

# Analyse harmonique en dimension infinie : paires de Guelfand généralisées

Marouane Rabaoui

► **To cite this version:**

Marouane Rabaoui. Analyse harmonique en dimension infinie : paires de Guelfand généralisées. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 2007. Français. NNT : 2007METZ028S . tel-01749014

**HAL Id: tel-01749014**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749014>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

---

**UNIVERSITÉ PAUL VERLAINE - METZ**

École Doctorale IAEM Lorraine

---

**THÈSE DE DOCTORAT**

Discipline : Mathématiques  
Spécialité : Mathématiques fondamentales

Présentée par

**MAROUANE RABAOUI**

pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Paul Verlaine-Metz**

---

**ANALYSE HARMONIQUE EN DIMENSION INFINIE :  
PAIRES DE GUELFAND GÉNÉRALISÉES**

---

Soutenue publiquement le 30 novembre 2007

Professeurs membres du jury :

<b>M. Jacques FARAUT</b>	<b>Co-Directeur de thèse, Paris VI</b>
<b>M. Joachim HILGERT</b>	<b>Rapporteur, Paderborn</b>
<b>M. Jean LUDWIG</b>	<b>Examineur, Metz</b>
<b>M. Sami MUSTAPHA</b>	<b>Examineur, Paris VI</b>
<b>M. Grigori OLSHANSKI</b>	<b>Rapporteur, Moscou</b>
<b>Mme. Angela PASQUALE</b>	<b>Directeur de thèse, Metz</b>

---

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz  
UMR 7122 du CNRS et de l'Université Paul Verlaine-Metz  
Ile du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 1



*À mes parents*



## Résumé

Dans cette thèse, on commence par démontrer une version généralisée du théorème de Bochner. Ce résultat concerne les paires sphériques d'Olshanski  $(G_\infty, K_\infty)$  qui sont définies comme limites inductives de suites croissantes de paires de Gelfand  $(G_n, K_n)_n$ . En utilisant la théorie de la représentation intégrale de Choquet dans les cônes convexes, on établit une représentation de type Bochner pour toute fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  des fonctions continues,  $K_\infty$ -biinvariantes et de type positif sur  $G_\infty$ . Cette représentation est donnée via une unique mesure positive et bornée  $\mu$  par :  $\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) d\omega$ . Ici  $\Omega$  désigne l'ensemble des fonctions sphériques de type positif sur  $G_\infty$ .

Ensuite, on considère la paire sphérique  $(U(\infty) \times U(\infty), (U(\infty) \times U(\infty)) \ltimes V_\infty)$  où  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$  est l'espace des matrices complexes carrées de dimension infinie n'ayant qu'un nombre fini de coefficients non nuls, et  $U(\infty)$  est le groupe unitaire de dimension infinie. En utilisant un résultat dû à G. Olshanski et A. Vershik, on détermine l'ensemble  $\Omega$  pour la paire sphérique considérée. Ce qui nous permet de trouver une version paramétrée du théorème de Bochner généralisé qu'on utilise pour établir une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif dans le cas de cette paire.

**Mots-clés :** Paire de Gelfand, théorème de Bochner-Godement, fonction de type positif, fonction de type négatif, fonction sphérique, paire sphérique, limite inductive, théorème de Bochner généralisé.

## Abstract

In this Thesis, we first prove a generalisation of Bochner theorem. This result deals with Olshanski spherical pairs  $(G_\infty, K_\infty)$  which are defined as inductive limits of increasing sequences of Gelfand pairs  $(G_n, K_n)_n$ . By using Choquet's theorem, we establish a Bochner type representation of any element  $\varphi$  in the set  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  of  $K_\infty$ -biinvariant continuous functions of positive type on  $G_\infty$ . Such representation is given via a unique, positive and bounded measure  $\mu$  by :  $\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) d\omega$ . Here  $\Omega$  is the set of spherical functions of positive type on  $G_\infty$ .

Then we consider the spherical pair  $(U(\infty) \times U(\infty), (U(\infty) \times U(\infty)) \ltimes V_\infty)$  where  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$  is the infinite dimensional space of square complex matrices with only finite non zero coefficients, and  $U(\infty)$  is the infinite dimensional unitary group. By using a result of G. Olshanski and A. Vershik, we determine the set  $\Omega$  of spherical functions of positive type for the considered spherical pair. This enables us to find a parameterized version of the generalized Bochner theorem which we use to establish an integral representation of continuous functions of negative type in this case.

**Keywords :** Gelfand Pair, Bochner-Godement theorem, function of positive type, function of negative type, spherical function, spherical pair, inductive limit, generalized Bochner theorem.





# REMERCIEMENTS

C'est un moment très fort en émotion, fermer ce long chapitre de ma vie en remerciant toutes les personnes qui m'ont accompagné pendant.

Je commence par exprimer ma profonde gratitude à mes deux directeurs de thèse Jacques Faraut et Angela Pasquale. J'ai eu la chance de faire à leurs côtés de belles mathématiques et je ne peux qu'admirer leur savoir mathématiques et leur façon de travailler. Je les remercie d'avoir été toujours disponible, de m'avoir accueilli toujours avec un grand sourire, d'être à mon écoute pendant les moments difficiles et de m'entourer avec gentillesse et humanité pendant les moments très difficiles. Toutes nos discussions étaient des sources d'inspiration pour mon travail, ils ont répondu avec beaucoup de patience à mes questions et ils m'ont appris que c'est dans la simplicité que l'on trouve les meilleures réponses. Je les remercie aussi pour leurs encouragements constants et leurs judicieux conseils. Ils ont su me faire découvrir de nombreux domaines passionnants des mathématiques et me guider vers des problèmes à la fois intéressants et abordables. Sans eux, cette thèse n'aurait pas pu s'accomplir dans de si bonnes conditions.

Je souhaite remercier Grigori Olshanski et Joachim Hilgert de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs et membres du jury de ma thèse. Je leur exprime ma sincère reconnaissance d'avoir accepté de se lancer dans un travail certainement ingrat de relecture attentive et critique.

C'est avec un grand sourire que je remercie spécialement Jean Ludwig. Je le remercie d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je le remercie aussi de m'avoir très bien accueilli depuis mon arrivée au LMAM. Je lui exprime ma gratitude pour son soutien inestimable.

C'est une grande joie de voir Sami Mustapha faire partie du jury de ma thèse et je le remercie beaucoup. J'ai eu la chance de faire mon stage de DEA avec lui et c'est grâce à son encouragement et sa gentillesse que j'ai eu la force et l'envie de me relever et continuer. Sa présence à ma soutenance de thèse et un grand honneur pour moi.

Je remercie également Tilmann Wurzbacher. Je le remercie pour son soutien pendant mes années de thèse et je me souviendrai toujours de son accueil chaleureux lors de ma première visite à Metz.

Je remercie également tous les membres du Laboratoire de mathématiques et applications de Metz. Je ne pourrais jamais oublier les moments chaleureux que j'ai passé au sein de ce laboratoire.

Je me souviendrai toujours que l'institut de mathématiques de Jussieu et son directeur Gilles Godefroy m'ont très bien accueilli depuis mon arrivée en France.

Je pense très fort à mes amis et mes collègues. Je pense très fort à Haikel, Aziz, Mohamed et Walid.

Finalement, ce rêve n'aurait pas pu se réaliser sans l'amour, la confiance, le soutien de ma famille, sans qui je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui. Je remercie ma grande-mère qui a fait grandir mon imagination dès mon enfance quand elle me faisait dormir avec ses contes de fées. Mon père, qui m'a appris à rester toujours debout face aux difficultés, à aimer la recherche et la science. Ma mère, qui m'a appris à être simple, que l'on peut être heureux juste en regardant ceux qu'on aime à nos côtés. Elle a embrassé mes échecs et mes réussites sans distinction. Je remercie mon frère et ma soeur de m'avoir donné tellement de chaleur et de joie de vivre, de m'avoir appris à ne jamais baisser les bras. Je pense très fort à ma femme qui m'a entouré de son amour tendre et pure. À ma famille et à tous ceux que j'aime et je respecte je dédie ce travail.

# Table des matières

0.1	INTRODUCTION GÉNÉRALE . . . . .	11
<b>1</b>	<b>Généralités sur les représentations unitaires et les fonctions de type positif</b>	<b>15</b>
1.1	Introduction . . . . .	15
1.2	Généralités sur les représentations unitaires des groupes . . . .	16
1.2.1	Représentations unitaires . . . . .	16
1.2.2	Lemme de Schur . . . . .	19
1.2.3	Mesure de Haar . . . . .	21
1.3	Généralités sur les fonctions de type positif . . . . .	26
1.3.1	Noyau de type positif . . . . .	26
1.3.2	Fonctions de type positif . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Théorème de Bochner-Godement</b>	<b>41</b>
2.1	Introduction . . . . .	41
2.2	Propriétés algébriques de $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ . . . . .	42
2.3	Théorème de Bochner-Godement . . . . .	46
2.3.1	Commutativité de $\pi^{\varphi}(G)'$ . . . . .	46
2.3.2	Compacité de $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ . . . . .	49
2.3.3	Preuve du théorème de Bochner-Godement . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Généralisation du théorème de Bochner-Godement aux limites inductives de paires de Guelfand</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Paires de Guelfand généralisées . . . . .	54
3.2.1	Paires sphériques . . . . .	54
3.2.2	Limites inductives de paires de Guelfand . . . . .	55
3.3	Généralisation du théorème de Bochner . . . . .	59
3.3.1	Au sujet de la compacité de $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$ . . . . .	59
3.3.2	Propriétés algébriques de $\mathcal{Q}$ . . . . .	63
3.3.3	Énoncé et preuve du théorème de Bochner-Godement généralisé . . . . .	71

<b>4</b>	<b>Analyse harmonique sur l'espace des matrices complexes</b>	<b>75</b>
4.1	Introduction . . . . .	75
4.2	Détermination des fonctions sphériques de type positif sur $(G_n, K_n)$ . . . . .	77
4.2.1	Partie radiale du laplacien sur $V_n$ . . . . .	77
4.2.2	Équation de la chaleur, intégrales orbitales et fonctions sphériques sur $V_n$ . . . . .	81
4.3	Détermination des fonctions sphériques de type positif sur $(G_\infty, K_\infty)$ . . . . .	85
4.3.1	Propriété de multiplicativité des fonctions sphériques . . . . .	85
4.3.2	Fonction de Pólya modifiée : définition et convergence . . . . .	89
4.3.3	Convergence des mesures orbitales et fonctions sphériques . . . . .	96
4.3.4	Formule de Lévy-Khinchine . . . . .	104
	Bibliographie . . . . .	107

## 0.1 INTRODUCTION GÉNÉRALE

La théorie des groupes topologiques constitue une branche importante de mathématiques ; elle englobe des théorie comme : la mesure de Haar, la théorie du produit de composition, les séries et intégrales de Fourier, les fonctions presque-périodiques, les groupes d'opérateurs unitaires, et en partie, la théorie du potentiel, la théorie ergodique et la topologie algébrique.

On connaît les principales étapes de son développement : l'extension de la théorie des séries de Fourier aux groupes de Lie compacts par F. Peter et H. Weyl ; la démonstration de l'existence d'une mesure invariante par A. Haar ; la théorie des fonctions presque périodiques due à J. von Neumann ; la théorie de la dualité pour les groupes abéliens par L. Pontrjagin et A. R van Kampen ; enfin l'année 1940 vit apparaître le traité fondamental d'André Weil qui, outre une systématisation à peu près parfaite des résultats antérieurs, apportait une construction complète de l'analyse harmonique sur les groupes abéliens.

A partir de cette date, c'est avant tout à l'école de Moscou, représentée particulièrement, par D. Raïkov, I. Gelfand, et M. Neumark, que l'on doit les progrès les plus considérables. Alors que jusqu'en 1940 tous les travaux concernaient les représentations unitaires de dimension finie, Gelfand et Raïkov, dans un mémoire paru en 1943, étudient systématiquement les représentations unitaires de dimension quelconque et prouvent l'existence, sur tout groupe localement compact, d'un système complet de représentations unitaires irréductibles, résultat qui contient tous ceux connus jusqu'alors dans cette ordre d'idées et qui, au surplus, n'avait jamais été démontré même dans les cas classiques.

L'école française représentée particulièrement par R. Godement et J. Dixmier a aussi largement contribué au développement de cette branche de mathématiques. R. Godement dans sa thèse, soutenue en 1946, a étudié les fonctions de type positif. Ce sujet concerne l'analyse harmonique sur les groupes abéliens localement compacts, domaine où Godement a obtenu des résultats majeurs. Ce travail est parallèle mais indépendant des recherches similaires menées par l'école de Moscou (par Guelfand et Raikov). Son travail sur la théorie des fonctions sphériques en 1952 a eu beaucoup d'influence par la suite, particulièrement sur Harish-Chandra qui, entre 1950 et 1963, a mené de très importantes recherches sur la représentation des groupes semi-simples.

A partir des années 80, G.I. Olshanski dans une série remarquable de travaux (voir par exemple [39], [40], [41]), a étudié les représentations unitaires de dimension infinie relativement aux paires  $(G_\infty, K_\infty)$  qui sont des limites inductives de paires de Gueldand  $(G_n, K_n)$  :

$$G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \quad K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Ces études ont conduit à introduire la notion de paire sphérique qui généralise celle de paire de Guelfand. Olshanski montre en effet que la limite inductive d'une suite croissante de paires de Guelfand est une paire sphérique et donne une caractérisation des fonctions sphériques de type positif relativement à ces paires : une fonction  $\varphi$  continue de type positif  $K_\infty$ -biinvariante sur  $G_\infty$  et normalisée par  $\varphi(e) = 1$  est sphérique si et seulement si elle vérifie la relation fonctionnelle suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky) dk = \varphi(x)\varphi(y),$$

où  $dk$  est la mesure de Haar normalisée du groupe  $K_n$ .

Cette thèse est une contribution à l'étude de ces paires. Nous y démontrons une représentation intégrale des fonctions continues de type positif  $K_\infty$ -biinvariantes sur un groupe  $G_\infty$  limite inductive d'une suite croissante  $(G_n)_n$  de groupes topologiques localement compacts séparables, le sous-groupe  $K_\infty$  étant de même type. C'est une généralisation du théorème de Bochner classique qui concerne le groupe  $G = \mathbb{R}$  et s'énonce comme suit : soit  $\varphi$  une fonction continue de type positif sur  $\mathbb{R}$ . Il existe une mesure positive bornée  $\mu$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :

$$\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} \mu(d\lambda).$$

Une version plus générale, démontrée par R. Godement, s'étend au cas d'une paire de Guelfand  $(G, K)$ . C'est le théorème de Bochner-Godement qui donne une représentation intégrale des fonctions continues  $K$ -biinvariantes de type positif sur  $G$  via une unique mesure positive et bornée  $\mu$  définie sur l'ensemble  $\Omega$  des fonctions sphériques de type positif sur le groupe  $G$  par :

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} \omega(x) \mu(d\omega).$$

Le résultat principal de cette thèse, qui a fait l'objet d'une publication aux annales de l'institut Fourier (voir [44]), est la généralisation du théorème de Bochner aux limites inductives de paires de Guelfand séparables.

Il est obtenu en utilisant la théorie de la représentation intégrale de Choquet dans les cônes convexes. La méthode adoptée dans la preuve de ce résultat constitue une généralisation de celle de Thoma pour un groupe discret dénombrable [49], avec des modifications inspirées du travail de G. Olshanski sur l'espace des matrices hermitiennes de dimension infinie [40]. Notre résultat s'énonce comme suit :

**Théorème A** *Soit  $\varphi$  une fonction continue de type positif  $K_\infty$ -biinvariante sur  $G_\infty$ . Alors il existe, sur l'ensemble  $\Omega$  des fonctions sphériques de type positif sur  $G_\infty$ , une unique mesure  $\mu$  positive et bornée telle que :*

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \mu(d\omega).$$

Nous considérons ensuite l'espace limite inductive  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$  des matrices complexes carrées de dimension infinie n'ayant qu'un nombre fini de coefficients non nuls. Nous étudions l'analyse de Fourier sur l'espace dual  $V^\infty$  des matrices carrées de dimension infinie à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . La transformée de Fourier d'une mesure de probabilité sur  $V^\infty$  est une fonction continue de type positif sur l'espace  $V_\infty$  qui est muni de la topologie de limite inductive. Sur les espaces  $V^\infty$  et  $V_\infty$  nous considérons l'action par conjugaison du groupe  $K_\infty = U(\infty) \times U(\infty)$ . L'ensemble  $\mathfrak{M}$  des mesures de probabilité  $K_\infty$ -invariantes sur  $V^\infty$  est un convexe dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques relativement à l'action de  $K_\infty$ . D'autre part, les points extrémaux de l'ensemble  $\mathfrak{P}$  des fonctions continues, de type positif,  $K_\infty$ -invariantes sur  $V_\infty$ , et normalisées par la constante 1 à l'origine sont les fonctions sphériques de type positif relativement à la paire sphérique  $(K_\infty \times V_\infty, K_\infty)$ . La transformation de Fourier établit une bijection de  $\mathfrak{M}$  sur  $\mathfrak{P}$ , et par suite de l'ensemble des mesures ergodiques sur  $V^\infty$  sur l'ensemble des fonctions sphériques de type positif sur  $V_\infty$ .

Nous utilisons la méthode de Olshanski et Vershik. Son point de départ est le résultat de Vershik : une mesure ergodique est limite d'une suite de mesures orbitales  $\nu^{(n)}$  relativement au groupe compact  $K_n$ . Etant donnée qu'une fonction sphérique  $\varphi^{(n)}$  de type positif relativement à la paire  $(G_n, K_n)$  est la transformée de Fourier d'une telle mesure orbitale  $\nu^{(n)}$ , nous développons l'expression explicite de ces fonctions en séries de polynômes de Schur. Nous parvenons ainsi à déterminer le comportement asymptotique de l'intégrale

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\xi) &= \int_{V^\infty} e^{i\langle \xi, x^{(n)} \rangle} \nu^{(n)}(dx) \\ &= \int_{U(n)} \int_{U(n)} e^{i\Re \operatorname{tr}(\xi u x^{(n)} v^*)} \alpha_n(du) \alpha_n(dv), \end{aligned}$$

où  $x^{(n)} = \text{diag}(a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}, 0, \dots)$  et  $\alpha_n$  est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire  $U(n)$ . Ainsi le deuxième résultat de cette thèse est :

**Théorème B** *La transformée de Fourier d'une mesure ergodique de  $\mathfrak{M}$  est une fonction sur  $V_\infty$  qui est invariante par  $K_\infty$ , et dont la restriction au sous-ensemble des matrices diagonales est donnée par :*

$$\varphi(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) = \Pi(\xi_1) \dots \Pi(\xi_k),$$

où

$$\Pi(\lambda) = e^{-\gamma\lambda^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha_k \lambda^2},$$

avec

$$\gamma \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Enfin, on établit une version paramétrée du théorème de Bochner généralisé (Théorème A) qui, combinée avec une méthode de C. Berg qui a été développée par M. Bouali dans [8], nous permet d'établir une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif relativement à la paire sphérique considérée.

**Plan de la thèse.** Cette thèse est constituée de quatre chapitres :

- Dans le premier chapitre, on rappelle les principales définitions et propriétés liées aux représentations unitaires des groupes topologiques. On y rappelle en particulier les notions suivantes : Lemme de Schur, mesures de Haar, noyaux de type positif, fonctions de type positif et construction G.N.S.
- Nous utilisons, dans le deuxième chapitre, la théorie de Choquet pour la représentation intégrale dans les cônes convexes pour démontrer le théorème de Bochner-Godement dans le cas d'une paire de Guelfand  $(G, K)$  où  $G$  est un groupe localement compact séparable et  $K$  un sous-groupe compact de  $G$ .
- Le troisième chapitre est consacré à la preuve du résultat principal de cette thèse, à savoir le théorème de Bochner généralisé aux limites inductives de suites croissantes de paires de Guelfand séparables.
- Au quatrième chapitre, nous donnons une expression explicite des fonctions sphériques de type positif dans le cas de la paire  $(G_\infty, K_\infty)$  où  $G_\infty = K_\infty \rtimes V_\infty$ , avec  $K_\infty = U(\infty) \times U(\infty)$  et  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$ . On trouve alors une version paramétrée du théorème de Bochner généralisé qu'on utilise pour établir une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif dans le cas de cette paire.



# Chapitre 1

## Généralités sur les représentations unitaires et les fonctions de type positif

### 1.1 Introduction

Ce chapitre comporte trois sections. Après cette première section d'introduction, on présente, dans la deuxième section, des résultats de base sur les représentations unitaires d'un groupe topologique dans un espace de Hilbert. On appelle groupe topologique tout groupe  $G$  muni d'une topologie qui rend l'application  $(x, y) \mapsto xy^{-1}$  continue de  $G \times G$  dans  $G$ . Une représentation d'un groupe topologique  $G$  dans un espace vectoriel  $V$  est définie comme étant un homomorphisme de  $G$  sur le groupe des automorphismes de  $V$ . Les espaces de Hilbert sont supposés complexes, et les groupes topologiques sont toujours supposés séparés (de Hausdorff). Parmi les éléments les plus importants dans la théorie des représentations unitaires des groupes, on trouve la notion de fonction de type positif. Ainsi, la troisième section de ce chapitre sera consacrée à ce sujet. On commence par introduire la notion de noyau de type positif sur un espace topologique  $X$ . Puis, pour un noyau de type positif, on montre l'existence de la construction G.N.S. (Guelfand, Naimark, Segal). Cette construction montre que les noyaux de type positif peuvent être représentés par des applications de  $X$  dans un espace de Hilbert. Une fonction  $\varphi$  définie sur un groupe topologique séparé  $G$  est de type positif si le noyau associé à  $\varphi$ , qui est défini par  $(g, h) \mapsto \varphi(g^{-1}h)$ , est de type positif. Les fonctions de type positif forment un outil important pour prouver des résultats fondamentaux de la théorie générale des représentations.

## 1.2 Généralités sur les représentations unitaires des groupes

### 1.2.1 Représentations unitaires

Le produit scalaire de deux vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est noté  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathcal{H}}$ . On note par  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires continus d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  dans un autre espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$ . Un opérateur  $T$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  admet un adjoint  $T^*$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ . L'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{H}) := \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  est une algèbre involutive unitaire, l'unité étant l'opérateur identité de  $\mathcal{H}$ , qu'on note  $I_{\mathcal{H}}$ . Un opérateur  $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$  est dit unitaire, si  $UU^* = U^*U = I_{\mathcal{H}}$ . D'une façon équivalente,  $U$  est unitaire s'il est une isométrie surjective. Le groupe unitaire  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$  est le groupe de tous les opérateurs unitaires de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

**Définition 1.2.1** Une *représentation unitaire* d'un groupe topologique  $G$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un homomorphisme de groupe  $\pi$ , défini de  $G$  dans  $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ , qui vérifie :

- (1)  $\pi(e) = I_{\mathcal{H}}$  avec  $e$  l'élément neutre de  $G$ ,
- (2)  $\pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$  pour tous  $g_1, g_2 \in G$ ,
- (3) l'application  $G \longrightarrow \mathcal{H}, g \longmapsto \pi(g)v$  est continue, pour tout  $v \in \mathcal{H}$ .

On désigne une représentation unitaire  $\pi : G \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  par le couple  $(\pi, \mathcal{H})$ . Il est clair que, pour tout  $g \in G$ ,  $\pi(g)\pi(g^{-1}) = \pi(e) = I_{\mathcal{H}}$ . Donc, pour tout  $g$ , l'opérateur  $\pi(g)$  est inversible. Par suite, toute représentation unitaire peut être vue comme un homomorphisme de  $G$  dans le groupe des transformations linéaires inversibles de  $\mathcal{H}$ .

**Définition 1.2.2** Un sous-espace vectoriel  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{H}$  est dit *invariant* ou *G-invariant*, relativement à une représentation  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G$ , si  $\mathcal{K}$  est invariant par l'opérateur  $\pi(g)$  pour tout  $g \in G$ ; c'est-à-dire, pour tout  $v \in \mathcal{K}$  et tout  $g \in G$ ,  $\pi(g)v \in \mathcal{K}$ .

Un vecteur  $v \in \mathcal{H}$  est dit *cyclique* ou *totaliseur* si le plus petit sous-espace fermé et invariant le contenant est  $\mathcal{H}$  lui-même. Autrement dit, le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{F} = \{\pi(g)v, g \in G\}$ , qu'on note  $\text{Vect } \mathcal{F}$ , est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Soit  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$ , et considérons un sous-espace vectoriel fermé et  $G$ -invariant  $\mathcal{K}$ . Si on note, pour tout  $g \in G$ ,

$$\pi^{\mathcal{K}}(g) : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K},$$

la restriction de l'opérateur  $\pi(g)$  à  $\mathcal{K}$ , on obtient alors une représentation unitaire  $\pi^{\mathcal{K}}(g)$  de  $G$  dans  $\mathcal{K}$ . On dit que  $\pi^{\mathcal{K}}$  est une sous-représentation de  $\pi$ .

**Proposition 1.2.1** *Soient  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$ ,  $\mathcal{K}$  un sous-espace fermé et invariant de  $\mathcal{H}$ . Alors,  $\mathcal{K}^\perp$  le complémentaire orthogonal de  $\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{H}$  est aussi invariant.*

**Preuve.** On a

$$\langle \pi(g)\xi, \eta \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi, \pi(g)^*\eta \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \xi, \pi(g^{-1})\eta \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

pour tous  $g \in G$ ,  $\xi \in \mathcal{K}^\perp$  et  $\eta \in \mathcal{K}$ .  $\square$

**Définition 1.2.3** On appelle *opérateur d'entrelacement* entre deux représentations unitaires  $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$  et  $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$  de  $G$ , tout opérateur linéaire continu  $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$  tel que :

$$T\pi_1(g) = \pi_2(g)T \quad (g \in G).$$

Les représentations  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sont dites équivalentes ( $\pi_1 \sim \pi_2$ ), s'il existe un opérateur d'entrelacement  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  qui est isométrique et surjectif.

Dans ce qui suit on va donner une autre caractérisation concernant l'équivalence entre deux représentations unitaires.

Un opérateur  $U$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}_2$  est appelé isométrie partielle, s'il existe un sous-espace fermé  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{H}_1$  tel que la restriction de  $U$  à  $\mathcal{M}$  est une isométrie (c'est-à-dire vérifiant  $\|U\xi\|_{\mathcal{H}_2} = \|\xi\|_{\mathcal{H}_1}$  pour tout  $\xi \in \mathcal{M}$ ), et  $U = 0$  sur  $\mathcal{M}^\perp$ . En particulier, l'espace  $\mathcal{M} = (\text{Ker } U)^\perp$  est appelé espace initial et  $U(\mathcal{M})$  est appelé espace final de l'isométrie partielle  $U$ . Soit  $T$  un opérateur continu de  $\mathcal{H}_1$  dans  $\mathcal{H}_2$  et posons  $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ . Comme  $\| |T|\xi \|_{\mathcal{H}_1}^2 = \langle T^*T\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}_1} = \|T\xi\|_{\mathcal{H}_2}^2$ , l'application  $|T|\xi \longmapsto T\xi$  se prolonge en une isométrie  $U$  de  $\overline{|T|(\mathcal{H}_1)}$  sur  $\overline{T(\mathcal{H}_1)}$ . On peut aussi prolonger  $U$  linéairement à  $\mathcal{H}_1$  en posant  $U = 0$  sur  $|T|(\mathcal{H}_1)^\perp = \text{Ker } T$ . Ainsi,  $U$  sera une isométrie partielle avec espace initial  $(\text{Ker } T)^\perp$  et espace final  $\overline{T(\mathcal{H}_1)}$ , et  $T = U|T|$ . C'est la décomposition polaire de  $T$  (Pour plus de détails voir [28], problème 5).

**Proposition 1.2.2** Soient  $(\pi_1, \mathcal{H}_1)$  et  $(\pi_2, \mathcal{H}_2)$  deux représentations unitaires de  $G$ . Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  un opérateur d'entrelacement entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Posons  $\mathcal{M}_1 = (\text{Ker } T)^\perp$  et  $\mathcal{M}_2 = \overline{T(\mathcal{H}_1)}$ . Alors,  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont deux sous-espaces fermés et invariants de  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  respectivement, et la sous-représentation de  $\pi_1$  définie sur  $\mathcal{M}_1$  est équivalente à la sous-représentation de  $\pi_2$  définie sur  $\mathcal{M}_2$ .

**Preuve.**  $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$  est un opérateur d'entrelacement entre  $\pi_2$  et  $\pi_1$ . En effet, pour tout  $g \in G$ ,

$$T^* \pi_2(g) = (\pi_2(g^{-1})T)^* = (T\pi_1(g^{-1}))^* = \pi_1(g)T^*.$$

Alors, pour tout  $g \in G$ ,

$$T^*T\pi_1(g) = \pi_1(g)T^*T.$$

Comme  $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$  est limite (pour la topologie forte des opérateurs) de polynômes en  $T^*T$  (Voir [28], problème 95),  $|T|$  vérifie aussi

$$|T|\pi_1(g) = \pi_1(g)|T| \quad (g \in G).$$

Soit  $T = U|T|$  la décomposition polaire de  $T$ . Alors,  $\text{Ker } U = \text{Ker } T$  et la restriction de  $U$  à  $\mathcal{M}_1$  est une isométrie surjective sur  $\mathcal{M}_2$ . Il reste alors à vérifier que  $U$  est un opérateur d'entrelacement entre  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . En effet, pour  $g \in G$ ,  $\xi \in \mathcal{H}_1$ , on a d'une part :

$$\pi_2(g)U|T|\xi = \pi_2(g)T\xi = T\pi_1(g)\xi = U|T|\pi_1(g)\xi = U\pi_1(g)|T|\xi.$$

D'où,  $\pi_2(g)U$  et  $U\pi_1(g)$  coïncident sur  $|T|(\mathcal{H}_1)$ . Par suite, ils coïncident aussi sur sa fermeture  $\overline{|T|(\mathcal{H}_1)} = (\text{Ker } T)^\perp = \mathcal{M}_1$ . D'autre part,  $U = 0$  sur  $\text{Ker } T$  qui est fermé et invariant relativement à  $\pi_1$ . Ainsi,  $\pi_2(g)U = U\pi_1(g)$  sur  $\mathcal{H}_1$ .  $\square$

**Définition 1.2.4** Une représentation unitaire  $\rho$  de  $G$  est dite *contenue* dans une autre représentation  $\pi$  de  $G$ , ce qu'on note par  $\rho \leq \pi$ , si  $\rho$  est équivalente à une sous-représentation de  $\pi$ .

Un des principaux problèmes de l'analyse harmonique est de décomposer une représentation unitaire  $\pi$  d'un groupe à l'aide des représentations unitaires les plus simples qui sont contenues dans  $\pi$ . On les nomme les représentations unitaires irréductibles.

**Définition 1.2.5** Une représentation unitaire  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G$  est dite *irréductible* si, les seuls sous-espaces vectoriels invariants et fermés de  $\mathcal{H}$  sont les triviaux ; c'est-à-dire  $\{e\}$  et  $\mathcal{H}$ .

**Proposition 1.2.3** Une représentation  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G$  est irréductible si, et seulement si, tout vecteur non nul de  $\mathcal{H}$  est cyclique.

**Preuve.** La preuve est évidente d'après la définition précédente et celle du vecteur cyclique.  $\square$

## 1.2.2 Lemme de Schur

Pour une représentation  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G$ , l'ensemble des opérateurs  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  qui commutent avec  $\pi$  (c'est-à-dire vérifiant  $T\pi(g) = \pi(g)T$  pour tout  $g \in G$ ), est appelé le commutant de  $\pi(G)$ . On le note  $\pi(G)'$ .

$\pi(G)'$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  qui est fermée pour la topologie faible des opérateurs. De plus,  $\pi(G)'$  est auto-adjointe, puisque pour tout  $T \in \pi(G)'$  :

$$T^*\pi(g) = (\pi(g^{-1})T)^* = (T\pi(g^{-1}))^* = \pi(g)T^* \quad (g \in G).$$

**Proposition 1.2.4** Soient  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$  et  $\mathcal{K}$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{H}$ . Alors,  $\mathcal{K}$  est invariant si et seulement si la projection orthogonale sur  $\mathcal{K}$ , notée  $P$ , appartient à  $\pi(G)'$ .

**Preuve.** Posons  $Q = I_{\mathcal{H}} - P$ . L'opérateur  $Q$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{K}^\perp$ . Alors, pour  $\xi \in \mathcal{H}$ ,  $g \in G$  on a :

$$\pi(g)\xi = \pi(g)P\xi + \pi(g)Q\xi. \tag{1.1}$$

Si  $\mathcal{K}$  est invariant, par la proposition 1.2.1,  $\mathcal{K}^\perp$  est aussi invariant. Donc,  $\pi(g)P\xi \in \mathcal{K}$  et  $\pi(g)Q\xi \in \mathcal{K}^\perp$ . Par suite, (1.1) donne la décomposition orthogonale du vecteur  $\pi(g)\xi$  sur  $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ . Ainsi,  $\pi(g)P\xi = P\pi(g)\xi$ , pour tout  $\xi \in \mathcal{H}$ .

Inversement, supposons que  $\pi(g)P = P\pi(g)$  pour tout  $g \in G$ . Alors, pour tout  $g \in G$  et tout  $\xi \in \mathcal{K}$ ,

$$\pi(g)\xi = \pi(g)P\xi = P\pi(g)\xi \in \mathcal{K},$$

ce qui montre l'invariance de  $\mathcal{K}$ .  $\square$

**Remarque 1.2.1** (voir [46], 12.24) Pour un opérateur  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , on rappelle que le spectre  $\sigma(T)$  de  $T$  est l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $T - \lambda I$  n'est pas inversible. C'est une partie non vide et compacte de  $\mathbb{C}$ . Si de plus  $T$  est auto-adjoint, alors  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ . On peut associer à une fonction mesurable bornée  $f$ , l'opérateur  $f(T) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  de telle sorte que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) L'application  $\Lambda : f \mapsto f(T)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{B}(\sigma(T))$  et  $W^*(T)$  où  $\mathcal{B}(\sigma(T))$  est la  $*$ -algèbre de toutes les fonctions mesurables bornées à valeurs complexes sur  $\sigma(T)$ , et  $W^*(T)$  est la fermeture dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , pour la topologie forte des opérateurs, de la  $*$ -algèbre :

$$\left\{ \sum_{j=0}^n a_j T^j : n \geq 0, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

(ii)  $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ , pour tout  $f \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ .

(iii) Pour tout  $f \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ ,  $f(T)$  commute avec tout opérateur continu sur  $\mathcal{H}$  et commutant avec  $T$ .

**Théorème 1.2.1** (Lemme de Schur) *Une représentation unitaire  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G$  est irréductible si, et seulement si, l'algèbre  $\pi(G)'$  est constituée des multiples scalaires de  $I_{\mathcal{H}}$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\pi(G)'$  est constituée des multiples scalaires de l'identité  $I_{\mathcal{H}}$ . Soit  $\mathcal{K}$  un sous-espace invariant de  $\mathcal{H}$ , avec  $P$  l'opérateur de projection orthogonale correspondant. La proposition 1.2.4 montre que  $P \in \pi(G)'$ . D'où,  $P = \lambda I$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Comme  $P^2 = P$ , on a  $\lambda = 0$  ou  $\lambda = 1$ . C'est-à-dire  $\mathcal{K} = \{e\}$  ou  $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ . Ainsi,  $\pi$  est irréductible.

Inversement, supposons que  $\pi$  est irréductible et fixons  $T \in \pi(G)'$ . Posons  $T_1 = (T + T^*)/2$  et  $T_2 = (T - T^*)/2i$ . On a  $T = T_1 + iT_2$  avec  $T_1, T_2 \in \pi(G)'$ . Comme  $T_1$  et  $T_2$  sont auto-adjoints on peut supposer que  $T$  l'est aussi. Fixons alors  $\lambda_0$  dans  $\sigma(T_1)$  et soit  $f$  la fonction caractéristique de  $\lambda_0$ . Notons par  $f(T_1)$  l'opérateur défini dans la remarque précédente.

Par (ii) de la remarque précédente,  $f(T)^2 = f(T) = f(T)^*$ . Ainsi,  $f(T)$  est une projection orthogonale. Aussi,  $f(T) \in \pi(G)'$ . Comme  $\pi$  est irréductible, d'après la proposition 1.2.4,  $f(T) = 0$  ou  $f(T) = I_{\mathcal{H}}$ . Comme  $f \neq 0$ , on a  $f(T) = I_{\mathcal{H}}$ . Donc,  $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$  et  $T = \lambda_0 I_{\mathcal{H}}$ .  $\square$

### 1.2.3 Mesure de Haar

Un groupe topologique est localement compact si et seulement si il existe un voisinage compact de l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Cette classe de groupes contient tous les groupes discrets (c'est-à-dire les groupes munis d'une topologie discrète), tous les groupes compacts et tous les groupes de Lie de dimension finie. Une des propriétés qui distinguent les groupes localement compacts des autres groupes topologiques est l'existence d'une mesure appelée mesure de Haar. On donne dans ce qui suit quelques notions liées à la théorie des mesures sur les espaces localement compacts (Pour plus de détails voir [10], [11], [29], [47]).

Soit  $X$  un espace localement compact. Une mesure borélienne sur  $X$  est une mesure (non nécessairement finie) positive sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{B}(X)$  de tous les sous-ensembles boréliens de  $X$  (c'est la plus petite  $\sigma$ -algèbre contenant tous les ouverts). Une mesure borélienne  $\mu$  sur  $X$  est dite régulière si toutes les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (1)  $\mu(B) = \inf\{\mu(V) : V \text{ ouvert et } B \subseteq V\}$  pour tout borélien  $B$  de  $X$ .
- (2)  $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact et } K \subseteq U\}$  pour tout ouvert  $U$  de  $X$ .
- (3)  $\mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K$  de  $X$ .

En général, une mesure borélienne régulière ne vérifie pas la propriété (2) précédente pour tout ensemble borélien, mais si tout ouvert de  $X$  est  $\sigma$ -compact (c'est-à-dire réunion dénombrable de sous-ensembles compacts), alors la propriété (3) implique (2) ainsi que (1), (voir [47], chapitre 2, exercice 17 et théorème 2.18).

Notons par  $\mathcal{C}_c(X)$  l'espace des fonctions continues sur  $X$  à support compact. Une forme linéaire  $\varphi : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$  est dite positive si  $\varphi(f) \geq 0$  pour toute fonction réelle positive de  $\mathcal{C}_c(X)$ . Une telle forme linéaire est appelée une mesure de Radon sur  $X$ . Une mesure régulière  $\mu$  définit une mesure de Radon sur  $X$ , notée encore  $\mu$ , de la façon suivante :

$$\mu(f) = \int_X f(x)\mu(dx) \quad (f \in \mathcal{C}_c(X)).$$

Inversement, toute mesure de Radon sur  $X$  admet une telle représentation via une unique mesure borélienne régulière sur  $X$ . C'est le théorème de représentation de Riesz qui assure cette identification ([47], théorème 2.14).

Soit  $G$  un groupe localement compact. Il existe une mesure borélienne régulière  $\mu \neq 0$  sur  $G$  et invariante à gauche, c'est-à-dire vérifiant, pour tout  $B \in \mathcal{B}(G)$  :

$$\mu(gB) = \mu(B) \quad (g \in G).$$

Ou d'une façon équivalente, pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(G)$  :

$$\int_G f(g^{-1}x)\mu(dx) = \int_G f(x)\mu(dx) \quad (g \in G).$$

On montre que  $\mu$  est unique à une constante multiplicative près, c'est-à-dire si,  $\mu'$  est une autre mesure borélienne régulière invariante à gauche, alors  $\mu' = c\mu$  avec  $c > 0$ . La mesure  $\mu$  est appelée mesure de Haar à gauche sur  $G$  (voir [30], chapitre 16).

Le support d'une mesure de Haar sur  $G$  est  $G$  lui même. On donne une preuve de cette propriété dans la proposition suivante. On rappelle que le support d'une mesure borélienne régulière  $\mu$  sur un espace localement compact  $X$  est le plus petit sous-ensemble fermé  $F$  de  $X$  tel que  $\mu(X \setminus F) = 0$ .

**Proposition 1.2.5** *Soit  $\mu$  une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . Alors, pour tout sous ensemble ouvert non vide  $U$  de  $G$  on a  $\mu(U) > 0$ , et de plus,*

$$\int_G f(x)\mu(dx) > 0,$$

*pour toute fonction non négative et non identiquement nulle  $f \in \mathcal{C}_c(G)$ .*

**Preuve.** Supposons que  $\mu(U) = 0$ . Alors  $\mu(gU) = 0$  pour tout  $g \in G$ . Or, pour tout compact  $K$  de  $G$ , il existe  $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$  tels que  $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i U$ . Ainsi,  $\mu(K) = 0$  pour tout compact de  $G$ . Comme  $\mu$  est régulière, ceci implique que  $\mu = 0$ ; ce qui est absurde.

Soit  $f \in \mathcal{C}_c(G)$  une fonction positive non identiquement nulle. Par continuité, il existe  $\epsilon > 0$  et un ouvert non vide  $U_\epsilon$  de  $G$ , tel qu'on a  $f \geq \epsilon$  sur  $U_\epsilon$ . Ainsi

$$\int_G f(x)\mu(dx) \geq \epsilon\mu(U_\epsilon) > 0. \quad \square$$



Considérons, pour tout  $g \in G$ , la mesure borélienne  $\mu_g$  définie, pour tout  $B \in \mathcal{B}(G)$ , par :  $\mu_g(B) = \mu(Bg)$ . C'est une mesure régulière positive non nulle qui est aussi invariante à gauche. Ainsi,  $\mu_g = \Delta_G(g)\mu$  avec  $\Delta_G(g) > 0$ , et alors

$$\int_G f(xg^{-1})\mu(dx) = \Delta_G(g) \int_G f(x)\mu(dx) \quad (f \in \mathcal{C}_c(G), g \in G).$$

La fonction  $\Delta_G$  est appelée fonction module de  $G$ .

**Lemme 1.2.1** *Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_c(G)$ ,*

$$\int_G f(x^{-1})\mu(dx) = \int_G \Delta_G(x^{-1})f(x)\mu(dx).$$

**Preuve.** La forme linéaire

$$f \longmapsto \int_G f(x^{-1})\mu(dx) \quad (f \in \mathcal{C}_c(G)),$$

définit une mesure de Haar invariante à droite sur  $G$ ; ce qui est le cas aussi, par conséquence de la définition de  $\Delta_G$ , pour la forme linéaire

$$f \longmapsto \int_G \Delta_G(x^{-1})f(x)\mu(dx).$$

Ainsi, par unicité, il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(G)$ ,

$$\int_G f(x^{-1})\mu(dx) = c \int_G \Delta_G(x^{-1})f(x)\mu(dx). \quad (1.2)$$

Si on remplace dans (1.2)  $f$  par  $\check{f}$ , où  $\check{f}(x) = f(x^{-1})$ , on aura :

$$\int_G f(x)\mu(dx) = c \int_G \Delta_G(x^{-1})f(x^{-1})\mu(dx) \quad (f \in \mathcal{C}_c(G)).$$

D'autre part, (1.2) implique que :

$$\int_G \Delta_G(x^{-1})f(x^{-1})\mu(dx) = c \int_G f(x)\mu(dx).$$

Ainsi,  $c^2 = 1$  et alors  $c = 1$ .  $\square$

Il est clair qu'une mesure de Haar à gauche sur  $G$  est aussi invariante à droite si et seulement si  $\Delta_G = 1$ . Dans ce cas  $G$  est dit unimodulaire.

Notons par  $M_b(G)$  l'ensemble des mesures complexes bornées sur  $G$ , par  $L^1(G)$  l'ensemble des fonctions intégrables sur  $G$  par rapport à la mesure de Haar à gauche  $\mu$  définie sur  $G$ , et par  $L^\infty(G)$  l'ensemble des fonctions localement mesurables qui sont bornées localement presque partout. La définition précédente de  $L^\infty(G)$  est due au fait que  $G$ , tout en étant localement compact, n'est pas nécessairement  $\sigma$ -fini. Ainsi, on est obligé d'adopter les définitions suivantes :

- (i) Une partie  $A$  de  $G$  est localement mesurable si  $A \cap B$  est mesurable pour toute partie mesurable  $B$  vérifiant  $\mu(B) < +\infty$ .
- (ii) La partie  $A$  est dite localement négligeable si  $\mu(A \cap B) = 0$  pour toute partie mesurable  $B$  de  $G$  avec  $\mu(B) < +\infty$ .
- (iii) Une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  est dite localement mesurable si l'image réciproque par  $f$  de toute partie mesurable  $E$  de  $\mathbb{C}$ , à savoir  $f^{-1}(E)$ , est localement mesurable.
- (iv) Une propriété est dite vérifiée localement presque partout sur  $G$ , si elle est satisfaite sur le complémentaire d'une partie localement négligeable.

Ainsi, on dira que deux fonctions  $f, g \in L^\infty(G)$  coïncident si elles sont égales localement presque partout. De plus, avec cette définition, on peut identifier  $L^\infty(G)$  au dual topologique de  $L^1(G)$  au moyen de la forme linéaire

$$\varphi(f) = \int_G f(x)\varphi(x)\mu(dx) \quad (\varphi \in L^\infty(G), f \in L^1(G)).$$

Par suite, on peut munir  $L^\infty(G)$  de la topologie initiale par rapport à la famille de toutes les applications  $\varphi \mapsto \varphi(f)$  avec  $f$  fixé dans  $L^1(G)$ . Une base de cette topologie est donnée pour  $\varphi \in L^\infty(G)$ ,  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq L^1(G)$  et  $\epsilon > 0$  par la famille

$$U(\varphi; f_1, \dots, f_n; \epsilon) = \{\psi \in L^\infty(G) : |\psi(f_k) - \varphi(f_k)| < \epsilon, k = 1, \dots, n\}.$$

Cette topologie fait de  $L^\infty(G)$  un espace vectoriel topologique localement convexe. On l'appelle la topologie  $*$ -faible  $\sigma(L^\infty(G), L^1(G))$  sur  $L^\infty(G)$ . C'est la topologie la plus faible rendant continue l'application  $\varphi \mapsto \varphi(f)$  pour tout  $f$  fixé de  $L^1(G)$ . On note cette topologie  $*$ -faible sur  $L^\infty(G)$  par  $\tau^*(L^\infty(G))$ , (pour plus de détails voir [10], chapitre 5, section 5).

On peut définir sur  $L^1(G)$  un produit de convolution :

**Définition 1.2.6** Soient  $f, g \in \mathcal{C}_c(G)$  et  $dy$  la mesure de Haar à gauche sur  $G$ . On définit le *produit de convolution* par :

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy.$$

Soient  $\mu, \nu \in M_b(G)$ . On définit le produit de convolution de ces deux mesures par :

$$\mu * \nu(f) = \int_G \int_G f(xy)\mu(dx)\nu(dy) \quad (f \in M_b(G)).$$

Soient  $f \in \mathcal{C}_c(G), \mu \in M_b(G)$ . On définit aussi les produits de convolution  $f * \mu$  et  $\mu * f$  par :

$$f * \mu(x) = \int_G f(xy^{-1})\Delta(y^{-1})\mu(dy),$$

$$\mu * f(x) = \int_G f(y^{-1}x)\mu(dy),$$

où  $dy$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$ .

Sur  $M_b(G)$ , on définit une involution par la relation  $\mu^*(dx) = \overline{\mu(dx^{-1})}$ , où  $dx$  est une mesure de Haar à gauche sur  $G$ . On vérifie que  $M_b(G)$  devient au moyen de cette involution, une  $*$ -algèbre de Banach involutive.

Si, à tout  $f \in L^1(G)$ , on associe la mesure  $\mu(dx) = f(x)dx \in M_b(G)$ , on obtient un morphisme isométrique  $\Phi$  de  $L^1(G)$  dans  $M_b(G)$ . En posant,  $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$ , on montre que  $\mu^*(dx) = f^*(x)dx$ . Donc,  $f \mapsto f^*$  est une involution isométrique sur  $L^1(G)$ . Ce dernier, équipé de cette involution et du produit de convolution défini ci-dessus, devient une  $*$ -algèbre de Banach. Pour  $f$  mesurable bornée et  $\mu \in M_b(G)$ , on pose

$$\mu(f) = \int_G f(x)\mu(dx).$$

**Remarque 1.2.2** Pour tous  $\mu, \nu \in M_b(G)$  et tout  $\varphi$  mesurable bornée,

$$\begin{aligned} \mu^* * \nu(\varphi) &= \int_G \int_G \varphi(y^{-1}z)\overline{\mu}(dy)\nu(dz) \\ &= \overline{\int_G \int_G \varphi(z^{-1}y)\overline{\nu}(dz)\mu(dy)} \\ &= \overline{\nu^* * \mu(\varphi)}. \end{aligned}$$

En particulier cette propriété reste vraie pour  $f$  et  $g$  dans  $L^1(G)$  puisque, au moyen de l'isométrie  $\Phi$ , on peut identifier  $L^1(G)$  au sous-ensemble des mesures à densité de  $M_b(G)$ .

**Remarque 1.2.3** En considérant une représentation unitaire  $(\pi, \mathcal{H})$  d'un groupe topologique localement compact  $G$ , ayant  $dg$  comme mesure de Haar, on peut associer à toute mesure  $\mu \in M_b(G)$  l'opérateur  $\pi(\mu)$  défini par

$$\pi(\mu) = \int_G \pi(g)\mu(dg).$$

Plus précisément, pour tous  $v, w \in \mathcal{H}$ , la fonction  $g \mapsto \langle \pi(g)v, w \rangle_{\mathcal{H}}$  est continue et bornée par  $\|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}}$ , chose qui résulte du fait que  $\pi(g)$  est unitaire continue pour tout  $g \in G$ . Ainsi, l'application

$$(v, w) \mapsto \int_G \langle \pi(g)v, w \rangle_{\mathcal{H}} \mu(dg)$$

est bilinéaire et continue. Le théorème de Riesz assure alors l'existence d'un opérateur continu noté  $\pi(\mu)$  tel que :

$$\langle \pi(\mu)v, w \rangle_{\mathcal{H}} = \int_G \langle \pi(g)v, w \rangle_{\mathcal{H}} \mu(dg).$$

De plus, on montre que, pour tous  $\mu, \nu \in M_b(G)$ ,

$$\pi(\mu * \nu) = \pi(\mu)\pi(\nu) \quad \text{et} \quad \pi(\mu^*) = \pi(\mu)^*.$$

Notons que ces résultats restent vrais si  $G$  n'est pas localement compact et si on considère des mesures à support fini sur  $G$ .

### 1.3 Généralités sur les fonctions de type positif

Dans cette section, on présente quelques résultats classiques liés aux fonctions de type positif. Pour plus de détails, on suggère la lecture des travaux de R. Godement [25], [26] et [27], et ceux de M. G. Krein [34], [35] et [36].

#### 1.3.1 Noyau de type positif

Soit  $X$  un espace topologique.

**Définition 1.3.1** Un *noyau de type positif* sur  $X$  est une fonction continue  $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tous  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  et tous  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi(x_i, x_j) \geq 0$$

**Proposition 1.3.1** *Soit  $\phi$  un noyau de type positif sur  $X$ . Alors, pour tous  $x, y \in X$ ,*

- (i)  $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$ .
- (ii)  $|\phi(x, y)|^2 \leq \phi(x, x)\phi(y, y)$ .

**Preuve.** Pour  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ , l'inégalité de la définition (1.3.1) s'écrit sous la forme  $\langle A\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^2} \geq 0$  où

$$A = \begin{pmatrix} \phi(x, x) & \phi(x, y) \\ \phi(y, x) & \phi(y, y) \end{pmatrix}, \quad \xi = (c_1, \overline{c_2}) \in \mathbb{C}^2.$$

Ainsi, la matrice  $A$  est positive. D'autre part

$$0 \leq \langle A\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle \xi, A^*\xi \rangle_{\mathbb{C}^2} = \overline{\langle A^*\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^2}} = \langle A^*\xi, \xi \rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Par l'identité de polarisation, on montre que, pour tous  $\xi, \eta \in \mathbb{C}^2$ ,

$$\langle A\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}^2} = \langle A^*\xi, \eta \rangle_{\mathbb{C}^2}.$$

Donc,  $A = A^*$  et alors  $A$  est hermitienne avec des éléments diagonaux positifs. Ce qui donne  $\phi(x, x) \geq 0$ ,  $\phi(y, y) \geq 0$  et  $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$ . De plus, le spectre de  $A$  est dans  $\mathbb{R}^+$ , par suite  $\det(A) \geq 0$ , ce qui s'écrit encore

$$\phi(x, x)\phi(y, y) - \phi(y, x)\phi(x, y) \geq 0. \quad \square$$

**Proposition 1.3.2** *Soit  $\phi$  un noyau de type positif sur un espace topologique  $X$ . Alors, il existe un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \phi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi)$  et une application continue  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$  qui vérifie les propriétés suivantes :*

- (1)  $\phi(x, y) = \langle f(x), f(y) \rangle_\phi$ , pour tous  $x, y \in X$ .
- (2) *Le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{F} = \{f(x), x \in X\}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .*

*De plus, la paire  $(f, \mathcal{H})$  est unique à un isomorphisme près, c'est-à-dire si  $(g, \mathcal{K})$  est une autre paire vérifiant (1) et (2), alors il existe un isomorphisme unitaire unique  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  tel que  $g = T \circ f$ .*

**Preuve.** Pour tout  $x \in X$ , on note  $\phi_x$  la fonction continue sur  $X$  définie par  $\phi_x(y) = \phi(x, y)$ , ( $y \in X$ ). Posons  $V_\phi = Vect\{\phi_x, x \in X\}$ , c'est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{C}(X)$  des fonctions continues sur  $X$ . Soient  $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \phi_{x_i}$ ,  $\psi = \sum_{j=1}^n b_j \psi_{x_j}$  deux éléments de  $V_\phi$ . On définit sur  $V_\phi$  la forme hermitienne suivante :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_\phi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \bar{b}_j \phi(x_i, x_j).$$

On remarque que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \bar{b}_j \phi(x_i, x_j) = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j \varphi(x_j) = \sum_{i=1}^m a_i \overline{\psi(x_i)},$$

et

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_\phi &= \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \bar{b}_j \phi(x_i, x_j)}{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j \bar{a}_i \phi(x_j, x_i)} \\ &= \frac{\langle \psi, \varphi \rangle_\phi}{\langle \psi, \varphi \rangle_\phi}. \end{aligned}$$

Ainsi, la valeur commune de ces sommes ne dépend pas de la représentation de  $\varphi$  (respectivement  $\psi$ ) dans  $V_\phi$ . Par suite, l'application  $(\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi, \psi \rangle_\phi$  de  $V_\phi \times V_\phi \rightarrow \mathbb{C}$  est bien définie et constitue une forme hermitienne positive sur  $V_\phi$ . Cette forme est de plus définie. En effet, pour tout  $\varphi \in V_\phi$ ,

$$\langle \varphi, \phi_x \rangle_\phi = \varphi(x),$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne alors, pour tout  $x \in X$ ,

$$|\varphi(x)|^2 \leq \phi(x, x) \langle \varphi, \varphi \rangle_\phi. \quad (1.3)$$

Ainsi, si  $\langle \varphi, \varphi \rangle_\phi = 0$ , on a  $\varphi(x) = 0$  pour tout  $x \in X$ , c'est-à-dire  $\varphi = 0$ . Par suite  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\phi$  définit un produit scalaire sur  $V_\phi$ . Donc  $(V_\phi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi)$  est un espace préhilbertien. Soit  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_\phi)$  son complété hilbertien. L'espace  $\mathcal{H}$  peut être réalisé comme un espace de fonctions sur  $X$ . En effet, si  $(\varphi_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $V_\phi$  pour la norme  $\|\cdot\|_\phi$  qui est induite par le produit scalaire défini sur  $V_\phi$ , alors (1.3) implique que  $(\varphi_n(x))_n$  converge pour tout  $x \in X$ . Ainsi, l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un sous-espace de l'espace des fonctions  $\varphi$  sur  $X$  qui sont limites simples de suites de Cauchy dans  $(V_\phi, \|\cdot\|_\phi)$ .

Posons  $f : X \longrightarrow V_\phi$ ,  $x \longmapsto \phi_x$ . Alors,

$$\langle f(x), f(y) \rangle_\phi = \langle \phi_x, \phi_y \rangle_\phi = \phi(x, y).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_\phi^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle_\phi \\ &= \phi(x, x) - 2\Re(\phi(x, y)) + \phi(y, y). \end{aligned}$$

Comme  $\phi$  est continue, la relation précédente montre que  $f$  est aussi continue, et comme par construction  $V_\phi$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , il est évident que le sous-espace engendré par la famille  $\mathcal{F} = \{f(x), x \in X\} = \{\phi_x, x \in X\}$  est dense dans  $\mathcal{H}$ . Ceci prouve les assertions (1) et (2) de la proposition.

Considérons maintenant une autre paire  $(g, \mathcal{K})$  vérifiant (1) et (2). On a

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \phi_{x_i} \right\|_\phi^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \bar{a}_j \phi(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \bar{a}_j \langle g(x_i), g(x_j) \rangle_{\mathcal{K}} \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i g(x_i) \right\|_{\mathcal{K}}^2. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'application  $V_\phi \longrightarrow \mathcal{K}$ ,

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i \phi_{x_i} \right) \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i g(x_i)$$

est bien définie, et puisque  $V_\phi$  est dense dans  $\mathcal{H}$ , elle se prolonge par continuité en un isomorphisme unitaire  $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$ .

Comme  $T(V_\phi)$  coïncide avec le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{G} = \{g(x), x \in X\}$  et que ce dernier est dense dans  $\mathcal{K}$ , on peut en déduire que  $T$  est surjective. Ainsi,  $T$  est un isomorphisme de  $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{K}$  vérifiant  $T \circ f = g$ ; une relation qui définit  $T$  d'une façon unique.  $\square$

On présente dans ce qui suit des propriétés classiques liées aux noyaux de type positifs.

**Proposition 1.3.3** *Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux noyaux de type positif sur  $X$ . Alors les noyaux suivant sont aussi de type positif :*

(1)  $\bar{\phi} : (x, y) \mapsto \overline{\phi(x, y)}$ .

(2)  $t\phi : (x, y) \mapsto \phi(x, y), t \geq 0$ .

(3)  $\phi + \psi : (x, y) \mapsto \phi(x, y) + \psi(x, y)$ .

(4)  $\phi\psi : (x, y) \mapsto \phi(x, y)\psi(x, y)$ .

(5) *Soit  $(\phi_t)_{t \in A}$  une famille de noyaux de type positif sur  $X$  qui converge simplement sur  $X \times X$  vers une fonction continue  $\phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $\phi$  est aussi de type positif.*

**Preuve.** (1), (2), (3), (5) sont obtenus immédiatement en utilisant la définition d'un noyau de type positif. Montrons (4).

Soit  $f : X \rightarrow \mathcal{H}$  et  $g : X \rightarrow \mathcal{K}$  les applications obtenues à partir de la proposition précédente. Soit  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$  l'espace de Hilbert produit tensoriel des espaces de Hilbert  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{K}$ , et posons  $h : X \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ,  $x \mapsto f(x) \otimes g(x)$ . Alors

$$\begin{aligned} \phi\psi(x, y) &= \phi(x, y)\psi(x, y) \\ &= \langle f(x), f(y) \rangle_{\phi} \langle g(x), g(y) \rangle_{\psi} \\ &= \langle f \otimes g(x), f \otimes g(y) \rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}} \\ &= \langle h(x), h(y) \rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  et tous  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \phi\psi(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \langle h(x_i), h(x_j) \rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i h(x_i), \sum_{i=1}^n c_i h(x_i) \right\rangle_{\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Cette dernière proposition nous affirme que l'ensemble des noyaux de type positif sur  $X$  est un cône convexe stable par conjugaison et produit.



### 1.3.2 Fonctions de type positif

Soit  $G$  un groupe topologique de Hausdorff d'élément neutre  $\{e\}$ , et  $K$  un sous-groupe fermé de  $G$ .

**Définition 1.3.2** Une *fonction de type positif* sur  $G$  est une fonction continue  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  telle que le noyau défini sur  $G \times G$  par  $(g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_2^{-1}g_1)$  est de type positif. C'est-à-dire que, pour tous  $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$  et tous  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ ,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(g_j^{-1}g_i) \geq 0.$$

On donne dans ce qui suit quelques propriétés liées aux fonctions de type positif.

**Proposition 1.3.4** Soit  $\varphi$  une fonction de type positif sur  $G$ . Alors,  $\varphi$  est hermitienne, c'est-à-dire, pour tout  $g \in G$ ,  $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$ . De plus, elle vérifie  $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ .

**Preuve.** Les propriétés données sont des conséquences immédiates de la proposition 1.3.1. Il suffit de prendre  $\phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$  avec  $x = e$  et  $y = g$ .

**Définition 1.3.3** Une fonction  $\varphi$  définie sur  $G$  est dite  *$K$ -biinvariante* si elle vérifie  $\varphi(k_1 g k_2) = \varphi(g)$ , pour tous  $k_1, k_2 \in K$  et  $g \in G$ .

Pour une représentation unitaire  $(\pi, \mathcal{H})$ , on note  $\mathcal{H}_K$  le sous-espace des vecteurs  $K$ -invariants de  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire les vecteurs  $\xi$  tels que  $\pi(k)\xi = \xi$  pour tout  $k \in K$ .

**Proposition 1.3.5** Soit  $(\pi, \mathcal{H})$  une représentation unitaire de  $G$  et  $\xi$  un vecteur de  $\mathcal{H}_K$ . Alors, la fonction  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g \mapsto \langle \pi(g)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}}$  est  $K$ -biinvariante de type positif.

**Preuve.** Il suffit de montrer que le noyau  $\phi(g_1, g_2) = \varphi(g_2^{-1}g_1)$  est de type positif. En effet

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(g_j^{-1}g_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \langle \pi(g_j^{-1}g_i)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \langle \pi(g_j^{-1})\pi(g_i)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \langle \pi(g_i)\xi, \pi(g_j)\xi \rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \left\langle \sum_{i=1}^n c_i \pi(g_i)\xi, \sum_{i=1}^n c_i \pi(g_i)\xi \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \varphi(k_1 g k_2) &= \langle \pi(k_1 g k_2)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \langle \pi(k_1)\pi(g)\pi(k_2)\xi, \xi \rangle_{\mathcal{H}} \\
 &= \langle \pi(g)\xi, \pi(k_1^{-1})\xi \rangle_{\mathcal{H}} = \varphi(g). \quad \square
 \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 1.3.2, on peut montrer que toute fonction  $K$ -biinvariante de type positif sur  $G$  peut être représentée, à un isomorphisme près, au moyen d'une représentation unitaire et cyclique de  $G$ . C'est la construction G. N. S. (Guelfand, Naimark, Segal) :

**Théorème 1.3.1** (Construction G. N. S.) *Soit  $\varphi$  une fonction  $K$ -biinvariante de type positif sur  $G$ . Il existe un triplet  $(\pi^\varphi, \mathcal{H}^\varphi, \xi^\varphi)$  qui consiste en une représentation unitaire cyclique  $\pi^\varphi$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}^\varphi$  et un vecteur cyclique  $\xi^\varphi$  dans  $\mathcal{H}_K^\varphi$  tels que, pour tout  $g \in G$ ,*

$$\varphi(g) = \langle \pi^\varphi(g)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_{\mathcal{H}^\varphi}.$$

*De plus, ce triplet est unique dans le sens suivant : si  $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$  est un autre triplet, alors il existe un isomorphisme d'entrelacement  $T$  entre  $\pi^\varphi$  et  $\pi$ , défini de  $\mathcal{H}^\varphi$  sur  $\mathcal{H}$  et vérifiant  $T\xi^\varphi = \xi$ .*

**Preuve.** Soit  $\phi$  le noyau de type positif sur  $G$  associé à  $\varphi$ . D'après la proposition 1.3.2, il existe un espace de Hilbert  $\mathcal{H}^\varphi$  muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi$  et une application continue  $f : G \longrightarrow \mathcal{H}^\varphi$  tels que, pour tous  $x, y \in G$ ,

$$\langle f(x), f(y) \rangle_\varphi = \phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x).$$

D'autre part, pour tout  $g \in G$ ,

$$\langle f(gx), f(gy) \rangle_\varphi = \phi(gx, gy) = \varphi(y^{-1}g^{-1}gx) = \phi(x, y).$$

Par unicité de la représentation (voir proposition 1.3.2), il existe un opérateur unitaire  $\pi^\varphi(g)$  sur  $\mathcal{H}^\varphi$  tel que, pour tout  $x \in G$ ,

$$\pi^\varphi(g)f(x) = f(g^{-1}x).$$

Donc, pour tous  $g_1, g_2 \in G$ ,

$$\begin{aligned} \pi^\varphi(g_1g_2)f(x) &= f(g_1g_2x) \\ &= \pi^\varphi(g_1)f(g_2x) \\ &= \pi^\varphi(g_1)\pi^\varphi(g_2)f(x). \end{aligned}$$

Puisque le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $\mathcal{F} = \{f(x), x \in G\}$  est dense dans  $\mathcal{H}^\varphi$ , on obtient, pour tous  $g_1, g_2 \in G$ ,

$$\pi^\varphi(g_1g_2) = \pi^\varphi(g_1)\pi^\varphi(g_2)$$

De plus, comme  $f$  est continue, l'application  $g \mapsto \pi^\varphi(g)\xi$  est continue pour tout  $\xi \in \mathcal{H}^\varphi$ . Ainsi,  $\pi^\varphi$  est une représentation unitaire de  $G$ . Posons maintenant  $\xi^\varphi = f(e)$ . Alors,  $\pi^\varphi(g)\xi^\varphi = \pi^\varphi(g)f(e) = f(g)$ , et puisque  $\mathcal{F}$  est dense dans  $\mathcal{H}^\varphi$ , il est immédiat que  $\xi^\varphi$  est un vecteur cyclique de  $\mathcal{H}^\varphi$ . Comme  $\varphi$  est  $K$ -biinvariante, pour tout  $k \in K$  et tout  $g \in G$ ,

$$\langle f(k), f(g) \rangle_\varphi = \varphi(g^{-1}k) = \varphi(g^{-1}) = \langle f(e), f(g) \rangle_\varphi.$$

D'où

$$\langle f(k) - f(e), f(g) \rangle_\varphi = 0.$$

Comme le sous-espace  $\mathcal{F}$  est dense dans  $\mathcal{H}^\varphi$ , pour tout  $k \in K$ ,  $f(k) = f(e)$ . Ainsi

$$\pi^\varphi(k)\xi^\varphi = \pi^\varphi(k)f(e) = f(k) = f(e) = \xi^\varphi,$$

ce qui prouve que  $\xi^\varphi \in \mathcal{H}_K^\varphi$ .

De plus, pour tout  $g \in G$ ,

$$\varphi(g) = \varphi(e^{-1}g) = \langle f(g), f(e) \rangle_\varphi = \langle \pi^\varphi(g)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi.$$

Finalement, si  $(\pi, \mathcal{H}, \xi)$  est un autre triplet avec les mêmes propriétés que  $(\pi^\varphi, \mathcal{H}^\varphi, \xi^\varphi)$ , alors

$$\phi(g_1, g_2) = \langle \pi(g_1)\xi, \pi(g_2)\xi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant encore l'unicité de la proposition 1.3.2, il existe un isomorphisme  $T : \mathcal{H}^\varphi \rightarrow \mathcal{H}$  tel que  $T\pi^\varphi(g)\xi^\varphi = \pi(g)\xi$  pour tout  $g \in G$ . Comme  $\xi^\varphi$  est un vecteur cyclique, il est alors immédiat que, pour tout  $g \in G$ , on a  $T\pi^\varphi(g)T^{-1} = \pi(g)$  avec  $T\xi^\varphi = \xi$ .  $\square$

$G$  étant toujours un groupe topologique de Hausdorff et  $K$  un sous-groupe fermé de  $G$ , notons  $\mathcal{P}(G)$  (respectivement  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ ) l'ensemble des fonctions de type positif sur  $G$  (respectivement l'ensemble des éléments  $K$ -biinvariants de  $\mathcal{P}(G)$ ).

**Proposition 1.3.6** *Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$  et posons  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Alors,  $\pi^{\varphi_1}$  est contenue dans  $\pi^{\varphi}$ . De plus, si  $\pi^{\varphi}$  est irréductible, alors il existe  $t \geq 0$  tel que  $\varphi_1 = t\varphi$ .*

**Preuve.** Comme  $\varphi_2 = \varphi - \varphi_1$  est une fonction continue de type positif, pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$  et tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^{\varphi_1}(g_i) \xi^{\varphi_1} \right\|_{\varphi_1}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \varphi_1(g_j^{-1} g_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \bar{\lambda}_j \varphi(g_j^{-1} g_i) \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^{\varphi}(g_i) \xi^{\varphi} \right\|_{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^{\varphi}(g_i) \xi^{\varphi} \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^{\varphi_1}(g_i) \xi^{\varphi_1}$$

est bien définie. Elle est aussi prolongeable par continuité en un opérateur continu  $T : \mathcal{H}^{\varphi} \longrightarrow \mathcal{H}^{\varphi_1}$ . On remarque que  $T$  est un opérateur d'entrelacement entre  $\pi^{\varphi}$  et  $\pi^{\varphi_1}$  et que  $T(\mathcal{H}^{\varphi})$  est dense dans  $\mathcal{H}^{\varphi_1}$ . Ainsi, d'après la proposition 1.2.2, la sous-représentation de  $\pi^{\varphi}$  définie sur  $(\text{Ker} T)^{\perp}$  est équivalente à  $\pi^{\varphi_1}$ . Donc  $\pi^{\varphi_1}$  est contenue dans  $\pi^{\varphi}$ .

Supposons que  $\pi^{\varphi}$  est irréductible. Comme  $T^*T \in \pi^{\varphi}(G)'$ , d'après le lemme de Schur (Théorème 1.2.1), il existe  $t \geq 0$  tel que  $T^*T = tI_{\mathcal{H}^{\varphi}}$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ ,

$$\varphi_1(g) = \langle T \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi}, T \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi_1} = \langle T^*T \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi_1} = t\varphi(g). \quad \square$$

**Définition 1.3.4** Soit  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ .

- (1)  $\varphi$  est dite *pure* si la représentation unitaire qui lui est associée par la construction G.N.S. est irréductible.
- (2)  $\varphi$  est dite *extrémale* si, lorsque  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  avec  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ , alors les fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont proportionnelles à  $\varphi$ ; ou d'une manière équivalente si, lorsque  $\varphi = t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2$ , avec  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$  et  $0 \leq t \leq 1$ , alors  $\varphi = \varphi_1$  ou  $\varphi = \varphi_2$ .

Pour un ensemble convexe  $E$ , on note  $\text{ext}(E)$  l'ensemble de ses points extrémaux. Par  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  (respectivement  $\mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ ), on désigne l'ensemble des fonctions  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$  vérifiant  $\varphi(e) \leq 1$  (respectivement  $\varphi(e) = 1$ ).

**Lemme 1.3.1**  $\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)) = \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G)) \cup \{0\}$ .

**Preuve.** (a) Montrons que  $0 \in \text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$ . Soient  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  et  $0 \leq t \leq 1$  tels que  $t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 = 0$ . Alors  $\varphi_1(e) = 0$  ou  $\varphi_2(e) = 0$ . Ou encore  $\varphi_1 = 0$  ou  $\varphi_2 = 0$ .

(b) Montrons que  $\text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G)) \subset \text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$ . Soient  $\varphi \in \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  et  $0 \leq t \leq 1$  tels que  $t\varphi_1 + (1-t)\varphi_2 = \varphi$ . On sait que  $t\varphi_1(e) + (1-t)\varphi_2(e) = \varphi(e) = 1$ . Donc,  $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = 1$ . Ainsi,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ . Par suite  $\varphi \in \text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$ .

(c) Montrons que  $\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)) \subset \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G)) \cup \{0\}$ . Considérons une fonction  $\varphi \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G) \setminus (\mathcal{P}_1^{\natural}(G) \cup \{0\})$  et posons  $t = \varphi(e)$ . Alors,  $0 < t < 1$ ,  $\frac{\varphi}{t} \in \mathcal{P}_1^{\natural}(G)$  et  $\varphi = t(\frac{\varphi}{t}) + (1-t) \times 0$ . Par suite  $\varphi \notin \text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$ .  $\square$

On donne dans ce qui suit une caractérisation des points extrémaux de  $\mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ .

**Théorème 1.3.2** Soit  $\varphi \in \mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ . Alors,  $\varphi \in \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$  si et seulement si  $\varphi$  est pure.

**Preuve.** Supposons que  $\varphi$  n'est pas pure, c'est-à-dire que  $\pi^\varphi$  n'est pas irréductible. L'espace hilbertien associé  $\mathcal{H}^\varphi$ , peut être décomposé sous la forme  $\mathcal{H}^\varphi = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^\perp$ , où  $\mathcal{K}$  est un sous-espace fermé invariant et non trivial de  $\mathcal{H}^\varphi$ . Ainsi, le vecteur cyclique  $\xi^\varphi \in \mathcal{H}^\varphi$  s'écrit  $\xi^\varphi = \xi_1 + \xi_2$  avec  $\xi_1 \in \mathcal{K}$  et  $\xi_2 \in \mathcal{K}^\perp$ . Comme  $\xi^\varphi$  est cyclique,  $\xi^\varphi \notin \mathcal{K}$  et  $\xi^\varphi \notin \mathcal{K}^\perp$ . Ainsi,  $\xi_1 \neq 0$  et  $\xi_2 \neq 0$ .

Posons  $s = \|\xi_1\|_\varphi^2$  et  $t = \|\xi_2\|_\varphi^2$ .

On remarque que  $s + t = \|\xi^\varphi\|_\varphi^2 = \varphi(e) = 1$  et les fonctions

$$\varphi_1(g) = \langle \pi^\varphi(g) s^{-\frac{1}{2}} \xi_1, s^{-\frac{1}{2}} \xi_1 \rangle_\varphi, \quad \varphi_2(g) = \langle \pi^\varphi(g) t^{-\frac{1}{2}} \xi_2, t^{-\frac{1}{2}} \xi_2 \rangle_\varphi,$$

sont des éléments de  $\mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ .

De plus, comme  $\mathcal{K}$  est invariant

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= \langle \pi^\varphi(g) \xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi \\ &= \langle \pi^\varphi(g) \xi_1, \xi_1 \rangle_\varphi + \langle \pi^\varphi(g) \xi_2, \xi_2 \rangle_\varphi \\ &= s\varphi_1(g) + t\varphi_2(g). \end{aligned}$$

On va montrer que  $\varphi_1 \neq \varphi$  et  $\varphi_2 \neq \varphi$ , c'est-à-dire  $\varphi \notin \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ . En effet, si  $\varphi = \varphi_1$  alors, pour tout  $g \in G$ ,

$$\langle \pi^\varphi(g) \xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi = s^{-1} \langle \pi^\varphi(g) \xi_1, \xi_1 \rangle_\varphi.$$

Donc, pour tous  $g_1, \dots, g_n \in G$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ,

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^\varphi(g_i) \xi^\varphi, \xi^\varphi \right\rangle_\varphi &= s^{-1} \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^\varphi(g_i) \xi_1, \xi_1 \right\rangle_\varphi \\ &= s^{-1} \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \pi^\varphi(g_i) \xi^\varphi, \xi_1 \right\rangle_\varphi \end{aligned}$$

Comme  $\xi^\varphi$  est un vecteur cyclique,  $\langle \eta, \xi^\varphi \rangle_\varphi = s^{-1} \langle \eta, \xi_1 \rangle_\varphi$  pour tout  $\eta \in \mathcal{H}^\varphi$ . Donc  $\xi_1 = s\xi^\varphi$ , ce qui contredit le fait que  $\xi_2 \neq 0$ . Par suite,  $\varphi \notin \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ .

Inversement, supposons que  $\varphi$  est pure, c'est-à-dire  $\pi^\varphi$  est irréductible. Si  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  pour  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_1^{\natural}(G)$ . D'après la proposition 1.3.6, il existe  $t \geq 0$  tel que  $\varphi_1 = t\varphi$ . Donc,  $\varphi \in \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ .  $\square$

**Remarque 1.3.1** Si on reprend la preuve de la proposition 1.3.2 avec  $\phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$  où  $\varphi$  une fonction continue de type positif  $K$ -biinvariante, on peut la refaire en faisant intervenir l'espace des mesures à support fini

$$\mathfrak{M}^{\circ}(G) := \left\{ \mu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i} \mid (a_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{C}, (x_i)_{1 \leq i \leq m} \subset G \right\}.$$

Commençons par introduire quelques notions :

Soit  $x \in G$  et  $f$  une fonction mesurable bornée. Posons

$$f(x) = \int_G f(g) d\delta_x(g).$$

Soit  $\mu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i} \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$ . On peut définir une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions mesurable bornées par

$$L : f \longmapsto (f, \mu) = \int_G f(g) d\mu(g).$$

En effet

$$(f, \mu) = \int_G f(g) d\mu(g) = \sum_{i=1}^m a_i f(x_i),$$

et

$$|(f, \mu)| \leq \|f\|_{\infty} \|\mu\|,$$

où

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{g \in G} |f(g)|, \quad \|\mu\| = \sup_{\|f\|_{\infty} \leq 1} |(f, \mu)|.$$

On définit aussi la convolution de deux mesures  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$  par :

$$(f, \mu * \nu) = \int_G \int_G f(xy) d\mu(x) d\nu(y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j f(x_i x_j),$$

ce qui donne

$$\mu * \nu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j \delta_{x_i x_j}.$$

On pose aussi  $(f, \bar{\mu}) = \overline{(f, \mu)}$  et  $(f, \mu^*) = \overline{(f^*, \mu)}$  où  $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$  pour tout  $g \in G$ .

On a alors

$$\mu^* = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \delta_{x_i^{-1}} \quad \text{et} \quad \bar{\mu} = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \delta_{x_i}.$$

Par suite,

$$(f, \nu^* * \mu) = \int_G \int_G f(x^{-1}y) d\bar{\nu}(x) d\mu(y) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{b}_j a_i f(x_j^{-1}x_i).$$

En particulier pour une fonction continue de type positif

$$(\varphi, \mu^* * \mu) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \bar{a}_j a_i \varphi(x_j^{-1}x_i) \geq 0.$$

On a aussi

$$(\varphi, \nu^* * \mu) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{b}_j a_i \varphi(x_j^{-1}x_i) = \overline{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m b_j \bar{a}_i \varphi(x_i^{-1}x_j)} = \overline{(\varphi, \mu^* * \nu)}.$$

On peut aussi définir la fonction

$$\mu * \varphi(x) = \int_G \varphi(y^{-1}x) d\mu(y) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi(x_i^{-1}x),$$

qui est une combinaison des translatées à gauche de la fonction  $\varphi$ . La fonction  $\mu * \varphi$  est continue et invariante à droite par  $K$ .

Avec les données précédentes on peut reformuler la démonstration de la proposition 3.1.2 comme suit :

Pour une fonction continue de type positif  $\varphi$  on pose  $\phi(x, y) = \varphi(y^{-1}x)$ . L'espace vectoriel  $V_\phi$  est défini par

$$V_\phi = \left\{ \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{x_i} \mid (a_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{C}, (x_i)_{1 \leq i \leq m} \subset G \right\},$$

où  $\varphi_{x_i}(y) = \varphi(y^{-1}x_i)$  pour tout  $y \in G$ . D'autre part,  $\sum_{i=1}^m a_i \varphi_{x_i} = \mu * \check{\varphi}$  avec  $\mu = \sum_{i=1}^m a_i \delta_{x_i}$  et  $\check{\varphi}(x) = \varphi(x^{-1})$ . Ainsi, l'espace  $V_\phi$  peut être défini par

$$V_\phi := V_\varphi = \{ \varphi^\mu = \mu * \check{\varphi}, \mu \in \mathfrak{M}^0(G) \}.$$

Soit  $\varphi^\mu, \varphi^\nu \in V_\varphi$ , on définit l'application  $(\mu, \nu) \mapsto \langle \varphi^\mu, \varphi^\nu \rangle_\varphi$  par :



$$\langle \varphi^\mu, \varphi^\nu \rangle_\varphi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i \bar{b}_j \varphi(x_j^{-1} x_i) = (\varphi, \nu^* * \mu).$$

C'est une forme hermitienne positive sur  $V_\varphi$  qui est de plus définie puisqu'elle vérifie, pour tout  $x \in G$ ,

$$|\varphi^\mu(x)|^2 = |\mu * \varphi(x)|^2 \leq \varphi(e) \langle \varphi^\mu, \varphi^\mu \rangle_\varphi.$$

Cette dernière inégalité prouve que  $(V_\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$  est un espace préhilbertien. Soit  $(\mathcal{H}^\varphi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi)$  le complété hilbertien de  $V_\varphi$ . Soit  $f : G \longrightarrow V_\varphi, x \longmapsto \varphi_x$ . Pour tout  $y \in G$ ,

$$\varphi_x(y) = \varphi(y^{-1}x) = \delta_x * \check{\varphi}(y) = \varphi^{\delta_x}(y).$$

Ainsi,  $f(x) = \varphi^{\delta_x}$ , et

$$\langle f(x), f(y) \rangle_\varphi = \langle \varphi^{\delta_x}, \varphi^{\delta_y} \rangle_\varphi = \varphi(y^{-1}x).$$

D'autre part, pour tout  $g \in G$ ,

$$\langle f(gx), f(gy) \rangle_\varphi = \varphi((gy)^{-1}gx) = \varphi(y^{-1}x).$$

Donc, par unicité de la paire  $(\mathcal{H}^\varphi, f)$  (voir la preuve de la proposition 1.3.2), il existe un opérateur unitaire  $\pi^\varphi(g)$  tel que  $\pi^\varphi(g)f(x) = f(gx)$ , pour tout  $x \in G$ . Ce qui s'écrit encore

$$\pi^\varphi(g)\varphi^{\delta_x} = \varphi^{\delta_{gx}}.$$

En particulier,

$$\pi^\varphi(g)\varphi^{\delta_e} = \varphi^{\delta_g}.$$

Ainsi,  $\pi^\varphi$  est une représentation unitaire continue et cyclique de  $G$  dans  $\mathcal{H}^\varphi$  avec  $\xi^\varphi = f(e) = \varphi^{\delta_e}$  comme vecteur cyclique. Ainsi, on peut exprimer  $\varphi$  en tout point  $g \in G$  par

$$\varphi(g) = \langle \pi^\varphi(g)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi = \langle \varphi^{\delta_e}, \varphi^{\delta_g} \rangle_\varphi.$$

Enfin, on remarque que pour tout  $\mu \in \mathfrak{M}^o(G)$ ,

$$\varphi^\mu = \mu * \check{\varphi} = \sum_{i=1}^m a_i (\delta_{g_i} * \check{\varphi}) = \sum_{i=1}^m a_i \varphi^{\delta_{g_i}} = \sum_{i=1}^m a_i \pi^\varphi(g_i) \xi^\varphi,$$

ce qui prouve que  $V_\varphi = Vect\{\pi^\varphi(g)\xi^\varphi, g \in G\}$ .



# Chapitre 2

## Théorème de Bochner-Godement

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est constitué de trois sections. On commence par définir la notion de cône réticulé. Soit  $\Gamma$  un cône convexe dans un espace vectoriel topologique  $E$ . Ce cône est équipé de son *ordre propre* :  $\gamma_1 \ll \gamma_2$  si  $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Gamma$ . Le cône  $\Gamma$  est dit *réticulé*, si pour deux éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $\Gamma$ , il existe (pour l'ordre propre du cône) un plus petit majorant, noté  $\gamma_1 \vee \gamma_2$ , et un plus grand minorant, noté  $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ . Pour  $\gamma_0 \in \Gamma$ , on note  $\Gamma^{\gamma_0}$  la *face du cône*  $\Gamma$  définie par :

$$\Gamma^{\gamma_0} = \{\gamma \in \Gamma \mid \exists \lambda \geq 0 ; \gamma \ll \lambda\gamma_0\}.$$

L'ordre propre de  $\Gamma^{\gamma_0}$  coïncide avec l'ordre induit par  $\Gamma$ . Le cône  $\Gamma$  est réticulé si et seulement si pour tout  $\gamma_0$  le cône  $\Gamma^{\gamma_0}$  est réticulé.

Nous nous intéressons dans la deuxième section à  $\Gamma = \mathcal{P}^{\natural}(G)$  qui est le sous-cône de  $\mathcal{P}(G)$  constitué par les éléments  $K$ -biinvariants. L'ordre propre de ce cône convexe, ainsi que celui de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ , est donné par :

$$f \ll g \quad \text{si et seulement si} \quad g - f \in \mathcal{P}^{\natural}(G) \quad (f, g \in \mathcal{P}^{\natural}(G)).$$

En démontrant une condition nécessaire et suffisante pour que le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  soit réticulé, on donne, dans la troisième section de ce chapitre, une nouvelle preuve du théorème de Bochner-Godement dans le cas d'une paire de Guelfand  $(G, K)$  où  $G$  est un groupe localement compact séparable et  $K$  un sous-groupe compact de  $G$ . La méthode d'analyse que nous présentons utilise la théorie de Choquet pour la représentation intégrale dans les cônes convexes.

## 2.2 Propriétés algébriques de $\mathcal{P}^{\natural}(G)$

D'après la construction G. N. S. du théorème 1.3.1, à toute fonction  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ , il est associé un triplet  $(\pi^{\varphi}, \mathcal{H}^{\varphi}, \xi^{\varphi})$ . On note  $\mathcal{A} = \pi^{\varphi}(G)'$  le commutant de  $\pi^{\varphi}(G)$ . C'est une sous-algèbre auto-adjointe de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\varphi})$ . On va montrer que chaque face

$$\Gamma^{\varphi} = \{\psi \in \mathcal{P}^{\natural}(G) \mid \exists \lambda \geq 0 ; \psi \ll \lambda\varphi\}$$

du cône convexe  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  est linéairement isomorphe au cône

$$\mathcal{A}^+ = \{T \in \mathcal{A} \mid \forall v \in \mathcal{H}^{\varphi} \langle Tv, v \rangle_{\varphi} \geq 0\}$$

des opérateurs positifs de  $\mathcal{A}$ . Le cône  $\mathcal{A}$  est équipé d'un ordre, noté  $\prec$ , défini pour tout  $v \in \mathcal{H}^{\varphi}$  et tous  $P, Q \in \mathcal{A}^+$  par :

$$P \prec Q \quad \text{si et seulement si} \quad \langle Pv, v \rangle_{\varphi} \leq \langle Qv, v \rangle_{\varphi}.$$

**Théorème 2.2.1** *Pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$  la face  $\Gamma^{\varphi}$  est linéairement isomorphe au cône  $\mathcal{A}^+$  des opérateurs positifs de l'algèbre  $\mathcal{A} = \pi^{\varphi}(G)'$ . Cette correspondance bijective identifie un élément  $\psi$  de  $\Gamma^{\varphi}$  à un élément  $T$  de  $\mathcal{A}^+$  par :*

$$\psi(g) = \langle T\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \quad (g \in G). \quad (2.1)$$

**Preuve.** Soit  $T \in \mathcal{A}^+$ . L'opérateur  $T^{\frac{1}{2}}$  existe et appartient, lui aussi, à  $\mathcal{A}^+$  ([17], page 430, 11.17). Ainsi, pour tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \psi(g) &= \langle T\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \langle T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \langle T^{\frac{1}{2}}\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, (T^{\frac{1}{2}})^*\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(g)T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi}, T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}. \end{aligned}$$

$\psi$  est alors de type positif, d'après la proposition 1.3.5. Elle est de plus continue, puisque l'application  $\xi \mapsto \pi^{\varphi}(g)\xi$  est continue pour tout  $g \in G$ . Montrons que  $\psi$  est  $K$ -biinvariante. En effet, comme  $\xi^{\varphi} \in \mathcal{H}_K^{\varphi}$ , pour tous  $k_1, k_2 \in K$  et tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} \psi(k_1 g k_2) &= \langle \pi^{\varphi}(k_1 g k_2)T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi}, T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(k_1 g)\pi^{\varphi}(k_2)T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi}, T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(k_1)\pi^{\varphi}(g)T^{\frac{1}{2}}\pi^{\varphi}(k_2)\xi^{\varphi}, T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(g)T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(k_1^{-1})T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(g)T^{\frac{1}{2}}\xi^{\varphi}, T^{\frac{1}{2}}\pi^{\varphi}(k_1^{-1})\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \psi(g). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\psi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ . Si on pose  $\lambda_0 = \|T\|$ , (où  $\|\cdot\|$  est la norme d'opérateur usuelle définie sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\varphi})$ ), alors  $\lambda_0\varphi - \psi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ . En effet,

$$\begin{aligned} (\lambda_0\varphi - \psi)(g) &= \|T\| \langle \pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} - \langle \pi^{\varphi}(g)T\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\ &= \langle \pi^{\varphi}(g)(\|T\|I - T)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}. \end{aligned}$$

Comme  $T$  est auto-adjoint, l'opérateur  $C = \|T\|I - T$  l'est aussi. Il est de plus positif, puisque pour tout  $v \in \mathcal{H}^{\varphi}$ ,  $0 \leq \langle Tv, v \rangle_{\varphi} \leq \|T\| \langle v, v \rangle_{\varphi}$ . Aussi,  $C$  est un élément de  $\mathcal{A}^+$ . Ainsi,  $C = D^2$  avec  $D \in \mathcal{A}$  et alors

$$(\lambda_0\varphi - \psi)(g) = \langle \pi^{\varphi}(g)D^2\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \langle \pi^{\varphi}(g)D\xi^{\varphi}, D\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi},$$

ce qui prouve, d'après la proposition 1.3.5, que  $\lambda_0\varphi - \psi$  est de type positif. Elle est aussi continue et  $K$ -biinvariante puisque  $\varphi$  et  $\psi$  le sont. Donc, la fonction  $\lambda_0\varphi - \psi$  appartient à  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ .

Remarquons que  $\psi$  détermine  $T$  d'une façon unique. En effet, pour tous  $g, h \in G$ ,

$$\psi(h^{-1}g) = \langle \pi^{\varphi}(h^{-1}g)T\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \langle T\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(h)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}.$$

Si  $\tilde{T}$  est un autre opérateur de  $\mathcal{A}^+$  vérifiant (2.1), alors pour tous  $g, h \in G$ ,

$$\langle \pi^{\varphi}(g)(T - \tilde{T})\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(h)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = 0.$$

Comme  $V_{\varphi}^{\perp} = \{0\}$ , (puisque  $V_{\varphi} = Vect\{\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, g \in G\}$  est dense dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$ ), pour tout  $g \in G$ ,

$$\pi^{\varphi}(g)(T - \tilde{T})\xi^{\varphi} = 0,$$

ou encore,

$$(T - \tilde{T})\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi} = 0.$$

La densité de  $V_{\varphi}$  dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$  assure alors que  $T - \tilde{T} \equiv 0$ , c'est-à-dire  $T = \tilde{T}$ .

Il reste alors à montrer que, pour tout  $\psi \in \Gamma^{\varphi}$ , il existe  $T \in \mathcal{A}^+$  vérifiant (2.1). Soit  $\psi \in \Gamma^{\varphi}$ . Il existe  $\lambda_0 \geq 0$  tel que

$$\lambda_0\varphi - \psi \in \mathcal{P}^{\natural}(G).$$

Ainsi, par la remarque 1.3.1, pour tout  $\mu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$ ,

$$(\lambda_0\varphi - \psi, \mu^* * \mu) \geq 0 \quad \text{ou encore} \quad (\psi, \mu^* * \mu) \leq \lambda_0(\varphi, \mu^* * \mu).$$

D'où,

$$\langle \psi^{\mu}, \psi^{\mu} \rangle_{\psi} \leq \lambda_0 \langle \varphi^{\mu}, \varphi^{\mu} \rangle_{\varphi}.$$

Par suite, on peut définir sur  $V_{\varphi} \times V_{\varphi}$  une forme hermitienne  $\omega$  donnée, pour tous  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$  par :

$$\omega(\varphi^{\mu}, \varphi^{\nu}) = (\psi, \nu^* * \mu) = \langle \psi^{\mu}, \psi^{\nu} \rangle_{\psi}.$$

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\omega(\varphi^{\mu}, \varphi^{\nu})|^2 &= |(\psi, \nu^* * \mu)|^2 = |\langle \psi^{\mu}, \psi^{\nu} \rangle_{\psi}|^2 \\ &\leq \langle \psi^{\mu}, \psi^{\mu} \rangle_{\psi} \langle \psi^{\nu}, \psi^{\nu} \rangle_{\psi} \\ &\leq \lambda_0^2 \langle \varphi^{\mu}, \varphi^{\mu} \rangle_{\varphi} \langle \varphi^{\nu}, \varphi^{\nu} \rangle_{\varphi} \\ &= \lambda_0^2 \|\varphi^{\mu}\|_{\varphi}^2 \|\varphi^{\nu}\|_{\varphi}^2. \end{aligned}$$

De plus,

$$\omega(\varphi^{\mu}, \varphi^{\nu}) = (\psi, \nu^* * \mu) = \overline{(\psi, \mu^* * \nu)} = \overline{\omega(\varphi^{\nu}, \varphi^{\mu})}.$$

Ainsi,  $\omega$  est une forme hermitienne bien définie et continue sur  $V_{\varphi} \times V_{\varphi}$ . Elle est de plus positive, puisque pour tout  $\mu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$ ,

$$\omega(\varphi^{\mu}, \varphi^{\mu}) = (\psi, \mu^* * \mu) \geq 0.$$

Comme  $V_{\varphi}$  est dense dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$ ,  $\omega$  est prolongeable en une forme hermitienne continue positive sur  $\mathcal{H}^{\varphi} \times \mathcal{H}^{\varphi}$ . Ainsi, par le théorème de Riesz, il existe un opérateur hermitien positif unique  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{\varphi})$  tel que, pour tous  $v_1, v_2 \in \mathcal{H}^{\varphi}$ ,  $\langle T v_1, v_2 \rangle_{\varphi} = \omega(v_1, v_2)$ . En particulier, pour  $\varphi^{\mu}, \varphi^{\nu} \in V_{\varphi}$ ,  $\langle T \varphi^{\mu}, \varphi^{\nu} \rangle_{\varphi} = \omega(\varphi^{\mu}, \varphi^{\nu}) = (\psi, \nu^* * \mu)$ . Par suite, pour  $\mu_0 = \delta_g$ ,  $g \in G$  et  $\nu_0 = \delta_e$ ,

$$\langle T \varphi^{\mu_0}, \varphi^{\nu_0} \rangle_{\varphi} = \langle T \varphi^{\delta_g}, \varphi^{\delta_e} \rangle_{\varphi} = (\psi, \delta_e^* * \delta_g) = \psi(g).$$

Or,  $\varphi^{\delta_g} = \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi}$  et  $\varphi^{\delta_e} = \xi^{\varphi}$ . Donc,  $\psi(g) = \langle T \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}$ , ce qui prouve que la fonction  $\psi$  est liée à  $T$  par (2.1).

L'opérateur  $T$  est aussi auto-adjoint positif. En effet, comme  $\psi$  est de type positif, pour tous  $g, h \in G$ ,  $\psi(g^{-1}h) = \overline{\psi(h^{-1}g)}$ , ce qui donne que

$$\langle T \pi^{\varphi}(h) \xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \overline{\langle T \pi^{\varphi}(g), \pi^{\varphi}(h) \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}}.$$

Ou encore,

$$\langle \pi^{\varphi}(h) \xi^{\varphi}, T^* \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} = \langle \pi^{\varphi}(h) \xi^{\varphi}, T \pi^{\varphi}(g) \rangle_{\varphi}.$$

Comme  $V_{\varphi}^{\perp} = \{0\}$ , pour tout  $g \in G$ ,  $(T - T^*) \pi^{\varphi}(g) \xi^{\varphi} = 0$ , et puisque  $V_{\varphi}$  est dense dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$ ,  $T \equiv T^*$  sur  $\mathcal{L}(\mathcal{H}^{\varphi})$ . Pour la positivité de  $T$ , on a montré que  $\omega$  est une forme positive sur  $V_{\varphi}$ . Ainsi, pour tout  $\eta \in V_{\varphi}$ ,  $\langle T \eta, \eta \rangle_{\varphi} \geq 0$ , ce qui traduit la positivité de  $T$ . La densité de ce dernier dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$  implique alors que  $T$  est un opérateur positif sur  $\mathcal{H}^{\varphi}$ .

Il reste à montrer que  $T$  commute avec  $\pi^{\varphi}(g)$  pour tout  $g \in G$ . En effet, pour tous  $g, h_1, h_2 \in G$ ,

$$\begin{aligned}
 \langle T\pi^{\varphi}(g)\pi^{\varphi}(h_1)\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(h_2)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} &= \langle T\pi^{\varphi}(gh_1)\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(h_2)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\
 &= \langle T\varphi^{\delta_{gh_1}}, \varphi^{\delta_{h_2}} \rangle_{\varphi} \\
 &= \psi(h_2^{-1}gh_1) \\
 &= \psi((g^{-1}h_2)^{-1}h_1) \\
 &= \langle T\pi^{\varphi}(h_1)\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(g^{-1}h_2)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \\
 &= \langle \pi^{\varphi}(g)T\pi^{\varphi}(h_1)\xi^{\varphi}, \pi^{\varphi}(h_2)\xi^{\varphi} \rangle_{\varphi}.
 \end{aligned}$$

La densité de  $V_{\varphi}$  dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$  implique alors que  $T\pi^{\varphi}(g) = \pi^{\varphi}(g)T$  pour tout  $g \in G$ .  $\square$

On va donner dans ce qui suit une condition nécessaire et suffisante pour que le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  soit réticulé.

**Lemme 2.2.1** (voir [20]) *Le cône  $\mathcal{A}^+$  est réticulé si et seulement si l'algèbre  $\mathcal{A}$  est commutative.*

**Preuve.** Supposons  $\mathcal{A}$  commutative. Alors  $\mathcal{A}$  est une  $\mathbb{C}^*$ -algèbre commutative, donc isomorphe à l'espace des fonctions continues sur son spectre. On note cet espace par  $\mathcal{C}(\sigma)$  où  $\sigma$  est le spectre de  $\mathcal{A}$  qui est compact. D'autre part, le cône  $\mathcal{A}^+$  est linéairement isomorphe au cône des fonctions positives de  $\mathcal{C}(\sigma)$  qui est réticulé, donc  $\mathcal{A}^+$  est réticulé.

Inversement, supposons que le cône  $\mathcal{A}^+$  soit réticulé. L'algèbre  $\mathcal{A}$  étant auto-adjointe, elle est engendrée par ses opérateurs auto-adjoints. D'après le théorème spectral, un opérateur auto-adjoint est une intégrale de projecteurs orthogonaux. Donc,  $\mathcal{A}$  est engendrée par ses projecteurs orthogonaux. Par conséquent, pour montrer que l'algèbre  $\mathcal{A}$  est commutative, il suffit de montrer que deux projecteurs orthogonaux  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{A}$  commutent. Pour cela, posons  $T = P \wedge Q$  le plus grand minorant relativement à l'ordre défini par  $\mathcal{A}^+$ , qui existe puisque  $\mathcal{A}^+$  est réticulé, et soit  $R$  le projecteur orthogonal sur  $\overline{T(\mathcal{H}^{\varphi})}$ . Alors,  $R \in \mathcal{A}^+$ , et, puisque  $T(\mathcal{H}^{\varphi})^{\perp} = \text{Ker}T$ , on aura  $T \prec R$ . De plus,  $R \prec P$  et  $R \prec Q$ , donc  $T = R$ . Posons maintenant  $P_1 = P - R$ ,  $Q_1 = Q - R$ , alors  $P_1 \wedge Q_1 = 0$  et donc  $P_1 \vee Q_1 = P_1 + Q_1 \prec I$ , et donc  $P_1 \prec I - Q_1$ . Ceci montre que  $P_1$  et  $Q_1$  sont deux projecteurs orthogonaux sur des sous-espaces orthogonaux. En particulier, on a  $P_1Q_1 = Q_1P_1$ , c'est à dire que  $(P - R)(Q - R) = (Q - R)(P - R)$ . En développant et en utilisant le fait que  $PR = RP$  et que  $QR = RQ$  on obtient :  $PQ = QP$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  est par suite commutative.  $\square$

En utilisant le théorème 2.2.1 et ce dernier lemme, on montre le théorème suivant :

**Théorème 2.2.2** *Le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  est réticulé si et seulement si, pour toute fonction  $\varphi$  de ce cône, l'algèbre  $\mathcal{A} = \pi^{\varphi}(G)'$  est commutative.*

**Preuve.** Du théorème 2.2.1, on déduit que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ , la face  $\Gamma^{\varphi}$  est linéairement isomorphe au cône  $\mathcal{A}^+$ , qui est réticulé si et seulement si  $\mathcal{A}$  est commutative. D'où, pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ ,  $\Gamma^{\varphi}$  est réticulé si et seulement si  $\mathcal{A}$  est commutative.  $\square$

## 2.3 Théorème de Bochner-Godement

### 2.3.1 Commutativité de $\pi^{\varphi}(G)'$

**Définition 2.3.1** Une paire  $(G, K)$ , où  $G$  est un groupe localement compact et  $K$  un sous-groupe compact de  $G$ , est dite *paire de Guelfand*, si l'algèbre de convolution des fonctions intégrables,  $K$ -biinvariantes sur  $G$ , est commutative.

**Remarque 2.3.1** Si  $(G, K)$  est une paire de Guelfand, alors le groupe  $G$  est unimodulaire (voir [18], proposition I.1).

Soit  $(G, K)$  est une paire de Guelfand. En utilisant quelques éléments de la théorie des algèbres de von Neumann, nous allons montrer que, dans le cas d'une paire de Guelfand, l'algèbre  $\pi^{\varphi}(G)'$  est commutative pour tout  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G)$ .

Posons  $[A, B] = AB - BA$  pour tous  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . On définit le commutant d'un sous-ensemble  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  par

$$\mathcal{M}' = \{A \in \mathcal{L}(H) \mid \forall B \in \mathcal{M} [A, B] = 0\}.$$

L'ensemble  $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$  est appelé le bicommutant de  $\mathcal{M}$ . Une sous-algèbre auto-adjointe  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , est dite algèbre de von Neumann si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (a)  $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  est fermé pour la topologie faible d'opérateur.
- (b)  $I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  est fermé pour la topologie forte d'opérateur.
- (c)  $\mathcal{M}$  est égale à son bicommutant :  $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ .

Ces équivalences constituent le théorème du bicommutant ([15], théorème 2 et corollaire 1, page 45). En particulier, pour tout sous-ensemble auto-adjoint  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}''$  sont des algèbres de von Neumann.



Pour une fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ , il existe deux algèbres de von Neumann associées à la représentation  $\pi^{\varphi}$  : le commutant de  $\pi^{\varphi}$ , qui est l'algèbre  $\pi^{\varphi}(G)'$ , et le bicommutant  $\pi^{\varphi}(G)''$ , qui est l'algèbre de von Neumann engendrée par  $\pi^{\varphi}(G)$ . Le commutant de l'algèbre engendrée par  $\pi^{\varphi}(G)$ , à savoir  $\pi^{\varphi}(\mathfrak{M}^{\circ}(G))'$ , coïncide avec  $\pi^{\varphi}(G)'$ . Comme  $\pi^{\varphi}(\mathfrak{M}^{\circ}(G))$  est une sous-algèbre auto-adjointe contenant l'identité de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , les équivalences précédentes montrent alors que  $\pi^{\varphi}(\mathfrak{M}^{\circ}(G))$  est dense dans  $\pi^{\varphi}(G)''$  pour la topologie forte d'opérateur.

**Proposition 2.3.1** *Soit  $P$  la projection orthogonale sur  $\mathcal{H}_K^{\varphi}$  définie par*

$$P = \pi^{\varphi}(\alpha) = \int_K \pi^{\varphi}(k) \alpha(dk),$$

où,  $\alpha$  est la mesure de Haar normalisée du sous-groupe  $K$ . Alors  $P$  est un élément de  $\pi^{\varphi}(G)''$ , et l'algèbre  $P\pi^{\varphi}(G)''P$  est commutative.

**Preuve.** Pour toute mesure  $\mu$  sur  $G$ ,  $\pi^{\varphi}(\mu)$  appartient à  $\pi^{\varphi}(G)''$ , en particulier, la projection  $P$  appartient à  $\pi^{\varphi}(G)''$ . En effet, pour tout  $T \in \pi^{\varphi}(G)'$ , et tous  $v, w \in \mathcal{H}^{\varphi}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \pi^{\varphi}(\mu)Tv, w \rangle &= \int_K \langle \pi^{\varphi}(k)Tv, w \rangle \mu(dk) \\ &= \int_K \langle T\pi^{\varphi}(k)v, w \rangle \mu(dk) \\ &= \int_K \langle \pi^{\varphi}(k)v, T^*w \rangle \mu(dk) \\ &= \langle \pi^{\varphi}(\mu)v, T^*w \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $v$  de  $\mathcal{H}^{\varphi}$ ,  $PTv = TPv$ , et alors  $P$  commute avec les éléments de  $\pi^{\varphi}(G)'$ . Par suite,  $P \in \pi^{\varphi}(G)''$ .

Comme  $(G, K)$  est une paire de Guelfand, pour tous  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$ , les mesures  $K$ -biinvariantes

$$\alpha * \mu * \alpha \quad \text{et} \quad \alpha * \nu * \alpha$$

commutent. Ainsi, pour tous  $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^{\circ}(G)$ ,

$$P\pi^{\varphi}(\mu)P\pi^{\varphi}(\nu)P = P\pi^{\varphi}(\nu)P\pi^{\varphi}(\mu)P.$$

Comme  $\pi^{\varphi}(\mathfrak{M}^{\circ}(G))$  est dense dans  $\pi^{\varphi}(G)''$  pour la topologie forte d'opérateur, pour tous  $A, B \in \pi^{\varphi}(G)''$ ,

$$PAPBP = PBPAP.$$

Posons  $S = PAP$  et  $T = PBP$ .  $S$  et  $T$  sont deux éléments arbitraires de l'algèbre  $P\pi^\varphi(G)''P$  qui vérifient

$$ST = PAPPBP = PAPBP = PBPAP = TS.$$

Par suite, l'algèbre  $P\pi^\varphi(G)''P$  est commutative.  $\square$

Pour tout opérateur  $A$  de l'algèbre de von Neumann  $\pi^\varphi(G)'$ , notons  $A_P$  la restriction de l'opérateur  $PA$  à  $\mathcal{H}_K^\varphi$ . Posons  $[\pi^\varphi(G)']_P = \{A_P, A \in \pi^\varphi(G)'\}$ . Par ([15], proposition 1, page 18), les algèbres  $[\pi^\varphi(G)']_P$  et  $[\pi^\varphi(G)'' ]_P$  sont des algèbres de von Neumann et vérifient

$$([\pi^\varphi(G)'' ]_P)' = [\pi^\varphi(G)']_P.$$

Comme  $\xi^\varphi$  est un vecteur  $K$ -invariant cyclique pour l'algèbre  $\pi^\varphi(\mathfrak{M}^\circ(G))$ , par ([16], Appendice A, A14), il est séparateur pour l'algèbre de von Neumann  $\pi^\varphi(\mathfrak{M}^\circ(G))' = \pi^\varphi(G)'$ . Ainsi, il est aussi séparateur pour l'algèbre de von Neumann  $[\pi^\varphi(G)']_P$ . On conclut alors qu'il est cyclique pour l'algèbre de von Neumann  $[\pi^\varphi(G)'' ]_P$ .

En utilisant le fait que toute algèbre de von Neumann commutative  $\mathcal{M}$ , qui possède un vecteur cyclique, vérifie  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$  (voir [15], corollaire 2, page 89), et en remarquant que l'algèbre  $[\pi^\varphi(G)'' ]_P$  n'est autre que  $P\pi^\varphi(G)''P$ , on obtient

$$([\pi^\varphi(G)'' ]_P)' = [\pi^\varphi(G)'' ]_P.$$

D'où,

$$[\pi^\varphi(G)']_P = [\pi^\varphi(G)'' ]_P.$$

Ainsi, pour aboutir à la commutativité de  $\pi^\varphi(G)'$ , il suffit de prouver la proposition suivante

**Proposition 2.3.2** *Le commutant  $\pi^\varphi(G)'$ , vu comme algèbre de von Neumann, est isomorphe à l'algèbre  $[\pi^\varphi(G)']_P$ .*

**Preuve.** Soit  $\Psi$  l'application de  $\pi^\varphi(G)'$  dans  $[\pi^\varphi(G)']_P$ ,  $A \mapsto A_P$ . Elle est bien définie. C'est de plus un homomorphisme d'algèbre, puisque pour tous  $S, T \in \pi^\varphi(G)'$ ,

$$\Psi(ST) = [ST]_P = PSTP = PSPPTP = S_P T_P = \Psi(S)\Psi(T),$$

et

$$\Psi(T^*) = PT^*P = P^*T^*P^* = (PTP)^* = (T_P)^* = \Psi(T)^*.$$

Il est clair que par construction  $\Psi$  est surjective. Montrons alors qu'elle est injective. Soit  $S \in \pi^\varphi(G)'$  tel que  $\Psi(S) = 0$ . Alors,

$$\Psi(S) = 0 \Rightarrow PS\xi^\varphi = 0 \Rightarrow SP\xi^\varphi = 0 \Rightarrow S\xi^\varphi = 0.$$

Ainsi, pour tout  $g \in G$ ,  $S\pi^\varphi(g)\xi^\varphi = \pi^\varphi(g)S\xi^\varphi = 0$ , et comme  $\xi^\varphi$  est cyclique pour  $\pi^\varphi$ , il en résulte que  $S = 0$ . Donc,  $\Psi$  est injective.  $\square$

**Théorème 2.3.1** *Soient  $(G, K)$  une paire de Guelfand et  $\varphi$  une fonction continue sur  $G$ , de type positif et  $K$ -biinvariante. Alors, l'algèbre  $\pi^\varphi(G)'$  est commutative.*

**Preuve.** D'après la proposition précédente  $\pi^\varphi(G)'$  est isomorphe à  $[\pi^\varphi(G)']_P$ . D'autre part, on sait que  $[\pi^\varphi(G)']_P = [\pi^\varphi(G)'' ]_P = P\pi^\varphi(G)''P$ . Le résultat est alors immédiat puisque l'algèbre  $P\pi^\varphi(G)''P$  est commutative.  $\square$

**Corollaire 2.3.1** *Soit  $(G, K)$  une paire de Guelfand. Alors, le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  est réticulé.*

**Preuve.** D'après le théorème 2.2.2,  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  est réticulé si et seulement si pour tout élément  $\varphi$  de ce cône, l'algèbre  $\pi^\varphi(G)'$  est commutative. Or, ceci est acquis par le théorème précédent. Donc,  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  est réticulé.  $\square$

### 2.3.2 Compacité de $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$

Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}(G)$ , on a  $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ . Ainsi, toute fonction de type positif est bornée. Comme,  $G$  est un groupe topologique localement compact, on peut voir  $\mathcal{P}(G)$  comme un sous ensemble de  $L^\infty(G)$  pour une mesure de Haar sur  $G$ . Dans cette partie, on ajoute la condition que  $G$  est séparable, ce qui nous permet de montrer que  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est métrisable (voir lemme 2.3.2 ci-dessous).

**Lemme 2.3.1** (voir ([16], proposition 13.4.4, page 256)) *Pour une fonction  $\varphi$  de  $L^\infty(G)$  les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1)  *$\varphi$  est égale localement presque partout sur  $G$  à une fonction continue de type positif.*

(2) *Pour toute fonction  $f$  de  $L^1(G)$ ,  $\varphi(f^* * f) \geq 0$ . Ce qui s'écrit encore :*

$$\int_G \int_G \varphi(y^{-1}z) \bar{f}(y) f(z) dy dz \geq 0.$$

D'après le théorème de Banach-Alaoglu, la boule unité de  $L^\infty(G)$  est compacte pour la topologie  $*$ -faible  $\tau^*(L^\infty(G))$ .

**Lemme 2.3.2** *L'ensemble  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ , considéré comme partie de  $L^\infty(G)$ , est convexe compact et métrisable pour la topologie  $*$ -faible  $\tau^*(L^\infty(G))$ .*

**Preuve.** Comme  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est contenu dans la boule unité de  $L^\infty(G)$  qui est compacte, il suffit de prouver que  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est fermé dans  $L^\infty(G)$  pour la topologie  $\tau^*(L^\infty(G))$ . Pour démontrer ce fait, on utilise le lemme précédent (voir [18], corollaire II.5, page 330). Pour montrer la métrisabilité de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ , on a besoin du résultat suivant qu'on trouve dans [46], théorème 3.16, page 68.

**Théorème.** *Soient  $X$  un espace vectoriel topologique séparable et  $K$  une partie de  $X^*$ , le dual topologique de  $X$ . Alors, si  $K$  est compact dans  $X^*$  pour la topologie  $*$ -faible  $\sigma(X^*, X)$ , alors  $K$  est métrisable pour cette topologie.*

Comme  $G$  est séparable,  $L^1(G)$  l'est aussi (voir [16], page 252). Ainsi, en appliquant ce dernier théorème à  $X = L^1(G)$ ,  $X^* = L^\infty(G)$  et  $K = \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ , on obtient que  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est métrisable.  $\square$

Le théorème de représentation intégrale de Choquet est l'outil clé pour démontrer le théorème de Bochner-Godement pour la paire de Gelfand que nous considérons.

**Théorème 2.3.2 (Théorème de Choquet)** *Soit  $\mathcal{U}$  un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique localement convexe  $E$ . Si  $\mathcal{U}$  est compact et métrisable, alors :*

- (i)  $\text{ext}(\mathcal{U})$  est un sous-ensemble borélien de  $\mathcal{U}$ .
- (ii) Pour tout  $a \in \mathcal{U}$ , il existe une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\text{ext}(\mathcal{U})$ , telle que pour toute forme linéaire continue  $L$  sur  $E$  on a :

$$L(a) = \int_{b \in \text{ext}(\mathcal{U})} L(b) \mu(db).$$

- (iii) La mesure  $\mu$  est unique si et seulement si le cône engendré par  $\mathcal{U}$  est réticulé.

**Preuve.** Pour (i) voir [43], proposition 1.3. Pour (ii) et (iii) voir [43], sections 3 et 10.  $\square$

### 2.3.3 Preuve du théorème de Bochner-Godement

D'après le lemme 2.3.2, l'ensemble  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est convexe compact et métrisable dans l'espace vectoriel topologique  $L^{\infty}(G)$  qui est localement convexe pour la topologie  $*$ -faible  $\tau^*(L^{\infty}(G))$ . Ainsi, d'après le théorème de Choquet ci-dessus, toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  admet une représentation intégrale via une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$  :

$$L(\varphi) = \int_{\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))} L(\omega)\mu(d\omega).$$

Prenons pour  $L$ , la forme linéaire

$$\varphi \mapsto (\varphi, f) = \int_G \varphi(h)f(h)\alpha(dh),$$

où  $f \in L^1(G)$  et  $\alpha$  est une mesure de Haar à gauche de  $G$ . Considérons, une approximation de  $g \in G$ ,  $(f_k) : f_k \in L^1(G)$ ,  $f_k \geq 0$ ,

$$\int_G f_k(h)\alpha(dh) = 1,$$

et pour toute fonction  $\psi$  continue bornée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_G \psi(h)f_k(h)\alpha(dh) = \psi(g).$$

En utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que, pour tout  $g \in G$ ,

$$\varphi(g) = \int_{\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))} \omega(g)\mu(d\omega).$$

Posons  $\Omega = \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ . Comme  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $\text{ext}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G))$ , on peut écrire

$$\varphi(g) = \int_{\Omega \cup \{0\}} \omega(g)\mu(d\omega) = \int_{\Omega} \omega(g)\mu(d\omega).$$

On peut alors aboutir au théorème suivant :

**Théorème 2.3.3** *Soit  $\varphi$  une fonction de  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ . Il existe une unique mesure positive et bornée  $\mu$  sur  $\Omega = \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G))$ , telle que :*

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g)\mu(d\omega).$$

**Preuve.** Soit  $\varphi$  dans  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$ . Si  $\varphi(e) = 0$ , alors  $\varphi = 0$  puisque, pour tout  $g$  de  $G$ ,  $|\varphi(g)| \leq \varphi(e)$ . D'où  $\mu = 0$  convient.

Si,  $\varphi(e) \neq 0$  alors, pour tout  $g$  de  $G$ , on a  $\varphi(g) = \varphi(e) \varphi(g)/\varphi(e)$ . En posant  $\tilde{\varphi}(g) = \varphi(g)/\varphi(e)$ , on a  $\tilde{\varphi} \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$ , puisque  $\tilde{\varphi}(e) = 1$ . Ainsi, il existe une mesure de probabilité  $\tilde{\mu}$  telle que :

$$\tilde{\varphi}(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \tilde{\mu}(d\omega).$$

La mesure  $\tilde{\mu}$  est unique. En effet, le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  engendré par  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G)$  est réticulé par le corollaire 2.3.1. Ainsi, d'après (iii) du théorème de Choquet, la mesure  $\mu$  est unique. Par suite, la fonction  $\varphi$  est représentée par la mesure  $\mu = \varphi(e)\tilde{\mu}$  qui est une mesure positive bornée et déterminée de façon unique :

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \mu(d\omega). \quad \square$$

**Remarque 2.3.2** C'est dans un article de H. Cartan et R. Godement (voir [12]) que la théorie de la représentation intégrale dans les ensembles convexes est pour la première fois utilisée pour établir une représentation intégrale de type Bochner. Cependant, la preuve classique, qu'on trouve dans la littérature concernant l'unicité de cette mesure, utilise le théorème de Stone-Weierstrass et se base sur le fait que le groupe  $G$  est localement compact ce qui assure l'existence de la mesure de Haar (voir par exemple [18]). Le point de départ de notre preuve est le théorème 2.2.2 qui donne une caractérisation algébrique du cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G)$  valable dans le cas d'un groupe topologique de Hausdorff quelconque. Cette caractérisation nous permettra dans le chapitre 3 de surmonter une difficulté topologique qui vient du fait que le groupe limite inductive n'est généralement pas localement compact. L'idée d'utiliser les cônes réticulés a été introduite par E. Thoma dans le cas d'un groupe discret dénombrable (voir [49]). En généralisant cette méthode et en utilisant des éléments de la théorie des algèbres de von Neumann, nous avons présenté dans ce chapitre une preuve alternative de l'unicité de la mesure représentative  $\mu$ .

# Chapitre 3

## Généralisation du théorème de Bochner-Godement aux limites inductives de paires de Guelfand

### 3.1 Introduction

De nombreuses extensions du théorème de Bochner ont été établies dans le cadre de l'analyse harmonique en dimension infinie sur les groupes du type

$$G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

où  $G_n$  est une suite de groupes classiques, avec un sous-groupe  $K_\infty$  de même type

$$K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset G_n.$$

On peut citer, par exemple, les résultats de Thoma en 1964 (voir [50]), Kerov, Olshanski et Vershik en 2004 (voir [33]), qui traitent le cas du groupe symétrique infini  $G_\infty = \mathfrak{S}_\infty$  :

$$\mathfrak{S}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_n, \quad K_\infty = \text{diag} (\mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty) \simeq \mathfrak{S}_\infty.$$

Il y' a aussi les résultats de Voiculescu en 1976 (voir [51]), et Olshanski en 2003 (voir [41]) concernant la paire

$$G_\infty = U(\infty) \times U(\infty), \quad K_\infty = \text{diag} (U(\infty) \times U(\infty)) \simeq U(\infty),$$

où

$$U(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U(n)$$

est le groupe unitaire de dimension infinie. Les remarquables résultats d'Olshanski et Vershik en 1996 sur l'espace

$$H(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Herm(n, \mathbb{C})$$

des matrices hermitiennes de dimension infinie constituent une référence fondamentale sur le sujet (voir [40]).

Les exemples cités font partie de la théorie d'Olshanski des paires sphériques qui a été développée en 1990 (voir [39]). Cependant, une généralisation de type Bochner qui englobe les limites inductives de paires de Guelfand n'a pas encore été établie. Ce chapitre, qui a fait l'objet d'une publication aux annales de l'institut Fourier (voir [44]), est consacré à la preuve d'une telle généralisation dans la cas d'une limite inductive de paires de Guelfand séparables. Il est composé de trois sections : après cette section d'introduction, la deuxième contient les définitions et les résultats de base qui sont dus à G. Olshanski. Dans la troisième section, on démontre le résultat principal de cette thèse, à savoir le théorème de Bochner généralisé. La méthode adoptée pour la démonstration constitue une généralisation de celle de Thoma pour un groupe discret dénombrable (voir [49]), avec des modifications inspirées du travail de G. Olshanski sur l'espace des matrices hermitiennes de dimension infinie (voir [40]).

## 3.2 Paires de Guelfand généralisées

### 3.2.1 Paires sphériques

Soit  $H$  un groupe topologique de Hausdorff et  $L$  un sous-groupe fermé de  $H$ . On sait que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}_1^{\natural}(H)$ , il existe une représentation unitaire  $\pi^{\varphi}$  de  $H$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}^{\varphi}$ , et un vecteur unitaire  $L$ -invariant et cyclique  $\xi^{\varphi}$  tels que

$$\varphi(h) = \langle \pi^{\varphi}(h)\xi^{\varphi}, \xi^{\varphi} \rangle_{\varphi} \quad (h \in H).$$

On a montré dans le théorème 1.3.2 que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\varphi$  est un point extrémal de  $\mathcal{P}_1^{\natural}(H)$ .
- (2) la représentation correspondante  $\pi^{\varphi}$  est irréductible.



**Définition 3.2.1** On dit que  $(H, L)$  est une *paire sphérique* si pour toute représentation unitaire continue irréductible  $\pi$  de  $H$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , la dimension du sous-espace  $\mathcal{H}_L$  des vecteurs  $L$ -invariants est inférieure ou égale à un. Si  $H$  est localement compact et  $L$  compact, la paire  $(H, L)$  est sphérique si et seulement si elle est une paire de Guelfand.

Si la dimension du sous-espace  $\mathcal{H}_L$  est égale à un, la représentation irréductible  $\pi$  est dite sphérique. Une fonction  $\varphi$  sur  $H$  est dite sphérique si elle peut s'écrire

$$\varphi(h) = \langle \pi(h)u, u \rangle_{\mathcal{H}},$$

où  $\pi$  est une représentation sphérique et  $u \in \mathcal{H}_L$  avec  $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$ . On peut ainsi conclure que les fonctions sphériques sont les points extrémaux de l'ensemble convexe  $\mathcal{P}_1^s(H)$ .

### 3.2.2 Limites inductives de paires de Guelfand

Considérons maintenant une famille de paire de Guelfand  $(G_n, K_n)_{n \geq 1}$ . On suppose que  $G_n$  est un sous-groupe fermé de  $G_{n+1}$  et que  $K_n$  est un sous-groupe fermé de  $K_{n+1}$  avec  $K_n = K_{n+1} \cap G_n$ .

**Définition 3.2.2** Un *système dénombrable inductif* de groupes topologiques est la donnée :

- (i) d'une famille dénombrable de groupes topologiques  $(H_n, \tau_n)_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , où  $\tau_n$  est la topologie définie sur  $H_n$ .
- (ii) d'un système d'homomorphismes continus  $\phi_{m,n} : H_n \rightarrow H_m$  pour  $n, m \in \mathbb{N}^*$  avec  $n \leq m$ , et satisfaisant la condition de consistance suivante :  $\phi_{k,m} \circ \phi_{m,n} = \phi_{k,n} \forall n \leq m \leq k$ .

Pour un tel système inductif on peut définir le groupe limite inductive de la famille  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  :

$$H_\infty := \varinjlim H_n.$$

En effet,  $H_\infty$  est défini en considérant une réunion disjointe  $S = \coprod_{n \in \mathbb{N}^*} H_n$  et en définissant la relation d'équivalence  $\sim$  de la façon suivante :

$h_n \sim h_m$  pour  $h_n \in H_n$  et  $h_m \in H_m$  si et seulement si, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  telque :  $\phi_{k,n}(h_n) = \phi_{k,m}(h_m)$ . Par suite  $H_\infty$  est le quotient  $S/\sim$ .

Dans le cas où tous les homomorphismes  $\phi_{m,n}$  sont injectifs, par identification au moyen de  $\phi_{m,n}$ , on peut considérer des inclusions,  $H_n \subset H_m$ , et donc on peut écrire :

$$H_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} H_n.$$

Soit  $\phi_n$  l'injection canonique de  $H_n$  dans  $H_\infty$ . Alors  $\phi_m \circ \phi_{m,n} = \phi_n$ , pour tout  $n \leq m$ , et la topologie définie sur  $H_\infty$  est la topologie limite inductive, notée  $\tau_{ind}$ . C'est la topologie la plus fine rendant continues toutes les  $\phi_n$ . Une partie  $A \subset H_\infty$  est ouverte pour  $\tau_{ind}$  si et seulement si  $\phi_n^{-1}(A) \subset H_n$  est ouverte pour la topologie  $\tau_n$  et ceci pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

La famille des paires de Gelfand  $(G_n, K_n)_{n \geq 1}$  qu'on considère, munie du système d'injections canoniques  $\iota_{m,n} : G_n \rightarrow G_m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \leq m$ , constitue un système dénombrable inductif de groupes topologiques (voir [9]). Ainsi, on peut définir les deux groupes limites inductives

$$G_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n, \quad K_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n.$$

La topologie définie sur  $G_\infty$  est la topologie limite inductive.

Olshanski montre que la paire  $(G_\infty, K_\infty)$  est une paire sphérique (voir [19], [39]) :

### Théorème 3.2.1

- (i) La paire  $(G_\infty, K_\infty)$  est une paire sphérique.
- (ii) Soit  $\varphi \in \mathcal{P}_1^\natural(G_\infty)$ . La fonction  $\varphi$  est sphérique si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky) \alpha_n(dk) = \varphi(x)\varphi(y),$$

où  $\alpha_n(dk)$  est la mesure de Haar normalisée du groupe  $K_n$ .

**Preuve.** (a) Considérons une représentation unitaire irréductible  $(\pi, \mathcal{H})$  de  $G_\infty$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  avec  $\mathcal{H}_{K_\infty} \neq \{0\}$ . On va montrer que  $\dim \mathcal{H}_{K_\infty} = 1$ . La projection orthogonale  $P_n$  sur  $\mathcal{H}_{K_n}$  est donnée par

$$P_n = \int_{K_n} \pi(k) \alpha_n(dk).$$

Comme  $K_n \subset K_{n+1}$ , alors  $\mathcal{H}_{K_{n+1}} \subset \mathcal{H}_{K_n}$ , et donc

$$P_{n+1} = P_n P_{n+1} = P_{n+1} P_n$$

et d'une manière générale on a pour tous  $n, m \geq 1$

$$P_{n+m} = P_{n+m} P_n = P_n P_{n+m}.$$

La projection  $P_n$  converge fortement vers la projection  $P$  sur

$$\mathcal{H}_{K_\infty} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{K_n}.$$

Pour  $n_0$  fixé, on sait que la paire  $(G_{n_0}, K_{n_0})$  est une paire de Guelfand. Ainsi, pour tous  $x, y \in G_{n_0}$ , les mesures  $K_{n_0}$ -biinvariantes suivantes

$$\alpha_n * \delta_x * \alpha_n \text{ et } \alpha_n * \delta_y * \alpha_n$$

commutent. Par suite, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$P_n \pi(x) P_n \pi(y) P_n = P_n \pi(y) P_n \pi(x) P_n,$$

ou encore, pour tous  $m, m', n \geq n_0$ ,

$$P_{n+m} \pi(x) P_{n+m} \pi(y) P_{n+m'} = P_{n+m} \pi(y) P_{n+m} \pi(x) P_{n+m'}.$$

En faisant tendre  $m, m'$  vers l'infini, on obtient

$$P \pi(x) P_n \pi(y) P = P \pi(y) P_n \pi(x) P.$$

Enfin, en faisant tendre  $n$  vers l'infini, on aboutit à

$$P \pi(x) P \pi(y) P = P \pi(y) P \pi(x) P. \quad (3.1)$$

Soit  $\mathcal{A}$  l'algèbre engendrée par les opérateurs  $P \pi(x) P$ , où  $x \in G_\infty$ . La relation (3.1) montre que  $\mathcal{A}$  est commutative. Il est aussi évident que le sous-espace  $\mathcal{H}_{K_\infty}$  est  $\mathcal{A}$ -invariant. D'autre part, une représentation irréductible d'une algèbre de Banach commutative est de dimension égale à un.

Ainsi, pour montrer que  $\dim \mathcal{H}_{K_\infty} = 1$ , il suffit de montrer que le sous-espace  $\mathcal{H}_{K_\infty}$  est irréductible. Supposons que  $\mathcal{H}_{K_\infty}$  s'écrit comme

$$\mathcal{H}_{K_\infty} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,$$

où  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  sont deux sous-espaces orthogonaux et  $\mathcal{A}$ -invariants de  $\mathcal{H}_{K_\infty}$ . Soit  $u_1 \in \mathcal{H}_1$ ,  $u_1 \neq 0$ . Pour  $u_2 \in \mathcal{H}_2$  et  $x \in G_\infty$ ,

$$\langle P \pi(x) P u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Ce qui montre que pour tout  $x \in G_\infty$ ,

$$\langle \pi(x)u_1, u_2 \rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Comme  $\pi$  est irréductible, il est évident que  $u_2 = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{H}_2 = \{0\}$ .

(b) Soit  $\varphi$  une fonction sphérique :  $\varphi(g) = \langle \pi(g)u, u \rangle_{\mathcal{H}}$ , où  $\pi$  est une représentation unitaire irréductible et  $u \in \mathcal{H}_{K_\infty}$  avec  $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$ . Pour  $v \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle P\pi(g)Pu, v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \pi(g)u, Pv \rangle_{\mathcal{H}},$$

et, comme  $Pv = \langle v, u \rangle_{\mathcal{H}}u$ , le deuxième membre vaut  $\langle u, v \rangle_{\mathcal{H}}\langle \pi(g)u, u \rangle_{\mathcal{H}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned} P\pi(g)Pu &= \varphi(g)u, \\ P\pi(x)P\pi(y)Pu &= \varphi(x)\varphi(y)u, \\ \langle \pi(x)P\pi(y)u, u \rangle_{\mathcal{H}} &= \varphi(x)\varphi(y). \end{aligned}$$

Comme  $P_n$  converge fortement vers  $P$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi(x)P_n\pi(y)u, u \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky)\alpha_n(dk). \end{aligned}$$

(c) Soit  $\varphi \in \mathcal{P}_1^{\natural}(G_\infty)$  et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky)\alpha_n(dk) = \varphi(x)\varphi(y).$$

La fonction  $\varphi$  peut être écrite sous la forme  $\varphi(g) = \langle \pi^\varphi(g)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi$ , où  $\pi^\varphi$  est une représentation unitaire de  $G_\infty$  dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et le vecteur  $\xi^\varphi$  est  $K_\infty$ -invariant et cyclique.

Montrons que  $\mathcal{H}_{K_\infty} = \mathbb{C}\xi^\varphi$ , ce qui implique que  $\pi^\varphi$  est irréductible. Par hypothèse

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky)\alpha_n(dk) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi^\varphi(x)P_n\pi^\varphi(y)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi = \langle \pi^\varphi(x)P\pi^\varphi(y)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\langle P\pi^\varphi(y)\xi^\varphi, \pi^\varphi(x^{-1})\xi^\varphi \rangle_\varphi = \varphi(y)\langle \xi^\varphi, \pi^\varphi(x^{-1})\xi^\varphi \rangle_\varphi.$$

Comme  $\xi^\varphi$  est cyclique, on a  $P\pi^\varphi(y)\xi^\varphi = \varphi(y)\xi^\varphi$ .  $\square$

### 3.3 Généralisation du théorème de Bochner

#### 3.3.1 Au sujet de la compacité de $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$

Le groupe  $G_{\infty}$  équipé de la topologie limite inductive est un groupe topologique de Hausdorff. Mais, cette topologie, en général, ne fait pas de  $G_{\infty}$  un groupe localement compact. Ainsi, on ne peut pas appliquer directement à  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$ , qui n'est pas généralement compact dans ce cas, la théorie de la représentation intégrale de Choquet.

Pour surmonter cette difficulté, nous utilisons une idée due à G. Olshanski (voir [40], [39]). Elle consiste à plonger  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{\infty})$  dans le cône des systèmes sous-projectifs :

$$\mathcal{Q} := \left\{ \varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^{\natural}(G_n) \mid \mathbf{Res}_n^{n+1}(\varphi^{(n+1)}) \ll \varphi^{(n)} \quad n = 1, 2, \dots \right\},$$

$\mathbf{Res}_n^{n+1}$  étant l'opérateur de restriction de  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{n+1})$  à  $\mathcal{P}^{\natural}(G_n)$ , qui à toute fonction  $\varphi^{(n+1)}$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{n+1})$  associe sa restriction de  $G_{n+1}$  à  $G_n$ . La théorie de la représentation intégrale de Choquet appliquée à  $\mathcal{Q}$  donnera l'analogie du théorème de Bochner pour la paire sphérique  $(G_{\infty}, K_{\infty})$ . Notons  $\mathbf{Res}_n$  l'opérateur de restriction de  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{\infty})$  à  $\mathcal{P}^{\natural}(G_n)$ , et posons  $\mathcal{P}_m^n = \prod_{k=m}^n \mathcal{P}^{\natural}(G_k)$  où  $1 \leq m \leq n \leq \infty$ . En particulier  $\mathcal{P}_1^{\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}^{\natural}(G_k)$ .

**Remarque 3.3.1** Si  $G_1 \subset G_2$  sont deux groupes localement compacts, l'ensemble  $\{(\varphi, \psi) \in \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2) \mid \mathbf{Res}(\psi) = \varphi\}$ , où  $\mathbf{Res}$  est la restriction à  $G_1$  d'une fonction sur  $G_2$ , n'est pas fermé en générale. Mais on montre que dans certains cas, par exemple pour  $G_2 = L \times \mathbb{R}^n$  et  $G_1 = L$ , il est dense dans  $\{(\varphi, \psi) \in \mathcal{P}(G_1) \times \mathcal{P}(G_2) \mid \mathbf{Res}(\psi) \ll \varphi\}$ .

Nous allons montrer que l'ensemble  $\mathcal{Q}$  est fermé dans  $\mathcal{P}_1^{\infty}$  pour la topologie produit

$$\tau^* = \prod_{n=1}^{\infty} \tau^*(L^{\infty}(G_n)).$$

Pour établir ceci, il suffit de montrer que l'ensemble

$$\mathcal{R}_n = \{(\varphi^{(n)}, \varphi^{(n+1)}) \in \mathcal{P}_n^{n+1} \mid \mathbf{Res}_n^{n+1}(\varphi^{(n+1)}) \ll \varphi^{(n)}\}$$

est fermé pour la topologie produit  $\tau^*(L^{\infty}(G_n)) \times \tau^*(L^{\infty}(G_{n+1}))$ .

Soit  $(H, L)$  une paire de Guelfand et  $\alpha$  la mesure de Haar de  $H$ .

**Lemme 3.3.1** Soient  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(H)$ ,  $f \in L^1(H)^{\natural}$ ,  $\|f\|_1 \leq 1$ . Alors

$$f^* * \varphi * f \ll \varphi.$$

**Preuve.** Soit  $(\pi^\varphi, \mathcal{H}^\varphi)$  la représentation unitaire associée à  $\varphi$  :

$$\varphi(h) = \langle \pi^\varphi(h)\xi^\varphi, \xi^\varphi \rangle_\varphi, \quad (h \in H).$$

L'opérateur  $\pi^\varphi(f)$  commute à la représentation  $\pi^\varphi$ , et

$$f^* * \varphi * f(h) = \langle \pi^\varphi(h)\pi^\varphi(f)\xi^\varphi, \pi^\varphi(f)\xi^\varphi \rangle_\varphi.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^N f^* * \varphi * f(h_j^{-1}h_i)c_i\bar{c}_j &= \left\| \sum_{i=1}^N c_i\pi^\varphi(h_i)\pi^\varphi(f)\xi^\varphi \right\|_\varphi^2 \\ &= \left\| \pi^\varphi(f) \sum_{i=1}^N c_i\pi^\varphi(h_i)\xi^\varphi \right\|_\varphi^2 \\ &\leq \|\pi^\varphi(f)\|^2 \left\| \sum_{i=1}^N c_i\pi^\varphi(h_i)\xi^\varphi \right\|_\varphi^2 \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^N c_i\varphi(h_i)\xi^\varphi \right\|_\varphi^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^N \varphi(h_j^{-1}h_i)c_i\bar{c}_j. \quad \square \end{aligned}$$

En utilisant ce dernier lemme on montre la propriété suivante :

**Lemme 3.3.2** Soit  $\mu$  une mesure bornée sur  $H$ . La forme linéaire  $\Lambda$  définie par

$$\Lambda(\varphi) = \int_{H \times H} \varphi(y^{-1}x)\mu(dx)\overline{\mu(dy)}$$

est semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  pour la topologie  $*$ -faible  $\tau^*(L^\infty(H))$ .

**Preuve.** Commençons par remarquer que  $\Lambda$  prend des valeurs positives sur  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  et que si  $\mu = \delta$ , alors  $\Lambda(\varphi) = \varphi(e)$ . On va montrer que, pour toute constante  $C \geq 0$ , l'ensemble

$$\{\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(H) \mid \Lambda(\varphi) \leq C\}$$

est fermé.

Soit  $(\varphi_n)$  une suite de  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  qui converge vers  $\varphi$ , c'est-à-dire que, pour tout  $f \in L^1(H)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_H \varphi_n(h) f(h) \alpha(dh) = \int_H \varphi(h) f(h) \alpha(dh).$$

On suppose que, pour tout  $n$ ,  $\Lambda(\varphi_n) \leq C$ . Régularisons la mesure  $\mu$  : pour  $f \in L^1(H)^{\natural}$ ,  $f * \mu \in L^1(H)$ . Supposons  $\|f\|_1 \leq 1$ . Par hypothèse, pour tout  $n$ ,

$$\mu^* * \varphi_n * \mu(e) \leq C.$$

Par suite, d'après le lemme 3.3.1,

$$\mu^* * f^* * \varphi_n * f * \mu(e) \leq C,$$

et puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^* * f^* * \varphi_n * f * \mu(e) = \mu^* * f^* * \varphi * f * \mu(e),$$

il en résulte que

$$\mu^* * f^* * \varphi * f * \mu(e) \leq C.$$

En considérant une approximation de l'identité  $(f_k) : f_k \in L^1(H)^{\natural}$ ,  $f_k \geq 0$ ,

$$\int_H f_k(h) \alpha(dh) = 1,$$

et pour toute fonction  $\psi$  continue bornée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_H \psi(h) f_k(h) \alpha(dh) = \psi(e),$$

on en déduit que

$$\mu^* * \varphi * \mu(e) \leq C. \quad \square$$

Soit  $M$  un sous-groupe fermé de  $H$ . On suppose  $M$  unimodulaire. On note  $\alpha_M$  la mesure de Haar de  $M$ , et **Res** l'application qui à une fonction sur  $H$  associe sa restriction à  $M$ . On note  $\mathcal{P}^{\natural}(M)$  l'ensemble des fonctions continues de type positif sur  $M$  et biinvariantes par  $M \cap L$ .

**Proposition 3.3.1** *L'ensemble*

$$\{(\phi, \psi) \in \mathcal{P}^{\natural}(H) \times \mathcal{P}^{\natural}(M) \mid \mathbf{Res}(\phi) \ll \psi\}$$

*est fermé.*

**Preuve.** Soient  $(\phi_n, \psi_n)$  une suite de  $\mathcal{P}^{\natural}(H) \times \mathcal{P}^{\natural}(M)$  qui converge vers  $(\phi, \psi)$ . On suppose que, pour tout  $n$  et pour toute fonction  $f \in L^1(M)$ ,

$$\int_{M \times M} \phi_n(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy) \leq \int_{M \times M} \psi_n(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy).$$

Soit

$$C > \int_{M \times M} \psi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy).$$

Il existe  $n_0$  tel que, si  $n \geq n_0$ ,

$$\int_{M \times M} \psi_n(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy) \leq C,$$

et donc

$$\int_{M \times M} \phi_n(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy) \leq C.$$

D'après le lemme 3.3.2 appliqué dans le cas de la paire de Gelfand  $(H, L)$  à la mesure  $\mu(dx) = f(x) \alpha_M(dx)$ ,

$$\int_{M \times M} \phi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy) \leq C.$$

Ceci étant vrai pour toute constante  $C$  pour laquelle

$$C > \int_{M \times M} \psi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy),$$

on en déduit que

$$\int_{M \times M} \phi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy) \leq \int_{M \times M} \psi(y^{-1}x) f(x) \overline{f(y)} \alpha_M(dx) \alpha_M(dy).$$



Ceci montre que  $\mathbf{Res}(\phi) \ll \psi$ , c'est-à-dire que l'ensemble

$$\{(\phi, \psi) \in \mathcal{P}^{\natural}(H) \times \mathcal{P}^{\natural}(M) \mid \mathbf{Res}(\phi) \ll \psi\}$$

est fermé.  $\square$

En appliquant cette dernière proposition dans le cas où  $H = G_{n+1}$  et  $M = G_n$ , on prouve que l'ensemble  $\mathcal{R}_n$  est fermé, pour tout  $n$ . Ainsi,  $\mathcal{Q}$  est fermé dans  $\mathcal{P}_1^{\infty}$ . Par suite, l'ensemble convexe  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  défini par

$$\mathcal{Q}_{\leq 1} := \left\{ \varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_n) \mid \mathbf{Res}_n^{n+1}(\varphi^{(n+1)}) \ll \varphi^{(n)} \ n = 1, 2, \dots \right\},$$

est un compact de  $\mathcal{Q}$ . En supposant que les groupes  $G_n$  sont séparables, l'ensemble  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  devient métrisable. Il reste à montrer que le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé pour pouvoir lui appliquer le théorème de la représentation intégrale de Choquet.

### 3.3.2 Propriétés algébriques de $\mathcal{Q}$

Le groupe limite inductive  $G_{\infty}$  étant un groupe topologique de Hausdorff, on peut associer, par la construction G.N.S., un triplet  $(\pi^{\varphi}, \mathcal{H}^{\varphi}, \xi^{\varphi})$  à toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{\infty})$ . On se propose de montrer que l'algèbre  $\pi^{\varphi}(G_{\infty})'$  est commutative. Comme, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $G_n$  est un sous-groupe de  $G_{\infty}$ , la représentation  $\pi^{\varphi}$  de  $G_{\infty}$  est encore une représentation unitaire continue de  $G_n$  dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$ . Posons  $\mathcal{H}_n^{\varphi} = \overline{\text{Vect}\{\pi^{\varphi}(g)\xi^{\varphi}, g \in G_n\}}$ , c'est un sous-espace hilbertien  $G_n$ -invariant de  $\mathcal{H}_n^{\varphi}$ . Par suite, on peut restreindre, pour tout  $g \in G_n$ , l'opérateur  $\pi^{\varphi}(g)$  à  $\mathcal{H}_n^{\varphi}$ . On obtient alors une représentation unitaire continue de  $G_n$  dans  $\mathcal{H}_n^{\varphi}$ , qu'on notera  $\pi_n^{\varphi}$ , ayant aussi  $\xi^{\varphi}$  pour vecteur cyclique.

En notant  $P_n$  la projection orthogonale de  $\mathcal{H}^{\varphi}$  sur  $\mathcal{H}_n^{\varphi}$ , on montre :

#### Lemme 3.3.3

- (i)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\varphi}$  est dense dans  $\mathcal{H}^{\varphi}$ .
- (ii) L'opérateur de projection  $P_n$  converge fortement vers l'identité  $I$  de  $\mathcal{H}^{\varphi}$ .

**Preuve.** On a  $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\varphi} \subseteq \mathcal{H}^\varphi$ . Il reste alors à montrer l'inclusion inverse. On sait déjà que  $\mathcal{H}^\varphi = \overline{\text{Vect}\{\pi^\varphi(g)\xi^\varphi, g \in G_\infty\}}$ . Or,

$$\{\pi^\varphi(g)\xi^\varphi, g \in G_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\pi^\varphi(g)\xi^\varphi, g \in G_n\},$$

et, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\{\pi^\varphi(g)\xi^\varphi, g \in G_n\} \subset \mathcal{H}_n^\varphi.$$

Comme  $\mathcal{H}_n^\varphi$  est un espace vectoriel fermé,

$$\mathcal{H}^\varphi \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\varphi},$$

ce qui prouve l'inclusion inverse.

La deuxième assertion découle de la première. Soit  $v \in \mathcal{H}^\varphi$ . Comme  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\varphi$  est dense dans  $\mathcal{H}^\varphi$ , il existe une suite  $(v_l)_l \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n^\varphi$  telle que  $\lim_{l \rightarrow +\infty} \|v - v_l\|_{\mathcal{H}^\varphi} = 0$ . Comme les sous-espaces hilbertiens  $(\mathcal{H}_n^\varphi)_n$  forment une suite croissante, pour tout  $l \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $n_l \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq n_l$ ,  $v_l \in \mathcal{H}_n^\varphi$ .

Fixons  $n$  tel que  $n_l \leq n \leq l$ . Comme  $v_l \in \mathcal{H}_n^\varphi$ , on aura que  $P_n v_l = v_l$ . Par suite,

$$\begin{aligned} \|P_n v - v\|_{\mathcal{H}^\varphi} &= \|P_n v - P_n v_l + v_l - v\|_{\mathcal{H}^\varphi} \\ &\leq \|P_n v - P_n v_l\|_{\mathcal{H}^\varphi} + \|v_l - v\|_{\mathcal{H}^\varphi} \\ &\leq (\|P_n\| + 1)\|v_l - v\|_{\mathcal{H}^\varphi} \leq 2\|v_l - v\|_{\mathcal{H}^\varphi}. \end{aligned}$$

Or, si  $n \rightarrow +\infty$ ,  $l \rightarrow +\infty$ . Ainsi, par cette dernière inégalité, pour tout  $v \in \mathcal{H}^\varphi$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n v - v\|_{\mathcal{H}^\varphi} = 0. \quad \square$$

**Proposition 3.3.2** *Pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\mathfrak{h}}(G_\infty)$ , le commutant  $\mathcal{A} = \pi^\varphi(G_\infty)'$  de la représentation  $\pi^\varphi$  qui est associée à  $\varphi$  par la construction G.N.S., est commutatif.*

**Preuve.** Soit  $B \in \mathcal{A}$ . Pour tout  $g \in G_\infty$ , l'opérateur  $B$  commute avec  $\pi^\varphi(g)$ . En particulier, ceci est vrai pour tout  $g \in G_n$ . D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_n B P_n$  qui est un opérateur de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_n^\varphi)$  commute avec la représentation  $\pi_n^\varphi$  de  $G_n$  dans  $\mathcal{H}_n^\varphi$ . Comme  $\mathcal{H}_n^\varphi$  est  $G_n$ -invariant, pour tout  $g \in G_n$ , la projection  $P_n$  commute avec  $\pi^\varphi(g)$ . Par conséquent, pour tout  $g \in G_n$ ,

$$P_n B P_n \pi_n^\varphi(g) = P_n B \pi_n^\varphi(g) P_n = P_n \pi_n^\varphi(g) B P_n = \pi_n^\varphi(g) P_n B P_n.$$

D'après le théorème 2.3.1, l'algèbre  $\pi_n^\varphi(G_n)'$  est commutative. Par suite, pour deux opérateurs  $B_1$  et  $B_2$  de  $\pi^\varphi(G_\infty)'$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$P_n B_1 P_n P_n B_2 P_n = P_n B_2 P_n P_n B_1 P_n,$$

$$P_n B_1 P_n B_2 P_n = P_n B_2 P_n B_1 P_n.$$

Puisque  $K_n \subset K_{n+1}$ , alors  $\mathcal{H}_{K_{n+1}} \subset \mathcal{H}_{K_n}$ , et donc

$$P_{n+1} = P_n P_{n+1} = P_{n+1} P_n.$$

On a aussi, pour tout  $n, m \geq 1$ ,

$$P_{n+m} = P_{n+m} P_n = P_n P_{n+m}.$$

Par suite, pour tout  $m, m', n \geq 1$ ,

$$P_{n+m} B_1 P_n B_2 P_{n+m'} = P_{n+m} B_2 P_n B_1 P_{n+m'}.$$

En utilisant le fait que  $P_n$  converge fortement vers  $I$  et en faisant tendre  $m, m'$  vers  $\infty$ , on obtient

$$B_1 P_n B_2 = B_2 P_n B_1.$$

Enfin, en faisant tendre  $n$  vers  $\infty$ , on conclut que

$$B_1 B_2 = B_2 B_1. \quad \square$$

Au moyen de cette dernière proposition, on montre que le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  est réticulé. Cela fait l'objet du théorème suivant :

**Théorème 3.3.1** *Pour la paire sphérique  $(G_\infty, K_\infty)$ , le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  est réticulé.*

**Preuve.** Montrer que  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{\infty})$  est réticulé revient à montrer, d'après le théorème 2.2.2, que l'algèbre  $\mathcal{A} = \pi^{\varphi}(G_{\infty})'$  est commutative, ce qui est évident d'après la proposition précédente.  $\square$

On va dans ce qui suit prouver que le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé.

**Lemme 3.3.4** *Soient  $H$  un groupe topologique localement compact d'élément neutre  $e_H$ ,  $L$  un sous-groupe fermé de  $H$  et  $(u_n)_n$  une suite de fonctions continues de type positif  $L$ -biinvariantes sur  $H$ .*

(a) Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(e_H) < \infty,$$

alors la série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge uniformément sur  $H$  et sa somme est une fonction continue de type positif  $L$ -biinvariante.

(b) Si, pour  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n u_k \ll \varphi,$$

où  $\varphi$  est une fonction continue de type positif  $L$ -biinvariante, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ll \varphi.$$

(c) Si  $(v_n)_n$  est une autre suite telle que  $v_n \ll u_n$  pour tout  $n$ , alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \ll \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

**Preuve.** (a) Posons, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ . Par la convergence de la série  $\sum_n u_n(e_H)$ , il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\sup_{n \geq 1} S_n(e_H) \leq c.$$

En posant  $d = \sup_{n \geq 1} S_n(e_H)$ , pour tout  $\epsilon \geq 0$ , il existe  $n_0 \geq 1$  tel que

$$d - \epsilon < S_{n_0}(e_H) \leq d.$$

Ainsi, pour tous  $l \geq m \geq n_0$ ,  $m, l \in \mathbb{N}^*$ ,

$$S_l(e_H) \leq d \text{ et } S_m(e_H) \geq d - \epsilon.$$

Par suite,

$$(S_l - S_m)(e_H) \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite  $\{S_n(e_H)\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy de  $\mathbb{R}$ . Par conséquent, la suite  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  est une suite de Cauchy de  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  pour la topologie de la convergence uniforme sur  $H$ . En effet, pour tout  $\epsilon \geq 0$ , tout  $l \geq m \geq n_0$ ,

$$|(S_l - S_m)(h)| \leq \|S_l - S_m\|_{\infty} = (S_l - S_m)(e_H) \leq \epsilon.$$

$\mathcal{P}(H)$  étant complet pour la topologie de la convergence uniforme sur  $H$ , la suite de Cauchy  $\{S_n\}_{n \geq 1}$  converge pour cette topologie dans  $\mathcal{P}(H)$  vers  $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . Puisque la convergence uniforme sur  $H$  implique la convergence simple, pour tous  $s_1, s_2 \in L$ ,

$$u(s_1 h s_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(s_1 h s_2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(h) = u(h).$$

Donc,  $u$  est biinvariante par  $L$  et est ainsi un élément de  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$ .

(b) Par hypothèse, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n \ll u$ . Ainsi,  $S_n(e_H) \leq u(e_H)$ . Aussi, on a  $S_{n+1} - S_n = u_n \gg 0$ . Donc, pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_{n+1}(e_H) \geq S_n(e_H)$ . Par suite,  $\{S_n(e_H)\}_{n \geq 1}$  forme une suite croissante et majorée de  $\mathbb{R}^+$ . Donc,  $\sum_{j=0}^{\infty} u_n(e_H) < \infty$ , et par (a), la série  $\sum_{j=0}^{\infty} u_n$  converge dans  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  uniformément sur  $H$ .

(c) La suite  $T_n = \sum_{j=0}^{n-1} v_j$  est uniformément majorée par  $u = \sum_n u_n$ , qui est un élément de  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$ . Ainsi, d'après (b), la série  $\sum_n v_n$  converge dans  $\mathcal{P}^{\natural}(H)$  uniformément sur  $H$ .  $\square$

La proposition suivante est indispensable pour démontrer le fait que le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé. Elle généralise celle qui est indiquée par G. Olshanski dans le cas particulier des matrices hermitiennes de dimension infinie (voir [40]).

**Proposition 3.3.3** *Pour tout système sous-projectif  $\varphi = \{\varphi^{(k)}\}_k$  de  $\mathcal{Q}$ , il existe un système projectif  $\Phi = \{\Phi^{(k)}\}_k$  et des fonctions  $\psi^{(k)} \in \mathcal{P}^{\natural}(G_k)$  tels que, pour tout  $k$ ,*

$$\varphi^{(k)} = \Phi^{(k)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi^{(k+j)}). \quad (3.2)$$

*Les fonctions  $\Phi^{(k)}$  et  $\psi^{(k)}$  sont déterminées de manière unique.*

**Preuve.** Soit  $\varphi \in \mathcal{Q}$ . Posons, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\psi^{(k)} = \varphi^{(k)} - \mathbf{Res}_k^{k+1}(\varphi^{(k+1)}). \quad (3.3)$$

D'après la définition de  $\mathcal{Q}$ , pour tout  $k \geq 1$ ,  $\psi^{(k)}$  est une fonction de type positif sur  $G_k$ . Par itération, l'égalité (3.3) nous permet aussi d'avoir, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\varphi^{(k)} = \psi^{(k)} + \mathbf{Res}_k^{k+1}(\psi^{(k+1)}) + \dots + \mathbf{Res}_k^{k+n-1}(\psi^{(k+n-1)}) + \mathbf{Res}_k^{k+n}(\varphi^{(k+n)}).$$

En posant  $\Psi^{(k,n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi^{(k+j)})$ , pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\varphi^{(k)} = \Psi^{(k,n)} + \mathbf{Res}_k^{k+n}(\varphi^{(k+n)}).$$

On remarque alors que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\Psi^{(k,n)} \ll \varphi^{(k)}$ , ce qui implique, d'après (b) du lemme 3.3.4, que la suite  $\{\Psi^{(k,n)}\}_n$  converge uniformément sur  $G_k$  vers la fonction  $\Psi^{(k)}$  de  $\mathcal{P}^1(G_k)$  qui est donnée par

$$\Psi^{(k)} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi^{(k+j)}).$$

Ainsi la suite  $\mathbf{Res}_k^{k+n}(\varphi^{(k+n)})$  converge uniformément sur  $G_k$ . Notons  $\Phi^{(k)}$  sa limite. Comme l'application de restriction  $\mathbf{Res}_k^{k+1}$  est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur  $G_k$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Res}_k^{k+n}(\varphi^{(k+n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Res}_k^{k+1+n}(\varphi^{(k+1+n)}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{Res}_k^{k+1} \circ \mathbf{Res}_{k+1}^{k+1+n})(\varphi^{(k+1+n)}) \\ &= \mathbf{Res}_k^{k+1} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{Res}_{k+1}^{k+1+n}(\varphi^{(k+1+n)}) \right) \\ &= \mathbf{Res}_k^{k+1}(\Phi^{(k+1)}). \end{aligned}$$

Le système  $\{\Phi^{(k)}\}_{k \geq 1}$  est alors un système projectif. Pour démontrer l'unicité, supposons que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\varphi^{(k)}$  admet une autre décomposition :

$$\varphi^{(k)} = \Phi_1^{(k)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi_1^{(k+j)}).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\psi^{(k)} &= \varphi^{(k)} - \mathbf{Res}_k^{k+1}(\varphi^{(k+1)}) \\
&= \Phi_1^{(k)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi_1^{(k+j)}) \\
&\quad - \mathbf{Res}_k^{k+1} \left( \Phi_1^{(k+1)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_{k+1}^{k+1+j}(\psi_1^{(k+1+j)}) \right) \\
&= \Phi_1^{(k)} - \mathbf{Res}_k^{k+1}(\Phi_1^{(k+1)}) + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi_1^{(k+j)}) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+1}(\mathbf{Res}_{k+1}^{k+1+j}(\psi_1^{(k+1+j)})) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi_1^{(k+j)}) - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{k+j}(\psi_1^{(k+j)}) \\
&= \psi_1^{(k)}. \quad \square
\end{aligned}$$

**Corollaire 3.3.1** Soient  $\varphi_1 = \{\varphi_1^{(n)}\}_n$  et  $\varphi_2 = \{\varphi_2^{(n)}\}_n$  deux systèmes sous-projectifs de  $\mathcal{Q}$  tels que  $\varphi_1 \lll \varphi_2$ , dans le sens que, pour tout  $n$ ,  $\varphi_1^{(n)} \lll \varphi_2^{(n)}$ . Alors, pour tout  $n$ ,  $\Phi_1^{(n)} \lll \Phi_2^{(n)}$  et  $\psi_1^{(n)} \lll \psi_2^{(n)}$ .

**Preuve.** On pose

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_0.$$

En raison de l'unicité de la décomposition donnée par la formule (3.2),

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_0,$$

et pour tout  $n$ ,

$$\psi_2^{(n)} = \psi_1^{(n)} + \psi_0^{(n)}.$$

Comme les fonctions  $\Phi_0^{(n)}$  et  $\psi_0^{(n)}$  appartiennent à  $\mathcal{P}^{\natural}(G(n))$ , il en découle que, pour tout  $n$ ,  $\Phi_1^{(n)} \lll \Phi_2^{(n)}$  et  $\psi_1^{(n)} \lll \psi_2^{(n)}$ .  $\square$

D'après le corollaire 2.3.1, pour tout  $n \geq 1$ , le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G_n)$  est réticulé. Aussi, d'après le théorème 3.3.1, le cône  $\mathcal{P}^{\natural}(G_{\infty})$  est réticulé. En utilisant la décomposition de la proposition 3.3.3, on montre que :

**Proposition 3.3.4** Le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé.

**Preuve.** Soient  $\varphi_1 = \{\varphi_1^{(n)}\}_n$  et  $\varphi_2 = \{\varphi_2^{(n)}\}_n$  deux systèmes sous-projectifs de  $\mathcal{Q}$ . D'après la proposition 3.3.3,

$$\varphi_1^{(n)} = \Phi_1^{(n)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi_1^{(n+j)}),$$

$$\varphi_2^{(n)} = \Phi_2^{(n)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi_2^{(n+j)}).$$

Posons, pour tout  $n$ ,

$$\Phi_{Min}^{(n)} = \Phi_1^{(n)} \wedge \Phi_2^{(n)},$$

$$\psi_{Min}^{(n)} = \psi_1^{(n)} \wedge \psi_2^{(n)}.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{Q}$ . Si  $\varphi \lll \varphi_1$  et  $\varphi \lll \varphi_2$ , d'après le corollaire 3.3.1, pour tout  $n$ ,  $\Phi^{(n)} \ll \Phi_1^{(n)}$ ,  $\Phi^{(n)} \ll \Phi_2^{(n)}$ , et donc  $\Phi^{(n)} \ll \Phi_{Min}^{(n)}$ . D'autre part, pour tout  $n$ ,  $\psi^{(n)} \ll \psi_1^{(n)}$ ,  $\psi^{(n)} \ll \psi_2^{(n)}$ , et donc  $\psi^{(n)} \ll \psi_{Min}^{(n)}$ . Comme on a  $\psi_{Min}^{(n)} \ll \psi_1^{(n)}$ , d'après (c) du lemme 3.3.4, la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi_{Min}^{(n+j)})$  converge dans  $\mathcal{P}^{\natural}(G_n)$  uniformément sur  $G_n$ . On pose alors, pour tout  $n$ ,

$$\varphi_{Min}^{(n)} = \Phi_{Min}^{(n)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi_{Min}^{(n+j)}).$$

On a, pour tout  $n$ ,  $\varphi^{(n)} \ll \varphi_{Min}^{(n)}$ , et alors le couple  $(\varphi_1, \varphi_2)$  possède un plus grand minorant  $\varphi_{Min} = \{\varphi_{Min}^{(n)}\}_n$ . Posons maintenant, pour tout  $n$ ,

$$\Phi_{Max}^{(n)} = \Phi_1^{(n)} \vee \Phi_2^{(n)},$$

$$\psi_{Max}^{(n)} = \psi_1^{(n)} \vee \psi_2^{(n)}.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{Q}$ . Si  $\varphi_1 \lll \varphi$  et  $\varphi_2 \lll \varphi$ , d'après le corollaire 3.3.1, pour tout  $n$ ,  $\Phi_1^{(n)} \ll \Phi^{(n)}$ ,  $\Phi_2^{(n)} \ll \Phi^{(n)}$ , et donc  $\Phi_{Max}^{(n)} \ll \Phi^{(n)}$ . Aussi, pour tout  $n$ ,  $\psi_1^{(n)} \ll \psi^{(n)}$ ,  $\psi_2^{(n)} \ll \psi^{(n)}$ , et donc  $\psi_{Max}^{(n)} \ll \psi^{(n)}$ . Comme, pour tout  $n$ ,  $\psi_{Max}^{(n)} \ll \psi_1^{(n)} + \psi_2^{(n)}$ , d'après (c) du lemme 3.3.4, la série  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_k^{n+j}(\psi_{Max}^{(n+j)})$  converge dans  $\mathcal{P}^{\natural}(G_n)$  uniformément sur  $G_n$ . On pose alors, pour tout  $n$ ,

$$\varphi_{Max}^{(n)} = \Phi_{Max}^{(n)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi_{Max}^{(n+j)}).$$

On a, pour tout  $n$ ,  $\varphi_{Max}^{(n)} \ll \varphi^{(n)}$ , et ainsi le couple  $(\varphi_1, \varphi_2)$  possède un plus petit majorant  $\varphi_{Max} = \{\varphi_{Max}^{(n)}\}_n$ . Par suite, le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé.  $\square$



### 3.3.3 Énoncé et preuve du théorème de Bochner-Godement généralisé

On commence par déterminer les points extrémaux de l'ensemble  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$ . Pour cela on a besoin de considérer, pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , les sous-ensembles suivant de  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  :

$$\mathcal{P}^n = \left\{ \varphi \in \prod_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_m) \mid \begin{array}{l} \varphi^{(m)} = \mathbf{Res}_m^n(\varphi^{(n)}) \text{ pour } m = 1, \dots, n \\ \varphi^{(m)} = 0 \text{ pour } m = n+1, \dots \end{array} \right\},$$

où pour tout  $m = 1, \dots, n-1$ ,  $\mathbf{Res}_m^n = \mathbf{Res}_m^{m+1} \circ \mathbf{Res}_{m+1}^{m+2} \circ \dots \circ \mathbf{Res}_{n-1}^n$ .

Les  $\mathcal{P}^n$ , avec  $n$  fini, sont des systèmes sous-projectifs d'ordre fini  $n$ , et l'application

$$\begin{aligned} \iota : \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_n) &\rightarrow \mathcal{P}^n \\ \varphi^{(n)} &\longmapsto (\mathbf{Res}_1^n(\varphi^{(n)}), \mathbf{Res}_2^n(\varphi^{(n)}), \dots, \mathbf{Res}_{n-1}^n(\varphi^{(n)}), \varphi^{(n)}, 0, \dots) \end{aligned}$$

définit un isomorphisme linéaire.

De plus, comme  $\mathbf{Res}_n^{n+1}(\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{n+1})) \subset \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_n)$ , l'ensemble  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$  peut être identifié à la limite projective de la famille  $\{\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_n)\}_{n \geq 1}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty}) = \mathcal{P}^{\infty}$  et un élément  $\varphi \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$  détermine un système projectif  $\{\varphi^{(n)}\}_n$ ,  $\varphi^{(n)} \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_n)$  avec  $\varphi^{(n)} = \mathbf{Res}_n(\varphi)$ .

Soit  $\mathcal{E}_{\infty}$  l'ensemble des points extrémaux non nuls de  $\mathcal{P}^{\infty}$ . Il est identifié à l'ensemble  $\text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G_{\infty}))$  des points extrémaux non nuls de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_{\infty})$ . Soit  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des points extrémaux de  $\mathcal{P}^n$ . Un élément  $\varphi \in \mathcal{E}_n$  est l'image par l'isomorphisme  $\iota$  d'un élément  $\varphi^{(n)} \in \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G_n))$ .

Le théorème suivant donne les points extrémaux de l'ensemble  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$ .

**Théorème 3.3.2** *Les points extrémaux de l'ensemble  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  sont composées d'éléments des types suivant :*

$$\mathcal{E}_{\infty} : \text{type } \infty : \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G_{\infty})),$$

$$\mathcal{E}_n : \text{type } n : \text{ext}(\mathcal{P}^n),$$

et on a

$$\text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1}) = \{0\} \cup \mathcal{E}_{\infty} \cup \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \right). \quad (3.4)$$

Les ensembles  $\mathcal{E}_{\infty}$ ,  $\mathcal{E}_n$  ( $n \geq 1$ ) sont disjoints.

**Preuve.** (a) Montrons que  $\varphi \in \mathcal{E}_n$  est extrémal. On suppose  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{Q}_{\leq 1}$ . Donc, pour tout  $n$ ,

$$\varphi^{(n)} = \varphi_1^{(n)} + \varphi_2^{(n)}.$$

Ainsi  $\varphi_1^{(n)}$  et  $\varphi_2^{(n)}$  sont proportionnels à  $\varphi^{(n)}$  :

$$\varphi_1^{(n)} = \lambda_1 \varphi^{(n)}, \quad \varphi_2^{(n)} = \lambda_2 \varphi^{(n)}.$$

D'autre part,

$$\varphi^{(n-1)} = \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)} = \varphi_1^{(n-1)} + \varphi_2^{(n-1)} \gg \lambda_1 \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)} + \lambda_2 \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)} = \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)}.$$

Par suite,

$$\varphi_1^{(n-1)} = \lambda_1 \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)}, \quad \varphi_2^{(n-1)} = \lambda_2 \mathbf{Res}_{n-1}^n \varphi^{(n)},$$

et alors

$$\varphi_1 = \lambda_1 \varphi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 \varphi.$$

(b) Montrons que  $\varphi \in \mathcal{E}_\infty$  est extrémal. Supposons que  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  avec  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{Q}_{\leq 1}$ . Comme  $\varphi$  est un système projectif, pour tout  $m$ ,  $\psi^{(m)} = 0$ . Donc,  $\psi_1^{(m)} = 0$ ,  $\psi_2^{(m)} = 0$ , et alors  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_1^{\sharp}(G_\infty)$ . Par suite

$$\varphi_1 = \lambda_1 \varphi, \quad \varphi_2 = \lambda_2 \varphi.$$

(c) Soit  $\varphi$  un élément extrémal non nul de  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$ , on écrit

$$\varphi^{(n)} = \Phi^{(n)} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{Res}_n^{n+j}(\psi^{(n+j)}),$$

c'est une décomposition en somme de deux éléments de  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  :

Premier cas :  $\psi^{(m)} = 0$ , pour tout  $m$ , et alors  $\varphi \in \mathcal{E}_\infty$ .

Deuxième cas :  $\Phi^{(n)} = 0$ , pour tout  $n$ , et alors

$$\varphi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots,$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(j)} &= \mathbf{Res}_j^n(\psi^{(n)}) & \text{si } j \leq n, \\ &= 0 & \text{si } j > n. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe  $n_0$  tel que  $\varphi = \Psi_{n_0}$ , avec  $\psi^{(n_0)} \in \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\sharp}(G_{n_0}))$ . On peut alors conclure que  $\varphi \in \mathcal{E}_{n_0}$ .  $\square$

On est maintenant en mesure d'énoncer la généralisation du théorème de Bochner-Godement aux limites inductives de paires de Guelfand sous l'hypothèse que tous les  $G_n$  sont séparables.

**Théorème 3.3.3** *Soit  $(G_\infty, K_\infty)$  une limite inductive d'une suite croissante de paires de Guelfand  $(G_n, K_n)_n$  avec l'hypothèse que tous les  $G_n$  sont séparables. Alors pour toute fonction  $\varphi$  de  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$ , il existe sur le borélien  $\Omega = \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G_\infty))$ , une unique mesure  $\mu$  positive et bornée telle que :*

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \mu(d\omega).$$

**Preuve.** L'ensemble  $\mathcal{Q}_{\leq 1}$  étant convexe, compact et métrisable, il satisfait les hypothèses du théorème de Choquet. Ainsi,  $\text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1})$  est un borélien et un de ses éléments  $q$  est représentable au moyen d'une mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1})$ , tel qu'on a pour toute forme linéaire continue  $L$

$$L(q) = \int_{\text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1})} L(p) \nu(dp) \quad (q \in \mathcal{Q}_{\leq 1}). \quad (3.5)$$

De plus, le fait que le cône  $\mathcal{Q}$  est réticulé (Proposition 3.3.4) implique, d'après (iii) du théorème de Choquet que la mesure  $\nu$  est unique. D'autre part, on déduit de la formule (3.4) que

$$\Omega = \text{ext}(\mathcal{P}_1^{\natural}(G_\infty)) = \text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1}) \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n \cup \{0\} \right).$$

Ainsi,  $\Omega$  est borélien car différence entre  $\text{ext}(\mathcal{Q}_{\leq 1})$ , qui est un borélien, et une réunion dénombrable de boréliens.

Soit  $\varphi$  un élément de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_\infty)$ . On sait que  $\varphi$  détermine une suite  $\{\varphi^{(n)}\}_{n \geq 1}$  où  $\varphi^{(n)} = \mathbf{Res}_n(\varphi)$ . Prenons pour  $L$ , dans (3.5), la forme linéaire

$$\varphi^{(n)} \mapsto (\varphi^{(n)}, f) = \int_{G_n} \varphi^{(n)}(h) f(h) \alpha_n(dh),$$

où  $f \in L^1(G_n)$  et  $\alpha_n$  est la mesure de Haar de  $G_n$ . En considérant, pour tout  $n$ , une approximation de  $g \in G_n$ ,  $(f_k) : f_k \in L^1(G_n)$ ,  $f_k \geq 0$ ,

$$\int_{G_n} f_k(h) \alpha_n(dh) = 1,$$

et pour toute fonction  $\psi$  continue bornée :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{G_n} \psi(h) f_k(h) \alpha_n(dh) = \psi(g),$$

on déduit que, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\varphi^{(n)}(g) = \int_{\text{ext}(\Omega)} \omega(g) \nu^{(\infty)}(d\omega) + \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\mathcal{E}_n} \omega(g) \nu^{(k)}(d\omega),$$

où  $\nu^{(\infty)}$  (respectivement  $\{\nu^{(k)}\}_{k \geq n}$ ) sont les restrictions de la mesure  $\nu$  à  $\text{ext}(\Omega)$  (respectivement  $\{\mathcal{E}_k\}_{k \geq n}$ ). Ainsi, on obtient

$$\varphi^{(n)} - \mathbf{Res}_n^{n+1}(\varphi^{(n+1)}) = \int_{\mathcal{E}_n} \omega(g) \nu^{(n)}(d\omega).$$

Comme la suite  $\{\varphi^{(n)}\}_{n \geq 1}$  forme un système projectif, pour tout  $g \in G_n$  et tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_{\mathcal{E}_n} \omega(g) \nu^{(n)}(d\omega) = 0.$$

Puisque  $\omega(e) = 1$ , pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\nu^{(n)}(\mathcal{E}_n) = 0.$$

Ainsi, la mesure  $\nu$  ne charge pas les sous-ensembles  $\{\mathcal{E}_n\}_{n \geq 1}$ , et elle est donc concentrée sur  $\mathcal{E}_\infty = \Omega$ . Par suite, tout élément  $\varphi$  de  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_\infty)$  admet, pour tout  $g \in G_\infty$ , la représentation intégrale suivante

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \nu^{(\infty)}(d\omega).$$

Enfin, tout  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  s'écrit de manière unique comme  $\varphi(g) = \lambda \varphi_0(g)$  avec  $\varphi_0 \in \mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_\infty)$  et  $\lambda = \varphi(e) \geq 0$ . Ainsi,  $\varphi$  est représentable via une mesure  $\mu$  égale à  $\lambda \nu_0^{(\infty)}$ . Où,  $\nu_0^{(\infty)}$  vérifie

$$\varphi_0(g) = \int_{\Omega} \omega(g) \nu_0^{(\infty)}(d\omega). \quad \square$$

**Remarque 3.3.2** On ne connaît pas de topologie rendant  $\mathcal{P}_{\leq 1}^{\natural}(G_\infty)$  compact et permettant par conséquent une application directe du théorème de Choquet sans l'utilisation de  $\mathcal{Q}$ . T. Hirai et E. Hirai ont étudié ce problème dans [31].

**Remarque 3.3.3** Étant donnée une paire de Guelfand généralisée, i.e. une paire sphérique d'Olshanski, un des problèmes intéressants est de déterminer explicitement l'ensemble des points extrémaux  $\Omega$ . Ceci est connu dans de nombreuses situations (voir par exemple [19], [39], [40], [38] et [51]). Un autre problème est, étant donnée une fonction  $\varphi \in \mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$ , de déterminer la mesure  $\mu$  sur  $\Omega$  qui représente  $\varphi$  (voir par exemple [41]).

# Chapitre 4

## Analyse harmonique sur l'espace des matrices complexes

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous déterminons les points extrémaux de l'ensemble convexe  $\mathfrak{P}$  dans le cas de la limite inductive  $(G_\infty, K_\infty)$  constituée par la suite des groupes de déplacements  $G_n = K_n \times V_n$ , où  $V_n = M(n, \mathbb{C})$  est l'espace des matrices complexes carrées  $n \times n$  et  $K_n = U(n) \times U(n)$  agissant sur  $V_n$  comme suit :  $k.x = uxv^*$  ( $k = (u, v) \in K_n$ ,  $x \in V_n$ ). Notons que  $G_\infty = K_\infty \times V_\infty$ , où

$$V_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n.$$

La loi du groupe limite inductive sur  $G_\infty = K_\infty \times V_\infty$  est donnée par

$$(u, x)(v, y) = ((u_1v_1, u_2v_2), x + u_1yu_2^*),$$

où

$$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in K_\infty \text{ et } x, y \in V_\infty.$$

Une fonction  $\varphi$  sur  $G_\infty$  qui est invariante à droite par  $K_\infty$  ne dépend pas de la variable  $u \in K_\infty$ , et il est ainsi possible de la voir comme une fonction sur  $V_\infty$  :  $\varphi(g) = \varphi((u, x)) = \varphi_0(x)$ . Si de plus la fonction  $\varphi$  est  $K_\infty$ -biinvariante, alors la fonction  $\varphi_0$  définie sur  $V_\infty$  est  $K_\infty$ -invariante. De plus, la fonction  $\varphi$  est de type positif sur  $G_\infty$  si et seulement si la fonction  $\varphi_0$  est de type positif.

Notons  $D_\infty$  le sous-ensemble des matrices diagonales de  $V_\infty$ . Un élément de  $D_\infty$  s'écrit comme  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots)$ , avec  $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}_+$  et  $a_j = 0$  pour  $j$  assez grand. Toute matrice  $x \in V_\infty$  peut être diagonalisée sous la forme

$$x = u \text{diag}(a_1, a_2, \dots) v \quad (u, v \in U(\infty)).$$

Par suite, toute fonction  $K_\infty$ -invariante sur  $V_\infty$  est déterminée de façon unique par sa restriction au sous-ensemble  $D_\infty$ .

Dans de nombreux cas, les fonctions sphériques de type positif (les points extrémaux de  $\mathfrak{P}$ ) ont été déterminées. On peut citer, par exemple les travaux de Schoenberg [48] sur  $\mathbb{R}^{(\infty)}$  et ceux de G. Olshanski, A. Vershik [40] et M. Bouali [7] sur l'espace  $Herm(\infty; \mathbb{C})$  des matrices hermitiennes de dimension infinie. Après cette première section introductive, nous déterminons, dans la deuxième section, les fonctions sphériques de type positif relativement à la paire  $(G_n, K_n)$ . La troisième section est consacrée à la détermination des fonctions sphériques de type positif relativement à la paire  $(G_\infty, K_\infty)$ . De plus, en s'inspirant du travail de M. Bouali (voir [8]), et en utilisant le théorème de Bochner généralisé (Théorème 4.3.5), nous y démontrons une formule de type Lévy-Khinchine pour les fonctions de type négatif sur  $G_\infty$ .

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

**Théorème** Les fonctions sphériques de type positif  $\varphi$  sur  $V_\infty$  sont données par :

$$\varphi(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)) = \Pi_\omega(\xi_1) \dots \Pi_\omega(\xi_n),$$

où

$$\Pi_\omega(\lambda) := \Pi(\lambda; \alpha, \gamma) = e^{-\gamma\lambda^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha_k \lambda^2},$$

avec

$$\gamma \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

## 4.2 Détermination des fonctions sphériques de type positif sur $(G_n, K_n)$

### 4.2.1 Partie radiale du laplacien sur $V_n$

Dans ce paragraphe, on va déterminer les fonctions sphériques de type positif relativement à la paire  $(G_n, K_n)$ . Une formule explicite de ces fonctions a été annoncé pour la première fois dans [2]. Elle a aussi été démontrée dans [37] par une méthode liée à l'inverse de la transformée d'Abel pour le groupe  $SU(n, n)$ . Elle a aussi été déterminée dans [1], au moyen d'une contraction, à partir des fonctions sphériques sur l'espace homogène  $SU(n, n)/S(U(n) \times U(n))$ . Nous présentons ici une méthode analogue à celle utilisée par J. Faraut dans le cas des matrices hermitiennes (voir [23]) pour donner une nouvelle preuve simple et directe du résultat.

Nous considérons l'espace  $V_n$  des matrices carrées complexes, sur lequel opère le groupe  $K_n$  par les transformations

$$T(k) : x \mapsto k.x = uxv^* \quad (k = (u, v) \in U(n) \times U(n)).$$

Toute matrice  $x \in V_n$  admet une décomposition polaire

$$x = u \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) v, \quad u, v \in U(n), \lambda_j \geq 0.$$

Ainsi toute fonction  $f$  qui est  $K_n$ -invariante sur  $V_n$  ne dépend que de  $\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,

$$f(x) = F(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où  $F$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^n$  et invariante par  $\mathfrak{S}_n \times \{-1, 1\}^n$ .

Considérons sur  $V_n$  la structure euclidienne définie par  $\langle x|y \rangle = \Re \operatorname{tr}(xy^*)$ . Le laplacien associé à cette structure s'écrit,

$$\begin{aligned} \Delta = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial(\Re x_{jj})^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\Im x_{jj})^2} \right) &+ \sum_{j < k}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial(\Re x_{jk})^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\Re x_{kj})^2} \right) \\ &+ \sum_{j < k}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial(\Im x_{jk})^2} + \frac{\partial^2}{\partial(\Im x_{kj})^2} \right). \end{aligned}$$

Le laplacien est invariant par le groupe  $K_n$  dans le sens suivant : si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,

$$\Delta f(T(k)) = \Delta(f(T(k))) \quad (k \in K_n).$$

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $V_n$  et invariante par le groupe  $K_n$  :

$$f(uxv^*) = f(x) \quad (k = (u, v) \in K_n).$$

La fonction  $\Delta f$  est aussi invariante par le groupe  $K_n$ , ce qui conduit à introduire l'opérateur  $L$  défini par :

$$\Delta f(x) = LF(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

L'opérateur  $L$  est appelé *partie radiale* du laplacien.

**Proposition 4.2.1**

(i) Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  invariante par  $K_n$ . Alors

$$\Delta f(x) = LF(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

où

$$LF = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} \right) + 2 \sum_{i < j} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \right) + 2 \sum_{i < j} \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} \right).$$

(ii) La formule précédente s'écrit aussi

$$LF = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right) (D(\lambda)F(\lambda)),$$

où  $D$  est donné par

$$D(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2).$$

Pour la preuve de la proposition 4.2.1, nous allons utiliser le lemme IX-2.2 de [23] dont l'énoncé est :

*Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  dans un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  de dimension finie. Soient  $\mathcal{A}$  un endomorphisme de  $\mathcal{V}$ ,  $a \in \mathcal{V}$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que, pour  $|t| < \epsilon$ ,  $\exp t\mathcal{A} \cdot a \in \mathcal{U}$ . On suppose que, pour  $|t| < \epsilon$ ,*

$$f(\exp t\mathcal{A} \cdot a) = f(a).$$

Alors

$$(Df)_a(\mathcal{A} \cdot a) = 0, \\ (D^2 f)_a(\mathcal{A} \cdot a, \mathcal{A} \cdot a) + (Df)_a(\mathcal{A}^2 \cdot a) = 0.$$



**Preuve de la proposition 4.2.1.** Soit  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $V_n$  et  $\mathcal{A}$  l'endomorphisme de  $V_n$  défini par :  $\mathcal{A}. a = Xa + aY^*$  où  $X, Y \in V_n$ . Si les matrices  $X, Y$  sont antihermitiennes, alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , les matrices  $\exp tX, \exp tY$  sont unitaires et, pour tout  $a \in \mathcal{U}$ ,

$$f(\exp tX a \exp tY^*) = f(a).$$

Du lemme IX-2.2 précédent nous déduisons que

$$(Df)_a(Xa + aY^*) = 0, \\ (D^2f)_a(Xa + aY^*, Xa + aY^*) + (Df)_a(X^2a + 2XaY^* + a(Y^*)^2) = 0.$$

(a) Prenons  $X = Y = E_{jk} - E_{kj}$  ( $j \neq k$ ),  $a = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ . Nous obtenons

$$Xa + aY^* = (a_k - a_j)(E_{jk} + E_{kj}), \\ X^2a + 2XaY^* + a(Y^*)^2 = 2(a_k - a_j)(E_{jj} - E_{kk}),$$

et donc

$$(a_k - a_j)^2 (D^2f)_a(E_{jk} + E_{kj}, E_{jk} + E_{kj}) + 2(a_k - a_j)(Df)_a(E_{jj} - E_{kk}) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(\Re x_{jk})^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial(\Re x_{kj})^2}(a) = \frac{2}{(a_j - a_k)} \left( \frac{\partial f}{\partial(\Re x_{jj})}(a) - \frac{\partial f}{\partial(\Re x_{kk})}(a) \right).$$

(b) Prenons  $X = i(E_{jk} + E_{kj})$  et  $Y = -X$ . Nous obtenons

$$Xa + aY^* = (a_j + a_k)(iE_{jk} + iE_{kj}), \\ X^2a + 2XaY^* + a(Y^*)^2 = -2(a_j + a_k)(E_{jj} + E_{kk}),$$

et donc

$$(a_j + a_k)^2 (D^2f)_a(iE_{jk} + iE_{kj}, iE_{jk} + iE_{kj}) - 2(a_j + a_k)(Df)_a(E_{jj} + E_{kk}) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{jk})^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{kj})^2}(a) = \frac{2}{(a_j + a_k)} \left( \frac{\partial f}{\partial(\Re x_{jj})}(a) + \frac{\partial f}{\partial(\Re x_{kk})}(a) \right).$$

(c) Prenons  $X = iE_{jj}$  et  $Y = -X$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} Xa + aY^* &= i 2a_j E_{jj}, \\ X^2a + 2XaY^* + a(Y^*)^2 &= -4a_j E_{jj}, \end{aligned}$$

et donc

$$4a_j^2 (D^2 f)_a (iE_{jj}, iE_{jj}) - 4a_j (Df)_a (E_{jj}) = 0,$$

ou

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{jj})^2}(a) = \frac{1}{a_j} \frac{\partial f}{\partial(\Re x_{jj})}(a).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial(\Re x_{jj})^2}(a) &= \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_j^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{jj})^2}(a) &= \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial(\Re x_{jk})^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial(\Re x_{kj})^2}(a) &= \frac{2}{(\lambda_j - \lambda_k)} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(a) - \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(a) \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{jk})^2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial(\Im x_{kj})^2}(a) &= \frac{2}{(\lambda_j + \lambda_k)} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(a) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k}(a) \right). \end{aligned}$$

Pour montrer (ii), on utilise la formule :

$$\Delta_0(DF) = \Delta_0 F + 2(\nabla_0 D | \nabla_0 F) + \Delta(D),$$

où  $\Delta_0$  désigne le laplacien et  $\nabla_0$  le gradient sur  $\mathbb{R}^n$ . Le polynôme  $D$  est harmonique et vérifie aussi

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial D}{\partial \lambda_j} = 0.$$

On peut alors conclure que

$$\frac{1}{D} \Delta_0(DF) + \frac{1}{D} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial(DF)}{\partial \lambda_j} = \Delta_0 F + 2 \frac{1}{D} (\nabla_0 D | \nabla_0 F) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}.$$

Comme

$$\frac{1}{D} \nabla_0 D = \nabla_0 \log |D| = \sum_{j < k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} (e_j - e_k) + \sum_{j < k} \frac{1}{\lambda_j + \lambda_k} (e_j + e_k),$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , nous obtenons

$$\frac{1}{D} (\nabla_0 D | \nabla_0 F) = \sum_{j < k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} - \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} \right) + \sum_{j < k} \frac{1}{\lambda_j + \lambda_k} \left( \frac{\partial F}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} \right). \quad \square$$

### 4.2.2 Équation de la chaleur, intégrales orbitales et fonctions sphériques sur $V_n$

Dans la décomposition polaire précédente la mesure euclidienne  $m$  s'écrit

$$\alpha(du)\alpha(dv) \prod_{j < k} (\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 \prod_{j=1}^n \lambda_j d\lambda_j,$$

où  $\alpha$  est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire  $U(n)$ . De plus, on a la formule d'intégration suivante ([21], Proposition X.3.4)

**Proposition 4.2.2** (Formule d'intégration de Weyl) *Pour toute fonction  $f$  intégrable sur  $V_n$*

$$\int_{V_n} f(x)m(dx) = c_n \int_{U(n) \times U(n)} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(u\lambda v) \alpha(du)\alpha(dv) \prod_{j < k} (\lambda_j^2 - \lambda_k^2)^2 \prod_{j=1}^n \lambda_j d\lambda_j,$$

où  $c_n$  est une constante :

$$c_n = \frac{2^n \pi^{n^2}}{n! \left( \prod_{j=1}^{n-1} j! \right)^2}.$$

En utilisant les données précédentes, la résolution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur  $V_n$  conduit à l'évaluation de l'intégrale orbitale  $\mathcal{I}(x, y)$ , qui est définie pour tous  $x, y \in V_n$ , par :

$$\mathcal{I}(x, y) = \int_{U(n)} \int_{U(n)} e^{\Re \operatorname{tr}(xyv^*)} \alpha(du)\alpha(dv).$$

Remarquons que la fonction  $\mathcal{I}(x, y)$  est déterminée par sa restriction au sous-ensemble des matrices diagonales puisqu'elle est invariante par  $K_n$  agissant sur  $x$  ou sur  $y$  :

$$\mathcal{I}(uxv^*, y) = \mathcal{I}(x, yv^*) = \mathcal{I}(x, y) \quad (u, v \in U(n)).$$

Le problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U,$$

$$U(0, x) = f(x),$$

où  $f$  est une fonction continue bornée sur  $V_n$ , admet une solution unique qui est donnée par

$$U(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{V_n} e^{-\frac{1}{4t} \|x-y\|^2} f(y) m(dy) \quad (t > 0, x \in V_n),$$

où  $N = 2n^2$  est la dimension de  $V_n$ ,  $\|\cdot\|$  est la norme de Hilbert-Schmidt sur  $V_n$  et  $m$  est la mesure euclidienne.

Supposons que la fonction  $f$  soit invariante par le groupe  $K_n$ . Alors il en est de même de la solution  $U$ . Nous pouvons ainsi écrire

$$f(x) = f_0(\lambda), \quad U(t, x) = U_0(t, \lambda).$$

En utilisant la formule d'intégration de Weyl (Proposition 4.2.2), la solution  $U_0(t, \lambda)$  est donnée par :

$$U_0(t, \lambda) = \int_{\mathbb{R}_+^n} H_0(t, \lambda, \theta) f_0(\theta) D(\theta) \prod_{j=1}^n \theta_j d\theta_j,$$

avec

$$\begin{aligned} H_0(t, \lambda, \theta) &= c_n \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \int_{U(n)} \int_{U(n)} e^{-\frac{1}{4t} \|\lambda - u\theta v^*\|^2} f(y) \alpha(du) \alpha(dv) \\ &= c_n \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{4t} (\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} \int_{U(n)} \int_{U(n)} e^{\frac{1}{2t} \Re \operatorname{tr}(\lambda u \theta v^*)} \alpha(du) \alpha(dv) \\ &= c_n \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{4t} (\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} \mathcal{J}\left(\frac{1}{2t} \lambda, \theta\right). \end{aligned}$$

**Théorème 4.2.1** Si  $\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\theta = \operatorname{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,

$$\mathcal{J}(\lambda, \theta) = 2^{n(n-1)} [1!2! \times \dots \times (n-1)!]^2 \frac{1}{D(\lambda)D(\theta)} \det\left((I_0(\lambda_i \theta_j))_{1 \leq i, j \leq n}\right),$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiée :

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} z^{2k} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

**Preuve.** De la formule donnant la partie radiale du laplacien (Proposition 4.2.1) on déduit que la fonction  $U_0$  est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right) (D(\lambda) F(\lambda)).$$

Nous posons par suite

$$V(t, \lambda) = D(\lambda) U_0(t, \lambda), \quad g(\lambda) = D(\lambda) f_0(\lambda).$$

La fonction  $V$  est alors solution du problème

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda_i^2} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial V}{\partial \lambda_i} \right),$$

$$V(0, \lambda) = g(\lambda).$$

Supposons que la donnée initiale  $f$  appartienne à l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(V_n)$ . D'après un résultat semblable à ([23], Lemme X-3.1) on montre que, pour tout  $T > 0$ , la fonction  $V$  est bornée sur  $[0, T] \times \mathbb{R}_+^n$ . D'autre part, pour  $n = 1$ , le problème ci-dessus est équivalent, en coordonnées cylindriques, au problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur sur  $\mathbb{R}^2$  avec une donnée initiale radiale. La solution d'un tel problème est exprimée au moyen de la fonction de Bessel modifiée  $I_0$  et est donnée par (voir [23], Chapitre IX, exercice 3)

$$\frac{1}{2t} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2 + \rho^2}{4t}} g(\rho) I_0\left(\frac{r\rho}{2t}\right) \rho d\rho.$$

On peut alors conclure que la solution de notre problème pour  $n$  quelconque est donnée par

$$V(t, \lambda) = \frac{1}{(2t)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{1}{4t}(\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} g(\theta) \prod_{i=1}^n I_0\left(\frac{\lambda_i \theta_i}{2t}\right) \theta_i d\theta_i.$$

La fonction  $g$  étant antisymétrique cette relation peut s'écrire

$$V(t, \lambda) = \frac{1}{(2t)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{1}{4t}(\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} g(\theta) \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n I_0\left(\frac{\lambda_i \theta_{\sigma(i)}}{2t}\right) \theta_i d\theta_i.$$

Ainsi, pour toute fonction  $g(\theta) = D(\theta) f_0(\theta)$ , où  $f_0$  est une fonction symétrique de l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+^n)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} H_0(t, \lambda, \theta) g(\theta) \prod_{i=1}^n \theta_i d\theta_i$$

$$= \frac{1}{n!(2t)^n} \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-\frac{1}{4t}(\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} g(\theta) \det\left(\left(I_0\left(\frac{\lambda_i \theta_j}{2t}\right)\right)_{1 \leq i, j \leq n}\right) \prod_{i=1}^n \theta_i d\theta_i.$$

Ceci démontre que le noyau  $H_0$  défini précédemment est égal à

$$H_0(t, \lambda, \theta) = \frac{1}{n!(2t)^n} \frac{1}{D(\lambda)D(\theta)} e^{-\frac{1}{4t}(\|\lambda\|^2 + \|\theta\|^2)} \det \left( \left( I_0 \left( \frac{\lambda_i \theta_j}{2t} \right) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right).$$

Le résultat en découle en comparant, pour  $t = \frac{1}{2}$ , les deux expressions obtenues de  $H_0$ .  $\square$

Pour  $x \in V_n$  la mesure orbitale  $\mu_x$  est définie sur  $V_n$  par

$$\int_{V_n} f(y) \mu_x(dy) = \int_{U(n)} \int_{U(n)} f(uxv^*) \alpha(du) \alpha(dv),$$

où  $\alpha$  est la mesure de Haar normalisée de  $U(n)$  et  $f$  est une fonction continue sur  $V_n$ . La transformée de Fourier de la mesure  $\mu_x$  est la fonction  $\widehat{\mu}_x$  suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}_x(\xi) &= \int_{V_n} e^{i\langle \xi, y \rangle} \mu_x(dy) \\ &= \int_{U(n)} \int_{U(n)} e^{i\Re \operatorname{tr}(\xi uxv^*)} \alpha(du) \alpha(dv) \\ &= \mathcal{I}(x, i\xi). \end{aligned}$$

En adoptant la notation multi-indicielle :

$$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) := (n-1, n-2, \dots, 0),$$

les fonctions sphériques de type positif  $\varphi_x$ , relativement à la paire  $(G_n, K_n)$ , sont les transformées de Fourier des mesures orbitales sur  $V_n$  :

**Corollaire 4.2.1** *Si  $x = \operatorname{diag}(x_1, \dots, x_n)$  et  $\xi = \operatorname{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,*

$$\varphi_x(\xi) := \widehat{\mu}_x(\xi) = (\delta!)^2 \frac{(-4)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{D(x)D(\xi)} \det \left( \left( J_0(x_j \xi_k) \right)_{1 \leq j, k \leq n} \right),$$

où

$$\delta! = \delta_1! \times \dots \times \delta_n!,$$

$J_0$  étant la fonction de Bessel classique.

### 4.3 Détermination des fonctions sphériques de type positif sur $(G_\infty, K_\infty)$

#### 4.3.1 Propriété de multiplicativité des fonctions sphériques

Une fonction sphérique est une fonction continue  $\varphi$  sur  $G_\infty$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} \varphi(xky) dk = \varphi(x)\varphi(y),$$

où  $dk$  est la mesure de Haar normalisée du groupe produit  $K_n = U(n) \times U(n)$  (Théorème 3.2.1).

Dans notre cas, la fonction  $\varphi$  peut être vue comme une fonction sur  $V_\infty$  et ainsi on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(x + k_1 y k_2^*) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) = \varphi(x)\varphi(y),$$

où  $\alpha_n$  est la mesure de Haar normalisée du groupe unitaire  $U(n)$ .

**Théorème 4.3.1** (Propriété de multiplicativité) *Soit  $\varphi \in \mathfrak{P}$ . La fonction  $\varphi$  est sphérique, si et seulement si, il existe une fonction continue  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\Phi(0) = 1$  telle que*

$$\varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0, \dots)) = \Phi(a_1) \dots \Phi(a_n).$$

Posons, pour  $m \leq n$ ,

$$K_m(n) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} I_m & 0 \\ 0 & v \end{array} \right) \mid v \in U(n-m) \right\} \simeq U(n-m),$$

et

$$K_m(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_m(n) \subset U(\infty).$$

Posons aussi

$$K(m, n) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} u & 0 \\ 0 & v \end{array} \right) \mid u \in U(m), v \in U(n-m) \right\} \subset U(n).$$





où

$$w_m = a\left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -I_m & 0 \\ I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

**Lemme 4.3.1** *Soit  $X$  un espace topologique compact et  $\mu$  une mesure positive sur  $X$  tels que tout ensemble ouvert non vide soit de mesure positive. Soit  $\delta$  une fonction continue à valeurs positives sur  $X$ , qui atteint son maximum en un seul point  $x_0$ . Posons*

$$\frac{1}{c_n} = \int_X \delta(x)^n \mu(dx).$$

Alors, si  $f$  est une fonction continue sur  $X \times X$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 \int_{X \times X} f(x, y) \delta(x)^n \delta(y)^n \mu(dx) \mu(dy) = f(x_0, x_0).$$

**Preuve.** On applique le lemme 5.4 de [19] pour la fonction  $\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y)$ .  $\square$

Par le lemme 4.3.1, pour tout  $m$  fixé, et pour toute fonction  $f$  continue sur  $[0, \pi]^m \times [0, \pi]^m$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \pi]^m \times [0, \pi]^m} f(\theta, \zeta) D_{m,n}(\theta) D_{m,n}(\zeta) d\theta d\zeta = f\left(\frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2}\right).$$

**Preuve de la proposition 4.3.1.**

En utilisant la formule d'intégration et l'invariance par  $K_m(\infty) \times K_m(\infty)$ , on obtient

$$\int_{U(n) \times U(n)} f(k_1, k_2) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) = \int_{[0, \pi]^m \times [0, \pi]^m} F(\theta, \zeta) D_{m,n}(\theta) D_{m,n}(\zeta) d\theta d\zeta,$$

avec

$$F(\theta, \zeta) = \int_{K_m^2} \int_{K_m^2} f(h_1 a(\theta) h_2, g_1 a(\zeta) g_2) \alpha_m(dh_1) \alpha_m(dh_2) \alpha_m(dg_1) \alpha_m(dg_2).$$

Par suite, le lemme 4.3.1 nous donne

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} f(k_1, k_2) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) \\ &= \int_{K_m^2} \int_{K_m^2} f(h_1 w_m h_2, g_1 w_m g_2) \alpha_m(dh_1) \alpha_m(dh_2) \alpha_m(dg_1) \alpha_m(dg_2). \end{aligned}$$

$\square$

**Corollaire 4.3.1** *Soit  $\varphi$  une fonction continue sur  $V_\infty$  et  $K_\infty$ -invariante. Alors, pour  $x = \text{diag}(a_1, \dots, a_m, 0, \dots)$ ,  $y = \text{diag}(b_1, \dots, b_m, 0, \dots)$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(x + k_1 y k_2^*) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) = \varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, 0, \dots)).$$

**Preuve.** La fonction  $(k_1, k_2) \mapsto \varphi(x + k_1 y k_2^*)$  est  $K_m(\infty) \times K_m(\infty)$ -invariante. Ainsi, on peut appliquer la proposition 4.3.1 :

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(x + k_1 y k_2^*) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) \\ &= \int_{K_m^2} \int_{K_m^2} \varphi(x + h_1 w_m h_2 y g_2^* w_m^{-1} g_1^*) \alpha_m(dh_1) \alpha_m(dh_2) \alpha_m(dg_1) \alpha_m(dg_2). \end{aligned}$$

Le résultat découle du fait que

$$x + h_1 w_m h_2 y g_2^* w_m^{-1} g_1^* \in U(\infty) \text{diag}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m) U(\infty).$$

□

**Preuve du théorème 4.3.1.** Soit  $\varphi \in \mathfrak{P}$ . Si  $\varphi$  est sphérique alors, pour

$$x = \text{diag}(a_1, \dots, a_m, 0, \dots), \quad y = \text{diag}(b_1, \dots, b_m, 0, \dots),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(x + k_1 y k_2^*) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) = \varphi(x) \varphi(y).$$

Par le corollaire 4.3.1, il s'en suit que

$$\varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_m, 0, \dots)) (\text{diag}(b_1, \dots, b_m, 0, \dots)) = \varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, 0, \dots)).$$

En réappliquant le corollaire 4.3.1, on obtient

$$\varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0, \dots)) = \Phi(a_1) \dots \Phi(a_n),$$

où

$$\Phi(\lambda) = \varphi(\text{diag}(\lambda, 0, \dots)).$$

Inversement, supposons qu'il existe une fonction continue  $\Phi$  sur  $\mathbb{R}$  telle que

$$\varphi(\text{diag}(a_1, \dots, a_n, 0, \dots)) = \Phi(a_1) \dots \Phi(a_n).$$

Alors, par le corollaire 4.3.1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{U(n) \times U(n)} \varphi(x + k_1 y k_2^*) \alpha_n(dk_1) \alpha_n(dk_2) = \varphi(x) \varphi(y),$$

ce qui revient à dire que le fonction  $\varphi$  est sphérique. □

### 4.3.2 Fonction de Pólya modifiée : définition et convergence

**Définition 4.3.1** La fonction de Pólya modifiée est définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\Pi(\lambda; \alpha, \gamma) := e^{-\gamma\lambda^2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha_j \lambda^2},$$

où  $\alpha = (\alpha_j)_{j \geq 1} \in \ell^1(\mathbb{N})$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$  et  $\gamma \in \mathbb{R}_+$ .

Au couple  $(\alpha, \gamma)$  on associe la mesure positive bornée  $\sigma$  définie, pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$  (noté  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ ), par :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma(dt) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f(\alpha_j) + \gamma f(0).$$

On obtient ainsi un ensemble  $\Omega$  de mesures que l'on munit de la topologie de la convergence étroite. Les fonctions de Pólya modifiées sont ainsi paramétrées par cet ensemble.

Remarquons que les moments de la mesure  $\sigma$  sont donnés par

$$\mathcal{M}_0(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \sigma(dt) = \gamma + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = \gamma + p_1(\alpha),$$

et pour  $m \geq 1$ ,

$$\mathcal{M}_m(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} t^m \sigma(dt) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{m+1} = p_{m+1}(\alpha),$$

où  $p_m$  est la  $m^{\text{ième}}$  somme de Newton définie, pour  $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^1(\mathbb{N})$  et  $m \geq 1$ , par :

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^m.$$

La dérivée logarithmique de la fonction de Pólya modifiée  $\Pi_{\omega}(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha, \gamma)$  est :

$$\frac{\Pi'_{\omega}(\lambda)}{\Pi_{\omega}(\lambda)} = -2(\gamma + p_1(\alpha))\lambda + \sum_{m=2}^{\infty} p_m(-\alpha)\lambda^{2m-1}.$$

**Lemme 4.3.2** L'ensemble  $\Omega$  est fermé pour la topologie de la convergence étroite.

**Preuve.** Soit  $\sigma^{(n)}$  une suite de mesures de  $\Omega$  qui converge étroitement vers une mesure  $\sigma$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma^{(n)}(dt) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} f(\alpha_k^{(n)}) + \gamma^{(n)} f(0),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma^{(n)}(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma(dt) \quad (f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})). \quad (4.1)$$

Posons

$$P^{(n)}(t) = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k^{(n)} t).$$

Comme  $\alpha_k^{(n)}$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $\infty$ , la suite  $P^{(n)}(t)$  converge dans un voisinage de 0 vers une fonction  $\Psi$ . D'après ([32], Theorem 2.1, page 336), la fonction  $\Psi$  admet un prolongement analytique sur  $\mathbb{C}$ , et elle est donnée par

$$\Psi(z) = e^{\gamma'' z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k z),$$

avec

$$\gamma'' \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

La dérivée logarithmique de  $P^{(n)}$  converge vers celle de  $\Psi$  dans un voisinage de 0. Ainsi, en considérant les développements en série entière en 0 de ces dérivées logarithmiques, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)} = \gamma'' + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k,$$

et pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(\alpha^{(n)}) = p_k(\alpha).$$

En prenant  $f = 1$  dans (4.1), on en déduit que la suite  $\gamma^{(n)} + \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(n)}$  converge. Donc, la suite  $\gamma^{(n)}$  possède une limite, qu'on note  $\gamma' \geq 0$ . Finalement, la mesure  $\sigma$  appartient à  $\Omega$  :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma(dt) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(\alpha_k) + \gamma f(0),$$

où

$$\gamma = \gamma' + \gamma''.$$

Posons pour toute fonction de Pólya modifiée de paramètre  $\omega = (\alpha, \gamma)$ ,

$$\|\omega\| = p_1(\alpha) + \gamma,$$

et, pour tout  $R \geq 0$ ,

$$\Omega_R = \left\{ \omega \in \Omega \mid \frac{-\Pi''_{\omega}(0)}{2} = \|\omega\| \leq R \right\}.$$

**Lemme 4.3.3** *L'ensemble  $\Omega_R$  est compact.*

**Preuve.** Comme la fonction de Pólya modifiée est une transformée de Fourier d'une mesure de probabilité  $\mu$ ,

$$-\Pi''_{\omega}(0) = \int_{\mathbb{R}} t^2 \mu(dt).$$

D'autre part, l'ensemble des mesures de probabilité telles que  $\int_{\mathbb{R}} t^2 \mu(dt) \leq 2R$  est relativement compact. On peut alors conclure, d'après le lemme 4.3.2, que l'ensemble  $\Omega_R$  est relativement compact dans  $\Omega$ .

De plus, la convergence dans  $\Omega$  d'une suite  $\omega^{(n)}$  vers  $\omega$  pour la topologie de  $\Omega$  implique que la suite  $\|\omega^{(n)}\|$  converge dans  $\mathbb{R}$  vers  $\|\omega\|$ . Ainsi, l'application  $\omega \mapsto \|\omega\|$  est continue. Par suite, l'ensemble  $\Omega_R$  est un fermé relativement compact, il est donc compact.  $\square$

**Proposition 4.3.2** *L'application définie sur  $\Omega$  par :*

$$\omega = (\alpha, \gamma) \mapsto \Pi_{\omega} := \Pi(\cdot; \alpha, \gamma)$$

*est injective.*

La transformation de Fourier classique permet d'étudier les mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^n$ , et leur convergence. Rappelons ici les résultats que nous utiliserons dans la suite. Soit  $\nu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et  $\psi$  sa transformée de Fourier :

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \nu(du).$$

**Proposition 4.3.3** (voir [19], Lemma 6.5) *On suppose que la fonction  $\psi$  est développable en série de Taylor à l'origine : pour  $|x| < R$ ,*

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m.$$

*Alors la fonction  $\psi$  admet un prolongement holomorphe à la bande*

$$\Sigma_R = \{z = x + iy \mid |y| < R\}.$$

*De plus, pour  $|y| < R$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{yu} \nu(du) < \infty,$$

*et, pour  $z \in \Sigma_R$ , le prolongement  $\tilde{\psi}$  de  $\psi$  est donné par*

$$\tilde{\psi}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izu} \nu(du).$$

Considérons une suite  $\nu^{(n)}$  de mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}$  et notons par  $\psi^{(n)}$  la transformée de Fourier de  $\nu^{(n)}$  :

$$\psi^{(n)}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu} \nu^{(n)}(du).$$

**Proposition 4.3.4** (voir [19], Lemma 6.6)

(i) *On suppose que chacune des fonctions  $\psi^{(n)}$  soit développable en série de Taylor dans le disque ouvert  $D(0, R)$  : pour  $|z| < R$ ,*

$$\psi^{(n)}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^m,$$

*et que la suite des fonctions  $\psi^{(n)}$  converge uniformément sur le disque fermé  $\overline{D(0, r)}$ , pour tout  $r < R$ . Alors la suite des mesures  $\nu^{(n)}$  converge étroitement vers une mesure de probabilité  $\nu$ . Notons  $\psi$  la transformée de Fourier de  $\nu$ . Les fonctions  $\psi^{(n)}$  et  $\psi$  admettent des prolongement holomorphes à  $\Sigma_R$ , et la suite  $\psi^{(n)}$  converge vers  $\psi$  uniformément sur tout compact de  $\Sigma_R$ .*

(ii) *On suppose que, pour tout  $m$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_m^{(n)} = c_m$  et qu'il existe une suite  $a_m \geq 0$  telle que, pour tout  $r < R$ ,  $\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m < \infty$  et, pour tous  $m, n$ ,  $|c_m^{(n)}| \leq a_m$ . Alors, les hypothèses de (i) sont vérifiées.*

**Théorème 4.3.2** *Une suite de points  $\omega^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)})$  de  $\Omega$  converge vers  $\omega = (\alpha, \gamma)$  si et seulement si les fonctions de Pólya modifiées correspondantes  $\Pi_{\omega^{(n)}}(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha^{(n)}, \gamma^{(n)})$  convergent uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers  $\Pi_{\omega}(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha, \gamma)$ .*

**Preuve.** Condition nécessaire : supposons que  $\omega^{(n)}$  converge vers  $\omega$  pour la topologie de  $\Omega$ . Remarquons que les fonctions des Pólya modifiées  $\Pi^{(n)}$  et  $\Pi$  sont holomorphes dans le disque  $D(0, R)$  où  $\frac{1}{R} = \sup_{m,n} |\alpha_m^{(n)}|$ . Donc, pour tout  $\lambda \in D(0, R)$ , leurs dérivées logarithmiques sont données par

$$\frac{\Pi_{\omega^{(n)}}'(\lambda)}{\Pi_{\omega^{(n)}}(\lambda)} = -2\|\omega^{(n)}\|\lambda + \sum_{m=2}^{\infty} p_m(-\alpha^{(n)})\lambda^{2m-1},$$

$$\frac{\Pi'(\lambda)}{\Pi(\lambda)} = -2\|\omega\|\lambda + \sum_{m=2}^{\infty} p_m(-\alpha)\lambda^{2m-1}.$$

Pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma^{(n)}(dt) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma(dt),$$

où  $\sigma^{(n)}$  est la mesure positive bornée sur  $\mathbb{R}$  associée au couple  $(\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)})$ . Donc, si  $f = 1$ , on en déduit que la suite  $p_1(\alpha^{(n)}) + \gamma^{(n)}$  converge. Par suite, il existe une constante  $A > 0$  telle que, pour tout  $n$ ,

$$0 \leq \|\omega^{(n)}\| \leq A.$$

Donc, la suite  $\{\alpha_m^{(n)}\}$  est bornée par  $A$  pour tout  $m$  et tout  $n$ .

D'où,

$$\text{supp}(\sigma^{(n)}) \subset [-A, A] \quad \text{et} \quad \text{supp}(\sigma) \subset [-A, A].$$

Ainsi, la suite des mesures  $\sigma^{(n)}$  converge vers  $\sigma$  pour toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit que, pour tout  $m \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_m(\alpha^{(n)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} t^m \sigma^{(n)}(dt) \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^m \sigma(dt) = p_m(\alpha), \end{aligned}$$

et

$$p_m(\alpha^{(n)}) \leq (p_1(\alpha^{(n)}))^m \leq A^m.$$

D'autre part, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega^{(n)}\| = \|\omega\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Pi_{\omega^{(n)}}'(\lambda)}{\Pi_{\omega^{(n)}}(\lambda)} = \frac{\Pi_{\omega}'(\lambda)}{\Pi_{\omega}(\lambda)},$$

la convergence étant uniforme sur tout compact du disque  $D(0, R)$ . Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_{\omega^{(n)}}(\lambda) = \Pi_{\omega}(\lambda),$$

puisque  $\Pi_{\omega^{(n)}}(0) = 1$  et  $\Pi_{\omega}(0) = 1$ .

Les fonctions  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  et  $\Pi_{\omega}$  étant de type positif, d'après la proposition 4.3.4,  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  converge uniformément sur tout compact de  $\Sigma_R$  vers  $\Pi_{\omega}$ . Ceci implique la convergence uniforme de  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  vers  $\Pi_{\omega}$  sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

Condition suffisante : supposons que  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$  vers  $\Pi_{\omega_0} = \Pi(\cdot; \alpha_0, \gamma_0)$ . Soit  $\lambda_0 > 0$  fixé. Comme la fonction de Pólya modifiée  $\Pi_{\omega_0}$  est continue, ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$  et vérifie  $\Pi_{\omega_0}(0) = 1$ , il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $n$ ,

$$\Pi_{\omega^{(n)}}(\lambda_0) \geq M.$$

Par suite

$$\gamma \lambda_0^2 + \lambda_0^2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \leq e^{\gamma \lambda_0^2} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k^{(n)} \lambda_0^2) \leq \frac{1}{M}.$$

Donc

$$\|\omega^{(n)}\| \leq \frac{1}{\lambda_0^2 M} =: R_0.$$

L'ensemble  $\Omega_{R_0}$  étant un compact de  $\Omega$  (Lemme 4.3.3), on peut en extraire une sous-suite  $(\omega^{(n_k)})_k$  qui converge vers  $\omega = (\alpha, \gamma) \in \Omega_{R_0}$  pour la topologie de  $\Omega$ .

Donc la suite des fonctions de Pólya modifiées  $\Pi_{\omega^{(n_k)}}(\lambda)$  converge uniformément sur tout compact de  $\Sigma_{R_0}$  vers la fonction de Pólya modifiée  $\Pi_{\omega}(\lambda) = \Pi(\lambda; \alpha, \gamma)$ , et par suite

$$\Pi_{\omega} = \Pi_{\omega_0},$$



ou encore

$$\omega = \omega_0 = (\alpha_0, \gamma_0).$$

Si une autre sous-suite converge dans  $\Omega_{R_0}$  vers  $\omega'$ , alors nécessairement  $\omega' = \omega = \omega_0$ . Le point  $\omega_0$  est donc l'unique point d'accumulation de la suite  $\omega^{(n)}$ . Comme pour toute fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}$ , il existe  $M > 0$  telle que

$$\sigma^{(n)}(f) \leq M \|\omega^{(n)}\| < MR_0,$$

la suite  $\omega^{(n)}$  converge vers  $\omega_0$ . □

### Corollaire 4.3.2

(i) *L'application qui à  $\omega$  associe la fonction de Pólya modifiée  $\Pi_\omega$  est un homéomorphisme, l'ensemble des fonctions de Pólya modifiées étant muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .*

(ii) *L'ensemble  $\Omega$  est localement compact, séparable, métrisable et complet.*

**Preuve.** Le premier point est une conséquence immédiate du théorème précédent. Le fait que  $\Omega$  est un ensemble séparable, métrisable et complet, se déduit de ([42], Chapter II, Theorem 6.2).

Pour  $R > 0$ , on définit l'ensemble

$$\Omega_R = \{\omega \in \Omega \mid \|\omega\| = p_1(\alpha) + \gamma \leq R\}.$$

Puisque l'application

$$\omega \mapsto \int_{\mathbb{R}} \sigma(dt) = \|\omega\|,$$

est continue, alors l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega \mid \|\omega\| < R\}.$$

est un ouvert. D'autre part, l'ensemble  $\Omega_R$  est compact. Donc tout point  $\omega$  possède un voisinage compact. Ceci prouve que  $\Omega$  est localement compact. □

### 4.3.3 Convergence des mesures orbitales et fonctions sphériques

Soit  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable sur lequel un groupe  $G$  agit par des transformations mesurables. Soit  $\nu$  une mesure de probabilité  $G$ -invariante sur  $X$ . Un ensemble  $E \in \mathcal{B}$  est dit  $G$ -invariant relativement à  $\nu$  si, pour tout  $g \in G$ ,  $\nu((gE)\Delta E) = 0$ , où  $\Delta$  désigne la différence symétrique. La mesure  $\nu$  est dite ergodique relativement à l'action du groupe  $G$  si, pour tout  $E \in \mathcal{B}$  qui est  $G$ -invariant :  $\nu(E) = 0$  ou 1. Si  $X$  est localement compact et  $K$  un groupe compact agissant sur  $X$  par des homéomorphismes, les mesures ergodiques sont exactement les mesures orbitales. C'est le cas, si on prend  $X = V_n = M(n; \mathbb{C})$  et  $K = K_n = U(n) \times U(n)$ .

On note par  $V^\infty$  l'espace des matrices complexes infinies. C'est l'espace dual de  $V_\infty$ . L'espace  $V^\infty$  est défini comme étant la limite projective de la suite  $V_n$  relativement aux projections orthogonales

$$p_{m,n} : V_n \rightarrow V_m \quad (n > m).$$

L'espace  $V^\infty$  peut être identifié à  $\mathbb{R}^\infty$ . Le groupe  $K_\infty$  agit sur  $V^\infty$  de la même façon que sur  $V_\infty$ . Soit  $\mathfrak{M}$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $V^\infty$  qui sont invariantes par  $K_\infty$ . La transformée de Fourier d'une mesure  $\nu$  de  $\mathfrak{M}$  est la fonction  $K_\infty$ -invariante de type positif  $\varphi$  définie sur  $V_\infty$  par

$$\varphi(\xi) = \int_{V^\infty} e^{i\langle x, \xi \rangle} \nu(dx).$$

La transformée de Fourier établit une bijection entre  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{P}$  et aussi entre leurs sous ensembles respectifs des points extrémaux  $\text{ext}(\mathfrak{M})$  et  $\text{ext}(\mathfrak{P})$ . Une fonction  $\varphi \in \mathfrak{P}$  est sphérique si et seulement si la mesure  $\mu$  est ergodique.

Soit  $\lambda^{(n)}$  une suite de matrices diagonales

$$\lambda^{(n)} = \text{diag}(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}).$$

Nous lui associons la suite des mesures orbitales  $\nu^{(n)}$  définie par : si  $f$  est une fonction continue sur  $V^\infty$

$$\int_{V^\infty} f(x) \nu^{(n)}(dx) = \int_{U(n) \times U(n)} f(u\lambda^{(n)}v^*) \alpha_n(du) \alpha_n(dv).$$

La transformée de Fourier  $\varphi^{(n)}$  de  $\nu^{(n)}$  est définie sur  $V_\infty$  par

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\xi) &= \int_{V^\infty} e^{i\langle \xi, x \rangle} \nu^{(n)}(dx) \\ &= \int_{U(n) \times U(n)} e^{i\langle \xi, u\lambda^{(n)}v^* \rangle} \alpha_n(du) \alpha_n(dv). \end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale précédente est donnée par le corollaire 4.2.1.

Posons

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \frac{1}{(k!)^2} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$\Xi = (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_n) := \left( -\frac{\xi_1^2}{4}, -\frac{\xi_2^2}{4}, \dots, -\frac{\xi_n^2}{4} \right),$$

$$\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n) := (\lambda_1^{(n)^2}, \lambda_2^{(n)^2}, \dots, \lambda_n^{(n)^2}).$$

Nous pouvons réécrire l'expression des fonctions sphériques  $\varphi^{(n)}$  sous une forme plus convenable :

$$\varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)) = \Psi(\Lambda, \Xi) = (\delta!)^2 \frac{\det \left( \left( F(\Lambda_i \Xi_j) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right)}{D(\Lambda)D(\Xi)}, \quad (4.2)$$

où

$$D(\Xi) = \prod_{i < j} (\Xi_i - \Xi_j), \quad D(\Lambda) = \prod_{i < j} (\Lambda_i - \Lambda_j).$$

Nous donnons une condition nécessaire et suffisante, portant sur la suite  $\lambda^{(n)}$ , de telle sorte que la suite des mesures  $\nu^{(n)}$  converge. À la matrice  $\lambda^{(n)}$  on associe le point  $\omega^{(n)} = (\alpha^{(n)}, \gamma^{(n)})$  de  $\Omega$  défini par

$$\alpha^{(n)} = \left( \frac{\lambda_1^{(n)^2}}{4n^2}, \dots, \frac{\lambda_n^{(n)^2}}{4n^2}, 0, \dots \right), \quad \gamma^{(n)} = 0.$$

**Théorème 4.3.3** *La suite  $\nu^{(n)}$  converge étroitement si et seulement si la suite  $\omega^{(n)}$  converge dans  $\Omega$ . Si la suite  $\omega^{(n)}$  converge dans  $\Omega$  vers  $\omega = (\alpha, \gamma)$ , c'est-à-dire pour toute fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^{(n)^2}}{4n^2} f \left( \frac{\lambda_k^{(n)^2}}{4n^2} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(\alpha_k) + \gamma,$$

alors, pour tout  $k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) = \Pi_{\omega}(\xi_1) \dots \Pi_{\omega}(\xi_k),$$

où  $\Pi_{\omega}$  est la fonction de Pólya modifiée associée à  $\omega$  :

$$\Pi_{\omega}(\lambda) := \Pi(\lambda; \alpha, \gamma) = e^{-\gamma \lambda^2} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha_k \lambda^2},$$

avec

$$\gamma \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

**Preuve.** Condition suffisante. Supposons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega^{(n)} = \omega$ . Nous allons montrer que, pour tout  $k$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) = \Pi_\omega(\xi_1) \dots \Pi_\omega(\xi_k).$$

En utilisant un résultat général dans ([19], section 2.3) lié au développement en série de fonctions de Schur, on peut écrire (4.2) comme

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)) &= (\delta!)^2 \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_n \geq 0} c_{m_1 + \delta_1} \dots c_{m_n + \delta_n} s_{\mathbf{m}}(\Lambda) s_{\mathbf{m}}(\Xi) \\ &= (\delta!)^2 \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_n \geq 0} \left( \frac{1}{(\mathbf{m} + \delta)!} \right)^2 s_{\mathbf{m}}(\Lambda) s_{\mathbf{m}}(\Xi). \end{aligned}$$

(a) Traitons d'abord le cas d'une seule variable. Dans ce cas les seuls termes non nuls du développement en série de fonctions de Schur sont ceux pour lesquels  $\mathbf{m} = (m, 0, \dots, 0)$ . Donc

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi, 0, \dots)) &= ((n-1)!)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{((m+n-1)!)^2} h_m(\lambda^{(n)^2}) \left( -\frac{\xi^2}{4} \right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{n^m}{n(n+1) \dots (n+m-1)} \right)^2 h_m \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) \xi^{2m}, \end{aligned}$$

où  $h_m$  est la fonction symétrique complète :

$$s_{\mathbf{m}}(t) = h_m(t) = h_m(t_1, \dots, t_n) = \sum_{|\alpha|=m} t_1^{\alpha_1} \dots t_n^{\alpha_n}.$$

Considérons la fonction de Pólya modifiée :

$$\Pi_{\omega^{(n)}}(\xi) = \prod_{j=1}^n \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{\lambda_j^{(n)^2}}{n^2} \xi^2 \right)^{-1}.$$

D'après le théorème 4.3.2, la suite  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  converge vers la fonction de Pólya modifiée  $\Pi_\omega$  uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$ . De plus,  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  converge

uniformément sur tout compact du disque  $D(0, R) \subset \mathbb{C}$ , où  $\frac{1}{R} = \frac{1}{2} \sup_{j,n} \left| \frac{\lambda_j^{(n)}}{n} \right|$ .

Considérons les développements de Taylor de  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  et  $\Pi_\omega$  en 0 :

$$\Pi_{\omega^{(n)}}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m^{(n)} z^{2m},$$

$$\Pi_\omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{2m}.$$

Les coefficients  $c_m^{(n)}$  sont donnés par :

$$c_m^{(n)} = h_m \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right).$$

De la convergence uniforme de la suite  $\Pi_{\omega^{(n)}}$  vers  $\Pi_\omega$  on déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_m^{(n)} = c_m,$$

De plus, d'après les inégalités de Cauchy, pour tout  $r < R$ , il existe  $M > 0$  tel que

$$|c_m^{(n)}| \leq \frac{M}{r^m}.$$

D'autre part

$$\varphi^{(n)}(\text{diag}(z, 0, \dots)) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{n^m}{n(n+1) \dots (n+m-1)} \right)^2 h_m \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) z^{2m}.$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^m}{n(n+1) \dots (n+m-1)} \right)^2 = 1, \quad \left( \frac{n^m}{n(n+1) \dots (n+m-1)} \right)^2 \leq 1.$$

Par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(z, 0, \dots)) = \Pi_\omega(z),$$

sur tout compact de  $D(0, R)$ . En appliquant la proposition 4.3.4, on en déduit que la convergence a lieu uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .

(b) Considérons maintenant le cas de plusieurs variables ( $k > 1$ ). Si  $m_{k+1} > 0$ , alors  $s_{\mathbf{m}}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots) = 0$ . Par suite

$$\begin{aligned} & \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) \\ &= (\delta!)^2 \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 0} \left( \frac{1}{(\mathbf{m} + \delta)!} \right)^2 s_{\mathbf{m}} \left( \lambda^{(n)^2} \right) s_{\mathbf{m}} \left( -\frac{\xi_1^2}{4}, \dots, -\frac{\xi_k^2}{4} \right) \\ &= (\delta!)^2 \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 0} \left( \frac{n^{|\mathbf{m}|}}{(\mathbf{m} + \delta)!} \right)^2 s_{\mathbf{m}} \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) s_{\mathbf{m}} (\xi_1^2, \dots, \xi_k^2). \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant l'identité ([19], Proposition 2.5) :

$$\prod_{i,j=1}^k \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 0} s_{\mathbf{m}}(x_1, \dots, x_k) s_{\mathbf{m}}(y_1, \dots, y_k),$$

on obtient

$$\Pi_{\omega^{(n)}}(\xi_1) \dots \Pi_{\omega^{(n)}}(\xi_k) = \sum_{m_1 \geq \dots \geq m_k \geq 0} s_{\mathbf{m}} \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) s_{\mathbf{m}}(\xi_1^2, \dots, \xi_k^2).$$

En généralisant la preuve qu'on a utilisé dans (a) et par une version multi-variée de la proposition 4.3.4, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots)) = \Pi_{\omega}(\xi_1) \dots \Pi_{\omega}(\xi_k).$$

Condition nécessaire. Nous supposons que la suite  $\nu^{(n)}$  des mesures orbitales converge étroitement vers une mesure  $\nu$ . Ou encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\xi, 0, \dots)) = \varphi(\text{diag}(\xi, 0, \dots)),$$

où  $\varphi^{(n)}$  (respectivement  $\varphi$ ) sont les transformées de Fourier de  $\nu^{(n)}$  (respectivement de  $\nu$ ). On va montrer que la suite  $\omega^{(n)}$  converge dans  $\Omega$ . Pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 4.3.4** *Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\omega^{(n)}$  le point de  $\Omega$  associé à la mesure orbitale  $\nu^{(n)}$ . Si*

$$\sup_n \left( p_1(\alpha^{(n)}) \right) = R < \infty, \tag{4.3}$$

*alors la suite des paramètres  $\omega^{(n)}$  converge dans  $\Omega$ .*

**Preuve.** La condition (4.3) assure d'une part que la suite  $\omega^{(n)}$  converge car pour toute fonction  $f$  continue bornée

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}} f(t) \sigma^{(n)}(dt) \leq \|f\|_{\infty} \sup_n \left( p_1(\alpha^{(n)}) \right) < \infty.$$

D'autre part, comme la suite  $\omega^{(n)}$  reste dans le compact  $\Omega_R$ , on peut en extraire une sous-suite  $(\omega^{(n_k)})_k$  qui soit convergente dans  $\Omega$  vers  $\omega = (\alpha, \gamma)$ . Ainsi, par la condition suffisante,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(n_k)}(\text{diag}(\xi, 0, \dots)) = \Pi_{\omega}(\xi) := \Pi(\xi; \alpha, \gamma).$$

Donc

$$\varphi \equiv \Pi_\omega.$$

Si une autre sous-suite telle que  $\omega^{n'_k}$  converge dans  $\Omega$  vers  $\omega'$ , alors on aura

$$\varphi \equiv \Pi_{\omega'}.$$

Par unicité, on aura  $\omega = \omega'$ , et la suite  $\omega^{(n)}$  ne possède par suite qu'un seul point d'accumulation. Par conséquence, elle est nécessairement convergente vers ce point  $\omega$ .  $\square$

Revenons à la preuve de la condition nécessaire. Supposons maintenant, que dans notre cas, la condition (4.3) n'est pas vérifiée, autrement dit que :

$$\sup_n \left( p_1 \left( \frac{\Lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) \right) = \infty.$$

Il existe une suite  $\epsilon_n$  à valeurs positives telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ , et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_1 \left( \epsilon_n \frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) = 1.$$

On remarque alors que le fait de multiplier la suite  $\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2}$  par  $\epsilon_n$  revient aussi à multiplier  $\xi$  par  $\epsilon_n$ . Ainsi, par le lemme 4.3.4, il existe  $\omega \in \Omega$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\epsilon_n \xi, 0, \dots)) = \Pi_\omega(\xi).$$

La fonction de Pólya modifiée  $\Pi_\omega$  n'est pas identiquement égale à 1, puisque  $\omega \neq 0$ . Ainsi, dans un voisinage  $D(0, R)$  de 0, la fonction  $\Pi_\omega$  n'est pas identiquement égale à 1. Mais ceci contredit l'hypothèse de départ, car via cette hypothèse

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{(n)}(\text{diag}(\epsilon_n \xi, 0, \dots)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{n^m \epsilon_n^m}{n(n+1) \dots (n+m-1)} \right)^2 h_m \left( -\frac{\lambda^{(n)^2}}{4n^2} \right) \xi^{2m} \\ &= 1, \end{aligned}$$

et alors

$$\Pi_\omega \equiv 1. \quad \square$$

**Théorème 4.3.4** *Les points extrémaux de l'ensemble  $\mathfrak{P}$  sont les fonctions  $\varphi_\omega$  définies par :*

$$\varphi_\omega(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi) \quad (\xi \in V_\infty),$$

où  $\Pi_\omega$  est la fonction de Pólya modifiée associée à  $\omega \in \Omega$ .

**Preuve.** (a) La fonction  $\varphi_\omega$  étant multiplicative, elle est par suite sphérique (Théorème 4.3.1). Donc, c'est un élément extrémal de  $\mathfrak{P}$ .

(b) Soit  $\varphi \in \text{ext}(\mathfrak{P})$ . C'est la transformée de Fourier d'une mesure ergodique  $\nu$  sur  $V^\infty$  relativement à l'action du groupe  $K_\infty$ . D'après un théorème de Vershik ([40], Theorem 3.2), la mesure  $\nu$  est limite étroite d'une suite de mesures  $\nu^{(n)}$ ,  $\nu^{(n)}$  étant une mesure orbitale relativement à  $K_n$ . Par conséquent  $\varphi$  est limite de la suite  $\varphi^{(n)}$ ,  $\varphi^{(n)}$  étant la transformée de Fourier de  $\nu^{(n)}$ . D'après le théorème 4.3.3, il existe  $\omega \in \Omega$  tel que :

$$\varphi_\omega(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi) \quad (\xi \in V_\infty). \quad \square$$

Nous obtenons ainsi un paramétrage de l'ensemble  $\text{ext}(\mathfrak{P})$  par  $\Omega$ . Un espace mesurable est dit lusinien ou standard s'il est isomorphe à une partie borélienne d'un espace polonais muni de la tribu induite par la tribu borélienne.

**Proposition 4.3.5** *La correspondance  $\Omega \leftrightarrow \text{ext}(\mathfrak{P})$  est un isomorphisme entre deux espaces standards.*

**Preuve.** Par le corollaire 4.3.2, l'espace  $\Omega$  est standard. Aussi en suivant la preuve du théorème de Bochner généralisé (Théorème 3.3.3), on peut voir que l'ensemble  $\text{ext}(\mathfrak{P})$  est un borélien dans un espace standard. Donc, il est standard par ([16], Appendice B, B 20). Aussi, par le corollaire 1, l'application  $\text{ext}(\mathfrak{P}) \rightarrow \Omega$ ,  $\varphi_\omega \mapsto \omega$  est borélienne bijective. Ainsi, par ([16], Appendice B, B22), cette application est un isomorphisme.  $\square$

On en déduit une version paramétrée du théorème de Bochner pour les paires de Guelfand généralisées (Théorème 3.3.3).

**Théorème 4.3.5** (Bochner généralisé)

*Soit  $\varphi$  une fonction continue de type positif sur  $V_\infty$ ,  $K_\infty$ -invariante et vérifiant  $\varphi(e) = 1$ . Alors, il existe une unique mesure de probabilité  $\mu$  définie sur  $\Omega$  telle que, pour tout  $g \in V_\infty$ ,*

$$\varphi(g) = \int_{\Omega} \varphi_\omega(g) \mu(d\omega).$$



**Remarque 4.3.1** (Généralisation) Considérons les espaces  $V_{n,p} = M(n, p; \mathbb{C})$  et  $K_{n,p} = U(n) \times U(p)$  agissant sur  $V_{n,p}$ . Alors  $(G_{n,p}, K_{n,p})$  est une paire de Guelfand où  $G_{n,p} = K_{n,p} \ltimes V_{n,p}$ . Pour définir la limite inductive de ces paires de Guelfand, on suppose que  $p$  dépend de  $n : p = p(n)$ , que  $p(n)$  est une suite croissante et que le rapport  $\frac{n}{p}$  a une limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p} = c \quad (0 < c \leq 1).$$

On pose  $G(n) = G_{n,p(n)}$ ,  $K(n) = K_{n,p(n)}$  et  $V(n) = V_{n,p(n)}$ . Dans ce cadre là, les fonctions sphériques de type positif relativement à la paire de Guelfand  $(G(n), K(n))$  sont les transformées de Fourier des mesures orbitales sur  $V(n)$ . En gardant les mêmes définitions pour  $D$  et  $\Pi_\omega$ , on montre que l'expression de ces fonctions est donnée comme suit : si

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & x_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \xi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varphi_x(\xi) = C_n \frac{1}{D(x)D(\xi)} \det\left(\left(J_{p(n)-n}(x_j \xi_k)\right)_{1 \leq j, k \leq n}\right),$$

où

$$C_n = (-4)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^{n-1} j! \prod_{j=1}^{p(n)-1} j!.$$

On pourra alors démontrer, par une méthode analogue à celle utilisée pour les matrices complexes carrées, que les fonctions  $\varphi_\omega$ , qui sont sphériques de type positif sur  $V(\infty)$  sont données par :

$$\varphi_\omega \left[ \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & \xi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \tilde{\Pi}_\omega(\xi_1) \dots \tilde{\Pi}_\omega(\xi_n),$$

où

$$\tilde{\Pi}_\omega(\lambda) := \Pi_\omega(\sqrt{c}\lambda).$$

### 4.3.4 Formule de Lévy-Khinchine

Une fonction  $\psi$  définie sur un espace vectoriel réel  $\mathcal{V}$  et à valeurs complexes est dite *de type négatif* si  $\psi(0) \geq 0$ ,  $\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)}$  et, pour tous  $\xi_1, \dots, \xi_N \in \mathcal{V}$  et tous  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$  tels que  $\sum_{i=1}^N c_i = 0$ ,

$$\sum_{i,j=1}^N c_i \overline{c_j} \psi(\xi_i - \xi_j) \leq 0.$$

Une fonction de type négatif  $\psi$  est dite normalisée si  $\psi(0) = 0$ . Puisque  $\psi(\xi) - \psi(0)$  est aussi continue, de type négatif et biinvariante par  $U(\infty)$ , on peut supposer que  $\psi(0) = 0$ . Si  $\varphi$  est une fonction de type positif, alors  $\psi(\xi) = \varphi(\xi) - \varphi(0)$  est de type négatif. Il y' a un lien assez étroit entre les fonctions de type négatif et les fonctions de type positif. C'est la donnée de la proposition suivante :

**Proposition 4.3.6** (Schoenberg ([48], page 527) et ([4], Theorem 7.8))  
*La fonction  $\psi$  est de type négatif si et seulement si  $\psi(0) \geq 0$ , et, pour tout  $t \geq 0$ ,  $e^{-t\psi}$  est de type positif.*

Les fonctions de type négatif constituent un cône convexe. Les fonctions continues de type négatif sur un espace vectoriel réel de dimension finie admettent une représentation intégrale. C'est la formule de Lévy-Khinchine.

Nous allons établir un résultat analogue dans le cas où  $\mathcal{V} = V_2^\infty$  est l'espace des matrices carrées complexes de Hilbert-Schmidt sur lequel agit le groupe  $K_\infty = U(\infty) \times U(\infty)$ . La topologie de cet espace est définie par la norme de Hilbert-Schmidt

$$|||\xi|||_\infty = \left( \sum_{i,j=1}^\infty |\xi_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (\text{tr}(\xi^2))^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction  $\xi \mapsto \varphi_\omega(\xi) = \det \Pi_\omega(\xi)$ , qui est définie sur  $V_\infty$ , se prolonge de façon naturelle en une fonction continue sur  $V_2^\infty$ . En utilisant le théorème de Bochner généralisé (Théorème 4.3.5), on peut démontrer que toute fonction continue de type négatif sur cet espace admet une représentation intégrale analogue à celle donnée par la formule de Lévy-Khinchine.

Le lemme suivant est nécessaire pour la démonstration :

**Lemme 4.3.5**

$$\varphi_\omega(\xi) = 1 - \|\omega\| \operatorname{tr}(\xi^2) + R(\omega, \xi),$$

où

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{R(\omega, \xi)}{\|\omega\|} = 0 \quad (\xi \in V_\infty),$$

et, pour tout  $\rho > 0$ , il existe  $C > 0$ , et il existe  $\varepsilon > 0$ , tels que, si  $\|\omega\| \leq \varepsilon$  et  $\|\xi\| \leq \rho$ , alors

$$|1 - \varphi_\omega(\xi)| \leq C\|\omega\|.$$

**Preuve.** La démonstration est analogue à celle du ([8], Lemma 3.2). On utilise, pour  $\xi \neq 0$  et  $\omega \in \Omega$  assez proche de zéro, le développement

$$\varphi_\omega(\xi) = \exp \left( -\gamma \operatorname{tr}(\xi^2) - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tr} \log (1 + \alpha_k \xi^2) \right). \quad \square$$

**Théorème 4.3.6** Soit  $\psi$  une fonction continue et  $K_\infty$ -invariante sur  $V_2^\infty$ . Alors  $\psi$  est de type négatif si et seulement si elle admet la représentation intégrale suivante

$$\psi(\xi) = A_0 + A_1 \operatorname{tr}(\xi^2) + \int_{\Omega \setminus \{0\}} (1 - \varphi_\omega(\xi)) \nu(d\omega),$$

où  $A_0, A_1$  sont des constantes positives ou nulles et  $\nu$  est une mesure positive sur  $\Omega \setminus \{0\}$  telle que

$$\int_{\Omega \setminus \{0\}} \frac{\|\omega\|}{1 + \|\omega\|} \nu(d\omega) < \infty.$$

Les constantes  $A_0, A_1$  et la mesure  $\nu$  sont déterminées de manière unique.

**Preuve.** L'idée de la preuve est semblable à celle donnée dans ([8], proof of theorem 3.1), pour les matrices hermitiennes de Hilbert-Schmidt.

a) D'après le lemme 4.3.5, l'intégrale est bien définie et une fonction  $\psi$  donnée par une telle représentation est continue de type négatif et invariante par  $K_\infty$ .

b) Existence de la représentation : soit  $\psi$  une fonction continue de type négatif sur  $V_2^\infty$ , invariante par  $K_\infty$ . Puisque  $\psi(\xi) - \psi(0)$  est aussi continue de type négatif et invariante par  $K_\infty$ , on peut supposer que  $\psi(0) = 0$ .

Pour  $t \geq 0$ , la fonction  $e^{-t\psi}$  est continue de type positif sur  $V_2^\infty$  et invariante par  $K_\infty$ . Donc d'après le théorème de Bochner généralisé (Théorème 4.3.5), il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_t$  sur  $\Omega$  telle que, pour tout  $\xi \in V_\infty$ ,

$$e^{-t\psi(\xi)} = \int_{\Omega} \varphi_\omega(\xi) \mu_t(d\omega).$$

Comme la fonction  $\varphi_\omega$  se prolonge en une fonction continue sur  $V_2^\infty$ , en utilisant le théorème de convergence dominée, on montre que la représentation intégrale précédente reste valable sur  $V_2^\infty$ . En séparant les parties réelles et imaginaires on obtient

$$e^{-t\Re\psi(\xi)} \cos(t\Im\psi(\xi)) = \int_{\Omega} \Re\varphi_\omega(\xi) \mu_t(d\omega). \quad (4.4)$$

et

$$e^{-t\Re\psi(\xi)} \sin(t\Im\psi(\xi)) = - \int_{\Omega} \Im\varphi_\omega(\xi) \mu_t(d\omega). \quad (4.5)$$

Par passage à la limite quand  $t$  tend vers 0 dans l'équation (4.4), on établit une représentation intégrale de la fonction  $\Re\psi$ . Puis, en utilisant l'équation (4.5), on obtient une représentation intégrale de la fonction  $\psi$ .

c) Unicité : pour démontrer l'unicité de la constante  $A_1$ , on utilise le fait que la fonction de Pólya modifiée est de type positif et est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui permet de déterminer la constante  $A_1$  via la relation :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\psi(s\xi_0)}{s^2} = A_1 \quad (s \geq 1).$$

Pour établir l'unicité de la mesure  $\nu$ , on utilise, d'une part, la relation fonctionnelle des fonctions sphériques de la paire  $(K_\infty \times V_\infty, K_\infty)$  (voir Théorème 3.2.1), et d'autre part, l'unicité de la représentation intégrale donnée par le théorème de Bochner généralisé (Théorème 4.3.5).  $\square$

# Bibliographie

- [1] *S. Ben Saïd, B. Ørsted. Analysis on flat symmetric spaces.* J. Math. Pures Appl. **84** (2005), 1393-1426.
- [2] *F.A. Berezin, F.I. Karpelevič. Zonal spherical functions and Laplace operators on some symmetric spaces.* Dokl. Akad. Nauk SSSR. **118** (1958), 9-12.
- [3] *C. Berg, J. P. Christensen, P. Ressel. Harmonic analysis on semi-groups. Theory of positive definite and related functions.* Springer, 1984.
- [4] *C. Berg, G. Forst. Potentiel theory on locally compact abelian groups.* Springer, 1975.
- [5] *S. Bochner. Lecture on Fourier integrals.* Princeton University Press, 1959.
- [6] *A. Borodin, G. Olshanski. Infinite random matrices and ergodic measures.* Comm. Math. Phys. **223**. No 1 (2001), 87-123.
- [7] *M. Bouali. Analyse harmonique en dimension infinie.* Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006.
- [8] *M. Bouali. A Lévy-Khinchin formula for the space of infinite dimensional Hermitian matrices.* To appear in Journal of Lie Theory.
- [9] *N. Bourbaki. Eléments de mathématique. Fasc 20. Livre 1. Théorie des ensembles. Chapitre 3 : ensembles ordonnés cardinaux, nombres entiers.* Hermann, 1963.
- [10] *N. Bourbaki. Intégration. Chapitres 4-5,* Hermann, 1963.
- [11] *N. Bourbaki. Intégration. Chapitres 7-8,* Hermann, 1963.
- [12] *H. Cartan, R. Godement. Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts.* Ann. Sci. ENS **64** (1947), 79-99.
- [13] *G. Choquet. Lecture on Analysis. Vol 1. Integration and topological vector spaces.* Benjamin, Inc, New York, 1969.

- 
- [14] *G. Choquet. Lectures on analysis. Vol 2. Representation theory.* Benjamin, Inc, New York, 1969.
- [15] *J. Dixmier. Les Algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de Von Neumann).* Gauthier-Villars, 1957.
- [16] *J. Dixmier. Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations.* Gauthier Villars, 1964.
- [17] *R.S. Doran, J.M.G. Fell. Representations of  $*$ -algebras, locally compact groups, and Banach  $*$ -algebraic bundles. Vol 1. Basic representation theory of groups and algebras.* Academic Press, 1988.
- [18] *J. Faraut. Analyse harmonique sur les paires de Gelfand et les espaces hyperboliques.* Cours du CIMPA, 1980.
- [19] *J. Faraut. Infinite dimensional harmonic analysis and probability.* in Probability measures on groups : Proceedings of the CIMPA-TIFR school on Probability measures on groups. Recent directions and trends. TIFR, Mumbai. Narosa Publishing House, 2006.
- [20] *J. Faraut. Espaces Hilbertiens invariants de fonctions holomorphes.* Séminaires et Congrès. SMF, **7** (2003), 101-167.
- [21] *J. Faraut, A. Korányi. . Analysis on Symmetric Cones.* Oxford University Press, 1994.
- [22] *J. Faraut, K. Harzallah. . Distances hilbertiennes invariantes sur un espace homogène,* Ann. Inst. Fourier, **24** (1974), 171-217.
- [23] *J. Faraut. Analyse sur les groupes de Lie : une introduction.* Calvage et Mounet, 2006.
- [24] *H. Glöckner. Positive definite functions on infinite-dimensional convex cones.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. **789**, 2003.
- [25] *R. Godement. Sur les fonctions de type positif.* C. R. Acad. Sci. Paris. **221** (1945), 69-71.
- [26] *R. Godement. Sur quelques propriétés des fonctions de type positif définies sur un groupe quelconque.* C. R. Acad. Sci. Paris. **222** (1946), 529-531.
- [27] *R. Godement. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes.* Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 1-84.
- [28] *P.R. Halmos. A Hilbert space problem book.* Van Nostrand, 1967.
- [29] *P.R. Halmos. Measure theory.* Springer, 1974.
- [30] *E. Hewitt, K.A. Ross. Abstract harmonic analysis I.* Springer, (1963).

- 
- [31] *T. Hirai, E. Hirai. Positive definite class functions on a topological group and characters of factor representations.* J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), no. 2, 355–379.
- [32] *S. Karlin. Total positivity.* Vol 1. Stanford Univ. Press, Stanford, CA, 1968.
- [33] *S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik. Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* Invent. Math. **158**, No 3 (2004), 551-642.
- [34] *M.G. Krein. A ring of functions on a topological group.* C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) **29** (1940), 275-280.
- [35] *M.G. Krein. Hermitian kernels on homogeneous spaces I.* Amer. Math. Translations 2. Vol **34**, 1949.
- [36] *M.G. Krein. Hermitian kernels on homogeneous spaces II.* Amer. Math. Translations 2. Vol **34**, 1950.
- [37] *C. Meaney. The inverse Abel transform for  $SU(p, q)$ ,* Ark. Mat. **24** (1986), 131-140.
- [38] *N.I. Nessonov. Complete classification of representations of  $GL(\infty)$  containing the identity representation of the unitary subgroup.* (Russian) Mat. Sb. (N.S.) **130** (1986), no. 2, 131-150.
- [39] *G. Olshanski. Unitary representation of infinite dimensional pairs  $(G, K)$  and the formalism of R. Howe.* Representation of Lie groups and related topics. (Eds. A.M. Vershik, D.P. Zhelobenko), Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Vol **7**. Gordon and Breach, 1990.
- [40] *G. Olshanski, A. Vershik. Ergodic unitarily invariant measures on the space of infinite Hermitian matrices.* Contemporary Mathematical physics (R. L. Dobroshin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, M. A. Vershik). Amer. Math. soc. Translations 2. **175** (1996), 137-175.
- [41] *G. Olshanski. The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* J. Funct. Anal. **205**, No **2** (2003), 464-524.
- [42] *K.R. Parthasarathy. Probability measures on metric spaces.* Academic Press, 1967.
- [43] *R. Phelps. Lectures on Choquet's Theorem.* Springer, 2001.
- [44] *M. Rabaoui. A Bochner type theorem for inductive limits of Gelfand pairs.* A paraître dans les annales de l'institut Fourier. Vol **58** (2008).
- [45] *M. Rabaoui. Analyse harmonique asymptotique sur l'espace des matrices complexes.* Preprint, 2007.
- [46] *W. Rudin. Functional Analysis.* Mc Graw-Hill, Inc, 1973.

- 
- [47] *W. Rudin. Real and Complex Analysis.* Mc Graw-Hill, Inc, 1969.
- [48] *I. J. Schoenberg. Positive definite functions on spheres.* Duke Math. J. **9** (1942), 96-108.
- [49] *E. Thoma. Über positiv-definite Klassenfunktionen abzählbarer Gruppen.* Math. Z. **84** (1964), 389-402.
- [50] *E. Thoma. Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe.* Math. Z. **85** (1964), 40-61.
- [51] *D. Voiculescu. Représentation factorielles de type  $II_1$  de  $U(\infty)$ .* J. Math. pures et appl. **55** (1976), 1-22.
- [52] *H. Yoshizawa. On some types of convergence of positive definite functions.* Osaka Math. J. **1** (1949), 90-94.





## Résumé

Dans cette thèse, on commence par démontrer une version généralisée du théorème de Bochner. Ce résultat concerne les paires sphériques d'Olshanski  $(G_\infty, K_\infty)$  qui sont définies comme limites inductives de suites croissantes de paires de Gelfand  $(G_n, K_n)_n$ . En utilisant la théorie de la représentation intégrale de Choquet dans les cônes convexes, on établit une représentation de type Bochner pour toute fonction  $\varphi$  de l'ensemble  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  des fonctions continues,  $K_\infty$ -biinvariantes et de type positif sur  $G_\infty$ . Cette représentation est donnée via une unique mesure positive et bornée  $\mu$  par :  $\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) d\omega$ . Ici  $\Omega$  désigne l'ensemble des fonctions sphériques de type positif sur  $G_\infty$ .

Ensuite, on considère la paire sphérique  $(U(\infty) \times U(\infty), (U(\infty) \times U(\infty)) \times V_\infty)$  où  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$  est l'espace des matrices complexes carrées de dimension infinie n'ayant qu'un nombre fini de coefficients non nuls, et  $U(\infty)$  est le groupe unitaire de dimension infinie. En utilisant un résultat dû à G. Olshanski et A. Vershik, on détermine l'ensemble  $\Omega$  pour la paire sphérique considérée. Ce qui nous permet de trouver une version paramétrée du théorème de Bochner généralisé qu'on utilise pour établir une représentation intégrale des fonctions continues de type négatif dans le cas de cette paire.

**Mots-clés :** Paire de Gelfand, théorème de Bochner-Godement, fonction de type positif, fonction de type négatif, fonction sphérique, paire sphérique, limite inductive, théorème de Bochner généralisé.

## Abstract

In this Thesis, we first prove a generalisation of Bochner theorem. This result deals with Olshanski spherical pairs  $(G_\infty, K_\infty)$  which are defined as inductive limits of increasing sequences of Gelfand pairs  $(G_n, K_n)_n$ . By using Choquet's theorem, we establish a Bochner type representation of any element  $\varphi$  in the set  $\mathcal{P}^{\natural}(G_\infty)$  of  $K_\infty$ -biinvariant continuous functions of positive type on  $G_\infty$ . Such representation is given via a unique, positive and bounded measure  $\mu$  by :  $\varphi(g) = \int_{\Omega} \omega(g) d\omega$ . Here  $\Omega$  is the set of spherical functions of positive type on  $G_\infty$ .

Then we consider the spherical pair  $(U(\infty) \times U(\infty), (U(\infty) \times U(\infty)) \times V_\infty)$  where  $V_\infty = M(\infty, \mathbb{C})$  is the infinite dimensional space of square complex matrices with only finite non zero coefficients, and  $U(\infty)$  is the infinite dimensional unitary group. By using a result of G. Olshanski and A. Vershik, we determine the set  $\Omega$  of spherical functions of positive type for the considered spherical pair. This enables us to find a parameterized version of the generalized Bochner theorem which we use to establish an integral representation of continuous functions of negative type in this case.

**Keywords :** Gelfand Pair, Bochner-Godement theorem, function of positive type, function of negative type, spherical function, spherical pair, inductive limit, generalized Bochner theorem.