



**HAL**  
open science

# Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile. Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique

Martin Schwartz

► **To cite this version:**

Martin Schwartz. Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile. Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique. Autre. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0031 . tel-01749198

**HAL Id: tel-01749198**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749198>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE  
ECOLE DES MINES DE NANCY  
INSTITUT JEAN LAMOUR (UMR 7198)  
ECOLE DOCTORALE : ENERGIE MECANIQUE ET MATERIAUX

---

**CONTRIBUTION A LA RESOLUTION DE PROBLEMES  
TRIDIMENSIONNELS DE FISSURATION FRAGILE  
VERS L'UTILISATION D'UN MODELE NON-LOCAL DE  
COMPORTEMENT ELASTIQUE**

---

THESE DE DOCTORAT en Sciences des Matériaux

Présentée par **Martin SCHWARTZ**

Pour l'obtention du titre de

DOCTEUR de l'I.N.P.L

Spécialité : Science et Ingénierie des Matériaux et Métallurgie

Soutenue publiquement le 10 avril 2012 à l'Ecole des Mines de Nancy devant le jury :

M. Moussa NAIT-ABDELAZIZ.....	Rapporteur
M. Frédéric LANI.....	Rapporteur
M. Gérard MICHOT.....	Examineur
Mme Hélène WELEMANE.....	Examineur
M. Ngadia Taha NIANE.....	Examineur
M. Olivier DAVODET.....	Invité
M. Richard KOUITAT.....	Directeur de thèse



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement les membres de mon jury pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de mon manuscrit. Je remercie particulièrement mes rapporteurs M. Moussa Nait-Abdelaziz et M. Frédéric Lani, ainsi que Mme Hélène Weleman et M. Gérard Michot dans leurs rôles d'examineurs, pour les remarques constructives qu'ils m'ont adressées. Un remerciement spécial à M. Gérard Michot qui a par ailleurs accepté la responsabilité de présider le jury.

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une collaboration entre l'Institut Jean Lamour de Nancy et le groupe PSA Peugeot Citroën. Je veux donc tout d'abord remercier M. Gérard Henrion et M. Emmanuel Chamouton pour m'avoir accueilli dans leurs locaux, respectivement au Laboratoire en Science et Génie des Surfaces (LSGS) à Nancy, et au sein de l'entité INM sur le site technique PSA de La Garenne Colombes.

Mes recherches n'auraient pu aboutir sans la patience et la pédagogie de mon directeur de thèse Richard Kouitat. Sa franchise et ses analyses sans concessions ont largement contribué à l'avancement de mon travail. Pour cela, je tiens à lui adresser mes plus sincères remerciements. Je veux aussi remercier ici Olivier Davodet et Taha Niane pour leur accueil chez PSA et l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ma thèse.

Je voudrais dire un grand merci à toute la bande du LSGS qui m'a accueilli à bras ouverts et qui a facilité mon intégration au laboratoire à Nancy. Je pense en particulier aux petites « bretonnes » Maud et Nolwenn, à Hugo, Toony, Nico, Cyril, Greg A. et Greg M., Alan, Jonathan, Thomas... J'ai passé beaucoup de bons moments qui font oublier que la thèse n'est pas toujours un long fleuve tranquille. Un remerciement spécial à Francis Kosior pour son aide dans mes démêlés informatiques.

Du côté de La Garenne, j'aimerais saluer tous les membres (ou ex membres) de la petite mais dynamique équipe MAHC, JP, Marc, Jérôme et Julien, pour leur bonne humeur et leur sens de l'humour, et les remercier pour leur aide dans la dernière ligne droite. Leurs stations de travail et le serveur INM doivent bien mieux fonctionner depuis que je ne lance plus de calculs dessus...

Je voudrais remercier tous mes proches qui m'ont porté pendant ces trois années.

Je pense à tous mes amis, qui m'ont permis de me distraire de la traque des bugs et anomalies cachés dans mon programme. Dans ce domaine, un remerciement spécial à Guillaume. Une pensée aussi pour ceux qui sont dans la dernière ligne droite de la rédaction (Jule, Jerem, Matthieu). Courage !

Je tiens aussi à remercier particulièrement la famille d'Aurélie pour sa gentillesse à mon égard, spécialement Isabelle et Jean Noel, ainsi que Claire (qui a tout compris à ma soutenance), Julie, Marie, Romain et Adrien.

Enfin, je voudrais remercier mes parents pour leur soutien sans failles et leurs conseils tout au long de ma thèse. Ils m'ont permis de relativiser mes difficultés et de continuer à avancer. J'adresse enfin tout mon amour à Aurélie, qui a pour ainsi dire « vécu » cette thèse avec moi, en partageant mes moments de doute et de déprime, alors qu'elle-même n'avait pas encore soutenu, et qui m'a toujours remis sur la bonne voie.



---

## RESUME

---

Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile - Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique

Mots clés : Fissuration fragile – Elasticité non-locale - Eléments de frontière – Méthodes sans maillage

Au cours de cette thèse, nous avons développé un outil numérique, basé sur une formulation intégrale en éléments de frontière, qui permet une analyse classique du comportement d'une fissure 3D soumise à des sollicitations mécaniques complexes. Cet outil industriel est destiné à être intégré dans un code de calcul à usage industriel.

Dans le but d'appréhender l'impact de la microstructure sur le comportement en fissuration fragile, nous nous sommes intéressés aux modèles de comportement non local. Nous avons commencé par adopter le modèle de comportement élastique non local de Eringen, qui permet de décrire plus finement le comportement élastique au voisinage de la fissure en prenant en compte les interactions à longue distance au sein du matériau. Cette modélisation du comportement conduit, contrairement à l'approche classique, à un champ de contrainte fini sur le front de la fissure et localement maximal en avant du front. Ces résultats montrent qu'il est possible de prévoir la stabilité et la direction de propagation de la fissure à l'aide d'un critère plus simple et plus naturel, basé sur les variations du champ de contrainte au voisinage du front de la fissure. La stratégie numérique adoptée permet de traiter indifféremment des cas de fissure en traction, compression, cisaillement ou sollicitation mixte.

L'intérêt de l'approche non-locale étant clairement démontré, nous avons considéré la version améliorée du modèle de Eringen telle que proposée par Polizzotto. Cette modélisation est la plus appropriée pour les milieux finis et requiert une mise en œuvre numérique particulière. Les bases d'une méthodologie numérique, initiée par R. Kouitat ont été établies. Cette méthode est fondée sur un couplage des éléments de frontière avec une méthode de collocation par points d'équations aux dérivées partielles. Les premiers résultats obtenus dans ce cadre sont très encourageants et montrent qu'il sera effectivement possible de traiter le phénomène irréversible de fissuration de la même façon que les problèmes de plasticité.





---

## ABSTRACT

---

Contribution to the treatment of three-dimensional brittle cracking problems – Toward the use of a nonlocal elasticity model

Keywords: Brittle fracture – Nonlocal elasticity – Boundary Element Method – Meshfree method

In this thesis, we have developed a numerical tool, based on a classical boundary elements method, which allows a conventional analysis of a stationary crack in a 3D specimen under complex mechanical loading. In order to assess the impact of the microstructure on the brittle fracture, we were interested in non local models of behavior. First, we have adopted the non local elastic model due to Eringen. This refined constitutive equation allows to account for long range interactions in the description of the elastic behavior in the vicinity of the crack front. Unlike the traditional approach, this type of model leads to a finite stress field at the crack front. Moreover, the stress is locally maximal ahead of the front. These interesting results indicate that it is possible to predict the stability and direction of crack propagation in a simple and more naturel way by using stress based criteria. The implemented numerical strategy can handle cases of crack in tension or compression, under shear stress or mixed loadings.

Having clearly highlighted the interest of non local models, we have adopted the improved version of Eringen elastic model as proposed by Polizzotto. This elastic model is applicable to finite domains and requires a specific numerical treatment. The basis of such a numerical strategy initiated by R. Kouitat has been established. The method couples the conventional boundary element method with local point interpolation of a strong form differential equation. Promising results are obtained and show that with such modeling of material behavior, it is possible to describe the irreversible process of fracturing in a similar way as plasticity.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	13
<b>Chapitre 1 : Mécanique de l'endommagement et de la rupture - Approche non locale des problèmes de fissuration</b> .....	17
Introduction.....	19
1.1. Mécanismes physiques de la rupture et de l'endommagement.....	21
1.1.1. Clivage et glissement des plans cristallographiques dans un monocristal .....	21
1.1.2. Clivage et glissement des plans cristallographiques dans un polycristal .....	25
1.1.3. Influence des grains et joints de grain sur la propagation des fissures .....	27
1.1.4. Contraintes théoriques de rupture.....	28
1.1.5. Défauts microscopiques et macroscopiques.....	31
1.2. Approche classique des problèmes de fissuration : mécanique de la rupture .....	38
1.2.1. Rupture fragile et rupture ductile .....	38
1.2.2. La Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR).....	41
1.2.3. Bilan .....	50
1.3. Vers l'utilisation d'un modèle de comportement non-local .....	51
1.3.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non-locale .....	51
1.3.2. Théories non-locales à gradient.....	52
1.3.3. Théories non-locales intégrales .....	53
Références .....	57
<b>Chapitre 2 : Traitement du problème de fissuration dans l'approche classique de la mécanique linéaire de la rupture</b> .....	63
Introduction.....	65
2.1. Présentation du problème .....	67
2.2. Equations d'équilibre et de comportement pour un solide élastique fissuré .....	68
2.2.1. Equation d'équilibre et conditions aux limites.....	68
2.2.2. Relation de comportement classique.....	69
2.3. Equations intégrales et méthode des éléments de frontière .....	71
2.3.1. La méthode des éléments de frontière.....	71
2.3.2. Equations intégrales pour un solide élastique sans fissure.....	72
2.3.3. Equations intégrales pour un solide élastique fissuré.....	73

2.4. Méthode numérique de calcul des facteurs d'intensité de contrainte.....	83
2.5. Résultats.....	86
2.5.1. Influence de la taille et de la forme de la fissure.....	86
2.5.2. Fissures débouchantes - Influence de la frontière .....	89
2.5.3. Fissure fermée ou partiellement fermée .....	94
2.5.4. Fissure en mode mixte – Angle de propagation.....	101
Conclusion.....	113
Annexes.....	115
Annexe 2.1 : Identité de réciprocité de Maxwell-Betti .....	115
Annexe 2.2 : Solutions fondamentales de l'élastostatique.....	117
Annexe 2.3 : Elément avec « nœuds au quart » .....	119
Annexe 2.5 : Fonctions d'interpolation conformes et non conformes .....	125
Références .....	129

### **Chapitre 3 : Traitement du problème de fissuration par une approche non-locale.....**

Introduction.....	135
3.1. Présentation du problème .....	137
3.2. Equations d'équilibre et de comportement non-locales.....	137
3.2.1. Equations d'équilibre .....	138
3.2.2. Equation de comportement.....	138
3.2.3. Fonction de caractérisation non-locale.....	138
3.3. Stratégie de calcul des contraintes non-locales.....	140
3.3.1. Cas particulier du milieu infini.....	140
3.3.2. Stratégie de calcul .....	141
3.4. Calcul des contraintes locales .....	142
3.4.1. Représentation intégrale non-régularisée des contraintes locales .....	142
3.4.2. Représentation intégrale régularisée des contraintes locales .....	143
3.4.3. Méthode de subdivision de l'élément.....	146
3.5. Calcul des contraintes non-locales.....	147
3.6. Résultats.....	149
3.6.1. Fissure circulaire dans un milieu infini à comportement élastique non-local.....	149
3.6.2. Influence de la forme de la fissure .....	156
3.6.3. Fissure débouchante en traction .....	158
3.6.4. Prédiction de l'angle de propagation.....	161

Conclusion.....	175
Références .....	177
<b>Chapitre 4 : Approche non-locale en milieu borné - Résolution par la méthode des éléments de frontière couplée à une méthode de collocation par points.....</b>	<b>181</b>
Introduction.....	183
4.1. Présentation du problème .....	185
4.1.1. Equations d'équilibre et de comportement.....	185
4.2. Stratégie de résolution numérique.....	187
4.2.1. Traitement de la solution complémentaire .....	189
4.2.2. Traitement de la solution particulière.....	189
4.2.3. Construction du système d'équations final .....	192
4.3. Validation de la stratégie pour des cas de chargement simples.....	193
4.3.1. Les fonctions radiales multi-quadriques.....	193
4.3.2. Cube soumis à un effort de traction ou de cisaillement uniforme.....	194
4.3.3. Cylindre en torsion – Influence de la longueur interne caractéristique.....	199
4.3.4. Bilan .....	201
4.4. Fissure circulaire en mode d'ouverture .....	201
Conclusion.....	207
Annexe .....	209
Références .....	215
Conclusion générale.....	217
Résumé.....	219
Abstract.....	223



# Introduction générale

Que ce soit pour étendre le champ des connaissances ou pour améliorer les performances de leurs produits, chercheurs et industriels ont toujours tenté d'expliquer le comportement macroscopique d'un système à partir des phénomènes microscopiques à l'œuvre en son sein.

Ces recherches attirent de plus en plus l'attention car il existe de nombreux cas où les théories classiques macroscopiques sont mises en échec et ne permettent pas de prédire correctement les phénomènes observés ou la réponse du matériau à une sollicitation. Parmi les exemples les plus connus, on peut citer le champ de contrainte infini obtenu sur une ligne de dislocation ou à la pointe d'une fissure, ou bien la singularité calculée au point d'application d'une force ponctuelle. Les théories classiques se révèlent aussi inefficaces pour traiter les problèmes où l'effet d'échelle devient non négligeable (nanotubes, films minces...). Ces difficultés mettent en lumière les limitations des théories classiques pour traiter les problèmes où des phénomènes intervenant à l'échelle microscopique ont une influence significative sur le comportement macroscopique du système.

La communauté scientifique avance plusieurs raisons physiques pour expliquer la défaillance des modèles classiques. Entre autres, l'influence plus importante de l'effet de surface aux petites échelles ou encore le rôle important joué par la microstructure interne du matériau. Pour étudier précisément les phénomènes à de très petites échelles (micro ou nanométrique), les approches atomiques, basées sur une description discrète de la matière, semblent les plus appropriées. Cependant, elles impliquent un nombre extrêmement important de degrés de liberté, et requièrent des moyens de calcul phénoménaux. Leur utilisation pour traiter des problèmes industriels est tout à fait inenvisageable à l'heure actuelle. C'est pourquoi, les théories classiques, fondées sur une description continue de la matière, leur ont souvent été préférées.

Dans ce contexte, les théories continues non-locales représentent un compromis intéressant entre les théories atomiques et les théories continues classiques. La philosophie de ce type d'approche est de décrire le système par un modèle de milieu continu capable de prendre en compte l'effet de la structure sous-jacente du matériau. Plus précisément, la théorie non-locale constitue une généralisation de la théorie classique où le comportement en un point dépend de l'état en tout point du solide. Les modèles non-locaux font intervenir une longueur interne caractéristique du matériau et permettent de décrire plus finement son comportement par la prise en compte des interactions à plus longue distance.

Ces théories se divisent principalement en deux classes : les théories non-locales à gradient, basées sur l'introduction de gradients du champ de déformation dans la loi de comportement élastique, et les théories non-locales intégrales. Dans ce mémoire, nous nous sommes limités à l'étude de l'approche intégrale. Proposée initialement et indépendamment par Krumhansl (1963), Kunin (1967) et Kroner (1967), la théorie non-locale intégrale a depuis bénéficié, entre autres, de l'apport significatif de Eringen (1987). Ce dernier a proposé notamment une loi de comportement élastique incluant une intégrale du champ de déformation sur l'ensemble du domaine d'étude. Ce type d'approche a été testé avec succès pour traiter de nombreux problèmes simples de fissures et de dislocations.

Dans ce travail, nous proposons de démontrer l'intérêt de ce type de modélisation et les avantages potentiels pour l'industrie, et, en l'occurrence, pour le constructeur PSA-Peugeot-Citroën.

En effet, confronté à l'intense concurrence régnant dans le secteur automobile, le groupe PSA est contraint de réduire continuellement ses coûts de production. Pour atteindre cet objectif, une piste évidente est de limiter le nombre de pièces mises au rebut. La solution la moins coûteuse consiste donc à accepter des pièces contenant des défauts. Pour cela, il est impératif de disposer de critères qui permettent de faire le tri entre défauts acceptables et défauts critiques pouvant conduire à la ruine de la pièce.

Nous nous concentrons ici sur les fissures, qui font partie des défauts les plus dangereux pour l'intégrité d'une structure. L'objectif de cette thèse est double. D'une part, fournir au corps de métier de la société, un outil simple et fiable permettant d'évaluer efficacement la dangerosité des défauts en comparant les facteurs d'intensité de contraintes aux fronts d'une fissure à une valeur limite donnée expérimentalement. D'autre part d'étudier l'apport d'une modélisation non locale du comportement élastique pour l'analyse des problèmes de fissuration.

Suivant ces objectifs, ce manuscrit est divisé en quatre chapitres :

La première partie du chapitre I est consacrée à une présentation des causes microscopiques de la rupture dans les matériaux métalliques. A cette échelle, les mécanismes élémentaires d'endommagement sont le clivage et les glissements de plans cristallins dans les grains métallurgiques. Le processus de propagation de l'endommagement dans une structure polycristalline est exposé, puis nous présentons différents types de défauts présents dans les alliages métalliques, tels que les dislocations, les cavités et les fissures. La seconde partie du chapitre permet d'introduire les bases de la mécanique linéaire de la rupture, outil très apprécié dans l'industrie pour prédire le comportement des fissures. Nous donnons la définition des facteurs d'intensité de contrainte, et nous voyons comment ces paramètres sont utilisés dans le cadre classique pour prévoir la stabilité et la direction de propagation de la fissure. La fin de ce chapitre est dédiée à la présentation des différents types de théories non-locales, qui permettent d'envisager une approche alternative des problèmes de fissuration, et notamment le retour à un critère de propagation physique basé sur la contrainte.

Dans le chapitre II, nous présentons des résultats relatifs à la modélisation classique du comportement sous sollicitation quasi-statique. Le problème est résolu par la méthode des éléments de frontière, une alternative intéressante à la méthode des éléments finis en mécanique de la rupture (réduction de la dimension du problème d'une unité, modélisation géométrique de la fissure facilitée). La première partie du chapitre présente les équations intégrales utilisées pour modéliser le problème d'un solide élastique fissuré, puis nous détaillons la procédure de résolution de ces équations. Nous décrivons ensuite quelques méthodes numériques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte. La fin de ce chapitre est consacrée à la présentation des résultats obtenus pour plusieurs problèmes de fissures internes ou débouchantes sous différents types de sollicitations statiques. Ces différents cas permettent de démontrer l'efficacité de la stratégie de résolution adoptée pour les problèmes classiques.

Dans le chapitre III, nous nous penchons sur la possibilité de décrire l'initiation et l'évolution de la fissure par l'intermédiaire d'une contrainte résolue. Pour cela, nous proposons une méthode de résolution numérique de problèmes de structures à comportement élastique non-local. Nous avons opté pour une stratégie numérique basée sur la méthode des éléments de frontières et nous avons adopté le modèle d'élasticité non-locale de Eringen. En première approche, nous considérons le cas d'une fissure dans un milieu infini. Dans ce contexte, le calcul des contraintes non-locales se fait en post-traitement, par l'évaluation d'une intégrale



volumique du champ de déformation issu de la résolution des équations d'équilibre classiques. La première partie du chapitre détaille précisément la stratégie numérique adoptée pour calculer le champ de contrainte non-local. Dans un second temps, nous traitons plusieurs problèmes de fissures afin d'évaluer l'apport de la modélisation non locale du comportement comparée à l'approche locale.

Enfin, le chapitre IV est consacré à l'élasticité non locale dans un milieu fini. La loi de comportement adoptée (modèle de Polizzotto) requiert une stratégie numérique particulière. Les premiers développements de cette méthode et les résultats associés sont présentés. Dans la première partie du chapitre, nous revenons sur la méthode de résolution. Celle-ci est basée sur un couplage de la méthode des éléments de frontière avec une méthode de collocation par points appliquée aux équations aux dérivées partielles. Dans un second temps, l'intérêt du modèle de Polizzotto et l'efficacité de la méthodologie numérique sont démontrés pour quelques cas de sollicitations statiques, en l'absence de singularité géométrique. Le chapitre se termine sur la présentation des premiers résultats obtenus pour un cas de fissure en mode d'ouverture.



# **Chapitre 1 :Mécanique de l'endommagement et de la rupture - Approche non locale des problèmes de fissuration**



## Introduction

La persistance de défauts et de fissures dans les pièces mécaniques à l'issue de leur procédé de fabrication est une problématique majeure de l'industrie automobile. Ces défauts, de types variés, dépendent fortement du mode de fabrication, notamment des contraintes mécaniques, thermiques ou chimiques subies par le matériau au cours de l'élaboration de la pièce ou pendant son utilisation.

Dans certains cas de sollicitations défavorables, ces imperfections constituent des sites d'initiation et de propagation de fissures qui peuvent conduire à une rupture catastrophique, ou progressive (dans le cas de la fatigue) de la pièce.

Il apparaît donc important, à l'issue de la fabrication et ultérieurement, pour le contrôle et la maintenance, d'évaluer la dangerosité des fissures préexistantes au sein d'une pièce. L'objectif est de fixer des critères d'acceptation de ces fissures en fonction de leur taille, de leur orientation, de leur position dans la pièce et du chargement appliqué.

Du point de vue industriel, les intérêts sont multiples :

- Aider à la rédaction des cahiers des charges matériaux, par une meilleure spécification des critères d'acceptation des défauts en fonction des zones.
- Réduire les coûts et délais de mise au point outillage en se focalisant sur les défauts jugés critiques.
- Etre plus précis dans la prédiction de la durée de vie de certains composants mécaniques.

Dans ce chapitre, nous exposons les mécanismes microscopiques qui conduisent à la formation de fissures à l'intérieur d'un matériau métallique. Nous présentons le cadre classique d'étude de ces fissures, la mécanique linéaire de la rupture, avant de nous intéresser aux avantages que procurent les théories non-locales dans le cadre des problématiques de fissuration.

Le chapitre se découpe donc en trois parties :

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux causes microscopiques de l'endommagement, responsables de la rupture macroscopique des matériaux métalliques. Nous revenons notamment sur les phénomènes de décohérence et glissement de plans atomiques au sein de la microstructure métallique et les contraintes théoriques de rupture à l'échelle atomique. Ces dernières se révèlent bien supérieures aux contraintes de rupture mesurées expérimentalement ce qui a conduit les mécaniciens à s'interroger sur le rôle des défauts et leur influence vis-à-vis de la rupture.

Pour observer l'initiation d'un endommagement, il faut inévitablement que la contrainte théorique de rupture soit atteinte au moins localement, afin de rompre quelques liaisons atomiques au sein du matériau. Dans ce contexte, les défauts (cavités, fissures...) présents dans la matrice métallique, agissent comme des concentrateurs de contrainte.

Dans la suite de cette introduction, nous présentons différents types de défauts, microscopiques et macroscopiques, que l'on peut rencontrer dans les alliages métalliques, ainsi que leurs mécanismes de formation. La perturbation du champ de contrainte au voisinage d'une cavité est brièvement évoquée puis nous nous concentrons sur le cas

particulier de la fissure, cavité très fine, dont les extrémités sont décrites par un rayon de courbure nul.

Dans un deuxième temps, nous présentons un cadre théorique très utilisé pour traiter les problèmes de fissuration : la mécanique linéaire de la rupture. Parmi les principales hypothèses de ce modèle, on considère notamment un milieu globalement élastique, où les phénomènes de plasticité sont confinés au voisinage du front de la fissure et où les déformations restent petites.

Les expressions asymptotiques du champ de contrainte au voisinage du front de la fissure ont été déterminées par Irwin en 1957. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, ces équations présentent une singularité sur le front de fissure et font intervenir trois paramètres, dépendant de la géométrie du problème et du chargement, appelés « facteurs d'intensité de contrainte ». Ces grandeurs constituent la base de la mécanique linéaire de la rupture. Chaque facteur d'intensité est associé à un mode de sollicitation de la fissure et possède une valeur critique, « intrinsèque » au matériau, au-delà de laquelle la rupture survient. En MLR, les facteurs d'intensité sont utilisés en lieu et place des contraintes, inexploitable du fait de leur singularité, pour prédire le développement et la stabilité de la fissure.

Cette théorie a permis d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants industriellement mais présente toutefois des inconvénients, le premier d'entre étant évidemment que la définition des facteurs d'intensité de contrainte est basée sur une description physiquement incohérente du champ de contrainte sur le front de la fissure. Pour certains scientifiques, la singularité des contraintes est symptomatique des limitations de la théorie classique à traiter les problèmes de rupture.

Pour cette raison, nous nous sommes intéressés aux théories non-locales, qui permettent une description plus fine du comportement élastique au voisinage de la fissure. Il existe un certain nombre d'approches que l'on peut qualifier de non-locale. Elles se classent en deux principales catégories : les théories élastiques à gradient et les théories intégrales. Ces dernières sont basées sur le principe suivant : le comportement en un point donné d'un solide dépend de **l'état de déformation en tous les autres points de ce solide**. La loi de comportement du matériau relie ainsi le champ de contrainte en un point au champ de déformation dans l'ensemble du domaine étudié.

Ce type d'approche permet de tenir compte de l'effet des interactions à plus longue distance. L'utilisation de modèles de type non-local permettrait d'éliminer les singularités inhérentes aux modèles classiques, et d'obtenir des champs de contrainte régularisés dans les problèmes de mécanique de la rupture.

Dans ce cadre, l'analyse du comportement des fissures, à l'aide de critères plus rigoureux basés sur la contrainte semble donc tout à fait envisageable.

Dans cette dernière partie, nous présentons donc rapidement les différents types d'approches non-locales, avant de détailler les origines du modèle intégral, que nous avons utilisé dans ce travail.

## 1.1. Mécanismes physiques de la rupture et de l'endommagement

L'« endommagement » est défini comme l'apparition et le développement irréversible de nouvelles surfaces au sein d'un matériau (François (2004)).

Les propriétés mécaniques macroscopiques des pièces métalliques, en particulier leur résistance à l'endommagement, découlent directement de leur organisation microstructurale, elle-même résultant du procédé d'élaboration. Pour être capable de prédire le comportement macroscopique d'une fissure, il est donc utile de comprendre les mécanismes élémentaires d'endommagement et de rupture à l'œuvre au niveau microscopique, au sein d'un matériau.

A l'échelle atomique, les métaux et leurs alliages présentent généralement une structure polycristalline. Ils se composent d'un ensemble de cristaux appelés « grains métallurgiques », orientés aléatoirement les uns par rapport aux autres. Le processus d'endommagement, qui débouche sur la propagation d'une fissure macroscopique, débute à l'échelle de ces grains. Dans un premier temps, nous étudions le cas d'un monocristal et nous décrivons les deux mécanismes principaux susceptibles de conduire à la rupture du cristal : le clivage et le glissement. Comme nous allons le voir, l'organisation des atomes dans le grain est déterminante et favorise l'un ou l'autre de ces phénomènes. Puis, nous étudierons le cas plus général d'un polycristal, et comment se transmet l'endommagement d'un grain à l'ensemble du matériau. Le phénomène de fatigue et ses manifestations à l'échelle microscopiques seront eux aussi évoqués.

### 1.1.1. Clivage et glissement des plans cristallographiques dans un monocristal

#### Structure et plans cristallographiques

Un grain est un empilement ordonné d'atomes qui s'organisent suivant une structure périodique. Cette périodicité permet de dégager un « motif » élémentaire (aussi appelé « maille »), à partir duquel on peut, par translation, reproduire l'ensemble du cristal. L'organisation spatiale des atomes d'une maille définit la structure cristallographique du grain. Parmi les plus courantes et les plus simples, on peut citer les structures Cubique Simple (CS), Cubique Centré (CC), Cubique Face Centré (CFC). Dans le premier cas, les atomes sont aux sommets du cube. Dans le deuxième, un atome supplémentaire se situe au centre du cube. Dans le dernier cas, les atomes se trouvent aux sommets et aux centres des faces du cube. A titre d'exemple, la ferrite (Fer  $\alpha$ ) possède une organisation Cubique Centré (CC) tandis que l'austénite (Fer  $\gamma$ ) est Cubique Face Centré.

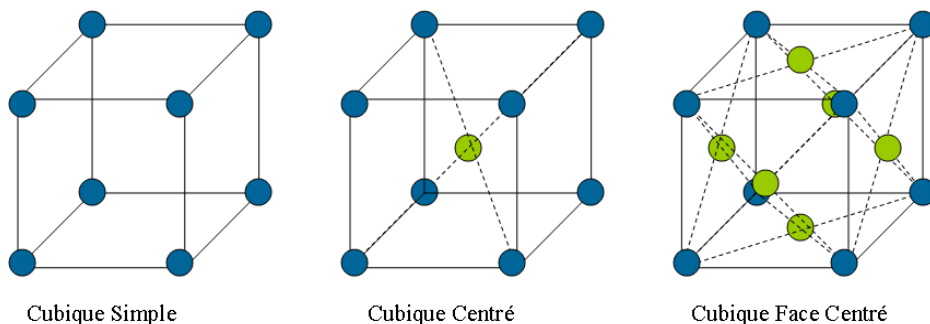


Figure 1.1 : Mailles élémentaires CS, CC et CFC

Les atomes contenus dans un grain sont donc rangés de manière régulière, et de ce fait, appartiennent à des plans, appelés « plans cristallographiques ». Pour chaque type de structure, on peut dénombrer plusieurs familles de plans cristallographiques définies par une orientation particulière. Les indices de Miller sont couramment utilisés pour caractériser cette orientation. La distance minimale entre deux plans d'une même famille est appelée distance interréticulaire. Notons qu'un même atome appartient nécessairement à plusieurs familles. Les schémas sur la Figure 1.2 présentent quelques familles de plans cristallographiques associées à la structure Cubique Simple, ainsi que leur notation en indice de Miller.

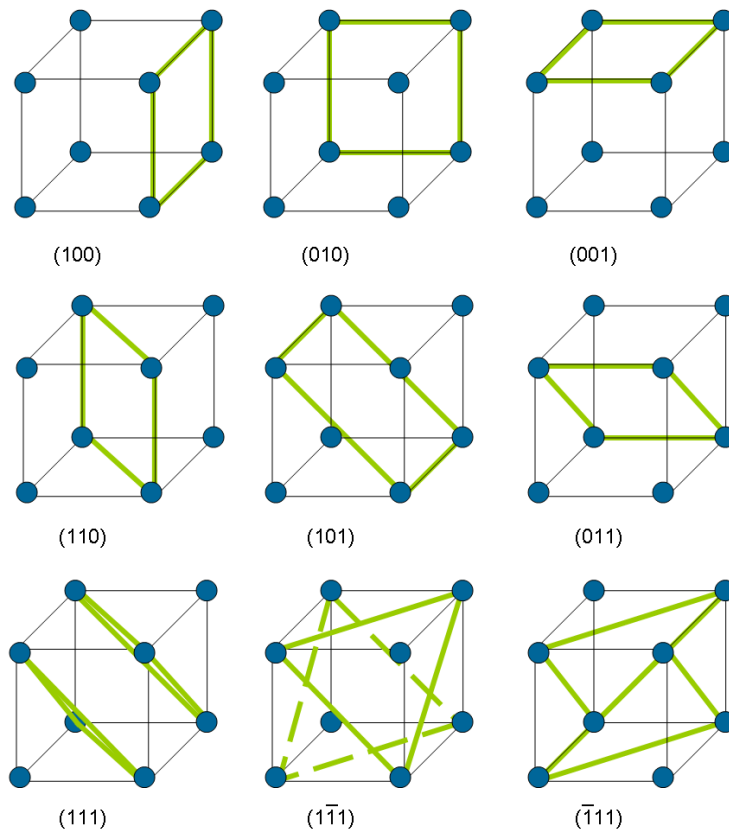


Figure 1.2 : Familles de plans cristallographiques associées à la structure CC  
(Les indices de Miller sont indiqués entre parenthèses)

Parmi ces plans, certains possèdent une densité plus importante d'atomes. De plus, les familles regroupant ces plans sont caractérisées par une distance interréticulaire maximale. Ces deux propriétés font de ces plans des lieux propices aux mouvements de glissement ou de clivage.

## Mouvement de clivage et de glissement

### *Sollicitation statique*

Les mécanismes de clivage et de glissement sont décrits par François (2004) sur un monocristal de Zinc (structure cristallographique hexagonale compacte) soumis à un effort de traction. L'orientation du monocristal est choisie de telle sorte que les plans denses d'atomes soient perpendiculaires à la direction d'application de la traction (Figure 1.3). Dans ce cas précis, en l'absence d'effort de cisaillement, tout glissement des plans les uns par rapport aux



autres est impossible. Le déplacement des atomes se fait donc dans la direction perpendiculaire aux plans, jusqu'à la rupture des liaisons atomiques. Notons que la distance interréticulaire étant maximale, l'énergie à fournir pour rompre ces liaisons est moins importante. Pour cette raison, ces plans sont appelés « plans de clivage ». Dès que la séparation est effective, on parle d'endommagement par clivage.

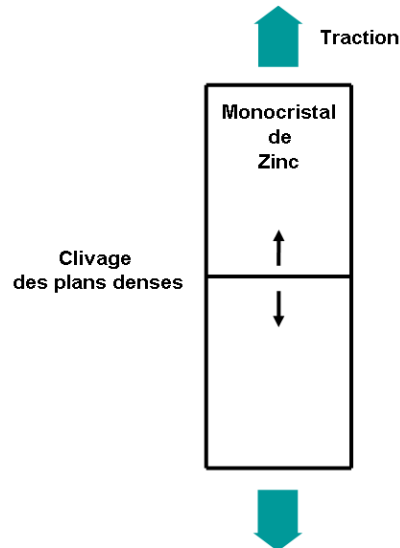


Figure 1.3 : Représentation schématique du clivage d'un monocristal

Lorsque l'orientation des plans denses d'atomes est inclinée par rapport à la direction de sollicitation, ces derniers subissent un effort de cisaillement (Figure 1.5a). Dans cette situation, les plans glissent l'un par rapport à l'autre de manière irréversible. Là encore, on peut noter que la densité importante des atomes dans ces plans facilite le glissement. Le nombre d'atomes par unité de surface étant plus important, le « chemin » à parcourir pour retrouver une configuration cristalline stable est plus petit et l'énergie à fournir moindre. Le schéma de la Figure 1.4 illustre clairement le propos précédent :

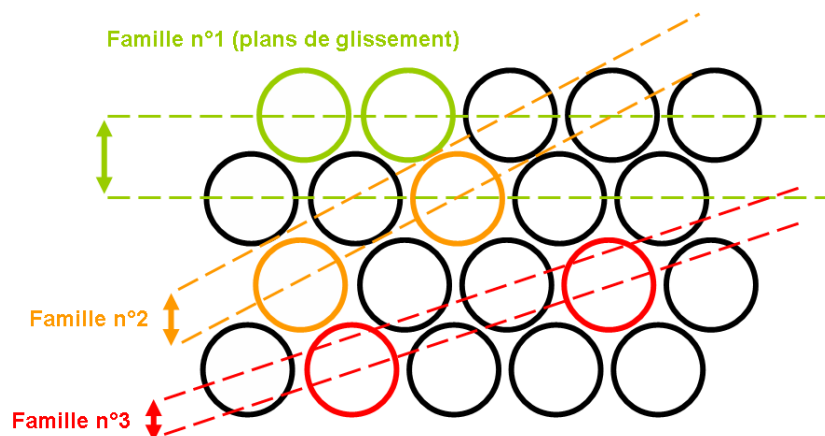


Figure 1.4 : Représentation schématique de plusieurs familles de plans atomiques de densité variable

Les droites en pointillés permettent de mettre en évidence la distance interréticulaire associée à chaque famille de plans. Puis, pour un plan donné, deux atomes sont colorés afin de faire ressortir la distance interatomique.

Logiquement, la famille dont la distance interréticulaire est maximale correspond à celle pour laquelle la distance interatomique est minimale. Il s'agit de la famille de plans denses. En observant la configuration du réseau, on comprend aisément que les mouvements de glissements seront plus difficiles pour les familles n°2 et n°3 que pour la première.

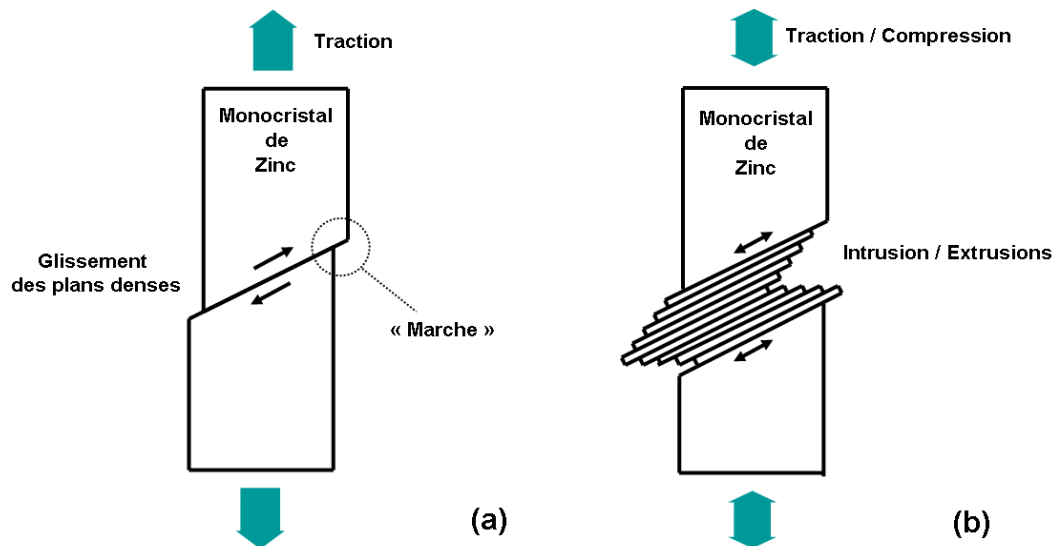


Figure 1.5 : Représentation schématique du cisaillement d'un monocristal  
(a) sollicitation statique ; (b) sollicitation cyclique

Revenons à notre monocristal. Lorsque le glissement du plan atomique se propage jusqu'à la frontière du grain, on constate l'apparition d'une « marche » en surface (Figure 1.5a). Ce glissement est irréversible, il entraîne un certain écrouissage du cristal mais ne constitue pas réellement un endommagement, au sens où aucune nouvelle surface n'est créée. En revanche, si le glissement se poursuit et débouche sur la séparation du monocristal en deux parties, l'endommagement devient indéniable.

Le monocristal de Cuivre, de structure CFC, constitue un dernier exemple intéressant d'endommagement par glissement. Ce grain contient quatre familles de plans denses possédant des orientations différentes. Dans ce cas, il existe toujours une famille pour laquelle la contrainte appliquée est suffisante pour provoquer le glissement. L'endommagement par clivage dans ce type de cristaux est donc impossible. La connaissance de la structure cristallographique permet donc, dans certains cas, de donner une première explication (au moins à l'échelle microscopique) de la nature fragile ou ductile de l'endommagement. Cette seule donnée est toutefois largement insuffisante pour conclure de manière définitive, d'autres paramètres ayant une influence considérable sur le caractère fragile ou ductile du matériau (par exemple, la température).

### *Sollicitation cyclique*

Dans le cas d'une sollicitation cyclique, les plans denses sont soumis à un effort de cisaillement alternativement positif et négatif (Figure 1.5b). Le glissement d'un premier plan conduit à l'apparition d'une marche en surface. Cette déformation du cristal est irréversible. Lorsque le signe de la sollicitation change, le sens de glissement s'inverse, et le premier plan étant « immobilisé », le glissement s'opère au niveau d'un plan voisin. On observe alors

l'apparition d'une deuxième marche de l'autre côté du cristal. La répétition de ce mécanisme, cycle après cycle, conduit à la formation d'intrusions et d'extrusions à la surface du grain. Chaque intrusion constitue une zone de concentration de contrainte et donc, un site potentiel d'amorçage de fissure. En pénétrant dans le cristal, ces microfissures contribuent à l'apparition d'un endommagement dont le mécanisme est basé sur le glissement des plans atomiques.

## 1.1.2. Clivage et glissement des plans cristallographiques dans un polycristal

### *Sollicitation statique*

Un polycristal est constitué d'un ensemble de petits cristaux, orientés aléatoirement les uns par rapport aux autres. Pour un chargement donné, tous les grains ne sont donc pas sollicités de la même façon et avec la même intensité.

Étudions comment se propage l'endommagement par clivage au sein d'un polycristal de Zinc (François (2004)). Suivant l'orientation du grain, les plans denses atomiques peuvent être soumis à un effort de traction important qui entraîne l'apparition de clivages. Lorsque les grains voisins du grain endommagé sont orientés défavorablement, l'endommagement est stoppé et reste localisé.

Le matériau est effectivement fragilisé car le clivage des grains réduit la section supportant le chargement, mais l'endommagement ne débouche pas sur la formation d'une fissure de taille macroscopique.

Cependant, le plus souvent, les clivages apparus dans les premiers grains parviennent à surmonter le changement d'orientation des plans cristallographiques et se propagent aux grains voisins (Figure 1.6).

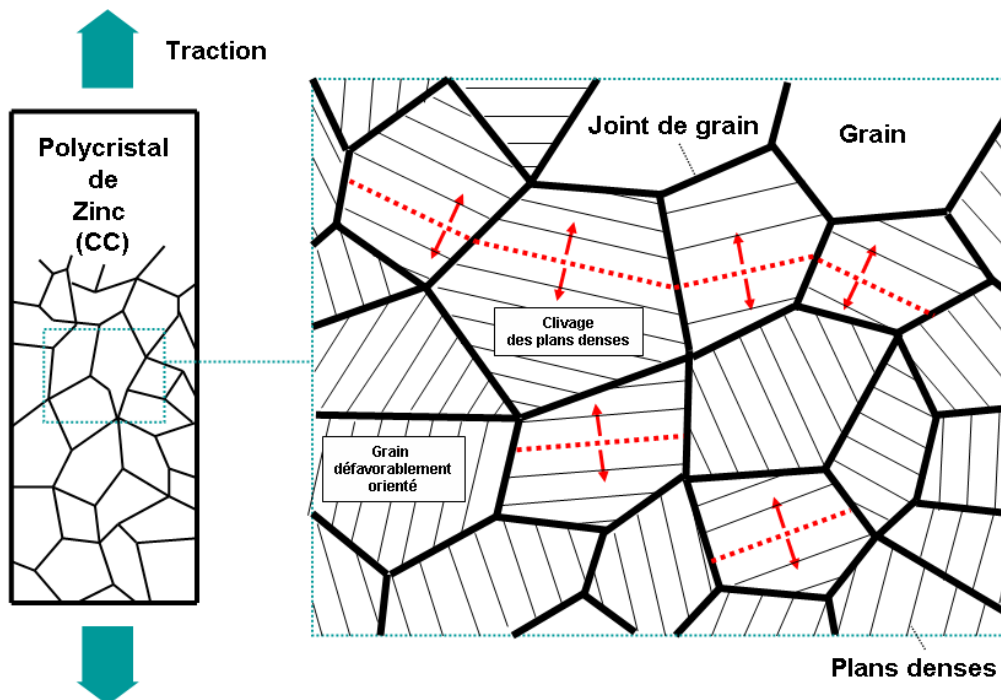


Figure 1.6 : Représentation schématique de clivages dans la microstructure

## d'un polycristal de Zinc

Dans le cas du polycristal de Cuivre (CFC), l'endommagement est initié par le glissement des plans denses atomiques à l'intérieur des grains (voir cas du monocristal). En fonction de l'intensité du chargement, certains cristaux se déforment, s'écrasent et soumettent leurs voisins encore élastiques à de fortes contraintes. La déformation peut ainsi se propager de grain en grain à l'ensemble du polycristal (Figure 1.7).

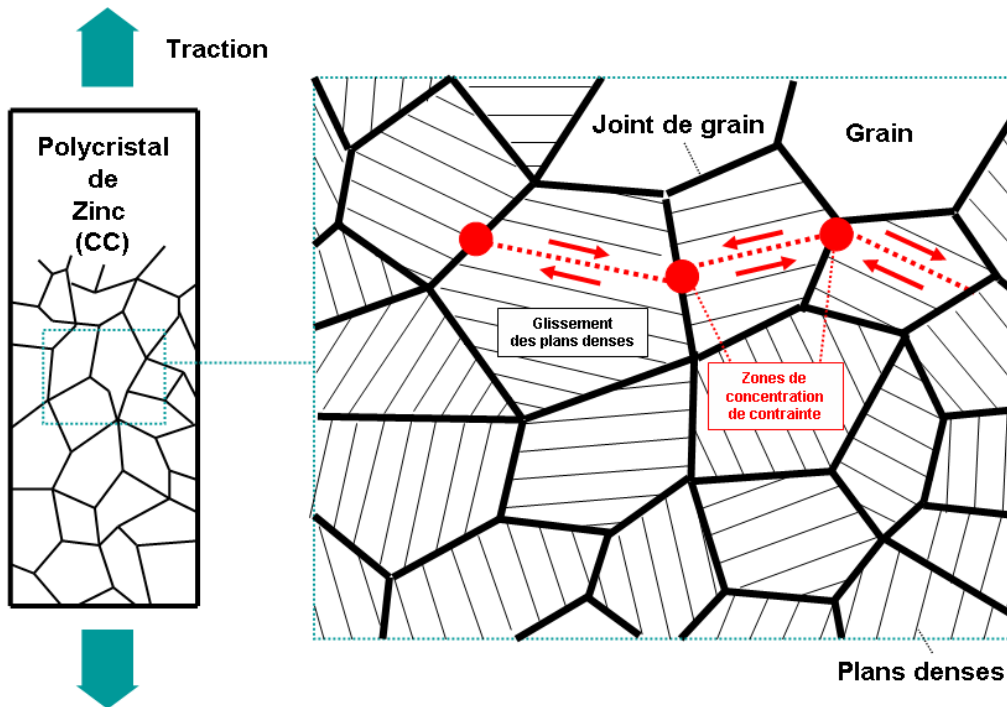


Figure 1.7 : Représentation schématique de glissements dans la microstructure d'un polycristal de Cuivre

A ce stade, on ne constate à priori aucun endommagement mais seulement un phénomène de déformation plastique du milieu. L'apparition de nouvelles surfaces intervient notamment au niveau des hétérogénéités présentes dans le matériau, les impuretés ou les inclusions, par exemple.

Ces dernières possèdent des caractéristiques élastiques et plastiques différentes de celles de la matrice et constituent des zones de concentration de contrainte. Lorsque les grains se déforment, les inclusions et leurs interfaces avec le matériau, sont soumises à des sollicitations telles qu'elles peuvent conduire au clivage de l'hétérogénéité ou à la décohésion de l'interface inclusion/matrice. Dans le second cas, la déformation des grains entraîne une croissance des cavités. Lorsque celles-ci ont atteint une taille suffisante, elles coalescent et provoquent la rupture ductile du solide.

### *Sollicitation cyclique*

L'endommagement sous sollicitation cyclique d'un polycristal met en œuvre le même mécanisme que celui évoqué pour un monocristal. Soumis à un effort alternativement positif puis négatif, les grains du solide dont les plans denses sont favorablement orientés se déforment plastiquement. L'écrasement d'un grain entraîne l'apparition de « marches » à sa

surface qui viennent contraindre les cristaux voisins et contribuent à la propagation de la déformation. Ces aspérités constituent par ailleurs des zones géométriques propices à l'amorçage de fissures de cisaillement qui pénètrent à l'intérieur du grain et débouchent sur un endommagement réel avec séparation irréversible des plans atomiques. On constate ainsi la naissance simultanée et dans tout le solide, de nombreuses microfissures de tailles variables. Au fur et à mesure des cycles de sollicitation, ces microfissures croissent. Les plus importantes prennent le pas sur les autres et se propagent jusqu'à former une seule fissure de taille macroscopique.

Une observation importante soulignée dans la littérature (Bathias et Pineau (2008), François (2004)) est la nature superficielle de l'endommagement par fatigue. Les grains situés à la surface du solide subissent des déformations plus importantes que les grains confinés à l'intérieur du matériau. Les microfissures de cisaillement se forment donc préférentiellement en surface suivant une orientation à  $45^\circ$  par rapport à la direction d'application de l'effort. Elles se développent ensuite vers l'intérieur du solide, avec plus ou moins de facilité, suivant l'orientation cristallographique des grains rencontrés, tout en conservant, pendant un certain nombre de cycles, une direction de propagation proche de celle d'origine. Puis petit à petit, avec l'augmentation de la taille de la fissure, l'effort de cisaillement diminue et la fissure tend à se propager dans un plan perpendiculaire à la direction d'application de l'effort.

### 1.1.3. Influence des grains et joints de grain sur la propagation des fissures

La taille et la forme des grains influent de manière importante sur le développement de l'endommagement. Comme nous l'avons évoqué dans les paragraphes précédents, la propagation d'une microfissure est couramment freinée voire stoppée lorsqu'elle arrive au niveau d'un joint de grain.

Comme son nom le laisse supposer, le joint de grain est l'interface entre deux cristaux dans un solide polycristallin. Cette région est caractérisée par un changement d'orientation plus ou moins important des plans cristallographiques.

Prenons l'exemple d'un clivage se propageant dans un grain très favorablement orienté (perpendiculaire à la direction de traction). L'effort appliqué fournit l'énergie suffisante pour rompre les liaisons atomiques et séparer deux plans atomiques dans le cristal. En arrivant au niveau du grain voisin, deux cas sont possibles :

- L'orientation du grain voisin est proche de celle du grain où la microfissure est née. Dans cette situation, le clivage n'a aucune difficulté à traverser le joint de grain et poursuivre sa route dans le polycristal. La présence de région de faible désorientation cristallographique est donc très préjudiciable du point de vue de la résistance à la rupture.

- L'orientation du grain est sensiblement différente de celle du grain initial. L'énergie à fournir pour cliver le grain voisin est plus importante que celle qui avait suffi à initier l'endommagement dans le premier grain. A ce stade, la propagation va dépendre des dimensions de la microfissure. En effet, comme nous le verrons ultérieurement, l'intensité des contraintes aux extrémités d'un défaut est proportionnelle à la racine carrée de sa taille. Si la microfissure s'est suffisamment développée, l'énergie de déformation accumulée peut-être suffisante pour provoquer le clivage dans le grain voisin et assurer la propagation de la

fissure. Dans le cas contraire, la microfissure reste bloquée au niveau de l'interface entre les grains.

Evidemment, la taille de la microfissure est directement liée à la taille du grain dans lequel elle se développe. Plus le cristal est gros, plus la fissure aura de chances de prendre des dimensions importantes et plus le clivage des grains voisins, quel que soit leur orientation cristallographique, sera facile.

C'est pour cette raison qu'une microstructure fine permet souvent d'améliorer la résistance à la rupture d'un matériau métallique. La taille des grains étant petite, les microfissures ne peuvent pas se développer et les joints de grains s'avèrent être des barrières énergétiques difficilement franchissables. De plus, une microstructure fine implique un grand nombre de grains, ce qui multiplie les interfaces à traverser et rend encore plus difficile la progression de la fissure.

#### 1.1.4. Contraintes théoriques de rupture

Les deux mécanismes importants responsables de l'endommagement à l'échelle microscopique sont donc le clivage et le glissement. Comme nous l'avons évoqué, ces phénomènes se produisent le plus souvent au niveau des plans denses comportant un nombre important d'atomes. Dans cette partie, nous présentons un calcul théorique de la contrainte nécessaire pour briser les liaisons atomiques et séparer ou faire glisser deux plans l'un par rapport à l'autre.

##### Clivage

On considère deux plans denses A et B séparés d'une distance notée « a » (Figure 1.8). En présence d'un effort de traction, le plan A s'écarte du plan B, et au-delà d'un seuil critique, la rupture des liaisons chimiques entraîne le clivage des deux surfaces.

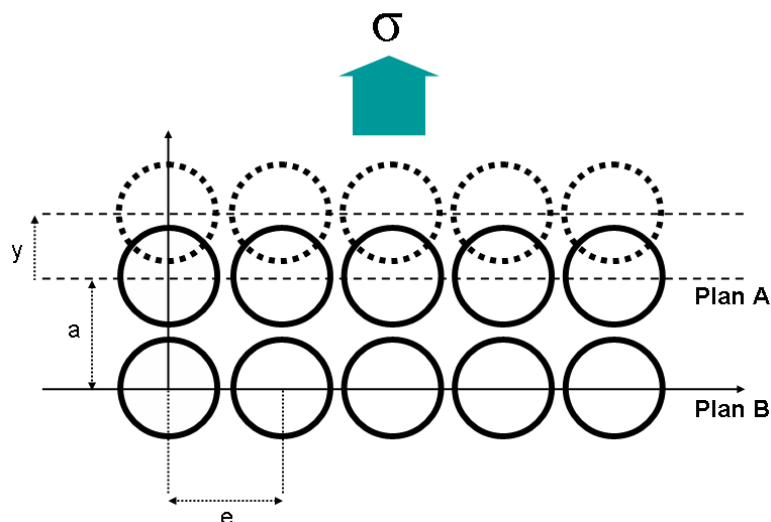


Figure 1.8 : Représentation schématique du clivage de deux plans atomiques

On note  $\sigma$  la contrainte qui contribue à écarter le plan A du plan B d'une longueur y. Cette dernière peut être approximée par une fonction périodique de la distance interatomique « a » et s'écrire sous la forme mathématique suivante :

$$\sigma = \sigma_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a} y\right)$$

En utilisant la loi de Hooke et en supposant que l'écartement « y » est petit, on obtient une valeur approchée de la  $\sigma_{\max}$  :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma = E \cdot \frac{y}{a} \\ \sigma = \sigma_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{a} y\right) \cong \sigma_{\max} \cdot \frac{2\pi}{a} y \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{\max} \cong \frac{E}{2\pi}$$

Où E est le module d'Young du matériau

La contrainte théorique de rupture en clivage est donc environ équivalente à  $1/6^{\text{ème}}$  du module d'Young, une valeur très supérieure aux contraintes de rupture mesurées expérimentalement. Dans le cas d'un acier de module d'Young 220GPa, la contrainte théorique de rupture est approximativement de 22GPa (François (2004)). Or, la contrainte à la rupture des aciers les plus résistants ne dépasse pas, dans la réalité, 3GPa.

### Glissement

La contrainte critique pour laquelle deux plans atomiques glissent l'un par rapport à l'autre peut être estimée en considérant le problème simple suivant (Martin (2000)) :

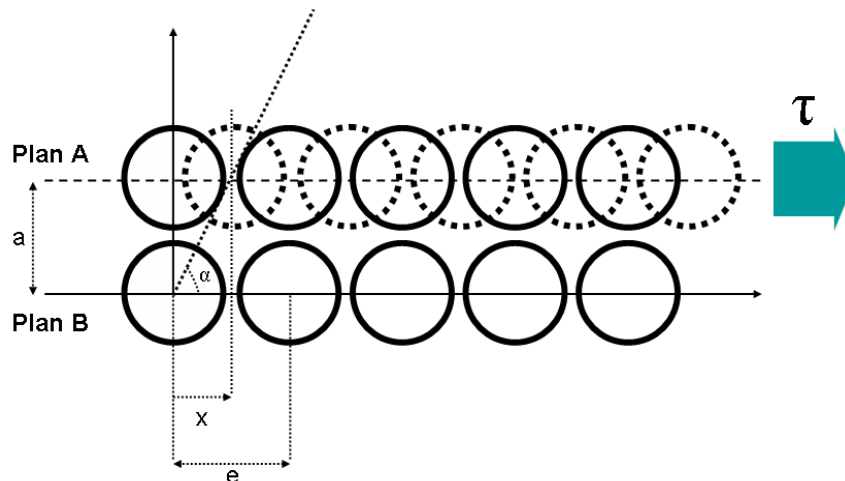


Figure 1.9 : Représentation schématique du cisaillement de deux plans atomiques

On considère à nouveau deux plans atomiques A et B séparés d'une distance (interréticulaire) « a ». On note « e » la distance entre deux atomes au sein d'un même plan. Le plan B reste immobile tandis qu'un effort de cisaillement  $\tau$  fait glisser le plan A sur le plan B. On note  $\alpha$  l'angle de cisaillement et x le déplacement relatif du plan A par rapport au plan B (Figure 1.9).

L'énergie du cristal est une fonction périodique de la distance de glissement  $x$ . Le décalage d'un plan dense dans la direction de glissement, sur une distance atomique, ramène le système dans une configuration énergétique équivalente.

Comme dans le cas précédent, la contrainte de cisaillement  $\tau$  peut donc s'exprimer sous la forme d'une fonction périodique de la distance interatomique «  $e$  » :

$$\tau = \tau_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{e}\right)$$

La constante  $\tau_{\max}$  est déterminée en considérant le cas des petites déformations. On suppose l'angle  $\alpha$  petit et on écrit :

$$\tan(\alpha) = \frac{x}{a} \Rightarrow \alpha \cong \frac{x}{a}$$

Et,

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \mu \alpha \Rightarrow \tau \cong \mu \frac{x}{a} \\ \tau = \tau_{\max} \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{e}\right) \Rightarrow \tau \cong \tau_{\max} \cdot \frac{2\pi x}{e} \end{array} \right\} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{\mu e}{2\pi a}$$

Où  $\mu$  représente le module de cisaillement.

Le glissement du plan A sur le plan B intervient pour la valeur maximale de  $\tau$ , soit  $\tau_{\max}$ . En supposant «  $e$  » et «  $a$  » du même ordre de grandeur, la contrainte critique de cisaillement est donc environ égale à  $\tau_{\max} = \mu/2\pi$ . La contrainte théorique est donc équivalente à 1/6<sup>ème</sup> du module de Coulomb. Là encore, comme dans le cas du clivage, les valeurs théoriques sont très supérieures aux contraintes de glissements réelles mesurées expérimentalement.

Or, pour qu'un endommagement par clivage puisse s'amorcer, il est nécessaire que la contrainte théorique de décohérence soit atteinte au moins localement, afin de défaire les liaisons atomiques entre les plans. La question est donc : comment peut-on observer dans la réalité un phénomène de rupture pour un chargement très inférieur aux contraintes théoriques critiques ?

L'écart constaté entre théorie et mesures expérimentales est lié au fait que les contraintes de rupture et de glissement ont été calculées en supposant un cristal à l'ordre parfait. Dans la réalité, la présence de défauts introduit des distorsions et des inhomogénéités dans le matériau, qui contribuent à augmenter localement le champ de contrainte. La contrainte théorique de clivage ou de glissement peut alors être atteinte, entraînant l'apparition de zones d'endommagement et suivant les cas, la rupture.

L'influence des défauts est clairement mise en évidence par l'effet d'échelle. Expérimentalement, on observe que pour un chargement identique, une grande éprouvette a statistiquement plus de chances de rompre qu'une petite. L'explication de ce phénomène est simple. Plus la taille de l'éprouvette est importante, plus elle contient de défauts et plus la probabilité que l'un d'entre eux soit défavorablement sollicité augmente. Cet exemple permet d'illustrer l'importance fondamentale des défauts dans le processus de rupture.



### 1.1.5. Défauts microscopiques et macroscopiques

#### **L'élaboration du matériau – Origine des défauts**

Un matériau est de la matière ouvrée, travaillée par l'homme, afin d'en obtenir une forme fonctionnelle et/ou d'en améliorer les propriétés mécaniques. Pour cela, un grand nombre de procédés de fabrication existe. La pièce souhaitée peut-être obtenue par déformation plastique d'un lopin (forgeage, laminage, emboutissage, hydroformage...), par solidification après fusion (fonderie), par découpage (découpage laser, découpage plasma), par soudage, etc. A l'issue de l'étape de mise en forme, la pièce nécessite parfois, pour des besoins mécaniques ou esthétiques, un traitement supplémentaire. On peut citer notamment, les traitements de surface thermochimiques tels que la cémentation ou la nitruration et les traitements mécaniques de grenailage ou de galetage. Ces procédés permettent d'obtenir une déformation plastique et un durcissement superficiel de la pièce, qui améliore ces caractéristiques mécaniques et en particulier sa résistance à l'usure et à la fatigue.

Ces quelques exemples donnent un petit aperçu de la diversité et du nombre de sollicitations auxquelles est soumise la pièce au cours de sa fabrication.

Si ces contraintes contribuent à former et améliorer les propriétés de la pièce, elles sont aussi inévitablement à l'origine de la formation de défauts, que ce soit à l'échelle macroscopique, ou à l'échelle microscopique.

#### **Les différents types de défauts**

On peut grossièrement classer les défauts en quatre grandes familles (Lamon (2007), selon leur taille et leur origine :

- Les défauts de microstructure
- Les défauts d'élaboration
- Les défauts d'usinage
- Les défauts de service

Dans cette partie, nous nous intéressons plus particulièrement aux deux premières catégories. Les défauts d'usinage et de service ne sont pas traités.

#### *Les défauts de microstructures - Les défauts cristallins*

La première famille est constituée des défauts de microstructure. Dans le cas des métaux et des alliages, il s'agit d'imperfections de petite taille, généralement inférieures aux dimensions des grains métallurgiques. On parle de défauts cristallins.

Il existe trois classes d'imperfections susceptibles de perturber l'arrangement d'un réseau cristallographique : les défauts ponctuels (lacunes, atomes interstitiels, impuretés...), les défauts linéaires et les défauts plans (défaut d'empilement des atomes). Parmi ces trois catégories, nous nous intéressons plus particulièrement aux défauts linéaires, aussi appelés *dislocations*.

#### Les dislocations

L'existence et le rôle des dislocations dans le processus de plastification ont été démontrés dans les années 1950 avec l'avènement du microscope électronique à balayage. L'idée d'un défaut linéaire, moteur du cisaillement des plans atomiques, est toutefois apparue bien

auparavant dans les travaux de Orowan, Polanyi ou encore Taylor (1934). Confrontés au problème posé par la différence entre la valeur théorique de la contrainte critique de cisaillement, et sa valeur expérimentale, ils proposent un mécanisme de glissement progressif, basé sur le déplacement d'une « ligne de discontinuité » dans les plans denses atomiques.

Le concept de dislocation est né. Il permet d'expliquer pour quelles raisons le glissement des plans intervient pour des valeurs de chargement inférieures aux valeurs théoriques.

Tout d'abord, il est important de noter que la contrainte théorique de glissement est calculée en supposant un processus de cisaillement en une étape, impliquant un mouvement collectif simultané de tous les atomes du plan atomique. Or, la force nécessaire pour déplacer un plan entier d'atomes est largement supérieure à celle demandée pour déplacer une ligne d'atomes. Un calcul simple et rapide (Martin (2000)) permet de vérifier cette affirmation. Considérons le problème présenté sur la Figure (1.10).

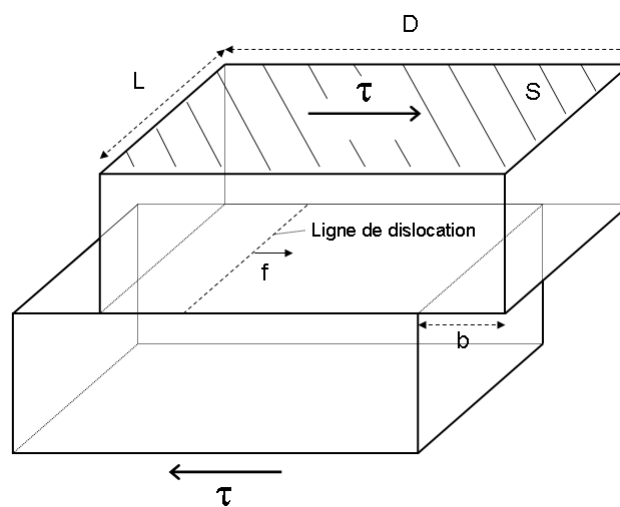


Figure 1.10 : Cisaillement simple

La force  $F$  nécessaire pour déplacer le bloc supérieur d'une longueur  $b$  est égale au produit de la contrainte de cisaillement par la surface  $S$  du bloc, soit  $F = S \times \tau = L \times D \times \tau$ . Le travail correspondant  $W_F$  est égal à  $W_F = F \times b = L \times D \times \tau \times b$ .

On note maintenant  $f$  la force s'appliquant sur une ligne de dislocation de longueur  $L$ , balayant la surface  $S$  de gauche à droite dans la direction de cisaillement. Le travail  $W_f$  nécessaire pour que la ligne traverse tout le solide (d'épaisseur  $D$ ) est égal à  $W_f = f \times D$ .

En égalant  $W_F$  et  $W_f$ , on trouve finalement  $F = \frac{D}{b} \times f$ .

Typiquement, la valeur de  $b$  est égale à la distance entre deux atomes du plan. Le rapport entre  $D$  et  $b$  est nécessairement inférieur à 1. La mise en mouvement d'une ligne de dislocation est donc logiquement plus aisée que le déplacement d'un plan entier.

La Figure (1.11) représente schématiquement les différentes étapes du glissement dû au déplacement de la dislocation, dans une section du solide de la Figure (1.10). Le plan de glissement est représenté par la ligne en pointillés.

Dans un premier temps, le solide se déforme élastiquement, puis, lorsque la sollicitation est suffisamment importante, le glissement débute. Localement, la rupture des liaisons entraîne

l'apparition d'un plan d'atomes dont l'extrémité est « libre ». Cette extrémité correspond à la ligne de dislocation, représentée par un point sur les schémas de la Figure (1.11). Le déplacement dans le plan de glissement se fait pas à pas, en coupant une seule liaison à la fois. Au fur et à mesure de l'avancée de la dislocation, les liaisons se reforment et à l'issue de la traversée du cristal, le mécanisme débouche sur la formation de deux marches, de part et d'autre du cristal.

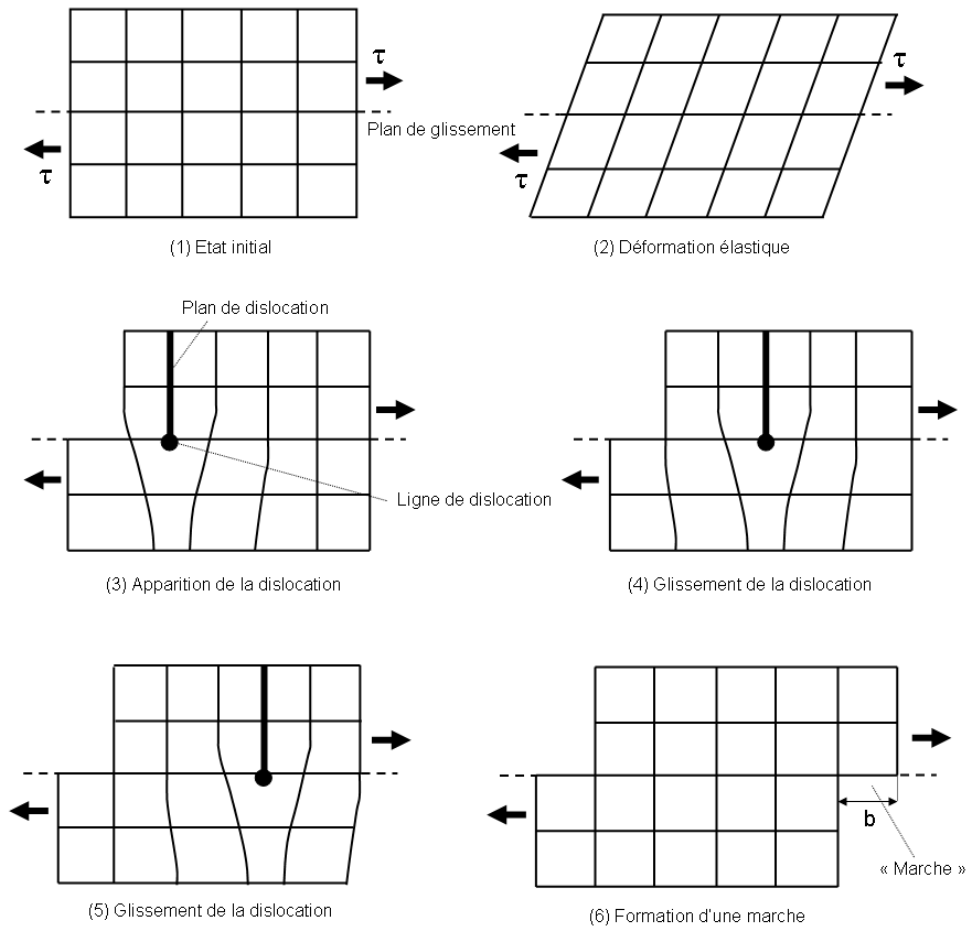


Figure 1.11 : Représentation schématique du glissement de deux plans atomiques par le déplacement d'une dislocation

D'après le mécanisme de dislocation présenté ci-dessus, on peut donc conclure que la contrainte théorique de glissement est surévaluée.

### Champ de contrainte au voisinage d'une ligne de dislocation

Comme on le devine sur la Figure (1.11), la dislocation entraîne une distorsion du réseau atomique, qui a pour effet de perturber localement le champ de contrainte. Le mathématicien Vito Volterra est le premier à introduire le concept de dislocation dans le cadre de la mécanique des milieux continus élastiques. Ses travaux ont permis de déterminer les expressions du champ de contrainte au voisinage de la ligne de dislocation, dans le cadre de l'élasticité linéaire. Les formules sont consultables dans de nombreux ouvrages de la

littérature (Martin (2000), Priester (2000)...). Sans entrer dans les détails, l'allure générale du champ de contrainte peut se mettre sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{\mu b}{2\pi r} g_{ij}(\theta)$$

Où  $\mu$  et  $b$  correspondent au module de Coulomb et à la longueur du décalage introduit par la dislocation (la « marche » représentée sur les Figures (1.10) et (1.11)). Le champ de contrainte s'exprime en fonction des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$ , définies dans le plan perpendiculaire à l'axe de la dislocation.  $g_{ij}$  est une fonction de l'angle polaire  $\theta$ .

Cette expression très générale montre que la présence de la dislocation entraîne une augmentation locale du champ de contrainte. Au voisinage de la dislocation, lorsque  $r$  tend vers 0,  $\sigma$  tend vers l'infini. Ce résultat est physiquement impossible et dénote l'existence d'une région autour de la ligne de dislocation (appelée « cœur de la dislocation ») pour laquelle la théorie élastique linéaire ne s'applique pas.

Nous reviendrons sur les limitations de l'élasticité classique en fin de chapitre, lorsque nous aborderons les théories non-locales. Pour le moment, on comprend que la présence d'imperfections cristallines explique comment, localement, la contrainte théorique de cisaillement peut être atteinte, alors que le chargement global reste inférieur à la contrainte critique.

### Dislocations et clivage

Le mouvement des dislocations permet aussi de comprendre le processus d'endommagement par séparation de plans atomiques.

En 1946, le physicien américain Zener imagine un mécanisme pour expliquer l'apparition du clivage dans les grains d'un matériau polycristallin, sollicité par un effort inférieur à la contrainte théorique de rupture.

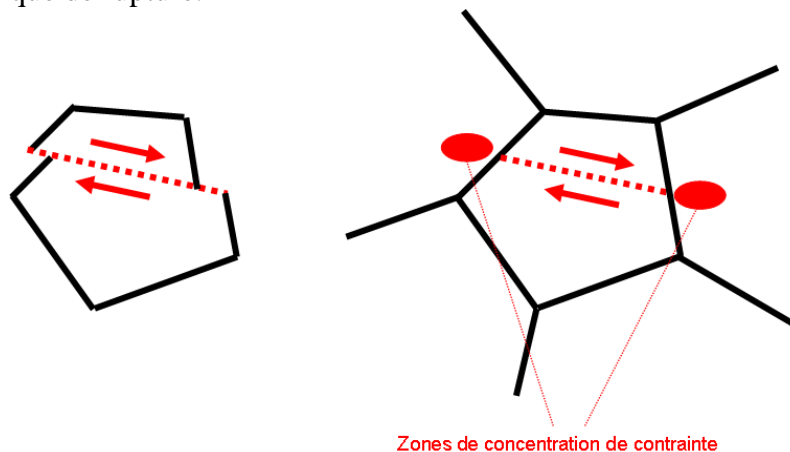


Figure 1.12 : Mécanisme de Zener

Lorsqu'un grain du solide est sollicité par une contrainte de cisaillement, les mouvements de glissement des plans atomiques entraînent la formation de petites intrusions et extrusions à la frontière du grain. En s'appuyant sur les cristaux voisins, ces « marches » créent localement de fortes concentrations de contrainte (Figure (1.12)).

Suivant l'orientation des grains, et le niveau de contrainte atteint, un endommagement par clivage peut alors s'initier.

### *Les défauts d'élaboration*

La deuxième famille de défauts regroupe les imperfections liées aux procédés d'élaboration. Leur taille est plus importante que celle des défauts de microstructure et leur origine est souvent liée aux défaillances et aux fluctuations inhérentes aux procédés de fabrication. Ces défauts sont essentiellement des cavités ou des inclusions telles que les criques et replis observables après le forgeage, les dédoubleures et repliures caractéristiques du laminage, ou encore les porosités engendrées par les phénomènes de dégazage pendant le procédé de fonderie.

Les cavités, les fissures et les inclusions constituent des zones de concentration de contrainte qui, additionnées à la contrainte de service à laquelle est soumise le matériau, peuvent être potentiellement très dangereuses.

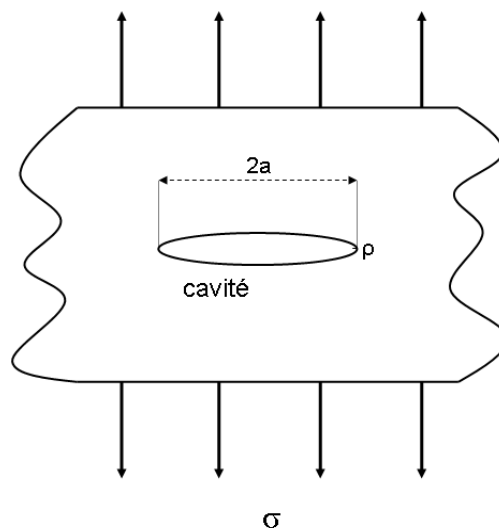


Figure 1.13 : Représentation schématique d'une cavité ellipsoïdale

### Sévérité d'une cavité

L'intensité des contraintes au voisinage d'un « accident géométrique » à la surface (arêtes, réduction de section, entailles...) ou à l'intérieur d'une pièce (cavité) est décrite par le facteur de concentration de contrainte noté  $K_t$ . Son calcul repose sur les hypothèses de la théorie de l'élasticité. Dans le cas d'une cavité ellipsoïdale soumise à une sollicitation de traction  $\sigma$ ,  $K_t$  s'exprime sous la forme générale suivante (Neuber (1961), Peterson (1974)) :

$$K_t = \frac{\sigma_t}{\sigma} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

Où,  $a$  et  $\rho$  correspondent respectivement à la demi-longueur et au rayon de courbure du défaut (Figure (1.13)) et  $\sigma_t$  représente la contrainte de tension à son extrémité. Cette formule n'est valable que pour une cavité perpendiculaire à la direction de sollicitation. Elle permet néanmoins de noter l'importance de la taille et du rayon de courbure sur la sévérité du défaut. Plus le rayon de courbure est petit par rapport à la taille de la cavité, plus la contrainte à son extrémité est importante.

### Sévérité d'une fissure

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, la fissure est considérée comme une cavité *infinitement* mince avec un rayon de courbure nul. Sous certaines hypothèses, que nous préciserons dans la partie 2, le champ de contrainte au voisinage du front s'écrit alors (Irwin (1957)) :

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + O\left(\sqrt{\frac{1}{r}}\right)$$

Le paramètre  $K$  est appelé **facteur d'intensité de contrainte**. Les variables  $r$  et  $\theta$  correspondent aux coordonnées polaires définies dans le repère cartésien local associé au front de fissure (Figure 1.14). Les expressions des fonctions angulaires  $f_{ij}$  seront précisées ultérieurement dans ce chapitre. L'expression des contraintes met en évidence une particularité bien connue en mécanique linéaire de la rupture : la singularité du champ de contrainte sur le front de la fissure.

Le facteur d'intensité de contrainte ne doit pas être confondu avec le coefficient de concentration de contrainte introduit dans la partie précédente. Ce dernier est un paramètre sans dimensions qui permet de déterminer la contrainte maximale à l'extrémité d'une cavité au rayon de courbure non nul. Le facteur d'intensité de contrainte s'exprime en  $N.m^{-3/2}$ . Il permet de « mesurer » la singularité du champ de contrainte sur le front de la fissure.

Dans le cadre théorique de la mécanique linéaire de la rupture, la dangerosité de la fissure est évaluée à partir de l'étude du facteur  $K$ , qui dépend entre autres de la géométrie de la fissure, et du chargement appliqué au solide.

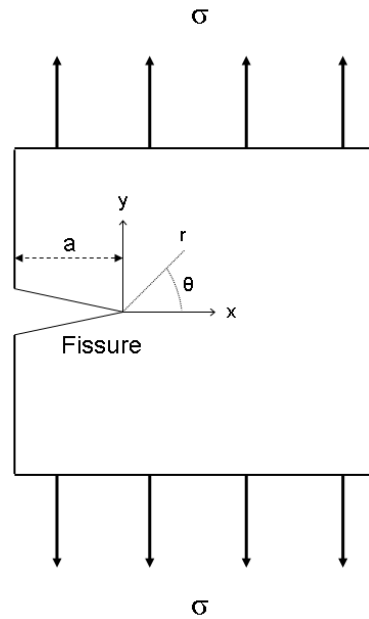


Figure 1.14 : Représentation schématique d'une fissure débouchante et du repère local associé à la pointe de fissure

### Sévérité d'une inclusion

Le cas des inclusions est différent des deux cas précédents. Une inclusion possède le plus souvent une nature chimique, ou à tout le moins, une configuration microstructurale différente de celle de la matrice qui l'entoure.

En présence d'un champ de contrainte, inclusion et matrice subissent donc des déformations différentes. Ce différentiel de déformation induit une contrainte supplémentaire au niveau de l'interface inclusion/matrice qui peut entraîner une décohésion locale et l'apparition d'un vide. On retrouve alors le cas déjà évoqué de la concentration de contrainte au voisinage d'une cavité.

En l'absence de décohésion de l'interface, l'endommagement peut apparaître, soit dans l'inclusion, soit dans le matériau environnant en fonction de la résistance relative des deux milieux.

Plus d'éléments sur la mécanique des inclusions sont consultables dans les travaux de J.D. Eshelby (1976).

### *Bilan*

Comme dans le cas des dislocations et des défauts cristallins, les cavités et les fissures perturbent le champ de contrainte dans le matériau. Celui-ci peut, localement, dépasser la contrainte critique de rupture du matériau bien que le chargement soit globalement peu important. Il semble donc essentiel de disposer d'un outil d'étude de ces défauts afin de prévoir et d'anticiper la ruine d'une structure.

C'est dans ce contexte qu'a été développée la mécanique linéaire de la rupture.

## 1.2. Approche classique des problèmes de fissuration : mécanique de la rupture

### 1.2.1. Rupture fragile et rupture ductile

La mécanique de la rupture traite de l'amorçage et de la propagation de fissures.

Du point de vue mécanique, la rupture est caractérisée par la séparation locale et irréversible d'un milieu continu en deux parties situées de part et d'autre d'une surface  $S$ . La coupure ainsi créée est appelée fissure. Elle constitue une surface de discontinuité pour le champ de déplacement.

Schématiquement, une fissure tridimensionnelle peut-être représentée par deux surfaces  $S^+$  et  $S^-$  jointives. La ligne de jonction est appelée front et concentre toute l'attention du mécanicien car elle constitue le « point » de départ de la propagation. Du point de vue géométrique, les deux faces  $S^+$  et  $S^-$  sont supposées confondues, bien que la réalité physique soit différente.

Sur la Figure (1.15) ci-dessous, l'ouverture de la fissure est volontairement exagérée.

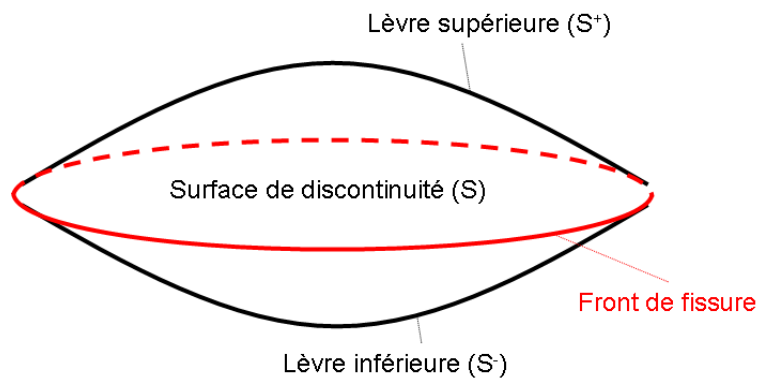


Figure 1.15 : Représentation schématique d'une fissure

On distingue deux types de rupture (sans compter la fatigue) :

- La rupture fragile
- La rupture ductile

#### **Rupture fragile**

Du point de vue macroscopique, la rupture fragile s'accompagne d'une « plasticité » peu importante et limitée au voisinage de la pointe de fissure. Le comportement du matériau est donc essentiellement élastique et le cadre théorique proposé pour son étude est l'élasticité linéaire.

A l'échelle microscopique, le mécanisme prépondérant mis en jeu au cours d'une rupture fragile est le clivage. Cependant, nous verrons ultérieurement que ça n'est pas toujours le cas.



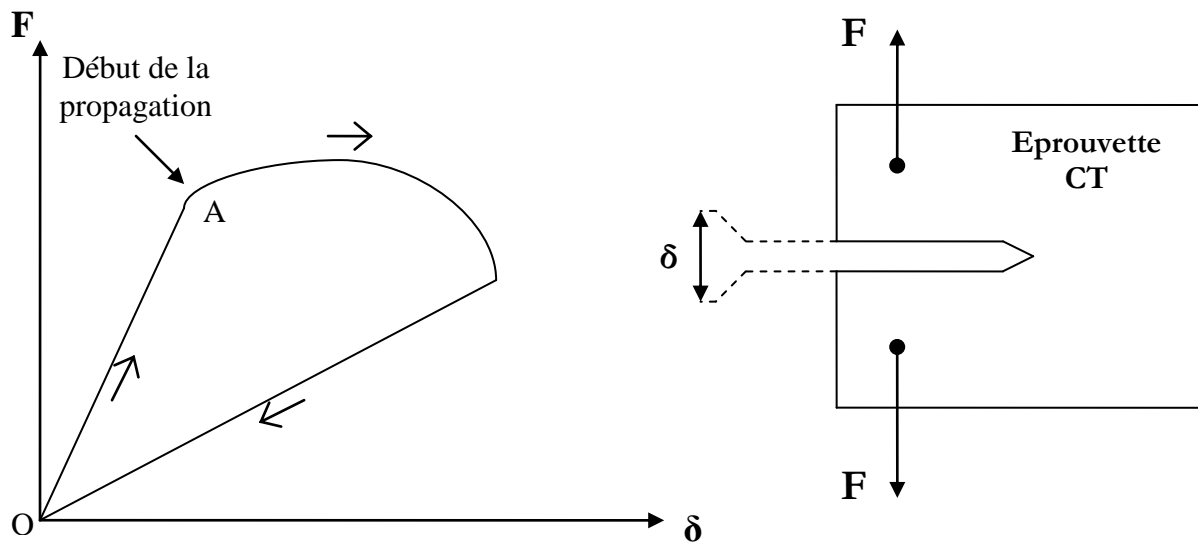


Figure 1.16 : Evolution typique de l'effort au cours d'un essai de traction sur une éprouvette CT dans le cas d'un matériau fragile

La Figure (1.16) représente de manière schématique l'évolution de la force  $F$  en fonction de l'écartement  $\delta$  sur une éprouvette CT (éprouvette compacte de traction). L'inflexion de la pente à partir du point  $A$  est due à l'initiation de la propagation d'une fissure au fond de l'encoche. Une partie du travail apporté par l'effort est dissipée dans cette propagation. A l'issue de la décharge, l'écartement revient à sa valeur d'origine.

Lorsqu'un matériau est fragile, il se déforme très peu avant de rompre. La rupture intervient donc brutalement et rapidement. D'où la nécessité de bien connaître et maîtriser les paramètres critiques que sont le chargement et la taille de fissure.

### Rupture ductile

Du point de vue macroscopique, la rupture ductile s'accompagne d'un phénomène de plastification étendu et non plus limité au voisinage du front de fissure. La courbe expérimentale reliant les efforts aux déplacements s'en trouve modifiée avec l'apparition d'une déformation permanente après décharge (Figure (1.17)).

A l'échelle microscopique, les glissements de plans atomiques entraînent un écrouissage des grains métallurgiques. Le mécanisme de fissuration se décompose alors en trois étapes. Le chargement entraîne une décohésion de la matrice métallique autour d'inclusions de nature chimique différente et l'apparition de microcavités. Puis, la taille de ces cavités augmente par écoulement plastique. Enfin, une fissure se forme par coalescence des cavités lorsque celles-ci ont atteint une taille suffisamment importante.

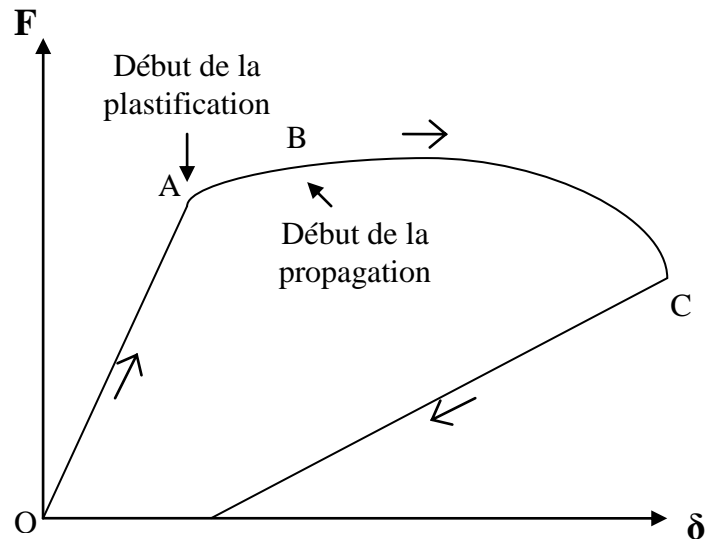


Figure 1.17 : Evolution typique de l'effort au cours d'un essai de traction sur une éprouvette CT dans le cas d'un matériau ductile

Pour un matériau ductile, la propagation de la fissure est retardée car le matériau commence par plastifier. Dans ce cas, le fléchissement de la courbe constaté en A est avant tout dû à la plastification, puis très rapidement, à la propagation de la fissure (point B). Dans la réalité, ces deux points sont très proches et il est très difficile de différencier les deux phénomènes. On peut, pour cela, procéder régulièrement à de petites décharges et mesurer la pente observée.

Un matériau ductile se déforme de façon importante avant de rompre, ce qui permet parfois d'anticiper la rupture du matériau.

## Discussion sur le caractère fragile ou ductile d'un matériau

### *Transition fragile-ductile*

Le caractère ductile ou fragile dépend de la température. Une baisse de la température tend à fragiliser un matériau. Inversement, une hausse de la température accroît le caractère ductile. Les essais de résilience de type Charpy permettent de déterminer expérimentalement la température de transition entre ces deux états.

D'autres paramètres peuvent contribuer à la fragilisation des matériaux métalliques. On peut citer entre autres, le vieillissement, la corrosion chimique ou l'irradiation par des neutrons.

### *Aspect microscopique ou macroscopique*

Comme le souligne Bui (1978), la notion de rupture fragile ou ductile dépend grandement de l'échelle à laquelle on se situe.

Au niveau microscopique, la fragilité est associée au mécanisme de clivage, qui entraîne la séparation des plans cristallographiques au sein des grains métallurgiques. Tandis que la ductilité est basée sur le glissement des plans denses d'atomes, avec pour conséquence une déformation plastique importante de la microstructure.

Cependant, le comportement fragile ou ductile à l'échelle microscopique ne permet pas forcément de qualifier le comportement du matériau à l'échelle macroscopique. Certains solides se rompent avec un phénomène de plastification globale très important, tandis que les grains au niveau de la surface rompue ne connaissent pas une déformation plastique significative (Bui (1978)). Inversement, la déformation plastique peut-être extrêmement importante au niveau de la surface de rupture tandis que le matériau est resté globalement élastique pendant la propagation de la fissure.

La définition de la fragilité apparaît ainsi fortement motivée par l'aspect macroscopique de la rupture. Le type de mécanisme (clivage ou cisaillement) à l'œuvre au niveau microscopique n'est pas déterminant pour le choix du cadre théorique de l'étude de la rupture. Si les déformations plastiques importantes sont confinées au voisinage de la fissure, autrement dit, si la plasticité globale de la structure est faible, alors le matériau peut-être décrit par une loi de comportement purement élastique.

On note que le confinement de la zone plastique étant une condition nécessaire de l'applicabilité de la théorie de la rupture fragile, il est important de pouvoir évaluer la taille de cette zone et de la comparer à la taille du domaine étudié.

On parlera donc désormais de rupture fragile au sens macroscopique. Ce choix a pour conséquences de qualifier comme fragiles un certain nombre de phénomènes, telles que la fissuration par fatigue, ou la fissuration par corrosion chimique, bien qu'à l'échelle microscopique, la rupture ne puisse être considérée comme fragile.

### 1.2.2. La Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR)

En 1920, les travaux de Griffith posent les bases de la mécanique de la rupture. A l'époque, il pressent déjà l'importance des microfissures, et des concentrations de contraintes qu'elles engendrent, sur le processus de fracture des matériaux. Il développe une approche énergétique de la rupture, basée sur une grandeur nouvelle, le taux de restitution d'énergie, qui lui permet de prédire l'initiation et la stabilité de la propagation des fissures.

Le travail de Griffith, ignoré pendant de nombreuses années par la communauté scientifique, est repris à partir du milieu du 20<sup>ème</sup> siècle par plusieurs auteurs. Sneddon (1951) et Irwin (1957) notamment, réalisent le calcul analytique des champs de contrainte et de déformation au voisinage de la fissure dans le cadre de l'élasticité linéaire. Ils introduisent les facteurs d'intensité de contrainte, des paramètres qui relient l'état de contrainte aux abords du front de la fissure à des caractéristiques géométriques macroscopiques (géométrie de la structure, dimension et forme de la fissure, chargement...).

A partir des années 1960, les études menées par Rice (1968) et Bui (1978), qui introduisent la notion d'intégrale indépendante de contour, permettent de traiter des problèmes de fissuration en présence d'une plasticité étendue. Il s'agit des premiers développements de la mécanique non linéaire de la rupture.

Depuis, la mécanique de la rupture n'a cessé de progresser, notamment grâce à l'avènement des méthodes numériques (méthode des éléments finis, méthode des éléments de frontière...).

Dans la suite de ce chapitre, nous nous restreignons à l'étude de la mécanique linéaire de la rupture. Sa simplicité en fait un outil très apprécié dans le monde industriel.

## Hypothèses de base

En supposant que les déformations plastiques sont confinées au voisinage de la fissure, le cadre théorique adéquat pour l'étude du comportement de la fissure est la mécanique linéaire de la rupture.

Les hypothèses de base de la MLR sont donc un milieu élastique, linéaire et isotrope, dont le comportement est décrit par la loi de Hooke généralisée :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} \right) \quad (1.1)$$

Où E et  $\nu$  représentent le module d'Young et le coefficient de Poisson. Les tenseurs de contrainte et de déformation sont symbolisés par les lettres  $\sigma$  et  $\varepsilon$ . La notation indicielle et la convention d'Einstein associée sont adoptées :

$$\varepsilon_{kk} = \text{Tr}(\varepsilon)$$

Par ailleurs, on utilise l'expression linéarisée du tenseur des déformations :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (1.2)$$

Où u représente le vecteur déplacement.

## Modes de sollicitation d'une fissure

Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, on distingue 3 modes de rupture (Figure (1.18)):

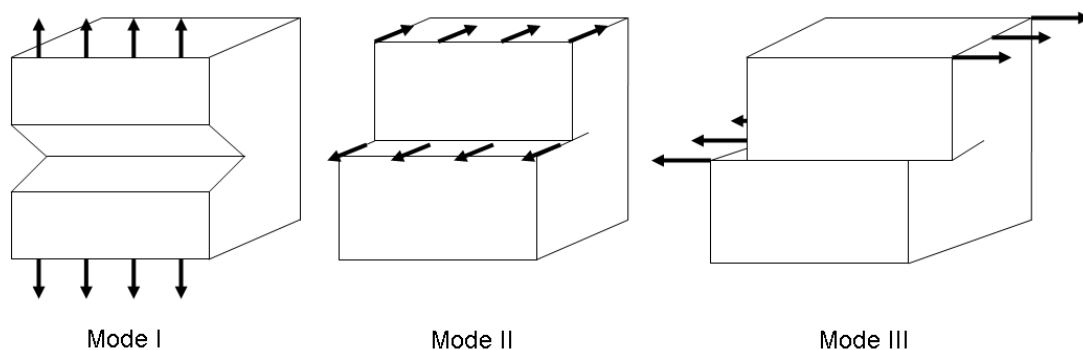


Figure 1.18 : Modes élémentaires de déformation des lèvres de la fissure

- Le mode I, appelé « mode d'ouverture », décrit l'écartement des faces de la fissure.
- Le mode II ou « mode de glissement plan », pour lequel les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans une direction perpendiculaire au front.

- Le mode III ou « mode de glissement anti-plan », pour lequel les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans une direction parallèle au front.

A chaque mode de rupture est associé un champ de déformation et un champ de contrainte.

### Expressions asymptotiques des contraintes – Facteurs d'intensité de contraintes

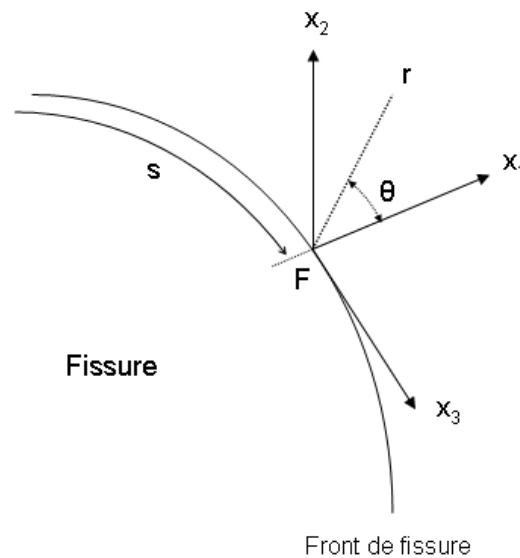


Figure 1.19 : Définition du repère local sur le front d'une fissure tridimensionnelle

Les expressions des déplacements et des contraintes en pointe de fissure ont été déterminées par Irwin (1957) dans le cas bidimensionnel. La généralisation à des problèmes tridimensionnels est intervenue quelques années plus tard, grâce aux travaux de Kassir et Sih (1960, 1964). Nous présentons ici directement les expressions obtenues dans le cadre 3D.

Le calcul repose sur les hypothèses suivantes :

- Les lèvres de la fissure sont soumises à des conditions de bords libres, autrement dit, le vecteur contrainte  $T$  sur les faces de la fissure vérifie :  $T_i = \sigma_{ij} n_j = 0$  ( $\mathbf{n}$  = vecteur normal à la surface).
- Le matériau est élastique linéaire.
- Les contraintes au voisinage du front de fissure vérifient les équations d'équilibre ( $\sigma_{ij,j} = 0$ )
- Les déplacements et les déformations sont liés par les équations (1.2).

Sous ces conditions, la détermination des déplacements et des contraintes se ramène à la résolution d'un problème d'élasticité plane dans le cas des modes I et II, et d'un problème d'élasticité anti-plane pour le mode III.

Les stratégies mathématiques adoptées pour résoudre ces deux problèmes sont présentées dans de nombreux ouvrages (Bui (1978), Labbens (1980)). Elles se basent sur la méthode des fonctions d'Airy et les solutions de Muskhelishvili (1975) pour l'élasticité. Sans détailler ces

calculs, nous donnons la forme générale du développement asymptotique des contraintes au voisinage de la pointe de fissure :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K_p f_{ij}^p(\theta)}{\sqrt{r}} + T_p g_{ij}^p(\theta) + O(\sqrt{r}) \quad (1.3)$$

Nous ne présentons ici que les deux premiers termes du développement. Pour plus d'information sur les termes suivants, on peut consulter les travaux menés par Leblond et Torlai (1992).

L'expression (1.3) fait intervenir les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  définies dans le plan  $Fx_1x_2$ , perpendiculaire au front de la fissure (Figure 1.19). Les paramètres  $K_p$  et  $T_p$  ( $p = I, II, III$ ) correspondent respectivement aux « facteurs d'intensité de contrainte » et aux « contraintes non-singulières » (ou « contraintes-T ») au point F. Enfin,  $f_{ij}^p$  et  $g_{ij}^p$  sont des fonctions de l'angle polaire  $\theta$ .

Le premier terme du développement est singulier et domine le second terme pour les petites valeurs de  $r$ . Pour l'étude du comportement de la fissure, on ne s'intéresse donc généralement qu'au premier terme. Il faut cependant noter que plusieurs études expérimentales (Williams et Ewing (1972), Ueda et al. (1983)) et théoriques (Cotterell et Rice (1980)) ont démontré que les « contraintes-T » avaient une influence non négligeable sur le développement de la fissure, notamment sur sa stabilité et sa direction de propagation.

Néanmoins, dans le cadre de cette partie, nous nous limiterons à l'étude du terme singulier et des « facteurs d'intensité de contrainte ».

Dans le cas d'une fissure tridimensionnelle, les champs de contrainte et de déplacement dépendent de la position  $s$  (Figure 1.19) sur le front de la fissure. Les expressions détaillées des composantes du tenseur de contraintes sont (Kassir et Sih (1966), Hartranft et Sih (1977)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{22} = \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{33} = 2\nu \left[ \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sigma_{12} = \frac{K_I(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right) \\ \sigma_{13} = -\frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sigma_{23} = \frac{K_{III}(s)}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Et les déplacements correspondant s'expriment sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 = \frac{1+\nu}{\mathbf{E}} \sqrt{\frac{2\mathbf{r}}{\pi}} \left\{ \mathbf{K}_I(\mathbf{s}) \cos\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \left[ (1-2\nu) + \sin^2\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \right] + \mathbf{K}_{II}(\mathbf{s}) \sin\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \left[ 2(1-\nu) + \cos^2\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \right] \right\} \\ \mathbf{u}_2 = \frac{1+\nu}{\mathbf{E}} \sqrt{\frac{2\mathbf{r}}{\pi}} \left\{ \mathbf{K}_I(\mathbf{s}) \sin\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \left[ 2(1-\nu) + \cos^2\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \right] - \mathbf{K}_{II}(\mathbf{s}) \cos\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \left[ (1-2\nu) - \sin^2\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \right] \right\} \\ \mathbf{u}_3 = \frac{2(1+\nu)}{\mathbf{E}} \sqrt{\frac{2\mathbf{r}}{\pi}} \mathbf{K}_{III}(\mathbf{s}) \sin\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \end{cases} \quad (1.5)$$

Où  $\mu$  et  $\nu$  sont respectivement le module de cisaillement et le coefficient de Poisson.

Les paramètres  $K_I$  et  $K_{II}$  et  $K_{III}$  correspondent aux facteurs d'intensité de contrainte (FIC) associés respectivement aux modes de déformation I, II et III.

Les FIC dépendent de la géométrie du domaine contenant la fissure et du chargement qui lui est appliqué. Ils sont aussi fonction de la taille, la forme et la position de la fissure..

Le champ de contrainte étant singulier en  $1/\sqrt{r}$ , **les contraintes sont infinies en pointe de fissure et donc inexploitable pour étudier son comportement.**

La singularité des contraintes est un résultat physiquement incohérent, qui met en évidence les limites de la théorie classique de l'élasticité pour traiter les problèmes de fissure. Pour surmonter cette difficulté, une solution est de prendre en compte le comportement plastique du matériau en pointe de fissure. On sort alors du cadre de la MLR et on rentre dans celui, autrement plus complexe, de la mécanique non linéaire de la rupture (MNLR).

Plutôt que de compliquer la modélisation, la MLR propose de faire l'analyse de la fissure à partir des facteurs d'intensité de contrainte.

## Critères de propagation

*Critère basé sur les facteurs d'intensité de contrainte*

### Critère d'Irwin en mode I

L'étude du comportement de la fissure se ramène simplement à l'étude des valeurs des FIC. Lorsque ceux-ci dépassent une valeur critique, la fissure se propage.

Le critère proposé par Irwin en mode I est le suivant :

$$\begin{cases} K_I < K_{IC} & \Rightarrow \text{Pas De Propagation} \\ K_I = K_{IC} & \Rightarrow \text{Pr opagation} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le paramètre  $K_{IC}$  est la valeur critique de  $K_I$  pour laquelle la propagation s'initie en mode I.  $K_{IC}$  est appelé « ténacité du matériau » et décrit sa capacité à résister à la rupture. Il s'agit d'une grandeur à priori intrinsèque, à laquelle on accède expérimentalement. L'essai le plus connu pour déterminer la ténacité est l'essai de traction sur éprouvette CT.

Généralement, en première approximation, les FIC varient linéairement avec la contrainte  $\sigma$  et la racine carrée de la longueur de la fissure :

$$K_i \propto \sigma \sqrt{\pi a}$$

Où « a » représente la taille de la fissure.

Les expressions détaillées des FIC pour un grand nombre de problèmes simples sont disponibles dans la littérature (Tada et al. (1985), Murakami (1987)). Pour des problèmes plus complexes, les mécaniciens disposent d'une large palette de méthodes numériques qui permet de les déterminer.

Grâce au critère (1.6), on peut, à chargement constant, prédire la dimension critique de la fissure pour laquelle la propagation intervient. De même, si les dimensions de la fissure sont fixées, il est possible d'évaluer le chargement critique entraînant l'initiation de la propagation.

### Critère en mode mixte

Lorsque que plusieurs modes de déformation agissent simultanément sur les lèvres de la fissure, on parle de sollicitation en mode mixte. Dans ce cas, on observe le plus souvent un changement de direction au cours de la propagation de la fissure. Le critère de propagation doit donc être capable de prédire à la fois la direction de propagation et la stabilité de la fissure.

De nombreux critères ont été proposés pour déterminer la direction de propagation d'une fissure sous sollicitation mixte. Parmi d'autres, on peut citer le critère de Erdogan et Sih (1963) qui postule que la fissure se propage dans la direction où la contrainte circonférentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  est maximale, ou encore le critère de symétrie locale, de Goldstein et Salganik (1974), qui prévoit la propagation de la fissure dans la direction pour laquelle le mode II s'annule ( $K_{II} = 0$ ).

Une fois la direction de propagation connue, le critère de propagation peut se mettre sous la forme (1.7) :

$$\begin{cases} K_{eq} < K_{IC} & \Rightarrow \text{Pas De Propagation} \\ K_{eq} = K_{IC} & \Rightarrow \text{Propagation Dans La Direction } \theta_p \end{cases} \quad (1.7)$$

Où  $\theta_p$  est l'angle qui caractérise la direction de propagation par rapport au plan initial de la fissure, et  $K_{eq}$  est un facteur d'intensité de contrainte équivalent, fonction de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$ .

$$K_{eq} = f(K_I, K_{II}, K_{III})$$

La définition de  $K_{eq}$  varie d'un problème à un autre. De multiples définitions sont proposées dans la littérature (Glodez et al. (2002), Jelaska (2005), Gerstle (1986)...).

Bien que le facteur d'intensité équivalent ne dépende pas exclusivement de  $K_I$ , la stabilité de la fissure est le plus souvent évaluée en comparant les valeurs de  $K_{eq}$  et de la ténacité  $K_{IC}$ . En effet, dans la pratique, le mode I de déformation est considéré comme le plus dangereux par rapport à l'initiation de la propagation.

Cette prépondérance du mode I sur les autres modes de déformation est une caractéristique de la mécanique linéaire de la rupture. Dans ce cadre, les critères classiques de propagation



prévoient tous une bifurcation immédiate de la fissure lorsque celle-ci est sollicitée en mode mixte.

Néanmoins, notons que plusieurs études consacrées au phénomène de fatigue (Smith et Smith (1988), Doquet et Bertolino (2008)) ont montré qu'une propagation coplanaire de la fissure est possible en mode de cisaillement. Le travail de Sun Z. et al. (2005) débouche sur les mêmes conclusions pour des cas de chargement statique faisant intervenir des efforts de compression.

### La ténacité

La ténacité est une propriété intrinsèque du matériau, valable pour un état métallurgique et une température donnés. Elle est mesurée expérimentalement sur des éprouvettes entaillées de forme simple (éprouvette CT, éprouvette de flexion à trois points d'appuis). Une éprouvette Compacte de Traction est représentée de façon schématisée sur la Figure (1.20) :

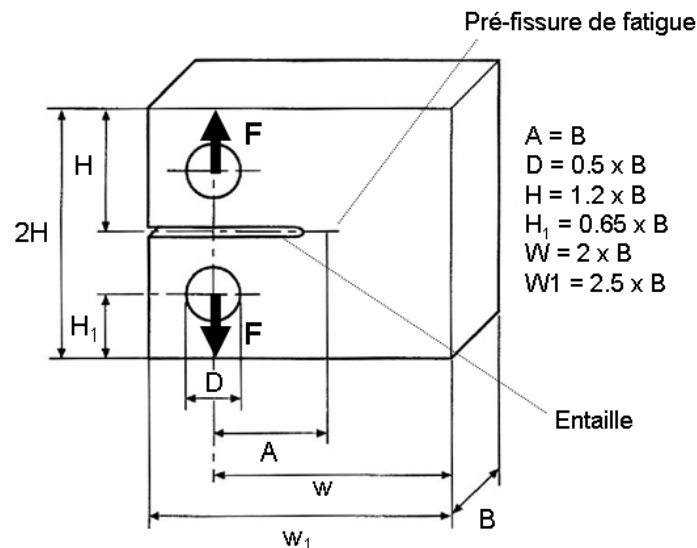


Figure 1.20 : Epreuve Compacte de Traction (François D., Essais de mesure de la ténacité, Techniques de l'Ingénieur, 2007)

Comme on peut le constater, l'éprouvette comporte une entaille située à mi-hauteur. Le fond de cette entaille est pré-fissuré par fatigue afin que l'extrémité de la fissure soit la plus aigüe possible. L'essai se déroule ensuite de la manière suivante. On applique un effort de traction  $F$  de chaque côté de l'entaille et on augmente progressivement le chargement. L'écartement entre les deux « bras » de l'éprouvette est mesuré en fonction de l'augmentation de la force. Lorsque la rupture intervient, on relève la valeur maximale atteinte par  $F$  au cours de l'historique de déformation de l'éprouvette. Connaissant la longueur initiale de la fissure, on peut alors calculer  $K_{IC}$  à l'aide de formules empiriques (François (2007)).

La validité de la mesure de la ténacité est cependant soumise à quelques restrictions.

- Il est impératif que la plasticité reste confinée au niveau du front de la fissure. Les dimensions de la zone plastifiée doivent être suffisamment réduites par rapport à l'épaisseur et au ligament de l'éprouvette (François (2007)). Pour les matériaux à haute limite d'élasticité, cette restriction n'est pas problématique car la taille de

l'éprouvette reste tout à fait raisonnable. En revanche, pour des matériaux à faible limite élastique, le dimensionnement de l'éprouvette est autrement plus complexe.

- Suivant la nature du problème, déformations planes ou contraintes plane, la valeur de la ténacité n'est pas la même. On constate en effet que la valeur de  $K_{IC}$  n'est réellement indépendante de l'épaisseur de l'éprouvette (voir Figure (1.21)) que si celle-ci est supérieure à une certaine valeur  $B_0$  (Bui (1978)).

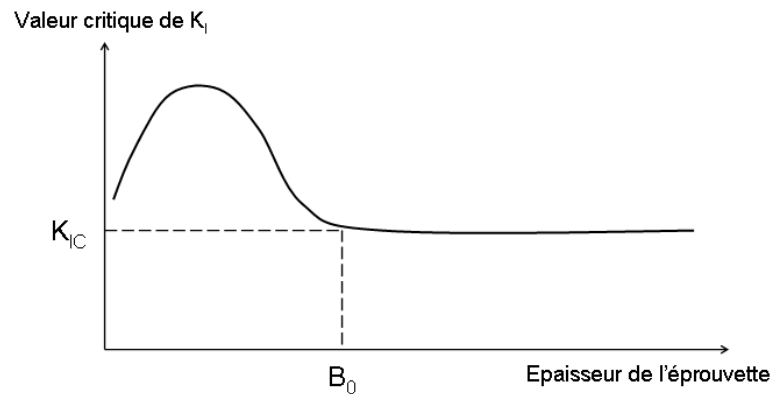


Figure 1.21 : Evolution de la valeur critique de KI en fonction de l'épaisseur de l'éprouvette (Bui H.D., Mécanique de la rupture fragile, 1978)

### *Critères énergétiques*

Le taux de restitution d'énergie

Griffith (1920) est le premier à aborder les problèmes de rupture du point de vue énergétique. Il suppose que la propagation de la fissure consomme de l'énergie et postule l'existence d'une énergie spécifique  $\gamma_F$ , caractéristique du matériau, nécessaire pour créer de nouvelles surfaces à l'intérieur du solide.

Il définit alors une nouvelle grandeur (notée  $G$ ), qu'il baptise « taux de restitution d'énergie », et qui représente la variation de l'énergie potentielle du système en fonction de l'accroissement de la taille de la fissure. Pour une fissure de surface  $S$ , à l'intérieur d'un solide d'énergie potentielle  $W$ , le taux de restitution d'énergie est donné par la formule :

$$G = -\frac{\partial W}{\partial S}$$

Le critère de propagation proposé par Griffith s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} G < 2\gamma_F & \Rightarrow \text{Pas De Propagation} \\ G \geq 2\gamma_F & \Rightarrow \text{Propagation} \end{cases} \quad (1.8)$$

Pour  $G \geq 2\gamma_F$ , deux cas sont possibles :

- Si  $G > 2\gamma_F$ , une partie de l'énergie (équivalente à  $2\gamma_F$ ) est utilisée pour rompre les liaisons atomiques et créer ainsi deux nouvelles surfaces à l'intérieur du solide (correspondant aux extensions des deux faces de la fissure). L'excédent ( $G - 2\gamma_F$ ) est converti en énergie cinétique et peut aussi contribuer, selon les circonstances, à la création de nouvelles surfaces. Ce processus peut mener à une propagation instable de la fissure.

- Si  $G = 2\gamma_F$ , il n'y a pas d'excédent d'énergie, la propagation est contrôlée et la fissure se propage de façon stable.

L'approche énergétique présentée par Griffith permet donc non seulement de prédire l'initiation, mais aussi la stabilité de la fissure au cours de la propagation. Quant à la direction de propagation, Griffith montre qu'elle peut se déduire des variations du taux de restitution d'énergie. En se basant sur l'idée que tout système physique tend à évoluer vers une configuration minimisant son énergie potentielle, il postule que le développement de la fissure se fait dans la direction pour laquelle le taux de restitution d'énergie est maximal.

Au cours de ses travaux, Irwin a démontré que le critère de Griffith (équation (1.8)) était équivalent au critère (1.6), basé sur les FIC. Il a déterminé la relation entre le taux de restitution d'énergie et les facteurs d'intensité de contrainte :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.9)$$

En comparant l'énergie potentielle d'une fissure possédant une extension infinitésimale d'orientation quelconque, et l'énergie de la même fissure dans son état initial, on peut définir les facteurs d'intensité de contrainte après branchement  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ , et  $K_{III}^*$  et les exprimer en fonction des FIC sur le front original de la fissure :

$$K_p^* = f(K_I, K_{II}, K_{III}, \theta) \quad (p = I, II, III)$$

Le taux de restitution d'énergie s'exprime finalement en fonction des FIC après branchement :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E} (K_I^{*2} + K_{II}^{*2}) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^{*2} \quad (1.10)$$

Et l'évaluation de la direction de propagation se fait simplement en étudiant les variations de

$$G \text{ en fonction de } \theta : \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0.$$

Ce critère, ainsi que les expressions détaillées des FIC après branchement (Leblond (1999)), sont précisées dans le Chapitre 2.

Notons que d'autres critères énergétiques existent. En 1974, Sih (problème 2D), puis Sih et Cha (problème 3D) proposent un critère de propagation basé sur la densité d'énergie de déformation élastique. Il prédit la propagation de la fissure dans la direction où la densité de déformation est minimale.

Pour ce critère, la propagation de la fissure intervient lorsqu'une valeur critique de la densité de déformation est atteinte.

### 1.2.3. Bilan

La mécanique linéaire de la rupture est un outil simple très utilisé par les ingénieurs pour résoudre les problèmes de rupture fragile. Le critère de propagation de la fissure repose sur un seul et unique paramètre, le facteur d'intensité de contrainte, qui caractérise le champ de contrainte au voisinage du front de fissure en fonction de grandeurs macroscopiques telles que la géométrie du domaine, le chargement ou la taille de la fissure.

Toutefois, la singularité des contraintes prédite en pointe de fissure a mis en évidence certaines insuffisances de l'approche classique. L'infinité des contraintes sur le front de la fissure est un résultat physiquement impossible qui questionne sur la validité de l'approche « facteurs d'intensité de contrainte ».

Peut-on rester dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture pour étudier la fracturation, sans avoir recours à la notion de plasticité confinée ? Certains travaux conduisent à répondre par l'affirmative. Ils ont recours aux théories dites non-locales dont une présentation clôture ce chapitre.

## 1.3. Vers l'utilisation d'un modèle de comportement non-local

### 1.3.1. Limites de la théorie classique et intérêt de l'approche non-locale

Comme le note Eringen dans la préface de son ouvrage « Nonlocal continuum theories » (2002), toutes les théories physiques possèdent un champ d'application en dehors duquel elles sont incapables de fournir des résultats précis et cohérents. Cela se traduit par des prédictions numériques qui divergent de façon notable par rapport aux résultats expérimentaux ou des résultats théoriques présentant des singularités mathématiques inacceptables.

De nombreux exemples viennent illustrer cette assertion. Dans le cadre de la théorie classique de l'élasticité, le champ de contrainte prédit sur le front d'une fissure ou sur une ligne de dislocation est infini. Le même type de singularité est constaté au point d'application d'une force ponctuelle ou au voisinage de défauts ponctuels.

On peut ajouter que la théorie classique de l'élasticité linéaire ne permet pas de rendre compte de « l'effet d'échelle », i.e. des conséquences physiques intervenant lorsqu'on modifie certaines dimensions d'un solide. Plusieurs études expérimentales ont permis de mettre en évidence ce phénomène sur des nanotubes de carbone ou des films minces. L'augmentation de la viscosité d'un fluide s'écoulant dans des canaux microscopiques relève aussi de « l'effet d'échelle ».

Pour expliquer les limites de la théorie classique de l'élasticité, la communauté scientifique avance plusieurs explications physiques (Di Paola et al. (2010)) parmi lesquelles l'influence croissante de l'énergie de surface aux petites échelles ou bien le rôle non négligeable de la microstructure interne du matériau. L'approche classique serait donc incapable de traiter des problèmes pour lesquels les événements se produisant à une échelle microscopique ou microstructurale ont une influence significative. Selon Eringen (1987, 2002), cette incapacité est liée à l'absence d'une longueur interne, caractéristique du matériau, dans le modèle de comportement élastique classique.

Une solution possible est de revenir à une description discrète du matériau et d'utiliser les théories atomiques pour décrire le comportement du solide. Dans ce type d'approche, on suppose le plus souvent que le matériau possède une structure interne parfaite dépourvue de défauts. Cette hypothèse est très éloignée de la réalité. Les matériaux métalliques, par exemple, sont remplis de dislocations, lacunes et autres impuretés. Par ailleurs, le nombre d'atomes de la structure entraîne une explosion du nombre de degrés de liberté et requiert des capacités de calcul gigantesques dont nous ne disposons pas à ce jour.

Dans ce contexte, l'approche non-locale se présente comme une alternative intéressante, à mi-chemin entre les théories atomiques et la mécanique classique. L'idée principale est d'utiliser un modèle de milieu continu capable de prendre en compte l'influence de la microstructure. Les théories non-locales sont une généralisation des théories classiques pour lesquelles le comportement en un point matériel est influencé par l'état en chaque point du solide. Ce type d'approche, dont la formulation mathématique induit naturellement une longueur interne caractéristique du matériau, permet de décrire plus finement le comportement élastique par la prise en compte des interactions à longue distance.

On peut grossièrement classer les théories non-locales en deux catégories :

- Les théories non-locales à gradient
- Les théories non-locales intégrales

La première catégorie est brièvement décrite dans la partie suivante, puis on s'attarde plus longuement sur les théories intégrales.

### 1.3.2. Théories non-locales à gradient

Il existe deux formulations légèrement différentes de cette théorie.

La première repose sur la philosophie suivante. Pour matérialiser l'influence de la microstructure interne, chaque point matériel du solide possède des degrés de liberté supplémentaires, qui correspondent à des microcontraintes et des microdéformations additionnelles. Les bases de la théorie ont été posées dans les années 60 par plusieurs auteurs (Toupin (1963), Mindlin (1963), Krumhansl (1967), Kunin (1967)). Dès le début des années 1970, Eringen a lui aussi contribué à son développement (Eringen (1972)).

Cette théorie a permis d'étudier de nouveaux modèles de comportement, à travers, notamment, la définition des milieux micromorphes, microstretches ou micropolaires (Eringen (2002), p 253). Dans ce type de modèle, le solide est constitué d'un ensemble de particules matérielles qui sont susceptibles de se dilater, se contracter ou tourner sur elles-mêmes.

Ces degrés de libertés supplémentaires engendrent des micro-contraintes qui viennent s'ajouter à la contrainte classique prévue par la théorie locale.

Sur ce sujet, citons aussi les travaux de Gao (1999-a,1999-b) qui introduit dans les équations d'équilibre non-locales les moments liés aux rotations relatives des particules les unes par rapport aux autres.

La seconde formulation est basée sur l'introduction de gradients de la déformation dans l'équation de comportement élastique. Cette approche est apparue plus récemment dans les travaux de Aifantis (1992, 1994), Askas et Aifantis (2002) ou encore, Altan et al.(1997). Ces auteurs remarquent que la singularité au voisinage de la pointe de fissure disparaît lorsqu'on utilise une loi de comportement dans laquelle les contraintes ne dépendent pas uniquement du tenseur de déformation, mais aussi de ses dérivées secondes.

Selon ces auteurs, l'introduction de gradients d'ordre supérieur permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau sur la loi de comportement.

Sous sa forme la plus simple, l'équation de comportement de la théorie des gradients s'écrit :

$$\sigma = C(\varepsilon - \ell^2 \nabla^2 \varepsilon) \quad (1.11)$$

Où  $\sigma$  et  $\varepsilon$  correspondent respectivement au tenseur de contrainte de Cauchy et au tenseur de déformation linéarisé. Rappelons que l'opérateur nabla ( $\nabla$ ) a pour composantes en coordonnées cartésiennes,  $\nabla(\cdot) = (\partial \cdot / \partial x; \partial \cdot / \partial y; \partial \cdot / \partial z)$ .

Le paramètre «  $\ell$  » est homogène à une longueur, représentative de la microstructure interne du matériau. On peut d'ores et déjà remarquer que lorsque «  $\ell$  » s'annule, on retrouve le modèle classique de comportement élastique (loi de Hooke généralisée).

Par ailleurs, notons que des formulations plus élaborées de l'équation de comportement (1.11) ont été proposées. Il existe notamment des modèles incluant des gradients d'ordre 4 (Askes et al. (2002)) ou des termes gradients non linéaires (Aifantis (1999)).

### 1.3.3. Théories non-locales intégrales

La théorie non-locale à gradients est une formulation non-locale souvent qualifiée de « faible ». Nous nous intéressons dans cette dernière partie à l'approche non-locale intégrale ou « théorie non-locale forte ».

Cette formulation a été développée initialement dans les années 1960 par Krumhanls (1963), Kroner (1967) et Kunin (1967). Ces auteurs partent du même constat : dans le cadre de l'élasticité classique, les forces de cohésion à l'intérieur d'un solide sont modélisées par des forces de contact dont la portée est nulle. Or, les forces de cohésion dans un matériau réel possèdent clairement une certaine portée et ont donc un rayon d'influence non nul. Pour remédier à cette insuffisance, Kroner propose d'affiner la théorie des milieux continus élastiques en y introduisant des forces d'interaction à longue distance. De son côté, Krumhanls a travaillé sur la conversion de la théorie des réseaux en une théorie continue.

Une formulation améliorée de l'approche non-locale, qui précise les relations de comportement dans le cadre de la thermodynamique, est présentée par Eringen et Edelen (1972) au début des années 1970. Elle s'est ensuite enrichie des contributions plus récentes de Gao (1999) et Polizzotto (2001). Dans le cadre non-local, l'énergie interne en un point dépend du champ de déformation dans tout le solide. De ce fait, le premier principe de la thermodynamique doit être intégré sur l'ensemble du domaine d'étude. Notons que plusieurs auteurs (Edelen et Laws (1971), Edelen et al. (1971)), ont proposé une formulation « locale » du premier principe dans laquelle apparaît un terme d'énergie résiduel supplémentaire. Ce *résidu non-local* représente l'énergie transmise en un point par tous les autres points du solide.

Pour le cas particulier d'un solide élastique nonlocal, isotrope et linéaire, Eringen et Kim (1974) proposent une approche non-locale qui ne diffère de l'approche continue classique que par la relation entre les déformations et les contraintes. Dans ce cas, le champ de contrainte s'exprime le plus souvent comme une intégrale pondérée des déformations sur l'ensemble du domaine d'étude. Le modèle de comportement fait par ailleurs intervenir un paramètre «  $\ell$  » homogène à une longueur, qui définit la « portée » des interactions et permet de prendre en compte l'influence de la microstructure du matériau.

La loi de comportement proposée par Eringen peut se mettre sous la forme suivante :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha(|x'-x|, \ell) \epsilon_{kl}(x') d\Omega(x') \quad (1.12)$$

Où  $t$  et  $\varepsilon$  sont respectivement le tenseur de contrainte non-local et le tenseur des déformations linéarisé.

$$\varepsilon_{kl}(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(x) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(x) \right) \quad (1.13)$$

$C$  correspond au tenseur d'élasticité et  $\alpha(|x'-x|, \ell)$  est la fonction de caractérisation non-locale. Le paramètre «  $\ell$  » représente une longueur interne caractéristique du matériau.

D'après, l'équation (1.12), le tenseur de contrainte au point  $x$  dépend des déformations en tout point à l'intérieur du domaine  $\Omega$ . Ce modèle est donc très différent de la loi de Hooke généralisée où la contrainte dépend de la déformation en un point uniquement.

La fonction de caractérisation, ou fonction d'atténuation, dépend de «  $\ell$  » et de la distance euclidienne entre  $x$  et  $x'$ .

Plus cette distance est grande devant la longueur interne, plus la valeur de la fonction est faible. Au-delà d'un certain rayon,  $\alpha(|x'-x|, \ell)$  est quasi nulle. Cette propriété permet de prendre en compte l'atténuation des forces d'interaction dans le matériau. Les déformations aux points  $x'$  éloignés du point  $x$  ont peu d'influence sur la valeur de la contrainte en ce point.

Cette approche a été utilisée avec succès pour traiter des problèmes de fissures (Eringen (1978,1979) ; Gao (1989), Minghao (1999)), de dislocations (Lazar et al. (2006)) ou encore de défauts ponctuels (Povstenko (1999)). Dans tous les cas, les singularités de contraintes sont éliminées. La méthode est appliquée avec la même réussite à des problèmes impliquant des forces ponctuelles (Artan (1999) ; Povstenko et Kubik (2005)).

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés à la théorie non-locale intégrale de Eringen. Cette approche se présente comme une alternative aux théories non-locales à gradients, pour lesquelles des conditions aux limites non conventionnelles sont requises.



## Conclusion

L'étude de la structure microscopique des matériaux métalliques permet d'isoler deux mécanismes d'endommagement qui sont à l'origine de la rupture : le clivage et le glissement des plans atomiques dans les cristaux (grains) qui constituent le matériau. L'un ou l'autre phénomène est favorisé par la structure cristallographique et l'orientation des efforts à l'intérieur du grain.

En faisant quelques approximations, on peut calculer les contraintes théoriques critiques pour lesquelles le clivage et le glissement sont activés. Les valeurs obtenues sont bien supérieures aux contraintes de rupture observées pour des structures macroscopiques. Cette différence a conduit les mécaniciens à s'interroger sur le rôle des défauts dans le phénomène de rupture.

Un matériau ne présente pas une structure parfaite et homogène, et comporte toujours des défauts, provenant des aléas du procédé de fabrication. Ces défauts introduisent des distorsions à l'intérieur du solide et agissent comme des concentrateurs de contrainte, ce qui explique que, localement, les valeurs critiques de rupture peuvent parfois être atteintes.

A l'échelle microscopique, il a été démontré expérimentalement que le glissement des plans atomiques à l'intérieur des grains est facilité par le déplacement de défauts linéaires cristallins, les dislocations.

A plus grande échelle, la présence de cavités ou d'inclusions perturbe le champ de contrainte, et ce d'autant plus fortement que le rayon de courbure à l'extrémité de ces défauts est petit.

Dans le cas de microfissures, ce rayon tend vers zéro, et la contrainte est infinie en pointe de fissure. Elle devient donc inexploitable pour définir un critère de propagation. Le plus naturel serait en effet de postuler que la fissure se propage lorsque la contrainte au voisinage de son extrémité dépasse une certaine valeur critique. Mais, du fait de la singularité en pointe de fissure, ce type de critère est toujours vérifié et prédit donc la propagation de la fissure quelles que soient les conditions de chargement.

Une solution est proposée par Irwin après la seconde guerre mondiale. Il calcule les expressions asymptotiques des contraintes au voisinage de la pointe de fissure et montre qu'elles dépendent de trois paramètres, fonctions de la géométrie de la structure, du chargement auquel elle est soumise, ainsi que des caractéristiques de la fissure (taille, forme, position...) : les facteurs d'intensité de contrainte.

Irwin propose alors de fonder le critère de propagation sur ces paramètres. Leurs valeurs sont comparées à une valeur critique, caractéristique du matériau, appelée ténacité.

Cette approche a permis de résoudre de façon satisfaisante de nombreux problèmes de fissuration sans éliminer les singularités de contraintes.

Comme le souligne Eringen, la singularité des expressions asymptotiques montre les limitations de l'élasticité classique pour traiter les problèmes de rupture. Dans ce contexte, l'approche non-locale, qui permet d'introduire l'influence de la microstructure du matériau dans les lois de comportement, se présente comme une alternative intéressante.

Nous avons présenté différents types d'approches non-locales. Parmi celles-ci, la théorie non-locale intégrale de l'élasticité est intéressante par le fait qu'elle ne nécessite pas l'introduction de conditions aux limites non conventionnelles pour la résolution d'un problème concret. Contrairement à l'élasticité classique, où la contrainte en un point dépend uniquement de la

déformation au même point (loi de Hooke), le modèle de comportement non-local relie la contrainte en un point aux déformations dans l'ensemble du solide. Cette modélisation permet d'éliminer les singularités mathématiques produites par les théories classiques. De nombreux travaux montrent que le champ de contrainte sur le front de fissure est fini. Il est donc à nouveau exploitable et peut être utilisé pour étudier le développement de la fissure.

## Références

- Aifantis E.C., *On the role of gradients in the localization of deformation and fracture*, Int. J. Eng. Sci. 30, 1279-1299, 1992.
- Aifantis E.C., *Gradient effects at macro micro and nano scales*, Journal of the Mechanical Behavior of Materials 5, 355-375, 1994.
- Aifantis E.C., *Strain gradient interpenetration of size effects*, International Journal of Fracture 95, 299-314, 1999.
- Artan R., *The nonlocal solution of the elastic half plane loaded by a couple*, International Journal of Engineering Science 37, 1389-1405, 1999.
- Askes H., Aifantis C., *Numerical modeling of size effects with gradient elasticity – Formulation, meshless discretization and examples*, International Journal of Fracture 117, 347-358, 2002.
- Askes H., Metrikine A.V., *One dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure. Part 2 : Static and dynamic response*, European Journal of Mechanics A/Solids 21, 573-588, 2002.
- Bathias C., Pineau A., *Fatigue des matériaux et des structures 1*, Lavoisier, 2008.
- Bui H.D., *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, 1978.
- Clavel M., Bompard P., *Endommagement et rupture des matériaux 1 : généralités, matériaux métalliques*, Hermès Science Publications, 2009.
- Cotterell B., Rice J.R., *Slightly curved or kinked cracks*, Int. J. Fract. 16, 155-169, 1980.
- Di Paola M., Failla G., Zingales M., *The mechanically-based approach to 3D non-local linear elasticity theory : long-range central interactions*, Int. J. Solids Struct. 47, 2347-2358, 2010.
- Doquet V., Bertolino G., *A material and environment-dependent criterion for the prediction of fatigue crack paths in metallic structures*, Engineering Fracture Mechanics 75, 3399-3412, 2008.
- Edelen D.G.B., Laws N., *On the thermodynamics of systems with nonlocality*, Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 24-35, 1971.
- Edelen D.G.B., Green A.E., Laws N., *Nonlocal continuum mechanics*, Arch. Rat. Mech. Anal. 43, 36-44, 1971.
- Erdogan F., Sih G.C., *On the crack extension in plate under plane loading and transverse shear*, J. Basic Engng. 85, 519-527, 1963.
- Eringen A.C., *Nonlocal continuum field theories*, Springer New-York, 2002.

- Eringen A.C., *Non-local polar elastic continua*, International Journal of Engineering Science 10, 1-16, 1972.
- Eringen A.C., *Theory of nonlocal elasticity and some applications*, Res Mechanica 21 313-342, 1987.
- Eringen A.C., *Line Crack subjected to shear*, Int. J. Fract 14, 367-379, 1978.
- Eringen A.C., *Line Crack subjected to anti-plane shear*, Engng. Fract. Mech. 12, 1979.
- Eringen A.C., Edelen D.G.B., *On nonlocal elasticity*, Int. J. Engng. Sci. 10, 233-248, 1972.
- Eringen A.C., Kim B.S., *Stress concentration at the tip of a crack*, Mech. Res. Commun. 1, 233-237, 1974.
- Eshelby J.D., *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion*, Proceedings of the Royal Society of London A 241, p376, 1957.
- François D., *Endommagement et rupture de matériaux*, EDP Sciences, 2004.
- François D., *Essais de mesure de la ténacité*, Techniques de l'ingénieur, 2007.
- Gao J., *An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 1: Quasicontinuum theory*, International Journal of Solids and Structures 36, 2947-2958, 1999-a.
- Gao J., *An asymmetric theory of nonlocal elasticity. Part 2: Continuum field*, International Journal of Solids and Structures 36, 2959-2971, 1999-b.
- Gao J., Dai T.M., *On the study of a penny-shaped crack in nonlocal elasticity*, Acta Mechanica Solida Sinica 2, 253-269, 1989.
- Gerstle W.H., *Finite and boundary element modelling of crack propagation in two and three dimensions using interactive computer graphics*, Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY USA, 1986.
- Glodez S., Sraml M., Kramberger J., *A computational model for determination of service life of gears*, International Journal of Fatigue 24, 1013-1020, 2002.
- Goldstein R.V., Salganik R.L., *Brittle fracture of solids with arbitrary cracks*, International Journal of Fracture 10, 507-523, 1974.
- Griffith A., *The phenomena of rupture and flow in solids*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A CCXXI, 163-198, 1920.
- Hartranft R.J., Sih G.C., *Stress singularity for a crack with an arbitrary curved front*, Engineering Fracture Mechanics 9, 705-718, 1977.
- Irwin G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics 24, 361-364, 1957.

Jelaska D.T., Damir T., Podrug S., Glodez S., *Comparison of numerical models for gear tooth root fatigue assessments*, In 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2005, Vol. 2005, p. 77-84, American Society of Mechanical Engineers, 2005.

Kassir M.K., Sih G.C., *Three-dimensional cracks problems*, Pergamon Press, 1960.

Kassir M.K., Sih G.C., *Three-dimensional stress distribution around an elliptical crack under arbitrary loadings*, J. Appl. Mech. 33, 1966.

Kroner E., *Elasticity theory of materials with long-range cohesive forces*, International Journal of Solids and Structures 3, 731-742, 1967.

Krumhanls J.A., *Generalized continuum field representation for lattice vibrations*, In : Wallis R.F. (Ed.), Lattice Dynamics, Proc. of Int. Conference, Pergamon Press, London, 1963.

Krumhanls J.A., *Some considerations of the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics*, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag, 1967.

Kunin I.A., *The theory of elastic media with microstructure and the theory of dislocations*, In : Kroner (Ed.), Mechanics of Generalized Continua, Proc. IUTAM symposium, Springer-Verlag, 1967.

Labbens J., *Introduction à la mécanique de la rupture*, Pluralis, 1980.

Lamon J., *Mécanique de la rupture fragile et de l'endommagement*, Lavoisier, 2007

Lazar M., Maugin G.A., Aifantis E.C., *On a theory of nonlocal elasticity of bi-Helmholtz type and some applications*, Int. J. Sol. Struct. 43, 1404-1421, 2006.

Leblond J.B., *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, Hermès Science Publications, 2003.

Leblond J.B., *Crack paths in three-dimensional elastic solids. I: two-term expansion of the stress intensity factors – Application to crack path stability in hydraulic fracturing*, International Journal of Solids and Structures 36, 79-103, 1999.

Leblond J.B., Torlai O., *The stress field near the front of an arbitrarily shaped crack in three-dimensional elastic body*, Journal of elasticity 29, 97-131, 1992.

Martin J.L., *Dislocations et plasticité des cristaux*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2000.

Mindlin R.D., *Micro-structure in linear elasticity*, Archive of Rational Mechanics and Analysis 16, 51-78, 1963.

Minghao Z., Changjun C., Yuanjie L., Guoning L., Shishan Z., *The method of analysis of crack problem in three-dimensional non-local elasticity*, Applied Mathematics and Mechanics 20, 1999.

- Murakami Y., *Stress intensity factors handbook*, Pergamon, 1987.
- Muskhelishvili N., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff International Publishing, 1975.
- Neuber H., *Theory of notch stresses*, USAEC Office of Technical Information, 1961.
- Peterson R.E., *Stress Concentration Factors*, John Wiley, 1974.
- Polizzotto C., *Nonlocal elasticity and related variational principles*, International Journal of Solids and Structures 38, 7359-7380, 2001.
- Povstenko Y.Z., *The nonlocal theory of elasticity and its applications to the description of defects in solid bodies*, Journal of Mathematical Sciences 97, 1999.
- Povstenko Y.Z., Kubik I., *Concentrated ring loading in a nonlocal elastic medium*, International Journal of Engineering Science 43, 457-471, 2005.
- Priester L., Larere A., *Théorie des dislocations*, Editions Université de Paris Sud, 2000.
- Rice J.R., *A path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*, J. Appl. Mech. 35, 1968.
- Sih G.C., *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture 10, 305-321, 1974.
- Sih G.C., Cha C.K., *A fracture criterion for three-dimensional crack problems*, Engn. Fract. Mech. 6, 699-723, 1974.
- Smith M.C., Smith R.A., *Toward an understanding of mode II fatigue crack growth*, In : Fong J.T., Fields R.J. (Eds.), *Basic questions in fatigue, I*, ASTM STP 924, Philadelphia, p260-280, 1988.
- Sneddon I.N., *Fourier transforms*, New-York McGraw-Hill, 1951.
- Sneddon I.N., Lowengrub M., *Crack problems in the classical theory of elasticity*, Wiley, 1969.
- Tada H., Paris P.C., Irwin G.R., *The stress analysis of cracks handbook*, Paris Productions, 1985.
- Toupin R.A., *Elastic materials with couple-stresses*, Archive of Rational Mechanics and Analysis 11, 385-414, 1963.
- Ueda Y., Ikeda K., Yao T., Aoki M., *Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads*, Engng Fract Mech 18, 1131-1158, 1983.

Williams J.G., Ewing P.D., *Fracture under complex stress – the angled crack problem*, Int. J. Fract. 8, 441-446, 1972.

Zongqi Sun, Qihua Rao, Feng Chen, *An analysis of distinction between loading mode and fracture mode*, Proceedings : 11<sup>th</sup> International Congress on Fracture – ICF, Turin, Italy, 2005.





# **Chapitre 2 : Traitement du problème de fissuration dans l'approche classique de la mécanique linéaire de la rupture**



## Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de diverses problématiques de fissuration abordées dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture. Certains aspects théoriques de cette approche ont été exposés dans le Chapitre 1. Nous présentons ici la méthode numérique mise en œuvre pour traiter le problème d'une fissure dans un milieu élastique linéaire et quelques résultats obtenus pour divers cas de sollicitations et différentes géométries de fissure.

Le chapitre se découpe en plusieurs parties. Tout d'abord, nous rappelons les équations d'équilibre et de comportement utilisées en mécanique linéaire de la rupture. Les déformations plastiques sont négligées et on suppose que les déformations restent petites dans tout le milieu. Des conditions aux limites de contact unilatéral sont utilisées pour éviter l'interpénétration des zones sous compression.

Dans un deuxième temps, nous présentons la méthode numérique employée pour traiter le problème. La résolution analytique des équations d'équilibre pour un solide élastique fissuré se révèle ardue voire impossible lorsque la géométrie du domaine et les conditions aux limites qui lui sont appliquées deviennent plus complexes. Il est alors nécessaire de recourir aux méthodes numériques pour parvenir aux solutions recherchées.

Dans ce travail, nous avons opté pour la méthode des éléments de frontière (Brebbia et Dominguez (1992), Bonnet (1995), Balas, Sladek et Sladek (1989)) qui se révèle être une alternative intéressante à la méthode bien connue des éléments finis (Zienkiewicz et al. (2005)), pour résoudre les problèmes de mécanique linéaire de la rupture. Les avantages de cette approche sont détaillés ultérieurement dans cette partie.

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est réalisé par la méthode de l'élément avec nœuds au quart. Le chapitre se poursuit donc par une présentation de cette technique très populaire développée dans un premier temps par Henshell et Shaw (1975), puis Barsoum (1976), et Cruse et Wilson (1978) dans le cadre de la méthode des éléments de frontière.

Pour conclure ce chapitre, nous présentons plusieurs résultats significatifs pour valider et démontrer l'intérêt de la stratégie numérique utilisée. L'impact de plusieurs paramètres sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte est étudié.

Nous analysons notamment l'influence de la forme et de la taille de la fissure. Le cas bien connu d'une fissure elliptique soumise à une pression constante dans un milieu infini (Kassir et Sih (1960)) est repris pour valider la méthode de calcul des FIC.

Nous étudions ensuite l'effet de la frontière sur les variations des facteurs d'intensité de contrainte et présentons le cas d'une fissure elliptique débouchante. L'influence de la profondeur de fissure est analysée.

L'intérêt de la condition de contact unilatéral est mis en évidence dans le cas d'un barreau fissuré soumis à un chargement de flexion simple. Ce problème permet d'observer une refermeture partielle ou totale de la fissure. La condition de contact unilatéral permet d'éviter tout phénomène d'interpénétration des faces de la fissure.

Enfin, nous étudions le cas d'une fissure en mode de sollicitation mixte. Nous nous intéressons notamment à l'angle de propagation de la fissure prédit par le critère de la contrainte circonférentielle maximale, proposé par Erdogan et Sih (1963), le critère de la densité d'énergie de déformation minimale, de Sih (1973,1974) et le critère du taux de

restitution d'énergie maximal, présenté par Griffith (1920). L'influence des facteurs d'intensité de contrainte sur l'angle de propagation est analysée.

## 2.1. Présentation du problème

Nous nous intéressons au cas d'un solide élastique tridimensionnel contenant une fissure et nous nous proposons d'en faire l'étude dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (MLR). Nous supposons donc que les phénomènes de plasticité sont confinés au voisinage de la fissure (voir Chapitre 1) et que le solide reste macroscopiquement élastique. Le problème type que nous étudions peut être schématisé de la façon suivante :

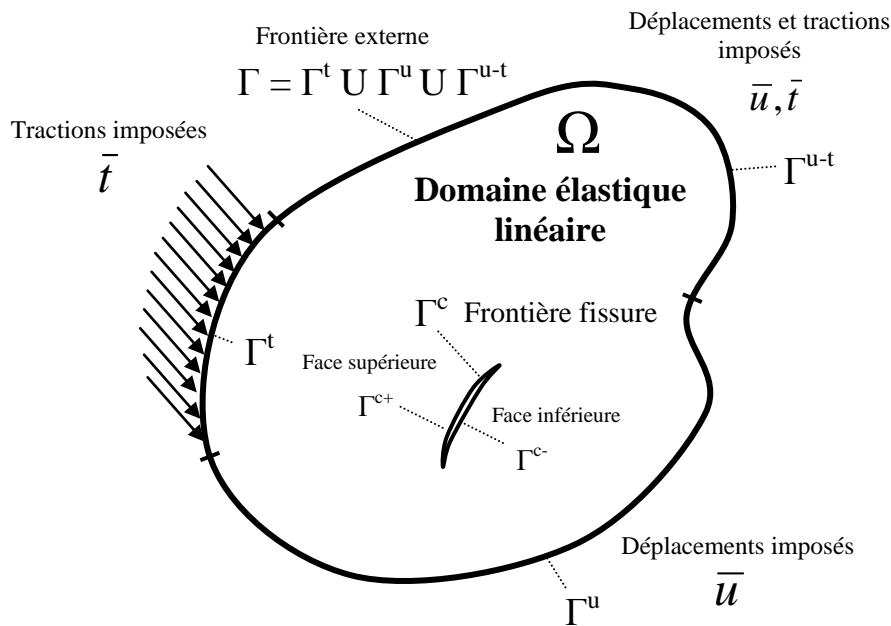


Figure 2.1 : Représentation schématique du problème d'un solide élastique linéaire fissuré

Le solide élastique linéaire occupe un domaine géométrique  $\Omega$  délimité par une frontière externe  $\Gamma$ , et une frontière interne  $\Gamma^c$  décrivant la forme de la fissure. Sur le schéma de la Figure (2.1), la frontière de la fissure  $\Gamma^c$  est constituée de deux faces  $\Gamma^{c+}$  et  $\Gamma^{c-}$ .

L'objectif est d'évaluer la dangerosité de la fissure. Pour cela, nous étudions l'influence de différents paramètres sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte :

- La taille et la forme de la fissure : fissure carrée (cas académique), circulaire, elliptique.
- Le type de chargement appliqué au solide : traction, compression, cisaillement, sollicitation mixte...
- La position et l'orientation de la fissure dans le domaine : fissures internes, fissures débouchantes, fissures proches de la frontière du domaine...

## 2.2. Equations d'équilibre et de comportement pour un solide élastique fissuré

Nous rappelons succinctement les équations qui régissent le comportement d'un solide dans le cadre classique de l'élasticité linéaire. La convention de sommation d'Einstein est adoptée.

### 2.2.1. Equation d'équilibre et conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le repère cartésien fixe  $(O, x_1, x_2, x_3)$  et nous considérons le solide élastique isotrope et homogène de la figure (2.1). En l'absence de forces de volume, l'équation locale d'équilibre se réduit simplement à :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.1)$$

Où  $\sigma_{ij}$  représente le tenseur de contrainte de Cauchy.

Le problème est complété par la donnée des conditions aux limites à la frontière externe du solide  $\Gamma$  et sur la frontière interne  $\Gamma^c$ . Ces dernières peuvent être de type Dirichlet, de type Neumann, ou plus souvent de type mixte Dirichlet-Neumann.

Pour la frontière externe :

$$\bar{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i \quad \text{sur } \Gamma^u \text{ et } \Gamma^{u-t} \quad (2.2a)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_i = \sigma_{ij} \mathbf{n}_j \quad \text{sur } \Gamma^t \text{ et } \Gamma^{u-t} \quad (2.2b)$$

Où  $\Gamma^u$ ,  $\Gamma^t$  et  $\Gamma^{u-t}$  représentent les portions de  $\Gamma$  ( $\Gamma = \Gamma^u + \Gamma^t + \Gamma^{u-t}$ ) où sont imposés respectivement les déplacements  $\mathbf{u}$ , les vecteurs contraintes  $\mathbf{t}$ , et les conditions aux limites mixtes.  $n_j$  représente la  $j$ -ème composante de la normale extérieure à la surface  $\Gamma$ .

Pour la frontière fissure, si la séparation du milieu est effective, on suppose les lèvres de la fissure libres de tractions :

$$\bar{\mathbf{t}}_i = 0 \quad \text{sur } \Gamma^c \quad (2.2c)$$

Si la fissure est initialement fermée, ou si un effort de compression entraîne la refermeture partielle ou complète de la fissure, il est nécessaire de définir les conditions de contact entre les faces  $\Gamma^{c+}$  et  $\Gamma^{c-}$ .

Dans ce travail, nous avons adopté une condition de contact glissant unilatéral.

En un point quelconque appartenant à  $\Gamma^c$ , on définit le repère local composé du vecteur normal  $\mathbf{n}$ , et de deux vecteurs orthogonaux  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\rho}$ , tangents à la surface de la fissure. La normale est orientée vers l'intérieur de la cavité.

Les déplacements et tractions sur la face supérieure (resp. inférieure)  $\Gamma^{c+}$  (resp.  $\Gamma^{c-}$ ) de la fissure sont notés  $\mathbf{u}^+$  et  $\mathbf{t}^+$  (resp.  $\mathbf{u}^-$  et  $\mathbf{t}^-$ ). De la même façon, on indexe la normale  $\mathbf{n}$  et les vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{\rho}$  d'un signe « + » ou « - » suivant la face de la fissure considérée.

En s'appuyant sur ces notations, on définit le saut de déplacement par la relation :

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$$

Les conditions de contact unilatéral s'énoncent alors de la façon suivante :

$$(\mathbf{u}_j^+ - \mathbf{u}_j^-) \mathbf{n}_j^+ = \Delta \mathbf{u}_j \mathbf{n}_j^+ = \Delta u_n \geq 0 \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{t}_j^+ \mathbf{n}_j^+ = -\mathbf{t}_j^- \mathbf{n}_j^+ = \mathbf{t}_n \leq 0 \quad (2.3b)$$

D'après l'équation (2.3a), les lèvres de la fissure peuvent, soit s'écarter l'une de l'autre, soit être collées, mais aucun phénomène d'interpénétration n'est possible. L'équation (2.3b) indique que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression. Dans ce cas, les lèvres sont en contact et le principe d'action/réaction est vérifié. Lorsque les lèvres sont séparées, les efforts normaux sont nuls.

Pour simplifier le problème, on considère un contact sans frottements. Les tractions tangentielles  $t_\tau$  et  $t_\rho$  sont donc nulles.

$$\mathbf{t}_j \boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{t}_\tau = 0 \quad (2.3c)$$

$$\mathbf{t}_j \boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{t}_\rho = 0$$

Dans tous les cas, le saut de déplacement normal  $\Delta u_n$  et la traction normale  $t_n$  vérifient la condition de complémentarité suivante :

$$\Delta u_n \mathbf{t}_n = 0 \quad (2.3d)$$

Si les lèvres de la fissure sont écartées, la condition de bords libres entraîne la nullité des tractions. En revanche, si les lèvres de la fissure sont en contact, le saut de déplacement est nul. La condition de complémentarité est donc effectivement toujours vérifiée.

## 2.2.2. Relation de comportement classique

Dans le cadre de l'élasticité linéaire classique, deux hypothèses sont retenues pour décrire le comportement du matériau :

- Les déformations du solide restent suffisamment petites, de telle sorte que le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  peut s'exprimer sous la forme linéarisée suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{x}_l} + \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial \mathbf{x}_k} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{k,l} + \mathbf{u}_{l,k}) \quad (2.4)$$

- Le comportement du milieu est décrit par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} \quad (2.5)$$

$$\text{où } \mathbf{C}_{ijkl} = \mu \left( \frac{2\nu}{1-2\nu} \boldsymbol{\delta}_{ij} \boldsymbol{\delta}_{kl} + \boldsymbol{\delta}_{ik} \boldsymbol{\delta}_{jl} + \boldsymbol{\delta}_{il} \boldsymbol{\delta}_{jk} \right)$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\nu$  correspondent au module de Coulomb et au coefficient de Poisson,  $\mathbf{C}$  symbolise le tenseur d'élasticité (d'ordre 4) et  $\delta$  représente le symbole de Kronecker.

Le module de Coulomb est relié au module d'Young  $E$  par la relation :

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$



## 2.3. Equations intégrales et méthode des éléments de frontière

### 2.3.1. La méthode des éléments de frontière

La résolution du problème d'un solide élastique contenant une fissure passe par la recherche des solutions de l'équation d'équilibre (2.1), assortie des conditions aux limites (2.2) et (2.3). Sous certaines hypothèses, présentées au chapitre précédent (milieu globalement élastique, conditions de bords libres sur les lèvres de la fissure...), la forme générale des champs de déplacement et de contrainte au voisinage du front de fissure peut-être déterminée analytiquement. Les travaux d'Irwin (1957) ou d'Hartranft et Sih (1977) ont montré que l'expression des contraintes fait intervenir trois paramètres  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , dépendant du chargement et de la géométrie du problème : les facteurs d'intensité de contrainte. Leur calcul est indispensable pour comprendre le comportement de la fissure dans le cadre de l'élasticité linéaire classique.

Lorsque le problème est simple, les facteurs d'intensité de contrainte peuvent être obtenus sans recours au calcul numérique. En deux dimensions, le problème d'une fissure rectiligne dans un milieu infini a été résolu par Irwin. Le cas d'une fissure rectiligne débouchante dans un milieu semi-infini est traité à la même période par Koiter (1965). En trois dimensions, les solutions exactes du problème de la fissure circulaire soumise à une pression constante dans un milieu infini sont données par les travaux de Sneddon (1951). Kassir et Sih (1960) ont, quant à eux, traité le cas plus général de la fissure elliptique.

Toutefois, lorsque le domaine géométrique est fini ou présente une forme plus complexe, les techniques analytiques de résolution ne sont plus applicables et des méthodes de résolution numériques doivent être employées.

La méthode des éléments finis (Batoz et Dhatt (1990) Zienkiewicz et al. (2005)) est un puissant moyen de résolution des équations intégrales qui permet de traiter des problèmes très variés sur des géométries complexes. Cette méthode requiert la discrétisation géométrique de l'ensemble du domaine d'étude. Dans le cas de problèmes de fissuration 3D, un maillage fin est souvent nécessaire au voisinage du front de la fissure pour calculer de manière fiable les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte.

Une technique populaire permet de faciliter la modélisation de la fissure dans le cadre des éléments finis. Il s'agit de la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), suggérée par Moes, Dolbow et Belytschko (1999). Dans cette approche, le maillage ne comporte aucune discontinuité géométrique. Le saut de déplacement induit par la fissure dans le milieu est introduit dans une approximation « enrichie » du champ de déplacement. Cette méthode permet donc d'utiliser un maillage « sain » pour les problèmes de rupture.

Dans le domaine de la mécanique de la rupture, la méthode des éléments de frontière représente une alternative intéressante à la méthode des éléments finis. Bien que le champ d'application de cette dernière soit indéniablement plus vaste, la méthode des éléments de frontière se prête particulièrement bien à la résolution des problèmes de mécanique de la rupture.

Les bases mathématiques de cette méthode sont posées grâce aux formulations intégrales de Betti (1873) et Somigliana (1886). Les premiers développements en tant qu'outil numérique

pour traiter des problèmes élastostatiques, remontent aux travaux de Rizzo (1967) et Cruse (1969) durant les années 60. Concrètement, la méthode se fonde sur la discrétisation d'équations intégrales de frontière. Seule la surface délimitant le domaine est maillée ce qui limite largement le nombre d'inconnues à déterminer. De plus, l'absence de maillage volumique facilite la modélisation de la fissure et la gestion de sa propagation à l'intérieur du domaine. Le principe et les bases de la méthode des éléments de frontière sont détaillés dans les ouvrages de Brebbia et Dominguez (1992), Bonnet (1995) et Balas, Sladek et Sladek (1989).

### 2.3.2. Equations intégrales pour un solide élastique sans fissure

Nous allons maintenant introduire les représentations intégrales qui permettent de traiter un problème d'élastostatique. L'équation intégrale pour le déplacement présentée ci-dessous découle du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (voir Annexe 2.1).

Dans un premier temps, on considère le cas d'un solide sans fissure et de frontière  $\Gamma$ .

#### Représentations intégrales des déplacements et des contraintes

La résolution d'un problème d'élasticité classique par la méthode des éléments de frontière se base sur la représentation intégrale du déplacement.

$$u_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} u_i(\mathbf{x}) T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} t_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

Où  $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  correspond à la solution fondamentale de l'équation de Navier et  $T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est le vecteur contrainte correspondant. Les expressions de  $U_{ij}$  et  $T_{ij}$  sont rappelées en Annexe 2.2. Elles dépendent de la distance euclidienne entre le point  $\mathbf{x}$  et le point  $\mathbf{y}$ .

L'équation (2.6) n'est valable que pour un point  $\mathbf{y}$  interne n'appartenant pas à la surface  $\Gamma$  du domaine. Comme on peut le constater, le champ de déplacement en un point quelconque à l'intérieur du solide se déduit des valeurs des déplacements et des tractions à la surface  $\Gamma$ .

La dérivation de l'équation (2.6) et l'application de la loi de Hooke permettent d'obtenir l'expression du champ de contrainte en n'importe quel point à l'intérieur du domaine.

$$\sigma_{ij}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} t_k(\mathbf{x}) D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} u_k(\mathbf{x}) S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

$D_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et  $S_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dérivent de la solution fondamentale  $U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Leurs expressions sont fournies en Annexe 2.2.

L'équation (2.7) constitue la représentation intégrale des contraintes élastiques.

#### Equations intégrales de frontière

Les représentations intégrales (2.6) et (2.7) ne sont pas applicables directement pour un point  $y$  appartenant à la frontière  $\Gamma$ . En effet, les solutions fondamentales  $U_{ij}(x,y)$ ,  $T_{ij}(x,y)$ ,  $D_{kij}(x,y)$  et  $S_{kij}(x,y)$  présentent des singularités respectivement de la forme  $|x-y|^{-1}$ ,  $|x-y|^{-2}$ ,  $|x-y|^{-2}$  et  $|x-y|^{-3}$  (voir Annexe 2.2). Les intégrales de frontière apparaissant dans (2.6) et (2.7) cessent à priori d'avoir un sens pour un point  $y$  de  $\Gamma$ . Il est donc nécessaire d'avoir recours à une procédure de passage à la limite pour obtenir l'expression des équations intégrales de frontière.

Les différentes étapes qui permettent d'aboutir à ces équations sont détaillées dans les ouvrages de Bonnet (1995), Brebbia (1992), ou encore Aliabadi (2002). Sans plus de détails, nous présentons ici l'équation intégrale de frontière en déplacement :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.8)$$

Cette expression vaut pour un point  $y$  appartenant à la surface du domaine. De la même façon, l'équation intégrale de frontière pour les contraintes s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_k(\mathbf{x}) \mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Les termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation (2.9) sont deux intégrales impropres convergentes. Différentes techniques de régularisation permettent leur évaluation (Bonnet (1995), Aliabadi (2002)).

La multiplication de (2.9) par le vecteur normal à la surface donne l'équation intégrale de frontière en traction :

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{t}_i(\mathbf{y}) = \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} \mathbf{t}_k(\mathbf{x}) \mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{n}_j(\mathbf{y}) \int_{\Gamma} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.10)$$

### 2.3.3. Equations intégrales pour un solide élastique fissuré

Intéressons nous maintenant aux représentations et équations intégrales de frontière qui permettent de résoudre le problème d'un solide élastique fissuré. Comme nous allons le voir, à moins d'utiliser une méthode de sous-structuration du domaine, l'équation intégrale de frontière en déplacement seule est insuffisante pour gérer les cas de fissuration (Cruse (1969)).

#### Présentation du problème

L'exemple suivant permet de démontrer l'inapplicabilité de l'équation intégrale en déplacement pour un solide élastique fissuré (Bonnet (2002), p 249). On considère un solide  $\Omega$  de frontière externe  $\Gamma$ , contenant une fissure  $\Gamma^C$ . Les deux faces de la fissure, notées  $\Gamma^{C+}$  et  $\Gamma^{C-}$ , sont géométriquement identiques et se différencient par leurs normales  $\mathbf{n}^+$  et  $\mathbf{n}^-$ , de directions opposées.

Dans cet exemple, des efforts sont imposés sur toute la frontière externe, mais cette démonstration est généralisable aux problèmes avec des conditions aux limites quelconques. Comme nous le verrons ultérieurement, le déplacement en un point interne à  $\Omega$  peut s'écrire :

$$u_j(y) = \int_{\Gamma} T_{ij}(x, y) u_i(x) dS(x) - \int_{\Gamma} \bar{t}_i(x) U_{ij}(x, y) dS(x) + \int_{\Gamma^{c+}} T_{ij}(x, y) \Delta u_i(x) dS(x) \quad (2.11a)$$

Où  $\Delta \mathbf{u}$  représente le saut de déplacement entre les lèvres de la fissure ( $\Delta \mathbf{u}(x) = \mathbf{u}^+(x) - \mathbf{u}^-(x)$ ) et  $\bar{t}_i$  correspond au vecteur contrainte imposé sur la frontière  $\Gamma$ .

En l'absence de fissure, le déplacement  $\hat{u}_i$  engendré au même point et par les mêmes conditions aux limites est donné par la représentation intégrale (2.6) :

$$\hat{u}_j(y) = \int_{\Gamma} \hat{u}_i(x) T_{ij}(x, y) dS(x) - \int_{\Gamma} \bar{t}_i(x) U_{ij}(x, y) dS(x) \quad (2.11b)$$

En retranchant (2.11b) de l'équation (2.11a), on obtient,

$$\delta u_j(y) = \int_{\Gamma} T_{ij}(x, y) \delta u_i(x) dS(x) + \int_{\Gamma^{c+}} T_{ij}(x, y) \Delta u_i(x) dS(x) \quad (2.11c)$$

où  $\delta u = u - \hat{u}$  est la perturbation du déplacement induite par la fissure. Or, l'équation (2.11c) est linéaire et homogène sur  $\delta u$ , et admet donc une infinité de solutions. Par ricochet, comme  $u = \hat{u} + \delta u$ , l'équation (2.11a) admet elle aussi une infinité de solutions et n'est donc pas exploitable.

L'équation intégrale en déplacement seule ne permet donc pas de résoudre le problème. Plusieurs solutions ont été proposées pour surmonter cette difficulté. On peut citer notamment :

- La méthode de sous-structuration
- La méthode duale des éléments de frontière
- La méthode des discontinuités de déplacement

### *La méthode de sous-structuration*

Elle consiste à décomposer le solide fissuré  $\Omega$  en deux sous-domaines fictifs  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  contenant chacun une face de la fissure. Cette manipulation revient à transformer le problème d'un solide élastique fissuré en deux problèmes élastiques couplés.

Les conditions aux limites adéquates sont imposées à l'interface entre les sous-domaines pour assurer la continuité des déplacements et l'équilibre des tractions. Les surfaces de la fissure sont supposées libres de tractions (voir Figure (2.2)).

Chaque sous problème élastique pris séparément peut alors être traité au moyen de l'équation intégrale en déplacement, dont la mise en œuvre numérique est relativement simple. En revanche, l'introduction d'une surface fictive augmente le nombre d'inconnues du problème.

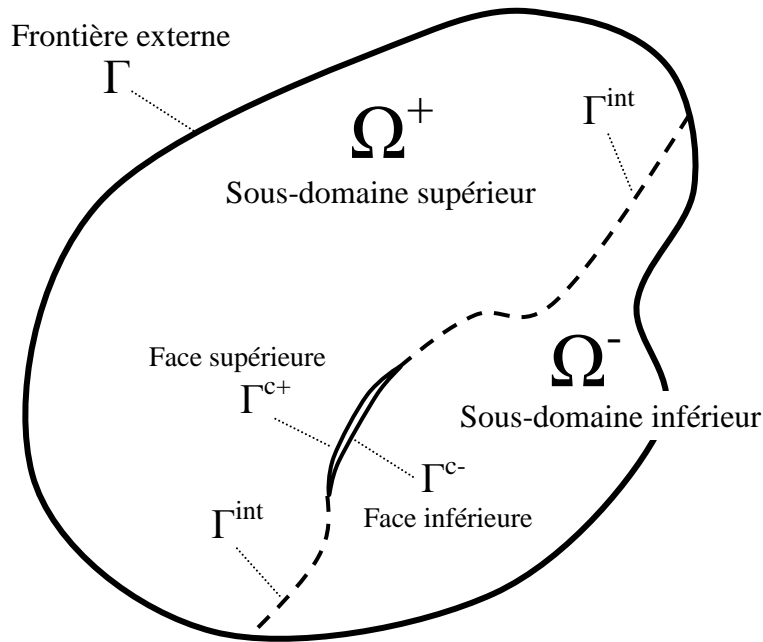


Figure 2.2 : Décomposition du domaine en deux régions fictives  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$

#### *La méthode duale des éléments de frontière*

Cette méthode, présentée initialement par Portela, Aliabadi et Rooke (1992) dans le cas de problèmes 2D et par Mi et Aliabadi (1992) en 3D, permet de traiter le cas d'un solide élastique fissuré sans utiliser la méthode de décomposition en sous-domaines. La formulation proposée utilise deux équations intégrales de frontière indépendantes.

L'équation intégrale en déplacement (2.8) est appliquée sur la frontière externe du solide et sur l'une des faces de la fissure. L'équation intégrale en traction (2.9) est employée pour la seconde face de la fissure.

Cette stratégie permet d'obtenir un système d'équations non dégénéré.

#### *La méthode des discontinuités de déplacement*

Il s'agit d'une variante de la méthode précédente, où seule une face de la fissure est discrétisée. Cette formulation fait intervenir le saut de déplacement entre les faces de la fissure. Dans ce cas, l'équation intégrale en déplacement est appliquée aux nœuds de la frontière externe et l'équation intégrale en traction est utilisée pour les nœuds de la face fissure.

Dans ce travail, l'approche basée sur les discontinuités de déplacements, utilisée entre autres par Partheymüller et al. (2000) et Kouitat et Stebut (2004), est adoptée.

### **Equations intégrales de frontière pour la méthode des discontinuités de déplacement**

On considère un solide élastique  $\Omega$  de frontière extérieure  $\Gamma$  contenant une fissure de frontière  $\Gamma^c$ . Les deux faces de la fissure  $\Gamma^{c+}$  et  $\Gamma^{c-}$  sont géométriquement identiques. On note  $\mathbf{n}^+$  et  $\mathbf{n}^-$

les normales orientées vers l'intérieur de la cavité associées à chaque face. Le saut de déplacement et la discontinuité des tractions dus à la fissure sont notés :

$$\Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}^+) - \mathbf{u}_i(\mathbf{x}^-) \quad ; \quad \Delta \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i(\mathbf{x}^+) + \mathbf{t}_i(\mathbf{x}^-) \quad (2.12)$$

Où  $\mathbf{x}^+$  (resp.  $\mathbf{x}^-$ ) est le nœud appartenant à  $\Gamma^{c+}$  (resp.  $\Gamma^{c-}$ ) situé au point  $\mathbf{x}$ .

L'hypothèse des petites déformations est conservée et le comportement élastique du matériau reste décrit par la loi de Hooke. L'équation intégrale de frontière en déplacement (2.8), réécrite pour la surface totale du domaine  $\Gamma + \Gamma^{c+} + \Gamma^{c-}$ , s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c-}} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ & - \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c-}} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Or, sachant que  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ , les solutions fondamentales vérifient les propriétés :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) &= \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \\ \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) &= -\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

De plus, comme on suppose les lèvres de la fissure identiques géométriquement ( $\Gamma^{c+} = \Gamma^{c-}$ ), l'équation (2.13) peut être reformulée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}^+) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c-}} -\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}^-) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ & - \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}^+) U_{ij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c-}} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}^-) U_{ij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Soit, en utilisant les notations (2.12) :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbf{u}_i(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_i(\mathbf{y})] d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c+}} \Delta \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) = 0$$

Par ailleurs, on suppose que la fissure est chargée symétriquement. La discontinuité des tractions est donc nulle :

$$\Delta \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) = 0$$

Sous ces hypothèses, l'équation intégrale de frontière en déplacement s'écrit finalement :

$$\boxed{\int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(x, y) [u_i(x) - u_i(y)] dS(x) + \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{T}_{ij}(x, y) \Delta u_i(x) dS(x) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(x) U_{ij}(x, y) dS(x)} \quad (2.15)$$

Dans la méthode des discontinuités de déplacement, l'équation (2.15) est appliquée aux points  $y$  de la frontière externe  $\Gamma$ .

Suivant une procédure similaire, sachant que les solutions fondamentales  $D_{kij}$  et  $S_{kij}$  vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) &= \mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \\ \mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}^+, \mathbf{y}) &= -\mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}^-, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

On peut déterminer l'équation intégrale de frontière en traction à partir de l'équation (2.9) :

$$\boxed{t_i(y) + n_j(y) \int_{\Gamma^{c+}} \Delta u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x) = n_j(y) \int_{\Gamma} t_k(x) D_{kij}(x, y) dS(x) - n_j(y) \int_{\Gamma} u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x)} \quad (2.17)$$

Dans l'approche adoptée, l'équation (2.17) est utilisée aux nœuds de la frontière supérieure de la fissure  $\Gamma^{c+}$ .

### *Intégrales singulières*

Le calcul des intégrales singulières apparaissant dans les équations de frontière (2.15) et (2.17) a longtemps constitué la principale difficulté de la méthode des éléments de frontière. Leur régularisation est nécessaire avant de pouvoir les évaluer à l'aide des formules de quadrature de Gauss. Les méthodes utilisées sont plus ou moins complexes suivant le niveau de singularité de l'intégrale et nous nous contentons d'en citer quelques unes sans entrer dans les détails.

Dans l'équation (2.15), les deux intégrales singulières sont celles qui portent sur la surface externe du domaine  $\Gamma$ . Les singularités sont de type  $|x-y|^{-1}$  et  $|x-y|^{-2}$ . Dans cette situation, l'évaluation des intégrales élémentaires singulières est gérée par l'introduction d'un système de coordonnées polaires centré sur la position intrinsèque du point  $y$  dans l'élément de référence (Bonnet (1999)). Cette stratégie permet de lever les singularités de la relation (2.15)

Dans l'équation (2.17), la seule intégrale singulière est celle associée à la surface supérieure de la fissure  $\Gamma^{c+}$ . Dans ce cas, la technique précédente n'est pas suffisante pour régulariser entièrement l'intégrale car la singularité, de type  $|x-y|^{-3}$ , est plus forte (on parle d'intégrale hyper-singulière). Plusieurs techniques permettant une première régularisation de ce type d'intégrale ont été proposées. On peut notamment citer Guiggiani et Gigante (1990), Guiggiani et al. (1992) qui se basent sur un développement en série de Taylor de l'intégrand, ou encore une méthode fondée sur l'intégration par parties de l'intégrale singulière, présentée par Sladek et Sladek (1983). Toutes ces techniques permettent l'évaluation numérique par une formule de quadrature de Gauss.

### **Représentations intégrales du déplacement et des contraintes**

Lorsque les déplacements et tractions sur la frontière extérieure, et les sauts de déplacement sur la frontière supérieure de la fissure sont connus, les valeurs de  $u$  et  $\sigma$  en un point  $y$  à l'intérieur du solide sont calculables par post-traitement, grâce aux formules de représentations intégrales.

Le vecteur déplacement se déduit de l'expression :

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma^{c+}} \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

Tandis que le tenseur de contrainte est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \mathbf{t}_k(\mathbf{x}) \mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma^{c+}} \Delta \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) \mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (2.19)$$

## Méthode des éléments de frontière

La méthode des équations intégrales suit un schéma en deux étapes. Tout d'abord, la résolution des équations (2.15) et (2.17) permet de déterminer les déplacements, tractions et sauts de déplacement aux frontières du domaine (surface externe + surface fissure). Puis, les champs de déplacement et de contrainte à l'intérieur du domaine sont calculés en post-traitement grâce aux équations (2.18) et (2.19).

### Discrétisation des équations (2.15) et (2.17)

La résolution des équations (2.15) et (2.17) par la méthode des éléments de frontière requiert la discrétisation de la surface externe du domaine, ainsi que celle de la fissure. De ce point de vue, notons que le choix de la méthode des discontinuités de déplacement représente un avantage car seule la frontière supérieure de la fissure doit être maillée.

La surface externe  $\Gamma$  et la surface de la fissure  $\Gamma^{c+}$  sont découpées respectivement en  $N$  et  $N_C$  éléments. Les équations intégrales (2.15) et (2.17) se décomposent en deux sommes d'intégrales élémentaires :

$$\sum_N \int_{\Gamma^{el}} T_{ij}(x, y) [u_i(x) - u_i(y)] dS(x) + \sum_{N_C} \int_{\Gamma^{el}} T_{ij}(x, y) \Delta u_i(x) dS(x) = \sum_N \int_{\Gamma^{el}} t_i(x) U_{ij}(x, y) dS(x) \quad (2.20)$$

Et,

$$t_i(y) + n_j(y) \sum_{N_C} \int_{\Gamma^{el}} \Delta u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x) = n_j(y) \sum_N \int_{\Gamma^{el}} t_k(x) D_{kij}(x, y) dS(x) - n_j(y) \sum_N \int_{\Gamma^{el}} u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x) \quad (2.21)$$

Où  $\Gamma^{el}$  est un élément quelconque de la surface ( $\Gamma$  ou  $\Gamma^{c+}$ ), défini par la position de ses nœuds géométriques et les fonctions de forme associées (voir Annexe 2.5), qui permettent une description paramétrique approximative de la surface.

$$\mathbf{x}_i = \sum_{p=1, N_g} \mathbf{M}_p(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_i^p \quad (2.22)$$

$N_g$  correspond au nombre de nœuds géométriques de l'élément et  $\mathbf{M}_p$  représente la fonction de forme associée au nœud géométrique  $p$  ( $p=1, N_g$ ).  $\mathbf{x}_i^p$  est la  $i$ -ème composante du vecteur position  $\mathbf{x}$  du nœud géométrique  $p$ . Enfin, les paramètres  $\boldsymbol{\eta}$  et  $\boldsymbol{\xi}$  désignent les coordonnées intrinsèques sur l'élément de référence ( $\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi} \in [-1, 1]$ ).



La figure (2.3) représente schématiquement un élément quadrilatère réel et l'élément de référence associé.

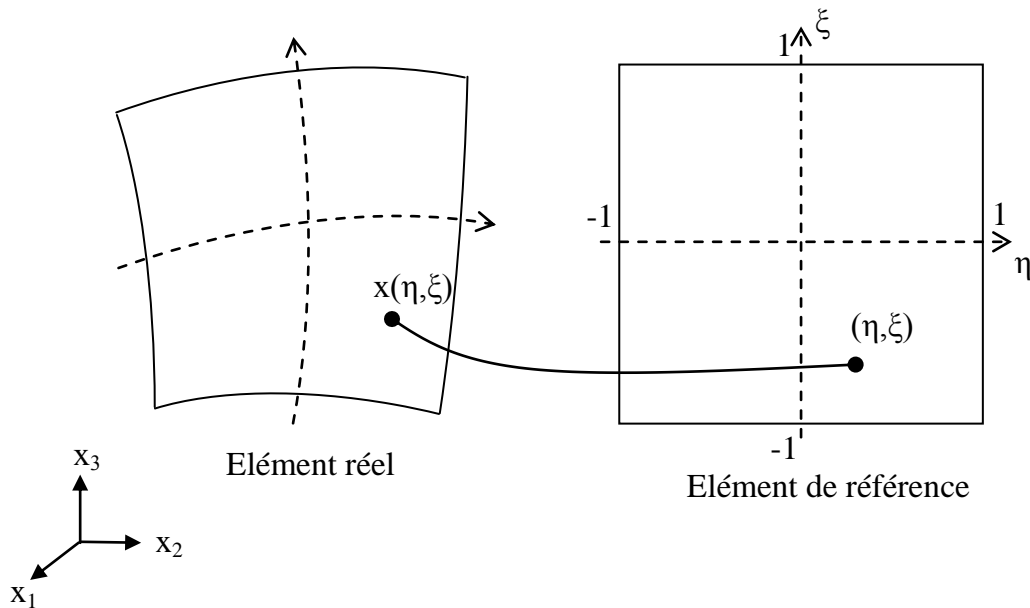


Figure 2.3 : Elément réel et élément de référence

### Interpolation des champs de déplacement et de traction

La représentation des déplacements et tractions à la frontière se fait suivant le formalisme de la méthode des éléments finis. L'élément possède un certain nombre de nœuds d'interpolation, chacun associé à une fonction d'interpolation, qui permettent d'exprimer les variables sous une forme discrétisée.

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i(\mathbf{x}) = \sum_{p=1, N_i} N_p(\eta, \xi) \mathbf{u}_i^p \\ \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) = \sum_{p=1, N_i} N_p(\eta, \xi) \mathbf{t}_i^p \end{cases} \quad (2.23)$$

$N_i$  correspond au nombre de nœuds d'interpolation sur l'élément et  $N_p$  est la fonction d'interpolation associée au nœud  $p$  ( $p=1, N_i$ ).  $\mathbf{t}_i^p$  et  $\mathbf{u}_i^p$  représentent respectivement les  $i$ -èmes composantes du vecteur contrainte et du vecteur déplacement au nœud  $p$ . La discrétisation (2.23) utilise les mêmes fonctions d'interpolation pour le vecteur déplacement et le vecteur contrainte. Ce choix fréquent n'est toutefois pas obligatoire. Il peut être intéressant d'utiliser des interpolations différentes pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  au niveau des arêtes ou des coins à la surface du domaine.

En effet, l'existence de ce type de singularités géométriques constitue une difficulté pour l'interpolation du vecteur contrainte. Prenons l'exemple d'un nœud situé sur une arête. Il appartient à deux surfaces différentes qui possèdent chacune leur propre vecteur normal. En ce point, deux vecteurs normaux, et donc, deux vecteurs contraintes, peuvent être définis. Le nombre d'inconnues est donc supérieur au nombre d'équations disponibles.

Pour surmonter cet obstacle, une solution consiste à dupliquer tous les nœuds géométriques appartenant aux arêtes ou aux coins du solide (Brebbia (1992)). Cette astuce est efficace

lorsqu'on impose des conditions aux limites en traction aux « nœuds doubles ». En revanche, si les déplacements sont imposés, elle débouche sur un système contenant plusieurs équations identiques (car la solution fondamentale  $U_{ij}$  ne dépend pas de la normale). Cette technique n'est donc pas entièrement satisfaisante si des conditions aux limites en déplacement doivent être appliquées aux nœuds doubles.

L'utilisation d'éléments non-conformes ou partiellement non-conformes permet de régler efficacement ce dernier problème. Les nœuds d'interpolation des champs de déplacement sont positionnés à l'intérieur de l'élément, en retrait de la ligne (arête) ou du point (coin) de discontinuité de la normale. Cette technique permet de gérer les problématiques liées aux singularités géométriques de la surface du domaine. Pour plus de détails sur ce sujet, nous invitons le lecteur à se reporter à l'Annexe 2.5, où les expressions des fonctions d'interpolation non-conformes, ainsi que diverses représentations schématiques de l'élément, sont fournies.

Dans ce travail, la stratégie de modélisation est donc la suivante :

- La surface externe du solide est discrétisée à l'aide d'éléments conformes et partiellement non-conformes au niveau des arêtes et des sommets de la géométrie.
- La surface de la fissure est maillée par des éléments totalement non conformes. Ce choix permet d'assurer l'existence de l'intégrale sur  $\Gamma^{c+}$  dans l'équation (2.17), en chaque nœud de collocation (Aliabadi (2002) p 337).

En utilisant les expressions discrétisées du vecteur déplacement et du vecteur contrainte, les équations (2.20) et (2.21) peuvent se mettre sous les formes (2.24) et (2.25) :

$$\sum_N \sum_{p=1}^{N_i} A_{ij}^p u_i^p - \sum_N \sum_{p=1}^{N_i} B_{ij}^p t_i^p + \sum_{N_c} \sum_{p=1}^{N_i} C_{ij}^p \Delta u_i^p = 0 \quad (2.24)$$

avec,

$$A_{ij}^p = \int_{\Gamma^{ref}} T_{ij}(x(\eta, \xi), y) [N_p(\eta, \xi) - N_p(\eta', \xi')] J(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

$$B_{ij}^p = \int_{\Gamma^{ref}} U_{ij}(x(\eta, \xi), y) N_p(\eta, \xi) J(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

$$C_{ij}^p = \int_{\Gamma^{ref}} T_{ij}(x(\eta, \xi), y) N_p(\eta, \xi) J(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

et,

$$t_i(y) + n_j(y) \sum_N \sum_{p=1}^{N_i} E_{kij}^p \Delta u_k^p = n_j(y) \sum_N \sum_{p=1}^{N_i} F_{kij}^p t_k^p - n_j(y) \sum_N \sum_{p=1}^{N_i} E_{kij}^p u_k^p \quad (2.25)$$

avec,

$$E_{kij}^p = \int_{\Gamma^{ref}} S_{kij}(x(\eta, \xi), y) N_p(\eta, \xi) J(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

$$F_{kij}^p = \int_{\Gamma^{ref}} D_{kij}(x(\eta, \xi), y) N_p(\eta, \xi) J(\eta, \xi) d\eta d\xi$$

$J(\eta, \xi)$  représente le jacobien de la transformation de l'élément réel  $\Gamma^{el}$  à l'élément de référence  $\Gamma^{ref}$ . Le couple  $(\eta', \xi')$  correspond aux coordonnées intrinsèques du point  $y$  sur  $\Gamma^{ref}$ .

Si on choisit les nœuds d'interpolation pour points de collocation, les inconnues du problème sont :

- Les déplacements et tractions aux nœuds de la frontière externe, soient  $3 \times N_\Gamma$  déplacements et  $3 \times N_\Gamma$  tractions, et donc  $6 \times N_\Gamma$  inconnues en tout pour la surface ( $N_\Gamma =$  nombre de nœuds sur la frontière externe).
- Les sauts de déplacement et tractions aux nœuds de la frontière supérieure de la fissure, soient  $3 \times N_{\Gamma_c}$  sauts de déplacement et  $3 \times N_{\Gamma_c}$  tractions, et donc  $6 \times N_{\Gamma_c}$  inconnues supplémentaires pour la surface fissure ( $N_{\Gamma_c} =$  nombre de nœuds sur la frontière fissure).

Les conditions aux limites sur  $\Gamma$  divise le nombre d'inconnues à la surface par deux (à  $3 \times N_\Gamma$ ). Puis, l'application de l'équation intégrale en déplacement (2.24) en chaque point de collocation de la frontière externe du domaine fournit un ensemble de  $3 \times N_\Gamma$  équations qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[K]\{\Delta u\} = [G]\{t^e\} - [H]\{u^e\} \quad (2.26)$$

Où  $[K]$ ,  $[G]$  et  $[H]$  regroupent l'ensemble des coefficients des matrices élémentaires pour les points de collocation de la frontière externe  $\Gamma$ .  $\{u^e\}$  et  $\{t^e\}$  contiennent les valeurs des déplacements et tractions aux nœuds de  $\Gamma$  et  $\{\Delta u\}$  contient les valeurs du saut de déplacement aux nœuds de la face supérieure de la fissure  $\Gamma^{C+}$ .

Après application de l'équation intégrale en traction (2.25) aux points de collocation de la frontière  $\Gamma^{C+}$ , on obtient le système suivant :

$$\{t^c\}_+ [\bar{K}]\{\Delta u\} = [\bar{G}]\{t^e\} - [\bar{H}]\{u^e\} \quad (2.27)$$

Les matrices  $[\bar{K}]$ ,  $[\bar{G}]$  et  $[\bar{H}]$  rassemblent les coefficients des matrices élémentaires pour les points de collocation de la frontière fissure  $\Gamma^{C+}$ .  $\{t^c\}$  contient les valeurs des tractions aux nœuds de  $\Gamma^{C+}$ .

La résolution des équations (2.26) et (2.27) est réalisée par la procédure itérative suivante (Kouitat et Stebut (2004)) :

- (i) On suppose initialement que les sauts de déplacement à la surface de la fissure sont nuls.
- (ii) En appliquant les conditions aux limites à la frontière externe du domaine, on résout le système d'équations (2.26). On détermine ainsi les déplacements et tractions sur  $\Gamma$ .

- (iii) En utilisant les solutions calculées à l'étape précédente, on résout le système (2.27) complété par les équations de contact unilatéral (2.3). On obtient ainsi les tractions et de nouvelles valeurs pour les sauts de déplacement sur  $\Gamma^{C+}$ .
- (iv) Si l'écart entre le  $\Delta \mathbf{u}$  fixé initialement et celui obtenu à l'étape (iii) ne vérifie pas le critère de convergence, la procédure reprend à l'étape (ii). Dans ce cas,  $\Delta \mathbf{u}^k$  est remplacé par  $\Delta \mathbf{u}^{k+1}$ .

La procédure de résolution est représentée de manière schématique sur la Figure (2.4).

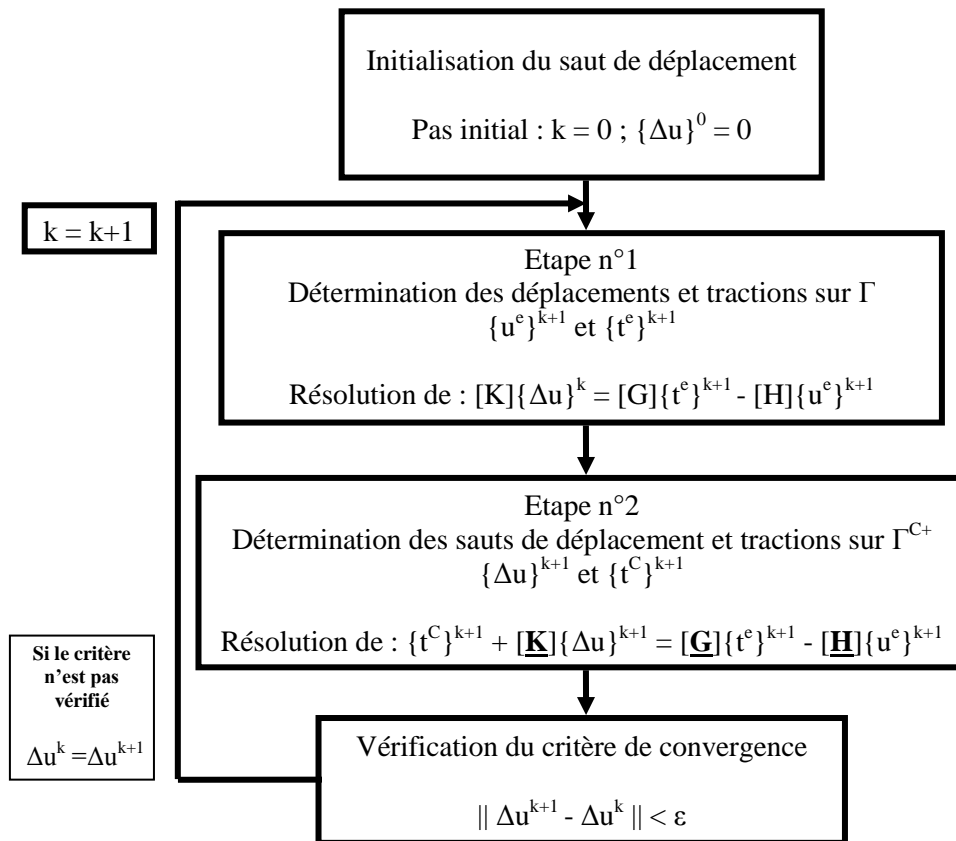


Figure 2.4 : Algorithme de résolution des équations (2.26) et (2.27)

A l'étape n°1, on suppose que les sauts de déplacements sont connus. L'imposition des conditions aux limites à la frontière permet alors d'obtenir un système linéaire contenant autant d'équations que d'inconnues.

A l'étape n°2, le système (2.27) est complété par les équations de contact (2.3c) et (2.3d). Pour un contact glissant, les composantes tangentielles du vecteur contrainte sont nulles. De plus, pour chaque point de collocation, la condition de complémentarité doit être vérifiée. Il est donc nécessaire de s'assurer que  $\min(\Delta u_n, t_n) = 0$ .

Le système d'équation obtenu est donc non-linéaire. Il est résolu par la méthode de Newton B-différentiable (Christensen et al. (1998)).

## 2.4. Méthode numérique de calcul des facteurs d'intensité de contrainte

La résolution des équations (2.15) et (2.17) permet de déterminer les déplacements et tractions à la surface externe du solide, ainsi que le saut de déplacement et les tractions sur  $\Gamma^{C^+}$ .

Les représentations intégrales (2.18) et (2.19) donnent accès aux déplacements et contraintes à l'intérieur du domaine.

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le champ de contrainte au voisinage du front de la fissure est singulier. Dans le cadre de l'élasticité linéaire, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte revêt donc une importance pratique pour l'étude du développement de la fissure.

Les méthodes de calcul des facteurs d'intensité de contrainte sont très nombreuses. Une littérature très fournie existe sur ce sujet et de nombreuses techniques ont été proposées, parmi lesquelles les méthodes d'extrapolation à partir des valeurs du déplacement sur les éléments de front, la méthode de l'élément avec nœuds au quart (Henshell et Shaw (1975), Barsoum (1976), Cruse et Wilson (1978)), les méthodes utilisant des fonctions d'interpolation modifiées pour décrire le déplacement sur les éléments de front Wilde et Aliabadi (1999), la méthode de l'intégrale J etc...

Dans ce travail, la méthode de l'élément avec nœud au quart est adoptée.

*Extrapolation à partir des valeurs du saut de déplacement sur un élément de front classique*

Les expressions asymptotiques des déplacements (voir Chapitre 1), prises pour  $\theta = -\pi$  et  $\theta = \pi$ , permettent d'obtenir le saut de déplacement au voisinage du front de la fissure :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, \theta = \pi) - \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, \theta = -\pi) &= \Delta \mathbf{u}_2(\mathbf{r}) = \frac{\kappa + 1}{\mu} \mathbf{K}_I \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{2\pi}} \\ \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, \theta = \pi) - \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, \theta = -\pi) &= \Delta \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) = \frac{\kappa + 1}{\mu} \mathbf{K}_{II} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{2\pi}} \\ \mathbf{u}_3(\mathbf{r}, \theta = \pi) - \mathbf{u}_3(\mathbf{r}, \theta = -\pi) &= \Delta \mathbf{u}_3(\mathbf{r}) = \frac{4}{\mu} \mathbf{K}_{III} \sqrt{\frac{\mathbf{r}}{2\pi}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Avec  $\kappa = 3 - 4\nu$  dans le cas des déformations planes et  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  dans le cas des contraintes planes. Les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  sont définies dans le repère local associé au front de fissure (voir Figure (2.5)).

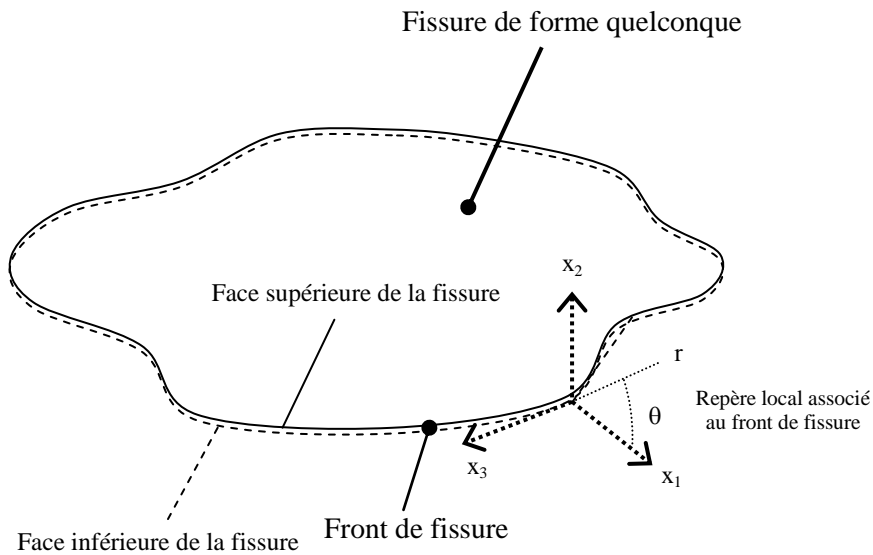


Figure 2.5 : Définition du repère local sur le front de fissure

Les facteurs d'intensité de contrainte peuvent ainsi être évalués à partir du saut de déplacement :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \Delta \mathbf{u}_2(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\
 \mathbf{K}_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \Delta \mathbf{u}_1(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \\
 \mathbf{K}_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{4} \Delta \mathbf{u}_3(\mathbf{r}) \sqrt{\frac{2\pi}{r}}
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

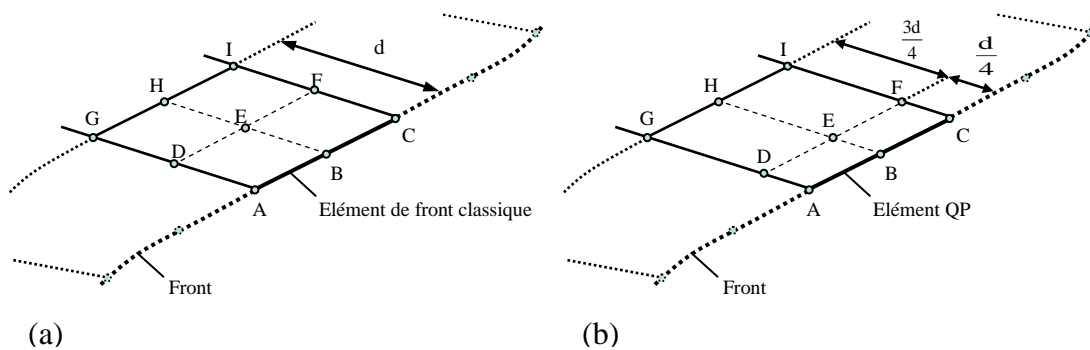


Figure 2.6 : (a) Elément de front classique ; (b) Elément de front avec nœuds au quart

Une première méthode de calcul des FIC consiste à évaluer  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  aux nœuds les plus proches du front. En suivant les notations présentées sur la Figure (2.6a) pour un élément quadrilatère à 9 nœuds adjacent au front, on obtient alors par exemple :

$$\mathbf{K}_I^{A,B,C} = \frac{\mu}{\kappa + 1} \Delta \mathbf{u}_2^{D,E,F} \sqrt{\frac{2\pi}{r_{D,E,F}}} \quad (2.30)$$

Où  $r_D$ ,  $r_E$  et  $r_F$  représentent les positions radiales des nœuds D, E et F.

Suivant la même procédure, on détermine les valeurs de  $\mathbf{K}_{II}$  et  $\mathbf{K}_{III}$  à partir des sauts de déplacement  $\Delta u_1$  et  $\Delta u_3$  aux nœuds D, E et F.

Cette solution relativement approximative peut-être améliorée en tenant compte des nœuds G, H et I, et en évaluant  $\mathbf{K}_I$  aux nœuds A,B et C par extrapolation linéaire :

$$\mathbf{K}_I^{A,B,C} = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \Delta \mathbf{u}_2^{D,E,F} \sqrt{\frac{2\pi}{r_{D,E,F}}} - \frac{\mu}{\kappa + 1} \Delta \mathbf{u}_2^{G,H,I} \sqrt{\frac{2\pi}{r_{G,H,I}}} \quad (2.31)$$

Toutefois, comme le note Bonnet (1999), cette approche est limitée car le type d'interpolation utilisée pour le saut de déplacement, ne permet pas d'approximer correctement la variation en  $r^{1/2}$  observée au voisinage du front.

#### *Élément de front avec nœuds au quart*

Une approche plus astucieuse consiste à utiliser des éléments avec « nœuds au quart ». Développée initialement par Henshell et Shaw (1975), et indépendamment par Barsoum (1976), cette technique introduit le comportement en  $r^{1/2}$  dans l'interpolation du déplacement en modifiant les positions géométriques de certains nœuds de l'élément de front. Dans le cas de l'élément quadrilatère, les nœuds milieux des côtés perpendiculaires à la ligne de front (nœuds D et F), ainsi que le nœud central E sont déplacés et positionnés à une distance du front égale à un quart de la longueur de l'élément (voir Figure (2.6b)).

Dans ce travail, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est donc réalisé par la méthode des éléments avec nœuds au quart. Plus précisément, nous utilisons une approche améliorée proposée par Gray et al. (2003) pour le cas 2D et basée sur l'utilisation de fonctions d'interpolation modifiées. Toute la procédure de calcul des FIC est détaillée en Annexe 2.3.

## 2.5. Résultats

Cette partie est consacrée à la présentation et l'analyse des résultats obtenus par la méthode des éléments de frontière.

### 2.5.1. Influence de la taille et de la forme de la fissure

Le comportement de la fissure sous une sollicitation donnée dépend particulièrement de ses dimensions et de sa forme. Pour apprécier l'influence de chacun de ces paramètres, nous étudions l'évolution des facteurs d'intensité de contrainte sur le front d'une fissure elliptique centrée dans un parallélépipède rectangle chargé en traction simple. Chaque extrémité du domaine est soumise à une contrainte uniforme  $P$ .

On se place dans le repère cartésien  $(O,x,y,z)$ . La fissure  $y$  est décrite par les paramètres  $a$  et  $b$ , longueurs des demi grand-axe et demi petit-axe de l'ellipse que décrit le front de fissure dans le plan  $Oxy$ . La hauteur du parallélépipède et les dimensions de sa base sont proportionnelles à la constante  $h$ . L'ensemble de ces paramètres est précisé sur le schéma de la Figure (2.7).

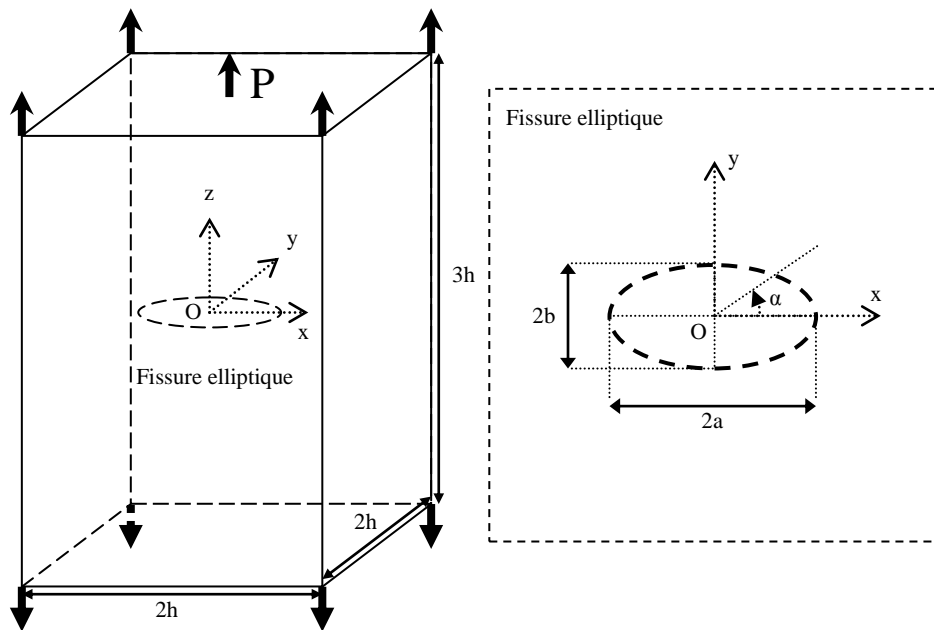


Figure 2.7 : Représentation schématique du domaine d'étude et de la fissure elliptique

Les dimensions de la fissure sont choisies volontairement petites par rapport à la taille du domaine. On peut ainsi comparer les résultats numériques obtenus aux solutions analytiques de Sneddon (1951), pour une fissure circulaire en milieu infini, et Kassir et Sih (1960) pour une fissure elliptique en milieu infini.

Le problème d'une fissure circulaire dans un milieu infini, soumise à une pression constante  $p$ , a été résolu par Sneddon. Ce dernier a obtenu un facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  constant sur tout le front de la fissure et égal à :



$$K_I = 2p\sqrt{\frac{r_c}{\pi}}$$

Où  $r_c$  représente le rayon de la fissure.

Kassir et Sih ont donné les solutions pour le cas plus général de la fissure elliptique. Le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est exprimé en fonction de l'angle polaire  $\alpha$  (voir Figure (2.7)), de la pression  $p$ , des valeurs  $a$  et  $b$  des demis grand axe et petit axe et de la fonction elliptique de seconde espèce  $E$  :

$$K_I(\alpha) = \frac{p\sqrt{\pi}}{E(\mathbf{h})} \sqrt{\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}} \left( \mathbf{a}^2 \sin^2(\alpha) + \mathbf{b}^2 \cos^2(\alpha) \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{Avec } E(\mathbf{h}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \mathbf{h}^2 \sin^2(\mathbf{u}) \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{u}$$

$$\text{Et } \mathbf{h} = \left( 1 - (\mathbf{b}/\mathbf{a})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Notons que pour tous les problèmes traités dans ce chapitre, la discrétisation de la géométrie du domaine et de la fissure est réalisée à l'aide d'éléments quadrilatères à neufs nœuds.

Pour ce cas, la frontière extérieure du domaine est discrétisée en 128 éléments. Plusieurs maillages sont testés pour la fissure : 20, 48 et 84 éléments. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure (2.8) pour deux géométries de fissure. Dans un cas nous imposons  $\mathbf{a} = 2 \times \mathbf{b}$  et dans l'autre  $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ , ce qui correspond au cas particulier de la fissure circulaire. L'évolution du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ , normalisé par la constante  $K_0 = 2P\sqrt{\mathbf{a}/\pi}$  est représentée en fonction de l'angle  $\alpha$  décrivant le front de la fissure. Pour le cas de la fissure circulaire, l'ouverture suivant un diamètre de la fissure, normalisée par  $\Delta u_0 = 8(1 - \nu^2)P\mathbf{a}/\pi \cdot \mathbf{E}$ , est présentée également. La constante  $\Delta u_0$  correspond à l'ouverture maximale de la fissure circulaire, pour une pression donnée  $P$  (Sneddon (1951)).

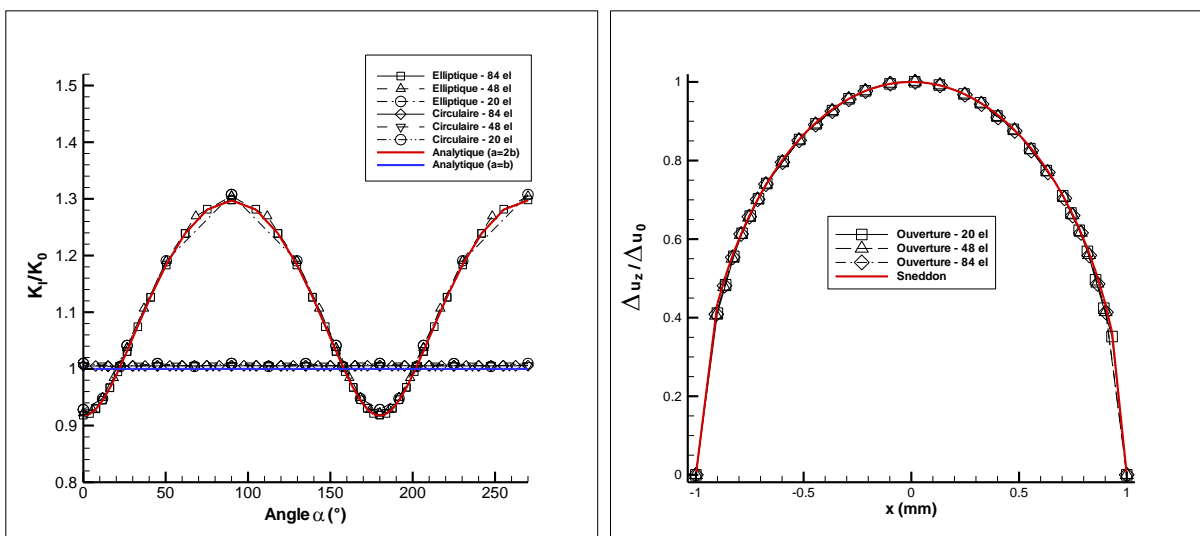


Figure 2.8 : Evolution de  $K_I$  le long du front des fissures elliptique et circulaire – Saut de déplacement normal suivant un diamètre de la fissure circulaire  
Influence du maillage et comparaison aux solutions analytiques

Les résultats obtenus pour la fissure circulaire sont très proches de la solution analytique de Sneddon. L'erreur maximale constatée est inférieure à 1.2%, quel que soit le maillage utilisé. Dans le cas de la fissure elliptique, la comparaison des résultats numériques avec les solutions de Kassir et Sih est aussi très satisfaisante. L'erreur maximale constatée avec le plus grossier des maillages est inférieure à 1%.

De la même façon, on note que l'ouverture de la fissure calculée par Sneddon est quasiment égale aux résultats numériques. L'erreur maximale obtenue est d'environ 0.8%.

La qualité de ces résultats, obtenus en utilisant un maillage de fissure relativement grossier, montre l'efficacité de l'approche retenue.

Intéressons nous à l'évolution de  $K_I$  le long du front de la fissure elliptique. Pour le cas considéré, la fissure est soumise à une sollicitation de mode I pur. Les facteurs  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont logiquement nuls, et leurs valeurs numériques, négligeables devant  $K_I$ , ne sont donc pas représentées sur la Figure (2.8).

La valeur de  $K_I$  est maximale aux extrémités du petit axe ( $\alpha = 90^\circ$  et  $270^\circ$ ) et minimale aux extrémités du grand axe ( $\alpha = 0^\circ$  et  $180^\circ$ ). Cette observation laisse supposer que le développement de la fissure s'initie aux extrémités du petit axe. La fissure aurait donc tendance à propager en reprenant une forme circulaire comme le suggèrent K.P. Mroz et Z. Mroz (2010).

Pour vérifier cette hypothèse, considérons le cas physiquement improbable d'une fissure carrée en lieu et place de la fissure elliptique. La taille de la fissure est caractérisée par le paramètre  $c$ , qui correspond à la demi-longueur d'un côté de la fissure.

Le maillage de la surface du domaine demeure inchangé et la stabilité des résultats en fonction du nombre d'éléments sur la fissure est étudié (16, 25 et 100 éléments). Sur la Figure (2.9), on peut observer l'évolution de  $K_I$  le long d'un côté de la fissure carrée (le problème étant parfaitement symétrique, les résultats obtenus sur les 3 autres côtés sont identiques). Les profils de  $K_I$  sont représentés pour différentes tailles de fissure  $c = h/32$ ,  $h/16$  et  $h/8$ .  $K_I$  est normalisé par la constante  $K_0 = 2P\sqrt{0.5 \times \pi}$ . L'ouverture de la fissure, normalisée par la constante  $\Delta u_0 = 8(1 - \nu^2)Pa / (\pi \cdot E)$ , est représentée suivant l'axe  $Oy$ .

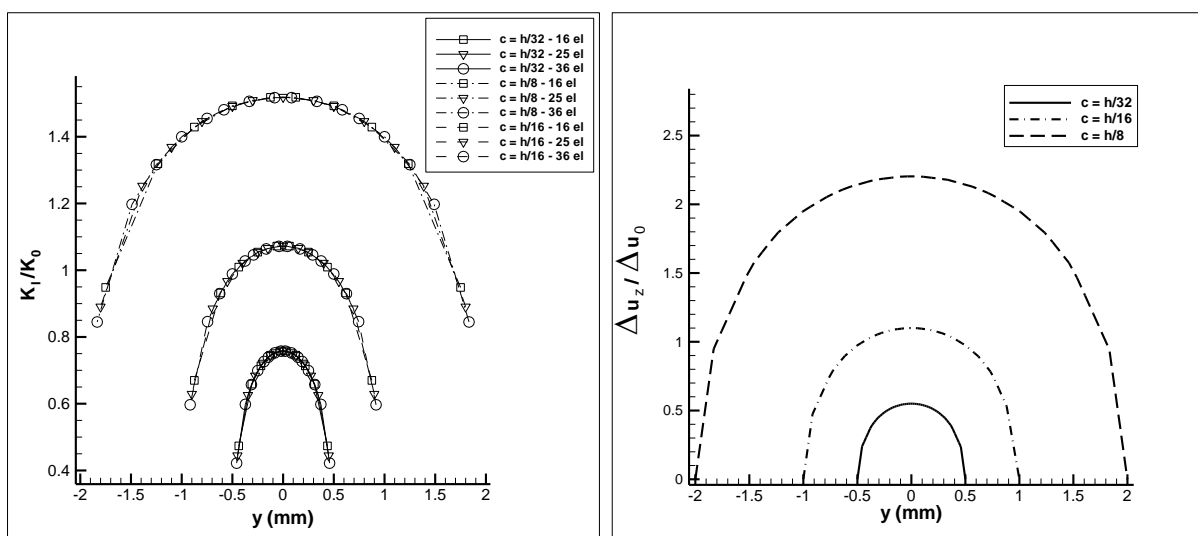


Figure 2.9 : Evolution de  $K_I$  sur un côté de la fissure carrée – Saut de déplacement normal suivant une ligne joignant les milieux de deux côtés opposés

## Influence du maillage et de la taille de fissure

Tout d'abord, en l'absence de solutions analytiques auxquelles comparer nos résultats numériques, il est satisfaisant de noter la stabilité des résultats obtenus quel que soit le maillage utilisé. La variation de la valeur maximale de  $K_I$  en passant du maillage à 16 éléments au maillage à 100 éléments est inférieure à 0.1%. Une discrétisation relativement grossière permet donc d'obtenir des résultats d'une qualité très satisfaisante.

La valeur de  $K_I$  est maximale au centre du côté de la fissure. Les extrémités correspondant aux sommets du carré sont moins sollicitées avec une valeur de  $K_I$  environ 1.8 fois inférieure à l'amplitude du maximum. Ces observations montrent que la propagation de la fissure s'initie par les milieux de chacun des côtés de la fissure. Pour le type de sollicitation étudié, la forme carrée n'est donc pas une forme de fissure durable.

Par ailleurs, on note que l'amplitude du maximum de  $K_I$  augmente parallèlement à la taille de la fissure. Pour un chargement constant donné, on peut ainsi déterminer une taille critique de fissure au-delà de laquelle la propagation est activée. Cette tâche constitue une des principales missions du mécanicien de la rupture.

Le saut de déplacement par rapport à la lèvres supérieure de la fissure est représenté pour chaque taille de fissure et le chargement constant  $P$  sur la Figure (2.9). L'ouverture est parfaitement symétrique dans chacun des cas et augmente proportionnellement à la taille de la fissure.

### 2.5.2. Fissures débouchantes - Influence de la frontière

Dans la partie précédente, nous avons montré l'efficacité de la méthode des éléments de frontière pour calculer les facteurs d'intensité de contrainte sur le front de fissures circulaire, elliptique ou carrée.

Jusqu'à maintenant, les dimensions du domaine, choisies de telle sorte que la fissure puisse être considérée en milieu infini, n'avaient pas d'influence sur les résultats. Nous nous proposons désormais d'étudier l'impact de la surface du solide sur les facteurs d'intensité de contrainte. Cette analyse constitue une transition simple, vers le cas de la fissure débouchante.

#### *Influence de la frontière externe*

Nous nous intéressons au cas d'une fissure elliptique située dans le plan médian (Oxy) d'un cube soumis à un effort de traction  $P$ . Les notations géométriques décrivant le domaine et la fissure sont conservées.  $a$  et  $b$  sont les demi grand axe et demi petit axe de la fissure et la longueur du côté du cube est décrite par le paramètre  $h$  (Figure (2.10)). Les dimensions du problème sont choisies de telle sorte que  $a/b = 2$  et  $h/b = 10$ . Les maillages de la frontière externe et de la fissure sont constitués respectivement de 384 et 84 éléments.

On note  $d_1$  la distance entre la surface extérieure (point  $F_1$ ) et la frontière de la fissure suivant le grand axe et  $d_2$ , la distance avec la frontière (point  $F_2$ ) suivant le petit axe.

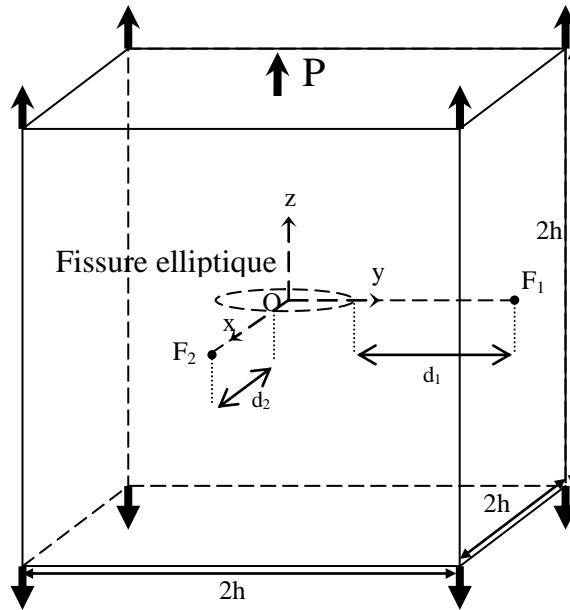


Figure 2.10 : Représentation schématique du domaine d'étude et de la fissure elliptique proche de la frontière externe

Afin d'étudier l'influence de la frontière externe sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte, la fissure, initialement au centre du domaine, est translaturée dans la direction  $x$  ou dans la direction  $y$ . Ces deux situations sont représentées sur la Figure (2.11).

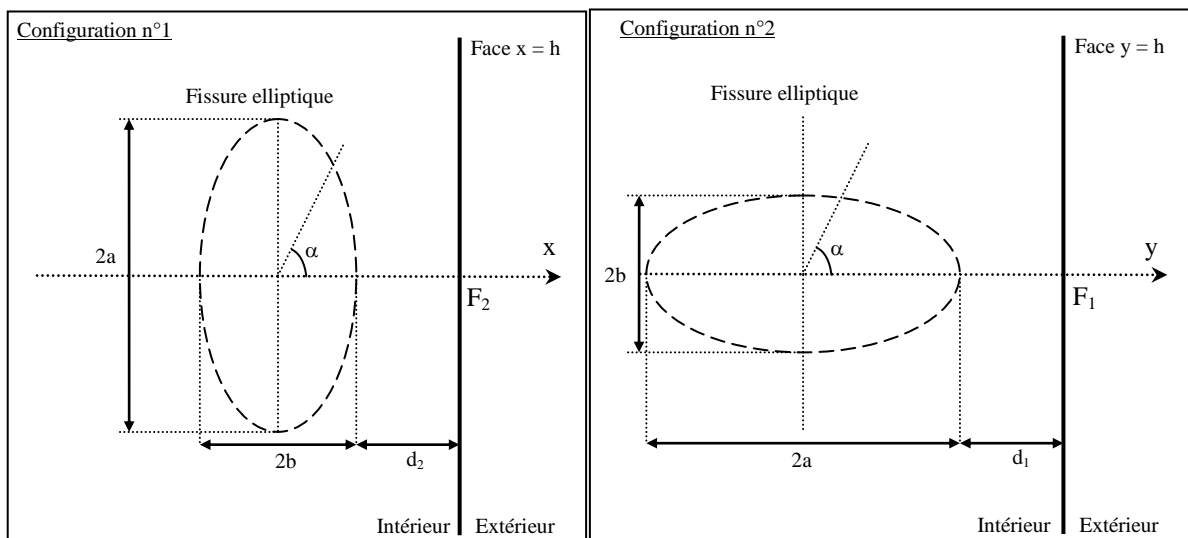


Figure 2.11 : Fissure elliptique à proximité de : (Configuration n°1) la face  $x = h$  ; (Configuration n°2) la face  $y = h$

Pour le cas de chargement étudié, la fissure est en mode I pur. On s'intéresse donc uniquement aux valeurs de  $K_I$  le long du front pour différentes positions de la fissure par rapport à la surface :  $d_1 / b = 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125$  et  $0.0625$  (resp.  $d_2 / b = 2, 1, \dots$ ). La valeur de  $K_I$  est normalisée par  $K_0 = 2P\sqrt{a/\pi}$  ( $P$  est homogène à une contrainte).

Les résultats obtenus pour chaque configuration sont présentés sur les Figures (2.12) et (2.13).

Lorsque la fissure se trouve dans la première configuration, deux effets notables sur la valeur de  $K_I$  sont observés. Le premier est directement lié à la forme de la fissure. Comme nous l'avons remarqué dans la première partie,  $K_I$  est minimal aux extrémités du grand axe ( $\alpha=90^\circ$  et  $270^\circ$ ) et maximal aux extrémités du petit axe. Cependant, un second effet, lié à la présence de la frontière, est clairement visible. Plus la fissure est proche de la surface (petites valeurs de  $d_2$ ), plus l'amplitude des maximums est importante. On note néanmoins que la valeur de  $K_I$  au point du front le plus proche de la surface ( $\alpha=0^\circ$ ) augmente sensiblement plus rapidement que la valeur du second maximum, associé à l'autre extrémité du petit axe ( $\alpha=180^\circ$ ). Dans cette configuration, la proximité de la frontière amplifie l'effet lié à la forme de la fissure et facilite son émergence à la surface.

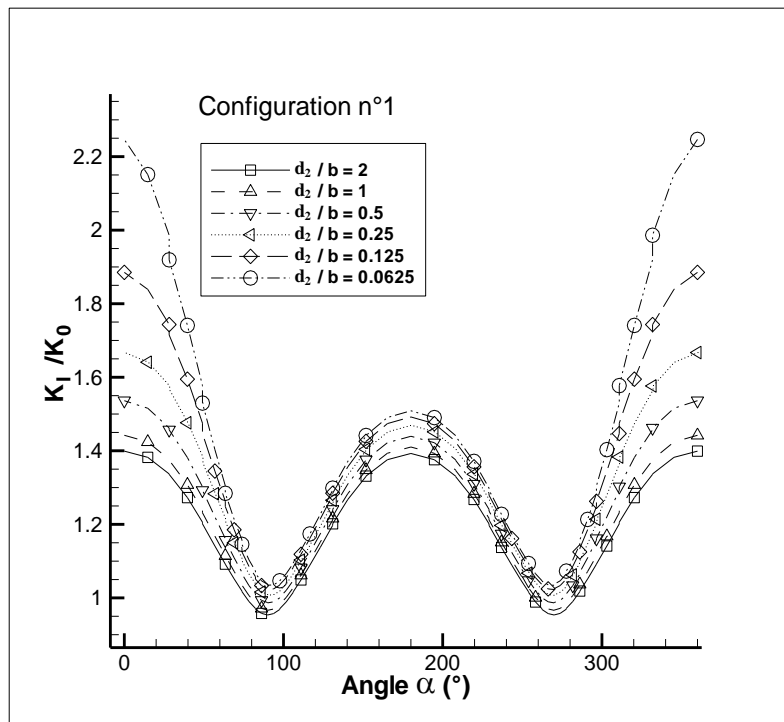


Figure 2.12 : Evolution de  $K_I$  le long du front de la fissure elliptique pour la configuration n°1  
Influence de la distance de la fissure à la surface du domaine

Dans la seconde configuration, l'effet dû à la forme elliptique de la fissure est toujours observable. Les maximums de  $K_I$  se situent à nouveau aux extrémités du petit axe et sont, cette fois, d'amplitudes équivalentes. En revanche, l'influence de la frontière est très peu marquée. La valeur du minimum de  $K_I$  au point le plus proche de la surface ( $\alpha=0^\circ$ ) augmente légèrement lorsque  $d_1$  diminue, sans toutefois dépasser celle des maximums locaux. L'effet de forme reste donc prédominant par rapport à l'effet de surface. Dans cette situation, la fissure va donc se développer parallèlement à la surface, sans déboucher.

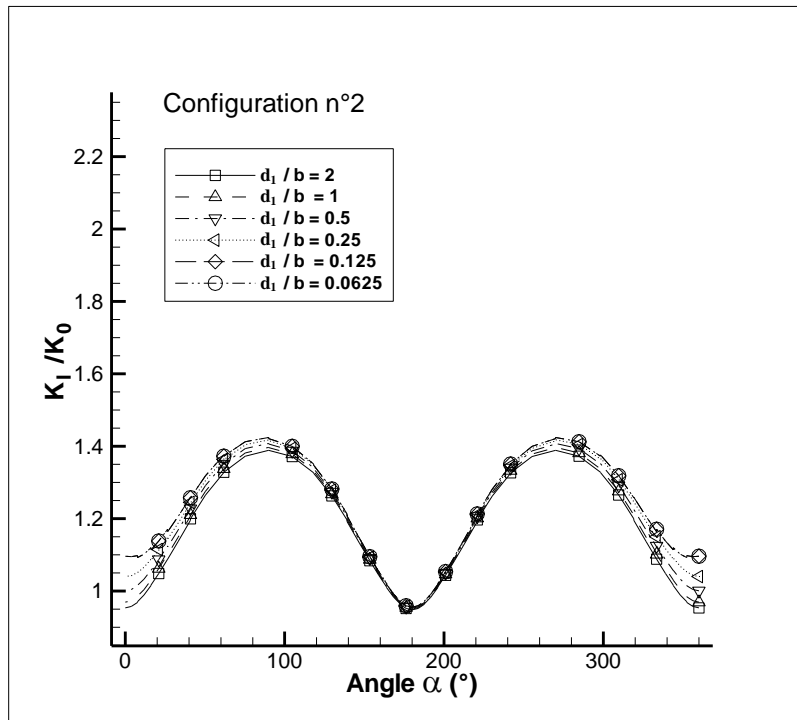


Figure 2.13 : Evolution de  $K_I$  le long du front de la fissure elliptique pour la configuration n°2  
Influence de la distance de la fissure à la surface du domaine

La première configuration « constituerait » donc la situation la plus dangereuse.

### Fissures débouchantes

Nous étudions l'influence de la profondeur d'une fissure semi-elliptique débouchante sur les FIC. Le chargement appliqué au domaine est inchangé (traction uniforme).

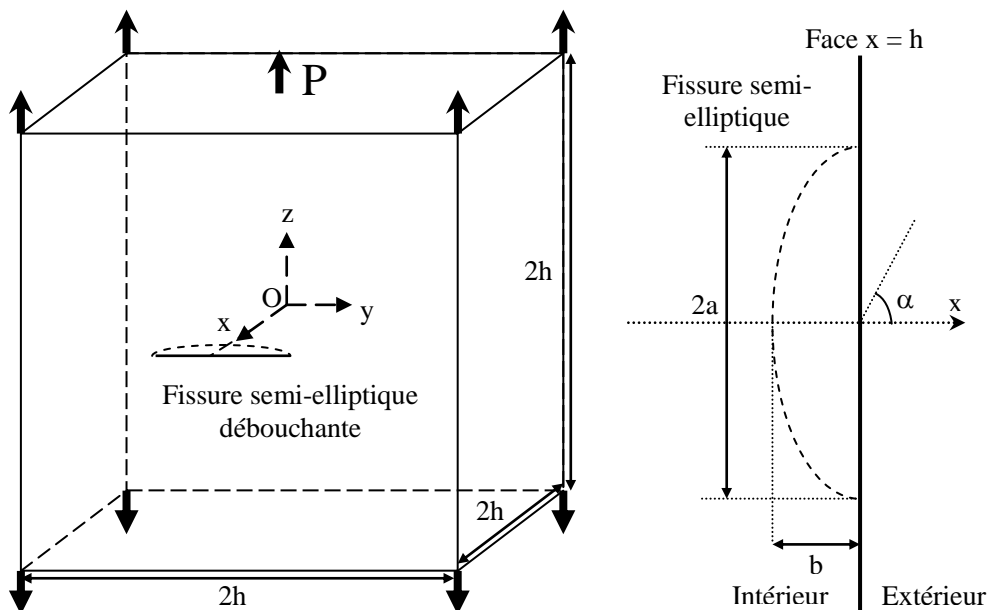


Figure 2.14 : Représentation schématique du domaine et de la fissure semi-elliptique débouchante

La fissure est située dans le plan médian Oxy du cube de hauteur  $2h$ . Sa profondeur est égale à la valeur du demi petit axe  $b$  (Figure (2.14)). Le côté débouchant de la fissure a pour longueur  $2a$ . Pour ce cas, le rapport  $h/a$  est égal à 5, ce qui permet de négliger l'effet des faces adjacentes en  $y = \pm h$ .

La valeur de  $a$  étant fixée, l'impact de la profondeur de la fissure sur les résultats est analysé en faisant varier la valeur du demi petit axe  $b$ . Les calculs numériques sont réalisés en utilisant un maillage fissure de 42 éléments.

Les résultats, normalisés par  $K_0 = 2P\sqrt{a/\pi}$ , sont présentés sur la Figure (2.15) :

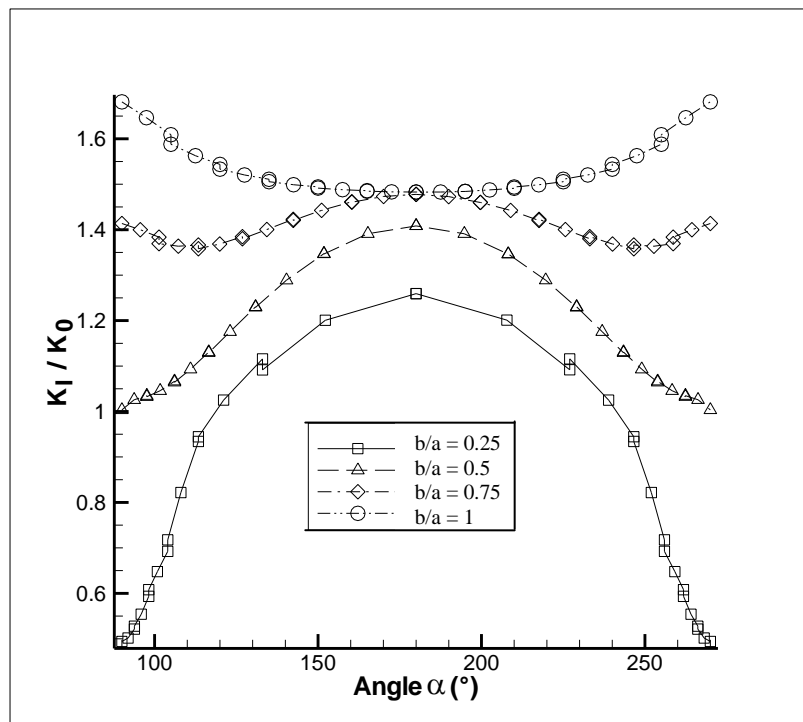


Figure 2.15 : Variation de  $K_I$  le long du front de la fissure débouchante  
Influence du rapport  $b/a$

Comme on peut le constater, la profondeur influe de manière significative sur le comportement de la fissure.

Pour  $b/a = 0.25$ , la valeur maximale de  $K_I$  est atteinte au point du front le plus profond ( $\alpha = 180^\circ$ ). Elle est environ 2.55 fois supérieure aux valeurs de  $K_I$  aux extrémités débouchantes de la fissure ( $\alpha = 90^\circ$  et  $270^\circ$ ).

Pour  $b/a = 0.5$ , les positions des minimums et maximums de  $K_I$  sont inchangées. Toutefois, on note que la valeur maximale n'est plus que 1.4 fois supérieure aux valeurs minimales calculées aux extrémités débouchantes.

Pour ces deux configurations, la fissure tend clairement à se propager vers l'intérieur du domaine.

Pour  $b/a = 0.75$ , on observe une situation intermédiaire. La valeur maximale de  $K_I$  correspond toujours au point le plus profond. Cependant, on constate l'apparition de deux maximums locaux d'amplitudes équivalentes aux extrémités débouchantes de la fissure. Le comportement de la fissure semble donc s'équilibrer entre propagation vers l'intérieur et propagation en surface du domaine.

Enfin, pour  $b / a = 1$ , la tendance observée se confirme.  $K_I$  est maximal aux extrémités débouchantes de la fissure et minimal au point le plus profond. Dans ce cas, la propagation de la fissure sera clairement de nature superficielle.

Lorsque la profondeur augmente, le comportement de la fissure passe donc progressivement d'une propagation vers l'intérieur du solide à une propagation en surface.

### 2.5.3. Fissure fermée ou partiellement fermée

En présence d'efforts de compression, les lèvres de la fissure sont susceptibles de rester, partiellement ou totalement fermées. Cette situation est prise en compte par les conditions de contact unilatéral (voir Equations (2.3)), qui permettent d'éviter toute interpénétration des faces de la fissure.

Afin de montrer l'intérêt de cette stratégie, nous étudions le problème d'un parallélépipède rectangle soumis à un effort de flexion simple contenant dans un cas, une fissure carrée centrée, dans un second cas, deux fissures carrées coplanaires. L'extrémité gauche de la barre est encastree tandis que l'extrémité droite est soumise à un effort uniforme  $P$  de direction  $-z$ . Les autres faces du domaine sont libres de traction.

#### *Fissure carrée centrale*

Les dimensions du domaine sont décrites par le paramètre  $h$  (voir Figure (2.16)). La taille de la fissure  $c$  est choisie de telle sorte que  $c/h = 0.5$ . La discrétisation de la frontière externe comporte 128 éléments et le maillage de la fissure est constitué de 100 éléments.

Pour faciliter l'analyse des résultats, un numéro est assigné à chaque côté de la fissure (Figure 2.17).

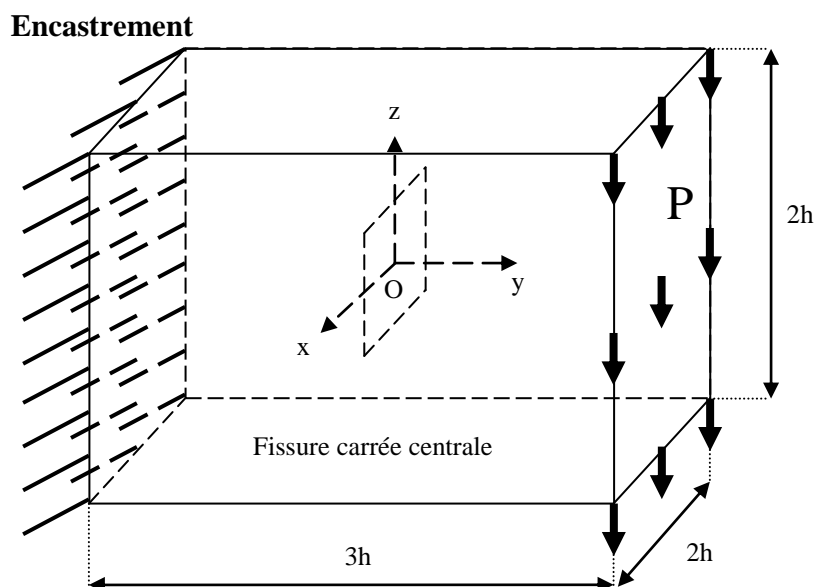


Figure 2.16 : Représentation schématique du domaine en flexion simple et de la fissure carrée centrée



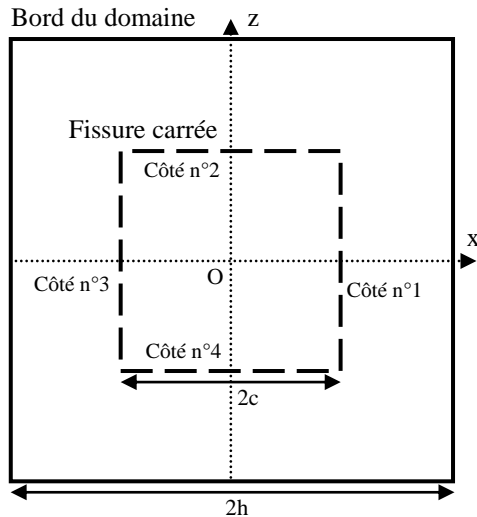


Figure 2.17 : Numérotation des côtés de la fissure carrée

Sur la Figure (2.18), on représente l'ouverture ( $\Delta u_y$ ) le long d'un axe vertical passant par le centre de la fissure. Les calculs sont réalisés pour trois positions différentes de cette dernière :  $y = -h/2$ ,  $0$  et  $h/2$ . Pour chaque cas, l'évolution de la contrainte  $\sigma_{yy}$  en l'absence de fissure est superposée au profil du saut de déplacement. Pour assurer une bonne lisibilité de la figure, contrainte et ouverture sont normalisées par leurs valeurs maximales  $\Delta u_{yMax}$  et  $\sigma_{yyMax}$  atteintes pour la position  $y=-h/2$ .

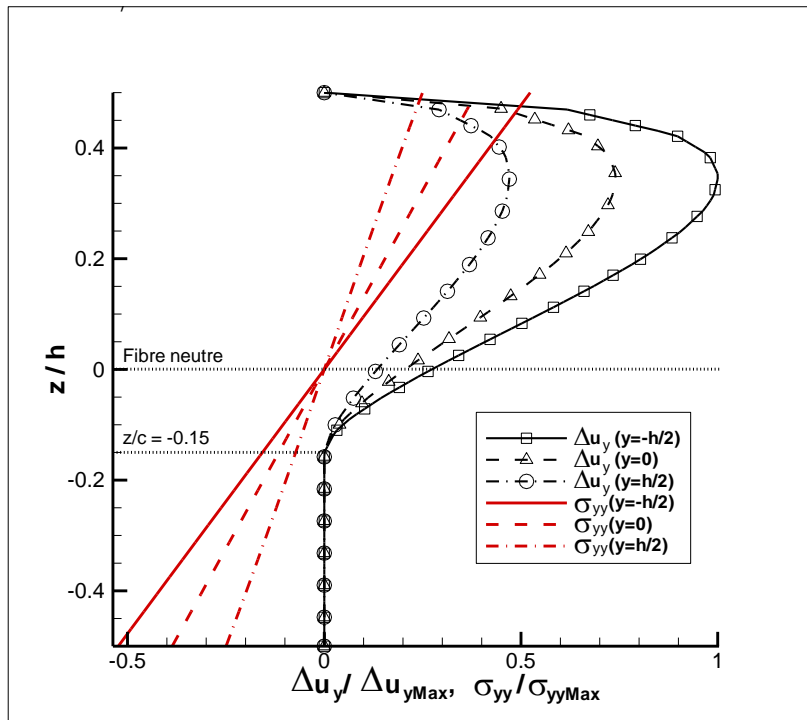


Figure 2.18 : Saut de déplacement normal entre les lèvres de la fissure  
La position est successivement en  $y = -h/2$ ,  $0$  et  $h/2$

La sollicitation de flexion entraîne la mise en traction de la partie supérieure du barreau et la mise en compression de la partie inférieure. A « cheval » entre ces deux zones, la fissure est partiellement ouverte. De plus, on note que la position de la fibre neutre, normalement au

centre du domaine (en  $z = 0$ ) pour un matériau sain, est modifiée par la présence de la fissure, cette dernière s'ouvrant pour  $z / h > - 0.15$  environ.

Plus le plan considéré est proche de l'extrémité encastrée du barreau, plus la variation de la contrainte (suivant  $z$ ) est forte et plus l'ouverture de la fissure est importante. Quel que soit le signe de la contrainte,  $\Delta u_y$  reste positif. La condition de contact unilatéral permet donc d'éviter toute interpénétration des faces de la fissure.

Intéressons nous maintenant aux variations des facteurs d'intensité  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur les fronts n°1, 2, 3 et 4 de la fissure (on considère le cas où celle-ci est située en  $y = 0$ ). Les FIC sont normalisés par la valeur maximale ( $K_{Max}$ ) atteinte par  $K_I$  sur le pourtour de la fissure (Figure (2.19)).

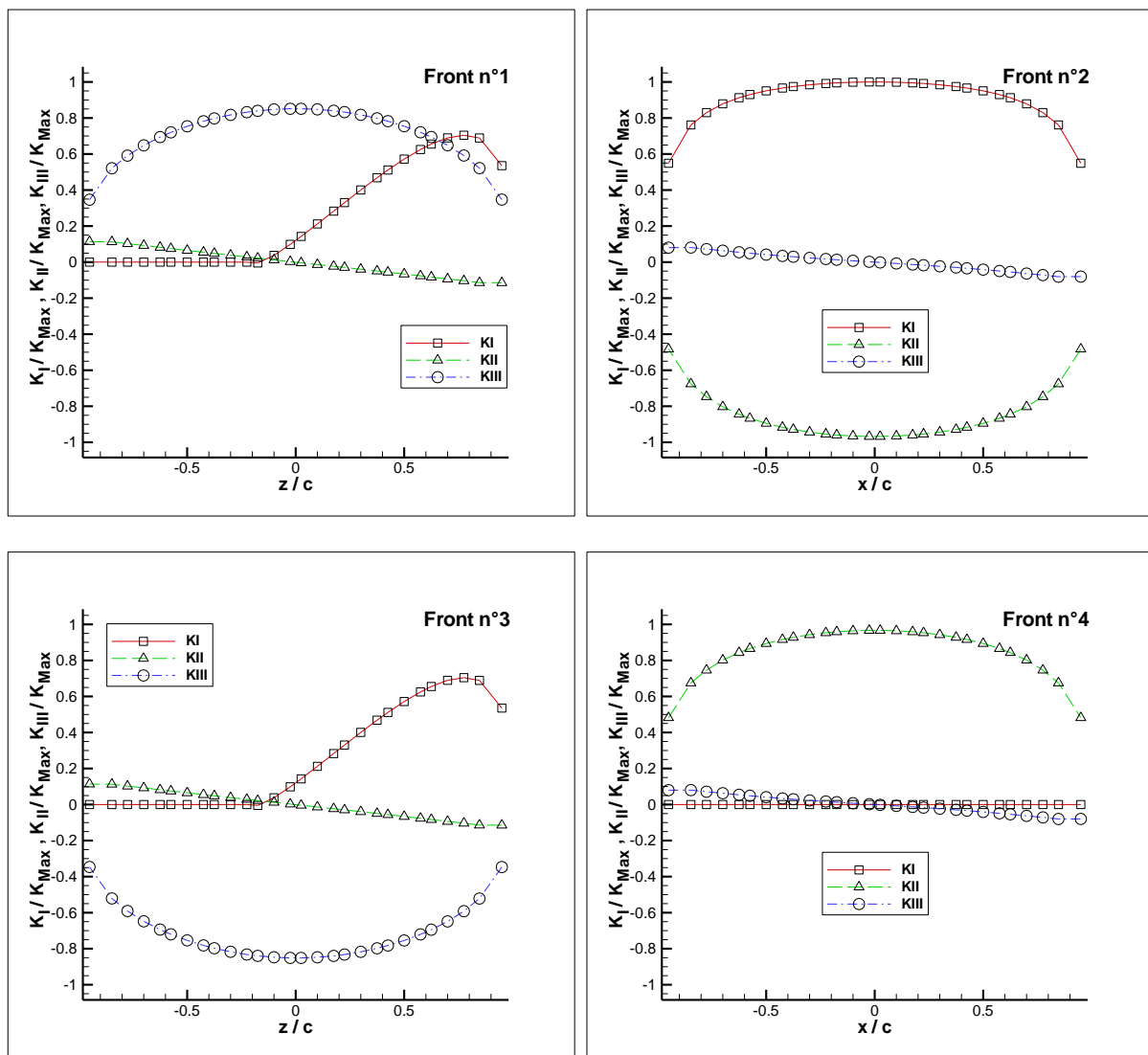


Figure 2.19 : Evolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  sur chaque côté de la fissure carrée

Comme on peut le constater, les facteurs d'intensité de contrainte  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sont non nuls. L'ouverture de la fissure s'accompagne donc de glissements perpendiculaires ou parallèles au front de la fissure.

Sur les fronts n°1 et n°3, les valeurs de  $K_{II}$  sont quasiment négligeables devant celles de  $K_{III}$ . Ce résultat indique que le mouvement de glissement des faces de la fissure est principalement anti-plan. La fissure est donc soumise à un effort de cisaillement essentiellement vertical. L'intérêt des conditions de contact unilatéral est souligné par l'obtention de valeurs non-négatives de  $K_I$  dans la partie de l'éprouvette en compression. Le mode I prend progressivement de l'importance lorsqu'on « remonte » dans la partie supérieure du domaine, soumise à des efforts de traction.

Sur les fronts n°2 et n°4, le mode III est quasiment inexistant par rapport au mode II et le mouvement de glissement des faces de la fissure est plan.

Sur le côté n°4, entièrement situé dans la zone en compression du domaine, le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  est logiquement nul en tout point du front (grâce aux conditions de contact unilatéral). Dans la partie supérieure de l'éprouvette, le front n°2 est soumis à des efforts de traction.  $K_I$  présente un profil non nul et symétrique par rapport à  $x = 0$ .

Pour résumer, on constate donc que la fissure est en mode mixte de sollicitation sur sa partie supérieure (mode I + mode II, ou mode I + mode III), et en mode pur de cisaillement sur sa partie inférieure (mode II ou mode III). Quand il n'est pas inexistant, le mode I ne constitue pas nécessairement le mode de sollicitation dominant.

#### *Fissures carrées coplanaires*

On étudie maintenant le cas de deux fissures carrées contenues dans le plan médian ( $y = 0$ ) d'un parallélépipède rectangle. La position des fissures dans le domaine et les dimensions du problème sont précisées sur les Figures (2.20) et (2.21). Le maillage de la frontière externe est identique au cas précédent. Le maillage des deux fissures est constitué de 36 éléments.

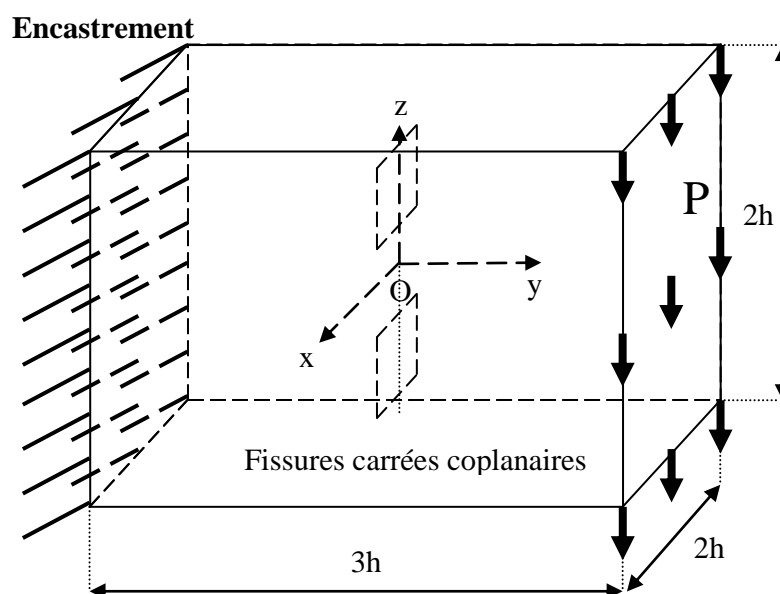


Figure 2.20 : Eprouvette en flexion simple contenant deux fissures coplanaires

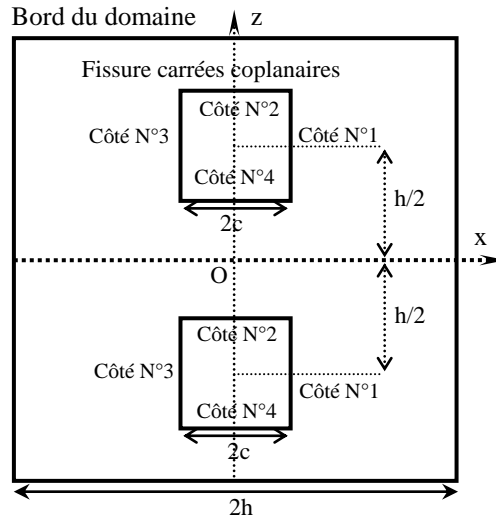


Figure 2.21 : Disposition des fissures dans le plan xOz

L'ouverture de la fissure est représentée le long d'une ligne dans le plan médian  $y = 0$  et les plans  $y = \pm h/2$ . Les profils de contrainte  $\sigma_{yy}$  (en l'absence de fissure) sont superposés sur la même figure. Comme dans le cas précédent, contrainte et ouverture sont normalisées par leurs valeurs maximales  $\Delta u_{yMax}$  et  $\sigma_{yyMax}$  atteintes pour la position  $y = -h/2$ .

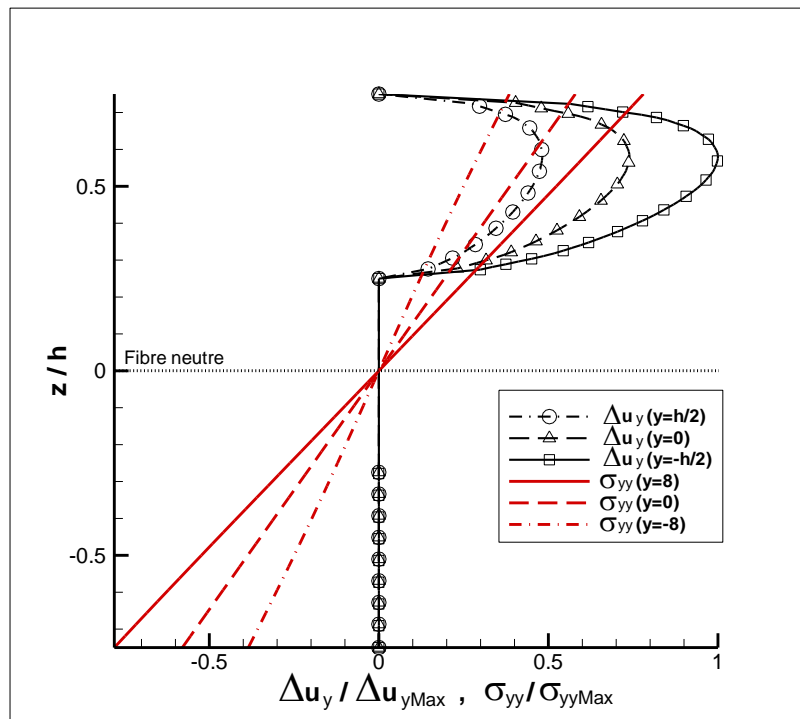


Figure 2.22 : Saut de déplacement normal entre les lèvres des deux fissures coplanaires pour trois positions différentes de celles-ci :  $y = -h/2$ ,  $0$  et  $h/2$

Dans la partie supérieure de l'éprouvette, la fissure est complètement ouverte. Le champ de contrainte n'étant pas uniforme, le profil d'ouverture de la fissure (Figure (2.22)) est légèrement dissymétrique.

Comme dans le cas précédent, plus la fissure est proche de la face encastrée, plus le saut de déplacement entre les faces de la fissure est important.

Dans la partie inférieure de l'éprouvette, soumise à un effort de compression, la fissure est totalement fermée. La condition de contact unilatéral permet là encore d'éviter un saut de déplacement négatif.

On s'intéresse maintenant à l'évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur chaque côté des deux fissures. Les figures suivantes permettent de comparer, pour un front donné, les variations de chacun des facteurs d'intensité de contrainte, pour la fissure située dans la partie supérieure du domaine.

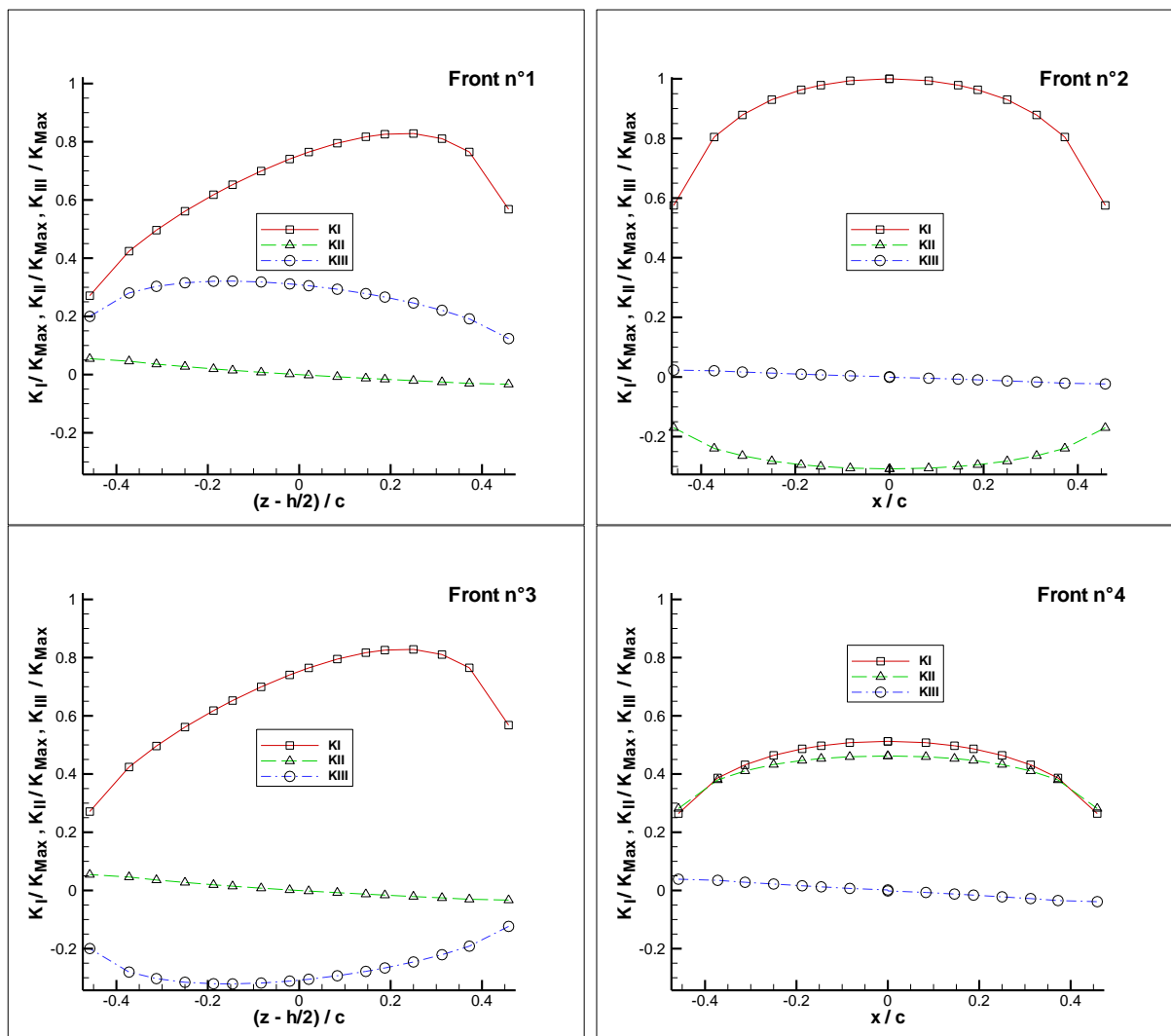


Figure 2.23 : Evolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  sur chaque côté de la fissure carrée située dans la partie supérieure du barreau rectangulaire

L'analyse de la Figure (2.23) amène plusieurs observations.

Quel que soit le front étudié, les valeurs de  $K_I$  sont supérieures ou égales aux valeurs de  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Le mode I est donc largement dominant par rapport aux autres modes de sollicitations. Contrairement au cas de traction simple étudié dans la section 5.1, les profils de  $K_I$  sur les

quatre fronts ne sont pas identiques. La contrainte  $\sigma_{yy}$  induite par le chargement de flexion est plus importante lorsqu'on s'approche du bord supérieur du domaine ( $z = h$ ). Le front n°2 subit donc un effort de traction plus intense que le front n°4 ce qui explique la différence d'amplitude des profils de  $K_I$  associés à ces deux côtés.

L'évolution de  $\sigma_{yy}$  en fonction de  $z$  permet aussi d'expliquer le décalage du maximum de  $K_I$  observé sur les fronts n°1 et 3. La valeur maximale de  $K_I$  est atteinte en un point plus élevé que le centre du front.

Les mêmes figures sont présentées pour la fissure située dans la partie inférieure de l'éprouvette. Dans cette zone, le matériau est soumis à un effort de compression.

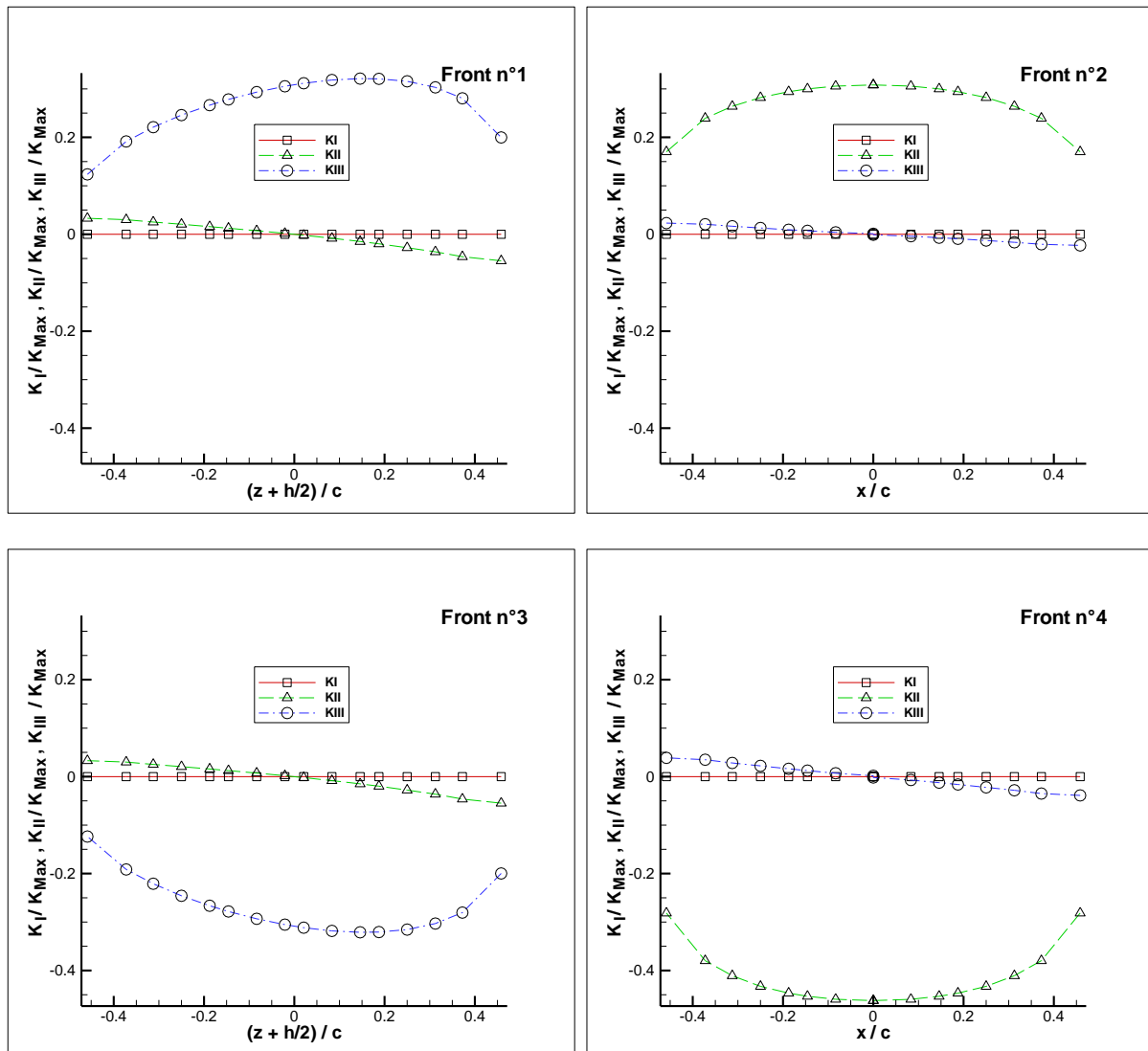


Figure 2.24 : Evolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  sur chaque côté de la fissure carrée située dans la partie inférieure du barreau rectangulaire

L'étude des facteurs d'intensité de contrainte dans ce cas se limite à une comparaison des valeurs de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur un front donné. Le mode d'ouverture est totalement absent et le facteur  $K_I$  est nul sur tous les fronts de la fissure.

Le mode III est prépondérant sur les côtés n°1 et n°3, tandis que le mode II est supérieur sur les fronts n°2 et n°4.

En l'absence de mode I, le comportement de la fissure doit donc se déduire des valeurs prises par  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur chacun des fronts.

L'étude de ces deux exemples (fissure carrée centrée et fissures carrées coplanaires) a permis de démontrer l'intérêt des conditions de contact unilatéral. En cas de refermeture totale, ou partielle, de la fissure, le saut de déplacement et le facteur  $K_I$  restent positifs ou nuls (pas de phénomène d'interpénétration des faces de fissure). De plus, contrairement aux cas étudiés précédemment, la fissure n'est plus en mode I pur. Ces côtés sont soumis à des sollicitations mixtes. Nous allons désormais nous intéresser au comportement de la fissure dans ce type de situation.

#### 2.5.4. Fissure en mode mixte – Angle de propagation

Dans la section 2.5.1, nous avons étudié des cas où la fissure était perpendiculaire à la direction d'application de l'effort. Pour ce type de chargement, seul le mode I intervient, les modes de glissement plan et antiplan sont absents et la propagation a lieu dans le plan initial de la fissure. Nous avons ainsi pu analyser l'influence de la forme et la taille de la fissure sur sa stabilité.

Dans la section 2.5.3, à travers l'analyse du cas de flexion simple, nous avons pu observer des cas de fermeture totale ou partielle de fissure. Pour ce type de chargement, les valeurs des facteurs d'intensité  $K_{II}$  et  $K_{III}$  ne sont plus négligeables par rapport à  $K_I$ . Plusieurs modes de sollicitation sont impliqués et on parle alors de mode mixte. Les lèvres de la fissure sont susceptibles de s'ouvrir ou de rester en contact tout en glissant l'une par rapport à l'autre. Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, le comportement des fissures en mode mixte a fait l'objet de nombreuses études. La direction de propagation de fissure notamment est un sujet très populaire dans la communauté des mécaniciens de la rupture. De très nombreux critères ont été proposés pour prédire l'angle de propagation et la stabilité de la fissure pour des problèmes 2D (voir par exemple K.P. Mroz et Z. Mroz (2010)). Parmi les plus connus, on peut citer notamment, le critère de la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$  maximale, proposé par Erdogan et Sih (1963), le critère de la densité d'énergie de déformation minimale (Sih (1974)) ou le critère du taux de restitution d'énergie maximal (Griffith (1920)). D'autres méritent d'être cités, comme le critère de symétrie locale, présenté par Goldstein et Salganik (1974), qui postule la propagation de la fissure dans la direction où le facteur d'intensité de contrainte  $K_{II}$  s'annule.

La prédiction de l'angle de propagation dans le cas d'une fissure tridimensionnelle en mode mixte est un problème plus complexe. L'expérience permet de dégager trois modes de développement de la fissure associés aux trois modes de sollicitation I, II et III (Schollmann et al. (2002)) et représentés schématiquement sur la Figure (2.25).

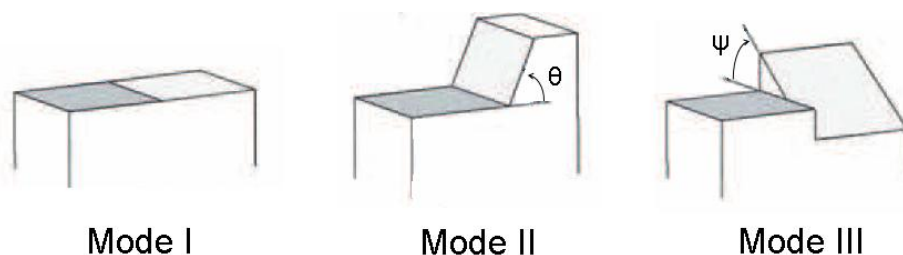


Figure 2.25 : Développement de la fissure en mode I, II et III

Lorsque la fissure est sollicitée en mode I pur, la propagation a lieu dans le plan initial de la fissure sans changement d'orientation. Dans le cas d'une sollicitation de mode II pur, le développement de la fissure se fait continuellement à partir du front initial dans un plan incliné d'un angle  $\theta$  par rapport au plan de la fissure. Enfin, en mode III, la propagation a lieu dans un plan tourné d'un angle  $\psi$  par rapport au plan initial de la fissure. Dans cette situation, la continuité de la surface de la fissure est rompue. Ce phénomène a été observé expérimentalement par plusieurs auteurs (Palaniswamy et Knauss (1975)).

La prédiction de la direction de propagation dans le cas 3D se ramène donc rigoureusement à l'évaluation des angles  $\theta$  et  $\psi$ . Toutefois, dans les exemples suivants, nous nous limitons aux cas où la fissure se développe de manière continue à partir de son front initial. La direction de propagation se déduit donc uniquement de l'angle  $\theta$  défini dans le plan perpendiculaire au front de fissure.

#### *Critère de la contrainte circonférentielle*

Dans ce cas, le critère de la contrainte circonférentielle de Erdogan et Sih (1963) se généralise directement en 3D. On se place dans le plan perpendiculaire au front et on recherche l'angle  $\theta$  pour lequel la contrainte circonférentielle est maximale. L'expression de  $\sigma_{\theta\theta}$  se déduit des formules asymptotiques du champ de contrainte au voisinage du front d'une fissure 3D (Hartranft et Sih (1977)). Dans le plan normal au front ( $\psi = 0$ ), exprimée en fonction des coordonnées polaires, la contrainte circonférentielle s'exprime sous la forme suivante :

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{3}{4} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( -\frac{3}{4} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{4} \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right)$$

On recherche donc simplement la valeur de  $\theta$  pour laquelle  $\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0$ .

Notons que pour ce critère, l'angle de propagation  $\theta_p$  ne dépend pas du facteur d'intensité  $K_{III}$ .

#### *Critère de la densité d'énergie de déformation*

D'autres critères, basés sur des considérations énergétiques, ont été généralisés au cas tridimensionnel. Le critère de la densité d'énergie de déformation fut adapté aux problèmes 3D par Sih et Cha (1974). Dans leur travail, la densité d'énergie  $W_e$  au voisinage du front de fissure est approximée en fonction d'un « facteur densité d'énergie » noté  $S$ , dépendant de l'angle  $\theta$  :

$$W_e \cong \frac{1}{r} \frac{S(\theta)}{\cos(\psi)}$$

La propagation de la fissure a lieu dans la direction définie par les angles  $\theta$  et  $\psi$  minimisant la densité d'énergie de déformation. Cependant, comme le notent Mroz et Mroz (2010), le minimum local du terme  $S(\theta)/\cos(\psi)$  est toujours atteint dans le plan normal au front (soit pour  $\psi = 0$ ). La recherche de la direction de propagation se limite donc à la détermination de



l'angle  $\theta$  pour lequel le facteur densité d'énergie  $S$  est minimal. L'expression de  $S$  en fonction des valeurs des facteurs d'intensité de contrainte est précisée ci-après :

$$S(\theta) = a_{11}(\theta)K_I^2 + 2a_{12}(\theta)K_I K_{II} + a_{22}(\theta)K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2$$

Elle dépend de fonctions angulaires dont les expressions sont fournies elles aussi :

$$a_{11}(\theta) = \frac{1}{16\pi\mu} (3 - 4\nu - \cos(\theta))(1 + \cos(\theta))$$

$$a_{12}(\theta) = \frac{1}{8\pi\mu} \sin(\theta)(\cos(\theta) - 1 + 2\nu)$$

$$a_{22}(\theta) = \frac{1}{16\pi\mu} [4(1 - \nu)(1 - \cos(\theta)) + (3\cos(\theta) - 1)(1 + \cos(\theta))]$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi\mu}$$

La densité d'énergie de déformation fait intervenir le facteur  $K_{III}$ . Toutefois, comme le coefficient  $a_{33}$  est indépendant de l'angle  $\theta$ , le mode de glissement antiplan n'a, pour ce critère, aucune influence sur la direction de propagation.

Pour déterminer l'angle de propagation, on recherche l'angle  $\theta$  vérifiant  $\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0$ .

La fissure se propage lorsque la valeur minimale du facteur densité d'énergie atteint une valeur critique  $S_C$ .

$$S(\theta_p) = S_C.$$

Cette valeur critique peut-être reliée à la ténacité par la relation :  $S_C = \frac{(1 - 2\nu)K_{IC}^2}{4\pi\mu}$ .

#### *Critère du taux de restitution d'énergie*

Ce critère postule (Griffith (1920)) que la propagation de la fissure se fait dans la direction maximisant le taux de restitution d'énergie  $G$ . Comme nous l'avons vu au premier chapitre, le taux de restitution d'énergie correspond à la variation de l'énergie potentielle du solide en fonction de l'accroissement de la taille de la fissure. Sa valeur en un point quelconque du front peut s'exprimer en fonction des facteurs d'intensité de contrainte :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2$$

Les facteurs d'intensité de contrainte  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ,  $K_{III}^*$  au bout d'une extension virtuelle infinitésimale du front de la fissure sont reliés aux valeurs des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  sur le front original par un opérateur linéaire  $F(\theta)$  dépendant de l'angle  $\theta$  (Leblond et al. (1999)) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_I^* \\ \mathbf{K}_{II}^* \\ \mathbf{K}_{III}^* \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{I,I}(\theta) & \mathbf{F}_{I,II}(\theta) & 0 \\ \mathbf{F}_{II,I}(\theta) & \mathbf{F}_{II,II}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{F}_{III,III}(\theta) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}(\theta)} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_I \\ \mathbf{K}_{II} \\ \mathbf{K}_{III} \end{pmatrix}$$

Les expressions des fonctions  $\mathbf{F}_{I,I}$ ,  $\mathbf{F}_{I,II}$ ,  $\mathbf{F}_{II,I}$ ,  $\mathbf{F}_{II,II}$  et  $\mathbf{F}_{III,III}$ , consultables dans le travail de Leblond (1999), sont rappelées en Annexe 2.4.

L'expression du taux de restitution d'énergie après branchement devient donc :

$$\mathbf{G}^* = \frac{1-\nu^2}{\mathbf{E}} (\mathbf{K}_I^{*2} + \mathbf{K}_{II}^{*2}) + \frac{1+\nu}{\mathbf{E}} \mathbf{K}_{III}^{*2}$$

L'angle de propagation correspond à la direction maximisant le taux de restitution d'énergie après branchement.

Pour le déterminer, on recherche l'angle  $\theta$  vérifiant  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \theta^2} < 0$ .

La fissure se propage lorsque le taux de restitution atteint une valeur critique  $\mathbf{G}_C$  qui est reliée à la ténacité par la relation  $\mathbf{G}_C = \frac{(1-\nu^2)\mathbf{K}_{IC}^2}{\mathbf{E}}$ , en déformations planes, ou  $\mathbf{G}_C = \frac{\mathbf{K}_{IC}^2}{\mathbf{E}}$ , en contraintes planes.

#### *Facteurs d'intensité de contrainte équivalent*

Lorsque la fissure est sollicitée en mode mixte, il est nécessaire de définir un facteur d'intensité de contrainte équivalent  $\mathbf{K}_{eq}$  pour étudier la stabilité de la fissure. La fissure se propage si le facteur d'intensité équivalent atteint la valeur de la ténacité  $\mathbf{K}_{IC}$ .

Un grand nombre de définitions de  $\mathbf{K}_{eq}$  existe dans la littérature. Sans plus de justifications, Glodez et al. (2002) et Jelaska et al. (2003) ont notamment proposé :

$$\mathbf{K}_{eq} = \sqrt{(\mathbf{K}_I^2 + \mathbf{K}_{II}^2) \cdot (1-\nu^2)}$$

En se basant sur l'expression de la contrainte tangentielle  $\sigma_{\theta\theta}$ , une définition alternative de facteur d'intensité de contrainte équivalent s'écrit sous la forme suivante (Jelaska et al. (2005)) :

$$\mathbf{K}_{eq} = \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \left( \mathbf{K}_I \cos\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - 3\mathbf{K}_{II} \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \right)$$

D'autres expressions, fonctions de  $\mathbf{K}_I$ ,  $\mathbf{K}_{II}$  et  $\mathbf{K}_{III}$ , sont également disponibles. Gerstle (1986) propose notamment :

$$\mathbf{K}_{eq} = \sqrt{(\mathbf{K}_I + \mathbf{B}|\mathbf{K}_{III}|)^2 + 2\mathbf{K}_{II}^2}$$

Où B est une constante prise égale à 1 dans les travaux de Wilde et Aliabadi (1999).

Une autre définition, citée par Kouitat et al. (2005), s'écrit sous la forme :

$$K_{eq} = \left( K_I^4 + 8K_{II}^4 + \frac{8}{1-\nu} K_{III}^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

Comme le montre cette liste non exhaustive, il existe un grand nombre d'expressions pour le facteur d'intensité de contrainte équivalent. Cette diversité reflète la difficulté à définir un facteur « universel » applicable quel que soit le cas de chargement ou le problème étudié.

### *Fissure circulaire en mode mixte – Angles de propagation*

Dans cette partie, nous étudions plusieurs cas de sollicitations mixtes. L'angle de propagation de la fissure et sa stabilité sont analysés dans chaque cas à l'aide des trois critères détaillés précédemment.

#### *Fissure circulaire dans un barreau soumis à un effort de traction uniforme*

Nous étudions le cas d'une fissure circulaire, d'inclinaison variable, et centrée dans un barreau rectangulaire dont les extrémités sont soumises à un effort de traction uniforme P. Le domaine est décrit par le repère global cartésien (Oxyz) dont l'origine O est située au centre de la fissure. Le second repère cartésien (Ox'y'z'), associé au plan de la fissure, se déduit du repère global par rotation autour de l'axe Ox. L'angle  $\varphi$  entre l'axe Oy et l'axe Oy' correspond à l'inclinaison de la fissure.

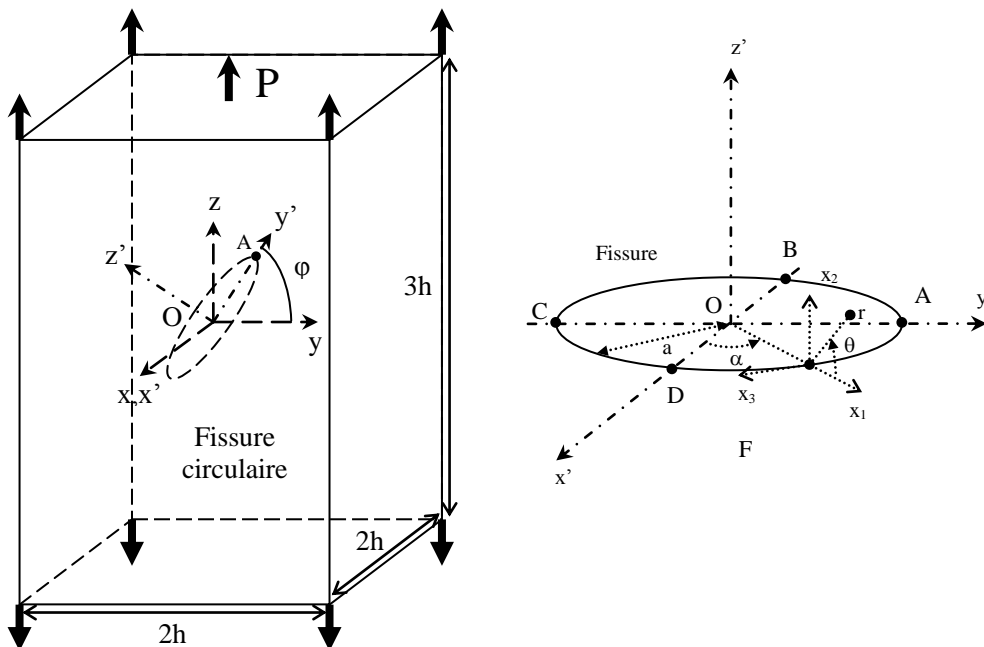
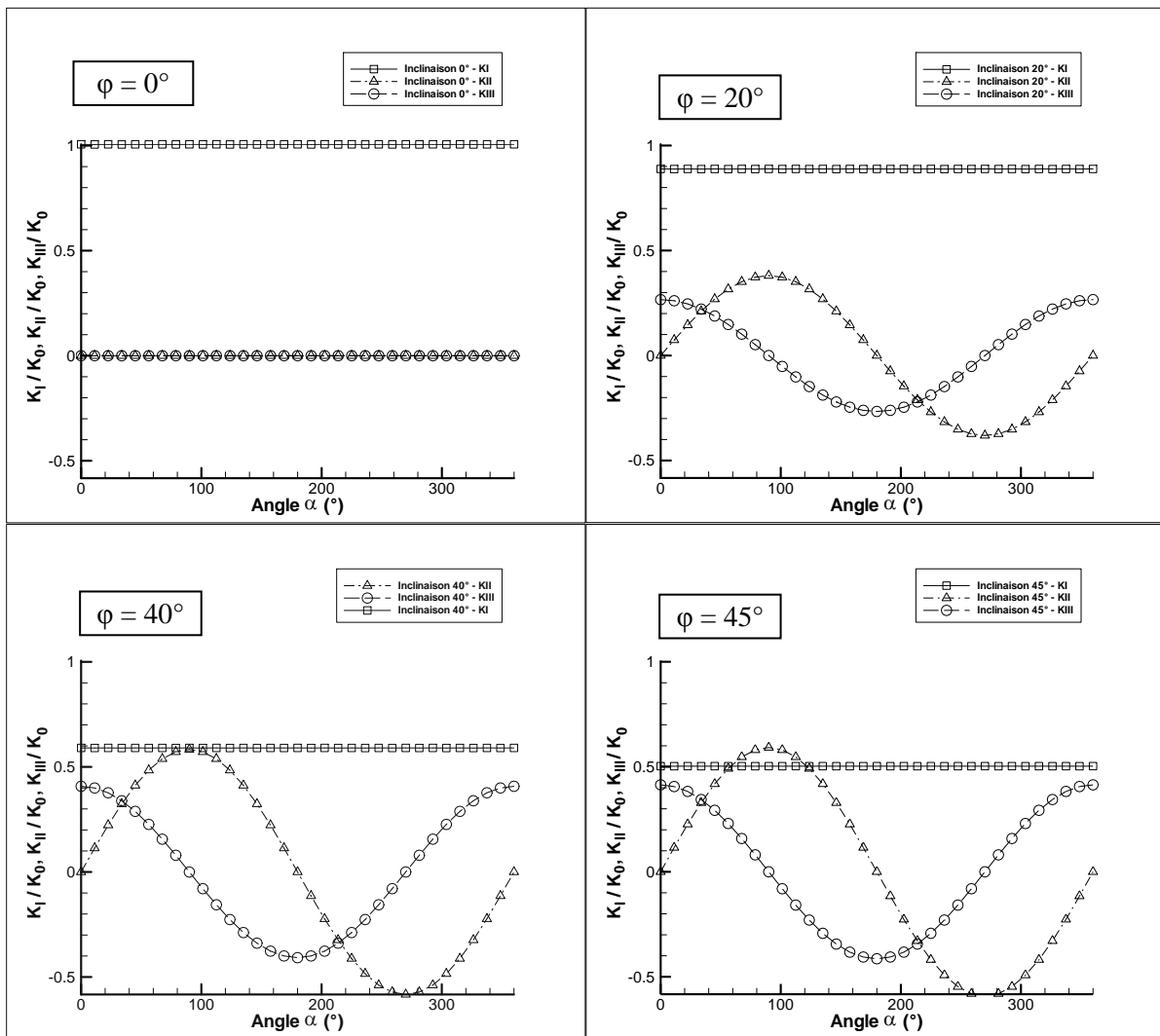


Figure 2.26 : Représentation schématique du domaine d'étude et de la fissure circulaire inclinée

Les maillages du domaine et de la fissure sont respectivement constitués de 128 et 48 éléments.

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est réalisé pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison  $\varphi$ , comprises entre  $0^\circ$  et  $80^\circ$ . L'application des critères de la contrainte circonférentielle, de la densité d'énergie de déformation et du taux de restitution d'énergie permet de déterminer l'évolution de l'angle de propagation le long du front de la fissure pour chaque inclinaison. Les valeurs prédites par les trois critères sont comparées et leurs variations en fonction de la position sur le front ou de l'inclinaison de la fissure sont analysées.



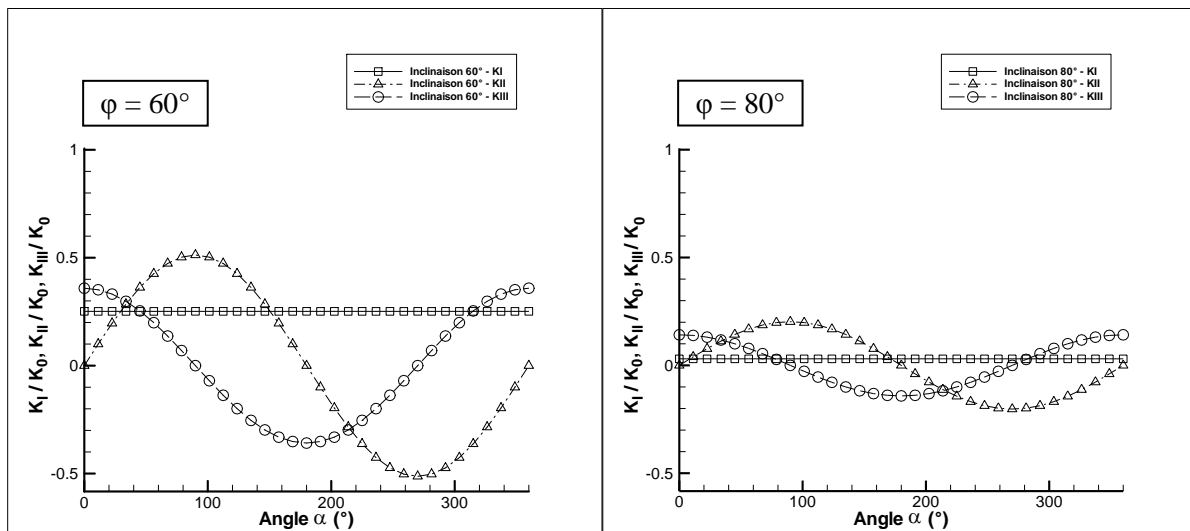


Figure 2.27 : Evolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  et  $K_{eq}$  le long du front pour  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$   
Cas de traction

Dans un premier temps, on compare l'évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur le front pour plusieurs inclinaisons de la fissure :  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  et  $80^\circ$ . Les facteurs d'intensité, normalisés par la constante  $K_0 = 2P\sqrt{a/\pi}$ , sont représentés en fonction de l'angle  $\alpha$  décrivant le front de fissure (Figure (2.27)).

#### Evolution des FIC le long du front

Pour une inclinaison nulle, la fissure est sollicitée en mode I pur. Seul  $K_I$  est non nul, et, du fait de la symétrie du problème, constant sur tout le front de la fissure.

Dès que l'angle d'inclinaison de la fissure est différent de zéro, on constate une baisse de l'amplitude de  $K_I$ , qui reste constant en tout point du front, et parallèlement, l'apparition de valeurs non nulles de  $K_{II}$  et  $K_{III}$ , correspondant à l'apparition de sollicitations de mode II et III.

Le facteur d'intensité  $K_{II}$  (resp.  $K_{III}$ ) est maximal (en valeur absolue) aux points d'intersection entre le front et l'axe  $Oy'$  (resp.  $Ox'$ ) (Figure (2.26)). En parcourant le front de  $\alpha = 0^\circ$  à  $\alpha = 90^\circ$ , on passe donc progressivement d'une sollicitation mixte I + III à une sollicitation de type I + II. Cette observation est en accord avec le chargement appliqué au solide, qui tend à faire glisser les faces de la fissure l'une par rapport à l'autre dans une direction parallèle à l'axe  $Oy'$ .

L'orientation du plan de la fissure par rapport à la direction d'application du chargement a une importance considérable sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte. Plus l'angle d'inclinaison est élevé, plus la valeur de  $K_I$  est faible. Parallèlement, lorsque  $\varphi$  passe de  $0^\circ$  à  $45^\circ$ , on constate une augmentation sensible de l'amplitude des variations de  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Puis de  $45^\circ$  à  $80^\circ$ , la tendance inverse est observée, avec une diminution notable des valeurs de  $K_{II}$  et  $K_{III}$ , les modes de glissement plan et antiplan devenant toutefois largement prédominants par rapport au mode d'ouverture.

### Angle de propagation

L'évolution de la direction probable de propagation  $\theta_p$  en fonction de la position angulaire sur le front de fissure est représentée pour différentes valeurs de l'inclinaison de la fissure –  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  et  $80^\circ$ . Les résultats obtenus avec chacun des trois critères sont présentés sur la Figure (2.28).

Pour une inclinaison nulle, tous les critères prévoient une propagation coplanaire de la fissure. Quel que soit le critère adopté la valeur numérique de l'angle de propagation est en valeur absolue inférieure à  $10^{-5}$  degré (Figure (2.28)).

Lorsque l'inclinaison est non nulle, la fissure est sollicitée en mode mixte. L'angle de propagation passe par deux valeurs extrêmes (de signes opposés) au point culminant et au point le plus bas du front de la fissure (respectivement A et C sur la Figure (2.26)). Qualitativement, quel que soit le point du front considéré, la fissure tend à se propager dans une direction quasi-perpendiculaire à celle de l'effort de traction.

Pour toutes les valeurs de  $\varphi$  testées,  $K_I$  est constant sur tout le front. Il est intéressant de noter que les valeurs extrêmes de l'angle de propagation correspondent aux valeurs extrêmes du rapport  $K_{II}/K_I$ . Plus ce dernier est grand, plus l'angle de bifurcation est important (en valeur absolue).

De plus, on remarque que l'angle prédit par les trois critères est nul aux points pour lesquels  $K_{II}$  est nul, i.e. pour  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 180^\circ$  (points B et D sur la Figure (2.26)). En l'absence de mode II, le mode I dicte la direction de propagation et la fissure se développe de façon coplanaire.

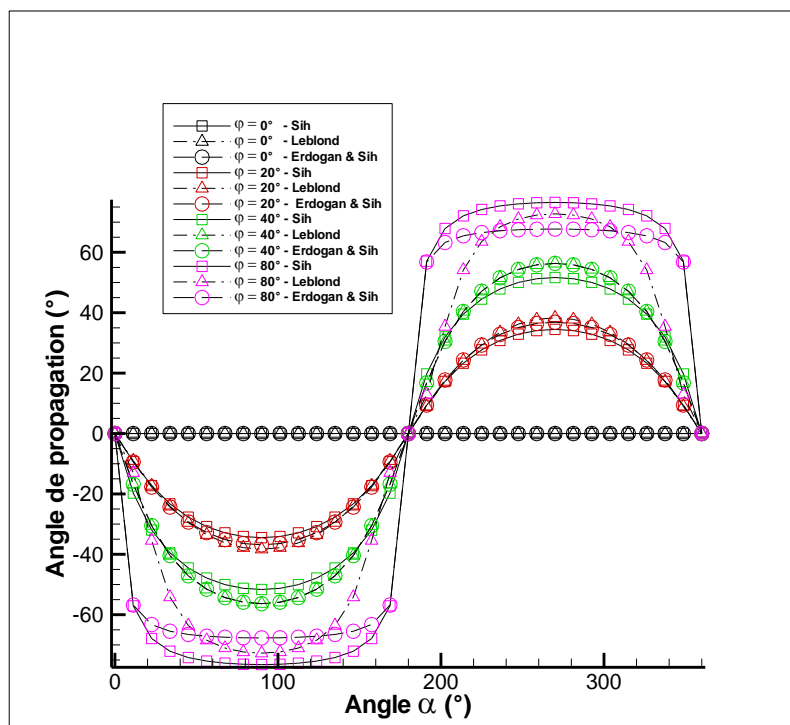


Figure 2.28 : Angle de propagation le long du front pour  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$   
Cas de traction

Par ailleurs, la Figure (2.28) montre clairement que l'accord entre les différents critères se dégrade lorsque l'inclinaison de la fissure augmente. Pour  $\varphi = 20^\circ$ , l'écart moyen entre les

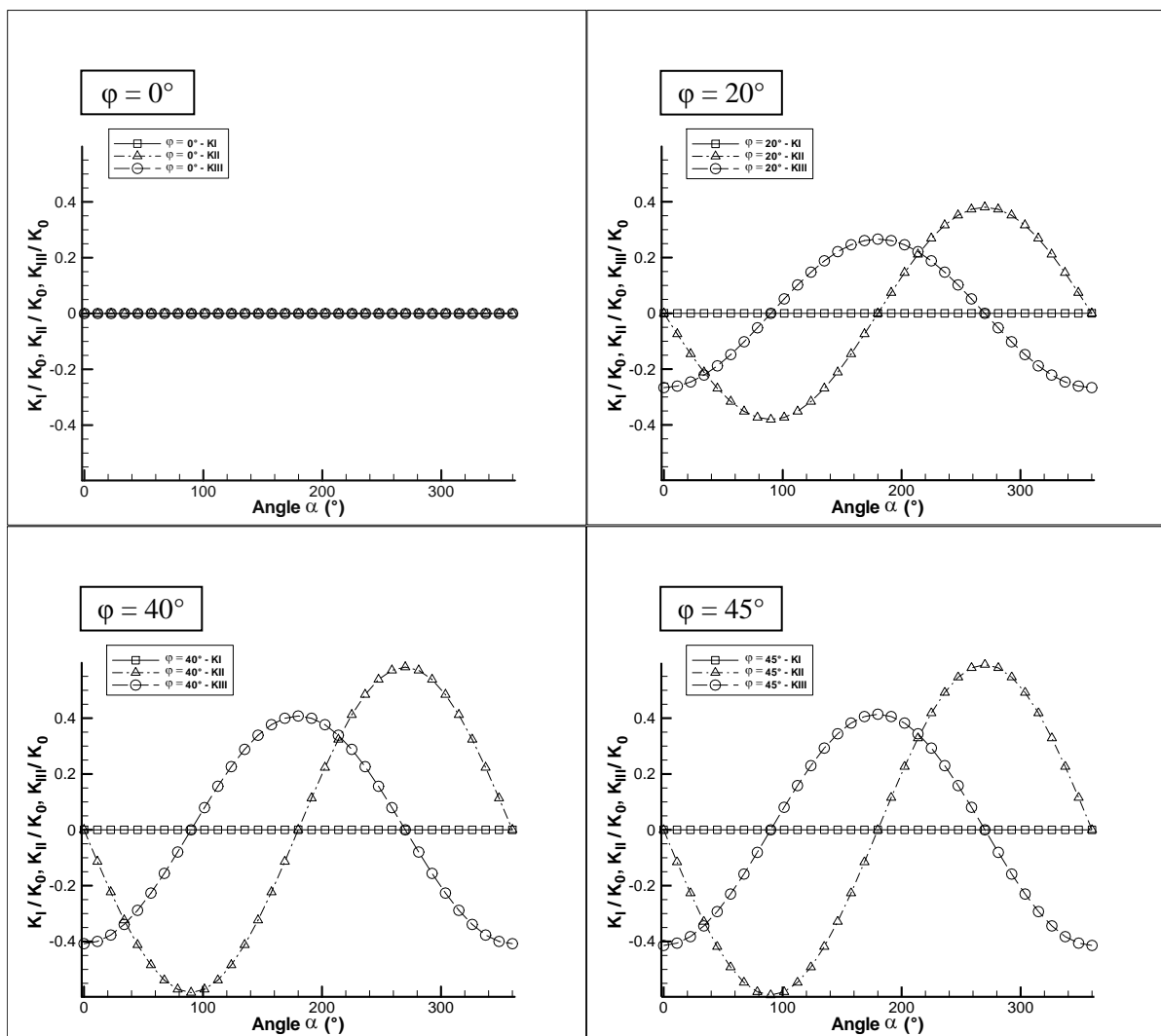
valeurs fournies par le critère de Sih et le critère du taux de restitution d'énergie est d'environ 6%. Puis, pour  $\varphi = 40^\circ, 60^\circ$  et  $80^\circ$ , cet écart grimpe successivement à 7.3%, 11.5% et 56.8%. Une tendance similaire est observée pour l'écart entre les autres critères.

Lorsque l'inclinaison de la fissure augmente, le mode II de sollicitation prend le pas sur le mode d'ouverture. Dans cette situation, les prédictions faites par les critères classiques de bifurcation divergent.

### *Fissure circulaire dans un barreau soumis à un effort de compression uniforme*

Le problème précédent est repris en changeant le chargement. Les extrémités du barreau sont désormais soumises à un effort de compression uniforme -P.

De la même façon, on étudie l'évolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  sur le front pour plusieurs inclinaisons de la fissure :  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  et  $80^\circ$ . Les facteurs d'intensité, normalisés par la constante  $K_0 = 2P\sqrt{a/\pi}$ , sont représentés en fonction de l'angle  $\alpha$  décrivant le front de fissure.



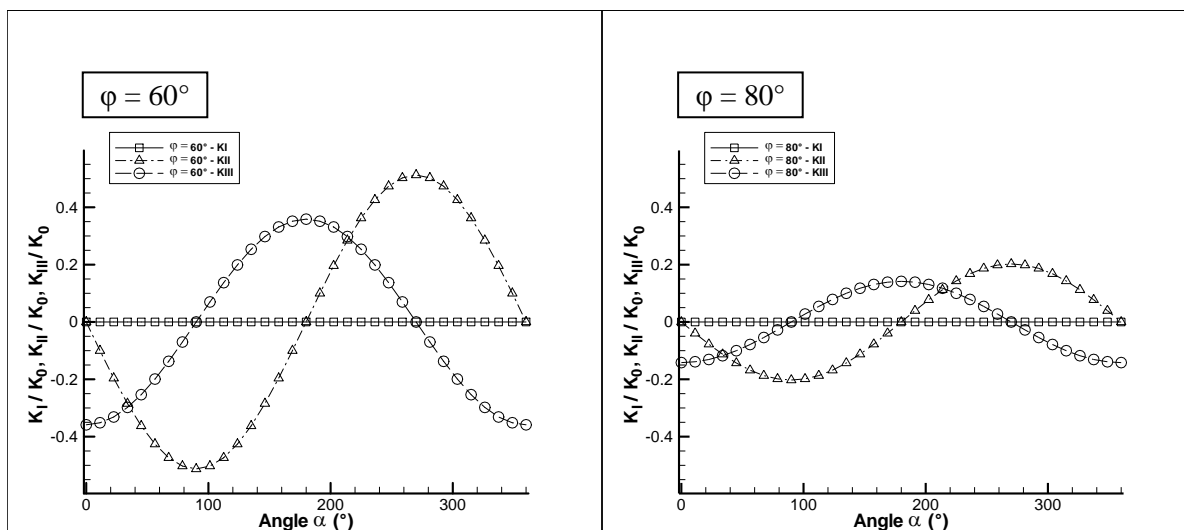


Figure 2.29 : Evolution de  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  et  $K_{eq}$  le long du front pour  $\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$   
Cas de compression

Le chargement de compression entraîne la fermeture totale de la fissure et la nullité du facteur d'intensité  $K_I$ , quelle que soit l'angle d'inclinaison testé.

Les valeurs de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  correspondent, au signe près, aux valeurs obtenues dans le cas du chargement de traction. La mise en compression du barreau a pour conséquence le glissement vers le bas de la face supérieure de la fissure ce qui explique le changement de signe des facteurs d'intensité  $K_{II}$  et  $K_{III}$ .

### Angle de propagation

En présence de compression, les critères de propagation donnent des résultats différents.

#### Critère de Erdogan et Sih

Lorsque l'inclinaison de la fissure est non nulle, l'angle de propagation prédit pour  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  est constant et égal à  $70.52^\circ$ . Sur la seconde moitié du front, pour  $180^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ , l'angle est constant et vaut  $-70.52^\circ$ . Ces résultats sont indépendants de l'inclinaison de la fissure. Le même comportement est observé pour  $\varphi = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  ou  $80^\circ$ .

Dans un matériau fragile soumis à un effort de compression uniaxial, la fissure tend à se propager parallèlement à la direction de l'effort (Dyskin et al. (2003)). Lorsque l'angle d'inclinaison varie, l'orientation de la fissure par rapport au chargement change. Légitimement, on s'attendrait donc à ce que l'angle de propagation soit sensible aux variations de  $\varphi$ .

#### Critère de Sih

Comme nous pouvons le voir sur les Figures (2.29),  $K_I$  est nul quel que soit l'inclinaison. En se reportant à l'expression du critère de Sih, on constate que la recherche de l'angle de



propagation se limite donc à la recherche du minimum de la fonction  $a_{22}(\theta)$  ( $a_{33}$  est une constante). Or, la fonction cosinus étant paire, il est clair que :

$$a_{22}(-\theta) = a_{22}(\theta)$$

Si  $\theta_p \neq 0^\circ$ , il existe donc deux directions de propagation possibles en chaque point du front. En l'occurrence, la minimisation de  $a_{22}$  conduit à  $\theta_p = \pm 82.34^\circ$ .

Comme pour le critère précédent, ces valeurs ne dépendent pas de l'inclinaison de la fissure.

#### *Critère du taux de restitution d'énergie*

En l'absence de mode I, en s'appuyant sur l'expression de l'opérateur linéaire F, le taux de restitution d'énergie après branchement peut s'exprimer en fonction de  $K_{II}$ ,  $K_{III}$  et des fonctions  $F_{I,II}$ ,  $F_{II,II}$  et  $F_{III,III}$  :

$$G^*(\theta) = \frac{1-\nu^2}{E} K_{II}^2 (F_{I,II}^2(\theta) + F_{II,II}^2(\theta)) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 F_{III,III}^2(\theta)$$

Comme dans le cas précédent, on peut vérifier facilement que la fonction  $G^*$  est paire. Si  $\theta_p \neq 0^\circ$ , on a donc deux directions de propagation possibles pour chaque point du front :  $\pm \theta_p$ . A nouveau, les valeurs de l'angle de propagation le long du front ne dépendent pas de l'inclinaison de la fissure.

L'évolution de l'angle de propagation est représentée sur la Figure (2.30) pour chacun des trois critères en supposant que l'angle est positif sur la portion de front comprise entre  $\alpha = 0^\circ$  et  $\alpha = 180^\circ$ , et négatif sur l'autre moitié du front.

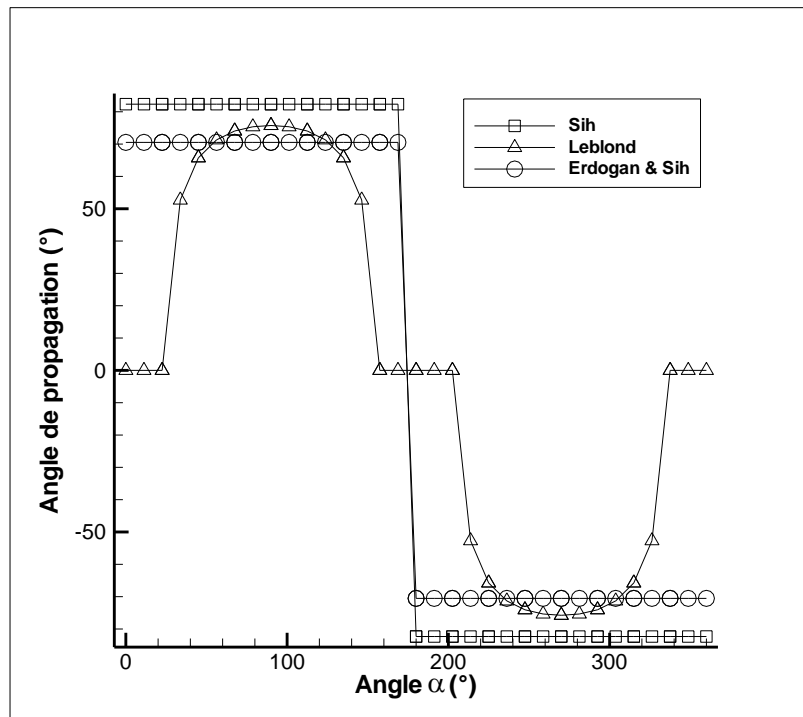


Figure 2.30 : Evolution de l'angle de propagation en fonction de l'inclinaison de la fissure  
Cas de compression

L'évolution de l'angle de propagation prédit par le critère de Sih (resp. Erdogan et Sih) adopte une forme en créneau, comme dans le cas limite observé pour le cas de traction précédent. La courbe associée au critère du taux de restitution d'énergie présente une forme plus complexe. Sur les portions de front où le mode III atteint sa valeur maximale, la propagation de la fissure est coplanaire, en accord avec les travaux de Dyskin et Salganik (1987). Inversement, l'angle de propagation est maximal (resp. minimal) aux points du front où  $K_{II}$  est maximal (resp. minimal). Entre ses deux situations, les variations de l'angle de propagations sont moins brutales que celles prédites par les deux autres critères.

Les expressions des FIC après branchement, proposées par Leblond, permettent d'observer l'influence du mode de glissement antiplan sur l'angle de propagation  $\theta_p$ .

## Conclusion

La méthode des éléments de frontière constitue une alternative très intéressante à la méthode des éléments finis pour traiter les problèmes de fissure. Dans le cadre classique de la mécanique linéaire de la rupture, pour lequel des solutions fondamentales des équations de Navier sont connues (solutions de Kelvin), seule la surface du domaine d'étude est discrétisée, ce qui permet de réduire la dimension du problème d'une unité. Le nombre d'inconnues est réduit de manière notable. De plus, l'absence de maillage volumique facilite la modélisation géométrique de la fissure à l'intérieur du domaine.

Dans ce chapitre, nous avons utilisé une formulation intégrale basée sur le saut de déplacement entre les lèvres de la fissure. Ainsi, seule une face de la fissure est représentée et discrétisée. Afin de gérer les cas de fermeture, le contact entre les faces de la fissure est régi par une condition de contact unilatéral.

Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est ensuite réalisé par la technique de l'élément avec nœuds au quart.

La stratégie numérique adoptée est validée par comparaison des résultats numériques avec les solutions analytiques de Sneddon et de Kassir et Sih, pour les fissures circulaire et elliptique. L'utilité de la condition de contact unilatéral a été démontrée par les cas de flexion et de compression. Les phénomènes d'interpénétration sont évités et la valeur de  $K_I$  reste positive ou nulle quel que soit le chargement.

De plus, lorsque la fissure est proche de la surface du domaine, nous avons montré que la frontière libre avait une influence notable sur les facteurs d'intensité de contrainte. Pour un chargement de mode I pur, les valeurs de  $K_I$  augmentent aux points du front les plus proches de la surface. Cet effet est plus ou moins marqué, suivant la forme de la fissure et son orientation par rapport à la frontière.

Le code permet aussi de traiter des problèmes de fissures débouchantes. A titre d'exemple, nous avons étudié le cas d'une fissure émergente semi-elliptique, soumise à un effort de traction. Nous avons ainsi mis en évidence l'influence de la profondeur de la fissure sur son développement. Les résultats obtenus pour les FIC montrent qu'une fissure de faible profondeur devrait se propager vers l'intérieur du solide, tandis qu'une fissure profonde aurait tendance à se propager en surface.

Enfin, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte permet de déterminer la direction de propagation de la fissure. Par simplicité, nous avons supposé une propagation continue de la fissure à partir de son front original. Dans ce cas,  $K_I$  et  $K_{II}$  ont une influence prépondérante sur la direction de bifurcation. Trois critères de propagation ont été testés. Leurs prédictions se révèlent proches les unes des autres pour un mode I dominant, mais se dégradent lorsque le mode II devient prépondérant. En présence de compression, ces critères ne semblent pas en mesure de prévoir des résultats cohérents avec les observations expérimentales (pour les matériaux fragiles).

La mécanique linéaire de la rupture classique est un outil simple et très intéressant pour traiter les problèmes de fissuration. Le comportement de la fissure est décrit par trois paramètres, les facteurs d'intensité de contrainte, dont on peut déduire la stabilité et la direction de propagation de la fissure.

Toutefois, cette approche est critiquable car elle repose sur une description physiquement inacceptable du champ de contrainte au voisinage de la fissure. Dans ce contexte, les théories non-locales, présentées au Chapitre 1, devraient nous permettre de décrire plus « correctement » le comportement élastique aux abords du front de fissure, avec pour objectif de nous ramener à un critère de propagation basé sur la contrainte.

## Annexes

### Annexe 2.1 : Identité de réciprocité de Maxwell-Betti

En l'absence de forces volumiques, l'équation d'équilibre des contraintes pour un solide élastique occupant un domaine  $\Omega$  délimité par une frontière  $\Gamma$ , se réduit simplement à :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.32)$$

Le problème est complété par la donnée des conditions aux limites à la frontière  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{u}_i \\ \bar{\mathbf{t}}_i &= \sigma_{ij}\mathbf{n}_j \end{aligned}$$

Où  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  et  $\sigma$  correspondent respectivement aux vecteurs déplacements et traction, et au tenseur de contrainte de Cauchy ;  $n_j$  représente la  $j$ -ème composante de la normale extérieure à la surface  $\Gamma$ .

Selon le principe des travaux virtuels (Salençon (2005)), le travail réalisé par l'ensemble des forces appliquées à un solide en équilibre, dans un déplacement virtuel  $\mathbf{u}^*$  quelconque, est nul.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,j}(\mathbf{x})\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.33)$$

L'intégration par partie de l'équation (2.33), puis l'application du théorème de la divergence permet d'obtenir :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{i,j}^*(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.34)$$

Après quelques manipulations, l'intégrand du second terme de l'équation (2.34) devient :

$$\sigma_{ij}\mathbf{u}_{i,j}^* = C_{ijkl}\mathbf{u}_{k,l}\mathbf{u}_{i,j}^* = C_{klij}\mathbf{u}_{k,l}\mathbf{u}_{i,j}^* = C_{klij}\mathbf{u}_{i,j}^*\mathbf{u}_{k,l} = \sigma_{kl}^*\mathbf{u}_{k,l}$$

Ce qui permet de réécrire (2.34) sous la forme :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{\Omega} \sigma_{kl}^*(\mathbf{x})\mathbf{u}_{k,l}(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = 0$$

L'intégration par partie de la seconde intégrale, suivie de l'application du théorème de la divergence permet d'aboutir à :

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{x})\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_i^*(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \sigma_{kl}^*(\mathbf{x})\mathbf{n}_l(\mathbf{x})\mathbf{u}_k(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \sigma_{kl,l}^*(\mathbf{x})\mathbf{u}_k(\mathbf{x})dV(\mathbf{x}) = 0$$

Ou encore :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{t}_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i^*(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \mathbf{t}_k^*(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{S}(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} \mathbf{b}_k^*(\mathbf{x}) \mathbf{u}_k(\mathbf{x}) d\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.35)$$

Où  $\mathbf{t}$  correspond au champ de traction à la surface du solide et  $\mathbf{b}^*$  représente un champ de force volumique virtuel tel que :

$$\sigma_{kl,l}^*(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_k^*(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.36)$$

La relation (2.35) constitue l'identité de réciprocité de Maxwell-Betti. Le travail des contraintes et des forces de l'état élastostatique  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b})$  dans le déplacement  $\mathbf{u}^*$  est égal au travail des forces et contraintes de l'état élastostatiques  $(\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{b}^*)$  dans le déplacement  $\mathbf{u}$ .

## Annexe 2.2 : Solutions fondamentales de l'élastostatique

Les solutions de l'équation de Navier dans le cas d'une force ponctuelle unitaire sont appelées solutions fondamentales.

On note  $U_{ij}(x,y)$  la  $i$ -ème composante cartésienne du déplacement au point  $x$ , engendrée par une force ponctuelle unitaire appliquée au point  $y$  dans la direction  $j$ . La solution fondamentale s'exprime en fonction de la distance euclidienne  $r$  entre le point  $x$  et le point  $y$  :

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j]$$

Avec :

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i \quad \text{et} \quad r = \sqrt{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i}$$

Le vecteur contrainte s'obtient par dérivation de  $U_{ij}$ , application de la loi de Hooke et multiplication par le vecteur normal adéquat :

$$\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \mathbf{r}_k \mathbf{n}_k [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j] - (1-2\nu)(\mathbf{n}_j \mathbf{r}_i - \mathbf{n}_i \mathbf{r}_j) \right\}$$

Les solutions fondamentales apparaissant dans la représentation intégrale des contraintes sont données par les expressions suivantes :

$$\mathbf{D}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik} \mathbf{r}_j + \delta_{jk} \mathbf{r}_i - \delta_{ij} \mathbf{r}_k) + 3\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k]$$

$$\mathbf{S}_{kij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \left\{ 3\mathbf{r}_m \mathbf{n}_m [(1-2\nu)\delta_{ij} \mathbf{r}_k + \nu(\delta_{ik} \mathbf{r}_j + \delta_{jk} \mathbf{r}_i) - 5\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k] \right. \\ \left. + 3\nu(\mathbf{n}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k + \mathbf{n}_j \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k) + (1-2\nu)(3\mathbf{n}_k \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + \mathbf{n}_j \delta_{ik} + \mathbf{n}_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)\mathbf{n}_k \delta_{ij} \right\}$$

Du fait de leur dépendance à la distance entre  $x$  et  $y$ , toutes ces expressions présentent des singularités plus ou moins fortes.





### Annexe 2.3 : Elément avec « nœuds au quart »

L'utilisation d'éléments avec « nœuds au quart » permet d'améliorer l'approximation du champ de déplacement au voisinage du front de la fissure et par ricochet, la précision sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte.

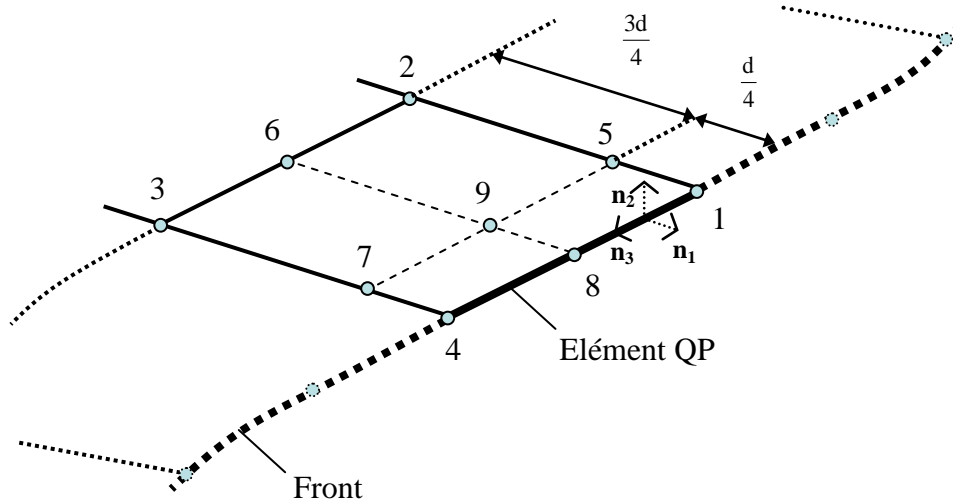


Figure 2.31 : Représentation schématique d'un élément QP (quarter point)

#### Approximation du saut de déplacement

A titre d'exemple, on considère un élément quadrilatère de type QP (Figure 2.31). Les points 1, 5 et 2 sont supposés alignés sur une droite perpendiculaire au front de la fissure. On note  $d$  la longueur du segment reliant les points 1 et 2. Suivant cette notation, on peut écrire :

$$\begin{cases} x^5 - x^1 = -\frac{d}{4} n_1 \\ x^2 - x^1 = -d n_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

Où  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_5$  correspondent aux positions respectives des nœuds 1, 2 et 5.

$n_1$  représente le vecteur normal au front situé dans le plan de la fissure (Figure 2.31). Le nœud n°5 est donc situé au quart de la longueur du segment  $[x^1, x^2]$ . En utilisant les fonctions de forme classiques, on peut approximer le vecteur position  $x$  sur ce segment de la façon suivante :

$$x = M_1(\eta)x^1 + M_5(\eta)x^5 + M_2(\eta)x^2 \quad (2.38)$$

Où  $M_1$ ,  $M_5$  et  $M_2$  correspondent aux fonctions de forme quadratiques 1D associées aux nœuds 1, 5 et 2.  $\eta$  est la coordonnée intrinsèque qui décrit l'élément de référence 1D.

En combinant les équations (2.37) et (2.38) et connaissant l'expression des fonctions de forme, on détermine la distance  $r$  entre le nœud  $x^1$  (sur le front) et un point quelconque  $x$  sur le segment  $[x^1, x^2]$  :

$$r = \frac{d}{4}(1 + \eta)^2 \quad (2.39)$$

Parallèlement, le saut de déplacement en un point  $x$  sur le segment  $[x^1, x^2]$  est approximé par la relation suivante :

$$\Delta u(x) = M_5(\eta)\Delta u^5 + M_2(\eta)\Delta u^2 = (1 + \eta) \left( \Delta u^5 + \left( \frac{1}{2} \Delta u^2 - \Delta u^5 \right) \eta \right) \quad (2.40)$$

La contribution du nœud 1 n'apparaît pas dans (2.40) car le saut de déplacement est nul en ce point. De plus, l'équation (2.39) permet d'exprimer  $\eta$  en fonction de  $r$  :

$$\eta = -1 + 2\sqrt{\frac{r}{d}} \quad (2.41)$$

En combinant (2.40) et (2.41), on obtient finalement :

$$\Delta u(x) = 2\sqrt{\frac{r}{d}} \left( 2\Delta u^5 - \frac{1}{2} \Delta u^2 + 2\sqrt{\frac{r}{d}} \left( \frac{1}{2} \Delta u^2 - \Delta u^5 \right) \right) \quad (2.42)$$

En positionnant le nœud n°5 au quart du segment  $[x^1, x^2]$ , on introduit le comportement en  $\sqrt{r}$  dans l'approximation du saut de déplacement au voisinage de la pointe de fissure.

#### *Calcul des facteurs d'intensité de contrainte*

Nous détaillons ici uniquement le calcul de  $K_I$ . La procédure est identique pour les autres modes.

Comme nous l'avons vu précédemment,  $K_I$  est donné par la formule :

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu}{\kappa + 1} \Delta u_2(r) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (2.43)$$

Où  $\Delta u_2$  correspond au saut de déplacement normal entre les lèvres de la fissure. La numérotation des nœuds étant conservée, on injecte l'équation (2.42) dans l'expression de  $K_I$ . Après simplification et en passant à la limite ( $r \rightarrow 0$ ),  $K_I$  se déduit de la relation :

$$K_I = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{d}} (4\Delta u_2^5 - \Delta u_2^2) \quad (2.44)$$

La formule (2.44) est valable dans le cas où les fonctions d'interpolation du champ de déplacement sont identiques aux fonctions de forme. Dans ce travail, nous avons opté pour une approche améliorée proposée par Gray et al. (2003). Pour le cas 2D, les auteurs suggèrent d'utiliser des fonctions d'interpolation modifiées pour approximer le saut de déplacement.

En reprenant les notations précédentes, on écrit les fonctions d'interpolation classiques  $M_5$  et  $M_2$  :

$$\begin{cases} M_5(\eta) = 1 - \eta^2 \\ M_2(\eta) = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1) \end{cases} \quad (2.45)$$

Les fonctions d'interpolation proposées par Gray et al. s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{cases} M_5^*(\eta) = -\frac{1}{3}(\eta^2 - 1)(\eta + 3) \\ M_2^*(\eta) = \frac{1}{6}\eta(\eta + 1)(\eta + 2) \end{cases} \quad (2.46)$$

Ces fonctions permettent de décrire plus précisément les déplacements au voisinage de la pointe de fissure (Gray et al. (2003)).

Enfin, comme l'élément de front est non-conforme, les nœuds de collocation sont positionnés à l'intérieur de l'élément (voir Annexe 2.5). Dans ce cas, en notant  $\eta^0$  la position intrinsèque du nœud de collocation sur le segment  $[x^1, x^2]$ , l'expression finale des facteurs d'intensité de contrainte est fournie par la relation (2.47) (Kouitat et Stebut (2004)) :

$$K_i = C_i \sqrt{\frac{2\pi}{d}} \left( \left( 8 + \frac{M_5^*(\eta^0)}{M_2^*(\eta^0)} \right) \Delta u_i^5 - \frac{1}{M_2^*(\eta^0)} \Delta u_i^2 \right) \quad (2.47)$$

Où  $C_i = \frac{\mu}{12(1-\nu)}$  pour  $i = I, II$  et  $C_i = \frac{\mu}{12}$  pour  $i = III$ .

$$\text{Et, } \begin{cases} \Delta u_I = \Delta u_2 \\ \Delta u_{II} = \Delta u_1 \\ \Delta u_{III} = \Delta u_3 \end{cases}$$



## Annexe 2.4 : Expressions des coefficients de l'opérateur linéaire $F(\theta)$

Les expressions des coefficients de l'opérateur  $F$  sont données par Leblond (1999).

Ce dernier peut se mettre sous la forme matricielle :

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} F_{I,I}(\theta) & F_{I,II}(\theta) & 0 \\ F_{II,I}(\theta) & F_{II,II}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & F_{III,III}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose : } \mathbf{m} = \frac{\theta}{\pi} \quad (-1 < m < 1)$$

Les composantes non nulles de  $F$  sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_{I,I}(\mathbf{m}) = & 1 - 3.7011017\mathbf{m}^2 + 6.064562\mathbf{m}^4 - 6.337059\mathbf{m}^6 + 5.07790\mathbf{m}^8 - 2.88312\mathbf{m}^{10} - 0.0925\mathbf{m}^{12} \\ & + 2.996\mathbf{m}^{14} - 4.059\mathbf{m}^{16} + 1.63\mathbf{m}^{18} + 4.1\mathbf{m}^{20} + \mathbf{O}(\mathbf{m}^{22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{I,II}(\mathbf{m}) = & -4.72123890\mathbf{m} + 12.409868\mathbf{m}^3 - 15.087784\mathbf{m}^5 + 12.313906\mathbf{m}^7 - 7.32433\mathbf{m}^9 + 1.5793\mathbf{m}^{11} \\ & + 4.0216\mathbf{m}^{13} - 6.915\mathbf{m}^{15} + 4.21\mathbf{m}^{17} + 4.56\mathbf{m}^{19} + \mathbf{O}(\mathbf{m}^{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{II,I}(\mathbf{m}) = & 1.5707963\mathbf{m} - 4.834754\mathbf{m}^3 + 6.639793\mathbf{m}^5 - 6.176023\mathbf{m}^7 + 4.44112\mathbf{m}^9 - 1.5340\mathbf{m}^{11} \\ & - 2.0700\mathbf{m}^{13} + 4.684\mathbf{m}^{15} - 3.95\mathbf{m}^{17} - 1.32\mathbf{m}^{19} + \mathbf{O}(\mathbf{m}^{21}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{II,II}(\mathbf{m}) = & 1 - 7.7011017\mathbf{m}^2 + 14.762653\mathbf{m}^4 - 14.751719\mathbf{m}^6 + 10.58254\mathbf{m}^8 - 4.78511\mathbf{m}^{10} - 1.8804\mathbf{m}^{12} \\ & + 7.280\mathbf{m}^{14} - 7.592\mathbf{m}^{16} + 0.25\mathbf{m}^{18} + 12.5\mathbf{m}^{20} + \mathbf{O}(\mathbf{m}^{22}) \end{aligned}$$

Et,

$$F_{III,III}(\mathbf{m}) = \left( \frac{1-\mathbf{m}}{1+\mathbf{m}} \right)^{m/2}$$



## Annexe 2.5 : Fonctions d'interpolation conformes et non conformes

Les expressions des fonctions d'interpolation sont données en fonction des coordonnées intrinsèques  $(\eta, \xi)$  de l'élément de référence.

### Fonctions conformes

#### Quadrangle à 4 nœuds

$$N_1(\eta, \xi) = 1/4(\eta - 1)(\xi - 1)$$

$$N_2(\eta, \xi) = 1/4(\eta + 1)(\xi - 1)$$

$$N_3(\eta, \xi) = 1/4(\eta + 1)(\xi + 1)$$

$$N_4(\eta, \xi) = 1/4(\eta - 1)(\xi + 1)$$

#### Quadrangle à 8 nœuds

$$N_1(\eta, \xi) = 1/4(1 - \eta)(1 - \xi)(-1 - \eta - \xi)$$

$$N_2(\eta, \xi) = 1/2(1 - \eta^2)(1 - \xi)$$

$$N_3(\eta, \xi) = 1/4(1 + \eta)(1 - \xi)(-1 + \eta - \xi)$$

$$N_4(\eta, \xi) = 1/2(1 - \xi^2)(1 + \eta)$$

$$N_5(\eta, \xi) = 1/4(1 + \eta)(1 + \xi)(-1 + \eta + \xi)$$

$$N_6(\eta, \xi) = 1/2(1 - \eta^2)(1 + \xi)$$

$$N_7(\eta, \xi) = 1/4(1 - \eta)(1 + \xi)(-1 - \eta + \xi)$$

$$N_8(\eta, \xi) = 1/2(1 - \xi^2)(1 - \eta)$$

#### Quadrangle à neuf nœuds

$$N_1(\eta, \xi) = 1/4(1 - \eta)(1 - \xi)\eta\xi$$

$$N_2(\eta, \xi) = 1/4(-1 - \eta)(1 - \xi)\eta\xi$$

$$N_3(\eta, \xi) = 1/4(1 + \eta)(1 + \xi)\eta\xi$$

$$N_4(\eta, \xi) = 1/4(-1 + \eta)(1 + \xi)\eta\xi$$

$$N_5(\eta, \xi) = 1/2(-1 + \eta^2)(1 - \xi)\xi$$

$$N_6(\eta, \xi) = 1/2(1 + \eta)(1 - \xi^2)\eta$$

$$N_7(\eta, \xi) = 1/2(1 - \eta^2)(1 + \xi)\xi$$

$$N_8(\eta, \xi) = 1/2(-1 + \eta)(1 - \xi^2)\eta$$

$$N_9(\eta, \xi) = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2)$$

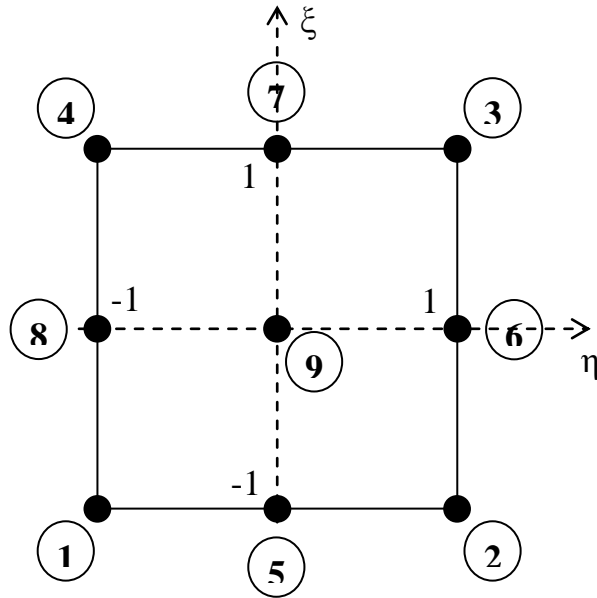


Figure 2.32 : Numérotation des nœuds sur l'élément de référence

### Fonctions non conformes

Les fonctions d'interpolations non conformes  $\tilde{N}_p(\eta, \xi)$  (l'indice  $p$  correspond au numéro du nœud d'interpolation) se déduisent des expressions des fonctions conformes par le changement de variables suivant :

$$\tilde{N}_p(\eta, \xi) = N_p(\tilde{\eta}, \tilde{\xi})$$

Avec,

$$\tilde{\eta} = \frac{1-\eta}{2} \eta^- + \frac{1+\eta}{2} \eta^+$$

$$\tilde{\xi} = \frac{1-\xi}{2} \xi^- + \frac{1+\xi}{2} \xi^+$$

Où  $(\eta^-, \eta^+)$  et  $(\xi^-, \xi^+)$  correspondent aux positions intrinsèques horizontales et verticales des nœuds pour l'interpolation non conforme.

La Figure (2.33) présente deux exemples d'éléments non-conformes.



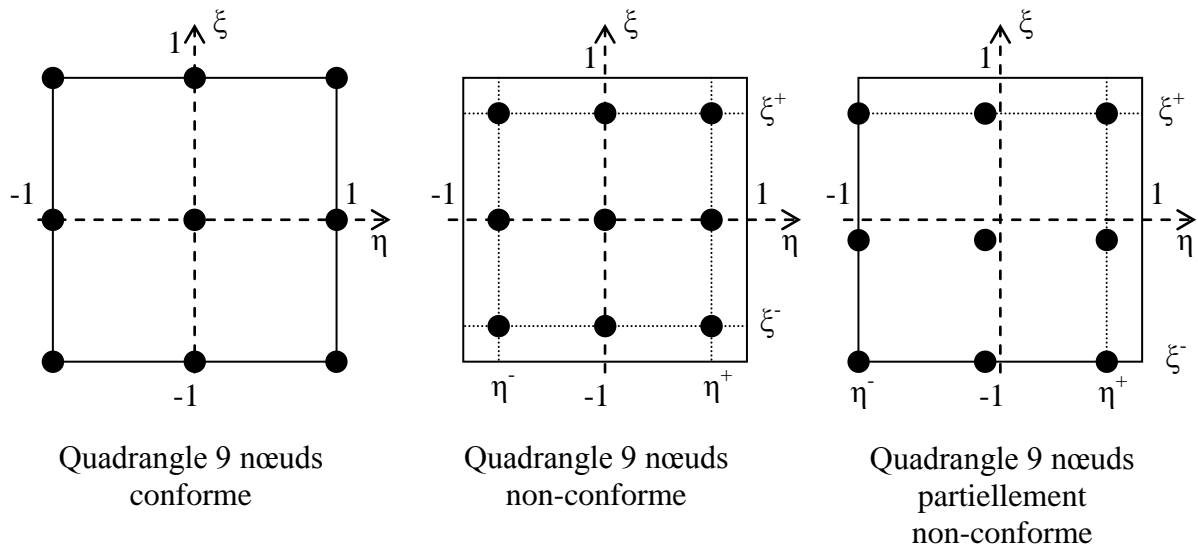


Figure 2.33 : Représentations schématiques de l'élément de référence dans le cas conforme, non conforme et partiellement conforme (Bonnet (1999))



## Références

- Aliabadi M.H., *The boundary element method, Volume 2 : Applications in Solids and Structures*, Wiley, 2002.
- Balas J., Sladek J., Sladek V., *Stress analysis by boundary elements methods*, Elsevier, 1989.
- Barsoum R.S., *On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 10, 25-37, 1976.
- Batoz J.L., Dhatt G., *Modélisation des structures par éléments finis. Volume 1 : solides élastiques*, Hermès, 1990.
- Betti E., *Teoria della elasticita*, II Nuovo Cimento 10, 58-84, 1873.
- Bonnet M., *Equations intégrales et éléments de frontière : Applications en mécanique des solides et des fluides*, CNRS Editions / Eyrolles, 1995.
- Brebbia C.A., Dominguez J., *Boundary elements : An introductory course*, Computational Mechanics Publications, 1992.
- Christensen P.W., Klarbing A., Pang J.S., Strömberg N., *Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 42, 1998.
- Cruse T.A., *Numerical solutions in three-dimensional elastostatics*, International Journal of Solids and Structures 5, 1259-1274, 1969.
- Cruse T.A., Wilson R.B., *Advanced applications of boundary-integral equation methods*, Nuclear Engineering and Design 1, 223-234, 1978.
- Dyskin A.V., Sahouryeh E., Jewell R.J., Joer H., Usitnov K.B., *Influence of shape and locations of initial 3-D cracks on their growth in uniaxial compression*, Engineering Fracture Mechanics 70, 2115-2136, 2003.
- Dyskin A.V., Salganik R.L., *Model of dilatancy of brittle materials with cracks under compression*, Mech Solids 22, 165-173, 1987.
- Erdogan F., Sih G.C., *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, J. Basic Engng. 85, 519-527, 1963.
- Gerstle W.H., *Finite and boundary element modelling of crack propagation in two and three dimensions using interactive computer graphics*, Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY USA, 1986.
- Glodez S., Sraml M., Kramberger J., *A computational model for determination of service life of gears*, International Journal of Fatigue 24, 1013-1020, 2002.

- Goldstein R.V., Salganik R.L., *Brittle fracture of solids with arbitrary cracks*, International Journal of Fracture 10, 507-523, 1974.
- Gray L.J., Phan A.V., Paulino G.H., Kaplan T., *Improved quarter-point crack tip element*, Engng. Fract. Mech. 70, 269-283, 2003.
- Griffith A., *The phenomena of rupture and flow in solids*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A CCXXI, 163-198, 1920.
- Guiggiani M., Gigante A., *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, ASME J. Appl. Mech 57, 906-915, 1990.
- Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J., *A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations*. ASME J. Appl. Mech. 59, 604-614, 1992.
- Hartranft R.J., Sih G.C., *Stress singularity for a crack with an arbitrary curved front*, Engineering Fracture Mechanics 9, 705-718, 1977.
- Henshell R.D., Shaw K.G., *Crack tip finite elements are unnecessary*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 9, 495-507, 1975.
- Irwin G.R., *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*, Journal of Applied Mechanics 24, 361-364, 1957.
- Jelaska D.T., Glodez S., Podrug S., *Numerical modelling of crack propagation path at gear tooth root*, In 2003 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, vol. 4 A., p 201-207, American Society of Mechanical Engineers, 2003.
- Jelaska D.T., Damir T., Podrug S., Glodez S., *Comparison of numerical models for gear tooth root fatigue assessments*, In 2005 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2005, Vol. 2005, p. 77-84, American Society of Mechanical Engineers, 2005.
- Kassir M.K., Sih G.C., *Three-dimensional cracks problems*, Pergamon Press, 1960.
- Koiter W.T., J. App. Mech. 32, 237, 1965.
- Kouitat Njiwa R., Niane N.T., Von Stebut J., *Three-dimensional vertical cracks in coated specimens under sliding contact load with a spherical indenter : A numerical study using boundary element modelling*, Surface and Coatings technology, 2005.
- Kouitat Njiwa R., Von Stebut J., *Three dimensional boundary element analysis of internal cracks under sliding contact load with a spherical indenter*, Engineering Fracture Mechanics 71, 2607-2620, 2004.
- Leblond J.B., *Crack paths in three-dimensional elastic solids. I :two-term expansion of the stress intensity factors – application to crack path stability in hydraulic fracturing*, International Journal of Solids and Structures 36, 79-103, 1999.

- Mi Y., Aliabadi M.H., *Dual boundary element method for three dimensional fracture mechanics analysis*, Engineering analysis with boundary elements 10, 161-171, 1992.
- Moes N., Dolbow J., Belytschko T., *A finite element method for crack growth without remeshing*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 46, 131-150, 1999.
- Mroz K.P., Mroz Z., *On crack path evolution rules*, Engineering Fracture Mechanics 77, 1781-1807, 2010.
- Palaniswamy K., Knauss W.G., *On the problem of crack extension in brittle solids under general loading*, Mechanics Today 4, 87-148, 1975.
- Partheymuller P., Haas M., Kuhn G., *Comparison of the basic and the discontinuity formulation of the 3D-dual boundary element method*, Engng. Anal. Bound. Elem. 24, 777-788, 2000.
- Portela A., Aliabadi M.H., Rooke D.P., *Dual boundary element method. Effective implementation for crack problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 33, 1269-1287, 1992.
- Rizzo F.J., *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatic*, Q. Appl. Math. 25, 83-95, 1967.
- Salençon J., *Mécanique des milieux continus – Tome 1 : Concepts généraux*, Ecole Polytechnique Editions, 2005.
- Schöllmann M., Richard H.A., Kullmer G., Fulland M., *A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures*, International Journal of Fracture 117, 129-141, 2002.
- Sih G.C., *Some basic problems in fracture mechanics and new concepts*, Engng. Fract. Mech. 5, 365-377, 1973.
- Sih G.C., *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture 10, 305-321, 1974.
- Sih G.C., Cha C.K., *A fracture criterion for three-dimensional crack problems*, Engn. Fract. Mech. 6, 699-723, 1974.
- Sneddon I.N., *Fourier transforms*, New-York McGraw-Hill, 1951.
- Somigliana C., *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotrope*, Il Nuovo Cimento, 17-19, 1886.
- Wilde A.J., Aliabadi M.H., *A 3-D Dual BEM formulation for the analysis of crack growth*, Computational Mechanics 23, 250-257, 1999.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Butterworth-Heinemann (6<sup>th</sup> edition), 2005.



# **Chapitre 3 : Traitement du problème de fissuration par une approche non-locale**





## Introduction

Ce troisième chapitre est dédié à l'étude de la fissuration dans le cadre de l'approche non-locale intégrale. Le principe et l'intérêt de cette théorie ont été présentés dans le premier chapitre. Il s'agit d'une extension de la théorie classique de l'élasticité pour laquelle l'état de contrainte en un point matériel dépend des déformations en tous les points du solide. La loi de comportement non-locale intègre une longueur interne, caractéristique du matériau et de sa microstructure. Ce type de modèle permet de décrire plus finement le comportement élastique au voisinage du front de la fissure et élimine les singularités de contrainte obtenues dans le cadre de la théorie classique.

Le but ultime du travail engagé est la définition d'un critère de propagation basé sur la contrainte non-locale pour étudier le comportement de la fissure, en particulier sa stabilité et sa direction de propagation.

Dans ce chapitre, nous proposons une stratégie numérique pour calculer les contraintes non-locales au voisinage d'une fissure 3D dans le cas d'un milieu infini. Le comportement élastique du solide est décrit par le modèle non-local proposé par Eringen (2002). Pour résoudre ce problème, nous avons conservé la méthode des éléments de frontière et les avantages qu'elle procure (voir Chapitre 2).

Le solide étant assimilé à un milieu infini, nous choisissons une fonction de caractérisation non-locale solution de Green d'un opérateur différentiel linéaire. L'application de l'opérateur différentiel aux équations de champ, ramène le problème à celui de l'élastostatique classique. Ainsi, le calcul des contraintes non-locales se fait suivant une procédure en deux étapes : tout d'abord la résolution du problème d'élasticité classique, puis l'évaluation, en post-traitement, d'une intégrale sur le champ de déformation pour obtenir les contraintes non-locales.

La méthode des éléments de frontière permet de résoudre le problème d'élasticité classique et de calculer les champs de déformation et de contrainte locaux à l'intérieur du solide. Un soin particulier doit être apporté à l'évaluation des intégrales dites quasi-singulières. Quelques méthodes de traitement de ce type d'intégrales ont été testées et comparées (technique de subdivision de l'élément, régularisation mathématique (Balas et al. (1989))).

La présentation des résultats obtenus conclut ce chapitre. Les effets du modèle non-local sur le champ de contrainte sont analysés et l'influence de différents paramètres (fonction de caractérisation non-locale, longueur interne...) étudiée.

Différents problèmes de fissure ont été traités. On évalue notamment l'impact de la forme de la fissure sur les variations du champ de contrainte. Le cas de la fissure émergente et les problèmes de bifurcation en mode mixte sont revisités dans le cadre non-local.



### 3.1. Présentation du problème

L'objectif de ce chapitre est l'étude d'une fissure dans un solide élastique tridimensionnel dont le comportement est décrit par la loi d'élasticité non-locale intégrale proposée par Eringen (2002).

Pour cela, on considère un domaine élastique  $\Omega$  délimité par sa surface externe  $\Gamma$  et la frontière interne que constitue la fissure  $\Gamma^c$ .

Le problème peut-être schématiquement représenté de la façon suivante.

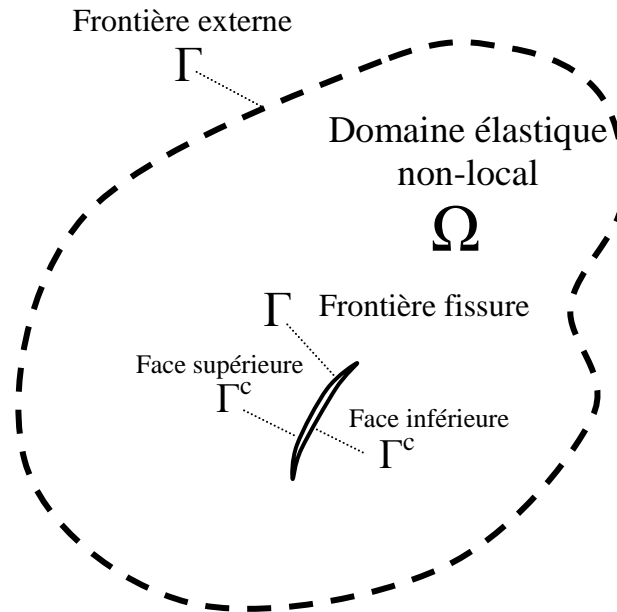


Figure 3.1 : Représentation schématique du solide élastique non-local avec une fissure interne

Dans ce chapitre, nous avons choisi de considérer le cas d'un milieu infini. Rigoureusement, on ne devrait modéliser que la frontière de la fissure. Cependant, en mécanique de la rupture, on sait que si la frontière extérieure du domaine est suffisamment éloignée de la fissure, le comportement au voisinage de cette dernière n'est pas impacté. Pour reproduire cette situation, les dimensions du solide sont choisies grandes devant la taille de la fissure (surface  $\Gamma$  en pointillés sur la Figure (3.1)).

Nous reprenons ensuite plusieurs cas traités à l'aide de l'approche classique dans le chapitre précédent et étudions l'apport de l'approche non-locale sur ces problématiques. Les influences des paramètres du modèle non-locale, fonction d'atténuation et longueur interne caractéristique, sont notamment étudiées.

### 3.2. Equations d'équilibre et de comportement non-locales

Nous rappelons ici brièvement les équations d'équilibre et de comportement du modèle non-locale de Eringen, présentées dans le Chapitre 1, puis nous nous attardons sur les propriétés de la fonction de caractérisation non-locale.

### 3.2.1. Equations d'équilibre

Pour un milieu homogène et isotrope, en l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre de l'élasticité non-locale sont (Eringen (1987)) :

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

Où  $t_{ij}$  représente le tenseur de contrainte non-local.

### 3.2.2. Equation de comportement

En introduisant les tenseurs de déformation et de rigidité élastiques, le comportement élastique du matériau est décrit par la loi de comportement (3.2) :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.2)$$

Où  $C_{ijkl}$  représente le tenseur d'élasticité et  $\varepsilon$  est le tenseur de déformation linéarisé, qui s'exprime en fonction du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  suivant l'expression :

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right) \quad (3.3)$$

La fonction  $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell)$  est appelée fonction de caractérisation non-locale. Elle dépend de la distance euclidienne entre les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  et fait intervenir un paramètre «  $\ell$  » homogène à une longueur : *la longueur interne caractéristique*. Les propriétés de cette fonction sont détaillées dans la partie 3.2.3.

Comme on peut le constater, la relation (3.2) contient une intégrale sur l'ensemble du volume  $\Omega$ , qui relie la contrainte en un point  $\mathbf{x}$  aux déformations en chaque point  $\mathbf{x}'$  du solide. Cette caractéristique du modèle de comportement non-local permet de tenir compte des interactions à longue distance qui agissent à l'intérieur du milieu.

### 3.2.3. Fonction de caractérisation non-locale

Les interactions interatomiques n'ont pas une portée infinie. Un atome influe sur le comportement de ses proches voisins, mais cette influence diminue avec la distance. Dans le cadre de l'approche non-locale intégrale, ce phénomène est pris en compte par la fonction de caractérisation non-locale  $\alpha$  qui apparaît dans l'équation de comportement. Cette dernière, aussi appelée « fonction d'atténuation », vérifie les propriétés suivantes (Lazar et al. (2006)) :

- $\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell)$  est une fonction continue de la distance euclidienne entre les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$ . Pour  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , la fonction est maximale. Lorsque  $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|$  augmente, la fonction décroît et tend vers zéro.
- La fonction d'atténuation dépend d'une longueur interne caractéristique «  $\ell$  ». Comme le souligne Eringen (2002), ce paramètre est représentatif de la microstructure sous-jacente du matériau (taille de grain, distance interatomique...).
- $\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell)$  vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int_{\Omega_\infty} \alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) d\Omega(\mathbf{x}') = 1 \quad (3.4)$$

Où  $\Omega_\infty$  est le domaine infini contenant le domaine d'étude  $\Omega$ .

- Lorsque la longueur caractéristique «  $\ell$  » tend vers zéro, la fonction de caractérisation  $\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell)$  tend vers la fonction de Dirac  $\delta(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|)$ . Dans ce cas, le modèle de comportement non-local est identique au modèle classique de l'élasticité.

$\alpha( \mathbf{x}'-\mathbf{x} , \ell) \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} \delta( \mathbf{x}'-\mathbf{x} )$
$\text{élasticité nonlocale} \xrightarrow{\ell \rightarrow 0} \text{élasticité classique}$

Pour un solide isotrope, plusieurs types de fonctions d'atténuation ont été suggérés. On peut citer notamment la fonction « bi-exponentielle » (Polizzotto (2001), Lazar et al. (2006)) :

$$\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) = \frac{1}{8\pi\ell^3} e^{-|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|/\ell}$$

La fonction d'erreur de Gauss est elle aussi très utilisée dans la littérature (Eringen (2002), Povstenko (1999,2005), Minghao et al.(1999)...) pour traiter des problèmes variés (dislocations, défauts ponctuels, fissures) :

$$\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) = \frac{1}{(\ell\sqrt{\pi})^3} e^{-|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^2/\ell^2}$$

Un dernier exemple de fonction couramment rencontrée dans les publications (Artan (1996)) ou les ouvrages consacrés aux théories nonlocales (Eringen (2002)) est :

$$\alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) = \begin{cases} \frac{3}{2\pi\ell^3} \left( 1 - \frac{|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|^3}{\ell^3} \right), & |\mathbf{x}'-\mathbf{x}| \leq \ell \\ 0, & |\mathbf{x}'-\mathbf{x}| > \ell \end{cases}$$

Comme on peut le constater, les variations de ces fonctions n'ont de sens que par rapport aux valeurs de  $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|/\ell$ . Lorsque la distance  $|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|$  est grande devant la longueur  $\ell$ , l'atténuation est forte et la fonction de caractérisation tend vers 0. La condition de normalisation (3.4) permet

de déterminer le rayon du domaine d'influence sphérique  $\Omega_{\text{inf}}$  en dehors duquel la fonction est pratiquement nulle.

Suivant l'exemple de Polizzotto (2004), on peut donc réécrire la loi de comportement de la façon suivante :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \cong \int_{\Omega_{\text{inf}}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (3.5)$$

La contribution des points  $\mathbf{x}'$  éloignés de  $\mathbf{x}$  étant négligeable, l'évaluation de l'intégrale est réalisée uniquement sur le domaine  $\Omega_{\text{inf}}$ .

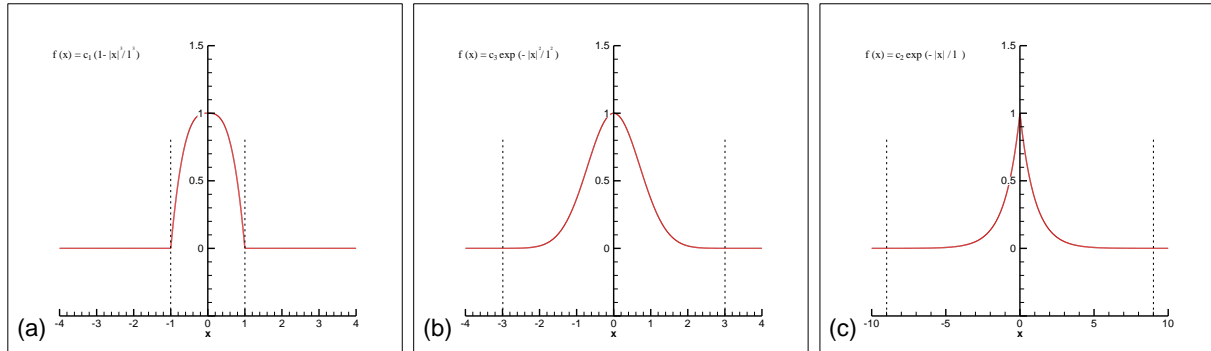


Figure 3.2 : Fonctions d'atténuation usuelles ; (a) Fonction cubique ; (b) Fonction d'erreur de Gauss ; (c) Fonction bi-exponentielle

A titre d'illustration, les variations des fonctions d'atténuation, par rapport à la variable  $r$ , sont représentées sur la Figure (3.2). Les limites approximatives du domaine d'influence sont indiquées par les droites en pointillés. Par définition, le rayon d'influence de la fonction cubique est égal à la valeur de la longueur caractéristique. Pour la fonction d'erreur et la fonction bi-exponentielle, le rayon vaut approximativement  $3\ell$  et  $9\ell$ .

On remarque que l'allure des courbes varie sensiblement d'une fonction à l'autre. La prise en compte de l'état de déformation au voisinage du point de référence n'est donc pas tout à fait la même suivant la fonction choisie.

Enfin, notons que les fonctions d'atténuation sont construites en se basant sur la théorie de dynamique des réseaux (Eringen et Kim (1977), Eringen (2002)). Dans ce cadre, un cristal est représenté de façon approximative comme un réseau de sphères reliées entre elles par des ressorts. Pour des problèmes de propagation d'ondes élastiques, Eringen a comparé avec succès les résultats obtenus par la théorie non-locale à ceux prédits par la théorie de la dynamique des réseaux. Ce travail lui a permis de proposer les différentes formes de fonctions d'atténuation présentées dans cette partie. Ces dernières ne sont donc pas de simples objets mathématiques choisis arbitrairement, mais reposent sur des bases physiques.

### 3.3. Stratégie de calcul des contraintes non-locales

#### 3.3.1. Cas particulier du milieu infini

Les propriétés de la fonction d'atténuation évoquées dans la partie 3.2.3 sont des propriétés générales. Dans le cas particulier d'un milieu infini, la fonction peut posséder une caractéristique supplémentaire, rappelée par Lazar et al. (2006) :

- $\alpha(|x'-x|, \ell)$  est solution de Green d'un opérateur différentiel linéaire L

Elle vérifie donc une relation de la forme suivante :  $L\alpha(|x'-x|, \ell) = \delta(|x'-x|)$

Parmi les exemples cités précédemment, la fonction d'atténuation bi-exponentielle et la fonction d'erreur de Gauss sont respectivement solutions de l'opérateur de Helmholtz  $L = 1 - \ell^2 \nabla^2$  (Eringen (1987)) et de l'opérateur de la chaleur  $L = \partial \cdot / \partial \ell - \nabla^2$  (Eringen (2002) ; Povstenko et Kubik (2005)).

D'autres formes d'opérateurs existent. Une expression améliorée de l'opérateur de Helmholtz, faisant intervenir un terme gradient d'ordre 4, est proposée par Lazar et al. (2006). Il s'agit de l'opérateur de bi-Helmholtz  $L = 1 - \ell^2 \nabla^2 + \gamma^4 \nabla^4$ . Dans cette expression, les paramètres  $\ell$  et  $\gamma$  sont reliés à une longueur interne caractéristique du matériau.

De façon intéressante, on note que l'application de l'opérateur L aux équations d'équilibre non-locales, pour un problème de fissure symétriquement chargé, permet de retomber sur les équations d'équilibre classiques :

$$L(t_{ij,j}(x)) = L(t_{ij}(x))_{,j} = \sigma_{ij,j}$$

Donc,

$$\underline{t_{ij,j}(x) = 0 \Rightarrow \sigma_{ij,j}(x) = 0}$$

Dans le cas d'un milieu infini, si les équations d'équilibres non-locales (3.1) sont satisfaites, les équations d'équilibres classiques sont elles aussi vérifiées. Le tenseur de contrainte non-local  $t_{ij}$  peut donc se calculer à partir de l'équation de comportement (3.5) où le tenseur de Cauchy  $\sigma_{ij}$  se déduit simplement de la résolution des équations d'équilibre locales (Artan (1996), Eringen (2002)).

Suivant la stratégie adoptée par Eringen (2002), le problème est traité en imposant des conditions aux limites classiques aux frontières du domaine. Les conditions de contact unilatéral présentées dans le Chapitre 2 sont gardées pour les faces de la fissure.

Dans ce cas, le vecteur-contrainte imposé à la frontière de la fissure est uniforme et égal à zéro et les conditions aux limites sont conservées par application de l'opérateur L. Elles sont donc équivalentes que l'on soit dans le cadre classique ou dans le cadre non-local.

### 3.3.2. Stratégie de calcul

La procédure de calcul des contraintes non-locales est schématisée sur la Figure (3.3) :

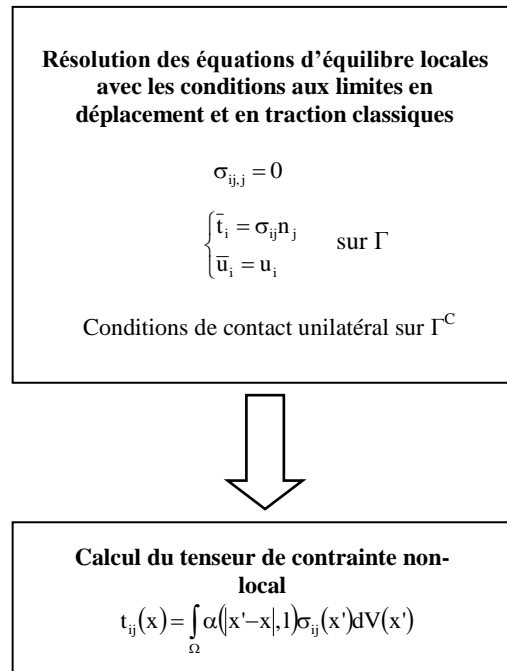


Figure 3.3 : Stratégie de calcul du tenseur de contrainte non-local

Celle-ci se divise en deux étapes. Dans un premier temps, les équations d'équilibre locales sont résolues par la méthode des éléments de frontière. Dans un second temps, l'évaluation de l'intégrale du champ de déformation (voir équation (3.5)) sur le domaine d'influence  $\Omega_{inf}$  permet de déterminer le tenseur de contrainte non-local.

Le calcul numérique de cette intégrale requiert au préalable l'estimation du tenseur de contrainte local en un certain nombre de points d'intégration. Nous allons voir dans la section suivante comment déterminer ces contraintes.

### 3.4. Calcul des contraintes locales

#### 3.4.1. Représentation intégrale non-régularisée des contraintes locales

La résolution des équations d'équilibre classiques est réalisée à l'aide de la méthode des éléments de frontière. La procédure suivie lors de cette étape a été détaillée dans le Chapitre 2. Dans cette partie, nous nous intéressons plus particulièrement au calcul des contraintes locales à l'intérieur du solide.

Dans la formulation intégrale basée sur le saut de déplacement, nous avons introduit l'équation (3.6) qui permet de déterminer le tenseur de contrainte en un point quelconque à l'intérieur du solide. Le calcul est réalisé en post-traitement, connaissant les valeurs des champs de déplacement et du vecteur-contrainte à la frontière externe  $\Gamma$ , ainsi que les valeurs du saut de déplacement entre les lèvres de la fissure.

$$\sigma_{ij}(y) = \int_{\Gamma} t_k(x) D_{kij}(x, y) dS(x) - \int_{\Gamma} u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x) - \int_{\Gamma^{c+}} \Delta u_k(x) S_{kij}(x, y) dS(x) \quad (3.6)$$



Pour un point  $y$  interne au solide  $n$ 'appartenant pas à  $\Gamma$  ou  $\Gamma^{c+}$ , les intégrales apparaissant dans cette expression sont régulières. Leurs valeurs peuvent donc être évaluées numériquement par les formules de quadrature de Gauss-Legendre.

Toutefois, nous avons vu au Chapitre 2 que les fonctions  $D_{kij}(x,y)$  et  $S_{kij}(x,y)$  dépendent respectivement de termes en  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2}$  et  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-3}$ . Pour un point  $y$  situé à l'intérieur du domaine et proche de la surface d'intégration, on observe de fortes variations de  $D_{kij}(x,y)$  et  $S_{kij}(x,y)$  au voisinage de la projection orthogonale  $x$  de  $y$  sur la surface (Figure (3.4)).

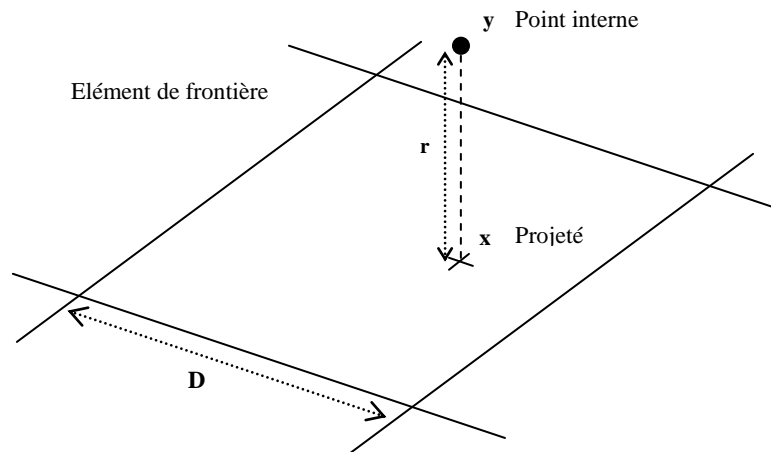


Figure 3.4 : Représentation schématique d'un nœud interne et de son projeté pour la problématique de quasi-singularité

Dans ce cas, l'évaluation numérique des intégrales à l'aide des formules classiques de quadrature est difficile. Cette difficulté est d'autant plus marquée que le point  $y$  est proche de sa projection orthogonale  $x$ .

### 3.4.2. Représentation intégrale régularisée des contraintes locales

Le traitement de la quasi-singularité revêt une grande importance car la précision des résultats pour les contraintes locales va déterminer la qualité des résultats obtenus pour les contraintes non-locales.

Tout d'abord, il est utile de rappeler que la notion de « proximité à la surface » est relative à une dimension caractéristique  $D$  de la frontière (typiquement, la taille de l'élément contenant le projeté). Suivant ce principe, le point  $y$  est proche (resp. éloigné) de la frontière si la distance qui le sépare de son projeté orthogonal est petite (resp. grande) devant la taille de l'élément. Pour surmonter le problème posé par les quasi-singularités, une solution simple consiste donc simplement à affiner la discrétisation de la surface. Cependant, cette méthode débouche sur la construction d'un modèle lourd comportant un grand nombre de nœuds.

L'augmentation du nombre de points d'intégration est une solution alternative (Gao et Davies (2001)) qui entraîne toutefois une hausse importante des temps de calcul et s'avère parfois insuffisante pour évaluer correctement les intégrales quasi-singulières.

D'autres solutions ont été proposées. Citons notamment le travail de Telles (1987) qui propose un changement de variables sur l'intervalle d'intégration afin de concentrer les points d'intégration au voisinage de la projection orthogonale du point  $y$ .

Une méthode alternative consiste à réduire mathématiquement l'ordre de singularité des intégrales. Dans leurs travaux, Balas et al. (1989) suggèrent l'utilisation de la représentation intégrale régularisée de premier ordre suivante :

$$\sigma_{ij}(y) = \int_{\Gamma} t_k(x) D_{kij}(x, y) dS(x) - \int_{\Gamma} u_k(x) \hat{T}_{kij}(x, y) dS(x) - \int_{\Gamma^{c+}} \Delta u_k(x) \hat{T}_{kij}(x, y) dS(x) \quad (3.7)$$

Où,

$$\hat{T}_{kij}(x, y) = \frac{\mu}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 4\nu\delta_{ki}r_l \hat{D}_{lj} + (1-2\nu) \left[ r_k \hat{D}_{ij} + r_i \hat{D}_{kj} - r_m (\delta_{jk} \hat{D}_{im} + \delta_{ji} \hat{D}_{km}) \right] - 3r_j r_m (r_k \hat{D}_{im} + r_i \hat{D}_{km}) \right\}$$

Les paramètres  $\mu$  et  $\nu$  représentent respectivement le module de Coulomb et le coefficient de Poisson. La distance euclidienne entre les points  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est notée  $r$  ( $r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ ). L'opérateur  $\hat{D}_{ij}$  est défini comme suit :

$$\hat{D}_{ij} = \varepsilon_{ijm} \left[ \tau_m(x) \frac{\partial}{\partial \rho(x)} - \rho_m(x) \frac{\partial}{\partial \tau(x)} \right]$$

Dans cette expression, les vecteurs  $\tau_m(x)$  et  $\rho_m(x)$  représentent deux vecteurs unitaires orthogonaux et tangents à la surface au point  $x$ .  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\varepsilon_{ijk}$  correspond à l'opérateur de permutation.

Comme on peut le constater, la fonction  $\hat{T}_{kij}(x, y)$  est singulière en  $1/r^2$ . Comparée à la fonction  $S_{kij}(x, y)$  (en  $1/r^3$ ), l'ordre de la singularité est réduit d'une unité. Les variations de  $\hat{T}_{kij}(x, y)$  au voisinage du projeté orthogonal sont plus douces et plus facilement intégrables.

Afin de valider cette procédure de calcul des contraintes locales au voisinage de la fissure, nous étudions le cas d'une fissure circulaire située dans un cube dont les extrémités sont soumises à un effort de traction uniforme  $\sigma_0$ . Les dimensions du cube sont choisies grandes par rapport au rayon de la fissure afin de se rapprocher du problème de la fissure dans un milieu infini. L'espace est décrit par le repère global cartésien Oxyz. Pour chaque point F du front, on définit un repère local cartésien  $Fx_1x_2x_3$  tel que les axes  $Fx_1$ ,  $Fx_2$  et  $Fx_3$  sont respectivement normal, binormal et tangent au front au point F (Figure (3.5)).

Pour un tel problème, d'après le théorème de superposition, le champ de contrainte théorique au voisinage de la fissure est la somme de deux composantes :

- Le champ de contrainte uniforme  $\sigma_{zz}^0$  que les conditions aux limites en traction engendreraient au sein du solide en l'absence de fissure
- Le champ de contrainte asymptotique au voisinage de la fissure dont les faces sont soumises à une pression constante de valeur  $\sigma_{zz}^0$ . Les solutions de ce problème ont été calculées par Sneddon (1952).

Nous disposons donc d'une solution analytique à laquelle comparer nos résultats numériques.

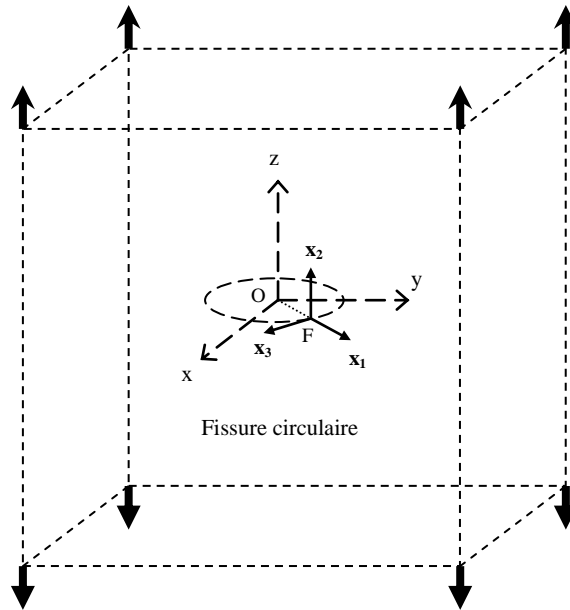


Figure 3.5 : Fissure circulaire en milieu infini soumise à un effort de traction uniforme

La fissure circulaire est discrétisée en 20 éléments quadrilatères à neuf nœuds. Sur chaque élément, le calcul des intégrales est réalisé en utilisant  $n_p \times n_p$  points d'intégration. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure (3.6). L'évolution de la composante  $\sigma_{zz}$  y est représentée suivant l'axe  $Fx_2$  pour une position quelconque le long du front. La contrainte est normalisée par  $\sigma_0$  et représentée en fonction du rapport  $r / D$ , où  $r$  correspond à la distance à la pointe de fissure et  $D$  est une longueur représentative de la dimension de l'élément de front considéré.

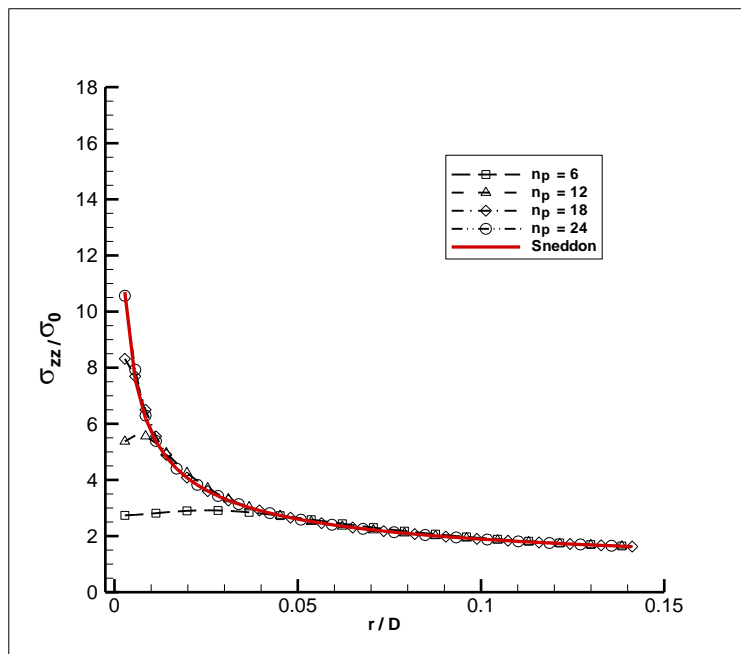


Figure 3.6 : Evolution de  $\sigma_{zz}$  en fonction de la distance à la pointe de fissure – Représentation régularisée de Balas et al. (1989)

Comme on peut le constater, le nombre de points d'intégration améliore sensiblement la qualité des résultats lorsqu'on est proche de la pointe de fissure. A titre d'information, le

pourcentage d'erreur à une distance donnée du front et pour plusieurs valeurs de  $n_p$  est fourni dans le Tableau (3.1).

$n_p$	6	12	18	24
<b>Erreur (%)</b> (en $r = 0.02$ )	15,038	2,076	0,112	0,077

Tableau 3.1 : Evolution du % d'erreur pour différents valeurs du nombre de points d'intégration Représentation régularisée de Balas et al. (1989)

### 3.4.3. Méthode de subdivision de l'élément

Lorsque la formulation régularisée ne suffit pas à assurer de bons résultats à proximité de la surface, une solution efficace et robuste pour traiter la quasi-singularité, sans raffiner l'ensemble du maillage, consiste à subdiviser l'élément  $\Gamma^{el}$  contenant le projeté orthogonal du point  $y$  en un certain nombre  $N_{sub}$  de « sous-éléments fictifs »  $\Gamma_i^{el}$  ( $i = 1, N_{sub}$ ).

L'intégration est alors réalisée sur chaque subdivision. Les contributions de tous les sous-éléments sont ensuite sommées pour obtenir la valeur de l'intégrale totale :

$$\int_{\Gamma^{el}} f(x) d\Gamma^{el}(x) = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \int_{\Gamma_i^{el}} f(x) d\Gamma_i^{el}(x)$$

Pour montrer l'efficacité de cette technique, on reprend l'exemple précédent. Le nombre de points d'intégration  $n_p$  est fixé à 6. Le découpage de l'élément contenant le projeté orthogonal est régulier. Les résultats obtenus sont présentés sur la Figure (3.7). Suivant les cas, le nombre maximal de subdivisions est fixé à 9, 16, 25, 36, 64 ou 100.

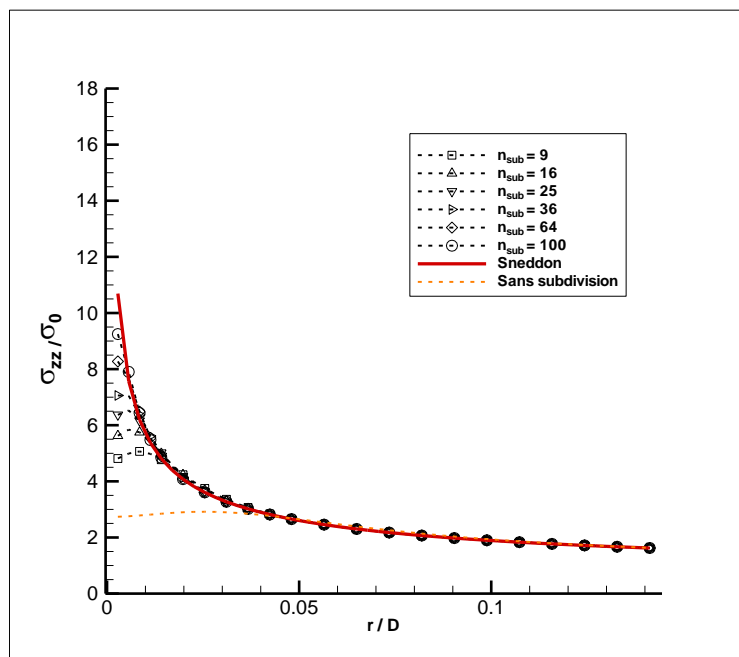


Figure 3.7 : Evolution de  $\sigma_{zz}$  en fonction de la distance à la pointe de fissure  
Méthode de subdivision de l'élément

La figure (3.7) montre que la subdivision de l'élément permet d'obtenir des résultats de bonne qualité à proximité de la fissure. Même pour un petit nombre  $n_{\text{sub}}$  de sous-éléments (ex : 9), les résultats sont significativement améliorés (voir Tableau (3.2)). Avec 25 subdivisions, l'erreur est inférieure à 1%.

$N_{\text{sub}}$	1	9	16	25	36	64	100
<b>Erreur (%)</b> ( $r = 0.02$ )	15,038	3,311	1,496	0,439	0,180	0,073	0,010

Tableau 3.2 : Evolution du % d'erreur pour différents valeurs du nombre de points d'intégration Méthode de subdivision de l'élément

L'utilisation de la formulation régularisée de Balas et al. (1989), associée à la méthode bien connue de subdivision de l'élément, permet donc de calculer avec une précision correcte les contraintes locales au voisinage de la fissure.

### 3.5. Calcul des contraintes non-locales

Grâce à la méthode des éléments de frontière, nous sommes capables de déterminer le tenseur des contraintes « locales » à l'intérieur du solide, connaissant les valeurs des champs de déplacement et de traction sur les surfaces délimitant le domaine. Pour atténuer l'effet des quasi-singularités au voisinage de la fissure, une technique de régularisation (Balas et al. (1989)) associée à la méthode de subdivision de l'élément, est employée.

Suivant la stratégie présentée dans la section 3.3., les contraintes non-locales se déduisent ensuite de la relation de comportement (3.8) :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \underbrace{\int_{\Omega_{\text{inf}}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \sigma_{ij}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}')}_I \quad (3.8)$$

Où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont deux vecteurs position décrits dans le repère global cartésien  $(O, e_x, e_y, e_z)$  par leurs coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$ .

L'objectif est donc d'évaluer numériquement la valeur de l'intégrale I sur le domaine sphérique  $\Omega_{\text{inf}}$  de rayon  $R_{\text{inf}}$ .

Pour cette tâche, on distingue deux situations :

- Le domaine d'influence  $\Omega_{\text{inf}}$  n'intersecte pas la surface de la fissure
- Le domaine d'influence  $\Omega_{\text{inf}}$  intersecte le front de fissure

Dans le premier cas, l'intégration se fait sur la totalité du domaine d'influence. L'intégrale est évaluée en utilisant les formules de quadrature de Gauss-Legendre. Les points d'intégration sont définis dans un repère sphérique local d'origine M  $(x, y, z)$ .

Lorsque le domaine d'influence coupe le plan de la fissure, une partie des points  $x'$  est « écrantée » (Figure (3.8)) et reste invisible pour le point  $x$ . On peut logiquement supposer que ces points ont un impact moins important sur le comportement au point  $x$ . Dans ce cas, une solution simple consiste à appliquer le *principe de visibilité*. Ce dernier postule que les points invisibles depuis le point de référence n'ont aucune influence sur la contrainte en  $x$  (Figure (3.8)).

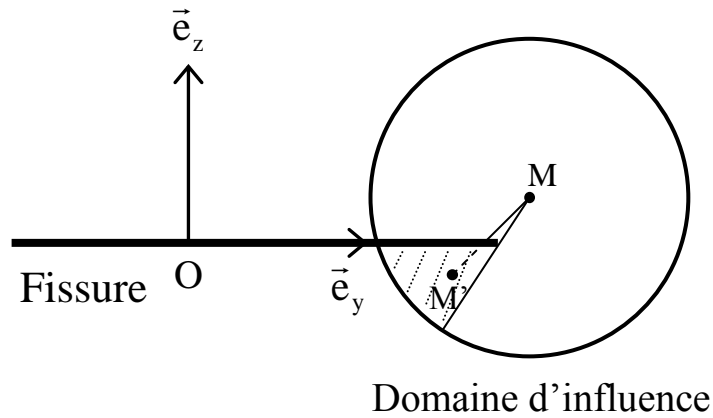


Figure 3.8 : Illustration du principe de visibilité

Dans ce cas le schéma d'intégration est légèrement modifié. Lorsque le domaine d'influence coupe la surface de la fissure, les bornes d'intégration dépendent des angles  $\theta$  et  $\varphi$ . En coordonnées sphériques, l'intégrale  $I$  s'écrit sous la forme :

$$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{R(\theta,\varphi)} \alpha(r, \ell) \sigma_{ij}(x + r \sin(\varphi) \cos(\theta), y + r \sin(\varphi) \sin(\theta), z + r \cos(\varphi)) r^2 \sin(\varphi) dr d\theta d\varphi$$

Son évaluation est réalisée par les formules de quadrature de Gauss-Legendre.

## 3.6. Résultats

### 3.6.1. Fissure circulaire dans un milieu infini à comportement élastique non-local

#### *Comparaison contrainte classique / contrainte non-locale*

Comme dans le chapitre 2, nous commençons par l'étude d'une fissure circulaire dans un milieu infini (Figure (3.9)). Le rapport  $h / c$ , entre la demi-longueur d'un côté du domaine et le rayon de la fissure est pris égal à 10. Pour ce choix, les contraintes locales au voisinage de la fissure correspondent parfaitement aux solutions de Sneddon. Le solide peut donc être considéré comme infini.

Dans cette partie, nous comparerons nos résultats à ceux obtenus par Minghao (1999) pour un problème similaire (fissure circulaire en milieu infini soumise à une pression uniforme).

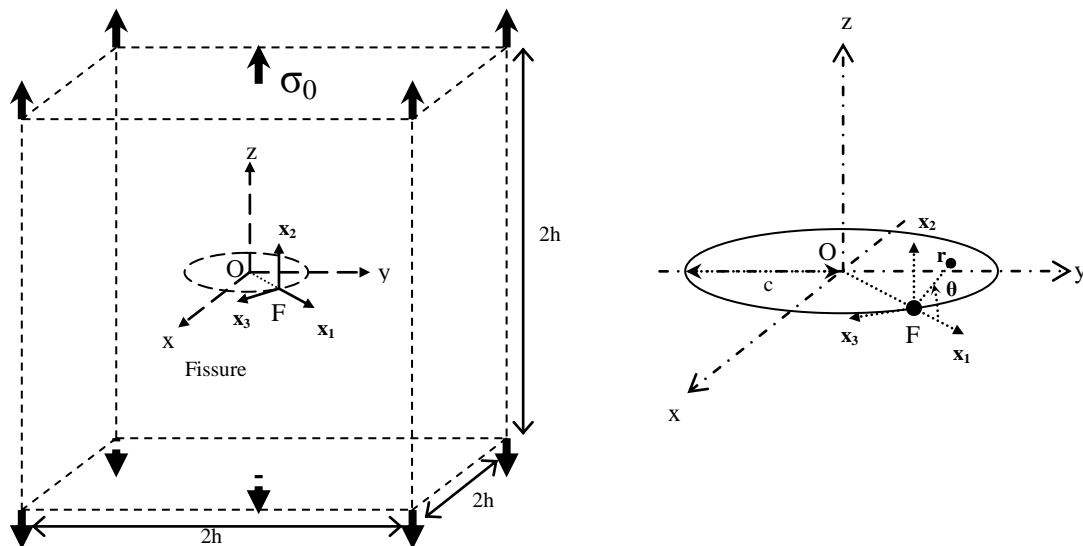


Figure 3.9 : Fissure circulaire dans un cube soumis à un effort de traction uniforme

Les caractéristiques élastiques du matériau sont le module d'Young  $E = 220000$  MPa et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Pour ce premier calcul, nous avons retenu la fonction d'atténuation utilisée par Minghao dans ces travaux (la fonction d'erreur), et nous fixons la longueur interne de telle sorte que  $c / \ell = 20$ .

Les conditions aux limites appliquées à la frontière sont les suivantes :

- Les extrémités du domaine sont soumises à un effort de traction uniforme.
- Les faces latérales du cube sont libres de traction

La frontière externe du cube est discrétisée en 24 éléments et la surface de la fissure est maillée en 48 éléments. Suivant la position du domaine d'influence de la fonction de caractérisation par rapport au front de la fissure, deux schémas d'intégration sont utilisés. Soit  $d_c$ , la distance minimale entre le centre de la sphère d'influence et le front, et  $R_{inf}$  le rayon de la sphère d'influence.

- Si  $d_c > R_{inf}/2$ , la sphère est subdivisée en 8 cellules et l'intégration se fait sur chaque subdivision à l'aide de 96 points de Gauss
- Si  $d_c \leq R_{inf}/2$ , la sphère est subdivisée en 500 cellules et l'intégration est réalisée sur chaque subdivision à l'aide de 8 points de Gauss.

La Figure (3.10) montre l'évolution de  $\sigma_{zz}$  et  $t_{zz}$  en avant du front et dans le plan de la fissure. Les contraintes sont normalisées par le chargement  $\sigma_0$  imposé au cube. Elles sont représentées en fonction de la variable polaire  $r$  (normalisée par  $\ell$ ), définie dans le repère local cartésien  $Fx_1x_2x_3$  associé au front de fissure (voir Figure (3.9)).

Les résultats prédits par les modèles local et non-local sont comparés et le profil de contrainte obtenu par Minghao est indiqué en traits pointillés.

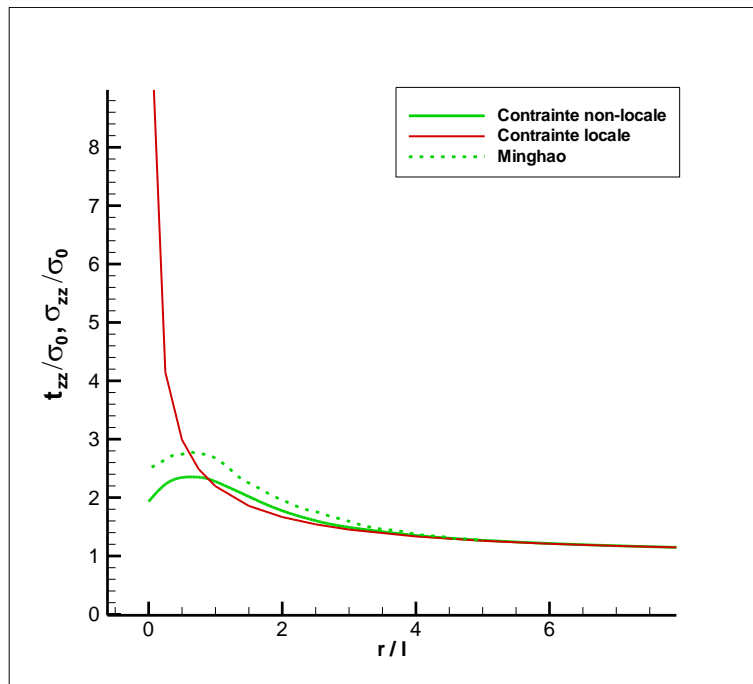


Figure 3.10 : Evolution de la composante locale  $\sigma_{zz}$  et de la composante non-locale  $t_{zz}$  en fonction de la distance au front de fissure

Comme on peut le constater et comme le prévoit la théorie classique de l'élasticité, la contrainte locale  $\sigma_{zz}$  diverge lorsqu'on tend vers le front de fissure (en  $r = 0$ ).

La Figure 3.10 amène d'autres observations plus intéressantes :

- La contrainte non-locale  $t_{zz}$  est finie en pointe de fissure.
- Le profil de  $t_{zz}$  présente un maximum « local » situé en avant du front de la fissure en  $r \cong 0.63 \times \ell$ . L'amplitude de cet extrémum est environ égale à  $t_{zz}^{Max} \cong 2.35 \times \sigma_0$ .
- A une distance suffisamment grande de la fissure, la contrainte classique et la contrainte non-locale coïncident.

Les résultats i et ii constituent l'intérêt principal de l'approche non-locale. De nombreux travaux, principalement en 2D, débouchent sur les mêmes observations. Dans chaque cas, l'utilisation de la loi de comportement intégrale (3.2) permet de régulariser le champ de contrainte au voisinage de la fissure (Eringen and Kim (1974), Eringen et al. (1977), Gao (1989)).



Pour ce problème, nous présentons les résultats de Minghao à titre de comparaison. L'allure générale de la courbe et la position du maximum de contrainte sont très similaires ( $\cong 0.64 \times \ell$  pour Minghao contre  $\cong 0.63 \times \ell$  dans notre approche). Toutefois, l'amplitude du profil en pointillés est sensiblement supérieure à celle du profil en trait plein. ( $2.78 \times \sigma_0$  pour Minghao contre  $2.35 \times \sigma_0$ ).

Cette différence d'amplitude peut s'expliquer par le fait que les problèmes traités ne sont pas rigoureusement les mêmes. Dans notre cas, le domaine d'étude n'est pas réellement infini et le chargement est appliqué à la frontière *externe* de ce solide. Dans ses travaux, Minghao considère un vrai domaine infini et applique une pression uniforme directement sur les faces de la fissure.

Quoi qu'il en soit, le profil de contrainte obtenu est qualitativement très satisfaisant et démontre la justesse de notre stratégie.

Le résultat iii peut s'expliquer de la façon suivante. On sait que le champ de contrainte classique est globalement uniforme dans l'ensemble du solide, excepté au voisinage de la fissure. Lorsqu'on s'éloigne du front, la contrainte locale tend donc vers une valeur constante égale au chargement appliqué aux extrémités du domaine. Or, pour un champ  $\sigma_0$  constant, la relation de comportement donne :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega_{inf}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \sigma_0 d\Omega(\mathbf{x}') = \sigma_0 \underbrace{\int_{\Omega_{inf}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) d\Omega(\mathbf{x}')}_{=1} = \sigma_0$$

Cette observation permet de comprendre l'égalité des contraintes locale et non-locale pour  $r/\ell > 5$ .

D'un point de vue physique, les résultats de la Figure (3.10) tendent à montrer que l'endommagement ne s'initie pas directement aux extrémités de la fissure, mais dans une zone située à l'avant du front.

Or, la formation de microcavités ou de microfissures devant la fissure est un phénomène mis en évidence par de nombreuses études expérimentales (Bouchaud et Paun (1999), Mourot et al.(2002)). Les premiers auteurs suggèrent notamment que la rupture est liée à la formation, la croissance et la coalescence de microcavités devant la pointe de la fissure, et ce, quelle que soit la nature ductile ou fragile du matériau.

L'existence de cette zone de concentration de contrainte permet par ailleurs d'expliquer comment l'endommagement s'initie alors que le chargement global  $\sigma_0$  est inférieur à la contrainte critique de cohésion du matériau.

Quoi qu'il en soit, l'utilisation d'un critère de propagation basé sur la contrainte semble donc à nouveau envisageable. Dans ses travaux, Eringen propose d'étudier la stabilité de la fissure en comparant la valeur du maximum de contrainte à la contrainte théorique de décohesion atomique. Il prédit la propagation de la fissure lorsque le maximum atteint la valeur critique de clivage.

Pour ce problème, la fissure est sollicitée en mode I pur. On peut donc comparer la valeur maximale de  $t_{zz}$  à la contrainte critique de clivage, notée  $t_c$ . Expérimentalement, on constate que cette dernière est, en ordre de grandeur, égale à  $1/10^{\text{ème}}$  du module d'Young, soit environ 22000 MPa. En reprenant les résultats de la Figure (3.10), la contrainte maximale admissible à laquelle peut être soumise le cube serait donc approximativement égale à :

$$\sigma_0^{\text{Max}} \cong t_c / 2.35 \cong 9362 \text{ MPa}$$

On voit donc que la position et l'intensité de l'extrémum de contrainte vont jouer un rôle déterminant dans l'analyse du comportement de la fissure. Il paraît donc important d'étudier l'influence de différents paramètres (longueur interne, fonction d'atténuation...) sur les variations du champ de contrainte au voisinage de la fissure.

### *Influence de la longueur interne caractéristique*

Dans cette partie, nous étudions l'influence de la longueur interne «  $\ell$  » sur les résultats de l'approche non-locale. Pour cela, le rayon de la fissure (noté  $c$ ) est fixé et on fait varier la valeur du paramètre «  $\ell$  ». La Figure (3.11) montre l'évolution de la contrainte  $t_{zz}$  dans le plan de la fissure en avant du front. Chaque courbe correspond à une valeur du rapport  $c / \ell$ . La distance entre le point de référence et la pointe de la fissure est normalisée par la valeur de la longueur caractéristique tandis que la composante  $t_{zz}$  est normalisée par le chargement  $\sigma_0$ .

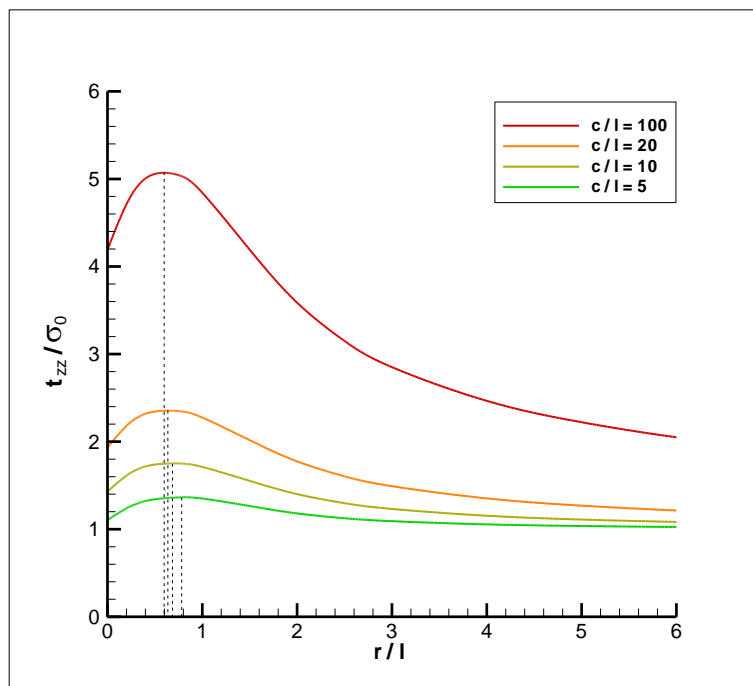


Figure 3.11 : Influence de la longueur interne caractéristique

Comme on peut le voir sur la Figure (3.11), la longueur interne caractéristique influe de manière importante sur les variations du champ de contrainte au voisinage de la fissure. La position et l'intensité du maximum de contrainte dépendent clairement de «  $\ell$  ». Plus précisément, on note que :

- i. Plus la longueur caractéristique est petite (rapport  $c / \ell$  grand), plus l'amplitude du maximum de contrainte est élevée. Pour  $c/\ell = 5$ , le maximum de contrainte vaut  $t_{zz}^{\text{Max}} \cong 1.36 \times \sigma_0$ . Il atteint  $t_{zz}^{\text{Max}} \cong 5.07 \times \sigma_0$  lorsque  $c/\ell = 100$ .
- ii. Pour l'ensemble des rapports  $c / \ell$  testés, la position du maximum de contrainte se situe approximativement entre  $0.59 \times \ell$  ( $c / \ell = 100$ ) et  $0.82 \times \ell$  ( $c / \ell = 5$ ). Le

maximum est d'autant plus proche de la pointe de fissure que la longueur caractéristique est petite.

La situation la plus dangereuse correspond clairement au cas où  $\ell$  est petite devant la taille de la fissure. Dans ce cas, l'amplitude du maximum de contrainte est la plus importante. Si la longueur interne est reliée à une dimension caractéristique de la microstructure, on comprend aisément que plus cette dernière est fine, plus le matériau est fragilisé.

Le choix de la longueur interne caractéristique revêt donc une grande importance. Selon l'échelle à laquelle se produit la rupture, l'ordre de grandeur de «  $\ell$  » peut varier de la distance interatomique à la taille d'un grain métallurgique. Sur ce point, notons que Ilcewicz et al. (1981) ont montré expérimentalement que la longueur caractéristique à considérer dans l'approche non-locale pouvait changer au cours du processus de rupture.

### *Influence de la fonction d'atténuation*

Le rayon de la fissure et la longueur interne sont fixés de telle sorte que  $c/\ell = 100$ . Le tenseur de contrainte non-local est évalué en utilisant successivement la fonction d'erreur, la fonction bi-exponentielle et la fonction cubique.

Les résultats sont présentés sur la Figure (3.12) où l'on peut observer l'évolution de  $t_{zz}$  dans le plan de la fissure, en avant du front. Contrainte et distance au front sont normalisées par  $\sigma_0$  et «  $\ell$  ».

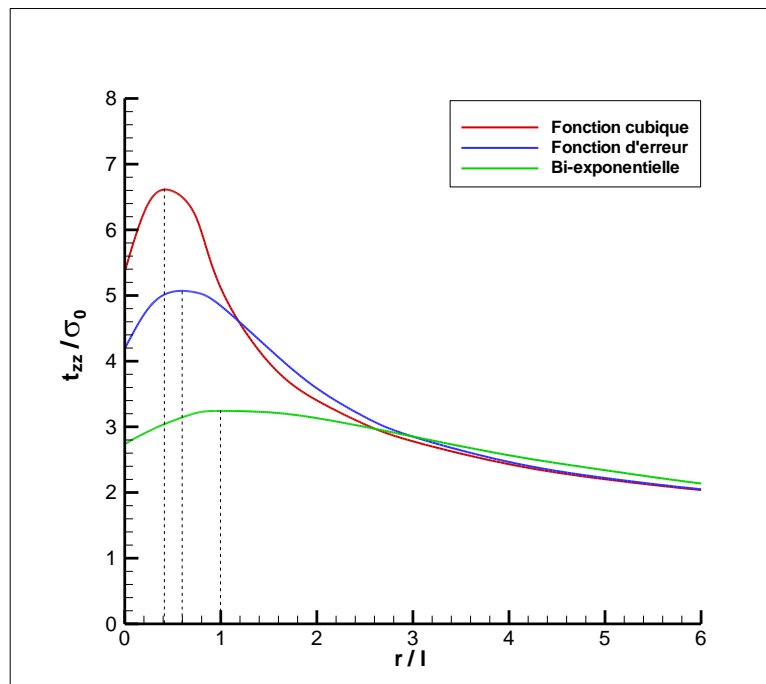


Figure 3.12 : Influence de la fonction de caractérisation

Sans surprise, on remarque que la forme de la fonction de caractérisation joue sur la position et l'amplitude du maximum de contrainte.

- Le pic le plus prononcé, associé à la fonction cubique, se situe approximativement en  $r \cong 0.42 \times \ell$ , tandis que la position du maximum de contrainte pour la fonction

d'erreur est environ  $r \cong 0.61 \times \ell$ . Le maximum le plus éloigné de la pointe de fissure ( $r \cong \ell$ ) est lié à la fonction bi-exponentielle.

- Par ailleurs, on note que l'amplitude du maximum est la plus petite ( $t_{zz}^{\text{Max}} \cong 3.24 \times \sigma_0$ ) pour la fonction bi-exponentielle et la plus grande ( $t_{zz}^{\text{Max}} \cong 6.61 \times \sigma_0$ ) pour la fonction cubique.

Ces variations d'amplitude s'expliquent aisément lorsqu'on étudie l'allure des fonctions de caractérisation (Figure (3.13)).

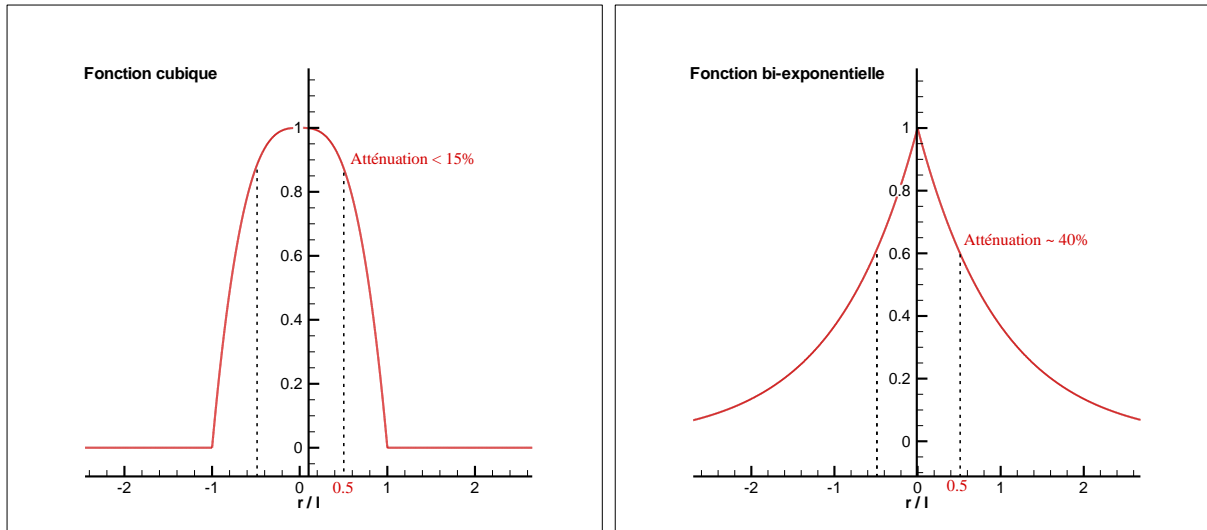


Figure 3.13 : Variations des fonctions d'atténuation cubique et bi-exponentielle

La fonction bi-exponentielle est piquée. L'atténuation est extrêmement forte dès qu'on s'éloigne du point de référence ( $\sim 40\%$  en  $r = \ell / 2$ ), ce qui réduit de façon importante la contribution des points voisins à la contrainte au point  $x$ .

En revanche, la fonction cubique présente un profil nettement plus arrondi à son sommet. De ce fait, l'atténuation est beaucoup moins importante ( $< 15\%$  en  $r = \ell / 2$ ). Les déformations aux points voisins de  $x$  influent de manière significative sur la valeur de la contrainte.

La fonction d'erreur représente un cas intermédiaire (atténuation de 21% environ en  $r = \ell / 2$ ).

Le choix de la fonction de caractérisation n'est donc pas anodin. Une fonction correspond à un modèle de comportement non-local particulier.

#### *Influence des points « écrantés » par la fissure*

Dans cette section, nous étudions l'effet du principe de visibilité présentée dans la partie 3.5.. L'utilisation de ce critère semble justifiée lorsque le point de référence se trouve en dehors du plan de la fissure, et que le domaine d'influence de la fonction de caractérisation en coupe le front.

Nous considérons toujours le cas de la fissure circulaire soumise à un effort de traction uniforme. La longueur caractéristique est telle que  $c/\ell = 10$ .

La Figure (3.14) montre l'évolution de la contrainte  $t_{zz}$  dans plusieurs directions  $\theta$  (angle polaire défini sur la Figure (3.9)) à partir de la pointe de fissure. Les résultats obtenus avec et sans principe de visibilité sont présentés.

Pour  $\theta = 0^\circ$ , l'impact du critère de visibilité est logiquement nul. Le domaine d'influence intersecte le front mais aucun point  $x'$  n'est « écranté » par la fissure. Les profils obtenus sont donc confondus.

Pour  $\theta = 30^\circ$ , les courbes coïncident toujours et l'effet du critère reste clairement négligeable. Son influence commence à apparaître pour  $\theta = 60^\circ$ . Le niveau de contrainte calculé en pointe de fissure est plus faible lorsque le principe de visibilité est employé.

Dans le dernier cas ( $\theta = 90^\circ$ ), on note qu'en l'absence de critère de visibilité, le maximum de contrainte est situé à la pointe de la fissure. Si les points masqués par la fissure sont négligés, on retrouve un maximum de contrainte local situé légèrement au-dessus du front.

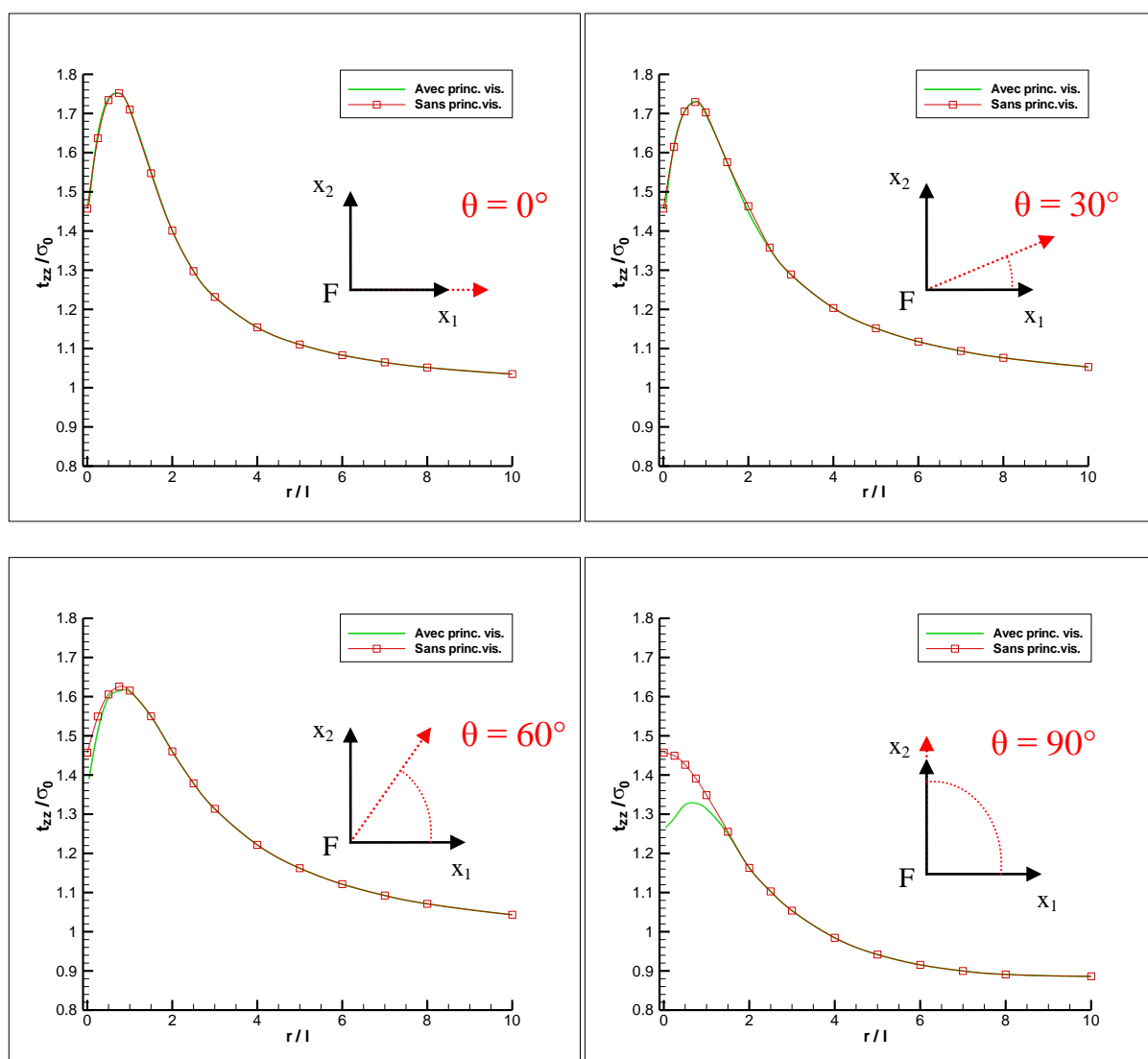


Figure 3.14 : Influence du principe de visibilité pour différentes valeurs de  $\theta$

L'utilisation du principe de visibilité ne bouleverse donc pas radicalement les résultats. Pour  $-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ , le champ de contrainte n'est pratiquement pas modifié. L'influence du critère est cependant plus significative lorsque la position angulaire du point de référence se situe en dehors de cette zone. Le phénomène d'écrantage lié à la surface de la fissure devient alors

suffisamment important pour perturber les résultats et on observe une diminution de l'intensité des contraintes au voisinage du front de fissure.

L'utilisation du principe de visibilité répond à une exigence physique. Comme le note Polizzotto (2001), il est raisonnable de penser que les « accidents » géométriques à l'intérieur d'une structure (fissures, trous...) constituent des obstacles pour processus de diffusion des effets non-locaux. Deux points  $x'$ , à égale distance du point de référence  $x$ , ne peuvent avoir la même influence sur le comportement en ce point, si l'un des deux est masqué par la fissure.

Dans cette partie, nous avons montré que l'utilisation du critère de visibilité avait une influence non négligeable sur les résultats. Ce dernier est donc adopté dans la suite de nos recherches.

### 3.6.2. Influence de la forme de la fissure

Pour un cas de chargement inchangé (traction uniforme  $\sigma_0$ ), trois fissures de formes différentes sont testées : fissure carrée, fissure elliptique, fissure circulaire (Figure (3.15)). Leurs dimensions sont choisies de telle sorte que le domaine puisse être considéré comme infini. Dans chaque cas, le centre de la fissure est situé à l'origine  $O$  du repère global et son plan reste perpendiculaire à la direction d'application du chargement.

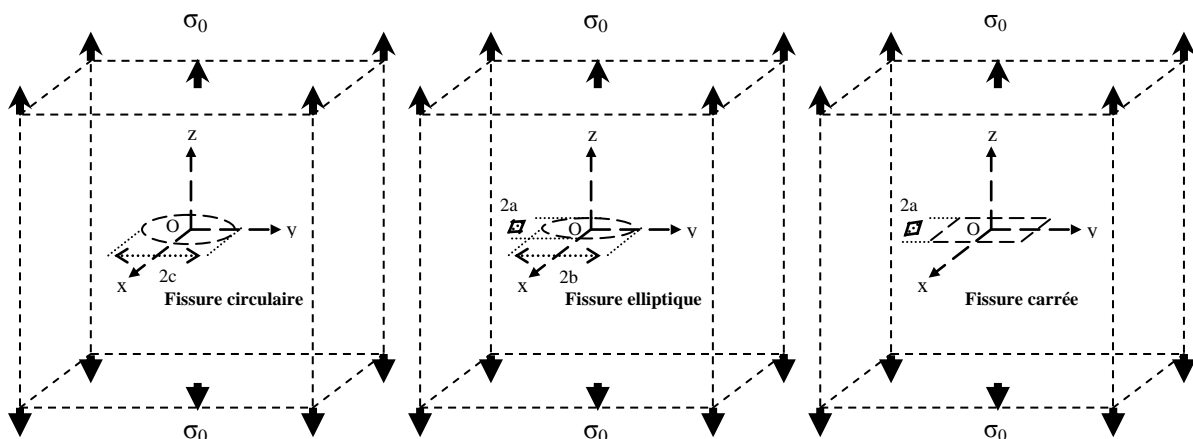


Figure 3.15 : Fissures circulaire, elliptique et carrée soumises à un effort de traction uniforme

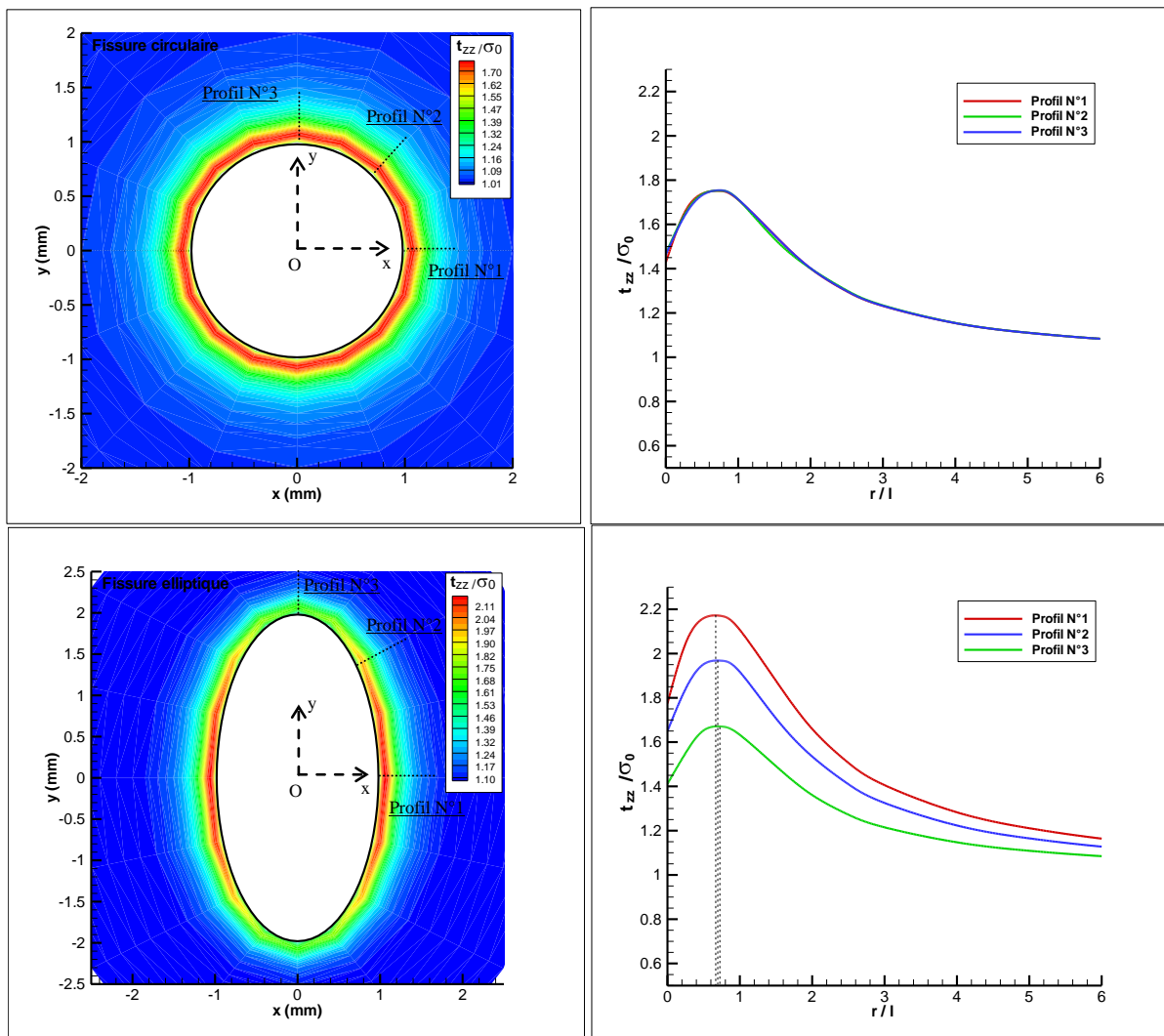
La même longueur caractéristique est utilisée pour chaque cas ( $c/\ell = 10$ ). La fonction d'atténuation choisie est la fonction d'erreur. Le maillage des fissures circulaire et elliptique est composé de 48 éléments quadrangulaires, tandis que la fissure carrée et la frontière externe sont discrétisées respectivement en 36 et 24 éléments.

La Figure (3.16) représente les variations de  $t_{zz}$  dans le plan  $Oxy$  devant le front des fissures circulaire, elliptique et carrée. Ces cartographies sont accompagnées chacune de trois profils (relevés suivant les lignes indiquées sur les cartographies) qui permettent de mieux comprendre l'évolution de la contrainte d'ouverture le long du front.

Dans le cas de la fissure circulaire, le problème est symétrique de révolution. L'évolution de  $t_{zz}$  est logiquement identique dans toutes les directions. L'écart moyen constaté entre chaque profil est inférieur à 0.3%.

Comme l'amplitude du maximum de contrainte reste constante sur toute la circonférence de la fissure, on peut supposer que l'initiation de la propagation se fait de manière simultanée en tout point du front lorsque  $t_{zz}^{Max}$  atteint la valeur critique de clivage du matériau  $t_c$ .

Dans le cas de la fissure elliptique, l'amplitude de l'extremum de contrainte est maximale en avant des extrémités du petit axe de l'ellipse ( $\sim 2.17 \times \sigma_0$ ), et minimale aux extrémités du grand axe ( $\sim 1.67 \times \sigma_0$ ). La position du maximum varie légèrement passant de  $0.65 \times \ell$  (profil n°1) à  $0.69 \times \ell$  (profil n°3). Ce résultat est conforme aux observations faites par l'approche des facteurs d'intensité de contrainte. La propagation s'initie aux extrémités du petit axe, la fissure reprenant petit à petit une forme circulaire.



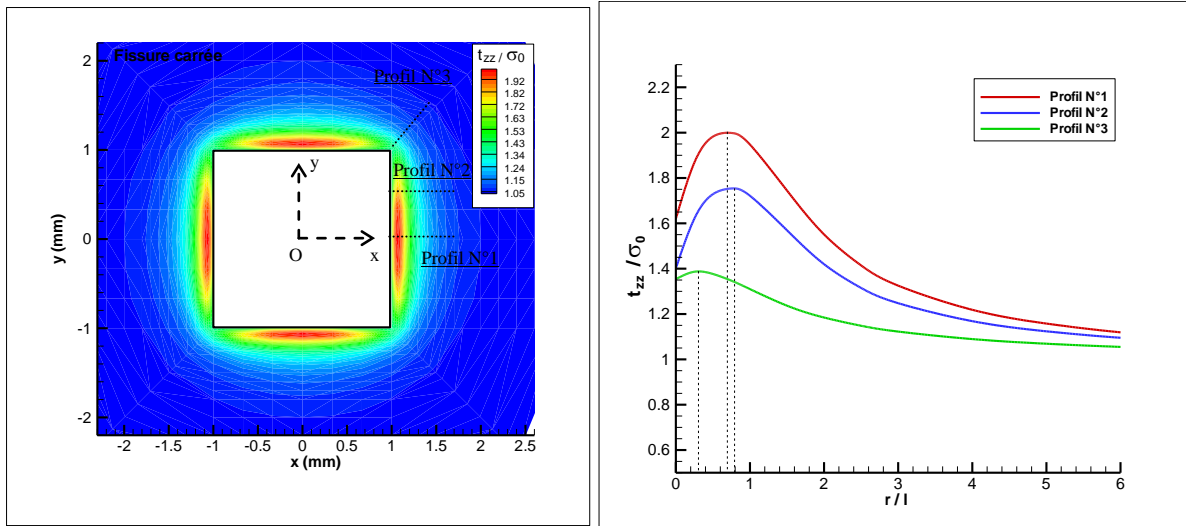


Figure 3.16 : Variation de  $t_{zz}$  dans le plan Oxy en avant du front de fissures circulaire, elliptique et carrée

Enfin, dans le cas de la fissure carrée, l'amplitude du maximum de contrainte est maximale en avant du front au centre de chaque côté de la fissure ( $\sim 2 \times \sigma_0$ ). Elle décroît progressivement lorsqu'on tend vers les sommets du carré où elle atteint sa valeur minimale ( $\sim 1.39 \times \sigma_0$ ). Là encore, cette observation est conforme aux résultats obtenus dans le Chapitre 2 à l'aide de l'approche classique (FIC). L'initiation de la propagation se produit au centre de chaque côté de la fissure.

A la différence du cas de la fissure circulaire (et elliptique), la localisation du maximum varie de manière notable suivant la position sur le front. Au centre du côté, celle-ci est d'environ  $r \cong 0.69 \times \ell$ , et passe à  $r_{\text{Max}} \cong 0.31 \times \ell$  aux coins du carré. Cette observation laisse supposer que la forme de la fissure influe sur les zones d'initiation de l'endommagement en avant du front. Notons que l'étude des facteurs d'intensité de contrainte ne permet pas de retrouver ce résultat.

### 3.6.3. Fissure débouchante en traction

Comme dans le chapitre 2, l'objectif est d'analyser l'influence de la profondeur de la fissure sur le champ de contrainte. Le cas étudié et les dimensions des deux fissures testées sont présentés sur les Figures (3.17) et (3.18). Les paramètres  $a$  et  $b$  correspondent respectivement à la profondeur et la demie-largeur en surface de la fissure. Cette dernière est discrétisée en 42 éléments et soumise à un effort de traction uniforme.



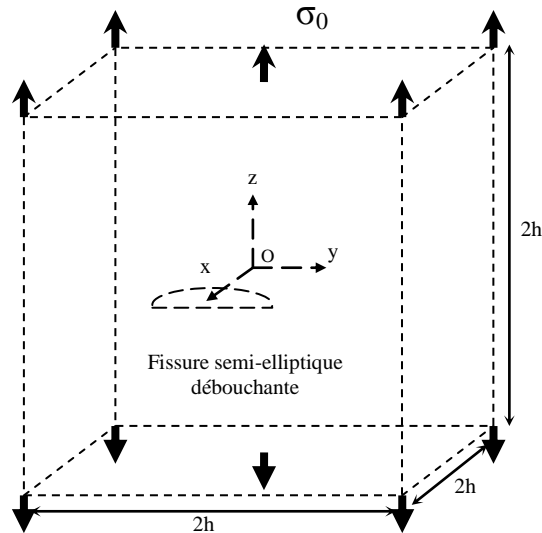


Figure 3.17 : Fissure semi-elliptique débouchante en traction

Pour ce cas, nous avons conservé la fonction d'erreur comme fonction d'atténuation non-locale. La longueur caractéristique est choisie telle que  $b/\ell = 10$ .

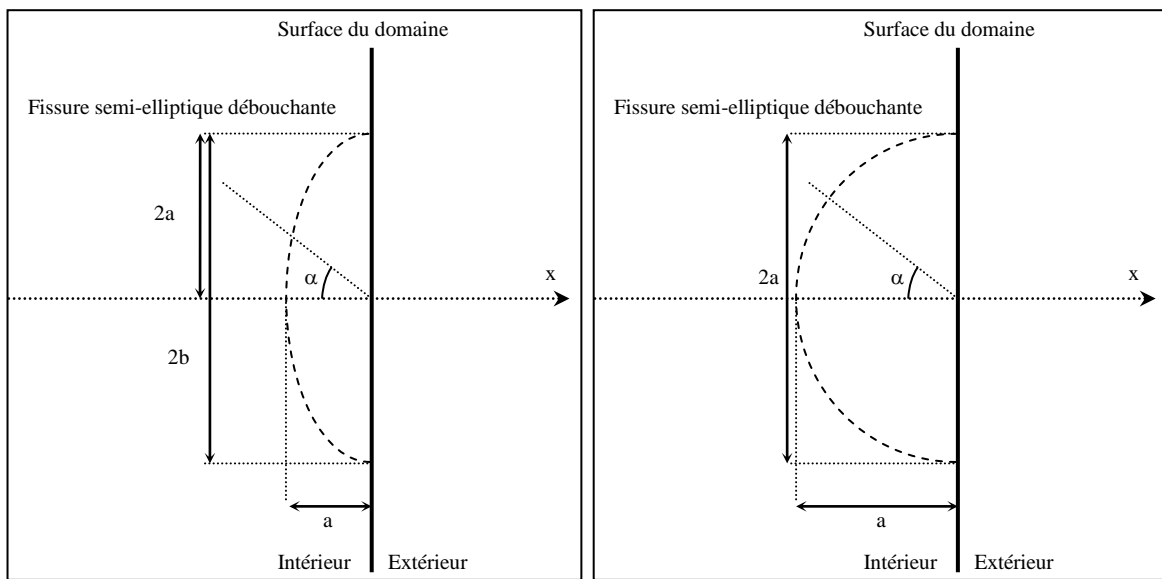


Figure 3.18 : Représentation schématique des fissures débouchantes

Les variations de la contrainte d'ouverture  $t_{zz}$ , en avant du front, sont représentées sur les cartographies de la Figure (3.19). Des différences notables apparaissent suivant la profondeur de la fissure.

Pour  $b = 2a$ ,  $t_{zz}$  est maximale en avant du point le plus profond de la fissure. La valeur de ce maximum diminue lorsqu'on suit le front vers les extrémités débouchantes de la fissure (Figures (3.19) et (3.20)). Ce résultat laisse supposer une initiation de la propagation au fond de la fissure vers l'intérieur du domaine, et rejoint les constatations faites dans l'approche classique (Chapitre 2).

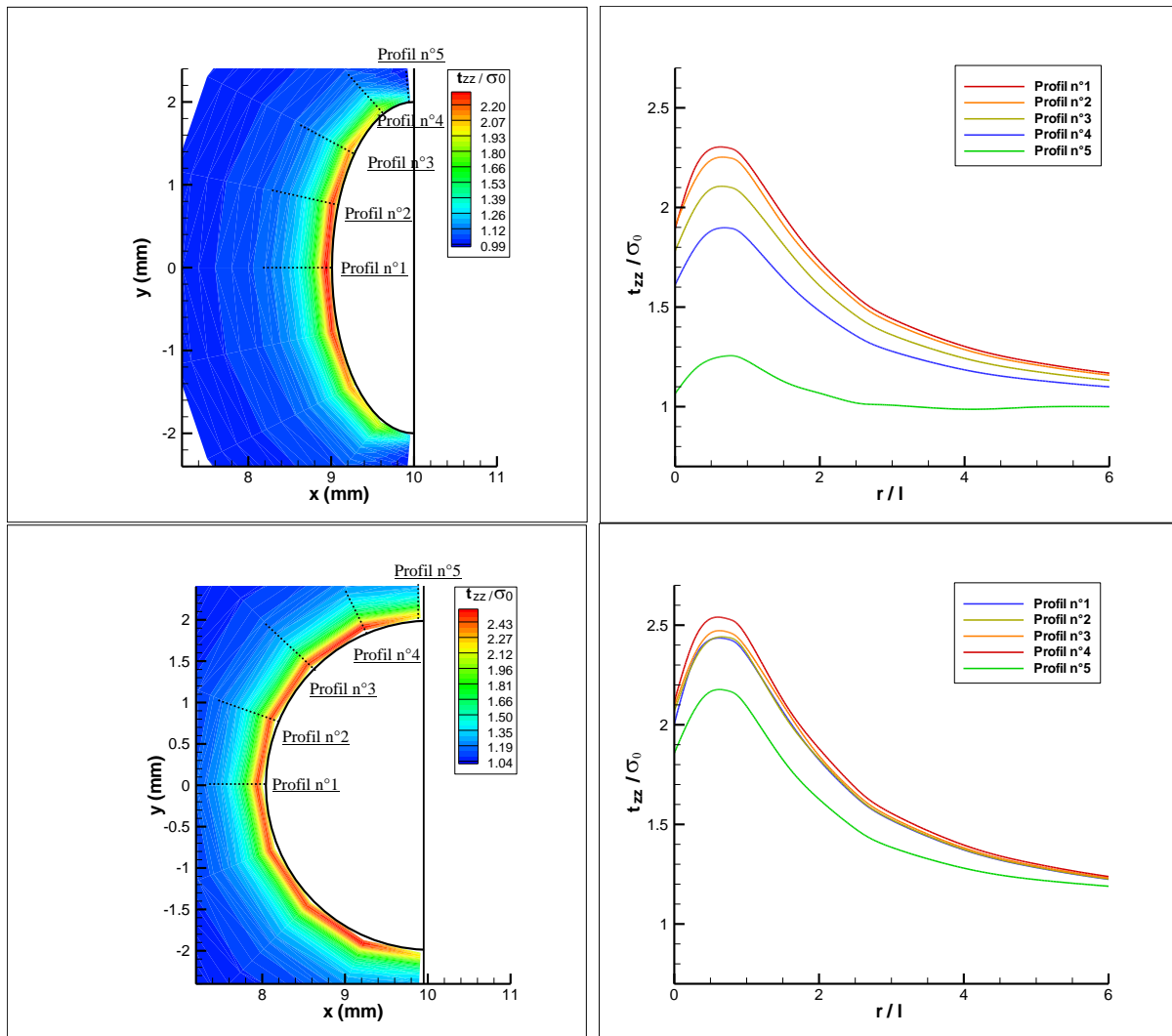


Figure 3.19 : Variations de  $t_{zz}$  en avant du front d'une fissure semi-elliptique débouchante

Pour  $b = a$ , le maximum de contrainte passe par un minimum local en fond de fissure, augmente doucement lorsqu'on tend vers les extrémités débouchantes de la fissure, puis chute brutalement à l'approche de la surface externe du domaine. Cette situation est clairement représentée sur la Figure (3.20) où l'on peut observer l'évolution de la valeur du maximum en fonction de l'angle  $\alpha$ .

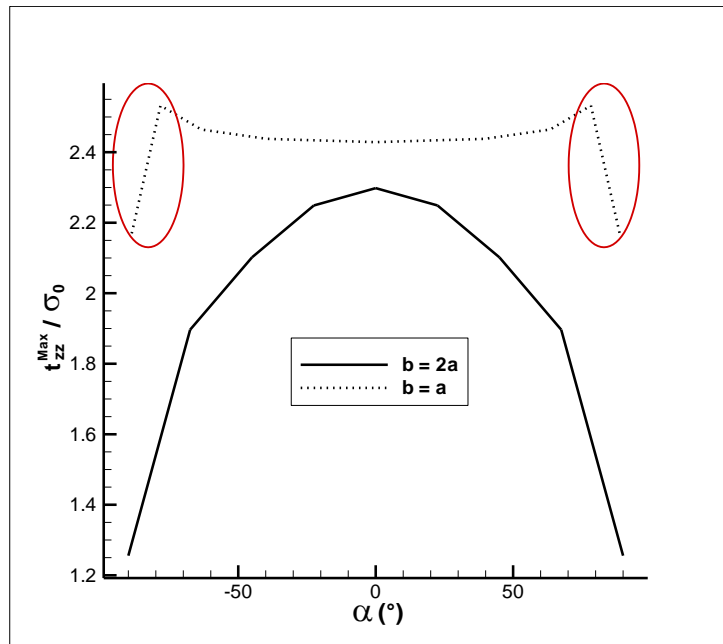


Figure 3.20 : Evolution de la valeur du maximum de contrainte en fonction de  $\alpha$

Cette « chute » de la contrainte (cerclée de rouge sur la Figure (3.20)) est en contradiction avec les résultats obtenus dans l'approche classique, qui prédisent au contraire une contrainte maximale aux extrémités débouchantes de la fissure.

Nous touchons là une insuffisance du modèle de Eringen. La stratégie utilisée dans ce chapitre ne permet pas de traiter rigoureusement le cas de milieux bornés. Au voisinage de la frontière externe du domaine, le calcul des contraintes non-locales est perturbé par un effet de bord lié à la troncature du domaine d'influence de la fonction d'atténuation. Comme nous le verrons dans le Chapitre 4, l'utilisation d'une loi de comportement légèrement modifiée permet de résoudre ce problème.

### 3.6.4. Prédiction de l'angle de propagation

Notre objectif est de déterminer l'angle de propagation de la fissure en nous basant sur les variations du champ de contrainte non-local. Pour cela, nous avons choisi de « revisiter » le critère de bifurcation de Erdogan et Sih (1963), qui prédit la propagation de la fissure dans la direction pour laquelle la contrainte circonférentielle est maximale. Ce critère est particulièrement adapté dans le cas de la rupture fragile.

En nous plaçant dans le cadre non-local, nous nous intéressons aussi brièvement aux résultats prédits par le critère de Sih (1974) basé sur la densité d'énergie de déformation.

Sauf mention contraire, la fonction d'atténuation utilisée dans cette partie est la fonction d'erreur de Gauss, et la longueur caractéristique est fixée de telle sorte que  $c/\ell = 10$ .

#### *Fissure circulaire en mode I pur*

La définition des coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  est rappelée sur la Figure (3.21).

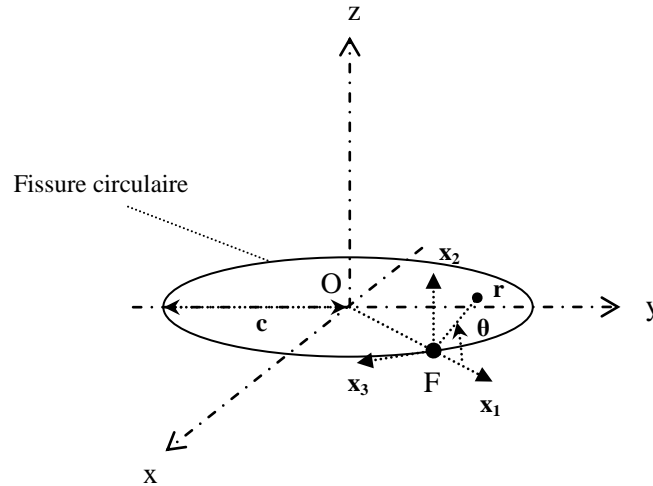


Figure 3.21 : Représentation schématique de la fissure circulaire et définition du repère polaire dans le plan  $Fx_1x_2$

La fissure est soumise à une sollicitation de mode I pur (chargement de traction uniforme). Le problème est donc à symétrie axiale et les variations du champ de contrainte sont identiques dans tous les plans  $Fx_1x_2$ , quelle que soit la position du point F sur le front.

Plaçons-nous dans le plan  $Oyz$ . Dans ce cas, la valeur de la contrainte circonférentielle  $t_{\theta\theta}$  se déduit des composantes  $t_{yy}$ ,  $t_{zz}$  et  $t_{yz}$  du tenseur de contrainte dans le repère global  $Oxyz$ , et de l'angle polaire  $\theta$ .

$$t_{\theta\theta} = \sin^2(\theta)t_{yy} - \sin(2\theta)t_{yz} + \cos^2(\theta)t_{zz}$$

D'après le critère de Erdogan et Sih, la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte circonférentielle est maximale. Les variations de  $t_{\theta\theta}$  dans le plan  $Oyz$  en avant du front sont représentées sur la Figure (3.22).

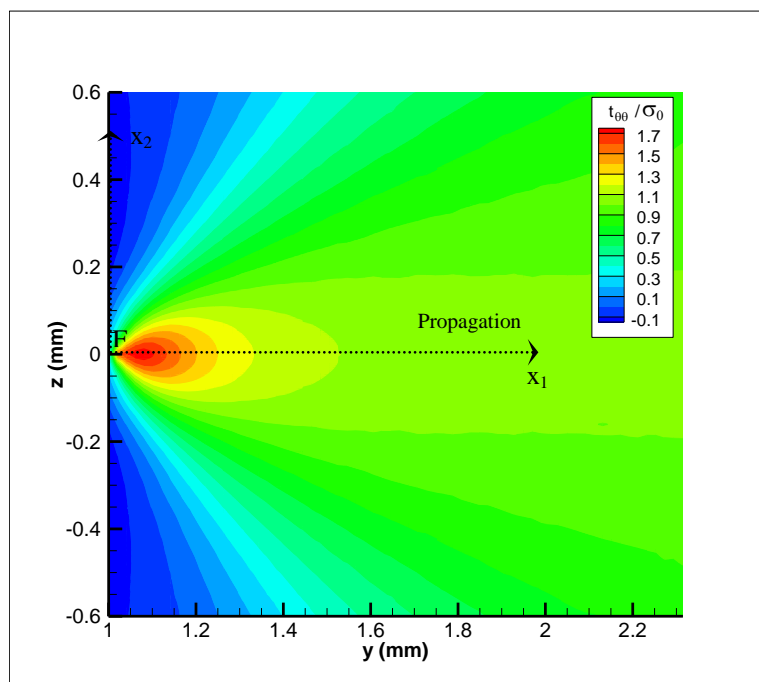


Figure 3.22 : Variation de  $t_{\theta\theta}$  dans le plan  $Oyz$  en avant du front de fissure

Le maximum de contrainte se situe dans le prolongement du plan de la fissure en avant du front. Ce résultat indique que la fissure devrait se propager dans son propre plan sans bifurquer. Cette observation est en accord avec l'expérience et les prédictions faites par les critères classiques de branchement.

### *Fissure circulaire en mode de cisaillement pur*

Nous étudions désormais une fissure circulaire soumise à un effort de cisaillement uniforme. Le cas étudié est schématisé sur la Figure (3.23a).

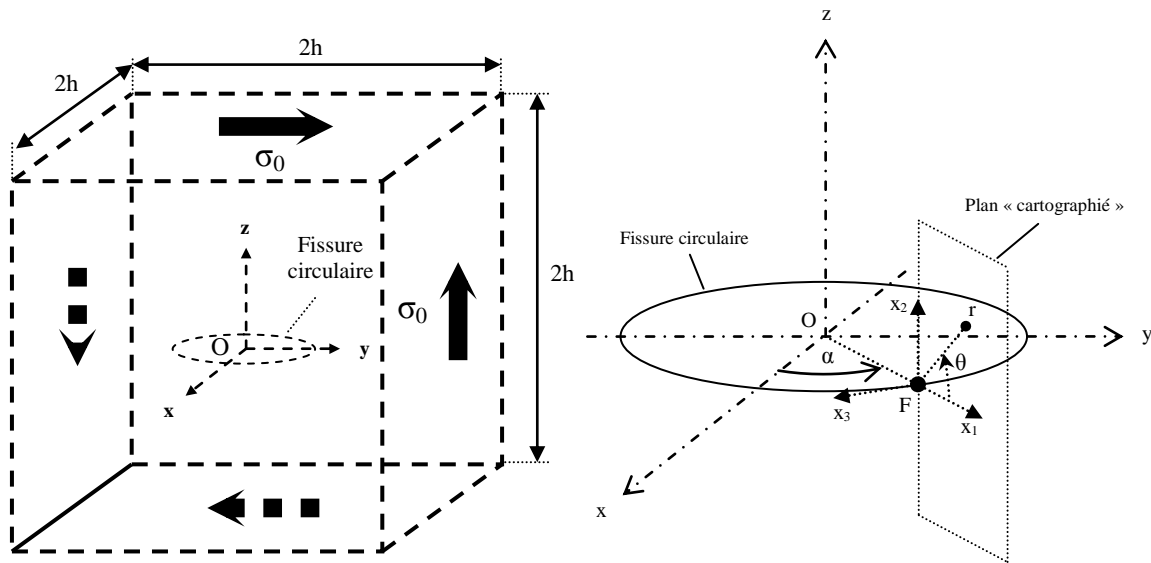


Figure 3.23 : (a) Fissure circulaire soumise à un effort de cisaillement uniforme ; (b) Représentation schématisique du plan cartographié en avant du front de fissure

Les conditions aux limites pour ce cas sont les suivantes :

- Les faces supérieure et inférieure ( $z = \pm h$ ) sont soumises à une contrainte de cisaillement uniforme  $\sigma_0$  respectivement dans les directions  $y$  et  $-y$ .
- Les deux faces latérales en  $y = \pm h$ , sont soumises à la même contrainte  $\sigma_0$ , mais dans respectivement dans les directions  $z$  et  $-z$ .
- La composante  $u_x$ , ainsi que les composantes  $t_y$  et  $t_z$  du vecteur contrainte sont fixées à zéro sur les faces en  $x = \pm h$ . Les trois composantes du déplacement sont bloquées au nœud central de chaque face.

Le maillage de la fissure comporte 48 éléments.

Afin de déterminer l'angle probable de propagation pour ce cas de chargement, nous présentons les variations de la composante circonférentielle  $t_{\theta\theta}$  du champ de contrainte dans différents plans perpendiculaires au front de la fissure. Ces plans sont repérés par leur position angulaire  $\alpha$  le long du front (voir Figure (3.23b)).

Les cartographies obtenues pour  $\alpha = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$  et  $90^\circ$  sont représentées sur la Figure (3.24). La position angulaire du maximum de contrainte est notée  $\theta_p$  et la direction de propagation associée est matérialisée par une flèche en pointillés rouges.

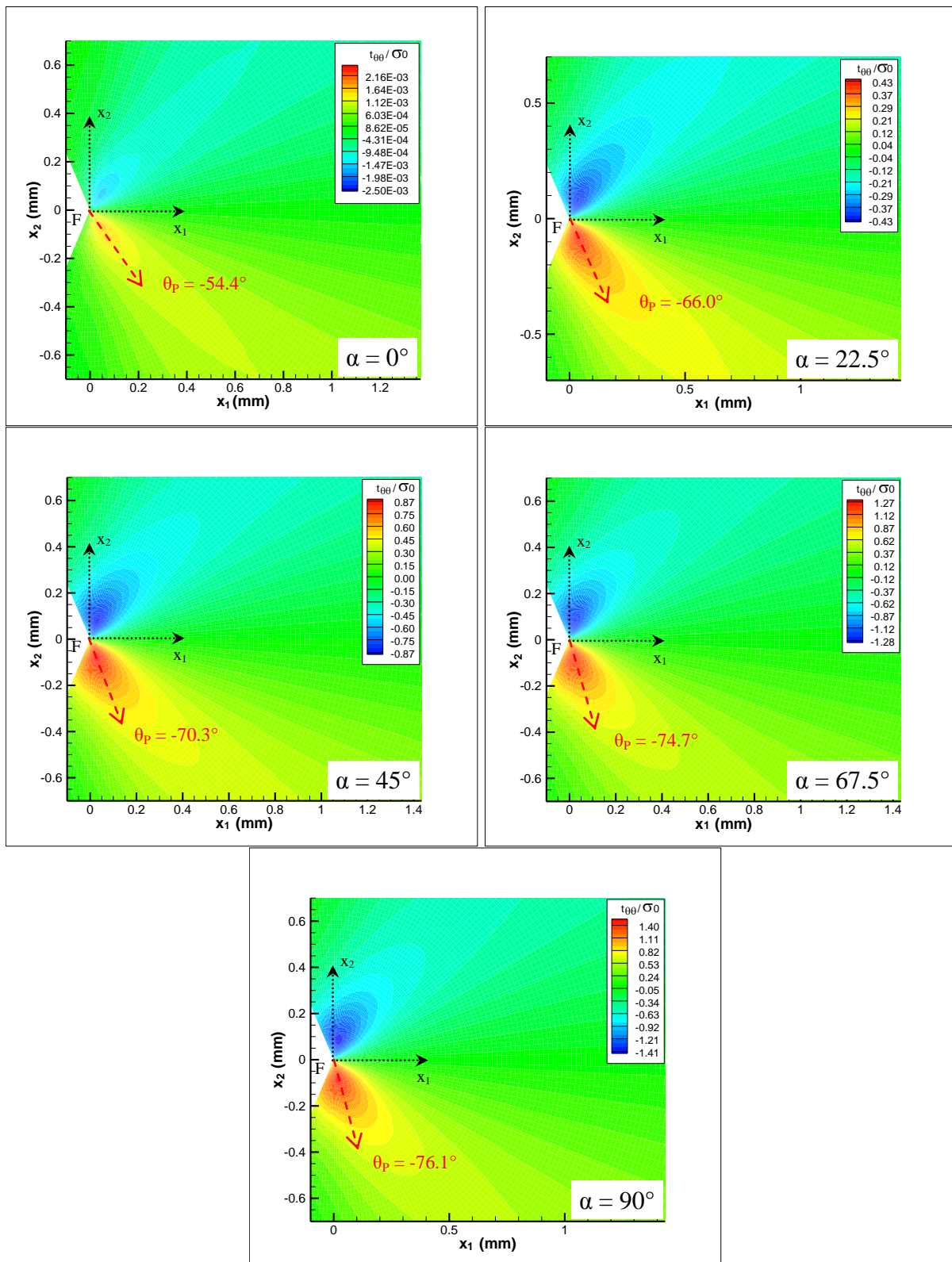


Figure 3.24 : Variations de la contrainte circonférentielle  $t_{\theta\theta}$  dans différents plans perpendiculaires au front – Fissure circulaire soumise à un effort de cisaillement uniforme

Quelle que soit la position le long du front, le maximum de contrainte se situe en dehors du plan de la fissure, ce qui laisse supposer que la fissure va bifurquer, en accord avec les prédictions faites par les critères classiques de propagation.

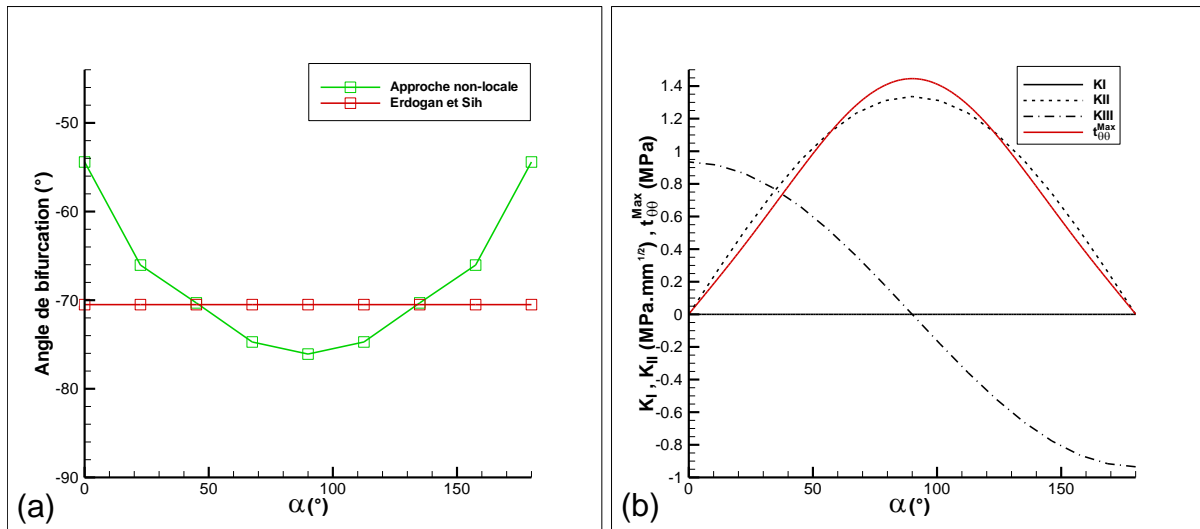


Figure 3.25 : (a) Evolution de l'angle de propagation le long du front (comparaison à l'angle prédit par le critère classique de Erdogan et Sih) ; (b) Evolution de la valeur du maximum de contrainte le long du front et variations associées des facteurs d'intensité  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$

Cependant, en l'absence de mode I, le critère de Erdogan et Sih prévoit un angle de propagation constant le long du front (Figure (3.25a)), quelles que soient les valeurs de  $K_{II}$  et  $K_{III}$ . Dans le cadre non-local, la position angulaire du maximum de contrainte varie lorsqu'on parcourt le front. En valeur absolue, l'angle de bifurcation est maximal en  $\alpha = 90^\circ$ , position pour laquelle  $K_{II}$  est maximal et  $K_{III}$  nul (Figure (3.25b)). Inversement,  $\theta_p$  est minimal en  $\alpha = 0^\circ$ , où  $K_{II}$  est nul et  $K_{III}$  maximal. Ce résultat laisse penser que le rapport  $K_{II}/K_{III}$  a une influence sur l'orientation de la propagation de la fissure. Cet effet ne semble pas visible dans l'approche classique à l'aide du critère de Erdogan et Sih.

Par ailleurs, l'évolution de la valeur du maximum de contrainte le long du front indique clairement que l'initiation de la propagation aura lieu en  $\alpha = 90^\circ$  (Figure 3.25b). Pour savoir si la fissure se propage, la stratégie consiste alors simplement à comparer la valeur de  $t_{00}^{Max}$  à la contrainte de clivage critique  $t_c$ .

En supposant que le mode II l'emporte sur le mode III, l'étude des variations de  $K_{II}$  et  $K_{III}$  débouche sur les mêmes conclusions. Cependant, l'importance de chaque mode dans le processus de rupture peut varier suivant le problème étudié. Dans ce cas, le choix d'un facteur d'intensité de contrainte équivalent adapté est nécessaire et peut se révéler compliqué.

### *Fissure circulaire inclinée en traction*

On considère une fissure circulaire, de rayon  $c$ , placée au centre d'un domaine cubique de grandes dimensions ( $h / c = 10$ ). Les extrémités du cube sont soumises à un effort de traction uniforme. L'orientation de la fissure par rapport à la direction d'application du chargement est paramétrée par  $\varphi$ , l'angle formé par les axes  $Oy$  et  $Oy'$ .  $\varphi$  correspond à l'angle d'inclinaison de la fissure (voir Figure (3.26)).

La frontière externe du domaine et la surface de la fissure sont respectivement discrétisées en 24 et 48 éléments.

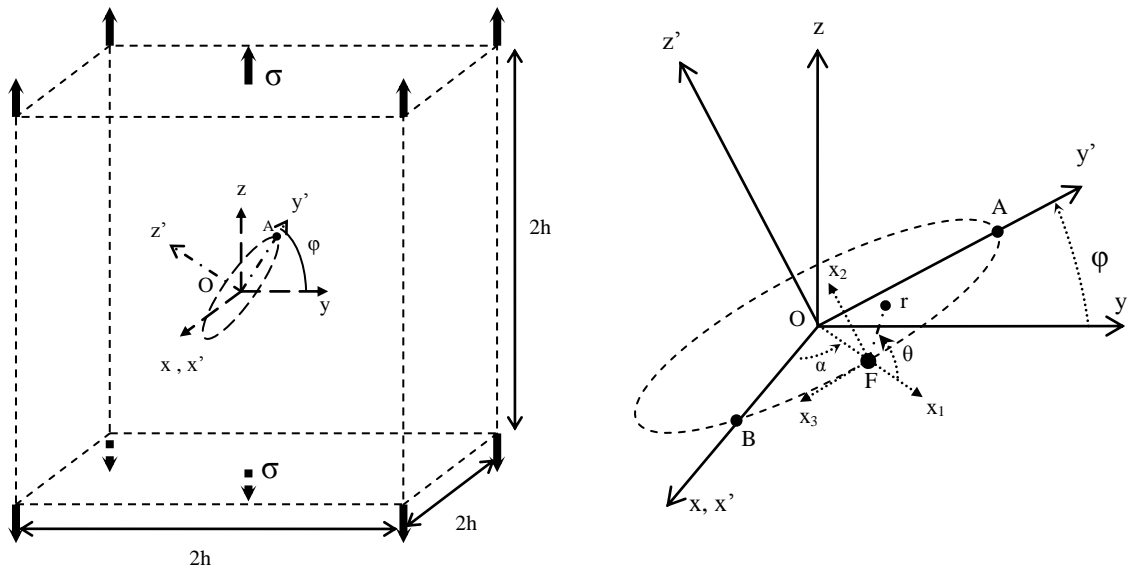
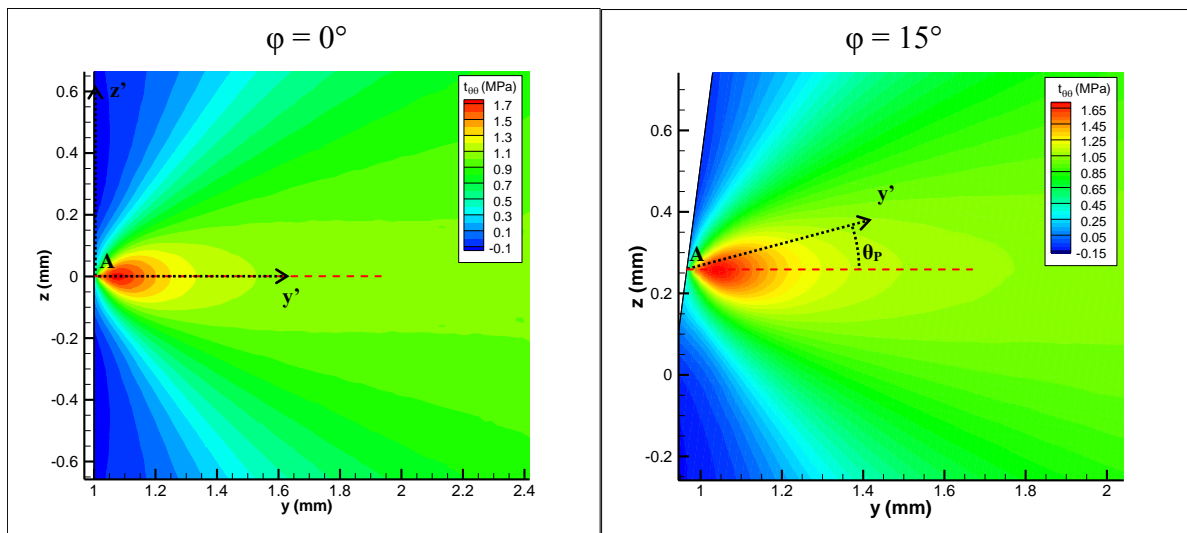


Figure 3.26 : Fissure circulaire inclinée soumise à un effort de traction

Pour déterminer la direction de propagation de la fissure, nous étudions l'évolution de la composante  $t_{\theta\theta}$  du tenseur de contrainte dans plusieurs plans perpendiculaires au front. Dans un premier temps, la longueur interne caractéristique est fixée de telle sorte que  $c/\ell = 10$ .

Les cartographies de la Figure (3.27) représentent les variations de  $t_{\theta\theta}$  en avant du point A (point culminant du front), pour différentes inclinaisons  $\varphi$  de la fissure. La position angulaire du maximum de contrainte, notée  $\theta_P$ , est indiquée de manière approximative par une droite en pointillés rouges.





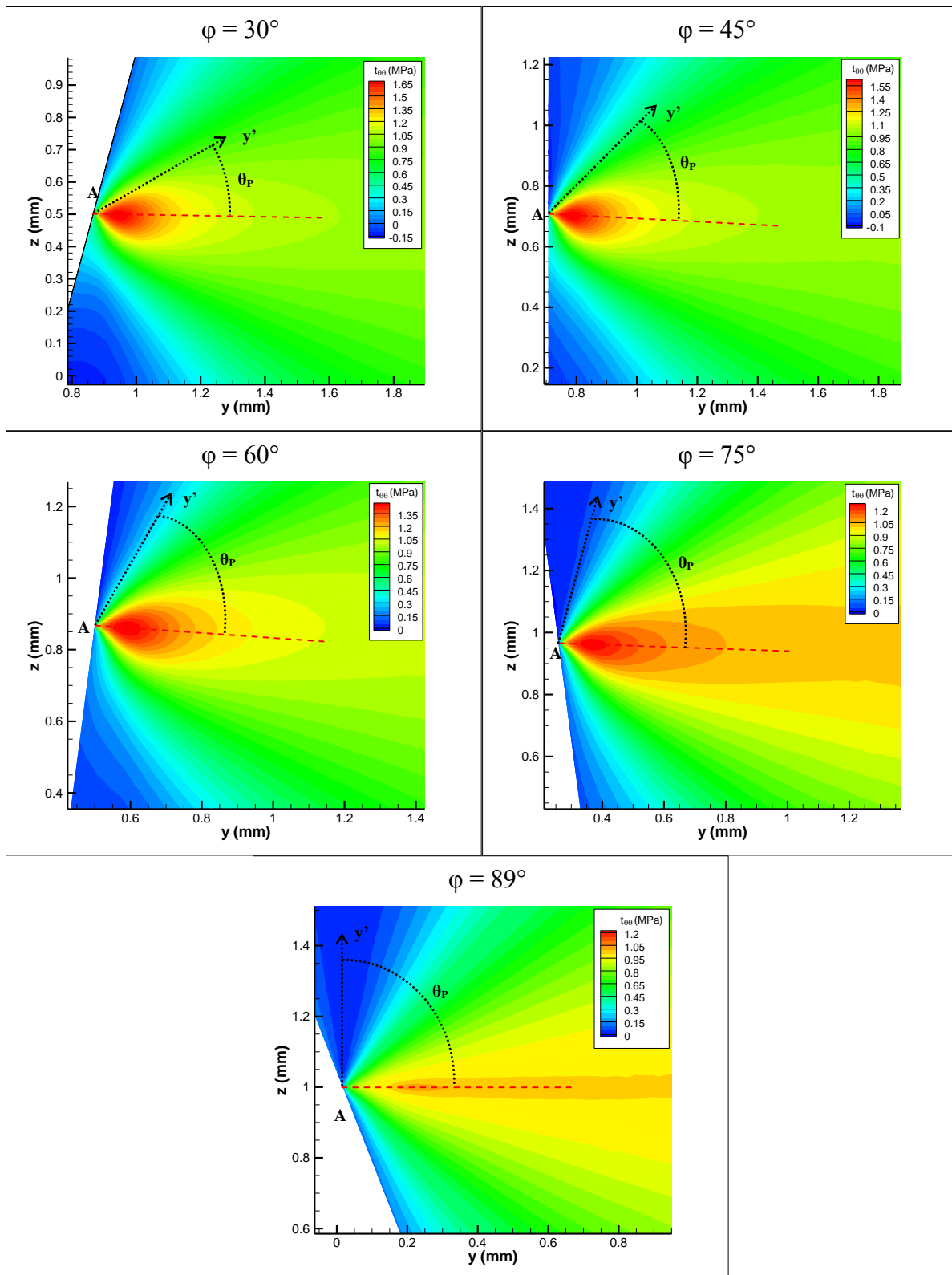


Figure 3.27 : Fissure circulaire inclinée soumise à un effort de traction uniforme  
Variations de la contrainte circonférentielle  $t_{\theta\theta}$  pour  $\varphi = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  et  $89^\circ$

Sur les cartographies, l'axe  $Ay'$  permet de visualiser l'orientation de la fissure. Lorsque  $Ay'$  est horizontal, le plan de la fissure est horizontal. Lorsque l'axe  $Ay'$  est vertical, la fissure est inclinée à  $90^\circ$  (Figure (3.26)).

Comme on peut le constater, et quelle que soit la valeur de l'inclinaison, le maximum de contrainte se situe approximativement dans un plan perpendiculaire à la direction d'application de l'effort de traction (direction z). Cette observation vient confirmer le fait qu'en mode mixte, la fissure tend à se propager dans la direction qui lui permet de se replacer en mode pur d'ouverture.

### Evolution de l'angle de propagation en fonction de l'inclinaison de la fissure

La Figure (3.28) présente l'évolution de l'angle de propagation en fonction de l'inclinaison de la fissure, et pour différentes valeurs de la longueur interne caractéristique ( $c / \ell = 5, 10, \text{ et } 100$ ). Les résultats obtenus à l'aide du critère classique de Sih sont indiqués à titre de comparaison.

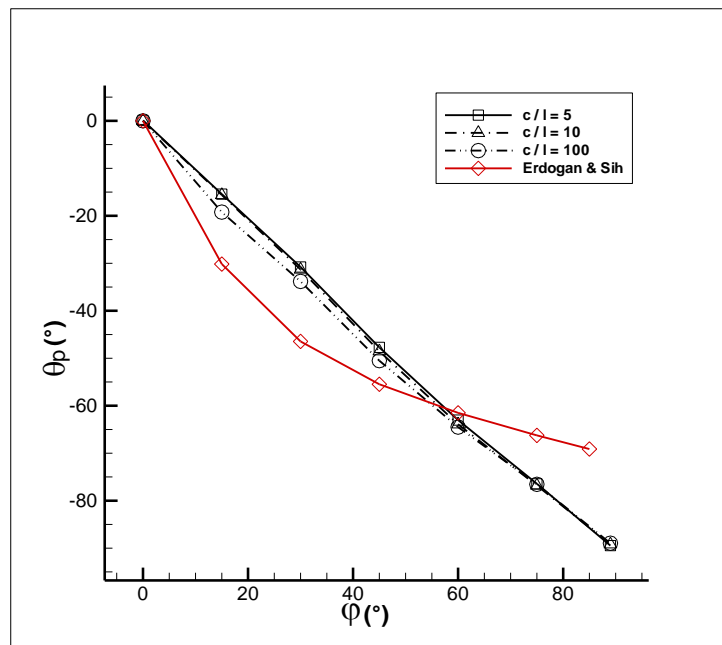


Figure 3.28 : Evolution de l'angle de propagation au point A en fonction de l'inclinaison de la fissure – Cas de traction uniforme

Quel que soit le cadre, local ou non-local, l'angle de propagation prédit est nul pour  $\varphi = 0^\circ$  (inclinaison nulle) puis décroît lorsque la valeur de  $\varphi$  augmente. L'évolution de l'angle de propagation est différente suivant l'approche employée. La courbe classique présente une forme incurvée, tandis que la courbe non-locale suit une évolution quasi-linéaire.

On sait qu'en mécanique de la rupture fragile, une fissure en mode mixte tend à se propager en se replaçant en situation de mode I pur. De ce point de vue, les résultats obtenus dans le cadre de l'approche non-local sont cohérents et de meilleure qualité que les résultats prédits par le critère classique de Erdogan et Sih.

Le même type de résultats a été obtenu pour une fissure de géométrie carrée.

Notons que pour la gamme de valeurs étudiée, la longueur caractéristique «  $\ell$  » n'a qu'une influence très limitée sur l'angle de propagation de la fissure.

### Evolution de l'angle de propagation le long du front

La Figure (3.29a) représente l'évolution de l'angle de propagation le long du front pour différentes inclinaisons de la fissure ( $\varphi = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ \text{ et } 85^\circ$ ).

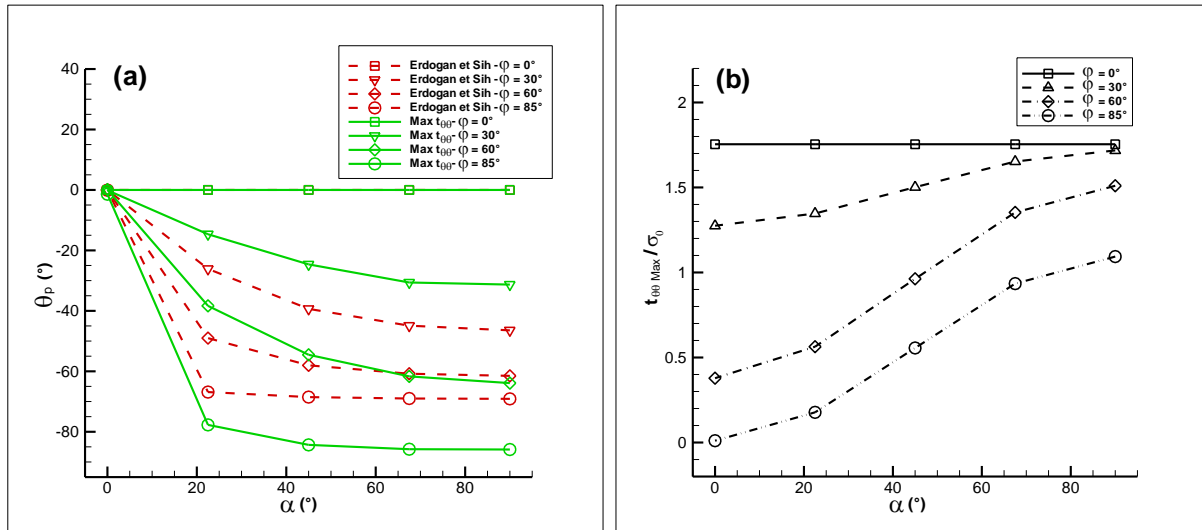


Figure 3.29 : (a) Evolution de l'angle de propagation le long du front ; (b) Evolution de la valeur maximale de  $t_{00}$  le long du front – Cas de traction uniforme

En valeur absolue,  $\theta_p$  est maximal en  $\alpha = 90^\circ$  (point A) et diminue progressivement jusqu'à s'annuler en  $\alpha = 0^\circ$ . Les parties supérieure et inférieure du front de la fissure ( $y' = \pm c$ ) tendent donc à se propager en branchant dans un plan perpendiculaire à l'effort de traction, tandis que les parties latérales du front ( $x' = \pm c$ ) vont se propager de façon coplanaire. La transition entre ces deux comportements se fait de manière plus ou moins rapide suivant l'inclinaison  $\phi$  de la fissure (Figure (3.29a)). Des résultats similaires sont présentés par Mroz et Mroz (2010) dans un état de l'art consacré aux critères de bifurcation.

D'autre part, les valeurs atteintes par le maximum de contrainte montrent que la propagation débute sur la partie supérieure du front. Cette tendance est d'autant plus marquée que l'angle d'inclinaison est important (Figure (3.29b)).

Ce résultat démontre à nouveau le rôle prépondérant du mode II par rapport au mode III dans l'initiation de la propagation. L'initiation se produit aux points du front où  $K_{II}$  est maximal.

Les Figures (3.30a) et (3.30b) sont deux illustrations supplémentaires du comportement de la fissure respectivement pour une inclinaison de  $30^\circ$  et de  $60^\circ$ . Les vecteurs sont orientés dans la direction du maximum de contrainte situé en avant du front et leur norme est proportionnelle à l'amplitude de ce maximum.

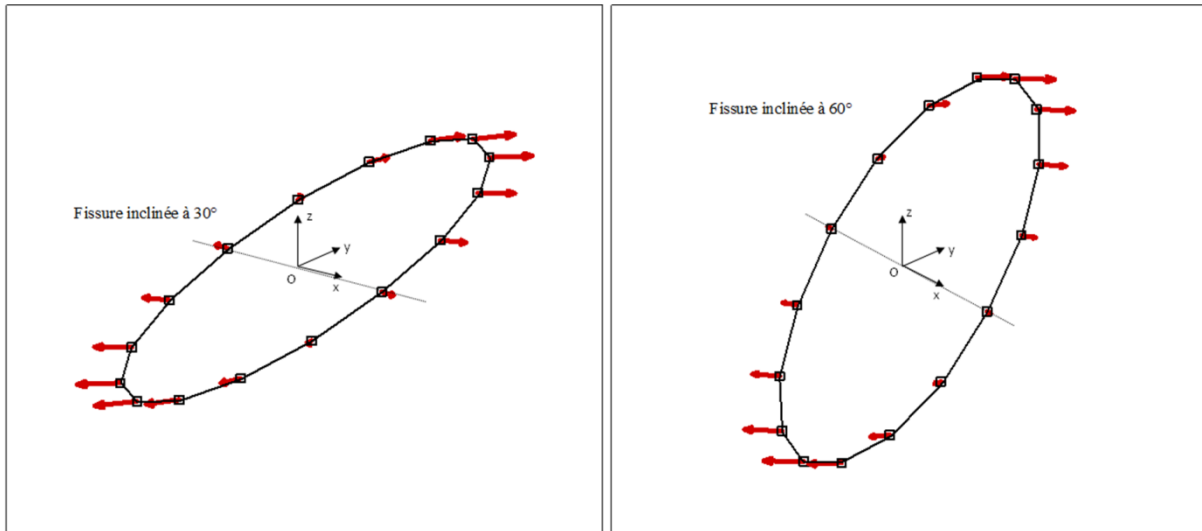
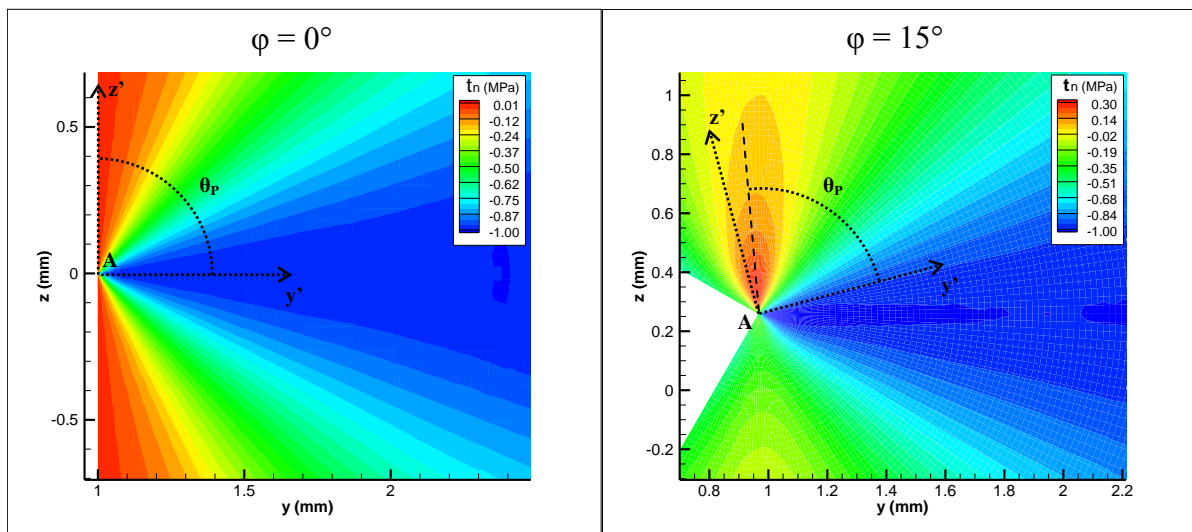


Figure 3.30 : Initiation et direction de la propagation d'une fissure circulaire en traction  
(a) inclinée à  $30^\circ$  ; (b) inclinée à  $60^\circ$

### *Fissure inclinée en compression*

On étudie désormais une fissure circulaire inclinée soumise à un effort de compression uniforme. Toutes les notations introduites dans la partie précédentes sont conservées. Suivant la stratégie déjà utilisée dans les parties précédentes, nous déterminons la direction de propagation de la fissure en repérant la position du maximum de  $t_{\theta\theta}$  dans plusieurs plans perpendiculaires au front. La longueur interne caractéristique est fixée de telle sorte que  $c / \ell = 10$ .

Les cartographies de la Figure (3.31) représentent les variations de  $t_{\theta\theta}$  en avant du point A, pour différentes inclinaisons  $\varphi$  de la fissure. La position angulaire du maximum de contrainte, notée  $\theta_p$ , est indiquée de manière approximative par une droite en pointillés noirs.



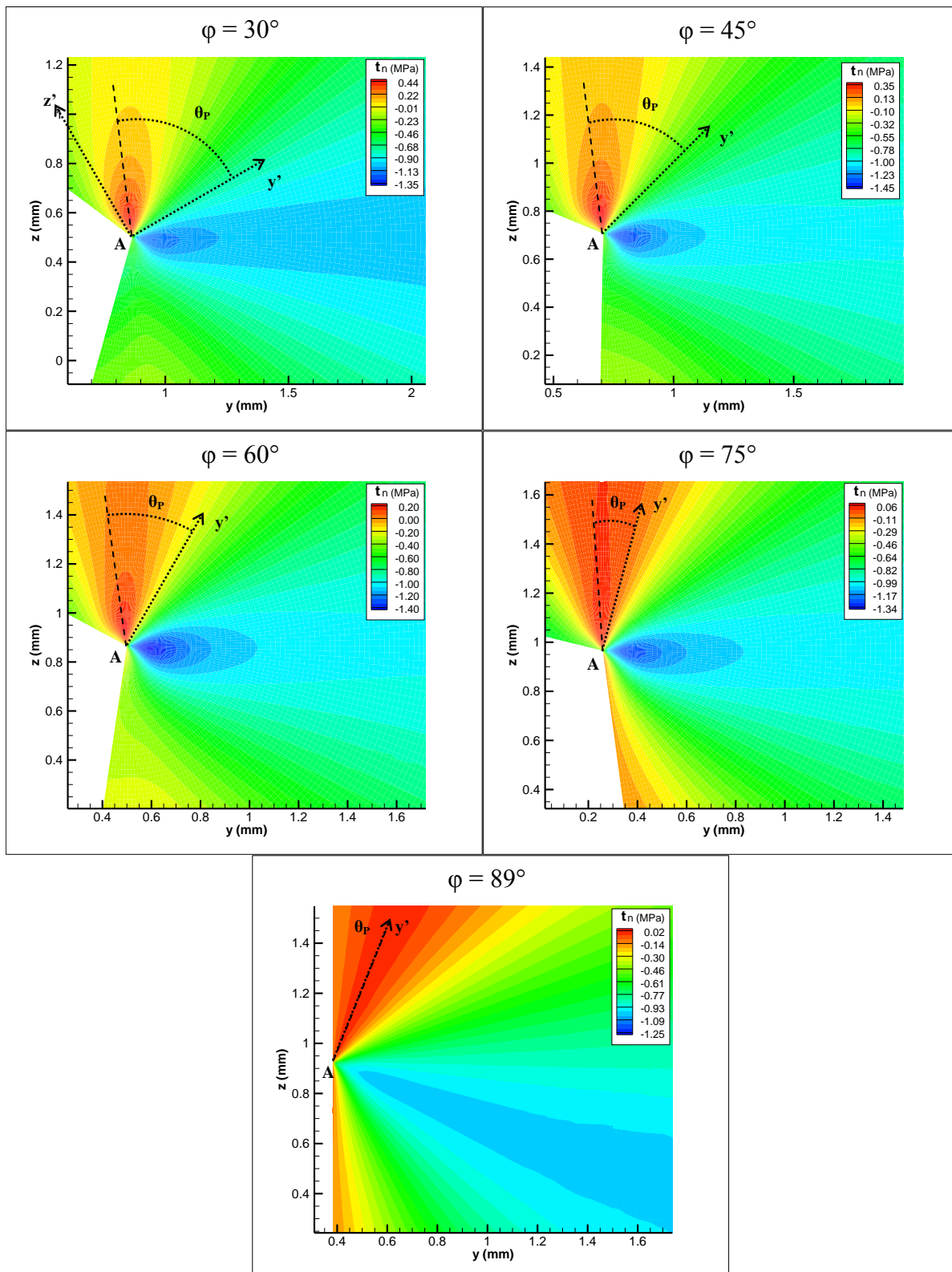


Figure 3.31 : Fissure circulaire inclinée soumise à un effort de compression uniforme  
Variations de la contrainte circonférentielle  $t_{\theta\theta}$  pour différentes inclinaisons  $\varphi$

En étudiant les cartographies de la Figure (3.31), on constate que plus l'angle d'inclinaison de la fissure augmente, plus la position angulaire du maximum de contrainte se rapproche du plan de la fissure (l'axe  $Ay'$ ).

L'évolution de l'angle de propagation  $\theta_p$  en fonction de l'inclinaison de la fissure est représentée sur la Figure (3.32), pour différentes valeurs de la longueur caractéristique.

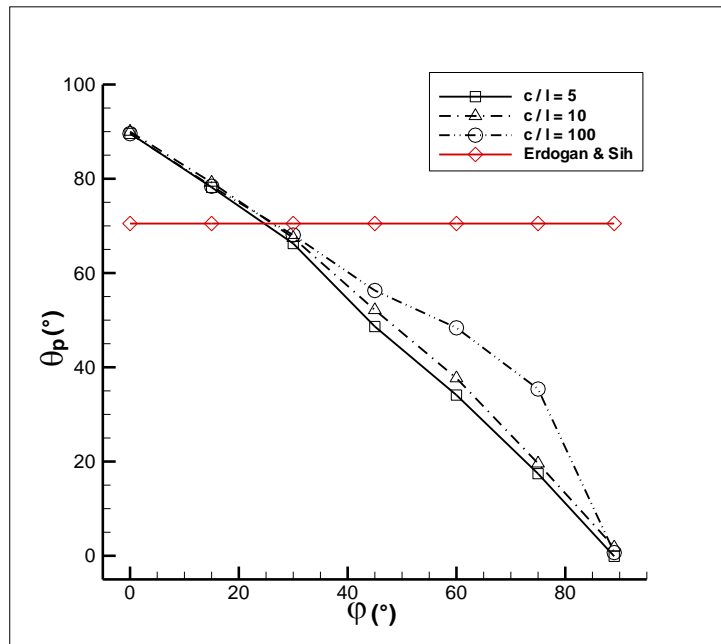


Figure 3.32 : Evolution de l'angle de propagation au point A en fonction de l'inclinaison de la fissure – Cas de compression uniforme

Pour une inclinaison nulle, la direction de propagation est perpendiculaire au plan de la fissure. Lorsque  $\phi$  augmente, l'angle  $\theta_p$  diminue de manière quasi linéaire (excepté pour  $c / \ell = 100$ ) et s'annule pour  $\phi = 90^\circ$ . La fissure tend à se propager dans un plan parallèle à la direction d'application du chargement de compression. Pour un matériau fragile, ce résultat est conforme aux observations expérimentales (Dyskin et al. (2003)).

L'approche non-locale semble à nouveau supérieure au critère de Erdogan et Sih, qui prédit le même angle de propagation quelle que soit l'inclinaison de la fissure. L'utilisation des facteurs d'intensité de contrainte paraît donc insuffisante pour prédire correctement le comportement de la fissure en présence de compression.

Pour  $c / \ell = 100$ , l'évolution de l'angle de bifurcation varie notablement. Pour ce cas de chargement, la longueur caractéristique a donc une influence non négligeable sur la direction de propagation (en particulier lorsque  $\phi > 45^\circ$ ).

La longueur caractéristique étant fixée de telle sorte que  $c / \ell = 10$ , nous représentons l'évolution de  $\theta_p$  le long du front pour différentes inclinaisons de la fissure (Figure (3.33a)). Pour le même problème, le critère classique de Erdogan et Sih prédit un angle de propagation constant de  $70.5^\circ$ , quelle que soit la position le long du front.

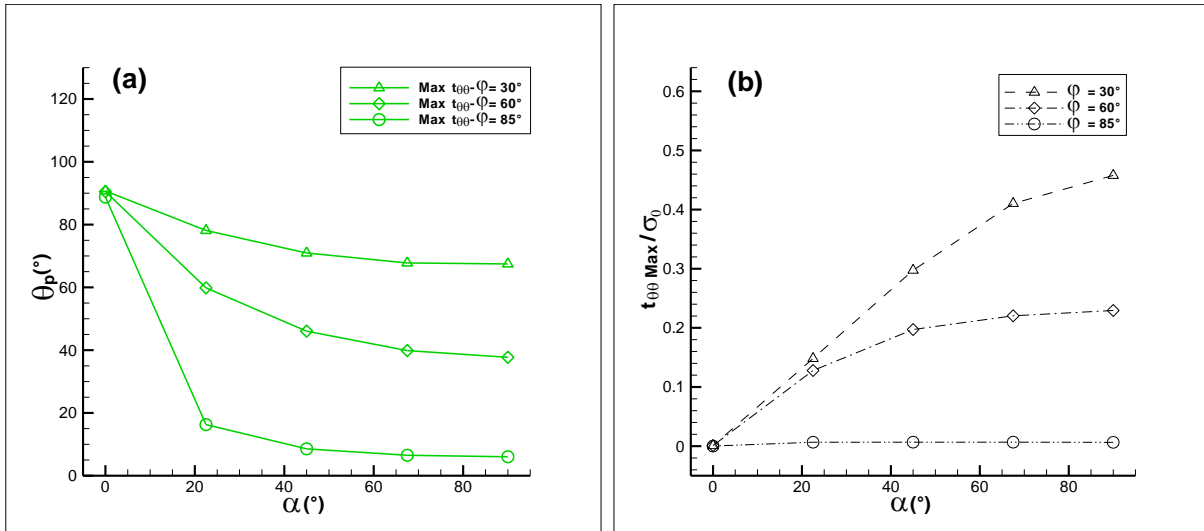


Figure 3.33 : (a) Evolution de l'angle de propagation le long du front ; (b) Evolution de la valeur maximale de  $t_{\theta_0}$  le long du front – Cas de compression uniforme

Dans le cadre non-local, l'angle de propagation dépend clairement de la position le long du front de la fissure. L'angle de bifurcation est moins important en  $\alpha = 90^\circ$  (point A), qu'au point B situé en  $\alpha = 0^\circ$ . Cependant, quelle que soit leur position, tous les points du front tendent à se propager dans un plan parallèle à la direction d'application de l'effort de compression.

Dans tous les cas, l'initiation de la propagation intervient au point A (Figure (3.33b)).

Les Figures (3.34a) et (3.34b) permettent de représenter concrètement les résultats des Figures (3.33a) et (3.33b). Comme dans la partie précédente, la direction de propagation est indiquée par l'orientation du vecteur et la norme de ce dernier est proportionnelle à l'amplitude du maximum de contrainte en avant du front.

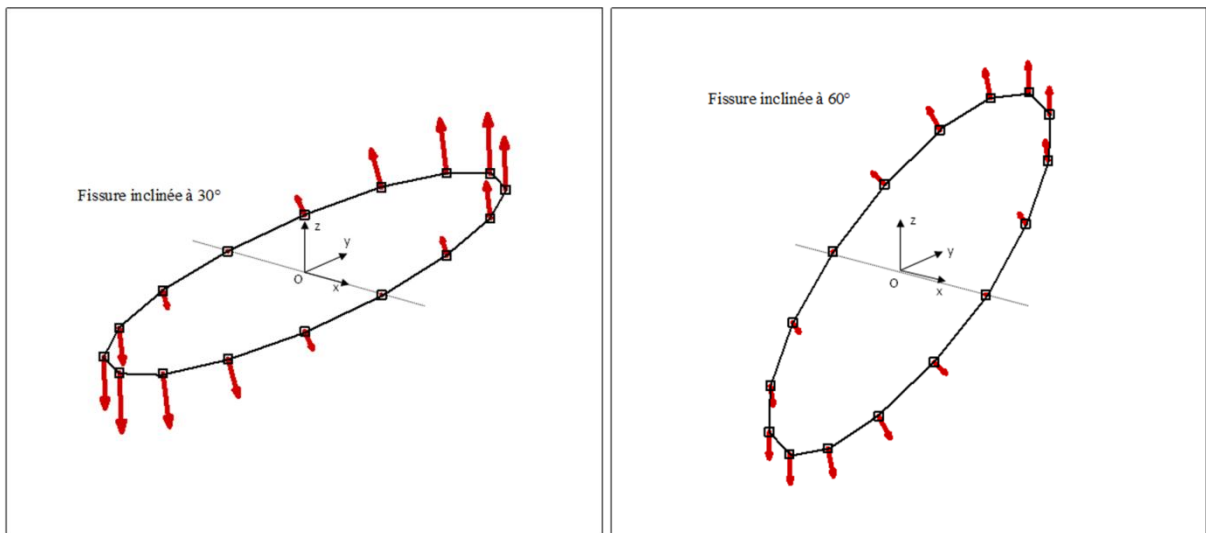


Figure 3.34 : Initiation et direction de la propagation d'une fissure circulaire en compression (a) inclinée à  $30^\circ$  ; (b) inclinée à  $60^\circ$





## Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté une stratégie numérique pour résoudre le problème d'une fissure dans un milieu infini à comportement élastique non-local. Elle est basée sur l'intégration des contraintes locales obtenues par la méthode des éléments de frontière

Les premiers résultats obtenus démontrent l'intérêt d'une modélisation non locale du comportement. En effet, la prise en compte des interactions à longue distance permet une description plus fine du comportement élastique au voisinage de la fissure. Les singularités inhérentes au modèle classique sont éliminées. Les contraintes sont finies en pointe de fissure et présentent un maximum situé en avant du front.

Une particularité notable du modèle non-local est l'introduction d'une longueur interne caractéristique du matériau. Cette longueur permet, dans une certaine mesure, de prendre en compte les effets de la microstructure sur le comportement élastique au voisinage du front de fissure. Ainsi, la position et l'intensité du maximum de contrainte dépendent clairement de la longueur caractéristique. Sa valeur doit être choisie en fonction de l'échelle à laquelle intervient le processus de rupture (distance interatomique, taille d'un grain...).

Ces résultats sont particulièrement intéressants car ils permettent d'envisager l'utilisation d'un critère de propagation plus naturel basé sur la contrainte, tel que l'envisageait Griffith à ses débuts. On peut notamment contrôler la stabilité de la fissure en comparant l'amplitude du maximum local de contrainte à la valeur critique de clivage du matériau. De plus, l'angle de propagation de la fissure se déduit de la position du maximum de contrainte en avant du front.

Suivant cette philosophie, nous avons étudié l'influence de la forme de la fissure sur les variations du champ de contrainte au voisinage du front. Comme dans l'approche classique, les résultats indiquent qu'une fissure elliptique ou carrée se développe en reprenant une forme circulaire.

L'étude d'un cas de fissure débouchante a permis de souligner une insuffisance du modèle d'élasticité non locale de Eringen. A proximité de la surface externe du domaine, les résultats prédits par le modèle non-local sont perturbés et diffèrent sensiblement de ceux prévus par les facteurs d'intensité de contrainte.

Enfin, nous avons revisité le critère classique de bifurcation de Erdogan et Sih pour déterminer l'angle de propagation d'une fissure soumise à plusieurs cas de sollicitation (traction, compression, cisaillement). L'approche non-locale donne des résultats très intéressants pour les cas de chargement où le mode I est absent (cas que l'approche classique ne permet pas de traiter correctement). En présence de compression, le critère de Erdogan et Sih « non-local » permet notamment de retrouver des angles de bifurcations conformes à l'expérience (la fissure tend à se propager dans un plan parallèle à la direction d'application de l'effort de compression).

L'approche non-locale permet donc non seulement d'introduire l'influence de la microstructure sur le comportement mécanique du solide (via la longueur interne caractéristique), mais aussi, en se ramenant à un critère de propagation fondé sur la contrainte, elle permet de traiter des cas problématiques dans le cadre classique de la MLR.

Ce chapitre a donc permis de démontrer l'intérêt d'une modélisation non-locale du comportement élastique au voisinage de la fissure. Nous nous proposons désormais de

répondre à l'insuffisance du modèle de Eringen, mis en évidence par le problème de la fissure débouchante. Pour cela, nous nous sommes intéressés à la loi de comportement « améliorée » de Polizzotto (2001), fondée sur le modèle de Eringen, et qui permet d'éliminer les perturbations du champ de contrainte au voisinage de la frontière externe du domaine. Dans le prochain chapitre, nous présentons les bases d'une nouvelle stratégie numérique, qui intègre cette nouvelle loi et permet de traiter le cas de milieux bornés.

## Références

- Artan R., *Nonlocal elastic half plane loaded by a concentrated force*, Int. J. Engng. Sci. 34, 943-950, 1996.
- Atluri S.N., Zhu T., *A new meshless local Petrov-Galerkin (MPLG) approach in computational mechanics*, Comput. Mech. 22, 117-127, 1998.
- Balas J., Sladek J., Sladek V., *Stress analysis with boundary element methods*, Elsevier, 1989.
- Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., *Element free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Eng. 37, 229-256, 1994.
- Bouchaud E., Pan F., *Fracture and damage at a microstructural scale*, Computing in Science and Engineering 1, 32-38, 1999.
- Dyskin A.V., Sahouryeh E., Jewell R.J., Joer H., Ustinov K.B., *Influence of shape and locations of initial 3-D cracks on their growth in uniaxial compression*, Engineering Fracture Mechanics 70, 2115-2136, 2003.
- Erdogan F., Sih G.C., *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*, J. Basic Engng 85, 519-527, 1963.
- Eringen A.C., *Nonlocal continuum field theories*, Springer New-York, 2002.
- Eringen A.C., *Theory of nonlocal elasticity and some applications*, Res Mechanica 21 313-342, 1987.
- Eringen A.C., *Edge dislocation in nonlocal elasticity*, Int. J. Engng. Sci. 15, 177-183, 1977.
- Eringen A.C., *Screw dislocation in nonlocal elasticity*, J. Phys. D. Appl. Phys. 10, 671-678, 1977.
- Eringen A.C., Kim B.S., *Stress concentration at the tip of a crack*, Mech. Res. Comm. 1, 233-237, 1974.
- Eringen A.C., Kim B.S., *Relation between nonlocal elasticity and lattice dynamics*, Cryst. Lattice Defects 7, 51-57, 1977.
- Eringen A.C., Speziale C.A., Kim B.S., *Crack tip problem in nonlocal elasticity*, J. Mech. Phys. Solids 25, 339-355, 1977.
- Duflot M, *Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture*, Thèse de doctorat en sciences appliquées, Université de Liège, 2004.
- Gao J., Dai T.M., *On the study of a penny-shaped crack in nonlocal elasticity*, Acta Mechanica Solida Sinica 2, 253-269, 1989.

- Gao X-W, Davies T.G., *Boundary element programming in mechanics*, Cambridge, U.K., Cambridge University Press, 2001.
- Ilcewicz L., Narasimhan M., Wilson J., *An experimental verification of nonlocal fracture criterion*, Engineering Fracture Mechanics 14, 801-808, 1981.
- Lazar M., Maugin G.A., Aifantis E.C., *On a theory of nonlocal elasticity of bi-Helmholtz type and some applications*, Int. J. Sol. Struct. 43, 1404-1421, 2006.
- Minghao Z., Changjun C., Yuanjie L., Guoning L., Shishan Z., *The method of analysis of crack problem in three-dimensional non-local elasticity*, Applied Mathematics and Mechanics 20, 1999.
- Minghao Z., Yuanjie L., Changjun C., *Boundary integral equations and the boundary-element method for three dimensional fracture mechanics*, Engineering analysis with boundary elements 13, 333-338, 1994.
- Mourot G., Morel S., Valentin G., *Comportement courbe-R d'un matériau quasi-fragile (le bois) : Influence de la forme des spécimens d'essai*, Colloque MATERIAUX 2002, Tours (France), 2002.
- Mroz K.P., Mroz Z., *On crack path evolution rules*, Engineering Fracture Mechanics 77, 1781-1807, 2010.
- Polizzotto C., *Nonlocal elasticity and related variational principles*, International Journal of Solids and Structures 38, 7359-7380, 2001.
- Polizzotto C., Fushi P., Pisano A.A., *A strain-difference-based nonlocal elasticity model*, International Journal of Solids and Structures 41, 2383-2401, 2004.
- Povstenko Y.Z. Kubik I., *Concentrated ring loading in a nonlocal elastic medium*, International Journal of Engineering Science 43, 457-471, 2005.
- Povstenko Y.Z., *The nonlocal theory of elasticity and its applications to the description of defects in solid bodies*, Journal of Mathematical Sciences 97, 1999.
- Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Flannery B.P., *Numerical Recipes in Fortran 77 – The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.
- Schollmann M., Kullmer G., Fulland M., Richard H.A., *A new criterion for 3D crack growth under mixed-mode (I+II+III) loading*, In : de Freitas MM, editor. Proceedings of the 6th international conference on biaxial/multiaxial fatigue and fracture II, Lisboa : Instituto Superior Tecnico ; p 589-596, 2001.
- Schwartz M., Niane N.T., Kouitat Njiwa R., *Etude de l'angle de propagation d'une fissure carrée dans un milieu tridimensionnel à comportement élastique non-local*, Proceedings 20<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Besançon, 2011.
- Seweryn A., *A non-local stress and strain energy release rate mixed mode fracture initiation and propagation criteria*, Engineering Fracture Mechanics 59, 737-760, 1998.

Sih G.C., *Some basic problems in fracture mechanics and new concepts*, Engng Fract. Mech., 1973.

Sih G.C., *Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems*, International Journal of Fracture 10, 305-321, 1974.

Sneddon I.N., *Fourier transforms*, New-York McGraw-Hill, 1951.

Telles J.C.F., *A self-adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals*, Int. J. Num. in Eng. 24, 959-973, 1987.



# **Chapitre 4 : Approche non-locale en milieu borné - Résolution par la méthode des éléments de frontière couplée à une méthode de collocation par points**





## Introduction

La stratégie développée au Chapitre 3 repose sur une propriété particulière de la fonction d'atténuation. Elle ne peut rigoureusement s'appliquer que si le domaine étudié est infini, auquel cas la fonction de caractérisation est aussi solution de Green d'un opérateur différentiel linéaire. Dans cette situation, si les équations d'équilibre non-locales sont vérifiées, alors les équations d'équilibre classiques le sont aussi. La contrainte non-locale peut alors être calculée en post-traitement.

Lorsque le milieu est borné, cette méthode simple n'est plus rigoureusement valable. Il convient de trouver une stratégie numérique permettant de résoudre le problème directement dans le cadre non-local.

Par ailleurs, dans le cas d'une fissure émergente (voir Chapitre 2 et 3), le modèle de Eringen conduit à des résultats questionnables. Au voisinage de la frontière externe du domaine, le calcul des contraintes non-locales est perturbé par un effet de bord lié à la troncature du domaine d'influence de la fonction d'atténuation. Comme le note Polizzotto (2001), le modèle de Eringen ne permet pas de retrouver un champ de contrainte uniforme dans l'ensemble du domaine d'étude lorsque celui-ci est soumis à un champ de déformation uniforme.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de résolution numérique pour un problème d'élasticité non-locale en milieu fini. La stratégie initiée par R. Kouitat (2011) dans le cadre de l'élasticité linéaire anisotrope est étendue au cas de l'élasticité non locale. Cette méthode est basée sur un couplage de la méthode des éléments de frontière avec une méthode de collocation par points.

Depuis la fin des années 1990, les méthodes dites « sans-maillages » suscitent un intérêt grandissant car elles permettent de s'affranchir des difficultés propres à la méthode des éléments finis : distorsion des éléments en grandes déformations, procédure de remaillage au cours de la propagation d'une fissure, etc.

De nombreuses approches sont exposées dans la littérature. Citons notamment les méthodes « sans-maillage » basées sur des formulations faibles de type Galerkin (Belytschko et al. (1994,1996)) ou de type Petrov-Galerkin (Atluri et al. (1998,1999)). Les méthodes de collocation par points appliquées aux équations différentielles du problème sont très attractives du fait de leur simplicité de mise en oeuvre (Zhang et al. (2001), Liu et Gu (2003)). Ces méthodes sont efficaces et très précises pour des problèmes ne comportant que des conditions aux limites du type Dirichlet. La qualité de la solution se détériore en présence des conditions aux limites du type Neumann. Dans la littérature, cette difficulté est contournée en appliquant une forme locale de Galerkin pour les points avec conditions aux limites à efforts imposés. Cette approche qui nécessite la construction en arrière plan d'un domaine d'intégration est inévitable en mécanique du solide où des conditions aux limites en traction sont quasiment toujours présentes.

Le couplage que nous proposons utilise les avantages de la méthode des éléments de frontière classique (réduction de la dimension du problème par un) et de la méthode locale de collocation par points appliquée aux équations aux dérivées partielles. Cette démarche numérique sera détaillée dans le paragraphe 4.2

L'approche est basée sur la partition du champ de déplacement en une solution complémentaire et une solution particulière. Le déplacement complémentaire est solution de l'équation classique de Navier, qui est résolue par la méthode des éléments de frontière, tandis que le déplacement particulier est obtenu par la méthode de collocation par points.

Pour tenir compte des effets de bord liés à la surface externe du solide, nous utilisons une loi de comportement améliorée proposée par Polizzotto (2002,2004). Ce modèle reprend la loi de comportement de Eringen (1987), en lui adjoignant un terme correctif qui permet de traiter le cas où le domaine d'influence de la fonction d'atténuation est tronqué.

Le chapitre s'organise de la façon suivante. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les équations d'équilibre et de comportement non-locales pour un milieu fini. Puis, nous nous attardons sur la procédure de résolution numérique, en détaillant le couplage entre la méthode des éléments de frontière et la méthode de collocation par points.

La fin du chapitre est consacrée à la présentation des résultats obtenus par cette stratégie. Quelques cas de sollicitations simples démontrent l'efficacité de l'approche pour traiter les problèmes d'élasticité non-locale en milieu fini. Nous terminons par une application de la stratégie à la résolution d'un problème de fissuration.

## 4.1. Présentation du problème

### 4.1.1. Equations d'équilibre et de comportement

On considère un solide élastique homogène occupant un domaine  $\Omega$  de frontière externe  $\Gamma$ . En l'absence de forces volumiques, l'équilibre des forces et des moments se traduit de manière classique par :

$$\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} = t_{ij,j} = 0 \quad (4.1)$$

Où  $\mathbf{t}$  représente le tenseur symétrique de contrainte non-local.

Rappelons que le modèle de comportement élastique non local de Eringen (1987) relie les tenseurs de contrainte et de déformation par une expression du type :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (4.2a)$$

Où  $C_{ijkl}$  représente le tenseur d'élasticité et  $\varepsilon$  est le tenseur de déformation linéarisé, qui s'exprime en fonction du vecteur déplacement  $u$  suivant l'expression :

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \right)$$

La fonction  $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell)$  est la fonction de caractérisation non-locale et «  $\ell$  » correspond à la longueur interne caractéristique. Comme nous l'avons montré dans le Chapitre 3,  $\alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell)$  s'annule en dehors d'un domaine d'influence noté  $\Omega_{inf}$ . On peut donc approximer le tenseur de contrainte par la relation suivante :

$$t_{ij}(\mathbf{x}) \cong C_{ijkl} \int_{\Omega_{inf}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (4.2b)$$

Rappelons que le rayon de la sphère d'influence  $\Omega_{inf}$  dépend de la fonction de caractérisation choisie (voir Chapitre 3). De plus, notons qu'en toute rigueur, au voisinage de la fissure, la fonction  $\alpha$  ne dépend pas de la distance euclidienne. Cet aspect ne sera cependant pas pris en compte dans ce travail.

Lorsqu'on considère le cas d'un milieu borné, pour certains points situés près de la surface, le domaine d'influence de la fonction de caractérisation est tronqué par la frontière (les points B et C sur la Figure (4.1) par exemple).

Dans cette situation, pour un champ de déformation uniforme  $\bar{\varepsilon}$ , la relation (4.2b) donne :

$$t(\mathbf{x}) \cong C \int_{\Omega_{inf}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) \bar{\varepsilon} d\Omega(\mathbf{x}') = C \bar{\varepsilon} \int_{\Omega_{inf}} \alpha(|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|, \ell) d\Omega(\mathbf{x}')$$

Deux situations sont alors possibles :

- Si le point  $\mathbf{x}$  appartient au « cœur » du domaine  $\Omega$  (i.e : le point est distant de la surface  $\Gamma$  d'une longueur supérieure ou égale au rayon du domaine d'influence), alors la condition de normalisation de la fonction d'atténuation est vérifiée et :

$$t(\mathbf{x}) \cong C\bar{\varepsilon} \underbrace{\int_{\Omega_{\text{mf}}} \alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) d\Omega(\mathbf{x}')}_{=1} = C\bar{\varepsilon}$$

- Si le point  $\mathbf{x}$  est trop proche de la frontière, le domaine d'influence est tronqué et la condition de normalisation de la fonction d'atténuation n'est plus respectée. Dans ce cas, on a :

$$t(\mathbf{x}) \cong C\bar{\varepsilon} \underbrace{\int_{\Omega_{\text{mf}}} \alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) d\Omega(\mathbf{x}')}_{<1} < C\bar{\varepsilon}$$

L'application d'un champ de déformation uniforme ne permet donc pas de retrouver un champ de contrainte uniforme dans l'ensemble du domaine. Ce résultat montre que le modèle de Eringen n'est applicable que dans le « cœur » du solide. Lorsqu'on est proche de la surface, il est nécessaire d'utiliser une loi de comportement modifiée.

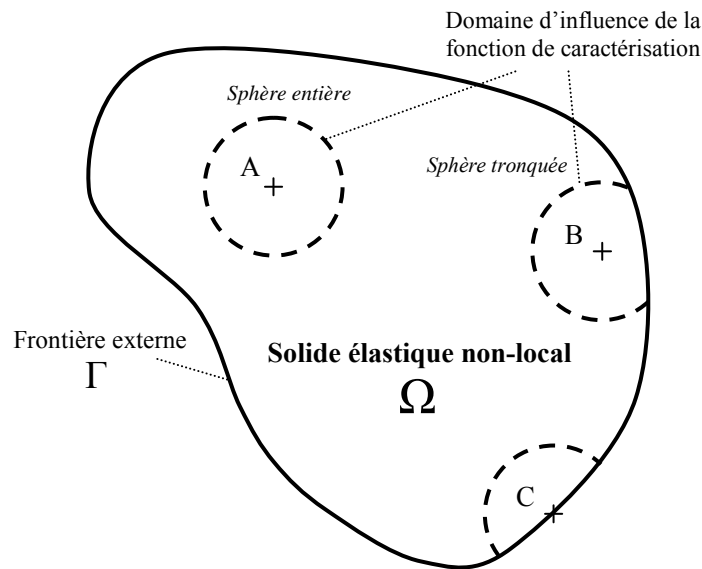


Figure 4.1 : Effet de bord – Troncature du domaine d'influence de la fonction d'atténuation

Pour répondre à cette problématique, Polizzotto (2002,2004) propose un modèle de comportement amélioré, basé sur le modèle de Eringen, mais comportant un terme correctif additionnel.

$$t_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \underbrace{[1 - \gamma(\mathbf{x})] \varepsilon_{kl}(\mathbf{x})}_{\text{terme correctif}} + C_{ijkl} \int_{\Omega_{\text{mf}}} \alpha(|\mathbf{x}'-\mathbf{x}|, \ell) \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega(\mathbf{x}') \quad (4.3)$$

$$\text{Avec, } \gamma(x) = \int_{\Omega_{\text{inf}}} \alpha(|x'-x|, \ell) d\Omega(x'), \quad 0 \leq \gamma(x) \leq 1$$

Lorsque le point  $\mathbf{x}$  appartient au « cœur » du domaine, la fonction  $\gamma$  est égale à 1 et le terme correctif est nul. Dans ce cas, le modèle de Polizzotto coïncide avec celui de Eringen. Si le point est proche de la frontière, le terme additionnel dans la relation (4.3) permet de traiter la problématique liée aux effets de bord.

Dans la suite de ce chapitre, la loi de comportement améliorée de Polizzotto est adoptée.

## 4.2. Stratégie de résolution numérique

Notre objectif est de résoudre le système composé par les équations d'équilibre (4.1), complété par des conditions aux limites appropriées en déplacement et en traction à la surface  $\Gamma$ .

A ce stade, il nous faut choisir une approche numérique efficace pour résoudre le système d'équations (4.1). Les éléments finis sont une méthode robuste et puissante de résolution des équations aux dérivées partielles. Toutefois, les problèmes de mécanique de la rupture nécessitent une discrétisation extrêmement fine au voisinage du front de fissure qui alourdit les calculs. Les difficultés liées au remaillage au cours de la propagation constituent un inconvénient supplémentaire de l'approche classique.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, l'usage de la méthode des éléments de frontière est conditionné par la connaissance de solutions fondamentales. Or, on ne dispose pas toujours de telles solutions pour l'élasticité non-locale.

Parmi les alternatives possibles aux deux approches citées précédemment, les méthodes dites « sans-maillage » ont connu un essor important ces dernières années. Elles permettent notamment de s'affranchir des difficultés caractéristiques de la méthode des éléments finis (distorsion des éléments en grandes déformations, procédure de remaillage pour les problèmes de propagation de fissure...). Une revue détaillée de ce type de méthode est consultable dans l'ouvrage de Liu (2002). Nous nous contentons ici de rappeler les plus connues d'entre elles.

Les méthodes sans maillage se séparent en deux classes :

- Les approches basées sur une formulation faible des équations d'équilibre, telles que la méthode type Galerkin (Belytschko (1994), la méthode type Petrov-Galerkin (Atluri et al. (1998),(1999)) ou la méthode d'interpolation par point de Liu et Gu (2001).
- Les approches basées sur une formulation forte, notamment les méthodes de collocation par point de Zhang et al. (2001), ou de Liu et Gu (2003).

Cependant, la plupart des méthodes basées sur une formulation faible des équations d'équilibre ne sont réellement « sans maillage » que pour l'interpolation des champs de déplacement et de contrainte. Il est en effet nécessaire de définir des cellules d'intégration pour calculer la forme faible du problème sur l'ensemble du domaine d'étude. Ce fait réduit l'intérêt de l'approche par rapport à la méthode traditionnelle des éléments finis.

En revanche, les approches basées sur une formulation forte du problème peuvent être considérées comme de « vraies » méthodes « sans-maillage ». D'autre part, comme le

soulignent Liu et Gu (2003), elles sont faciles à implémenter. Leur principal défaut est de fournir des résultats souvent peu précis pour des problèmes avec conditions aux limites de type Neumann. Pour un problème de mécanique avec conditions aux limites en traction le couplage forme forte et forme faible est nécessaire (Liu et Gu (2003)).

Dans ce travail, nous adoptons une stratégie différente dont les grandes lignes sont décrites ci-après.

Pour alléger les notations, on pose :

$$Q_{kl}(x; \varepsilon) = -\gamma(x) \varepsilon_{kl}(x) + \int_{\Omega} \alpha(|x' - x|, \ell) \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x')$$

La loi de comportement (4.3) peut se réécrire de la façon suivante :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(x) + C_{ijkl} Q_{kl}(x; \varepsilon) \quad (4.4)$$

En injectant l'expression de  $t_{ij}$  donnée par (4.4) dans les équations d'équilibre (4.1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} Q_{kl}(x; \varepsilon)) = 0 \quad (4.5)$$

On pourrait appliquer la méthode des équations intégrales à l'équation (4.5). La formulation finale contiendra un terme de volume qui dans une certaine mesure enlève son « charme » à la méthode.

L'équation (4.5) est réécrite sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}) = F_{ij}(x) \quad (4.6)$$

$$\text{Avec, } F_{ij}(x) = -\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} Q_{kl}(x; \varepsilon))$$

L'expression (4.6) sans second membre correspond simplement aux équations de Navier. Dans ce contexte, supposons que le champ de déplacement soit la somme de deux termes. Un premier champ solution des équations de Navier et un second, solution particulière des équations aux dérivées partielles induites. Autrement dit, avec  $u = u^C + u^P$  et donc  $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^C + \varepsilon_{kl}^P$ , on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^c) = 0 \quad (4.7)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} Q_{kl}(\varepsilon)) = 0 \quad (4.8)$$

#### 4.2.1. Traitement de la solution complémentaire

Le déplacement complémentaire  $\mathbf{u}^C$  est solution de l'équation (4.7) qui est similaire à l'équation classique de Navier.

Ce problème peut être résolu par la méthode des éléments de frontière. Les solutions de Kelvin sont utilisées comme solutions fondamentales. La formulation est basée sur les équations intégrales de frontière en déplacement présentées dans le Chapitre 2.

$$\int_{\Gamma} U_{mi}(x, y) t_i^C(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} T_{mi}(x, y) (u_i^C(x) - u_i^C(y)) d\Gamma(x) \quad (4.9)$$

Où  $U_{mi}$  et  $T_{mi}$  sont donc les solutions fondamentales de Kelvin pour l'élasticité locale. La discrétisation et l'approximation classiques conduisent à un système d'équations de la forme :

$$[H] \{u^C\} = [G] \{t^C\} \quad (4.10)$$

Où H et G sont deux matrices globales regroupant les coefficients calculés pour chaque matrice élémentaire.

#### 4.2.2. Traitement de la solution particulière

La solution particulière  $\mathbf{u}^P$  satisfait l'équation (4.8). Dans notre stratégie, nous proposons donc de résoudre cette équation en utilisant la méthode de collocation par points avec des fonctions radiales (Liu et Gu (2001)).

Le domaine  $\Omega$  et sa frontière  $\Gamma$  sont représentés par un ensemble judicieux de points de collocation. En un point quelconque  $\mathbf{x}$  du domaine, le champ  $v(\mathbf{x})$  est approché par la relation suivante :

$$v^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N R_i(r) a^i + \sum_{j=1}^M P_j(\mathbf{x}) b^j \quad (4.11)$$

$R_i(r)$  est la fonction radiale d'interpolation associée au nœud i. Elle dépend de la distance euclidienne r entre le point  $\mathbf{x}$  et la position  $\mathbf{x}^i$  du nœud i.

$$r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\| = \sqrt{(x_1 - x_1^i)^2 + (x_2 - x_2^i)^2 + (x_3 - x_3^i)^2}$$

L'entier N désigne le nombre de nœuds voisins du point  $\mathbf{x}$ , contenus dans un domaine d'interpolation dont les dimensions sont choisies par l'utilisateur.

L'équation (4.11) s'accompagne des conditions suivantes :

$$\sum_{i=1}^N P_j(x^i) a^i = 0 \quad (j=1,2,\dots,M) \quad (4.12)$$

Dans (4.11) et (4.12), les fonctions  $P_j(x)$  représentent une base de monômes dans l'espace  $(x_1, x_2, x_3)$ .

L'entier  $M$  correspond au nombre de monômes de la base (notée  $B$ ). Par exemple :

$$\text{Pour } M = 4, \quad B = \{1, x_1, x_2, x_3\}$$

$$\text{Pour } M = 10, \quad B = \{1, x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1^2, x_2^2, x_3^2\}.$$

Enfin, les coefficients  $a^i$  et  $b^j$  sont des constantes d'interpolation. Elles sont déterminées en appliquant l'équation (4.11) en chacun des  $N$  nœuds du domaine d'interpolation. En rassemblant ces  $N$  équations et les  $M$  contraintes définies par les équations (4.12), on construit un système qui peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} v \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} R & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Où  $\{v\}$  représente le vecteur des valeurs nodales de  $v(x)$  dans le domaine d'interpolation.  $\{a\}$  et  $\{b\}$  sont les vecteurs contenant les valeurs des coefficients d'interpolation.

Dans le système d'équations (4.13), les matrices  $[R]$  et  $[P]$ , respectivement de dimensions  $N \times N$  et  $N \times M$ , contiennent les valeurs des fonctions radiales et des monômes en chaque nœud d'interpolation. Leurs expressions détaillées sont précisées en Annexe.

Après quelques manipulations (Annexe), les vecteurs  $\{a\}$  et  $\{b\}$  s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\{b\} = \underbrace{\left( [P]^T [R]^{-1} [P] \right)^{-1} [P]^T [R]^{-1}}_{[F_b]} \{v\} = [F_b] \{v\} \quad (4.14)$$

Et,

$$\{a\} = \underbrace{[R]^{-1} ([I] - [P][F_b])}_{[F_a]} \{v\} = [F_a] \{v\} \quad (4.15)$$

Où  $[I]$  représente la matrice identité. En utilisant les expressions (4.14) et (4.15), l'équation (4.11) devient :

$$v^h(x) = [R^*(x)] [F_a] \{v\} + [P^*(x)] [F_b] \{v\}$$

Et de façon plus compacte, on peut écrire (4.11) sous la forme :



$$\mathbf{v}^h(x) = [\Phi(x)] \{ \mathbf{v} \} \quad (4.16)$$

Avec,

$$[\Phi(x)] = [R^*(x)][F_a] + [P^*(x)][F_b]$$

Les expressions de  $[R^*(x)]$  et  $[P^*(x)]$  sont fournies en Annexe.

#### *Discrétisation de l'équation particulière*

L'équation (4.16) est utilisée pour discrétiser le champ de déplacement dans l'équation particulière. Pour un nœud de collocation, l'équation (4.8) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$[Q_{u^p}(x)] \{ u^p \} + [Q_u(x)] \{ u \} = \{ 0 \} \quad (4.17)$$

Les expressions des matrices  $[Q_{u^p}(x)]$  et  $[Q_u(x)]$ , ainsi que la procédure pour les obtenir, sont décrites en Annexe.

#### *Construction du système global*

L'équation (4.17) est appliquée pour chaque nœud de collocation interne au domaine. Le système obtenu se met sous la forme suivante :

$$[Q_{u^p}^{IB} \quad Q_{u^p}^{II}] \begin{Bmatrix} u_B^p \\ u_I^p \end{Bmatrix} + [Q_u^{IB} \quad Q_u^{II}] \begin{Bmatrix} u_B \\ u_I \end{Bmatrix} = \{ 0 \} \quad (4.18)$$

Les indices « I » et « B » permettent de distinguer les nœuds frontières des nœuds internes. Comme nous recherchons une solution particulière, on peut la choisir de telle sorte que le déplacement  $\mathbf{u}^p$  soit nul à la frontière :  $\{ u_B^p \} = \{ 0 \}$ . Dans ce cas :

$$[Q_{u^p}^{II}] \{ u_I^p \} + [Q_u^{IB} \quad Q_u^{II}] \begin{Bmatrix} u_B \\ u_I \end{Bmatrix} = \{ 0 \} \quad (4.19)$$

Soit,

$$\{ u_I^p \} = - \underbrace{[Q_{u^p}^{II}]^{-1} [Q_u^{IB} \quad Q_u^{II}]}_{[UP]} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_I \end{Bmatrix} = [UP] \{ u \} \quad (4.20)$$

#### *Approximation des tractions à la frontière du domaine*

La normale à la surface (orientée vers l'extérieur du domaine), est notée  $\mathbf{n}$ . Dans ce cas, en s'appuyant sur la relation de comportement (4.4), le vecteur contrainte pour un nœud à la frontière s'exprime de la façon suivante :

$$t_i(x) = t_{ij}(x)n_j(x) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^C(x)n_j(x) + C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^P(x)n_j(x) + C_{ijkl}Q_{kl}(\varepsilon)n_j(x) \quad (4.21)$$

Ou de façon plus compacte :

$$t_i(x) = t_i^C(x) + t_i^P(x) + \delta t_i(x) \quad (4.22)$$

En utilisant la méthode d'approximation par fonction radiale (équation (4.16)), les deux derniers termes de l'équation (4.22) peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\{t_i^P(x)\} = [K_{r^p}^{Bl}] \{u_I^P\} \quad (4.23)$$

Et,

$$\{\delta t_i(x)\} = \begin{bmatrix} K_{\delta r}^{BB} & K_{\delta r}^{Bl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_I \end{Bmatrix} = [K_{\delta r}] \{u\} \quad (4.24)$$

Les matrices  $[K_{r^p}]$  et  $[K_{\delta r}]$  sont détaillées en Annexe.

### 4.2.3. Construction du système d'équations final

Nous disposons désormais de tous les outils pour construire le système final d'équations à résoudre. Le couplage entre la méthode des éléments de frontière et la méthode de collocation par points est réalisé de la façon suivante.

En tenant compte de la partition du déplacement en deux solutions, la formulation intégrale de frontière (4.10) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [H] \{u^C\} &= [G] \{t^C\} \\ \Rightarrow [H] \{u - u^P\} &= [G] \{t - t^P - \delta t\} \\ \Rightarrow [H] \{u\} - [G] \{t\} &= [H] \{u^P\} - [G] \{t^P\} - [G] \{\delta t\} \end{aligned} \quad (4.25)$$

En injectant les expressions (4.20), (4.23) et (4.24) dans la formulation (4.25), on obtient :

$$\begin{aligned} [H] \{u^C\} &= [G] \{t^C\} \\ \Rightarrow [H] \{u\} - [G] \{t\} &= [H][UP] \{u\} - [G][K_{r^p}^{Bl}][UP] \{u\} - [G][K_{\delta r}] \{u\} \end{aligned}$$

Ou de manière simplifiée :

$$\begin{aligned} [H]\{u^c\} &= [G]\{t^c\} \\ \Rightarrow [\tilde{H}]\{u\} &= [G]\{t\} \end{aligned} \quad (4.26)$$

On s'est donc ramené à un système fortement semblable à celui issu de la méthode classique des éléments de frontière. La prise en compte des conditions aux limites se fait de la façon habituelle dans le cadre de la méthode des éléments de frontière.

### 4.3. Validation de la stratégie pour des cas de chargement simples

Nous nous proposons de tester la stratégie présentée dans la partie 4.2 et d'étudier l'apport du modèle amélioré de Polizzotto. Dans un premier temps, nous présentons le type de fonction utilisée pour l'interpolation des champs de déplacement et de contrainte. Puis, l'intérêt du modèle est démontré sur des cas de traction simple, de cisaillement simple et de torsion.

#### 4.3.1. Les fonctions radiales multi-quadriques

Il existe différentes formes de fonctions radiales d'interpolation. Parmi les plus connues, on peut notamment citer les fonctions gaussiennes et multi-quadriques. Leurs caractéristiques ont fait l'objet de nombreux travaux (Powell (1992), Liu (2002)). Citons aussi Kansa (1990) qui fut l'un des premiers à appliquer les fonctions radiales d'interpolation pour la résolution d'équations aux dérivées partielles (notamment en dynamique des fluides).

Dans ce chapitre les fonctions multi-quadriques sont adoptées. Ces dernières s'expriment de manière générale sous la forme suivante :

$$R_i(x) = \left( \|x - x^i\|^2 + C^2 \right)^q = \left( r^2 + C^2 \right)^q$$

Où «  $r$  » correspond à la distance euclidienne entre le point  $\mathbf{x}$  et le nœud  $\mathbf{x}^i$ .

Les constantes  $C$  et  $q$  sont deux paramètres de « forme » de la fonction d'interpolation radiale. Le paramètre  $C$  est choisi de la façon suivante :

$$C = \alpha \times d_m$$

Où  $\alpha$  est un coefficient sans dimension et  $d_m$  correspond à la distance la plus petite entre les nœuds de collocation.

Notons que l'approche proposée utilise deux domaines d'influence distincts. Le premier est associé à la fonction de caractérisation non-locale. Il définit la zone dans laquelle les déformations ont une influence non nulle sur la contrainte au point de référence. Le second est le domaine associé à l'interpolation radiale. Tous les points de collocation compris dans cette région sont utilisés pour l'approximation des champs de déplacement ou de contrainte.

Par souci de simplicité, le domaine d'influence de la fonction d'atténuation est choisi plus petit que le domaine d'interpolation.

### 4.3.2. Cube soumis à un effort de traction ou de cisaillement uniforme

Afin de montrer l'intérêt du modèle de Polizzotto, nous étudions deux cas de sollicitations simples (Figure (4.2)) :

- Cas n°1 : on considère un domaine cubique de côté 1 soumis à un effort de traction uniforme. Sur la face inférieure ( $z = -0.5$ ) les composantes du vecteur contrainte dans les directions  $x$  et  $y$  sont nulles. Les points de cette face ne peuvent pas se déplacer dans la direction  $z$ . Les faces latérales sont libres de contrainte. Un champ de déplacement uniforme  $\bar{u}$  dans la direction  $z$  est imposé sur la face supérieure du cube ( $z = 0.5$ ).
- Cas n°2 : on considère un domaine cubique soumis à un effort de cisaillement uniforme. Le déplacement des faces latérales ( $x = \pm 0.5$ ) est bloqué dans la direction  $x$ . Un champ de déplacement uniforme  $\bar{u}$  est appliqué dans la direction  $y$  (resp.  $-y$ ) sur la face  $z = 0.5$  (resp.  $z = -0.5$ ). Le même champ de déplacement  $\bar{u}$  est imposé dans la direction  $z$  (resp.  $-z$ ) sur la face latérale  $y = 0.5$  (resp.  $y = -0.5$ ).

Dans les deux cas, nous utilisons des conditions de type Dirichlet afin de pouvoir comparer les résultats obtenus avec chacun des deux modèles de comportement.

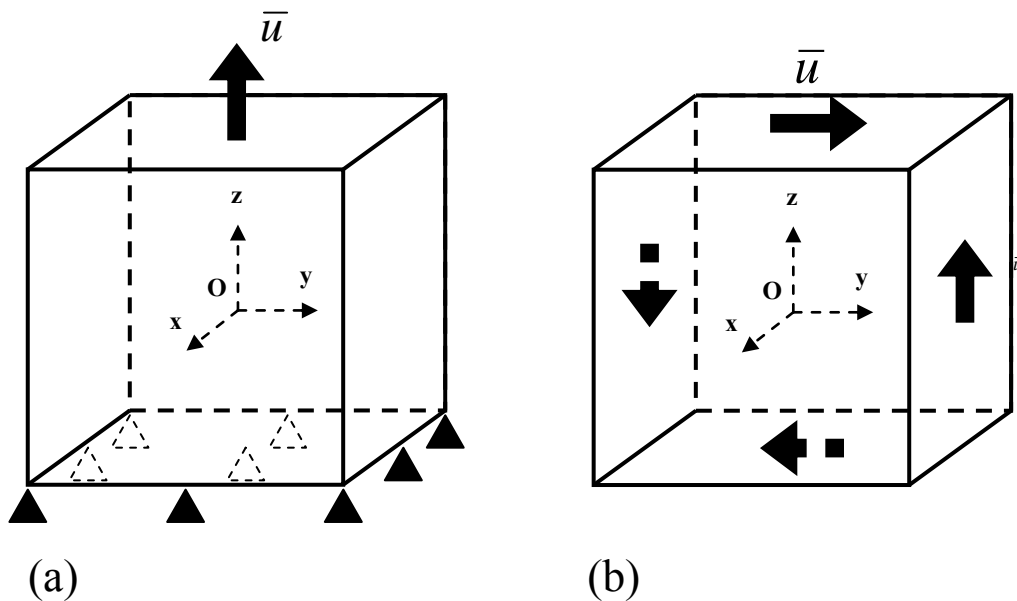


Figure 4.2 : Représentation schématique des cas de chargement étudiés ; (a) Cube soumis à un effort de traction uniforme ; (b) cube soumis à un effort de cisaillement uniforme

Le solide, isotrope et homogène, est caractérisé par un module d'Young  $E = 220$  GPa et un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . La longueur interne caractéristique du matériau est fixée arbitrairement à  $10 \mu\text{m}$ . L'influence de  $\ell$  est étudiée ultérieurement dans la partie 1.3.3. Dans ce chapitre, la fonction d'atténuation bi-exponentielle est adoptée.

Comme nous l'avons vu en 4.3.1, la fonction radiale d'interpolation dépend de deux paramètres de forme. La constante C – définie comme le produit d'un coefficient sans dimensions  $\alpha$  et de la longueur  $d_m$  – et l'exposant q.

L'influence de C et q sur les performances des fonctions radiales multi-quadratiques a été étudiée en détails par Liu (2002). Dans le cas de problèmes statiques, il montre que pour  $q = 1.03$  et  $\alpha = 1$ , la méthode de collocation mène à de bons résultats dans la plupart des cas considérés.

Dans un premier temps, ces valeurs sont donc adoptées pour les paramètres de forme.

Enfin, notons que pour traiter ces deux cas, la surface du domaine cubique est discrétisée en 24 éléments quadrangulaires, soit quatre éléments par face. Afin de tester l'influence du nombre de points de collocation, les calculs sont réalisés en utilisant 27, 45 et 125 nœuds internes.

### Cas n°1 : Cube en traction uniforme

Les résultats obtenus pour le cas de traction sont présentés dans le Tableau (4.1). Les valeurs des composantes non nulles des tenseurs de contrainte et de déformation sont fournies pour un point interne et un point à la surface du domaine.

Point	Champs de déformation et de contrainte	Solutions analytiques	Solutions numériques (27 points internes)		Solutions numériques (45 points internes)		Solutions numériques (125 points internes)	
			Modèle de Eringen	Modèle de Polizzotto	Modèle de Eringen	Modèle de Polizzotto	Modèle de Eringen	Modèle de Polizzotto
(0, 0, 0)	$\epsilon_{xx} (\times 10^{-3})$	-0.1363636	-0.1363634	-0.1363635	-0.1363630	-0.1363635	-0.1363639	-0.1363635
	$\epsilon_{yy} (\times 10^{-3})$	-0.1363636	-0.1363634	-0.1363635	-0.1363630	-0.1363635	-0.1363639	-0.1363635
	$\epsilon_{zz} (\times 10^{-3})$	0.4545454	0.4545446	0.4545450	0.4545448	0.4545450	0.4545447	0.4545450
	$\sigma_{zz}$ (MPa)	100	99.05985	99.99989	99.06001	99.99991	99.05973	99.99990
(0.5, 0.25, 0.25)	$\epsilon_{xx} (\times 10^{-3})$	-0.1363636	-0.1363630	-0.1363634	-0.1363624	-0.1363632	-0.1363649	-0.1363645
	$\epsilon_{yy} (\times 10^{-3})$	-0.1363636	-0.1363638	-0.1363634	-0.1363633	-0.1363634	-0.1363642	-0.1363631
	$\epsilon_{zz} (\times 10^{-3})$	0.4545454	0.4545453	0.4545451	0.4545448	0.4545444	0.4545444	0.4545441
	$\sigma_{zz}$ (MPa)	100	<b>49.53003</b>	99.99994	<b>49.52999</b>	99.99977	<b>49.52972</b>	99.99952

Tableau 4.1: Cube soumis à un chargement uniforme de traction : valeurs numériques des champs de déformation et de contrainte en un point interne et un point à la frontière du domaine – Influence du nombre de points de collocation

Pour un problème avec conditions aux limites de Dirichlet, le champ de déplacement local est égal au champ de déplacement non-local. Pour le champ de déformation, les solutions analytiques classiques peuvent donc être utilisées à titre de comparaison.

En traction simple, comme le champ de déformation est uniforme dans tout le domaine, la loi de comportement de Eringen permet d'écrire :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl} \int_{\Omega_{inf}} \alpha(|x'-x|, \ell) \epsilon_{kl}(x') d\Omega(x') = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \underbrace{\int_{\Omega_{inf}} \alpha(|x'-x|, \ell) d\Omega(x')}_{=1} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} = \sigma_{kl}$$

Si la condition de normalisation est vérifiée, les champs de contrainte classique et non-local sont identiques.

Comme le montre le tableau (4.1), le champ de déformation obtenu au point interne et à la frontière est quasi identique aux solutions analytiques (erreur  $< 10^{-5} \%$ ), quel que soit le modèle de comportement utilisé. Les résultats prédits sont de la même qualité pour 27, 45 et 125 nœuds internes.

Pour la contrainte, l'effet de bord est clairement mis en évidence au point à la frontière du domaine. La valeur de  $\sigma_{zz}$  prévue par le modèle de Eringen est inférieure à la solution attendue.

La Figure (4.3) représente les variations de  $\sigma_{zz}$  (suivant Eringen) sur la face supérieure et dans le plan médian du cube.

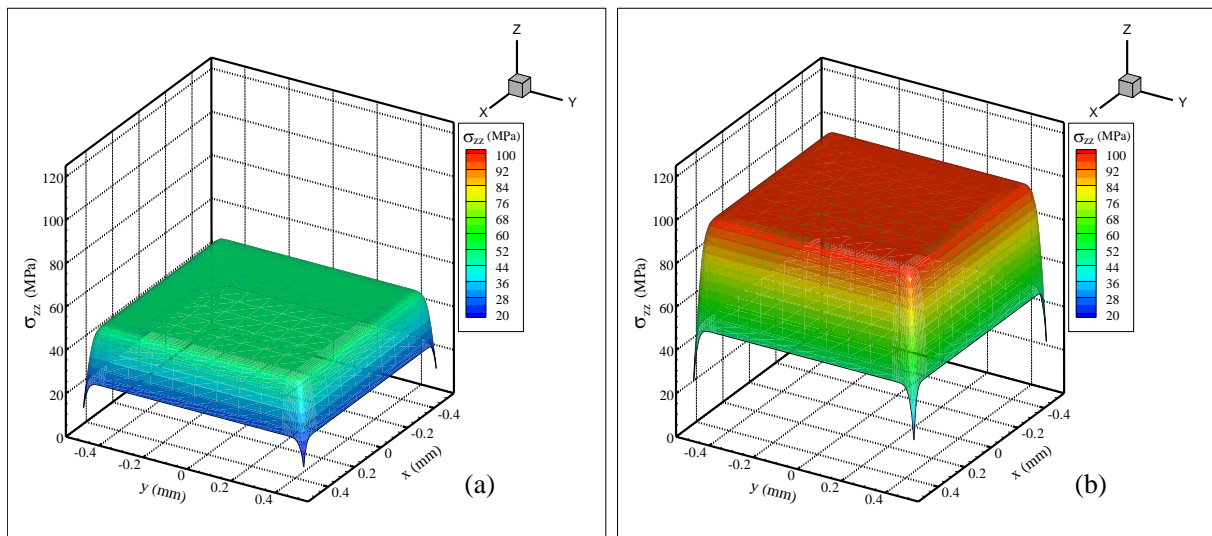


Figure 4.3 : Variation de  $\sigma_{zz}$  d'après le modèle de Eringen : (a) Face supérieure du cube ; (b) Plan médian du cube

On observe clairement l'effet de bord décrit par Polizzotto (2001,2004). Au voisinage de la frontière, le domaine d'influence de la fonction d'atténuation est tronqué. La condition de normalisation n'est plus respectée. Les valeurs de  $\sigma_{zz}$  sont inférieures à celles prévues par la théorie. On note que la contrainte est plus faible au niveau des arêtes et des sommets du cube – où la troncature du domaine d'influence est la plus importante – qu'aux milieux des faces.

En revanche, pour les points situés au « cœur » du solide, le modèle de Eringen s'applique. La solution numérique est égale à la solution analytique (voir Tableau (4.1) et Figures (4.3) et (4.4)).

Pour illustrer plus en détails les observations précédentes, la Figure (4.4) présente des profils de contraintes obtenus sur la face supérieure et dans le plan médian du cube. Les résultats prédits par Polizzotto et Eringen sont comparés.

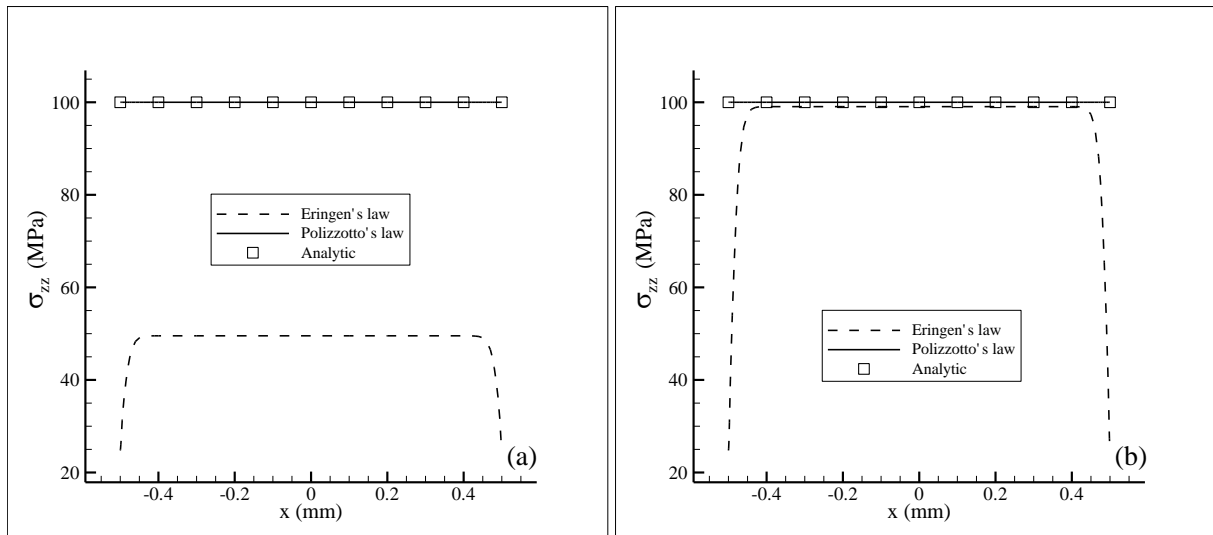


Figure 4.4 : Evolution de  $\sigma_{zz}$  entre les points : (a) (- 0.5 ; 0 ; 0.5) et (0.5 ; 0 ; 0.5) ; (b) (-0.5 ; 0 ; 0) et (0.5 ; 0 ; 0)

Ces profils permettent de démontrer l'intérêt du modèle de Polizzotto. L'utilisation de la loi de comportement améliorée permet de gérer l'effet de bord. Les résultats obtenus sont identiques aux solutions analytiques. Le champ de contrainte est uniforme dans l'ensemble du domaine.

Les paramètres  $C$  et  $q$  peuvent avoir une influence sur la qualité des résultats obtenus par la méthode de collocation par points. Il est évidemment intéressant de conserver une bonne précision pour des gammes de valeurs de  $C$  et  $q$  les plus larges possibles.

$q$  est fixé à 1.03 et on fait varier la valeur du coefficient  $\alpha$  de  $10^{-4}$  à 1. Les résultats obtenus dans le cas de traction uniforme sont présentés dans le Tableau (4.2). Pour 27 nœuds internes, les composantes du champ de déformation ne sont pratiquement pas sensibles à la valeur de  $C$ .

L'étude de l'influence  $q$  conduit aux mêmes conclusions. Lorsque  $\alpha$  est fixé à 1,  $q$  variant de 0.5 à 1.6, les résultats ne varient pas de manière significative.

$C = \alpha \times d_i$ ( $q = 1.03$ )	Champ de déformation ( $\times 10^{-3}$ )	Résultats numériques (27 nœuds internes)
$1 \times d_i$	$\epsilon_{xx}$ $\epsilon_{yy}$ $\epsilon_{zz}$	-0.1363630 -0.1363638 0.4545453
$0.01 \times d_i$	$\epsilon_{xx}$ $\epsilon_{yy}$ $\epsilon_{zz}$	-0.1363634 -0.1363636 0.4545451
$0.0001 \times d_i$	$\epsilon_{xx}$ $\epsilon_{yy}$ $\epsilon_{zz}$	-0.1363634 -0.1363636 0.4545451

Tableau 4.2: Influence du paramètre  $C$  sur le champ de déformation au point (0.5;0.25;0.25) pour le cas de traction uniforme (modèle de Polizzotto)

### Cas n°2 : Cube en cisaillement simple

Le problème de cisaillement simple confirme les résultats obtenus pour le cas de chargement précédent.

Les valeurs des champs de déformation et de contrainte, pour un point interne et un nœud sur la frontière du domaine, sont rassemblées dans le Tableau (4.3). Les résultats obtenus avec les modèles de Eringen et Polizzotto sont comparés.

Point	Champs de déformation et de contrainte	Solutions analytiques	Solutions numériques (27 points internes)		Solutions numériques (125 points internes)	
			Modèle de Eringen	Modèle de Polizzotto	Modèle de Eringen	Modèle de Polizzotto
(0, 0, 0)	$\varepsilon_{yz} (\times 10^{-3})$	0.0590909	0.0590927	0.0590908	0.0590905	0.0590906
	$\sigma_{yz}$ (MPa)	100	99.06135	99.99981	99.05974	99.99981
(0.5, 0.25, 0.25)	$\varepsilon_{yz} (\times 10^{-3})$	0.0590909	0.0590913	0.0590908	0.0590906	0.0590910
	$\sigma_{yz}$ (MPa)	100	49.52990	99.99983	49.52988	99.99992

Tableau 4.3: Cube soumis à un effort de cisaillement simple : champs de déformation et de contrainte pour un point interne et un nœud de la frontière – Influence du nombre de points de collocation

Comme dans le cas précédent, le champ de déformation est pratiquement égal à la solution analytique quel que soit le modèle de comportement utilisé. La différence intervient au niveau de la frontière où la contrainte prédit par Eringen est à nouveau inférieure à la valeur attendue. En revanche, le modèle de Polizzotto permet de conserver un champ de contrainte uniforme et pratiquement identique à la solution théorique (erreur  $< 10^{-3}$  %) dans tout le solide.

Notons que la précision est satisfaisante pour 27 nœuds internes et ne change pas significativement lorsque plus de points sont utilisés (125).

De plus, la qualité des résultats est maintenue pour une large gamme de valeurs de  $\alpha$  (de 0.0001 à 10) et de  $q$  (0.5 à 1.6). A titre d'exemple, les valeurs numériques du champ de déformation sont fournies dans le Tableau (4.4) pour différentes valeurs de  $C$ . L'erreur reste inférieure à 0.0006 % quel que soit  $C$ .

$C = \alpha \times d_i$ ( $q = 1.03$ )	Champ de déformation ( $\times 10^{-3}$ )	Résultats numériques (27 nœuds internes)
---	--	---



$10 \times d_i$	$\epsilon_{yz}$	0.05909436
$1 \times d_i$	$\epsilon_{yz}$	0.05909084
$0.01 \times d_i$	$\epsilon_{yz}$	0.05909073
$0.0001 \times d_i$	$\epsilon_{yz}$	0.05909072

Tableau 4.4: Influence du paramètre C sur la déformation au point (0.5;0.25;0.25) pour le cas de cisaillement uniforme (modèle de Polizzotto)

#### 4.3.3. Cylindre en torsion – Influence de la longueur interne caractéristique

Les exemples précédents ont permis de montrer la validité de la stratégie numérique proposée et l'intérêt de la loi de comportement améliorée de Polizzotto.

Dans cette section, nous présentons un cas de torsion et nous étudions l'influence de la longueur interne caractéristique sur les variations de la contrainte au voisinage de la frontière.

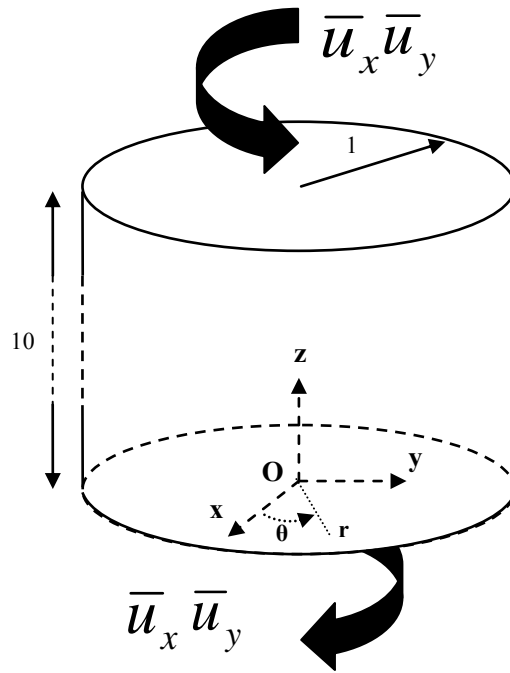


Figure 4.5 : Cylindre soumis à une sollicitation simple de torsion

On considère une barre cylindrique de rayon 1 (mm) et de hauteur  $2H = 10$  (Figure (4.5)). Ce solide est caractérisé par un module d'Young de 220 GPa et un coefficient de Poisson de 0.3. Afin de simuler un chargement de torsion simple, les composantes tangentielles (directions  $x$  et  $y$ ) du déplacement sont imposées sur les faces supérieure et inférieure du domaine (Figure (4.5)). En notant  $H$  la demie-hauteur du cylindre et  $\theta_t$  l'angle unitaire de torsion (en rad/mm), on applique  $u_x = -\theta_t H y$  et  $u_y = \theta_t H x$  sur la face  $z = 10$  et  $u_x = \theta_t H y$  et  $u_y = -\theta_t H x$  sur la face  $z = 0$ . La face latérale du cylindre est libre de tractions.

Pour ce cas, la solution analytique classique donne  $\sigma_{\theta z} = \mu r \theta_t$ , où  $\mu$  correspond au module de coulomb.

La frontière du domaine est discrétisée en 80 éléments quadrangulaires et 100 nœuds internes sont répartis de manière régulière à l'intérieur du solide.

Plusieurs valeurs de la longueur interne caractéristique ont été testées,  $\ell = 1, 10$  et  $20 \mu\text{m}$ , en utilisant les lois de Eringen et Polizzotto.

Les résultats obtenus avec le premier modèle sont présentés sur la Figure (4.6). On peut observer la variation de la composante  $\sigma_{\theta z}$  suivant un diamètre de la face supérieure du cylindre. La même représentation est reproduite pour le diamètre d'une section à l'intérieur du solide.

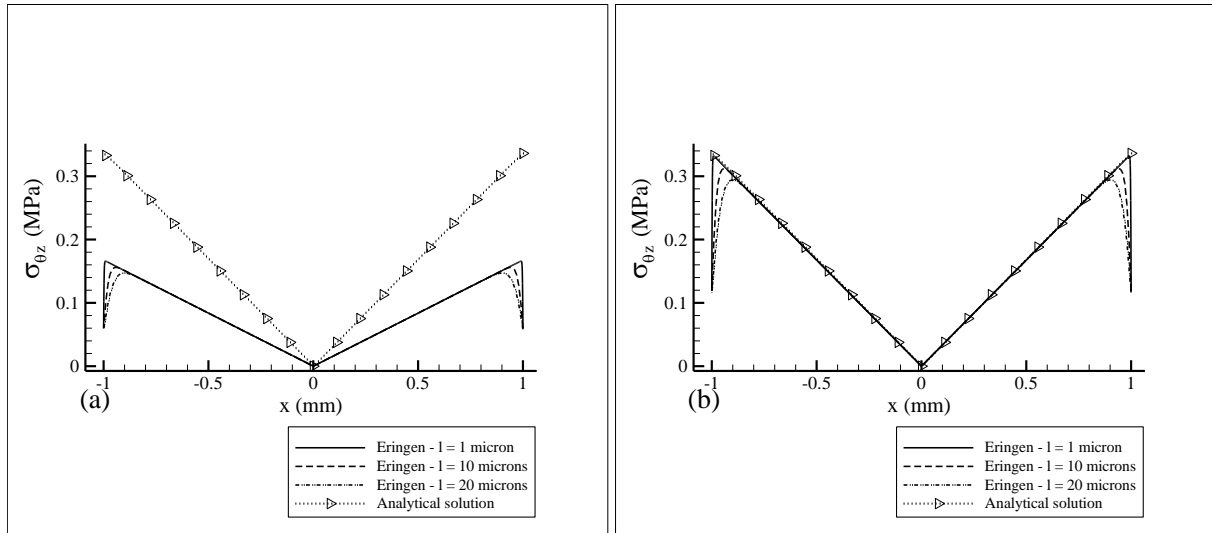


Figure 4.6 : Evolution de  $\sigma_{\theta z}$  entre les points : (a)  $(-1 ; 0 ; 10)$  et  $(1 ; 0 ; 10)$  ; (b)  $(-1 ; 0 ; 7.5)$  et  $(1 ; 0 ; 7.5)$  – Modèle de Eringen

L'effet lié à la troncature du domaine d'influence est à nouveau mis en évidence. Celui-ci se manifeste d'autant plus profondément à l'intérieur du cylindre que la longueur caractéristique est importante. Cette observation était tout à fait prévisible car le rayon de la sphère d'influence dépend directement de  $\ell$ . Lorsque cette dernière augmente, la taille de la sphère croît parallèlement.

Comme le montre le Tableau (4.5), les résultats obtenus avec le modèle de Polizzotto sont très proches des solutions analytiques. L'erreur maximale est inférieure à 2%.

Point	Champ de contrainte (MPa)	Solutions analytiques	Résultats numériques (100 points internes) Modèle de Polizzotto		
			$\ell = 1 \text{ micron}$	$\ell = 10 \text{ microns}$	$\ell = 20 \text{ microns}$
$(1, 0, 8)$	$\sigma_{xz}$ $\sigma_{yz}$	0 0.338462	$< 10^{-5}$ 0.3382272	$< 10^{-4}$ 0.3360592	$< 10^{-4}$ 0.3336628
$(0.3535, 0.3535, 8)$	$\sigma_{xz}$ $\sigma_{yz}$	-0.119664 0.119664	-0.1196661 0.1196689	-0.1197072 0.1196875	-0.1197038 0.1197099

Tableau 4.5: Cylindre en torsion : Résultats numériques pour le champ de contrainte en un point interne et un nœud à la frontière du domaine – Influence du nombre de points de collocation

#### 4.3.4. Bilan

La stratégie proposée se révèle efficace pour traiter le cas d'un solide isotrope et homogène décrit par un comportement élastique non-local. Pour les cas de sollicitation étudiés, des résultats précis sont obtenus avec un petit nombre de noeuds internes. De plus, pour de larges gammes de valeurs, les paramètres de forme  $q$  et  $C$  n'ont pas une influence significative sur la qualité de ces résultats.

Cette approche et les problèmes abordés dans cette première partie ont permis de démontrer l'intérêt du modèle de comportement amélioré de Polizzotto. Ce dernier permet d'obtenir un champ de contrainte uniforme en présence d'un champ de déformation uniforme. Les effets de bord liés à la troncature du domaine d'influence, sont éliminés.

Nous nous proposons désormais d'utiliser cette méthode pour traiter un problème de fissuration.

#### 4.4. Fissure circulaire en mode d'ouverture

Considérons le cas classique d'une fissure circulaire centrée dans un domaine parallélépipédique de hauteur  $4 \times a$  et de base  $2 \times a$  par  $2 \times a$ . Les extrémités du domaine sont soumises à un effort de traction uniforme  $\sigma_0$ . Le rayon de la fissure (noté  $c$ ) est fixé tel que  $a/c = 2$ . Le problème est schématisé sur la Figure (4.7).

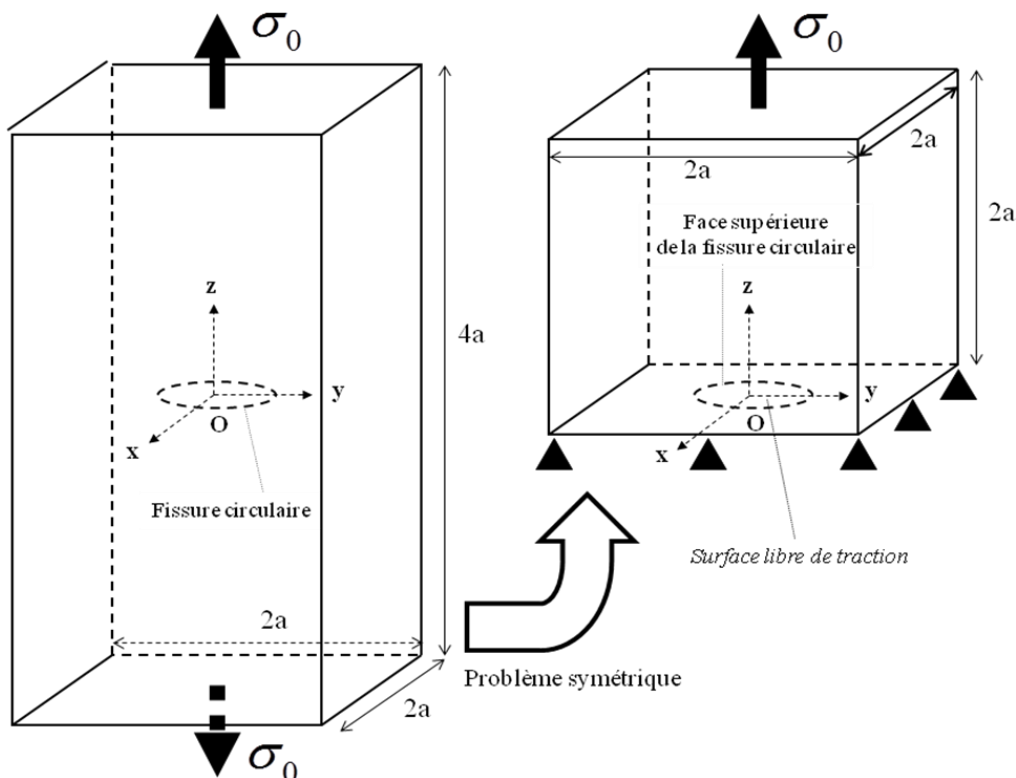


Figure 4.7 : Fissure circulaire centrée en mode d'ouverture

Comme on peut le constater, le problème possède un plan de symétrie ( $Oxy$ ). Pour simplifier, seule la moitié supérieure du domaine est modélisée. Le domaine d'étude se ramène donc

finalement à un cube de côté  $2 \times a$  (voir Figure (4.7)). Chaque face de ce cube est discrétisée en 4 éléments quadrilatères, exceptée la face inférieure pour laquelle est maillage particulier est nécessaire.

Sur ce côté ( $z = 0$ ), on adopte un maillage du type suivant :

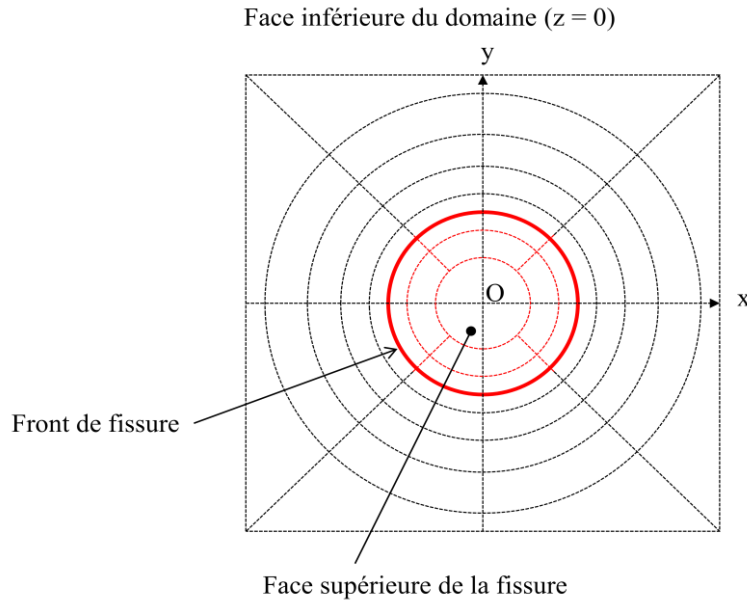


Figure 4.8 : Discretisation de la face inférieure du domaine et représentation de la face supérieure de la fissure

Sur la Figure (4.8), les éléments de la face supérieure de la fissure circulaire sont représentés en rouge, le front de la fissure étant indiqué en gras.

Les conditions aux limites appliquées à la frontière sont les suivantes :

- On applique un vecteur contrainte uniforme  $\sigma_0$  dans la direction  $z$  sur la face supérieure du cube ( $z = 2 \times a$ ). Les autres composantes dans les directions  $x$  et  $y$  sont nulles. Pour bloquer le mouvement de corps rigide, les composantes du déplacement suivant  $x$  et  $y$  sont nulles au nœud central de la face.
- Les faces latérales ( $x = \pm a$  et  $y = \pm a$ ) sont libres de contrainte.
- Sur la face inférieure du domaine ( $z = 0$ ), la surface de la fissure (en rouge sur la Figure (4.8)) est libre de contrainte. Aux nœuds du front, ainsi qu'aux autres points de la face inférieure, le déplacement dans la direction  $z$  est bloqué et les composantes dans les directions  $x$  et  $y$  du vecteur contrainte sont nulles.

Ces conditions aux limites permettent de simuler le cas simple d'une fissure en mode d'ouverture. Notons que la méthode de sous-structuration, évoquée au Chapitre 2, devrait permettre de traiter également les problèmes non-symétriques.

Pour ce travail, le module d'Young  $E$  est fixé à 220 GPa et le coefficient de Poisson  $\nu$  est égal à 0.3. La longueur interne caractéristique  $\ell$  du matériau est choisie arbitrairement égale à 0.05 mm et la fonction d'atténuation d'erreur est adoptée.

Les calculs sont réalisés avec 27, 64 et 125 nœuds internes régulièrement répartis dans le domaine. Les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $q$  intervenant dans les fonctions multi-quadriques sont respectivement égales à  $1 \times d_m$  et 1.03 (valeurs optimales déterminées par Liu (2002)).

La stratégie présentée dans la section 1.2 permet de déterminer le champ de déplacement en chaque point de collocation. Le champ de contrainte peut ensuite être calculé en post traitement à partir de la relation (4.27) :

$$t_{ij}(x) = C_{ijkl}(1 - \gamma(x))u_{k,l}(x) + C_{ijkl} \int_{\Omega_{int}} \alpha(|x' - x|, \ell) u_{k,l}(x') d\Omega(x') \quad (4.27)$$

Où le champ de déplacement est approximé de la façon suivante :

$$u_k(x) = [\Phi(x)] \{u_k\} \quad (4.28)$$

Nous présentons sur la Figure (4.9), l'évolution de  $t_{zz}$  en avant du front de la fissure le long de l'axe Ox. La contrainte est normalisée par la constante  $\sigma_0$ . Les résultats obtenus avec 27, 64 et 125 points internes sont comparés.

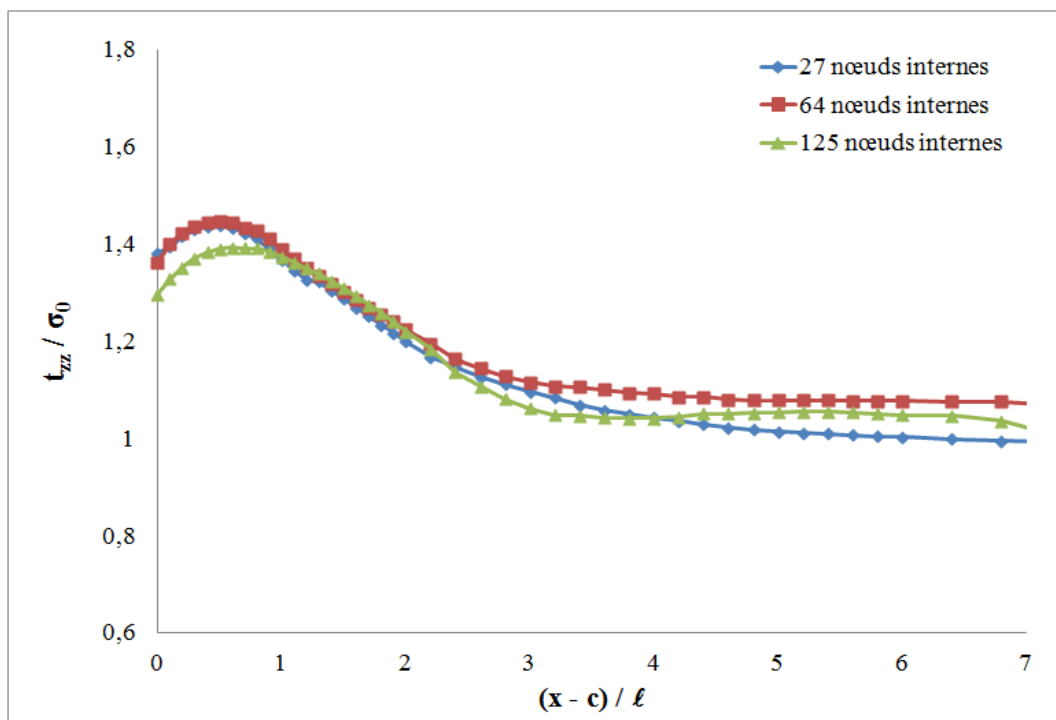


Figure 4.9 : Evolution de  $t_{zz}$  en avant du front de la fissure circulaire

On note que le nombre de points internes utilisés a une influence relativement faible sur le résultat final.

De manière satisfaisante, le profil de contrainte présente un maximum local situé en avant du front. La position de ce maximum est de l'ordre de grandeur de la longueur interne caractéristique. Lorsqu'on s'éloigne de la pointe de fissure, le niveau de contrainte décroît et tend approximativement vers 1.

Ce résultat ne varie pas significativement lorsqu'on fait varier les paramètres  $\alpha$  (de 0.001 à 1) et  $q$  (de 0.9 à 1.5) (Figure (4.10)).

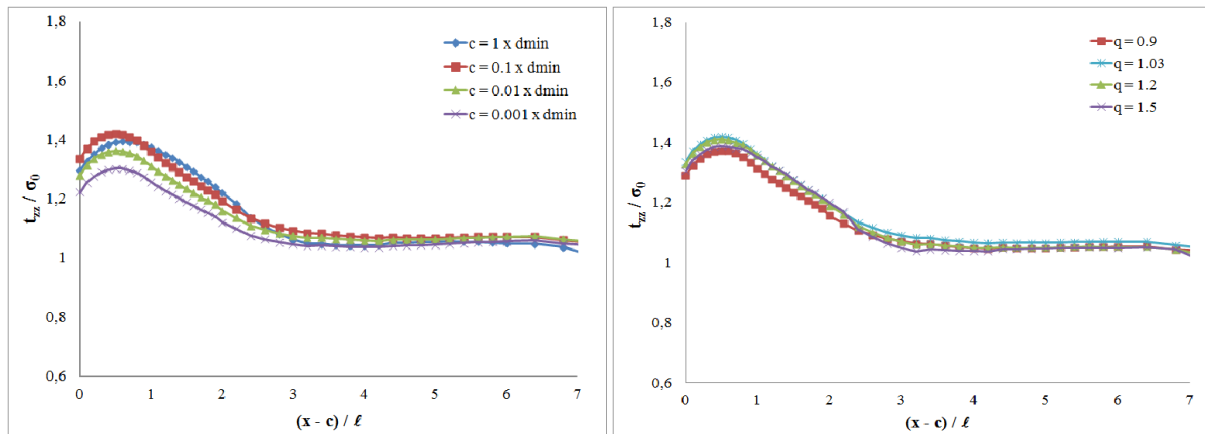


Figure 4.10 : (a) Influence du paramètre  $\alpha$  ; (b) Influence du paramètre  $q$

De même, les premiers résultats pour différentes valeurs de la longueur interne caractéristique sont prometteurs (Figure (4.11)).

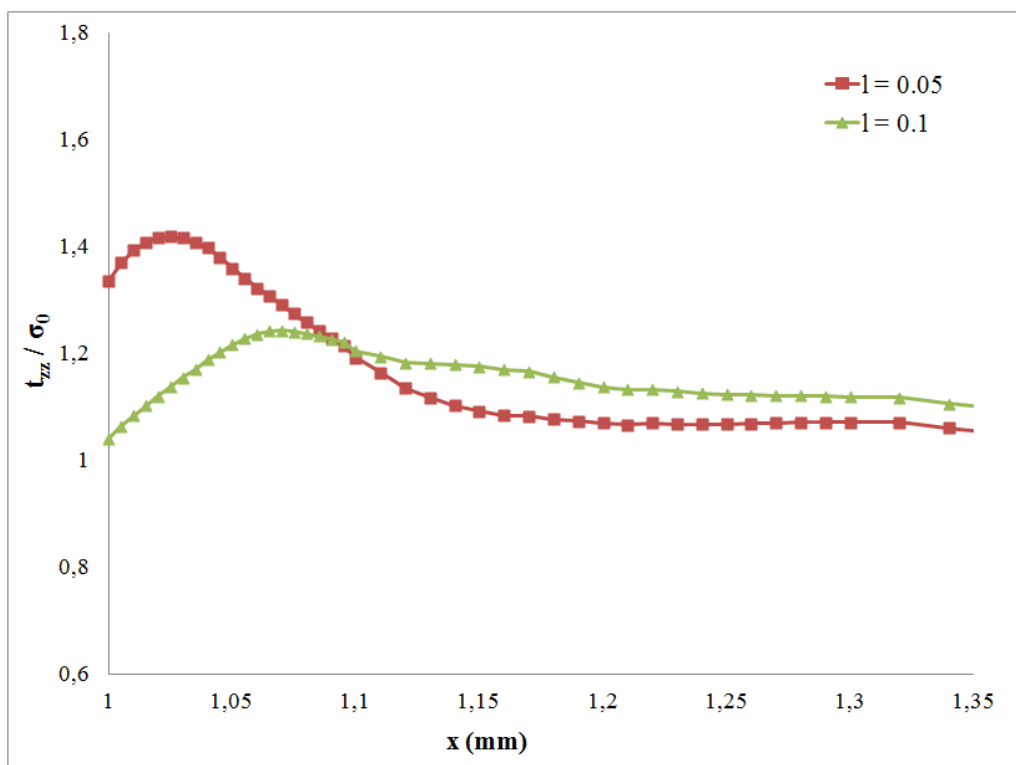


Figure 4.11 : Influence de la longueur interne caractéristique

Comme on peut le voir sur la Figure (4.11), et comme on l'avait déjà constaté dans le chapitre III, la position et l'amplitude du maximum de contrainte sont modifiées lorsque la longueur interne change. L'intensité de la contrainte est plus élevée lorsque  $\ell$  est petite.

De plus, on peut noter que la position du maximum reste de l'ordre de grandeur de la longueur interne (que ce soit pour  $\ell = 0.05$  mm ou  $\ell = 0.1$  mm), ce qui avait déjà été relevé précédemment.

Il conviendra par la suite de tester l'efficacité de la stratégie au regard des maillages possibles de la fissure, et de la géométrie en général. Des imperfections dans notre implémentation numérique (comme par exemple la légère « bosse » que l'on peut observer par exemple sur la Figure (4.11) pour  $x \cong 1.15$ ) devront être corrigées.

Malgré tout, ces premiers résultats sont encourageants et montrent que la stratégie proposée dans la section 4.2 est applicable pour la résolution des problèmes de fissuration.





## Conclusion

Lorsqu'on considère un problème classique d'élasticité linéaire, la méthode des éléments de frontière permet en général d'obtenir des résultats précis. Dans le cas de la théorie non-locale intégrale de l'élasticité, des solutions fondamentales ne sont pas disponibles et cette approche n'est plus applicable.

Afin de surmonter cette difficulté, nous proposons une stratégie prometteuse basée sur un couplage de la méthode des éléments de frontière avec une méthode forte de collocation par points.

Cette méthode nous permet de traiter un problème d'élasticité non-locale dans un milieu borné. De plus, pour tenir compte des effets de bords à proximité de la frontière (dus à la troncature du domaine d'influence de la fonction d'atténuation), le modèle de comportement de Polizzotto, version améliorée du modèle de Eringen, est adopté.

Cette stratégie est simple à implémenter. Son efficacité a été démontrée sur plusieurs problèmes simples d'élasticité non-locale sans singularité géométrique. Les résultats obtenus sont très proches des solutions analytiques. Dans la méthode de collocation par points, le champ de déplacement est approximé à l'aide des fonctions radiales multi-quadriques. L'influence des paramètres de forme de ces fonctions a été étudiée. Pour de larges gammes de valeurs, ces paramètres ont peu d'influence sur la qualité des résultats obtenus.

De plus, l'intérêt de la loi de comportement améliorée de Polizzotto est clairement mis en évidence. Pour des cas de traction ou de cisaillement simple, ce modèle permet de retrouver un champ de contrainte uniforme dans l'ensemble du domaine.

Enfin, nous présentons les premiers résultats obtenus pour un problème de fissuration. Pour ce cas simple de mode I pur, notre stratégie permet de retrouver le profil de contrainte typique observé dans le Chapitre 3. Le maximum de contrainte se situe en avant du front et sa position est de l'ordre de grandeur de la longueur interne caractéristique.

Quelques difficultés numériques restent encore à surmonter mais ces premiers résultats sont très encourageants. Ils démontrent que notre approche devrait pouvoir être utilisée, dans un avenir proche, pour traiter des problèmes de fissuration dans un milieu de dimensions quelconques et soumis à des sollicitations quelconques.



## Annexe

Calcul des coefficients d'interpolation et discrétisation de l'équation particulière dans le cadre de la méthode forte de collocation par points

### Calculs de coefficients d'interpolation

Dans la première partie de cette annexe, nous décrivons l'algorithme de calcul des coefficients d'interpolation  $a_k^i$  et  $b_k^j$ . Comme nous l'avons vu, leur détermination passe par la résolution du système suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_k \\ \mathbf{b}_k \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$\{\mathbf{v}_k\}$  représente le vecteur des valeurs nodales du champ  $v_k(x)$  dans le domaine d'interpolation. Il peut se mettre sous la forme :

$$\{\mathbf{v}_k\}^T = \{v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_1^2, v_2^2, v_3^2, \dots, v_1^N, v_2^N, v_3^N\} \quad (4.30)$$

$\{\mathbf{a}_k\}$  et  $\{\mathbf{b}_k\}$  sont les vecteurs contenant les valeurs des coefficients d'interpolation.

Dans le système d'équations (4.29), les matrices  $[\mathbf{R}]$  et  $[\mathbf{P}]$  sont respectivement de dimensions  $3N \times 3N$  et  $3N \times 3M$ . Elles contiennent les valeurs des fonctions radiales et des fonctions de la base polynômiale en chaque nœud d'interpolation.

Sachant que la matrice  $[\mathbf{R}]$  est symétrique, les coefficients d'interpolation peuvent être calculés suivant la procédure suivante (Liu et Gu (2003)) :

D'après (4.29),

$$\begin{aligned} \{\mathbf{v}_k\} &= [\mathbf{R}]\{\mathbf{a}_k\} + [\mathbf{P}]\{\mathbf{b}_k\} \\ \Rightarrow \{\mathbf{a}_k\} &= [\mathbf{R}]^{-1}\{\mathbf{v}_k\} - [\mathbf{R}]^{-1}[\mathbf{P}]\{\mathbf{b}_k\} \end{aligned} \quad (4.31)$$

En injectant l'expression (4.31) dans les conditions portant sur les monômes, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= [\mathbf{P}]^T \{\mathbf{a}_k\} \\ \Rightarrow \mathbf{0} &= [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1} \{\mathbf{v}_k\} - [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{P}]\{\mathbf{b}_k\} \\ \Rightarrow \{\mathbf{b}_k\} &= \left[ [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{P}] \right]^{-1} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1} \{\mathbf{v}_k\} \end{aligned} \quad (4.32)$$

De manière plus compacte, on peut écrire :

$$\{\mathbf{b}_k\} = \underbrace{\left( [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{P}] \right)^{-1} [\mathbf{P}]^T [\mathbf{R}]^{-1}}_{[\mathbf{F}_b]} \{\mathbf{v}_k\} = [\mathbf{F}_b] \{\mathbf{v}_k\} \quad (4.33)$$

Et en utilisant (4.31) et (4.33), on obtient la forme de  $\{a_k\}$  :

$$\{a_k\} = \underbrace{[R]^{-1}([I] - [P][F_b])}_{[F_a]} \{v_k\} = [F_a] \{v_k\} \quad (4.34)$$

Où  $[I]$  représente la matrice identité. En utilisant les expressions (4.33) et (4.34), l'équation particulière (4.13) devient :

$$v_k^h(x) = [R^*(x)][F_a] \{v_k\} + [P^*(x)][F_b] \{v_k\}$$

Avec,

$$[R^*(x)] = \begin{bmatrix} R_1(\|x-x^1\|) & 0 & 0 & \dots & R_N(\|x-x^N\|) & 0 & 0 \\ 0 & R_1(\|x-x^1\|) & 0 & \dots & 0 & R_N(\|x-x^N\|) & 0 \\ 0 & 0 & R_1(\|x-x^1\|) & \dots & 0 & 0 & R_N(\|x-x^N\|) \end{bmatrix}$$

Et,

$$[P^*(x)] = \begin{bmatrix} P_1(x) & 0 & 0 & \dots & P_M(x) & 0 & 0 \\ 0 & P_1(x) & 0 & \dots & 0 & P_M(x) & 0 \\ 0 & 0 & P_1(x) & \dots & 0 & 0 & P_M(x) \end{bmatrix}$$

De façon plus compacte, on peut écrire (4.13) sous la forme :

$$v_k^h(x) = [\Phi(x)] \{v_k\} \quad (4.35)$$

Où,

$$[\Phi(x)] = [R^*(x)][F_a] + [P^*(x)][F_b]$$

### Discrétisation de l'équation particulière

L'approximation (4.35) est utilisée pour discrétiser l'équation particulière. En remplaçant le terme  $Q_{kl}$  par son expression, l'équation (4.13) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^p(x)) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -C_{ijkl} \gamma(x) \varepsilon_{kl}(x) + C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha(|x'-x|, \ell) \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x') \right) &= 0 \\ \Rightarrow C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^p(x) - C_{ijkl} \gamma_{,j}(x) \varepsilon_{kl}(x) - C_{ijkl} \gamma(x) \varepsilon_{kl,j}(x) + C_{ijkl} \int_{\Omega} \alpha_{,j}(|x'-x|, \ell) \varepsilon_{kl}(x') d\Omega(x') &= 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les différents termes apparaissant dans l'équation (4.36) peuvent se mettre sous les formes matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} &\rightarrow [C] \\
 C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^P &\rightarrow [C] \{\varepsilon^P\} \\
 C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j}^P &\rightarrow [B]^T [C] \{\varepsilon^P\}
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Où  $[C]$  et  $\{\varepsilon^P\}$  correspondent respectivement à la matrice d'élasticité de dimensions  $6 \times 6$  et au vecteur déformation de dimensions  $6 \times 1$  en notation de Voigt.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Et,

$$\{\varepsilon^P\}^T = \{\varepsilon_1^P \quad \varepsilon_2^P \quad \varepsilon_3^P \quad \varepsilon_4^P \quad \varepsilon_5^P \quad \varepsilon_6^P\}$$

L'opérateur  $[B]$  est composé des dérivées partielles par rapport aux coordonnées cartésiennes  $x_1, x_2$  et  $x_3$  :

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \partial \cdot / \partial x_1 & 0 & 0 & \partial \cdot / \partial x_2 & \partial \cdot / \partial x_3 & 0 \\ 0 & \partial \cdot / \partial x_2 & 0 & \partial \cdot / \partial x_1 & 0 & \partial \cdot / \partial x_3 \\ 0 & 0 & \partial \cdot / \partial x_3 & 0 & \partial \cdot / \partial x_1 & \partial \cdot / \partial x_2 \end{bmatrix}$$

De la même façon, on a :

$$\begin{aligned}
 C_{ijkl} \varepsilon_{kl,j} &\rightarrow [B]^T [C] \{\varepsilon\} \\
 C_{ijkl} \alpha_{,j} \varepsilon_{kl} &\rightarrow [A]^T [C] \{\varepsilon\}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Avec :

$$[A(x, x')]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_3} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha(x, x')}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Enfin, le vecteur-colonne des déformations s'exprime en fonction des valeurs nodales du vecteur déplacement suivant la relation :

$$\{\varepsilon(x)\} = [B] \begin{bmatrix} R^*(x) & P^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix} \{u\} \quad (4.39)$$

En injectant les formes matricielles (4.37), (4.38) et (4.39) dans l'équation (4.36), et après quelques simplifications, on obtient la forme compacte suivante :

$$[Q_{u^p}(x)] \{u^p\} + [Q_u(x)] \{u\} = \{0\} \quad (4.40)$$

Où,

$$[Q_{u^p}(x)] = [B]^T [C] [B] \begin{bmatrix} R^*(x) & P^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix}$$

Et,

$$[Q_u(x)] = \int_{\Omega} [A(x, x')]^T [C] [B] \begin{bmatrix} R^*(x') & P^*(x') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix} d\Omega(x') - \int_{\Omega} [A(x, x')]^T [C] [B] \begin{bmatrix} R^*(x) & P^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix} + \gamma(x) [B]^T [C] [B] \begin{bmatrix} R^*(x) & P^*(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix}$$

### Approximation des tractions à la frontière du domaine

Comme on l'a vu, les tractions s'expriment de la façon suivante :

$$t_i(x) = t_{ij}(x) n_j(x) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^C(x) n_j(x) + C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^P(x) n_j(x) + C_{ijkl} Q_{kl}(\varepsilon) n_j(x) \quad (4.41)$$

Où,

$$t_i^P(x) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^P(x) n_j(x) \quad (4.42)$$

Et,

$$\delta t_i(x) = C_{ijkl} Q_{kl}(\varepsilon) n_j(x) = C_{ijkl} \left[ \int_{\Omega} \alpha(|x'-x|, \ell) (\varepsilon_{kl}(x') - \varepsilon_{kl}(x)) dV(x') \right] n_j(x) \quad (4.43)$$

On introduit la matrice  $[N(x)]$  contenant les composantes du vecteur normal à la frontière :

$$[N(x)]^T = \begin{bmatrix} n_1(x) & 0 & 0 & n_2(x) & n_3(x) & 0 \\ 0 & n_2(x) & 0 & n_1(x) & 0 & n_3(x) \\ 0 & 0 & n_3(x) & 0 & n_1(x) & n_2(x) \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, en utilisant les notations déjà introduites dans cette Annexe, les vecteurs  $\{t_i^P\}$  et  $\{\delta t_i\}$  peuvent s'écrire :

$$\{t_i^P(x)\} = \underbrace{[N(x)]^T [C][B][R^*(x) P^*(x)]}_{[K_{i^P}^{BI}]} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix} \{u^P\} = [K_{i^P}^{BI}] \{u^P\}$$

Et,

$$\{\delta t_i(x)\} = \int_{\Omega} \alpha(|x'-x|, \ell) \underbrace{[N(x)]^T [C][B] \{[R^*(x') P^*(x')] - [R^*(x) P^*(x)]\}}_{[K_{\delta i}]} \begin{bmatrix} R \\ P^T \end{bmatrix} d\Omega(x') \{u\} = [K_{\delta i}] \{u\}$$





## Références

- Atluri S.N., Zhu T.A., *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics*, Comput. Mech. 22, 117-127, 1998.
- Atluri S.N., Kim H.G., Cho J.Y., *A critical assessment of the truly Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG), and Local Boundary Integral Equation (LBIE) methods*, Comput. Mech. 24, 348-372, 1999.
- Belytschko T., Lu Y.Y., Gu L., *Element free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Eng. 37, 229-256, 1994.
- Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl O., *Meshless methods : An overview and recent developments*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 139, 3-47, 1996.
- Eringen A.C., *Theory of nonlocal elasticity and some applications*, Res Mechanica 21 313-342, 1987.
- Kansa E.J., *Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics : II. Solutions to parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations*, Comput. Math. Appl. 19, 147-161, 1990.
- Kouitat Njiwa R., *Isotropic-BEM coupled with a local point interpolation method for the solution of 3D-anisotropic elasticity problems*, Engineering Analysis with Boundary Elements 35, 611-615, 2011.
- Liu G.R., Gu Y.T., *A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids*, J. Sound Vib. 246, 29-46, 2001.
- Liu G.R., Gu Y.T., *A point interpolation method for two-dimensional solids*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 50, 937-951, 2001.
- Liu G.R., *Mesh Free Methods : Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC Press, USA, 2002.
- Liu G.R., Gu Y.T., *A meshfree method : meshfree weak-strong (MWS) form method for 2-D solids*, Computational Mechanics 33, 2-14, 2003.
- Pisano A.A., Sofi A., Fuschi P., *Nonlocal integral elasticity : 2D finite element based solutions*, Int. J. Sol. Struct. 46, 3836-3849, 2009.
- Polizzotto C., *Nonlocal elasticity and related variational principles*, International Journal of Solids and Structures 38, 7359-7380, 2001.
- Polizzotto C., *Remarks on some aspects of nonlocal theories in solid mechanics*. In : Proc. Of the 6<sup>th</sup> Congress of Italian Society for Applied and Industrial Mathematics (SIMAI), Cagliari, Italy, 2002.

Polizzotto C., Fushi P., Pisano A.A., *A strain-difference-based nonlocal elasticity model*, International Journal of Solids and Structures 41, 2383-2401, 2004.

Powell M.J.D., *The theory of radial basis function approximation in 1990*. In : Advanced in Numerical Analysis, Light FW (ed.), 303-322, 1992.

Rabczuk T., Belytschko T., *A three-dimensional large deformation meshfree method for arbitrary evolving cracks*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196, 2777-2799, 2007.

Zhang X., Liu X.H., Song K.Z., Lu M.W., *Least-square collocation meshless method*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 51, 1089-1100, 2001.

# Conclusion générale

Les défauts dans les alliages métalliques (dislocations, cavités, fissures...) constituent des zones de concentration de contrainte et contribuent à fragiliser les structures. Dans l'industrie automobile, il est indispensable de caractériser leur dangerosité afin de réduire le risque de casse en service et pour limiter le taux de rebus pendant la fabrication.

Pour répondre à cet objectif, nous avons développé un outil numérique qui permet de calculer de manière rapide et fiable les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte sur le front d'une fissure 3D. Nous nous limitons dans cette étude à des cas de chargement mécanique statique. Les équations d'équilibre classiques sont résolues par la méthode des éléments de frontière. Des conditions de contact unilatéral sont adoptées pour gérer les cas de refermeture de la fissure.

Afin de valider notre approche, les facteurs d'intensité de contrainte sont comparés aux solutions analytiques de Sneddon pour une fissure circulaire. Les résultats obtenus avec un maillage de fissure relativement grossier sont d'une très bonne précision.

De plus, nous avons démontré l'intérêt des conditions de contact unilatéral, notamment en présence de compression. Le phénomène d'interpénétration des lèvres de la fissure est évité et le  $K_I$  reste positif ou nul quel que soit le chargement.

Plusieurs problèmes de fissures, internes comme débouchantes, sont traités. Les résultats obtenus sont très intéressants et méritent d'être soulignés. Nous avons notamment mis en évidence l'influence de la frontière libre du domaine sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte. L'effet est plus ou moins marqué suivant la proximité de la fissure à la surface, et dépend aussi de sa forme et de son orientation. Dans le cas débouchant, les résultats indiquent qu'une fissure peu profonde tend à se développer vers l'intérieur du matériau. En revanche, lorsque la profondeur augmente, la propagation a lieu à la surface de la pièce.

Enfin, ce travail préliminaire a permis de révéler quelques inconvénients de l'approche locale. Nous avons ainsi testé trois critères de propagation classiques. Sur l'angle de propagation, leurs prédictions sont en bon accord tant que le mode I est dominant, mais divergent lorsque le mode II devient prépondérant. De même, en présence de compression, ces critères ne permettent pas de prévoir des résultats cohérents avec les observations expérimentales.

Pour surmonter ces inconvénients, nous nous intéressons dans un deuxième temps aux avantages que procure une modélisation non-locale du comportement élastique au voisinage de la fissure.

Tout d'abord, nous avons considéré le cas d'une fissure dans un milieu infini. A cette condition, le calcul des contraintes non-locales peut se faire en post-traitement, par l'évaluation d'une intégrale volumique du champ de déformation issu de la résolution des équations d'équilibre classiques. Pour réaliser cette tâche, nous avons opté pour une stratégie numérique basée sur la méthode des éléments de frontière.

Grâce à la modélisation non-locale, nous obtenons une contrainte finie sur le front de fissure et localement maximale en avant du front. La position et l'intensité de ce maximum dépendent d'une longueur interne caractéristique du matériau. Ce résultat constitue un premier pas vers la prise en compte de la microstructure dans la caractérisation de la fissuration. Il est en accord avec le travail de Bouchaud et Pan (1999) qui montre qu'un endommagement local s'initie devant le front et est à l'origine du mécanisme de propagation de la fissure.

En s'appuyant sur ces résultats, nous avons analysé diverses géométries et configurations de fissures. Nous proposons d'utiliser la position et l'intensité du maximum local de contrainte

pour prédire le comportement de la fissure. L'amplitude du maximum est comparée à la contrainte de cohésion du matériau – une donnée « universelle » – et sa position permet de déterminer la direction de propagation de la fissure.

Pour ce qui est de l'influence de la forme de la fissure, cette stratégie débouche sur des conclusions similaires à celles tirées de l'analyse des facteurs d'intensité de contrainte dans l'approche classique. En revanche, les apports du modèle non local sont clairement mis en évidence dans la recherche de l'angle probable de propagation. Pour des problèmes avec sollicitations mixtes ou en présence d'efforts de compression, les résultats obtenus sont conformes aux observations expérimentales pour des matériaux fragiles.

Ce travail démontre les avantages d'une modélisation non-locale du comportement. L'approche permet d'introduire l'influence de la microstructure du matériau. De plus, en se ramenant à un critère de propagation fondé sur la contrainte, elle permet de traiter des cas problématiques dans le cadre classique de la mécanique linéaire de la rupture.

Toutefois, les premiers résultats pour la fissure débouchante ont aussi mis en évidence certaines insuffisances du modèle non-local de Eringen. Au voisinage de la frontière externe du domaine, les résultats obtenus ne conduisent pas aux mêmes conclusions que celles tirées de l'analyse des facteurs d'intensité de contrainte dans l'approche classique.

A la fin de ce manuscrit, nous apportons donc une première réponse à ce problème. Nous proposons une nouvelle stratégie numérique pour traiter le cas d'un milieu élastique non-local fini. Cette approche est basée sur un couplage de la méthode des éléments de frontière avec une méthode forte de collocation par points. De plus, le modèle de comportement amélioré de Polizzotto est adopté.

Cette nouvelle méthode a tout d'abord été testée sur des cas de milieux sans fissure. Les exemples traités ont permis de démontrer l'intérêt de la loi de comportement amélioré de Polizzotto. En présence d'un champ de déformation uniforme, le champ de contrainte calculé est lui aussi uniforme dans tout le solide, y compris au voisinage de sa frontière externe. La qualité des résultats obtenus confirme l'efficacité de la nouvelle approche.

Des résultats prometteurs ont été obtenus pour une géométrie de fissure et montrent tout le potentiel de notre stratégie pour traiter des problématiques de fissuration. Toutefois, des difficultés numériques subsistent et devront être surmontées afin d'envisager, dans un futur proche, des critères d'initiation et de propagation de fissure basés sur une contrainte équivalente comme c'est le cas, par exemple, pour les problèmes de plasticité.

# Résumé

## **Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile - Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique**

Mots clés : Fissuration fragile – Elasticité non-locale - Eléments de frontière – Méthodes sans maillage

### Contexte industriel et objectif de la thèse

Face à l'intense concurrence régnant dans l'industrie automobile, les constructeurs sont forcés de réduire continuellement leurs coûts de production. PSA Peugeot Citroën possédant toujours ses propres forges et fonderies à Mulhouse, Charleville, Sept Fond, ... il est crucial pour ce secteur d'activité fortement concurrentiel d'effectuer d'importants gains de productivité. L'un des aspects sur lesquels PSA a décidé de jouer se situe au niveau de la diminution des taux de rebus. Afin de diminuer le nombre de pièces rebutées, la solution la moins onéreuse consiste à accepter des pièces à défaut. Pour accepter de telles pièces, il est crucial de s'assurer de leur tenue au cours du cycle de vie du véhicule.

La persistance de défauts dans les pièces mécaniques à l'issue de leur procédé de fabrication (et lors de leur sollicitation en service) est une problématique majeure de l'industrie automobile.

Ces derniers sont de types variés et dépendent fortement du mode de fabrication employé, notamment des contraintes mécaniques, thermiques ou chimiques subies par le matériau au cours de l'élaboration de la pièce ou pendant son utilisation plus particulièrement en fatigue.

Les fissures font partie des défauts les plus dangereux pour l'intégrité d'une structure. Dans certaines circonstances défavorables, elles peuvent se propager et conduire à la ruine catastrophique, ou progressive du matériau.

Il apparaît donc important, à l'issue de la fabrication et ultérieurement, pour le contrôle et la maintenance, d'évaluer la dangerosité des fissures préexistantes au sein d'une pièce mécanique. Le but est de fixer des critères d'acceptation de ces fissures en fonction de leur taille, de leur orientation, de leur position dans la pièce et du chargement appliqué.

Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est double. D'une part, fournir au corps de métier de la société, un outil simple et fiable permettant d'évaluer efficacement la dangerosité des défauts en regardant les facteurs d'intensité de contraintes aux fronts d'une fissure par rapport à une valeur limite donnée expérimentalement. D'autre part d'étudier l'apport d'une modélisation non locale du comportement élastique sur le comportement des fissures.

### Contexte scientifique

Le cadre théorique le plus connu pour traiter les problèmes de fissuration est la mécanique linéaire de la rupture. Cet outil est fondé sur l'hypothèse d'un milieu globalement élastique où les phénomènes de plasticité sont confinés au voisinage de la fissure.

Sous ces conditions, les expressions asymptotiques du champ de contrainte (Irwin (1957)) tendent vers l'infini lorsqu'on s'approche du front de la fissure. A cause de cette singularité, le tenseur de contrainte est inexploitable pour prédire le comportement de la fissure. En général, les critères d'initiation et de propagation classiques portent sur les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , trois paramètres dépendant de la géométrie de la fissure et du chargement appliqué au solide. Ces grandeurs sont comparées à une valeur critique caractéristique du matériau. Elles permettent de prédire la stabilité et la direction de propagation de la fissure.

La mécanique linéaire de la rupture est un outil très apprécié qui a fait ses preuves dans de nombreuses situations industrielles. Elle présente cependant l'inconvénient de prédire des contraintes infinies en pointe de fissure. Cette solution est physiquement incohérente et a induit l'introduction du concept de zone plastique en pointe de fissure. Pour d'autres scientifiques, cette singularité des contraintes en pointe de fissure est symptomatique des limitations de la théorie classique de l'élasticité à traiter des problèmes en présence de singularités géométriques (telles que les fissures).

Suivant la ligne de pensée de ces scientifiques, nous nous sommes intéressés aux théories non-locales, et plus particulièrement à la théorie non-locale intégrale. Ce type d'approche propose une description plus fine du comportement en prenant en compte des interactions à plus longue distance. Ainsi, dans la théorie non-locale intégrale, le comportement en un point donné du solide dépend de l'état de déformation en tous les points de ce solide. Grâce à une telle description plus fine du comportement élastique les singularités inhérentes aux modèles classiques au voisinage de la fissure sont levées. Le champ de contrainte est partout fini dans le milieu y compris sur le front de la fissure.

## Travail réalisé

Dans ce travail de thèse nous avons choisi d'affiner la description du comportement du matériau au voisinage de la singularité géométrique. Pour nos travaux, nous avons retenu le modèle de Eringen (1987). Dans cette approche, la loi de comportement fait intervenir une intégrale du champ de déformation sur l'ensemble du solide. Elle dépend en outre d'une longueur interne caractéristique de la structure sous-jacente du matériau.

Dans une première approche, nous avons étudié l'apport de la théorie non locale sur la description du comportement d'une fissure dans un milieu infini sous diverses configurations de chargement. Les prémices d'une stratégie numérique particulière ont été établies pour l'extension de l'étude au cas de fissures dans un milieu borné.

Dans ce manuscrit, nous présentons d'abord des résultats relatifs à la modélisation classique du comportement sous sollicitation quasi-statique. Le problème est résolu par la méthode des éléments de frontière (Bonnet (1999)), une alternative intéressante à la méthode des éléments finis en mécanique de la rupture (réduction de la dimension du problème d'une unité, modélisation géométrique de la fissure facilitée). Le calcul des facteurs d'intensité de contrainte est réalisé de façon rapide et précise pour des cas de fissures internes ou débouchantes sous différents types de sollicitations statiques. L'utilisation d'une condition de contact unilatéral permet de gérer le problème de fermeture des lèvres de la fissure en présence de compression. On peut ainsi traiter les cas de fissures partiellement ou totalement fermées. Cet outil efficace répond aux exigences du corps de métier (il sera très prochainement intégré dans un outil de simulation tel que Abaqus) et il remplit une partie du cahier des charges du travail de thèse.

Nous nous penchons ensuite sur la possibilité de décrire l'initiation et l'évolution de la fissuration par l'intermédiaire d'une contrainte résolue. Il s'agit de la résolution numérique de problèmes de structures à comportement élastique non local. Nous avons opté pour une stratégie numérique basée sur la méthode des éléments de frontières.

En premier lieu nous avons considéré le cas d'une fissure dans un milieu infini. Ce choix nous permet dans bien des situations d'estimer l'apport de la modélisation non locale du comportement comparée à l'approche locale. Dans ce contexte, le calcul des contraintes non-locales se fait en post-traitement, par l'évaluation d'une intégrale volumique du champ de déformation issu de la résolution des équations d'équilibre classiques (Artan (1996), Eringen (2002)).

Nous montrons que la contrainte obtenue est finie sur le front de fissure et localement maximale en avant du front. L'amplitude et la position de ce maximum local sont significativement influencées par la longueur interne du matériau (introduite via la relation de comportement non-locale) représentative de sa microstructure. Ce résultat constitue un premier pas vers la prise en compte de la microstructure dans la caractérisation de la fissuration. Il est par ailleurs en accord avec diverses études (Bouchaud et Pan (1999)) qui montrent qu'un endommagement local s'initie devant le front de la fissure et est à la base du mécanisme de propagation (que l'on soit en rupture fragile ou ductile).

Diverses géométries et configurations de fissures enterrées sont analysées. Les apports de l'approche non locale sont clairement mis en évidence en particulier par rapport à l'angle probable de propagation.

Toutefois, la considération de ces problèmes de fissures, bien qu'instructive, a mis en évidence certaines insuffisances du modèle de comportement de Eringen, telles que signalées par Polizzotto (2004) dans un autre contexte. De ce fait, nous avons adopté pour la suite de l'étude un modèle de comportement amélioré nécessitant la construction d'une nouvelle stratégie numérique. Les performances de l'approche ont été testées sur le cas de milieux sans singularités géométriques (Schwartz et al. 2012).

Des résultats prometteurs ont été obtenus pour une géométrie de fissure. Toutefois, des difficultés numériques subsistent. Nous espérons qu'elles seront surmontées dans un futur proche. Une analyse plus poussée de l'approche sera alors entreprise et conduira certainement à la définition d'un critère d'initiation et de propagation de fissure similaire à ceux utilisés pour la plasticité.

## Références

Artan R., Nonlocal elastic half plane loaded by a concentrated force, *Int. J. Engng. Sci.* 34, 943-950, 1996.

Bonnet M., *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, John Wiley and Sons, New-York, 1999.

Bouchaud E., Pan F., Fracture and damage at a microstructural scale, *Computing in Science and Engineering* 1, 32-38, 1999.

Eringen A.C., Theory of nonlocal elasticity and some applications, *Res Mechanica* 21 313-342, 1987.

Eringen A.C., *Nonlocal continuum field theories*, Springer New-York, 2002.

Irwin G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364, 1957.

Polizzotto C., Fushi P., Pisano A.A., A strain-difference-based nonlocal elasticity model, *Int. J. Sol. Struct.* 41, 2383-2401, 2004.

Schwartz M., Niane N.T., Kouitat R., A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity : Isotropic-BEM coupled with strong form local radial point interpolation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 36 (4), p606-612, 2012.



# Abstract

## Contribution to the treatment of three-dimensional brittle cracking problems – Toward the use of a nonlocal elasticity model

Keywords: Brittle fracture – Nonlocal elasticity – Boundary Element Method – Meshfree method

### Industrial context and purpose of the thesis

Due to the intense competition prevailing in the automotive industry, manufacturers are forced to reduce their production costs. PSA Peugeot Citroën still has its own forges and foundries in Mulhouse, Charleville, or Sept Fond ... that is why it is critical in this highly competitive industry to make significant productivity gains. To this end, PSA has decided, among others things, to decrease its rebus rates. To reduce the number of rejected components, the cheapest solution is to accept parts containing defects. Therefore, it is crucial to ensure that they won't fail during the life cycle of the vehicle. The persistence of defects in mechanical parts at the end of the manufacturing process is a major issue in the automotive industry. They are of various types and depend strongly on the manufacturing method and the mechanical, thermal or chemical constraints experienced by the material during the process or the life of the vehicle.

The cracks are among the most dangerous defects for the safety of a structure. In some adverse circumstances, they can spread and lead to catastrophic or progressive destruction of the material.

It therefore appears important, for the control and maintenance of the product, to assess the danger of pre-existing cracks in a mechanical part. The goal is to establish acceptance criteria for these cracks depending on their size, orientation, position and the loading applied.

In this context, the objective of this thesis is twofold. On the one hand, provide the company with a simple and reliable tool for evaluating efficiently the dangerous defects by looking at the stress intensity factors on the crack fronts and comparing them to a limit given experimentally. On the other hand, to study the contribution of a nonlocal modeling of the elastic behavior for the analysis of cracks.

### Scientific context

The well-known theoretical framework for addressing the problems of cracking is the linear fracture mechanics. This tool is based on the assumption that the overall elastic plasticity phenomena is confined in the vicinity of the crack.

Under these conditions, the terms of the asymptotic stress field (Irwin (1957)) tend to infinity when approaching the front of the crack. Because of this singularity, the stress tensor can't be used to predict the behavior of the crack. In general, the criteria of initiation and propagation is based on the values of stress intensity factors  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ , three parameters depending on the geometry of the crack and the load applied to the solid. These quantities are compared to a critical value that is a characteristic of the material. They are able to predict the stability and direction of crack propagation.

The linear fracture mechanics is a popular tool which is efficient in many industrial situations. However, it has the disadvantage of predicting infinite stress at the crack tip. This solution is

physically inconsistent and has led to the introduction of a plastic zone at the crack tip. For others, the stress singularity at the crack tip is symptomatic of the limitations of the classical theory of elasticity to deal with problems in the presence of geometric singularities (cracks). Following the idea of these scientists, we are interested in nonlocal theories, especially the nonlocal integral theory. This type of approach provides a more detailed description of the behavior taking into account the interactions over longer distances. Thus, in the nonlocal integral theory, the behavior at a given point of the solid depends on the state of deformation at all points of this solid. With this finer description of the elastic behavior, the singularities on the front of the crack, inherent to classical elasticity, vanished. The stress field is finite in the whole media including the front of the crack.

## Work performed

In this thesis we have chosen to refine the description of material behavior in the vicinity of the crack. For our work, we used the model of Eringen (1987). In this approach, the constitutive law involves an integral of the deformation field throughout the solid. It also depends on a characteristic internal length of the underlying structure of the material.

In a first approach, we studied the contribution of a nonlocal integral theory of elasticity to analyze the behavior of a crack in an infinite medium under different loading configurations. The beginnings of a new numerical strategy have been developed to extend the study to the case of cracks in a bounded media.

In this manuscript, we first present the results for the classical modeling of the behavior under quasi-static loading. The problem is solved by the boundary element method (Bonnet (1999)), an interesting alternative to the finite element method in fracture mechanics (it reduces the size of the problem by one and the geometric modeling of the crack is easier). The calculation of stress intensity factors is performed quickly and accurately in cases of internal or emergent cracks under different static loads. The use of a unilateral contact condition is used to handle the problem of crack submitted to compression loading. Thus, we can deal with cases of cracks partially or completely closed. This tool meets a part of the expectations of PSA-Peugeot-Citroen and will be soon integrated into a simulation tool (Abaqus).

We then examine the possibility of describing the initiation and evolution of cracking through a criteria based on the stress in the vicinity of the crack front. To this end, we propose a numerical strategy to solve structural problems in nonlocal elasticity. We opted for a numerical approach based on the boundary element method.

First we considered the case of a crack in an infinite medium. This choice allows us in many situations to estimate the contribution of nonlocal modeling of the behavior compared to the local approach. In this context, the calculation of nonlocal stresses is done in post processing, through the evaluation of an integral of the deformation field resulting from the resolution of the classical equations of equilibrium (Artan (1996), Eringen (2002)).

We show that the stress obtained over the crack front is finite and exhibits a local maximum ahead of the front. The magnitude and position of this local maximum is significantly influenced by the internal length of the material (introduced via the constitutive nonlocal relation) representative of the microstructure. This result is a first step towards taking into account the microstructure in the characterization of cracking. It is also consistent with various studies (Bouchaud and Pan (1999)) which show that local damage is initiated forward the crack front and is the basis of the propagation mechanism (for brittle or ductile material).

Various geometries and configurations of cracks are analyzed. The contribution of nonlocal approach is clearly demonstrated in particular in relation to the likely angle of propagation.

However, consideration of these problems of cracks has highlighted some shortcomings of the behavior model of Eringen, as reported by Polizzotto (2004). Thus, we have adopted for the rest of the study an improved model for the elastic behavior which requires the construction of a new numerical strategy. The performance of the approach has been successfully tested on the case of media without geometrical singularities (Schwartz et al. 2012).

Promising results were obtained for media with a crack geometry. However, numerical difficulties remain. We hope they will be overcome in the near future. Further analysis of the approach will be carried out and will certainly lead to the definition of a criterion of initiation and propagation of cracks similar to those used for plasticity.

## References

R. Artan, Nonlocal elastic half plane loaded by a Concentrated Force, *Int. J. Engng.Sci.* 34, 943-950, 1996.

M. Bonnet, *Boundary integral equation methods for solids and fluids*, John Wiley and Sons, New York, 1999.

E. Bouchaud, F. Pan, Fracture and damage at a microstructural scale, *Computing in Science and Engineering* 1, 32-38, 1999.

AC Eringen, Theory of nonlocal elasticity and Some applications, *Res Mechanica* 21 313-342, 1987.

AC Eringen, *Nonlocal continuum field theories*, Springer New York, 2002.

GR Irwin, Analysis of stresses and strains near the end of a crack Traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364, 1957.

C. Polizzotto, P. Fushi, Pisano AA, A strain-difference-based nonlocal elasticity model, *Int. J. Ground. Struct.* 41, 2383-2401, 2004.

M. Schwartz, NT Niane, Kouitat R., A simple solution method to 3D integral nonlocal elasticity: Isotropic-BEM coupled with strong local radial point interpolation form, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol 36 (4), P606-612, 2012 .

