



**HAL**  
open science

# Quelques techniques pour appliquer la M.A.N. [Méthode Asymptotique Numérique] aux structures plastiques et aux grands systèmes

Ali Imazatene

## ► To cite this version:

Ali Imazatene. Quelques techniques pour appliquer la M.A.N. [Méthode Asymptotique Numérique] aux structures plastiques et aux grands systèmes. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 2001. Français. NNT : 2001METZ008S . tel-01748970

**HAL Id: tel-01748970**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748970v1>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

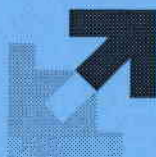
<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ  
PAR

**Ali IMAZATENE**

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE** : Sciences de l'ingénieur  
**OPTION** : Mécanique

**Quelques techniques pour appliquer la M.A.N. aux  
structures plastiques et aux grands systèmes.**

Soutenue le 11 juillet 2001 devant le jury composé de:

Mr. B. Cochelin	E.S.M2	Marseille	Rapporteur
Mr. N. Damil	L.C.S.M.	Casablanca-Maroc	Examineur
Mr. M. Potier-Ferry	L.P.M.M.	Metz	Directeur de thèse
Mr. F. Sidoroff	E.C.L.	Lyon	Examineur
Mr. C. Stolz	C.N.R.S.	Ecole Polytechnique - Palaiseau	Rapporteur
Mr. L. Toth	L.P.M.M.	Metz	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
U.R.A. C.N.R.S. 1215  
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01.



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ  
PAR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	2001 0235
Cote	S/M3 01/8
Loc	Magasin

**Ali IMAZATENE**

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE** : Sciences de l'ingénieur

**OPTION** : Mécanique

**Quelques techniques pour appliquer la M.A.N. aux  
structures plastiques et aux grands systèmes.**

Soutenue le 11 juillet 2001 devant le jury composé de:

Mr. B. Cochelin	E.S.M2	Marseille	Rapporteur
Mr. N. Damil	L.C.S.M.	Casablanca-Maroc	Examineur
Mr. M. Potier-Ferry	L.P.M.M.	Metz	Directeur de thèse
Mr. F. Sidoroff	E.C.L.	Lyon	Examineur
Mr. C. Stolz	C.N.R.S.	Ecole Polytechnique - Palaiseau	Rapporteur
Mr. L. Toth	L.P.M.M.	Metz	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
U.R.A. C.N.R.S. 1215  
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01.

# Sommaire

<b>I</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>11</b>
I.1	Techniques de base de la M.A.N. : exemples . . . . .	11
I.1.1	Cas de l'élastoplasticité . . . . .	12
I.1.2	Cas de la viscoplasticité . . . . .	18
I.2	Utilisation optimale de la M.A.N . . . . .	22
I.2.1	Amélioration du domaine de validité . . . . .	22
I.2.2	Principe de continuation . . . . .	24
I.3	Conclusion . . . . .	25
<b>II</b>	<b>Etude des techniques de base réduite</b>	<b>27</b>
II.1	Introduction . . . . .	27
II.2	Méthodes classiques de base réduite . . . . .	29
II.2.1	Méthode classique de base réduite . . . . .	32
II.2.2	Une variante de la méthode classique de base réduite . . . . .	33
II.2.3	Trois variantes de la méthode asymptotique numérique . . . . .	34
II.2.4	Deux applications numériques . . . . .	36
II.2.5	Résultats numériques et discussion . . . . .	38
II.2.6	Conclusion . . . . .	43
II.3	Nouvelle méthode de base réduite . . . . .	44
II.3.1	Présentation de la méthode . . . . .	44
II.3.2	Résultats numériques et discussion . . . . .	48
II.4	Conclusion . . . . .	57

<b>III La M.A.N. pour les grandes transformations élastoplastiques</b>	<b>59</b>
III.1 Introduction . . . . .	59
III.2 Cinématique des transformations finies . . . . .	61
III.2.1 Tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$ . . . . .	61
III.2.2 Tenseurs des déformations et des taux de déformation . . . . .	63
III.2.3 Tenseurs des contraintes . . . . .	64
III.3 Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de F. SIDOROFF . . . . .	65
III.3.1 Equations d'équilibre . . . . .	67
III.3.2 Principe des puissances virtuelles . . . . .	67
III.3.3 Loi de comportement . . . . .	69
III.3.4 Bilan des équations . . . . .	73
III.3.5 Application de la M.A.N. . . . .	74
III.3.6 Résultats numériques et discussion . . . . .	81
III.4 Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de J.C. SIMO . . . . .	92
III.4.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites . . . . .	93
III.4.2 Loi élastoplastique . . . . .	93
III.4.3 Régularisation de la loi élastoplastique . . . . .	97
III.4.4 Formulation variationnelle . . . . .	99
III.4.5 Application de la M.A.N. . . . .	100
III.5 Conclusion . . . . .	112
 <b>ANNEXES</b>	 <b>117</b>
 <b>A Détermination des coefficients qui constituent le problème réduit</b>	 <b>119</b>
 <b>B Développement asymptotique d'un produit</b>	 <b>121</b>

<b>C</b>	<b>Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de F. Sidoroff</b>	<b>123</b>
C.1	Développements des différentes équations . . . . .	123
C.2	Condensation des équations à l'ordre $i$ . . . . .	126
C.3	Définition du vecteur $F_i^{NL*}$ . . . . .	127
<b>D</b>	<b>Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique J. C. Simo</b>	<b>129</b>
D.1	Obtention des systèmes d'équations (III.88) et (III.90) . . . . .	129
D.1.1	Relations entre les coefficients de $\underline{\underline{T}}$ et ceux de $J, P, \underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{S}}_D$ . .	130
D.1.2	Relations entre les coefficients de $\underline{\underline{S}}_D$ et ceux de $J, \underline{\underline{C}}^{p-1}$ et $\underline{\underline{F}}$ .	131
D.1.3	Développement des coefficients de $\underline{\underline{C}}^{p-1}$ . . . . .	133
D.1.4	Relations entre les développements de $J$ et ceux de $\underline{\underline{F}}$ . . . . .	135
D.1.5	Développements du paramètre de chargement $\mu$ . . . . .	136
D.2	Relations exprimées dans la configuration $\Omega^{(0)}$ . . . . .	136
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>140</b>





# Introduction générale

La résolution numérique des problèmes de mécanique a connu un développement sans précédent depuis quelques décennies et ceci, grâce aux multiples possibilités offertes par les moyens informatiques. Généralement, les problèmes de mécanique que nous traitons sont de nature non linéaire. Pour résoudre ce type de problèmes, on a souvent recours à des techniques de prédictions-corrrections. Pas à pas, on linéarise le problème pour obtenir une prédiction de la solution au voisinage d'une solution de départ. Ensuite, par itérations successives, on se ramène à l'équilibre en minimisant le résidu global d'équilibre de la structure.

Ces dernières années ont vu l'apparition d'une méthode alternative aux méthodes classiques itératives de résolution de problèmes non-linéaires. La Méthode Asymptotique Numérique (M.A.N.) s'est montrée très efficace lors de la résolution de problèmes mettant en jeu tout type de non-linéarité (géométrique, matérielle, contact). Son principe consiste à remplacer le problème non linéaire de départ par une suite récurrente de problèmes linéaires. Les systèmes linéarisés s'obtiennent de la manière suivante :

- On développe chaque inconnue du problème sous forme de série entière en fonction d'un paramètre de contrôle.
- On injecte ces développements dans le problème non linéaire.
- On identifie par rapport au paramètre de contrôle.

Ainsi, une partie de la branche solution est obtenue. Elle est limitée par le rayon de convergence des séries. Des efforts ont été effectués pour améliorer la longueur de pas. La substitution, par exemple, des polynômes par des fractions rationnelles (encore appelées approximants de Padé) asymptotiquement équivalentes a permis

---

une augmentation de la longueur de pas. De plus, les temps de calculs sont sensiblement identiques. Des recherches sont actuellement effectuées sur les approximations quadratiques. Quelques exemples montrent que leur utilisation permet d'accroître le domaine de validité des approximations de Padé [30]. Il est encore possible d'améliorer cette longueur de pas en utilisant une technique de base réduite. Son principe étant de diminuer la taille du problème non linéaire initial par une approximation de type Galerkin. Cependant, l'obtention de ce problème réduit passe par le calcul de coefficients qui nécessite un temps considérable. Des recherches ont été poursuivies dans ce sens pour améliorer le temps de calcul de ces coefficients par l'introduction de variables supplémentaires. Mais, ce dernier reste encore beaucoup trop grand si on le compare à celui nécessaire à l'obtention de l'approximation polynomiale ou rationnelle.

Une fois le pas obtenu, une procédure de continuation est nécessaire pour obtenir toute la courbe solution. On doit alors déterminer un critère de fin de pas ainsi que le nouveau point de départ pour le pas suivant. Des critères ont été proposés pour l'approximation polynomiale [19] ainsi que pour l'approximation rationnelle [30].

Actuellement, les recherches se font principalement dans deux directions :

- la première direction concerne la **résolution de problèmes à grand nombre de degrés de libertés (d.d.l.)**. En effet, jusqu'à présent, les différents exemples traités pour attester de la fiabilité de la M.A.N. ont rarement été au delà de 15000 ou 20000 d.d.l.. Or, les problèmes étudiés en industrie ont très souvent des nombres de d.d.l. supérieurs à 100000. On sait que le coût de calcul de la résolution d'un problème à grand nombre de d.d.l. dépend essentiellement de l'inversion de la matrice de rigidité. Les solveurs directs (Choleski, Crout, Gauss) sont particulièrement bien adaptés à la M.A.N. puisque c'est la même matrice tangente qui permet d'obtenir tous les termes d'une même série. En effet, avec un solveur direct, c'est la triangulation (calcul des décompositions  $L^t.L$ ,  $L^t.D.L$ ,  $L.U$ ) de la matrice qui demande le temps de calcul le plus important. Une fois

que cette triangulation est effectuée, la solution d'un problème linéaire ne coûte presque plus rien puisqu'il ne reste qu'à inverser des matrices triangulaires ou diagonales. Cette stratégie doit être remise en question pour un grand nombre de degrés de libertés. En effet, lorsqu'il n'y a qu'un problème linéaire à résoudre, les solveurs itératifs sont plus performants (Gradient Conjugué, GMRES...) et demandent moins d'espace mémoire. Mais le couplage de la M.A.N. avec un solveur itératif n'est pas très attractif puisque chacun des problèmes linéaires à résoudre demande presque le même effort numérique [50]. Donc, le calcul des problèmes à grand nombre de degrés de libertés remet en question les stratégies classiques de la M.A.N. associées à un solveur direct. Diverses voies sont à l'étude actuellement, telles que la méthode de sous-structuration [35], [33] ou les méthodes multi-grilles [51]. Probablement, les meilleures solutions conduiront à coupler diverses techniques. Ainsi, dans sa thèse, I. Galliet [35] couple la technique de sous-structuration avec un solveur itératif pour résoudre le problème d'interface.

Dans notre travail, nous allons présenter **une nouvelle façon d'utiliser la technique de base réduite**. Nous n'allons pas l'appliquer directement au problème non linéaire de départ, mais résoudre par base réduite les problèmes linéaires obtenus par la technique de perturbation.

- la deuxième direction concerne **l'application de la M.A.N. à des problèmes impliquant des lois de comportement plus complexes**. Jusqu'à présent, on s'attachait à montrer l'efficacité de la M.A.N.. Pour ce faire on utilisait des modèles simples tels que l'élasticité non linéaire [19]. Ceci a permis d'introduire les non linéarités géométriques. Elle a également été appliquée en mécanique des fluides pour la résolution des équations de Navier-Stokes [14],[73]. Tous ces problèmes peuvent être affublés de la mention "faiblement" non linéaires ou non-linéarités "douces" par opposition aux problèmes "fortement" non linéaires tels que ceux introduisant des phénomènes de contact. Dans ses travaux, A.

---

Elhage-Hussein s'y est intéressé et a montré l'efficacité de la M.A.N. pour les résoudre [29]. D'autres problèmes fortement non linéaires ont également été étudiés tels que la plasticité utilisant la théorie des déformations totales [10], [27], [75]. Toutes ces études sont dirigées vers des applications industrielles. Ainsi, J. Brunelot a couplé les phénomènes de contact à une loi viscoplastique afin de simuler des procédés de mise en forme à chaud [12]. H. Abichou a lui, couplé le problème de contact avec une loi élastoplastique utilisant la théorie des déformations totales, afin de simuler des procédés de mise en forme à froid. Ces lois de comportement ou de contact ne sont pas analytiques. Elles ont alors nécessité une étape de régularisation pour pouvoir appliquer la M.A.N..

A présent, **on voudrait pouvoir appliquer la M.A.N. à une vraie loi élastoplastique.** Elle doit pouvoir prendre en compte les grandes déformations plastiques et/ou les grandes déformations élastiques ainsi qu'une possibilité de décharge élastique. Dans notre étude, nous proposons d'appliquer la M.A.N. à deux formulations du problème élastoplastique. La première est basée sur les modèles élastoplastiques de type F. Sidoroff - A. Dogui. Elle utilise la décomposition additive du taux de déformation totale en une partie élastique et une autre plastique. Les déformations élastiques sont supposées petites et les déformations plastiques peuvent être grandes. La deuxième formulation quant à elle est basée sur un modèle proposé par J.C. Simo. Elle utilise la décomposition multiplicative du gradient de la transformation en une partie élastique et une partie plastique. Les déformations plastiques ainsi que les déformations élastiques peuvent être grandes.

Les recherches actuelles ou récentes sur la M.A.N. ne se réduisent pas aux deux grands axes précédemment évoqués. En particulier, de nombreuses études sont consacrées aux vibrations [23], [4] et à la résolution de problèmes instationnaires [11]. On peut citer aussi les techniques itératives [45] et les méthodes de prédiction-corrrection [41], [39].

## Contenu de la thèse

Dans ce travail de thèse, on a voulu contribuer au développement de la M.A.N. dans deux directions. La première consiste à présenter et à discuter une nouvelle façon d'utiliser la technique de base réduite. Dans la deuxième partie, nous appliquerons la M.A.N. à des lois de comportement élastoplastiques en transformations finies.

Le premier chapitre de cette thèse est un rappel sur les principes de base de la M.A.N.. On y voit, comment à partir de deux exemples, on obtient une partie de la courbe solution. Le premier exemple permet de présenter la M.A.N. lors de problèmes mettant en jeu des lois de comportement élastoplastiques indépendantes du temps. Une procédure de régularisation est nécessaire car ces lois ne sont pas analytiques. On introduit également des variables supplémentaires afin d'obtenir la formulation du problème dans un cadre quadratique. Le deuxième exemple nous permet d'introduire les lois de comportement non linéaires dépendantes du temps, par l'intermédiaire d'une loi viscoplastique de Norton-Hoff. Il sera également nécessaire de régulariser la loi pour pouvoir appliquer la M.A.N. [75]. On introduira également des variables afin d'obtenir un cadre de travail quadratique qui se prête mieux à l'application de la M.A.N.. Nous appliquons pour chacun des deux exemples une technique de continuation qui nous permet d'obtenir toute la branche solution.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la nouvelle façon d'appliquer la technique de base réduite. On fera d'abord une présentation des techniques classiques de base réduite. Pour ce faire, on l'appliquera à un problème élastique non linéaire. On effectuera à nouveau une comparaison de ces techniques avec les M.A.N. utilisant les approximations polynômiales et rationnelles. Quelques exemples numériques traditionnels nous permettront d'effectuer cette comparaison. Et finalement, nous effectuerons une comparaison de notre nouvelle technique avec les M.A.N. classiques (approximations polynômiales ou rationnelles). Nous verrons que la technique de base réduite est un outil très prometteur en vue de l'application de la M.A.N. aux problèmes à grand nombre de d.d.l..

---

Au cours du troisième chapitre, nous appliquerons la M.A.N. au comportement élastoplastique en transformations finies. Nous présenterons 2 modèles : un modèle proposé par F. Sidoroff et un modèle proposé par J. C. Simo. Il sera nécessaire de régulariser les lois afin d'appliquer la M.A.N.. Pour le modèle de F. Sidoroff, nous effectuerons une approximation avant de régulariser la loi. Cette opération nous permet de conserver une loi indépendante du temps. Quant au modèle de J. C. Simo, nous effectuerons directement la régularisation, ce qui entraîne une loi dépendante du temps. On sera alors en présence d'une loi élasto-visco-plastique.

# CHAPITRE I

## Etat de l'art

### I.1 Techniques de base de la M.A.N. : exemples

La résolution des problèmes non linéaires est depuis bien longtemps le cheval de bataille des numériciens. Depuis quelques années, la M.A.N. s'est montrée très efficace pour la résolution de certains problèmes mettant en jeu tout type de non linéarité (géométrique, matérielle, contact, etc). Le principe de cette méthode peut être résumé de la manière suivante: supposons qu'on puisse écrire le problème non linéaire sous la forme quadratique suivante:

$$R(\underline{U}, \lambda) = L(\underline{U}) + Q(\underline{U}, \underline{U}) - \lambda \underline{F} = \underline{0}, \quad (I.1)$$

où  $R$  représente le vecteur résidu,  $\lambda$  un paramètre de chargement,  $L$  un opérateur linéaire,  $Q$  un opérateur quadratique et le vecteur  $\underline{U}$  l'inconnue.

On cherche alors les inconnues sous la forme de séries entières par rapport à un paramètre  $a$  au voisinage d'une solution connue  $(\underline{U}_0, \lambda_0)$ :

$$\begin{cases} \underline{U} = \underline{U}_0 + \sum_{i=1}^{i=p} a^i \underline{U}_i, \\ \lambda = \lambda_0 + \sum_{i=1}^{i=p} a^i \lambda_i. \end{cases} \quad (I.2)$$

En injectant les développements (I.2) dans le problème initial et en identifiant suivant les puissances entières du paramètre  $a$ , on montre que chaque vecteur  $U_i$  est solution d'un problème linéaire qui peut s'écrire sous la forme:

$$L_t(\underline{U}_i) = \underline{F}_i^{NL}, \quad (I.3)$$

où l'opérateur tangent  $L_t$  est défini par  $L_t(\cdot) = L(\cdot) + 2Q(\underline{U}_0, \cdot)$  et  $\underline{F}_i^{NL}$  est un vecteur ne dépendant que des inconnues aux ordres antérieurs à l'ordre  $i$ .

Chacun de ces problèmes linéaires se résoud par une méthode de discrétisation telle que la méthode des éléments finis (M.E.F.). On obtient ainsi une partie de la branche solution qui est limitée par le rayon de convergence des séries.

Pour une analyse plus détaillée de la méthode, nous allons l'appliquer à quelques exemples. Il s'agit ici d'illustrer les techniques permettant d'appliquer un développement asymptotique de manière simple et efficace.

Le premier cas d'étude aborde le problème des lois de comportement non linéaires indépendantes du temps. Les non linéarités introduites sont essentiellement géométriques et matérielles. Dans le cas de l'élastoplasticité, plusieurs lois ont été implémentées [27],[75]. A titre d'exemple, on peut citer le cas d'une loi rigide plastique, celui d'un matériau élastique parfaitement plastique, ou encore un matériau élastoplastique avec écrouissage. Pour cette étude, ces lois sont basées sur la théorie des déformations totales, où ces dernières sont supposées assez petites. Cette théorie ne permet pas de prendre en compte la décharge élastique.

La deuxième étude, quant à elle, permettra d'introduire les grandes déformations et les lois de comportement dépendantes du temps. Pour ce faire, nous présentons une loi viscoplastique de Norton Hoff telle qu'elle a été étudiée par J. Brunelot [12].

### I.1.1 Cas de l'élastoplasticité

Nous nous limiterons ici au cas d'étude d'une loi puissance.

#### Position du problème

Nous nous plaçons dans l'hypothèse des petites déformations. Le tenseur des déformations  $\underline{\underline{\gamma}}$  peut donc être décomposé en une partie élastique  $\underline{\underline{\gamma}}^e$  et une partie plastique  $\underline{\underline{\gamma}}^p$  :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{\gamma}}^e + \underline{\underline{\gamma}}^p. \quad (\text{I.4})$$



La partie élastique se déduit simplement à partir des contraintes et est donnée par la loi de Hooke [44], quant à la partie plastique, elle est basée sur la relation de Ramberg Osgood [1],[18]. Elle est plus couramment appelée loi puissance car elle introduit un exposant sur les contraintes.

Pour une étude tridimensionnelle, la loi de comportement élastoplastique s'écrit :

$$E\underline{\underline{\gamma}} = (1 + \nu)\underline{\underline{S}}^d - (1 - 2\nu)P\underline{\underline{I}} + \frac{3}{2}\alpha\left[\frac{S^{eq}}{\sigma_y}\right]^{n-1}\underline{\underline{S}}^d, \quad (I.5)$$

où  $E, \nu, \alpha, n$  et  $\sigma_y$  sont des paramètres définissant le matériau et représentant respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson, un paramètre scalaire, l'exposant réel d'écrouissage et la contrainte limite d'élasticité.

La quantité  $\underline{\underline{S}}^d = \underline{\underline{S}} + P\underline{\underline{I}}$  représente le tenseur déviateur des contraintes,  $P = -\frac{1}{3}\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{I}}$  est la trace du tenseur des contraintes,  $S^{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\underline{S}}^d : \underline{\underline{S}}^d}$  est la contrainte équivalente de von Mises et  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur unité.

### Régularisation

Nous constatons que la loi (I.5) qui définit le comportement élastoplastique contient un exposant qui a la possibilité de ne pas être entier. Ainsi, en présence de contraintes nulles, cela peut conduire à des relations qui ne sont pas analytiques. Or, l'application de la méthode asymptotique numérique nécessite des dérivées successives des inconnues. Afin d'obtenir un développement de ces contraintes, une procédure de régularisation telle qu'elle a été présentée dans [63] s'avère nécessaire. Nous redéfinissons à présent la contrainte équivalente afin d'éviter qu'elle n'atteigne la valeur nulle. Pour ce faire, on introduit un petit paramètre  $\eta$ . Ainsi, on réécrit l'expression de la contrainte équivalente de la façon suivante :

$$(S_{eq})^2 = \frac{3}{2}\underline{\underline{S}}^d : \underline{\underline{S}}^d + \eta^2\sigma_y^2. \quad (I.6)$$

On peut constater alors que lorsque  $\eta = 0$ , on retrouve la définition de la loi de comportement initiale. Remarquons que le terme  $\sigma_y^2$  est introduit ici uniquement afin

d'homogénéiser les unités et de définir un paramètre de régularisation adimensionnel. Avec cette nouvelle définition de la contrainte équivalente, la loi de comportement (I.5) est à présent analytique. L'écriture de la solution sous forme de série entière est alors possible. Cependant, une difficulté due au terme de puissance demeure encore car  $n$  est un réel. L'utilisation d'un exposant entier dans ses travaux, n'avait permis à B. Braikat [10] d'obtenir que des développements en séries dont l'ordre de troncature était limité à 6.

Ainsi, pour supprimer cette limitation, H. Elasmr [27] et H. Zahrouni [75] ont utilisé une formulation différentielle et quadratique de la loi puissance.

### Formulation quadratique

L'obtention d'une formulation quadratique nécessite l'introduction de quelques variables supplémentaires. Ainsi, nous introduisons une nouvelle variable sous la forme :

$$\kappa(S_{eq}) = \frac{3}{2}\alpha\left[\frac{S_{eq}}{\sigma_y}\right]^{n-1} = \frac{3}{2}\alpha\left[\frac{3}{2\sigma_y^2}S^d : S^d + \eta^2\right]^{\frac{n-1}{2}}. \quad (I.7)$$

H. Zahrouni et al [76] ont ensuite proposé de travailler avec une équation différentielle en introduisant la variable suivante :

$$\zeta^2 = \frac{(S_{eq})^2}{\sigma_y^2} = \frac{3}{2\sigma_y^2}S^d : S^d + \eta^2, \quad (I.8)$$

Les 2 variables  $\kappa$  et  $\zeta$  sont alors liées par :

$$\kappa = \frac{3}{2}\alpha\zeta^{n-1}. \quad (I.9)$$

Une différenciation de cette dernière équation permet d'aboutir à une relation plus maniable qui sera utilisée dans les développements asymptotiques :

$$\zeta d\kappa = (n-1)\kappa d\zeta. \quad (I.10)$$

De cette manière, le degré de non linéarité du problème initial a été réduit. Ainsi, on a pu appliquer un algorithme similaire à celui présenté dans [19] pour l'étude d'un solide élastique avec des non linéarités géométriques.

Dans le but d'obtenir une approximation plus juste de la loi de comportement non régularisée, en petites déformations il est aisé de montrer que le premier membre de l'équation (I.5) doit être multiplié par  $(1 + \alpha\eta^n)$ . Nous pouvons alors écrire le problème traduisant l'équilibre et le comportement d'une structure élastoplastique de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \underline{\underline{S}} : \delta \underline{\underline{\gamma}} d\Omega = \lambda P_e(\delta \underline{\underline{u}}), \\ E(1 + \alpha\eta^n) \underline{\underline{\gamma}} = (1 + \nu) \underline{\underline{S}}^d - (1 - 2\nu) P \underline{\underline{I}} + \kappa \underline{\underline{S}}^d, \\ \zeta^2 = \frac{3}{2\sigma_y^2} \underline{\underline{S}}^d : \underline{\underline{S}}^d + \eta^2, \\ \zeta d\kappa = (n - 1) \kappa d\zeta. \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

Il s'agit donc de trouver les inconnues du problème vérifiant l'équation d'équilibre (I.11) d'un solide élastoplastique.  $P_e$  représente la puissance des efforts extérieurs,  $\delta \underline{\underline{\gamma}}$  et  $\delta \underline{\underline{u}}$  sont, respectivement, les déformations et les déplacements virtuels. On peut décomposer les déformations de Green Lagrange  $\underline{\underline{\gamma}}$  en une partie linéaire et une autre non linéaire qu'on n'explicitera pas ici :

$$\underline{\underline{\gamma}}(\underline{\underline{u}}) = \underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{\underline{u}}) + \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{u}}), \quad (\text{I.12})$$

### Développement des équations

Afin de calculer la solution du problème (I.11), on cherche les inconnues sous la forme d'un développement en séries entières par rapport à un paramètre ' $a$ ' autour d'une solution connue  $(\underline{\underline{u}}_0, \underline{\underline{S}}_0, \lambda_0)$ . En notant  $\Lambda = \{\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{\gamma}}, \zeta, \kappa\}$ , l'ensemble des variables intervenant dans la formulation, on obtient :

$$\Lambda = \Lambda_0 + a\Lambda_1 + a^2\Lambda_2 + a^3\Lambda_3 + \dots \quad (\text{I.13})$$

L'insertion des développements (I.13) dans (I.11) et l'identification par rapport au paramètre de développement  $a$  nous mène à l'ordre  $i$  à un système d'équations linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \int_{\Omega} [\underline{S}_i : (\underline{\gamma}^l(\delta \underline{u}) + 2\underline{\gamma}^{nl}(\underline{u}_0, \delta \underline{u})) + \underline{S}_0 : 2\underline{\gamma}^{nl}(\underline{u}_i, \delta \underline{u})] = \\
 \quad \lambda_i P_e(\delta \underline{u}) - \int_{\Omega} \sum_{r=1}^{i-1} \underline{S}_{i-r} : 2\underline{\gamma}^{nl}(\underline{u}_r, \delta \underline{u}), \\
 \\
 E(1 + \alpha \eta^n) [(\underline{\gamma}^l(\underline{u}_i) + 2\underline{\gamma}^{nl}(\underline{u}_i, \underline{u}_0) + \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\gamma}^{nl}(\underline{u}_r, \underline{u}_{i-r}))] = \\
 \quad (1 + \nu) \underline{S}_i^d - (1 - 2\nu) P_i \underline{I} + \sum_{r=0}^i \kappa_r \underline{S}_{i-r}^d, \quad (I.14) \\
 \\
 \sum_{r=0}^i \zeta_r \zeta_{i-r} = \frac{3}{2\sigma_y^2} \sum_{r=0}^i \underline{S}_r^d : \underline{S}_{i-r}^d, \\
 \\
 \sum_{r=1}^i r \zeta_{i-r} \kappa_r = (n - 1) \sum_{r=1}^i r \kappa_r \zeta_{i-r},
 \end{array} \right.$$

Il reste encore à préciser la définition du paramètre  $a$ . On se propose de présenter ici la plus couramment utilisée. Elle correspond à la projection des incréments  $(\underline{u} - \underline{u}_0, \lambda - \lambda_0)$  sur le vecteur tangent  $(\underline{u}_1, \lambda_1)$ . Ceci se traduit par :

$$a = \langle \underline{u} - \underline{u}_0, \underline{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1, \quad (I.15)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire ordinaire. On aura alors pour cette définition de  $a$  pour l'ordre 1 et l'ordre  $i$  ( $i > 1$ ) :

$$\begin{array}{l}
 \text{Ordre 1 : } \langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = 1, \\
 \text{Ordre } i : \langle \underline{u}_i, \underline{u}_1 \rangle + \lambda_i \lambda_1 = 0.
 \end{array} \quad (I.16)$$

Cette définition du paramètre  $a$  est inspirée des méthodes de continuation à longueur d'arc imposée. Elle permet de passer les points limites en force et en déplacement. Pour plus de détails sur le pilotage et le choix du paramètre  $a$ , on pourra se référer à [19].

### Condensation et méthode des éléments finis

Dans le but d'appliquer une discrétisation par éléments finis, où seul  $\underline{u}$  est interpolé, nous remplaçons la loi de comportement (I.14b) dans l'équation d'équilibre

(I.14a). Nous obtenons ainsi une équation ne dépendant plus que de la seule variable  $\underline{u}_i$ , ce qui se prête mieux à l'application de la M.E.F..

Après discrétisation, nous obtenons, à chaque ordre, une équation de la forme

$$[K_T]\{u_i\} = \lambda_i\{F\} + \{F_i^{NL}\}, \quad (\text{I.17})$$

où  $[K_T]$  représente la matrice de rigidité tangente. Au second membre apparaît un vecteur dépendant uniquement des inconnues aux ordres précédents.

## Conclusion

Cette méthode permet donc de calculer un grand nombre de termes des séries. Ainsi on obtient une partie de la branche solution au voisinage du point de départ. On peut constater d'après l'équation (I.17) que cette méthode présente l'avantage de faire apparaître la même matrice de rigidité à chaque ordre, ce qui est très intéressant en terme de temps de calcul lors de la résolution des systèmes linéaires. On voit apparaître au second membre un vecteur  $\{F_p^{NL}\}$  dépendant uniquement des termes de développements aux ordres inférieurs. Son calcul peut par contre lui, devenir très coûteux lorsque l'ordre de troncature des séries est choisi assez grand. Cependant, comme il a été constaté dans la thèse de H. Zahrouni [75] : si l'ordre de troncature est convenablement choisi, il existe alors un bon compromis entre le temps nécessaire à la triangulation de la matrice de rigidité et celui utilisé pour construire le vecteur  $\{F^{nl}\}$ . La méthode asymptotique numérique montre son efficacité quant à la résolution de problèmes impliquant des lois de comportements non linéaires. Elle montre sa capacité à résoudre des problèmes élastoplastiques dans l'hypothèse des petites déformations et dans le cadre de la théorie des déformations totales. Il serait intéressant de l'appliquer à une vraie loi de comportement élastoplastique mettant en jeu de grandes déformations. Ceci fera l'objet du chapitre III.

## I.1.2 Cas de la viscoplasticité

### Loi de comportement

On étudie ici un matériau ayant un comportement rigide viscoplastique. Le comportement viscoplastique est modélisé par une loi de Norton-Hoff [16],[17]. Il se caractérise par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}' = C \underline{\underline{D}}', \\ C = \frac{2}{3} k (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \bar{D}^{m-1}, \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\sigma}} + p \underline{\underline{I}}$  représente le déviateur des contraintes de Cauchy et  $p$  la pression. La quantité  $\bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{D}}' : \underline{\underline{D}}'}$  représente la vitesse de déformation équivalente et  $\bar{\varepsilon}$  est la déformation équivalente, dite également déformation plastique cumulée. Ces deux quantités sont reliées par la relation suivante :

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \bar{D}.$$

La contrainte d'écoulement est définie par le critère de von Mises :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\sigma}}'}.$$

L'utilisation d'un modèle d'écrouissage isotrope [74],[49], défini par

$$K(\bar{\varepsilon}) = \frac{2}{3} k (\alpha + \bar{\varepsilon})^n,$$

permet d'obtenir une expression unidimensionnelle de la loi de Norton entre les invariants des tenseurs:

$$\bar{\sigma} = k (\alpha + \bar{\varepsilon})^n \bar{D}^m,$$

où  $K$  représente la consistance et  $k, \alpha$  sont des constantes du matériau.

Nous pouvons constater que cette loi de comportement de Norton-Hoff n'est pas analytique pour certaines valeurs du paramètre  $m$  lorsque la vitesse de déformation équivalente est nulle. Pour le cas particulier où  $m = 0$ , on obtient le comportement rigide plastique. Il est fortement non linéaire et représente la valeur limite où la loi

de Norton-Hoff dégénère. La fonction  $\bar{\sigma} = \hat{\sigma}(\underline{\underline{D}})$  est alors indéterminée à l'origine. On traduira l'incompressibilité du matériau par l'équation :

$$Trace(\underline{\underline{D}}) = 0.$$

Afin de rendre l'équation de Norton-Hoff analytique et d'être capable ainsi d'obtenir des développements asymptotiques des variables, une procédure de régularisation est une fois de plus nécessaire. Cette loi a une singularité croissante lorsque le paramètre  $m$  s'approche de zéro. En effet, elle n'est pas dérivable lorsque la vitesse de déformation équivalente prend la valeur zéro. L'introduction d'un petit paramètre dans la définition de cette vitesse lui évite d'atteindre cette valeur :

$$\bar{D} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{D}}' : \underline{\underline{D}}' + (\eta \frac{V_c}{L_c})^2}.$$

A noter que  $\eta$  est un petit paramètre sans dimension et  $V_c, L_c$  sont, respectivement, une vitesse et une longueur caractéristiques du problème étudié introduites afin d'homogénéiser les unités.

### Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre d'un solide viscoplastique incompressible occupant un domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$  soumis à des efforts extérieurs donnés sur une partie  $\partial\Omega_f$  et à des vitesses imposées nulles sur une partie  $\partial\Omega_v$  peuvent s'exprimer par :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}'(\bar{\varepsilon}, \underline{v}) : \delta \underline{\underline{D}} d\Omega = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_f} \underline{F}(\underline{x}) \delta \underline{v} ds, \\ v \in CA_{inc} \quad \text{et} \quad \forall \delta \underline{v} \in CA_{inc}, \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

où  $\lambda(t)$  est un paramètre de chargement dépendant du temps.  $CA_{inc}$  est un ensemble défini par

$$CA_{inc} = \{ \underline{v} / \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega_v \text{ et } Trace(\underline{\underline{D}}) = 0 \text{ sur } \Omega \}.$$

Il est bien évidemment nécessaire de compléter ces équations d'équilibre par une loi de comportement, la loi de type Norton-Hoff, telle qu'elle est présentée ci-dessus par

exemple. Les relations géométriques et cinématiques viendront aussi s'y ajouter.

Nous allons à présent réécrire les équations d'équilibre avec une formulation Lagrangienne réactualisée qui se prête mieux à l'application de la M.A.N. dans le cas viscoplastique. Cette formulation consiste à prendre la configuration au début du pas de calcul comme configuration de référence. On réécrit ensuite le problème (I.19) à chaque pas. Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \underline{\underline{\sigma}}'(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{v}}) : (\underline{\nabla} \delta \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{f}}) d\Omega_0 = \lambda(t) \int_{\partial\Omega_0 f} \underline{\underline{F}}_0(\underline{\underline{X}}) \cdot \delta \underline{\underline{v}} dS_0, \\ \underline{\underline{v}} \in CA_{inc} \quad \text{et} \quad \forall \delta \underline{\underline{v}} \in CA_{inc}, \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

où  $\underline{\underline{f}}$  représente le gradient inverse de la transformation  $\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{F}}^{-1}$ , et  $\underline{\underline{F}}_0$  le vecteur force surfacique tel que  $\underline{\underline{F}}_0 dS_0 = \underline{\underline{F}} dS$ .  $\underline{\nabla}$  représente le gradient par rapport à la position lagrangienne. Nous écrivons plutôt le problème sous une formulation variationnelle mixte en vitesse et pression comme elle a été présentée dans le mémoire de J. Brunelot [12]:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} J\sigma(\underline{\underline{\varepsilon}}, U) : (\underline{\nabla} \delta \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{f}}) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} Jp Tr(\underline{\nabla} \delta \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{f}}) d\Omega_0 = \lambda(t) \int_{\delta\Omega_0 f} \underline{\underline{F}}_0(\underline{\underline{X}}) \cdot \delta \underline{\underline{v}} dS_0, \\ \int_{\Omega_0} J[Tr(\underline{\nabla} \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{f}}) + \frac{p}{C_{pen}}] \delta p d\Omega_0 = 0, \\ v \in CA \text{ et } \forall \delta \underline{\underline{v}} \in CA, \forall \delta p, \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

avec  $CA = \{\underline{\underline{v}}/\underline{\underline{v}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \delta\Omega_v\}$  et  $C_{pen}$  est un coefficient de pénalisation de la pression, très grand, introduit afin de satisfaire numériquement la condition d'incompressibilité [16],[36],[37]. La condition d'incompressibilité est donc remplacée par une sorte de loi visqueuse  $p = -C_{pen} Tr(\underline{\underline{D}})$ . Le matériau n'étant plus incompressible, il convient alors d'introduire une nouvelle variable  $J$  telle que:  $J = \det(\underline{\underline{F}})$  ou encore  $\dot{J} = J Tr(\underline{\underline{D}})$ . Lorsque le matériau est incompressible, on a  $J = 1$ .

### Application de la M.A.N.

Comme précédemment, nous allons développer chaque variable sous forme de série entière par rapport à un paramètre autour d'un point initial. On voit clairement d'après le problème présenté que le temps apparaît naturellement comme le paramètre



de développement. Nous allons au préalable introduire des variables intermédiaires afin d'obtenir une formulation quadratique du problème qui facilite l'utilisation de la méthode asymptotique comme on l'a vu précédemment [75]. En posant  $\Lambda$  l'ensemble des variables apparaissant dans le problème viscoplastique, on obtient :

$$\Lambda = \Lambda(0) + \tau\Lambda_1 + \dots + \tau^i\Lambda(i) + \dots + \tau^N\Lambda(N),$$

où  $\tau$  est un paramètre qui représente la différence de temps entre l'instant courant  $t$  et l'instant initial  $t_0$  au début de l'incrément.

### Condensation et méthode des éléments finis

De la même manière que pour l'élastoplasticité, nous introduisons les développements des variables dans les équations à résoudre. Une identification des termes permet d'obtenir à chaque ordre l'équation suivante :

$$L_{(0)t}(\underline{V}_p(i)) = \underline{F}_0(i) - \sum_{r=1}^{r=i-1} Q_0(\Lambda(r), \Lambda(i-r)), \quad (I.22)$$

où  $L_{(0)t}(\cdot)$  est un opérateur tangent et  $Q_0(\cdot, \cdot)$  dépend des ordres précédents. Le problème non linéaire initial est alors transformé en une suite récurrente de problèmes linéaires, aux différents ordres  $p$ , dont l'inconnue est le vecteur  $\underline{V}_p(i) = \left\{ \begin{array}{c} \underline{v}(i) \\ p(i) \end{array} \right\}$ .

Une discrétisation par la méthode des éléments finis permet de résoudre ces problèmes linéaires qui s'écrivent, à l'ordre  $p$ , de la manière suivante :

$$\left[ \begin{array}{cc} (K_v) & (K_{vp}) \\ (K_{vp}) & (K_{pp}) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \underline{v}_n(i) \\ p_n(i) \end{array} \right\}_g = \left\{ \begin{array}{c} \underline{F}_{ext}(i) \\ 0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \underline{R}_v(i-1) \\ \underline{R}_p(i-1) \end{array} \right\}, \quad (I.23)$$

où  $\{v_n(i)\}_g$  et  $\{p_n(i)\}_g$  représentent des inconnues nodales.  $[K_v]$ ,  $[K_{vp}]$  et  $[K_{pp}]$  représentent les matrices de rigidité qui ne dépendent que des variables à l'ordre 0.

### Conclusion

Nous parvenons comme pour le cas de l'élastoplasticité à parcourir une partie de la branche solution, après avoir calculé un nombre suffisant de termes des séries.

La résolution des systèmes linéaires s'opère une fois encore en inversant à chaque ordre la même matrice de rigidité, ce qui représente un des points clé de la méthode. L'efficacité de la M.A.N. à résoudre des problèmes faisant intervenir le comportement viscoplastique a été démontrée par J. Brunelot [12] qui l'a comparée à une méthode classique de résolution de problèmes non linéaires (Newton-Raphson). Cette méthode a ensuite été validée par Z. Jendli [38] qui en a fait une comparaison avec un code de calcul industriel [1].

## I.2 Utilisation optimale de la M.A.N

### I.2.1 Amélioration du domaine de validité

Nous venons donc de montrer comment on peut appliquer la M.A.N. à deux types de problèmes différents; le premier faisant intervenir une loi de comportement élastoplastique indépendante du temps sous l'hypothèse des petites déformations; le deuxième abordant les lois de comportements dépendantes du temps dans le cadre de travail des grandes déformations. De manière générale, cette méthode nous permet de transformer un problème non linéaire en une suite récurrente de problèmes linéaires en substituant dans le problème initial les inconnues par leur développement en séries entières. La résolution de ces problèmes linéaires permet de calculer les termes de ces séries en inversant une matrice de rigidité tangente qui demeure identique pour tous les ordres.

Ainsi, on obtient une partie de la branche solution qui est limitée par le rayon de convergence des séries. On admet communément que la solution obtenue est acceptable si le résidu reste inférieur à une certaine valeur.

Plusieurs travaux ont été réalisés afin d'accroître le domaine de validité des séries, notamment l'utilisation des approximants de Padé [6] ou encore l'utilisation des techniques de base réduite que nous proposons de présenter dans les paragraphes suivants.

## Approximants de Padé

Dans le but d'améliorer le domaine de validité des fonctions, H. Padé a substitué leur représentation polynômiale par une représentation rationnelle qui sera appelée approximant de Padé. A partir des vecteurs  $\underline{u}_i$ , on construit une base orthogonale  $\underline{u}_i^*$  par la procédure de Gram-Schmidt par exemple. Cependant, comme ce sont des fractions, il peut exister des pôles qui peuvent restreindre l'efficacité de ces approximants et affecter une procédure automatique de continuation si elle était envisagée. Afin d'en limiter le nombre, une idée consiste à imposer aux fractions un dénominateur identique.

L'utilisation de la M.A.N. avec les approximants de Padé est une technique déjà très employée. On peut citer notamment : [5], [19], [22], [10], [56], [72], [57], [28], [29], [4], [12], où elle s'est révélée très efficace. Notons également que dans les travaux de A. Elhage-Hussein, ce dernier associe la M.A.N. à un algorithme de recherche des pôles afin de contrôler la fiabilité et la qualité de la solution approchée. Ainsi, lors de l'étude de problèmes de contact en élasticité non linéaire, l'utilisation des approximants de Padé a permis de doubler le domaine de validité par rapport à la représentation polynômiale.

## Techniques de base réduite

Cette méthode a été proposée et testée par B. O. Almroth [3], A. K. Noor et J. M. Peters [61],[60],[62]. Elle consiste à utiliser des champs de vecteurs  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \dots, \underline{u}_n$  comme base dans une approximation de Rayleigh-Ritz. L'inconnue  $\underline{u}$  du problème non linéaire initial est recherchée de la manière suivante :

$$\underline{u} = r_1 \underline{u}_1 + r_2 \underline{u}_2 + r_3 \underline{u}_3 + \dots + r_p \underline{u}_p, \quad (\text{I.24})$$

où les coefficients  $r_i$  constituent les nouvelles inconnues à déterminer. La substitution de ces développements dans le problème à résoudre permet de réduire considérablement sa taille et facilite ainsi sa résolution. On peut trouver des exemples où la M.A.N.

utilisant cette technique s'est montrée efficace: [56],[57]. Cette technique permet d'améliorer non seulement le domaine de validité de l'approximation polynômiale mais également celui de l'approximation rationnelle. Malheureusement, l'obtention du problème réduit nécessite des temps de calculs trop importants. C'est pourquoi, nous présentons au chapitre II une nouvelle façon d'appliquer cette technique. Ces points seront plus amplement détaillés au chapitre II.

### I.2.2 Principe de continuation

Jusqu'à présent, les méthodes présentées nous donnent de bonnes approximations de la solution à l'intérieur du domaine de validité. Afin de parcourir toute la branche solution, un principe de continuation est indispensable. Il doit permettre de déterminer la longueur de pas optimum ainsi que le nouveau point de départ afin de réitérer la procédure jusqu'à obtention de la courbe solution totale. Pour ce faire, il convient de déterminer la valeur maximale  $a_m$  du paramètre de contrôle  $a$  à partir de laquelle la solution n'est plus acceptable. La solution ainsi obtenue pour cette valeur de  $a$  constituera le point suivant. Nous présentons ici les différents critères d'arrêts des représentations polynômiale et rationnelle. Concernant la technique de base réduite, un principe de continuation n'a toujours pas été élaboré.

Différents critères ont été établis dans [19] pour définir le domaine de validité des séries. Nous présentons ici uniquement un critère basé sur le déplacement. Il exige simplement que la différence relative de deux vecteurs déplacement à des ordres consécutifs soit inférieur à un nombre  $\varepsilon_1$  petit. Ce qui nous permet de définir la valeur maximale  $a_m$  du paramètre  $a$  comme suit :

$$a_m = \left( \varepsilon_1 \frac{\|u_1\|}{\|u_n\|} \right)^{1/n-1}. \quad (I.25)$$

En ce qui concerne la représentation rationnelle, nous pouvons trouver dans les travaux de A. Elhage-Hussein [30] une caractérisation de la valeur maximale  $a_{mp}$  qui

est définie comme suit :

$$\varepsilon_2 = \frac{\|f_N(a_{mp}) - f_{N-1}(a_{mp})\|}{\|f_N(a_{mp}) - \underline{u}_0\|}, \quad (\text{I.26})$$

où  $\varepsilon_2$  est un paramètre de précision et  $f_k(a)$  est l'approximation rationnelle de la solution avec troncature des séries à l'ordre  $k$ .

Les domaines de validité étant plus importants avec l'utilisation des approximants de Padé, l'obtention de toute la courbe solution se fera avec un nombre de pas moindre ce qui entraîne un gain certain en terme de temps de calcul.

### I.3 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter la M.A.N. à travers deux exemples distincts. Le premier a introduit les lois de comportement non linéaires indépendantes du temps par l'intermédiaire d'une loi élastoplastique dans le cadre de travail de la théorie des déformations totales. Le deuxième exemple a abordé les lois de comportement dépendantes du temps grâce à la loi viscoplastique de Norton-Hoff sous l'hypothèse des grandes déformations. Quel que soit l'exemple, le principe reste identique : les lois de comportement de ces deux problèmes n'étant pas analytiques, il a fallu procéder à une régularisation. Ensuite, afin de formuler le problème sous une forme quadratique, des variables supplémentaires ont dû être introduites. Enfin, on transforme le problème non linéaire en une suite récurrente de problèmes linéaires en développant toutes les inconnues sous forme de série entière, en les substituant dans le problème initial et en identifiant par rapport au paramètre de développement. Cette procédure fait apparaître à chaque ordre la même matrice de rigidité à inverser. La définition du rayon de validité a permis de définir la longueur de pas qui peut être améliorée par l'utilisation des fractions rationnelles avec un coût de calcul qui demeure sensiblement identique. L'utilisation d'une technique de continuation, simple dans sa constitution, nous a permis d'obtenir toute la branche de solution.

Ces quelques rappels semblent montrer qu'on dispose de nombreuses techniques pour

appliquer la M.A.N. à des structures élastoplastiques. L'idée principale est la technique de régularisation des lois non régulières, qui permet de poser un problème ayant des solutions analytiques par rapport au temps ou à un paramètre de chargement. Ces régularisations introduisent des petits paramètres. Dans de nombreux cas, on sait choisir ces paramètres afin d'obtenir un algorithme efficace sans trop modifier le problème à résoudre [30], [75], [2]. Toutefois, dans certains cas [12], la maîtrise de ces régularisations demande des études approfondies. D'après les deux types de loi de comportement considérées, on voit qu'il est possible de travailler avec des lois posées en variables lagrangiennes ou eulériennes. Les premières semblent plus simples à manipuler, mais le travail de J. Brunelot montre qu'on peut appliquer la M.A.N. avec des lois "eulériennes" en introduisant quelques inconnues pour assurer le passage entre les deux configurations.

Notons également que l'emploi d'une technique de base réduite permet d'accroître le domaine de validité, mais comme nous le verrons dans le chapitre II, au prix d'un coût de calcul trop important. De plus, un principe de continuation pour cette méthode n'ayant toujours pas été mis au point, il ne nous est pas encore possible, à l'heure actuelle, de parcourir toute la branche solution.

Dans le chapitre suivant, nous présentons une analyse détaillée des algorithmes classiques de base réduite. Une nouvelle technique de base réduite est également proposée. Contrairement aux techniques de base réduite classiques, où l'on réduit le problème non linéaire de départ, l'idée principale de cette nouvelle technique de base réduite est de réduire les problèmes linéaires obtenus par la méthode de perturbation.

## CHAPITRE II

# Etude des techniques de base réduite

### II.1 Introduction

Les techniques de base réduite ont été utilisées pour la résolution de problèmes non linéaires, pour la première fois, il y a plus d'une vingtaine d'années. La base utilisée provenait d'une analyse de flambage linéaire (cf. [8]) de phases de correction (cf. [3]) ou résultait d'une technique de perturbation. Dans les différents tests effectués, il s'est avéré que cette dernière était la plus efficace. Plusieurs exemples ont été traités et un nombre restreint de vecteurs de base fut utilisé, entre deux et dix, généralement six ou sept. En effet, à partir d'un certain ordre, les vecteurs calculés deviennent de moins en moins linéairement indépendants. On peut résumer l'algorithme de programmation de la résolution d'un problème non linéaire utilisant la technique de base réduite de la manière suivante :

1. Calcul des vecteurs de base avec l'utilisation d'une technique de perturbation,
2. Obtention du problème non linéaire réduit,
3. Résolution du problème non linéaire réduit,
4. Phase de correction et démarrage d'un nouveau pas.

Cependant, on peut constater dans les travaux de E. Riks [64] que le gain obtenu avec ce processus est contrebalancé par le coût excessif des étapes 2 et 4. C'est ce qui explique que ces méthodes de base réduite n'ont pas suscité beaucoup d'enthousiasme

pour la résolution des problèmes non linéaires. Dans ce chapitre, nous analyserons une fois encore cet algorithme et nous nous attarderons en particulier sur le point essentiel qui est le coût de calcul nécessaire pour obtenir le problème réduit.

Le choix d'une base constituée, par exemple, de quinze à trente vecteurs entraîne un coût de calcul beaucoup trop important. Or, comme nous l'avons vu au chapitre I, cette constatation n'est pas vérifiée lorsque l'emploi d'une représentation polynômiale de la branche solution est envisagée. L'obtention de la solution nécessite uniquement l'étape 1 et on obtient ainsi plusieurs pas de calcul sans étape de correction et pour un coût de calcul raisonnable [20]. Il a été montré que l'utilisation d'un nombre important de termes des séries s'avérait très intéressant, bien que les nouveaux vecteurs générés fussent pratiquement une combinaison linéaire des vecteurs précédents. Nous avons également vu au chapitre I qu'il était possible de transformer l'approximation polynômiale par une approximation rationnelle asymptotiquement équivalente. Celle-ci nous permet alors d'élargir la taille du pas, et ce, pour un supplément de temps de calcul négligeable. Lorsqu'elle est couplée à une technique de continuation, l'approximation rationnelle permet souvent de diviser par deux le nombre de pas dans un calcul donné [30], [12].

La technique de base réduite a été comparée à ces deux sortes de M.A.N. dans des travaux récents [57]. Il a été montré que les longueurs de pas obtenues par la représentation rationnelle étaient sensiblement identiques à celles obtenues par la technique de base réduite, mais avec un temps de calcul beaucoup plus intéressant car elle ne nécessite pas l'étape 2. Par ailleurs, la longueur de pas obtenue pour les représentations polynômiales et rationnelles pour des ordres élevés (par exemple 16), était plus grande que celle obtenue par la technique de base réduite pour de petits ordres (par exemple 8), et ce, pour des temps de calcul moindres. On s'aperçoit alors que la technique de base réduite n'est pas efficace comparativement aux deux autres, à moins qu'une solution ne soit apportée pour diminuer le temps de calcul



associé à l'étape 2. Cette seconde étape est donc un point critique pour une plus grande utilisation des techniques de base réduite dans la résolution de problèmes non linéaires.

On peut mentionner ici qu'il n'est pas évident de traiter numériquement un grand nombre de vecteurs  $U_i$  obtenus par une technique de perturbation. En particulier, le processus d'orthogonalisation et le calcul des coefficients des fractions rationnelles présentent des instabilités numériques [56],[15]. Mais les tests numériques ont montré que ces instabilités n'affectaient pas la qualité des solutions, même à des ordres élevés.

L'objet de ce chapitre est de présenter une nouvelle façon d'appliquer la technique de base réduite qui nous permettra l'emploi de bases de dimension plus élevée, pour un coût de calcul modéré. L'idée principale de la méthode consiste à éviter la réduction du problème non linéaire initial et à réduire les problèmes linéaires obtenus par la technique de perturbation. On contourne ainsi la seconde étape et son coût de calcul important. On évite également la factorisation de la matrice tangente globale, qui nécessite un temps de calcul considérable. Ce chapitre sera organisé de la manière suivante: nous rappellerons tout d'abord les deux manières d'appliquer la technique de base réduite écrite dans le cas de l'élasticité non linéaire. Puis, nous analyserons avec attention les coûts de calcul de ces techniques pour déterminer leur pertinence. Enfin, une nouvelle version de la technique de base réduite sera présentée et nous l'analyserons de la même façon.

## II.2 Méthodes classiques de base réduite

Cette méthode a été proposée et testée par B. O. Almroth [3], A. K. Noor et J. M. Peters [62], [61], [59] et [60]. Elle consiste à utiliser des champs de vecteurs  $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \dots, \underline{u}_p$  comme base dans une approximation de Rayleigh-Ritz. Afin de rappeler les différentes étapes de la méthode, on se propose ici de l'appliquer à un problème

d'élasticité non linéaire. Celui-ci concerne l'équilibre d'un solide élastique occupant un domaine  $\Omega_0$  de frontière  $\partial\Omega_0$  dans la configuration de référence soumis à des efforts  $\underline{F}$  sur sa surface  $\partial\Omega_{F_0}$ . Traditionnellement, on traduit cet équilibre par la formulation variationnelle mixte d'Hellinger-Reissner qui conduit à une non linéarité quadratique par rapport aux inconnues  $\underline{u}$  (représentant le déplacement) et  $\underline{\underline{S}}$  (représentant le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff).

Pour un solide élastique, on a :

$$HR(\underline{u}, \underline{\underline{S}}, \mu) = \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}) - \frac{1}{2} \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{D}}^{-1} : \underline{\underline{S}}) dv - \mu P_e(\underline{u}), \quad (\text{II.1})$$

où  $\underline{\underline{D}}$  représente la matrice de comportement élastique,  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs,  $\mu$  un paramètre de chargement et  $\underline{\underline{\gamma}}$  le tenseur des déformations de Green Lagrange qui peut être décomposé en une partie linéaire et une autre non linéaire :

$$\underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}) + \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \underline{u}). \quad (\text{II.2})$$

A l'équilibre, cette fonctionnelle est stationnaire sur l'ensemble des déplacements  $u$  cinématiquement admissibles (C.A.) et  $\underline{\underline{S}}$  quelconque.

$$\delta HR(\underline{u}, \underline{\underline{S}}, \mu) = 0 \quad \forall \delta \underline{\underline{S}} \quad \text{et} \quad \forall \delta \underline{u} \in C.A. \quad (\text{II.3})$$

On en déduit les équations d'équilibre et les relations de comportement.

Si  $(\underline{u}_0, \underline{\underline{S}}_0, \mu_0)$  est une solution du problème, une autre solution notée  $(\underline{u}_0 + \underline{u}, \underline{\underline{S}}_0 + \underline{\underline{S}}, \mu_0 + \mu)$  vérifiera :

$$\int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\delta \underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \delta \underline{u})) dv + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}}_0 : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \delta \underline{u}) dv + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}} : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \delta \underline{u}) dv - \mu P_e(\delta \underline{u}) = 0, \quad (\text{II.4})$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{u}) + \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \underline{u})). \quad (\text{II.5})$$

On notera que la variation du tenseur des déformations de Green Lagrange se présente sous la forme :

$$\delta \underline{\underline{\gamma}}(\underline{u}) = \underline{\underline{\gamma}}^l(\delta \underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \delta \underline{u}). \quad (\text{II.6})$$

L'inconnue  $\underline{u}$ , représentant le déplacement, est alors recherchée comme suit :

$$\underline{u} = r_1 \underline{u}_1 + r_2 \underline{u}_2 + r_3 \underline{u}_3 + \dots + r_p \underline{u}_p, \quad (\text{II.7})$$

où les coefficients  $r_i$  sont les nouvelles inconnues à déterminer. Une application efficace de la technique de base réduite suppose une bonne stratégie de choix de la base (étape 1). Différents choix de base ont été proposés dans la littérature. Certaines bases provenaient des modes de flambage linéaire (cf. [54] et [55]), de la solution linéaire et ses corrections (cf. [3]), ou bien de la solution non linéaire et ses nombreuses dérivées successives (cf. [61] et [60]). On qualifie généralement de base idéale celle qui maximise la qualité de la solution et minimise les efforts pour l'obtenir (cf. [61], [59], [60]). Les différents critères que doit satisfaire cette base sont les suivants:

1. Les vecteurs doivent être linéairement indépendants.
2. Un coût de calcul peu élevé pour leur génération et sélection simple et automatique de leur nombre.
3. Une bonne propriété d'approximation dans le sens d'une bonne exactitude de la solution utilisant ces vecteurs, pour un intervalle assez grand de la branche solution. Ceci impose aux vecteurs une caractérisation (au moins locale) de la réponse non linéaire de la structure.
4. Simplicité du tracé de la courbe post flambage ou post point limite.

Le premier critère est nécessaire pour la convergence de l'approximation de Rayleigh-Ritz, tandis que les trois derniers influent sur l'efficacité de calcul de la technique de base réduite.

Les premiers vecteurs d'un développement asymptotique satisfont les critères sus mentionnés. On choisira alors comme bases, dans les exemples, celles qui seront constituées de ces vecteurs.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons présenter deux façons d'appliquer la technique de base réduite.

### II.2.1 Méthode classique de base réduite

D'après l'expression (II.4), l'équation d'équilibre d'un solide élastique est quadratique par rapport aux variables  $\underline{u}$  et  $\underline{S}$ . En substituant la loi de comportement (II.5) dans les équations d'équilibre (II.4), on aboutit à une formulation en déplacement du problème. Une expression cubique du problème par rapport à la variable  $u$  est alors obtenue :

$$\int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{u}) + \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \underline{u})) : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\delta\underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \delta\underline{u})) dv +$$

$$\int_{\Omega_0} \underline{\underline{S}}_0 : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \delta\underline{u}) dv + \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{u}) + \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \underline{u})) : \underline{\underline{D}} : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}, \delta\underline{u}) dv$$

$$- \mu \int_{\Omega_0} F \delta\underline{u} = 0. \quad (\text{II.8})$$

Le principe de la technique de base réduite est d'approcher le déplacement  $\underline{u}$  et le déplacement virtuel  $\delta\underline{u}$  comme suit :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^p r_i \underline{u}_i, \quad (\text{II.9})$$

$$\delta\underline{u} = \sum_{i=1}^p \delta r_i \underline{u}_i, \quad (\text{II.10})$$

où  $r_i$  et  $\delta r_i$  sont réels et les coefficients  $r_i$  deviennent les nouvelles inconnues. En reportant les équations (II.9) et (II.10) dans l'expression cubique (II.8) on obtient une expression cubique fonction des variables  $r$  :

$$l_{ij}^* r_j + q_{ijk}^* r_j r_k + c_{ijkl}^* r_j r_k r_l - \mu f_i^* = 0, \quad i, j, k, l \in \{1, \dots, p\}. \quad (\text{II.11})$$

Les opérateurs  $l^*$ ,  $q^*$  et  $c^*$  sont définis dans l'annexe A.

Afin de résoudre ces équations, les coefficients  $l^*$ ,  $q^*$  et  $c^*$  doivent être calculés. Par exemple, l'utilisation d'une base de 3 vecteurs conduit à la détermination de 78 coefficients, tandis que l'emploi d'une base de 10 vecteurs nous amène au calcul de

6105 coefficients. Comme nous pouvons le constater, le nombre de coefficients à calculer augmente considérablement avec la taille de la base. Afin de réduire les temps de calcul de la méthode, une diminution du nombre de coefficients à déterminer est nécessaire. C'est ce que nous allons tenter de faire dans le paragraphe suivant.

## II.2.2 Une variante de la méthode classique de base réduite

Dans le but de réduire les temps de calcul nécessaires à l'obtention du problème réduit, une alternative à la méthode exposée précédemment a été proposée par Najah dans [57]. Elle consiste à obtenir une formulation quadratique du problème réduit par l'introduction de variables additionnelles. On exposera ici l'essentiel de la méthode et pour de plus amples détails, se référer aux travaux [56] et [57]. Le point de départ de la méthode demeure la formulation mixte (II.4) et (II.5) qui est quadratique par rapport aux variables  $\underline{u}$  et  $\underline{S}$ . Les équations d'équilibre sont alors approchées en choisissant les champs de vecteurs  $\delta\underline{u}$  sous la forme (II.10) et on recherche les champs de déplacements  $\underline{u}$  sous la même forme (II.9). Quant à la relation contrainte-déformation (II.5), elle sera satisfaite exactement. En reportant l'équation (II.9) dans la loi de comportement (II.5), nous obtenons :

$$\underline{\underline{S}}(u) = \underline{\underline{D}} : \left( \sum_{i=1}^p r_i (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}_i)) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p r_i r_j \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_i, \underline{u}_j) \right), \quad (\text{II.12})$$

qui se réécrit :

$$\underline{\underline{S}}(u) = \sum_{i=1}^p r_i \underline{\underline{S}}_i + \sum_{k=p+1}^N r_k \underline{\underline{S}}_k \quad \text{avec} \quad N = p + \frac{p(p+1)}{2}. \quad (\text{II.13})$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\underline{\underline{S}}_i = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}_i), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq p, \quad (\text{II.14})$$

$$\underline{\underline{S}}_k = \underline{\underline{D}} : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_i, \underline{u}_j), \quad \text{pour } i \neq j, \quad (\text{II.15})$$

ou,

$$\underline{\underline{S}}_k = \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_i, \underline{u}_i), \quad \text{pour } i = j \quad (p+1 \leq k \leq N). \quad (\text{II.16})$$

Ainsi, le point clé de la méthode consiste en l'introduction des  $p(p+1)/2$  variables additionnelles pour représenter la dépendance non linéaire des contraintes par rapport aux variables  $r_i$  de la base réduite,  $1 < i < p$ . Ces variables additionnelles sont définies par la relation quadratique suivante :

$$r_k = r_i r_j, \quad \text{avec} \quad k = ip + j - \frac{i(i-1)}{2}. \quad (\text{II.17})$$

Avec ce choix des inconnues :  $r = \langle r_1, r_2, \dots, r_p, r_{p+1}, \dots, r_N \rangle$ , l'équation réduite obtenue à partir du principe des travaux virtuels est seulement quadratique :

$$l_{ij} r_j + q_{ijk} r_j r_k - \mu f_i = 0, \quad i = 1, p \quad j = 1, N \quad \text{and} \quad k = 1, p. \quad (\text{II.18})$$

Les opérateurs  $l$  et  $q$  sont définis dans l'annexe A.

Comme dans le paragraphe précédent, afin de résoudre ces équations, les coefficients  $l_{ij}$  et  $q_{ijk}$  doivent être calculés. Par exemple, pour le choix d'une base composée de 3 vecteurs, 60 coefficients seront calculés, tandis que pour une base comprenant 10 vecteurs nous aurons besoin d'en déterminer 3630. On constate alors que le nombre de coefficients a été diminué, comparativement à celui obtenu précédemment. Cependant, celui-ci demeure trop important pour espérer atteindre un coût de calcul acceptable.

Il est intéressant de noter ici que les équations (II.11) et (II.18) représentent rigoureusement le même problème, néanmoins elles ne sont pas exprimées par rapport aux mêmes variables  $r$ .

La résolution de ces problèmes réduits peut s'effectuer à l'aide d'une méthode asymptotique numérique (représentation polynômiale ou utilisation des approximants de Padé) dont nous rappellerons les principes dans le paragraphe suivant. Ces méthodes ne sont pas très gourmandes en temps de calcul, cependant elles peuvent présenter quelques instabilités numériques.

### II.2.3 Trois variantes de la méthode asymptotique numérique

Afin de déterminer la solution d'un problème non linéaire, nous avons à notre disposition trois sortes de M.A.N.. Ces méthodes permettent de parcourir la branche

solution du problème par l'utilisation de développement asymptotique des variables. Nous rappelons ici brièvement les trois méthodes disponibles.

La première fait intervenir des développements en séries entières des inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{u} - \underline{u}_0 \\ \underline{S} - \underline{S}_0 \\ \mu - \mu_0 \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^p a^i \left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_{(i)} \\ \underline{S}_{(i)} \\ \mu_{(i)} \end{array} \right\}, \quad (\text{II.19})$$

où  $p$  représente l'ordre de troncature,  $a$  est un paramètre de développement que l'on choisit de la manière suivante :  $a = \{ < \underline{u} - \underline{u}_0, \underline{u}_1 > + (\mu - \mu_0)\mu_1 \}$  et  $(\underline{u}_0, \underline{S}_0, \mu_0)$  sont les valeurs initiales des variables  $(\underline{u}, \underline{S}, \mu)$ . En introduisant ces développements dans le problème à résoudre et en identifiant les équations par rapport au paramètre  $a$ , on aboutit à un système d'équations linéaires. Une discrétisation par la méthode des éléments finis nous fournit à chaque ordre l'équation suivante :

$$[K_t]\{u_i\} = \mu_i\{f\} + \{f_i^{NL}\}, \quad (\text{II.20})$$

où  $f_i^{NL}$  ne dépend que des variables  $\underline{u}_i$  et  $\underline{S}_i$  provenant des ordres précédents [21].

La deuxième possibilité permet d'accroître le domaine de validité des séries par l'utilisation de fractions rationnelles appelées approximants de Padé. A partir des vecteurs  $\underline{u}_i$  obtenus par les séries, on crée une base orthogonale par la procédure de Gram-Schmidt par exemple, puis les inconnues  $\underline{u}$  et  $\mu$  sont recherchées comme suit :

$$\underline{u}(a) = \sum_{i=0}^p f_i(a)\underline{u}_i^* \quad \text{et} \quad \mu(a) = \sum_{i=0}^p f_i(a)\mu_i, \quad (\text{II.21})$$

où les coefficients  $f_i(a)$  sont des fractions rationnelles (voir [56] et [30] pour plus de détails).

Et comme nous venons de le voir, la troisième technique qui permet également d'étendre le domaine de validité, est l'application d'une technique de base réduite. Son principe est de réduire le problème original en utilisant les bases  $\underline{u}_i$  ou  $\underline{u}_i^*$  (qui

devraient mener aux mêmes résultats),  $u$  est alors recherché sous la forme :

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^p \tau_i \underline{u}_i. \quad (\text{II.22})$$

Les temps de calcul pour l'obtention de la solution du problème dépendent de la méthode employée pour le résoudre. En effet, en ce qui concerne l'utilisation des développements en séries entières, les temps de calculs nécessaires sont principalement gouvernés par la détermination de la matrice de rigidité  $K_t$ , sa décomposition (on notera au passage que la méthode utilisée est l'algorithme de Crout qui permet d'écrire  $K_t = L^t . D . L$  ou  $L$  est une matrice triangulaire supérieure et  $D$  une matrice diagonale), ainsi que les calculs des seconds membres  $f_i^{NL}$  et leurs vecteurs associés  $\underline{u}_i$ . Les temps de calculs de tous ces termes dépendent en majeure partie du nombre de degrés de liberté (d.d.l.) du problème. Quant à la représentation utilisant les approximations de Padé, elle nécessite des temps de calcul correspondant à ceux utilisés par la représentation polynômiale, auxquels viennent s'ajouter les temps utilisés pour l'orthogonalisation de la base  $\underline{u}_i$  ainsi que ceux pour les calculs des coefficients des fractions. Cependant, ces temps additionnels ont une importance peu significative. Enfin, pour les techniques de base réduite, les temps de calcul nécessaires pour obtenir la solution sont de plus gouvernés par le calcul des coefficients permettant de définir le système réduit (si on suppose que la base est déjà à disposition). En effet, le nombre de termes  $c_{ijkl}^*$  (technique de base réduite classique) et celui des termes  $q_{ijk}$  (variante de la technique de base réduite) augmentent considérablement avec la dimension de la base.

### II.2.4 Deux applications numériques

Nous avons procédé à l'étude de deux exemples. Le premier concerne l'exemple classique de la coque cylindrique soumise à l'action d'une charge ponctuelle. Dans ce qui suit, il sera référé en tant que problème du toit. Pour des raisons de symétrie, nous n'avons maillé qu'un quart de la structure et nous avons utilisé 200 éléments triangulaires DKT18 (cf.[7]). Ceci conduit à un nombre total de degrés de liberté de



726. Les caractéristiques géométriques et matérielles sont décrites dans la figure II.1a. La solution de référence obtenue avec une méthode de continuation est représentée sur la figure II.1b.

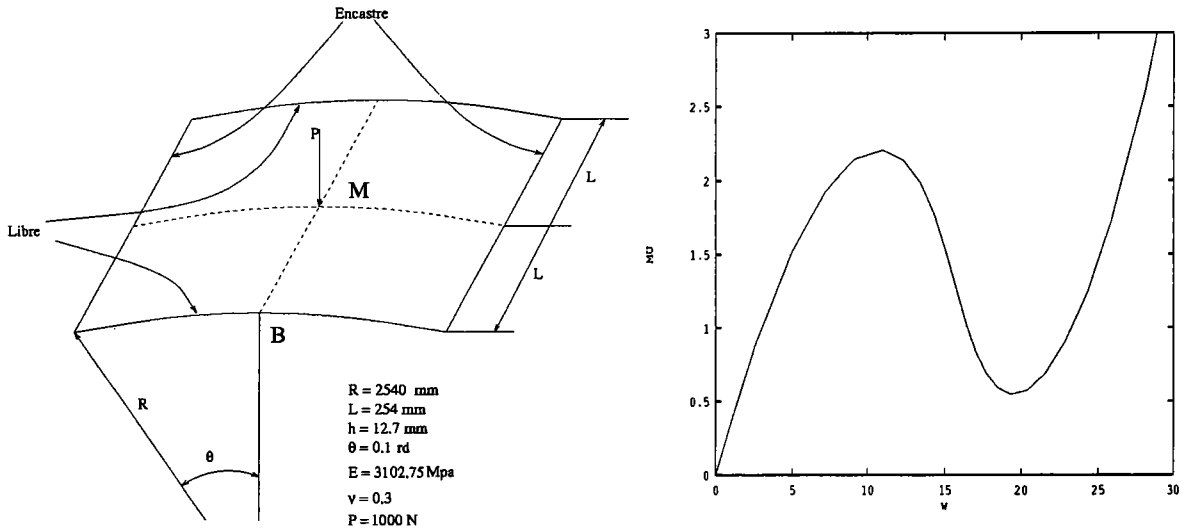


FIG. II.1 – Toit: a) Coque cylindrique élastique sous l'action d'une charge ponctuelle. b) Courbe charge/déplacement du point central M. Courbe de référence.

Le second exemple est un problème classique déjà présenté (cf. [64] et [59]). Il s'agit d'un cylindre avec deux ouvertures rectangulaires opposées et situées au milieu entre les extrémités du cylindre. Dans ce qui suit, il sera référé en tant que problème du cylindre. La structure est soumise à l'action d'une pression axiale uniforme. Les caractéristiques géométriques et matérielles sont décrites dans la figure II.2a et la solution de référence obtenue avec une méthode de continuation est représentée sur la figure II.2b. Pour des raisons de symétrie, nous n'avons maillé qu'un huitième de la structure. Nous avons utilisé 1608 éléments triangulaires DKT18 pour le maillage de cette structure ce qui nous a conduit à un nombre total de degrés de liberté de 5190.

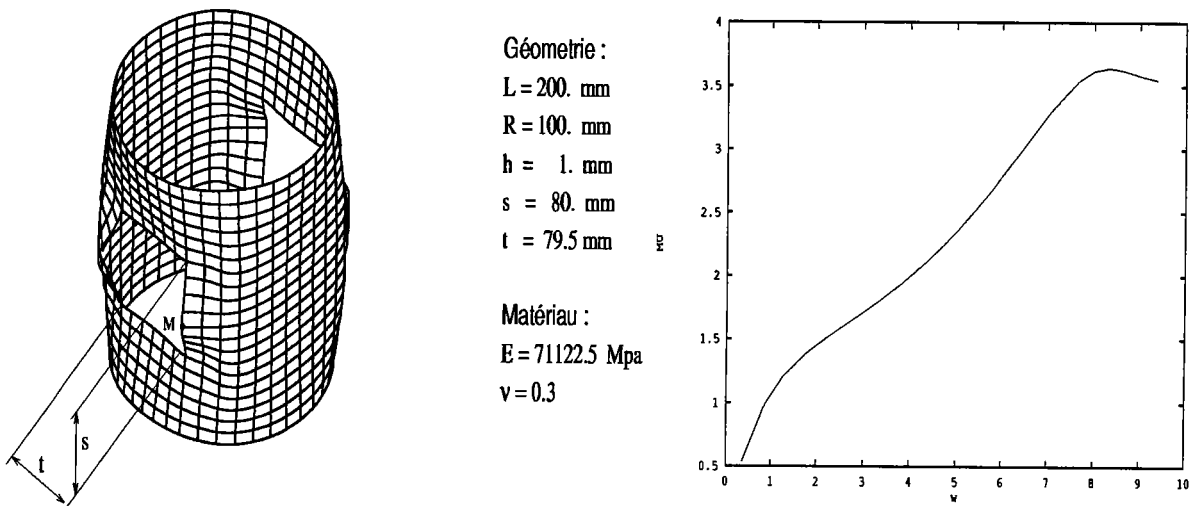


FIG. II.2 – *Cylindre: a) Coque cylindrique avec deux ouvertures rectangulaires opposées soumise à l'action d'une pression axiale uniforme. b) Courbe charge/déplacement du point central M. Courbe de référence.*

### II.2.5 Résultats numériques et discussion

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la longueur de pas obtenue en fonction de l'ordre de troncature et de la méthode utilisée, à savoir : une représentation polynômiale, rationnelle, ou alors une des deux techniques de base réduite. Comme nous nous y attendions, ces deux techniques de base réduite introduites au paragraphe I.1 et I.2 présentent exactement les mêmes résultats : elles ne diffèrent que par leur programmation et leurs temps de calcul.

On se propose d'analyser ici, la longueur de pas à partir des courbes représentant l'évolution de la qualité de la solution en fonction du déplacement. Elles représentent le logarithme de la norme du résidu par rapport au déplacement  $w$ . Généralement, la qualité de la solution est supposée correcte lorsque la norme du résidu est inférieure à  $10^{-3}$  et c'est ce que nous considérerons dans notre discussion.

Dans le cas du toit (figure II.3), nous constatons que la qualité de la solution la meilleure, est obtenue avec la technique de sous espace, tandis que la plus mauvaise est obtenue avec les séries (ce qui correspond à ce que nous attendions). Nous vérifions aussi que l'ordre de troncature possède une grande influence sur la qualité de la solu-

tion et que les séries à l'ordre 15 donnent de meilleurs résultats que les techniques de base réduite à l'ordre 5. Comme l'a souligné Najah (cf. [57]), la meilleure stratégie de calcul est obtenue en choisissant des ordres de troncature assez élevés. Si un critère de résidu inférieur à  $10^{-3}$  est retenu, les longueurs de pas sont :

- ordre 5:  $w_s = 4.2$  (séries),  $w_p = 5.5$  (Padé) et  $w_r = 6.5$  (base réduite),
- ordre 10:  $w_s = 9$ ,  $w_p = 11$  et  $w_r = 12$ ,
- ordre 15:  $w_s = 11$ ,  $w_p = 14$  et  $w_r = 15$ .

Si l'utilisation des bases réduites ou des approximants de Padé permet d'accroître le domaine de validité, cette amélioration apportée n'est pas considérable. Cependant, la technique de base réduite deviendrait intéressante si une amélioration significative était apportée aux temps de calculs.

La base réduite utilisée ici est la base  $u_i^*$  obtenue par perturbation puis orthonormalisation. Des essais ont été réalisés avec l'utilisation de la base  $u_i$  obtenue par perturbation mais sans orthonormalisation. Cependant, la qualité de la solution était inadéquate (résidu supérieur à  $10^{-3}$ ) et ce, même pour des petites valeurs du déplacement : le domaine de validité de la solution approchée était pratiquement nul. Nous pensons que ceci est dû à un mauvais conditionnement de la matrice  $l_{ij}$  et de la matrice tangente  $l_{ij}^t$  qui apparaît dans la solution du problème réduit (II.18). Remarquons que même avec l'utilisation de la base orthonormalisée, la qualité de la solution obtenue à l'aide des bases réduites à l'ordre 15, pour des petites valeurs du déplacement (résidu à peu près égal à  $10^{-7}$ ), est moins bonne que celle obtenue par les deux autres représentations asymptotiques (résidu à peu près égal à  $10^{-12}$ ). Ce résultat inattendu est probablement dû à des instabilités numériques provenant également d'un mauvais conditionnement de la matrice  $l_{ij}^t$ .

En ce qui concerne les résultats numériques correspondant au cylindre, les mêmes conclusions peuvent être apportées. La plus grande longueur de pas est obtenue

par la technique de base réduite alors que la plus petite longueur s'obtient avec les séries. Cependant, la longueur de pas n'est pas le seul paramètre de calcul significatif et il faut tenir compte du temps de calcul. Sur la figure II.4, nous avons reporté les courbes chargement/déplacement des trois méthodes à l'ordre 5 pour les comparer à la courbe chargement/déplacement obtenue avec les approximants de Padé à l'ordre 15. Une fois de plus, on constate que l'approximation rationnelle à l'ordre 15 donne de meilleurs résultats que les bases réduites à l'ordre 5. On verra plus loin que la solution obtenue par les approximants de Padé à l'ordre 15 ne coûte pas plus cher qu'une solution obtenue par base réduite à l'ordre 5. De plus, en dépit de tous nos efforts, nous n'avons pas été capables d'obtenir des résidus satisfaisants avec la technique de base réduite, ce qui est probablement dû à des instabilités numériques.

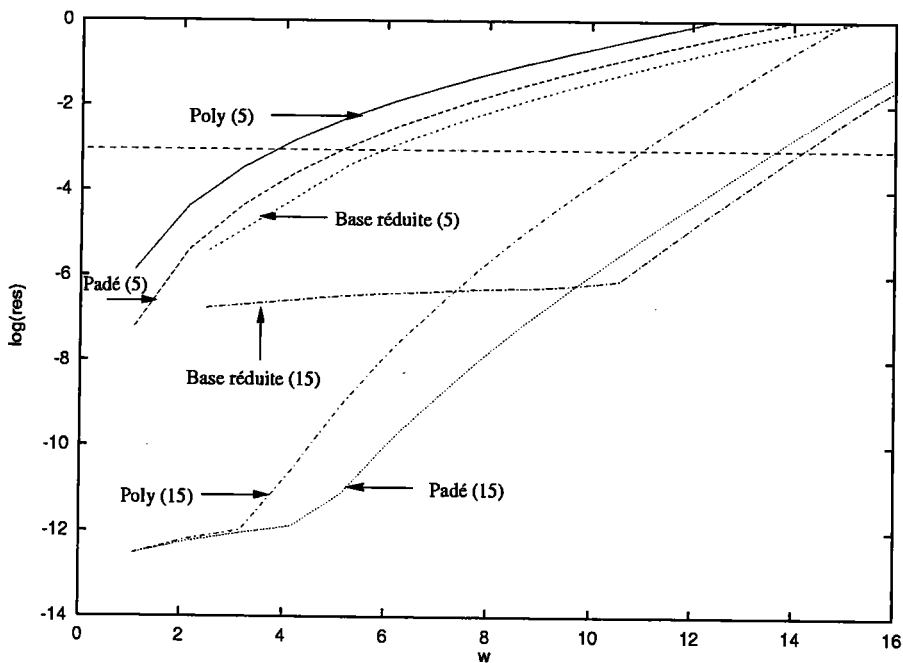


FIG. II.3 – Toit, (726 d.d.l.) : représentation du résidu pour les trois méthodes. Les séries sont tronquées aux ordres 5 et 15.

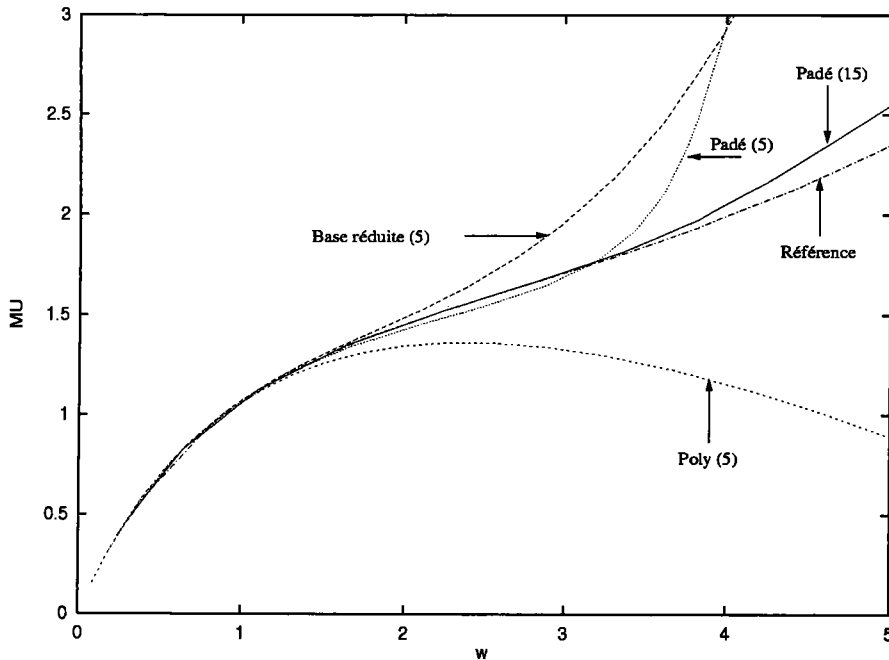


FIG. II.4 – *Cylindre, (5190 d.d.l.) : déplacement du point M pour les trois méthodes. Les séries sont tronquées à l'ordre 5.*

Nous allons à présent comparer les temps de calcul nécessaires à l'obtention de toutes ces approximations asymptotiques. Sur les tableaux II.1 et II.3, nous avons reporté les temps de calcul requis pour la détermination des séries aux ordres 5,10,15 et 20. Nous avons partagé le temps de calcul total en trois parties : la première concerne le temps de calcul de la matrice tangente, ensuite le temps nécessaire pour sa décomposition et enfin, le temps requis pour la détermination des seconds membres  $F_i^{nl}$  et de leurs vecteurs  $\underline{u}_i$  associés. Remarquons que le dernier temps est le seul à dépendre de l'ordre de troncature et notons qu'il est plus ou moins proportionnel à cet ordre. La distribution de ces temps de calcul est très différente pour ces deux tests. Avec un nombre de d.d.l. petit, la décomposition de la matrice n'est pas très gourmande en temps, mais ce dernier devient très significatif dans le second test (5190 d.d.l.) et sera prééminent pour des problèmes de grande taille. Il est connu que le temps de décomposition augmente comme le cube du nombre des inconnues.

Les temps de calcul nécessaires à l'obtention des vecteurs orthogonalisés  $\underline{u}_i^*$  avec l'algorithme classique de Gram-Schmidt, ainsi que celui pour obtenir les fractions rationnelles sont négligeables (moins de 1% pour les ordres 5 ou 10, 2% pour l'ordre 15 et 2.5% pour l'ordre 20). C'est pourquoi les approximations polynômiale et rationnelle nécessitent quasiment les mêmes temps de calcul. Etant donné que le domaine de validité de l'approximation rationnelle est plus grand que celui de l'approximation polynômiale et ce, pour des temps de calcul sensiblement similaires, nous considèrerons dans ce qui suit comme méthode de référence, la méthode utilisant les approximants de Padé.

Sur les tableaux II.2 et II.4, nous avons représenté les temps de calcul utilisés par les deux types de méthode de base réduite. Nous avons uniquement inclus les temps requis pour la détermination des coefficients du système quadratique (II.18) et celui du système cubique (II.11) en évitant d'y apporter celui utilisé pour la résolution du problème réduit. En fait, ce dernier temps de calcul n'est pas très petit, mais nous l'avons négligé car il dépend de la stratégie de programmation et la nôtre pourrait être améliorée.

Quel que soit l'algorithme de réduction utilisé, le temps de calcul nécessaire à l'obtention du problème réduit demeure trop grand dès lors que la taille de la base choisie est supérieure à 10. Ainsi, les techniques de base réduite présentées aux paragraphes II.2.1 et II.2.2 ne sont pratiquement plus utilisables pour un ordre supérieur à 7. De plus, nous avons constaté que pour des temps de calculs sensiblement identiques, l'approximation rationnelle à l'ordre 15 présente un domaine de validité supérieur à celui de la technique de base réduite à l'ordre 5. A partir de ces tableaux, il apparait clairement que la méthode de base réduite quadratique est meilleure que la formulation cubique. Néanmoins, cette amélioration reste insuffisante pour fournir une méthode numérique efficace à des ordres de troncature élevés.

Ordre	calcul de [Kt]	décomposition de [Kt]	calcul de Fnl	Total (series)
5	2.1	0.7	1.6	4.4
10	2.1	0.7	3.4	6.2
15	2.1	0.7	5.1	7.9
20	2.1	0.7	7	9.8

TAB. II.1 – Toit (726 d.d.l.): temps de calcul pour la représentation polynômiale aux ordres 5,10,15 et 20.

Nb vecteurs	Vecteurs de base	Base réduite (quadratique)		Base réduite (cubique)	
		système réduit	Total	système réduit	Total
5	4.4	1.9	6.3	3.4	7.8
10	6.2	15.5	21.7	64	70.2
15	7.9	65	72.9	177	184.9
20	9.8	183	192.8	559	568.8

TAB. II.2 – Toit (726 d.d.l.): temps de calcul pour les méthodes classiques de base réduite aux ordres 5,10,15 et 20.

Ordre	calcul de [Kt]	décomposition de [Kt]	calcul de Fnl	Total(series)
5	17	27	15	59
10	17	27	30	74
15	17	27	46	90
20	17	27	63	107

TAB. II.3 – Cylindre (5190 d.d.l.): temps de calcul pour la représentation polynômiale aux ordres 5,10,15 et 20.

Nb vecteurs	Vecteurs de base	Base réduite (quadratique)		Base réduite (cubique)	
		système réduit	Total	système réduit	Total
5	59	15	74	27	86
10	74	125	199	301	375
15	90	522	612	1415	1506
20	107	1474	1581	4501	4608

TAB. II.4 – Cylindre (5190 d.d.l.): temps de calcul pour les méthodes classiques de base réduite aux ordres 5,10,15 et 20.

## II.2.6 Conclusion

Nous avons vu clairement que la technique de base réduite n'est pas une méthode numérique efficace comparée à une simple technique de perturbation, par-

ticulièrement lorsque cette dernière est améliorée par l'introduction des approximations de Padé. Le point clé reste le calcul d'un nombre considérable de coefficients nécessaires à l'obtention du système réduit, ce qui empêche d'appliquer cette technique pour un nombre de vecteurs assez grand. Nous recommandons de ne pas utiliser plus de 5 ou 7 vecteurs pour des problèmes allant de 1000 à 10000 d.d.l.. Deux autres difficultés viennent s'ajouter concernant ces méthodes classiques de base réduite : d'une part il reste difficile de supprimer quelques instabilités numériques et d'autre part, elles ne restent applicables que pour quelques cas d'équations simples comme l'élasticité non linéaire ou les équations de Navier-Stokes. C'est pourquoi nous proposons dans le paragraphe suivant un autre moyen d'appliquer la technique de base réduite qui nous permettra d'éviter tous ces inconvénients.

### II.3 Nouvelle méthode de base réduite

En dépit des conclusions pessimistes du paragraphe précédent, nous proposons ici une nouvelle variante de la technique de base réduite qui demeure efficace pour des bases de dimensions élevées. La difficulté majeure réside dans le calcul des coefficients du système réduit. Pour éviter cette difficulté nous suggérons d'appliquer d'abord la technique de perturbation, qui transforme les problèmes non linéaires en une suite récurrente de problèmes linéaires et ensuite, de résoudre chaque problème linéaire grâce à la technique de base réduite. Ainsi, la technique de perturbation est appliquée avant la réduction contrairement à ce qui était fait lors de l'utilisation des techniques de base réduite classiques.

#### II.3.1 Présentation de la méthode

Les premières étapes de cette nouvelle technique sont exactement les mêmes que celles exposées lors de la présentation de la méthode asymptotique numérique classique [19]. On se propose ici d'en faire un bref rappel : tout d'abord, nous développons chaque variable sous forme de séries entières par rapport à un paramètre  $a$  au-



tour d'une solution connue. Nous avons choisi comme paramètre de développement :  
 "  $a = \langle \underline{u} - \underline{u}_0, \underline{u}_1 \rangle + (\mu - \mu_0)\mu_1$ ". Ensuite, tous ces développements sont introduits dans le problème à résoudre. Une identification par rapport aux puissances du paramètre de développement conduit alors à une suite récurrente de problèmes linéaires. Ainsi, dans le cas de l'élasticité non linéaire, on a pour un ordre  $i$  quelconque :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_0} ((\underline{\underline{\gamma}}^l(\delta \underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \delta \underline{u})) : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{u}_i) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{u}_i)) + \underline{\underline{S}}_0 : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_i, \delta \underline{u})) d\Omega_0 \\ & = \mu_i P_e(\delta \underline{u}) - \int_{\Omega_0} \left( \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{S}}_r : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_{i-r}, \delta \underline{u}) + \right. \\ & \left. \left( \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_r, \underline{u}_{i-r}) \right) : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\delta \underline{u}) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \delta \underline{u})) \right) d\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

où l'inconnue du problème est le vecteur  $\underline{u}_i$ . Afin de résoudre ces problèmes linéaires, deux méthodes sont à notre disposition :

- La première méthode consiste à appliquer la méthode des éléments finis avant la technique de base réduite.
- Dans la seconde méthode, la technique de réduction est appliquée avant la méthode des éléments finis.

Ces deux méthodes devraient mener aux mêmes résultats car elles ne diffèrent que par le nombre d'opérations (produits, additions) à effectuer pour résoudre le problème.

### **méthode 1: Application de la méthode des éléments finis avant la technique de réduction**

L'application de la méthode des éléments finis à l'équation (II.23) conduit à l'équation suivante :

$$[K_i]\{u_i\} = \{g_i^{nl}\}. \quad (\text{II.24})$$

où  $[K_i]$  est la matrice de rigidité tangente.

Supposons à présent que nous ayons choisi une base  $E$  constituée de  $N$  vecteurs  $e_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Alors, chaque inconnue discrète  $u_i$  est recherchée comme combinaison

linéaire de ces vecteurs. En projetant ensuite ces équations sur la base  $E$ , on obtient, par exemple pour l'ordre  $i$ , le système suivant :

$$k_{mn}r_n^i = g_n^{inl} \quad (\text{II.25})$$

avec  $[k] = \{e_m\}^t [K_t] \{e_n\}$

**méthode 2 : Application de la technique de base réduite avant la méthode des éléments finis**

Supposons que nous ayons choisi une base  $E$  constituée de  $N$  vecteurs  $e_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . On a alors :  $\underline{u}_i = \sum_{j=1}^N r_j^i e_j$  et  $\delta \underline{u}_i = \sum_{j=1}^N \delta r_j^i e_j$ . Ainsi, en substituant ces équations dans le problème (II.23), on a alors :

$$k_{mn}^* r_n^{*i} = g_n^{*inl} \quad (\text{II.26})$$

avec

$$k_{mn}^* = \int_{\Omega_0} ((\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{e}_m) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{e}_m)) : \underline{\underline{D}} : (\underline{\underline{\gamma}}^l(\underline{e}_n) + 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{u}_0, \underline{e}_n)) + \underline{\underline{S}}_0 : 2\underline{\underline{\gamma}}^{nl}(\underline{e}_m, \underline{e}_n)) dv$$

Il suffit ensuite d'appliquer la méthode des éléments finis. Cette méthode possède l'avantage par rapport à la première de ne pas calculer la matrice de rigidité tangente. On calcule ainsi directement les termes de la matrice réduite. Ceci demande beaucoup moins d'opérations car, rappelons le, la matrice de rigidité tangente est de dimension (n.d.l) \* (n.d.l). Cependant, des instabilités numériques ne nous ont pas permis d'obtenir une qualité satisfaisante de la solution à l'aide de cette méthode 2. C'est pourquoi, nous avons retenu la première méthode pour calculer la matrice réduite (discrétisation avant réduction). En ce qui concerne les seconds membres, nous avons retenu la deuxième méthode (réduction puis discrétisation) car nous n'avons pas constaté d'instabilité numérique.

Afin d'améliorer le domaine de validité de ces polynômes, il est possible de les substituer par des approximants de Padé comme nous l'avons expliqué précédemment. Il est clair que le nombre exact de coefficients  $k_{mn}$  à calculer est exactement  $N(N+1)/2$ ,

ce qui devient largement plus petit que celui qui était requis pour les méthodes classiques décrites au paragraphe II. De cette manière, la technique de base réduite peut être appliquée avec des bases d'assez grande dimension (quelques dizaines de vecteurs). Notons par ailleurs que cette technique présente l'avantage de pouvoir être appliquée à tous les types de problèmes où il est possible d'appliquer une technique de perturbation. Cet algorithme est résumé par le schéma (II.5).

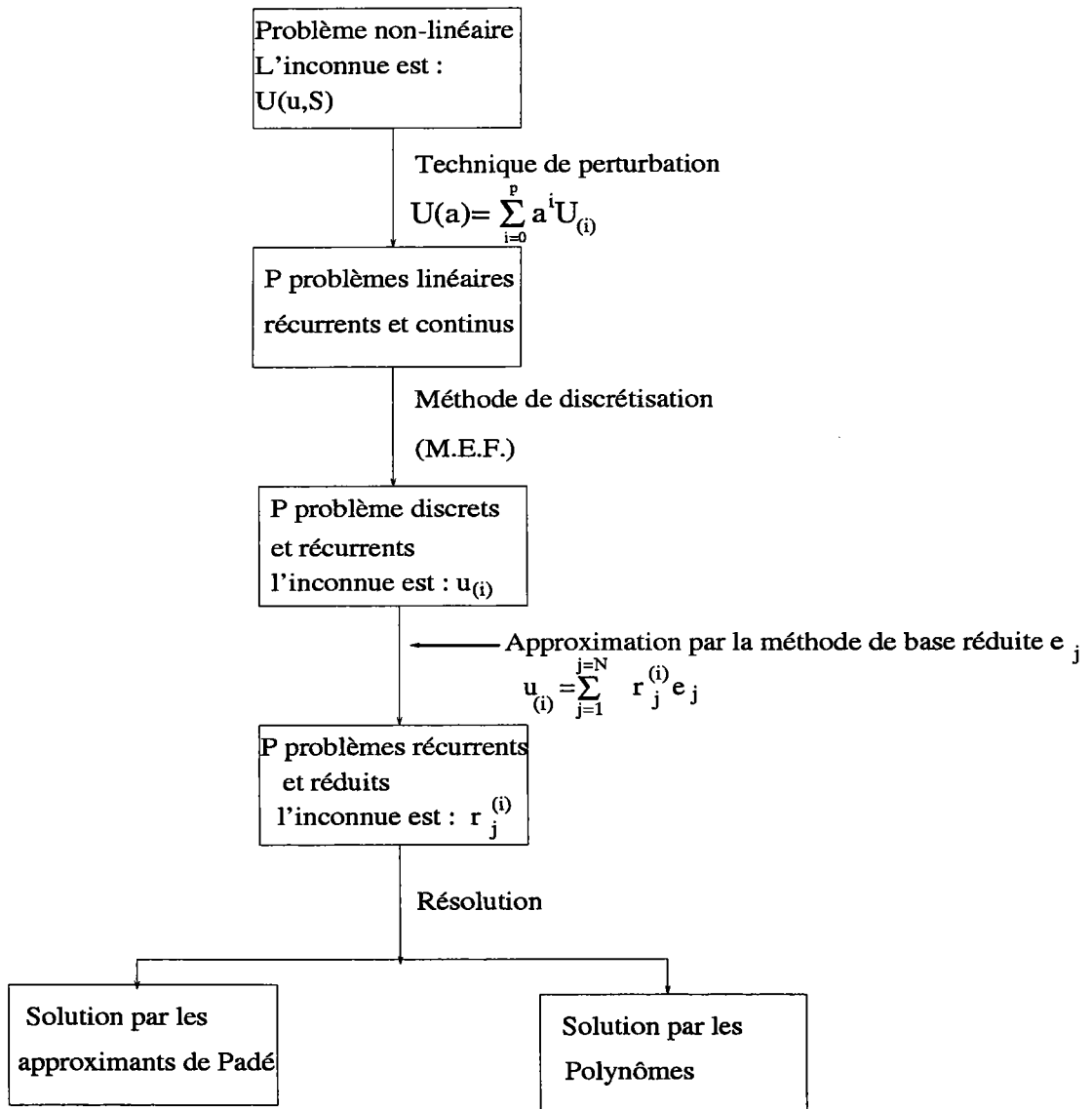


FIG. II.5 – Algorithme de la nouvelle technique de base réduite.

### II.3.2 Résultats numériques et discussion

Nous traitons à nouveau les deux points du paragraphe précédent afin d'attester la fiabilité de notre nouvelle technique numérique : - tout d'abord nous vérifierons que la réduction des problèmes linéaires ne détériore pas trop la longueur de pas pour un choix de base correcte; - ensuite, nous analyserons les temps de calcul. Rappelons qu'une bonne base est celle qui conduit à une bonne longueur de pas pour un temps de calcul modéré. Nous ne nous attarderons donc pas sur le choix de la base qui ne fait pas l'objet de notre étude. Pour les différents tests proposés, nous avons fait le choix de la base suivante: deux pas M.A.N. sont réalisés à l'aide d'un calcul direct des séries tronquées à l'ordre 15. Ainsi, lors de ces 2 pas préliminaires, nous calculons  $2 * 15 = 30$  vecteurs qui, après avoir été orthonormalisés, constitueront notre base pour le troisième pas. Ici aussi, nous avons utilisé l'algorithme de Gram-Schmidt pour réaliser cette orthonormalisation. Plusieurs tests ont été réalisés avec différentes dispositions de ces 30 vecteurs. Nous n'avons néanmoins pas constaté de changement significatif. Dans les exemples que nous proposons, l'étude porte donc sur le troisième pas de calcul. Il a été réalisé à partir de la fin du domaine de validité des séries du deuxième pas. Nous avons alors déterminé les courbes de réponse ainsi que les courbes résidu de quatre manières différentes :

1. La première méthode utilise une décomposition complète de la matrice de rigidité tangente pour calculer les vecteurs  $\underline{u}_i$ . Cette décomposition se fait à l'aide de l'algorithme de Crout et la représentation de la solution à l'aide des séries. Les courbes seront référencées Crout+Poly.
2. Dans la deuxième méthode, les vecteurs  $\underline{u}_i$  sont calculés à l'aide de la technique de base réduite présentée au paragraphe (II.3.1). La représentation de la solution utilisera les polynômes. Nous appellerons donc ces courbes : base réduite + Poly.
3. Ici, les vecteurs  $\underline{u}_i$  sont déterminés à l'aide de l'algorithme de Crout qui décompose complètement la matrice de rigidité tangente. La solution sera calculée avec les

approximants de Padé. Nous référencerons donc ces courbes : Crout + Padé.

4. La dernière méthode concerne celle déterminant les vecteurs  $\underline{u}_i$  à l'aide de la technique de base réduite (paragraphe II.2.1). La solution est représentée à l'aide des fractions rationnelles. Ces courbes seront référencées : base réduite + Padé.

En fait, nous disposons de deux méthodes pour calculer les vecteurs  $\underline{u}_{(i)}$  : une décomposition complète de la matrice rigidité tangente par l'algorithme de Crout, ou alors, l'utilisation de la technique de base réduite. Nous avons également deux méthodes pour déterminer la solution : l'utilisation d'une représentation polynômiale ou bien une représentation rationnelle, ceci nous donne en fait quatre possibilités.

Les résultats concernant le toit sont représentés sur les figures (II.6) et (II.7) pour des ordres de troncature 5, 10 et 15 et sur les figures (II.8) et (II.9) pour le problème du cylindre pour des ordres de troncature de 5, 10 et 15. On voit clairement que la résolution approchée par la technique de base réduite n'affecte que très peu la qualité de la solution. Il apparait même que dans un des cas de la représentation rationnelle (figures (II.7)), la résolution à l'aide de la technique de base réduite est préférable à la résolution utilisant la méthode directe. Ce résultat paradoxal est probablement dû à des instabilités numériques inhérentes au calcul des approximants de Padé à des ordres élevés [57].

Dans le cas du cylindre et de l'approximation rationnelle, la solution approchée réduit légèrement la longueur de pas. En utilisant un résidu maximum admissible de  $10^{-3}$  on obtient une limite de validité à 5,1 pour la technique de base réduite et de 5,4 avec une résolution par la méthode de Crout.

Nous avons également analysé les longueurs de pas obtenus avec les mêmes sous espaces mais sans orthogonalisation. Nous avons constaté que dans les cas du toit et du cylindre, la qualité de la solution obtenue est inacceptable. Les valeurs de résidu

### II.3. NOUVELLE MÉTHODE DE BASE RÉDUITE

obtenues sont supérieures à  $10^{-3}$  même au début du pas. Nous en concluons donc que la technique de base réduite proposée fonctionne bien pour des bases de grande taille, mais une procédure d'orthonormalisation est nécessaire afin d'éviter les instabilités numériques.

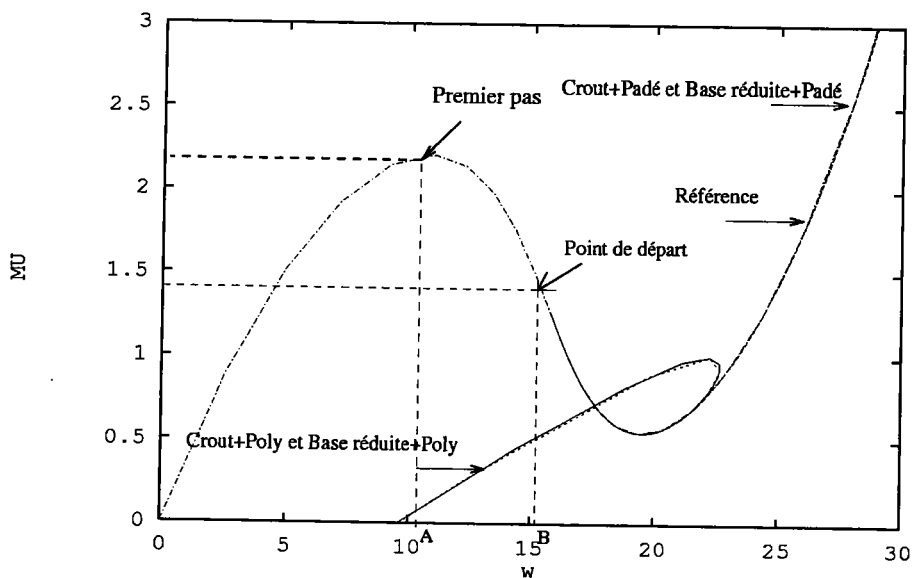


FIG. II.6 – Toit (726 d.d.l.): Courbe chargement/déplacement du point M.

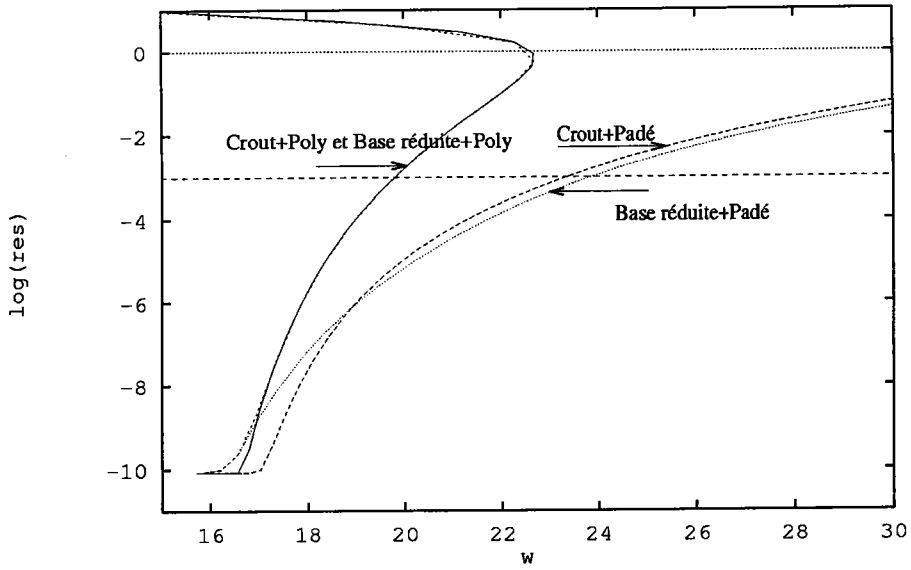


FIG. II.7 – *Toit (726 d.d.l.)*: Représentation du logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15.

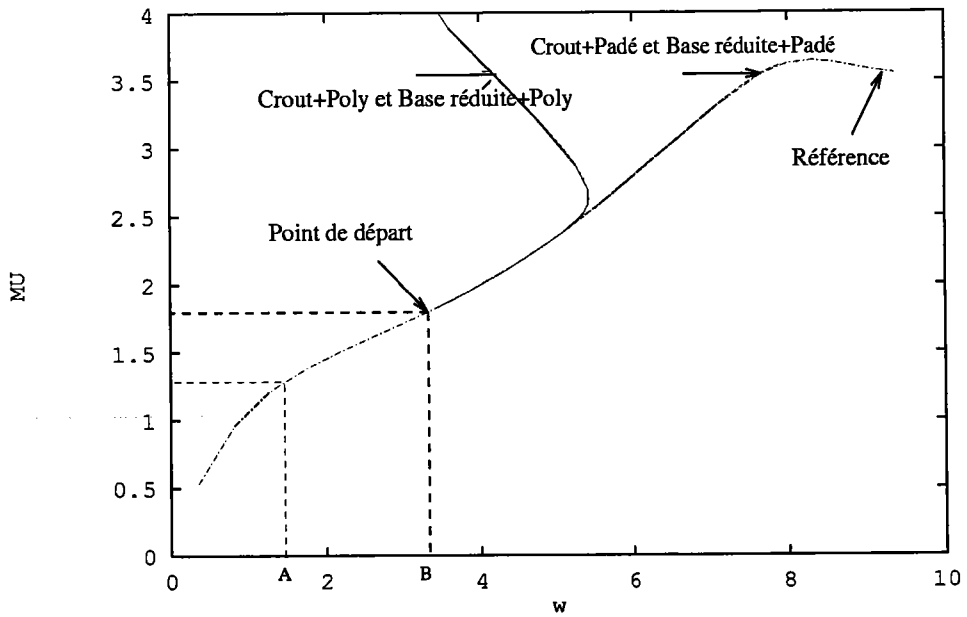


FIG. II.8 – *Cylindre (5190 d.d.l.)*: Courbe chargement/déplacement du point M.

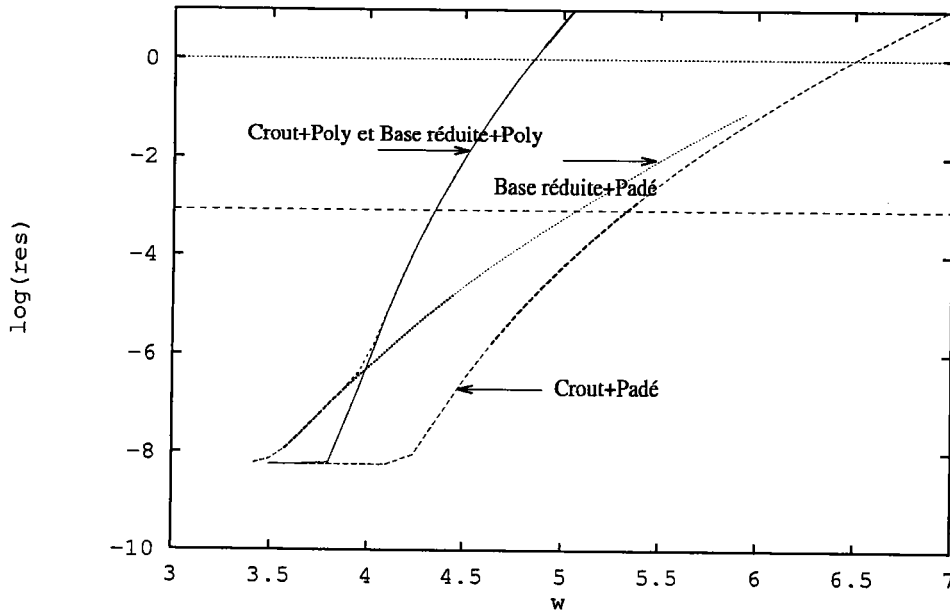


FIG. II.9 - *Cylindre (5190 d.d.l.) Représentation du logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15.*

Nous pouvons nous poser à présent la question suivante : quelle est la taille de la base nécessaire pour obtenir une solution approchée satisfaisante. Une telle analyse est représentée sur les figures (II.10), (II.11), (II.12) et (II.13) où le nombre de vecteurs varie de 15 à 30 pour les représentations polynômiales et rationnelles respectivement. Dans le cas de l'utilisation de 15 vecteurs, nous avons choisi ceux obtenus au deuxième point de départ (référéncé point A). Lorsque nous avons utilisé 20 vecteurs, les cinq premiers vecteurs obtenus par perturbation à partir du point initial 0 ont été ajoutés. Si on analyse la représentation polynômiale on constate que :

- A partir des courbes (II.10) et (II.12), au moins 25 vecteurs sont nécessaires pour obtenir une longueur de pas assez grande.
- L'approximation n'est pas satisfaisante en dessous de 20 vecteurs...

Pour une analyse de la représentation rationnelle on constate que :

- Pour un résidu maximum admissible de  $10^{-3}$ , les 30 vecteurs sont nécessaires pour obtenir une longueur de pas acceptable (c-à-d : proche de la solution ob-



tenue à l'aide des développements en séries) (courbes (II.11) et (II.13)).

- L'approximation n'est pas satisfaisante en dessous de 20 vecteurs.

Les conclusions sont les mêmes pour les deux exemples.

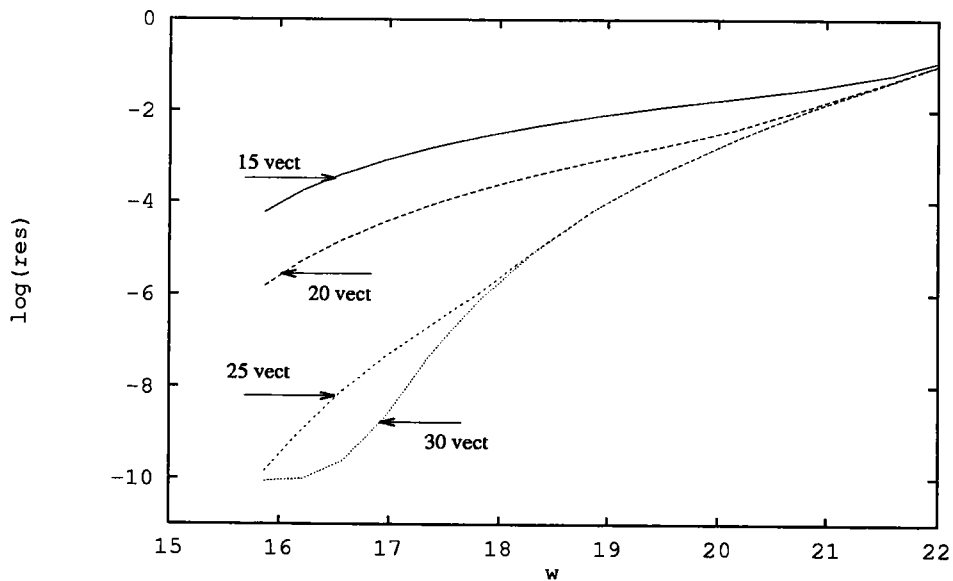


FIG. II.10 - Toit (726 d.d.l.) : Logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15 et divers nombres de vecteurs de base. Technique de base réduite combinée aux polynômes.

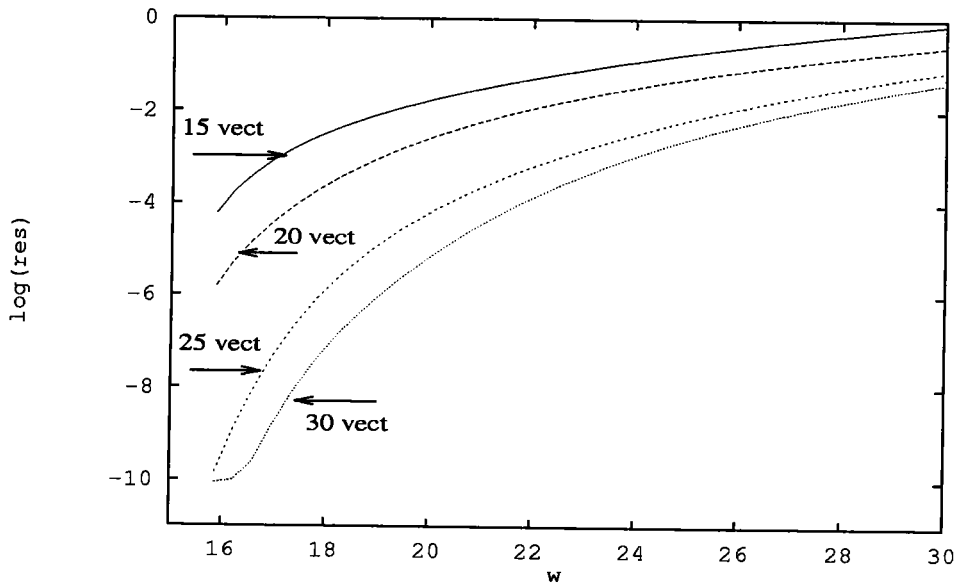


FIG. II.11 – Toit (726 d.d.l.) : Logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15 et divers nombres de vecteurs de base. Technique de base réduite combinée aux fractions rationnelles.

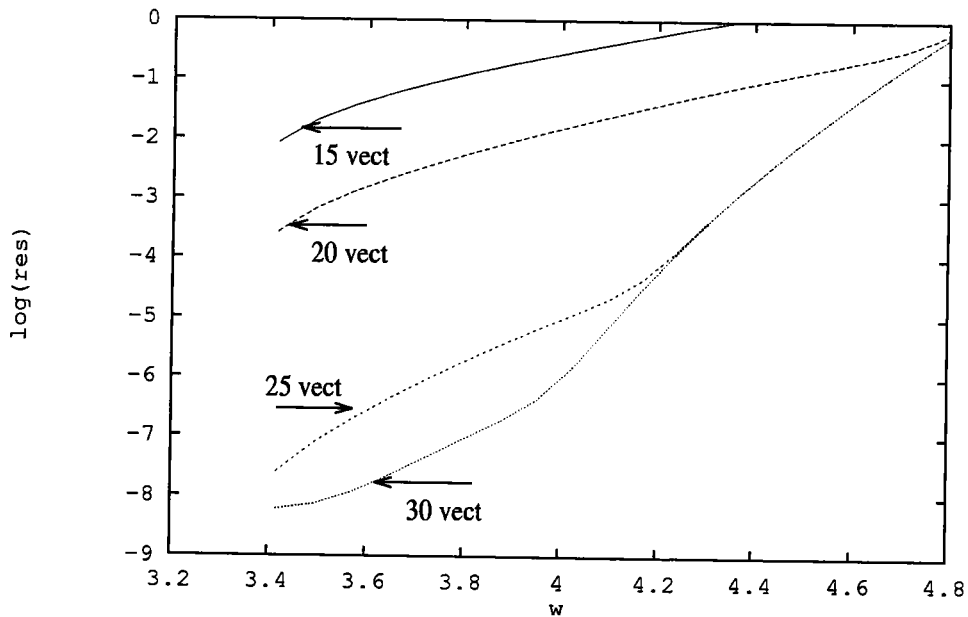


FIG. II.12 – Cylindre (5190 d.d.l.) : Logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15 et divers nombres de vecteurs de base. Technique de base réduite combinée aux polynômes.

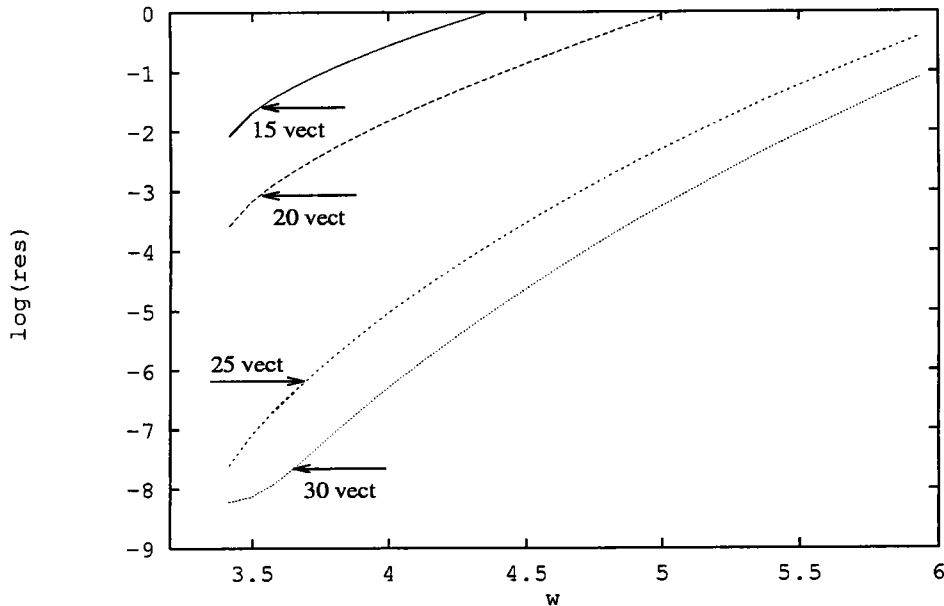


FIG. II.13 – *Cylindre (5190 d.d.l.) : Logarithme du résidu pour un ordre de troncature égal à 15 et divers nombres de vecteurs de base. Technique de base réduite combinée aux fractions rationnelles.*

Pour une analyse plus efficace des temps de calcul, nous avons considéré trois problèmes :

- Le problème du toit avec ses 726 *d.d.l.*
- Le problème du cylindre et ses 5190 *d.d.l.*
- Le même cylindre mais sans tenir compte des symétries soit 39756 *d.d.l.*

Pour ce dernier test, nous avons donc maillé toute la structure avec 12856 éléments triangulaires DKT18. Ceci nous a conduit à un nombre total de degrés de liberté de 39756. Nous noterons que dans le cas du cylindre entièrement maillé, nous avons réalisé les tests sur un ordinateur Hewlet Packard C360. Il est environ 10 fois plus rapide que les ordinateurs Hewlet Packard 716/60 qui ont été utilisés pour les autres tests numériques. Pour la technique de base réduite, nous avons utilisé différentes bases. La dimension de ces sous espaces varie entre 15 et 30 vecteurs. Dans tous les cas, l'ordre de troncature utilisé pour obtenir la solution a été choisi égal à 15.

Concernant les deux plus petits problèmes (Tableaux II.5 et II.6), les temps de calcul correspondent à ceux trouvés pour le calcul de référence (*ie* : résolution des problèmes linéaires par une décomposition de Crout, ordre 15 et approximation rationnelle). Bien évidemment, les temps de calcul croissent avec la dimension du sous espace, cependant, pas considérablement. Donc il est possible d'utiliser une base de grande taille et il est même recommandé d'en choisir une dont la dimension est supérieure à 20 vecteurs. Pour le problème du cylindre à 5190 *d.d.l.*, les temps de calcul de notre nouvelle méthode sont approximativement de 11% plus faibles que ceux obtenus par la méthode de référence (à savoir, résolution des problèmes linéaires par une décomposition de Crout et obtention de la solution par les approximants de Padé). Ceci représente un gain appréciable car rappelons que ces deux méthodes nous donnent des longueurs de pas sensiblement identiques.

L'intérêt de notre nouvelle méthode de base réduite devient évident lorsque l'on traite l'exemple à plus grand nombre de *d.d.l.* : la technique de base réduite a permis de diminuer le temps CPU total de 87,5% si on la compare à l'algorithme standard Crout + Padé et ceci, toujours pour des longueurs de pas similaires. Dans ce cas, la consommation en temps CPU de l'algorithme standard est principalement gouvernée par la décomposition de la matrice de rigidité tangente. En fait, elle nécessite un nombre d'opérations qui correspond au cube du nombre de *d.d.l.*. Puisque le temps CPU pour générer la matrice réduite ne croît pas de la même manière, une réduction des temps de calcul de 2075 à 170 n'est pas surprenante.

Vecteurs de base	[Kt]	Fnl	Matrice réduite	Vec-ortho	Total
15	2.1	4.7	0.6	0.2	7.6
20	2.1	4.7	0.8	0.3	7.9
25	2.1	4.7	1	0.4	8.3
30	2.1	4.8	1.3	0.6	8.9

TAB. II.5 – Toit (726 *d.d.l.*): Temps de calcul pour la nouvelle technique de base réduite utilisant une approximation polynômiale tronquée à l'ordre 15. On rappelle que le calcul de 15 termes avec le solveur de Crout coûte 7.9s.

Vecteurs de base	[Kt]	Fnl	Matrice réduite	Vec-ortho	Total
15	17	37	10	1	65
20	17	37	14	2	70
25	17	38	18	3	76
30	17	38	21	4	80

TAB. II.6 – *Cylindre (5190 d.d.l.)*: Temps de calcul pour la nouvelle technique de base réduite utilisant une approximation polynômiale tronquée à l'ordre 15. On rappelle que le calcul de 15 termes avec le solveur de Crout coûte 90s.

	calcul de [Kt]	traitement de [Kt]	Fnl	vec-ortho	Total
Décomposition de Crout	32	2075	202	faible	2310
Base réduite (30 vecteurs)	32	170	72	9.5	284

TAB. II.7 – *Cylindre (39756 d.d.l.)*: Temps de calcul d'un pas avec la M.A.N. classique (Crout, Padé) et avec la nouvelle technique de base réduite (base réduite, Padé). Ordre 15

Une autre réduction des temps est observée concernant les seconds membres  $F^{(Ni)}$ , et leur vecteur déplacement  $\underline{u}_i$  correspondant. On rappelle effectivement que nous avons utilisé la deuxième méthode présentée au paragraphe II.3.1 pour calculer les vecteurs  $F^{(Ni)}$ . Nous calculons donc directement le vecteur réduit  $F^{(Ni)}$ .

Enfin, quel que soit le problème étudié, le processus d'orthogonatisation ainsi que l'obtention des coefficients de Padé nécessitent un temps de calcul négligeable.

## II.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, une nouvelle technique de base réduite pour résoudre des problèmes non linéaires. Nous avons également discuté son efficacité. Contrairement aux méthodes de base réduite classiques [62], nous appliquons une technique de perturbation avant la réduction. Ainsi, nous évitons le calcul d'un nombre considérable de coefficients qui permettent de définir le problème réduit. Comparée aux méthodes asymptotiques numériques classiques [22], notre méthode ne diffère que dans le processus de résolution des problèmes linéaires. En effet, nous

l'effectuons par une technique de base réduite et non par une décomposition directe de la matrice de rigidité tangente. Nous pouvons également améliorer le domaine de validité de la solution pour un coût de calcul négligeable par l'introduction d'approximants de Padé.

Dans les différents tests numériques présentés, nous avons clairement établi que la méthode devient attrayante pour des problèmes de grande taille. Par exemple, les temps de calcul d'un pas d'un problème comptant 39756 d.d.l. peuvent être divisés par 8.

Il a également été montré que cette technique fonctionne très bien même avec un sous espace de grande dimension. Probablement, cette technique pourrait être utilisée comme phase de prédiction dans un algorithme de prédiction-correction appliqué à des problèmes de grande taille. En effet, avec ce type de procédé numérique, beaucoup de vecteurs peuvent être calculés. Ceci pourrait contribuer à définir des sous-espaces pour la technique de base réduite. Mais cette discussion dépasse notre cadre de travail.

Nous avons aussi revisité les méthodes de base réduite classiques utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires. Nous avons clairement recommandé de ne pas les utiliser lorsque la dimension des sous-espaces est supérieure à 5. En effet, dans ce cas, les temps de calcul croissent rapidement en fonction de l'ordre de troncature. De plus, et contrairement à notre nouvelle méthode, elle présente d'autres inconvénients : il apparaît des instabilités numériques et le champ d'application est restreint à des systèmes quadratiques ou cubiques.

## CHAPITRE III

# La M.A.N. pour les grandes transformations élastoplastiques

### III.1 Introduction

Les processus industriels de mises en forme (emboutissage, laminage, filage, formage,...) mettent en œuvre des déformations plastiques considérables. Pour les métaux utilisés, la limite élastique est toujours très petite par rapport aux modules élastiques de rigidité. Ceci entraîne des déformations élastiques faibles par rapport aux déformations plastiques ( 1% à 2 % maximum ). Pendant des années, on s'est satisfait des deux approches suivantes

- Ou bien les déformations plastiques sont également petites, ce qui était la situation habituelle en calcul des structures . Dans ce cas, on utilise la théorie élastoplastique en petites déformations.
- Ou bien les déformations plastiques sont grandes, ce qui est une situation habituelle de mise en forme. On peut alors négliger les déformations élastiques et utiliser une théorie rigide plastique.

En choisissant l'une ou l'autre de ces méthodes suivant le problème à étudier, on impose plusieurs limitations. Notamment, dans le cas de la modélisation du comportement rigide plastique, les approches numériques utilisées sont en général basées sur une régularisation viscoplastique et incompatibles avec la prise en compte d'un quelconque écrouissage. De plus, elle ne donne pas accès aux contraintes résiduelles

et aux retours élastiques.

En France, dans les années 1980-1990, l'étude des "Grandes déformations" a fait l'objet de travaux théoriques et expérimentaux très élaborés par de nombreuses équipes réunies au sein d'un GRECO "grandes déformations et endommagement" (Groupement de REcherches COordonnées) qui regroupait notamment l'Ecole Central de Lyon [(F. Sidoroff, [65],[66],[67]) et (A. Dogui, [26])], l'INSA de Lyon [(M. Boivin) et (M. Brunet et J. Bahuaud, [13])], l'Université de Technologie de Compiègne [(M. El Moutassim, [31]) (M. El Moutassim et G. Touzot, [32]) et (J. M. Detraux, [24])], l'ENSET (J. Lemaître, [44]), l'Ecole Polytechnique (C. Stolz, [71]), l'Université de Metz (A. Molinari, [34]), entre autres.

Bien entendu, d'autres travaux sur les grandes déformations élastoplastiques ont eu lieu avant ce G.R.E.C.O., notamment J. Mandel, [46], [47], [48], Q.S Nguyen et H.D. Bui H.D., [58], P. Ladeveze [40], M. Boivin [9]. De nos jours, de nombreux codes de calcul industriels permettent de prendre en compte les grandes déformations plastiques.

Nous présentons dans notre étude deux formulations du problème élastoplastique en grandes déformations :

- La première a été proposée par F. SIDOROFF [65] dans le début des années 80. Elle est basée sur une décomposition additive du tenseur des taux de déformations. Les déformations élastiques sont supposées petites et les déformations plastiques grandes.
- La deuxième formulation quant à elle, a été proposée par J.C. Simo en 1986 [68], [69]. Elle est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation. Dans ce cas, les déformations élastiques ainsi que les déformations plastiques peuvent être grandes. Ici, le seuil de plasticité est formulé à l'aide de tenseurs de déformation lagrangiens.

Le but de ce travail est d'appliquer la M.A.N à ces deux formulations élastoplastiques. Ce problème peut s'avérer ardu en raison de la présence simultanée de plusieurs types



de non-linéarités :

- La première, d'origine géométrique, est induite par les grands déplacements (rotations).
- La deuxième, d'origine matérielle est étroitement liée au comportement du matériau (élastoplasticité, viscoplasticité,...).

Cependant, la M.A.N s'est déjà montrée très efficace pour résoudre des problèmes mettant en jeu ces deux types de non linéarité. On peut notamment citer pour exemple les travaux de Juliette Brunelot [12] qui a appliqué cette méthode au comportement viscoplastique en grandes déformations ainsi que les travaux de B. Braikat [10] ou bien H. Zahrouni [75] qui l'ont appliquée au comportement élastoplastique. Ces derniers ont utilisé une formulation basée sur la théorie des déformations, ce qui ne permet pas de simuler correctement de grandes déformations plastiques et la décharge élastique.

Pour nos deux études, des procédures de régularisations seront proposées pour les deux lois de comportement pour pouvoir appliquer une technique de perturbation. On fera en sorte d'obtenir une formulation quadratique du problème, ce qui se fait assez simplement en introduisant des variables supplémentaires.

Dans les paragraphes qui suivent, nous rappellerons d'abord les définitions préliminaires de quelques tenseurs lagrangiens et eulériens permettant le choix adéquat des contraintes et des déformations au cours d'une transformation finie. On s'attardera à formuler le problème à résoudre : d'une part, par le choix de modèles de comportement et d'autre part, par l'écriture d'un principe variationnel qui leur est associé.

## III.2 Cinématique des transformations finies

### III.2.1 Tenseur gradient de la transformation $\underline{\underline{F}}$

Pour notre étude, nous nous placerons dans le cadre de la mécanique des milieux continus et nous supposerons donc implicitement qu'il n'apparaît pas de défauts durant l'application des chargements. Nous supposerons également que le matériau est isotrope et qu'il le reste au cours du chargement.

Considérons un corps déformable dans une configuration de référence  $C_0$  et dans une configuration courante  $C$  à l'instant  $t$  et désignons par  $\underline{X}$  et  $\underline{x}$  les vecteurs positions d'un point matériel respectivement dans  $C_0$  et  $C$ .

Nous définissons le vecteur déplacement  $\underline{u}$  et le vecteur vitesse  $\underline{v}$  par les relations suivantes:

$$\underline{u} = \underline{x} - \underline{X} \quad (\text{III.1})$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \frac{d\underline{u}}{dt} \quad (\text{III.2})$$

où  $\frac{d}{dt}$  représente la dérivée particulière par rapport au temps à  $\underline{X}$  constant. Nous désignons par  $\underline{F}$  la transformation finie de  $\underline{X}$  à  $\underline{x}$ :

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial(\underline{u} + \underline{X})}{\partial \underline{X}} = \underline{I} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} \quad (\text{III.3})$$

où  $\underline{F}$  est:

- bijective
- continue par rapport aux variables d'espace et de temps
- différentiable

et  $\underline{I}$  est le tenseur unité. Le tenseur  $\underline{F}$  prend en compte à la fois la rotation locale du solide et sa déformation. Nous pouvons alors en déduire les relations géométriques suivantes:

- entre un élément de volume  $d\Omega_0$  mesuré dans  $C_0$  et un élément de volume  $d\Omega$  mesuré à l'instant  $t$  dans  $C$ , on a:

$$d\Omega = Jd\Omega_0 \quad (\text{III.4})$$

- entre un élément de surface  $dS_0$ , pris dans  $C_0$  et caractérisé par une normale unitaire  $\underline{n}_0$ , et un élément de surface  $dS$  pris à l'instant  $t$  de normal unitaire  $\underline{n}_t$ , on a la formule de NANSON:

$$\underline{n}_0 dS_0 = \det \underline{F}^{-1} * \underline{F}^t * \underline{n}_t dS_t = J^{-1} * \underline{F}^t * \underline{n}_t dS_t \quad (\text{III.5})$$

où l'indice supérieur  $t$  désigne le transposé d'un tenseur et  $J = \det(\underline{\underline{F}})$  le Jacobien.

On notera que le tenseur  $\underline{\underline{F}}$  n'est pas symétrique  $\underline{\underline{F}} \neq \underline{\underline{F}}^t$ .

### III.2.2 Tenseurs des déformations et des taux de déformation

Afin de définir la déformation du solide, c'est à dire ses changements de formes, il faut éliminer le mouvement de corps solide qui n'entraîne aucune déformation.

Le tenseur gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}$  recèle des informations sur la déformation du solide ainsi que sur sa rotation au voisinage d'une particule.

Pour caractériser le changement de forme, il faut évaluer convenablement les variations de longueurs et d'angles de manière à éliminer la rotation parasite de corps solide contenue dans le tenseur  $\underline{\underline{F}}$ .

#### Tenseurs des dilatations

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^t \cdot \underline{\underline{F}}, \quad (\text{III.6})$$

symétrique et défini positif est le tenseur des dilatations ou encore le tenseur de Cauchy-Green droit. Il permet d'exprimer le produit scalaire de deux vecteurs transportés  $d\underline{\underline{x}}$  et  $\delta\underline{\underline{x}}$  en fonction des vecteurs initiaux correspondants  $d\underline{\underline{X}}$  et  $\delta\underline{\underline{X}}$ . Sa connaissance permet de définir la forme locale de la configuration déformée du solide en chaque point.  $\underline{\underline{C}}$  est un tenseur lagrangien car il opère sur des vecteurs définis sur la configuration initiale  $C_0$ .

#### Taux de déformation et de rotation

En dérivant (III.3) par rapport au temps, on peut montrer que le gradient de la vitesse  $\underline{\underline{v}}$  par rapport à  $\underline{\underline{x}}$  satisfait la relation:

$$\underline{\underline{l}} = \frac{\partial \underline{\underline{v}}}{\partial \underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad (\text{III.7})$$

Le tenseur vitesse de déformation  $\underline{\underline{D}}$  et le tenseur vitesse de rotation  $\underline{\underline{W}}$  sont définis en tant que les parties symétrique et antisymétrique de  $\underline{\underline{l}}$ , c'est à dire:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^t) \quad (\text{III.8})$$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^t) \quad (\text{III.9})$$

### III.2.3 Tenseurs des contraintes

Afin de conclure avec la cinématique des grandes transformations, nous présentons maintenant le tenseur des contraintes. Le tenseur des contraintes le plus naturel est le tenseur des contraintes de Cauchy (ou d'Euler)  $\underline{\underline{\sigma}}$ , défini dans la configuration courante déformée. Il caractérise l'effort de cohésion s'exerçant entre deux particules du milieu continu à l'instant considéré. Le tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  définit l'effort  $d\underline{\underline{f}}$  exercé sur l'élément de surface  $dS$  de normale  $\underline{\underline{n}}$  dans la configuration  $C$ :

$$d\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} dS \quad (\text{III.10})$$

Le tenseur  $\underline{\underline{\sigma}}$ , défini sur la configuration  $C$ , est eulérien et symétrique. Un tenseur plus fréquemment employé dans la formulation variationnelle en grandes déformations est le tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  car il est symétrique et conduit dans la discrétisation spatiale en éléments finis à une formulation matricielle symétrique. Les tenseurs des contraintes de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  et de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  sont liés par la relation suivante:

$$\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}} \quad (\text{III.11})$$

En transportant l'élément de surface  $n_t dS_t$  dans la configuration de référence, on obtient le tenseur de Piola-Kirchhoff de première espèce  $\underline{\underline{T}}$  encore appelé tenseur de Boussinesq.

$$d\underline{\underline{f}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}}_0 dS_0 \quad (\text{III.12})$$

Ce tenseur n'est ni lagrangien ni eulérien.

En transportant le vecteur contrainte dans la configuration de référence  $C_0$ , on fait apparaître le tenseur de Piola-Kirchhoff de second espèce  $\underline{\underline{S}}$  :

$$df_{\underline{0}} = \underline{\underline{S}} \cdot \underline{n}_0 dS_0 \quad (\text{III.13})$$

Il est lagrangien, symétrique et invariant dans une rotation de corps rigide.

Tous ces tenseurs de contraintes sont reliés par les relations :

$$\underline{\underline{\tau}} = J \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}^t = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^t \quad (\text{III.14})$$

### III.3 Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de F. SIDOROFF

Nous entrons maintenant dans le coeur du sujet, qui est d'établir des algorithmes asymptotiques numériques pour des matériaux élastoplastiques en transformations finies. Il y a de nombreuses applications, mais nous sommes principalement motivés par la simulation numérique de procédés de fabrication par déformation plastique comme l'emboutissage, le laminage, l'usinage, etc. La modélisation de ces procédés implique aussi la prise en compte du contact unilatéral, du frottement et des transformations finies. Rappelons que divers travaux ont permis d'établir une certaine efficacité de la M.A.N. pour des modèles impliquant le contact unilatéral [29], le frottement [12], les grandes rotations élastiques [75], les grandes déformations élastiques [35] et les grandes déformations viscoplastiques [12]. D'après ces travaux, ce n'est pas la prise en compte des transformations finies qui est une difficulté pour appliquer la M.A.N., bien au contraire, les résultats les plus spectaculaires ont été obtenus en flambage élastique, en élasticité non linéaire avec de très grandes rotations.

De même, il a été montré que la M.A.N. reste performante avec des lois "fortements non linéaires" comme le contact unilatéral ou des lois de comportement impliquant des lois en puissance fractionnaire  $y = x^n$ . Dans ce cas la difficulté est d'établir un algorithme assez simple et efficace pour construire les vecteurs seconds membres

successifs  $F_i^{nl}$ . Rappelons qu'on déduit les vitesses ou les déplacements par une inversion de matrice  $[K_t]^{-1}\{F_i^{nl}\}$ , où la matrice  $[K_t]$  est la matrice tangente habituelle: ceci a été brièvement décrit au chapitre I.

Lorsque le problème est fortement non linéaire, deux techniques sont utilisées pour établir un algorithme asymptotique numérique. Tout d'abord, on modifie légèrement le problème à résoudre de manière à obtenir des courbes de réponses développables en séries entières: c'est la technique de régularisation qui est parfois difficile à gérer lorsqu'il y a plusieurs non linéarités couplées, mais qui a déjà permis de construire des algorithmes efficaces pour des problèmes académiques de simulation de l'emboutissage [12], [2]. Pour résoudre notre problème, nous avons à gérer d'une part la transition du domaine élastique vers le domaine élastoplastique qui est seulement fonction de l'état de contrainte, d'autre part, la décharge élastique qui est aussi fonction des dérivées temporelles des contraintes. Dans cette première étude de l'élastoplasticité, nous avons choisi de négliger la décharge élastique au cours d'un pas de calcul. Cela permet de définir à chaque pas une loi de comportement de type déformation et donc de construire un algorithme comparable à celui utilisé avec succès dans des travaux précédents [76].

Un second artifice est important pour obtenir des algorithmes efficaces avec des modèles complexes. L'idée est d'ajouter ou de conserver des variables lors de la phase de développements asymptotiques. Par exemple, lorsque la loi est exprimée en termes de tenseurs  $\underline{F}$  ou  $\underline{F}^{-1}$  pour assurer le passage entre les configurations d'euler et de Lagrange (voir chapitre I).

Nous avons choisi ici, un modèle de comportement proposé au début des années 1980, qui est suffisant dans la plupart des applications visées et qui est assez proche de ceux pris en compte dans beaucoup de codes de calcul industriels.

### III.3.1 Equations d'équilibre

Considérons un solide élastoplastique occupant, dans la configuration  $C$ , un domaine  $\Omega$  ayant pour frontière  $\partial\Omega = \partial\Omega_v \cup \partial\Omega_F$ . Ce solide est soumis à des efforts extérieurs surfaciques donnés  $\underline{\mu F}$  sur la partie  $\partial\Omega_F$  et à des vitesses imposées nulles sur la partie  $\partial\Omega_v$ .

Si on néglige les forces de volumes ainsi que les forces d'inertie, les équations d'équilibre et les conditions aux limites s'écrivent alors:

$$\begin{cases} \text{div}(\underline{\sigma}) = \underline{0} & \text{sur } \Omega \\ \underline{v} = \underline{0} & \text{sur } \partial\Omega_v \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{\mu F} & \text{sur } \partial\Omega_F \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$\underline{n}$  représente le vecteur unitaire de la normale extérieure à  $\partial\Omega_F$ .

### III.3.2 Principe des puissances virtuelles

Nous venons de présenter au paragraphe (III.3.1) les équations d'équilibre et les conditions aux limites qui doivent être satisfaites à chaque instant. Il est bien connu ([77],[25]) que le problème aux limites (III.15) est satisfait si et seulement si le principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\Omega} \underline{\sigma} : \delta \underline{D} d\Omega = \int_{\partial\Omega_F} \underline{\mu F} \cdot \delta \underline{v} dS \quad (\text{III.16})$$

est satisfait pour tout champ de vitesses virtuelles  $\delta \underline{v}$  cinématiquement admissible (C.A.).

On appelle champ de vitesses virtuelles C.A. un champ vectoriel continûment différentiable, qui satisfait les conditions aux limites homogènes,

$$\delta \underline{v} = \underline{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega_v \quad (\text{III.17})$$

On rappelle ici que:

$$\delta \underline{D} = \frac{1}{2}(\delta \underline{l} + \delta \underline{l}^t) \quad \text{avec} \quad \delta \underline{l} = \frac{\partial(\delta \underline{v})}{\partial \underline{x}} \quad (\text{III.18})$$

Afin d'obtenir une formulation variationnelle complète, il est nécessaire d'y associer les relations de comportement et les relations géométriques et cinématiques.

La description cinématique des grandes déformations constitue un obstacle géométrique important. Les configurations successives occupées par le solide étant distinctes, il est essentiel de toujours préciser dans quelle configuration les calculs sont effectués. En grandes déformations, la configuration courante est une inconnue du problème, on préférera alors écrire le problème dans une configuration fixée. La formulation est alors appelée : formulation lagrangienne.

### Formulation lagrangienne totale

Nous réécrivons le principe des puissances virtuelles (III.16) dans une configuration de référence initiale  $C_0$ . Nous rappelons ici l'écriture des différentes quantités dans la configuration initiale :

$$\underline{\underline{\tau}} = J\underline{\underline{\sigma}}, \quad \Omega = Jd\Omega_0 \quad \text{et} \quad \underline{F}_0 dS_0 = \underline{F} dS \quad (\text{III.19})$$

On peut faire apparaître les variables lagrangiennes  $\underline{X}$  dans le tenseur gradient de la vitesse  $\underline{l}$ , on a :

$$\underline{l} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} \quad \implies \quad \delta \underline{l} = \frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \delta \underline{v}}{\partial \underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} \quad (\text{III.20})$$

En appelant  $\underline{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}}$  et en constatant que  $\frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}} = \underline{F}^{-1}$  On a :

$$\underline{l} = \underline{L}\underline{F}^{-1} \quad \text{et} \quad \delta \underline{l} = \delta \underline{L}\underline{F}^{-1} \quad (\text{III.21})$$

Pour simplifier l'écriture, on introduira l'inverse du gradient de la transformation  $\underline{F}^{-1} = \underline{f}$ . On a finalement :

$$\underline{l} = \underline{L}\underline{f} \quad \text{et} \quad \delta \underline{l} = \delta \underline{L}\underline{f} \quad (\text{III.22})$$

Le principe des puissances virtuelles s'écrit alors dans la configuration lagrangienne mais avec le tenseur de Kirchhoff :

$$\int_{\Omega_0} \frac{1}{J} \underline{\underline{\tau}} : (\delta \underline{L}\underline{f}) J d\Omega_0 = \mu \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0 \quad \forall \delta \underline{v} \text{ cinématiquement admissible} \quad (\text{III.23})$$

La symétrie du tenseur de Kirchhoff nous permet de réécrire (III.23) :

$$\int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{f}^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 = \mu \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0 \quad \forall \delta \underline{v} \text{ cinématiquement admissible} \quad (\text{III.24})$$



### Formulation lagrangienne actualisée

Dans le cas d'une formulation lagrangienne actualisée, la forme du principe des puissances virtuelles est la même que dans le cas d'une formulation lagrangienne totale. Cependant, au lieu de prendre la configuration initiale non-déformée comme configuration de référence, nous prenons la configuration actuelle à l'instant  $t$  début de l'incrément.

Toutes les variables physiques sont référencées dans cette configuration où  $\underline{x}$  et  $\underline{X}$  coïncident à l'instant  $t$ .

L'application du schéma lagrangien actualisé consiste essentiellement dans l'application répétée de deux étapes:

1) Pour un intervalle de temps  $(t, t + \Delta t)$ , la configuration à l'instant  $t$  est prise pour configuration de référence. On écrit alors le principe des puissances virtuelles dans cette configuration de départ.

2) Après avoir calculé les valeurs de toutes les variables au moment  $t + \Delta t$ , on obtient la configuration d'arrivée à ce moment par actualisation des coordonnées spatiales. Cette configuration est ensuite prise comme configuration de départ pour un nouvel incrément de temps, et le calcul se poursuit de la même manière.

### III.3.3 Loi de comportement

De manière générale, la loi de comportement caractérise la relation entre les contraintes et les déformations. Cependant en élastoplasticité "grandes déformations", la loi de comportement relie, en général, les vitesses de contraintes aux vitesses de déformations. Or, la formulation d'une loi de comportement, par nature intrinsèque, doit être établie en respectant les principes fondamentaux de la Mécanique et de la Thermodynamique. Elle doit notamment vérifier le "Principe d'Indifférence Matérielle" encore appelé "Principe d'Objectivité" [66]. Ceci est une propriété essentielle en transformations finies car le solide change continuellement de configuration. Par rapport aux "petites déformations" le respect du "Principe d'Objectivité" constitue une dif-

ficulté tout à fait essentielle, or la plupart des lois de comportements élastoplastiques "grandes déformations" sont tirées des lois de comportements "petites déformations".

Pour cette première étude, nous utiliserons la formulation élastoplastique telle qu'elle a été présentée par F. Sidoroff dans [66], [26]. C'est une généralisation de la loi de Prandtl et Reuss valable dans le cas des grandes déformations et satisfaisant le critère d'objectivité. Nous faisons l'hypothèse que les déformations élastiques sont toujours petites et les déformations plastiques peuvent être grandes. C'est d'ailleurs souvent le cas en mise en forme où les déformations élastiques sont au plus de l'ordre de 2% et les déformations plastiques varient entre 10% et 100%. Cette hypothèse, associée à l'hypothèse d'isotropie nous permet de confondre la configuration relâchée et la configuration actuelle. On démontre alors que le taux de déformations  $\underline{\underline{D}}$  se décompose additivement en un taux de déformations élastiques  $\underline{\underline{D}}^e$  et un taux de déformations plastiques  $\underline{\underline{D}}^p$ :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^e + \underline{\underline{D}}^p \quad (\text{III.25})$$

### Taux de déformations élastiques

Le taux de déformations élastiques  $\underline{\underline{D}}^e$  est simplement défini par la loi de Hooke comme suit :

$$\underline{\underline{D}}^e = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\tau}}^J \quad (\text{III.26})$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est un tenseur de souplesse élastique du quatrième ordre qui est symétrique. L'indice supérieur  $J$  du tenseur de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  indique la dérivée objective de Jaumann qui a été choisie afin de satisfaire le principe d'indifférence matérielle présenté ci-dessus. La dérivée de Jaumann du tenseur de Kirchhoff est définie comme suit :

$$\underline{\underline{\tau}}^J = \underline{\underline{\dot{\tau}}} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{\tau}} \quad (\text{III.27})$$

où  $\underline{\underline{\dot{\tau}}}$  représente la dérivée par rapport au temps du tenseur  $\underline{\underline{\tau}}$ . On rappelle que  $\underline{\underline{W}}$  représente le tenseur des taux de rotations.

## Taux de déformations plastiques

Afin de définir complètement le comportement plastique de notre matériau, il faut définir au préalable la surface de plasticité, le critère de charge/décharge, la loi d'écoulement plastique et la loi d'évolution de la surface de plasticité, c'est à dire la loi d'écrouissage [44].

### Surface de plasticité

Nous supposons une surface de plasticité de type von Mises avec écrouissage isotrope. Elle est décrite par l'équation suivante :

$$f(\tau_{II}^d, A) \equiv \tau_{II}^d - A = 0, \quad (\text{III.28})$$

où  $A$  est la contrainte d'écoulement en traction simple et définit la loi d'écrouissage,  $\tau_{II}^d$  représente la contrainte équivalente. Nous adoptons dans notre travail la loi de Swift qui définit un écrouissage isotrope. Pour cet écrouissage, la valeur de la limite élastique  $A$  ne dépend que d'un seul paramètre interne d'écrouissage. Cet écrouissage a pour effet de faire gonfler uniformément le domaine élastique. Ce paramètre peut être identifié à la déformation plastique cumulée.

$$A = k(\alpha + \bar{\epsilon}^p)^n, \quad (\text{III.29})$$

où  $\bar{\epsilon}^p$  définit la déformation plastique équivalente (ou cumulée) et  $k$ ,  $\alpha$  et  $n$  sont des paramètres dépendants du matériau.

La contrainte équivalente  $\tau_{II}^d$  est définie par :

$$\tau_{II}^d = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{T}}^d} \quad (\text{III.30})$$

où  $\underline{\underline{T}}^d$  représente la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\underline{T}}$ .

### Loi d'écoulement plastique

Lorsque le critère est atteint, le matériau se déforme plastiquement sous l'action du chargement qui lui est imposé. La relation que l'on établit entre le taux de

déformations plastiques  $\underline{\underline{D}}^p$  et l'état de contrainte  $\underline{\underline{\tau}}$  s'appelle la loi d'écoulement. Elle utilise le concept de potentiel plastique. Dans le cas d'une loi associée, le potentiel plastique et la surface de plasticité coïncident et on a :

$$\underline{\underline{D}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\tau}}} \quad (\text{III.31})$$

Nous voyons alors que la direction du taux de déformations plastiques est définie à l'aide de la fonction  $f$ .  $\dot{\lambda}$  est un scalaire positif de proportionnalité qui dépend de l'état de contrainte et de l'histoire de chargement. Avec la définition (III.28) de la surface de plasticité nous obtenons :

$$\underline{\underline{D}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\tau_{II}^d} \underline{\underline{\tau}}^d \quad (\text{III.32})$$

On vérifie facilement que la loi est bien incompressible puisque :

$$\text{trace}(\underline{\underline{D}}^p) = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{\tau_{II}^d} \text{trace}(\underline{\underline{\tau}}^d) = 0 \quad (\text{III.33})$$

Remarquons que le temps peut ici être remplacé par un pseudo temps. En effet, la relation (III.32) étant homogène de degré 1 en temps, un changement de l'échelle des temps n'a aucun effet sur elle. Le temps ne représente qu'un paramètre permettant de caractériser la déformation et non pas le temps physique.

### Critère de charge-décharge

Le comportement plastique pour un matériau écrouissable apparaît lorsque l'état de contrainte sur la limite de la surface de plasticité tente de se déplacer en dehors de cette zone (limite). Dans ce cas la condition de chargement pour la déformation plastique est définie par :

$$f(\tau_{II}^d, A) = 0, \quad \dot{f}(\tau_{II}^d, A) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad (\text{III.34})$$

Le passage d'un état plastique à un état élastique, encore appelé décharge élastique, se traduit par :

$$f(\tau_{II}^d, A) = 0, \quad \dot{f}(\tau_{II}^d, A) \leq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{III.35})$$

La relation discontinue obtenue qui est due à la présence d'un domaine élastique et à la loi d'écoulement, peut être simplement réécrite :

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{f}(\tau_{II}^d, A) \leq 0, \quad \dot{\lambda} \dot{f}(\tau_{II}^d, A) = 0 \quad (\text{III.36})$$

### III.3.4 Bilan des équations

Nous pouvons à présent faire un bilan des équations ainsi que des inconnues du problème. Ainsi les différentes équations sont les suivantes :

$$\int_{\Omega_0} (\underline{\tau} \cdot \underline{f}^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 = \mu \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0,$$

$$\underline{D} = \underline{D}^e + \underline{D}^p,$$

$$\underline{D}^e = \underline{M} : \underline{\tau}^J,$$

$$\underline{\tau}^J = \dot{\underline{\tau}} + \underline{\tau} \cdot \underline{W} - \underline{W} \cdot \underline{\tau},$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{l} + \underline{l}^t),$$

$$\underline{W} = \frac{1}{2}(\underline{l} - \underline{l}^t),$$

$$\underline{l} = \underline{L} \cdot \underline{f},$$

$$\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}},$$

$$\underline{f} \cdot \underline{F} = \underline{I},$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}},$$

$$\underline{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}},$$

$$\underline{\underline{D}}^p = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\tau_{II}^d} \underline{\underline{\tau}}^d,$$

$$f(\tau_{II}^d, A) \equiv \tau_{II}^d - A,$$

$$A = k(\alpha + \bar{\epsilon}^p)^n,$$

$$\tau_{II}^d = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{\tau}}^d : \underline{\underline{\tau}}^d},$$

$$\lambda \geq 0, \quad \dot{f}(\tau_{II}^d, A) \leq 0, \quad \lambda \dot{f}(\tau_{II}^d, A) = 0$$

L'ensemble des variables intervenant dans la formulation est donc :

$$\nabla = \{\mu, \underline{\underline{\tau}}, \underline{\underline{f}}, \underline{\underline{D}}, \underline{\underline{D}}^e, \underline{\underline{D}}^p, \underline{\underline{\tau}}^J, \underline{\underline{W}}, \underline{\underline{L}}, \underline{\underline{l}}, \underline{\underline{f}}, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{x}}, \underline{\underline{v}}, \lambda, \tau_{II}^d, A\}$$

Sous cette forme, nous avons 17 inconnues ; 5 inconnues scalaires, 3 inconnues vectorielles, 5 tenseurs symétriques et 4 tenseurs non symétriques. En 3D cela conduirait à 80 variables scalaires. En contrepartie, nous avons 16 équations scalaires vectorielles ou tensioremelles, ce qui correspond à 70 équations scalaires. Il restera à préciser l'évolution du paramètre de chargement  $\mu$  en fonction du paramètre de Chemin. Pour une question de simplicité, nous n'avons pas éliminé de variable à ce niveau. On peut toutefois signaler que nous ne garderons pas 79 inconnues à chaque ordre et à chaque point de Gauss, ce qui demanderait une capacité considérable de mémoire pour des structures de grandes complexités. Ainsi toutes les variables qui correspondent à des équations linéaires peuvent être éliminées sans difficulté. Après application du développement asymptotique, toutes les équations restantes seront linéarisées, ce qui permettra une condensation en chaque point de Gauss de toutes les variables, qui seront réexprimées en fonction de la vitesse aux noeuds du maillage.

### III.3.5 Application de la M.A.N.

Nous montrons dans ce paragraphe, l'application de la Méthode Asymptotique Numérique sur le problème élastoplastique en transformations finies. Celui-ci

présente à la fois des non-linéarités géométriques (grands déplacements et grandes rotations) et des non linéarités matérielles (comportement élastoplastique). Nous avons présenté au chapitre I l'efficacité de la méthode en présence de ces deux types de non-linéarités, notamment lors de l'étude d'un solide élastoplastique utilisant la théorie des déformations totales [75] et d'un solide viscoplastique [12]. La première étape de la méthode consiste à appliquer une technique de perturbation. Celle-ci consiste à développer les inconnues du problème sous forme de série entière par rapport à un paramètre  $a$  autour d'une solution connue. Nous commençons par développer les inconnues de l'équation (III.24) de la formulation variationnelle puis nous nous occuperons de la loi de comportement. Celle-ci présente des singularités lors du passage de l'état élastique à l'état élastoplastique ou inversement. Une procédure de régularisation est alors nécessaire pour l'application de la technique de perturbation. Elle sera donc développée de la même manière sous forme de série entière. L'introduction de la loi de comportement dans les équations d'équilibre et l'identification par rapport au paramètre  $a$  nous permet de transformer le problème non linéaire en une suite récurrente de problèmes linéaires. La seconde étape consiste à appliquer une technique de discrétisation. Nous avons choisi de discrétiser notre solide par la méthode des éléments finis.

## Technique de perturbation

### Equations d'équilibre

Nous développons les inconnues  $\underline{\tau}$ ,  $\underline{f}$  et  $\mu$  sous forme de séries entières autour d'une solution initiale ( $\underline{\tau}_0$ ,  $\underline{f}_0$  et  $\mu_0$ ) par rapport à un paramètre  $a$  de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \underline{\tau} \\ \underline{f} \\ \mu \end{array} \right\}, = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\tau}_0 \\ \underline{f}_0 \\ \mu_0 \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^p a^i \left\{ \begin{array}{c} \underline{\tau}^{(i)} \\ \underline{f}^{(i)} \\ \mu^{(i)} \end{array} \right\}. \quad (\text{III.37})$$

L'introduction des développements (III.37) dans l'équation (III.23) et l'identification par rapport aux puissances du paramètre  $a$  nous permet d'obtenir à chaque ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 0 : } \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_0 \cdot \underline{f}_0^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 = \mu_0 \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0 \\ \text{Ordre 1 : } \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_1 \cdot \underline{f}_1^t + \underline{\tau}_0 \cdot \underline{f}_1^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 = \mu_1 \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0 \\ \vdots \\ \text{Ordre } i : \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_i \cdot \underline{f}_i^t + \underline{\tau}_0 \cdot \underline{f}_i^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 = \mu_i \int_{\Omega_{F_0}} \underline{F}_0 \cdot \delta \underline{v} dS_0 + \langle \underline{F}_i^{NL}, \delta \underline{v} \rangle \\ \langle \underline{F}_i^{NL}, \delta \underline{v} \rangle = - \int_{\Omega_0} \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\tau}_r \cdot \underline{f}_{i-r}^t d\Omega_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.38})$$

$\underline{F}_i^{NL}$  est un vecteur ne dépendant que des inconnues du problème aux ordres inférieurs à l'ordre  $i$ .

### Remarque

H. Zahrouni a montré dans ses travaux [75] qu'une formulation quadratique des problèmes étudiés est essentielle pour une bonne mise en oeuvre de la méthode. Il présente également une étude originale qui lui a permis de montrer les avantages d'une formulation quadratique par rapport à une formulation cubique, notamment en terme de coût de calcul. En effet, lors d'une formulation quadratique, la technique de perturbation fait intervenir une simple sommation tandis qu'une double sommation apparaît lors d'une formulation cubique. Il est évident qu'une simple sommation entraîne un certain gain de calcul comparativement à une double sommation. Cependant, une formulation quadratique du problème nécessite le stockage de variables supplémentaires, ce qui peut être coûteux en espace mémoire. Nous nous arrangerons donc dans le cadre de notre étude pour obtenir une formulation quadratique. Pour plus de détails concernant les développements de relations quadratiques, se référer à l'annexe B.



## Loi de comportement

### Régularisation et approximation

Comme nous l'avons déjà dit, l'application de la M.A.N. nécessite des dérivées successives de chaque relation. Cependant, la loi élastoplastique présente des discontinuités lorsque le matériau passe d'un état élastique à un état élastoplastique. Les dérivées ne sont pas continues lors de la transition. Ainsi, il est nécessaire de régulariser cette loi afin d'obtenir des développements asymptotiques. Il convient donc de régulariser l'équation (III.32) de la même manière que dans [63] et [12], par exemple en redéfinissant  $\tau_{II}^d$  comme suit :

$$\tau_{II}^d = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{T}}^d : \underline{\underline{T}}^d + \eta_R^2 A_R^2} \quad (\text{III.39})$$

où  $\eta_R$  est un petit paramètre et  $A_R$  est une valeur de référence qui a la dimension d'une contrainte. Des travaux antérieurs ont montré que le paramètre de régulation  $\eta_R$  peut être choisi en conservant une efficacité numérique suffisante sans changement significatif de la loi constitutive.

Nous avons également une autre difficulté, due elle, à la présence d'équations différentielles et à l'exigence de rechercher des courbes réponses indépendantes du temps. Dans des travaux précédents qui abordaient l'étude des corps rigides viscoplastiques, (voir chap.I ou pour plus de détails voir [12]), des développements par rapport au temps ont été considérés. Ici nous proposons d'utiliser des développements par rapport à un paramètre arbitraire et nous choisissons le paramètre de longueur d'arc  $a$ . Il s'est montré très efficace dans de nombreux problèmes physiques. Bien évidemment, ce choix ne peut être possible que lors de l'étude de matériaux élastoplastiques indépendants du temps.

Enfin, un traitement spécifique est nécessaire pour l'équation (III.36). Nous proposons tout d'abord d'intégrer et d'approximer cette équation de la manière suivante:

$$\lambda \geq 0, \quad f(\tau_{II}^d) \leq 0 \quad \text{soit} \quad \lambda \cdot f(\tau_{II}^d) = 0 \quad (\text{III.40})$$

Ceci nous impose de négliger une possible décharge élastique durant le pas de calcul, cependant une plastification durant le pas est prise en compte. Nous régularisons ensuite cette dernière équation de la même manière que précédemment:

$$\lambda \cdot f(\tau_{II}^d) = \eta f_{init} \quad (III.41)$$

où  $f_{init}$  est la valeur initiale de  $f$  au début du procédé, et  $\eta$  est un petit paramètre de régularisation.

Remarque:

L'idée de cette approximation et de cette régularisation est de remplacer le modèle plastique par une sorte de théorie de déformations totales qui ne serait valide que dans le pas courant. Ceci nous permet alors d'utiliser le même type d'algorithme que H. Zahrouni [75]. Malheureusement, cette approximation n'autorise pas de décharge élastique durant le pas. Il aurait été possible d'introduire une régularisation de la relation (III.36) entre les quantités  $\dot{\lambda}$  et  $f(\tau_{II}^d, A)$ , mais le modèle régularisé correspondant n'aurait pas été indépendant du temps. Nous verrons plus en détail ce cas de figure dans le paragraphe suivant lorsque nous étudierons le modèle élastoplastique de Simo.

**Développements asymptotiques des variables**

Nous appliquons une fois de plus la même procédure, nous développons chaque inconnue sous forme de séries entières et nous les substituons dans les équations. Une identification par rapport aux puissances du paramètre  $a$  nous permet d'obtenir la loi de comportement aux ordres 0 et  $i$ :

$$\begin{cases} \text{Ordre } 0 : \underline{\underline{D}}_0 = \underline{\underline{M}}^{ep} : \underline{\underline{\tau}}_0^J \\ \text{Ordre } i : \underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{M}}^{ep} : \underline{\underline{\tau}}_i^J + \underline{\underline{D}}_i^{res} \end{cases} \quad (III.42)$$

où  $\underline{\underline{M}}^{ep}$  est la matrice standard de souplesse élastoplastique et  $\underline{\underline{D}}_i^{res}$  est un vecteur ne dépendant que des variables aux ordres précédents.

Plus de détails sur l'obtention de ces relations sont fournis dans les annexes C.1 et C.2.

### Problème perturbé

Les équations (III.24) et (III.42) qui représentent respectivement l'équilibre et le comportement à chaque ordre forment notre problème élastoplastique. Ainsi, en tenant compte de la définition de la dérivée de Jaumann, l'introduction de (III.42) dans (III.24) nous permet d'obtenir par exemple à l'ordre  $i$ :

$$\int (\underline{\underline{H}} : \underline{\underline{L}}_{i-1}) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = i \int_{S_0} \mu_i \underline{\underline{t}}_0 \delta \underline{\underline{v}} dS_0 + \langle \underline{\underline{F}}_i^{NL*}, \delta \underline{\underline{v}} \rangle \quad (\text{III.43})$$

où  $\underline{\underline{H}}$  est l'opérateur classique de rigidité tangente tel qu'il est défini dans [65] et [26],  $\underline{\underline{F}}_i^{NL*}$  est un vecteur qui contient le vecteur  $F_i^{NL}$  et des termes provenant de la loi de comportement. Ce second membre dépend uniquement des variables provenant d'ordres précédant l'ordre  $i$ . On trouvera une définition du vecteur  $\underline{\underline{F}}_i^{NL}$  dans l'annexe C.3.

### Méthode des éléments finis

Pour la mise en oeuvre de la méthode des éléments finis, nous effectuons une discrétisation spatiale. Le domaine sur lequel est recherchée la solution est discrétisé spatialement de manière approchée par un maillage d'éléments finis, caractérisés par la position des noeuds. Ce maillage réalise une partition du domaine.

En grandes déformations, le maillage peut être fortement distordu, l'élément fini utilisé doit être apte à subir de grands changements de forme sans que les résultats (contraintes, déformations) en soient altérés [52].

Dans le domaine élastoplastique, nous devons donc tenir compte de deux phénomènes importants, à savoir, l'incompressibilité de la matière et le blocage ou verrouillage numérique.

Pour une étude en contraintes planes de notre problème, l'élément isoparamétrique à 8 noeuds "Serendip" avec une intégration réduite ( $2 * 2$ ) points de gauss (sous

intégration) donne toute satisfaction, il est souvent cité dans la littérature [77].

L'approximation nodale pour la vitesse  $\underline{v}$  d'un point  $M$  de l'élément s'écrit:

$$\underline{v} = [N]\underline{v}_N \quad (\text{III.44})$$

où  $[N]$  est une matrice contenant les fonctions d'interpolation et  $\underline{v}_N$  est le vecteur vitesse nodal de l'élément.

L'accroissement virtuel des vitesses est donné sur chaque élément par la même interpolation:

$$\delta\underline{v} = [N]\delta\underline{v}_N \quad (\text{III.45})$$

On en déduit avec la formule:

$$\underline{L} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{X}} \quad (\text{III.46})$$

que

$$\underline{L} = [B]\underline{v}_N \quad (\text{III.47})$$

Les composantes de la matrice  $[B]$  sont fonctions des dérivées partielles des fonctions d'interpolation.

En introduisant les interpolations dans le problème à résoudre (III.43) et en effectuant l'opération d'assemblage des matrices et des vecteurs, nous obtenons le système suivant:

$$[K_t]\{\underline{v}_{Ni-1}\}_g = \{\underline{F}_i^{ext}\} + \{\underline{F}_i^{NL*}\}, \quad (\text{III.48})$$

où  $\{\underline{v}_{Ni-1}\}_g$  représente le vecteur assemblé des inconnues nodales.  $[K_t]$  représente la matrice de rigidité tangente assemblée, elle ne dépend que des variables à l'ordre 0 et est définie par :

$$[K_t] = \sum_{ele} \int_{\Omega_0^e} [B]^t [H] [B] d\Omega_0^e. \quad (\text{III.49})$$

Les intégrales sont calculées par la méthode de Gauss. Les vecteurs  $\{\underline{F}_i^{ext}\}$  et  $\{\underline{F}_i^{NL*}\}$  sont également globaux et représentent respectivement les efforts extérieurs et un vecteur ne dépendant que des inconnues aux ordres précédents.

### Détermination de la solution

A chaque ordre  $i$ , le vecteur vitesse  $\{v_{N_{i-1}}\}_g$  est solution du problème linéaire (III.48), où le second membre ne dépend que des inconnues calculées aux ordres précédents. Le problème non linéaire a donc été transformé en une suite récurrente de problèmes linéaires. Ainsi, nous ne résolvons plus un problème non linéaire mais, plusieurs problèmes linéaires. Cette linéarité permet une résolution très facile. Une propriété essentielle de la technique de perturbation est l'unicité de l'opérateur tangent quelque soit l'ordre considéré. Cette propriété permet de le construire et de le trianguler une seule fois, ce qui est évidemment avantageux en terme de temps de calcul. Cependant à chaque ordre, les seconds membres sont différents et doivent être calculés à partir des inconnues déterminées aux ordres précédents.

### III.3.6 Résultats numériques et discussion

Nous présentons dans ce paragraphe quelques simulations numériques de problèmes simples. Avant de montrer les résultats obtenus pour le comportement élastoplastique, nous allons tenter de montrer que notre loi de comportement permet une bonne prise en compte des grandes rotations. Pour ce faire, nous présentons l'étude d'une plaque élastique en flexion pour le cas des contraintes planes. Elle sera discrétisée à l'aide de deux éléments quadratiques à huit noeuds et soumise à une charge verticale. Les caractéristiques mécaniques et les dimensions de la plaque sont représentées sur la figure (III.6).

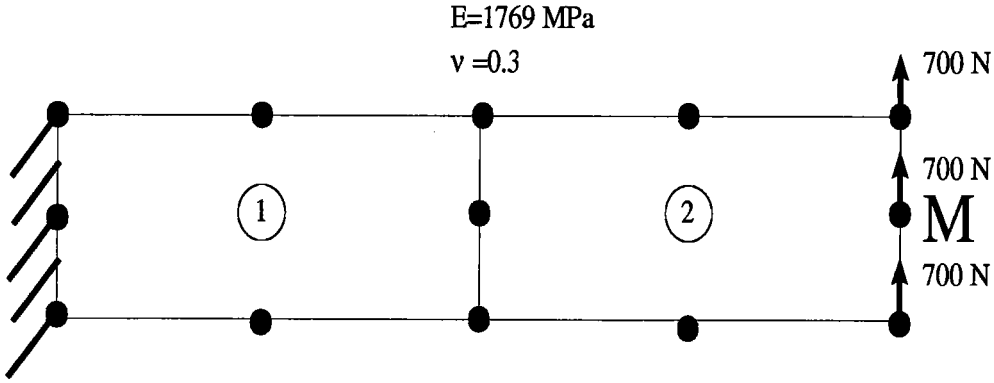


FIG. III.1 - Plaque de longueur  $L=10\text{mm}$ , de largeur  $l=1\text{mm}$  et d'épaisseur  $e=1\text{mm}$  encastrée et soumise à de la flexion.

Nous allons d'abord étudier cette plaque à l'aide de deux modèles élastiques :

- Pour le premier modèle, la loi de comportement relie la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Kirchhoff au taux de déformations élastiques. En fait, ce modèle s'obtient simplement à partir du modèle élastoplastique que nous venons de présenter en prenant  $\eta = 0$  dans l'équation (III.41). L'affectation de la valeur nulle au paramètre  $\eta$  entraîne l'annulation du taux de déformation plastique. Nous utiliserons pour ce problème une formulation lagrangienne actualisée. Ainsi, le problème peut s'écrire :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{f}}^t) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = \mu \int_{S_0} \underline{\underline{F}}_0 \cdot \delta \underline{\underline{v}} dS_0 \\ \underline{\underline{\tau}}^J = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{D}}, \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

$\underline{\underline{C}}$  représente le tenseur de rigidité du quatrième ordre.

- Pour le second modèle, la loi de comportement utilisée relie le second tenseur des contraintes de Piola Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  au tenseur des déformations de Green Lagrange  $\underline{\underline{\gamma}}$ . L'utilisation d'un schéma lagrangien actualisé sera également effectué. On écrit alors le problème de la manière suivante:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{f}}^t) : \delta \underline{\underline{L}} d\Omega_0 = \mu \int_{S_0} \underline{\underline{F}}_0 \cdot \delta \underline{\underline{v}} dS_0 \\ \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\gamma}} \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

On rappelle qu'une relation simple liant le tenseur de Kirchhoff et le tenseur de

Piola Kirchhoff de second espèce est la suivante :

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{f}}^t = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \quad (\text{III.52})$$

Pour ce second modèle, beaucoup de travaux antérieurs [19] ont été effectués avec l'utilisation d'un schéma lagrangien total. Le problème à résoudre a été formulé à l'aide des équations suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\Omega_0} \{ \underline{\underline{S}} : \delta \underline{\underline{\gamma}} + \delta \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{\gamma}} - \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{C}}^{-1} : \delta \underline{\underline{S}} \} d\Omega_0 - \int_{S_0} \mu \underline{\underline{F}}_0 \delta \underline{\underline{u}} dS \\ \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\gamma}}, \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

où  $\delta \underline{\underline{u}}$  représente le déplacement virtuel. Les résultats obtenus avec ce modèle constitueront une base de référence pour notre étude.

La résolution des problèmes (III.50), (III.51) et (III.53), se fait à l'aide de la Méthode asymptotique. La figure (III.2) montre les résultats pour un pas de calcul avec l'utilisation d'une approximation polynômiale tronquée à l'ordre 20. Elle présente le chargement en fonction du déplacement vertical au point M. On constate naturellement que les trois formulations entraînent des résultats similaires. La figure (III.3) qui représente la qualité de la solution montre même que pour un résidu admissible de  $10^{-3}$ , la longueur du pas est plus grande avec les formulations (III.50) et (III.51). Au niveau de ce premier pas, il n'y a donc aucune différence visible entre les deux lois de comportement élastiques (III.50) et (III.51). Notons qu'à la fin du pas la flèche est déjà importante (50% de la longueur de la poutre). Cela montre la capacité de la loi avec la dérivée de Jaumann à prendre en compte de grandes rotations élastiques. On redécouvre aussi ici la capacité de la M.A.N. à effectuer de très grands pas de calcul en grandes transformations élastiques. En revanche, on observe une légère différence de longueur de pas selon la procédure adoptée pour la discrétisation de l'équation d'équilibre : expression (III.51) utilisant les tenseurs eulériens  $\underline{\underline{\tau}}$ ,  $\underline{\underline{D}}$  etc, ou expression (III.53) totalement lagrangienne. En tous cas, l'introduction des tenseurs eulériens n'a pas de conséquence sur la longueur, bien au contraire.

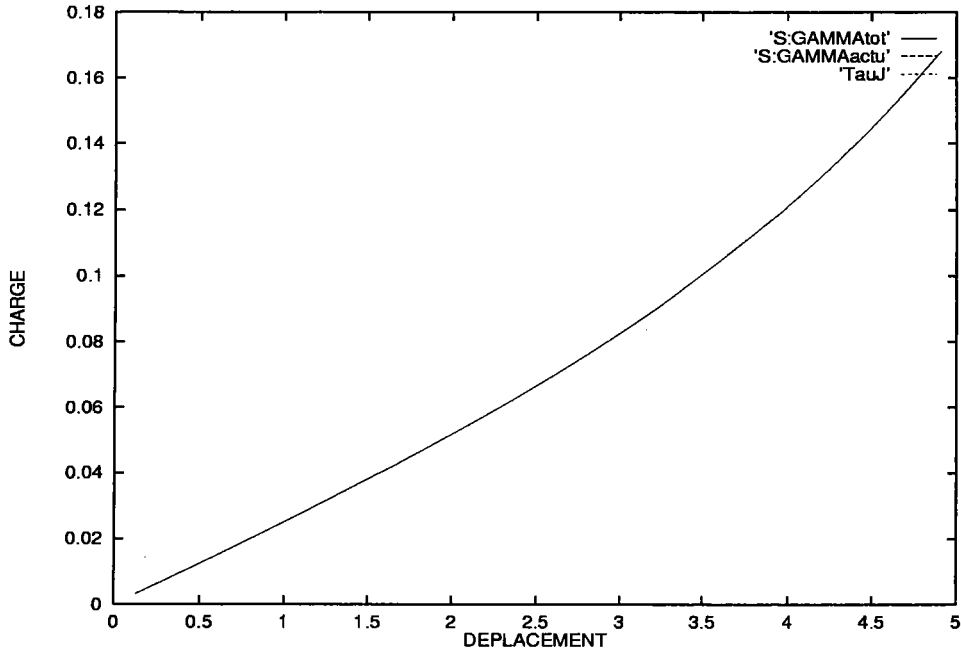


FIG. III.2 – Courbe chargement/déplacement du point M pour les trois formulations élastiques.

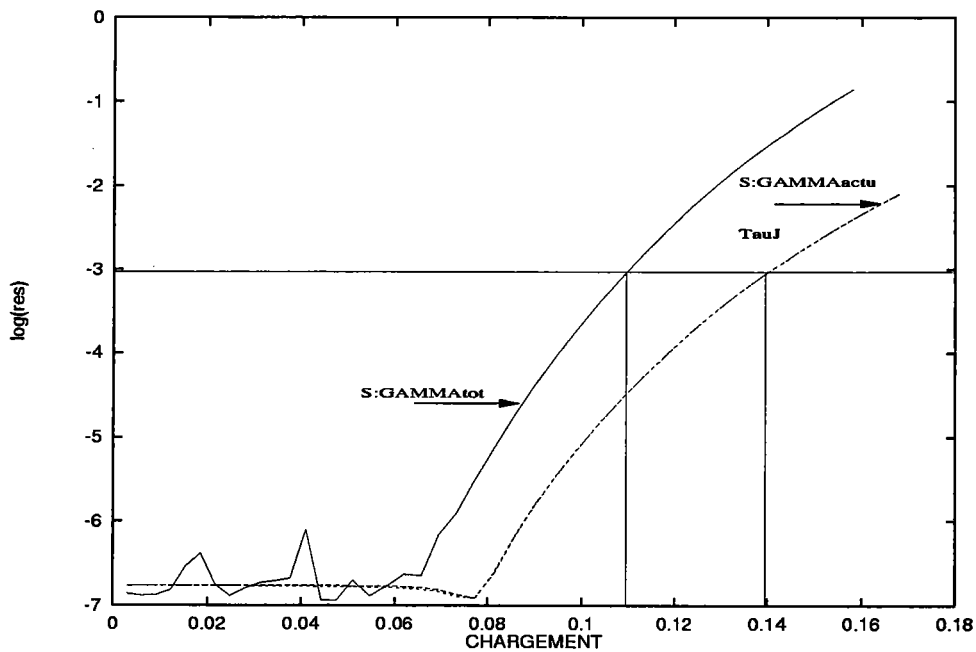


FIG. III.3 – Logarithme du résidu pour les trois formulations élastiques : (III.50) nommée TJ, (III.51) nommée S:GAMMAactu et (III.53) nommée S:GAMMAatot.

La figure (III.4) nous montre la courbe complète, obtenue avec le principe de continuation présenté au chapitre I. Nous avons choisi  $\epsilon = 10^{-8}$  (paramètre définissant



le paramètre de continuation  $\alpha$  de l'équation (I.25)). On constate que la courbe représentant la formulation (III.50) (avec la dérivée de Jaumann) ne correspond pas aux courbes représentant les formulations (III.51) et (III.53). Ceci est dû en fait à la valeur affectée au paramètre  $\epsilon$ .

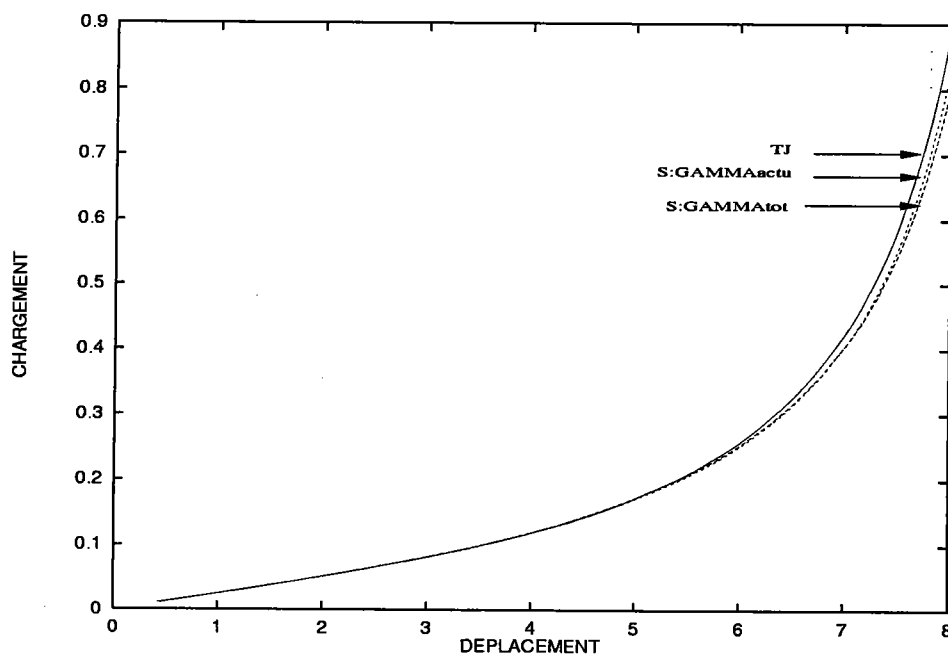


FIG. III.4 – Comparaison des courbes chargement/déplacement représentant les trois formulations (III.50) nommée TJ, (III.51) nommée S:GAMMAactu et (III.53) nommée S:GAMMAtot pour  $\epsilon = 10^{-8}$ .

Si on observe la figure (III.5) qui présente une comparaison entre la formulation (III.50) pour différentes valeurs du paramètre  $\epsilon$  et la formulation (III.53) pour  $\epsilon = 10^{-8}$ . On constate alors que pour  $\epsilon = 10^{-20}$ , la formulation (III.50) paraît donner les mêmes résultats que la formulation (III.53). Une étude comparative de la qualité de la solution n'a pu être effectuée car nous ne sommes pas capables actuellement d'obtenir une qualité satisfaisante (norme du vecteur résidu inférieur à  $10^{-3}$ ) avec la formulation (III.50). Un saut au niveau de la norme du vecteur résidu se produit après le premier pas. Nous supposons actuellement que celui ci est dû à l'actualisation

de la géométrie. Nous définissons le vecteur résidu de la manière suivante :

$$[R(\underline{v}, \mu)] = \int_{\Omega_0} [B]^t [Y] [B] d\Omega_0 - \mu [F], \quad (\text{III.54})$$

où  $[Y]$  est le résultat du produit  $[\tau] \cdot [f^t]$  mis sous forme de vecteur et  $[B]$  est la matrice qui relie classiquement les variations  $[\delta L]$  et  $[\delta v]$ .

L'obtention d'un vecteur résidu acceptable lors de la procédure de continuation n'est possible que pour des valeurs très petites du paramètre  $\epsilon$  ( $10^{-50}$  voire  $10^{-60}$ ) ce qui n'a pas réellement de signification si on prend en considération la précision de l'ordinateur.

Si on considère uniquement la courbe représentant le chargement en fonction du déplacement, on constate que pour  $\epsilon = 10^{-20}$ , on obtient des résultats similaires (figure III.4). Malheureusement, l'utilisation d'un paramètre aussi petit entraîne une diminution de la longueur de pas. L'obtention totale de la courbe se fera donc avec un nombre de pas plus important. On peut noter ici qu'un paramètre  $\epsilon = 10^{-3}$  est suffisant pour obtenir toute la courbe solution avec la formulation lagrangienne totale (III.53). Nous pouvons en conclure à l'aide de cet exemple, qu'une formulation lagrangienne actualisée entraîne une diminution de la longueur de pas. De plus, l'utilisation d'une loi élastique telle qu'elle est formulée dans (III.50) ne permet pas d'obtenir des longueurs de pas aussi grandes qu'à l'aide de la formulation (III.51). On pourrait penser ici que la discrétisation de la structure à l'aide de deux éléments peut entraîner des difficultés lors de l'actualisation de la géométrie. Cependant, le même exemple a été traité pour différents maillages (40 éléments et 80 éléments), mais aucun changement notable n'a pu être constaté en ce qui concerne la longueur des pas.

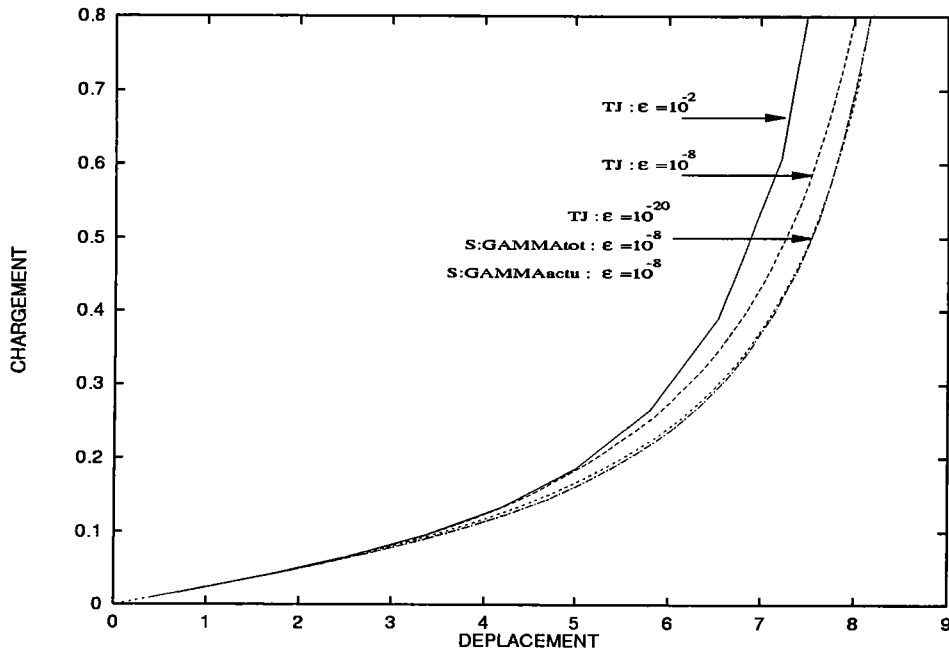


FIG. III.5 - Comparaison des courbes chargement/déplacement de la formulation (III.50) nommée TJ pour différentes valeurs de  $\epsilon$  avec les formulations (III.51) nommée S:GAMMA<sub>actu</sub> et (III.53) nommée S:GAMMA<sub>tot</sub> pour  $\epsilon = 10^{-8}$ .

Nous traitons à présent le même exemple, mais nous considérons à présent un matériau élastoplastique. Nous mettons ainsi en application la M.A.N. à la formulation élastoplastique de F. Sidoroff. Les propriétés mécaniques du matériau sont les suivantes: Module de Young:  $E = 176400 \text{ MPa}$ , coefficient de Poisson:  $\eta = 0.3$ , limite d'élasticité:  $A_0 = 178.47 \text{ MPa}$ . En ce qui concerne la loi de Swift  $A = k(\alpha + \bar{\epsilon}^p)^n$  qui définit notre écrouissage isotrope, nous avons:  $k = 515.0 \text{ MPa}$ ,  $\alpha = 0.008269$  et  $n = 0.2210$ .

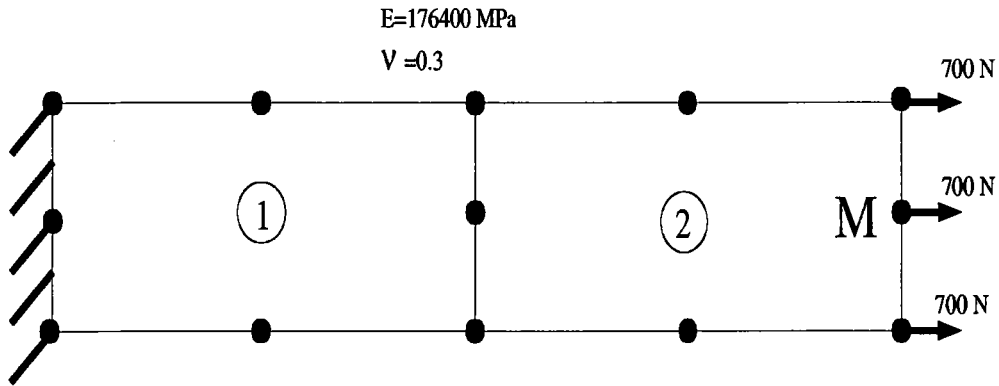


FIG. III.6 – Plaque de longueur  $L=10\text{mm}$ , de largeur  $l=1\text{mm}$  et d'épaisseur  $e=1\text{mm}$  encastrée et soumise à de la traction.

Nous comparons les résultats obtenus par la M.A.N. avec ceux obtenus par un code de calcul (ABAQUS [1]). Ce dernier utilise, pour résoudre le problème élastoplastique, une méthode itérative très populaire (Méthode de Newton- Raphson). On présente sur la figure (III.4) la contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente. Nous avons fixé pour les paramètres  $\eta_R = 0.1$  et  $A_R = 1$  ( $\eta_R A_R = 0.1$ ) pour la contrainte équivalente régularisée. Nous avons fait varier le paramètre  $\eta$  de l'équation (III.41). Comme nous le prévoyions, plus le paramètre  $\eta$  est petit, plus on se rapproche de la solution de référence (ABAQUS). Cependant, alors qu'une dizaine de pas est nécessaire pour obtenir 11% de déformation avec le code de calcul ABAQUS, plus de 200 pas ont été effectués par la M.A.N.. En fait, à partir d'une certaine valeur, les longueurs de pas deviennent si petites que l'évolution de la déformation n'est plus visible. De plus, plus  $\eta$  est petit, plus cette valeur limite où on n'observe pratiquement plus d'évolution est petite. On peut noter ici qu'un choix de  $\eta > 0.5$  est inutile car il entraîne une déformation plastique équivalente initiale de 5%, ce qui est déjà considérable.

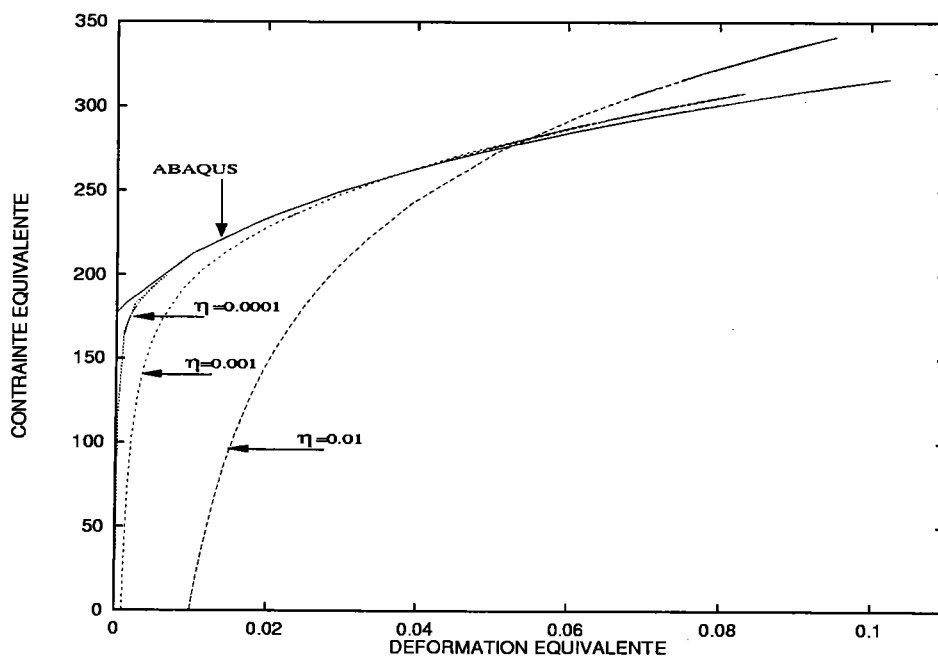


FIG. III.7 – Comparaison des courbes Contrainte équivalente / Déformation équivalente obtenues par la M.A.N. pour différentes valeurs de  $\eta$  avec la solution représentative obtenue par ABAQUS.

La figure (III.8) nous montre des courbes représentant la contrainte équivalente en fonction de la déformation équivalente obtenue pour différentes valeurs du produit  $\eta_R A_R$  et pour une valeur fixée du paramètre  $\eta$ . On constate une légère augmentation de la longueur de pas avec l'accroissement de ce produit. On observe également un décalage des courbes sur l'axe représentant les contraintes équivalentes. Ceci était prévisible puisque le produit  $\eta_R A_R$  définit la contrainte équivalente initiale. On évitera de prendre ce produit inférieur à la limite d'élasticité pour démarrer le processus avec un état élastique.

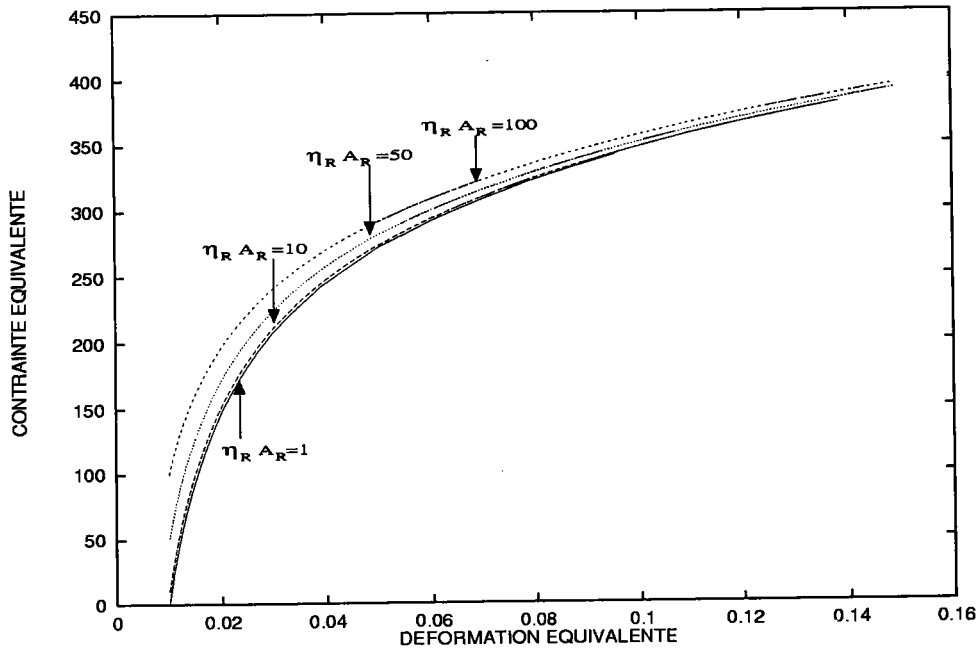


FIG. III.8 - Comparaison des courbes Contraintes équivalente / Déformation équivalente obtenues par la M.A.N. pour  $\eta = 0.01$  et différentes valeurs du produit  $\eta_R A_R$ .

Nous venons d'introduire une nouvelle formulation de la M.A.N. en vue de son application à des lois de comportement élastoplastiques en grandes transformations. Cette formulation apporte plusieurs innovations par rapport aux travaux antérieurs.

1. Elle implique des grandeurs eulériennes (le tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$ , le taux de déformation  $\underline{\underline{D}}$ ), alors que la plupart des prédécesseurs ont préféré les tenseurs lagrangiens. La seule exception est le travail de J. Brunelot en viscoplasticité (voir aussi le chapitre I).
2. La partie élastique de la loi est écrite sous forme incrémentale  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\tau}}^J$ .
3. Une loi élastoplastique en grandes transformations est prise en compte.
4. Une approximation spécifique a été faite qui revient à adopter pour chaque pas et en chaque point une loi régularisée négligeant la décharge élastique.

Les tests utilisés en élasticité montrent que le premier point ne semble pas introduire de difficulté particulière. En effet, avec une même loi de comportement, nous obtenons les mêmes résultats pour le premier pas avec les 2 formulations (flèche jus-

qu'à une demie longueur). Au delà, c'est à dire avec de grandes rotations, les résultats restent très voisins.

En revanche, la loi élastique  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\tau}}^J$  réduit la longueur des pas à partir du second pas. Est-ce dû à l'actualisation de la configuration de référence? Ou à une inadaptation de cette loi en grandes rotations? Ou encore à un problème dans la définition du vecteur résidu qui nous aurait conduit à choisir un paramètre de contrôle  $\epsilon$  inutilement petit? Nous n'avons pu répondre à ces interrogations avec certitude.

En élastoplasticité, nous avons rencontré une difficulté plus grave, qui remet en question la technique de continuation. Cela signifie que nous n'avons pas réussi à établir un algorithme efficace. Est-ce dû à un choix inadapté des techniques de régularisations (III.39) et (III.41)? Peut-être, mais on se doit de constater qu'elle ne diffère guère de ce qui avait été introduit dans des cas similaires et qui a été rappelé au chapitre I. Rappelons que A. Tri [72] avait rencontré ce même problème d'accumulation de pas en mécanique des fluides visqueux. Difficulté qui, à ce jour, n'a pas reçu d'explication parfaitement établie. Toutefois, un autre logiciel, basé sur un autre type de discrétisation, avait pu donner d'excellents résultats [14]. Il est donc probable qu'on puisse un jour obtenir un algorithme M.A.N. efficace pour résoudre les problèmes élastoplastiques en transformations finies, sans modifier fortement les hypothèses faites ici.

Nous allons maintenant reprendre la démarche précédemment décrite à un autre modèle élastoplastique un peu plus général, qui a été formulé par J.C. Simo [68],[69]. Toutefois, du point de vue des applications à la mise en forme des matériaux, il ne diffère pas fondamentalement du précédent.

La première idée consiste à utiliser une loi hyperélastique au lieu d'une loi incrémentale hypoélastique pour ce qui concerne la partie élastique de la déformation. Comme il est classique [43], [71], on suppose qu'il existe une configuration intermédiaire relâchée et on fait une décomposition multiplicative du tenseur gradient de la déformation en une partie élastique et une partie plastique. Ainsi il est possible de traiter des

grandes déformations élastiques avec ce modèle. Mais cette possibilité ne conduit pas à beaucoup d'applications nouvelles pour la plupart des matériaux.

Lors de son séjour à l'université de Berkley en 1998-1999, H. L. Cao avait réalisé un logiciel basé sur la M.A.N. appliquée à ce modèle de J.C. Simo. Après ce séjour, il a quitté le domaine de la recherche et le logiciel s'est avéré difficile à utiliser en l'absence de son concepteur, c'est pourquoi, nous ne présenterons ici que les résultats théoriques.

### **III.4 Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de J.C. SIMO**

La formulation élastoplastique utilisée ici dans le contexte des grandes déformations est basée sur une loi hyperélastique et permet de prendre en compte l'écouissage isotrope. Le modèle élastoplastique est caractérisé par la donnée d'une densité de déformation qui se décompose en une partie élastique et une partie plastique. Pour le cas plastique, nous nous limitons au cas de la plasticité associée avec un critère de von Mises et un écouissage isotrope. La description du modèle est faite en introduisant classiquement une configuration intermédiaire relâchée qui conduit à une décomposition multiplicative du tenseur gradient de la déformation en une partie élastique et une partie plastique. Dans cette section, nous commençons par présenter les équations d'équilibre ainsi que les conditions aux limites de notre problème. Nous exposerons ensuite la loi élastoplastique adoptée pour représenter le comportement de notre matériau ainsi que les modifications à lui apporter pour permettre des développements asymptotiques.

Ensuite, une formulation variationnelle de notre problème sera exposée et enfin, nous appliquerons la méthode asymptotique à notre problème.



### III.4.1 Equations d'équilibre et conditions aux limites

Pour notre étude, nous négligeons les forces de volume. Ainsi, les équations d'équilibre d'un solide occupant un domaine  $\Omega^0$ , dans sa configuration de référence, ayant pour contour la surface  $\partial\Omega^0$  peuvent être exprimées par:

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{X}} = 0 \quad \text{dans } \Omega^0 \quad (\text{III.55})$$

$$\underline{u} = \underline{u}^d \text{ sur } \partial\Omega^0_u, \quad \underline{T} \cdot \underline{N} = \mu \underline{F} \text{ sur } \partial\Omega^0_T$$

où  $\partial\Omega^0_u \cup \partial\Omega^0_T = \partial\Omega^0$  et  $\partial\Omega^0_u \cap \partial\Omega^0_T = \emptyset$ .  $\underline{u}$  et  $\underline{T}$  représentent respectivement le déplacement et le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhof.

$\underline{u}^d$  est le champ de déplacement donné sur le bord  $\partial\Omega^0_u$  et  $\underline{F}$  représente les efforts de surface donnés sur la partie  $\partial\Omega_T$  avec  $\mu$  un paramètre de chargement qui dépend du temps ou d'un pseudo temps.

Finalement,  $\underline{N}$  est la normale extérieure à la surface  $\partial\Omega^0_T$  et  $\underline{X}$  désigne les coordonnées des points matériels dans la configuration de référence.

### III.4.2 Loi élastoplastique

Nous utilisons ici une loi élastoplastique telle qu'elle a été présentée par J.C SIMO [68]. Elle est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation proposée par J. C. Lee et D. T. Lu [42], J. C. Lee [43] et d'autres.

Dans notre travail, on adopte une loi hyperélastique néo-Hookéenne conjointement avec un critère de Von Mises et une loi d'érouissage isotrope. De plus, notre matériau est supposé suivre le principe de dissipation plastique maximale, ce qui mène à une loi d'écoulement associée.

#### Energie de déformation

Un matériau hyperélastique est caractérisé par l'existence d'une énergie potentielle  $W(\underline{C}, \underline{C}^p)$ , de laquelle on peut déduire le second tenseur des contraintes de

Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$ , de la manière suivante:

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = 2 \frac{\partial W(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p)}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (\text{III.56})$$

où  $\underline{\underline{C}}$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green gauche et  $\underline{\underline{C}}^p$  est la partie plastique de  $\underline{\underline{C}}$ . On définit  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{C}}^p$  par :

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{C}}^p = \underline{\underline{F}}^{pt} \underline{\underline{F}}^p \quad (\text{III.57})$$

Le gradient de la transformation peut être décomposé en une partie élastique  $\underline{\underline{F}}^e$  et en une autre plastique  $\underline{\underline{F}}^p$  comme suit :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^e \cdot \underline{\underline{F}}^p \quad (\text{III.58})$$

Supposons à présent que l'énergie de déformation par unité de volume de notre matériau soit donnée par l'expression suivante :

$$W(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = \frac{1}{2} K (J^2 - 1) + \frac{1}{2} \beta (J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}}^{p-1} - 3), \quad (\text{III.59})$$

où  $K$  et  $\beta$  sont les modules de compression hydrostatique et de cisaillement.

D'après cette définition de l'énergie et l'équation (III.56), on exprime la loi de comportement élastique en fonction du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff :

$$\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = J P \underline{\underline{C}}^{-1} + \underline{\underline{S}}^D \quad (\text{III.60})$$

avec,  $P=KJ$  et :

$$\underline{\underline{S}}^D = \beta J^{-\frac{2}{3}} (\underline{\underline{C}}^{p-1} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}}^{p-1}) \underline{\underline{C}}^{-1}), \quad (\text{III.61})$$

où  $P$  est la pression hydrostatique et  $J$  le déterminant de  $\underline{\underline{F}}$  ( $J = \det(\underline{\underline{F}})$ ).  $\underline{\underline{S}}^D$  peut être considéré comme la partie déviatorique du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$ , car la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\underline{\tau}}$  peut être obtenue par :

$$\underline{\underline{\tau}} = P J \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\tau}}^D = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{F}}^t, \quad \underline{\underline{\tau}}^D = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}}^D \cdot \underline{\underline{F}}^t \quad (\text{III.62})$$

Ici,  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur unité.

## Surface de plasticité

Notre surface de plasticité est définie par le critère de von Mises combiné à une loi d'écoulement isotrope de la manière suivante :

$$f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = \bar{\tau} - A \quad (\text{III.63})$$

avec la contrainte équivalente  $\bar{\tau}$  définie comme suit :

$$\bar{\tau} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{T}}^D : \underline{\underline{T}}^D} \quad (\text{III.64})$$

et la contrainte de limite élastique  $A$  comme suit :

$$A = k(\alpha + \bar{\epsilon}^p)^n \quad (\text{III.65})$$

Les paramètres  $k$ ,  $\alpha$  et  $n$  sont des constantes définissant le matériau et  $\bar{\epsilon}^p$  est la déformation plastique cumulée.

En utilisant la loi hyperélastique (III.60) à (III.62), nous pouvons également exprimer la surface de plasticité (III.63) dans l'espace des déformations :

$$f = \beta J^{-\frac{2}{3}} \sqrt{(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{p-1}) : (\underline{\underline{C}}^{p-1} \cdot \underline{\underline{C}}) - \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{p-1})^2} - A, \quad (\text{III.66})$$

## Loi d'écoulement

Pour une réponse élastique, la dérivée par rapport au temps du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  s'exprime comme suit :

$$\underline{\underline{\dot{S}}} = 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{\underline{C}} \cdot \partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\dot{C}}} \quad (\text{III.67})$$

Pour une réponse plastique,  $\underline{\underline{S}}$  devient :

$$\underline{\underline{\dot{S}}} = 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{\underline{C}} \cdot \partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\dot{C}}} + \underline{\underline{\dot{S}}}^p, \quad (\text{III.68})$$

où  $\underline{\underline{\dot{S}}}^p$  est décrit par la loi d'écoulement associée :

$$\underline{\underline{\dot{S}}}^p = 2 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \underline{\underline{C}} \cdot \partial \underline{\underline{C}}^{p-1}} : \underline{\underline{\dot{C}}}^{p-1} = -2\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (\text{III.69})$$

En utilisant la dérivée partielle par rapport au temps de l'équation (III.60) relativement à  $\underline{\underline{\dot{C}}}^{p-1}$ , l'équation (III.69) devient :

$$\beta J^{-\frac{2}{3}} [\underline{\underline{\dot{C}}}^{p-1} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\dot{C}}}^{p-1}) \underline{\underline{C}}^{-1}] = -2\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (\text{III.70})$$

On définit la déformation plastique cumulée par l'équation suivante :

$$\bar{\epsilon}^p = \bar{\epsilon}_0^p + \int_0^t \dot{\lambda} dt, \quad (\text{III.71})$$

où  $\bar{\epsilon}_0^p$  est la valeur initiale de la déformation plastique à l'instant  $t_0$  du début du pas. Le paramètre plastique  $\dot{\lambda}$  peut être calculé à partir de la condition de consistance  $\dot{f}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = 0$ , qui s'exprime par :

$$\dot{f}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\dot{C}}} + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}^{p-1}} : \underline{\underline{\dot{C}}}^{p-1} - \frac{\partial A}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{III.72})$$

Et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{\beta J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}}^{p-1}}{2\bar{\tau}} \underline{\underline{S}}^D + \frac{3}{2\bar{\tau}} \underline{\underline{S}}^D \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{S}}^D - \frac{1}{3\bar{\tau}} \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (\text{III.73})$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}^{p-1}} = \frac{3\beta J^{-\frac{2}{3}}}{2\bar{\tau}} \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{S}}^D \cdot \underline{\underline{C}} \quad (\text{III.74})$$

En introduisant les équations (III.69) et (III.74) dans l'équation (III.72), on obtient :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\dot{C}}}}{\frac{\partial A}{\partial \bar{\epsilon}} + \frac{2}{\bar{\tau}} (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{S}}^D \cdot \underline{\underline{C}}) : \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{C}}}} \quad (\text{III.75})$$

Afin de déterminer le tenseur des dilatations plastiques  $\underline{\underline{C}}^p$ , une relation supplémentaire doit être ajoutée à cause du caractère déviatorique de la surface de plasticité (III.66).

Comme ceci a été indiqué par J.C. Simo [68], on suppose que :

$$\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}}^{p-1} = 0 \quad (\text{III.76})$$

### Critère de charge / décharge

En quelques mots, si le matériau a une réponse élastique, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{S}}$  sera donné par la relation (III.60) et sa dérivée par rapport au temps par la relation (III.67). De plus on a :

$$\dot{\lambda} = 0 \quad f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) < 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = 0 \quad (\text{III.77})$$

Si le matériau a une réponse élastoplastique,  $\underline{\underline{S}}$  sera également donné par la relation (III.60) mais sa dérivée par rapport au temps sera calculée à l'aide de l'équation (III.68). De plus,  $\dot{\lambda}$  devient positif et sera estimé par l'équation (III.75). La surface de plasticité (III.66) reste toujours satisfaite :

$$\dot{\lambda} > 0 \quad f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = 0 \quad \text{soit} \quad \dot{\lambda} f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = 0 \quad (\text{III.78})$$

### III.4.3 Régularisation de la loi élastoplastique

Afin d'appliquer la technique de perturbation nous avons besoin des dérivées successives de chaque relation. Or, la loi élastoplastique présentée dans le paragraphe précédent, est discontinue lorsque le matériau passe d'une réponse élastique à une réponse élastoplastique ou inversement. Les dérivées par rapport au temps n'existent pas pendant l'étape de transition, il est donc nécessaire de régulariser la loi de comportement afin d'appliquer la technique de perturbation.

Une analyse des équations (III.77) et (III.78) nous permet de proposer une régularisation simple et naturelle de la manière suivante :

$$\dot{\lambda} f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p) = -\eta \frac{A_R}{t_R}, \quad (\text{III.79})$$

où  $\eta$  est un petit paramètre positif,  $A_R$  et  $t_R$  sont respectivement, une contrainte représentative de limite élastique et un paramètre temporel représentatif introduit afin d'éliminer la dimension du paramètre  $\eta$ .

Lorsque le matériau a une réponse élastique,  $f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{C}}^p)$  est négatif et a une valeur finie. D'après la régularisation présentée ci-dessus, le paramètre  $\dot{\lambda}$  devrait être petit

et positif à cause de la petite valeur de  $\eta$ . Ceci correspond approximativement à la réponse élastique décrite par (III.77).

Si le matériau a une réponse élastoplastique,  $f(\underline{C}, \underline{C}^p)$  est pratiquement égal à zéro. Le paramètre plastique  $\dot{\lambda}$  pourrait avoir une valeur finie si on considère l'équation (III.79). Cette situation correspond à la réponse élastoplastique (III.78). Bien évidemment la relation (III.79) ne donne pas exactement les mêmes relations (III.77) et (III.78) mais elle vérifie presque ces dernières.

En adoptant la relation (III.79), la loi élastoplastique indépendante du temps dans le paragraphe précédent devient dépendante du temps. Le matériau présente alors un comportement élastoviscoplastique quelle que soit sa localisation par rapport à la surface de plasticité.

Ainsi, dans ce contexte,  $\dot{\lambda}$  s'exprime par la relation suivante :

$$\dot{\lambda} = -\eta \frac{A_R}{t_R} \frac{1}{f(\underline{C}, \underline{C}^p)} \quad (\text{III.80})$$

La première dérivée par rapport au temps du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff est toujours donnée par l'équation (III.67) mais reste valide pour les réponses élastique et élastoplastique. La surface de plasticité  $f(\underline{C}, \underline{C}^p)$  n'est plus égale à zéro mais est seulement exprimée par l'équation (III.63). De plus l'équation (III.64) n'est plus analytique lorsque le déviateur du tenseur des contraintes de Kirchhoff  $\underline{\tau}^D$  est nul. Pour obtenir des dérivées successives quelle que soit la valeur de  $\underline{\tau}^D$ , on régularise (III.64) comme suit :

$$\bar{\tau}^B = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\tau}^D : \underline{\tau}^D + \eta_r^2 A_R^2} \quad (\text{III.81})$$

Dorénavant, on s'attachera à calculer la contrainte équivalente de Kirchhoff à l'aide de l'équation (III.81).

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les équations d'équilibre aux dérivées partielles, les conditions aux limites, les relations cinématiques et la loi de comportement. Afin d'utiliser la méthode des éléments finis, nous présentons à

présent une formulation variationnelle équivalente aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites correspondantes.

### III.4.4 Formulation variationnelle

Durant les procédés de mise en forme des matériaux, nous avons une part beaucoup plus importante de la déformation plastique comparativement à la déformation élastique. La déformation plastique étant incompressible, notre problème devient quasi-incompressible. Il est alors essentiel d'adopter une formulation mixte afin d'éviter les phénomènes de verrouillage [53]. La loi hyperélastique que nous employons ici, permet de grandes déformations élastiques et dans ces conditions, la formulation mixte reste valide.

Au lieu d'utiliser directement l'énergie de déformation définie par (III.59), nous pouvons la décomposer en une partie  $W_V$  et une partie  $W_D$ . Ces deux quantités représentent des énergies de déformation provenant de la partie volumique ( $W_V$ ) et de la partie déviatorique ( $W_D$ ) de la déformation et sont définies par :

$$W(\theta, \underline{u}) = W_V(\theta) + W_D(\underline{u}) \quad (\text{III.82})$$

avec

$$W_V(\theta) = \frac{1}{2}K(\theta - 1)^2, \quad W_D(\underline{u}) = \frac{1}{2}\beta(J^{-2/3}\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{C}}^{p-1} - 3), \quad (\text{III.83})$$

où  $\theta$  représente la dilatation et est considérée comme une variable indépendante. Si  $\theta$  est estimée à partir de  $\underline{\underline{F}}$  au lieu d'être approximée indépendamment à partir des déplacements, nous retrouvons l'énergie définie par l'équation (III.59).

En utilisant le principe variationnel de Hu-Washizu (on peut trouver un exemple dans [70]), une fonctionnelle à trois champs peut être construite :

$$\Pi(\theta, \underline{u}, P) = \int_{\Omega^0} [W(\theta, \underline{u}) + P(J - \theta)] d\Omega + \Pi^{ext}(\underline{u}), \quad (\text{III.84})$$

où  $P$ ,  $\theta$  et  $\underline{u}$  sont des variables indépendantes.  $\Pi^{ext}(\underline{u})$  représente l'énergie potentielle

due aux forces antérieures. Elle est exprimée par :

$$\Pi^{ext}(\underline{u}) = - \int_{\delta\Omega_T^0} \mu \underline{F} \cdot \underline{u} dS_0 . \quad (\text{III.85})$$

Une formulation variationnelle des équations d'équilibre et des relations de comportement s'obtient en invoquant la stationnarité de la fonctionnelle ci dessus. On obtient ainsi 3 équations d'Euler-Lagrange qui correspondent à la forme faible des équations d'équilibre (III.55), l'égalité entre  $\theta$  et  $J$  et la loi constitutive pour la partie volumique.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^0} \underline{T} : \delta \underline{F} d\Omega_0 - \int_{\delta\Omega_T^0} \mu \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS_0 &= 0 , \\ \int_{\Omega^0} (J - \theta) \delta P d\Omega_0 &= 0 , \\ \int_{\Omega^0} (K \theta - P) \delta \theta d\Omega_0 &= 0 , \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

avec

$$\underline{T} = \underline{T}_V + \underline{T}_D , \quad \underline{T}_V = p J (\underline{F}^{-1})^t , \quad \underline{T}_D = \underline{F} S_D , \quad (\text{III.87})$$

où  $\underline{T}_V$  et  $\underline{T}_D$  sont introduits pour partager le premier tenseur de Piola Kirchhoff en une partie volumique et une partie déviatorique.

### III.4.5 Application de la M.A.N.

Nous résolvons le problème variationnel présenté précédemment par la M.A.N.. Nous appliquons une technique de perturbation qui va nous permettre de transformer notre problème non linéaire en une suite récurrente de problèmes linéaires. Ensuite, ces problèmes linéaires sont résolus par la méthode des éléments finis.

#### Technique de perturbation

Nous avons déjà constaté que les inconnues du problème étaient des fonctions du temps (ou d'un pseudo temps:  $\mu = t, \Rightarrow \mu_0 = t_0, \mu_1 = 1, \mu_i = 0$  pour  $i > 1$ ).



Nous allons donc considérer que notre problème est dépendant du temps (ou d'un pseudo temps). Nous développons alors chaque inconnue par rapport au temps. Nous ne présentons ici que notre problème formulé aux ordres 0 et  $i$ . Pour plus de détails concernant les développements des équations, on se référera à l'annexe D.1.

$$\int_{\Omega^0} (\underline{\tau}_0^{*d} : \delta \underline{D}^{*D} + P_0 J_0 \text{trace}(\delta \underline{D}^*)) d\Omega - \int_{\delta \Omega_{\underline{T}}^0} \mu_0 \underline{F} \cdot \delta \underline{u} dS_0 = 0 ,$$

$$\int_{\Omega^0} (J_0 - \theta_0) \delta P d\Omega_0 = 0 ,$$

$$\int_{\Omega^0} (K \theta_0 - P_0) \delta \theta d\Omega_0 = 0 , \quad (\text{III.88})$$

avec

$$\delta \underline{D}^{*d} = \frac{1}{2} (\delta \underline{l}^* + \delta \underline{l}^{*t}), \quad \delta \underline{l}^* = \delta \underline{F} \cdot \underline{F}_0^{-1},$$

$$\underline{\tau}_0^{*d} = \beta J_0^{-\frac{2}{3}} (\underline{B}_0^* - \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{B}_0^*) \underline{I}),$$

où les inconnues de ce problème sont :  $\underline{u}_0$ ,  $P_0$  et  $\theta_0$ .  $\underline{B}_0^*$  est défini dans l'annexe D.2. Or, on a  $J_0$  et  $\underline{B}_0^*$  qui dépendent de  $\underline{u}_0$ , le système (III.88) est alors non linéaire. Une méthode itérative telle que la méthode de Newton-Raphson peut être utilisée pour le résoudre. La solution obtenue pour l'ordre zéro sera considérée comme point de départ pour nos développements asymptotiques.

Afin de trouver une approximation de la solution du système (III.88), la méthode de Newton-Raphson a besoin de sa forme linéarisée. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^0} \{ dP_0 J_0 \text{trace}(\delta \underline{D}^*) + P_0 J_0 (\text{trace}(d\underline{D}_0^*) \text{trace}(\delta \underline{D}^*) - d\underline{l}_0^{*t} : \delta \underline{l}^*) \} d\Omega_0 + \\ \int_{\Omega^0} \{ (d\underline{l}_0^* \cdot \underline{\tau}_0^{*d}) : \delta \underline{l}^* + (\underline{M} : d\underline{D}_0^*) : \delta \underline{D} \} = \int_{\delta \Omega_{\underline{T}}^0} \mu_0 \underline{F} \delta \underline{u} dS_0 = 0 + \delta R^{int}, \\ \int_{\Omega^0} (J_0 \text{trace}(d\underline{D}_0^*) - d\theta_0) \delta P d\Omega_0 = \int_{\Omega^0} (J_0 - \theta_0) \delta P d\Omega_0 \\ \int_{\Omega^0} (K d\theta_0 - dP_0) \delta \theta d\Omega_0 = \int_{\Omega^0} (K \theta_0 - P_0) \delta \theta d\Omega_0 \end{array} \right. \quad (\text{III.89})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\underline{\underline{D}}_0^* = \frac{1}{2}(d\underline{l}_0^* + d\underline{l}_0^{*t}), \quad d\underline{l}_0^* = d\underline{F}_0 \cdot \underline{F}_0^{-1}, \quad \beta^* = \beta J^{-\frac{1}{2}} \\ \underline{\underline{M}} = \frac{1}{2}\beta^* \text{trace}(\underline{B}_0^*)(\underline{I} \odot \underline{I} - \frac{1}{3}\underline{I} \otimes \underline{I}) - \frac{2}{3}(\underline{I} \otimes \underline{\tau}_0^{*d} + \underline{\tau}_0^{*d} \otimes \underline{I}) \\ \delta R^{int} = - \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_0^{*d} : \delta \underline{\underline{D}}^{*d} + P_0 J_0 \text{trace}(\delta \underline{\underline{D}}^*)) d\Omega, \end{array} \right.$$

où  $\underline{\underline{M}}$  est le tenseur des modules élastiques effectifs. Il est symétrique et provient de la part déviatorique.  $\delta R^{int}$  représente le travail virtuel des forces intérieures. Les symboles  $\odot$  et  $\otimes$  signifient respectivement :

$$(\underline{I} \otimes \underline{I})_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad \text{et} \quad (\underline{I} \odot \underline{I})_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$$

De plus,  $d\underline{\underline{D}}_0^*$  et  $d\underline{l}_0^*$  ont la même forme que  $\delta \underline{\underline{D}}^*$  et  $\delta \underline{l}^*$ , respectivement, ce qui entraînera une matrice de rigidité symétrique. La lettre  $d$  placée devant chaque variable représente la correction de celles ci entre deux itérations. Tous les termes des membres de droite de ces équations peuvent être déterminés à l'aide des solutions de la dernière itération.

Nous présentons à présent l'ordre  $i$  du développement en série :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_0} \{P_i J_0 \text{trace}(\delta \underline{\underline{D}}^*) + P_0 J_0 (\text{trace}(\underline{D}_i^*) \text{trace}(\delta \underline{\underline{D}}^*) - \underline{l}_i^{*t} : \delta \underline{l}^*)\} d\Omega_0 + \\ \int_{\Omega_0} \{(\underline{l}_i^* \cdot \underline{\tau}_0^{*d}) : \delta \underline{l}^* + (\underline{\underline{M}} : d\underline{\underline{D}}_i^*) : \delta \underline{\underline{D}}\} = \int_{\delta \Omega_0^i} \mu_i \underline{F} \delta \underline{u} dS_0 + \delta R^u, \\ \int_{\Omega_0} (J_0 \text{trace}(\underline{D}_i^*) - \theta_i) \delta P d\Omega_0 = \delta R^P, \\ \int_{\Omega_0} (K\theta_i - P_i) \delta \theta d\Omega_0 = 0 \end{array} \right. \quad \text{(III.90)}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta R^u &= - \int_{\Omega_0} (P_0 J_0 \underline{\underline{R}}_{FM}^* + \underline{\underline{R}}_{TV}^* + \underline{\underline{R}}_{TD}^* + R_{PJ} \underline{I}) : \delta \underline{l}^* d\Omega_0 \\ &- \int_{\Omega_0} \{ \frac{1}{2} \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{R}}_C^* - \frac{1}{3} \beta^* (\underline{B}_0^* \cdot \underline{\underline{R}}_{CM}^* + R_{eI}) \} : \delta \underline{\underline{D}}^* d\Omega_0 \\ &- \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_0^{*d} + \beta^* \underline{\underline{R}}_{EB}^* + (\frac{1}{3} \text{trace}(\underline{R}_C^*) + R_{JM}^*) \underline{\tau}_0^{*d} + \underline{\underline{R}}_{SD}^*) : \delta \underline{\underline{D}}^* d\Omega_0 \\ &- \int_{\Omega_0} (\frac{\text{trace}(\underline{R}_i)}{i} + \frac{R_j}{J_0}) (P_0 J_0 \underline{I} - \frac{2}{3} \underline{\tau}_0^{*d}) : \delta \underline{\underline{D}}^* d\Omega_0, \end{aligned}$$

$$\delta R^P = \int_{\Omega_0} \left( \frac{\text{trace}(\underline{\underline{R}}_i^*)}{i} + \frac{R_j}{J_0} \right) \delta P d\Omega_0, \quad \underline{\underline{R}}_{FM}^* = \underline{\underline{F}}_0 \underline{\underline{R}}_{FM},$$

$$\underline{\underline{R}}_{TV}^* = \underline{\underline{R}}_{TV} \cdot \underline{\underline{F}}_0^t, \quad \underline{\underline{R}}_{TD}^* = \underline{\underline{R}}_{TD} \cdot \underline{\underline{F}}_0^t, \quad R_{JM}^* = J_0^{\frac{2}{3}} R_{JM}$$

$$\underline{\underline{\tau}}_i^{*d} = \beta^* (\underline{\underline{B}}_i^* - \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{B}}_i^*) \underline{\underline{I}}),$$

où  $\underline{\underline{D}}_i^*$ ,  $\underline{\underline{l}}_i^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{CM}^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_C^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{EB}^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{SD}^*$  sont définis dans l'annexe D.1.

$\underline{\underline{D}}_i^*$  et  $\underline{\underline{l}}_i^*$  ont la même forme que  $d\underline{\underline{D}}_0^*$  et  $d\underline{\underline{l}}_0^*$  respectivement. Si on effectue une comparaison avec la forme linéarisée (III.88), l'opérateur d'inconnues  $\underline{u}_i$ ,  $P_i$  et  $\theta_i$  reste le même que celui d'inconnues  $d\underline{u}_0$ ,  $dP_0$  et  $d\theta_0$ . Ainsi nous avons le même opérateur pour chaque ordre  $i$  ( $i \geq 1$ ). De plus, l'opérateur est fonction uniquement de  $d\underline{u}_0$ ,  $dP_0$  et  $d\theta_0$  et les membres de droite ne dépendent que des variables aux ordres précédant l'ordre  $i$ . Le système est alors linéaire dès lors que les inconnues  $d\underline{u}_0$ ,  $dP_0$  et  $d\theta_0$  sont déterminées. Nous avons donc la même matrice de rigidité à inverser pour tous les ordres du même pas de calcul. Les inconnues  $\underline{u}_i$ ,  $P_i$  et  $\theta_i$  peuvent être calculées de façon récursive pour  $r$  variant de 1 à  $i$ . La solution finale  $\underline{u}$ ,  $P$  et  $\theta$  peut alors être obtenue par les développements en série pour toutes les valeurs comprises dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ . Bien évidemment les autres variables peuvent être obtenues de la même manière. Pour que la solution soit acceptable en dépit des erreurs de troncatures, l'incrément de temps  $\Delta t$  doit être à l'intérieur du rayon de convergence des séries. Etant donné que les systèmes (III.88) et (III.90) ont le même opérateur pour leurs inconnues respectives, il est astucieux d'utiliser la matrice inversée du système (III.88) pour résoudre le système (III.90).

### Discussion sur la résolution du système (III.90)

A partir des équations (III.88) et (III.90), il semble plus économique de calculer la matrice de rigidité et les seconds membres si tous les termes sont exprimés dans la configuration de référence notée  $\Omega^{(0)}$  au point de départ des développements asymptotiques. Nous pouvons ainsi utiliser un schéma lagrangien total pour décrire

l'évolution du procédé de déformation dont la formulation est presque aussi simple que si un schéma Lagrangien actualisé était utilisé. On peut noter ici que  $\underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{I}}$  et  $J_0 = 1$  dans le cas d'un schéma lagrangien actualisé, ce qui paraît plus simple à calculer. Cependant, le schéma lagrangien actualisé peut entraîner une distorsion du maillage ainsi qu'une perte de la précision dans les résultats. C'est pourquoi nous adoptons cette fois, un schéma lagrangien total pour estimer la solution mais nous estimerons les inconnues à chaque point de départ des développements asymptotiques  $\Omega^{(0)}$ . En reformulant les équations (III.88) et (III.90) dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  on obtient :

A l'ordre 0

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega^{(0)}} dP_0 \text{trace}(\delta\underline{\underline{\epsilon}}^*) d\Omega_0 + \int_{\Omega^{(0)}} P_0 \left( \text{trace}(d\underline{\underline{\epsilon}}_0^*) \text{trace}(\delta\underline{\underline{\epsilon}}^*) - d\underline{\underline{F}}_0^{*t} : \delta\underline{\underline{F}}^* \right) d\Omega_0 + \\
 & \int_{\Omega^{(0)}} \left\{ \left( d\underline{\underline{F}}_0^* \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} \right) : \delta\underline{\underline{F}}^* + \left( \underline{\underline{M}} : d\underline{\underline{\epsilon}}_0^* \right) : \delta\underline{\underline{\epsilon}}^* \right\} d\Omega_0 = \delta F^{ext} - \delta F^{int}, \\
 & \int_{\Omega^{(0)}} \left( \text{trace}(d\underline{\underline{\epsilon}}_0^*) - \frac{d\theta_0}{J_0} \right) \delta P \, d\Omega_0 = -\delta R^P, \\
 & \int_{\Omega^{(0)}} \left( K \frac{d\theta_0}{J_0} - \frac{dP_0}{J_0} \right) \delta\theta \, d\Omega_0 = -\delta R^\theta, \tag{III.91}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 d\underline{\underline{\epsilon}}_0^* &= \frac{1}{2} \left( d\underline{\underline{F}}_0^* + d\underline{\underline{F}}_0^{*t} \right), \quad d\underline{\underline{F}}_0^* = d\underline{\underline{F}}_0 \underline{\underline{F}}_0^{-1}, \quad \beta^* = \frac{\beta J_0^{-2/3}}{J_0}, \\
 \delta\underline{\underline{\epsilon}}^* &= \frac{1}{2} \left( \delta\underline{\underline{F}}^* + \delta\underline{\underline{F}}^{*t} \right), \quad \delta\underline{\underline{F}}^* = \delta\underline{\underline{F}} \underline{\underline{F}}_0^{-1}, \quad \underline{\underline{B}}_0^* = \underline{\underline{F}}_0 \underline{\underline{B}}_0 \underline{\underline{F}}_0^t,
 \end{aligned}$$

$$e_0 = \text{trace}(\underline{\underline{B}}_0^*), \quad \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} = \beta^* \left( \underline{\underline{B}}_0^* - \frac{1}{3} e_0 \underline{\underline{I}} \right),$$

$$\underline{\underline{M}} = \frac{2}{3} \beta^* e_0 \left( \underline{\underline{I}} \odot \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{I}} \right) - \frac{2}{3} \left( \underline{\underline{I}} \otimes \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} + \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} \otimes \underline{\underline{I}} \right),$$

$$\delta F^{int} = \int_{\Omega^{(0)}} \left( \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^* + P_0 \text{trace}(\delta \underline{\underline{\epsilon}}^*) \right) d\Omega_0 ,$$

$$\delta F^{ext} = \int_{\partial\Omega_T^0} \frac{t_0}{J_0} t^d \cdot \delta \underline{u} d\Gamma , \quad \delta R^P = \int_{\Omega^{(0)}} \left( 1 - \frac{\theta_0}{J_0} \right) \delta P d\Omega_0 ,$$

$$\delta R^\theta = \int_{\Omega^{(0)}} \left( K \frac{\theta_0}{J_0} - \frac{P_0}{J_0} \right) \delta \theta d\Omega_0 ,$$

où  $d\underline{\underline{\epsilon}}_0^*$  et  $d\underline{\underline{F}}_0^*$  ont la même forme que  $\delta \underline{\underline{\epsilon}}^*$  et  $\delta \underline{\underline{F}}^*$ , respectivement. De plus,  $d\underline{\underline{F}}_0^*$  est la correction du tenseur gradient de déplacement par rapport aux coordonnées  $\underline{x}_0$  dans la configuration  $\Omega^0$ , et  $d\underline{\underline{\epsilon}}_0^*$  représente sa part symétrique. Ils ont la même forme que dans le cas des déformations infinitésimales.

A l'ordre  $i$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^{(0)}} P_i \text{trace}(\delta \underline{\underline{\epsilon}}^*) d\Omega_0 + \int_{\Omega^{(0)}} P_0 \left( \text{trace}(\underline{\underline{\epsilon}}_i^*) \text{trace}(\delta \underline{\underline{\epsilon}}^*) - \underline{\underline{F}}_i^{*t} : \delta \underline{\underline{F}}^* \right) d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega^{(0)}} \left\{ \left( \underline{\underline{F}}_i^* \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} \right) : \delta \underline{\underline{F}}^* + \left( \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\epsilon}}_i^* \right) : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^* \right\} d\Omega_0 = \delta F_i^{ext} - \delta F_i^u , \\ & \int_{\Omega^{(0)}} \left( \text{trace}(\underline{\underline{\epsilon}}_i^*) - \frac{\theta_i}{J_0} \right) \delta P d\Omega_0 = -\delta R_i^P , \\ & \int_{\Omega^{(0)}} \left( K \frac{\theta_i}{J_0} - \frac{P_i}{J_0} \right) \delta \theta d\Omega_0 = 0 , \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

avec

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_i^* &= \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}_i^* + \underline{\underline{F}}_i^{*t} \right) , \quad \underline{\underline{F}}_i^* = \underline{\underline{F}}_i \underline{\underline{F}}_0^{-1} , \quad \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{F}}^M}^* = \underline{\underline{F}}_0 \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{F}}^M} , \\ \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_V}^* &= \frac{1}{J_0} \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_V} \underline{\underline{F}}_0^t , \quad \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_D}^* = \frac{1}{J_0} \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_D} \underline{\underline{F}}_0^t , \quad \underline{\underline{R}}_{P_J}^* = \frac{1}{J_0} \underline{\underline{R}}_{P_J} , \\ \underline{\underline{R}}_J^* &= \frac{R_J}{J_0} , \quad \underline{\underline{\tau}}_i^{*d} = \beta^* \left( \underline{\underline{B}}_i^* - \frac{\text{trace}(\underline{\underline{B}}_i^*)}{3} \underline{\underline{I}} \right) , \quad \underline{\underline{B}}_i^* = \underline{\underline{F}}_0 \underline{\underline{B}}_i \underline{\underline{F}}_0^t , \\ \delta F_i^u &= \int_{\Omega^{(0)}} \left( P_0 \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{F}}^M}^{*t} + \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_V}^* + \underline{\underline{R}}_{\underline{\underline{T}}_D}^* + \underline{\underline{R}}_{P_J}^* \underline{\underline{I}} \right) : \delta \underline{\underline{F}}^* d\Omega_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega^{(0)}} \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{R}}_C^* - \frac{1}{3} \beta^* \left( e_0 \underline{\underline{R}}_{CM}^* + R_e \underline{\underline{I}} \right) \right\} : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^* d\Omega_0 \\
 & + \int_{\Omega^{(0)}} \left( \underline{\underline{\tau}}_i^* + \beta^* \underline{\underline{R}}_{EB}^* + \left( \frac{tr \underline{\underline{R}}_C^*}{3} + R_{JM}^* \right) \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} + \underline{\underline{R}}_{SD}^* \right) : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^* d\Omega_0 \\
 & + \int_{\Omega^{(0)}} \left( \frac{trace(\underline{\underline{R}}_I)}{i} + R_J^* \right) \left( P_0 \underline{\underline{I}} - \frac{2}{3} \underline{\underline{\tau}}_0^{*d} \right) : \delta \underline{\underline{\epsilon}}^* d\Omega_0 , \\
 \delta R_i^P & = \int_{\Omega^{(0)}} \left( \frac{trace(\underline{\underline{R}}_I)}{i} + R_J^* \right) \delta P d\Omega_0 , \quad \delta F_i^{ext} = \int_{\partial\Omega_T^0} \frac{\lambda_i}{J_0} t^d \cdot \delta \underline{\underline{u}} d\Gamma ,
 \end{aligned}$$

Afin de pouvoir réutiliser les variables calculées  $\underline{\underline{B}}_0^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{CM}^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_C^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{EB}^*$ ,  $R_{JM}^*$ ,  $R_J^*$ ,  $\underline{\underline{R}}_{SD}^*$  pour l'estimation de leurs variables correspondantes à l'ordre suivant, il est aussi utile de les exprimer dans la configuration  $\Omega^{(0)}$ . Les détails de ces transformations sont présentés dans l'annexe D.2.

### Implémentation de la M.A.N.

Dans ce paragraphe, deux points seront discutés, la discrétisation par la méthode des éléments finis et la procédure de programmation.

#### **Discrétisation par la méthode des éléments finis**

Nous décomposons le solide  $\Omega^0$  en éléments. L'interpolation des déplacements et leurs variations pour chaque élément est prise sous la forme :

$$\underline{\underline{u}}_{(i)} = N_\alpha^u \underline{\underline{u}}_{(i)}^\alpha , \quad \delta \underline{\underline{u}} = N_\alpha^u \delta \underline{\underline{u}}^\alpha , \quad (\text{III.93})$$

où on applique la convention de sommation sur l'indice  $\alpha$ .  $\underline{\underline{u}}_{(i)}^\alpha$  et  $\delta \underline{\underline{u}}^\alpha$  représentent les variables nodales de  $\underline{\underline{u}}_{(i)}$  and  $\delta \underline{\underline{u}}$ , respectivement.  $\alpha$  varie de 1 au nombre de noeuds élémentaires. Quant aux interpolations de la pression et de sa variation, elles sont données par les expressions :

$$P_{(i)} = N_\alpha^P P_{(i)}^\alpha , \quad \delta P = N_\alpha^P \delta P^\alpha , \quad (\text{III.94})$$

dans lesquelles  $P_{(i)}^\alpha$  représente les valeurs d'interpolation de  $P_{(i)}$  et  $\delta P^\alpha$  celles de  $\delta P$ . Ici,  $\alpha$  varie de 1 au nombre de valeurs d'interpolation de la pression. En ce qui concerne la variable de dilatation  $\theta$  et sa variation, elles peuvent être approximées par :

$$\theta_{(i)} = N_\alpha^\theta \theta_{(i)}^\alpha, \quad \delta\theta = N_\alpha^\theta \delta\theta^\alpha, \quad (\text{III.95})$$

où  $\theta_{(i)}^\alpha$  définit la valeur d'interpolation de  $\theta_{(i)}$  et  $\delta\theta^\alpha$  celle de  $\delta\theta$ . En général, les fonctions d'interpolation  $N_\alpha^u$  sont différentes de  $N_\alpha^P$  et  $N_\alpha^\theta$ .

En substituant les équations (III.93), (III.94) et (III.95) dans (III.91), nous obtenons après assemblage, le système discrétisé suivant.

$$[K^u] \{d\underline{u}_{(0)}\} + [K^{uP}]^t \{dP_{(0)}\} = \{F^{ext}\} - \{F^{int}\},$$

$$[K^{uP}] \{d\underline{u}_{(0)}\} - [K^{P\theta}]^t \{d\theta_{(0)}\} = -\{R^P\}.$$

$$K [K^{\theta\theta}] \{d\theta_{(0)}\} - [K^{P\theta}] \{dP_{(0)}\} = -\{R^\theta\}, \quad (\text{III.96})$$

où  $[K^{uP}]$  est la matrice globale qui provient du premier terme du membre de gauche de l'équation (III.91)<sub>1</sub> et  $[K^u]$ , symétrique et dépendante de  $\{\underline{u}_{(0)}\}$  et  $\{P_{(0)}\}$ , représente la matrice de rigidité globale provenant du reste des termes du membre de gauche.  $[K^{P\theta}]$  provient du second terme du membre de gauche de l'équation (III.91)<sub>2</sub> et  $[K^{\theta\theta}]$  provient du premier terme du membre de gauche de l'équation (III.91)<sub>3</sub>. Rappelons que  $K$  représente le module de compressibilité.

De plus,  $\{d\underline{u}_{(0)}\}$ ,  $\{dP_{(0)}\}$  et  $\{d\theta_{(0)}\}$  sont la correction nodale assemblée de la vitesse, la correction de la pression et celle de la dilatation respectivement. Finalement,  $\{F^{ext}\}$  représente le vecteur global des forces données,  $\{F^{int}\}$  les forces intérieures,  $\{R^P\}$  et  $\{R^\theta\}$  les résidus provenant de  $\delta R^P$  et  $\delta R^\theta$ , respectivement.

Dans la pratique, les fonctions d'interpolations  $N_\alpha^\theta$  de  $\theta$  sont les mêmes que celles de  $N_\alpha^P$  de  $P$ . Dans ce cas, la matrice de rigidité  $[K^{P\theta}]$  devient identique à  $[K^{\theta\theta}]$ . A partir de (III.96)<sub>3</sub>, les inconnues  $\{d\theta_{(0)}\}$  peuvent être exprimées en fonction de

$\{dP_{(0)}\}$ :

$$\{d\theta_{(0)}\} = \frac{1}{K} \left( \{dP_{(0)}\} - [K^{\theta\theta}]^{-1} \{R^\theta\} \right) . \quad (\text{III.97})$$

En utilisant (III.96<sub>2</sub>) et (III.97),  $\{dP_{(0)}\}$  peut être reformulé en fonction de  $\{d\underline{u}_{(0)}\}$ :

$$\{dP_{(0)}\} = [K^{\theta\theta}]^{-1} \left( K [K^{uP}] \{d\underline{u}_{(0)}\} + K \{R^P\} + \{R^\theta\} \right) , \quad (\text{III.98})$$

En remplaçant  $\{dP_{(0)}\}$  dans (III.96<sub>1</sub>) avec l'expression (III.98), nous arrivons finalement au système à résoudre:

$$[K]^G \{d\underline{u}_{(0)}\} = \{R\} - [K^{uP}]^t [K^{\theta\theta}]^{-1} \left( K \{R^P\} + \{R^\theta\} \right) , \quad (\text{III.99})$$

avec

$$[K]^G = [K^u] + K [K^{uP}]^t [K^{\theta\theta}]^{-1} [K^{uP}] ,$$

$$\{R\} = \{F^{ext}\} - \{F^{int}\} ,$$

qui ne dépend que des inconnues  $\{d\underline{u}_{(0)}\}$ . Si le champ de pression est discontinu dans l'élément, la construction des équations ci-dessus peut être réalisée au niveau de l'élément puis assemblée. Cette procédure évite l'inversion de la matrice globale  $[K^{\theta\theta}]$  et le produit des matrices  $[K^{uP}]$  et  $[K^{\theta\theta}]^{-1}$ .

De la même façon, on peut obtenir le système à l'ordre  $i$ :

$$\{P_{(i)}\} = K [K^{\theta\theta}]^{-1} \left( [K^{uP}] \{\underline{u}_{(i)}\} + \{R_{(i)}^P\} \right) , \quad (\text{III.100})$$

et

$$[K]^G \{\underline{u}_{(i)}\} = \{F_{(i)}^{ext}\} - \{F_{(i)}^u\} - K [K^{uP}]^t [K^{\theta\theta}]^{-1} \{R_{(i)}^P\} , \quad (\text{III.101})$$

où  $\{\underline{u}_{(i)}\}$  et  $\{P_{(i)}\}$  sont la vitesse nodale assemblée et la pression.  $\{F_{(i)}^{ext}\}$  représente le vecteur global des forces extérieures à l'ordre  $i$ , provenant de  $\delta F_{(i)}^{ext}$  de l'équation (III.92).  $\{F_{(i)}^u\}$  est un vecteur ne dépendant que des termes d'ordre inférieurs à l'ordre  $i$ .  $\{R_{(i)}^P\}$  est le vecteur résidu provenant de  $\delta R_{(i)}^P$ . Il est encore plus explicite, à partir



de ces systèmes discrétisés, de voir que le système (III.101) a besoin qu'on inverse une seule fois la matrice de rigidité pour résoudre tous les ordres, une fois que la solution du système (III.99) a été obtenue.

### Procédure de programmation

Pour l'analyse numérique des grandes déformations élastoplastiques, la procédure de programmation adoptée peut être résumée brièvement de la manière suivante :

1. Pour une configuration initiale et un champ de déformation initial donnés, on calcule la solution du système (III.99) en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson au temps  $t_0 = 0$ .
2. On améliore la solution obtenue pour le système (III.99) pour déterminer le point de départ de notre série asymptotique par la méthode de Newton-Raphson au temps  $t_0 = 0$ . La solution est acceptable uniquement lorsqu'un critère sévère satisfait la norme du résidu relatif des équations d'Euler-Lagrange.

*Boucle des développements asymptotiques pour  $i$  variant de 1 à  $i$*

3. On calcule  $\{F_{(r)}^{ext}\}$ ,  $\{R_{(r)}^U\}$  et  $\{R_{(r)}^P\}$  pour  $r \geq 1$ .
4. On calcule  $\{U_{(r)}\}$  et  $\{P_{(r)}\}$  en accord avec les équations (III.100) et (III.101) en utilisant la matrice inversée  $[K^G]^{-1}$  de la dernière itération de 2).

*Fin de la boucle asymptotique numérique*

5. On détermine l'intervalle de temps  $t_{max} - t_0$ , durant lequel les équations d'Euler-Lagrange dans leur forme discrétisée sont satisfaites, en utilisant une méthode de bisection. Le critère est moins sévère que dans 2).

6. On estime la solution de  $\{U\}$ ,  $\{P\}$  au temps  $t_{max}$  en accord avec leurs développements asymptotiques.
7. Vérifier si le processus est terminé. Si oui, on stoppe le calcul; sinon, on continue.
8. Mise à jour du point de départ des développements asymptotiques au temps  $t_{max}$  et mettre  $t_0 = t_{max}$ .
9. On répète le processus à partir de 2) jusque 8) pour un nouveau pas de temps.

#### Commentaires et discussion

L'algorithme présenté ici, a été mis au point en collaboration avec H. L. Cao. Une première implémentation de cet algorithme a été réalisée par H. L. Cao lors de son séjour à l'université de Berkeley. Lorsqu'il a choisi de poursuivre sa carrière dans un autre secteur d'activité, il nous a fourni une version du logiciel, qui probablement fonctionne. Malheureusement, il est apparu très difficile de travailler avec ce logiciel en l'absence de son concepteur et nous ne pouvons donc présenter de résultats numériques attestant de la pertinence des choix qui ont été faits. Nous n'avons donc présenté les développements théoriques et numériques de cette partie III.4.5 qu'à titre conservatoire.

De cette présentation, on peut retenir plusieurs idées plus ou moins indépendantes qui pourraient être reprises dans des travaux ultérieurs.

- Le comportement élastoplastique a été pris en compte dans le cadre de J.C. Simo. La loi de comportement obtenue ne représente pas une physique très différente de celle présentée au paragraphe III.3, mais elle est exprimée d'une autre façon. Ce nouveau cadre diffère du précédent d'une part, par l'expression de la loi élastique qui est de nature hyperélastique et non pas hypoélastique,

d'autre part, par l'écriture de la fonction seuil qui est exprimée en fonction de tenseurs de déformation lagrangiens. A priori, l'idée d'adopter une loi hyperélastique nous semble pertinente et elle permet la prise en compte de grandes déformations élastiques, mais nous n'avons pas pu établir de comparaison pratique entre les deux approches. En revanche, la condensation des contraintes de Kirchhoff pour aboutir à l'expression (III.66) du seuil de plasticité nous semble plus discutable. En effet, il faudrait reprendre toute l'analyse si on modifiait la loi élastique ou le critère de plasticité. Conformément à la pratique courante dans les méthodes asymptotiques numériques, nous conseillons de garder la variable  $\underline{\tau}$  dans l'expression analytique du seuil de plasticité et d'effectuer diverses condensations après avoir linéariser les équations par la technique de perturbation.

- Une configuration lagrangienne totale a été considérée, comme cela se pratique souvent en grandes déformations élastiques et contrairement à ce qui est généralement fait en élastoplasticité. Le seul inconvénient de ce choix est une complexité plus grande des diverses quantités calculés, en particulier, la matrice tangente.
- Une autre classe d'éléments finis mixtes a été utilisée. Elle est basée sur une formulation à trois champs et permet d'éviter le phénomène de verrouillage dû à l'incompressibilité plastique.
- La proposition la plus intéressante concerne la technique de régularisation (III.80) "viscoplastique". Elle est différente de celle introduite au paragraphe précédent. Faute de temps et en raison des difficultés contingentes évoquées plus haut, nous n'avons pas pu comparer ces deux techniques et établir leur pertinence. Dans des travaux futurs, il faudra élucider en priorité ce point essentiel pour la mise en œuvre de la M.A.N. en élastoplasticité.
- La technique de résolution utilisée est calquée sur celle qui avait donné de bons résultats pour les équations de Norton-Hoff. Elle introduit une correction

systematique en fin de pas et le calcul des séries est fait de manière légèrement approchée en remplaçant la matrice tangente constante par celle obtenue à la dernière itération. Cet algorithme a montré son intérêt en viscoplasticité [12], en élasticité et en mécanique des fluides [41], même si d'autres variantes peuvent être employées avec succès.

## III.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé les relations cinématiques employées dans nos formulations élastoplastiques. Deux formulations ont été exposées. La première a été proposée par F. Sidoroff et est basée sur la décomposition additive du tenseur des taux de déformations en une partie élastique et une autre plastique. Les déformations élastiques sont supposées petites tandis que les déformations plastiques peuvent être grandes. Le principe variationnel a été écrit dans une configuration de référence et un schéma lagrangien actualisé a été utilisé.

La deuxième formulation a été proposée par J. C. Simo. Elle est basée sur une décomposition multiplicative du gradient de la transformation. La loi hyperélastique employée permet de grandes déformations élastiques. Les déformations plastiques peuvent également être grandes. Nous avons cette fois-ci adopté une formulation mixte afin d'éviter les phénomènes de verrouillage. Nous avons donc utilisé le principe variationnel de Hu-Washizu, ce qui nous a conduit à une fonctionnelle à trois champs. Un schéma lagrangien total a été utilisé.

Nous avons ensuite appliqué la méthode asymptotique à nos deux formulations, mais au préalable, nous avons dû modifier nos lois de comportement. En effet, celles-ci n'étant pas analytiques lors de la transition d'un état élastique à un état plastique et inversement, une technique de perturbation ne pouvait pas leur être appliquée. Pour ces deux lois élastoplastiques, le critère de charge/décharge entraîne la même loi à régulariser:

- Dans le cas du modèle de F. Sidoroff, nous avons d'abord tenté une approximation

de la loi en effectuant une intégration sur celle-ci. Une seconde étape consiste à la régulariser classiquement à l'aide d'un petit paramètre. Cette approximation nous permet d'obtenir une formulation indépendante du temps et donc, de pouvoir utiliser le paramètre de développement  $a$  habituellement utilisé dans la M.A.N.. Cependant, cette approximation ne permet aucune décharge élastique durant le pas de calcul.

- En ce qui concerne le modèle de J. C. Simo, nous avons directement régularisé la loi (sans effectuer d'autres approximations). Nous obtenons ainsi une formulation qui est cette fois ci dépendante du temps. Le matériau présente alors toujours un comportement élastoviscoplastique. Une possible décharge est alors prise en compte durant le pas de calcul. Le paramètre de développement choisi pour la technique de perturbation est donc le temps.



# Conclusion générale

Au cours de ce présent travail, nous avons mené deux études distinctes dans le cadre de travail de la méthode asymptotique numérique. La première étude a permis de présenter une nouvelle manière d'appliquer la technique de base réduite dans le cas de problèmes dont le matériau a un comportement élastique non linéaire. Jusque là les méthodes classiques de base réduite réduisaient directement le problème non linéaire de départ par l'utilisation d'une base convenablement choisie. L'obtention de ce problème de dimension réduite nécessitait le calcul d'un nombre important de coefficients. Des tentatives ont été réalisées afin de réduire ce nombre de coefficients par l'introduction de variables supplémentaires. Cependant ce dernier demeure trop important dès lors que la dimension de la base est supérieure à 7 vecteurs.

La technique que nous avons présentée, ne réduit pas le problème non linéaire de départ mais les problèmes linéaires obtenus par une technique de perturbation. On évite ainsi le calcul de ces coefficients et le temps de calcul énorme qui leur est associé. Cette méthode a l'avantage de pouvoir utiliser des bases de grandes dimensions pour des temps de calcul faibles comparativement aux méthodes asymptotiques numériques classiques. Des exemples ont permis de montrer que pour des problèmes ayant un nombre important de degrés de libertés, cette méthode peut permettre un gain en temps de calcul allant de 11% (pour des problèmes de 5000 d.d.l.) à 87.5% (pour des problèmes de 40000 d.d.l.). Il reste à établir une méthode systématique de choix de la base, mais nous avons montré qu'on peut obtenir une très grande précision, comme avec la M.A.N. classique, en choisissant un petit nombre de vecteurs calculés aux pas précédents.

---

Un autre avantage que présente cette technique par rapport aux techniques de base réduite classiques, est qu'on peut l'appliquer dans tous les problèmes où il est possible d'appliquer une technique de perturbation. Les méthodes classiques quant à elles ne s'appliquent qu'à de simples problèmes tels que l'élasticité introduisant des non linéarités géométriques ou encore dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

La deuxième étude concerne l'application de la méthode asymptotique numérique aux problèmes élastoplastiques en transformations finies. Deux formulations élastoplastiques ont été présentées :

- La première était basée sur le modèle élastoplastique de F. Sidoroff. Une décomposition du tenseur des taux de déformations en une partie élastique et une partie plastique a été adoptée. Ce modèle nous permet de travailler dans le cadre de petites déformations élastiques mais de grandes déformations plastiques. Un schéma lagrangien actualisé a été utilisé pour l'écriture de la formulation variationnelle.

- La deuxième formulation quant à elle est basée sur le modèle de J. C. Simo. Une décomposition multiplicative du gradient de la déformation en une partie élastique et une autre plastique a été adoptée. Le modèle hyperélastique utilisé permet à la fois de grandes déformations élastiques et de grandes déformations plastiques. Nous avons utilisé la fonctionnelle mixte de Hu-Washisu ce qui nous a mené à une formulation variationnelle à trois champs. Un schéma lagrangien total a cette fois-ci été choisi. On évite ainsi des problèmes de distorsion du maillage parfois rencontrés avec un schéma lagrangien actualisé.

Des exemples numériques ont été présentés dans le cas de la première formulation. On a pu ainsi montrer que celle-ci permettait bien de prendre en compte les grandes rotations. Toutefois, nous n'avons pu établir une validation numérique complète des algorithmes proposés.

Les modèles élastoplastiques considérés impliquent des transformations finies, des lois non linéaires comme des lois puissances et des relations non régulières. Nous



avons mis en œuvre des techniques maintenant bien établies pour calculer des séries entières dans ce cadre. Rappelons que l'application de ces techniques avait donné de bons résultats avec des lois de type déformation ou avec la loi de Norton-Hoff. Il n'y a donc pas de raison particulière pour qu'il en aille différemment en élastoplasticité.

Il reste donc à savoir comment traiter numériquement la loi d'écoulement. Nous avons proposé deux techniques différentes de régularisation, l'une conduisant à une loi de type déformation pour chaque pas, l'autre introduisant une régularisation viscoplastique.



## ANNEXE A

# Détermination des coefficients qui constituent le problème réduit

Les opérateurs  $l^*$ ,  $q^*$  et  $c^*$  sont définis comme suit:

$$\begin{aligned}
 l_{ij}^* &= \int_{\Omega_o} (\gamma^l(u_j) : D : \gamma^l(u_i)) dv \\
 q_{ijk}^* &= \int_{\Omega_o} (\gamma^{nl}(u_j, u_k) : D : \gamma^l(u_i)) dv \\
 &\quad + \int_{\Omega_o} (\gamma^l(u_j) : D : 2\gamma^{nl}(u_k, u_i)) dv \\
 c_{ijkl}^* &= \int_{\Omega_o} (\gamma^{nl}(u_j, u_k) : D : 2\gamma^{nl}(u_l, u_i)) dv \\
 \text{et } f_i^* &= P_e(u_i)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Les opérateurs  $l$  et  $q$  sont définis comme suit:

$$\begin{aligned}
 l_{ij} &= \int_{\Omega_o} S_j : \gamma^l(u_i) dv \\
 &\quad \text{for } i = 1, p \text{ et } j = 1, N \\
 q_{ijk} &= \int_{\Omega_o} S_j : (\gamma^l(u_i) + 2\gamma^{nl}(u_k, u_i)) dv \\
 &\quad \text{pour } i = 1, p \text{ } j = 1, N \text{ et } k = 1, p \\
 \text{et } f_i &= P_e(u_i) \text{ pour } i = 1, p
 \end{aligned} \tag{A.2}$$



## ANNEXE B

# Développement asymptotique d'un produit

On présente ici la procédure de développement des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  pour une fonction quadratique  $C = A.B$  (on suppose bien évidemment que chaque coefficient peut être développable sous forme de séries :  $A = \sum_{r=0}^i a^r A_r$ ,  $B = \sum_{r=0}^i a^r B_r$  et

$$C = \sum_{r=0}^i a^r C_r )$$

Cette procédure peut être résumée de cette manière :

- En introduisant les développements de Taylor des coefficients  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans la relation quadratique précédente et en regroupant les termes suivant les puissances du paramètre  $a$ , on obtient :

$$C_0 + aC_1 + \dots + a^i C_i = A_0 B_0 + a(A_0 B_1 + A_1 B_0) + \dots + a^i \sum_{r=0}^i A_r B_{i-r} \quad (\text{B.1})$$

Or, cette équation doit être vérifiée quelle que soit la valeur du paramètre  $a$ . Nous pouvons alors établir les relations entre les coefficients pour chaque puissance de  $a$  :

$$C_0 = A_0 B_0, \quad C_i = \sum_{r=0}^i A_r B_{i-r} \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (\text{B.2})$$



## ANNEXE C

# Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de F. Sidoroff

### C.1 Développements des différentes équations

Gradient de la transformation :  $\underline{\underline{F}}$

$$\underline{\underline{F}} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}}$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{F}}_i = \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial \underline{X}} \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.1})$$

Gradient de la vitesse dans la configuration initiale :  $\underline{\underline{L}}$

$$\underline{\underline{L}} = \frac{\partial v}{\partial \underline{X}}$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{L}}_i = \frac{\partial v_i}{\partial \underline{X}} \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.2})$$

Expression de la position en fonction de la vitesse :  $\underline{x}$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = v$$

$$\begin{cases} \text{Ordre } 0: \underline{x}_0 \\ \text{Ordre } i: \underline{x}_i = \int v_{i-1} \text{ pour } i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

Gradient inverse de la transformation :  $\underline{\underline{f}}$

Formule obtenue en reportant la position  $\underline{x}$  en fonction des vitesses (cf: (C.1), (C.2), (C.3))

$$\underline{\underline{f}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \underline{\underline{f}}_0 \cdot \underline{\underline{F}}_0 = \underline{\underline{I}} \\ \text{Ordre } i: \underline{\underline{f}}_i = - \sum_{r=0}^{i-1} \frac{1}{i-r} \underline{\underline{f}}_r \cdot \underline{\underline{L}}_{i-r-1} \text{ pour } i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Gradient de la vitesse dans la configuration finale:  $\underline{\underline{l}}$

$$\underline{\underline{l}} = \frac{\partial v}{\partial \underline{\underline{x}}} = \frac{\partial v}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{f}}$$

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \underline{\underline{l}}_0 = \underline{\underline{L}}_0 \cdot \underline{\underline{f}}_0 \\ \text{Ordre } i: \underline{\underline{l}}_i = \sum_{r=0}^i \underline{\underline{L}}_r \cdot \underline{\underline{f}}_{i-r} \text{ pour } i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Taux de rotation:  $\underline{\underline{W}}$

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} - \underline{\underline{l}}^t)$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{W}}_i = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}}_i - \underline{\underline{l}}_i^t) \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.6})$$

Taux de déformation:  $\underline{\underline{D}}$

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}} + \underline{\underline{l}}^t)$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{D}}_i = \frac{1}{2}(\underline{\underline{l}}_i + \underline{\underline{l}}_i^t) \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.7})$$

$$\text{et: } \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}^e + \underline{\underline{D}}^p$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{D}}_i^e + \underline{\underline{D}}_i^p \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.8})$$

Taux de déformation élastique:  $\underline{\underline{D}}^e$

N.B.: la dérivée de Jaumann du tenseur des contraintes de Kirchhoff est ici considérée comme une variable indépendante.

$$\underline{\underline{D}}^e = \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\tau}}^J$$

$$\text{Ordre } i: \underline{\underline{D}}_i^e = \underline{\underline{M}}_i : \underline{\underline{\tau}}_i^J \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.9})$$

Loi d'écoulement:

$$\tau_{II}^d \underline{\underline{D}}^p = \frac{3}{2} \dot{\lambda} \underline{\underline{\tau}}^d$$



$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \underline{D}_0^p = \frac{3}{2} \frac{\lambda_1}{\tau_{II_0}^d} \underline{T}_0^d \\ \text{Ordre } i: \underline{D}_i^p = \frac{3}{2\tau_{II_0}^d} (i+1)\lambda_{i+1} \underline{T}_0^d + \underline{D}_i^{pNL} \text{ pour } i \geq 1 \\ \underline{D}_i^{pNL} = \frac{1}{\tau_{II_0}^d} \left[ \sum_{r=0}^{i-1} \left( \frac{3}{2}(r+1)\lambda_{r+1} \underline{T}_{i-r}^d - \tau_{II_{i-r}}^d \underline{D}_r^p \right) \right] \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

Surface de plasticité:  $f$

$$f = \tau_{II}^d - A$$

$$\text{Ordre } i: f_i = \tau_{II_i}^d - A_i \text{ pour } i \geq 0 \quad (\text{C.11})$$

Contrainte équivalente:  $\tau_{II}^d$

$$\tau_{II}^d = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{T}^d : \underline{T}^d + \eta_R^2 \tau_R^2}$$

Ces formules sont obtenues en reportant les séries dans:  $\tau_{II}^d \tau_{II}^d = \frac{3}{2} \underline{T}^d : \underline{T}^d + \eta_R^2 \tau_R^2$

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \tau_{II_0}^d = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{T}_0^d : \underline{T}_0^d + \eta_R^2 \tau_R^2} \\ \text{Ordre } i: \frac{3}{2\tau_{II_0}^d} \underline{T}_0^d : \underline{T}_i^d + \tau_{II_i}^{dNL} \text{ pour } i \geq 1 \\ \tau_{II_i}^{dNL} = \frac{1}{\tau_{II_0}^d} \sum_{r=1}^{i-1} \left( \frac{3}{4} \underline{T}_{i-r}^d : \underline{T}_{i-r}^d - \frac{1}{2} \tau_{II_r}^d \tau_{II_{i-r}}^d \right) \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Contrainte de limite élastique:  $A$

$$A = k(\alpha + \bar{\epsilon}^p)^n$$

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } A_0 = k(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)^n \\ \text{Ordre } i: A_i = \frac{n A_0 \lambda_i}{(\alpha + \bar{\epsilon}_i^p)} + A_i^{NL} \text{ pour } i \geq 1 \\ A_i^{NL} = \frac{1}{(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)} \sum_{r=1}^{i-1} (n(i-r) - r) A_r \lambda_{i-r} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Expression de la contrainte de Kirchhoff:  $\underline{\tau}$

$$\underline{\tau}^J = \underline{\dot{\tau}} + \underline{\tau} \cdot \underline{W} - \underline{W} \cdot \underline{\tau}$$

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_0^J - \tau_0 \cdot \underline{W}_0 + \underline{W}_0 \cdot \underline{\tau}_0 \\ \text{Ordre } i: \tau_{i+1} = \frac{1}{i+1} [\underline{\tau}_i^J - \tau_0 \cdot \underline{W}_i + \underline{W}_i \cdot \underline{\tau}_0 - \underline{\tau}_i^{JNL}] \text{ pour } i \geq 1 \\ \underline{\tau}_i^{JNL} = \sum_{r=1}^i (\underline{\tau}_r \cdot \underline{W}_{i-r} - \underline{W}_{i-r} \cdot \underline{\tau}_r) \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

Multiplicateur plastique:  $\lambda$

Le développement du multiplicateur est obtenu à partir de la régularisation de la loi d'écoulement :  $f \cdot \lambda = \eta \cdot f_{init}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre } 0 : \lambda_0 = \eta \frac{f_{init}}{f_0} \\ \text{Ordre } i : \lambda_i = -\frac{\lambda_0}{f_0 f_i + \lambda_i^{NL}} \text{ pour } i \geq 1 \\ \lambda_i^{NL} = -\sum_{r=1}^{i-1} \frac{\lambda_r f_{i-r}}{f_0} \end{array} \right. \quad (C.15)$$

## C.2 Condensation des équations à l'ordre $i$

Pour l'écriture du logiciel, il est commode d'écrire la loi de comportement à l'ordre  $i$  sous la forme habituelle :

$$\underline{\underline{D}}_i = \underline{\underline{M}}^{ep} : \underline{\underline{\tau}}_i^J + \underline{\underline{D}}_i^{res}$$

où  $\underline{\underline{D}}_i$  et  $\underline{\underline{\tau}}_i^J$  sont les coefficients du développement à l'ordre  $i$  du taux de déformation et de la dérivée de Jaumann de la contrainte de Kirchhoff.  $\underline{\underline{M}}^{ep}$  ne peut être autre chose que la compliance élastoplastique classique et  $\underline{\underline{D}}_i^{res}$  est le résidu du développement asymptotique à l'ordre  $i$ , qui dépend des termes d'ordre inférieur à  $i$ . L'expression de ce  $\underline{\underline{D}}_i^{res}$  s'obtient par condensation des 15 équations obtenues précédemment.

En introduisant l'équation (C.11) dans l'équation (C.15), on obtient :

$$\lambda_i = -\frac{\lambda_0}{f_0} (\tau_{II_i}^d - A_i) + \lambda_i^{NL}. \quad (C.16)$$

En remplaçant dans l'équation (C.16)  $\tau_{II_i}^d$  et  $A_i$  par leur définition (C.12) et (C.13) respectivement, on obtient :

$$\lambda_i = -\frac{\lambda_0}{f_0} X \frac{3}{2\tau_{II_0}^d} + \lambda_i^{NL2} \quad (C.17)$$

avec  $\lambda_i^{NL2} = \frac{\lambda_0}{f_0} X (A_i^{NL} - \tau_{II_i}^{dNL})$  et  $X = \frac{f_0(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)}{f_0(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p) - \lambda_0 n A_0}$

En introduisant l'équation (C.17) dans l'équation (C.10), on obtient :

$$\underline{\underline{D}}_i^p = \frac{9}{4} \frac{X}{\tau_{II_0}^d \tau_{II_0}^d} \frac{\lambda_0}{f_0} (i+1) (\underline{\underline{\tau}}_0^d : \underline{\underline{\tau}}_{i+1}^d) \underline{\underline{\tau}}_0^d + \underline{\underline{D}}_i^{pNL2} \quad (C.18)$$

avec  $\underline{\underline{D}}_i^{pNL2} = \underline{\underline{D}}_i^{pNL} + \frac{3}{2\tau_{II_0}^d} (i+1) \lambda_{i+1}^{NL2} \underline{\underline{\tau}}_0^d$

Or, on a :  $(\underline{\underline{\tau}}_0^d : \underline{\underline{\tau}}_{i+1}^d) \underline{\underline{\tau}}_0^d = (\underline{\underline{\tau}}_0^d \otimes \underline{\underline{\tau}}_0^d) : \underline{\underline{\tau}}_{i+1}^d = (\underline{\underline{\tau}}_0^d \otimes \underline{\underline{\tau}}_0^d) : \underline{\underline{\tau}}_{i+1}$ . Alors (C.18) devient :

$$\underline{\underline{D}}_i^p = \frac{9}{4} \frac{X}{\tau_{II_0}^d \tau_{II_0}^d} \frac{\lambda_0}{f_0} (i+1) (\underline{\underline{\tau}}_0^d \otimes \underline{\underline{\tau}}_0^d) : \underline{\underline{\tau}}_{i+1} + \underline{\underline{D}}_i^{pNL2} \quad (C.19)$$

En substituant  $\underline{\tau}_{i+1}$  par sa définition (C.14) et en constatant que  $(\underline{\tau}_0^d \otimes \underline{\tau}_0^d) : (-\underline{\tau}_0 \cdot \underline{W}_i + \underline{W}_i \cdot \underline{\tau}_0) = \underline{0}$ , on obtient finalement :

$$\underline{D}_i = \underline{\underline{M}}^{ep} : \underline{\tau}_i^J + \underline{D}_i^{res} \quad (\text{C.20})$$

$$\text{avec : } \underline{\underline{M}}^{ep} = \underline{\underline{M}} - \frac{9}{4} \frac{X}{\tau_{I10}^d \tau_{II10}^d} \frac{\lambda_0}{f_0} \underline{\tau}_0^d \otimes \underline{\tau}_0^d \quad \text{et} \quad \underline{D}_i^{res} = \frac{9}{4} \frac{X}{\tau_{I10}^d \tau_{II10}^d} \frac{\lambda_0}{f_0} (\underline{\tau}_0^d \otimes \underline{\tau}_0^d) : \underline{\tau}_i^{JNL} + \underline{D}_i^{pNL2}$$

### C.3 Définition du vecteur $F_i^{NL*}$

En injectant les développements de la loi de comportement (III.42) dans les équations d'équilibre (III.38), et en regroupant tous les termes qui ne dépendent que des ordres inférieurs à l'ordre  $i$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle F_i^{NL*}, \delta \underline{v} \rangle = & - \int_{\Omega_0} \sum_{r=1}^{i-1} i(\underline{\tau}_r \cdot \underline{f}_{i-r}^t) : \delta \underline{L} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \underline{\tau}_{i-1}^{JNL} : \delta \underline{L} d\Omega_0 \\ & - \int_{\Omega_0} i(\underline{\tau}_0 \cdot \underline{f}_i^{NL}) : \delta \underline{L} d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \{ \underline{\underline{C}}^{ep} : [\underline{D}_{i-1}^{pNL2} - K(\underline{\tau}_0^d \otimes \underline{\tau}_0^d) : \underline{\tau}_{i-1}^{JNL}] \} : \delta \underline{L} d\Omega_0 \\ & + \int_{\Omega_0} (\underline{\tau}_0 \cdot \underline{W}_{i-1}^{NL}) : \delta \underline{L} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\underline{W}_{i-1}^{NL} \cdot \underline{\tau}_0) : \delta \underline{L} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} (\underline{\underline{C}}^{ep} : \underline{D}_{i-1}^{NL}) : \delta \underline{L} d\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

où  $\underline{\underline{C}}^{ep}$  est la raideur, qui est le tenseur inverse de la compliance  $\underline{\underline{M}}$ .



## ANNEXE D

# Application de la M.A.N. au modèle élastoplastique de J. C. Simo

## D.1 Obtention des systèmes d'équations (III.88) et (III.90)

Cette annexe présente les développements de tous les coefficients qui permettent d'obtenir les équations (III.88) et (III.90). D'après ces équations, les principales inconnues sont  $\underline{u}$ ,  $P$  et  $\theta$ . Les nouvelles inconnues deviennent les coefficients correspondant aux développements asymptotiques qui sont notés  $\underline{u}_0, \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots$ , pour  $\underline{u}$ ,  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , pour  $P$  et  $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$ , pour  $\theta$ .

Ainsi de la définition:  $\underline{F} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{X}} = \underline{I} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}}$ , il est facile d'obtenir à partir des développements de  $\underline{F}$  et de  $\underline{u}$ :

$$\underline{F}_0 = \underline{I} + \frac{\partial \underline{u}_0}{\partial \underline{X}}, \quad \underline{F}_i = \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial \underline{X}}, \quad \text{pour } i \geq 1 \quad (\text{D.1})$$

Six étapes sont nécessaires pour obtenir les développements de tous les coefficients :

1) Etablir les relations entre les coefficients de  $\underline{T}$  et ceux de  $J$ ,  $P$ ,  $\underline{F}$  et  $\underline{S}_D$  à l'aide de l'équation (III.87).

2) Obtenir les relations entre les coefficients de  $\underline{S}_D$  et ceux de  $J$ ,  $\underline{C}^{p-1}$  et  $\underline{F}$  à l'aide de l'équation (III.61)

3) Donner les développements de  $\underline{C}^{p-1}$  à l'aide des équations (III.65), (III.66), (III.70), (III.71), (III.73), (III.76), (III.79) et (III.81).

4) Dédire les relations entre les coefficients de  $J$ , et ceux de  $\underline{F}$ .

5) Développement du paramètre de chargement  $\mu$ .

6) Etablissement des systèmes d'équations pour chaque nouvelle inconnue.

### D.1.1 Relations entre les coefficients de $\underline{T}$ et ceux de $J, P, \underline{F}$ et $\underline{S}_D$

Pour obtenir les coefficients de  $\underline{T}$  en fonction des coefficients de  $J, P, \underline{F}$  et  $\underline{S}_D$ , il est nécessaire d'avoir les développements des variables  $\underline{T}_V$  et  $\underline{T}_D$  grâce à l'équation (III.87<sub>3</sub>). Pour simplifier les notations, on rappelle ici que:  $\underline{F}^{-1} = \underline{f}$ . De plus, comme la relation (III.87<sub>2</sub>) est cubique nous la transformons sous une forme quadratique en ajoutant cette nouvelle variable  $P_J = PJ$ . Par conséquent, (III.87<sub>2</sub>) peut être réécrite:

$$\underline{T}_V = P_J \underline{f}^t, \quad \text{avec } P_J = PJ, \quad \underline{F} \cdot \underline{f} = \underline{I} \quad (\text{D.2})$$

Parce que (III.87<sub>1</sub>) est linéaire, il est trivial d'obtenir:

$$\underline{T}_{\underline{0}} = \underline{T}_{V_0} + \underline{T}_{D_0}, \quad (\text{D.3})$$

$$\underline{T}_{\underline{i}} = \underline{T}_{V_i} + \underline{T}_{D_i} \quad \text{pour } i \geq 1$$

L'équation (D.2) nous permet aussi d'écrire:

$$\underline{T}_{V_0} = P_{J_0} \underline{f}_{\underline{0}}^t, \quad (\text{D.4})$$

$$\underline{T}_{V_i} = P_{J_0} \underline{f}_{\underline{i}}^t + P_{J_i} \underline{f}_{\underline{0}}^t + \underline{R}_{T_V}, \quad \underline{R}_{T_V} = \sum_{r=1}^{i-1} P_{J_r} \underline{f}_{\underline{i-r}}^t, \quad \text{pour } i \geq 1$$

où  $\underline{R}_{T_V}$  est introduit pour représenter les termes ne dépendant que des autres termes aux ordres précédant l'ordre  $i$ . A présent, nous représentons par  $\underline{R}_{(\cdot)}$  pour les tenseurs et par  $R_{(\cdot)}$  pour les scalaires, les termes dépendants des autres termes aux ordres précédents l'ordre  $i$ .

De la même manière, à partir de (D.2<sub>2</sub>) et (D.2<sub>3</sub>), on obtient:

$$P_{J_0} = P_0 J_0, \quad P_{J_i} = P_0 J_i + P_i J_0 + R_{P_J}, \quad (\text{D.5})$$

$$R_{P_J} = \sum_{r=1}^{i-1} P_r J_{i-r}, \quad \text{pour } i \geq 1$$

et

$$\underline{F}_{\underline{0}} \cdot \underline{f}_{\underline{0}} = \underline{I}, \quad \underline{f}_{\underline{0}} = \underline{F}_{\underline{0}}^{-1}, \quad \underline{f}_{\underline{i}} = -\underline{f}_{\underline{0}} \cdot \underline{F}_{\underline{i}} \cdot \underline{f}_{\underline{0}} + \underline{R}_f, \quad (\text{D.6})$$

$$\underline{R}_f = -\underline{f}_{\underline{0}} \cdot \sum_{r=1}^{i-1} \underline{F}_{\underline{r}} \cdot \underline{f}_{\underline{i-r}}, \quad i \geq 1$$

De plus, à partir de (III.87<sub>3</sub>) nous pouvons déduire:

$$\underline{T}_{D_0} = \underline{F}_{\underline{0}} \cdot \underline{S}_{D_0}, \quad \underline{T}_{D_i} = -\underline{F}_{\underline{0}} \cdot \underline{S}_{D_i} + \underline{F}_{\underline{i}} \cdot \underline{S}_{D_0} + \underline{R}_{T_D}, \quad \underline{R}_{T_D} = \sum_{r=1}^{i-1} \underline{F}_{\underline{r}} \cdot \underline{S}_{D_{i-r}}, \quad i \geq 1 \quad (\text{D.7})$$

Finalement, les relations entre les coefficients de  $\underline{T}$  et ceux de  $J$ ,  $P$ ,  $\underline{F}$  et  $\underline{S}_D$  peuvent être établies en substituant les équations (D.4) et (D.7) dans l'équation (D.3). Elles s'expriment par :

$$\begin{aligned}\underline{T}_0 &= P_0 J_0 \underline{F}_0^{-1t} + \underline{F}_0 \cdot \underline{S}_{D_0}, \\ \underline{T}_i &= -P_{J_0} f_0^t \cdot \underline{F}_i^t \cdot f_0^t + \underline{F}_i \cdot \underline{S}_{D_0} + P_0 J_i f_0^t + \underline{F}_0 \underline{S}_{D_i} + \\ &P_i J_0 f_0^t + P_{J_0} \underline{R}_f^t + R_{P_J} f_0^t + \underline{R}_{TV} + \underline{R}_{TD}, \quad i \geq 1.\end{aligned}\tag{D.8}$$

### D.1.2 Relations entre les coefficients de $\underline{S}_D$ et ceux de $J$ , $\underline{C}^{p-1}$ et $\underline{F}$

Comme l'équation (III.61<sub>4</sub>) est une fonction complexe, nous la transformons sous forme quadratique que l'on note :

$$\begin{aligned}\underline{S}_D &= \beta J^M \underline{E}^B, \quad \underline{E}^B = \underline{B} - \frac{1}{3} e \underline{C}^M, \quad e = \underline{C} \cdot \underline{B}, \\ J^M &= J^{-\frac{2}{3}}, \quad \underline{C}^M = \underline{C}^{-1}, \quad \underline{B} = \underline{C}^{-1}\end{aligned}\tag{D.9}$$

où quelques variables supplémentaires sont ajoutées :  $\underline{E}^B$ ,  $e$ ,  $J^M$ ,  $\underline{C}^M$ . La variable  $\underline{B}$  est introduite pour noter plus facilement la variable  $\underline{C}^{p-1}$  mais ce n'est pas une variable supplémentaire. Les équations (D.9) étant quadratiques, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\underline{S}_{D_0} &= \beta J_0^M \underline{E}_0^B, \quad \underline{S}_{D_i} = \beta (J_0^M \underline{E}_i^B + J_i^M \underline{E}_0^B) + \underline{R}_{S_D}, \\ \underline{R}_{S_D} &= \beta \sum_{r=1}^{r=i-1} J_r^M \underline{E}_{i-r}^B \quad i \geq 1,\end{aligned}\tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}\underline{E}_0^B &= \underline{B}_0 - \frac{1}{3} e_0 \underline{C}_0^M, \\ \underline{E}_i^B &= -\frac{1}{3} (e_0 \underline{C}_i^M + e_i \underline{C}_0^M) + \underline{B}_i + \underline{R}_{EB}, \\ \underline{R}_{EB} &= -\frac{1}{3} \sum_{r=1}^{r=i-1} e_r \underline{C}_{i-r}^M \quad i \geq 1,\end{aligned}\tag{D.11}$$

et

$$\begin{aligned}e_0 &= \underline{C}_0 : \underline{B}_0, \quad e_i = \underline{C}_0 : \underline{B}_i + \underline{C}_i : \underline{B}_0 + R_e \\ R_e &= \sum_{r=1}^{r=i-1} \underline{C}_r : \underline{B}_{i-r}, \quad i \geq 1,\end{aligned}\tag{D.12}$$

En ce qui concerne les développements des coefficients de  $J^M$  de l'équation (D.94), nous utilisons la relation  $JJ^M = -\frac{2}{3}J^M J$ . On a alors :

$$J_0^M = J_0^{-\frac{2}{3}}, \quad J_i^M = -\frac{2}{3J_0}J_0^M J_i + R_{JM},$$

$$R_{JM} = -\frac{2}{3J_0} \sum_{r=1}^{i-1} (1 + \frac{r}{2i}) J_r^M J_{i-r}, \quad i \geq 1,$$
(D.13)

Pour la relation (D.95), nous pouvons utiliser la même procédure que pour les développements de  $\underline{\underline{F}}^{-1}$  en utilisant la relation  $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^M = \underline{\underline{I}}$ . Par conséquent, les développements de  $\underline{\underline{C}}^M$  peuvent s'écrire :

$$\underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{C}}^M = \underline{\underline{I}}, \quad \underline{\underline{C}}_0^M = \underline{\underline{C}}_0^{-1}, \quad \underline{\underline{C}}_i^M = \underline{\underline{C}}_0^M \cdot \underline{\underline{C}}_i \cdot \underline{\underline{C}}_0^M + \underline{\underline{R}}_{CM}$$

$$\underline{\underline{R}}_{CM} = -\underline{\underline{C}}_0^M \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{C}}_r : \underline{\underline{C}}_{i-r}^M, \quad i \geq 1,$$
(D.14)

Comme  $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^t \cdot \underline{\underline{F}}$ , ses développements en fonction de ceux de  $\underline{\underline{F}}$  se déduisent directement :

$$\underline{\underline{C}}_0 = \underline{\underline{F}}_0^t \cdot \underline{\underline{F}}_0, \quad \underline{\underline{C}}_i = \underline{\underline{F}}_0^t \cdot \underline{\underline{F}}_i + \underline{\underline{F}}_i^t + \underline{\underline{F}}_0 + \underline{\underline{R}}_C$$

$$\underline{\underline{R}}_C = \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{F}}_r^t \cdot \underline{\underline{F}}_{i-r}, \quad i \geq 1,$$
(D.15)

En introduisant successivement (D.11)-(D.15) dans (D.10), nous obtenons :

$$\underline{\underline{S}}_{D_0} = \beta J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{F}}_0^M \cdot \{ \underline{\underline{B}}^* - \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{B}}^*) \underline{\underline{I}} \} \cdot \underline{\underline{F}}_0^{Mt},$$

$$\underline{\underline{S}}_{D_i} = \frac{2}{3} \beta J_0^M \underline{\underline{F}}_0^M \cdot \{ e_0 \underline{\underline{D}}_i^* - (\underline{\underline{D}}_i^* : \underline{\underline{B}}^*) \underline{\underline{I}} - \frac{J_i}{J_0} (\underline{\underline{B}}^* - \frac{1}{3} e_0 \underline{\underline{I}}) \} \cdot \underline{\underline{F}}_0^{Mt},$$

$$+ \beta J_0^M \underline{\underline{F}}_0^M \cdot \{ \underline{\underline{B}}_i^* - \frac{1}{3} \text{trace}(\underline{\underline{B}}_i^*) \underline{\underline{I}} \} \cdot \underline{\underline{F}}_0^{Mt},$$

$$\frac{1}{3} \beta J_0^M \underline{\underline{F}}_0^M \cdot \{ e_0 (\underline{\underline{R}}_C^* - \underline{\underline{R}}_{CM}^*) - \underline{\underline{R}}_C^* : \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{I}} - R_e \underline{\underline{I}} \} \cdot \underline{\underline{F}}_0^{Mt},$$

$$+ \underline{\underline{F}}_0^M \cdot \{ \beta J_0^M \underline{\underline{R}}_{EB}^* + \beta R_{JM} (\underline{\underline{B}}^* - \frac{1}{3} e_0 \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{R}}_{SD}^*) \} \cdot \underline{\underline{F}}_0^{Mt},$$
(D.16)

avec

$$\underline{\underline{D}}_i^* = \frac{1}{2} (\underline{\underline{I}}_i^* + \underline{\underline{I}}_i^{*t}),$$

$$\underline{\underline{I}}_i^* = \underline{\underline{F}}_i \cdot \underline{\underline{F}}_0^{-1}, \quad \underline{\underline{B}}_0^* = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{B}}_0 \cdot \underline{\underline{F}}_0^t,$$

$$\underline{\underline{B}}_i^* = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{B}}_i \cdot \underline{\underline{F}}_0^t, \quad \underline{\underline{R}}_{CM}^* = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{R}}_{CM} \cdot \underline{\underline{F}}_0^t$$

$$\underline{\underline{R}}_{EB}^* = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{R}}_{EB} \cdot \underline{\underline{F}}_0^t, \quad \underline{\underline{R}}_{SD}^* = \underline{\underline{F}}_0 \cdot \underline{\underline{R}}_{SD} \cdot \underline{\underline{F}}_0^t$$

$$\underline{\underline{R}}_C^* = \underline{\underline{f}}_0^t \cdot \underline{\underline{R}}_C \cdot \underline{\underline{f}}_0 \quad i \geq 1.$$



### D.1.3 Développement des coefficients de $\underline{\underline{C}}^{p-1}$

Comme nous l'avons spécifié dans le paragraphe précédent,  $\underline{\underline{C}}^{p-1}$  est représenté par le symbole  $\underline{\underline{B}}$ . Nous noterons dans ce paragraphe, sa première dérivée par rapport au temps  $\underline{\underline{\dot{B}}}$ . A partir des développements de  $\underline{\underline{B}}$  il est facile d'obtenir ceux de  $\underline{\underline{\dot{B}}}$ :

$$\underline{\underline{\dot{B}}}_0 = \underline{\underline{B}}_1, \quad \underline{\underline{\dot{B}}}_{i-1} = i\underline{\underline{B}}_i, \quad i \geq 1. \quad (D.17)$$

On peut noter:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{B}}} &= \underline{\underline{\dot{\lambda}}}\underline{\underline{Q}}, \quad \text{avec} \quad \underline{\underline{Q}} = a\underline{\underline{S}}_D + b\underline{\underline{T}}_D^q + c\underline{\underline{C}}^M, \quad \underline{\underline{T}}_D^q = \underline{\underline{T}}_D^t \underline{\underline{T}}_D^D, \\ a &= -\frac{e}{\bar{\tau}^B}, \quad b = -\frac{3}{\beta} \frac{\bar{\tau}^I}{JM}, \quad c = -\frac{2}{3\beta} \frac{\bar{\tau}^B}{JM}, \end{aligned} \quad (D.18)$$

$$\bar{\tau}^I = \frac{1}{\bar{\tau}^B}, \quad \bar{\tau}^B = \sqrt{\bar{\tau}^c + \eta_\tau^2 A_R^2}, \quad \bar{\tau}^c = \frac{3}{2} \underline{\underline{T}}_D^q : \underline{\underline{C}}.$$

Pour obtenir les développements de  $\underline{\underline{B}}$ , nous devons au préalable déterminer les coefficients de  $\underline{\underline{\dot{\lambda}}}$  et de  $\underline{\underline{Q}}$ . Nous devons également développer les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\bar{\tau}^I$ ,  $\bar{\tau}^B$ ,  $\bar{\tau}^c$ , et de  $\underline{\underline{T}}_D^q$ .

#### Développements de $\underline{\underline{\dot{\lambda}}}$

A partir de l'équation (III.71) nous pouvons exprimer les développements de  $\bar{\epsilon}^p$  à l'aide de ceux de  $\underline{\underline{\dot{\lambda}}}$ :

$$\bar{\epsilon}_0^p = \bar{\epsilon}_0^p \text{ est donné, } \bar{\epsilon}_i^p = \frac{1}{i} \underline{\underline{\dot{\lambda}}}_{i-1}, \quad i \geq 1. \quad (D.19)$$

En utilisant l'équation (III.65), la relation  $(\alpha + \bar{\epsilon}^p)\dot{A} = nA\dot{\bar{\epsilon}}^p$  et (D.19), nous obtenons:

$$A_0 = k(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)^n, \quad A_i = \frac{nA_0 \underline{\underline{\dot{\lambda}}}_{i-1}}{i(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)} + R_B, \quad (D.20)$$

$$R_B = \frac{1}{i(\alpha + \bar{\epsilon}_0^p)} \sum_{r=0}^{i-1} \left(n - \frac{r}{i-r}\right) A_r \underline{\underline{\dot{\lambda}}}_{i-r-1}, \quad i \geq 1.$$

à partir de la relation (D.18<sub>3</sub>), on obtient les développements de  $\underline{\underline{T}}_D^q$ :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}}_{D_0}^q &= \underline{\underline{T}}_{D_0}^t \underline{\underline{T}}_{D_0}^D, \quad \underline{\underline{T}}_{D_i}^q = \underline{\underline{T}}_{D_0}^t \underline{\underline{T}}_{D_i}^D + \underline{\underline{T}}_{D_i}^t \underline{\underline{T}}_{D_0}^D + \underline{\underline{R}}_{T_D^q}, \\ \underline{\underline{R}}_{T_D^q} &= \sum_{r=0}^{i-1} \underline{\underline{T}}_{D_r}^t \underline{\underline{T}}_{D_{i-r}}^D, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.21)$$

De la même manière, à partir de (D.18<sub>9</sub>):

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0^c &= \frac{3}{2} \underline{\underline{T}}_{D_0}^q : \underline{\underline{C}}_0, \quad \bar{\tau}_i^c = \frac{3}{2} (\underline{\underline{T}}_{D_0}^q : \underline{\underline{C}}_i + \underline{\underline{T}}_{D_i}^q : \underline{\underline{C}}_0) + R_{\bar{\tau}^c}, \\ R_{\bar{\tau}^c} &= \frac{3}{2} \sum_{r=1}^{i-1} (\underline{\underline{T}}_{D_r}^q : \underline{\underline{C}}_{i-r}), \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.22)$$

Pour les développements de  $\bar{\tau}^B$ , nous avons besoins de la relation  $(\bar{\tau}^c + \eta_r^2 A_R^2) \dot{\bar{\tau}}^B = \frac{1}{2} \bar{\tau}^B \dot{\bar{\tau}}^c$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0^B &= \sqrt{\bar{\tau}_0^c + \eta_r^2 A_R^2}, \quad \bar{\tau}_i^B = \frac{\bar{\tau}_0^B \bar{\tau}_i^c}{2(\bar{\tau}_0^c + \eta_r^2 A_R^2)} + R_{\bar{\tau}^B}, \\ R_{\bar{\tau}^B} &= \frac{1}{2(\bar{\tau}_0^c + \eta_r^2 A_R^2)} \sum_{r=1}^{i-1} (1 - \frac{3r}{i}) \bar{\tau}^r \bar{\tau}_{i-r}^c, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.23)$$

Finalement, on obtient pour les développements de  $\dot{\lambda}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 &= \frac{\eta_{tR} A_R}{t_R} \frac{1}{A_0 - \bar{\tau}_0^B}, \quad \dot{\lambda}_i = \frac{\dot{\lambda}_0}{A_0 - \bar{\tau}_0^B} (\bar{\tau}_i^B - A_i) + R_{\dot{\lambda}}, \\ R_{\dot{\lambda}} &= \frac{1}{A_0 - \bar{\tau}_0^B} \sum_{r=1}^{i-1} \dot{\lambda}_r (\bar{\tau}_{i-r}^B - A_{i-r}) \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.24)$$

### Développements des coefficients de $\underline{\underline{Q}}$

En utilisant la même technique que dans le paragraphe précédent, nous pouvons déterminer les développements de  $\underline{\underline{Q}}$  en utilisant successivement les développements de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , et  $\bar{\tau}^I$ .

Pour les développements de  $a$ , nous utilisons la relation (D.18<sub>4</sub>), qui peut être réécrite:  $a \bar{\tau}^B = -e$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{e_0}{\bar{\tau}_0^B}, \quad a_i = \frac{e_i + a_0 \bar{\tau}_i^B}{\bar{\tau}_0^B} + R_a, \\ R_a &= -\frac{1}{\bar{\tau}_0^B} \sum_{r=1}^{i-1} a_r \bar{\tau}_{i-r}^B, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.25)$$

De la même manière, nous obtenons les coefficients de  $b$ ,  $c$  et  $\bar{\tau}^I$  en utilisant respectivement les équations (D.18<sub>5-7</sub>).

Pour  $b$  :

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{\beta} \frac{\bar{\tau}_0^B}{J_0^M}, \quad b_i = \frac{1}{J_0^M} (\frac{3}{\beta} \bar{\tau}_i^I + b_0 J_i^M) + R_b, \\ R_b &= -\frac{1}{J_0^M} \sum_{r=1}^{i-1} b_r J_{i-r}^M, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.26)$$

Pour  $c$  :

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{2}{3\beta} \frac{\bar{\tau}_0^B}{J_0^M}, \quad c_i = \frac{1}{J_0^M} (\frac{2}{3\beta} \bar{\tau}_i^B - c_0 J_i^M) + R_c, \\ R_c &= -\frac{1}{J_0^M} \sum_{r=1}^{i-1} c_r J_{i-r}^M, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.27)$$

Pour  $\bar{\tau}^I$  :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_0^I &= \frac{1}{\bar{\tau}_0^B}, \quad \bar{\tau}_i^I = -\frac{1}{\bar{\tau}_0^B} \bar{\tau}_0^I \bar{\tau}_i^B + R_{\bar{\tau}^I}, \\ R_{\bar{\tau}^I} &= -\frac{1}{\bar{\tau}_0^B} \sum_{r=1}^{i-1} \bar{\tau}_r^I \bar{\tau}_{i-r}^B, \quad i \geq 1. \end{aligned} \quad (D.28)$$

Finalement, on obtient pour  $\underline{\underline{Q}}$  :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{Q}}_0 &= a_0 \underline{\underline{S}}_{D_0} + b_0 \underline{\underline{T}}_{D_0}^q + c_0 \underline{\underline{C}}_0^M, \\ \underline{\underline{Q}}_i &= a_0 \underline{\underline{S}}_{D_i} + a_i \underline{\underline{S}}_{D_0} + b_0 \underline{\underline{T}}_{D_i}^q + b_i \underline{\underline{T}}_{D_0}^q + \\ &c_0 \underline{\underline{C}}_i^M + c_i \underline{\underline{C}}_0^M + \underline{\underline{R}}_Q, \\ \underline{\underline{R}}_Q &= \sum_{r=1}^{i-1} (a_r \underline{\underline{S}}_{D_{i-r}} + b_r \underline{\underline{T}}_{D_{i-r}}^q + c_r \underline{\underline{C}}_{i-r}^M) \quad i \geq 1.\end{aligned}\tag{D.29}$$

On a alors directement les développements de  $\underline{\underline{B}}$  en tenant compte de l'équation (D.17) :

$$\underline{\underline{B}}_0 = \dot{\lambda}_0 \underline{\underline{Q}}_0, \quad \underline{\underline{B}}_i = \frac{1}{i} \sum_{r=0}^{i-1} \dot{\lambda}_r \underline{\underline{Q}}_{i-1-r} \quad i \geq 1.\tag{D.30}$$

Pour calculer complètement  $\underline{\underline{B}}_r$  avec  $r$  variant de 1 à  $i$ , nous avons encore besoin d'utiliser la relation (III.76) dont les développements peuvent être exprimés par :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{B}}_0 &= 0, \quad \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{B}}_1 = 0 \\ \underline{\underline{C}}_0 : \underline{\underline{B}}_i &= \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{i-1} (i-r) \underline{\underline{C}}_r : \underline{\underline{B}}_{i-r}, \quad i \geq 1.\end{aligned}\tag{D.31}$$

#### D.1.4 Relations entre les développements de $J$ et ceux de $\underline{\underline{F}}$

On sait que :

$$\dot{J} = J \text{trace}(\underline{\underline{l}}), \quad \underline{\underline{l}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \underline{\underline{F}}^{-1}\tag{D.32}$$

où  $\underline{\underline{l}}$  est le tenseur gradient de la vitesse.

Pour pouvoir obtenir les développements de  $J$  en fonction de ceux de  $\underline{\underline{F}}$ , il nous faut au préalable déterminer les développements de  $\underline{\underline{\dot{F}}}$ ,  $\underline{\underline{F}}^{-1}$  et  $\underline{\underline{l}}$ . Nous avons déjà effectué les développements de  $\underline{\underline{F}}^{-1}$ , nous présenterons donc uniquement les développements de  $\underline{\underline{\dot{F}}}$  et  $\underline{\underline{l}}$ . Ainsi, en développant  $\underline{\underline{F}}$  par rapport au temps on a :

$$\underline{\underline{\dot{F}}}_0 = \underline{\underline{F}}_1, \quad \underline{\underline{\dot{F}}}_{i-1} = \underline{\underline{F}}_i, \quad i \geq 1.\tag{D.33}$$

De la même manière, on obtient les relations entre  $J$  et  $\dot{J}$  :

$$\dot{J}_0 = J_1, \quad \dot{J}_{i-1} = J_i, \quad i \geq 1.\tag{D.34}$$

A partir de l'équation (D.32<sub>2</sub>) on a :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{l}}_0 &= \underline{\underline{F}}_1 \cdot \underline{\underline{F}}_0^{-1}, \quad \underline{\underline{l}}_{i-1} = i \underline{\underline{F}}_i \cdot \underline{\underline{F}}_0^{-1} + \underline{\underline{R}}_l, \\ \underline{\underline{R}}_l &= \sum_{r=1}^{i-1} r \underline{\underline{F}}_r \cdot \underline{\underline{F}}_{i-r}^M, \quad i \geq 1.\end{aligned}\tag{D.35}$$

Des relations (D.31) et (D.33) on a pour  $J$  :

$$\begin{aligned} J_0 &= \det(\underline{\underline{F}}_0), \quad J_i = \frac{1}{i} J_0 \text{trace}(\underline{\underline{l}}_{i-1}) + R_J, \\ R_J &= \sum_{r=1}^{i-1} J_r \text{trace}(\underline{\underline{l}}_{i-r-1}), \quad i \geq 1. \end{aligned} \tag{D.36}$$

En introduisant (D.35) et (D.36<sub>2</sub>), on a alors :

$$J_i = J_0 \text{trace}(\underline{\underline{F}}_i \underline{\underline{F}}_0^{-1}) + \frac{J_0}{i} \text{trace}(\underline{\underline{R}}_i) + R_J \quad i \geq 1. \tag{D.37}$$

### D.1.5 Développements du paramètre de chargement $\mu$

En ce qui concerne le paramètre  $\mu$ , il dépend du procédé de simulation et peut être considéré comme une fonction du temps. Nous considérons alors  $\mu$  comme une fonction du temps (ou d'un pseudo temps). Dans ce cas, ses développements peuvent être écrits comme suit :

$$\mu_0 = t_0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0, \dots, \mu_i = 0, \quad i \geq 1. \tag{D.38}$$

Tous ces développements nous permettent alors d'obtenir les systèmes (III.88) et (III.90).

## D.2 Relations exprimées dans la configuration $\Omega^{(0)}$

Pour le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff  $\underline{\underline{T}}$ , son tenseur transformé correspondant  $\underline{\underline{T}}^*$  dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  peut être écrit :

$$\underline{\underline{T}}^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t,$$

où le symbole  $(\bullet)^*$  représente la variable correspondant dans la configuration  $\Omega^{(0)}$ . Par conséquent, les transformations des parties volumique  $\underline{\underline{T}}_V$  et déviatorique  $\underline{\underline{T}}_D$  peuvent facilement être exprimées :

$$\underline{\underline{T}}_V^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{T}}_V \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t, \quad \underline{\underline{T}}_D^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{T}}_D \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t. \tag{D.39}$$

Comme  $\underline{\underline{T}}_V = P J \underline{\underline{F}}^{-1t} = P_J \underline{\underline{f}}^t$ ,  $\underline{\underline{T}}_V^*$  peut être encore réécrit :

$$\underline{\underline{T}}_V^* = P_J^* \underline{\underline{f}}^{*t}, \quad P_J^* = \frac{P_J}{J_{(0)}} = P J^*,$$

$$J^* = \frac{J}{J_{(0)}}, \quad \underline{f}^* = \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{f}, \quad (\text{D.40})$$

dans lesquelles  $P_J^*$  et  $J^*$  sont les variables transformées dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  de  $P_J$  et  $J$ , respectivement.  $\underline{f}^*$  représente celle correspondant au gradient inverse de la déformation  $\underline{f}$ .

De la même manière, en prenant en compte la relation  $\underline{T}_D = \underline{F} \cdot \underline{S}_D$ ,  $\underline{T}_D^*$  peut être reformulé :

$$\underline{T}_D^* = \underline{F}^* \cdot \underline{S}_D^*, \quad \underline{F}^* = \underline{F} \cdot \underline{F}_{(0)}^{-1}, \quad \underline{S}_D^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{S}_D \cdot \underline{F}_{(0)}^t. \quad (\text{D.41})$$

où  $\underline{F}^*$  et  $\underline{S}_D^*$  sont respectivement, les variables transformées dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  correspondant à  $\underline{F}$  et  $\underline{S}_D$ .

De plus, en utilisant les relations:

$$\underline{S}_D = \mu J^M \underline{E}^B, \quad \underline{E}^B = \underline{B} - \frac{1}{3} e \underline{C}^M, \quad e = \underline{C} : \underline{B},$$

$$J^M = J^{-2/3}, \quad \underline{C}^M = \underline{C}^{-1}, \quad \underline{B} = \underline{C}^{p-1}, \quad (\text{D.42})$$

nous pouvons calculer  $\underline{S}_D^*$  en utilisant toutes les variables exprimées dans la configuration  $\Omega^{(0)}$ . Nous obtenons :

$$\underline{S}_D^* = \mu^* J^{M*} \underline{E}^{B*}, \quad \underline{E}^{B*} = \underline{B}^* - \frac{1}{3} e \underline{C}^{M*}, \quad e = \underline{C}^* : \underline{B}^*,$$

$$J^{M*} = J_{(0)}^{2/3} J^M, \quad \underline{E}^{B*} = \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{E}^B \cdot \underline{F}_{(0)}^t, \quad \underline{B}^* = \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{F}_{(0)}^t,$$

$$\underline{C}^{M*} = \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{C}^M \cdot \underline{F}_{(0)}^t, \quad \underline{C}^* = \underline{F}_{(0)}^{-1t} \cdot \underline{C} \cdot \underline{F}_{(0)}^{-1}, \quad \mu^* = \mu \frac{J_{(0)}^{-2/3}}{J_{(0)}}. \quad (\text{D.43})$$

ici, les variables  $J^{M*}$ ,  $\underline{E}^{B*}$ ,  $\underline{B}^*$ ,  $\underline{C}^{M*}$ ,  $\underline{C}^*$  représentent les variables transformées dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  correspondant respectivement à  $J^M$ ,  $\underline{E}^B$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{C}^M$ ,  $\underline{C}$ .

De plus, pour pouvoir estimer  $\underline{B}^*$  en utilisant les quantités exprimées dans la configuration  $\Omega^{(0)}$  au point de départ des développements asymptotiques, nous devons transformer les relations suivantes :

$$\underline{\dot{B}} = \dot{\lambda} \underline{Q}, \quad \text{avec } \underline{Q} = a \underline{S}_D + b \underline{T}_D^q + c \underline{C}^M, \quad \underline{T}_D^q = \underline{T}_D^t \cdot \underline{T}_D,$$

$$a = -\frac{e}{\bar{\tau}^B}, \quad b = -\frac{3}{\mu} \frac{\bar{\tau}^I}{J^M}, \quad c = \frac{2}{3\mu} \frac{\bar{\tau}^B}{J^M}, \quad \bar{\tau}^I = \frac{1}{\bar{\tau}^B},$$

$$\bar{\tau}^B = \sqrt{\bar{\tau}^c + \eta_\tau^2 A_R^2}, \quad \bar{\tau}^c = \frac{3}{2} \underline{T}_D^q : \underline{C}, \quad \dot{\lambda} (\bar{\tau}^B - A) = -\eta \frac{A_R}{t_R}, \quad (\text{D.44})$$

et

$$\underline{\underline{C}} : \underline{\underline{B}} = 0 . \quad (D.45)$$

Puisque  $\underline{\underline{B}}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$  et  $\underline{\underline{F}}_{(0)}$  ne dépendent pas du temps, la dérivée par rapport au temps de  $\underline{\underline{B}}^*$  peut être écrite  $\dot{\underline{\underline{B}}}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \dot{\underline{\underline{B}}} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$ . Par conséquent, nous obtenons :

$$\dot{\underline{\underline{B}}}^* = \dot{\lambda} \underline{\underline{Q}}^* , \quad \underline{\underline{Q}}^* = a^* \underline{\underline{S}}_D^* + b^* \underline{\underline{T}}_D^{q*} + c^* \underline{\underline{C}}^{M*} ,$$

$$\underline{\underline{T}}_D^{q*} = \underline{\underline{T}}_D^{*t} \cdot \underline{\underline{T}}_D^* , \quad a^* = -\frac{e}{\bar{\tau}^{B*}} , \quad b^* = -\frac{3}{\mu^*} \frac{\bar{\tau}^{I*}}{J^{M*}} ,$$

$$c^* = \frac{2}{3\mu^*} \frac{\bar{\tau}^{B*}}{J^{M*}} , \quad \bar{\tau}^{I*} = \frac{1}{\bar{\tau}^{B*}} , \quad \bar{\tau}^{B*} = \sqrt{\bar{\tau}^{c*} + (\eta_r A_R^*)^2} ,$$

$$\bar{\tau}^{c*} = \frac{3}{2} \underline{\underline{T}}_D^{q*} : \underline{\underline{C}}^* , \quad \dot{\lambda} (\bar{\tau}^{B*} - A^*) = -\eta \frac{A_R^*}{t_R} ,$$

$$A^* = \frac{A}{J_{(0)}} , \quad A_R^* = \frac{A_R}{J_{(0)}} , \quad \underline{\underline{Q}}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t , \quad (D.46)$$

et

$$\underline{\underline{C}}^* : \underline{\underline{B}}^* = 0 , \quad (D.47)$$

Nous pouvons en déduire les coefficients de  $\underline{\underline{F}}^*$ ,  $\underline{\underline{f}}^*$ ,  $J^*$ ,  $\underline{\underline{C}}^*$ ,  $\underline{\underline{C}}^{M*}$ ,  $J^{M*}$ ,  $\underline{\underline{E}}^{B*}$ ,  $\underline{\underline{S}}_D^*$ ,  $\underline{\underline{T}}_D^*$ ,  $P_J^*$ ,  $\underline{\underline{T}}_V^*$ ,  $\underline{\underline{T}}_D^*$ ,  $\underline{\underline{T}}_D^{q*}$ ,  $\bar{\tau}^{c*}$ ,  $\bar{\tau}^{B*}$ ,  $A^*$ ,  $\bar{\tau}^{I*}$ ,  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$ ,  $\underline{\underline{Q}}^*$ ,  $\underline{\underline{B}}^*$  de la même manière que leurs variables correspondantes dans la configuration  $\Omega_0$ . Ainsi on a :

Les développements de  $\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^{-1}$ ,

$$\underline{\underline{F}}_{(0)}^* = \underline{\underline{I}} , \quad \underline{\underline{F}}_{(i)}^* = \underline{\underline{F}}_{(i)} \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^{-1} , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $\underline{\underline{f}}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{f}}$ ,

$$\underline{\underline{f}}_{(0)}^* = \underline{\underline{I}} , \quad \underline{\underline{f}}_{(i)}^* = -\underline{\underline{F}}_{(i)}^* + \underline{\underline{R}}_{FM}^* ,$$

$$\underline{\underline{R}}_{FM}^* = -\sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{F}}_{(r)}^* \cdot \underline{\underline{f}}_{(i-r)}^* , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $\underline{\underline{l}}$ ,

$$\underline{\underline{l}}_{(0)} = \underline{\underline{F}}_{(1)}^* , \quad \underline{\underline{l}}_{(i-1)} = i \underline{\underline{F}}_{(i)}^* + \underline{\underline{R}}_i$$

$$\underline{R}_i = \sum_{r=1}^{i-1} r \underline{F}_{(r)}^* \cdot \underline{f}_{(i-r)} \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $J^* = \frac{J}{J_{(0)}}$ ,

$$J_{(0)}^* = 1 , \quad J_{(i)}^* = \frac{1}{i} \text{tr} \, l_{(i-1)} + R_J^* ,$$

$$R_J^* = \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{i-1} J_{(r)}^* \text{tr} \, l_{(i-1-r)} , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $\underline{C}^* = \underline{F}_{(0)}^{-1t} \cdot \underline{C} \cdot \underline{F}_{(0)}^{-1}$ ,

$$\underline{C}_{(0)}^* = \underline{I} \cdot \underline{C}_{(i)}^* = \underline{F}_{(i)}^* + \underline{F}_{(i)}^{*t} + R_C^* ,$$

$$\underline{R}_C^* = \sum_{r=1}^{i-1} \underline{F}_{(r)}^{*t} \cdot \underline{F}_{(i-r)}^* , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $\underline{C}^{M*} = \underline{F}_{(0)} \cdot \underline{C}^M \cdot \underline{F}_{(0)}^t$ ,

$$\underline{C}_{(0)}^{M*} = \underline{I} , \quad \underline{C}_{(i)}^{M*} = -\underline{C}_{(i)}^* + \underline{R}_{CM}^* ,$$

$$\underline{R}_{CM}^* = -\sum_{r=1}^{i-1} \underline{C}_{(r)}^* \cdot \underline{C}_{(i-r)}^{M*} , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $J^{M*} = J_{(0)}^{2/3} J^M$ ,

$$J_{(0)}^{M*} = 1 , \quad J_{(i)}^{M*} = -\frac{2}{3} J_{(i)}^* + R_{JM}^* ,$$

$$R_{JM}^* = -\frac{2}{3} \sum_{r=1}^{i-1} \left( 1 + \frac{r}{2i} \right) J_{(r)}^{M*} J_{(i-r)}^* , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $e$ ,

$$e_{(0)} = \underline{C}_{(0)}^* : \underline{B}_{(0)}^* , \quad e_{(i)} = \underline{C}_{(i)}^* : \underline{B}_{(0)}^* + \underline{C}_{(0)}^* : \underline{B}_{(i)}^* + R_e ,$$

$$R_e = \sum_{r=1}^{i-1} \underline{C}_{(r)}^* : \underline{B}_{(i-r)}^* , \quad i \geq 1 .$$

Les développements de  $\underline{\underline{E}}^{B*} = \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{E}}^B \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$ ,

$$\underline{\underline{E}}_{(0)}^{B*} = \underline{\underline{B}}_{(0)}^* - \frac{1}{3} e_{(0)} I, \quad \underline{\underline{E}}_{(i)}^{B*} = -\frac{1}{3} \left( e_{(0)} \underline{\underline{C}}_{(i)}^{M*} + e_{(i)} I \right) + \underline{\underline{B}}_{(i)}^* + \underline{\underline{R}}_{E^B}^*,$$

$$\underline{\underline{R}}_{E^B}^* = -\frac{1}{3} \sum_{r=1}^{i-1} e_{(r)} \underline{\underline{C}}_{(i-r)}^{M*}, \quad i \geq 1.$$

Les développements de  $\underline{\underline{S}}_D^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{F}}_{(0)} \cdot \underline{\underline{S}}_D \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$ ,

$$\underline{\underline{S}}_{D(0)}^* = \mu^* J_{(0)}^{M*} \underline{\underline{E}}_{(0)}^{B*}, \quad \underline{\underline{S}}_{D(i)}^* = \mu^* \left( J_{(0)}^{M*} \underline{\underline{E}}_{(i)}^{B*} + J_{(i)}^{M*} \underline{\underline{E}}_{(0)}^{B*} \right) + \underline{\underline{R}}_{S_D}^*,$$

$$\underline{\underline{R}}_{S_D}^* = \mu^* \sum_{r=1}^{i-1} J_{(r)}^{M*} \underline{\underline{E}}_{(i-r)}^{B*}, \quad i \geq 1.$$

Les développements de  $\underline{\underline{T}}_D^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{T}}_D \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$ ,

$$\underline{\underline{T}}_{D(0)}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)}^* \cdot \underline{\underline{S}}_{D(0)}^*, \quad \underline{\underline{T}}_{D(i)}^* = \underline{\underline{F}}_{(0)}^* \cdot \underline{\underline{S}}_{D(i)}^* + \underline{\underline{F}}_{(i)}^* \cdot \underline{\underline{S}}_{D(0)}^* + \underline{\underline{R}}_{T_D}^*,$$

$$\underline{\underline{R}}_{T_D}^* = \sum_{r=1}^{i-1} \underline{\underline{F}}_{(r)}^* \cdot \underline{\underline{S}}_{D(i-r)}^*, \quad i \geq 1.$$

Les développements de  $P_J^* = \frac{P_J}{J_{(0)}}$ ,

$$P_{J(0)}^* = P_{(0)}, \quad P_{J(i)}^* = P_{(0)} J_{(i)}^* + P_{(i)} J_{(0)}^* + R_{P_J}^*,$$

$$R_{P_J}^* = \sum_{r=1}^{i-1} P_{(r)} J_{(i-r)}^*, \quad i \geq 1.$$

Les développements de  $\underline{\underline{T}}_V^* = \frac{1}{J_{(0)}} \underline{\underline{T}}_V \cdot \underline{\underline{F}}_{(0)}^t$ ,

$$\underline{\underline{T}}_{V(0)}^* = P_{J(0)}^* \underline{\underline{f}}_{(0)}^{*t}, \quad \underline{\underline{T}}_{V(i)}^* = P_{J(0)}^* \underline{\underline{f}}_{(i)}^{*t} + P_{J(i)}^* \underline{\underline{f}}_{(0)}^{*t} + \underline{\underline{R}}_{T_V}^*,$$

$$\underline{\underline{R}}_{T_V}^* = \sum_{r=1}^{i-1} P_{J(r)}^* \underline{\underline{f}}_{(i-r)}^{*t}, \quad i \geq 1.$$



# Bibliographie

- [1] ABAQUS Standard. *Version 5.8*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Pawtucket, RI, 1998.
- [2] ABICHOU H., ZAHROUNI H., and POTIER-FERRY M. A first attempt to simulate deep-drawing within an asymptotic numerical method. *Submitted to : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- [3] ALMROTH B. O. , BROGAN F. A., and STERN P. Automatic choice of global shape functions in structural analysis. *AIAA Journal*, 16:525–528, 1978.
- [4] AZRAR L., BENAMAR R., and POTIER-FERRY M. An asymptotic numerical method for large amplitude free vibrations of thin elastic plates. *Journal of Sounds and Vibrations*, Elsevier, Amsterdam, 220(4):695–727, 1999.
- [5] AZRAR L., COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. An asymptotic numerical method to compute bifurcation branches. *New Advances in Computational Structural Mechanics*, pages 117–131, 1992.
- [6] BAKER G. A. and GRAVES-MORRIS P. *Padé approximants, 2nd edition*. Cambridge University Press, 1996.
- [7] BATOZ J. L and DHATT G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1. Hermes, 1990.
- [8] BESSELING J. F. Nonlinear analysis of structures by the finite element method as a supplement to a linear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:173–194, 1974.
- [9] BOIVIN M. Contribution à l'étude des déformations finies dans les matériaux écrouissables. Thèse d'Etat, Université de Lyon, 1970.
- [10] BRAIKAT B. Méthode Asymptotique-Numérique et fortes non-linéarités. Thèse, Faculté des sciences Ben M'sik Casablanca, 1995.
- [11] BRAIKAT B. Quelques contributions dans l'application de la méthode asymptotique-numérique en mécanique. Thèse d'état, Faculté des sciences Ben M'sik Casablanca, 2000.
- [12] BRUNELOT J. Simulation de la mise en forme à chaud par la méthode asymptotique numérique. Thèse, Université de Metz, 1999.
- [13] BRUNET M. and BAHUAUD J. An incremental variational principle in elastic-plastic finite deformation analysis. Rapport du GRECO 'Grandes Déformations et Endommagement', 1985.
- [14] CADOU J. M., POTIER-FERRY M., COCHELIN B., and DAMIL N. Asymptotic numerical method for stationary navier-stokes equations and with petrov-galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:825–845, 2001.

- [15] CHARI R. Analyse non linéaire des structures en treillis par la m.e.f et influence de la procédure d'orthogonalisation et du produit scalaire sur les approximants de padé. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1997.
- [16] CHENOT J. L. La modélisation numérique des procédés de mise en forme des métaux. *La revue métallurgie-CIT/Science et Génie des Matériaux*, pages 1567–1576, 1993.
- [17] CHENOT J. L. New trends in finite element modelling of metal forming processes. In *Computational Plasticity*, pages 209–223, Barcelone, CIMNE, Fundamentals and Applications, 1997.
- [18] CHEN W. F. *Constitutive Equations for Engineering Materials, Vol.2: Plasticity and Modelling*. Elsevier, 1994.
- [19] COCHELIN B. Méthodes Asymptotiques-Numeriques pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. Flambage et délaminage dans les composites stratifiés. Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, 1994.
- [20] COCHELIN B. A path-following technique via an Asymptotic-Numerical Method. *Comp. and Struct.*, 53(5):1181–1192, 1994.
- [21] COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. The Asymptotic-Numerical Method: an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Revue Européenne des éléments finis*, 3(2):281–297, 1994.
- [22] COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. Asymptotic-Numerical Methods and Padé approximants for non-linear elastic structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:1187–1213, 1994.
- [23] DAYA E. M. and POTIER-FERRY M. A numerical method for nonlinear eigenvalue problems: application to vibrations of viscoelastic structures. *Computers and Structures*, 79:533–541, 2000.
- [24] DETRAUX J. M. Formulation et applications en grandes déformations des solides. Thèse de docteur-Ingénieur, U.T.C., 1985.
- [25] DHATT G. and TOUZOT G. *Une présentation de la méthode des éléments finis*. MALOINE, Paris, 1982.
- [26] DOGUI A. Contribution à l'étude de l'érouissage isotrope et anisotrope en grandes déformations élastoplastiques. Thèse, Ecole Centrale de Lyon, 1983.
- [27] ELASMAR H. Calcul des structures plastiques par la méthode asymptotique numérique (m. a. n.). Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1997.
- [28] ELHAGE HUSSEIN A. Modélisation des problèmes de contact par une méthode asymptotique numérique. Thèse, Université de Metz, 1998.
- [29] ELHAGE-HUSSEIN A., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. An asymptotic numerical algorithm for frictionless contact problems. *Revue Européenne des éléments finis*, 7(1-2-3):119–130, 1998.
- [30] ELHAGE-HUSSEIN A., POTIER-FERRY M., and DAMIL N. A numerical continuation method based on padé approximants. *International Journal of Solids and Structures*, 37:6981–7001, 2000.
- [31] EL MOUTASSIM M. Modélisation en grandes transformations des solides massifs par éléments finis. Thèse, U.T.C., 1989.

- [32] EL MOUTASSIM M. and TOUZOT G. Modélisation des problèmes de grandes déformations. Formulation, et techniques de résolutions. 17<sup>ème</sup> Congrès de l'I.U.T.A.M., Grenoble, 1988.
- [33] ESSAKHI M., BRAIKAT B., LAHMAM H., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. Méthode asymptotique numérique et sous-structurations: application aux bandes minces. 4<sup>e</sup> congrès de mécanique, S.M.S.M., Mohammadia (Maroc), pages 181–182, 1999.
- [34] FRESSENGEAS C. and MOLINARI A. Représentation du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations. *Archive of Mechanics*, 36(4):483–498, 1983.
- [35] GALLIET I. Une version parallèle des méthodes asymptotiques numériques. applications à des structures complexes à base d'élastomères. Thèse, Université Marseille II, 2000.
- [36] GERMAIN Y. Modélisation par éléments finis d'écoulement viscoplastique avec frottement - application au forgeage à chaud. Thèse d'Etat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1985.
- [37] HANS RAJ K. and CHENOT J. L. Finite element modelling of hot metal forming. *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, 3:234–238, 1996.
- [38] JENDLI Z. Validation de la simulation de la mise en forme à chaud par une méthode asymptotique numérique. Mémoire de D.E.A, Université de Metz, 2000.
- [39] KESSAB N. Un algorithme de prédiction-corrrection d'ordre élevé basé sur une linéarisation partielle pour les problèmes fortement non linéaires. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Mohammedia, Casablanca, 2001.
- [40] LADEVEZE P. Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations. Rapport interne n9, L.M.T., E.N.S. Cachan, 1980.
- [41] LAHMAM H., CADOU J. M., ZAHROUNI H., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. High order predictor-corrector algorithms. *Soumis à International Journal for Numerical Methods in Engineering.*, 2000.
- [42] LEE E. H. and LIU D. T. Finite strain elastic-plastic theory particulary for plane wave analysis. *Journal of Applied Physics*, 38, 1967.
- [43] LEE J. C. Elastic-plastic deformations at finite strains. *Journal of Applied Mechanics*, 36, 1969.
- [44] LEMAITRE J. and CHABOCHE J. -L. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [45] MALLIL E. H. Développement d'une méthode itérative basée sur les séries et les approximants de padé pour le calcul non linéaire des structures. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Mohammedia, Casablanca, 1999.
- [46] MANDEL J. Plasticité classique et viscoplasticité. Cours CSIM n97, Udine, Springer-Verlag Ed., 1971.
- [47] MANDEL J. Introduction à la mécanique des milieux continus déformables. Ed. Sci. de Pologne, 1974.
- [48] MANDEL J. Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grandes transformations élastoplastiques. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(7):573–578, 1983.

- [49] MESRAR R. Comportement plastique des tôles sous sollicitation biaxiale et analyse numérique de la mise en forme par gonflement hydraulique. Thèse, Université de Metz, 1984.
- [50] MOKHTARI R. Méthode de résolution itérative pour la m.a.n. Mémoire de DEA, Université de Metz, 1999.
- [51] MOKHTARI R., CADOU J. M., and POTIER-FERRY M. Une approche multigrille basée sur les techniques d'homotopie et de perturbation pour la résolution de problèmes non linéaires. Proceedings du 15ème congrès Français de Mécanique, Nancy, 2001.
- [52] NAGTEGAAL J. C. and DE JONG J. E. Some computational aspects of elastic-plastic large strain analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17:15–41, 1981.
- [53] NAGTEGAAL J. C. PARCS D. M. and RICE J. R. On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4:153–177, 1974.
- [54] NAGY D. A. Modal representation of geometrically nonlinear behavior by the finite element method. *Computers and Structures*, 10:683–688, 1979.
- [55] NAGY D. A. and KÓNIG M. Geometrically nonlinear finite element behavior using buckling mode superposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19:447–484, 1979.
- [56] NAJAH A. Calcul non linéaire des structures par des méthodes asymptotiques numériques et accélération de la convergence. Thèse, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, 1997.
- [57] NAJAH A., COCHELIN B., DAMIL N., and POTIER-FERRY M. A critical review of Asymptotic Numerical Methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 5:31–50, 1998.
- [58] NGUYEN Q. S. and BUI H. D. Sur les matériaux élastoplastiques à écrouissage positif ou négatif., 1974.
- [59] NOOR A. K. . Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. *Computers and Structures*, 13:31–44, 1981.
- [60] NOOR A. K. , ANDERSEN C. M. , and PETERS J. M. Global-local approach for nonlinear analysis. *Proc. Seventh ASCE Conf. Electronic Computation, Washington University, St Louis, Missouri*, pages 634–657, 1979.
- [61] NOOR A. K. and PETERS J. M. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4):455–462, 1980.
- [62] NOOR A. K. and PETERS J. M. Recent advances in reduction methods for instability analysis of structures. *Computers and Structures*, 16(1–4):67–80, 1983.
- [63] POTIER-FERRY M., DAMIL N., BRAIKAT B., DESCAMPS J., CADOU J. M., CAO H. L., and ELHAGE HUSSEIN A. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. *C. R. Acad. Sci. Paris, t.324, Série II b*, pages 171–177, 1997.
- [64] RIKS E. . Some computational aspects of the stability analysis of non-linear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47:219–259, 1984.

- [65] SIDOROFF F. Formulation Elastoplastique en Grandes Déformations. Rapport du GRECO 'Grandes Déformations et Endommagement', 1981.
- [66] SIDOROFF F. Cours sur les grandes déformations. Rapport du GRECO 'Grandes Déformations et Endommagement', 1982.
- [67] SIDOROFF F. Ecrouissage cinématique et anisotropie induite en grandes déformations élastoplastiques. *Journal of Applied Mechanics*, 3(1):117–133, 1984.
- [68] SIMO J. C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part I. Continuum formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66:199–219, 1988.
- [69] SIMO J. C. A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition : Part II. Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68:1–31, 1988.
- [70] SIMO J. C. and TAYLOR R. L. Consistent tangent operators for rate independent elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48:101–118, 1985.
- [71] STOLZ C. Contribution à l'étude des grandes transformations en élastoplasticité. Thèse de docteur-Ingénieur, ENPC, Paris, 1982.
- [72] TRI A. Méthode Asymptotique-Numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection des bifurcations de hopf. Thèse, Université de Metz, 1996.
- [73] TRI A., COCHELIN B., and POTIER-FERRY M. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique Numérique. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 5:415–442, 1996.
- [74] WANG N. M. A rigid-plastic rate-sensitive finite element method for modelling sheet metal forming processes. *Numerical Analysis of Forming Processes*, pages 117–164, 1984.
- [75] ZAHROUNI H. Méthode asymptotique numérique pour les coques en grandes rotations. Thèse, Université de Metz, 1998.
- [76] ZAHROUNI H., POTIER-FERRY R., ELASMAR H., and DAMIL N. Asymptotic numerical method for nonlinear constitutive laws. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 7(7):841–869, 1998.
- [77] ZIENKIEWICZ O. C. *The finite element method*. Mc Graw-Hill, New-York, 1989.