



HAL
open science

Modélisation de l'anisotropie plastique et application à la mise en forme des tôles métalliques

Meziane Rabahallah

► **To cite this version:**

Meziane Rabahallah. Modélisation de l'anisotropie plastique et application à la mise en forme des tôles métalliques. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2007. Français. NNT : 2007METZ044S . tel-01749000

HAL Id: tel-01749000

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749000>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



THESE

Présentée par

Meziane RABAHALLAH

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz

SPECIALITE Mécanique

Modélisation de l'anisotropie plastique et application à la mise en forme des tôles métalliques

Soutenance prévue le 22 octobre 2007 devant le jury composé de :

Yvan CHASTEL	Professeur, ENSAM Paris	Président du jury
Anne-Marie HABRAKEN	Directeur de recherche, FNRS Belgique	Rapporteur
Philippe PILVIN	Professeur, Université de Bretagne Sud	Rapporteur
Dominique DANIEL	Ingénieur de recherche, Centre de recherche Alcan	Examineur
Brigitte BACROIX	Directeur de recherche, CNRS Université Paris 13	Directeur de thèse
Gérard FERRON	Professeur, Université Paul Verlaine Metz	Co-Directeur de thèse
Tudor BALAN	Maître de Conférences, ENSAM Metz	Co-encadrant
Salima BOUVIER	Maître de Conférences HDR, Université Paris 13	Co-encadrant

LPMM, Laboratoire de Physique et Mécanique
des Matériaux,
Université Paul Verlaine / ENSAM Metz
Ile du Saulcy 57045 Metz

LPMTM, Laboratoire des Propriétés Mécaniques
et Thermodynamiques des Matériaux,
CNRS, Université Paris Nord
Av. J.B. Clément, 93540 Villetaneuse

Dédicace

*A la mémoire de ma grand-mère Thassadith,
A ma mère et à mon père,
A mes sœurs et frères.*

« La plus belle expérience que nous puissions faire, c'est celle du mystère de la vie. C'est le sentiment original dans lequel tout art et toute science véritables plongent leurs racines. Quand on ne le connaît pas, quand on ne sait plus s'étonner, être émerveillé, c'est comme si l'on était mort, le regard éteint. »

Albert EINSTEIN, 1930.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord témoigner ma plus grande gratitude, doublée de mon profond respect, à Madame Brigitte BACROIX et Monsieur Gérard FERRON pour m'avoir donné l'opportunité d'effectuer ce travail de thèse, et qui ont su être présents quand il le fallait. Ensuite, mes plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur Tudor BALAN et Madame Salima BOUVIER pour m'avoir co-encadré durant cette thèse. Ils ont su m'orienter dans les bonnes directions, me proposer des solutions aux différents problèmes que j'ai pu rencontrer durant ces années de thèse. Leurs compétences et leurs qualités humaines ont été une source de motivation permanente pour moi. Leur encadrement a été tout simplement extraordinaire, autant par l'intensité des échanges que par la passion avec l'ouverture d'esprit et le scepticisme qui l'accompagne. Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Cristian TEODOSIU, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, je tiens à lui exprimer ma sincère reconnaissance pour ses innombrables questions et requêtes de faire un travail très intéressant. J'aimerais remercier également Monsieur Frédéric BARLAT, Professeur et chercheur à Alcoa Technical Center, qui a contribué à mes travaux.

Mes remerciements s'adressent également à Madame Anne Marie HABRAKEN, Directrice de recherche au FNRS, et Monsieur Philippe PILVIN, Professeur au Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux de Lorient, qui m'ont fait l'honneur d'examiner ce travail et d'en être les rapporteurs. Je remercie aussi Monsieur Yvan CHASTEL, Professeur à l'ENSAM Paris, et Monsieur Dominique DANIEL, Ingénieur de recherche au Centre de recherche Pechiney d'avoir accepté de participer à mon jury.

J'exprime également mes remerciements à la Région Lorraine pour m'avoir accordé une bourse pour ces années de thèse.

Je remercie aussi Tudor et Luc de m'avoir aidé à la préparation des travaux pratiques pendant mon ATER. Je n'oublierai pas de remercier également Badis qui a apporté les réponses à mes nombreuses interrogations concernant les aspects numériques ; j'associe également à ces remerciements les nombreux membres du LPMM et LPMTM : Nabil, Anis, Mourad, Modhar, Jérôme, Camille, Hakim, Wassila, Redha, Gerald, Nadjib, Olivier, Mohammed, Jean Philippe, Youcef...

Je témoigne ici de ma plus grande reconnaissance et profonde gratitude à mes parents pour leur soutien continu et leur appui à toute épreuve. Je n'oublierai pas bien sûr mes sœurs et frères.

Table des matières

TABLE DES MATIERES	7
INTRODUCTION GENERALE	17
I. MODELISATION DE L'ANISOTROPIE PLASTIQUE	21
I.1. Introduction	21
I.2. Modélisation micromécanique	21
<i>I.2.1. Modèle de Taylor de type Full-Constraints (FC)</i>	22
<i>I.2.2. Modèle de Bishop-Hill</i>	23
<i>I.2.3. Modèle de Taylor de type «Relaxed Constraints» (RC)</i>	25
<i>I.2.4. Modèle auto-cohérent</i>	25
I.3. Modélisation macroscopique	26
<i>I.3.1. Critère isotrope de von Mises et potentiel dual correspondant</i>	26
<i>I.3.2. Potentiel quadratique de Hill</i>	27
<i>I.3.3. Potentiel Quartus</i>	28
<i>I.3.4. Potentiel Srp93</i>	29
<i>I.3.5. Potentiel Srp2004-18p</i>	30
I.4. Calcul des puissances plastiques	31
I.5. Impact de la contrainte de référence sur les coefficients des potentiels	32
I.6. Discussion	34
Références bibliographiques	35
II. IDENTIFICATION DES PARAMETRES DES POTENTIELS PLASTIQUES	41
II.1. Introduction	41
II.2. Identification des paramètres à partir de la texture cristallographique	41
<i>II.2.1. Principe de la méthode et algorithme de minimisation</i>	42
<i>II.2.2. Choix des points de référence</i>	43
<i>II.2.3. Fonction coût utilisée pour la minimisation</i>	44
<i>II.2.4. Fonction poids pour discriminer les chargements dans l'épaisseur</i>	44
<i>II.2.5. Résultats d'identification à partir de la texture</i>	45
<i>II.2.6. Sensibilité des résultats d'identification aux paramètres numériques</i>	49
II.3. Identification des paramètres à partir des essais mécaniques	52
<i>II.3.1. Dépouillement analytique des données issues des essais mécaniques</i>	52
II.3.1.1. Traction uniaxiale : coefficient d'anisotropie et contrainte d'écoulement	52
II.3.1.2. Traction équi-biaxiale : coefficient d'anisotropie et contrainte d'écoulement	53
II.3.1.3. Cisaillement simple : contrainte d'écoulement	54
II.3.1.4. Mesure du coefficient d'anisotropie de Hill et de contrainte d'écoulement	54
<i>II.3.2. Description de la fonction coût</i>	55
<i>II.3.3. Résultats d'identification utilisant les essais mécaniques</i>	56
II.4. Stratégie d'identification combinée	62

II.5. Conclusion	63
II.6. Références bibliographiques	65
III. IMPLANTATION NUMERIQUE	71
III.1. Introduction	71
III.2. Relations cinématiques en élasto-plasticité	72
III.3. Formulation des lois de comportement	75
<i>III.3.1. Principe d'objectivité</i>	76
<i>III.3.2. Approche en critère de plasticité</i>	76
<i>III.3.3. Approche en potentiel dual</i>	77
<i>III.3.4. Comparaison des deux approches</i>	78
<i>III.3.5. Transition élasto-plastique</i>	78
III.4. Intégration temporelle de la loi de comportement	81
<i>III.4.1. Intégration implicite du modèle considéré</i>	82
<i>III.4.2. Algorithme de subdivision</i>	84
<i>III.4.3. Variables internes et lois d'érouissage</i>	85
<i>III.4.4. Module tangent cohérent</i>	86
<i>III.4.5. Algorithme d'intégration</i>	88
III.5. Validation de l'implantation numérique	89
<i>III.5.1. Essai de traction simple</i>	89
<i>III.5.2. Simulation du rail en S</i>	90
III.6. Conclusion	91
III.7. Références bibliographiques	92
IV. APPLICATIONS A L'EMBOUTISSAGE CYLINDRIQUE	97
IV.1. Introduction	97
IV.2. Description des essais étudiés	97
IV.3. Sensibilité au maillage	100
<i>IV.3.1. Prévisions des hauteurs des cornes</i>	101
<i>IV.3.2. Distribution des contraintes équivalentes</i>	102
IV.3.2.1. Cas de l'élément C3D8IH	102
IV.3.2.2. Cas de l'élément C3D8R	104
<i>IV.3.3. Distribution de la déformation</i>	105
<i>IV.3.4. Distribution des épaisseurs</i>	107
<i>IV.3.5. Discussion</i>	107
IV.4. Prédiction des cornes d'emboutissage	109
<i>IV.4.1. Calcul analytique du profil de cornes</i>	109
<i>IV.4.2. Alliage d'aluminium AA2090-T43</i>	114
<i>IV.4.3. Alliage d'aluminium AA2008-T4</i>	116
<i>IV.4.4. Discussion</i>	117
IV.5. Influence de la stratégie d'identification	117
<i>IV.5.1. Alliage d'aluminium AA6022-T43</i>	117
IV.5.1.1. Hauteur des cornes	118
IV.5.1.2. Distribution des contraintes	119

IV.5.1.3. Distribution des déformations	119
IV.5.1.4. Distribution des épaisseurs	121
IV.5.2. Acier dual phase DP600	121
IV.5.3. Matériau virtuel.....	122
IV.5.4. Comparaison du temps CPU	124
IV.6. Retour élastique.....	125
IV.7. Conclusions.....	127
IV.8. Références bibliographiques	128
V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	133
V.1. Conclusions	133
V.2. Perspectives.....	134
ANNEXES	137
Annexe A : Calcul du module tangent	137
Annexe B : Critères de convergence	138
Annexe C : Les dérivées premières et secondes des potentiels.....	139
Annexe D : Paramètres identifiés	145

Notations

VER	Volume Élémentaire Représentatif
$\boldsymbol{\varepsilon}^g$	Tenseur des déformations (échelle d'un grain)
$\boldsymbol{\sigma}^g$	Tenseur des contraintes (échelle d'un grain)
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations macroscopiques
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes macroscopiques
\mathbf{I}_4	Tenseur identité du quatrième ordre
\mathbf{I}'_4	Partie déviatorique du tenseur identité du quatrième ordre
\mathbf{d}^p	Tenseur de vitesse de déformation plastique (échelle d'un grain)
\mathbf{D}^p	Tenseur de vitesse de déformation macroscopique imposée
\mathbf{k}	Système de glissement
\mathbf{g}	Direction de glissement
\mathbf{n}	Normale au plan de glissement
$\dot{\gamma}$	Vitesse de glissement
TBH	Modèle micromécanique de Taylor-Bishop-Hill
\dot{W}^p	Travail de déformation plastique
\mathbf{L}	Gradient de vitesse de déformation
\mathbf{M}	Tenseur de Schmid
\mathbf{M}^{sym}	Partie symétrique du tenseur de Schmid
\mathbf{M}^{skw}	Partie antisymétrique du tenseur de Schmid
G	Module de cisaillement élastique
τ_c	Cission critique du système de glissement
τ	Cission réduite du système de glissement
$\boldsymbol{\omega}^L$	Spin du réseau cristallin
ψ	Potentiel dans l'espace des vitesses de déformation plastique
φ	Potentiel dans l'espace des contraintes
r	Coefficient de Lankford
a_k	Paramètres matériaux
\mathbf{X}_K	Combinaisons des vitesses de déformation plastique (potentiel Quartus)
$\tilde{\mathbf{D}}^p$	Défini par la transformation linéaire suivante $\tilde{\mathbf{D}}^p = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^p$
K	Taille du potentiel
$\ \mathbf{D}^p\ $	Norme du tenseur \mathbf{D}^p , i.e. $(D^p_{ij} D^p_{ij})^{1/2}$ dans le cas d'un tenseur à second ordre
$\tilde{\mathbf{E}}$	Vecteur des valeurs principales de $\tilde{\mathbf{D}}^p$
\mathbf{A}	Matrice des paramètres matériaux
\mathbf{T}	Tenseur de contrainte efficace
b	Exposant du potentiel Srp : $b = 4/3$ (cfc) et $3/2$ (cc)
\mathbf{D}^p_g	Tenseur de vitesse de déformation plastique (échelle d'un grain)
\mathbf{S}_g	Déviateur du tenseur des contraintes au niveau du grain
$\dot{W}^p_{TBH,g}$	Puissance plastique dans chaque grain, calculée à partir du modèle TBH
$f(g)$	Fonction de Distribution des Orientations (FDO)
\mathbf{N}	Directions dans l'espace cinq-dimensionnel des vitesses de déformation plastiques
\dot{W}^p_{POT}	Puissance plastique calculée à partir du potentiel plastique
Γ	Déformation plastique équivalente
$\dot{\Gamma}$	Vitesse de déformation plastique équivalente
θ_i	Coordonnées polaires des vitesses de déformation plastique

σ'	Tenseur déviatorique des contraintes
q_r	Facteur de contraction
FDO	Fonction de Distribution des Orientations
cfc	Cubique à face centré
cc	Cubique centrée
q	Paramètre de discrimination sur la fonction poids w_j
β_1	Paramètre de discrimination sur la fonction poids w_j
β_2	Paramètre de discrimination sur la fonction poids w_j
w_j	Poids associés à une direction \mathbf{N}_j
α	Angle par rapport à la direction de laminage (plan de la tôle)
p	Pression hydrostatique
F_{Tex}	Fonction coût d'identification à partir de la texture cristallographique
F_{Mec}	Fonction coût d'identification à partir des essais mécaniques
\mathbf{F}	Tenseur gradient de déformation
\mathbf{F}^e	Tenseur gradient de déformation élastique
\mathbf{F}^p	Tenseur gradient de déformation plastique
\mathbf{L}	Gradient de vitesse de déformation
\mathbf{L}^e	Gradient de vitesse de déformation élastique
\mathbf{L}^p	Gradient de vitesse de déformation plastique
\mathbf{V}	Tenseur symétrique positif
\mathbf{R}	Tenseur orthogonal de rotation
$\overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}}$	Dérivée temporelle objective de $\boldsymbol{\varepsilon}$
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^J$	Dérivée de Jaumann de $\boldsymbol{\varepsilon}$
\mathbf{W}	Vitesses de rotation
\mathbf{W}^e	Vitesses de rotation élastique
\mathbf{W}^p	Vitesses de rotation plastique
\mathbf{D}^p	Vitesses de déformation plastique
\mathbf{D}^e	Vitesses de déformation élastique
\mathbf{D}	Vitesses de déformation
$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$	Dérivée temporelle objective de $\boldsymbol{\sigma}$
\mathbf{C}^e	Tenseur d'élasticité d'ordre quatre
\mathbf{C}^p	Contribution plastique - tenseur d'ordre quatre
\mathbf{C}^{ep}	Module tangent - tenseur d'ordre quatre
G	Module de cisaillement
K	Module de compressibilité
"^"	Ecriture en repère tournant
$F(\boldsymbol{\sigma}, \tau, \mathbf{X})$	Critère de plasticité
τ	Variable scalaire mesure la taille du domaine élastique
\mathbf{X}	Variable tensorielle repérant le centre du domaine élastique
$\bar{\sigma}$	Contrainte équivalente
$\dot{\Gamma}$	Multiplicateur plastique
\mathbf{h}_x	Fonction d'écrouissage cinématique
h_τ	Fonction d'écrouissage isotrope
\mathbf{T}	Contrainte efficace avec $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X}$
$g(\mathbf{N})$	Fonction définie la transition élasto-plastique avec $g(\mathbf{N}) = \tau\Psi(\mathbf{N}) - \mathbf{T}:\mathbf{N}$
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incrément de déformation totale
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Incrément de déformation élastique

$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$	Incrément de déformation plastique
$\boldsymbol{\sigma}^{ee}$	Contrainte d'essai
Δt	Incrément du temps
$\Delta \Gamma$	Incrément de déformation plastique équivalente
$\boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p)$	Résidu lié au schéma d'intégration temporelle
$\bar{\boldsymbol{\rho}}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^p)$	Résidu lié au schéma de subdivision
ξ	Dérivée première du potentiel dual
ζ	Dérivée seconde du potentiel dual
R_{sat}	Saturation de la variable interne R
X_{sat}	Saturation de la variable interne X
C_R	Vitesse de saturation de la variable interne R
C_x	Vitesse de saturation de la variable interne X
R_{emb}	Rapport d'emboutissage
DL	Direction de laminage
DD	Direction diagonale – 45° par rapport à DL
DT	Direction transverse
C3D8R	Élément solide à intégration réduite
C3D8IH	Élément solide à intégration réduite sélective avec formulation mixte
xc-y	Notation du maillage x- nombre de couche, y - maillage grossier, moyen et fin

Introduction générale

Introduction générale

L'emboutissage est un procédé industriel important ; ce procédé est utilisé dans presque toutes les industries (mécanique, automobile, aéronautique, électroménager ...). Dans ce travail on se limite à l'emboutissage de tôles métalliques laminées à froid en raison de la connaissance relativement bonne des propriétés mécaniques de ces matériaux. Des besoins toujours plus diversifiés imposent aux industriels une connaissance et une compréhension accrues du comportement de ces matériaux. Parmi ces matériaux, nous nous attachons dans ce travail aux aciers et aux alliages d'aluminium. L'étude expérimentale complexe du comportement des matériaux anisotropes lors de la mise en forme, demande un temps de préparation et des moyens souvent très coûteux. A côté de cela, d'énormes progrès ont été effectués au niveau des performances des stations de calcul. Ainsi, les industriels font de plus en plus appel aux simulations numériques en se tournant vers l'implantation numérique, dans un code de calcul par éléments finis, de modèles caractérisant de mieux en mieux le comportement du matériau.

La simulation numérique des procédés de mise en forme nécessite la mise au point de modèles de comportement qui tiennent compte des sollicitations que subissent les matériaux utilisés et rendent compte de l'anisotropie plastique. Dans notre étude, nous nous focalisons sur l'anisotropie initiale du matériau, qui dépend principalement de la texture cristallographique.

La conception des potentiels plastiques demande alors une meilleure connaissance de l'anisotropie de ces matériaux. De nombreux auteurs se sont efforcés à décrire l'anisotropie du matériau en utilisant des modèles macroscopiques phénoménologiques. Ces modèles ont généralement des temps de calcul acceptables, cependant, leur pouvoir prédictif reste souvent limité. Il existe également des modèles microscopiques ou polycristallins, faisant intervenir des mécanismes de déformation à l'échelle du grain, ayant une bonne capacité de prédiction du comportement du matériau mais beaucoup trop coûteux en temps de calcul pour des simulations en emboutissage par exemple. D'autres potentiels plastiques non-quadratiques ayant une prédiction et un temps de calcul satisfaisant (avec un nombre de paramètres raisonnable) ont été élaborés par Barlat et Chung [Barlat and Chung 2007] et par Arminjon et Bacroix [Arminjon and Bacroix, 1995] et d'autres auteurs.

La détermination des paramètres des potentiels intervenant dans les lois de comportement des matériaux est une étape importante. Elle permet la meilleure représentation possible des expériences. En effet, une identification paramétrique rigoureuse avec le choix d'un modèle adéquat permet de simuler correctement les procédés de mise en forme.

Dans le but de caractériser au mieux le comportement des matériaux métalliques, nous cherchons à identifier une large classe de potentiels plastiques par des mesures de texture, faisant intervenir des simulations micro-macro et par des essais mécaniques. Ces données expérimentales sont réalisées au LPMTM ou ALCOA Center. Ensuite, la simulation numérique de l'emboutissage cylindrique va permettre la mise en évidence de la sensibilité des différents potentiels identifiés par les deux stratégies. En effet, nous disposons d'une large classe de potentiels plastiques, isotrope von Mises, quadratique de Hill'48 ainsi que les potentiels non-quadratiques de Barlat et de Quartus. On adopte par ailleurs l'hypothèse de l'écrouissage isotrope et cinématique et une loi d'écoulement plastique associée. Enfin, l'étude de sensibilité des simulations éléments finis aux potentiels plastiques ainsi qu'aux différentes stratégies d'identification a pu être menée, où nous étudions l'influence sur l'apparition des cornes d'emboutissage

Le manuscrit s'articule en quatre parties :

Le premier chapitre présente une synthèse des potentiels plastiques allant des plus classiques (isotrope) jusqu'aux modèles les plus récents (orthotrope et non-quadratique), ainsi que des modèles micromécaniques. Nous y justifions le choix de l'utilisation d'un modèle polycristallin pour l'identification paramétrique. Il est nécessaire de prendre en compte des modèles de comportement permettant de prédire l'anisotropie plastique. Plusieurs modèles de ce type sont apparus à partir des années 1930. Ce chapitre présente une revue de ces différents modèles, qui peuvent être classés en deux grandes catégories : les modèles basés sur des descriptions macroscopiques de l'anisotropie et les modèles basés sur la théorie de la plasticité cristalline. Nous tenons à préciser que de tels modèles sont nombreux, et que nous n'avons donc pas l'ambition d'en fournir une liste exhaustive. Nous avons sélectionné les plus représentatifs d'entre eux afin de donner un aperçu représentatif des différents potentiels disponibles dans la littérature, ensuite nous allons discuter de leurs avantages et inconvénients.

Le deuxième chapitre est consacré à l'identification paramétrique des potentiels plastiques. Nous présentons les algorithmes de la stratégie d'identification par des mesures de texture. Nous développons également une autre stratégie d'identification à partir des essais mécaniques. Nous allons discuter l'impact du choix des données de références ainsi que de la fonction coût de chacune des deux stratégies d'identification employées. Afin de montrer l'apport des différentes stratégies d'identification couplées avec différents potentiels, nous les avons appliquées à une série conséquente de matériaux, présentant différentes formes d'anisotropie.

Au chapitre trois nous exposons les équations du formalisme en critère classique et en approche potentiel dual. L'adoption de ce dernier soulève quelques difficultés notamment lors de l'implantation dans des logiciels de simulation par éléments finis. Nous présentons la mise en place des algorithmes d'intégration temporelle de loi de comportement élastoplastique, et les différents développements réalisés dans le sous-programme Umat. Nous avons utilisé un schéma implicite basé sur une méthode itérative de Newton Raphson. Ensuite, nous présentons un schéma de subdivision spécifique pour l'approche potentiel dual, qui répond aux problèmes de convergence instable dans le cas des potentiels plastiques non-quadratiques. Finalement, nous donnons quelques exemples de simulations pour vérifier le bien-fondé des algorithmes et montrer ce qu'il est possible de calculer dès à présent avec le sous-programme Umat.

Le chapitre quatre présente des exemples de simulations numériques réalisées avec le code de calcul éléments finis Abaqus/Standard. On commence par des tests sur la sensibilité au raffinement du maillage ainsi que du type de l'élément fini. Nous examinons les différentes stratégies d'identification couplées avec différents potentiels plastiques, permettant de prendre en compte l'anisotropie plastique lors des simulations des procédés de mise en forme. Nous discutons des avantages et inconvénients de ces différents modèles au vu de leur intégration dans un code EF. En guise de validation expérimentale, on effectue une comparaison avec des résultats expérimentaux disponibles dans la littérature.

Les références bibliographiques sont listées à la fin de chaque chapitre.

Chapitre I :

Modélisation de l'anisotropie plastique

I. Modélisation de l'anisotropie plastique

I.1. Introduction

Ce chapitre traite de la description du comportement plastique anisotrope de matériaux métalliques. Les modèles de comportement élasto-plastique peuvent être classés selon qu'ils appartiennent aux approches à base physique ou phénoménologique. Dans le cas d'une approche phénoménologique ou *macroscopique*, le comportement élasto-plastique est décrit par la définition d'une surface d'écoulement plastique initiale, de son évolution et des conditions de charge-décharge. A cette surface d'écoulement écrite classiquement dans l'espace des contraintes, on peut associer un potentiel dual écrit dans l'espace des vitesses de déformation plastique. Dans le cas d'une approche à base physique ou *micromécanique*, les grandeurs macroscopiques à l'échelle de l'élément de volume, tels que le tenseur des contraintes ou des déformations sont déduits du comportement mécanique à l'échelle des grains constituant l'élément de volume. Bien que cette approche soit plus proche de la physique de la déformation plastique, elle reste cependant d'une utilisation assez limitée en raison d'un besoin de stockage, de taille mémoire et de temps de calcul nettement supérieurs. L'approche phénoménologique est plus répandue en raison de sa commodité, de sa relative facilité de mise en œuvre numérique, de sa rapidité mais également pour la précision suffisante de ses résultats dans bon nombre de situations. Cependant, les deux approches peuvent être complémentaires.

Ce travail de thèse fait appel à différentes modélisations. Ainsi, l'approche macroscopique est retenue pour l'implantation au sein des logiciels de simulations par éléments finis, en utilisant les potentiels plastiques dans l'espace des vitesses de déformation. Cependant, l'approche micromécanique est utilisée pour la procédure d'identification. On peut trouver des études dans la littérature qui traitent le couplage micromécanique – éléments finis de façon différente, on peut citer par exemple : [Habracken et Duchêne, 2004], [Delannay, 2006]. Les différentes approches de modélisation utilisées dans ce travail sont présentées dans ce chapitre, afin de faciliter la lecture des chapitres suivants. La présentation n'est pas exhaustive, ces aspects de modélisation étant classiques. Les différents choix réalisés sont cependant discutés.

I.2. Modélisation micromécanique

La modélisation micromécanique se déroule en trois étapes : la *représentation*, la *localisation* et l'*homogénéisation*. Au cours de la première étape, on définit l'échelle caractéristique d'hétérogénéité et les propriétés mécaniques et physiques correspondantes. Dans le cas des polycristaux, l'élément de volume correspond à un ensemble de grains de même composition chimique, de même forme et de même structure cristalline. Comme la taille d'un grain est en général de l'ordre de quelques dizaines de micromètres et l'échelle macroscopique de l'ordre du millimètre, le nombre de grains contenus dans un Volume Élémentaire Représentatif (VER) est en général très important. Dans cette étape, après avoir déterminé la nature de la phase, on définit son comportement, sa fraction volumique, sa répartition spatiale de manière à établir les relations entre les grandeurs à l'échelle microscopique. Dans le cas des polycristaux, on détermine au cours de cette étape la loi de comportement à l'échelle du grain. Différentes lois de comportement à l'échelle intragranulaire existent. Le choix de l'une ou l'autre de ces lois va dépendre des

caractéristiques microstructurales du matériau mais aussi de la gamme de température et de vitesse de déformation envisagée. Dans notre étude, nous supposons que l'ensemble des grains du polycristal possèdent la même loi de comportement et ne diffèrent donc que par leur orientation cristallographique.

L'étape de « *localisation* » consiste à relier les grandeurs mécaniques locales ou à l'échelle microscopique, aux grandeurs macroscopiques. Dans le cas particulier d'un comportement linéaire élastique, cette étape se ramène à l'estimation des tenseurs de localisation en déformation \mathbf{A} ou en contrainte \mathbf{B} tels que :

$$\forall x \in V, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^g(x) = \mathbf{A}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.1)$$

$$\forall x \in V, \quad \boldsymbol{\sigma}^g(x) = \mathbf{B}(x) : \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.2)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^g$ et $\boldsymbol{\sigma}^g$ sont respectivement les tenseurs de déformations et de contraintes à l'échelle microscopique. $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont respectivement les tenseurs de déformations et de contraintes à l'échelle macroscopique. x désigne la position d'un point matériel de l'élément de volume V .

L'étape d'« *homogénéisation* » consiste à déterminer le comportement du milieu homogène équivalent associé au VER considéré, appelé comportement effectif du matériau hétérogène. A chaque instant t , le tenseur des contraintes macroscopiques $\boldsymbol{\sigma}$ (ou de déformations macroscopiques $\boldsymbol{\varepsilon}$) peut être défini comme la moyenne spatiale des tenseurs des contraintes (respectivement des déformations) locales $\boldsymbol{\sigma}^g$ (respectivement $\boldsymbol{\varepsilon}^g$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma}^g(t) \rangle \quad \text{avec} \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^g(t) \rangle = \frac{1}{V} \int \boldsymbol{\sigma}^g(t) dV, \quad (1.3)$$

ou

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^g(t) \rangle \quad \text{avec} \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon}^g(t) \rangle = \frac{1}{V} \int \boldsymbol{\varepsilon}^g(t) dV,$$

de telle sorte que $\langle \mathbf{A} \rangle = \langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{I}_4$ où \mathbf{I}_4 désigne le tenseur identité du quatrième ordre.

L'opération de moyenne spatiale est donc identifiée à une moyenne sur l'ensemble des orientations cristallines dans le cas des polycristaux. La recherche des champs mécaniques $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$ solutions des équations (1.1) et (1.2) est équivalente à la résolution d'un problème de structure sur le VER V avec des conditions aux limites imposées à son contour de type déformations homogènes ou contraintes homogènes.

I.2.1. Modèle de Taylor de type Full-Constraints (FC)

Dans ce modèle, on fait l'hypothèse de déformation plastique uniforme dans l'agrégat. Le comportement du matériau est supposé rigide-plastique et ne tient pas compte des déformations élastiques [Taylor, 1938], [Araso and Needleman, 1985], [Becker, 1990], [Neale, 1993] et [Dawson and Kumar, 1997]. L'ensemble des grains accommode le même tenseur des vitesses de déformation plastique \mathbf{d}^p , lui-même égal au tenseur des vitesses de déformation macroscopique imposée \mathbf{D}^p . Dans ce modèle, chaque système de glissement ne s'active qu'à partir d'un seuil de contrainte appelé cission critique (loi de Schmid), en dessous duquel la déformation est considérée comme nulle. De ce fait, le glissement sur cinq systèmes de glissement indépendants est généralement nécessaire pour accommoder les cinq

composantes indépendantes de la déformation plastique [von Mises, 1928]. Ce modèle constitue une borne supérieure pour le calcul du tenseur des contraintes macroscopiques. Dans ce cas, la compatibilité géométrique est assurée mais la condition d'équilibre des contraintes aux joints de grains n'est pas satisfaite. L'hypothèse de ce modèle s'avère réaliste dans le cas des matériaux à grande symétrie cristalline (par exemple cubiques) pour lesquels il existe un grand nombre de systèmes de glissement pouvant ainsi accommoder la déformation quelle que soit l'orientation initiale du grain.

Si les contraintes sont connues (*e.g.* modèle de Sachs [Sachs, 1928]), il est assez facile de déterminer les systèmes de glissement qui vont être activés et d'en déduire la rotation des grains. En revanche, si ce sont les déformations qui sont connues *e.g.* modèle de Taylor, le calcul n'est plus aussi immédiat. La solution en terme de systèmes activés et donc de rotation de grains n'est pas toujours unique. Mathématiquement, le tenseur des vitesses de déformation possède cinq composantes indépendantes (tenseur symétrique et déviatorique) et 12 ou 24 systèmes de glissements disponibles peuvent être activés. Dans sa théorie initiale, Taylor résout le problème en se basant sur le principe du travail virtuel. Le modèle de Taylor [Taylor, 1938], suppose que parmi les combinaisons de systèmes de glissement capables d'accueillir la déformation imposée, la combinaison correcte est une de celle qui minimisent le travail de déformation plastique Eq.(1.4), tout en respectant les conditions cinématiques à l'échelle du grain Eq.(1.5):

$$\dot{W}^p = \sum_{k=1}^{n_{sys}} \tau_c^k \cdot |\dot{\gamma}^k| = Min, \quad (1.4)$$

De plus,

$$d_{ij}^p = \left[\sum_{k=1}^{n_{sys}} \dot{\gamma}^k g_i^k \cdot n_j^k \right]^{Sym}, \quad (1.5)$$

où τ_c^k est la cission critique du système de glissement k , n_{sys} est le nombre total de systèmes de glissement, $\dot{\gamma}^k$ est la vitesse de glissement du système de glissement k , \mathbf{g}^k et \mathbf{n}^k représentent des vecteurs unitaires décrivant respectivement la direction de glissement et la normale au plan de glissement du système de glissement k . De manière générale, les modèles basés sur la condition énergétique Eq.**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**, considèrent l'égalité des cissions critiques. L'équation Eq.**Erreur ! Source du renvoi introuvable.** devient :

$$\sum_{k=1}^{k=n_{sys}} |\dot{\gamma}^k| = Min. \quad (1.6)$$

I.2.2. Modèle de Bishop-Hill

Pour trouver les systèmes de glissement actifs, Bishop et Hill [Bishop et Hill, 1951] ont adopté une autre approche. Cette dernière est basée sur le principe du travail maximum effectué par le tenseur des contraintes pour réaliser une déformation donnée :

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.7)$$

Dans leur modèle, Bishop et Hill permettent des cissions critiques différentes sur les systèmes de glissement, ce qui est plus proche de la réalité physique. En utilisant la représentation de la surface d'écoulement du grain dans l'espace des contraintes, Bishop et Hill montrent qu'une déformation arbitraire ne s'accorde qu'aux sommets de la surface

d'écoulement. Chaque sommet est l'intersection d'hyperplans de l'espace des contraintes, représentant chacun l'activation d'un système de glissement donné. Pour déterminer le sommet solution, ils utilisent le principe du travail maximum. Les deux approches de Taylor et de Bishop – Hill sont totalement équivalentes. On parlera donc par la suite de modèle de Taylor-Bishop-Hill.

Le modèle de Taylor-Bishop-Hill est utilisé dans ce travail comme modèle de comportement micromécanique. Le glissement cristallographique est considéré comme le seul mécanisme physique à l'origine du comportement plastique du matériau. Cette hypothèse est généralement adoptée dans le cas de la plasticité à froid des matériaux polycristallins. On peut supposer également que ce glissement a lieu sous la forme de glissement multiple à l'échelle du grain où le comportement intragranulaire est considéré homogène (*e.g.* on ne prend pas en compte l'apparition de sous-structures de dislocations, de cellules, de parois,...).

Lorsque le glissement cristallographique se produit, il a toujours lieu selon des familles de systèmes de glissement bien particulières (*i.e.* plans denses). Dans le cas des matériaux cubiques centrés, les directions de glissement \mathbf{g}^k sont celles de la famille $\langle 111 \rangle$ et les normales aux plans de glissement \mathbf{n}^k ceux des familles $\{110\}$, $\{112\}$ et plus rarement $\{123\}$. Dans le cas des matériaux cubiques à faces centrées, les directions de glissement sont celles de la famille $\langle 110 \rangle$ et les plans de glissement ceux des familles $\{111\}$. Au niveau de chaque système de glissement (k), le tenseur gradient des vitesses de déformation plastique, peut s'exprimer à l'aide de la vitesse de glissement $\dot{\gamma}^k$:

$$L_{ij}^k = \dot{\gamma}^k g_i^k n_j^k \quad (1.8)$$

En effet, plusieurs systèmes de glissement peuvent être activés à l'échelle du grain, le gradient des vitesses de déformation \mathbf{L} appliqué sur ce grain peut se décomposer en une partie induite par le glissement et une rotation du réseau cristallin $\boldsymbol{\omega}^L$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L} = \sum_k \mathbf{L}^k + \boldsymbol{\omega}^L \\ k = 1, 24 \text{ dans le cas CC} \\ 1, 12 \text{ dans le cas CFC} \end{array} \right. \quad (1.9)$$

Le tenseur de Schmid est défini par :

$$\mathbf{M}_{ij}^k = g_i^k n_j^k \quad (1.10)$$

Les parties symétrique (vitesse de déformation plastique déviatorique) et antisymétrique (spin microscopique) du tenseur gradient des vitesses peuvent s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d} = [\mathbf{L}]^{sym} = \sum_k \mathbf{M}^{sym,k} \cdot \dot{\gamma}^k \\ \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{L}]^{skw} = \sum_k \mathbf{M}^{skw,k} \cdot \dot{\gamma}^k + \boldsymbol{\omega}^L \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Les tenseurs \mathbf{M}^{sym} et \mathbf{M}^{skw} représentent respectivement les parties symétrique et antisymétrique du tenseur de Schmid \mathbf{M} . La rotation du réseau cristallin $\boldsymbol{\omega}^L$ est responsable de l'évolution de la texture [Toth et van Houtte, 1992].

La cisssion résolue peut être obtenue en projetant la contrainte appliquée sur le système de glissement du monocristal, en utilisant la matrice $\mathbf{M}^{sym,k}$ ([van Houtte, 1988]):

$$\boldsymbol{\tau}^k = \mathbf{M}^{sym,k} : \boldsymbol{\sigma}^g . \quad (1.12)$$

L'approche proposée par Schmid suppose que le glissement intervient uniquement si la cission résolue atteint une valeur critique τ_c . Cette condition peut être écrite :

$$-\tau_c^k \leq \tau^k \leq \tau_c^k \quad \Rightarrow \quad -\tau_c^k \leq \mathbf{M}^{sym,k} : \boldsymbol{\sigma}^g \leq \tau_c^k . \quad (1.13)$$

En introduisant l'hypothèse de Taylor Eq.(1.4) et l'hypothèse de Bishop et Hill Eq.(1.7), on obtient :

$$-\tau_c^k \leq \frac{\boldsymbol{\sigma}^g : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\dot{\gamma}^k} \leq \tau_c^k . \quad (1.14)$$

I.2.3. Modèle de Taylor de type «Relaxed Constraints» (RC)

Diverses variantes du modèle de Taylor ont été proposés dans la littérature [Honeff et Mecking, 1981], [Kocks et Chandra1982] et [van Houtte, 1982] afin de pallier l'absence d'équilibre des contraintes aux joints des grains.

L'idée de ce type de modèles est en partie née du constat suivant : après une certaine quantité de déformation lors du laminage, les grains tendent à devenir plats et allongés. Ceci implique que, pour des raisons géométriques, une différence entre la composante l_{13} (composante de cisaillement dans le plan (x_1, x_3) du tenseur gradient des vitesses local \mathbf{l}) et la composante L_{13} du gradient des vitesses à l'échelle macroscopique \mathbf{L} , peut être acceptable. Une première idée a été donc de ne pas imposer cette composante du gradient des vitesses et d'imposer plutôt la condition $\sigma_{13} = 0$.

De la même manière, l'hypothèse de relaxation de la composante l_{23} du tenseur gradient des vitesses local \mathbf{l} a été proposée également. Dans cette forme de modèle de Taylor RC, la résolution du problème se fait alors en imposant les conditions en contraintes ci-dessous:

$$\sigma_{13} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{23} = 0 . \quad (1.15)$$

L'équilibre des contraintes est donc satisfait à la frontière des grains pour les composantes 13 et 23 du tenseur des contraintes. Contrairement au modèle de Taylor FC, les modèles de Taylor RC sont généralement restreints à certains modes de déformation. Plus particulièrement, dans le cas du laminage, ils permettent de mieux prévoir la compatibilité des contraintes aux joints de grains en comparaison au modèle de Taylor FC.

I.2.4. Modèle auto-cohérent

Le modèle de Taylor ne prend pas en compte les interactions mécaniques entre grains. Les modèles auto-cohérents ont permis une avancée dans ce sens. Les formulations de ces modèles sont basées sur la solution d'une inclusion ellipsoïdale, représentative du grain, immergée dans un milieu homogène équivalent infini (matrice) représentant l'agrégat polycristallin. Ce formalisme est né des travaux d'Eshelby [Eshelby, 1957] réalisés dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans le cadre des déformations plastiques, ce formalisme a été repris par Kröner [Kröner 1961]. Il propose de représenter tous les grains représentatifs d'une orientation particulière par un grain sphérique, entouré d'un Milieu Homogène Equivalent (MHE) qui englobe le reste du polycristal. En utilisant le formalisme d'Eshelby, il traite ainsi l'interaction entre le grain et son environnement par une estimation du champ de contrainte

élastique causé par la déformation de l'ensemble grain - matrice polycristalline. La relation obtenue prend la forme

$$\boldsymbol{\sigma}^g - \boldsymbol{\sigma} = \beta \cdot G (\boldsymbol{\varepsilon}^g - \boldsymbol{\varepsilon}) = 2G(1 - \beta_{ES}) (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}^{g,p}) \quad (1.16)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont les tenseurs macroscopiques des contraintes et des déformations. $\boldsymbol{\varepsilon}^g$ et $\boldsymbol{\sigma}^g$ sont les tenseurs des contraintes et des déformations à l'échelle du grain représentatif. G est le module de cisaillement élastique et β est une constante. Kröner souligne que le domaine de validité de cette analyse est le domaine des très faibles déformations (< 1%). En effet, au delà de ce domaine les grains sont en écoulement plastique et l'analyse élastique n'est plus applicable. Cependant, l'idée va servir de base pour des modèles plus évolués. Ces modèles de transition d'échelle font donc le lien entre les grandeurs locales à l'échelle du grain, (*i.e.* inclusion) dans un Milieu Homogène équivalent, et les grandeurs globales à l'échelle du polycristal par un formalisme de type Eshelby. Le comportement macroscopique est obtenu en imposant l'égalité entre les champs de déformation et/ou de contrainte imposés, et la moyenne sur tous les grains des grandeurs équivalentes. L'équation qui en résulte est de type implicite et se résout de manière itérative en démarrant à partir d'une valeur approximée du comportement polycristallin. Cette catégorie de modèles est utile lorsque l'uniformité de la déformation des grains n'est pas une hypothèse raisonnable ou lorsque l'on veut une meilleure solution que celle donnée par les modèles de Sachs ou de Taylor. Lorsque le matériau possède plusieurs systèmes de glissement avec des cissions critiques différentes (*e.g.* matériau à faible symétrie cristalline) ou lorsque les grains ont initialement une grande variété de tailles et/ou de formes, l'interaction de chaque grain avec son entourage devient très directionnelle et l'anisotropie relative joue un rôle très important dans la répartition de la déformation plastique à travers la matrice. Différents modèles ont été proposés [Hill, 1965], [Berveiller et Zaoui, 1970], [Canova et Lebensohn, 1995], [Molinari *et al.*, 1997], [Masson et Zaoui, 1999], ils se différencient principalement par le comportement supposé de chaque grain et du Milieu Homogène Equivalent ainsi que par la méthode utilisée pour approximer la solution de l'équation constitutive locale non linéaire.

I.3. Modélisation macroscopique

Le formalisme en potentiel dual est appliqué pour des matériaux de structure cristalline cubique à faces centrées [Fortunier, 1989] et cubique centrée [Arminjon et Bacroix, 1991]; [Arminjon *et al.*, 1994]; [van Houtte, 1994]; [Hiwatashi *et al.*, 1997]; [van Bael et van Houtte, 2002]; [van Houtte et van Bael, 2004]. Cette approche permet une identification très efficace et directe en terme de puissances plastiques avec le modèle micromécanique.

Des simulation numériques avec le potentiel plastique basé sur la texture cristallographique ont été effectuées par [Bacroix et Gilormini, 1995]; [Szabó et Jonas, 1995]; [Hu *et al.*, 1998], [Zhou *et al.*, 1998]; [Li *et al.*, 2001].

I.3.1. Critère isotrope de von Mises et potentiel dual correspondant

L'un des critères de plasticité isotrope les plus utilisés pour les matériaux métalliques ductiles est le critère de [von Mises, 1913]. Il est défini en considérant l'écoulement plastique comme insensible à la pression hydrostatique. La propriété d'isotropie traduit l'indépendance de l'expression du critère de plasticité par rapport à tout changement de repère. Le critère de von Mises est défini dans un repère orthonormé quelconque par l'expression suivante :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (1.17)$$

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}') = \left\{ \frac{1}{2} (\sigma'_{33} - \sigma'_{22})^2 + \frac{1}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{33})^2 + \frac{1}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + 3\sigma'^2_{23} + 3\sigma'^2_{13} + 3\sigma'^2_{12} \right\}^{1/2} = \bar{\sigma}$$

où $\bar{\sigma}$ définit la contrainte équivalente. Transformé dans l'espace des vitesses de déformation, le critère se ramène à sa forme duale définissant le potentiel de von Mises et son expression s'écrit sous la forme :

$$\bar{D}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{D}^p} \quad (1.18)$$

$$\psi(\mathbf{D}^p) = \left\{ \frac{1}{3} \left[(D^p_{11})^2 + (D^p_{22})^2 + (D^p_{33})^2 + 2(D^p_{23})^2 + 2(D^p_{13})^2 + 2(D^p_{12})^2 \right] \right\}^{1/2} = \bar{D}^p$$

Dans cette expression, \bar{D}^p définit la vitesse de déformation équivalente.

I.3.2. Potentiel quadratique de Hill

Les matériaux de faible épaisseur sont des matériaux issus des opérations de laminage. Ils présentent généralement un état initial anisotrope. Cette anisotropie est souvent de type orthotrope caractérisée par trois plans de symétrie. Le repère (DL, DT, DN) est souvent adopté comme repère matériel où DL est la direction de laminage, DT est la direction transverse et DN est la direction normale au plan de la tôle. L'anisotropie d'un matériau peut être déterminée par le coefficient de Lankford ou par le coefficient d'anisotropie de Hill. Celui-ci est défini par le rapport de la vitesse de déformation plastique transversale $\dot{\epsilon}^p_{22}$ sur la vitesse de déformation plastique normale $\dot{\epsilon}^p_{33}$ d'une éprouvette en traction uniaxiale :

$$r = \frac{\dot{\epsilon}^p_{22}}{\dot{\epsilon}^p_{33}} \quad (1.19)$$

Le critère d'écoulement proposé par [Hill, 1948] (noté Hill'48) est une expression quadratique à six paramètres, qui est l'extension orthotrope du critère de von Mises [von Mises, 1913]. Le critère de Hill'48 est le critère de plasticité le plus connu et le plus ancien en plasticité des matériaux anisotropes et plus particulièrement des matériaux métalliques. Dans le repère d'orthotropie (DL, DT, DN), ce critère s'écrit :

$$\varphi(\boldsymbol{\sigma}') = \left[\frac{F}{2} (\sigma'_{33} - \sigma'_{22})^2 + \frac{G}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{33})^2 + \frac{H}{2} (\sigma'_{11} - \sigma'_{22})^2 + L\sigma'^2_{23} + M\sigma'^2_{13} + N\sigma'^2_{12} \right]^{1/2} = \bar{\sigma} \quad (1.20)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}'}$$

où les axes 1, 2 et 3 sont confondus respectivement avec DL, DT et DN. Les coefficients matériau F , G , H , L , M et N sont les coefficients caractéristiques du critère. Ils déterminent en partie la forme de la surface et le degré de son anisotropie. Le potentiel plastique dual de ce critère s'écrit sous la forme [Bacroix and Gilormini, 1995] :

$$\psi(\mathbf{D}^p) = \left[\frac{2F}{\Delta} (D_{11}^p)^2 + \frac{2G}{\Delta} (D_{22}^p)^2 + \frac{2H}{\Delta} (D_{33}^p)^2 + \frac{4}{L} (D_{23}^p)^2 + \frac{4}{M} (D_{13}^p)^2 + \frac{4}{N} (D_{12}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{D}^p, \quad (1.21)$$

$$\bar{D}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}^p : \mathbf{H}' : \mathbf{D}^p}$$

où $\Delta = FH + FG + HG$. Dans le cas isotrope, $F = G = H = 1$ et $L = M = N = 3$. On peut noter que pour certaines anisotropies (*e.g.* certains alliages d'aluminium, qui présentent souvent un coefficient d'anisotropie de Hill moyen $\bar{r} = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4} < 1$), le critère de Hill prévoit que

$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_0} < 1 \right)$ où σ_b est la contrainte d'écoulement en traction équi-biaxiale et σ_0 est la contrainte d'écoulement en traction uniaxiale. Cependant, les observations expérimentales de [Woodthorpe and Pearce, 1970] ont montré que le comportement d'un alliage d'aluminium, à l'inverse des prédictions du critère de Hill'48, est caractérisé par une limite élastique plus grande en traction équi-biaxiale qu'en traction uni-axiale (*i.e.* $\frac{\sigma_b}{\sigma_0} > 1$). Ce comportement est bien connu sous le nom du comportement « anormal » de l'aluminium. Pour en tenir compte, d'autres formes de critères ont été utilisées dans ce travail.

Les paramètres matériau F, G, \dots, N peuvent être déterminés à l'aide d'essais de traction uniaxiale dans trois directions dans le plan $\{DL, DT\}$ (F, G, H et N) et d'essais de cisaillement hors plan (L, M). Ce modèle, intégré dans un grand nombre de codes de calculs par éléments finis, est largement utilisé même dans les cas où l'anisotropie des matériaux dépasse le cas orthotrope. Le caractère quadratique du critère de [Hill, 1948] ne permet pas une bonne description des différents types d'anisotropie (*e.g.* comportement anormal de l'aluminium). Ainsi, d'autres critères non quadratiques ont été développés dans la littérature afin de pallier les limitations du critère de [Hill, 1948]. Toutefois ce potentiel permet de confronter les résultats de simulation éléments finis avec ceux d'Abaqus standard.

I.3.3. Potentiel Quartus

Arminjon et co-auteurs [Arminjon et Bacroix, 1991], [Arminjon *et al.*, 1994], [Arminjon et Imbault, 1994] ont développé un potentiel d'ordre quatre pour lequel la représentation de la surface d'écoulement dans l'espace des vitesses de déformation est reliée à la texture cristallographique.

Le potentiel plastique dual quadratique proposé par Hill n'est autre que la fonction puissance plastique pour une contrainte de référence unitaire. Cette remarque a conduit ces auteurs à étendre la méthode à une large classe de potentiels duaux définis directement comme des fonctions des composantes du tenseur des vitesses de déformation plastique. Le potentiel d'ordre quatre a été construit donc à partir de ce principe. Ce potentiel est appelé *Quartus* en référence à la puissance 4 des composantes du tenseur des vitesses de déformation plastique. *Quartus* se définit par un polynôme dépendant de 22 coefficients indépendants donné par ψ :

$$\psi(\mathbf{D}^p) = \sum_{ijkl} a_{ijkl} \frac{D_i^p D_j^p D_k^p D_l^p}{\|\mathbf{D}^p\|^3} = \sum_K a_K \frac{\mathbf{X}_K(\mathbf{D}^p)}{\|\mathbf{D}^p\|^3} = \bar{D}^p, \quad (1.22)$$

où

$$\begin{cases} X_1 = D_{11}^{p4} & X_6 = D_{11}^{p3} D_{22}^p & X_{11} = D_{11}^{p2} D_{12}^{p2} & X_{16} = D_{23}^{p2} D_{12}^{p2} \\ X_2 = \hat{D}_{22}^{p4} & X_7 = D_{11}^p D_{22}^{p3} & X_{12} = D_{22}^{p2} D_{23}^{p2} & X_{17} = D_{13}^{p2} D_{12}^{p2} \\ X_3 = \hat{D}_{23}^{p4} & X_8 = D_{11}^{p2} D_{22}^{p2} & X_{13} = D_{22}^{p2} D_{13}^{p2} & X_{18} = D_{11}^p D_{22}^p D_{23}^{p2} \\ X_4 = \hat{D}_{13}^{p4} & X_9 = D_{11}^{p2} D_{23}^{p2} & X_{14} = D_{22}^{p2} D_{12}^{p2} & X_{19} = D_{11}^p D_{22}^p D_{13}^{p2} \\ X_5 = \hat{D}_{12}^{p4} & X_{10} = D_{11}^{p2} D_{13}^{p2} & X_{15} = D_{23}^{p2} D_{13}^{p2} & X_{20} = D_{11}^p D_{22}^p D_{12}^{p2} \\ & X_{21} = D_{11}^p D_{23}^p D_{13}^p D_{13}^p & X_{22} = D_{22}^p D_{23}^p D_{13}^p D_{13}^p \end{cases}. \quad (1.23)$$

La surface de charge isotrope normalisée par la cission critique est obtenue en prenant

$$\begin{cases} a_i = 10, i = \overline{1,5} \text{ et } \overline{21,22} \\ a_i = 20, i = \overline{6,7} \text{ et } \overline{9,20} \\ a_8 = 30 \end{cases} \quad (1.24)$$

Une approche similaire à celle du potentiel plastique du 4^{ème} ordre a été développée par van Houtte et co-auteurs [van Houtte *et al.*, 1989], [van Bael, 1994], [van Houtte *et al.*, 1992] et [van Houtte, 1994]. Dans ces cas, les termes du potentiel plastique sont étendus au 6^{ème} ordre, l'anisotropie plastique est identifiée par 210 paramètres. Ce potentiel est caractérisé par une flexibilité significative, cependant, la perte de la convexité est souvent observée.

I.3.4. Potentiel Srp93

Sur les base des travaux de [Ziegler, 1977] et [Hill, 1987], Barlat et co-auteurs [Barlat *et al.*, 1993] ont proposé un potentiel plastique exprimé dans l'espace des vitesses de déformation plastique. Ce potentiel, noté Srp93, est très voisin du critère proposé par [Barlat *et al.*, 1991] qui est lui-même l'extension anisotrope du critère isotrope de [Hershey, 1954] et [Hosford, 1972]. [Barlat *et al.*, 1991] ont confronté avec succès leur critère aux prédictions des surfaces d'écoulement calculées avec des modèles polycristallins.

Le potentiel proposé par [Barlat and Chung, 1993] est développé pour les matériaux orthotropes. Ce potentiel est convexe car c'est l'extension orthotrope d'un potentiel isotrope convexe. L'extension se fait par transformation linéaire du tenseur \mathbf{D}^p . Ce potentiel est défini par :

$$\psi(\hat{\mathbf{D}}^p) = \left[\frac{1}{k} \left(\left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_3}{3} \right|^b + \left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_3 - \tilde{\mathbf{E}}_1}{3} \right|^b + \left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_3 - \tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_2}{3} \right|^b \right) \right]^{\frac{1}{b}} = \bar{D}^p, \quad (1.25)$$

où $\tilde{\mathbf{E}} = [\tilde{E}_i]$ représente le vecteur des valeurs principales de $\tilde{\mathbf{D}}^p$, lui-même défini par la transformation linéaire suivante :

$$\tilde{\mathbf{D}}^p = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^p, \quad (1.26)$$

où

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a'_2 + a'_3 & -a'_3 & -a'_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a'_3 & a'_3 + a'_1 & -a'_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a'_2 & -a'_1 & a'_1 + a'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a'_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_6 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

k , b et $\{a'_1, \dots, a'_6\}$ sont les paramètres matériau. La constante k définit la taille du potentiel. Dans le cas des calculs présentés dans ce travail, $k = 2^{1-b} + 1$ (ceci permet de faire coïncider dans le cas isotrope les deux potentiels issus des travaux de Barlat et co-auteurs et utilisés dans cette étude). L'exposant b prend les valeurs de $4/3$ et $3/2$ pour des matériaux de structure cristalline cubique centrée et cubique face centrée respectivement. Les valeurs de b proposées par [Barlat et Chung, 1993] ont été déterminées de manière à retrouver dans le cas isotrope la surface d'écoulement calculée par le modèle de Taylor-Bishop-Hill. Le cas isotrope est obtenu en prenant tous les paramètres $\{a'_1, a'_2, \dots, a'_6\}$ égaux à l'unité.

Ce potentiel est capable de décrire le comportement expérimental d'un alliage d'aluminium. En effet, il apparaît capable de prédire les coefficients d'anisotropie expérimentaux r_0 et r_{90} mais il sous-estime significativement le coefficient r_{45} . Ces observations ont conduit Barlat et co-auteurs à introduire des paramètres supplémentaires pour améliorer la prévision de r_α .

I.3.5. Potentiel Srp2004-18p

Récemment Barlat et Chung [Barlat and Chung, 2005] (ESAFORM) ont proposé une extension du potentiel Srp93 afin d'améliorer la description de l'anisotropie plastique, et ce potentiel a été validé par [Rabahallah *et al.*, 2007], sur une large classe de matériaux. Ce potentiel noté Srp2004-18p fait appel à 18 paramètres matériau tout en respectant la convexité. Ce nouveau potentiel fait appel à une double transformation linéaire du tenseur \mathbf{D}^p et s'écrit sous la forme suivante :

$$\psi(\hat{\mathbf{D}}^p) = \left[\frac{1}{2^{2-b} + 2} \left(|\tilde{\mathbf{E}}'_1|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_2|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_3|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_2 + \tilde{\mathbf{E}}'_3|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_3 + \tilde{\mathbf{E}}'_1|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_1 + \tilde{\mathbf{E}}'_2|^b \right) \right]^{\frac{1}{b}} = \bar{D}^p \quad (1.28)$$

où $[\tilde{E}'_i]$ et $[\tilde{E}''_i]$ sont les valeurs principales de $\tilde{\mathbf{D}}^{p'}$ et $\tilde{\mathbf{D}}^{p''}$ respectivement définis par les transformations linéaires suivantes :

$$\tilde{\mathbf{D}}^{p'} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{D}}^p, \quad (1.29)$$

et

$$\tilde{\mathbf{D}}^{p'} = \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{D}}^p. \quad (1.30)$$

Ici les coefficients d'anisotropie $\{a_1, a_2, \dots, a_{18}\}$ sont contenus dans les matrices \mathbf{A}' et \mathbf{A}''

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ -a_5 & -a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 0 & -a_{10} & -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{12} & 0 & -a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{14} & -a_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{18} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

La matrice \mathbf{I}'_4 est introduite pour traduire le caractère déviatorique des tenseurs des vitesses de déformation plastique :

$$\mathbf{I}'_4 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (\text{tenseur isotrope}). \quad (1.32)$$

Le cas isotrope est obtenu lorsque l'ensemble des coefficients du potentiel $\{a_1, a_2, \dots, a_{18}\}$ sont pris égaux à 1 et $b = 4/3$ ou $3/2$ pour des matériaux de structure cristalline cubique centrée et cubique face centrée respectivement.

Ce potentiel se réduit à Srp93 en prenant :

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{I}'_4 = \mathbf{A}'' \cdot \mathbf{I}'_4 = \mathbf{A}. \quad (1.33)$$

On aura donc

$$\begin{cases} a_1 = a_{10} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_3 + a'_2) \\ a_2 = a_{11} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_2 + a'_3) \\ a_3 = a_{12} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_3 + a'_1) \end{cases} \quad \begin{cases} a_4 = a_{13} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_1 + a'_3) \\ a_5 = a_{14} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_2 + a'_1) \\ a_6 = a_{15} = \frac{1}{3}(2 \cdot a'_1 + a'_2) \end{cases} \quad \begin{cases} a_7 = a_{16} = a'_4 \\ a_8 = a_{17} = a'_5 \\ a_9 = a_{18} = a'_6 \end{cases} \quad (1.34)$$

I.4. Calcul des puissances plastiques

Le modèle micromécanique prend explicitement en considération la texture cristallographique du matériau, en considérant le polycristal comme un ensemble de grains, chaque grain ayant une orientation spécifique. Pour une direction $\mathbf{N} = \mathbf{D}^p / |\mathbf{D}^p|$ donnée, le comportement plastique de l'agrégat est alors calculé à partir de la réponse de chacun de ses constituants. Ce type de modélisation repose sur un ensemble d'hypothèses à l'échelle des mécanismes de déformation microscopiques, des relations entre les conditions aux limites

imposées et l'état de contrainte et de déformation au niveau de chaque grain. Le modèle de Taylor-Bishop-Hill (TBH) [Taylor, 1938] et [Bishop et Hill, 1951] appartient à cette catégorie de modèles. Il est intéressant pour plusieurs raisons: (i) la surface d'écoulement plastique est une limite supérieure de la réponse réelle du matériau en terme de contraintes ; (ii) l'accord entre les propriétés calculées et expérimentales est tout à fait satisfaisant (iii) parmi les modèles micromécaniques, il est un des plus simples à mettre en oeuvre. Le modèle TBH est basé sur l'hypothèse d'homogénéité du champ des vitesses de déformation plastique au début de l'élastoplasticité :

$$\mathbf{d}^p = \mathbf{D}^p, \quad (1.35)$$

où \mathbf{d}^p est le tenseur des vitesses de déformation plastique dans chaque grain g . On suppose que la déformation est accommodée par glissement. Ce dernier obéit à la loi de Schmid. On suppose que les cissions critiques τ_c^α sur les systèmes de glissement α sont identiques et égales à τ_c dans tous les grains. Connaissant le tenseur des vitesses de déformation \mathbf{d}^p dans chaque grain, il est possible de calculer la puissance plastique dans chaque grain $\dot{W}_{\text{TBH},g}^p(\mathbf{d}^p) = \mathbf{S}_g : \mathbf{d}^p$, où \mathbf{S}_g est le déviateur du tenseur des contraintes au niveau du grain. Elle est déterminée par le principe de travail plastique maximal associé à la loi de Schmid. La puissance plastique moyenne pour l'agrégat polycristallin peut alors être calculée par :

$$\dot{W}_{\text{TBH}}^p(\mathbf{D}^p) = \int_g \dot{W}_{\text{TBH},g}^p(\mathbf{d}^p) f(g) dg, \quad (1.36)$$

où $f(g)$ est la Fonction de Distribution des Orientations (FDO) qui décrit la texture du matériau. L'espace d'Euler est discrétisé en 2016 orientations cristallographiques pour représenter le volume élémentaire [Daniel et Jonas, 1990]. Comme la puissance plastique est homogène de degré un en \mathbf{D}^p , elle est calculée simplement pour la direction \mathbf{N} de \mathbf{D}^p .

De même, on définit pour chaque direction \mathbf{N} une puissance plastique calculée à partir du potentiel plastique adopté :

$$\dot{W}_{\text{POT}}^p(\mathbf{N}) = \mathbf{T} : \mathbf{N} = \tau \cdot \dot{\Gamma} = \tau \cdot \psi(\mathbf{N}). \quad (1.37)$$

1.5. Impact de la contrainte de référence sur les coefficients des potentiels

L'objectif de ce paragraphe est de trouver les relations de passage entre les coefficients des potentiels étudiés dans le cas d'une normalisation par τ_c ou par σ_0 . Dans le cas d'une traction selon la direction de laminage, on impose un tenseur des vitesses de déformation plastique égal à :

$$\mathbf{D}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q_r & 0 \\ 0 & 0 & q_r - 1 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

où q est le facteur de contraction.

La condition ci-dessus conduit à la forme suivante pour le déviateur du tenseur des contraintes de Cauchy dans le repère d'essai :

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & -\frac{1}{3}\sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

En utilisant les deux tenseurs $(\boldsymbol{\sigma}', \mathbf{D}^p)$ pour calculer la puissance plastique pour une traction simple suivant la direction de laminage :

$$\dot{W}^p(\mathbf{D}^p) = \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{D}^p = \frac{2}{3}\sigma_{11} + \frac{1}{3}\sigma_{11} \cdot q_r - \frac{1}{3}\sigma_{11} \cdot (q_r - 1) = \sigma_{11} \quad (1.40)$$

On peut réécrire aussi:

$$\dot{W}^p(\mathbf{N}) = \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{N} = \frac{1}{\|\mathbf{D}^p\|} \cdot \sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1+q_r^2+(q_r-1)^2}} \quad (1.41)$$

En utilisant le potentiel plastique $\psi(\mathbf{N})$ et la loi d'écoulement associée, on obtient :

$$\dot{W}^p(\mathbf{N}) = \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{N} = \tau_c \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{N})}{\partial \mathbf{N}} : \mathbf{N} = \tau_c \cdot \psi(\mathbf{N}) \quad (1.42)$$

soit

$$\frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1+q_r^2+(q_r-1)^2}} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1+q_r^2+(q_r-1)^2}} = \tau_c \cdot \psi_0(\mathbf{N}) \quad (1.43)$$

L'indice 0 pour ψ et σ indique la direction du laminage, il s'agit donc d'un cas particulier d'une traction uniaxiale. La quantité $\psi_0(\mathbf{N})$ est calculée en normalisant le tenseur des contraintes par la cission critique τ_c . La relation Eq.(1.43) peut être écrite sous la forme :

$$\sigma_0 = \tau_c \psi_0(\mathbf{D}^p) \quad (1.44)$$

On peut également déterminer la conversion des coefficients de la manière suivante. Dans le cas de la traction uniaxiale selon la direction de laminage, quand le choix de σ_0 est adopté, $\psi(\mathbf{D}^p) = \bar{D}^p = 1$. Quand le choix de τ_c est adopté, $\psi_0(\mathbf{D}^p) = \bar{D}^p = \frac{\sigma_0}{\tau_c}$.

D'où les relations entre coefficients

$$\begin{cases} a'_i = \frac{a_i}{\psi_0(\mathbf{D}^p)} & \text{pour } Srp93, Srp2004-18p \text{ et } Quartus \\ a'_i = \frac{a_i}{(\psi_0(\mathbf{D}^p))^2} & \text{pour } von Mises \text{ et } Hill'48 \end{cases} \quad (1.45)$$

Les coefficients a'_i sont associés à la normalisation par τ_c alors que les coefficients a_i sont associés à la normalisation par σ_0 . Dans le cas isotrope, le passage des coefficients a_i

aux coefficients a'_i se fait par la multiplication des coefficients a_i par 3,062 (pour avoir $\bar{D}^p = 1$).

I.6. Discussion

Nous avons présenté dans ce chapitre les modélisations classiques de l'anisotropie plastique. Pour le modèle micromécanique nous avons choisi le modèle de Taylor Bishop Hill qui donne d'une part des résultats satisfaisants dans le cas de matériaux à symétrie cubique et d'autre part un temps de calcul raisonnable. Ensuite, nous avons présenté les différents potentiels plastiques qui sont capables de décrire l'anisotropie des matériaux, en se basant sur le nombre des paramètres et la forme mathématique du potentiel (quadratique, d'ordre quatre ou nombre des transformations linéaires). Nous avons choisi une modélisation macroscopique pour l'implantation dans les codes de calcul par éléments finis.

L'identification paramétrique que nous allons présenter au chapitre suivant est basée sur l'utilisation d'une modélisation micromécanique. Dans cet objectif, et dans une première approche, nous avons choisi le modèle de Taylor (sachant que toute autre approche pourrait être retenue dans ce cadre, moyennant un coût de calcul supplémentaire). Dans le contexte du modèle de Taylor, l'utilisation des potentiels plastiques en vitesses de déformations présente en effet un net avantage en termes de temps de calcul. Il est important de noter que notre objectif premier n'est pas de trouver des paramètres très précis pour des validations expérimentales – mais de comparer différents potentiels phénoménologiques dans un cadre cohérent. Nous reviendrons sur ce point dans les chapitres suivants. Notons que Habraken et Duchêne [Habraken et Duchêne, 2004] ont employé le modèle de Taylor pour prendre en compte l'anisotropie initiale et son évolution dans le cadre de simulations par éléments finis, en obtenant de très bonnes précisions de calcul.

Références bibliographiques

- Asaro, R.J., Needleman, A., 1985. Texture development and strain hardening in rate dependent polycrystals, *Acta Metallurgica*, 33, 923-953.
- Arminjon, M., Bacroix, B., 1991. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function, *Acta Mechanica* 88, pp. 219-243.
- Arminjon, M., Bacroix, B., Imbault, D., Raphanel, J.L., 1994. A fourth-order plastic potential for anisotropic metals and its analytical calculation from texture data, *Acta Mechanica* 107, pp. 33-51.
- Arminjon, M., Imbault, D., 1994. An analytical micro-macro model for textured polycrystals at large strain deformations, *Int. J. Plasticity* 10, pp. 825-847.
- Bacroix, B., Gilormini, P., 1995. Finite-element simulations of earing in polycrystalline materials using a texture-adjusted strain-rate potential. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 3, 1-21.
- Barlat, F., Lege D.J., Brem J.C., 1991. A six-component yield function for anisotropic materials, *Int. J. Plasticity* 7, 693-712.
- Barlat, F., and Chung K., 1993. Anisotropic potentials for plastically deformation metals. *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.* 1, 403-416.
- Barlat, F., Aretz, H., Yoon J.W., Karabin M.E., Brem J.C. and Dick R.E., 2005. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *Int. J. Plasticity*, 21, 1009-1039.
- Barlat, F., Chung, K., 2005. Anisotropic strain rate potential for aluminum alloy plasticity. In: *Proc. 8th ESAFORM Conference on Material Forming, Cluj-Napoca, Romania, April 2005*. Banabic, D., (Ed.), The Publishing House of the Romanian Academy, Bucharest, pp. 415-418.
- Becker, 1990, An analysis of shear localization during bending of a polycrystalline sheet, *Microstructural Evolution in Metal Processing*, 46.
- Berveiller, M., Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals, *J.Mech. Phys. Solids* 26, pp. 325-344.
- Bouvier, S., Rabahallah, M., Bacroix, B., Barlat, F., Balan, T., Ability of advanced plastic potentials to predict the anisotropic yielding behaviour, *Plasticity 2006*, Halifax, sur CD-ROM, 4 p. (2006)
- Bishop, J.F.W., Hill, R., 1951. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stress, *Phil. Mag.* 42, 414-427.
- Canova, G. R., Lebensohn, R., 1995. Micro-macro modelling, *Computer Simulation in Materials Science*, NOTA ASI, Ile d'Oleron, France, June 6-16.
- Daniel, D., Jonas, J. J., 1990. Measurement and Prediction of Plastic Anisotropy in Deep Drawing Steels; *Metall. Trans.*, 21A, pp. 331-343.

- Dawson, P.R., Kumar, A., 1997. Deformation Process Simulations Using Polycrystal, Large plastic deformation of crystalline aggregates, International Center for Mechanical Sciences, Courses and Lectures n° 376, Springer Ed, 247.
- Delannay, L., Jacques, P.J., Kalindidi, S.R., 2006. Finite element modeling of crystal plasticity with grains shaped as truncated octahedrons, *Int. J. Plasticity*, 22, pp. 1879-1898.
- Eshelby, J.D., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. Roy. Soc. London A* 241, pp. 376-396.
- Fortunier, R., 1989. Dual potentials and extremum work principles in single crystal plasticity. *J. Mech. Phys. Solids* 37, 779.
- Habraken, A.M., and Duchêne, L., 2004. Anisotropic elasto-plastic finite element analysis using a stress-strain interpolation method based on polycrystalline model, *Int. J. Plasticity* 20, pp. 1525-1560.
- Hershey, A. V., 1954. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic facecentered cubic crystals. *J. Appl. Mech.* 21, 241-249.
- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials, *Proc. Roy. Soc. London, A* 193, pp. 281-297.
- Hill, R., 1965. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 13, pp. 89-101.
- Hill, R., 1987. Constitutive dual potentials in classical plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 35, 22-33.
- Hiwatashi S., Van Bael A., Van Houtte P. and Teodosiu C., 1997. Modelling of plastic anisotropy based on texture and dislocation structure, *Comp. Mat. Science*, 9, 274
- Honeff, H., and Mecking, H., 1981. Analysis of the deformation texture at different rolling conditions. In : S. Nagamashi (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference on Textures of Materials*, vol.1. The Iron and Steel Institute of Japan, Tokyo, pp. 347-355.
- Hosford, W. F., 1972. A generalize isotropic yield criterion. *J. Appl. Mech.* 39, 607-609.
- Hu J.G., Jonas J.J. and Ishikawa T., 1998. FEM simulation of the forming of textured aluminum sheets, *Mat. Science Engng A*, 256, p. 51.
- Kim, D., Barlat, F., Bouvier, S., Rabahallah, M., Balan, T., Chung, K., 2007. Non-quadratic anisotropic potential based on linear transformation of plastic strain rate, *Int. J. Plasticity* 23 (2007) 1380-1399.
- Kocks, U.F., and Chandra, H., 1982. Slip geometry in partially constrained deformation, *Acta Metall.* 30, 695.
- Kröner, E., 1961. Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, *Acta Metall. Mater.* 9, pp. 155-161.

- Li, S., Hoferlin, E., Van Bael, A., 2001. Application of a texture-based plastic potential in earing prediction of an IF steel. *Advanced Engineering Materials* 3, 990-994.
- Masson, R., Zaoui, A., 1999. Self –consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behaviour for polycrystalline materials, *J. of Mechanics and Physics of Solids*, 47, 1543-1568.
- Molinari, A., Kouddane, R., and Azhi, S., 1997. On the self-consistent modeling of elastic-plastic behavior of polycrystals, *Mechanics of Materials* 26, pp. 43-62.
- Neale, K.W., 1993. Use of Crystal Plasticity in Metal Forming Simulation, *Int. J. Mech. Sci.*, 35/12, 1053-1063.
- Rabahallah, M. Balan, T. Bouvier, S. Bacroix, B. Barlat, F. Chung, C. Teodosiu, C. 2007. Ability of advanced plastic potentials to predict the anisotropic yielding behaviour, *International Journal of Plasticity. soumis*.
- Sachs, G., 1928. Zur Ableitung einer Fließbedingung, *Z. Ver. Deu. Ing.* 72, pp. 734-736.
- Taylor, G.I., 1938. Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals* 62, pp. 307-324.
- Toth, L.S., van Houtte, P., 1992. Discretization technique for orientation distribution functions, textures and microstructure, 19, 229-244.
- van Bael, A., 1994. Anisotropic Yield Loci Derived from Crystallographic Data and their Application in Finite-element Simulations of Plastic Forming Processes. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven.
- van Houtte, P., 1982. On the equivalence of relaxed Taylor theory and the Bishop-Hill theory for partially constrained plastic deformation of crystals, *Mater. Sci. Eng.* 55, pp. 69-77.
- van Houtte, P., 1988. A comprehensive mathematical formulation of an extended Taylor-Bishop-Hill model featuring relaxed constraints, the Renouard- Wintenberger theory and a strain rate sensitivity model, *Textures and Microstructures*, 8-9, 313-350.
- van Houtte, P., Mols, K., van Bael, A., and Aernoudt, E., 1989. Application of yield loci calculated from texture data, *Textures and Microstructures* 11, pp. 23-39.
- van Houtte, P., van Bael, A., Winters, J., Aernoudt, E., Hall, F., Wang, N., Pillinger, I., Hartley, P., Sturgess, C.E.N., 1992.. Modelling of complex forming processes. In: Andersen, S.I. et al. (Eds.), *Modelling of Plastic Deformation and Its Engineering Applications (Proc. of the 13th Risø Inter. Symp. on Mat. Sci.)*. Roskilde, Denmark, pp. 161–172.
- van Bael, A., van Houtte, P., 2002. Convex fourth and sixth-order plastic potentials derived from crystallographic texture. In: Cescotto, S. (Ed.), *Non Linear Mechanics of Anisotropic Materials. Proceedings of the Sixth European Mechanics of Materials Conference (EMMC6)*, Liege, Belgium, September 2002. University of Liege, pp. 51-58.
- van Houtte, P., 1994. Application of plastic potentials to strain rate sensitive and insensitive anisotropic materials, *Int. J. Plasticity*, pp. 719-748.

van Houtte, P., Li, S., and Engler, O., 2004. Taylor-Type Homogeneization Methods for Texture and Anisotropy, In : Continuum Scale Simulation of Engineering Materials, Eds D. Raabe, F. Roters, F. Barlat , L Chen, pp. 459-472.

van Houtte, P., van Bael, A., 2004. Convex plastic potentials of fourth and sixth rank for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity*, 20, 1505-1524.

von Mises, R., 1913. *Mechanik der festen Korper im plastisch-deformablen Zustand*, Nachr Konigl Ges Wiss Gottingen, Math Phys, pp. 582-592, 1913.

Woodthrope, J., Pearce, R., 1970. The anomalous behavior of aluminum sheet under balanced biaxial tension. *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.20, pp. 5.

Zhou, Y., Jonas J.J., Savoie, J., Makinde, A., and MacEwen, S.R., 1998. Effect of texture on earing in FCC metals: Finite element simulations, *Int. J. Plasticity*, 14, p. 117.

Ziegler, H., 1977. *An introduction to thermodynamics*. North Holland Publishing Company, Amsterdam

Chapitre II :

Identification des paramètres des potentiels plastiques

II. Identification des paramètres des potentiels plastiques

II.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est la caractérisation du comportement anisotrope initial d'une large classe de matériaux métalliques. La modélisation des procédés de formage des matériaux métalliques nécessite une description précise du comportement anisotrope du matériau employé. De nombreux travaux ont été dédiés à la description de l'anisotropie dans le plan de la tôle, qui est le lieu des chargements les plus courants en mise en forme des tôles. Cependant, certaines applications induisent des cisaillements dans l'épaisseur de la tôle, dont l'anisotropie devrait être connue à son tour.

Dans ce chapitre, nous présentons l'identification des paramètres des potentiels plastiques à partir de mesures de texture. Cette approche présente plusieurs avantages, notamment un grand nombre de valeurs de référence équitablement distribuées et la possibilité d'explorer les chargements dans l'épaisseur. Par la suite, nous confrontons cette approche à l'identification plus traditionnelle utilisant des essais mécaniques. Afin de montrer l'apport des différentes stratégies d'identification, nous les avons appliquées à une série conséquente de matériaux, présentant différentes formes d'anisotropie. Des applications dans le cas d'alliages d'aluminium et de plusieurs nuances d'acier sont discutées pour mettre en évidence *la flexibilité* des potentiels analysés. La robustesse des résultats par rapport aux aspects numériques liés à l'algorithme de minimisation est vérifiée. Enfin, des résultats associés au couplage des deux stratégies d'identification sont présentés.

Huit matériaux ont été sélectionnés pour cette étude, dans une tentative de représenter une large gamme de comportements plastiques anisotropes, caractéristique de la mise en forme des tôles métalliques. Pour la structure cristalline de type c.c., nous avons considéré un acier doux IF de type DC06, un acier microallié de type HSLA340 et un acier dual phase de type DP600 (l'hypothèse d'homogénéité des déformations du modèle de TBH ne rend pas compte de la réalité du comportement de ce matériau). Pour la structure cristalline de type c.f.c., nous avons considéré les alliages d'aluminium AA2008-T4, AA2090-T3, AA5182-O, AA6022-T43 et AA6016-T4. Un intérêt particulier est accordé à l'alliage d'aluminium AA6022-T43 et l'acier dual phase DP600, car nous disposons à la fois des données de références issues des mesures de textures ainsi que des essais mécaniques. Toutes les données expérimentales sont réalisées au LPMTM et ALCOA Center (LPMTM et ALCOA).

II.2. Identification des paramètres à partir de la texture cristallographique

La stratégie d'identification des coefficients d'anisotropie est basée sur la minimisation d'une fonction coût, définie par le carré des écarts entre la puissance plastique, calculée par le potentiel dual et celle calculée par la méthode discrète avec le modèle de Taylor-Bishop-Hill dans le cas d'un comportement rigide-plastique. L'espace des vitesses de déformation est discrétisé par un nombre élevé de directions de vitesse de déformation plastique (typiquement 80000 directions dans la présente étude), uniformément réparties dans l'espace à cinq dimensions des vitesses de déformation plastiques (déviatoriques).

II.2.1. Principe de la méthode et algorithme de minimisation

Les données de référence utilisées pour l'identification sont issues d'une simulation micromécanique (via le modèle de Taylor-Bishop-Hill), basée sur la texture du matériau considéré. Les « points » de référence sont définis par la direction de tenseur de vitesses de déformation plastique et le résultat utilisé pour l'identification est la puissance plastique correspondante, normée par la cisssion critique τ_c .

Les mêmes directions de vitesse de déformation sont utilisées pour calculer les puissances plastiques pour les mêmes chargements via le potentiel plastique considéré. Le choix du modèle de Taylor-Bishop-Hill pour l'identification paramétrique des potentiels en vitesses de déformation montre ici son grand intérêt : les données d'entrée pour les deux types de modélisation sont les mêmes et donc les calculs se font naturellement aux mêmes « points ». L'écart entre les deux séries de calculs est mesuré au moyen d'une fonction coût dont la minimisation permet d'identifier les paramètres optimaux. Il s'agit d'une fonction de type moindres-carrés, non linéaire. De ce fait, l'algorithme de Levenberg-Marquardt a été retenu pour la minimisation.

Le principe de cette procédure est schématisé dans la Figure II.1. Les paragraphes suivants détaillent le calcul des points de référence et de la fonction coût utilisée.

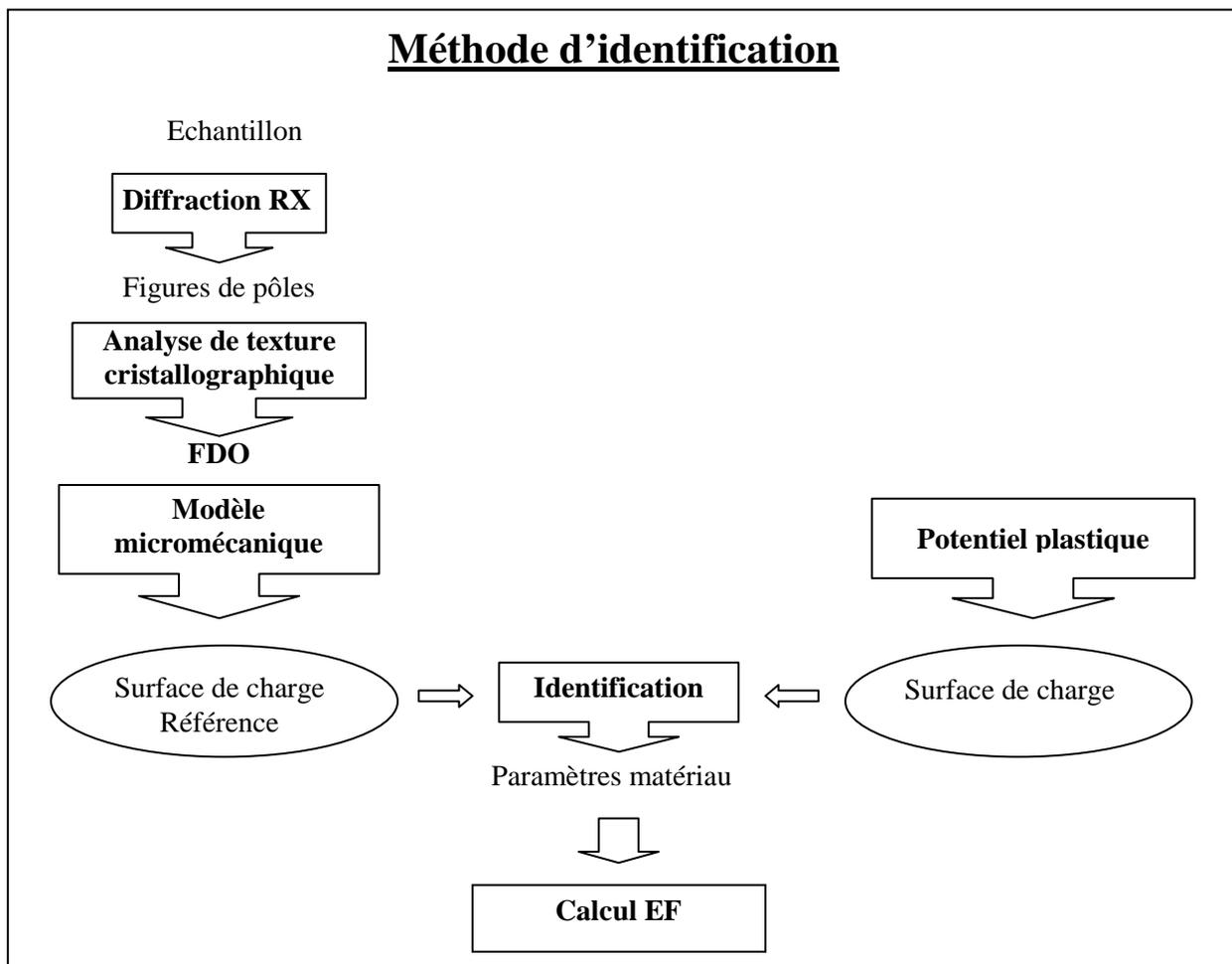


Figure II.1 Schéma général d'identification des paramètres matériau à partir de la texture cristallographique.

II.2.2. Choix des points de référence

L'un des grands avantages de l'approche basée sur la texture est de pouvoir fournir des données de référence pour l'identification de paramètres matériau correspondant à des chargements difficilement accessibles expérimentalement. Le cisaillement dans une direction comprise dans l'épaisseur de la tôle en est l'exemple le plus typique. De plus, le nombre de points de référence peut être augmenté si nécessaire, avec comme seul inconvénient une augmentation du temps de calcul micromécanique. Là aussi, le modèle de Taylor-Bishop-Hill n'est pas vraiment pénalisant Et enfin, ces points peuvent être répartis uniformément dans l'espace des chargements, afin de ne pas favoriser certains chargements particuliers lors de la minimisation de la fonction coût. Ces propriétés ne sont pas envisageables lors d'une identification par rapport aux essais mécaniques et constituent un atout de cette approche.

Pour générer des directions uniformément réparties dans l'espace cinq dimensionnel des vitesses de déformation plastiques, Gilormini et co-auteurs [Gilormini *et al.*, 1988] ont décrit ces directions à l'aide de quatre angles :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (N_{11} - N_{22}) / \sqrt{2} = \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\
 N_2 &= (N_{11} + N_{22}) \sqrt{\frac{3}{2}} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\
 N_3 &= \sqrt{2} N_{23} = \cos \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\
 N_4 &= \sqrt{2} N_{13} = \cos \theta_3 \sin \theta_4 \\
 N_5 &= \sqrt{2} N_{12} = \cos \theta_4
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

où $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta_i \leq \pi$ pour i allant de 2 à 4. La même notation à cinq composantes sera employée au chapitre suivant pour désigner des tenseurs symétriques et déviatoriques. Par la suite, l'espace défini par les quatre angles est discrétisé en un nombre prédéfini de valeurs (ici 80000), en faisant correspondre à chaque valeur une « surface » équivalente sur l'hypersphère unité [Gilormini *et al.*, 1988].

La Figure II.2 montre la répartition des points utilisés pour décrire la surface de plasticité dans l'espace des trois composantes N_1 , N_2 et N_5 (défini par Eq.(2.1)). En effet, cette méthode permet de décrire la surface finement et uniformément.

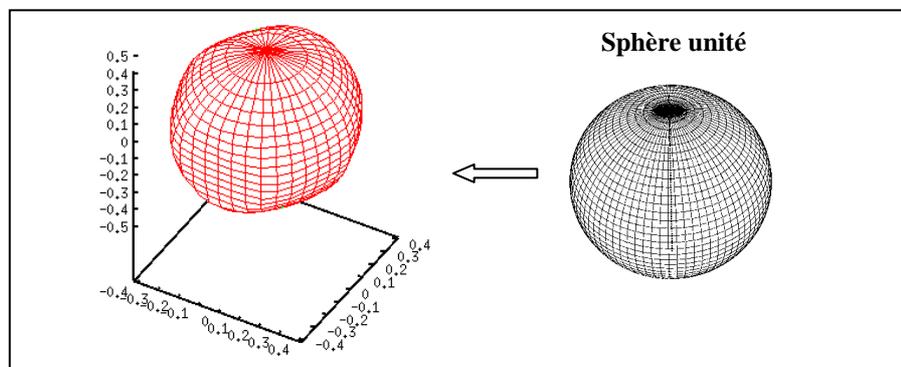


Figure II.2 Distribution des points de références sur la surface de plasticité dans l'espace des composante D_1 , D_2 et D_5 . Droite : sphère unité ; Gauche : calcul micromécanique pour une texture idéale parfaitement isotrope.

II.2.3. Fonction coût utilisée pour la minimisation

Le principe d'identification des paramètres matériau est basé sur un ajustement adéquat de puissances plastiques calculées à partir de potentiels plastiques (\dot{W}_{POT}^P) et de modèle micromécanique (\dot{W}_{TBH}^P), pour un ensemble de directions des tenseurs vitesse de déformation plastique. Les paramètres a_i du potentiel plastique sont identifiés en minimisant la fonction coût suivante :

$$F_{Tex}(a_i) = \frac{\sum_{j=1}^{80000} w_j \cdot \left[\dot{W}_{TBH}^P(\mathbf{N}_j) - \dot{W}_{POT}^P(\mathbf{N}_j, a_i) \right]^2}{\sum_{j=1}^{80000} \left[\dot{W}_{TBH}^P(\mathbf{N}_j) \right]^2}, \quad (2.2)$$

où w_j est le poids associé à \mathbf{N}_j et la puissance plastique $\dot{W}_{POT}^P(\mathbf{N}_j, a_i) = \tau_c \cdot \psi(\mathbf{N}_j, a_i)$. Quand l'expression du potentiel est une fonction linéaire des coefficients du potentiel plastique (par exemple, dans le cas du potentiel Quartus), l'identification par la méthode des moindres carrés linéaire nécessite une seule itération [van Houtte *et al.*, 1989] [Arminjon and Bacroix, 1991]. Afin de généraliser l'identification à n'importe quel potentiel plastique, le problème des moindres carrés non linéaire est résolu en utilisant l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt [Dennis et Schnabel, 1983]. Cet algorithme exige le calcul de la fonction objectif et de ses dérivés d'ordre premier par rapport aux paramètres. Le gradient de la fonction coût est donné par :

$$\frac{\partial F_{Tex}(a_i)}{\partial a_i} = \frac{\sum_{j=1}^{80000} 2 \cdot w_j \cdot \tau_c \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{N}_j, a_i)}{\partial a_i} \left[\dot{W}_{TBH}^P(\mathbf{N}_j) - \tau_c \cdot \psi(\mathbf{N}_j, a_i) \right]}{\sum_{j=1}^{80000} \left[\dot{W}_{TBH}^P(\mathbf{N}_j) \right]^2} \quad (2.3)$$

II.2.4. Fonction poids pour discriminer les chargements dans l'épaisseur

Par défaut, les poids de chaque point de référence sont considérés unitaires, afin de donner la même importance à tous les chargements. Afin de pouvoir effectuer des identifications spécifiques, par exemple en privilégiant des chargements dans le plan de la tôle, on peut donner des poids différents à différents types de chargements. Etant donné le nombre important de points, il est nécessaire de générer ces poids avec des relations qui affectent de manière cohérente le même poids aux chargements jugés similaires selon un certain critère.

Dans la perspective d'une application, les chargements dans l'épaisseur de la tôle sont souvent beaucoup moins importants que ceux dans le plan de la tôle. Dans ce contexte, une possibilité de discriminer les cisaillements dans l'épaisseur face aux chargements dans le plan de la tôle est fournie par la fonction poids ci-dessous :

$$w_j = 1 + \beta_1 \cdot \left[\left(\frac{1 + \cos \left[\frac{\pi \sqrt{(N_{13,j})^2 + (N_{23,j})^2}}{2} \right]}{2} \right)^{\frac{2}{q}} - 1 \right] \quad (2.4)$$

où β_1 et q sont deux constantes prenant des valeurs entre 0 et 1 (bien que mathématiquement, le paramètre q peut prendre n'importe quelle valeur positive). Les graphes ci-dessous illustrent l'effet des deux paramètres d'ajustement sur les poids générés. Cette formule est entièrement euristique et d'autres expressions peuvent être imaginées afin de favoriser ou discriminer des chargements plus spécifiques.

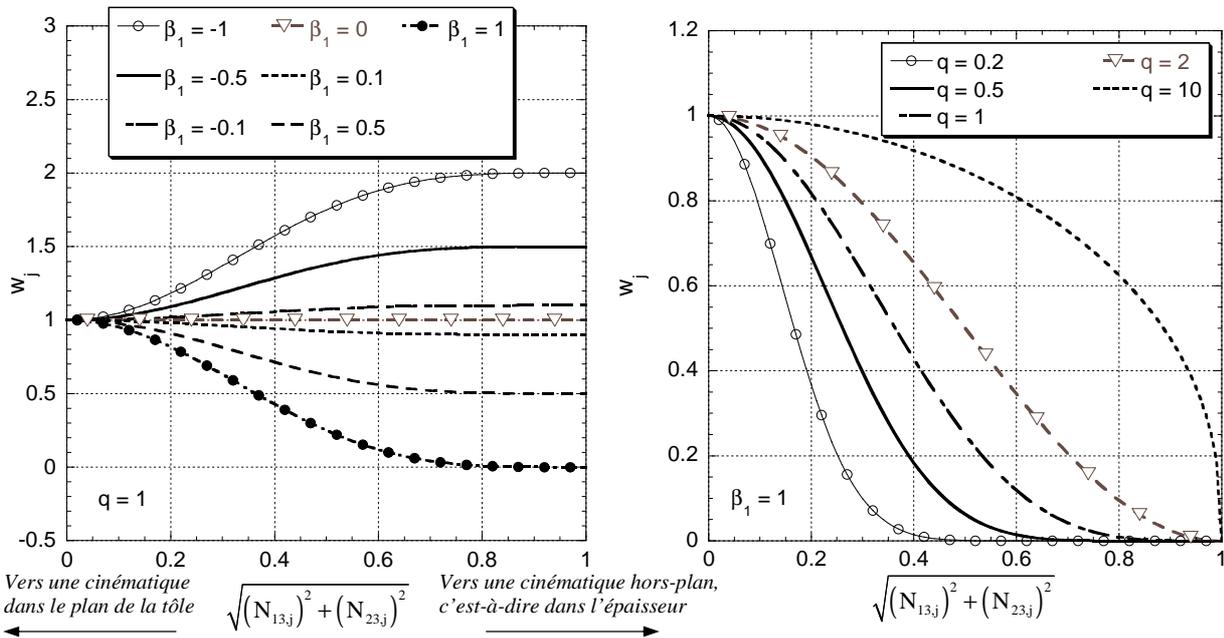


Figure II.3 : Influence des paramètres β_1 et q sur la fonction poids w_j .

II.2.5. Résultats d'identification à partir de la texture

Dans ce paragraphe, la méthode d'identification décrite ci-dessus a été appliquée pour identifier les paramètres de tous les potentiels décrits au chapitre précédent, en utilisant les huit matériaux utilisés pour l'étude pour lesquels on a pu mesurer la texture. Cette étape a généré un grand nombre de résultats qui nous ont permis de confronter les différents modèles entre eux et d'en extraire les principaux avantages et faiblesses. Nous représentons dans ce chapitre ces résultats sous forme de surfaces de plasticité en contraintes planes principales, de graphes $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$ correspondant à la traction uniaxiale et enfin, par la valeur de la fonction coût obtenue après identification. L'ensemble des paramètres identifiés dans notre étude est récapitulé en annexe.

Comme le montre clairement la Figure II.4, les prédictions des potentiels quadratiques sont nettement améliorées par les potentiels Srp2004-18p et Quartus. Les profils de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$ correspondants sont présentés par la Figure II.5 et la Figure II.6. Les données issues des essais expérimentaux sont aussi indiquées. Notons cependant que ces données expérimentales n'ont pas été utilisées dans la phase d'identification présentée dans ce paragraphe. On observe

des anomalies dans la prédiction des valeurs de $r(\alpha)$ expérimentales, en particulier dans le cas où le comportement anisotrope est prononcé (par exemple l'acier DC06 et l'alliage d'aluminium AA6022-T43). Ce résultat peut être lié à deux raisons : (i) la capacité du modèle TBH a bien décrire les profils de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$, (ii) le poids relatifs des sollicitations de traction hors-axes (sept directions du tenseur vitesse de déformation plastique parmi 80000) dans la fonction coût. Ceci suggère que ces deux mesures importantes d'anisotropie méritent d'être incluses dans la fonction coût avec des poids judicieusement choisis pour améliorer l'identification.

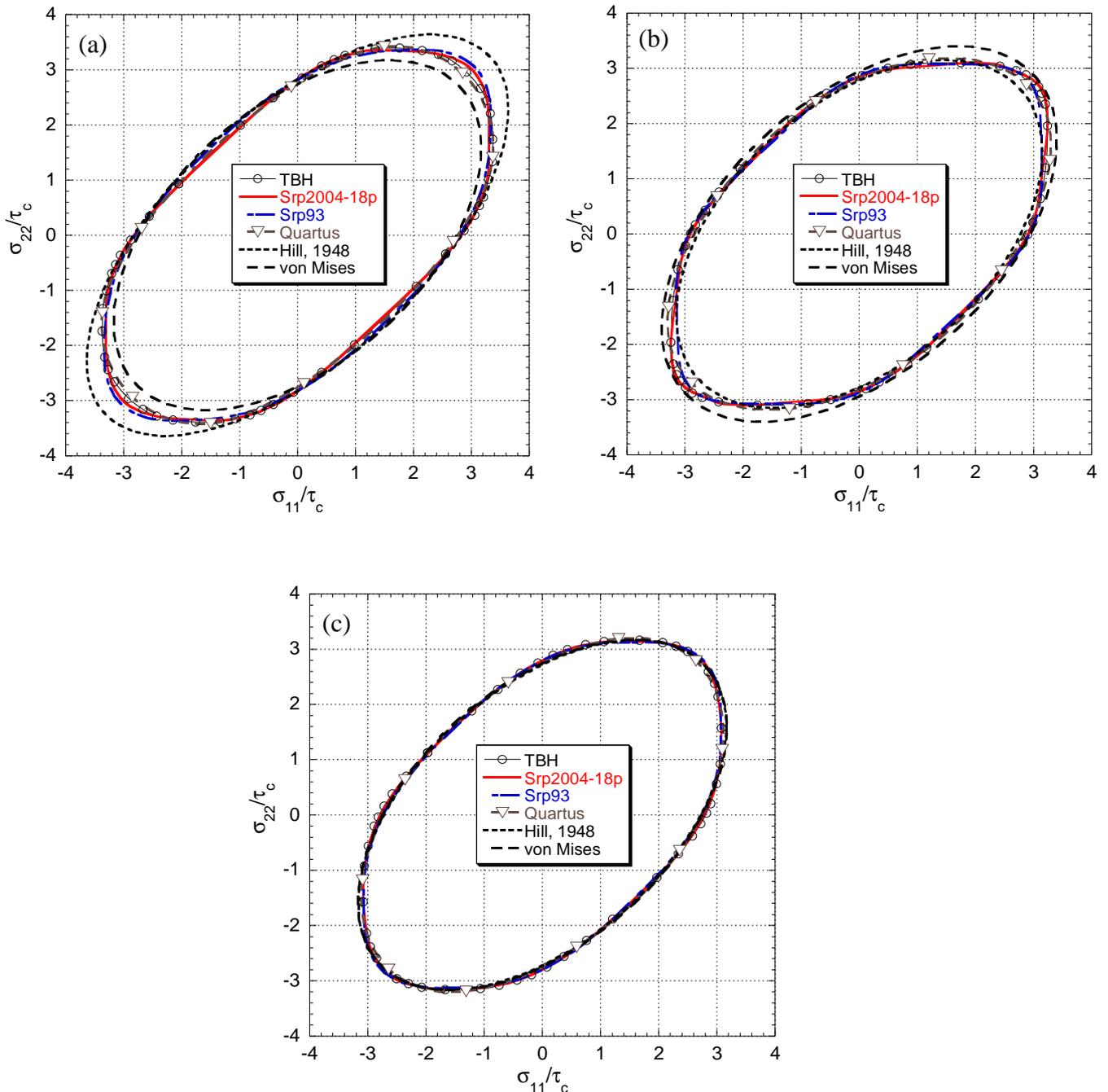


Figure II.4 Surfaces de charges de plusieurs potentiels prédites par l'identification à partir de la texture. (a) Acier doux DC06, (b) Alliage d'aluminium AA6022-T43, (c) Acier dual phase DP600.

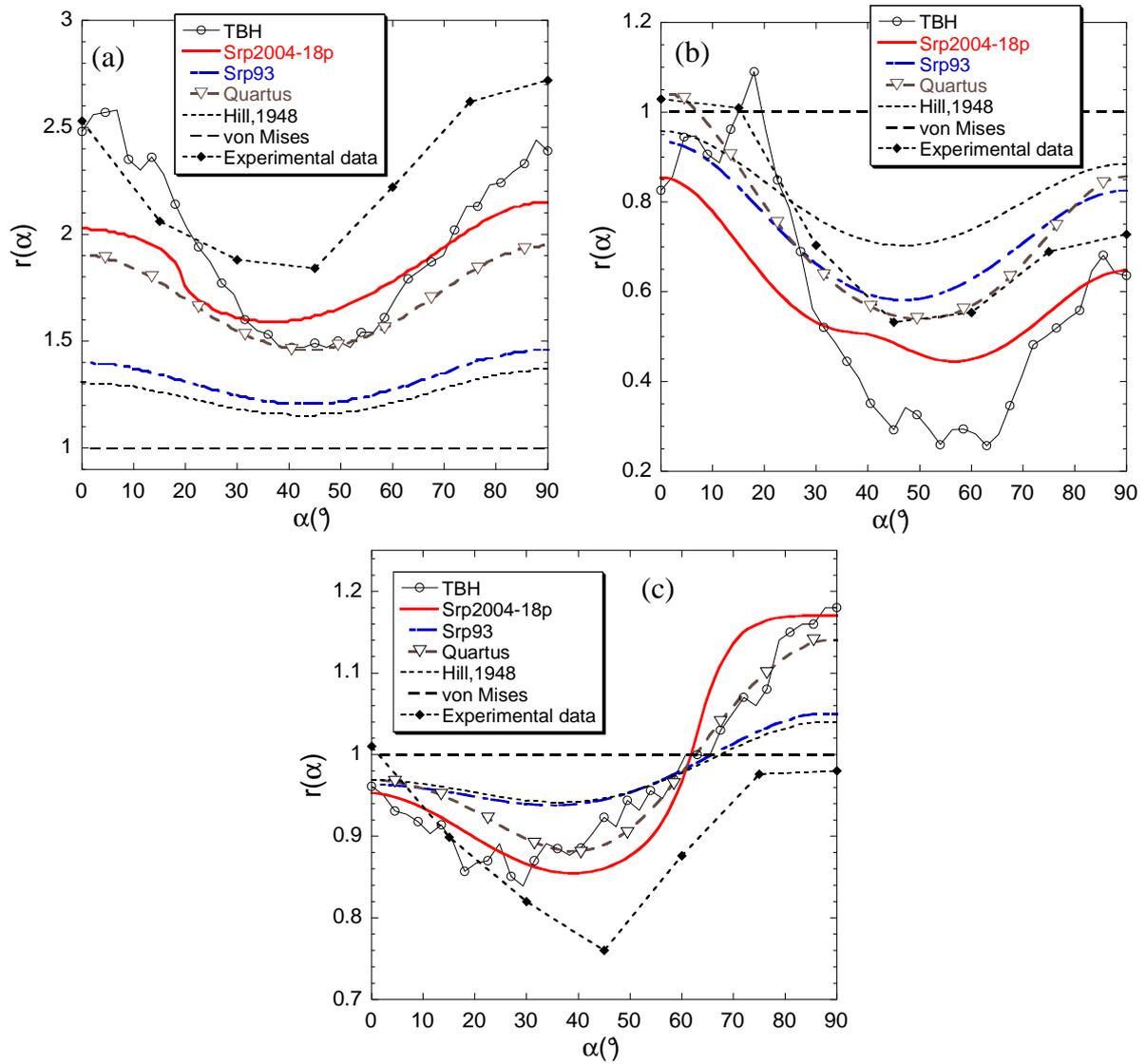


Figure II.5 Profils de $r(\alpha)$ avec différents potentiels dont les paramètres matériau sont identifiés à partir de la texture. (a) Acier doux DC06, (b) Alliage d'aluminium AA6022-T43, (c) Dual phase DP600.

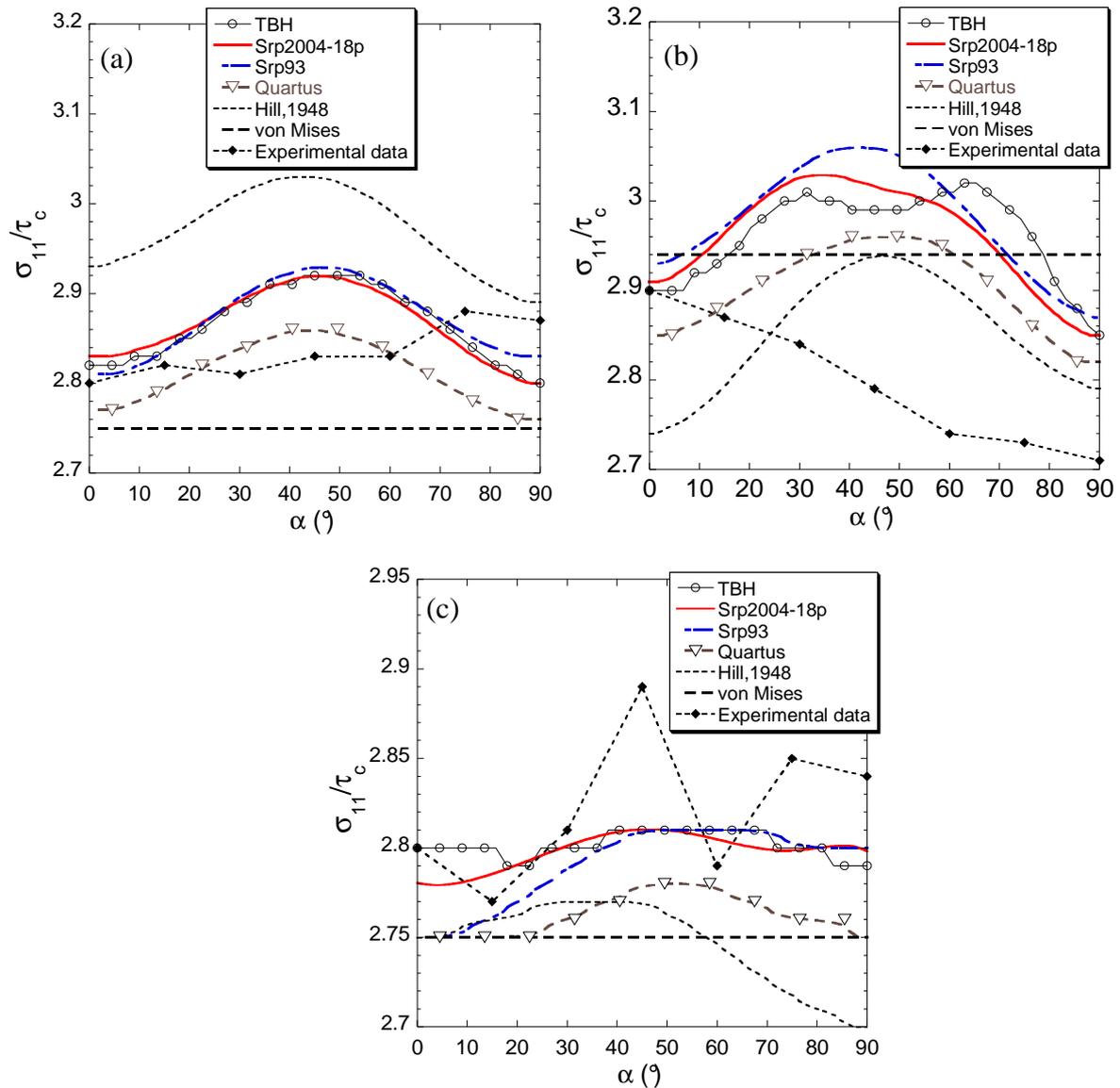


Figure II.6 Contraintes d'écoulement de plusieurs potentiels, obtenues par identification à partir de la texture. (a) Acier doux DC06, (b) Alliage d'aluminium AA6022-T43, (c) Dual phase DP600.

La Figure II.7 récapitule toutes les valeurs de la fonction coût (Eq.(2.2)), obtenues après identification des potentiels [Rabahallah *et al.*, 2006], [Bouvier *et al.*, 2006] et [Rabahallah *et al.*, 2007]. Notons que l'identification à partir de la texture permet une comparaison cohérente entre les différents potentiels (la fonction coût est calculée sur 80000 points de la surface d'écoulement, uniformément répartis). On observe clairement que Srp93 donne de meilleures prédictions par rapport à Quartus dans le cas des alliages d'aluminium, alors que Quartus permet une meilleure description pour tous les aciers examinés. Ce même constat a été déjà fait par [Bacroix *et al.*, 2003] en utilisant une autre série de matériaux (au total, une dizaine de nuances d'acier et une dizaine de nuances d'aluminium). Cependant, on observe que le potentiel Srp2004-18p améliore de manière significative la description de la surface de plasticité par rapport à Srp93 et à Quartus, pour l'ensemble des matériaux étudiés. Ainsi, parmi les potentiels considérés dans ce travail, Srp2004-18p offre le plus de flexibilité en terme de description du comportement anisotrope. Ce type de résultat peut intéresser

fortement la communauté de la mise en forme, dans le contexte de l'augmentation continue du nombre de modèles disponibles dans la littérature. C'est l'un des principaux intérêts de l'identification basée sur la texture.

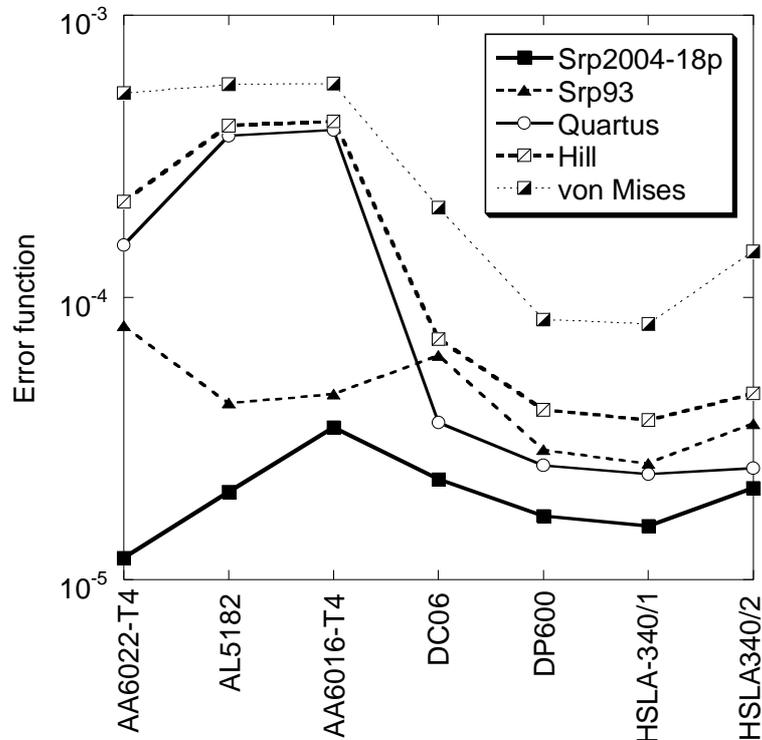


Figure II.7 Fonction coût pour plusieurs matériaux c.c. (acier doux DC06, acier dual phase DP600 et acier micro-allié HSLA avec différentes épaisseurs) et matériaux c.f.c. (AA5182-O, AA6022-T4 et AA6016-T4) en utilisant plusieurs potentiels.

II.2.6. Sensibilité des résultats d'identification aux paramètres numériques

Malgré la robustesse et l'efficacité de l'algorithme de minimisation utilisé, une étude de sensibilité des résultats d'identification aux paramètres d'entrée (solution initiale, choix des poids) a été soigneusement effectuée. Les conclusions de cette étude sont rendues ici par rapport à l'alliage d'aluminium AA6022-T43.

Les Figure II.8 et Figure II.9 montrent la sensibilité de l'identification des paramètres du potentiel Srp2004-18p par rapport à la solution initiale. La surface d'écoulement obtenue est quasiment insensible. En revanche, une sensibilité plus marquée est observée dans le cas des profils de $r(\alpha)$ bien qu'un poids plus important ait été imposé pour les directions de sollicitation dans le plan de la tôle (*i.e.* $\beta_1=q=1$). Rappelons que les coefficients d'anisotropie ne sont pas utilisés pour l'identification. Notons aussi que Srp2004-18p est le seul potentiel, de par sa flexibilité mathématique supérieure, à présenter une sensibilité à la solution initiale (ce qui semble indiquer que la fonction coût correspondante présente des *minima* locaux). Bien que des algorithmes de minimisation globale soient disponibles, ils sont très peu utilisés pour les applications dans les sciences pour l'ingénieur, étant donnés leurs temps de calcul prohibitifs. Cependant, dans le cas présent, il ne semble pas nécessaire d'adopter un tel algorithme. En effet, même si les prédictions des coefficients d'anisotropie sont différentes selon les différentes solutions initiales, les écarts qui séparent ces prédictions sont inférieurs à la marge d'erreur du modèle de Taylor-Bishop-Hill par rapport aux mesures expérimentales

(qui peuvent être à leur tour dans une marge d'erreurs). Deuxièmement, il serait difficile objectivement de choisir un parmi ces résultats, étant donnée que la valeur de la fonction coût finale ne change quasiment pas d'un cas à l'autre. De ce fait, on peut utiliser un algorithme de minimisation classique pour ces applications. Nous avons cependant systématiquement testé plusieurs solutions initiales (aléatoires) pour Srp2004-18p afin de vérifier ces aspects et de conforter les résultats obtenus.

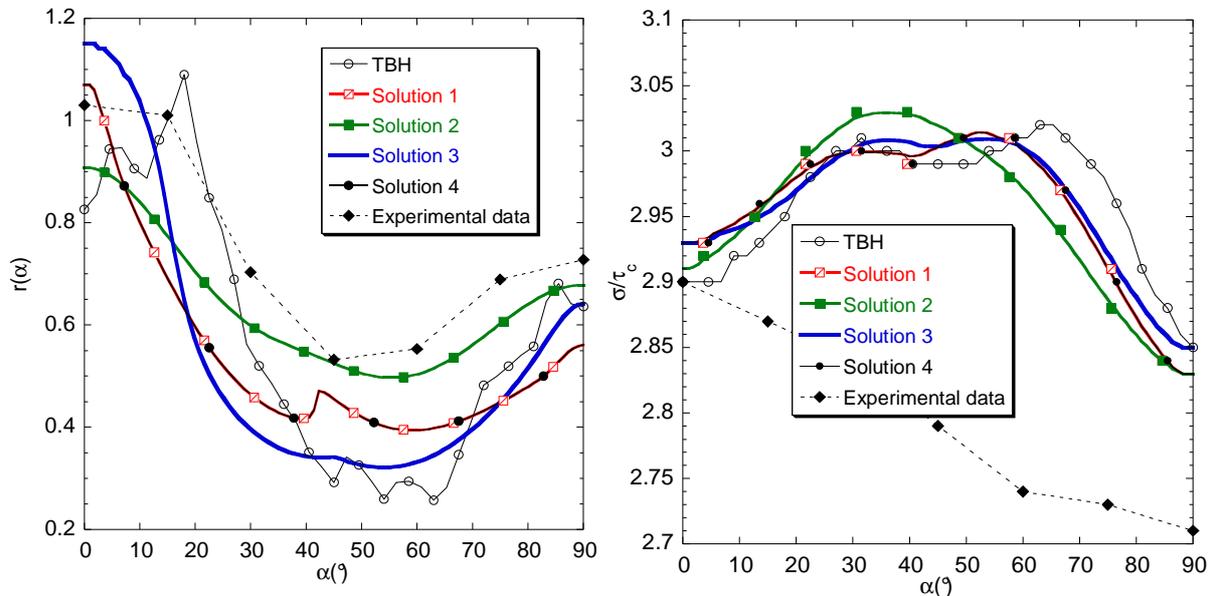


Figure II.8 Alliage d'aluminium AA6022-T43, profils de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$: analyse de la sensibilité de l'identification à la solution initiale des paramètres matériau dans le cas de Srp2004-18p avec $\beta_1 = 1$ et $q = 1$.

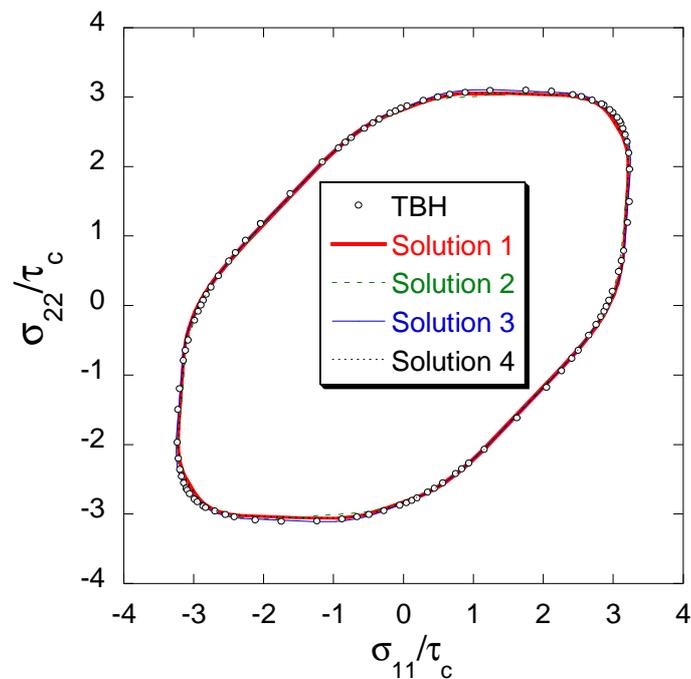


Figure II.9 Alliage d'aluminium AA6022-T43, surface d'écoulement : analyse de la sensibilité de l'identification à la solution initiale des paramètres matériau dans le cas de Srp2004-18p avec $\beta_1 = 1$ et $q = 1$.

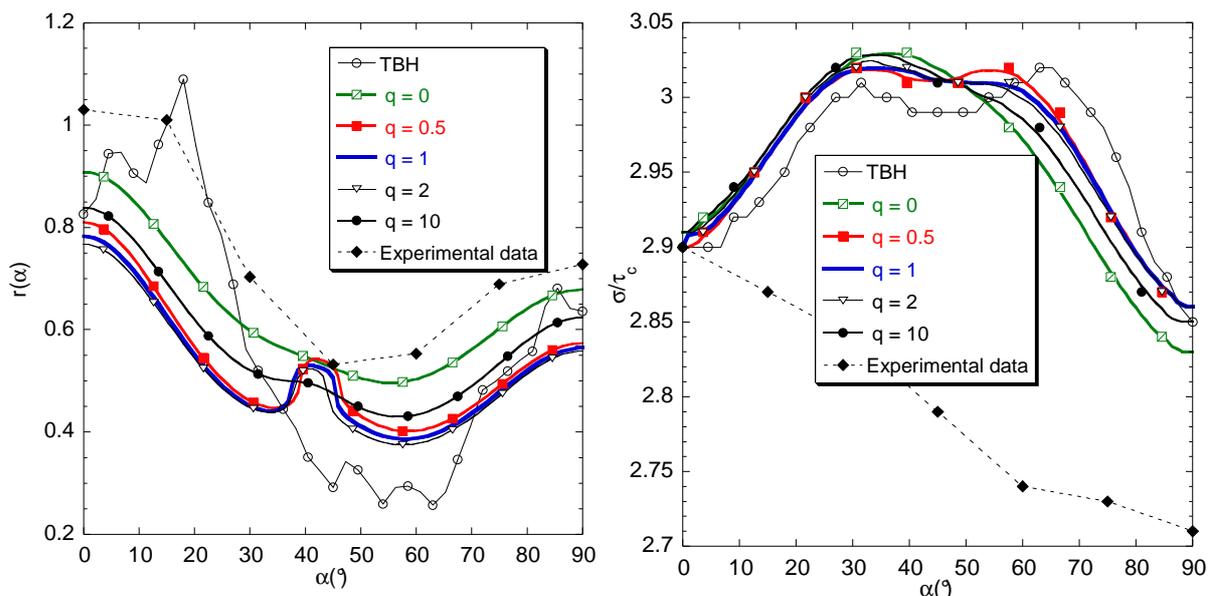


Figure II.10 Alliage d'aluminium AA6022-T43: analyse de l'influence du paramètre « q » sur l'identification par la texture du potentiel Srp2004-18p, avec $\beta_1 = 1$.

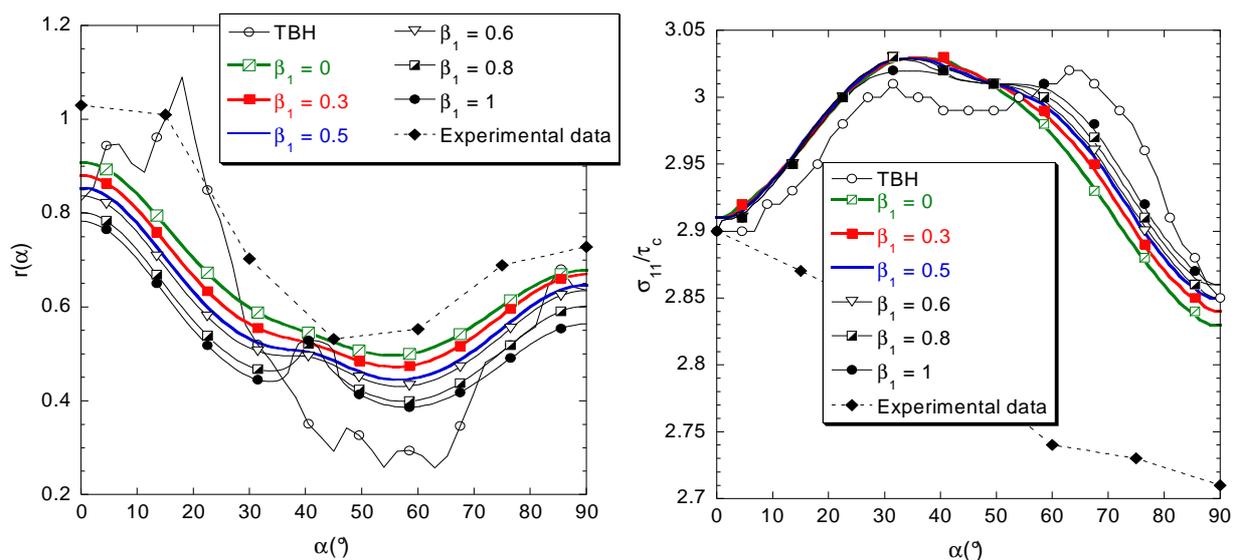


Figure II.11 Alliage d'aluminium AA6022-T43: analyse de l'influence du paramètre « β_1 » sur l'identification par la texture du potentiel Srp2004-18p, avec $q = 1$

Un poids spécifique w_j (Eq.(2.4)) peut être imposé pour des directions particulières de chargement (via un choix judicieux des paramètres β_1 et q). Ce facteur permet d'imposer un faible poids aux modes de cisaillement dans l'épaisseur. D'après les résultats présentés sur les figure II.10 et II.11, on constate une sensibilité significative des résultats par rapport à ces deux paramètres β_1 et q . On peut rappeler que l'identification sur les essais mécaniques donne des meilleures descriptions, en utilisant le potentiel Srp2004-18p, en terme des coefficients d'anisotropie. Elle peut cependant générer des aberrations qui peuvent, à leur tour, avoir un impact sur les résultats éléments finis, comme la formation des cornes d'emboutissage (voir le chapitre IV) et doivent être manipulées avec attention en présence de potentiels très flexibles. On n'observe aucune aberration pour les valeurs $q=1$ et $\beta_1=0$, cependant, ces dernières commencent à apparaître pour des valeurs de $q=1$ et $\beta_1>0.6$.

II.3. Identification des paramètres à partir des essais mécaniques

Cette technique d'identification utilise des données issues des essais mécaniques (les coefficients d'anisotropie de Hill $r(\alpha)$ et les contraintes d'écoulement initiales $\sigma(\alpha)$ où α est l'angle entre la direction de traction et celle de laminage). Le nombre et le type d'essais mécaniques (*e.g.* traction uniaxiale, traction équibiaxiale, traction plane, cisaillement simple,...) utilisés dépendent souvent du nombre des paramètres matériau à identifier et leur affectation dans l'expression du potentiel. Dans le cas de matériau de faible épaisseur, la difficulté de caractérisation mécanique du comportement dans l'épaisseur nécessite la génération de pseudo données expérimentales pour l'identification des paramètres matériau associés aux composantes D_{13}^p et D_{23}^p du potentiel plastique.

II.3.1. Dépouillement analytique des données issues des essais mécaniques

II.3.1.1. Traction uniaxiale : coefficient d'anisotropie et contrainte d'écoulement

Dans ce qui suit, les axes {1, 2 et 3} représentent le repère de sollicitation. Les axes {x, y et z} représentent le repère d'orthotropie, où x est la direction de laminage, y la direction transverse et z la direction normale. L'angle α désigne l'angle entre l'axe x et l'axe 1. Dans le cas d'une traction hors-axes uniaxiale le long de la direction 1, on impose un tenseur vitesse de déformation plastique sous la forme suivante:

$$\mathbf{D}^p = D_{11}^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -q(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & q(\alpha)-1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

où q est le facteur de contraction. En introduisant le coefficient d'anisotropie de Hill $r(\alpha)$, l'Eq.(2.5) devient :

$$\mathbf{D}^p = -D_{33}^p \begin{bmatrix} 1+r(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & -r(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Le fait d'imposer une valeur arbitraire pour l'une des composantes de \mathbf{D}^p ne réduit en rien la généralité des résultats ci-dessous, étant donnée que la modélisation retenue dans ce travail est la plasticité indépendante du temps. La condition $\text{trace}(\mathbf{D}^p) = 0$ laisse une seule composante indéterminée : $q(\alpha)$ ou $r(\alpha)$ suivant l'écriture utilisée. Le tenseur des contraintes qui en résulte est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où σ_{12} doit rester faible devant σ_{11} .

On détermine les composantes de la direction du tenseur vitesse de déformation $\hat{\mathbf{N}}$ dans le repère d'orthotropie :

$$\|\mathbf{D}^p\| = \sqrt{1 + q^2 + (q-1)^2} = \sqrt{2(q^2 - q + 1)}, \quad (2.8)$$

et

$$\hat{\mathbf{N}} = \mathbf{R}^T \mathbf{N} \mathbf{R} \quad \text{où} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Afin de déterminer la valeur de $q(\alpha)$ ou $r(\alpha)$, on minimise la puissance plastique $\dot{W}^p(\hat{\mathbf{N}}) = \tau_c \cdot \psi(\hat{\mathbf{N}})$ par rapport à $q(\alpha)$ ou $r(\alpha)$. En réalité, on considère que le tenseur des contraintes est normalisé par τ_c . Ceci revient à effectuer une minimisation du potentiel plastique $\psi(\hat{\mathbf{N}})$ par rapport à $q(\alpha)$ ou $r(\alpha)$.

Le déviateur du tenseur des contraintes dans le repère d'orthotropie est déterminé par la relation suivante :

$$\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}'}{\tau_c} = \frac{\partial \psi(\hat{\mathbf{N}})}{\partial \hat{\mathbf{N}}}. \quad (2.10)$$

Afin de calculer la pression hydrostatique p , on utilise la condition d'état de contraintes planes en traction uniaxiale, conduisant à :

$$\sigma'_{zz} = -p = \tau_c \frac{\partial \psi}{\partial D_{zz}^p}. \quad (2.11)$$

et par conséquent :

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + p = \sigma'_{xx} - \sigma'_{zz} = \tau_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial D_{xx}^p} - \frac{\partial \psi}{\partial D_{zz}^p} \right) \quad (2.12)$$

Le changement de repère permet d'aboutir au tenseur des contraintes défini par l'Eq.(2.7).

II.3.1.2. Traction équi-biaxiale : coefficient d'anisotropie et contrainte d'écoulement

On impose un tenseur vitesse de déformation plastique sous la forme suivante

$$\mathbf{D}^p = D_{xx}^p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 \\ 0 & 0 & -1 - r_b \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad r_b = \frac{D_{yy}^p}{D_{xx}^p}. \quad (2.13)$$

Le tenseur des contraintes qui en résulte est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

L'inconnue r_b dans l'Eq.(2.13) est déterminée en imposant la condition $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 0$. Cette condition peut également s'écrire :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} = \tau_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial D_{xx}^p} - \frac{\partial \psi}{\partial D_{yy}^p} \right) = 0, \quad (2.15)$$

soit finalement

$$\frac{\partial \psi}{\partial D_{xx}^p} - \frac{\partial \psi}{\partial D_{yy}^p} = 0. \quad (2.16)$$

La résolution de cette équation permet également de déterminer $\sigma_b = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$, en utilisant l'état de contrainte plane pour la détermination de la pression hydrostatique :

$$\sigma_b = \tau_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial D_{xx}^p} - \frac{\partial \psi}{\partial D_{zz}^p} \right) \quad (2.17)$$

II.3.1.3. Cisaillement simple : contrainte d'écoulement

On impose un tenseur vitesse de déformation plastique sous l'une des formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^p &= D_{xy}^p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{cisaillement dans le plan } \{x,y\} & \text{ ou} \\ \mathbf{D}^p &= D_{xz}^p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{cisaillement dans le plan } \{x,z\} & \text{ ou .} \\ \mathbf{D}^p &= D_{yz}^p \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{cisaillement dans le plan } \{y,z\} & \end{aligned} \quad (2.18)$$

Les contraintes d'écoulement sont déterminées par :

$$\sigma_{xy} = \tau_c \frac{\partial \psi}{\partial D_{xy}^p}, \quad \sigma_{xz} = \tau_c \frac{\partial \psi}{\partial D_{xz}^p}, \quad \sigma_{yz} = \tau_c \frac{\partial \psi}{\partial D_{yz}^p}. \quad (2.19)$$

II.3.1.4. Mesure du coefficient d'anisotropie de Hill et de contrainte d'écoulement

Une grille (15x15mm²) composée de 25 carreaux est imprimée par sérigraphie dans la zone utile d'une éprouvette de traction uniaxiale ISO80x20. Lors de l'essai de traction uniaxiale, des photos de la grille initiale et déformée sont prises à différent taux de déformation. La première étape pour la mesure du coefficient d'anisotropie du matériau est le traitement des photos issues des essais de traction uniaxiale, à l'aide d'un logiciel développé au laboratoire PMTM. L'objectif étant d'extraire des coordonnées des nœuds des grilles issues des photos numérisées (voir Figure II.12 (b)). La deuxième étape est la détermination du coefficient d'anisotropie $r(\alpha)$ de Hill par l'utilisation d'une routine MATLAB développée également au laboratoire PMTM, avec :

$$r(\alpha) = \frac{D_{22}^p}{D_{33}^p} = -\frac{D_{22}^p}{D_{11}^p + D_{22}^p}, \quad (2.20)$$

Comme la précision de la mesure de $r(\alpha)$ est relativement faible pour des déformations longitudinales inférieures à quelques pourcents, on se contente souvent par les méthodes

conventionnelles à corrélérer les valeurs de ce coefficient obtenues pour différentes orientations α à la même déformation longitudinale (par exemple 10% ou 15%), en admettant ainsi que l'écroutissage du matériau est purement isotrope. Par contre, en utilisant la méthode d'acquisition des déformations par traitement d'images développée au LPMTM et des grilles de très bonne qualité, il est possible d'obtenir des mesures fiables des déformations longitudinales et transverses à partir d'environ 3% de déformation vraie (voir Figure II.12, (a)), donc pour des points assez proches de la surface de plasticité initiale. Par ailleurs, la méthode expérimentale proposée permet d'obtenir l'évolution de $r(\alpha)$ avec la déformation logarithmique ϵ_{11}^p variant dans un large intervalle de déformation comme le montre l'exemple illustré par la figure ci-dessous jusqu'à même l'apparition de la striction.

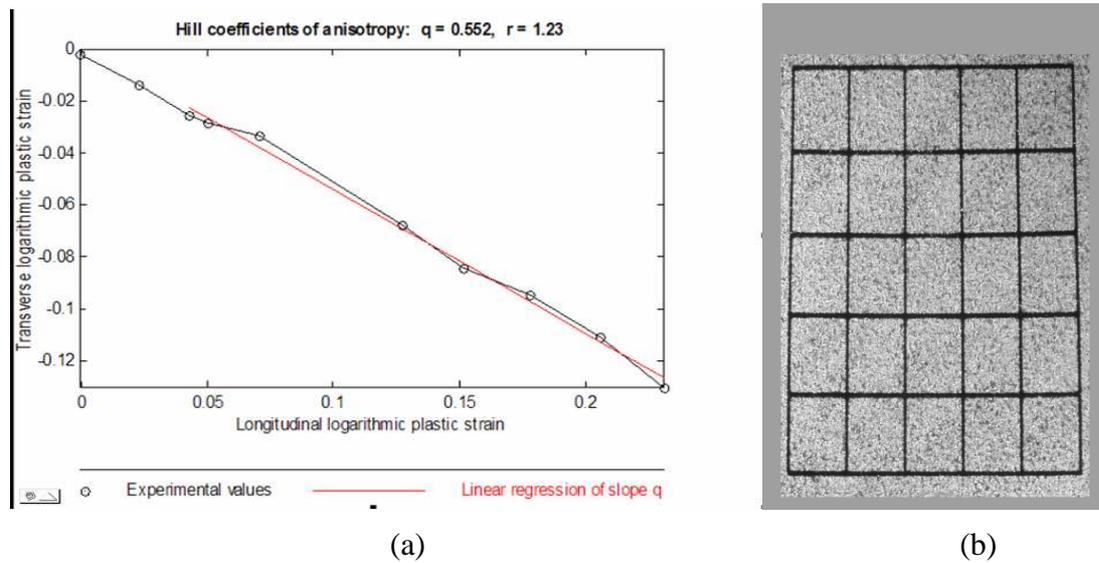


Figure II.12: (a) Evolution de ϵ_{22}^p en fonction de ϵ_{11}^p en vue de la détermination du coefficient d'anisotropie, (b) Grille déformée après une traction uniaxiale à 45° par rapport à la direction de laminage jusqu'à $\epsilon_{11}^p = 25\%$.

Pratiquement pour la majorité des matériaux utilisés dans ce travail, $r(\alpha)$ demeure constant dans un large intervalle de déformation [0.05,0.25].

Les contraintes d'écoulement en traction uniaxiale sont déterminées pour un offset de 0.1% de déformation plastique.

II.3.2. Description de la fonction coût

Une fois les mesures expérimentales disponibles, l'identification des paramètres matériau des potentiels plastiques se fait par la minimisation de la fonction coût suivante [Barlat and Chung, 2005] :

$$\begin{aligned}
 F_{Mec}(c_i) = & \sum_m \left[w_{m1} \left(\frac{\tau_c \partial \psi / \partial D_{11}^p - \tau_c \partial \psi / \partial D_{33}^p}{\sigma_{11}^{exp}} - 1 \right)^2 + w_{m2} \left(\frac{\tau_c \partial \psi / \partial D_{22}^p - \tau_c \partial \psi / \partial D_{33}^p}{\sigma_{11}^{exp}} \right)^2 \right] \\
 & + w_{r1} \left(\frac{\tau_c \partial \psi / \partial D_{xx}^p - \tau_c \partial \psi / \partial D_{zz}^p}{\sigma_b^{exp}} - 1 \right)^2 + w_{r2} \left(\frac{\tau_c \partial \psi / \partial D_{xx}^p - \tau_c \partial \psi / \partial D_{yy}^p}{\sigma_b^{exp}} \right)^2 \\
 & + \sum_n w_n \left(\frac{\tau_c \partial \psi / \partial D_{ij}^p}{\tau_{ij}^{exp}} - 1 \right)^2
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

où m représente le nombre de contraintes d'écoulement expérimentales en traction uniaxiale et de coefficients d'anisotropie de Hill utilisées dans la minimisation et n le nombre de contraintes d'écoulement pseudo expérimentales en cisaillement utilisées dans la minimisation. Le premier terme sous la première sommation, correspond à la contrainte uniaxiale longitudinale quand le tenseur vitesse de déformation imposée est calculée en fonction de $r(\alpha)$ expérimental. Le deuxième terme sous la première sommation, correspond à la contrainte uniaxiale transverse. Les troisième et quatrième termes correspondent à la contrainte d'écoulement en expansion équiuniaxiale quand le tenseur vitesse de déformation imposée est calculé en fonction de la valeur de r_b expérimentale. Enfin, le cinquième terme correspond à la contrainte de cisaillement simple. Chaque terme dans la fonction coût est pondéré par un poids w . Le poids peut être employé pour différencier entre la contrainte longitudinale et transversale dans le cas de la traction hors-axes ou pour différencier entre les différents types de sollicitation. Dans ce travail, un poids identique a été adopté pour des chargements dans le plan de la tôle (souvent égal à un). En revanche, pour les données pseudo expérimentales (issues d'un calcul par un modèle micromécanique), un poids plus faible a été attribué (de l'ordre de 0.01).

II.3.3. Résultats d'identification utilisant les essais mécaniques

Les Figure II.13 et Figure II.14 illustrent un exemple d'identification des paramètres matériau des cinq potentiels dans le cas de l'alliage d'aluminium AA6022-T43. Les prédictions des potentiels quadratiques sont clairement améliorées par les trois autres potentiels Srp93, Srp2004-18p et Quartus. On constate aussi que Srp2004-18p améliore systématiquement les prédictions de Srp93. Les figures II.15 et II.16 présentent les mêmes types de résultats pour les alliages d'aluminium. AA2090-T3 et AA2008-T4). On observe dans tous ces cas une très bonne prédiction des courbes $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$, et ce pour tous les potentiels dans la mesure de leur flexibilité mathématique. Ceci est normal dans la mesure où il s'agit des données utilisées pour l'identification. Cependant, on observe une plus grande dispersion en ce qui concerne les surfaces de plasticité prédites (Figure II.14 et Figure II.17). Cette observation qualitative relève une différence importante entre les deux méthodes d'identification, qui utilisent des données de référence bien différentes les unes des autres. Néanmoins, on peut tirer exactement la même conclusion que précédemment, en ce qui concerne la supériorité des prédictions obtenues avec Srp2004-18p.

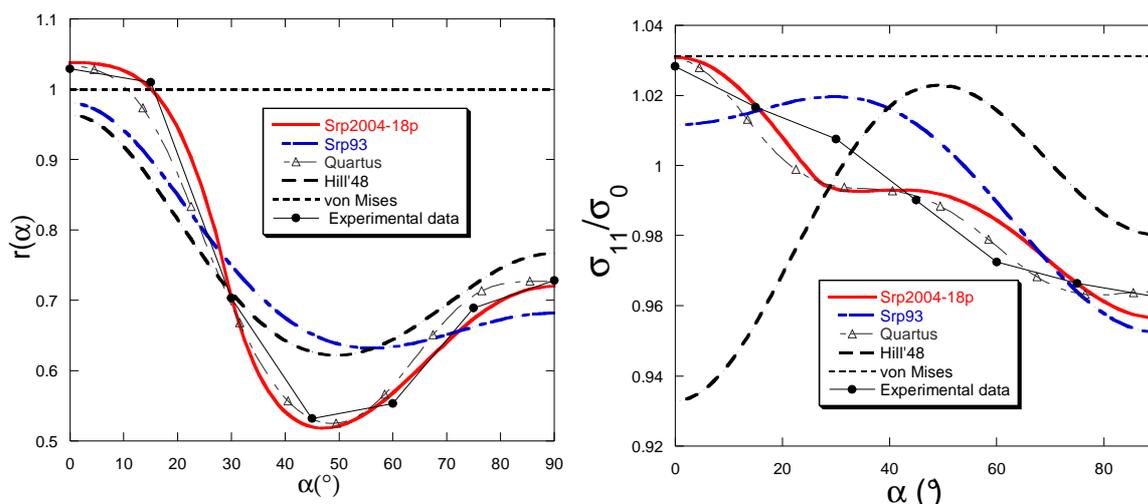


Figure II.13. Alliage d'aluminium AA6022-T43: contraintes d'écoulement et profils de $r(\alpha)$ prédits par plusieurs potentiels à partir d'identification sur les essais mécaniques.

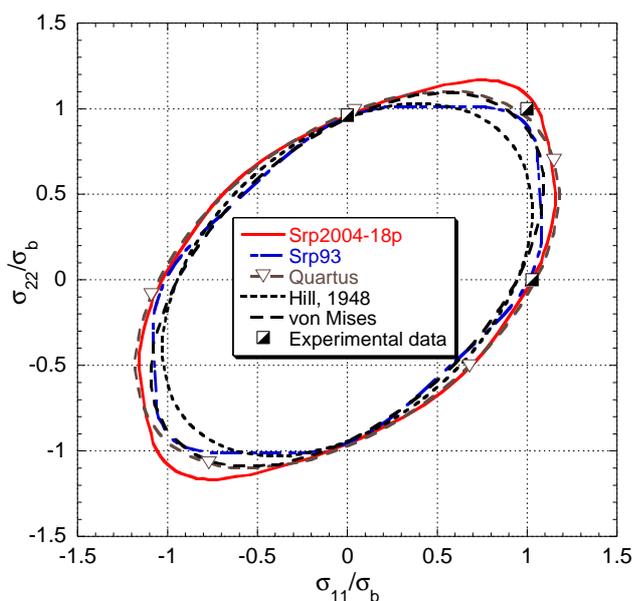


Figure II.14 Alliage d'aluminium AA6022-T43: surfaces de charges prédites par plusieurs potentiels à partir d'identification sur les essais mécaniques.

Sur la Figure II.18, on constate que l'Quartus permet une meilleure description du comportement par rapport à Srp93 et ce même pour les alliages d'aluminium ([Rabahallah *et al.*, 2006]). Ce résultat ne vient toutefois pas contredire les conclusions de l'identification par rapport à la texture. Ce résultat est dû au nombre de points de référence beaucoup plus réduit qui est utilisé ici. Dans ces conditions, le passage de la fonction d'ordre quatre par un nombre réduit de points est possible mais en dehors de ces points, des problèmes de perte de convexité peuvent apparaître. Un exemple flagrant est montré sur la

Figure II.19 : en augmentant le poids du point biaxial, Quartus peut passer par ce point en quittant l'espace de valeurs de paramètres qui en garantissent la convexité. Un choix judicieux du poids appliqué à la direction du tenseur \mathbf{D}^p pour l'expansion équi-biaxiale permet de contourner ce problème. Notons qu'avec l'identification à partir de la texture, aucune perte de convexité n'a été détectée pour Quartus. Le fait d'utiliser pour l'identification un nombre de points important, uniformément distribué dans l'espace des vitesses de déformation plastique, empêche l'obtention de surface d'écoulement concave.

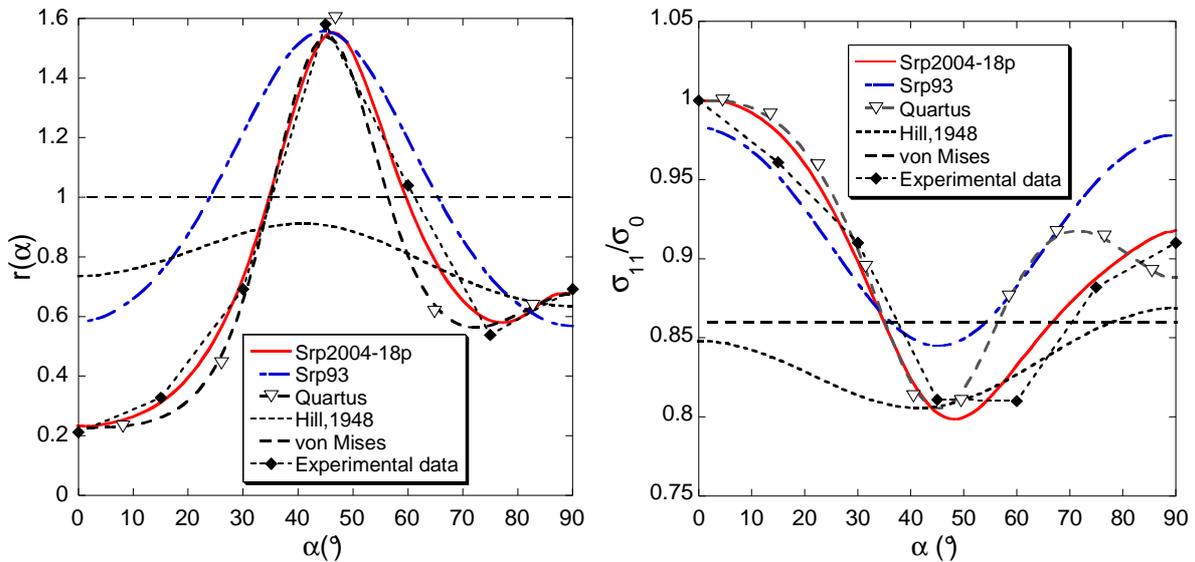


Figure II.15 Alliage d'aluminium AA2090-T3: contrainte d'écoulement et profils de $r(\alpha)$ prédits par plusieurs potentiels à partir d'identification sur les essais mécaniques.

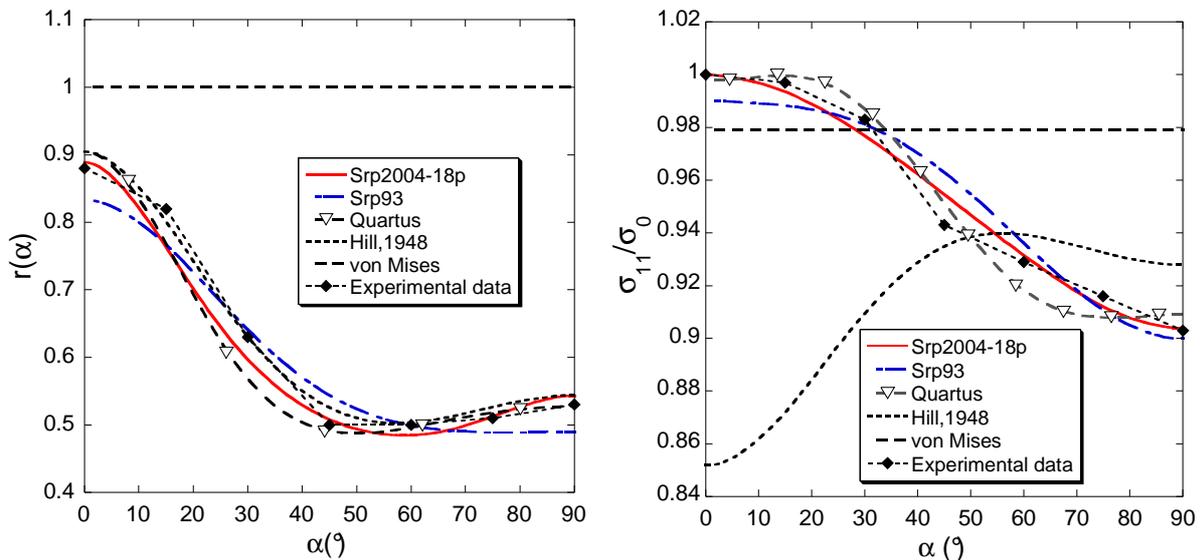


Figure II.16 Alliage d'aluminium AA2008-T4: contrainte d'écoulement et profils de $r(\alpha)$ prédits par plusieurs potentiels à partir d'identification sur les essais mécaniques.

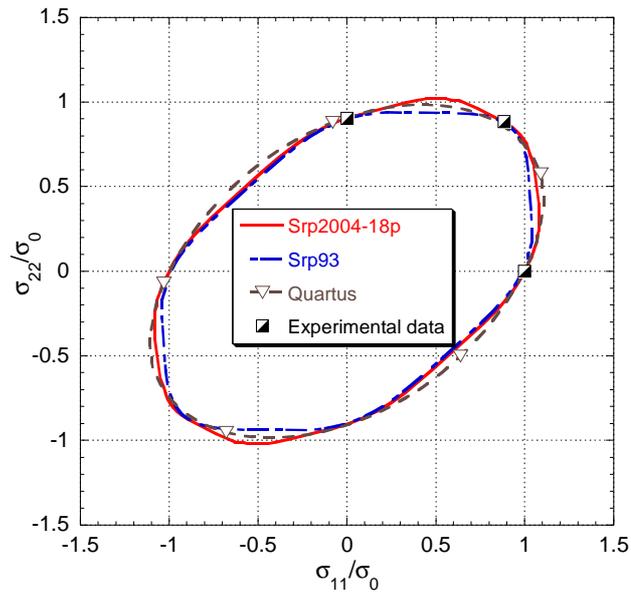


Figure II.17 Alliage d'aluminium AA2008-T4 : surfaces d'écoulement prédites par plusieurs potentiels à partir d'identification sur les essais mécaniques.

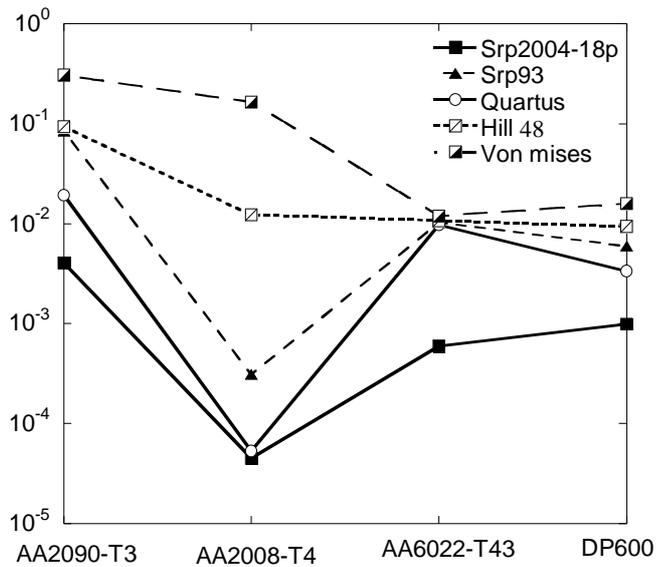


Figure II.18 Fonction coût pour plusieurs matériaux c.c. (acier dual phase DP600) et c.f.c. (AA2090-T3, AA2008-T4 et AA6022-T43) en utilisant plusieurs potentiels.

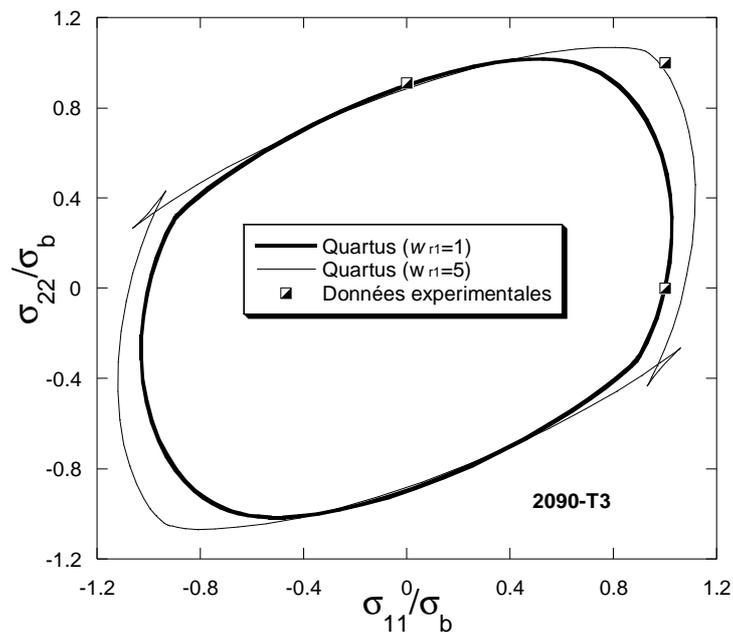


Figure II.19 Prédictions du potentiel Quartus pour l'alliage d'aluminium AA2090-T3: la solution acceptable est celle qui ne viole pas la convexité du potentiel. Le paramètre w_{r1} correspond au poids affecté à la contrainte équi-biaxiale comme défini dans l'Eq(2.21).

Dans le cas de matériaux ayant une faible anisotropie dans le plan (par exemple, l'acier dual phase DP600), les surfaces de charge identifiées obtenues avec les différents potentiels sont très proches de la surface de charge de von Mises. Cependant, les coefficients d'anisotropie de Hill prédits peuvent être très différents comme indiqué dans la Figure II.5(c) pour l'acier DP600. Pour ce matériau, quand la stratégie d'identification à partir des essais mécaniques est utilisée, on observe une amélioration significative des coefficients d'anisotropie de Hill, prédits avec des surfaces de charge proches de celle de von Mises. Cependant, une étude sur l'ajustement ou la prédiction des surfaces d'écoulement, en utilisant les deux stratégies d'identifications, indique clairement que les normales à la surface de charge peuvent être très différentes (Figure II.20,a). Ces différences peuvent être encore plus grandes quand l'anisotropie dans le plan devient plus prononcée, comme le montre le cas du matériau AA6022-T43 (Figure II.20,b).

Selon la stratégie d'ajustement utilisée pour identifier les paramètres matériau, les prédictions des profils de $r(\alpha)$, $\sigma(\alpha)$ et de surface d'écoulement peuvent être très différentes. Les profils de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$ sont bien décrits avec les potentiels non-quadratiques avec toutefois des différences visibles dans la description des surfaces de charge (Figure II.17). Ce résultat est associé au nombre et au type de données de référence utilisées pour l'identification des paramètres des potentiels. La Figure II.21 montre la position des données expérimentales utilisées dans les deux stratégies d'identification. L'identification à partir de la texture utilise un ensemble de points de référence (directions de vitesse de déformation), uniformément répartis, alors que les essais mécaniques fournissent un ensemble très réduit de données. En particulier, la zone de sollicitation en déformation plane est mal représentée dans l'ensemble des données expérimentales utilisées dans notre étude. L'impact sur la description de la surface d'écoulement est clairement visible dans le cas du matériau AA6022-T43 (Figure II.20). Ceci conduit à la nécessité d'élargir la base de données expérimentales dans le cas d'identification à partir des essais mécaniques. En cas d'absence de ces données (*e.g.*

cisaillement dans l'épaisseur), le recours au modèle micromécanique permet de les générer pour enrichir la stratégie d'identification à partir des essais mécaniques.

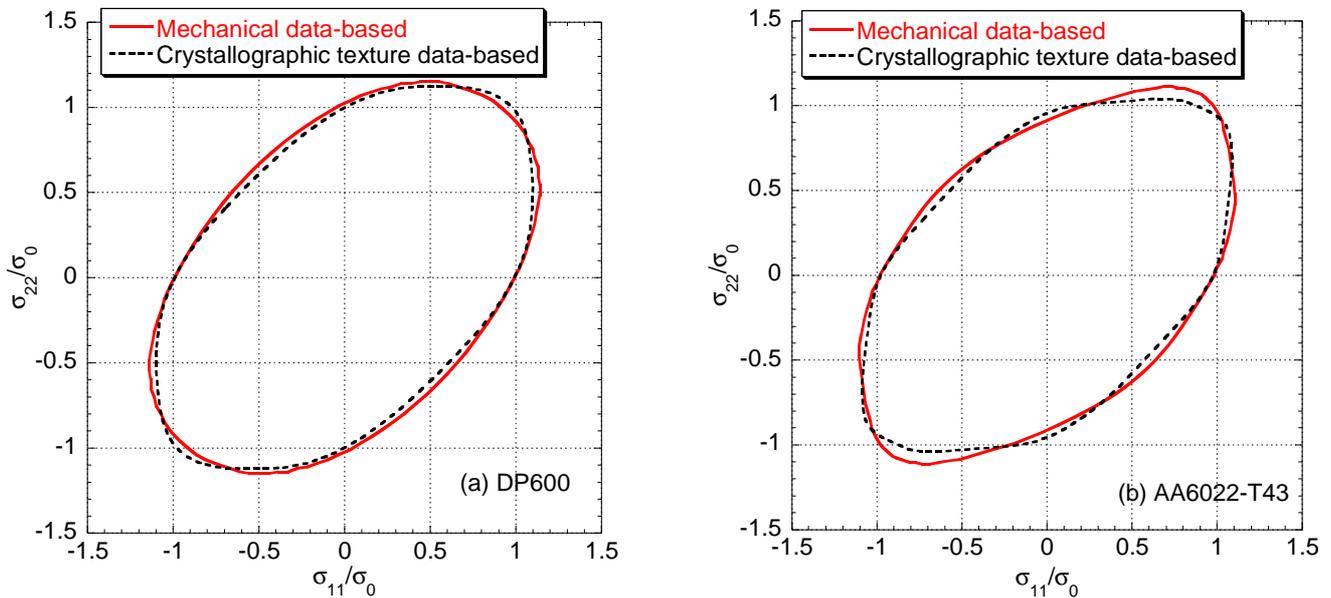


Figure II.20 Surface de charge prédite par le potentiel Srp2004-18p en utilisant différentes stratégies d'identification, pour a) l'acier DP600 et b) l'alliage d'aluminium AA6022-T43.

Dans le cadre de ce travail, nous avons observé les limites du modèle micromécanique adopté à bien décrire les profils de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$ (e.g. Figure II.5 et Figure II.6) pour certains matériaux. Dans de telles situations, la méthode d'identification par la texture ne permet pas d'améliorer la qualité de la description de l'anisotropie initiale. Par ailleurs, le nombre de directions mises en jeu dans l'approche d'identification par la texture nécessite une réflexion sur le choix des poids à accorder aux différentes directions de \mathbf{D}^p . Bien que cela introduise une identification cohérente dans l'espace des directions de \mathbf{D}^p , les applications dans les processus de mise en forme montrent que les sollicitations sont globalement proches du cas des contraintes planes.

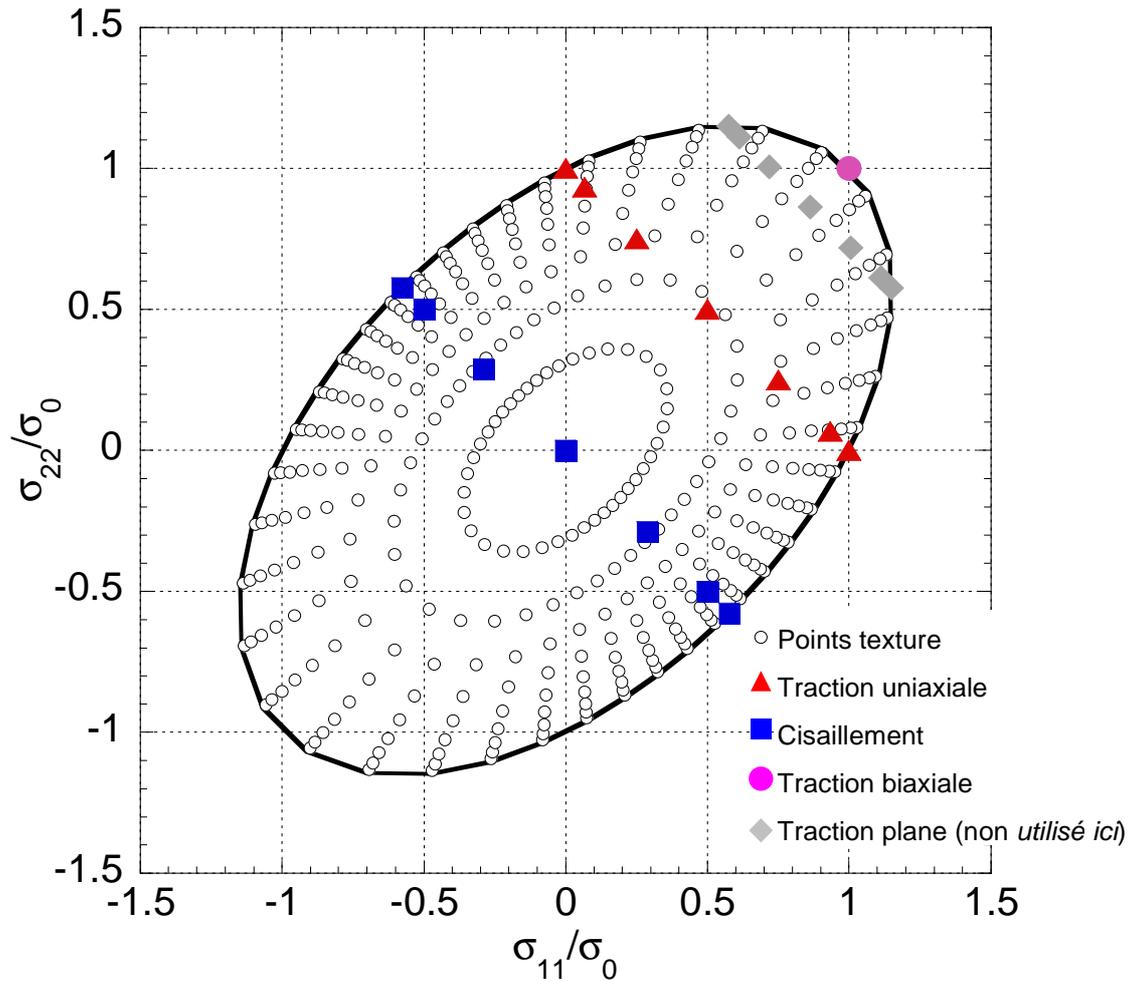


Figure II.21 Représentation 3D de la surface de charge normalisée (σ_{11} - σ_{22} - σ_{12}) et la position des points de référence des deux stratégies d'identification.

II.4. Stratégie d'identification combinée

Dans le cas où les essais mécaniques et la texture cristallographique sont disponibles, on peut combiner les avantages des deux méthodes d'identification de paramètres en minimisant une fonction coût composée des deux fonctions coût F_{Tex} et F_{Mec} comme suit :

$$F_{Com} = \beta_2 F_{Tex} + (1 - \beta_2) F_{Mec} \quad (2.22)$$

Cette approche a été appliquée ici pour l'alliage d'aluminium AA6016-T4, dans le cas du potentiel Srp93. Les contraintes d'écoulement prédites par le modèle TBH sont combinées à celles issues des essais mécaniques dans le cas de sollicitation en cisaillement simple en vue d'identification des paramètres du potentiel Srp93. La Figure II.22 présente la prédiction des contraintes d'écoulement pour différentes valeurs du paramètre β_2 . Quand $\beta_2 = 1$ (identification à partir de la texture uniquement), l'anisotropie de la contrainte d'écoulement est mal décrite par les paramètres identifiés. Si on diminue la valeur de β_2 , on observe une amélioration progressive de l'ajustement, pour rejoindre les résultats de la procédure d'identification par des essais mécaniques.

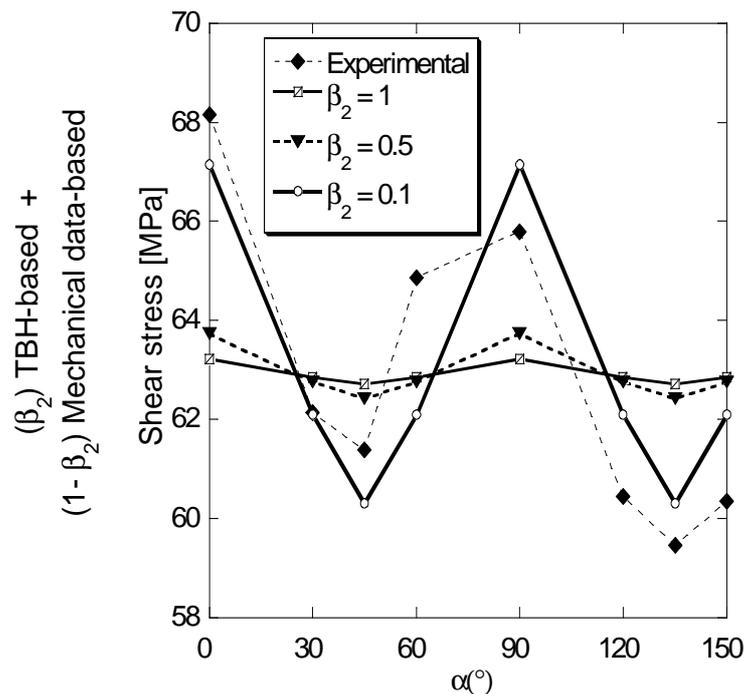


Figure II.22 Alliage d'aluminium AA6016-T4: l'anisotropie prédite et expérimentale, en utilisant le couplage des deux stratégies d'identification.

II.5. Conclusion

L'identification basée sur la texture fournit une approche puissante et cohérente pour la comparaison des potentiels plastiques phénoménologiques. L'étude réalisée ici montre clairement l'intérêt du potentiel *Srp2004-18p* récemment proposé, pour une grande catégorie de matériaux et d'applications. Le potentiel *Quartus*, beaucoup plus simple d'utilisation, reste intéressant pour le cas des aciers. Des potentiels d'ordre supérieur (six) pourraient fournir des prédictions beaucoup plus précises que *Quartus*. Néanmoins, la convexité de ces potentiels d'ordre quatre et six n'est pas garantie et le risque de perte de convexité augmente considérablement pour les ordres supérieurs, ce qui constitue un frein considérable à l'application pratique des expansions en séries d'ordre supérieur à deux.

Malgré ses avantages certains, l'identification utilisant la texture est tributaire de la précision du modèle micromécanique employé, ce qui est souvent pénalisant lorsque le modèle de Taylor-Bishop-Hill est utilisé. Ceci limite son utilisation dans les applications réelles d'emboutissage, telles qu'elles seront abordées dans la suite du manuscrit. La précision peut être fortement améliorée en employant un modèle de type autocohérent, moyennant un coût de calcul bien supérieur. Même avec cette précaution, la qualité des prédictions n'est cependant pas garantie dans tous les cas. De ce fait, nous avons adopté aussi une méthode d'identification utilisant les essais mécaniques, beaucoup plus prisée par les utilisateurs industriels. Les prédictions de l'anisotropie telle que révélée par les essais de traction uniaxiale (coefficients d'anisotropie, contraintes d'écoulement) sont bien meilleures dans ce cas. Cependant, une incertitude plus grande sur l'ensemble de la surface de plasticité est à craindre. Aussi, le nombre réduit de données expérimentales employées peut induire des effets indésirables, comme une très mauvaise description de certaines parties de la surface de plasticité, non représentées dans l'ensemble de données expérimentales – ou encore la perte de convexité pour *Quartus*.

Le travail mené ici montre clairement l'impact de la méthode d'identification (en utilisant des données de texture ou des essais mécaniques) sur les résultats obtenus. La comparaison des deux stratégies d'identification, en utilisant des données expérimentales ou micromécaniques, montre que la combinaison des deux procédures améliore la description de l'anisotropie initiale. Nous allons poursuivre cette comparaison au chapitre IV, à travers l'impact de l'identification sur les résultats de simulation de l'emboutissage cylindrique. Afin d'atteindre cet objectif, nous nous sommes attachés à l'implantation numérique des modèles retenus au sein du logiciel Abaqus. Ce travail essentiellement numérique fait l'objet du chapitre suivant.

II.6. Références bibliographies

- Arminjon, M., Bacroix, B., 1991. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function, *Acta Mechanica* 88, 219-243.
- Arminjon, M., Bacroix B., Imbault, D., Raphanel, J. L., 1994. A fourth-order plastic potential for anisotropic metals and its analytical calculation from the texture function, *Acta Mechanica* 107, 33-51.
- Bacroix, B., Balan T., Bouvier, S., Teodosiu C., 2003. Identification of plastic potentials by inverse method, In: Proc. 6th Int. Esaform Conf., Salerno, Italy, April 28-30 2003, pp. 347-350.
- Balan, T., Bacroix, B., Teodosiu, C., 2000. On the identification of strain rate potentials using both texture data and mechanical tests, Proc. of TPR 2000, Cluj-Napoca (Romania), 81-93.
- Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C., 1991. A six-component yield function for anisotropic materials, *Int. J. Plasticity* 7, 693-712.
- Barlat, F. and Chung, K., 1993. Anisotropic potentials for plastically deformation metals. *Modelling Simul. Mater. Sci. Engng.* 1, 403-416.
- Barlat, F., Chung, K., Richmond, O., 1993. Strain rate potential for metals and its application to minimum plastic work path calculations, *Int. J. Plasticity* 9, 51-63.
- Barlat, F., Chung K., Richmond, O., 1994. Anisotropic plastic potentials for polycrystals and application to the design of optimum blank shapes in sheet forming. *Metallurgical and Materials Transactions A* 25, 1209-1216.
- Barlat, F., Chung, K., 1993. Anisotropic potentials for plastically deforming materials, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.* 1, 403-416.
- Barlat, F., Chung, K., 2005. Anisotropic strain rate potential for aluminum alloy plasticity. In: Proc. 8th ESAFORM Conference on Material Forming, Cluj-Napoca, Romania, April 2005. Banabic, D., (Ed.), The Publishing House of the Romanian Academy, Bucharest, pp. 415-418.
- Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J. C., Hayashida, Y., Lege D. J., Matsui, K., Murtha, S. J., Hattori, S., Becker, R. C., Makosey, S., 1997. Yield function development for aluminium alloy sheets, *J. Mech. Phys. Solids* 45, 1727-1763.
- Barlat, F., Brem, J.C., Yoon, J.W., Chung, K., Dick, R.E., Lege, D.J., Pourboghrat, F., Choi, S.-H., Chu, E., 2003. Plane stress yield function for aluminum alloy sheet. Part I: Theory. *Int. J. Plasticity* 19, 1297–1319.
- Barlat, F., Cazacu, O., Źyczkowski, M., Banabic, D., Yoon, J.W., 2004. Yield surface plasticity and anisotropy. In: Raabe, D., Chen, L.-Q., Barlat, F., Roters, F. (Eds.), *Continuum Scale Simulation of Engineering Materials Fundamentals – Microstructures – Process Applications*. WILEY–VCH Verlag, Berlin GmbH, pp. 145–177.

- Barlat, F. and Chung, K., 2005. Anisotropic strain rate potential for aluminium alloy plasticity, Proc. of The 8th Esaform Conference on Material Forming, Cluj-Napoca, Romania, 27-29 April 2005, pp.415-418.
- Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J.W., Karabin, M.E., Brem, J.C. and Dick R.E., 2005. Linear transformation-based anisotropic yield functions. *Int. J. Plasticity*, 21, 1009-1039.
- Berveiller, M. and Zaoui, A., 1979. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 26, 325-344.
- Bishop, J.F.W., Hill, R., 1951. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stress, *Phil. Mag.* 42, 414-427.
- Bouvier, S., Rabahallah, M., Bacroix, B., Barlat, F., Balan, T., Ability of advanced plastic potentials to predict the anisotropic yielding behaviour, *Plasticity 2006*, Halifax, sur CD-ROM, 4 p. (2006)
- Budiansky, B., 1984. Anisotropic plasticity of plane-isotropic sheets, in: *Mechanics of Material Behavior*, Dvorak G.J. and Shield R.T. (eds.), Elsevier, 15-29.
- Cazacu, O., Barlat, F., 2001. Generalization of Drucker's yield criterion to orthotropy. *Math. Mech. Solids* 6, 613-630.
- Cazacu, O., Barlat, F., 2003. Application of representation theory to describe yielding of anisotropic aluminum alloys. *Int. J. Eng. Sci.* 41, 1367-1385.
- Chung, K., Lee, S.Y., Barlat, F., Keum, Y.T., and Park, J.M., 1996. Finite element simulation of sheet forming based on a planar anisotropic strain rate potential. *Int. J. Plasticity* 12(1), 93-115.
- Chung, K., Barlat, F., Brem, J.C., Lege, D.J., Richmond, O., 1997. Blank shape design for a planar anisotropic sheet based on ideal forming design theory and FEM analysis. *Int. J. Mech. Sci.*, 39(1), 105-120.
- Chung, K., Barlat, F., Richmond, O., Yoon, J.W., 1999. Blank design for a sheet forming application using the anisotropic strain rate potential Srp98. *The integration of Material, Process and Product Design*, Zabarás *et al.* (Eds.), Balkema, Rotterdam.213-219.
- Dennis, J.E. and Schnabel, R.B., 1983. *Numerical methods for unconstrained optimization and non-linear equations*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Gotoh, M., 1977. A theory of plastic anisotropy based on a yield function of fourth order, *Int. J. Mech. Sci.* 19, 505-520.
- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. Royal Soc. A* 193, 281-297.
- Hill, R., 1979. Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.* 85, 179-191.
- Hill, R., 1987. Constitutive dual potentials in classical plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 35, 22-33.

- Hill, R., 1993. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals, *Int. J. Mech. Sci.* 35, 19-25.
- Hosford, W.F., 1972. A generalised isotropic yield function, *J. Appl. Mech.* 39, 607-619.
- Karafilis, A.P., Boyce, M.C., 1993. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor, *J. Mech. Phys. Solids* 41, 1859-1886.
- Kim, D., Barlat, F., Bouvier, S., Rabahallah, M., Balan, T., Chung, K., 2007. Non-quadratic anisotropic potential based on linear transformation of plastic strain rate, *Int. J. Plasticity* 23 (2007) 1380-1399.
- Kuwabara, T., Ikeda, S. and Kuroda, K., 1998. Measurement and analysis of differential work hardening in cold-rolled steel sheet under biaxial tension, *J. Mat. Proc. Tech.*, 80-81, 517-523.
- Lege, D.J., Barlat, F. and Brem, J.C.. 1989. Characterization and modeling of the mechanical behavior and formability of a 2008-T4 sheet sample. *Int. J. Mech. Sci.*, 31, 549-563.
- Pöhlandt, K., Banabic, D., Lange, K., 2002. Equi-biaxial anisotropy coefficient used to describe the plastic behavior of sheet metal, In: *Prof. ESAFORM 2002 Conference*, Krakow, Poland, 723-727.
- Rabahallah, M. Balan, T. Bouvier, S. Bacroix, B. Barlat, F. Chung, K. Teodosiu, C. 2007. Parameter identification of advanced plastic potentials and impact on plastic anisotropy prediction, *International Journal of Plasticity*. submitted.
- Rabahallah, M., Bacroix, B., Bouvier, S., Balan, T., 2006. Crystal plasticity based identification of anisotropic strain rate potentials for sheet metal forming simulation, III European Conference on Computational Mechanics, C.A. Mota Soares et.al. (Eds.), Lisbon, Portugal.
- Savoie, J. and MacEwen, S.R., 1996. A sixth order inverse function for incorporation of crystallographic texture into predictions of properties of aluminium sheet. In *Textures and Microstructures*, 26/27, 495-512.
- Taylor, G.I., 1938. Plastic strain in metals, *J. Inst. Metals* 62, 307-324.
- van Houtte, P., Mols, K., Van Bael, A., Aernoudt E., 1989. Application of yield loci calculated from texture data, *Textures Microstruct.* 11, 23-39.
- van Houtte, P. and van Beal, A., Winters, J., Aernoudt, E., Hall, F., Wang, N., Pillinger, I., Hartley, P., and Sturgess, C.E.N., 1992. Modelling of complex forming processes. In Andersen S.I. *et al.* (Eds.), *Modeling of Plastic Deformation and Its Engineering Applications*, Proc. 13th Risø International Symposium on Materials Science. Risø National Laboratory, Denmark, pp. 161-172.
- van Houtte, P., and van Beal, A., 2004. Convex plastic potentials of fourth and sixth rank for anisotropic materials, *Int. J. Plasticity* 20, 1505-1524.
- Vegter, D., 1991. On the plastic behaviour of steel during sheet forming, PhD Thesis, Univ. Twente.

Yoon, J.W., Song, I.S., Yang, D.Y., Chung, K., Barlat, F., 1994. Finite element method for sheet forming based on an anisotropic strain rate potential and the convected coordinate system, *Int. J. Mech. Sci.*, 37, 733-752.

Yu, M.H., 2002. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century. *Appl. Mech. Rev.* 55, 198–218.

Ziegler, H., 1977. *An introduction to thermodynamics*, North-Holland, Amsterdam.

Życzkowski, M., 2001. Anisotropic yield conditions. In: Lemaitre, J. (Ed.), *Handbook of Materials Behavior Models*. Academic Press, San Diego, CA, pp. 155–165.

Chapitre III :

Implantation numérique

III. Implantation numérique

III.1. Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté plusieurs potentiels plastiques censés décrire l'anisotropie des matériaux métalliques. Ensuite, pour caractériser ces matériaux nous avons utilisé deux stratégies d'identification : à partir de mesures de texture et à partir d'essais mécaniques. Ce chapitre est consacré aux aspects numériques relatifs à l'intégration temporelle de lois de comportement élasto-plastiques utilisant le formalisme du potentiel dual.

Il s'agit donc de construire les algorithmes qui effectuent l'intégration temporelle de la loi de comportement, reposant sur une approche de type potentiel dual. Nous avons utilisé le potentiel quadratique de Hill [Hill, 1948], Quartus [Arminjon et Bacroix, 1995] et Srp2004-18p [Barlat et Chung, 2005] couplés à un modèle d'érouissage isotrope et cinématique non-linéaire.

De plus, un schéma d'intégration par sous-incréments, adapté au formalisme du potentiel dual, a été proposée afin de rendre plus stable la convergence des algorithmes de projection plastique et de transition élasto-plastique. Par conséquent, l'implantation des potentiels avancés devient plus robuste. Ensuite, nous avons validé notre sous-programme Umat en faisant des comparaisons par rapport aux résultats fournis par le logiciel Abaqus.

Pour simuler le processus d'emboutissage il est indispensable d'avoir une loi qui établit la relation entre les contraintes et les déformations. Dans ce travail, nous adoptons une loi de comportement élasto-plastique indépendante de la vitesse de déformation et de la température ; ce choix très courant se justifie pour une gamme assez large de tôles métalliques embouties à froid.

Pour décrire complètement un écoulement plastique non-visqueux, il faut préciser la surface de plasticité, le critère de charge-décharge, la loi d'écoulement plastique et la loi d'évolution de la surface de plasticité, c'est-à-dire la loi d'érouissage. Dans ce travail nous adoptons des surfaces de plasticité de type quadratique von Mises et Hill'48, ainsi que des potentiels plus avancés comme Quartus et Barlat, avec érouissage isotrope et cinématique non-linéaire. Ces différents choix sont justifiés pour plusieurs raisons :

1. D'abord, parce que les processus d'emboutissage utilisent des tôles laminées qui possèdent la propriété d'orthotropie plastique et que, d'une part, les modèles de type Quartus et Barlat décrivent bien l'anisotropie initiale.
2. D'autre part, la surface de plasticité de type Hill'48 permet la validation de notre sous-programme avec celui du code de calcul éléments finis Abaqus. En outre, elle met en évidence l'apport des potentiels plus avancés, en termes de précision de la simulation numérique.

3. Ensuite, parce que lors du processus d'emboutissage le flan se plie et se déplie, ce qui conduit à des effets de type Bauschinger qui peuvent ne pas être négligeables, d'où la nécessité d'introduire l'érouissage cinématique en plus de l'érouissage isotrope.

Finalement, étant donné que l'on se limite à la mise en forme des tôles métalliques, une loi d'écoulement associée est retenue, bien que l'adoption d'une loi non associée rendrait le modèle plus flexible [Genevois, 1992].

III.2. Relations cinématiques en élasto-plasticité

Pour connaître le mouvement d'un solide en grandes transformations, il faut, à chaque instant t , définir la position de chacune de ses particules, donc connaître la fonction :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) \quad (3.1)$$

où \mathbf{x} est la position à l'instant t de la particule qui avant toute déformation se trouvait en \mathbf{x}_0 . Contrairement à ce qui se passe dans le cas de l'hypothèse des petites perturbations, on ne peut plus identifier ces deux variables et il faudra préciser, pour chaque vecteur ou tenseur, la configuration de définition.

Considérons donc une structure déformable dans une configuration de référence C_0 à l'instant t_0 . Jusqu'à l'instant courant t , la structure a évolué suivant un mouvement impliquant généralement une déformation et on note C la configuration correspondante. On désigne alors par \mathbf{x}_0 et \mathbf{x} les vecteurs position d'un point matériel de cette structure respectivement dans C_0 et C . Le mouvement de la structure est alors donné pour chaque point par Eq.(3.1). On définit le champ de vitesse associé par :

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (3.2)$$

Dans le voisinage de ce point, la transformation locale est définie par le tenseur \mathbf{F} , donné par :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (3.3)$$

correspondant à la transformation finie de \mathbf{x}_0 à \mathbf{x} . Le tenseur \mathbf{F} définit en fait le mouvement local du milieu continu et il va être utilisé pour décrire la cinématique de l'élasto-plasticité en grandes transformations, à l'aide de sa décomposition multiplicative classique en partie élastique et plastique. L'idée de base est de considérer un matériau plastique comme étant élastique par rapport à une configuration mobile intermédiaire, normalement appelée configuration relâchée locale (Lee [Lee 1969], Sidoroff [Sidoroff ,1981], Teodosiu [Teodosiu ,1989]) :

1. relâchée, car elle est libre de contraintes : c'est la configuration obtenue par relâchement local des contraintes.
2. locale, car on ne peut la définir que localement, au voisinage de chaque point ; il n'existe pas une configuration relâchée globale, étant donnée l'existence de contraintes résiduelles. On parle en général du découpage du matériau en petits éléments que l'on relâche indépendamment les uns des autres.

Désignons cette configuration intermédiaire par C^R . Pour son orientation, on peut adopter différentes définitions cinématiques comme :

- a. Définition proposée par Mandel [Mandel, 1982] ; ce repère peut être défini cinématiquement, en égalant sa vitesse de rotation avec la vitesse de rotation moyenne des grains. Il considère un repère tel que l'orientation cristallographique moyenne reste la même pendant le mouvement ;
- b. Référentiel corotationnel : dans lequel le spin plastique est considéré nul ;
- c. Repère dit en rotation propre, en considérant la décomposition polaire de \mathbf{F} .

Avec un choix particulier, la partie élastique de la déformation est alors la déformation de \mathbf{C} par rapport à cette configuration \mathbf{C}^R , tandis que la déformation plastique est la déformation de \mathbf{C}^R par rapport à la configuration de référence \mathbf{C}_0 . Il s'agit donc d'une composition de la déformation, qui se traduit par une décomposition multiplicative du tenseur gradient de déformation de type :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p, \quad (3.4)$$

où \mathbf{F}^e et \mathbf{F}^p désignent respectivement le tenseur gradient de déformation élastique et le tenseur gradient de déformation plastique.

En dérivant (3.4) par rapport au temps on est conduit à la décomposition du gradient de la vitesse \mathbf{L} en parties élastique et plastique :

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p, \quad \mathbf{L}^e = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1}, \quad \mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p (\mathbf{F}^p \mathbf{F}^{p-1}) \mathbf{F}^{e-1} \quad (3.5)$$

où un point superposé désigne la dérivée temporelle particulière.

Dans la plupart des cas de mise en forme à froid des tôles métalliques, la transformation élastique \mathbf{F}^e génère des déformations petites devant l'unité, bien que des grandes rotations soient possibles [Cao, 1993], [Sidoroff, 1981]. Ainsi on peut adopter l'hypothèse des petites déformations élastiques. Sous cette hypothèse, on utilise la décomposition polaire de \mathbf{F}^e sous la forme :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (3.6)$$

Où \mathbf{R} est un tenseur orthogonal de rotation vérifiant les propriétés

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T, \quad \det \mathbf{R} = 1 \quad (3.7)$$

et \mathbf{V} est un tenseur symétrique positif, que l'on va décomposer sous la forme :

$$\mathbf{V} = \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{avec } |\boldsymbol{\varepsilon}| \ll 1. \quad (3.8)$$

En introduisant (3.6) dans (3.5) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^e &= \dot{\mathbf{V}}\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1}, \\ \mathbf{L}^p &= \mathbf{V}\mathbf{R}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^T\mathbf{V}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En tenant compte de (3.8) et en négligeant dans \mathbf{L}^e les termes de deuxième ordre en $|\boldsymbol{\varepsilon}|$ et dans \mathbf{L}^p ceux de premier ordre, les relations (3.9) deviennent respectivement

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^e &= \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad \text{avec } \overset{\circ}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T\boldsymbol{\varepsilon}, \\ \mathbf{L}^p &= \mathbf{R}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{R}^T, \end{aligned} \quad (3.10)$$

où $\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ désigne la dérivée temporelle objective de $\boldsymbol{\varepsilon}$ calculée avec la vitesse de rotation associée à la rotation élastique \mathbf{R} .

Le gradient de la vitesse \mathbf{L} peut également être décomposé en une partie symétrique \mathbf{D} , appelée la vitesse de déformation, et une partie antisymétrique \mathbf{W} , appelée vitesse de rotation. Ces deux tenseurs peuvent être décomposés à leur tour, en tenant compte de (3.10), en parties élastique et plastique. On obtient donc

$$\mathbf{D} = \mathbf{L}^{\text{sym}} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p, \quad (3.11)$$

où

$$\mathbf{D}^e = \overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}} \text{ et } \mathbf{D}^p = \mathbf{R} \left(\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} \right)^S \mathbf{R}^T \quad (3.12)$$

désignent respectivement les vitesses de déformation élastique et plastique, et

$$\mathbf{W} = \mathbf{L}^{\text{skw}} = \mathbf{W}^e + \mathbf{W}^p, \quad (3.13)$$

avec

$$\mathbf{W}^e = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \text{ et } \mathbf{W}^p = \mathbf{R} \left(\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1} \right)^{\text{skw}} \mathbf{R}^T \quad (3.14)$$

\mathbf{W}^e et \mathbf{W}^p désignant respectivement les vitesses de rotation élastique et plastique. On va considérer de plus que la vitesse de rotation plastique \mathbf{W}^p définie en Eq.(3.13) peut être négligée devant la partie élastique. Ainsi, on écrit :

$$\mathbf{W} \approx \mathbf{W}^e = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T, \text{ et } \mathbf{W}^p \approx \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

Tandis que $\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}$ devient égale à la dérivée de Jaumann de $\boldsymbol{\varepsilon}$, définie par :

$$\overset{0}{\boldsymbol{\varepsilon}}^J = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{W} - \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

L'évolution de la rotation élastique \mathbf{R} au cours du temps peut être déduite à partir de (3.13). On aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{R}} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^p) \mathbf{R} \approx \mathbf{W} \mathbf{R}.$$

L'hypothèse de négliger la vitesse de rotation plastique, qui conduit à l'introduction de la dérivée objective de Jaumann, est habituelle dans la modélisation de processus de mise en forme [Cao, 1990], [Ladreyt, 1992] et [Eterovic and Bathe, 1990]. Elle est cependant bien justifiée à condition que le cisaillement ne soit pas très important [Teodosiu, 1976], [Teodosiu, 1988a]. Dans le cas de l'emboutissage des tôles minces, par exemple, le cisaillement est peu important [Schweizerhof, 1991b], donc il est raisonnable d'accepter cette hypothèse. A titre d'exemple, les résultats numériques bidimensionnelles de l'emboutissage des tôles métalliques obtenus par Teodosiu et Cao [Teodosiu et Cao, 1988b] et Makinouchi [Makinouchi, 1985] et [Makinouchi, 1986], ont permis de constater que si le rapport entre les rayons des zones courbes des outils et l'épaisseur de la tôle est suffisamment large (supérieur à 2) le cisaillement à travers l'épaisseur de la tôle est très faible. Notons que pour considérer la vitesse de rotation plastique, il faudrait se donner une relation supplémentaire pour son évolution.

III.3. Formulation des lois de comportement

Le formalisme en potentiel dual est actuellement en constante amélioration et a fait l'objet de plusieurs publications, autant pour le cas des alliages d'aluminium [Barlat *et al.*, 1993], [Barlat and Chung, 2005] et [Fortunier, 1989] que pour le cas des aciers [Arminjon and Bacroix, 1991]; [Arminjon et al., 1994]; [Van Houtte, 1994]; [Hiwatashi et al., 1998]; [van Bael and van Houtte, 2002]; [van Houtte and van Bael, 2004]. Dans cette section, on fait un rappel sur la forme générale des équations du modèle de comportement élasto-plastique dans la théorie classique de la plasticité ; ensuite, on décrit plus en détail le modèle de plasticité utilisant le potentiel dual.

Les équations de la loi de comportement élasto-plastique peuvent être récapitulées de la manière suivante :

La vitesse de déformation se décompose en une partie élastique et une partie plastique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (3.17)$$

Dans le cas de l'élasticité linéaire, la réponse hypo-élastique du matériau est donnée par la relation suivante:

$${}^0\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : \mathbf{D}^e \quad (3.18)$$

où :

1. $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy ;
2. ${}^0\boldsymbol{\sigma}$ désigne une dérivée objective, e.g. dérivée de Jaumann ;
3. \mathbf{C}^e est le tenseur d'élasticité d'ordre quatre.

L'élasticité traduit une déformation réversible du matériau. Le plus souvent, elle est considérée comme linéaire et isotrope dans le cas des aciers à froid. Dans ces conditions, on peut écrire:

$$\mathbf{C}^e = 2G\mathbf{I}'_4 + KI \otimes \mathbf{I} \quad (3.19)$$

où :

4. K et G sont respectivement le module de compressibilité et de cisaillement ;
5. $\mathbf{I}'_4 = \mathbf{I}_4 - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$, est la matrice identité dans l'espace des tenseurs d'ordre quatre symétriques et déviatoriques,
6. $\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ (symbole de Kroneker) désigne les composantes de la matrice identité d'ordre deux \mathbf{I} .

Les équations (3.17) et (3.18) définissent la loi :

$${}^0\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p) \quad (3.20)$$

III.3.1. Principe d'objectivité

Le principe d'objectivité traduit le caractère intrinsèque de la loi de comportement vis-à-vis d'un changement de référentiel, c'est-à-dire d'un changement d'observateur. La loi de comportement qui caractérise un matériau doit être indépendante de l'observateur, donc du référentiel. C'est ce qu'on appelle le principe d'objectivité (ou d'indifférence matérielle).

Une façon de respecter ce principe, très utilisée en vue de l'implantation dans des logiciels, consiste à travailler dans un repère tournant [Sidoroff, 1981]. Dans le cas présent, le principe d'objectivité sera satisfait si la loi de comportement est formulée par rapport à la configuration naturelle relâchée C^R [Ortiz, 1987]; il convient alors de représenter les contraintes, par exemple, par un tenseur $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ Lagrangien par son orientation mais ayant comme valeurs propres les contraintes principales, c'est-à-dire les valeurs propres du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Les tenseurs $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ et $\hat{\mathbf{C}}$ se déduisent des $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{D} et \mathbf{C} par la rotation \mathbf{R} de la forme :

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R} \\ \hat{\mathbf{D}}^e = \mathbf{R}^T \mathbf{D}^e \mathbf{R} \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{R}^T (\mathbf{R}^T \mathbf{C} \mathbf{R}) \mathbf{R} \end{cases} \quad (3.21)$$

On peut réécrire alors l'équation (3.18) dans la configuration locale relâchée C^R sous la forme :

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \hat{\mathbf{C}} : \hat{\mathbf{D}}^e \quad (3.22)$$

impliquant les mêmes quantités que précédemment, mais tournées par une matrice de rotation \mathbf{R} qui évolue dans le temps. Plusieurs dérivées objectives peuvent être écrites sous cette forme (les cas particuliers les plus importants concernent la dérivée de Jaumann, celle de Green-Naghdi etc.). Le repère tournant peut être associé au repère de symétrie du matériau, et ce même en présence d'un spin plastique. Le principal avantage de cette approche est lié à la présence d'une dérivée temporelle ordinaire dans l'équation (3.22), à la place d'une dérivée plus compliquée utilisée dans l'équation (3.20).

Nous adoptons ici cette écriture en repère tournant. Pour faciliter la lecture du manuscrit, les signes " \wedge " ne seront plus indiqués, mais toutes les grandeurs seront écrites dans ce qui suit dans le repère tournant lié au matériau.

III.3.2. Approche en critère de plasticité

Avant d'aborder l'approche en potentiel dual, il convient de rappeler la théorie classique de la plasticité, où le tenseur des vitesses de déformations plastiques \mathbf{D}^p est proportionnel au gradient du potentiel plastique $G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{X})$. Dans le cas de la loi d'écoulement associée, le potentiel plastique est défini par le critère de plasticité $G(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}) \equiv F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{X})$.

Pour un chargement plastique :

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (3.23)$$

avec $\dot{F}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{X}) > 0$.

La variable scalaire τ mesure la taille du domaine d'élasticité, \mathbf{X} est une variable tensorielle repérant le centre du domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes, $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente.

On a: $F \leq 0, \dot{\Gamma} \geq 0, F \cdot \dot{\Gamma} = 0$. Cela donne deux cas:

$$\text{élastique : } \begin{cases} F \leq 0 \\ \dot{\Gamma} = 0 \end{cases} ; \quad \text{plastique : } \begin{cases} F = 0 \\ \dot{\Gamma} \geq 0 \end{cases}$$

La loi d'écoulement s'écrit :

$$\mathbf{D}^p = \dot{\Gamma} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \tau, \mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.24)$$

où $\dot{\Gamma}$ est le multiplicateur plastique.

Les deux variables τ et \mathbf{X} évoluent avec la déformation plastique. Leurs équations d'évolution ont souvent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{h}_x \dot{\Gamma}, \\ \dot{\tau} &= h_\tau \dot{\Gamma}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour les applications présentées dans cette thèse, nous allons faire un choix pour les fonctions \mathbf{h}_x et h_τ , qui est précisé dans le paragraphe (III.4.3). Notons cependant que tous nos développements théoriques et algorithmiques utilisent les équations (3.25) et sont de ce fait applicables à une classe de modèles beaucoup plus large que celle utilisée pour nos applications.

III.3.3. Approche en potentiel dual

Ziegler [Ziegler, 1977] et Hill [Hill, 1987] ont démontré l'existence de deux potentiels duaux convexes, où la contrainte peut être dérivée d'un potentiel en vitesse de déformations et vice versa. Le potentiel dual de la surface de charge précédente s'écrit donc :

$$\psi(\mathbf{D}^p) = \dot{\Gamma} \quad (3.26)$$

ce qui donne

$$\mathbf{T} = \tau \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}^p} \quad (3.27)$$

avec

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{X} \quad (3.28)$$

\mathbf{T} étant souvent appelée contrainte efficace. Les fonctions ψ et $\varphi = \bar{\sigma}$ sont homogènes d'ordre un par rapport à la multiplication avec un scalaire positif. La puissance plastique efficace s'écrit alors :

$$\dot{W}^p = \mathbf{T} : \mathbf{D}^p = \tau \dot{\Gamma} = \tau \psi(\mathbf{D}^p) \quad (3.29)$$

La fonction $\Psi(\mathbf{D}^p) = \frac{\dot{W}^p}{\tau}$ caractérise donc l'anisotropie actuelle du matériau, de même que la fonction classique $\varphi(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})$.

III.3.4. Comparaison des deux approches

Les équations du modèle de comportement élasto-plastique dans les deux formalismes précédents sont données dans le tableau ci-dessous :

	Potentiel classique	Potentiel dual
Loi hypo-élastique	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$	$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^e : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^p)$
Ecrouissage cinématique	$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{h}_x \dot{\Gamma}$	$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{h}_x \dot{\Gamma}$
Ecrouissage isotrope	$\dot{\tau} = h_\tau \dot{\Gamma}$	$\dot{\tau} = h_\tau \dot{\Gamma}$
Critère de plasticité	$F(\boldsymbol{\sigma}, \tau, \mathbf{X}) = \varphi(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - \tau \leq 0$	$\dot{\Gamma} = \Psi(\mathbf{D}^p)$
Loi d'écoulement	$\mathbf{D}^p = \dot{\Gamma} \frac{\partial F(\boldsymbol{\sigma}, \tau, \mathbf{X})}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$	$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{X} + \tau \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}^p}$
<i>Inconnues</i>	$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{D}^p$ et τ	$\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, \mathbf{D}^p$ et τ

Tableau III.1 Bilan des équations

Nous remarquons donc que les deux formalismes sont très semblables. D'un point de vue algorithmique, les deux approches ont le même nombre d'inconnues ainsi que d'équations, qui sont similaires (voire identiques pour certaines). Cependant, si le signe du potentiel $\varphi(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - \tau$ nous renseigne sur le caractère élastique ou élasto-plastique d'un état de contrainte donné, il n'en est rien pour l'approche en vitesse de déformation. Les développements qui permettent de lever cette indétermination sont présentés dans le paragraphe ci-dessous.

III.3.5. Transition élasto-plastique

Dans le modèle élasto-plastique en approche potentiel dual, le critère de charge décharge n'est pas défini explicitement, il n'est donc pas possible d'utiliser sa définition pour vérifier si une contrainte donnée (typiquement, la contrainte d'essai élastique $\boldsymbol{\sigma}^{ee}$) se trouve à l'intérieur de la surface de plasticité ou pas. Toutefois, une fonction $g(\mathbf{N})$ a été définie dans les travaux de Bacroix et Gilormini [Bacroix and Gilormini, 1995] comme suit :

$$g(\mathbf{N}) = \tau \Psi(\mathbf{N}) - \mathbf{T} : \mathbf{N} \quad (3.30)$$

En utilisant le principe du travail maximal, les auteurs ont montré que, pour un état connu, l'état élastique ou plastique est donné par la condition suivante:

$$\text{Min}_{\mathbf{N}} \{ \tau \Psi(\mathbf{N}) - \mathbf{T} : \mathbf{N} \} \begin{cases} < \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{\sigma} \text{ est à l'extérieur de la surface de plasticité,} \\ = \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{\sigma} \text{ est sur la surface de plasticité,} \\ > \mathbf{0} & \text{si } \boldsymbol{\sigma} \text{ est à l'intérieur de la surface de plasticité.} \end{cases} \quad (3.31)$$

La fonction $g(\mathbf{N})$ respecte la symétrie du comportement du matériau et ne dépend que de la partie déviatorique de la contrainte. Parmi les neuf composantes de \mathbf{T} , seulement cinq sont indépendantes. Pour transformer les tenseurs symétriques et déviatoriques de neuf à cinq composantes, un changement de base a été défini par (2.1). Cette contraction préserve la norme :

$$\|\mathbf{N}\| = N_{ij} N_{ij} = N_p N_p \quad ; \quad p = \overline{1,5} \quad ; \quad i \text{ et } j = \overline{1,3} \quad (3.32)$$

De plus, le tenseur déviatorique \mathbf{N} de norme unitaire n'a que quatre composantes indépendantes. Considérer \mathbf{N} à cinq composantes dans (2.1) revient à résoudre un problème de minimisation sous contraintes : trouver \mathbf{N} qui minimise $g(\mathbf{N})$ et qui respecte la condition $\|\mathbf{N}\| = 1$. Pour palier à cette difficulté et réduire le nombre d'inconnues, une représentation en coordonnées polaires (à quatre composantes) sera donc utilisée. La deuxième partie de la relation (2.1) nous permet d'écrire \mathbf{N} dans un système de coordonnées polaires $\boldsymbol{\theta}$ à quatre composantes.

On cherche donc le minimum de g par rapport aux variables $\boldsymbol{\theta}$, en utilisant la méthode de Newton-Raphson. Le système d'équations à résoudre est alors :

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

avec

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \tau \left[\frac{\partial \Psi(\mathbf{N})}{\partial \mathbf{N}} - \frac{\mathbf{T}}{\tau} \right] : \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Lors des itérations de minimisation, la réactualisation des angles $\boldsymbol{\theta}$ s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \delta \boldsymbol{\theta} \quad (3.35)$$

où $\delta \boldsymbol{\theta}$ est donné par :

$$\delta \boldsymbol{\theta} = - \left[\frac{\partial^2 g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}} \right]^{-1} \frac{\partial g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (3.36)$$

On vérifié à chaque itération la diminution de la fonction g . Pour s'assurer que la direction donnée par (3.36) entraîne la diminution de $g(\mathbf{N})$, il est nécessaire que le hessien $\mathbf{h} = \frac{\partial^2 g(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}}$ soit défini positif. Dans le cas où la fonction $g(\mathbf{N})$ n'est pas convexe, le hessien n'est pas défini positif et la méthode de Newton-Raphson ne converge pas. Pour éviter ce risque, nous utilisons l'approximation BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) pour le hessien \mathbf{h} .

L'algorithme de minimisation se résume comme suit :

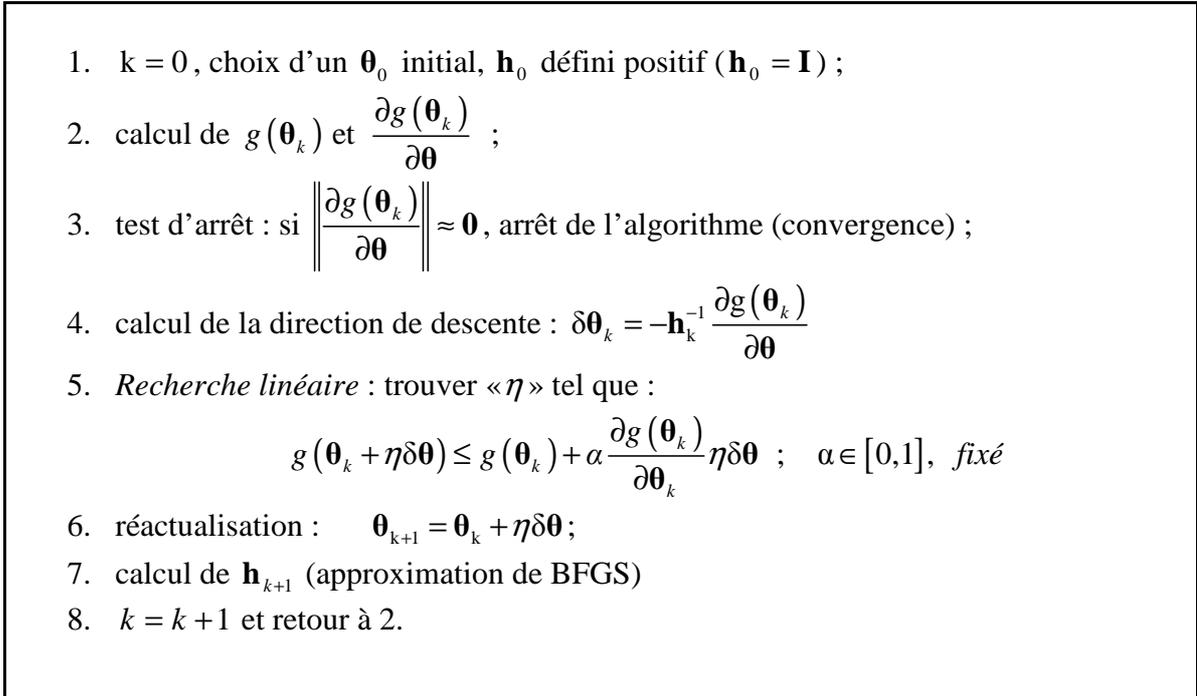


Figure III.1 Schéma de l'algorithme BFGS adopté pour la transition élasto-plastique

L'algorithme a plusieurs avantages par rapport à celui de Newton-Raphson :

- La convergence est moins dépendante de la solution initiale ;
- Les dérivées d'ordre deux ne sont plus nécessaires ;
- La convexité de la fonction g n'est pas exigée.

Remarque : avant de lancer l'algorithme BFGS, on peut éviter des calculs itératifs inutiles et donc optimiser le temps de calcul avec l'introduction des deux critères suivants : Si la contrainte efficace d'essai $\boldsymbol{\sigma}'^{ee} - \mathbf{X}_n$ est négligeable devant τ_n , on peut conclure que l'incrément est élastique [Hoferlin, 2001] :

$$\left\| \boldsymbol{\sigma}'^{ee} - \mathbf{X} \right\| / \tau \leq 0,1 \tag{3.37}$$

De plus, dès que l'on trouve un tenseur \mathbf{N} tel que $g(\mathbf{N}) < 0$, il n'est plus nécessaire de poursuivre la minimisation : le minimum sera forcément négatif. Ceci permet de gagner beaucoup de temps dans la mise en œuvre pratique, lorsque la première approximation de \mathbf{N} vérifie déjà cette condition.

Dans le cas où la contrainte initiale se trouve sur la surface de charge, Hughes [Hughes, 1984] montre que :

si $(\boldsymbol{\sigma}'^{ee} - \boldsymbol{\sigma}'_n) : \mathbf{N}_n \geq 0$, l'incrément est élasto-plastique.

avec \mathbf{N}_n est la normale à la surface de charge, stockée à l'incrément précédent.

Pour finir, notons que dans le système d'équations non-linéaire (3.34) le terme $\frac{\partial \Psi(\mathbf{N})}{\partial \mathbf{N}}$ dépend du potentiel choisi, par contre $\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ dépend uniquement de la définition (2.1). Son calcul donne le résultat suivant :

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} -s_1 s_2 s_3 s_4 & c_1 c_2 s_3 s_4 & c_1 s_2 c_3 s_4 & c_1 s_2 s_3 c_4 \\ c_1 s_2 s_3 s_4 & s_1 c_2 s_3 s_4 & s_1 s_2 c_3 s_4 & s_1 s_2 s_3 c_4 \\ 0 & -s_2 s_3 s_4 & c_2 c_3 s_4 & c_2 s_3 c_4 \\ 0 & 0 & -s_3 s_4 & c_3 c_4 \\ 0 & 0 & 0 & -s_4 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

où

$$c_i = \cos(\theta_i) \text{ et } s_i = \sin(\theta_i), \quad i = \overline{1,4} \quad (3.39)$$

III.4. Intégration temporelle de la loi de comportement

Lors du calcul d'un processus de déformation instationnaire, il est nécessaire d'intégrer les variables internes sur un incrément de temps donné $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, en connaissant l'état du matériau à l'instant t_n . Les valeurs exactes des incréments de déformation $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$ sont données par :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D} \, dt \text{ et } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{D}^p \, dt \quad (3.40)$$

La méthode d'intégration implicite d'Euler consiste à considérer \mathbf{D}^p constant sur un incrément de temps et égal à sa valeur à la fin de l'incrément :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \approx \mathbf{D}_{n+1}^p \Delta t \quad (3.41)$$

On remarque en conséquence que, grâce aux propriétés de convexité et d'homogénéité d'ordre un par rapport à multiplicateur positif du potentiel dual, on a :

$$\Delta \Gamma = \Delta t \Psi(\mathbf{D}_{n+1}^p) = \Psi(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \Delta t \left| \mathbf{D}_{n+1}^p \right| \Psi(\mathbf{N}_{n+1}) = \left| \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \right| \Psi(\mathbf{N}_{n+1}) \quad (3.42)$$

avec $\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\mathbf{D}_{n+1}^p}{\left| \mathbf{D}_{n+1}^p \right|} = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p}{\left| \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \right|}$

On aura donc aussi

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}_{n+1}^p)}{\partial \mathbf{D}_{n+1}^p} = \frac{\partial \Psi(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{N}_{n+1})}{\partial \mathbf{N}_{n+1}} \quad (3.43)$$

Ces propriétés montrent que l'on peut séparer l'effet de la norme $|\Delta\epsilon^p|$ et de la direction \mathbf{N}_{n+1} de l'incrément de déformation plastique $\Delta\epsilon^p$. Cette observation peut être utilisée au niveau algorithmique pour réduire localement le nombre d'inconnues.

III.4.1. Intégration implicite du modèle considéré

Dans les calculs de plasticité, l'intégration temporelle de loi de comportement est décrite par un algorithme, comprenant une première phase de prédiction élastique et une seconde phase de correction par une projection sur la surface de plasticité (voir schéma de la figure III.2). L'objectif est de déterminer les parties élastique et plastique de l'incrément de déformation qui satisfont la loi de comportement écrite de manière implicite au temps $t + \Delta t$. Pour réactualiser les variables d'état, on utilise la méthode d'Euler implicite, ce qui conduit généralement à des systèmes non linéaires. A chaque incrément, plusieurs itérations seront nécessaires.

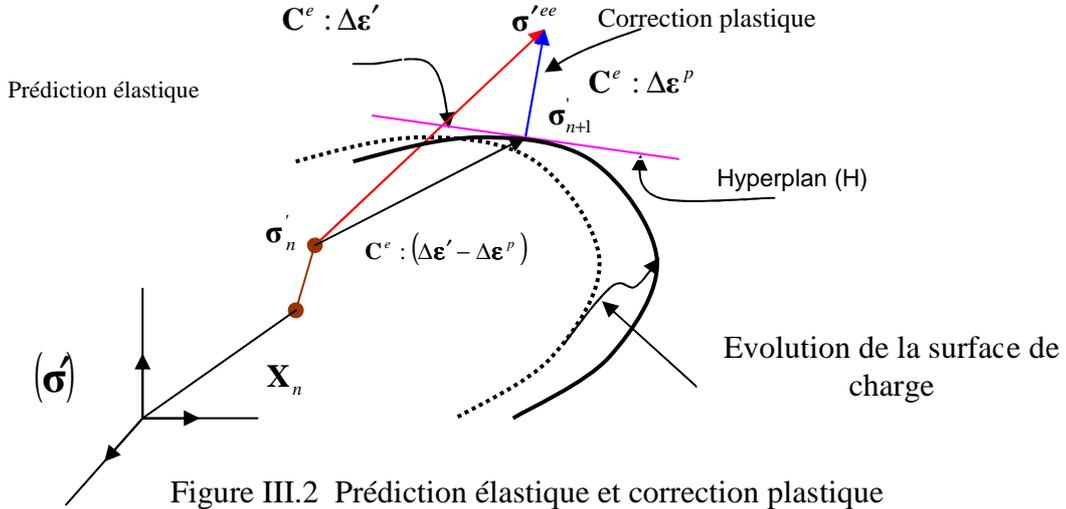


Figure III.2 Prédiction élastique et correction plastique

L'incrément de déformation $\Delta\epsilon$ (donné) se décompose en une partie élastique et une partie plastique :

$$\Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e + \Delta\epsilon^p \quad (3.44)$$

- *Prédiction élastique*

$$\sigma^{ee} = \sigma_n + \mathbf{C}^e : \Delta\epsilon \quad (3.45)$$

où σ^{ee} représente la contrainte d'essai.

- *Correction plastique*

La contrainte à l'instant t_{n+1} devient :

$$\sigma_{n+1} = \sigma^{ee} - \mathbf{C}^e : \Delta\epsilon^p \quad (3.46)$$

Finalement on obtient

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \mathbf{C}^e : (\Delta\epsilon - \Delta\epsilon^p) \quad (3.47)$$

La partie sphérique (hydrostatique) de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ est calculée par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{sph} = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) \mathbf{I} = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_n) \mathbf{I} + K tr(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad (3.48)$$

où K est le module de compression hydrostatique.

On remarque que la partie sphérique de la contrainte est définie complètement par la donnée $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$. Pour la partie déviatorique on a :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_n + 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.49)$$

D'autre part, la contrainte déviatorique à l'instant t_{n+1} peut être calculée en utilisant la relation (3.27) sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (3.50)$$

La combinaison des équations (3.49) et (3.50) donne un système d'équations non linéaires :

$$\mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n = \mathbf{0} \quad (3.51)$$

Le problème d'intégration temporelle de la loi de comportement est réduit à la résolution du système non linéaire précédent. Les contraintes réactualisées sont ensuite calculées par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}'_{n+1} + \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{sph} \quad (3.52)$$

Pour résoudre le système d'équations non-linéaires (3.51), on utilise la méthode de Newton-Raphson. On définit la fonction résidu $\boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ par :

$$\boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n \quad (3.53)$$

On doit donc résoudre $\boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \mathbf{0}$, et pour augmenter la robustesse de l'algorithme, on associe un problème de minimisation à la résolution du système (3.53). On définit pour cela la fonction scalaire $f(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ de la manière suivante :

$$f(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.54)$$

La réactualisation de l'incrément plastique, à chaque itération « k » de calcul, s'écrit :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}^p = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p + \eta \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p; \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (3.55)$$

où :

- $\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p$ est la correction correspondant à une itération « k » de Newton ; son expression est donnée par :

$$\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p = - \left[\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p)}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right]^{-1} : \boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_k^p) \quad (3.56)$$

- η représente le pas défini par la recherche linéaire, afin d'assurer la diminution de $f(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$ d'une itération à l'autre suivant la règle [Press, 1992] :

trouver η tel que :

$$f(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p) \leq f(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^p) + \alpha \frac{\partial f}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} \eta (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \quad (3.57)$$

avec α entre 0 et 1 (valeur recommandée $\alpha=10^{-4}$).

Pour calculer $\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p}$, on dérive l'expression (3.53) et on obtient le Jacobien du système:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} + \frac{\partial \tau}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} \otimes \frac{\partial \Psi(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} + \tau \frac{\partial^2 \Psi(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} + 2\mathbf{G}\mathbf{I}_4^s \quad (3.58)$$

Pour la résolution du système nonlinéaire (3.53), on doit calculer les termes suivants :

$$\Delta\Gamma = \Psi(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \xi = \frac{\partial \Psi(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} \text{ et } \zeta = \frac{\partial^2 \Psi(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (3.59)$$

soit l'expression du potentiel ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre deux. Les expressions des potentiels utilisés ont été données au chapitre 1 ; les expressions des dérivées ξ et ζ correspondantes sont données dans l'annexe 2.

III.4.2. Algorithme de subdivision

L'implantation du schéma d'intégration couplé avec des potentiels non-quadratiques identifiés sur des matériaux à forte anisotropie, conduit généralement à des difficultés de convergence des systèmes non-linéaires (3.34) et (3.53) qui correspondent à la transition élasto-plastique et la projection plastique respectivement. D'où la nécessité d'implanter ce schéma sous la forme d'intégration par sous-incrémentation. Dans ce travail nous avons proposé un nouveau schéma d'intégration par sous-incrémentation en formalisme dual. Ce schéma est inspiré par les travaux effectués en formalisme classique (critère en contraintes) [Ortiz et Simo 1986], [Park and Lee 1996], [Dutko *et al* 1993] et [Yoon *et al*, 1999a]. La méthode proposée prend en compte un écrouissage isotrope et cinématique. L'algorithme cité dans le paragraphe précédent est modifié en adoptant une approche originale. La première étape consiste à initialiser $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_0^p$, en utilisant la condition de cohérence et l'approximation tangente, sur la base de la contrainte d'essai et des variables internes du début de l'incrément. On calcule $\boldsymbol{\rho}_0$ en injectant cette valeur initiale dans (3.53). Ensuite, l'approche consiste à diminuer $\boldsymbol{\rho}_0$ ($\boldsymbol{\rho}_0 > \boldsymbol{\rho}_1 > \boldsymbol{\rho}_2 \dots > \boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{0}$), jusqu'à zéro. Dans ces conditions, on peut réécrire:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^p) &= \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n - \boldsymbol{\rho}_0 = \mathbf{0} \\
 \bar{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) &= \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n - \boldsymbol{\rho}_1 = \mathbf{0} \\
 \bar{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) &= \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_2^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n - \boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{0} \\
 &\vdots \\
 \bar{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_N^p) &= \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} - 2G(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}' - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_N^p) - \boldsymbol{\sigma}'_n - \boldsymbol{\rho}_N = \boldsymbol{\rho}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_N^p) = \mathbf{0}
 \end{aligned}
 \tag{3.60}$$

avec

$$\boldsymbol{\rho}_0 > \boldsymbol{\rho}_1 > \boldsymbol{\rho}_2 \dots > \boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{0} \tag{3.61}$$

Pour chercher l'incrément de déformation plastique du premier sous-incrément, le système non-linéaire correspondant est initialisé par $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0^p = \Delta \Gamma_0 \mathbf{N}_0$, où \mathbf{N}_0 est la direction normale à la surface de charge de von Mises, au niveau de la contrainte d'essai. Ensuite l'incrément de déformation plastique $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_1^p$ est déterminé en initialisant par la solution retrouvée au premier incrément. Finalement, l'incrément de déformation plastique finale recherché est obtenu pour $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_N = \mathbf{0}$. En fait l'équation développée au dernier incrément est équivalente à l'équation (3.53) et $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_N^p$. Le nombre de sous-incréments N est prédéfini ; il peut être augmenté par le programme en cas de divergence.

III.4.3. Variables internes et lois d'écrouissage

Le comportement plastique des métaux dépend non seulement de l'état courant de déformation mais aussi de l'histoire de la déformation. L'influence de l'histoire de la déformation peut être correctement représentée par un nombre suffisant de variables internes. Le modèle d'écrouissage utilisé dans ce travail est décrit par deux variables internes (R , \mathbf{X}). Pour un matériau recuit, les variables R et \mathbf{X} sont initialement nulles. La variable scalaire R décrit l'écrouissage isotrope produit au-delà de la limite d'écoulement par des dislocations accumulées statistiquement et caractérise la taille de la surface d'écoulement. Le tenseur du second ordre \mathbf{X} décrit l'écrouissage cinématique et caractérise la position du centre de la surface d'écoulement. Les variables internes suivent des lois d'évolution. La taille de la surface d'écoulement peut être calculée en utilisant un modèle d'écrouissage isotrope saturant (loi de Voce) :

$$\tau = \tau_0 + R \tag{3.62}$$

avec
$$\dot{R} = C_R (R_{\text{sat}} - R) \dot{\Gamma}, \quad R(0) = 0 \tag{3.63}$$

Une autre loi largement utilisée, où l'évolution de R est croissante en fonction de la déformation plastique cumulée (loi non saturante) est celle de Swift qui s'écrit sous forme :

$$\tau = k(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^n \text{ et } R = \tau - \tau_0 = k \left[(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)^n - \boldsymbol{\varepsilon}_0^n \right] \tag{3.64}$$

où k et n sont des paramètres caractérisant la vitesse d'accroissement de la taille de la surface de charge et $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et un paramètre qui permet de décrire la limite d'élasticité initiale du matériau.

Nous avons couplé le modèle d'écroutissage isotrope à un modèle d'écroutissage cinématique saturant de type Armstrong-Frederick [Frederick and Armstrong, 1966] donnée sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = C_x (X_{sat} \xi - \mathbf{X}) \dot{\Gamma} \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{0} \quad (3.65)$$

Ces deux lois d'écroutissage décrivent assez bien les résultats des essais mécaniques effectués sur des tôles en acier et en alliage d'aluminium.

Le schéma d'intégration temporelle préconisé dans notre travail est le schéma d'Euler implicite :

$$R_{n+1} - R_n = C_R (R_{sat} - R_{n+1}) \Delta\Gamma \quad (3.66)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n = C_x (X_{sat} \xi_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1}) \Delta\Gamma \quad (3.67)$$

Ce qui conduit donc aux expressions suivantes :

$$\tau_{n+1} = \tau_0 + \frac{R_n + C_R R_{sat} \Delta\Gamma}{1 + C_R \Delta\Gamma}; \quad \mathbf{X}_{n+1} = \frac{\mathbf{X}_n + C_x X_{sat} \xi_{n+1} \Delta\Gamma}{1 + C_x \Delta\Gamma}; \quad (3.68)$$

Pour le calcul du module tangent (abordé au paragraphe suivant), on doit aussi calculer les dérivées suivantes :

$$\left\| \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} &= \frac{C_x X_{sat} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} (C_x \Delta\Gamma^2 + \Delta\Gamma) + C_x X_{sat} \xi \otimes \xi - C_x \mathbf{X}_n \otimes \xi}{[1 + C_x \Delta\Gamma]^2}; \\ \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} &= \frac{(C_R R_{sat} - R_n C_R) \xi}{[1 + C_R \Delta\Gamma]^2}. \end{aligned} \right. \quad (3.69)$$

III.4.4. Module tangent cohérent

La méthode de Newton-Raphson utilisée dans la résolution du principe des puissances virtuelles (le système d'équilibre obtenu est une fonction non-linéaire des déplacements incrémentaux) assure une convergence quadratique à condition que le module élasto-plastique soit cohérent, c'est-à-dire que les approximations utilisées pour calculer les déformations incrémentales et les incréments des contraintes soient utilisées aussi dans la forme linearisée du principe des puissances virtuelles.

Nous abordons ici d'une façon générale, le module élasto-plastique cohérent dans le cas du potentiel dual avec écroutissage isotrope et cinématique non-linéaire. On va donc calculer le module tangent cohérent avec le schéma d'intégration utilisé pour la réactualisation des contraintes de Cauchy [Hoferlin *et al.*, 2003].

La loi d'écoulement est donnée par :

$$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{X}_{n+1} + \tau_{n+1} \frac{\partial \Psi(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad (3.70)$$

Pour simplifier l'écriture, nous adoptons ici, pour le potentiel et ces dérivées première et seconde, les notations implicites suivantes :

$$\psi = \psi(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad \xi = \xi(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad \text{et} \quad \zeta = \zeta(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.71)$$

La dérivée totale donne l'expression suivante :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \otimes \frac{\partial \psi}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \tau_{n+1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right] : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.72)$$

On peut écrire aussi :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \psi} \otimes \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \otimes \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} + \tau_{n+1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right] : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.73)$$

soit, en utilisant les notations (3.59) :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \Delta \Gamma} \otimes \xi + \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \Gamma} \xi \otimes \xi + \tau_{n+1} \zeta \right] : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.74)$$

On peut donc réécrire le système comme suit :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = [\mathbf{h}_x \xi + h_r \xi \otimes \xi + \tau_{n+1} \zeta] : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.75)$$

soit encore :

$$d\boldsymbol{\sigma}'_{n+1} = \mathbf{C}^p : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{h}_x \xi + h_r \xi \otimes \xi + \tau_{n+1} \zeta \quad (3.76)$$

Ici \mathbf{h}_x et h_r désignent respectivement les modèles d'écrouissage cinématique et isotrope tel que $\mathbf{h}_x = \frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \Delta \Gamma}$ et $h_r = \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \Gamma}$. Pour le cas particulier du modèle retenu dans le paragraphe précédent, on a $\mathbf{h}_x = C_x (X_{sat} \xi - \mathbf{X}_{n+1})$ et $h_r = C_R (R_{sat} - R_{n+1})$. Cependant, le développement du module tangent s'applique dans un cas plus général. D'autre part on a :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (3.77)$$

on obtient donc :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - d\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (3.78)$$

On peut développer cette écriture en introduisant (3.76) :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{C}^p)^{-1} : d\boldsymbol{\sigma}') \quad (3.79)$$

puis l'opérateur déviatorique :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{C}^e : (d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{I}'_4 : (\mathbf{C}^p)^{-1} : d\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.80)$$

et en regroupant les termes :

$$\left(\mathbf{I} + \mathbf{C}^e : \mathbf{I}'_4 : (\mathbf{C}^p)^{-1} \right) : d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.81)$$

ce qui définit, finalement, l'expression du module tangent cohérent :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[(\mathbf{C}^e)^{-1} + \mathbf{I}'_4 : (\mathbf{C}^p)^{-1} \right]^{-1} : d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.82)$$

III.4.5. Algorithme d'intégration

Les équations développées ci-dessus ont été incorporées dans une routine Umat, sous le logiciel Abaqus/Standard. Les grandes lignes de l'algorithme développé sont répertoriées par le tableau ci-après (Tableau III.2).

Données d'entrée : $\sigma_n, \mathbf{X}_n, R_n, \Delta t, \Delta \epsilon$	<i>En repère tournant</i>
1. Calcul des parties déviatoriques et sphériques	
➤ $\sigma_n^{sph} = \frac{1}{3} tr(\sigma_n), \Delta \epsilon^{sph} = \frac{1}{3} tr(\Delta \epsilon)$	<i>Partie sphérique</i>
➤ $\sigma'_n = \sigma_n - \sigma_n^{sph} \mathbf{I}, \Delta \epsilon' = \Delta \epsilon - \Delta \epsilon^{sph} \mathbf{I}$	<i>Partie déviatorique</i>
2. Prédiction élastique	
➤ $\sigma'^{ee} = \sigma'_n + \mathbf{C}^e : \Delta \epsilon'$	
3. Détection de l'état élastique ou élasto-plastique de σ'^{ee}	
➤ déterminer $\min_{\mathbf{N}} (\tau_n \Psi(\mathbf{N}) - \sigma'^{ee} : \mathbf{N})$	<i>Algorithme de BFGS</i>
4. Réactualisation des variables d'état	
4.1 Si l'incrément est élastique :	
$\sigma_{n+1} = \sigma'^{ee} + \sigma_n^{sph} + Ktr(\Delta \epsilon) \mathbf{I},$	<i>Calcul élastique</i>
$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n, R_{n+1} = R_n$ et $\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e.$	
4.2 Si l'incrément est élasto-plastique : Projection plastique	
a. initialisation $\Delta \epsilon^p$	
b. calcul de $\Delta \Gamma, \xi, \frac{\partial \xi(\Delta \epsilon^p)}{\partial \Delta \epsilon^p}$	<i>Spécifique au potentiel employé</i>
c. calcul de $\mathbf{X}_{n+1}, \tau_{n+1}, \frac{\partial \mathbf{X}_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon^p}, \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \Delta \epsilon^p}$	<i>Spécifique au modèle d'écroutissage</i>
d. calcul de $\rho(\Delta \epsilon^p), f(\Delta \epsilon^p)$ et $\frac{\partial \rho(\Delta \epsilon^p)}{\partial \Delta \epsilon^p};$	<i>cf. eq. (3.53), (3.54) et (3.58)</i>
e. calcul $\delta \Delta \epsilon^p = - \left[\frac{\partial \rho(\Delta \epsilon^p)}{\partial \Delta \epsilon^p} \right]^{-1} : \rho(\Delta \epsilon^p)$	
f. calcul de η (recherche linéaire)	<i>cf. eq. (3.55)</i>
g. réactualisation de l'incrément plastique : $\Delta \epsilon^p = \Delta \epsilon^p + \eta \delta \Delta \epsilon^p, \quad 0 \leq \eta \leq 1$	
h. - si $test_4 \geq Tol_4$ aller à 4.2.b, sinon	<i>(voir annexe B)</i>
- calcul $\sigma_{n+1} = \sigma_n + 2G(\Delta \epsilon' - \Delta \epsilon_i^p) + Ktr(\Delta \epsilon) \mathbf{I}$	
- calcul $\mathbf{C}^{ep} = 2G(\mathbf{I}_4 + 2G\mathbf{C}^p)^{-1} : \mathbf{I}_4^s + K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$	<i>(voir annexe A)</i>
4. Retour	

Tableau III.2 Schéma de l'algorithme utilisé dans le sous-programme Umat

III.5. Validation de l'implantation numérique

Dans les deux exemples qui suivent, on présente les résultats comparatifs sur le bien-fondé des algorithmes d'intégration temporelle de la loi de comportement, implantés dans le code de calcul par éléments finis **Abaqus/Standard** (version 6.5). Ces tests ont pour objectif les points suivants :

1. La validation des algorithmes de transition élasto-plastique et de projection plastique, en comparant des résultats de sous-programme Umat avec ceux d'Abaqus.
2. Vérification de la robustesse du sous-programme Umat par la simulation d'un problème industriel complexe.

III.5.1. Essai de traction simple

Afin de vérifier le bon fonctionnement des algorithmes développés (la transition élasto-plastique, la projection plastique ainsi que le sous-programme Umat), on effectue un exemple d'une traction simple, sur un alliage d'aluminium AA5182 d'épaisseur 1 mm. Les coefficients d'anisotropie et d'écrouissage appliqués pour cet exemple sont résumés dans le tableau ci-dessous, ils sont extraits d'un rapport LPMTM [Tabacaru *et al.* 2003]. De plus, nous avons considéré un module de Young $E=70000\text{MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu=0.33$.

Potentiel de Hill'48		Paramètres d'écrouissage	
F	0,652	σ_0 [MPa]	148,5
G	0,570	C_r	9,7
H	0,430	R_{sat} [MPa]	192,4
N	1,61	C_x	152,7
		X_{sat} [MPa]	26.0

Tableau III.3 Paramètres d'écrouissage isotrope de type Voce et écrouissage cinématique

Pour simuler un test rhéologique de type traction simple, nous avons considéré un cube unité. L'élément fini choisi est l'élément à intégration sélective réduite C3D8IH. Pour le pilotage nous avons appliqué un incrément de déplacement de 0.2mm.

La Figure III.3 montre l'évolution de la contrainte équivalente avec la déformation plastique équivalente. On peut constater que les deux courbes simulées par le sous-programme Umat et Abaqus sont identiques. Ceci met en évidence le bien-fondé de l'algorithme de transition élasto-plastique ainsi que l'algorithme élaboré pour la réactualisation de la contrainte élasto-plastique. En même temps, les résultats fournis par le sous programme Umat sont proches de l'expérience, ce qui justifie le choix des lois d'écrouissage considérées et donne une idée de la pertinence des paramètres d'écrouissage qui seront utilisés lors des applications, au chapitre suivant.

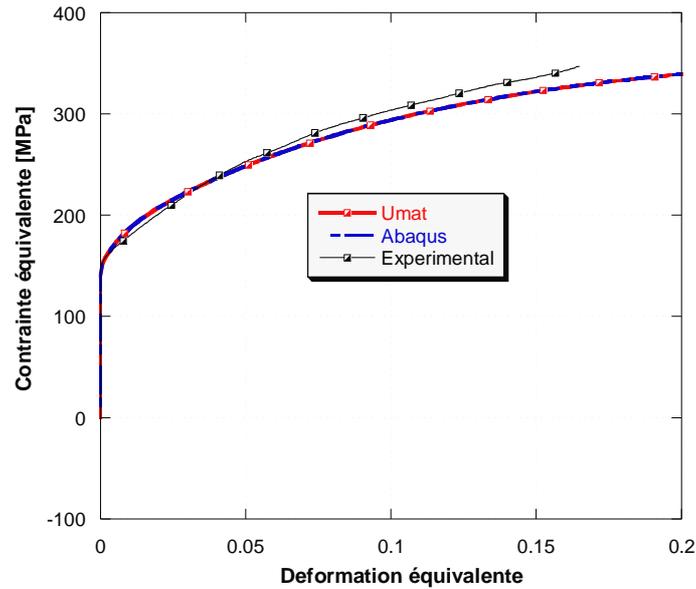


Figure III.3 Traction uniaxiale à 15% de déformation

III.5.2. Simulation du rail en S

L'exemple de l'emboutissage du « S-rail » est un très bon test pour la convergence du sous-programme UMAT dans des situations d'emboutissage de pièce complexe. Il s'agit d'un problème fortement non-linéaire, caractérisé par de grandes déformations et rotations et l'existence du contact avec frottement. Par conséquent, ce test permet la vérification de la robustesse de la Umat implantée dans le logiciel Abaqus/Standard, en comparant aux résultats fournis par le comportement existant dans ce logiciel. Cet exemple présente deux simulations fournies par le logiciel Abaqus/Standard avec et sans le sous-programme Umat. Nous tenons à préciser que nous voulons montrer, par cet exemple, le bien fondé de sous programme Umat, et que nous n'avons donc pas l'ambition d'en montrer les résultats expérimentaux.

Nous avons effectué ce test sur le même matériau considéré dans l'exemple précédent. Les simulations réalisées sont montrées sur la Figure III.4. D'après ces résultats, les deux simulations ne présentent aucune différence. De plus, ces résultats sont très cohérents. En effet, cet exemple met en évidence la robustesse du sous programme Umat.

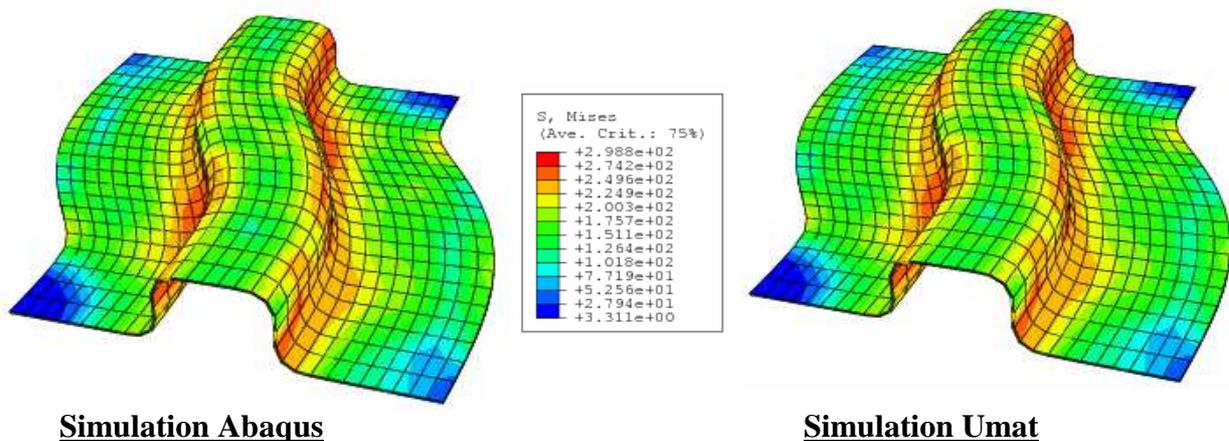


Figure III.4 Simulation d'un test S-rail

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les principaux aspects numériques liés à l'implantation d'une loi de comportement élasto-plastique en approche potentiel dual, dans le logiciel **Abaqus/Standard**.

Nous avons introduit les hypothèses et les notions théoriques liées à la modélisation mécanique du processus de mise en forme des matériaux métalliques subissant de grandes déformations. Avant de présenter le formalisme du potentiel dual, nous avons rappelé la théorie classique de la plasticité.

L'absence du critère de charge-décharge, nous a conduits à chercher des algorithmes plus ou moins robustes pour traiter la transition élasto-plastique, d'après la méthode développée dans les travaux de Bacroix et Gilormini [Bacroix and Gilormini, 1995]. Par conséquent, l'approximation BFGS a été retenue et discutée en détail.

Nous avons adopté le schéma d'Euler implicite pour l'intégration de la loi de comportement élasto-plastique, en utilisant la méthode de Newton Raphson. Ensuite, nous avons proposé une approche originale de subdivision de l'incrément de chargement, capable de traiter le cas des potentiels non-quadratiques fortement non-linéaires.

Ces outils numériques ont été validés sur un exemple simple et un exemple plus complexe. Les résultats montrés mettent en évidence le bien-fondé du sous programme Umat.

L'implantation numérique des différents potentiels au sein du même logiciel de simulation par éléments finis nous a permis de comparer ces différents modèles non seulement sur la base leurs prédictions d'anisotropie sur des calculs analytiques, mais aussi de leurs prédictions numériques lors de l'emboutissage. Ces résultats font l'objet du chapitre qui suit.

III.7. Références bibliographiques

- Arminjon, M., Bacroix, B., 1991. On Plastic Potentials for Anisotropic Metals and Their Derivation From the Texture Function. *Acta Mechanica*. 88, 219-243.
- Arminjon, M., Bacroix, B., Imbault, D., Raphanel, J. L., 1994. A forth-order plastic potentiel for anisotropic metals and its analytical calculation from texture data, *Acta Mech.* 107, pp 33-51.
- Bacroix, B., Gilormini, P., 1995. Finite-element simulations of earing in polycrystalline materials using a texture-adjusted strain-rate potential, *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng* 3, pp 1-21.
- Barlat, F., 1993. Strain rate potential for metals and its application to minimum plastic work path calculations, *International Journal of Plasticity* 9, pp 51-63.
- Cao, H. L., 1990. Modélisation mécanique et simulation numérique de l'emboutissage ; Thèse de doctorat, INPG-Grenoble.
- Dutko, M., Peric, D., and Owen, D.R.J., 1993. Universal anisotropic yield criterion based on superquadratic functional representation: Part 1. Algorithmic issues and accuracy analysis, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 109, 73-93.
- Eterovic, A., L. Bathe, K. J., 1990. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kenematic hardening using the logarithmic stress and strain measures; *Int. J. Num. Meth. Eng.* 30, p. 1099.
- Genevois, P., 1992. Etude expérimentale et modélisation du comportement plastique anisotrope de tles d'acier en grandes transformations ; Thèse de doctorat, INPG- Grenoble.
- Hill, R., 1987. Constitutive dual potentiels in classical plasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 35, pp 23-33.
- Hiwatashi, S., 1998. A texture and microstructure-based constitutive model for plastic anisotropy and its application to forming limit prediction under strain path changes, thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven.
- Hoferlin, E., 2001. Incorporation of an accurate model of texture and strain-path induced anisotropy in simulations of sheet metal forming, Thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven.
- Hughes, T. J. R., 1984. Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity: S. Nemat-Masser et al. (editeurs), *Theoretical foundation for large-scale computations for nonlinear material behavior*, Martinus Nijhoff Publishers : Dordrecht, The Netherlands, pp 29-57.
- Ladreyt, T., 1992. Modélisation bidimensionnelle et simulation numérique des processus de mise en forme des tles dans l'industrie automobile ; Thèse de doctorat, INPG-Grenoble.
- Lee, E. H., 1969. Elastic-plastic deformations at finite strains, *J. Appl; Mech.*, 36.
- Li, S. Hoferlin, E., van Bael, A., van Houtte, P., Teodosiu, C., 2003. Finite element modeling of plastic anisotropy induced by texture and strain-path change, *International Journal of Plasticity* 19, pp 647-674.

- Mandel, J., 1982. Définition d'un repère privilégié pour l'étude des transformations anélastiques du polycristal ; J. Méc. Appl., 1, p7.
- Makinouchi, 1985. A., Elastic-plastic stress analysis of binding and forming of sheet metal; computer modelling of sheet metal forming process, N.M. Wang and S.C. Tang, Eds., AIME, Warrendale, p. 161.
- Makinouchi, A., 1986. Finite element modelling of draw-bending process of sheet metal; numerical methods in industrial forming processes, Proc. NUMIFORM'86 Conf., Gothenburg, K. Mattiasson, A., Samuelsson, R.D., Wood and O.C., Zienkiewicz, Eds., Balkema, Rotterdam-Boston, p.327.
- Ortiz, M., Simo, J.C., 1986. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic relations, Int. J. Numer. Methods Engrg. 23, 353-366.
- Ortiz, M., 1987. Some computational aspects of finite deformation plasticity, Proc. 2nd Int. Conf. on computational plasticity, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Onate, Barcelona, p.1717.
- Park, M.S., Lee, B.C., 1996. Geometrically nonlinear and elastoplastic three dimensional shear flexible beam element of Von-Mises type hardening material, Int. J. Numer. Methods Engrg. 39, 383-408.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 1992. Numerical recipes: The art of scientific computing. Ed. Cambridge University Press.
- Schweizerhof, K., Hallquist, J. O., 1991. Explicit integration schemes and contact formulations for thin sheet metal forming, FE-simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, VDI Berichte Nr. 894, Zurich, p.405.
- Sidoroff, F., 1981. Formulation Elasto-plastique en grandes déformations, Rapport GRECO 29.
- Szabó, L., Jonas, J. J., 1995. Consistent tangent operator for plasticity models based on the plastic strain rate potential, Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 128, pp 315-323.
- Tabacaru, V., Haddadi, H., Maier, C., Bouvier, S., Teodosiu, C., 2003. Essais de traction/cisaillement et identification de trois modèles élasto-plastiques pour les acier DP600, DP500 et DC06, rapport technique, LPMTM.
- Teodosiu, C., Sidoroff, F., 1976. A theory of the finite elastoplasticity of single crystal; Int. J. Eng. Sci. 14, p165
- Teodosiu, C., Genevois, P., 1988. Modelling large deformation anisotropic plastic behaviour of mild steel; Proc. Int. Symp. MECAMAT on inelastic behaviour of solids: Models and utilisation, Besanon, p. 211
- Teodosiu, C., Cao, H. L., 1988. Residual stress after axisymmetric deep drawing, Proc. 15th Biennial congress I.D.D.R.G. on controlling sheet metal forming processes, Dearborn, Michigan, U.S.A., Ed. North American Deep Drawing Research Group: ASM International, pp. 309/319
- Teodosiu, C., 1989. The plastic spin: Microstructural origin and computational significance; Proc. 2nd Int. Conf. on computational plasticity, eds. D.R.J. Owen, E. Hinton and E. Onate, Barcelona, p.163.

van Bael, A., 1994. Anisotropic yield loci derived from crystallographic data and their application in finite-element simulations of plastic forming processes, thèse de doctorat, Katholieke Universiteit Leuven.

van Bael, A., van Houtte, P., 2002. Convex fourth and sixth-order plastic potentials derived from crystallographic texture. In: Cescotto, S. (Ed.), *Non Linear Mechanics of Anisotropic Materials. Proceedings of the Sixth European Mechanics of Materials Conference (EMMC6)*, Liege, Belgium, September 2002. University of Liege, pp. 51-58.

Yoon, J.W., Yang, D.Y., Chung, K., 1999a. Elasto-plastic finite element method based on incremental deformation theory and continuum based shell elements for planar anisotropic sheet materials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 174, 23.

Ziegler, H., 1977. *An introduction to thermomechanics*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.

Zhou, Y., Jonas, J. J., Szabo, L., Makinde, A., Jain, M., MacEwen, S. R., 1997. Incorporation of an anisotropic (texture-based) strain-rate potential into three-dimensional finite elements simulations, *International Journal of Plasticity*, 13 pp 165-181.

Chapitre IV :

Applications à l'emboutissage cylindrique

IV. Applications à l'emboutissage cylindrique

IV.1. Introduction

Dans ce travail les lois de comportement élastoplastique anisotrope envisagées précédemment ont été implantées et testées avec le code de calcul par éléments finis Abaqus/Standard, pour simuler le processus d'emboutissage. L'anisotropie des matériaux a été décrite en introduisant des potentiels duaux comme le potentiel de Hill'48, Srp93, Quartus et Srp2004-18p. Nous présentons dans ce chapitre des applications dans le cadre de la simulation des processus de mise en forme. Ces applications concernent la simulation numérique de l'emboutissage profond et le retour élastique. Avant de commencer notre étude, une analyse de l'influence du maillage et du type d'éléments finis sur les simulations numériques est effectuée. Cette première étude, bien que non exhaustive, permet toutefois de faire un choix judicieux du maillage pour la suite de l'étude. La première application discutée dans ce chapitre porte sur la capacité des différents potentiels plastiques à décrire les cornes d'emboutissage en prenant en compte également l'influence des différentes stratégies d'identification des paramètres matériau présentées dans le chapitre II de ce mémoire. Ces calculs nous ont permis de vérifier les hypothèses concernant la corrélation entre les cornes d'emboutissage et les coefficients d'anisotropie de Hill, et de voir l'impact que donne la prise en compte de l'anisotropie à travers l'épaisseur sur les simulations numériques. Les résultats des simulations numériques sont analysés du point de vue des hauteurs de cornes, de leur nombre, des distributions des iso-valeurs de contraintes équivalentes, des déformations radiales et circonférentielles ainsi que des distributions des épaisseurs suivant la direction de laminage. La deuxième application concerne l'étude du retour élastique dans le cas d'un emboutissage profond partiel.

Les applications présentées dans ce chapitre portent sur une large classe de matériaux polycristallins de type c.c. (aciers mono et bi-phasé) et c.f.c. (alliages d'aluminium) cités dans le chapitre II. Ces matériaux ont l'avantage de présenter différentes anisotropies (profils distincts de $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$).

IV.2. Description des essais étudiés

Plusieurs exemples d'emboutissage cylindrique ont été simulés et analysés dans ce chapitre. La symétrie de révolution de la géométrie ainsi que la symétrie orthotrope des matériaux étudiés permettent de considérer dans les simulations seulement un quart de la structure (outillage+tôle). Le processus se déroule suivant les deux phases suivantes :

- Serrage de la tôle entre la matrice et le serre-flan, avec une force constante imposée.
- Descente du poinçon jusqu'à un déplacement total qui assure un avalement complet ou partiel du flan, en maintenant un effort constant imposé sur le serre-flan.

On peut noter que pour une matrice et un poinçon circulaires donnés, plus le flan est grand, plus les efforts d'emboutissage sont grands, entraînant une augmentation de la compression circonférentielle au niveau de la collerette, et des risques de plissement et de rupture de la tôle

[Schaller, 1972]. La difficulté d'emboutissage augmente donc avec le rapport d'emboutissage défini par :

$$R_{\text{emb}} = \frac{\text{Diamètre du flan}}{\text{Diamètre du poinçon}}. \quad (4.1)$$

Les paramètres d'anisotropie de tous les matériaux simulés ont été identifiés soit par des mesures de texture, soit par des essais mécaniques selon les stratégies décrites au chapitre II. L'écroutissage isotrope est décrit en fonction des matériaux par la loi de Swift ou la loi de Voce. L'écroutissage cinématique est décrit par la loi d'Armstrong-Frederick. Notons ici qu'en termes d'identification paramétrique, l'écroutissage est volontairement traité dans ce travail avec moins d'attention que l'anisotropie initiale. Les paramètres d'écroutissage des alliages d'aluminium fournis par Alcoa ont été simplement pris dans les articles correspondants. Pour les autres matériaux, les paramètres d'écroutissage avaient été identifiés par le LPMTM, notamment dans le cadre du projet 3DS, en utilisant des essais de traction et de cisaillement (monotone et réversible), réalisés dans la direction de laminage. Enfin, pour l'acier DC06, nous avons utilisé les paramètres d'écroutissage d'un acier de la même nuance qui avait déjà été identifié au LPMTM.

De ce fait, l'utilisation de ces jeux de paramètres (combinés aux paramètres des potentiels identifiés au chapitre II) pourrait aboutir à des prédictions imprécises pour certains chargements en grandes déformations. Il est donc important de souligner que ce choix se justifie dans le contexte particulier des applications envisagées dans le cadre de cette thèse, à savoir la simulation de l'emboutissage cylindrique (et notamment la prédiction de la hauteur des cornes). Il a été montré par plusieurs chercheurs (dont [Hoferlin, 2001] dans le contexte des potentiels plastiques) que le modèle d'écroutissage ainsi que ses paramètres ont un faible impact sur les cornes d'emboutissage – à moins que l'évolution de texture ne soit prise en compte dans la modélisation [Flores et al. 2005]. Nous pensons donc que la pertinence de nos conclusions concernant l'emboutissage cylindrique n'est pas affectée par les choix faits ici. Cependant, l'utilisation de ces jeux de paramètres pour des applications plus complexes nécessiterait une validation plus approfondie de ces jeux de paramètres.

Nous avons considéré plusieurs mises en données d'emboutissage cylindrique. Dans le cadre de la validation des résultats éléments finis par comparaison avec les résultats expérimentaux, nous avons repris deux exemples de [Yoon *et al.*, 2006], concernant les alliages d'aluminium AA2090-T3 et AA2008-T4. Dans le cas des aciers et alliage d'aluminium AA6022-T43, nous avons pris les résultats expérimentaux de [Hoferlin *et al.*, 2001]. Les propriétés des matériaux, les géométries des outils et des tôles ainsi que les forces appliquées sur le serre-flan et les coefficients de la loi de Coulomb considérés sur les interfaces outil/tôle sont répertoriés dans le Tableau IV.1.

La Figure IV.1 ci-dessous schématise l'outillage de l'essai d'emboutissage profond adopté dans les simulations par EF. D'un point de vue numérique, on suppose que le flan est parfaitement centré avec les outils lors des opérations d'emboutissage.

L'évaluation complète des simulations par EF des procédés d'emboutissage nécessite une prise en compte des conditions réelles d'emboutissage, tels l'effort de serrage ou la description du contact entre les outils et le flan. Le but recherché lors d'un procédé d'emboutissage est la transformation d'un flan en une pièce de forme désirée avec une uniformité des distributions des épaisseurs. Cette dernière condition n'est pas toujours

respectée de manière satisfaisante en imposant un effort de serrage constant. Afin que l'épaisseur reste quasi uniforme, on pourrait imposer aussi un déplacement du serre-flan nul. Ceci implique en échange que la force du serre flan varie au cours du processus. Nous n'avons pas retenu ce cas de figure.

Matériaux	Alliages d'aluminium			Aciers	
	AA6022	AA2008-T4	AA2090-T3	DP600	DC06
Coefficient du frottement	0.1	0.123	0.1	0.1	0.2
Force de serrage (N)	5000	5550	5500	11000	12000
Propriétés des matériaux (écrouissage isotrope + cinématique)					
Contrainte d'écoulement ($0^\circ/DL$)	124.2	185	279.6	285.0	122.24
Cr	9.5	6.14	1.7	5.6	7.8
Rsat (MPa)	167.0	223	488	359.6	213.6
Cx	146.5	0	0	51.0	153.4
Xsat (MPa)	34.9	0	0	268.7	45.1
Géométrie tôle/outillage (mm)					
Epaisseur du flan	1	1.24	1.6	1	0.8
Diamètre du flan	100	162	158.76	100	100
Rayon de raccordement matrice $r_{matrice}$	10	6.35	12.7	10	10
Rayon de raccordement poinçon $r_{poinçon}$	6.8	4.78	12.7	6.8	5
Diamètre de la matrice $D_{matrice}$	52.5	100.08	101.48	52.5	52.5
Diamètre du poinçon $D_{poinçon}$	49.6	99.16	97.46	49.6	50

Tableau IV.1 Paramètres géométriques et de procédé pour les emboutissages cylindriques simulés.

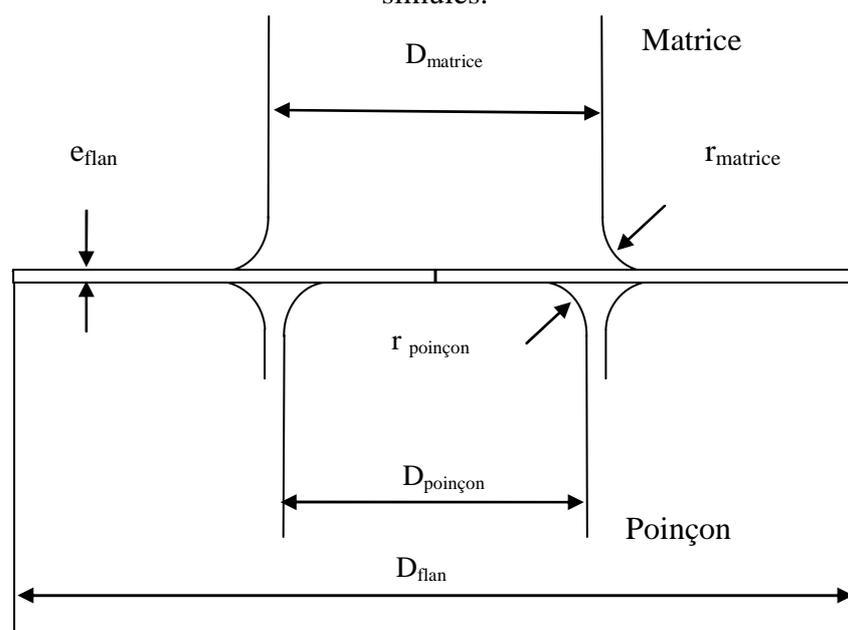


Figure IV.1 Géométrie de l'emboutissage.

Le contact avec frottement joue un grand rôle pour la réussite du procédé. Or, les mécanismes de frottement sont complexes et les modèles dont on dispose restent relativement simplistes par rapport à la réalité physique. Ainsi, dans la majorité des cas, on se contente de décrire le phénomène de frottement par la loi classique de Coulomb plutôt que d'intégrer des modèles plus sophistiqués qui tiennent compte des différents frottements flan/matrice et flan/poinçon. Bien que très simple, cette loi est cependant assez bien adaptée pour le processus d'emboutissage.

Le traitement du contact dans la simulation par éléments finis des processus de mise en forme est un sujet complexe. Dans toutes nos simulations, les outils sont supposés rigides et la tôle est réduite, du point de vue de la gestion du contact, aux nœuds du maillage situés sur la surface de la tôle. Les nœuds en contact avec l'outil peuvent se détacher et inversement les nœuds libres peuvent entrer en contact.

Le bon choix des éléments finis à utiliser dans les simulations des processus de mise en forme est fondamental pour la qualité des résultats. Dans un processus d'emboutissage, le matériau subit différentes sollicitations, qui sont parfois proches de l'expansion biaxiale, du cisaillement pur, de la flexion, *etc.* Par conséquent, l'élément fini choisi doit bien se comporter pour ces différents états de contraintes et de déformations. Les éléments de type coque sont le plus souvent utilisés pour la mise en forme en emboutissage. La théorie des coques peut toutefois ne pas être adéquate pour représenter les phénomènes complexes associés à ce processus (contact sur les deux faces, cisaillement transverse ...*etc.*). Dans ce travail, des éléments finis de type solide ont été utilisés dans nos simulations numériques. Le choix des éléments finis à utiliser doit aussi tenir compte de beaucoup de facteurs tels que l'incompressibilité, la géométrie, le comportement en flexion et en cisaillement, le contact et le coût de calcul.

IV.3. Sensibilité au maillage

Avant d'entamer nos simulations numériques, nous avons étudié l'influence du choix des paramètres du maillage (le nombre de couches d'éléments dans l'épaisseur, le raffinement dans la surface et le type d'intégration). Afin d'analyser la sensibilité des calculs EF au type d'intégration, nous avons considéré deux types d'éléments disponibles dans Abaqus : l'élément solide linéaire à 8 nœuds à intégration réduite C3D8R et l'élément solide linéaire hybride à 8 nœuds à intégration réduite sélective C3D8IH. Nous avons testé le raffinement du maillage dans l'épaisseur en considérant une, deux et trois couches d'éléments. D'autre part, nous avons considéré un maillage grossier sur la surface du flan comportant 20x24 éléments finis suivant la direction radiale et circonférentielle respectivement, puis un maillage moyen avec 30x30 éléments finis et enfin un maillage fin avec 40x45 éléments finis. Les différents maillages non déformés sont illustrés sur la Figure IV.2. Les axes de symétrie orthotrope (x, y, z) correspondent respectivement aux directions de laminage (DL), transverse (DT) et normale (DN). Pour alléger la notation des différents éléments et maillages utilisés, on présente une notation condensée par « xc-y » où la lettre x indique le nombre de couches et la lettre y indique le raffinement dans le plan de la tôle : grossier par (g), moyen par (m) et fin par (f).

Cette étude de sensibilité au maillage a été effectuée sur un flan en acier doux DC06 caractérisé par une anisotropie dans le plan de la tôle ($r_0 = 2.53$, $r_{45} = 1.84$, $r_{90} = 2.72$)

conduisant à des hauteurs de cornes prononcées. Ce matériau a été identifié pour le potentiel de [Hill, 1948] à partir des mesures de textures en utilisant le modèle micromécanique de Taylor-Bishop-Hill [Bishop and Hill., 1951]. La force de serrage est de 12000N et le coefficient de la loi de Coulomb sur les interfaces outil/tôle est fixé à 0.1.

La sensibilité des simulations par éléments finis au type d'intégration et au raffinement du maillage est examinée par rapport aux prévisions des hauteurs de cornes, des distributions des contraintes équivalentes, des distributions des déformations logarithmiques radiales et circonférentielles et enfin des distributions des épaisseurs.

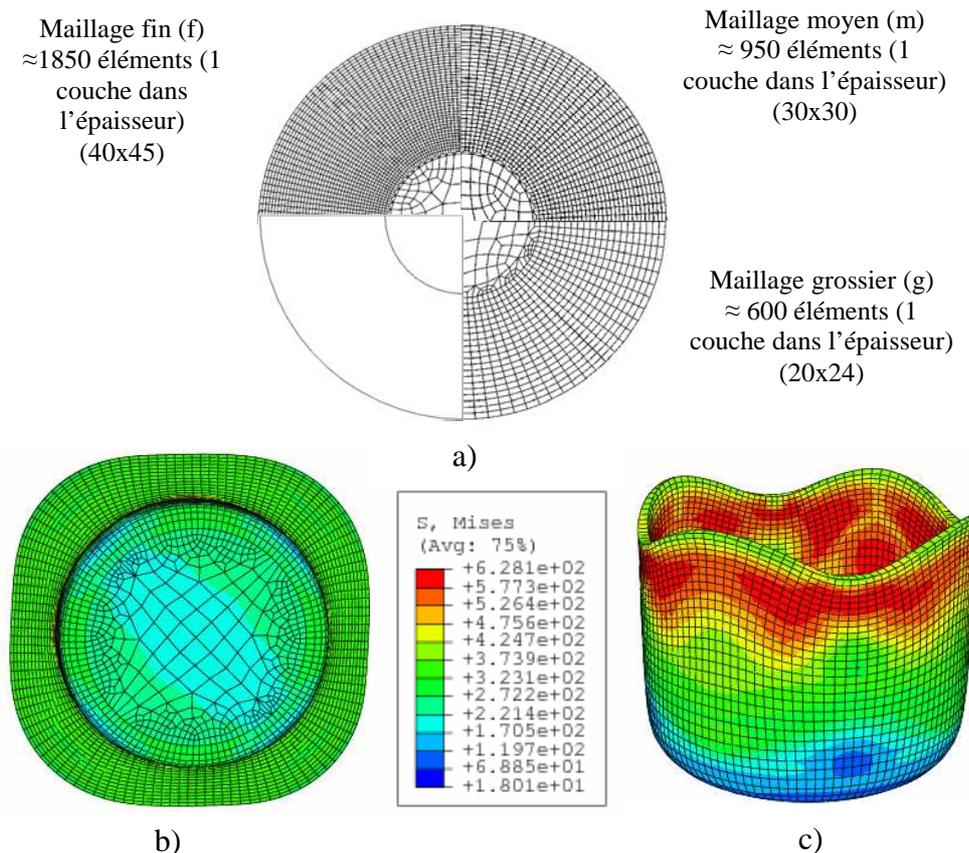


Figure IV.2 Maillages utilisés : a) les trois maillages employés dans le plan de la tôle
 b) Configuration intermédiaire et c) Configuration finale pour le maillage moyen.

IV.3.1. Prévisions des hauteurs des cornes

Les profils des emboutis obtenus sont présentés sur la Figure IV.3, pour les deux types d'intégration et les différents maillages. De l'analyse de ces résultats, on constate que l'influence du raffinement du maillage dépend du type de l'élément fini. Bien que les résultats numériques obtenus soient cohérents, on constate quelques différences systématiques avec le maillage utilisé. Quand on considère l'élément C3D8R à intégration réduite, les simulations numériques sont très sensibles à la fois au nombre de couches dans l'épaisseur et au raffinement du maillage sur la surface. En augmentant le nombre d'éléments et de couches, le profil de l'embouti approche les résultats obtenus avec l'élément à intégration réduite

sélective. On observe très souvent l'apparition du plissement de l'embouti, en utilisant une seule couche de cet élément.

Dans le cas de l'élément C3D8IH, les résultats sont quasi-identiques avec les différents maillages (Figure IV.3, Figure IV.4). Ceci montre bien qu'une finesse raisonnable du maillage sur la surface est tout à fait satisfaisante avec ce type d'intégration. De même, les hauteurs des cornes obtenues sont faiblement sensibles au nombre de couches d'éléments dans l'épaisseur. Une seule couche semble suffire pour prédire les cornes d'emboutissage. Ces résultats, en accord avec les travaux de [Alves, 2003], [Yoon *et al.*, 2006] et [Hoferlin *et al.*, 2001] mettent en évidence l'efficacité de cet élément.

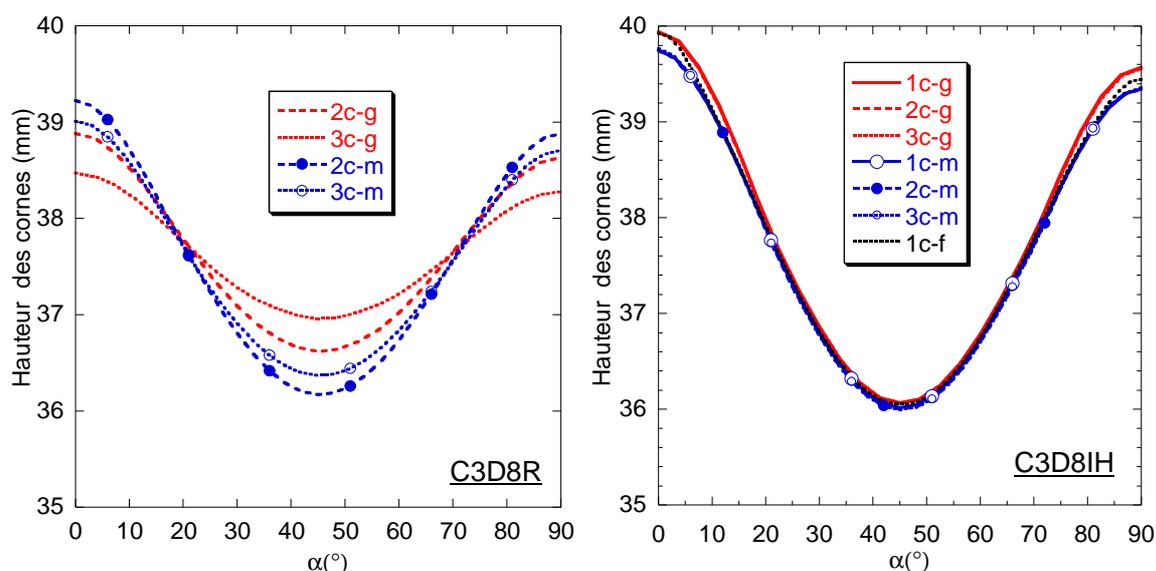


Figure IV.3. Influence du maillage sur la hauteur des cornes.

On doit noter que les simulations effectuées avec les différents maillages et les différents types d'intégration n'ont pas présenté de difficulté particulière d'ordre numérique. Une bonne convergence a été observée pour les différents incréments de calcul, tant au niveau de l'équilibre, qu'au niveau de la gestion du contact avec frottement. Il faut toutefois souligner que l'augmentation du nombre d'éléments est pénalisante au niveau du temps CPU.

IV.3.2. Distribution des contraintes équivalentes

IV.3.2.1. Cas de l'élément C3D8IH

Les différents maillages analysés donnent des résultats différents en terme de distributions d'isovaleurs de contrainte équivalente. Quand on analyse la distribution de la contrainte le long de la paroi, on constate, dans le cas d'une seule couche, que sur la face intérieure de la paroi, le niveau des contraintes varie de 3.5 à 720MPa. Cette différence diminue en mettant deux couches et semble se stabiliser pour un maillage qui comporte trois couches dans l'épaisseur. Ceci nous conduit à conclure que l'utilisation de trois couches dans l'épaisseur est nécessaire afin d'accommoder correctement le gradient de contraintes. En revanche, les différents maillages sur la surface du flan donnent des distributions proches de contraintes équivalentes. Ainsi, avec l'élément d'intégration réduite sélective analysé, 2

couches d'éléments à travers l'épaisseur semblent donner des résultats satisfaisants par rapport à un raffinement plus important du maillage. Notons cependant que l'apparente sensibilité des contraintes au nombre de couches d'éléments peut s'expliquer par la manière d'extrapolation des valeurs aux deux points d'intégrations vers les faces externes.

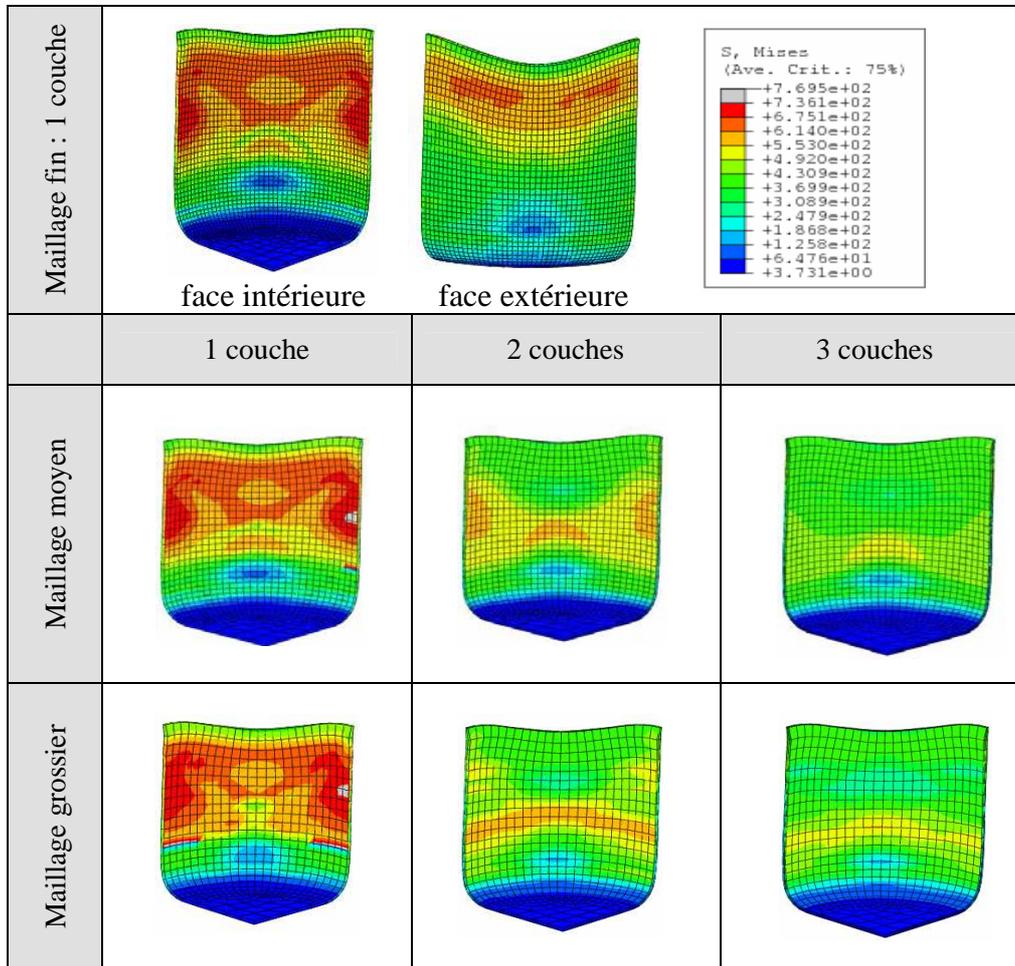


Figure IV.4 Distribution des contraintes équivalentes. Simulations avec l'élément fini C3D8IH. (faces intérieures)

IV.3.2.2. Cas de l'élément C3D8R

Pour l'ensemble des simulations, le niveau des contraintes est beaucoup plus faible par rapport à l'élément d'intégration réduite sélective C3D8IH. Ce dernier présente un gradient de contraintes significatif dans l'épaisseur, cela est dû au nombre de points d'intégration à travers l'épaisseur (e.g. 3 couches : 6 pour le C3D8IH et 3 dans le cas présent).

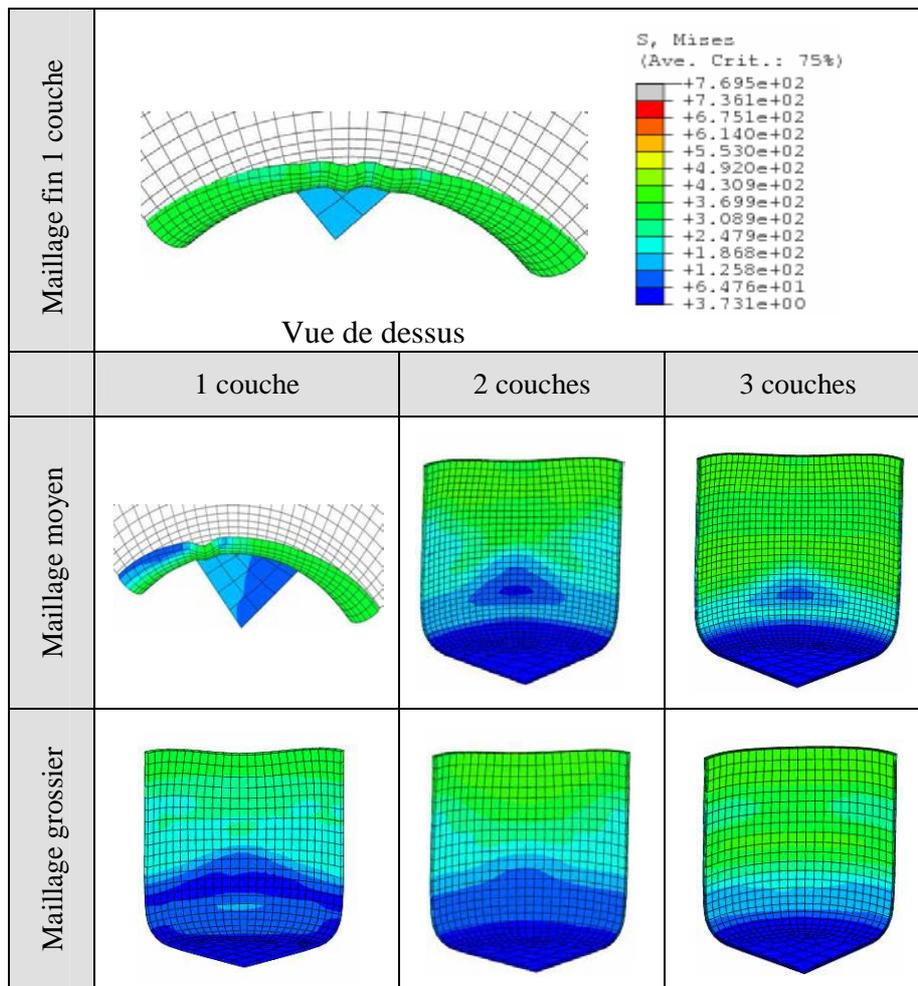


Figure IV.5 Distribution des contraintes équivalentes. Simulations avec l'élément fini C3D8R.

L'une des difficultés constatées avec l'élément C3D8R, est l'apparition d'une zone de plissement dans le cas du maillage fin et moyen avec 1 couche dans l'épaisseur. Ces plissements sont causés par la compression circonférentielle. L'élément fini C3D8R possède un seul point de Gauss dans l'épaisseur et ne permet pas d'accommoder correctement les gradients de contraintes. On peut facilement constater que dans le cas d'une seule couche, le nombre de plis augmente avec l'augmentation du nombre d'élément dans la surface. Les simulations numériques montrent que l'utilisation d'au moins deux couches d'éléments suivant l'épaisseur fait disparaître ce phénomène de plissement de la tôle. Cependant, en utilisant ce type d'intégration, le niveau des contraintes reste faible par rapport à l'élément d'intégration réduite sélective. Dans le cas d'un maillage moyen avec 3 couches d'éléments finis dans l'épaisseur, les résultats obtenus par les deux types d'éléments sont plus proches. Ceci indique que les limites de l'élément C3D8R sont repoussées par le raffinement du

maillage dans le plan de la tôle et surtout dans son épaisseur. Dans la suite de ce travail, cet élément ne sera toutefois pas utilisé pour éviter les instabilités de calculs numériques associées à l'apparition des plissements du flan.

IV.3.3. Distribution de la déformation

On présente dans les figures IV.6 et IV.7 ci-dessous les distributions des déformations logarithmiques radiales et circonférentielles calculées le long d'une ligne matérielle initialement orientée le long de la direction de laminage. On observe une bonne concordance des résultats pour les différentes régions de la tôle. Des déformations faibles et uniformes sont observées au niveau du fond de la tôle, une augmentation des déformations radiales et une diminution des déformations circonférentielles (négatives) le long de la jupe en allant vers le bord. Globalement, on retrouve les mêmes tendances que celles observées sur l'influence du maillage sur les hauteurs des cornes, ce qui est cohérent du fait du lien entre les cornes d'emboutissage et les déformations selon les différentes directions de la tôle et confirme notre choix du degré de raffinement du maillage et du type d'élément fini.

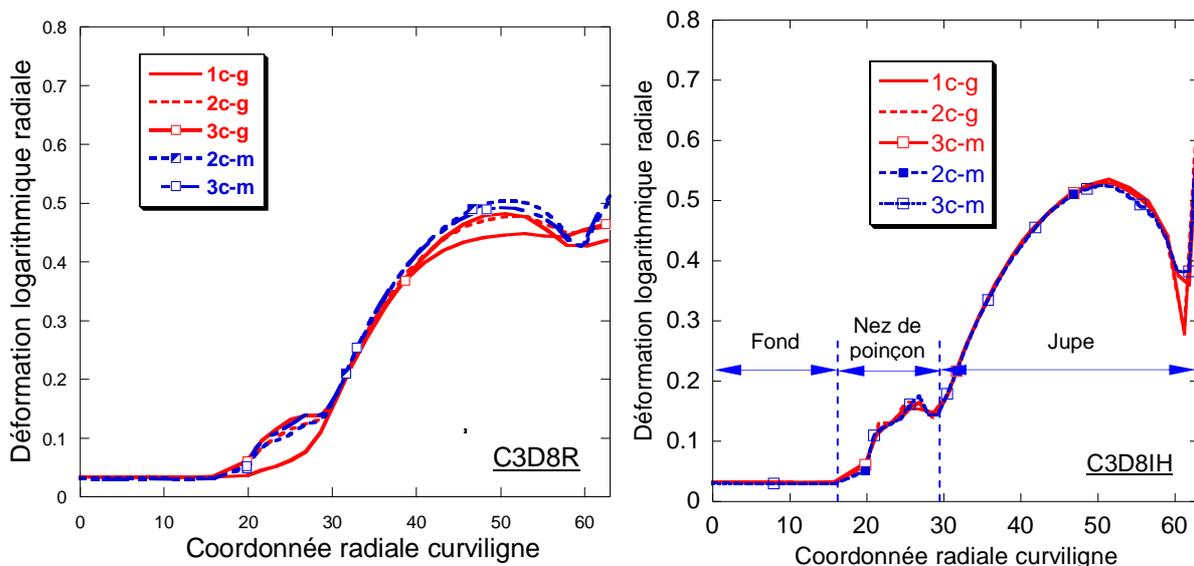


Figure IV.6 Distributions des déformations logarithmiques radiales pour les deux types d'éléments finis.

On peut noter que la déformation logarithmique radiale présente un gradient dans l'épaisseur dû à la flexion. Cette déformation est représentée en fonction de la coordonnée radiale initiale sur la figure IV.8 aux différentes positions dans l'épaisseur de la tôle. La surface externe est la surface de la tôle du côté de la matrice et la surface interne correspond à la surface du côté du poinçon. La déformation radiale sur la surface neutre est calculée par les valeurs moyennes de celles sur les surfaces externe et interne. On peut bien observer que les déformations radiales sont différentes sur la surface externe et sur la surface interne, surtout à proximité du rayon du poinçon ; ceci montre bien l'effet de la flexion.

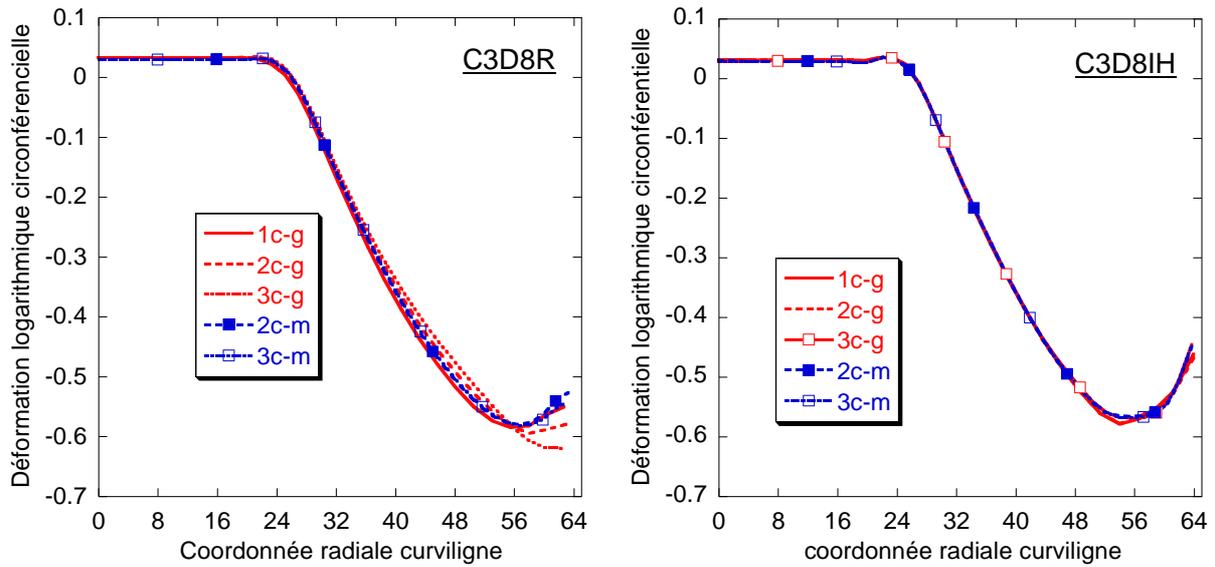


Figure IV.7 Distributions des déformations logarithmiques circonférentielles pour les deux types d'éléments finis.

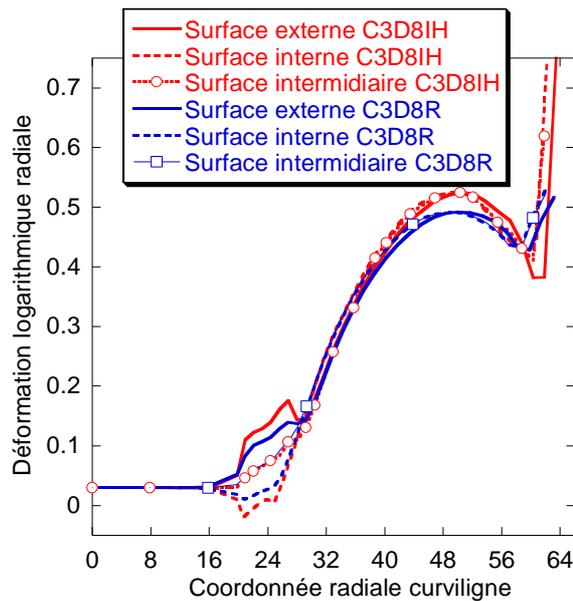


Figure IV.8 Répartition des déformations effet de la flexion.

Les déformations présentées sur la figure IV.6 et IV.7 ci-dessus correspondent à celles de la face extérieure de la tôle, *i.e.* celles qui seraient mesurées dans un essai d'emboutissage.

IV.3.4. Distribution des épaisseurs

La Figure IV.9 (a) représente les prévisions numériques de la distribution d'épaisseur le long de la direction de laminage (DL), à 45° par rapport à la direction de laminage (DD) et la direction transverse (DT). Les simulations ont été réalisées avec une force de serrage constante et un déplacement de 55mm du poinçon, soit un avalement complet de la tôle. Le long des trois directions, les profils des épaisseurs sont similaires.

Dans le cas du matériau examiné (acier doux DC06), on observe un épaissement le long de la direction à 45°/DL par rapport aux directions de laminage et transverse. Cette variation d'épaisseur directement liée à l'anisotropie du matériau, se traduit par l'apparition des cornes à l'extrémité de l'embouti. En effet, quand $r(\alpha)$ est élevé, l'épaissement au niveau de la collerette est moins important. Ceci entraîne une distribution non uniforme de la pression de serrage sur la collerette. Les zones à forte pression subissent une diminution de la vitesse radiale agissant ainsi sur des cornes d'emboutissage. Cependant, la pression au niveau des cornes devient plus importante juste avant l'avalement complet de la tôle, ce qui se traduit par une déformation très importante et donc un amincissement des derniers éléments comme on le voit sur la Figure IV.9 (c). Ce phénomène est souvent rencontré dans les opérations d'emboutissage ; il est amplifié avec le degré d'anisotropie du matériau.

Par conséquent, les épaisseurs maximales se situent très nettement dans les directions à r plus faible. En se rappelant les comparaisons faites sur les hauteurs des cornes et les distributions des déformations obtenues pour différents maillages, on constate aussi que les différences ont la même tendance pour les distributions des épaisseurs. On retrouve une diminution de l'épaisseur très importante au niveau des derniers éléments dont on a discuté dans le paragraphe précédent. Cette diminution est amplifiée par l'élément d'intégration réduite sélective.

Sur la base de l'étude de sensibilité présentée dans les paragraphes précédents, l'élément à intégration réduite sélective C3D8IH a été choisi pour nos simulations d'emboutissage, car cet élément présente un comportement satisfaisant (sensibilité moins forte au maillage). Concernant le nombre de couches, avec l'élément C3D8IH, la sensibilité des résultats en terme de distributions des déformations, des épaisseurs, des hauteurs de cornes est très faible. Ceci nous conduit à adopter une couche dans l'épaisseur dans la suite de ce travail.

IV.3.5. Discussion

Le comportement des différents éléments présenté dans les paragraphes précédents, montre que l'influence du raffinement du maillage dépend du type de l'élément fini. Contrairement à C3D8IH, l'utilisation de l'élément C3D8R à intégration réduite montre que les simulations numériques sont très sensibles à la fois au nombre de couches dans l'épaisseur et au raffinement du maillage sur la surface. Cependant, le gradient des contraintes et des déformations ainsi que la distribution des épaisseurs sont très sensibles à ces paramètres. Toutefois, on peut retenir, pour l'analyse des cornes d'emboutissage, l'élément à intégration réduite sélective, car cet élément présente un comportement satisfaisant. Concernant le

nombre de couches, on peut se contenter d'utiliser uniquement une seule couche, du fait que les résultats obtenus en termes de hauteurs des cornes d'emboutissage ne sont pas sensibles au nombre de couches à travers l'épaisseur.

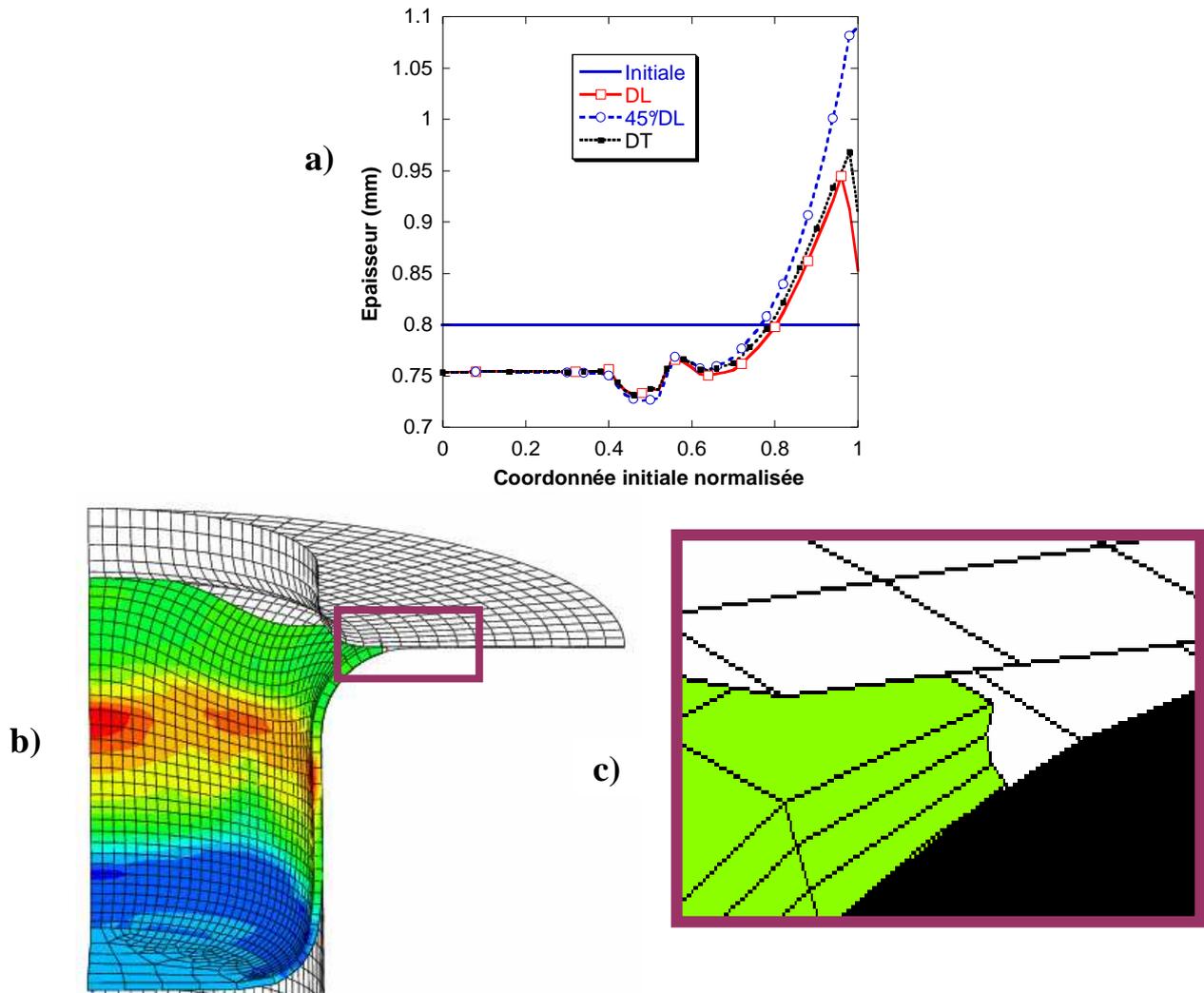


Figure IV.7 a) Distribution d'épaisseur le long de la direction de laminage (DL), à 45° par rapport à la direction de laminage (DD) et la direction transverse (DT). b) Géométrie de l'embouti vers la fin de la phase d'avalement c) Détail : écrasement du dernier élément en contact avec le serre flan en DL.

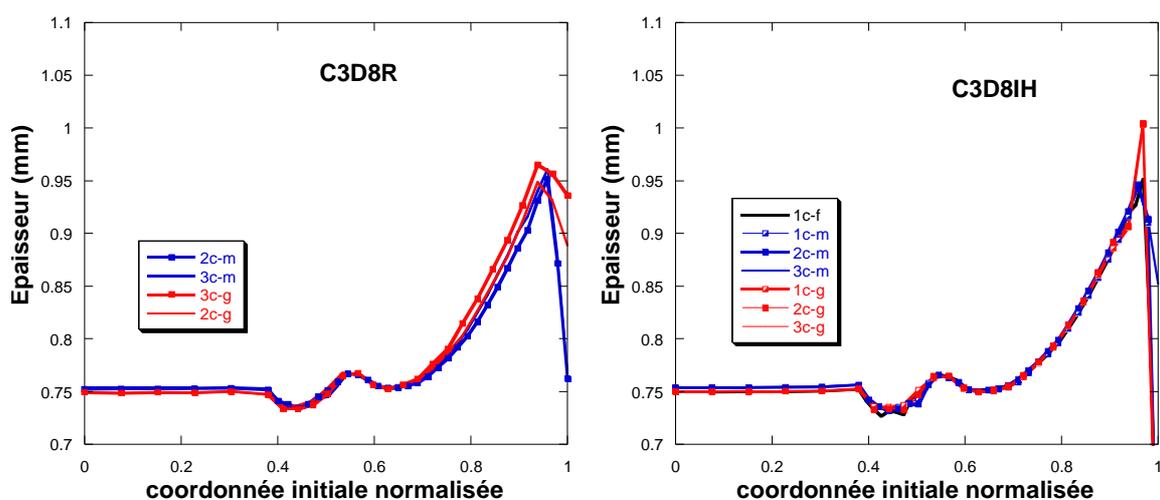


Figure IV.8 Distribution des épaisseurs dans la direction de laminage, pour différents maillages. Gauche : élément à intégration réduite ; Droite : élément à intégration sélective réduite.

IV.4. Prédiction des cornes d'emboutissage

Dans ce paragraphe, nous allons analyser la formation des cornes d'emboutissage à partir des essais d'emboutissage d'un godet cylindrique.

Nous comparons les prédictions numériques des cornes obtenues avec les différents potentiels implantés. De plus nous les confrontons à une formule analytique qui n'utilise aucun modèle de comportement – mais seulement les mesures expérimentales des coefficients d'anisotropie. La validité de nos calculs ainsi que de la formule analytique sont explorées pour deux matériaux, pour lesquels on dispose de l'ensemble des données expérimentales nécessaires.

IV.4.1. Calcul analytique du profil de cornes

Dans ce paragraphe, nous allons analyser la formation des cornes d'emboutissage à partir des essais d'emboutissage d'un godet cylindrique. A partir de travaux expérimentaux, Bourne et Hill [Bourne and Hill, 1950] proposent que les cornes d'emboutissage se forment dans les positions angulaires (α) où les coefficients d'anisotropie de Hill $r(\alpha+\pi/2)$ présentent un minimum. Cette hypothèse se base sur les fortes elongations radiales obtenues sous une compression uniaxiale pour des fortes valeurs de r . A partir de cette analyse et dans le cas des contraintes planes, le critère quadratique de [Hill, 1948] prédit la formation de quatre cornes d'emboutissage dans les orientations correspondant aux minima de $\sigma(\alpha+\pi/2)$ ou aux maxima de $r(\alpha+\pi/2)$ et inversement pour les vallées correspondantes. De façon analogue, la formation de deux cornes, et des vallées d'emboutissage est attendue lorsque les évolutions angulaires de la contraintes d'écoulement en traction uniaxiale et du coefficient d'anisotropie de Hill sont monotones, *i.e.* pour des extrema de $\sigma(\alpha)$ et $r(\alpha)$ à $\alpha=0$ et $\alpha=\pi/2$ seulement. Dans ce cas, les positions des cornes et/ou des vallées se trouvent respectivement soit dans la direction parallèle soit dans la direction transverse par rapport au sens de laminage de la tôle. Les

argumentations avancées par [Hill, 1948], [Hill, 1950] et [Bourne et Hill, 1950] ont été confirmées expérimentalement par plusieurs auteurs. [Wilson and Bulter, 1962] ont établi une corrélation linéaire entre les hauteurs moyennes des cornes d'emboutissage mesurées pour une large gamme de tôles minces d'acier, d'aluminium et de cuivre et les variations des coefficient d'anisotropie de Hill déterminés dans des essais de tractions uniaxiales dans le plan de la tôle. Bien que les corrélations proposées par [Hill, 1948], [Hill, 1950] et [Bourne et Hill, 1950] soient qualitativement correctes, elles ne permettent pas de prédire quantitativement l'amplitude des cornes d'emboutissage. Barlat et coauteurs [Barlat *et al* 1991] ont montré que les courbes représentant les variations angulaires normalisées de la vitesse radiale et de la contrainte d'écoulement située au bord de la collerette sont équivalentes et directement proportionnelle au paramètre Γ_α :

$$\frac{1}{v_r} \frac{dv_r}{d\alpha} = \frac{1}{\sigma_\alpha} \frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = 2\Gamma_\alpha, \quad (2)$$

où $\Gamma_\alpha = \dot{\epsilon}_{r\alpha} / \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}$. Il faut noter que les quantités $\sigma(\alpha)$ et Γ_α correspondent, aux valeurs déterminées à une orientation $(\alpha + \pi/2)$. Dans le cas de l'hypothèse de [Hill, 1948], la contrainte d'écoulement dans le cas de contraintes planes est celle définie en traction uniaxiale tandis que dans le cas de la déformation plane, elle est identifiée à la contrainte d'écoulement en cisaillement pur. Selon le paramètre Γ_α , le cisaillement se produit lorsque les directions principales des contraintes et des vitesses de déformation ne coïncident pas. Par conséquent, les cornes et/ou les vallées d'emboutissage se forment dans les directions de symétrie orthotrope $\alpha=0, \pi/2$ et pour une orientation α^* telle que $\Gamma_{(\alpha^* + \pi/2)} = 0$. Par ailleurs, l'équation précédente est en accord avec l'hypothèse de [Hill, 1948], les directions pour lesquelles $\Gamma_{(\alpha + \pi/2)} = 0$ correspondent également aux positions angulaires pour lesquelles les contraintes d'écoulement $\sigma(\alpha + \pi/2)$ ont des valeurs stationnaires. La figure IV.11 schématise le principe de la formation des cornes d'emboutissage fondé en fonction du paramètre $\Gamma_{(\alpha)}$ proposé par Barlat et Richmond [Barlat and Richmond, 1987]. Le paramètre $\Gamma_\alpha = \epsilon_{12} / \epsilon_{11}$ est défini à un niveau de contrainte équivalente $\bar{\sigma}$ donné. Ces auteurs ont démontré que ce paramètre peut être défini par :

$$\Gamma_\alpha = - \frac{\partial f / \partial \alpha}{2\sigma(\alpha)}, \quad (3)$$

où f est la fonction de charge. Le paramètre Γ_α peut être également déterminé à partir d'un modèle basé sur la plasticité cristalline. En retenant les hypothèses simplificatrices adoptées dans les approches proposées par Hill [Hill, 1948] et Barlat et coauteurs [Barlat *et al.*, 1991], il est possible de mettre en évidence le rôle de la forme de la surface de charge sur la formation des cornes d'emboutissage.

Pour une évaluation très rapide des cornes d'emboutissage, il serait plus pratique d'utiliser une forme analytique. Dans les travaux récents de [Yoon *et al*, 2006], une prédiction réaliste des cornes d'emboutissage est obtenue avec les coefficients de Lankford. Au niveau de la collerette, le flan peut être considéré comme un anneau, caractérisé par un bord intérieur correspondant à la zone du flan qui est tirée vers la cavité sous des déplacements uniformes. Quand la collerette commence à subir un emboutissage, différents niveaux de compressions circonférentielles se génèrent à cause de l'anisotropie dans le plan de la tôle. On peut comprendre clairement par la Figure IV.9, que le comportement dans la collerette suivant la direction de laminage est contrôlé par les propriétés du matériau dans le cas d'une compression suivant la direction transverse. On peut dire d'une manière générale, que le

comportement de la collerette, suivant la direction faisant α avec la direction de laminage, est contrôlé par les propriétés du matériau de la compression suivant la direction $\alpha+90^\circ$.

Supposant que pour une direction donnée, la traction uniaxiale et la compression uniaxiale donnent les mêmes valeurs de r exprimées en fonction des déformations de la collerette [Chung *et al.*, 1996] :

$$r_{\alpha+90^\circ} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_e} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + \varepsilon_\alpha} \quad (4.4)$$

Les indices r , α et e correspondant aux directions radiale, circonférentielle et selon l'épaisseur respectivement. L'expression précédente donne :

$$\varepsilon_\alpha : \varepsilon_r = -(r_{\alpha+90^\circ} + 1) : r_{\alpha+90^\circ} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_r : \varepsilon_e = r_{\alpha+90^\circ} : 1 \quad (4.6)$$

D'où :

$$\varepsilon_\alpha : \varepsilon_r : \varepsilon_e \Big|_\alpha = -(r_{\alpha+90^\circ} + 1) : r_{\alpha+90^\circ} : 1 \quad (4.7)$$

On examine par la suite l'emboutissage après avalement complet du flan (figure IV.12). On suppose que le fond plat en contact avec le poinçon, ne se déforme pas. La déformation circonférentielle dans la paroi est définie par :

$$\varepsilon_\alpha = \ln\left(\frac{R_c}{R}\right) \quad \text{pour } R_c \leq R \leq R_b, \quad (4.8)$$

La déformation radiale est donnée par :

$$\varepsilon_r = \frac{r_{\alpha+90^\circ}}{r_{\alpha+90^\circ} + 1} \ln\left(\frac{R_c}{R}\right) \quad (4.9)$$

Finalement, les hauteurs des cornes sont définies par :

$$\Delta h_\alpha = \int_{R_c}^{R_b} \varepsilon_r \Big|_\varepsilon dR = - \int_{R_c}^{R_b} \frac{r_{\alpha+90^\circ}}{r_{\alpha+90^\circ} + 1} \ln\left(\frac{R_c}{R}\right) \Big|_\varepsilon dR \quad (4.10)$$

$$\Delta h_\alpha = \int_{R_c}^{R_b} \varepsilon_r \Big|_\varepsilon dR = \frac{r_{\alpha+90^\circ}}{r_{\alpha+90^\circ} + 1} \left((R_c - R_b) R_b \ln\left(\frac{R_b}{R_c}\right) \right) \quad (4.11)$$

La hauteur totale du godet est :

$$H_\alpha = r_p + (R_b - R_c) + \Delta h_\alpha \quad (4.12)$$

$$H_\alpha = r_p + (R_b - R_c) + \frac{r_{\alpha+90^\circ}}{r_{\alpha+90^\circ} + 1} \left((R_c - R_b) R_b \ln\left(\frac{R_b}{R_c}\right) \right) \quad (4.13)$$

Cette relation est basée sur l'hypothèse que l'épaisseur de la tôle est négligée. Par conséquent, on peut connaître la hauteur des cornes si on connaît la géométrie initiale et finale de la tôle ainsi que les valeurs de $r(\alpha)$.

D'un point de vue pratique, de telles formules analytiques présentent un grand intérêt. L'emboutissage cylindrique n'a qu'un intérêt industriel très ciblé (industrie de l'emballage) ; cependant les cornes d'emboutissage donnent une information sur l'anisotropie du matériau, qui combine les effets matériaux et procédé. Leur bonne prédiction permet donc de valider à la fois les modèles et la simulation numérique. Il est évident que d'un point de vue modélisation, une formule analytique prédictive permettrait de travailler plus sereinement en s'affranchissant des essais expérimentaux d'emboutissage. Les industriels, à leur tour, pourraient s'affranchir plus souvent des simulations numériques. Nous nous proposons dans ce sous-chapitre de comparer la formule analytique Eq.(4.12) ainsi que nos prédictions numériques, aux mesures expérimentales. Nous utilisons pour cela deux alliages d'aluminium, pour lesquels nous disposons des mesures expérimentales des cornes d'emboutissage. Pour toutes ces comparaisons, les paramètres des potentiels sont ceux identifiés par rapport aux essais mécaniques.

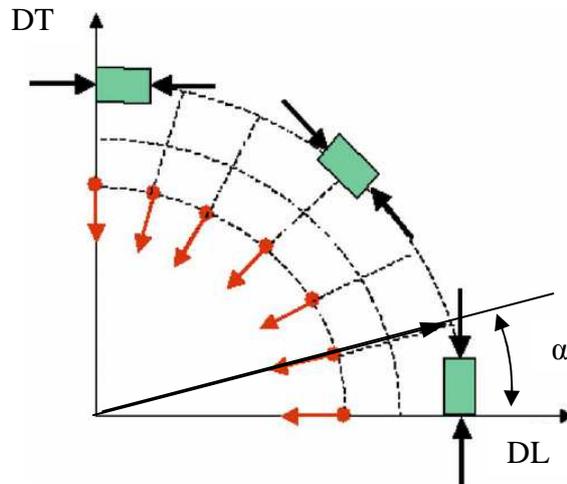


Figure IV.9 Élément en compression dans la collerette [Yoon *et al*, 2006]

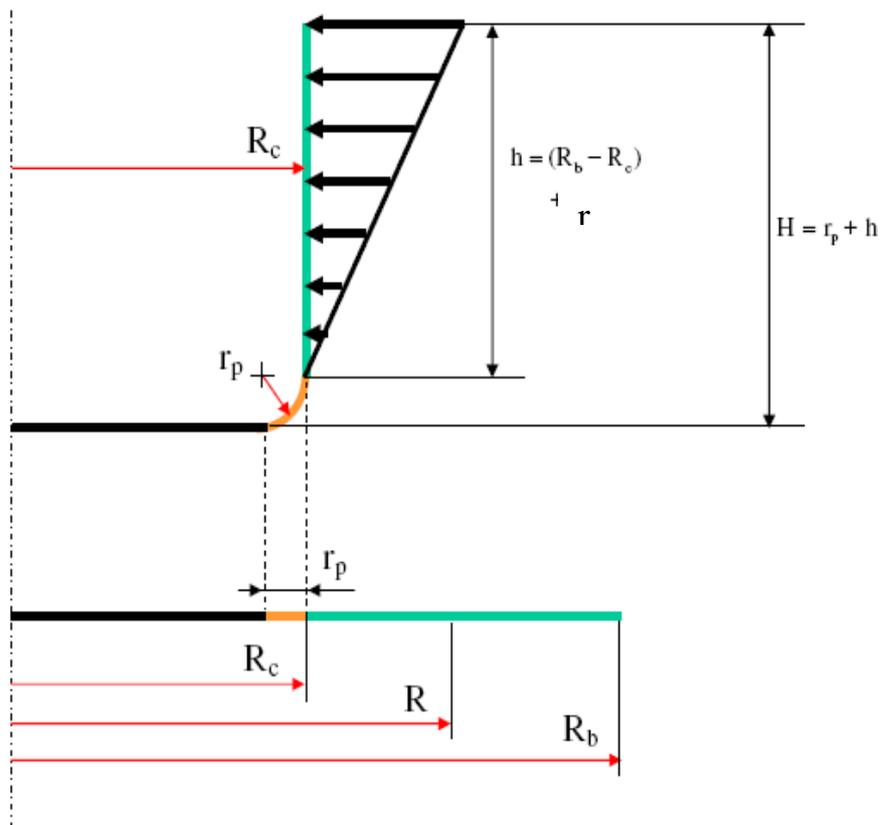


Figure IV.10 Flan initial et après avalement total : la ligne verte représente la zone de déformation [Yoon *et al*, 2006]

IV.4.2. Alliage d'aluminium AA2090-T43

Récemment, Yoon et co-auteurs [Yoon *et al.*, 2006] ont appliqué le critère Yld2004-18p proposé par [Barlat *et al.*, 2004] pour la simulation de l'emboutissage d'un godet cylindrique en alliage d'aluminium AA2090-T43. Les paramètres matériau de leur critère ont été identifiés en utilisant des essais mécaniques de traction uniaxiale. [Yoon *et al.*, 2006] compare le profil expérimental des cornes aux prévisions numériques faites avec le critère Yld2004-18p (figure IV.13). Etant donnée la forme analytique du critère Yld2004-18p, il est très difficile d'écrire sa forme duale en potentiel. Toutefois, le nouveau potentiel Srp2004-18p proposé par [Barlat et Chung, 2005] peut être considéré comme un *pseudo* potentiel dual de Yield2004-18p. Ainsi, nous avons ajusté ce potentiel sur les mêmes données expérimentales pour effectuer par la suite une comparaison plus globale en introduisant le potentiel proposé par [Arminjon and Bacroix, 1995]. Les résultats issus des simulations par EF obtenues avec les différents potentiels présentent les mêmes tendances. On peut noter que les six cornes et leurs amplitudes ont été prédites par Yield2004-18p, Srp2004-18p et Quartus. Cet exemple permet de valider d'une part la mise en œuvre numérique des potentiels Srp2004-18p et Quartus et d'analyser leur caractère prédictif par rapport aux résultats expérimentaux [Rabahallah *et al.*, 2006] et [Rabahallah *et al.*, 2007].

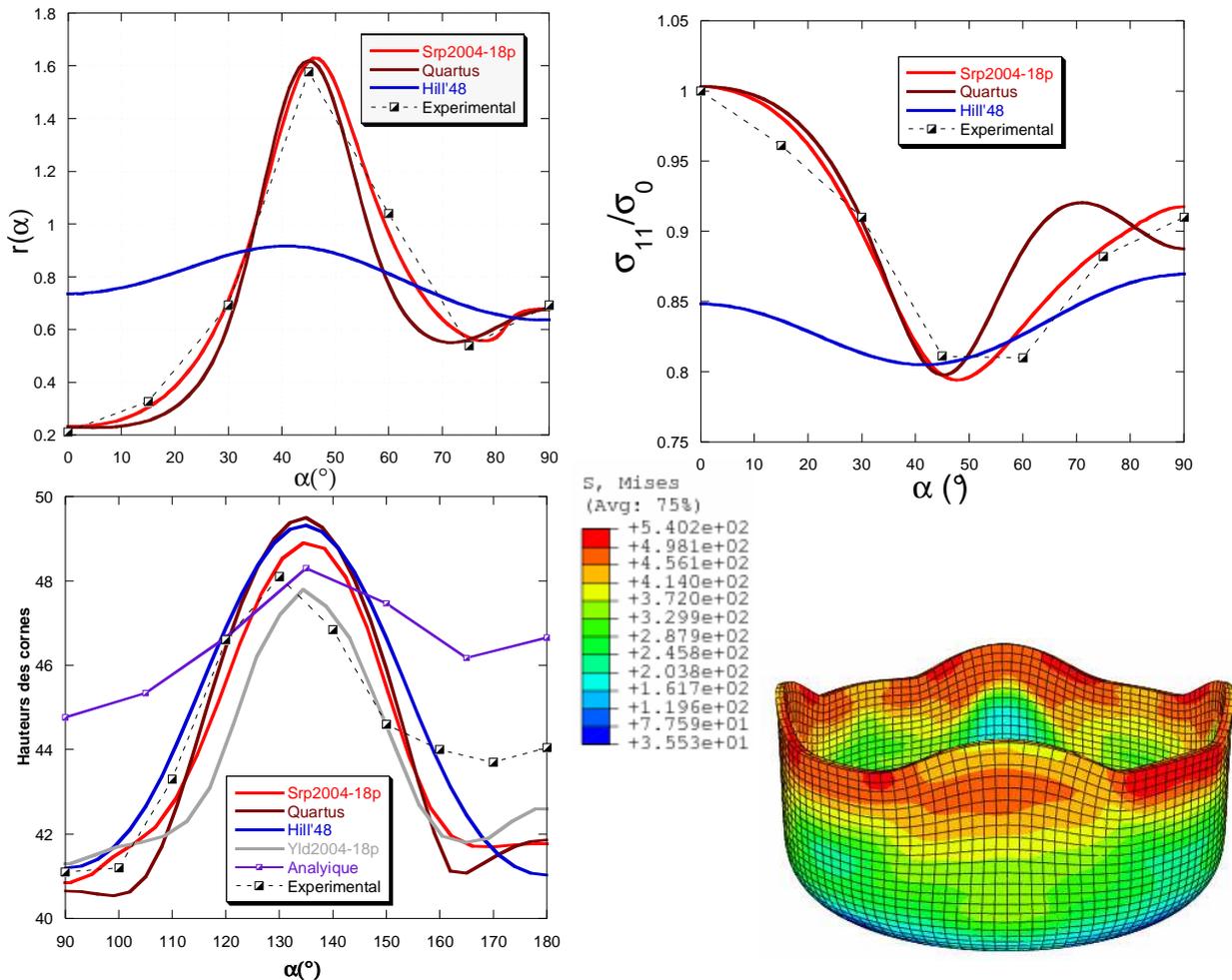


Figure IV.11 Corrélation cornes d'emboutissage et valeurs de r et le godet simulé par le potentiel Srp2004-18p

On peut facilement remarquer que le potentiel quadratique de [Hill, 1948] n'est pas capable de prédire des profils autres que quatre cornes. Le calcul analytique fournit une information correcte en terme de nombre des cornes prédites mais avec des amplitudes très faibles.

Pour prédire les quatre et six cornes d'emboutissage Gilormini et Bacroix [Gilormini and Bacroix, 1995] ont fait une approche simplifiée du procédé d'emboutissage, en considérant uniquement la partie collerette du flan, le poinçon et le serre flan ont été négligés dans cette analyse. Cette approche a été adoptée dans le cadre de l'implantation du potentiel Quartus [Arminjon et Bacroix, 1995] dans Abaqus à l'aide de l'écriture d'une Umat. La Figure IV.14 montre un exemple de simulations obtenues sur un alliage d'aluminium et un acier virtuel.

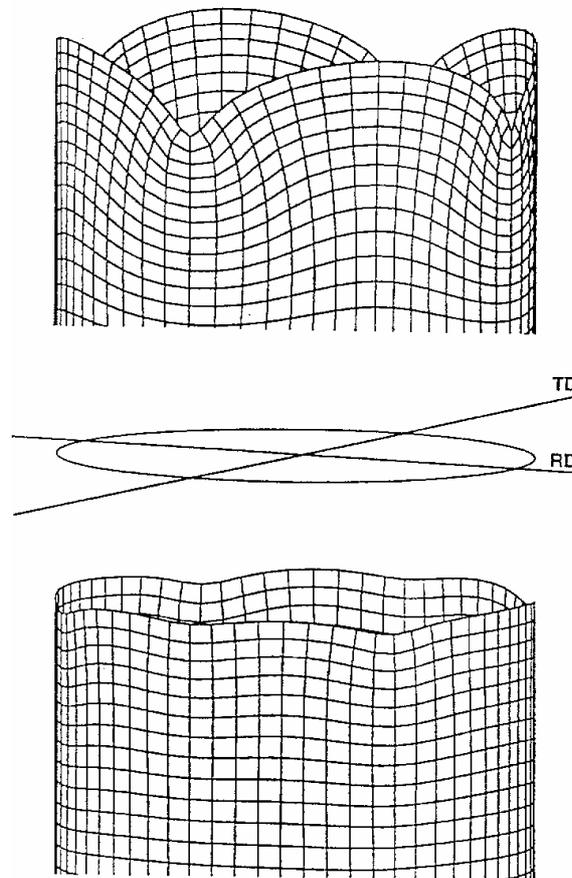


Figure IV.12 Prédiction de la formation des cornes d'emboutissage à partir d'une approche simplifiée [Gilormini et Bacroix, 1995] Haut : Alliage d'aluminium, Bas : Acier virtuel.

IV.4.3. Alliage d'aluminium AA2008-T4

La figure IV.15 compare le profil mesuré des cornes d'emboutissage sur l'alliage d'aluminium AA2008-T4 (issu de [Chung and Shah, 1992]), avec ceux prédits par différents potentiels examinés dans ce travail. L'ensemble des potentiels donne une même tendance en ce qui concerne les profils prédits. Cependant, l'amplitude des cornes d'emboutissage est surestimée par le potentiel de [Hill, 1948]. En revanche, comme pour le cas précédent, les deux potentiels Quartus et Srp2004-18p sont en bon accord avec les résultats expérimentaux sur les prévisions des cornes à la fois par leur nombre, leurs positions et leurs amplitudes. Ceci montre bien la qualité de ces potentiels à décrire différentes anisotropies.

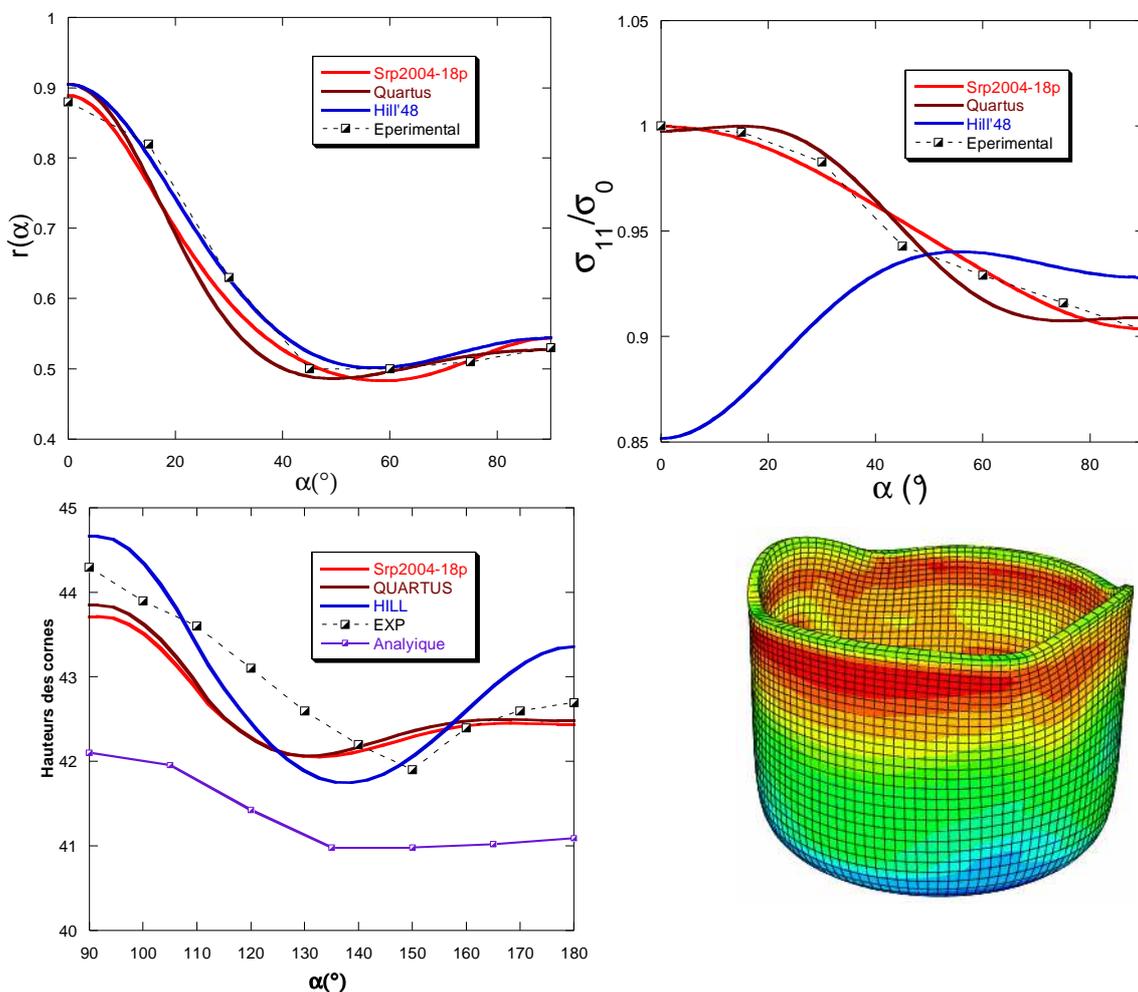


Figure IV.13 Prédiction des cornes d'emboutissage pour l'alliage AA2008-T43 et corrélation avec les coefficients d'anisotropie

IV.4.4. Discussion

Ces deux exemples illustrent bien les limites du potentiel quadratique de Hill à prédire à la fois les variations de $r(\alpha)$ et de $\sigma(\alpha)$, pour les alliages d'aluminium. Cependant, les prédictions des cornes d'emboutissage sont étonnamment bonnes. Ceci montre que l'anisotropie du matériau (et encore moins son image à travers les essais de traction dans le plan de la tôle), n'est pas l'unique paramètre à relier aux cornes d'emboutissage. Cela semble aussi conforter l'idée de [Barlat *et al.*, 1991] selon laquelle les coefficients de Lankford (mieux prédits, dans nos calculs, par Hill'48) sont plus importants que les contraintes d'écoulement, pour la formation des cornes.

Les prédictions analytiques ont un sort similaire : si le nombre des cornes, et même leurs emplacements, sont très bien prédits, leurs amplitudes (autant absolues que relatives) le sont beaucoup moins.

Ces observations soulignent, à nos yeux, la nécessité de recourir aux simulations numériques ainsi qu'à des modèles plus avancés. Tous les modèles implantés, à l'exception de Hill'48, permettent de prédire les six cornes du matériau AA2090-T43. La hauteur des cornes est nettement mieux prédite qu'avec la formule analytique. Cependant, la précision des prédictions à 0° pour ce même alliage est loin d'être satisfaisante.

Forts de ces observations, nous allons affiner la comparaison des différents potentiels sur les autres matériaux et confronter les deux techniques d'identification, afin d'en évaluer l'impact.

IV.5. Influence de la stratégie d'identification

Pour évaluer l'influence de la stratégie d'identification des paramètres des potentiels plastiques sur les simulations par éléments finis, on considère deux matériaux de structures cristallines différentes (cfc et cc). Des mesures de texture de l'état initial (LPMTM) ainsi que des données issues des essais mécaniques (LPMTM et ALCOA) ont été obtenues pour l'alliage d'aluminium AA6022-T43 et l'acier dual phase DP600. L'analyse menée dans ce paragraphe présente un double intérêt : elle met en évidence l'impact de la stratégie d'identification (base de données expérimentales, prise en compte de l'anisotropie du matériau dans l'épaisseur...) sur les résultats numériques et illustre la sensibilité de ceux-ci aux différents potentiels plastiques considérés.

IV.5.1. Alliage d'aluminium AA6022-T43

Les simulations numériques ont été réalisées en adoptant la mise en données présentée sur le Tableau IV.1. Nous allons faire une étude comparative de plusieurs simulations d'un embouti cylindrique avec différents potentiels plastiques identifiés soit à partir d'un ajustement sur la surface d'écoulement calculée par un modèle de plasticité cristalline et de mesure de texture soit par ajustement sur des données issues des essais mécaniques (coefficient d'anisotropie de Hill $r(\alpha)$ et contrainte d'écoulement en traction uniaxiale $\sigma(\alpha)$).

IV.5.1.1. Hauteur des cornes

Un premier objectif des simulations de l'emboutissage d'un godet cylindrique est la prédiction des cornes, pour évaluer la capacité du potentiel adopté à décrire l'anisotropie du matériau. Dans le cas de l'alliage d'aluminium AA6022-T43, la hauteur des cornes retrouvées avec les différents potentiels plastiques, en utilisant les deux stratégies d'identification, présentent les mêmes tendances et sont en bon accord avec les coefficients d'anisotropie de Hill (Figure IV.16). Ces résultats sont cohérents, avec les identifications des paramètres des potentiels présentées dans le chapitre II. En effet, pour ce matériau, les $r(\alpha)$ sont bien ajustés par les deux stratégies d'identification, de ce fait les hauteurs des cornes prédites par les différents potentiels plastiques sont assez voisines. Toutefois, dans le cas du potentiel Quartus identifié à partir des essais mécaniques, on constate la formation de huit cornes d'emboutissage. Ceci s'explique par les *minima* obtenus pour le profil de $r(\alpha)$ (0° et 86°) lors de l'identification de ce potentiel. Cette situation sera confirmée par d'autres simulations présentées dans des exemples ultérieurs. Cet exemple met bien en évidence l'incidence de l'identification des potentiels sur les simulations numériques.

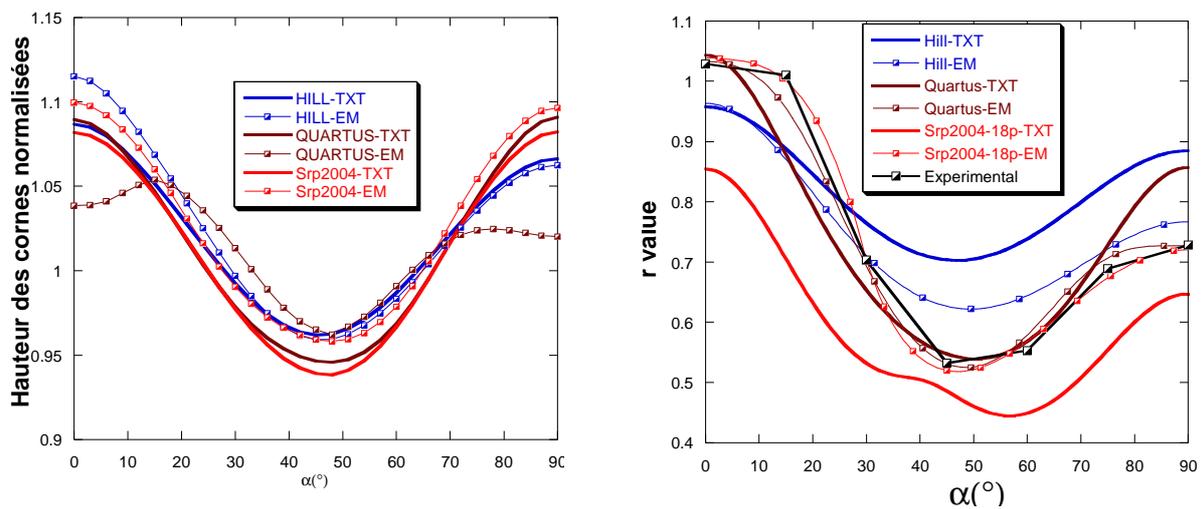


Figure IV.14 Cornes obtenues par différentes stratégies d'identifications pour l'alliage d'aluminium AA6022-T43 : texture (TXT) et essais mécaniques (EM). Valeurs normalisées par la hauteur du godet obtenu avec von Mises.

IV.5.1.2. Distribution des contraintes

Comme on l'a constaté dans le paragraphe précédent, la même tendance se confirme aussi en terme des distributions des contraintes équivalentes (Figure IV.17). Celles-ci sont *quasi* uniformes lors des premiers stades d'emboutissage. En revanche, au fur et à mesure que le processus avance, notamment au moment où les cornes commencent à se former, la distribution des contraintes équivalentes devient de plus en plus hétérogène. Par ailleurs, on note que le niveau des contraintes est plus important dans le cas de l'identification par des essais mécaniques. Une différence systématique est observée pour tous les potentiels notamment au niveau de la paroi et suivant la direction de laminage et transverse. On retrouve la même situation au niveau de la vallée.

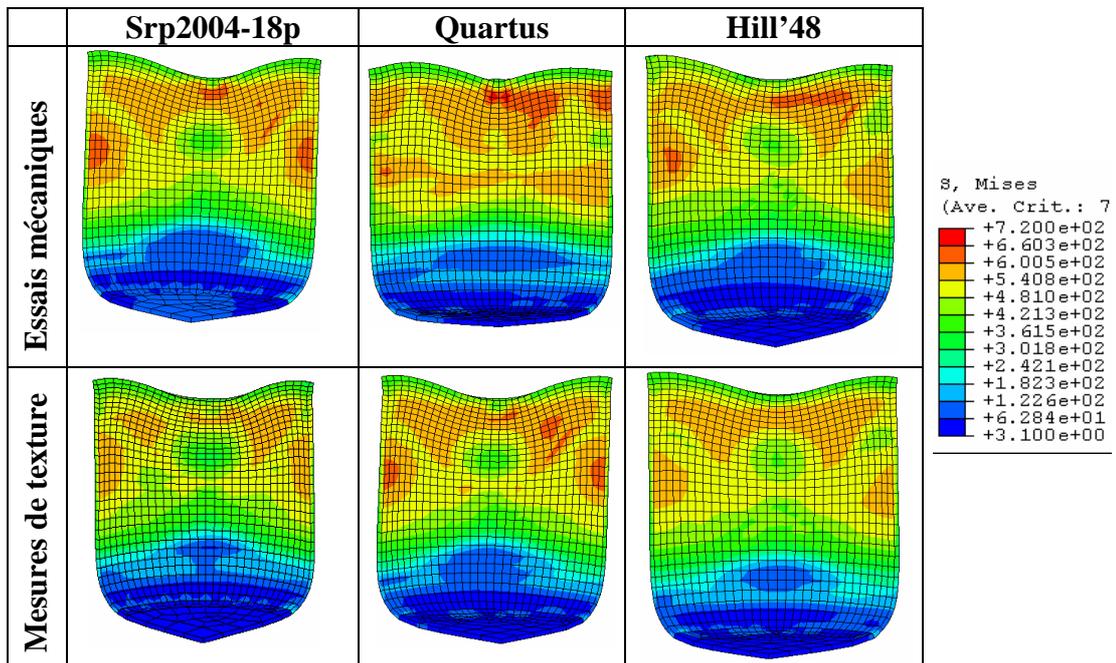


Figure IV.15 Simulations correspondant aux différentes stratégies d'identifications.

IV.5.1.3. Distribution des déformations

Dans ce paragraphe, on compare les distributions des déformations logarithmiques radiales et circonférentielles suivant la direction de laminage obtenues avec les différents potentiels dans le cas des identifications à partir des mesures de texture et des essais mécaniques (Figure IV.16). A titre de comparaison, on rappelle également les surfaces d'écoulement correspondant aux différents potentiels. D'un point de vue qualitatif, des profils similaires des déformations logarithmiques sont obtenus. D'un point de vue quantitatif, des différences significatives sont observées. Dans le cas d'identification à partir des essais mécaniques, quel que soit le potentiel, les déformations radiales sont systématiquement plus faibles au niveau de la paroi, par rapport à celles obtenues par identification sur des mesures de texture. Ces différences sont moins importantes dans le cas du potentiel Hill'48. Ce dernier présente un nombre de paramètres matériau plus faible, et donc est moins sensible à la

stratégie d'identification, comparé aux autres potentiels. Ces résultats numériques sont en accord avec les surfaces d'écoulement obtenues lors des identifications. Les deux stratégies d'identification, montrent que le niveau des déformations dans la région de la paroi varie de façon inverse par rapport aux valeurs des contraintes qui correspondent au rétreint et à la traction plane, ce qu'on peut observer facilement sur la surface de charge. Ces résultats sont en accord avec les travaux de [Moreira, 2002] et [Moreira et Ferron, 2004].

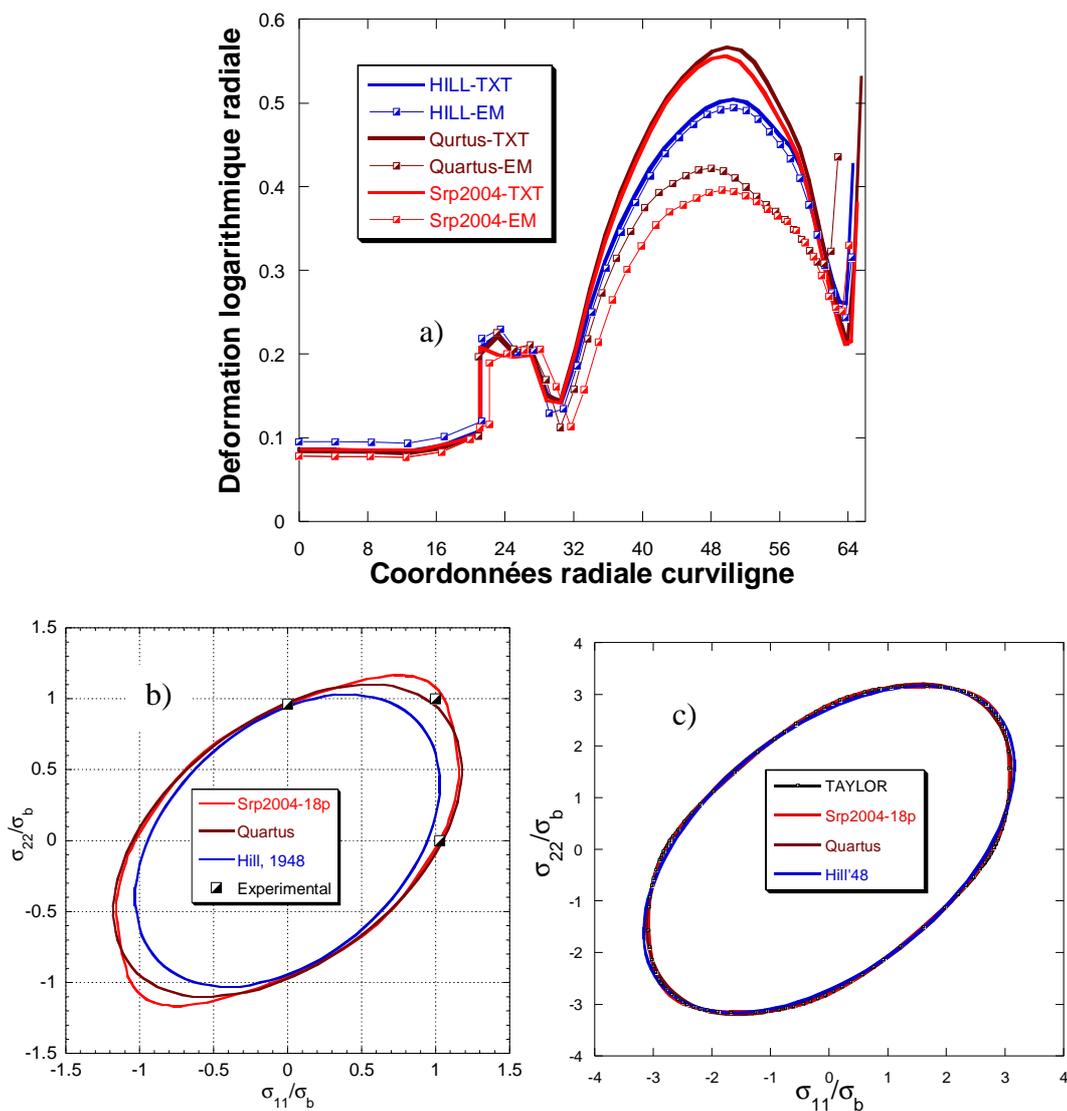


Figure IV.16 a) Distribution des déformations radiales pour l'alliage d'aluminium AA6022-T43. Surfaces de charge après identification b) avec les essais mécaniques et c) avec la texture

IV.5.1.4. Distribution des épaisseurs

Les différences entre les niveaux de déformations induisent des différences d'épaisseur – paramètre important du procédé d'emboutissage. La prévision des épaisseurs (Figure IV.19) est faite correctement. Nous avons analysé les distributions des épaisseurs suivant la direction de laminage. Celles-ci présentent un amincissement uniforme au fond de l'embouti, suivi d'un amincissement plus important au nez du poinçon, puis un épaissement le long de la paroi de l'embouti qui devient encore plus important au bord de l'embouti. Les derniers éléments au bord de l'embouti subissent un écrasement à cause de la pression importante exercée par le serre flan sur la région au niveau des cornes. Les différentes stratégies d'identification ont une incidence sur les distributions des épaisseurs notamment au niveau de la paroi et du fond du godet. Cette sensibilité est plus marquée dans le cas des potentiels Quartus et Srp2004-18p. Cependant, le potentiel de Hill'48 reste moins sensible à la stratégie d'identification.

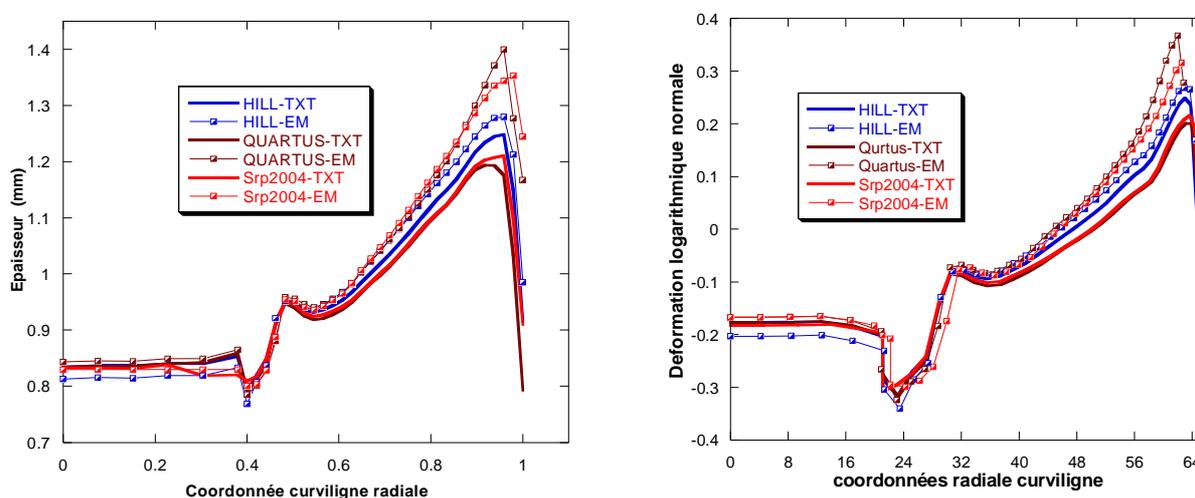


Figure IV.17 Droite : distribution des épaisseurs pour les différents potentiels et différentes stratégies d'identification. Gauche : distribution des déformations en direction de l'épaisseur.

IV.5.2. Acier dual phase DP600

Une étude similaire à la précédente a été réalisée sur un acier dual phase à faible anisotropie initiale. Les cornes d'emboutissage obtenues par plusieurs potentiels plastiques, sont présentées sur la figure IV.20.a. On retrouve les corrélations entre le profil des $r(\alpha)$ et celles des cornes, observées dans le cas des autres matériaux (le nombre des cornes et leurs amplitudes) et cela pour les deux stratégies d'identification. Une sensibilité moins forte aux stratégies d'identification est obtenue dans le cas de Quartus. En revanche, celle-ci est plus marquée avec Hill'48. Ceci est cohérent avec les profils de $r(\alpha)$ obtenus lors de l'identification des paramètres matériau de ces potentiels. Les valeurs de $r(\alpha)$ prédites par le potentiel de Hill'48 lors de l'identification par les mesures de texture sont plus proches du comportement isotrope que celles retrouvées par les essais mécaniques ; c'est pour cela qu'on retrouve un profil plus plat des cornes. Dans le cas de Srp2004-18p, l'amplitude des cornes obtenues est bien prononcée dans le cas d'identification par des mesures de texture.

Par ailleurs, l'identification de ce potentiel par des essais mécaniques, fait apparaître huit cornes d'emboutissage, réduisant ainsi leur amplitude.

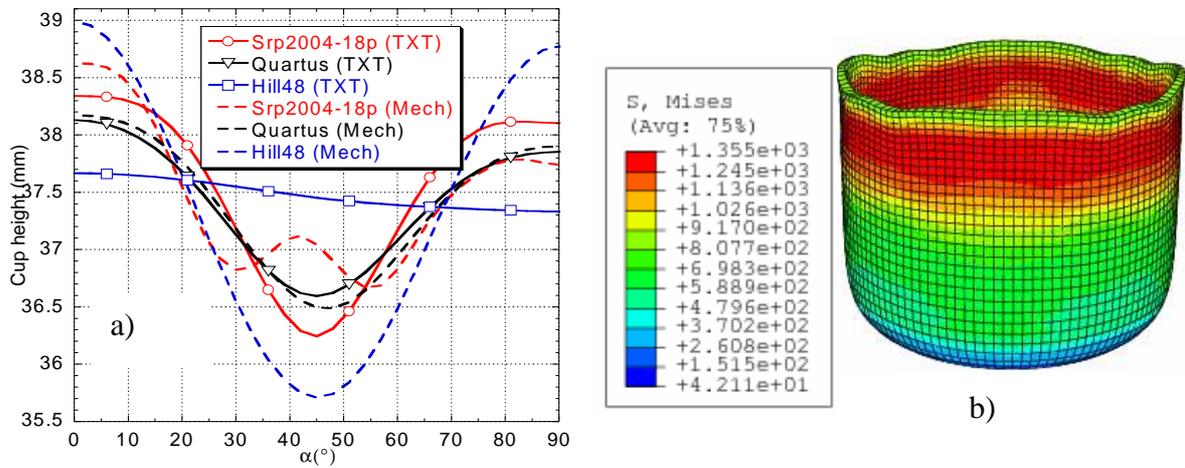


Figure IV.18 a) Cornes obtenus par différentes stratégies d'identification. B) Les huit cornes d'emboutissage retrouvées par le potentiel Srp2004 identifié sur des essais mécaniques.

Cet exemple illustre bien l'impact des stratégies d'identification sur la prévision des cornes d'emboutissage. Dans le cas de potentiel dit 'flexible' (nombre élevé de paramètres matériau) *e.g.* Srp2004-18p, un bon ajustement sur les essais mécaniques (la valeur de r à 75°) peut artificiellement générer des cornes supplémentaires lors de la simulation (Figure IV.20.b).

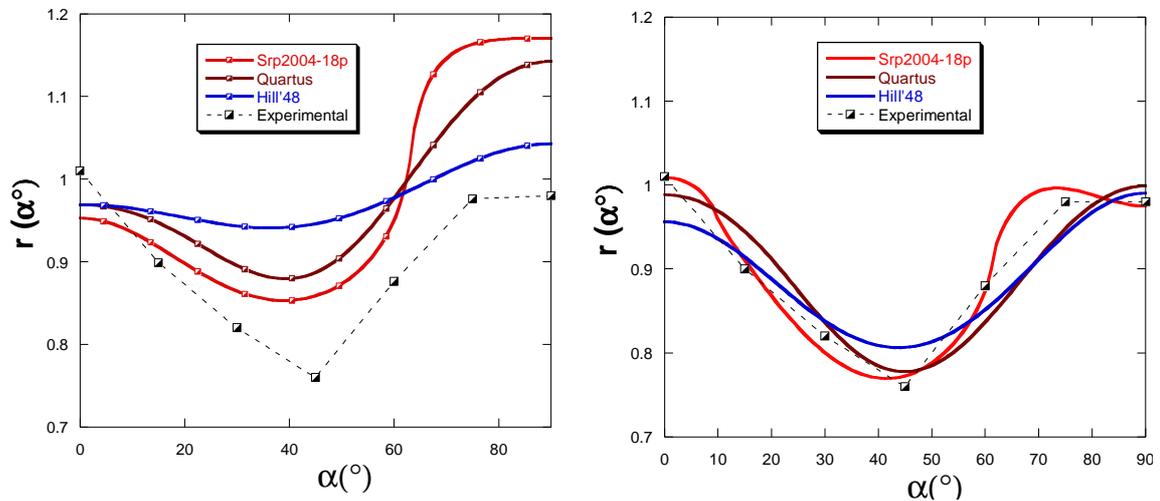


Figure IV.19 Coefficients de Lankford et les cornes d'emboutissage Gauche : identification par la texture ; Droite : par les essais mécaniques.

IV.5.3. Matériau virtuel

D'un point de vue expérimental, Les matériaux étudiés dans les paragraphes précédents présentent quatre ou six cornes d'emboutissage- en cohérence avec le nombre de maxima du coefficient d'anisotropie de Hill. Afin d'étudier la capacité des potentiels plastiques utilisés dans ce travail à décrire d'autres anisotropies (*e.g.* prédiction de huit cornes

d'emboutissage), nous avons créé numériquement un matériau virtuel présentant deux *maxima* de coefficient d'anisotropie de Hill dans l'intervalle $[0^\circ-90^\circ]$: Les variations du coefficient d'anisotropie de Hill, décrites avec Quartus, sont tracées sur la Figure IV.22. Le comportement a été créé à partir d'un matériau réel, dont certaines caractéristiques ont été exacerbées/atténuées lors de l'identification, en alternant les poids correspondants dans la fonction coût. On constate que le potentiel non-quadratique Quartus est capable de prédire les huit cornes d'emboutissage. Par ailleurs, le matériau retenu sous le serre flan, s'écoule préférentiellement suivant les directions au voisinage de 22° et 67° par rapport à la direction de laminage. On observe l'apparition des cornes suivant les directions 0° , 45° et 90° par rapport à la direction de laminage. L'effet de l'écoulement anisotrope de la tôle génère des hétérogénéités des épaisseurs, ce qui entraîne la localisation du contact sur les zones d'épaisseur maximale et l'augmentation locale de la pression de contact.

La Figure IV.18 présente les résultats de simulations obtenues pour l'acier DP600 avec le potentiel Srp2004-18p, après identification par essais mécaniques. Comme indiqué dans le paragraphe précédent, la simulation prédit huit cornes d'emboutissage ce qui est incorrect pour ce type de matériaux. Si ce résultat illustre bien la flexibilité du potentiel, il montre aussi les risques d'une identification employant un nombre réduit de valeurs de référence (proche du nombre de paramètres) pour des fonctions aussi avancées.

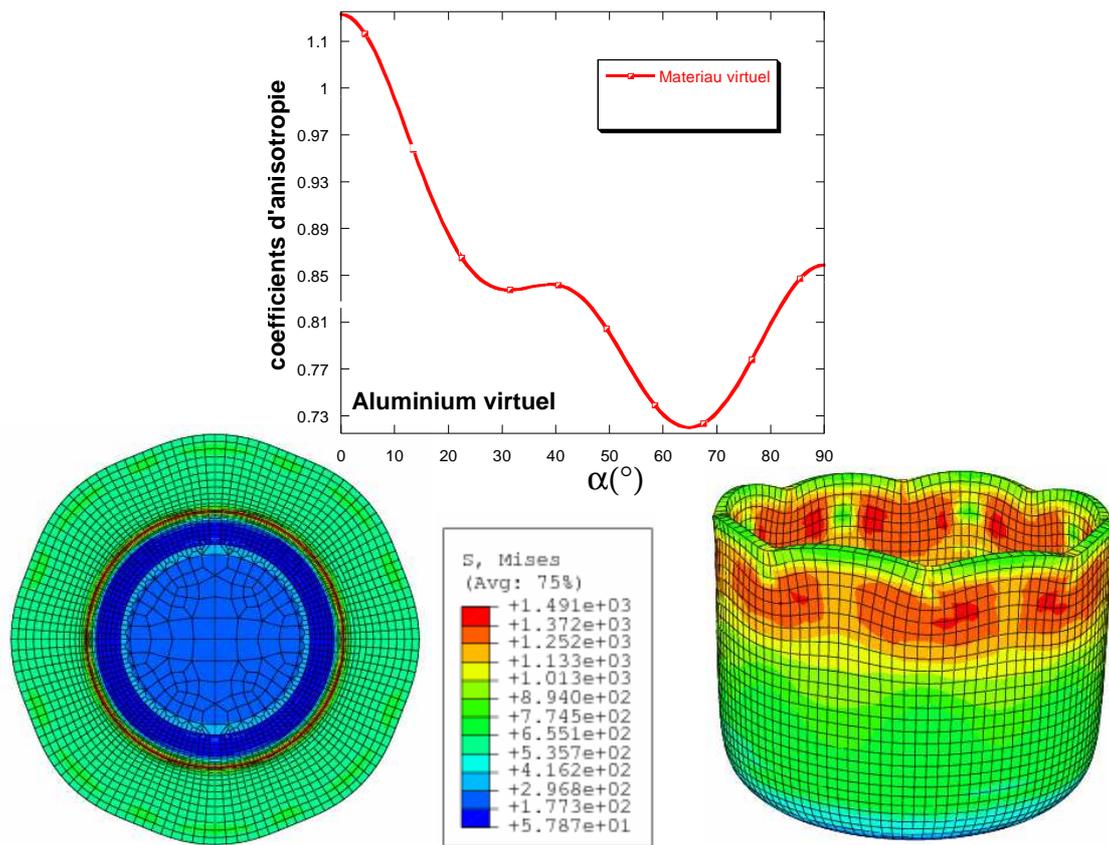


Figure IV.20 Simulations de huit cornes d'emboutissage d'un alliage d'aluminium virtuel avec le potentiel Quartus.

IV.5.4. Comparaison du temps CPU

Nous avons effectué une analyse des temps d'utilisation CPU nécessaire pour la simulation numérique d'un godet cylindrique par l'ensemble des potentiels sur un PC (Processor Intel Pentium 1.8 GHz dual core). Pour cela, nous avons considéré les exemples des paragraphes (IV.5.1) et (IV.5.2). Comme indiqué dans le Tableau IV.2, le temps CPU est quasiment identique pour les deux simulations faites avec le potentiel Hill'48 existant dans la bibliothèque d'Abaqus et celui implanté dans le sous programme Umat, ce qui confirme le bien fondé des algorithmes élaborés. On constate que les temps CPU augmentent systématiquement pour les potentiels Quartus et Srp2004-18p. Le temps CPU dépensé par le potentiel Quartus est presque le double par rapport à celui du potentiel Hill'48. Dans le cas du potentiel Srp2004-18p, le temps de calcul est plus élevé, en raison du fonctionnement interne de la Umat qui doit appeler le sous-programme de subdivision (voir le paragraphe III.4.2). Le temps CPU n'est pas proportionnel au nombre de paramètres des potentiels. Il dépend de l'écriture analytique de ces derniers (quadratique, ordre quatre, transformation linéaire) et du degré d'anisotropie du matériau. Plus celle-ci est marquée, plus long sera le temps nécessaire pour la gestion du problème de subdivision.

Ce tableau vient aussi et surtout pondérer les conclusions que l'on peut tirer, au vu des résultats précédents, sur l'éventuelle « supériorité » de l'un ou l'autre des potentiels : en effets, un gain en précision est accompagné par un surcoût non-négligeable en temps de calculs.

	AA6022-T43	DP600
Hill48 (Abaqus) (6 paramètres)	3h31mn24s	3h27mn11s
Hill48 (Umat) (6 paramètres)	3h39mn30s	3h37mn49s
Quartus (Umat) (22 paramètres)	5h50mn36s	8h41mn56s
Srp2004-18p (Umat) (18 paramètres)	84h3mn36s	31h48mn57s

Tableau IV.2 Comparaison des temps CPU pour les différents potentiels¹

¹ Pour chacune des deux colonnes de ce tableau, le nombre d'incrémentes des différentes simulations est quasiment identique.

IV.6. Retour élastique

Dans nos simulations numériques, une étude a été menée afin d'analyser l'incidence de l'anisotropie décrite par différents potentiels plastiques, sur la géométrie finale de la collerette après le retour élastique appliqué sur un processus d'emboutissage partiel. La simulation du retour élastique est faite avec l'alliage d'aluminium AA2090-T3, qui s'arrête à 50% de profondeur d'emboutissage. On présente les ondulations générées par ce phénomène (Figure IV.21), ainsi que les résultats en termes des isovaleurs des contraintes équivalentes au sens de von Mises (Figure IV.24).

Quand on compare la géométrie finale de la collerette simulée après le retour élastique par chaque potentiel, on constate que l'ensemble des hauteurs de l'extrémité de la collerette, suivent la même tendance que les hauteurs des cornes retrouvées par chaque potentiel. En moyenne, l'amplitude des ondulations est de 0.65mm. Il est à noter que cette amplitude varie en fonction de l'épaisseur de la tôle (ici, l'épaisseur de la tôle est de 1.6 mm).

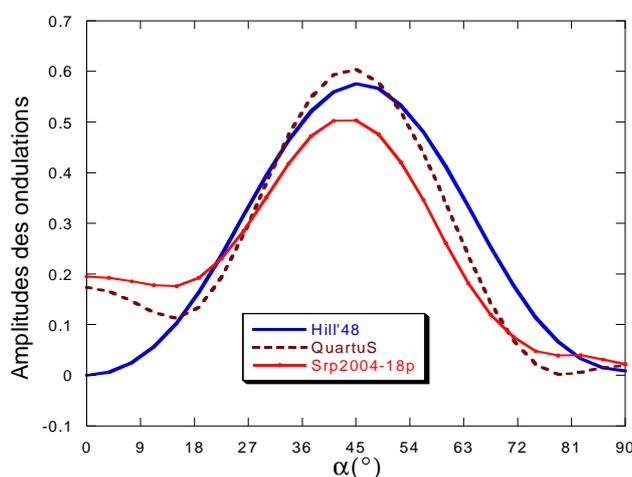


Figure IV.21 Amplitudes des ondulations.

Le retour élastique influence significativement à la fois la forme finale de l'embouti et aussi la distribution des contraintes résiduelles. Les différences entre les trois potentiels peuvent être facilement observées sur les figures.

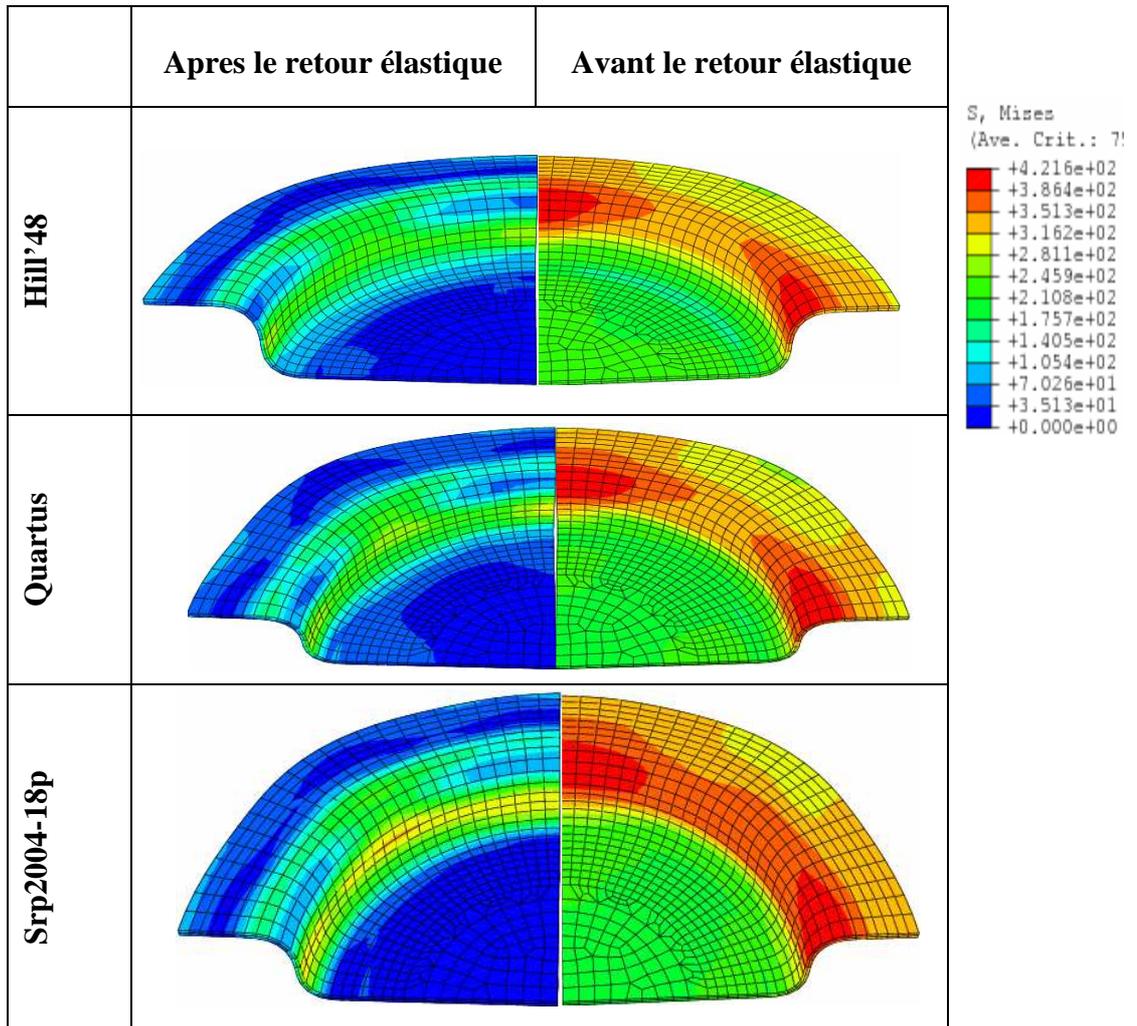


Figure IV.22 Distributions des contraintes avant et après le retour élastique

IV.7. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré que le sous programme Umat développé a été correctement mis en œuvre numériquement dans le code de calculs par éléments finis Abaqus. Cette Umat prend en compte un comportement élastoplastique avec une anisotropie plastique décrite par différents potentiels plastiques couplés à un écrouissage mixte (isotrope et cinématique non-linéaire).

L'effet des paramètres numériques (éléments finis, maillage, contact-frottement) sur la simulation des cornes d'emboutissage est important, ce qui limite à partir d'un certain niveau la validité des comparaisons par rapport aux résultats expérimentaux.

Les potentiels Srp2004-18p et Quartus améliorent les prédictions du potentiel de Hill'48 et permettent notamment la simulation de six ou huit cornes d'emboutissage, voire plus. Cependant, pour certains matériaux, le potentiel de Hill'48 est suffisant pour une bonne prédiction des cornes – ceci en dépit d'une prédiction des $r(\alpha)$ et $\sigma(\alpha)$ qui n'est pas toujours convaincante. Le surcoût en termes de temps CPU est très important lorsque l'on passe à des potentiels plus avancés. Notons cependant que le choix du formalisme dual n'affecte quasiment pas le temps de calcul, par rapport au cas où l'on utilise directement les critères de plasticité.

Nous avons pu mettre en évidence un effet très important de la technique d'identification sur les résultats de la simulation par éléments finis. Le modèle de Taylor n'est pas toujours suffisamment précis pour donner à l'identification par la texture une applicabilité industrielle dans tous les cas de figures. D'autre part, la stratégie d'identification par les essais mécaniques utilise peu de données expérimentales, qui sont non-uniformément réparties. Par conséquent, cette dernière peut générer des aberrations pour les fonctions avancées. De ce point de vue, l'identification par rapport à la texture a l'avantage de la régularisation sur un grand nombre de chargements (uniformément distribués dans le plan de la tôle et à travers l'épaisseur).

IV.8. Références bibliographiques

- Alves, J.L., 2003. Simulação numerica do processo de estampagem de chapas matalicas modelacao mecanica e metodos numericos ; Ph.D thesis , Universidade do minho escola de engenharia departamento de engenharia mecanica.
- Arminjon, M., Bacroix, B., 1991. On plastic potentials for anisotropic metals and their derivation from the texture function, *Acta Mechanica* 88, 219-243.
- Arminjon, M., Bacroix, B., Imbault, D., Raphanel, J. L., 1994. A fourth-order plastic potential for anisotropic metals and its analytical calculation from the texture function, *Acta Mechanica* 107, 33-51.
- Bacroix, B., Gilormini, P., 1995. Finite-element simulations of earing in polycrystalline materials using a texture-adjusted strain-rate potential. *Model. Simul. Mater. Sci. Eng.* 3, 1-21.
- Barlat, F., Richmond, O., 1987. Prediction of tricomponent plane stress yield surfaces and associated flow behaviour of strongly textured FCC polycrystalline sheet. *Materials Sciences and Engineering*, No. 3, pp. 1-21.
- Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C., 1991. A six-component yield function for anisoropic metals. *Int. J. Plasticity* 7, 693.
- Barlat, F., Chung, K., Richmond, O., 1993. Strain rate potential for metals and its application to minimum work path calculations. *Int. J. Plasticity* 9, 51-63.
- Barlat, F., Aretz, H., Yoon, J.W., Karabin, M.E., Brem, J.C., Dick, R.E., 2005. Linear transformation based anisotropic yield function. *Int. J. Plasticity* 21, 1009.
- Barlat, F., Chung, K., 2005. Anisotropic strain rate potential for aluminum alloy plasticity. In: *Proc. 8th ESAFORM Conference on Material Forming*, Cluj-Napoca, Romania, April 2005. Banabic, D., (Ed.), The Publishing House of the Romanian Academy, Bucharest, pp. 415-418.
- Bishop J.F.W., Hill R., 1951. A theory of the plastic distorsion of a polycrystalline aggregate under combined stress, *Phil. Mag.* 42, 414-427.
- Bourne, L., et Hill, R., 1950. On the correlation of the directional properties of rolled sheets in tension and cupping tests. *Philosophical Magazine* 41, 671-681.
- Chung, K. et Shah, K., 1992. Finite element simulation of sheet metal forming for planar anisotropic metal. *International Journal of Plasticity* 8, 453-476
- Flores, P., Duchêne, L., Lelotte, T., Bouffioux, C., El Houdaigui, F., van Bael, A., He, S., Duflou, J., Habraken, A.M., 2005. Model Identification and FE Simulations: Effect of Different Yield Loci and Hardening Laws in Sheet Forming, *Conf. Numisheet 2005*, Detroit, août 2005, 371-381.

- Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. Proc. R. Soc. Lond., A193, 281.
- Hill, R., 1990. The mathematical theory of plasticity, Oxford University Press. Pp. 317-332.
- Hoferlin E., 2001. Incorporation of an accurate model of texture and strain-path induced anisotropy in simulations of sheet metal forming; Ph.D thesis, Katholieke Universiteit Leuven.
- Hoferlin, E., Li, S., Van Bael, A., Van Houtte, P., 2001. Texture- and microstructure-induced anisotropy: micro-macro modelling, implementation. In: Mori, K. (Ed.), Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications, Proc. of Inter. Conf. Numiform 2001. Swets & Zeitlinger, Lisse, pp. 209–214.
- Hu, J.G., Jonas, J.J., Ishikawa, T., 1998. FEM simulation of the forming of textured aluminum sheets, Mat. Science Engng A, 256, p. 51.
- Li, S., Hoferlin, E., Van Bael, A., 2001. Application of a texture-based plastic potential in earing prediction of an IF steel. Advanced Engineering Materials 3, 990-994.
- Moreira, L. P., Ferron, G., 2004. Influence of the plasticity model in sheet metal forming simulations Journal of Materials Processing Technology, Volumes 155-156, 30, Pages 1596-1603.
- Moreira, L.P., 2002. Étude numérique de l'influence du modèle de plasticité sur le comportement des tôles lors de l'emboutissage, Thèse de Doctorat, Université de Metz, France.
- Rabahallah, M., Balan, T., Bouvier, S., Bacroix, B., Teodosiu, C., 2007. Finite element simulation of sheet metal forming using anisotropic strain-rate potentials, Proc. Conf. Numiform 2007, juin 2007, Porto (2007)
- Rabahallah, M., Balan, T., Bouvier, S., Bacroix, B., Teodosiu, C., 2007. Impact of the parameter identification of plastic potentials on the finite element simulation of sheet metal forming, Proc. Conf. Esaform 2007, avril 2007, Zaragoza (2007)
- Schaller, W., 1972. Sheet Metal Industries. pp. 621-624.
- Szabó, L., Jonas, J. J., 1995. Consistent tangent operator for plasticity models based on the plastic strain rate potential, Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng. 128, pp 315-323.
- Wilson, D. V., Bulter, R. D., 1962. The role of cup- drawing tests in measuring drawability. Journal of the Institute of Metals. 90, 473-483.
- Yoon, J.W., Barlat, F., Dick, R.E., Karabin, M.E., 2006. Prediction of six or eight ears in a drawn cup based on a new anisotropic yield function. Int. J. Plasticity 22, 174-193.
- Zhou, Y., Jonas, J.J., Savoie, J., Makinde, A., MacEwen, S.R., 1998. Effect of texture on earing in FCC metals: Finite element simulations, Int. J. Plasticity, 14, p. 117.



Conclusions et perspectives

V. Conclusions et perspectives

V.1. Conclusions

Dans cette thèse nous avons développé un ensemble cohérent d'outils numériques pour l'utilisation effective des potentiels plastiques, allant de leur identification paramétrique jusqu'à l'implantation dans un logiciel de simulation commercial. Nous avons utilisé pour cela des méthodes numériques classiques, en nous efforçant cependant de choisir systématiquement les plus précises et fiables. L'adaptation de ces algorithmes au cas des potentiels en vitesses de déformation nous a donné l'occasion de proposer quelques solutions originales. Un effort conséquent sur cette partie nous a permis d'aboutir à des algorithmes robustes et généraux.

Nous avons focalisé nos travaux sur la confrontation de plusieurs potentiels avancés disponibles dans la littérature. Nous présentons notamment, pour la première fois, des applications du potentiel Srp2004-18p. L'utilisation d'un nombre conséquent de matériaux, ainsi que de deux techniques d'identifications différentes, ont abouti à une comparaison riche et assez complète.

Ainsi, nous avons pu proposer pour la première fois une classification des différents potentiels par rapport à leurs capacités mathématiques à reproduire les prédictions du modèle de Taylor. Cette classification a été confirmée par les essais mécaniques. Cette information est importante à elle seule pour guider le choix de l'utilisateur, face à l'augmentation continue du nombre de modèles.

L'extension de cette comparaison à la simulation des cornes a fortement nuancé cette classification. De nombreux facteurs (notamment numériques et de procédé) viennent rejoindre la description de l'anisotropie plastique pour concourir à la prédiction des hauteurs des cornes. Après avoir délimité les conditions de simulations nous mettant à l'abri d'aberrations numériques, nous avons mené une campagne importante de simulations d'emboutissage cylindrique. Le simple succès de la convergence de ces nombreux calculs, impliquant plusieurs géométries, matériaux et modèles – nous a imposé un travail approfondi sur la robustesse des algorithmes.

Outre la validation de nos développements numériques, la confrontation expérimentale des cornes d'emboutissage n'a pas permis de désigner un « champion » des potentiels plastiques. Si l'on prend en compte le temps CPU dans l'évaluation, alors Srp2004-18p, Quartus et même Hill'48 peuvent présenter le meilleur compromis pour tel ou tel matériau. Cependant, Hill'48 peut faire des prestations très modestes pour certains cas, alors que Quartus – bien que excellent sur les aciers – peut présenter des problèmes de convexité. A contrario, le potentiel Srp2004-18p assure de très bonnes prédictions – souvent les meilleures – pour l'ensemble des matériaux testés.

Ce modèle très flexible permet notamment de simuler six, huit voire dix cornes d'emboutissage. Cette garantie de qualité est malheureusement accompagnée d'un surcoût non négligeable en temps de calcul, ainsi que d'un certain soin numérique afin de garantir la convergence.

Les simulations d'emboutissage cylindrique ont aussi apporté un éclairage très intéressant sur les deux méthodes d'identification. L'identification par les essais mécaniques, bien que plus précise, peut s'avérer dangereuse pour des potentiels avancés du fait du nombre réduit de données expérimentales. Une piste d'amélioration pourrait être la combinaison avec l'identification par rapport à la texture, qui viendrait régulariser la première dans les vastes zones dépourvues de points expérimentaux. Ainsi, notre étude n'a pas servi à éliminer des modèles ou des méthodes d'identifications - mais à en éclaircir les propriétés et à en améliorer l'utilisation, en vue des applications aux simulations numériques de procédés d'emboutissage. Nous espérons que le caractère systématique de nos investigations puisse les rendre utiles au lecteur intéressé à les appliquer.

V.2. Perspectives

Bien qu'une modélisation comprehensive de l'anisotropie plastique et des simulations numériques du processus d'emboutissage en 3-D aient été réalisées dans ce travail, il reste encore beaucoup de perspectives de recherche à envisager. Une première piste consiste à généraliser la méthode d'identification par rapport à la texture aux critères de plasticité. Il serait aussi très utile d'introduire l'évolution de la texture, en faisant des identifications de temps en temps et des simulations de Taylor en parallèle pour mieux prendre en compte le comportement réel du matériau. Pour simuler des cas d'intérêt industriel, il est convenable de faire des applications à des pièces plus complexes afin d'y mettre en évidence l'intérêt de tel ou tel potentiel ainsi que l'impact des méthodes d'identification. Des efforts futurs devraient aussi porter sur l'amélioration de l'érouissage et combiner avec des modèles d'érouissage avancé pour une modélisation complète. Pour une précision accrue de la prédiction de l'anisotropie plastique il serait peut être nécessaire de remplacer le modèle de Taylor par le modèle auto-cohérent ou polycristal éléments finis. Pour des raisons numériques, il serait nécessaire d'introduire des algorithmes de minimisation de type évolutionnaire pour contourner le problème de minima locaux rencontrés parfois lors de l'identification. Pour évaluer la précision relative de l'anisotropie plastique sur des simulations numériques, il serait intéressant de la comparer à une implantation directe de modèles micromécaniques dans les codes éléments finis.

Le sous-programme Umat peut servir comme une base pour l'implantation de nouveaux potentiels qui vont apparaître. Nous avons proposé notamment une extension de Srp2004-18p en augmentant le nombre de paramètres (36).

Pour une prévision éventuelle de la réussite de l'embouti, il serait nécessaire de coupler les résultats obtenus par la simulation numérique avec des critères de striction ou de rupture et éventuellement de tenir compte de l'endommagement. La prise en compte de l'anisotropie élastique pourrait améliorer sensiblement des résultats de type retour élastique.

Annexes

Annexes

Annexe A : Calcul du module tangent

On peut calculer, pour des raisons numériques (inversion des tenseurs d'ordre 4), le module cohérent de la manière suivante :

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e : (d\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{A.1})$$

soit en considérant l'élasticité isotrope et la partie déviatorique :

$$d\boldsymbol{\sigma}' = 2G(\mathbf{I}'_4 : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

avec

$$\mathbf{I}'_4 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

on écrit l'équation (3.76), du paragraphe III.4.4, en 5 composantes :

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{A}^p : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{A.3})$$

pour réécrire cette équation en 6 composantes on a :

$$d\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}^p : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (\text{A.4})$$

$$\text{avec } \mathbf{C}^p = \mathbf{T}^t : [\mathbf{A}^p]^{-1} : \mathbf{T}^s$$

$$\mathbf{T}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}^s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Après simplification :

$$d\boldsymbol{\sigma}' = 2G(\mathbf{I}_4 + 2G\mathbf{C}^p)^{-1} : \mathbf{I}'_4 : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.6})$$

Avec la contribution élastique on obtient

$$d\boldsymbol{\sigma} = 2G(\mathbf{I}_4 + 2G\mathbf{C}^p)^{-1} : \mathbf{I}'_4 : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon} + (\mathbf{K}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) : d\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (\text{A.7})$$

$$d\sigma = \left(2G(\mathbf{I}_4 + 2GC^p) \right)^{-1} : \mathbf{I}'_4 + K\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} : d\Delta\epsilon \quad (\text{A.8})$$

Finalement, le module tangent cohérent s'écrit :

$$\mathbf{C}^{ep} = 2G(\mathbf{I}_4 + 2GC^p) \right)^{-1} : \mathbf{I}'_4 + K\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2 \quad (\text{A.9})$$

Annexe B : Critères de convergence

Les algorithmes numériques présentés aux paragraphes III.4.5 (intégration temporelle via algorithme de Newton – Raphson) et III.3.5 (transition élastoplastique via algorithme BFGS) sont régis par un nombre de paramètres numériques qui permettent de décider de la convergence. Le tableau ci-dessus indique les valeurs employées ou les formules utilisées pour les déterminer.

Critères d'arrêt Newton	Critères d'arrêt minimisation
<p><u>Teste du résidu avec la solution approchée</u> $test_1 = \max_i \rho_i < 10^{-2} \times Tol_1 ; Tol_1 = 10^{-4}$</p> <p><u>Teste du résidu avec la solution convergée</u> $test_2 = \max_i \rho_i < Tol_1$</p> <p><u>Détecter la fausse convergence</u></p> $test_3 = \max \frac{\left \rho_i \frac{\partial \rho_j}{\partial \Delta \epsilon_i^p} \right \max(\Delta \epsilon_i^p , 1)}{\max(0.5\rho : \rho, 0.5n)} < Tol_2 ; Tol_2 = 10^{-6}$ <p>teste sur $\delta \Delta \epsilon^p$</p> $test_4 = \max_i \frac{ \Delta \epsilon_{i+1}^p - \Delta \epsilon_i^p }{\max(\Delta \epsilon_i^p , 1)} < Tol_3 ; Tol_3 = 10^{-7}$	<p><u>Teste de convergence sur $\delta \beta$</u> $test_5 = \max \frac{ \delta \beta_i }{\max(\beta_i , 1)} < Tol_4 ; Tol_4 = 12 \times 10^{-8}$</p> <p><u>Teste de convergence sur le gradient</u></p> $test_6 = \max \frac{\left \frac{\partial g}{\partial \beta_i} \right \max(\beta_i, 1)}{\max(\min(g), 1)} < Tol_5 ; Tol_5 = 10^{-9}$

Annexe C : Les dérivées premières et secondes des potentiels

Les expressions des différents potentiels utilisés sont données au paragraphe I.3. Leur implantation numérique nécessite cependant le calcul de leurs dérivées numériques jusqu'à l'ordre deux. Le développement de ces calculs est donné ici, pour le potentiel quadratique et pour Srp2004-18p.

Potentiel de Hill'48

$$\text{Calcul de } \xi = \frac{\partial \Psi(\mathbf{N})}{\partial \mathbf{N}} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial \mathbf{D}^p} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial D_1^p} &= (\alpha_1 D_1^p - 0.5 \alpha_{12} D_2^p) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial D_2^p} &= (\alpha_2 D_2^p - 0.5 \alpha_{12} D_1^p) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial D_3^p} &= \alpha_3 D_3^p [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial D_4^p} &= \alpha_4 D_4^p [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{D}^p)}{\partial D_5^p} &= \alpha_5 D_5^p [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{Calcul de } \zeta = \frac{\partial \xi(\mathbf{D}^p)}{\partial \mathbf{D}^p} :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1(\mathbf{D}^p)}{\partial D_1^p} &= (-\zeta_1^2 + \alpha_1) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \xi_1(\mathbf{D}^p)}{\partial D_2^p} &= (-\zeta_2 \zeta_1 - 0.5 \alpha_2) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \xi_2(\mathbf{D}^p)}{\partial D_2^p} &= (-\zeta_2^2 + \alpha_2) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \\ \frac{\partial \xi_i(\mathbf{D}^p)}{\partial D_i^p} &= (\alpha_i - \zeta_i \zeta_i) [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \quad \text{avec } i = \overline{3,5} \\ \frac{\partial \xi_i(\mathbf{D}^p)}{\partial D_j^p} &= -\zeta_i \zeta_j [\Psi(\mathbf{D}^p)]^{-1} \quad \text{avec } i \neq j \text{ et } i \text{ et } j = \overline{3,5} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

les autres termes de ζ sont nuls.

Potentiel Srp2004-18p

$$\psi(\mathbf{D}^p) = |\tilde{\mathbf{E}}'_1|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_2|^b + |\tilde{\mathbf{E}}'_3|^b + |\tilde{\mathbf{E}}''_2 + \tilde{\mathbf{E}}''_3|^b + |\tilde{\mathbf{E}}''_3 + \tilde{\mathbf{E}}''_1|^b + |\tilde{\mathbf{E}}''_1 + \tilde{\mathbf{E}}''_2|^b = (2^{2-b} + 2)(\bar{D}^p)^b \quad (\text{C.3})$$

La loi de normalité s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial \Delta \varepsilon_{ij}^p} \quad (\text{C.4})$$

où μ est un facteur proportionnel nécessaire pour calculer la contrainte deviatorique.

La taille du potentiel égale à $2^{2-b} + 2$, l'exposant $b=3/2$ et $4/3$ pour les matériaux CC et CFC respectivement.

\tilde{E}'_i et \tilde{E}''_i : représentent les valeurs principales des tenseurs $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'$ et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}''$ respectivement définies par deux transformations linéaires :

$$\tilde{\mathbf{D}}^{p'} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{d} = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{p''} = \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{d} = \mathbf{B}'' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p \quad (\text{C.6})$$

Les tenseurs $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}'$ et $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}''$ sont représentés par :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{xx} & \tilde{\varepsilon}_{xy} & \tilde{\varepsilon}_{zx} \\ \tilde{\varepsilon}_{xy} & \tilde{\varepsilon}_{yy} & \tilde{\varepsilon}_{yz} \\ \tilde{\varepsilon}_{zx} & \tilde{\varepsilon}_{yz} & \tilde{\varepsilon}_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Ses valeurs principales sont les racines de l'équation caractéristique suivante :

$$P(\tilde{E}_k) = -\tilde{E}_k + 3H_1\tilde{E}_k^2 + 3H_2\tilde{E}_k^3 + 2H_3 = 0 \quad (\text{C.8})$$

Le premier, le second et le troisième invariants du tenseur $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ sont :

$$\begin{aligned} (1) \quad H_1 &= (\tilde{\varepsilon}_{xx} + \tilde{\varepsilon}_{yy} + \tilde{\varepsilon}_{zz})/3 \\ (2) \quad H_2 &= (\tilde{\varepsilon}_{yz}^2 + \tilde{\varepsilon}_{zx}^2 + \tilde{\varepsilon}_{xy}^2 - \tilde{\varepsilon}_{yy}\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{xx} - \tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{yy}) \\ (3) \quad H_3 &= (2\tilde{\varepsilon}_{yz}\tilde{\varepsilon}_{zx}\tilde{\varepsilon}_{xy} + \tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{yy}\tilde{\varepsilon}_{zz} - \tilde{\varepsilon}_{xx}\tilde{\varepsilon}_{yz}^2 - \tilde{\varepsilon}_{yy}\tilde{\varepsilon}_{zx}^2 - \tilde{\varepsilon}_{zz}\tilde{\varepsilon}_{xy}^2) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Utilisant le changement des variables :

$$\tilde{E}_k = \bar{E}_k + H_1 \quad (\text{C.10})$$

L'équation caractéristique devienne :

$$P(\tilde{E}_k) = P'(\bar{E}_k) = -\bar{E}_k^3 + 3p\bar{E}_k + 2q = 0 \quad (\text{C.11})$$

où P et P' sont aussi les invariants du tenseur des vitesses de déformation et :

$$\begin{aligned} p &= (H_1^2 + H_2) > 0 \\ q &= (2H_1^3 + 3H_1H_2 + 2H_3)/2 \\ \theta &= \arccos \left[\frac{q}{p^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Les solutions de l'équation (C.11) sont :

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= z + \bar{z} \\ \bar{E}_2 &= \omega z + \bar{\omega} \bar{z} \\ \bar{E}_3 &= \bar{\omega} z + \bar{z}\end{aligned}\tag{C.13}$$

Z est une variable complexe définie pour l'argument principal ($0 \leq \theta \leq \pi$), ω est la constante ($e^{-2i\pi/3}$), et \bar{z} et $\bar{\omega}$ sont respectivement les variables conjuguées.

$$Z = z^3 = q + i\sqrt{p^3 - q^2}\tag{C.14}$$

Les valeurs principales du tenseur $\tilde{\mathbf{e}}$, lesquelles sont réelles avec $p^3 - q^2 \geq 0$, sont :

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &= \bar{E}_1 + H_1 = 2\sqrt{H_1^2 + H_2} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + H_1 \\ \tilde{E}_2 &= \bar{E}_2 + H_1 = 2\sqrt{H_1^2 + H_2} \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) + H_1 \\ \tilde{E}_3 &= \bar{E}_3 + H_1 = 2\sqrt{H_1^2 + H_2} \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + H_1\end{aligned}\tag{C.15}$$

Ces valeurs sont ordonnées, à cause de l'argument z inférieur ou égale à $\pi/3$:

$$\tilde{E}_1 > \tilde{E}_2 \geq \tilde{E}_3 \text{ et } \tilde{E}_1 \geq \tilde{E}_2 > \tilde{E}_3\tag{C.16}$$

Les transformations tensorielles représentées par la matrice orthogonale $\mathbf{q} = [q_{ij}]$, entre la vitesse de déformation principale dans le repère matériel principal et non principal.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}' &= \mathbf{Q}' \tilde{\mathbf{e}}' \\ \tilde{\mathbf{E}}'' &= \mathbf{Q}'' \tilde{\mathbf{e}}''\end{aligned}\tag{C.17}$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11}^2 & q_{21}^2 & q_{31}^2 & 2q_{21}q_{31} & 2q_{31}q_{11} & 2q_{11}q_{21} \\ q_{12}^2 & q_{22}^2 & q_{32}^2 & 2q_{22}q_{32} & 2q_{32}q_{12} & 2q_{12}q_{22} \\ q_{13}^2 & q_{23}^2 & q_{33}^2 & 2q_{23}q_{33} & 2q_{33}q_{13} & 2q_{13}q_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_{xx} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{yy} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{zz} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{yz} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{zx} \\ \tilde{\mathbf{e}}_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \tilde{\mathbf{e}}\tag{C.18}$$

La matrice \mathbf{Q}' et \mathbf{Q}'' sont de dimension 3×6 . La combinaison de ces deux matrices donne :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{E}}' \\ \tilde{\mathbf{E}}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}' \\ \mathbf{Q}'' \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \text{ et } \mathbf{E} = \mathbf{\Theta} \mathbf{e}\tag{C.19}$$

Cas particulier (Potentiel de Srp93) :

$$\psi(\mathbf{D}^p) = \left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_3}{3} \right|^b + \left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_3 - \tilde{\mathbf{E}}_1}{3} \right|^b + \left| \frac{2\tilde{\mathbf{E}}_3 - \tilde{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\mathbf{E}}_2}{3} \right|^b = |\tilde{\mathbf{E}}_1|^b + |\tilde{\mathbf{E}}_2|^b + |\tilde{\mathbf{E}}_3|^b \quad (\text{C.20})$$

Dérivée première de Srp2004-18p :

La loi d'écoulement montrée dans Eq.(C.4) est utilisée pour obtenir la contrainte deviatorique :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}'_p} \frac{\partial \tilde{E}'_p}{\partial H'_q} \frac{\partial H'_q}{\partial \tilde{\epsilon}'_{rs}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}'_{rs}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}''_p} \frac{\partial \tilde{E}''_p}{\partial H''_q} \frac{\partial H''_q}{\partial \tilde{\epsilon}''_{rs}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}''_{rs}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = \psi'_{,p} E'_{p,q} H'_{q,rs} L'_{rsij} + \psi''_{,p} E''_{p,q} H''_{q,rs} L''_{rsij} \quad (\text{C.21})$$

Les expressions pour $\partial \psi / \partial \tilde{E}_p = \psi_{,p}$ sont :

$$\begin{aligned} \psi'_{,p} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}'_p} = b \tilde{E}'_p |\tilde{E}'_p|^{b-2} \\ \psi''_{,1} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}''_1} = b \left[(\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_2) |\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_2|^{b-2} + (\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_1) |\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_1|^{b-2} \right] \\ \psi''_{,2} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}''_2} = b \left[(\tilde{E}''_2 + \tilde{E}''_3) |\tilde{E}''_2 + \tilde{E}''_3|^{b-2} + (\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_2) |\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_2|^{b-2} \right] \\ \psi''_{,3} &= \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}''_3} = b \left[(\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_1) |\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_1|^{b-2} + (\tilde{E}''_2 + \tilde{E}''_3) |\tilde{E}''_2 + \tilde{E}''_3|^{b-2} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

On peut obtenir les termes de $\partial E_p / \partial H_q = E_{p,q}$ à partir de l'Eq.(C.15) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}_p}{\partial H_1} &= \frac{\tilde{E}_p^2}{\tilde{E}_p^2 - 2H_1 \tilde{E}_p - H_2} \\ \frac{\partial \tilde{E}_p}{\partial H_1} &= \frac{\tilde{E}_p}{\tilde{E}_p^2 - 2H_1 \tilde{E}_p - H_2} \\ \frac{\partial \tilde{E}_p}{\partial H_1} &= \frac{2}{2(\tilde{E}_p^2 - 2H_1 \tilde{E}_p - H_2)} \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Les expressions de $\partial H_q / \partial \tilde{\epsilon}_{ij} = H_{q,rs}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{xx}} &= 1/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} = 1/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{zz}} = 1/3 \text{ et } \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{rs}} = 0 \text{ if } r \neq s \\
 \frac{\partial H_2}{\partial \tilde{\epsilon}_{xx}} &= -(\tilde{\epsilon}_{yy} + \tilde{\epsilon}_{zz})/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} = -(\tilde{\epsilon}_{zz} + \tilde{\epsilon}_{xx})/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{zz}} = -(\tilde{\epsilon}_{xx} + \tilde{\epsilon}_{yy})/3 \\
 \frac{\partial H_2}{\partial \tilde{\epsilon}_{yz}} &= 2\tilde{\epsilon}_{yz}/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{zx}} = 2\tilde{\epsilon}_{zx}/3, \quad \frac{\partial H_1}{\partial \tilde{\epsilon}_{xy}} = 2\tilde{\epsilon}_{xy}/3 \\
 \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{xx}} &= (\tilde{\epsilon}_{yy}\tilde{\epsilon}_{zz} - \tilde{\epsilon}_{yz}^2)/2, \quad \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} = (\tilde{\epsilon}_{zz}\tilde{\epsilon}_{xx} - \tilde{\epsilon}_{zx}^2)/2, \quad \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{zz}} = (\tilde{\epsilon}_{xx}\tilde{\epsilon}_{yy} - \tilde{\epsilon}_{xy}^2)/2 \\
 \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{yz}} &= \tilde{\epsilon}_{zx}\tilde{\epsilon}_{xy} - \tilde{\epsilon}_{xx}\tilde{\epsilon}_{yz}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{zx}} = \tilde{\epsilon}_{xy}\tilde{\epsilon}_{yz} - \tilde{\epsilon}_{yy}\tilde{\epsilon}_{zx}, \quad \frac{\partial H_3}{\partial \tilde{\epsilon}_{xy}} = \tilde{\epsilon}_{yz}\tilde{\epsilon}_{zx} - \tilde{\epsilon}_{zz}\tilde{\epsilon}_{xy}
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

Finalement, $\partial \tilde{\epsilon}_{rs} / \partial \dot{\epsilon}_{ij}$ est simplement donnée par :

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{rs}}{\partial \dot{\epsilon}_{ij}} = L_{rsij} \tag{C.25}$$

Les cas singuliers :

Les dérivées de $\partial E_p / \partial H_q$ sont pas définies dans le cas ou :

$$\tilde{E}_p^2 - 2H_1\tilde{E}_p - H_2 = 0 \tag{C.26}$$

Résoudre l'équation du second ordre on aura :

$$\tilde{E}_p = H_1 \pm \sqrt{H_1^2 + H_2} \tag{C.27}$$

Les dérivées $\partial E_p / \partial H_q$ sont pas connus dans les cas suivants :

- $\theta = 0, \tilde{E}_2 = \tilde{E}_3$
- $\theta = \pi, \tilde{E}_2 = \tilde{E}_1$

Il est possible de démontrer que pour le cas 1 ($\theta = 0, \tilde{E}_2 = \tilde{E}_3$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial H_p} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_2} \right) \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial H_p} + 3 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_2} \delta_{p1} \tag{C.28}$$

où $\frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial H_p}$ comme une valeur limite obtenue dans ce cas :

$$\frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial H_1} = \frac{(2\sqrt{p} + H_1)^2}{3p}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial H_2} = \frac{2\sqrt{p} + H_1}{3p}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial H_3} = \frac{2}{9p} \tag{C.29}$$

Exemple similaire pour le cas 2 ($\theta = \pi, \tilde{E}_2 = \tilde{E}_1$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial H_p} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_3} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_2} \right) \frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial H_p} + 3 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{E}_2} \delta_{p1} \quad (\text{C.30})$$

où $\frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial H_p}$ comme une valeur limite obtenue dans ce cas :

$$\frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial H_1} = \frac{(-2\sqrt{p} + H_1)^2}{3p}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial H_2} = \frac{-2\sqrt{p} + H_1}{3p}, \quad \frac{\partial \tilde{E}_3}{\partial H_3} = \frac{2}{9p} \quad (\text{C.31})$$

Annexe D : Paramètres identifiés

Potentiels		ESSAIS MECANQUES					TEXTURES			
		AA6022	AL2090	AL2008	DP600	HSLA	AL5182	AL6022	DP600	DC06
Srp2004-18p	c ₁	0.4212	0.3899	0.9253	-0.3884	3.2647	1.5420	0.3174	0.1341	0.9552
	c ₂	-0.7992	0.6832	1.2680	0.8796	3.9510	1.5109	0.0152	0.5141	0.9893
	c ₃	1.0704	0.9090	1.3418	1.2638	2.2691	1.6337	0.7568	1.1634	1.2842
	c ₄	-0.1444	1.0109	1.1949	0.6983	2.6105	1.6230	0.2410	1.0563	1.2377
	c ₅	-0.0860	1.1323	0.3638	0.9022	2.0673	1.5248	0.4022	0.6356	1.2117
	c ₆	-0.4176	0.6264	0.3418	0.7441	3.6123	1.5096	0.2673	0.5963	1.2144
	c ₇	1.0120	1.0020	1.0600	1.0000	1.0300	1.6772	0.7076	0.7458	1.3448
	c ₈	1.1040	0.5635	0.9000	1.0000	0.9000	1.5940	0.4440	-0.0087	1.1439
	c ₉	0.9611	1.0703	1.2771	0.9996	3.0605	1.6138	0.1820	0.5735	1.3870
	c ₁₀	1.4010	1.3692	0.7990	1.1610	3.5713	0.2844	1.3642	1.1936	0.5695
	c ₁₁	1.0898	0.7683	0.9553	0.6363	2.5628	0.2877	1.4038	1.3097	-0.4002
	c ₁₂	0.8842	1.4545	0.7286	0.7697	1.6127	0.3904	1.4569	1.2247	0.6464
	c ₁₃	1.0281	0.6826	1.0405	0.9165	2.9480	0.2079	1.4284	1.1146	-0.2051
	c ₁₄	0.9415	0.9383	0.1169	1.1588	2.3682	0.3413	1.5882	1.3339	-0.1529
	c ₁₅	1.0724	1.1074	0.5947	0.4566	2.9196	0.2916	1.5605	1.0895	-0.7111
	c ₁₆	1.0120	1.0020	1.0600	1.0000	1.0300	-0.0985	1.4803	1.1794	-0.4046
	c ₁₇	1.1040	0.5635	0.9000	1.0000	0.9000	0.2969	1.6225	1.5432	-0.8189
	c ₁₈	1.1758	0.5083	0.6863	1.0785	2.6826	0.2574	1.7888	1.3890	0.5119
	b	1.4010	1.3333	1.3333	1.7783	1.4109	1.2878	1.2640	1.5171	1.4990
Srp93	c ₁	0.8956	0.9056	0.8072	0.9916	3.0515	0.9654	0.9522	1.0283	1.0968
	c ₂	1.0089	0.9138	0.9663	0.9713	2.7060	0.9609	0.9903	0.9924	1.0797
	c ₃	1.0143	1.0606	1.0129	1.0024	3.0932	1.0413	1.0099	1.0077	0.9263
	c ₄	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0344	1.1031	1.0064	0.9221
	c ₅	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0261	1.0731	1.0330	0.9391
	c ₆	1.0352	0.8245	0.9958	1.0321	2.7926	0.9967	1.0756	1.0260	1.0307
	b	1.3333	1.3333	1.3333	1.5000	1.5000	1.3810	1.3296	1.5517	1.6063
Quartus	α_1	3.3262	3.0617	3.1603	3.2032	3.0705	3.2045	3.2751	3.2096	3.4549
	α_2	3.1141	2.9778	2.8008	3.2362	3.2649	3.2097	3.1622	3.3014	3.5051
	α_3	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.4265	3.7685	3.2765	2.9584
	α_4	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.4554	3.6904	3.3644	3.0204
	α_5	3.6043	2.4120	3.4445	3.3728	3.0682	3.3274	3.6739	3.3360	3.2601
	α_6	6.4118	5.6264	6.0438	6.2594	6.3341	6.3970	6.5023	6.3126	6.8453
	α_7	6.2361	6.4392	5.5018	6.2188	6.7128	6.3856	6.2727	6.5265	6.9710
	α_8	9.5573	9.6742	8.8248	9.3124	10.0202	9.7322	9.5990	9.5735	9.9496
	α_9	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5401	6.5111	6.3561	6.6972
	α_{10}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5201	6.9435	6.4937	6.4091
	α_{11}	5.9286	5.9475	6.1642	6.4792	6.5018	6.4210	6.4006	6.5316	6.9840
	α_{12}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5851	6.8686	6.5589	6.4387
	α_{13}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.4302	6.1979	6.5502	6.8756
	α_{14}	6.0664	5.8206	5.6784	6.5003	6.5201	6.4118	6.5754	6.5461	6.9564
	α_{15}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.7936	6.8321	6.5308	5.7396
	α_{16}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.3772	6.7905	6.3481	6.6667
	α_{17}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.4592	6.5335	6.6062	6.7797
	α_{18}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5863	7.0078	6.5294	6.6227
	α_{19}	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.5320	6.4334	6.6083	6.7160	6.8739
	α_{20}	5.5229	4.2424	5.1755	6.3920	6.5136	6.2199	5.9970	6.5379	7.5806
	α_{21}	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	0.4318	0.6137	-0.2269	-1.1834
	α_{22}	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	3.2660	0.3315	0.1261	0.1035	-0.8967
Hill'48	F	1.248110	1.498140	1.69578	1.02769	0.952	1.0008	1.18965	0.9886	1.2413
	G	0.993584	1.324690	1.02119	1.06445	1.167	1.0076	1.08328	1.0636	1.3007
	H	0.957249	0.561664	0.92107	1.01769	1.028	0.8819	1.07183	1.0185	1.1085
	L	3.000000	3.000000	3.00000	3.00000	3.200	3.1593	2.61289	2.9199	3.8472
	M	3.000000	3.000000	3.00000	3.00000	4.139	2.8197	2.75352	2.9424	3.1423
	N	2.513170	5.227130	2.72143	2.73322	4.012	3.2457	2.77350	3.0481	2.6108
von Mises	0.9290	1.0599	0.8204	0.6431	0.1152	1.152	0.9049	1.0593	1.1903	

Résumé

Ce travail de recherche, réalisé au sein de deux laboratoires (LPMM à l'ENSAM de Metz et LPMTM à l'Université Paris 13), se propose d'étudier l'anisotropie plastique des tôles métalliques lors d'opérations de mise en forme. Les applications visées concernent la prédiction, au moyen de la simulation numérique du procédé, de l'anisotropie plastique initiale et son influence sur le comportement global de la tôle.

A cette fin, une large classe de potentiels plastiques a été considérée. Ces potentiels sont écrits dans le cadre d'une approche dite duale (moins couramment utilisée) où la grandeur introduite est le taux de déformation plastique, contrairement à l'approche classique où un critère est défini en contraintes. De plus, l'écrouissage du matériau a été pris en compte à travers l'introduction de variables internes. Une étude étendue a été consacrée à l'identification des différents potentiels introduits en se basant sur des données expérimentales, ainsi que sur la mesure de la texture du matériau. Les matériaux étudiés à cet effet sont des nuances d'acier et des alliages d'aluminium. Deux stratégies d'identification ont été explorées afin de s'assurer de la bonne détermination des paramètres du modèle de comportement.

Pour permettre l'exploitation des différents potentiels dans le cadre de la simulation numérique des procédés de mise en forme, une implantation numérique robuste et efficace a été réalisée dans un code de calcul par éléments finis. Une routine de résolution du comportement suivant un schéma d'intégration implicite a été développée afin d'obtenir une bonne précision des calculs.

La modélisation a d'abord été appliquée à la prédiction des coefficients d'anisotropie. Cette étude a mis en évidence la capacité de chaque potentiel à reproduire les fortes anisotropies de plasticité. Par la suite, l'application de cette modélisation à l'étude des cornes d'emboîtage a permis concrètement de voir les effets du potentiel sur le nombre de cornes formés, ainsi que sur leur degré de prononciation. La corrélation entre les coefficients d'anisotropie du matériau et les cornes d'emboîtage a été étudiée.

Mots clés : anisotropie plastique, potentiel plastique dual, identification paramétrique, texture cristallographique, grandes déformations, éléments finis.

Abstract

This research work, realized in two laboratories (LPMM at ENSAM of Metz and LPMTM at Paris 13 University) study the plastic anisotropy of sheet metals during forming operations. The applications in mind concern the prediction, through the forming process numerical simulation, of the initial plastic anisotropy and its influence on the global behaviour of the sheet.

To this end, a large class of strain rate potentials has been considered. These potentials written in the frame of so called dual approach (less commonly used), where the introduce variable is the plastic strain rate, contrary to the classical approach, where a criterion is defined with the stress tensor. In addition, the material work-hardening has been considered by introducing internal variables. An extensive study has been devoted to the identification of the different potentials introduced, based on the experimental data, as well as on material texture measure. The materials under study are some steel grades and aluminium alloys. Different identification strategies have been investigated, in order to insure the proper determination of the behaviour model parameters.

To allow the exploitation of the different potentials in the frame of the forming process simulation, a robust and efficient computer implementation has been performed in a finite element code. A solver routine following as implicit time integration scheme has been developed in order to obtain a good accuracy.

The modelling has been applied to the prediction of anisotropy coefficients. This study highlighted the ability of each model to reproduce the strong plastic anisotropies. Then, the application of this modelling to the study of deep drawing ears allowed to show the effects of the potential on the number of ears as well as their pronounciation degree. The correlation between the anisotropy coefficients and the deep drawing ears has been studied.

Keywords: Plastic anisotropy, strain rate potential, parametric identification, crystallographic texture, large strain, finite elements.