle (rapport de rigidité =0.5) dans une matrice newtonienne.*

3.4 Conclusion

Une extension du problème d'Eshelby pour un comportement non linéaire est considérée dans ce travail. Une inclusion ellipsoïdale viscoplastique est noyée dans une matrice viscoplastique infinie. Les propriétés de l'inclusion et de la matrice sont supposées homogènes.

Une approche tangente anisotrope a été proposée pour l'étude de la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion ellipsoïdale. Une vitesse de déformation est appliquée à l'infini, afin de reproduire deux chargements : compression axisymétrique ou compression plane. On a étudié l'influence du rapport de rigidité, de la sensibilité à la vitesse de déformation et du rapport de forme sur la localisation de la vitesse de déformation. Les résultats des différentes approches analytique, variationelle et par éléments finis, ont été utilisés pour valider notre

modèle. Les résultats obtenus par l'approche tangente, concernant la localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion sont en général en bon accord avec ceux de ces différentes approches.

Des informations sur la distribution de la vitesse de déformation dans l'inclusion peuvent être données par la méthode des éléments finis, à la différence de l'approche tangente où la vitesse de déformation est prise uniforme à l'intérieur de l'inclusion. Compte tenu de ce fait, il est alors possible de comprendre les faibles différences existantes entre les deux méthodes pour les faibles sensibilités à la vitesse de déformation. A noter que l'hétérogénéité de la vitesse de déformation dans l'inclusion augmente quand la sensibilité à la vitesse de déformation tend vers zéro (comportement parfaitement plastique). On remarque ainsi le rôle de la sensibilité à la vitesse de déformation sur l'uniformisation du champ de vitesse de déformation. Cela est en accord avec les nombreux résultats démontrant le rôle stabilisant de m dans les problèmes d'instabilité de l'écoulement viscoplastique. De façon générale, une augmentation de m tend à uniformiser le champ des vitesses de déformation.

Chapitre 4

Modélisations des matériaux composites viscoplastiques

4.1 Modèles différentiels, bibliographie

La méthode différentielle permet d'estimer le comportement effectif d'un matériau composite constitué d'inclusions dispersées dans une matrice. Cette méthode a été proposée dans un premier temps par Bruggeman (1935) et développée ensuite par Roscoe (1952). Ultérieurement, le schéma différentiel a été appliqué par Boucher (1976) pour estimer le comportement élastique d'un matériau composite constitué d'inclusions ellipsoïdales. Cette approche a permis de retrouver la loi empirique de Archie dans le cas de la conductivité effective des roches (Sen, Scala et Cohen (1981)). Cette méthode a été également utilisée par Cleary, Chen & Lee (1980) et par Norris, Callegari & Sheng (1985). D'autres schémas différentiels basés sur l'approximation des milieux dilués ont été proposés par Norris (1985), McLaughlin (1977) et par Zimmerman (1991) dans le cas des milieux poreux. De ces travaux se détachent deux études particulièrement intéressantes : l'étude Briottet et al. (1998) et celle de Phan-Tiem & Pham (2000).

4.1.1 Approche de Briottet et al.

Briottet et al. (1998) ont utilisé le schéma différentiel pour caractériser le comportement

effectif d'un matériau composite constitué de cavités dans une matrice infinie. Willis (1982) a résolu le problème d'une cavité dans une matrice infinie en utilisant l'approximation des milieux dilués et a obtenu ainsi une loi d'interaction de la forme suivante :

$$L_h - L_M = -fL_M : (I - S_M)^{-1}$$

où L_M définit le module de la matrice, S_M désigne le tenseur d'Eshelby dépendant des caractéristiques de la matrice et de la forme des cavités.

Briottet et al. se sont appuyés sur cette relation pour définir un schéma différentiel capable de donner le comportement effectif d'un matériau poreux. Le module $L_h(f)$ décrit le comportement homogénéisé d'un premier composite constitué d'une matrice infini avec des cavités de fraction volumique f. On considère ensuite un deuxième composite constitué de la même matrice, de module L_M, contenant une fraction volumique de cavité $f + \delta f$; ce deuxième composite a pour module $L_h(f+\delta f)$. La méthode différentielle permet alors d'estimer le comportement homogénéisé du deuxième composite et ceci en ajoutant une fraction volumique δf au premier composite. En supposant le module $L_h(f)$ du premier composite connu, le module $L_h(f + \delta f)$ du deuxième composite est obtenu a l'aide de l'équation suivante :

$$L_h(f + \delta f) - L_h(f) = -\frac{\delta f}{1 - f} L_h(f) : (I - S(f))^{-1}$$

Le facteur $\frac{1}{1-f}$ indique que l'on tient compte de la présence des cavités dans le premier composite. Des solutions analytiques pour calculer $S(f)$ sont proposées par Mura (1987). Quand $\delta f \rightarrow 0$, l'équation différentielle suivante est obtenue :

$$\frac{d}{df}\left(L_h(f)\right) = -\frac{1}{1 - f} L_h(f) : (I - S(f))^{-1}$$

où la condition initiale est $L_h(0) = L_M$

Briottet et al. s'est particulièrement intéressé à l'influence de la cavité ellipsoïdale sur le comportement viscoplastique de la matrice dans le cas d'un chargement axisymétrique.

Une comparaison entre différents modèles pour des inclusions sphériques montre (figure 4.1), que la méthode différentielle et le modèle à trois phases donnent des résultats très proches

(Gilormini, 1992). La figure 4.1 montre que le module de cisaillement effectif satisfait les bornes de Hashin-Shtrikman.

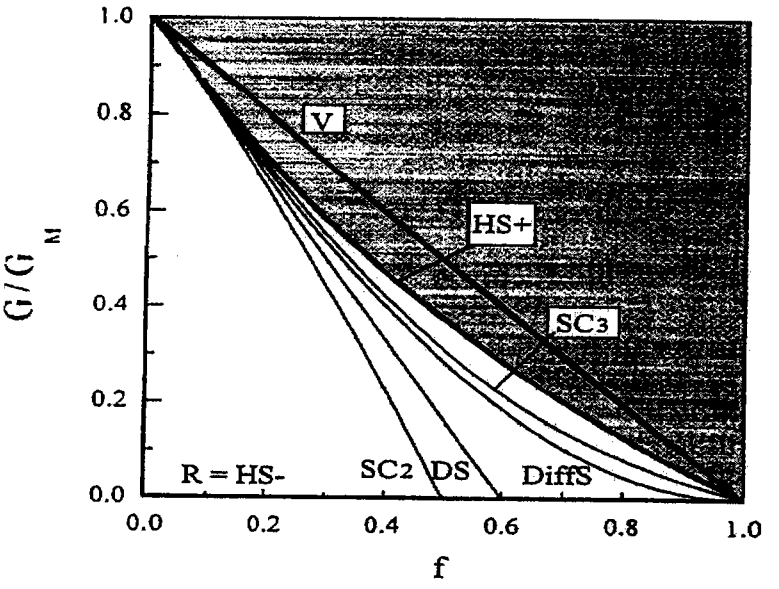


Figure 4.1 : *Module de cisaillement effective en fonction de la fraction volumique des cavités donné pour différents modèles. V : Voigt 'borne supérieure'; R : borne inférieur de Reuss'; HS+ : Hashin-shtrikman 'borne supérieur'; HS- : Hashin-shtrikman 'borne inférieur'; DS : estimation des milieux dilués; SC2 : '2-phase' autocohérent; SC3 : '3-phase' Modèle autocohérent à trois phases; DiffS : Shéma différentiel (Briottet et al. (1999)).*

4.1.2 Etude de Phan-Tiem & Pham

Phan-Tiem & Pham (2000) ont utilisé le schéma différentiel pour estimer la conductivité thermique θ dans le cas d'un matériau multiphasé. Ce dernier est constitué d'inclusions ellipsoïdales de différentes formes avec une distribution aléatoire dans la matrice.

Dans le cas d'un matériau biphasé avec des inclusions ellipsoïdales de fraction volumique f, l'équation différentielle suivante est obtenue :

$$\frac{d\theta}{df} = \frac{\theta}{1-f}\frac{\theta_1 - \theta}{3}\left[\frac{1}{\theta_1 A + \theta(1-A)} + \frac{4}{\theta_1 A + \theta(1+A)}\right]$$

$$\theta(0) = \theta_M$$

où θ_M définit la conductivité de la matrice de départ, et A caractérise la forme des inclusions.

Dans le cas limite de supraconductivité ($\frac{\theta_1}{\theta_M} \to \infty$), la solution de l'équation différentielle obtenue se simplifie :

$$\theta = \theta_M (1 - f)^{-1/X}$$

Dans le cas limite où la conductivité des inclusions est très faible devant celle de la matrice ($\frac{\theta_1}{\theta_M} \to 0$), il vient

$$\theta = \theta_M (1 - f)^{1/(Y-X-Z)}$$

où X, Y et Z sont des fonctions de A. Trois types de forme d'inclusions ont été étudiés : sphérique, allongée et aplatie.

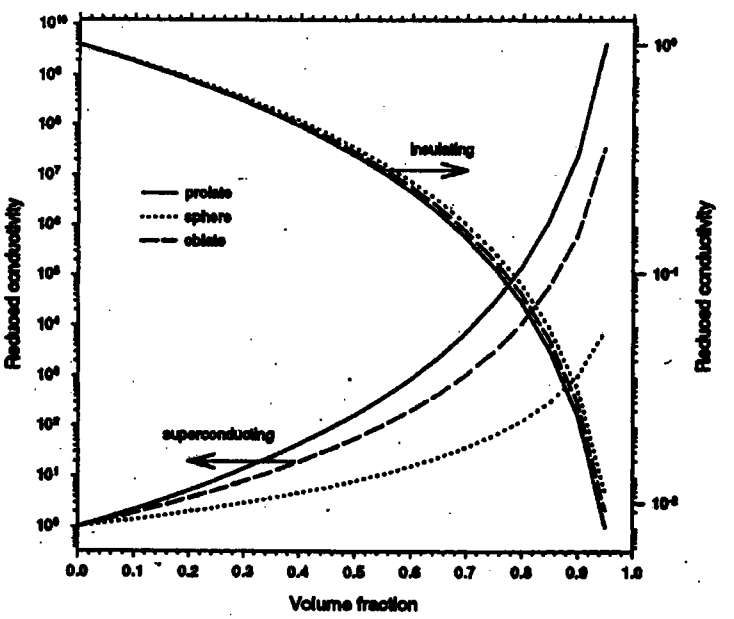


Figure 4.2 : *Conductivité thermique effective pour différentes formes d'inclusions : sphérique, ou ellipsoïdale de rapport de forme 5 (aplatie ou allongée) (Phan-Thien et al. (2000)).*

Les deux cas limites, supraconduction et isolant sont reportés sur la figure 4.2 pour le cas d'une forme sphérique, ou ellipsoïdale de rapport de forme 5 (aplatie ou allongée). Ces auteurs ont montré que, dans le cas de supraconductivité, la conductivité thermique est plus forte pour des inclusions ellipsoïdales aplaties que pour les sphères. Ces résultats sont inversés dans le

cas des inclusions de très faibles conductivités par rapport à la matrice. L'effet de forme de l'inclusion est plus prononcé dans le cas de la supraconductivité.

4.2 Modélisation de la rigidité effective du composite par la méthode différentielle

Le schéma différentiel est utilisé dans ce travail pour caractériser le comportement effectif d'un matériau composite constitué d'inclusions dispersées dans une matrice. Les inclusions sont supposées de formes et d'orientations identiques. La modélisation considérée dans ce travail dans le cas d'un composite biphasé est la suivante : la première phase représente la matrice, l'autre (phase inclusionnaire) est ajoutée incrémentalement de manière à ce que le matériau ajouté soit toujours en concentration diluée.

4.2.1 Description du schéma différentiel

Nous considérons un matériau composite constitué de deux phases viscoplastiques 1 et 2. Le matériau initial ne contient que la phase 2 avec un module μ_2. Un volume élémentaire de la matrice de départ est remplacé par des inclusions ellipsoïdales de la phase 1 de module μ_1 et de fraction volumique df_1. Les inclusions étant diluées dans une matrice infinie, on peut utiliser la solution du problème d'Eshelby non linéaire du chapitre 3. La méthode différentielle permet d'estimer le comportement du milieu homogénéisé constitué d'une matrice de module μ_2 avec la phase inclusionnaire (μ_1 , df_1). L'étape suivante consiste à ajouter dans cette nouvelle matrice de module μ_{eff} (df_1) des inclusions de la même phase 1 en proportion df_1. On continue ces itérations jusqu'à ce que la phase 1 représentent la fraction volumique désirée. En continuant jusqu'a l'infini, la matrice d'origine sera complètement remplacée et le matériau a alors pour module celui de la phase ajoutée μ_1. Le schéma du processus itératif de la méthode différentielle est présenté sur la figure 4.3.

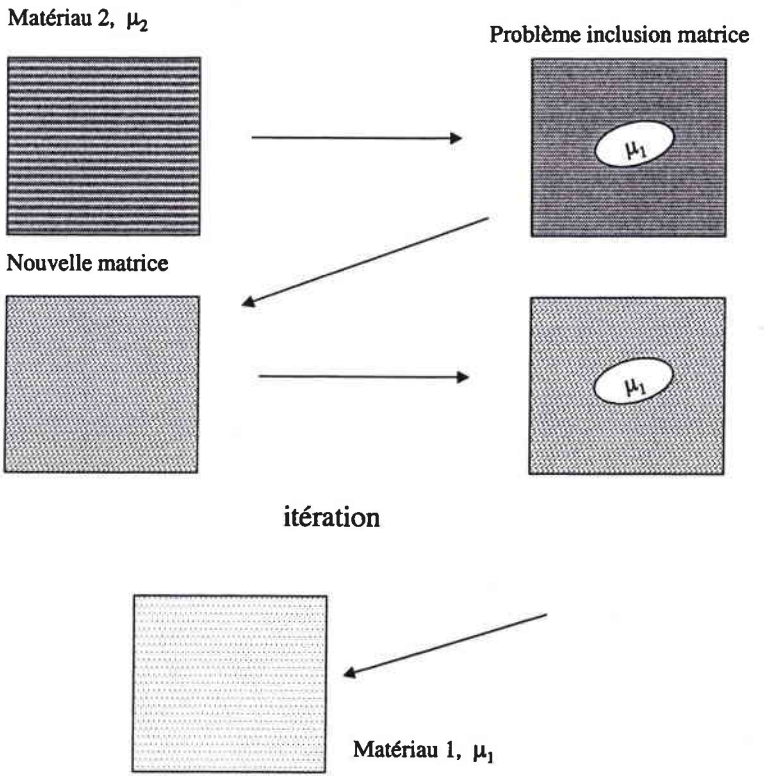


Figure 4.3 : *Processus itératif de la méthode différentielle.*

4.2.2 Fraction volumique d'inclusion ajoutée

A chaque étape du calcul, une fraction volumique df_1 de la matrice actuelle est remplacée par des inclusions ellipsoïdales de la phase 1. La fraction volumique d'inclusions f est alors augmentée par df qui est égale à la fraction volumique d'inclusion ajoutée df_1 moins la fraction volumique d'inclusions enlevée $f.df_1$:

$$df = df_1 - f.df_1 \tag{4.1}$$

$$df = (1 - f)df_1 \tag{4.2}$$

En intégrant l'équation (4.2), la concentration d'inclusion ajoutée après chaque itération vaut alors :

$$f = 1 - e^{-f_1} \tag{4.3}$$

avec $f_1 = \Sigma df_1$, la fraction volumique d'inclusion ajoutée pendant tout le processus itératif de la méthode différentielle.

Milton (1984) a montré que ($f = 1$) est atteint pour un nombre infini d'incrément, c-a-d lorsque $f_1 \longrightarrow \infty$, ce résultat est directement visible à partir de la relation (4.3). En effet que $f = 1$, corespond à une concentration en inclusion égale à 100%.

4.2.3 Equation différentielle vérifiée par le module μ

4.2.3.1 Préliminaires

Dans le cas d'un composite biphasé, les deux phases représentent respectivement, une inclusion ellipsoïdale (phase 1) de module μ_I, une matrice (phase 2) de module μ_M. Les comportements de la matrice 2 et de la phase inclusionnaire 1 sont donnés par :

$$\underline{d}^i = \frac{1}{2\mu_i}\underline{s}^i, \qquad avec\ i = I, M \tag{4.4}$$

Les modules viscoplastiques sont représentés par une loi puissance de la forme :

$$\mu_i(d^i_{eq}) = \frac{1}{3}k_i(d^i_{eq})^{m_i-1}, \qquad \text{avec} \qquad i = I, M \tag{4.5}$$

k_I et k_M sont respectivement les rigidités de l'inclusion et de la matrice; m_I et m_M sont les sensibilités à la vitesse de déformation des deux phases.

Le comportement des deux phases étant isotrope, et les inclusions étant supposées distribuées de façon isotrope, le milieu homogénéisé a alors un comportement isotrope donné par la relation suivante :

$$\underline{D} = \frac{1}{2\mu_{eff}}\underline{S} \tag{4.6}$$

Il est légitime de penser que le milieu homogénéisé a un comportement viscoplastique, pouvant être approximé par une loi puissance. Le module viscoplastique du milieu homogénéisé vaut alors :

$$\mu_{eff}(D_{eq}) = \frac{1}{3}k_{eff}\left(\frac{D^{eq}}{D_o}\right)^{m-1} \tag{4.7}$$

k_{eff}, m représentent respectivement, la rigidité et la sensibilité à la vitesse de déformation du milieu homogénéisé. Ces deux quantités varient sont ajustées continument du processus

associé à la méthode différentielle. D_o est une vitesse de déformation de référence donnée.

Les quantités d^i_{eq} et D_{eq} représentent respectivement, la vitesse de déformation équivalente dans les deux phases et dans le milieu homogénéisé :

$$d^i_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} d^i_{ij} d^i_{ij}} \quad \text{avec} \quad i = I, M \tag{4.8}$$

$$D_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ij} D_{ij}} \tag{4.9}$$

Pour une vitesse de déformation macroscopique appliquée $\underline{D}$, une linéarisation tangente, autour de $\underline{D}$, est proposée pour le comportement du milieu homogénéisé donné par (4.6). Ainsi le comportement tangent du milieu homogénéisé est donné par :

$$\underline{D}^* \rightarrowtail \underline{\underline{A}}^{tg}(\underline{D}) : \underline{D}^* + S^o(\underline{D}) \tag{4.10}$$

avec

$$S^o(\underline{D}) = 2\mu_{eff}(D^{eq})\underline{D} - A^{tg}(\underline{D}) : \underline{D} \tag{4.11}$$

Le module tangent du milieu homogénéisé est défini par :

$$A^{tg}_{ijkl}(\underline{D}) = \frac{2}{(D^{eq})^2}\mu_{eff}\left[\frac{2}{3}(m-1)D_{ij}D_{kl} + (D^{eq})^2 K_{ijkl}\right] \tag{4.12}$$

La méthode différentielle proposée dans ce paragraphe est basée sur l'approche tangente développée dans le chapitre 3 pour résoudre le problème d'une inclusion ellipsoidale noyée dans une matrice infinie. Le module tangent $\underline{\underline{A}}^{tg}$ est fonction du module viscoplastique μ_{eff} de la matrice homogénéisée.

4.2.3.2 Procédure incrémentale

Nous supposons que le comportement de la matrice $(f_1, \mu_{eff}(f_1))$ est connu à l'incrément considéré. Le comportement est donné par :

$$\underline{S}(f_1, \underline{D}) = 2\mu_{eff}(f_1, \underline{D})\underline{D} \tag{4.13}$$

Remarquons qu'initialement ceci est vérifié puisque le matériau est homogène, avec $\mu_{eff}(f_1 =$

$0) = \mu_2(\underline{D})$.

A chaque étape de la méthode différentielle on remplace un volume élémentaire de fraction volumique df_1 de la matrice actuelle par des inclusions ellipsoïdales de phase I.

Notons $f_1 = \Sigma df_1$ la somme des fractions volumiques enlevées jusqu'à l'étape actuelle. On calcule la vitesse de déformation $\underline{d}^I$ dans les inclusions I introduites dans la matrice de module $\mu_{eff}(f_1)$, en utilisant la loi d'interaction suivante (valable en milieu diluée, les interactions étant négligées entre les inclusions) :

$$\underline{s}^I(\underline{d}^I) - \underline{S}(f_1, \underline{D}) = \left(\underline{\underline{A}}^{tg}(f_1, \underline{D}) - \underline{\underline{P}}^{tg^{-1}}(f_1, \underline{D})\right) : (\underline{d}^I - \underline{D}) \tag{4.14}$$

La présence du tenseur d'interaction $\underline{\underline{P}}^{tg^{-1}}(f_1, \underline{D})$ prend en compte la forme des inclusions. L'équation (4.14) permet d'obtenir la vitesse de déformation dans l'inclusion $\underline{d}^I$ à chaque étape.

La contrainte macroscopique à l'étape $f_1 + df_1$ est obtenue en utilisant la relation $\langle \underline{s} \rangle = \underline{S}$:

$$\underline{S}(f_1 + df_1, \underline{D}) = (1 - df_1)\underline{S}(f_1, \underline{d}^M) + df_1.\underline{s}^I(\underline{d}^I) \tag{4.15}$$

D'après la relation (4.6), le comportement du composite à l'étape $f_1 + df_1$ peut être exprimé par :

$$\underline{S}(f_1 + df_1, \underline{D}) = 2\mu_{eff}(f_1 + df_1, \underline{D})\underline{D} \tag{4.16}$$

La relation $\langle \underline{d} \rangle = \underline{D}$ permet de relier les vitesses de déformation $\underline{d}^I$ dans une inclusion I et $\underline{d}^M$ dans la matrice à la vitesse de déformation macroscopique $\underline{D}$:

$$\underline{D} = df_1.\underline{d}^I + (1 - df_1).\underline{d}^M \tag{4.17}$$

Les équations (4.4), (4.13), (4.15) et (4.17) conduisent alors à :

$$\underline{S}(f_1 + df_1) = 2\mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)(\underline{D} - df_1\underline{d}^I) + df_1.2\mu_I(\underline{d}^I)\underline{d}^I \tag{4.18}$$

La combinaison de (4.16) et (4.18) fournit alors :

$$2\mu_{eff}(f_1 + df_1, \underline{D})\underline{D} = 2\mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)(\underline{D} - df_1\underline{d}^I) + df_1.2\mu_I(\underline{d}^I)\underline{d}^I \tag{4.19}$$

$$d\mu_{eff}\underline{D} = df_1 \left[\mu_I(\underline{d}^I) - \mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)\right] \underline{d}^I \tag{4.20}$$

avec

$$d\mu_{eff} = \mu_{eff}(f_1 + df_1, \underline{D}) - \mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M) \tag{4.21}$$

En contractant la relation (4.20) par le tenseur $\underline{D}$, on obtient :

$$d\mu_{eff} = df_1 \frac{2}{3(D^{eq})^2} \left[\mu_I(\underline{d}^I) - \mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)\right] \ \underline{d}^I : \underline{D} \tag{4.22}$$

La condition initiale est $\mu_{eff}(f = 0) = \mu_2(\underline{D})$. La fraction volumique d'inclusion f est donnée par la relation (4.3). $\mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)$ peut se calculer en notant que :

$$\frac{\mu_{eff}(f_1, \underline{D})}{\mu_{eff}(f_1, \underline{d}^M)} \left(\frac{D^{eq}}{d^M_{eq}}\right)^{1-m} = 1 \tag{4.23}$$

Pour une vitesse de déformation appliquée $\underline{D}$, la vitesse de déformation dans l'inclusion à l'étape f_1 est solution de l'équation non linéaire (4.14) (résolue par la méthode de Newton-Raphson), dans laquelle $\underline{\underline{A}}^{tg}(f_1, \underline{D})$ et $\underline{\underline{P}}^{tg^{-1}}(f_1, \underline{D})$ sont fonction du module $\mu_{eff}(f_1, \underline{D})$ calculé à l'étape précédente. L'équation (4.22) permet de calculer $d\mu_{eff}$ et ensuite $\mu_{eff}(f_1 + df_1, \underline{D})$ qui correspond au module effectif du milieu homogénéisé.

La rigidité effective est donnée par :

$$k_{eff}(f_1) = 3\mu_{eff}(f_1, \underline{D}) \left(\frac{D^{eq}}{D_0}\right)^{1-m} \tag{4.24}$$

où D_0 est une vitesse de déformation de référence.

4.2.4 Résultats et discussions

Dans ce paragraphe, nous étudions l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation m sur la rigidité effective k_{eff} du milieu homogénéisé en fonction de la fraction volumique d'inclusions ajoutée et pour différents rapports de rigidité η. La sensibilité à la vitesse de déformation m est identique dans les deux phases et égale à celle du milieu homogénéisé ($m = m_1 = m_2$).

Nous nous limitons ici au cas de la compression axisymétrique. L'inclusion de section ellip-

soïdale de révolution située dans une matrice est sollicitée à l'infini en compression axisymétrique. Le tenseur des vitesses de déformation $\underline{D}$ appliqué à l'infini est de la forme :

$$D = D_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +0.5 & 0 \\ 0 & 0 & +0.5 \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

On considère un repère cartésien (Ox_1, x_2, x_3). L'inclusion I est un ellipsoïde de révolution autour de Ox_1, dont les axes coïncident avec les directions principales de la sollicitation imposée à l'infini (*fig.* 4.4).

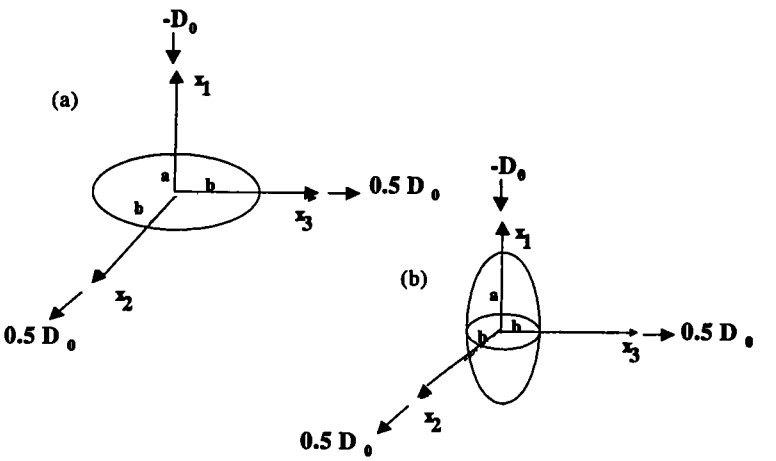


Figure 4.4 : *Schémas d'orientation pour une inclusion (a) aplatie et (b) allongée dans un repère cartésien* (Ox_1, x_2, x_3). Une compression axisymétrique suivant la direction Ox_1 est appliquée.

4.2.4.1 Effet de la sensibilité à la vitesse de déformation

Les figures (4.5 – 4.8) montrent les variations de k_{eff} du milieu homogénéisé en fonction de la fraction volumique d'inclusions (sphériques, λ=1)f pour différentes duretés ($\eta = \frac{k_L}{k_M}$), et pour différentes valeurs de m.

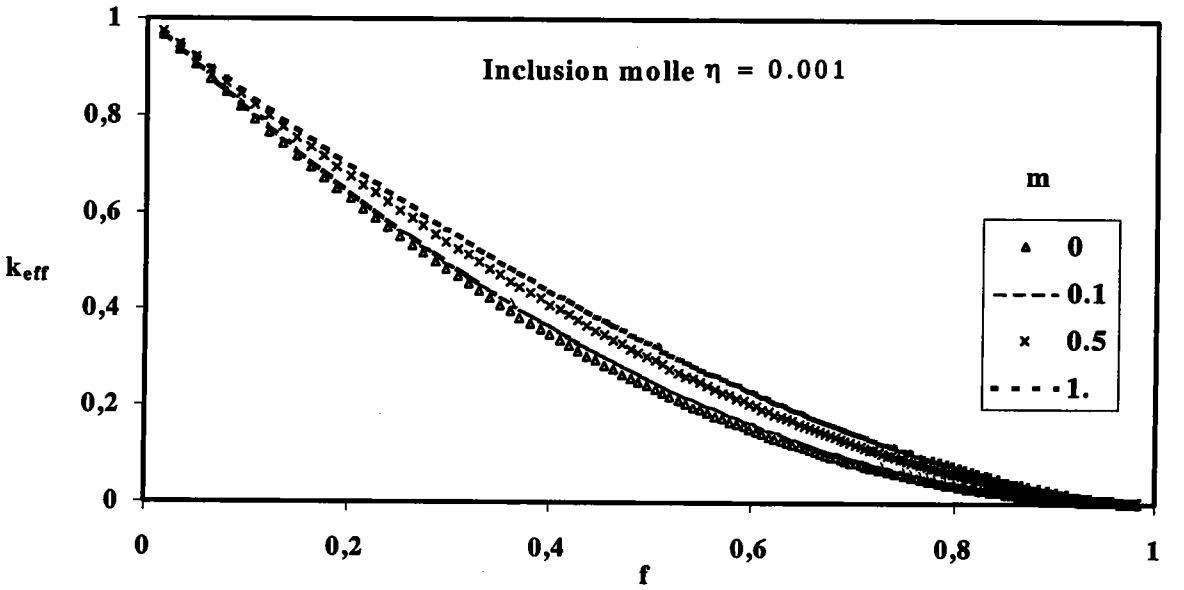


Figure 4.5 : *Variation de la rigidité effective en fonction de la fraction volumique d'inclusions de rapport de rigidité* $\eta = 0.001$, *pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation.*

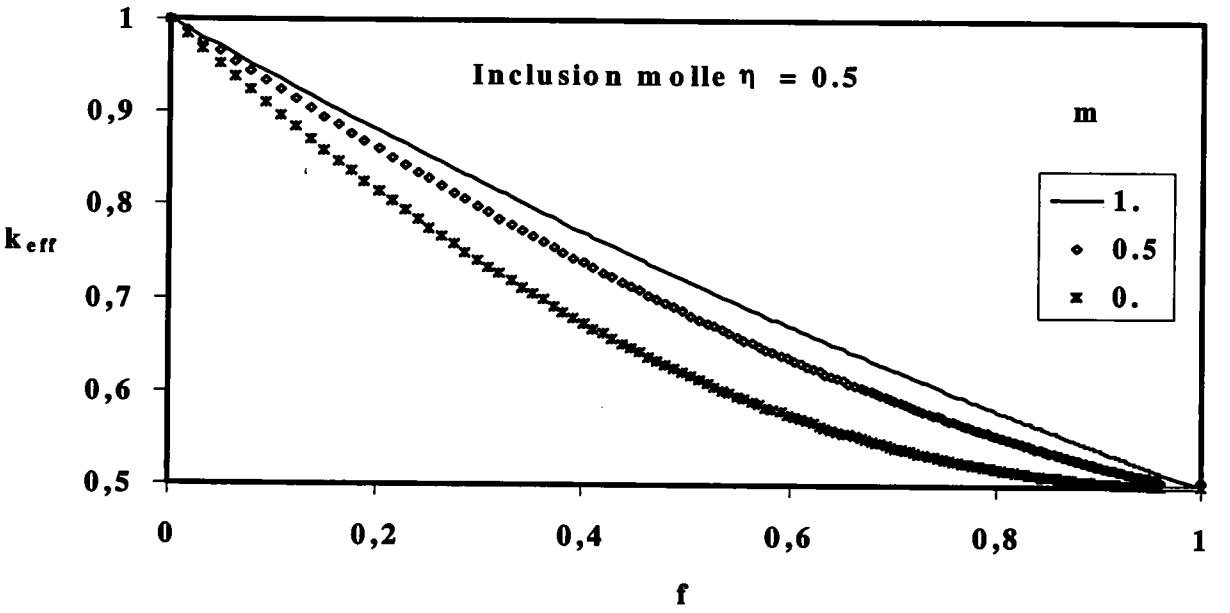


Figure 4.6 : *Variation de la rigidité effective en fonction de la fraction volumique d'inclusions de rapport de rigidité* $\eta = 0.5$, *pour différentes sensibilités à la vitesse.*

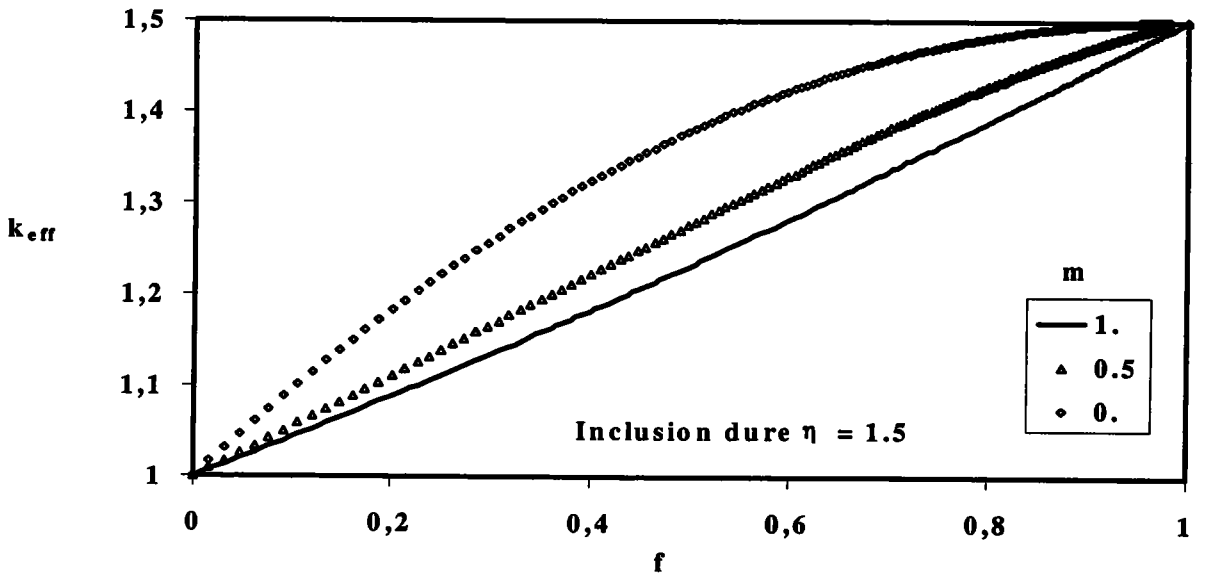


Figure 4.7 : *Variation de la rigidité effective en fonction de la fraction volumique d'inclusions de rapport de rigidité $\eta = 1.5$, pour différentes sensibilités à la vitesse de déformation.*

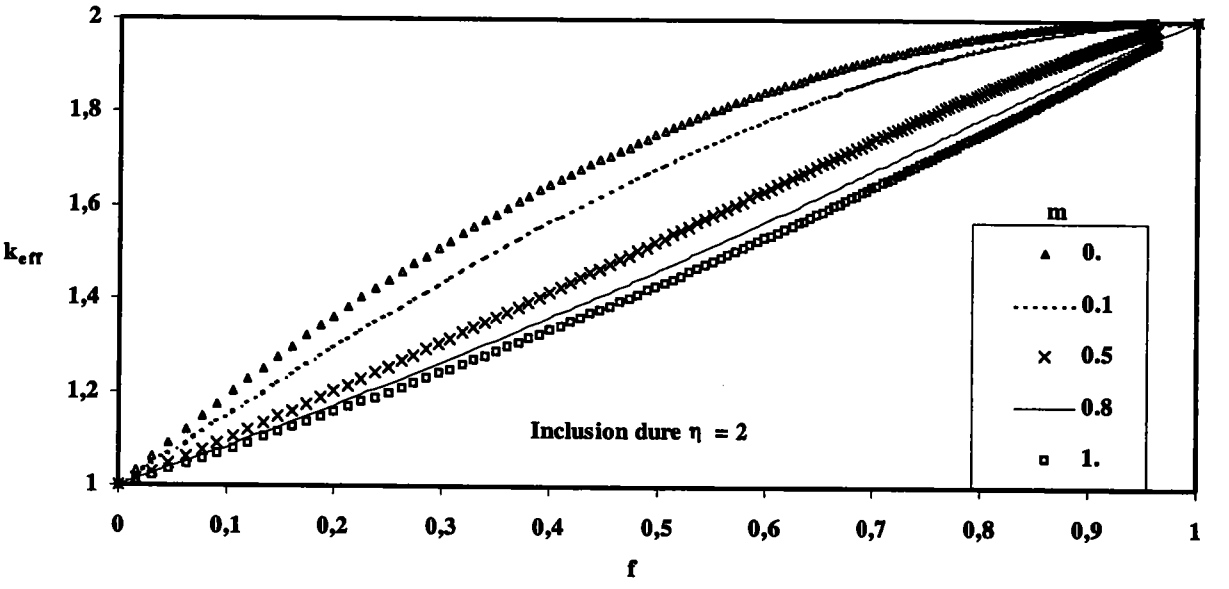


Figure 4.8 : *Variation de la rigidité effective en fonction de la fraction volumique d'inclusions de rapport de rigidité $\eta = 2.0$, pour différentes sensibilités à la vitesse.*

Les résultats de l'approche tangente (Chapitre 3) ont montré que la localisation de la vitesse de déformation, dans le cas d'une inclusion molle est beaucoup moins influencée par m que dans le cas d'une inclusion dure. Dans le cas linéaire (m=1) la localisation de la vitesse de déformation tend vers le modèle de Taylor. Ceci montre l'effet de la sensibilité à la vitesse de déformation sur la localisation de la vitesse de déformation dont dépend l'évolution de la rigidité effective.

Les résultats sont présentés dans le cas de la compression axisymétrique pour des inclusions sphériques. La rigidité effective k_{eff} est fortement influencée par la sensibilité à la vitesse de déformation m dans le cas des inclusions dures (voir *fig.* 4.7 ou *fig.* 4.8). Dans le cas des inclusions molles, l'effet de m est plus faible (voir *fig.* 4.5 ou *fig.* 4.6). Ainsi lorsque m décroît de 1 à 0 la rigidité effective augmente dans le cas des inclusions dures, et diminue lorsque les inclusions sont molles.

En conclusion, nous avons établi dans cette section une méthode différentielle permettant de calculer la rigidité effective d'un matériau biphasé constitué de deux phases viscoplastiques de même sensibilité à la vitesse de déformation. Le cas de sensibilités à la vitesse de déformation différentes dans les deux phases peut être abordé par la méthode différentielle puisque l'approche tangente développée dans le chapitre 3 le permet. Le but du paragraphe suivant est de proposer une méthode théorique pour calculer la sensibilité à la vitesse de déformation effective qui peut être intégrée ensuite dans la méthode différentielle.

4.3 Modélisation de la sensibilité à la vitesse de déformation effective du composite

De nombreux alliages sont multiphasés (phases $\alpha + \beta + \gamma...$). La sensibilité à la vitesse de déformation présente une variation significative d'une phase à l'autre. Il est alors important de connaître la sensibilité à la vitesse de déformation du mélange.

Quand le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation n'est pas identique dans les deux phases, il peut être, en première approximation de considérer une sensibilité effective du composite donnée par une loi des mélanges :

$$m = f_1 m_1 + f_2 m_2 \tag{4.26}$$

Plusieurs auteurs ont utilisé cette relation simple (4.26) ; notamment Parks (1991), Toth et al. (1994).

Cette partie est consacrée à un développement théorique permettant de calculer la sensibilité à la vitesse de déformation effective m. A cet effet, deux types de chargement, en vitesse de déformation et en contrainte sont considérés.

4.3.1 Préliminaires

On considère un matériau composite dont les deux phases sont isotropes et incompressibles (phase 1, f_1 et phase 2, f_2). Le comportement de chaque phase est défini par une loi puissance viscoplastique de type Norton Hoff suivantes :

$$\sigma_1 = k_1 (\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_1} \tag{4.27}$$

$$\sigma_2 = k_2 (\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2} \tag{4.28}$$

avec σ_1 , σ_2 respectivement les contraintes dans les deux phases ; k_1 et k_2 représente les rigidités des deux phases. $\dot{\varepsilon}_o$est une vitesse de déformation de référence. Les deux sensibilités à la vitesse de déformation m_1 et m_2 sont supposées constantes.

On suppose que lorsque le comportement des deux phases est isotrope viscoplastique, le composite a alors un comportement isotrope qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\sigma = k (\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^{m} \tag{4.29}$$

où m et k sont, respectivement la sensibilité à la vitesse de déformation et la rigidité du composite. Pour simplifier les équations de cette modélisation, la contrainte σ et la vitesse de

déformation $\dot{\varepsilon}$ ne sont pas prises sous forme tensorielle ou équivalente. Comme le matériau est isotrope et que les deux types de chargement considérés sont la compression axisymétrique et compression plane, il est possible d'utilisé seulement la composante majeur de ces deux tenseurs. Un terme correctif intervient au niveau de la rigidité par rapport à une formulation en vitesse et contrainte équivalente en von mises, mais est sans influence sur le développement théorique. On suppose également que les axes principaux de déformation et de la contrainte coincident avec les axes géométriques des inclusions.

4.3.2 Lois de localisation

Le matériau composite est constitué de deux phases dont le comportement est donné par les relations (4.27-4.28). La vitesse de déformation du composite est fonction de la vitesse de déformation dans les deux phases :

$$\dot{\varepsilon} = f_1 \dot{\varepsilon}_1 + f_2 \dot{\varepsilon}_2 \tag{4.30}$$

où f_1 et f_2 sont les fractions volumiques des phases 1 et 2 :

$$f_1 + f_2 = 1 \tag{4.31}$$

La déformation locale dans la phase 1 peut s'exprimer en fonction de la vitesse de déformation dans le composite sous la forme suivante :

$$\dot{\varepsilon}_1 = r \dot{\varepsilon} \tag{4.32}$$

où r est un scalaire appelé, facteur de localisation de déformation dans la phase 1. En utilisant (4.30) et (4.32), la relation de localisation dans la phase 2 est donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_2 = \frac{1 - f_1 r}{f_2} \dot{\varepsilon} \tag{4.33}$$

La contrainte macroscopique dans le composite est la valeur moyenne de la contrainte dans les deux phases :

$$\sigma = f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 \tag{4.34}$$

La contrainte locale dans la phase 1 peut s'exprimer en fonction de la contrainte dans le composite sous la forme suivante :

$$\sigma_1 = t\sigma \tag{4.35}$$

où t est un scalaire nommé facteur de censentration des contraintes dans la phase 1. En utilisant (4.34) et (4.35), il vient :

$$\sigma_2 = \frac{1 - f_1 t}{f_2}\sigma \tag{4.36}$$

4.3.3 Contrôle en vitesse

Dans le cas où, la vitesse de déformation est imposée aux frontières du composite, la contrainte est donnée par (4.34). En substituant dans cette relation, les lois de comportement (4.27-4.29) on obtient :

$$k(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^m = f_1 k_1 (\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_1} + f_2 k_2 (\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2} \tag{4.37}$$

Afin de déterminer m, on réalise un saut de vitesse de déformation de faible amplitude. Ainsi, la nouvelle vitesse de déformation macroscopique appliquée est multipliée par un facteur α proche de 1 ($\alpha \cong 1$) :

$$\dot{\varepsilon}' = \alpha\, \dot{\varepsilon} \tag{4.38}$$

Puisque le saut de vitesse est faible, on suppose que les nouvelles vitesses de déformation dans les deux phases suivent la même relation :

$$\dot{\varepsilon}_1' = \alpha\, \dot{\varepsilon}_1 \qquad \text{et} \qquad \dot{\varepsilon}_2' = \alpha\, \dot{\varepsilon}_2 \tag{4.39}$$

En substituant (4.38-4.39) dans (4.37), il vient :

$$k\alpha^m(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^m = f_1 k_1 \alpha^{m_1}(\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_1} + f_2 k_2 \alpha^{m_2}(\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2} \tag{4.40}$$

Le développement au premier ordre des fonctions α^{m_i} donne :

$$\alpha^m = 1 + m(\alpha - 1)$$

$$\alpha^{m_1} = 1 + m_1(\alpha - 1) \tag{4.41}$$

$$\alpha^{m_2} = 1 + m_2(\alpha - 1)$$

La combinaison de (4.37),(4.41) et (4.40), permet de définir m de la façon suivante :

$$m = \frac{f_1 k_1 m_1 (\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_1} + f_2 k_2 m_2 (\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2}}{f_1 k_1 (\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_1} + f_2 k_2 (\frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2}} \tag{4.42}$$

En introduisant le facteur de localisation de déformation r, l'équation (4.42) conduit à la relation suivante :

$$m = \frac{f_1 k_1 m_1 + f_2 k_2 m_2 R}{f_1 k_1 + f_2 k_2 R} \tag{4.43}$$

avec :

$$R = \frac{(1 - f_1 r)^{m_2}}{f_2^{m_2} r^{m_1}} (\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2 - m_1} \tag{4.44}$$

On peut remarquer que la sensibilité à la vitesse de déformation m est fonction de la vitesse de déformation appliquée.

Dans le cas du modèle de Taylor, les vitesses de déformation sont identiques dans chaque phase et égale à la vitesse de déformation macroscopique :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} \tag{4.45}$$

Ce qui donne :

$$r = 1 \tag{4.46}$$

Dans ce cas, la relation donnant la sensibilité à la vitesse de déformation effective m s'écrit simplement :

$$m = \frac{f_1 k_1 m_1 + f_2 k_2 m_2 (\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2 - m_1}}{f_1 k_1 + f_2 k_2 (\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o})^{m_2 - m_1}} \tag{4.47}$$

Dans le cas ($m_1 = m_2$), les relations (4.43) et (4.47) donnent m=$m_1 = m_2$.

4.3.4 Contrôle en contrainte

Dans cette partie, nous supposons que la contrainte est imposée aux frontières. La relation (4.30) est écrite en terme des contraintes, via les lois de comportement (4.27-4.29). Il vient alors :

$$\left(\frac{\sigma}{k}\right)^{\frac{1}{m}} = f_1 \left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + f_2 \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \tag{4.48}$$

On applique un faible saut de contrainte sur la contrainte macroscopique :

$$\sigma' = \alpha\sigma \tag{4.49}$$

et on suppose que la contrainte dans chaque phase va être évaluer de la même manière, d'où :

$$\sigma'_1 = \alpha\sigma_1 \qquad \text{et} \qquad \sigma'_2 = \alpha\sigma_2 \tag{4.50}$$

A l'aide de (4.49), (4.50) et (4.48), on obtient :

$$\alpha^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\sigma}{k}\right)^{\frac{1}{m}} = f_1 \alpha^{\frac{1}{m_1}} \left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + f_2 \alpha^{\frac{1}{m_2}} \left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \tag{4.51}$$

Puisque α est proche de 1, la fonction $\alpha^{\frac{1}{m_i}}$ est développée au 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} \alpha^{\frac{1}{m}} &= 1 + \frac{1}{m}(\alpha - 1) \\ \alpha^{\frac{1}{m_1}} &= 1 + \frac{1}{m_1}(\alpha - 1) \\ \alpha^{\frac{1}{m_2}} &= 1 + \frac{1}{m_2}(\alpha - 1) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Ceci permet d'exprimer m de la façon suivante :

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{f_1}{m_1}\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + \frac{f_2}{m_2}\left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}}{f_1\left(\frac{\sigma_1}{k_1}\right)^{\frac{1}{m_1}} + f_2\left(\frac{\sigma_2}{k_2}\right)^{\frac{1}{m_2}}} \tag{4.53}$$

En introduisant le facteur de concentration de contrainte t, on obtient la relation suivante :

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{f_1}{m_1} + \frac{f_2}{m_2} T}{f_1 + f_2 T} \tag{4.54}$$

avec :

$$T = \left(\frac{1 - f_1 t}{f_2 k_2}\right)^{\frac{1}{m_2}} \left(\frac{t}{k_1}\right)^{-\frac{1}{m_1}} \sigma^{\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)} \tag{4.55}$$

A noter que m dépend de la contrainte appliquée.

Pour le cas particulier du modèle statique, la contrainte est supposée homogène dans chaque phase :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \tag{4.56}$$

ce qui fait que :

$$t = 1 \tag{4.57}$$

La relation (1.54) devient :

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{f_1}{m_1} + \frac{f_2}{m_2} \frac{k_1^{\frac{1}{m_1}}}{k_2^{\frac{1}{m_2}}} \sigma^{\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)}}{f_1 + f_2 \frac{k_1^{\frac{1}{m_1}}}{k_2^{\frac{1}{m_2}}} \sigma^{\left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}\right)}} \tag{4.58}$$

Dans le cas où de sensibilité à la vitesse de déformation est identique dans les deux phases ($m_1 = m_2$), les relations (4.54) et (4.58) donnent $m = m_1 = m_2$.

4.3.5 Sensibilité à la vitesse de déformation effective en utilisant la méthode différentielle

L'interaction inclusion-matrice est traitée au travers du modèle tangent. Après avoir résolu le problème inclusion-matrice pour chaque étape de la méthode différentielle par l'intermédiaire de l'approche tangente, les facteurs de localisation de déformation r et de contrainte t dans la phase 1 (phase inclusionnaire) sont alors connus. Ainsi, la sensibilité à la vitesse de déformation effective m peut être obtenue soit par (4.43) ou (4.54).

Le schéma différentiel est initialisé en prenant pour valeur initiale de m et k, ceux de la

matrice de départ (phase 2) :

$$m_{old} = m_2$$

$$k_{old} = k_2$$

A l'étape suivante la matrice possède le comportement du milieu homogénéisé. Au fur et à mesure des étapes les valeurs effectives de m et k évoluent. Les équations suivantes sont utilisées pour calculer la nouvelle valeur m du milieu homogénéisé à chaque étape de la méthode différentielle :

i - contrôle en vitesse de déformation (eq.(4.43)) :

$$m^{new} = \frac{f_1 k_1 m_1 + f_2 k_{old} m_{old} R}{f_1 k_1 + f_2 k_{old} R} \tag{4.59}$$

avec :

$$R = \frac{(1 - f_1 r)^{m_{old}}}{f_2^{m_{old}} r^{m_1}} \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_o}\right)^{m_{old} - m_1} \tag{4.60}$$

ii - contrôle en contrainte (eq.(4.54)) :

$$\frac{1}{m^{new}} = \frac{\frac{f_1}{m_1} + \frac{f_2}{m_{old}} T}{f_1 + f_2 T} \tag{4.61}$$

avec :

$$T = \left(\frac{1 - f_1 t}{f_2 k_{old}}\right)^{\frac{1}{m_{old}}} \left(\frac{t}{k_1}\right)^{-\frac{1}{m_1}} \sigma^{\left(\frac{1}{m_{old}} - \frac{1}{m_1}\right)} \tag{4.62}$$

On peut distinguer deux approches, celles où la phase 1 ou 2 est ajoutée. En effet le rôle des deux phases est symétrique. La matrice de depart de la méthode différentielle peut donc étre soit de la phase 1 ou de la phase 2. Les deux facteurs de localisation de la vitesse de déformation r et de localisation de contraintes t sont calculés à chaque étape de la méthode différentielle.

4.4 Applications

4.4.1 Application sur l'alliage de Titane ; TA5E

4.4.1.1 Données expérimentales

La plupart des alliages de titane sont forgés dans un domaine biphasé $(\alpha+\beta)$. Les alliages de Titane TA6V, CEZ et Ti6246 ne présentent pas de domaine monophasé α. L'alliage TA5E possède quand à lui, trois domaines de phases et apparaît de ce fait comme l'alliage modèle pour tester différents modèles d'homogénéisation.

Audrerie et al. (1992) étudient l'alliage de Titane TA5E qui contient 4.9% d'Al et 2.53% de Sn. Grâce à plusieurs traitements thermiques, ces auteurs ont déterminé les températures de transition d'un domaine monophasé à un domaine biphasé de l'alliage TA5E . La température de transition du domaine monophasé α au domaine biphasé $(\alpha+\beta)$ est voisine de $940°C$. La température de passage du domaine biphasé au domaine monophasé β se situe aux environs de $1000°C$.

Dans le domaine biphasé $(\alpha+\beta)$ à une température de $980°C$, la fraction volumique des deux phases est :

$$f_\alpha = f_\beta = 0.5$$

Les lois de comportement des deux phases extrapolées à la température de $980°C$ peuvent être représentées par les lois suivantes :

$$\sigma_\alpha = 267.5(\dot{\bar{\varepsilon}})^{0.29} \tag{4.63}$$

$$\sigma_\beta = 76.7(\dot{\bar{\varepsilon}})^{0.23} \tag{4.64}$$

Par analyse d'images, ces auteurs ont pu déterminer le coefficient de localisation à la température de $980°C$, dans les deux phases :

$$\dot{\varepsilon}_\alpha = 0.25\ \dot{\varepsilon} \tag{4.65}$$

$$\dot{\varepsilon}_\beta = 1.75\ \dot{\varepsilon} \tag{4.66}$$

4.4.1.2 Résultats et discussions

En disposant des rigidités, sensibilités à la vitesse de déformation, fraction volumique et la localisation de la vitesse de déformation des deux phases, l'approche analytique proposée dans ce travail permet de calculer m via les relations (4.43) et (4.54). La méthode différentielle est utilisée dans le cas où la phase α est inclusionnaire et aussi dans le cas où la phase β est inlusionnaire. Les résultats de la méthode différentielle sont confrontés aux résultats expérimentaux et aux approches Taylor et statique.

Approches	m macroscopique
Modèle de Taylor	0.29
Contrôle de la vitesse	0.27
Méthode différentielle (Inclusion molle)	0.249
Méthode différentielle (Inclusion dure)	0.244
Contrôle de la contrainte	0.236
Modèle statique	0.23
Expérience	0.22

Tableau 4.1 : Valeurs de la sensibilité à la vitesse de déformation m pour une vitesse de déformation de $1s^{-1}$, prévus par les différents modèles.

Les deux modèles statique et Taylor encadrent bien les résultats donnés par les relations (4.43) et (4.54) ainsi que ceux donnés par la méthode différentielle et en contrôlant la contrainte. Notons que les valeurs de m obtenue en contrôlant la contrainte se rapproche de la valeur de l'approche statique, tandis que la valeur de m obtenue en contrôlant la vitesse de déformation (relation (4.43)) se rapproche de l'approche de Taylor. Les approches en contrôlant la contrainte et statique donnent le meilleur accord avec l'expérience. Il reste à vérifier si la valeur expérimentale de m sous estime l'approche statique également pour d'autres

compositions de l'alliage TA5E.

4.4.2 Application au matériau polycristallin biphasé Camphor + OCP

Les matériaux géologiques sont souvent multiphasés. Il est alors difficile d'appréhender le comportement global à partir des propriétés des constituants.

Dans cette partie, la méthode différentielle développée dans la section 4.2 est utilisée pour étudier l'évolution de la sensibilité à la vitesse de déformation effective m du mélange Camphor + OCP pour différentes compositions de ce mélange en appliquant les différents modèles discutés dans la section 4.3.

4.4.2.1 Données expérimentales

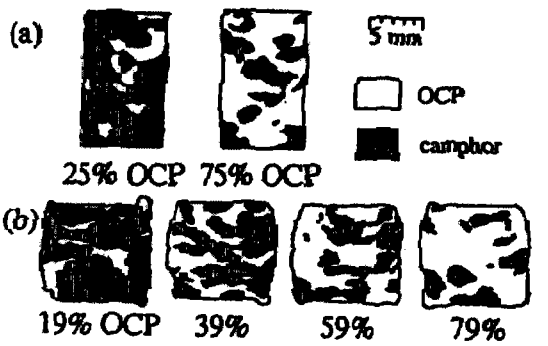


Figure 4.9 : *Différentes compositions du mélange OCP-Camphor.*

Bons et Urai (1994) ont réalisé une étude expérimentale sur un matériau biphasé constitué de Camphor et d'octachloropropane (*fig* 4.9). Les essais ont été réalisés sur un échantillon cylindrique Camphor+OCP dans un appareil miniaturisé à gaz sous compression ; la pression hydrostatique constante vaut 0.6 MPa. La taille des grains dans chaque phase est de l'ordre de 25-50 μm. La contrainte de compression varie de 0.1 à 1.2 MPa et la vitesse de déformation induite a été mesurée. Les lois de comportement de OCP+Camphor ainsi obtenues sont

représentées par les relations suivantes :

$$\sigma_{OCP} = 3.09(\dot{\bar{\varepsilon}})^{0.222} \tag{4.67}$$

$$\sigma_{Camphor} = 30.04(\dot{\bar{\varepsilon}})^{0.303} \tag{4.68}$$

Les résultats expérimentaux sont présentés sur la *figure* 4.10, par des droites linéaires en $log(\sigma) - log(\dot{\bar{\varepsilon}})$, pour différentes vitesses de déformations comprises entre $10^{-3}\, 1s^{-1}$ et $10^{-6} 1s^{-1}$, pour différentes compositions du biphasé Camphor-OCP.

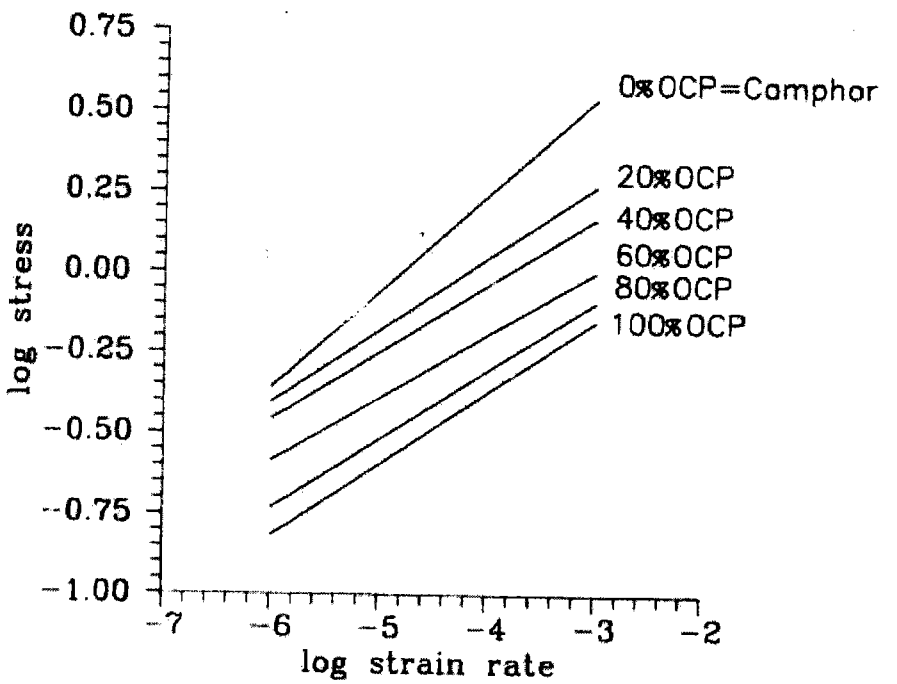


Figure 4.10 : *Courbe contrainte-vitesse de déformation pour différentes compositions du mélange Camphor-OCP, Bons et Urai (1994)* .

La sensibilité à la vitesse de déformation m est obtenue en mesurant la pente des courbes $log(\sigma) - log(\dot{\bar{\varepsilon}})$. L'ordonné à l'origine de ces courbes permet d'obtenir la rigidité k. Les deux quantités m, k sont données respectivement avec une incertitude Δm et Δk (Bons et Urai

(1994)) sont regroupés dans le tableau suivant.

% OCP	m	k
0	0.303 ± 0.03	30.04 ± 2
20	0.232 ± 0.03	9.68 ± 2
40	0.222 ± 0.03	7.72 ± 2
60	0.196 ± 0.03	3.83 ± 2
80	0.212 ± 0.03	3.52 ± 2
100	0.222 ± 0.03	3.09 ± 2

4.4.2.2 Résultats et discussions

Les données expérimentales que nous avons recueillies pour différentes compositions du mélange Comphor-OCP, nous permettent de calculer la sensibilité à la vitesse de déformation effective m à l'aide des différents modèles. Les figures 4.11 – 4.13 montrent l'évolution de m avec la fraction volumique du Camphor.

Sur la figure 4.11, les résultats obtenus par les bornes supérieure (Taylor) et inférieure (statique) en utilisant les relations (4.47) et (4.58), seront comparés avec la solution intermédiaire représenté par la loi de mélange (Eq.(4.26)). Nous reportons également les résultats expérimentaux pour une valeur de sensibilité à la vitesse de déformation de OCP égale à 0.22. La variation de m donnée par l'expérience est complexe : m décroit jusqu à $f = 0.4$. On remarque que ces résultats viole les deux bornes Taylor et statique pour $f = 0.2, 0.4$. On peut constater que la méthode statique fournit la meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux.

L'influence de la vitesse de déformation appliquée sur les résultats obtenus par les deux approches Taylor et statique est représentée sur la figure 4.12. Cette influence est faible dans le cas de l'approche de Taylor et nulle dans le cas de l'approche statique.

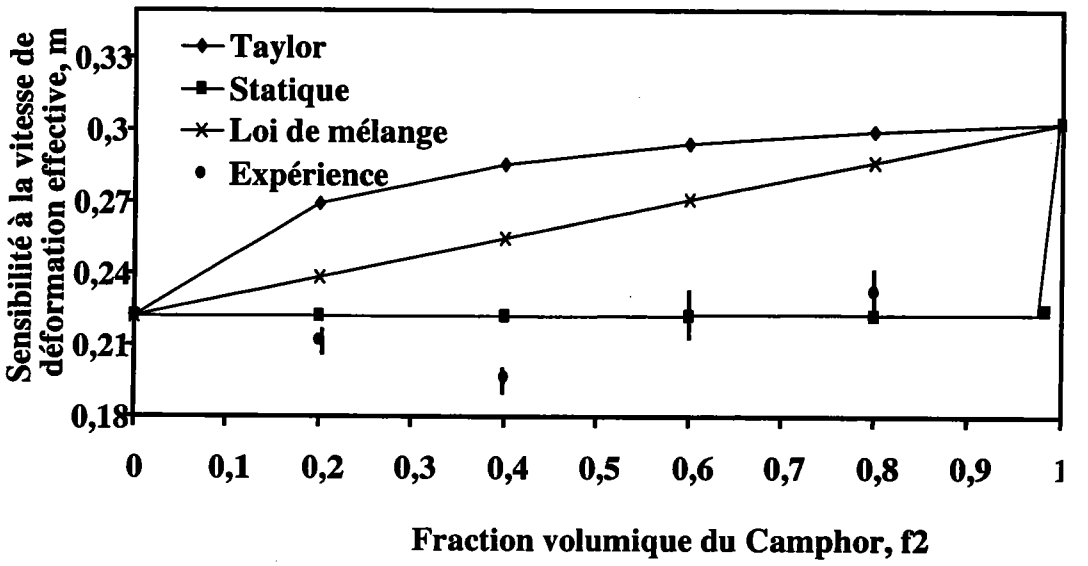


Figure 4.11 : Comparaison des résultats donnés par les deux approches statique et de Taylor, avec ceux donnés par les lois de melanges.

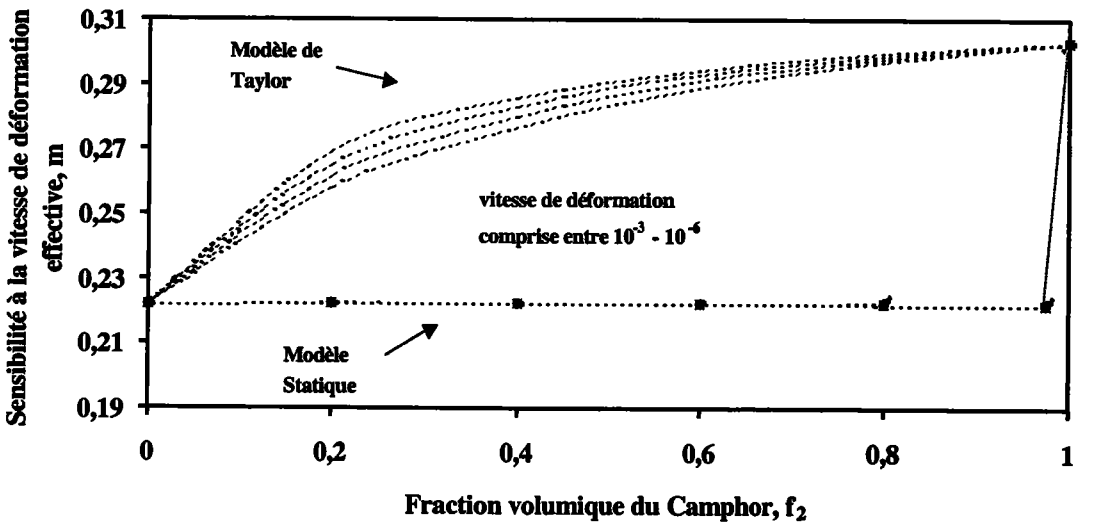


Figure 4.12 :Effet de la vitesse de déformation sur les résultats donnés par les deux approches statique et de Taylor.

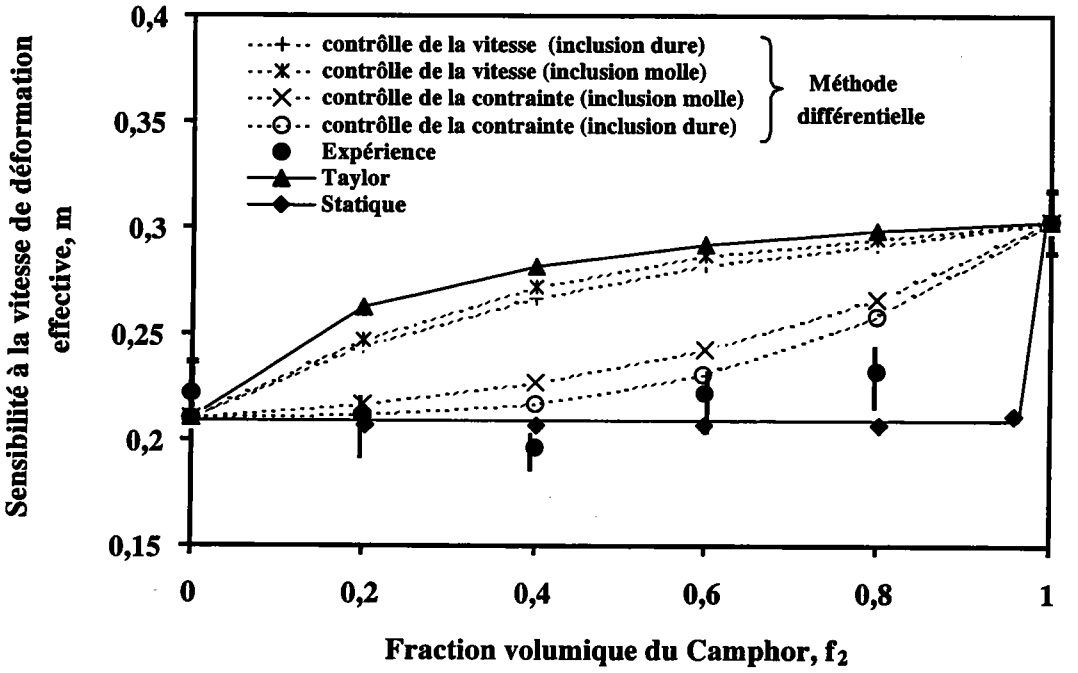


Figure 4.13 :Comparaison des résultats de la méthode différentielle avec ceux de l'expérience.

La figure 4.13 regroupe les résultats des deux approches de Taylor et statique ainsi que de la méthode différentielle en contrôlant la vitesse de déformation et en contrôlant la contrainte. Les tests sont réalisés pour les deux configurations possibles : phase dure inclusionnaire et phase molle inclusionnnaire. Les résultats seront confrontés aux résultats expérimentaux, reportés avec une certaine incertitude. La valeur de sensibilité à la vitesse de déformation de la phase molle OCP est prise égale à 0.21, pour pouvoir encadrer au mieux les résultats expérimentaux par les deux approches Taylor et statique. Nous vérifions que la solution donnée par la méthode différentielle est comprise entre les bornes statique et Taylor.

En comparant les différentes approches avec l'expérience, on constate que le meilleur accord est obtenu par l'approche statique pour les faibles fractions volumiques. Cette approche donnant une valeur constante de la sensibilité à la vitesse de déformation proche de celle de la phase molle OCP.

L'allure de la courbe obtenue par la méthode différentielle et en contrôlant la contrainte est similaire à celle donnée par l'expérience. On peut remarquer que la méthode différentielle fournit des résultats plus raisonnables que l'approche statique pour les grandes fractions volumique de la phase dure (Camphor).

Conclusion générale

Nous avons utilisé une approche tangente anisotrope pour des matériaux viscoplastiques, dans le but d'examiner la localisation de la vitesse de déformation dans une inclusion. La déformation a été supposée homogène dans l'inclusion, même si, dans le cas d'un comportement non linéaire, la vitesse de déformation dans l'inclusion est non homogène.

Nous avons abordé le cas d'un matériau viscoplastique contenant une inclusion cylindrique de section elliptique (déformation plane) ou une inclusion ellipsoïdale de révolution (déformation axisymétrique). Nous avons confronté les résultats de l'approche tangente aux différentes méthodes : analytique, variationnelle et éléments finis. Les principaux résultats sont :

- La localisation de la vitesse de déformation dans l'inclusion est influencée par le caractère non linéaire du matériau. Cet effet est plus prononcé quand l'écart de dureté avec la matrice est important. L'influence est néanmoins plus faible pour une inclusion molle que pour une inclusion dure.

- Plus le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation est faible, plus la localisation de la vitesse de déformation dans une inclusion molle est importante et plus la localisation de la vitesse de déformation dans une inclusion dure est faible.

- Existence d'une valeur critique du rapport de rigidité pour une inclusion parfaitement plastique dans une matrice linéaire ou non linéaire.

- Lorsque les inclusions sont infiniment aplaties ou allongées, elles se déforment comme la matrice (modèle de Taylor).

- Les inclusions parfaitement plastiques dans une matrice linéaire ou non linéaire, de forme très allongée ou très aplatie restent déformables jusqu'á des valeurs élevées du rapport de rigidité. Par contre les inclusions globulaires deviennent indéformables pour des rapports de

rigidité plus faibles.

- La localisation de la vitesse de déformation d'une inclusion viscoplastique dans une matrice infinie viscoplastique est mieux représentée par l'approche tangente que par les approches sécantes.

- Le cas de différents coefficients de sensibilité à la vitesse de déformation de la matrice et de l'inclusion est considéré dans ce travail. L'approche tangente donne des résultats très satisfaisants.

La méthode différentielle est abordée dans ce travail pour estimer le comportement effectif d'un matériaux composite constitué d'inclusions viscoplastiques dispersées dans une matrice viscoplastique. L'originalité de cette partie réside essentiellement dans l'introduction d'un calcul de localisation par l'approche tangente (avec un module tangent anisotrope).

Nous avons abordé la question de l'influence de la sensibilité à la vitesse de déformation (prise identique dans les deux phases) sur la rigidité effective du composite. La rigidité effective est fortement influencée par la sensibilité à la vitesse de déformation. Ainsi lorsque m décroît, la rigidité effective augmente dans le cas des inclusions dures, et diminue lorsque les inclusions sont molles.

Dans le cas où le coefficient de la sensibilité à la vitesse de déformation n'est pas identique dans les deux phases, nous avons proposé une modélisation pour le calcul de la sensibilité à la vitesse de déformation effective d'un composite. Deux relations qui correspondent à deux types de chargements ont été obtenues : contrôle en vitesse de déformation (4.43), contrôle en contrainte (4.54). Les deux cas limites qui correspondent aux deux bornes Taylor et statique sont donnés par les relations (4.47) et (4.58) respectivement. Dans la méthode différentielle, la sensibilité à la vitesse de déformation est calculée par les relations (4.59) et (4.61), selon que l'une ou l'autre phase est prise comme matrice.

En applications, nous avons évalué la sensibilité à la vitesse de déformation effective pour deux matériaux biphasés.

- Titane TA5E
- Camphor-octhacloropropane

Les principaux résultats sont les suivants :

- Les deux approches Taylor et statique encadrent bien les résultats théoriques obtenus en contrôlant la contrainte et la vitesse de déformation et également ceux de la méthode différentielle.

- Les résultats obtenus en contrôlant la contrainte sont plus proches du modèle statique. Ceux obtenus en contrôlant la vitesse de déformation se rapproche du modèle de Taylor.

- Nous avons comparé les différentes approches avec l'expérience. Nous avons constaté qu'un meilleur accord peut être obtenu par l'approche statique pour les faibles fractions volumiques. Cette approche donne une valeur constante qui correspond à la sensibilité à la vitesse de déformation de la phase molle. Mais l'allure obtenue par la méthode différentielle (en contrôle de contrainte) est similaire à celle donnée par l'expérience. On peut conclure que la méthode différentielle fournit des résultats plus raisonnables que l'approche statique.

Annexe A : Calcul des tenseurs d'interaction

Le calcul des coefficients P_{ijkl} et T_{ijkl} se fait de la même façon que dans le cas élastique traité par Faivre (1971), Tiem et al. (1986) and Berveiller et al. (1987). On calcule d'abord les termes T_{ijkl} que l'on symétrise ensuite pour obtenir les P_{ijkl}

$$T^{tg}_{ijkl} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} G^{tg}_{ik,jl}(\underline{r} - \underline{r}') dr^3 dr'^3 \qquad \text{(A-1)}$$

La transformée de Fourier de la fonction de Green s'écrit :

$$\tilde{G}^{tg}_{ik}(\underline{k}) = \int_{R^3} G^{tg}_{ik}(\underline{r}) \exp(-i\underline{k}.\underline{r}) dr^3$$

La transformée de fourier inverse est donnée par :

$$G^{tg}_{ik}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{R^3} \tilde{G}^{tg}_{ik}(\underline{k}) \exp(i\underline{k}.\underline{r}) dk^3$$

En injectant cette dernière relation dans (A-1), on obtient :

$$T^{tg}_{ijkl} = -\frac{1}{8\pi^3 V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \left(\int_{R^3} k_j k_l \tilde{G}^{tg}_{ik} \exp(ik(\underline{r} - \underline{r}')) d^3k \right) dr^3 dr'^3 \qquad \text{(A-2)}$$

Les transformations de Fourier $\tilde{G}^{tg}_{km}$ et $\tilde{H}^{tg}_{m}$ des fonction de Green sont solutions du système d'équations suivant qui résulte de la transformation de Fourier du système (3.63-64) :

$$-A^{tg}_{ijkl} k_j k_l \tilde{G}^{tg}_{km}(\underline{k}) + ik_i \tilde{H}^{tg}_{m}(\underline{k}) + \delta_{im} = 0 \qquad \text{(A-3)}$$

$$k_k \tilde{G}^{tg}_{km}(\underline{k}') = 0 \qquad (A\text{-}4)$$

On montre facilement que $k^2 \tilde{G}^{tg}_{km}(\underline{k})$ et $k\tilde{H}^{tg}_{m}(\underline{k})$ sont indépendants du module k du vecteur $\underline{k}$.

a) - Inclusion sphérique de rayon a

En coordonnées sphériques k, θ, φ , on a :

$$\begin{aligned} k_1 &= k\sin\theta\cos\varphi \\ k_2 &= k\sin\theta\sin\varphi \\ k_3 &= k\cos\theta \end{aligned} \qquad (A\text{-}5)$$

avec $d^3k = k^2 \sin\theta d\theta d\varphi dk$

En tenant compte du fait que $k_j k_l \tilde{G}^{tg}_{ik}$ sont indépendants du module du vecteur $\underline{k}$, les termes T^{tg}_{ijkl} s'écrivent alors pour une inclusion sphérique sous la forme suivante :

$$T^{tg}_{ijkl} = -\frac{1}{8\Pi^3 V_g}\int_0^{\Pi} \sin\theta \left(\int_0^{2\Pi} k_j k_l \tilde{G}^{tg}_{ik}(\underline{k}) d\varphi\right) d\theta \int_0^{\infty}\int_{V_g}\int_{V_{g'}} \exp(i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}'))k^2 d^3k dr^3 dr'^3 \qquad (A\text{-}6)$$

Ledernier terme de cette intégrale se calcule facilement et on obtient alors :

$$\frac{1}{8\Pi^3 V_g}\int_0^{\infty}\int_{V_g}\int_{V_{g'}} \exp(i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}'))k^2 d^3k dr^3 dr'^3 = \frac{1}{4\Pi} \qquad (A\text{-}6)$$

Finalement, pour une inclusion sphérique :

$$T^{tg}_{ijkl} = -\frac{1}{4\Pi}\int_0^{\Pi} \sin\theta \left[\int_0^{2\Pi} k_j k_l \tilde{G}^{tg}_{ik}(\underline{k}) d\varphi\right] d\theta \qquad (A\text{-}6)$$

b - Inclusion ellipsoïdale de paramètre a, b, c

On passe directement de la forme sphérique à la forme ellipsoïdale d'axes a, b, c suivant Ox_1, ox_2, ox_3 par le changement de variables suivants :

$$k(k_1, k_2, k_3) \longmapsto K(k_1, \frac{a}{b}k_2, \frac{c}{a}k_3) \qquad (A\text{-}7)$$

$$r(x_1, x_2, x_3) \longmapsto R(x_1, \frac{a}{b}x_2, \frac{a}{c}x_3)$$

Le passage des composantes k_i aux composantes K_i s'écrit

$$k_i = \Psi_{ij} K_j \tag{A-8}$$

La matrice Ψ_{ij} est définie par :

$$\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{c} \end{pmatrix} \tag{A-9}$$

avec

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{A-10}$$

Les transformations de Fourier des fonctions de Green G_{km} et H_m sont donnés par l'équation (A-2) qui s'écrit dans ce cas :

$$A^{tg}_{ijkl}\Psi_{lr}k_r\Psi_{js}k_s\tilde{G}^{tg}_{km}(\underline{r} - \underline{r}') - i\Psi_{is}k_s H^{tg}_m(\underline{r} - \underline{r}') + \delta_{im} = 0 \tag{A-11}$$

$$\Psi_{kr}k_r\tilde{G}^{tg}_{km} = 0 \tag{A-12}$$

Pour une inclusion ellipsoidale, les coefficients T_{ijkl} s'écrivent alors :

$$T^{tg}_{ijkl} = -\frac{1}{4}\int_0^{\Pi} \sin\theta \left(\int_0^{2\Pi} \Psi_{jr}K_r\Psi_{ls}K_s G^{tg}_{ik}(\Psi\underline{K})d\varphi\right)d\theta \tag{A-13}$$

Finalement, les coefficients P_{ijkl} sont donnés par la relation suivante :

$$P^{tg}_{ijkl} = \frac{1}{4}(T^{tg}_{ijkl} + T^{tg}_{jikl} + T^{tg}_{ijlk} + T^{tg}_{jilk}) \tag{A-14}$$

Annexe B : Problème de l'inclusion élastique

a) - Position duproblème

Considérons une inclusion ellipsoïdale élastique C^Idans une matrice élastique C^M homogène et infinie. L'ensemble est sollicité à l'infini par un champ de déplacement de la forme $\underline{\xi} = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$. Ainsi un champ de déformation homogène $\underline{\underline{E}}$ est appliqué à l'infini.

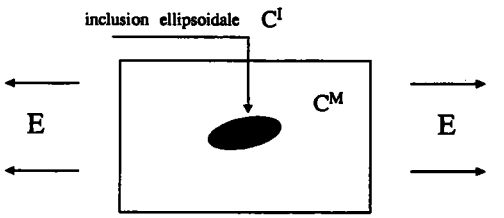


Figure B.1 : *problème de l'inclusion*

La loi de Hook qui relie le tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ au tenseur des déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{x}) : \underline{\underline{grad\xi}}(\underline{x}) \qquad \text{(B-1)}$$

Avec la définition suivante des fonctions indicatrices $\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M$:

$$\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Inclusion} \qquad \text{(B-2)}$$

$$\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M(\underline{x}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Matrice} \qquad \text{(B-3)}$$

On a :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M - \delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M(\underline{x}) \tag{B-4}$$

A l'aide des relations précedentes, l'équation d'équilibre, $div\ \underline{\underline{\sigma}} = 0$, prend la forme suivante :

$$\underline{div}(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{grad\xi}}) + \underline{f} = 0 \tag{B-5}$$

où $\underline{f}$ peut être considérée comme une force fictive, définie par :

$$\underline{f} = \underline{div}(\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M : \underline{\underline{grad\xi}}) = \underline{div}(\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M : \underline{\underline{\varepsilon}}) \tag{B-6}$$

On considère que la déformation est uniforme à l'interieur de l'inclusion, a notée $\underline{\underline{\varepsilon}}^I$. Il vient alors :

$$\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M(\underline{x})\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M)\underline{\underline{\varepsilon}}^I \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Inclusion} \tag{B-7}$$

$$\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M(\underline{x})\underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \underline{x} \in \text{Matrice} \tag{B-8}$$

Ce qui conduit à l'expression suivant de la force fictive :

$$f_i = (\delta\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M : \underline{\underline{\varepsilon}})_{,j} = -(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M)\underline{\underline{\varepsilon}}^I.\underline{n}\delta(\partial I) \tag{B-9}$$

avec $\underline{n}$ la normale à l'interface inclusion-matrice ∂I, $\delta(\partial I)$ désigne la distribution de Dirac associée à la surface ∂I.

b) - Fonction de Green

L' équation (B-5) est de type Navier, et peut être résolue par la méthode des fonctions de Green.

Les fonctions de Green $\underline{\underline{\underline{\underline{G}}}}$ sont associées au module élastique dans la matrice $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M$. On considère un milieu infini de module élastique $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M$, et une force $\underline{P}$ concentré au point $\underline{x}'$. Les conditions aux limites sont :

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \underline{\xi}(\underline{x}) = 0 \tag{B-10}$$

Le déplacement $\underline{\xi}^p(\underline{x})$ produit au point $\underline{x}$, dépend linéairement du chargement $\underline{P}$:

UNIVERSITE DE METZ
S. C. D.

$$\underline{\xi}^p(\underline{x}) = \underline{\underline{G}}^M(\underline{x} - \underline{x}').\underline{P} \tag{B-11}$$

où $\underline{\underline{G}}^M$ est la fonction de Green. En utilisant la condition aux limites (B-10), il vient

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \underline{\underline{G}}^M(\underline{x} - \underline{x}') = 0 \tag{B-12}$$

La fonction de Green G^M_{km} associées au module C^M_{ijkl} est solution du système d'équations suivantes :

$$C^M_{ijkl} G_{km,lj}(\underline{x} - \underline{x}') + \delta_{im}\delta(\underline{x} - \underline{x}') = 0 \quad \forall \underline{x}, \underline{x}' \tag{B-13}$$

avec la condition aux limites (B-12). $\delta(\underline{x} - \underline{x}')$ désigne la fonction de Dirac en $\underline{x}'$. Pour m fixé, le terme $\delta_{im}\delta(\underline{x} - \underline{x}')$ représente la i-ème composante d'une force unité concentrée au point $\underline{x}'$ et parallèle à la direction m.

Le vecteur déplacement $\underline{\xi}$, solution de l'équation (B-5), est obtenu par superposition de :

1) la solution $\underline{\xi}^1$ de l'équation homogène ($f = 0$) qui satisfait la condition $\lim_{x \longrightarrow \infty} \underline{\xi}(\underline{x}) = \underline{\underline{E}}.\underline{x}$. Cette solution est évidente

$$\underline{\xi}^1 = \underline{\underline{E}}.\underline{x}. \tag{B-14}$$

2) la solution $\underline{\xi}^2$ de l'équation (B-6) qui satisfait la condition $\lim_{x \longrightarrow \infty} \underline{\xi} = 0$:

$$\underline{\xi}^2 = \int_{R^3} \underline{\underline{G}}^M(\underline{x} - \underline{x}')\underline{f}(\underline{x}')d\underline{x}' \tag{B-15}$$

$$\underline{\xi}^2 = -\int_{\partial I} \underline{\underline{G}}^M(\underline{x} - \underline{x}') \left[(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M)\underline{\underline{\varepsilon}}^I \right] .\underline{n}(\underline{x}')d\underline{a}' \tag{B-16}$$

avec $\underline{n}(\underline{x}')$ la normale extérieure à la surface ∂I, et $d\underline{a}'$ est un élement de la surface ∂I au point $\underline{x}'$.

Finalement, en utilisant le théorème de Gauss qui transforme l'integrale de surface en integrale de volume, le champ de déplacement solution s'écrit : :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}(\underline{x}) &= \underline{\xi}^1(\underline{x}) + \underline{\xi}^2(\underline{x}) \\ &= E_{in}x_n + \left(\int_I G^M_{ij,k}(\underline{x} - \underline{x}')d\underline{x}' \right) (C^I_{jklm} - C^M_{jklm})\varepsilon^I_{lm} \end{aligned} \tag{B-17}$$

Aprés différentiation de l'équation (B-17), il vient

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{x}) = \underline{\underline{\underline{\underline{E}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}(\underline{x})(\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M)\underline{\underline{\varepsilon}}^I \tag{B-18}$$

avec

$$R^M_{ijkl}(\underline{x}) = -\left[\int_I G^M_{ik,jl}(\underline{x} - \underline{x}')d\underline{x}'\right]_{(ij)(kl)} \tag{B-19}$$

A noter que la condition $\underline{\underline{\varepsilon}}^I$ uniforme dans l'inclusion ellipsoïdale est vérifiée, puisque $\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^M(\underline{x})$définie par (B-19) ne dépend pas de $\underline{x}$, lorsque $\underline{x}$ ϵ inclusion. Finalement, la loi de localisation est donnée par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^I = \left[\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^M : (\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^I - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M)\right]^{-1} : \underline{\underline{E}} \tag{B-20}$$

Quand le comportement de la matrice est isotrope, le tenseur des modules élastiques s'écrit :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^M = 2\mu^M \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} + 3k^M \underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \tag{B-21}$$

avec μ^M et k^M.$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}}$ sont donné par :

$$K_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{B-22}$$

La fonction de Green a l'exprésion analytique suivante :

$$G^M_{ij}(\underline{x}) = \frac{(3k^M + 7\mu^M)\delta_{ij} + (3k^M + \mu^M)e_i e_j}{8\Pi\mu^M(3k^M + 4\mu^M)r} \tag{B-22}$$

avec $r = |\underline{x}|$, $\underline{e} = \underline{x}/|\underline{x}|$.

Si de plus l'inclusion est sphérique :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}^M = \frac{\beta^M}{2\mu^M}\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} + \frac{\alpha^M}{3k^M}\underline{\underline{\underline{\underline{K}}}} \tag{B-23}$$

avec :

$$\alpha^M = \frac{3k^M}{3k^M + 4\mu^M} \tag{B-24}$$

$$\beta^M = \frac{6(k^M + 2\mu^M)}{5(3k^M + 4\mu^M)} \tag{B-25}$$

A partir de la loi de localisation (B-20), dans le cas d'une inclusion sphérique isotrope (μ^I , k^I) noyée dans une matrice isotrope (μ^M , k^M), on obtient :

$$dev\underline{\underline{\varepsilon}}^I = \frac{1}{1 + \frac{\beta^M(\mu^I - \mu^M)}{\mu^M}} dev\underline{\underline{E}} \tag{B-26}$$

$$tr\ \underline{\underline{\varepsilon}}^I = \frac{1}{1 + \frac{\alpha^M(k^I - k^M)}{k^M}} tr\ \underline{\underline{E}} \tag{B-27}$$

où dev(.) signifie le déviateur du tenseur (.).

Références bibliographiques

ABAQUS. (1995).

ABAQUS/Standard Manuals, Version 5.5, Hibbitt, Karlsson and Sorensen I,nc., Pawtucket RI (USA).

Ahzi, S. (1987).

Une approche autocohérente pour le comportement des polycristaux viscoplastiques en grandes déformations, Thèse, Université de Metz.

Ahzi, S. ; Molinari, A. & Canova, G. R. (1990).

Effects of the grain shape on the texture evolution in polycrystalline materials Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids (EGF Publication 5) ed J P Boehler. p. 425- 441.

Asaro, R. J. & Needleman, A. (1985).

Hardening in rate dependent polycrystals texture development and strain,. Acta. Met., Vol. 33, p. 923.

Ankem, S. & Margolin, H. (1982).

Finite element method calculations of strain stress behavior of alpha-beta TI-Mn alloys part

Audrerie, P. ; Chaze, A. M. & Levaillant, C.(1992).

CEMEF, Ecole des Mines de Paris, Sophia Antipolis, 06560 Valbonne. 1 and 2 Metall Trans A vol13, p 595-601.

Bao, G. ; Hutchinson, J. W. ; Mcmeeking, R. M. (1991a).

Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep, Acta Metall. Mater., 39, 1871-1882.

Batdrof, S. B.& Budiansky, B. (1949).

A mathematical theory of plasticity based on the concept of sip, NACA TN, 1871.

Briottet, L. ; Gilormini, P. ; Montheillet, F. (1999).

Approximate analytical equations for the deformation of in inclusion in a viscoplastic matrix, Acta Mechanica 134, 217-234.

Berveiller, M. & Zaoui, A. (1979).

An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. J. Mech. Phys. Solids. 26, 325-344.

Berveiller, M. ; Fassi-Fehri, O. ; Hihi A. (1987).

The problem of tow plastic and heterogeneous inclusions, Int J Eng Sci. 25, 691-709.

Bishop, J. F. W. & Hill, R. (1951).

Phil. Mag., Vol. 42, p. 401.

Boucher, S. (1976).

Modules effectifs de materiaux quasi homogenes et quasi isotropes, constitues d'une matrice elastique et d'inclusions elastiques. Revue M 22,31.

Budiansky, B. & Wu, T. T. (1962).

Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals. Proc. 4th Compr. App. Rech., p. 1175.

Bruggeman, D. A. G. 1935

Berechung verschiedener physkilisher konstante von heterogene substazen, Ann. Physik 24, 636.

Bretheau, Th. ; Caldemaison, D. ; Feylessoufi, A. & Fondere, J.P. (1988).

Plasticity and space distribution of the phases in an iron/silver two phase material, J. Mter. Sci, vol 23, p4022-4026.

Cleary, M. P. ; Chen, I. W. & Lee, S. M. (1980).

Self consistent techniques for heterogeneous solids, ASCE J. Eng. Mech. 106, 861.

Dahoun, A. ; Canova, G. R. ; Molinari, A. ; Philippe, M. J. & G'Sell, CH. (1990).

Proc. of ICOTOM9, Avignon France.

Eshelby, J. D. (1957).

The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc. Roy. Soc Lond., A241, 376-396.

Gilormini, P. ; Montheillet, F. (1984).

Champs de vitesses et de contraintes autour d'une inclusion cylindrique en traction ou compression plane. J. Mech. Théorique Appl. 3, 563.

Gilormini, P. (1985).

Thèse d'Etat, Université de Grenoble.

Gilormini, P. ; Montheillet, F. (1986).

Deformation of an inclusion in a viscous matrix and induced stress concentration, J. Mech. Phys. Solids, 34, 97-123.

Gilormini, P. ; Germain, Y. (1987).

A finite element analysis of the inclusion problem for power law viscous materials, Int. J. Solids Structures, 23, 413-437.

Gilormini, P. (1992).

Une présentation simplifiée de méthode d'homogéneisation utilisées pour les matériaux désordonnés. Rapport interne LMT (Cachan), N. 132, July, Cachan.

Gilormini, P. ; Michel, J. -C. (1999).

Finite element solution of the problem of a spherical inhomogeneity in an infinite power-law, viscous matrix. European Journal of Mechanics A/Solids.

Hashin, Z. ; Shtrikman, S. (1963).

A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, J. Mech. Phys. Solids 11, 127-140.

Hashin, Z. (1969).

Int. J. Eng. Sci., Vol. 7, p. 11.

Hershey, A. V. (1954).

J. Appl. Mech., Vol.21, p. 241.

Harren, S. V. (1991)

The finite deformation of rate dependent polycrystals II A comparison of the self-consistent and Taylor methods, J. Mech. Phys. Solids, 39, 361.

Hill, R. (1965).

J. Mech. Phys. Sol., Vol. 13, p. 89.

Hutchinson, J. W. (1976).

Bounds and self-consistent estimates for creep of polycrystalline materials. Proc. Roy. Soc. Lond. A348,101-127.

Hutchinson, J. W. (1970).

Proc. Roy. Soc., A319, p. 247.

Iwakuma, T. & Nemat-Nasser, S. (1984).

Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, Proc. Roy. Soc. London. A394, 87.

Kouddane (1994).

Approche autocohérente en élastoviscoplasticité des matériaux hétérogènes, Thèse, Univesité de Metz.

Kouddane, R. ; Canova, G. R. & Molinari, A. (1993).

In C. Teodosiu, F. Sodoroff and J. Raphanel (eds.), Proc. Mecamat 1991, Large Plastic Deformation, Balkema Pulb., p. 129.

Kröner, E. (1961).

Zur plastichen Verformung des Vielkristalls. Acta. Met., Vol. 9, p. 155.

Kinoshita, N. & Mura, T. (1971).

Elastic fields of inclusions in anisotropic media. Phys, stat Solids 5, 759-768.

Laws, N. (1980).

J. Engng. Mech. Div., p. 915.

Leffers, T. (1968).

Computer simulation of the plastic deformation in face-centred cubic polycrystals and the rolling texture derived, Phys. Stat. Sol., 25, 337.

Lebensohn, R. A. & Tomé, C. N. (1993).

A slf consistent anisotropic approach for the simulation of plastic deformation and texture devlopement of polycrystals : Application to zirconium alloys, Acta Metall. et Mater., 41, 2611-2624.

Lee, B. J. ; Mear, M. E. (1991).

Effect of inclusion shape on the stiffness of nonlinear two phase composites, J. Mech. Phys. Solids, 39, 627-649.

Lipinski, P. ; Berveiller, M. & Carmasol. (1987).

Smirt, Lausanne, N 9, p. 45.

Lin, T. H. (1957).

J. Mech. Phys. Sol., Vol. 5, p. 143.

McLaughlin, R. (1977).

A study of differential scheme for composite materials. International journal of Engineering Science 15, 237-244.

Molinari, A. (1997).

Self-consistent modelling of plastic and viscoplastic polycrystalline materials. In : Large Plastic Deformation of Crystalline Aggregates. (Ed. C. Teodosiu), SpringerWien NewYork, pp. 174-246

Molinari, A. (1999).

Extension of the self-consistent tangent model. Modelling Simul. Mater. Sci. Eng., 7, 683-697.

Molinari, A.; Canova, G. R. & Ahzi, S. (1987).

A self consistent approach of the large deformation polycrystal plasticity. Acta Metall. 35, 2983-2994.

Molinari, A.; Toth, L.S. (1994).

Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results, Part I : Modelling. Acta Metall. Mat. 42, 2453-2458.

Molinari, A.; EL-Houdaigui, F. & Toth, L.S. (2000).

Comparison of the tangent model prediction to finite element results for the solution of the inclusion problem in viscoplasticity. Applied Mathematics and Mecanics, 80, S21-S24,

Molinari, A.; EL-Houdaigui, F. & Toth, L.S. (2001).

Validation of the tangent formulation for the solution of the non-linear Eshelby inclusion problem. Journal of placticity, Accepted, 2001.

Mura, T. (1987).

Micromechanics of defects in solids. Martinus Njhoff Publisher, Docdrecht.

Nemat-Nasser, S. & Obata, M. (1986).

Rate-dependent, finite elasto-plastic deformation of polycrystals. Pro. Roy. Soc., A407, p. 343.

Norris, A. N. (1985).

A differential scheme for the effective moduli of composites. Mechanics of Materials 4, 1-16.

Norris, A. N.; Callegari, A. J. & Sheng, P. (1985).

A generalized differential effective medium theory, J. Mech. Phys. Solids 33, 525-543.

Phan-Tien, N. & Pham, D. C. (2000.

Differential multiphase models for polydispersed spheroidal inclusions : thermal conductivity and effective viscosity, Int. J. Eng. Sci. 38, 73-88.

Rougier, Y.; Stolz, C. & Zaoui, A. (1994)

Self-consistent modelling of elastic-viscoplastic polycrystals. C. R. acad. SCI. Paris, 318, Série II, 145-151.

Roscoe, R. (1952).

The viscosity of suspensions of rigid spheres. Br. J. Appl. Phys. 3, 267-269.

Sachs, S. (1928).

Z. Verein Deut. Ing., Vol. 72, p. 734.

Sen, P. N.; Scala, C.; Cohen, M. H. 1981

A self-similar model for sedimentation rocks with application to the dielectric constant of fused glass beads, Geophysics 46, 781-795.

Stringfellow, R. G. & Parks D. M. (1991).

A self-consistent model of isotropic viscoplastic behavior in multiphase materials, Int. J. Plasticity, Vol. 7, p. 529-547.

Takeshita, T.; Wenk, H. R.; Canova, G. R. & Molinari, A. (1990)

Def. Proc. Matr., Cer. & Roc., Unwin Hyman, p. 365.

Toth, L. S.; Molinari, A. (1994).

Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results II, Application to torsion textures. Acta Metall. Mat. 42, 2459-2466.

Toth, L. S.; Molinari, A. & Bons, P. D. (1994)

Self consistent modelling of the creep behavior of mixtures of camphor and octachlo-ropropane. Materials Science and Engineering, A175 , 231-236.

Tiem, S.; Berveiller, M.; Canova, G. R. (1986).

Acta Met., 34, 2139.

Taylor, G. I. (1938).

Plastic strain in metals., J. Inst. Metals, Vol. 62, p. 307-324.

Turner, P.A. & Tomé, C. N. (1993).

Self-consistent modeling of viscoelastic polycrystals : Application to irradiation creep and growth, J. Mech. Phys. Solids 41,1191.

Vernuse, Ph. (1993).

Comportement mécanique d'un matériau microhétérogène. Application à la déformation à chaud d'aciers à deux phases ductiles. Thèse, Ecole des mines de Saint Etienne.

Willis, J. R. (1982).

Elasticity theory of composites. In Mechanics of Solids, eds H. G. Hopkins and M. J. Sewell. The R. Hill 60th anniversary Volume, pp. 653-685. Pergamon Press, Oxford.

Wenk, H. R. ; Canova, G. R. ; Molinari, A. & Mecking, H. (1989).

Acta.Met., Vol. 37, p. 2017.

Wenk, H. R. ; Bennett, K. ; Canova, G. R. & Molinari, A. (1991).

J. Geophys. Res., Vol. 96, B5, p. 8337.

Zimmerman, D. A. G. (1985).

The effect of microcraks on the elastic moduli of brittle materials. Journal of Material Science Letters 4, 1457-1460.

Zaoui (1972).

Thèse d'Etat, Paris.

Zouhal (1996).

Comportement mécanique des polycristaux sous sollicitations complexes : approche micro-macro. Thèse, Univesité de Metz.