

Modélisation du comportement des métaux en transformations élasto-plastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelles

Paul Lipinski

▶ **To cite this version:**

Paul Lipinski. Modélisation du comportement des métaux en transformations élasto-plastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelles. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1993METZ025S . tel-01748978

HAL Id: tel-01748978
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01748978

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

MODELISATION DU COMPORTEMENT DES METAUX, EN TRANSFORMATIONS ELASTO-PLASTIQUES FINIES, A PARTIR DES METHODES DE TRANSITION D'ECHELLES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
SCIENCES ET TECHNIQUES - METZ
N° Inv. 19930985
Cote S/Mz 93/25
Loc. mag
Cat Thèses

PAWEL LIPINSKI

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux

Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 486098 3

A Mayka

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique de Metz au sein de l'équipe du Pr. M. Berveiller.

Je tiens, avant tout, à remercier M. le Pr. E. Kröner pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de faire partie de mon jury.

Je remercie vivement Messieurs les Professeurs J. P. Boehler, M. Potier-Ferry, A. Zaoui pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant d'en être les rapporteurs.

Je souhaite enfin exprimer toute ma gratitude à M. le Pr. Marcel Berveiller qui, outre un soutien scientifique constant, m'a témoigné une amitié qui ne s'est jamais démentie au cours de ces années de collaboration.

Pawel Lipinski

0 - NOTATIONS 1
I - INTRODUCTION 4
II - CHOIX DE LA DESCRIPTION. TRANSITIONS D'ECHELLES ET LOCALISATION 13
II.1 - Description du Mouvement 13
II.2 - Contraintes. Equation d'équilibre 17
II.3 - Le polycristal comme échantillon statistique 19
II.4 - Tenseurs de localisation. Transition d'échelles 23
III - LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE POUR LE MONOCRISTAL 26
III.1 - Bases physiques de la plasticité à froid des métaux 27
III.2 - Comportement élastique du monocristal 30
III.3 - Comportement plastique du monocristal 33
III.4 - Construction des modules tangents du monocristal 40
III.5 - Commentaires 42
III.5.1 -Remarques sur la loi de comportement de Iwakuma et Nemat-Nasser 42
III.5.2 - Cas des petites déformations élastiques 42
IV- SOLUTION FORMELLE DU PROBLEME DES TRANSFORMATIONS FINIES DES SOLIDES HETEROGENES 45
IV.1 - Equation intégrale cinématique 45
IV.2 - Solution formelle de l'équation intégrale 51
IV.3 - Lois d'évolution des variables d'état 54
IV.3.1 - Evolution des cissions critiques 55
IV.3.2 - Evolution de la texture cristallographique 56
IV.3.3 - Etat du réseau. Contraintes internes et résiduelles 58
IV.4 - Conclusions 61
V- APPROXIMATION AUTO-COHERENTE DE L'EQUATION INTEGRALE EN ELASTO-PLASTICITE DES POLYCRISTAUX 62
V.1 - Bases statistiques de la modélisation auto-cohérente 63
V.2 - Approximation auto-cohérente du comportement élasto-plastique des polycristaux 66
V.2.1 - Approximation auto-cohérente à un site 68
V.2.2 - Approximation auto-cohérente à sites multiples 70
V.3 - Evolution de la microstructure 72
V.3.1 - Cissions critiques, texture cristallographique et contraintes internes 72
V.3.2 - Evolution de la texture morphologique 75
V.4 - Conclusions 76
VI - SCHEMA DE RESOLUTION NUMERIQUE 77
VI.1 - Détermination du tenseur TIJ 78
VI.2 - Calcul des modules tangents 81
VI.2.1 - Comportement élastique global 81
VI.2.2 - Modules tangents élastoplastiques macroscopiques 84

VI.3 - Recherche des systèmes actifs 90
VI.4 - Réactualisation des variables mécaniques et structurales 92
VI.5 - Commentaires 97
VII - APPLICATIONS 98
VII.1 - Anisotropie élastique induite 101
VII.2 - Applications aux métaux à structure CFC 105
VII.2.1 - Données initiales 106
VII.2.2 - Comportement élastoplastique global 110
VII.2.3 - Evolution de la structure interne 123
VII.3 - Applications au cas des polycristaux CC initialement isotropes 137
VII.3.1 - Mécanismes de déformation des métaux CC 137
VII.3.2 - Résultats pour un chargement en traction simple 140
VII.3.3 - Prévision des textures de laminage 148
VII.3.4 - Conclusions partielles 151
VII.4 - Application au cas des métaux CC initialement anisotropes 152
VII.4.1 - Choix des paramètres 152
VII.4.3 - Anisotropie induite par un préchargement dans la direction de laminage 156
VIII - CONCLUSIONS 166
ANNEXE: UNICITE DE LA SOLUTION EN METHODE AUTO-COHERENTE 168
BIBLIOGRAPHIE 171

0 - NOTATIONS

- Nous réservons les lettres minuscules pour les variables locales et les lettres majuscules pour les correspondants globaux ou macroscopiques.

- La moyenne volumique d'une fonction f(x) est notée

$$\overline{f(x)} = \langle f(x) \rangle = \frac{1}{V_t} \int_{v_t} f(x)\, dV$$

- Les caractères gras sont utilisés pour les matrices représentant les tenseurs d'ordre 1, 2 et 4. Leurs composantes sont exprimées par rapport à un repère cartésien orthonormé direct $\left(0 ; \overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}\right)$ fixe et notées avec le même symbole (normal).

- Le point "." et le double point ":" définissent les produits matriciels suivants :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} v_j$$
$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} E_{jk}$$
$$\mathbf{T} : \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad T_{ij} E_{ji}$$

  La convention d'indice muet est employée.

- Le symbole "⊗" correspond au produit tensoriel

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{E} \Rightarrow T_{ij} E_{mn}.$$

- La transposition est notée avec un exposant "t" présenté à gauche du symbole de la matrice : ${}^{t}\mathbf{T}$.

- L'inverse est notée avec un exposant "-1" présenté à droite du symbole de la matrice : $\mathbf{T}^{-1}$.

- Les exposants (indices) suivants sont utilisés :

- "e"	pour définir la partie élastique
- "p"	pour définir la partie plastique
- "*"	pour faire référence au réseau çristallin
- "o"	pour faire appel au milieu de référence
- "sc"	pour indiquer l'approximation auto-cohérente
- "eff"	pour indiquer les propriétés effectives.

- Les symboles suivants sont réservés pour :

$\mathbf{a}, \mathbf{a}^{I}$	l'opérateur de localisation du gradient de vitesse d'un milieu de référence
$\mathbf{A}, \mathbf{A}^{I}$	l'opérateur de localisation du gradient de vitesse
$\mathbf{b}$	les forces de volume
$\mathbf{B}, \mathbf{B}^{I}$	l'opérateur de localisation du taux des contraintes nominales
$\mathbf{c}$ et $\mathbf{C}$	les constantes élastiques
$\mathcal{C}_{\alpha}$	l'opérateur de localisation d'une variable α
$\mathbf{d}$ et $\mathbf{D}$	le taux de déformation
$\mathcal{D}$	l'opérateur de localisation du taux de déformation
$\mathbf{e}$ et $\mathbf{E}$	la déformation d'Euler-Almansi
$\mathbf{e}_o$ et $\mathbf{E}_o$	la déformation de Green-Lagrange
E	module de Young
$\mathbf{f}$ et $\mathbf{F}$	le gradient de transformation
$\mathbf{g}$ et $\mathbf{G}$	le gradient de vitesse
$\mathcal{G}$	l'opérateur de Green
$\mathcal{H}^{gh}$ et H^{*gh}	les matrices d'écrouissage du monocristal
$\mathbf{I}$	matrice unité d'ordre 4
$\mathbf{l}$ et $\mathbf{L}$	les pseudo-modules tangents
$\mathbf{m}$ et $\mathbf{M}$	les modules tangents
$\mathbf{n}$ et $\mathbf{N}$	la contrainte nominale
$\mathbf{m}^{h}$	la direction du glissement du système h
$\mathbf{n}^{h}$	la normale au plan de glissement du système h

$\mathbf{P}^h$	la partie symétrique du facteur de Schmid
$\mathbf{R}^h$	la partie antisymétrique du facteur de Schmid
$\mathbf{S}^h$	le facteur de Schmid
$\mathbf{s}$ et $\mathbf{S}$	les complaisances élastiques
$\mathbf{s}, \mathbf{s}^I$	la contrainte interne
$\mathbf{t}$ et $\mathbf{T}$	les forces de contact
$\mathbf{T}^{II}, \mathbf{T}^{IJ}$	les opérateurs d'interactions entre les inclusions
$\mathbf{v}$ et $\mathbf{V}$	la vitesse
$\mathbf{w}$ et $\mathbf{W}$	le taux de rotation
$\mathcal{W}$	l'opérateur de localisation du taux de rotation
$\mathbf{x}$	la position d'un point matériel à l'instant t
α	densité de dislocations
α^h	la quantité tensorielle exprimant la différence des taux de la contrainte de Cauchy par rapport à la matière et par rapport au réseau
β^h	la quantité tensorielle décrivant le durcissement du réseau
γ^h	le glissement plastique sur le système h
Γ	l'opérateur de Green de déformation
$\theta(\mathbf{x})$	la fonction caractéristique
η	l'opérateur de transition
λ^h	l'opérateur définissant la contrainte résiduelle après un cycle charge-décharge
μ^h	l'opérateur définissant le taux de déformation plastique
ν	la normale extérieure à la surface d'un solide
π et Π	la contrainte de Piola-Kirchoff symétrique
σ et Σ	la contrainte de Cauchy
τ^h	la cission réduite sur le système h
τ et $\mathbf{T}$	la contrainte de Kirchoff
φ et ϕ	les parties non-locales de Γ
ψ et Ψ	les parties locales de Γ.

I - INTRODUCTION

La détermination des propriétés effectives des matériaux micro-hétérogènes et macrohomogènes à partir de la connaissance des propriétés des constituants, du rôle des interfaces, et de la microstructure de l'agrégat constitue un champ de recherches en plein développement du fait des applications potentielles que l'on peut en attendre.

Une approche basée sur la transition d'échelles débouche sur une meilleure description des lois de comportement des matériaux et constitue simultanément un outil précieux pour l'élaboration de nouveaux matériaux. En effet, dans une telle approche, la microstructure et le comportement local sont traduits directement en termes de comportement global.

Concernant les propriétés linéaires, de nombreux modèles ont été proposés par Voigt [1], Reuss [2], Hill [3]. Le développement récent des théories statistiques systématiques peut être considéré, au moins formellement, comme étant la solution complète et définitive du problème des milieux microhétérogènes à comportement linéaire, Kröner [4], Dederichs & Zeller [5].

La solution n'est pas aussi avancée en ce qui concerne les propriétés inélastiques telles que l'élastoplasticité des métaux polycristallins. Jusqu'à une date encore récente, les études de plasticité se sont limitées à des applications des modèles simples de Taylor [6], Sachs [7], statiques de Zaoui [8], ou à d'éventuelles améliorations de ceux-ci, Lin [9], Honneff & Mecking [10], Kocks & Canova [11]. Sauf pour les rotations, les modèles de Taylor, Lin, Sachs, statiques, ne font aucune référence à la structure granulaire de l'agrégat. Dans les modèles de type "Relaxed Constraints", on introduit la notion de forme des grains pour relaxer les composantes appropriées du tenseur de déformation. Ces approches étant relativement bien connues, nous ne présentons pas ici les détails de la modélisation.

Une voie nouvelle a été ouverte par Kröner [4], [12] au travers des modèles auto-cohérents qui ont ensuite été développés par Hill [13], Budiansky & Wu [14], Hutchinson [15], [16], Berveiller & Zaoui [17], [18], [19] et autres dans le cadre des petites déformations élastoplastiques. Ce type de modélisation est basé sur un calcul fait par Eshelby [20] concernant des interactions entre un grain de forme ellipsoïdale déformé plastiquement et ses voisins représentés par une matrice infinie.

Une discussion de différents modèles a été faite par Kocks [21] et Zaoui [8] et plus récemment par Canova [22] et Ahzi [23] à propos de description des textures cristallographiques. Ici l'attention est portée sur les contraintes internes (résiduelles) car notre modèle a la prétention, en plus de la texture, de décrire ces contraintes d'ordre 2 avec une précision permettant la comparaison avec des mesures expérimentales

Dans le cas du modèle de Kröner [12], la matrice est supposée isotrope dans son comportement élastique. Elle subit une déformation plastique homogène E^P. En supposant que la déformation plastique ε^P est également homogène dans l'inclusion, Kröner a obtenu pour les contraintes dans le grain de forme sphérique

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\,\mu\,(1 - \beta)\left(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right) \qquad \text{(I.1)}$$

$$\text{où } \beta = \frac{2\,(4 - 5\nu)}{15\,(1 - \nu)}$$

Cette formule ressemble à l'expression obtenues par Lin [9]

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2\,\mu\left(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij}\right) \qquad \text{(I.2)}$$

mais elle conduit à des contraintes internes presque deux fois plus petites que celles prévues par Lin, grâce au cœfficient $1 - \beta \approx 0{,}5$. Ce résultat est dû au fait que les incompatibilités plastiques chez Kröner sont accommodées par des déformations élastiques additionnelles de la matrice. Dans le modèle de Lin [9], la déformation totale est imposée. Ceci empêche toute accommodation additionnelles dans la matrice.

En réalité la matrice s'accommode aux déformations incompatibles du grain considéré, par une déformation élastoplastique additionnelle. Ce type de raisonnement avait conduit Hill [13] à prendre un comportement élastoplastique L pour la matrice. Il a obtenu alors pour le taux des contraintes locales :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\Sigma}_{ij} + L^*_{ijkl}\left(\dot{E}^T_{kl} - \dot{\varepsilon}^T_{kl}\right) \qquad \text{(I.3)}$$

où L^* est le "constraint" tenseur résultant du problème de l'inclusion dans une matrice de comportement tangent défini par L. Ce modèle a été utilisé par Hutchinson [16]. Les résultats numériques de Hutchinson ont démontré

l'importance de l'accommodation élastoplastique de la matrice sur le niveau de la contrainte interne. En effet, la composante L_{1212} passe d'une valeur égale à μ à la limite d'élasticité à une valeur $\mu/10$ pour une déformation totale 4 à 5 fois plus grande.

Un raisonnement similaire a conduit Zaoui [8] à remplacer dans la formule de Kröner (1) le module élastique μ par le module sécant $\overline{L}$ défini par un essai de traction simple. Ce module est donné par

$$\overline{L} = \frac{\mu \, \Sigma}{\Sigma + 3 \, \mu \, \beta \, E^p} \qquad (I.4)$$

Les contraintes internes se calculent selon l'expression :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2 \, \mu \, (1 - \beta) \frac{\Sigma}{\Sigma + 3 \, \mu \, \beta \, E^p} \left(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij} \right) \qquad (I.5)$$

L'expression (4) témoigne de l'évolution de $\overline{L}$ qui pour $E^p = 0$ est égal à μ, et pour $E^p \approx 0{,}1$ tombe à $\sim \mu/10$.

Une généralisation de cette approche a été proposée par Berveiller & Zaoui [17]. En supposant que la matrice obéit à un critère de plasticité anisotrope et à une loi d'écoulement plastique associée, ils ont démontré que, pour les chargements radiaux, les contraintes internes dans l'inclusion d'Eshelby sont :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + 2 \, \mu \, \alpha \, (1 - \beta) \left(E^p_{ij} - \varepsilon^p_{ij} \right) \qquad (I.6)$$

avec

$$\alpha = \frac{1 + 6 \, \mu \, \overline{h} \, \frac{1 + \nu}{7 - 5\nu}}{1 + 2 \, \mu \, \overline{h} \, \frac{13 - 5\nu}{15 \, (1 - \nu)} + 8 \left(\mu \, \overline{h} \right)^2 \frac{1 + \nu}{15 \, (1 - \nu)}} \qquad (I.7)$$

et $(\overline{h})^{-1}$ représentant le module plastique moyen de la matrice.

Il est facile de remarquer que pour :

. $\overline{h} \rightarrow 0$ (matrice élastique) $\alpha = 1$ et la formule (6) se transforme en relation (1) de Kröner.

. $\overline{h} \rightarrow \infty$ (régime de la plasticité parfaite) $\alpha \rightarrow 0$ et la formule (6) se transforme en modèle statique proposé par Zaoui [8]

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij}$$

Dans tous les modèles présentés jusqu'ici le comportement élastique du matériau a été supposé isotrope et homogène.
La forme des constituants a été choisie sphérique. Néanmoins, les résultats obtenus par Hihi et al. [24] et Beradaï et al. [25], en utilisant l'approche proposée par Berveiller et Zaoui [18], montrent l'intérêt d'une modélisation basée sur la transition d'échelles.

En grandes transformations élastoplastiques, c'est tout l'état microstructural et mécanique du polycristal qui change profondément avec la déformation plastique. Globalement, on peut distinguer quatre familles de paramètres physiques dont l'évolution avec la déformation doit être connue si on veut déduire le comportement tangent actuel du matériau.

- A l'échelle intracristalline, la multiplication des dislocations et l'évolution de leur répartition spatiale (création de cellules, parois, empilements...) sont responsables de l'écrouissage intracristallin. Logiquement, il conviendrait de relier l'état disloqué intragranulaire au comportement du monocristal. Ceci constitue un domaine de recherche largement ouvert. Actuellement, l'écrouissage intracristallin est plutôt décrit par l'intermédiaire d'une matrice d'écrouissage, Franciosi et al. [26], Franciosi [27]. Cette matrice permet de déterminer le taux de la cission critique sur un système de glissement en fonction des taux de glissements plastiques sur tous les systèmes actifs.
Des informations concernant cette matrice d'écrouissage peuvent être déduites des mesures expérimentales de l'écrouissage latent, Franciosi et al. [26]. Là encore, la détermination précise et complète de cette matrice, et surtout de son évolution avec les glissements plastiques, reste à effectuer. Malgré les défauts évidents de cette approche, elle sera utilisée par la suite pour décrire le comportement du monocristal.

- A l'échelle des grains (échelle intercristalline), la désorientation relative des réseaux cristallins constitue une source de contraintes internes par l'intermédiaire des incompatibilités du champ de déformation plastique. Ces contraintes internes jouent un rôle fondamental dans la plasticité des métaux. Au cours de l'écoulement plastique, les contraintes internes se développent du fait des incompatibilités plastiques, se relaxent (au moins partiellement) grâce à l'accommodation élastoplastique et contribuent ainsi, de manière significative, au comportement élastoplastique macroscopique, qui se manifeste par un écrouissage anisotrope du matériau.

- A la même échelle, le mécanisme de glissement plastique induit une rotation plastique qui, en relation avec les équations de compatibilité de Kröner [28], entraîne une rotation des réseaux cristallins. Ces rotations sont à l'origine des textures de déformation, phénomène connu depuis longtemps et qui est, pour une large part, responsable de l'anisotropie du comportement élastoplastique macroscopique. Seul le modèle de Taylor ,et ses modifications, a été largement utilisé pour la prévision des textures de déformation. Il est basé sur l' hypothèse trop restrictive :

$$\bar{w}^e = - w^p.$$

  Les prévisions théoriques vérifient d'une manière très approximative les résultats expérimentaux, Canova [22]. Une analyse critique et constructive de l'influence des mécanismes élémentaires de déformation plastique à l'intérieur d'un grain, des effets associés aux incompatibilités intergranulaires, a été effectuée par Berveiller [29]. La description de la texture cristallographique pratiquée dans ce travail utilise pleinement ses résultats.

- A cette même échelle intercristalline, on doit prendre en compte le changement morphologique des grains, qui se superpose aux hétérogénéités plastiques intra- et intergranulaires. L'influence de la texture morphologique sur la texture cristallographique a été démontrée par les modèles du type "relaxed constraints" (Honneff & Mecking [10], Van Houtte [30], etc.) et par Tiem et al. [31] sur les contraintes internes. La distribution spatiale des constituants, ou texture topologique du matériau, joue également un rôle important sur les textures et le niveau des contraintes internes.

Face à une telle complexité, il est nécessaire d'aborder le problème de la détermination des lois de comportement élastoplastiques à partir de simplifications "homogènes". Avant de présenter le plan de ce travail, nous nous arrêtons pour commenter les modèles auto-cohérents en grandes transformations.

La première tentative de détermination de la loi de comportement élastoplastique en grandes transformations, et dans le cadre du modèle auto-cohérent, a été présentée par Iwakuma & Nemat-Nasser [32]. En partant de la loi de comportement du monocristal basée sur les travaux de Mandel [33], Hill [34], Hill & Rice [35], Zarka [36], Asaro & Rice [37],... ils ont généralisé l'approche auto-cohérente développée par Hill [38] aux grandes transformations élastoplastiques. Finalement, ils appliquent leur théorie au cas d'un élément représentatif **bi-dimensionnel** en se limitant, pour un CFC, à quatre systèmes de glissement par grain. Dans ce modèle ils prennent en compte les quatre familles de paramètres microscopiques évoqués plus haut, mais réduites au cas plan. Le principal problème lié à cette modélisation est la perte de stabilité ou d'ellipticité du système. En effet, le tenseur des modules tangents du monocristal, et en conséquence du comportement macroscopique, n'est pas symétrique par rapport aux couples d'indices

$$L_{ijkl} \neq L_{klij}$$

Dans le meilleur des cas présentés dans [32], la déformation totale en traction ne dépasse pas 30 fois la déformation élastique en cisaillement ; c'est-à-dire pour un matériau CFC tel que le cuivre, elle est de l'ordre de 15%. Au-delà l'opérateur de Lamé du problème perd son caractère elliptique et empêche le calcul du tenseur de Green.

Nous démontrons dans la suite de ce travail, que cette asymétrie du tenseur L est liée aux simplifications non-homogènes dans la construction du comportement du monocristal (par exemple le taux de déformation est supposé petit dans le calcul des rotations du réseau et important dans la loi du comportement élastique) .

Parallèlement au développement de notre approche, l'équipe de A. Molinari (Canova, Ahzi) du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz mettait au point un modèle auto-cohérent en grandes déformations viscoplastiques.

Dans cette modélisation, la déformation élastique du matériau est négligée, voir Ahzi [23]. Ceci conduit à une mauvaise description des trajets de

chargement complexe. En outre, l'effet Bauschinger est complètement écrasé, ainsi que la prédiction des surfaces de plasticité après une prédéformation quelconque. Tous ces phénomènes sont liés au manque de distorsion du réseau cristallin, qui se manifeste par l'absence de contraintes résiduelles. La viscosité est ici simplement une astuce mathématique permettant d'éviter le problème d'ambiguïté concernant le choix des systèmes actifs. En effet, dans cette approche, tous les systèmes de glissement sont en permanence actifs. Un critère arbitraire sert à classer un système en tant qu'actif ou non. Il est basé sur les rapports des vitesses de glissement sur différents systèmes.
Une autre hypothèse simplificatrice concerne l'isotropie des propriétés tangentes du matériau. Cette simplification permet de diminuer le temps de calcul de manière très importante. D'ailleurs, la procédure de calcul du paramètre scalaire de la matrice tangente ne se fait pas de manière auto-cohérente, c'est-à-dire en tant que moyenne pondérée des paramètres locaux.

Un avantage essentiel de cette approche auto-cohérente viscoplastique réside dans la vitesse de traitement des données. Cette vitesse est obtenue grâce à :

- l'hypothèse que tous les systèmes de glissement sont en permanence actifs (pas de recherche d'une combinaison des systèmes réellement actifs)
- l'hypothèse d'isotropie du tenseur des propriétés effectives.

Dernièrement, Nemat-Nasser & Obata [39] ont proposé une approche auto-cohérente en élasto-viscoplasticité.Il s'agit d'une généralisation du modèle de Iwakuma et Nemat-Nasser [32] par le biais du critère de Schmid viscoplastique de type puissance (voir également Ahzi [23]). Les modules tangents du monocristal restent, pour des même raisons que dans [32], non-symétriques par rapport aux couples d'indices. Ils ont appliqué leur modèle uniqement au cas plan. Le comportement global du polycristal est plus stable qu'en plasticité classique mais aux frais d'une "rigidification" des interactions entre les constituants et le milieu effectif.

Le cadre général des transitions d'échelles pour les grandeurs microscopiques et macroscopiques a été discuté par Mandel [40] et Stolz [41]. Pour les grandes déformations élastoplastiques, Hill [38] suggère l'emploi du gradient de la vitesse et des taux des contraintes nominales. Ce choix ramène les opérations d'homogénéisation à de simples opérations de moyenne volumique comme dans le cas des déformations infinitésimales. Le choix de la description ainsi que les relations de transition d'échelles et de localisation sont expliqués dans le chapitre II . Le but de ce chapitre est plutôt l'introduction et

la systématisation des notations. Nous finissons ce chapitre par une démonstration générale permettant de calculer les propriétés effectives tangentes du matériau en fonction des propriétés locales des monocristaux.

Le comportement intracristallin des grains est construit à partir de variables cinématiques décrivant la vitesse de glissement plastique sur les systèmes de glissement actifs : le glissement plastique obéit à la loi de Schmid et l'écrouissage intracristallin est décrit par la matrice d'écrouissage. La construction de la loi de comportement élastoplastique pour le monocristal est abordée dans le chapitre III. Nous donnons tout d'abord les bases physiques de la plasticité à froid des métaux. Nous montrons les difficultés liées à une telle description. Ceci nous conduit à introduire la notion de matrice d'écrouissage. Ensuite nous discutons la description du comportement élastique du monocristal en grandes transformations. Ce paragraphe est basé sur les travaux de Mandel [42], Rice [43]. Plus loin, nous abordons la construction du comportement plastique du monocristal. Formulée en vitesse (ou taux), une telle loi de comportement a été développée par Mandel [44], Hill & Rice [35], Asaro [46], Nemat-Nasser [45] et discutée par Stolz [41]. Un cas particulier du résultat général de Hill & Rice [35] est exposé, suivi par la construction des modules tangents du monocristal. Nous démontrons la symétrie d'un tel tenseur, par rapport aux couples d'indices, sous hypothèse de symétrie de la matrice d'écrouissage du monocristal. Une comparaison avec le résultat de Iwakuma & Nemat-Nasser [32] est donnée.

Dans le chapitre IV, nous abordons le problème de la localisation cinématique en proposant une équation intégrale similaire à celle que Dederichs & Zeller [5] ont démontrée dans le cas de l'élasticité. Cette équation est construite dans le cas général du tenseur des propriétés tangentes non symétriques. Une solution formelle de cette équation est présentée en vue d'en déduire les lois d'évolution des variables microscopiques telles que :

- cissions critiques
- texture cristallographique
- contraintes internes et résiduelles.

Ces lois ont la forme de relations de localisation en fonction du gradient de la vitesse macroscopique. Cette solution formelle, dans le cadre théorique présenté, constitue le point de départ pour différents modèles en fonction des approximations utilisées. L'approximation auto-cohérente semble aujourd'hui la mieux adaptée pour décrire le comportement élastoplastique des polycristaux, mais également la plus compliquée à mettre en œuvre. Nous discutons cette approximation au chapitre V . Le cas d'un matériau quelconque

est envisagé en premier lieu pour être adapté ensuite au cas des matériaux granulaires. Des approximations à un site et à sites multiples sont développées. A la fin du chapitre nous reprenons les lois d'évolution de la structure microscopique pour un polycristal.

Le chapitre VI est consacré à la mise en algorithme de la méthode auto-cohérente en élasticité et plasticité dans le cadre d'approximations à un site et sites multiples.

Nous poursuivons en expliquant la recherche d'une combinaison des systèmes de glissement actifs et l'incrément de temps pendant lequel cette combinaison reste valable. Dans le dernier paragraphe, nous discutons en détail le problème de réactualisation des variables cinématiques et statiques.

Dans le chapitre VII, nous présentons un échantillon des résultats obtenus avec le modèle auto-cohérent durant les cinq dernières années. Nous commençons avec des résultats en élasticité afin d'illustrer l'anisotropie élastique induite par la déformation plastique. Nous poursuivons par une analyse des différents phénomènes (écrouissage, surface de plasticité, contraintes résiduelles, énergie bloquée, texture...) pour des matériaux type CFC. Dans la dernière partie, nous présentons les simulations du comportement des matériaux type CC. Une comparaison avec des résultats expérimentaux de l'équipe du Professeur Boehler [106] de Grenoble a pu être effectuée.

Nous concluons par une analyse critique de la méthode ainsi que des résultats obtenus.

II - CHOIX DE LA DESCRIPTION. TRANSITIONS D'ECHELLES ET LOCALISATION

L'ambition de ce chapitre n'est pas de présenter des idées ou des résultats nouveaux mais plutôt d'introduire et de systématiser les notations utilisées dans la suite de ce travail. Ce chapitre est basé sur les travaux de Hill [38], Mandel [40], Rice [43], Kröner [47], Truesdell[48], Stolz [41], Nemat-Nasser [49], Lipinski et Berveiller [50], ...

S'il fallait définir le processus de déformation des matériaux élastoplastiques en un seul mot, le nom qui conviendrait le mieux serait, d'après nous, **évolution**. Caractère non linéaire et incrémental du comportement, mais surtout évolution de la structure interne du matériau conduisant à l'anisotropie induite de ce dernier, sont les caractéristiques principales de la plasticité. Une approche naturelle de la description d'un tel comportement utilisant la vitesse est la description **eulérienne** par rapport à la configuration actuelle du solide.

II.1 - Description du Mouvement

Le mouvement du solide déformable B peut être défini par une transformation χ (X,t), telle que la position courante **x** d'un point matériel X à l'instant t soit donnée par

(II.1) $$\mathbf{x} = \chi\,(X,t) \qquad X \in B \;,\; t \in R$$

En choisissant une configuration de référence κ_o, ce mouvement peut être exprimé en fonction du vecteur **X**, position des points matériels X dans cette configuration de référence

(II.2) $$\mathbf{X} = \kappa_o\,(X\,,\,t_o)$$

En effet, en supposant que κ_o^{-1} existe, l'équation (1) s'écrit :

(II.3) $$x = \chi\,(\kappa_o^{-1}(X)\,,\,t) \equiv \chi\,(X\,,\,t)$$

Le vecteur X, position du point matériel X dans la configuration κ_o, sera souvent appelé, sans risque de confusion, point matériel.

En un point donné X, on définit une application linéaire tangente **f** (X,t) appelée aussi gradient de la transformation entre la configuration de référence κ_o et la configuration actuelle κ_t

(II.4) $$\mathbf{f}\,(X,t) = \frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial \chi(X,t)}{\partial X}$$

La construction de cette application (ainsi que ses propriétés) a été discutée en détail dans plusieurs ouvrages [48], [51], [41].

Le choix de la configuration de référence κ_o est bien sûr libre, mais la détermination du mouvement des solides déformables est plus ou moins commode en fonction de ce choix. Dans la description eulérienne, ce choix est porté sur la configuration actuelle κ_t. Une pareille description est appelée relative. Suivant Truesdell [48], on introduit une seconde configuration du solide B à l'instant $\tau \neq t$. Soit ξ le vecteur position du point matériel X à cet instant:

(II.5) $$\xi = \chi\,(X\,,\,\tau)$$

Grâce à la définition du mouvement (1) et (3), la relation (5) devient :

(II.6) $$\xi = \chi\,[\chi^{-1}\,(X,t),\,\tau] \equiv \chi_t\,(x\,,\,\tau)$$

Ceci définit une transformation relative par rapport à la configuration actuelle (variable) κ_t.

On introduit, de manière analogue à (4), le gradient de la transformation relative $\mathbf{f}_t$:

(II.7) $$\mathbf{f}_t\,(x,\tau) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \chi_t\,(x,\tau)}{\partial x}$$

Dans la description eulérienne, on utilise une formulation en vitesse, incontournable d'ailleurs en mécanique non linéaire des solides déformables. Cependant, l'emploi des méthodes numériques conduit toujours à une

formulation incrémentale qui peut être facilement obtenue à partir d'une écriture différentielle. C'est cette dernière qui est choisie ici.

La dérivée instantanée du gradient de transformation relative par rapport au temps joue un rôle primordial dans la description de l'évolution de la structure interne du matériau. Son **incrément** noté **g** est défini par :

(II.8) $$\mathbf{g} = \delta_t \mathbf{f}_t (x,t)$$

où δ_t symbolise l'incrémentation selon le temps

$$\delta_t a \equiv a (t + dt) - a (t).$$

En introduisant

(II.9) $$\mathbf{v} = \delta_t \mathbf{x} (X,t)$$

on démontre que :

(II.10) $$\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{v} (x,t)}{\partial x}$$

Dans la suite, les incréments **v** et **g** seront souvent appelés respectivement vitesse et gradient de vitesse.

En appliquant au gradient $\mathbf{f}_t$ le théorème de la décomposition polaire de Cauchy, on obtient :

(II.11) $$\mathbf{f}_t = \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{U}_t = \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{R}_t$$

ce qui signifie que la transformation correspondant à $\mathbf{f}_t$ s'obtient en effectuant une rotation $\mathbf{R}_t$ et trois déformations pures dans trois directions principales de $\mathbf{V}_t$ ou inversement.
L'incrément de la relation (11) par rapport au temps, par définition égale à **g**, est :

(II.12) $$\mathbf{g} = \delta_\tau \mathbf{f}_t (x,\tau) \Big|_{\tau=t} = \delta_\tau (\mathbf{R}_t) \cdot \mathbf{U}_t + \mathbf{R}_t \cdot \delta_\tau \mathbf{U}_t \Big|_{\tau=t}$$

Pour $\tau = t$ $\quad \mathbf{f}_t = \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{U}_t = \mathbf{R}_t = \mathbf{1}$

et (12) devient :

(II.13) $\mathbf{g} = \delta_\tau \mathbf{R}_t \big|_{\tau=t} + \delta_\tau \mathbf{U}_t \big|_{\tau=t} = \mathbf{w} + \mathbf{d}$

Grâce à l'unicité de la décomposition d'un tenseur en parties symétrique et antisymétrique, la relation (13) conduit à :

(II.14) $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}\ (\mathbf{x},t) + {}^t\mathbf{g}\ (\mathbf{x},t)\right)$ incrément (taux) de déformation

(II.15) $\mathbf{w} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{g}\ (\mathbf{x},t) - {}^t\mathbf{g}\ (\mathbf{x},t)\right)$ incrément (taux) de rotation.

Finalement, l'application de la règle de dérivation d'une fonction composée à la relation (6) permet d'établir le lien entre les descriptions eulérienne et lagrangienne :

(II.16) $$\mathbf{f}\ (\tau) = \frac{\partial \xi\ (\mathbf{x}\ (\mathbf{X},t), \tau)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \xi\ (\mathbf{x},\tau)}{\partial \mathbf{x}}\ \frac{\partial \mathbf{x}\ (\mathbf{X},t)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}_t \cdot \mathbf{f}$$

En dérivant par rapport à τ et en posant $\tau = t$, la relation (16) devient :

$$\delta_t \mathbf{f}\ (\mathbf{X},t) = \mathbf{g}\ (\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{f}\ (\mathbf{X},t)$$

ou encore

(II.17) $$\mathbf{g}\ (\mathbf{x},t) = \delta_t \mathbf{f}\ (\mathbf{x},t)\ .\ \mathbf{f}^{-1}\ (\mathbf{X},t)$$

Ceci montre du même coup que le gradient de vitesse est indépendant de la configuration de référence.

II.2 - Contraintes. Equation d'équilibre

Considérons, à un point courant x de la configuration actuelle du solide, un élément de surface dS_t de normale unitaire extérieure ν_t. En notant dP_t la force transmise par cette surface, le vecteur de contraintes, ou de densité surfacique des efforts, s'écrit :

(II.18) $\quad t_t = dP_t / dS_t$

Le tenseur des contraintes de Cauchy σ est défini, dans cette configuration actuelle, par la relation :

(II.19) $\quad t_t = {}^t\sigma \cdot \nu_t = \sigma \cdot \nu_t$

grâce à la symétrie du tenseur de Cauchy.

Imaginons deux transports fictifs de la force dP_t dans une configuration de référence (par exemple initiale), ils introduisent deux nouvelles forces:

(II.20) $\quad dP_o^B = dP_t$ obtenue par le transport "direct"

et

(II.21) $\quad dP_o = f^{-1} \cdot dP_t$ obtenue par le transport convectif

L'élément de surface considéré, dans la configuration de référence, étant défini par dS_o et son vecteur normal ν_o, deux nouvelles définitions des vecteurs de contraintes apparaissent :

(II.22) $\quad t_o^B = dP_o^B / dS_o$

(II.23) $\quad t_o = dP_o / dS_o$

conduisant aux deux tenseurs de contraintes :

(II.24) $\quad t_o^B = {}^t n \cdot \nu_o$

avec **n** - tenseur de Boussinesq ou de Piola-Kirchoff 1

(II.25) $\quad t_o = {}^t\pi \cdot \nu_o = \pi \cdot \nu_o.$

avec π - tenseur de Piola-Kirchoff 2

Le tenseur de Boussinesq, comme le gradient de transformation, est défini sur les deux configurations (actuelle et de référence), **il n'est pas symétrique.** Le tenseur de Piola-Kirchoff 2 est purement lagrangien et,

comme le tenseur de Cauchy, symétrique. Pour établir les liens entre ces trois mesures de contraintes, on utilise la relation de Nanson :

(II.26) $\nu_o dS_o = (\text{dét } \mathbf{f})^{-1}\, \mathbf{f} \cdot \nu_t\, dS_t$

Ceci conduit à :

(II.27) $(\text{dét } \mathbf{f})\, \sigma = \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f} \cdot \pi \cdot {}^t\mathbf{f}$

Ces trois relations se simplifient quand on choisit la configuration actuelle comme configuration de référence ($\mathbf{f} = \mathbf{1}$) :

(II.28) $\sigma = \mathbf{n} = \pi$

mais les incréments (taux) de ces tenseurs restent différents et tels que :

(II.29) $\delta_t\sigma = \delta_t\mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \sigma - \sigma\, \text{tr}\, \mathbf{g}$
$= \delta_t\pi + \mathbf{g} \cdot \sigma + \sigma \cdot {}^t\mathbf{g} - \sigma\, \text{tr}\, \mathbf{g}.$

Les équations d'équilibre pour des problèmes quasistatiques s'écrivent :

- en fonction du taux des contraintes de Cauchy

(II.30) $\text{div}\, (\delta_t\sigma) + \rho\delta_t\mathbf{b} - \text{grad}\,(\sigma) : \mathbf{g} + \rho\, \mathbf{b}\, \text{tr}\, (\mathbf{g}) = 0$

- en fonction du taux des contraintes de Boussinesq et pour la configuration de référence confondue avec la configuration actuelle

(II.31) $\text{div}\, (\delta_t\mathbf{n}) + \rho\delta_t\mathbf{b} = 0$

Dans ces deux expressions, $\delta_t\mathbf{b}$ est l'incrément (taux) de forces volumiques et ρ la masse volumique du solide.

II.3 - Le polycristal comme échantillon statistique

Soit un solide polycristallin avec un nombre N "quasi" infini de cristallites suivant la plus petite longueur L du solide. Ce nombre N est supposé si grand que même la racine carrée de N est "presque" infinie. Dans ce cas le solide peut être divisé en macro-éléments de volume V et de dimension "presque" infinitésimale par rapport à L. Le macro-élément V constitue un objet statistiquement suffisamment riche pour être représentatif du comportement de tout macro-élément du polycristal. Il est supposé que V est **macro-homogène**, Kröner [6]. La présence d'un nombre important de cristallites dans l'élément V, leurs désorientations cristallographiques, morphologiques, différences de formes et de tailles, et souvent différentes compositions chimiques, font que les propriétés de cet élément représentatif varient avec la position et il doit être considéré comme **micro-hétérogène**.

L'objectif étant l'obtention d'une loi de comportement effective, ainsi que la description de l'évolution de la microstructure du macro-élément V, il est préférable de choisir comme variables macroscopiques :

- les mesures eulériennes
- les variables qui peuvent être déterminées en fonction des données sur la surface extérieure du macro-élément
- les variables macroscopiques se calculant par **moyennes volumiques non-pondérées** de ces homologues microscopiques
- les mesures qui sont conjuguées via l'expression des puissances virtuelles
- les variables telles que la puissance interne macroscopique est la moyenne volumique des puissances internes locales ou microscopiques. Ceci traduit l'hypothèse de **macro-homogénèité.**

En se basant sur l'article de Hill [38], Iwakuma et Nemat-Nasser [32] ont proposé :

. le gradient de vitesse G comme mesure de déformation
. la contrainte nominale N et son taux $\delta_t N$, calculés par rapport à la configuration actuelle, comme mesures de l'effort interne.

En effet, suivant Hill [38], si les conditions sur la frontière extérieure S_t sont du type cinématique (vitesse v imposée telle que G est homogène dans V_t), on a :

(II.32) $\quad v_i = G_{ik}\, x_k \qquad \forall\, \mathbf{x} \in S_t$

Par contre, s'il s'agit des conditions aux limites statiques (l'incrément de traction $\delta_t T$ imposé tel que $\delta_t N$ est homogène dans V_t), on peut écrire :

(II.33) $$\delta_t T_i = \delta_t N_{ji}\, \nu_j(x) \qquad \forall\, x \in S_t.$$

En partant de l'équation d'équilibre (31) et en négligeant les forces de volume $\delta_t b = 0$, on obtient

$$0 = \int_{V_t} \delta_t n_{ij,i}\, x_k\, dV_t = \int_{V_t} [\delta_t n_{ij}\, x_k]_{,i}\, dV_t - \int_{V_t} \delta_t n_{ij}\, x_{k,i}\, dV_t$$

L'expression ci-dessus peut être réécrite sous la forme :

(II.34) $$\int_{V_t} [\delta_t n_{ij}\, x_k]_{,i}\, dV_t = \int_{V_t} \delta_t n_{kj}\, dV_t$$

Le membre de gauche devient, grâce au théorème de la divergence :

$$\int_{V_t} [\delta_t n_{ij}\, x_k]_{,i}\, dV_t = \int_{S_t} \delta_t n_{ij}\, x_k\, \nu_i\, dS_t$$

Mais, sur la surface extérieure, pour $x \in S_t$:

$$\delta_t n_{ij}\, \nu_i = \delta_t N_{ij}\, \nu_i$$

alors :

$$\int_{S_t} \delta_t n_{ij}\, x_k\, \nu_i\, dS_t = \delta_t N_{ij} \int_{V_t} x_{k,i}\, dV_t = \delta_t N_{kj}\, V_t$$

En introduisant ce résultat dans (34) on obtient :

(II.35) $$\delta_t N = \frac{1}{V_t} \int_{V_t} \delta_t n\, dV_t$$

Le calcul de la moyenne volumique du gradient de vitesse donne :

$$\frac{1}{V_t} \int_{V_t} g_{ij}\, dV_t = \frac{1}{V_t} \int_{V_t} \nu_{i,j}\, dV_t = \frac{1}{V_t} \int_{S_t} \nu_i\, \nu_j\, dS_t$$

Mais, grâce à l'expression (32), on a :

$$\frac{1}{V_t}\int_{S_t} G_{ik}\, x_k\, v_j\, dS_t = \frac{1}{V_t} G_{ik}\, \delta_{kj}\, V_t = G_{ij}$$

En résumant :

(II.36) $$\mathbf{G} = \frac{1}{V_t}\int_{V_t} \mathbf{g}\, dV_t$$

Les deux mesures macroscopiques apparaissent alors comme les moyennes volumiques non pondérées des variables microscopiques correspondantes.
Dans la description eulérienne la densité massique de la puissance interne $p_{(i)}$ se calcule par:

(II.37) $$-p_{(i)} = \Sigma : \mathbf{D} = \mathbf{N} : \mathbf{G}$$

Ce résultat, bien connu dans la description eulerienne, reste valable dans la description lagrangienne avec un choix approprié des mesures de déformations et de contraintes, Hill [38].

Pour démontrer la validité de l'hypothèse de **macro-homogénèité**, on passe par l'équation d'équilibre (31) et les conditions aux limites (32) ou (33). En notant $\overline{q}$ la moyenne volumique d'une quantité q soit:

$$\overline{q} = \langle q \rangle \frac{1}{V_t}\int_{V_t} q\, dV$$

nous avons :

$$\overline{\mathbf{g}:\delta_t\mathbf{n}} = \frac{1}{V_t}\int_{V_t} g_{ij}\, \delta_t n_{ji}\, dV_t$$

$$= \frac{1}{V_t}\int_{V_t} [v_i\, \delta_t n_{ji}]_{,j}\, dV_t - \frac{1}{V_t}\int_{V_t} v_i\, [\delta_t n_{ji}]_{,j}\, dV_t$$

$$= \frac{1}{V_t}\int_{S_t} v_i\, \delta_t n_{ji}\, v_j\, dS_t$$

Analysons tout d'abord le cas des conditions aux limites cinématiques (32)

$$\overline{\mathbf{g}:\delta_t\mathbf{n}} = \frac{1}{V_t}\int_{S_t} v_i\, \delta_t n_{ji}\, v_j\, dS_t = \frac{1}{V_t} G_{ik}\int_{S_t} x_k\, \delta_t n_{ji}\, v_j\, dS_t$$

$$= \frac{1}{V_t} G_{ik}\int_{V_t} [x_k\, \delta_t n_{ji}]_{,j}\, dV_t$$

$$= G_{ik}\left(\frac{1}{V_t}\int_{V_t} \delta_t n_{ki}\, dV_t + \frac{1}{V_t}\int_{V_t} x_k\,(\delta_t n_{ji})_{,j}\right) dV_t$$

$$\overline{\mathbf{g} : \delta_t \mathbf{n}} = G_{ik}\,\delta_t N_{ki} = \mathbf{G} : \delta_t \mathbf{N}$$

La démonstration est semblable dans le cas des conditions aux limites statiques (33)

$$\overline{\mathbf{g} : \delta_t \mathbf{n}} = \frac{1}{V_t}\int_{S_t} v_i\,\delta_t n_{ji}\,\nu_j\, dS_t$$

$$= \frac{1}{V_t}\int_{S_t} v_i\,\delta_t N_{ji}\,\nu_j\, dS_t$$

$$= \frac{1}{V_t}\,\delta_t N_{ji}\int_{V_t} v_{i,j}\, dV_t$$

$$= G_{ij}\,\delta_t(N_{ji}) = \mathbf{G} : \delta_t \mathbf{N}$$

En résumant, et pour les deux types des conditions aux limites, nous avons

(II.38) $$\overline{\mathbf{g} : \delta_t \mathbf{n}} = \mathbf{G} : \delta_t \mathbf{N} = \overline{\mathbf{g}} : \overline{\delta_t \mathbf{n}}$$

et par analogie :

$$\overline{\mathbf{g} : \mathbf{n}} = \mathbf{G} : \mathbf{N} = \overline{\mathbf{g}} : \overline{\mathbf{n}}$$

grâce à l'équation d'équilibre

$$\text{div}\,\mathbf{n} + \rho\mathbf{b} = 0$$

et les conditions aux limites appropriées.

II.4 - Tenseurs de localisation. Transition d'échelles

La résolution du problème de comportement d'un matériau micro-hétérogène et macro-homogène a principalement pour objectif la détermination :

. du comportement effectif du matériau
. des champs locaux tels que champ de déformation et contrainte.

La procédure de résolution est constituée de plusieurs étapes :

. la construction de la loi de comportement local
. l'établissement des relations de localisation
. l'homogénéisation.

La modélisation développée dans la suite concerne le comportement des matériaux métalliques, type CFC et CC, à froid. Il est judicieux de supposer que le principal mécanisme de la déformation plastique dans de tels matériaux est le glissement cristallographique [6], [52], [53]. Les nombreux travaux de Mandel [44], Hill [34], Hill et Rice [35], Asaro [46], Havner [54], Franciosi et al. [26],... constituent une base de départ pour tout développement de la loi de comportement du monocristal. Iwakuma et Nemat-Nasser [32] ont proposé une description qui a été reprise par Lipinski et Berveiller [50].

Dans le chapitre suivant, une généralisation au cas de grandes déformations élastiques et plastiques, donnée par Hill et Rice [35], est rappelée en détails.

Dans tous les travaux cités ci-dessus, la relation constitutive se met sous la forme :

(II.39) $\delta_t \mathbf{n} = \mathbf{l} : \mathbf{g}$

où $\mathbf{l}$ représente le tenseur des propriétés tangentes du monocristal.
La deuxième étape mentionnée plus haut consiste à déterminer la solution du problème aux limites suivant :

"Soit un élément de volume représentatif, au sens de Hill et Mandel, du comportement défini par (39)

$$\delta_t \mathbf{n} = \mathbf{l} : \mathbf{g}$$

et vérifiant l'équation d'équilibre (31)

$$\text{div}\,(\delta_t \mathbf{n}) = 0 \qquad \text{dans } V_t$$

sous l'action des sollicitations extérieures appliquées sur sa surface S_t soit du type cinématique (32)

$$v_i = G_{ij}\, x_j \qquad \text{sur } S_t$$

soit du type statique (33)

$$\delta_t (T_i) = \delta_t (N_{ji})\, v_i \qquad \text{sur } S_t."$$

Il existe alors :

a) un champ de vitesses v(x) solution du problème tel que :

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{grad}\ v(x)$$

b) un tenseur de localisation du quatrième ordre A tel que :

(II.40) $$\mathbf{g}(x) = \mathbf{A}(x) : \mathbf{G}$$

c) un tenseur de localisation du quatrième ordre B tel que :

(II.41) $$\delta_t \mathbf{n}(x) = \mathbf{B}(x) : \delta_t \mathbf{N} \ "$$

L'existence de tels tenseurs a été démontrée, en élasticité, par Mandel [40], et Hill [13]. Dans le chapitre IV une approche par l'équation intégrale cinématique est développée conduisant au tenseur de localisation du gradient de vitesses A(x).

La connaissance de l'un des tenseurs de localisation permet de retrouver rapidement les propriétés effectives du volume représentatif V. En effet, supposons connu le tenseur A; en utilisant la loi de comportement (39) et l'opération de localisation (40), on trouve :

$$\delta_t \mathbf{n}(x) = \mathbf{l}(x) : \mathbf{g}(x) = \mathbf{l}(x) : \mathbf{A}(x) : \mathbf{G}$$

L'opération de moyenne volumique (35) appliquée au résultat ci-dessus conduit à :

(II.42) $$\delta_t \mathbf{N} = \overline{\delta_t \mathbf{n}(x)} = \overline{\mathbf{l}(x) : \mathbf{A}(x)} : \mathbf{G}$$

L'hypothèse de macro-homogénéité (38) permet de reconnaître en (42) le tenseur des propriétés effectives tangentes du matériau macro-homogène :

(I) $\mathbf{L}^{eff} = \overline{\mathbf{l}(x) : \mathbf{A}(x)}$

(II.43) ou

(2) $\mathbf{L}^{eff} = \overline{{}^{t}\mathbf{A}(x) : \mathbf{l}(x) : \mathbf{A}(x)}$

en appliquant la définition du matériau macro-homogène (38)

Les deux définitions, sous les hypothèses évoquées plus haut, sont équivalentes.

Les tenseurs de localisation possèdent plusieurs propriétés, dont

(II.44) $\overline{\mathbf{A}(x)} = \mathbf{I}$

(II.45) $\overline{\mathbf{B}(x)} = \mathbf{I}$

En introduisant les tenseurs inverses des propriétés locales et macroscopiques $\mathbf{l}^{-1}(x)$ et $\mathbf{L}^{-eff} = (\mathbf{L}^{eff})^{-1}$, on démontre aisément que les tenseurs **A** et **B** sont liés par:

(II.46) $\mathbf{B}(x) = \mathbf{l}(x) : \mathbf{A}(x) : \mathbf{L}^{-eff}$

(II.47) $\mathbf{A}(x) = \mathbf{l}^{-1}(x) : \mathbf{B}(x) : \mathbb{L}^{eff}$

Dans le chapitre III nous développons la loi constitutive élastoplastique du monocristal en nous appuyant sur le travail de Hill et Rice [35].

III - LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-PLASTIQUE POUR LE MONOCRISTAL

Parmi tous les mécanismes de déformation plastique possibles, tels que glissement cristallographique, diffusion, maclage, changement de phases, on retient le glissement plastique résultant du mouvement non thermiquement activé des dislocations. Ce mécanisme correspond principalement à la plasticité à froid des métaux. On suppose également que cette déformation a lieu sous la forme du glissement multiple homogène, c'est-à-dire que plusieurs systèmes de glissement peuvent être actifs à une échelle large par rapport aux dislocations. C'est le cadre de la théorie du glissement continu et homogène.

Plusieurs auteurs ont étudié la description d'une telle déformation élastoplastique du monocristal. On cite ici les travaux ayant une influence directe sur l'exposé présenté dans ce chapitre.

Taylor et Elam [6], [52], [53] sont considérés comme précurseurs dans ce domaine. La formulation en grandes transformations est due à Hill [34], Rice [43], Mandel [44], Hill et Rice [35], Asaro [46]. La démarche présentée ici s'inspire des travaux de Hill et Rice [35] et Mandel [42] et aboutit à une loi de comportement semblable à celle proposée par Iwakuma et Nemat-Nasser [32] ; elle est une généralisation des résultats déjà présentés par Lipinski et Berveiller [50], [55]...

Le point central des grandes transformations élastoplastiques se situe au niveau de la décomposition du gradient de vitesse g en parties élastique et plastique. Cette décomposition, ainsi que les lois de comportement pour les parties élastique et plastique, sont discutées dans ce chapitre. Auparavant, les bases physiques de la plasticité sont rappelées, ce qui permet de comprendre et de définir les limites de l'approche purement mécanique développée plus loin.

III.1 - Bases physiques de la plasticité à froid des métaux

Il est maintenant bien admis que la plasticité des métaux est associée au mouvement des dislocations sous l'effet des sollicitations statiques ou cinématiques imposées à la frontière du solide.

Il paraît utile de rappeler quelques éléments du concept de dislocation que nous introduisons dans le cadre de la théorie continue de Kröner [56], formulée en petites déformations. Soit κ_o une configuration de référence et κ_t la configuration actuelle du solide qui a subi en chaque point x (X,t) une transformation plastique β^p (X,t) due à un mouvement de dislocations.

A cause de la non homogénéité du monocristal (distribution non uniforme de défauts), β^p (X,t) est non compatible et *a priori* ne dérive pas d'un champ de déplacement. Ce manque de compatibilité doit être compensé par des transformations élastiques du réseau cristallin $\beta^e(X,t)$ telles que la transformation totale dérive d'un champ de déplacement continu.

$$\beta(X,t) = \frac{\partial u}{\partial X} = \beta^e(X,t) + \beta^p(X,t) \qquad \text{(III.1)}$$

Puisque β^e est mesurable par des techniques de métallurgie physique, il peut être choisi comme variable d'état (contrairement à β^p). Une quantité primaire qui décrit localement l'état du réseau cristallin peut être déduite de la condition géométrique d'intégrabilité du champ u (X,t) par la relation de Kröner [56]

$$\text{(III.2)} \quad (1) \quad \alpha = \mathbf{Rot}\ \beta^e$$
$$(2) \quad \alpha_{ij} = \in_{ikl} \beta^e_{lj,k}$$

où α désigne le tenseur **densité de dislocations** introduit par Nye [57].
De la relation

$$\mathbf{Rot\ grad\ u} = \mathbf{0}$$

on peut déduire que :

$$\alpha = -\mathbf{Rot}\ \beta^p \qquad \text{(III.3)}$$

Le cas particulier d'une dislocation unique s'obtient en choisissant un champ β^p tel que :

$$\beta^p_{kl} = -\, b_l \int_S \delta(x - \xi)\, \nu_k\, dS \quad ; \quad \xi \in S \qquad \text{(III.4)}$$

où **b** désigne le vecteur de Burgers et S la surface délimitée par la dislocation. La théorie continue des défauts permet de trouver le champ β^e (X,t) à partir du champ :

$$\beta^e_{mn}(x,t) = \int_{V_t} \in_{pmk} c_{ijkl} \mathcal{G}_{jn,j}(x-x') \alpha_{pl}(x') \, dV_t \qquad \text{(III.5)}$$

où **c** désigne le tenseur des constantes d'élasticité du matériau et $\mathcal{G}$ le tenseur de Green du solide élastique infini. Il existe donc une relation claire entre les distorsions élastiques et la densité de dislocations.

β^e contient à la fois la déformation ε^e qui est reliée aux contraintes $\sigma(x,t)$, qui sont auto-équilibrées, et les rotations du réseau cristallin. L'application des contraintes Σ sur un élément de volume disloqué fait apparaître des forces sur les dislocations qui s'écrivent selon la formule de Peach et Koehler:

$$F_i = \in_{ilm} t_l (\Sigma_{mk} + \sigma_{mk}) b_k \qquad \text{(III.6)}$$

Dans cette relation **t** désigne le vecteur tangent à la ligne de dislocation et **b** son vecteur de Burgers. Lorsque la force F atteint une valeur critique F_{cr}, on admet que le segment unitaire peut subir un mouvement irréversible. On a alors atteint la limite "microscopique" d'écoulement du matériau.

F_{cr} dépend de manière complexe de l'état disloqué du matériau de sorte que le critère de plastification s'écrit :

$$F_{cr}(\alpha(x)) = F \qquad \text{(III.7)}$$

La plastification dépend donc de la densité de dislocations et non de β^p.

Des interactions à distance se traduisent par les contraintes σ qui se superposent aux contraintes macroscopiques Σ. Les interactions avec d'autres défauts sont à considérer également. Dans le cas du polycristal, il faut encore rajouter les interactions avec les joints de grains, qui se traduisent plus particulièrement par des effets à grande distance. L'écoulement plastique modifie l'arrangement spatial des dislocations et leur densité, de sorte que F_{cr} évolue avec la déformation irréversible, ce qui constitue le phénomène d'écrouissage.

Malheureusement, la théorie continue des dislocations n'est pas développée au stade où elle pourrait être appliquée pour la description du monocristal. Les rares tentatives de modélisation du comportement du monocristal dans le cadre de cette théorie demandent un équipement informatique très important pour simuler la réaction d'une cellule de taille de 20x20x20 μm^3. Néanmoins, les derniers travaux de Kubin, Canova et al. [58], [59], témoignent de l'importance de ce type de modélisation, qui apporte de

nouvelles explications concernant le comportement collectif des dislocations et leur tendance à s'auto-organiser.

A ce jour, les transitions d'échelles entre les dislocations et le monocristal sont effectuées de manière phénoménologique. Cette modélisation a pour origine l'observation du fait que la mobilité des dislocations est très grande sur les surfaces appelées **systèmes de glissement** et quasiment nulle en dehors.

On est alors amené à décrire le comportement du monocristal par l'intermédiaire des relations entre les cissions critiques et les glissements plastiques, sur les systèmes mentionnés plus haut, par le biais d'une matrice d'écrouissage H^{*gh} qui est censée refléter de manière plus macroscopique les interactions locales et à distance contenues dans (6) et (7).

Cette approche peut être considérée comme justifiée dans le cas du glissement multiple homogène, c'est-à-dire lorsque l'arrangement spatial des dislocations n'est pas trop marqué. Dans le cas contraire, l'approche proposée est moins justifiée car le mode de déformation est plutôt du type glissement multiple ou simple hétérogène. Il faut alors faire appel à des descriptions différentes comme cela a été proposé dans [60]. Concernant les transitions d'échelles monocristal-polycristal, pour ce dernier cas, il peut apparaître qu'une microstructure de dislocations induite par la déformation plastique présente un caractère d'hétérogénéité intragranulaire. Malgré le caractère approché de la modélisation décrite par la suite, les résultats obtenus concernant le comportement global et l'évolution de la microstructure interne sont confirmés par les observations expérimentales, tout au moins dans le cas où les hypothèses retenues sont proches des observations expérimentales concernant les mécanismes de déformation.

Une deuxième conclusion que l'on peut tirer de cette discussion concerne le rôle essentiel de l'élasticité dans la description du comportement plastique du monocristal ($\alpha = \mathbf{Rot}\ \beta^e$) et, plus particulièrement, lorsqu'il s'agit d'en déduire le comportement du polycristal.

III.2 - Comportement élastique du monocristal

D'après Rice [43], une décomposition additive de l'incrément de déformation, par rapport à une configuration de référence κ_o, conduit à une loi de comportement élastique qui, dans la description lagrangienne, prend la forme :

(III.8) $$\delta_t e_o^e = s_o : \delta_t \pi$$

où : e_o^e est la partie élastique du tenseur de déformation de Green-Lagrange
π est le tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff 2
s_o est le tenseur de complaisances élastiques.

La relation inverse, appelée loi de Hooke généralisée, s'écrit :

(III.9) $$\delta_t \pi = c_o : \delta_t e_o^e$$

où c_o, tenseur de modules d'élasticité, est l'inverse de s_o au sens $s_o : c_o = I$.

Le transport convectif du tenseur e_o^e dans la configuration actuelle κ_t, noté e^e, est le tenseur de déformation élastique d'Euler-Almansi

(III.10) $$e^e = {}^tf^{-1}\, e_o^e\, .\, f^{-1}$$

Pour établir les relations entre les incréments des différentes mesures de déformation, il est instructif de partir de la définition de ces déformations :

$$\frac{1}{2}(dx\, .\, dy - dX\, .\, dY) = dX\, e_o\, dY = dx\, e\, .\, dy$$

Les incréments sont alors liés par les relations :

$$\delta_t\left(\frac{1}{2}(dx\, .\, dy - dX\, .\, dY)\right) = dx\, .\, d\, .\, dy = dX\, \delta_t e_o\, dY = \delta_t\,(dx\, e\, .\, dy)$$

ce qui conduit à :

(III.11) $$d = {}^tf^{-1}\, \delta_t e_o\, .\, f^{-1}$$

(III.12) $$d = \delta_t e + {}^tg\, .\, e + e\, .\, g$$

La décomposition additive de Rice [43] de l'incrément de déformation de Green-Lagrange en partie élastique et plastique

(III.13) $\delta_t e_o = \delta_t e_o^e + \delta_t e_o^p$

et la relation (11) conduisent à :

(III.14) $d^e = {}^tf^{-1}\, \delta_t e_o^e \,.\, f^{-1}$

D'autre part, le transport convectif du tenseur des complaisances d'élasticité s_o dans la configuration actuelle s'écrit :

(III.15) $s_{ijkl} = f_{pi}^{-1} f_{qj}^{-1} f_{rk}^{-1} f_{sl}^{-1} (s_o)_{pqrs}$ dét (f)

Alors, la loi de comportement élastique (1) s'exprime dans cette configuration actuelle sous la forme :

(III.16) $d^e = s : \delta_{Tr}\, \sigma$

où figure un incrément du tenseur de contraintes de Cauchy qui reste à définir. C'est cette définition qui pose une difficulté résidant dans la détermination des vitesses élastiques dans la configuration actuelle. Mandel [33,42] a introduit, pour résoudre ce problème, la notion du repère directeur, Onat et al. [61] la notion des variables structurales. Dafalias [62,63] a systématisé l'approche aux grandes transformations élastoplastiques en démontrant que les deux approches ne sont pas contradictoires.

Cette difficulté ne se pose pas dans le cas du monocristal, où le repère directeur est introduit de manière naturelle, et on définit la "vitesse élastique v^e comme étant celle du réseau atomique au cours du chargement", Mandel [33].

Une approche générale de détermination de l'incrément de contraintes conjugué à un incrément de déformation choisi, a été proposée par Hill [64]. Elle est basée sur l'invariance du travail extérieur. Cette méthode, dans le cas où d^* est choisi comme **incrément de déformation élastique du réseau**, conduit directement à :

(III.17) $\delta^*_{Tr}\, \sigma = \delta_t \sigma - g^* \,.\, \sigma - \sigma \,.\, {}^tg^* + \sigma\, tr\, (g^*)$

l'incrément de Truesdell du tenseur de contraintes de Cauchy ou l'incrément des contraintes de Kirchhoff dans la configuration actuelle par rapport à un référentiel animé d'un mouvement élastique du réseau donné par g^*.

Introduisant c tel que :

$$c : s = I$$

la loi de comportement élastique du réseau peut être mise sous la forme :

(III.18) $\delta^*_{Tr}\,\sigma = \mathbf{c} : \mathbf{d}^*$

soit :

(III.19) $\delta_t\,\sigma = \mathbf{c} : \mathbf{d}^* + \mathbf{g}^* . \sigma + \sigma . {}^t\mathbf{g}^* - \sigma\, tr\,(\mathbf{g}^*)$

ou encore, en utilisant la contrainte de Kirchhoff.

(III.20) $\tau = \left(\frac{\rho_r}{\rho_t}\right)\sigma$

telle que, pour la configuration actuelle considérée comme configuration de référence,

(III.21) $\delta_t\,\tau = \delta_t\sigma + \sigma\, tr\,(\mathbf{g}^*)$

cette loi élastique s'écrit :

(III.22) $\delta^*_{Ja}\tau = \mathbf{c}' : \mathbf{d}^*$

avec

(III.23) $\delta^*_{Ja}\tau = \delta_t\,\tau - \mathbf{w}^* . \tau + \tau . \mathbf{w}^*$

l'incrément objectif de Jaumann-Zaremba de la contrainte de Kirchhoff
ρ_r - la masse volumique dans la configuration de référence
ρ_t - la masse volumique dans la configuration actuelle

(III.24) $c'_{ijkl} = c_{ijkl} + \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\,\tau_{jl} + \delta_{jl}\,\tau_{ik} + \delta_{il}\,\tau_{jk} + \delta_{jk}\,\tau_{il}\right)$

La loi de comportement (22) a été utilisée par Iwakuma et Nemat-Nasser [32] et reprise par Lipinski et Berveiller [50], [55], [65].

III.3 - Comportement plastique du monocristal

Le problème du comportement élasto-plastique du monocristal a été résolu par Hill et Rice [35], pour un couple de variables conjuguées quelconques. Ici nous discutons un cas particulier de ce résultat général de Hill et Rice [35]. En effet, nous utilisons la description relative du mouvement (par rapport à la configuration actuelle), la loi de comportement élastique (16) et les incréments de déformation et de contrainte $\mathbf{d}$ et $\delta_{Tr}\,\sigma$ respectivement.

Comme dans [35], nous supposons que le glissement cristallographique est le seul mécanisme de déformation inélastique. En imaginant un cycle de charge - décharge, on peut écrire, grâce à la décomposition additive du taux de déformation en parties élastique et plastique:

$$(III.25) \qquad \mathbf{d}^p = \mathbf{d} - \mathbf{s} : \delta_{Tr}\,\sigma = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mu^h \, d\gamma^h$$

où

$\delta\gamma^h$ est l'incrément du glissement plastique sur le système h
μ^h est un tenseur décrivant la cinématique de la déformation plastique du système h, à déterminer
N.S.A. veut dire "Nombre des Systèmes Actifs" dans le monocristal.

Multiplions la relation (25) par le tenseur des modules élastiques $\mathbf{c}$

$$(III.26) \qquad \mathbf{c} : \mathbf{d} - \delta_{Tr}\,\sigma = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{c} : \mu^h \, \delta\gamma^h = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \lambda^h \, \delta\gamma^h$$

avec des relations évidentes

$$(III.27) \qquad (1) \quad \lambda^h = \mathbf{c} : \mu^h$$
$$(2) \quad \mu^h = \mathbf{s} : \lambda^h$$

L'un des buts de ce paragraphe est de définir μ^h (ou λ^h).

Définition de la partie plastique du gradient g

Soit $\mathbf{g}^*$ le taux de déformation du réseau cristallin tel que :

(III.28) $\mathbf{g}^* = \mathbf{d}^* + \mathbf{w}^*$

Taylor [17] a remarqué que le gradient de vitesse relatif au réseau atomique est provoqué par le glissement cristallographique :

(III.29)

(1) $\mathbf{g} - \mathbf{g}^* = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{S}^h \, \delta\gamma^h$

(2) $\mathbf{d} - \mathbf{d}^* = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \{\mathbf{S}^h\}_s \, \delta\gamma^h = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h \, \delta\gamma^h$

(3) $\mathbf{w} - \mathbf{w}^* = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \{\mathbf{S}^h\}_a \, \delta\gamma^h = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{R}^h \, \delta\gamma^h$

(4) $\delta_{Tr}\,\sigma - \delta^*_{Tr}\,\sigma = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \alpha^h \, \delta\gamma^h$

où :

(III.30) $\mathbf{S}^h = \mathbf{m}^h \otimes \mathbf{n}^h$

est le tenseur de Schmid du système h défini par les vecteurs unités

$\mathbf{m}^h$ - direction de glissement

$\mathbf{n}^h$ - normal au plan de glissement,

tous les deux exprimés dans la configuration actuelle,

(III.31) $\mathbf{P}^h = \{\mathbf{S}^h\}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{m}^h \otimes \mathbf{n}^h + \mathbf{n}^h \otimes \mathbf{m}^h)$ est la partie symétrique de $\mathbf{S}^h$

(III.32) $\mathbf{R}^h = \{\mathbf{S}^h\}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{m}^h \otimes \mathbf{n}^h - \mathbf{n}^h \otimes \mathbf{m}^h)$ est la partie antisymétrique de $\mathbf{S}^h$.

Le tenseur α^h, qui est symétrique, peut être déterminé à partir de la définition (17) de la dérivée objective de Truesdell appliquée par rapport à la matière et au réseau. Nous avons :

$$\delta_{Tr}\,\sigma - \delta^*_{Tr}\,\sigma = -(\mathbf{g} - \mathbf{g}^*) \cdot \sigma - \sigma \cdot {}^t(\mathbf{g} - \mathbf{g}^*) + \sigma \, \mathrm{tr}\,(\mathbf{g} - \mathbf{g}^*)$$

et finalement :

(III.33) $\alpha^h = -\mathbf{S}^h \cdot \sigma - \sigma \cdot {}^t\mathbf{S}^h = (\sigma \cdot \mathbf{R}^h - \mathbf{R}^h \cdot \sigma) - \mathbf{P}^h \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{P}^h$

car $\mathrm{tr}\,(\mathbf{g} - \mathbf{g}^*) = 0 \quad (\mathbf{m}^h \perp \mathbf{n}^h)$

Pour compléter le système d'équations, il est indispensable de définir le comportement du réseau cristallin. En l'absence de glissements plastiques, le réseau et la matière se déforment de la même manière, c'est-à-dire élastiquement. Supposons pour le moment que les glissements plastiques influencent le comportement élastique du réseau.
Dans un tel cas, ce comportement prend obligatoirement la forme :

$$\text{(III.34)} \qquad \delta^{*}_{Tr}\,\sigma - \mathbf{c} : \mathbf{d}^{*} = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \beta^{h}\,\delta\gamma^{h}$$

qui est la loi proposée par Hill et Rice [35]. Le tenseur β^h, également symétrique, décrit le durcissement éventuel du réseau.
La combinaison de la loi de comportement (26) avec la loi de comportement du réseau (34) conduit à :

$$\mathbf{c} :(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{*}) - (\delta_{Tr}\,\sigma - \delta^{*}_{Tr}\,\sigma) = \sum_{h=1}^{N.S.A.} (\lambda^{h} + \beta^{h})\,\delta\gamma^{h}$$

ou en exploitant les relations (29_2), (29_4) et (27_2)

$$\text{(III.35)} \qquad \text{(1)} \quad \mathbf{c} : \mathbf{P}^{h} - \alpha^{h} = \lambda^{h} + \beta^{h}$$

$$\text{(2)} \quad \mathbf{P}^{h} - \mathbf{s} : \alpha^{h} = \mu^{h} + \bar{\mathbf{s}} : \beta^{h}$$

Le terme $\sum_{h=1}^{N.S.A.} \beta^{h}\,\delta\gamma^{h}$ correspond au terme $\mathbf{d}'$ introduit par Mandel [33].
Dans ce travail le phénomène de durcissement du réseau par les glissements plastique est négligé, c'est-à-dire que l'on suppose $\beta^{h} = 0$.
Sous cette hypothèse, la définition (33) du tenseur α^h permet d'identifier les tenseurs λ^h et μ^h et, par là-même, la règle d'écoulement plastique du monocristal.

$$\text{(III.36)} \qquad \text{(1)} \quad \lambda^{h} = \mathbf{c} : \mathbf{P}^{h} + \mathbf{R}^{h} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{R}^{h} + \mathbf{P}^{h} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{P}^{h}$$

$$\text{(2)} \quad \mu^{h} = \mathbf{P}^{h} + \mathbf{s} : (\mathbf{R}^{h} \cdot \sigma - \sigma \cdot \mathbf{R}^{h} + \mathbf{P}^{h} \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{P}^{h})$$

On remarque, dans les formules (35) et (36), que le taux de la déformation plastique, définie par μ^h (25), est généralement différent de

$$\sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^{h}\,\delta\gamma^{h}$$

conclusion donnée également par Hill et Rice [35].

Critère de déchargement

Pour un matériau qui vérifie la règle de normalité, c'est-à-dire un matériau obéissant au principe du travail plastique maximal, le critère de déchargement s'écrit :

(III.38) $\delta_{Tr}\sigma : \mathbf{d}^p \leq 0$

pour tout incrément de contraintes qui ne viole pas le critère de plasticité, discuté plus bas.
En éliminant $\mathbf{d}^p$ à l'aide de (25) et en sachant que $\delta\gamma^h > 0$, l'inégalité (38) devient :

(III.39) $\mu^h : \delta_{Tr}\sigma < 0$

La décharge étant élastique, $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e = \mathbf{d}^*$, nous avons également :

(III.40) $\lambda^h : \mathbf{d} < 0$

Les deux inégalités (39) et (40) définissent alors le critère de déchargement élastique. Grâce à l'identité

$$\mu^h = \mathbf{P}^h - \mathbf{s} : \alpha^h$$

qui découle de (35) avec $\beta^h = 0$, et la définition (17), nous obtenons :

(III.41)

(1) $\mu^h : \delta_{Tr}\sigma = \mathbf{S}^h : (\delta_{J_a}\tau + \sigma \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d} \cdot \sigma) < 0$

(2) $\mu^h : \delta_{Tr}\sigma = \mathbf{S}^h : (\delta_t\sigma + \sigma\,\mathrm{tr}\,\mathbf{g} + \sigma \cdot \mathbf{g} - \mathbf{g} \cdot \sigma) < 0$

où :

(III.42) $\delta_{J_a}\tau = \delta_t\sigma + \sigma\,\mathrm{tr}\,\mathbf{g} + \sigma \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \sigma$

est la dérivée corotationnelle de Jaumann de la contrainte de Kirchhoff.

Pour comprendre le sens physique de ce critère, analysons la vitesse de la contrainte de cisaillement sur un système de glissement h. Cette contrainte τ est donnée par

(III.43) $\tau^h = \mathbf{S}^h : \sigma = S^h_{ij}\sigma_{ji} = S^h_{ij}\tau_{ji} = (\mathbf{n}^h \cdot \tau) \cdot \mathbf{m}^h$

Le vecteur unité $\mathbf{m}^h$ représente la direction du glissement. C'est un vecteur matériel qui, à un instant donné, se déforme avec le réseau cristallin. Le vecteur unité $\mathbf{n}^h$ doit rester constamment perpendiculaire au vecteur $\mathbf{m}^h$, il appartient donc à une base instantanée réciproque de la base matérielle du vecteur $\mathbf{m}^h$. La cinématique des bases réciproques est donnée par les relations suivantes :

$$\text{(III.44)} \qquad \begin{array}{lll} (1) & \delta_t \mathbf{m}^h = \mathbf{g} \,.\, \mathbf{m}^h & \delta_t m_i^h = g_{ip} m_p^h \\ & \text{ou} & \\ (2) & \delta_t \mathbf{n}^h = -\,{}^t\mathbf{g} \,.\, \mathbf{n}^h & \delta_t n_i^h = -\, g_{ip} n_p^h \end{array}$$

Ces expressions conduisent à :

$$\delta_t \tau^h = \delta_t \left(m_i^h \, n_j^h \, \tau_{ji} \right) = m_i^h \, n_j^h \, \delta_t \, \tau_{ji} + \delta_t \left(m_i^h \right) n_j^h \, \sigma_{ji} + m_i^h \, \delta_t \left(n_j^h \right) \sigma_{ji}$$

$$\delta_t \, \tau^h = m_i^h \, n_j^h \left(\delta_t \, \sigma_{ji} + \sigma_{ji} \, g_{kk} + \sigma_{jk} \, g_{ki} - g_{jk} \, \sigma_{ki} \right)$$

Ce qui s'écrit en notation tensorielle :

$$\text{(III.45)} \qquad \begin{array}{ll} (1) & \delta_t \, \tau^h = \mathbf{S}^h : \left(\delta_t \, \sigma + \sigma \, \mathrm{tr} \, \mathbf{g} + \sigma \,.\, \mathbf{g} - \mathbf{g} \,.\, \sigma \right) \\ (2) & \delta_t \, \tau^h = \mathbf{S}^h : \left(\delta_{J_a} \, \tau + \sigma \,.\, \mathbf{w} - \mathbf{w} \,.\, \mathbf{g} \right) \end{array}$$

Alors, le critère de déchargement du système h s'écrit sous la nouvelle forme :

$$\text{(III.46)} \qquad \delta_t \, \tau^h < 0.$$

avec $\delta_t \, \tau^h$ défini par les relations (41) ou (45).

Dans la dernière partie de ce paragraphe, nous discutons une loi d'écrouissage du monocristal. Cette loi doit décrire l'évolution de la cission critique sur les systèmes actifs et non actifs en vérifiant les relations :

$$\text{(III.47)} \qquad \begin{array}{lll} (1) & \delta \, \tau^h = \mu^h : \delta_{Tr} \, \sigma = \delta_t \, \tau_{cr}^h & \text{pour un système h actif} \\ (2) & \delta \, \tau^h = \mu^h : \delta_{Tr} \, \sigma < \delta_t \, \tau_{cr}^h & \text{pour un système h qui se desactive.} \end{array}$$

où τ_{cr}^h représente la cission critique sur le système h. L'évolution de cette cission, dans sa forme la plus simple, est décrite, dans la configuration actuelle, par l'expression :

(III.48) $$\delta_t \tau^h_{cr} = \sum_{g=1}^{N.S.A.} H^{hg} \delta\gamma^g$$

où H^{hg} est la matrice d'écrouissage recherchée.
D'autre part, si les glissements plastiques ne modifient pas le comportement élastique du réseau, les relations suivantes peuvent être adoptées :

(III.49)

(1) $\delta_t \tau^h = \mu^h : \delta^*_{Tr} \sigma = \delta_t \tau^h_{cr}$ pour un système h actif

(2) $\delta_t \tau^h = \mu^h : \delta^*_{Tr} \sigma < \delta_t \tau^h_{cr}$ pour un système h qui se desactive..

où l'évolution de cission critique définie par la matrice H^{*gh}, et discutée au premier paragraphe de ce chapitre, est donnée par:

(III.50) $$\delta_t \tau^h_{cr} = \sum_{g=1}^{N.S.A.} H^{*gh} \delta\gamma^g$$

Pour construire la matrice H^{gh} analysons, pour les systèmes actifs, la différence entre les expressions (47_1) et (50_1) :

(III.51) $$\mu^g : (\delta_{Tr} \sigma - \delta^*_{Tr} \sigma) = \sum_{h=1}^{N.S.A.} (H^{gh} - H^{*gh}) \delta\gamma^h$$

D'après (29_4)

$$\delta_{Tr} \sigma - \delta^*_{Tr} \sigma = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \alpha^g \delta\gamma^g$$

et on déduit :

(III.52) $$H^{gh} = H^{*gh} + \mu^g : \alpha^h$$

Cette matrice d'écrouissage n'étant pas exploitée ici, elle est laissée sous forme non-développée. Une nouvelle forme peut être obtenue facilement à partir de la relation (49), en effet :

$$\sum_{g=1}^{N.S.A.} H^{*gh}\,\delta\gamma^g = \mu^h : \delta^*_{Tr}\,\sigma = \mu^h : c : d^* = \lambda^h : d^*$$

La décomposition du taux de déformation d'après (29_2) permet d'écrire :

$$\lambda^h : d = \sum_{g=1}^{N.S.A.} H^{*gh}\,\delta\gamma^g + \lambda^h : \sum_{g=1}^{N.S.A.} P^g\,\delta\gamma^g$$

(III.53)

$$\lambda^h : d = \sum_{g=1}^{N.S.A.} (H^{*gh}+\lambda^h : P^g)\delta\gamma^g = \sum_{g=1}^{N.S.A.} (H^{*gh}+\lambda^h : S^g)\delta\gamma^g$$

ou encore :

(III.54) $$\lambda^h : d = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{hg}\,\delta\gamma^g$$

Ainsi, on retrouve la règle d'écrouissage proposée par Hill et Rice [35] laquelle, d'après les auteurs, est invariante par rapport aux changements de mesures et de configurations. La nouvelle matrice d'écrouissage est une combinaison linéaire de la matrice H^{*gh}, de la matrice d'élasticité et de l'état de contrainte. En effet :

(III.55)
$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{hg} &= H^{*gh} + \lambda^h : S^g \\ &= H^{*gh} + S^h : c : S^g + (S^h \,.\, \sigma + \sigma \,.\, {}^tS^h) : S^g \\ &= H^{*gh} + H_c^{hg} + H_\sigma^{hg}\end{aligned}$$

avec

$$H_c^{hg} = S^h_{ij}\, c_{ijkl}\, S^g_{kl}$$

$$H_\sigma^{hg} = \left(S^h_{im}\,\sigma_{mj} + \sigma_{im}\,S^h_{jm}\right)S^g_{ji}$$

Grâce à l'invariance du terme $\lambda^h : d$ par rapport aux changements des mesures ou/et des configurations de référence les facteurs $\delta_i\gamma$ sont insensibles à ces changements et gardent leurs valeurs dans toute description (Hill [38], Hill et Rice[35])

III.4 - Construction des modules tangents du monocristal

Les modules tangents du monocristal s'obtiennent à partir de la relation (25) par élimination des glissements plastiques $\delta\gamma^h$.

Pour déterminer les glissements $\delta\gamma^h$, nous résolvons le système (54). Sous l'hypothèse que la matrice d'écrouissage $\mathcal{H}^{hg}$ est non singulière, ceci conduit à :

$$\delta\gamma^g = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{-gh}\, \lambda^h : \mathbf{d} \qquad \text{(III.56)}$$

où $\mathcal{H}^{-gh}$ désigne l'inverse de la matrice d'écrouissage $\mathcal{H}^{gh}$.

En introduisant la relation (56) dans la loi de comportement (26), on obtient :

$$\delta_{Tr}\sigma = \left(\mathbf{c} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \lambda^h \otimes (\mathcal{H}^{-hg}\, \lambda^g)\right) : \mathbf{d} = \mathbf{m} : \mathbf{d} \qquad \text{(III.57)}$$

La relation (57) définit les modules tangents élastoplastiques m_{ijkl}

$$m_{ijkl} = c_{ijkl} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \lambda^h_{ij}\, \mathcal{H}^{hg}\, \lambda^g_{kl} \qquad \text{(III.58)}$$

Les modules m_{ijkl} possèdent toutes les symétries du tenseur des constantes élastiques c_{ijkl} si la matrice d'écrouissage H^{*gh}, et en conséquence $\mathcal{H}^{gh}$, est symétrique. Dans ce travail nous supposons que cette symétrie est respectée. Le cas de la matrice non-symétrique a été envisagé par exemple dans [108], [109].

L'utilisation des variables conjuguées $\delta_t\mathbf{n}$ et $\mathbf{g}$, justifiée au chapitre II, demande une autre écriture de la loi de comportement élastoplastique. La relation entre $\delta_{Tr}\sigma$ et $\delta_t\mathbf{n}$ s'écrit (voir les expressions (II.29) et (17)) :

$$\delta_{Tr}\,\sigma = \delta_t\mathbf{n} - \sigma \,.\, {}^t\mathbf{g} \qquad \text{(III.59)}$$

et, grâce à la symétrie de m_{ijkl} par rapport aux indices k et l, nous pouvons écrire :

$$\delta_t n_{ij} = m_{ijkl} g_{lk} + \sigma_{ik} g_{jk} = (m_{ijkl} + \sigma_{ik}\delta_{jl})\, g_{lk}$$

(III.60) $\delta_t n_{ij} = l_{ijkl} g_{lk}$

ou

(III.61) $l_{ijkl} = m_{ijkl} + \sigma_{ik}\delta_{jl}$

On remarque que le tenseur l possède la symétrie par rapport au couple d'indices (ij) et (kl). En effet

$$l_{ijkl} - l_{klij} = m_{ijkl} + \sigma_{ik}\delta_{jl} - m_{klij} - \sigma_{ki}\delta_{lj} = 0$$

alors

$$l_{ijkl} = l_{klij}$$

Cette symétrie garantit l' ellipticité de l'opérateur de Lamé du problème (voir le chapitre suivant) et en conséquence la stabilité du matériau.

Nous finissons ce paragraphe en détaillant l'expression des modules tangents l_{ijkl}

(III.62) $$l_{ijkl} = c_{ijkl} + \sigma_{ik}\delta_{jl} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \left[\left(c_{ijpq} S^h_{pq} + S^h_{ip}\sigma_{pj} + \sigma_{ip} S^h_{jp} \right) \mathcal{H}^{-hg} \left(c_{klrs} S^g_{rs} + S^g_{kr}\sigma_{rl} + \sigma_{kr} S^g_{lr} \right) \right]$$

III.5 - Commentaires

III.5.1 - Remarques sur la loi de comportement de Iwakuma et Nemat-Nasser

La loi de comportement élastoplastique du monocristal présentée dans le paragraphe précédent - formule (62) - a été proposée par Hill et Rice [35] sous une forme plus générale mais moins explicite. Iwakuma et Nemat-Nasser [32] ont repris leurs résultats, et comme ici, ils ont négligé l'influence des glissements plastiques sur le comportement élastique du réseau.

De même, ils ont négligé le taux de la déformation élastique dans la description du comportement plastique du monocristal, en supposant que cette déformation est petite par rapport à la rotation du réseau , tout en la préservant dans la loi de comportement élastique. Cette simplification apparente conduit à une dissymétrie du tenseur de comportement élastoplastique du monocristal. En effet, dans [32] ainsi que dans les travaux de Lipinski et Berveiller [50], [65]... les modules tangents sont tels que :

$$l_{ijkl} \neq l_{klij}.$$

Ce manque de symétrie peut conduire à un comportement instable du matériau, observé par Nemat-Nasser et Iwakuma dans leurs simulations numériques, mais aussi aux difficultés mathématiques liées à la détermination du tenseur de localisation. Dans le chapitre IV ce tenseur est déterminé à partir d'une équation intégrale obtenue pour un cas général du tenseur des propriétés élastoplastiques non symétrique.

III.5.2 - Cas des petites déformations élastiques

Dans le cas des métaux, il est raisonnable de supposer que le taux de déformations du réseau est négligeable par rapport au taux de rotation.

$$\mathbf{d}^* << \mathbf{w}^*$$

c'est-à-dire:

$$\mathbf{g}^* \approx \mathbf{w}^* = \mathbf{w}^e$$

Dans ce cas la formule (17) devient

$$\delta_t\sigma - \mathbf{w}^e \cdot \sigma + \sigma \cdot \mathbf{w}^e = \delta_{JA}\,\sigma \qquad \text{(III.63)}$$

et la loi de comportement élastique (18) se met sous la forme :

(III.64) $\delta_{J_a}\sigma = \mathbf{c} : \mathbf{d}^e$

Le même type de simplification appliqué au comportement plastique du monocristal conduit :

· au critère de déchargement (38)

(III.65) $\delta^*_{Ja}\sigma : \mathbf{d}^p < 0$

où :

$$\delta^*_{Ja}\sigma = \delta_t\sigma - \mathbf{w}^* . \sigma + \sigma . \mathbf{w}^*$$

et

$$\mathbf{S}^h : (\delta^*_{JA}\,\tau - \mathbf{d}^*_k . \sigma + \sigma . \mathbf{d}^*) \approx \delta^*_{JA}\,\sigma : \mathbf{S}^h < 0$$

qui se traduit par

(III.66) $\lambda^h = \mathbf{c} : \mathbf{S}^h$

et

(III.67) $\mu^h = \mathbf{S}^h$

c'est-à-dire une définition habituelle de la déformation plastique due aux glissements plastiques

$$\mathbf{d}^p = \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h \, \delta\gamma^p$$

· à la loi de comportement élastoplastique (57)

(III.68) $$\delta_{JA}\sigma = \left(\mathbf{c} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathbf{c} : \mathbf{S}^h \, \mathcal{H}^{hg} \mathbf{S}^g : \mathbf{c}\right) : \mathbf{d}$$

avec

(III.69) $$\mathcal{H}^{hg} = \left(\mathbf{H}^{*gh} + \mathbf{S}^h : \mathbf{c} : \mathbf{S}^g\right)^{-1}$$

· aux modules élastoplastiques l (62)

$$(III.70) \qquad l_{ijkl} = c_{ijkl} - \frac{1}{2}\left(\delta_{kj}\sigma_{il} + \delta_{ki}\sigma_{lj} - \sigma_{ki}\delta_{lj} + \sigma_{kj}\delta_{il}\right) + \\ - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \left(c_{ijpq} S^{h}_{pq} \mathcal{H}^{hg} S^{g}_{rs} c_{rskl}\right)$$

avec, comme attendu, une symétrie du tenseur l par rapport aux couples d'indices, si $\mathcal{H}^{gh}$ est symétrique.

$$l_{ijkl} = l_{klij}.$$

Si de plus, les contraintes peuvent être négligées par rapport aux modules élastiques, on obtient :

$$(III.71) \qquad l_{ijkl} = c_{ijkl} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \left(c_{ijpq} S^{h}_{pq} \mathcal{H}^{-hg} S^{g}_{rs} c_{rskl}\right)$$

relation qui est identique à celle utilisée en petites transformations élastoplastiques.

IV- SOLUTION FORMELLE DU PROBLEME DES TRANSFORMATIONS FINIES DES SOLIDES HETEROGENES

IV.1 - Equation intégrale cinématique

Le problème de la détermination des champs mécaniques, tels que les champs de contraintes et de déformations, dans un milieu non-homogène, relève du domaine du calcul de structures et, en tant que tel, peut être abordé en utilisant les techniques mathématiques développées dans ce cadre.

En effet, le matériau hétérogène peut être considéré comme un milieu continu à microstructure. Celle-ci est supposée connue dans l'état initial du milieu, et son évolution au cours de la déformation du solide conditionne la réponse du matériau. La formulation d'un tel problème en élasticité (problème non évolutif) conduit à une équation intégrale [5] dont la solution approchée est souvent obtenue dans le cadre du schéma auto-cohérent [47], [66].

En élastoplasticité , Berveiller et Zaoui [17] ont formulé une équation intégrale dans le cadre des petites déformations. Ici, une démarche semblable est utilisée pour résoudre ce problème en grandes transformations. Une formulation en vitesse est indispensable pour le problème d'évolution. D'après les conclusions du chapitre précédent, une description par rapport à la configuration actuelle est souhaitable.

Supposons qu'à l'instant t le solide considéré occupe un volume V_t de surface extérieure S_t et que l'action de l'extérieur sur ce solide se traduise par une vitesse imposée sur sa surface, donnée par :

(IV.1) $$v_i(x) = G_{ij}(x)\, x_j \qquad \text{sur } S_t.$$

En se limitant au cas quasi stationnaire et en négligeant les forces volumiques, l'équilibre du corps s'exprime localement par la relation suivante:

(IV.2) $$(\delta_t n_{ij})_{,i}\,(x) = 0.$$

Ces deux relations sont complétées par la loi de comportement locale

(IV.3) $$\delta_t n_{ij}\,(x) = l_{ijkl}\,(x)\, v_{l,k}\,(x)$$

Les équations (2) et (3) et les conditions aux limites (1) définissent le problème dans le cas d'une approche cinématique (les relations de compatibilité sont automatiquement vérifiées).

En éliminant $\delta_t n$ de (2) à l'aide de (3), on obtient le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

(IV.4) $$\left(l_{ijkl}(x)\, v_{l,k}(x)\right)_{,i} = 0$$

Comme pour les milieux linéaires, on décompose le tenseur **l** en une partie uniforme L° et une déviation $\delta l(x)$ telles que :

(IV.5) $$l_{ijkl}(x) = L^{\circ}_{ijkl} + \delta l_{ijkl}(x)$$

L'équation (4) s'écrit maintenant :

(IV.6) $$L^{\circ}_{ijkl}\, v_{l,ki}(x) + \left[\delta l_{ijkl}(x)\, v_{l,k}(x)\right]_{,i} = 0$$

Le deuxième terme apparaît comme des forces de volume $\delta_t f$ dans l'équation classique de Navier. En introduisant l'opérateur de Lamé Λ, l'équation (6) peut être réécrite sous la forme :

(IV.7) $$\Lambda_{jl}\, v_l(x) + \delta_t f_j(x) = 0$$

où :

(IV.8) $$\Lambda_{jl} \equiv L^{\circ}_{ijkl}\, \partial_k\, \partial_i$$

(IV.9) $$\delta_t f_j(x) = \left[\delta l_{ijkl}(x)\, v_{l,k}(x)\right]_{,i}$$

Le problème est défini maintenant par l'équation (7) et les conditions aux limites (1).

L'opérateur de Lamé Λ est non symétrique dans le cas où :

$$L^{\circ}_{ijkl} \neq L^{\circ}_{klij}.$$

Effectivement

$$L^{\circ}_{ijkl}\, \partial_k\, \partial_i = \Lambda_{jl} \neq \Lambda_{lj} = L^{\circ}_{klij}\, \partial_k\, \partial_i$$

Définissons un opérateur Λ^* adjoint à Λ et tel que

(IV.10) $$\int_{V_t} \Lambda_{jl}\, v_l\, w_j\, dV = \int_{V_t} \Lambda^+_{jl}\, v_j\, w_l\, dV,$$

ce qui, dans le cas de l'espace vectoriel réel, conduit à :

(IV.11) (1) $\Lambda^+ = {}^t\Lambda$

ou

(2) $\Lambda^+_{jl} = \Lambda_{lj} = L^\circ_{klij}\, \partial_k\, \partial_i$

L'équation (7) peut être transformée en équation intégrale en utilisant la technique du tenseur de Green. En suivant le schéma usuel de cette méthode, on suppose que l'action d'une force concentrée au point x définie par

(IV.12) $$\delta_t\, f_j\,(x') = \delta_{jm}\, \delta\,(x' - x)$$

induit une vitesse au point x' égale à

(IV.13) $$v_l(x') = \mathcal{G}_{lm}\,(x' - x)\, \delta_t\, f_m\,(x)$$

Ces deux quantités doivent bien sûr vérifier l'équation (7). En remplaçant f(x') et v(x') dans (7) par (12) et (13) on obtient l'équation pour $\mathcal{G}(x',x)$

(IV.14) $$L^\circ_{ijkl}\, \mathcal{G}_{lm,ki}\,(x',x) + \delta_{jm}\, \delta\,(x' - x) = 0$$

Dans cette expression, le tenseur de Green $\mathcal{G}(x',x)$ apparaît en tant qu'opérateur inverse de l'opérateur de Lamé Λ. De la même manière, on peut introduire le tenseur de Green $\mathcal{G}^+\,(x',x)$ associé à Λ^+ opérateur adjoint de Λ.

(IV.15) $$L^\circ_{klij}\, \mathcal{G}^+_{lm,ki}\,(x',x) + \delta_{jm}\, \delta\,(x' - x) = 0$$

En multipliant (6) par $\mathcal{G}_{jm}{}^+(x',x)$ et (15) par $v_j(x')$, on obtient par différence

(IV.16) $$\mathcal{G}^+_{jm}\,(x',x)\, L^\circ_{ijkl} v_{l,ki}(x') + \mathcal{G}^+_{jm}(x',x)\, f_j(x') - v_j(x')\, L^\circ_{klij} \mathcal{G}^+_{lm,ki}(x',x)$$
$$= v_m(x')\, \delta\,(x' - x)$$

Par ailleurs on démontre que :

$$[\mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x') - v_j(x')\,L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{o}_{lm,k}(x',x)]_{,i'} = \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x') +$$

$$+ \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,ki}(x') - v_{j,i}(x')L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x) - v_j(x')L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,ki}(x',x) =$$

$$= \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,ki}(x') - v_j(x')\,L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,ki}(x',x) + \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x')$$

$$- \mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)\,L^{o}_{klij}v_{j,i}(x')$$

$$= \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\,L^{o}_{ijkl}v_{l,ki}(x') - v_j(x')\,L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,ki}(x',x)$$

Ceci permet de réécrire l'équation (16) sous la forme :

$$(IV.17)\quad [\mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x') - v_j(x')\,L^{o}_{klij}\,\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)]_{,i'} + \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\,\delta_t\,f_j(x')$$

$$= v_m(x')\,\delta(x' - x)$$

Par intégration sur le volume du solide V_t et en utilisant le théorème de divergence on obtient :

$$(IV.18)\qquad v_m(x) = \int_{S_t} [\mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x') - v_j(x')L^{o}_{klij}\,\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)]v_i\,dS +$$

$$+ \int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\,\delta_t\,f_j(x')\,dV$$

Les deux termes sous l'intégrale de surface définissent deux types de conditions aux limites:

a) cinématiques quand:

$$v_j(x') = v^{d}_{j}(x') \quad \text{alors} \quad \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x) = 0 \qquad \forall\, x' \in S_t$$

b) statiques quand:

$$T_j(x') = L^{o}_{ijkl}v_{l,k}(x')v_i(x') = T^{d}_{j}(x') \quad \text{alors} \quad L^{o}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)v_i(x') = 0 \quad \forall\, x' \in S_t$$

Dans la suite de la démonstration, seul le cas des conditions aux limites cinématiques est considéré. L'équation (18) devient alors

$$(IV.19)\quad v_m(x) = -\int_{S_t} v_j(x')L^{\circ}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)v_i(x')\,dS + \int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\,\delta_t\, f_j(x')\,dV.$$

La dernière intégrale sur le volume, d'après la définition (9), devient

$$\int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\,[\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')]_{,i}\,dV$$

$$= \int_{S_t} \mathcal{G}^{+}_{jm}(x',x)\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')v_i(x')\,dS - \int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')\,dV$$

$$= -\int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')\,dV$$

grâce aux conditions aux limites ($\mathcal{G}^{+}(x',x) = 0$ sur S_t).

En introduisant ce résultat dans (19), le champ de vitesses dans le solide s'écrit alors :

$$(IV.20)\quad v_m(x) = -\int_{S_t} v_j(x')L^{\circ}_{klij}\mathcal{G}^{+}_{lm,k}(x',x)v_i(x')\,dS$$

$$-\int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')\,dV.$$

La première intégrale dans (20) représente le champ de vitesses dans un solide homogène ayant la même géométrie et soumis aux mêmes conditions aux limites que le solide considéré.

En notant cette vitesse $V_m^{\circ}(x)$ on obtient :

$$(IV.21)\quad v_m(x) = V^{\circ}_m(x) - \int_{V_t} \mathcal{G}^{+}_{jm,i}(x',x)\,\delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')\,dV$$

L'expression (21) constitue la solution du problème, exprimée en fonction de l'opérateur $\mathcal{G}^+(x',x)$. Cet opérateur peut être éliminé à l'aide d'une relation entre lui-même et $\mathcal{G}(x',x)$. En effet, en choisissant:

$$v_j(x') = \mathcal{G}_{jn}(x',x'')$$

et

$$\delta_t f_j(x') = \delta_{jn}\delta(x' - x'')$$

et en utilisant l'expression (18) on a :

$$\int_{S_t} [\mathcal{G}^+_{jm}(x',x)L^o_{ijkl}\mathcal{G}_{kn,l}(x',x'') - \mathcal{G}_{jn}(x',x'')L^o_{klij}\mathcal{G}^+_{lm,k}(x',x)]\, v_i(x')\, dS$$

$$+ \int_{V_t} \mathcal{G}^+_{jm}(x',x)\delta_{jn}\delta(x'-x'')\, dV = \mathcal{G}_{mn}(x,x'')$$

L'intégrale de surface s'annule quelles que soient les conditions aux limites et on déduit de l'expression ci-dessus que

(IV.22) $$\mathcal{G}^+_{nm}(x'',x) = \mathcal{G}_{mn}(x,x'')$$

Cette propriété, dans le cas de l'opérateur de Lamé auto-adjoint, traduit la symétrie du tenseur de Green.

En introduisant (22) dans (21), on obtient

(IV.23) $$v_m(x) = V^o_m(x) - \int_{V_t} \mathcal{G}_{mj,i}(x,x')\, \delta l_{ijkl}(x')v_{l,k}(x')\, dV$$

L'expression (23) décrit le mouvement du solide hétérogène. En dérivant celle-ci par rapport à la position x, le gradient de vitesse peut être calculé, soit:

(IV.24) $$g_{mn}(x) = v_{m,n}(x) = G^o_{mn}(x) - \int_{V_t} \mathcal{G}_{mj,i'n}(x,x')\delta l_{ijkl}(x')g_{lk}(x')\, dV$$

où

$$\mathbf{G^o(x) = grad\ V^o(x)}$$

qui est l'équation intégrale recherchée.

Cette équation intégrale est valable pour toute structure interne actuelle, y compris lorsque les hétérogénéités intra-constituantes sont présentes dans le solide.

Ainsi qu'il a été signalé dans le chapitre précédent, le problème central de la détermination des propriétés effectives des milieux hétérogènes consiste à résoudre un problème de localisation c'est-à-dire résoudre l'équation intégrale (24). Dans ce chapitre, une approche formelle, proposée par Kröner [71], est exploitée. Elle permet en même temps de situer les modèles simples de Lin [9] et de Taylor [6] par rapport à la solution de l'équation (24).

IV.2 - Solution formelle de l'équation intégrale

Pour les milieux élastiques linéaires, Kröner [66] a proposé une approche statistique systématique en utilisant l'approximation de Born. Cette approche conduit à une solution de l'équation (24) sous forme de série infinie. Kröner et Koch [67] ont montré que la convergence d'une telle série est assurée si les propriétés locales sont reparties aléatoirement dans l'espace. Ici cette solution est étendue au cas des transformations finies élastoplastiques.

Les grandes classes de méthodes ou modèles qui ont été développées dans le passé sont mentionnées très succinctement. En effet, négligeons l'intégrale dans l'équation (24) c'est-à-dire posons :

(IV.25) $\quad g^{(o)}_{mn}(x) = G^{o}_{mn}(x)$

Puisque les sollicitations envisagées se traduisent par des conditions aux limites homogènes, la solution G^{o} pour des milieux homogènes doit être homogène. En appliquant la relation (II.36) à l'expression (25) on obtient :

(IV.26) $\quad G = < g(x) > = < G^{o} > = G^{o}$

c'est-à-dire

(IV.27) $\quad g^{(o)}_{mn}(x) = G_{mn}$

L'équation (27) exprime l'hypothèse de Lin [9] de l'homogénéité de la déformation (gradient) totale. On voit que cette approximation néglige de fait toute hétérogénéité de comportement et ne doit s'appliquer qualitativement que pour les milieux faiblement hétérogènes.

Si, de plus, la partie élastique du taux de déformation **d** est négligée, l'expression (27) devient

(IV.28) $\quad g^{p}_{mn}(x) + w^{e}_{mn}(x) = G_{mn}$

et on aboutit à l'hypothèse de Taylor [6].

A partir de la solution de Lin (27) qui peut être considérée comme une approximation d'ordre zéro de la solution de l'équation (24), l'approximation du premier ordre est obtenue en substituant au terme $g(x)$ dans (24) l'expression (27). On a alors :

(IV.29) $$g^{(1)}(x) = G^o + \int_{V_t} \Gamma\,(x,x') : \delta l\,(x') : G^o\, dV' =$$

$$= [I + \int_{V_t} \Gamma\,(x,x') : \delta l\,(x')\, dV'] : G^o$$

où, pour simplifier l'écriture, on introduit le tenseur :

(IV.30) $$\Gamma_{ijmn}\,(x,x') \equiv \mathcal{G}_{im,jn'}\,(x,x')$$

L'approximation du second ordre s'obtient en remplaçant **g** (**x**) dans (24) par l'approximation du premier ordre (29)

$$g^{(2)}(x) = G^o + [\int_{V_t} \Gamma(x,x') : \delta l\,(x')\, dV'] : G^o$$

(IV.31) $$+ [\int_{V_t} \Gamma(x,x') : \delta l\,(x') \Gamma(x',x") : \delta l(x")\, dV"\, dV'] : G^o$$

$$= [I + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x) dV' + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x')$$

$$: \int_{V_t} \Gamma(x',x"):\delta l(x") dV" dV']: G^o$$

En procédant de la même manière pour les ordres supérieurs, on obtient une solution générale pour **g** (**x**) sous la forme d'une série infinie.

(IV.32) $$g(x) = [I + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x')\, dV' + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x'):\int_{V_t} \Gamma(x',x"):\delta l(x")\, dV"\, dV' +$$

$$+ \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x'):\int_{V_t} \Gamma(x',x"):\delta l(x"):\int_{V_t} \Gamma(x",x"'):\delta l(x"')dV'"dV"dV'+...]: G^o$$

La solution (32) peut être réécrite sous la forme :

(IV.33) $$g\,(x) = a\,(x) : G^o$$

à partir de laquelle on peut déduire le tenseur de localisation (II.40). En effet, l'application du théorème de la moyenne (II.36) au résultat (33) conduit à :

(IV.34) $$G = < g\,(x) > = < a\,(x) > : G^o$$

qui permet d'exprimer G^0

(IV.35) $\quad G^0 = < a(x) >^{-1} : G.$

L'introduction de (35) dans (33) donne :

(IV.36) $\quad g(x) = a(x) : < a(x) >^{-1} : G$

La comparaison avec (II.40) permet de définir le tenseur de localisation

(IV.37) $\quad A(x) = a(x) : < a(x) >^{-1}$

avec

(IV.38) $$a(x) = I + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x')dV' + \int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x'): \int_{V_t} \Gamma(x',x''):\delta l(x'')dV''dV' +$$

$$\int_{V_t} \Gamma(x,x'):\delta l(x'): \int_{V_t} \Gamma(x',x''):\delta l(x''): \int_{V_t} \Gamma(x'',x'''):\delta l(x''')dV'''dV''dV' + \ldots$$

L'équation (37) a été obtenue pour la première fois par Eimer [68], [69] en 1967 dans le cadre des problèmes d'élasticité linéaire. Ceci constitue la solution formelle de l'équation intégrale (24).

Par ailleurs, grâce à la relation (36), il est possible de formuler les lois d'évolution de la structure interne du milieu. Au paragraphe suivant, ces lois sont développées pour le cas particulier d'un mécanisme de déformation plastique , le glissement cristallographique multiple et homogène.

IV.3 - Lois d'évolution des variables d'état

La solution de l'équation intégrale (24) permet de décrire l'évolution de la structure interne du solide. Il est évident que les relations obtenues sont étroitement liées à l'état de connaissance (modélisation) des micro-mécanismes de déformation plastique. Si, par exemple, on se limite au mécanisme de glissements cristallographiques, multiples et homogènes à l'intérieur d'un constituant, les phénomènes tels que :

- création des structures de dislocations
- apparition des micro-bandes de cisaillement

ne peuvent pas être décrits par une telle approche. Mais, si le modèle décrivant le réarrangement des dislocations existait, la solution (36) de l'équation intégrale permettrait de simuler de tels phénomènes.
Une première approche de ce problème très complexe a été proposée par Berveiller et al. [60] et permet de retrouver des sous-domaines de grains, siège d'une forte concentration de dislocations.
La structure dipolaire de ces sous-domaines ainsi que leurs formes et orientations correspondent aux micro-bandes de cisaillement.

Donner les lois d'évolution des variables d'état revient à relier la grandeur α (x), décrivant une telle variable au point x, au gradient de la vitesse G, imposé à la frontière du solide, sous la forme d'une équation de localisation :

$$\dot{\alpha}(\mathbf{x}) = C_\alpha(\mathbf{x}) : \mathbf{G}. \qquad \text{(IV.39)}$$

Le tenseur C_α (x) désigne formellement un opérateur de localisation particulier à la variable α.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que le glissement plastique sur les systèmes cristallographiques bien définis est le seul mécanisme de déformation permanente.

La structure interne est définie par les paramètres suivants :

- cissions critiques sur les systèmes de glissement
- texture cristallographique
- contraintes internes correspondant à la distortion du réseau
- texture morphologique, c'est-à-dire des formes et orientations des constituants.

IV.3.1 - Evolution des cissions critiques

L'augmentation (ou diminution) de la résistance au glissement sur un système g provoquée par des glissements γ^h sur tous les systèmes actifs peut être exprimée d'après Mandel [22] sous forme d'une fonction linéaire des vitesses de glissement γ^h

$$\text{(IV.40)} \qquad \delta^* \tau_c^g(x) = \sum_h H^{*gh}(x)\, \delta\gamma^h(x)$$

Le comportement du monocristal est discuté en détail dans le chapitre III, on rappelle ici le résultat concernant la vitesse du glissement sur le système h (expression III.56)

$$\delta\gamma^h = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{-hg}\, \lambda^g : \mathbf{d}$$

dans laquelle :

$$\mathcal{H}^{-hg} = (H^{*gh} + \lambda^h : S^g)^{-1} = (H^{*gh} + H_c^{hg} + H_\sigma^{hg})^{-1}$$
$$\lambda^h(x) = \mathbf{c}(x) : S^h + S^h . \sigma + \sigma . {}^tS^h$$

$S^h(x) = \mathbf{m}^h \otimes \mathbf{g}^h$ est le tenseur de Schmid du système h

$\mathbf{c}(x)$ est le tenseur des modules d'élasticité du monocristal.

Grâce à la symétrie du tenseur λ^h on peut réécrire la relation (III.49) sous une nouvelle forme :

$$\text{(IV.41)} \qquad \delta\gamma^h = \sum_g \mathcal{H}^{hg}\, \lambda^g : \mathbf{g}$$

Utilisant la solution (36) de l'équation intégrale (24), on exprime $d\gamma^h(x)$ sous forme d'une équation de localisation :

$$\text{(IV.42)} \qquad \delta\gamma^h(x) = C_\gamma^h(x) : \mathbf{G}$$

où :

$$\text{(IV.43)} \qquad [C_\gamma^h(x)]_{mn} = \sum_g \mathcal{H}^{hg}(x)\, [S_{ij}^g(x)\, c_{ijkl}(x) + S_{km}^g(x)\, \sigma_{ml}(x) + \sigma_{km}(x)\, S_{lm}^g(x)]\, A_{lkmn}(x)$$

En introduisant (43) dans (40) on obtient finalement la loi d'évolution des cissions critiques en tout point du solide :

$$\text{(IV.44)} \qquad \delta^* \tau_c^g(x) = \sum_{h=1}^{N.S.A.} H^{*gh}\left(\mathcal{C}_\gamma^h(x)\right) : G = \mathcal{C}_\tau^g(x) : G$$

où le tenseur de l'évolution des cissions critiques est donnée par :

$$\text{(IV.45)} \qquad [\mathcal{C}_\tau^g(x)]_{ij} = \sum_{f=1}^{N.S.A.} \sum_{n=1}^{N.S.A.} H^{*gf} \mathcal{H}^{fh} \left(S_{ij}^h(x)\, c_{ijkl}(x) + S_{km}^h(x)\, \sigma_{ml}(x) + \sigma_{km}(x)\, S_{lm}^h(x)\right) A_{lkmn}(x)$$

IV.3.2 - Evolution de la texture cristallographique

La création d'une texture cristallographique induite par l'écoulement plastique modifie le comportement élastoplastique du milieu et le rend anisotrope. Aujourd'hui, le mécanisme de création de la texture cristallographique induite est bien connu. Le glissement plastique ne modifie pas l'orientation du réseau cristallographique par rapport à un référentiel macroscopique. Ce sont les conditions de compatibilité entre les constituants qui entraînent des rotations de réseau à l'origine de la formation des textures cristallographiques. En effet, les glissements plastiques conduisent à des déformations plastiques qui sont, dans la plupart des cas, incompatibles. Pour préserver la continuité du milieu, une transformation supplémentaire élastique ou élastoplastique est nécessaire. Cette transformation (partie symétrique) provoque une distorsion du réseau tandis que sa partie antisymétrique induit la rotation du réseau. La solution de l'équation intégrale sous la forme de relation de localisation (36) nous permet de déterminer la vitesse de rotation des réseaux cristallins.

D'une part, d'après (II.14) et (II.15), le gradient de vitesse se décompose en partie symétrique et antisymétrique, ce qui donne le taux de rotation totale :

$$w(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) - {}^t g(x)\right)$$

d'autre part la décomposition (III.22$_3$) nous fournit la rotation du réseau dû aux glissements cristallographiques

(IV.46) $$w^*(x) = w(x) - \sum_{h=1}^{N.S.A.} R^h(x)\, d\gamma^h$$

avec R^h - partie antisymétrique du tenseur de Schmid.
Introduisons une notation qui nous permette de simplifier l'écriture :

(IV.47)

(1) $$\mathcal{D}_{ijkl} = \frac{1}{2}(A_{ijkl} + A_{jikl})$$

tenseur de localisation du taux de déformation

(2) $$\mathcal{W}_{ijkl} = \frac{1}{2}(A_{ijkl} - A_{jikl})$$

tenseur de localisation du taux de rotation.

Le taux de rotation du réseau peut être écrit :

(IV.48) $$w^*(x) = \mathcal{W}(x) : G - \sum_{h=1}^{N.S.A.} R^h(x)\, d\gamma^h$$

Utilisons la relation (42) pour éliminer le glissement cristallographique dans (48)

(IV.49) $$w^*(x) = [\mathcal{W}(x) - \sum_{h=1}^{N.S.A.} R^h(x)\, C_\gamma^h(x)] : G = C_w(x) : G$$

où l'on introduit un nouveau tenseur d'évolution de la texture cristallographique $C_w(x)$ tel que :

(IV.50) $$C_w(x) = \mathcal{W}(x) - \sum_h R^h(x) \otimes [c(x) : S^h(x) + S^h(x) \cdot \sigma(x) + \sigma(x) \cdot {}^tS^h] : A(x)$$

Si l'orientation cristallographique d'un constituant est définie par les trois angles d'Euler φ_1, ϕ, φ_2, introduits par Bunge [70], le taux de changement de ces angles est donné par les relations usuelles :

$$\delta_t\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\phi} w^*_{13}(x) - \frac{\cos\varphi_2}{\sin\phi} w^*_{23}(x)$$

(IV.51) $$\delta_t\phi = -\cos\varphi_2\, w^*_{23}(x) + \sin\varphi_2\, w^*_{13}(x)$$

$$\delta_t\varphi_2 = \cos\phi\left[\frac{\cos\varphi_1}{\sin\phi} w^*_{13}(x) + \frac{\sin\varphi_1}{\sin\phi} w^*_{23}(x)\right] + w^*_{21}(x)$$

En posant le problème du mouvement des solides hétérogènes d'une manière exacte, il est possible de déterminer les rotations du réseau cristallin lorsque le gradient de vitesse est connu.
L'équation (49) montre qu'il n'est pas justifié d'égaler la rotation du réseau à l'opposé de la rotation plastique, comme il est habituellement pratiqué dans le modèle de Taylor et ses dérivés [6], [9], [10]. Ce problème a été largement discuté par Berveiller dans sa thèse [29], où les contre-exemples ont été cités, montrant l'importance du terme $\mathcal{W}(x)$: G sur les rotations du réseau.

IV.3.3 - Etat du réseau. Contraintes internes et résiduelles

Une autre grandeur qui décrit l'état de la structure interne du matériau, souvent négligée par des modèles dits en grandes transformations plastiques, est la distorsion du réseau cristallin ou encore les contraintes internes. Ces distorsions sont effectivement faibles par rapport à des déformations plastiques. Néanmoins, le niveau des contraintes internes, et surtout, leur rôle dans le comportement (élasto-) plastique du matériau macro-homogène, est très important. Comme nous le verrons dans les applications, les contraintes internes sont présentes dans le matériau pratiquement dès le début du processus de la transformation élastoplastique, et pour des chargements complexes elles sont, en grande partie, responsables de l'anisotropie du matériau.

Pour trouver la loi d'évolution des distorsions du réseau cristallin, on utilise la solution de l'équation intégrale sous la forme d'opération de localisation (36) puis la décomposition du taux de déformation (III.22$_2$) :

(IV.52) $$\mathbf{d}^*(x) = \frac{1}{2}(\mathbf{g}(x) + {}^t\mathbf{g}(x)) - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h(x)\, d\gamma^h$$

où $\mathbf{P}^h(x)$ est la partie symétrique du tenseur de Schmid.

D'après (47_1) on a :

(IV.53) $$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) = \mathcal{D}(\mathbf{x}) : \mathbf{G} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h(\mathbf{x})\, d\gamma^h$$

L'utilisation de l'expression (42) définissant la localisation du taux de glissement sur un système h conduit à :

(IV.54) $$\mathbf{d}^*(\mathbf{x}) = [\mathcal{D}(\mathbf{x}) - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h \otimes \mathcal{C}_\gamma^h(\mathbf{x})] : \mathbf{G} = \mathcal{C}_d(\mathbf{x}) : \mathbf{G}$$

où $\mathcal{C}_d(\mathbf{x})$ est le tenseur d'évolution des distorsions élastiques du réseau ayant la forme :

(IV.55) $$\mathcal{C}_d(\mathbf{x}) = \mathcal{D}(\mathbf{x}) - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h \mathcal{H}^{hg} \otimes [\mathbf{S}^g(\mathbf{x}):\mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}^g(\mathbf{x})\cdot\sigma + \sigma\cdot{}^t\mathbf{S}^g(\mathbf{x})] : \mathbf{A}(\mathbf{x})$$

Si on définit les contraintes internes s(x) comme différence entre les contraintes locales σ(x) et les contraintes macroscopiques Σ, c'est-à-dire :

(IV.56) $$s(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) - \Sigma$$

on peut déterminer l'évolution de ces contraintes à partir de :

$$\delta_{Tr}\, s(\mathbf{x}) = \delta_{Tr}\, \sigma - \delta_{Tr}\, \Sigma.$$

La loi de comportement (III.50) permet d'écrire :

(IV.57) $$\delta_{Tr}\, s(\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}):\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}:\mathbf{G} = (\mathbf{m}(\mathbf{x}):\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}):\mathbf{G} = \mathcal{C}_s(\mathbf{x}):\mathbf{G}$$

Cette relation définit le tenseur d'évolution des contraintes internes $\mathcal{C}_s(\mathbf{x})$

(IV.58) $$[\mathcal{C}_s(\mathbf{x})]_{ijmn} = [c_{ijkl} - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \sum_{g=1}^{N.S.A.} \lambda_{ij}^h\, \mathcal{H}^{hg}\, \lambda_{kl}^g]\, A_{klmn} - L_{ijmn}^{eff} + \Sigma_{im}\, \delta_{jl}$$

Si, en particulier, le cycle de chargement envisagé est fermé, c'est-à-dire en partant de l'état de contraintes macroscopiques nul, on revient à cet état par un chemin arbitraire dans l'espace de contraintes mais tel qu'il conduit à une déformation plastique (voir schéma sur la figure 1), l'expression (56) devient:

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})$$

et ce champ des contraintes internes est appelé champ de contraintes résiduelles.

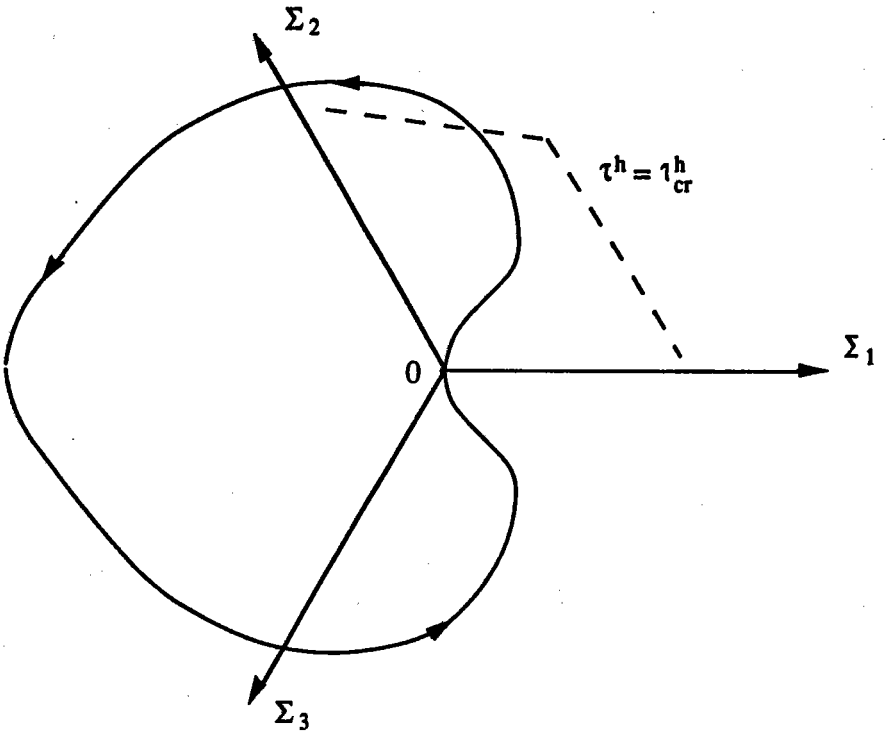


Figure IV.1
Chemin de chargement dans l'espace des contraintes macroscopiques conduisant à des contraintes résiduelles

Leur rôle dans le comportement des structures de tout type est essentiel. Dans les chapitres suivants, nous reviendrons souvent sur la notion des contraintes internes du second ordre et mettrons en évidence leur influence sur le comportement macroscopique des matériaux polycristallins.

IV.4 - Conclusions

En partant de la loi de comportement élastoplastique du monocristal et des relations habituelles de la mécanique des milieux continus, nous avons déterminé le mouvement d'un élément de volume micro-hétérogène et macro-homogène sous forme d'une équation intégrale. La solution formelle de cette équation prend la forme d'une relation de localisation (36) pour le gradient de vitesse

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{G}$$

Elle permet de suivre l'évolution des paramètres internes (physiques) de la structure tels que :

- texture cristallographique
- contraintes internes
- cissions critiques.

Toutes ces lois sont également des relations de localisation. Comme la forme des constituants n'a pas été définie, l'évolution de la texture morphologique n'a pas été abordée dans ce chapitre. Ce point sera traité plus loin.

Finalement, les propriétés effectives, ou plutôt leur évolution, peuvent être déterminées grâce aux relations (II.48) et (36).

V- APPROXIMATION AUTO-COHERENTE DE L'EQUATION INTEGRALE EN ELASTO-PLASTICITE DES POLYCRISTAUX

Par rapport aux différentes solutions approchées de l'équation intégrale (IV-24) discutées dans le chapitre précédent, l'approche auto-cohérente formulée pour la première fois par Kröner [66], dans le cadre de l'élasticité linéaire, constitue un compromis raisonnable entre les méthodes statistiques systématiques et les approximations de champs uniformes de Taylor-Lin-Voigt ou l'approche statique proposée par Zaoui [8]. La solution formelle (IV-30) est très difficile à mettre en application et pas nécessairement justifiée eu égard aux simplifications faites pour décrire le monocristal (voir § III.1). L'approximation de Taylor-Lin-Voigt néglige systématiquement toute hérérogénéité de déformation, y compris intergranulaire. Kröner [71] a démontré que le comportement élastique linéaire des milieux parfaitement désordonnés peut être reconstitué par une modélisation auto-cohérente. Par ailleurs, une première approche du problème de plasticité, basée sur une évaluation *a priori* des interactions intergranulaires [17], [24], [25], a montré que les prévisions obtenues à partir d'une telle formulation correspondent bien aux observations expérimentales. Des simulations en petites déformations élastoplastiques ont mis en évidence les avantages du schéma auto-cohérent pour des chargements radiaux et non monotones [25].
Dans les chapitres qui suivent, on considère le polycristal comme un agrégat constitué des grains d'orientations cristallographiques différentes, éventuellement de structures cristallographiques différentes s'il s'agit d'un matériau multiphasé.

V.1 - Bases statistiques de la modélisation auto-cohérente

Dans ce paragraphe nous formulons les restrictions et les hypothèses nécessaires pour obtenir une approximation auto-cohérente de l'équation intégrale (IV-24)

(IV.24) $$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{\circ}(\mathbf{x}) - \int_{V_t} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x},\mathbf{x}') : \delta\mathbf{l}(\mathbf{x}') : \mathbf{g}(\mathbf{x}')\, dV'$$

En premier lieu nous supposons que le comportement du polycristal est local. Ceci permet d'écrire la loi de comportement sous la forme :

$$\delta_t \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^{eff}(\mathbf{x}) : \mathbf{G}(\mathbf{x})$$

ou encore

(V.1) $$\delta_t \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \int_{V_t} \mathbf{L}^{eff}(\mathbf{x}') : \mathbf{G}(\mathbf{x}')\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, dV$$

Cette propriété, d'une part nous libère de l'influence de la forme du macro-élément sur le comportement de ce dernier, d'autre part nous autorise à utiliser le tenseur de Green pour un milieu infini, comme cela a été démontré par Zeller et Dederichs [5]. La loi de comportement sous sa forme intégrale, (1) reste bien sûr valable au niveau microscopique. En introduisant le même type d'opérateurs pour $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{G}^{\circ}(\mathbf{x})$, l'équation intégrale (IV-24), pour un milieu infini, peut se mettre sous la forme :

(V.2) $$\int_{V_t} [\mathbf{I}\,\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{x}') : \delta\mathbf{l}(\mathbf{x}')] : \mathbf{g}(\mathbf{x}')\, dV' = \int_{V_t} \mathbf{G}^{\circ}(\mathbf{x})\, \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\, dV'$$

En introduisant les notations habituelles pour le calcul des convolutions, celle-ci devient :

(V.3) $$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma} * \delta\mathbf{l}) * \mathbf{g} = \mathbf{a}^{-1} * \mathbf{g} = \mathbf{G}^{\circ}$$

dont la solution en $\mathbf{g}$ (à comparer à la solution formelle IV.33) s'écrit :

(V.4) $$\mathbf{g} = \mathbf{a} * \mathbf{G}^{\circ}$$

avec

(V.5) $$\mathbf{a} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma} * \delta\mathbf{l})^{-1}$$

En moyennant l'expression (4) sur le volume du milieu on aboutit à

(V.6) $$G = \langle a \rangle * G^{\circ}$$

qui conduit aux équivalents des relations (IV-37) et (II-43$_1$)

(V.7) $$A = a * \langle a \rangle^{-1}$$

(V.8) $$L^{eff} = \langle l * A \rangle = \langle (L^{\circ} + \delta l) * a \rangle * \langle a \rangle^{-1}$$
$$= L^{\circ} + \langle \delta l * a \rangle * \langle a \rangle^{-1}$$

Une propriété capitale du tenseur de Green de déformation $\Gamma(x-x')$ a été démontrée par Dederichs et Zeller[5]. En effet, ils ont trouvé que ce tenseur peut être décomposé en parties locale $\Psi(x)$ et non locale $\Phi(x-x')$ telles que :

(V.9) $$\Gamma(x-x') = \Psi(x)\,\delta(x-x') + \Phi(x-x')$$

Introduisant, d'après Dederichs et Zeller[5], le tenseur de transition η tel que :

(V.10) $$\eta = \delta l * a$$

on obtient :

(V.11) $$a = I - \Gamma * \eta$$

et l'expression (8) devient

(V.12) $$L^{eff} = L^{\circ} + \langle \eta \rangle * \langle I - \Gamma * \eta \rangle^{-1}$$

Parce que le choix du matériau homogène de référence est arbitraire, il est possible alors de prendre

(V.13) $$L^{\circ} = L^{eff}$$

On déduit immédiatement de l'expression (12) que dans ce cas

(V.14) $$\langle \eta \rangle = \langle \delta l * a \rangle = 0$$

et que

(V.15) $$A = a$$

Introduisant (9) dans (11) et le résultat dans (10) on obtient :

(V.16) $$\eta = \psi * (I + \Phi * \psi)^{-1}$$

avec

(V.17) $\psi = \delta l * (I + \Psi * \delta l)^{-1}$

qui peut être écrit aussi sous sa forme tensorielle

(V.18) $\psi (x) = \delta l (x) : (I + \Psi (x) : \delta l (x))^{-1}$

car tous les opérateurs dans (17) sont locaux.
On obtient une solution approchée du problème de la loi de comportement effective en remplaçant la condition $< \eta >=0$ par son approximation

(V.19) $< \psi (x) > = 0$

qui s'obtient en négligeant la partie non locale de $\Gamma (x-x')$ par rapport à $\Psi(x)$. Cette approximation est justifiée car la partie non locale de $\Gamma (x-x')$ peut être mise sous la forme

$$\Phi (x-x') = \frac{1}{| x-x' |^3} \varphi$$

qui tend vers zéro comme x^{-3}, tandis que $\Psi(x)$ se comporte comme x^{-1} [66].
Il est alors possible de résoudre l'équation (19) pour en déduire une approximation auto-cohérente du tenseur instantané des propriétés effectives du milieu macro-homogène L°.

(V.20) $L^{sc} = < l (x) : [I + \Psi (x) : \delta l (x)]^{-1} > : < [I + \Psi(x) : \delta l (x)]^{-1} >^{-1}$

Cette approximation a été proposée par Hershey [72] pour les matériaux à symétrie cubique et généralisée par Kröner [66]. Dans cet article Kröner a démontré que l'approximation auto-cohérente constitue une solution exacte du problème des matériaux parfaitement désordonnés. Dans de tels matériaux, seules les auto-corrélations sont présentes.
Dans le cas général, l'expression (20) apparaît comme une solution approchée de l'équation intégrale (IV-24). Aucune hypothèse concernant le gradient de vitesse dans les constituants du milieu ni la forme de ces constituants n'a été faite. Dans le paragraphe suivant, la solution générale présentée ici est particularisée pour des matériaux granulaires. Dans ce cas, l'approche développée dans ce travail rejoint celle proposée par Kröner en élasticité et par Hill [34] pour la plasticité en petites déformations et basée sur la solution du problème d'inclusion de Eshelby [20] à ceci près qu'elle est formulée en grandes transformations élasto-plastiques avec prise en compte des rotations des grains et de l'écrouissage intragranulaire.

V.2 - Approximation auto-cohérente du comportement élasto-plastique des polycristaux

Les résultats présentés dans ce paragraphe constituent un cas particulier de ceux discutés dans la section précédente. En effet, aux hypothèses énoncées précédemment, nous ajoutons deux approximations supplémentaires:

1. Le matériau modélisé est granulaire, et que la forme des grains peut être suffisamment bien approchée par un ellipsoïde ;

2. Le module tangent $\mathbf{l}(\mathbf{x})$, qui définit le comportement instantané élasto-plastique du matériau, ainsi que le gradient de la vitesse $\mathbf{g}(\mathbf{x})$, varient faiblement à l'intérieur du constituant, de sorte que leurs valeurs moyennes reflètent bien le comportement réel, ceci se traduit par

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{l}^I \quad \forall\, \mathbf{x} \in V_t^I \tag{V.21}$$

$$\mathbf{g}^I = \frac{1}{V_t^I} \int_{V_t^I} \mathbf{g}(\mathbf{x})\, dV_t \tag{V.22}$$

où V_t^I désigne le volume actuel du grain modélisé par un ellipsoïde I.

Des deux approximations formulées ci-dessus, c'est sûrement la deuxième qui risque d'être la plus contestable, car elle ignore toute hétérogénéité plastique intragranulaire.
Néanmoins, pour les hétérogénéités dont le "rayon d'action" est inférieur au diamètre du grain, la deuxième simplification semble suffisante. Le problème se pose dans le cas où une corrélation entre les hétérogénéités intra-granulaires se manifeste par la présence d'une structure supplémentaire se superposant à la structure granulaire du polycristal. L'image typique d'une telle situation est une microbande de cisaillement. Alors, l'approche proposée risque de s'avérer insuffisante et un traitement spécifique est nécessaire, permettant une description d'un tel phénomène. Une tentative de modélisation de ce problème peut être trouvée dans [60].

En acceptant les deux approximations, le champ du gradient de la vitesse et le champ des modules tangents s'écrivent :

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{g}^I\, \theta^I(\mathbf{x}) \tag{V.23}$$

$$\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{l}^I\, \theta^I(\mathbf{x}) \tag{V.24}$$

où:

- $\theta^I(x)$ est une fonction caractéristique telle que :

$$\theta^I(x) = \begin{cases} 1 & \forall\, x \in V_t^I \\ 0 & \forall\, x \notin V_t^I \end{cases} \qquad \text{(V.25)}$$

- N désigne le nombre des grains du polycristal.

De même, la déviation $\delta l(x)$ s'écrit ici

$$\delta l(x) = \sum_{i=1}^{N} \Delta l^I\ \theta^I(x) \qquad \text{(V.26)}$$

avec évidemment

$$\Delta l^I = l^I - L^\circ \qquad \text{(V.27)}$$

constant dans le grain I.

En reportant (23) et (26) dans l'équation intégrale (IV-24), on obtient :

$$g(x) = G^\circ - \int_{V_t} \Gamma(x-x') : \Big(\sum_{J=1}^{N} \Delta l^J : g^J\, \theta^J(x-x')\Big) dV_t'$$

La valeur moyenne du gradient de la vitesse dans le grain I se calcule alors par

$$g^I = G^\circ - \sum_{J=1}^{N} T^{IJ} : \Delta l^J : g^J \qquad \text{(V.28)}$$

où l'on a posé :

$$T^{IJ} = \frac{1}{V_t^I} \int_{V_t^I} \int_{V_t^J} \Gamma(x-x')\ dV_t'\, dV_t \qquad \text{(V.29)}$$

Pour des grains de forme ellipsoïdale et pour I = J, le tenseur T^{II} est relié au tenseur S d'Eshelby par :

$$S = T^{II} : L^\circ \qquad \text{(V.30)}$$

Pour $I \neq J$, les tenseurs T^{IJ} décrivent les interactions entre grains I et J. Ces tenseurs ont été introduits par Berveiller et al. [73], qui donnent également une méthode de calcul de T^{IJ} dans le cas d'inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope. Les tenseurs T^{IJ} peuvent être considérés comme connus.

V.2.1 - Approximation auto-cohérente à un site

L'expression (28) constitue un système linéaire d'équations pour g^I et dont le rang est égal au nombre de grains considérés. Réécrivant ce système d'une manière légèrement différente, on a :

$$(V.29) \qquad g^I = G^\circ - T^{II} : \Delta l^I : g^I - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N} T^{IJ} : \Delta l^J : g^J$$

Au lieu de résoudre directement un tel système, on peut choisir L° le plus proche possible de L^{eff}, c'est-à-dire solution du problème dans le cadre de l'approximation auto-cohérente. Notons cette approximation L^{sc}. Dans ce cas, les contributions de termes tels que $T^{IJ} : \Delta l^J : g^J$ pour $I \neq J$ dans l'expression (29) peuvent être légitimement négligées puisque leur effet sur g^I a été pris en compte au travers de l'interaction entre le grain I et le milieu homogène de comportement proche de L^{eff}. Dans cette démarche, on reconnaît l'approximation (19) discutée au paragraphe précédent et basée sur la décomposition du tenseur $\Gamma(x-x')$ en partie locale et non locale, qui se traduisent dans l'expression (29), respectivement par T^{II} et T^{IJ}.

Le choix $L^\circ = L^{sc}$ et la limitation des termes de la somme dans (29) à I=J constituent la solution approchée auto-cohérente à un site de l'équation intégrale (IV-24). Nous obtenons alors :

$$(V.30) \qquad g^I = (I + T^{II} : \Delta l^I)^{-1} : G^\circ = a^{II} : G^\circ$$

Grâce à l'application du théorème de la moyenne (II-36), on élimine G° de l'expression ci-dessus pour aboutir à :

$$(V.31) \qquad g^I = a^{II} : \langle a^{II} \rangle^{-1} : G = A^I : G$$

où

$$(V.32) \qquad a^{II} = (I + T^{II} : \Delta l^I)^{-1}$$

et

(V.33) $\mathbf{A}^{I} = \mathbf{a}^{II} : <\mathbf{a}^{II}>^{-1}$

sont respectivement le tenseur de localisation de $\mathbf{G}^{\circ}$ dans l'approche à un site et le tenseur de localisation du gradient de la vitesse macroscopique $\mathbf{G}$ pour l'inclusion ellipsoïdale I. L'application du résultat (33) dans (20) produit

(V.34) $\mathbf{L}^{sc} = <\mathbf{l}^{I} : \mathbf{A}^{I}> = <\mathbf{l}^{I} : \mathbf{a}^{II}> : <\mathbf{a}^{II}>^{-1}$

constituant l'approximation auto-cohérente à un site des modules tangents du polycristal. Pour un polycristal constitué de N grains ces relations s'écrivent

(V.35)
$$(1) \quad <\mathbf{a}^{II}> = \sum_{I=1}^{N} f^{I} \mathbf{a}^{II}$$
$$(2) \quad \mathbf{A}^{J} = \mathbf{a}^{JJ} : \sum_{I=1}^{N} f^{I} \mathbf{a}^{II}$$
$$(3) \quad \mathbf{L}^{sc} = \sum_{I=1}^{N} f^{I} \mathbf{l}^{I} : \mathbf{A}^{I}$$

où f^{I} désigne la fraction volumique des grains de la classe I.

Deux remarques concernant la méthode s'imposent. La simplification de la relation (29) est due au choix très particulier du matériau de référence $\mathbf{L}^{\circ}$. Pour pouvoir négliger les termes $\mathbf{T}^{IJ} : \Delta\mathbf{l}^{J} : \mathbf{g}^{J}$ par rapport au terme $\mathbf{T}^{II} : \Delta\mathbf{l}^{I} : \mathbf{g}^{I}$, ce choix a été porté sur la solution de l'équation (29). Cette solution est exprimée par la relation (34) qui, à cause de cette simplification, a un caractère fortement implicite. En effet, le tenseur $\mathbf{a}^{I}$ qui figure dans (34) dépend de $\mathbf{L}^{sc}$ par le biais de $\Delta\mathbf{l}^{I} = \mathbf{l}^{I} - \mathbf{L}^{sc}$.
La deuxième remarque concerne une amélioration éventuelle de l'approximation auto-cohérente à un site. Cette amélioration conduit à la méthode auto-cohérente à sites multiples. Elle constitue le sujet du paragraphe suivant.

V.2.2 - Approximation auto-cohérente à sites multiples

Afin de déterminer le tenseur de localisation $\mathbf{A}^I$ de manière plus précise que (32), en prenant en compte la taille et la position relatives des constituants, on retourne à la relation (29).

$$\mathbf{g}^I = \mathbf{G}^\circ - \mathbf{T}^{II} : \Delta\mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I - \sum_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{N} (\mathbf{T}^{IJ} : \Delta\mathbf{l}^J : \mathbf{g}^J)$$

Il s'agit d'un système linéaire en $\mathbf{g}^I$ dont la solution peut être mise sous la forme :

(V.36) $\qquad \mathbf{g}^I = \mathbf{a}^I : \mathbf{G}^\circ.$

En reportant (36) dans (29) nous obtenons

(V.37) $\qquad \mathbf{g}^I = \mathbf{G}^\circ - \mathbf{T}^{II} : \Delta\mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I - \sum_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{N} (\mathbf{T}^{IJ} : \Delta\mathbf{l}^J : \mathbf{a}^J) : \mathbf{G}^\circ$

ce qui conduit à :

(V.38) $\qquad \mathbf{g}^I = \mathbf{a}^{II} : \left(\mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{N} \mathbf{T}^{IJ} : \Delta\mathbf{l}^J : \mathbf{a}^J\right) : \mathbf{G}^\circ$

Par comparaison avec (36), nous avons :

(V.39) $\qquad \mathbf{a}^I = \mathbf{a}^{II} : \left(\mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J\neq I}}^{N} \mathbf{T}^{IJ} : \Delta\mathbf{l}^J : \mathbf{a}^J\right)$

L'expression (39) définit le tenseur de localisation de $\mathbf{G}^\circ$ dans la méthode auto-cohérente à sites multiples. Malheureusement, cette relation est doublement implicite. En effet, le tenseur $\mathbf{a}^I$ dépend des tenseurs de localisation de tous les autres constituants. Plusieurs solutions approchées de ce problème peuvent être proposées, dont la plus naturelle consiste à choisir pour $\mathbf{a}^J$ son approximation à un site

$$\mathbf{a}^J \approx \mathbf{a}^{JJ}$$

Une telle approximation permet de réécrire la relation (39) sous la forme :

$$(V.40) \qquad \mathbf{a}^I \approx \mathbf{a}^{II} : \left(\mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N} \mathbf{T}^{IJ} : \Delta \mathbf{l}^J : \mathbf{a}^{JJ}\right)$$

Les relations (33) et (34) demeurent valables et constituent la solution du problème en méthode auto-cohérente à site multiples.

Une autre approximation de la solution de (29) peut être développée en limitant la somme dans le système (29) aux premiers voisins de l'inclusion I et en résolvant un système linéaire d'une taille numériquement raisonnable. Une telle démarche a été adoptée par Fassi-Fehri et al. [74] dans le cas de l'élasticité linéaire. Elle a permis de prendre en compte l'effet de la répartition spatiale des renforts d'un composite biphasé sur les propriétés élastiques du milieu. Cet effet, baptisé texture topologique, joue un rôle important pour les matériaux composites. Son importance paraît moins justifiée dans le cas de la plasticité des polycristaux à cause de l'écrantage des actions inter-granulaires à distance par les joints de grains.

Les tenseurs $\mathbf{L}^{sc}$ et $\mathbf{A}^I$ dépendent de l'état actuel du chargement (Σ, δ_tN ou E,G) et de la microstructure actuelle du polycristal. Il est donc indispensable de pouvoir déterminer, pour un trajet de chargement quelconque, la structure interne actuelle du matériau. Celle-ci peut être considérée comme connue, lorsque les lois d'évolution des différents paramètres décrivant cette micro-structure sont établies. Dans la suite de ce chapitre, les lois d'évolution obtenues dans la section (IV.3) sont particularisées en fonction des résultats présentés dans ce paragraphe.

V.3 - Evolution de la microstructure

Dans le paragraphe IV.3, des lois d'évolution de la structure interne d'un matériau ont été déduites de la solution formelle (IV-30) de l'équation intégrale (IV-24). Ici, disposant de l'approximation auto-cohérente du tenseur de localisation de gradient de la vitesse (expression (35) ou (40)), ces règles sont précisées dans le contexte de l'approche choisie. Comme le tenseur de localisation, les champs des variables structurales sont alors continus par morceaux et concernent plus précisément les constituants du polycristal. On s'arrête davantage sur la règle de l'évolution de la forme des grains, point qui n'a pas été traité au chapitre IV.

V.3.1 - Cissions critiques, texture cristallographique et contraintes internes

Connaissant le tenseur de localisation du gradient de la vitesse pour tout grain (inclusion) de l'élément de volume considéré, on peut proposer une écriture pour tout volume sous la forme :

$$\text{(V.41)} \qquad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N} \mathbf{A}^I \theta^I(\mathbf{x})$$

avec $\mathbf{A}^I$ et θ^I définis respectivement par (35) ou (40) et (25). Alors, toutes les lois d'évolution proposées au chapitre IV sont directement applicables. En particulier les expressions suivantes décrivent :

- l'évolution des glissements plastiques cristallographiques: expressions (IV-37) et (IV-38)
- l'évolution des cissions critiques: expressions (IV-39) et (IV-40) ;
- l'évolution de la texture cristallographique: expressions (IV-44), (IV-45) et (IV-46) ;
- l'évolution de la distorsion du réseau: expressions (IV-49) et (IV-50) ;
- l'évolution des contraintes internes: expressions (IV-52) et (IV-53).

En pratique, on cherche à déterminer les tenseurs localisations pour chaque constituant. Les propriétés de la fonction $\theta^I(\mathbf{x})$ permettent d'écrire ces champs sous forme d'une somme sur tous les grains. De manière générale, nous avons :

$$(V.42) \qquad C_\alpha(x) = \sum_{I=1}^{N} C_\alpha^I \, \theta^I(x)$$

où C_α^I désigne formellement un tenseur localisation particulier qui relie la variation de la variable structurale α^I dans un constituant I au gradient de la vitesse sur la frontière du volume G.
C_α^I est constant dans le grain, ce qui reste cohérent avec les approximations (22) et (23) exprimant le comportement du polycristal constant par grain.
Nous précisons de tels tenseurs localisations pour les micro-variables citées plus haut.
Ainsi, l'évolution du glissement plastique sur un système cristallographique du grain I est décrite par :

$$(V.43) \qquad [C_\gamma^{hI}]_{mn} = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}_I^{-hg} \left[S_{ij}^g \, c_{ijkl}^I + S_{km}^g \, \sigma_{ml}^I + \sigma_{km}^I \, S_{lm}^g \right] A_{lkmn}^I$$

où, toujours pour le constituant I,

- σ^I est le tenseur de contraintes de Cauchy, moyennes sur le volume du grain
- c^I est le tenseur d'élasticité constant dans le grain, voir (22)
- $\mathcal{H}_I^{gh}$ est la matrice d'écrouissage élastoplastique définie par la relation (III-55) et spécifiée pour le grain I.

A^I est le tenseur localisation (35) ou (40). Le glissement plastique sur le système h est alors homogène à l'intérieur du constituant I.

Compte tenu de (III-48), l'évolution des cissions critiques sur le système g est gouvernée par le tenseur localisation

$$(V.44) \qquad [C_\tau^{gI}]_{mn} = \sum_{f=1}^{N.S.A.} \sum_{h=1}^{N.S.A.} H_I^{*gf} \mathcal{H}_I^{fh} \left(S_{ij}^h \, c_{ijkl}^I + S_{km}^h \, \sigma_{ml}^I + \sigma_{km}^I \, S_{lm}^h \right) A_{lkmn}^I$$

Alors, les cissions critiques sont également homogènes dans le constituant.
Introduisant la partie symétrique et antisymétrique du tenseur de localisation du gradient de la vitesse, nous pouvons définir l'état du réseau cristallin. En effet, si :

$$(V.45) \qquad (1) \quad \mathcal{D}_{ijkl}^I = \frac{1}{2}\left(A_{ijkl}^I + A_{jikl}^I\right)$$

$$(2) \quad \mathcal{W}_{ijkl}^I = \frac{1}{2}\left(A_{ijkl}^I - A_{jikl}^I\right)$$

les tenseurs localisations :

- de la rotation du réseau cristallin

$$(V.46) \qquad C_W^I = \mathcal{W}^I - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{R}^h \otimes C_\gamma^{hI}$$

-de la distorsion du réseau cristallin

$$(V.47) \qquad C_d^I = \mathcal{D}^I - \sum_{h=1}^{N.S.A.} \mathbf{P}^h \otimes C_\gamma^{hI}$$

s'expriment en fonction du tenseur localisation des glissements plastiques (43), où $\mathbf{P}^h$, $\mathbf{R}^h$ sont les parties symétrique et antisymétrique du tenseur de Schmid. Finalement, l'état des contraintes internes peut être calculé, grain par grain, à partir de la définition (IV-51) de ces contraintes:

$$(V.48) \qquad \mathbf{s}^I = \sigma^I - \Sigma.$$

Le dernier aspect de la microstructure, relativement important en grandes transformations élastoplastiques, est l'évolution de la forme des constituants. Le choix de la forme initiale ellipsoïdale et surtout l'homogénéité du gradient **g** dans le constituant, facilitent la résolution du problème.

V.3.2 - Evolution de la texture morphologique

La forme et l'orientation des constituants sont strictement définies par les gradients de transformation locaux. Connaissant le tenseur localisation $\mathbf{A}^I$, il est possible, par intégration, de déterminer le gradient de transformation $\mathbf{f}^I$ pour chaque grain. Symboliquement, cette opération s'écrit

$$\mathbf{f}_t^I = \int_o^t \mathbf{A}^I(\tau) : \mathbf{G}(\tau)\, d\tau \qquad \text{(V.49)}$$

où $\mathbf{f}_t^I$ est le gradient de transformation du grain I entre sa configuration initiale κ_o^I et sa configuration actuelle κ_t^I. Pour simplifier les considérations, supposons que dans la configuration initiale les grains soient sphériques. Si ce n'est pas le cas, il est toujours possible de trouver une configuration de référence dans laquelle le grain considéré est sphérique.

Soit un grain sphérique de rayon R = 1 dans sa configuration initiale ou de référence:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = 1 \qquad \text{(V.50)}$$

Le domaine sphérique occupé par le grain I se transforme pendant un mouvement homogène caractérisé par le tenseur gradient $\mathbf{f}^I$ en un domaine ellipsoïdal d'équation :

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{f}_t^I \cdot {}^t\mathbf{f}_t^I)^{-1} \cdot \mathbf{x} = 1 \qquad \text{(V.51)}$$

La parenthèse dans l'équation (51) est le tenseur de dilatation. La décomposition polaire (II-11) permet d'écrire

$$\mathbf{f}_t^I \cdot {}^t\mathbf{f}_t^I = \mathbf{V}_t^I \cdot \mathbf{V}_t^I = (\mathbf{V}_t^I)^2 \qquad \text{(V.52)}$$

Notant λ_a, λ_b et λ_c les valeurs propres de $(\mathbf{V}_t^I)^2$ et n_a, n_b et n_c ses directions propres, nous avons

$$\begin{aligned} a_t^I &= \sqrt{1/\lambda_a} \\ b_t^I &= \sqrt{1/\lambda_b} \\ c_t^I &= \sqrt{1/\lambda_c} \end{aligned} \qquad \text{(V.53)}$$

les demi-axes de l'ellipsoïde dans la configuration actuelle, les vecteurs propres n_a, n_b et n_c indiquent leurs orientations par rapport au repère du polycristal.

En résumé, les expressions (53) basées sur la recherche des valeurs et vecteurs propres du tenseur de dilatation dans la configuration actuelle permettent de réactualiser la géométrie des grains du polycristal connaissant le tenseur localisation du gradient de la vitesse $\mathbf{A}^I$.

V.4 - Conclusions

Un choix particulier du matériau de référence, $\mathbf{L}^\circ = \mathbf{L}^{eff}$, permet de négliger la partie non locale du tenseur de Green modifié $\Gamma(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ au moins pour des matériaux parfaitement désordonnés. Ceci transforme l'équation intégrale (IV-24) en équation algébrique implicite.

La modélisation du polycristal par un ensemble d'inclusions ellipsoïdales qui se transforment de manière homogène constitue un compromis raisonnable entre les méthodes statistiques exactes et le modèle de Taylor-Lin-Voigt. Ces deux approximations conduisent au modèle auto-cohérent à un site.

La solution du problème des interactions entre deux inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope permet une modélisation plus réaliste du comportement des polycristaux. Un schéma auto-cohérent à sites multiples, prenant en compte les interactions entre les grains, est dégagé de telles considérations. Alors la prise en compte de la texture topologique est possible par cette approche à sites multiples, enrichissant la modélisation par la répartition spatiale et la taille relative des sites .

Dans les deux cas, le tenseur localisation du gradient de la vitesse du constituant est déterminé. Il permet l'obtention des lois d'évolution de la structure interne du polycristal. Ces lois prennent la forme des opérations de localisation.

VI - SCHEMA DE RESOLUTION NUMERIQUE

Le caractère implicite de l'équation (V.34) constitue la principale difficulté de la méthode auto-cohérente. La solution de cette équation peut être obtenue de manière itérative en partant d'une meilleure approximation du comportement. Une telle approche est pratiquée pour résoudre le problème de comportement des matériaux élastiques, linéaires en petites transformations [73], [74].

En effet, le comportement du matériau étant indépendant du trajet et de l'histoire de chargement, cette procédure permet de traiter des édifices polycristallins comportant plusieurs milliers de grains pendant un temps restant raisonnable, par exemple trois heures pour un polycristal de 6000 grains sur une station de travail APOLLO 4500.

Par contre, cette méthode appliquée directement au problème de plasticité conduit à un temps prohibitif lié à une répétition de calculs du tenseur T^{II} (ou T^{IJ}).

Ce tenseur, défini par la relation (V.29), ne peut être calculé analytiquement que dans les cas simples d'inclusions sphériques dans des milieux isotropes. Pour toute autre configuration, une intégration numérique doit être employée. La précision avec laquelle ce tenseur est évalué est déterminante pour la précision de la modélisation du comportement. D'autre part, en plasticité, le calcul de ce tenseur est répété, pour chaque grain, à cause de l'évolution des propriétés mais aussi de la forme des grains.

Il est alors indispensable d'optimiser le calcul de ce tenseur en utilisant des méthodes numériques efficaces et précises.

VI.1 - Détermination du tenseur T^{IJ}

Le calcul des T^{II} et T^{IJ} est basé sur les techniques de transformée de Fourier du tenseur de Green. Cette méthode a été proposée par Kneer [75] et reprise par Mura [76] pour déterminer le tenseur T^{II}. Fassi-Fehri [77] a généralisé cette approche au cas du tenseur T^{IJ} pour le problème d'une paire d'inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope quelconque. Ici, l'attention est concentrée sur les techniques numériques.

Partons de la définition (IV.14) du tenseur de Green :

$$L^{o}_{ijkl}\, G_{lm,ki}(\mathbf{x}',\mathbf{x}) + \delta_{jm}\,\delta(\mathbf{x}'-\mathbf{x}) = 0 \qquad \text{(VI.1)}$$

et appliquons la transformée de Fourier à G

$$\tilde{G}\,\tilde{G}_{ij}(\mathbf{k}) = \int_{V_t} G_{ij}(\mathbf{x})\, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\, dV_t \qquad \text{(VI.2)}$$

telle que sa transformée de Fourier inverse est :

$$G_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \tilde{G}_{ij}(\mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{x}}\, dV_k \qquad \text{(VI.3)}$$

ce qui permet de réécrire l'équation (1) sous la forme :

$$L^{o}_{ijkl}\, \tilde{G}_{lm}(\mathbf{k})\, k_k\, k_i = \delta_{jm} \qquad \text{(VI.4)}$$

car la transformée de $\delta(\mathbf{x})$ est

$$\delta(\mathbf{k}) = 1$$

Alors l'équation (4) peut être résolue par rapport à $\tilde{G}$

$$\tilde{G}_{lm}(\mathbf{k}) = \left(L^{o}_{imkl}\, k_k\, k_i\right)^{-1} = \tilde{G}_{ml}(\mathbf{k}) \qquad \text{(VI.5)}$$

si $L^{o}_{ijkl} = L^{o}_{klij}$.

Si cette symétrie n'est pas respectée, il est nécessaire d'introduire la transformée de Fourier du tenseur de Green adjoint $\tilde{G}^{+}(\mathbf{k})$. Dans les deux cas la procédure de résolution reste identique.

L'application de ces résultats à la définition (V.29) du tenseur T^{IJ} nous donne

$$(VI.6) \qquad T^{IJ}_{ijmn} = \frac{1}{8\pi^3} \frac{1}{V_t^I} \int_{V_t^I} \int_{V_t^J} \int_{V_k} k_m\, k_j\, \tilde{G}_{in}\, e^{-ik.(x-x')}\, dk\, dV_t\, dV_t'$$

Les étapes suivantes, conduisant au résultat

$$(VI.7) \qquad T^{IJ}_{ijmn} = \frac{9}{8\pi^3} V_t^J \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, \chi_m\, \chi_j\, k^2\, \tilde{G}_{in}\, f(\theta,\varphi)\, d\theta.$$

ainsi que la définition de toutes les fonctions qui y figurent peuvent être trouvées dans la thèse de Fassi-Fehri [77]. Tous les calculs s'effectuent dans le repère principal d'inertie de l'ellipsoïde I. Dans ce repère le vecteur **k** a pour coordonnées

$$k_i = k\, \chi_i \qquad i = 1.2.3$$

$$(VI.8) \qquad \chi_1 = \sin\theta \cos\varphi \qquad \chi_2 = \sin\theta \sin\varphi \qquad \chi_3 = \cos\theta$$

et la fonction $f(\theta,\varphi)$ dépend de la forme et de l'orientation relative des ellipsoïdes I et J.
Le tenseur T^{IJ} donné par l'expression (7) ne peut être déterminé analytiquement que dans le cas de deux inclusions sphériques dans un milieu isotrope. Ce résultat, se trouvant également dans la thèse de Fassi-Fehri [77], nous permet de valider la méthode numérique employée pour déterminer T^{IJ} pour deux inclusions ellipsoïdales quelconques dans un milieu anisotrope.

Pour déterminer ce tenseur nous avons mis au point un programme basé sur la méthode d'intégration de Gauss. Soit une fonction $f(\theta,\varphi)$, son intégrale pour $-1 \le \theta,\varphi \le +1$ peut être approchée par une double somme

$$(VI.9) \qquad I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi \approx \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(\theta_i,\varphi_j)\, w_i\, w_j$$

où :
N et M sont les nombres des points d'intégration respectivement selon θ et φ
θ_i et φ_j sont les positions des points d'intégration dépendantes de N et M
w_i et w_j sont les poids d'intégration également dépendants de N et M.

Les valeurs des poids ainsi que les positions des points d'intégration sont tabulées (voir par exemple [78]). Si les bornes d'intégration sont différentes de ± 1, un changement de variables approprié permet de ramener le calcul au cas décrit plus haut.

La précision avec laquelle l'intégrale est déterminée est fonction du nombre de points d'intégration (avec N points on détermine de manière exacte l'intégrale d'un polynôme de degré 2N-1). L'expérience montre qu'une augmentation trop importante du nombre des points de Gauss (N et M > 10) conduit à un temps de calcul trop long et une précision qui ne s'améliore pas en proportion. Il est plutôt recommandé de diviser le domaine d'intégration en sous-domaines et d'employer la méthode de Gauss dans chacun d'eux avec un nombre de points réduit. Cette méthode a été utilisée pour déterminer le tenseur T^{IJ}. Le domaine d'intégration est divisé en trois sous-domaines dont les bornes varient en fonction de la forme des ellipsoïdes. En tout, 9 points de Gauss sont utilisés selon φ et 15 points de Gauss selon θ (3+9+3 par division). Ce choix est un compromis entre la précision et le temps de calcul. Sur une station de travail APOLLO DN4500, celui-ci conduit à un temps inférieur à 0,5 seconde et une précision (par rapport à la solution exacte mentionnée plus haut) inférieure à 0,05%. La précision est moins bonne pour des inclusions de forme non sphériques, et dans le cas le plus défavorable, approche 1%. Le temps de calcul varie insensiblement avec l'anisotropie du matériau. Le tenseur T^{IJ} (ou T^{II}) est indispensable pour déterminer le tenseur localisation du gradient de vitesse. Ce dernier dépend également de Δl^I - déviation du tenseur de comportement tangent du matériau.

Ce tenseur est inconnu car il est, dans le cadre de la méthode autocohérente, fonction de L^{eff}. Dans le paragraphe suivant nous présentons une méthode permettant l'obtention d'une approximation suffisamment précise de Δl^I.

VI.2 - Calcul des modules tangents

Pour pouvoir appliquer la méthode auto-cohérente en plasticité des métaux, il est indispensable de mettre en oeuvre un algorithme contournant le caractère implicite de la méthode. Nous proposons alors une approximation numérique qui consiste à choisir comme milieu de référence celui dont le comportement élastoplastique a été calculé au pas de calcul précédent. Les modules initiaux sont bien sûr les modules élastiques qui peuvent être déterminés selon une méthode itérative. On peut justifier cette approximation par les résultats antérieurs de Hihi et al. [72] et de Beradaï et al. [25] qui obtenaient des réponses satisfaisantes à partir d'une évaluation *a priori* du tenseur L^o supposé constant et isotrope (hypothèse de l'accommodation élastoplastique [78], [79]). La méthode proposée ici, que nous avons appelé **quasi auto-cohérente**, peut être aussi proche de la méthode auto-cohérente qu'on le désire, en fonction de l'incrément du chargement choisi. Dans la suite de ce paragraphe nous verrons l'influence de cet incrément sur le comportement global élastoplastique en petites déformations. Pour l'instant nous rappelons le principe d'une méthode itérative pour déterminer le comportement élastique du matériau microhétérogène et macro-homogène.

VI.2.1 - Comportement élastique global

Le cadre théorique développé au chapitre V, qui s'applique également à la prévision du comportement élastique du matériau micro-hétérogène et macro-homogène, permet de prendre en compte :

. le comportement local des constituants (matériaux mono ou multi phasés)
. la texture cristallographique (orientation des réseaux cristallins)
. la texture morphologique (forme et orientation des grains)
. la texture topologique (position relative des constituants).

La procédure est forcément incrémentale à cause du caractère implicite de l'équation (V.35) décrivant le comportement du matériau.

La première étape consiste à déterminer l'approximation d'ordre zéro du comportement. Deux situations sont envisageables :

* <u>première situation</u>

il s'agit du démarrage de calcul ; alors cette approximation est obtenue à partir du modèle de Voigt, c'est-à-dire :

$$C_o = \overline{c^I} = \sum_{I=1}^{N} f^I c^I \qquad \text{(VI.10)}$$

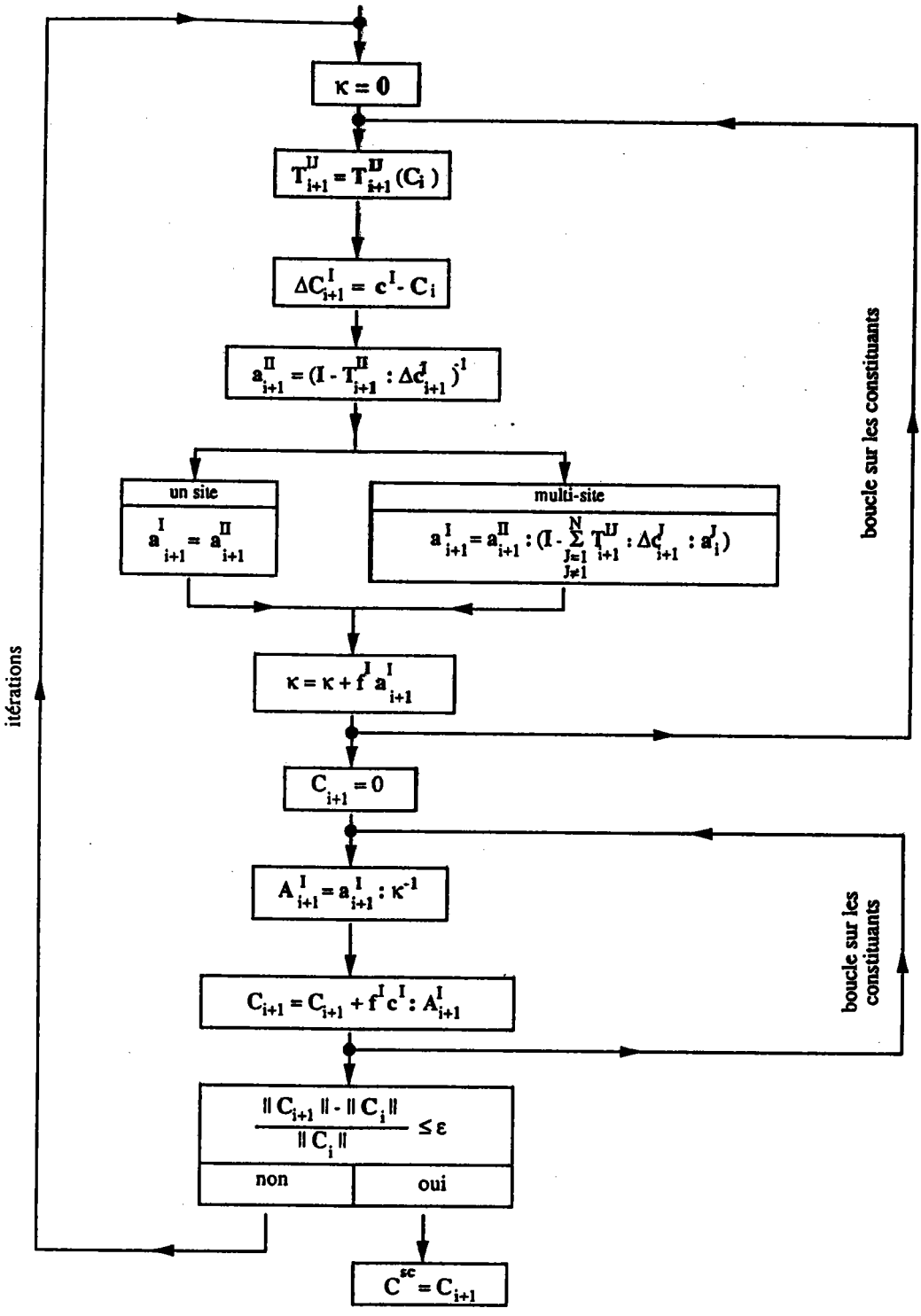
* deuxième situation

il s'agit de la réactualisation du comportement élastique dont le changement est induit par l'évolution de la structure interne du matériau, alors $\mathbf{C}_o$ est pris égale à $\mathbf{C}^{sc}$ de l'incrément précédent.

Dans les deux cas, nous disposons également de l'approximation du tenseur de localisation $\mathbf{a}_o^I$ pour tous les constituants ($\mathbf{I} = 1,\ldots,N$). Soit $\mathbf{C}_i$ et $\mathbf{a}_i^I$ l'approximation des tenseurs d'élasticité et de localisation du gradient de vitesse à l'itération "i". Pour trouver une meilleure approximation de ces grandeurs, il convient de calculer pour tous les grains (voir l'organigramme VI.1 plus bas) :

- ☞ les tenseurs $\mathbf{T}_{i+1}^{IJ}$ (expression 7) en prenant pour le comportement du milieu de référence le tenseur d'élasticité déterminé à l'itération "i" ;
- ☞ la déviation des propriétés $\Delta\mathbf{c}_{i+1}^I$ par rapport au milieu de référence, (V.27);
- ☞ le tenseur de localisation $\mathbf{a}_{i+1}^{II}$, (V.32) ;
- ☞ le tenseur de localisation $\mathbf{a}_{i+1}^I$. Ce tenseur est égal à $\mathbf{a}_{i+1}^{II}$ si le schéma auto-cohérent à un site est utilisé, (V.32). Dans le cas de l'approximation à sites multiples, l'expression (V.39) est appliquée. Son caractère implicite, $\mathbf{a}^I$ fonction de tous $\mathbf{a}^J \neq \mathbf{a}^I$, impose naturellement un traitement itératif cohérent avec l'estimation de $\mathbf{T}_{i+1}^{IJ}$ et $\Delta\mathbf{c}_{i+1}^I$. En effet, pour déterminer $\mathbf{a}_{i+1}^I$ il convient de prendre pour $\mathbf{a}^J$ leurs approximations de l'itération "i".
  Cette approche, comparée à la méthode utilisée par Fassi-Fehri et al. [73], permet de réaliser des modélisations avec des nombres de grains très importants car, contrairement aux autres algorithmes, nous ne passons pas par la résolution des systèmes d'équations pour $\mathbf{g}^I$.

- ☞ le tenseur de localisation du gradient de vitesse $\mathbf{A}^I$, (V.33).
  La différence entre $\mathbf{A}^I$ et $\mathbf{a}^I$, qui résulte de la distinction entre $\mathbf{L}^{eff}$ et $\mathbf{L}^{sc}$, se manifeste par un terme correctif $\kappa = (\sum_J^N \mathbf{f}^J \mathbf{a}^J)^{-1}$. Ce terme accélère la convergence de la méthode. Pour la même précision, le nombre d'itérations est pratiquement deux fois plus grand dans l'approche sans ce terme correctif.



SCHEMA VI.1 - Algorithme de la méthode auto-cohérente en élasticité

☞ la nouvelle approximation des propriétés élastiques C_{i+1}, (V.34)

☞ la dernière étape consiste à vérifier la convergence de la solution. Le critère adapté ici est basé sur la comparaison des normes de C dans deux itérations successives. Le processus d'itération est arrêté quand

$$\frac{\| C_{i+1} \| - \| C_i \|}{\| C_i \|} \leq \varepsilon \qquad \text{(VI.11)}$$

où ε représente une tolérance admise.

Quelques remarques s'imposent concernant cet organigramme. Tout d'abord, il est unique pour les deux méthodes auto-cohérentes : à un site et à des sites multiples. Dans les deux cas une précision de $\varepsilon = 1.10^{-4}$ est atteinte après 3 ou 4 itérations dépendant de l'hétérogénéité du matériau. Les propriétés élastiques C^{sc}, obtenues grâce à cette méthode, serviront comme point de départ dans le calcul élastoplastique.

VI.2.2 - Modules tangents élastoplastiques macroscopiques

La procédure itérative exposée au paragraphe précédent demeure valable pour des calculs en élastoplasticité. Elle n'est pas directement appliquée pour des raisons purement techniques. La loi de comportement élastoplastique s'exprimant en taux des variables mécaniques, une approche incrémentale s'avère indispensable. Deux algorithmes sont alors possibles :

. appliquer des incréments des variables importants et une procédure itérative à l'intérieur de chaque pas ;
. utiliser des pas d'incrémentations suffisamment petits pour éliminer le processus itératif.

L'avantage principal des méthodes basées sur la transition d'échelles est qu'elles fournissent de précieuses informations concernant l'évolution de la structure interne du matériau. Cette évolution est liée à la précision de la description des mécanismes de la déformation plastique, ici activation et désactivation des systèmes de glissement.

Ce souci impose alors des pas d'incrémentation très petits, au moins au stade de mise en place des systèmes de glissement. Il est donc évident que le deuxième algorithme est plus adapté au problème traité ici. D'autre part, la rapide convergence de la méthode prouvée en élasticité permet d'espérer qu'une seule itération soit suffisante pour déterminer les propriétés tangentes macroscopiques du matériau avec une bonne précision. Les résultats obtenus par Hihi et al. [72] et Beradaï et al. [25] en petites déformations élastoplastiques appuient cette thèse. En effet, une évaluation *a priori* du tenseur élastoplastique L^{sc}, basée sur l'hypothèse de l'accommodation

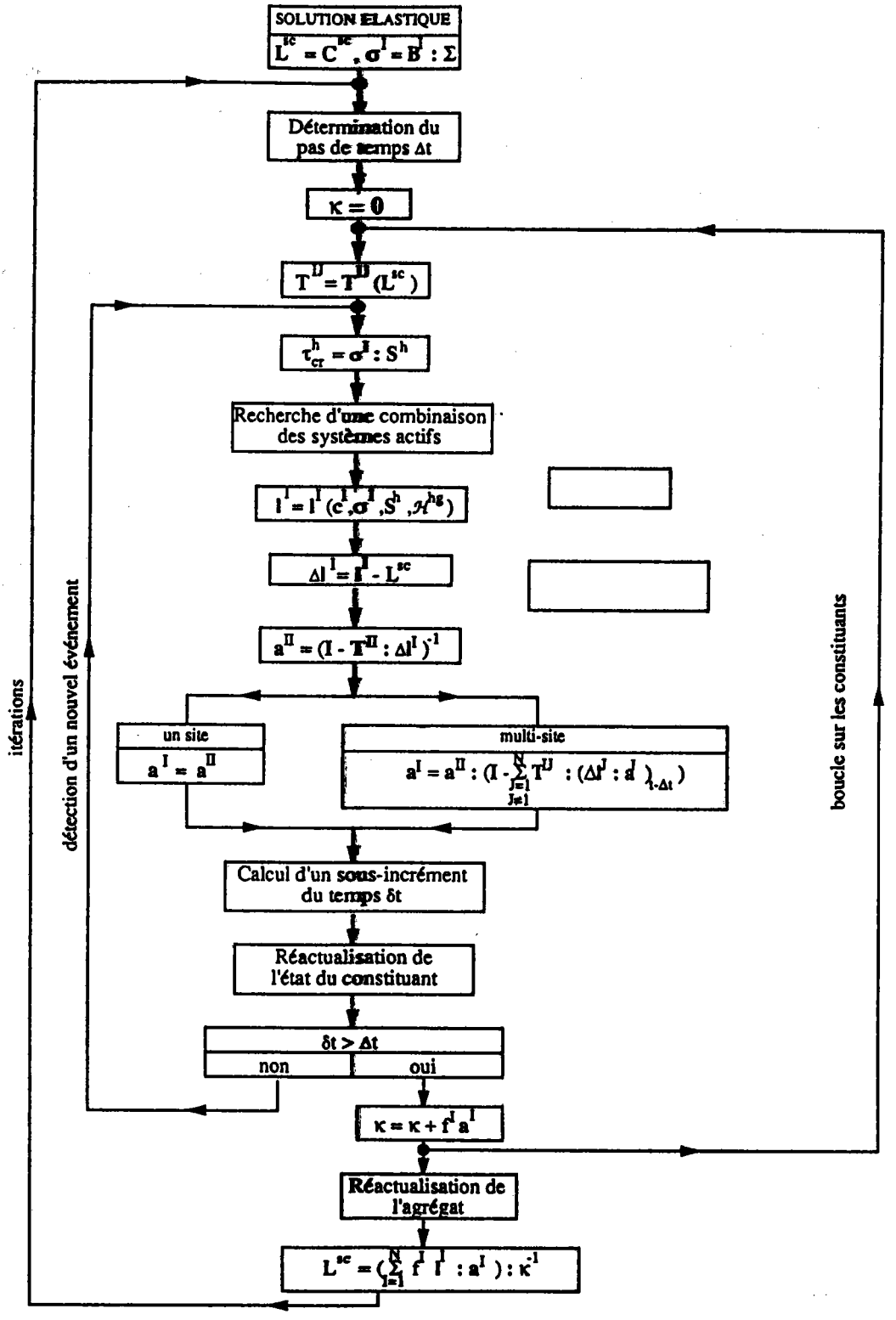
élastoplastique de Berveiller - Zaoui [17], supposé isotrope et en réalité très différent de $\mathbf{L}^{sc}$, a permis d'obtenir des résultats quantitativement très valables. Dans notre cas, cette différence peut être négligeable grâce au choix du pas d'incrémentation.

Avant d'analyser l'influence du pas d'incrémentation, nous présentons l'organigramme de la méthode en élastoplasticité. Comme précédemment, nous supposons connue l'approximation des modules tangents à l'instant initial t=0 (ici t représente le paramètre de chargement croissant de manière monotone avec le temps, par exemple le temps lui-même). Ce tenseur est généralement égal, au début du chargement, au tenseur de propriétés élastiques du matériau déterminé suivant le schéma algorithmique présenté plus haut.

Le calcul des propriétés élastoplastiques instantanées se déroule suivant l'algorithme présenté sur le schéma VI .2.

Connaissant les modules tangents du matériau ainsi que l'état des contraintes internes, on détermine pour chaque grain :

- ☞ le tenseur $\mathbf{T}^{IJ}$ à l'instant t (7) en fonction de $\mathbf{L}^{sc}$ obtenu à la fin du pas précédent, c'est-à-dire également à l'instant t. Ce tenseur est supposé **constant** pendant l'incrément de temps imposé ;
- ☞ les systèmes potentiellement actifs vérifiant le critère de Schmid (III.43) pour un état de contraintes et du réseau cristallin donné ;
- ☞ la combinaison des systèmes actifs. la recherche de cette combinaison est discutée au paragraphe suivant ;
- ☞ les modules tangents du constituant (III.62) ;
- ☞ la partie déviation du comportement par rapport à $\mathbf{L}^{sc}$ (V.27) ;
- ☞ le tenseur de localisation $\mathbf{a}^{II}$ (V.32) ;
- ☞ suivant le schéma retenu, le tenseur $\mathbf{a}^{I}$ qui est égal à $\mathbf{a}^{II}$ dans la méthode auto-cohérente à un site ou défini par (V.39) dans la méthode à sites multiples. Dans ce deuxième cas, le terme $\Delta\mathbf{l}^{J} : \mathbf{a}^{J}$ est approché par sa valeur au pas précédent ;
- ☞ l'événement suivant, c'est-à-dire l'activation d'un nouveau système ou désactivation d'un des systèmes actifs. Si l'intervalle du temps ainsi déterminé est inférieur à l'incrément de temps imposé, le processus est répété, pour le constituant en cours de traitement, après la réactualisation de son état. Dans le cas contraire, et toujours après la réactualisation de l'état de ce dernier, on passe au grain suivant ;
- ☞ la réactualisation de l'état de l'agrégat. Cette opération s'effectue après le traitement de tous les grains. Ce problème, ainsi que la réactualisation de l'état des constituants, est abordé dans le dernier paragraphe de ce chapitre ;
- ☞ les modules tangents élastoplastiques du matériau à l'instant $t+\Delta t$, (V.34). Le terme correctif κ^{-1} permet de rattraper l'inexactitude de l'estimation du $\mathbf{L}^{sc}$ à l'instant donné.



SCHEMA VI.2 - Algorithme de la méthode auto-cohérente en élasto-plasticité

L'approche numérique présentée ici ne respecte pas exactement le schéma de résolution de la méthode auto-cohérente, car les modules tangents du matériau de référence sont légèrement différents des modules auto-cohérents L^{sc}. Nous proposons alors de l'appeler **schéma *quasi auto-cohérent.*** La différence entre les modules auto-cohérents et ceux du matériau de référence dépend de l'incrément du temps choisi et des variations de ces derniers en fonction du temps. Pour vérifier la convergence de cette approche, nous avons effectué une série de calculs en petites transformations élastoplastiques, pour un matériau dont le comportement élastique est isotrope et homogène.

Pour prendre en compte la variation de moins en moins rapide des modules tangents en fonction de la déformation plastique cumulée, nous proposons une règle géométrique d'augmentation de l'incrément de temps

(VI.12) $\Delta t_i = \Delta t_{i-1} \cdot r$

c'est-à-dire que l'incrément de temps à l'instant i est égal à l'incrément de temps à l'instant i-1 multiplié par un facteur $r > 1.0$.

Les figures VI.1 et VI.2 présentent respectivement les variations de la contrainte Σ_{11} et des modules L_{1212} et L_{1111} en fonction de la déformation plastique équivalente (au sens de Von Mises) pour un essai de traction suivant la direction 3. Différentes raisons r ont été utilisées. On constate que l'écart entre les résultats diminue quand r tend vers 1. A partir de $r = 1.03$ les courbes sont tellement proches qu'il est difficile de les distinguer. Ces figures prouvent la convergence de l'algorithme et en même temps permettent de choisir l'incrémentation en temps en fonction de la précision du calcul désirée.

Parmi les nombreux problèmes qui demandent à être résolus en mettant au point un algorithme de la méthode auto-cohérente en grandes transformations, les problèmes de réactualisation de l'état du matériau et de recherche de la combinaison des systèmes actifs sont sûrement les plus importants. La réactualisation de l'état du matériau est plus facile à établir, car il existe des algorithmes bien connus développés en éléments finis [79], [80]. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe VI.4.

Le problème du choix d'une combinaison de systèmes actifs nous semble moins connu.

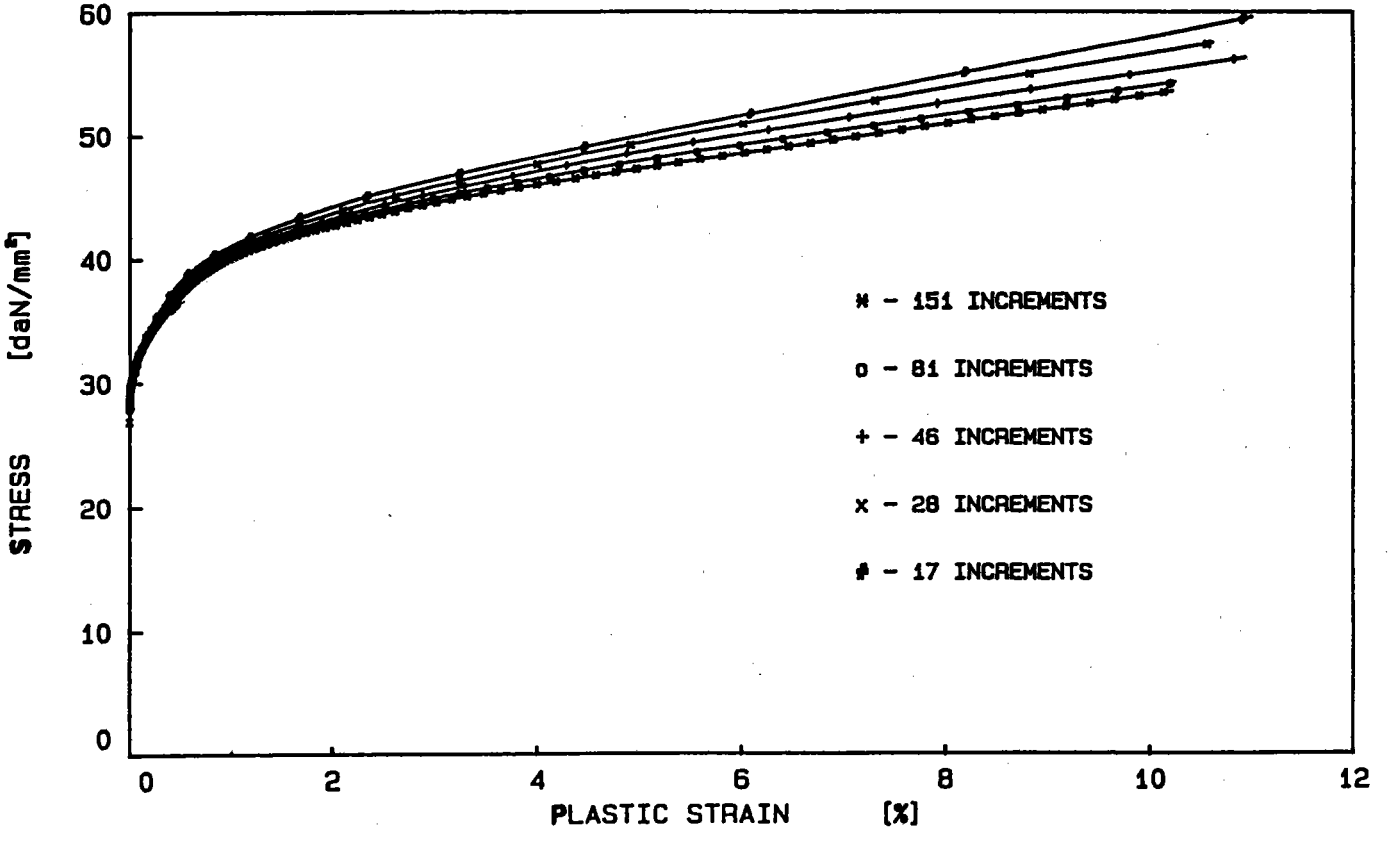


FIGURE VI.1 - Influence du pas de temps (r) sur la courbe de traction selon la direction 1.

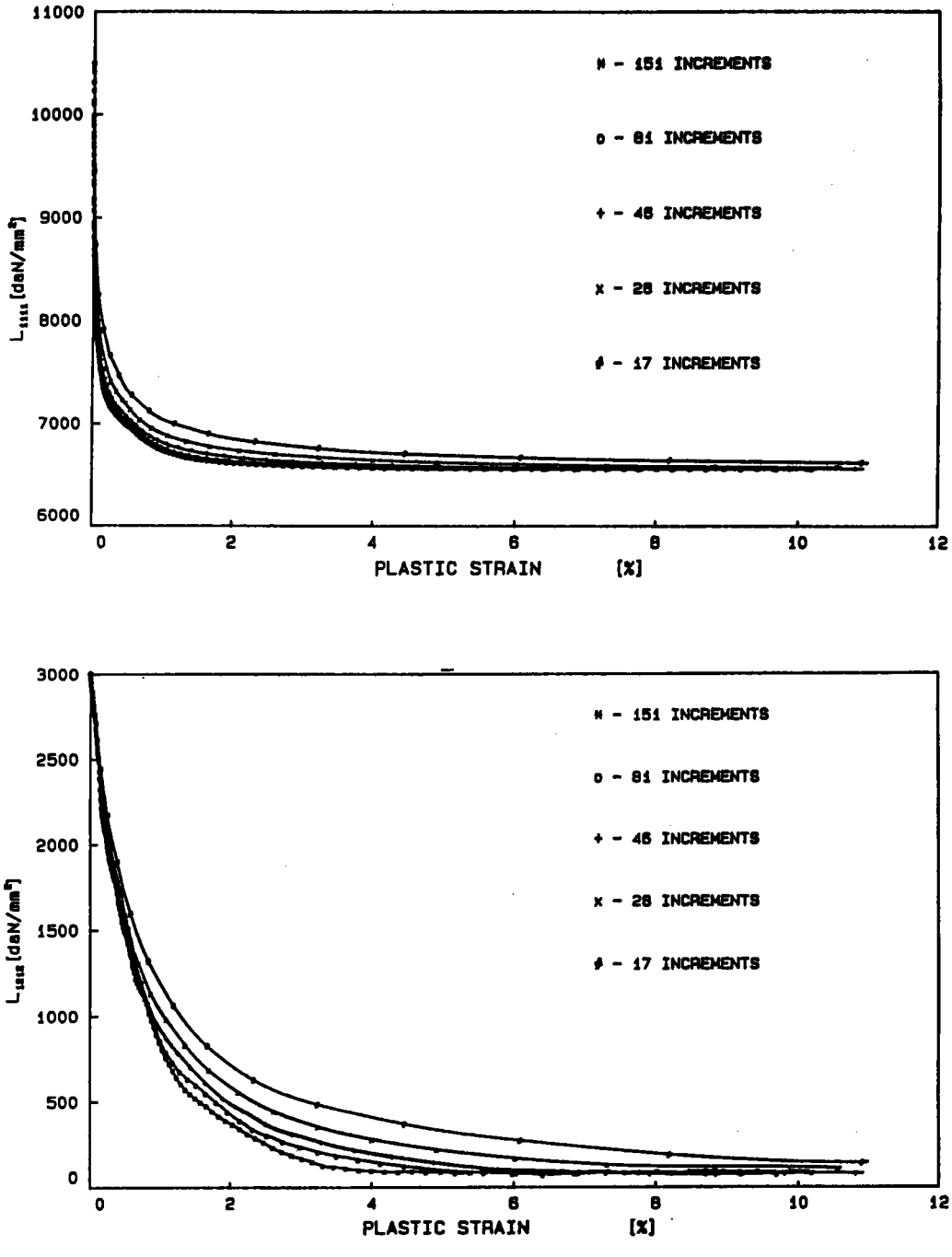


FIGURE VI.2 - Influence du pas de temps (r) sur les modules tangents L_{1212} et L_{1111} pour une simulation de traction selon la direction 1.

VI.3 - Recherche des systèmes actifs

Supposons que, dans le grain considéré, il y ait un certain nombre de systèmes vérifiant le critère de Schmid, discuté au chapitre III, c'est-à-dire

$$\tau_{ij} S_{ij}^h \equiv \sigma_{ij} S_{ij}^h = \tau_{cr}^h \qquad h = 1, 2, \ldots, N.S.P.A. \tag{VI.13}$$

où N.S.P.A. veut dire "Nombre de Systèmes Potentiellement Actifs".

Le problème qu'on se pose est de choisir, parmi ces systèmes, un sous-ensemble de systèmes actifs. Une fausse idée, qui est une extrapolation non justifiée des difficultés du modèle de Taylor, consiste à dire qu'un tel choix est ambigu, c'est-à-dire qu'il existe plusieurs combinaisons vérifiant toutes les équations du problème. Très brièvement, nous rappelons que dans le cas du modèle de Taylor, et de ses dérivés, les déformations élastiques sont négligées, ce qui impose un nombre de systèmes actifs égal au nombre des composantes indépendantes du tenseur de déformations plastiques (compatibilité des déformations plastiques). Le champ cinématiquement admissible ainsi construit n'est pas suffisant. L'application du critère énergétique à un tel champ conduit souvent à un choix non unique de ces cinq systèmes de glissement.

En élastoplasticité, la déformation totale doit être compatible, ce qui nous libère d'un nombre imposé de systèmes actifs. Dans le cas du modèle de Taylor, le nombre de combinaisons à vérifier est

$$C_{NSPA}^5 \text{ (combinaisons de 5 parmi NSPA).}$$

Dans le cas du modèle élastoplastique auto-cohérent, ce nombre s'élève à :

$$2^{NSPA} = C_{NSPA}^0 + C_{NSPA}^1 + \ldots + C_{NSPA}^{NSPA}$$

où $C_{NSPA}^0 = 1$ correspond à la solution purement élastique du problème et $C_{NSPA}^{NSPA} = 1$ à l'activation de tous les systèmes potentiellement actifs.

L'unicité de la solution a été démontrée par Hill [34] en petites déformations et Hill et Rice [35] en grandes transformations élastoplastiques. Nous donnons une démonstration semblable à celle de Hill et Rice [35] dans l'annexe.

Un système h est actif si l'incrément de la cission réduite sur ce système est égal à l'incrément de sa cission critique :

$$\delta_t^* \tau^h = \delta_t^* \tau_{cr}^h \tag{VI.14}$$

Cette écriture a été développée au chapitre III. Elle prend la forme :

$$\lambda^h : d = \sum_{g=1}^{N.S.A.} (H^{*gh} + \lambda^h : S^g)\, \delta\gamma^g = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{hg}\, \delta\gamma^g$$

En construisant les sous-ensembles de systèmes susceptibles d'être actifs, on détermine les incréments des glissements plastiques

$$\delta\gamma^g = \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{-gh} (\lambda^h : d) \qquad \text{(VI.15)}$$

Le premier critère de sélection est :

$$\delta\gamma^g = \geq 0 \qquad \text{(VI.16)}$$

Si l'un des $\delta\gamma^g$ est négatif, la combinaison considérée est rejetée.

Toute cette procédure est basée sur l'hypothèse que $\mathcal{H}^{gh}$ est défini positif, ou encore que $\mathcal{H}^{-gh}$ existe. Nous rappelons ici que le tenseur d'élasticité **c** est défini positif et qu'il est prépondérant dans l'expression (III.55) définissant la matrice d'écrouissage $\mathcal{H}^{gh}$. Il n'est pas possible de démontrer que $\mathcal{H}^{gh}$ est toujours défini positif car cette matrice dépend de l'état de contrainte du monocristal et de la matrice H^{*gh}. On remarque que la condition "$\mathcal{H}^{gh}$ défini positif" peut être vérifiée même quand H^{*gh} ne l'est pas (voir l'annexe).

La connaissance des systèmes actifs à l'instant donné n'est pas suffisante pour effectuer le calcul. Il faut également évaluer la période de temps pendant laquelle ces systèmes restent actifs. Cette période est déterminée en fonction des événements tels que : activation d'un nouveau système ou désactivation d'un des systèmes actifs. Pour que cet événement se produise, il faut qu'un des systèmes inactifs devienne potentiellement actif, c'est-à-dire qu'il vérifie le critère de Schmid à l'instant $(t + \delta t)$

$$\tau_r^h (t+\delta t) = \tau_{cr}^h (t+\delta t)$$

$$S^h : \sigma (t) + \delta t^h (\mu^h : \delta^*_{Tr} \sigma) = \tau_{cr}^h (t) + \delta t^h \Big(\sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{hg}\, \delta\gamma^g \Big)$$

De là on déduit l'incrément de temps cherché :

$$\delta t^h = \frac{\tau_{cr}^h (t) - S^h : \sigma (t)}{\mu^h : \delta^*_{Tr}\, \sigma - \sum_{g=1}^{N.S.A.} \mathcal{H}^{hg}\, \delta\gamma_g} \qquad \text{(VI.17)}$$

Cette opération doit être effectuée pour tous les systèmes inactifs. L'incrément de temps à appliquer est évidemment

(VI.18) $\delta t = \min (\delta t^h)$.

Les amplitudes des glissements plastiques étant déterminées, il est possible alors de calculer les gradients de la vitesse plastique et de réactualiser toutes les variables mécaniques et la structure interne du polycristal. La fin de ce chapitre est consacrée à la discussion du problème de l'incrémentation de la solution dans le cadre de la description Lagrangienne réactualisée.

VI.4 - Réactualisation des variables mécaniques et structurales

Dans ce paragraphe, le symbole δ_t représente **un incrément fini** d'une variable entre le temps t et t+Δt.

Nous allons définir cette procédure dans le cadre de la description Lagrangienne réactualisée, c'est-à-dire en prenant comme configuration de référence la configuration actuelle à l'instant t.

La connaissance des modules tangents $\mathbf{L}^{sc}$ (t) et de l'état du polycristal, au moment considéré, permet de déterminer le gradient de la vitesse du grain I (V.31) (méthode auto-cohérente)

$$\mathbf{g}^I(t) = \mathbf{A}^I(t) : \mathbf{G}(t)$$

La partie plastique de ce gradient peut être calculée connaissant les systèmes actifs du grain. Dans la suite nous omettons l'indice supérieur I dans toutes les formules

$$\mathbf{g}^p(t) = \mathbf{d}^p(t) + \mathbf{w}^p(t) = \mathbf{d}^p(t) + (\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}^*(t)) = \sum_{h=1}^{N.S.A.} (\mu^h + \mathbf{R}^h)\, \delta\gamma^h$$

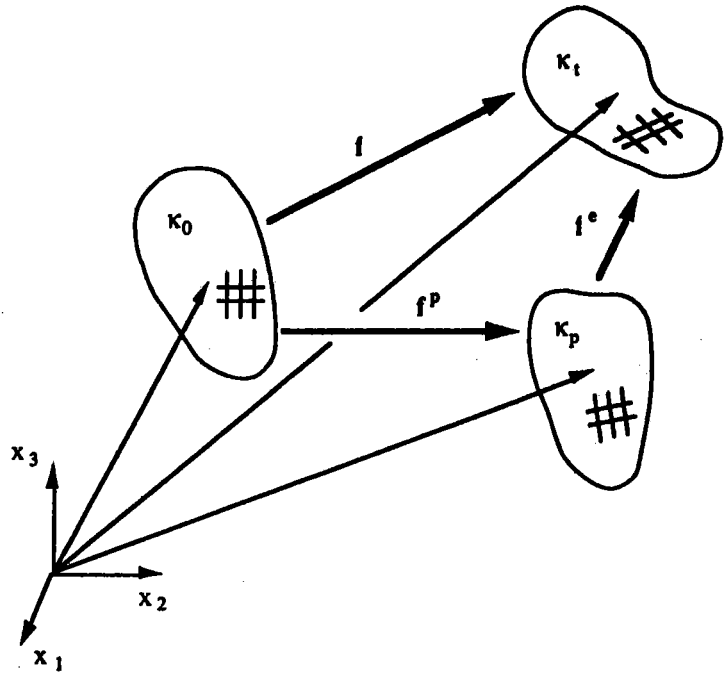
(VI.19) $$\mathbf{g}^p(t) = \sum_{h=1}^{N.S.A.} [\mathbf{S}^h + \mathbf{s} : (\mathbf{S}^h \cdot \sigma + \sigma \cdot {}^t\mathbf{S}^h)]\, \delta\gamma^h$$

On rappelle que l'expression (VI.19) est obtenue en supposant que $\mathbf{w}^e = \mathbf{w}^*$, c'est-à-dire que le repère directeur de Mandel est attaché au réseau cristallin du grain considéré.

La décomposition additive du gradient de la vitesse en partie élastique et plastique

(VI.20) $$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}^e(t) + \mathbf{g}^p(t)$$

permet de déterminer de manière stricte la partie élastique du mouvement. Nous pouvons écrire grâce au schéma présenté ci-dessous:



(VI.23) $$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}^p} \frac{\partial \mathbf{x}^p}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^p$$

Pour pouvoir réactualiser l'état du matériau, il faut déterminer les variations de ces trois gradients en fonction du temps. La relation (II.17) nous donne directement la variation du gradient de la transformation

(VI.21) $$\delta_t \mathbf{f}(t) = \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{f}(t)$$

Alors ce gradient à l'instant $t+\Delta t$ est égal à

(VI.22) $$\mathbf{f}(t+\Delta t) = \mathbf{f}(t) + \delta_t \mathbf{f} + \frac{1}{2} \delta_t (\delta_t \mathbf{f}) + \ldots$$

$$= \mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{f}(t) + \frac{1}{2} \delta_t (\mathbf{g}(t) \cdot \mathbf{f}(t)) +$$

En se limitants au deuxième terme nous avons:

$$\text{(VI.24)} \qquad \mathbf{f}\,(t+\Delta t) \approx \left(\mathbf{I} + \mathbf{g}(t) + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}(t)\,.\,\mathbf{g}(t)\right).\,\mathbf{f}(t)$$

Cette approximation du deuxième ordre permet d'utiliser des pas de temps relativement grands.

Pour définir des relations analogues pour la partie élastique et plastique du gradient de transformation, dérivons la relation (23) par rapport au temps:

$$\delta_t \mathbf{f} = \mathbf{g}(t)\,.\,\mathbf{f}(t) = \delta_t\,(\mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^p) = \delta_t \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^p + \mathbf{f}^e \cdot \delta_t \mathbf{f}^p$$

ceci conduit à

$$\text{(VI.25)} \qquad \mathbf{g}(t) = \delta_t \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^{-e} + \mathbf{f}^e \cdot (\delta_t\,\mathbf{f}^p \cdot \mathbf{f}^{-p})\,\mathbf{f}^{-e}$$

en comparant avec (19) on obtient :

$$\text{(VI.26)} \qquad \begin{aligned} &(1) \qquad \mathbf{g}^e(t) = \delta_t \mathbf{f}^e \cdot \mathbf{f}^{-e} \\ &(2) \qquad \mathbf{g}^p(t) = \mathbf{f}^e \cdot (\delta_t \mathbf{f}^p \cdot \mathbf{f}^{-p})\,\mathbf{f}^{-e} \end{aligned}$$

Par analogie avec la formule (22) nous avons :

$$\text{(VI.27)} \qquad \mathbf{f}^e\,(t+\Delta t) = \left(\mathbf{1} + \mathbf{g}^e(t) + \frac{1}{2}\,\mathbf{g}^e(t) \cdot \mathbf{g}^e(t)\right) \cdot \mathbf{f}^e(t)$$

Pour déterminer la partie plastique du gradient de transformation, nous passons par la relation (21). En effet :

$$\text{(VI.28)} \qquad \mathbf{f}^p\,(t+\Delta t) = \mathbf{f}^{-e}\,(t+\Delta t) \cdot \mathbf{f}\,(t+\Delta t)$$

La connaissance de ces trois grandeurs permet de calculer tous les tenseurs de déformation. En introduisant les mesures habituelles :

- dans la configuration initiale

$$\text{(VI.29)} \qquad \begin{aligned} &(1) \qquad \mathbf{e}_o = \frac{1}{2}\,({}^t\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} - \mathbf{1}) \\ &(2) \qquad \mathbf{e}^p_o = \frac{1}{2}\,({}^t\mathbf{f}^p \cdot \mathbf{f}^p - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

- dans la configuration actuelle

(VI.30)

$$(1) \qquad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - {}^{t}\mathbf{f}^{-1} \cdot \mathbf{f}^{-1})$$

$$(2) \qquad \mathbf{e}^{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - {}^{t}\mathbf{f}^{-e} \cdot \mathbf{f}^{-e})$$

- dans la configuration relâchée

(VI.31)

$$(1) \qquad \mathbf{e}^{e}_{r} = \frac{1}{2}({}^{t}\mathbf{f}^{e} \cdot \mathbf{f}^{e} - \mathbf{1})$$

$$(2) \qquad \mathbf{e}^{p}_{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - {}^{t}\mathbf{f}^{-p} \cdot \mathbf{f}^{-p})$$

Nous avons les décompositions suivantes :

(VI.32)

$$(1) \qquad \mathbf{e}_{o} = {}^{t}\mathbf{f}^{p} \cdot \mathbf{e}^{e}_{r}\mathbf{f}^{p} + \mathbf{e}^{p}_{o}$$

$$(2) \qquad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{e} + {}^{t}\mathbf{f}^{-e}\,\mathbf{e}^{p}_{r} \cdot \mathbf{f}^{-e}$$

Ainsi, la connaissance du gradient de vitesse et de sa partie élastique et plastique à l'instant t permet de déterminer la cinématique de transformations élastoplastiques.

Grâce à la loi de comportement (III.60) nous avons également :

$$\delta_{t}\mathbf{n}^{I} = \mathbf{l}^{I} : \mathbf{g}^{I}$$

Cet incrément est bien évidemment déterminé par rapport à la configuration κ_t, supposée immobile. Dans cette configuration nous avons (voir (II.28)) :

$$\overset{(t)}{\mathbf{n}}(t) = \overset{(t)}{\pi}(t) = \sigma(t)$$

La lettre au-dessus du symbole de contrainte spécifie, quand c'est nécessaire, sa configuration de référence. Il est alors possible d'incrémenter la contrainte de Piola-Kirchoff

(VI.33) $\overset{(t)}{\delta_t \pi} = \delta_t \mathbf{n} - \sigma \cdot {}^t\mathbf{g}$

$$\overset{(t)}{\pi}(t+\Delta t) = \overset{(t)}{\pi}(t) + \overset{(t)}{\delta_t \pi}$$

Le résultat est obtenu dans la même configuration κ_t. Le transport de cette contrainte dans la configuration $\kappa_{t+\Delta t}$ s'écrit :

(VI.34) $$\overset{(t+\Delta t)}{\pi}(t+\Delta t) = \mathbf{f}(\Delta t) \cdot \overset{(t)}{\pi}(t+\Delta t) \, {}^t\mathbf{f}(\Delta t) / \text{dét}(\mathbf{f}(\Delta t))$$

Dans cette expression $\mathbf{f}(\Delta t)$ est le gradient de transformation relatif entre les instants t et $(t+\Delta t)$, tel que (voir (II.16)) :

(VI.35) $$\mathbf{f}(\Delta t) = \mathbf{f}(t+\Delta t) \cdot \mathbf{f}^{-1}(\Delta t)$$

Dans la configuration $\kappa_{t+\Delta t}$ considérée comme configuration de référence, toutes les mesures de contrainte sont égales :

$$\sigma(t+\Delta t) = \overset{(t+\Delta t)}{\mathbf{n}}(t+\Delta t) = \overset{(t+\Delta t)}{\pi}(t+\Delta t)$$

Ceci représente l'état de contrainte dans la nouvelle configuration actuelle. L'application de l'expression (II.27) nous donne sa représentation dans la configuration initiale.

(VI.36) $$\overset{(o)}{\pi}(t+\Delta t) = \text{dét}(\mathbf{f}(t+\Delta t)) \, \mathbf{f}^{-1}(t+\Delta t) \cdot \sigma(t+\Delta t) \cdot {}^t\mathbf{f}^{-1}(t+\Delta t)$$

Les formules présentées ci-dessus, ainsi que les règles de réactualisation de la microstructure (voir § V.3) se déduisent du gradient de vitesse $\mathbf{g}^I$ ou du taux de contrainte nominale $\delta_t \mathbf{n}$.

La même approche et les mêmes formules restent valables à l'échelle macroscopique. En effet, dans le paragraphe II.3 nous avons démontré que

$$\mathbf{G} = \langle \mathbf{g}^I \rangle \qquad \text{(II.36)}$$

et

$$\delta_t \mathbf{N} = \langle \mathbf{n}^I \rangle \qquad \text{(II.35)}$$

Ce résultat permet, en appliquant les expressions de (23) à (35), de réactualiser l'état de contrainte et de déformation macroscopique.

VI.5 - Commentaires

L'approche discrète, proposée dans ce chapitre, se distingue par plusieurs solutions originales, par rapport aux travaux, relativement peu nombreux, dans ce domaine. Nous soulignons ici le traitement individuel des grains. Cette approche, présentée au paragraphe 2 de ce chapitre, nous permet de modéliser le matériau composé d'un nombre très important de constituants, car par rapport aux méthodes employées dans d'autres travaux, nous n'inversons pas des systèmes d'équations dont le nombre est croissant avec le nombre des grains. Cette méthode, apparemment inexacte, s'avère très précise grâce au terme correctif employé à la fin de chaque incrément du temps (voir les organigrammes 1 ou 2).

VII - APPLICATIONS

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus à partir de la formulation autocohérente développée précédemment. Ces résultats concernent les métaux à structures CFC et CC. Ils peuvent être classés en deux grandes parties.

La première concerne le comportement global du matériau tel qu'il découle de la formulation proposée. Celui-ci peut être traduit par :

. le tenseur d'élasticité C
. les courbes d'écrouissage
. les modules tangents
. les surfaces de plasticité.

Bien entendu, le comportement plastique dépend du trajet de chargement et reflète l'état interne actuel du matériau affecté par les mécanismes des déformations plastiques actifs.

La seconde partie des résultats concerne l'évolution de la structure interne du polycristal pour un chargement donné. Par structure interne nous comprenons ici :

. l'état du réseau cristallin : d'une part les contraintes résiduelles du second ordre et l'énergie élastique bloquée associée, et d'autre part l'orientation de ces réseaux c'est-à-dire la texture cristallographique induite
. la forme des constituants (grains), c'est-à-dire la texture morphologique du matériau
. l'intensité des cissions critiques sur les systèmes de glissement qui reflète, de manière moyenne, les densités de dislocations sur ces systèmes.

Les données initiales d'un problème sont de deux types. En premier lieu, il est indispensable de décrire la sollicitation et sa variation en fonction du temps

$$G = G(t) \quad \text{ou} \quad \delta N = \delta N(t)$$

Cette variation permet de réaliser des simulations des sollicitations

- monotones ou non-monotones

- radiales ou non-radiales.

Ensuite, il est nécessaire de définir l'état initial du polycristal. Ceci revient à identifier

- la nature métallurgique et cristallographique des constituants
- la microstructure initiale du polycristal, c'est-à-dire la forme et l'orientation des grains
- le comportement élastique des monocristaux
- les familles des systèmes de glissement plastique
- pour un polycristal pré-écroui, les contraintes résiduelles initiales et les cissions critiques pour tout système de glissement.

Dans l'approche ainsi définie, le nombre de paramètres ou de variables décrivant le matériau est très restreint. Ceux-ci sont entièrement définis, soit à partir d'expériences sur des monocristaux, soit par une analyse microstructurale du polycristal.

Le choix des propriétés élastiques des monocristaux ne pose pas de problème. Un nombre important de résultats expérimentaux est disponible [57], [81],... Le problème est bien plus complexe en ce qui concerne le comportement plastique. En effet, les essais simples type traction sur des monocristaux peuvent fournir, après un dépouillement approprié, la valeur de la cission critique initiale τ^{o}_{cr}. La définition de la matrice d'écrouissage H^{*gh} reste néanmoins une tâche bien plus difficile. Une analyse des "interactions" entre les systèmes de glissement (tétraèdre de Thompson) permet de définir les classes d'interaction ainsi que la structure de la matrice H^{*gh}; la détermination des différents termes doit se faire de manière expérimentale par essai d'écrouissage latent [26]. En première approximation, nous supposons que cette matrice est constante (indépendante du niveau de déformation). Cette hypothèse, sûrement très grossière pour des déformations supérieures à 10%, est maintenue, par manque de données expérimentales, dans tous les calculs présentés ici.

Les observations métallographiques permettent de définir la forme et l'orientation des grains, au moins de manière qualitative. Il reste alors la description de la texture cristallographique. La détermination expérimentale de la texture cristallographique d'un matériau est très fiable et largement utilisée dans le monde industriel. Les résultats, sous forme de figures de pôles ou de fonctions de distribution des orientations (FDO), nécessitent d'être discrétisés afin de décrire le polycristal par un nombre réduit de grains (ou familles d'orientation) très souvent de l'ordre de 100 à 1 000.

Des remarques formulées ci-dessus témoignent que dans l'approche utilisée, il n'y a en principe aucun "paramètre ajustable".

Dans les résultats présentés plus loin, nous n'avons pas cherché à étudier de manière systématique l'influence de tel ou tel paramètre (par exemple τ_{cr}^{o} ou H^{*gh} sur les propriétés effectives et l'évolution de la microstructure. Nous avons plutôt cherché à mettre en évidence les capacités du modèle à décrire de nombreux phénomènes physiques tels que :

- la formation des textures
- les diverses formes d'écrouissage
- les contraintes résiduelles
- l'énergie bloquée et sa restitution, etc...

Nous présentons d'abord quelques résultats en élasticité. Ensuite, nous nous concentrons sur la modélisation du comportement élastoplastique d'un matériau, de structure cristallographique CFC, de départ choisi isotrope (sans texture cristallographique ni morphologique) et recuit (les cissions critiques initiales identiques et sans contraintes internes).

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous montrons l'influence de la texture cristallographique, initialement très marquée, sur le comportement d'un polycristal CC recuit.

Tous les résultats présentés plus loin ont été obtenus dans le cadre de la méthode auto-cohérente à un site.

B.U. METZ

VII.1 - Anisotropie élastique induite

La modélisation présentée dans les chapitres précédents s'applique, sans modification, à la prédiction du comportement des matériaux élastiques microhétérogènes tels que polycristaux ou certains composites [82], [83]. Nous avons utilisé cette approche également pour déterminer les caractéristiques thermo-élastiques des matériaux [84], [85]. Dernièrement, le domaine d'application a été élargi aux matériaux non-linéaires [83], [86] et viscoélastiques [87].

Dans ce paragraphe, nous présentons un très bref aperçu des résultats concernant l'anisotropie élastique liée à l'évolution de la texture cristallographique des matériaux, induite par une déformation plastique, ici en traction et compression [88].

Supposons que la texture cristallographique du matériau étudié, et son évolution avec la déformation plastique, soient connues. Nous disposons alors d'une fonction d'orientations cristallographiques obtenue par des mesures ou par des simulations numériques.

Les données du problème en élasticité se réduisent à :

- un fichier d'orientations cristallographiques censé représenter la texture du matériau
- les constantes élastiques du cristal constituant les grains
- la forme et l'orientation des grains.

Dans cet exemple, la texture cristallographique provient des simulations numériques discutées plus loin. Au départ, état initial du matériau, la texture cristallographique quasi-isotrope, est obtenue par une génération aléatoire de cent triplés des angles d'Euler φ_1, ϕ, φ_2. La forme des inclusions est supposée sphérique afin d'obtenir un comportement isotrope de l'élément de volume. Le comportement du monocristal est anisotrope, de symétrie cubique. En prenant comme référence le module d' Young de matériau isotrope E(o), nous avons en notation de Voigt :

$$C_{11} = 1.353\ E(o)$$
$$C_{12} = 1.091\ E(o)$$
$$C_{44} = 0.576\ E(o).$$

Ces données correspondent au cas du cuivre.

Il est instructif de calculer, pour un tel monocristal, la variation du module d' Young selon les trois directions cristallographiques <100>, <110> et <111>. Nous avons :

$$E_{100} = 0.515\ E(o)$$
$$E_{110} = 1.007\ E(o)$$
$$E_{111} = 1.477\ E(o).$$

Une première simulation, avec une texture quasi-isotrope, conduit à un module d' Young E(o) avec des variations en fonction des orientations, de l'ordre de ± 0,6%.

Trois configurations sont envisagées :

a) un matériau type cuivre avec différents niveaux de prédéformation en traction
b) un matériau type cuivre avec différents niveaux de prédéformation en compression
c) un matériau type laiton avec différents niveaux de prédéformation en traction.

Dans tous les cas, le module d' Young dans la direction de prédéformation $E(\varepsilon_P)$ est déterminé en fonction de la prédéformation ε_P. Les résultats des simulations sont visualisés sur la figure VII.1.

La courbe (a) correspond à l'essai de traction sur un matériau type cuivre. On observe une influence très faible de la prédéformation sur le module d' Young dans la direction de traction (~ 4% pour une prédéformation de 90%). L'explication peut être obtenue à partir de l'évolution de la texture cristallographique d'un tel matériau. En effet, sa texture est caractérisée par deux fibres prédominantes (voir figure VII.16) :

- la composante <111> dont le module d' Young est élevé
- la composante <100> dont le module d' Young est très faible.

Leurs influences sur le module d' Young se compensent.
La courbe (b) correspond à l'évolution de la texture cristallographique d'un matériau type cuivre en compression. Il est bien connu qu'une telle texture est caractérisée par une composante prédominante de type <110> (voir figure VII.17).

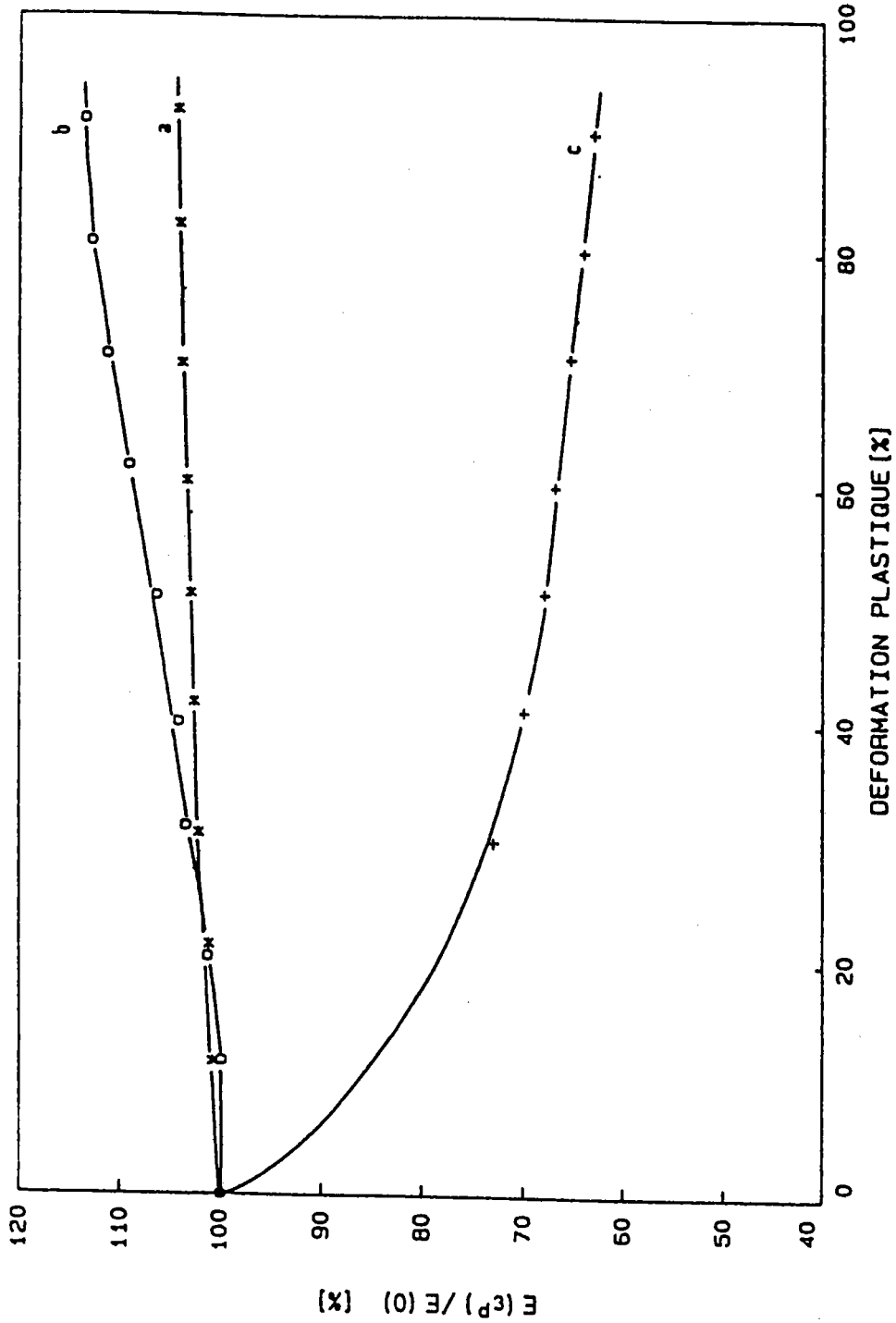


FIGURE VII.1 - Evolution du rapport $E(EP_{vm})/E(0)$ en fonction de la déformation plastique pour :

a) la texture de traction (Cu)
b) la texture de compression (Cu)
c) la texture de traction (Laiton)

Le module d' Young qui lui correspond est proche du module E(o). Alors l'influence de la prédéformation doit rester également faible. En effet nous avons obtenu, pour une prédéformation de 90%, une augmentation de ce module de (environ 14%).

Le mode de déformation plastique du monocristal dépend de plusieurs facteurs dont les plus importants sont :

- la température d'essai
- l'énergie de faute d'empilement
- les éléments d'additions.

Si les textures discutées plus haut correspondent bien à la texture du cuivre pur ou de l'aluminium, on sait [89] que la texture du laiton possède une fibre <100> nettement plus intense que celle du cuivre. Puisque $E_{100} < E(o)$ pour les monocristaux correspondants, on peut donc s'attendre à une diminution du rapport $E(\varepsilon_P) / E(o)$ pour ces matériaux.

La courbe (c) a été obtenue par l'intermédiaire des simulations en ne retenant que les orientations cristallographiques pour lesquelles l'axe de traction se rapproche de la fibre <100>. Cette approche surestime partiellement l'anisotropie induite. On observe, comme prévu, une diminution du module d'Young avec la déformation plastique, diminution qui atteint la valeur significative de 35% pour $\varepsilon_P = 0.9$, ce qui est comparable à certaines variations de $E(\varepsilon_P)$ attribuées à l'endommagement du matériau.

VII.2 - Applications aux métaux à structure CFC

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus à partir de la formulation autocohérente précédente appliquée au cas des métaux à forte énergie de faute d'empilement de structure CFC pour lesquels on peut admettre que le mécanisme de glissement multiple homogène est prédominant.

Il convient donc, dans ce type d'approche du comportement du polycristal, de caractériser convenablement l'état interne initial de l'agrégat à partir de paramètres déduits des essais sur monocristaux et d'observations micro- et macrostructurales. C'est l'objet du paragraphe VII.2.1.

Les résultats que nous avons obtenus sont classés en deux grandes parties:

-la première concerne le comportement élastoplastique global du polycristal tel qu'il découle de la formulation proposée et du mode dechargement : chargement radial et monotone à un ou plusieurs paramètres, chargement séquentiel (paragraphe VII.2.2)

- la seconde concerne l'évolution de la structure interne du polycristal pour un chargement donné. par structure interne, nous nous limitons ici à l'état du réseau cristallin, c'est-à-dire d'une part aux contraintes résiduelles du second ordre et à l'énergie élastique bloquée associée et, d'autre part à l'orientation de ces réseaux, c'est-à-dire aux textures cristallographiques induites (paragraphe VII.2.3).

VII.2.1 - Données Initiales

L'état initial du polycristal est caractérisé par :

a) le comportement élastoplastique intracristallin

b) la microstructure du polycristal.

a) Comportement élastoplastique du monocristal

La structure du monocristal étant du type CFC, nous supposons que les systèmes de glissement sont du type (111) <110> et nous distinguons les deux sens de glissement, ce qui conduit à l'existence de 24 systèmes de glissement.

Sauf précision contraire, l'élasticité du monocristal est supposée isotrope, de module de Lamé μ et de rapport de Poisson ν. La cission critique initiale τ^o est choisie identique sur tous les systèmes de glissement d'un grain mais également d'un grain à l'autre.

La matrice d'écrouissage définie par Franciosi et al. [26] ne fait intervenir que les interactions fortes et faibles entre les systèmes de glissement.

Le terme H_1 décrivant l'auto-écrouissage est pris égal à $\mu/250$ et correspond à la pente du stade II d'un essai de traction sur monocristal. Nous avons choisi cette valeur du fait que le stade I est pratiquement absent dans les grains du polycristal en liaison avec le développement rapide des contraintes internes d'incompatibilités intergranulaires.

Le terme H_2 est choisi proportionnel à H_1 ($H_2 = AH_1$), le cœfficient d'anisotropie A décrivant l'écrouissage latent du monocristal. H_1 et A sont supposés constants en fonction de la déformation plastique.
Toutes ces données sont rappelées dans le tableau VII.1 et leurs valeurs numériques rappelées pour tous les résultats obtenus. Ils correspondent globalement à un matériau tel que le cuivre ou l'aluminium pur. La forme de la matrice H^{*gh} est visualisée par le tableau VII.2.

Elasticité	module de cisaillement m et rapport de Poisson ν dans le cas anisotrope ou C_{11}, C_{12} et C_{44}
Plasticité	24 systèmes de glissement (111) < 110 > cission critique initiale t° matrice d'écrouissage $H_1 = m/250$, $H_2 = AH_1$
Microstructure de l'agrégat	100 à 10 000 grains texture isotrope ou initiale forme initiale : sphère ou ellipsoïde identique pour tous les grains

Tableau VII.1 :Etat initial du polycristal et comportement élastoplastique du monocristal.

b) Microstructure du polycristal

Pour limiter les temps de calcul sans perdre d'information statistique, il convient de choisir un nombre limité mais suffisant de grains pour décrire l'édifice polycristallin. Pour un matériau dont la texture initiale n'est pas très marquée, différents tests ont permis de limiter le nombre de grains à une ou deux centaines.

Dans l'état initial, ils possèdent tous la même forme (sphérique ou ellipsoïdale) et leur orientation cristallographique est choisie de manière aléatoire (Figure VII.2). Cette condition n'est pas évidement indisponsable.

	A 2		A 3		A 6		B 2		B 4		B 5		C 1		C 3		C 5		D 1		D 4		D 6	
	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
A2 +	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x
-	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x
A3 +	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x
-	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x
A6 +	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o
-	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o
B2 +	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x
-	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x
B4 +	x	x	o	o	x	x	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x
-	x	x	o	o	x	x	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x
B5 +	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o
-	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o
C1 +	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x
-	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x
C3 +	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x
-	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	o	o	o	o	o	o	x	x	o	o	x	x
C5 +	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o
-	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o	x	x	x	x	o	o
D1 +	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
-	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o
D4 +	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o
-	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o
D6 +	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o
-	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	x	x	x	x	o	o	o	o	o	o	o	o

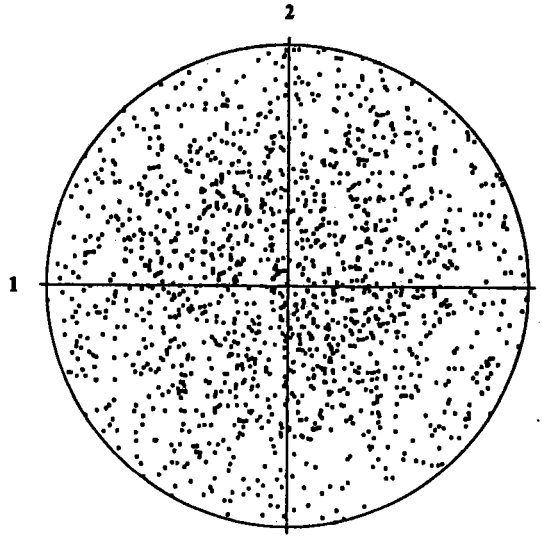
x - interactions fortes o - interactions faibles

PLANS : (111) ; A : ($\bar{1}$ 11) ; B : (111) ; C : ($\bar{1}$ $\bar{1}$ 1) ; D : (1 $\bar{1}$ 1)

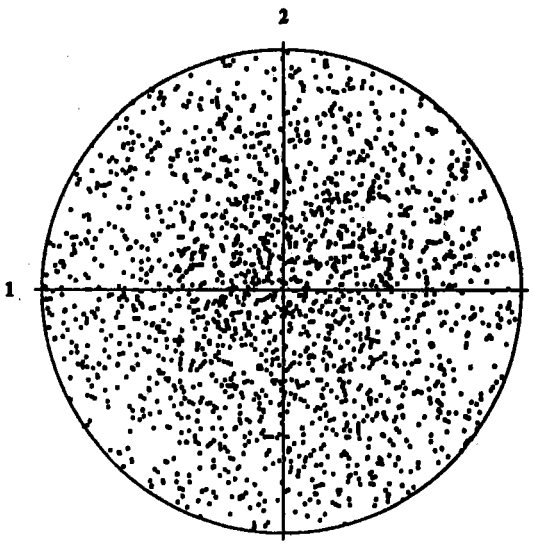
DIRECTIONS < 011>

1 : ± <011> ; 2 : ± <0 $\bar{1}$ 1> ; 3 : ± <101> ; 4 : ± < $\bar{1}$ 01> ; 5 : ± < $\bar{1}$ 10> ; 6 : ± <110>

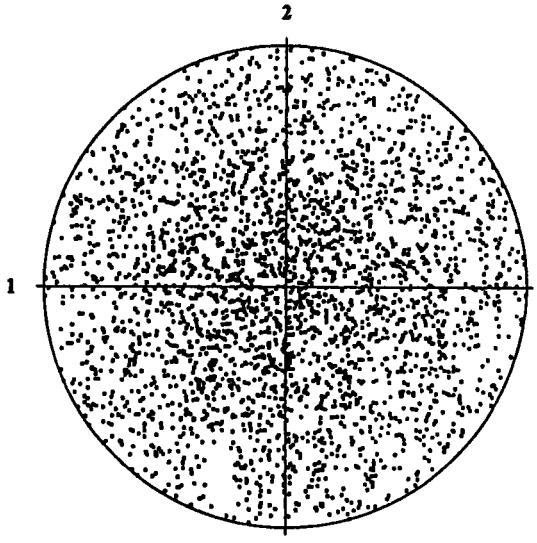
Tableau VII.2 : - Systèmes de glissements et matrice d'écrouissage pour les métaux CFC



Poles 200



Poles 111



Poles 110

FIGURE VII.2 - Figures des pôles pour un fichier de 500 triplets d'angles φ_1, ϕ, φ_2 aléatoire.

VII.2.2 - Comportement élastoplastique global

VII.2.2.1 - Chargements monotones

La figure VII.3 présente les résultats obtenus pour des chargements en traction simple pour différentes formes de grains initiales caractérisées par les paramètres de formes a, b, c. Dans tous les cas, l'axe de traction est parallèle à l'axe c des grains.

Pour des grains de forme sphérique, on retrouve bien l'allure expérimentale de la courbe de traction [81] :

- un régime à allure parabolique jusque vers 2% de déformation plastique
- un stade quasi-linéaire de pente voisine de E/100 où E est le module d'Young du polycristal.

Pour les grains initialement non équiaxes, on observe par rapport à la courbe concernant les grains sphériques, un durcissement ou adoucissement correspondant à des contraintes internes différentes selon la forme des grains.

La figure VII.4 décrit l'évolution des modules tangents effectifs du polycristal en fonction de la déformation plastique macroscopique. Concernant les modules de cisaillements élastoplastiques, on constate comme prévu une décroissance rapide entre 0 et 1% suivie d'une évolution lente autour de $\mu/100$. Ce résultat conforte l'analyse effectuée par Berveiller et Zaoui [17] pour proposer un modèle autocohérent simplifié en introduisant le facteur d'accommodation élastoplastique constant.

La figure VII.5 décrit l'évolution de la limite d'écoulement pour des chargements monotones biaxés, limite définie par l'état de contrainte pour une déformation plastique équivalente au sens de Von Mises (notée E_e) donnée. Comme prévu, on observe une surface de plasticité initiale correspondant au critère de Tresca, surface qui évolue, avec le seuil utilisé pour définir la limite élastique, vers le critère de Von Mises (E_e = 0,02% à 0,2%). Ce résultat est dû également aux contraintes internes intragranulaires puisqu'il est pratiquement indépendant de l'écrouissage intracristallin. Pour les déformations plastiques envisagées jusqu'ici (Ee ~ 10%), les évolutions de l'état interne du matériau ne concernent pratiquement que les contraintes internes et l'écrouissage (anisotrope) intracristallin. L'effet de la texture induite est peu sensible. Par contre, pour des déformations plastiques plus importantes, cet effet s'ajoute aux précédents et a pour principal résultat d'induire une anisotropie mécanique prononcée observable directement lors de chargements séquentiels.

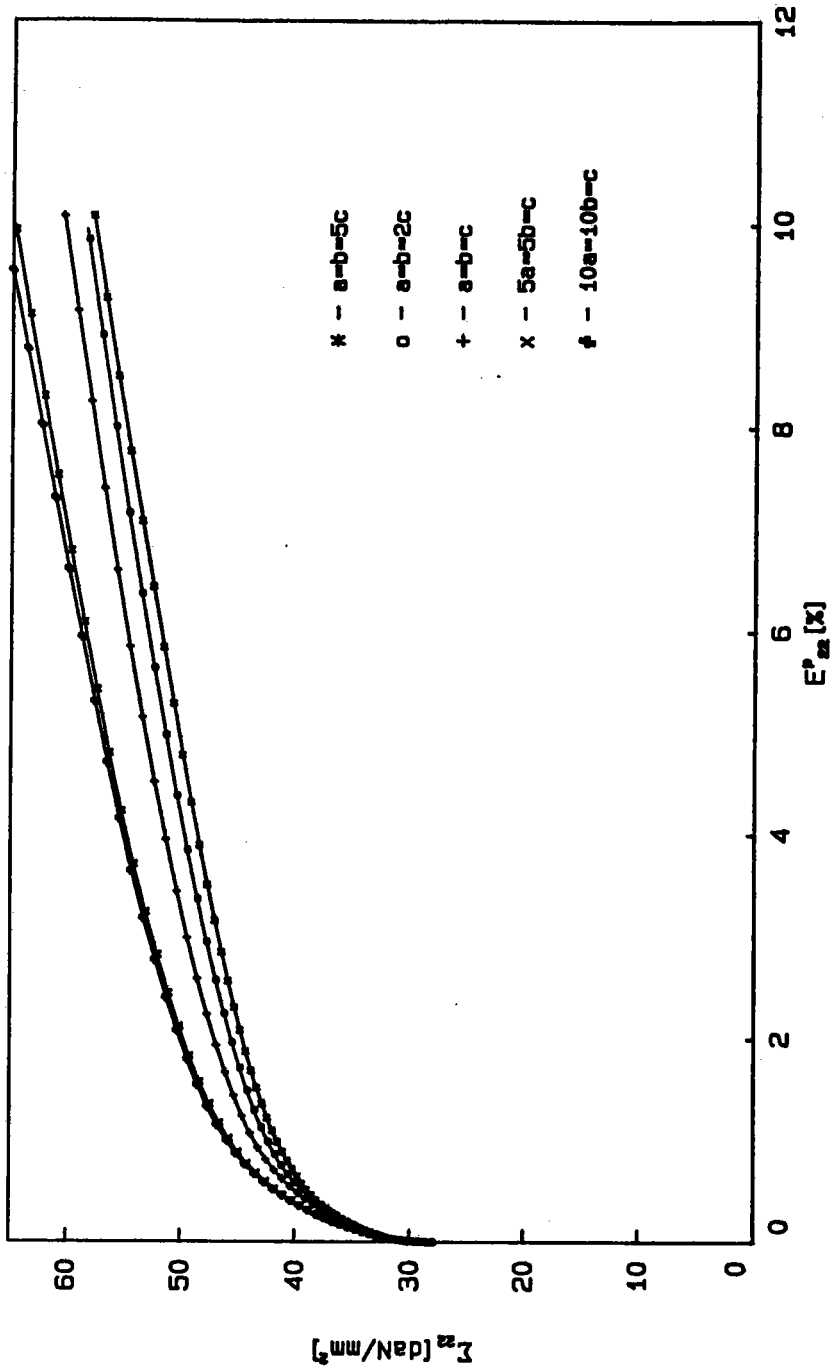


FIGURE VII.3 - Courbes d'écrouissage en traction simple du polycristal CFC à texture cristallographique initiale isotrope. Les différentes courbes correspondent à des textures morphologiques initiales différentes.

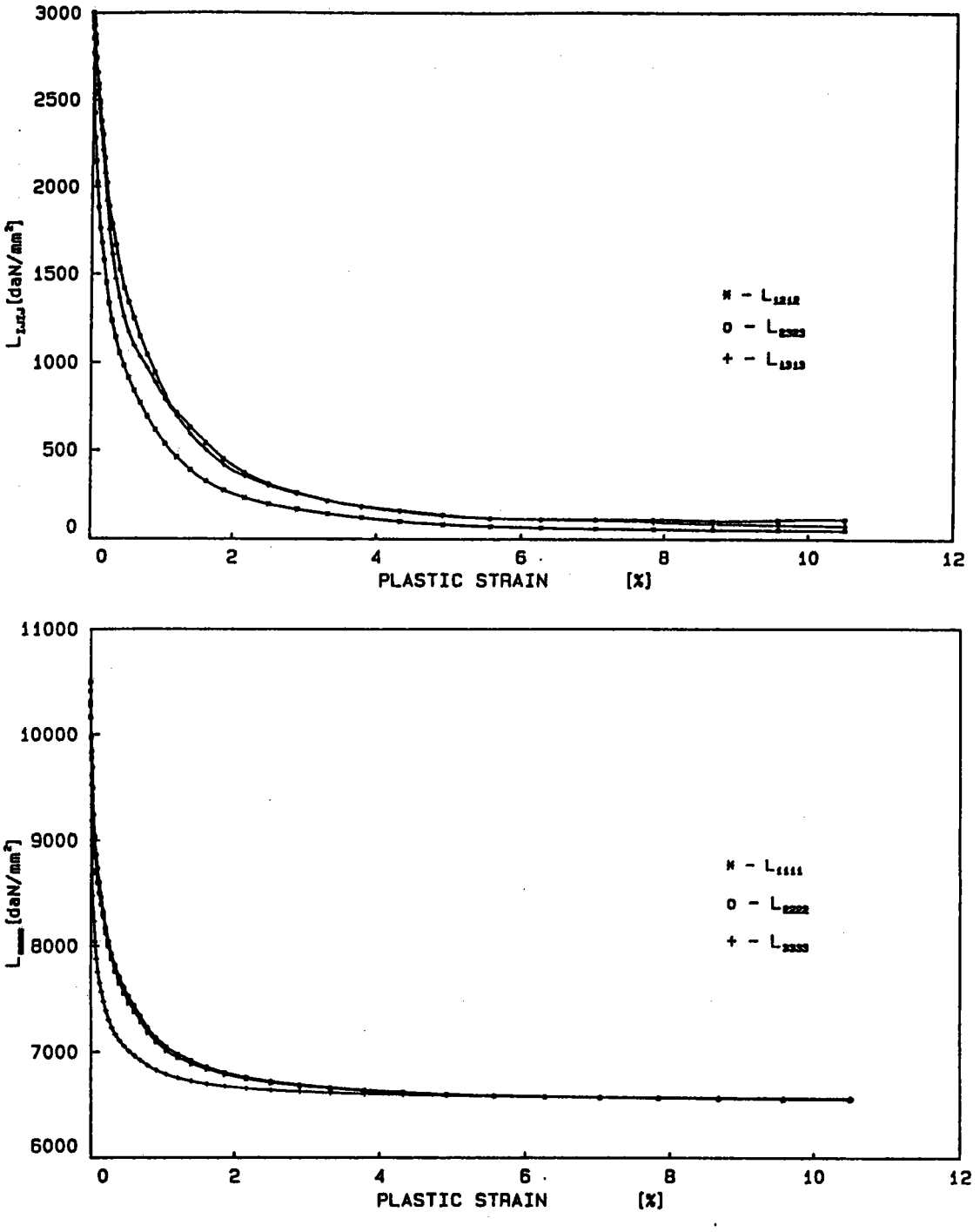


FIGURE VII.4 - Evolution des modules tangents effectifs du polycristal en fonction de la déformation plastique macroscopique.

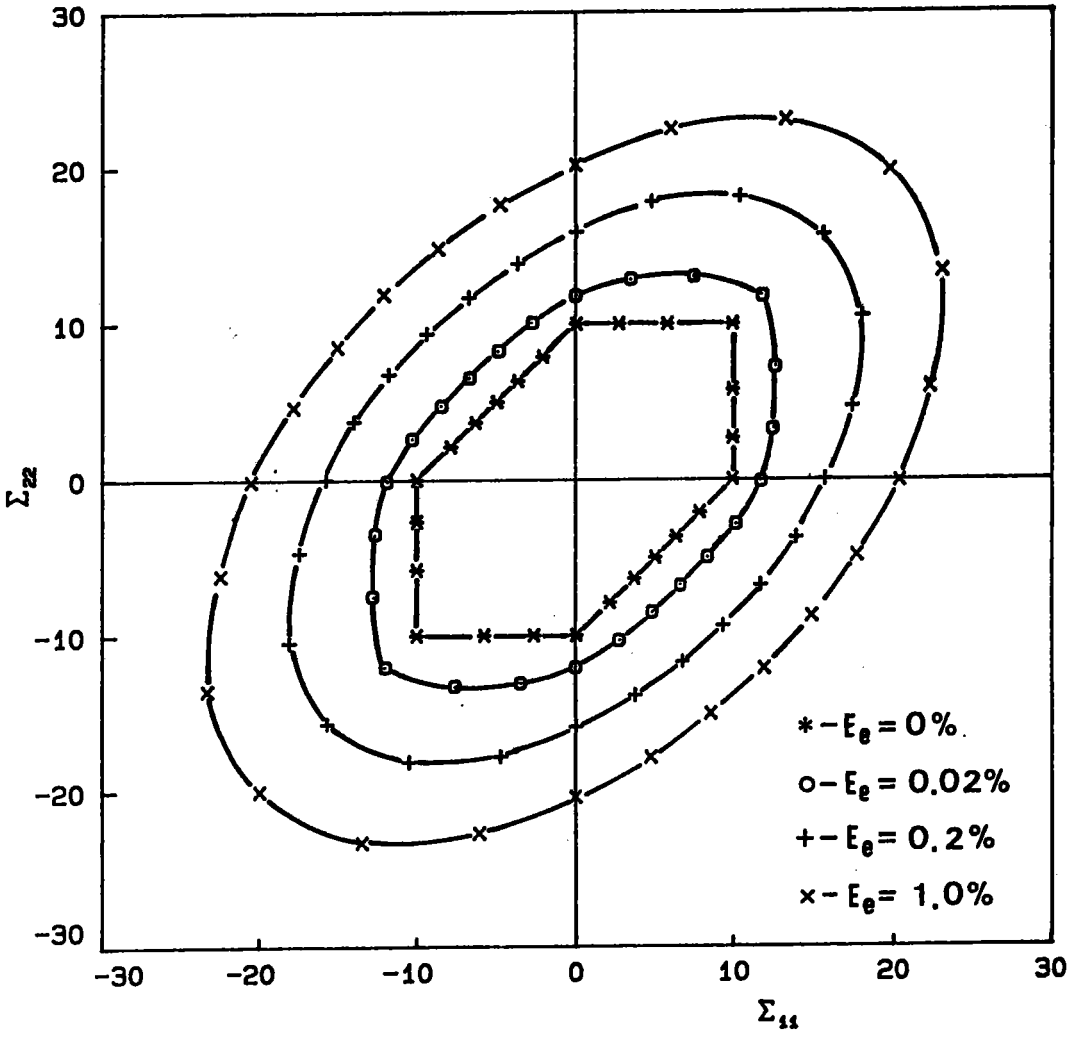


FIGURE VII.5 - Surfaces de plasticité initiales dans un sous-espace de contraintes Σ_{11}- Σ_{22} en fonction de la définition du seuil d'écoulement plastique.

VII.2.2.2 - Chargements séquentiels

La figure VII.6 décrit l'évolution des surfaces d'écoulement plastique, toujours définies par l'état de contrainte biaxé associée à une déformation plastique équivalente (donnée), après un préchargement de traction dans la direction (1) de 0,5%.

On constate un effet très sensible du seuil choisi sur la forme de la surface d'écoulement. En particulier, le taux d'écrouissage est nettement supérieur dans des directions de chargement non parallèles au préchargement par rapport aux valeurs observées dans la direction du préchargement.

Cet effet est dû aux contraintes résiduelles intragranulaires créées par la prédéformation. Le champ des contraintes résiduelles peut être profondément modifié pour des déformations plastiques de l'ordre de grandeur des déformations élastiques. C'est ce qui se passe lorsque $0\% < E_{VM} < 0{,}2\%$.

Pour les résultats suivants, nous avons reporté l'évolution des surfaces de plasticité définies par une déformation plastique équivalente de 0,2%, évolution associée à l'intensité et à la nature du préchargement.

La figure VII.7 concerne un préchargement de traction dans la direction (1), les surfaces correspondant à une prédéformation de 1%, 10%, 20%, 60%.

Les figures VII.8 et VII.9 correspondent aux mêmes prédéformations mais les trajets de chargements diffèrent :

- chargement équibiaxé ($\Sigma_1 = \Sigma_2$) pour la figure VII.8
- chargement en traction compression ($\Sigma_1 > 0$, $\Sigma_2 = -\Sigma_1$) sur la figure VII.9.

Pour les figures VII.10 et VII.11, l'espace de chargement correspond à une sollicitation en traction-torsion. La figure VII.10 décrit l'évolution de la surface de plasticité pour un préchargement en traction alors que dans le cas de la figure VII.11 le préchargement correspond à la torsion.

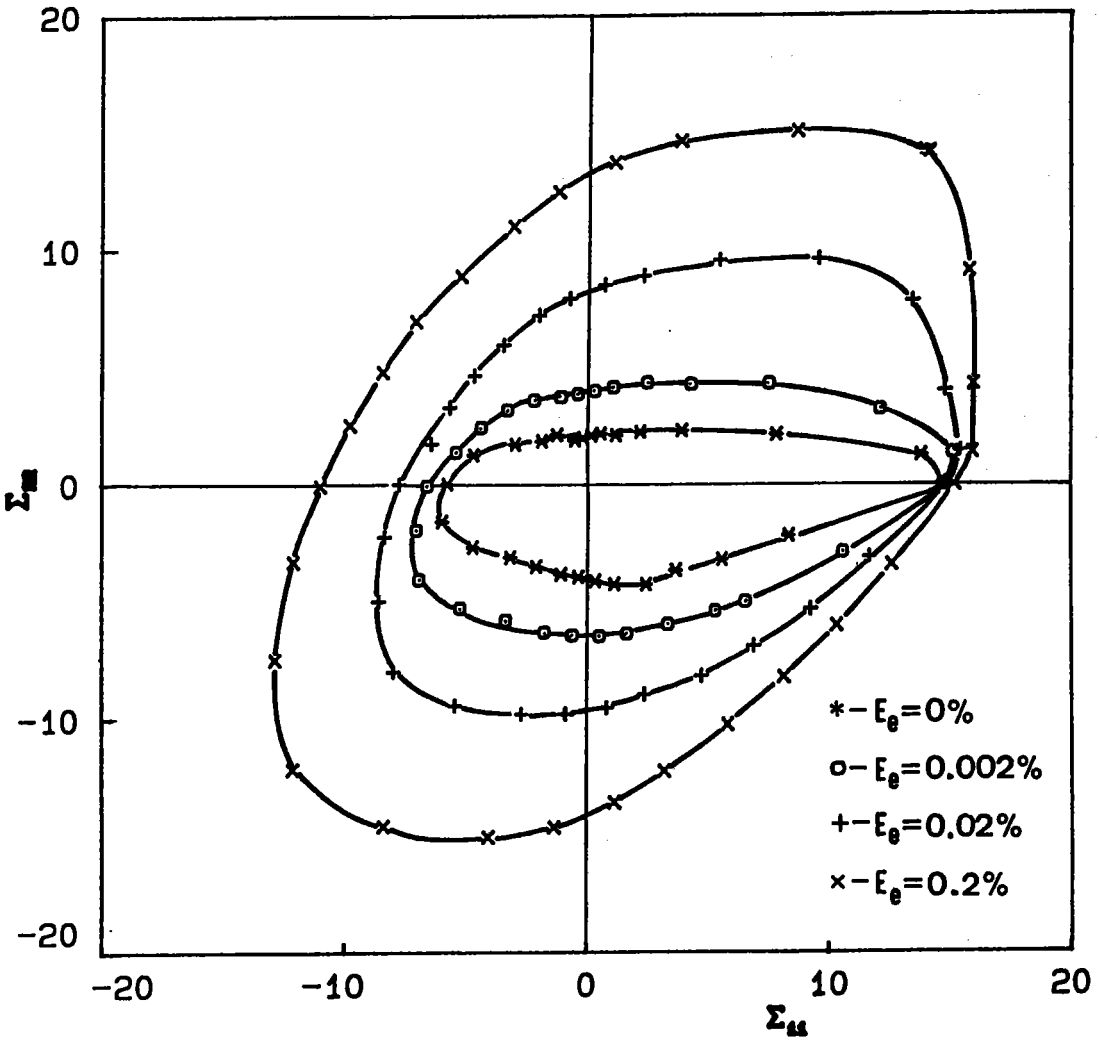


FIGURE VII.6 - Evolution de la surface de plasticité avec le seuil d'écoulement choisi pour un polycristal prédéformé en traction simple dans la direction 1.

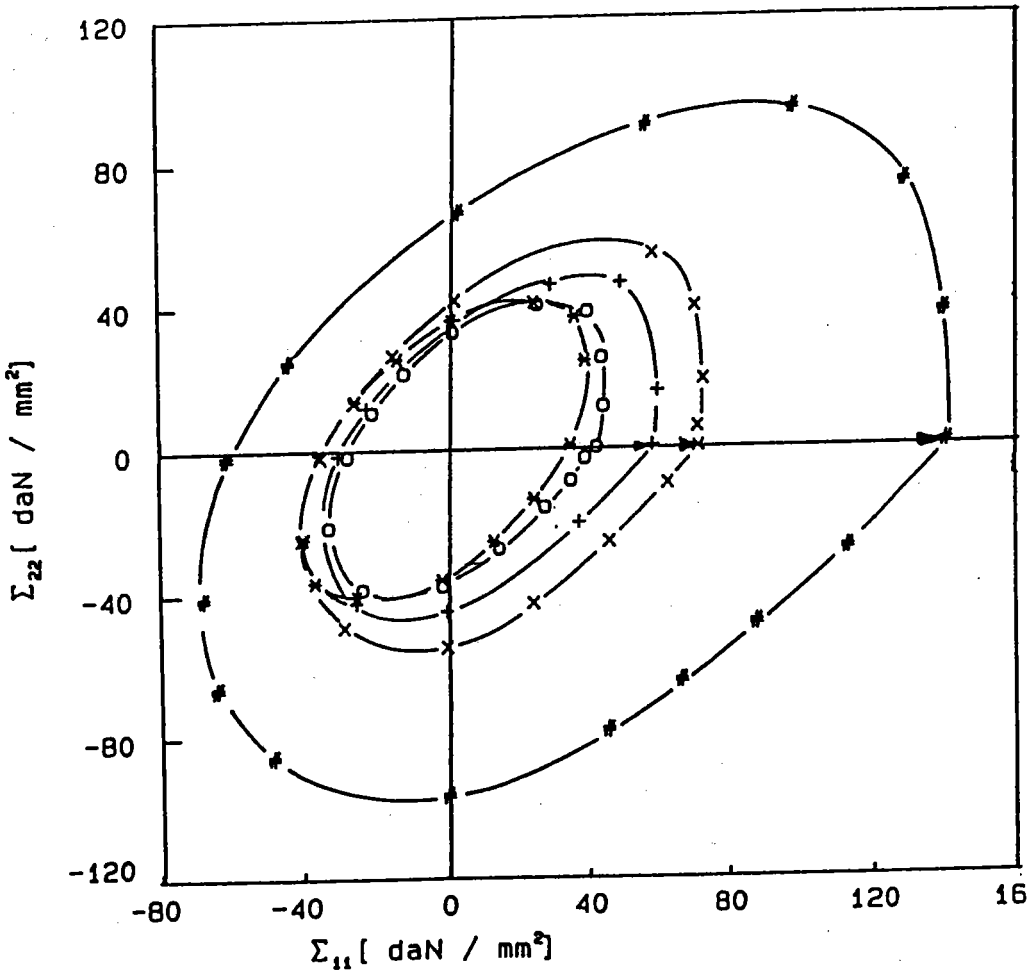


FIGURE VII.7 - Evolution de la surface de plasticité (définie pour un seuil égal à 0,2 %) en fonction de l'amplitude de la prédéformation en traction (0%, 1%, 10%, 20%, 60%).

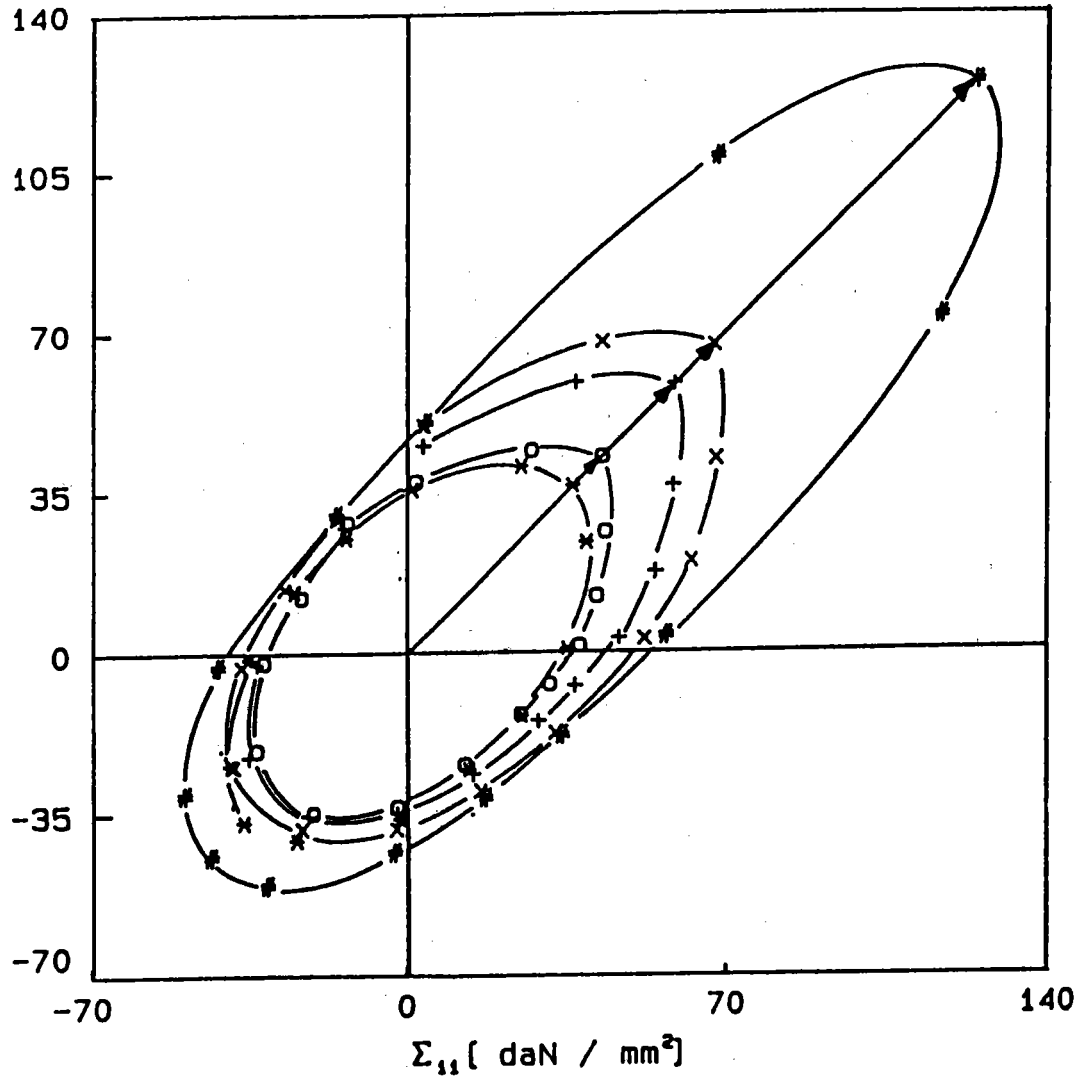


FIGURE VII.8 - Evolution des surfaces de plasticité après un préécrouissage en traction équibiaxée d'amplitude variable (0%, 1%, 2%, 20%, 60%).

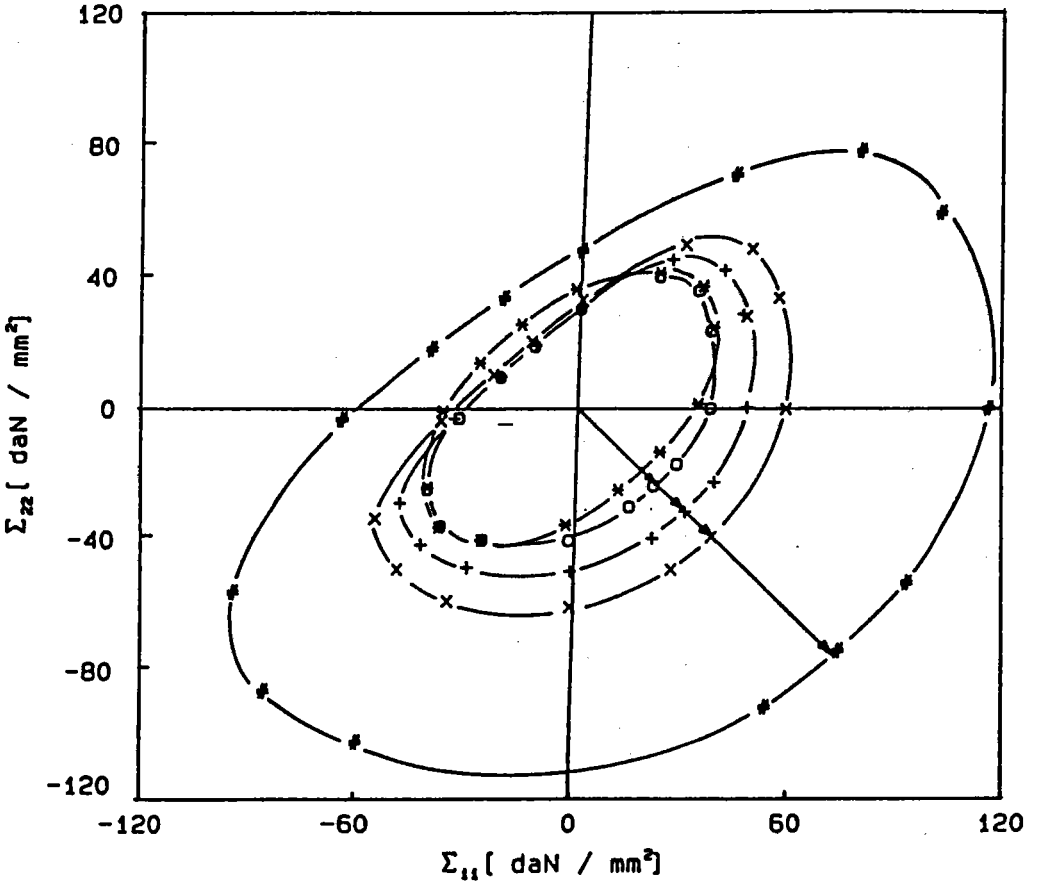


FIGURE VII.9 - Evolution des surfaces de plasticité après un préécrouissage en traction-compression d'amplitude variable (0%, 1%, 2%, 20%, 60%).

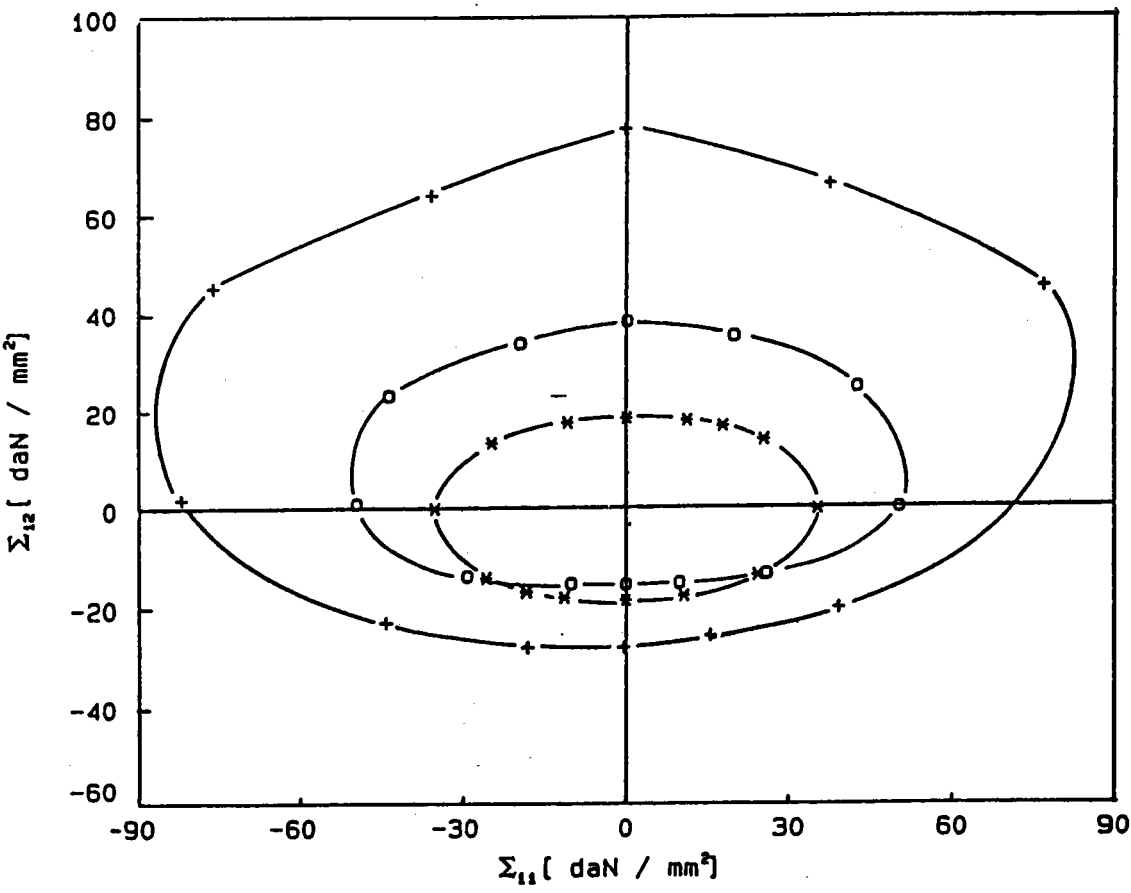


FIGURE VII.10 - Evolution des surfaces de plasticité en traction-torsion après une prédéformation en traction de 0%, 20% et 60%.

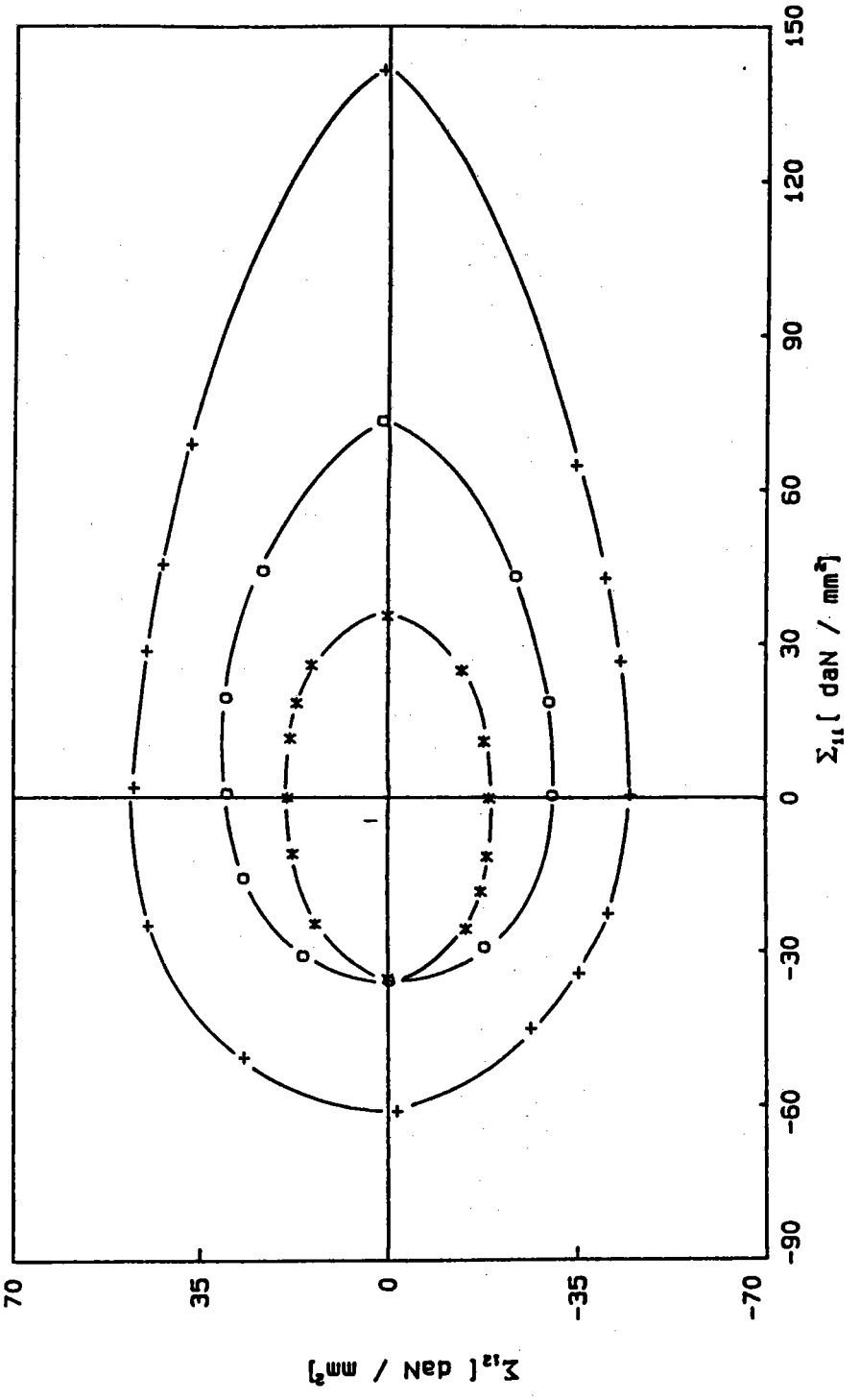


FIGURE VII.11 - Evolution des surfaces de plasticité en traction-torsion après une prédéformation en torsion de 0%, 20% et 60%.

Globalement, les évolutions calculées des surfaces d'écoulement présentent les différentes caractéristiques observées expérimentalement :

a) formation d'un point conique plus ou moins prononcé dans la direction de chargement selon la nature du trajet. Ce point conique est pratiquement absent dans le cas d'un chargement en traction-compression. Il est relativement prononcé dans le cas d'un chargement en traction (Figure VII.7), en torsion (Figure VII.10) et pour un chargement équibiaxé (Figure VII.8).

b) Concernant la forme moyenne des surfaces d'écoulement, on constate trois grandes tendances :

- pour des chargements équibiaxés, l'écrouissage est très prononcé dans la direction de chargement et faible dans toutes les autres directions
- pour les chargements en traction et en torsion, l'écrouissage est relativement isotrope
- pour un chargement de traction-compression (Figure VII.9), l'écrouissage est pratiquement identique dans toute direction, faisant un angle compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ par rapport à la direction de chargement. Pour les autres directions, l'écrouissage est faible.

c) Dans tous les cas, on constate l'existence d'un effet Bauschinger dont l'évolution est complexe au début du chargement pour des petites prédéformations.

Pour des préchargements plus intenses, le seuil d'écoulement dans la direction opposée au préchargement augmente également (valeur absolue), mais moins rapidement que le seuil dans la direction de chargement.

Toutes ces évolutions sont conformes aux observations expérimentales de Shiratori et al. [90], Bui [91] et les autres données de la littérature.

La figure VII.12 décrit l'évolution des modules tangents élastoplastiques effectifs pour les chargements séquentiels suivants :

- traction dans la direction 1 jusqu'à une déformation plastique de 0,4%
- traction dans la direction 2.

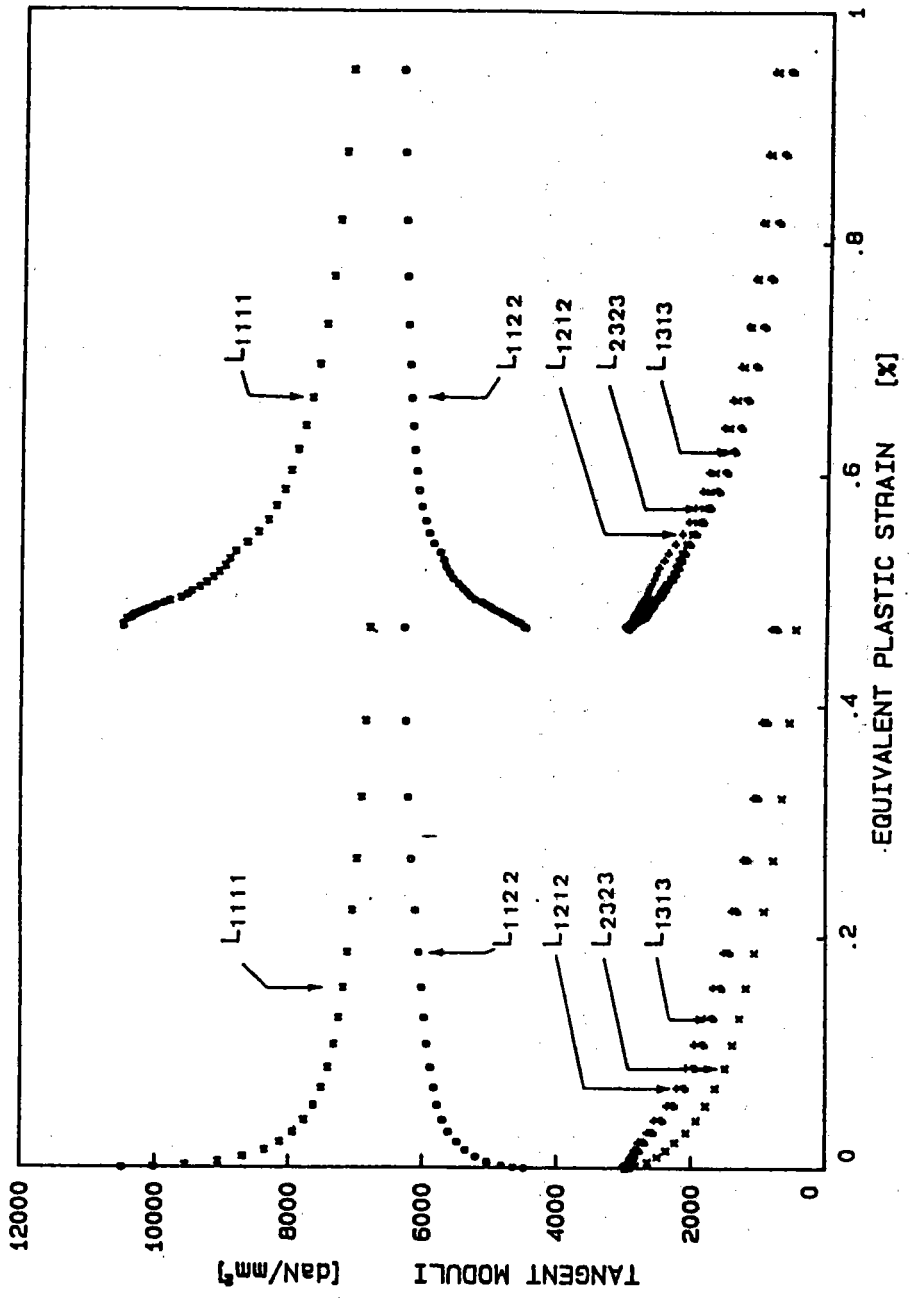


FIGURE VII.12 - Evolution des modules tangents élastoplastiques pour un chargement séquentiel :

- traction simple jusqu'à 0,4% dans la direction 1
- décharge
- traction simple dans la direction 2.

Les modules sont toujours exprimés dans le même repère du matériau. Pour des prédéformations aussi faibles, les modules élastoplastiques ne diffèrent qu'au tout premier stade de l'écoulement plastique (effet des contraintes internes).

Toutes les modifications du comportement élastoplastique macroscopique résultent de l'évolution de l'état interne du matériau. Dans le paragraphe suivant, les modifications de l'état du réseau cristallin (contraintes internes, orientations cristallographiques) sont décrites pour plusieurs trajets de chargement.

VII.2.3 - Evolution de la structure interne

VII.2.3.1 - Evolutions des contraintes internes intragranulaires ou contraintes du second ordre. Energie bloquée

La configuration de référence choisie coïncidant avec la configuration actuelle, les contraintes nominales locales ou macroscopiques coïncident avec les contraintes de Cauchy correspondantes.

Par contre, du fait des contraintes internes associées aux incompatibilités de la déformation plastique et à l'hétérogénéité élastique, les contraintes locales sont différentes des contraintes macroscopiques.

Ainsi, lors d'une décharge complète après un trajet de chargement ayant conduit à des déformations plastiques, il subsiste un champ de contraintes internes $\sigma_{ij}(r)$ en équilibre ($\sigma_{ij,j} = 0$ dans V) appelées contraintes résiduelles.

Pour déterminer ce champ de contraintes résiduelles, il est nécessaire d'envisager un écoulement plastique éventuel lors de la décharge, associé précisément aux contraintes résiduelles. Puisque la formulation proposée est applicable à n'importe quel trajet de chargement, le calcul des contraintes résiduelles se ramène au calcul des contraintes locales pour un cycle

$$\Pi = 0 \Rightarrow \Pi \text{ donné} \Rightarrow \Pi = 0 \text{ (voir également la figure IV.1)}$$

Dans le cas où il n'y a pas d'écoulement plastique à la décharge et pour un polycristal dont les grains ont un comportement élastique isotrope, le champ (constant par morceaux) des contraintes résiduelles s'écrit :

$$\text{(VII-1)} \qquad \left(\pi^I_{ij}\right)_{\Sigma=0} = \left(\pi^I_{ij}\right)_{\Sigma} - \Pi_{ij}$$

Comme on le verra dans les applications, ces contraintes résiduelles sont loin d'être négligeables et correspondent, pour un polycristal monophasé CFC, à environ un tiers des contraintes appliquées.

Par ailleurs, pour un matériau plus hétérogène, elles sont nettement plus importantes [84].

Dans les bilans énergétiques du processus de déformation plastique, une partie du travail de déformation plastique W_a est transformée en énergie bloquée U_b^σ dans le polycristal sous forme de contraintes internes du second ordre. Une autre partie (bloquée également) U_b^d est associée à l'augmentation de la densité de dislocations (dislocations "statistiques" associées à l'écrouissage intragranulaire). La partie complémentaire Q est dissipée.

D'après le premier principe, on a :

$$(VII\text{-}2) \qquad Wa = Q + \left(U_b^\sigma + U_b^d\right)$$

On définit alors la fraction d'énergie bloquée F par le rapport :

$$(VII\text{-}3) \qquad F = \frac{U_b^\sigma + U_b^d}{Wa}$$

dont la mesure peut être effectuée par différentes méthodes [92] [93] [94].

Le terme U_b^d contient également une part d'énergie associée aux contraintes internes du 3ème ordre.

De nombreux modèles [95] [96] ont été proposés pour évaluer le terme U_b^d à partir de la densité de dislocations et de leur répartition. Si on reprend le modèle de Bailey et Hirsch [95] et qu'on l'adapte à la situation de glissement multiple qui prédomine dans le polycristal, on constate [96] que le terme U_b^σ reste prédominant par rapport au terme U_b^d.

Dans ce qui suit, nous négligeons la contribution de U_b^d à l'énergie bloquée et nous admettons par conséquent que :

$$(VII\text{-}4) \qquad F \equiv \frac{U_b^\sigma}{W_a}$$

Le terme U_b^σ s'obtient alors, pour un cycle charge-décharge conduisant à une déformation plastique donnée E^p par l'intégrale :

$$(VII\text{-}5) \qquad U_b^\sigma = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}\, e_{ij}^e \, dV$$

soit sous forme de la somme (pour un volume unité) :

$$(VII\text{-}6) \qquad U_b^\sigma = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{N} f^I \, \sigma_{ij}^I \, e_{ij}^{eI}$$

Le travail fourni W_a s'obtient à partir de :

$$(VII\text{-}7) \qquad W_a = \int_0^t \Sigma_{ij}\, D_{ij}^p \, dt$$

L'examen des prévisions des modèles concernant l'énergie bloquée par une déformation plastique doit permettre, par comparaison avec les mesures expérimentales, de valider les bases théoriques. Ceci nous semble particulièrement important en ce qui concerne l'énergie élastique bloquée et les contraintes résiduelles.

Contraintes internes résiduelles

Pour un trajet de chargement qui engendre des déformations plastiques, l'état de contrainte dans les grains n'est pas identique à la contrainte macroscopique appliquée du fait des incompatibilités de la déformation plastique. Ici, nous calculons les contraintes résiduelles après un chargement donné et après décharge (élastique ou élastoplastique).

La figure VII.13 présente pour six grains d'orientation initiale repérés par les lettres A, B, C, D, E, F, l'évolution des contraintes résiduelles (composantes σ_{11}, σ_{22} et σ_{33}) en fonction de l'amplitude de la déformation plastique selon l'axe de traction (3).

On constate une évolution rapide jusque vers 3% de déformation macroscopique suivie d'une progression plus lente au-delà de 3%. En même temps, certains grains ont des contraintes résiduelles négatives alors que d'autres composantes sont positives, conformément aux relations d'équilibre

$$\sum_I f^I \sigma_{ij}^I = 0.$$

Par rapport à la limite d'écoulement macroscopique, ces contraintes correspondent globalement à 30% de la limite d'écoulement, ce qui est significatif.

La distribution des contraintes résiduelles dans l'espace des orientations cristallographiques n'est pas aléatoire. En effet, la figure VII.14 représente l'évolution des orientations cristallographiques des grains en fonction de l'amplitude de la déformation plastique de traction imposée au polycristal.

En même temps, chaque chiffre repérant l'orientation d'un grain décrit selon la grille indiquée sur la figure, l'intensité de la composante σ_{33} (3 = axe de traction) des contraintes résiduelles. On observe que les grains dont l'orientation de l'axe (111) tend à être parallèle à l'axe de traction sont soumis à des contraintes résiduelles positives, alors que pour ceux dont l'axe (100) se rapproche de la direction de traction, la contrainte résiduelle σ_{33} est négative.

Très qualitativement, ce résultat est conforme aux essais sur monocristaux qui présentent un durcissement plus important si leur orientation initiale est parallèle à (111) par rapport à ceux pour lesquels l'axe de traction est proche de (100).

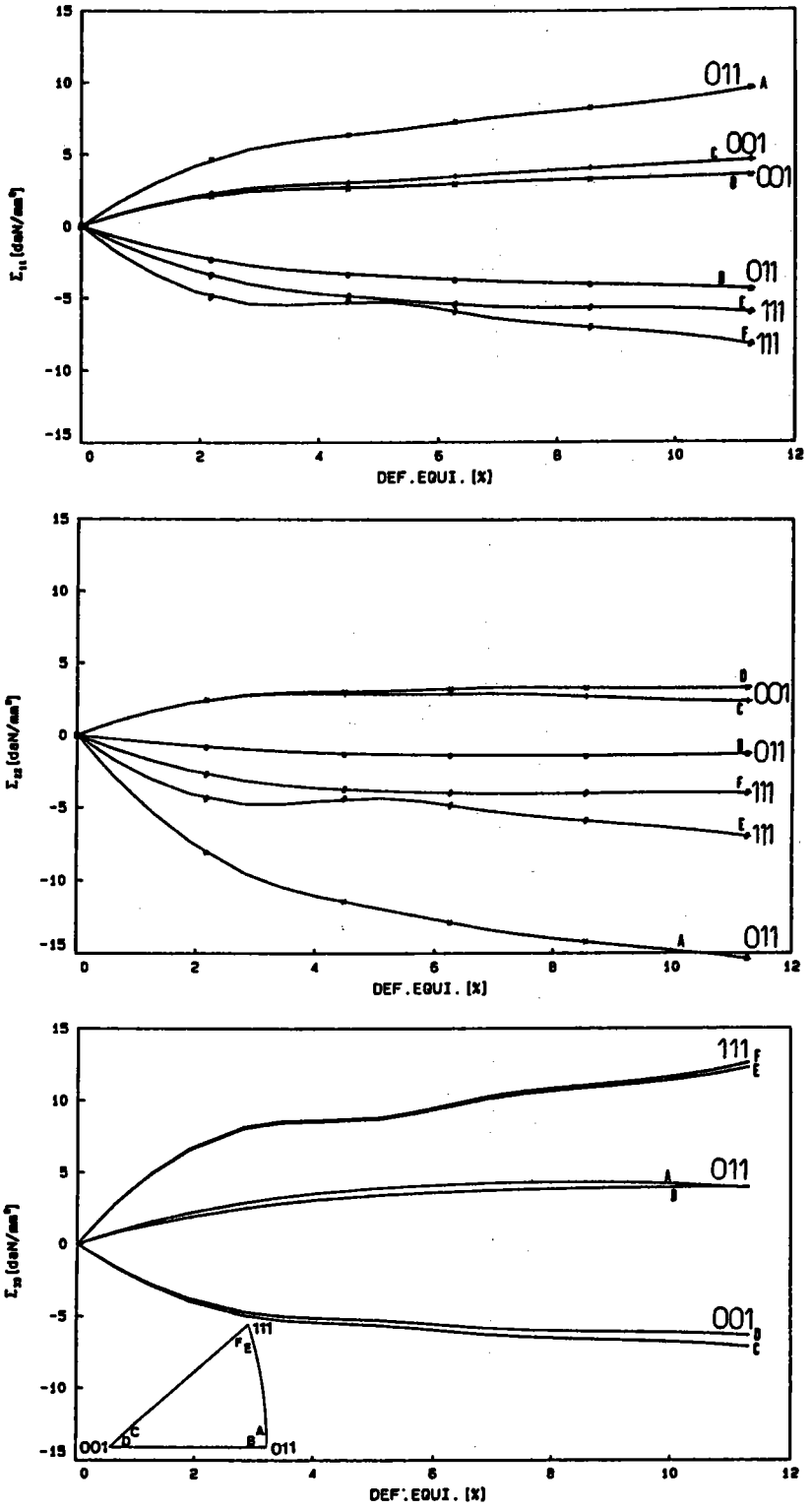
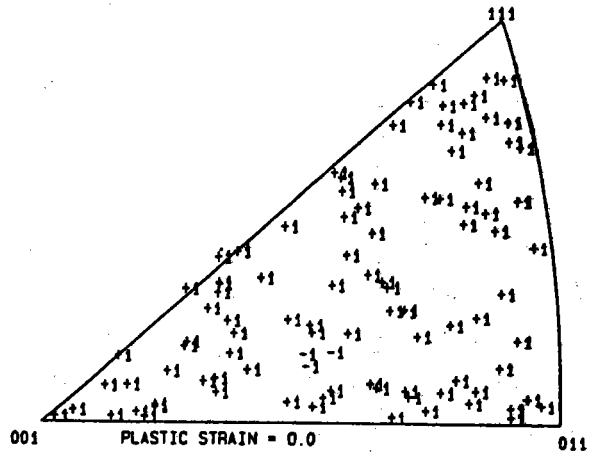
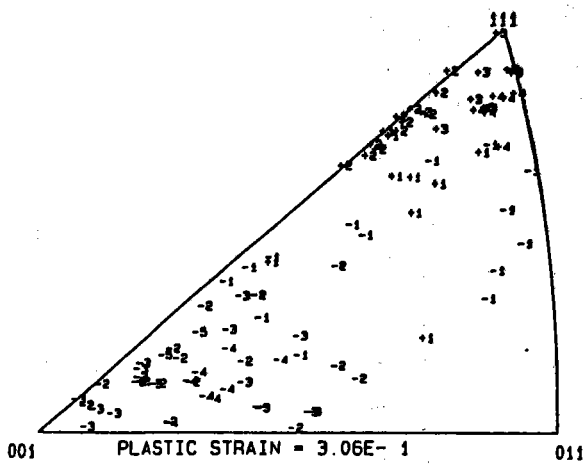


FIGURE VII.13 - Evolution, avec la déformation de traction macroscopique E_{33}, des composantes σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} des contraintes résiduelles dans les grains repérés sur le triangle stéréographiques.





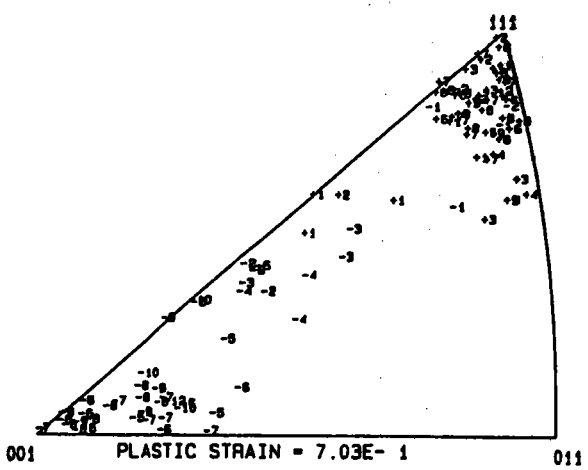


FIGURE VII.14 - Evolution des orientations cristallographiques en traction simple et amplitude des contraintes résiduelles dans chaque grain (composantes parallèles à l'axe de traction)

$$n*5 \le \sigma_{33}\left[daN/mm^2\right] \le (n+1)*5 \quad \text{pour } n \le 0$$

$$(n-1)*5 \le \sigma_{33}\left[daN/mm^2\right] \le n*5 \quad \text{pour } n \ge 0$$

Energie bloquée

Une évaluation plus globale des contraintes internes consiste à calculer l'énergie élastique bloquée U_b^σ qui leur est associée et de la comparer au travail mécanique W_a fourni au solide pour réaliser la déformation inélastique.

La fraction d'énergie bloquée $F = U_b^\sigma / W_a$ sous forme de contraintes résiduelles du second ordre est portée sur la figure VII.15 en fonction de la déformation plastique E^p correspondant à un essai de traction. La courbe $F(E^p)$ croît très rapidement au début de la déformation plastique, passe par un maximum de l'ordre de quelques %, puis décroît progressivement.

Ce type d'évolution est conforme aux observations expérimentales [92], [93], [94].

Pour un chargement séquentiel (traction jusque $E^p = 22\%$ suivie d'une compression), on observe un stockage d'énergie pendant la première phase suivi d'une restitution d'énergie au tout début de l'essai de compression et, à nouveau une croissance de l'énergie élastique bloquée (Figure VII.16). Une telle évolution a également été observée expérimentalement [93].

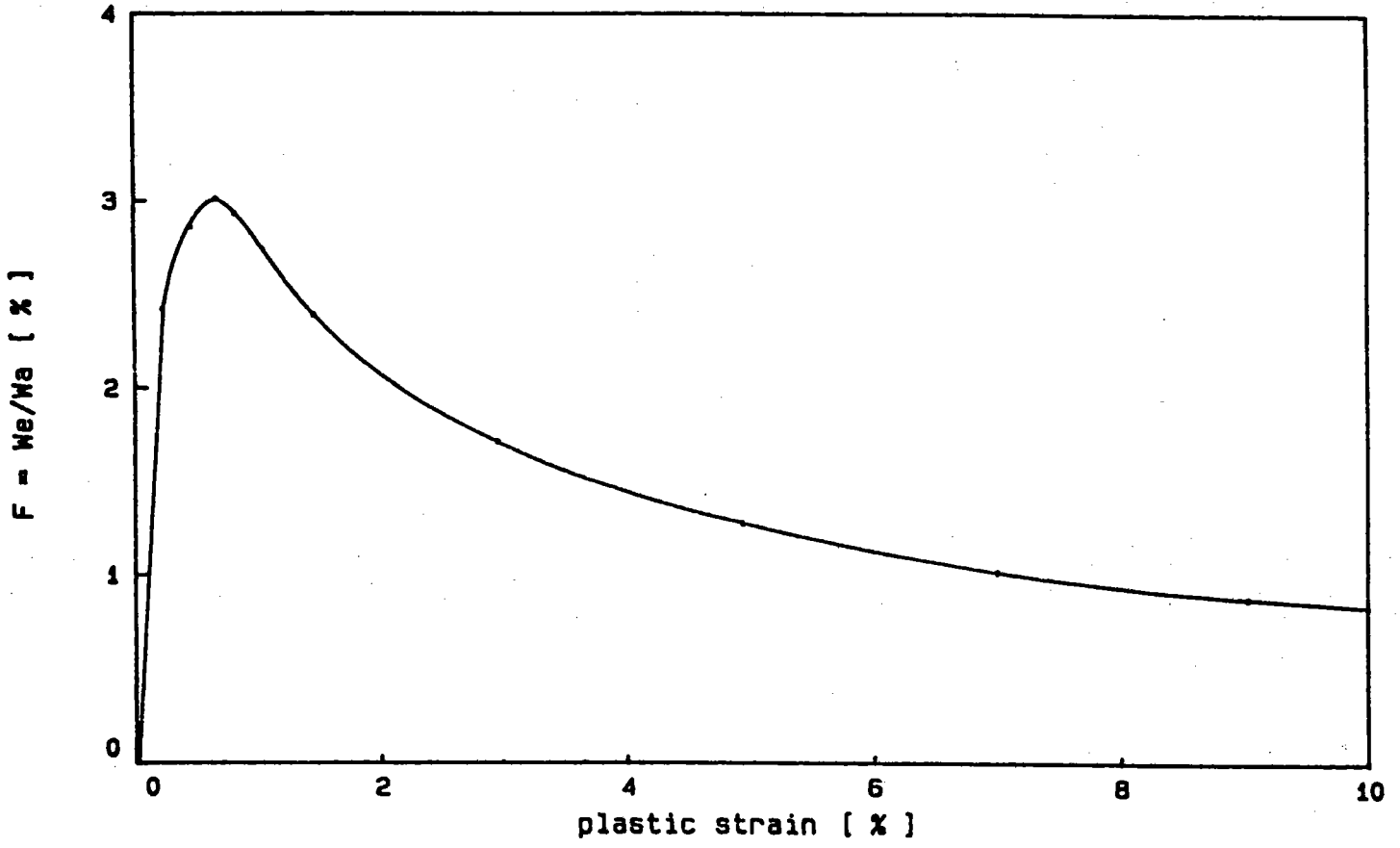


FIGURE VII.15 — Evolution de la fraction d'énergie bloquée en fonction de la déformation plastique pour un chargement radial en traction simple.

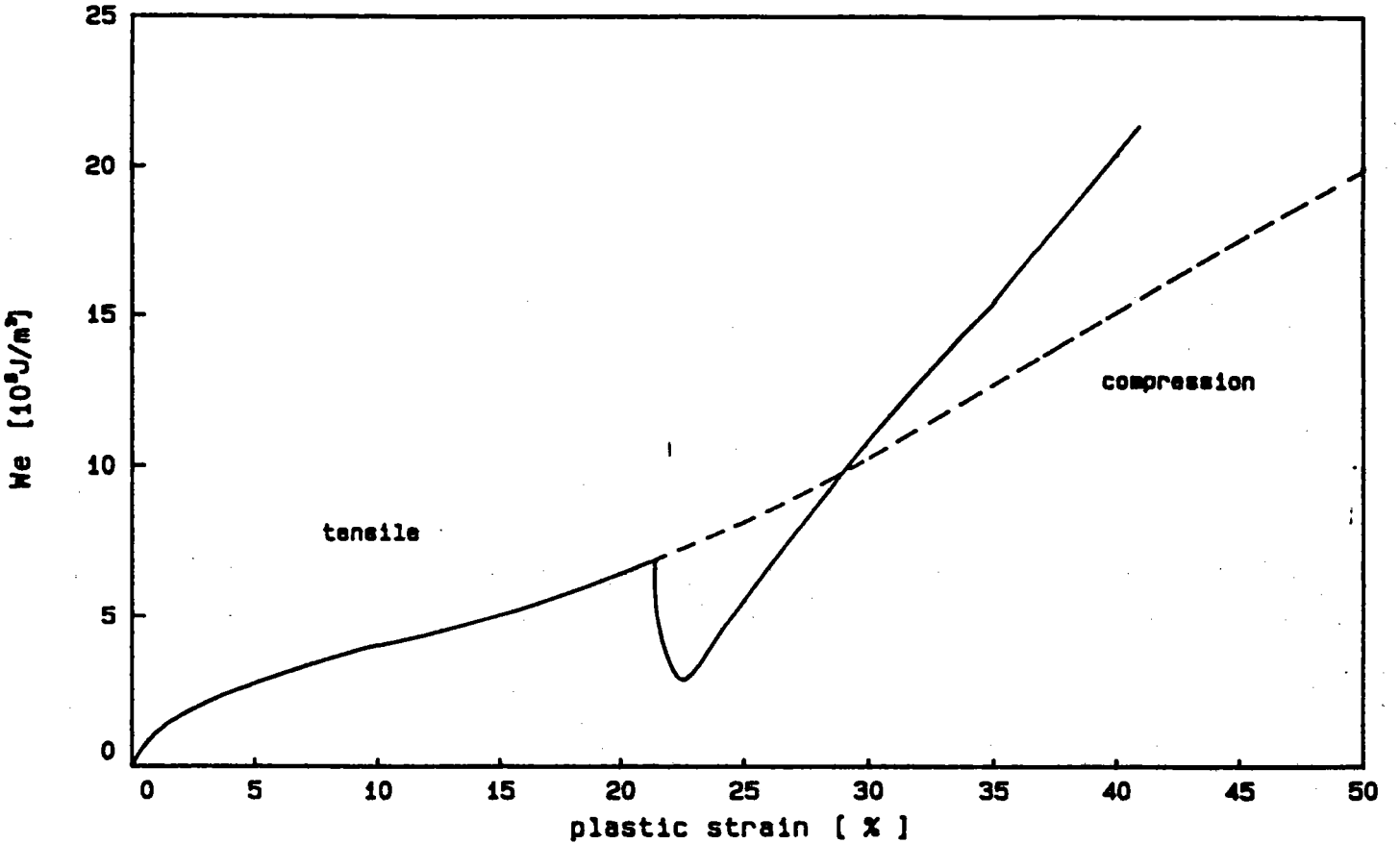


FIGURE VII.16 - Evolution de l'énergie bloquée sous forme de contraintes résiduelles du second ordre pour un chargement séquentiel traction puis compression.

VII.2.3.2 - Textures cristallographiques induites

Il est bien connu que l'évolution des orientations cristallographiques des grains n'est pas aléatoire lors des processus qui induisent une déformation plastique. Cette évolution entraîne la formation de textures de déformation. Ces textures dépendent du trajet de déformation, de la nature du matériau et de la température de l'essai [70] [97] [98].

La figure VII.17 décrit l'évolution des orientations cristallines en fonction de l'amplitude de la déformation de traction imposée au polycristal. L'analyse de ces figures montre que la texture formée est du type <111> + <100> et qu'elle devient plus accentuée lorsque la déformation progresse. Ce résultat correspond bien [97] [98] aux mesures expérimentales effectuées sur des matériaux tels que le cuivre ou l'aluminium.

Pour le cas de la compression, on constate la formation d'une texture de fibre (110) (Figure VII.18), également en accord avec les observations expérimentales pour la classe des matériaux à forte énergie de faute d'empilement.

Pour une déformation en compression plane (simulant le laminage), la représentation utilisée pour décrire les textures correspond à des figures de pôles directes (111), (200) et (220). Les figures VII.19 et VII.20 présentent les résultats calculés et les figures de pôles expérimentales obtenues par Bunge [70]. Là encore, l'accord entre les prévisions théoriques et les mesures expérimentales est plus que satisfaisant.

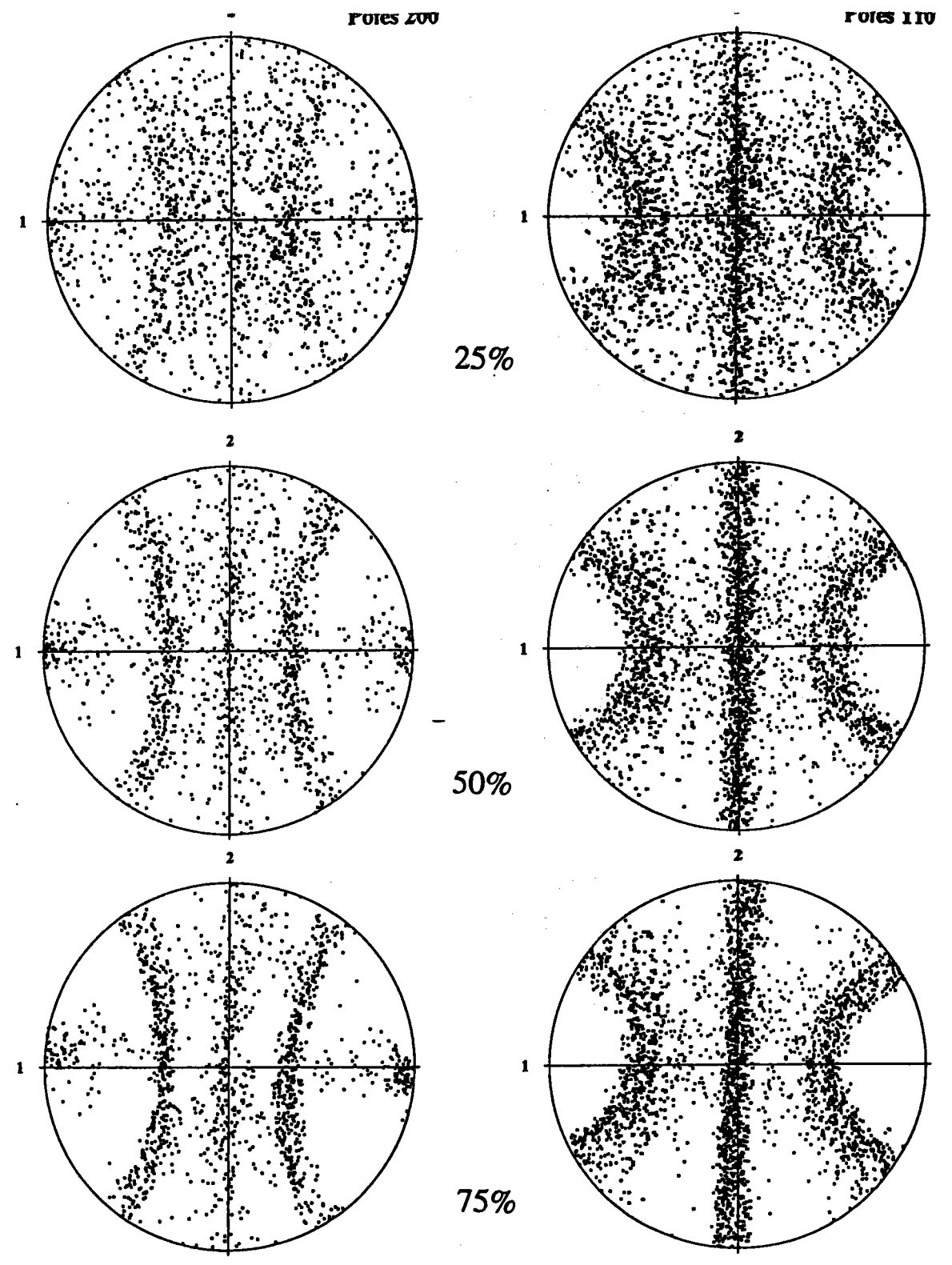


FIGURE VII.17 - Evolution des orientations cristallines en fonction de l'amplitude de la déformation plastique en traction.

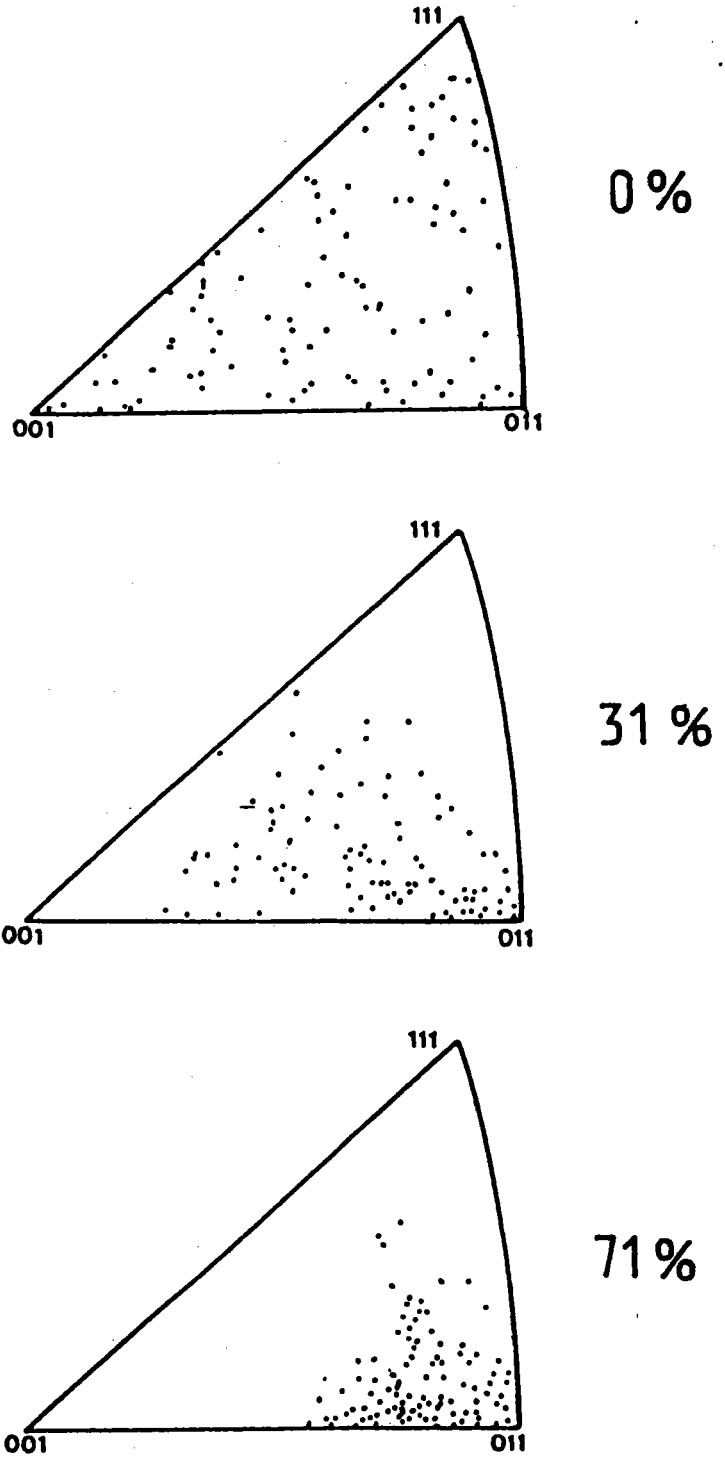


FIGURE VII.18 - Evolution de la texture cristallographique en compression.

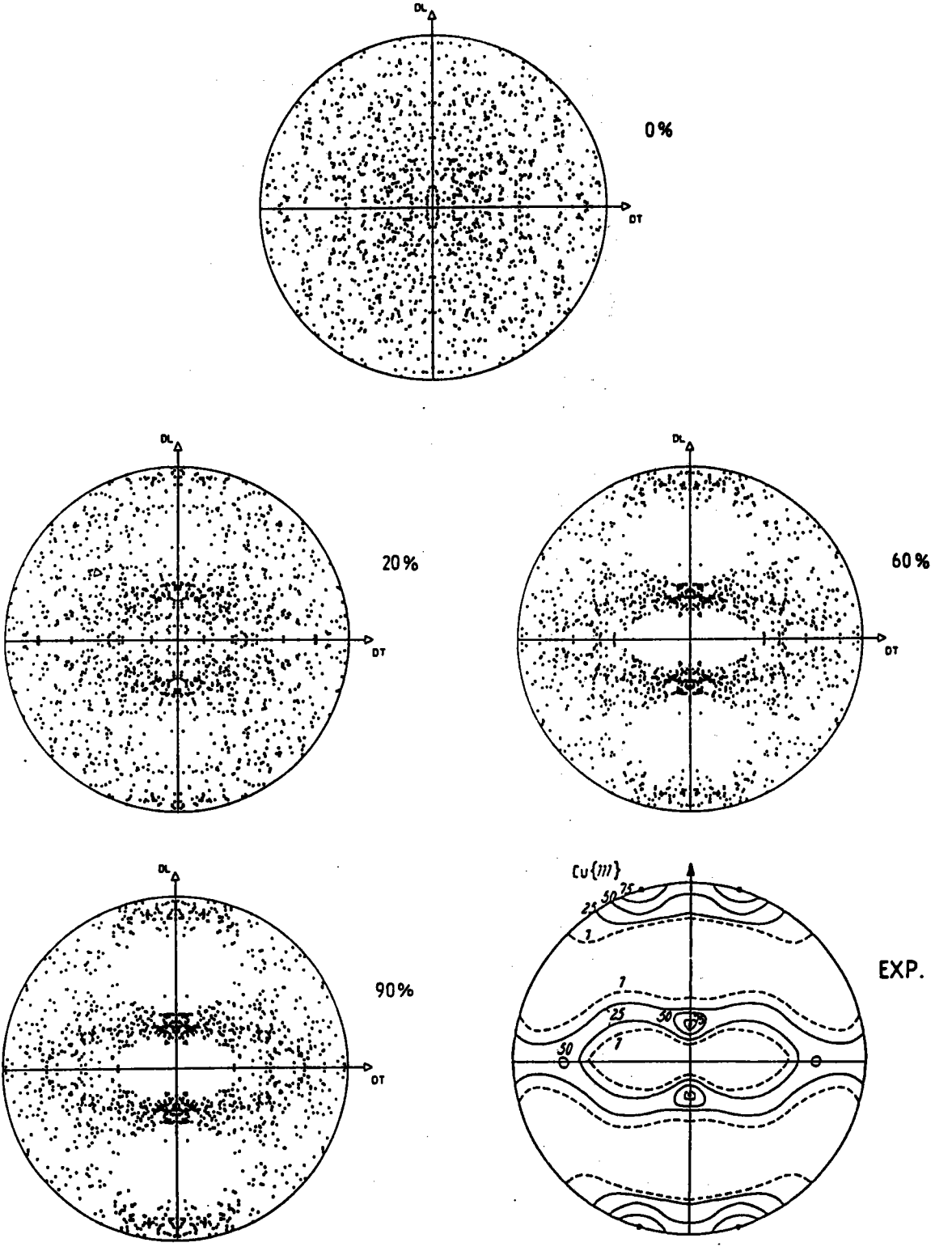


FIGURE VII.19 - Evolution de la texture cristallographique en laminage (figure de pôle 111) et comparaison avec une texture expérimentale de BUNGE [70].

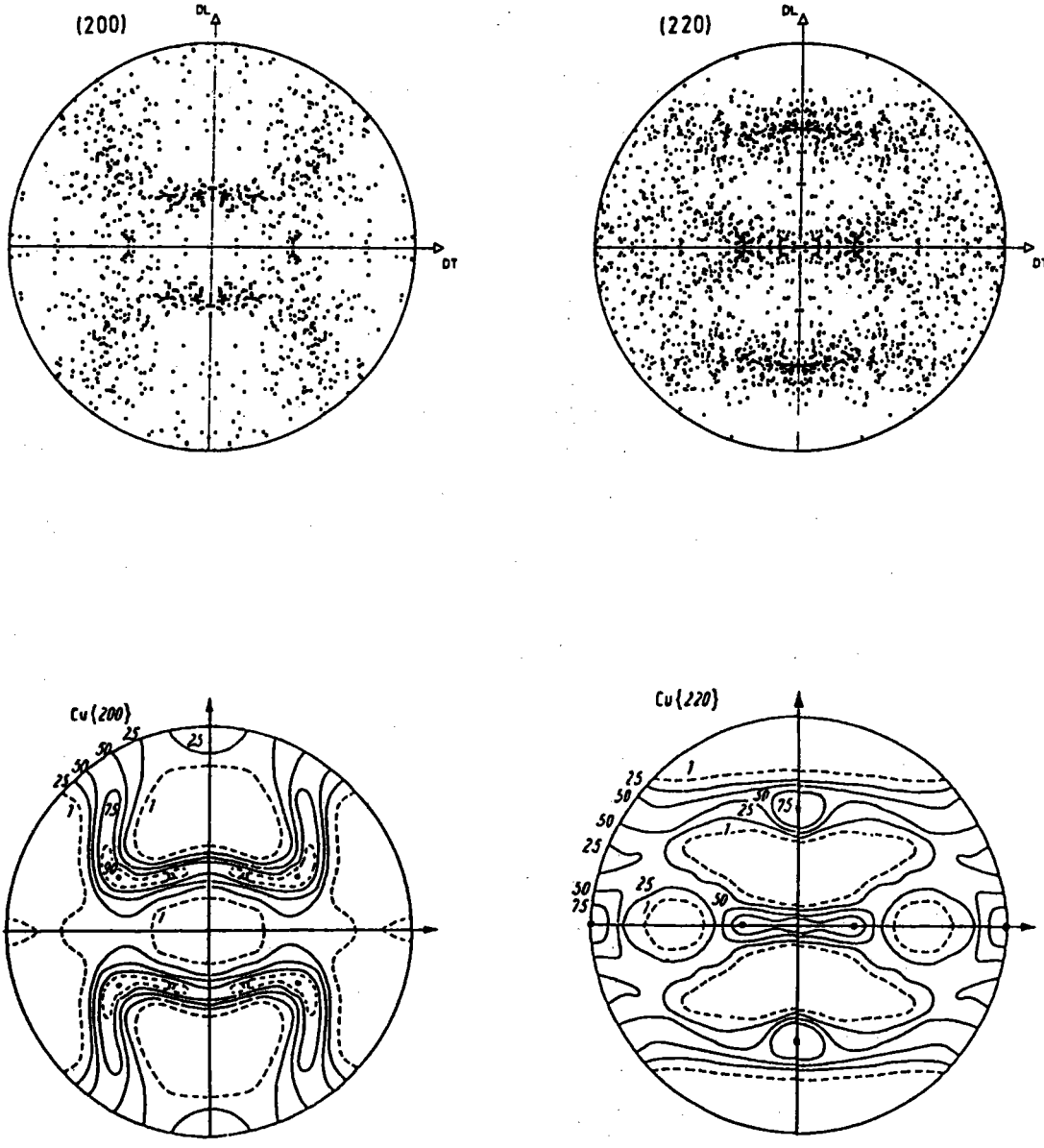


FIGURE VII.20 - Comparaison des textures caclulées et expérimentales (figures de pôles 200 et 220) pour le laminage des métaux CFC.

VII.3 - Applications au cas des polycristaux CC initialement isotropes

VII.3.1 - Mécanismes de déformation des métaux CC

Il est généralement bien accepté que pour les métaux CFC, les mécanismes de déformation sont, selon la température et la pureté du métal

- le glissement plastique cristallographique sur les plans (111) dans les directions < 110 >
- le maclage mécanique (111) < 112 >.

Dans de rares cas, on a observé d'autres systèmes de glissement. La situation est moins claire pour les métaux cubiques centrés. Alors que la direction de glissement est toujours du type <111>, on observe des plans du type (110) (le plus couramment), mais aussi des plans du type (112), (123), ce qui conduit à des lignes de glissement d'apparence sinueuse ("pencil glide"). Christian [99] et J. Gill Sevillano, P. van Houtte, E. Aernoudt [100] ont cependant indiqué, par des arguments géométriques et cristallographiques, que les plans du type <123> sont relativement improbables.

Nous avons donc supposé que les mécanismes de glissement des métaux CC peuvent être décrits par les directions <111> et par deux familles de plans (110) et (112). Puisque nous distinguons le sens du glissement, ceci conduit à 24 + 24 systèmes de glissement énumérés dans le tableau VII.3.

Pour ces mécanismes, il convient maintenant d'évaluer les cissions critiques initiales, l'écrouissage et les interactions entre les systèmes de glissement.

Il est bien connu que le glissement le long des plans (112) présente une asymétrie (Christian [99]), ce qui nécessite l'introduction de 3 cissions critiques (initiales)

τ_1 pour les systèmes <111> (110)
τ_2 pour les systèmes <111> (112)
τ_3 pour les systèmes <111> (112) (direction de maclage).

L'écrouissage "moyen" des monocristaux CC présente également trois stades, comme pour les métaux CFC, mais ceux-ci sont moins nets et l'écrouissage du stade II est nettement plus faible que celui du stade II des

métaux CFC ($\mu/250$). On peut admettre une pente moyenne pour le stade II des courbes (τ - γ) des monocristaux CC de l'ordre de ($\mu/500$).

Les interactions entre les systèmes de glissement des métaux CC sont plus complexes du fait de la plus grande multiplicité des systèmes possibles. D'après Franciosi [101], il est raisonnable en première approximation de classer les interactions selon deux types :

- les interactions faibles
- les interactions fortes.

Cette classification conduit à une matrice d'écrouissage de la forme donnée dans le tableau VII.3.

Finalement, les paramètres à déterminer sont au nombre de 4. En posant

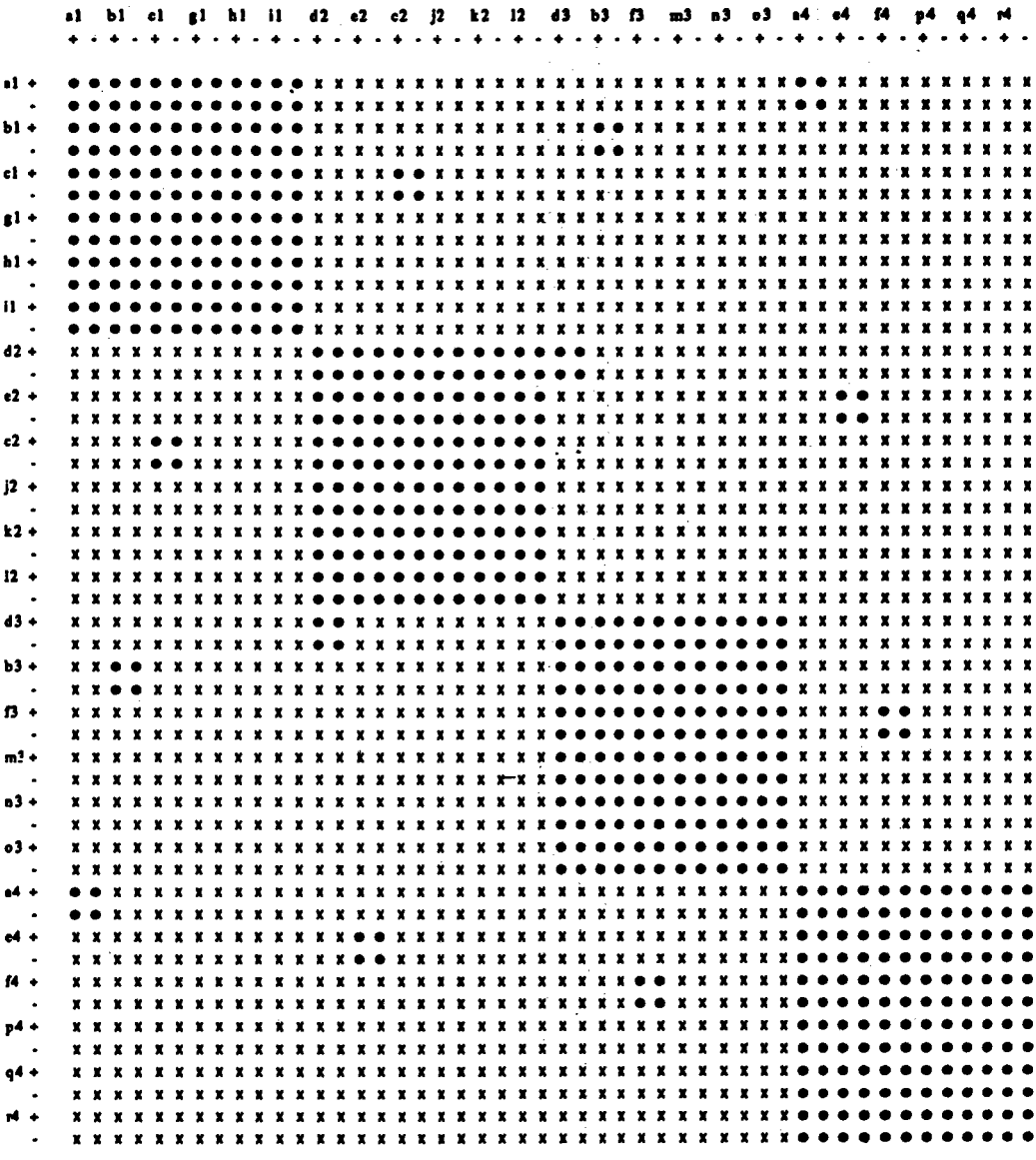
$\tau_1 = \tau$; $\tau_2 = \alpha_- \tau$; $\tau_3 = \alpha_+ \tau$

$H_2 = AH_1$

$H_1 = \mu/500$

on doit définir τ, α_-, α_+ et A.

La cission critique initiale τ_1 (sur les systèmes principaux) peut s'obtenir par l'analyse de la courbe de traction du polycristal. La détermination de α_-, α_+ et A nécessiterait des essais sur monocristaux, essais qui ne rentrent pas dans le cadre de cette étude. Nous avons donc cherché à évaluer les valeurs optimales de α_-, α_+ et A à partir d'un problème inverse : quelles sont les meilleures valeurs de α_-, α_+ et A permettant d'obtenir des simulations sur polycristal proches des observations expérimentales (textures) ? Le paragraphe suivant présente les résultats obtenus en traction, et dans le paragraphe 3 on présente les textures de laminage pour un polycristal initialement isotrope. En même temps, nous avons cherché à analyser les effets du glissement sur 48 systèmes par rapport au glissement cristallographique pur (24 systèmes).



PLANS (110) : a : (1 $\bar{1}$ 0) ; b : (10 $\bar{1}$) ; c : (01 $\bar{1}$) ; d : (110) ; e : (101) ; f : (011)

PLANS (112) : g : (11 $\bar{2}$) ; h : (1 $\bar{2}$ 1) ; i : ($\bar{2}$ 11) ; j : (1 $\bar{1}$ 2) ; k : (12 $\bar{1}$) ; r : (2 $\bar{1}$ 1)

DIRECTIONS <111> : 1 : ± <111> ; 2 : ± < $\bar{1}$ 11> ; 3 : ± <1 $\bar{1}$ 1> ; 4 : ± <11 $\bar{1}$ >

Tableau VII.3 - Systèmes de glissement et matrice d'écrouissage pour des métaux CC

VII.3.2 - Résultats pour un chargement en traction simple

La figure VII.21 présente l'évolution des figures de pôles 200 et 110 en fonction de la déformation plastique imposée au polycristal et pour un monocristal avec 24 systèmes de glissement, ainsi que les figures de pôles expérimentales correspondantes obtenues par le LMPC de Metz [102] sur un acier XC63 tréfilé à froid de 95%. On observe la formation d'une texture de fibre <110> conformément aux observations expérimentales.

Dans la figure VII.22 on a représenté les mêmes résultats, mais obtenus avec 48 systèmes de glissement ($\alpha_- = \alpha_+ = 1$). A part une dispersion plus importante due à l'anisotropie des interactions entre systèmes de glissement (A = 3), les résultats sont identiques aux précédents. C'est seulement pour des valeurs extrêmes de A (A = 100) que la texture calculée est différente de la texture expérimentale. Cependant, de telles valeurs de A (supérieures à quelques unités) n'ont pas de réalité physique pour les métaux cubiques. L'effet d'une texture morphologique initiale sur la formation des textures de traction est représenté dans la figure VII.23. Lorsque les grains sont allongés dans la direction de traction, l'effet d'une anisotropie de forme est peu important (sauf en ce qui concerne la dispersion des orientations idéales). Par contre, une traction sur un polycristal dans une direction orthogonale à l'axe allongé des grains (a = 1, b = 10, c = 1) conduit à la formation d'une texture tout à fait différente. Un tel effet est cependant peu probable car il nécessite une texture morphologique très prononcée, difficile à obtenir par un écoulement plastique du polycristal.

De cette première analyse, on peut conclure que les textures de traction sont bien reproduites par les paramètres suivants:

- A = 1.1 , $\alpha_+ = \alpha_- = 1$,
- 24 ou 48 systèmes de glissement.

De plus, les effets de la texture morphologique semblent peu importants. Ces valeurs ont été reprises pour simuler les textures de laminage des métaux CC.

Ces conclusions sont conformes à l'allure des courbes de traction calculées pour les différentes valeurs des paramètres physiques et reportées sur les figures VII.23 à VII.26.

On observe une faible influence du nombre de systèmes de glissement sur le taux d'écrouissage (plus le nombre de systèmes de glissement est important, plus faible est la limite d'écoulement). A part la valeur A = 100 (qui n'a pas de justification physique), l'anisotropie intracristalline due aux interactions entre systèmes de glissement a peu d'effets sur la réponse macroscopique.

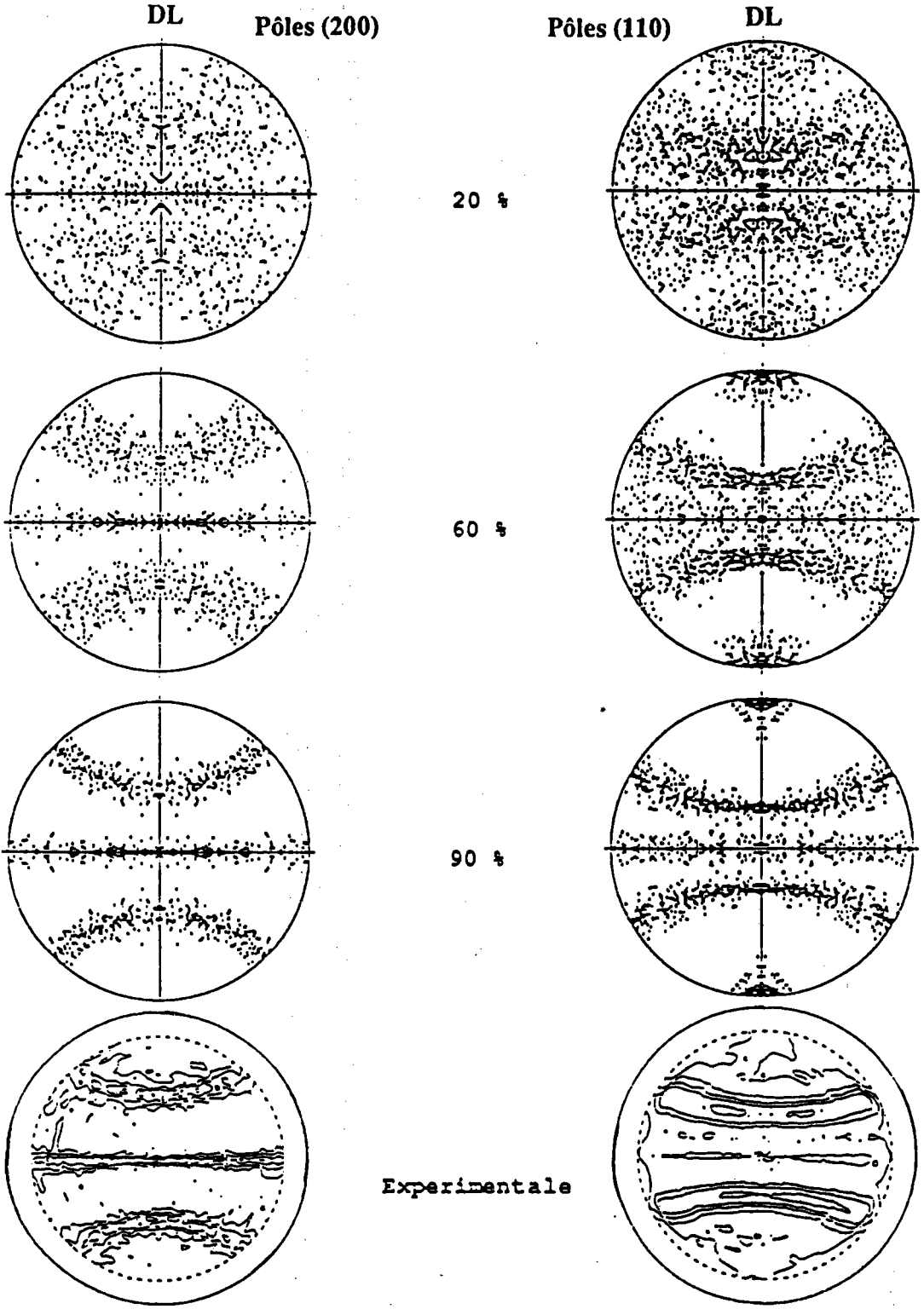


FIGURE VII.21 - Evolution de la texture du CC en fonction de la déformation plastique entraction suivant DL. Comparaison avec les mesures expérimentales du LMPC-Metz [104] sur un acier XC63 déformé à 95%.

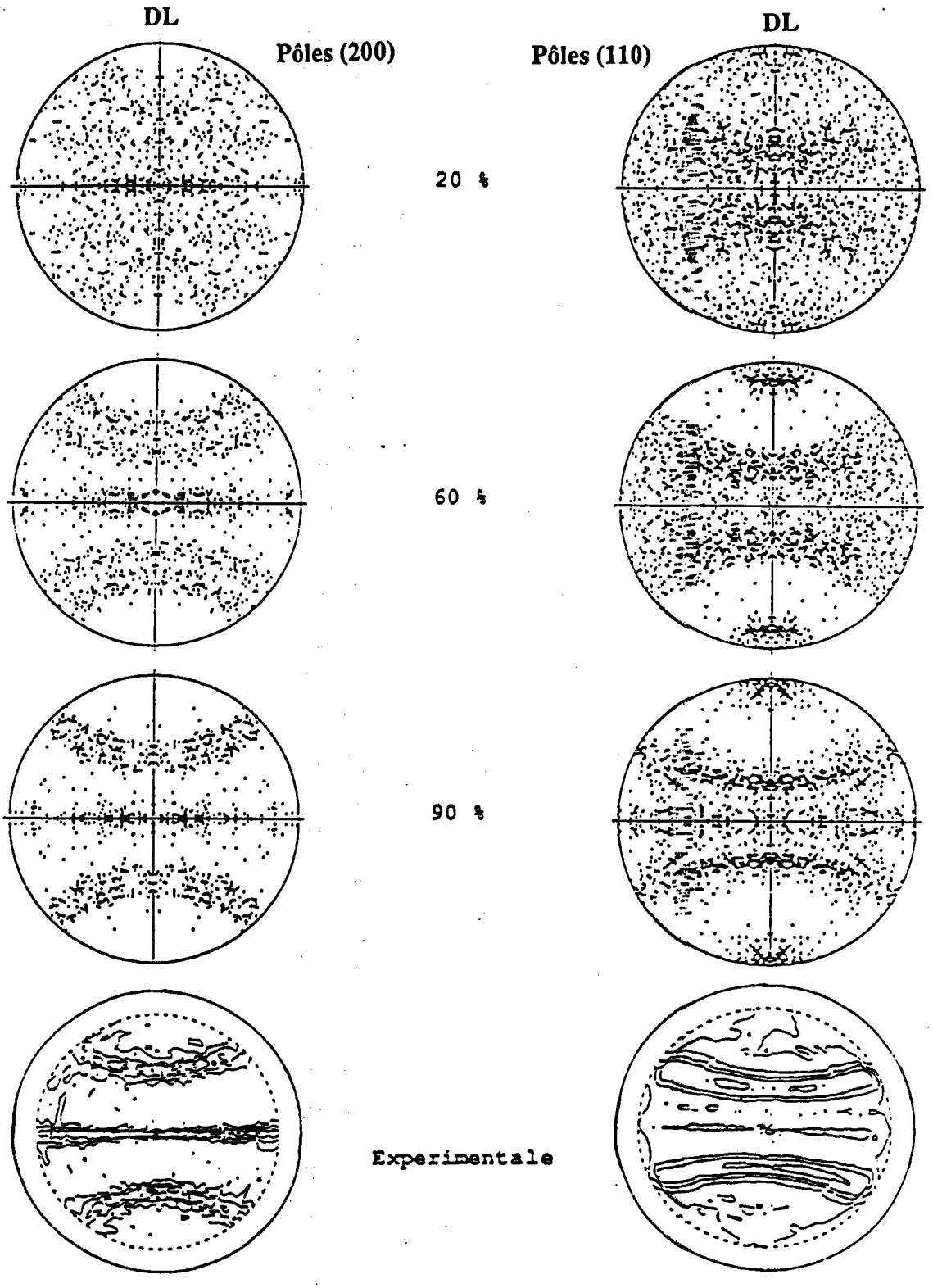


FIGURE VII.22 - Même figure que VII.21 mais avec 48 systèmes de glissement et facteur d'anisotropie A= 3.

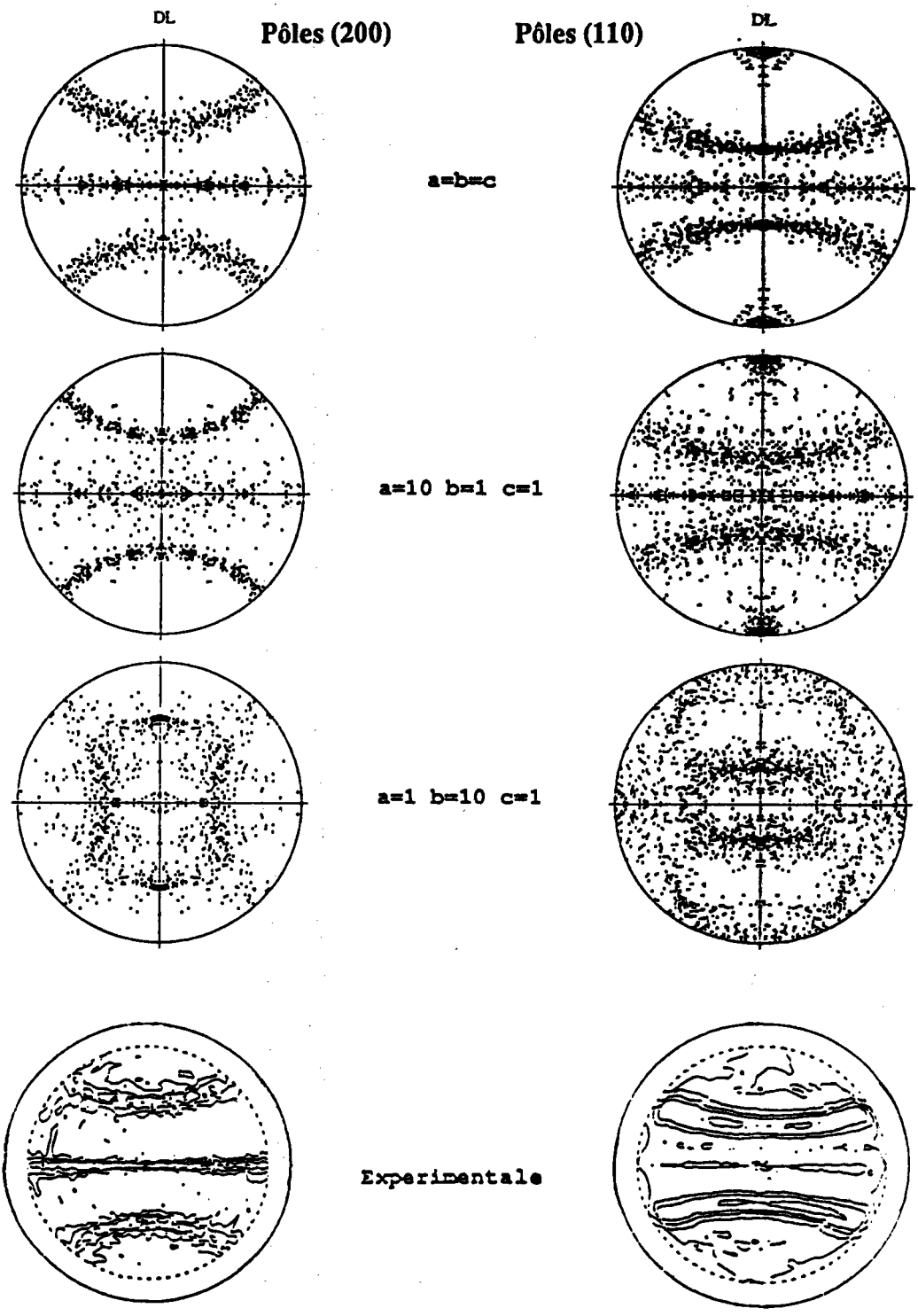


FIGURE VII.23 - Influence de la texture morphologique initiale (paramètres a,b,c). Traction suivant DL de 90%.

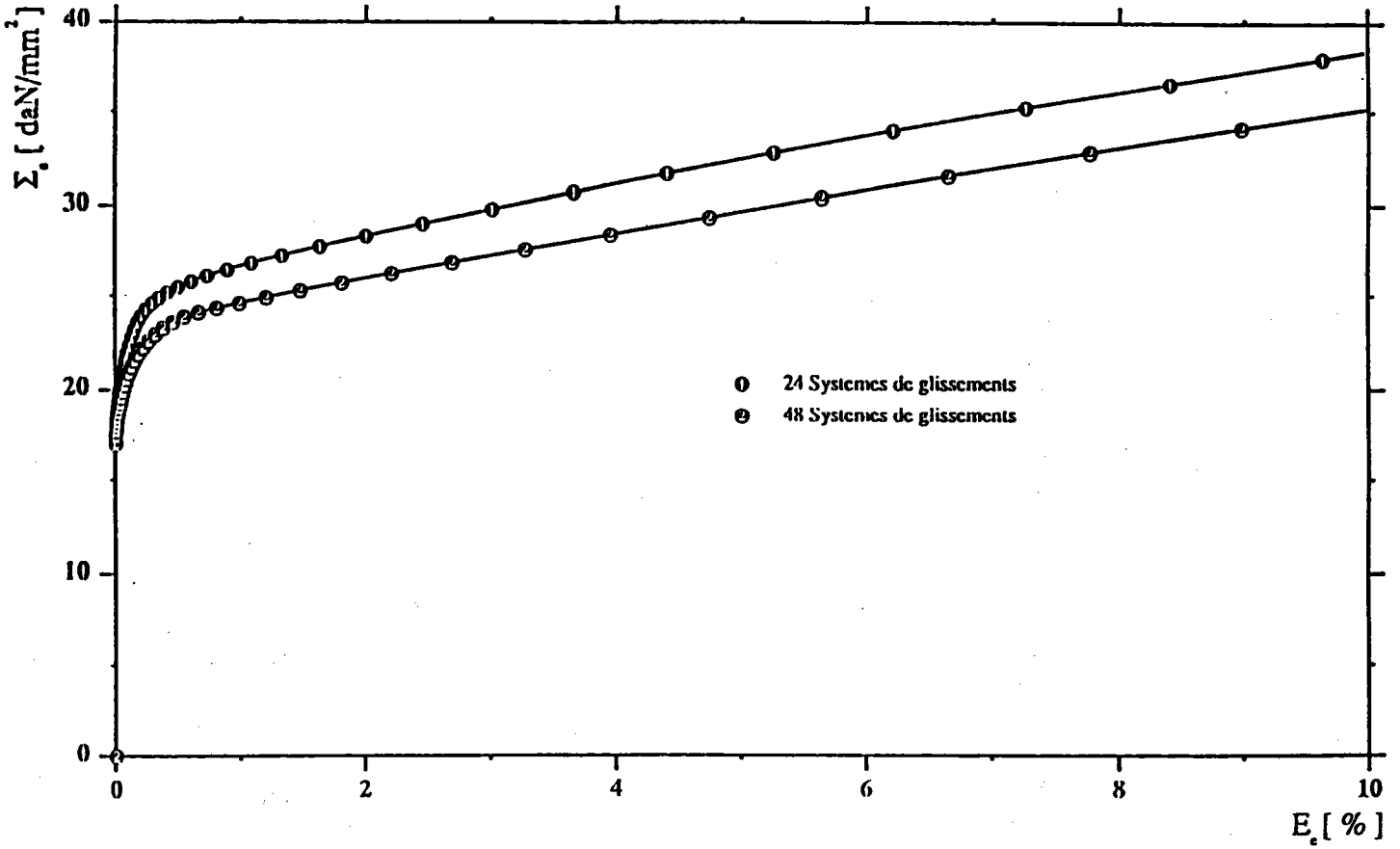
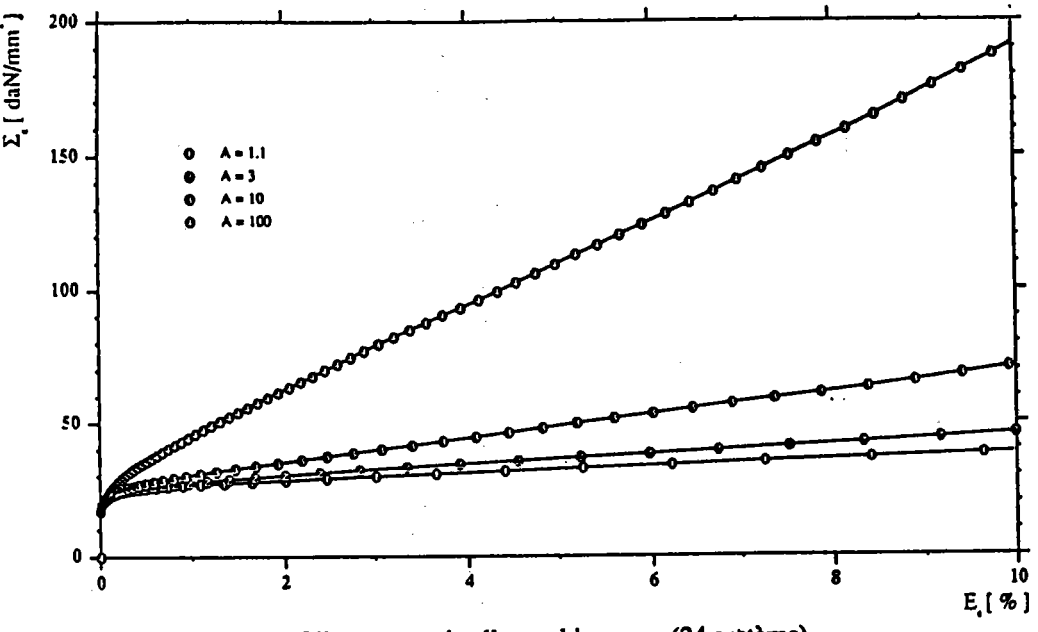
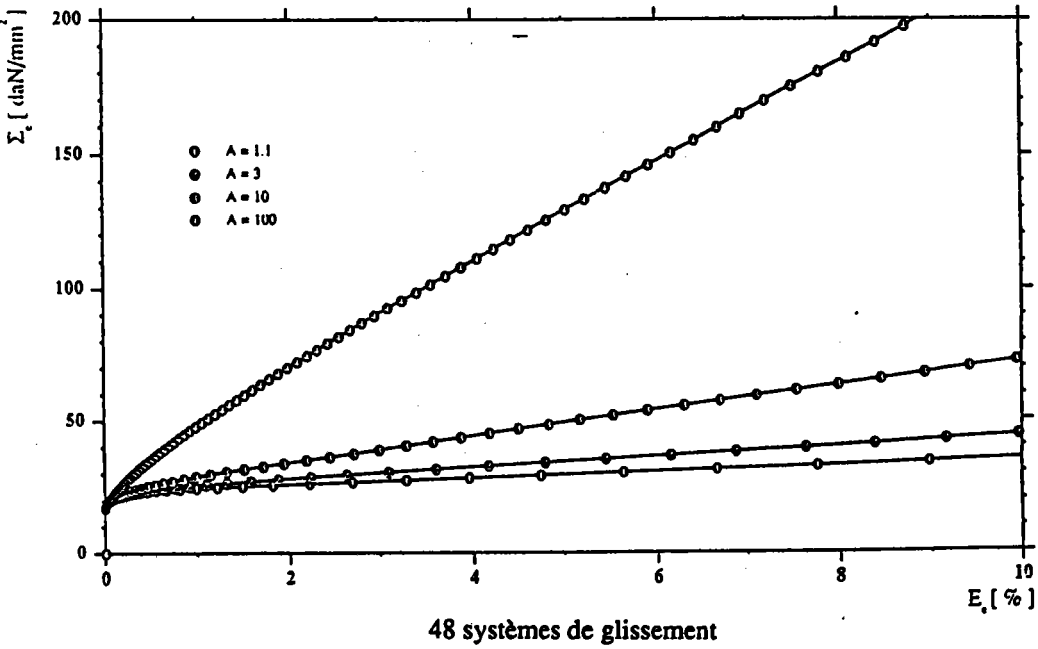


FIGURE VII.24 - Influence du nombre de systèmes de glissement possibles sur l'écrouissage du polycristal CC.



Glissement cristallographique pur (24 systèms)



48 systèmes de glissement

FIGURE VII.25 - Influence du facteur d'anisotropie d'intéraction entre systèmes de glissement d'un polycristal CC. Texture initialement isotrope.

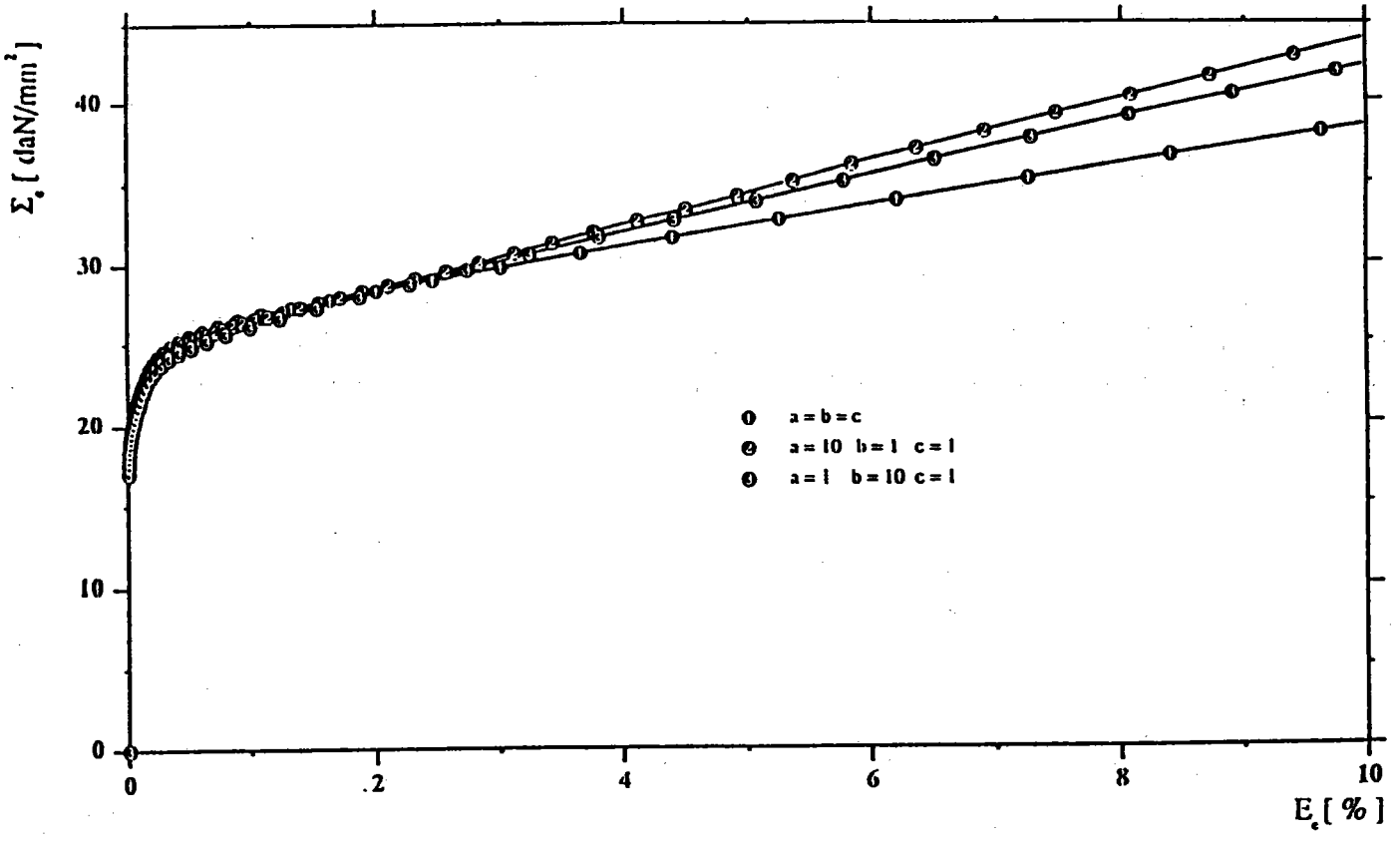


FIGURE VII.26 - Effet de la texture morphologique initiale sur les courbes d'écrouissage.

Pour A = 1.1, on obtient un taux d'écrouissage $d\Sigma/dE^p \sim 150$ daN/mm² c'est-à-dire de l'ordre de E/130 où E est le module d'Young en traction. Les mesures expérimentales donnent des valeurs comprises entre 100 et 200 daN/mm² selon la pureté de l'acier.

La figure VII.26 montre l'influence de la texture morphologique sur la courbe de traction. Cette influence, pour les rapports de forme raisonnable, est également faible.

VII.3.3 - Prévision des textures de laminage

La figure VII.27 représente l'évolution des figures de pôles 200 et 110 en fonction de la déformation plastique de laminage ainsi que les figures de pôles expérimentales obtenues par l'Irsid [103] sur un fer pur laminé à froid de 75%.

On constate que, dans ce cas, les textures calculées ne correspondent que partiellement aux mesures expérimentales et que la composante H ($\varphi_1 = 0$, $\Phi = 0$, $\varphi_2 = 45$ ou $\varphi_1 = 45$, $\Phi = 0$, $\varphi_2 = 0$) est pratiquement absente des prévisions théoriques.

Nous avons donc recherché parmi d'autres textures de laminage des métaux CC si, comme pour les métaux CFC, la texture pouvait dépendre d'autres phénomènes que le glissement multiple homogène. La figure VII.28 présente, en même temps que les calculs théoriques, les résultats obtenus par Williams sur une tôle de Fe-17% Cr laminé à 95% [104]. On constate que dans ce cas, les prévisions théoriques correspondent aux mesures expérimentales. La composante H, qui est absente de nos calculs autocohérents, correspond à un mécanisme de glissement hétérogène décrit par ailleurs [60].

On constate que la texture de Williams-Vadon est bien décrite par les résultats du modèle autocohérent, alors que pour les résultats de Donadelle [103], il convient de décrire la texture globale par un mélange de textures déduites du modèle autocohérent et du modèle proposé dans [60].

Nous avons également cherché à savoir si la modification des paramètres morphologiques (effet de forme des grains), cristallographiques (nombre de systèmes de glissement) ou physiques (anisotropie A) permettrait de retrouver une texture complète (autocohérente comprenant la composante H). Les résultats obtenus, non présentés ici, indiquent bien que la composante H ne peut être obtenue par l'intermédiaire des paramètres physiques évoqués précédemment. Celle-ci correspond donc bien à un mécanisme de déformation différent du glissement multiple homogène. Un tel phénomène a déjà été mis en évidence pour les métaux CFC et a permis d'interpréter les textures de transition (Cu → Laiton) et la formation des microbandes de cisaillement.

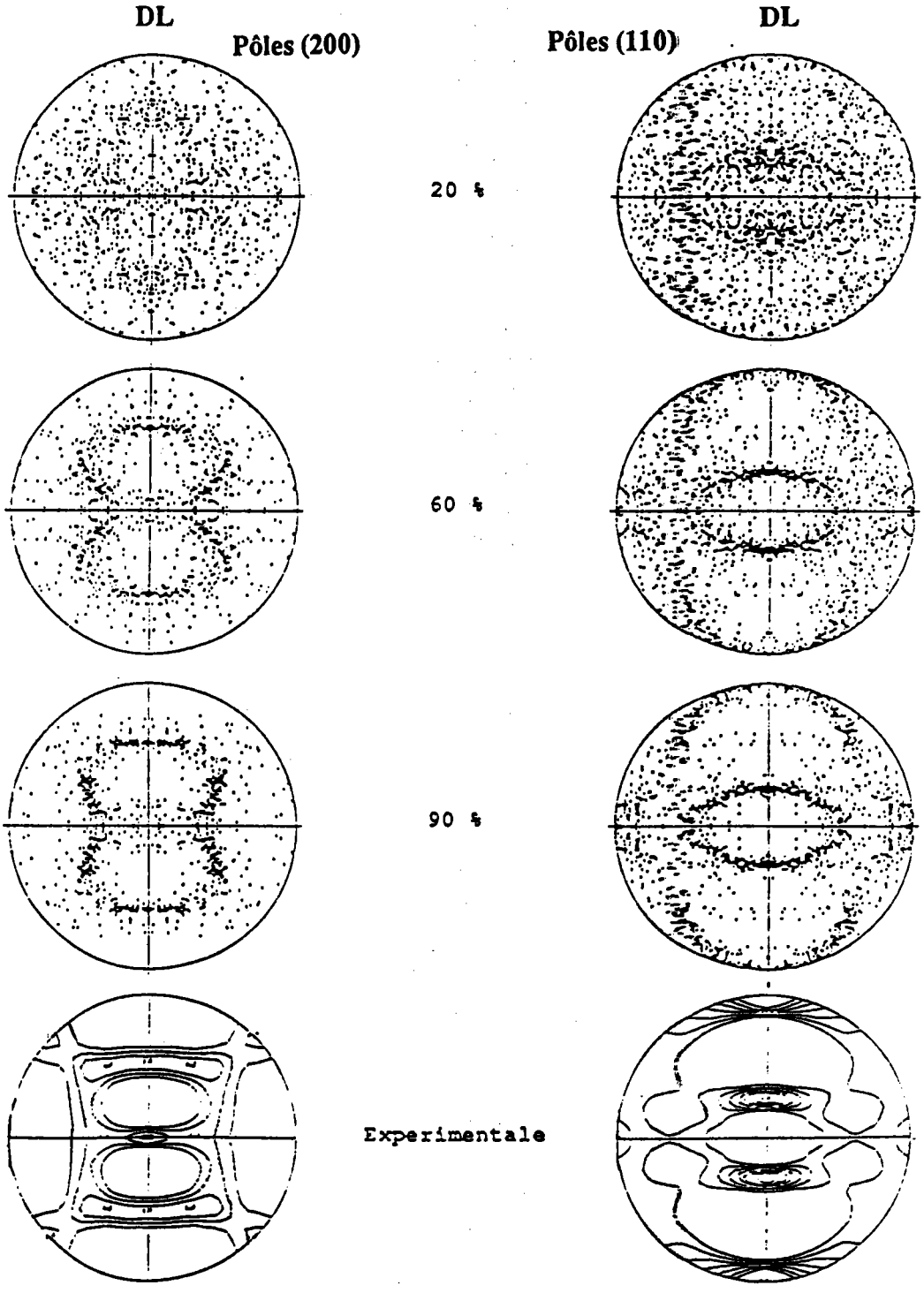


FIGURE VII.27 - Evolution de la texture en fonction du taux de laminage du polycristal CC.Comparaison de la texture finale avec les mesures expérimentales sur un fer pur laminé à froid de 75% (IRSID 89)[103].

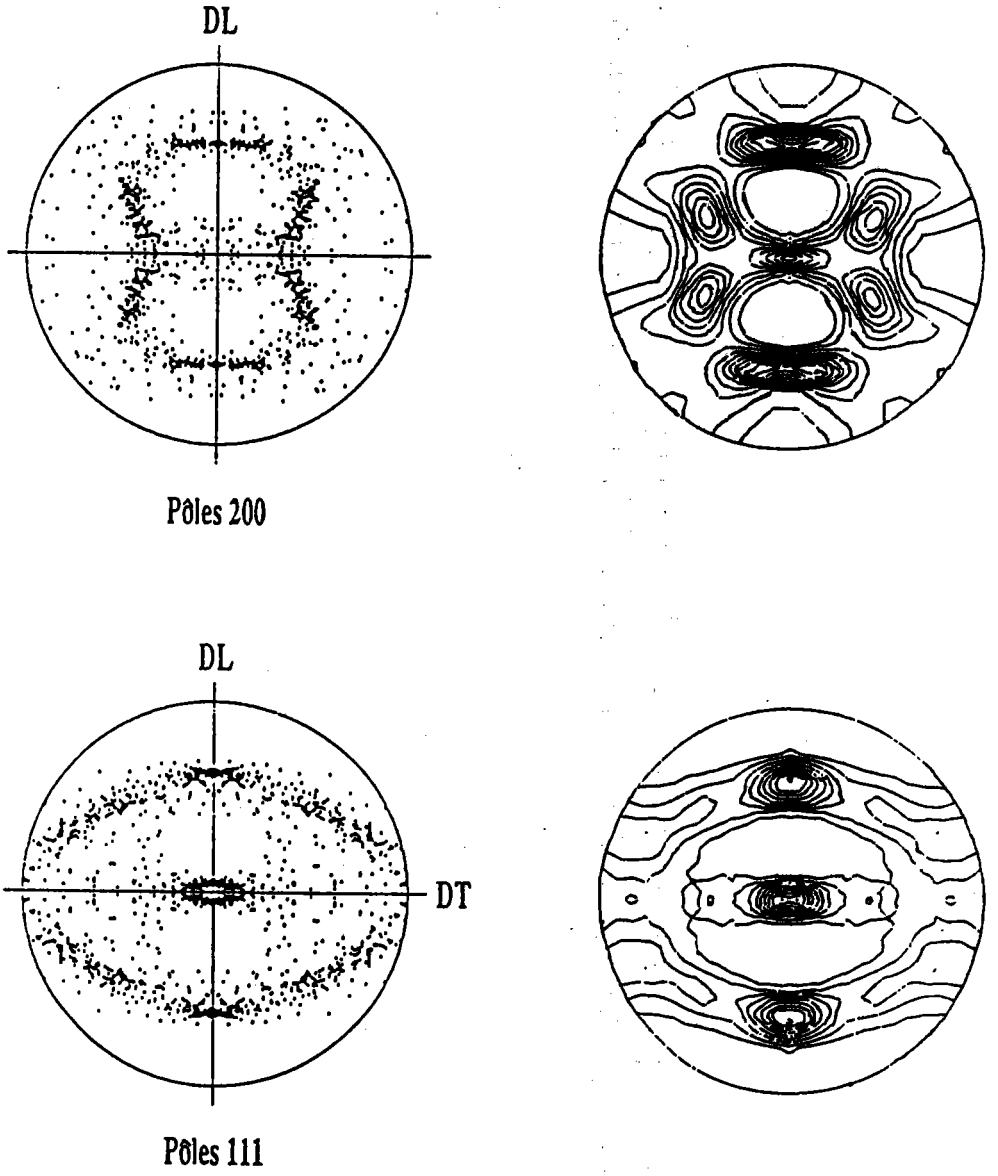


FIGURE VII.28 - Comparaison de la texture de laminage d'un polycristal CC avec desmesures expérimentales sur du fe-17%Cr laminé à 95% (Williams-Vadon [104] LMPC - Metz).

VII.3.4 - Conclusions partielles

L'application du modèle développé dans les chapitres III à VI aux métaux CC conduit à des résultats satisfaisants tant pour le laminage que pour la traction, sous réserve que le mécanisme de déformation local soit bien le glissement multiple homogène. La faible influence des paramètres géométriques (forme des grains), cristallographiques (nombre de systèmes de glissement) et physiques (facteur d'anisotropie A) sera d'ailleurs confirmée par les résultats obtenus dans le cas des tôles initialement anisotropes.

Pour étudier le comportement de celles-ci, nous avons limité l'analyse de l'influence des différents paramètres aux cas suivants :

Nombre de systèmes de glissement		24 <111> (110)
	ou	48 <111> (110) + <111> (112)
Cission critique initiale		identique sur tous les systèmes de glissement $\alpha_+ = \alpha_- = 1$
Facteur d'anisotropie		A = 1.1
Facteur de forme des grains (indications déduites des données de Penelle)		a = b = c ⇒ tôles A
		a = 3 b = 2 c = 1 tôles B.

Les tôles A et B possédant une texture cristallographique initiale (pratiquement identique), nous avons testé plusieurs méthodes permettant leur description à partir d'un nombre fini (100 à 2 000) d'orientations cristallographiques.

VII.4 - Application au cas des métaux CC initialement anisotropes

VII.4.1 - Choix des paramètres

Les tôles A et B qui ont été étudiées par Penelle et Bœhler [105], [106], ont été laminées puis recuites.

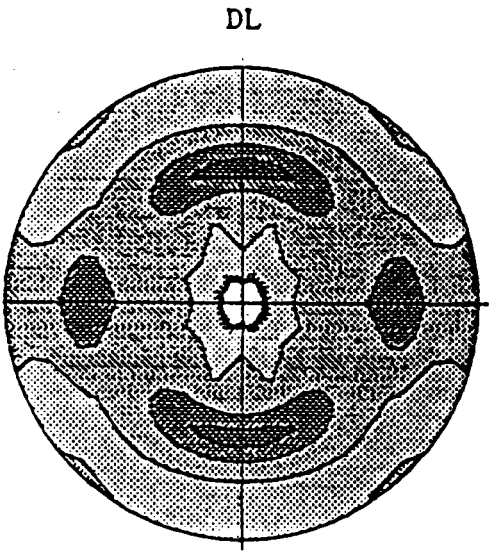
Elles présentent la même texture cristallographique, la tôle A possédant des grains sphériques, alors que les rapports de forme moyens pour les grains de la tôle B sont a = 3 b = 2 c = 1.

Dans le paragraphe précédent, nous avons recensé les différents paramètres physiques dont dépendent les propriétés des métaux CC, et les simulations qui ont été effectuées ont permis d'évaluer un certain nombre de ces paramètres. Il reste cependant à décrire la texture cristallographique initiale des tôles A et B. Celle-ci a été mesurée par Penelle et décrite sous forme de fonction de distribution des orientations (FDO). Cette fonction des trois angles d'Euler φ_1, Φ, φ_2, nécessite d'être discrétisée afin de décrire le polycristal par des grains (ou famille d'orientation) dans le modèle autocohérent. Afin de limiter les temps de calculs sans perdre trop d'informations sur l'état du polycristal, et donc sur son comportement, il est nécessaire de choisir une famille de N orientations discrètes de poids N(g). Des essais antérieurs ont montré qu'avec N = 100 orientations, on obtient un bon compromis entre représentation de la texture et temps de calcul. Dans le cas d'un polycristal, initialement isotrope, les 100 orientations sont choisies de manière aléatoire. Dans le cas d'un polycristal initialement anisotrope, ce choix ne convient pas car la partie isotrope de la texture est sur-représentée par rapport aux orientations idéales, même si on tient compte du poids de chaque famille.

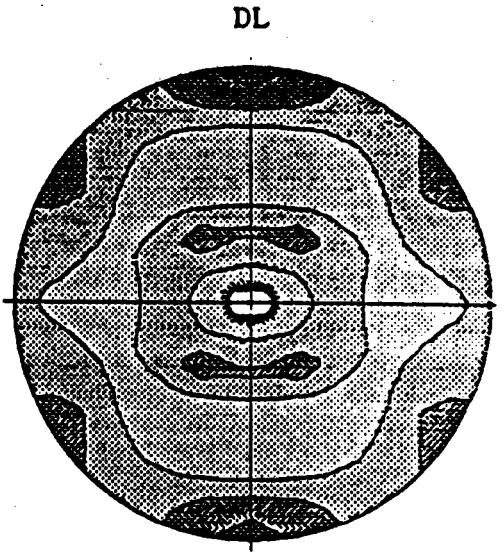
La figure VII.29 représente la texture initiale sous forme de figures de pôles, telle qu'elle découle des mesures de Penelle et du calcul de la fonction de distribution des orientations données sous la forme d'un fichier de 6958 triplets d'angle d'Euler avec le poids respectif de chaque orientation.

Plusieurs méthodes ont été testées pour décrire cette texture par l'intermédiaire de 100 grains.

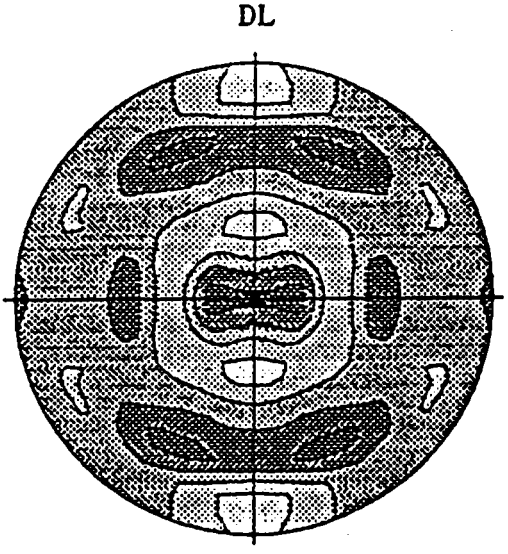
La méthode qui a été utilisée consiste à discrétiser la sphère de la projection en 100 cases (pour 1/8 de la sphère à cause de la symétrie macroscopique) et à prendre la valeur de la FDO au centre de chaque case. Ceci élimine la redondance car l'espace (φ_1, Φ, φ_2) n'est pas l'espace minimum de représentation.



Poles 200



Poles 110



Poles 111

FIGURE VII.29 - Figures de pôles expérimentales décrites par l'intermédiaire de 6859 orientations.

L'anisotropie plane peut être caractérisée par l'intermédiaire de différents chargements en traction simple sur des éprouvettes prélevées selon un angle θ par rapport à la direction de laminage. La figureVII.30 présente les résultats obtenus en fonction de la forme initiale des grains (a, b, c) et du nombre de systèmes de glissement possibles (24 ou 48). On constate que :

- l'anisotropie initiale ($E^p < 0,2\%$) est très faible, voire inexistante et pratiquement indépendante de la texture morphologique et du nombre de systèmes de glissement
- lorsque la déformation plastique augmente, l'anisotropie de la limite d'écoulement reste faible jusqu'à une déformation de 2% (mais aussi pour une déformation de 22%
- l'effet des paramètres de structure (nombre de systèmes de glissement) et géométriques (forme des grains) est très faible. Ceux-ci semblent avoir un effet secondaire par rapport à l'effet de la texture cristallographique initiale
- la présence d'un plus grand nombre de systèmes de glissement "adoucit" le matériau
- l'effet de la texture morphologique est plus important pour 24 systèmes de glissement que pour 48 systèmes.

La faible anisotropie plane de ces matériaux provient presque exclusivement de la texture cristallographique initiale. Dans le paragraphe 3, une prédéformation de traction d'amplitude variable (6, 12 et 21%) modifie de façon significative cette anisotropie.

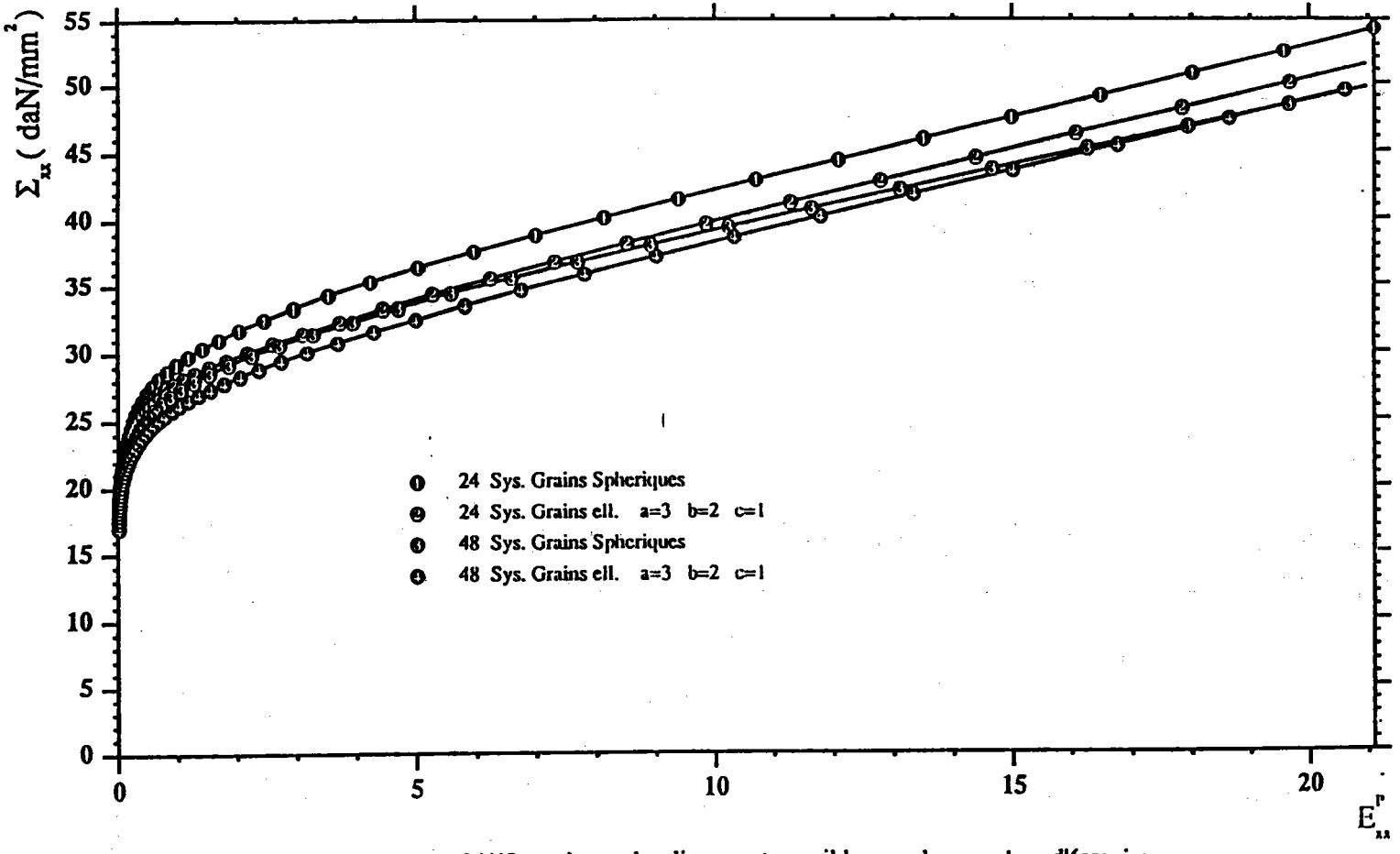


FIGURE VII.30 - Influence de 24/48 systèmes de glissement possibles sur les courbes d'écrouissage en traction simple suivant DL pour les tôles A et B.

VII.4.3 - Anisotropie induite par un préchargement dans la direction de laminage

Un préchargement dans une direction donnée (ici direction de laminage) a pour effets

- de modifier les textures cristallographiques et morphologiques initiales
- de modifier les cissions critiques sur les systèmes de glissement
- d'induire un champ de contraintes résiduelles du second ordre associé aux incompatibilités intergranulaires de la déformation plastique.

Les deux premiers effets sont croissants, avec l'amplitude de la prédéformation, alors que le troisième présente une saturation.

La figure VII.31 indique les différentes courbes de traction obtenues en fonction

- de l'angle θ de l'éprouvette secondaire par rapport à la direction du laminage (direction de prédéformation)

pour la tôle B (texture morphologique) après une prédéformation de 12,8% selon DL.

L'analyse des résultats complets indique que

- l'anisotropie induite par la prédéformation est plus grande que l'anisotropie initiale et croît avec l'amplitude de la prédéformation. Cet effet est dû aux textures cristallographiques induites (voir plus loin)
- l'anisotropie induite est supérieure dans le cas des grains équiaxes à celle développée dans le cas d'une texture morphologique initiale
- l'effet du nombre de systèmes de glissement sur l'amplitude de l'anisotropie semble faible.

Alors que le taux d'écrouissage $\left(d\Sigma/dE^p\right)$ évoluait de manière similaire en fonction de E^p pour les différents essais sur un matériau non prédéformé, on observe sur les essais secondaires effectués sur les éprouvettes prédéformées, une évolution beaucoup plus complexe, déjà rencontrée sur les métaux CFC (Figure VII.6).

Quelle que soit l'amplitude de la prédéformation, la forme des grains et le nombre de systèmes possibles, on observe que

- la limite élastique vraie ($E^p \sim 0\%$) diminue lorsque l'orientation de l'éprouvette secondaire par rapport à l'axe du chargement primaire augmente
- la limite élastique vraie est suivie d'un stade (jusque vers $E^p \sim 1\%$) où le taux de consolidation varie fortement avec l'orientation relative de l'éprouvette et l'amplitude de la déformation plastique

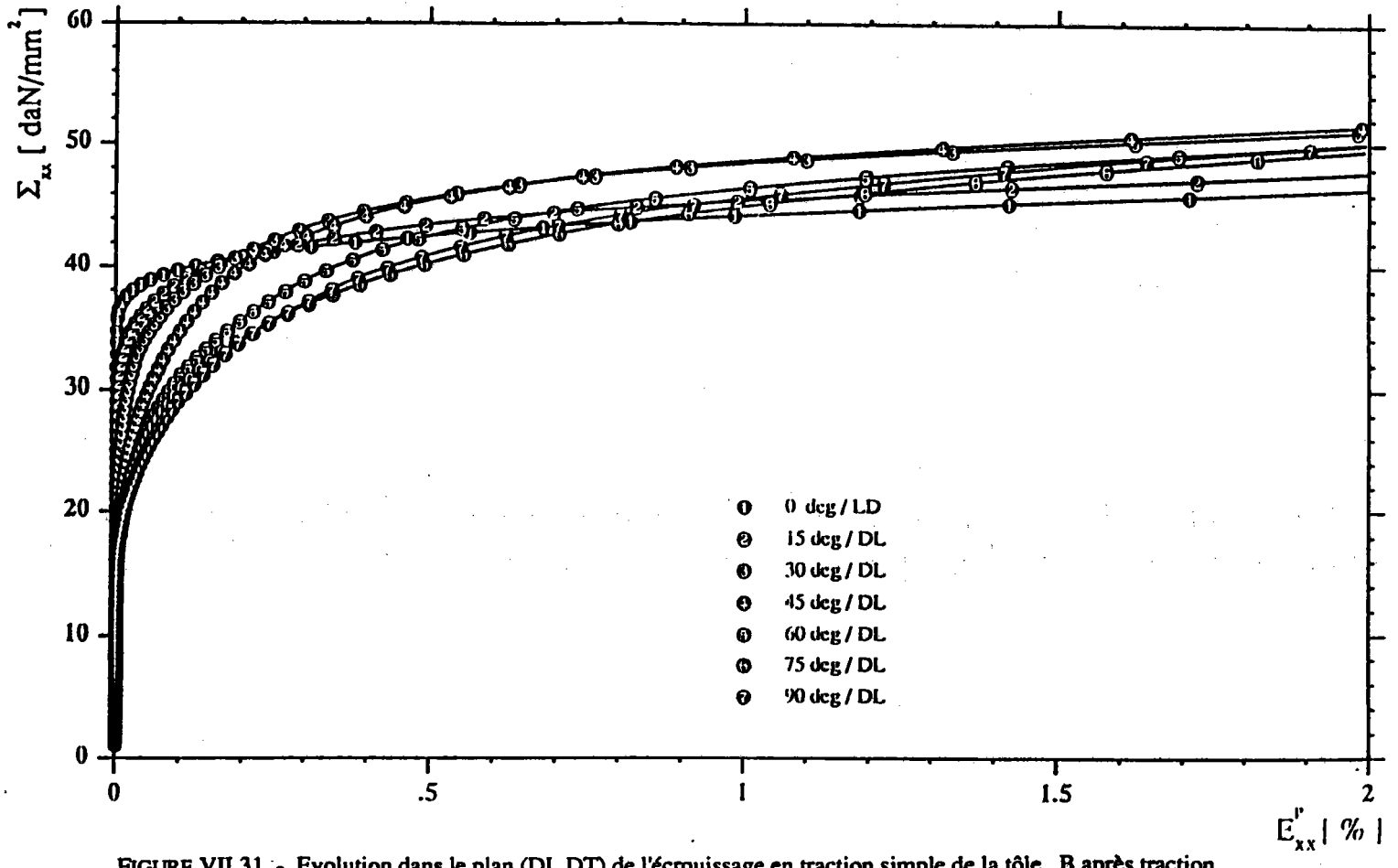


FIGURE VII.31 - Evolution dans le plan (DL,DT) de l'écrouissage en traction simple de la tôle B après traction de 12,8 % suivant DL.

- au-delà de 1% de déformation plastique (et jusque vers 2%), les taux d'écrouissage semblent constants, indépendants de la déformation plastique et de l'orientation relative des chargements primaires et secondaires.

Les évolutions rapides de la limite d'écoulement et la position de la limite élastique initiale sont à attribuer aux contraintes internes du second ordre introduites par la prédéformation.

Les figures VII.32 et VII.33 présentent la limite élastique de la tôle prédéformée dans la direction de prédéformation en fonction de l'angle entre l'axe de l'éprouvette secondaire et la direction de laminage. Comme indiqué précédemment, ces courbes dépendent beaucoup de la définition retenue pour apprécier la limite élastique. Nous avons retenu ici $E^p = 0.05\%$.

Les figures VII.34 et VII.35 représentent l'évolution de la limite élastique à 0.5% en fonction de la prédéformation pour les tôles A et B respectivement.

On observe que l'effet essentiel sur ces courbes est l'écrouissage par la prédéformation qui modifie, de façon sensible, l'anisotropie. Pour ces essais, c'est la direction à 45° par rapport à la direction de préchargement qui a été la plus écrouie par la prédéformation. Les différents paramètres physiques ont une influence du second ordre. Les mêmes observations peuvent être faites pour des prédéformations plus importantes.

Si les premiers stades de déformation plastique ($E^p \sim 1\%$) sont contrôlés par les contraintes internes introduites par le préchargement, au-delà du régime transitoire les courbes de traction possèdent un taux d'écrouissage pratiquement constant et qui dépend fortement de la texture résultant simultanément de la texture initiale et de la texture induite par le préchargement. La texture résultante a été calculée pour plusieurs niveaux de prédéformation (10, 20, 40, 60%) en faisant varier les paramètres physiques (nombre de systèmes, forme des grains).

On constate à nouveau que les paramètres physiques ont peu d'influence sur l'évolution des textures. Celles-ci évoluent progressivement de la texture initiale vers une texture de fibre qui possède quelques similitudes avec la texture de traction d'un polycristal initialement isotrope. Cependant, certaines orientations particulières des fibres sont renforcées alors que d'autres sont atténuées par rapport à la répartition uniforme observée dans le cas d'un polycristal initialement isotrope. Cette différence ne semble pas s'atténuer avec la déformation plastique, ce qui indique la persistance d'une texture initiale (voir figures VII.36 et VII.37).

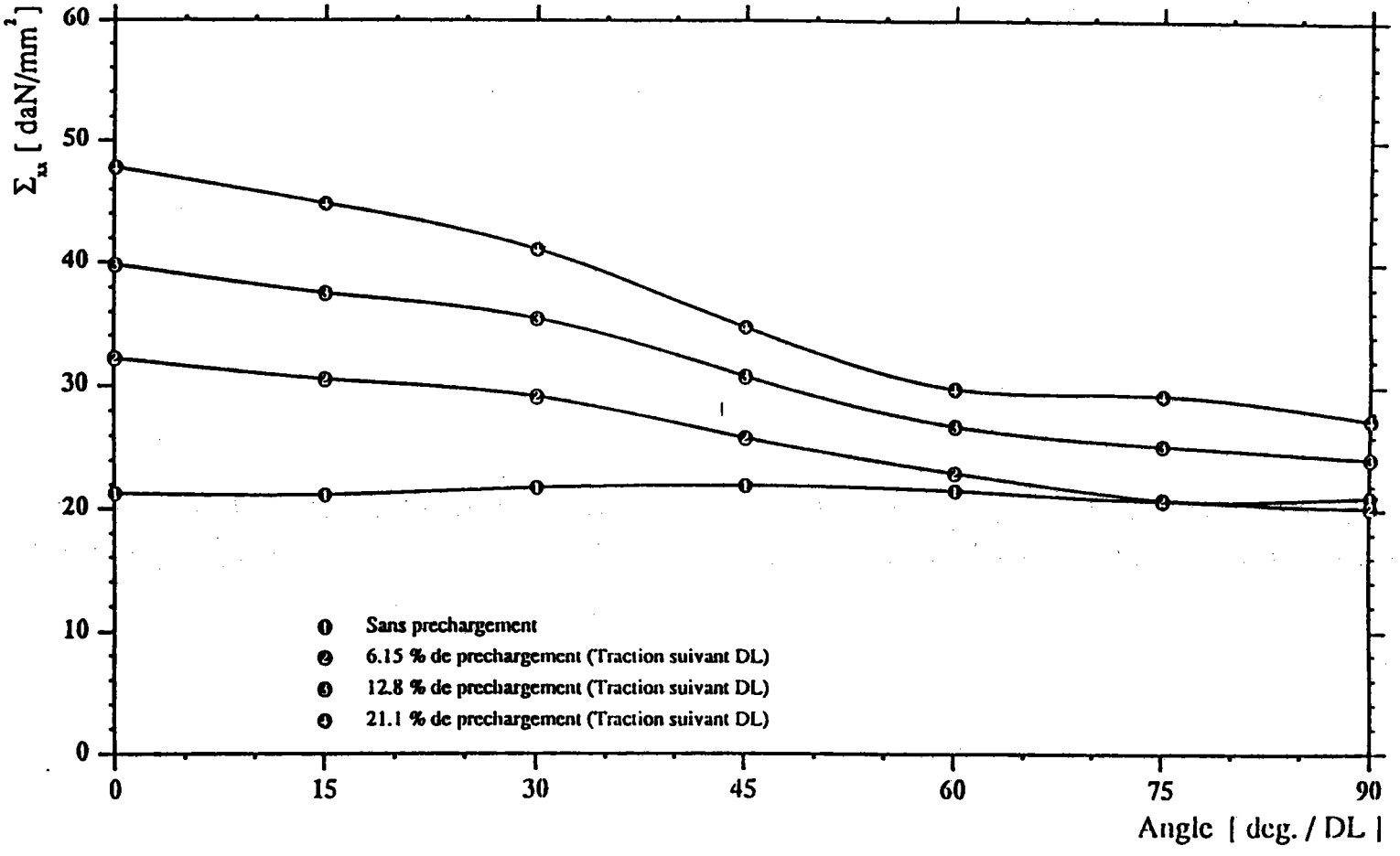


FIGURE VII.32 - Tôle A - Evolution dans le plan (DL,DT) et selon le taux de préchargement de la limite élastique prise à 0,05% de déformation plastique.

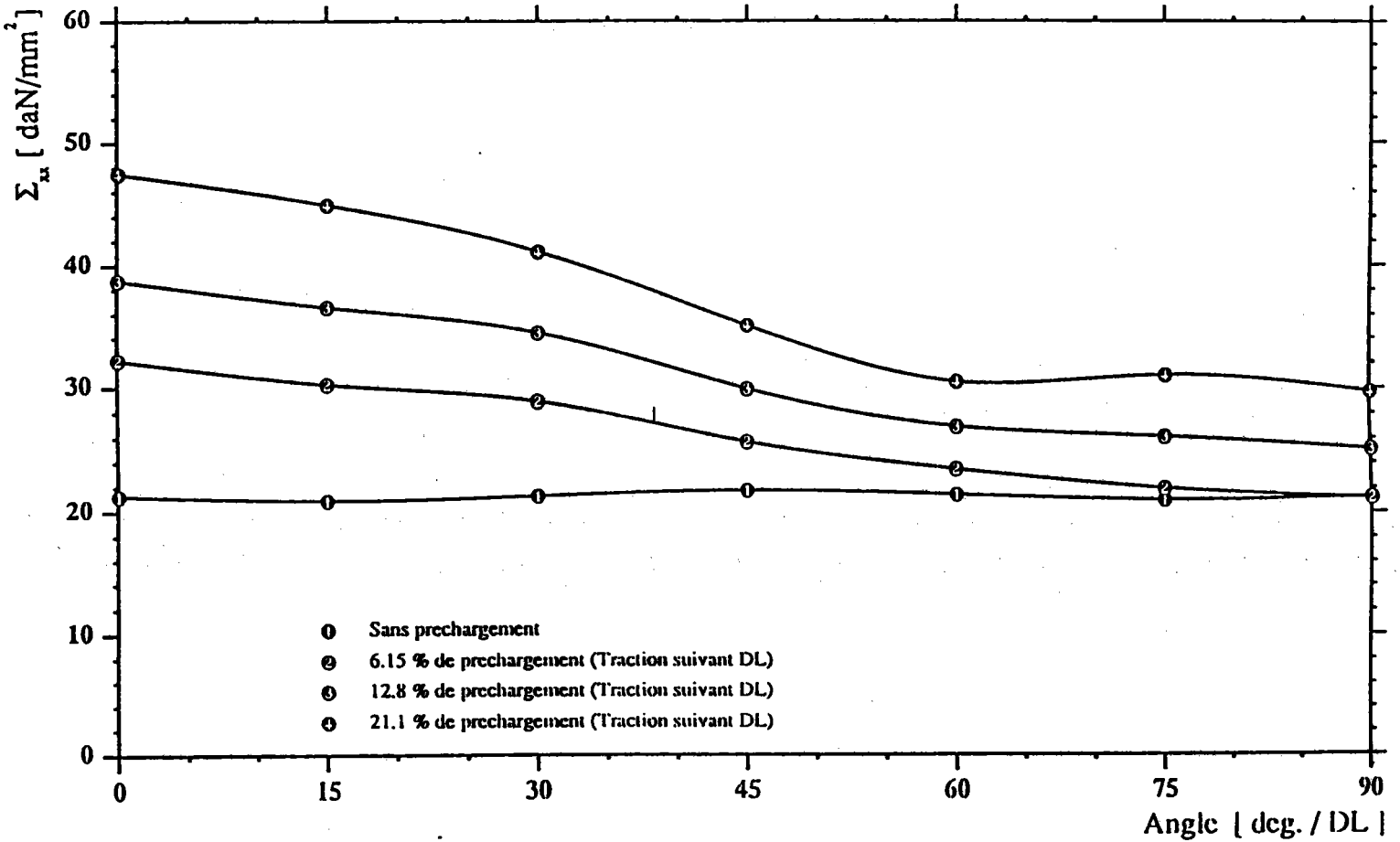


FIGURE VII.33 - Tôle B - Evolution dans le plan (DL,DT) de la limite élastique prise à 0,05% de déformation plastique pour 4 taux de préchargement suivant DL.

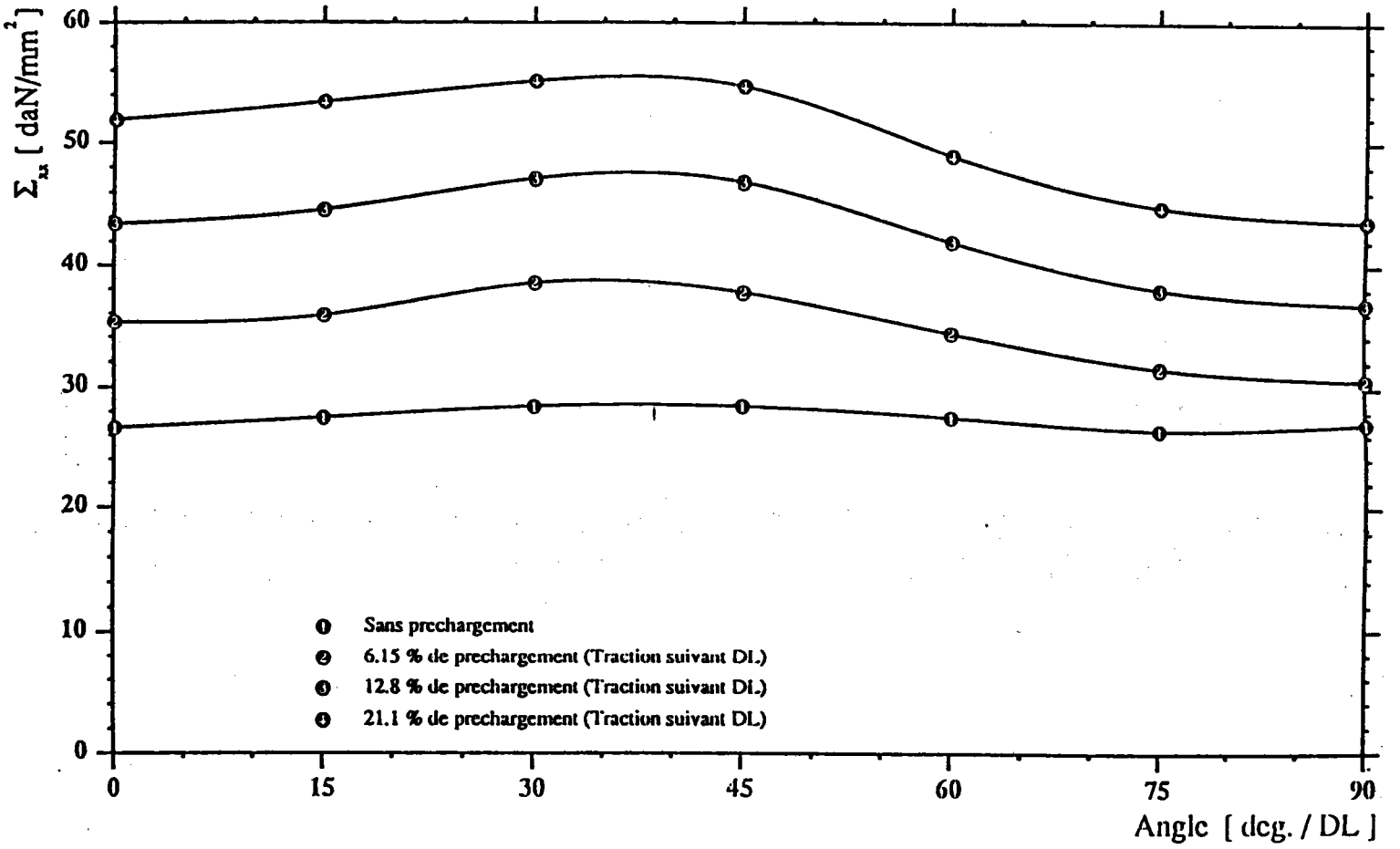


FIGURE VII.34 - Tôle A. Evolution en fonction de l'angle/DL et selon le taux de préchargement de la limite élastique prise à 0,4% de déformation plastique.

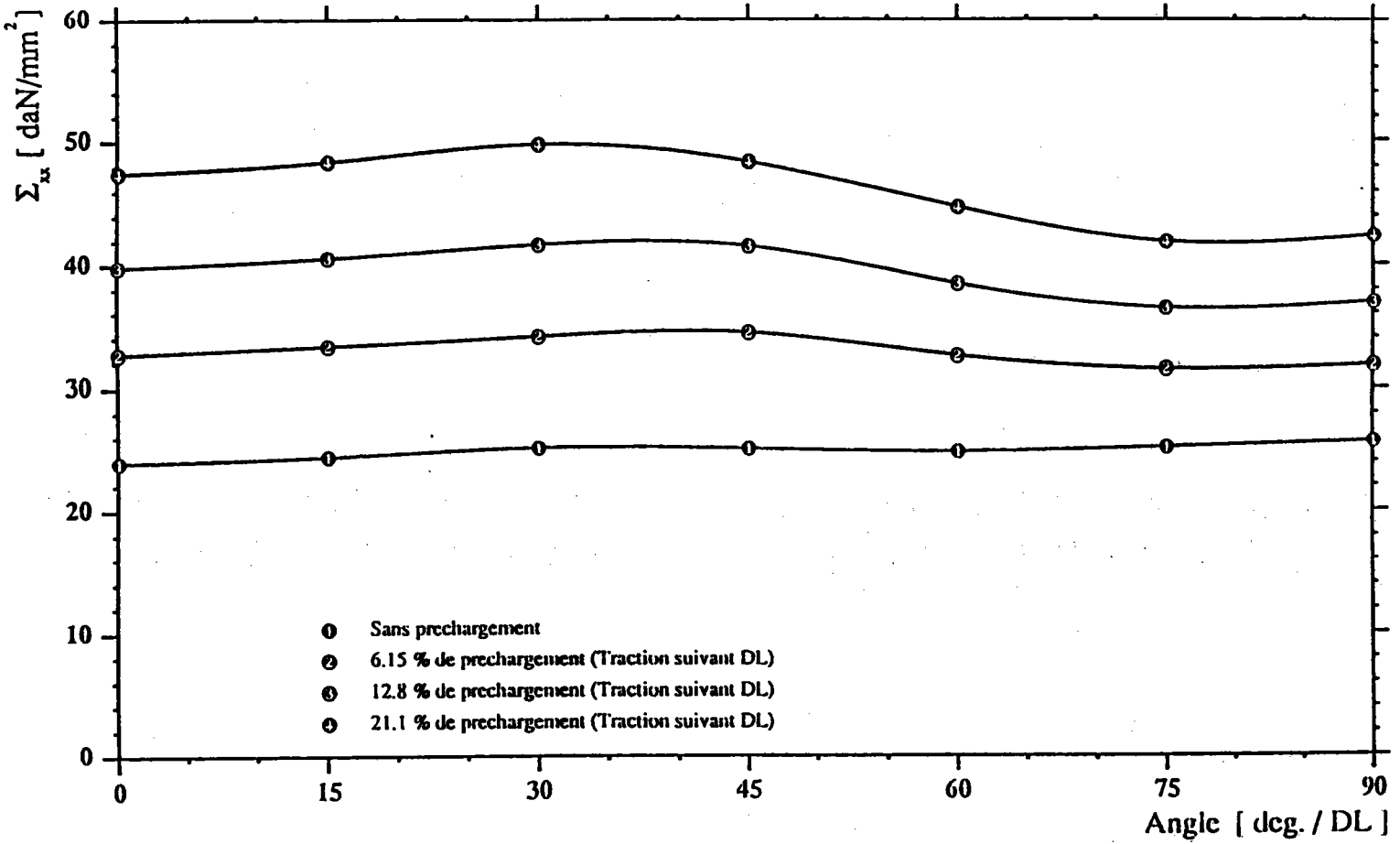
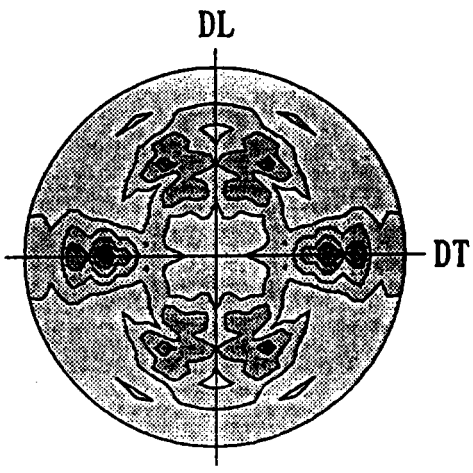
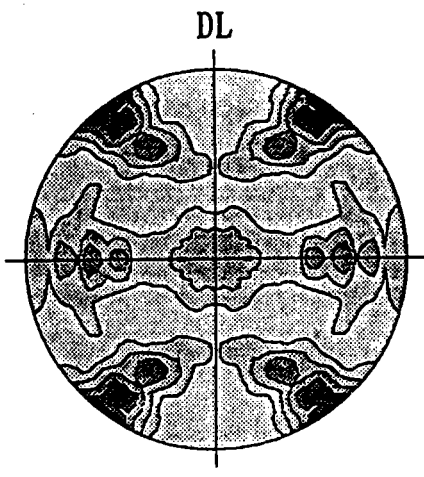


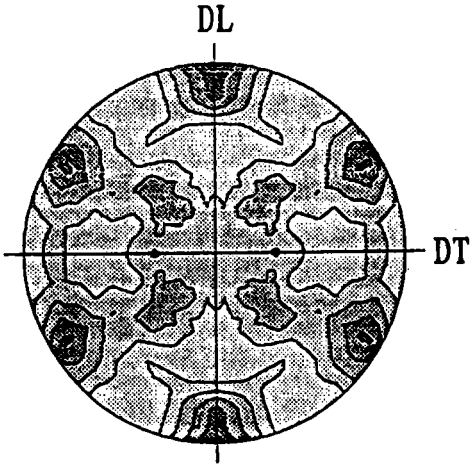
FIGURE VII.35 - Tôle B. Evolution en fonction de l'angle/DL et selon le taux de préchargement de la limite élastique prise à 0,4% de déformation plastique.



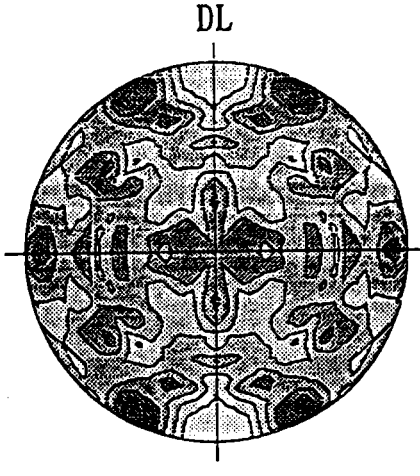
Poles 200



Poles 111



Poles 110



Poles 112

FIGURE VII.36 - Tôle A. Texture après 60% de traction suivant DL. 48 systèmes de glissement.

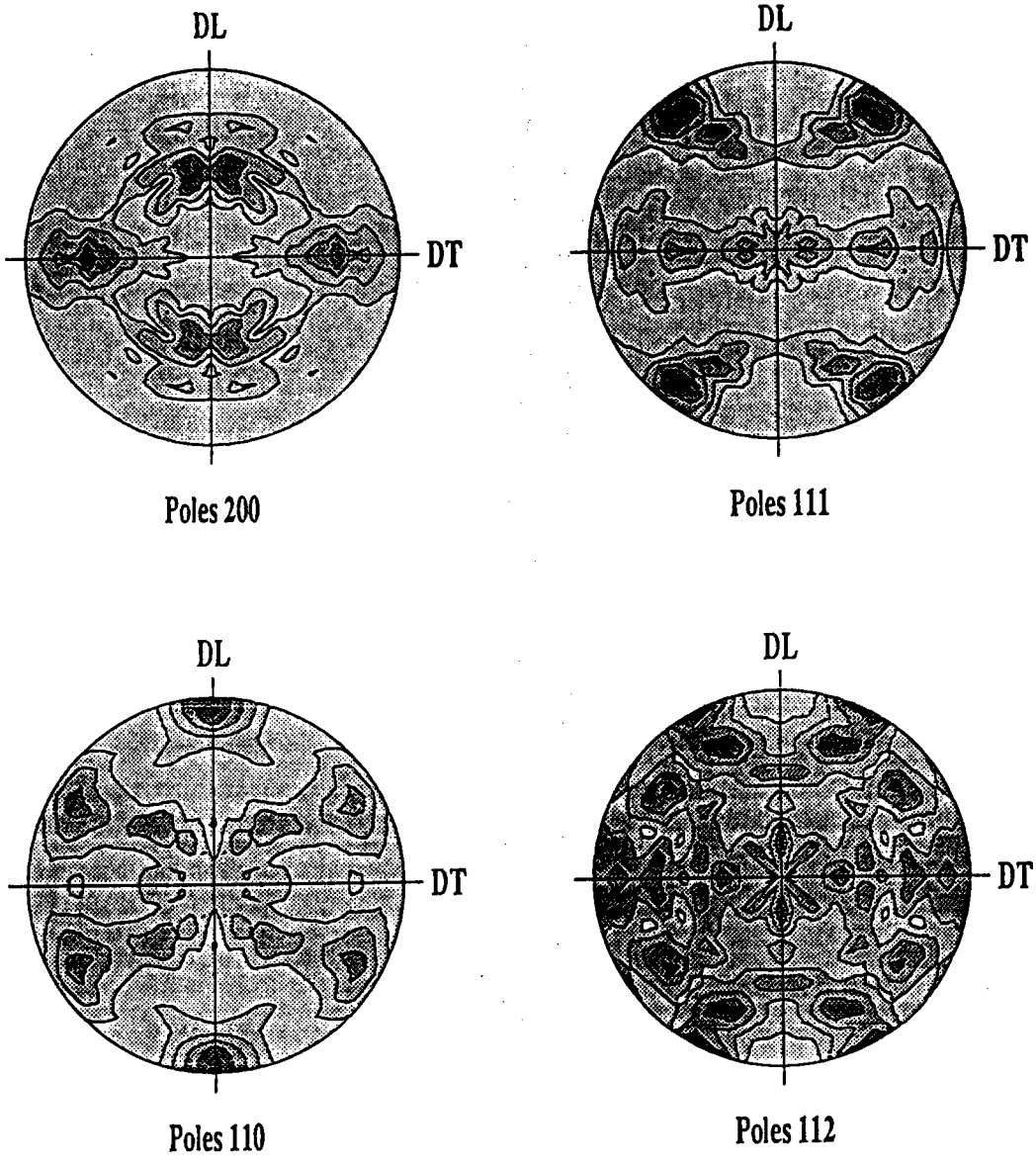


FIGURE VII.37 - Tôle B. Texture après 60% de traction suivant DL. 48 systèmes de glissement.

Pour un préchargement dans la direction de laminage, nous avons également cherché à évaluer l'effet du nombre de grains choisi pour décrire la texture initiale. La comparaison des textures obtenues avec 100 et 1000 orientations conduit aux conclusions :

- les composantes principales sont quasiment identiques
- seuls quelques détails apparaissent différents (dispersion des pics...), mais ceux-ci sont en partie dus à la discrétisation des courbes de niveaux de la fonction densité des pôles. Par rapport aux résultats expérimentaux de Penelle [105], on peut considérer que les figures VII.36 et VII.37 représentent une texture proche de la texture réelle du matériau.

VIII - CONCLUSIONS

Dans ce travail, de nouveaux résultats concernant la modélisation du comportement des métaux polycristallins en transformations élastoplastiques finies, sont présentés.

1 - Une équation intégrale, valable pour des matériaux dont les modules tangents ne possèdent pas de symétries par rapport aux couples d'indices, est dérivée. Cette équation sert comme une base de départ pour toute modélisation du comportement des matériaux micro-hétérogènes et macro-homogènes.

2 - Des opérateurs de localisation permettant la description de l'évolution de la structure interne du polycristal sont déduits de cette équation.

3 - L'approche auto-cohérente classique est ensuite obtenue en introduisant les hypothèses simplificatrices appropriées.

4 - Un schéma de résolution numérique original, valable dans l'approche à un site ou sites multiples, est proposé et mis en oeuvre. Il permet de traiter les édifices polycristallins de plusieurs milliers de grains (aujourd'hui les calculs avec 10 000 grains sont pratiqués couramment).

5 - Pour les matériaux CFC à forte énergie de faute d'empilement, on peut considérer que les résultats obtenus sont en très bon accord avec l'ensemble des observations expérimentales concernant à la fois les surfaces de plasticité, l'énergie bloquée et les textures de déformations. Cet accord justifie a postériori l'emploi d'une approximation auto-cohérente à un site pour résoudre l'équation intégrale du problème par rapport aux développements à sites multiples ou aux méthodes statistiques systématiques.

6 - Dans les cas des métaux CC, les résultats obtenus sont conformes aux observations expérimentales, à part la composante H de la texture qui semble provenir d'un autre mécanisme de déformation que celui pris en compte dans ce travail. De même, pour un polycristal possédant une texture initiale , la confrontation des prévisions théoriques aux mesures expérimentales de Boehler [106] et Penelle [105] indique un accord satisfaisant.

L'anisotropie de structure du matériau associée à la formation des textures est responsable, en même temps que les contraintes internes et l'état d'écrouissage des systèmes de glissement, de l'anisotropie mécanique du comportement observé lors des chargements séquentiels (Figures 32 à 35). La complexité et la diversité des évolutions de textures constatées expliquent la difficulté qu'ont les théories phénoménologiques à décrire le comportement élastoplastique en grandes déformations.

Evidemment, pour certaines classes de matériaux microhétérogènes (métaux polyphasés, métaux à faible énergie de faute d'empilement...), l'approche proposée se révéle insuffisante. Les limites de cette approximation peuvent être regroupées en deux classes :

1 - La première limitation est directement liée aux hypothèses de la méthode auto-cohérente qui est une approximation de l'équation intégrale , solution exacte du problème aux limites pour les matériaux microhétérogènes. Dans le cadre de cette solution d'autres approximations peuvent être développées pour prendre en compte les microstructures spécifiques. Par exemple, pour les matériaux biphasés fortement hétérogènes, l'approche à sites multiples développée par Fassi-Fehri et al [73] ou le modèle à trois phases proposé par Hervé et Zaoui [107] sont surement plus adaptés.
Dans le cas usuel du polycristal monophasé les limitations de l'approche auto-cohérente sont liées à la présence d'une microstructure intragranulaire induite par les déformations plastiques plus ou moins importantes.

2 - L'hypothèse de la déformation plastique (taux) homogène dans le grain efface la possibilité de modélisation de toute microstructure intragranulaire induite. Cette dernière est l'image de l'hétérogénéité de densité de dislocations. De ce point de vue, les intéractions entre les systèmes de glissement et le joint de grain, correspondent plutôt aux dislocations surfaciques.
Les observations expérimentales telles que l'empilement des dislocations sont pratiquement entièrement négligées dans cette modélisation (la matrice d'écrouissage H^{*gh} les décrit de manière très "homogénéisée"). Alors les phénomènes bien connus, comme l'influence de la taille de grains sur le comportement plastique des matériaux, sont absents dans nos résultats. Ceci explique également pourquoi les résultats obtenus sont plus corrects pour les matériaux à forte énergie de faute d'empilement, où le mécanisme de glissement plastique multiple est bien observé.

Dans les cas cités ci-dessus, il est nécessaire de revoir les fondements mêmes d'une telle approche en incluant les mécanismes spécifiques à de tels matériaux (glissements hétérogènes, formation de microbandes etc...).

ANNEXE: UNICITE DE LA SOLUTION EN METHODE AUTO-COHERENTE

Pour démontrer l'unicité de la solution en approche auto-cohérente, il est commode de partir de la forme incrémentale du théorème des travaux virtuels, exprimé par rapport à la configuration actuelle considérée comme configuration de référence.

$$\text{(A1)} \qquad \int_{V_t} \delta_t \mathbf{n} : \mathbf{g}\, dV = \int_{V_t} \delta_t \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}\, dV + \int_{S_t} \left(\delta_t^{\mathbf{l}}\, \mathbf{n} \;.\; \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v}\, dS$$

En absence des efforts massiques et en prenant en compte les conditions aux limites sur la surface S_t, nous obtenons

$$\text{(A2)} \qquad \int_{V_t} \delta_t \mathbf{n} : \mathbf{g}\, dV = \mathbf{G} : \delta_t \mathbf{N}$$

Supposons maintenant, comme c'est usuel en méthode auto-cohérente, que :

$$\delta_t \mathbf{n}\,(\mathbf{x}) : \mathbf{g}\,(\mathbf{x}) = \sum_I \mathbf{n}^I : \mathbf{g}^I\, \theta\,(\mathbf{x})$$

alors l'équation (2) devient :

$$\text{(A3)} \qquad \sum_I \mathbf{n}^I : \mathbf{g}^I = \mathbf{G} : \delta_t \mathbf{N}$$

La solution du problème correspond au minimum de la fonctionnelle (3) par rapport au champ de vitesse $\mathbf{v}\,(\mathbf{x})$, c'est-à-dire que, pour le gradient $\mathbf{G}$ imposé sur la surface S_t, nous avons la condition

$$\text{(A4)} \qquad \min \left(\sum_I \mathbf{n}^I : \mathbf{g}^I \right) = \min \sum_I \left(\mathbf{g}^I : \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I \right)$$

Dans le cas où

$$\mathbf{l}^I_{ijkl} = \mathbf{l}^I_{klij} \quad \text{(voir III-62)}$$

cette condition est à appliquer grain par grain (inclusion par inclusion), car tout terme $\mathbf{g}^I : \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I$ est positif.
Alors, nous avons :

$$\min (\mathbf{g}^I : \mathbf{l}^I : \mathbf{g}^I) = \min (\mathbf{d}^I : \mathbf{m}^I : \mathbf{d}^I)$$

ou encore

(A5) $$\min (\mathbf{d}^I : \delta_{Tr}\, \sigma^I)$$

D'après la loi de comportement (III-26), on peut écrire :

$$\min (\mathbf{d}^I : \delta_{Tr}\, \sigma^I) = \min \left\{ \mathbf{d}^I : \left[\mathbf{c}^I : \mathbf{d}^I - \left(\sum_{h=1}^{N.S.P.A.} \lambda^h\, \delta\gamma^h \right) \right] \right\}$$

où N.S.P.A. veut dire "Nombre des Systèmes Potentiellement Actifs".

Dans la méthode auto-cohérente, le taux de déformation $\mathbf{d}^I$ est imposé par la loi de localisation

$$\mathbf{d}^I = \mathcal{D}^I : \mathbf{G}$$

Alors le problème de minimisation se ramène ici à :

(A6) $$\min_{C.S.P.A.} [\mathbf{d}^I : (\mathbf{c}^I : \mathbf{d}^I - \delta_{Tr}\, \sigma^I)] = \min_{C.S.P.A.} \left(\sum_{h=1}^{N.S.P.A.} \mathbf{d}^I : \lambda^h\, \delta\gamma^h \right)$$

avec :

C.S.P.A. qui correspond aux "Combinaisons des Systèmes Potentiellement Actifs".
En utilisant (III.54), nous pouvons énoncer: la solution du problème de recherche des systèmes actifs correspond à la recherche du minimum de la forme quadratique :

(A7) $$\min_{C.S.P.A.} \left(\sum_{h=1}^{N.S.P.A.} \sum_{g=1}^{N.S.P.A.} \delta\gamma^g\, \mathcal{H}^{gh}\, \delta\gamma^h \right)$$

avec les contraintes :

(A8) $$-\delta\gamma^h < 0.$$

Il est facile de démontrer que, si $\mathcal{H}^{gh}$ est définie positive, cette solution est unique pour un $\mathbf{d}^I$ imposé. La démonstration se trouve dans [34] pour les

petites transformations ou dans [35] pour les grandes déformations élastoplastiques.

Analysons la structure de la matrice $\mathcal{H}^{gh}$

(A9) $$\mathcal{H}^{gh} = H^{*gh} + S^g : c : S^h + (S^g . \sigma + {}^t(S^g . \sigma)) : S^h$$

Elle est symétrique : $\mathcal{H}^{gh} = \mathcal{H}^{hg}$ si la matrice H^{*gh} est symétrique.

Cette matrice est une combinaison linéaire de la matrice d'écrouissage du monocristal H^{*gh}, du tenseur d'élasticité c et du tenseur de contrainte σ.
Le tenseur d'élasticité c est défini positif, voir § III.2. La matrice projection du tenseur d'élasticité sur les systèmes g et h est prépondérante par rapport aux autres termes. En effet :

(A10) $$S^g : c : S^h \sim \frac{\mu}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} H^{*gh} &\sim \frac{\mu}{100} \\ (S^g . \sigma) : S^h &\sim \frac{\mu}{500} \end{aligned}\right\} \text{ pour des métaux.}$$

Ainsi, même si la matrice d'écrouissage H^{*gh} est singulière, il est pratiquement improbable que la matrice $\mathcal{H}^{gh}$ le soit . Il est difficile de prouver que cette matrice est définie positive dans le cas général. Néanmoins, dans tous les calculs effectués depuis cinq ans, le cas de $\det(\mathcal{H}^{gh}) = 0$ ne s'est jamais produit.

Le problème d'ambiguïté de la solution ne se pose pas. L'état de contrainte et les rotations du réseau sont alors uniques. L'ambiguïté de cette solution dans le cas de modèle de Taylor provient de l'hypothèse que cinq systèmes sont supposés actifs en permanence et que la déformation élastique du monocristal est négligée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voigt, W., Wied. Ann., 38, pp 573-587, 1889.
[2] Reuss, A., Z. Angew Math. Mech., 9, pp 49-58, 1929.
[3] Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, 13, pp 213-222, 1965.
[4] Kröner, E., J. Mech. Phys. Solids, 25, pp 137-155, 1977.
[5] Dederichs, P.H., Zeller, R., Z. Phys., 259, pp 103-113, 1973.
[6] Taylor, G.I., J. Inst. Metals, 62, pp 307-315, 1938.
[7] Sachs, G., Zeit. der V.D.I., 72, pp 739-747, 1928.
[8] Zaoui, A., Thèse d'Etat, Paris, 1970.
[9] Lin, T.H., J. Mech. Phys. Solids, 5, pp 143-158, 1957.
[10] Honeff, H. et Mecking, H., Proc Icotom 6, 1, p 428, 1978.
[11] Kocks, U.F. et Canova, G.R., Risø Nat. Lab., Roskilde, Denmark, 35, 1986.
[12] Kröner, E., Acta Metall., 9, pp 155-165, 1961.
[13] Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, 13, pp 89-101, 1965.
[14] Budiansky, B., Wu, T.T., Proc, 4th US Nat, Cong of Applied Mech., pp 1175-1183, 1962.
[15] Hutchinson, J.W., J. Mech. Phys. Solids, 12, pp 11-21, 1964.
[16] Hutchinson, J.W., Proc. Roy. Soc., A319, pp 247-258, 1970.
[17] Berveiller , M., Zaoui, A., J. Mech. Phys. Solids, 26, pp 325-339, 1979.
[18] Berveiller , M., Zaoui, A., Colloques Internationaux du CNRS, 319, pp 119-132, 1980.
[19] Berveiller , M., Zaoui, A., J. Eng. Mat. Tech., 106, p 295, 1984.
[20] Eshelby, J.D., Proc. Roy. Soc., A241, p 376, 1957.
[21] Kocks, U.F., Met. Trans., 1, p 1121, 1970.
[22] Canova, G., Thèse d'Etat, Metz, 1986.
[23] Ahzi, S., Thèse, Metz, 1987.
[24] Hihi, A., Berveiller , M., Zaoui, A., J. Méc. Théorique et Appl., 4, pp 201-221, 1985.
[25] Beradaï, Ch., Berveiller , M., Lipinski P., Int. J. Plasticity, 3, pp 143-163, 1987.
[26] Franciosi, P., Berveiller , M., Zaoui, A., Acta. Met., 28, pp 273-283, 1980.
[27] Franciosi, P., Proc. 8th Risø Symposium Denmark, p 83-89, 1984.
[28] Kröner, E., Kontinuums Theorie der Versetzungen und Eigens pannungen, Springer Verlag, 1958.

[29] Berveiller , M., Thèse d'Etat, Paris Nord, 1978.
[30] Van Houtte, P., Acta Metall, 26, p 591, 1978.
[31] Tiem, S., Berveiller , M., Canova, G., Acta Metall, 34, pp 2139-2149, 1986.
[32] Iwakuma, T., Nemat-Nasser, S. Proc. R. Soc. Lond., A394, pp 87-119, 1984.
[33] Mandel, J., Cours CISM 97, Udine, Springer, New York, 1971.
[34] Hill, R., J. Mech. Phys. Solids, 14, pp 95-102, 1966.
[35] Hill, R., Rice, J.R., J. Mech. Phys. Solids, 20, pp 401-413, 1972.
[36] Zarka, J. Méca, 12, pp 275-318, 1973.
[37] Asaro, R.J., Rice, J.R., J. Mech. Phys. Solids, 25, pp 309-338, 1977.
[38] Hill, R., Proc. R. Soc. Lond., A326, pp 131-147, 1972.
[39] Nemat-Nasser, S., Obata, M., Proc. R. Soc. Lond., A407, pp 343-375, 1986.
[40] Mandel, J., Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech., Springer, pp 502-509, 1964.
[41] Stolz, C., Thèse docteur-ingénieur, E.N.P.C., 1982.
[42] Mandel, J., Int. J. Solids Struct., 17, pp 873-878, 1981.
[43] Rice, J.R., J., Mech. Phys. Solids, 19, pp 433-455, 1971.
[44] Mandel, J., Int. J. Solids Struct., 1, pp 273-295, 1965.
[45] Nemat-Nasser, S., J. App. Mech, 50, pp 1114-1126, 1983.
[46] Asaro, R.J., Acta Metall., 27, pp 445-453, 1979.
[47] Kröner, E., J. Gittus & J. Zarka eds., Elsevier, Appl. science London, New York, pp 229-289, 1986.
[48] Truesdell, C., Masson et Cie, Editeurs, 1974.
[49] Nemat-Nasser, S., Int. J. Solids Struct., 18, pp 857-872, 1982.
[50] Lipinski, P., Berveiller , M., Int. J. Plasticity, 5, pp 149-172, 1989.
[51] Salençon, J., "Mécanique des milieux continus". Tomes I et II, Ellipses, Editeur, 1988.
[52] Taylor, G.I., Elam, C.F., Proc. Roy. Soc. Lond., A102, pp 643-667, 1923.
[53] Taylor, G.I., Elam, C.F., Proc. Roy. Soc. Lond., A108, pp 28-51, 1925.
[54] Havner, K.S., J. Mech. Phys. Solids, 21, pp 383-394, 1973.
[55] Lipinski, P., Berveiller , M., CORVASCE, F., Arch. Mech., 40, pp 725-740, 1988.
[56] Kröner, E., Ergeb. Angew. Math., Springer Verlag, 5, 1958.
[57] Nye, J.F., Clarendon Press Oxford, 1957.
[58] Kubin, L.P., Estrin, Y., Canova, G., NATO meeting on "Patterns, Defects and Materials Instabilities", 1989.

[59] Canova, G., Kubin, L.P., in Continuum Models of Discrete Systems, 6, 1990.
[60] Berveiller , M., Bouaouine, H., Fakri, N., Lipinski, P., Textures and Microstructures, 8-9, p 351, 1988.
[61] Fardshishen, F., Onat, E.T., Problems of plasticity, Ed. A. Sawczuk, pp 88-115, 1974.
[62] Dafalias, Y.F., Acta Mecha., 69, pp 119-138, 1987.
[63] Dafalias, Y.F., Acta Mecha., 73, pp 121-146, 1988.
[64] Hill, R., Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 77, pp 225-240, 1977.
[65] Lipinski, P., Berveiller , M., Carmasol A., SMIRT, 9, pp 45-52, Lausanne, 1987.
[66] Kröner, E., Z. Physik, 151, p 504, 1958.
[67] Kröner, E., Koch, H., Solid Mechanics Archives, 1, p 183, 1976.
[68] Eimer, C., Arch. Mech. Stos., 20, p 87, 1968.
[69] Eimer, C., Arch. Mech. Stos., 19, p 521, 1967.
[70] Bunge, H.J., Phys. Stat. Sol., 26, pp 167-172, 1968.
[71] Kröner, E., Colloque G.F.R., Ed. Huet-Zaoui, pp 15-40, 1980.
[72] Hershey, A.V., J. Appl. Mech., 21, p 236, 1954.
[73] Fassi-Fehri, O., Hihi, A., Berveiller , M., Int. J. Engng Sciences, 25, p 691, 1987.
[74] Fassi-Fehri, O., Hihi, A., Berveiller , M., Int. J. Engng Sci., 27, pp 495-502, 1989.
[75] Kneer, G., Physica Status Solidi, 9, p 825, 1965.
[76] Mura, T., J. Appl. Mech., 38, 1971.
[77] Fassi-Fehri, O., Thèse, Metz, 1985.
[78] Ralston, A., A First Course in Numerical Analysis, Mc Graw-Hill, 1965.
[79] Kleiber, M., Metoda Elementow Skonczonych, IPPT-PAN, 1985.
[80] Bathe, K.J., Prentice Hall, 1981.
[81] Jaoul, B., Dunod Ed., Paris, 1964.
[82] Ahaouari, K., Corvasce, F., Lipinski, P., Berveiller , M., Mémoires et Etudes Scien., Revue de Métall., pp 73-84, 1990.
[83] Ahaouari, K., Thèse, Metz, 1990.
[84] Corvasce, F., Schmitt, C., Lipinski, P., Berveiller , M., JNC7, Lyon, 1990.
[85] Ahaouari, K., Patoor, E., Lipinski, P., Berveiller , M., 23e Colloque du G.F.R., Bordeaux, 1988.
[86] Lemoine, X., DEA, Metz, 1991.
[87] Vieville, P., Thèse, Nancy-Metz, 1992.

[88] Ahaouari, K., Lipinski, P., Berveiller , M., C.R.A.S., 306, pp 1063-1066, 1988.
[89] Bunge, H.J., Kristall und Technik, 6, pp 677-728, 1971.
[90] Shiratori, Ikegami, Kaneko, J.S.M.E., 20, pp 1549-1556, 1977.
[91] Bui H.D., C.R.A.S., 259, pp 4509-4512, 1964.
[92] Chrysochoos, A., Thèse, Montpellier, 1987.
[93] Bevert, M.B., Holt, D.L., Titchener, A.L., Prog in Mat. Sci., 17, pp 1-191, 1967.
[94] Williams, R.O., in Experimental Methods and Materials Research, H. Hermann Ed., Intersciences, 1967.
[95] Bailey, J.E., Hirshe, P.B., Phil. Mag., 5, p 485, 1960.
[96] Seeger, A., Kronmuller, H., Phil. Mag., 7, p 897, 1962.
[97] Van Houtte, P., 7th Int. Conf. Texture of Mats, Holland, pp 7-23, 1984.
[98] Grewen, J., Wassermann, G., Texturen Metallischer Werkstoffe, Springer Verlag, Berlin, 1969.
[99] Christian, J.W., Proc. 2nd Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, 1, p 29, 1970.
[100] Gill Sevillano, J., Van Houtte, P., Aernoudt, E., Progress in Mat. Sciences, 25, 1982.
[101] Franciosi, P., Acta Metall., 31, pp 1331-1342, 1983.
[102] Montesin T., Heitzmann, J.J., Rev. Fran. Métall. (à paraître).
[103] Donadelle, Ch., IRSID, 1989, Communication personnelle.
[104] Williams, R.O., J. Appl. Phys., 39, p 4329, 1968.
[105] Penelle,R., Rapport Contrat-DRET 85093,1985
[106] Bœhler, J.P., Rapport Contrat-DRET 85093,1985
[107] Hervé, E., Zaoui, A., Eur. J. Mech. Solids, 9 , pp 247-272 , 1990
[108] Havner,K.S.,Shalaby,A.H., Proc.Roy.Soc.London, A358, pp 47-70,1977
[109] Franciosi, P., Zaoui, A., Proc. 10th Risø Symposium Denmark, pp 561-564, 1989.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 086547 0