HAL
open science

La représentation implicite des volumes pour l'analyse par éléments finis avec XFEM et Level-sets

Mohammed Moumnassi

▶ **To cite this version:**

Mohammed Moumnassi. La représentation implicite des volumes pour l'analyse par éléments finis avec XFEM et Level-sets. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 2011. Français. NNT : 2011METZ033S . tel-01749074

HAL Id: tel-01749074

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749074v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 9 décembre 2011 à l'Université Paul Verlaine de Metz

par

Mohammed MOUMNASSI

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paul Verlaine de Metz

Discipline : Mécanique

La représentation implicite des volumes pour l'analyse par éléments finis avec XFEM et Level-sets

Composition du jury

Président :	Professeur Houman BOROUCHAKI	Université de technologie de Troyes, France
Rapporteurs :	Professeur Nicolas MOËS	École Centrale de Nantes, France
	Professeur Pierre DUYSINX	Université de Liège, Belgique
Examinateur :	Docteur Salim BELOUETTAR	CRP Henri Tudor, Luxembourg
Directeurs :	Professeur Michel POTIER-FERRY	Université Paul Verlaine-Metz, France
	Professeur Éric BÉCHET	Université de Liège et Université Paul Verlaine-Metz

Laboratoire d'Étude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) - UMR CNRS 7239

Ecole Doctorale EMMA (Énergie Mécanique MAtériaux)

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire n'aurait jamais abouti sans l'aide et le soutien permanents apportés par de nombreuses personnes et aussi grâce au financement du Fonds National de la Recherche du Grand Duché du Luxembourg (AFR 07/070).

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants : Messieurs Michel POTIER-FERRY, Éric BÉCHET et Salim BELOUETTAR pour m'avoir donné la chance de travailler sur un sujet aussi passionnant, pour leur disponibilité, leurs conseils et leur aide précieuse.

Je remercie également Monsieur Stéphane P.A. BORDAS, Professeur à Cardiff School of Engineering, pour son aide et ses précieux conseils au cours de cette thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à l'égard de Monsieur Houman BOROUCHAKI pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury, à Messieurs Nicolas MOËS et Pierre DUYSINX pour avoir accepté la tâche fastidieuse de rapporteur et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

J'en profite pour remercier l'ensemble des collègues : les thésards, les permanents et plus particulièrement Houssein NASSER, Griselda GUIDONI, Mohamed MOUAS et Youcef BOUGHERIRA pour leur soutien, leur aide et l'ambiance sympathique qu'ils n'ont jamais négligée.

Enfin, je ne saurais conclure sans un mot pour ma famille : un grand merci à mes parents, mes beaux-parents, mes sœurs Ibtissam et Soukaïna, mon frère Rachid pour m'avoir soutenu moralement dans les derniers moments de la thèse. Merci à Mamie et Papi (mes beaux-parents) d'avoir pris de leur temps pour s'occuper de mon fils Elyass quand ma femme travaillait. Un énorme merci à ma femme Nora qui m'a supporté et tout fait pour me faciliter la vie durant toute la thèse.

Je dédie cette thèse
à ma femme Nora et mon fils Elyass

Résumé

La méthode des éléments finis (ÉF) est largement utilisée pour la simulation numérique de problèmes physiques formulés en terme d'équations aux dérivées partielles (EDP). Une étape cruciale du processus d'analyse par cette méthode est la discrétisation de la géométrie du domaine afin de construire le maillage sur lequel est formulé l'espace d'approximation du problème. Cependant, la création d'un maillage de qualité conforme aux frontières courbes et aux arêtes vives, dont dépend les résultats numériques, nécessite encore un apport significatif de temps humain lors du processus globale d'analyse. L'objet de ce travail est la mise en œuvre d'une nouvelle approche qui permet de réaliser des simulations sur un objet dont la frontière est non-conforme au maillage, tout en conservant les avantages des ÉF. Pour cela, on utilise une représentation implicite du domaine (Level set) et la méthode des éléments finis étendus (XFEM). Dans un premier temps, on s'intéresse à construire des objets par Level sets indépendamment de la discrétisation spatiale (i.e. un maillage simple). Des stratégies ont été développées afin de construire des objets implicites à partir de la représentation paramétrique la plus populaire en conception CAO, de préserver les arêtes vives et pour pouvoir représenter correctement les frontières courbes. Dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'adaptation de la méthode XFEM afin de réaliser une intégration numérique correcte et de préserver la stabilité des formulations mixtes pour la gestion de la contrainte de Dirichlet. La dernière partie consiste à vérifier la précision et les taux de convergence dans le cas des frontières courbes et pour des objets entièrement non-conformes au maillage.

Mots-clés: Représentation paramétrique-implicite, Level Set, Maillage non-conforme, Sous-maillage local multi-niveaux, XFEM, Dirichlet, Approche multiplicateurs de Lagrange.

Abstract

The Finite Element Method (FEM) is widely used for numerical simulations of physical problems formulated in terms of partial differential equations (PDE). A crucial step in the process of analysis by this method is the discretization of the geometry to construct a mesh representing the approximation space of the problem. However, high quality mesh that conforms to the curved boundaries and sharp features, whose depends on the numerical results, still requires a significant amount of human time in the global process of analysis. The aim of this work is to implement a new approach that allows performing simulations on an object whose boundaries do not conform to the mesh, while retaining the benefits of FEM. For this purpose, the implicit representation of the domain (Level set) and the eXtended Finite Element Method (XFEM) are used. In the first step, the focus is to build objects by using Level sets independently of the spatial discretization (i.e. a simple mesh). Strategies have been developed to build implicit objects from the parametric representation (the most common in Computer Aided Design CAD), to preserve sharp features and correctly represent curved boundaries. In a second step, the focus lies on adapting XFEM to achieve a proper numerical integration and to preserve the stability of mixed formulations for managing Dirichlet constraints. The last part consists in verifying the accuracy and rate convergence in the case of implicit curved boundaries and of non-conforming objects to the mesh.

Key words: Parametric-implicit representation, Level Set method, Non-conforming mesh, Multilevel local sub-mesh, XFEM, Dirichlet, Lagrange multipliers approach.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction **1**

1.1 Contributions 4

1.2 Organisation du document 5

Chapitre 2 Représentations en modélisation géométrique et les maillages qui en résultent **6**

2.1 Représentation par surfaces paramétriques 6

2.1.1 Génération du maillage 7

2.1.2 Modélisation géométrique par les frontières (B-Rep) 7

2.2 Représentation par fonctions implicites 8

2.2.1 La fonction de distance signée 9

2.2.2 La méthode des Level sets (les courbes de niveau) 10

2.2.3 Génération du maillage 10

2.2.4 Géométrie solide constructive (CSG) 14

2.3 Transformation d'une représentation paramétrique vers une représentation implicite 16

2.4 Discussion sur le choix de la représentation géométrique 17

2.5 Conclusions 19

Chapitre 3 Partition de l'Unité et Méthode des Eléments finis étendus **20**

3.1 Introduction 21

3.2 Méthode de partition de l'unité 21

3.3 Stratégie d'enrichissement dans le contexte XFEM 23

3.3.1 Discontinuités à travers des interfaces ouvertes 24

3.3.2 Discontinuités à travers des interfaces fermées 26

3.3.2.1 *Modélisation des interfaces matériau-vide avec XFEM* . . 27
3.3.2.2 *Modélisation des interfaces matériau-matériau avec XFEM* 29
3.4 Intégration numérique 30
3.5 Imposition des conditions aux limites dans le cadre des éléments finis étendus 31
3.5.1 Formulations 32
3.5.2 Multiplicateurs de Lagrange "classiques" 34
3.5.3 Algorithmes de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange 37
3.5.4 La méthode de pénalité 39
3.5.5 La méthode de Nitsche 39
3.6 Conclusions 40

Chapitre 4 Représentation implicite par Level sets d'un objet paramétrique 42
4.1 Notations 42
4.1.1 Classification des éléments de maillage par l'intermédiaire des données de la Level set 43
4.1.2 Discrétisation de la Level set et définition des sous-éléments de maillage 43
4.2 Rappel des objectifs et proposition de méthodologie 45
4.3 Conversion d'une fonction paramétrique arbitraire vers une représentation level set 48
4.3.1 Algorithme proposé 50
4.3.2 Description détaillée de l'algorithme de conversion 53
4.3.2.1 *Déterminer l'élément de départ à partir d'un point arbitraire sur la surface paramétrique* 53
4.3.2.2 *Déterminer les points d'intersections entre la surface paramétrique et l'élément de départ* 53
4.3.2.3 *Calculer le champ de la distance signée dans l'élément de départ* 54
4.3.2.4 *Remplir la liste des éléments voisins de l'élément de départ* 54
4.3.2.5 *Calculer le champ de la distance signée dans les éléments adjacents à l'élément de départ* 55
4.3.2.6 *Construction du niveau zéro situé dans la bande ω et l'extraction du maillage polygonale Γ_h* 55
4.3.2.7 *Remarques sur l'algorithme de conversion* 57

4.4 Modélisation d'objets par multiples Level sets 58
4.4.1 Technique récursive de découpage 58
4.4.2 Illustration de la technique de découpage pour représenter des arêtes vives 59
4.4.3 Exemples de représentation de formes avec plusieurs Level Sets . . . 60
4.5 Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage 62
4.5.1 Technique de raffinement basée sur un sous-maillage gradué (SMG) 62
4.5.1.1 *Algorithme de raffinement* 63
4.5.1.2 *Remarques* 64
4.5.2 Technique de raffinement basée sur un sous-maillage dégénéré (SMD) 67
4.6 Conclusions 68

Chapitre 5 Analyse par XFEM sur des géométries non-conformes au maillage 69

5.1 Intégration numérique 69
5.1.1 Intégrales de domaine 70
5.1.2 Intégrales de frontière 72
5.2 Analyse de convergence en maillage non-conforme aux frontières courbes . 74
5.2.1 Aire d'un disque 75
5.2.2 Plaque trouée sous tension 77
5.2.2.1 Expérience numérique en utilisant le sous-maillage dégénéré (SMD) 79
5.2.2.2 Expérience numérique en utilisant le sous-maillage gradué (SMG) 83
5.2.3 Tube cylindrique sous pression 86
5.2.3.1 Tube cylindrique sous pression en 2D 88
5.2.3.2 Tube cylindrique sous pression en 3D 90
5.2.4 Conclusions et remarques 94
5.3 Analyse de convergence en maillage non-conforme à la frontière avec XFEM 97
5.3.1 Formulations 97
5.3.2 Imposition des conditions aux limites de type Dirichlet 98
5.3.3 Validations 99
5.3.3.1 *Validation de l'approche proposée sur des problèmes en 2D* 100
5.3.3.2 *Validation de l'approche proposée sur un problème en 3D* 106
5.4 Conclusions 107

Chapitre 6 Conclusions et Perspectives **110**
6.1 Conclusions 110
6.2 Perspectives 112
6.3 Publications 113

Bibliographie **114**

CHAPITRE 1

Introduction

Sommaire

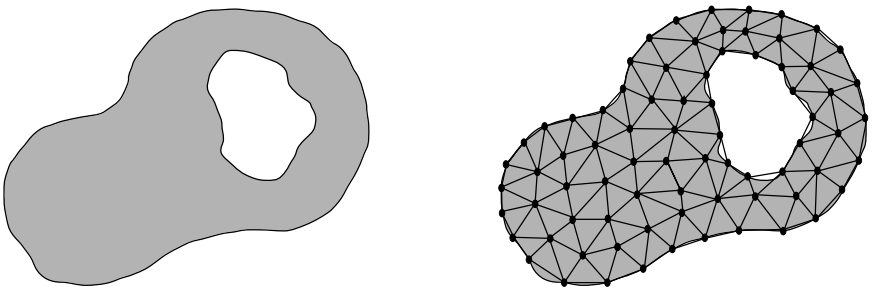
1.1 Contributions **4**

1.2 Organisation du document **5**

La méthode des éléments finis (ÉF) [Zienkiewicz and Taylor (1991)] est largement utilisée pour l'analyse des problèmes d'ingénierie, non seulement en raison de son aptitude à résoudre une variété de problèmes physiques formulés en termes d'équations aux dérivées partielles (EDP), mais aussi en raison de sa capacité à gérer des géométries complexes et des conditions aux limites. Pour une analyse par éléments finis, le domaine physique 1.1(a) est subdivisé en éléments de forme géométrique simple 1.1(b) afin de discrétiser la géométrie du domaine en respectant scrupuleusement les frontières *internes* et *externes*. Ainsi le maillage résultant est utilisé pour représenter l'espace de l'approximation de la solution du problème. Cependant, la création d'un maillage satisfaisant qui est *conforme* aux frontières et aux arêtes vives du domaine nécessite encore un apport significatif de temps humain lors du processus d'analyse globale. En effet, les algorithmes de génération automatique de maillage sont très bien maitrisés pour la plupart des problèmes $2D$, mais peuvent être peu fiables pour certaines géométries $3D$, ce qui entraîne des éléments de mauvaise qualité ou déformés dans certaines régions, qui peuvent conduire à des erreurs importantes de la solution. Un nombre important d'interventions et de savoir-faire de la part de l'utilisateur sont parfois nécessaires pour pallier ces problèmes.

De plus, dans la plupart des applications industrielles, le modèle de conception CAO [1] approprié est celui qui produit la précision désirée pour le problème à résoudre. En pratique, cela n'est réalisable que par des modifications itératives du modèle CAO par l'insertion, la suppression ou la modification de certaines caractéristiques de forme et de la

1. Conception Assistée par Ordinateur



(a) (b)

FIGURE 1.1 – 1.1(a) Le domaine de l'analyse. 1.1(b) la discrétisation spatiale du domaine (maillage).

géométrie de la pièce qui sont importantes ou bien qui sont même sans attributs pertinents pour la simulation à effectuer. Par conséquent, la génération d'un maillage unique pour le domaine de calcul ne suffit pas pour de multiples analyses élément finis. En effet, chaque étape de la simulation du modèle CAO modifié exige d'effectuer une nouvelle étape du processus de génération de maillage (remaillage) à plusieurs reprises. Ce processus est nécessaire pour un grand nombre de situations où la forme du modèle et de la topologie peuvent changer (telles que l'optimisation de forme, propagation de fissures, mouvement de frontières libres, etc.). Par ailleurs, au-delà de la lourde tâche de remaillage, le transfert de champ lors de processus de remaillage dans le cas des problèmes à frontière mobile, entraine une dégradation de la solution due à une diffusion numérique après chaque transfert de champ d'approximation.

Les difficultés liées à la génération de maillages de qualité conforme aux frontières de l'objet, ainsi que le processus de remaillage ont conduit à développer des nouvelles méthodes numériques alternatives dans le but de pallier certaines limites de la méthode des éléments finis classique. Parmi ces alternatives, on trouve les méthodes appelées méthodes sans maillage (Meshless) [Nayroles et al. (1992)] ou encore plus proche du cadre élément finis classique sous le nom de la méthode des éléments finis généralisée (GFEM) [Strouboulis et al. (2001)] et la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [Moës et al. (1999)]. Ces alternatives qui sont basées sur un maillage exploitent la propriété de partition de l'unité (PU) [Babuška and Melenk (1997)] afin d'enrichir l'espace de l'approximation classique par des fonctions représentant au mieux les phénomènes physiques à évaluer. L'idée principale de cette technique est, d'une part, de rendre le maillage utilisé indépendant de la géométrie du problème en ajoutant des fonctions de forme discontinues capables de représenter le saut de la solution ou bien de son gradient à l'intérieur des éléments de

maillage, d'autre part de permettre une représentation fidèle des phénomènes physiques comme dans le cas, par exemple, de singularités et zones à forts gradients au sein des éléments finis.

Le principal atout de ces méthodes alternatives est que la discrétisation spatiale (maillage) pour construire l'espace de l'approximation éléments finis devient indépendante de la géométrie du domaine. Par conséquent, les frontières ne seront plus portées par la topologie du maillage mais plutôt par l'espace d'approximation discontinue. Ainsi le processus de remaillage est remplacé par une mise à jour de l'espace d'approximation enrichie. Autrement dit, la génération du maillage devient une étape très simple dans l'analyse éléments finis, ainsi un maillage simple et unique pourra se servir pour de multiples analyses et remplace l'opération globale du remaillage.

En ce qui concerne la représentation des frontières de la géométrie, une très grande diversité existe dans la littérature, que ce soient des représentations par des surfaces paramétriques, ou bien volumiques comme les représentations par voxels ou encore par la méthode des fonctions de niveau "Level set method" [Osher and Sethian (1988)]. La représentation d'objet par la méthode des Level sets sur un maillage fixe s'est avérée particulièrement pratique et fournit un cadre de travail ainsi que des outils numériques performant permettant le traitement et la manipulation des objets $3D$. Ainsi, son couplage avec la méthode des éléments finis étendus (XFEM) présente un intérêt très particulier pour réaliser des simulations purement indépendantes du maillage.

L'objectif du travail présenté dans ce mémoire de thèse est de développer des outils numériques capables de réaliser des calculs élément finis sur des géométries purement non-conformes au maillage. La démarche envisagée intègre le concept de la représentation par Level set d'une part et la méthode des éléments finis étendus d'autre part. La spécificité de cette démarche conduit dès lors à l'étude de deux axes :

- **la représentation géométrique** : il s'agit d'améliorer et étendre la représentation géométrique par Level set sur un maillage fixe afin d'élargir son domaine d'application (représentation des pièces mécaniques), d'une part, développer des techniques afin de construire des objets implicites à partir de la représentation paramétrique la plus populaire en CAO, d'autre part de préserver les arêtes vives de l'objet et pouvoir représenter les frontières courbes indépendamment de la taille des éléments du maillage fixe.
- **l'analyse éléments finis** : il s'agit de développer une intégration numérique appropriée pour les éléments de maillage coupés par la frontière de l'objet, ainsi la mise en place des conditions aux limites de sorte que le calcul se réalise en toute indépendance du maillage, tout en conservant la précision et les propriétés des éléments

finis classiques.

1.1 Contributions

Nos contributions dans le domaine de la représentation d'objets 3D par la méthode des Level sets et l'analyse par la méthode des éléments finis étendus peuvent être résumées de la façon suivante.

- Nous présentons un algorithme de conversion d'une représentation paramétrique (par frontière) en représentation Level set (volumique) dans un maillage non structuré. Cette conversion réunit les avantages de la représentation volumique (Level set) sur un maillage fixe tout en tirant parti des avantages de la représentation paramétrique pour décrire plus précisément les frontières courbes.
- Nous proposons une modélisation volumique d'objet géométrique de type CSG [2], basée sur la combinaison de multiples level sets précédemment converties pour construire l'objet final : l'intérieur de l'objet est décrit par un ensemble d'éléments de maillage et sa surface est précisément approximée en utilisant la représentation paramétrique, tout en préservant les arêtes vives et les coins. Ensuite, nous montrons que cette représentation géométrique peut être indépendante de la taille des éléments du maillage en construisant un sous-maillage à l'intérieur des éléments traversés par les frontières courbes.
- Nous utilisons cette représentation d'objet par Level sets sur un maillage fixe pour mener des études éléments finis indépendamment du maillage. Pour cela, nous étendons l'intégration numérique classique utilisée dans la méthode des éléments finis étendus (XFEM). Cela consiste à réaliser une intégration numérique correcte dans la partie du domaine courbée ou bien qui représente une arête vive, ainsi que sur la frontière courbe à l'intérieur d'un élément du maillage. Nous utilisons une formulation mixte pour le problème considéré, ainsi nous adaptons la technique de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange proposée par Moës et al. (2006); Géniaut et al. (2007) et Béchet et al. (2009) pour la mise en place des conditions aux limites de type Dirichlet sur une interface dans le cadre d'XFEM. Ensuite nous montrons les capacités de notre approche à mener des études éléments finis indépendamment du maillage en assurant la stabilité et la bonne convergence de la solution similaires à celle des éléments finis classique avec maillage conforme aux frontières.
- Nous montrons dans la suite que la considération de l'information exacte des frontières courbes en utilisant la représentation paramétrique permet l'utilisation des

2. La géométrie constructive solide

éléments finis d'ordre supérieur afin d'obtenir le taux optimal de convergence.

1.2 Organisation du document

Ce mémoire de thèse est organisé de la façon suivante.

Le chapitre 2 présente les principales techniques de représentation géométrique $3D$ et les maillages qui en résultent, leurs propriétés ainsi que leurs avantages et inconvénients pour la génération de maillage et le remaillage. Un intérêt particulier sera dédié à la représentation par Level sets dite représentation *implicite* et nous intéressons à la modélisation CSG pour construire des formes et des objets définis par la distance Euclidienne signée à la surface du solide.

Le chapitre 3 présente une étude bibliographique concernant la méthode XFEM pour traiter les discontinuités, l'intégration numérique et l'imposition des conditions aux limites que nous étendons et adaptons dans la suite pour mener des calculs sur des géométries non-conformes au maillage.

Le chapitre 4 est consacré aux algorithmes développés pour construire une géométrie implicite indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage). Nous détaillons un algorithme de conversion d'une représentation paramétrique en représentation par un champ de distance signée (Level set) pour représenter un plus vaste champ de primitives. Nous présentons une technique de représentation implicite de type CSG capable de préserver les arêtes vives et les coins d'un objet. Ce chapitre décrit également deux techniques de sous-maillage (sous-maillage dégénéré et gradué SMD/SMG) pour pouvoir approximer correctement les frontières courbes indépendamment de la taille des éléments du maillage qui servent pour l'approximation éléments finis.

Le chapitre 5 est dédié à l'analyse par éléments finis sur des géométries non-conformes au maillage. Nous détaillons l'adaptation de la méthode XFEM à notre contexte. Plusieurs tests académiques en deux et trois dimensions ainsi que des analyses de convergence permettront de valider l'approche proposée.

Nous présentons au cours du chapitre 6 nos conclusions sur le potentiel de l'approche proposée ainsi que sur les perspectives possibles.

CHAPITRE 2

Représentations en modélisation géométrique et les maillages qui en résultent

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement les principales techniques de représentation des objets $3D$, ainsi que les techniques que peuvent fournir telle ou telle représentation pour construire un maillage éléments finis. Nous exposons les deux différentes représentations existantes pour définir les courbes, les surfaces, les objets : les formes paramétriques et les fonctions implicites. De plus, les structures de données les plus connues en CAO : la représentation par les frontières (B-Rep) et la géométrie constructive solide (CSG), ainsi leurs avantages et inconvénients pour la génération du maillage et le remaillage.

Il est important de garder à l'esprit qu'une représentation qui facilite la génération du maillage ou bien qui soit indépendante du maillage présente de nombreux avantages lors des analyses éléments finis. Nous rassemblons nos remarques, nos observations et nos justifications pour déterminer d'une part un modèle de représentation suffisamment adapté pour représenter un vaste champ d'objets, comme des pièces mécaniques, et d'autre part plus adapté pour les analyses éléments finis étendus qui est la méthode numérique que nous adopterons dans cette étude.

2.1 Représentation par surfaces paramétriques

La représentation la plus populaire en conception assistée par ordinateurs (CAO) est probablement l'utilisation de formes paramétriques. Les points de l'espace paramétrique sont portés vers l'espace géométrique par la forme générale d'une surface paramétrique

définie par : $S(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v))$.
Les courbes et surfaces paramétriques les plus utilisées sont les B-Splines, les surfaces de Bézier ou les B-Splines rationnelles non uniformes (NURBS) [Piegl and Tiller (1997)]. Cette catégorie de modélisation permet de représenter des objets complexes arbitraires par leurs frontières et est nommée Boundary Representation (B-Rep).

2.1.1 Génération du maillage

L'évaluation exacte et directe des points sur la surface et ses dérivées permet d'approximer la frontière d'un objet, le plus fidèlement possible, par un maillage polygonal. Plusieurs algorithmes sont disponibles dans les mailleurs automatiques pour l'obtention de maillage satisfaisant surfacique, c'est-à-dire qui répond aux critères d'approximation surfacique de l'objet et la qualité des éléments qui le constitue. Ce maillage surfacique est un pré-requis fondamental pour aborder le maillage volumique de l'objet. Plusieurs approches sont possibles pour la génération du maillage non structuré d'un domaine tridimensionnel à partir du maillage de sa frontière. Les plus populaires se basent sur l'algorithme de Delaunay [Shewchuk (2002)] et l'algorithme frontal [Lo (1985)]. La génération et la qualité d'un maillage tridimentionnel acceptable pour l'analyse éléments finis est conditionné, dans une large mesure, par le maillage de la frontière de l'objet considéré.

2.1.2 Modélisation géométrique par les frontières (B-Rep)

Le modèle géométrique utilisé dans les logiciels CAO est la représentation par les frontières. Cette modélisation consiste à représenter un objet par un ensemble de surfaces (la peau de l'objet), ainsi que l'orientation de ces surfaces pour séparer l'intérieur de l'objet à son extérieur. Le modèle B-Rep conserve deux types d'informations : géométriques (surfaces, courbes, points) et topologiques par des relations entre les entités géométriques (sommets, arêtes, faces, etc).

Dans la méthode des éléments finis, un maillage est utilisé pour représenter les frontières et le volume de la structure ainsi servant comme support pour les fonctions d'approximation et d'interpolation. L'approximation du domaine de calcul est représentée comme un ensemble de polygones en $2D$ ou polyèdres en $3D$, composé de faces, d'arêtes et de sommets. En général, un maillage est caractérisé par l'ensemble des sommets qui composent ses éléments et sa topologie qui définit la connectivité entre sommets, arêtes et faces. Les modèles de maillages peuvent être générés à partir de logiciel de modélisation en utilisant le modèle B-Rep CAO.

Cependant, les générateurs de maillage sont conçus pour forcer le maillage de se conformer aux frontières de l'objet, en particulier de se conformer aux arêtes vives, coins et aux frontières courbes ; respecter la carte de tailles ÉF imposée ; des critères de qualité liés à la forme des éléments. Ces contraintes doivent être respectées pour garantir la qualité du maillage obtenu et la précision de l'approximation géométrique par le maillage de sortie.

De plus, les changements paramétriques des frontières ne sont pas directement prises en compte. En conséquence, la plupart des changements de paramètres (modifications du modèle CAD) nécessitent un nouveau maillage du modèle partant de zéro. Cela se produit même si la plupart des frontières de l'objet restent inchangées, car le changement d'une seule entité de la frontière entraîne la suppression du maillage surfacique sur cette entité et toutes les entités qui en dépendent pour construire un nouveau maillage de l'objet modifié. Cela conduit à un ralentissement significatif dans le processus de conception à cause de multiples changements paramétriques répétitifs qui sont souvent réalisés jusqu'à ce que l'objet désiré soit généré en fonction des résultats de simulation.

Des complications peuvent apparaître lors d'un changement dans la topologie de la description de l'objet en raison d'un éventuel changement en matière de connectivité des éléments en cours de l'évolution des frontières par exemple. Des algorithmes robustes sont nécessaires pour gérer ce changement topologique.

2.2 Représentation par fonctions implicites

Les fonctions implicites qui sont très utilisées dans le domaine de l'infographie et de l'imagerie médicale, offrent un autre moyen de modéliser des objets par une fonction $F(P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, décrivant pour chaque point de l'espace P, sa position relativement à la frontière de l'objet. Les courbes et surfaces sont représentées comme l'ensemble des points de l'espace pour lesquels la fonction implicite est égale à une valeur scalaire fixée iso, nommée iso-valeur. Les courbes implicites planes ($P \in \mathbb{R}^2$) et les surfaces implicite ($P \in \mathbb{R}^3$) divisent l'espace en deux régions. Plus précisément, la frontière par $\{P : F(P) = iso\}$ où P se situe sur la frontière, l'intérieur de l'objet est défini par $\{P : F(P) > iso\}$ (selon la convention adoptée) et l'extérieur par $\{P : F(P) < iso\}$. Cette représentation permet donc de définir implicitement un objet de topologie arbitraire à la fois par sa surface et son intérieur.

Il existe différents types de fonctions implicites où une fonction F est vue comme un potentiel auquel est associée une valeur de ce potentiel en fonction de la position. La fonction F peut être soit une fonction polynômiale, soit une fonction définie de manière procédurale ou encore une fonction quelconque. La version la plus utilisée exprime un

champ de distance scalaire qui définit un objet en associant à chaque point de l'espace la plus petite distance signée entre ce point et tout point appartenant à la surface du solide.

2.2.1 La fonction de distance signée

La fonction de distance signée ou le champ de distance signée d'un point $P \in \mathbb{R}^n$ à un espace topologique de dimension $(n-1)$ fermé Γ dans $\mathbb{R}^n$ avec $n = 2; 3$ est défini par : $d : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} d\,(P) &= sign(P) \cdot min\,\{|P - Q| : Q \in \Gamma\} \\ sign\,(P) &= \begin{cases} +1 & \text{si} \quad P \in \text{ extérieur,} \\ -1 & \text{si} \quad P \in \text{ intérieur.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $|P - Q|$ est la distance Euclidienne entre le point P de l'espace et un point Q appartenant à Γ. Le champ distance peut être représenté de façon continue ou discrète. Les expressions pour la plupart des fonctions implicites qui représentent des primitives simples par la distance signée sont connues analytiquement [Hart (1996)]. Par exemple les champs de distance signée à la surface d'un plan infini, une sphère et un cylindre infini sont définies par :

- $p\,(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{n}$, où $\underline{x}_0$ et $\underline{n}$ sont respectivement le point et la normale unitaire définissant le plan ;
- $s\,(\underline{x}) = \|\underline{x} - \underline{x}_0\| - r_0$, où $\underline{x}_0$ et r_0 sont respectivement le centre et le rayon définissant la sphère ;
- $c\,(\underline{x}) = \|(\underline{x} - \underline{x}_0) - ((\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{x}_\star)\underline{x}_\star\| - r_0$, où $\underline{x}_\star$ est l'axe directeur et $\underline{x}_0$ un point de l'axe du cylindre.

Le principal avantage de la modélisation par fonctions implicites est la possibilité de combiner plusieurs d'entre elles pour représenter des objets complexes. De plus, cette modélisation permet la manipulation ou la déformation aisée de la frontière de l'objet. C'est pourquoi ce modèle est utilisé entre autres dans les domaines de la visualisation de modèles 3D de plus en plus réalistes et de l'imagerie médicale qui incluent non seulement des informations géométriques, mais également les propriétés internes de l'objet (appelés attributs).

2.2.2 La méthode des Level sets (les courbes de niveau)

La méthode des courbes de niveau ou Level Set Method [Osher and Sethian (1988)] identifie la position d'une interface ou une surface en général comme une ligne/surface de niveau d'une fonction potentielle typiquement définie par un champ scalaire de distances signées (voir la section 2.2.1). Cette méthode capture une surface fermée Γ par le niveau zéro d'un champ scalaire $\phi(\underline{x})$, soit que : $\Gamma = \{\underline{x} : \phi(\underline{x}) = 0\}$, ou encore le signe de $\phi(\underline{x})$ qui permet de définir un intérieur et un extérieur du domaine physique.

Une propriété importante du champ level set définie par un champ scalaire de distances est que le gradient vaut toujours 1, $\|\underline{\nabla}\phi\| = 1$.

Dans certaines applications, l'interface évolue tout au long de la simulation, où $\phi\left(\underline{x}\right)$ est également fonction du temps $\phi\left(\underline{x}(t), t\right)$. Dans ce cas, l'évolution de la frontière $\Gamma(t)$ du champ Level set $\phi\left(\underline{x}(t), t\right)$ doit être mis à jour à chaque pas de temps en différenciant l'équation $\phi\left(\underline{x}(t), t\right) = 0$ par rapport au temps, soit que :

$$\frac{\partial\phi\left(\underline{x}(t), t\right)}{\partial t} + \underline{\nabla}\phi\left(\underline{x}(t), t\right) \cdot \frac{\partial\underline{x}(t)}{\partial t} = 0 \tag{2.2}$$

On considère V le champ de vitesse normale qui intervient dans cette loi d'évolution et $\underline{n}$ la normale en tout point $\underline{x}$ aux iso-surfaces $\phi(\underline{x}) = iso$ donnée par :

$$\underline{n} = \frac{\underline{\nabla}\phi}{\|\underline{\nabla}\phi\|} \tag{2.3}$$

l'équation 2.2 est réécrite comme ceci :

$$\phi_t + V\,\|\underline{\nabla}\phi\| = 0 \tag{2.4}$$

Cette équation est de type Hamilton-Jacobi, elle est principalement utilisée dans les problèmes de transport. L'évolution de $\Gamma\left(t\right)$ équivaut à déformer ou propager la frontière de l'objet construit par le niveau zéro $\phi\left(\underline{x}(t), t\right) = 0$. L'avantage majeur de cette méthode est que les calculs sont réalisés sur un maillage fixe et qu'elle manipule naturellement les changements topologiques de la frontière (l'interface).

Il existe deux méthodes numériques de résolution de l'équation 2.2, soit par la méthode des différences finies sur un maillage structuré ou bien par élément finis sur un maillage non structuré [Barth and Sethian (1998), Marchandise et al. (2006), Elias et al. (2007)].

2.2.3 Génération du maillage

Il y a essentiellement deux types de méthodes pour mailler un objet de type implicite.

Décomposition spatiale : cette technique est basée sur le découpage de l'espace en cellules de même type, généralement des cubes ou des tétraèdres. Une décomposition spatiale en $2D$ est présentée sur la figure 2.1.

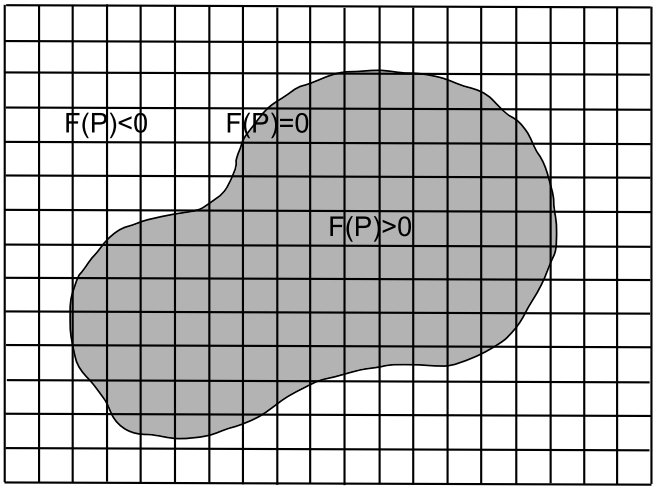


FIGURE 2.1 – Exemple d'une grille en $2D$ pour mailler un objet définie par une fonction implicite F(P).

Les valeurs de la fonction implicite sont calculées sur chaque sommet des cellules qui composent l'espace. Ensuite, les points d'intersection de la fonction implicite avec les cellules de l'espace sont définis, soit par un calcul d'intersection avec les arêtes traversées par la surface ou bien par une approximation par une interpolation des valeurs stockées de la fonction aux sommets. Les points d'intersection des arêtes de chaque cellule traversée par la surface sont utilisés pour approcher localement la surface par un polygone. Ces polygones sont triangulés et assemblés formant ainsi un maillage surfacique de la frontière de l'objet. Une approximation du maillage de la frontière peut être créée en utilisant les algorithmes de polygonisation : Marching Cube [Lorensen and Cline (1987)] dans le cas d'une décomposition de l'espace par des cubes ou Marching Triangle [Hilton et al. (1996)] dans le cas d'une décomposition par des tétraèdres. Ces algorithmes consistent à construire le maillage en réalisant un suivi des cellules traversant la surface à partir d'une première cellule repérée. La figure 2.2 montre les quinze configurations d'intersection de base entre un cube et la surface implicite en fonction du signe de la fonction potentielle aux différents sommets.

Le maillage surfacique résultant par cette décomposition sépare l'espace en deux parties : intérieur et extérieur de l'objet. Ce qui rend le maillage du volume plus simple en fournissant un maillage très régulier à l'intérieur de l'objet.

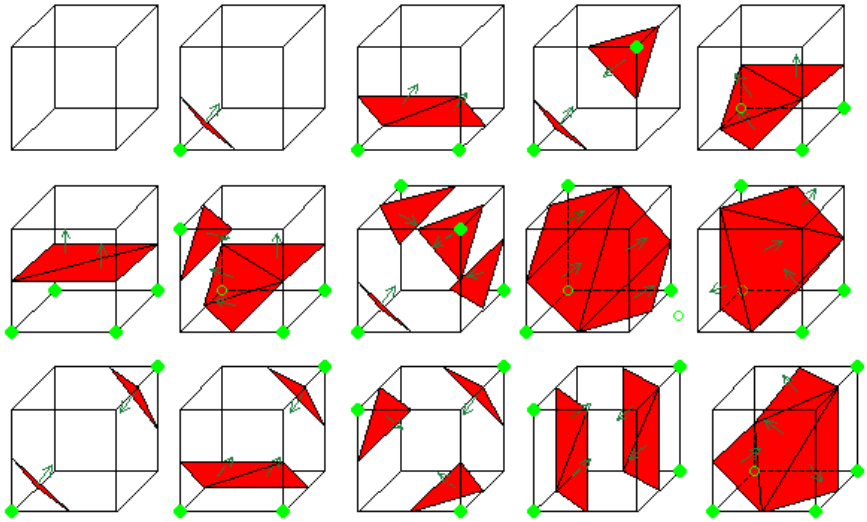


FIGURE 2.2 – Configurations de base de l'algorithme du Marching Cube [Lorensen and Cline (1987)].

Algorithmes pour la polygonisation de surfaces implicites : la seconde approche globale pour mailler un objet représenté par une fonction implicite est la polygonisation de la surface, ensuite construire le maillage volumique de l'objet à partir du maillage surfacique. La polygonisation de frontières d'objets construits à base des fonctions implicites est le principal inconvénient de cette représentation. En effet, l'évaluation des points sur la surface par une fonction implicite est plus difficile que celle de la fonction paramétrique, puisqu'il est impossible de générer directement ces points à partir des arguments de la fonction. La plupart des algorithmes consistent à distribuer des points aléatoirement autour de la surface implicite. Puis un processus itératif de projection consiste à distribuer ces points uniformément sur la surface en tenant compte de la qualité des triangles construits comme par exemple l'algorithme de [Hartmann (1998)]. Enfin, le maillage volumique de l'objet est obtenu à partir du maillage de sa frontière (B-Rep) en appliquant l'algorithme de Delaunay ou l'algorithme frontal.

Parmi ces deux types de méthodes pour mailler un objet représenté implicitement, la méthode par décomposition spatiale semble la plus pratique et surtout la plus naturelle, tant pour générer le maillage de la surface que pour le maillage de l'intérieur de l'objet.

Cependant, le maillage de la frontière de l'objet construit par les algorithmes de polygonisation introduits par [Lorensen and Cline (1987)] ou [Hilton et al. (1996)] est seulement une approximation de la frontière théorique de la fonction implicite F, c'est-à-dire que

pour tout nœud P qui constitue le maillage de la frontière, on a seulement $F(P) \approx 0$.

La méthode par décomposition spatiale pose également un problème lors de l'approximation de l'objet par le maillage produit. En effet, l'approximation du maillage produit dépend de la taille des cellules qui composent l'espace. Considérons par exemple la représentation d'une sphère de rayon 1 et centrée au point $(0, 0, 0)$: elle est définie par la fonction de distance $s(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 1$ sur une grille décomposée par des éléments tétraédriques. Sur la figure 2.3, trois tailles différentes sont considérées pour caractériser le problème de l'approximation par le maillage produit. Ce qui illustre la dépendance de la qualité de l'approximation géométrique et la finesse du maillage utilisé.

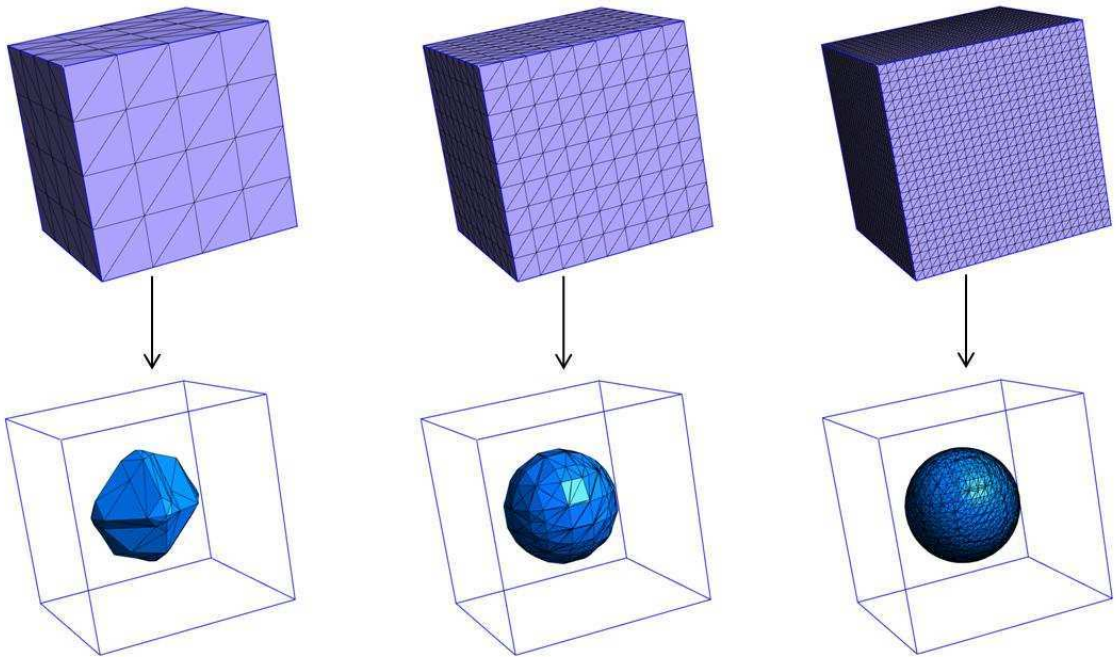


FIGURE 2.3 – Le maillage surfacique d'une sphère produit par une décomposition spatiale avec trois tailles de maillage différentes.

L'avantage majeur du maillage d'un objet par cette méthode est sa simplicité. Par contre, le maillage surfacique résultant est adapté éventuellement à la visualisation pour l'infographie : des triangles de tailles très différentes et de formes possèdent en générale des angles très aigus. En ce qui concerne le maillage du domaine, des éléments de mauvaise qualité se retrouvent près de la frontière ce qui rend la discrétisation spatiale mal adaptée à la simulation par éléments finis (voir la figure 2.4).

Un autre problème typiquement rencontré par le modèle implicite lors de la construction de géométries complexes est la représentation des angles aigus (arêtes vives) par le maillage de sortie. Ce problème résulte généralement d'opérations ensemblistes (union,

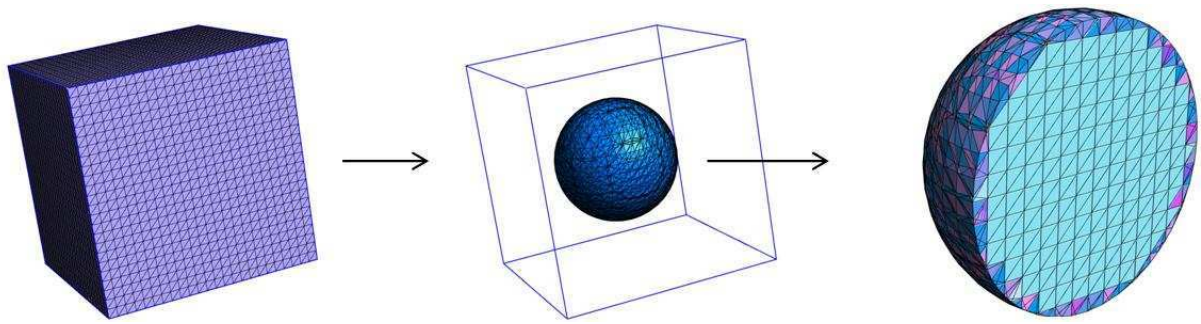


FIGURE 2.4 – Illustration de la qualité du maillage intérieur et surfacique d'une sphère représentée implicitement.

intersection, différence) de type CSG sur les primitives.

2.2.4 Géométrie solide constructive (CSG)

Le terme de géométrie constructive fait référence à la construction d'objet représenté comme une composition de volumes simples (appelés primitives) pouvant être de différentes natures comme des sphères, cylindres, tores, cônes, parallélépipèdes et éventuellement des demi-espaces. L'objet résultant est représenté en utilisant une structure de données de type arbre ayant pour feuilles les primitives, et comme nœuds les différentes opérations booléennes de combinaison. Ces opérations entre les primitives sont de type union, intersection et différence.

Lorsque la description de l'objet est décrite par le signe d'une fonction distance, les opérations de combinaison peuvent être facilement définies. Ricci (1972) propose l'utilisation de min/max entre les fonctions implicites pour constituer ces opérations, ou encore d'autres opérations plus élaborées comme les R-fonctions [Rvachev (1982); Shapiro (1994)] pour garantir une continuité géométrique d'ordre supérieur. En utilisant min/max, les opérations ensemblistes de deux champs distance signés ϕ^1 et ϕ^2 correspondant à deux objets distincts sont définies par :

$$\text{Intersection :} \quad \underline{x} \in \Omega^1 \cap \Omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{\cap}(\underline{x}) = max\left\{\phi^1(\underline{x}), \phi^2(\underline{x})\right\} \tag{2.5}$$

$$\text{Union :} \quad \underline{x} \in \Omega^1 \cup \Omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{\cup}(\underline{x}) = min\left\{\phi^1(\underline{x}), \phi^2(\underline{x})\right\} \tag{2.6}$$

$$\text{Différence :} \quad \underline{x} \in \Omega^1/\Omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \phi^{/}(\underline{x}) = max\left\{\phi^1(\underline{x}), -\phi^2(\underline{x})\right\} \tag{2.7}$$

Le maillage approximant la surface et l'intérieur d'un objet représenté par un arbre CSG est souvent construit par décomposition spatiale. La figure 2.5 représente l'approximation par maillage d'un objet construit dans un maillage tétraédrique structuré avec des opérations booléennes à partir de quatre primitives : trois cylindres et un cube. Les primitives elles-mêmes sont construites par des opérations booléennes sur les demi-espaces définis par les fonctions de distances signées (comme celles décrites dans la section 2.2.1). Par exemple, le cube est construit par six demi-espaces de type plan, où le rôle des opérations booléennes est de déterminer de quelle partie finie du demi-espace constitue la primitive (cube) à l'intérieur de l'espace délimité par la grille maillée.

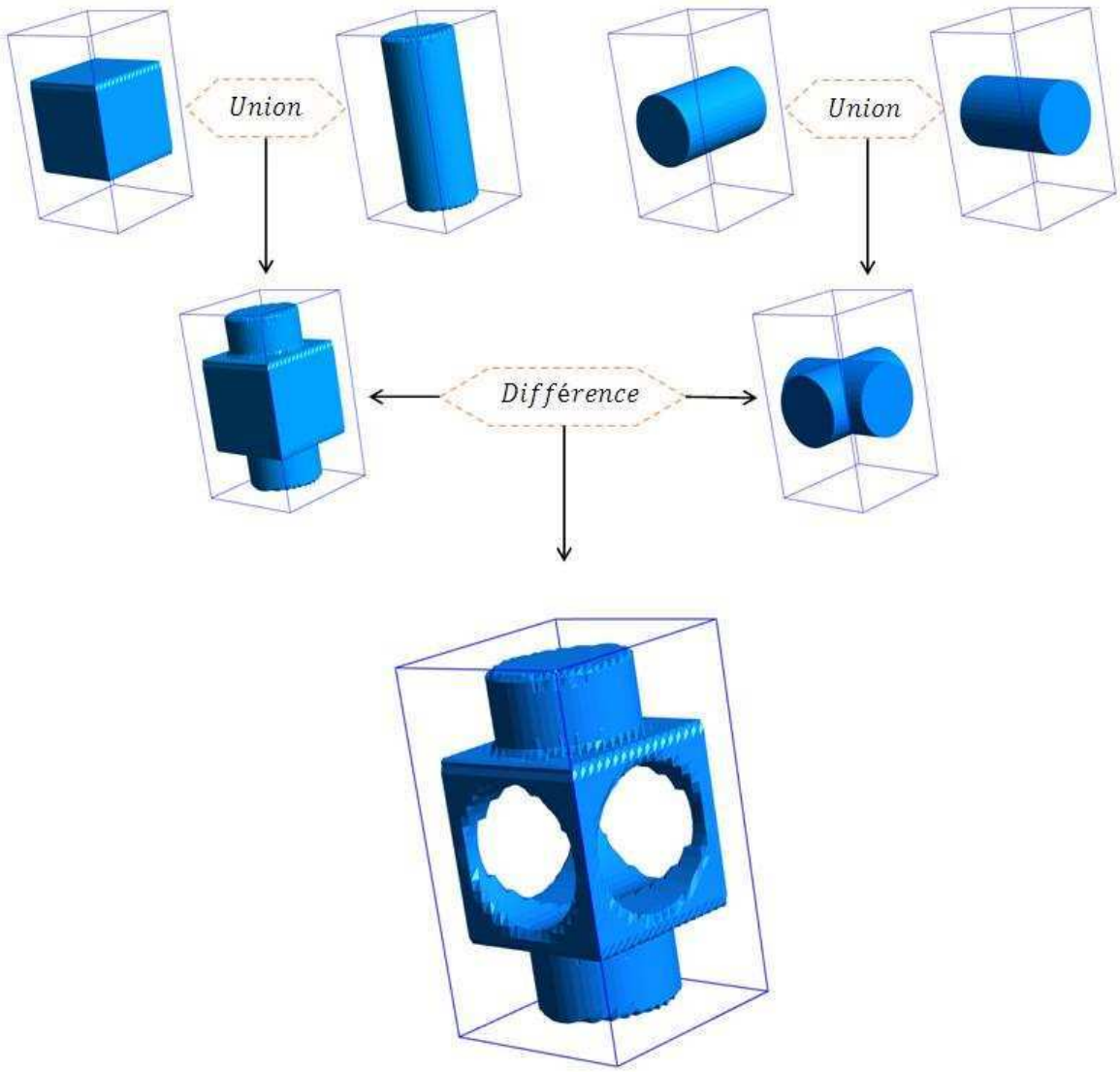


FIGURE 2.5 – Exemple d'arbre constructif CSG d'une pièce mécanique résultant de combinaisons booléennes d'un cube et 3 cylindres dans un maillage tétraédrique structuré.

Le principal avantage du modèle CSG par fonctions implicites est qu'il permet de modifier la géométrie de l'objet ou sa topologie tout en gardant la même décomposition spatiale (grille maillée), donc le maillage approximant l'objet après chaque suppression ou modification de certaines caractéristiques de forme et de géométrie est toujours simple à construire, contrairement à la représentation B-Rep. Par contre, le maillage produit ne permet pas de conserver les arêtes vives de l'objet.

2.3 Transformation d'une représentation paramétrique vers une représentation implicite

Un problème important en modélisation géométrique est la transformation *exacte* d'une représentation paramétrique en une représentation implicite [Sederberg et al. (1999)]. Le problème est en partie dû au fait que ce processus de transformation appelé implicitisation est relativement complexe, notamment à cause du degré élevé de l'équation de la forme implicite. Cependant, il est possible de réaliser une transformation approximative par le calcul du champ de distance discret sur une discrétisation spatiale (grille maillée) qui englobe la frontière paramétrique de l'objet. Ce champ scalaire défini à partir de la distance Euclidienne permet de définir naturellement et simplement un objet par sa frontière et son intérieur. Bien que cette transformation soit approximative, il est possible d'approcher le plus fidèlement possible la frontière théorique par un champ de distance aussi précis que possible en raffinant la grille maillée.

En ce qui concerne le calcul du champ distance d'un objet paramétrique, la plupart des méthodes de calcul actuellement utilisées ne s'appliquent que pour des frontières discrétisées [Jones (2006)], représentées sous la forme d'un nuage de points ou d'un maillage polygonal. Dans le cas d'un objet paramétrique, une discrétisation préalable de la frontière est souvent nécessaire pour le calcul du champ distance sur une discrétisation spatiale. Cependant, la précision du champ devient ainsi liée à la discrétisation de la frontière paramétrique. En effet, une première erreur de l'approximation de la courbe/surface paramétrique est commise lors de la polygonalisation, et une autre erreur du calcul de la distance minimale entre un point P de l'espace et la courbe/surface exacte et discrétisée.

Le choix de calculer le champ de distance à partir d'une discrétisation de la représentation paramétrique peut être acceptable ou pas, selon l'application visée et la précision désirée. Dans notre cas, nous nous intéressons au calcul du champ de distance dans le cas bien précis de la représentation implicite, et plus spécifiquement pour réaliser des calculs élément finis. Pour cela, il semble préférable de construire ce champ directement à partir de la représentation paramétrique sans construire une discrétisation préalable. Cepen-

dant, nous n'avons pas trouvé dans la littérature d'algorithmes permettant de construire le champ de distance directement à partir de la représentation paramétrique.

Les méthodes actuelles calculent la projection orthogonale de chaque point de la discrétisation spatiale (maillage) sur la représentation discrétisée de la frontière. Certaines méthodes se limitent à calculer la distance minimale par la projection orthogonale seulement sur un certain nombre de points du maillage autour de la frontière discrétisée, et ensuite de propager le champ de distance dans l'ensemble du maillage à partir des distances connues dans le voisinage. Ce dernier type de méthode repose sur deux étapes. La première consiste à localiser les nœuds de maillage qui entourent la frontière discrétisée et ensuite à calculer la distance minimale de ces nœuds à cette frontière, ce qui formera les conditions limites de la loi de propagation. La deuxième étape consiste à utiliser des méthodes qui propagent l'information de la distance selon un front qui se déplace dans la direction de la propagation, comme le cas des méthodes de Level set [Osher and Sethian (1988)] et du Fast Marching [Barth and Sethian (1998)].

2.4 Discussion sur le choix de la représentation géométrique

La littérature dédiée à la construction d'objets ainsi que la génération des maillages associés est riche et abondante. Généralement, le type de modélisation géométrique permet de distinguer la génération de maillage pour des applications de type visualisation en infographie et de type analyse élément finis pour la CAO. On résume brièvement les avantages (Avt) et les inconvénients (Inc) que peuvent fournir la représentation paramétrique et implicite pour construire un maillage et pour le processus de remaillage pour le type d'application : analyse par élément finis.

Représentation paramétrique :

Avt : les nœuds créés pour approximer le maillage de la frontière sont calculés sur la géométrie réelle et par conséquent, le respect de la géométrie des frontières est assuré afin d'affecter correctement les conditions aux limites du problème ÉF.

Inc : le maillage volumique est conditionné par la qualité du maillage surfacique construit à partir de la représentation paramétrique. (La géométrie est décrite par la peau de l'objet)

Inc : forcer le maillage de se conformer aux frontières et arêtes vives de l'objet ne garantit pas que la carte de tailles ÉF imposée ainsi que les critères de qualité liés à la forme des éléments soient respectés.

Inc : les changements paramétriques des frontières nécessitent un nouveau processus de

maillage du modèle pratiquement de zéro (maillage surfacique et volumique).
Inc : faire évoluer la frontière d'un objet maillé à partir de la représentation paramétrique, c'est-à-dire l'évolution des frontières B-Rep (maillage de la frontière linéique/surfacique) pose des complications lors du transfert d'information au court du processus de remaillage.

Représentation implicite :

Avt : représentation permet de définir implicitement un objet de topologie arbitraire à la fois par sa surface et son intérieur, ainsi que les propriétés physiques de l'objet.
Avt : le maillage approximant l'objet après chaque changement de forme des frontières est simple à construire avec la même décomposition spatiale.
Avt : existence des méthodes numériques efficaces permettant de modéliser le mouvement ou la déformation des frontières implicites. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de Level set [Osher and Sethian (1988)].
Inc : le maillage d'une frontière représentée implicitement dépend fortement de la taille des cellules qui constituent la décomposition spatiale.
Inc : malgré le caractère très utile des différentes fonctions analytiques existantes représentant les entités géométriques de base (tels que : plan, cylindre, etc...), en plus de celles qui permettent de construire des géométries complexes par le modèle CSG (intersection, union et différence), ne permettent pas de représenter toutes les formes d'objets possibles.
Inc : la technique de la décomposition spatiale est relativement capable de bien préserver les arêtes vives et les coins du maillage produit.
Inc : des éléments de moins bonne qualité sont localisés près des frontières ce qui rend la discrétisation spatiale mal adaptée à la simulation par la méthode des éléments finis classique.

Selon l'application, la représentation paramétrique ou bien la représentation implicite peut être plus avantageuse. Cependant, l'utilisation de la représentation implicite offrira d'autres avantages (maillage simple, évite le remaillage) que la représentation paramétrique si cette représentation est étendue aux applications d'analyses par éléments finis. Dans le cadre de la modélisation implicite pour réaliser des calculs éléments finis, il serait souhaitable :

- de représenter un ensemble de formes suffisamment vaste à partir de la représentation la plus populaire en CAO (paramétrique) pour éviter les limitations des entités géométriques de base. Un calcul du champ de distances signées à partir de surfaces paramétriques devrait ainsi permettre de représenter un plus vaste champ d'objets.
- d'approximer le plus fidèlement possible la géométrie des frontières afin d'affecter

correctement les conditions aux limites du problème ÉF. Le maillage produit devrait ainsi coïncider avec la frontière théorique et préserver les arêtes vives.
- d'utiliser une méthode numérique alternative comme la méthode des éléments finis étendus (XFEM) qui permet de modéliser une discontinuité au sein d'une cellule de l'espace (élément de maillage) pour que les éléments de mauvaise qualité ou déformés près des frontières du maillage produit par cette représentation soient plus adaptés à une analyse par éléments finis.

2.5 Conclusions

Ce chapitre a présenté les deux principaux modèles géométriques utilisés pour la modélisation géométrique ainsi que les avantages et les inconvénients que posent chacun de ces modèles pour la construction du maillage et le remaillage. Les réflexions que nous avons menées montrent que la représentation implicite possède certains avantages pour simplifier le maillage de la géométrie par rapport à la représentation par frontière. Cependant, certaines contraintes rendent la représentation implicite mal adaptée pour la représentation des pièces mécaniques et la simulation par éléments finis. Dans la suite du manuscrit, nous détaillerons les solutions que nous proposons pour contourner les difficultés de la représentation implicite. A ce stade, il est donc nécessaire de s'intéresser à la méthode d'approximation par éléments finis qui permette de prendre en compte les discontinuités matérielles et géométriques à l'intérieur des cellules de la discrétisation spatiale. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3

Partition de l'Unité et Méthode des Eléments finis étendus

Sommaire

3.1 Introduction **21**

3.2 Méthode de partition de l'unité **21**

3.3 Stratégie d'enrichissement dans le contexte XFEM **23**

3.3.1 Discontinuités à travers des interfaces ouvertes 24

3.3.2 Discontinuités à travers des interfaces fermées 26

3.4 Intégration numérique **30**

3.5 Imposition des conditions aux limites dans le cadre des éléments finis étendus **31**

3.5.1 Formulations 32

3.5.2 Multiplicateurs de Lagrange "classiques" 34

3.5.3 Algorithmes de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange 37

3.5.4 La méthode de pénalité 39

3.5.5 La méthode de Nitsche 39

3.6 Conclusions **40**

Dans ce chapitre, nous décrivons les fondements de la méthode des éléments finis étendus et un certain nombre de ses propriétés. Nous allons voir comment modéliser des discontinuités représentées par des interfaces à l'intérieur d'un maillage fixe, le type de représentation géométrique utilisée pour faciliter le traitement de ces discontinuités, l'intégration numérique à l'intérieur d'un élément de maillage traversé par une discontinuité et comment imposer les conditions aux limites sur des interfaces. La stratégie de notre

travail est de tirer profit des recherches déjà réalisées dans ce domaine, avec un intérêt particulier au contexte présenté au chapitre précédent.

3.1 Introduction

La génération du maillage pour la méthode des éléments finis pose des difficultés dès lors que l'on s'intéresse à des objets tridimensionnels. Une étude publiée dans [Cottrell et al. (2009)] déclare qu'environ 80% du temps humain lors d'un processus d'analyse éléments finis est consacré à la génération du maillage. En effet, les procédures pour mailler les frontières et ensuite le volume de l'objet sont lourdes, en particulier lorsque la géométrie à traiter est complexe. Ces difficultés ont motivé le développement d'autres méthodes telles que la méthode des éléments de frontières [Brebbia (1978)] pour éviter le maillage du volume de l'objet ou les méthodes dites *Meshless* [Nayroles et al. (1992), Onate et al. (1996)] pour éviter de conformer le maillage aux frontières, ou encore la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [Moës et al. (1999)] qui a connu un formidable essor durant ces dix dernières années.

La méthode (XFEM) est plus proche du principe des éléments finis classique, elle se base sur un support maillé pour la construction de l'espace d'approximation, et elle utilise la méthode de la partition de l'unité développée par Babuška and Melenk (1997) pour enrichir la base des fonctions de forme afin de représenter des discontinuités au sein même d'un élément de maillage. En d'autres termes, le support maillé permettant la discrétisation spatiale peut ne pas être conforme à la frontière de l'objet. Cette propriété apporte à la méthode des éléments finis étendus (XFEM) une flexibilité supplémentaire afin d'éliminer la contrainte de dépendance du maillage servant comme support pour les fonctions de forme. En effet, la frontière du domaine physique ne sera plus portée par la topologie du maillage et sera donc fournie à part, ainsi la discontinuité du champ d'approximation sera portée par des fonctions de forme elles-mêmes discontinues. Ainsi, le processus de remaillage peut être éliminé dans la méthode XFEM, puisque le déplacement d'une discontinuité correspondra simplement à la mise à jour des fonctions d'enrichissement.

3.2 Méthode de partition de l'unité

Soit un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ partitionné en un ensemble d'éléments n^{el} qui constituent un maillage $\mathcal{M}$ et I est l'ensemble des nœuds associés aux fonctions de forme notées N_i. De façon générale, l'approximation de la solution globale dans la méthode des éléments

finis standard d'un champ u peut être écrite de la manière suivante :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\, u_i \tag{3.1}$$

où u_i sont les degrés de liberté (ddl) du champ u au nœud i.

Les alternatives de la méthode des éléments finis classique (ÉF) utilisent la même structure pour enrichir la base des fonctions d'interpolation grâce au concept de la partition de l'unité introduit par [Melenk and Babuška (1996), Babuška and Melenk (1997)]. Ces auteurs ont montré que lorsque les fonctions de forme N_i d'un espace d'approximation vérifient une partition de l'unité, c'est-à-dire que :

$$\sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) = 1 \quad \forall \underline{x} \in \mathcal{M} \tag{3.2}$$

il est alors possible d'enrichir l'approximation 3.1 par d'autres fonctions quelconque $\psi(\underline{x})$. L'approximation de la solution avec l'enrichissement de la partition de l'unité s'écrit ainsi dans sa forme générale comme :

$$u^h(\underline{x}) = \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\, u_i}_{approx\ EF\ classique} + \underbrace{\sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \cdot \psi(\underline{x}) a_i}_{enrichissement} \tag{3.3}$$

où u_i sont les degrés de liberté additionnels.

Ces alternatives qui se basent sur un maillage incluent la méthode des éléments finis généralisés (GFEM) [Strouboulis et al. (2001)] et la méthode des éléments finis étendus (XFEM) [Moës et al. (1999)], permettent d'enrichir l'espace des fonctions de forme grâce à la connaissance a priori des propriétés de la solution du problème.

Un enrichissement comme décrit dans 3.3 est global donc plus coûteux car le nombre de degrés de liberté enrichi est proportionnel au nombre des nœuds du maillage $\mathcal{M}$. Cependant la plupart des enrichissements sont utilisés de manière à mieux prendre en compte des phénomènes locaux comme des singularités ou discontinuités, et il n'est clairement pas efficace d'enrichir tout le domaine. Il est alors naturel d'employer l'enrichissement en sous-domaines locaux, c'est-à-dire enrichir un sous-ensemble de nœuds $I^* \subset I$. Cela conduit à une approximation de la forme

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\, u_i + \sum_{i \in I^*} N_i(\underline{x}) \cdot \psi(\underline{x}) a_i \tag{3.4}$$

qui représente la base de la méthode XFEM. C'est cette caractéristique de localisation

d'enrichissement qui distingue la méthode XFEM de la méthode GFEM. Nous allons voir dans la section suivante comment prendre les phénomènes locaux indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage) en utilisant le concept de la partition de l'unité dans le cadre de la méthode XFEM.

3.3 Stratégie d'enrichissement dans le contexte XFEM

La méthode XFEM a été originalement développée pour l'étude des fissures dans le but de s'affranchir des difficultés de maillage et de remaillage [Belytschko and Black (1999), Moës et al. (1999)]. Deux enrichissement sont introduits dans l'approximation du champ de déplacement : (i) une fonction d'enrichissement discontinue autorise au maillage de ne plus être conforme à la géométrie de la fissure ; (ii) la connaissance de la forme de la solution en fond de fissure extraite des développements asymptotiques du champ de déplacement en mécanique de la rupture élastique linéaire, a permis d'ajouter un terme supplémentaire d'enrichissement permettant de décrire correctement la solution singulière dans la zone autour de la pointe de fissure.

L'introduction de l'enrichissement discontinu permet d'éviter complètement la lourde tâche de remaillage lors de la propagation de la fissure, et l'introduction de l'enrichissement singulier permet d'obtenir de bonnes approximations même dans le cas de maillage relativement grossier là où une diminution de la taille des éléments aurait été nécessaire dans le cadre de la méthode des éléments finis classique. Par conséquent, le concept de la partition de l'unité qui permet d'étendre l'approximation habituelle des éléments finis classique, montre l'intérêt de la méthode XFEM pour limiter la dépendance au maillage. Ultérieurement, la méthode XFEM a également été utilisée pour les phénomènes d'interface, par exemple dans le cadre de problèmes multi-matériaux [Sukumar et al. (2001)], la solidification [Chessa et al. (2002)], fluides multi-phases [Chessa and Belytschko (2003)], des bandes de cisaillement [Areias and Belytschko (2006)], les dislocations [Belytschko and Gracie (2007)].

Une réalisation particulière de l'approximation générale d'XFEM se caractérise par le choix des fonctions d'enrichissement ainsi que des nœuds à enrichir. Le choix des fonctions d'enrichissement dépend du type de problème de discontinuité à résoudre et de l'approche utilisée, nous distinguons entre les fonctions d'enrichissement pour les discontinuités à travers des interfaces ouvertes ou fermées (voir figure 3.1) :

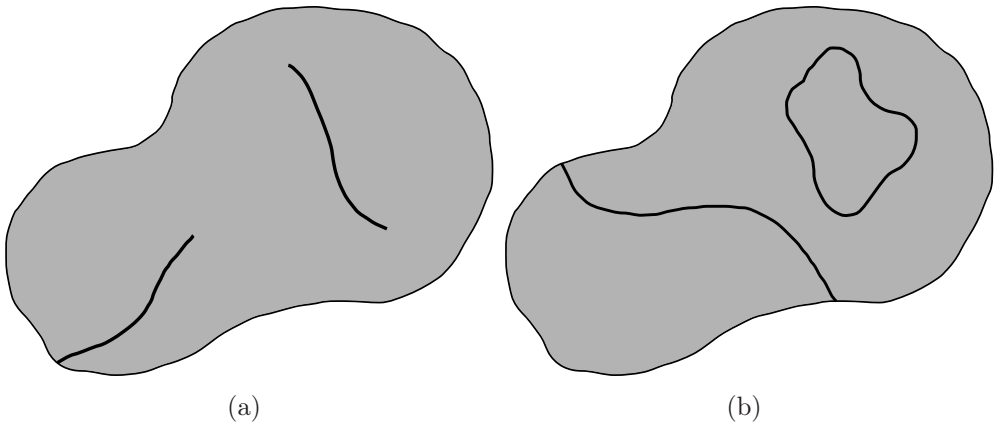


FIGURE 3.1 – Exemples d'interfaces (a) ouvertes et (b) fermées.

3.3.1 Discontinuités à travers des interfaces ouvertes

De nombreuses applications impliquent des discontinuités à travers des interfaces qui représentent une pointe en $2D$ ou un front en $3D$ à l'intérieur du domaine. Les fissures ou les dislocations sont deux exemples où le champ de déplacement présente un saut au niveau de l'interface, ainsi que le champ de contrainte et de déformation présentent une singularité au voisinage de la pointe/fond de l'interface. Pour la simulation de ces problèmes dans le cadre des fissures, à la fois les discontinuités le long de l'interface et le gradient élevé à l'extrémité de l'interface (pointe/front), la méthode XFEM utilise de manière appropriée deux types d'enrichissements différents pour chacun de ces deux caractéristiques :

- Un enrichissement par une fonction discontinue afin de représenter un saut du champ de déplacement au niveau des lèvres de la fissure. Cette fonction est de type Heaviside $H(\underline{x})$ définie de la façon suivante :

$$H(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{\mathrm{x}} \text{ se trouve d'un coté de la fissure} \\ -1 & \text{si } \underline{\mathrm{x}} \text{ se trouve de l'autre coté de la fissure} \end{cases} \tag{3.5}$$

  Ce type d'enrichissement est utilisé pour les éléments dont le support est totalement coupé par la fissure (voir la figure 3.2).
- Un enrichissement par des fonctions asymptotiques du déplacement en pointe/fond de fissure, qui permet une représentation fidèle des singularités au sein des éléments dont le support est partiellement affecté par cette fissure (voir figure 3.2). Les premiers travaux sur ce type d'enrichissement [Belytschko and Black (1999), Moës et al. (1999)] ont proposé la base qui permet de décrire le champ enrichi en élasticité

linéaire par quatre fonctions de type :

$$F = \left\{ \sqrt{r} sin\left(\theta/2\right), \sqrt{r} cos\left(\theta/2\right), \sqrt{r} sin\left(\theta/2\right) sin\left(\theta\right), \sqrt{r} cos\left(\theta/2\right) sin\left(\theta\right) \right\} \tag{3.6}$$

où (r, θ) représentent les coordonnées polaires dans un repère local à la pointe/-fond de la fissure. Dans le cadre XFEM, la même base à été utilisé en fissuration bidimensionnelle [Moës et al. (1999)] et tridimensionnelle [Sukumar et al. (2000)].

Dans le cas particulier de la modélisation $2D$ d'une fissure selon XFEM, l'approximation enrichie du champ de déplacement s'écrit (d'après Moës et al. (1999)) :

$$u^h\left(\underline{x}\right) = \sum_{i \in I} N_i\left(\underline{x}\right) u_i + \sum_{i \in I_\Gamma^*} N_i\left(\underline{x}\right) H(\underline{x}) a_i + \sum_{j=1}^{4} \sum_{i \in I_{pointe}^*} N_i\left(\underline{x}\right) F_j(\underline{x}) b_i^j \tag{3.7}$$

a_i et b_i^j sont les vecteurs des degrés de liberté nodaux enrichis, I_Γ^* est l'ensemble des noeuds dont le support est complètement coupé par la fissure et I_{pointe}^* l'ensemble des noeuds dont le support contient la pointe de la fissure. Une représentation graphique des deux ensembles I_Γ^* et I_{pointe}^* est présentée sur la figure 3.2.

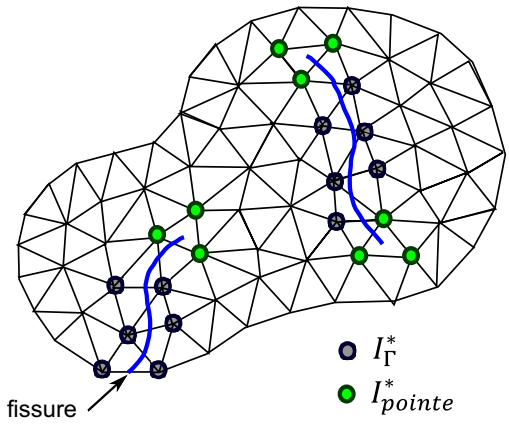


FIGURE 3.2 – Les deux ensembles des nœuds I_Γ^* et I_{pointe}^* selon la modélisation des fissures avec XFEM.

Dans la méthode XFEM, l'interface peut être représentée explicitement par un ensemble de segments de droite (polylignes) en $2D$ ou un ensemble de triangles (polygones) en 3D sur un maillage fixe de la structure. Initialement Moës et al. (1999) ont proposé une représentation du trajet de la fissure en $2D$ par un ensemble de segments. La même représentation est utilisée dans [Daux et al. (2000)] pour l'étude de l'intersection de plusieurs fissures, ainsi l'extension de cette représentation pour les fissures en $3D$ a été proposée dans [Duarte et al. (2001), Sukumar et al. (2000)]. Cependant, la réalisation de l'inter-

section des polylignes/polygones qui représentent la discontinuité avec le maillage fixe de la structure ($2D/3D$ respectivement), ainsi que l'interaction nécessaire entre ces deux maillage pour localiser les éléments à enrichir, s'avèrent une tâche lourde et complexe [Sukumar et al. (2000)].

Ultérieurement, Stolarska et al. (2001) ont introduit la méthode des Level sets [Osher and Sethian (1988)] pour représenter la fissure en utilisant uniquement le maillage fixe de la structure. Cette méthode a permis de propager la fissure sur le même maillage en mettant à jour la fonction level set, au lieu de rajouter un nouveau segment à chaque pas de propagation de la fissure initiale [Moës et al. (1999)]. De plus, cette méthode a également permis de simplifier considérablement le repérage des éléments de maillage de la structure nécessaire afin d'effectuer l'enrichissement, surtout en 3D [Moës et al. (2002), Gravouil et al. (2002)].

Remarque : Pour représenter une fissure, deux level sets ($\phi(\underline{x})$:level set 1 et $\varphi(\underline{x})$:level set 2) sont utilisées (voir figure 3.3) pour limiter la trajectoire de l'interface ouverte à la pointe, car la représentation par level set ne concerne que les surfaces fermées ou pour séparer un domaine en deux (demi-espaces). La fissure Γ_f est alors donnée par $\Gamma_f = \{\underline{x} : \phi(\underline{x}) = 0 \ et \ \varphi(\underline{x}) \leq 0\}$.

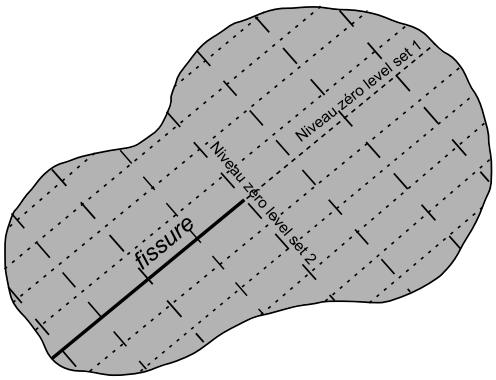


FIGURE 3.3 – Level sets pour la représentation d'une fissure $2D$.

3.3.2 Discontinuités à travers des interfaces fermées

On considère la représentation par level set de la position des interfaces fermées, où le niveau zéro de la fonction donne la position de l'interface tel que discuté dans la section 4.1. Dans la méthode XFEM, les fonctions d'enrichissements sont choisies suivant la discontinuité à traiter au sein de l'élément du maillage de la structure. La level set $\phi(\underline{x})$ a pour avantage de fournir un moyen de localiser les nœuds de l'ensemble des éléments

coupé par l'interface (voir figure 3.4) :

$$N_\phi = \left\{ k \in \left\{1, ..., n^{el}\right\} : min_{i \in I_k^{el}} \left(\phi(\underline{x}_i)\right) \cdot max_{i \in I_k^{el}} \left(\phi(\underline{x}_i)\right) < 0 \right\} \tag{3.8}$$

où I_k^{el} est l'ensemble des nœuds d'un élément de maillage k, ainsi l'ensemble des nœuds enrichis sont définis à partir de 3.8 par :

$$I_\phi^* = \bigcup_{k \in N_\phi} I_k^{el} \tag{3.9}$$

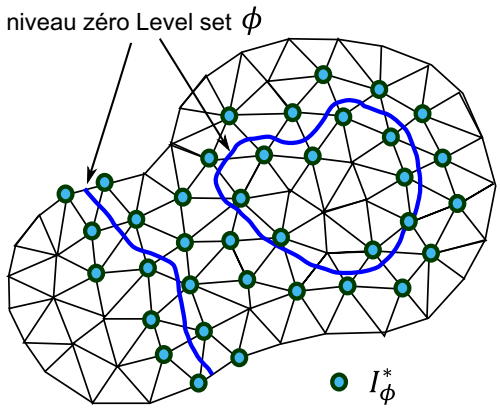


FIGURE 3.4 – L'ensemble des nœuds enrichis I_ϕ^* dans le cas des interfaces fermées selon XFEM.

Le couplage de la méthode Level set à la méthode XFEM a été introduit dans les travaux de Sukumar et al. (2001), pour la description des interfaces fermées fixes (des trous et inclusions). L'approche par Level set a permis de transformer la géométrie en information numérique dans un maillage directement exploitable par la méthode des éléments finis. L'avantage de l'utilisation des Level Sets avec XFEM ne se situe pas seulement au niveau de la description géométrique des interfaces, elle fournit des moyens simples de recherche des éléments de maillage coupés par la frontière du domaine, permet de localiser les éléments et les noeuds du maillage dont le support est à l'extérieur du domaine, permet de sélectionner les noeuds à enrichir, elle contribue à la construction des fonctions d'enrichissement qui sont principalement dépendantes de la distance à l'interface ce qui est certainement le but premier du choix de cette représentation.

3.3.2.1 *Modélisation des interfaces matériau-vide avec XFEM*

La modélisation des interfaces matériau-vide (discontinuité forte) permet la présence du vide et de la matière dans un élément du maillage. Dans ce cas particulier, le champ doit

prendre en compte une discontinuité au passage de l'interface, pour cela l'interpolation du champ va être modifiée en utilisant une fonction spécifique $V(x)$ prenant 0 comme valeur dans le vide et 1 dans la matière [Daux et al. (2000)]. Dans le cas particulier des interfaces matériau-vide, le champ 3.4 est donné par la relation suivante :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\, u_i V(\underline{x}) \qquad avec \quad V(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \text{matière} \\ 0 & \text{si } \underline{x} \in \text{vide} \end{cases} \tag{3.10}$$

Pour illustrer cette modélisation, la figure 3.6 traite une plaque avec un trou par exemple [Sukumar et al. (2001)]. Le domaine est représenté par la fonction de distance signée (level set) de type sphère $s(\underline{x})$ (voir section 2.2.1) sur un maillage fixe. Les valeurs de cette fonction sont stockées dans les nœuds, ensuite sont interpolées par les fonctions de formes linéaires utilisées pour le calcul éléments finis (figure 3.5).

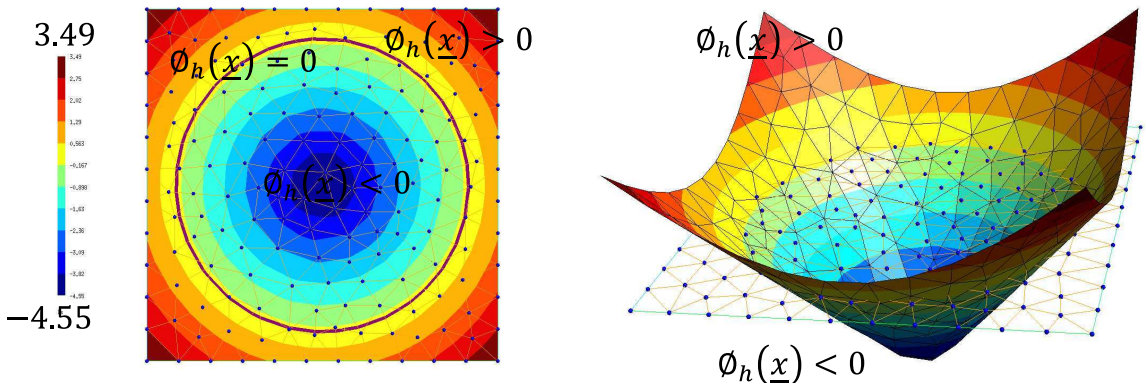


FIGURE 3.5 – Représentation d'un cercle par le niveau zéro de la fonction Level set $\phi(\underline{x}) = \|\underline{x} - \underline{x}_0\| - r_0$.

Si un élément a pour valeur de Level set en ses nœuds que des valeurs négatives, il sera placé dans la partie vide du domaine. Pour l'autre cas, il sera conservé et placé dans la partie matière si ses valeurs sont positives. Pour les éléments dont le support est coupé, c'est-à-dire si un élément a pour valeurs négatives et positives en ses nœuds, alors il sera placé dans la partie matière du domaine.

Dans ce cas particulier, le champ 3.10 est réécrit en terme de Level set par :

$$u^h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\, u_i V(\phi(\underline{x})) \qquad avec \quad V(\phi(\underline{x})) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi(\underline{x}) \geq 0 \\ 0 & \text{si } \phi(\underline{x}) < 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

L'utilisation de la fonction $V(\phi(\underline{x}))$ n'est effective que pour les nœuds dans le support

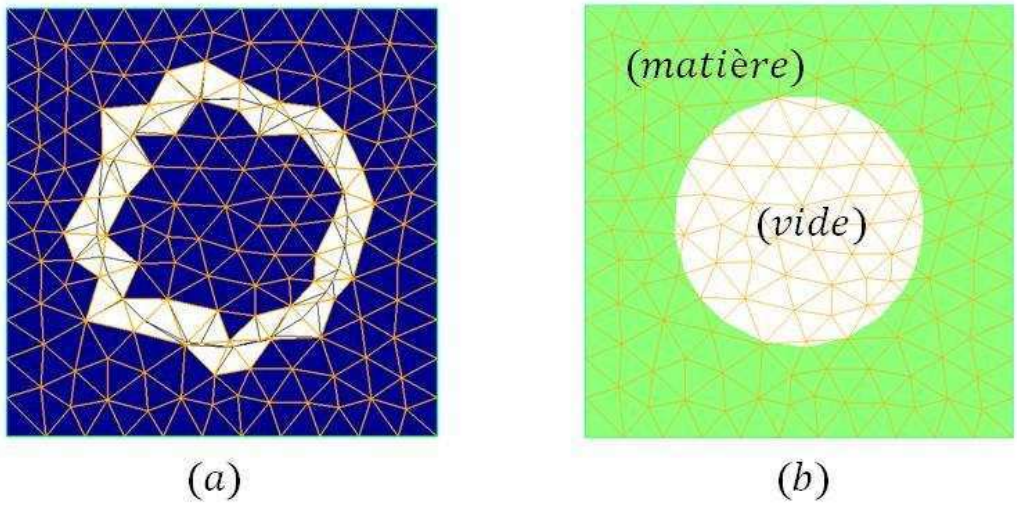


FIGURE 3.6 – (a) Représentation des différents éléments du maillage (vide, matière, coupés par le niveau zéro). (b) Représentation du domaine : matière et le vide.

se trouve à la fois dans la partie vide et la partie matière du domaine. En pratique, les degrés de liberté relatifs à la partie vide sont supprimés de la formulation faible, ainsi l'intégration se fait seulement sur la partie de l'élément située dans la matière.

3.3.2.2 *Modélisation des interfaces matériau-matériau avec XFEM*

Dans le cadre des interfaces matériaux (discontinuité faible), la méthode XFEM permet de prendre en compte une discontinuité dans le gradient de la variable interpolée au passage de l'interface, et cela au sein même d'un élément du maillage. Par exemple dans le cas de la mécanique, le champ d'approximation doit permettre de représenter un saut de déformation. Ce cas a été étudié par Sukumar et al. (2001). Un premier choix de la fonction d'enrichissement au niveau des nœuds I_ϕ^* des éléments coupés par l'interface est donné en fonction de la valeur de la Level set. La fonction $\psi\left(\underline{x}\right)$ de l'approximation enrichie du champ 3.4 est principalement dépendante de la distance à l'interface :

$$\psi\left(\underline{x}\right) = abs\left(\phi(\underline{x})\right) = |\phi(\underline{x})| \tag{3.12}$$

L'enrichissement local par la fonction $|\phi(\underline{x})|$ provoquait une diminution du taux de convergence par rapport à la méthode des éléments finis classique (maillage conforme à l'interface) [Chessa et al. (2003)]. En effet, le choix de cette fonction conduit au non respect de la partition de l'unité dans les éléments du maillage qui entourent les éléments coupé par l'interface. Ce problème est connu dans la méthode XFEM sous le non de "blending elements".

Une alternative intéressante de la fonction $\psi(\underline{x})$ qui évite le problème de "blending elements", a été proposée par Moës et al. (2003) :

$$\psi(\underline{x}) = \sum_{i \in I_\phi^*} |\phi_i(\underline{x})| \, N_i(\underline{x}) - \left| \sum_{i \in I_\phi^*} \phi_i(\underline{x}) N_i(\underline{x}) \right| \tag{3.13}$$

Les auteurs ont judicieusement choisi cette fonction de telle sorte qu'elle soit nulle dans les éléments qui sont partiellement enrichis. Ils ont observé numériquement que celle-ci préservait l'ordre de convergence de la méthode éléments finis classique.

Une troisième alternative consiste à ne pas utiliser l'enrichissement, mais de forcer la continuité du champ de part et d'autre de l'interface par l'utilisation de la méthode de Nitsche, utilisée en tout premier lieu par Hansbo and Hansbo (2002), ou encore l'utilisation de la méthode des multiplicateurs de Lagrange [Moës et al. (2006), Béchet et al. (2009)].

3.4 Intégration numérique

Lors de l'intégration numérique de la formulation faible du problème, l'intégration des éléments contenant des approximations discontinues exige un traitement spécial. En effet, l'utilisation de la quadrature d'intégration de Gauss-Legendre sur la totalité d'un élément coupé par l'interface n'est pas applicable pour un champ d'approximation discontinu. Une approche précise, mais géométriquement complexe, consiste à subdiviser un élément de part et d'autre de l'interface. Une telle subdivision est une technique habituelle dans le cadre d'XFEM, elle est suggérée dans la plupart des publications qui permettent l'inclusion des discontinuités faibles et fortes dans un maillage fixe [Moës et al. (1999), Dolbow et al. (2000), Strouboulis et al. (2001)].

Supposons que l'interface soit décrite implicitement par le niveau zéro d'une fonction Level set, i.e. $\phi_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x}) \, \phi_i = 0$. Dans le cas $2D$, un segment est créé en joignant les deux points d'intersection de l'interface avec l'élément du maillage et un certain nombre de sous-éléments (sous-triangles) sont générés, comme il est présenté sur la figure 3.7 pour un maillage triangulaire. En conséquence, l'intégrale du champ discontinu sur l'élément du maillage (appelé "élément parent") est subdivisée en une somme d'intégrales sur les sous-éléments.

Dans le cas d'une discontinuité matériau-vide, l'intégrale d'une fonction $f(\underline{x})$ sur un élément du maillage Ω_e coupé par le niveau zéro de la Level set peut être posé de la

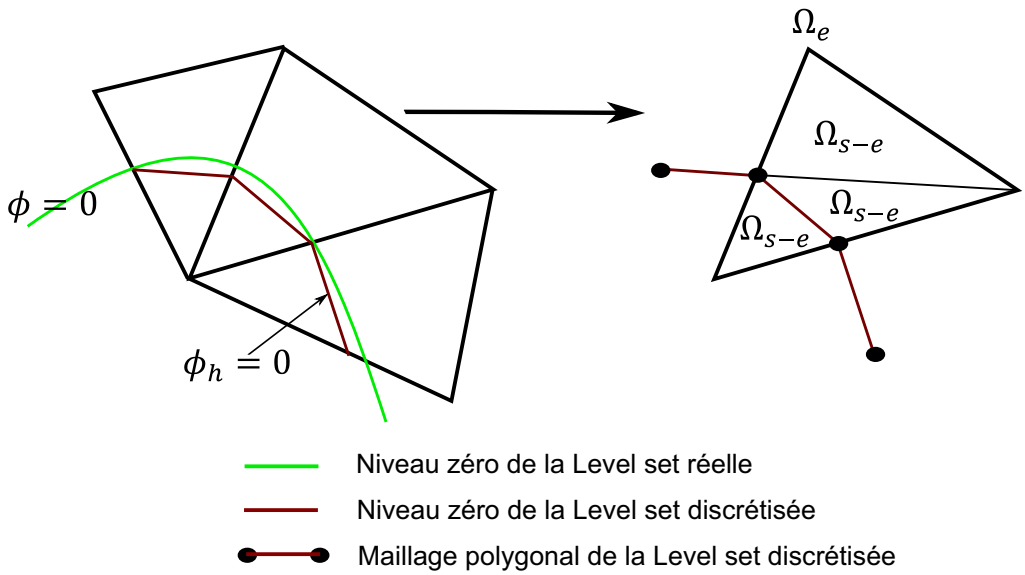


FIGURE 3.7 – Construction des sous-éléments Ω_{s-e} d'un élément de maillage Ω_e à partir d'un maillage polygonal qui correspond au niveau zéro d'une fonction Level set ϕ discrétisée.

manière suivante :

$$\int_{\Omega_e} f(\underline{x})V\left(\phi(\underline{x})\right)\ d\Omega_e = \sum_{\text{sous-éléments}} \int_{\Omega_{s-e}} f(\underline{x})V\left(\phi(\underline{x})\right)\ d\Omega_{s-e} \tag{3.14}$$

Notons que sur chaque sous-élément Ω_{s-e}, l'intégrande $f(\underline{x})V\left(\phi(\underline{x})\right)$ est continu. De plus, aucun degré de liberté n'est associé à ces sous éléments, seuls les degrés de liberté associés au maillage fixe sont utilisés par le système linéaire à résoudre.

La prise en compte de la frontière du domaine est en pratique effectuée lors de l'intégration des sous-éléments qui se trouvent de part et d'autre de l'interface. En conséquent, cette technique est aussi valable pour évaluer l'intégration sur un élément de maillage avec deux matériaux différents, en choisissant la loi de comportement adéquate sur chacun des sous-éléments.

3.5 Imposition des conditions aux limites dans le cadre des éléments finis étendus

L'objectif de cette section est de présenter les étapes lors de l'utilisation de la méthode XFEM et la technique des multiplicateurs de Lagrange pour traiter l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet sur les interfaces implicites. Les démarches sont mises en évidence en utilisant un problème scalaire caractérisé par l'équation de Poisson. La

position de l'interface est supposée fixe sur la grille maillée.

3.5.1 Formulations

Considérons le problème elliptique du second ordre sur un domaine Ω^+ :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega^+ \tag{3.15}$$

Supposons l'imposition de la condition de Dirichlet (CD) sur une partie de la frontière du domaine physique Ω^+ comme illustré sur la figure 3.8(a). Cette configuration est reformulée comme un problème de Dirichlet sur une frontière immergée, où une interface interne Γ^i sépare un large domaine Ω en deux parties : domaine physique Ω^+ et domaine fictif Ω^-. La partie de la frontière avec la condition de Dirichlet (CD) devient maintenant une interface interne Γ^i dans le domaine Ω comme le montre la figure 3.8(b). La construction de l'interface peut être donnée, par exemple, par un maillage polygonal ou par le niveau zéro d'une fonction Level set (voir la figure 3.9).

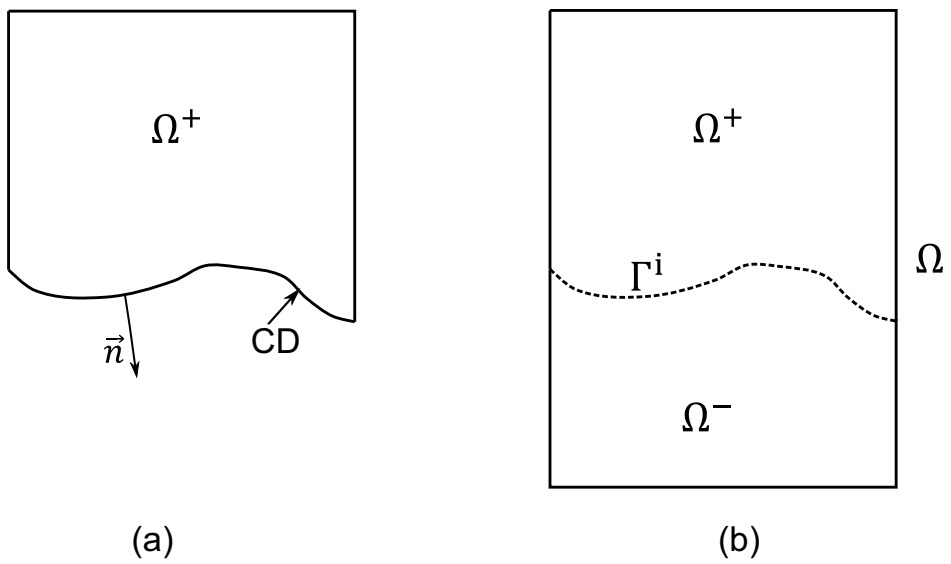


FIGURE 3.8 – (a) Exemple de domaine physique représenté explicitement et (b) implicitement avec une partie de frontière "émergée".

En utilisant un maillage non-conforme à la frontière (CD), le champ u peut être considéré comme un champ discontinu avec un saut en u entre le domaine physique u^+ et le vide u^-.

$$[\![u]\!] = u^+ - \underbrace{u^-}_{=0} \quad \text{sur } \Gamma^i \tag{3.16}$$

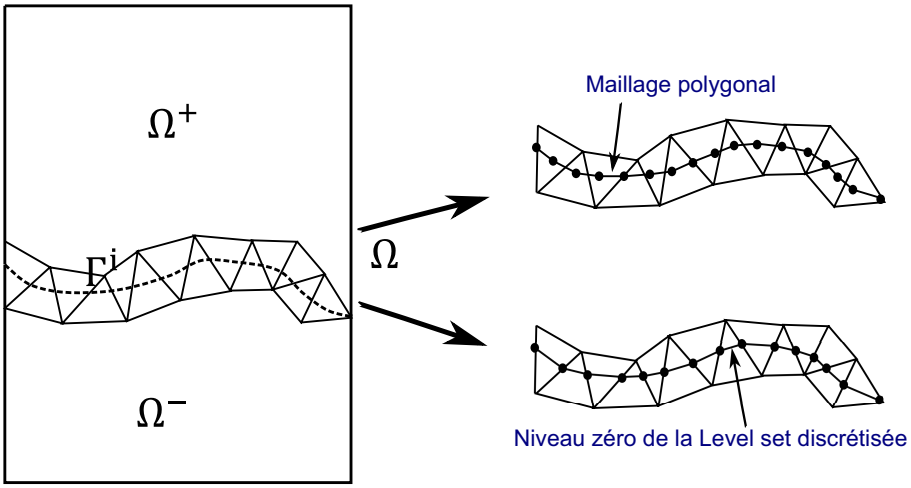


FIGURE 3.9 – Représentation de l'interface Γ^i par un maillage polygonal (explicite) ou par un maillage polygonal qui correspond au niveau zéro de la Level set discrétisée (implicite).

Dans le cas matériau-vide, la composante u^- est sans influence sur la modélisation puisque elle est identiquement nulle. Cependant, la grandeur du saut est égale à la valeur de u sur Γ^i, ce qui se traduit par la contrainte sur l'interface donnée par :

$$u^+ - u_D = 0 \quad \text{sur } \Gamma^i \tag{3.17}$$

où u_D est une donnée du problème. De même, on peut identifier une discontinuité du gradient du champ u :

$$[\![\nabla u \cdot \mathbf{n}]\!] = \nabla u^+ \cdot \mathbf{n} - \underbrace{\nabla u^+ \cdot \mathbf{n}}_{=0} \quad \text{sur } \Gamma^i \tag{3.18}$$

La forme forte complète avec les conditions aux limites de Neumann sur Γ_N et de Dirichlet sur Γ_D s'écrit :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans} \quad \Omega^+ \\ u = u_D & \text{sur} \quad \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = t_N & \text{sur} \quad \Gamma_N \end{cases} \tag{3.19}$$

où f, u_D et t_N sont des données du problème et $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière Γ^+.

Compte tenu des notations précédentes, le principe des travaux virtuels associé à 3.19

donne la forme faible suivante : trouver $u \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)$ tel que $u = u_D$ sur Γ_D et

$$\int_{\Omega^+} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega^+} v f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} v t_N \, d\Gamma \quad , \tag{3.20}$$

$\forall v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)$. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, l'interpolation du champ u peut être facilement choisi afin de vérifier les conditions aux limites de type Dirichlet, et les fonctions test v peut être choisies de telle sorte que $v = 0$ sur Γ_D, conduisant à la forme faible suivante : trouver $u \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)$ tel que $u = u_D$ sur Γ_D et

$$\int_{\Omega^+} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega = \int_{\Omega^+} v f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} v t_N \, d\Gamma \quad , \tag{3.21}$$

$\forall v \in \mathscr{U}_0^1(\Omega^+)$, où l'espace $\mathscr{U}_0^1(\Omega^+)$ est défini par : $\mathscr{U}_0^1(\Omega^+) = \{v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+) |\ v = 0 \ sur \ \Gamma_D\}$.

L'imposition de conditions aux limites de type Neumann est simple dans le cadre d'XFEM et se réalise de la même manière que pour les ÉF classiques (par l'évaluation des intégrales de la forme faible le long de la frontière de Neumann). Cependant, dans le cas de l'utilisation d'un maillage non-conforme à la frontière (CD), l'imposition des contraintes $u = u_D$ et $v = 0$ sur Γ_D n'est pas aussi simple que dans le cadre des éléments finis classique, et donc la forme faible définie par 3.21 ne peut pas être utilisée. En général, l'application de ces contraintes est généralement effectuée au moyen des approches suivantes [Fries and Belytschko (2010)] : (i) la méthode par pénalisation, (ii) la méthode de Nitsche, et (iii) l'approche basée sur des multiplicateurs de Lagrange. Toutes ces approches visent à répondre à la problématique de l'imposition de conditions de Dirichlet sur une interface dans le cadre de XFEM.

3.5.2 Multiplicateurs de Lagrange "classiques"

La solution du problème 3.19 peut également être obtenue comme la solution d'un problème de minimisation avec contraintes : trouver u qui minimise l'énergie potentielle

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^+} \nabla v \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega^+} v f \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} v t_N \, d\Gamma \tag{3.22}$$

et vérifie les conditions aux limites de Dirichlet, s'écrit de la manière suivante :

$$u = arg \min_{\substack{v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+) \\ v = u_D \ sur \ \Gamma_D}} \Pi(v) \tag{3.23}$$

Avec l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange, $\lambda(x)$, ce problème de minimisation s'écrit comme suit :

$$(u, \lambda) = arg \min_{v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)} \max_{\mu \in \mathscr{U}^{-1/2}(\Gamma_D)} \Pi(v) + \int_{\Gamma_D} \mu(v - u_D)\, d\Gamma \ , \tag{3.24}$$

où $\mathscr{U}^{-1/2}$ est l'espace dual de $\mathscr{U}^{1/2}$, avec $\mathscr{U}^{1/2}$ est l'espace des traces des fonction de $\mathscr{U}^1$.

Ce problème conduit à la forme faible suivante avec les multiplicateurs de Lagrange : trouver $u \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)$ et $\lambda \in \mathscr{U}^{-1/2}(\Gamma_D)$ tel que

$$\int_{\Omega^+} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega + \int_{\Gamma_D} v\lambda \, d\Gamma = \int_{\Omega^+} vf \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} vt_N \, d\Gamma, \quad \forall v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+), \tag{3.25a}$$

$$\int_{\Gamma_D} \mu(u - u_D) \, d\Gamma = 0, \quad \forall \mu \in \mathscr{U}^{-1/2}(\Gamma_D). \tag{3.25b}$$

où $\lambda = -\nabla u \cdot \mathbf{n}$ correspond au flux le long de la frontière Γ_D.

En considérant l'approximation des éléments finis classiques $u_h(x) \simeq \sum_i u_i N_i(x)$, les fonctions de forme N_i sont construites sur les éléments de maillage englobant le domaine Ω^+. Dans le cas de la représentation de l'interface Γ^D par le niveau zéro d'une fonction Level set, une interpolation de λ peut être construite avec l'ensemble de fonctions de forme $\left\{N_i^L(x)\right\}_{i=1}^{l}$, construites sur les nœuds de l'intersection entre les arêtes des éléments de maillage du domaine Ω et le niveau zéro de la Level set discrétisée :

$$\lambda_h(x) \simeq \sum_{i=1}^{l} \lambda_i N_i^L(x) \quad pour\ x \in \Gamma_D \ , \tag{3.26}$$

la discrétisation du système d'équations 3.25 peut s'écrire sous la forme d'un système matriciel

$$\begin{pmatrix} K & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ b \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

où λ est le vecteur des coefficients λ_i, et

$$
\begin{aligned}
K_{ij} &= \int_{\Omega^+} \nabla N_i \cdot \nabla N_j \, d\Omega, \\
f_i &= \int_{\Omega^+} N_i f \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i t_N \, d\Gamma, \\
A_{ij} &= \int_{\Gamma_D} N_i^L N_j \, d\Gamma, \\
b_i &= \int_{\Gamma_D} N_i^L u_D \, d\Gamma
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Dans le cas des formulations mixtes à deux champs, seul un choix approprié des espaces éléments finis $\mathscr{U}_h := (\mathscr{U}^1)$, $\mathscr{L}_h := (\mathscr{U}^{-1/2})$ fournira des approximations stables et convergentes. Plus précisément, l'espace des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h$ doit être choisi avec soin de manière à satisfaire la condition de compatibilité LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) [Brezzi and Fortin (1991)], également nommée la condition "inf-sup".

Cette condition s'exprime par le choix des champs de potentiels u_h et de multiplicateurs de Lagrange λ_h qui sont liés aux deux espaces $\mathscr{U}_h$ et $\mathscr{L}_h$ respectivement, vérifiant la condition "inf-sup" numérique :

$$
\exists\, \alpha > 0, \qquad \inf_{\lambda_h \in \mathscr{L}_h} \sup_{u_h \in \mathscr{U}_h} \frac{\int_{\Gamma_D} \lambda_h u_h \, d\Gamma}{\|\lambda_h\|_{0,\Gamma_D} \, \|u_h\|_{1,\Omega^+}} \geq \alpha > 0 \tag{3.29}
$$

où $\|\bullet\|_0$ et $\|\bullet\|_1$ sont respectivement les normes L^2 et H^1, et α est une constante strictement positive indépendante de la taille du maillage h.

Le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange n'est pas unique. Une stratégie particulièrement simple est d'utiliser des multiplicateurs sur le maillage de l'interface discrétisée. Cependant, Ji and Dolbow (2004) et Moës et al. (2006) ont montré que l'utilisation de tous les multiplicateurs de Lagrange définis sur les nœuds du maillage Γ_D, comme l'indique l'approximation 3.26, conduit à des oscillations des multiplicateurs et diminue le taux de convergence globale. Cette problématique a été déjà soulignée dans le travail pionnier de Babuška (1973). La présence d'oscillations s'explique par la richesse du champ de multiplicateurs de Lagrange par rapport à celui de la variable primale u. Moës et al. (2006) ont proposé une stratégie visant à réduire l'espace des multiplicateurs de Lagrange en éliminant un certain nombre de contraintes, en imposant des relations d'égalité ou des relations linéaires entre certains multiplicateurs. Cette stratégie a été étendue en

trois dimensions pour imposer des conditions de contact dans le cadre d'XFEM [Géniaut et al. (2007)]. Récemment, une analyse théorique de la stabilité de cette stratégie en deux dimensions a été développée par Béchet et al. (2009).

3.5.3 Algorithmes de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange

Le premier algorithme de réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange dans le cadre de XFEM est introduit par Moës et al. (2006) afin de répondre à la problématique de l'imposition de conditions de Dirichlet sur une interface en deux dimensions. La généralisation de l'algorithme aux problèmes tridimensionnels a été présentée par Géniaut et al. (2007) et récemment par Béchet et al. (2009). Le principe de tous ces algorithmes est d'imposer des relations d'égalité ou des relations linéaires entre les multiplicateurs de Lagrange. Ils se distinguent essentiellement au niveau du choix de l'interpolation du champ des multiplicateurs de Lagrange : (i) l'approche proposée par Moës et al. (2006) et Géniaut et al. (2007) consiste à réaliser l'interpolation avec des fonctions de forme construites sur les nœuds de l'intersection entre les arêtes des éléments de maillage et le niveau zéro de la Level set discrétisée, et (ii) l'autre possibilité proposée par Béchet et al. (2009), qui consiste à réaliser l'interpolation du champ des multiplicateurs de Lagrange par les mêmes fonctions de forme utilisées pour interpoler le champ de la variable primale u. Dans cette dernière approche, les multiplicateurs de Lagrange sont stockés aux nœuds des éléments de maillage traversés par le niveau zéro de la Level set, et le champ λ est représenté sur une base constituée par la trace sur l'interface des fonctions de forme construites aux nœuds du maillage du domaine.

Nous détaillerons ici l'algorithme présenté par Géniaut et al. (2007) pour montrer la technique utilisée pour réduire l'espace des multiplicateurs de Lagrange qui sera adoptée dans ce travail. De manière plus formelle, soit S_e l'ensemble des arêtes e qui sont strictement coupées par l'interface. La localisation de ces arêtes est réalisée par l'intermédiaire du signe de la Level set $\phi(\underline{x})$ et les deux extrémités de chaque arête e notées $n_1(e)$ et $n_2(e)$, tel que $\phi(n_1(e)) \cdot \phi(n_2(e)) < 0$. Dans le cas où le niveau zéro de l'interface coïncide avec l'un des extrémités d'une arête e, cette dernière sera éliminée de l'ensemble S_e.

Soit N_e l'ensemble des nœuds des deux extrémités de chaque arête e de l'ensemble S_e. L'ensemble N_e sera séparé en deux sous-ensembles N_e^+ et N_e^-, représentant ainsi les nœuds d'un coté et de l'autre de l'interface. Par exemple N_e^+ représente les nœuds qui vérifient $\phi(n_i(e)) > 0$.

Ensuite, l'algorithme recherche le sous-ensemble $S_{ve} \subset S_e$ nommé par les auteurs

"arêtes vitales", ce qui permet de relier les nœuds dans N_e^+ aux nœuds dans N_e^-.

Chaque nœud de N_e est affecté par un score correspondant au nombre d'arêtes qui lui sont connectés. Cette technique de scores se retrouve dans l'algorithme initial de Moës et al. (2006) et aussi dans l'algorithme de Béchet et al. (2009). Elle permet de localiser les nœuds qui porteront les multiplicateurs de Lagrange essentiels pour l'approximation des conditions aux limites de type Dirichlet sur l'interface.

Pour chaque arête e de S_e, le score minimum des deux nœuds extrémités est associé. Si ce score est égal à 1 pour une arête e, cette arête sera classée dans S_{ve} . L'algorithme soustrait de l'ensemble des nœuds N_e tous les nœuds reliés entre eux par les arêtes vitales identifiées auparavant. Si un nœud $n_i(e)$ de l'ensemble N_e (actuel) est connecté à plusieurs arêtes, il devrait avoir au moins une arête vitale (l'arête la plus courte est privilégiée).

En utilisant ces étapes de l'algorithme, le nœud 10 (voir figure 3.10) se retrouve dans l'ensemble N_e (actuel) et l'arête la plus courte connectée à ce nœud sera classée dans l'ensemble S_{ve}. L'algorithme procède de cette façon jusqu'à toutes les arêtes vitales soient incluses dans S_{ve}. Il est à noter que S_{ve} est composé d'arêtes déconnectées et d'arêtes connectées par un seul nœud unique, formant ainsi des groupes. Une fois que les groupes d'arêtes connectées sont sélectionnés, l'algorithme impose des relations entre les multiplicateurs de Lagrange. Tous les multiplicateurs portés par des arêtes d'un même groupe de l'ensemble S_{ve} sont imposés égaux. Les multiplicateurs de Lagrange liés à des arêtes vitales seules de l'ensemble S_{ve} sont imposé libres. En ce qui concerne les arêtes non vitales (les arêtes e qui existent dans l'ensemble S_e et pas dans S_{ve}), l'algorithme les imposent comme des combinaisons linéaires de multiplicateurs sur des arêtes vitales. Ces combinaisons linéaires sont déterminées par la procédure suivante. Soit λ_e qui se trouve sur une arête e non vitale, à l'intersection entre e et la fonction Level set ϕ. L'algorithme cherche les multiplicateurs de Lagrange les plus proches qui sont portés par les arêtes vitales connectées à chaque nœud de l'arête e. Dans le cas $2D$, un multiplicateur de Lagrange λ_e est une combinaison linéaire des multiplicateurs de Lagrange suivant et précédent sur l'interface. Si λ_{k1} et λ_{k2} sont ces deux valeurs, alors une relation linéaire est imposé entre λ_e, λ_{k1} et λ_{k2} sous la forme suivante :

$$\lambda_e = \frac{dist(\lambda_e, \lambda_{k2})}{dist(\lambda_e, \lambda_{k1}) + dist(\lambda_e, \lambda_{k2})}\lambda_{k1} + \frac{dist(\lambda_e, \lambda_{k1})}{dist(\lambda_e, \lambda_{k1}) + dist(\lambda_e, \lambda_{k2})}\lambda_{k2} \tag{3.30}$$

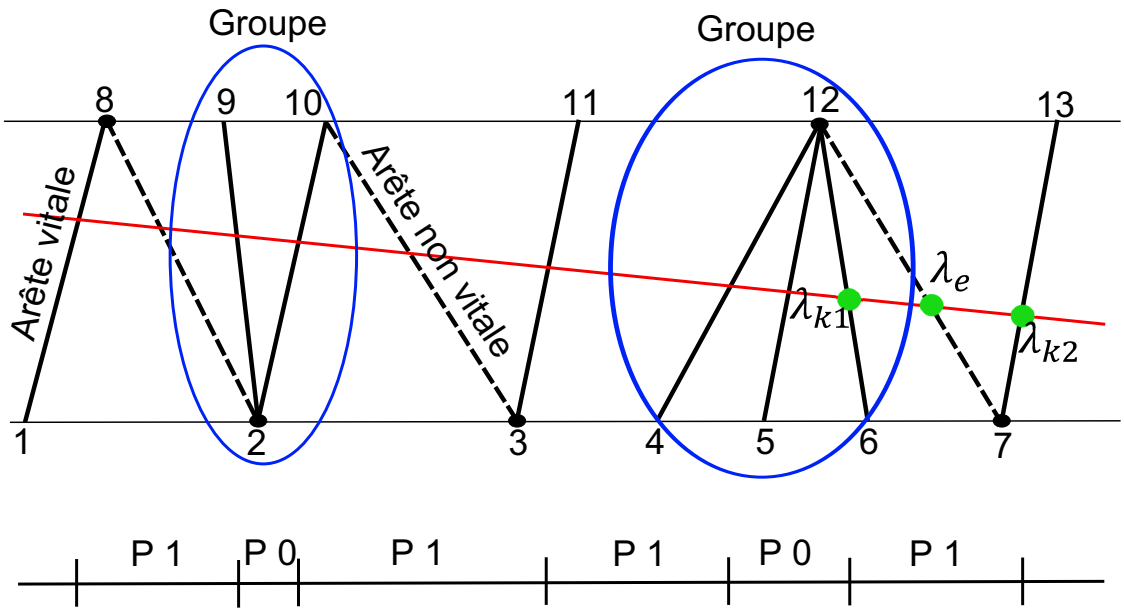


FIGURE 3.10 – Exemple d'arêtes coupées par l'interface, arêtes vitales, arêtes non vitales, groupes d'arêtes et l'approximation résultantes d'ordre $P0$ ou $P1$ par l'algorithme de Géniaut et al. (2007).

3.5.4 La méthode de pénalité

Le problème de minimisation avec contraintes définies par 3.23 peut être également résolu avec l'utilisation d'un paramètre de pénalité. Le potentiel considéré est le suivant :

$$u = arg \min_{v \in \mathscr{U}^1(\Omega^+)} \Pi(v) + \frac{1}{2}\beta \int_{\Gamma_D} (v - u_D)^2 \, d\Gamma \tag{3.31}$$

Dans la méthode de pénalité, des grandes valeurs du paramètre β doivent être utilisées pour imposer les conditions aux limites de Dirichlet d'une manière convenable. En pratique, la détermination du paramètre de pénalité optimal (en terme de taux de convergence en énergie) n'est pas aisée, cela conduit à des systèmes d'équations mal conditionnés, et dépend en plus du problème étudié. Cette approche est utilisée par Chessa et al. (2002), Ji and Dolbow (2004) et Liu and Borja (2008) dans le cadre d'XFEM.

3.5.5 La méthode de Nitsche

La méthode de Nitsche (1971) peut être considérée comme une forme consistante de la méthode de pénalité, où les conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sous forme faible. La formulation faible du système d'équations aux dérivées partielles (EDP) 3.19 par la méthode de Nitsche s'écrit [Arnold et al. (2001), Fernández-Méndez and Huerta

(2004)] :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^+} \nabla v \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\Gamma_D} v \nabla u \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_D} u \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \beta \int_{\Gamma_D} vu \, d\Gamma \\ = \int_{\Omega^+} vf \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} vt_N \, d\Gamma - \int_{\Gamma_D} u_D \nabla v \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma + \beta \int_{\Gamma_D} vu_D \, d\Gamma\end{aligned} \tag{3.32}$$

où β est un paramètre scalaire positif. Cette méthode conduit à des matrices de rigidité au conditionnement acceptable, utilisée par Hansbo and Hansbo (2002), Dolbow and Franca (2008), Dolbow and Harari (2009) dans le cadre d'XFEM. Le seul problème de cette méthode est la déduction de la forme faible. La généralisation de la mise en œvre pour d'autres problèmes n'est pas aussi simple que la méthode des multiplicateurs de Lagrange ou la méthode de pénalisation. La forme faible et le choix du paramètre β ne dépend pas seulement du système d'EDP, mais aussi des conditions aux limites de Dirichlet à imposer.

3.6 Conclusions

A travers de ce chapitre, nous avons montré le potentiel de la méthode XFEM pour modéliser les discontinuités fixes et mobiles sur un maillage fixe. Nous avons vu que l'introduction de l'enrichissement discontinu dans l'approximation habituelle des éléments finis classique, permet de s'affranchir de la contrainte de conformité du maillage avec l'interface (ou la frontière). De plus, l'introduction des fonctions d'enrichissements représentant au mieux le phénomène physique à évaluer permet d'obtenir de bonnes approximations même dans le cas de maillage relativement grossier là où une diminution de la taille des éléments aurait été nécessaire dans le cadre de la méthode des éléments finis classique. Nous avons également vu que l'utilisation de la méthode des Level sets développée par Osher and Sethian (1988) s'avère efficace dans le cadre de la modélisation de l'évolution de la frontière du domaine sur un support maillé (grille maillé par exemple). Son couplage avec la méthode XFEM a grandement facilité la description des interfaces, le traitement des discontinuités mobiles ainsi que la simplification de la construction d'enrichissements.

Le principal intérêt de ce couplage dans le cadre de notre travail est d'éviter la contrainte de conformité du maillage aux frontières du domaine physique, analyse par éléments finis sur un maillage fixe, tout en gardant les convergences de la méthode des éléments finis classiques.

Nous allons donc nous tourner dans le chapitre qui suit vers les questions relatives à la

representation implicite par Level sets des pièces mécaniques, une representation adaptée au cadre des éléments finis étendus (XFEM).

CHAPITRE 4

Représentation implicite par Level sets d'un objet paramétrique

Ce chapitre décrit la méthodologie élaborée pour construire une représentation implicite à partir d'un objet représenté par des surfaces paramétriques. Nous présenterons les notations de base, un bref rappel des objectifs et la méthodologie utilisée dans le présent document. Puis nous décrirons étape par étape la démarche élaborée afin de construire un objet implicite indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage). Nous proposerons tout d'abord un algorithme robuste pour calculer la distance signée sur une grille maillée à partir de la représentation paramétrique. Ensuite nous décrirons les techniques élaborées afin de préserver les arêtes vives et pour pouvoir représenter correctement la frontière d'un objet.

4.1 Notations

Dans cette section, nous définissons les notations utilisées dans le présent document en se basant sur la modélisation classique d'objets par une seule fonction Level set. La plus petite boîte englobante qui entoure complètement l'objet Ω est désignée par $Gr \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). La frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de Ω est de dimension $(n-1)$. Gr est un maillage, soit structuré ou non structuré (triangles en $2D$ et tétraèdres en $3D$). Les éléments de ce maillage sont désignés génériquement par E et sont de taille caractéristique h. Bien que nous n'étudiions que deux phases (matériau et le vide), l'idée peut être facilement étendue aux multi-matériaux. Dans ce manuscrit, toutes les grilles de maillage et le post-traitement sont produits avec l'aide du logiciel $GMSH$ [Geuzaine and Remacle (2009)].

4.1.1 Classification des éléments de maillage par l'intermédiaire des données de la Level set

En utilisant le signe de la fonction Level set $\phi(\underline{x})$, nous pouvons classer les éléments E du maillage Gr en trois ensembles : les éléments intérieurs E_I sont ceux qui sont complètement à l'intérieur du domaine physique Ω, les éléments extérieurs E_O qui sont complètement à l'extérieur de Ω et les éléments frontière E_B qui sont coupés par la frontière $\partial\Omega$. Soit les ensembles d'éléments qui composent le maillage :

$$\text{Intérieur :} \quad I = \{E_I \in Gr \ \text{ tel que } E \subset \Omega \text{ et } E \cap \partial\Omega = \emptyset\}\,; \tag{4.1}$$

$$\text{Extérieur :} \quad O = \left\{E_O \in Gr \ \text{ tel que } E \subset \overline{\Omega} \text{ et } E \cap \partial\Omega = \emptyset\right\}\,; \tag{4.2}$$

$$\text{Frontière :} \quad B = \{E_B \in Gr \ \text{ tel que } E \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}\,. \tag{4.3}$$

Cette classification peut être exprimée en terme de la fonction Level set ϕ :

- Un élément intérieur E_I est stocké dans I si le produit des valeurs de ϕ en ses nœuds est négatif ou nul.
- Un élément extérieur E_O est stocké dans O si le produit des valeurs de ϕ en ses nœuds est positif ou nul.
- Un élément de frontière E_B est stocké dans B si les valeurs de ϕ en ses nœuds sont à la fois négatives et positives.

4.1.2 Discrétisation de la Level set et définition des sous-éléments de maillage

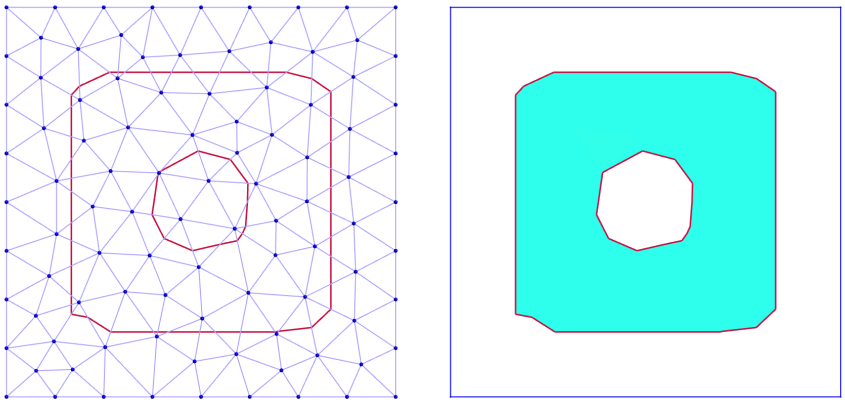
En pratique, les valeurs du champ scalaire de distances signées (level set) sont généralement stockées aux nœuds $\phi_i = \phi(\underline{x_i})$ d'une discrétisation spatiale (maillage) et interpolées par les fonctions de base éléments finis classiques $N_i(\underline{x})$ comme ceci :

$$\phi_h(\underline{x}) = \sum_{i \in I} N_i(\underline{x})\,\phi_i \tag{4.4}$$

où I est l'ensemble des nœuds du maillage.

En utilisant des fonctions de forme linéaires pour la discrétisation de la Level set ϕ, on obtient une approximation ϕ_h du champ de distance exacte ϕ, ainsi une approximation

du domaine physique Ω_h et sa frontière $\partial\Omega_h$ (voir la figure 4.1). La représentation de la frontière définie par $\partial\Omega_h$ comme le niveau zéro de ϕ_h n'est qu'une approximation de la position réelle ϕ qui s'améliore avec le raffinement du maillage.



(a) (b)

FIGURE 4.1 – Approximation d'un carré contenant un trou circulaire par une modélisation de type CSG sur un maillage non structuré. (a) montre le niveau zéro de la Level set discrétisée $\phi_h = 0$, construite à partir de la combinaison booléenne de demi-espaces (cinq fonctions distances signées : quatre plans infinis et un cylindre). (b) le domaine approximé Ω_h sur un maillage de taille caractéristique h.

La localisation du niveau zéro de la Level set $\phi_h = 0$ à l'intérieur des éléments E_B de l'ensemble B, permet de calculer les points d'intersection de la frontière avec les bords des éléments. Une fois que les points d'intersection sont connus, la frontière $\partial\Omega_h$ peut être obtenue par la construction d'un maillage linéique en reliant les points d'intersection obtenus précédemment. Ce maillage de la frontière est composé d'un ensemble de segment de droite (polyligne) en $2D$ ou un ensemble de triangles en $3D$.

Les éléments de la frontière $E_B \in B$ sont subdivisés en sous-éléments conformes à la frontière discrétisée $\partial\Omega_h$. Ces sous-éléments peuvent être séparés en deux ensembles, ceux qui sont situés à l'intérieur de la frontière $\partial\Omega_h$ que nous désignons par (IB), et ceux qui sont situés à l'extérieur que nous désignons par (OB). L'élément "père" $E_B \in B$ peut donc être réécrit comme l'union des sous-éléments E_Δ de telle sorte que $E_B = \bigcup_{k=1}^{n} E_\Delta = \{E_{IB}\}_{n-m} \cup \{E_{OB}\}_m$ (voir la figure 4.2c). Les ensembles des sous-éléments (IB) et (OB) sont définis par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} IB & = & \{E_{IB} \text{ sous-élément} \in E_B : E_\Delta \subset \Omega_h\} \\ OB & = & \{E_{OB} \text{ sous-élément} \in E_B : E_\Delta \subset \overline{\Omega}_h\} \\ avec \quad B & = & IB \cup OB \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Un sous-élément E_Δ d'un élément frontière E_B est classifié en utilisant le signe de la fonction ϕ en son centre de gravité. Si le sous-élément est considéré à l'intérieur du domaine Ω_h alors $E_\Delta = E_{IB}$, si non $E_\Delta = E_{OB}$. Pour les analyses éléments finis, l'intérieur de l'objet Ω_h défini par cette représentation implicite est alors construit par l'union des éléments (I) avec les sous-éléments (IB).

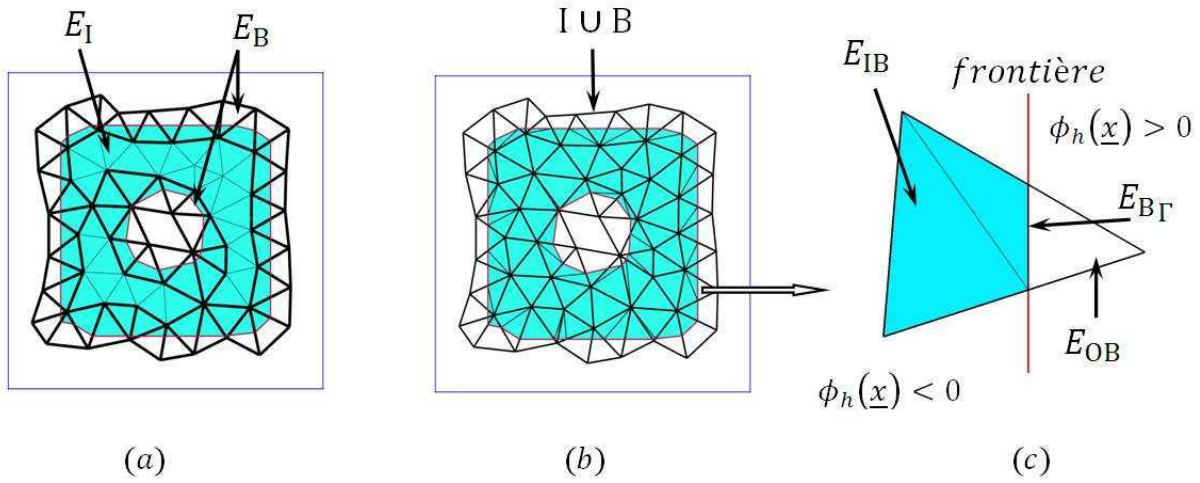


FIGURE 4.2 – (a) Définition des éléments de maillage : élément frontière E_B et élément intérieur E_I, (b) montre la partie du maillage $Gr_{I\cup B}$ qui couvre entièrement l'objet. (c) la représentation du matériau et le vide par la subdivision de l'élément E_B en sous-éléments E_{IB} "intérieur" et E_{OB} "extérieur". Dans ce cas particulier, $E_B = \bigcup_{k=1}^{3} E_\Delta = \{E_{IB}\}_2 \cup \{E_{OB}\}_1$ et $E_{B_\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{1} E_{\Delta_\Gamma}$.

On note une partie de la frontière $\partial\Omega_h$ à l'intérieur d'un élément de frontière E_B par E_{B_Γ} sachant que $E_{B_\Gamma} \subset E_B$ (voir la figure 4.2c). Nous montrons dans l'approche proposée dans la suite de document, que dans un cas général, E_{B_Γ} peut être réécrite comme l'union des sous-éléments E_{Δ_Γ} de telle sorte que $E_{B_\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{n} E_{\Delta_\Gamma}$.

4.2 Rappel des objectifs et proposition de méthodologie

Nous cherchons à calculer le champ distance signée d'un objet à partir de sa description paramétrique (fonctions analytiques) sur un maillage non structuré. Notre but est d'éviter une discrétisation préalable de la frontière pour minimiser l'erreur sur le champ distance autour de la frontière. De plus, nous voulons éviter la lourde tache de la projection orthogonale des nœuds du maillage sur la frontière de l'objet pour le calcul du champ distance.

Comme indiqué dans l'introduction, un des objectifs de cette thèse est de proposer

une nouvelle représentation implicite qui peut garantir l'indépendance de la qualité de l'approximation géométrique par rapport à la discrétisation spatiale (maillage).

Étant donné que la modélisation implicite ne permet pas de représenter les arêtes vives et les coins de l'objet, nous cherchons à ce que notre approche soit capable de préserver ces singularités de nature géométrique.

Nous avons vu dans la section 2.2.3 que l'approximation d'un objet avec frontières courbes (voir figure 2.3) dépend de la taille du maillage, nous désirons aussi que notre approche permette une représentation plus fidèle des frontière courbes indépendamment de la taille des éléments de maillage.

La méthodologie de la construction d'un objet implicite à partir d'un objet paramétrique peut être décomposée selon les étapes suivantes :

- La décomposition de la surface frontière d'un objet CAO en faces
- Chaque face sera associée à une fonction paramétrique (géométrie exacte)
- Chaque fonction paramétrique sera transformée en Level set
- Représentation implicite de l'objet en utilisant une technique de sous-découpage et les opérateurs de la modélisation CSG.

Soit Ω un objet dont la frontière $\partial\Omega$ est composée de m surfaces paramétriques. Considérons m fonctions paramétriques $\vec{S}_i(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \, (i = 1, ..., m)$ décrivant chacune de ces surfaces.

La procédure que nous proposons ici pour obtenir une représentation totalement implicite d'un objet Ω est la suivante.

Convertir chaque fonction paramétrique $\vec{S}_i$ en un champ de distance signée ϕ_h^i sur une bande étroite d'éléments ω_i tel que discuté dans la section suivante. Cette conversion se base sur la localisation d'une bande d'éléments autour de chaque surface paramétrique, ce qui permet de définir les renseignements nécessaires sur la distance. Il y a donc m bandes $\omega_i \, (i = 1, ..., m)$ d'éléments. Chaque niveau zéro de Level set ϕ_h^i est construit en interpolant les valeurs nodales du champ de distance stocké dans les nœuds des éléments de chaque bande ω_i. Les champs de distance sont interpolés en utilisant des fonctions linéaires d'éléments finis N_j :

$$\phi_h^i = \sum_{j \in \omega_i} \phi_{ij} N_j \tag{4.6}$$

où ϕ_{ij} est la distance signée du j^{ime} nœud de la bande à la surface discrétisée Γ_h^i. L'approximation de chaque niveau zéro des Level sets $\phi_h^i = \{\underline{x} \in \omega_i : \phi_h^i(\underline{x})\}$ consti-

tue une partie de la frontière de l'objet $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ à l'intérieur de la discrétisation spatiale (la grille englobante l'objet).

Construire le maillage polygonal Γ_h^i de chaque Level set définie sur chaque bande ω_i. Le maillage de chaque Γ_h^i est composé d'un ensemble de segments de droites (polylignes) en deux dimensions (appelé "arête de découpage") ou un ensemble de triangles en trois dimensions (appelé "triangle de découpage"). Ces Γ_h^i sont utilisés pour subdiviser les éléments appartenant à chaque groupe ω_i aux fins d'intégration numérique.

Classification des éléments en éléments de maillage (I) "intérieur", (B) "frontière" et l'ensemble des sous-éléments (IB) qui sont situés à l'intérieur de la frontière. Ce classement permet de définir le domaine approché Ω_h et sa frontière Γ_h.[3]

À des fins d'illustration, prenons le même exemple que la figure 4.1. Dans ce cas, nous utilisons cinq fonctions paramétriques dont chacune correspond à une partie de la frontière de l'objet (voir la figure 4.3).

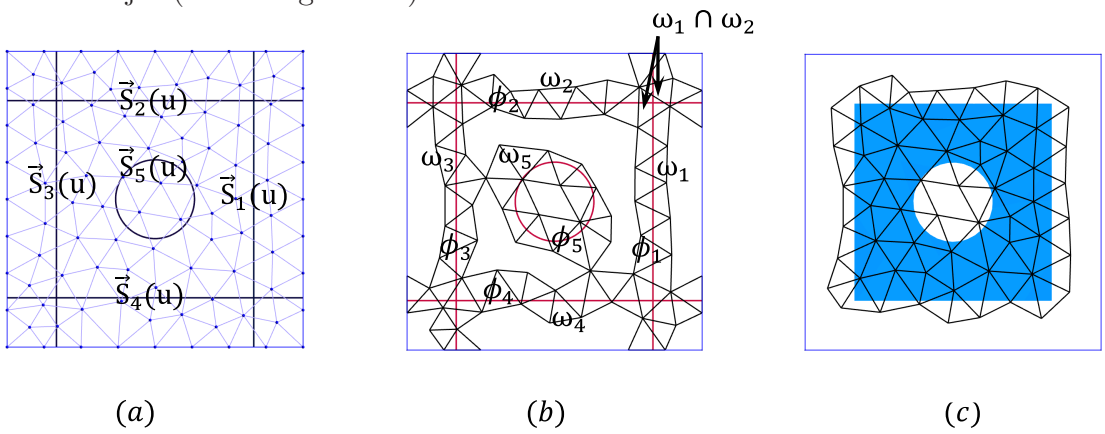


FIGURE 4.3 – (a) Modélisation d'un carré contenant un trou circulaire par cinq fonctions paramétriques, (b) montre l'étape de la conversion sur une boite englobante maillée : les niveaux zéro des level sets $\phi_h^i = 0$ et leurs corresponds bandes ω_i, (c) la representation implicite de l'objet approximé Ω_h sur le même maillage que la figure 4.1.

Chacune des étapes nécessaires pour la construction d'objet implicite $3D$ à partir d'une représentation paramétrique est détaillée dans la suite.

3. Les sections 4.4.1 et 4.5 décrivent respectivement deux types d'éléments de frontière E_B : ceux qui sont traversés par plusieurs niveaux zéro de Level sets et les éléments qui contribuent à la représentation des frontières courbes.

4.3 Conversion d'une fonction paramétrique arbitraire vers une représentation level set

Comme nous avons vu au chapitre 2, les surfaces paramétriques sont la base de la modélisation géométrique en CAO. C'est pour cette raison que nous avons fait le choix de nous intéresser à cette forme de représentation. Cependant, le calcul du champ de la distance signée d'une surface paramétrique exige la détermination de la distance minimale à la surface en chaque sommet du maillage de la boite englobante. La méthode utilisée consiste à déterminer la projection orthogonale qui minimise la distance Euclidienne entre chaque sommet $\vec{V}(\underline{x})$ du maillage et la surface $\vec{S}(u,v)$. La minimisation s'écrit :

$$d_{min} = \left\| \vec{S}(u,v) - \vec{V}(\underline{x}) \right\| \tag{4.7}$$

où le point de la projection $\vec{P}(\underline{x})$ sur la surface et la tangente $\vec{t}$ à la surface au point $\vec{P}(\underline{x})$ doivent satisfaire la condition :

$$\left(\vec{P}(\underline{x}) - \vec{V}(\underline{x}) \right) \cdot \vec{t} = 0 \ . \tag{4.8}$$

Cette projection demande la résolution d'un système d'équations non linéaires, qui peut être résolu numériquement à l'aide d'un algorithme de type Newton. Cependant, une des difficultés de cette minimisation est de déterminer convenablement les valeurs initiales (u,v) dans l'espace des paramètres pour atteindre la convergence de l'algorithme de Newton. Peu de travaux à notre connaissance considèrent le traitement de la projection orthogonale sur les modèles paramétriques. Des algorithmes utilisent des itérations de type Newton moins sensibles au choix des valeurs initiales pour localiser les solutions du problème 4.8, ont été proposées par Hartmann (1999), Ma and Hewitt (2003), Hu and Wallner (2005). Ces algorithmes sont basés sur des informations différentielles du premier ou du second ordre selon le taux de convergence désiré et convergent vers des minima locaux.

Dans l'objectif de calculer le champ de distance signée directement de la représentation paramétrique, l'utilisation de la projection orthogonale pour chaque point du maillage s'avère délicate à traiter du point du vue numérique et coûteuse en temps de calcul. Nous proposons une méthode qui permet de limiter le calcul du champ distance signée à une bande entourant la surface, sans l'utilisation de la projection orthogonale. Au lieu de trouver la projection sur la surface, cette minimisation sera remplacée par le calcul exact des points d'intersection des arêtes de chaque élément de maillage traversé par la surface $\vec{S}(u,v)$ et l'évaluation de la distance en utilisant localement la définition de la fonction

analytique du champ de distance signée à la surface d'un plan infini :

$$p(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{n} \tag{4.9}$$

Étant donné que les points d'intersection de la surface avec les arêtes de chaque élément sont connus, on peut évaluer la distance signée sur les nœuds de l'élément en construisant $p(\underline{x})$ passant par chaque point d'intersection (voir la figure 4.4).

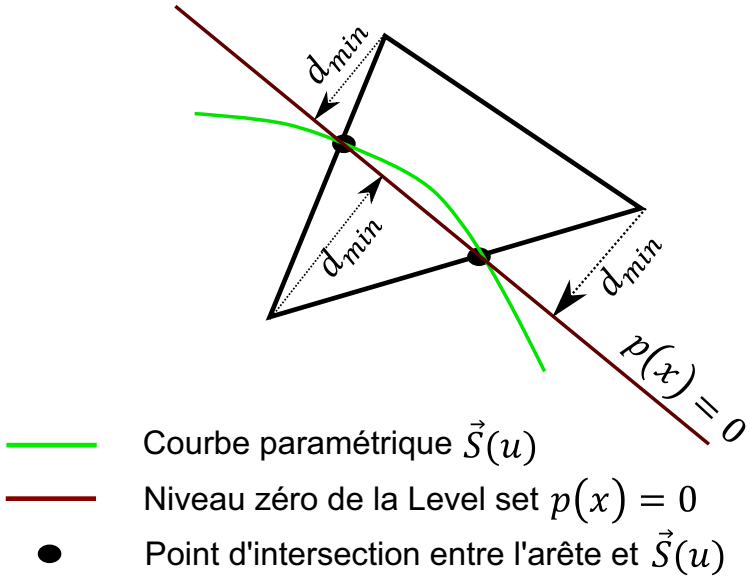


FIGURE 4.4 – Illustration en 2D de la construction de la Level set analytique $p(\underline{x})$ à l'intérieur d'un élément de maillage traversé par une courbe paramétrique.

Remarque : En pratique, une fonction Level set est interpolée sur le maillage éléments finis à partir des fonctions de forme éléments finis linéaires. Par conséquent, même si la distance *dmin* stockée aux nœuds de l'élément est la distance exacte à la courbe/surface paramétrique, la Level set discrétisée sera donc linéaire à l'intérieur de l'élément. L'erreur due à cette interpolation linéaire et celle inhérente à notre technique sont supposées du même ordre de grandeur.

Lors de l'utilisation de la méthode itérative de Newton-Raphson pour le calcul des points d'intersection entre une surface paramétrique et une arête d'un élément de maillage, une valeur initiale doit être très soigneusement sélectionnée pour assurer la convergence. Pour pallier ce problème, nous présentons une approche qui s'appuie sur le concept de voisinage ou d'adjacence. Chaque élément de maillage est en effet entouré par d'autres éléments voisins. Ceci permet le calcul des points d'intersection entre la surface paramétrique et les arêtes de ces éléments en utilisant des valeurs initiales satisfaisantes pour la méthode de Newton. Le concept d'adjacence sera également utilisés pour définir la bande

d'éléments ω_i qui entoure la surface.

4.3.1 Algorithme proposé

L'algorithme prend en entrée l'équation de la surface paramétrique et un maillage (par exemple une boite englobante maillée), et fournit en sortie le champ de la distance signée défini sur une bande ω_i (ou sur le maillage total) et un maillage polygonal Γ_h qui correspond au niveau zéro de la Level set discrétisée. Le principe de l'algorithme consiste à construire le champ de distance en réalisant un suivi des éléments traversant la surface à partir d'un premier élément repéré comme étant partie de ω_i. Les figures 4.5,4.6,4.7 et 4.8 illustrent les différentes étapes de l'algorithme. Nous résumons l'algorithme de conversion comme suit :

Entrée(s) : Une courbe/surface paramétrique $\vec{S}(u)/\vec{S}(u,v)$, un maillage Gr structuré ou non structuré de taille caractéristique h, une valeur initiale $(u_s)/(u_s,v_s)$ qui corresponde à un point sur la surface spécifiée par l'utilisateur, et un vecteur initial $\underline{n}_s$ pour attribuer un signe positif ou négatif à chaque demi-espace en fonction de sa localisation par rapport à $\vec{S}(u)/\vec{S}(u,v)$;

Sortie(s) : Level set ϕ_h définie dans une bande ω, et un maillage polygonal Γ_h qui correspond au niveau zéro de la Level set discrétisée.

1. Choisir une valeur initiale des paramètres (u_s,v_s) et son point $\vec{P}_s$ correspondant sur la surface. Chercher l'élément du maillage "élément de départ" pour débuter l'algorithme, *i.e.* l'élément contenant le point $\vec{P}_s$. (voir la figure 4.5).
2. Pour chaque arête de l'élément de départ, calculer le point d'intersection avec $\vec{S}(u,v)$ en utilisant la valeur initiale (u_s,v_s), et établir une relation entre l'arête et la valeur des paramètres (u,v) de $\vec{S}(u,v)$ qui corresponde à ce point d'intersection. Chaque valeur des paramètres (u,v) trouvée par le calcul de chaque intersection est stockée dans un conteneur associatif[4] (appelé $Container_s$), de telle sorte qu'elle peut être trouvée à partir de son arête qui lui correspond. Dans le cas particulier, où le point d'intersection est situé sur un sommet (nœud) de l'élément de départ, la valeur des paramètres peut être trouvée pour toutes les arêtes connectées à ce sommet (deux arêtes en $2D$ et trois arêtes en $3D$).
3. Construire le plan sous forme implicite $p(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{n}$ qui passe par chaque point d'intersection et de telle sorte que $\underline{n}$ vérifie $\underline{n} \cdot \underline{n}_s > 0$ pour définir le signe du

4. En utilisant un conteneur associatif, les valeurs des paramètres (u,v) de la surface paramétrique $\vec{S}(u,v)$ qui correspondent aux points d'intersections avec chaque arête, sont accessibles le long des étapes de l'algorithme par leur *clé* = *arête*.

champ de distance dans l'élément de départ. Ensuite, évaluer et stocker la valeur de p à chaque sommet de l'élément de départ. Le vecteur $\underline{n}$ est stocké dans un conteneur associatif (appelé $Container_n$) de telle sorte qu'il peut être trouvé par son élément de maillage qui lui correspond. L'élément de départ est stocké dans une liste (appelée $list_B$) pour construire les éléments de la bande ω_i (voir la figure 4.5).

4. Localiser les éléments de maillage entourant l'élément de départ en utilisant le concept d'adjacence entre les entités de maillage (voir la figure 4.6). Pour chaque arête de l'élément de départ de la liste $list_B$ et qui était déjà stockée dans $Container_s$, stocker les éléments de maillage adjacents à cette arête dans une liste (appelée $list_{adj}$). Dans le cas particulier, où le point d'intersection est situé sur un sommet de l'élément de départ, stocker les éléments de maillage connectés à ce sommet dans $list_{adj}$.

5. Maintenant, chaque élément de la liste $list_{adj}$ qui n'a pas été déjà traité, devient le nouveau élément de départ actuel, et l'étape 2 sera répétée avec une nouvelle valeur initiale (u_s, v_s). Pour chaque nouveau élément de départ, une nouvelle valeur initiale (u_s, v_s) est cherchée par l'intermédiaire d'une de ces arêtes, déjà stockée dans $Container_s$. Dans le cas particulier où aucune de ces arêtes n'existe dans $Container_s$, la valeur initiale (u_s, v_s) est obtenue à partir d'une des arêtes qui est connectée à un des sommets de l'élément de départ actuel. C'est le cas des éléments de la liste $list_{adj}$ qui ont été obtenus à partir du concept d'adjacence associé au cas particulier de l'étape 4.

   Si plus d'un point d'intersection est trouvé par le nouvel élément de départ (deux points d'intersection dans $2D$ et trois/quatre en $3D$), l'étape 3 sera répétée avec un nouveau vecteur $\underline{n}_s$. Pour chaque nouveau élément de départ, le vecteur $\underline{n}_s$ est obtenu à partir d'un des éléments de maillage adjacents, qui a déjà été stocké dans $Container_n$.

   Pour construire le champ de la distance signée dans l'élément de départ actuel, évaluer et stocker la valeur de p pour chaque sommet qui n'a pas été déjà traité. Puis pour le reste des sommets de l'élément qui ont déjà été traités, mettre à jour dans chacun la valeur de la distance signée telle que celle-ci soit la valeur absolue minimale entre la valeur de p et la valeur déjà stockée au cours des étapes précédentes.

6. Répéter l'étape 5 jusqu'à ce que tous les éléments stockés dans la liste $list_{adj}$ soient traités. L'algorithme ensuite se poursuit avec une liste vide $list_{adj}$. Ensuite, répéter l'étape 4 pour chaque élément de la liste $list_B$ qui n'a pas été déjà traité pour construire la liste $list_{adj}$.

7. Si une autre liste non-vide $list_{adj}$ est construite au cours de l'étape 6, répéter les étapes 5 et 6. (voir les figures 4.6 et 4.7)
8. S'il n'y a plus d'éléments dans la liste $list_{adj}$, alors la conversion est terminée. Les éléments stockés dans la liste $list_B$ représentent la bande d'éléments du maillage ω traversés par $\vec{S}(u,v)$. Extraire le niveau zéro de la Level set ϕ_h à partir de la bande d'éléments ω par une interpolation linéaire du champ de distance signée stocké aux sommets (nœuds) des éléments. Ensuite, extraire le maillage polygonale Γ_h de la surface qui correspond au niveau zéro de la Level set discrétisée (voir la figure 4.8).

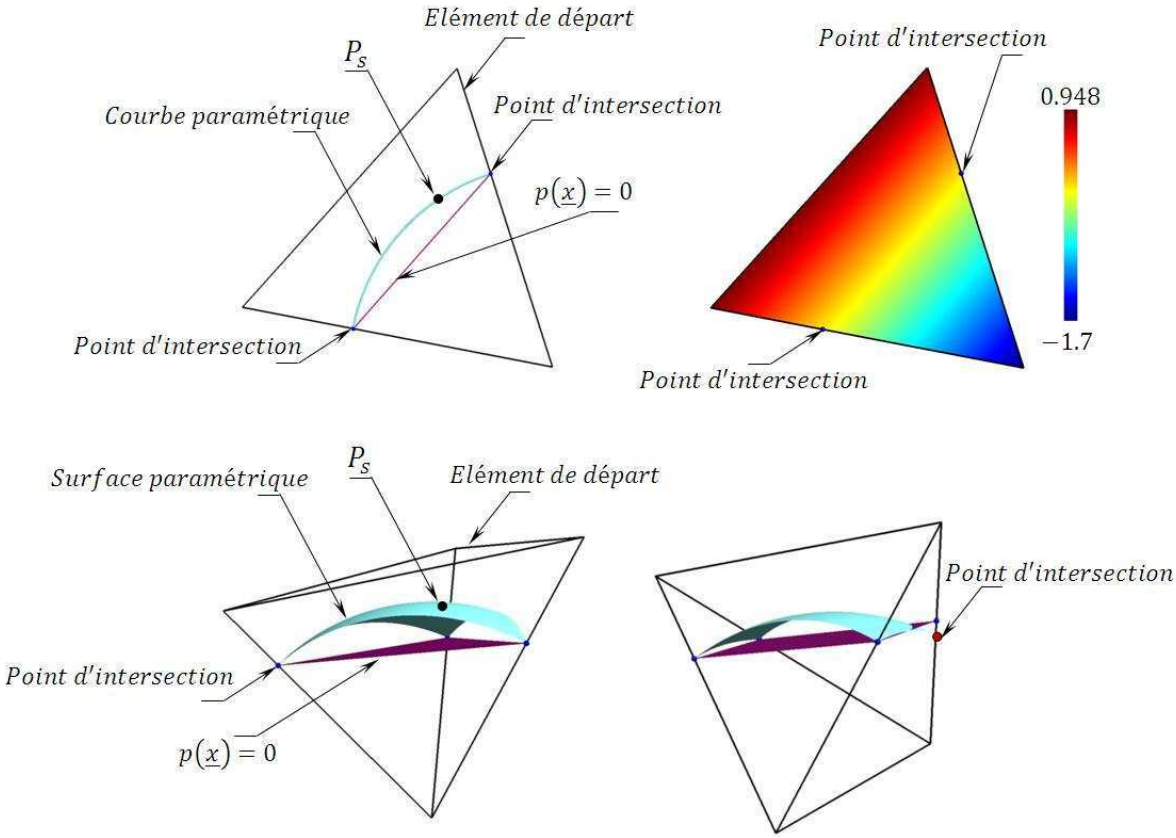


FIGURE 4.5 – Les étapes 1,2 et 3 de l'algorithme pour un élément de départ en $2D$ et $3D$. La construction de la fonction Level set $p(\underline{x})$ qui passe par les points d'intersections pour construire une portion locale de ϕ_h.

4.3.2 Description détaillée de l'algorithme de conversion

4.3.2.1 Déterminer l'élément de départ à partir d'un point arbitraire sur la surface paramétrique

La première étape de l'algorithme fournit l'élément de départ contenant le point $\vec{P}_s = \vec{S}(u_s, v_s)$ qui peut être choisi arbitrairement sur la surface paramétrique. Cela demande de tester si un élément de maillage contenant ce point en utilisant le minimum-maximum des coordonnées (x, y, z) de ses sommets. L'élément qui contient le point P_s est pris comme élément de départ pour commencer l'algorithme.

Il existe des algorithmes de localisation spatiale [5] qui permettent de diminuer le nombre de comparaisons nécessaires afin de déterminer l'élément contenant un point donné, ceux-ci sont typiquement de complexité en $O(log(n))$. Toutefois, cette étape n'est effectuée qu'une seule fois au début de notre algorithme, on peut se permettre d'effectuer une recherche exhaustive (complexité en $O(n)$), beaucoup plus simple à mettre en œuvre. Ensuite, la localisation géométrique des autres éléments nécessaires pour les étapes suivante, est réalisée en utilisant le concept d'adjacence.

4.3.2.2 Déterminer les points d'intersections entre la surface paramétrique et l'élément de départ

Dans l'étape 2, l'algorithme visite chaque arête de l'élément de départ pour déterminer les points d'intersection avec $\vec{S}$ (voir la figure 4.5). Ces points d'intersections peuvent être déterminés par la résolution du système d'équations non linéaires suivant :

$$\text{trouver } (u, v, t), \text{ tel que } \vec{F}(u, v, t) = \vec{S}(u, v) - \vec{E}(t), \tag{4.10}$$

où $\vec{S}(u, v)$ est la paramétrisation de la surface, et $\vec{E}(t) = (1-t)\vec{E}_0 + t\vec{E}_1$ est la paramétrisation d'une arête définie par ces deux sommets $\vec{E}_0$ et $\vec{E}_1$. Nous cherchons la solution approchée de l'équation 4.10 en utilisant la méthode de Newton-Raphson classique. La valeur initiale (u_s, v_s) correspond à $\vec{P}_s$ est utilisée pour obtenir la solution locale pour tous les arêtes de l'élément de départ, seulement quelques itérations sont nécessaires pour calculer le point d'intersection lorsqu'une arête est traversée par $\vec{S}$. Dans la pratique, deux itérations sont suffisantes pour obtenir le point d'intersection. Ce nombre d'itérations est utilisé comme critère pour trouver les arêtes qui intersectent $\vec{S}$ entre ses sommets. L'algorithme utilise uniquement les informations différentielles du premier ordre de $\vec{S}(u, v)$, et des informations géométriques communes à tout type de courbe/surface paramétrique

5. Comme par exemple : ANN library. URL http ://www.cs.umd.edu/∼mount/ANN/.

possible.

Pour chaque intersection arête/surface, la solution (u, v, t) du système d'équations 4.10 est stockée dans $Container_s$ de telle sorte qu'elle peut être retrouvée efficacement à partir de l'arête qui lui correspond. Ce stockage sera utilisé dans les prochaines étapes, à la fois pour détecter efficacement les prochains éléments nécessaires à notre algorithme de conversion, et de fournir une nouvelle valeur initiale satisfaisante pour aboutir à une convergence rapide de la méthode de Newton-Raphson. Cet algorithme est écrit en langage C++ en utilisant les conteneurs de la bibliothèque standard (STL ou Standard Template Library), et bénéficie des avantages des conteneurs associatifs pour le stockage et l'accès aux données avec une bonne gestion de la mémoire de stockage et un court temps d'exécution.

4.3.2.3 *Calculer le champ de la distance signée dans l'élément de départ*

La troisième étape utilise les points d'intersections obtenus dans l'étape 2 et le vecteur $\underline{n}_s$ donné en entrée de l'algorithme pour calculer les valeurs de la distance signée aux sommets de l'élément de départ. L'utilisation du $Container_n$ permet de garder en mémoire le signe du champ de distance entre les éléments de maillage stockés dans la liste $list_B$ et les éléments voisins pendant la construction du champ. En cas de présence de quatre points d'intersection, cas fréquemment rencontré en $3D$, nous en utilisons seulement trois choisis arbitrairement pour la construction du plan $p(\underline{x})$. Nous montrons dans la section 4.5 que l'erreur de la représentation locale du niveau zéro de la Level set à l'intérieur d'un élément frontière E_B peut être réduite en utilisant un sous-maillage gradué.

4.3.2.4 *Remplir la liste des éléments voisins de l'élément de départ*

La quatrième étape nécessite l'utilisation d'une base de donnée topologique (comme par exemple la librairie AOMD : Algorithm Oriented Mesh Database [Remacle and Shephard (2003)]) afin de fournir toutes les relations de connectivités et de voisinage qui existent entre toutes les entités du maillage. On peut déterminer les arêtes connectées à chaque nœud du maillge (nœud $\rightarrow$ arêtes), nœud $\rightarrow$ faces, nœud $\rightarrow$ éléments $(3D)$, arête $\rightarrow$ faces, arête $\rightarrow$ éléments $(3D)$ et face $\rightarrow$ éléments $(3D)$. Grace à ces relations de connectivités et de voisinage, notre algorithme sélectionne l'ensemble des éléments autour de l'élément de départ qui sont susceptibles d'être eux-mêmes traversés par une partie de $\vec{S}(u, v)$ (voir la figure 4.6). Cette sélection s'effectue de proche en proche, d'un élément déjà traité (stocké dans la liste $list_B$) vers ses éléments voisins (stockés dans la liste $list_{adj}$). Notons que puisque nous passons d'un élément à un autre aux travers des

arêtes intersectant la surface, la liste $list_{adj}$ ne contiennent que des éléments possédant une intersection avec la surface paramétrique.

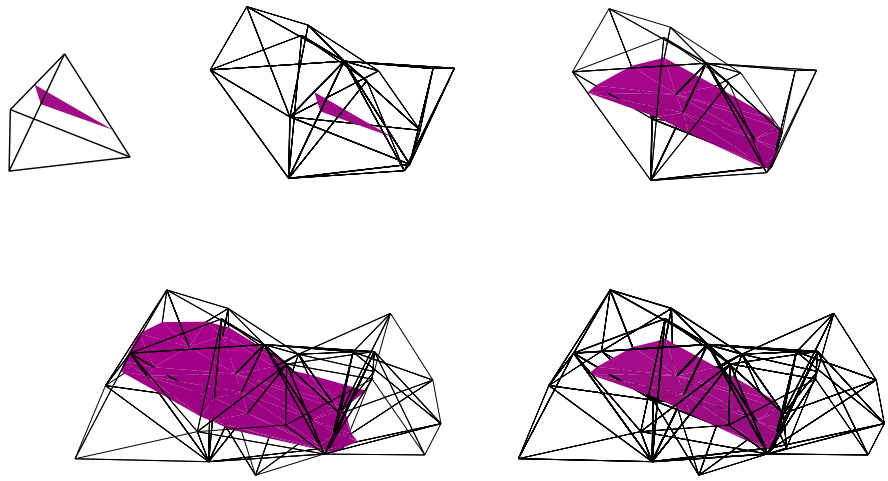


FIGURE 4.6 – Illustration de la construction du champ de la distance signée ϕ_h qui s'effectue de proche en proche, d'un élément déjà traité vers ses éléments voisins.

4.3.2.5 *Calculer le champ de la distance signée dans les éléments adjacents à l'élément de départ*

L'étape 5 traite chaque élément stocké dans la liste $list_{adj}$ qui n'a pas été déjà visité pour la construction du champ de la distance. Cette étape sélectionne les éléments de la $list_{adj}$ pour construire une portion de la bande ω et calcul son champ de distance correspondant. A ce stade de l'algorithme, deux petites portions de la surface $\vec{S}(u,v)$ ont été convertis successivement, la première portion correspond au premier élément de départ de l'étape 1, et la seconde portion correspond aux éléments voisins qui sont autour de l'élément de départ (voir la figure 4.6). Dans la suite, l'algorithme procède de cette manière, portion par portion, pour construire progressivement la bande ω traversée par la surface $\vec{S}(u,v)$, ainsi que le champ de la distance signée.

4.3.2.6 *Construction du niveau zéro situé dans la bande ω et l'extraction du maillage polygonale Γ_h*

Le produit final de l'algorithme tel que décrit ci-dessus est le champ de distance signée dans chaque nœud d'éléments de la bande ω. Une interpolation par les fonctions de forme

FIGURE 4.7 – Illustration des étapes de l'algorithme de conversion pour transformer une fonction paramétrique en niveau zéro d'un champ Level set.

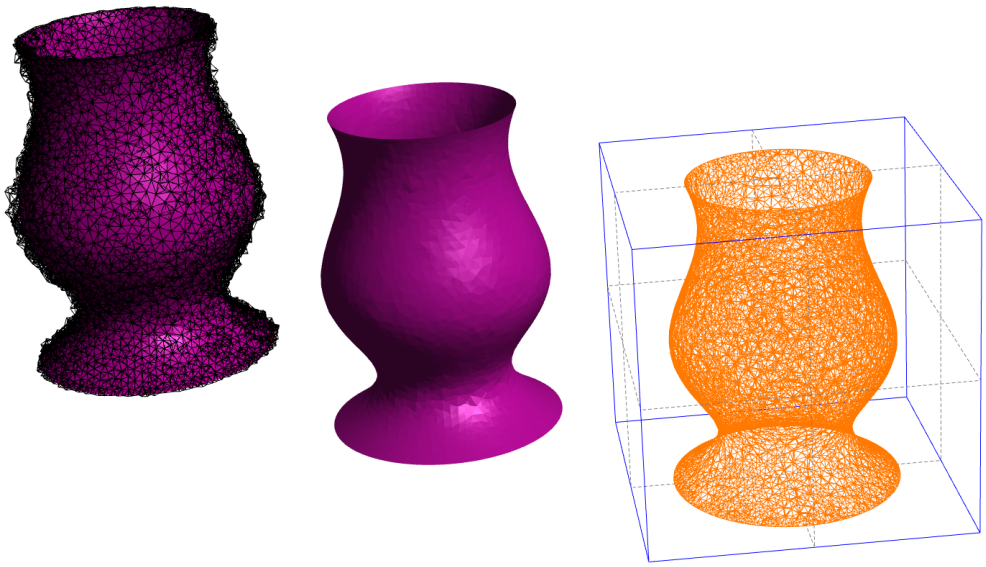


FIGURE 4.8 – Conversion d'une fonction paramétrique en champ de distance signée ϕ_h dans une bande d'éléments ω (à gauche). Au centre, approximation du niveau zéro $\phi_h = 0$ par interpolation linéaire des valeurs de la distance stockées aux nœuds de la bande ω. À droite, le maillage polygonal (triangulaire) Γ_h qui correspond au niveau zéro de la Level set discrétisée.

linéaires peut ensuite être utilisée pour construire le niveau zéro de la Level set à l'intérieur de la bande ω. Ensuite, l'extraction du maillage polygonale Γ_h qui correspond au niveau

zéro de la Level set discrétisée (voir la figure 4.8). Cette version discrétisée Γ_h de $\vec{S}(u,v)$ est générée pour subdiviser les éléments de la bande ω (les éléments de frontière E_B [6]) en triangles dan le cas $2D$ ou en tétraèdres dans le cas $3D$ (voir la figure 4.9).

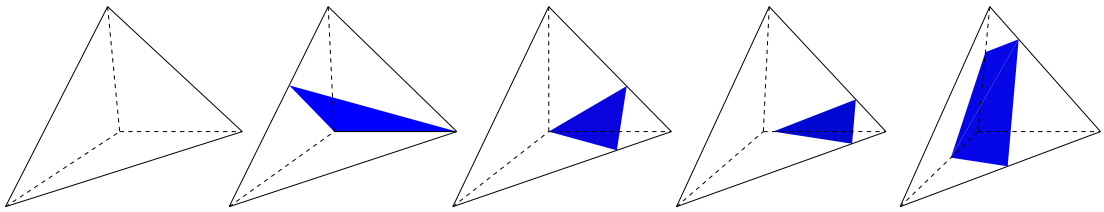


FIGURE 4.9 – Les quatre possibilités de subdivision d'un élément de frontière E_B en sous-éléments E_Δ (tétraèdres) par une portion du niveau zéro de la Level set (un triangle ou un quadrilatère). Dans le cas d'un quadrilatère, la portion du niveau zéro est subdivisée en deux triangles (*i.e.* $E_{B_\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{2} E_{\Delta_\Gamma}$)[voir la définition au paragraphe 4.1.2], puis E_B est subdivisé en six sous-éléments (*i.e.* $E_B = \bigcup_{k=1}^{6} E_\Delta$).

Notons que dans le cas où le niveau zéro de la Level set est très proche d'un nœud appartenant à un élément E_B de ω, la méthode XFEM peut donner lieu à des problèmes de conditionnement lors de l'utilisation d'enrichissement. En effet, la subdivision de l'élément en question, génère des sous-éléments de petites tailles par rapport aux autres sous-éléments. Pour éviter ces petits sous-éléments à l'intérieur d'un élément de frontière E_B, la valeur nodale de ϕ_h stockée à un nœud peut être mise à zéro quand $|\phi_h| < \epsilon$, où ϵ est une valeur de tolérance prédéfinie. Celle-ci peut être basée sur un rapport des valeurs de la Level set stockées aux nœuds d'une arête tel que proposé par Moës et al. (2002).

4.3.2.7 *Remarques sur l'algorithme de conversion*

Bien que l'algorithme ne construise le champ de la distance signée que sur la bande d'éléments ω traversée par la surface paramétrique, le champ de la distance signée peut être étendu de la bande ω vers le reste du maillage en utilisant la méthode du Fast Marching (FMM) [Barth and Sethian (1998)].

La méthodologie proposée à la section 4.2 pour construire un objet implicite, nécessite seulement la classification des deux ensembles d'éléments de chaque côté de la bande ω pour déterminer la région du maillage qui est à l'intérieur ou à l'extérieur de la frontière. Pour cela, nous n'avons pas besoin d'étendre l'information du champ de la distance à tout le maillage. On peut en effet utiliser la bande ω et le signe de ϕ_h pour localiser de proche en proche les éléments de chaque ensemble (intérieur et extérieur) en utilisant les informations de voisinage.

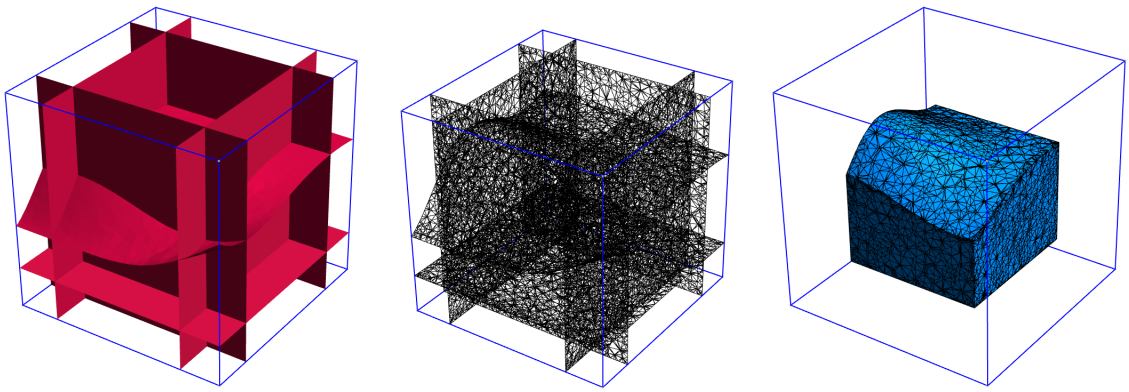
6. voir la définition au paragraphe 4.1.1

4.4 Modélisation d'objets par multiples Level sets

Nous utilisons l'algorithme 4.3.1 pour convertir individuellement les fonctions paramétriques $\vec{S}_i$ qui correspondent aux faces d'un objet Ω en Level sets ϕ_h^i. Ensuite, nous utilisons une technique récursive de découpage et la modélisation CSG pour construire l'objet final défini par un ensemble d'opérations booléennes entre les valeurs des champs de distance associées à chaque surface.

4.4.1 Technique récursive de découpage

Une fois que les Level sets ϕ_h^i 4.10(a) et leurs maillages polygonaux Γ_h^i 4.10(b) correspondants sont définis, une opération de découpage est utilisée pour subdiviser les éléments E_B des bandes ω_i par l'intermédiaire de Γ_h^i . Dans la méthode proposée ici, le découpage d'un élément de frontière E_B dépend du nombre de niveau zéro de Level sets définies en ses nœuds. Lorsque un élément E_B en 2D/3D est coupé par plusieurs arêtes/triangles (*i.e.* $\omega_k \cap \omega_l \neq \varnothing$, voir la figure 4.3 pour le cas 2D), la technique de découpage peut être utilisée de manière récursive pour chaque sous-élément (triangle/tétraèdre) en fonction du nombre d'arête/triangle de découpage.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.10 – (a) Conversion de six fonctions paramétriques $\vec{S}_i(u, v)$ en six Level sets ϕ_h^i. (b) Extraction des maillages polygonaux Γ_h^i pour la technique de découpage. (c) Représentation implicite de l'objet avec des arêtes vives et des coins.

Cette technique est conçue comme une extension de la technique de subdivision standard 3.4 utilisée dans XFEM [Moës et al. (1999) en $2D$ et Sukumar et al. (2000) en $3D$], en augmentant le niveau de sous-découpage des éléments E_B (c'est-à-dire découpage des sous-éléments). Chaque élément E_B (niveau de subdivision 0) traversé par le premier niveau zéro de Level set ϕ_h^1 peut être subdivisé en sous-éléments (niveau de subdivision

1). Si un second niveau zéro de Level set ϕ_h^2 traverse l'élément E_B, chaque sous-élément (niveau de subdivision de 1) traversé par $\phi_h^2 = 0$ peut être subdivisé de la même manière que E_B, et un certain nombre de nouveaux sous-éléments (niveau de subdivision 2) sont créés pour remplacer les sous-éléments de niveau de subdivision 1.

Dans le cas général, si une autre Level set $\phi_h^n = 0$ traverse E_B, alors elle sera utilisée pour la subdivision de niveau n. Chaque sous-élément créé par cette technique récursive de découpage et traversé par un niveau zéro de Level set $\phi_h^n = 0$ sera subdivisé et remplacé par des nouveaux sous-éléments. (niveau de subdivision n). Ensuite, tous ces nouveaux sous-éléments de différents niveaux sont stockés pour définir la frontière du domaine et pour effectuer l'intégration numérique dans le cadre d'XFEM.

Notons que tous les sous-éléments E_Δ [7] à l'intérieur de l'élément E_B sont des triangles en $2D$ ou tétraèdres en $3D$.

4.4.2 Illustration de la technique de découpage pour représenter des arêtes vives

Les figures 4.11 et 4.12 montrent la capacité de la technique de découpage pour représenter des arêtes vives en 2D et 3D. Aux fins d'illustration, dans le cas de la figure 4.11, l'élément de frontière E_B est subdivisé en trois sous-éléments par le premier niveau zéro de la Level set ϕ_h^1 ($E_B = \bigcup_{k=1}^{3} E_\Delta$), puis le second niveau zéro de la Level set ϕ_h^2 subdivise chaque sous-élément de niveau 1 traversé par $\phi_h^2 = 0$ en trois sous-éléments de niveau 2. Ces nouveaux sous-éléments de niveau 2 sont créés pour remplacer les sous-éléments de niveau 1 ($E_B = \bigcup_{k=1}^{9} E_\Delta$). Ensuite, tous les sous-éléments E_Δ sont classés en sous-éléments intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB}. Ce classement est effectué en utilisant des opérations booléennes basées sur les signes de ϕ_h^1 et ϕ_h^2 au centre de gravité de chaque sous-élément E_Δ, de telle sorte que $E_B = \bigcup_{k=1}^{9} E_\Delta = \{E_{IB}\}_3 \cup \{E_{OB}\}_6$ et $E_{B\Gamma} = \bigcup_{k=1}^{3} E_{\Delta\Gamma}$.

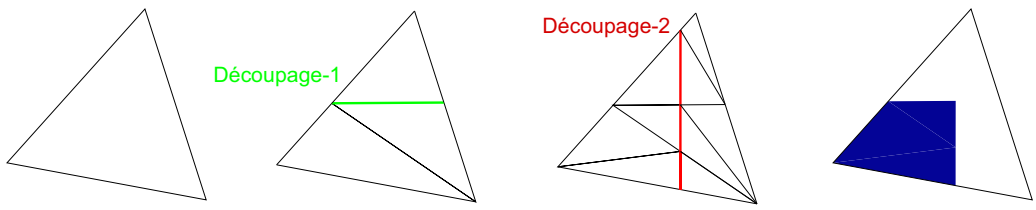


FIGURE 4.11 – Deux niveaux de subdivision d'un élément de frontière E_B en $2D$. Découpage-i : arête de découpage qui correspond à $\phi_h^i = 0$.

7. voir la définition au paragraphe 4.1.2

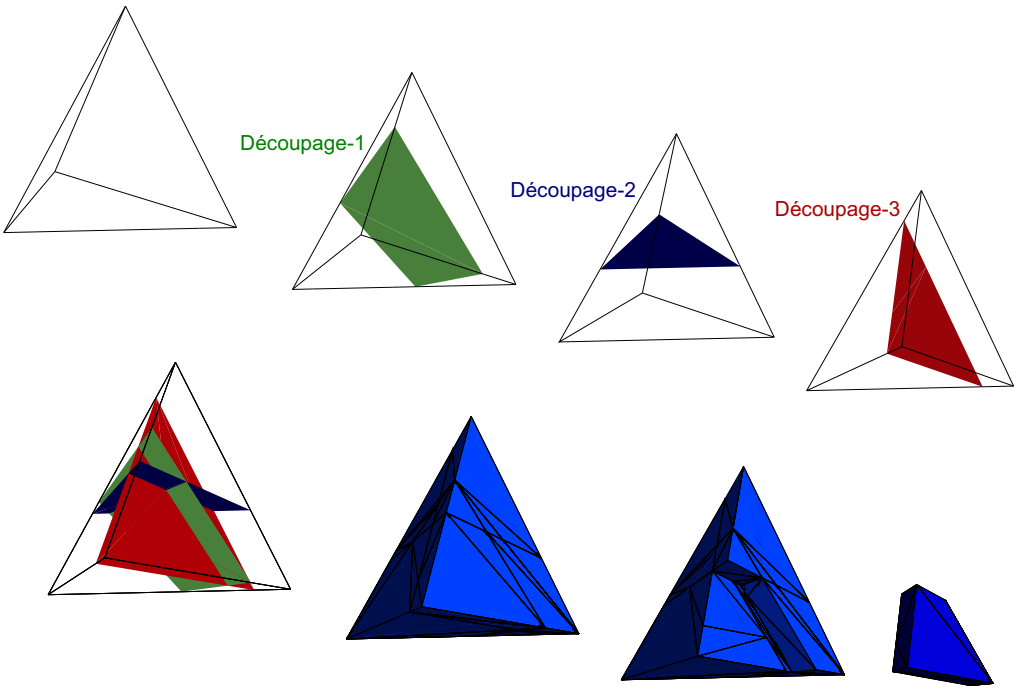


FIGURE 4.12 – Trois niveaux de subdivision d'un élément de frontière E_B en $3D$.

4.4.3 Exemples de représentation de formes avec plusieurs Level Sets

Cette section illustre les résultats obtenus par l'application de la méthodologie présentée dans ce chapitre. Des pièces mécaniques possédant un grand nombre d'arêtes vives ont été utilisées pour montrer la capacité de notre méthodologie à représenter des objets implicites.

La figure 4.10 illustre les étapes de la construction d'un objet possédant des arêtes vives en utilisant des opérations booléennes sur les demi-espaces définis par six Level sets. La figure 4.10(c) montre la partie intérieure de l'objet et le maillage de la frontière extrait de l'ensemble de maillages polygonaux Γ_h^i (voir la figure 4.10(b)).

On propose le même exemple traité sur la figure 2.5 dans un maillage tétraédrique non structuré. Pour fins de comparaison, nous construisons la pièce sur la même grille maillée en utilisant la représentation avec une unique Level set de l'objet 4.13(a) et notre méthodologie par plusieurs Level sets 4.13(b). Sur cet exemple et celui de la figure 4.14, la méthodologie proposée montre sa capacité pour remédier au problème de dépendance de la représentation à la taille du maillage pour permettre une représentation efficace des arêtes vives.

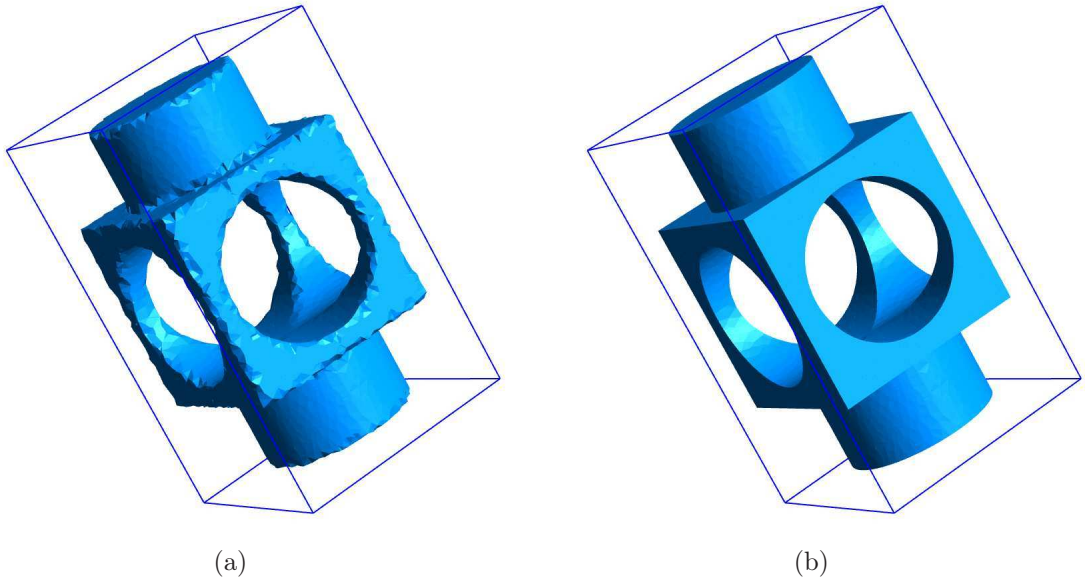


FIGURE 4.13 – Problème des arêtes vives. (a) Représentation implicite par une unique Level set construite à partir de la combinaison booléenne de demi-espaces (8-plans et 3-cylindres). (b) Représentation implicite en utilisant plusieurs Level sets construites séparément et la technique de découpage.

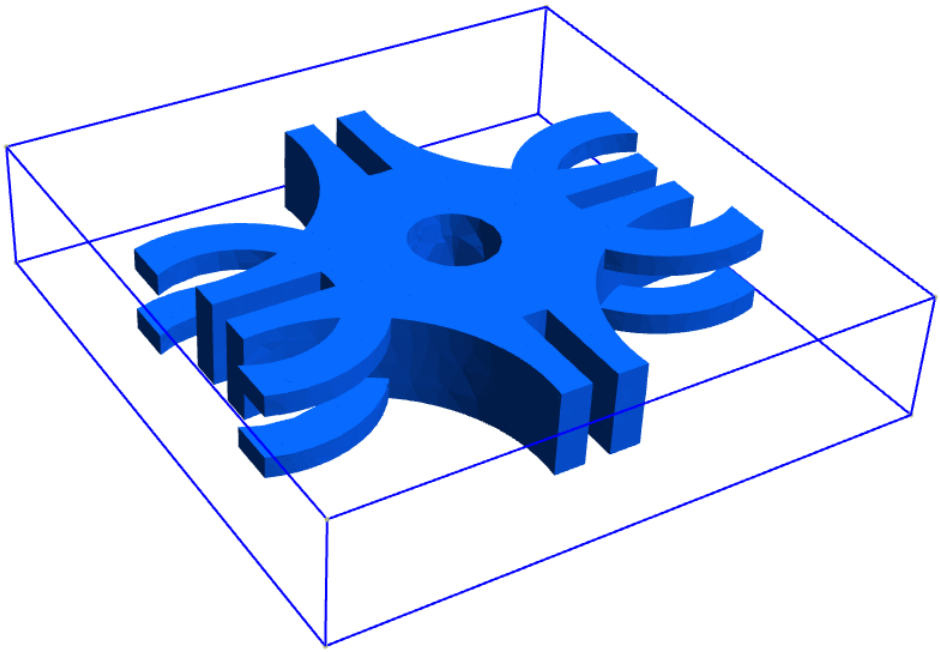


FIGURE 4.14 – Exemple de représentation par Level sets d'une pièce mécanique.

4.5 Techniques de raffinement basées sur un sous-maillage

Nous avons vu que la qualité de l'approximation des frontières courbes par la représentation implicite dépend principalement de la taille du maillage. Une technique qui permet de séparer la qualité de l'approximation géométrique de la discrétisation spatiale (maillage) peut être utilement utilisée pour améliorer la précision de l'analyse par éléments finis autour de la frontière.

Une stratégie consiste à utiliser une grille auxiliaire incorporée au maillage principal. Cette grille auxiliaire est utilisée pour l'interpolation de la Level set pour représenter plus finement les frontières courbes, alors que le maillage principal est utilisé pour la construction de l'approximation par éléments finis. Cette technique est utilisée principalement avec la représentation volumique (implicite) qui peut être générée selon des moyens différents : l'imagerie médicale [Düster et al. (2008)], par des fonctions implicites [Kumar et al. (2008); Bastian and Engwer (2009)], par Level set [Dréau et al. (2010)]. Cependant, la localisation de la frontière ne peut se faire facilement sur la grille auxiliaire que si une forme implicite de l'objet est utilisée. Or l'utilisation d'une grille auxiliaire pour représenter finement la frontière à partir de la représentation paramétrique n'est donc pas une approche évidente.

Nous proposons deux techniques pour représenter plus finement une frontière courbe à l'intérieur des éléments E_B en exploitant : (i) la bande du maillage ω_i sélectionnée par l'algorithme 4.3.1 à partir de l'ensemble des éléments de la boite englobante et (ii) l'information paramétrique de la forme paramétrique.

- La première technique utilise un sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur de l'élément E_B pour localiser exactement la frontière. Le fonction paramétrique sera convertie localement en champ de distance signée à l'intérieur de chaque SMG de la bande ω_i. Ensuite, en utilisant une interpolation linéaire de la distance signée stockée aux nœuds du SMG, le niveau zéro de la Level set sera approximé par un ensemble de segments linéaires en $2D$ et des triangles en $3D$ à l'intérieur de E_B.
- La deuxième technique utilise un sous-maillage dégénéré (SMD) à l'intérieur de l'élément E_B afin de pouvoir vérifier dans le chapitre suivant l'influence de l'intégration numérique en utilisant ce SMD sur les résultats de calculs.

4.5.1 Technique de raffinement basée sur un sous-maillage gradué (SMG)

L'algorithme de conversion 4.3.1 donne en sortie une bande ω_i d'éléments traversés par le niveau zéro de la Level set. Celle-ci sera utilisée pour localiser le raffinement que sur les éléments de frontières E_B. Un sous-maillage local de plus en plus fin autour de

la frontière est créé à l'intérieur de E_B par sous-découpage hiérarchique. La figure 4.15 montre les étapes nécessaires pour une conversion plus précise d'une courbe paramétrique en Level set dans un élément de frontière E_B et les sous-éléments E_Δ qui serviront pour l'intégration numérique lors des calculs par la méthode XFEM.

4.5.1.1 *Algorithme de raffinement*

Chaque élément de frontière triangulaire E_B (niveau de raffinement 0) est subdivisé en quatre sous-triangles E_Δ (niveau de raffinement 1) en reliant les milieux de ses trois arêtes. L'ensemble des sous-triangles de niveau 1 (appelé *set-1*) est traité par l'algorithme 4.3.1 pour localiser le sous-ensemble de sous-triangles (appelé *sub-set-1*) qui entoure la portion de la courbe à l'intérieur de E_B, ainsi que la construction du champ de la distance signée dans *sub-set-1* pour construire le niveau zéro de la Level set. [8]

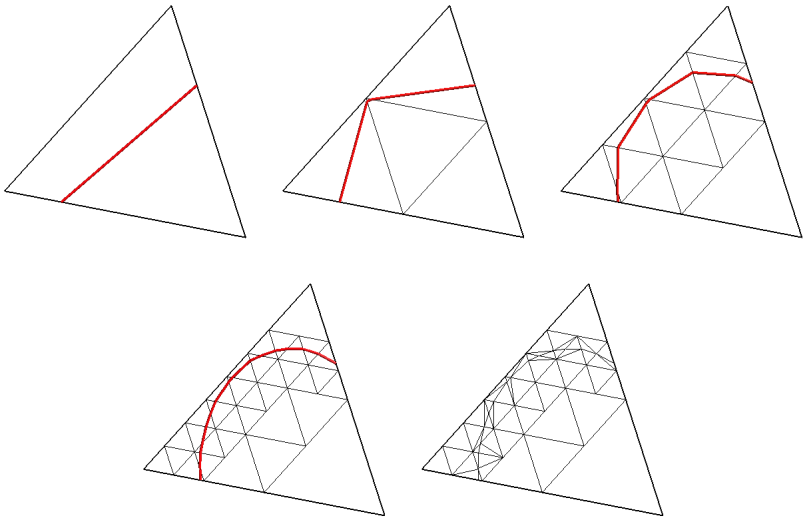


FIGURE 4.15 – Raffinement par un sous-maillage gradué (SMG) de niveau ($n = 3$) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B. L'ensemble de segments linéaires à l'intérieur de E_B fait référence à l'approximation linéaire de la frontière par le niveau zéro de la Level set dans chaque niveau de raffinement.

Les sous-éléments E_Δ qui ne contribuent pas à la représentation locale de la courbure de la frontière (*i.e.* les sous-éléments E_Δ qui sont dans *set-1* mais pas dans *sub-set-1*) sont répartis en intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB}. Cette classification est basée sur le signe des

8. Aux fins de compréhension, dans le cas de la figure 4.15, l'élément de frontière E_B est subdivisé en quatre sous-éléments E_Δ (*i.e. set-1*) ; ensuite l'algorithme 4.3.1 localise trois sous-éléments E_Δ (*i.e. sub-set-1*) afin de mieux convertir la portion de la surface paramétrique en une autre portion du niveau zéro Level set plus précise.

valeurs de la distance stockées dans E_B (*i.e.* niveau 0) en évaluant le signe au centre de gravité de chaque sous-élément E_Δ qui ne contribue pas à la construction de l'ensemble *sub-set-1.* [9]

Si un deuxième raffinement est nécessaire, chaque sous-élément E_Δ de l'ensemble *sub-set-1* peut être subdivisé de la même manière que E_B, et de nouveaux sous-éléments (*set-2* ; *i.e.* niveau de raffinement 2) sont créés pour remplacer les sous-éléments de *sub-set-1.* Ensuite, l'ensemble des sous-éléments *set-2* sera traité par l'algorithme de conversion pour localiser le sous-ensemble *sub-set-2* qui entoure la portion de la courbe à l'intérieur du *sub-set-1.*

Ces sous-éléments E_Δ de niveau 2 qui ne contribuent pas à la représentation locale de la courbure de la frontière (*i.e.* les sous-éléments E_Δ qui sont dans *set-2* mais pas dans *sub-set-2*) devraient à leur tour être répartis en intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB}.

Enfin, nous appliquons la technique de découpage pour subdiviser chaque sous-élément de *sub-set-n* en utilisant le niveau zéro de la Level set construit sur le même ensemble *sub-set-n* par interpolation linéaire. Des sous-éléments E_Δ sont créés, ainsi sont classés en intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB} en évaluant le signe à leurs centre de gravité.

4.5.1.2 *Remarques*

- L'algorithme de conversion appliqué dans une grille maillée Gr, construit progressivement la bande ω traversée par la surface $\vec{S}(u, v)$ pour la construction du niveau zéro de la Level set à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B de niveau 0. Si un raffinement local est souhaité dans E_B, un autre processus de l'algorithme de conversion est utilisé localement et de manière récursive à chaque étape de raffinement à l'intérieur de E_B, tels que les entrées de l'algorithme (*i.e.* le sous-ensemble du niveau n, les valeurs de départ (u_s, v_s) à chaque niveau de raffinement, et le vecteur de départ $\underline{n}_s$ pour l'orientation du champ de la distance) sont obtenus automatiquement.
- Chaque élément de frontière E_B est traité séparément jusqu'à la classification de tous les sous-éléments E_Δ du niveau n, de manière récursive, en intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB}.

La technique de sous-maillage gradué (SMG) en $3D$ est semblable à celle décrite précédemment dans le cas $2D$. L'algorithme de raffinement 4.5.1.1 doit faire face à quelques défis supplémentaires. (1) Un élément de frontière tétraédrique E_B sera subdivisé en huit

9. Dans le cas de la figure 4.15, un sous-élément E_Δ de l'ensemble *set-1* ne contribue pas à la construction du niveau zéro de la Level set, et les trois sous-élément E_Δ de l'ensemble *sub-set-1* seront utilisés par la suite pour un autre raffinement, si nécessaire.

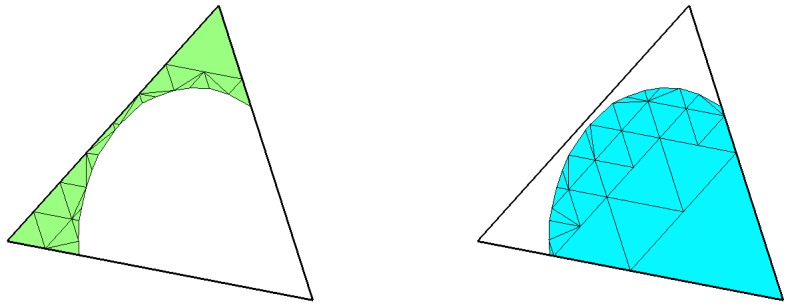


FIGURE 4.16 – Une représentation plus fine de la frontière courbe à l'intérieur d'un élément de frontière E_B. les ensembles $\{E_\Delta\}$ et $\{E_{\Delta_\Gamma}\}$ résultant d'un raffinement par SMG de niveau $(n = 3)$, où la technique de découpage est appliquée à l'ensemble des sous-éléments *sub-set-3*.

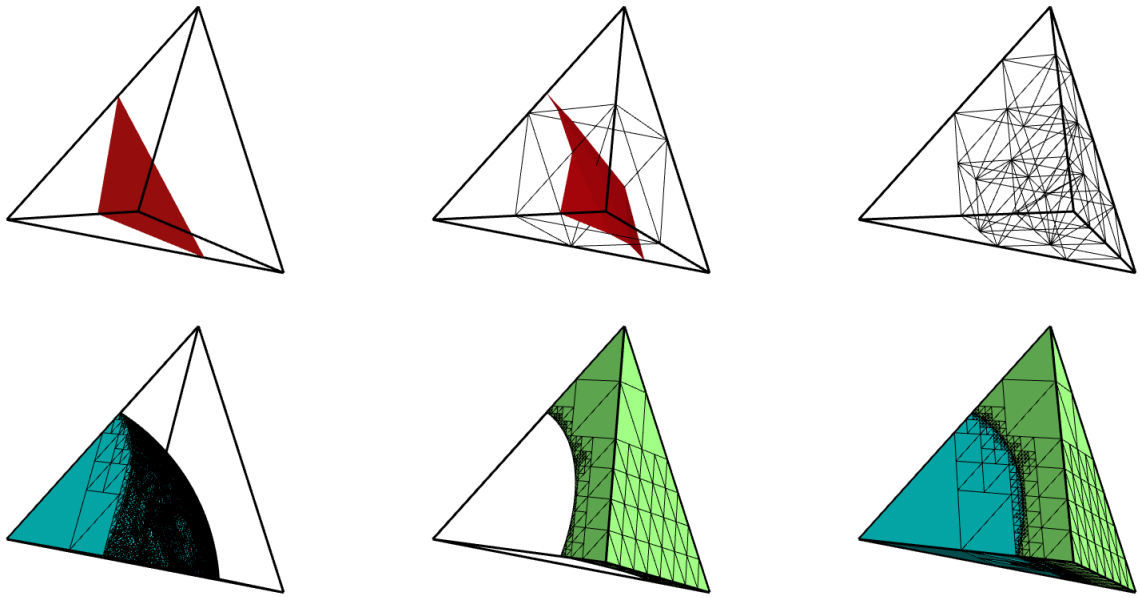


FIGURE 4.17 – Un sous-maillage gradué de niveau $(n = 6)$ à l'intérieur d'un élément de frontière E_B en $3D$.

sous-éléments E_Δ en reliant les milieux de ses six arêtes. (2) Pour chaque niveau de raffinement nécessaire, chaque sous-élément E_Δ sera subdivisé d'une manière similaire à E_B. (3) L'algorithme de conversion 4.3.1 sera appliqué globalement dans la grille maillée Gr et localement dans E_B.

Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 montrent la capacité de la technique de raffinement (SMG) afin de représenter les frontières courbes à l'intérieur d'un élément de frontière E_B en $2D$

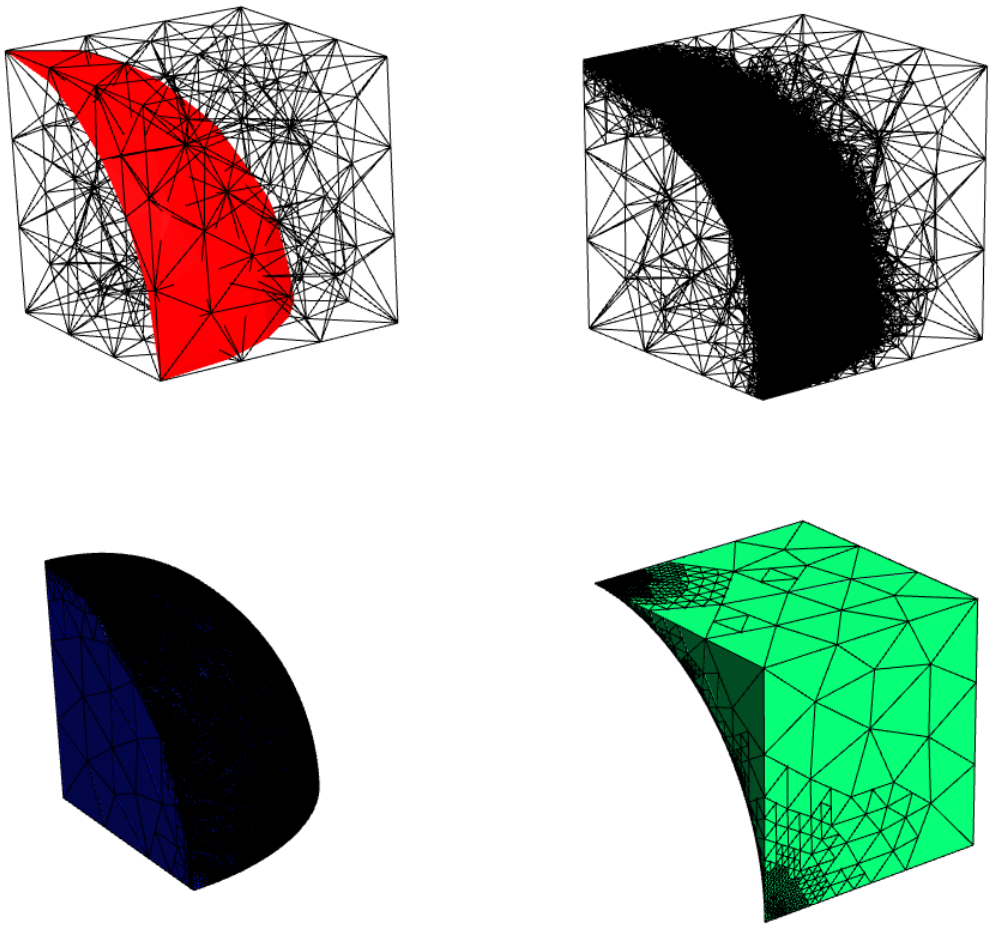


FIGURE 4.18 – Exemple de représentation plus fine d'une partie de sphère indépendamment de la taille des éléments du maillage de la grille Gr. Localisation de la bande ω (à gauche) et la construction du sous-maillage gradué à l'intérieur de ω (à droite).

et $3D$ respectivement. L'approximation du domaine et le vide à l'intérieur de l'élément E_B est réalisée par la classification des sous-éléments E_Δ, et l'approximation de la frontière courbe est réalisée par un ensemble $\{E_{\Delta_\Gamma}\}$ de segments de droites (polylignes) en $2D$ ou un ensemble de triangles (polygones) en $3D$ à l'intérieur de E_B. Ces sous-éléments E_Δ et E_{Δ_Γ} seront utilisés respectivement pour l'intégration numérique de la matrice locale de l'élément E_B et pour appliquer les conditions aux limites sur la frontière courbe à l'intérieur de E_B. A cet effet, les ensembles $\{E_\Delta\}$ et $\{E_{\Delta_\Gamma}\}$ correspondant à un élément de frontière E_B sont stockés de tel sorte que chaque E_Δ ou E_{Δ_Γ} peut être trouvé par l'élément E_B qui le contient.

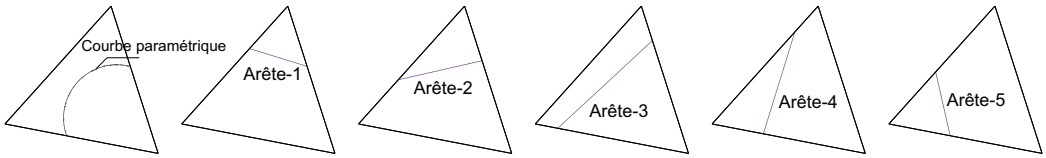


FIGURE 4.19 – Exemple d'approximation d'une frontière courbe à l'intérieur d'un élément de frontière E_B : cinq arêtes de découpage sont utilisées pour couvrir la courbe paramétrique.

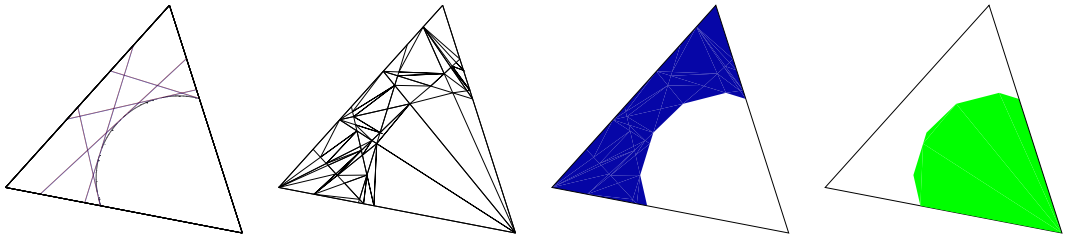


FIGURE 4.20 – Les sous-éléments E_Δ résultants de cinq opérations de subdivision à l'intérieur d'un élément frontière E_B (voir la figure 4.19). Les ensembles des sous-éléments $\{E_{IB}\}$ et $\{E_{OB}\}$ sont montrés dans les deux figures de droite représentent la partie solide et la 2ème partie du matériau ou bien le vide.

4.5.2 Technique de raffinement basée sur un sous-maillage dégénéré (SMD)

Nous utilisons les informations paramétriques pour générer le nombre souhaité d'arêtes de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B (voir la figure 4.19). Ces arêtes de découpage sont générées par une succession d'arêtes tangentes à la courbe paramétrique et sont créées par le niveau zéro de la Level set analytique $p(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}_0)\cdot\underline{n}$ qui passe par le point $\underline{x}_0$ sur la courbe et orienté par le vecteur $\underline{n}$ qui représente la normale extérieure à la courbe en ce point.

Ensuite, nous appliquons la technique récursive de découpage (voir la section 4.4.1) en utilisant une succession d'opérations de subdivision à l'intérieur de l'élément E_B par les arêtes de découpage afin de créer les sous-éléments dégénérés E_Δ (voir la figure 4.20). La prochaine étape est la classification des sous-éléments E_Δ en intérieur E_{IB} et extérieur E_{OB} pour définir la partie du domaine Ω_h et la partie de sa frontière Γ_h dans l'élément de frontière E_B.

L'influence sur l'intégration numérique dans le cadre de la méthode XFEM des éléments de très mauvaise qualité générés par l'approche SMD, sera présentée dans le chapitre suivant.

4.6 Conclusions

Nous avons présenté différents algorithmes sur lesquels repose notre approche de construction d'objets implicites $3D$ indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage). Nous avons dans un premier temps proposé une méthodologie visant à approximer un objet dans une boite englobante maillée à partir d'un ensemble de fonctions paramétriques qui composent sa frontière. Le choix de cette méthodologie permet de concilier deux avantages importants pour l'analyse par éléments finis : la représentation de pièce mécanique avec des arêtes vives et la génération exacte des points de la frontière. Nous avons présenté un algorithme de conversion d'une représentation paramétrique vers une représentation implicite (Level set) approximative par le calcul du champ de distance signée dans la bande d'éléments de maillage traversée par la frontière. Cette conversion permet de construire implicitement l'ensemble des frontières qui délimitent l'objet dans la boite englobante. Nous avons ensuite proposé une modélisation de type CSG où nous combinons les Level sets auparavant converties en utilisant des opérations booléennes et la technique récursive de découpage. Enfin, nous avons développé un sous-maillage auxiliaire intégré dans les éléments de maillage traversés par les frontières courbes afin d'approcher correctement les frontières de l'objet indépendamment de la taille des éléments du maillage de la boite englobante.

Nous ne souhaitons pas remplacer le modèle paramétrique, mais nous croyons que la représentation implicite (Level set) dans le domaine d'analyse par éléments finis offre de nombreux avantages, notamment son utilisation dans le cadre de la méthode des éléments finis étendus (XFEM) pour faciliter le maillage et le remaillage.

Notre approche peut être vue comme une représentation hybride entre la représentation implicite, décrivant l'intérieur de l'objet mais dont la frontière ne peut être exactement localisée dans l'espace, et la représentation paramétrique où la frontière est exacte et directement exploitable mais ne permet pas de distinguer l'intérieur de l'extérieur. Grâce à l'utilisation des objets possédant une double représentation paramétrique et implicite, ainsi que l'utilisation de la technique récursive de découpage et le sous-maillage auxiliaire, nous pouvons construire une géométrie non-conforme au maillage avec le niveau de précision désiré.

Nous disposons donc maintenant de tous les outils nécessaires à la mise en œuvre de notre approche de simulation, à savoir la géométrie et le maillage qui servira comme support des fonctions d'approximation. Le chapitre suivant sera consacré à l'adaptation de l'utilisation de la méthode XFEM à notre approche de représentation géométrique et la présentation de différents résultats obtenus.

CHAPITRE 5

Analyse par XFEM sur des géométries non-conformes au maillage

Nous consacrons ce dernier chapitre à la présentation de divers résultats de convergence obtenus par notre méthode de représentation implicite. Il s'agit de montrer comment la méthode XFEM peut être utilisée avec tous les outils mis en œuvre et de valider l'approche proposée. Nous cherchons tout d'abord à adapter l'intégration numérique et l'imposition des conditions aux limites dans le contexte de XFEM. Ensuite nous cherchons à montrer les possibilités offertes par notre représentation géométrique et la méthode XFEM, en présentant les résultats obtenus lors de la résolution de quelques problèmes académiques en deux et trois dimensions.

5.1 Intégration numérique

Soit Gr un maillage servant comme support pour les fonctions de forme élément finis d'ordre p. Dans la suite de ce travail, les ensembles d'éléments du maillage Gr (voir la figure 5.1) : les éléments intérieurs I, les éléments extérieurs O et les éléments de frontière B sont supposés connus. L'union des deux ensembles d'éléments I et B, notée $Gr_{I\cup B}$ couvre le domaine physique entièrement. Dans le cas de la modélisation matériau-vide par XFEM en utilisant notre approche de représentation implicite, la discrétisation des EDP est conçue sur $Gr_{I\cup B}$, et les degrés de liberté relatifs à l'ensemble d'éléments O seront supprimés de la formulation faible. L'ensemble des éléments B qui couvre la frontière de l'objet, est à son tour réparti en deux sous ensembles de sous-éléments IB (intérieur de la frontière Γ_h) et OB (extérieur de la frontière Γ_h). L'intérieur de l'objet Ω_h à prendre en considération pour les analyses éléments finis est alors défini par l'union des éléments (I) avec les sous-éléments (IB). Dans la suite, nous n'étudions que deux phases (matériau et

vide), l'idée peut être facilement étendue aux structures multi-matériaux.

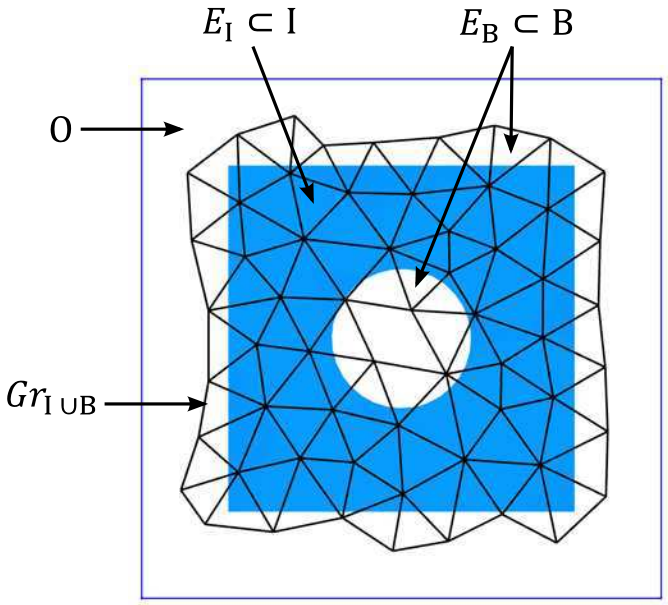


FIGURE 5.1 – Description des ensembles d'éléments de maillage Gr : I, O et B.

Dans notre approche, nous utilisons des sous-éléments linéaires géométriquement (sous-maillage) incorporés dans l'élément de frontière E_B pour contrôler a priori la fidélité de la représentation de la frontière de l'objet. Cette approche à également été utilisée avec des frontières représentées par des Level sets analytiques en $2D$ [Dréau et al. (2010)] et par maillage polygonal en $3D$ [Pereira et al. (2009); Mayer et al. (2009)].

Nous rappelons les notations utilisées pour les deux types d'éléments de frontière E_B : les éléments qui servent pour représenter les arêtes vives (voir la figure 5.2) et les éléments qui servent pour représenter les frontières courbes (voir la figure 5.3). Les sous-éléments du domaine E_Δ et les sous-éléments du frontière E_{Δ_Γ} sont illustrés sur les figures 5.2 et 5.3. De même, la classification de ces entités géométriques est supposée connue lors de la préparation du domaine physique pour le calcul.

5.1.1 Intégrales de domaine

Belytschko et al. (2003a) ont développé une méthode d'éléments finis étendus (XFEM) en utilisant une grille structurée et la représentation par frontière implicite. L'approximation de la fonction implicite ϕ de l'objet a été construite en utilisant des fonctions à base radiale (RBF) pour interpoler un nuage de points directement acquises par scanner laser. Les auteurs ont proposé d'utiliser la fonction Heaviside pour limiter l'intégration numé-

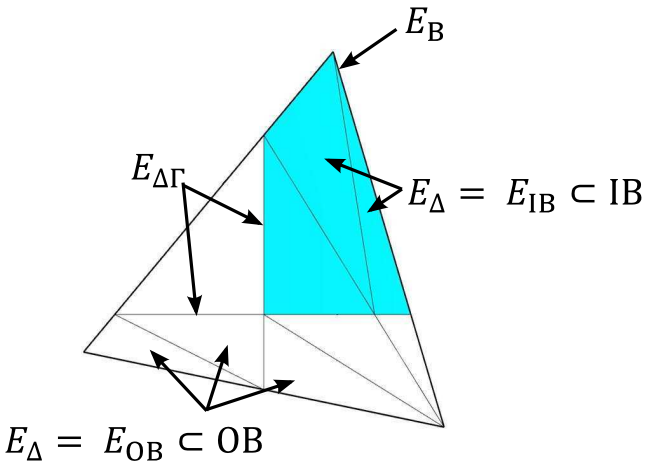


FIGURE 5.2 – Description des sous-éléments du domaine E_Δ et les sous-éléments du frontière E_{Δ_Γ} dans un élément de frontière E_B. Un sous-élément du domaine E_Δ est considéré à l'intérieur du Ω_h si $E_\Delta = E_{IB}$, si non $E_\Delta = E_{OB}$. Dans cet exemple, $E_B = \bigcup_{k=1}^{9} E_\Delta = \{E_{IB}\}_3 \cup \{E_{OB}\}_6$.

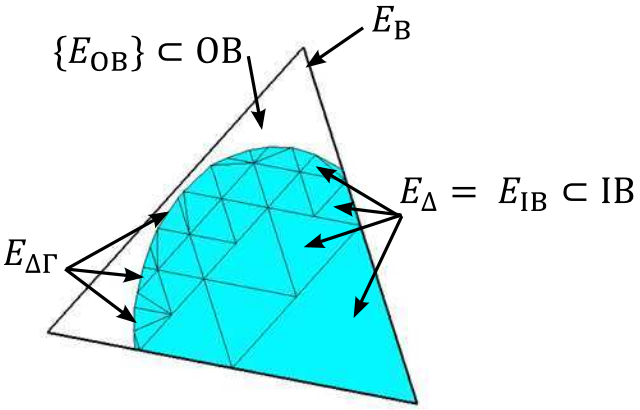


FIGURE 5.3 – Illustration des sous-éléments E_Δ et E_{Δ_Γ} sur la second catégorie d'élément de frontière E_B.

rique que sur le domaine physique, où la formule de quadrature d'une fonction générique f s'écrit sous la forme :

$$\int_{\Omega_a} H(-\phi) f \, d\Omega = \sum_{e=1}^{N_V^{act}} \int_{\Omega_e} f \, d\Omega \tag{5.1}$$

où N_V^{act} est le nombre de voxels actifs qui couvrent l'objet, et l'intégration numérique à l'intérieur des voxels traversés par la frontière est réalisée par l'approche classique de

XFEM (voir section 3.4). En se basant sur des idées similaires à l'approche de la fonction Heaviside utilisée avec *une unique* fonction implicite [Belytschko et al. (2003a); Kumar et al. (2008)], nous allons définir la fonction indicatrice $\Lambda_{I\cup B}$ pour simplifier la description du domaine physique Ω_h de la façon suivante :

$$\Lambda_{I\cup B} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (E_I, E_\Delta) \in \Omega_h \\ 0 & \text{si} \quad E_\Delta \notin \Omega_h \end{cases} \tag{5.2}$$

Cette fonction indicatrice est utilisée autant pour restreindre la procédure d'intégration numérique aux éléments E_I et aux sous-éléments E_Δ qui devraient contribuer à la matrice résultante du système linéaire provenant de la discrétisation d'EDP.

L'intégration numérique dans chaque élément intérieur $E_I \subset I$ est réalisée en utilisant la méthode classique de quadrature de Gauss-Legendre. Pour chaque élément de frontière $E_B \subset B$, l'intégration numérique sera effectuée dans chaque sous-élément E_Δ (triangle/tétraèdre) qui contribue à l'approximation du domaine Ω_h. En tenant compte des éléments de maillage $Gr_{I\cup B}$ qui couvrent le domaine physique Ω_h, la formule de quadrature d'une fonction régulière f s'écrit sous la forme :

$$\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega = \int_I f\ d\Omega + \int_B \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega \tag{5.3}$$

où

$$\int_I f\ d\Omega = \sum_{E_I} \int_{E_I} f\ d\Omega$$

et

$$\int_B \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega = \sum_{E_B} \int_{E_B} \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega = \sum_{E_B} \sum_{E_\Delta} \int_{E_\Delta} \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega = \sum_{E_B} \sum_{E_{IB}} \int_{E_{IB}} f\ d\Omega$$

où E_Δ est l'un des sous-éléments à l'intérieur de E_B et E_{IB} est l'un des sous-éléments qui contribuent à la précision du domaine à l'intérieur de E_B. Dans ce cas, $E_\Delta = E_{IB}$.

5.1.2 Intégrales de frontière

L'intégration numérique le long de la frontière du domaine Γ_h sera effectuée sur chaque segment/triangle E_{Δ_Γ} linéaire (en 2D/3D respectivement) à l'intérieur de E_B. Pour limiter l'intégration aux sous-éléments de frontière E_{Δ_Γ} qui contribuent à la frontière Γ_h, nous

allons définir la fonction indicatrice Ξ_B de la façon suivante :

$$\Xi_B = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad E_{\Delta_\Gamma} \in \Gamma_h \\ 0 & \text{si} \quad E_{\Delta_\Gamma} \notin \Gamma_h \end{cases} \tag{5.4}$$

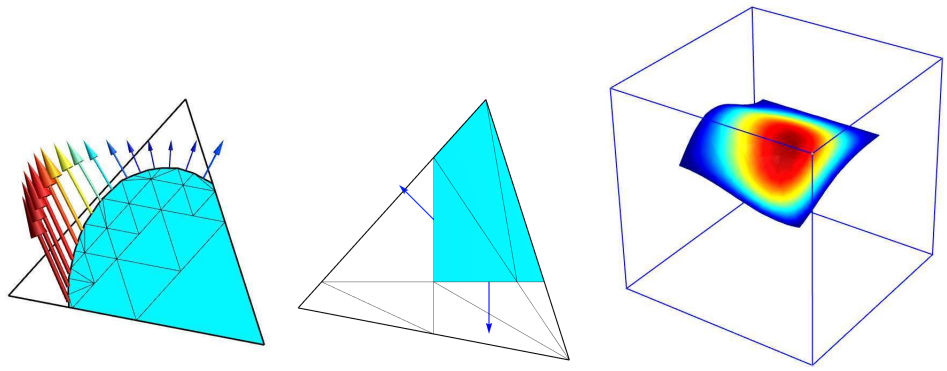
La formule de quadrature d'une fonction régulière f sur la frontière du domaine Γ_h s'écrit sous la forme :

$$\int_{B(\Gamma)} \Xi_B \; f \; d\Gamma = \sum_{E_{B_\Gamma}} \int_{E_{B_\Gamma}} \Xi_B \; f \; d\Gamma = \sum_{E_{B_\Gamma}} \sum_{E_{\Delta_\Gamma}} \int_{E_{\Delta_\Gamma}} \Xi_B \; f \; d\Gamma \tag{5.5}$$

$B(\Gamma)$ indique l'ensemble des éléments de frontière B qui couvrent une partie ou la totalité de la frontière Γ. E_{B_Γ} désigne la portion de la frontière à l'intérieur de E_B. E_{Δ_Γ} est l'un des segments/triangles qui contribue à la construction de Γ_h. Dans le cas particulier, lorsque le domaine est construit sans arêtes vives, (5.5) peut être écrite :

$$\int_{B(\Gamma)} \Xi_B \; f \; d\Gamma = \sum_{E_{B_\Gamma}} \int_{E_{B_\Gamma}} f \; d\Gamma = \sum_{E_{B_\Gamma}} \sum_{E_{\Delta_\Gamma}} \int_{E_{\Delta_\Gamma}} f \; d\Gamma$$

La figure 5.4 illustre quelques exemples d'intégrales de frontière réalisés sur des configurations géométriques particulières.



(a) (b) (c)

FIGURE 5.4 – Exemples de quadrature numérique d'une fonction vectorielle : (a) le long d'une interface courbe (sur une approximation linéaire de la frontière à l'intérieur de E_B : $E_{B_\Gamma} = \bigcup_{k=15}^{n} E_{\Delta_\Gamma}$) ; (b) sur la partie inférieure et à gauche de la frontière (limitation des intégrales par l'indicateur Ξ_B). (c) Illustre la quadrature numérique d'une fonction scalaire limitée à la partie supérieure de la frontière du domaine (voir la figure 4.10).

5.2 Analyse de convergence en maillage non-conforme aux frontières courbes

Notons que l'erreur dans la méthode des éléments finis est contrôlée par la taille des éléments de maillage h (h-version) et le degré du polynôme d'interpolation p des éléments (p-version) [10]. L'erreur est réduite en diminuant la taille d'éléments h ou en augmentant l'ordre du polynôme d'interpolation p. Leurs couplage est connu sous le nom de hp-version. La technique de h-version semble bien maitrisée lors du raffinement/déraffinement par les mailleurs 2D et 3D. Cependant, la génération de maillage d'ordre supérieur pour la technique p-version reste encore difficile [Luo et al. (2004)] et les résultats de sa construction est problématique, surtout pour l'obtention de maillages courbes respectant la frontière exacte sur des géométries tridimensionnelles complexes. La construction de maillage d'ordre supérieur conduit à la non-validité des éléments courbes en proche de la frontière de l'objet. Par conséquent, il est nécessaire de développer des procédures efficaces pour détecter la validité des éléments de maillage et de corriger les éléments non-valides en assurant que le jacobien de l'élément soit strictement positif [George and Borouchaki (2011)].

La technique de p-version a certains avantages, une meilleur précision des résultats et de vitesse de convergence en utilisant des éléments de maillage grossier, la capacité à produire une séquence de solutions en augmentant l'ordre p du polynôme d'interpolation des éléments finis, automatiquement et sans la nécessité de modifier le maillage. Cependant,[Luo et al. (2001)] ont montré par des testes numérique que des erreurs importantes sont présentes dans la solution numérique quand l'ordre de l'approximation géométrique des frontières courbes est inférieure à l'ordre du polynôme d'interpolation p. À notre connaissance, aucune théorie disponible n'est capable de quantifier l'influence spécifiquement de l'approximation de la géométrie sur l'erreur globale. Donc, on peut considérer que l'erreur globale peut être écrite comme la somme de deux contributions :

$$E^{ÉF} = E_p^{ÉF} + E_g^{ÉF} \tag{5.6}$$

où $E_p^{ÉF}$ est l'erreur du polynôme d'interpolation p et $E_g^{ÉF}$ est l'erreur due à l'approximation géométrique.

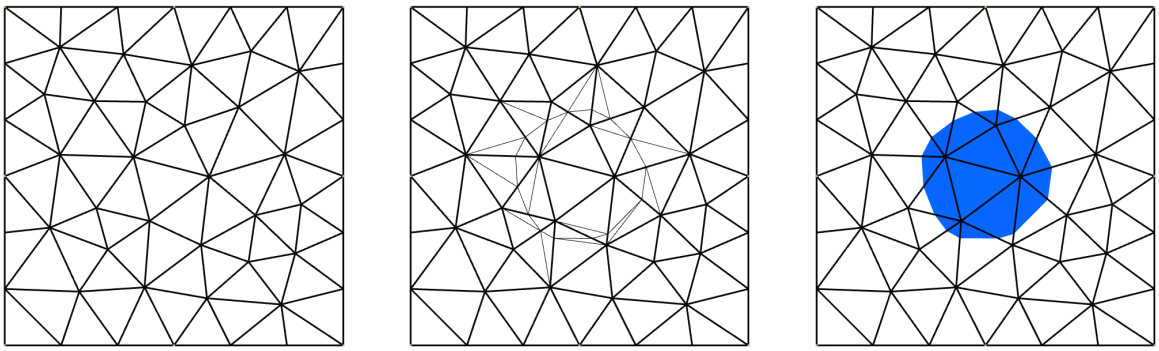
Comme indiqué dans la section 4.5, les techniques de raffinement basées sur un sous-maillage gradué (SMG) et sur un sous-maillage dégénéré (SMD) peuvent être utilisées si nécessaire pour couvrir l'espace créé par les frontières courbes à l'intérieur d'un élément

10. Pour une présentation détaillée de ces techniques, on pourra se référer à [Zienkiewicz and Taylor (1991)]

de frontière E_B. Nous montrons par des expériences numériques que le sous-maillage dégénéré (SMD : le cas le plus défavorable) est très bien adapté pour contrôler les erreurs géométriques dans la description des frontières courbes, et les sous-éléments E_Δ de mauvaise qualité n'affectent pas la précision de l'intégration numérique, ce qui est confirmé par d'autres études [Pereira et al. (2009)]. De plus, nous montrons que l'erreur dans la description des frontières courbes conduit à des taux de convergence sous-optimaux lors d'utilisation des éléments finis d'ordre supérieur avec XFEM.

5.2.1 Aire d'un disque

Considérons une grille maillée comportant un disque circulaire en son centre, où le disque est construit en utilisant l'information paramétrique représentée par $C(u) = (cos(u), sin(u))$ et les arêtes de découpage pour construire le sous-maillage dégénéré (SMD) à l'intérieur des éléments de frontière E_B. La figure 5.5 illustre la représentation classique d'un disque circulaire en utilisant un Level set analytique de type cercle et la représentation en utilisant la technique SMD (voir la figure 5.6).



(a) (b) (c)

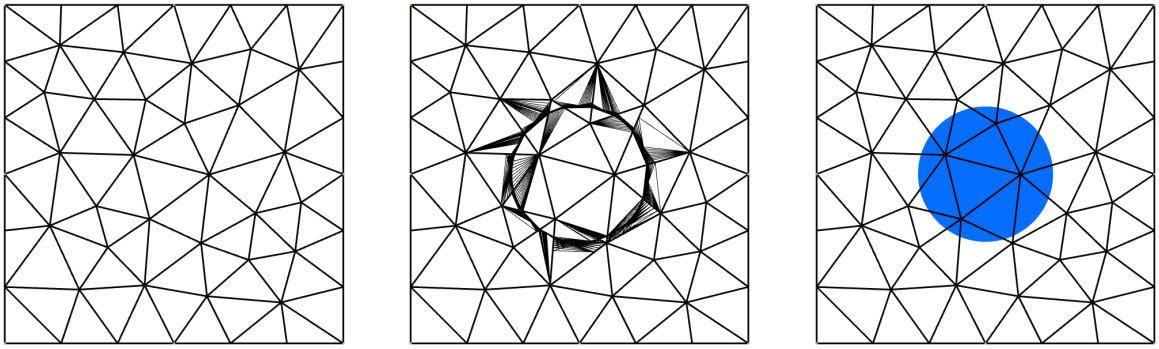
FIGURE 5.5 – Approximation géométrique d'un disque circulaire. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) construction des sous-éléments E_Δ à partir du niveau zéro de la fonction Level set "cercle". (c) représentation du domaine : matière et le vide.

On s'intéresse à l'évolution de l'erreur de l'approximation géométrique en calculant l'erreur relative sur l'aire du domaine :

$$Re_a = \frac{\left|area^h - area^{ex}\right|}{area^{ex}} \tag{5.7}$$

où

$$area^h = \int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ f\ d\Omega \qquad et\ \ f = 1.$$



(a) (b) (c)

FIGURE 5.6 – Approximation géométrique d'un disque circulaire. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) représentation en utilisant l'information paramétrique du cercle et les arêtes de découpage (10 arêtes à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B). (c) approximation de la géométrie indépendamment de la taille h du maillage.

L'erreur est calculée en fonction de la taille h des éléments du maillage et le nombre d'arêtes de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B. Rappelons que la méthode XFEM classique utilise une seule arête de découpage à l'intérieur de E_B.

Les calculs sont réalisés en utilisant des fonctions de forme linéaires, construites sur les éléments E_I et les sous-éléments $E_\Delta = E_{IB}$. Les résultats de convergence sont présentés sur la figure 5.7 où il est clair que pour une taille d'élément de maillage fixée h, l'augmentation du nombre d'arêtes de découpage pour représenter la frontière courbe au sein de chaque élément de frontière E_B conduit à une réduction importante de l'erreur. Ainsi, pour un nombre fixé d'arêtes de découpage à l'intérieur de E_B, l'erreur d'approximation géométrique diminue lorsqu'on raffine la taille des éléments du maillage avec un taux de convergence proche de $O(h^2)$. Notons que le niveau d'erreur dans l'approximation de l'aire du domaine est améliorée de trois ordres de grandeur en utilisant 20 arêtes de découpage à l'intérieur de chaque élément E_B, par rapport à l'utilisation d'une unique arête de découpage comme dans le cas de XFEM classique. Cependant, l'approche par sous-maillage améliore l'erreur, mais pas le taux de convergence puisqu'on utilise une approximation linéaire de la frontière courbe.

On en conclut que l'erreur de l'approximation de la géométrie peut être contrôlée à priori sur un maillage fixe en utilisant les techniques de raffinement par sous-maillage (SMG)/(SMD) sans avoir besoin de contrôler les critères de qualité liés à la forme des sous-éléments. Dans la suite, nous traitons d'autres expériences numériques en utilisant XFEM afin d'étudier l'influence du sous-maillage sur les résultats des calculs.

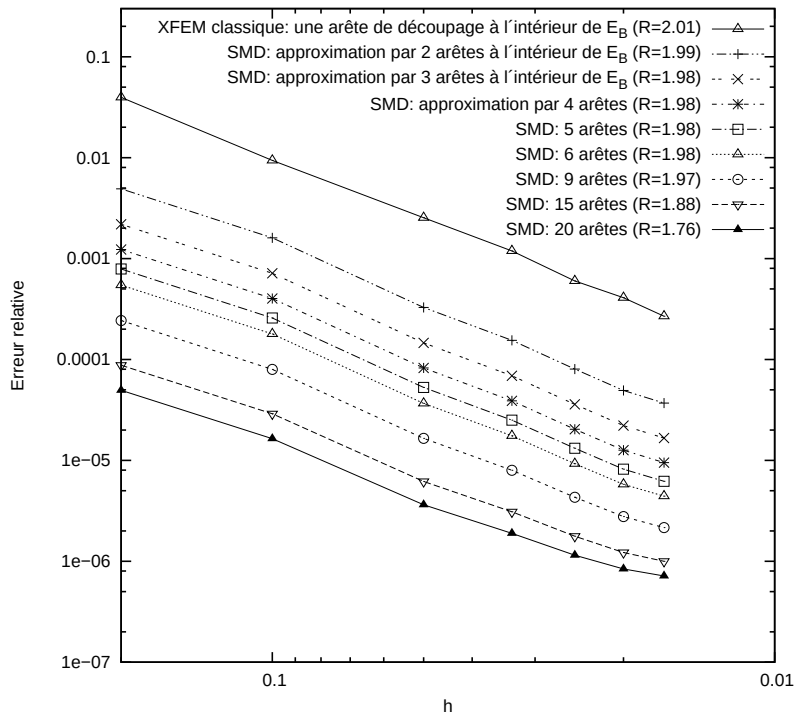


FIGURE 5.7 – Convergence de l'erreur relative sur l'aire d'un disque dans le cas d'un sous-maillage dégénéré (SMD).

5.2.2 Plaque trouée sous tension

Nous considérons une plaque infinie contenant un trou circulaire de rayon a, soumise à un chargement de traction uniaxial uniforme à l'infini $\sigma_\infty = 1$ dans la direction x. La solution exacte de ce problème est donnée dans [Szabó and Babuska (1991); Sukumar et al. (2001)], où les déplacements dans la direction x et y sont donnés par :

$$\begin{aligned} u_x(r,\theta) &= \frac{a}{8\mu}\left[\frac{r}{a}(\kappa+1)\,cos\theta + 2\frac{a}{r}\left((1+\kappa)\,cos\theta + cos3\theta\right) - 2\frac{a^3}{r^3}cos3\theta\right], \\ u_y(r,\theta) &= \frac{a}{8\mu}\left[\frac{r}{a}(\kappa-3)\,sin\theta + 2\frac{a}{r}\left((1-\kappa)\,sin\theta + sin3\theta\right) - 2\frac{a^3}{r^3}sin3\theta\right] \end{aligned} \tag{5.8}$$

et les composantes du tenseur des contraintes sont données par :

$$\sigma_{11}(r,\theta) = \sigma_\infty \left[1 - \frac{a^2}{r^2}\left(\frac{3}{2}cos2\theta + cos4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}cos4\theta\right],$$

$$\sigma_{22}(r,\theta) = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}cos2\theta - cos4\theta\right) - \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}cos4\theta\right], \tag{5.9}$$

$$\sigma_{12}(r,\theta) = \sigma_\infty \left[-\frac{a^2}{r^2}\left(\frac{1}{2}sin2\theta + sin4\theta\right) + \frac{3}{2}\frac{a^4}{r^4}sin4\theta\right]$$

où (r,θ) est le système de coordonnées polaires dont l'origine est placé au centre du trou. Un état de contraintes planes $\kappa = 3 - 4\nu$ est considéré avec le module d'Young $E = 10^5 MPa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ est le module de cisaillement.

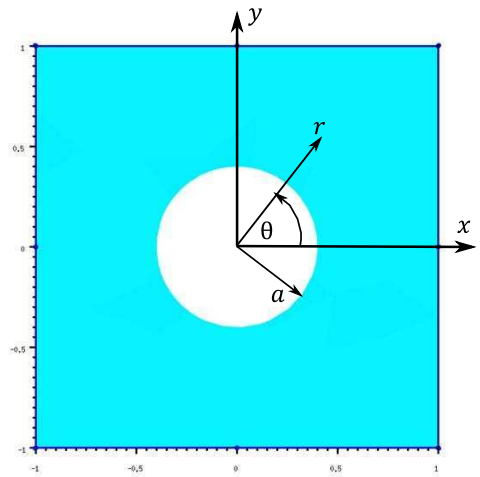


FIGURE 5.8 – Modèle de la plaque trouée.

Dans le modèle numérique (voir la figure 5.8), nous considérons un domaine de calcul carré de taille $L \times L$ avec $L = 2$ et un trou de rayon $a = 0.4$ en son centre. Les tractions exactes correspondent à la solution analytique (5.9) sont imposées sur la frontière du domaine carré, avec des conditions aux limites essentielles appropriées pour éliminer les mouvements de corps rigide.

Nous chercherons à mettre en évidence l'influence de la précision de la représentation de la frontière courbe lors de l'utilisation de la méthode XFEM d'ordre supérieur sur les taux de convergence. Afin d'étudier l'efficacité de l'approche utilisée en terme de convergence, nous utilisons les erreurs relatives suivantes :

– erreur relative en norme de l'énergie sur l'ensemble du domaine Ω_h

$$\mathscr{E}\left(\Omega_h\right) = \left(\frac{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ \epsilon\left(u^h - u^{ex}\right) : \mathbf{C} : \epsilon\left(u^h - u^{ex}\right)\ d\Omega}{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ \epsilon(u^{ex}) : \mathbf{C} : \epsilon(u^{ex})\ d\Omega} \right)^{1/2} \tag{5.10}$$

– erreur relative en norme $\mathscr{L}^2\left(\Omega_h\right)$ sur le champ du déplacement

$$\mathscr{L}^2\left(\Omega_h\right) = \left(\frac{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ \left(\underline{u}^h - \underline{u}^{ex}\right)^T \cdot \left(\underline{u}^h - \underline{u}^{ex}\right)\ d\Omega}{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\ \left(\underline{u}^{ex}\right)^T \cdot \left(\underline{u}^{ex}\right)\ d\Omega} \right)^{1/2}, \tag{5.11}$$

où u^{ex} et u^h sont respectivement la solution exacte et la solution XFEM du champ de déplacement.

Notons que le taux de convergence optimal d'un problème régulier par la méthode des éléments finis correspond à $O\left(h^p\right)$ pour l'énergie et $O\left(h^{p+1}\right)$ pour le champ du déplacement, où h est la taille des éléments de maillage et p l'ordre du polynôme des fonctions de forme.

Les convergences sont réalisées en utilisant des éléments linéaires, quadratiques et cubiques, et en utilisant un ensemble de maillages triangulaires non structurés formant un domaine carré et de taille d'éléments h différents.

5.2.2.1 Expérience numérique en utilisant le sous-maillage dégénéré (SMD)

Les résultats de l'erreur relative en énergie en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés sur la figure 5.9, où il est clair que non seulement la précision, mais aussi le taux de convergence sont améliorés en utilisant une représentation plus fine de la frontière courbe à l'intérieur d'un élément de frontière E_B et une approximation d'ordre supérieur ($p > 1$). Par ce simple cas test, on constate qu'en présence d'une frontière courbe, la méthode XFEM classique montre une diminution du taux de convergence lors de l'utilisation d'une discrétisation linéaire de l'interface (ce qu'on désigne sur la figure 5.9 par : XFEM classique).

Comme prévu, une représentation fine du trou (15 arêtes de découpage à l'intérieur de chaque élément E_B) n'influence pas la précision et le taux de convergence lors de l'utilisation d'XFEM avec des éléments linéaires.

En ce qui concerne les éléments quadratiques, la représentation fine du trou n'influence pas vraiment la précision et le taux de convergence. Le taux de convergence est de 1.87 pour une représentation classique et de 1.91 pour une représentation plus fine (15 arêtes), qui sont très proche du taux optimal théorique ($p = 2$).

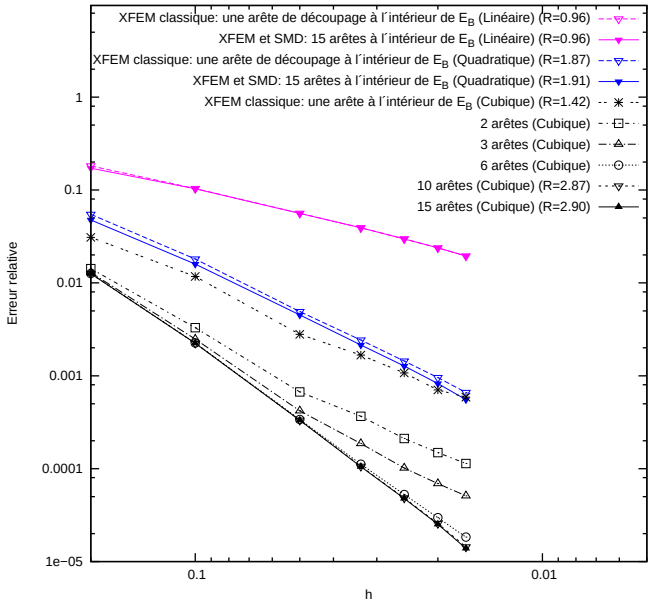


FIGURE 5.9 – Erreur en norme d'énergie pour le problème de la plaque trouée. Des approximations linéaire, quadratique et cubique sont utilisées avec différents nombre d'arrête de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

Cependant, une représentation fine du trou est bénéfique pour l'approximation par des éléments cubiques, même pour seulement 2 arêtes de découpage à l'intérieur de chaque élément E_B. Le taux de convergence en norme $\mathscr{E}$ dans le cas extrême où 15 arêtes de découpage sont utilisées est de 2.90, ce qui est proche du taux optimal théorique ($p = 3$).

Remarque : Nous expliquerons dans la suite pourquoi on ne peut pas converger jusqu'au taux optimal théorique pour ce cas test.

Les résultats de l'erreur relative en norme $\mathscr{L}^2$ sur le champ du déplacement en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés sur la figure 5.10 pour le cas linéaire et quadratique et sur la figure 5.11 pour le cas cubique. Au contraire des résultats de l'erreur relative en énergie, il est clair que le norme $\mathscr{L}^2$ est sensible à la représentation de la frontière courbe, à partir d'une approximation d'ordre ($p > 1$). La précision et le taux de convergence en norme $\mathscr{L}^2$ s'améliore au fur et à mesure qu'on augmente le nombre d'arêtes de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B. Dans le cas extrême où 15 arêtes de découpage sont utilisées avec une approximation quadratique, le taux de convergence est de 3.31, qui est mieux que le taux optimal théorique ($p + 1 = 3$).

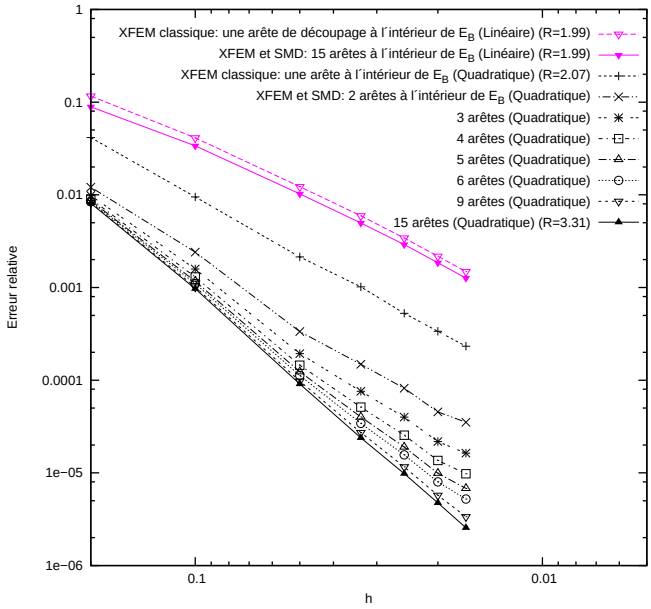


FIGURE 5.10 – Erreur en norme $\mathscr{L}^2$ pour le problème de la plaque trouée. Des approximations linéaire et quadratique sont utilisées avec différents nombre d'arrête de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

Cependant, malgré l'utilisation de 20 arêtes de découpage dans le cas de l'approximation cubique (voir la figure 5.11), la technique de raffinement basée sur un sous-maillage dégénéré (SMD) ne permet pas d'atteindre le taux optimal théorique ($p + 1 = 4$). Il faudra plus d'arêtes de découpage pour s'approcher au taux optimal théorique.

On en conclut que pour obtenir le taux de convergence optimal, une représentation plus fine des frontières courbes est nécessaire lors de l'utilisation de la méthode XFEM d'ordre supérieur. De plus, ce cas test avec le sous-maillage dégénéré (SMD) nous a permis de confirmer que les sous-éléments E_Δ de mauvaise qualité qui servent que pour l'intégration numérique n'affectent pas la précision de l'intégration numérique. Dans la suite, nous utilisons la technique de raffinement basée sur un sous-maillage gradué (SMG) pour comparer les résultats de convergence au cas (SMD).

À des fins d'illustration, un maillage grossier est utilisé avec des éléments cubiques et 7 arêtes de découpage à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B. Les champs de contraintes et de déplacements obtenus sont représentés sur la figure 5.12.

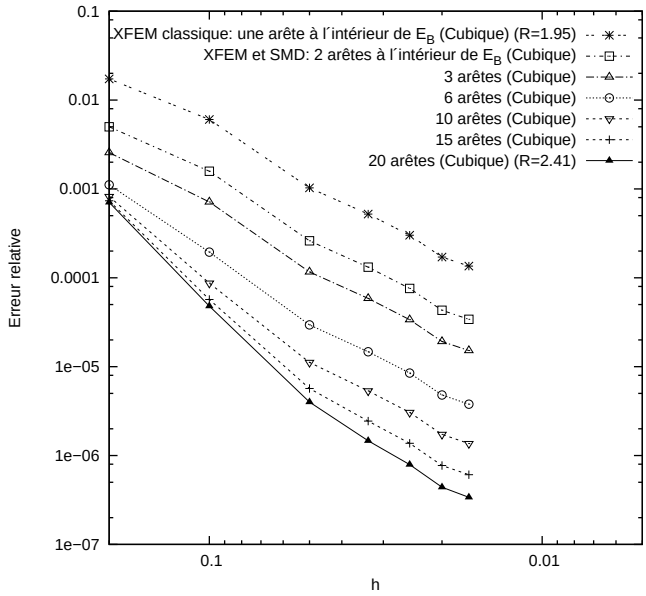
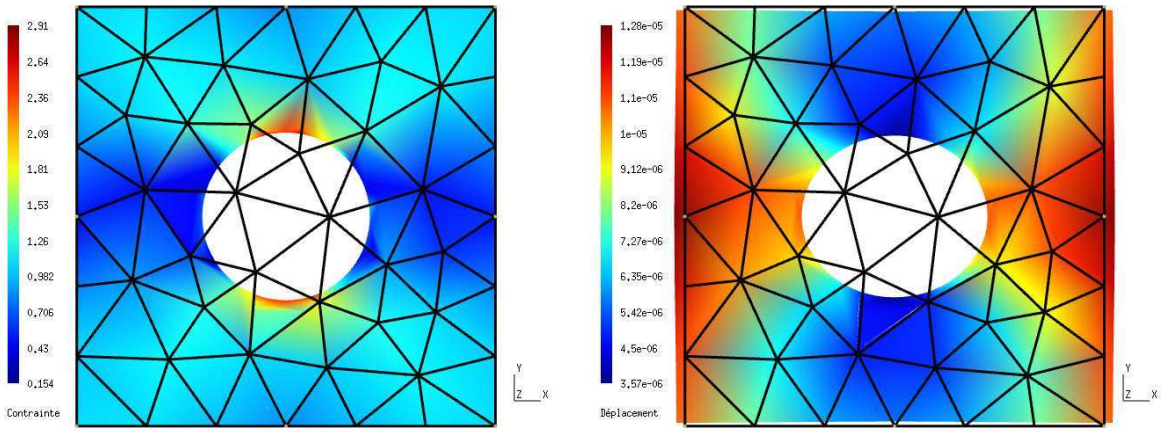
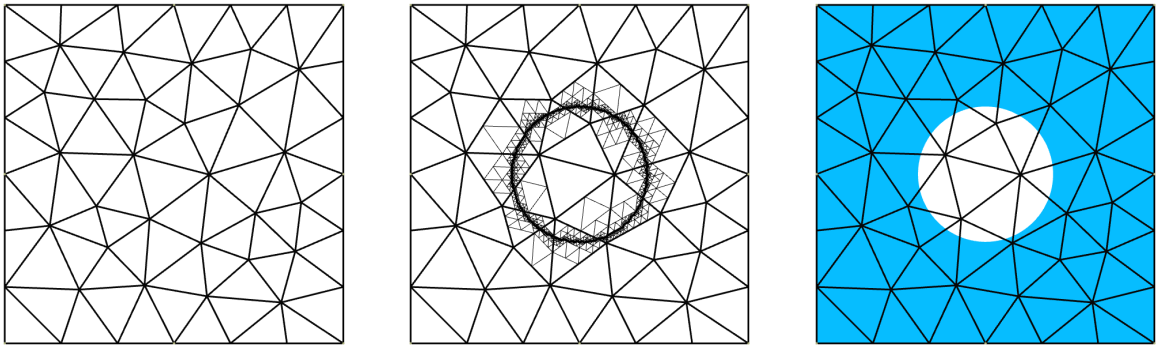


FIGURE 5.11 – Erreur en norme $\mathscr{L}^2$ pour le problème de la plaque trouée. Approximation cubique est utilisée avec différents nombre d'arrête de découpage à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.



(a) (b)

FIGURE 5.12 – Champs de contraintes (a) et de déplacements (b).



(a) (b) (c)

FIGURE 5.13 – Approximation géométrique de la plaque trouée. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) raffinement par un sous-maillage gradué (SMG) de niveau (n = 10) à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B. (c) approximation de la géométrie indépendamment de la taille h du maillage.

5.2.2.2 Expérience numérique en utilisant le sous-maillage gradué (SMG)

Dans cette section, nous abordons le même cas test de la plaque trouée sous tension en utilisant le sous-maillage gradué (SMG) pour une représentation plus fine du trou et pour générer les sous-éléments E_Δ de l'intégration numérique (voir la figure 5.13).

Les résultats de l'erreur relative en énergie en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés sur la figure 5.14 pour la technique SMG, qui sont très similaires aux résultats de la technique SMD (voir la figure 5.9). Dans le cas de l'approximation cubique, il en suffit qu'un SMG de niveau (n=3) pour atteindre la précision et le taux de convergence les plus optimaux. Les même résultats de convergence en énergie de ce cas test ont été trouvés récemment par Dréau et al. (2010).

Notons que les taux de convergences en norme d'énergie par la technique SMG sont inférieurs aux taux optimaux théoriques pour le cas quadratique et cubique (1.91 et 2.90 respectivement), similaires aux convergences de la technique SMD. Cela confirme que les sous-éléments E_Δ caractérisés par leurs rapports d'aspect importants n'a aucun effet négatif sur la précision des résultats.

Les résultats de l'erreur relative en norme $\mathscr{L}^2$ sur le champ du déplacement en fonction de la taille des éléments de maillage h, sont présentés sur la figure 5.15 pour le cas linéaire et quadratique, et sur la figure 5.16 pour le cas cubique. On constate que le taux de convergence optimal dans le cas quadratique (voir les figures 5.15 pour le SMG et 5.10 pour le SMD) sont similaires, mieux que le taux optimal théorique ($p + 1 = 3$). Dans le

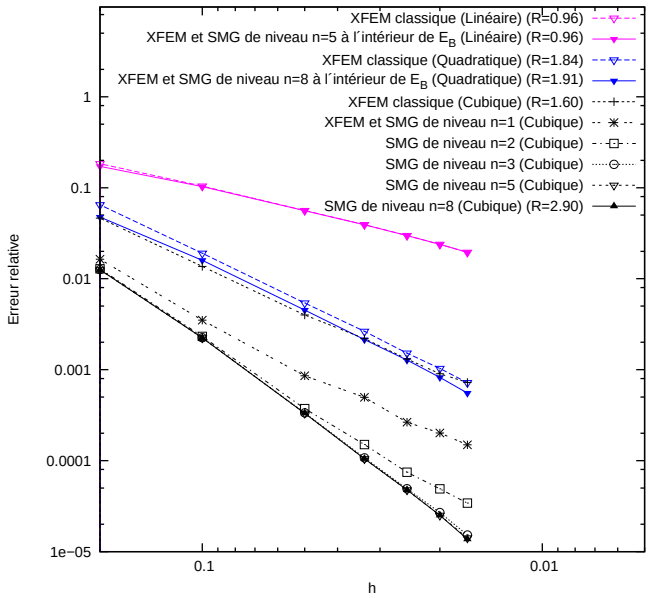


FIGURE 5.14 – Erreur en norme d'énergie pour le problème de la plaque trouée. Des approximations linéaire, quadratique et cubique sont utilisées avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

cas cubique (voir la figure 5.16), on constate qu'on arrive à atteindre la précision et le taux de convergence optimaux en raffinant jusqu'au niveau ($n = 8$), ce qui correspond à un taux de convergence de 3.85 proche au taux optimal théorique ($p + 1 = 4$).

La question qui se pose maintenant est de savoir pourquoi des taux de convergence inférieurs aux taux optimums sont obtenus dans le cas de l'erreur en énergie, et un taux supérieur au taux optimal théorique dans le cas de l'erreur en norme $\mathscr{L}^2$ avec l'approximation quadratique, pour ce problème de la plaque trouée.

Pour répondre à cette question, nous résolvons le même problème en imposant les tractions exactes correspondent à la solution analytique (5.9) sur la frontière courbe du cercle. Cela implique une intégration numérique le long de la frontière courbe du cercle Γ_h sur chaque segment linéaire E_{Δ_Γ} à l'intérieur de E_B (voir la section 5.1.2). Les résultats de l'erreur relative en normes d'énergie et $\mathscr{L}^2$ en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés respectivement sur les figures 5.17 et 5.18 pour le cas linéaire, quadratique et cubique. Notons que les expériences numériques, donnent pour le même ordre d'approximation p la même courbe de convergence quelque soit le niveau du SMG.

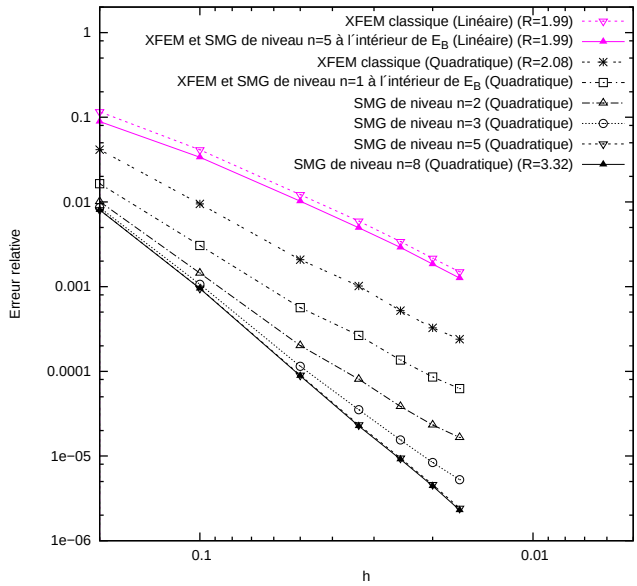


FIGURE 5.15 – Erreur en norme $\mathscr{L}^2$ pour le problème de la plaque trouée. Des approximations linéaire et quadratique sont utilisées avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

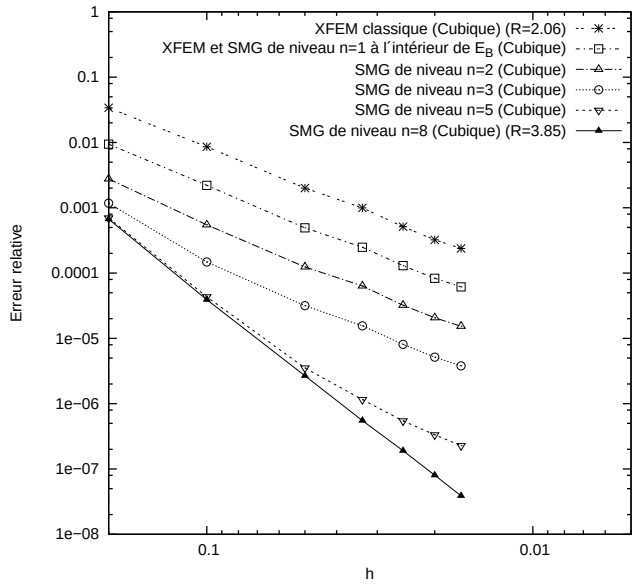


FIGURE 5.16 – Erreur en norme $\mathscr{L}^2$ pour le problème de la plaque trouée. Approximation cubique est utilisée avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

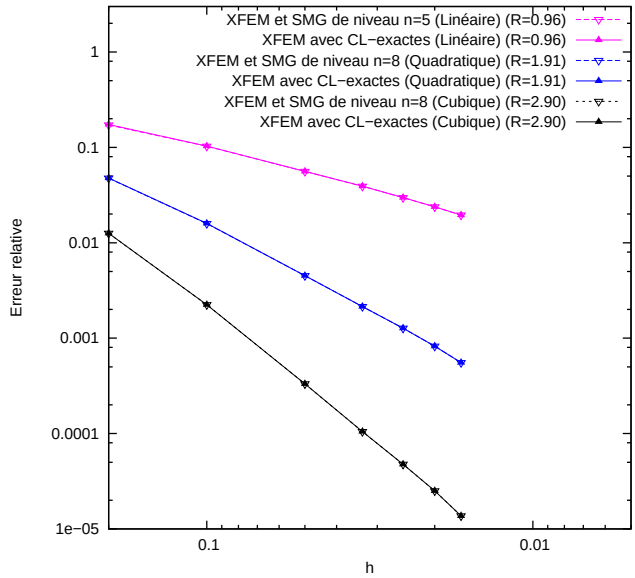


FIGURE 5.17 – Comparaison d'erreur en norme d'énergie entre le problème de la plaque trouée avec et sans conditions aux limites exactes sur le cercle dans le cas des approximations linéaire, quadratique et cubique.

Cela signifie que ces courbes sont les courbes optimales qu'on peut atteindre par l'analyse numérique de ce problème de la plaque trouée par XFEM. Ces courbes de convergences sont désignées par "CL- exactes" sur les figures 5.17 et 5.18.

On peut voir sur ces figures que les résultats des courbes obtenues en imposant les conditions aux limites exactes sur la frontière du cercle sont similaires aux courbes obtenues lors de l'obtention des taux optimaux de convergence par les techniques SMD/SMG. Ce qui explique la question de la remarque au-dessus, sans oublier que ce problème de la plaque trouée présente des concentrations de contraintes, donc les taux optimaux de convergence sont légèrement différents aux taux optimaux théoriques.

5.2.3 Tube cylindrique sous pression

Afin d'illustrer au mieux les capacités de cette approche de la représentation des frontières courbes et XFEM d'ordre supérieur, nous avons choisi de traiter un problème en deux et trois dimensions qui demande une imposition correcte de la condition de Neumann sur la frontière courbe à l'intérieur des éléments de frontières E_B, et pour lequel la solution analytique est connue et suffisamment régulière.

Nous considérons un tube cylindrique circulaire de rayon intérieur et extérieur res-

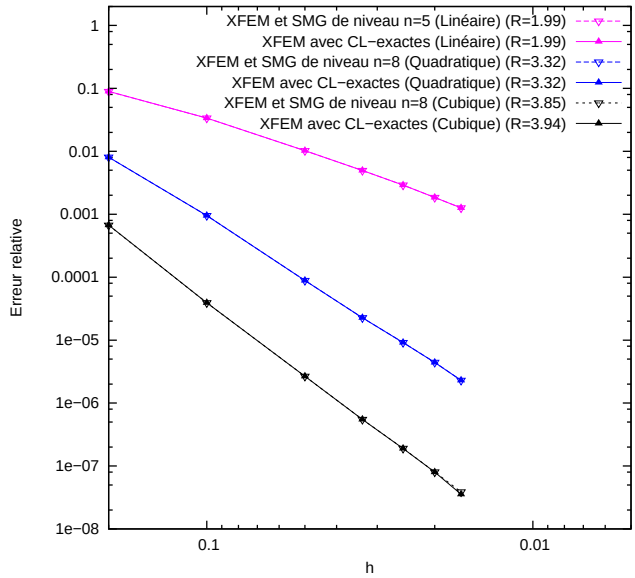


FIGURE 5.18 – Comparaison d'erreur en norme $\mathscr{L}^2$ entre le problème de la plaque trouée avec et sans conditions aux limites exactes sur le cercle dans le cas des approximations linéaire, quadratique et cubique.

pectivement $a = 0.4$ et $b = 0.9$, sous pression uniforme égale à $p = 3000MPa$ exercée sur la paroi intérieure du cylindre. Les données de problèmes sont : le module d'Young $E = 10^6 MPa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. On considère un champ de contrainte plane, la solution exacte des composantes du tenseur des contraintes en coordonnées cylindrique autour de Oz sont données par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}(r) &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}(1 - \frac{b^2}{r^2}), \\
\sigma_{\theta\theta}(r) &= \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}(1 + \frac{b^2}{r^2}), \\
\sigma_{r\theta} &= \sigma_{z\theta} = \sigma_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

En raison de symétrie, le domaine de calcul est modélisé par un quart du cylindre, comme indiqué dans la figure 5.19.

Le but de ce cas test est de réaliser des calculs d'ordre supérieur sur la géométrie de tube dont la partie de la frontière courbe est indépendante du maillage. L'objectif est

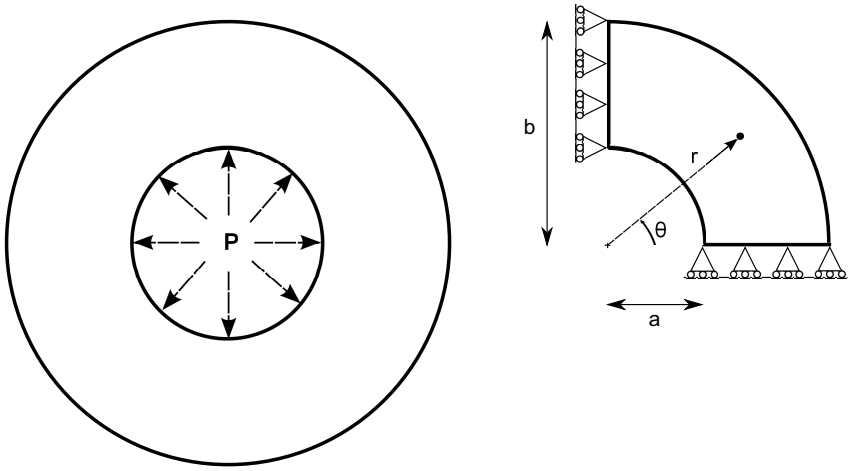


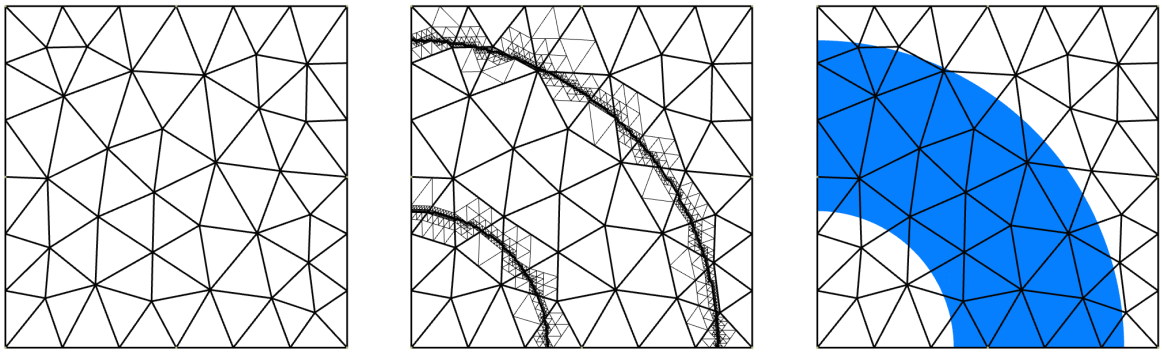
FIGURE 5.19 – Tube cylindrique sous pression interne et la partie du modèle numérique.

double : nous évaluons les effets de représenter cette frontière en utilisant la technique SMG et de réaliser une intégration numérique correcte le long de la paroi intérieure du cylindre Γ_h sur chaque segment linéaire E_{Δ_Γ} à l'intérieur de E_B (voir la section 5.1.2). Afin d'étudier l'efficacité de l'approche utilisée en terme de convergence, nous utilisons l'erreur relative en norme de l'énergie 5.10. Les convergences sont réalisées en utilisant des éléments linéaires, quadratiques et cubiques, et en utilisant un ensemble de maillages (triangulaires/tétraédriques) non structurés formant un domaine (carré/parallélépipède rectangle à base carrée) de taille d'éléments h différents.

5.2.3.1 Tube cylindrique sous pression en 2D

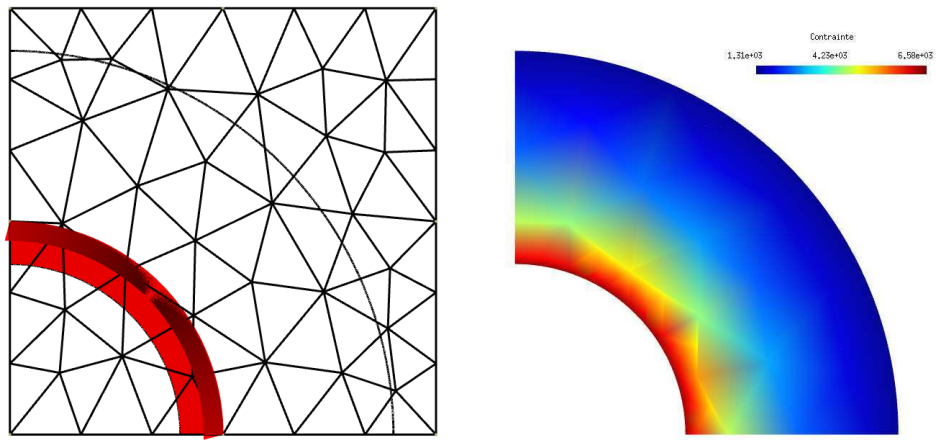
Considérons un carré $Gr = [0,1] \times [0,1]$ pour générer un maillage non-structuré de taille d'élément h. Le quart de cylindre est construit en utilisant deux Level sets pour les parois interne et externe respectivement. Notons que l'on ne prend en compte que la partie du maillage $Gr_{I \cup B}$ qui couvre le domaine physique Ω_h pour le calcul. Les étapes de la construction du domaine physique Ω_h sont illustrées sur la figure 5.20. L'imposition de la pression p sur la paroi intérieure du cylindre et le champ de contrainte obtenu sont représentés sur la figure 5.21.

Les résultats de l'erreur relative en norme d'énergie (équation 5.10) en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés sur la figure 5.22 pour le cas linéaire et quadratique, et sur la figure 5.23 pour le cas cubique. Pour ce problème régulier, le taux de convergence théorique est atteint pour une approximation linéaire sans avoir besoin d'utiliser la technique SMG. Cependant, les approximations quadratique et cubique en utilisant la représentation classique des frontières courbes présentes des taux de conver-



(a) (b) (c)

FIGURE 5.20 – Approximation géométrique du tube cylindrique. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) raffinement par un sous-maillage gradué (SMG) de niveau (n = 10) à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B. (c) approximation de la géométrie indépendamment de la taille h du maillage.



(a) (b)

FIGURE 5.21 – (a) Illustre l'imposition correcte de la pression p sur l'approximation linéaire de la paroi intérieure du cylindre indépendamment du maillage ÉF. (b) champ de contrainte de Von Mises.

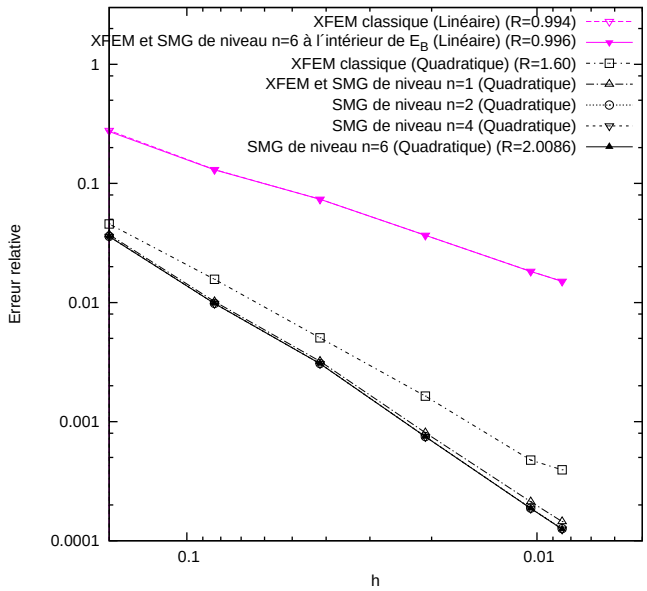


FIGURE 5.22 – Erreur en norme d'énergie pour le problème de tube cylindrique. Des approximations linéaire et quadratique sont utilisées avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

gence sous-optimaux. Ces courbes de convergences sont désignées par "XFEM classique" sur les figures 5.22 et 5.23. Dans le cas où la technique SMG est utilisée, il est clair que non seulement la précision, mais aussi le taux de convergence sont améliorés jusqu'à l'obtention d'une convergence en $O\left(h^p\right)$.

On en conclut que les convergences théoriques pour des problèmes réguliers peuvent être atteintes par la technique SMG et XFEM d'ordre supérieur. Cela signifie aussi que l'imposition des conditions aux limites de Neumann et la quadrature numérique sur une frontière courbe présentée dans la section 5.1.2 sont correctement effectuées.

5.2.3.2 Tube cylindrique sous pression en 3D

Considérons un parallélépipède rectangle à base carrée $Gr = [0,1] \times [0,1] \times [0,l]$ pour générer un maillage non-structuré tétraédrique de taille d'élément h. Pour une exploitation optimale des ressources de calcul et de mémoire, on génère un parallélépipède rectangle d'épaisseur l en fonction de la taille d'élément h du maillage tout en assurant une épaisseur l d'au moins 3 éléments. Comme dans le cas 2D, le quart de cylindre est construit en

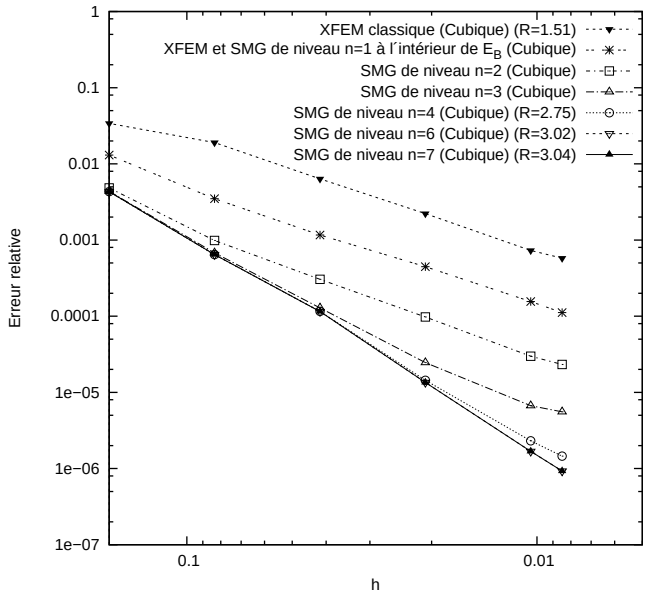


FIGURE 5.23 – Erreur en norme d'énergie pour le problème de tube cylindrique. Approximation cubique est utilisée avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

utilisant deux Level sets pour les parois interne et externe respectivement et on prend en compte que la partie du maillage $Gr_{I\cup B}$ qui couvre le domaine physique Ω_h pour le calcul. Les étapes de la construction du domaine physique Ω_h sont illustrées sur la figure 5.24. L'imposition de la pression p sur la paroi intérieure du cylindre et le champ de contrainte obtenu sont représentés sur la figure 5.25.

Les résultats de l'erreur relative en norme d'énergie 5.10 en fonction de la taille des éléments de maillage h sont présentés sur la figure 5.26 pour le cas linéaire et quadratique. Comme prévu, une représentation fine des parois du cylindre (SMG de niveau ($n = 2$) à l'intérieur de chaque élément E_B) n'influence pas la précision et le taux de convergence lors de l'utilisation d'XFEM avec des éléments linéaires. En ce qui concerne les éléments quadratiques, la représentation fine des parois du cylindre améliore la précision et le taux de convergence. Le taux de convergence est de 1.50 pour une représentation classique et de 1.94 pour une représentation plus fine (SMG de niveau $n = 3$), qui est très proche du taux optimal théorique ($p = 2$).

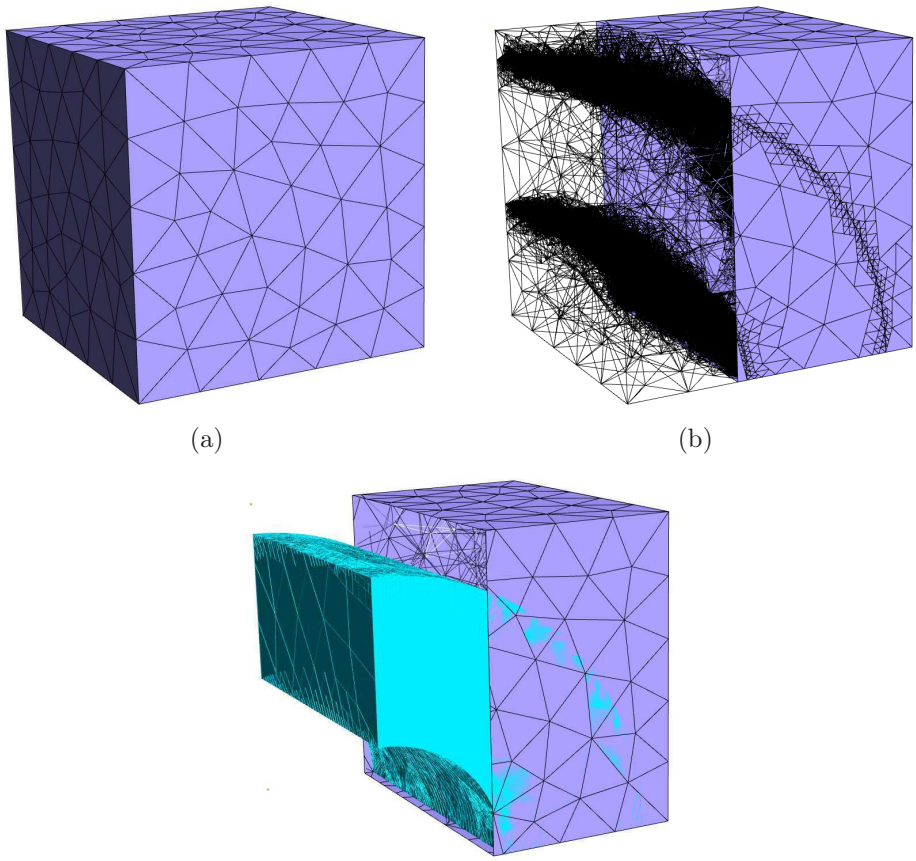
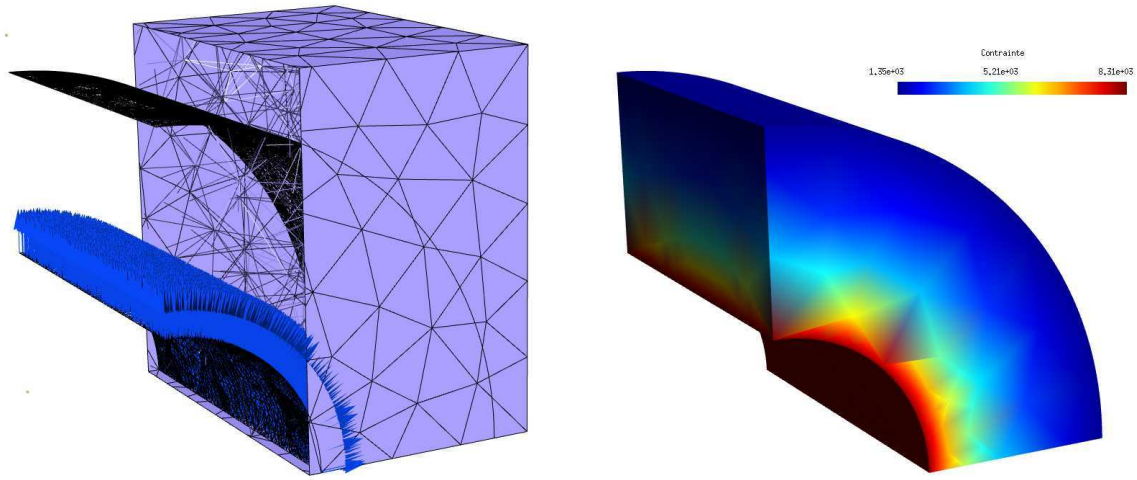


FIGURE 5.24 – Approximation géométrique du tube cylindrique en 3D. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) raffinement par un sous-maillage gradué (SMG) de niveau (n = 3) à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B. (c) approximation de la géométrie indépendamment de la taille h du maillage.



(a) (b)

FIGURE 5.25 – (a) Illustre l'imposition correcte de la pression p sur l'approximation linéaire de la paroi intérieure du cylindre indépendamment du maillage ÉF. (b) champ de contrainte de Von Mises.

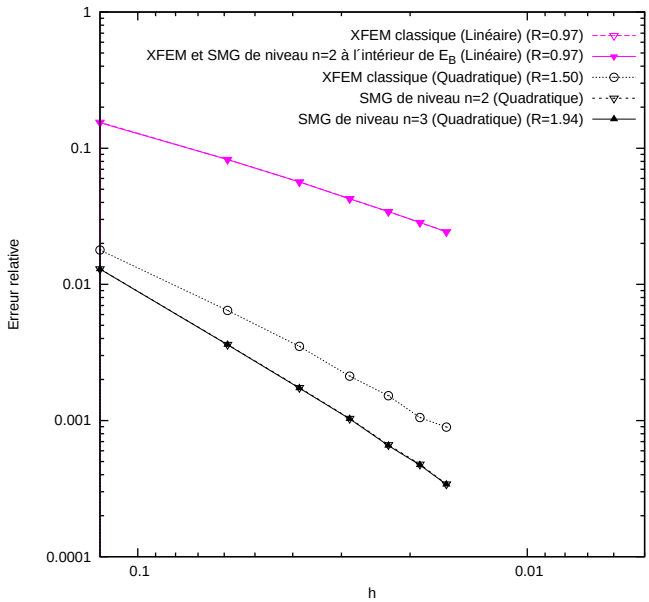


FIGURE 5.26 – Erreur en norme d'énergie pour le problème de tube cylindrique en 3D. Des approximations linéaire et quadratique sont utilisées avec différents niveaux de sous-maillage gradué (SMG) à l'intérieur d'un élément de frontière E_B.

5.2.4 Conclusions et remarques

Les résultats obtenus par la technique (SMD/SMG) montrent qu'autant de sous éléments que nécessaire pour l'intégration numérique peuvent être générés afin de diminuer l'erreur de l'approximation géométrique à l'intérieur de l'ensemble des éléments de frontière B, et améliorer la précision et le taux de convergence lors de l'utilisation d'XFEM avec une approximation d'ordre supérieur. De plus, les résultats montrent que l'imposition des conditions aux limites de Neumann et la quadrature numérique sur une frontière courbe non-conforme au maillage sont correctement réalisés.

Les exemples montrent aussi que le taux de convergence optimal peut être atteint, même pour des rapports d'aspect importants des sous-éléments E_Δ. Cependant, un aspect critique de la technique (SMD) est que les opérations locales de la géométrie algorithmique nécessaires pour subdiviser un élément de frontière E_B sont complexes, en particulier en trois dimensions. Nous recommandons l'utilisation de la technique de raffinement basée sur un sous-maillage gradué (SMG) (voir la section 4.5.1), qui se caractérise par sa robustesse, sa rapidité et sa simplicité pour contrôler avec précision la description de la frontière d'un objet indépendamment du maillage qui serve pour l'approximation éléments finis.

Cette technique de représentation des frontières courbes par la technique du sous-maillage gradué (SMG) permet un contrôle de l'erreur globale commise lors d'une analyse par éléments finis sur un maillage fixe, sans avoir besoin de changer le maillage ou encore d'utiliser un maillage avec des éléments courbes.

À des fins d'illustration, les deux exemples qui suivent (voir les figures 5.27, 5.28 et 5.29) montrent deux géométries simples, qui peuvent être difficilement traitables par un maillage conforme d'ordre supérieur.

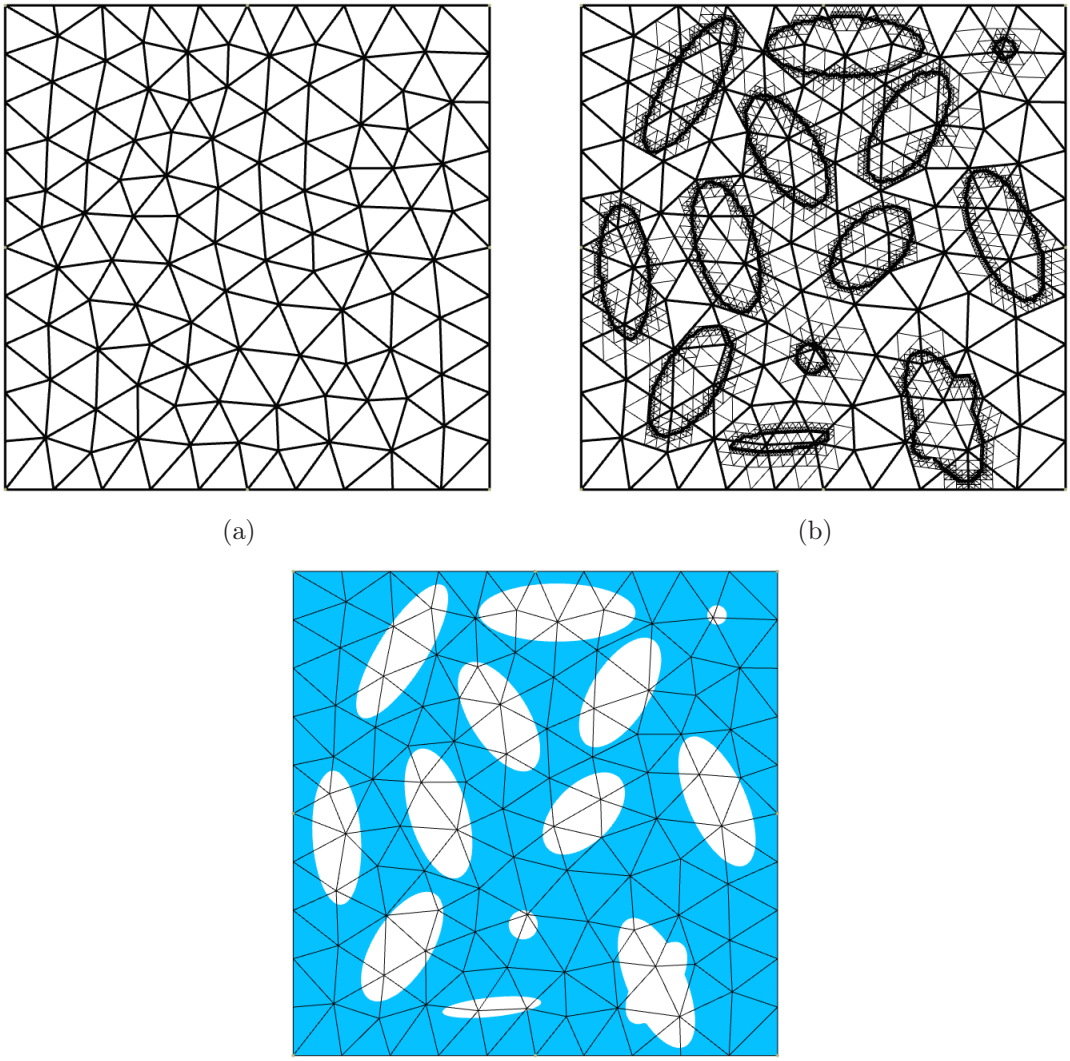
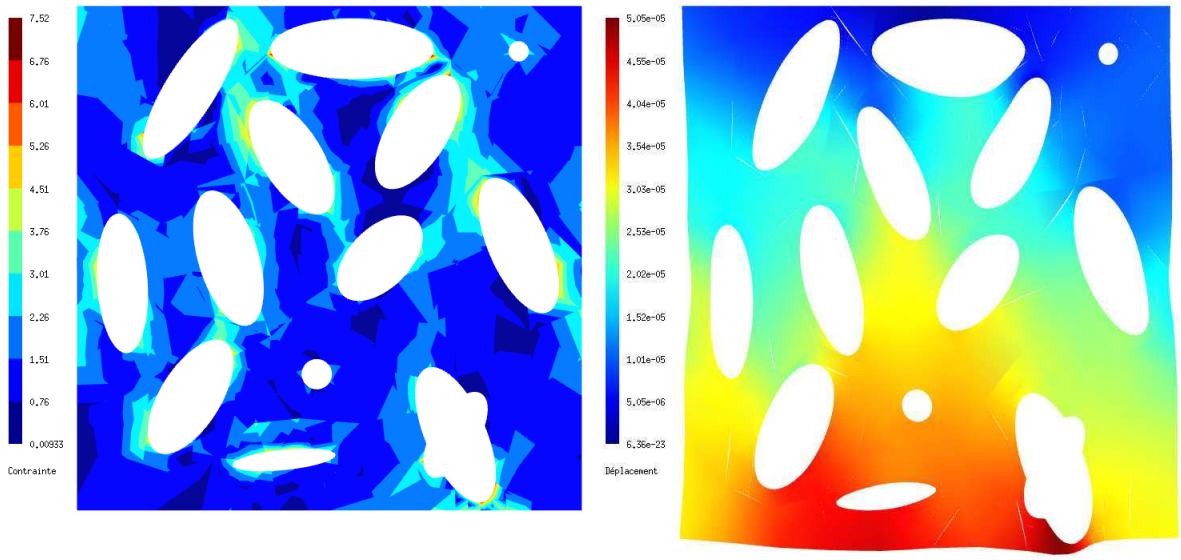


FIGURE 5.27 – Approximation géométrique d'une microstructure contenant des inclusions lenticulaires. (a) maillage grossier de l'approximation ÉF. (b) raffinement par un sous-maillage gradué (SMG) de niveau (n = 7) à l'intérieur de chaque élément de frontière E_B. (c) approximation de la géométrie indépendamment de la taille h du maillage.



(a) (b)

FIGURE 5.28 – Champs de contraintes (a) et de déplacements (b).

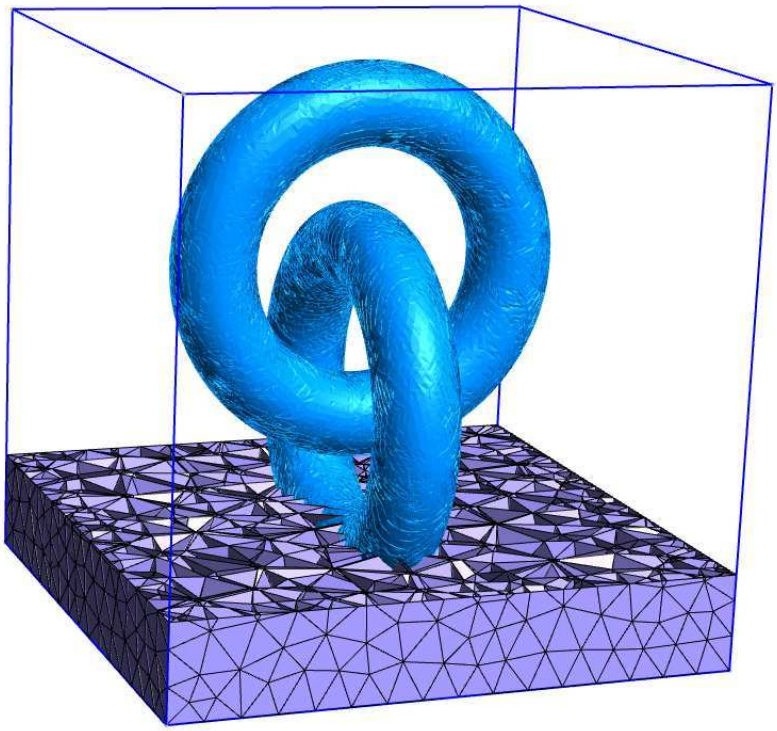


FIGURE 5.29 – Approximation géométrique d'une microstructure contenant des inclusions en forme de tore indépendamment de la taille du maillage ÉF.

5.3 Analyse de convergence en maillage non-conforme à la frontière avec XFEM

L'objectif de cette section est de montrer que l'analyse par éléments finis sur un domaine dont les frontières sont indépendantes du maillage est possible dans le cadre d'XFEM et conserve la précision et les propriétés des éléments finis classiques.

5.3.1 Formulations

Dans cette étude, nous considérons des frontières fixes en utilisant des conditions aux limites mixtes de types Dirichlet et Neumann. Pour plus de simplification, nous considérons le problème de Poisson (voir le système d'équations aux dérivées partielles 3.19), la généralisation à d'autres EDP ou conditions aux limites est simple.

Plusieurs méthodes sont disponibles dans la littérature pour appliquer les conditions aux limites de Dirichlet le long d'une frontière qui ne coïncide pas nécessairement avec les nœuds d'un maillage fixe. Une catégorie basée sur l'imposition de la condition de Dirichlet sous forme faible (voir la section 3.5) et l'autre basée sur la modification des fonctions de base pour satisfaire les contraintes directement [Lew and Buscaglia (2008); Düster et al. (2008); Kumar et al. (2008)]. Parmi les différentes méthodes possibles, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est particulièrement applicable à de nombreuses classes de problèmes [Fernández-Méndez and Huerta (2004)]. En effet, seule une modification triviale de la forme faible est nécessaire pour imposer les conditions de Dirichlet sans exiger un paramètre prédéfini par l'utilisateur.

Considérons une grille maillée non structurée Gr de taille d'éléments h, englobant un objet $\Omega_h \subset \mathbb{R}^n, (n = 2, 3)$, délimité par Γ_h. Soit $Gr_{I\cup B}$ la partie des éléments de la grille qui entourent entièrement Ω_h à partir de laquelle l'espace $\mathscr{U}_h \subset H^1(Gr_{I\cup B})$ d'ordre p est construit. L'approximation d'un champ u peut alors s'écrire sous la forme :

$$u_h(x) = \sum_{i\in Gr_{I\cup B}} u_i N_i(x) \qquad \text{tel que} \quad N_i \in \mathscr{U}_h \subset H^1(Gr_{I\cup B}). \tag{5.13}$$

La formulation forte du problème 3.19 conduit à la formulation faible 3.25 avec les multiplicateurs de Lagrange. En utilisant ainsi les fonctions indicatrices (voir les sections 5.1.1

et 5.1.2), la forme faible discrétisée s'écrit :

trouver $(u_h, \lambda_h) \in \mathscr{U}_h \times \mathscr{L}_h$ tels que :

$$\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\, \nabla v_h \cdot \nabla u_h \, d\Omega + \int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B\, v_h \lambda_h \, d\Gamma = \int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B}\, v_h f \, d\Omega + \int_{B(\Gamma_N)} \Xi_B\, v_h t_N \, d\Gamma$$

$$-\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B\, \mu_h u_h \, d\Gamma = -\int_{B(\Gamma_D)} \Xi_B\, \mu_h u_D \, d\Gamma \tag{5.14}$$

pour tous $(v_h, \mu_h) \in \mathscr{U}_h \times \mathscr{L}_h$, où $Gr_{I\cup B}$ est l'union des ensembles d'éléments I et B, $\Lambda_{I\cup B}$ et Ξ_B sont les fonctions indicatrices, $B(\Gamma_N)$ et $B(\Gamma_D)$ définis respectivement les deux parties des éléments de frontière B qui englobent les deux parties de la frontière Γ_N et Γ_D.

5.3.2 Imposition des conditions aux limites de type Dirichlet

L'approximation des multiplicateurs de Lagrange est réalisée en construisant les fonctions de forme classique sur la partie du maillage Γ_h^i qui correspond à la frontière de Dirichlet. Cependant, seul un choix judicieusement approprié de l'espace des multiplicateurs de Lagrange fournira la stabilité de la formulation faible ci-dessus et des approximations convergentes (voir la section 3.5.2).

Dans ce travail, nous construisons l'espace des multiplicateurs de Lagrange en employant l'algorithme décrit dans [Géniaut et al. (2007)] (voir la section 3.5.3). Dans le cadre de notre représentation implicite, cet algorithme impose des relations d'égalité ou des relations linéaires entre certains multiplicateurs de l'espace $\mathscr{L}_h$ pour imposer les conditions de Dirichlet sous forme faible. L'algorithme consiste à sélectionner un ensemble d'arêtes de la bande d'éléments de maillage ω_i qui sont coupées par Γ_h^i en utilisant le champ de distance signée défini dans ω_i. Un sous-ensemble est sélectionné à partir de cet ensemble d'arêtes en passant par les étapes de l'algorithme pour construire les arêtes "vitales" et "non vitales". Seuls les multiplicateurs qui sont liés aux arêtes vitales seront considérés pour la résolution des équations discrétisées (5.14). Ensuite, chaque multiplicateur lié à une arête non vitale est imposé comme combinaison linéaire de multiplicateurs sur les arêtes vitales qui lui sont voisines.

Remarque : À notre connaissance, les algorithmes de Moës et al. (2006); Géniaut et al. (2007); Béchet et al. (2009) et Hautefeuille et al. (2011) considèrent le traitement

des conditions aux limites sur des interfaces qui doivent absolument se terminer sur le bord d'un élément de maillage, ou encore sur des interfaces fermées (comme un trou par exemple). Cependant, notre approche représente les différentes parties de la frontière Γ_h comme des interfaces ouvertes, car chaque face de l'objet est délimitée par les arêtes vives à l'intérieur des éléments du maillage. Pour cela, nous avons adapté l'algorithme de Géniaut et al. (2007) pour pouvoir imposer correctement les conditions de Dirichlet sur une interface ouverte (une partie de frontière délimitée par les arrêtes vives).

5.3.3 Validations

Afin d'illustrer au mieux les capacités de notre approche de représentation implicite et XFEM, nous avons choisi de traiter un problème de Laplace en deux et trois dimensions pour lequel la solution analytique est connue et suffisamment régulière. Des fonctions de forme linéaire sont utilisées pour construire la frontière Γ_h ainsi que pour l'analyse par XFEM, sachant que le taux de convergence optimal en norme de l'énergie d'un problème régulier par la méthode des éléments finis correspond à $O(h)$. Les conditions exactes de Dirichlet et de Neumann sont imposées sur la frontière du domaine Ω_h, elles correspondent respectivement aux solutions analytiques du potentiel (u^{ex}) et de flux normal ($\nabla_n u^{ex}$). Afin d'étudier l'efficacité de l'approche utilisée en terme de convergence et la stabilité numérique, on utilise les erreurs relatives suivantes :

- erreur en norme de l'énergie sur l'ensemble du domaine Ω_h

$$\mathscr{E}(\Omega_h, \nabla u) = \left(\frac{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B} \, \nabla \left(u^h - u^{ex}\right) \cdot \nabla \left(u^h - u^{ex}\right) \, d\Omega}{\int_{Gr_{I\cup B}} \Lambda_{I\cup B} \, \nabla u^{ex} \cdot \nabla u^{ex} \, d\Omega} \right)^{1/2} \tag{5.15}$$

- erreur en norme $\mathscr{L}^2$ mesurant la précision de l'application de la condition de Dirichlet sur Γ_D

$$\mathscr{L}^2(\Gamma_h, u) = \left(\frac{\int_{B(\Gamma D)} \Xi_B \, \left(u^h - u^{ex}\right)^2 \, d\Gamma}{\int_{B(\Gamma D)} \Xi_B \, \left(u^{ex}\right)^2 \, d\Gamma} \right)^{1/2} \tag{5.16}$$

- erreur en norme $\mathscr{L}^2$ mesurant la précision des multiplicateurs de Lagrange sur Γ_D

$$\mathscr{L}^2(\Gamma_h, \lambda) = \left(\frac{\int_{B(\Gamma D)} \Xi_B \, \left(\lambda^h - \nabla_n u^{ex}\right)^2 \, d\Gamma}{\int_{B(\Gamma D)} \Xi_B \, \left(\nabla_n u^{ex}\right)^2 \, d\Gamma} \right)^{1/2} \tag{5.17}$$

où u^{ex} et u^h sont respectivement la solution exacte et la solution XFEM du champ potentiel, et $\nabla_n u^{ex}$ et λ^h correspondent respectivement à la solution exacte de flux normal et la solution XFEM des multiplicateurs de Lagrange.

5.3.3.1 *Validation de l'approche proposée sur des problèmes en 2D*

Considérons l'exemple de l'équation de Laplace, déjà été traité par Moës et al. (2006); Mourad et al. (2007); Dolbow and Harari (2009); Béchet et al. (2009) pour imposer les conditions de Dirichlet sur une interface dans le cadre d'XFEM. Le problème est donné par :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans} \quad (x,y) \in \Omega_h :=]0,1[\times]y^*,1[\quad \text{avec} \quad y^* \in [0,1[\\ u = u^{ex}(x,y^*) & \text{sur} \quad y = y^* \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \nabla u^{ex} \cdot \mathbf{n}_o & \text{sur} \quad (x = 0,1;\ y^* < y < 1) \quad \text{et} \quad y = 1 \end{cases} \tag{5.18}$$

La solution analytique est donnée par :

$$u^{ex}(x,y) = [\cosh(\pi y) - \coth(\pi)\sinh(\pi y)]\sin(\pi x) \tag{5.19}$$

Pour ce problème, nous étudions deux exemples : le domaine carré ($y = y^* = 0$) et le domaine courbé ($y = y^*$) ; voir la figure 5.30. Notons que les conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur la partie inférieure du domaine carré et sur la partie courbe du domaine courbé.

Remarque : La construction de chaque domaine de calcul Ω_h dont la frontière est non-conforme au maillage est réalisée par quatre Level sets ϕ_h^i (voir la figure 5.30). Des maillages polylignes Γ_h^i qui corresponds aux ϕ_h^i sont extraits afin de subdiviser la grille maillée Gr. Seules les parties des maillages polylignes Γ_h^i enfermées dans l'ensemble des éléments de frontière B seront utilisées pour imposer les conditions aux limites. Les éléments de frontière $E_B \in B$ ceux qui contiennent des coins sont séparés en deux catégories : notées $E_B(1)$ et $E_B(2)$. Ces deux catégories sont respectivement les éléments de frontière qui possèdent des conditions aux limites de même type et mixtes.

Domaine implicite carré En premier lieu, aux fins de comparaisons, nous présentons deux tests numériques pour le cas d'un domaine carré avec la méthode mixte standard. Le premier test est réalisé avec un maillage conforme triangulaire non structuré et le deuxième en utilisant un maillage non-conforme triangulaire non structuré sans prise en compte de l'algorithme de restriction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange.

Dans le cas test du domaine non-conforme au maillage, un espace linéaire par morceaux des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h$ est construit sur les nœuds de l'ensemble des segments

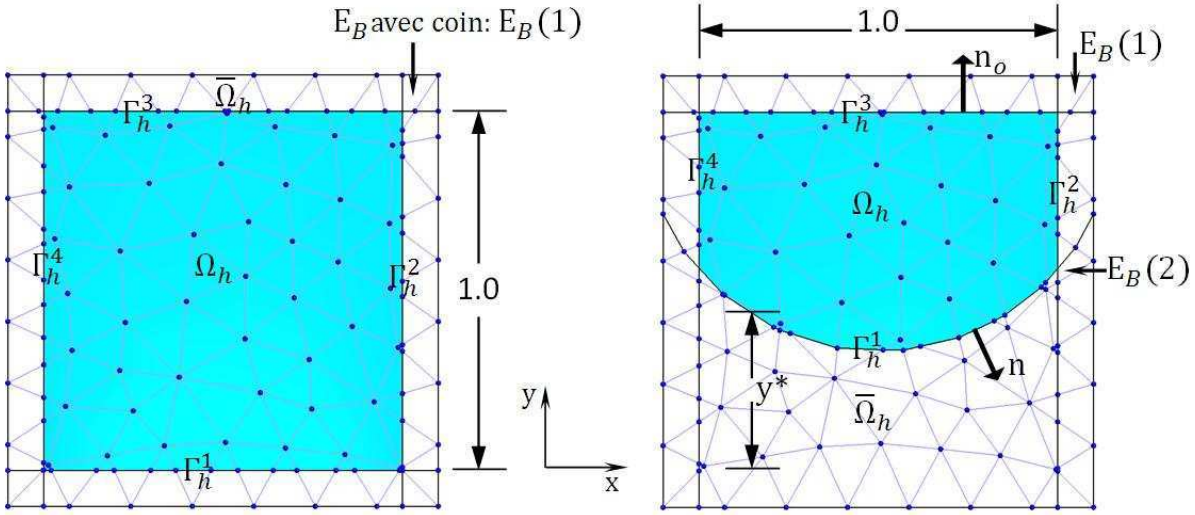


FIGURE 5.30 – Domaines de calcul Ω_h pour les problèmes à frontière libre.

de droite qui constituent la partie inférieure de la frontière Γ_h à l'intérieur de l'ensemble des éléments de frontière B. Notons que nous traitons deux types de conditions aux limites à l'intérieur d'un élément de frontière E_B dont le support contient un coin. Par conséquent, les intégrales sur les deux parties de la frontière à l'intérieur de $E_B(2)$ sont discontinues au point virtuel du coin. Ces intégrales sont calculées à l'aide de quadrature de Gauss et de la fonction indicatrice Ξ_B (*cf.* Section 5.1).

Les figures 5.31 et 5.32 présentent les résultats obtenus des divers normes en fonction de la taille du maillage h. Les taux de convergence dans le cas de la méthode des éléments finis (ÉF) des erreurs relatives (5.15),(5.16) et (5.17) (voir la figure 5.31) en utilisant des éléments triangulaires linéaires sont respectivement $O(h^{0.95})$, $O(h^2)$ et $O(h^{1.33})$. Ils indiquent que les calculs ont atteint une convergence raisonnable pour l'approximation de la condition de Dirichlet et de flux sur la partie inférieure du domaine carré, et ont fourni un taux de convergence en norme de l'énergie qui est légèrement inférieur à la valeur théorique de l'interpolation linéaire, *i.e.* $O(h^{p=1})$.

Cependant, la solution XFEM en utilisant un maillage non-conforme et la méthode mixte standard ne permet pas d'avoir des taux de convergence optimaux (voir la figure 5.32). Le taux de convergence sous-optimal de l'erreur en énergie s'explique par une approximation beaucoup plus élevée de la condition de Dirichlet sur la partie inférieure du domaine carré. Cela provoque une sur-contrainte de l'espace de la variable primale qui donne lieu à des oscillations des multiplicateurs de Lagrange sur la frontière de Dirichlet. Ces oscillations ont été déjà observées dans les travaux de Ji and Dolbow (2004); Moës et al. (2006), et peuvent être éliminées en réduisant l'espace des multiplicateurs de

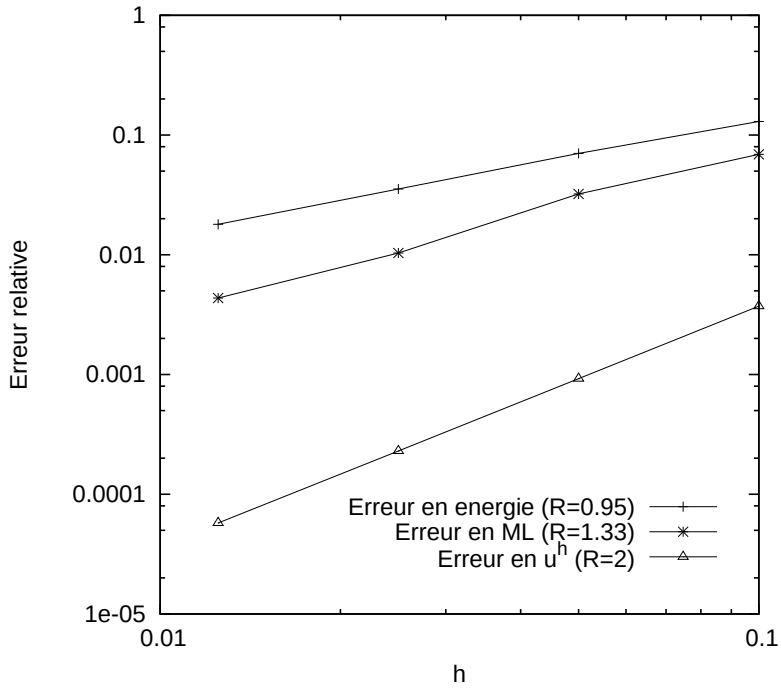


FIGURE 5.31 – Domaine carré conforme au maillage : convergence de la méthode des éléments finis (ÉF).

Lagrange $\mathscr{L}_h$ comme le suggère Moës et al. (2006).

La figure 5.33 illustre la solution XFEM (u^h) du problème (5.18) obtenu sur le domaine de calcul carré (non-conforme au maillage), où la condition de Dirichlet est imposée en utilisant l'espace réduit des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$.

Les nouveaux résultats de convergence avec l'espace réduit des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h^*$ sont présentés sur la figure 5.34, où il est clair que l'analyse sur une géométrie purement non-conforme au maillage fournit des résultats très similaires à ceux obtenus par un maillage conforme (voir la figure 5.31). La méthode mixte standard (avec l'espace $\mathscr{L}_h$) a été largement améliorée au niveau des convergences en utilisant l'espace réduit $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$ des multiplicateurs de Lagrange. De plus, l'étude de convergence a également montré que l'analyse par XFEM sur un domaine défini implicitement avec des arêtes vives peut être réalisée comme dans le cas d'un domaine conforme au maillage.

Domaine implicite courbé Nous considérons le problème de Laplace sur un domaine courbé non-conforme au maillage afin d'étudier l'influence de l'application de la contrainte de Dirichlet sur les taux de convergence de l'analyse par XFEM. La figure

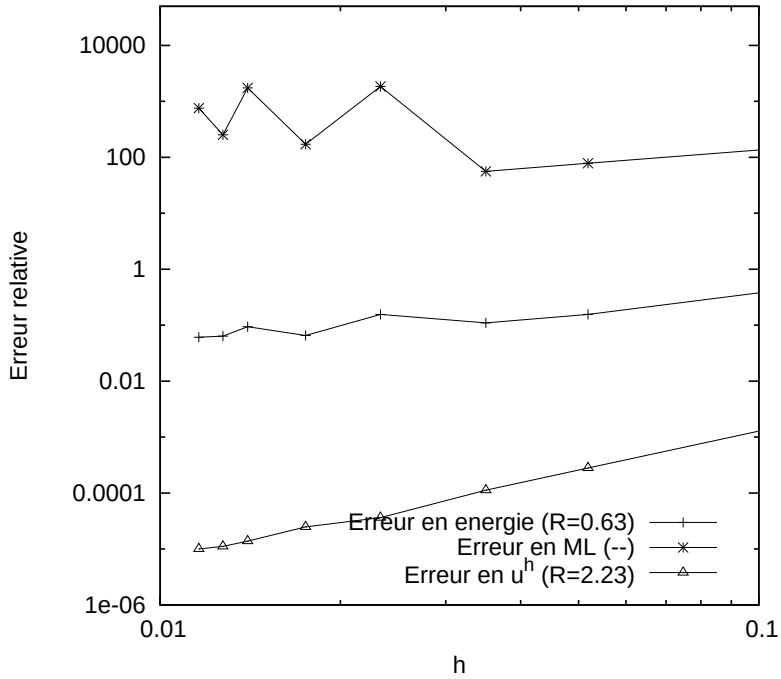


FIGURE 5.32 – Domaine carré non-conforme au maillage : convergence de la méthode XFEM en utilisant l'espace standard des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h$.

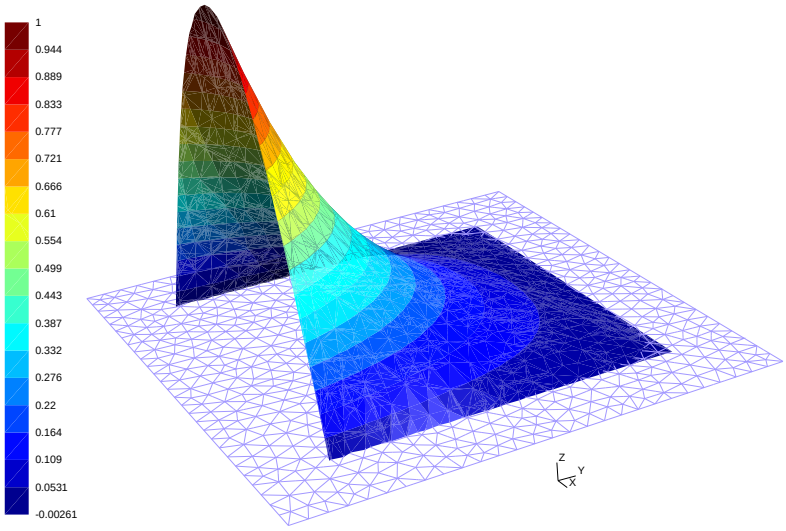


FIGURE 5.33 – Domaine carré non-conforme au maillage : la solution XFEM du problème de Laplace en utilisant une représentation implicite (Level sets).

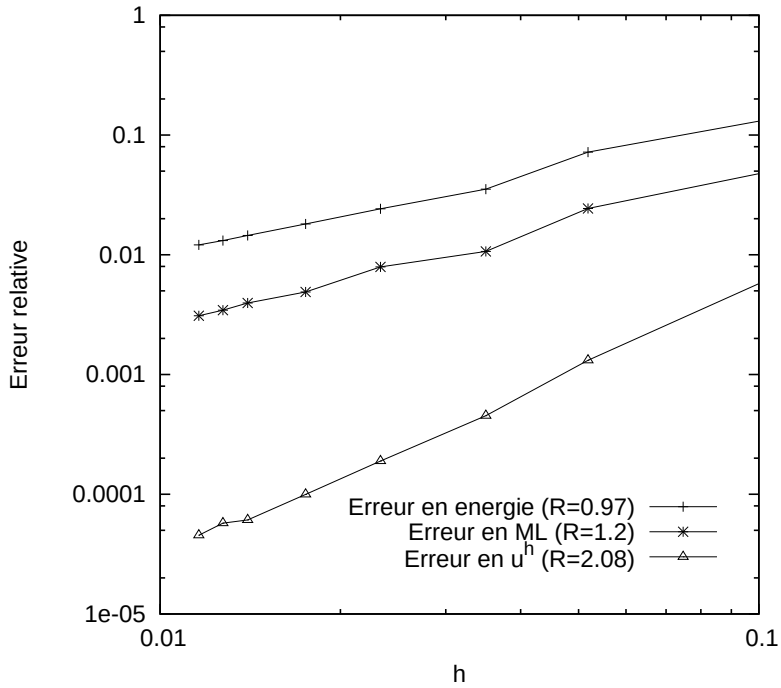


FIGURE 5.34 – Domaine carré non-conforme au maillage : convergence de la méthode XFEM en utilisant l'espace réduit $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$ des multiplicateurs de Lagrange.

5.35 montre la solution XFEM (u^h) du problème (5.18) obtenue avec des conditions aux limites mixtes, sachant que la condition de Dirichlet est imposée sur la partie courbe de la frontière.

La distribution du champ des multiplicateurs de Lagrange (flux) le long de la partie courbe du domaine est illustrée sur la figure 5.36, où il apparaît clairement que le flux normal λ^h sur l'interface courbe ne présente pas d'oscillations.

Les résultats de l'étude de convergence sont présentées sur la figure 5.37, où les taux de convergence des erreurs relatives (5.15),(5.16) et (5.17) avec des éléments triangulaires linéaires sont respectivement $O(h^{0.93})$, $O(h^{1.99})$ et $O(h^{1.18})$. Le taux de convergence mesuré en norme de l'énergie est légèrement inférieur à la valeur théorique de l'interpolation linéaire. Ce niveau de précision est comparable à celui obtenu avec un maillage conforme et il est supérieur à la précision de la méthode mixte standard (sans prise en compte de l'algorithme de restriction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange). De plus, des taux de convergence acceptables sont observés, mesurant la précision de l'imposition de la condition de Dirichlet et la précision des multiplicateurs de Lagrange sur la frontière

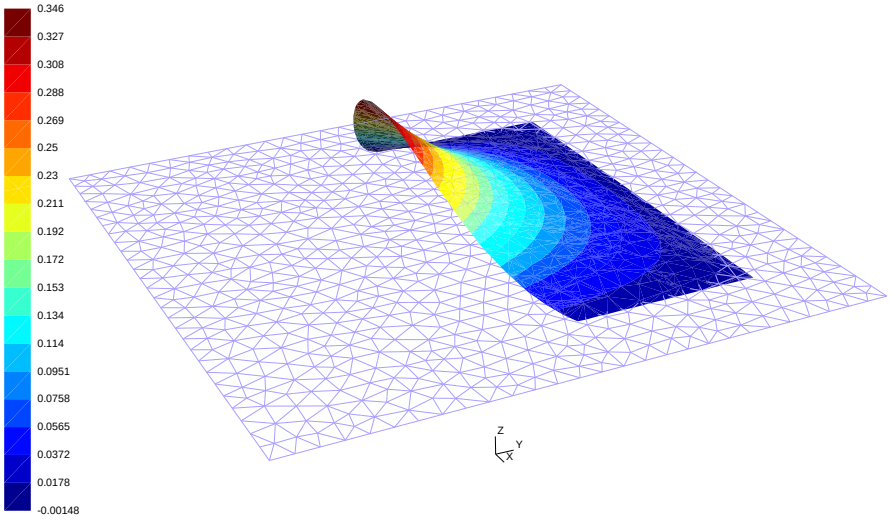


FIGURE 5.35 – Domaine courbé non-conforme au maillage : la solution XFEM du problème de Laplace en utilisant une représentation implicite (Level sets).

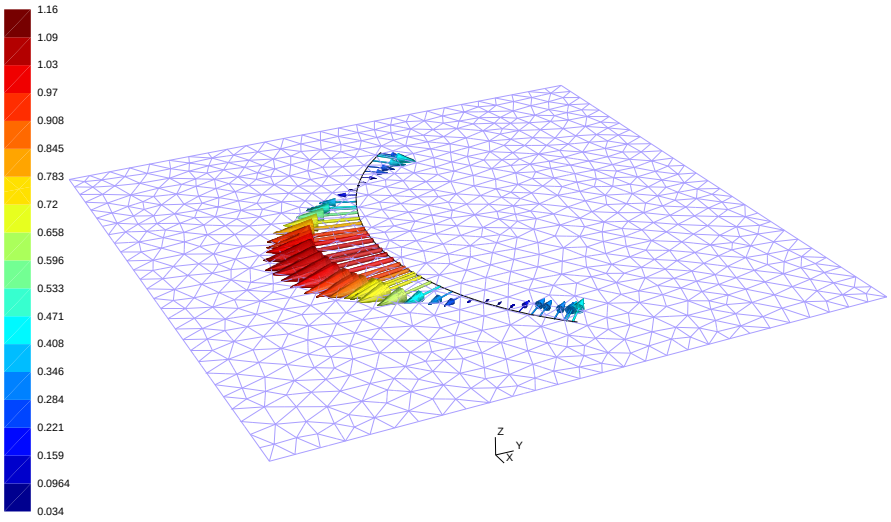


FIGURE 5.36 – Domaine courbé non-conforme au maillage : la solution XFEM du flux normal λ^h sur l'interface courbe sans oscillations.

courbe.

Les études numériques montrent que notre approche est d'une précision et stabilité comparable à la méthode des éléments finis (ÉF) avec maillage conforme, même pour des géométries avec des coins et frontières courbes. D'autres expériences numériques, qui ne sont pas présentées ici, confirment l'importance de l'intégration correcte le long des frontières avec des arêtes vives en utilisant la fonction indicatrice Ξ_B (voir la section 5.1).

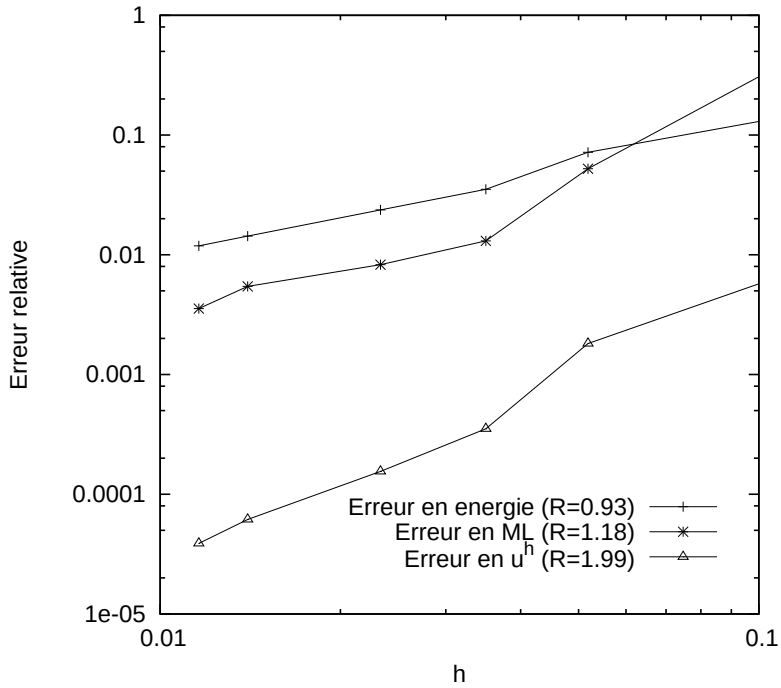


FIGURE 5.37 – Domaine courbé non-conforme au maillage : convergence de la méthode XFEM en utilisant l'espace réduit $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$ des multiplicateurs de Lagrange.

Des taux de convergence sous-optimaux et une précision plus faible sont obtenus, et cela est dû au fait que l'erreur est concentrée dans les éléments de frontière E_B contenant ces arêtes vives.

5.3.3.2 *Validation de l'approche proposée sur un problème en 3D*

Le but de cette partie est de tester la qualité de notre approche au travers d'un exemple numérique tridimensionnel. Pour cela, nous cherchons à comparer les taux de convergence obtenus par la méthode XFEM avec ceux réalisés par la méthode des éléments finis (ÉF).

Nous considérons le même problème de Laplace dans un cube unité $\Omega_h = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ dont la solution analytique est donnée par :

$$u^{ex}(x,y,z) = \sin(\pi x)\sin(\pi z)\frac{\sinh\left[\pi\sqrt{2}(1-y)\right]}{\sinh\left(\pi\sqrt{2}\right)} \tag{5.20}$$

La condition de Dirichlet u_D, correspond à la solution analytique 5.20, est imposée sur

la face inférieure ($y = 0$) de cube (voir la figure 5.38(a)) en utilisant l'espace réduit des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$. La condition de Neumann, qui correspond également à la solution analytique du flux normal, est imposée sur les cinq autres faces.

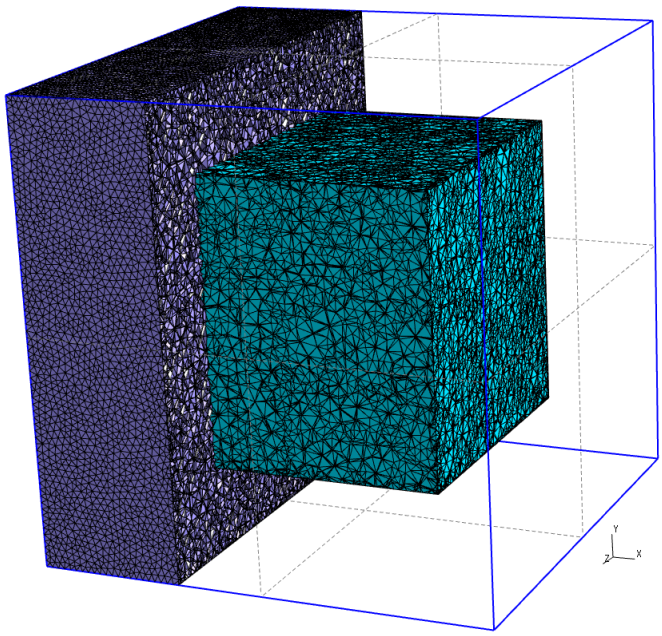
Les arêtes vives du domaine implicite sont exactement représentées à l'intérieur de la grille maillée en utilisant des opérations booléennes sur six Level sets et la technique récursive de découpage (voire la section 4.4.1). La figure 5.38 montre le domaine de calcul construit dans un maillage tétraédrique non structuré (grille), et la solution XFEM (u^h) du problème de Laplace avec des conditions aux limites mixtes.

Pour fins de comparaison, nous traitons le même problème de la formulation mixte 5.14 en utilisant la méthode des éléments finis standard (ÉF), où le maillage est conforme à la frontière du cube. L'évolution des erreurs relatives (5.15),(5.16) et (5.17) en fonction de la taille du maillage h est illustrée sur la figure 5.39(a) pour le cas d'une analyse par maillage conforme avec la méthode des ÉF et sur la figure 5.39(b) pour le cas du maillage non-conforme avec la méthode XFEM.

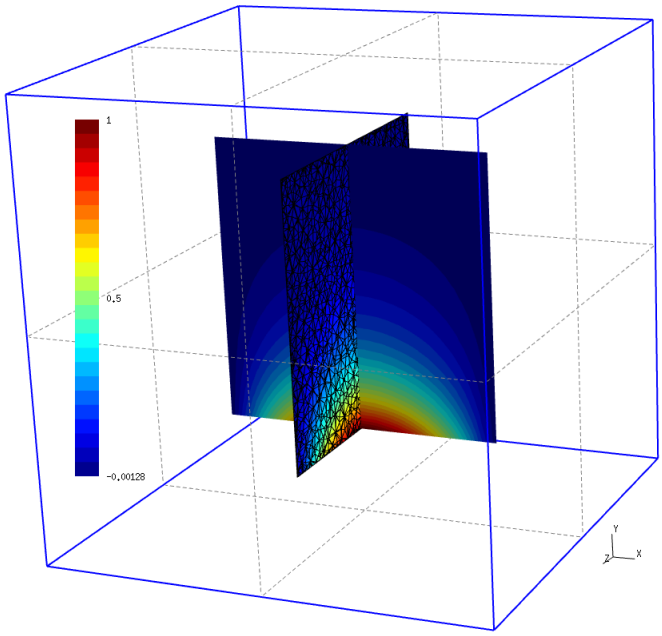
Nous comparons ensuite la précision et le taux de convergence de la méthode des ÉF classique et notre représentation implicite avec XFEM. Comme illustré sur la figure 5.40, la précision et le taux de convergence sont similaires pour les erreurs relatives en énergie et en multiplicateurs de Lagrange. En ce qui concerne l'application des conditions aux limites de Dirichlet, la précision et le taux de convergence sont pilotés par le choix de l'espace des multiplicateurs de Lagrange $\mathscr{L}_h^*$. Il est ainsi intéressant de noter que tous ces résultats numériques pour le cas de maillage non-conforme et XFEM sont comparables à ceux obtenus par un maillage conforme et la méthode des éléments finis ÉF, et ils sont supérieurs aux résultats de la méthode mixte standard.

5.4 Conclusions

Ce chapitre a permis d'évaluer l'approche de la représentation implicite et l'analyse par XFEM proposée dans ce document. Plusieurs études sur des cas simples ont montré que la précision et les taux de convergence de la solution XFEM en utilisant un maillage non-conforme sont similaires à ceux réalisés par un maillage conforme. Son efficacité a été démontrée pour la résolution d'exemples simples mettant en jeu des frontières droites ou courbes, des conditions aux limites mixtes, des géométries totalement indépendantes du maillage. De plus, la mise en place du sous-maillage pour pouvoir représenter correctement la frontière d'un objet s'est avérée d'une grande utilité dans l'analyse par XFEM d'ordre supérieur.

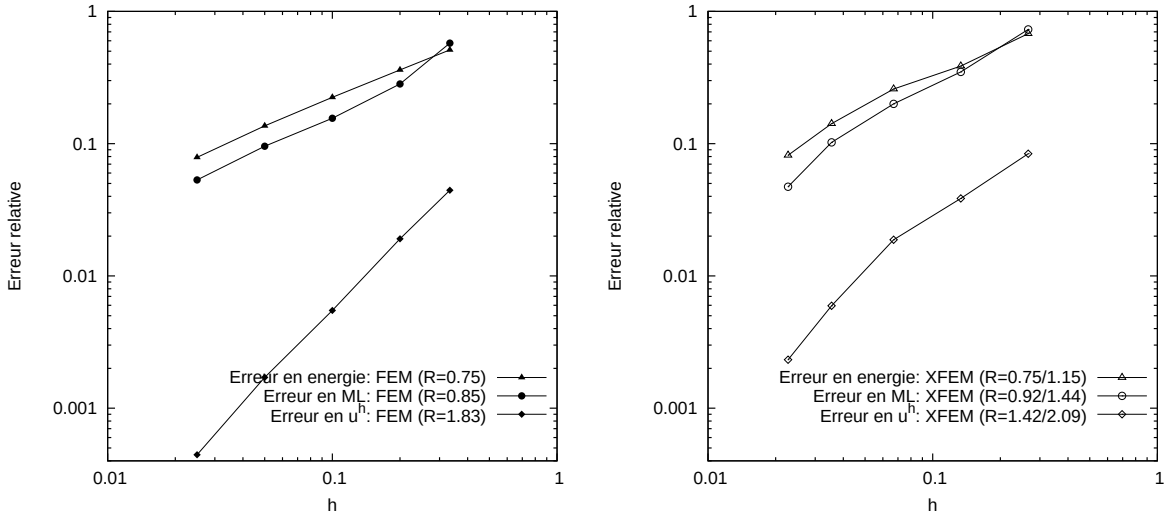


(a)



(b)

FIGURE 5.38 – La solution XFEM du problème de Laplace en utilisant un domaine de calcul implicite. (a) Représentation implicite de la géométrie (frontière non-conforme au maillage) ; (b) Illustre la vue en coupe de la solution u^h.



(a) (b)

FIGURE 5.39 – Étude de convergence de la formulation mixte sur des maillages tétraédriques non structurés : (a) Analyse par éléments finis sur un maillage conforme ; (b) Analyse par XFEM sur un maillage non-conforme en utilisant l'espace réduit $\mathscr{L}_h^* \subset \mathscr{L}_h$ des multiplicateurs de Lagrange.

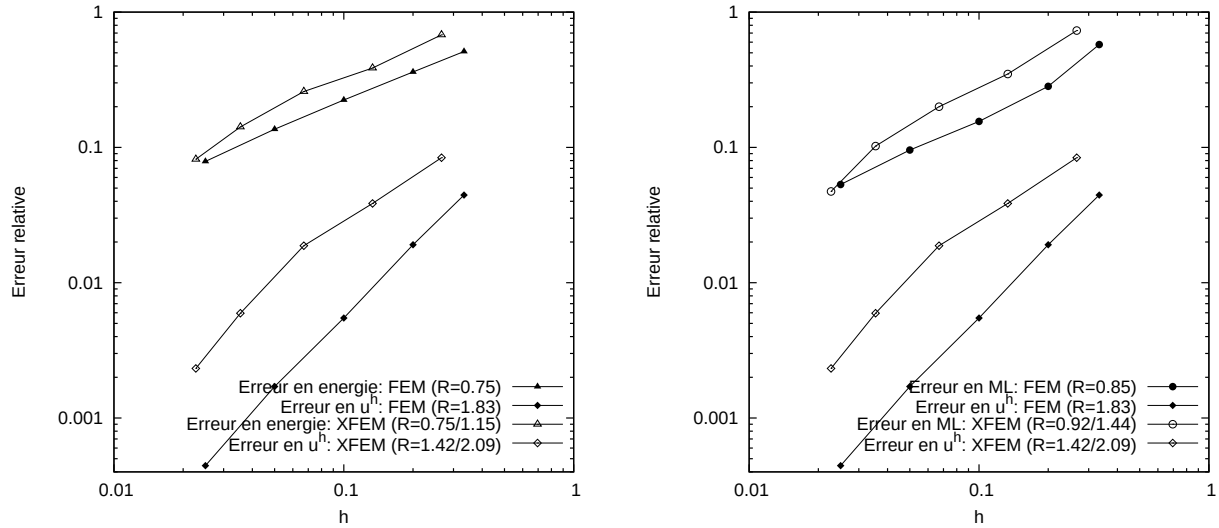


FIGURE 5.40 – Étude comparative entre les analyses sur maillage conforme (figure 5.39(a)) et non-conforme (figure 5.39(b)).

CHAPITRE 6

Conclusions et Perspectives

6.1 Conclusions

Dans cette thèse nous avons proposé une extension de l'utilisation de la méthode des Level sets et XFEM pour éviter la conformité du maillage de calcul à la frontière du domaine physique. L'approche proposée consiste à réaliser des calculs éléments finis sur des géométries représentées implicitement (numériquement) sur le maillage qui servira comme support des fonctions d'approximation. La spécificité de cette approche a conduit l'étude selon deux axes : (i) La réalisation d'une représentation géométrique sur un maillage plus simple englobant le domaine de calcul, de telle sorte que l'approximation géométrique soit indépendante de la taille des éléments du maillage ; (ii) L'analyse par XFEM sur des géométries entièrement non-conformes au maillage en assurant la stabilité et la bonne convergence de la solution similaires à celles des éléments finis classiques avec maillage conforme aux frontières.

Après avoir fait une analyse critique sur les avantages et les inconvénients de la représentation implicite, nous avons choisi de construire une représentation implicite par Level Set à partir de la représentation paramétrique. Une technique simple et précise de conversion d'une représentation paramétrique vers une représentation implicite (Level set) a été développée. Contrairement aux techniques utilisées pour calculer le champ de distance signée, nous avons développé une nouvelle approche basée sur l'intersection des arêtes de chaque élément de maillage traversé par la surface paramétrique. Nous avons mis en place une méthodologie et des techniques afin de préserver les arêtes vives et pour pouvoir représenter correctement la frontière de l'objet par Level sets. Ce choix a permis à la représentation implicite de retrouver les deux avantages importants de la représentation paramétrique : la représentation de pièce mécanique et la génération exacte des points de la frontière. De plus, à défaut d'utiliser le raffinement du maillage pour localiser les

frontières courbes, nous avons utilisé un sous-maillage intégré dans la région d'éléments qui sont coupées par la frontière pour approcher le plus possible la géométrie exacte. Ensuite, nous avons présenté les performances de l'approche proposée en termes de représentation des structures d'une manière implicite indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage) en deux et trois dimensions.

Après avoir introduit la représentation par Level sets d'un objet complet, nous avons adapté la méthode XFEM pour pouvoir réaliser des calculs éléments finis indépendamment du maillage en deux et trois dimensions. Dans un premier temps, nous avons adapté l'intégration numérique classique d'XFEM afin d'intégrer correctement de part et d'autre des interfaces complexes. En ce qui concerne l'imposition des conditions aux limites de type Dirichlet dans le contexte d'XFEM, nous avons fait le choix d'utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange afin d'éviter les paramètres prédéfinis par l'utilisateur lors de l'utilisation des autres techniques. Après avoir réalisé des cas tests, nous avons pu constater que le choix classique de l'espace des multiplicateurs de Lagrange conduit à des oscillations des multiplicateurs et diminue le taux de convergence globale. Afin de stabiliser la formulation mixte des systèmes d'EDP, nous avons adapté la technique proposée par Moës et al. (2006); Géniaut et al. (2007) et Béchet et al. (2009) pour imposer correctement la condition de Dirichlet sur une interface ouverte. La validation sur des exemples académiques avec des éléments linéaires montre que l'analyse par XFEM sur des géométries non-conformes au maillage est d'une précision et stabilité comparable à la méthode des éléments finis (ÉF) avec maillage conforme, même pour des géométries avec des arêtes vives et frontières courbes.

De plus, une analyse de convergence a permis de confirmer que le taux de convergence en fonction de la taille des éléments du maillage lors d'utilisation des éléments finis d'ordre supérieur est contrôlé par l'erreur d'approximation de la frontière courbe. La combinaison de la représentation par Level set et la technique de sous-maillage local autour de la frontière courbe a permis d'améliorer la précision de la solution pour un coût de calcul additionnel peu élevé par rapport à la méthode des éléments finis (ÉF). En effet, l'amélioration de la précision et le taux de convergence en utilisant le sous-maillage autour des frontières courbes n'entrainera pas une augmentation des degrés de libertés du modèle élément finis, ni le changement du maillage principal, là où une diminution de la taille des éléments en respectant les zones de forte courbure et par conséquent une augmentation des degrés de libertés du modèle aurait été nécessaire dans le cadre de la méthode des éléments finis classique.

Notre approche peut être considérée comme une extension du travail effectué par Belytschko et al. (2003a) qui ont introduit l'idée d'utiliser un domaine implicite dans le

cadre d'XFEM. Cette approche s'avère prometteuse pour réduire les difficultés associées à la génération de maillage ÉF.

6.2 Perspectives

Nous avons montré l'intérêt de représenter des objets complexes par Level sets à partir de la représentation paramétrique, et encore de réaliser des analyses par XFEM sans être contraint de mailler la frontière de l'objet et avoir la stabilité et la convergence des ÉF standard. Néanmoins de nombreuses pistes de recherche restent à explorer afin de mettre au point un code de simulation permettant l'élimination des limitations fondamentales associées au maillage, tout en conservant les avantages des ÉF :

- En tenant compte de l'ensemble des nouveaux résultats obtenus, il serait intéressant d'exploiter directement les surfaces NURBS [11] des logiciels CAO afin de les transcrire en Level sets automatiquement. Ainsi, il serait possible d'utiliser les informations des surfaces NURBS de l'objet pour représenter correctement les surfaces courbes indépendamment de la discrétisation spatiale (maillage) afin de réaliser des analyses par XFEM d'ordre supérieur. Dans la suite, il serait intéressant de pouvoir tester cette approche dans un cas industriel, en comparant le temps de calcul lié à l'opération globale (conversion du fichier CAO en représentation Level set et analyse par XFEM) avec la méthode standard (préparation de la géométrie, maillage et analyse par ÉF).
- L'ajout du sous-maillage permet une meilleure prise en compte des frontières courbes, et par conséquent l'amélioration de la précision et le taux de convergence lors de l'utilisation d'XFEM d'ordre supérieur. Une perspective importante est de pouvoir intervenir automatiquement sur le niveau de raffinement du sous-maillage en se basant sur la courbure locale de la surface paramétrique.
- Notre représentation est basée sur un champ de distance signée, par conséquent, elle peut être utilisée pour construire des fonctions d'enrichissement dans le cadre de la modélisation des interfaces matériaux par XFEM. Cependant, les fonctions d'enrichissement existantes ne sont adaptées que pour les interfaces linéaires à l'intérieur de l'élément du maillage. Toutefois, des travaux récents [Dréau et al. (2010); Cheng and Fries (2010)] ont traité le problème des interfaces courbes et XFEM d'ordre supérieur. Comme cela a été déjà réalisé en 2D, un axe de recherche serait de combiner la modélisation des interfaces matériaux courbes à notre représentation implicite, avec pour objectif de l'étendre en 3D.

11. Non Uniform Rational B-Splines

– Un point très important que doit pouvoir gérer la méthode XFEM est l'application des conditions aux limites de Dirichlet en utilisant des éléments d'ordre supérieur. L'imposition de cette condition par l'approche des multiplicateurs de Lagrange est encore au stade de la recherche. Une autre possibilité consistant à utiliser l'approche de Nitsche avec des éléments d'ordre supérieur [Legrain et al. (2011)], est en train de voir le jour.

La simulation par XFEM sur des géométries représentées par des Level sets à partir de la représentation paramétrique est un projet ambitieux qui ouvre de nombreuses perspectives de recherche, notamment dans le monde de l'intégration CAO-calcul [Hughes et al. (2005)] et l'optimisation topologique [Belytschko et al. (2003b), Van Miegroet and Duysinx (2007)].

6.3 Publications

Ces travaux ont fait l'objet de publications dans une revue internationale [Moumnassi et al. (2011a)], chapitre de livre [Bordas et al. (2010)], d'une communication dans une conférence nationale [Moumnassi et al. (2009a)] et de trois conférences internationales [Moumnassi et al. (2009b), Moumnassi et al. (2011b), Moumnassi et al. (2011c)].

Bibliographie

Areias, P. M. A., Belytschko, T., 2006. Two-scale shear band evolution by local partition of unity. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 66 (5), 878–910.

Arnold, D. N., Brezzi, F., Cockburn, B., Marini, L. D., 2001. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. SIAM J. Numer. Anal. 39 (5), 1749–1779.

Babuška, I., Jun. 1973. The finite element method with lagrangian multipliers. Numerische Mathematik. 20 (3), 179–192.

Babuška, I., Melenk, J. M., 1997. The partition of unity method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40 (4), 727–758.

Barth, T. J., Sethian, J. A., 1998. Numerical schemes for the hamilton-jacobi and level set equations on triangulated domains. Journal of Computational Physics. 145 (1), 1 – 40.

Bastian, P., Engwer, C., 2009. An unfitted finite element method using discontinuous galerkin. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 79 (12), 1557–1576.

Béchet, É., Moës, N., Wohlmuth, B., 2009. A stable lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 78 (8), 931–954.

Belytschko, T., Black, T., 1999. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int. J. Numer. Meth. Engng. 45 (5), 601–620.

Belytschko, T., Gracie, R., 2007. On xfem applications to dislocations and interfaces. International Journal of Plasticity. 23 (10-11), 1721 – 1738.

Belytschko, T., Parimi, C., Moës, N., Sukumar, N., Usui, S., 2003a. Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 56 (4), 609–635.

Belytschko, T., Xiao, S. P., Parimi, C., 2003b. Topology optimization with implicit functions and regularization. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 57 (8), 1177–1196.

Bordas, S. P. A., Rabczuk, T., Rodenas, J.-J., Kerfriden, P., Moumnassi, M., Belouettar, S., 2010. Recent advances towards reducing the meshing and re-meshing burden in computational sciences. Computational Technology Reviews. 2, 51 – 82.

Brebbia, C. A., 1978. The Boundary Element Method for Engineers. Wiley : New York.

Brezzi, F., Fortin, M., 1991. Mixed and hybrid finite element methods. Springer-Verlag New York, Inc.

Cheng, K. W., Fries, T.-P., 2010. Higher-order xfem for curved strong and weak discontinuities. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 82 (5), 564–590.

Chessa, J., Belytschko, T., 2003. An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 58 (13), 2041–2064.

Chessa, J., Smolinski, P., Belytschko, T., 2002. The extended finite element method (xfem) for solidification problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 53 (8), 1959–1977.

Chessa, J., Wang, H., Belytschko, T., 2003. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 57 (7), 1015–1038.

Cottrell, J. A., Hughes, T. J. R., Bazilevs, Y., 2009. Isogeometric analysis : toward integration of CAD and FEA. Wiley.

Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N., Belytschko, T., 2000. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. Int. J. Numer. Meth. Engng. 48 (12), 1741–1760.

Dolbow, J., Franca, L., 2008. Residual-free bubbles for embedded dirichlet problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 197 (45-48), 3751 – 3759.

Dolbow, J., Harari, I., 2009. An efficient finite element method for embedded interface problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 78 (2), 229–252.

Dolbow, J., Moës, N., Belytschko, T., 2000. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. Finite Elements in Analysis and Design. 36 (3-4), 235 – 260.

Dréau, K., Chevaugeon, N., Moës, N., 2010. Studied x-fem enrichment to handle material interfaces with higher order finite element. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 199 (29-32), 1922 – 1936.

Duarte, C. A., Hamzeh, O. N., Liszka, T. J., Tworzydlo, W. W., 2001. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190 (15-17), 2227 – 2262.

Düster, A., Parvizian, J., Yang, Z., Rank, E., 2008. The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 197 (45-48), 3768 – 3782.

Elias, R. N., Martins, M. A. D., Coutinho, A. L. G. A., 2007. Simple finite element-based computation of distance functions in unstructured grids. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 72 (9), 1095–1110.

Fernández-Méndez, S., Huerta, A., 2004. Imposing essential boundary conditions in mesh-free methods. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 193 (12-14), 1257 – 1275.

Fries, T.-P., Belytschko, T., 2010. The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 84 (3), 253–304.

Géniaut, S., Massin, P., Moës, N., 2007. A stable 3d contact formulation using x-fem. European Journal of Computational Mechanics. 16, 259–275.

George, P.-L., Borouchaki, H., 2011. Construction de maillages de degré 2- partie 3 : Tétraèdre p2. Tech. rep., GAMMA3 - INRIA.

Geuzaine, C., Remacle, J.-F., 2009. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 79 (11), 1309–1331.

Gravouil, A., Moës, N., Belytschko, T., 2002. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets - part ii : Level set update. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 53 (11), 2569–2586.

Hansbo, A., Hansbo, P., 2002. An unfitted finite element method, based on nitsche's method, for elliptic interface problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 191 (47-48), 5537 – 5552.

Hart, J. C., 1996. Sphere tracing : a geometric method for the antialiased ray tracing of implicit surfaces. The Visual Computer. 12, 527–545.

Hartmann, E., 1998. A marching method for the triangulation of surfaces. The Visual Computer. 14, 95–108.

Hartmann, E., 1999. On the curvature of curves and surfaces defined by normalforms. Computer Aided Geometric Design. 16 (5), 355 –376.

Hautefeuille, M., Annavarapu, C., Dolbow, J., 2011. Robust imposition of dirichlet boundary conditions on embedded surfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering.

Hilton, A., Stoddart, A. J., Illingworth, J., Windeatt, T., 1996. Marching triangles : range image fusion for complex object modelling. In : Proceedings of the International Conference on Image Processing. Vol. 1. pp. 381–384.

Hu, S.-M., Wallner, J., 2005. A second order algorithm for orthogonal projection onto curves and surfaces. Computer Aided Geometric Design. 22 (3), 251–260.

Hughes, T., Cottrell, J., Bazilevs, Y., 2005. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 194 (39-41), 4135 – 4195.

Ji, H., Dolbow, J. E., 2004. On strategies for enforcing interfacial constraints and evaluating jump conditions with the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 61 (14), 2508–2535.

Jones, M. W., 2006. 3d distance fields : A survey of techniques and applications. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 12, 581–599.

Kumar, A. V., Padmanabhan, S., Burla, R., 2008. Implicit boundary method for finite element analysis using non-conforming mesh or grid. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 74 (9), 1421–1447.

Legrain, G., Chevaugeon, N., Dréau, K., 29th June – 1st July 2011. High order extended finite element method and level sets : Uncoupling geometry and approximation. 2nd International Conference on the Extended Finite Element Method, Cardiff University, UK.

Lew, A. J., Buscaglia, G. C., 2008. A discontinuous-galerkin-based immersed boundary method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 76 (4), 427–454.

Liu, F., Borja, R. I., 2008. A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 76 (10), 1489–1512.

Lo, S. H., 1985. A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 21 (8), 1403–1426.

Lorensen, W. E., Cline, H. E., 1987. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. SIGGRAPH Comput. Graph. 21, 163–169.

Luo, X.-J., Shephard, M. S., O'Bara, R. M., Nastasia, R., Beall, M. W., 2004. Automatic p-version mesh generation for curved domains. Engineering with Computers 20 (3), 273–285.

Luo, X.-J., Shephard, M. S., Remacle, J.-F., 2001. The influence of geometric approximation on the accuracy of high order methods. Tech. rep., SCOREC.

Ma, Y. L., Hewitt, W. T., 2003. Point inversion and projection for nurbs curve and surface : Control polygon approach. Computer Aided Geometric Design. 20 (2), 79 – 99.

Marchandise, E., Remacle, J.-F., Chevaugeon, N., 2006. A quadrature-free discontinuous galerkin method for the level set equation. Journal of Computational Physics. 212 (1), 338–357.

Mayer, U. M., Gerstenberger, A., Wall, W. A., 2009. Interface handling for three-dimensional higher-order xfem-computations in fluid-structure interaction. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 79 (7), 846–869.

Melenk, J. M., Babuška, I., 1996. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 139 (1-4), 289–314.

Moës, N., Béchet, E., Tourbier, M., 2006. Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 67 (12), 1641–1669.

Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P., Remacle, J. F., 2003. A computational approach to handle complex microstructure geometries. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 192 (28-30), 3163 – 3177.

Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T., 1999. A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 46 (1), 131–150.

Moës, N., Gravouil, A., Belytschko, T., 2002. Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets - part i : Mechanical model. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 53 (11), 2549–2568.

Moumnassi, M., Béchet, E., Belouettar, S., François, V., Quoirin, D., Potier-Ferry, M., 25–29 Mai 2009a. Calculs de structures basés sur la technique des level sets et la méthode de partition de l'unité. 9ème colloque national en calcul des structures, Giens, France.

Moumnassi, M., Béchet, E., Belouettar, S., François, V., Quoirin, D., Potier-Ferry, M., 23–26 June 2009b. Finite element analysis of structures using level sets and partition of unity methods. NACONF 2009 : 23rd Biennial Conference on Numerical Analysis, Glasgow, Scotland, UK.

Moumnassi, M., Belouettar, S., Béchet, E., Bordas, S. P., Quoirin, D., Potier-Ferry, M., 2011a. Finite element analysis on implicitly defined domains : An accurate representation based on arbitrary parametric surfaces. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 200 (5-8), 774–796.

Moumnassi, M., Belouettar, S., Bordas, S. P., Béchet, E., Quoirin, D., Potier-Ferry, M., 29th June – 1st July 2011b. Accurate and optimally convergent implicit geometry definition and finite element analysis preserving sharp edges and corners from parametric primitives. 2nd International Conference on the Extended Finite Element Method, Cardiff University, UK.

Moumnassi, M., Belouettar, S., Bordas, S. P., Béchet, E., Quoirin, D., Potier-Ferry, M., 25–28 July 2011c. Analysis on implicit objects definition with extended finite element method. 11th US National Congress on Computational Mechanics, Minneapolis, Minnesota, USA.

Mourad, H. M., Dolbow, J., Harari, I., 2007. A bubble-stabilized finite element method for dirichlet constraints on embedded interfaces. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 69 (4), 772–793.

Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P., 1992. Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements. Computational Mechanics. 10 (5), 307–318.

Nitsche, J., 1971. über ein variationprinzip zur lösung von dirichlet-problem bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 36 (36-41), 9–15.

Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 1996. A finite point method in computational mechanics. applications to convective transport and fluid flow. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 39 (22), 3839–3866.

Osher, S., Sethian, J. A., 1988. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. Journal of Computational Physics. 79 (1), 12 – 49.

Pereira, J. P., Duarte, C. A., Guoy, D., Jiao, X., 2009. hp-generalized fem and crack surface representation for non-planar 3-d cracks. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 77 (5), 601–633.

Piegl, L., Tiller, W., 1997. The Nurbs Book. Springer.

Remacle, J.-F., Shephard, M. S., 2003. An algorithm oriented mesh database. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 58 (2), 349–374.

Ricci, A., 1972. A constructive geometry for computer graphics. The Computer Journal. 16 (2), 157–160.

Rvachev, V., 1982. Theory of r-functions and some applications. In Russian.

Sederberg, T. W., Zheng, J., Klimaszewski, K., Dokken, T., 1999. Approximate implicitization using monoid curves and surfaces. Graphical Models and Image Processing. 61 (4), 177 –198.

Shapiro, V., 1994. Real functions for representation of rigid solids. Computer Aided Geometric Design. 11 (2), 153 – 175.

Shewchuk, J. R., 2002. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. Computational Geometry. 22 (1-3), 21–74.

Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N., Belytschko, T., 2001. Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 51 (8), 943–960.

Strouboulis, T., Copps, K., Babuška, I., 2001. The generalized finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190 (32-33), 4081 – 4193.

Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N., Belytschko, T., 2001. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 190 (46-47), 6183 – 6200.

Sukumar, N., Moës, N., Moran, B., Belytschko, T., 2000. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 48 (11), 1549–1570.

Szabó, B., Babuska, I., 1991. Finite Element Analysis. Wiley.

Van Miegroet, L., Duysinx, P., 2007. Stress concentration minimization of 2d filets using x-fem and level set description. Structural and Multidisciplinary Optimization 33 (4), 425–438.

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R., 1991. The Finite Element Method. Vol. 1,2,3. McGraw-Hill, London.