



HAL
open science

Couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production sous contrainte de sous-traitance

Mohammed Dahane

► **To cite this version:**

Mohammed Dahane. Couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production sous contrainte de sous-traitance. Gestion et management. Université Paul Verlaine - Metz, 2007. Français. NNT : 2007METZ030S . tel-01749015

HAL Id: tel-01749015

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749015>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Présentée à

L'Université Paul Verlaine - Metz
UFR Mathématiques, Informatique, Mécanique

Pour obtenir le titre de

DOCTEUR

Spécialité : Sciences de l'ingénieur
Mention : AUTOMATIQUE

Par

Mohammed DAHANE

Titre de la thèse :

**Couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la
production sous contrainte de sous-traitance**

Soutenue le 19 Novembre 2007, devant le jury composé de :

Rapporteurs :

Jean-Pierre CAMPAGNE

Professeur à l'INSA de Lyon.

Noureddine ZERHOUNI

Professeur à l'ENSMM, Besançon.

Examineurs :

Daniel NOYES

Professeur à École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes.

Anis CHELBI

Maître de conférence (HDR) à l'École Supérieure des
Sciences et Techniques de Tunis.

Directeur de thèse :

Nidhal REZG

Professeur à l'Université Paul Verlaine de Metz.

Co-encadrant :

Christian CLEMENTZ

Professeur Agrégé Docteur. École Nationale d'Ingénieurs
de Metz

À mes très chers parents...

Merci pour votre soutien et tout l'amour que vous m'avez donné,
J'ai un grand honneur et une grande chance d'avoir des parents comme vous...
Merci d'avoir cru en moi et de m'avoir poussé à rêver et à atteindre mes rêves,
...sans vos sacrifices aucun de ces rêves n'aurait été réalité

Je vous aime.

À ma grande famille.
À la mémoire de mes grands-parents et ma sœur Saliha.

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué dans l'équipe Systèmes de Production (SdP) au sein du Laboratoire de Génie Industriel et Production Mécanique (LGIPM), et le projet COSTEAM de l'INRIA Nancy - Grand Est, dont je tiens à exprimer mes remerciements les plus sincères à leur directeur M. Nidhal REZG.

Ma reconnaissance la plus profonde et ma gratitude la plus sincère à mon Directeur de thèse Monsieur Nidhal REZG, Professeur à l'Université Paul Verlaine - Metz, pour m'avoir encadré et encouragé durant trois années et sa patience de suivre avec attention les travaux de cette thèse jusqu'à son aboutissement. Je le remercie aussi pour sa confiance, ses conseils et tout le temps qu'il m'a consacré. Mes remerciements les plus sincères à mon co-encadreur, Monsieur Christian CLEMENTZ, Directeur des études de l'École Nationale d'Ingénieurs de Metz (ENIM) pour son soutien, ses conseils et ses encouragements tout au long de ma thèse ainsi que pour sa disponibilité et sa gentillesse. Un grand merci pour vous, Nidhal et Christian, pour votre amitié. C'était un grand bonheur et un grand plaisir de travailler avec vous.

Mes remerciements les plus vifs s'adressent à ceux qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de ma thèse :

Monsieur Jean-Pierre CAMPAGNE, Professeur à l'INSA de Lyon, Monsieur Noureddine ZERHOUNI, Professeur à l'ENSMM, Besançon, Monsieur Daniel NOYES Professeur à École Nationale d'Ingénieurs de Tarbes et Monsieur Anis CHELBI, Maître de conférence (HDR) à l'École Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis. Qu'ils trouvent ici toute ma reconnaissance pour avoir accepté d'examiner cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je remercie tous les membres du laboratoire LGIPM. Je pense particulièrement à Jérémie, Mehdi, Sofiène, Zied et Ali, pour leurs encouragements et leur amitié.

Je voudrais remercier et saluer la disponibilité et la gentillesse de Mme Christel WIEMERT, Mme Chantal FOUSSE, Mme Viviane Ludmann, Mme Clotilde GUENOT ainsi que M. Jean Luc COYARD.

Un merci particulier pour mes chers amis Zerouk, M'hamed, Samir et Smail pour leur présence, leur soutien et leur fidélité.

Je ne saurais assez remercier mes amis de toujours Farid, Rachid, Abdelkader, Mohamed(s), Laarbi et Maamar.

Une pensée particulière va à Fatima, à qui j'exprime ma profonde gratitude.

Tous mes remerciements vont à mes parents, mes sœurs : Fatiha, Malika, Karima, Samira, Saliha et Fatima-Zohra, mon petit frère Brahim, mes beaux-frères : Hamou, Abdel Kader, Maazouz, Hafid et Omar, mes adorables nièces et neveux, mes oncles et tantes ainsi que toute la famille DAHANE et BEN AMARA, pour leur amour et leur soutien inconditionnel durant les longues années de ma scolarité.

Enfin, Un grand merci pour tous les "Safraouis", à mes amis de toujours et à ceux qui m'ont aidé de près ou de loin. Je pense à kada, Boutkhill et à tous mes enseignants et instituteurs, je cite en particuliers ma première institutrice Mme Amina DIDOUH.

Table des matières

Liste des figures	V
Liste des tableaux	VII
Introduction	1
Chapitre I	
<hr/>	
La sous-traitance et la maintenance intégrée : État de l'art	5
II.1. Introduction	6
II.2. Le couplage de la maintenance et la production	6
I.2.1. Travaux de Van der Duyn Schouten et Vanneste	7
I.2.2. Travaux de Meller et Kim	7
I.2.3. Travaux de Srinivasan et Lee	7
I.2.4. Travaux de Ouali <i>et al.</i>	7
I.2.5. Travaux de Rezg <i>et al.</i>	8
I.2.6. Travaux de Chelbi et Ait-Kadi	8
I.2.7. Travaux de Chelbi et Rezg	9
I.2.8. Travaux Benbouzid-Sitayeb <i>et al.</i>	9
II.3. Le concept de la sous-traitance industrielle	9
I.3.1. Définitions	9
I.3.2. Motivations de la sous-traitance	10
I.3.3. Diverses formes de la sous-traitance	11
I.3.4. Avantages de la sous-traitance	11
I.3.5. Inconvénients de la sous-traitance	13
I.3.6. Quelques travaux menés sur la sous-traitance	14
I.3.6.1. Travaux de Morcos	14
I.3.6.2. Travaux de Kimura	14
I.3.6.3. Travaux de Berry	14
I.3.6.4. Travaux de Van Mieghem	15
I.3.6.5. Travaux de Grossman <i>et al.</i>	15
I.3.6.6. Travaux de Amesse <i>et al.</i>	16
I.3.6.7. Travaux de Cagliano et Spina	16
II.4. Problématique de la maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance	17
I.4.1. Motivation de cette étude	17
I.4.2. Problématique industrielle	17

I.4.2.1	Le transport par oléoducs	18
I.4.2.2	La maintenance des oléoducs	19
I.4.3.	Problème posé par cette thèse	20
I.4.4.	Travaux de Dellagi et <i>al.</i>	21
I.4.5.	Positionnement par rapport aux travaux de Dellagi	22
II.5.	Conclusion	22

Chapitre II

	Couplage de la maintenance et de la production sous la contrainte de sous-traitance	23
II.1.	Introduction	24
II.2.	Étude de la rentabilité d'une politique IMP : Cas d'une machine	24
II.2.1.	Politique de commande	25
II.2.2.	Politique de maintenance	25
II.2.3.	L'apport de la Politique de Maintenance Intégrée IMP par rapport à une Politique de Maintenance Simple SMP	26
II.2.3.1.	La Politique de Maintenance Simple SMP	26
II.2.3.2.	La Politique de Maintenance Intégrée IMP	29
II.2.4.	Différence entre une politique IMP ^A et une politique IMP ^B	30
II.2.4.1.	La Politique de Maintenance Intégrée selon le type bloc IMP ^B	31
II.2.4.2.	La Politique de Maintenance Intégrée selon le type âge IMP ^A	32
II.2.4.3.	Performances de la politique IMP ^A par rapport à la politique IMP ^B	34
II.3.	Étude de la rentabilité de la contrainte de la sous-traitance sous une politique IMP	34
II.3.1.	La Politique IMP ^{TS}	35
II.3.1.1.	Définition de la politique IMP ^{TS}	35
II.3.1.2.	Politique de commande de IMP ^{TS}	35
II.3.1.3.	Politique de maintenance de IMP ^{TS}	35
II.3.2.	La Politique IMP ^{WS}	35
II.3.2.1.	Définition de la politique IMP ^{WS}	35
II.3.2.2.	Politique de commande IMP ^{WS}	35
II.3.2.3.	Politique de maintenance de IMP ^{WS}	36
II.3.2.4.	Politique d'affectation à la sous-traitance	36
II.3.3.	Comparaison des politiques IMP ^{TS} et IMP ^{WS}	37
II.4.	Étude de la rentabilité d'une politique IMP : Cas de deux machines avec prise en compte de la sous-traitance	47
II.4.1.	Politique de commande	47
II.4.2.	Politique de maintenance	49
II.4.3.	Politique d'affectation à la sous-traitance	50
II.4.4.	Problématique à résoudre	51
II.4.5.	Politique de Maintenance Simple (SMP)	51
II.4.5.1.	Définition de la politique SMP	51
II.4.5.2.	Optimisation avec la politique SMP	52
II.4.6.3.	Résultats de la politique SMP	53
II.4.6.	Politique de Maintenance Intégrée (IMP)	53
II.4.6.1.	Définition de la politique IMP	53
II.4.6.2.	Optimisation avec la politique IMP	54
II.4.6.3.	Résultat de la politique IMP	55
II.4.7.	Étude des performances de IMP par rapport à SMP	55
II.5.	Conclusion	56

Chapitre III

Étude de l'aspect temporel de la contrainte de sous-traitance dans un contexte d'une politique de maintenance intégrée	57
III.1. Introduction	58
III.2. Politique d'affectation à la TST de la politique IMP	58
III.3. Politique de commande de la politique IMP	59
III.4. Politique de maintenance	60
III.5. Impact du placement de la TST	60
III.6. Impact du retard de la sous-traitance	77
III.7. Impact du prolongement de la durée de la TST	79
III.8. Conclusion	83

Chapitre IV

Analyse de la maintenance et de la production sous la contrainte de sous-traitance	85
IV.1. Introduction	86
IV.2. La Politique Adaptée de Maintenance Intégrée (AIMP)	86
IV.2.1. Définition	86
IV.2.2. Politique de commande	87
IV.2.3. Politique d'affectation à la sous-traitance	87
IV.2.4. Politique de maintenance	88
IV.2.5. Équation du coût de la politique AIMP	88
IV.2.5.1. Expression du coût de stockage	88
IV.2.5.2. Expression du coût de pénurie	89
IV.2.5.3. Expression du coût de maintenance	90
IV.2.5.4. Équation du coût total moyen par cycle	90
IV.2.5.5. Optimisation	91
IV.2.5.6. Exemple numérique	91
IV.3. La Politique Généralisée de Maintenance Intégrée (GIMP)	92
IV.3.1. Définition	92
IV.3.2. Politique de commande	93
IV.3.3. Politique d'affectation à la sous-traitance	94
IV.3.4. Politique de maintenance	94
IV.3.5. Équation du coût de la politique GIMP	95
IV.3.5.1. Expression du coût de stockage	95
IV.3.5.2. Expression du coût de pénurie	105
IV.3.5.3. Expression du coût de maintenance	105
IV.3.5.4. Expression du coût total moyen par cycle	106
IV.3.5.5. Optimisation	106
IV.3.5.6. Exemple numérique	108
IV.4. La Politique de Maintenance Intégrée Relaxée (IMP ^R)	109
IV.4.1. Définition	109
IV.4.2. Politique de commande	109
IV.4.3. Politique d'affectation à la sous-traitance	111
IV.4.4. Politique de maintenance	111
IV.4.5. Modèle de simulation	111
IV.4.5.1. Algorithme de simulation	112
IV.4.5.2. Analyse de la variance	113
IV.4.5.3. Optimisation	114
IV.5. Conclusion	115

Chapitre V

Étude quantitative de la contrainte de sous-traitance	117
V.1. Introduction	118
V.2. Problématique	118
V.2.1. Politique globale d'affectation aux tâches de sous-traitance	118
V.2.2. Politique globale de commande	119
V.2.3. Politique globale de maintenance	120
V.2.4. Approche de simulation	121
V.2.5. Paramètres de simulation	121
V.3. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Simple (PPMSS)	122
V.3.1. Politique d'affectation à la sous-traitance	122
V.3.2. Politique de commande	122
V.3.3. Optimisation avec la politique PPMSS	123
V.4. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Multiple (PPMSM)	125
V.4.1. Politique d'affectation à la sous-traitance	125
V.4.2. Politique de commande	125
V.4.3. Optimisation avec la politique PPMSM	126
V.5. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Inflexible (PPMSI)	127
V.5.1. Politique d'affectation à la sous-traitance	127
V.5.2. Politique de maintenance	128
V.5.3. Politique de commande	129
V.5.4. Optimisation avec la politique PPMSI	130
V.6. Interprétations des résultats	132
V.7. Conclusion	132
Conclusion	133
Annexe	
Références bibliographiques	

Liste des figures

Figure I.1.	Évolution du tonnage annuel et celle du tonnage pondéré en France	18
Figure II.1.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMP	25
Figure II.2.	Étude de la contrainte de sous-traitance : composants du système	35
Figure II.3.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle de maintenance de IMP ^{WS} et sa différence avec la politique IMP ^{TS}	36
Figure II.4.	Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 1	38
Figure II.5.	Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 2	39
Figure II.6.	Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 3	40
Figure II.7.	Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 4	41
Figure II.8.	Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 5	44
Figure II.9.	Couplage de la maintenance et la production : composants du système	47
Figure II.10.	Évolution du niveau du stock	48
Figure II.11.	Maintenance préventive pendant la sous-traitance (cas 1)	49
Figure II.12.	Maintenance préventive pendant la sous-traitance (cas 2)	49
Figure II.13.	Politique d'affectation à la sous-traitance	50
Figure III.1.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMP	59
Figure III.2.	Différence de début de réalisation de la TST selon le cas 1	64
Figure III.3.	Différence de début de réalisation de la TST selon le cas 2	72
Figure III.4.	Impact du prolongement de la durée de la TST sur l'évolution du niveau du stock	81
Figure IV.1.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle avec la politique AIMP	87
Figure IV.2.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle avec la politique GIMP	94
Figure VI.3.	Évolution du niveau du stock durant une période de production à la demande	96
Figure IV.4.	Évolution du niveau du stock durant la phase II	97
Figure IV.5.	Évolution du niveau du stock durant deux périodes de production à la demande	98
Figure IV.6.	Durée d'une période de production à la demande séparant deux TST	98
Figure IV.7.	Évolution du stock durant la dernière période de production à la demande	101
Figure IV.8.	Évolution du stock durant une TST	102
Figure IV.9.	Évolution du stock durant la période de maintenance préventive	104
Figure IV.10.	Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMP ^R	110
Figure IV.11.	Cas 1 : Comportement du niveau du stock pendant la phase I	110

Figure IV.12.	Cas 2 : Comportement du niveau du stock pendant la phase I	111
Figure IV.13.	Découpage du temps, et les états de la machine M pendant un cycle	112
Figure IV.14.	Étape du fonctionnement de la machine M pendant un cycle	113
Figure V.1.	L'évolution du niveau du stock pendant la phase I	119
Figure V.2.	L'évolution du niveau du stock pendant une TST	120
Figure V.3.	L'évolution du niveau du stock pendant hors sous-traitance	120
Figure V.4.	Évolution de niveau du stock pour la PPMSS	122
Figure V.5.	Évolution de niveau du stock pour la PPMSSM	125
Figure V.6.	Récupération des TST perdues dans la politique PPMSS	128
Figure V.7.	Récupération d'une TST sans report de maintenance préventive	128
Figure V.8.	Récupération d'une TST avec report de maintenance préventive	129
Figure V.9.	Évolution de niveau du stock pour la PPMSS	130

Liste des tableaux

Tableau I.1.	Coût de transport de produits pétroliers avec divers moyens	19
Tableau II.1.	Structure des coûts	26
Tableau II.2.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	31
Tableau II.3.	Analyse de variance de $C_t^{IMP^B}$	31
Tableau II.4.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	32
Tableau II.5.	Analyse de variance de $C_t^{IMP^A}$	33
Tableau II.6.	Caractéristiques des machines	51
Tableau II.7.	Structure des coûts	51
Tableau II.8.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	52
Tableau II.9.	Analyse de variance de L_2	52
Tableau II.10.	Valeurs de α^* et h^* et leurs correspondances L_2	53
Tableau II.11.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expérience	54
Tableau II.12.	Analyse de variance de L^{IMP}	54
Tableau II.13.	Performances de PMI par rapport à SMP	55
Tableau IV.1.	Structure des coûts	92
Tableau IV.2.	Évolution du coût moyen par cycle et les valeurs optimales de T et h par rapport au nombre de TST par cycle	108
Tableau IV.3.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	114
Tableau IV.4.	Analyse de variance.	114
Tableau V.1.	Caractéristiques du système	121
Tableau V.2.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	123
Tableau V.3.	Analyse de variance de $C_{t_1}^T$	124
Tableau V.4.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	126
Tableau V.5.	Analyse de variance de $C_{t_2}^T$	126
Tableau V.6.	Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences	130
Tableau V.7.	Analyse de variance de $C_{t_3}^T$	131
Tableau V.8.	Récapitulatif des résultats	132

Introduction

Si selon M. Goldratt¹, l'excellence en production est le but à atteindre² ; elle constitue désormais une vraie obligation pour résister aux différentes contraintes et exigences du monde économique actuel, caractérisé par une compétition exacerbée, sans limites, ni frontières. Dans ce cadre, diverses techniques et procédés ont vu le jour pour guider les décideurs et managers du secteur économique et industriel afin de prendre les meilleures décisions capables de garantir la pérennité et la stabilité de leurs entreprises, tel que le *juste-à-temps*, qui consiste en une méthode d'organisation des systèmes de production dans le but de minimiser les stocks. Parmi les techniques émergentes on peut citer aussi la philosophie du « *lean manufacturing* » qui consiste à éliminer les gaspillages sur toutes les phases du système de production, classés dans sept familles : la surproduction, le stock, les délais d'attente, le transport, les processus, les mouvements, et les taux de rebut.

Dans cette perspective de perfectionnement, l'amélioration de la gestion des activités de la maintenance s'impose comme un choix stratégique nécessaire pour garantir le seuil désiré de disponibilité du système de production. Chaque instant où la machine ou le système est en panne constitue un risque majeur d'insatisfaction des clients, pouvant générer des retards de livraison ou – dans le cas extrême – la perte définitive de la demande des clients, ce qui peut affecter les profits et surtout l'image et la crédibilité de l'entreprise vis-à-vis ses clients et de ses actionnaires. En conséquence, une coordination entre les stratégies de la maintenance et celles de la production devient primordiale pour avoir une vue globale sur toute la chaîne de production, assurant ainsi, un traitement complet de la demande des clients et une prise en compte efficace et réactive de tout problème ou imprévu. Cette coordination entre la maintenance et la production est connue sous forme d'une approche dite de maintenance intégrée, faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production.

Cependant, en parallèle des techniques et des améliorations internes que l'entreprise peut adopter concernant la production et la maintenance afin d'améliorer ses comportements et sa gestion, la coopération avec des acteurs externes devient une pratique de plus en plus répandue pour faire face aux défis grandissants de la mondialisation, qui a accentué la concurrence internationale et a provoqué de grands bouleversements et changements de méthodes et de procédés de production, poussant les entreprises à faire baisser leurs coûts de production pour rester attractives et

¹ Eliyahu Goldratt, Conseiller en management de renommée internationale, créateur de la théorie de contraintes.

² Voir : "Le but". Eliyahu M. Goldratt & Jeff COX. Éditions Eyrolles. 1986.

compétitives. Mais cette coopération n'est pas toujours basée sur un critère de coûts de production. Dans certain cas, elle constitue une alternative intéressante pour combler des manques internes de technologie ou de compétences requises pour assurer la production et la qualité nécessaires. Dans cette perspective, la sous-traitance industrielle représente un moyen intéressant de coopération inter-entreprises capable d'assurer des rapports gagnants – gagnants entre des entreprises sous-traitantes et des entreprises donneurs d'ordres.

Dans ce cadre, on cherche à travers cette thèse à étudier et à proposer des politiques de maintenance intégrées pour des entreprises prestataires de sous-traitance. De telles entreprises aspirent à optimiser l'exploitation de leurs moyens et leurs compétences pour maximiser leurs profits. Cette optimisation suppose qu'en plus des relations habituelles avec ses principaux clients, l'entreprise sera sous contrainte de sous-traitance.

L'objectif de la recherche menée dans cette thèse est de trouver un compromis entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production d'une part, et d'autre part, les services de sous-traitance proposés par l'entreprise, garantissant d'abord la stabilité interne de l'entreprise et l'évolution de ses profits. Ce compromis doit garantir aussi la qualité et la pérennité des relations de l'entreprise avec ses clients traditionnels, ainsi que les intérêts des entreprises donneurs d'ordres de sous-traitance partenaires de l'entreprise.

Cette thèse a été inspirée d'un problème réel rencontré dans le domaine de transport des produits pétroliers. Il s'agit d'une compagnie propriétaire d'une installation complète de transport de plusieurs produits pétroliers. Cette installation comprend essentiellement des oléoducs pour acheminer du pétrole brut ou ses dérivées avec un certain débit de pompage vers des réservoirs à partir desquels les clients de la compagnie sont desservis.

Pour des raisons commerciales et économiques visant à optimiser l'utilisation des oléoducs et ainsi, maximiser les profits de la compagnie, mais aussi pour des raisons techniques qui imposent une utilisation permanente des oléoducs, la compagnie a pris une décision stratégique de devenir prestataire de services de sous-traitance en allouant ses oléoducs pour d'autres compagnies de transport des produits pétroliers. Une telle décision exige un effort supplémentaire dans la gestion interne de la compagnie pour pouvoir intégrer l'activité de sous-traitance sans que cela n'affecte la stabilité des relations de la compagnie avec ses clients directs. Cette intégration passe d'abord par la recherche des meilleures politiques de gestion de la maintenance et de la production assurant la continuité de l'alimentation des réservoirs de la compagnie pour satisfaire ses principaux clients. Dans cette perspective, notre travail propose une étude de la problématique de l'allocation de l'oléoduc à la sous-traitance sous forme d'un système de production composé d'une machine fonctionnant à une certaine cadence pour satisfaire une demande client via un stock. Cette machine est allouée pour réaliser des tâches de sous-traitance suivant un contrat bien établi avec le donneur d'ordres, stipulant les fréquences et les durées de la sous-traitance. Le problème à résoudre consiste à déterminer les meilleures politiques de maintenance, couplées à des stratégies de production sous une contrainte de sous-traitance.

Des politiques de maintenance intégrées ont été développées et comparées. Leurs efficacités et apports en termes de gain en coûts ont été démontrés. Dans ce cadre un certain nombre de théorèmes et de lemmes ont été proposés et justifiés prouvant les gains engendrés.

Ce mémoire sera organisé comme suit :

Lors du premier chapitre, nous présentons l'approche de couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production. Dans ce contexte, nous présenterons différents travaux et études basés sur cette approche. Dans ce chapitre nous présenterons aussi le concept de la sous-traitance industrielle, en rappelant diverses définitions et motivations de la sous-traitance vues par différents chercheurs de la communauté scientifique. Dans le même esprit, nous présenterons les différents avantages et inconvénients de cette pratique pour ces différentes parties. Dans la dernière partie de ce premier chapitre nous présenterons la problématique industrielle source de cette étude ainsi que la transposition en problématique similaire en système de production.

Le deuxième chapitre de cette thèse sera consacré d'abord à démontrer l'utilité de l'approche de maintenance intégrée faisant le couplage entre la maintenance et la commande dans le cas d'un système de production composé d'une seule machine. Ensuite, dans une deuxième partie, nous montrerons les conditions sous lesquelles la sous-traitance sera rentable pour les systèmes de productions prestataires de services de sous-traitance. Dans la dernière partie de ce chapitre nous étudierons l'approche de maintenance intégrée sous contrainte de sous-traitance dans le cas d'un système composé de deux machines.

Le troisième chapitre de ce mémoire sera dédié à l'étude de l'aspect temporel de la contrainte de sous-traitance dans un contexte de maintenance intégrée, dans l'objectif de déterminer l'impact du placement de la tâche de sous-traitance dans un cycle de maintenance avec un critère de coût à optimiser. En se basant sur les résultats obtenus, nous déterminerons ensuite la meilleure date pour exécuter une tâche de sous-traitance. Cela nous conduira à déterminer les impacts économiques d'un retard inattendu du début de réalisation de la tâche de sous-traitance, ou un prolongement imprévu de sa durée de réalisation.

À travers le quatrième chapitre, nous continuons l'étude de l'approche de la maintenance intégrée en relaxant à chaque fois une des hypothèses posées dans le premier chapitre, concernant la date de début de la tâche de sous-traitance, le nombre de tâches de sous-traitance pendant un cycle et l'hypothèse que la probabilité que la machine tombe en panne pendant la phase de construction du stock soit négligeable.

Enfin, le cinquième chapitre de ce mémoire sera consacré à étudier la contrainte de la sous-traitance de point de vue quantitatif et cela en étudiant différentes stratégies pour allouer la machine à la sous-traitance basées sur deux principes différents : d'abord, un principe de perte des tâches non accomplies à temps à cause des pannes de la machine, ce qui engendre des coûts de perte de sous-traitance. Ensuite, un deuxième principe basé sur une logique de récupération des tâches de sous-traitance non réalisées à cause des pannes de la machine. Dans ce cas, le cycle peut être rallongé pour pouvoir réaliser toutes les tâches récupérées.

Chapitre I

La sous-traitance et la maintenance intégrée : État de l'art

Dans le premier chapitre de notre thèse nous présentons le concept de maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance. Dans un premier temps nous rapportons le principe du couplage de la gestion de la maintenance et de la gestion de la production ainsi que les travaux les plus marqués de la littérature traitant cette problématique. Par la suite, nous présentons le concept de la sous-traitance industrielle en explorant les diverses définitions de la sous-traitance dans la littérature, ainsi que les différentes motivations qui poussent les entreprises à avoir recours à la sous-traitance. Ces motivations ont fait émerger deux principaux types de sous-traitance : la sous-traitance de spécialité et la sous-traitance de capacité. Ce qui nous a conduit à illustrer les avantages qui peuvent être tirés de la sous-traitance du côté du donneur d'ordres et du côté du sous-traitant mais aussi les inconvénients qui peuvent résulter de son adoption. Dans cette partie nous présentons quelques travaux traitant de la sous-traitance dans divers domaines. La troisième partie de ce chapitre est consacrée aux problématiques de maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance et constitue le cadre d'étude de cette thèse ainsi que les motivations qui nous ont poussé à entamer cette étude et la problématique industrielle qui nous a inspiré.

I.1. Introduction

Dans un monde industriel de plus en plus complexe et en perpétuel changement, les relations interentreprises ont connu beaucoup d'améliorations vers plus de rapprochement et plus de coopération. Dans ce contexte, de plus en plus d'entreprises ont recours à la sous-traitance industrielle qui est devenue une pratique très répandue pour faire face à la concurrence [Amesse, 2001], [Andersen, 1999], [Lehtinen, 1999], mais aussi pour remédier au manque d'efficacité technologique ou à l'incapacité de production avec les critères et les paramètres demandés. Ce recours à la sous-traitance peut être justifiés aussi par la volonté de l'entreprise à se concentrer sur une activité noyau et d'externaliser les autres activités sous forme de contrats avec des entreprises prestataires de services de sous-traitance [Andersen, 1999].

De nombreuses études traitent la sous-traitance dans différents domaines, tels que l'aéronautique [Amesse, 2001], l'industrie [Lehtinen, 1999], [Cagliano, 2002] et [Bertrand, 2001], la construction [Tserng, 2002], le commerce et les chaînes logistique [Andersen, 1999], [Andersen, 2000], la gestion de projets [Gutierrez, 2000].

Dans ce chapitre, nous présenterons le problème de la sous-traitance vue du côté des entreprises prestataires de sous-traitance, dans un environnement de couplage de la maintenance et de la production.

De nombreuses études ont démontré l'efficacité et la pertinence d'une approche intégrée de la maintenance et de la production dans la gestion moderne des systèmes industriels. Parmi ces études, on note celle de Buzacott [Buzacott, 1967] qui a étudié l'impact de l'ajout d'un stock intermédiaire sur la productivité d'un système. Dans le même esprit, Conway et *al.*, [Conway, 1988] ont analysé par simulation le nombre d'unités produites par un système relativement à la position du stock intermédiaire. Cheung et Hausmann [Cheung, 1997] ont proposé à travers leur étude une optimisation simultanée du stock stratégique et la politique de maintenance du type âge.

Van der Dyun Schouten et Vanneste [Van der Dyun Schouten, 1995] ont proposé une politique de maintenance préventive basée sur l'âge de la machine et la capacité du stock séparant deux machines. Rezg et *al.* [Rezg, 2004] ont présenté une optimisation conjointe de la maintenance préventive et de la gestion du stock pour une ligne de production composée de plusieurs machines en série. [Kenné, 2004] a étudié une optimisation stochastique du problème de gestion de production et de la maintenance corrective associée basée sur un modèle stochastique. Ils ont proposé une méthode pour trouver l'âge optimal des actions de maintenance préventive et les cadences de production optimales pour un système composé de machines identiques.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la prochaine section nous présenterons l'approche faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et celle de la production en citant quelques études basées sur cette approche. Ensuite, nous aborderons le concept de la sous-traitance, ses définitions, ses formes, ses avantages et ses inconvénients. Nous présenterons aussi certaines études traitant la sous-traitance dans différents domaines.

La section suivante sera consacrée à exposer le couplage de la maintenance et la production dans le contexte de sous-traitance. Dans cette section nous détaillerons les motivations de notre étude ainsi que le problème posé par cette thèse et les méthodes que nous avons utilisées pour parvenir aux solutions proposées.

I.2. Le couplage de la maintenance et la production

L'approche de maintenance intégrée, faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production consiste à avoir une vue globale et plus complète de la chaîne de production, en maîtrisant à la fois les actions liées à la maintenance des composants mais aussi des activités de la production et cela pour avoir un fonctionnement meilleur qui prend en compte à la fois le programme de la maintenance et la planification de la production.

On trouve dans la littérature de nombreuses études se basant sur cette approche, parmi lesquelles on peut citer :

I.2.1. Travaux de Van der Duyn Schouten et Vanneste [Van der Duyn Schouten, 1995]

Van der Duyn Schouten et Vanneste considèrent dans ce travail une machine qui alimente un système de production via un stock intermédiaire mis en place pour faire face aux périodes d'indisponibilité de la production. La machine fait l'objet de programme de maintenance préventive qui ne se base pas uniquement sur l'âge de la machine mais aussi sur l'état du stock.

Ils ont traité ce problème d'intégration de la maintenance et la production pour analyser une classe de politiques de commande en se basant sur la théorie de Markov.

I.2.2. Travaux de Meller et Kim [Meller, 1996]

Dans ce travail Meller et Kim considèrent un système composé de deux machines en série, avec un stock intermédiaire. L'objectif est de déterminer le niveau optimal du stock intermédiaire auquel l'action de maintenance préventive sur la première machine est exécutée. Ils ont supposé qu'à long terme, les actions périodiques de maintenance préventive diminueront les taux de défaillance de la première machine. Un modèle de coût du système est défini, incluant le coût des actions de maintenance préventive et actions de réparations des machines, ainsi que les coûts de stockage et coût de pénurie de stock. Ce modèle de coût dépend des valeurs des mesures qui sont en fonction du niveau optimal du stock définissant la politique de maintenance préventive.

Les auteurs se sont basés sur une modélisation Markovienne du processus aléatoire du comportement du système.

I.2.3. Travaux de Srinivasan et Lee [Srinivasan, 1996]

Les auteurs ont considéré un système produisant des pièces pour satisfaire une demande suivant une loi de Poisson. Ce système de production peut tomber en panne pendant son fonctionnement avec un taux de défaillance croissant. Pour cela, des actions de maintenance préventive sont réalisées afin de restaurer le système dans son état initial. Ce travail est basé sur la politique de commande suivante : dès que le stock atteint un certain niveau ' S ', une action de maintenance préventive est réalisée. Après cette action de maintenance, le système de production reprend son fonctionnement dès que le niveau du stock passe au-dessous d'une certaine valeur ' s ' et cela jusqu'à ce qu'il atteigne à nouveau le niveau ' S '. Mais dans le cas où le système de production tombe en panne avant d'assurer le niveau ' S ', il sera réparé d'une façon minimale. Le coût total est composé des coûts de maintenance préventive, de réparation, d'installation, de stockage et de demande en attente.

I.2.4. Travaux de Ouali et *al.* [Ouali, 2002]

Les travaux de Ouali et *al.* reviennent à optimiser simultanément les flux de la production et de la maintenance préventive. L'approche développée permet de prendre en compte l'interaction entre la stratégie de la maintenance et de la politique de commande. En effet les indicateurs de performance du système sont exploités pour développer la stratégie de maintenance. Les indicateurs utilisés sont le niveau du stock et l'âge du système de production. La définition de la stratégie de maintenance doit prendre en compte le calendrier de la production ainsi que la disponibilité des ressources nécessaires à la réalisation des actions de maintenance.

Dans cette étude, le système de production considéré est composé d'une seule machine produisant un seul type de produit afin de satisfaire une demande constante dans le temps. La machine possède une cadence de production maximale supérieure à la demande. Ceci lui permet de construire un stock de sécurité. Quand le niveau du stock de sécurité est atteint la machine produit alors à la demande.

Du point de vue de la fiabilité, la machine est sujette à des pannes aléatoires qui nécessitent l'arrêt immédiat de la production. D'autre part, la machine est soumise à un programme de maintenance préventive de type âge. Pendant les périodes de maintenance préventive ou corrective la demande est

puisée dans le stock de sécurité. La non satisfaction de la demande suite à l'épuisement total du stock de sécurité entraîne des pénuries. Dans un premier temps, Ouali et al. ont étudié la stratégie de maintenance et la stratégie de production d'une façon indépendante. En effet, en premier lieu, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps des actions de maintenance. En optimisant ce coût, ils ont déterminé l'âge optimal de la maintenance préventive minimisant le coût de maintenance. En second lieu, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps qui intègre les coûts d'inventaire et des demandes perdues. Un niveau de stock de sécurité optimal a été déterminé suite à la minimisation de ce coût. Par la suite, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps intégrant les coûts de maintenance, les coûts d'inventaire et les coûts des demandes perdues. L'expression analytique du coût est complexe. La minimisation analytique du coût est difficile. Pour cela ils ont opté pour la simulation pour résoudre le problème. Ce qui a permis de déterminer conjointement l'âge optimal de la maintenance préventive et le niveau optimal du stock de sécurité à maintenir. Les comparaisons des coûts optimaux obtenus entre les différentes politiques de gestion de la maintenance et de la production ont montré l'efficacité d'une maintenance intégrée en termes de gain.

I.2.5. Travaux de Rezg et al. [Rezg, 2004]

Rezg et al. considèrent le cas d'une ligne de production série composée de n machines avec un stock à la fin de la ligne où la demande est puisée à périodicité et quantité constantes. Les machines possèdent des cadences de production identiques supérieures à la demande. Les machines produisent à leur cadence maximale pour construire un stock de sécurité. Quand le niveau souhaité est atteint, les machines produisent à la demande. Les pannes aléatoires des machines entraînent l'interruption de la production, ainsi la demande sera satisfaite à partir du stock de sécurité construit. Dans le cas où le stock de sécurité est vide, les demandes sont perdues et un coût de pénurie est engendré. Les machines sont soumises à des actions de maintenance préventive de type âge.

Les travaux de Rezg et al. sont menés en trois étapes. Dans la première étape, Rezg et al. se sont intéressés uniquement à la partie maintenance. En effet il ont établi un coût total moyen par unité de temps sur un horizon fini qui intègre les actions de maintenance corrective et préventive. Par une résolution numérique, ils ont minimisé la fonction coût pour obtenir l'âge optimal de la maintenance préventive. Dans une deuxième étape, ils ont étudié uniquement l'aspect production. Ils ont formulé un coût total moyen par unité de temps intégrant le coût des inventaires et des demandes perdues. Dans cette étape, ils ont considéré tous les scénarios d'évolution du stock possibles. Le but était de déterminer un niveau de stock optimal qui minimise le coût établi. Ils ont établi analytiquement les conditions d'existence d'une solution optimale. A l'aide d'une résolution numérique le niveau de stock optimal a été obtenu. Dans la troisième étape, ils ont traité l'aspect maintenance et production d'une façon simultanée. En effet, ils ont établi un coût total moyen par unité de temps intégrant la maintenance, l'inventaire et les demandes perdues. Le modèle analytique obtenu est assez complexe à résoudre.

D'autre part, afin de relaxer quelques hypothèses, ils ont opté pour la simulation pour résoudre le problème. Pour déterminer simultanément l'âge de la maintenance préventive optimal et le niveau de stock optimal, ils ont proposé une approche hybride basée sur l'utilisation de la simulation et les algorithmes génétiques pour déterminer le niveau de stock optimal et l'âge de la maintenance préventive optimal dans le cas d'une seule machine. Enfin une comparaison entre les trois étapes a prouvé que l'étude traitant simultanément la maintenance et la production est plus performante que l'étude traitant chaque aspect à part. Ces travaux ont été étendus à n machines.

I.2.6. Travaux de Chelbi et Ait-Kadi [Chelbi, 2004]

Dans ce travail, Chelbi et Ait-Kadi ont considéré une unité de production à l'entrée d'une chaîne de montage fonctionnant avec un mode de production juste à temps. Cette unité de production peut tomber en panne d'une façon aléatoire, pour cela elle bénéficie d'actions de maintenance corrective de durées aléatoires. En plus, elle fait l'objet d'actions de maintenance préventive de type bloc. Pour remédier aux périodes d'indisponibilité de la machine causées par les pannes, un stock intermédiaire de capacité finie est mis en place.

La stratégie de commande suivie consiste à produire avec la cadence maximale pendant une première phase durant laquelle l'unité de production est supposée neuve. Cette phase permet d'assurer la capacité maximale du stock, capable de satisfaire la demande jusqu'à la fin du cycle de maintenance préventive. Ensuite, l'unité de production passe à une production à la demande jusqu'à la date de maintenance préventive.

Le but de ce travail était de déterminer analytiquement la politique optimale intégrant la maintenance et la production, une politique qui détermine la capacité optimale du stock et l'âge de maintenance préventive optimale de l'unité de production, assurant un coût total moyen minimal.

I.2.7. Travaux de Chelbi et Rezg [Chelbi, 2006]

Ce travail est basé sur un couplage de la commande et la maintenance pour déterminer le niveau optimal de stock et l'âge optimal de maintenance préventive d'une unité de production sujette à des actions de maintenance corrective suite aux pannes aléatoires et soumise à un programme de maintenance préventive chaque âge T . Pour faire face à ces périodes de réparation et de maintenance de l'unité de production, un stock tampon est mis en place afin de garantir la continuité de la satisfaction de la demande.

L'objectif est de déterminer analytiquement le niveau optimal du stock et l'âge optimale de la maintenance préventive de l'unité de production qui assurent un coût total optimal, sous contrainte d'un niveau minimal de disponibilité exigé.

I.2.8. Travaux Benbouzid-Sitayeb et *al.* [Benbouzid, 05]

Les travaux de Benbouzid-Sitayeb et *al.* portent sur le problème de la planification de la maintenance. Ils proposent quelques éléments de réponse au problème de la planification commune et intégrée des tâches de maintenance et de production. Dans cette étude ils prennent en considération le respect des contraintes intrinsèques au problème. D'une part Benbouzid-Sitayeb et *al.* ont démontré la nécessité de développer des heuristiques d'ordonnement conjoint production/maintenance pour atteindre l'objectif d'optimisation de la sûreté de fonctionnement du système de production. Ils ont proposé l'adaptation d'un certain nombre d'heuristiques des approches constructives, itératives et évolutives pour le cas de l'ordonnement conjoint production/maintenance. D'autre part, ils ont étudié la contribution de la maintenance à la robustesse de ces ordonnancements conjoints. Le modèle proposé, a pour objectif d'inscrire la génération d'ordonnements conjoints comme une démarche proactive, et de démontrer que l'intégration de la maintenance lors de la génération des ordonnancements de production est à mettre au profit de la robustesse de ces derniers.

I.3. Le concept de la sous-traitance industrielle

I.3.1. Définitions

Dans [Van Mieghem, 1999], la sous-traitance est définie comme l'approvisionnement des produits ou des services des sources externes à l'organisation. Le même concept peut être trouvé dans [Andersen, 1999], [Cagliano, 2002] qui définissent la sous-traitance comme étant la livraison des marchandises ou des services, selon la conception et les caractéristiques d'une entreprise donneur d'ordres. Selon [Grosman, 2005] la sous-traitance signifie plus que juste l'achat des matières premières et des marchandises intermédiaires. Elle consiste à trouver un associé avec lequel l'entreprise peut établir un rapport bilatéral basé sur un cahier de charges précis de sorte qu'il devienne capable de produire les marchandises ou les services adaptés selon les besoins de l'entreprise.

En effet, [Kimura, 2001] remarque que la sous-traitance industrielle n'est pas toujours définie explicitement dans la littérature, néanmoins, il cite que dans sa plus large signification, la sous-traitance se rapporte à l'achat d'une partie d'un produit ou d'un processus d'une entreprise différente.

En se référant à d'autres auteurs, tels que [Kawasaki, 1998], il définit la relation de sous-traitance comme «une relation contractuelle dans laquelle une grande société demande à une petite société de conduire un travail commissionné (production des pièces, des composants ou des produits finis) sous une position dominante.»

Dans ces travaux, Kimura signale qu'il y a une sorte de consensus général que la sous-traitance est un arrangement à long terme. Une transaction unique (one-shot) ne peut pas s'appeler un arrangement de sous-traitance. En outre, on s'attend à ce que parfois cette relation de sous-traitance inclue des arrangements de partage de risques, un mécanisme de diffusion de technologie. Cependant, l'arrangement n'est pas nécessairement exclusif ; un sous-traitant peut avoir des clients multiples.

Selon la définition de la Commission européenne et de l'Association française de normalisation, le preneur d'ordres (le sous-traitant) est tenu de se conformer exactement aux directives ou spécifications techniques arrêtées par le donneur d'ordres. Le donneur d'ordres garde la responsabilité technique, commerciale et juridique des produits et des composants. [SESSI, 2006]

Au Japon, le ministère du commerce international et l'industrie du gouvernement du Japon, définit la sous-traitance comme suit : « arrangement contractuel entre une entreprise et une entreprise « mère » ayant un capital plus important, ou un nombre d'employés plus grand. La première entreprise est chargée de fabriquer des produits, des pièces, des matériaux ou des composants utilisés comme entrées dans la production de la société mère, ou de produire ou réparer les équipements, les outils..., que la société mère emploie dans sa production. Quand une société achète des pièces, composants et d'autres non adaptées aux besoins du client, par un canal habituel de vente, il n'est pas considéré comme une sous-traitance. Dans la sous-traitance, une société mère commande le travail directement à un sous-traitant avec des spécifications de plan, de qualité, une conception... » [Kimura, 2001]

Dans [Morcos, 2004] et [Amesse, 2001], la sous-traitance est définie comme étant un rapport économique où une entité, appelée donneur d'ouvrages, demande à une autre entité indépendante, le sous-traitant (ou fournisseur), d'entreprendre la production ou la transformation d'un matériel, d'une composante, d'une partie, d'un sous-ensemble ou de fournir un service industriel selon les caractéristiques définies par le donneur d'ouvrages.

À travers ces définitions nous pouvons considérer la sous-traitance comme une relation entre deux entreprises suivant laquelle une des entreprises – appelée sous-traitant (ou preneur d'ordres) – accomplit des tâches confiées par l'autre entreprise – dite donneur d'ordres (donneur d'ouvrages) – en respectant un cahier de charges précis, contenant les différentes spécifications en matière de délais, qualité, quantités,...

I.3.2. Motivations de la sous-traitance

La sous-traitance a été généralement considérée comme une pratique conduite et motivée par la réduction des coûts ou comme option pour faire face aux fluctuations de capacité de production ou au manque de compétences. Néanmoins, elle a été identifiée comme un composant stratégique et un facteur de changement depuis les années 70. La complexité croissante des technologies rend de plus en plus difficile pour qu'une entreprise maîtrise toutes les connaissances et le savoir faire exigés pour la fabrication de ses produits, une situation qui contribue à accroître le nombre de contrats de sous-traitance, d'associations et d'alliances technologiques stratégiques [Amesse, 2001].

Selon [Berry, 1997] la logique économique typique de la sous-traitance entre les grandes et petites entreprises se situe dans le fait que les grandes compagnies peuvent accomplir certaines tâches mieux que les petites entreprises, mais d'autres tâches moins bien, ce qui favorise la création de relations plus importantes que le simple achat ou la vente des biens et des services.

À travers ces travaux nous remarquons que la sous-traitance est favorisée par les contraintes économiques et commerciales récentes en termes de coût et technologie [Andersen, 1999]. Elle constitue une solution à des déficits technologiques ou dans certains cas une incapacité totale ou partielle à produire les quantités demandées selon les critères spécifiés. Mais d'après [Morcos, 2004] un autre facteur important de l'émergence de la sous-traitance est l'utilisation répandue des

techniques de production flexible et hautement productive et des méthodes basées sur une des technologies avancées (telle que la robotique...), ce qui incite les sous-traitants à combiner un grand nombre d'ordres de clients divers afin de maximiser la capacité d'utilisation de leurs équipements et par conséquent d'offrir un meilleur prix pour leurs services.

I.3.3. Diverses formes de la sous-traitance

La sous-traitance représente aujourd'hui une réaction du monde industriel à certains changements survenus suite à la mondialisation et la complication technique des procédés de fabrication ainsi qu'à la course interminable vers la réduction des prix.

À titre d'exemple, selon un rapport du service des études et des statistiques industrielles (SESSI) du Ministère de l'économie, des finances et de l'industrie, en France, les chiffres de l'année 2005 montrent que dans les secteurs de la sous-traitance industrielle concernant les domaines des métaux, plastiques, caoutchouc et électronique, il existe plus de 4 000 entreprises (de 20 personnes et plus) ayant 325 000 salariés et générant 45 milliards d'euros de chiffre d'affaires et 1,6 milliards d'euros d'investissements [SESSI, 2006].

Dans ce cadre, deux formes de sous-traitance sont nées, la sous-traitance de capacité et celle de spécialité : [Amesse, 2001], [Bertrand, 2001], [Morcos, 2004], [SESSI, 2006]

- La sous-traitance de spécialité :
Dans ce type de sous-traitance l'entreprise donneur d'ordres a établi une stratégie basée sur le choix de ne pas acquérir une certaine technologie ou des compétences nécessaires dans les procédés de fabrication des produits ou des biens qu'il propose. Cette stratégie est motivée par une volonté à éviter des investissements très lourds et coûteux, et dans certains cas peu rentables.
Pour cela, cette entreprise s'appuie sur les qualifications techniques d'un sous-traitant ayant des équipements ou des compétences humaines qualifiées pour accomplir des tâches complexes et précises (courant dans le secteur automobile, aéronautique ou aérospatial, notamment).
- La sous-traitance de capacité :
Dans certains cas une entreprise donneur d'ordres s'adresse à des entreprises prestataires de sous-traitance pour fabriquer un produit précis. Cette sollicitation de la sous-traitance survient bien que l'entreprise dispose des compétences et les techniques nécessaires pour le fabriquer afin de répondre à une fluctuation de la demande pendant des périodes provisoires.
La sous-traitance de capacité constitue un outil de flexibilité dans la mesure où elle permet de faire face aux hausses ponctuelles de la production et aux problèmes d'ordre technique.

Mais on trouve dans la littérature une autre forme de la sous-traitance peu citée qui pousse encore plus loin la relation entre le donneur d'ordres et le sous-traitant. Elle consiste à engager le donneur d'ordres à mettre en relation directe son client et le sous-traitant chargé de réaliser les tâches que le client a confiées au donneur d'ordres.

I.3.4. Avantages de la sous-traitance

Quelques soient les raisons et les motivations pour lesquelles une entreprise décide de faire appel à une entreprise sous-traitante afin de conduire des tâches précises et suivant un cahier de charges bien défini, la sous-traitance reste une stratégie qui doit apporter aux entreprises (prestataires ou donneur d'ordres de sous-traitances) des bénéfices et des avantages suivant un principe gagnant - gagnant.

Comme dans [Morcos, 2004], les avantages de la sous-traitance peuvent être classés en se basant sur les deux côtés de cette relation de sous-traitance. Ainsi, nous trouvons des avantages pour les donneurs d'ordres résumés dans les points suivants :

- Réduction des coûts
La plupart des études menées sur la sous-traitance insistent sur cet aspect de réduction des coûts de production comme avantage de la sous-traitance. En effet, la sous-traitance permet de réduire les frais d'exploitation, en plus, elle assure des conditions d'investissement inférieures [Van Mieghem, 1999]. Autre facteur de réduction des coûts est la différence entre les coûts de production et le niveau des salaires entre les pays industrialisés et pays d'économie émergente.
- Meilleure qualité
La réduction des coûts n'est pas le seul avantage que les donneurs d'ordres peuvent tirer en sous-traitant leurs activités [Grossman, 2005]. La sous-traitance permet aussi de garantir le niveau désiré de qualité de produit, et cela est généralement dû à la complication et la sophistication des procédés de production qui poussent les entreprises à chercher des partenaires plus aptes et plus compétents [Morcos, 2004], [Andersen, 2000].
- Flexibilité de la planification
La sous-traitance tient en compte des ajustements nécessaires pour faire face aux fluctuations et variations temporelles de la demande [Van Mieghem, 1999]. Cela est expliqué par le fait que le donneur d'ordres aura recours à la sous-traitance pour compléter sa propre production en réaction aux changements et l'état des marchés.
- Accéder à des nouveaux marchés
Certaines entreprises ont recours à la sous-traitance pour pouvoir accéder à des nouveaux marchés ou régions avec de forts potentiels de croissance et de développement [Morcos, 2004]. Un exemple très intéressant est celui de Airbus, filiale d'EADS et principal constructeur aéronautique européen, qui vient de signer en 2007 un contrat de joint venture pour la chaîne d'assemblage final de l'avion A320 [Airbus Info, 2007]. Il faut signaler la volonté de Airbus et d'une façon générale de la maison mère EADS de conquérir un marché asiatique et surtout chinois en pleine expansion, résumée par la citation de Noël Forgeard, l'ancien directeur d'EADS, en 2005 lors de la signature d'une commande : "À EADS, nous mettons la Chine au sommet extrême en matière de stratégie d'internationalisation. Nous voulons, à travers des partenariats industriels, lier nos destins à celui de la Chine".

Il faut dire qu'en Chine le trafic passager est en augmentation de + 16,5% par an, les prévisions de croissance économique pour les 10 prochaines années se situent à près de 9%, en plus, en 2020, la Chine deviendra le second utilisateur d'aéronefs, juste derrière les États-unis.
- Efficacité économique [Tserng, 2002]
La sous-traitance permet d'augmenter l'efficacité économique de l'entreprise en faisant déléguer à des partenaires externes des tâches qui ne font pas parties de son métier noyau [Van Mieghem, 1999], comme par exemple, la maintenance, la restauration,... Les cas dans ce volet sont multiples, nous citons à titre d'exemple, l'opérateur de téléphonie mobile français SFR qui a décidé en juillet 2007, de sous-traiter la gestion de ses centres d'appels à des sociétés plus expertes.

Du côté des sous-traitants les principaux avantages peuvent être résumés dans les points suivants :

- Productivité et efficacité plus élevées
Selon [Berry, 1997] la coopération entre les PME contribue à une efficacité collective faisant face aux défis de la concurrence, dans ce cadre, la sous-traitance offre une possibilité aux entreprises sous-traitantes d'augmenter leur productivité grâce à des contrats bien établis, avec des spécifications précises et qui dans la plupart des cas s'étalent sur le moyen voire le long terme.

En plus, la sous-traitance mène à une spécialisation des sous-traitants ce qui augmente leur savoir faire et leurs compétences dans le domaine et donc leur efficacité à accomplir les tâches qui leurs seront confiées [Morcos, 2004].

- Partage des risques
Beaucoup d'auteurs mettent l'accent sur le partage (et même la réduction) des risques que peut offrir la sous-traitance. Ces risques qui peuvent être causés – par exemple – par des incertitudes ou pénuries des stocks [Morcos, 2004], doivent être pris en considération par les deux parties de la relation de sous-traitance en combinant leurs qualifications [Andersen, 2000].
- Maximiser l'utilisation des capacités disponibles
Un point fort de la sous-traitance consiste à permettre aux entreprises d'utiliser le maximum de capacités dont elles disposent [Morcos, 2004], en orientant une partie de leurs capacités vers des donneurs d'ordres de sous-traitance. Une exploitation intelligente et parfaite des capacités et compétences permet d'augmenter les profits directs mais surtout les retours sur investissements et les rendements des équipements, matériels et compétences.
- Économies d'échelle
Le fait de se concentrer sur une seule activité offre aux sous-traitants la possibilité de réaliser des économies d'échelles [Andersen, 2000], ce qui leur permet aussi de proposer des coûts avantageux à leurs clients [Morcos, 2004].
- Transfert de technologie
La sous-traitance offre aux sous-traitants des opportunités d'acquérir une technologie et un savoir faire qui demeuraient inaccessibles à cause de leurs coûts élevés ou en raison de manque de compétences [Andersen, 2000]. En établissant des contrats de sous-traitance, les entreprises sous-traitantes peuvent avoir accès à la technologie, les compétences ainsi qu'à l'expérience du donneur d'ordres qu'elles finissent par s'approprier totalement (cas du secteur automobile et des équipementiers).
- Appui financier
Selon [Morcos, 2004], la sous-traitance permet aux sous-traitants de recevoir l'appui financier de leurs donneurs d'ordres ou un accès à leurs crédits. Un contrat de sous-traitance peut constituer un atout et une garantie pour accéder à des prêts de la part des organismes financiers. L'appui financier peut être tout simplement sous forme d'avances de paiement.

I.3.5. Inconvénients de la sous-traitance

Malgré ses multiples avantages pour ces différentes parties, la sous-traitance peut avoir certains inconvénients, causer la multiplication des partenaires, qui complique les relations entre les différentes entreprises. Cette complication finit dans certains par un échec de la relation de la sous-traitance [Andersen, 2000].

Un des risques de la sous-traitance est la dépendance de chaque partie vis-à-vis l'autre [Van Mieghem, 1999]. En effet, le donneur d'ordres peut devenir dépendant de la capacité de production ou les compétences du sous-traitant dans la mise en œuvre de ses propres produits. Cependant le sous-traitant peut se retrouver dans une situation de dépendance technique, financière ou économique vers son donneur d'ordres.

[Van Mieghem, 1999] note aussi la vulnérabilité à laquelle le donneur d'ordres peut s'exposer avec la sous-traitance car il perd le contrôle et la maîtrise de toute la chaîne de production de ses produits. Dans d'autres cas, il est question de perte de confidentialité ou du monopole du savoir faire.

I.3.6. Quelques travaux menés sur la sous-traitance

Dans cette section nous présenterons quelques études traitant la sous-traitance dans domaines divers :

I.3.6.1. Travaux de Morcos [Morcos, 2004]

Dans cette étude l'auteur cherche à déterminer si la sous-traitance internationale vers les pays d'économie émergente est, ou n'est pas, une cause de changement du marché de l'emploi dans les pays développés. Elle vise également à jeter la lumière sur les activités de l'Organisation des Nations Unies pour le développement industriel (ONUDI) dans le contexte du débat sur la délocalisation. Ce travail analyse des études sur la question de la délocalisation et ses implications sur le marché de l'emploi des pays développés dans le contexte, premièrement, du commerce international sous forme de sous-traitance internationale (ou d'approvisionnement externe) et, en second lieu, sous forme d'investissements étrangers directs. L'étude utilise également un échantillon de 14 partenariats internationaux réalisés grâce à des bourses de sous-traitance et de partenariats établies par l'ONUDI. Dans ce travail l'auteur a remarqué que les résultats qui ressortent des accords de partenariats entre des donneurs d'ouvrages de pays développés et des sous-traitants de pays en voie de développement prouvent que, contrairement au phénomène de la délocalisation, la sous-traitance internationale est avantageuse tant pour les pays du Sud que pour les pays du Nord. En d'autres termes, dans le contexte de l'ONUDI et comme le montrent aussi nombre d'études académiques, il y a suffisamment d'indications pour suggérer que la sous-traitance internationale vers les pays d'économie émergente ne devrait pas être considérée comme une cause principale des changements au sein du marché de l'emploi dans les pays développés. En revanche, naturellement guidés par les avantages concurrentiels des nations et en accord avec la division internationale du travail, les pays à différents niveaux de développement se complètent mutuellement.

I.3.6.2. Travaux de Kimura [Kimura, 2004]

Ce travail fournit une analyse empirique des choix faits par les entreprises japonaises en ce qui concerne leur statut par rapport à la sous-traitance, c'est-à-dire, être sous-traitant, externaliser ses travaux à d'autres sous-traitants, être à la fois sous-traitant et donneur d'ordres, ou aucune des deux situations ?

L'auteur prouve que la probabilité de travailler comme sous-traitant, un choix fait par beaucoup de petites sociétés au Japon, est négativement liée à la taille, aux ventes extérieures et aux possibilités technologiques. En outre, les bénéfices ne semblent pas être meilleurs pour les entreprises de sous-traitance. En effet, ces bénéfices sont plus importants pour le groupe d'entreprises qui ne sont pas impliquées dans aucun type de sous-traitance, que ce soit donneur d'ordres ou sous-traitant.

I.3.6.3. Travaux de Berry [Berry, 1997]

Le but de ces travaux est de suggérer des manières (c.-à-d. identifier les meilleures pratiques) d'augmenter la contribution de la coopération d'interentreprises à l'efficacité des secteurs industriels et d'identifier comment les programmes et les projets de l' IDB (Inter-American Development Bank) peuvent faciliter une telle coopération.

Selon l'auteur, les instruments qui peuvent être utilisés efficacement pour favoriser les associations souhaitables dépendent clairement des compétences du secteur public. La gamme des instruments possibles est plus grande dans les prétendus « états durs » (ceux capables de la gestion économique substantielle sans inefficacité ou fuites bureaucratique étendue) que dans « les états mous » (qui ne possèdent pas ces qualifications). Cependant l'auteur a remarqué que la plupart des pays latino-américains ont un secteur public avec une capacité située au milieu de ce spectre.

Le concept des « meilleures pratiques » est particulièrement utile quand une certaine manière de faire des choses produit des résultats supérieurs dans une grande variété d'options. C'est sans doute un grand avantage d'identifier et de faire répandre de telles pratiques, à partir du moment où ce qui est très réussi ou productif pour une entreprise, une industrie ou une région, tendra à être réussi ou

productif pour tous ou presque tous les autres. Mais l'auteur remarque que malheureusement, bien qu'il y soit d'évidence persuasive que la coopération interentreprises puisse générer l'efficacité et la compétitivité économiques, il est plus difficile de trier les interventions qui aident véritablement à augmenter une telle coopération. De plus, l'importance de l'interface productive des PME avec les autres entreprises, la forme qu'elle prend et les différentes politiques à favoriser sont susceptibles d'être perturbées par le niveau de développement du marché et de l'économie. Le concept de la meilleure pratique doit donc être compris dans ce sens contraint. En acceptant que les différents réglages impliqueront des pratiques optimales quelque peu différentes, il est encore souhaitable de distinguer un nombre modéré de réglages entre lesquels les meilleures pratiques peuvent différer de manière significative.

La distinction de base dans l'analyse des meilleures pratiques dans la promotion de la coopération et le soutien de la coopération d'interentreprises concerne la coopération entre de grandes entreprises et de petites entreprises (principalement sous forme de sous-traitance verticale), et la coopération des petites entreprises entre elles. La forme dominante et les autres dispositifs qui caractérisent la coopération sont sensibles aux évolutions de l'industrie, reflétant les différences dans la technologie, la structure industrielle, etc. Bien que cette dichotomie fournisse un point de départ utile, la gamme des modèles possibles de la coopération reste large.

I.3.6.4. Travaux de Van Mieghem, [Van Mieghem, 2004]

Dans ces travaux, l'auteur évalue l'option de sous-traitance pour améliorer la performance financière et le système de coordination, en analysant un jeu stochastique concurrentiel d'investissement avec recours. Le donneur d'ordres et le sous-traitant décident séparément de leurs niveaux d'investissement de capacité. Alors l'incertitude de la demande est résolue et les deux parties ont l'option de sous-traiter en décidant de leur production et de leurs ventes.

Il analyse et présente les conditions de sous-traitance pour trois types de contrat : (1) les «contrats de prix seulement», où un prix antérieur de transfert est fixé pour chaque unité fournie par le sous-traitant, (2) «contrats incomplets», où les deux parties négocient plus que le transfert de sous-traitance, et (3) des «contrats à état-dépendant», prix seulement et incomplets pour lesquels il montre un résultat d'équivalence.

Tandis que la sous-traitance avec ces types de trois contrats peut coordonner des décisions de production dans une chaîne logistique, seulement les contrats état-dépendants peuvent éliminer tous les coûts de décentralisation et peuvent assurer une coordination des décisions de capacité d'investissement. Le contrat de prix-seulement, de suffisante minimale, qui coordonne la chaîne logistique étudiée, indique des prix de transfert pour un petit nombre (6 dans le modèle traité) de scénarios exceptionnels. Dans cette étude, le modèle de jeu théorique permet l'analyse du rôle des prix de transfert et du pouvoir de négociation de l'acheteur et du fournisseur.

L'auteur constate que parfois les entreprises peuvent être meilleures en laissant quelques paramètres du contrat non spécifiés et en acceptant de négocier ultérieurement. En outre, une stratégie focalisée sur le prix dans la gestion des sous-traitants peut échouer parce qu'un prix inférieur de transfert peut diminuer le bénéfice du fabricant. En conclusion, comme avec des options financières, la valeur d'option de la sous-traitance augmente car les marchés sont plus volatils ou plus négativement corrélés.

I.3.6.5. Travaux de Grossman et al. [Grossman., 2005]

Pour ces travaux, les auteurs combinent des éléments de leurs études antérieures pour étudier le rapport entre la sous-traitance et l'approvisionnement extérieur (ou «offshoring»). Leur analyse se concentre sur des industries avec les entreprises hétérogènes qui font l'utilisation intensive des produits intermédiaires. Les problèmes se contractants limitent les types de contrats qui peuvent être écrits entre les producteurs et les fournisseurs finaux des produits. Des produits intermédiaires peuvent être fabriqués au niveau national ou dans un pays de bas salaires et peuvent être produits intérieurement ou externalisés. Par hypothèse, l'ensemble des marchandises finales aura lieu dans l'entreprise qui a développé le produit, mais nous permettons parfois à cette activité d'être exécutée à l'extérieur.

D'abord, ils supposent que l'assemblage aura lieu dans l'entreprise et que des marchandises intermédiaires peuvent être transportées sans aucun coût. Nous identifions les conditions dans lesquelles la variation intersectorielle du coût fixe de la sous-traitance produit d'une corrélation positive entre la sous-traitance et l'approvisionnement extérieur.

Ils introduisent alors des frais de transport pour les produits intermédiaires et nous permettons à des entreprises de choisir où assembler leur produit final. Dans ce cas-ci, la variation intersectorielle du coût fixe de la conduite des affaires à l'extérieur produit une deuxième complémentarité entre la sous-traitance et l'approvisionnement extérieur. Ce dernier résultat est en accord avec des conditions décrites dans un article récent dans le «Financial Times» au sujet des problèmes se posant à des entreprises produisant en Chine. Des entreprises qui ne peuvent pas trouver des sources locales efficaces pour des composants en Chine sont confrontées à des surcoûts de rapatriement des produits.

I.3.6.6. Travaux de Amesse et *al.* [Amesse, 2001]

Les auteurs présentent les résultats de la recherche explorant le transfert de technologie et la sous-traitance en aéronautique. Le but de cette recherche est d'explorer l'impact que pourrait avoir le type d'accord de sous-traitance (autrement dit les caractéristiques du partenariat) au niveau du transfert de technologie entre un entrepreneur principal et ses sous-traitants.

Cette étude prend en considération la portée et la nature des flux de technologie ayant lieu par l'acquisition d'équipement ou du savoir-faire ainsi que les complexités résultant de la manière avec laquelle les rapports de sous-traitance sont contrôlés.

Les auteurs justifient le choix de l'industrie aéronautique par le fait qu'elle est « technologiquement intensive » et présente des multiples opportunités de transferts de technologie.

Dans l'échantillon considéré par cette étude Amesse et *al.* ont observé que :

1. les perceptions du rapport de sous-traitance limitent le potentiel pour un transfert de technologie de haute qualité. Même lorsque le donneur d'ordres est concerné par ce transfert de technologie les actions conduites par coût brouillent les objectifs technologiques de n'importe quel type d'accord de sous-traitance.
2. bien que les sous-traitants se rendent compte du transfert de technologie, ils étaient peu disposés à l'accepter, considérant qu'il peut être une menace qui augmentera leur dépendance. Un transfert peut se produire, mais il demeure continu et limité.
3. on a également observé que quelques conditions managerielles des contrats ne favorisent pas une meilleure qualité de transfert de technologie.

Ils ont conclu que l'essentiel du transfert de technologie de haute qualité est le partenariat, une collaboration saine, la coopération et le partage.

I.3.6.7. Travaux de Cagliano et Spina [Cagliano, 2002]

Les auteurs remarquent que l'adoption et l'efficacité des procédures avancées de gestion par les petites et moyennes entreprises (PME) deviennent une question importante puisque la littérature a identifié qu'une attitude entreprenante pure n'est plus adéquate pour un succès concurrentiel de ces entreprises.

Dans ce cadre, leur étude explore cette question en comparant les liens de pratique - performance pour deux types de PME, qui sont des sous-traitants et petits fabricants, par la recherche sur les procédures de gestion concernant les trois secteurs fonctionnels suivants : la gestion générale, la gestion de la production et la gestion de l'innovation des produits (seulement dans le cas des fabricants). Malgré le fait que la sous-traitance est généralement considérée moins attractive et moins profitable que la production (la fabrication), des preuves empiriques prouvent que les sous-traitants sont plus efficaces en mettant en application des pratiques de gestion de la production plus avancées tandis que la plupart des petits fabricants - bien qu'ils soient avancés dans le développement des pratiques de gestion générale - ont des difficultés à exploiter le potentiel des bonnes pratiques en matière d'innovation de produit.

I.4. Problématique de la maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance

I.4.1. Motivation de cette étude

La mondialisation et l'ouverture des marchés inspirent de nos jours une remise à plat des politiques de management et de la gestion industrielle. Les politiques de la gestion de la maintenance et la gestion de production des systèmes de production des biens et des services n'échappent pas à ce constat et leur remise en cause est nécessaire dans ce contexte.

En effet, les stratégies de maintenance conventionnelles ne permettent pas d'assurer la pérennité ainsi que la croissance durable pour les entreprises d'aujourd'hui, où la réduction des coûts et des délais sont devenues l'objectif principal. Pour répondre à cet objectif l'entreprise doit se moderniser et évoluer et aller chercher ainsi d'autres types de marchés. Cette évolution se traduit par l'acquisition de nouveaux marchés où l'entreprise se trouve parfois comme sous-traitante de tâches particulières de production de biens et de services. Ceci impose une nouvelle contrainte dans la gestion de la production et de la maintenance. Ainsi, les politiques modernes de production des biens et des services couplées à la gestion de la maintenance doivent intégrer ce type de contrainte afin d'être réactives et compétitives et satisfaire les besoins des clients. Dans ce cadre, on souhaite développer de nouvelles politiques de maintenance intégrées sous contrainte de sous-traitance avec une interaction avec la gestion opérationnelle du système de production des biens et des services. Ceci passe par un couplage des scénarios de maintenance sous la contrainte de sous-traitance, qui est devenue une règle pour améliorer ou augmenter les capacités de production, d'après les travaux présentés dans les précédentes sections.

I.4.2. Problématique industrielle

L'entreprise considérée est une compagnie de transport des produits pétroliers, créée sous forme de consortium par plusieurs groupes pétroliers spécialisés dans les divers métiers des hydrocarbures. Cette compagnie est chargée de transporter des produits pétroliers avec un oléoduc liant le pays producteur et le pays consommateur. Une fois réceptionnés, les produits sont stockés selon les capacités de la compagnie et l'évolution des demandes des clients et du marché.

Il faut signaler que le stockage stratégique des produits pétroliers est soumis aussi à une réglementation de l'Agence Internationale de l'Énergie AIE, en plus – dans le cas des pays européens – d'une législation de l'Union Européenne UE. Dans le cas de l'AIE, il s'agit de 90 jours d'importation nette, et dans le cas de l'UE, l'obligation de stock stratégique est de 90 jours de consommation intérieure moyenne. Cette obligation est imposée sur chaque compagnie du secteur afin d'assurer les stocks stratégiques nécessaires [DIREM, 2007].

En conséquence, la compagnie considérée possède des réservoirs pour chaque type de produits pétroliers pouvant être transportés par cet oléoduc. Cela permet de satisfaire les clients en relation avec la compagnie sous forme d'une relation client – fournisseur. Chacun des ces clients est appelé client principal.

Dans ce cadre, le bon fonctionnement de la compagnie est sujet à deux contraintes : une contrainte commerciale et économique, qui impose une exploitation maximale de l'oléoduc afin de rentabiliser les lourds coûts d'investissement, et une autre contrainte d'ordre technique – expliquée ultérieurement – qui impose une utilisation continue de l'oléoduc.

Ainsi, et pour répondre à ces contraintes la compagnie a décidé de rentrer dans le secteur de la sous-traitance en devenant un prestataire de services de sous-traitance, et cela en allouant l'oléoduc à des périodes où il n'est pas utilisé pour le donneur d'ordres ayant l'offre la plus rentable et la plus adéquate aux différentes contraintes de fonctionnement de l'oléoduc.

Par conséquent, l'entreprise sera au cœur de deux relations différentes : d'abord, une relation client – fournisseur, avec son client principal et traditionnel, et une relation sous-traitant – donneur d'ordres, avec le donneur d'ordres de sous-traitance, ce qui permet à l'entreprise de diversifier les types de ses contrats et surtout de maximiser l'utilisation de ses capacités.

Avant de présenter le problème traité dans cette thèse, nous présentons dans les sections suivantes les principes du transport par oléoducs et le problème de la maintenance des oléoducs.

I.4.2.1 Le transport par oléoducs

Les régions de production du pétrole sont géographiquement très souvent éloignées des zones de consommation ou des raffineries vers lesquelles le pétrole devra être acheminé, par voie maritime ou par oléoduc.

En 2006, en France, le total du trafic des principaux pipelines a enregistré une progression de 8 % et s'est établi à environ 48,9 millions de tonnes (Mt).

Il faut signaler que les transports intérieurs de pétrole brut sont, presque totalement, réalisés par un réseau d'oléoducs de plus de 3200 km, qui permet d'alimenter les raffineries françaises, en plus de la raffinerie de Karlsruhe en Allemagne et la raffinerie de Cressier en Suisse [DIREM, 2007].

La figure I.1 illustre l'évolution du tonnage annuel et celle du tonnage pondéré en France durant les dix dernières années.

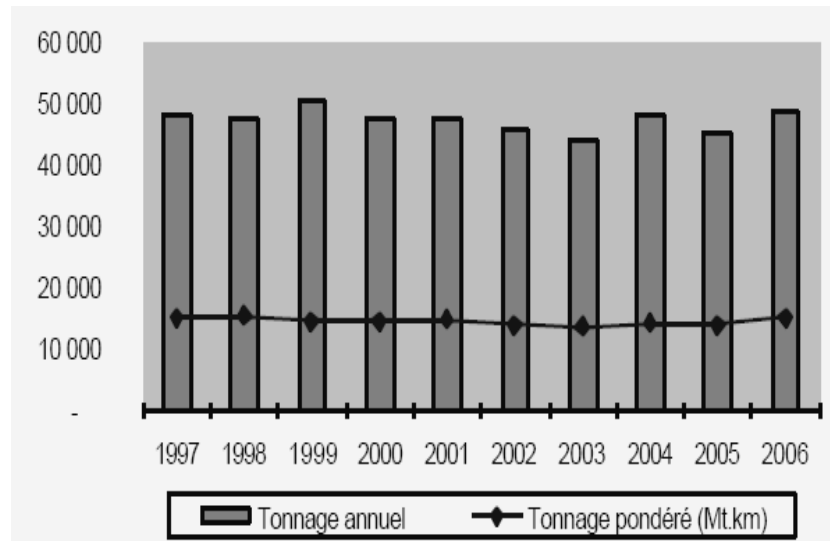


Figure I.1. Évolution du tonnage annuel et celle du tonnage pondéré en France [DIREM, 2007]

Les oléoducs sont des canalisations destinées à transporter des produits pétroliers pompables tels que le pétrole brut, produit raffinés finis ou semi finis.

Ce moyen de transport comporte plusieurs avantages, tels que [Roze, 2002] :

- Insensible aux conditions climatiques, discret avec un faible impact sur l'environnement puisque les canalisations sont très souvent enterrées.
- Un mode de transport sûr. Sur une période d'observation allant de 1994 à 1998 sur toute l'Europe de l'ouest, on relève moins de 10 incidents par an avec déversement de produit, soit actuellement 2 incidents pour 10000 km de ligne et de l'ordre de 600 m³ perdus, soit un millionième du volume transporté.
- Pour des volumes élevés et pour les longues distances, les oléoducs représentent le mode de transport le moins cher. Le tableau suivant illustre la différence du coût de transport d'une tonne (t) de produit sur une distance de 100 km sur les différents moyens de transport possibles :

Moyen de transport	coût (€/t/100 km)
Oléoduc	1,8 à 2,1
Navire (10.000 t, pour 300 km)	2,4
Train (2000 t)	2,7
Barge (pour 100 km)	2,7 à 4,1
Camion (38 t)	4,1
Camion (20 t)	4,5

Tableau I.1. Coût de transport de produits pétroliers avec divers moyens [Roze, 2002]

Nous remarquons sur le tableau ci-dessus que les oléoducs représentent un atout très intéressant quant au prix unitaire de transport de produits pétroliers par rapport à tous les autres moyens existants.

- Dans un contexte international de plus en plus conscient des contraintes écologiques, le transport par oléoducs constitue une offre d'intérêt majeur. En effet, l'utilisation des oléoducs n'impose pas de retour à vide contrairement aux autres moyens de transport, ce qui le rend bien placé vis-à-vis le problème d'émission de gaz à effet de serres.
- Le transport par oléoducs représente un moyen efficace puisqu'il offre des services disponibles sans interruption 24 heures sur 24 et 365 jours par an ce qui aide à rentabiliser le volume important des investissements de sa construction.

Toutefois, le transport des produits pétroliers par oléoducs comporte certaines limites. En effet, les oléoducs manquent de souplesse en ne permettant pas d'avoir des liaisons point à point à cause des contraintes géographiques ou celle imposées par la réglementation.

En plus, la capacité de l'oléoduc ne peut être augmentée, pour cela il faut bien l'estimer avant sa construction.

Notons que le transport de produits par oléoduc impose que la canalisation soit toujours pleine.

Les produits qui peuvent être transportés par les oléoducs sont :

- le carburéacteur,
- les supercarburants et le gazole,
- le fioul domestique (FOD),
- fiouls lourds,
- le pétrole brut, le naphta et des produits chimiques.

Les oléoducs sont dits « multi-produits » quand ils peuvent transporter plusieurs produits différents. Dans de tels oléoducs les différents produits succèdent les uns aux autres. A l'interface de deux produits différents se développe une zone de mélange. En cas de compatibilité entre ces produits (par exemple : le gazole et le fioul domestique), la zone de mélange sera déclassée dans le produit le moins noble et livrée au client. En cas d'incompatibilité (comme par exemple : le gazole et le supercarburant), le mélange est qualifié de "contamination" impropre à la commercialisation. Cette contamination est soutirée dans des réservoirs spécifiques du pipeline, en vue d'un retraitement ultérieur.

I.4.2.2 La maintenance des oléoducs

Les oléoducs sont confrontés à des problèmes de fuites légères ou les altérations de l'épaisseur des tubes et dans d'autres cas des déformations géométriques des tubes, mais grâce à des instruments de détection spécifiés à chaque type de problème on peut effectuer des interventions à titre préventif ou correctif.

Vu les caractéristiques chimiques du pétrole qui est plus ou moins corrosif parce qu'il contient un peu de gaz acides (le dioxyde de carbone : CO_2 , l'hydrogène sulfuré : H_2S), en plus, les canalisations en acier sont enterrées dans le sol et peuvent être rapidement oxydées extérieurement, et même perforées, car le sol est un agent de transformation où les phénomènes générateurs de corrosion sont fréquents (hétérogénéité et acidité des sols, concentration différentielle d'oxygène,...), tout cela rappelle à quel point les oléoducs sont confrontés aux problèmes de corrosion.

Ainsi, il existe deux façons pour protéger les oléoducs :

- La protection passive.

Les tubes sont protégés avant enfouissement par un revêtement étanche et résistant au courant électrique (brai de pétrole ou de houille, fibre de verre, papier, polyéthylène). Les lignes immergées (cours d'eau ou nappes phréatiques) reçoivent une protection supplémentaire avec un enrobage de béton.

Des joints isolants permettent de supprimer les contacts entre métaux différents ou entre structures protégées ou non afin d'éviter la formation de couples galvaniques favorisant l'oxydation des métaux.

- La protection active.

Afin d'éviter que l'oléoduc ne se trouve en position d'anode " soluble ", on le place artificiellement en position de cathode, d'où le nom de " protection cathodique ".

Des postes dits de " protection cathodique " sont répartis le long du pipeline de façon à injecter ou soutirer du courant électrique dans la canalisation, ou en vue de porter son potentiel à des valeurs de l'ordre de - 800 mV par rapport à son environnement.

I.4.3. Problème posé par cette thèse

La sous-traitance représente une opportunité intéressante pour ses différentes parties en offrant aux entreprises - donneurs d'ordres ou sous-traitantes - un moyen flexible et réactif pour maximiser leurs profits. Dans ce cadre, nous nous intéressons à travers cette thèse aux entreprises voulant intégrer une offre de services de sous-traitance dans leurs politiques commerciales.

L'intégration de la sous-traitance est motivée par la volonté de telles entreprises d'assurer une exploitation optimale de leurs compétences et capacités, notamment leurs capacités de production. Toutefois, cette intégration ne doit pas affecter la pérennité du bon fonctionnement de l'entreprise ni ses relations avec ses différents partenaires (fournisseurs ou clients). Concrètement, la sous-traitance consiste à allouer aux donneurs d'ordres une machine, un ensemble de machines ou toute une chaîne de production. Cette allocation à la sous-traitance se repose sur trois fondements :

- Les stratégies de maintenance et de production de l'entreprise,
- Les besoins réels des clients traditionnels de l'entreprise,
- L'importance de l'offre et les besoins du donneur d'ordres de sous-traitance.

Ainsi, notre but est d'étudier l'impact et l'influence de la sous-traitance sur les différentes stratégies de gestion de la production et de la maintenance adoptées par l'entreprise, tout en assurant la continuité et la stabilité de la relation de l'entreprise avec les autres clients traditionnels.

Cette thèse traite le problème d'une compagnie de transport des produits pétroliers. Cette compagnie possède des oléoducs pour acheminer différents produits entre une source pouvant être une plateforme pétrolière ou une raffinerie et une destination, qui constitue un point de commencement d'un réseau de distribution, dans le cas de produits finis ou une raffinerie de pétrole chargée de traiter du pétrole brut afin d'en extraire différents produits pétroliers.

Pour maximiser l'exploitation de son oléoduc, cette compagnie décide de devenir un prestataire de service, pour cela elle sera contrainte d'assurer la continuité de sa relation client - fournisseur avec son client principal, en plus d'une relation sous-traitant - donneur d'ordres avec le donneur d'ordres ayant la meilleure offre.

Le client principal est alimenté via un stock rempli par l'oléoduc de la compagnie. Cet oléoduc est alloué pour une autre compagnie de transport de produits pétroliers sous forme de contrat de sous-

traitance pendant un certain temps dont l'objectif, rappelons le, est de maximiser l'utilisation de l'oléoduc, ce qui pose le problème du choix des périodes et des fréquences avec lesquelles ce contrat de sous-traitance sera satisfaisant pour les deux parties, à savoir la compagnie sous-traitante et le donneur d'ordres de sous-traitance, sans que cela n'affecte la relation de la compagnie avec son client principal.

D'un point de vue technique, il est indispensable de trouver le point d'équilibre entre le débit de pompage des produits transportés par l'oléoduc afin d'assurer le niveau optimal de réservoirs pour satisfaire la demande du client, et les exigences de maintenance de l'oléoduc, ainsi que les termes du contrat de la sous-traitance qui exigent l'allocation de l'oléoduc au donneur d'ordres de sous-traitance pendant des périodes et des fréquences connues pendant lesquelles les réservoirs de la compagnie ne seront plus alimentés (la sous-traitance entraîne une indisponibilité de l'oléoduc).

Du côté du donneur d'ordres, la sous-traitance est un moyen pour accroître ses capacités. Ainsi, acquérir l'oléoduc pendant certaines périodes négociées permet aux donneurs d'ordres d'augmenter le volume de produits pétroliers acheminés vers les réservoirs de ses propres clients.

Dans ce cadre, nous nous positionnons du côté de la compagnie sous-traitante et notre mission à travers cette thèse est de trouver les meilleurs stratégies de production et de maintenance de l'oléoduc capable d'assurer la continuité de la relation de la compagnie avec son client principal, permettant aussi d'accomplir les services de sous-traitance imposés par le contrat de sous-traitance avec le donneur d'ordres.

Pour satisfaire la demande de ses clients, la compagnie doit acheminer par l'oléoduc des produits pétroliers avec un certain débit de pompage pour être stockés dans un réservoir de la compagnie. Comme nous l'avons signalé, l'oléoduc est sujet à des pannes aléatoires causées par différents facteurs. Pour cela, l'oléoduc subit un programme de maintenance préventive.

Pour résoudre ce problème, il est astucieux de rechercher les similitudes avec les systèmes de production. Ainsi, à travers notre étude, l'oléoduc peut être assimilé à une machine M qui doit alimenter un stock S (réservoir) avec une certaine cadence U_{max} (débit de pompage) pour satisfaire une demande client d (consommation du client principal). Suite aux pannes aléatoires, la machine fait l'objet d'actions de maintenance corrective en plus des actions de maintenance préventive. D'un autre côté, cette machine est allouée pour effectuer des tâches de sous-traitance (donneur d'ordres), avec une certaine fréquence A_1 et pour une certaine durée A_2 durant laquelle elle est considérée comme étant indisponible pour le système (la compagnie).

L'objectif de cette thèse est d'étudier et de proposer des politiques de maintenance faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production dans un contexte de sous-traitance pour des systèmes de production prestataires de services de sous-traitance. Ces politiques seront un outils pour le sous-traitant pour gérer sa production et son programme de maintenance de sorte à satisfaire au mieux son client principal et en même temps pour maximiser l'exploitation des ses capacités de production en ayant recours à la sous-traitance.

Il est intéressant de déterminer les conditions de rentabilité de la sous-traitance dans un contexte de maintenance intégrée ainsi que l'impact des stratégies de commande et de maintenance. L'approche proposée dans cette thèse est dédiée aux systèmes de production avec une transposition évidente au problème de l'oléoduc.

I.4.4. Travaux de Dellagi et al. [Dellagi, 2007]

Dans le même cadre, un travail très proche du notre est celui de Dellagi et al. [Dellagi, 2007], qui constitue une contribution à l'élaboration d'une politique de maintenance faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production dans un contexte de sous-traitance.

Le problème posé dans la thèse de Dellagi traite des politiques de maintenance intégrant l'aspect production sous la contrainte de sous-traitance pour des entreprises donneurs d'ordres de sous-traitance. Le système de production étudié par ces travaux est composé d'une seule machine M_1 . Pour satisfaire une demande du client principal, il était nécessaire de faire appel à la sous-traitance représentée par une machine M_2 . La sous-traitance impose des périodes d'indisponibilité incontrôlables. D'un point de vue fiabilité, il a supposé que le taux de défaillance de la sous-traitante

de la machine M_2 est constant, seule la machine M_1 était soumise à un programme de maintenance préventive de type âge.

Dans ce travail, différentes politiques de maintenance intégrant l'aspect production ont été élaborées pour tenir compte de la contrainte de sous-traitance. Ces politiques ont été comparées par rapport à une politique de maintenance simple SMP (Simple Maintenance Policy) ne tenant pas compte de la sous-traitance. Dans un premier temps, les auteurs ont proposé une nouvelle politique de maintenance qui a été appelée politique de maintenance améliorée IMP (Improved Maintenance Policy) et qui tient compte de la contrainte de sous-traitance. Les conditions d'efficacité en termes de performances de IMP ont été prouvées analytiquement. Dans un deuxième temps, les auteurs ont apporté des extensions de la politique IMP afin d'améliorer la performance en termes de coûts.

I.4.5. Positionnement par rapport aux travaux de Dellagi [Dellagi, 2006]

Les travaux de Dellagi [Dellagi, 2006] traite du principe du couplage de la maintenance et la production et proposent des politiques de maintenance tenant compte de la contrainte de sous-traitance. Les auteurs s'intéressent aux systèmes industriels donneurs d'ordres de sous-traitance, c'est-à-dire, des systèmes faisant appel aux services de sous-traitance.

Dans le cadre de ces travaux, la machine sous-traitante a un taux de défaillance constant, car l'entreprise donneur d'ordres de sous-traitance qu'il étudie n'a aucune information sur les programmes de maintenance de l'entreprise sous-traitante.

En ce qui concerne notre travail, nous étudierons l'autre côté de la relation de la sous-traitance, c'est-à-dire, les entreprises prestataires de sous-traitance, dans un contexte de couplage de la maintenance et de la production. Notre objectif est de proposer des politiques de maintenance pour le sous-traitant qui répondent aux mieux aux contraintes posées par la sous-traitance.

Dans notre étude, les tâches de maintenance et de réparation sont à la charge de l'entreprise sous-traitante, sans que cela ne doive perturber les services de sous-traitance ni en termes de temps ni de coûts. Ainsi, la maintenance de la machine allouée à la sous-traitance est complètement prise en charge, cela implique que les périodes de réparation pendant la sous-traitance ne sont pas incluses dans la période de la sous-traitance, en plus, elles généreront des coûts supérieurs par rapport à ceux générés par des réparations hors sous-traitance.

I.5. Conclusion

À travers ce premier chapitre nous avons exposé les principes sur lesquels cette thèse est basée. Dans un premier temps, nous avons présenté l'approche de maintenance intégrée, fondée sur un principe de couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production. Nous avons également présenté différents travaux basés sur cette approche.

Dans un second temps, nous avons présenté le concept de la sous-traitance industrielle, à travers ses différentes définitions, ses motivations, ses diverses formes, ainsi que les avantages et inconvénients que les entreprises peuvent rencontrer en ayant recours à la sous-traitance, que ce soit comme sous-traitants ou donneurs d'ordres de sous-traitance. Cette partie a été conclue avec une présentation de différents travaux traitant le concept de sous-traitance.

La troisième partie de ce chapitre était consacrée à la présentation de la problématique industrielle qui nous a inspirée en présentant les préceptes du transport des produits pétroliers par oléoducs. Ensuite, nous avons détaillé le problème posé par cette thèse. Et enfin, nous avons étalé les principales notations utilisées dans le reste des chapitres.

L'objectif de cette étude est de proposer différentes politiques faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production sous une contrainte de sous-traitance, pour des entreprises prestataires de sous-traitance. Ces politiques devront assurer le bon déroulement de la maintenance et de la production pour de telles entreprises, mais doivent être basées aussi sur un principe gagnant – gagnant entre le sous-traitant et le donneur d'ordres, afin d'assurer les intérêts de chacune de ces deux parties de la relation de sous-traitance.

Chapitre II

Étude du couplage de la maintenance et de la production sous la contrainte de sous-traitance

A travers ce chapitre, nous aborderons le problème du couplage de la gestion de la maintenance et de la gestion de la production sous une contrainte de sous-traitance. La première partie de ce chapitre est consacrée à l'analyse de l'impact d'une approche de maintenance intégrée puis à la production par rapport à une approche où la gestion de la maintenance est indépendante de celle de la production. Nous comparons une politique de maintenance intégrée avec une politique de maintenance simple, dissociant la gestion de la maintenance de la production dans le cas d'une seule machine soumise à un programme de maintenance préventive de type bloc. Par la suite, nous considérons cette politique de maintenance intégrée selon une stratégie de maintenance de type âge.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous étudions le problème du couplage de la maintenance et de la production avec une prise en compte de la contrainte de sous-traitance. La contrainte de sous-traitance impose des périodes d'indisponibilité des machines de façons périodiques afin d'exécuter des tâches de sous-traitance (TST) tout en continuant à satisfaire une demande client. Nous montrons analytiquement les conditions sous lesquelles la sous-traitance est profitable.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous présentons une extension du problème de maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance dans le cas de deux machines.

II.1. Introduction

Durant ces dernières années, la gestion des systèmes de production s'est orientée vers une approche plus développée en ayant une vue plus globale sur la chaîne de production, en intégrant la gestion de la maintenance avec celle de la commande pour réagir au mieux aux aléas du monde industriel et économique. Dans ce cadre, les travaux de Boukas *et al.* [Boukas, 1990], Gharbi et Kenne [Gharbi, 2000], Rezg *et al.* [Rezg, 2004] et Aghezzaf *et al.* [Aghezzaf, 2006] apportent de nouvelles approches de gestion de la production et de gestion de la maintenance. Ces travaux font l'objet d'un couplage de la gestion de la maintenance et de la production et optimisent simultanément les dates de maintenance préventive des équipements tout en assurant un certain niveau de service.

D'un autre côté, en plus du contexte de la mondialisation qui – jour après jour – repousse les frontières entre les marchés, l'émergence de nouveaux pays aux coûts de production inférieurs à ceux appliqués dans le monde industrialisé, a favorisé l'apparition de nouvelles pratiques économiques et commerciales telles que la sous-traitance industrielle.

Dans ce chapitre, nous étudions les deux fondements de notre travail, c'est-à-dire le couplage de la gestion de la maintenance et de la gestion de la production avec la contrainte de sous-traitance. À travers ce chapitre, nous prouvons qu'une gestion intégrée de la maintenance et de la production est plus avantageuse qu'une gestion séparée. Par la suite, nous mettons en évidence les conditions de la rentabilité de la sous-traitance en termes de gain de coût. [Dahane, 2007A]

Le reste du chapitre est organisé comme suit : la première partie de ce chapitre II.2 développe analytiquement l'approche de couplage de la gestion de la production et de la gestion de la maintenance dans le cas d'une seule machine et met en évidence les gains engendrés selon une politique de maintenance intégrée notée (IMP : Integrated Maintenance Policy) par rapport à une politique de maintenance simple notée (SMP : Simple Maintenance Policy). Par la suite, nous utilisons la simulation pour comparer une politique de maintenance intégrée selon une stratégie de maintenance de type bloc IMP^B par rapport à une politique de maintenance intégrée selon une stratégie de maintenance de type âge IMP^A .

La deuxième partie de ce chapitre II.3 est consacrée à l'étude du problème du couplage de la maintenance et de la production sous une contrainte de sous-traitance. Nous prouverons analytiquement dans cette partie sous quelles conditions la sous-traitance est rentable pour le système. Dans la dernière partie de chapitre II.4, nous proposons une extension de la comparaison de notre approche dans le cas de deux machines.

II.2. Étude de la rentabilité d'une politique IMP : Cas d'une machine

Le système étudié est composé d'une seule machine M pouvant fonctionner à une cadence maximale U_{max} pour satisfaire une demande client constante dans le temps d via un stock S , avec $U_{max} > d$. La machine fait l'objet d'actions de maintenance corrective à chaque panne et est soumise à un programme de maintenance préventive.

Le problème posé dans cette partie est d'étudier l'effet d'une politique de maintenance intégrée, c'est-à-dire faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production par rapport à une politique de maintenance simple les dissociant alors. Nous allons, dans un premier temps, comparer une politique IMP selon une stratégie de maintenance de type bloc par rapport à une politique SMP de type bloc.

Dans un deuxième temps, nous analyserons l'effet d'une politique IMP^A selon une stratégie de maintenance de type âge par rapport à une politique IMP^B qui est quant à elle de type bloc.

Tout d'abord, nous allons présenter dans la section suivante les différentes stratégies de commande et de maintenance sur lesquelles on se base tout au long de cette partie du présent chapitre.

II.2.1. Politique de commande

La stratégie de production qui régie le système consiste à produire à une cadence maximale U_{max} pendant la phase I dite de construction du stock afin d'atteindre la capacité maximale du stock h supposé garantir la demande durant les périodes de réparation de la machine M , jusqu'à la date de maintenance préventive T . Ensuite, la machine retourne dans un mode de production à la demande jusqu'à la date T de maintenance.

La politique de commande peut être résumée comme suit en fonction de la cadence de la machine M à chaque instant t du cycle :

$$U(t) = \begin{cases} U_{max} & \text{Si } t \leq \frac{h}{\alpha} \\ d & \text{Si } \frac{h}{\alpha} < t < T \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Tel que : $\alpha = U_{max} - d$ représente le ratio de construction maximal du stock.

L'impact de cette politique de commande est illustré par la figure ci-dessous :

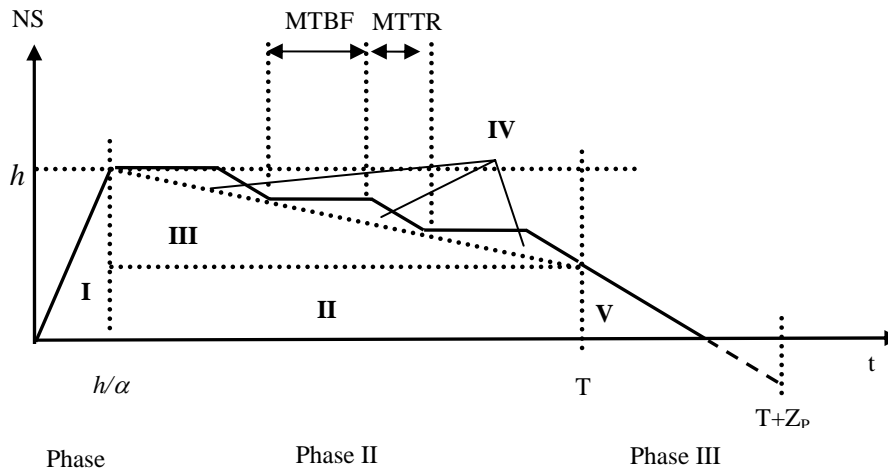


Figure II.1. Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMP

Nous remarquons que le niveau du stock passe par trois phases :

- Phase I : $[0, h/a]$: La machine fonctionne à sa cadence maximale U_{max} , ce qui fait accroître le niveau de stock (NS) avec le ratio $\alpha = U_{max} - d$.
- Phase II : $[h/a, T]$: La production est à la demande pour satisfaire les besoins du client. La machine peut tomber en pannes, ainsi, pendant les périodes de réparation le stock décroît à une vitesse d .
- Phase III : $[T, T+Z_p]$: La période de maintenance préventive de la machine M , durant laquelle le niveau du stock décroît, ce qui peut engendrer dans certains cas des situations de pénurie.

II.2.2. Politique de maintenance

La machine M a un taux de pannes croissant. Elle fera l'objet de plusieurs actions de maintenance de la façon suivante :

- Durant l'intervalle $[h/\alpha, T]$ la machine M peut tomber en panne. Le nombre moyen de pannes est de $\Phi(T-h/\alpha)$, sachant que $\Phi(T) = \Phi(T-h/\alpha) + \Phi(h/\alpha)$.

La machine M est supposée neuve après chaque action de maintenance corrective ou préventive (As Good as New), et la probabilité de tomber en panne est faible. On suppose que $\Phi(h/\alpha) = 0$.

Alors : $\Phi(T-h/\alpha) = \Phi(T)$.

- À $t = T$, la machine subit une action de maintenance préventive pendant une durée moyenne Z_p , qui coûtera M_p .

Par ailleurs, $\Phi(D)$ détermine le nombre moyen de panne pendant une période D quelconques. Le calcul de $\Phi(D)$ est basé sur la fonction $K(t)$ qui représente le nombre moyen de panne durant l'intervalle $[0, t]$, et définie selon l'équation de renouvellement.

Exemple :

Soient les instants t_1 et t_2 , $0 < t_1 < t_2$. Posons $D = [t_1, t_2]$.

Alors :

$$\Phi(D) = K(t_2) - K(t_1).$$

II.2.3. L'apport de la Politique de Maintenance Intégrée IMP par rapport à une Politique de Maintenance Simple SMP

Pour montrer l'apport de l'approche intégrant la gestion de la maintenance avec celle de la production en terme de gain au niveau du coût moyen par cycle généré par les différentes opérations de gestion de la maintenance et la gestion de la production, on compare dans cette section une politique de maintenance simple SMP avec une politique de maintenance intégrée IMP.

Pour illustrer les résultats de notre étude, on se base sur la structure de coûts détaillée à travers le tableau suivant :

M_C	\tilde{M}_C	M_p	C_p	C_s
3000	5000	300	1000	5

Tableau II.1. Structure des coûts (um : unités monétaires).

La machine M peut produire avec une cadence maximale $U_{max} = 60$ pièces/u.t. Sa durée de vie suit la loi de Weibull $(2, 100)$ avec une moyenne $MTBF = 88.6$ u.t (unité de temps). La durée moyenne de maintenance corrective est $MTTR = 15$ u.t et celle de la maintenance préventive est $Z_p = 5$ u.t.

D'autre part, la demande $d = 10$ pièces/u.t, pour $a = (U_{max} - d) = 50$ pièces/u.t.

II.2.3.1. La Politique de Maintenance Simple SMP

1. Définition de la politique SMP

La Politique de Maintenance Simple SMP consiste en une optimisation du coût total moyen par cycle dissociant la gestion de la maintenance de la gestion de la production. En conséquence, l'optimisation du coût total C_i^{SMP} passe par deux étapes :

- Déterminer la date optimale de maintenance préventive T^* qui assure un coût de maintenance moyen par cycle optimal L_1^{SMP} .

- En se basant sur les résultats de la première étape, déterminer le seuil optimal de stock h à assurer pendant la phase de construction de stock, engendrant un coût de gestion de stock moyen par cycle optimal L_2^{SMP} .

Formellement, le coût total moyen par cycle s'écrit sous la forme : $C_t^{SMP} = L_1^{SMP} + L_2^{SMP}$

Avec :

L_1^{SMP} : Coût total moyen par cycle des actions de gestion de la maintenance.

L_2^{SMP} : Coût total moyen par cycle des actions de gestion de la production.

2. Optimisation avec la politique SMP

2.a. Recherche du $L_1^{SMP}(T^*)$

Sachant que la stratégie de maintenance est de type bloc, l'optimisation du coût de maintenance de la politique SMP est basée sur le résultat suivant :

$$\frac{T^*}{\frac{\partial L_1^{SMP}(T)}{\partial T}} = 0 \quad (II.3)$$

Avec

$$L_1^{SMP}(T) = \frac{M_P + \Phi(T)M_C}{T + Z_P} \quad (II.4)$$

Où M_C , M_P représentent respectivement le coût d'une action de maintenance corrective et préventive. $\Phi(T)$ est le nombre moyen de pannes pendant l'intervalle $[0, T]$. Z_P est la durée moyenne d'une action de maintenance préventive.

Ainsi, l'optimisation de $L_1^{SMP}(T)$ donne un $T^* = 30.972$, pour un coût $L_1^{SMP}(T^*) = 14.644$ u.m.

2.b. Recherche du $L_2^{SMP}(h)$

La deuxième étape de l'optimisation des coûts générés par la politique SMP est de déterminer le seuil optimal h^* qui assure un coût moyen de gestion de stock optimal. Ce dernier a l'expression suivante :

$$L_2^{SMP}(h) = (L_S^{SMP} + L_P^{SMP}) \quad (II.5)$$

Avec :

L_S^{SMP} : Coût moyen de stockage par cycle,

L_P^{SMP} : Coût moyen de pénurie par cycle.

Concernant le coût moyen de stockage L_S^{SMP} , il s'écrit sous la forme :

$$L_S^{SMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_P} \right) (Z_I + Z_{II} + Z_{III} + Z_{IV} + Z_V) \quad (II.6)$$

(Telle que les Z_i représentent les surfaces mentionnées sur la figure II.1)

Avec:

- $Z_I = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{h^2}{2\alpha}$
- $Z_{II} = \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (h - dMTTR\Phi(T))$
- $Z_{III} = \frac{1}{2} \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (dMTTR.\Phi(T))$

- $Z_W = \Phi(T) \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR d - \frac{1}{2} MTTR^2 d \right)$
 $= \frac{1}{2} \Phi(T) MTBF \cdot MTTR \cdot d$
- $Z_V = \frac{(h - dMTTR\Phi(T))^2}{2d}$

Alors :

$$L_S^{SMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\frac{h^2}{2\alpha} + \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (h - dMTTR\Phi(T)) + \frac{1}{2} \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (dMTTR \cdot \Phi(T)) + \frac{1}{2} \Phi(T) MTBF \cdot MTTR d \right) + \frac{(h - dMTTR\Phi(T))^2}{2d}$$

Après simplification, on obtient :

$$L_S^{SMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha} \right) h^2 + \left(T + \left(\frac{1}{2\alpha} d - 1 \right) MTTR\Phi(T) \right) h + \frac{1}{2} dMTTR\Phi(T) (MTBF + MTTR\Phi(T) - T) \right) \quad (\text{II.7})$$

D'autre part, le coût de pénurie est donné par :

$$L_P^{SMP} = \left(\frac{C_P}{T + Z_p} \right) (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR) \quad (\text{II.8})$$

Par conséquent, l'expression du coût L_2^{SMP} est :

$$L_2^{SMP}(h) = \left(\frac{1}{T^* + Z_p} \right) \left(C_S \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha} \right) h^2 + \left(T^* + \left(\frac{1}{2\alpha} d - 1 \right) MTTR\Phi(T^*) \right) h \right) + \frac{1}{2} dMTTR\Phi(T^*) (MTBF + MTTR\Phi(T^*) - T^*) \right) + C_P (dZ_p - h + d\Phi(T^*)MTTR) \quad (\text{II.9})$$

Notre but est de déterminer le seuil optimal h^* , pour cela on commence par intégrer l'expression de L_2^{SMP} par rapport à la variable de décision h , sachant que $T^* = 30.972$.

On obtient :

$$\frac{\partial L_2^{SMP}}{\partial h} = \frac{1}{(T^* + Z_p)} \left(C_S \left(-\frac{1}{\alpha} (h - dMTTR\Phi(T^*)) + T - \frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T^*) + \frac{1}{d} (h - dMTTR\Phi(T^*)) \right) - C_P \right) \quad (\text{II.10})$$

Donc :

$$\frac{\partial L_2^{SMP}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = - \left(1 / \left(\frac{1}{(T^* + Z_p)} C_S \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{d} \right) \right) \right) \left(\frac{1}{(T^* + Z_p)} \left(C_S \left(\frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T^*) + T^* - MTTR\Phi(T^*) \right) - C_P \right) \right)$$

Après simplification, on obtient :

$$h^* = - \left(\frac{\alpha d}{C_S (\alpha - d)} \right) \left(\left(C_S \left(\frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T^*) + T^* - MTTR\Phi(T^*) \right) - C_P \right) \right) \quad (\text{II.11})$$

On trouve $h^* = 750.61$. Mais sachant que la condition $dZ_p < h \leq dZ_p + dMTTR\Phi(T)$ doit être vérifiée, on obtient alors : $h^* = 61.2654$. Cela implique que le coût de pénurie est nul. Et par conséquent, le coût optimal moyen par cycle engendré est $L_2^{SMP} = 6325.9 \text{ u.m.}$

On conclut que pour la politique SMP la date optimale de maintenance préventive est $T^* = 30.972$ et un niveau de stock à assurer pendant la phase de construction de stock $h^* = 61.2654$, engendrant un coût moyen optimal $C_i^{SMP} = 6340.5 \text{ u.m}$

II.2.3.2. La Politique de Maintenance Intégrée IMP

1. Définition de la politique IMP

La Politique de Maintenance Intégrée IMP consiste à optimiser simultanément les coûts engendrés par la gestion de la maintenance et celle de la production.

Le coût total moyen par cycle C_i^{IMP} s'écrit de cette façon :

$$C_i^{IMP}(T, h) = (L_S^{IMP} + L_P^{IMP} + L_M^{IMP}) \quad (\text{II.12})$$

Avec :

L_S^{IMP} : Coût moyen de stockage par cycle,

L_P^{IMP} : Coût moyen de pénurie par cycle,

L_M^{IMP} : Coût moyen de maintenance par cycle.

2. Optimisation avec la politique IMP

Le but de cette section est de déterminer les valeurs optimales des variables de décision T et h , assurant un coût moyen par cycle optimal. Pour cela, on commence tout d'abord par déterminer l'expression du coût moyen par cycle de la politique IMP en s'appuyant sur les expressions des coûts moyens qui le composent. Le coût moyen du stockage par cycle généré par la politique IMP est le même que celui généré par la politique SMP. On aura alors :

$$L_S^{IMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\frac{h^2}{2\alpha} + \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (h - dMTTR\Phi(T)) + \frac{1}{2} \left(T - \frac{h}{\alpha} \right) (dMTTR.\Phi(T)) \right) + \frac{1}{2} \Phi(T) MTBF.MTTR.d + \frac{(h - dMTTR\Phi(T))^2}{2d} \quad (\text{II.13})$$

On remarque aussi que le coût de pénurie généré par la politique IMP est le même que celui généré par la politique SMP. Ainsi, on obtient :

$$L_P^{IMP} = \left(\frac{C_P}{T + Z_p} \right) (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR) \quad (\text{II.14})$$

Concernant le coût généré par la gestion de maintenance, il est exprimé avec cette expression :

$$L_M^{IMP} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_P + M_C.\Phi(T)) \quad (\text{II.15})$$

À partir des expressions du coût de stockage, pénurie et de maintenance, le coût moyen par cycle associé à la politique IMP aura l'expression suivante :

$$C_i^{IMP}(T, h) = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(C_s \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha} \right) h^2 + \left(T + \left(\frac{1}{2\alpha} d - 1 \right) MTTR\Phi(T) \right) h \\ + \frac{1}{2} dMTTR\Phi(T) (MTBF + MTTR\Phi(T) - T) \end{array} \right) \right. \\ \left. + C_p (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR) + M_p + M_c \cdot \Phi(T) \right) \quad (II.16)$$

Pour déterminer la valeur de chaque variable de décision, on intègre l'expression du coût moyen. On trouve :

$$\frac{\partial C_i^{IMP}}{\partial h} = \frac{1}{(T + Z_p)} \left(C_s \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{\alpha} (h - dMTTR\Phi(T)) + T - \frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T) \\ + \frac{1}{d} (h - dMTTR\Phi(T)) \end{array} \right) - C_p \right)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial C_i^{IMP}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = - \left(1 / \left(\frac{1}{(T + Z_p)} C_s \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{d} \right) \right) \right) \left(\frac{1}{(T + Z_p)} \left(C_s \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T) \\ + T - MTTR\Phi(T) \end{array} \right) - C_p \right) \right)$$

Après simplification, on obtient :

$$h^* = - \left(\frac{\alpha d}{C_s (\alpha - d)} \right) \left(\left(C_s \left(\frac{1}{2\alpha} dMTTR\Phi(T) + T - MTTR\Phi(T) \right) - C_p \right) \right) \quad (II.17)$$

D'autre part :

$$\frac{\partial C_i^{IMP}}{\partial T} = \left(\frac{1}{(T + Z_p)^2} \right) \left(C_s \left(\begin{array}{l} \left(h + \left(\frac{1}{2\alpha} d - 1 \right) MTTRh\Phi'(T) \right) + \frac{1}{2} dMTTR\Phi(T) (MTTR\Phi'(T) - 1) \\ + \frac{1}{2} dMTTR\Phi'(T) (MTBF + MTTR\Phi(T) - T) \end{array} \right) \right. \\ \left. + C_p d \cdot MTTR\Phi'(T) + M_c \cdot \Phi'(T) \right) \\ - \left(\begin{array}{l} C_s \left(\begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{\alpha} \right) h^2 + \left(T + \left(\frac{1}{2\alpha} d - 1 \right) MTTR\Phi(T) \right) h \\ + \frac{1}{2} dMTTR\Phi(T) (MTBF + MTTR\Phi(T) - T) \end{array} \right) \\ + C_p (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR) + M_p + M_c \cdot \Phi(T) \end{array} \right) \quad (II.18)$$

En optimisant, on obtient : $T^* = 83.5879$ et $h^* = 173.0605$. Mais sachant que la condition $dZ_p < h \leq dZ_p + dMTTR\Phi(T)$ doit être vérifiée, on obtient alors : $h^* = 132.5856$

Ceci engendre un coût optimal moyen par cycle $C_i^{IMP} = 662.5377 \text{ u.m}$

En comparant $C_i^{IMP} = 662.5377 \text{ u.m}$ et $C_i^{SMP} = 6340.5 \text{ u.m}$ de IMP et SMP, on constate une amélioration de près de 90 % générée par l'adoption du couplage de la gestion de la maintenance et de la gestion de la production. Cela prouve l'importance et la pertinence de l'approche de maintenance intégrée par rapport d'une approche classique dissociant la maintenance et la commande.

II.2.4. Différence entre une politique IMP^A et une politique IMP^B

Le but de cette section est de montrer la différence entre une politique de maintenance intégrée adoptant une stratégie de maintenance de type bloc IMP^B et une autre politique de maintenance intégrée qui adopte quant à elle une stratégie de maintenance de type âge IMP^A, en ayant recours aux techniques de la simulation et l'analyse de variance.

On rappelle d'abord les définitions de ces deux stratégies de maintenance.

- **Stratégie bloc**
La stratégie de maintenance périodique selon un type bloc a été abordée par Nakagawa [Nakagawa, 1979]. Elle consiste à exercer une action de maintenance sur le composant soit en cas de panne au coût M_C , soit aux instants T , au coût M_P sans tenir compte de l'âge du composant.
- **Stratégie âge**
La politique de maintenance selon le type âge proposée par Barlow et Proschan [Barlow, 1965], consiste à exécuter une action de maintenance sur le composant en cas d'une panne avec un coût M_C ou après T unités de fonctionnement sans panne, au coût M_P .

II.2.4.1. La Politique de Maintenance Intégrée selon le type bloc IMP^B

1. Définition de la politique IMP^B

La politique IMP^B consiste en une politique IMP adoptant une stratégie de maintenance de type bloc. Elle se base sur les mêmes stratégies de commande et de maintenance décrites dans les sections II.2.1 et II.2.2.

2. Optimisation selon la politique IMP^B

Le but est de déterminer les valeurs de T^* et h^* qui représentent respectivement la date optimale de maintenance préventive et le niveau optimal du stock à assurer pendant la phase de construction du stock, qui assurent un coût moyen par cycle $C_t^{IMP^B}$ optimal. Le tableau ci-dessous présente la correspondance entre les valeurs réelles de T et h et leurs niveaux du plan d'expériences.

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
α	60	70	80
h	170	180	190

Tableau II.2. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences

À partir de ce tableau, on définit les relations de correspondance, soit :

$$\begin{aligned}
 X_T &= \frac{1}{10}T - 7 & (II.19) \\
 X_h &= \frac{1}{10}h - 18
 \end{aligned}$$

La tendance de représentation du $C_t^{IMP^B}$ est décrite par un modèle quadratique. Soit :

$$C_t^{IMP^B} = a_0 + a_1X_T + a_2X_h + a_3X_T^2 + a_4X_h^2 + a_5X_TX_h \quad (II.20)$$

Le tableau II.3 présente une analyse de la variance pour déterminer les coefficients influents sur le coût $C_t^{IMP^B}$.

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
T	256.13	1	256.13	32.128	10.1	S
h	190.88	1	190.88	23.943	10.1	S
T^2	321.19	1	321.19	40.29	10.1	S
h^2	710.7	1	710.7	89.148	10.1	S
Th	1.6584	1	1.6584	0.208	10.1	N
Régression	3.1386(10 ⁶)	6	5.2310(10 ⁵)	6.5616(10 ⁴)	8.44	GS
Résidu	23.91	3	7.9722			
Total	3.1386(10 ⁶)	9				

Tableau II.3. Analyse de variance de $C_t^{IMP^B}$.

Après l'élimination des coefficients non significatifs et en utilisant les relations de correspondance, le modèle analytique de $C_t^{IMP^B}$ est le suivant :

$$C_t^{IMP^B} = 569,38 + 6,5336X_T + 5,6403X_h + 12,673X_T^2 + 18,851X_h^2 \quad (II.21)$$

Ensuite, en remplaçant les valeurs des termes X_T et X_h , l'expression finale du coût sera :

$$C_t^{IMP^B}(T, h) = 0.1237T^2 - 16.6688T + 0.1885h^2 - 67.2996h + 7136.1 \quad (II.22)$$

Afin d'optimiser le coût total moyen par cycle, on le dérivra par rapport à chaque variable de décision. Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^B}}{\partial T} = 0.2475T - 16.6688 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^B}}{\partial h} = 0.3770h - 67.2996 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs optimales des variables de décisions sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^B}}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 67.3597 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^B}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = 178.5040 \end{cases} \quad (II.23)$$

Et par conséquent, le coût total moyen par cycle optimal correspondant à la politique IMP^B est $C_t^{IMP^B}(T^*, h^*) = 568.0956 \text{ u.m.}$

II.2.4.2. La Politique de Maintenance Intégrée selon le type âge IMP^A

1. Définition de la politique IMP^A

La politique IMP^A consiste en une politique IMP adoptant une stratégie de maintenance de type âge. Elle se base sur la même stratégie de commande décrite dans la section II.2.1. Mais concernant la stratégie de maintenance, elle suit la même logique décrite dans la section II.2.2 avec la différence que la maintenance préventive est de type âge, c'est-à-dire après T unités de temps d'usage sans panne.

2. Optimisation selon la politique IMP^A

L'optimisation de la politique IMP^A se base sur la même logique suivie dans l'optimisation de la politique IMP^B pour déterminer l'âge optimal de maintenance préventive T^* et le niveau optimal h^* assurant un coût moyen par cycle $C_t^{IMP^A}$ optimal.

Le tableau II.4 présente la correspondance entre les valeurs réelles de T et h et leurs niveaux du plan d'expériences.

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
a	60	70	80
h	100	120	140

Tableau II.4. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences

À partir du tableau II.4, on définit les relations de correspondance :

$$\begin{aligned} X_T &= \frac{1}{10}T - 7 \\ X_h &= \frac{1}{20}h - 6 \end{aligned} \quad (II.24)$$

La tendance de représentation du $C_t^{IMP^A}$ peut être décrite par un modèle quadratique. Soit :

$$C_t^{IMP^A} = a_0 + a_1X_T + a_2X_h + a_3X_T^2 + a_4X_h^2 + a_5X_TX_h \quad (II.25)$$

Le tableau suivant présente une analyse de la variance pour déterminer les coefficients influents sur le coût $C_t^{IMP^A}$.

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
T	2.2176	1	2.2176	0.812	10.1	N
h	328.28	1	328.28	120.21	10.1	S
T^2	44.419	1	44.419	16.265	10.1	S
h^2	449.43	1	449.43	164.57	10.1	S
Th	0.10794	1	0.10794	0.0395	10.1	N
Régression	2.2735(10 ⁶)	6	3.7891(10 ⁵)	1.3875(10 ⁵)	8.44	GS
Résidu	8.1929	3	2.7310			
Total	2.2735(10 ⁶)	9				

Tableau II.5. Analyse de variance de $C_t^{IMP^A}$.

Après l'élimination des coefficients non significatifs et en utilisant les relations de correspondance, le modèle analytique de $C_t^{IMP^A}$ est le suivant :

$$C_t^{IMP^A} = 489.37 + 7.3969X_h + 4.7127X_T^2 + 14.99X_h^2 \quad (II.26)$$

En remplaçant les valeurs des termes X_T et X_h l'expression finale du coût sera :

$$C_t^{IMP^A}(T, h) = 0.0471T^2 - 6.5978T + 0.0375h^2 - 9.6242h + 1215.6 \quad II.27$$

Afin d'optimiser le coût total moyen par cycle, on le dérivera par rapport à chaque variable de décision de la sorte :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^A}}{\partial T} = 0.0943T - 6.5978 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^A}}{\partial h} = 0.0750h - 9.6242 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs optimales sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^A}}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 70 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^A}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = 115.065 \end{cases} \quad (II.28)$$

Alors, le coût total moyen par cycle optimal qui correspond à la politique IMP^A est $C_t^{IMP^A}(T^*, h^*) = 488.4575 \text{ u.m.}$

II.2.4.3. Performances de la politique IMP^A par rapport à la politique IMP^B

À partir des résultats des optimisations trouvés précédemment, nous constatons que le choix de la stratégie de maintenance génère une différence entre deux politiques IMP en terme de coûts engendrés. Pour la politique IMP^B, qui s'appuie sur une stratégie de maintenance de type bloc, la date optimale de maintenance préventive est $T^* = 67.36$ u.t. et le niveau optimal du stock à assurer pendant la phase de construction du stock est $h^* = 179$ pièces. Ces valeurs optimales engendrent un coût moyen par cycle optimal $C_t^{IMP^B}(T^*, h^*) = 568.0956$ u.m. Concernant la politique IMP^A, qui consiste en une politique IMP adoptant une stratégie de maintenance de type âge, la valeur optimale de l'âge de maintenance obtenu est $T^* = 70$ u.t. avec un niveau optimal du stock à assurer pendant la phase de construction du stock $h^* = 116$ pièces, pour un coût moyen par cycle optimal $C_t^{IMP^A}(T^*, h^*) = 488.4575$ u.m.

D'après ces résultats l'amélioration A_{IMP^A/IMP^B} enregistrée au niveau du coût généré en adoptant une stratégie de maintenance de type âge au lieu d'une stratégie de maintenance de type bloc est égale à :

$$A_{IMP^A/IMP^B} = \left| C_t^{IMP^A} - C_t^{IMP^B} \right| = 79,6381 \text{ u.m} \quad (\text{II.29})$$

Cela peut être exprimé sous forme d'un gain économique de cette façon :

$$G_{IMP^A/IMP^B} = \frac{C_t^{IMP^B} - C_t^{IMP^A}}{C_t^{IMP^B}} = 15.16\% \quad (\text{II.30})$$

II.3. Étude de la rentabilité de la contrainte de la sous-traitance sous une politique IMP

La sous-traitance constitue pour les entreprises donneurs d'ordres un outil pour diminuer leurs coûts de production en cherchant des partenaires avec de faibles coûts ou pour augmenter leurs capacités afin de répondre à une demande plus importante. Elle permet aussi de s'ouvrir sur de nouveaux marchés en s'appuyant sur l'expérience et le réseau d'un partenaire local. Elle leur apporte, dans certains cas, un certain savoir faire technique qui ne le maîtrisaient pas.

Pour le sous-traitant, offrir ses services pour un tiers lui donne la possibilité d'exploiter ces capacités en diversifiant à la fois ses produits et ses relations avec les clients, ce qui signifie accroître son expérience, ses compétences et son savoir faire (ex. nouvelles normes de qualité).

Dans cette partie de ce chapitre, nous allons montrer les conditions dans lesquelles les tâches de sous-traitance sont profitables dans le cas d'une seule machine soumise à la sous-traitance.

La machine notée M peut produire à une cadence maximale U_{max} afin de satisfaire une demande client constante d via un stock S .

La machine M est réparée à la panne et elle est soumise à des actions de maintenance préventive de type bloc à chaque période T de durée moyenne Z_P . La période $[0, T+Z_P]$ est appelée cycle de maintenance.

Le stock S a une capacité finie h capable de garantir la satisfaction de la demande pendant les périodes d'indisponibilité de la machine M jusqu'à la date prévue de la maintenance préventive.

La stratégie suivie suppose que la machine fonctionne à une cadence maximale pendant une première phase durant laquelle elle est supposée neuve (as good as new) afin d'atteindre la capacité maximale du stock S . Après cette phase, la machine bascule dans un mode de production à la demande (JIT) jusqu'à la date T de maintenance préventive. Pendant les périodes de réparation de la machine M , le stock permet d'alimenter le client principal à une fréquence d . Si le stock est consommé avant la fin du cycle, les demandes arrivées seront définitivement perdues et généreront un coût de pénurie.

Dans les sections suivantes, nous décrivons la Politique de Maintenance Intégrée Sans Sous-traitance (Integrated Maintenance Policy without Subcontracting : IMP^{TS}), en détaillant sa politique de

commande et de maintenance. Il s'agit d'une politique de maintenance intégrée qui n'a aucune contrainte de sous-traitance.

Par la suite, nous décrirons la Politique de Maintenance Intégrée Avec Sous-traitance (Integrated Maintenance Policy With Subcontracting : IMP^{WS}) en mettant en avant ses différences avec la politique IMP^{TS} . Cette politique est une politique de maintenance qui consiste à allouer la machine pour effectuer des tâches de sous-traitance.

Enfin, les conditions de l'efficacité de la sous-traitance seront établies analytiquement en comparant les politiques IMP^{WS} et IMP^{TS} .

II.3.1. La Politique IMP^{TS}

II.3.1.1. Définition de la politique IMP^{TS}

La Politique de Maintenance Intégrée Sans Sous-traitance IMP^{TS} suppose que la machine ne soit pas allouée pour effectuer des tâches de sous-traitance. En d'autres termes, les tâches de sous-traitance sont toujours refusées.

II.3.1.2. Politique de commande de IMP^{TS}

La politique de maintenance intégrée sans sous-traitance IMP^{TS} s'appuie sur la même stratégie de maintenance d'une politique IMP décrite dans la première partie de ce chapitre (cf. II.2.1.).

II.3.1.3. Politique de maintenance de IMP^{TS}

La stratégie de maintenance de la politique de maintenance intégrée sans sous-traitance IMP^{TS} est la même que celle d'une politique IMP décrite dans la première partie de ce chapitre. (cf. II.2.2.).

II.3.2. La Politique IMP^{WS}

II.3.2.1. Définition de la politique IMP^{WS}

La politique de maintenance intégrée sous contrainte de sous-traitance IMP^{WS} consiste à allouer la machine M pour effectuer une tâche de sous-traitance par cycle de maintenance (figure II.2).

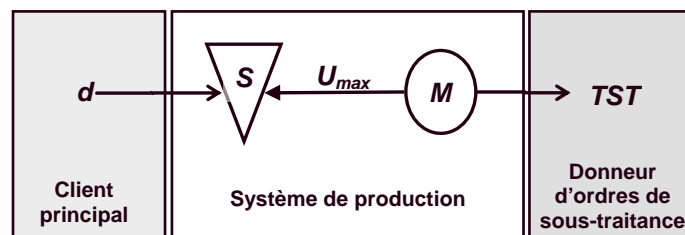


Figure II.2. Étude de la contrainte de sous-traitance : composants du système

Dans ce cas, la machine est contrainte de satisfaire à la fois la demande du client principal et les tâches de sous-traitance du donneur d'ordre.

II.3.2.2. Politique de commande IMP^{WS}

La politique de commande de IMP^{WS} suit la même logique que celle d'une politique IMP , sauf qu'à l'instant \bar{A}_1 la machine sera allouée pour effectuer une TST. Notons que la TST arrive avec une fréquence A_1 pour une durée d'exécution utile A_2 . On note par la suite par $\bar{A}_1 = A_1 \pm \Delta A_1$ la date d'exécution effective de la TST, sachant que la contrainte temporelle A_1 est flexible et on recherche à réaliser la TST le plus tôt possible. Ceci peut être résumé ainsi :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t \leq \frac{h}{\alpha} \\ d & \text{Si } \frac{h}{\alpha} < t < \tilde{A}_1 \quad \text{ou} \quad \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \leq t < T \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Telle que $\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2$ représente la fin effective de la TST.

À travers la figure ci-dessous nous illustrons l'évolution du stock pendant un cycle de maintenance de la politique IMP^{WS} , et nous montrons la différence avec la politique IMP^{TS} .

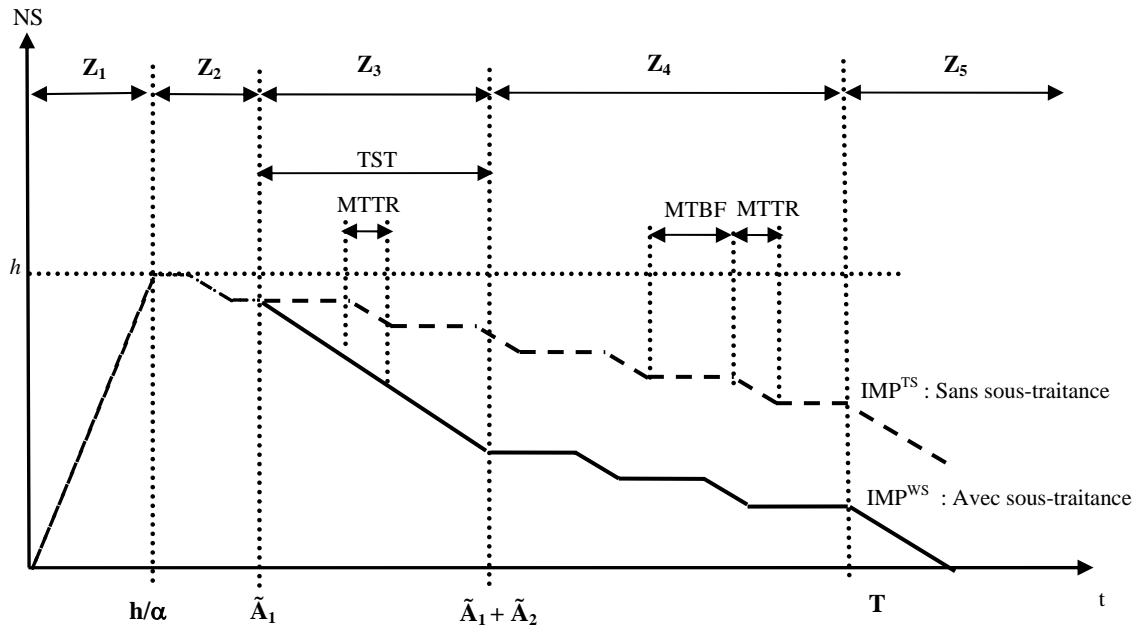


Figure II.3. Évolution du niveau du stock pendant un cycle de maintenance de IMP^{WS} et sa différence avec la politique IMP^{TS} .

Nous remarquons sur cette figure l'effet de l'application de politique IMP^{WS} . À l'instar de la politique IMP^{TS} , le niveau du stock passe par une première phase de construction avec la cadence maximale afin d'assurer le niveau h souhaité. Ensuite, la machine produit à la demande jusqu'à l'instant \tilde{A}_1 à partir duquel elle sera allouée pour effectuer une TST pour une durée utile A_2 . Au retour de la sous-traitance la machine reprend une production à la demande jusqu'à la date T de maintenance préventive. Notons qu'au cours de la période de sous-traitance ainsi que les périodes de réparation de la machine, les demandes client sont satisfaites à travers le stock.

II.3.2.3. Politique de maintenance de IMP^{WS}

La stratégie de maintenance adoptée par la politique IMP^{WS} est basée sur la même logique que celle de la politique IMP^{TS} , mais notons que la maintenance corrective pendant la sous-traitance génère un coût \tilde{M}_c supérieur par rapport à celle hors sous-traitance car elle provoque une indisponibilité de la machine pour le donneur d'ordre, ce qui entraîne aussi un prolongement de la durée de sous-traitance. (Car la durée de réparation n'est pas incluse dans la durée de sous-traitance). Dans ce cas, le nombre moyen des pannes pendant une TST sera $\Phi(A_2)$.

II.3.2.4. Politique d'affectation à la sous-traitance

L'affectation à la sous-traitance de la politique IMP^{WS} consiste à allouer la machine M pour effectuer une seule TST par cycle de maintenance à partir de l'instant \tilde{A}_1 et pour une durée utile A_2 . \tilde{A}_2 est dite

la période globale de la sous-traitance, elle se compose de la durée utile et des durées de réparation de la machine pendant la sous-traitance.

Formellement nous avons :

$$\tilde{A}_2 = A_2 + \Phi(A_2) MTTR$$

Où $MTTR$ est la durée moyenne d'une action de maintenance corrective sur la machine M , et $\Phi(A_2)$ est le nombre moyen de panne pendant la période A_2 .

Tandis que \tilde{A}_1 est dite date d'exécution effective de la TST. Rappelons que $\tilde{A}_1 = A_1 \pm \Delta A_1$.

II.3.3. Comparaison des politiques IMP^{TS} et IMP^{WS}

Dans cette section, nous étudions analytiquement l'efficacité d'une politique IMP^{WS} par rapport à une politique IMP^{TS} et les conditions de sa rentabilité en termes de gain du coût. Pour cela, nous allons procéder à la comparaison des coûts générés par les politiques IMP^{WS} et IMP^{TS} , et par la suite étudier les différences des coûts pour mettre en évidence les conditions de rentabilité.

Formellement, il s'agit de montrer dans quelles conditions s'établit la différence :

$$C_t^{IMP^{WS}} - C_t^{IMP^{TS}} < 0 \quad (II.32)$$

$C_t^{IMP^{WS}}$ et $C_t^{IMP^{TS}}$ sont respectivement les coûts moyens par cycle des politiques IMP^{WS} et IMP^{TS} .

Nous avons :

$$C_t^{IMP^{WS}} = \left(L_S^{IMP^{WS}} + L_P^{IMP^{WS}} + L_M^{IMP^{WS}} \right) \quad (II.33)$$

Et :

$$C_t^{IMP^{TS}} = \left(L_S^{IMP^{TS}} + L_P^{IMP^{TS}} + L_M^{IMP^{TS}} \right) \quad (II.34)$$

Tels que :

$L_S^{IMP^{WS}}$: Coût moyen du stockage par cycle de la politique IMP^{WS} .

$L_P^{IMP^{WS}}$: Coût moyen de pénurie par cycle de la politique IMP^{WS} .

$L_M^{IMP^{WS}}$: Coût moyen de maintenance par cycle de la politique IMP^{WS} .

$L_S^{IMP^{TS}}$: Coût moyen du stockage par cycle de la politique IMP^{TS} .

$L_P^{IMP^{TS}}$: Coût moyen de pénurie par cycle de la politique IMP^{TS} .

$L_M^{IMP^{TS}}$: Coût moyen de maintenance par cycle de la politique IMP^{TS} .

Ainsi, d'après la relation (II.32) nous obtenons :

$$IMP^{WS} \text{ est meilleure par rapport à } IMP^{TS} \Leftrightarrow \left(L_S^{IMP^{WS}} + L_P^{IMP^{WS}} + L_M^{IMP^{WS}} \right) - \left(L_S^{IMP^{TS}} + L_P^{IMP^{TS}} + L_M^{IMP^{TS}} \right) < 0. \quad (II.35)$$

Posons les notations suivantes :

$\Delta L_S = L_S^{WS} - L_S^{TS}$: Différence de coût du stockage par cycle entre IMP^{WS} et IMP^{TS} .

$\Delta L_P = L_P^{WS} - L_P^{TS}$: Différence de coût de pénurie par cycle entre IMP^{WS} et IMP^{TS} .

$\Delta L_M = L_M^{WS} - L_M^{TS}$: Différence de coût de maintenance par cycle entre IMP^{WS} et IMP^{TS} .

Dans ce cas, la condition (II.31) sera exprimée de la façon suivante :

$$\text{La politique } IMP^{WS} \text{ est meilleure par rapport à la politique } IMP^{TS} \Leftrightarrow (\Delta L_S + \Delta L_P + \Delta L_M) < 0. \quad (II.36)$$

La relation (II.36) est vraie sous la condition donnée par le théorème ci-dessous :

Théorème II.1

La politique IMP^{WS} est meilleure et plus rentable que la politique IMP^{TS} si et seulement si :

$$\frac{-BC_s - K}{C_p} > dA_2$$

Avec :

$$B = \begin{pmatrix} -hA_2 + A_2 dMTTR \left(-\frac{1}{2} \Phi(A_2) + \Phi(T) \right) - \frac{1}{2} d \Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ - \left(T - A_2 - \Phi(A_2) MTTR - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h + dA_2 - \frac{1}{2} dMTTR \cdot \Phi(T - A_2) \right) \end{pmatrix}$$

$$K = (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2)$$

Démonstration du théorème II.1

Dans cette section, nous allons apporter la preuve du théorème II.1

a. Différence des coûts du stockage ΔL_s

D'après la figure II.3, nous déterminons la différence de coût du stockage à partir des expressions des aires de surface du stockage de chaque politique en raisonnant par intervalle de temps.

- Intervalle 1 : $[0, h/a]$:

Pendant cette période la machine fonctionne à sa cadence maximale dans les deux politiques afin d'atteindre le niveau h du stock.

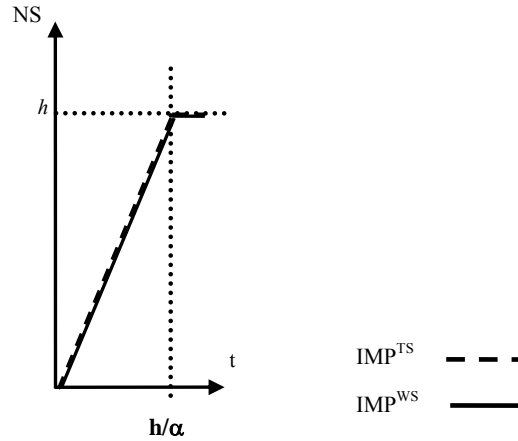


Figure II.4. Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 1.

L'expression de l'aire de surface du stockage pendant cet intervalle pour la politique IMP^{TS} est :

$$Z_I^{P1} = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{h^2}{2\alpha}$$

Concernant la politique IMP^{WS} on a :

$$Z_I^{P2} = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{h^2}{2\alpha}$$

Par conséquent, la différence de l'aire de surface du coût du stockage de l'intervalle 1 est :

$$Z_I^{P2} - Z_I^{P1} = 0$$

- Intervalle 2 : $[h/a, \tilde{A}_1]$:

Durant cette période la machine produit à la demande dans les deux politiques. Le niveau du stock peut connaître des décroissements à cause des pannes de la machine M . La figure suivante illustre l'évolution du niveau du stock pendant cette période pour les deux politiques en décomposant l'aire de surface en trois parties différentes pour des raisons de calcul.

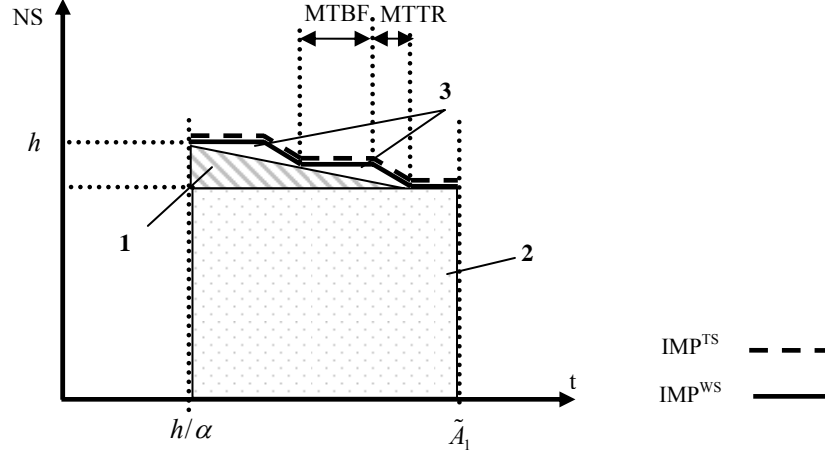


Figure II.5. Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 2.

À partir de cette figure, nous déterminons les expressions de l'aire de surface des deux politiques durant l'intervalle $[h/a, \tilde{A}_1]$.

L'expression de l'aire de surface correspondant à la politique IMP^{TS} est donnée par :

$$Z_{II}^{P1} = R_1'' + R_2'' + R_3''$$

Avec :

- $R_1'' = \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h - NS(\tilde{A}_1) \right)$
 $= \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \left(\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR \cdot d \right)$
- $R_2'' = \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) NS(\tilde{A}_1)$
 $= \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h - \left(\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR \cdot d \right) \right)$
- $R_3'' = \frac{1}{2} \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi\left(\frac{h}{\alpha}\right) \right) \left(\frac{1}{2} \left((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d \right) - \frac{1}{2} MTTR \cdot MTTR \cdot d \right)$
 $= \frac{1}{4} \Phi(\tilde{A}_1) MTBF \cdot MTTR \cdot d$

L'expression de Z_{II}^{P2} , qui représente l'aire de surface de la politique IMP^{WS} , est identique à celle de la politique IMP^{TS} .

Ainsi :

$$Z_{II}^{P2} - Z_{II}^{P1} = 0$$

- Intervalle 3 : $[\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$:

Pour la politique IMP^{WS} , cet intervalle correspond à la phase de sous-traitance, ce qui signifie une indisponibilité de la machine pour notre système.

Par contre, pour la politique IMP^{TS} , cette période représente la continuité de la période précédente, c'est-à-dire une production à la demande.

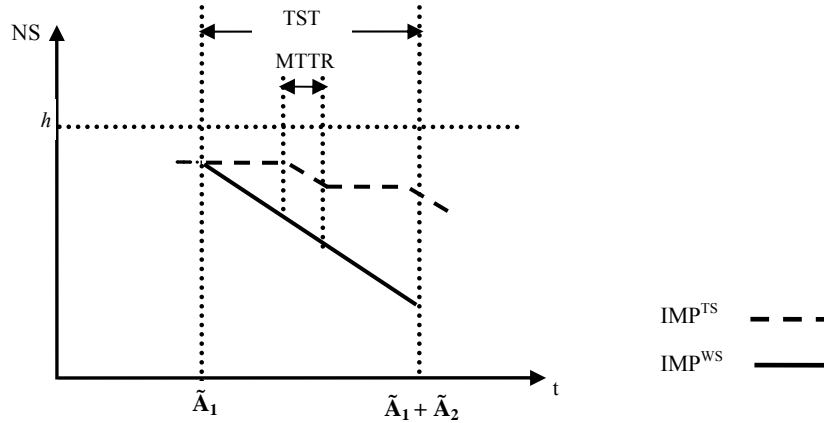


Figure II.6. Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 3.

En suivant la même logique adoptée dans le calcul de l'intervalle précédent, l'expression de l'aire de surface du stockage de la politique IMP^{TS} pendant l'intervalle $[\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$ est donnée par :

$$Z_{III}^{P1} = S_1'' + S_2'' + S_3''$$

Telles que :

- $S_1'' = \left((\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) - \tilde{A}_1 \right) (h - dMTTR\Phi(\tilde{A}_2))$
 $= (\tilde{A}_2) (h - dMTTR\Phi(A_2))$
 $= (A_2 + MTTR\Phi(A_2)) (h - dMTTR\Phi(A_2))$
- $S_2'' = \frac{1}{2} \left((\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) - A_1 \right) (dMTTR\Phi(\tilde{A}_2))$
 $= \frac{1}{2} (\tilde{A}_2) (dMTTR\Phi(A_2))$
 $= \frac{1}{2} (A_2 + MTTR\Phi(A_2)) (dMTTR\Phi(A_2))$
- $S_3'' = \Phi \left((\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1) - \tilde{A}_1 \right) \cdot \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right)$
 $= \Phi(\tilde{A}_2) \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right)$
 $= \Phi(A_2) \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right)$

Ainsi,

$$Z_{III}^{P1} = (A_2 + MTTR\Phi(A_2)) (h - dMTTR\Phi(A_2)) + \frac{1}{2} (A_2 + MTTR\Phi(A_2)) (dMTTR\Phi(A_2))$$

$$+ \Phi(A_2) \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right)$$

D'autre part, l'expression de l'aire de surface du stockage de la politique IMP^{WS} est :

$$Z_{III}^{P2} = h(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - \frac{1}{2} (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d$$

Nous factorisons les deux expressions afin de les homogénéiser. On aboutit à :

$$\begin{aligned} Z_{III}^{P2} &= h(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d \\ &= h(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - \frac{1}{2}dA_2^2 - d\Phi(A_2)A_2MTTR - \frac{1}{2}d(\Phi(A_2)MTTR)^2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} Z_{III}^{P1} &= (A_2 + MTTR\Phi(A_2))(h - dMTTR\Phi(A_2)) + \frac{1}{2}(A_2 + MTTR\Phi(A_2))(dMTTR\Phi(A_2)) \\ &\quad + \Phi(A_2)\left(\frac{1}{2}(MTBF + MTTR)MTTR.d - \frac{1}{2}MTTR^2.d\right) \\ &= h(A_2 + MTTR\Phi(A_2)) - dA_2MTTR\Phi(A_2) - d(MTTR\Phi(A_2))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}A_2dMTTR\Phi(A_2) + \frac{1}{2}d(MTTR\Phi(A_2))^2 + \frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR \\ &= h(A_2 + MTTR\Phi(A_2)) - \frac{1}{2}dA_2MTTR\Phi(A_2) - \frac{1}{2}d(MTTR\Phi(A_2))^2 + \frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Z_{III}^{P2} - Z_{III}^{P1} &= -\frac{1}{2}dA_2^2 - A_2dMTTR\Phi(A_2) + \frac{1}{2}dA_2MTTR\Phi(A_2) - \frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR \\ &= -\frac{1}{2}dA_2^2 - \frac{1}{2}A_2dMTTR\Phi(A_2) - \frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR \end{aligned}$$

La différence entre les aires de surfaces des politiques IMP^{WS} et IMP^{TS} pendant l'intervalle $[\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$ est :

$$Z_{III}^{P2} - Z_{III}^{P1} = -\frac{1}{2}dA_2^2 - \frac{1}{2}A_2dMTTR\Phi(A_2) - \frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR < 0$$

Nous remarquons que $Z_{III}^{P2} - Z_{III}^{P1} < 0$ car tous les termes qui le composent sont négatifs :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}dA_2^2 &< 0 \quad \text{car : } d < 0, A_2 < 0 \\ -\frac{1}{2}A_2dMTTR\Phi(A_2) &< 0 \quad \text{car : } A_2 > 0, d > 0, MTTR > 0, \Phi(A_2) > 0 \\ -\frac{1}{2}d\Phi(A_2)MTBF.MTTR &< 0 \quad \text{car : } d > 0, \Phi(A_2) > 0, MTBF > 0, MTTR > 0 \end{aligned}$$

- Intervalle 4 : $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, T]$:

Après la phase de sous-traitance, la machine bascule dans un mode de production à la demande pour les deux politiques. Notons que concernant la politique IMP^{TS} , cet intervalle est une continuité des deux périodes précédentes.

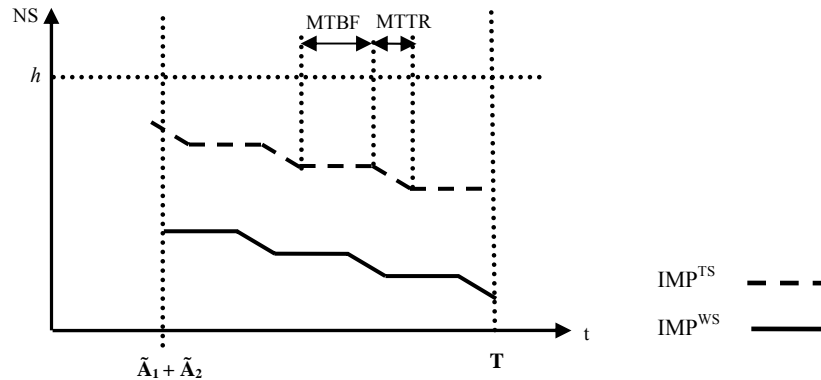


Figure II.7. Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 4.

L'expression de l'aire de surface du stockage de la politique IMP^{TS} est :

$$Z_{IV}^{P1} = S_1^{III} + S_2^{III} + S_3^{III}$$

Avec :

- $S_1^{III} = (T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \left(h - dMTTR\Phi(\tilde{A}_1) - dMTTR\Phi(\tilde{A}_2) - dMTTR\Phi(T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \right)$
 $= (T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \left((h - dMTTR\Phi(A_2 + \tilde{A}_1)) - dMTTR\Phi(T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \right)$
 $= (T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \left((h - dMTTR\Phi(A_2 + \tilde{A}_1)) - dMTTR\Phi(T - \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) \right)$
 $= (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) \left(h - dMTTR\Phi(A_2 + \tilde{A}_1) - dMTTR\Phi(T - A_2 - \tilde{A}_1) \right)$
 $= (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) (h - dMTTR\Phi(T))$
- $S_2^{III} = \frac{1}{2} (T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \left((h - dMTTR\Phi(A_2 + \tilde{A}_1)) - dMTTR\Phi(T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \right)$
 $= \frac{1}{2} (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) \left((h - dMTTR\Phi(A_2 + \tilde{A}_1)) - dMTTR\Phi(T - A_2 - \tilde{A}_1) \right)$
 $= \frac{1}{2} (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) (h - dMTTR\Phi(T))$
- $S_3^{III} = \Phi(T - (\tilde{A}_2 + \tilde{A}_1)) \cdot \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right)$
 $= \frac{1}{2} \Phi(T - A_2 - \tilde{A}_1) MTBF \cdot MTTR \cdot d$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_{IV}^{P2} &= (h - d(A_2 + \Phi(T)MTTR)) \left(T - (\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right) + \frac{1}{2} \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) \cdot MTBF \cdot MTTR \cdot d \\ &+ \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) \left(dMTTR\Phi(T) - dMTTR\Phi(\tilde{A}_1) - dMTTR\Phi(A_2) \right) \\ &= (T - A_2 - \Phi(A_2)MTTR - \tilde{A}_1) (h - dA_2 - d\Phi(T)MTTR) \\ &+ \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) dMTTR\Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) \cdot MTBF \cdot MTTR \cdot d \\ &- \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) dMTTR \cdot (\Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) \\ &= (T - A_2 - \Phi(A_2)MTTR - \tilde{A}_1) (h - d\Phi(T)MTTR) - (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) (dA_2) \\ &+ \frac{1}{2} (T - A_2 - \Phi(A_2)MTTR - \tilde{A}_1) dMTTR\Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) \cdot MTBF \cdot MTTR \cdot d \\ &- \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) dMTTR \cdot (\Phi(A_2)) \end{aligned}$$

D'un autre côté, l'expression de l'aire de surface du stockage de la politique IMP^{WS} est :

$$Z_{IV}^{P2} = V_1^{III} + V_2^{III} + V_3^{III}$$

Avec :

- $V_1^{III} = (h - d(A_2 + \Phi(T)MTTR)) \left(T - (\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right)$
- $V_2^{III} = \frac{1}{2} (T - (\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR)) \left(dMTTR \cdot (\Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2)) \right)$

$$= \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) (dMTTR.\Phi(T) - dMTTR.\Phi(\tilde{A}_1) - dMTTR.\Phi(A_2))$$

$$\begin{aligned} \circ \quad V_3^m &= \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR.d - \frac{1}{2} MTTR^2.d \right) \\ &= \frac{1}{2} \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) . MTBF . MTTR . d \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Z_{IV}^{P1} &= (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1)(h - dMTTR\Phi(T)) + \frac{1}{2} (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1)(h - dMTTR.\Phi(T)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Phi(T - A_2 - \tilde{A}_1) MTBF . MTTR . d \\ &= (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1)(h - dMTTR\Phi(T)) + \frac{1}{2} (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) h \\ &\quad - \frac{1}{2} (T - A_2 - MTTR\Phi(A_2) - \tilde{A}_1) dMTTR.\Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(T - \tilde{A}_1 - A_2) MTBF . MTTR . d \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} Z_{IV}^{P2} - Z_{IV}^{P1} &= -(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(dA_2) + (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)dMTTR.\Phi(T) \\ &\quad - \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)dMTTR.(\Phi(A_2)) - \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - MTTR\Phi(A_2))h \\ &= -(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(dA_2) - \frac{1}{2} \left(\begin{aligned} &(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) \\ &(2h - dMTTR.\Phi(T) - dMTTR.\Phi(A_2)) \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

La différence entre les deux aires de surface pendant l'intervalle $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, T]$ sera :

$$Z_{IV}^{P2} - Z_{IV}^{P1} = \left(-(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(dA_2) - \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(2h - dMTTR.\Phi(T - A_2)) \right) < 0$$

Remarquons que : $Z_{IV}^{P2} - Z_{IV}^{P1} < 0$

Car : $T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR > 0$

Et :

$$\begin{aligned} h &> d(T - \tilde{A}_1) \Rightarrow h > dMTTR\Phi(T - \tilde{A}_1) \\ &\Rightarrow h > dMTTR\Phi(T) \\ &\Rightarrow h > dMTTR.\Phi(T - A_2) \\ &\Rightarrow 2h > dMTTR.\Phi(T - A_2) \\ &\Rightarrow 2h - dMTTR.\Phi(T - A_2) > 0 \end{aligned}$$

- Intervalle 5 : [T, T+Z_p] :

C'est la période de maintenance préventive pendant laquelle le niveau du stock diminue afin de satisfaire la demande. Dans les deux politiques, le niveau du stock a le même comportement, sauf pour le niveau de stock à la date T.

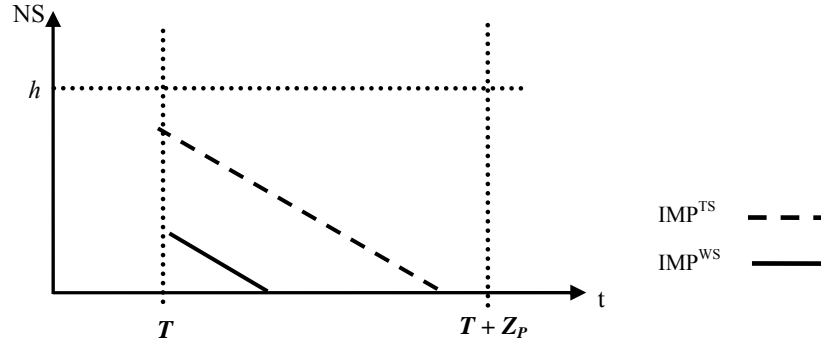


Figure II.8. Évolution du niveau du stock pendant l'intervalle 5.

L'expression de l'aire de surface de stockage de la politique IMP^{TS} est donnée par :

$$Z_V^{P1} = \frac{1}{2d} (h - dMTTR\Phi(T))^2$$

En ce qui concerne la politique IMP^{WS} , l'aire de surface du stockage pendant la période de maintenance préventive sera :

$$Z_V^{P2} = \frac{1}{2d} (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))^2$$

Alors,

$$\begin{aligned} Z_V^{P2} - Z_V^{P1} &= \frac{1}{2d} (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))^2 - \frac{1}{2d} (h - dMTTR\Phi(T))^2 \\ &= \frac{1}{2d} ((h - d\Phi(T)MTTR - dA_2)^2 - (h - dMTTR\Phi(T))^2) \\ &= \frac{1}{2d} (-2hdA_2 + 2d\Phi(T)MTTRdA_2 + dA_2^2) \end{aligned}$$

Ainsi, la différence entre les aires de surface du stockage entre les deux politiques est exprimée de cette façon :

$$Z_V^{P2} - Z_V^{P1} = -\frac{1}{2} A_2 (2h - dA_2 - 2d\Phi(T)MTTR) < 0$$

On remarque que : $Z_V^{P2} - Z_V^{P1} < 0$

Car : $h \geq dT \Rightarrow h \geq d(T - A_2) + dA_2$

$$\begin{aligned} \text{Or : } d(T - A_2) > dMTTR\Phi(T - A_2) &\Rightarrow d(T - A_2) > dMTTR\Phi(T) - dMTTR\Phi(A_2) \\ &\Rightarrow d(T - A_2) + dA_2 > dMTTR\Phi(T) - dMTTR\Phi(A_2) + dA_2 \\ &\Rightarrow h > dMTTR\Phi(T) - dMTTR\Phi(A_2) + dA_2 \\ &\Rightarrow 2h > 2dMTTR\Phi(T) - 2dMTTR\Phi(A_2) + 2dA_2 \\ &\Rightarrow 2h > 2dMTTR\Phi(T) + 2dA_2 \\ &\Rightarrow 2h > 2dMTTR\Phi(T) + dA_2 \\ &\Rightarrow 2h - 2dMTTR\Phi(T) - dA_2 > 0 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2} A_2 (2h - dA_2 - 2d\Phi(T)MTTR) < 0 \end{aligned}$$

À ce stade on peut écrire la différence du coût du stockage ΔL_s de façon suivante :

$$\Delta L_s = \left(\frac{C_s}{T + Z_p} \right) ((Z_I^{P2} - Z_I^{P1}) + (Z_{II}^{P2} - Z_{II}^{P1}) + (Z_{III}^{P2} - Z_{III}^{P1}) + (Z_{IV}^{P2} - Z_{IV}^{P1}) + (Z_V^{P2} - Z_V^{P1}))$$

Ou encore,

$$\Delta L_S = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{2} dA_2^2 - \frac{1}{2} A_2 dMTTR \Phi(A_2) - \frac{1}{2} d\Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ -\frac{1}{2} A_2 (2h - dA_2 - 2d\Phi(T)MTTR) - (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(dA_2) \\ -\frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(2h - dMTTR.\Phi(T - A_2)) \end{array} \right)$$

Enfin, l'expression de la différence du coût du stockage entre les politiques IMP^{TS} et IMP^{WS} est :

$$\Delta L_S = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\begin{array}{l} -hA_2 + A_2 dMTTR \left(-\frac{1}{2} \Phi(A_2) + \Phi(T) \right) - \frac{1}{2} d\Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ - \left(T - A_2 - \Phi(A_2)MTTR - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h + dA_2 - \frac{1}{2} dMTTR.\Phi(T - A_2) \right) \end{array} \right)$$

2. Différence des coûts de pénurie ΔL_p

Il y a une situation de pénurie si le niveau du stock à la date T ne couvre pas la totalité de la demande pendant la période de maintenance préventive.

Dans ce cas, le coût de pénurie de la politique IMP^{TS} est donné par l'expression suivante :

$$L_p^{IMP^{TS}} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR)$$

Concernant la politique IMP^{WS} , le coût de pénurie a l'expression suivante :

$$L_p^{IMP^{WS}} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2)))$$

De ce fait, la différence du coût de pénurie entre la politique IMP^{WS} et la IMP^{TS} est :

$$\begin{aligned} \Delta L_p &= L_p^{IMP^{WS}} - L_p^{IMP^{TS}} \\ &= \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) dA_2 > 0 \quad (\text{Car : } d > 0, A_2 > 0, C_p > 0 \text{ et } (T + Z_p) > 0). \end{aligned}$$

Remarque II.1

Nous remarquons que l'insertion d'une TST dans un cycle fait augmenter le coût de pénurie, en même temps elle provoque une diminution du coût du stockage et cela à cause des demandes satisfaites pendant la période de la sous-traitance.

3. Différence des coûts de maintenance ΔL_M

En se basant sur les stratégies de maintenance des politiques IMP^{TS} et IMP^{WS} nous remarquons que la seule différence se situe au niveau des actions de maintenance corrective pendant l'intervalle $[\tilde{A}_1 \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$ pour la politique IMP^{WS} . On rappelle que les coûts d'une action de maintenance corrective pendant la sous-traitance coûte $\tilde{M}_C > M_C$.

Le coût moyen de maintenance de la politique IMP^{TS} s'écrit de la façon suivante :

$$L_M^{IMP^{TS}} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_p + M_C.\Phi(T))$$

Tandis que celui de politique IMP^{WS} est de la forme :

$$L_M^{IMP^{WS}} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_p + M_c \cdot \Phi(T - A_2) + \tilde{M}_c \cdot \Phi(A_2))$$

Ainsi, la différence du coût de maintenance entre les politiques IMP^{WS} et IMP^{TS} a l'expression suivante :

$$\Delta L_M = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) > 0$$

Notons que $\Delta L_M > 0$ car $\tilde{M}_c > M_c$, $\Phi(A_2) > 0$ et $(T + Z_p) > 0$

4. Différence du coût total moyen par cycle

À partir de la relation (II.36) nous avons :

$$\left(\frac{1}{T + Z_p} \right) C_s \left[\begin{array}{l} -hA_2 + A_2 dMTTR \left(-\frac{1}{2} \Phi(A_2) + \Phi(T) \right) - \frac{1}{2} d\Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ - \left(T - A_2 - \Phi(A_2) MTTR - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h + dA_2 - \frac{1}{2} dMTTR \cdot \Phi(T - A_2) \right) \\ + C_p (dA_2) + (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) \end{array} \right] < 0$$

$$\Rightarrow C_s > \frac{-C_p (dA_2) - (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2)}{\left[\begin{array}{l} -hA_2 + A_2 dMTTR \left(-\frac{1}{2} \Phi(A_2) + \Phi(T) \right) - \frac{1}{2} d\Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ - \left(T - A_2 - \Phi(A_2) MTTR - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h + dA_2 - \frac{1}{2} dMTTR \cdot \Phi(T - A_2) \right) \end{array} \right]} \quad (II.37)$$

On Pose :

$$B = \left[\begin{array}{l} -hA_2 + A_2 dMTTR \left(-\frac{1}{2} \Phi(A_2) + \Phi(T) \right) - \frac{1}{2} d\Phi(A_2) MTBF.MTTR \\ - \left(T - A_2 - \Phi(A_2) MTTR - \frac{h}{\alpha} \right) \left(h + dA_2 - \frac{1}{2} dMTTR \cdot \Phi(T - A_2) \right) \end{array} \right]$$

Selon la démonstration précédente, la quantité $B < 0$.

La condition (II.33) devient :

$$C_s > \frac{-C_p (dA_2) - (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2)}{B} \quad B < 0$$

Alors :

$$\begin{aligned} C_s B &< -C_p (dA_2) - (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) \\ \Leftrightarrow C_s B + (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) &< -C_p (dA_2) \\ \Leftrightarrow \frac{C_s B + (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2)}{C_p} &< -(dA_2) \\ \Leftrightarrow \frac{-C_s B - (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2)}{C_p} &> dA_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -B\left(\frac{C_S}{C_P}\right) - \Phi(A_2)\left(\frac{(\tilde{M}_C - M_C)}{C_P}\right) > dA_2 \quad (\text{II.38})$$

Et on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{-BC_S - K}{C_P} > dA_2 \quad \text{Avec : } K = (\tilde{M}_C - M_C)\Phi(A_2)$$

Fin de la démonstration du théorème II.1.

II.4. Étude de la rentabilité d'une politique IMP : Cas de deux machines avec prise en compte de la sous-traitance

Afin de montrer les avantages du couplage de la gestion de la maintenance et de la gestion de la production, nous procédons dans cette partie à la comparaison des deux politiques SMP et IMP basées sur les mêmes politiques de commande, d'affectation à la sous-traitance et de maintenance mais qui optimisent les coûts de maintenance et la commande séparément quand il s'agit de SMP, contrairement à IMP, qui optimise simultanément tous les coûts [Dahane, 2006]. Avant de détailler ces deux politiques, nous exposons tout d'abord le système considéré, qui peut être schématisé par la figure II.9 ci-dessous :

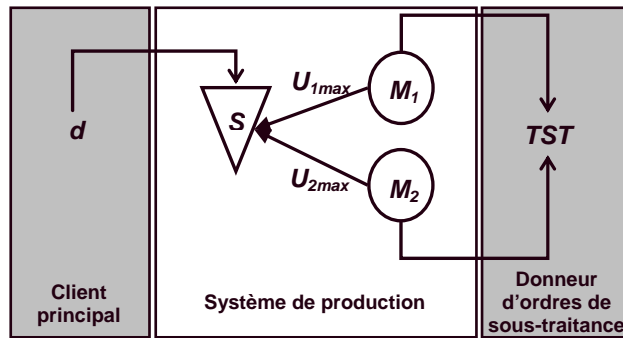


Figure II.9. Couplage de la maintenance et la production : composants du système

Nous distinguons à travers la figure ci-dessus – et comme nous l'avons mentionné précédemment – le système composé de deux machines M_1 et M_2 fonctionnant pour satisfaire une demande d via un stock S .

Par ailleurs, la figure II.9 met le point aussi sur le positionnement de notre système. Nous remarquons que le système de production de cette partie de notre étude constitue une partie de deux relations différentes : un fournisseur d'un client principal caractérisé par la demande constante d , avec, en parallèle, un système prestataire de sous-traitance au service d'un donneur d'ordre de sous-traitance dans le cadre d'une relation donneur d'ordre – sous-traitant, sous forme de tâches de sous-traitance.

Rappelons que pour notre système de production, la relation fournisseur – client avec le client principal est plus importante par rapport à la relation donneur d'ordres – sous-traitant car elle est plus rentable et plus durable.

II.4.1. Politique de commande

La production simultanée des deux machines est destinée pour garantir la satisfaction de la totalité de la demande constante d qui puise dans le stock S . Mais chaque production de la machine M_2 génère un surcoût $\Delta C = C^{M_2} - C^{M_1} > 0$. (Tels que C^{M_i} est le coût de production de la machine $i = 1,2$)

Ce surcoût de la sollicitation de la machine M_2 oblige le système à minimiser la production de cette machine en régulant sa cadence en fonction de celle de la machine M_1 . Cela revient à définir un coefficient α dit « coefficient de cadence » de la machine M_2 . On pose alors :

$$U_2(t) = \alpha U_1(t) \quad (\text{II.39})$$

Tel que : $0 < \alpha \leq 1$ Avec : $\alpha_{\max} = \frac{U_{2\max}}{U_{1\max}}$

Concrètement, la machine M_1 a une cadence maximale $U_{1\max}$. La machine M_2 fonctionne quant à elle avec à une cadence $\alpha U_{1\max}$. Si l'une des deux machines rentre dans une période de maintenance où elle est allouée à la sous-traitance, alors l'autre machine fonctionnera à sa cadence maximale. Formellement, cela peut être exprimé de la façon suivante :

$$U(t) = (U_1(t), U_2(t)) = \begin{cases} (U_{1\max}, \alpha U_{1\max}) & \text{Si } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont en fonctionnant.} \\ (U_{1\max}, 0) & \text{Si } M_1 \text{ fonctionne, mais } M_2 \text{ est en panne ou allouée à la sous-traitance.} \\ (0, U_{2\max}) & \text{Si } M_2 \text{ fonctionne, mais } M_1 \text{ est en panne ou allouée à la sous-traitance.} \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

sous la contrainte qu'une seule machine ne peut pas satisfaire seule la totalité de la demande. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} U_{i\max} < d & \forall i = \overline{1,2} \\ \sum_{j=1}^2 U_{j\max} < d \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

L'intégration du stock S de capacité finie h entraîne la modification de la politique de commande qui conduit à prendre en considération le niveau du stock pour fixer les cadences de production des machines. Ainsi, si les deux machines sont disponibles et le niveau du stock est inférieur à sa capacité maximale h , alors la machine M_1 produira à sa cadence maximale et la machine M_2 à une cadence régulée $\alpha U_{1\max}$, puis, dès que la capacité du stock est atteinte, elles basculeront dans un mode de production à la demande de façon que M_1 produit toujours avec la cadence maximale $U_{1\max}$, alors M_2 la complémente avec une cadence $d - U_{1\max}$.

En outre, si l'une des machines n'est pas disponible, alors la deuxième fonctionnera à sa cadence maximale. La mise en place du stock S entraîne la politique de commande suivante :

$$U(t) = (U_1(t), U_2(t)) = \begin{cases} (U_{1\max}, \alpha U_{1\max}) & \text{Si } M_1 \text{ et } M_2 \text{ fonctionnent et } NS(t) < h. \\ (U_{1\max}, d - U_{1\max}) & \text{Si } M_1 \text{ et } M_2 \text{ fonctionnent et } NS(t) = h. \\ (U_{1\max}, 0) & \text{Si } M_1 \text{ fonctionne, mais } M_2 \text{ est en panne} \\ & \text{ou allouée à la sous-traitance.} \\ (0, U_{2\max}) & \text{Si } M_2 \text{ fonctionne, mais } M_1 \text{ est en panne} \\ & \text{ou allouée à la sous-traitance.} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

L'impact de cette politique sur l'évolution du niveau du stock est illustré par la figure suivante :

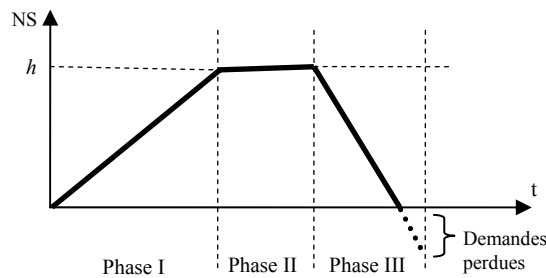


Figure II.10. Évolution du niveau du stock.

Nous apercevons sur la figure II.10 que le niveau du stock passe les phases possibles :

- **Phase I** : production avec la cadence maximale $U_{1\max} + \alpha U_{2\max} = U_{1\max} (1 + \alpha)$. Le niveau croît avec le ratio $U_{1\max} (1 + \alpha) - d$.
- **Phase II** : la capacité du stock est atteinte, ainsi le niveau du stock est constant à h suite à une production à la demande des deux machines, c'est-à-dire $U_{1\max} + (d - U_{1\max}) = d$.
- **Phase III** : Dès l'arrêt d'une des deux machines, ou son allocation pour effectuer une TST le niveau du stock décroît avec le ratio $d - U_{i\max}$, $i=1,2$, telle que $U_{i\max}$ est la cadence maximale de la machine disponible, qui ne peut pas assurer seule la totalité de la demande.

II.4.2. Politique de maintenance

La machine M_1 a un taux de pannes croissant, pour cela elle fait l'objet de maintenance préventive de type âge, c'est-à-dire à chaque T unités d'usage. En revanche, la machine M_2 a un taux de pannes constant.

Notons que la maintenance préventive est interdite pendant la période de sous-traitance quand il s'agit de la machine M_1 . Ainsi, à chaque fois qu'une action de maintenance préventive de la machine M_1 coïncide avec une période pendant laquelle la machine M_1 est allouée pour effectuer une TST, le système procède à un report de cette action de maintenance suivant une logique précise.

Dans ce cas, l'action de maintenance préventive coïncidant avec une période de sous-traitance de la machine M_1 est reportée à la fin de la TST concernée. Nous distinguons deux cas possibles :

- **Cas 1** : Si la machine M_1 ne tombe pas en panne jusqu'à la fin de la sous-traitance, alors l'action de la maintenance préventive est effectuée à la fin de la TST concernée (Figure II.11).

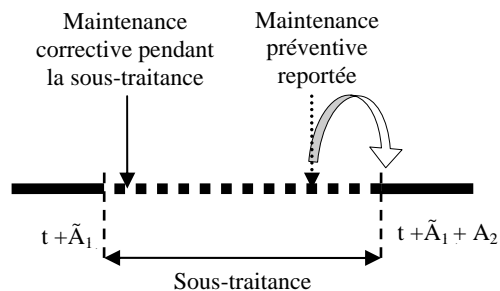


Figure II.11. Maintenance préventive pendant la sous-traitance (cas 1)

- **Cas 2** : Si la machine M_1 tombe en panne avant d'atteindre la fin de période de sous-traitance, la maintenance préventive sera effectuée à son âge programmé, c'est-à-dire après T unités d'usage, et non directement après la fin de la TST concernée (Figure II.12). En d'autres termes, le report est annulé.

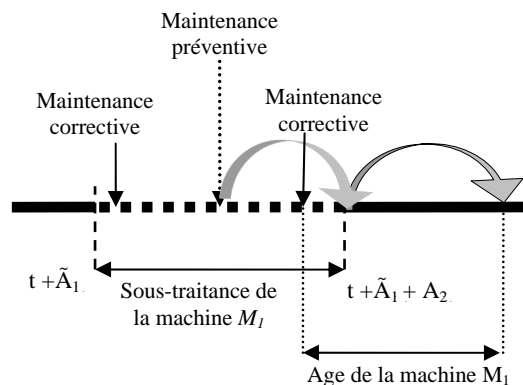


Figure II.12. Maintenance préventive pendant la sous-traitance (cas 2)

Remarque II.2

Le problème de la simultanéité de la maintenance préventive avec la sous-traitance ne concerne que la machine M_1 , parce qu'elle est la seule à être l'objet d'actions de maintenance préventive.

D'autre part, chaque action de maintenance corrective sur M_1 ou M_2 génère un coût unitaire M_C . Mais dans le cas d'une action de maintenance corrective sur machine allouée à la sous-traitance le coût généré sera \tilde{M}_C , tel que $\tilde{M}_C > M_C$. Tandis qu'une action de maintenance préventive sur la machine M_1 coûtera M_P . Avec : $\tilde{M}_C > M_C \gg M_P$

Nous définissons la fonction d'état $\eta_i(t)$ désignant l'état de la machine M_i à l'instant t de la façon suivante :

$$\eta_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{Machine } M_i \text{ en maintenance.} \\ 1 & \text{Machine } M_i \text{ en fonctionnement.} \\ 2 & \text{Machine } M_i \text{ bloquée.} \end{cases} \quad \forall i = \overline{1,2} \quad (\text{II.43})$$

II.4.3. Politique d'affectation à la sous-traitance

La politique d'affectation à la sous-traitance consiste à allouer une des machines pour effectuer une tâche de sous-traitance à partir d'une date connue et pendant une durée fixée.

Dans cette partie de l'étude, la politique d'affectation à sous-traitance des machines repose sur la logique de la machine la moins âgée. Cette politique est justifiée par l'existence de coûts élevés des réparations pendant les périodes de sous-traitance

Pour mettre en place cette politique, on définit la fonction $\Delta(t)$ indiquant à un instant t la machine qui sera allouée pour effectuer la tâche de sous-traitance pour la prochaine période. La fonction $K(t)$ désigne la machine qui est sous-traitée à l'instant t .

Telle que :

$$\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si les deux machines sont en maintenance.} \\ 1 & \text{Si la machine } M_1 \text{ est la moins âgée.} \\ 2 & \text{Si la machine } M_2 \text{ est la moins âgée.} \end{cases} \quad (\text{II.44})$$

Et :

$$K(t) = \begin{cases} 0 & \text{Si aucune machine n'est en sous-traitance.} \\ 1 & \text{Si la machine } M_1 \text{ est sous-traitante.} \\ 2 & \text{Si la machine } M_2 \text{ est sous-traitante.} \end{cases} \quad (\text{II.45})$$

Chaque période A_1 une TST arrive pour qu'elle soit réalisée par le système en allouant la machine désignée par la fonction $\Delta(t)$ pour effectuer une TST d'une durée utile A_2 , à la date \tilde{A}_1 qui représente la date d'exécution effective de la TST. Rappelons que la durée utile de réalisation de la TST n'inclut pas la période pendant laquelle la machine peut tomber en panne. Notons \tilde{A}_2 la durée globale constituée de la période effective de la sous-traitance, appelée durée utile, et la totalité des périodes des éventuelles réparations pendant la sous-traitance.

Cependant, si une TST arrive au moment où les deux machines sont en maintenance (c'est-à-dire $\Delta(t) = 0$), alors cette TST est définitivement perdue, générant un coût C_{lst} . (figure II.13)

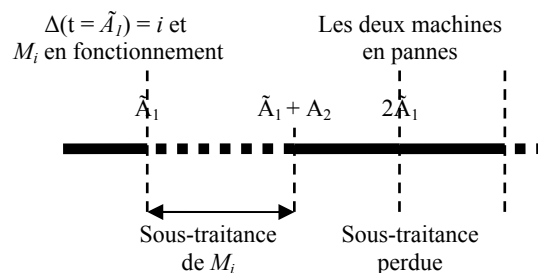


Figure II.13. Politique d'affectation à la sous-traitance

II.4.4. Problématique à résoudre

Dans la suite de ce chapitre, on cherche à comparer deux politiques de la gestion de la maintenance et la gestion de la production, l'une dissociant la maintenance et la commande, notée politique de maintenance simple (Simple Maintenance Policy) et l'autre intégrant la maintenance et la commande notée politique de maintenance intégrée (Integrated Maintenance policy).

La politique SMP consiste à déterminer l'âge optimal de la maintenance préventive T^* de la machine M_1 ainsi que le coefficient de cadence optimal α^* . Dans un deuxième temps, la politique SMP consiste à déterminer le niveau du stock optimal h^* sans tenir en compte des valeurs de T^* et α^* .

La politique IMP consiste à déterminer simultanément les valeurs de T^* , h^* et α^* .

L'étude menée dans le reste de ce chapitre est basée sur une approche hybride combinant les modèles analytiques de la maintenance et de la production avec une utilisation de la méthode du design expérimental.

Les caractéristiques des deux machines M_1 et M_2 sont résumées dans le tableau ci-dessous :

Machines	$f(t)$	$U_i \max$	$gc(t)$	$gp(t)$
M_1	Weibull (2,100)	20 pièces /ut	Normal (15,2)	Normal (4,0.5)
M_2	Exponentielle (80)	20 pièces /ut	Normal (9,2)	Normal (3,0.5)

Tableau II.6. Caractéristiques des machines.

Pour illustrer les résultats de notre étude, nous nous sommes basés sur la structure de coûts détaillée dans le tableau suivant :

M_C	\tilde{M}_C	M_P	C_P	C_S
3500	5000	350	4	2.66

Tableau II.7. Structure des coûts (um : unités monétaires).

D'autre part, la demande $d = 30$ pièces/u.t. Concernant la sous-traitance, sa fréquence est $A_1 = 10$ u.t pour une durée utile $A_2 = 5$ u.t.

II.4.5. Politique de Maintenance Simple (SMP)

II.4.5.1. Définition de la politique SMP

La politique SMP consiste à effectuer les activités de la maintenance préventive basée sur l'âge indépendamment de la gestion de la production, c'est-à-dire de la politique de commande définie précédemment (cf. II.2.1).

De ce fait, l'optimisation des variables de décision de la politique SMP, à savoir l'âge de la maintenance T , le niveau du stock h et le coefficient de cadence a , est basée sur une dissociation des coûts générés par les actions de maintenance de la machine M_1 , des coûts générés par la gestion du stock S ainsi que les coûts liés à la perte de la sous-traitance et le surcoût de production de M_2 . Soit :

$L_1(T^*_1)$ le coût moyen des actions de maintenance en fonction de l'âge T de maintenance préventive de la machine M_1 .

- $L_2(h^*_1, a^*_1)$ le coût moyen de la gestion du stock et de la sous-traitance en fonction des variables h et a .

Notons $L^{SMP}(h^*_1, a^*_1, T^*_1)$ le coût total moyen généré par l'application de la politique SMP. Avec :

$$L^{SMP}(h^*_1, a^*_1, T^*_1) = L_1(T^*_1) + L_2(h^*_1, a^*_1). \quad (\text{II.46})$$

Dans ce cas, optimiser le coût $L^{SMP}(h, a, T)$ revient à optimiser d'une manière indépendante le $L_1(T)$ et le $L_2(h, a)$

II.4.5.2. Optimisation avec la politique SMP

- Recherche du $L_1(T^*)$

Pour déterminer l'âge optimal de la maintenance préventive T^* , nous utilisons le résultat connu de la stratégie de maintenance de type âge [Barlow, 1965] à savoir :

$$\frac{T^*}{\frac{\partial L_1(T)}{\partial T}} = 0 \tag{II.47}$$

Avec

$$L_1(T) = \frac{R(T)M_p + F(T)M_c}{\int_0^T R(t)dt + F(T)MTTR + R(T)Z_p} \tag{II.48}$$

Où $R(T)$ représente la fonction de fiabilité du système, $F(T)$ la fonction de défaillance, Z_p et $MTTR$ les temps moyens de maintenance préventive et corrective. L'optimisation de $L_1(T)$ donne un $T_0^* = 27$.

- Recherche du $L_2(\alpha, h^*)$

Le coût $L_2(\alpha, h^*)$ constitue le coût total moyen par unité de temps caractérisant les coûts de pénurie de la demande, les coûts du stockage et les coûts des pertes de la sous-traitance. On cherche à déterminer α et h^* pour lesquels $L_2(\alpha, h^*)$ est optimal en se basant sur la simulation et l'analyse de variance. Le tableau II.8 présente la correspondance entre les valeurs réelles de α et h et leurs niveaux du plan d'expériences.

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
α	0.4	0.7	1
h	20	30	40

Tableau II.8. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences

À partir de ce tableau, on définit les relations de correspondance, soit :

$$X_\alpha = \frac{10}{3}\alpha - \frac{7}{3} \tag{II.49}$$

$$X_h = \frac{1}{10}h - 3$$

Suite aux différents essais de simulation avec différentes valeurs de α et h , pour un $T^* = 27$ issu de $L_1(T)$, la tendance de représentation du L_2 peut être décrite par un modèle quadratique. Soit :

$$L_2 = a_0 + a_1X_\alpha + a_2X_h + a_3X_\alpha^2 + a_4X_h^2 + a_5X_\alpha X_h \tag{II.50}$$

Le tableau II.9 présente une analyse de variance pour déterminer les coefficients influents sur L_2 .

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
a	20.981	1	20.981	19.6	10.1	S
h	13.68	1	13.68	12.8	10.1	S
a^2	2.01	1	2.01	1.9	10.1	N
h^2	58.89	1	58.89	55	10.1	S
ah	15.32	1	15.32	14.3	10.1	S
Régression	46712.19	6	7785.36	7344.67	8.44	GS
Résidu	3.20	3	1.06			
Total	46715.40	9				

Tableau II.9. Analyse de variance de L_2

Après l'élimination des coefficients non significatifs et en utilisant les relations de correspondance, le modèle analytique de L_2 est le suivant :

$$L_2(\alpha, h) = 154.94 - 13.26\alpha + 0.054h^2 - 3.858h - 0.65\alpha h \quad (\text{II.51})$$

II.4.6.3. Résultats de la politique SMP

L'optimisation de L_2 conduit à :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial L_2}{\partial h} \right|_{T^*} = 0 \Rightarrow 0.108h - 3.858 - 0.65\alpha = 0 \\ \left. \frac{\partial L_2}{\partial \alpha} \right|_{T^*} = 0 \Rightarrow -13.26 - 0.65h = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = \frac{3.858}{0.108} + \frac{0.65}{0.108}\alpha \\ h = \frac{13.26}{-0.65} < 0 \rightarrow \text{impossible} \end{cases} \quad (\text{II.52})$$

Alors le α^* et h^* sont donnés par la relation suivante :

$$h^* = \frac{3.858}{0.108} + \frac{0.65}{0.108}\alpha \quad (\text{II.53})$$

En se basant sur cette relation, nous déterminons des valeurs théoriques de L_2

a	h^*	L_2^* théorique
0.4	38.12	71.12
0.7	39.93	59.53
1	41.74	47.59

Tableau II.10. Valeurs de α^* et h^* et leurs correspondances L_2

D'après le tableau II.10, on remarque que L_2 est optimal pour les valeurs $\alpha^* = 1$ et $h^* = 41.74$. À partir des résultats de L_1 et L_2 , on conclue que pour SMP, les valeurs optimales sont :

$$\begin{cases} T^* = 27 \\ \alpha^* = 1 \\ h^* = 41.74 \end{cases} \quad (\text{II.54})$$

Ainsi, en appliquant la politique SMP sur notre système, c'est-à-dire une approche dissociant la commande et la maintenance, nous obtenons comme âge optimal de la maintenance préventive sur la machine M_1 $T^* = 27$ u.t. Concernant la cadence de la machine M_2 , elle sera égale à celle de la machine M_1 car la valeur optimale du coefficient de production $\alpha^* = 1$. Enfin, la capacité optimale du stock à assurer est $h^* = 42$ pièces.

II.4.6. Politique de Maintenance Intégrée (IMP)

II.4.6.1. Définition de la politique IMP

La politique IMP consiste à effectuer les activités de maintenance préventive en interaction directe avec la gestion du stock. De ce fait, l'optimisation des variables de décision de la politique IMP à savoir l'âge de la maintenance T , le niveau du stock h et le coefficient de cadence α est basée sur une optimisation globale de la fonction coût intégrant les surcoût de production de M_2 , les coûts de la maintenance de M_1 ainsi que les coûts de la gestion du stock S et les coûts de la perte de la sous-traitance.

Soit $L^{IMP}(h^*_2, \alpha^*_2, T^*_2)$ le coût total moyen généré par le système régis par la politique IMP.

II.4.6.2. Optimisation avec la politique IMP

La méthode d'optimisation de la politique IMP est basée sur une recherche globale du triplet (h^*, a^*, T^*) en déterminant le coût total moyen optimal par unité de temps L^{IMP^*} en utilisant la simulation et les plans d'expérience. Le Tableau II.11 traduit les correspondances entre les niveaux réels des variables de décision T , a et h adoptées pour la simulation et les valeurs du plan d'expérience. Il s'agit d'un plan d'expérience de 3^3 essais.

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
T	5	20	35
a	0.5	0.75	1
h	20	30	40

Tableau II.11. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expérience

Les correspondances entre les variables réelles α , h et T et les variables du plan d'expérience sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_T &= \frac{1}{15}T - \frac{4}{3} \\ X_\alpha &= 4\alpha - 3 \\ X_h &= \frac{1}{10}h - 3 \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Suite aux différents essais de simulation avec différentes valeurs de α , h et T , la tendance de représentation du L^{IMP} peut être décrite par un modèle quadratique.

Soit :

$$L^{IMP}(X_T, X_\alpha, X_h) = a_0 + a_1X_T + a_2X_\alpha + a_3X_h + a_4X_T^2 + a_5X_\alpha^2 + a_6X_h^2 + a_7X_TX_\alpha + a_8X_TX_h + a_9X_hX_\alpha \quad (\text{I.56})$$

Le modèle quadratique représente les coûts du stockage, de maintenance, de pertes de la demande et de la sous-traitance ainsi que les surcoûts de production liés à M_2

Afin de déterminer le degré d'influence de chaque paramètre, le tableau II.12 traduit une analyse de variance :

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
T	22.71	1	22.71	3.41	4.45	N
a	27.67	1	27.67	4.16	4.45	N
h	32.56	1	32.56	4.90	4.45	S
T^2	384.85	1	384.85	57.93	4.45	S
a^2	0.0007	1	0.0007	0.0001	4.45	N
h^2	55.95	1	55.95	8.42	4.45	S
Ta	8.00	1	8.00	1.2	4.45	N
Th	14.87	1	14.87	2.23	4.45	N
ha	99.70	1	99.70	15	4.45	S
Régression	261068.82	10	26106.882	3931.75	2.49	GS
Résidu	112.93	17	6.64			
Total	261181.75	27				

Tableau II.12. Analyse de variance de L^{IMP}

Après l'élimination des coefficients non significatifs on obtient :

$$L^{IMP}(X_T, X_\alpha, X_h) = a_0 + a_3X_h + a_4X_T^2 + a_6X_h^2 + a_9X_hX_\alpha \quad (\text{II.57})$$

Sachant que $a_0 = 90.84$, $a_3 = -1.34$, $a_4 = 8$, $a_6 = 3.05$ et $a_9 = 2.88$, on remplace chaque terme par sa valeur. On aura :

$$L^{IMP}(T, \alpha, h) = 159.72 + \frac{8}{225}T^2 - \frac{64}{45}T + 0.0305h^2 - 2.828h - 34.56\alpha + 1.152h\alpha \quad (II.58)$$

II.4.6.3. Résultats de la politique IMP

L'objectif est d'optimiser le coût $L^{IMP}(T, a, h)$, alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial L^{IMP}}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{16}{225}T - \frac{64}{45} = 0 \\ \frac{\partial L^{IMP}}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow -34.56 - 1.152h = 0 \\ \frac{\partial L^{IMP}}{\partial h} = 0 \Rightarrow 0.061h - 2.828 + 1.152\alpha = 0 \end{cases} \quad (II.59)$$

Ainsi L^{IMP} est optimal pour les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} T^* = 20 \\ \alpha^* = 0.86 \\ h^* = 30 \end{cases} \quad (II.60)$$

qui représentent respectivement les valeurs optimales de l'âge de maintenance préventive de la machine M_1 , le coefficient de cadence de la machine M_2 et la capacité du stock S .

II.4.7. Étude des performances de IMP par rapport à SMP

L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'efficacité de la politique IMP intégrant la gestion du stock par rapport à la politique SMP dissociant la gestion de la maintenance de la commande.

On rappelle que nous avons une contrainte de surcoût liée à la machine M_2 d'où la nécessité de minimiser sa sollicitation en pondérant sa cadence en fonction de celle de M_1 .

Le tableau II.13 présente une comparaison entre les politiques IMP et SMP en termes de performance. On remarque que IMP permet d'avoir une meilleure disponibilité pour M_1 par rapport à SMP. D'après ce tableau, il est clair que IMP sollicite moins la machine M_2 et réduit ainsi les surcoûts de production.

	T^*	α^*	h^*	Coût total moyen (C_t)	Disponibilité de M_1 (Δ_1)
IMP	20	0.86	30	90.59	0.52 %
SMP	27	1	41.74	106.79	0.39 %

Tableau II.13. Performances de PMI par rapport à SMP

La performance en termes de coût de IMP par rapport à SMP est définie sous la forme :

$$A = |L^{IMP}(h^*_2, \alpha^*_2, T^*_2) - L^{SMP}(h^*_1, \alpha^*_1, T^*_1)| = 28.89 \text{ u.m.}$$

En plus, on remarque les autres performances de la politique PMI qui sont résumées comme suit :

- Gain du coût total moyen par unité de temps :

$$G_{Ct} = \frac{C_t^{SMP} - C_t^{IMP}}{C_t^{SMP}} = 15.16\% \quad (II.61)$$

- Gain sur le coût de production lié à M_2 :

$$G_p = \alpha^*_{SMP} C^{M2} - \alpha^*_{IMP} C^{M2} = 0.14 C^{M2} \quad (II.62)$$

- Gain de disponibilité de M_1 :

$$G_{\Delta} = \frac{\Delta_1^{IMP} - \Delta_1^{SMP}}{\Delta_1^{SMP}} = 25\% \quad (\text{II.63})$$

tels que :

Δ_1^{IMP} : Disponibilité de M_1 pour notre système avec la politique IMP.

Δ_1^{SMP} : Disponibilité de M_1 pour notre système avec la politique SMP.

II.5. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons montré l'efficacité d'une politique de maintenance intégrée par rapport à une politique dissociant la gestion de maintenance et la gestion de la production dans le cadre d'une seule machine.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons déterminé analytiquement les conditions d'efficacité d'une politique de maintenance intégrée avec sous-traitance IMP^{WS} par rapport à une politique de maintenance intégrée sans sous-traitance IMP^{TS} en termes de gain de coût.

Le théorème II.1 met en évidence la condition de rentabilité de la politique IMP^{WS} en tenant en compte des coûts de maintenance, de stockage et de pénurie ainsi que la durée de la tâche de sous-traitance.

La troisième partie de ce chapitre a été consacrée à l'extension de l'approche de la maintenance intégrée dans le cadre de deux machines en parallèle sous contrainte de sous-traitance. La résolution du problème analytiquement est difficile, nous avons alors opté pour la simulation et le design expérimental. Dans ce cadre, nous avons montré l'efficacité et la rentabilité d'une politique de maintenance intégrée IMP par rapport à une politique de maintenance simple SMP dans le cas de deux machines sous contrainte de sous-traitance.

Chapitre III

Étude de l'aspect temporel de la contrainte de sous-traitance dans un contexte d'une politique de maintenance intégrée

Dans ce chapitre nous étudierons l'aspect temporel de la sous-traitance et ses éventuels impacts sur le comportement des systèmes industriels prestataires de sous-traitance, dans un contexte d'optimisation simultanée de la gestion de la production et de la maintenance.

Le système faisant l'objet de cette étude est composé d'une machine allouée périodiquement pour effectuer des TST. En parallèle, la machine est contrainte de satisfaire une demande client constante via un stock.

La machine est sujette à des pannes aléatoires avec un taux de défaillance croissant. Dans l'objectif de réduire la probabilité d'occurrence des pannes, la machine est soumise à un programme de maintenance préventive de type bloc. Les durées des actions de maintenance sont supposées aléatoires.

L'objectif de ce chapitre est de montrer analytiquement l'impact du placement d'une tâche de sous-traitance (TST) en termes de coûts engendrés. Le terme placement d'une TST représente sa position temporelle pour exécution sur la machine pendant un cycle de maintenance de période fixe. En se basant sur les résultats précédemment obtenus, on cherchera par la suite à déterminer l'instant optimal du placement d'une TST. Ensuite, on étudie l'impact d'un retard du début de réalisation de la TST, et l'impact d'une prolongation imprévue de cette TST.

III.1. Introduction

Dans un monde économique en perpétuelles mutations, l'importance de la sous-traitance exige des sous-traitants certaines conditions afin de décrocher plus de contrats de sous-traitance. Ces conditions permettent de s'adapter aux cahiers de charges des entreprises donneurs d'ordres en termes de qualité, de délais ou procédés de fabrication et dans certains cas de normes internationales.

De ce fait, nous étudierons dans ce chapitre l'aspect temporel de la sous-traitance afin de permettre à notre système de satisfaire à la fois les tâches de sous-traitance et la demande du client principal selon les exigences de chacun de ces partenaires. Par ailleurs, cette étude permettra au sous-traitant de maîtriser et donc de prévoir l'impact de tout changement des paramètres de la sous-traitance.

Le système qui fait l'objet de notre étude est composé d'une machine M . Cette machine est sollicitée pour satisfaire une demande constante d via un stock S . En plus, la machine est sollicitée pour accomplir des tâches de sous-traitance (TST) pendant lesquelles elle est allouée pour produire pour une tierce partie appelée client de sous-traitance.

Sur le plan de la maintenance, la machine peut tomber en panne d'une façon aléatoire, nécessitant des actions de maintenance corrective (M_C) de durées aléatoires. Chaque période de durée T , la machine fait l'objet d'action de maintenance préventive (M_P) d'une durée moyenne Z_p .

Du côté de la production, la machine peut produire avec une cadence maximale U_{max} pour construire un stock S ayant une capacité finie h avec un coût unitaire de stockage C_s . Au cas où la demande n'est pas satisfaite à cause d'une pénurie de stock, un coût de pénurie est engendré, noté C_p .

Dans ce contexte, la sous-traitance se présente comme une possibilité du système d'accroître ses profits en augmentant d'une façon raisonnable et étudiée l'exploitation de la machine M tout en assurant sa mission principale qui est de satisfaire la demande d .

Notre objectif est d'abord de prouver analytiquement l'importance de l'instant de début de réalisation de la sous-traitance. Pour cela nous décrivons la Politique de Maintenance Intégrée (IMP) qui consiste à allouer la machine M pour effectuer une TST par cycle à un instant bien défini du cycle. En résultat de cette première partie, nous démontrerons que le meilleur moment pour allouer la machine à la sous-traitance est exactement l'instant où la capacité du stock est assurée.

Ensuite, par souci d'augmenter la flexibilité de la prise en charge de la sous-traitance nous étudierons l'impact d'un décalage de l'instant de début de réalisation de la TST, et aussi l'impact d'une extension de la durée de la TST sur un système en fonctionnement stable.

III.2. Politique d'affectation à la TST de la politique IMP

La Politique d'affectation à la sous-traitance de la politique IMP consiste à allouer la machine pour effectuer une seule tâche de sous-traitance (TST) pendant un cycle de maintenance. La TST arrive avec une fréquence A_1 et pour une durée d'exécution utile A_2 . Cette TST sera réalisée à partir de l'instant \tilde{A}_1 représentant la date d'exécution effective de la TST, tel que $\tilde{A}_1 = A_1 \pm \Delta A_1$.

La politique d'affectation à la TST de la politique IMP se base sur les hypothèses suivantes :

1. Pendant un cycle $[0, T+Z_p]$, la machine ne peut être allouée aux tâches de sous-traitance qu'une seule fois.

Ainsi :

$$\left(\tilde{A}_1^{(k-1)} + \tilde{A}_2 \right) < \left(T^{(k-1)} + Z_p \right) \leq \tilde{A}_1^{(k)}.$$

Avec : $T^{(k-1)}$: Date de maintenance préventive du $k^{\text{ème}}$ cycle.

Z_p : Durée moyenne d'une action de maintenance préventive.

$\tilde{A}_1^{(k)}$: Date d'exécution effective de la $k^{\text{ème}}$ TST.

2. Pendant la phase de construction de stock, la probabilité d'avoir une panne est supposée négligeable :

$$\Phi\left(\frac{h}{\alpha}\right) = 0$$

Tel que : $\alpha = \frac{h}{U_{\max} - d}$.

3. La date de début de réalisation de la sous-traitance suffit pour atteindre le niveau h du stock :

$$\tilde{A}_1 \geq \frac{h}{\alpha}$$

On rappelle que : $\tilde{A}_2 = A_2 + \Phi(A_2)MTTR$

Avec $MTTR$, la durée moyenne d'une action de maintenance corrective sur la machine M et $\Phi(A_2)$ est le nombre moyen de panne pendant la période A_2 .

III.3. Politique de commande de la politique IMP

La politique de commande de la politique IMP est la suivante : d'abord, une première phase où la machine produit à sa cadence maximale U_{\max} afin d'atteindre un seuil de stock capable de satisfaire la demande durant tout le cycle. Notons que durant cette période la probabilité d'avoir une panne est supposée négligeable. Une deuxième phase où la machine bascule dans un mode de production à la demande jusqu'à l'instant \tilde{A}_1 qui signifie le début de réalisation de la TST qui durera la période A_2 . Après la sous-traitance, la machine sera à nouveau disponible pour notre système, et fonctionnera pour satisfaire la demande jusqu'à la date de maintenance préventive. Formellement, cette logique peut être exprimée de la façon suivante :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t \leq \frac{h}{\alpha} \\ d & \text{Si } \frac{h}{\alpha} < t < \tilde{A}_1 \text{ ou } \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < t < T \\ 0 & \text{Si } M \text{ est en panne ou allouée à la TST} \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

L'impact de cette politique de commande sur l'évolution du stock pendant un cycle est illustré par la figure ci-dessous :

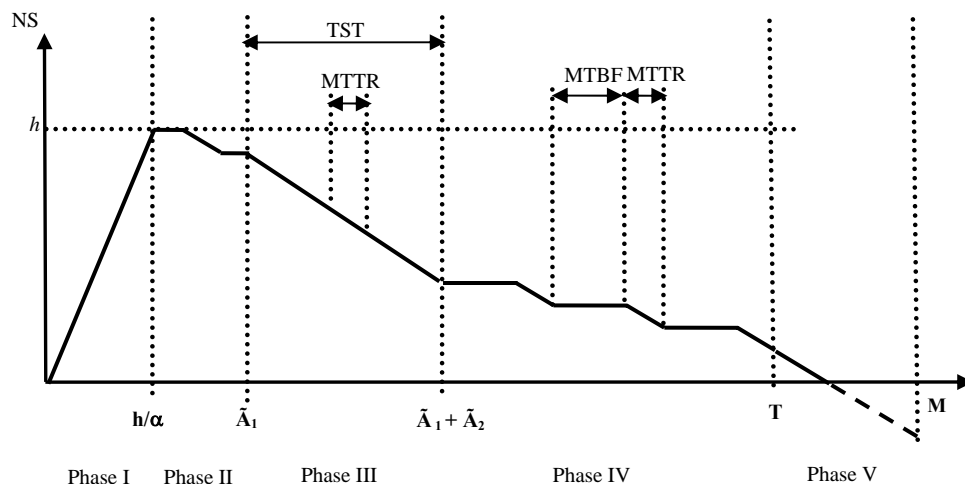


Figure III.1. Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMP

Nous remarquons que le niveau de stock passe par cinq phases différentes :

- Phase I : C'est la phase de construction du stock pendant laquelle la machine fonctionne à sa cadence maximale U_{max} de manière à assurer un niveau seuil capable de satisfaire la totalité de la demande durant le cycle. Pendant cette phase le niveau croît avec le ratio $a = U_{max} - d$.
- Phase II : Après avoir atteint le niveau seuil h , la machine commence une phase de production à la demande jusqu'à la date de début de réalisation de la sous-traitance. Pendant cette phase le niveau de stock peut connaître des diminutions de ratio d , causées par les pannes de la machine.
- Phase III : C'est la période pendant laquelle la machine est allouée à la sous-traitance pour effectuer une TST. Durant la sous-traitance la machine est considérée comme étant indisponible pour notre système. Ainsi, le niveau de stock décroît avec le ratio d .
- Phase IV : Après la sous-traitance la machine fonctionne pour satisfaire la demande jusqu'à la date T de maintenance préventive. Durant cette phase le niveau de stock peut décroître à cause des occurrences des pannes de la machine M .
- Phase V : À partir de date T , la machine fait l'objet d'une action de maintenance préventive d'une durée moyenne Z_p . Pendant cette période le niveau de stock décroît pour satisfaire la demande, ce qui peut engendrer dans certain cas des situations de pénurie.

III.4. Politique de maintenance

La machine M est soumise à un programme de maintenance préventive tous les kT unités de temps (stratégie bloc). Le taux de défaillance de la machine M est supposé croissant. La machine M est réparée immédiatement à chaque panne. Les durées des actions de maintenance sont aléatoires. Cette politique de maintenance et les différents coûts qu'elle engendre peuvent être résumés ainsi :

- Phase II : $[h/a, \tilde{A}_1]$: La machine peut tomber en panne avec une moyenne $\Phi(\tilde{A}_1 - h/\alpha) = \Phi(A_1)$. Chaque action de maintenance corrective génère un coût M_C .
- Phase III : $[\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$: La machine est allouée à la sous-traitance mais peut tomber en panne avec une moyenne $\Phi(\tilde{A}_2) = \Phi(A_2)$. Chacune des actions de maintenance corrective exécutées sur la machine durant cette période génère un coût \tilde{M}_C . Tel que $\tilde{M}_C > M_C$.
- Phase IV : $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, T]$: Après la sous-traitance la machine peut tomber en panne avec une moyenne $\Phi(T - \tilde{A}_2 - \tilde{A}_1) = \Phi(T) - \Phi(A_2) - \Phi(\tilde{A}_1)$. Chaque action de maintenance corrective pendant cette période génère un coût M_C .
- Phase V : $[T, T + Z_p]$: À partir de date T , on exécute sur la machine une action de maintenance préventive générant un coût M_p .

Nous avons : $\tilde{M}_C > M_C \gg M_p$.

III.5. Impact du placement de la TST

Une TST est caractérisée par une fréquence d'arrivée A_1 qui détermine son début d'exécution effective \tilde{A}_1 , et une durée globale \tilde{A}_2 . Nous étudierons dans cette section l'impact du placement d'une TST, afin de pouvoir répondre à la question : "Quel est le meilleur instant pour allouer la machine à la sous-traitance ?"

Pour cela, nous procédons à une comparaison entre une politique IMP allouant la machine pour effectuer la TST à la date $\bar{A}_1 = t_1$, et une politique IMP pour laquelle la machine est allouée pour effectuer la TST à la date $\bar{A}_1 = t_2$, notées IMP^{t_1} et IMP^{t_2} , générant respectivement un coût total moyen par cycle $C_i(IMP^{t_1})$ et $C_i(IMP^{t_2})$.

Nous montrerons que si $(h/\alpha) \leq t_2 < t_1$ alors la politique IMP^{t_2} est plus avantageuse que la politique IMP^{t_1} . C'est-à-dire : $C_i(IMP^{t_2}) < C_i(IMP^{t_1})$. Cela revient à établir la différence entre les deux coûts, et de montrer que $\Delta C_i < 0$, tel que : $\Delta C_i = C_i(IMP^{t_1}) - C_i(IMP^{t_2})$. Sous la condition (III.C1) :

Condition (III.C1)

Les dates t_2 et t_1 sont suffisantes pour atteindre la capacité maximale du stock (hypothèse 3), en plus $t_2 < t_1$. Ainsi :

$$\left(\frac{h}{\alpha}\right) \leq t_2 < t_1$$

Le coût total généré par une politique IMP est composé des coûts des maintenances préventive et corrective (hors et pendant la sous-traitance), ainsi que des coûts de stockage et de pénurie. Il peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C_i^{IMP} = (L_S + L_P + L_M) \tag{III.2}$$

Avec :

- L_S : coût moyen de gestion du stock par cycle,
- L_P : coût moyen de pénurie par cycle,
- L_M : coût moyen de maintenance par cycle.

De ce fait, la différence ΔC_i peut être décomposée sous forme de la somme de différences des coûts de maintenance, pénurie et de maintenance :

$$\Delta C_i = (\Delta L_S + \Delta L_P + \Delta L_M) \tag{III.3}$$

Avec :

- $\Delta L_S = (L_S^{t_2} - L_S^{t_1})$: Différence de coût moyen de stockage entre IMP^{t_2} et IMP^{t_1} .
- $\Delta L_P = (L_P^{t_2} - L_P^{t_1})$: Différence de coût moyen de pénurie entre IMP^{t_2} et IMP^{t_1}
- $\Delta L_M = (L_M^{t_2} - L_M^{t_1})$: Différence de coût moyen de maintenance entre IMP^{t_2} et IMP^{t_1}

Pour établir ces différences nous introduisons les lemmes suivants :

Lemme III.1

Sous la condition III.C1, la différence de coût de pénurie entre IMP^{t_2} et IMP^{t_1} est nulle. Formellement on a :

$$\Delta L_P = (L_P^{t_2} - L_P^{t_1}) = 0 \quad \forall t_2 \text{ avec } : \left(\frac{h}{\alpha}\right) \leq t_2 < t_1$$

Par conséquent, nous concluons que la date A_1 de début de réalisation de la TST n'influe pas sur le coût de pénurie générée.

Démonstration du Lemme III.1:

Pour la politique IMP, il y aura une situation de pénurie si le niveau de stock à la date $t = T$ n'est pas suffisant pour satisfaire la demande tout au long de la période de maintenance préventive.

Formellement on a :

$$NS(T) < dZ_p \Rightarrow \text{Pénurie.}$$

Ainsi, le coût moyen de pénurie par cycle s'écrit de la forme :

$$L_p = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - NS(T))$$

Nous introduisons les notations suivantes :

$NS^h(t)$: Niveau de stock à l'instant t en appliquant la politique IMP^h .

$NS^{t_2}(t)$: Niveau de stock à l'instant t en appliquant la politique IMP^{t_2} .

Déterminons $NS^h(T)$ et $NS^{t_2}(T)$, les niveaux du stock à la date $t = T$ de IMP^h et IMP^{t_2} .

$$\begin{aligned} NS^h(T) &= h - \Phi(t_1)MTTRd - \tilde{A}_2d - \Phi(T - A_2 - t_1)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_1)MTTRd - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d - \Phi(T - A_2 - t_1)MTTRd \\ &= h - A_2d - \Phi(T)MTTRd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} NS^{t_2}(T) &= h - \Phi(t_2)MTTRd - \tilde{A}_2d - \Phi(T - A_2 - t_2)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_2)MTTRd - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d - \Phi(T - A_2 - t_2)MTTRd \\ &= h - A_2d - \Phi(T)MTTRd \end{aligned}$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} L_p^h &= \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))) \\ L_p^{t_2} &= \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))) \end{aligned}$$

Ce qui implique que : $\Delta L_p = L_p^{t_2} - L_p^h = 0$

Fin de la démonstration du lemme III.1.

Lemme III.2

Sous la condition III.C1, la différence de coût de maintenance entre IMP^{t_2} et IMP^h est nulle. Formellement on a :

$$\Delta L_M = (L_M^{t_2} - L_M^h) = 0 \quad \forall t_2 \text{ avec : } \left(\frac{h}{\alpha} \right) \leq t_2 < t_1$$

Nous concluons que la date A_1 de début de réalisation de la TST n'influe pas sur le coût de maintenance générée.

Démonstration du Lemme III.2:

La stratégie de maintenance d'une politique IMP stipule que pendant un cycle la machine est sujette à trois type d'arrêts : maintenance corrective hors sous-traitance générant un coût M_C , des maintenances correctives pendant la sous-traitance avec un coût \tilde{M}_C et une action de maintenance préventive à $t = T$, coûtant M_p .

Ainsi, les coûts moyens de maintenance des politiques IMP^1 et IMP^2 sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} L_M^1 &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_c \Phi(t_1) + \tilde{M}_c \Phi(A_2) + M_c \Phi(T - t_1 - A_2) + M_p) \\ &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) ((\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) + M_c \Phi(T) + M_p) \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} L_M^2 &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_c \Phi(t_2) + \tilde{M}_c \Phi(A_2) + M_c \Phi(T - t_2 - A_2) + M_p) \\ &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) ((\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) + M_c \Phi(T) + M_p) \end{aligned}$$

Ce qui implique que : $\Delta L_p = L_M^2 - L_M^1 = 0$

Fin de la démonstration du lemme III.2.

Lemme III.3

Sous la condition III.C1, le coût de stockage généré par la politique IMP^2 est inférieur à celui généré par la politique IMP^1 . Formellement on a :

$$\Delta L_s = (L_s^2 - L_s^1) < 0 \quad \forall t_2 \text{ avec : } \left(\frac{h}{\alpha} \right) \leq t_2 < t_1$$

Cela implique que la date A_1 de début de réalisation de la TST a un impact sur le coût de stockage généré.

Démonstration du Lemme III.3:

En se basant sur la politique de commande et l'évolution du niveau de stock durant un cycle décrits ci-dessus, nous déterminerons $\Delta L_s = L_s^2 - L_s^1$.

Avec :

$$L_s^j = \left(\frac{C_s}{T + Z_p} \right) Z^j \quad j = \overline{1, 2}$$

Où Z^j : L'aire de la surface de stockage générée par la politique IMP^j , ($j = 1, 2$).

Dans ce cas :

$$\Delta L_s = \left(\frac{C_s}{T + Z_p} \right) (Z^2 - Z^1)$$

On note $\Delta Z = (Z^2 - Z^1)$: la différence entre les aires de surface de stockage générée par IMP^1 et IMP^2 .

Rappelons les notations suivantes :

$NS^1(t)$: Niveau de stock à l'instant t en appliquant la politique IMP^1 .

$NS^2(t)$: Niveau de stock à l'instant t en appliquant la politique IMP^2 .

Ainsi, pour déterminer la différence ΔZ , nous distinguons deux cas possibles :

- Cas 1 : $t_2 + \tilde{A}_2 < t_1$: Il n'y a pas de chevauchement entre les périodes de sous-traitance de IMP^{t_1} et IMP^{t_2} .
- Cas 2 : $t_2 < t_1 < t_2 + \tilde{A}_2$: La période de sous-traitance de la politique IMP^{t_1} commence avant la fin de celle de IMP^{t_2} .

➤ Cas 1 : $t_2 + \tilde{A}_2 < t_1$:

L'évolution du niveau du stock des politiques IMP^{t_1} et IMP^{t_2} est illustrée par la figure suivante :

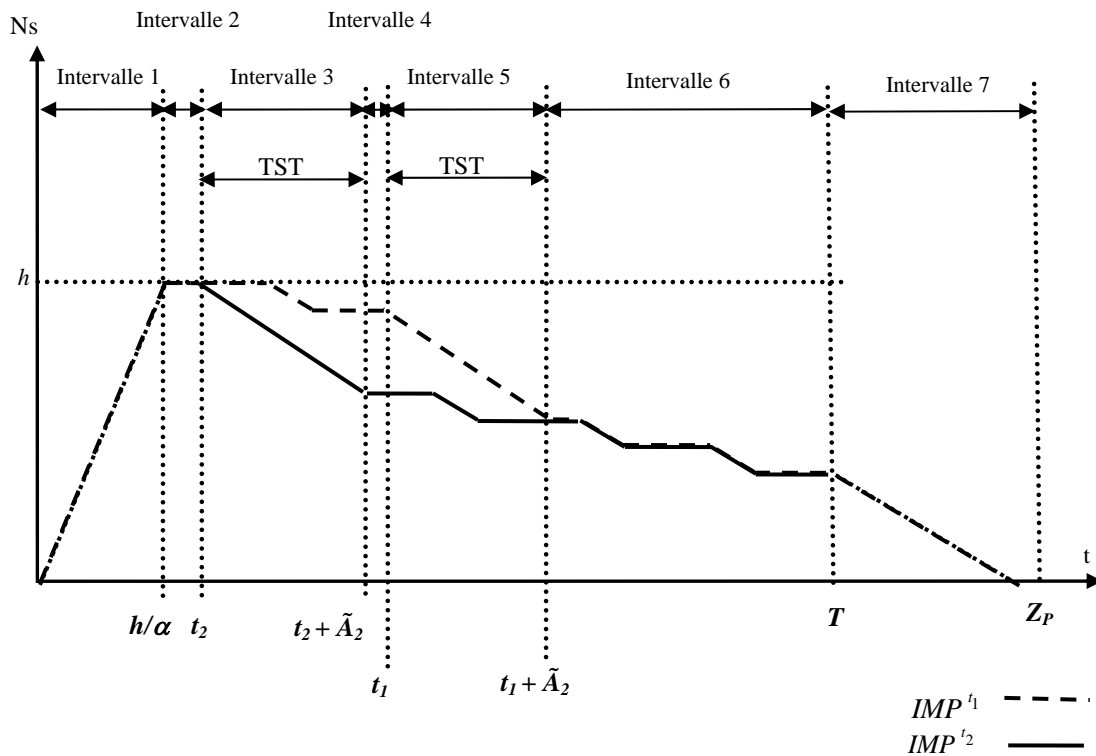


Figure III.2. Différence de début de réalisation de la TST selon le cas 1.

Afin d'établir la différence des coûts, on raisonne par intervalle de temps.

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 1: $[0, h/a]$:

La surface de stockage correspondant à la politique IMP^{t_1} pendant cet intervalle est donnée par :

$$Z_{p1}^{t_1} = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{1}{2\alpha} h^2$$

Celle correspondant à la politique IMP^{t_2} est :

$$Z_{p1}^{t_2} = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{1}{2\alpha} h^2$$

Alors :

$$\Delta Z_{p1}^t = Z_{p1}^{t_2} - Z_{p1}^{t_1} = 0$$

Par conséquent, ΔL_s pour cet intervalle est nul.

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 2 : $[h/\alpha, t_2]$:

Pour l'intervalle 2, la surface de stockage correspondant à la politique IMP^h est :

$$Z_{p2}^h = \left(t_2 - \frac{h}{\alpha}\right)h - \frac{1}{2}\left(t_2 - \frac{h}{\alpha}\right)\left(\Phi(t_2).MTTR.d\right) + \frac{1}{4}\Phi(t_2)MTBF.MTTR$$

De la même façon on établit l'aire de la surface de l'intervalle 2 pour IMP^{t_2} , on a :

$$Z_{p2}^{t_2} = \left(t_2 - \frac{h}{\alpha}\right)h - \frac{1}{2}\left(t_2 - \frac{h}{\alpha}\right)\left(\Phi(t_2).MTTR.d\right) + \frac{1}{4}\Phi(t_2)MTBF.MTTR$$

Ce qui implique que :

$$\Delta Z_{p2}^t = Z_{p2}^{t_2} - Z_{p2}^h = 0$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 3 : $[t_2, t_2 + \tilde{A}_2]$:

Pour calculer l'aire de la surface Z_{p3}^h qui correspond à la surface de stockage selon la politique IMP^h pour l'intervalle 3, nous posons $Z_{p3}^h = Z_1^h + Z_2^h + Z_3^h$

Notons t_p , la durée de cet intervalle :

$$\begin{aligned} t_p &= (t_2 + \tilde{A}_2) - t_2 \\ &= \tilde{A}_2 \\ &= A_2 + \Phi(A_2)MTTR \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a : $\Phi^h(t_p) = \Phi^h(A_2)$

Et :

$$\begin{aligned} NS^h(t_2 + \tilde{A}_2) &= NS^h(t_2) - (\Phi(t_p)MTTRd) \\ &= h - \Phi\left(t_2 - \frac{h}{\alpha}\right)MTTRd - \Phi(A_2)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd \end{aligned}$$

Alors :

- o $Z_1^h = \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d)$
 $= \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2).MTTR.d)$
- o $Z_2^h = t_p NS^h(t_2 + \tilde{A}_2)$
 $= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd)$
- o $Z_3^h = \frac{1}{2}(\Phi(t_p))\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{2}\Phi(A_2)\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d)$

Ainsi :

$$Z_{p3}^{t_1} = \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2).MTTR.d) + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd) + \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d)$$

Pour la politique IMP^{t_2} , cette période correspond à la période de la sous-traitance. L'aire de surface est donnée par :

$$Z_{p3}^{t_2} = (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(h - (\Phi(t_2).MTTR.d) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d\right)$$

Et par conséquent, la différence sera :

$$\begin{aligned} \Delta Z_{p3}^t &= Z_{p3}^{t_2} - Z_{p3}^{t_1} \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(h - (\Phi(t_2).MTTR.d) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2).MTTR.d) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd) \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)h - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left((\Phi(t_2).MTTR.d) + \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2).MTTR.d) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad - (A_2 + \Phi(A_2)MTTRd)h + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_2 + A_2)MTTRd) \\ &= -(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left((\Phi(t_2).MTTR.d) + \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d + \frac{1}{2}\Phi(A_2).MTTR.d\right) \\ &\quad + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTRd) + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_2)MTTRd) \\ &\quad - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &= -(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(\frac{1}{2}A_2d + \Phi(A_2)MTTRd\right) + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTRd) \\ &\quad - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &= -(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(\frac{1}{2}A_2d + \Phi(A_2)MTTRd\right) + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTRd) \\ &\quad - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Enfin, on obtient :

$$\Delta Z_{p3}^t = -\frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(A_2d) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d)$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 4 : $[t_2 + \tilde{A}_2, t_1]$:

Cette période correspond pour les deux politiques à une phase de production à la demande. Commençons par déterminer l'expression de l'aire de surface de la politique IMP^{t_1} notée $Z_{p4}^{t_1}$.

On pose : $Z_{p4}^{t_1} = Z_1^{t_1} + Z_2^{t_1} + Z_3^{t_1}$

La durée de cet intervalle est : $t_p = t_1 - (t_2 + \tilde{A}_2)$
 $= t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR$

Dans ce cas, on a : $\Phi(t_p) = \Phi(t_1 - t_2 - A_2)$

En plus, nous avons :

$$\begin{aligned} NS^{t_1}(t_1) &= NS^{t_1}(t_2 + \tilde{A}_2) - (\Phi(t_p)MTTRd) \\ &= h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd - \Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_1)MTTRd \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \circ \quad Z_1^{t_1} &= \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d) \\ &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) \\ \circ \quad Z_2^{t_1} &= t_p NS^{t_1}(t_1) \\ &= (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_1)MTTRd) \\ \circ \quad Z_3^{t_1} &= \frac{1}{2}(\Phi(t_p))\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right) \\ &= \frac{1}{2}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right) \\ &= \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} Z_{p4}^{t_1} &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) + \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad + (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_1)MTTRd) \end{aligned}$$

En suivant la même logique, on calcule l'aire de la surface $Z_{p4}^{t_2}$ correspondant à la surface de stockage pour la politique IMP^{t_2} , on pose $Z_{p4}^{t_2} = Z_1^{t_2} + Z_2^{t_2} + Z_3^{t_2}$

Nous avons $t_p = t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR$, et $\Phi(t_p) = \Phi(t_1 - t_2 - A_2)$

D'un autre côté :

$$\begin{aligned} NS^{t_2}(t_1) &= NS^{t_2}(t_2 + \tilde{A}_2) - (\Phi(t_p)MTTRd) \\ &= NS^{t_2}(t_2) - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d - (\Phi(t_p)MTTRd) \\ &= h - A_2d - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd - \Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTRd \\ &= h - A_2d - \Phi(t_1)MTTRd \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \circ \quad Z_1^{t_2} &= \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d) \\ &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) \end{aligned}$$

- o $Z_2^{t_2} = t_p NS^{-t_2}(t_1)$
 $= (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - A_2d - \Phi(t_1)MTTRd)$
- o $Z_3^{t_2} = \frac{1}{2}(\Phi(t_p))\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{2}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d)$

Ainsi,

$$Z_{p4}^{t_2} = \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) + \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d) + (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - A_2d - \Phi(t_1)MTTRd)$$

De ce fait, la différence entre les deux aires de surfaces de stockage pendant l'intervalle 4 s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta Z_{p4}^t &= Z_{p4}^{t_2} - Z_{p4}^{t_1} \\ &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) \\ &\quad + (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - A_2d - \Phi(t_1)MTTRd) + \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad - \frac{1}{2}(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(t_1 - t_2 - A_2)MTTR.d) \\ &\quad - (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - \Phi(t_1)MTTRd) - \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Ainsi, la différence entre les aires de surface de stockage générée par IMP^{t_1} et IMP^{t_2} pendant l'intervalle est :

$$\Delta Z_{p4}^t = -(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(A_2d)$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 5 : $[t_1, t_1 + \tilde{A}_2]$:

En ce qui concerne la politique, cette période IMP^{t_1} est celle de la sous-traitance. L'aire de la surface de stockage s'écrit sous la forme suivante :

$$Z_{p5}^{t_1} = (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(h - (\Phi(t_1).MTTR.d) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d\right)$$

Concernant la politique IMP^{t_2} et afin de calculer l'aire de surface correspondante, notée $Z_{p5}^{t_2}$. On pose : $Z_{p5}^{t_2} = Z_1^{t_2} + Z_2^{t_2} + Z_3^{t_2}$.

La durée de cet intervalle est :

$$\begin{aligned} t_p &= t_1 + \tilde{A}_2 - t_1 \\ &= \tilde{A}_2 \\ &= A_2 + \Phi(A_2)MTTR \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a : $\Phi(t_p) = \Phi(A_2)$

$$\begin{aligned} \text{Et : } NS^{t_2}(t_1) &= NS^{t_2}(t_1) - d(\tilde{A}_2) \\ &= h - \Phi(t_1)MTTRd - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d \\ &= h - dA_2 - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \circ \quad Z_1^{t_2} &= \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d) \\ &= \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTR.d) \\ \circ \quad Z_2^{t_2} &= t_p NS^{t_2}(t_1) \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) \\ \circ \quad Z_3^{t_2} &= \frac{1}{2}(\Phi(t_p))\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right) \\ &= \frac{1}{2}\Phi(A_2)\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right) \\ &= \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_{p5}^{t_2} &= \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTR.d) + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) \\ &\quad + \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

De ce fait, la différence entre des deux surfaces est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta Z_{p5}^t &= Z_{p5}^{t_2} - Z_{p5}^{t_1} \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(h - (\Phi(t_1).MTTR.d) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(A_2)MTTR.d) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(-(\Phi(t_1).MTTR.d) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d - \frac{1}{2}\Phi(A_2)MTTR.d\right) \\ &\quad (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)h - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)h \\ &\quad - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)(-dA_2 - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Alors la différence entre les deux surfaces sera :

$$\Delta Z_{p5}^t = (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)\left(\frac{1}{2}A_2d\right) - \frac{1}{4}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d)$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 6 : $[t_1 + \tilde{A}_2, T]$:

Pendant cet intervalle, pour les deux politiques, la production est à la demande. Pour calculer l'aire de surface $Z_{p6}^{t_1}$ générée par la politique IMP^{t_1} , on pose $Z_{p6}^{t_1} = Z_1^{t_1} + Z_2^{t_1} + Z_3^{t_1}$.

Cet intervalle a une durée t_p :

$$\begin{aligned} t_p &= T - (t_1 + \tilde{A}_2) \\ &= T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a : $\Phi(t_p) = \Phi(T - t_1 - A_2)$

$$\begin{aligned} \text{Et : } NS^{t_1}(T) &= NS^{t_1}(t_1 + \tilde{A}_2) - \Phi(t_p)MTTRd \\ &= h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd \end{aligned}$$

Donc :

- o $Z_1^{t_1} = \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d)$
 $= \frac{1}{2}(T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(T - t_1 - A_2)MTTR.d)$
- o $Z_2^{t_1} = t_p NS^{t_1}(t_1)$
 $= (T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd)$
- o $Z_3^{t_1} = \frac{1}{2}(\Phi(t_p))\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{2}\Phi(T - t_1 - A_2)\left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d\right)$
 $= \frac{1}{4}\Phi(T - t_1 - A_2)(MTBF.MTTR.d)$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Z_{p6}^{t_1} &= \frac{1}{2}(T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(T - t_1 - A_2)MTTR.d) + \frac{1}{4}\Phi(T - t_1 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &\quad + (T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd) \end{aligned}$$

De même pour la politique IMP^{t_2} , pour calculer l'aire de surface $Z_{p6}^{t_2}$ on pose $Z_{p6}^{t_2} = Z_1^{t_2} + Z_2^{t_2} + Z_3^{t_2}$

$$\begin{aligned} \text{La durée de cet intervalle est : } t_p &= T - (t_1 + \tilde{A}_2) \\ &= T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\Phi(t_p) = \Phi(T - t_1 - A_2)$

$$\begin{aligned} \text{Et : } NS^{t_2}(T) &= NS^{t_2}(t_1 + \tilde{A}_2) - \Phi(t_p)MTTRd \\ &= h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd \end{aligned}$$

Alors :

- o $Z_1^{t_2} = \frac{1}{2}t_p(\Phi(t_p).MTTR.d)$
 $= \frac{1}{2}(T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(T - t_1 - A_2)MTTR.d)$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad Z_2^{t_2} &= t_p NS^{t_2}(t_1) \\
 &= (T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd) \\
 \circ \quad Z_3^{t_2} &= \frac{1}{2}(\Phi(t_p)) \left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d \right) \\
 &= \frac{1}{2}\Phi(T - t_1 - A_2) \left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR).MTTR.d) - \frac{1}{2}MTTR.MTTR.d \right) \\
 &= \frac{1}{4}\Phi(T - t_1 - A_2)(MTBF.MTTR.d)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 Z_{p6}^{t_2} &= \frac{1}{2}(T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(\Phi(T - t_1 - A_2)MTTR.d) + \frac{1}{4}\Phi(T - t_1 - A_2)(MTBF.MTTR.d) \\
 &\quad + (T - t_1 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(h - dA_2 - \Phi(T)MTTRd)
 \end{aligned}$$

Donc, la différence des aires de surface entre les deux politiques est :

$$\Delta Z_{p6}^t = Z_{p6}^{t_2} - Z_{p6}^{t_1} = 0$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 7 : [T, T + Z_p] :

Cet intervalle correspond à la période de maintenance préventive. L'aire de surface de stockage générée par la politique IMP^{t_1} a l'expression suivante :

$$Z_{p7}^{t_1} = \frac{1}{2d}(h - A_2d - \Phi(T)MTTRd)^2$$

De même pour la politique IMP^{t_2} , on trouve :

$$Z_{p7}^{t_2} = \frac{1}{2d}(h - A_2d - \Phi(T)MTTRd)^2$$

Dans ce cas, la différence entre les deux aires de surface de stockage est nulle :

$$\Delta Z_{p7}^t = Z_{p7}^{t_2} - Z_{p7}^{t_1} = 0$$

- Expression de la différence totale des aires de surface de stockage :

À partir des expressions des différences trouvées par intervalle, la différence totale de l'aire de la surface des politiques pendant un cycle a l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \Delta Z &= (Z^{t_2} - Z^{t_1}) \\
 &= \sum_{i=1}^7 \Delta Z_{pi}^t = \Delta Z_{p1}^t + \Delta Z_{p2}^t + \Delta Z_{p3}^t + \Delta Z_{p4}^t + \Delta Z_{p5}^t + \Delta Z_{p6}^t + \Delta Z_{p7}^t \\
 &= -\frac{1}{2}\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) - (t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR)(A_2d)
 \end{aligned}$$

Or : $(t_1 - t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR) > 0$ car : $t_1 > t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR$

Et : $\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) > 0$, $(A_2d) > 0$

Par conséquent : $\Delta Z < 0$, donc : $\Delta L_s < 0$. (car $C_s > 0$ et $T + Z_p > 0$).

➤ Cas 2 : $t_2 < t_1 < t_2 + \tilde{A}_2$:

L'évolution du niveau du stock des politiques IMP^{t_1} et IMP^{t_2} dans ce cas est illustrée par la figure III.3.

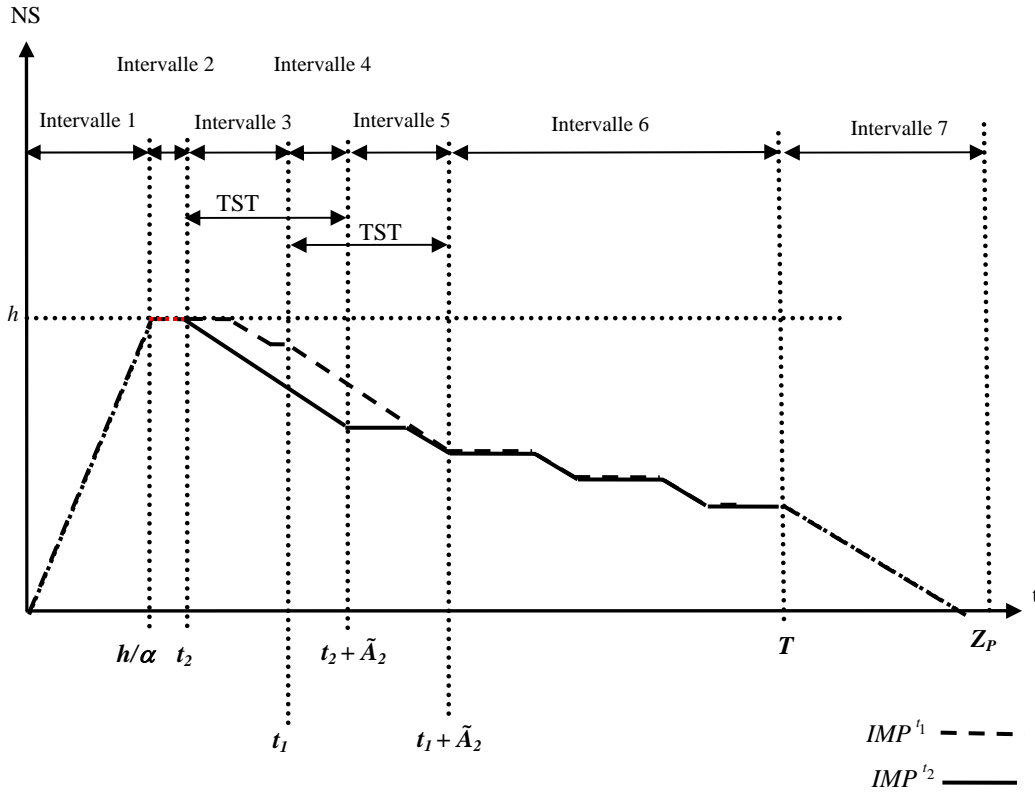


Figure III.3. Différence de début de réalisation de la TST selon le cas2.

Pour déterminer la différence entre les deux aires de surface de stockage des deux politiques nous procédons exactement de la même manière que pour le cas1 :

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 1: $[0, h/a]$:

Il s'agit du même intervalle traité dans le cas 1. Donc on retrouve :

$$\Delta Z_{p1}^t = Z_{p1}^{t_2} - Z_{p1}^{t_1} = 0$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 2: $[h/a, t_2]$:

De même que pour le cas 1, on retrouve :

$$\Delta Z_{p2}^t = Z_{p2}^{t_2} - Z_{p2}^{t_1} = 0$$

- Différence de surface de stockage pendant la période 3: $[t_1, t_2]$:

Pour cet intervalle, la machine fonctionne à la demande pour la politique IMP^{t_1} , tandis qu'elle est allouée à sous-traitance selon la politique IMP^{t_2} .

Pour calculer l'aire de surface $Z_{p3}^{t_1}$ sous la politique IMP^{t_1} on pose $Z_{p3}^{t_1} = Z_1^{t_1} + Z_2^{t_1} + Z_3^{t_1}$

Cette période a une durée de $t_p = t_1 - t_2$. Dans ce cas, on a $\Phi(t_p) = \Phi(t_1 - t_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Et : } NS^{t_1}(t_1) &= NS^{t_1}(t_2) - (\Phi(t_p)MTTRd) \\ &= h - \Phi(t_1)MTTRd \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \circ \quad Z_1^h &= \frac{1}{2} t_p (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d) \\
 &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (\Phi(t_1 - t_2) \cdot MTTR \cdot d) \\
 \circ \quad Z_2^h &= t_p NS^h(t_1) \\
 &= (t_1 - t_2) (h - \Phi(t_1) MTTR d) \\
 \circ \quad Z_3^h &= \frac{1}{2} (\Phi(t_p)) \left(\frac{1}{2} ((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d) - \frac{1}{2} MTTR \cdot MTTR \cdot d \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Phi(t_1 - t_2) \left(\frac{1}{2} ((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d) - \frac{1}{2} MTTR \cdot MTTR \cdot d \right) \\
 &= \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d)
 \end{aligned}$$

En conséquence :

$$Z_{p3}^h = \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (\Phi(t_1 - t_2) \cdot MTTR \cdot d) + (t_1 - t_2) (h - \Phi(t_1) MTTR d) + \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d)$$

D'autre part, en ce qui concerne la politique IMP^{t_2} , l'aire de surface de stockage est :

$$\begin{aligned}
 Z_{p3}^{t_2} &= ((t_1 - t_2) NS^{t_2}(t_1)) + \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (NS^{t_2}(t_2) - NS^{t_2}(t_1)) \\
 &= (t_1 - t_2) \left(NS^{t_2}(t_1) + \frac{1}{2} NS^{t_2}(t_2) - \frac{1}{2} NS^{t_2}(t_1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (NS^{t_2}(t_2) + NS^{t_2}(t_1)) \\
 &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (NS^{t_2}(t_2) + (NS^{t_2}(t_2) - (t_1 - t_2) d)) \\
 &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (2NS^{t_2}(t_2) - (t_1 - t_2) d)
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } Z_{p3}^{t_2} = \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (2(h - \Phi(t_2) MTTR d) - (t_1 - t_2) d)$$

Donc, la différence entre les deux surfaces est égale à :

$$\begin{aligned}
 \Delta Z_{p3}^t &= Z_{p3}^{t_2} - Z_{p3}^h \\
 &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (2h - 2\Phi(t_2) MTTR d - (t_1 - t_2) d) - \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (\Phi(t_1 - t_2) \cdot MTTR \cdot d) \\
 &\quad - (t_1 - t_2) (h - \Phi(t_1) MTTR d) - \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d) \\
 &= (t_1 - t_2) h - (t_1 - t_2) \Phi(t_2) MTTR d - \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (t_1 - t_2) d - \frac{1}{2} (t_1 - t_2) \Phi(t_1 - t_2) \cdot MTTR \cdot d \\
 &\quad - (t_1 - t_2) h + (t_1 - t_2) \Phi(t_1) MTTR d - \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d)
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta Z_{p3}^t = -\frac{1}{2} d (t_1 - t_2) (t_1 - t_2) + \frac{1}{2} d (t_1 - t_2) \Phi(t_1 - t_2) MTTR - \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d)$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 4 : $[t_1, t_2 + \tilde{A}_2]$:

Cet intervalle correspond à la période de sous-traitance pour les deux politiques.

Pour la politique IMP^1 :

$$\begin{aligned} NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) &= NS^1(t_1) - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \\ &= h - \Phi(t_1)MTTRd - (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1)d \\ &= h - (t_2 + A_2 - t_1)d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd \end{aligned}$$

Ainsi l'aire de surface sera :

$$\begin{aligned} Z_{p4}^1 &= \left((t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) \right) + \frac{1}{2} \left((t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(NS^1(t_1) - NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) + \frac{1}{2} \left(NS^1(t_1) - NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) + NS^1(t_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(\left(NS^1(t_1) - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \right) + NS^1(t_1) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(2NS^1(t_1) - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \right) \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$Z_{p4}^1 = \frac{1}{2} (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1) \left(2(h - \Phi(t_1)MTTRd) - (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1)d \right)$$

Pour la politique IMP^2 :

$$\begin{aligned} NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) &= NS^2(t_1) - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \\ &= NS^2(t_2) - (t_1 - t_2)d - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \\ &= NS^2(t_2) - (t_1 - t_2)d - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \\ &= h - \Phi(t_2)MTTRd - \tilde{A}_2d \\ &= h - \Phi(t_2 + A_2)MTTRd - A_2d \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Z_{p4}^2 &= \left((t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) \right) + \frac{1}{2} \left((t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(NS^2(t_1) - NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) + \frac{1}{2} \left(NS^2(t_1) - NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1) \left(2NS^2(t_1) - (t_2 + \tilde{A}_2 - t_1)d \right) \end{aligned}$$

On obtient,

$$Z_{p4}^2 = \frac{1}{2} (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1) \left(2(h - \Phi(t_2)MTTRd - (t_1 - t_2)d) - (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1)d \right)$$

De ce fait, la différence entre les deux surfaces $\Delta Z_{p4}^t = Z_{p4}^2 - Z_{p4}^1$ sera :

$$\Delta Z_{p4}^t = - (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1) \left((t_1 - t_2) - \Phi(t_1 - t_2)MTTR \right) d$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 5 : $[t_2 + \tilde{A}_2, t_1 + \tilde{A}_2]$:

Pour cet intervalle la machine est allouée pour la sous-traitance sous la politique IMP^1 . Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) &= NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) - (t_1 + \tilde{A}_2 - t_2 - \tilde{A}_2)d \\ &= h - (t_2 + A_2 - t_1)d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd - A_2d \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} Z_{p5}^1 &= \left((t_1 - t_2)NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) \right) + \frac{1}{2} \left((t_1 - t_2) \left(NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) - NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= (t_1 - t_2) \left(NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) + \frac{1}{2} \left(NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) - NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) \left(NS^1(t_1 + \tilde{A}_2) + NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) \left(NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) - (t_1 - t_2)d + NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) \right) \\ &= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) \left(2NS^1(t_2 + \tilde{A}_2) - (t_1 - t_2)d \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$Z_{p5}^1 = \frac{1}{2} (t_1 - t_2) \left(2(h - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd - A_2d) - (t_1 - t_2)d \right)$$

Concernant la politique IMP^2 , la machine est en mode de production à la demande. Pour calculer l'aire de la surface Z_{p5}^2 on pose $Z_{p5}^2 = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$.

La durée de cet intervalle est : $t_p = t_1 - t_2$.

Dans ce cas, on a : $\Phi(t_p) = \Phi(t_1 - t_2)$,

$$\begin{aligned} \text{Et : } NS^2(t_1 + \tilde{A}_2) &= NS^2(t_2 + \tilde{A}_2) - \Phi(t_1 - t_2)MTTRd \\ &= h - \Phi(t_2)MTTRd - (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)d - \Phi(t_1 - t_2)MTTRd \\ &= h - A_2d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd \end{aligned}$$

Ainsi :

- $Z_1^2 = \frac{1}{2} t_p (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d)$
 $= \frac{1}{2} (t_1 - t_2) (\Phi(t_1 - t_2) \cdot MTTR \cdot d)$
- $Z_2^2 = t_p NS^2(t_1 + \tilde{A}_2)$
 $= (t_1 - t_2) (h - A_2d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd)$
- $Z_3^2 = \frac{1}{2} (\Phi(t_p)) \left(\frac{1}{2} ((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d) - \frac{1}{2} MTTR \cdot MTTR \cdot d \right)$
 $= \frac{1}{2} \Phi(t_1 - t_2) \left(\frac{1}{2} ((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d) - \frac{1}{2} MTTR \cdot MTTR \cdot d \right)$
 $= \frac{1}{4} \Phi(t_1 - t_2) (MTBF \cdot MTTR \cdot d)$

En conséquence :

$$Z_{p5}^i = \frac{1}{2}(t_1 - t_2)(\Phi(t_1 - t_2).MTTR.d) + (t_1 - t_2)(h - A_2d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) + \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2)(MTBF.MTTR.d)$$

Ainsi, la différence des deux aires de surfaces est :

$$\begin{aligned} \Delta Z_{p5}^i &= Z_{p5}^{t_2} - Z_{p5}^{t_1} \\ &= \frac{1}{2}(t_1 - t_2)\left(2(h - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd - A_2d) - (t_1 - t_2)d\right) - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)(\Phi(t_1 - t_2).MTTR.d) \\ &\quad - (t_1 - t_2)(h - A_2d - \Phi(t_1 + A_2)MTTRd) - \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &= (t_1 - t_2)h - (t_1 - t_2)\Phi(t_1 + A_2)MTTRd - (t_1 - t_2)A_2d - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)(t_1 - t_2)d \\ &\quad - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)\Phi(t_1 - t_2).MTTR.d - (t_1 - t_2)h + (t_1 - t_2)A_2d + (t_1 - t_2)\Phi(t_1 + A_2)MTTRd \\ &\quad - \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2)(MTBF.MTTR.d) \end{aligned}$$

Donc :

$$\Delta Z_{p5}^i = -\frac{1}{2}(t_1 - t_2)(t_1 - t_2)d - \frac{1}{2}(t_1 - t_2)\Phi(t_1 - t_2).MTTR.d - \frac{1}{4}\Phi(t_1 - t_2)(MTBF.MTTR.d)$$

- Différence de surface de stockage pendant l'intervalle 6 : $[t_1 + \tilde{A}_2, T]$:

Il s'agit de la même période que celle traitée lors du premier cas. On retrouve :

$$\Delta Z_{p6}^i = Z_{p6}^{t_2} - Z_{p6}^{t_1} = 0$$

- Différence de surface de stockage pendant la période 7 : $[T, T+Z_p]$:

D'après le résultat précédemment établi selon le cas 1, on retrouve :

$$\Delta Z_{p7}^i = Z_{p7}^{t_2} - Z_{p7}^{t_1} = 0$$

- Expression de la différence totale des aires de surface de stockage :

À partir des expressions des différences par périodes établies précédemment, la différence totale de l'aire de surface des politiques pendant un cycle pour le cas 2 a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta Z &= (Z^{t_2} - Z^{t_1}) \\ &= \sum_{i=1}^7 \Delta Z_{Pi}^i = \Delta Z_{p1}^i + \Delta Z_{p2}^i + \Delta Z_{p3}^i + \Delta Z_{p4}^i + \Delta Z_{p5}^i + \Delta Z_{p6}^i + \Delta Z_{p7}^i \\ &= \left[\begin{aligned} &-d(t_1 - t_2)^2 - \frac{1}{2}\Phi(t_1 - t_2)(MTBF.MTTR.d) \\ &- (t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1)((t_1 - t_2) - \Phi(t_1 - t_2)MTTR)d \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

Or : $(t_2 + A_2 + \Phi(A_2)MTTR - t_1) > 0$ car : $t_1 < t_2 - A_2 - \Phi(A_2)MTTR$

Et : $\Phi(A_2)(MTBF.MTTR.d) > 0$

$$d(t_1 - t_2)^2 > 0$$

D'un autre côté, on a :

$$(t_1 - t_2) = \Phi(t_1 - t_2)(MTTR + MTBF) \Rightarrow (t_1 - t_2) > \Phi(t_1 - t_2)MTTR \\ \Rightarrow ((t_1 - t_2) - \Phi(t_1 - t_2)MTTR) > 0$$

En conséquence : $\Delta Z < 0$, et $\Delta L_S < 0$ (car $C_S > 0$ et $T + Z_P > 0$).

Fin de la démonstration du lemme III.3.

Théorème III.2

La politique IMP^{t_2} génère un coût total moyen par cycle inférieur à celui généré par la politique IMP^{t_1} , pour $t_1 > t_2 \geq (h/\alpha)$.

Formellement :

$$C_t(IMP^{t_2}) < C_t(IMP^{t_1}) \quad \forall t_2 \text{ tel que: } \left(\frac{h}{\alpha}\right) \leq t_2 < t_1$$

Démonstration du Théorème III.2:

Les lemmes III.1, III.2 et III.3 stipulent que :

Si $(h/\alpha) \leq t_2 < t_1$ alors :

$$\Delta L_P = L_P^{t_2} - L_P^{t_1} = 0.$$

$$\Delta L_M = L_M^{t_2} - L_M^{t_1} = 0.$$

$$\Delta L_S = L_S^{t_2} - L_S^{t_1} < 0.$$

Ainsi,

$$\Delta C_t = (\Delta L_S + \Delta L_P + \Delta L_M) < 0$$

Ce qui donne : $C_t(IMP^{t_2}) < C_t(IMP^{t_1})$.

Fin de la démonstration du théorème III.2.

Remarque

À partir du théorème III.2, on remarque que le coût total moyen par cycle est sensible à la date de placement d'une TST et le meilleur instant pour exécuter une TST est égale à h/α .

III.6. Impact du retard de la sous-traitance

Dans cette section nous traiterons le problème d'un autre angle, visant à rendre la politique IMP plus adaptée au contexte de la sous-traitance et aux aléas du monde industriel. Notre objectif consiste à trouver l'expression analytique du surcoût moyen engendré par un retard de réalisation de la TST. [Dahane, 2007C].

Soit l'instant \tilde{A}_1 prévu pour l'exécution effective de la TST. Supposons que cette TST ne puisse pas être réalisée à cet instant à cause – par exemple – d'une panne. Pour cela, nous nous posons la question des conséquences du décalage de la TST à un instant $\tau_1 > \tilde{A}_1$.

Cela revient à calculer le surcoût ΔC_t , tel que :

$$\Delta C_t = C_t^{\tau_1} - C_t^{\tilde{A}_1} \tag{III.4}$$

En se basant sur les résultats des lemmes III.1, III.2 et III.3 nous remarquons qu'un changement de l'instant de réalisation d'une TST a un impact direct sur le coût de stockage, mais pas sur le coût de pénurie ni celui de maintenance.

En se référant au théorème III.2, le décalage de la sous-traitance provoquera une augmentation du coût de stockage car $\tau_1 > \tilde{A}_1$.

Ceci nous conduit à établir le théorème ci-dessous :

Théorème III.3

Tout décalage de début de réalisation de la TST de sa date initiale \tilde{A}_1 à une date ultérieure τ_1 tel que $\tau_1 > \tilde{A}_1$ provoque une augmentation du coût total moyen par cycle. Le surcoût moyen par cycle généré par ce décalage est égal à :

$$\Delta C_t^{retard} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) C_s \left(\begin{array}{l} \left((\tau_1 - \tilde{A}_1)h - \frac{1}{2} \left(\left(\tau_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tau_1) + \left(-A_1 + \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tilde{A}_1) \right) \right) MTTR.d \\ + \frac{1}{4} MTBF.MTTR (\Phi(\tau_1) - \Phi(\tilde{A}_1)) \\ + \left((A_2 + \Phi(A_2) MTTR) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1)) MTTR.d \right) \\ + \left(\frac{1}{2} (T - \tau_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR) ((\Phi(T) - \Phi(\tau_1) - \Phi(A_2)) MTTR.d) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR) ((\Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2)) MTTR.d) \right) \\ \left. + (\tilde{A}_1 - \tau_1) (h - dA_2 - (\Phi(T)) MTTR.d) + \frac{1}{4} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1)) MTBF.MTTR.d \right) \end{array} \right)$$

Démonstration du Théorème III.3 :

En se basant sur la démonstration du lemme III.3, nous remarquons que les seuls intervalles concernés par ce changement de début de réalisation de la TST sont :

1. L'intervalle 1 : $[h/\alpha, \tilde{A}_1]$: car sa durée dépend de la date de début de réalisation de la TST,
2. L'intervalle 2 : $[\tilde{A}_1, \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2]$: c'est la phase de sous-traitance, elle est concernée non pas à sa durée, car elle sera toujours A_2 , mais par le niveau du stock au début de sa réalisation.
3. L'intervalle 2 : $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, T]$: c'est la phase de production à la demande séparant la TST et la maintenance. Sa durée dépend à la fois de la longueur du cycle et toutes les autres phases qui le précèdent.

En revanche, nous remarquons que la phase I de construction du stock et la phase V de maintenance préventive sont indépendantes de la date de début de réalisation de la TST car un décalage de TST n'aura aucune incidence sur la durée de ces phases. Ainsi, le surcoût ΔC_t^{retard} aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Delta C_t^{retard} &= C_t^{\tau_1} - C_t^{\tilde{A}_1} \\ &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) C_s (\Delta Z_{Intervalle1}^{retard} + \Delta Z_{Intervalle2}^{retard} + \Delta Z_{Intervalle3}^{retard}) \end{aligned}$$

Et nous avons :

- o $\Delta Z_{Intervalle1}^{retard} = (Z_{Intervalle1}^{\tau_1} - Z_{Intervalle1}^{\tilde{A}_1})$
 $= (\tau_1 - \tilde{A}_1)h - \frac{1}{2} \left(\left(\tau_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tau_1) + \left(-\tilde{A}_1 + \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR.d$
 $+ \frac{1}{4} MTBF.MTTR (\Phi(\tau_1) - \Phi(\tilde{A}_1))$
- o $\Delta Z_{Intervalle2}^{retard} = (Z_{Intervalle2}^{\tau_1} - Z_{Intervalle2}^{\tilde{A}_1})$
 $= (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) MTTR.d (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1))$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad \Delta Z_{Intervalle3}^{retard} &= \left(Z_{Intervalle3}^{\tau_1} - Z_{Intervalle3}^{\tilde{A}_1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(T - \tau_1 - A_2 - \Phi(A_2) \right) MTTR \left(\left(\Phi(T) - \Phi(\tau_1) - \Phi(A_2) \right) MTTR.d \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) \right) MTTR \left(\left(\Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) \right) MTTR.d \right) \\
 &\quad + \left(\tilde{A}_1 - \tau_2 \right) \left(h - dA_2 - \Phi(T) \right) MTTR.d + \frac{1}{4} \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1) \right) MTBF.MTTR.d
 \end{aligned}$$

Donc, l'expression du surcoût moyen est :

$$\Delta C_i^{retard} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) C_s \left(\begin{array}{l} \left(\tau_1 - \tilde{A}_1 \right) h - \frac{1}{2} \left(\left(\tau_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tau_1) + \left(-\tilde{A}_1 + \frac{h}{\alpha} \right) \Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR.d \\ + \frac{1}{4} MTBF.MTTR \left(\Phi(\tau_1) - \Phi(\tilde{A}_1) \right) \\ + \left(A_2 + \Phi(A_2) \right) MTTR \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1) \right) MTTR.d \\ + \left(\frac{1}{2} \left(T - \tau_1 - A_2 - \Phi(A_2) \right) MTTR \left(\left(\Phi(T) - \Phi(\tau_1) - \Phi(A_2) \right) MTTR.d \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) \right) MTTR \left(\left(\Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) \right) MTTR.d \right) \right. \\ \left. + \left(\tilde{A}_1 - \tau_1 \right) \left(h - dA_2 - \Phi(T) \right) MTTR.d + \frac{1}{4} \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tau_1) \right) MTBF.MTTR.d \right)
 \end{array} \right)$$

Fin de la démonstration du théorème III.3.

III.7. Impact du prolongement de la durée de la TST

Dans cette partie nous traiterons le problème d'un éventuel prolongement de la durée de la TST au cours de sa réalisation, tel que le système soit stable, c'est-à-dire après avoir fixé les paramètres du système en matière de durée de cycle et niveau seuil du stock à assurer pendant la phase I.

Cette possibilité d'extension de la sous-traitance, même si elle doit rester une exception, donnera une bonne flexibilité à notre système et peut constituer un point fort dans l'étape de négociation de contrats de sous-traitance, car elle offre aux clients de ces services de sous-traitance une garantie de prise en charge des éventuelles aléas et changements exceptionnels de production [Dahane, 2007D].

Soit θ la durée de prolongement d'une TST par rapport à sa durée utile A_2 . Le surcoût moyen par cycle engendré par cette augmentation de la durée de la sous-traitance s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \Delta C_i^{prolongement} &= C_i^{(A_2+\theta)} - C_i^{(A_2)} \\
 &= \left(\Delta L_S^{prolongement} + \Delta L_P^{prolongement} + \Delta L_M^{prolongement} \right)
 \end{aligned} \tag{III.5}$$

Pour mettre en évidence l'expression analytique de $\Delta C_i^{prolongement}$, on raisonnera de la même manière que ΔC_i^{retard} . À partir d'une durée utile A_2 , nous établirons les expressions du surcoût moyen engendrée par un éventuel prolongement d'une TST pour chacun des coûts composant le coût total, en l'occurrence, le coût de stockage, de pénurie et de maintenance.

Pour cela, nous allons introduire les lemmes suivants :

Lemme III.4

Un prolongement de la durée de sous-traitance de θ unités de temps engendre une augmentation du coût moyen de pénurie par cycle de :

$$\Delta L_p^{\text{prolongement}} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) d\theta$$

Démonstration du Lemme III.4:

Rappelons qu'une situation de pénurie peut arriver si à la date $t = T$ le niveau du stock n'est pas en mesure de satisfaire la totalité de la demande pendant l'intervalle $[T, T + Z_p]$. Ainsi, le coût moyen de pénurie pour une politique IMP sans prolongement de la durée de la TST est donné par :

$$L_p^{A_2} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR + A_2)$$

Dans le cas d'un prolongement, la TST durera $A_2 + \theta$ au lieu de A_2 . Le coût moyen de pénurie devient alors :

$$L_p^{(A_2+\theta)} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - h + d\Phi(T)MTTR + d(A_2 + \theta))$$

Et de ce fait :
$$\Delta L_p^{\text{prolongement}} = L_p^{(A_2+\theta)} - L_p^{A_2} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) d\theta$$

Fin de la démonstration du lemme III. 4.

Lemme III.5

Un prolongement de la durée de sous-traitance de θ unités de temps engendre une augmentation du coût moyen de maintenance par cycle de :

$$\Delta L_M^{\text{prolongement}} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(\theta)$$

Démonstration du Lemme III.5:

Le coût moyen de maintenance pour une politique IMP sans prolongement est donné par l'expression suivante :

$$L_M^{A_2} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) ((\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) + M_c \Phi(T) + M_p)$$

Dans le cas d'un prolongement de la durée de la TST on aura :

$$L_M^{(A_2+\theta)} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) ((\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2 + \theta) + M_c \Phi(T) + M_p)$$

Par conséquent :

$$\Delta L_M^{\text{prolongement}} = L_M^{(A_2+\theta)} - L_M^{A_2} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(\theta).$$

Fin de la démonstration du lemme III.5.

Lemme III.6

Un prolongement de la durée de sous-traitance de θ unités de temps engendre une diminution du coût moyen de stockage par cycle de :

$$\Delta L_S^{prolongement} = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left(\begin{array}{l} \left(\theta + \Phi(\theta) MTTR \right) \left(h - A_2 - \frac{1}{2} \theta - \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(\theta) \right) MTTR d \right) \\ - \left(\theta + \Phi(\theta) \cdot MTTR \right) \frac{1}{2} d \left(MTTR \left(h - d A_2 - \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\theta) \right) - \left(T - \tilde{A}_1 - A_2 - \theta \right) \right) \\ - \frac{1}{4} \Phi(\theta) MTBF \cdot MTTR \cdot d + \theta \left(-h + d A_2 + \frac{1}{2} d \theta + \Phi(T) MTTR \cdot d \right) \end{array} \right)$$

Démonstration du Lemme III.6:

L'impact d'un prolongement de la durée de la TST sur l'évolution du niveau de stock durant un cycle, peut être illustré sur la figure suivante :

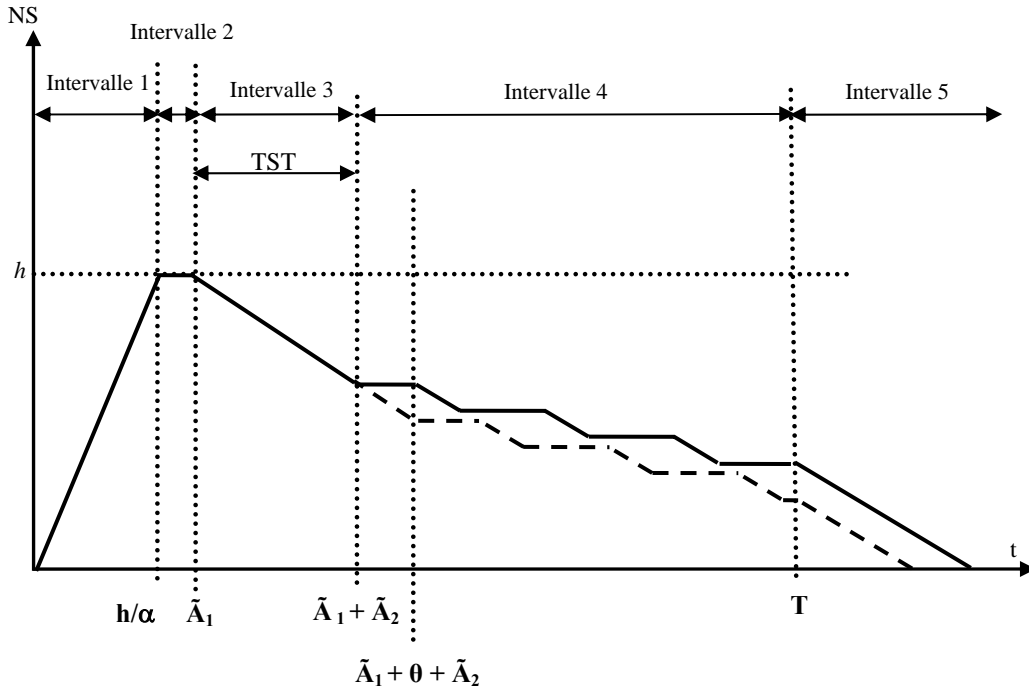


Figure III.4. Impact du prolongement de la durée de la TST sur l'évolution du niveau du stock.

La diminution du coût de stockage peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\Delta L_S^{prolongement} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(\Delta Z_{intervalle1}^{prolongement} + \Delta Z_{intervalle2}^{prolongement} + \Delta Z_{intervalle3}^{prolongement} + \Delta Z_{intervalle4}^{prolongement} + \Delta Z_{intervalle5}^{prolongement} \right)$$

Tels que :

- o $\Delta Z_{intervalle1}^{prolongement} = 0$
- o $\Delta Z_{intervalle2}^{prolongement} = 0$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad \Delta Z_{\text{intervalle}3}^{\text{prolongement}} &= \left(\theta + \Phi(\theta) MTTR \right) \left(h - A_2 - \frac{1}{2} \theta - \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(\theta) \right) MTTR d \right) \\
 \circ \quad \Delta Z_{\text{intervalle}4}^{\text{prolongement}} &= - \left(\theta + \Phi(\theta) . MTTR \right) \frac{1}{2} d \left(MTTR \left(h - dA_2 - \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\theta) \right) - (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \theta) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \Phi(\theta) MTBF . MTTR . d \\
 \circ \quad \Delta Z_{\text{intervalle}5}^{\text{prolongement}} &= \frac{1}{2d} \left(\left(h - d(A_2 + \theta) - \Phi(T) MTTR . d \right)^2 - \left(h - dA_2 - \Phi(T) MTTR . d \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2d} \left(\left(h - dA_2 - d\theta - \Phi(T) MTTR . d \right)^2 - \left(h - dA_2 - \Phi(T) MTTR . d \right)^2 \right) \\
 &= \theta \left(-h + dA_2 + \frac{1}{2} d\theta + \Phi(T) MTTR . d \right)
 \end{aligned}$$

De ce fait,

$$\Delta L_S^{\text{prolongement}} = \left(\frac{C_s}{T + Z_p} \right) \left[\begin{array}{l} \left(\theta + \Phi(\theta) MTTR \right) \left(h - A_2 - \frac{1}{2} \theta - \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(\theta) \right) MTTR d \right) \\ - \left(\theta + \Phi(\theta) . MTTR \right) \frac{1}{2} d \left(MTTR \left(h - dA_2 - \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\theta) \right) - (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \theta) \right) \\ - \frac{1}{4} \Phi(\theta) MTBF . MTTR . d + \theta \left(-h + dA_2 + \frac{1}{2} d\theta + \Phi(T) MTTR . d \right) \end{array} \right]$$

Fin de la démonstration du lemme III.6.

Nous remarquons à travers les lemmes ci-dessus, que tous les coûts qui composent le coût total (c'est-à-dire celui de stockage, pénurie et de maintenance) sont affectés par un prolongement de la durée prévue de la TST.

D'abord, le coût de pénurie, un prolongement de la durée de la TST augmentera le nombre des demandes clients pouvant être perdues puisque la machine restera indisponible encore plus longtemps que prévu.

Concernant les surcoûts de maintenance, le coût des actions de maintenance aura deux effets :

- D'abord, une augmentation du coût des actions de maintenance pendant la TST parce que la machine est allouée à la sous-traitance plus longtemps, et par conséquent le nombre moyen de pannes pendant la TST sera plus élevé.
- Ensuite, une diminution du coût des actions réalisées après la TST, car il y aura moins d'actions de maintenance pendant l'intervalle 4 $[\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2, T]$ qui suit la période de sous-traitance, puis que cet intervalle sera tronqué de la période équivalente au prolongement de la durée de la TST.

Mais d'une façon globale le coût de maintenance connaîtra une augmentation parce que le coût de maintenance pendant la sous-traitance est plus élevé que celui hors sous-traitance.

Pour le coût de stockage, nous constatons que l'évolution du niveau du stock pendant les phases antérieures à la TST (intervalle 1 et 2) est indépendante de la durée de la TST, donc prolongement de la durée de la TST n'a pas de conséquence sur le sur ces intervalles. D'un autre côté, avec un prolongement de la TST, le niveau de stock à la fin de cette TST sera encore plus bas, ce qui veut dire que les coûts de stockage correspondants aux intervalles 4 et 5 seront inférieurs.

Ceci nous conduit à établir le théorème suivant.

Théorème III.4

Tout prolongement de la durée de la TST d'une durée θ unités de temps a un impact sur le coût total et génère un surcoût moyen par cycle de :

$$\Delta C_t^{prolongement} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) C_s \times \left(\begin{array}{l} \left((\theta + \Phi(\theta) MTTR) \left(h - A_2 - \frac{1}{2} \theta - \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(\theta) \right) MTTR d \right) \right) \\ - (\theta + \Phi(\theta) . MTTR) \frac{1}{2} d \left(MTTR (h - dA_2 - \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\theta)) - (T - \tilde{A}_1 - A_2 - \theta) \right) \\ - \frac{1}{4} \Phi(\theta) MTBF . MTTR . d + \theta \left(-h + dA_2 + \frac{1}{2} d\theta + \Phi(T) MTTR . d \right) \\ + C_p d\theta + (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(\theta) \end{array} \right)$$

Démonstration du Théorème III.4:

Selon les lemmes III.4, III.5 et III.6, on peut établir l'expression de $\Delta C_t^{prolongement}$. Ainsi :

$$\Delta C_t^{prolongement} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(\Delta L_S^{prolongement} + \Delta L_P^{prolongement} + \Delta L_M^{prolongement} \right)$$

Selon les expressions analytiques de $\Delta L_S^{prolongement}$, $\Delta L_P^{prolongement}$ et $\Delta L_M^{prolongement}$ données respectivement par les lemmes III.4, III.5 et III.6, on établit l'expression analytique de $\Delta C_t^{prolongement}$ du théorème III.4.

Fin de la démonstration du théorème III.4.

III.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié analytiquement l'impact de la contrainte de la sous-traitance dans le cadre d'une politique de maintenance intégrée d'un système de production composé d'une seule machine en terme de coûts engendrés.

Nous avons prouvé dans ce chapitre que le placement d'une tâche de sous-traitance est très important dans le cadre d'une optimisation des coûts de gestion de la production et de la maintenance du système. Le terme emplacement d'une tâche de sous-traitance représente sa position temporelle dans un cycle de maintenance préventive à période fixe.

Par ailleurs, nous avons montré l'impact en terme de surcoûts engendrés dans le cas d'un retard d'exécution d'une TST et dans le cas du prolongement de sa durée de réalisation. Nous avons également prouvé l'instant optimal de placement d'une TST dans le cadre d'une politique de maintenance intégrée.

Chapitre IV

Analyse de la maintenance et de la production sous la contrainte de sous-traitance

A travers ce chapitre nous continuons d'approfondir l'étude du problème de couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production pour un système soumis à une contrainte de sous-traitance.

En effet, nous étudierons le même système vu dans le chapitre précédent, c'est à dire un système composé d'une seule machine M soumise à des actions de maintenance correctiv,e suite à des pannes aléatoires, et des actions de maintenance préventive de type bloc (chaque $T, 2T, \dots$). Cette machine fonctionne pour satisfaire la demande d du client principal via un stock S . La machine peut être allouée pour effectuer plusieurs TST.

Dans cette partie de notre thèse, nous élargissons l'étude en relaxant les hypothèses imposées au système. Ainsi, le but de ce chapitre est de présenter une optimisation de la politique IMP dans trois cas différents : d'abord, en soumettant l'hypothèse 3 au résultat trouvé dans le chapitre précédent précisant que le meilleur moment pour allouer la machine à la sous-traitance est exactement l'instant où la capacité du stock est atteinte. Ensuite, par la relaxation de l'hypothèse 1. Dans ce cas, la machine peut être allouée plusieurs fois à la sous-traitance, et enfin – par simulation – en relaxant l'hypothèse 2, qui stipule que la machine est supposée neuve durant la période de construction du stock.

IV.1. Introduction

Nous avons étudié au chapitre précédent la politique IMP soumise à trois hypothèses, relevant du nombre de TST que la machine doit réaliser pendant un cycle et l'état de la machine pendant la phase I. Dans ce cas, il était supposé que la machine était neuve pendant la période de construction du stock. Les hypothèses touchaient aussi la date de début de réalisation de la sous-traitance.

Nous avons pu étudier le comportement du système en réponse à des aléas et à des changements temporels de la contrainte de la sous-traitance, ce qui nous a permis d'établir des indicateurs mettant en évidence l'impact et l'influence des changements des paramètres de la sous-traitance (date de début de réalisation, décalage et prolongation).

Dans ce chapitre, nous allons affiner notre étude de la politique IMP en relaxant les hypothèses précédentes présentées au chapitre II, à savoir, l'hypothèse 1, l'hypothèse 2 et l'hypothèse 3.

Nous commençons d'abord, par proposer une politique dite Politique Adaptée de Maintenance Intégrée (AIMP) qui se distingue vis-à-vis la politique IMP par le fait qu'elle alloue la machine à la sous-traitance exactement à l'instant où la capacité maximale du stock est atteinte. En réalité, cela consiste à adapter l'hypothèse 3 de la politique IMP aux résultats du théorème 2, qui – rappelons le – a conclu que le meilleur moment pour aller à la sous-traitance est exactement à la fin de la phase de construction du stock.

Par la suite, nous proposons une généralisation de la politique IMP en permettant au système d'allouer la machine pour effectuer plusieurs TST par cycle contrairement à ce qui était stipulé par l'hypothèse 1 de la politique IMP. Nous étudierons cette généralisation à travers la Politique Généralisée de Production sous la Maintenance (GIMP).

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la relaxation de l'hypothèse 2, c'est-à-dire que la probabilité que la machine M tombe en panne pendant la phase I de la construction du stock est non nulle. Cette étude est basée sur la simulation et le design expérimental.

IV.2. La Politique Adaptée de Maintenance Intégrée (AIMP)

IV.2.1. Définition

Dans cette première partie du chapitre nous présenterons une optimisation de la Politique Adaptée de Maintenance Intégrée (Adapted Integrated Maintenance Policy : AIMP) qui consiste en une politique IMP adaptée au résultat du théorème III.2 présenté au cours du chapitre précédent, à partir duquel nous avons défini le meilleur moment pour allouer la machine à la sous-traitance [Dahane, 2007B].

Rappelons que la politique IMP suppose que la machine soit allouée pour effectuer une seule TST pendant un cycle de maintenance. Cette TST arrive à A_1 après la phase de construction du stock pendant laquelle la machine est supposée être neuve et sera réalisée à partir de la date d'exécution effective \tilde{A}_1 .

Formellement, la politique AIMP sera basée sur les hypothèses suivantes :

1. Pendant un cycle $[0, T+Z_p]$ la machine ne peut être allouée aux tâches de sous-traitances qu'une seule fois.

Ainsi :

$$(\tilde{A}_1^{(k-1)} + \tilde{A}_2) < (T^{(k-1)} + Z_p) \leq \tilde{A}_1^{(k)}.$$

Avec : $\tilde{A}_1^{(k)}$: Date d'exécution effective de la $k^{\text{ème}}$ TST.

$T^{(k-1)}$: Date de maintenance préventive du $k^{\text{ème}}$ cycle.

2. Pendant la phase de construction du stock, la machine est supposée neuve :

$$\Phi\left(\frac{h}{\alpha}\right) = 0 \quad \text{Tel que : } \alpha = \frac{h}{U_{\max} - d}.$$

3. La date de début d'exécution effective de la sous-traitance coïncide exactement avec le moment où la capacité du stock h est assurée :

$$\tilde{A}_1 = \frac{h}{\alpha}$$

IV.2.2. Politique de commande

Du point de vue de commande, la politique AIMP est basée sur la même stratégie de commande adoptée par la politique IMP. En tenant en compte de l'hypothèse 3, elle peut être résumée de la façon suivante :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t \leq \frac{h}{\alpha} \\ d & \text{Si } \frac{h}{\alpha} + \tilde{A}_2 < t < T \\ 0 & \text{Si } M \text{ est en panne ou allouée à la TST} \end{cases}$$

Ainsi, la machine fonctionne à sa cadence maximale pour atteindre la capacité maximale h du stock S . Une fois le niveau h assuré, la machine sera allouée pour effectuer une TST. Au retour de la sous-traitance la machine bascule en un fonctionnement à la demande. L'impact de cette politique de commande sur l'évolution du niveau du stock peut être détaillée par la figure IV.1.

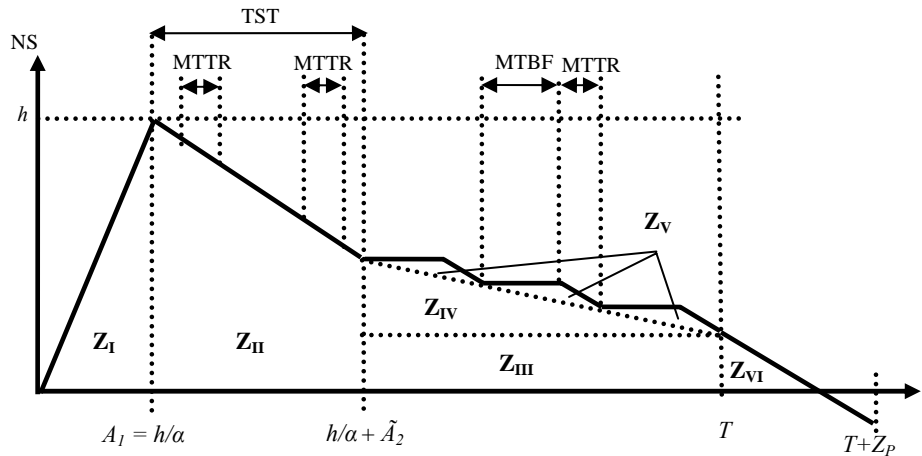


Figure IV.1. Évolution du niveau du stock pendant un cycle avec la politique AIMP.

Nous remarquons sur cette figure, que contrairement à la politique IMP, la politique AIMP conduit à distinguer quatre phases dans l'évolution du niveau du stock (Cinq phases dans le cas de IMP). La seule différence réside dans le fait qu'il n'y a pas de période intermédiaire entre le moment d'atteindre le niveau h du stock et l'instant à partir de lequel la machine est allouée pour la sous-traitance.

IV.2.3. Politique d'affectation à la sous-traitance

Comme le stipule l'hypothèse 3, la stratégie d'affectation de la machine M à la sous-traitance adoptée par la politique AIMP impose que la machine sera allouée pour effectuer la TST demandée exactement à la date $t = \tilde{A}_1 = h/\alpha$, qui représente - d'après le théorème 2 - le meilleur moment pour aller à la sous-traitance.

De cette façon, nous pouvons résumer la politique d'affectation de AIMP en deux points :

1. La machine est allouée pour effectuer la TST à la date $\tilde{A}_1 = h/\alpha$.
2. La TST a une durée globale \tilde{A}_2 , pour une durée utile A_2 . Rappelons que $\tilde{A}_2 = A_2 + \Phi(A_2)MTTR$.

IV.2.4. Politique de maintenance

Concernant la maintenance, la politique AIMP adopte la même stratégie que IMP, à savoir des actions de maintenance à chaque panne, et une action de maintenance préventive à la date T . Ceci peut être décrit suivant les différentes phases du fonctionnement de la machine durant un cycle :

- Phase II : $[h/a, h/a + \tilde{A}_2]$: La machine est allouée à la sous-traitance mais peut tomber en panne avec une moyenne $\Phi(\tilde{A}_2) = \Phi(A_2)$. Chacune des actions de maintenance corrective exécutées sur la machine durant cette période génère un coût \tilde{M}_C . Avec $\tilde{M}_C > M_C$.
- Phase III : $[h/a + \tilde{A}_2, T]$: Après la sous-traitance la machine peut tomber en panne avec une moyenne $\Phi(T - \tilde{A}_2 - h/a) = \Phi(T) - \Phi(A_2)$. Chaque action de maintenance corrective pendant cette période génère un coût M_C .
- Phase IV : $[T, T+Z_P]$: À la partir de la date T , on exécute sur la machine une action de maintenance préventive à un coût M_P , avec $M_P \ll M_C$.

IV.2.5. Équation du coût de la politique AIMP

Notre objectif à travers cette étude est de trouver le couple optimal (h^*, T^*) qui désigne la capacité optimale du stock à assurer pendant la phase I et la date optimale de maintenance préventive. Cette optimisation est basée sur un critère de minimisation des coûts engendrés par les actions de maintenances correctives et préventives ainsi que les coûts de gestion du stock.

Nous exprimerons le coût généré par l'application de la politique AIMP en fonction des coûts qui le composent :

$$\text{Coût}(AIMP) = L_S^{AIMP} + L_P^{AIMP} + L_M^{AIMP}$$

Ainsi, le coût total moyen par cycle associé à la politique AIMP sera :

$$C_t^{AIMP} = (L_S^{AIMP} + L_P^{AIMP} + L_M^{AIMP})$$

Tels que L_S^{AIMP} est le coût moyen par cycle de gestion du stock, L_P^{AIMP} représente le coût moyen par cycle de pénurie et L_M^{AIMP} celui des actions de maintenance, associés à la politique AIMP.

À travers les sections suivantes nous déterminerons les expressions des coûts moyens de stockage, de pénurie et de maintenance.

IV.2.5.1. Expression du coût de stockage

Le coût moyen de stockage correspondant à l'application de la politique AIMP est donné par :

$$L_s^{AIMP} = \left(\frac{C_s}{T + Z_p} \right) (Z_I + Z_{II} + Z_{III} + Z_{IV} + Z_V + Z_{VI})$$

Les Z_i représentent les surfaces générées par l'évolution du niveau du stock (voir figure IV.1). Elles sont données par les expressions suivantes :

$$\circ \quad Z_I = \frac{h^2}{2(U_{\max} - d)} = \frac{h^2}{2\alpha}$$

$$\circ \quad Z_{II} = h\tilde{A}_2 - \frac{1}{2}\tilde{A}_2^2 d = h(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d$$

$$\begin{aligned}
 \circ \quad Z_{III} &= (h - d(A_2 + \Phi(T)MTTR)) \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + \tilde{A}_2 \right) \right) \\
 &= (h - d(A_2 + \Phi(T)MTTR)) \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + A_2 + \Phi(A_2)MTTR \right) \right) \\
 \circ \quad Z_{IV} &= \frac{1}{2} \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + \tilde{A}_2 \right) \right) \left(h - d\tilde{A}_2 - (h - d(MTTR \cdot \Phi(T) + A_2)) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + A_2 + \Phi(A_2)MTTR \right) \right) \left(h - d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - (h - d(MTTR \cdot \Phi(T) + A_2)) \right) \\
 \circ \quad Z_V &= \Phi(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right) \\
 \circ \quad Z_{VI} &= \frac{(h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))^2}{2d}
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'expression du coût moyen de stockage par cycle, en appliquant la politique AIMP sera :

$$L_S^{AIMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_P} \right) \left[\begin{aligned} & \left(\frac{h^2}{2\alpha} + h(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d \right. \\ & \left. + (h - d(A_2 + \Phi(T)MTTR)) \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + A_2 + \Phi(A_2)MTTR \right) \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(T - \left(\frac{h}{\alpha} + A_2 + \Phi(A_2)MTTR \right) \right) \left(h - d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right. \\ & \left. - (h - d(MTTR \cdot \Phi(T) + A_2)) \right) \\ & + \Phi(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2} (MTBF + MTTR) MTTR \cdot d - \frac{1}{2} MTTR^2 \cdot d \right) \\ & \left. + \frac{1}{2d} (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))^2 \right]
 \end{aligned} \right)$$

Après simplification, nous obtenons :

$$L_S^{AIMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_P} \right) \left[\begin{aligned} & hT + \frac{1}{2(d - \alpha)} h^2 - h(\Phi(T)MTTR + A_2) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d + \frac{1}{2}(\Phi(T)MTTR + A_2)^2 \\ & - \frac{1}{2} d \left(T - \frac{h}{\alpha} - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \right) (MTTR \cdot \Phi(T + A_2) + 2A_2) + \Phi(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2} d MTBF \cdot MTTR \right) \end{aligned} \right]$$

IV.2.5.2. Expression du coût de pénurie

Nous rappelons que le niveau h du stock est destiné à satisfaire la demande au moins jusqu'à la date de la maintenance préventive T , et dans le meilleur des cas, jusqu'à la date de fin de cette action de maintenance préventive.

Par ailleurs, il y aura une situation de pénurie si le niveau du stock $NS(T)$ n'est pas en mesure de satisfaire la demande durant la période de maintenance préventive. Ainsi, -et comme la politique IMP - la pénurie est formulée comme suit :

$$NS(T) < dZ_p \Rightarrow \text{Pénurie.}$$

Donc, le coût de pénurie s'écrit de la forme : $L_p^{AIMP} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - NS(T))$

Sachant que : $NS(T) = h - A_2d - \Phi(T)MTTRd$

Alors :

$$L_p^{AIMP} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2)))$$

Ce qui représente l'expression du coût moyen de pénurie par cycle, avec l'application de la politique AIMP.

IV.2.5.3. Expression du coût de maintenance

En se basant sur la politique de maintenance, nous remarquons qu'au cours d'un cycle T la machine M est soumise à plusieurs actions de maintenance de la façon suivante :

- Phase I : pendant $[0, h/a]$ aucune action de maintenance n'est effectuée, car la machine est supposée neuve et la probabilité de tomber en panne est supposée nulle.
- Phase II : pendant la période $[h/a, h/a + \tilde{A}_2]$ (qui correspond à la période de réalisation de la TST) la machine peut tomber en panne, entraînant des actions de maintenance corrective avec un coût \tilde{M}_C .
- Phase III : durant l'intervalle $[h/a + \tilde{A}_2, T]$ on exerce sur la machine M des actions de maintenance corrective engendrant un coût M_C .
- Phase IV : à $t = T$, la machine fera l'objet d'une action de maintenance préventive pendant une durée moyenne Z_p , qui coûtera M_p .

Par conséquent, le coût moyen de maintenance par cycle sera exprimé comme suit :

$$L_M^{AIMP} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_p + M_C \Phi(T - A_2) + \tilde{M}_C \Phi(A_2))$$

Après simplification, nous obtenons :

$$L_M^{AIMP} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) (M_p + M_C \Phi(T) + (\tilde{M}_C - M_C) \Phi(A_2))$$

IV.2.5.4. Équation du coût total moyen par cycle

À partir de l'expression générale du coût, et à partir des expressions des coûts moyens de stockage, de pénurie et de maintenance, l'expression du coût total moyen par cycle correspondant à l'application de la politique AIMP sera :

$$C_t^{AIMP} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(C_s \left(\begin{aligned} & \left(hT + \frac{1}{2(d-\alpha)} h^2 - h(\Phi(T)MTTR + A_2) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d \right) \\ & - \frac{1}{2} d \left(T - \frac{h}{\alpha} - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \right) (MTTR \cdot \Phi(T + A_2) + 2A_2) \\ & + \Phi(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2} dMTBF \cdot MTTR \right) + \frac{1}{2} (\Phi(T)MTTR + A_2)^2 \end{aligned} \right) \right. \\ \left. + C_p (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))) + M_p + M_C \Phi(T) + (\tilde{M}_C - M_C) \Phi(A_2) \right)$$

IV.2.5.5. Optimisation

Le but de cette partie de notre étude est d'optimiser la politique de AIMP tout en se basant sur la minimisation du coût total moyen généré par les différentes gestions de la maintenance, de la production et de la sous-traitance.

En dérivant l'expression du coût total moyen par rapport à h , nous trouvons :

$$\frac{\partial C_t^{AIMP}}{\partial h} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(C_s \left(T + \frac{1}{(d - \alpha)} h - (\Phi(T)MTTR + A_2) + \frac{d}{2\alpha} (MTTR \cdot \Phi(T + A_2) + 2A_2) \right) - C_p \right)$$

En annulant cette dérivée, nous obtenons l'expression de h en fonction T de la sorte :

$$\frac{\partial C_t^{AIMP}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = (d - \alpha) \left(-T + (\Phi(T)MTTR + A_2) - \frac{d}{2\alpha} (MTTR \cdot \Phi(T + A_2) - 2A_2) + \frac{C_p}{C_s} \right)$$

Rappelons que $\Phi(D)$ détermine le nombre moyen de pannes pendant une période D quelconque. Le calcul de $\Phi(D)$ est basé sur la fonction $K(t)$ qui représente le nombre moyen de pannes durant l'intervalle $[0, t]$, et définie selon l'équation de renouvellement.

On remarque que $\Phi(T) = K(T)$.

Et : $\Phi(A_2) = K(A_2) - K(A_1)$.

Mais comme le nombre moyen pendant la phase de construction du stock est supposé nul : $K(A_1) = 0$,

Alors : $\Phi(A_2) = K(A_2)$.

Ainsi :

$$h^* = (d - \alpha) \left(-T + (K'(T)MTTR + A_2) - \frac{d}{2\alpha} (MTTR \Phi'(T + A_2) - 2A_2) + \frac{C_p}{C_s} \right)$$

D'un autre côté, en dérivant l'expression de C_t^{AIMP} en fonction de T , nous obtenons :

$$\frac{\partial C_t^{AIMP}}{\partial T} = \left(\frac{1}{(T + Z_p)^2} \right) \left(\begin{array}{l} (T + Z_p) \left(C_s \left(\begin{array}{l} h - h\Phi'(T)MTTR - \frac{1}{2}d(MTTR \cdot \Phi(T + A_2) + 2A_2) \\ -\frac{1}{2}d \left(T - \frac{h}{\alpha} - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \right) MTTR \cdot \Phi'(T + A_2) \\ + \Phi'(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2}dMTBF \cdot MTTR \right) + \frac{1}{2}MTTR^2 \Phi'(T) + MTTR \cdot A_2 \Phi'(T) \end{array} \right) \right. \\ \left. + C_p d\Phi'(T)MTTR + M_c \Phi'(T) \right) \\ - \left(\begin{array}{l} hT + \frac{1}{2(d - \alpha)} h^2 - h(\Phi(T)MTTR + A_2) - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)^2 d \\ -\frac{1}{2}d \left(T - \frac{h}{\alpha} - A_2 - \Phi(A_2)MTTR \right) (MTTR \cdot \Phi(T + A_2) + 2A_2) \\ + \Phi(T - A_2) \cdot \left(\frac{1}{2}dMTBF \cdot MTTR \right) + \frac{1}{2}(\Phi(T)MTTR + A_2)^2 \\ + C_p (dZ_p - (h - d(\Phi(T)MTTR + A_2))) + M_p + M_c \Phi(T) + (\tilde{M}_c - M_c) \Phi(A_2) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

IV.2.5.6. Exemple numérique

Pour illustrer les résultats de notre étude, nous présenterons dans ce paragraphe un exemple numérique en se basant sur la structure de coûts détaillée à travers le tableau suivant :

M_C	\tilde{M}_C	M_P	C_P	C_S
3000	5000	300	1000	5

Tableau IV.1. Structure des coûts. (um : unités monétaires)

La machine M peut produire avec une cadence maximale $U_{max} = 60$ pièces/u.t. Sa durée de vie suit la loi de Weibull $(2, 100)$ avec une moyenne $MTBF = 88.6$ u.t (unité de temps).

La durée moyenne de maintenance corrective est $MTTR = 15$ u.t et celle de la maintenance préventive est $Z_p = 5$ u.t.

D'autre part, la demande $d = 10$ pièces/u.t, pour $a = (U_{max} - d) = 50$ pièces/u.t. La durée utile de la sous-traitance $A_2 = 50$ u.t.

Pour ces paramètres nous trouvons :

$$\frac{\partial C_i^{AIMP}}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = \begin{cases} T_1 = 88.9820 \\ ou \\ T_2 = 353.2356 \end{cases}$$

Cependant la deuxième dérivée pour ces points est :

$$\frac{\partial^2 C_i^{AIMP}}{\partial^2 T}(T = T_1) = 0.0680 > 0$$

Et :

$$\frac{\partial^2 C_i^{AIMP}}{\partial^2 T}(T = T_2) = 0.0757 > 0$$

De plus, la capacité du stock h correspondante sera :

$$T_1 = 88.98200 \Rightarrow h_1 = 614.3182$$

$$T_2 = 353.2356 \Rightarrow h_2 = -1134.9 \quad \text{Absurde !}$$

Cependant : $(T_1, h_1) = (88.98200, 614.3182) \Rightarrow C_i^T(T_1, h_1) \approx 1571.7$

Donc le couple optimal est : $(T^*, h^*) = (88.98200, 614.3182)$. Et le coût moyen optimal par cycle correspondant est : $C_i^{AIMP}(T^*, h^*) = 1571.7$ u.m.

IV.3. La Politique Généralisée de Maintenance Intégrée (GIMP)

Dans la section précédente nous avons étudié un système de production soumis à une contrainte de sous-traitance et régis par une politique appelée AIMP qui consistait à assigner la machine pour effectuer une seule TST par cycle (hypothèse 1). Cette politique AIMP consistait à relaxer l'hypothèse 3. Ainsi, la TST que la machine doit réaliser pendant un cycle commençait au moment où le stock atteint sa capacité maximale h , c.-à-d. à la date $t = A_1 = h/a$. [Dahane, 2007E].

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, nous continuons à étudier les différentes possibilités engendrées par la relaxation des différentes hypothèses imposées par la politique IMP. Cette section sera consacrée à étudier la relaxation de l'hypothèse 1 fixant le nombre de TST réalisées pendant un cycle.

IV.3.1. Définition

La Politique Généralisée de Maintenance Intégrée (Generalized Integrated Maintenance Policy : GIMP) consiste en une généralisation de la politique IMP par la relaxation de l'hypothèse 1.

Cela implique de donner au système la possibilité d'allouer la machine pour effectuer plusieurs TST pendant un cycle. Pour cela nous introduisons le concept du nombre de TST que la machine peut réaliser durant un cycle, noté $S(T)$. Tel que $S(T) = (T-h/a)/\bar{A}_1$. De ce fait, la machine sera appelée pour

réaliser n TST, tel que $1 \leq n \leq S(T)$. La stratégie suivie consiste d'abord à construire le stock jusqu'au niveau h , ensuite d'affecter la machine M à la sous-traitance n fois pendant l'intervalle $[h/a, T]$ pour des durées utiles A_2 .

Hors périodes de sous-traitance, et avant la date $t = T$, la machine M produit à la demande.

On note $\tilde{A}_1^{(i)}, A_2^{(i)}$ respectivement, la date d'exécution effective et la durée utile de la $i^{\text{ème}}$ TST d'un cycle T . Cette politique repose sur les hypothèses suivantes :

1. Pendant un cycle $[0, T+Z_p]$ la machine est allouée aux tâches de sous-traitance exactement n fois :

$$\left(\tilde{A}_1^{(n)} + \tilde{A}_2^{(n)} \right)^{(k-1)} < \left(T^{(k-1)} + Z_p \right) \leq \left(\tilde{A}_1^{(1)} \right)^{(k-1)}$$

Autrement dit, la dernière TST (c'est à dire la $n^{\text{ème}}$ TST) du cycle $(k-1)$ est terminée avant la période de maintenance préventive du même cycle, qui, à son tour, se termine avant l'arrivée de la première TST du prochain cycle.

2. Pendant la phase de construction du stock, la probabilité que M puisse tomber en panne est supposée nulle :

$$\Phi \left(t = \frac{h}{U_{\max} - d} = \frac{h}{\alpha} \right) = 0$$

3. La date d'exécution effective de la première TST suffit pour atteindre le niveau h du stock.

$$\text{Ainsi : } \tilde{A}_1^{(1)} = \frac{h}{\alpha}$$

Remarque IV.1:

Une TST arrive chaque instant A_1 et sera exécutée à partir de sa date d'exécution effective \tilde{A}_1 pour une durée globale \tilde{A}_2 , pour cela nous remarquons que :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1^{(i+1)} &= \tilde{A}_1^{(i)} + \tilde{A}_1 & \text{Avec } \forall i = \overline{1, n-1}, \quad \tilde{A}_1^{(1)} &= \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2^{(j)} &= \tilde{A}_2 \quad \forall j = \overline{1, n} \end{aligned}$$

IV.3.2. Politique de commande

Comme la politique IMP, la politique GIMP est basée sur le principe de garantir un niveau du stock h durant une première période. Ce niveau du stock est supposé garantir la continuité de la satisfaction de la demande durant les périodes d'indisponibilité de la machine, au pire des cas, jusqu'à la date T de la maintenance préventive. Après cette phase de construction du stock, et durant l'intervalle $[h/a, \tilde{A}_1^{(1)}]$ la machine fonctionne à la demande en attendant la date de début de la première TST. Notons que durant cet intervalle la machine peut tomber en panne.

À partir de la date $t = \tilde{A}_1^{(1)}$ la machine sera en basculement entre des périodes de sous-traitance, et des périodes de production à la demande, jusqu'à la date de maintenance préventive. Formellement, la politique de commande peut être résumée comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } \left(t < \frac{h}{\alpha} \right) \\ d & \text{Si } \left(\frac{h}{\alpha} \leq t < A_1^{(1)} \right) \\ & \text{ou } \left(A_1^{(i)} + \tilde{A}_2^{(i)} < t < A_1^{(i+1)} \right) \forall i = \overline{1, n-1} \\ & \text{ou } \left(A_1^{(n)} + \tilde{A}_2^{(n)} < t < T \right) \\ 0 & \text{Si la machine est en panne ou allouée à une TST} \end{cases}$$

À travers la figure ci-dessous nous remarquons l'impact de cette politique de commande sur l'évolution du niveau du stock pendant un cycle.

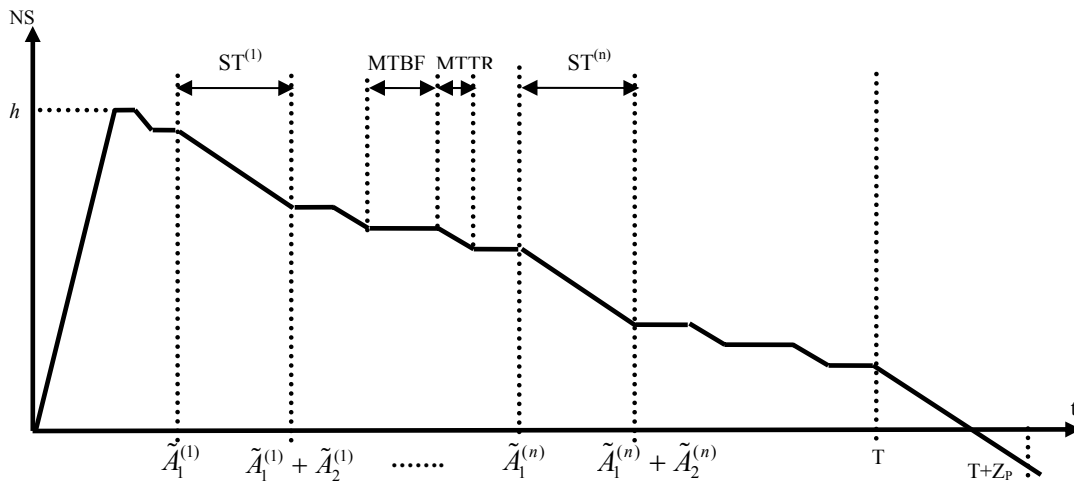


Figure IV.2. Évolution du niveau du stock pendant un cycle avec la politique GIMP.

Nous distinguons sur cette figure que le niveau du stock passe par différentes phases. D'abord, la phase I de construction pendant laquelle le niveau du stock croît avec le ratio a . Après cette phase, la machine produit à la demande jusqu'à la date de la première TST. Pendant cette période le niveau du stock peut diminuer à cause des pannes de la machine.

Ensuite, la machine est allouée pour effectuer n TST pendant lesquelles le niveau du stock décroîtra, car la production est indisponible, mais la demande continue de puiser dans le stock. À chaque fois que la machine revient de la sous-traitance elle se met en mode de production à la demande. Pendant de telles périodes, le stock est stable, mais peut décroître à cause des éventuelles pannes.

À la date $t = T$, et pour une durée moyenne Z_p , la machine fera l'objet d'une action de maintenance préventive pendant laquelle le niveau du stock diminuera à cause de la demande. Ce qui causé dans certains cas des situations de pénurie.

IV.3.3. Politique d'affectation à la sous-traitance

En se basant sur l'hypothèse 1 de la politique GIMP, la politique d'affectation à la sous-traitance suppose que la machine sera allouée pour effectuer n TST par cycle. Ces TST arrivent avec une fréquence A_1 , pour durer une période utile A_2 , et une durée globale \tilde{A}_2 .

Ainsi, la durée utile de toute la sous-traitance pendant un cycle est :

$$D_{\text{sous-traitance}}^{\text{utile}} = nA_2$$

Par ailleurs, la durée globale de toute la sous-traitance pendant un cycle est :

$$D_{\text{sous-traitance}}^{\text{globale}} = n\tilde{A}_2 = n(A_2 + \Phi(A_2)MTTR)$$

IV.3.4. Politique de maintenance

La politique GIMP repose sur une stratégie de maintenance basée sur la même logique que celle de la politique IMP. Cependant, nous constatons que cette stratégie de maintenance passe par différentes phases :

- Phase II : $[h/a, \tilde{A}_1^{(1)}]$: Pendant cette période la machine peut tomber en panne engendrant des actions de maintenance corrective de coût unitaire M_C .

Le nombre moyen de pannes pendant cette période est :

$$\Phi\left(\tilde{A}_1^{(1)} - \frac{h}{\alpha}\right) = \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi\left(\frac{h}{\alpha}\right) = \Phi(\tilde{A}_1)$$

– Phase III : Ce sont les périodes de sous-traitance, équivalentes aux intervalles $[\tilde{A}_1^{(1)}, \tilde{A}_1^{(1)} + \tilde{A}_2^{(1)}], [\tilde{A}_1^{(2)}, \tilde{A}_1^{(2)} + \tilde{A}_2^{(2)}], \dots, [\tilde{A}_1^{(n)}, \tilde{A}_1^{(n)} + \tilde{A}_2^{(n)}]$.

Le nombre moyen de pannes pendant une seule TST est $\Phi(A_2)$. Chaque panne pendant la sous-traitance engendre un coût $\tilde{M}_C > M_C$.

– Phase IV: Il s'agit de périodes de production à la demande séparant les périodes de sous-traitance, c'est-à-dire les intervalles $[\tilde{A}_1^{(1)} + \tilde{A}_2^{(1)}, \tilde{A}_1^{(2)}], [\tilde{A}_1^{(2)} + \tilde{A}_2^{(2)}, \tilde{A}_1^{(3)}], \dots, [\tilde{A}_1^{(n-1)} + \tilde{A}_2^{(n-1)}, \tilde{A}_1^{(n)}], [\tilde{A}_1^{(n)} + \tilde{A}_2^{(n)}, T]$. Pendant cette phase la machine sera sujette à des actions de maintenance corrective de coût unitaire M_C .

Pour une période séparant deux TST successives, le nombre moyen de pannes est :

$$\Phi([\tilde{A}_1^{(i-1)} + \tilde{A}_2^{(i-1)}, \tilde{A}_1^{(i)}]) = \Phi(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \quad \forall i = \overline{2, n}$$

– Phase V: à $t = T$ la machine subit une action de maintenance préventive de durée moyenne Z_P , engendrant un coût unitaire M_P .

IV.3.5. Équation du coût de la politique GIMP

L'objectif de la politique GIMP est de déterminer l'âge optimal de la maintenance préventive et la capacité optimale du stock qui doit être assurée par la production durant la phase I de construction des actions. Ces valeurs optimales sont déterminées en se basant sur un critère du coût total moyen par cycle et sur une contrainte quantitative de la sous-traitance, car – rappelons le – le système sera contraint à effectuer n TST pendant un cycle T .

Cependant la structure du coût ne changera pas, comparé à cela de IMP, et sera de la forme :

$$C_t^{GIMP} = (L_S^{GIMP} + L_P^{GIMP} + L_M^{GIMP})$$

Avec L_S^{GIMP} , L_P^{GIMP} et L_M^{GIMP} qui représentent respectivement les coûts moyens par cycle de gestion du stock, pénurie et des actions de maintenance, associés à la politique GIMP.

IV.3.5.1. Expression du coût de stockage

À partir de la figure IV.2, nous remarquons que l'aire de la surface de stockage générée par la politique GIMP est composée des aires suivantes :

- $Z_{\text{phase I}}$: il s'agit de la phase I de construction du stock.
- $Z_{\text{phase II}}$: c'est la période qui sépare le moment où le niveau h du stock est atteint et la date d'exécution effective de la 1^{ère} TST. Pendant cette période la machine produit à la demande, et peut être en panne.
- Z_d : c'est la surface totale des périodes de production à la demande. On distinguera la dernière période séparant la dernière TST et la date de maintenance préventive.
- Z_{tst} : représente la surface totale des périodes de sous-traitance.
- Z_{MP} : correspond à période de maintenance préventive.

Dans ce qui suit nous déterminerons l'expression de chacune de ces aires de surfaces, en supposons que le nombre moyen de panne pendant les périodes de TST sont égales.

- Expression de surface de stockage pendant la phase 1:

L'expression de la surface générée par l'évolution du niveau du stock pendant cette phase est donnée par :

$$Z_{\text{phase I}} = \frac{h^2}{2(U_{\text{max}} - d)} = \frac{1}{2\alpha} h^2$$

- Expression de surface de stockage pendant les périodes de production à la demande :

Parmi toutes les périodes de production à la demande nous distinguerons trois types, en basant leur durée respective sur :

- La période précédant la première TST (Phase II). Sa durée est fixe mais dépend à la fois de la fréquence de la sous-traitance et la durée de la phase I.
- Périodes entre deux TST successives : ce sont les $(n-1)$ périodes séparant les n TST. Leur durée est fixe et dépend en même temps de la fréquence et la durée de la sous-traitance.
- La période séparant la dernière TST et la date de maintenance préventive. Sa durée dépend de toutes les autres périodes, ainsi que la durée du cycle.

Avant de commencer à établir les expressions de chaque type, nous présentons d'abord un modèle de l'expression d'une période de production à la demande qui sera la base du calcul de toutes les périodes de production à la demande.

Prenons une période $[t_1, t_2]$ de production à la demande. La surface correspondant à l'évolution du stock pendant cette période suit la forme illustrée sur la figure suivante :

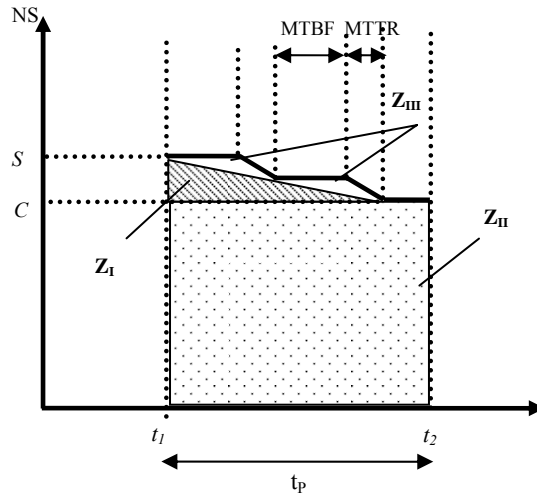


Figure VI.3. Évolution du niveau du stock durant une période de production à la demande.

Nous posons les notations suivantes nécessaires dans le reste du calcul : t_i : dates de changement du niveau du stock. $i = 1, 2$.

- $t_p = t_2 - t_1$: durée de cette période.

- S, C : niveaux du stock au début et à la fin de cette période (c'est-à-dire aux instants t_1 et t_2).

- Z : l'expression de l'aire de surface correspondant à l'évolution du stock durant cette période, tel que :

$Z = Z_I + Z_{II} + Z_{III}$. (voir figure IV.3).

Nous avons :

$$\begin{aligned} C &= S - ((\Phi(t_2) - \Phi(t_1)) \cdot MTTR \cdot d) \\ &= S - (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d) \end{aligned} \tag{1.a}$$

En plus :

$$\begin{aligned} \circ \quad Z_I &= \frac{1}{2} t_p (S - C) \\ &= \frac{1}{2} t_p (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d) \end{aligned} \tag{1.b}$$

$$\circ \quad Z_{II} = t_p \cdot C \quad (1.c)$$

$$\begin{aligned} \circ \quad Z_{III} &= \frac{1}{2}(\Phi(t_p)) \left(\frac{1}{2}((MTBF + MTTR) \cdot MTTR \cdot d) - \frac{1}{2}MTTR \cdot MTTR \cdot d \right) \\ &= \frac{1}{4}\Phi(t_p)MTBF \cdot MTTR \cdot d \end{aligned} \quad (1.d)$$

Par conséquent, l'aire de la surface générée par le niveau du stock, correspondant à une période de production à la demande, est donnée par l'expression suivante :

$$Z = t_p S - \frac{1}{2}t_p (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d) + \frac{1}{4}\Phi(t_p)MTBF \cdot MTTR \quad (1.e)$$

i. Expression de l'aire de surface de la phase II

La phase II consiste en période intermédiaire entre la phase construction du stock et la première TST.

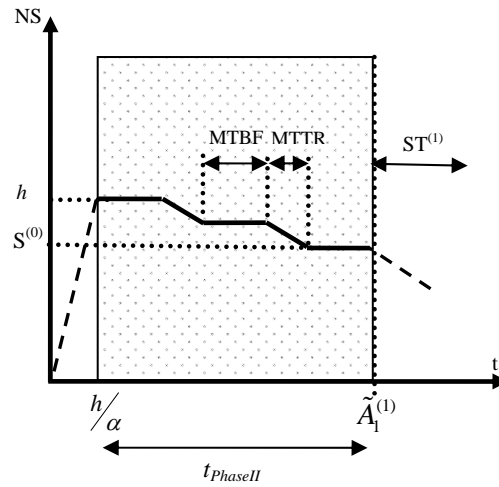


Figure IV.4. Évolution du niveau du stock durant la phase II.

Nous remarquons sur la figure ci-dessus que pendant la phase II de production à la demande le stock peut décroître à cause des pannes de la machine. Ceci influence le niveau du stock au début de la première TST.

Nous avons :

$$\begin{aligned} t_{PhaseII} &= \tilde{A}_1^{(1)} - \left(\frac{h}{U_{\max} - d} \right) \\ &= \tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \end{aligned}$$

Et :

$$\Phi(t_{PhaseII}) = \Phi\left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha}\right) = \Phi(\tilde{A}_1)$$

Ainsi, à partir des équations du modèle général d'une période de production à la demande déterminées précédemment, nous obtenons :

$$(1.a) \Rightarrow S^{(0)} = h - (\Phi(\tilde{A}_1)MTTR \cdot d)$$

$$(1.b) \Rightarrow Z_i^{PhaseII} = \frac{1}{2}\left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha}\right) \left((\Phi(\tilde{A}_1)MTTR \cdot d) \right)$$

$$(1.c) \Rightarrow Z_u^{PhaseII} = \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha}\right) \left(h - (\Phi(\tilde{A}_1)MTTR \cdot d) \right)$$

$$(1.d) \Rightarrow Z_m^{PhaseII} = \frac{1}{4} \Phi(\tilde{A}_1) MTBF.MTTR.d$$

$$(1.e) \Rightarrow Z_{PhaseII} = Z_i^{PhaseII} + Z_u^{PhaseII} + Z_m^{PhaseII}$$

$$= \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) h - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{h}{\alpha} \right) \left(\Phi(\tilde{A}_1).MTTR.d \right) + \frac{1}{4} \Phi(\tilde{A}_1) MTBF.MTTR$$

Alors :

$$Z_{PhaseII} = \left(-\frac{1}{\alpha} \right) h^2 - \frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{\Phi(\tilde{A}_1).MTTR.d}{\alpha} \right) h + \left(\frac{1}{4} MTBF - \frac{1}{2} d\tilde{A}_1 \right) \Phi(\tilde{A}_1) MTTR$$

Ce qui représente l'expression de l'aire de la surface générée par l'évolution du niveau du stock pendant la phase II.

ii. Expression de l'aire de surface des périodes de production à la demande, séparant deux TST successives

Les périodes de production à la demande séparant deux TST successives dépendent de la fréquence et la durée des TST. Figure IV.5 illustre l'évolution du niveau du stock durant deux périodes de production à la demande.

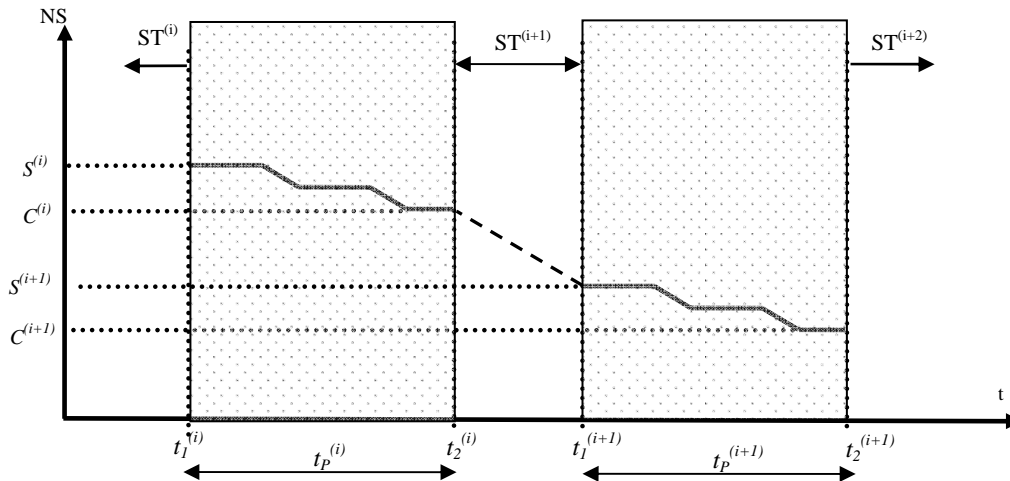


Figure IV.5. Évolution du niveau du stock durant deux périodes de production à la demande.

Comme la date d'exécution et la durée de la sous-traitance sont fixes, alors la durée séparant deux TST successives est fixe, et égale à A_1 . (Figure IV.6)

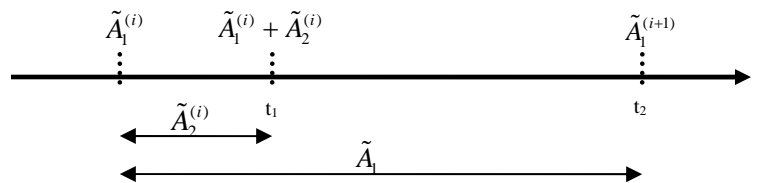


Figure IV.6. Durée d'une période de production à la demande séparant deux TST

Nous remarquons que la durée de la phase de production à la demande peut être exprimée de la façon suivante :

$$t_p^{(i)} = \tilde{A}_1 - \tilde{A}_2$$

$$\text{Ainsi : } \Phi(t_p^{(i)}) = \Phi(\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2)$$

$$= \Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)$$

En plus, la $i^{\text{ème}}$ période de production à la demande est caractérisée par un niveau du stock initial $C^{(i)}$ et un niveau final $S^{(i+1)}$ (figure ci-dessus). La relation entre ces deux niveaux est donnée par :

$$S^{(i+1)} = C^{(i)} - (d \cdot \tilde{A}_2^{(i+1)})$$

En remplaçant $C^{(i)}$ par son expression de l'équation (1.a) nous établissons la relation entre $S^{(i)}$ et $S^{(i+1)}$, qui représentent respectivement les niveaux du stock au début de deux TST successives. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} S^{(i+1)} &= (S^{(i)} - (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d)) - (d(A_2 + \Phi(A_2) \cdot MTTR)) \\ &= S^{(i)} - (\Phi(t_p) \cdot MTTR \cdot d + \Phi(A_2) \cdot MTTR \cdot d + dA_2) \\ &= S^{(i)} - \left((\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2)) \cdot MTTR \cdot d + \Phi(A_2) \cdot MTTR \cdot d + dA_2 \right) \end{aligned}$$

Alors:

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} - d \left(\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR + A_2 \right) \quad \text{Tel que } i = \overline{1, (n-1)} \quad (2.a)$$

D'un autre côté, $S^{(1)}$ qui représente le niveau du stock après la première TST est exprimé par :

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= S^{(0)} - (A_2 + \Phi(A_2) \cdot MTTR) \cdot d \\ &= h - (\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR \cdot d) - (A_2 + \Phi(A_2) \cdot MTTR) \cdot d \\ &= h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) \cdot MTTR \cdot d \end{aligned}$$

Notons $Z^{(i)}$ l'expression de l'aire de la surface de stockage de $i^{\text{ème}}$ période, tel que : $Z^{(i)} = Z_I^{(i)} + Z_{II}^{(i)} + Z_{III}^{(i)}$.

Alors :

$$\begin{aligned} (1.b) \Rightarrow Z_I^{(i)} &= \frac{1}{2} (t_p^{(i)}) (\Phi(t_p^{(i)}) \cdot MTTR \cdot d) \\ &= \frac{1}{2} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left((\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \cdot MTTR \cdot d \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.c) \Rightarrow Z_{II}^{(i)} &= t_p^{(i)} \cdot C^{(i)} \\ &= t_p^{(i)} \cdot (S^{(i)} - (\Phi(t_p^{(i)}) \cdot MTTR \cdot d)) \\ &= (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left(S^{(i)} - \left((\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \cdot MTTR \cdot d \right) \right) \end{aligned}$$

$$(1.d) \Rightarrow Z_{III}^{(i)} = \frac{1}{4} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \cdot MTBF \cdot MTTR \cdot d$$

Donc :

$$Z^{(i)} = (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) S^{(i)} - \frac{1}{2} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left((\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \cdot MTTR \cdot d \right) + \frac{1}{4} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \cdot MTBF \cdot MTTR \cdot d$$

À ce stade, nous pouvons établir l'expression de la surface totale des périodes de production à la demande, notée Z'_d , telle que : $Z'_d = \sum_{i=1}^{n-1} Z^{(i)}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 Z'_d &= \sum_{i=1}^{n-1} Z^{(i)} \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} (Z_I^{(i)} + Z_{II}^{(i)} + Z_{III}^{(i)}) \\
 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) S^{(i)} - \frac{1}{2} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left((\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTTR.d \right) + \frac{1}{4} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF.MTTR.d \right) \\
 &= -\frac{1}{2} MTTR.d(n-1) \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF + \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) S^{(i)} \\
 &= \left(-\frac{1}{2} MTTR.d(n-1) \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF \right) + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \sum_{i=1}^{n-1} S^{(i)}
 \end{aligned}$$

Mais: $\sum_{i=1}^{(n-1)} (S^{(i)}) = (S^{(1)} + S^{(2)} + \dots + S^{(n-1)})$

Donc, à partir de l'équation (2.a), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{(n-1)} (S^{(i)}) &= \left(\left(S^{(1)} + \left(S^{(1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) + \dots + \left(S^{(n-1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) \right) \right) \\
 &= \left(\left(S^{(1)} + \left(S^{(1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) + \dots + \left(S^{(1)} - (n-1) \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) \right) \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(S^{(1)} - (i-1) \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) \right) \\
 &= \left(\left((n-1) S^{(1)} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} (i-1) \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \right) \right) \right) \\
 &= \left(\left((n-1) S^{(1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \left(\sum_{i=1}^{n-1} (i-1) \right) \right) \right) \\
 &= \left(\left((n-1) S^{(1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \left(\frac{(n-1)(0+(n-2))}{2} \right) \right) \right) \\
 &= \left(\left((n-1) S^{(1)} - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \right) \right) \tag{3.a}
 \end{aligned}$$

Sachant que $S^{(1)} = h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR.d$.

Par conséquent, l'expression de Z'_d sera de la forme :

$$\begin{aligned}
 Z'_d &= \left(-\frac{1}{2} MTTR.d(n-1) \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF \right) \\
 &\quad + (A_1 - \tilde{A}_2) \left(\left((n-1) \left(h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR.d \right) - \left(d(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \right) \right)
 \end{aligned}$$

qui représente l'expression de l'aire de la surface totale des périodes séparant deux TST successives.

iii. Expression de l'aire de surface de la dernière période de production à la demande

Cette période de production à la demande sépare la dernière TST et la période de maintenance préventive. Sa durée dépend à la fois de la durée du cycle, ainsi que du nombre des TST réalisées, de leurs durées et leurs fréquences.

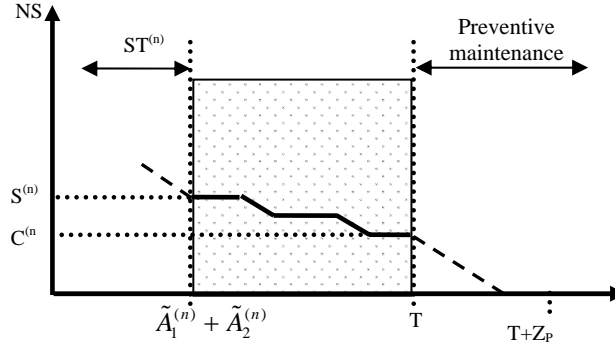


Figure IV.7. Évolution du stock durant la dernière période de production à la demande

Cette figure illustre l'évolution du niveau du stock durant la période séparant la dernière TST et l'action de maintenance préventive.

Nous remarquons que l'expression de la durée de cette période ne suit pas l'expression (1.a). Cependant, elle sera exprimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} t_p^{(n)} &= T - (n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \\ &= T - (n\tilde{A}_1 + (A_2 + \Phi(A_2).MTTR)) \end{aligned}$$

En plus :

$$\begin{aligned} \Phi(t_p^{(n)}) &= \Phi(T) - \Phi(n\tilde{A}_1 + (A_2 + \Phi(A_2).MTTR)) \\ &= \Phi(T) - \Phi(n\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \\ &= \Phi(T) - n\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2) \end{aligned}$$

Notons $Z_d^{(n)}$ l'expression de l'aire de surface correspondant à la dernière période de production à la demande. Telle que : $Z_d^{(n)} = Z_I^{(n)} + Z_{II}^{(n)} + Z_{III}^{(n)}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} (1.b) \Rightarrow Z_I^{(n)} &= \frac{1}{2} t_p^{(n)} (\Phi(t_p^{(n)}) . MTTR . d) \\ &= \frac{1}{2} (T - (n\tilde{A}_1 + (A_2 + \Phi(A_2).MTTR))) ((\Phi(T) - n\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) . MTTR . d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.c) \Rightarrow Z_{II}^{(n)} &= t_p^{(n)} C^{(n)} \\ &= t_p^{(n)} . (S^{(n)} - (\Phi(t_p^{(n)}) . MTTR . d)) \end{aligned}$$

Mais, en se référant à l'équation (2.a) nous avons :

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} - d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \quad \forall i = \overline{1, (n-1)}$$

Tel que : $S^{(1)} = h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR d$

Alors :

$$\begin{aligned} S^{(i+1)} &= (S^{(i-1)} - d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2)) - d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \\ &= (S^{(i-1)} - 2d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2)) \end{aligned}$$

Par récursivité nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 S^{(i+1)} &= \left(S^{(i-k)} - (k+1)d \left(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2 \right) \right) \quad \forall 0 \leq k \leq i \\
 &= \left(S^{(1)} - (i)d \left(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2 \right) \right) \\
 \text{Donc : } S^{(n)} &= \left(S^{(1)} - (n-1)d \left(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2 \right) \right) \quad (4.a)
 \end{aligned}$$

Et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 Z_{ii}^{(n)} &= \left(h - MTTRdA_2 - MTTRd\Phi(A_2) - dnA_2 + dA_2 - MTTRd\Phi(T) + MTTRd\Phi(\tilde{A}_2) \right) T \\
 &\quad + d \left(n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR \right) \left(-A_2 + MTTRA_2 + \Phi(A_2) MTTR + nA_2 + \Phi(T) MTTR - MTTR\Phi(\tilde{A}_2) \right) \\
 &\quad + \left(-n\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right) h
 \end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
 (1.d) \Rightarrow Z_{iii}^{(n)} &= \frac{1}{4} \Phi(t_p^{(n)}) MTBF.MTTR.d \\
 &= \frac{1}{4} \left(\Phi(T) - n\Phi(A_1) - \Phi(\tilde{A}_2) \right) MTBF.MTTR.d
 \end{aligned}$$

Par conséquent, la surface de la dernière période de production à la demande est donnée par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 Z_d^{(n)} &= \left(\left(-A_2 - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(\tilde{A}_2) - \frac{1}{2} n\Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR - (n-1)A_2 + h \right) dT \\
 &\quad + d \left(\frac{1}{2} MTTR \cdot \left(-\Phi(T) + n\Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\tilde{A}_2) \right) \left(n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR - \frac{1}{2} MTBF \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR \right) \left(\left(A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2) \right) MTTR - (n-1)A_2 \right) \right) \\
 &\quad + \left(-n\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right) h
 \end{aligned}$$

- Expression de surface de stockage pendant les périodes de sous-traitance :

Intéressons nous d'abord à la surface d'une seule période de sous-traitance, c'est-à-dire la $i^{\text{ème}}$ TST :

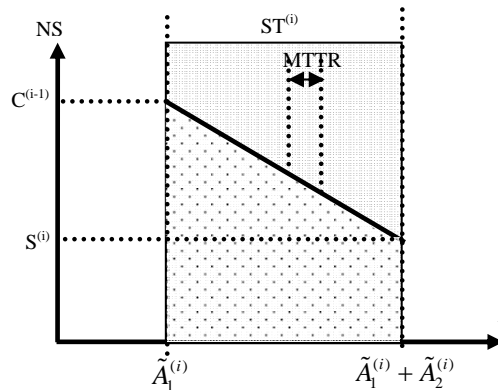


Figure IV.8. Évolution du stock durant une TST.

La figure ci-dessus illustre l'évolution du niveau du stock durant la $i^{\text{ème}}$ TST. L'expression de l'aire de surface générée est :

$$Z_{tsi}^{(i)} = S^{(i)} \tilde{A}_2 + \frac{1}{2} d \left(\tilde{A}_2 \right)^2$$

Et comme : $\tilde{A}_2 = (A_2 + \Phi(A_2)MTTR)$

Alors :

$$Z_{ist}^{(i)} = \left((A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \left(S^{(i)} + \frac{1}{2}d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right) \right)$$

L'expression de la surface totale des périodes de sous-traitance sera notée Z_{ist} .

Avec :

$$\begin{aligned} Z_{ist} &= \sum_{i=1}^n Z_{ist}^{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left((A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \left(S^{(i)} + \frac{1}{2}d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right) \right) \\ &= (A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \left(n \left(\frac{1}{2}d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right) + \sum_{i=1}^n S^{(i)} \right) \end{aligned}$$

Cependant, nous rappelons que l'équation (2.a) est :

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} - d \left(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2 \right)$$

En plus, d'après l'équation (3.a) nous avons trouvé précédemment que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} S^{(i)} = \left(((n-1)S^{(1)}) - \left(d \left(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2 \right) \right) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \right)$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n S^{(i)} = \left(((n)S^{(1)}) - \left(d \left(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2 \right) \right) \left(\frac{(n)(n-1)}{2} \right) \right)$$

Mais, d'un autre côté nous avons : $S^{(1)} = h - (A_2 + \Phi(A_1) + \Phi(A_2))MTTRd$

Alors :

$$Z_{ist} = (A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \left(n \left(\frac{1}{2}d(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \right) + \left(\left(n(h - (A_2 + \Phi(A_1) + \Phi(A_2))MTTRd) \right) - \left(d \left(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2 \right) \right) \left(\frac{(n)(n-1)}{2} \right) \right) \right)$$

Donc, nous obtenons :

$$\begin{aligned} Z_{ist} &= \left((A_2 + \Phi(A_2)MTTR)n \right) h - \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) \left(A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2) \right) dn^2 \\ &\quad + (A_2 + \Phi(A_2)MTTR) d \left(\frac{1}{2}(A_2 + \Phi(A_2)MTTR) - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2))MTTR + \frac{1}{2}(A_2 + \Phi(\tilde{A}_1)MTTR) \right) n \end{aligned}$$

Ce qui représente l'expression de l'aire de surface totale générée par l'évolution du niveau du stock pendant les n périodes de sous-traitance.

- Expression de surface de stockage pendant la période de maintenance préventive :

Un cycle est délimité par une action de maintenance préventive réalisée à partir de la date T pour une durée moyenne Z_p , pendant laquelle l'évolution du niveau du stock est illustrée par figure IV.9.

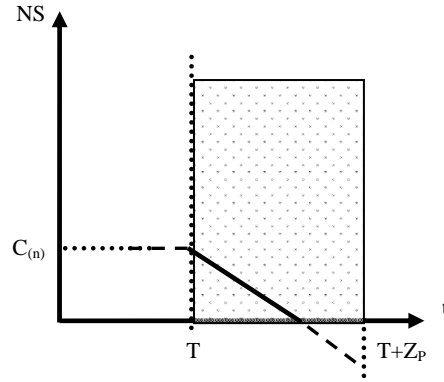


Figure IV.9. Évolution du stock durant la période de maintenance préventive.

Notons Z_{MP} l'expression de la surface correspondant à l'évolution du stock durant la période de maintenance préventive.

Nous avons :

$$Z_{MP} = \frac{(C^{(n)})^2}{2d}$$

$C^{(n)}$ représente le niveau du stock à la date $t = T$, c'est-à-dire à la fin de dernière période de production à la demande. À partir de l'équation (1.a) et (4.a) nous avons :

$$\begin{aligned} C^{(n)} &= S^{(n)} - (\Phi(t_p^{(n)}).MTTR.d) \\ S^{(n)} &= (S^{(1)} - (n-1)d(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2)) \end{aligned}$$

Alors :

$$C^{(n)} = (S^{(1)} - (n-1)d(\Phi(\tilde{A}_1)MTTR + A_2)) - (\Phi(t_p^{(n)}).MTTR.d)$$

En remplaçant $S^{(1)}$ par sa valeur nous trouvons :

$$C^{(n)} = h - d.MTTR(A_2 + \Phi(A_2) + (n)\Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(t_p^{(n)})) - (n-1)dA_2$$

Par conséquent, nous aurons :

$$Z_{MP} = \frac{1}{2d} \left(h - d.MTTR(A_2 + \Phi(A_2) + (n)\Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(t_p^{(n)})) - (n-1)dA_2 \right)^2$$

Mais : $\Phi(t_p^{(n)}) = \Phi(T) - n\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)$

Alors :

$$Z_{MP} = \frac{1}{2d} \left(h - d.MTTR(A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2)) - (n-1)dA_2 \right)^2$$

Z_{MP} représente alors l'expression de l'aire de surface générée par l'évolution du niveau du stock pendant la période de maintenance préventive.

- Expression totale du coût moyen de stockage :

À partir de l'expression de la surface de chaque période, nous obtenons l'expression du coût moyen de stockage sous la forme suivante :

$$L_S^{GIMP} = \left(\frac{C_S}{T + Z_p} \right) \left[\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR \cdot d}{\alpha} \right) h + \left(\frac{1}{4} MTBF - \frac{1}{2} d \cdot \tilde{A}_1 \right) \Phi(\tilde{A}_1) MTTR \\ & + \left(-\frac{1}{2} MTTR \cdot d (n-1) \left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF \right) \\ & + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left[\left((n-1) (h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR d) \right) \right. \\ & \quad \left. - (d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2)) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \right] + (-n\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR) h \\ & + \left(\left(-A_2 - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(\tilde{A}_2) - \frac{1}{2} n \Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR - (n-1) A_2 + h \right) d T \\ & + d \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} MTTR \cdot (-\Phi(T) + n \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\tilde{A}_2)) \left(n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR - \frac{1}{2} MTBF \right) \right) \\ & + (n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR) \left((A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTTR - (n-1) A_2 \right) \end{aligned} \right] \\ & + \left((A_2 + \Phi(A_2) MTTR) n \right) h - \frac{1}{2} (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) d n^2 \\ & + (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) d \left[\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR \right) \\ & + \frac{1}{2} (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) MTTR) \end{aligned} \right] n \\ & + \frac{1}{2d} \left(h - d MTTR (A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2)) - (n-1) d A_2 \right)^2 \end{aligned} \right]$$

IV.3.5.2. Expression du coût de pénurie

Comme dans toutes les politiques IMP, la pénurie est le résultat d'une insuffisance de stock disponible à l'instant $t = T$ pour pouvoir satisfaire la demande durant la période de maintenance préventive. Sachant que le niveau du stock NS à la date T est : $NS(T) = h - d (\Phi(T) MTTR + n A_2)$.

Alors, le coût moyen par cycle de pénurie pendant un cycle a l'expression suivante :

$$L_p^{GIMP} = \left(\frac{C_p}{T + Z_p} \right) \left(d Z_p - (h - d (\Phi(T) MTTR + n A_2)) \right)$$

IV.3.5.3. Expression du coût de maintenance

Selon la stratégie de maintenance de la politique GIMP nous notons que les coûts concernant la maintenance se décomposent de la façon suivante :

- Une action de maintenance préventive coûtant le M_p ,
- Des actions de la maintenance corrective hors sous-traitance coûtant M_c ,
- Des actions de maintenance corrective pendant les n TST, coûtant \tilde{M}_c .

Ainsi, le coût de la maintenance pendant un cycle aura l'expression suivante :

$$\begin{aligned} L_M &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(M_p + M_c \Phi(T - n A_2) + \tilde{M}_c (n \Phi(A_2)) \right) \\ &= \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(M_p + M_c (\Phi(T) - n \Phi(A_2)) + \tilde{M}_c (n \Phi(A_2)) \right) \end{aligned}$$

Alors, l'expression du coût moyen de maintenance par cycle de la politique GIMP est :

$$L_M = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(M_p + M_c \Phi(T) + (\tilde{M}_c - M_c) n \Phi(A_2) \right)$$

IV.3.5.4. Expression du coût total moyen par cycle

Le coût total moyen par le cycle se compose des coûts de stockage, de pénurie et de maintenance. À partir des expressions de ces coûts trouvées lors des sections précédentes, l'expression du coût total moyen par cycle de la politique GIMP est donné par :

$$C_t^{GIMP} = \left(\frac{1}{T + Z_p} \right) \left(C_s \left[-\frac{1}{2} \left(\tilde{A}_1 - \frac{\Phi(\tilde{A}_1) \cdot MTTR \cdot d}{\alpha} \right) h + \left(\frac{1}{4} MTBF - \frac{1}{2} dA_1 \right) \Phi(\tilde{A}_1) MTTR \right. \right. \\ \left. \left. + \left(-\frac{1}{2} MTTR \cdot d (n-1) \left(\left((\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) \right) + \frac{1}{2} (\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTBF \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (\tilde{A}_1 - \tilde{A}_2) \left[\left((n-1)h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR d \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left(d (\Phi(\tilde{A}_1) MTTR + A_2) \right) \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} \right) \right] - (n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR) h \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(-A_2 - \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(T) + \frac{1}{2} \Phi(\tilde{A}_2) - \frac{1}{2} n\Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR - (n-1)A_2 + h \right) d \cdot T \right. \right. \\ \left. \left. + d \left[\frac{1}{2} MTTR \cdot (-\Phi(T) + n\Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(\tilde{A}_2)) \left(n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR - \frac{1}{2} MTBF \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (n\tilde{A}_1 + A_2 + \Phi(A_2) MTTR) \left((A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2)) MTTR - (n-1)A_2 \right) \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left((A_2 + \Phi(A_2) MTTR) n \right) h - \frac{1}{2} (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) dn^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) d \left[\frac{1}{2} (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{2} (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) MTTR) \right] n \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2d} \left(h - d \cdot MTTR (A_2 + \Phi(A_2) + \Phi(T) - \Phi(\tilde{A}_2)) - (n-1) dA_2 \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. + C_p \left(dZ_p - (h - d (\Phi(T) MTTR + nA_2)) \right) \right) + M_p + M_c \Phi(T) + (\tilde{M}_c - M_c) n\Phi(A_2) \right)$$

IV.3.5.5. Optimisation

Comme pour toute politique inspirée de la politique IMP, le critère de l'optimisation de la politique GIMP est basé sur une minimisation du coût total moyen par cycle, en déterminant le meilleur couplet (T, h) déterminant l'âge optimal de la maintenance préventive et la capacité optimale du stock assurée pendant la phase I.

Ainsi, par la dérivation de l'expression du coût total moyen par rapport à h , nous trouvons :

$$\frac{\partial C_t^{GIMP}}{\partial h} = \frac{1}{(T + Z_p)} \left(-C_s MTTR \Phi(T) + C_s dT + C_s \left(\frac{-1}{\alpha} + \frac{1}{d} \right) h \right. \\ \left. + C_s \left[-\frac{1}{2} \tilde{A}_1 + \frac{1}{2\alpha} \Phi(\tilde{A}_1) MTTR d + (\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR) (n-1) \right. \right. \\ \left. \left. + (A_2 + \Phi(A_2) MTTR) n - n\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{d} (-MTTR dA_2 - (n-1) dA_2) \right] - C_p \right)$$

Après simplification nous obtenons :

$$\frac{\partial C_i^{GIMP}}{\partial h} = \frac{1}{(T+Z_p)} \left(C_s dT - C_s MTTR \Phi(T) + C_s \left(\frac{-1}{\alpha} + \frac{1}{d} \right) h \right. \\ \left. + C_s \left(-\frac{3}{2} \tilde{A}_1 + \frac{1}{2\alpha} \Phi(A_1) MTTR d - (MTTR + (n-1)) A_2 \right) - C_p \right)$$

Ensuite, en annulant cette dérivée, nous établissons l'expression de h en fonction de T :

$$h^* = \left(\frac{\alpha d^2}{d-\alpha} \right) T - \left(\frac{\alpha d}{d-\alpha} \right) MTTR \Phi(T) + \left(\frac{\alpha d}{d-\alpha} \right) \left(-\frac{3}{2} \tilde{A}_1 + \frac{1}{2\alpha} \Phi(A_1) MTTR d - (MTTR + (n-1)) A_2 - \frac{C_p}{C_s} \right)$$

De plus, en dérivant C_i^{GIMP} par rapport à T, nous trouvons (après simplifications) :

$$\frac{\partial C_i^{T/GIMP}}{\partial T} = \frac{1}{(T+Z_p)^2} \left((T+Z_p) \left[C_s \left(\begin{aligned} & -\Phi(T) MTTR d + \left(\left(-A_2 - \frac{1}{2} \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(T) - \frac{1}{2} n \Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR + h - (n-1) A_2 \right) d \\ & + d \left(\begin{aligned} & -MTTR \Phi'(T) \left(n \tilde{A}_1 + \Phi(A_2) MTTR + A_2 - \frac{1}{2} MTBF \right) \\ & + 2 \left(n \tilde{A}_1 + \Phi(A_2) MTTR + A_2 \right) MTTR \Phi'(T) \\ & - 2 \left(h - MTTR d (A_2 + \Phi(T)) - (n-1) d A_2 \right) MTTR \Phi'(T) \end{aligned} \right) \right. \\ \left. + C_p MTTR d \Phi'(T) + M_c \Phi'(T) \right) \right. \\ \left. - C_s \left(\begin{aligned} & -\frac{1}{2\alpha} h^2 - \left(\frac{1}{2} \tilde{A}_1 - \frac{1}{2\alpha} \Phi(\tilde{A}_1) MTTR d \right) h + \left(\frac{1}{4} MTBF - \frac{1}{2} d \tilde{A}_1 \right) \Phi(\tilde{A}_1) MTTR \\ & - \frac{1}{2} MTTR d (n-1) \left(\left(\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right) \left(\Phi(\tilde{A}_1) - \Phi(A_2) \right) + \left(\frac{1}{2} \Phi(\tilde{A}_1) - \frac{1}{2} \Phi(A_2) \right) MTBF \right) \\ & + \left(\tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right) \left(\begin{aligned} & (n-1) \left(h - (A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2)) MTTR d \right) \\ & - d \left(\Phi(\tilde{A}_1) MTTR A_2 \right) \left(\frac{1}{2} n - \frac{1}{2} \right) (n-2) \end{aligned} \right) \right) \\ & + \left(\left(-A_2 - \frac{1}{2} \Phi(A_2) - \frac{1}{2} \Phi(T) - \frac{1}{2} n \Phi(\tilde{A}_1) \right) MTTR + h - (n-1) A_2 \right) dT + \left(-n \tilde{A}_1 - A_2 - \Phi(A_2) MTTR \right) h \\ & + d \left(\begin{aligned} & \frac{1}{2} MTTR \left(-\Phi(T) + n \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2) \right) \left(n \tilde{A}_1 + \Phi(A_2) MTTR + A_2 - \frac{1}{2} MTBF \right) \\ & + \left(n \tilde{A}_1 + \Phi(A_2) MTTR + A_2 \right) \left((A_2 + \Phi(T)) MTTR - (n-1) A_2 \right) \end{aligned} \right) \\ & + \left(A_2 + \Phi(A_2) MTTR \right) n h - \left(\frac{1}{2} A_2 + \frac{1}{2} \Phi(A_2) MTTR \right) \left(A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2) \right) d n^2 \\ & + \left(A_2 + \Phi(A_2) MTTR \right) d \left(A_2 + \frac{1}{2} \Phi(A_2) MTTR + \frac{1}{2} \Phi(\tilde{A}_1) MTTR - \left(A_2 + \Phi(\tilde{A}_1) + \Phi(A_2) \right) MTTR \right) n \\ & + \frac{1}{2d} \left(h - MTTR d (A_2 + \Phi(T)) - (n-1) d A_2 \right)^2 \end{aligned} \right) \right. \\ \left. + C_p (dZ_p - h + d(\Phi(T) MTTR + n A_2)) + M_p + M_c \Phi(T) + (\tilde{M}_c - M_c) n \Phi(A_2) \right)$$

IV.3.5.6. Exemple numérique

Dans la présente partie de notre étude nous présentons un exemple numérique pour pouvoir voir les résultats de l'application de la politique de GIMP sur notre système de production. Pour cela, nous nous sommes basés sur la même structure du coût et paramètres que ceux utilisés dans l'exemple numérique de la politique AIMP (voir la section IV.2.5.6). Cependant, la date d'exécution effective des TST est $\tilde{A}_1 = 100$ u.t.

La table suivante décrit la tendance du coût total moyen par cycle comparé à l'accroissement du nombre de TST que la machine doit réaliser pendant un cycle, ainsi que les valeurs optimales correspondantes de l'âge de maintenance préventive et la capacité optimale du stock.

n	T	h ($\times 10^3$)	$C_t^{T/GIMP}$ ($\times 10^4$)
1	51832	33227	52703
2	51834	33230	52717
3	51835	33233	52732
4	51837	33236	52746
5	51839	33239	52760
6	51840	33242	52775
7	51842	33245	52789
8	51844	33248	52803
9	51846	33251	52818
10	51847	33254	52832

Tableau IV.2. Évolution du coût moyen par cycle et les valeurs optimales de T et h par rapport au nombre de TST par cycle.

En interprétant les résultats de GIMP, nous notons d'abord que pour $n = 1$, l'âge optimal de maintenance préventive est $T^* = 51832$ u.t et la capacité optimale d'actions est $h^* = 33227(10^3)$ pièces. En comparant ce résultat à celui de AIMP où $T^* = 88.98$ u.t et $h^* = 614.31$ pièces, nous observons une grande différence en valeurs optimales et notamment le coût moyen produit (1571.7 m.u pour AIMP et 52856(10^4) m.u pour GIMP), bien que le nombre de TST soit le même !!

Dans ce cas, nous rappelons que pour GIMP la TST a été effectuée à $t = \tilde{A}_1 = 100$, mais pour AIMP, elle été réalisée à partir de $t = h/a$.

Pour cela, et pour établir une bonne base de comparaison entre IMP et GIMP quand $n = 1$ il est nécessaire d'homogénéiser le contexte des deux politiques et plus précisément l'hypothèse 1 de chaque politique.

En d'autres termes, nous notons que le cycle de AIMP ne peut pas contenir une TST arrivant à $t = \tilde{A}_1 = 100$, parce que $T^* = 88.98$ u.t. nous considérons ainsi - à partir des résultats de AIMP - le couplet (T_4, h_4) comme base de comparaison avec GIMP quand $n = 1$. Rappelons-nous que $T_4 = 56032$ u.t, $h_4 = 41050(10^3)$ pièces et le coût correspondant est ainsi $C_t^{AIMP}(T_4, h_4) \approx 37642(10^3)$ m.u, nous notons que le coût concernant AIMP est inférieur, bien que le cycle soit plus long et la capacité optimale du stock soit plus importante. Cela est causé par la date de début réalisation de la TST. Ainsi, nous concluons qu'en effectuant la TST plus tôt le coût diminuera (ce qui rejoint le résultat du théorème 2).

Généralement, nous notons que l'augmentation du coût total moyen est proportionnelle au nombre de TST effectuées pendant un cycle, parce qu'une TST fait prolonger le cycle ce qui demande un niveau encore plus important de stock à assurer pendant la construction du stock, produisant en conséquence un coût de stockage plus important.

L'augmentation du nombre de TST influe également sur le coût de maintenance en raison du coût élevé des actions de maintenance pendant la sous-traitance.

À partir des données calculées, nous pouvons exprimer la relation entre le nombre de TST réalisées pendant un cycle et le coût moyen généré sous forme suivante : $C_t^{GIMP} = (143454,55)n + (526886(10^3))$

Avec un coefficient d'auto-corrélation $R = 0.99$.

IV.4. La Politique de Maintenance Intégrée Relaxée (IMPR)

Vu la difficulté à étendre notre modèle analytique, dans cette section, nous aurons recours à la simulation, pour pouvoir relaxer l'hypothèse 2, qui stipule que la probabilité que la machine M tombe en panne pendant la phase I est supposée nulle. [Dahane, 2007E].

IV.4.1. Définition

La Politique de Maintenance Intégrée Relaxée IMPR prend en compte la probabilité que la machine M peut tomber en panne pendant la phase I de construction du stock.

Cependant, les hypothèses sur lesquelles la politique IMPR repose sont :

1. Pendant un cycle $[0, T+Z_p]$ la machine ne peut être allouée aux tâches de sous-traitances qu'une seule fois.

$$\left(\tilde{A}_1^{(k-1)} + \tilde{A}_2\right) < \left(T^{(k-1)} + Z_p\right) \leq \tilde{A}_1^{(k)}.$$

Avec : $\tilde{A}_1^{(k)}$: Date d'exécution effective de la $k^{\text{ème}}$ TST.

$T^{(k-1)}$: Date de maintenance préventive du $k^{\text{ème}}$ cycle.

2. Pendant la phase de construction du stock, la machine peut tomber en panne :

$$\Phi\left(\frac{h}{\alpha}\right) > 0$$

Tel que : $\alpha = \frac{h}{U_{\max} - d}$.

3. La date d'exécution effective de la sous-traitance coïncide exactement avec le moment où la capacité du stock h est assurée et qui ne sera plus la date $t = \tilde{A}_1 = h/a$, à cause des pannes de la machine. Ainsi la date de d'exécution effective de la TST sera :

$$\tilde{A}_1 = \frac{h}{\alpha} + \Omega$$

Et : Ω représente la somme du temps pendant lequel la machine est en panne durant la phase I, et le temps nécessaire pour récupérer la quantité puisée dans le stock pendant ces pannes.

IV.4.2. Politique de commande

La stratégie de commande de la politique IMPR se base sur la même logique que la politique IMP. Ainsi, la production est maximale pendant la phase I afin d'assurer le niveau désiré du stock, si ce n'est que la machine peut tomber en panne pendant cette phase I. Une fois le niveau h assuré, la machine sera allouée pour effectuer une TST. Au retour de la sous-traitance, la machine produit à la demande jusqu'à la date de maintenance préventive. Formellement, la politique de commande s'écrit comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t < \tilde{A}_1 \\ d & \text{Si } \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < t < T \\ 0 & \text{Si } M \text{ est en panne ou allouée à la TST} \end{cases}$$

L'impact de cette politique de commande sur l'évolution du niveau du stock pendant un cycle est illustré par la figure suivante :

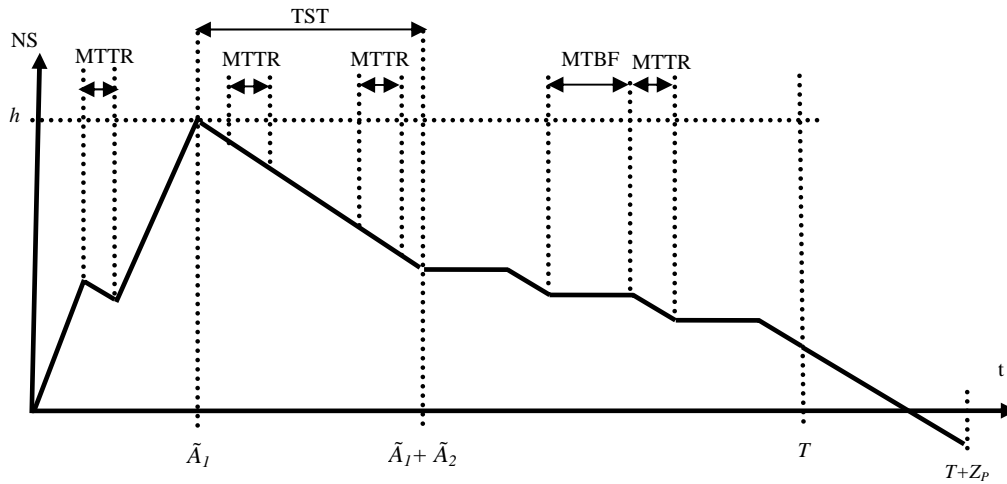


Figure IV.10. Évolution du niveau du stock pendant un cycle de la politique IMPR.

À travers cette figure, nous remarquons que le comportement du niveau du stock avec la politique IMPR est presque identique à celui de la politique AIMP (étudié dans la section IV.2.2) à la seule différence que pendant la phase I, le niveau du stock peut décroître à cause des pannes de la machine. La quantité puisée pendant ces périodes d'indisponibilité de la machine est récupérée avant la fin de la phase I, pour commencer la sous-traitance avec le niveau maximal h du stock. Mais signalons la possibilité que la TST ne soit exécutée qu'à partir du moment prévu \tilde{A}_1 . La conséquence immédiate de cette logique est que la machine ne sera plus allouée à la sous-traitance à partir de la date $t = \tilde{A}_1 = h/a$, mais un peu plus tard, à l'instant $t = \tilde{A}_1 = h/a + \Omega$. (hypothèse 3).

Pour déterminer Ω nous regroupons toutes les périodes de pannes de la machine pendant la phase I. Ainsi, nous posons les notations suivantes :

D_1 : période globale de panne de la machine M durant la phase I.

D_2 : période globale nécessaire pour récupérer l'équivalent de la demande pendant

Nous distinguons deux cas possibles :

Cas 1 : Il n'y a pas de pénurie

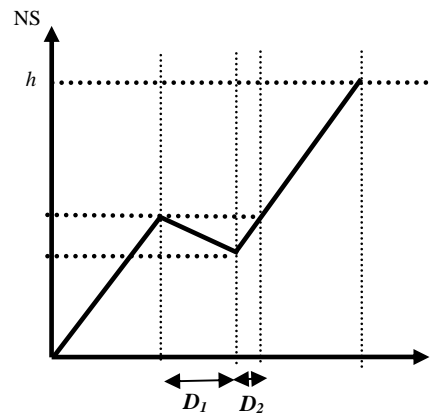


Figure IV.11. Cas 1 : Comportement du niveau du stock pendant la phase I.

La figure ci-dessus illustre le comportement du niveau du stock pendant la phase I de construction du stock dans le cas où il n'y pas de situation de pénurie. Dans ce cas nous obtenons :

$$D_1 = \Phi(h/\alpha)MTTR$$

et

$$D_2 = \frac{d\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$$

Ainsi, on a
$$\Omega = \frac{(\alpha + d)\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$$

Et par conséquent la date probable d'aller en TST est : $\tilde{A}_1 = \frac{h + (\alpha + d)\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$.

Cas 2 : Il y a une pénurie

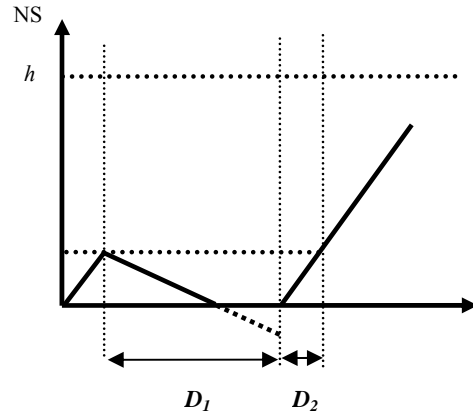


Figure IV.12. Cas 2 : Comportement du niveau du stock pendant la phase I.

La figure ci-dessus illustre le comportement du niveau du stock pendant la phase I de construction du stock dans le cas où il y a possibilité de pénurie. Dans ce cas nous obtenons :

$$D_1 = \Phi(h/\alpha)MTTR \quad \text{et} \quad D_2 < \frac{d\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$$

Ainsi, on a $\Omega < \frac{(\alpha + d)\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$

Et par conséquent la date probable d'aller en TST est : $\tilde{A}_1 < \frac{h + (\alpha + d)\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$

Dans le cas général, la phase I peut être composée des deux scénarios à la fois. Cela implique que pour la politique IMP^R la date probable d'exécution de la TST \tilde{A}_1 , est telle que :

$$\frac{h}{\alpha} \leq \tilde{A}_1 \leq \frac{h + (\alpha + d)\Phi(h/\alpha)MTTR}{\alpha}$$

IV.4.3. Politique d'affectation à la sous-traitance

La politique d'affectation à la sous-traitance de la politique IMP^R est la même que celle adoptée par la politique AIMP, et stipule que la machine soit allouée pour effectuer une seule TST par cycle exactement au moment où le niveau du stock h est atteint, pour une durée utile A_2 .

IV.4.4. Politique de maintenance

La politique IMP^R consiste à relaxer l'hypothèse que la machine est supposée neuve durant la phase I. De ce fait, la seule différence entre la politique IMP^R et la politique AIMP concernant la stratégie de maintenance peut être résumée par le fait que la machine subit des actions de maintenance corrective à chaque panne durant la phase I et engendrant un coût unitaire M_C .

IV.4.5. Modèle de simulation

Parmi les principes de la simulation à évènement discrets est la logique (la manière) avec laquelle le système évolue dans le temps. Il existe deux approches pour commander le temps :

- Le découpage du temps, dans ce cas, le système évolue avec des tranches de temps fixes.
- Le prochain évènement, dans cette approche, le système avance jusqu'au prochain évènement.

Dans cette partie de notre étude, la simulation est basée sur les deux approches. Nous avons d'abord découpé le temps en plusieurs intervalles de longueur $T+Z_p$ qui correspondent aux cycles de maintenance préventive, ce qui concorde avec les principes de la première approche.

Ensuite, et pour chaque cycle T l'évolution dans temps est basée dans un premier lieu sur un découpage de temps, engendrant quatre principaux états : phase I, TST, fonctionnement à la demande puis la maintenance préventive, et sur le principe du prochain évènement pendant chacun de ces quatre états. Les évènements susceptibles d'arriver dépendent de la nature de l'état du système (Une demande, fin de production d'une pièce, début de maintenance...), et font basculer la machine entre fonctionnement et maintenance, ou produisent des modifications sur les coûts engendrés.

La figure IV.13 ci-dessous décrit le fonctionnement de notre système pendant un cycle $T+Z_p$ qui résulte du découpage du temps de ce cycle. La machine M passe d'abord par une phase de construction du stock à sa cadence maximale. Pendant cette phase elle peut tomber en panne. En atteignant le niveau désiré, la machine est affectée pour effectuer une TST pour une période globale \tilde{A}_2 . À la suite de cette période, elle passe à un mode de fonctionnement à la demande jusqu'à la date T de maintenance préventive.

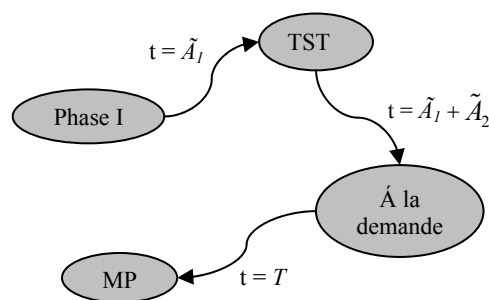


Figure IV.13. Découpage du temps, et les états de la machine M pendant un cycle.

Cependant, la figure IV.14, illustre les détails de l'évolution du temps durant chaque état du cycle. Nous remarquons sur la figure ci-dessous les différents états du système à chaque étape de son fonctionnement.

IV.4.5.1. Algorithme de simulation

Ainsi, et en se basant sur la logique décrite ci-dessus, l'algorithme que nous avons suivi dans notre simulation peut être résumé comme suit :

- Entrées :
- Les lois de pannes, maintenance préventive et corrective : $f(\cdot)$, $gp(\cdot)$, $gc(\cdot)$,
 - Fréquence de la sous-traitance : A_1 et sa durée : A_2 ,
 - Les paramètres de la demande d ,
 - Les coûts des maintenances : M_P , M_C , \tilde{M}_C , coût de stockage : C_S , coût de pénurie : C_p .
 - Temps de simulation : $tsim$.

Sorties : coût total moyen par cycle pour chaque couplet (T, h) .

Début

- Pour chaque couplet (T, h) , Faire :
 - Initialiser l'état du système à l'état de fonctionnement.
 - Tant que $tsim$ n'est pas écoulé faire simuler le fonctionnement du système :
 - Simuler un le fonctionnement de la machine M pendant un cycle T
 - Lire l'état du système e .
 - Déterminer le prochain évènement parmi l'ensemble des évènements correspondants à e .
 - Effectuer les mises à jours (les coûts, le niveau du stock,...) appropriées à cet évènement.
 - Éventuellement, basculer vers le nouvel état du système.
 - Enregistrer le coût résultant.

Fin.

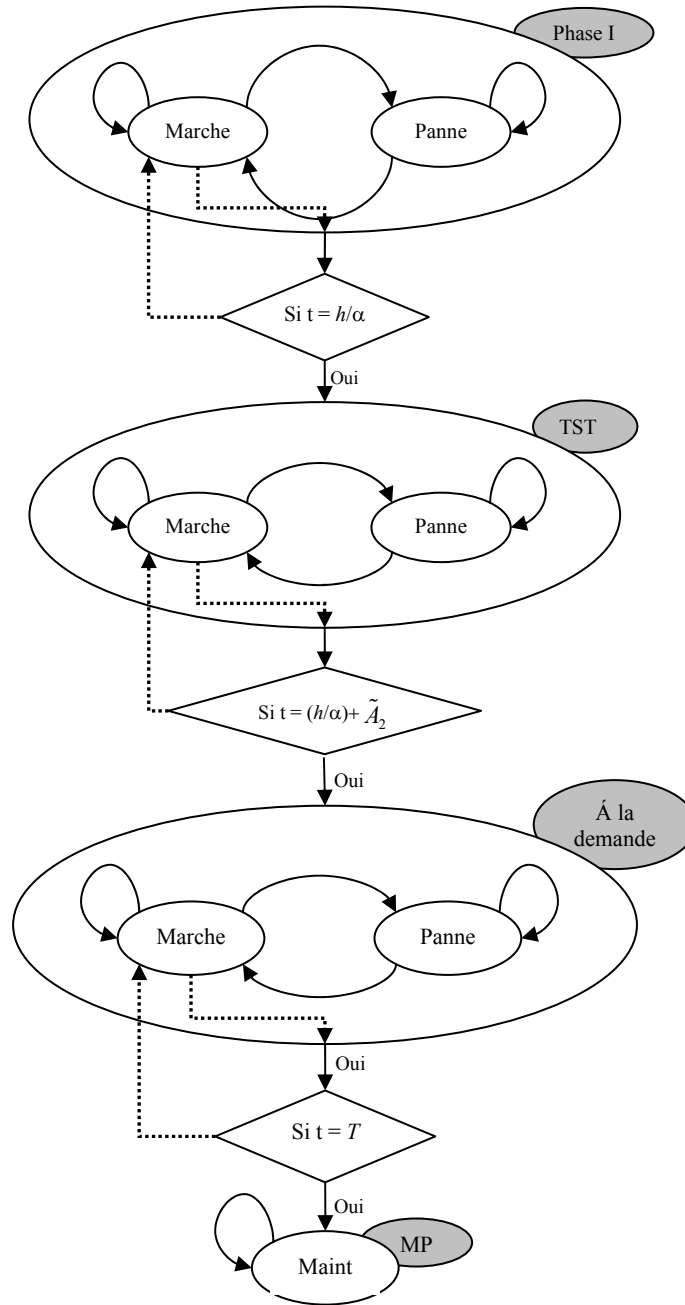


Figure IV.14. Étape du fonctionnement de la machine M pendant un cycle.

IV.4.5.2. Analyse de la variance

Notre objectif à travers cette partie est de déterminer le couple (T^*, h^*) en déterminant le coût total moyen optimal par unité de temps $C_t^{IMP^R}$.

Ainsi, pour la modélisation des résultats de la simulation, on a utilisé le design expérimental à trois niveaux (-1, 0, 1) et à deux facteurs. Les deux facteurs sont les variables de décision, à savoir, l'âge de maintenance préventive T et la capacité du stock h .

L'âge de maintenance préventive varie entre 110 et 120. La capacité du stock h quant à elle varie entre 650 et 770.

Le Tableau IV.3 fait les correspondances entre les niveaux réels des variables de décision T et h adoptées dans la simulation et les valeurs utilisées dans le plan d'expériences.

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
T	110	115	120
h	650	710	770

Tableau IV.3. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences.

À partir de ce tableau, on définit les relations de correspondance, soient :

$$X_T = \frac{T - 115}{120 - 115} = \frac{1}{5}T - 23$$

Et :

$$X_h = \frac{h - 710}{770 - 710} = \frac{1}{60}h - \frac{71}{6}$$

Le coût total moyen est quadratique, ainsi, la forme générale de l'expression du coût total moyen par cycle sera :

$$C_t^{IMP^R}(X_T, X_h) = a_0 + a_1X_T + a_2X_h + a_3X_T^2 + a_4X_h^2 + a_5X_TX_h$$

Le tableau IV.4 présente une analyse de variance pour déterminer les coefficients influents sur le coût $C_t^{IMP^R}$:

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
XT	1687.472	1	1687.472	20.413	10.1	S
Xh	69.471	1	69.471	0.840	10.1	NS
XT^2	1505.468	1	1505.468	18.211	10.1	S
Xh^2	7754.220	1	7754.220	93.801	10.1	S
$XT.Xh$	151.512	1	151.512	2.074	10.1	NS
Régression	1.9974(10) ⁷	6	3.329(10) ⁶	4.027(10) ⁴	8.44	GS
résidu	247.999	3	82.666			
totale	1.9974(10) ⁷	9				

Tableau IV.4. Analyse de variance.

À partir des résultats de cette analyse et en éliminant les coefficients non significatifs, l'expression du coût devient :

$$C_t^{IMP^R}(X_T, X_h) = a_0 + a_1X_T + a_3X_T^2 + a_4X_h^2$$

Sachant que : $a_0 = 1429.53$, $a_1 = -16.77$, $a_3 = 27.43$ et $a_4 = 62.26$

On trouvera : $C_t^{IMP^R}(X_T, X_h) = 1429.53 - 16.77X_T + 27.43X_T^2 + 62.26X_h^2$

En remplaçant les valeurs des termes X_h et X_T l'expression finale du coût sera :

$$C_t^{IMP^R}(T, h) = 1.097T^2 - 255.765T + 0.017h^2 - 24.560h + 25047.928$$

IV.4.5.3. Optimisation

Afin d'optimiser le coût total moyen par cycle, on le dérivera par rapport à chaque variable de décision de la sorte :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^R}}{\partial T} = 2.194T - 255.765 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^R}}{\partial h} = 0.034h - 24.560 \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs optimales des variables de décisions sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_t^{IMP^R}}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 116.52 \\ \frac{\partial C_t^{IMP^R}}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = 710 \end{cases}$$

Dans ce cas, le coût total moyen par cycle optimal correspondant est $C_t^{IMP^R}(h^*, T^*) = 1426.967 \text{ u.m.}$

En comparant, ces résultats avec ceux du modèle analytique, nous remarquons l'augmentation de la durée du cycle, et l'augmentation du niveau h du stock à atteindre pour satisfaire la demande durant le reste du cycle.

Cette augmentation de la capacité du stock s'explique tout d'abord par le fait que la machine peut tomber en panne durant la première phase, d'où l'augmentation de la durée globale de l'indisponibilité de la machine (due à la maintenance ou à la TST) et par conséquent la nécessité d'avoir un stock plus important.

Mais cette augmentation s'explique aussi par l'augmentation du T^* qui fait élever la probabilité que la machine tombe en panne (hors la phase I), et par conséquent l'accroissement de la durée globale de maintenance, pendant laquelle la demande puise dans le stock.

Par ailleurs, l'augmentation de la durée T^* , peut s'expliquer par les pannes de la machine durant la phase I, qui font retarder la date d'affectation, ce qui fait décaler tous les autres états du système.

IV.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les différentes hypothèses imposées sur le système avec la politique IMP initiée lors du chapitre précédent. En premier lieu, nous avons étudié la Politique Adaptée de Production sous la Maintenance (AIMP) qui consiste à adapter la politique IMP au résultat du théorème 2 qui confirme que le meilleur moment pour aller à la sous-traitance est exactement le moment où la capacité du stock est assurée.

Ensuite, nous avons présenté une généralisation de la politique IMP sous forme de la Politique Généralisée de Production sous la Maintenance (GIMP). Il s'agit dans ce cas de relaxer l'hypothèse 1 qui limite le nombre de TST à réaliser par cycle à une seule TST.

Enfin, en ayant recours au technique de la simulation et le design expérimental nous avons présenté une autre politique appelée Politique Étendue de Maintenance sous la production (IMP^R) qui repose sur le fait que la machine peut tomber en panne pendant la première phase de construction (relaxation de l'hypothèse 2).

Chapitre V

Étude quantitative de la contrainte de sous-traitance

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à l'aspect quantitatif de la sous-traitance et des différentes politiques pour allouer la machine à la sous-traitance. En effet, nous proposerons différentes politiques de gestion de la production et de la maintenance, basées sur une contrainte quantitative de la sous-traitance, en s'appuyant sur le nombre de TST arrivant pendant un cycle. Le système considéré dans ce chapitre est similaire à celui étudié dans les chapitres précédents, à la seule différence que la machine fait l'objet d'actions de maintenance préventive de type âge. Dans ce chapitre, nous introduisons les concepts de perte, de décalage et de récupération des tâches de sous-traitance.

Dans un premier temps, nous étudierons une politique simple faisant allouer la machine une seule fois à la sous-traitance avec un risque de la décaler suite aux pannes.

Dans un second temps, nous étudierons une politique allouant la machine à la sous-traitance plusieurs fois par cycle. Pour cette politique toute sous-traitance non réalisée à temps suite à une panne machine, est définitivement perdue engendrant un coût de perte de sous-traitance.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous étudierons une politique allouant la machine pour effectuer des tâches de sous-traitance plusieurs fois par cycle. À l'instar des deux autres politiques, il y a risque de ne pas accomplir les sous-traitances à leur temps d'arrivée, mais dans le cas de cette politique le système se charge de les récupérer avant la fin du cycle, même si cela nécessite le décalage de la date de maintenance préventive.

Tout au long de ce chapitre, nous aurons recours à la simulation pour trouver le meilleur âge de la machine et le niveau optimal du stock assurant un coût total moyen par unité de temps optimal.

V.1. Introduction

La sous-traitance constitue une contrainte forte pour un système de production et influence les différentes politiques de production et de maintenance qui peuvent être adoptées. Dans ce chapitre nous continuons à étudier l'influence des différents paramètres de la contrainte de la sous-traitance sur le comportement d'un système de production.

Dans cette perspective, nous présentons dans ce chapitre des politiques de maintenance intégrée en s'appuyant sur une analyse de la contrainte du côté quantitatif. Nous étudions d'abord, une Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Simple (PPMSS) à travers laquelle nous étudions le comportement d'un système satisfaisant une seule tâche de sous-traitance. Mais cette fois-ci, la machine fera l'objet de maintenance préventive de type âge (au lieu de bloc), en plus la tâche de sous-traitance sera exécutée à une date précise A_1 qui ne dépend pas de la longueur de la phase de construction du stock.

Nous étudierons ensuite une Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Multiple (PPMSM), pour laquelle la machine est sollicitée plusieurs fois pour effectuer des tâches de sous-traitances. Ces tâches peuvent être perdues si leurs dates d'arrivée coïncident avec des périodes de réparation de la machine M .

Dans la même perspective, à travers la Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Inflexible (PPMSI), nous allons étudier la sous-traitance dans un contexte inflexible (rigide) où les tâches inaccomplies seront forcément récupérées avant la fin du cycle. Cela peut avoir comme effet, le décalage de la date de maintenance préventive après la fin de la dernière TST.

L'approche adoptée est fondée essentiellement sur les techniques de simulation et d'analyse de variance. Notre recours à la simulation se justifie par la difficulté de trouver un modèle analytique pour un système soumis à la contrainte de la sous-traitance dès que le nombre de paramètres pris en compte est important. C'était le cas avec le passage vers une politique de maintenance préventive de type âge.

Le reste du chapitre est organisé comme suit : La section suivante présente notre système ainsi que les stratégies globales d'affectation à la sous-traitance, de commande et de maintenance adoptées. Cette section donne aussi une vue globale des techniques de simulation pour lesquelles nous avons opté. Les politiques PPMSS, PPMSM et PPMSI sont étudiées respectivement dans les sections V.3, V.4 et V.5. La conclusion est présentée dans la section V.6.

V.2. Problématique

Le système étudié est similaire à celui du chapitre précédent. Il se compose d'une machine M qui peut produire à une cadence maximale U_{max} , pour alimenter un stock de sécurité S de capacité maximale h . Le système doit satisfaire une demande constante d . Suite aux pannes aléatoires de la machine M , on exécute des actions de maintenance corrective de durées aléatoires, entraînant un coût M_C . En plus, la machine fait l'objet d'actions de maintenance préventive de type âge, chaque durée T , coûtant M_P ($M_C > M_P$).

D'un point de vue sous-traitance, la machine M est sollicitée pour effectuer des tâches de sous-traitance (TST) ayant une fréquence d'arrivée A_1 et une durée utile A_2 et seront réalisées à partir des dates d'exécution effective \tilde{A}_1 . Notons $S(T)$ le nombre de TST à satisfaire pendant un cycle T , et qui diffère selon la politique adoptée. Pendant les périodes de TST la machine peut tomber en panne, ce qui cause un coût de réparation $\tilde{M}_C > M_C$. [Dahane, 2007A].

V.2.1. Politique globale d'affectation aux tâches de sous-traitance

La sous-traitance est caractérisée par une fréquence A_1 (à partir de laquelle on détermine sa date d'exécution effective \tilde{A}_1), une durée utile A_2 et un nombre d'occurrences par cycle $S(T)$.

L'affectation de la machine M à la sous-traitance au moment de son arrivée est conditionnée par la disponibilité de la machine. Le cas où la machine est en panne est traité différemment par chaque politique étudiée et sera développé par la stratégie d'affectation aux TST spécifique à chaque

politique. Les politique PPMS et PPMSI ont des stratégies de récupérations (ou décalages) des TST inaccomplies, tandis que la politique PPMSM considère toute TST non effectuée à cause des pannes de la machine comme une TST définitivement perdue.

En cas de politiques qui reposent sur le principe de perte définitive de sous-traitance, le coût total moyen comportera un coût moyen par cycle de perte de sous-traitance noté $L_{\bar{p}}$. D'autre part le coût unitaire de perte de TST est noté C_{lst} .

Pour des raisons particulières, présentées dans les sections suivantes, on pose les notations suivantes :

- $A_1^{(i)}$: date d'arrivée de la $i^{\text{ème}}$ TST.
- $\tilde{A}_1^{(i)}$: date d'exécution effective de la $i^{\text{ème}}$ TST.
- $\Psi[j]$: fonction qui fournit l'indice de la TST exécutée à $j^{\text{ème}}$ position.

Les $A_1^{(i)}$, $\Psi[\cdot]$ donneront l'ordre d'arrivée des TST, et l'ordre de leurs exécutions respectivement.

Exemple

On a programmé trois TST par cycle, à savoir $TST^{(1)}$, $TST^{(2)}$, $TST^{(3)}$. Leurs dates d'exécution effective respectives sont $\tilde{A}_1^{(1)}$, $\tilde{A}_1^{(2)}$ et $\tilde{A}_1^{(3)}$. Supposons que $\tilde{A}_1^{(2)}$ coïncide avec une période de maintenance de la machine, alors l'ordre d'exécution sera comme suit :

- Pour les politiques à récupération : $\Psi[1] = 1, \Psi[2] = 3$ et $\Psi[3] = 2$.
- Pour les politiques avec perte : $\Psi[1] = 1, \Psi[2] = 3$. La $TST^{(2)}$ est perdue.

Remarque V.1

- Une TST : $TST^{(i)}$ (t.q : $i = \overline{1, S(T)}$) est dite la première TST exécutée si $\Psi[1] = i$.
- L'exécution de deux TST : $TST^{(i)}$, $TST^{(j)}$ se suivent et s'effectuent respectivement à la position k et $k+1$ si :

$$\exists k = \overline{1, S(m) - 1} : \begin{cases} \Psi[k] = i \\ \Psi[k+1] = j \end{cases} \text{ et}$$

V.2.2. Politique globale de commande

La politique globale de commande adoptée pour les différentes politiques étudiées se base sur la logique suivante :

Phase I : pendant l'intervalle $[0, \tilde{A}_1^{(k)}]$ tel que $\Psi[1] = k$, c'est-à-dire entre le début du cycle jusqu'à la première exécution d'une TST, la machine fonctionne avec sa cadence maximale U_{max} afin de garantir un niveau de stock capable de remédier aux périodes d'indisponibilité de la machine M . L'évolution du niveau du stock peut être illustrée par la figure suivante :

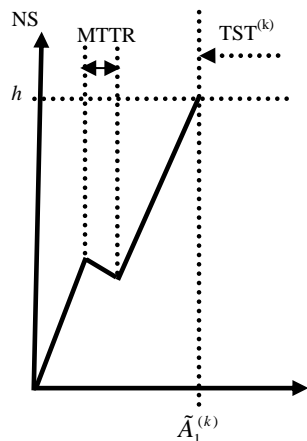


Figure V.1. L'évolution du niveau du stock pendant la phase I.

Ainsi, et jusqu'à l'arrivée de la sous-traitance, le niveau du stock augmente avec une cadence U_{max} mais il peut décroître à cause des périodes de maintenance.

- Durant $[\tilde{A}_1^{(i)}, \tilde{A}_2^{(i)}]$ la machine est allouée à la $i^{\text{ème}}$ TST ($i \geq 1$, selon la politique), et ne fabrique pas pour satisfaire notre demande. Ainsi, sa cadence est gérée par le client de la sous-traitance.

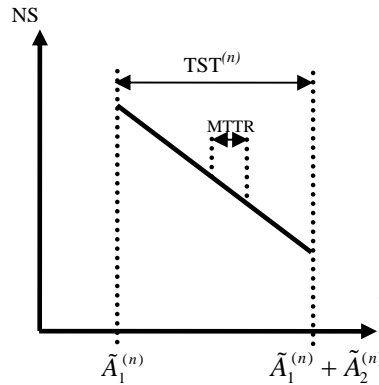


Figure V.2. L'évolution du niveau du stock pendant une TST.

À travers cette figure, on remarque que pendant toute la période de sous-traitance, et en absence de production, le niveau du stock décroît en satisfaisant la demande d .

- Après la période de sous-traitance, la machine produira à la demande, jusqu'à la prochaine TST, ou jusqu'à la date de maintenance préventive dans le cas échéant.

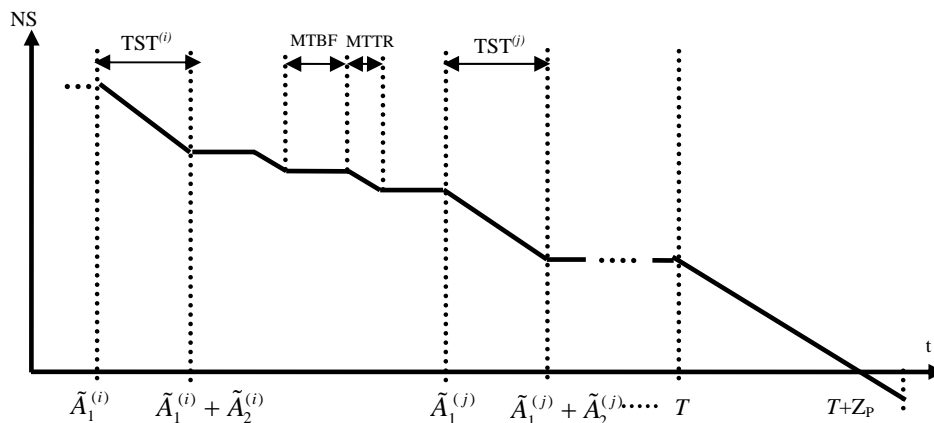


Figure V.3. L'évolution du niveau du stock pendant hors sous-traitance.

La figure V.3 peut être résumée par le fait que, après la phase I, lorsque la machine M est hors sous-traitance, et avant qu'elle subisse l'action de maintenance préventive à l'âge T , elle fonctionnera à la demande. Pendant ces périodes, le stock peut décroître à cause des actions de maintenance.

On rappelle que les différents coûts liés à la gestion du stock sont :

- C_s : Coût unitaire de stockage.
- C_p : Coût unitaire de pénurie.
- L_s : Coût moyen de stockage par unité de temps.
- L_p : Coût moyen de pénurie par unité de temps.

V.2.3. Politique globale de maintenance

La politique globale de maintenance sur laquelle se base les stratégies de maintenance des différentes politiques étudiées dans ce chapitre peut être décrite comme suit :

- **Hors sous-traitance :**
La machine n'est pas allouée pour effectuer des TST, alors chaque panne engendrera un coût de maintenance corrective M_C . En plus du coût, les pannes ont une influence sur la sous-traitance, à partir du moment où l'arrivée d'une TST pendant la maintenance entraîne la perte ou le décalage de cette TST selon la politique.
- **Pendant la sous-traitance :**
Une panne pendant la période de sous-traitance a deux incidences : d'abord un surcoût supplémentaire de maintenance \tilde{M}_C pris en charge par le système (et non par l'acquéreur de la TST), en plus la durée de maintenance n'est pas comptabilisée dans la durée réelle de la sous-traitance, ce qui augmente le temps d'indisponibilité de la machine M .
- D'autre part, on exécute sur la machine M une action de maintenance préventive de type âge, à chaque T , avec un coût M_P , où $M_P < M_C$.
Si la date prévue de la maintenance préventive coïncide avec la période de la sous-traitance, alors la maintenance est reportée à la fin de la tâche de sous-traitance.

On note que cette stratégie de maintenance est identique pour les trois politiques étudiées dans la suite PPMS, PPMSM et PPMSI.

V.2.4. Approche de simulation

Pour comparer les différentes politiques à appliquer sur notre système, nous avons eu recours à la simulation. La simulation de notre système repose sur le principe de cycle. Ainsi, le temps de simulation est découpé en cycles de longueurs $T + Z_p$.

De la même manière comme celle suivie dans le chapitre précédent (cf. Chapitre IV, section IV.4.5), la simulation dans ce chapitre est basée sur les préceptes de simulation à événements discrets.

V.2.5. Paramètres de simulation

Les paramètres pris dans la simulation de ce système sont notamment le temps de simulation $tsim = 1000000$ ut, permettant ainsi d'avoir un très long horizon d'étude, capable d'assurer un grand nombre de configurations et de situations.

D'autre part, dans le tableau V.1 nous résumons les différentes caractéristiques et paramètres du système étudié :

Caractéristiques des machines ($u.t$: unités de temps)				
Machine	$f(t)$	U_{max}	$gc(t)$	$gp(t)$
M	Weibull (2,100)	60 pièces /ut	Normal (15,2)	Normal (4,0.5)

Structure des coûts ($u.m$: unités monétaires)					
M_C	\tilde{M}_C	M_P	C_P	C_S	C_{TST}
3000	5000	300	1000	5	10000

La demande	
Fréquence de la demande T_d (ut unités de temps)	Quantité de la demande Q_d
1 u.t	10 pièces / T_d

Tâches de sous-traitance (unités de temps)	
Périodicité des TST (A_1)	Durée utile des TST (A_2)
60 u.t	50 u.t

Tableau V.1. Caractéristiques du système.

V.3. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Simple (PPMSS)

Dans cette partie, la machine est allouée pour effectuer une seule tâche de sous-traitance, après la phase I de construction de stock. Notons la possibilité de perte de cette TST à cause d'une période de maintenance corrective, ce qui entraînera le décalage de la date de TST à la fin de réparation de la machine.

V.3.1. Politique d'affectation à la sous-traitance

Dans la politique PPMSS la machine est allouée pour effectuer des TST une seule fois par cycle à une date d'exécution effective définie \tilde{A}_1 et pour une durée utile A_2 . En tenant compte des éventuelles périodes de maintenance pendant la sous-traitance, la durée globale de TST sera \tilde{A}_2 .

La machine M peut tomber en panne pendant l'intervalle $[\tau_1, \tau_2[$ (cf. V.5 ci-dessous). On remarque deux cas selon la disposition de la période de maintenance corrective par rapport à la date d'exécution effective de la TST :

- **Cas 1** : $\tau_1 \leq \tilde{A}_1 < \tau_2$
 Dans ce cas, la date d'exécution effective de la TST coïncide avec la période de maintenance corrective. Cette TST sera décalée à la fin de la période de réparation, c'est-à-dire à $t = \tau_2$.
- **Cas 2** : $\tau_2 \leq \tilde{A}_1$
 La sous-traitance arrive après les périodes de réparation et sera exécutée à la date prévue \tilde{A}_1 .

V.3.2. Politique de commande

En se basant sur la politique de commande globale, la politique de commande spécifique au PPMSS peut être définie comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t \leq \tilde{A}_1 \\ d & \text{Si } \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 < t < T \end{cases}$$

Ce qui revient à assurer un stock pendant la phase I d'un certain niveau capable de pallier la demande malgré les éventuelles périodes d'indisponibilité de la machine M .

L'évolution du niveau du stock peut être illustrée par la figure ci-dessous selon la politique de commande adoptée :

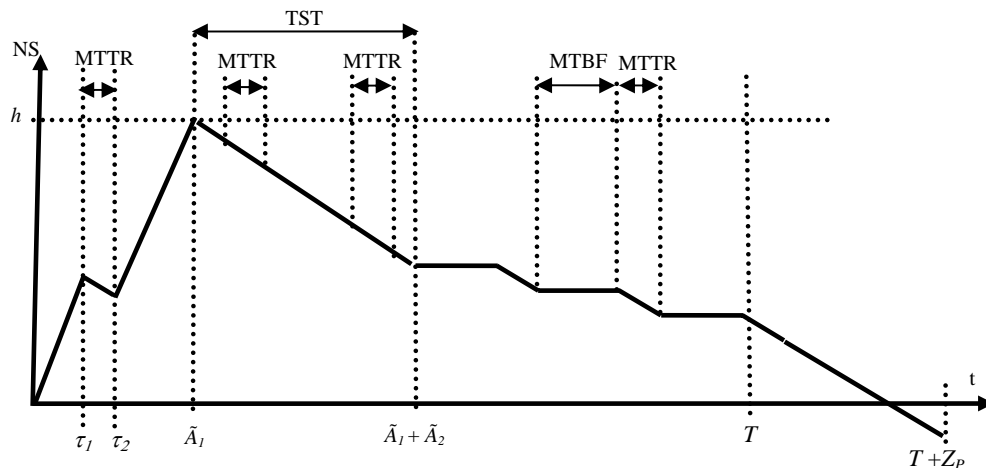


Figure V.4. Évolution de niveau du stock pour la PPMSS.

On observe sur la figure V.4 que le niveau du stock passe par la phase de construction, qui peut connaître des périodes de diminution à cause des éventuelles pannes. Ensuite, la machine est allouée pour effectuer une TST pour une durée globale de \tilde{A}_2 pendant laquelle le niveau du stock décroît en satisfaisant la demande d . Après la TST, la production passe à la demande jusqu'à l'âge prévu pour la maintenance préventive.

V.3.3. Optimisation avec la politique PPMSS

La méthode d'optimisation avec la politique PPMSS se base sur la recherche du meilleur niveau du stock à construire durant la phase I et le meilleur âge de maintenance préventive à appliquer sur la machine, afin de garantir un coût total moyen par unité de temps minimal.

Pour la politique PPMSS, Le coût total moyen par unité de temps s'écrit sous la forme suivante :

$$C_{t_1}^m = L_S + L_P + L_M$$

Avec :

$$L_M = L_{MC} + L_{MC'} + L_{MP}$$

- L_S : Coût moyen de stockage par unité de temps,
- L_P : Coût moyen de pénurie par unité de temps,
- L_M : Coût moyen de maintenance par unité de temps,
- L_{MC} : Coût moyen par unité de temps de la maintenance corrective hors la sous-traitance,
- $L_{MC'}$: Coût moyen par unité de temps de la maintenance corrective pendant la sous-traitance,
- L_{MP} : Coût moyen par unité de temps de la maintenance préventive.

Dans le tableau V.2, on présente les correspondances entre les niveaux réels des variables de décisions et les niveaux utilisés dans la simulation :

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
T	460	480	500
h	700	820	940

Tableau V.2. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences.

À partir de ce tableau, on peut définir les relations de correspondance, soient :

$$X_m = \frac{T - 480}{500 - 480} = \frac{1}{20}T - 24$$

Et :

$$X_h = \frac{h - 820}{940 - 820} = \frac{1}{120}h - \frac{41}{6}$$

D'autre part, la forme générale de l'expression du coût total moyen par cycle sera :

$$C_{t_1}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_1X_T + a_2X_h + a_3X_T^2 + a_4X_h^2 + a_5X_TX_h$$

Le tableau V.3 présente une analyse de variance pour déterminer les coefficients influents sur le coût $C_{t_1}^T$:

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
XT	3,363	1	3,363	0,015	10,1	NS
Xh	2793,2	1	2793,2	13,076	10,1	S
XT^2	6920,6	1	6920,6	32,40	10,1	S
Xh^2	7866,9	1	7866,9	36,83	10,1	S
$XT.Xh$	43,327	1	43,327	0,202	10,1	NS
Régression	$2,2518(10)^7$	6	$3,7531(10)^6$	17570,795	8,44	GS
résidu	640,79	3	213,5971			
totale	$2,2519(10)^7$	9				

Tableau V.3. Analyse de variance de $C_{t_1}^T$.

À partir des résultats de cette analyse et en éliminant les coefficients non significatifs, l'expression du coût devient :

$$C_{t_1}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_2 X_h + a_3 X_T^2 + a_4 X_h^2$$

Sachant que les valeurs des coefficients significatifs sont :

$$a_0 = 1500.1, a_2 = 21.576, a_3 = 58.824 \text{ et } a_4 = 62.717$$

Ainsi, on trouvera :

$$C_{t_1}^T(X_T, X_h) = 1500.1 + 21.576 X_h + 58.824 X_T^2 + 62.717 X_h^2$$

En remplaçant les valeurs des termes X_T et X_h l'expression finale du coût moyen par cycle spécifique à la politique PPMSS sera :

$$C_{t_1}^m(T, h) = 0.147T^2 - 141.177T + 0.004h^2 - 6.963h + 38163.823$$

Afin d'optimiser le coût total moyen par unité de temps, on le dérivera par rapport à chaque variable de décision de la sorte :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_1}^T}{\partial T} = \frac{7353}{25000}T - \frac{88236}{625} \\ \frac{\partial C_{t_1}^T}{\partial h} = \frac{62717}{7200000}h - \frac{2506669}{360000} \end{cases}$$

Ainsi, les valeurs optimales sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_1}^T}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 480 \\ \frac{\partial C_{t_1}^T}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = 800 \end{cases}$$

Et le coût total moyen par cycle optimal correspondant est : $C_{t_1}^m(T^*, h^*) = 1498.244 \text{ u.m}$

Ainsi, en appliquant la politique PPMSS pour notre système, on constate que le coût optimal par cycle est $C_{t_1}^m = 1498.244 \text{ u.m}$, et correspond à un âge optimal $T^* = 480 \text{ u.t}$, et un niveau du stock optimal $h^* = 800 \text{ pièces}$.

V.4. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Multiple (PPMSM)

La Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Multiple (PPMSM) suppose que le système soit soumis à la contrainte de sous-traitance de façon telle qu'il doive satisfaire n TST durant le cycle T , quand $0 < n \leq S(T)$ et où $S(T)$ est le nombre global des TST arrivées durant le cycle T .

Cela signifie que les TST peuvent être perdues si leurs dates d'exécution effective coïncident avec les périodes de maintenance correctives de la machine M . Chaque perte de TST entraînera un surcoût supplémentaire C_{tst} .

V.4.1. Politique d'affectation à la sous-traitance

La prise en compte de la sous-traitance avec ces différents paramètres s'appuie entièrement sur les principes de la stratégie globale d'affectation à la sous-traitance (cf. section V.2.1), mais la gestion des TST arrivées au moment où la machine M est en panne- et contrairement à la politique PPMS - considère ces TST comme perdues, tout en comptabilisant le coût de perte d'une TST de C_{tst} .

V.4.2. Politique de commande

La politique de commande spécifique au PPMSM - et basée sur la politique de commande globale - peut être définie comme suit :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t < \tilde{A}_1^{(k)} \quad t.q : \Psi[1] = k \text{ et } M \text{ n'est pas en panne} \\ 0 & \text{Si } \tilde{A}_1^{(i)} \leq t < \tilde{A}_2^{(i)} \quad \forall i = \overline{1, S(T)} \text{ ou } M \text{ est en panne} \\ d & \text{Sinon} \end{cases}$$

Le système commence par construire un stock pendant la phase I à une cadence maximale jusqu'à la date d'exécution effective de la première TST. Pendant cette première période la machine peut tomber en panne. Au retour de la sous-traitance, la machine produit à la demande jusqu'à la prochaine TST ou jusqu'à la fin du cycle dans le cas échéant.

L'impact de cette politique de commande sur l'évolution du niveau du stock est illustré par la figure V.5 :

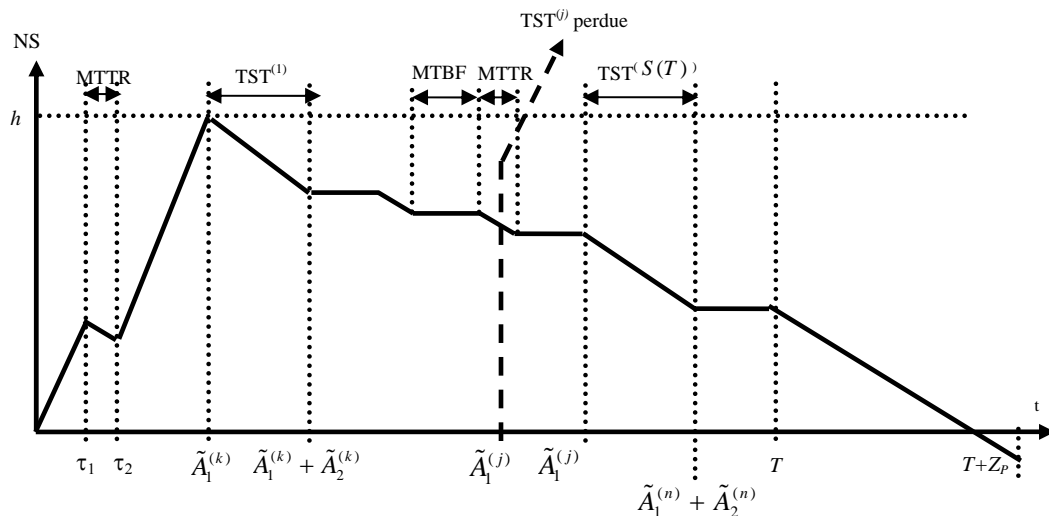


Figure V.5. Évolution de niveau du stock pour la PPMSM.

On remarque à partir de la figure V.5 ci-dessus, que pendant l'intervalle $[0, \tilde{A}_1^{(k)}]$, (tel que $\Psi [1] = k$) représentant la durée séparant le début du cycle et la date d'exécution effective de la première TST, la machine M fonctionne avec sa cadence maximale pour construire un stock de niveau h . Pendant cette durée la machine peut être confrontée à des pannes aléatoires.

V.4.3. Optimisation avec la politique PPMSM

À l'instar de la politique PPMS, l'optimisation de la politique PPMSM est basée sur la recherche du T^* et du h^* représentant l'âge optimal de maintenance préventive avec le niveau optimal du stock à assurer pendant la première phase. Le critère principal de cette optimisation est la minimisation du coût total moyen par unité de temps engendré, ayant l'expression suivante :

$$C_{t_2}^T = L_S + L_P + L_M + L_{\tilde{p}}$$

Tel que :

$$L_M = L_{MC} + L_{MC'} + L_{MP}$$

Avec :

- $L_{\tilde{p}}$: Coût moyen par unité de temps de perte de tâches de sous-traitance.

Le tableau V.4 donne les correspondances entre les niveaux réels et ceux utilisés dans la simulation, pour les variables de décisions T et h spécifiques à la politique PPMSM :

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
T	60	70	80
h	500	550	600

Tableau V.4. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences.

À partir de ce tableau, les relations de correspondance peuvent être définies de la façon suivante :

$$X_T = \frac{T - 70}{80 - 70} = \frac{1}{10}T - 7$$

Et :
$$X_h = \frac{h - 550}{600 - 550} = \frac{1}{50}h - 11$$

Ainsi, la forme générale de l'expression du coût total moyen par unité de temps sera :

$$C_{t_2}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_1 X_T + a_2 X_h + a_3 X_T^2 + a_4 X_h^2 + a_5 X_T X_h$$

Afin de déterminer les coefficients influents sur le coût total moyen $C_{t_2}^T$ engendré par l'application de la politique PPMSM, on présente une analyse de variance, résumées dans le tableau V.5 :

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
X_T	1,5694(10) ⁶	1	1,5694(10) ⁶	1270,282	10.1	S
X_h	1331.7	1	1331.7	1,077	10.1	NS
X_T^2	7,8635(10) ⁵	1	7,8635(10) ⁵	636,46	10.1	S
X_h^2	30817	1	30817	24,94	10.1	S
$X_T.X_h$	649.46	1	649.46	0,5256	10.1	NS
Régression	8,2626(10) ⁷	6	8,2626(10) ⁷	11145,965	8.44	GS
résidu	3706.5	3	1235,51			
total	8,2629(10) ⁷	9				

Tableau V.5. Analyse de variance de $C_{t_2}^T$.

À partir des résultats de cette analyse et en éliminant les coefficients non significatifs, l'expression du coût devient :

$$C_{t_2}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_1 X_T + a_3 X_T^2 + a_4 X_h^2$$

Sachant que : $a_0 = 2485,1$, $a_1 = -511,44$, $a_3 = 627,04$ et $a_4 = 124,132$

Ainsi, l'expression du coût moyen sera :

$$C_{t_2}^T(X_T, X_h) = 2485,1 - 511,44 X_T + 627,04 X_T^2 + 124,132 X_h^2$$

En remplaçant les valeurs des termes X_m et X_h , l'expression finale du coût sera :

$$C_{t_2}^T(T, h) = 6,27T^2 - 928,9T + 0,0496h^2 - 54,56h + 51789$$

La prochaine étape consiste à dériver l'expression du coût moyen par rapport aux variables de décision T et h :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_2}^T}{\partial T} = \frac{627}{50}T - 928,9 \\ \frac{\partial C_{t_2}^T}{\partial h} = \frac{62}{625}h - \frac{1364}{25} \end{cases}$$

Ce qui conduit à trouver les valeurs optimales suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_2}^T}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 74,075 \\ \frac{\partial C_{t_2}^T}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* = 550 \end{cases}$$

Pour ces valeurs optimales de T et de h , le coût total moyen par cycle optimal est :

$$C_{t_2}^T(T^*, h^*) = 2380,884 \text{ u.m}$$

V.5. Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Inflexible (PPMSI)

Pour la Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Inflexible (PPMSI) le système est soumis à une forte contrainte de sous-traitance qui exige d'affecter la machine M à la sous-traitance un nombre fixe de fois pendant un cycle, noté $S(T)$, malgré que les TST programmées au moment où la machine M était en panne sont inaccomplies. Les $S(T)$ TST programmées pendant un cycle doivent être toutes exécutées.

V.5.1. Politique d'affectation à la sous-traitance

Dans la politique PPMSI, l'affectation de la machine M pour effectuer des TST est basée sur le principe de récupération des TST inaccomplies.

À travers la figure V.6, on illustre le principe de la récupération de TST non effectuées. Si l'exécution effective de la $i^{\text{ème}}$ TST est programmée au moment où la machine M subit une action de maintenance, alors elle sera récupérée après l'exécution de la dernière TST du même cycle et après la récupération des autres TST perdues dans l'ordre de leurs pertes.

Le problème qui se pose réside dans le fait qu'une TST⁽ⁱ⁾ perdue à l'instant $\tilde{A}_1^{(i)}$, sa récupération à l'instant $\tilde{A}_1^{(i)}$ n'est pas toujours sûre, car elle risque d'être inaccomplie à nouveau à cause des pannes récurrentes.

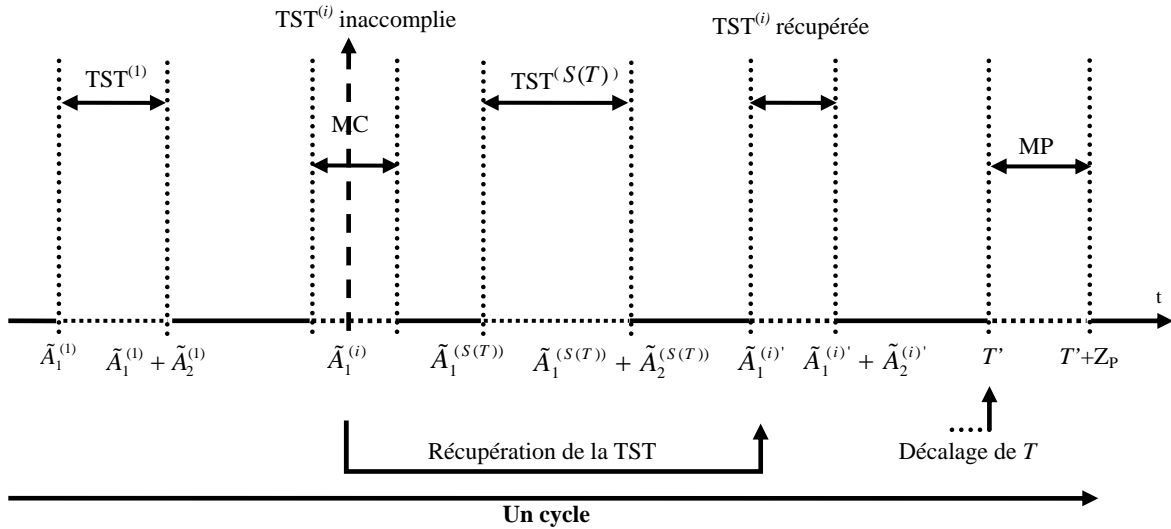


Figure V.6. Récupération des TST perdues dans la politique PPMSI.

Pour remédier à ce problème, la méthode de récupération des TST sera récursive, ainsi, chaque TST non réalisée sera reprogrammée pour être récupérée, jusqu'à ce qu'elle soit exécutée, quelque soit le nombre de fois qu'elle est perdue, garantissant ainsi d'avoir exécuter le nombre demandé de TST par cycle.

Mais sous un autre angle, cette récupération peut avoir une incidence majeure sur la politique de maintenance, car elle oblige notre système à reporter la date prévue pour exécuter l'action de maintenance préventive T pour une date ultérieure T'.

V.5.2. Politique de maintenance

La politique de maintenance pour la PPMSI est complètement fondée sur la logique décrite par la politique globale de maintenance (cf. section V.2.3). Cette section complète cette politique globale, en traitant le problème de récupération des TST et son impact sur la maintenance préventive.

Supposons qu'une seule TST soit perdue TST⁽ⁱ⁾ et soit récupérée à la date $\tilde{A}_1^{(i)'}$. Une question se pose : est-ce qu'il sera nécessaire de décaler la date de maintenance préventive ?

- **Cas 1** : La date prévue pour la maintenance préventive englobe toutes les TST à récupérer.

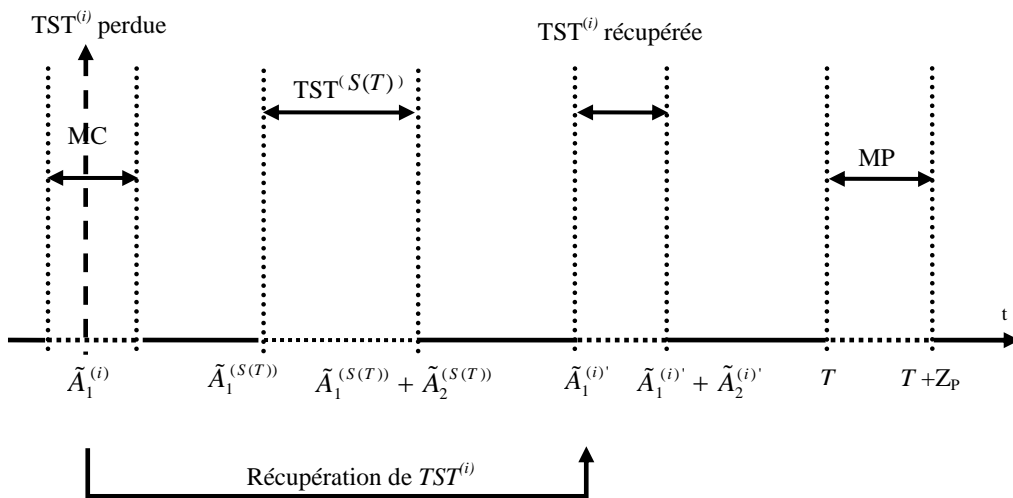


Figure V.7. Récupération d'une TST sans report de maintenance préventive.

Dans ce cas, illustré par la figure V.7, la date prévue pour effectuer l'action de maintenance préventive est ultérieure à la fin de la TST, ce qui assure l'exécuter à la date T sans report.

- **Cas 2:** La date prévue pour la maintenance préventive antérieure à la fin TST récupérée

Dans ce deuxième cas, la récupération de la sous-traitance sera programmée à une date $\tilde{A}_1^{(i')} > T$, ce qui nécessitera un report de la date de maintenance préventive à une date T' , qui sera exactement la date de fin de la tâche de sous-traitance.

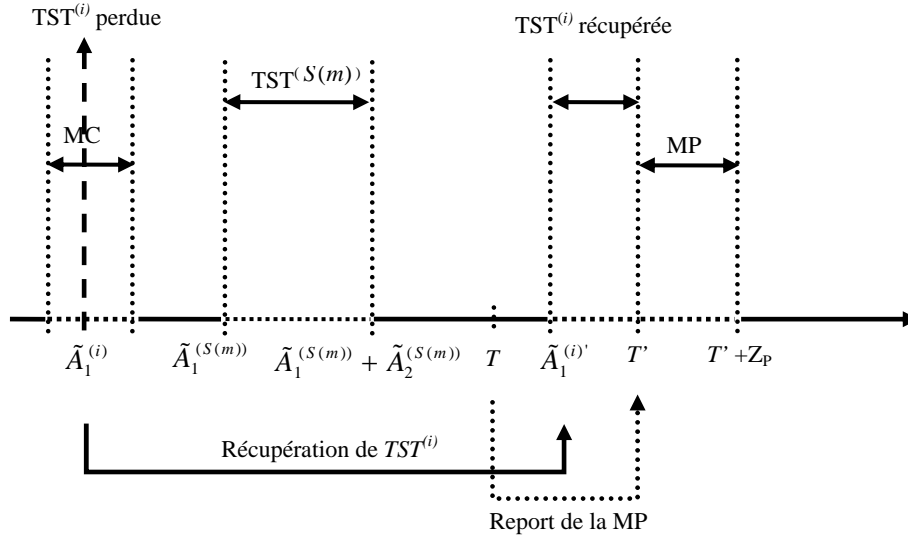


Figure V.8. Récupération d'une TST avec report de maintenance préventive.

D'une façon générale, le principe suivi pour exécuter l'action de maintenance préventive est de s'assurer que la machine était allouée à la sous-traitance le nombre de fois demandé par cycle $S(T)$. Si l'âge suffit pour pallier toutes les éventuelles pertes des TST et ses récupérations respectives, l'action de la maintenance préventive sera exécutée à la date T . Dans ce cas, elle sera effectuée à la fin de dernière TST récupérée.

V.5.3. Politique de commande

En se basant sur la politique de commande globale, la politique de commande spécifique au PPMSE peut être définie de la façon suivante :

$$U(t) = \begin{cases} U_{\max} & \text{Si } t < \tilde{A}_1^{(k)} \quad t.q : \Psi[1] = k \text{ et } M \text{ n'est pas en panne} \\ 0 & \text{Si } \tilde{A}_1^{(i)} \leq t < \tilde{A}_2^{(i)} \quad \forall i = \overline{1, S(T)} \text{ ou } M \text{ est en panne} \\ d & \text{Sinon} \end{cases}$$

Comme pour la politique PPMSE, la stratégie suivie est de construire un stock de niveau h pendant la phase I délimitée par le début de la première exécution d'une TST. Après cette tâche, et à chaque fois que la machine n'est ni en sous-traitance, ni en panne, le système fonctionnera sous un mode de production à la demande, jusqu'à la réalisation de l'action de la maintenance préventive.

La figure V.9 illustre l'impact de cette politique de commande sur l'évolution du niveau du stock.

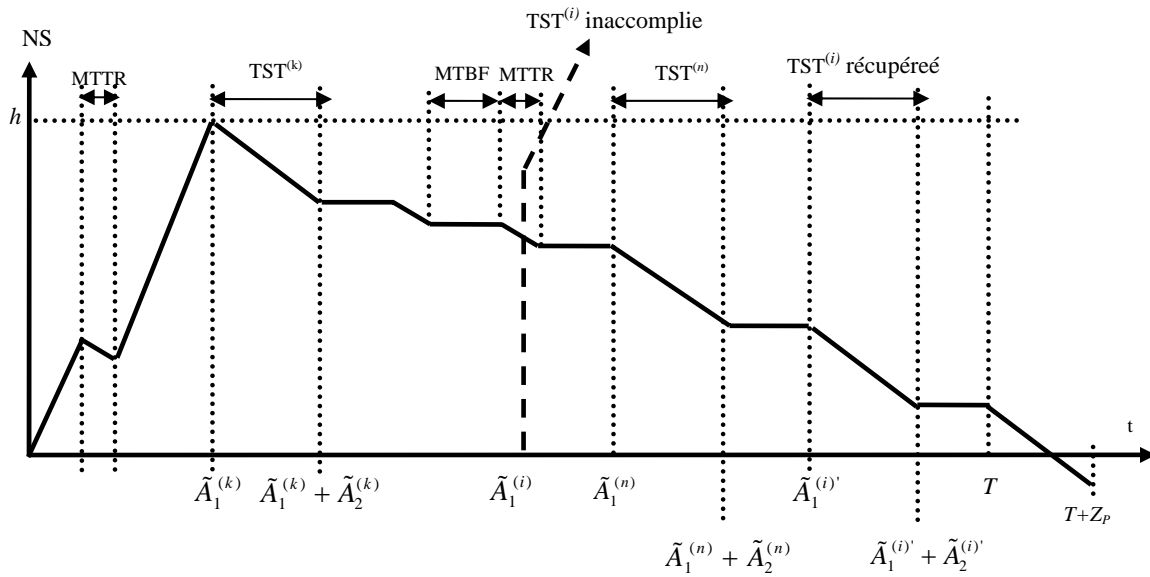


Figure V.9. Évolution de niveau du stock pour la PPMSI.

V.5.4. Optimisation avec la politique PPMSI

L'optimisation avec la politique PPMSI a comme objectif de déterminer les valeurs optimales de T et h garantissant un coût total moyen par unité de temps optimal.

L'expression du coût $C_{t_3}^T$ est de la même forme que le coût $C_{t_1}^T$ spécifique à la politique PPMSS, c'est-à-dire :

$$C_{t_3}^T = L_S + L_P + L_M$$

Tel que :

$$L_M = L_{MC} + L_{MC'} + L_{MP}$$

Remarquons que le coût total moyen par unité de temps ne contient pas l'expression de coût moyen de perte de sous-traitance puisque la politique PPMSSM est une politique basée sur la récupération des TST non effectuées. Dans cette section de notre étude, le système est contraint à satisfaire $S(T) = 10$ TST par cycle.

Le tableau suivant fait le lien entre les niveaux réels des variables de décisions et ceux du plan d'expériences :

	Niveau -1	Niveau 0	Niveau 1
T	1440	1470	1500
h	1035	1065	1095

Tableau V.6. Correspondance entre les niveaux réels et ceux du plan d'expériences.

Les relations de correspondance entre X_T et X_h d'une part, et T et h de l'autre seront comme suit :

$$X_T = \frac{T - 1470}{1500 - 1470} = \frac{1}{30}T - 49$$

Et :

$$X_h = \frac{h - 1065}{1095 - 1065} = \frac{1}{30}h - \frac{71}{2}$$

L'expression du coût total moyen de la politique PPMSI aura une forme générale suivante :

$$C_{t_3}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_1 X_T + a_2 X_h + a_3 X_T^2 + a_4 X_h^2 + a_5 X_T X_h$$

Le tableau V.7 présente une analyse de variance pour déterminer les coefficients influents sur le coût $C_{t_3}^T$:

Coefficients	signification	dl	Signification moyenne	F-expérimental	F-théorique	S/N
XT	348,53	1	348,53	2.6705	10,1	NS
Xh	1410,1	1	1410,1	10.805	10,1	S
XT^2	9746,6	1	9746,6	74.681	10,1	S
Xh^2	6238,1	1	6238,1	47,798	10,1	S
$XT.Xh$	17,227	1	17,227	0,132	10,1	NS
Régression	1,6762(10) ⁸	6	2,793(10) ⁷	2,140(10) ⁵	8,44	GS
résidu	391,53	3	130,51			
total	1,6762(10) ⁸	9				

Tableau V.7. Analyse de variance de $C_{t_3}^T$.

Les coefficients significatifs sont $a_0 = 4231.6$, $a_2 = 15.331$, $a_3 = 69.809$ et $a_4 = 55.849$

Alors, en les éliminant l'expression du coût sera de la forme :

$$C_{t_3}^T(X_T, X_h) = a_0 + a_2 X_h + a_3 X_T^2 + a_4 X_h^2$$

En remplaçant les coefficients significatifs avec leurs valeurs on trouve :

$$C_{t_3}^T(X_T, X_h) = 4231.6 + 15.331 X_h + 69.809 X_T^2 + 55.849 X_h^2$$

Ensuite, en substituant les valeurs des termes X_T et X_h l'expression finale du coût moyen par unité de temps de la politique PPMSI sera :

$$C_{t_3}^T(T, h) = 0.077T^2 - 228.042T + 0.062h^2 - 131.665h + 241682.46$$

Enfin, pour déterminer le coût total moyen par cycle optimal ainsi que les valeurs optimales correspondantes de l'âge de la machine et la capacité du stock à construire, on dérive l'expression du coût par rapport à chaque variable de décision :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_3}^T}{\partial T} = \frac{69809}{450000}T - \frac{3420641}{15000} \\ \frac{\partial C_{t_3}^T}{\partial h} = \frac{55849}{450000}h - \frac{987487}{7500} \end{cases}$$

L'annulation des deux termes donnera les valeurs optimales suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{t_3}^T}{\partial T} = 0 \Rightarrow T^* = 1470 \\ \frac{\partial C_{t_3}^T}{\partial h} = 0 \Rightarrow h^* \approx 1061 \end{cases}$$

Ce qui correspond à un coût total moyen par cycle optimal : $C_{t_3}^T(T^*, h^*) = 4230.547 \text{ u.m}$

V.6. Interprétation des résultats

Le tableau V.8 résume les résultats obtenus des différentes politiques :

Politique	TST demandées	TST réalisées	Stratégie	T^* (u.t)	h^* (pièces)	C_t^* (u.m)
PPMSS	$S(T) = 1$	1	Décalage	480.20	800.34	1498.244
PPMSM	$S(T) = 10$	$\tilde{S}(T)$	Perte	74.075	550	2380.884
PPMSI	$S(T) = 10$	$S(T)$	Décalage	1470.3	1061	4230.547

Tableau V.8. Récapitulatif des résultats

Rappelons d'abord, que les TST sont exécutées à partir de la date d'exécution effective $\tilde{A}_1 = 60$ u.t pour une durée de réalisation utile $A_2 = 50$ u.t.

À première lecture de ces résultats, nous remarquons que dans la politique PPMSM qui est une politique avec perte des TST arrivées au moment où la machine est en panne, avec un nombre $S(T)$ de sous-traitance à réaliser. En effet la date de maintenance préventive déterminée ne permet d'exécuter aucune des TST demandées. Ainsi, le système préfère perdre la sous-traitance. Suite à ce résultat, et selon la structure des coûts proposée les TST ne sont pas rentable sous la politique PPMSM.

Par ailleurs, nous constatons que dans le cas où le système est contraint de réaliser plusieurs TST par cycle, la politique PPMSI est la plus adéquate, car en réalisant 10 TST par cycle le coût généré $C_t^* = 4230.547$ u.m et pour réaliser 10 TST avec la politique PPMSS il faut 10 cycles qui contiennent chacun une seule TST. Dans ce cas le coût généré sera $10 C_t^* = 14982.44$ u.m. Ainsi, pour réaliser 10 TST par cycle, l'application de la politique PPMSI engendre un gain $G_{PPMSI/PPMSS}$:

$$G_{PPMSI/PPMSS} = \frac{10(1498.244) - 4230.547}{10(1498.244)} = 71.74\%$$

V.7. Conclusion

À travers ce chapitre nous avons pu montrer l'importance de l'aspect quantitatif de la contrainte de sous-traitance. Nous avons étudié une Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Simple (PPMSS) qui suppose que le système soit contraint de satisfaire une seule sous-traitance par cycle. Par la suite, nous avons étudié la Politique de Production et de la Maintenance à Sous-traitance Multiple (PPMSM). Pour cette politique la machine est allouée pour effectuer des TST plusieurs fois par cycle, mais il y a risque de perte de ces TST si leurs arrivées coïncident avec des pannes de la machine M . Ainsi, chaque TST non effectuée est définitivement perdue et engendre un coût de perte de sous-traitance. Nous avons étudié également une Politique de Production et de Maintenance, à Sous-traitance Inflexible (PPMSI), qui prévoit que le système doit satisfaire un nombre fixe de sous-traitances, et toute TST inaccomplie à cause des pannes de la machine sera récupérée après la dernière TST programmée, même si cela peut provoquer un décalage de la date de maintenance préventive. Ces trois politiques ont été optimisées en utilisant la simulation et le design expérimental. Suite à une analyse de variance les modèles analytiques des coûts de chaque politique ont été développés. D'après ces modèles on remarque que les politiques avec décalage des TST non réalisées sont meilleures par rapport à celles avec notion de perte. Nous avons remarqué aussi que dans le cas de plusieurs TST à réaliser pendant un cycle la politique PPMSI est la plus appropriée.

Conclusion

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la problématique de la maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance. Notre mission était d'étudier et de proposer des politiques faisant le couplage entre la gestion de la maintenance et la gestion de la production pour des entreprises prestataires de sous-traitance, afin de trouver un équilibre rationnel entre la maintenance, la production et la contrainte de sous-traitance, assurant des coûts minimaux de gestion de maintenance et gestion production, et une continuité des relations de l'entreprise à la fois avec son client principal et son donneur d'ordres de sous-traitance.

À travers cette thèse, nous avons représenté cette entreprise par une machine M fonctionnant pour satisfaire le client principal représenté par une demande continue d . Pour maximiser l'exploitation de la machine M , on décide de l'allouer à un donneur d'ordres de sous-traitance représenté par des tâches de sous-traitance de périodicité et de fréquence connues. Cela exige de trouver les meilleures politiques de maintenance intégrées qui assurent le meilleur programme de maintenance et la meilleure planification de la production afin de satisfaire la demande client d et permettant en même temps d'allouer la machine M pour réaliser les tâches de sous-traitance demandées.

Nous avons commencé cette thèse par la définition des préceptes de l'approche de maintenance intégrée et les concepts de la sous-traitance industrielle. Nous avons également détaillé la problématique industrielle à partir de laquelle cette thèse est inspirée et la démarche que nous avons suivie pour proposer des solutions capables de remédier à ce type de problématique.

Ensuite, avant de commencer à étudier les différentes politiques de maintenance intégrées sous contrainte de sous-traitance, nous avons souhaité prouver la pertinence et l'efficacité du couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production, et cela en comparant une politique de maintenance intégrée IMP par rapport à une politique dissociant la gestion de maintenance de la gestion de la production SMP dans le cadre d'une seule machine et deux machines. Nous avons déterminé aussi les conditions sous lesquelles la sous-traitance est rentable en termes de gain de coût et cela en comparant une politique IMP avec sous-traitance notée IMP^{WS} par rapport à une politique IMP sans sous-traitance notée IMP^{TS} .

Dans un autre chapitre de cette thèse, nous avons analysé l'aspect temporel de la contrainte de sous-traitance. Nous avons démontré l'importance du choix de l'instant de début de la tâche de sous-traitance et son impact sur les coûts engendrés. Dans cette perspective, nous avons déterminé le

meilleur moment pour allouer la machine à la sous-traitance. Pour faire face aux changements imprévus des paramètres de la sous-traitance, nous avons étudié les conséquences en termes de coût, du retard imprévu de l'instant de début de réalisation de la tâche de sous-traitance ou du prolongement de sa durée de réalisation.

En se basant sur les résultats trouvés précédemment, nous avons étudié une Politique Adaptée de Production sous la Maintenance AIMP, qui consiste à allouer la machine à la sous-traitance au meilleur moment (prouvé dans le chapitre précédent). Ensuite, nous avons présenté une généralisation de cette politique sous forme d'une Politique Généralisée de Production sous la Maintenance GIMP qui fait allouer la machine pour effectuer plusieurs tâches de sous-traitance pendant un cycle. Enfin, nous avons étudié une Politique Étendue de Maintenance sous la production IMP^R qui repose sur le fait que la machine peut tomber en panne pendant la première phase de construction du stock.

Dans le dernier chapitre nous avons mis l'accent sur l'aspect quantitatif de la contrainte de sous-traitance. Nous avons étudié une Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Simple PPMSS pour laquelle la machine est allouée pour effectuer une seule sous-traitance par cycle. Ensuite, nous avons étudié la Politique de Production et de Maintenance à Sous-traitance Multiple PPMSM, pour laquelle la machine est allouée pour effectuer des TST plusieurs fois par cycle. Dans cette politique chaque TST qui arrive au moment où la machine est en panne sera définitivement perdue, engendrant un coût de perte de sous-traitance. Nous avons étudié aussi une Politique de Production et de Maintenance, à Sous-traitance Inflexible PPM^{SI} qui, à l'instar la politique PPMSM, fait allouer la machine pour effectuer plusieurs TST par cycle, mais contrairement à PPMSM, dans cette politique toute TST non réalisée ne sera pas perdue, mais récupérée avant la fin du cycle, sans aucune pénalité engendrées.

À travers cette étude, nous avons démontré que si la sous-traitance représente une opportunité intéressante pour l'entreprise, elle doit être néanmoins bien étudiée pour que son intégration donne les résultats attendus pour qu'elle puisse garantir la stabilité et la continuité des relations de l'entreprise avec son client principal, ainsi qu'un rapport gagnant - gagnant avec le donneur d'ordres de sous-traitance.

Au delà de nos travaux, notre contribution est généralisable aux entreprises de process discontinus de biens manufacturiers. Face à la mondialisation et la globalisation, notre étude propose des perspectives d'amélioration de la production en centrant la réflexion sur une conception plus fine de la maintenance industrielle.

Annexe...

À travers cette annexe, nous illustrons le lien entre la problématique industrielle et la démarche suivie tout au long de ce mémoire. Des exemples numériques et des explications sont présentés pour justifier chacun des problèmes traités dans le cas réel.

Apports de la méthode proposée pour résolution générale de la problématique industrielle

La problématique industrielle, consistant à déterminer une gestion optimale de l'exploitation de l'oléoduc, en ayant recours à des propositions de services de sous-traitance à d'autres compagnies de transport de produits pétroliers, est conditionnée tout d'abord par la réponse à la question légitime de la pertinence et de la rentabilité de l'intégration d'une activité dans la gestion globale de notre compagnie.

La sous-traitance n'est intéressante que dans le cas où elle garantit des rapports gagnants – gagnants à ses différents partenaires. Dans le cas de l'entreprise considérée, cela peut être résumé en deux points essentiels :

- La garantie de la stabilité des relations de l'entreprise avec ses principaux clients, du moment où ces relations constituent le cœur de métier de l'entreprise.
- La réalisation des activités de sous-traitance doit apporter des bénéfices supplémentaires pour l'entreprise, car il faut signaler que devenir sous-traitant était pour l'entreprise un moyen pour maximiser l'utilisation des moyens et compétences dont elle dispose.

Dans ce qui suit, nous appliquons les démarches étudiées tout au long de ce mémoire sur un exemple numérique inspiré du cas industriel. Notons que les résultats trouvés dépendent beaucoup du type de l'oléoduc choisi, ainsi que de la nature des matières transportées et de leur séquençement. Dans cet esprit, deux notions sont importantes : d'un côté, le débit du transport, basé essentiellement sur le diamètre de l'oléoduc et la vitesse des liquides déterminée par la capacité de pression des stations de pompes, et de l'autre côté, le volume de la demande finale du client principal. Les résultats exposés dans cette partie de notre étude sont établis pour des stations de pompes ayant la capacité de faire circuler le produit à une vitesse V de 0.5 m/s (mètres/secondes) et des lignes d'oléoducs ayant un diamètre standard D de 10 pouces. Le débit Q de pompage est exprimé en m^3/h (mètres³/heure) de la façon suivante :

$$Q = 1.8VD^2$$

Ainsi, dans notre cas, on obtient $Q = 90 m^3/h$. Concernant la demande du client principal, elle sera : $d = 20 m^3/h$.

La loi de dégradation de l'installation suit une loi *Weibull* de paramètre d'échelle $a = 2$ et de forme $b = 165$. Tandis que les durées de maintenance correctives suite aux pannes aléatoires de l'installation suivent une loi *Normale* d'une moyenne $m = 18$ et d'un écart type $\delta = 2$. Pour les actions de maintenance préventive, elle sera en générale de durée moyenne $Z_p = 2$ u.t.

Les autres paramètres sont résumés par le tableau suivant :

Structure des coûts (<i>u.m</i> : unités monétaires)					
M_C	\tilde{M}_C	M_P	C_P	C_S	C_{TST}
3000	5000	300	2500	11	15200

Tableau A.1. Caractéristiques du système

Cependant, vu que les oléoducs sont soumis à plusieurs types de facteurs nécessitant des interventions de maintenance, il est très intéressant de noter que la maintenance préventive réalisée sera dans certains cas de type âge, suite aux facteurs – comme le taux d'utilisation et les différentes natures des produits pétroliers transportés – qui entrent en scène suite à l'utilisation de l'oléoduc. Dans d'autres situations, la maintenance préventive sera de type bloc, c'est-à-dire après un intervalle

de temps constant, et cela pour mieux répondre aux facteurs indépendants de l'usage de l'oléoduc, comme par exemple, les conditions climatiques ou la physique et la chimie du sol.

Ainsi, et dans le but de voir la différence entre ces deux stratégies de maintenance, nous avons étudié dans le premier chapitre une comparaison entre ces deux types de maintenance préventive appliqués sur un même système de production.

En appliquant cette démarche sur le cas industriel, nous avons obtenu les résultats suivants :

Politique	T^* (<i>u.t</i>)	h^* (m^3)	C_t^* (<i>u.m</i>)
IMP ^B	90	70	2302,16633
IMP ^A	130	90	1975,66044

Tableau A.2. Récapitulatif des résultats

D'après ces résultats l'amélioration A_{IMP^A/IMP^B} du niveau du coût moyen généré, en adoptant une stratégie de maintenance de type âge au lieu d'une stratégie de maintenance de type bloc, dans le cas de la problématique industrielle est égale à :

$$A_{IMP^A/IMP^B} = \left| C_t^{IMP^A} - C_t^{IMP^B} \right| = 326.51 \text{ u.m}$$

Cela peut être exprimé sous forme d'un gain économique de la façon suivante :

$$G_{IMP^A/IMP^B} = \frac{C_t^{IMP^B} - C_t^{IMP^A}}{C_t^{IMP^B}} = 14.18\%$$

Le chapitre III avait comme but de répondre aux contraintes temporelles, très présentes et assez influentes dans le domaine du transport des produits pétroliers. Un retard de début de réalisation de la tâche de sous-traitance se présente dans le cas réel comme une incapacité à allouer l'oléoduc pour le donneur d'ordres de sous-traitance. Ce problème peut se produire dans deux cas majeurs :

- Si un certain volume de produits pétroliers de la compagnie est toujours présent dans l'oléoduc. Cette situation peut être le résultat d'un problème de pompage des produits pétroliers.
- Si le dernier produit transporté par la compagnie à travers l'oléoduc est de nature incompatible avec le produit que le donneur d'ordres de sous-traitance veut transporter.

Il est très utile de signaler que dans des oléoducs multiproduits, les différents produits sont transportés l'un après l'autre. A l'interface de deux produits de natures différentes, se forme une zone de mélange. En cas de compatibilité entre ces produits (exemple : gazole et fioul domestique, supercarburants SP95 et SP 98...), la zone de mélange sera déclassée dans le produit le moins noble et livrée au client.

En cas d'incompatibilité (par exemple : gazole et supercarburant...), le mélange est qualifié de "contamination", impropre à la commercialisation, qui doit subir un certain nombre de retraitements. [Roze, 2002].

Ces mêmes problèmes peuvent occasionner des prolongements imprévus de la durée de la sous-traitance, qui empêchent l'exploitation de l'oléoduc par la compagnie.

En appliquant les résultats du chapitre III dans le cas de la problématique industrielle, nous pouvons observer les résultats suivants à travers lesquels nous remarquons l'impact d'un retard improbable de l'instant de début de la sous-traitance sur le coût moyen généré par unité de temps:

Proportion du retard par rapport à l'instant de référence (%)	Coût engendré ($\times 10^4$) (u.m)	Surcoût engendré par le retard (u.m)
0	1818011,00	0,00
1	1818011,98	9843,14
2	1818012,97	19689,81
3	1818013,95	29540,03
4	1818014,94	39393,77
5	1818015,93	49251,06
6	1818016,91	59111,88
7	1818017,9	68976,24
8	1818018,88	78844,14
9	1818019,87	88715,57
10	1818020,86	98590,54
11	1818021,85	108469,10
12	1818022,84	118351,10
13	1818023,82	128236,70
14	1818024,81	138125,80
15	1818025,8	148018,50
16	1818026,79	157914,60
17	1818027,78	167814,40
18	1818028,77	177717,60
19	1818029,76	187624,40
20	1818030,75	197534,80
21	1818031,74	207448,70
22	1818032,74	217366,10
23	1818033,73	227287,00
24	1818034,72	237211,50
25	1818035,71	247139,50
26	1818036,71	257071,10
27	1818037,7	267006,20
28	1818038,69	276944,80
29	1818039,69	286887,00
30	1818040,68	296832,70
31	1818041,68	306782,00
32	1818042,67	316734,70
33	1818043,67	326691,10

Tableau A.3. Impact du retard de la sous-traitance sur le coût engendré

À travers le chapitre IV, nous avons présenté une étude quantitative de la contrainte de la sous-traitance. Cela constituera, dans la problématique industrielle, un paramètre très important sur la façon avec laquelle la compagnie va allouer son oléoduc. En appliquant ces résultats sur les données du cas réel, nous obtiendrons les résultats résumés dans les tableaux A.4 et A.5.

Rappelons que la politique AIMP consiste en une relaxation de l'hypothèse portant sur l'instant de début de la tâche de sous-traitance.

Politique	T^* (u.t)	h^* (m^3)	Coût engendré (u.m)
AIMP	290.51	506.6744	9822.30

Tableau A.4. Récapitulatif des résultats de la politique AIMP

La politique GPMP, quant à elle, basée sur une généralisation du nombre de tâches de sous-traitance pendant un cycle et donne lieu aux résultats suivants :

Nombre de tâches de sous-traitance par cycle	T^* (<i>u.t</i>)	h^* ($\times 10^2$) (m^3)	Coût engendré ($\times 10^4$) (<i>u.m</i>)
1	136821,30	2538334	1818011
2	136821,90	2538374	1818098
3	136822,50	2538415	1818184
4	136823,10	2538455	1818271
5	136823,80	2538495	1818357
6	136824,40	2538536	1818444
7	136825,00	2538576	1818531
8	136825,60	2538617	1818617
9	136826,20	2538657	1818704
10	136826,80	2538698	1818790

Tableau A.5. Récapitulatif des résultats de la politique GIMP

Enfin, dans le chapitre V, nous avons traité la problématique quantitative de la sous-traitance. L'origine de cette partie est un questionnement légitime et logique de la part des industriels : « Est-ce qu'il vaut mieux allouer l'oléoduc n fois pendant chaque cycle, durant m cycles, ou $2n$ fois pendant chaque cycle, durant $m/2$ cycles, ou.... ? ». Autrement dit, comment peut-on gérer l'aspect quantitatif de contrainte de la sous-traitance ?

Pour répondre à ce problème, nous avons présenté trois stratégies d'allocations. En appliquant ces stratégies sur les données décrites auparavant, nous obtenons :

Politique	T^* (<i>u.t</i>)	h^* (m^3)	C_t^* (<i>u.m</i>)
PPMSS	490	510	5291.34
PPMSM	110	230	13998.40
PPMSI	1200	860	14023.66

Tableau A.6. Récapitulatif des résultats de l'étude quantitative

Cette partie de notre étude peut répondre au problème de la compatibilité des produits transportés via l'oléoduc par la compagnie et ceux du donneur d'ordres de sous-traitance, en allouant l'oléoduc plusieurs fois par cycle tout en coordonnant le plan d'exploitation de l'oléoduc des deux compagnies (la propriétaire de l'oléoduc et le donneur d'ordres de sous-traitance).

En effet, à travers cette étude, nous avons remarqué que même après avoir établi le contrat de sous-traitance, plus de coordination et de coopération entre les deux parties de la relation de sous-traitance améliorent la qualité de cette relation, afin de remédier aux imprévus (retard, prolongement...), mais aussi pour augmenter la flexibilité de l'exploitation de l'oléoduc (éviter au maximum les contaminations).

Références bibliographiques

- [Aghezzaf, 2007] Aghezzaf, E.H., Jamali, M.A., Ait-Kadi, D., "An integrated production and preventive maintenance planning model". *European Journal of Operational Research*, Volume 181, Issue 2, 1 September 2007, p. 679-685
- [Airbus Info, 2007] Airbus Info. "EADS in Asia-Pacific". *An EADS Company*. Press office. 31st March 2007.
- [Amesse, 2001] Amesse, F., Dragoste, L., Nollet, J., Ponce, S., "Issues on partnering: evidences from subcontracting in aeronautics", *Technovation*, vol. 21, p.559-569. 2001.
- [Andersen, 1999] Andersen, P. H., "Organizing international technological collaboration in subcontractor relationships: an investigation of the knowledge-stickiness problem". *Research Policy*, vol. 28, p. 625-642. 1999.
- [Andersen, 2000] Andersen, P. H., Christensen, P. R., "Inter-partner learning in global supply chains: lessons from NOVO Nordisk". *European Journal of Purchasing & Supply Management*, vol. 6, p. 105-116. 2000.
- [Barlow, 1965] Barlow, R.E., Proschan, F., Dans : "Mathematical Theory of Reliability". *John Wiley and Sons, New York*, pp. 108-117. 1965.
- [Benbouzid, 2005] Benbouzid-Sitayeb F " Contribution à l'étude de la performance et de la robustesse des ordonnancements conjoints Production/Maintenance - Cas du flowshop", Université de Franche-Comté, 2005.
- [Bertrand, 2001] Bertrand, J.W.M., Sridharan, V., "A study of simple rules for subcontracting in make-to-order manufacturing". *European Journal of Operational Research*, vol. 128, p. 509-531. 2001.
- [Bery, 1997] Berry, A., "SME competitiveness: the power of networking and subcontracting". *Washington D.C.: Inter-American Development Bank*. 1997.

- [Boukas, 1990] Boukas, E. K., Haurie, A., "Manufacturing flow control and preventive maintenance: a stochastic control approach". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35, 1024-1031. 1990.
- [Buzacott, 1967] Buzacott, J.A., "Automatic transfer lines with buffer stocks", *International Journal of Production Research*, vol. 5, n° 3, p. 183-200. 1967.
- [Cagliano, 2002] Cagliano, R., Spina, G., "A comparison of practice-performance models between small manufacturers and subcontractors". *International Journal of Operations & Production Management*, vol. 22, n° 12, p. 1367-1388. 2002.
- [Chelbi, 2004] Chelbi, A., Ait-Kadi, D., "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit submitted to regular preventive maintenance". *European Journal of Operational Research*, 156, 712-718. 2004.
- [Chelbi, 2006] Chelbi, A., Rezg, N., "Analysis of a production/inventory system with randomly failing production unit subjected to a minimum required availability level". *International Journal of Production Economics*, 99 131-143. 2006.
- [Cheung, 1997] Cheung, K. L., Hausmann, W. H., "Joint optimization of preventive maintenance and safety stock in an unreliable production environment", *Naval Research Logistics*, 44, 257-272. 1997.
- [Conway, 1988] Conway, R., Maxwell, W., Mc Clain, J.O., Thomas, L.J., "The role of work-in-process inventory in serial production lines", *Operations Research*, 36/2, 229-241. 1988
- [Dahane, 2006] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Optimalité d'une politique de maintenance intégrée dans un contexte de sous-traitance". *6ème Conférence Francophone de Modélisation et Simulation Modélisation" (MOSIM 2006)*, Rabat, Maroc. Avril 2006.
- [Dahane, 2007A] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Étude des politiques d'affectation à la sous-traitance dans un contexte de maintenance intégrée". *7e Congrès international de génie industriel (CIGI'2007)*, Trois-Rivières, Québec (CANADA). 5-8 juin 2007.
- [Dahane, 2007B] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Couplage de la gestion de la maintenance et de la production sous une contrainte de sous-traitance". *3ème édition du colloque international francophone : « Performances et nouvelles technologies en Maintenance » (PENTOM 2007)*. Mons. Belgique. 9 et 10 juillet 2007,
- [Dahane, 2007C] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Impact of the Delay of Subcontracting in a Context of Integrated Maintenance: Analytical Approach". *12th IEEE Conference on Emerging Technologies and Factory Automation. Patras - Greece*. September 25-28, 2007

- [Dahane, 2007D] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Effects of extension of subcontracting on a system in a joint maintenance and production context". *The 37th International Conference on Computers and Industrial Engineering (CIE'37)*. Alexandria - Egypt. October 20-23, 2007.
- [Dahane, 2007E] Dahane, M., Clementz, C., Rezg, N., "Analysis of maintenance and production under a subcontracting environment: Analytical and Experimental design approaches". *International Journal of Production Research*. Article accepté. 2007.
- [Dellagi, 2006] Dellagi, S., "Développement de stratégies de maintenance dans un contexte de sous-traitance partielle de production". Thèse de doctorat. Université Paul Verlaine - Metz. France. 2006.
- [Dellagi, 2007] Dellagi S., Rezg N., Xie X., "Preventive Maintenance of Manufacturing Systems Under Environmental Constraints". *International Journal of Production Research*, vol. 45, Issue 5, p. 1233-1254. 2007.
- [DIREM, 2007] "L'industrie pétrolière en 2006", Direction Générale de l'Énergie et des Matières Premières - Direction des Ressources Énergétiques et Minérales. Édition 2007.
- [Gharbi, 2000] Gharbi, A., Kenne, J.P., "Production and preventive maintenance rates control for a manufacturing system: An experimental design approach". *International Journal of Production Economics*, 65, 275-287. 2000.
- [Grossmann, 2005] Grossman, G. M., Helpman, E., "Outsourcing in a Global Economy", *Review of Economic Studies*, 72, 135-159, 2005.
- [Gutierrez, 2000] Gutierrez, G., Paul, A. "Analysis of the effects of uncertainty, risk-pooling, and subcontracting mechanisms on project performance". *Operations Research*; Nov/Dec 2000, vol. 48, n° 6, p. 927-938. 2000.
- [Kawasaki, 1998] Kawasaki, A., "The National Economy and SMEs", *The Economics of SMEs*, Edition 4, Tokyo: Yuhikaku. 1998.
- [Kenné, 2004] Kenne, J.P., Gharbi, A., (2004). "Stochastic optimal production control problem with corrective maintenance", *Computers and Industrial Engineering*, 46, 865-875.
- [Kimura, 2001] Fukunari Kimura, "Subcontracting and the Performance of Small and Medium Firms in Japan". 20 pages. Stock No. 37192. *The International Bank for Reconstruction and Development. The World Bank*. 2001.
- [Lehtinen, 1999] Lehtinen, U., "Subcontractors in a partnership environment: A study on changing manufacturing strategy". *International Journal of Production Economics*, 60-61, p. 165-170. 1999.
- [Lyonnet, 2000] Lyonnet, P., "la maintenance, mathématiques et méthodes", 4e édition, éditions TEC & DOC, 2000.

- [Meller, 1996] Meller, R.D. Kim D.S., "The impact of preventive maintenance on systems cost and buffer size", *European Journal of Operational Research*, 95, 577-591. 1996.
- [Morcos, 2004] Jean-Louis MORCOS, "International subcontracting versus delocalisation ? a survey of the literature and case studies from the SPX network", *United Nations industrial Development organization UNIDO. Industrial Subcontracting and Supply Chain Management*. 2003.
- [Nakagawa, 1979] T. Nakagawa. "Optimum policies when preventive maintenance is imperfect ", *IEEE Transactions on Reliability R-28* 4, p331-332. 1979.
- [Ouali, 2002] Ouali M.S., Rezg N., Xie X., "Maintenance préventive et optimisation des flux d'un système de production", *Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA)*, Vol. 36, No.1, pp 97-116, 2002.
- [Rezg, 2004] Rezg, N., Xie, X, Mati, Y., "Joint optimization of preventive maintenance and inventory control in a production line using simulation", *International Journal of Production Research*. 15 May 2004, vol. 42, n° 10, p. 2029-2046. 2004.
- [Roze, 2002] Roze, D., "Les oléoducs (ou pipelines)", *Groupe Professionnel Pétrole des Ingénieurs Arts et Métiers*. 2002.
- [SESSI, 2006] "La sous-traitance industrielle en chiffres, métaux, plastiques, caoutchouc, électronique", *Production industrielle, hors série*. Édition 2006. Service des études et des statistiques, industrielles (SESSI). Ministère de l'Économie, des Finances et de l'Industrie, Ministère délégué à l'Industrie. 2006.
- [Srinivasan, 1996] Srinivasan, M. M., Lee, H-S., "Production-inventory systems with preventive maintenance". *IIE Transactions*, 28, 11, pg. 879-890. Nov 1996,
- [Tserng, 2002] Tserng, H. P., Lin, P. H., "An accelerated subcontracting and procuring model for construction projects". *Automation in Construction*, vol. 11, p. 105-125. 2002.
- [Van der Duyn Schouten, 1995] Van Der Duyn Schouten, F.A., Vanneste, S.G. "Maintenance optimization of a production system with buffer capacity", *European journal of Operational Research*, vol. 82, n° 2, p.323-338. 1995.
- [Van Mieghem, 1999] Jan A. Van Mieghem, "Coordinating Investment, Production, and Subcontracting", *Management Science*, Vol. 45, No. 7, p. 954-971, July 1999.

Résumé

Les mutations économiques récentes ont favorisé l'émergence des pratiques industrielles plus appropriées aux nouveaux défis imposés. Dans ce contexte, les entreprises ont de plus en plus recours à de nouvelles méthodes d'organisation basées sur plus de coopération et de coordination entre elles. Parmi ces méthodes, la sous-traitance est devenue un outil important pour augmenter la compétitivité des entreprises et un moyen pour faire face à la complexité croissante des technologies pouvant générer dans certains cas un déficit de connaissance et de savoir faire. Dans ce cadre, notre but est d'étudier un système soumis à la contrainte de sous-traitance, dans un contexte de couplage de la gestion de la maintenance et la gestion de la production. En effet, la productivité des systèmes de production est directement affectée par les pannes des machines qui les composent et reste très sensible aux différentes politiques de commande et de maintenance adoptées. L'approche classique dissociant la maintenance et la production est limitée pour faire face aux exigences des nouveaux modes de gestion comme le juste à temps. Pour cela, nos études intègrent la maintenance et la production qui s'est avérée être une approche s'adaptant le mieux aux conditions de la gestion moderne des systèmes manufacturiers. Ainsi, nous avons étudié la sous-traitance industrielle et nous nous sommes intéressés aux systèmes industriels sous-traitants, c'est à dire prestataires de services de sous-traitance. De telles entreprises doivent garantir leurs propres demandes, qui leur parviennent directement, tout en offrant leurs services pour des tiers sous forme de tâches périodiques appelées «Tâches de Sous-Traitance» (TST). Proposer des services de sous-traitance est motivé par le fait que l'entreprise a la capacité de satisfaire sa propre demande, ce qui lui permet d'accomplir des actions supplémentaires générant des profits additionnels.

À travers cette thèse, nous avons élaboré des politiques de maintenance intégrées (c'est-à-dire intégrant la maintenance et la production) sous contrainte de sous-traitance dans le cas d'entreprises prestataires de sous-traitance.

Nous avons débuté cette thèse en démontrant l'efficacité d'une Politique de Maintenance Intégrée (Integrated Maintenance Policy : IMP) en se basant sur une Politique de Maintenance Simple (Simple Maintenance Policy : SMP) qui dissocie la gestion de la maintenance de la commande du système comme modèle de comparaison. Ensuite, nous avons établi analytiquement les conditions nécessaires sous lesquelles la sous-traitance devient profitable pour le système en comparant une Politique Sans Sous-traitance (wiThout Subcontracting Policy : TSP) avec une Politique Avec Sous-traitance (With Subcontracting Policy : WSP) allouant la machine pour effectuer une seule tâche de sous-traitance pendant un cycle de maintenance.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous nous sommes intéressés aux aspects temporels de la sous-traitance. Au début, nous avons développé le modèle analytique d'une Politique Adaptée de Maintenance sous la Production (Adapted Policy of Maintenance under Production : APMP) qui détermine le meilleur instant pour allouer la machine à la sous-traitance. Ensuite, nous avons analysé l'impact d'un retard imprévu du début de la réalisation de la sous-traitance ainsi qu'une prolongation inattendue de la période de sous-traitance.

Dans la troisième partie, en s'appuyant sur les résultats de la partie précédente nous optimisons la Politique de Production sous Maintenance (Production under Maintenance Policy : PMP), et la Politique Généralisée de Production sous Maintenance (Generalized Production under Maintenance Policy : GPMP) qui consiste alors en une généralisation basée sur le nombre de sous-traitances à réaliser pendant un cycle.

Une quatrième partie est enfin consacrée à l'analyse d'un aspect très important de la contrainte de sous-traitance : l'aspect quantitatif, qui prend en compte les différentes politiques de maintenance soumises à des contraintes sur nombres de TST réalisées et la façon avec laquelle la machine est allouée à la sous-traitance.

En conclusion, nos travaux proposent des modèles et des outils capables de prescrire la meilleure politique de maintenance dans le cas de production sous contrainte de sous-traitance. Cette contribution vise essentiellement l'efficacité de l'outil de production dans un contexte de globalisation de l'économie qui conduit de plus en plus les entreprises à assurer des TST pour rester compétitives.
