HAL
open science

Comportement dynamique non-linéaire dans les convertisseurs statiques : régulateurs de courant et stabilité des réseaux DC

Roghayeh Gavagsaz Ghoachani

▶ **To cite this version:**

Roghayeh Gavagsaz Ghoachani. Comportement dynamique non-linéaire dans les convertisseurs statiques : régulateurs de courant et stabilité des réseaux DC. Energie électrique. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0102 . tel-01749277

HAL Id: tel-01749277

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749277v1

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Ecole Doctorale « Informatique - Automatique - Electrotechnique
Electronique - Mathématiques » Département de Formation Doctorale « Electrotechnique - Electronique »

THESE

Présentée à

L'Université de Lorraine

En vue de l'obtention du grade de

DOCTEUR de l'Université de Lorraine

Spécialité : Génie Electrique

par

Roghayeh GAVAGSAZ GHOACHANI

COMPORTEMENT DYNAMIQUE NON-LINEAIRE DANS LES CONVERTISSEURS STATIQUES : REGULATEURS DE COURANT ET STABILITE DES RESEAUX DC

Soutenue publiquement le 16 Avril 2012 devant la commission d'examen

Membres du Jury :

Président :	Alain BERTHON
Rapporteurs :	Maria PIETRZAK-DAVID
	Mohamed-Fouad BENKHORIS
Examinateur :	Serge PIERFEDERICI
Directeur de thèse :	Bernard DAVAT
Co-directeur de thèse :	Jean-Philippe MARTIN

Laboratoire GREEN (Groupe de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nancy)
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique – Université de Lorraine
2, avenue de la Forêt de Haye 54516 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex

Remerciements

Le travail exposé dans ce mémoire a été effectué au sein du Groupe de Recherche en Électrotechnique et en Électronique de Nancy (GREEN), à l'École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique (ENSEM) de Nancy.

La soutenance s'achève et le moment est venu de penser à tous ceux qui ont été à mes côtés et de leur dire « Merci !».

Je tiens tout d'abord à remercier vivement ***M. Alain BERTHON****, professeur à IUT de Belfort-Montbéliard, pour avoir accepté de juger ce travail et pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.*

J'exprime mes sincères remerciements à ***Mme Maria PIETRZAK-DAVID****, professeur à l'INPT - ENSEEIHT, ainsi que* ***M. Mohamed Fouad BENKHORIS****, professeur au CRTT-IREENA, d'avoir accepté de rapporter sur ce travail et pour l'intérêt qu'ils y ont porté.*

J'adresse mes profonds remerciements à ***M. Serge PIERFEDERICI****, Professeur à l'ENSEM, pour sa disponibilité, son soutien, ses conseils avisés, ses compétences, son expérience, sa patience qui m'a grandement aidée à mener à bien mes travaux de thèse ainsi que sa participation à mon jury.*

J'exprime mes vifs remerciements à ***M. Bernard DAVAT****, professeur à l'ENSEM, d'avoir encadré et dirigé mes travaux. Je voudrais lui exprimer toute ma gratitude pour la grande confiance et la liberté qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse. Je tiens également à le remercier pour ses grandes qualités humaines.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à ***M. Jean-Philippe MARTIN****, Maître de conférence à l'ENSEM, d'avoir co-encadré cette thèse, pour son enthousiasme, son aide et tous les précieux conseils qu'il m'a apportés, des heures durant, sur ces travaux.*

Mes profonds remerciements vont à ***M. Babak NAHIDMOBARAKEH*** *qui m'a soutenue, encouragée et donné de précieux conseils et qui a fait preuve à mon égard d'une grande patience. Je remercie également* ***M. Farid MEIBODY-TABAR*** *pour les différents conseils et encouragements qu'il m'a apportés.*

Je tiens à exprimer également mes remerciements aux Professeurs ***M. Abderrezak REZZOUG*** *et* ***M. Shahrokh SAADATE*** *pour leur accueil au sein du laboratoire GREEN.*

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude au personnel du laboratoire : au personnel administratif, aux secrétaires Mesdames ***Latifa ZOUA****,* ***Sylvie COLINET*** *et* ***Christine PIERSON****, aux techniciens Mesdames* ***Isabelle SCHWENKER*** *et* ***Sophie GUICHARD****, Messieurs* ***Fadi SHARIF*** *et* ***Fabrice TESSON****, et à l'ensemble des chercheurs du GREEN pour leur gentillesse, leur aide, leurs conseils, les bons moments passés ensemble et l'ambiance vécue tout au long de cette thèse.*

J'adresse mes plus chaleureux remerciements à mes voisins de bureau : ***Olivier****,* ***Matheepot****,* ***Dinh-An****,* ***Nicolas*** *et* ***Diane****. Je ne pourrais oublier tous ces bons moments passés en leur compagnie, leur amitié, les discussions scientifiques, toujours très intéressantes.*

Je ne peux que remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées et avec qui j'ai passé de bons moments : ***Sisuda****,* ***Amel****,* ***Panee****,* ***Ting Ting****,* ***Suthida****,* ***Ahmed****,* ***Wattana****,* ***Mohammad Ali****,* ***Alireza****,* ***Shahram****,* ***Babak****,* ***Ehssan****,* ***Mahmoud****,* ***Jérémie****,* ***Pisit****,* ***Pisuit****,* ***Pierre****,* ***Thierry****,* ***Bilal****,* ***Sami****,* ***Raphaël****,* ***Azeddine****,* ***Hugues****,* ***Nicolas****,* ***Alexandre****,* ***Eric****,* ***Matthieu****,* ***Warit****.*

Je tiens aussi à exprimer mes remerciements à tous ceux qui ont eu la gentillesse d'assister à ma soutenance de thèse.

Je remercie également, mes amis, pour leur aide, leur assistance, leur immense soutien moral et affectif ainsi que leur gentillesse.

Enfin, aucun mot ne sera assez fort pour exprimer tout ce que je dois à ma famille, mon époux ***Majid*** *et mes enfants* ***Hamidreza*** *et* ***Amirreza*** *pour leur soutien sans limite.*

Sommaire

Introduction générale 1

Chapitre 1. Phénomènes non-linéaires dans les convertisseurs statiques. Application à un hacheur élévateur 5

1.1. Introduction 7

1.2. Rappel sur les phénomènes non linéaires 7

1.2.1. Introduction 7

1.2.2. Définitions 8

1.2.3. Différents types d'attracteurs 8

1.2.4. Différents types de bifurcation et diagramme de bifurcation 11

1.2.5. Etude de la stabilité 18

1.2.6. Chemins vers un comportement chaotique 20

1.3. Stratégie de modélisation 20

1.3.1. Modélisation en temps discret 22

1.3.2. Modélisation aux sens des valeurs moyennes 38

1.3.3. Retour aux modèles linéaires 39

1.4. Conclusion 50

Chapitre 2. Modèle moyen continu permettant de garantir un cycle mono-périodique des variables d'état des systèmes 51

2.1. Introduction 53

2.2. Régulateur à top à l'amorçage, sans terme intégral 53

2.2.1. Définition du modèle discret 53

2.2.2. Définition du modèle moyen proposé 57

2.2.3. Comparaison des résultats de la méthode proposée avec le modèle discret 63

2.2.4. Etude des propriétés de robustesse paramétrique 64

2.3. Régulateur à top à l'amorçage, avec terme intégral 64

2.3.1. Définition du modèle discret 64

2.3.2. Développement du modèle moyen proposé 67
2.3.3. Comparaison des résultats obtenus avec le modèle discret et le modèle proposé 71
2.4. Prise en compte des éléments parasites du montage 72
2.5. Résultats expérimentaux 73
2.6. Prise en compte de la variation de la tension de sortie 77
2.7. Généralisation de la méthodologie proposée pour d'autres structures de contrôleur de courant 78
2.7.1. Régulateur hybride à top de blocage 78
2.7.2. Hystérésis modulé 79
2.7.3. Régulateur PI associé à une modulation par MLI 90
2.8. Conclusion 96

Chapitre 3. Application au système de filtrage actif pour les hacheurs à absorption continue de courant 97
3.1. Introduction 99
3.2. Structure du filtre actif 99
3.2.1. Topologie utilisant deux convertisseurs isolés 102
3.2.2. Topologie avec un seul convertisseur isolé 103
3.3. Etude des cycles 104
3.3.1. Diagramme de bifurcation 105
3.3.2. Utilisation du modèle moyen proposé 106
3.4. Résultats de simulation 111
3.5. Résultats expérimentaux 114
3.6. Conclusion 120

Chapitre 4. Comportement dynamique des bus DC connectés à des convertisseurs statiques 121
4.1. Introduction 123
4.1.1. Nature de la charge 123
4.1.2. Présentation du système étudié et de sa modélisation 127
4.2. Analyse de la stabilité 132
4.2.1. Modèle non échantillonné 132
4.2.2. Modèle échantillonné 136
4.2.3. Analyse des résultats 138

4.3. Comparaison avec les résultats donnés par les modèles moyens usuels 158
4.4. Robustesse 161
4.5. Conclusion 164

Conclusion générale 165

Bibliographie 169

Introduction générale

Durant ces dernières décennies, motivée par la demande croissante de systèmes électriques dans de nombreux champs d'application, l'ingénierie électrique a connu un développement intense dans de nombreux domaines. Le dimensionnement des éléments d'un convertisseur statique ainsi que les paramètres de la commande utilisée doivent pouvoir garantir un fonctionnement stable quel que soit le point de fonctionnement.

Les systèmes non-linéaires, tels que les convertisseurs statiques, sont connus pour avoir une variété importante de comportements complexes. Parmi les comportements non-linéaires complexes, on peut définir les phénomènes de bifurcation pouvant conduire à des phénomènes chaotiques. Le phénomène de bifurcation peut être caractérisé par une modification soudaine du mode de fonctionnement d'un système et provoquer sa destruction. Ainsi, la connaissance de quand (dans quelles conditions) et de comment (de quelle manière) un phénomène de bifurcation apparaît, est fondamental dans le dimensionnement d'un système. De telles connaissances sont obtenues par une modélisation appropriée.

Comme on peut le voir dans la littérature, le modèle le plus adapté pour définir les conditions de bifurcation est le modèle discret. Cependant, ce type de modélisation peut être difficile à mettre en œuvre pour certains types de convertisseurs statiques associés à une stratégie de contrôle spécifique. En effet, pour certains dispositifs, un modèle discret ne peut être défini car il existe uniquement des solutions implicites pour le système d'équations différentielles et ceci, pour chaque séquence de fonctionnement du convertisseur statique.

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au GREEN (Groupe de Recherche en Electronique et Electrotechnique de Nancy). Ce travail a pour objectif de contribuer à l'amélioration de la modélisation des convertisseurs statiques. Des outils d'analyse des phénomènes non-linéaires ont été mis en œuvre pour les études de stabilité des réseaux DC lorsque le filtre d'entrée a volontairement une bande passante voisine de la fréquence de découpage du convertisseur.

Dans le premier chapitre, nous allons rappeler les différents phénomènes non-linéaires pouvant être présents dans les convertisseurs statiques et présenter les outils usuellement utilisés pour les caractériser. Parmi ces outils, on retrouve évidemment le diagramme de bifurcation permettant d'obtenir une représentation stroboscopique de l'évolution des variables d'état du système. Différentes méthodes de modélisation seront présentées et appliquées à un convertisseur élévateur usuel de type boost. Ensuite, des modèles linéarisés permettant de définir le comportement dynamique autour d'un point de fonctionnement sont présentés. Le modèle discret sur un convertisseur boost sera validé grâce à des résultats expérimentaux.

Dans le deuxième chapitre, on va proposer une nouvelle formulation du modèle moyen pour pouvoir estimer le premier point de bifurcation et ceci, même dans le cas de bifurcation de type flip. Cette nouvelle formulation est appliquée, dans un premier temps, à un convertisseur boost associé à un régulateur non-linéaire à top d'amorçage. Ensuite, cette formulation est appliquée dans le cas d'un contrôle hybride comportant un terme intégral. Et enfin, cette formulation est généralisée pour différents types de régulateurs hybrides, comme par exemple les régulateurs hybrides à top de blocage ou à hystérésis modulée. Cette formulation est également appliquée pour étudier la nature des cycles obtenus pour des régulateurs linéaires associés à une modulation par largeur d'impulsions. De nombreux résultats expérimentaux

vont permettre de valider l'efficacité de la formulation proposée pour plusieurs structures de régulateurs.

Dans le chapitre trois, cette méthodologie de modélisation est appliquée au système de filtrage actif breveté au laboratoire en 2008 pour lequel, un modèle discret est difficile à définir. Ce système de filtrage se greffe en parallèle sur un convertisseur d'interface et permet de réduire fortement les ondulations de courant générées par ce dernier. De nombreux résultats expérimentaux permettent de prouver la pertinence du modèle et la possibilité de définir les conditions sur les paramètres du système pour lesquelles une bifurcation apparaît.

Le dernier chapitre permet d'appliquer les outils d'étude des systèmes non-linéaires à l'analyse de la stabilité des réseaux DC. En effet, dans certaines applications, des filtres LC sont utilisés afin de respecter des contraintes sur les courants et les tensions d'un réseau DC. Pour les applications embarquées, l'un des objectifs est de réduire le coût, le poids et le volume de ces organes de filtrage. Cela implique l'utilisation de faibles valeurs des composants passifs. La réduction des capacités de filtrage est l'une des solutions proposées. Néanmoins, une diminution de la valeur de capacité va automatiquement se traduire (à inductance constante) par une augmentation de la fréquence de coupure du filtre pouvant atteindre des valeurs voisines de la fréquence de découpage du convertisseur statique. Un modèle discret de ce type de système a été défini, prenant en compte les différents phénomènes non-linéaires du système. Des résultats expérimentaux permettent de valider les modèles définis.

Enfin, une conclusion générale permet de faire le bilan des différents modèles définis pour l'étude des phénomènes non-linéaires et plus particulièrement de définir les conditions d'apparition de la première bifurcation dans un système donné. Différentes perspectives associées aussi bien pour la nouvelle formulation d'un modèle moyen que pour l'analyse de stabilité dans les réseaux DC seront présentées.

Chapitre 1

Phénomènes non-linéaires dans les convertisseurs statiques. Application à un hacheur élévateur

1.1. Introduction

Les systèmes pouvant être modélisés par des équations algébriques et/ou différentielles non-linéaires sont appelés des systèmes non-linéaires. Des exemples de tels systèmes sont présents dans de nombreux champs de disciplines scientifiques et d'ingénierie [Nay 95].

Durant ces dernières décennies, motivée par la demande croissante de systèmes électriques dans de nombreux champs d'application, tels que l'automobile, la marine, le ferroviaire ou l'aéronautique, l'ingénierie électrique a connu un développement intense dans de nombreux domaines : matériaux semi-conducteurs, méthodes de contrôle, conception de structures de convertisseurs, composants passifs, intégration des semi-conducteurs, etc. Cependant, même si de nombreux convertisseurs statiques sont utilisés depuis plus de 50 ans, des modèles analytiques (moyens et discrets) permettant un dimensionnement des éléments du convertisseur ne sont apparus que dans les années 1970 [Tse 04].

Les systèmes non-linéaires présentent une variété importante de comportements complexes telle que la modification brutale du régime de fonctionnement, un mode de fonctionnement atypique voire chaotique. De tels phénomènes peuvent naturellement se produire dans les systèmes d'électronique de puissance. La conception et le dimensionnement des convertisseurs statiques doivent assurer un fonctionnement régulier du système. La recherche d'une conception optimale aussi bien en termes de fonctionnalité que de fiabilité du système passe obligatoirement par la modélisation précise du système dans toutes ses conditions de fonctionnement.

Dans ce chapitre, on présente les différents phénomènes non-linéaires pouvant apparaitre dans les systèmes et plus principalement dans les convertisseurs statiques. On analysera les différentes solutions d'équilibre pouvant être présentes dans ces systèmes et on détaillera les différents types de bifurcation pouvant faire passer un système d'un régime de fonctionnement à un autre.

On s'intéresse ensuite aux différents outils permettant de prédire l'apparition de bifurcation et les différents types de modèles pouvant être appliqués. Les stratégies de modélisation à temps continu et/ou à temps discret sont ensuite appliquées à un convertisseur DC/DC usuel associé à un contrôleur de courant non-linéaire à large bande passante. Les paramètres de bifurcation définis par les différents modèles seront comparés aux paramètres de bifurcation expérimentaux. La correspondance des différentes valeurs permettra de valider les résultats obtenus par le modèle discret. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux différents types de modèle permettant de prédire le comportement dynamique du système à travers son temps de réponse et l'amplitude du dépassement.

1.2. Rappel sur les phénomènes non linéaires

1.2.1. Introduction

Usuellement, les convertisseurs statiques sont conçus et dimensionnés pour fonctionner de manière stable et périodique, où les formes d'onde dans les convertisseurs se répètent, en régime permanent, à des fréquences définies. Toutefois, un fonctionnement mono-périodique

n'est pas la seule possibilité. Par exemple, sous certaines conditions, le système peut fonctionner en régime n-périodique dans lequel les périodes de toutes les formes d'onde sont exactement n fois celle obtenue pour un mode mono-périodique.

Dans les convertisseurs statiques, de nombreux régimes opérationnels peuvent exister et un grand nombre de paramètres peut influer sur la stabilité d'un régime particulier. Comme les paramètres varient, l'opération peut passer d'un régime à un autre, parfois de manière abrupte. Un tel phénomène où un régime disparaît donnant place à un autre est appelé bifurcation.

Les phénomènes de bifurcation et les phénomènes chaotiques ont été étudiés dans de nombreux travaux de recherche à travers le monde. L'étude des phénomènes de bifurcation et de chaos dans les convertisseurs statiques a débuté à la fin des années 80, lorsque Hamil et al [Ham 88] ont publié : « Analysis of bifurcation and chaotic dynamics in a PWM voltage-mode controlled converter ». Les développements récents dans l'étude des phénomènes non-linéaires en électronique de puissance sont indiqués en [Tse a 00], [Sat 11], [Bao 11], [Tab 11], [Gia 12], [Xu 11].

1.2.2. Définitions

L'étude de la dynamique est essentiellement une enquête sur la façon dont les variables d'état évoluent avec le temps par rapport à leurs valeurs actuelles. Géométriquement, la dynamique peut être visualisée par la construction d'un espace avec les variables d'état comme coordonnées. C'est ce qu'on appelle l'espace d'état ou l'espace des phases. L'état du système à tout instant est représenté par un point dans cet espace [Nay 95], [Ban 01], [Tse 04].

La trajectoire décrite par les variables d'état est appelée orbite ou trajectoire du système, qui commence à partir d'une condition initiale donnée. L'évolution du système se traduit alors par un déplacement du point représentatif dans l'espace des phases, traçant ainsi une trajectoire des phases.

Ces trajectoires sont définies soit par les équations différentielles du système, lorsque l'on utilise une représentation en temps continu, soit par une application itérative lorsque l'on utilise une représentation discrétisée. On peut ainsi définir le système sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad ou \quad x_{n+1} = f(x_n, \mu) \tag{1-1}$$

où μ est un paramètre du système.

Un système dynamique peut avoir de multiples solutions d'équilibre. Pour un ensemble donné de paramètres et une condition initiale donnée, le système converge vers l'une des solutions d'équilibre. Cette solution d'équilibre est appelée attracteur. Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est-à-dire une situation (ou un ensemble d'états) vers laquelle évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Dans les systèmes non-linéaires, il peut y avoir plusieurs attracteurs, et en fonction de la condition initiale, le système converge sélectivement vers l'un d'eux. Ainsi, pour déterminer le comportement en régime permanent d'un système, nous devons connaître les attracteurs possibles ainsi que leurs bassins respectifs d'attraction.

1.2.3. Différents types d'attracteurs

En général, nous pouvons classer les attracteurs dans les catégories suivantes :

A) Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes : [Tho 86], [Nay 95], [Ban 01], [Tse 04]

Point fixe (ou critique ou singulier, ou point stationnaire) : La solution en régime permanent est un point dans l'espace d'état (Figure 1-1).

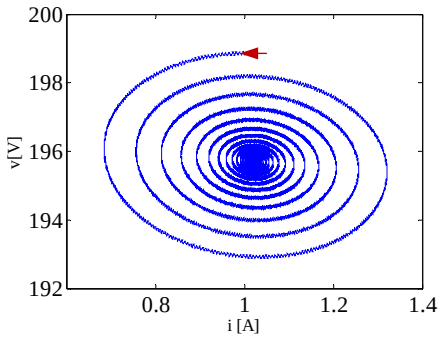


Figure 1-1 : Exemple de point fixe.

Cycle limite ou orbite périodique : La trajectoire se déplace sur un contour fermé dans l'espace d'état. Par ailleurs, cette motion est associée à un nombre fini de fréquences, qui sont liés les uns aux autres par des ratios rationnels. Le mouvement est périodique. Les exemples sont présentés sur la Figure 1-2. Il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes. Les cycles limites n'apparaissent que dans des systèmes non-linéaires, et évoluent toujours vers le même régime périodique, quelles que soient les conditions initiales.

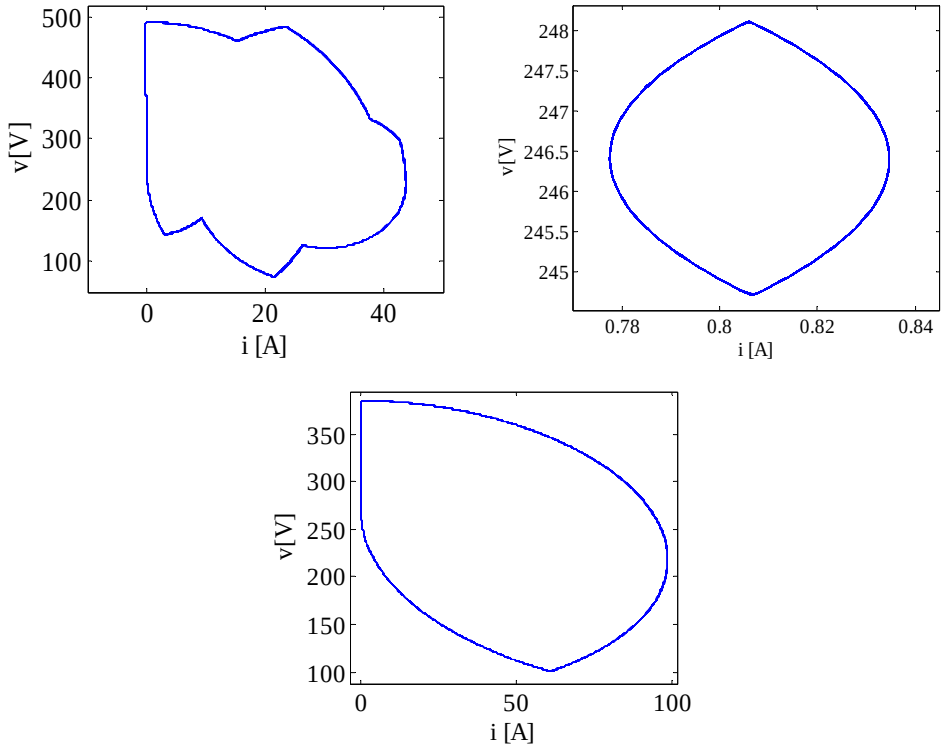


Figure 1-2 : Exemples de cycles limites périodiques.

Orbite quasi-périodique : C'est un cas particulier du cas précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple la trajectoire se déplace sur la surface d'un tore).

Le mouvement est associé à un nombre fini de fréquences, qui sont liées les unes aux autres par des ratios irrationnels. Le mouvement semble "presque périodique", mais n'est pas exactement périodique. Un exemple est montré dans la Figure 1-3. Nous en discuterons plus en détail dans le chapitre 4.

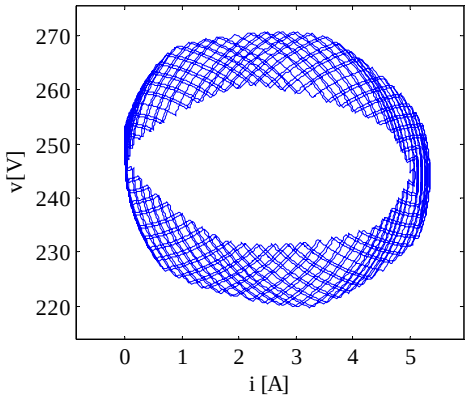


Figure 1-3 : Exemple d'orbites quasi-périodique.

B) Attracteurs étranges

Attracteur chaotique : La trajectoire semble se déplacer de façon aléatoire dans l'espace d'état. Par ailleurs, la trajectoire est bornée et le déplacement est non périodique. Un exemple est montré sur la Figure 1-4. Il s'agit d'ensembles dans l'espace des phases compacts, fermés, dans lesquels on retrouve des trajectoires chaotiques.

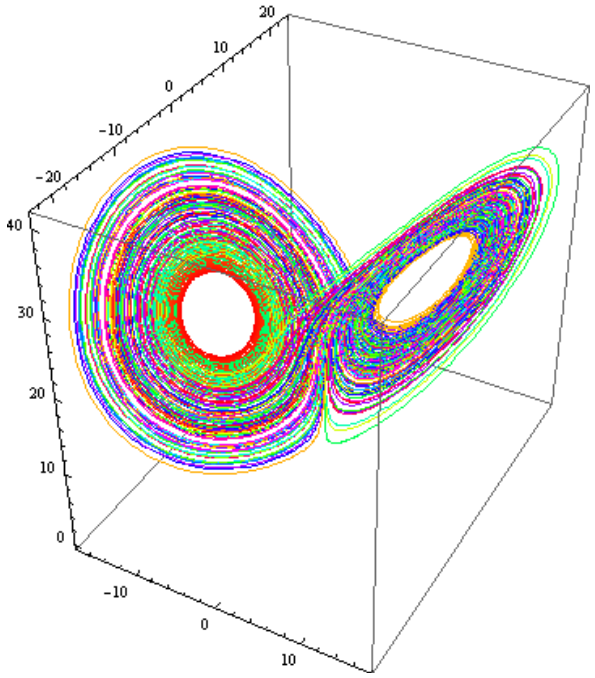


Figure 1-4 : Attracteurs chaotiques du système de Lorenz dans l'espace d'état.

1.2.4. Différents types de bifurcation et diagramme de bifurcation

L'outil le plus couramment utilisé pour mettre en évidence les phénomènes atypiques dans les systèmes dynamiques non-linéaires est le diagramme de bifurcation. Si les paramètres sont autorisés à varier, le système peut abandonner sa solution d'équilibre et chercher une autre solution d'équilibre. Par exemple, lorsque les paramètres varient, la solution d'équilibre présente devient instable et le système est attiré par une autre solution d'équilibre stable. Ce phénomène est appelé bifurcation.

Le diagramme de bifurcation permet de représenter la valeur d'une grandeur échantillonnée en fonction d'un paramètre appelé paramètre de bifurcation. Différentes méthodes d'échantillonnages sont présentées dans la littérature et peuvent être utilisées pour tracer le diagramme de bifurcation. Parmi les principales méthodes d'échantillonnage, on trouve le plan de Poincaré, la carte stroboscopique et différents types de cartes itérées. Dans nos travaux, la méthode principalement utilisée pour l'échantillonnage est la carte stroboscopique.

Pour définir le diagramme de bifurcation, différentes méthodes peuvent être utilisées. On peut soit utiliser un modèle discret soit utiliser les résultats d'une simulation numérique. Lorsque des approximations sont utilisées pour construire le modèle, un léger décalage peut être observé sur le diagramme de bifurcation [Tse 02].

Les paramètres de bifurcation étudiés dans les convertisseurs statiques sont nombreux. Des travaux ont été réalisés en considérant comme paramètres de bifurcation :

- l'amplitude de la tension d'entrée [Tse b 00], [Sat 11],
- la valeur de la résistance de charge [Kav 08], [Tse 00b],
- l'amplitude de la référence de courant [Ban 98],
- la valeur de la capacité [Ban 98],
- la valeur de l'inductance [caf 06],
- la fréquence de commutation des semi-conducteurs [Ban 98],
- la valeur de la résistance série d'une l'inductance et/ou d'une capacité [Ban 98],
- le gain de la chaine de retour [Iu 03], [Maz 03], [Mor 10].

Les convertisseurs statiques principalement utilisés sont, de par la simplicité de leur structure, les convertisseurs :

- de type buck [Dea 90], [Zho 03], [Mir 09], [Yan 09], [Bao 11], [Tab 11], [Sat 11,[El 10],
- de type boost en mode de conduction continue ou discontinue [Wil 97], [Tse 94], [Nat a 09], [Wan 10], [Gia 12]
- de type de buck-boost [Xu 11]
- de type boost réversible [Maz 03],
- les onduleurs monophasés à pont en H [Rob 06],
- de type Cuk [Tse 00b], [Won 08], Luo [Kav 08].

De plus, les associations de convertisseurs usuels comme les convertisseurs boost ont menées aux études présentées dans [Iu 03], [Nat 09b], [Maz 06].

Associés aux structures de convertisseurs précédemment cités, de nombreux types de contrôleurs non-linéaires ont été pris en compte dans la littérature pour réaliser un contrôle en courant ou en tension du convertisseur. Parfois, pour des raisons de simplicité, un contrôle en courant est présenté, sans boucle supplémentaire. En effet, il est connu qu'avec de tels contrôleurs, des phénomènes de bifurcation peuvent apparaitre, engendrant des phénomènes chaotiques [Ber 00]. Pour reporter les phénomènes de bifurcation et éviter de faire apparaitre des comportements chaotiques, des retards et des rampes de compensation peuvent être

insérés dans la structure du contrôleur. Des retards peuvent être insérés dans la chaine de retour [Nat 09a], [Rob 06]. L'utilisation de rampe de compensation est usuellement utilisée pour reporter l'apparition de bifurcation et garantir un comportement mono-périodique [Tse 01]. De plus, l'insertion de paramètres résonants peut aussi permettre d'éviter les phénomènes chaotiques [Zho 03].

De nombreux types de bifurcations ont été définis dans la littérature [Nay 95], [Tse 04], [Ban 01], [Str 94]. Sans présenter une liste exhaustive des différents types de bifurcations, les bifurcations génériques les plus courantes sont rappelées ci-après. Les bifurcations génériques étant les bifurcations générées par la modification d'un seul paramètre.

Une bifurcation de type standard ou "smooth" apparait lors d'une modification des propriétés de stabilité du système, alors qu'une bifurcation de type non standard apparait lors d'une modification structurelle du système [Tse 04]. Les trois bifurcations de type nœud-col, fourche, et transcritique sont définies comme des bifurcations statiques. En revanche, la bifurcation de type Hopf est définie comme une bifurcation dynamique [Nay 95]. Sur la Figure 1-5 sont rappelés les différents types de bifurcations génériques.

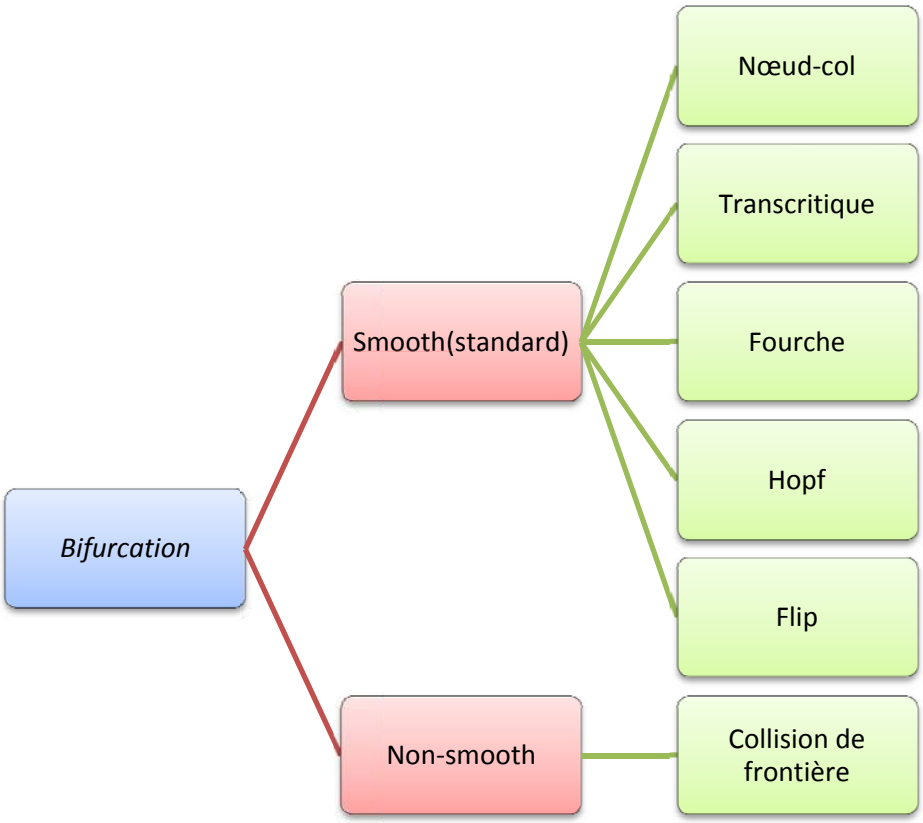


Figure 1-5 : Différents types de bifurcation.

Bifurcation nœud-col

Ce type de bifurcation est caractérisé par une perte ou l'acquisition soudaine de plusieurs solutions d'équilibre stables ou instables lorsque la valeur d'un paramètre franchit une valeur critique. Un diagramme de bifurcation typique est représenté sur la Figure 1-6.

Ce type de bifurcation est désigné sous les noms anglo-saxons : « saddle-node bifurcation », « tangential bifurcation » ou « fold ». Le type de bifurcation "nœud-col" est principalement utilisé dans le cas d'un système dynamique continu. Dans le cas d'un système dynamique discret, ce type de bifurcation est couramment appelé bifurcation de type "fold" [Gia 12].

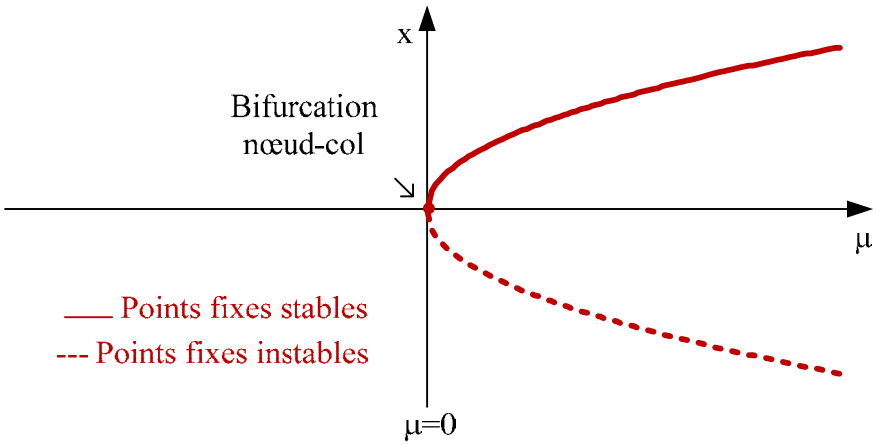


Figure 1-6 : Bifurcation de type nœud-col.

Bifurcation transcritique

Ce type de bifurcation est caractérisé par un échange de statut de stabilité de deux solutions d'équilibre, comme illustré sur la Figure 1-7. Le système a initialement une solution d'équilibre stable et une solution d'équilibre instable. Lorsqu'un paramètre varie et atteint une valeur critique, la solution d'équilibre stable devient instable, tandis que l'équilibre instable devient stable et prend le relais. Il y a échange de stabilité dans un tel cas, entre l'origine et le second point d'équilibre.

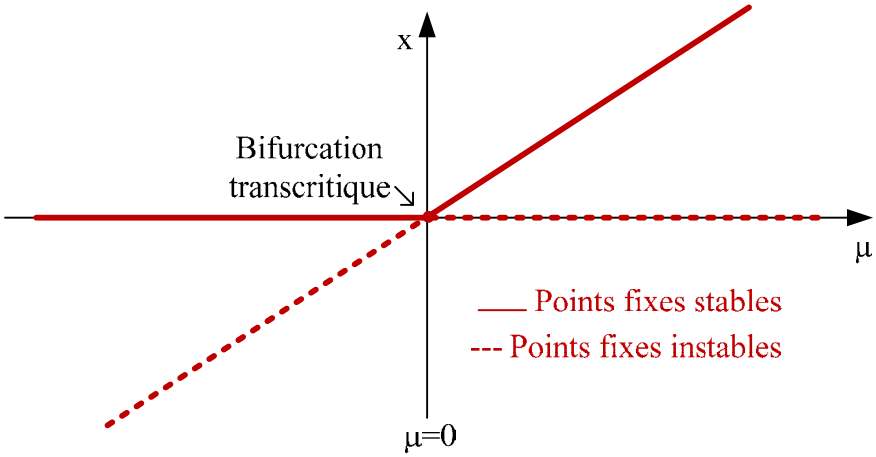


Figure 1-7 : Diagramme de bifurcation transcritique.

Les systèmes dynamiques à seuil sont des exemples typiques d'une bifurcation transcritique, tels que le laser ou la diode.

Bifurcation fourche

Ce type de bifurcation est caractérisé par la division d'une solution d'équilibre stable en deux solutions d'équilibres stables dans le cas de bifurcation fourche supercritique, comme représenté sur la Figure 1-8. Une bifurcation fourche subcritique est caractérisée par la disparition soudaine d'une solution d'équilibre stable, comme illustré sur la Figure 1-9. Ce type de bifurcation est désigné, respectivement, sous le nom anglo-saxon de supercritical pitchfork bifurcation et subcritical pitchfork bifurcation.

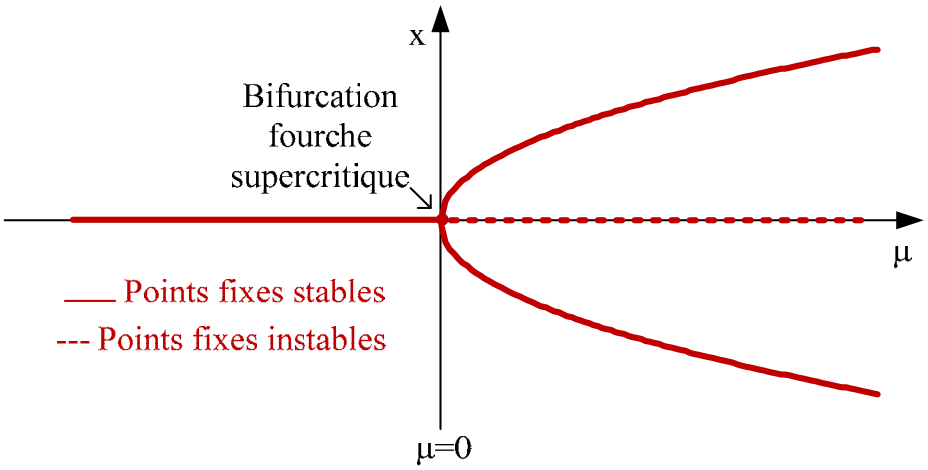


Figure 1-8 : Bifurcation fourche supercritique.

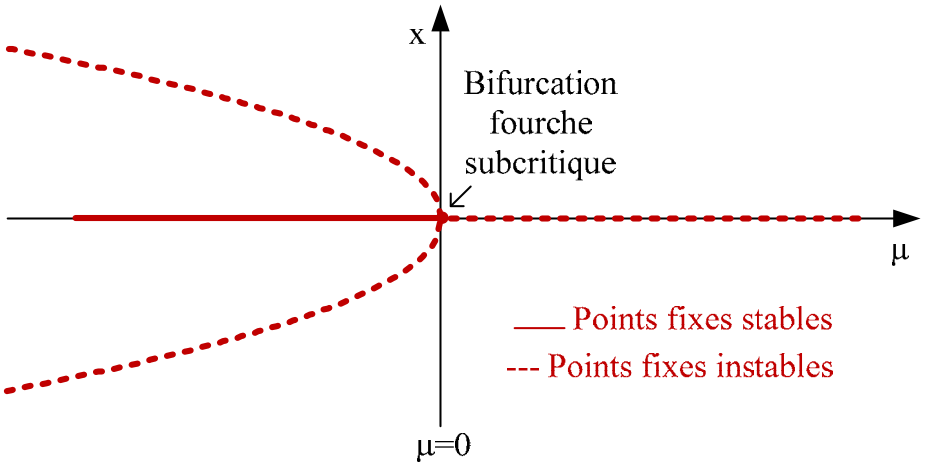


Figure 1-9 : Bifurcation fourche subcritique.

Bifurcation Hopf (Neimark-Scaker)

Ce type de bifurcation est caractérisé par l'expansion d'un point fixe stable en un cycle limite lorsqu'un paramètre varie. Lorsque le cycle obtenu est stable, on obtient une bifurcation de Hopf supercritique (Figure 1-10) et si le cycle n'est pas stable, on obtient une bifurcation de Hopf subcritique (Figure 1-11).

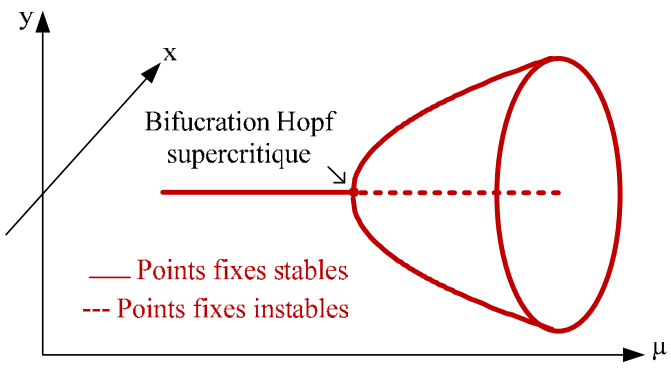


Figure 1-10 : Bifucration de Hopf supercritique.

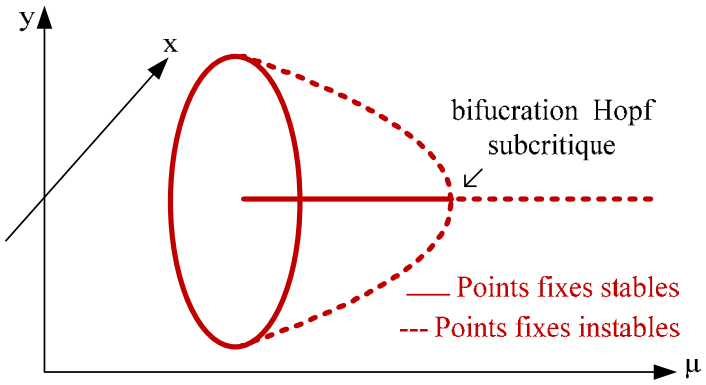


Figure 1-11 : Bifucration de Hopf subcritique.

La bifurcation de type Neimark-Sacker est la même que la bifurcation de type Hopf, mais est principalement obtenue dans les systèmes à temps discret.

Bifurcation flip

La bifurcation flip est aussi appelée bifurcation de doublement de période. Ce type de bifurcation est caractérisé par un doublement soudain de la période d'un cycle limite stable périodique. La bifurcation flip est ainsi une bifurcation caractérisée par la perte de stabilité d'une solution mono-périodique et la naissance d'une solution 2-périodique (Figure 1-12).

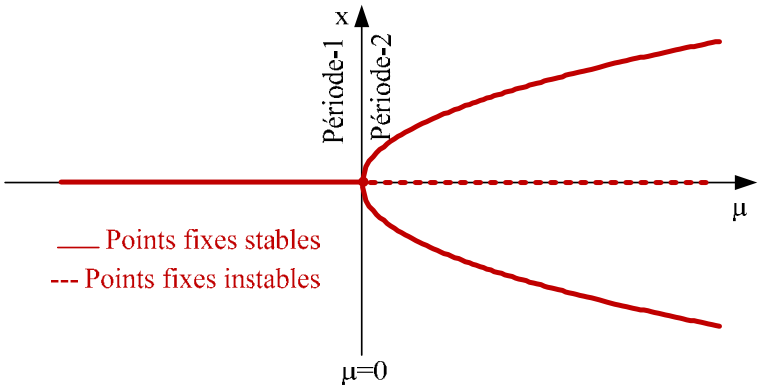


Figure 1-12 : Bifurcation flip pour f(f(x)).

En utilisant l'exemple du système de Lorenz, nous pouvons observer la bifurcation de doublement de période comme indiqué dans Figure 1-13.

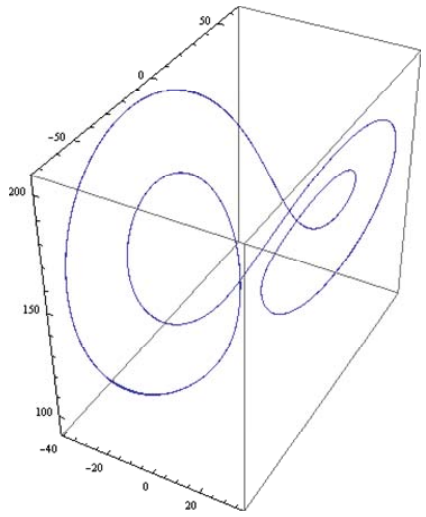


Figure 1-13 : Orbit 2T-Periodique pour le système de Lorenz.

Un exemple de diagramme de bifurcation pour ce type de bifurcation est donné sur la Figure 1-14.

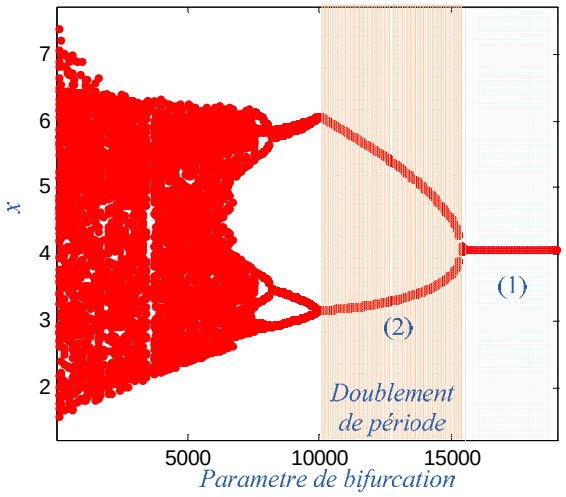


Figure 1-14 : Exemple de bifurcation de type flip.

Bifurcation collision de frontière

Ce type de bifurcation se produit dans les systèmes dynamiques lorsque différents types de structures apparaissent en fonction des paramètres du système [Tse 04].

Le Tableau 1-1 présente les différences principales entre les bifurcations de type standard et non-standard. [Tse 04].

Caractéristiques	bifurcations standards	bifurcations non-standards
Causes	Perte de stabilité	Modification structurelle du système

Structure du système	Structure et séquences de fonctionnement inchangées	Modification des séquences de fonctionnement (apparition de séquences supplémentaires).
Représentation dans le diagramme de bifurcation	Modification présentée dans la partie précédente en fonction du type	Modification soudaine, dont le comportement n'est pas défini dans les bifurcations standards.

Tableau 1-1 : Différences qualitatives entre les bifurcations standards et non-standards [Tse 04].

Deux situations sont particulièrement pertinentes pour des convertisseurs à découpage, comme l'illustre la Figure 1-15.

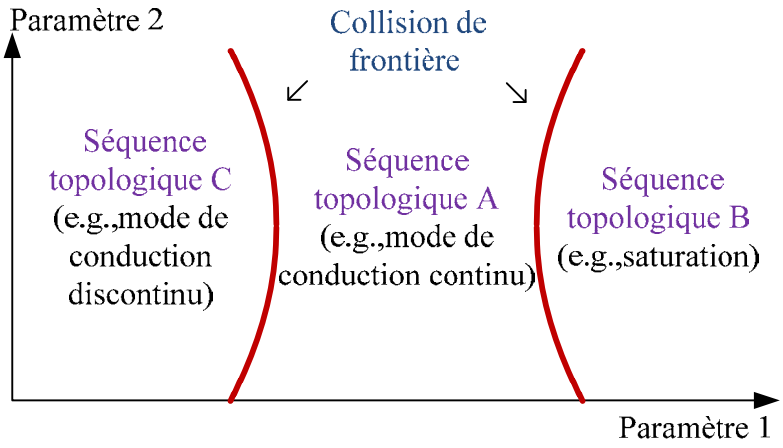


Figure 1-15 : Frontières séparant les zones ayant des séquences différentes [Tse 04].

a) Changement du mode de fonctionnement

Dans tous les convertisseurs statiques, une frontière existe entre un mode de conduction continu et discontinu. Ainsi, le franchissement de cette frontière peut conduire à une bifurcation de frontière. (Figure 1-16).

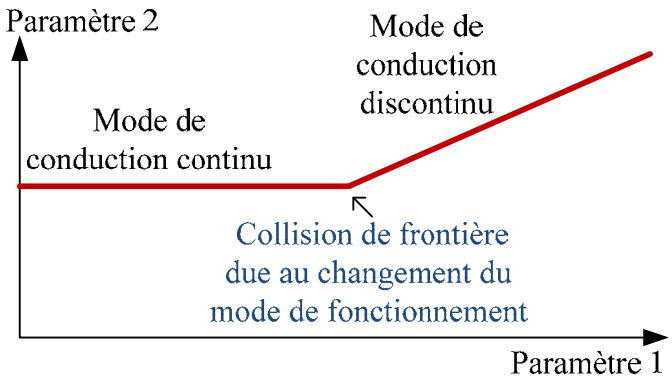


Figure 1-16 : Exemple de diagramme de bifurcation représentant une bifurcation de frontière.

b) Saturation

Dans les convertisseurs statiques, une frontière due à la saturation peut être définie. Le franchissement de cette frontière peut également conduire à une bifurcation non-standard.

1.2.5. Etude de la stabilité

La stabilité asymptotique du système peut être étudiée grâce aux valeurs propres du système au point d'équilibre [Kav 08]. Le comportement du système peut être identifié selon la trajectoire des valeurs propres du système non-linéaire.

(A) Cas discret

La perte de stabilité de la solution périodique correspond à la traversé du cercle unitaire par une ou plusieurs valeurs propres de la matrice Jacobienne (Figure 1-17).

La trajectoire périodique est :

- asymptotiquement stable si les valeurs propres ont un module strictement inferieur à 1.
- asymptotiquement instable si au moins une valeur propre a un module supérieur à 1.

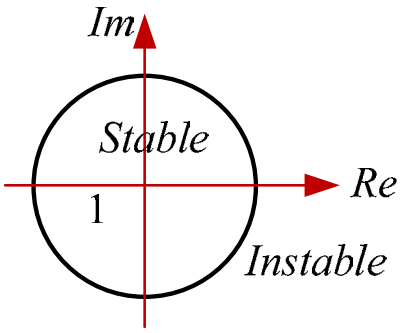


Figure 1-17 : Cercle unité dans le plan complexe.

Si une valeur propre quitte le cercle unité par $+1$, trois bifurcations possibles peuvent se produire : soit une bifurcation transcritique, soit une bifurcation de type fourche, soit une bifurcation de type nœud-col [Nay 95] (Figure 1-18 à gauche).

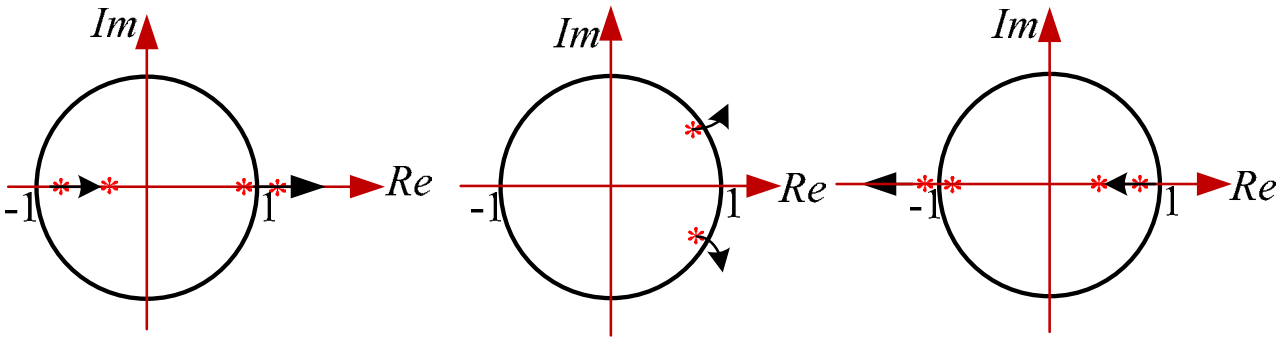


Figure 1-18 : Multiplicateurs de Floquet quittent le cercle unité pour différentes bifurcations.

Lorsque deux valeurs propres complexes conjuguées traversent simultanément le cercle unitaire, on obtient une bifurcation de Hopf. (Figure 1-18 au milieu).

Une bifurcation de type flip se produit quand une valeur propre réelle sort par le point -1 du cercle unité. [Maz 06], [Maz 03], [Tse 94], [Xu 11], [Gia 12]. (Figure 1-18 à droite).

Une bifurcation de type "collision de frontière" survient lorsque certaines valeurs propres sautent du cercle unité (Figure 1-19).

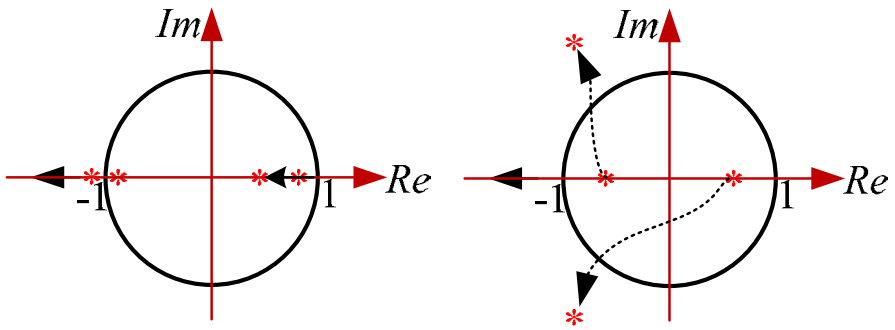


Figure 1-19 : Mouvement continu des valeurs propres dans une bifurcation standard (à gauche), saut discontinu de valeurs propres à une bifurcation de collision de frontière (à droite).

(B) cas continu

Supposons qu'un système de dimensions deux a un point fixe stable. Si le point fixe est stable, les deux valeurs propres λ_1, λ_2 doivent se trouver dans le demi-plan de gauche (Re $\lambda < 0$). Comme λ satisfait à une équation quadratique à coefficients réels, il y a deux possibilités : soit les valeurs propres sont réelles et négatives soit elles sont complexes conjuguées (Figure 1-20). Le point fixe n'est plus stable, si une ou deux des valeurs propres traversent le demi-plan droit lorsque μ varie. [Str 94].

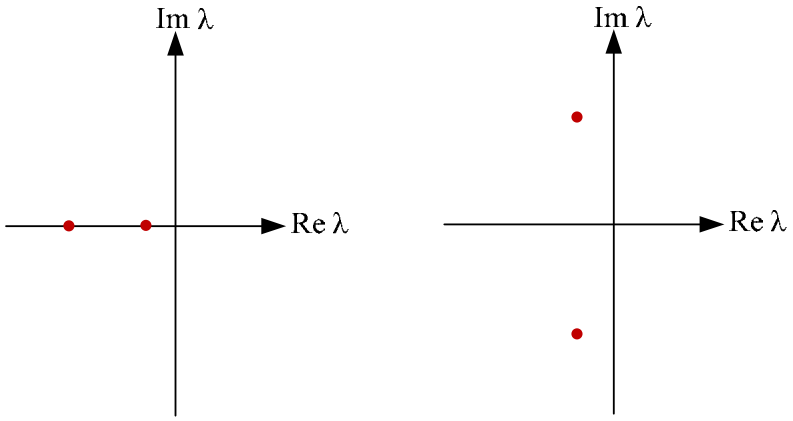


Figure 1-20 : Valeurs propres.

Dans le cas de valeurs propres réelles, lorsqu'une d'elles passe par $\lambda = 0$, on obtient une bifurcation standard de type nœud-col, transcritique ou fourche. (Figure 1-21a) [Str 94], [Tho 86].

Dans le cas de valeurs propres complexes conjuguées, lorsque les deux valeurs propres traversent simultanément l'axe imaginaire, on obtient une bifurcation de Hopf. (Figure 1-21b).

Les bifurcations de Hopf sont courantes dans les systèmes d'électronique de puissance [Tse 00b], [Won 08], [Kav 08], [Iu 03], [Gia 12].

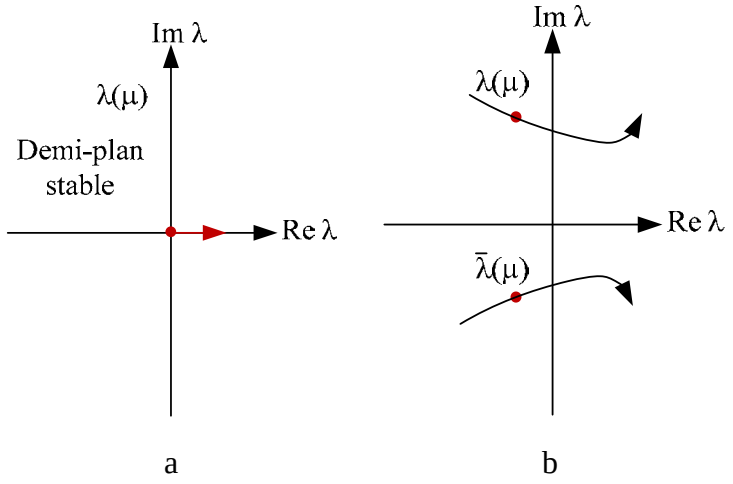


Figure 1-21 : Mouvement de valeurs propres.

1.2.6. Chemins vers un comportement chaotique

Lorsqu'un paramètre du système varie, le comportement dynamique des systèmes présente une succession de bifurcations standards et non-standards.

Généralement la première bifurcation à partir d'un fonctionnement normal mono-période est de type standard. Le développement d'une séquence de bifurcation standard (par exemple, une cascade de doublement de période) est interrompu par une bifurcation de type collision de frontière [Bao 11], [Tse 04], [Xie 11].

Les phénomènes de bifurcation, caractérisés par une modification soudaine du mode de fonctionnement peuvent générer la destruction du système électrique. Ainsi, la connaissance de quand (dans quelles conditions) et de comment (de quelle manière) un phénomène de bifurcation apparait est fondamental dans le dimensionnement du système. De telles connaissances sont obtenues par une modélisation appropriée du système.

1.3. Stratégie de modélisation

Les différentes techniques de modélisation pour les convertisseurs statiques peuvent être classifiées en deux catégories [Sho 83], comme représenté sur la Figure 1-22 :

- modélisation numérique,
- modélisation analytique.

Les techniques numériques utilisent différents algorithmes pour un résultat d'analyse précis. Cette technique de modélisation est désignée sous les noms anglo-saxons « switched model » et « detailed model ». La définition de modèle analytique permet de définir plusieurs types de modèle. Les modèles utilisés dans cette thèse sont les deux suivant :

1. Modèle discret
2. Modèle moyen

La définition du modèle discret ne fait aucune hypothèse sur le fonctionnement du convertisseur statique. Par contre, la description continue fait des hypothèses simplificatrices

inhérentes aux convertisseurs. Ainsi, la procédure de modélisation et les résultats mathématiques sont simplifiés, mais ne sont pas aussi précis que les descriptions discrètes.

L'exactitude est souvent échangée contre la simplicité pour beaucoup de bonnes raisons pratiques.

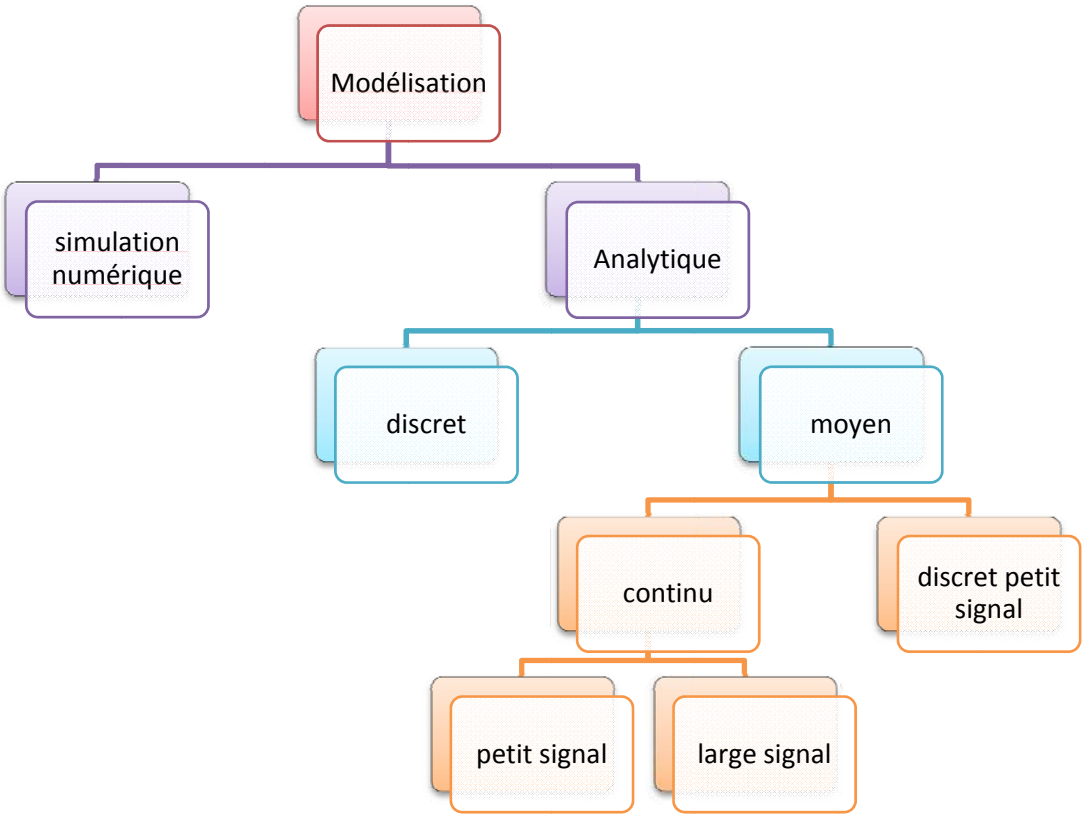


Figure 1-22 : Différents méthodes de modélisation.

Les deux approches de modélisation ont leurs avantages et inconvénients. Il est généralement plus simple d'obtenir un modèle moyen en temps continu qu'un modèle à temps discret. Cependant, d'une façon générale, seule le modèle discret permet de caractériser les phénomènes « haute fréquence » [Eri 01], [Ham 92], [Dea 90], [Tse 02], [Xu 11].

Dans [Tse 04], le convertisseur Cuk a été étudié sous deux configurations particulières du contrôleur de courant. Pour un contrôleur de courant à fréquence fixe, un point de bifurcation de type flip a été trouvé à l'aide d'un modèle discret. Pour un contrôle basé sur la régulation par hystérésis, un point de bifurcation de type Hopf a été obtenue à partir d'un modèle moyen [Tse 00b].

Dans [Won 08] en utilisant un modèle moyen, un point de bifurcation de type Hopf a été défini dans un convertisseur Cuk, sans la boucle de tension. Dans [Kav 08] en utilisant le modèle moyen, la bifurcation de Hopf a été étudiée pour le convertisseur Luo (hysteretic current-mode-controlled). Dans [Wil 97], [Ban 98], [Tse 94], un modèle discret a permis de déterminer une bifurcation de type flip respectivement dans un convertisseur boost en mode de conduction continu, avec les éléments parasites et en mode de conduction discontinu.

Dans la littérature, il est montré que certaines instabilités ne peuvent pas être détectées avec le modèle moyen [Mor 10]. Dans [Maz 03] les auteurs ont mentionné que la bifurcation de type flip ne peut être prédite en utilisant le modèle moyen conventionnel du convertisseur présenté avec son régulateur de courant.

Dans cette partie, la modélisation en temps discret va être appliquée pour un convertisseur de type boost, en mode de conduction continu. Le courant absorbé par ce convertisseur est régulé via un régulateur à large bande passante permettant d'obtenir une fréquence fixe de commutation des interrupteurs. Ce modèle discret sera ensuite utilisé pour étudier la nature de cycles lorsque qu'un paramètre du régulateur varie. Les résultats obtenus seront ensuite validés expérimentalement sur un hacheur de puissance réduite. Ensuite, la modélisation aux sens des valeurs moyennes sera appliquée sur le même type de système.

1.3.1. Modélisation en temps discret

Une approche de modélisation qui fournit de meilleures informations dynamiques est l'approche de modélisation en temps discret. Nous prenons la valeur du vecteur d'état au début d'une période et après avoir pris en compte toutes les séquences de fonctionnement du convertisseur, nous pouvons définir sa valeur finale. On obtient ainsi une équation sous la forme :

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1-2}$$

où x_n est le vecteur d'état à l'instant nT. La description ci-dessus suppose que la période d'échantillonnage soit égale à la période de découpage.

Le modèle ainsi obtenu permet de prendre les phénomènes dynamiques ayant une fréquence voisine de la fréquence de découpage.

Etablissement d'un Modèle discret pour un convertisseur de type boost

Les principes de modélisation proposés sont appliqués à un convertisseur de type boost dont le schéma est rappelé sur la Figure 1-23.

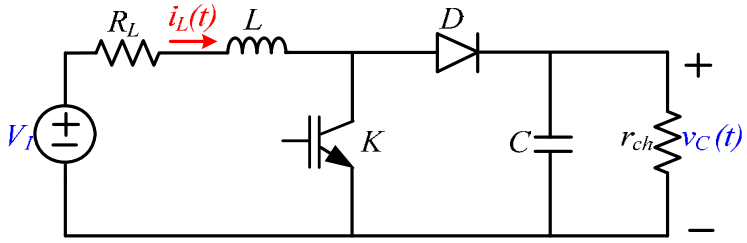


Figure 1-23 : Schéma d'un convertisseur de type boost.

Régulateur Hybride de courant à top d'amorçage

Les régulateurs non-linéaires permettent d'obtenir des dynamiques élevées et une grande robustesse vis-à-vis des perturbations paramétriques. On ne s'intéressera dans ce document qu'aux régulateurs de courant conventionnels à fréquence de commutation fixe des interrupteurs en fonctionnement normal. Ainsi, on rappellera le principe de fonctionnement des régulateurs à top d'amorçage [Kaz 08].

La fréquence fixe des commutations est garantie par un signal d'horloge, son principe de fonctionnement est représenté sur la Figure 1-24.

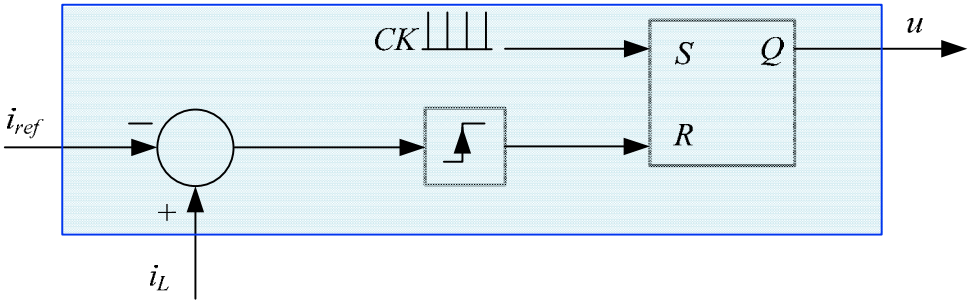


Figure 1-24 : Principe de régulateur de courant top d'amorçage.

Comme indiqué dans la littérature, les inconvénients majeurs de ce type de régulateur sont d'une part l'erreur statique de courant et d'autre part, l'apparition de phénomènes atypiques lorsque le rapport cyclique est supérieur à 0.5.

Pour éviter l'apparition de phénomènes atypiques lorsque le rapport cyclique est supérieur à 0,5, une rampe de compensation de pente m_c est ajoutée à la référence de courant, comme rappelée sur la Figure 1-25 [Eri 01], [Tse 01].

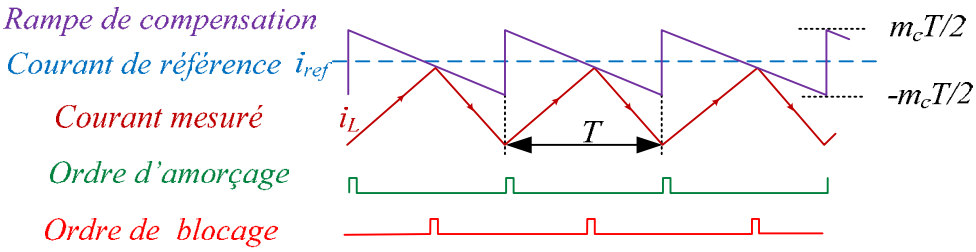


Figure 1-25 : Principe de fonctionnement du régulateur à top d'amorçage.

Le contrôleur de courant à top d'amorçage est désigné sous les noms anglo-saxons suivants :

- *constant-frequency trailing-edge modulation*
- *peak-current-mode control*
- *constant-frequency peak-current-mode on-time control*

Pour annuler l'erreur statique dans ce régulateur, de nombreuses méthodes sont détaillées dans la littérature. Dans [Mar 02], un régulateur hybride associant un contrôle par mode de glissement [Tan 08a] et [Tan 08b] avec le régulateur à top d'amorçage est présenté. Ce régulateur permet de supprimer l'erreur statique, quel que soit le point de fonctionnement du système comme représenté sur la Figure 1-26. L'utilisation d'un terme intégral dans la définition de la loi de commande défini dans la relation (1-3) permet de supprimer l'erreur statique [Mar 02], [Mon 11] :

$$s_0 = i_L - i_{ref} + K_i \int_0^t (i_L - i_{ref})(\tau) d\tau \qquad (1\text{-}3)$$

Le dimensionnement de la valeur du paramètre K_i permet de définir la dynamique du régulateur en fonction du temps de réponse souhaité. La valeur de la pente m_c est définie pour garantir un fonctionnement périodique du contrôleur de courant.

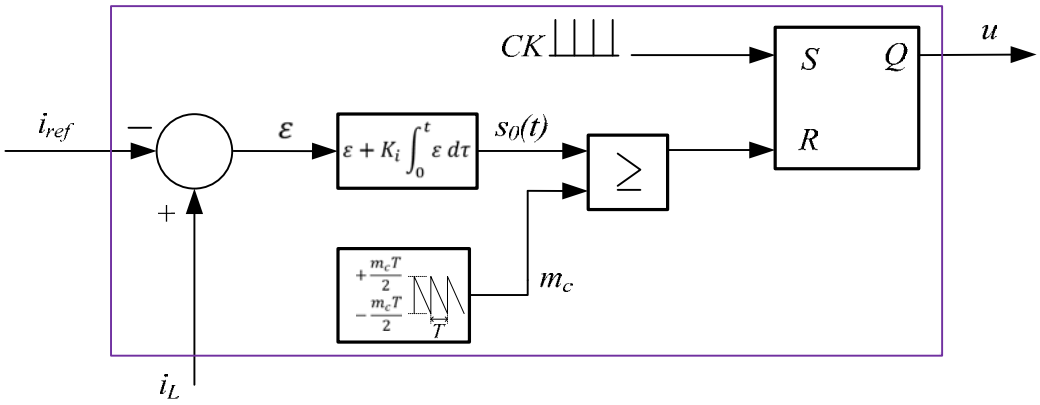


Figure 1-26 : Schéma bloc du régulateur hybride de courant à top d'amorçage.

Dans cet exemple, le régulateur utilisé est un régulateur hybride de courant à top d'amorçage. Comme détaillé dans [Mar 02], l'intérêt de ce régulateur de courant est associé à sa large bande passante. Par contre, l'inconvénient majeur de ce régulateur est associé à son fonctionnement apériodique pouvant apparaitre lorsque le rapport cyclique est élevé.

Pour modéliser le régulateur hybride de courant, d'après la Figure 1-26 et la relation (1-3), on peut définir la relation implicite suivante :

$$s = 0 \Leftrightarrow s_0(t)|_{d\,T} - m_c\left(\frac{T}{2} - d\,T\right) = 0 \qquad (1\text{-}4)$$

On définit les variables d'état du système puis on établit la suite récurrente qui lie les variables à l'instant $n\,T + T$ avec celles à l'instant précédent $n\,T$. On considère trois variables d'état : la valeur du courant i_L, la valeur de la tension v_C et le terme intégral de la loi de commande $I = K_i \int_0^t (i_L(\tau) - i_{ref}(\tau))d\tau$.

Sur la Figure 1-27, on note le courant i_{L1} sur l'intervalle $t\epsilon[n\,T, n\,T + D_n T]$, quand l'interrupteur K conduit. On nomme D_n le rapport cyclique associé à K.

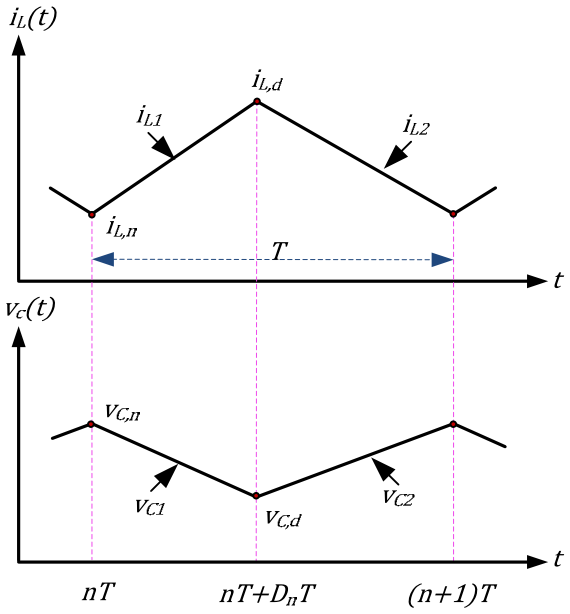


Figure 1-27 : Forme d'onde du courant et de la tension.

On peut écrire l'équation suivante :

$$L\frac{di_L}{dt} = V_1 - R_L\, i_L \tag{1-5}$$

La solution est définie par la relation suivante :

$$i_L(t) = i_{L1}(t) = \frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{R_L(t-nT)}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1}{R_L}\right) \tag{1-6}$$

où $i_{L,n}$ est la valeur du courant à l'instant $n\,T$. $i_{L,d}$ la valeur du courant à l'instant $n\,T + D_nT$ est définie par :

$$i_{L,d} = \frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1}{R_L}\right) \tag{1-7}$$

De même pour la tension v_C, on a :

$$C\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{r_{ch}} = 0 \tag{1-8}$$

On obtient :

$$v_C(t) = v_{C1} = v_{C,n}e^{-\frac{t-n\,T}{C\,r_{ch}}} \tag{1-9}$$

où $v_{C,n}$ est la valeur de la tension à l'instant nT.

si $v_{C,d}$ est la valeur de la tension à l'instant $n\,T + D_nT$ on a :

$$v_{C,d} = v_{C,n}\,e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}} \tag{1-10}$$

Sur le deuxième intervalle, pour $t\epsilon[n\,T + D_nT, n\,T + T]$, on définit le courant i_{L2} . On a selon la Figure 1-27 :

$$L\frac{di_L}{dt} = V_1 - v_C - R_L i_L \tag{1-11}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} i_L(t) = i_{L2}\,(t) = &\left(i_{L,d}\,(\alpha+\gamma) - \left(\frac{1}{L}\right)v_{C,d} + \left(\frac{V_1}{L}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\right).\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)e^{\alpha(t-D_n\,T-n\,T)} \\ &+\left(i_{L,d}\,(\gamma+\beta) - \left(\frac{1}{L}\right)v_{C,d} + \left(\frac{V_1}{L}\right)\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)\right).\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)e^{\beta(t-D_n\,T-n\,T)} \\ &+\left(\frac{V_1}{L}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha\,\beta}\right) \end{aligned} \tag{1-12}$$

avec

$$\alpha = \frac{-(R_L\, C\, r_{ch} + L) + \sqrt{(R_L\, C\, r_{ch} - L)^2 - 4\, L\, C\, {r_{ch}}^2}}{2\, L\, r_{ch}\, C}$$

$$\beta = \frac{-(R_L\, C\, r_{ch} + L) - \sqrt{(R_L\, C\, r_{ch} - L)^2 - 4\, L\, C\, {r_{ch}}^2}}{2\, L\, r_{ch}\, C}$$

$$\gamma = \frac{1}{C\, r_{ch}}$$

Il est alors possible de définir une application f de R^4 dans R qui aux cordonnées $(i_{L,n}, v_{C,n}, D_n, I_n)$ associe la valeur du courant à l'instant $n\,T + T$:

$$iL_{nT+T} = f(i_{L,n}, v_{C,n}, D_n, I_n) \tag{1-13}$$

Cette application est définie par :

$$f = A1\left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right) e^{\alpha(T - D_n\, T)} + A2\left(\frac{1}{\beta - \alpha}\right) e^{\beta(T - D_n\, T)} + \left(\frac{V_1}{L}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha\, \beta}\right) \tag{1-14}$$

avec :

$$A1 = \left(\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\, R_L T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1}{R_L}\right)\right)(\alpha + \gamma) - \left(\frac{1}{L}\right)\left(v_{C,n}\, e^{-\frac{D_n\, T}{C\, r_{ch}}}\right) + \left(\frac{V_1}{L}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\right)$$

$$A2 = \left(\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\, R_L\, T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1}{R_L}\right)\right)(\gamma + \beta) - \left(\frac{1}{L}\right)\left(v_{C,n}\, e^{-\frac{D_n\, T}{C\, r_{ch}}}\right) + \left(\frac{V_1}{L}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)$$

De la même façon pour le terme intégral, on peut construire une application g qui à $(i_{L,n}, v_{C,n}, D_n, I_n)$ associe la valeur de l'intégrale à l'instant $n\,T + T$:

$$g(i_{L,n}, v_{C,n}, D_n, I_n) = I_{nT+T} = I_n + (I_{D1} + I_{D2}) \tag{1-15}$$

On définit :

$$I_{D1} = K_i \int_{nT}^{n\,T + D_n\, T} (i_{L1} - i_{ref})dt \tag{1-16}$$

En substituant (1-6) dans (1-16) on a :

$$I_{D1} = K_i\left(\frac{L\, i_{L,n}}{R_L} - D_n i_{ref}\, T - \frac{L\, V_1}{{R_L}^2} + \frac{D_n T\, V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\, R_L\, T}{L}}\left(\frac{L\, V_1}{{R_L}^2} - \frac{L\, i_{L,n}}{R_L}\right)\right) \tag{1-17}$$

Pour le deuxième terme, on définit :

$$I_{D2} = K_i \int_{n\,T + D_n\, T}^{n\,T + T} (i_{L2} - i_{ref})dt \tag{1-18}$$

En posant (1-12) dans (1-18) on a :

$$I_{D2} = \left(\frac{K_i}{L\,\alpha\,(\alpha-\beta)\,\beta}\right)\Bigg((-1+D_n)T(\alpha-\beta)\big(i_{ref}\,L\;\alpha\,\beta-V_1\,\gamma\big) + \frac{1}{\alpha}\left(-1+e^{(1-D_n)T\alpha}\right)\beta\,(A) - \frac{1}{\beta}\left(-1+e^{(1-D_n)T\beta}\right)\alpha\,(B)\Bigg) \tag{1-19}$$

avec :

$$A = V_1\,(\alpha+\gamma) + \alpha\left(-\,e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\,v_{C,n} + L\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}-\frac{V_1}{R_L}\right)\right)(\alpha+\gamma)\right)$$

$$B = V_1(\beta+\gamma) + \beta\left(-\,v_{C,n}\,e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}} + L\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}-\frac{V_1}{R_L}\right)\right)(\beta+\gamma)\right)$$

Sur le deuxième intervalle pour la tension, on peut écrire l'équation :

$$C\,\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{r_{ch}} = i_L \tag{1-20}$$

dont la solution est :

$$v_{C2n} = \left(v_{C,d}\,(\alpha+\delta) + \left(\frac{1}{C}\right)i_{L,d} + \frac{V_1}{L\,C\,\alpha}\right)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)e^{\alpha(t-D_n\,T-n\,T)} + \left(v_{C,d}\,(\beta+\delta) - \left(\frac{1}{C}\right)i_{L,d} + \frac{V_1}{L\,C\,\beta}\right)\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)e^{\beta(t-D_n\,T-n\,T)} + \frac{V_1}{L\,C\,\alpha\,\beta} \tag{1-21}$$

avec :

$$\delta = \frac{R_L}{L}$$

De même, pour la tension v_C, on peut construire une application p qui à $(i_{L,n}, v_{C,n}, D_n, I_n)$ associe la valeur de la tension à l'instant $n\,T + T$:

$$p = n1\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)e^{\alpha(T-D_n\,T)} + n2\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)e^{\beta(T-D_n\,T)} + \frac{V_1}{L\,C\,\alpha\,\beta} \tag{1-22}$$

avec :

$$n1 = \left(\left(v_{C,n}\,e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\right)(\alpha+\delta) + \left(\frac{1}{C}\right)\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}-\frac{V_1}{R_L}\right)\right) + \frac{V_1}{L\,C\,\alpha}\right)$$

$$n2 = \left(\left(v_{C,n}\,e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\right)(\beta+\delta) - \left(\frac{1}{C}\right)\left(\frac{V_1}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R\,T}{L}}\left(i_{L,n}-\frac{V_1}{R_L}\right)\right) + \frac{V_1}{L\,C\,\beta}\right)$$

Il est maintenant possible de définir un vecteur $X_n = (i_{L,n}, v_{C,n}, I_n)$ et une application Y de $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $X_{n+1} = Y(X_n)$ avec $X_n = \begin{bmatrix} i_L \\ I_n \\ v_C \end{bmatrix}$.

Comportement dynamique du système

L'étude de la stabilité des cycles est effectuée par l'étude des valeurs propres de la matrice Jacobienne de Y autour d'un point de fonctionnement. Il peut être noté que pour un système discret, on appelle multiplieurs de Floquet, les valeurs propres de la matrice Jacobienne. On considère ici l'application Y, où D_n est définie sous une forme implicite.

La loi de commande avec le terme intégral est redéfinie ci-dessous.

$$s = i_{L,d} - i_{ref} + I_n + I_{D1} + m_c\left(-\frac{T}{2} + D_n\,T\right) \tag{1-23}$$

Le rapport cyclique D est défini lorsque $s = 0$. Ainsi, de cette expression implicite, on peut définir la relation :

$$\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\,di_{L,n} + \frac{\partial s}{\partial I_n}\,dI_n + \frac{\partial s}{\partial v_{C,n}}\,dv_{C,n} + \frac{\partial s}{\partial D_n}\,dD_n = 0 \tag{1-24}$$

Soit :

$$dD_n = -\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\,di_{L,n} + \frac{\partial s}{\partial I_n}\,dI_n + \frac{\partial s}{\partial v_{C,n}}\,dv_{C,n}\right) \tag{1-25}$$

En considérant de petites variations autour du point d'équilibre du système, on obtient :

$$\begin{cases} df = \dfrac{\partial f}{\partial i_{L,n}}\,di_{L,n} + \dfrac{\partial f}{\partial I_n}\,dI_n + \dfrac{\partial f}{\partial v_{C,n}}dv_{C,n} + \dfrac{\partial f}{\partial D_n}dD_n \\ dg = \dfrac{\partial g}{\partial i_{L,n}}\,di_{L,n} + \dfrac{\partial g}{\partial I_n}\,dI_n + \dfrac{\partial g}{\partial v_{C,n}}dv_{C,n} + \dfrac{\partial g}{\partial D_n}dD_n \\ dp = \dfrac{\partial p}{\partial i_{L,n}}\,di_{L,n} + \dfrac{\partial p}{\partial I_n}\,dI_n + \dfrac{\partial p}{\partial v_{C,n}}dv_{C,n} + \dfrac{\partial p}{\partial D_n}dD_n \end{cases} \tag{1-26}$$

En substituant l'équation (1-25) dans les équations (1-26), on obtient :

$$\begin{aligned} df = &\left[\frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\right]di_{L,n} + \left[\frac{\partial f}{\partial I_n} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n}\right]dI_n \\ &+ \left[\frac{\partial f}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial v_{C,n}}\right]dv_{C,n} \end{aligned} \tag{1-27}$$

$$\begin{aligned} dg = &\left[\frac{\partial g}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\right]di_{L,n} + \left[\frac{\partial g}{\partial I_n} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n}\right]dI_n \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial v_{C,n}}\right]dv_{C,n} \end{aligned} \tag{1-28}$$

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\right] di_{L,n} + \left[\frac{\partial p}{\partial I_n} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n}\right] dI_n + \left[\frac{\partial p}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial p}{\partial v_{C,n}}\right] dv_{C,n} \quad (1\text{-}29)$$

On peut ainsi déduire de cette expression la matrice Jacobienne de l'application Y :

$$J_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} & \frac{\partial f}{\partial I_n} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n} & \frac{\partial f}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial v_{C,n}} \\ \frac{\partial g}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} & \frac{\partial g}{\partial I_n} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n} & \frac{\partial g}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial g}{\partial v_{C,n}} \\ \frac{\partial p}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} & \frac{\partial p}{\partial I_n} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n} & \frac{\partial p}{\partial v_{C,n}} - \frac{\partial p}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial p}{\partial v_{C,n}} \end{bmatrix} \quad (1\text{-}30)$$

Calcul des multiplieurs de Floquet

La stabilité du point d'équilibre et l'évolution de la trajectoire d'état autour de ce point sont étudiées en calculant les multiplieurs de Floquet du système au point d'équilibre. Le procédé habituel est de résoudre l'équation suivante pour λ :

$$\det[\lambda\, I - J_Y] = 0 \quad (1\text{-}31)$$

Pour que le cycle décrit par la trajectoire du système soit stable, il faut que les multiplieurs de Floquet soient à l'intérieur du cercle unité.

Validation expérimentale

Un convertisseur expérimental de type boost de faible puissance ($I_{smax} = 10A$, fréquence de découpage $10\ kHz$), présenté sur la Figure 1-28, a été utilisé pour valider le modèle discret. Le banc de test est constitué d'une source programmable, d'une résistance de charge variable et d'un convertisseur statique de type boost.

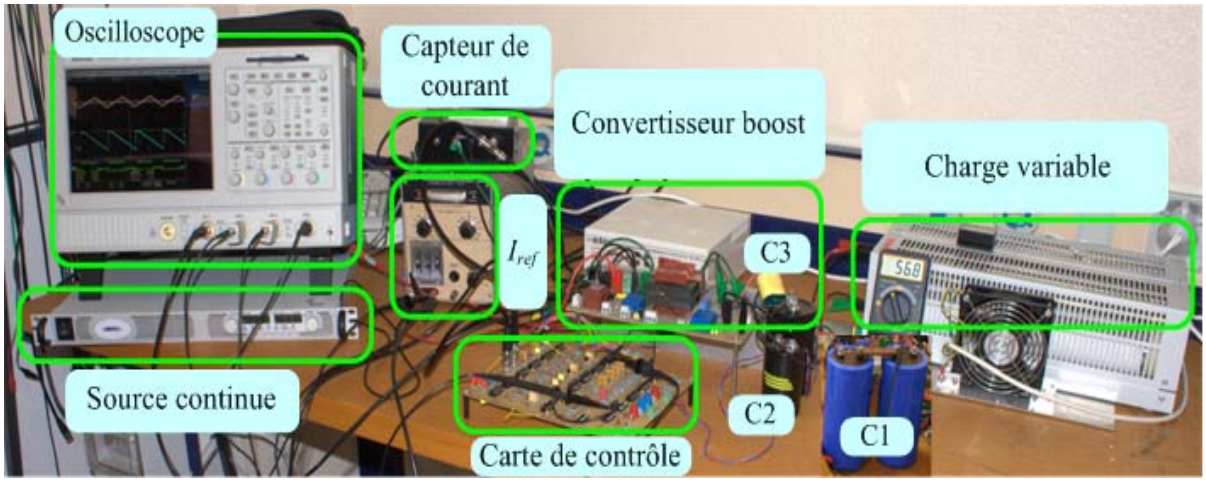


Figure 1-28 : Banc de test autour d'un convertisseur de type boost.

Dans le but de valider le modèle pour plusieurs conditions de fonctionnement, trois essais différents ont été réalisés. Les valeurs sont données dans le Tableau 1-2.

$Paramètres$	$Essais$		
	$Essai\ 1$	$Essai\ 2$	$Essai\ 3$
C	$18.19\ \mu F$	$990\ \mu F$	$0.05\ F$
V_1	$25.7\ V$	$25.7\ V$	$12.85\ V$
r_{ch}	$28.7\ \Omega$	$28.7\ \Omega$	$17\ \Omega$
$L = 0.769\ mH\ , R_L = 0.159\Omega\ , f = 10\ kHz\ , i_{ref} = 4.97A, K_i = 6746\ rad \cdot s^{-1}$			
$V_d = 0.92\ V\ , V_k = 0.95\ V\ , r_d = 0.047\ \Omega\ , r_k = 0.33\ \Omega$			

Tableau 1-2 : Paramètres utilisés pour réaliser les simulations et obtenir les résultats pratiques.

De par la nature des composants présents dans le convertisseur statique et du niveau de tension utilisé pour les essais, il est impératif de prendre en compte les éléments parasites du montage. Les modifications dans le modèle sont détaillées dans la partie suivante.

Prise en compte des éléments parasites du montage

Considérons r_k et r_d les résistances à l'état passant des interrupteurs, V_k et V_d les chutes de tension à l'état passant de ces interrupteurs et indépendantes du courant i_L (Figure 1-29).

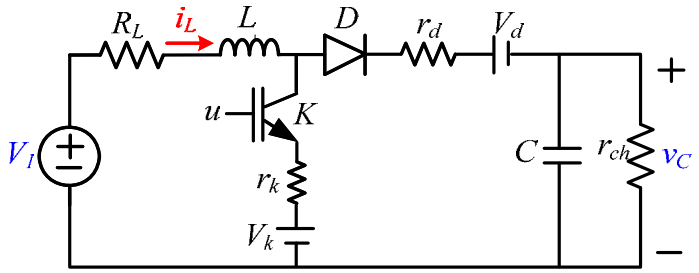


Figure 1-29 : Boost avec des éléments parasites.

En considérant des pertes, on peut reconstruire la relation de récurrence (1-14) entre le courant à l'instant nT et à l'instant $(n+1)T$. Ainsi que pour le terme intégral définit dans les relations (1-17), (1-19) et la tension définie par la relation (1-22).

D'après l'équation (1-14), on obtient :

$$f = A1\left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)e^{\alpha(T-D_n T)} + A2\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\right)e^{\beta(T-D_n T)} + \left(\frac{V_1 - V_d}{L}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha\,\beta}\right)$$

avec :

$$A1 = \left(\left(\frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k} + e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\right)(\alpha + \gamma) - \left(\frac{1}{L}\right)\left(v_{C,n} e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\right) + \left(\frac{V_1 - V_d}{L}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)\right)$$

$$A2 = \left(\left(\frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k} + e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\right)(\gamma + \beta) - \left(\frac{1}{L}\right)\left(v_{C,n}\, e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\right) + \left(\frac{V_1 - V_d}{L}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right)\right)$$

$$\alpha, \beta = \frac{-\left((R_L + r_d)\,C\,r_{ch} + L\right) \pm \sqrt{\left((R_L + r_d)\,C\,r_{ch} - L\right)^2 - 4\,L\,C\,r_{ch}^2}}{2\,L\,r_{ch}\,C}$$

$$\gamma = \frac{1}{C\,r_{ch}}, \delta = \frac{R_L + r_d}{L}$$

L'équation (1-17) se réécrit sous la forme :

$$I_{D1} = K_i\left(\frac{L\,i_{L,n}}{R_L+r_k} - D_n i_{ref} T - \frac{L\,(V_1-V_k)}{(R_L+r_k)^2} + \frac{D_n T\,V_1}{R_L+r_k} + e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(\frac{L\,(V_1-V_k)}{(R_L+r_k)^2} - \frac{L\,i_{L,n}}{R_L+r_k}\right)\right).$$

L'équation (1-19) devient :

$$I_{D2} = K_i\left(A0 + \frac{1}{L\alpha^2(\alpha - \beta)}\left(-1 + e^{(1-D_n)T\alpha}\right)A1 + \frac{1}{L\beta^2(\beta - \alpha)}\left(-1 + e^{(1-D_n)T\beta}\right)A2\right)$$

où :

$$A0 = i_{ref} T(D_n - 1) + \frac{T(1 - D_n)(V_1 - V_d)\gamma}{L\,\alpha\,\beta}$$

$$A1 = -\left(V_d - L\left(e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right) + \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\alpha\right)(\alpha + \gamma) - e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\, v_{C,n}\,\alpha + V_1(\alpha + \gamma)$$

$$A2 = -\left(V_d - L\left(e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right) + \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\beta\right)(\beta + \gamma) - e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\, v_{C,n}\,\beta + V_1(\beta + \gamma)$$

L'équation (1-22) devient :

$$p = B1\left(\frac{1}{\alpha - \beta}\right)e^{\alpha(T - D_n\,T)} + B2\left(\frac{1}{\beta - \alpha}\right)e^{\beta(T - D_n\,T)} + \frac{V_1 - V_d}{L\,C\,\alpha\,\beta}$$

avec :

$$B1 = \left(v_{C,n}\, e^{-\frac{D_n\,T}{C\,r_{ch}}}\right)(\alpha + \delta) + \left(\frac{1}{C}\right)\left(\frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k} + e^{-\frac{D_n\,(R_L+r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\right) + \frac{V_1 - V_d}{L\,C\,\alpha}$$

$$B2 = \left(v_{C,n}\, e^{-\frac{D_n\, T}{C\, r_{ch}}}\right)(\beta + \delta) - \left(\frac{1}{C}\right)\left(\frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k} + e^{-\frac{D_n\,(R_L + r_k)\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_1 - V_k}{R_L + r_k}\right)\right) + \frac{V_1 - V_d}{L\, C\, \beta}$$

Résultats de simulation

La Figure 1-30 montre les formes d'onde du courant et de la tension. Ces allures peuvent être comparées à celles obtenues avec le modèle échantillonné. Comme on peut le constater, les points échantillonnés et les courbes sont superposés pour les régimes transitoire et permanent. On s'aperçoit que le modèle discret suit bien les résultats de simulation.

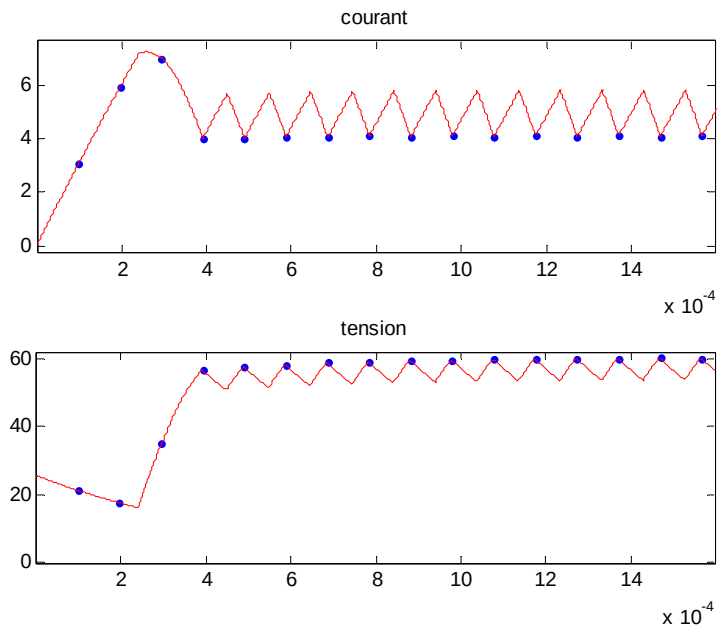


Figure 1-30 : Superposition des formes d'onde obtenues par le modèle discret et par simulation (découpage).

La Figure 1-31 montre les formes d'onde du courant et de la tension en régime permanent pour $m_c = 15800\ A \cdot s^{-1}$.

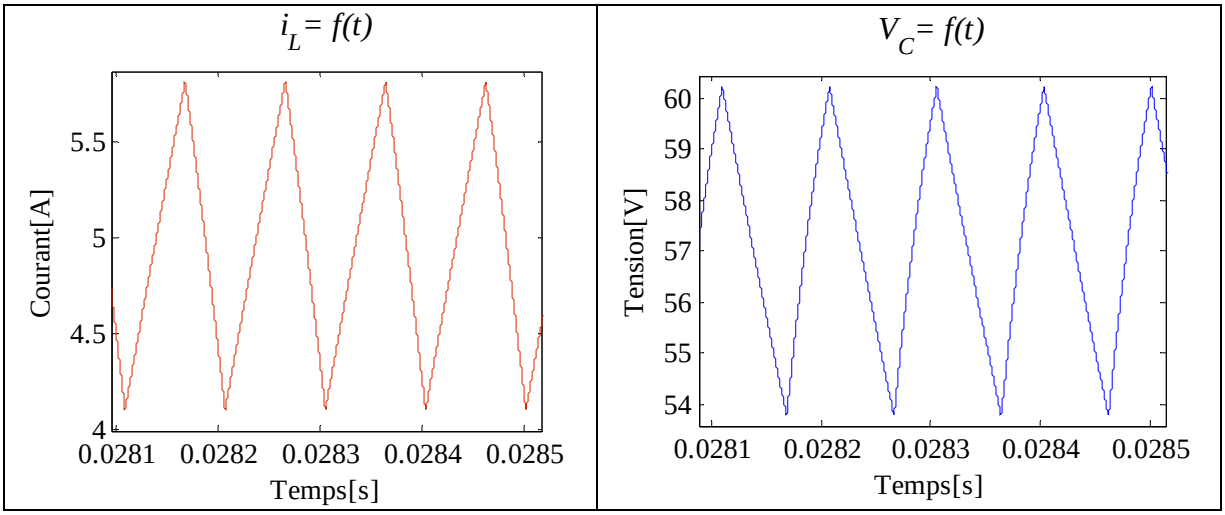


Figure 1-31 : Formes d'onde du courant et de la tension.

Le diagramme de bifurcation présenté sur la Figure 1-32 est construit comme détaillé ci-dessous :

1. On démarre avec une petite valeur de m_c, $(m_c = 0)$. On enregistre ensuite un nombre suffisamment grand de valeurs consécutives de i_L pour avoir suffisamment de données correspondants au régime permanent. Par exemple, on récupère 1400 points successifs de i_L puis on élimine les 1300 premières valeurs du régime transitoire initial. Les 100 dernières valeurs de i_L constituent l'ensemble de nos données.

2. On répète la même méthode que dans l'étape 1 avec des valeurs de m_c de plus en plus grandes $(m_c = 10, 20, \dots, 19000 A \cdot s^{-1})$. Autrement dit en utilisant le diagramme de bifurcation, nous pouvons voir le changement de comportement du système dans la gamme de paramètres d'intérêt. Nous obtenons donc d'autres ensembles de données.

3. Ensuite, nous allons tracer chaque ensemble de données en fonction des différents m_c.

Ce diagramme de bifurcation permet de garantir qu'un cycle mono-périodique existe lorsque m_c est supérieur à $m_c = 15520\ A \cdot s^{-1}$.

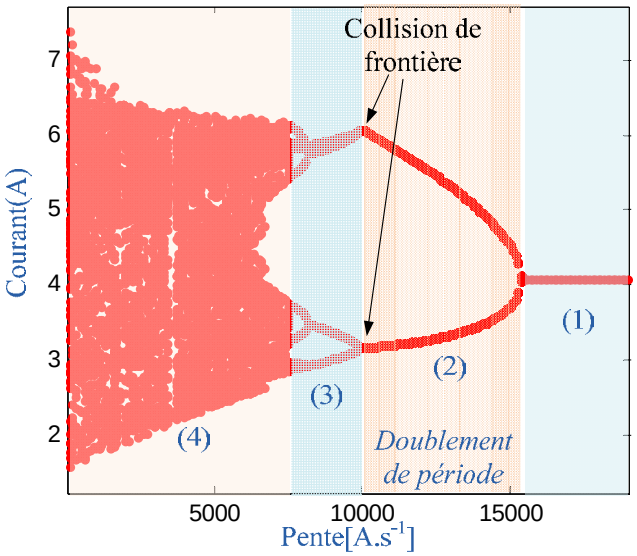
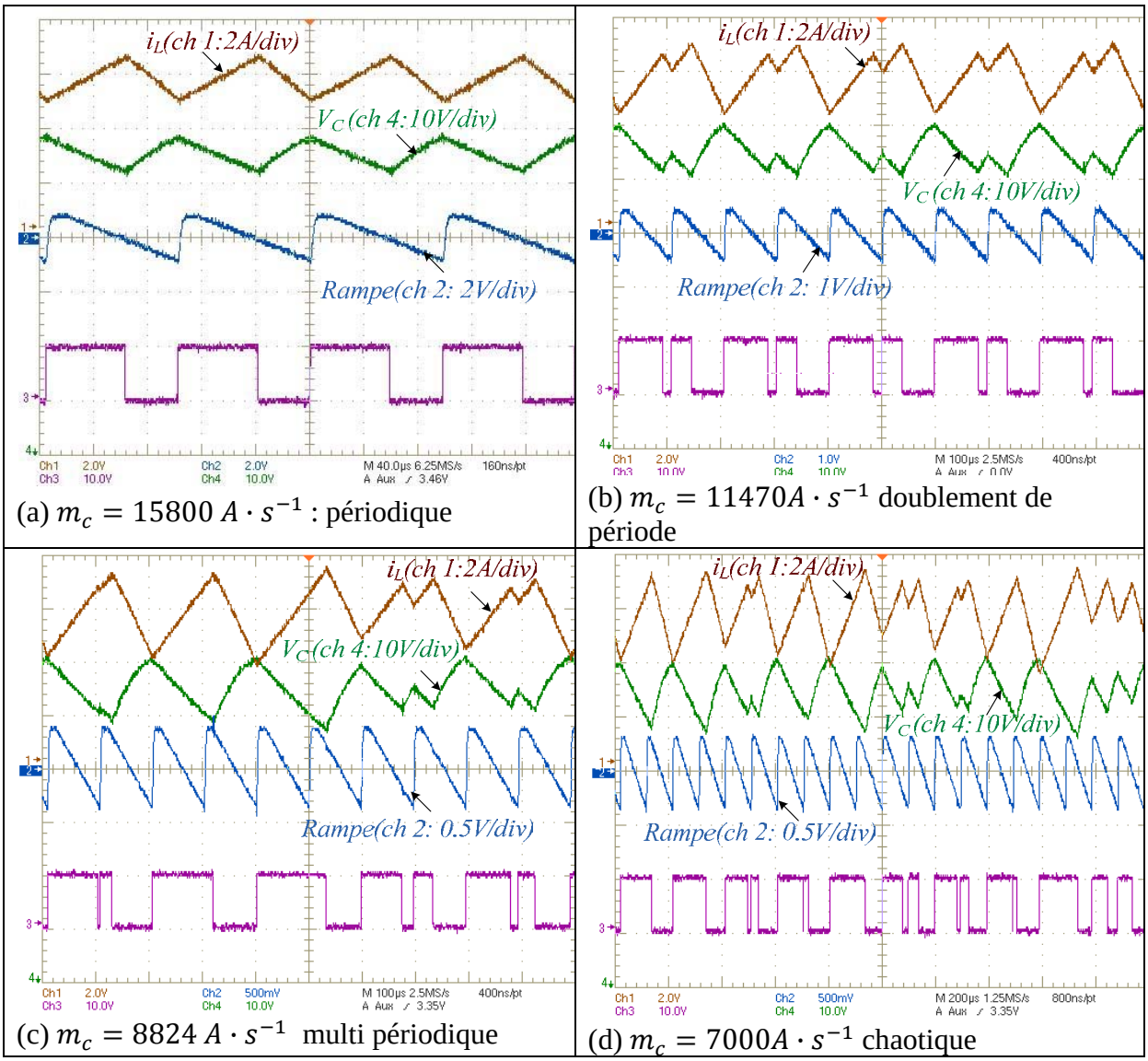


Figure 1-32 : Diagramme de bifurcation lorsque m_c varie de 0 à 19000 $A \cdot s^{-1}$ pour essai 1.

La Figure 1-33 montre un comportement mono- périodique, double, multi périodique et chaotique lorsque $m_c = 15800$,11470 , 8824 et $7000 A \cdot s^{-1}$ respectivement. Les formes d'ondes correspondant aux régions (1) jusqu'à (4) sont indiquées sur le diagramme de bifurcation de la Figure 1-32.



(a) $m_c = 15800\ A \cdot s^{-1}$: périodique

(b) $m_c = 11470 A \cdot s^{-1}$ doublement de période

(c) $m_c = 8824\ A \cdot s^{-1}$ multi périodique

(d) $m_c = 7000 A \cdot s^{-1}$ chaotique

Figure 1-33 : Formes d'onde du courant, de la tension, de la rampe et du signal de command pour l'essai 1.

Dans cette partie, nous allons présenter d'autres résultats expérimentaux obtenus. Une comparaison entre les diagrammes de bifurcation (Figure 1-34) et les résultats expérimentaux présentés sur la Figure 1-35, permettent de vérifier la cohérence des résultats trouvés.

Sur les diagrammes de bifurcation, on observe la manifestation d'une bifurcation brusque qui se produit invariablement après le premier doublement de période. Un tel changement comme on l'a déjà mentionné est appelé collision de frontière (Par exemple la limite entre les régions 2 et 3 sur la Figure 1-32).

Le changement de comportement obtenu lors d'une bifurcation de type collision de frontière n'est pas le même pour les différents cas. Par exemple, elle peut causer un saut dans le chaos (essai 3) ou provoquer une orbite périodique différente (essai 1).

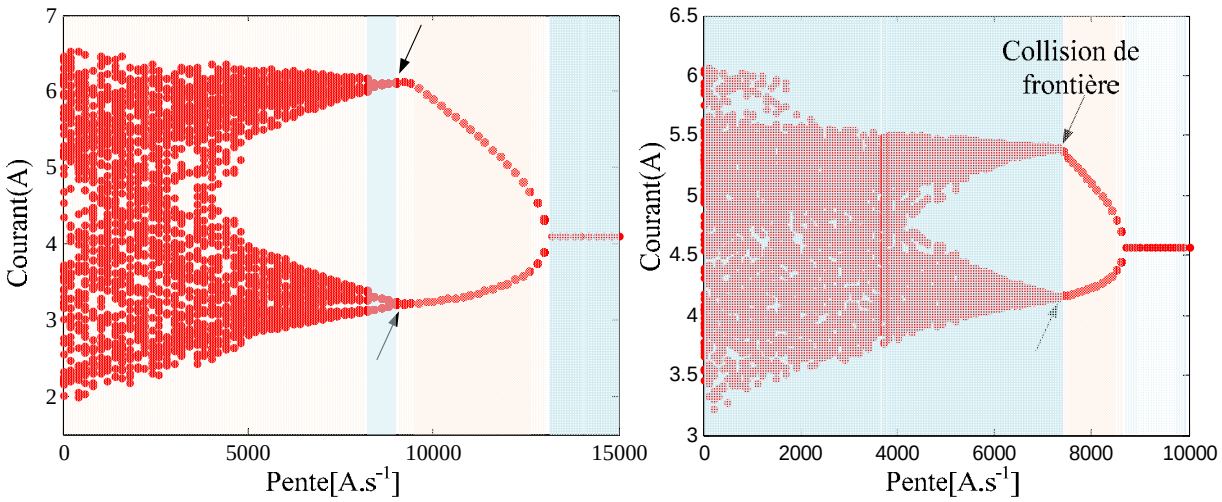


Figure 1-34 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 2 (à gauche) et l'essai 3 (à droite).

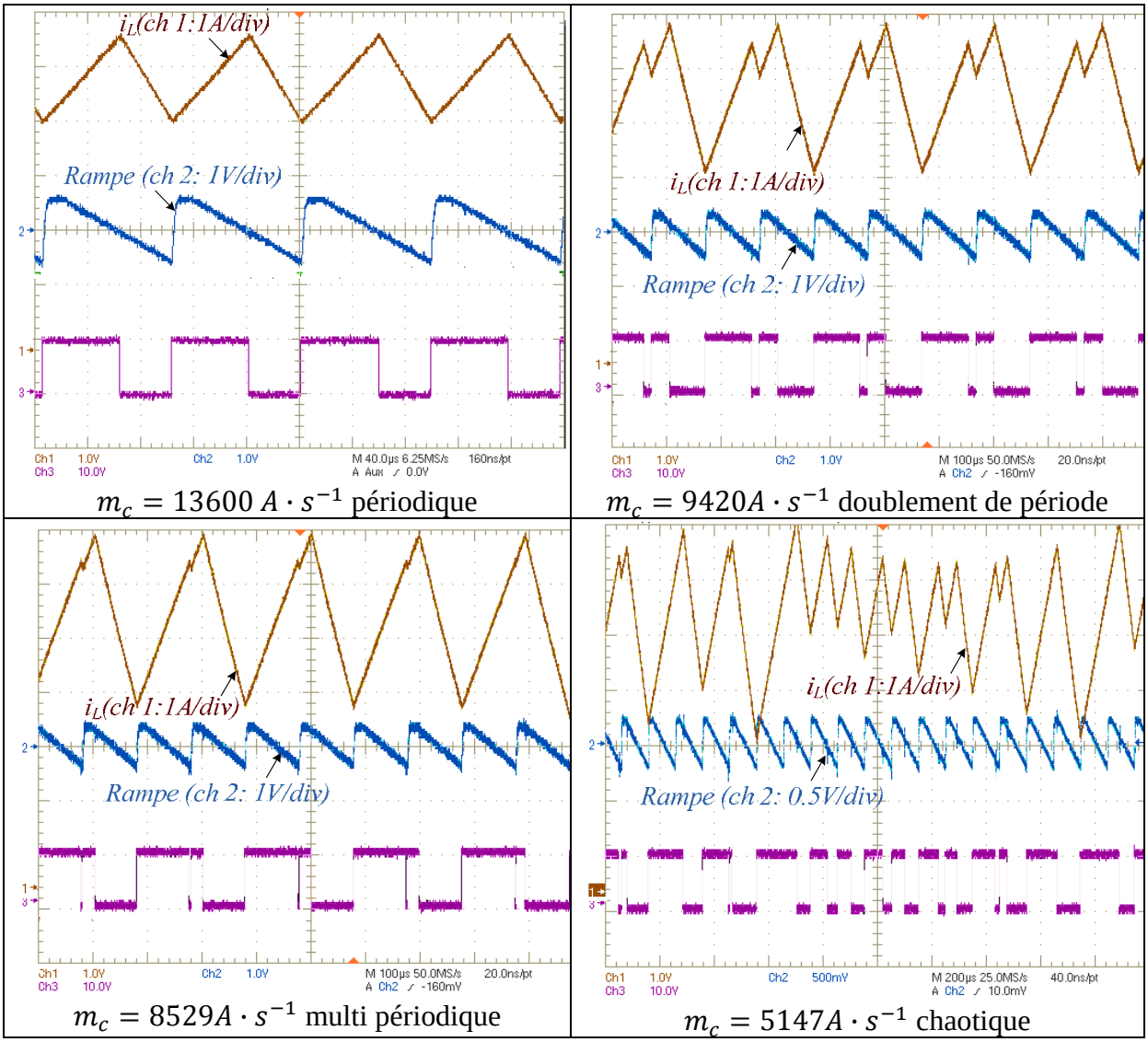


Figure 1-35 : Formes d'onde du courant, de la rampe et du signal de command pour l'essai 2.

Les valeurs propres de la matrice de Jacobi du système linéarisé autour du point de fonctionnement sont au nombre de trois. La Figure 1-36 représente le tracé de ces valeurs propres pour l'essai 1. La perte de stabilité de la solution périodique correspond à la traversée du cercle unité par une ou plusieurs valeurs propres. On voit bien qu'une valeur propre quitte le cercle unitaire à m_c critique (Figure 1-37). Le système perd alors sa stabilité via une bifurcation de type flip.

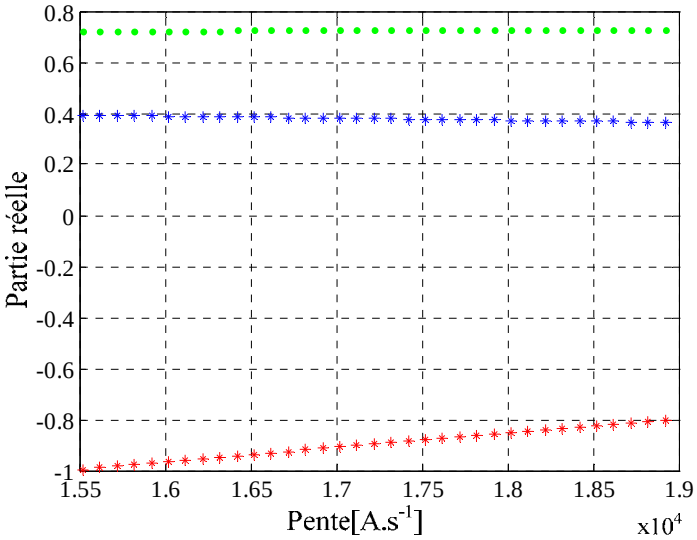


Figure 1-36 : Tracé des multiplieurs de Floquet pour m_c variant de $15520\ A \cdot s^{-1}$ à $19000\ A \cdot s^{-1}$.

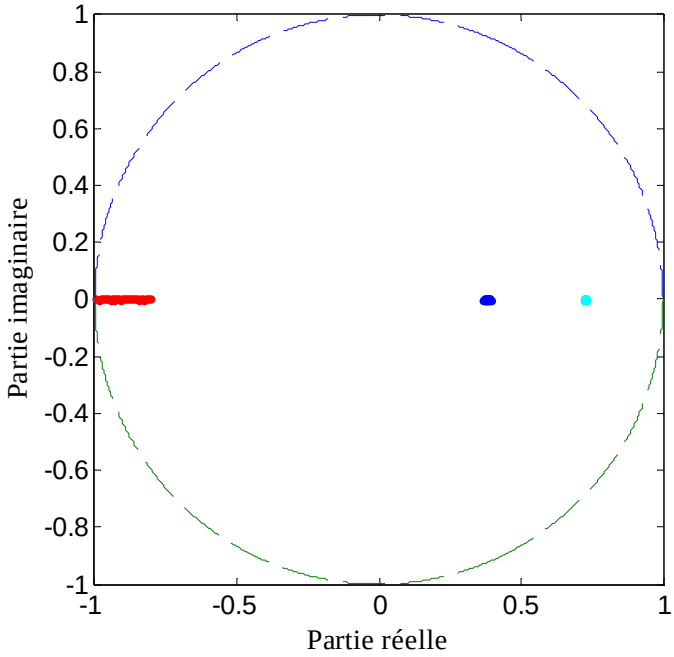


Figure 1-37 : Evolution des multiplieurs de Floquet lorsque m_c varie de $15520\ A \cdot s^{-1}$ à $19000\ A \cdot s^{-1}$.

Etude des propriétés de robustesse paramétrique

Maintenant qu'on a développé une modélisation analytique, il est possible d'étudier les propriétés de robustesse lorsque les paramètres du système varient ou sont incertains. Nous

fixons la valeur du paramètre de bifurcation à $m_c = 32000\ A \cdot s^{-1}$ pour l'essai 1. Les valeurs de l'inductance L et de la résistance R_L sont supposées varier de $\pm 50\%$ autour de leur valeur nominale. Comme le montre la Figure 1-38, les 3 valeurs propres restent à l'intérieur du cercle unité et ceci quelle que soit la valeur prise par l'inductance et la résistance. Cela prouve que le cycle limite décrit par la trajectoire d'état reste stable pour une gamme étendue de variations des paramètres.

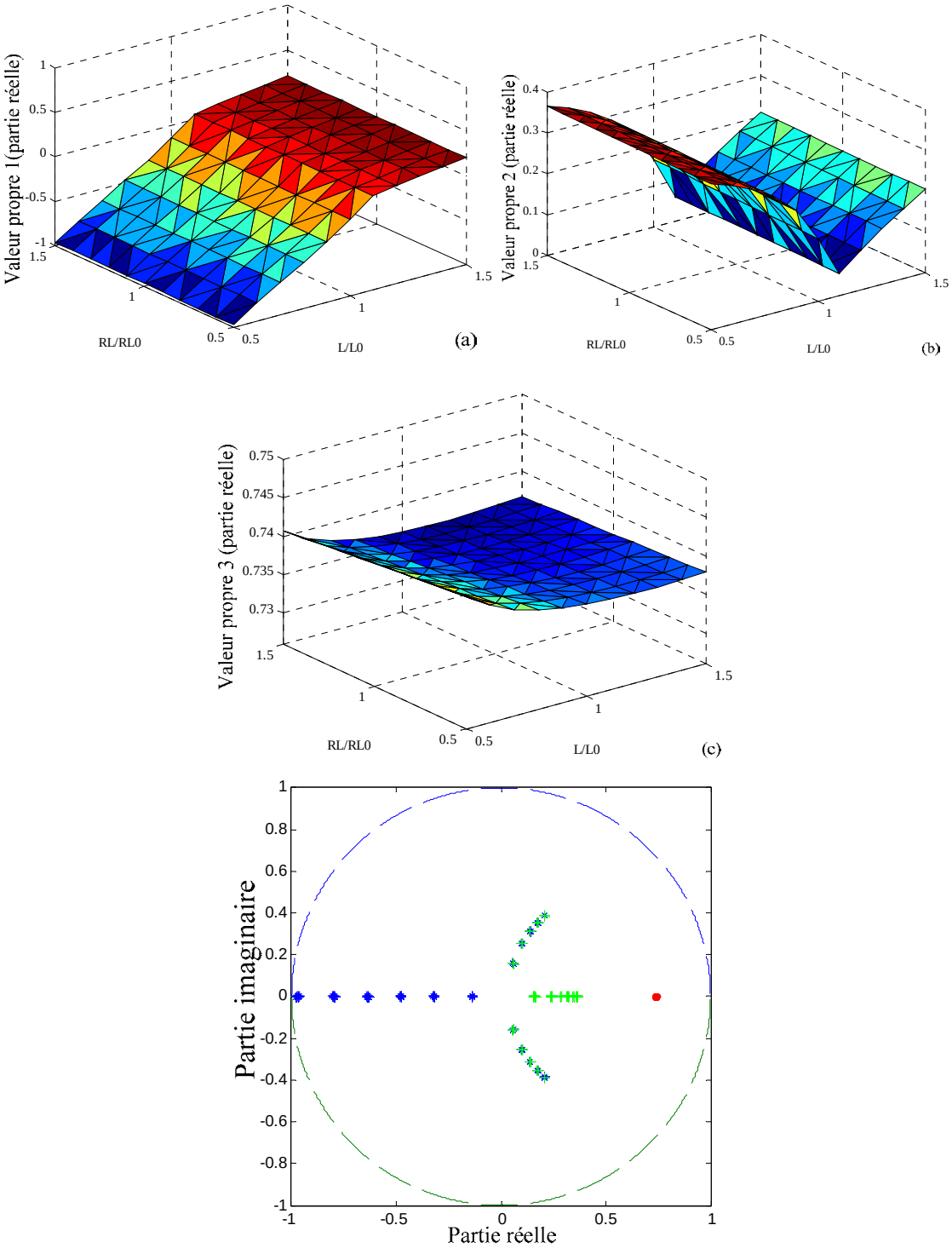


Figure 1-38 : Evolution des coefficients de Floquet lorsque l'inductance et la résistance varient entre 50% et 150% de leur valeur nominale avec $m_c = 32000\ A \cdot s^{-1}$ pour l'essai 1.

1.3.2. Modélisation aux sens des valeurs moyennes

L'approche la plus couramment utilisée pour la modélisation des convertisseurs statiques est l'approche au sens des valeurs moyennes qui a été développée par R.D. Middlebrook et Cuk dans les années 1970 [Mid 76]. Beaucoup d'améliorations et de généralisations ont été présentées plus tard. L'objectif principal de cette approche est d'éliminer les paramètres variant dans le temps des équations du système. Le détail des commutations est négligé et seule l'enveloppe du comportement dynamique est prise en compte, en considérant dans le modèle des éléments de valeur constante [Dav 07].

Modèle moyen dans l'espace d'état

Tout système linéaire ou non-linéaire peut être représenté sous forme d'équations d'état, comme représenté par la relation (1-32). Dans des convertisseurs statiques, les variables d'état d'un système sont habituellement les courants indépendants à travers les inductances et les tensions indépendantes aux bornes des condensateurs.

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + E\,u(t) \end{cases} \tag{1-32}$$

Ici, le vecteur d'état $x(t)$ est un vecteur contenant toutes les variables d'état. Le vecteur d'entrée $u(t)$ contient les entrées indépendantes au système, telles que la source de tension d'entrée.

Supposons que le système commute entre N topologies de circuit. Sur une période de découpage, il se situe une fraction de temps dans une topologie particulière. Nous supposons x le vecteur d'état, d_j la fraction de la période où le circuit reste dans la $jième$ topologie, et T la période découpage. Évidemment $d_1 + d_2 + \cdots + d_N = 1$. Ainsi, comme nous avons fait précédemment, nous pouvons noter les équations d'état suivantes pour le système :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u, & t_n \le t < t_n + d_1 T \\ A_2 x + B_2 u, & t_n + d_1 T \le t < t_n + (d_1 + d_2)T \\ & \dots \\ A_N x + B_N u, & t_n + (1 - d_N)T \le t < t_{n+1} \end{cases} \tag{1-33}$$

où A_j et B_j sont les matrices du système pour la $j$iéme topologie, et u est la tension d'entrée. Le modèle moyen du système est défini par [Mid 76] :

$$\dot{x} = A_m x + B_m u \tag{1-34}$$

où

$$A_m = \sum_{j=1}^{N} d_j\,A_j \quad , \qquad B_m = \sum_{j=1}^{N} d_j\,B_j \tag{1-35}$$

L'avantage principal de cette méthode est la généralité de l'approche; la méthode peut être utilisée pour obtenir un modèle moyen pour n'importe quel convertisseur en écrivant les équations différentielles pour chaque séquence et en faisant la moyenne de toutes les séquences.

Considérons maintenant un convertisseur possédant deux séquences de fonctionnement. En posant $< f(t) >_T$ la valeur moyenne de $f(t)$ sur une période de découpage T, on peut obtenir le modèle d'état moyen :

$$\frac{d < x(t) >_T}{dt} = (d(t)A_1 + d'(t)A_2) < x(t) >_T + (d(t)B_1 + d'(t)B_2) < u(t) >_T \quad (1\text{-}36)$$

où $d'(t) = 1 - d(t)$.

Les différentes grandeurs en régime permanent sont données par :

$$\begin{cases} X = \text{vecteur d'état au point d'équilibre} \\ U = \text{vecteur source au point d'équilibre} \\ D = \text{rapport cyclique au point d'équilibre} \end{cases} \quad (1\text{-}37)$$

La valeur moyenne du vecteur d'état au point d'équilibre est donnée par :

$$X = -A^{-1}\, B\, U \quad (1\text{-}38)$$

Les matrices A et B sont définies par :

$$A = D\, A_1 + D'\, A_2\, , B = D\, B_1 + D'\, B_2 \quad (1\text{-}39)$$

Cette modélisation permet donc de transformer un système à entrées discontinues définies par N sous modèles linéaires sur une période de découpage en un système continu équivalent souvent non-linéaire à entrées continues.

Comme indiqué précédemment, ce type de modélisation a permis de définir des bifurcations de type Hopf. Cependant, comme indiqué dans [Mor 10], [Maz 03], [Maz 06], les bifurcations de type flip ne peuvent pas être prédites par ce modèle moyen alors qu'elles apparaissent dans de nombreux convertisseurs statiques. Des modifications de ce modèle moyen vont être présentées dans le chapitre suivant de manière à prédire l'apparition de tous les types de bifurcations, et ceci quelle que soit la nature du système.

1.3.3. Retour aux modèles linéaires

Dans les domaines de l'ingénierie, de tels modèles moyens sont souvent linéarisés pour aboutir à des modèles linéaires, invariants dans le temps, qui peuvent être analysés dans le domaine fréquentiel, en facilitant l'évaluation des réponses transitoires [Tse 01].

La stabilité en boucle fermée et les réponses transitoires sont les objectifs majeurs du dimensionnement des systèmes d'électronique de puissance. Les modèles qui permettent l'application directe des approches petit-signal conventionnelles présenteront des avantages évidents. Ainsi, beaucoup de travaux de recherche en modélisation des systèmes d'électronique de puissance ont été orientées vers les modèles linéarisés qui peuvent être appliqués dans une analyse petit-signal. L'utilisation de ces modèles est relativement mature dans l'électronique de puissance. Cependant, ils ne permettent pas de prévoir certains comportements non linéaires.

Linéarisation du modèle moyen

Pour obtenir un modèle linéaire plus facile à analyser, quelle que soit la nature du système initial, nous construisons habituellement un modèle petit-signal, linéarisé autour d'un point de fonctionnement, dans lequel les harmoniques de la fréquence de modulation ou d'excitation sont négligés. Ce modèle peut être étudié en utilisant des techniques d'analyse de circuit conventionnelles, pour trouver la fonction de transfert, l'impédance de sortie, et d'autres propriétés liées à la fréquence.

Ce modèle permet donc principalement de déterminer le temps de réponse et le dépassement d'un système lorsque la bande passante du régulateur est faible devant la fréquence de découpage.

Pour construire un modèle moyen petit-signal à partir du modèle moyen, une linéarisation de ces équations autour d'un point de fonctionnement doit être réalisée. On définit ainsi :

$$\begin{cases} < x(t) >_T = X + \hat{x}(t) \\ < u(t) >_T = U + \hat{u}(t) \\ d(t) = D + \hat{d}(t) \rightarrow d'(t) = D' - \hat{d}(t) \end{cases} \tag{1-40}$$

où $\hat{u}(t)$ et $\hat{d}(t)$ sont des petites variations de $u(t)$ et de $d(t)$ autour des grandeurs en régime permanent U et D. En substituant l'équation (1-40) dans (1-36) et en supposant les termes non-linéaires du deuxième ordre négligeables, on obtient le modèle linéarisé suivant :

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + B\hat{u}(t) + \{(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)U\}\hat{d}(t) \tag{1-41}$$

La transformation de Laplace de cette relation permet d'obtenir la fonction de transfert suivante :

$$\hat{x}(s) = (s\,I - A)^{-1}\,B\,\hat{u}(s) + (s\,I - A)^{-1}\{(A_1 - A_2)X + (B_1 - B_2)U\}\hat{d}(s) \tag{1-42}$$

Définition d'un modèle moyen continu petit signal pour un convertisseur de type boost

Le principe de modélisation proposée est appliqué à un convertisseur DC/DC de type boost contrôlé en courant via un régulateur hybride à top d'amorçage représenté sur la Figure 1-23.

Les variables d'état du convertisseur sont le courant à travers l'inductance i_L et la tension aux bornes de la capacité v_C. On peut ainsi définir le vecteur d'état x tel que :

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \tag{1-43}$$

En considérant un mode de conduction continu, on peut définir deux séquences de fonctionnement, soit :

$$\dot{x} = \begin{cases} A_1 x + B_1 u, & t_n \leq t < t_n + D\,T \\ A_2 x + B_2 u, & t_n + D\,T \leq t < t_n + T \end{cases} \tag{1-44}$$

La tension d'entrée V_1 est une source indépendante. On peut donc définir le vecteur $u = V_1$

Sur le premier intervalle défini en (1-44), on obtient la relation suivante :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{\frac{dx(t)}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{C\,r_{ch}} \end{bmatrix}}_{A_1} \underbrace{\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{[V_1]}_{u(t)} \tag{1-45}$$

Les matrices A_1 et B_1 sont définies dans cette relation.

Sur le second intervalle, on obtient :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{\frac{dx(t)}{dt}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & \frac{-1}{C\,r_{ch}} \end{bmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} \underbrace{[V_1]}_{u(t)} \tag{1-46}$$

Les deux matrices A_2 et B_2 sont ainsi définies.

D'après les relations (1-39), (1-45) et (1-46), on peut définir les matrices A et B sous la forme :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & \frac{-(1-D)}{L} \\ \frac{1-D}{C} & \frac{-1}{C\,r_{ch}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-47}$$

En régime établi, l'équation $0 = AX + BU$ devient :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & \frac{-(1-d)}{L} \\ \frac{1-d}{C} & \frac{-1}{C\,r_{ch}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [V_1] \tag{1-48}$$

Ainsi, d'après la relation (1-38), le point de fonctionnement en régime permanent est défini par :

$$X = \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_L + r_{ch}(1-D)^2} \\ \frac{(1-D)r_{ch}}{R_L + r_{ch}(1-D)^2} \end{bmatrix} [V_1] \tag{1-49}$$

D'après (1-41), le modèle petit signal peut être défini par la relation :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \hat{\imath}_L \\ \hat{v}_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-R_L}{L} & \frac{-(1-D)}{L} \\ \frac{1-D}{C} & \frac{-1}{C\,r_{ch}} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\imath}_L \\ \hat{v}_C \end{bmatrix}}_{\hat{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\hat{v}_1}_{\hat{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{(1-D)r_{ch}}{L} \\ \frac{-1}{C} \end{bmatrix} \frac{V_1}{R_L + r_{ch}(1-D)^2}}_{(A_1 - A_2)X + \underbrace{(B_1 - B_2)}_{0}U} \hat{d} \tag{1-50}$$

En utilisant la transformée de Laplace, on peut obtenir l'expression des variations des variables d'état du système ($\hat{\imath}_L$ et $\hat{v}_C$) en fonction de la variation du rapport cyclique et de la tension d'entrée.

$$\hat{\imath}_L = \frac{2(1-D)r_{ch}V_1}{((1-D)^2 r_{ch}+R_L)^2}\frac{\left(1+\frac{r_{ch}C}{2}s\right)}{1+\frac{(L+C\,r_{ch}R_L)}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}s+\frac{C\,L\,r_{ch}}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}s^2}\hat{d} + \frac{1}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}\frac{(1+C\,r_{ch}s)}{1+\frac{(L+C\,r_{ch}R_L)s}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}+\frac{C\,L\,r_{ch}s^2}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}}\hat{v}_1 \tag{1-51}$$

$$\hat{v}_C = \frac{r((1-D)^2 r_{ch}-R_L)V_1}{((1-D)^2 r_{ch}+R_L)^2}\frac{\left(1-\frac{L}{(1-D)^2 r_{ch}-R_L}s\right)}{1+\frac{(L+C\,r_{ch}R_L)s}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}+\frac{C\,L\,r_{ch}s^2}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}}\hat{d} + \frac{(1-D)r_{ch}}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}\frac{1}{1+\frac{(L+C\,r_{ch}R_L)s}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}+\frac{C\,L\,r_{ch}s^2}{(1-D)^2 r_{ch}+R_L}}\hat{v}_1 \tag{1-52}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \hat{\imath}_L = f_1\,(\hat{d},\hat{v}_1) \\ \hat{v}_C = f_2\,(\hat{d},\hat{v}_1) \end{cases} \tag{1-53}$$

Définition d'un modèle moyen pour le régulateur de courant

Dans cet exemple, le régulateur utilisé est un régulateur hybride de courant à top d'amorçage. A partir de la Figure 1-27, on peut calculer géométriquement l'expression des valeurs moyennes du courant $< i_L >$ et de la tension v_c.

$$\begin{cases} i_L = \frac{1}{T}\left(\int_0^{D\,T} i_{L1}\,dt + \int_{D\,T}^{T} i_{L2}\,dt\right) \\ v_C = \frac{1}{T}\left(\int_0^{D\,T} v_{C1}\,dt + \int_{D\,T}^{T} v_{C2}\,dt\right) \end{cases} \tag{1-54}$$

Le développement limité au premier ordre des équations (1-54) conduit à :

$$i_L = \frac{1}{2L}\Big((2L+(2\,D-1)R_L\,T)i_{L,d} - T\left((2\,D-1)V_1+(D-1)^2\,v_{C,d}\right)\Big) \tag{1-55}$$

$$v_C = \frac{1}{2C}\left(T(-1+D)^2\,i_{L,d}+\frac{1}{r}(2\,C\,r_{ch}+(-1+2\,D)\,T\,)v_{C,d}\right) \tag{1-56}$$

$i_{L,d}$ est la valeur maximale de courant et $v_{C,d}$ la valeur minimale de tension sur chaque période de découpage.

Un modèle petit signal autour d'un point de fonctionnement permet de définir les variations de $\hat{\imath}_L$ et $\hat{v}_2$ en fonction des variations du rapport cyclique, de la tension d'entrée, du courant

maximum et de la tension minimale $(\hat{d}\,,\hat{v}_1\,,\hat{\imath}_{L,d}\,,\hat{V}_{C,d})$. On peut ainsi définir deux applications f_3 et f_4 comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{cases}\hat{\imath}_L = f_3\,(\hat{d}\,,\hat{v}_1\,,\hat{\imath}_{L,d}\,,\hat{V}_{C,d})\\ \hat{v}_2 = f_4\,(\hat{d}\,,\hat{v}_1\,,\hat{\imath}_{L,d}\,,\hat{V}_{C,d})\end{cases} \tag{1-57}$$

D'après les relations (1-3) et (1-4), la loi de commande avec le terme intégral est redéfinie à $t = D\,T$ ci-dessous :

$$i_{L,d} - i_{ref} + K_i \int_0^{DT} (< i_L > - i_{ref})(\tau)d\tau \;= m_c\left(\frac{T}{2} - D\,T\right) \tag{1-58}$$

Une modélisation petit signal de la relation (1-58) ainsi que l'utilisation de la transformée de Laplace permet d'écrire :

$$\hat{\imath}_{L,d} = \left(1 + \frac{K_i}{s}\right)\hat{\imath}_{ref} - \frac{K_i}{s}\hat{\imath}_L - m_c\,T\,\hat{d} \tag{1-59}$$

On peut ainsi définir la fonction f_5 telle que :

$$\hat{\imath}_{L,d} = f_5\left(\hat{\imath}_L, \hat{d}\,,\hat{\imath}_{ref}\right) \tag{1-60}$$

En utilisant les équations (1-53) , (1-57) et (1-60), on peut exprimer le modèle moyen petit signal du convertisseur associé au régulateur hybride à top d'amorçage. Il s'agit d'une relation exprimant la variation de la valeur moyenne du courant dans l'inductance en fonction de la variation du courant de référence et de la valeur moyenne de la tension d'entrée. L'écriture simplifiée de cette équation est la suivante :

$$\hat{\imath}_L = \hat{\imath}_{ref}\,H_1 + \hat{v}_1\,H_2 \tag{1-61}$$

Avec H_1 et H_2 deux fonctions dépendant des paramètres du système représentées schématiquement sur la Figure 1-39, on peut ainsi déduire la fonction de transfert $\hat{\imath}_L/\hat{\imath}_{ref}$.

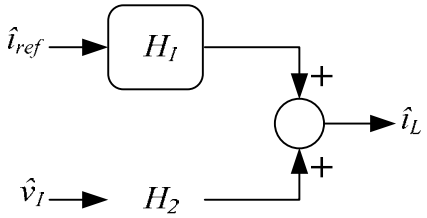


Figure 1-39 : Modèle moyen petit signal.

L'équation simplifiée obtenue pour $H_1 = \frac{num(s)}{den(s)}$ est la suivante :

$$\begin{aligned} num(s) = (-1+D)(K_i+s)(2+Cr_{ch}s)\Big(&2Cr_{ch}(2L+(-1+2D)R_LT)\\ &+T\big((-2+4D)L+((1-D)^4r+(1-2D)^2R_L)T\big)\Big)V_1\end{aligned} \tag{1-62}$$

$$den(s) = A0\left(A1 + A2 - \frac{(1-D)(2+Crs)(A3)V_1}{A5} + A6 + A7\right) \tag{1-63}$$

où :

$$A0 = C((1-D)^2 r_{ch} + R_L)s\big(R_L + L\,s + r_{ch}((1-D)^2 + C\,s(R_L + L\,s)\big)$$

$$A1 = -\left(\frac{m_c T}{C}\right)\left((-1+D)^4 T^2 + \frac{1}{r_{ch}}(2Cr_{ch} + (-1+2D)T)(2L + (-1+2D)R_L T)\right)$$

$$A2 = -\frac{2(1-D)^2 r_{ch}((1-D)^2 r - R_L - Ls)TV_1}{((1-D)^2 r_{ch} + R_L)\big(R_L + L\,s + r_{ch}((1-D)^2 + C\,s(R_L + L\,s)\big)}$$

$$A3 = \left(2Cr_{ch}A4 + T\left(2(2D-1)Ls + K_i\big((4D-2)L + ((1-D)^4 r_{ch} + (1-2D)^2 R_L)T\big)\right)\right)$$

$$A4 = \big(2Ls + K_i(2L + (2D-1)R_L T)\big)$$

$$A5 = C((1-D)^2 r + R)s\big(R_L + L\,s + r_{ch}((1-D)^2 + C\,s(R_L + L\,s)\big)$$

$$A6 = \frac{1}{Cr_{ch}}2(1-D)^2 T^2\left((1-D)i_{L,d}r_{ch} + v_{C,d}\right)$$

$$A7 = \frac{1}{Cr_{ch}}2T(2Cr_{ch} + (-1+2D)T)\big(i_{L,d}R_L - V_1 + v_{C,d} - Dv_{C,d}\big)$$

Sur la Figure 1-40 est présentée l'évolution des pôles la fonction de transfert courant-commande lorsque m_c varie ($K_i = 4000\,rad \cdot s^{-1}$). Elle montre que les pôles sont tous à partie réelle négative.

Les paramètres sont donnés dans le Tableau 1-3.

$L = 0.769\,mH,\ \ R_L = 0.159\Omega$	$V_e = 25.7\,V$	$i_{ref} = 4.97A$
$r = 28.7\Omega$	$f = 10\,KHz$	$C = 18.19\,\mu F$

Tableau 1-3 : Paramètres de simulation.

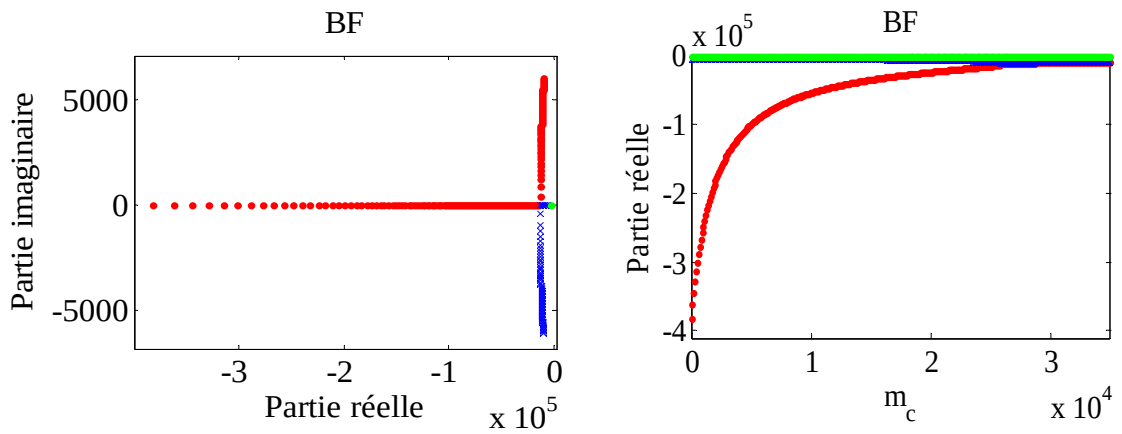


Figure 1-40 : Evolution des pôles en variant m_c de 0 à $35000A \cdot s^{-1}$.

On fixe $m_c = 14000A \cdot s^{-1}$. Bien que les pôles soient à partie réelle négative, la Figure 1-41 montre l'apparition d'un cycle 2-T périodique. L'étude des pôles de la fonction de transfert ne permet donc pas de prévoir le comportement irrégulier de la boucle de courant.

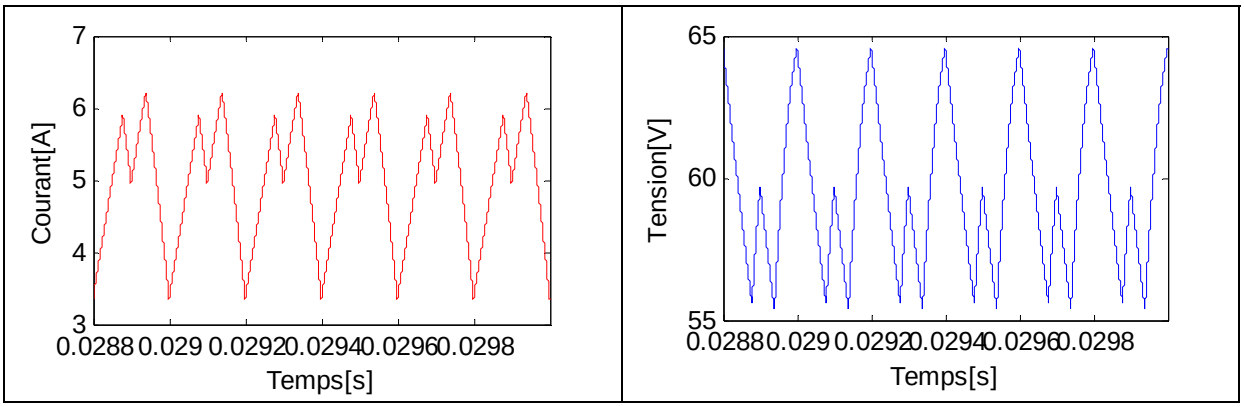


Figure 1-41 : Evolution du courant i_L et de la tension v_C pour $m_c = 14000A \cdot s^{-1}$.

Définition d'un modèle moyen discret petit signal à large bande passante pour un convertisseur de type boost

Pour améliorer la précision du modèle petit-signal d'un système, il est nécessaire de prendre en compte l'effet du découpage [Sho 83], [Mar 02], [Lac 08] et [Tan 95].

Sans utiliser le modèle moyen, on peut définir une relation liant la valeur du courant après une période de découpage en fonction des grandeurs obtenues sur la période de découpage précédente et du rapport cyclique pendant cet intervalle. Cette relation est obtenue en effectuant un développement limité au premier ordre. On suppose que la période de découpage est petite vis-à-vis de la constante de temps du système. On peut ainsi obtenir :

$$i_{L,n+1} = \frac{1}{2L}\Big((2L + (2D_n - 1)R_L\, T)i_{L,d} - T\left((2D_n - 1)V_1 + (D_n - 1)^2\, v_{C,d}\right)\Big) \qquad (1\text{-}64)$$

En considérant une petite variation sur les différentes grandeurs D_n, $i_{L,d}$ et $v_{C,d}$, on peut obtenir la grandeur moyenne du courant en régime perturbé : (Les variations sur D_n sont notées t_n/T).

$$\hat{\imath}_{L,n+1} = -\frac{t_n V_1}{L} + \frac{TV_1 - 2\, D_n T\, V_1}{2L} + \frac{(2L + (-1 + 2D_n)R_L T)\hat{\imath}_{L,d}}{2L} - \frac{(-1 + D_n)^2 T \hat{v}_{C,d}}{2L} \qquad (1\text{-}65)$$

Considérons Y la valeur en régime non perturbé et $\hat{Y}$ sa valeur en régime perturbé avec petites variations. On pose $\Delta Y = \hat{Y} - Y$. D'après les deux dernières équations :

$$\Delta i_{L,n+1} = \frac{2\, L + (-1 + 2\, D_n)R_L\, T\, \Delta i_{L,d}}{2L} - \frac{t_n\, V_1}{L} - (-1 + D_n)^2\, T\, \frac{\Delta v_{C,d}}{2\, L} \qquad (1\text{-}66)$$

On en déduit la fonction f_6 :

$$\Delta i_{L,n+1} = f_6(\Delta i_{L,d}\, , \Delta v_{C,d}\, , t_n\, , D_n) \qquad (1\text{-}67)$$

De même, pour la valeur moyenne de la tension en régime permanent, on obtient :

$$v_{C,n+1} = \frac{1}{2C}\left(T(-1+D_n)^2\, I_{L,d} + \frac{1}{r_{ch}}(2\,C\,r_{ch} + (-1+2\,D_n)\,T\,)V_{C,d}\right) \tag{1-68}$$

La valeur moyenne de la tension en régime perturbé est :

$$\hat{v}_{C,n+1} = \frac{1}{2C}\left(T(-1+D_n)^2\, \hat{\imath}_{L,d} + \frac{1}{r}(2\,C\,r_{ch} + (-1+2\,D_n)\,T\,)\hat{v}_{C,d}\right) \tag{1-69}$$

On soustrait les équations (1-69) et (1-68), on obtient :

$$\Delta v_{C,n+1} = \frac{1}{2C}\left(T(-1+D_n)^2\, \Delta i_{L,d} + \frac{1}{r}(2\,C\,r_{ch} + (-1+2\,D_n)\,T\,)\Delta v_{C,d}\right) \tag{1-70}$$

On en déduit la fonction f_7 telle que :

$$\Delta v_{C,n+1} = f_7(\Delta i_{L,d}\,, \Delta v_{C,d}\,, D_n) \tag{1-71}$$

En utilisant la loi de commande, on peut définir :

$$i_{L,d} = i_{ref,n+1} - K_i\,(X_n + \int_{n\,T}^{n\,T+D_n\,T}(iL_1 - i_{ref,n+1})dt) - m_c\,(D_n\,T - \frac{T}{2}) \tag{1-72}$$

et donc considérer les perturbations :

$$\hat{\imath}_{L,d} = \hat{\imath}_{ref,n+1} - K_i\,(\hat{X}_n + \int_{n\,T}^{n\,T+D_n\,T+t_n}(\hat{\imath}_{L1} - \hat{\imath}_{ref,n+1})dt) - m_c\,(D_n\,T + t_n - \frac{T}{2}) \tag{1-73}$$

avec :

$$X_n = \int_0^{n\,T}(i_{L1}(t) - i_{ref,n+1})dt\ \ , \hat{X}_n = \int_0^{n\,T}(\hat{\imath}_{L1}(t) - \hat{\imath}_{ref,n+1})dt \tag{1-74}$$

En soustrayant les équations (1-73) et (1-72) et en linéarisant au premier ordre, on aboutit à l'équation suivante :

$$\Delta i_{L,d} = \left(\frac{1+D_n\,K_i\,T}{1+D_n\,K_i\,T+\frac{D_n{}^2\,K_i\,R_L\,T^2}{2\,L}}\right)\Delta i_{ref,n+1} - \left(\frac{K_i}{1+D_n\,K_i\,T+\frac{D_n{}^2\,K_i\,R_L\,T^2}{2\,L}}\right)\Delta X_n + \frac{t_n\left(-m_c+\frac{D_n\,K_i\,T\,V_1}{L}\right)}{1+D_n\,K_i\,T+\frac{D_n{}^2\,K_i\,R_L\,T^2}{2\,L}}$$

On en déduit ainsi la fonction f_8 telle que :

$$\Delta i_{L,d} = f_8(\Delta i_{ref,n+1}\,, t_n\,, D_n\,, \Delta X_n) \tag{1-75}$$

De même, pour le terme intégral, on a :

$$X_{n+1} = X_n + \int_{n\,T}^{n\,T+D_n\,T}(i_{L1} - i_{ref,n+1})dt + \int_{n\,T+D_n\,T}^{n\,T+T}(i_{L2} - i_{ref,n+1})dt \tag{1-76}$$

Ce qui permet de déduire les perturbations sous la forme :

$$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_n + \int_{n\,T}^{n\,T+D_n\,T+t_n} (\hat{\imath}_{L1} - \hat{\imath}_{ref,n+1})dt + \int_{n\,T+D_n\,T+t_n}^{n\,T+T} (\hat{\imath}_{L2} - \hat{\imath}_{ref,n+1})dt \tag{1-77}$$

En utilisant (1-76) et (1-77) et en mettant dans $\Delta X_{n+1} = \hat{X}_{n+1} - X_{n+1}$, on obtient :

$$\Delta X_{n+1} = -\frac{t_n\,T\,V_1}{L} + \frac{2\,L\,T + (-1 + 2\,D_n)\,R_L\,T^2\,\Delta i_{L,n}}{2L} - T\,\Delta i_{ref,n+1} - \frac{(-1 + D_n)^2\,T^2\,\Delta v_{C,n}}{2\,L} + \Delta X_n \tag{1-78}$$

Nous avons alors la fonction f_9 suivante :

$$\Delta X_{n+1} = f_9\big(\Delta i_{L,n}\,, \Delta v_{C,n}\,, t_n\,, D_n\,, \Delta X_n\big) \tag{1-79}$$

On peut définir la valeur de t_n en fonction de la variation du courant moyen :

$$t_n = \frac{L\big(\Delta i_{L,n+1} - \Delta i_{L,n}\big) + R_L\,T\,\Delta i_{L,n}}{V_2} \tag{1-80}$$

avec :

$$V_2 = \frac{(1 - D_n)\,r_{ch}\,V_1}{R_L + r_{ch}(1 - D_n)^2}$$

On introduit la fonction f_{10} telle que :

$$t_n = f_{10}\big(\Delta i_{L,n}\,, \Delta i_{L,n+1}\big) \tag{1-81}$$

On peut considérer aussi la variation de la tension capacitive moyenne par la relation suivante :

$$\frac{C\big(\Delta V_{C,n+1} - \Delta V_{C,n}\big)}{T} = (1 - D_n)\,\Delta i_{L,n} - \frac{1}{r_{ch}}\Delta V_{C,n} \tag{1-82}$$

On en déduit ainsi la fonction f_{11} comme :

$$\Delta i_{L,n} = f_{11}\big(\Delta V_{C,n}\,, \Delta V_{C,n+1}\big) \tag{1-83}$$

On fait la transformée en z des fonctions f_6 à f_{11} présentées dans les équations (1-67), (1-71), (1-75), (1-79), (1-81) et (1-83).

On réécrit l'ensemble des équations sous forme matricielle afin de faciliter l'obtention de la fonction de transfert. On peut obtenir la relation entre Δi_L et Δi_{ref}. L'équation simplifiée obtenue est la suivante :

$$\frac{\Delta i_L(z)}{\Delta i_{ref}} = \frac{B_3\,z^3 + B_2\,z^2 + B_1 z}{A_3\,z^3 + A_2\,z^2 + A_1\,z + A_0} \tag{1-84}$$

La valeur exacte des coefficients n'est pas détaillée ici.

Sur la Figure 1-42 est présentée l'évolution des pôles de l'équation (1-84) lorsque m_c varie en utilisant les mêmes paramètres que pour le modèle moyen continu.

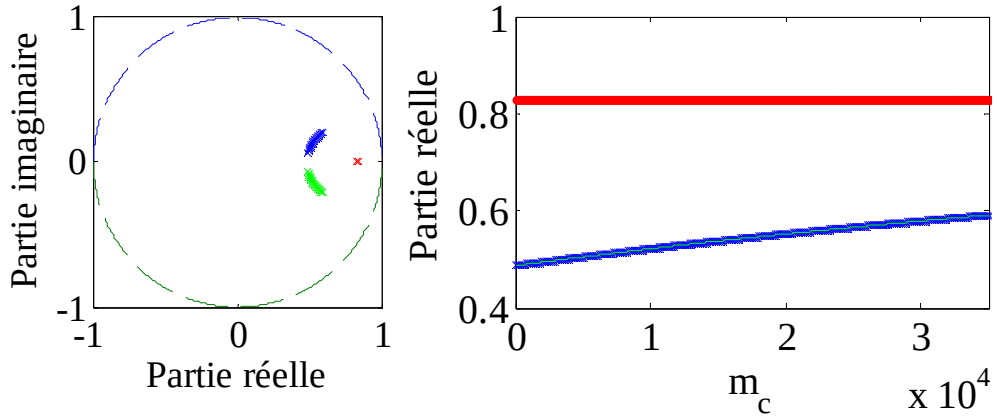


Figure 1-42 : Evolution des pôles en variant m_c de 0 à 35000 $A \cdot s^{-1}$.

Les pôles du système restent à l'intérieur du cercle unité, ce qui prouve la stabilité du système au sens des valeurs moyennes. Comme avec le modèle moyen continu, bien que les pôles soient à l'intérieur du cercle unité, on a un cycle double périodique.

L'équation (1-84) représente le modèle moyen discret. En utilisant $z = e^{s\,T}$, on obtient la transformée de Laplace du signal discret. Afin de passer à un modèle continu, on applique l'approximation de Padé du deuxième ordre [Tan 93].

$$e^{s\,T} \approx \frac{1 + \frac{s\,T}{2} + \frac{(s\,T)^2}{12}}{1 - \frac{s\,T}{2} + \frac{(s\,T)^2}{12}} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{1-85}$$

Supposons que la transformée de Laplace du courant de référence échantillonné soit $i_{ref,e}$. En considérant un spectre nul sauf dans l'intervalle $[-f/2, f/2]$, on peut alors écrire :

$$\Delta i_{ref,e}(s) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1 - e^{-s\,T}}{s} \cdot \Delta i_{ref}(s) \tag{1-86}$$

En sachant $e^{-s\,T} = \frac{Q(s)}{P(s)}$ et $P(s) - Q(s) = s\,T$ on obtient :

$$\frac{\Delta i_{ref,e}(s)}{\Delta i_{ref}(s)} = \frac{1}{P(s)} \tag{1-87}$$

La fonction de transfert de l'équation (1-84) dans le domaine de Laplace est donné par :

$$\frac{\Delta i_L(s)}{\Delta i_{ref}(s)} = \frac{B_3\,\left(P(s)\right)^3 + B_2\,\left(P(s)\right)^2 Q(s) + B_1\,P(s)\,\left(Q(s)\right)^2}{A_3\left(P(s)\right)^3 + A_2\left(P(s)\right)^2 Q(s) + A_1\,P(s)\,\left(Q(s)\right)^2 + A_0\left(Q(s)\right)^3} \cdot \frac{1}{P(s)} \tag{1-88}$$

La Figure 1-43 représente le diagramme de Bode pour $L = 85\,\mu H$, $R_L = 0.1\Omega$, $f = 10\,KHz$, $i_{ref} = 20A$, $r = 2\Omega$, $K_i = 5000\,rad \cdot s^{-1}$, $C = 1mF$, $V_e = 24\,V$. On constate que le diagramme de Bode, à basses fréquences, est identique pour les deux modèles moyens. Il est différent en hautes fréquences car un pôle est ajouté dû au découpage que l'on peut voir

sur le diagramme de phase. Le résultat obtenu par simulation en introduisant une petite perturbation sur le courant i_{ref} est représenté par des points rouges. On voit une bonne adéquation entre les résultats obtenus par le modèle et ceux obtenu par simulation.

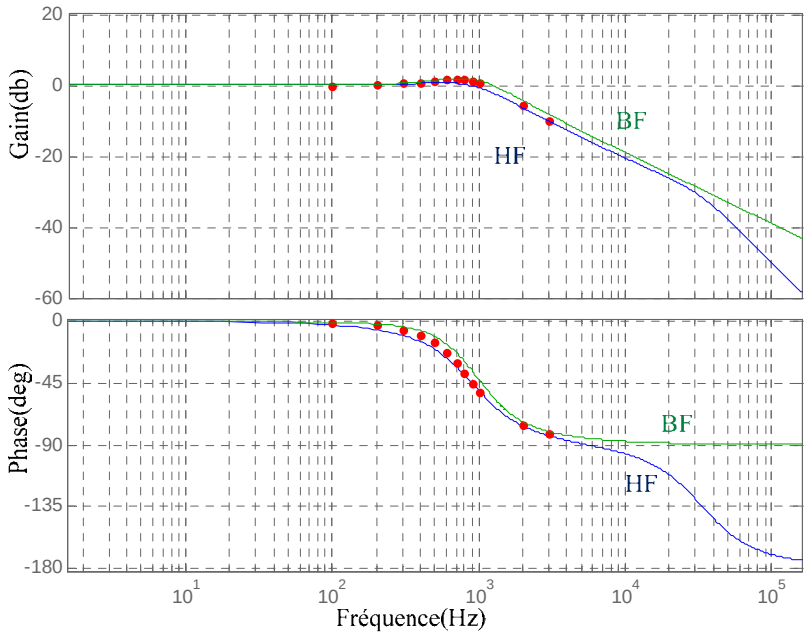


Figure 1-43 : Diagramme de Bode pour le modèle basses fréquences et hautes fréquences.

Sur la Figure 1-44 est représentée la réponse indicielle obtenue par les deux modélisations (Les paramètres sont précédemment dans le Tableau 1-3). Le modèle basse fréquence prévoit une réponse rapide mais avec un dépassement important, tandis que le modèle haute fréquence prévoit un temps de réponse plus important mais avec un dépassement plus faible.

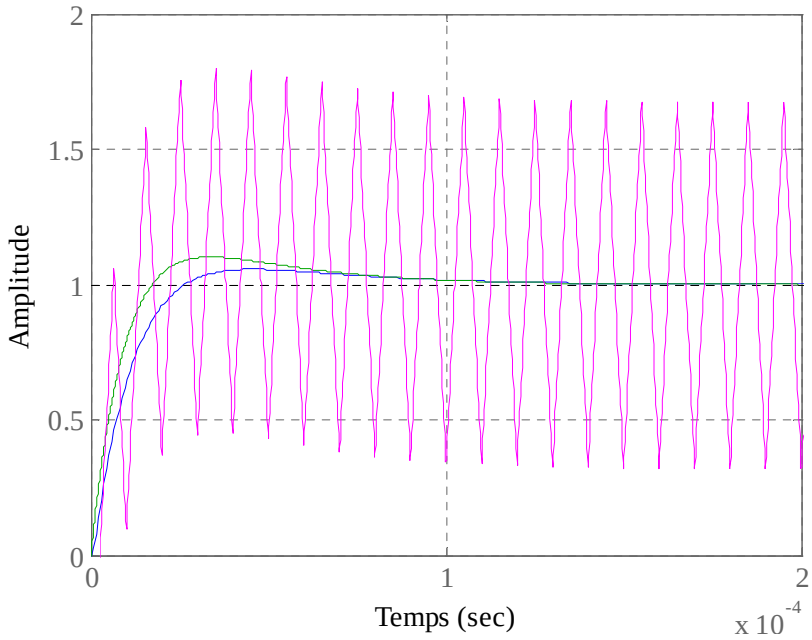


Figure 1-44 : Réponse indicielle.

Sur la Figure 1-45 (à gauche) est représenté la réponse indicielle du modèle haute fréquence pour plusieurs valeurs de K_i avec $m_c = 18000A \cdot s^{-1}$. On remarque une bande passante et un dépassement croissant pour augmentation du gain intégral K_i. Sur la Figure 1-45 (à droite) est représenté la réponse indicielle du modèle haute fréquence pour plusieurs valeurs de m_c avec $K_i = 6746\, rad \cdot s^{-1}$. En augmentant de la pente de la rampe de compensation, on constate un temps de réponse et un dépassement croissant.

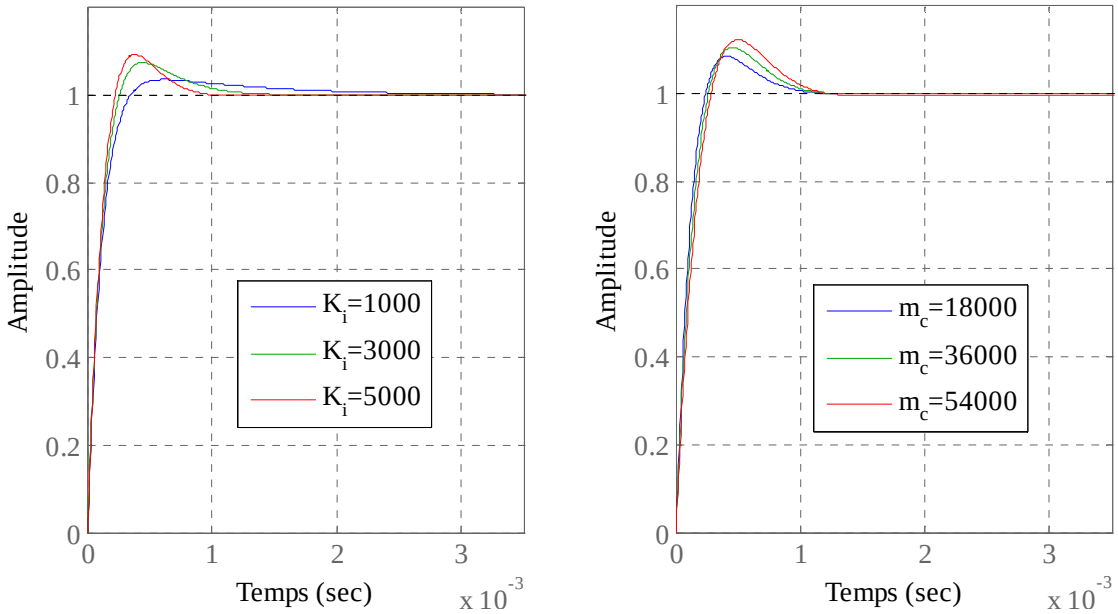


Figure 1-45 : Réponse indicielle pour plusieurs valeurs de K_i (à gauche) et m_c (à droite).

Cependant, bien que les pôles du modèle BF soient tous à partie réelle négative ou que les pôles du modèle HF soient à l'intérieur du cercle unité, des cycles multi-harmoniques peuvent apparaître tend au niveau des courants que de la tension. Aucun de ces deux modèles ne permet donc de prévoir le comportement irrégulier de la boucle de courant.

1.4. Conclusion

Le dimensionnement des éléments d'un convertisseur statique doit pouvoir garantir un fonctionnement stable quel que soit le point de fonctionnement [Iu 03], [Che 08]. Ainsi, le premier point de bifurcation doit être connu et c'est à cette tâche qu'a été consacré ce premier chapitre. L'ensemble des définitions et des outils nécessaires pour l'étude des comportements non-linéaires des convertisseurs statiques ont tout d'abord été présentés. Les différents types de bifurcation que l'on rencontre dans le fonctionnement des convertisseurs statiques ont été détaillés. Ensuite, les différentes méthodes de modélisation de ces convertisseurs ont été rappelées ainsi que leurs avantages et leurs limites.

Pour un convertisseur élévateur, une modélisation discrète a été utilisée pour l'analyse de ses différents modes de comportement, mono périodique, double et multi périodique et chaotique. Cette modélisation a été validée par des résultats expérimentaux qui ont aussi mis en évidence ces différents modes de comportement. Le comportement dynamique de ce convertisseur, autour d'un point de fonctionnement, a ensuite été étudié par simulation à l'aide de deux modèles moyens linéarisés.

Chapitre 2
Modèle moyen continu permettant de garantir un cycle mono-périodique des variables d'état des systèmes

2.1. Introduction

Les phénomènes de bifurcation peuvent engendrer une destruction des composants d'un convertisseur statique. Il est donc nécessaire de connaître quand et sous quelles conditions de tels phénomènes peuvent apparaître. Ceci nécessite une modélisation adaptée, associée à une analyse en profondeur du fonctionnement de ce convertisseur.

Pour le dimensionnement d'un convertisseur, le seul mode de fonctionnement acceptable est celui garantissant un comportement mono périodique. Pour cela, les conditions d'apparition du premier point de bifurcation doivent être connues.

Dans ce chapitre, une nouvelle formulation d'un modèle moyen continu est présentée. Cette formulation sera appliquée à la modélisation d'un convertisseur boost, en mode de conduction continu, contrôlé en courant par différents types de contrôleur, à fréquence fixe de commutation. Le modèle obtenu peut être utilisé pour estimer le premier point de bifurcation et garantir la stabilité du cycle limite.

Généralement, la définition d'un modèle discret permet d'obtenir des résultats plus précis que ceux issus d'un modèle moyen. Cependant, dans certains systèmes, le modèle discret est difficile à établir, car on ne peut obtenir qu'une formulation implicite des équations différentielles régissant le système dans chacun de ses séquences de fonctionnement [Sha 09], [Sha 11].

Le modèle moyen ainsi défini, sera comparé à un modèle discret et validé par simulation et à l'aide de différents résultats expérimentaux.

La Figure 2-1 rappelle la structure élémentaire du convertisseur boost sur lequel sont appliquées les différentes lois de commande.

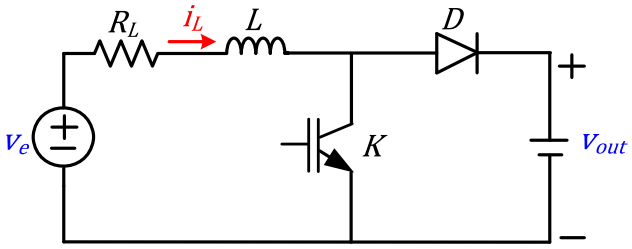


Figure 2-1 : Convertisseur boost.

2.2. Régulateur à top à l'amorçage, sans terme intégral

Le régulateur de courant à fréquence fixe de commutation utilisé dans cette partie est le régulateur hybride à top d'amorçage présenté dans le chapitre 1.

2.2.1. Définition du modèle discret

Dans le but de valider les résultats obtenus via le modèle moyen proposé, on définit préalablement un modèle discret. En effet, comme rappelé dans le chapitre 1, la majorité des phénomènes non linéaires peut être mise en évidence par la définition d'un modèle discret. La

définition de ce modèle sur un convertisseur boost est rappelée dans cette partie lorsque la tension de sortie est considérée constante et en supposant un mode de conduction continu.

La forme d'onde caractéristique du courant $i_L(t)$ est représentée sur la Figure 2-2. On nomme D_n le rapport cyclique associé à l'interrupteur commandable K.

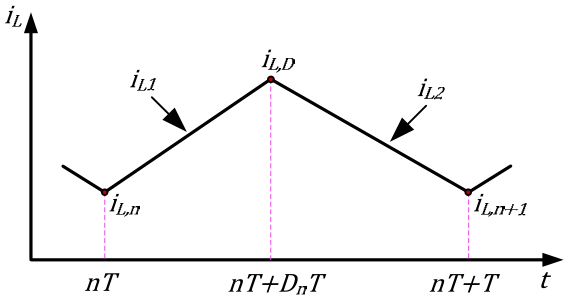


Figure 2-2 : Forme d'onde du courant.

Pour $t\epsilon[n\,T, n\,T + D_nT]$, le courant $i_L(t)$ est défini par la relation suivante :

$$i_L(t) = i_{L1}(t) = \frac{V_e}{R_L} + e^{-\frac{R_L(t-n\,T)}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_e}{R_L}\right) \tag{2-1}$$

où $i_{L,n}$ est la valeur du courant à l'instant $n\,T$. La valeur du courant $i_{L,D}$ à l'instant $n\,T + D_nT$ est définie par la relation suivante :

$$i_{L,D} = \frac{V_e}{R_L} + e^{-\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n} - \frac{V_e}{R_L}\right) \tag{2-2}$$

Pour $t\epsilon[n\,T + D_nT, n\,T + T]$, le courant $i_L(t)$ est défini par la relation suivante :

$$i_L(t) = i_{L2}(t) = \frac{V_e - V_{out}}{R_L} + e^{-\frac{R_L(t-(nT+D_n\,T))}{L}}\left(i_{L,D} - \frac{V_e - V_{out}}{R_L}\right) \tag{2-3}$$

Il est alors possible de définir une application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui aux cordonnées $(i_{L,n}, D_n)$ associe la valeur du courant à l'instant $n\,T + T$:

$$i_{L,n+1} = f(i_{L,n}, D_n) \tag{2-4}$$

Cette application est définie par :

$$f = \frac{1}{R_L}e^{-\frac{R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}R_L + \left(-1 + e^{\frac{R_L\,T}{L}}\right)V_e + \left(-e^{\frac{R_L\,T}{L}} + e^{\frac{D_n\,R_L\,T}{L}}\right)V_{out}\right) \tag{2-5}$$

Cette application modélise le convertisseur. La définition de la valeur du rapport cyclique est définie grâce à la loi de commande. Avec $K_i = 0$, la loi de commande associée au régulateur de courant est définie par la relation suivante :

$$s = i_{L,D} - i_{ref} - m_c\left(\frac{T}{2} - D_n\,T\right) = 0 \tag{2-6}$$

En posant l'équation (2-2) dans (2-6) on obtient une expression implicite du rapport cyclique D_n en fonction de $i_{L,n}$:

$$s = \frac{V_e}{R_L} + e^{-\frac{D_n R_L T}{L}} \left(i_{L,n} - \frac{V_e}{R_L} \right) - i_{ref} - m_c \left(\frac{T}{2} - D_n T \right) = 0 \tag{2-7}$$

Le modèle discret est ainsi défini par l'application $Y: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ tel que :

$$X_{n+1} = Y(X_n) \text{ avec } X_n = [i_{L,n}] \tag{2-8}$$

Comportement dynamique du système

Le comportement dynamique d'un système à proximité de ses points d'équilibre est topologiquement équivalent au système linéarisé à ces points [Guc 98]. Ainsi, les propriétés dynamiques de notre système peuvent être étudiées par l'étude de la matrice Jacobienne de la fonction calculée aux points d'équilibre. Pour obtenir une formulation explicite de la matrice Jacobienne, nous envisageons de petites variations autour du point de fonctionnement du système. On obtient :

$$df = \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} \, di_{L,n} + \frac{\partial f}{\partial D_n} \, dD_n \tag{2-9}$$

D'après la loi de commande, on a :

$$\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} \, di_{L,n} + \frac{\partial s}{\partial D_n} \, dD_n = 0 \tag{2-10}$$

donc :

$$dD_n = -\left(\frac{\partial s}{\partial D_n} \right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} \, di_{L,n} \right) \tag{2-11}$$

En substituant l'équation (2-10) dans l'équation (2-9), on obtient l'expression de la Jacobienne J_Y de l'application Y :

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n} \left(\frac{\partial s}{\partial D_n} \right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} \right] di_{L,n} = J_Y \, di_{L,n} \tag{2-12}$$

Calcul des multiplieurs de Floquet

Pour étudier la stabilité des cycles, nous calculons les multiplieurs de Floquet (valeurs propres de la matrice Jacobienne de Y) au point d'équilibre du système. Pour que le système soit stable, il faut que les multiplieurs de Floquet soient à l'intérieur du cercle unité.

En utilisant les équations (2-5) et (2-7), on obtient l'expression de la matrice Jacobienne (relation (2-12)) autour du point d'équilibre D_n, $i_{L,n}$ sous la forme :

$$J_Y = \frac{e^{-\frac{R_L T}{L}} \left(-i_{L,n} \; R_L + V_e + e^{\frac{D_n R_L T}{L}} (L \, m_c - V_{out}) \right)}{e^{\frac{D_n R_L T}{L}} \, L \, m_c - i_{L,n} \, R_L + V_e} \tag{2-13}$$

Les valeurs propres λ sont obtenues par :

$$\det[\lambda\, I - J_Y] = 0 \tag{2-14}$$

Par simulation numérique, en échantillonnant la valeur du courant à chaque début de période de découpage, le diagramme de bifurcation représenté sur la Figure 2-3 a été obtenu. Dans ce cas, le paramètre de bifurcation est la pente m_c de la rampe de compensation et m_{c0} est la valeur de la rampe au premier point de bifurcation. Les paramètres du système sont rappelés dans le Tableau 2-1.

V_e, V_{out}	$42V, 105V$
L, R_L	$2{,}14\ mH, 0{,}2\ \Omega$
f, i_{ref}	$10\ kHz, 10A$

Tableau 2-1: Paramètres de simulation.

Comme on peut l'observer sur la Figure 2-3, des orbites multi-périodiques voire chaotiques apparaissent lorsque la pente de la rampe de compensation est inférieure à $m_c = 5719A \cdot s^{-1}$. Lorsque $m_c > m_{c0}$ un cycle limite mono-périodique des variables d'état du système est obtenu.

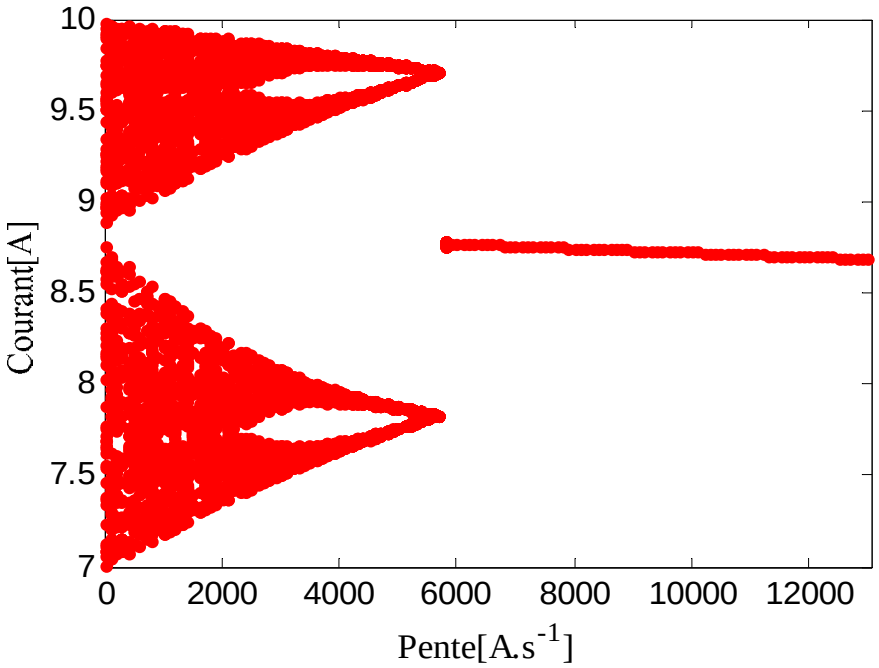


Figure 2-3 : Diagramme de bifurcation pour m_c variant de 0 à 13000 $A \cdot s^{-1}$.

La Figure 2-4 représente l'évolution du multiplieur de Floquet de l'application Y en fonction de la pente m_c. On remarque que le multiplieur de Floquet se trouve à l'intérieur du cercle unité et que son tracé se rapproche du point $(-1{,}0)$ lorsque m_c tend vers $m_{c0} = 5719\ A \cdot s^{-1}$. On obtient donc une bifurcation de type flip, conduisant à un doublement de la périodicité du cycle limite.

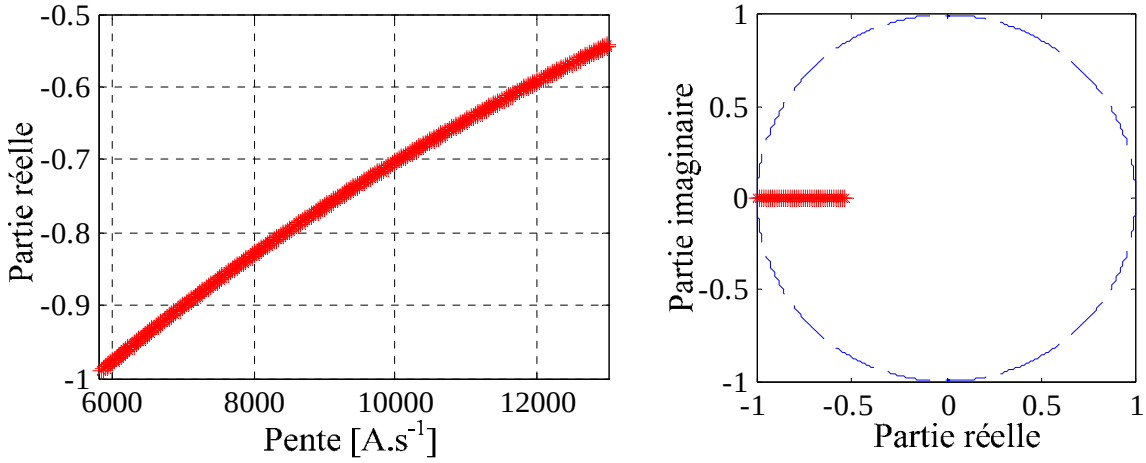


Figure 2-4 : Tracé du multiplieur de Floquet pour m_c variant de m_{c0} à $13000\ A \cdot s^{-1}$.

2.2.2. Définition du modèle moyen proposé

Dans cette partie, on suppose que la constante de temps du système est largement plus grande que la période de découpage ($\frac{L}{R_L} >> T$).

Selon la Figure 2-1, un vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^1$ est défini comme suit :

$$[X] = [X_1] = [\bar{i}_L] \tag{2-15}$$

où la notation $\bar{i}_L$ dénote la valeur moyenne de la variable d'état i_L calculée sur une période de découpage. L'équation qui régit le fonctionnement du convertisseur est donnée par :

$$\begin{gathered} \dot{X} = H(X, \alpha) \\ \frac{d\bar{i}_L}{dt} = -\frac{R_L}{L}\bar{i}_L - \frac{(1-\alpha)V_{out}}{L} + \frac{V_e}{L} \end{gathered} \tag{2-16}$$

où α est le rapport cyclique associé à l'interrupteur K.

Pour modéliser le contrôleur de courant, nous proposons de définir une équation implicite, associant le vecteur d'état et le rapport cyclique α. Nous posons :

$$s(X, \alpha) = 0 \quad \forall (X, \alpha) \in \mathbb{R} \times [0,1] \tag{2-17}$$

avec

$$s = I_P - i_{ref} - m_c\left(\frac{T}{2} - \alpha\, T\right) \tag{2-18}$$

Pour définir une relation entre la valeur de I_P et le courant moyen $\bar{i}_L$, nous proposons d'écrire l'équation de la droite MN définie sur la Figure 2-5. Cette formulation doit impérativement prendre en compte l'amplitude de l'ondulation de courant au début et à la fin de la période de découpage considérée.

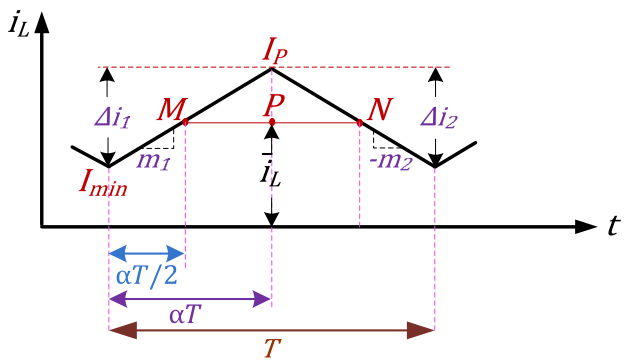


Figure 2-5 : Représentation des grandeurs pour calculer I_P.

En utilisant les deux points $M(\frac{\alpha\, T}{2}, I_P - \frac{\Delta i_1}{2})$ et $N(\frac{(\alpha+1)\, T}{2}, I_P - \frac{\Delta i_2}{2})$ on peut écrire :

$$MN: i_L(t) = \left(\frac{\Delta i_1 - \Delta i_2}{T}\right) t - \alpha \left(\frac{\Delta i_1 - \Delta i_2}{2}\right) - \frac{\Delta i_1}{2} + I_P \tag{2-19}$$

avec :

$$\begin{cases} \Delta i_1 = m_1 \alpha T \ , \qquad m_1 = \dfrac{V_e - R_L \bar{i}_L}{L} \\ \Delta i_2 = m_2 (1-\alpha) T \ , m_2 = -\dfrac{V_e - V_{out} - R_L \bar{i}_L}{L} \end{cases} \tag{2-20}$$

On met les coordonnées du point $P(\alpha\, T, \bar{i}_L\,)$ dans la droite MN et on obtient :

$$\bar{i}_L \ = \alpha \left(\frac{\Delta i_1 - \Delta i_2}{2}\right) - \frac{\Delta i_1}{2} + I_P \tag{2-21}$$

En remplaçant les équations (2-20) dans l'expression (2-21), on obtient :

$$I_P = \frac{2\, L\, \bar{i}_L + (1-\alpha)\alpha\, T\ \ V_{out}}{2\, L} \tag{2-22}$$

On obtient ainsi:

$$s = \frac{2\, L\, \bar{i}_L + (1-\alpha)\alpha\, T\ \ V_{out}}{2\, L} - i_{ref} - m_c \left(\frac{T}{2} - \alpha\, T\right) \tag{2-23}$$

L'association des relations (2-16) et (2-23) permet de définir la valeur moyenne du courant en régime établi $\bar{i}_{L0}$ ainsi que la valeur du rapport cyclique α_0. On obtient :

$$\bar{i}_{L0} = \frac{1}{2\, {R_L}^2\, T} (2 R_L T V_e - R_L T V_{out} + 2L(m_c R_L T + V_{out}) - A) \tag{2-24}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\, R_L\, T V_{out}} (R_L T V_{out} + 2L(m_c R_L T + V_{out}) - A) \tag{2-25}$$

avec

$$A = \sqrt{\left({R_L}^2 T^2 {V_{out}}^2 + 4L^2(m_c R_L T + V_{out})^2 - 4LR_L T V_{out}\left(2i_{ref}R_L - 2V_e + V_{out}\right)\right)}$$

L'équation (2-24) représente donc la nouvelle expression du modèle moyen pour un convertisseur de type boost associé à un régulateur de courant à top d'amorçage lorsque le composant intégral est nul.

Comparaison avec les résultats de simulation

Pour obtenir l'évolution du courant moyen lors d'un échelon du courant de référence à partir du modèle moyen proposé, on utilise les relations (2-16) et (2-23). La valeur du rapport cyclique pour chaque période de commutation est obtenue en résolvant numériquement l'équation (2-23). La relation (2-16) permet d'obtenir le courant moyen pour un rapport cyclique donné.

La Figure 2-6 montre l'évolution moyenne du courant définie grâce au modèle moyen proposé ainsi que l'évolution des formes d'onde du courant obtenu par simulation numérique lors d'un échelon de courant 10 à $15A$ à l'instant $t = 0{,}01s$.

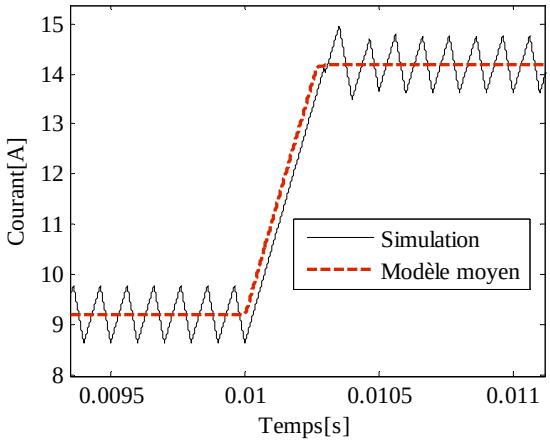
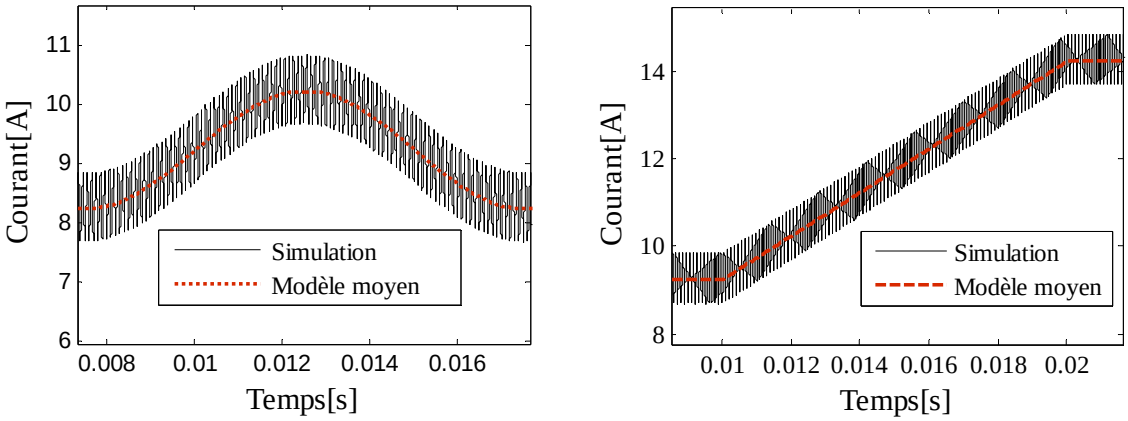


Figure 2-6 : Réponse indicielle à un échelon de référence; modèle moyen et résultat de simulation.

Sur la Figure 2-7a et Figure 2-7b est comparée l'évolution moyenne du courant obtenu grâce au modèle proposé avec les résultats de simulation pour une excitation sur i_{ref} sinusoïdale et une rampe.



(a) (b)

Figure 2-7 : Comparaison du courant dans l'inductance obtenu grâce au modèle proposé avec les résultats de simulation.

On observe donc que le modèle moyen proposé permet de définir la valeur du courant moyen aussi bien en régime établi qu'en régime transitoire.

Etude des cycles

Considérons un point d'équilibre (X_0, α_0) et une petite perturbation autour de ce point dans l'équation (2-16). On peut écrire :

$$\dot{X} = H(X_0 + dX, \alpha_0 + d\alpha) \tag{2-26}$$

$$\dot{X} = H(X_0, \alpha_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha 0)} dX + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_{(X_0,\alpha_0)} d\alpha \tag{2-27}$$

avec $H(X_0, \alpha_0) = 0$

La relation (2-17) mène à :

$$\frac{\partial s}{\partial X}\, dX + \frac{\partial s}{\partial \alpha}\, d\alpha = 0 \tag{2-28}$$

Donc :

$$d\alpha = -\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1} \left(\frac{\partial s}{\partial X}\right)(dX) \tag{2-29}$$

avec $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ non singulier.

En substituant (2-28) dans (2-27) , nous obtenons :

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1} \frac{\partial s}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha_0)} dX = J(X_0, \alpha_0) dX \tag{2-30}$$

Utilisant les équations (2-16), (2-23) et (2-30), on obtient l'expression de la matrice Jacobienne $J(X)$ pour le point d'équilibre (X_0, α_0):

$$J(X_0, \alpha_0) = \frac{1}{L}\left(-R_L + \frac{2\, L\, V_{out}}{T\big((-1 + 2\alpha_0)V_{out} - 2Lm_c\big)}\right) \tag{2-31}$$

Evolution des valeurs propres de la matrice Jacobienne

En utilisant les paramètres du système présentés dans le Tableau 2-1, la Figure 2-8 montre l'évolution de la partie réelle de la valeur propre lorsque m_c varie de 0 à 13000 $A \cdot s^{-1}$. Pour des valeurs m_c supérieures à $m_{c0} = 5781 A \cdot s^{-1}$, la valeur propre est à partie réelle négative, ce qui prouve la stabilité de l'application.

Les valeurs de m_{c0} obtenues grâce au modèle discret et au modèle moyen sont identiques (l'écart entre les deux valeurs est inférieur à 1%).

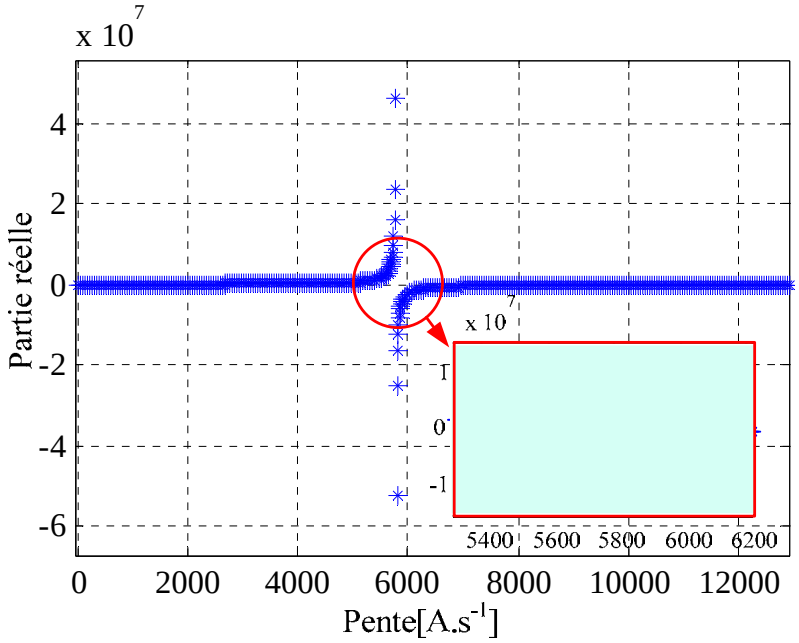


Figure 2-8 : Evolution des valeurs propres lorsque m_c varie de 0 à 13000 $A \cdot s^{-1}$.

Sur la Figure 2-9 est représentée la valeur propre pour m_c variant de m_{c0} à 13000 $A \cdot s^{-1}$. On observe que les valeurs propres obtenues se trouvent à gauche du plan. Ainsi, ces résultats permettent de valider la modélisation proposée.

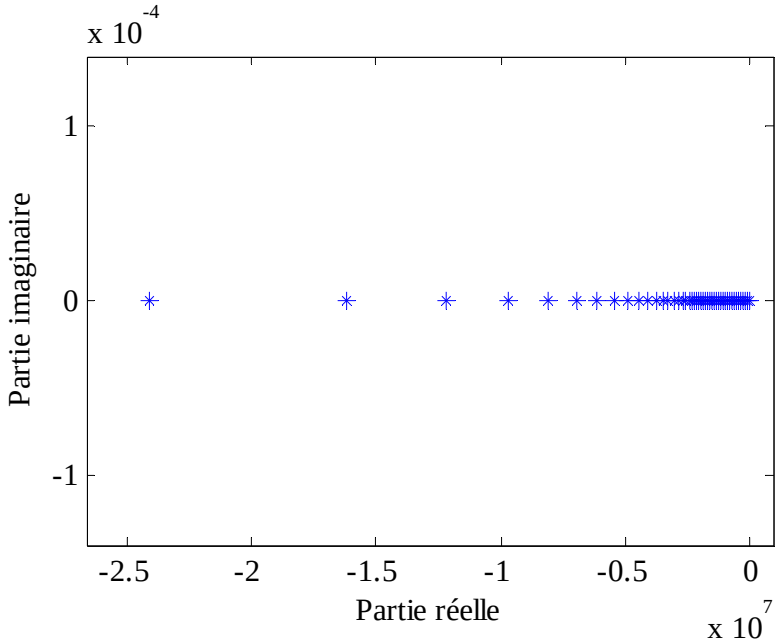


Figure 2-9 : Tracé des multiplieurs de Floquet pour m_c variant de m_{c0} à 13000 $A \cdot s^{-1}$.

Interprétation graphique du point de bifurcation

Sur la Figure 2-10 est représenté s pour différentes valeurs du rapport cyclique α comprises entre 0 et 1, et de la rampe m_c. Les valeurs des paramètres sont données dans le Tableau 2-1.

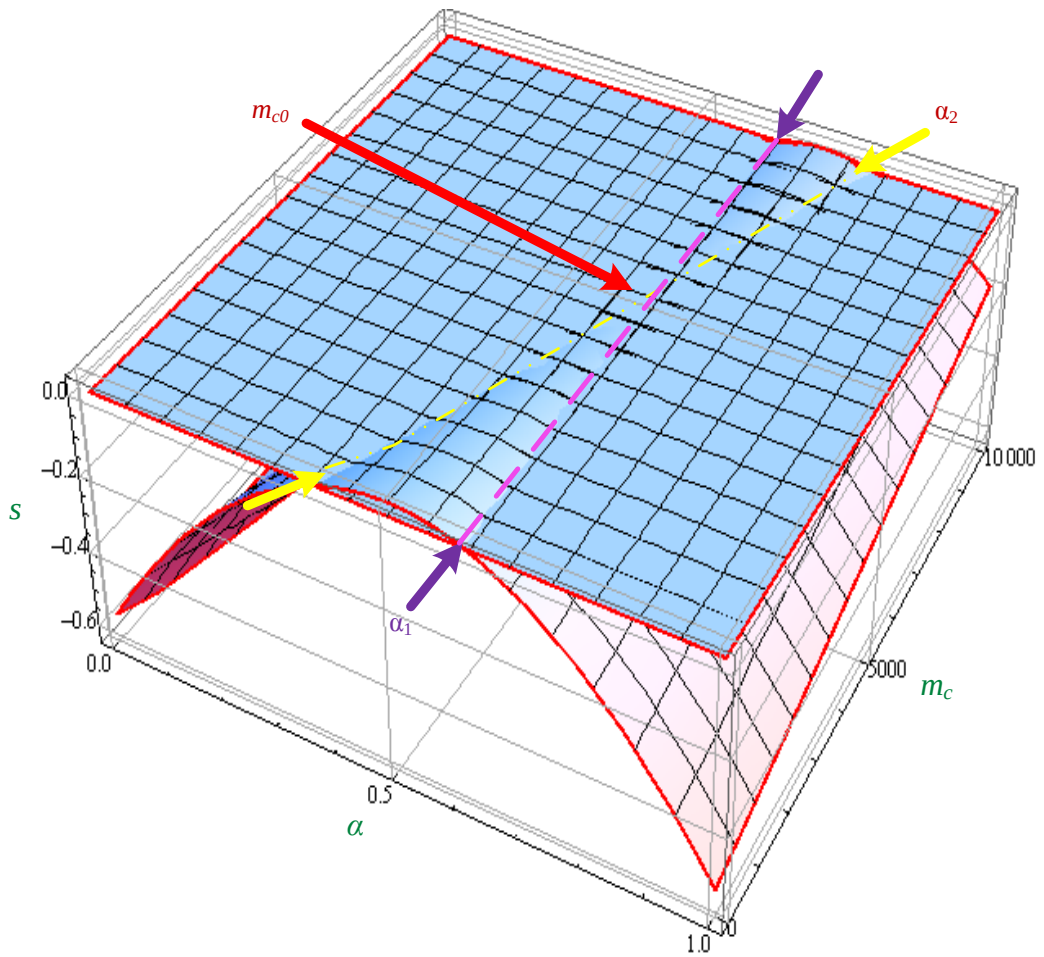


Figure 2-10 : Evolution de la surface s en fonction de α et m_c pour $V_{out} = 105\ V$.

On s'aperçoit que pour $s = 0$, on a deux solutions pour le rapport cyclique. On suppose que quand on a une solution double, la valeur de m_c correspond au point de la bifurcation $m_{c0} = 5781A \cdot s^{-1}$. Ceci correspond à l'intersection des deux droite α_1 et α_2. Pour calculer ce point il faut donc avoir $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant l'équation (2-23), on obtient :

$$s = -\frac{T\,V_{out}}{2\,L}\alpha^2 + \left(m_c\,T + \frac{T\,V_{out}}{2\,L}\right)\alpha - i_{ref} - \frac{m_c\,T}{2} + X_1 \qquad (2\text{-}32)$$

et on définit ainsi la valeur de m_{c0} :

$$m_c = m_{c0} = \frac{V_{out}\,(-1 + 2\,\alpha_0)}{2\,L} \qquad (2\text{-}33)$$

Maintenant si dans le Tableau 2-1, on change la valeur de la tension de sortie et on fixe $V_{out} = 71{,}4\ V$, on obtient la Figure 2-11 pour α variant de 0 à 1 et pour m_c variant de 0 à $5000A \cdot s^{-1}$. Les deux droites α_1 et α_2 ne se croisent pas dans le domaine considéré, ce qui indique qu'il n'y aura pas de point de bifurcation.

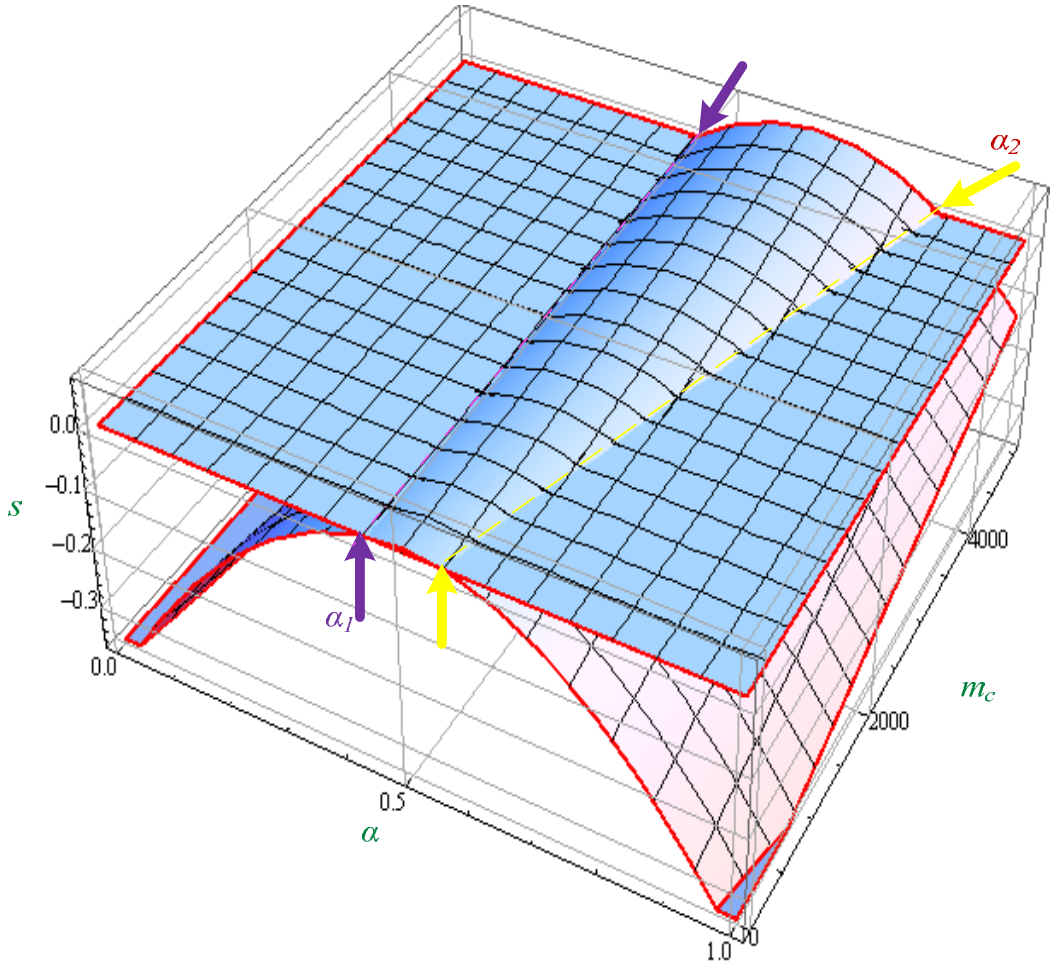


Figure 2-11 : Evolution de la surface s en fonction de α et m_c pour $V_{out} = 71{,}4\ V$.

2.2.3. Comparaison des résultats de la méthode proposée avec le modèle discret

Précédemment, m_{c0} a été obtenu par deux méthodes différentes : le modèle moyen et le modèle discret. Les valeurs sont présentées dans le Tableau 2-2 pour plusieurs points d'équilibre. L'erreur entre les deux modèles est faible, ce qui nous permet de valider le modèle moyen.

$V_{out}\ (V)$	$D_n = \alpha_0$	$m_{c0}\ (A \cdot s^{-1})$	
		modèle continu	*modèle discret*
79,8	0,4976	–	–
82,74	0,5154	595	550
84	0,5226	889	842
105	0,6178	5781	5719
126	0,6811	10668	10595
$V_e = 42\ V$, $L = 2{,}14\ mH$, $R_L = 0{,}2\Omega$, $f = 10\ kHz$, $i_{ref} = 10A$			

Tableau 2-2: Comparaison du premier point de bifurcation obtenu avec les modèles continu et discret.

2.2.4. Etude des propriétés de robustesse paramétrique

Il est possible d'étudier les propriétés de robustesse du système en étudiant les valeurs propres de la Jacobienne lorsque les paramètres varient. Nous fixons la valeur du paramètre de bifurcation m_c à $13000\, A \cdot s^{-1}$, ce qui correspond à environ $2 \cdot m_{c0}$. Les valeurs de l'inductance L et de la résistance R_L varient de $\pm 50\%$ autour de leur valeur nominale. Comme le montre la Figure 2-12, la valeur propre de $J(X)$ reste à partie réelle négative, ce qui permet de garantir la stabilité de l'application et donc la nature mono-périodique de la trajectoire pour une gamme étendue des variations de paramètres.

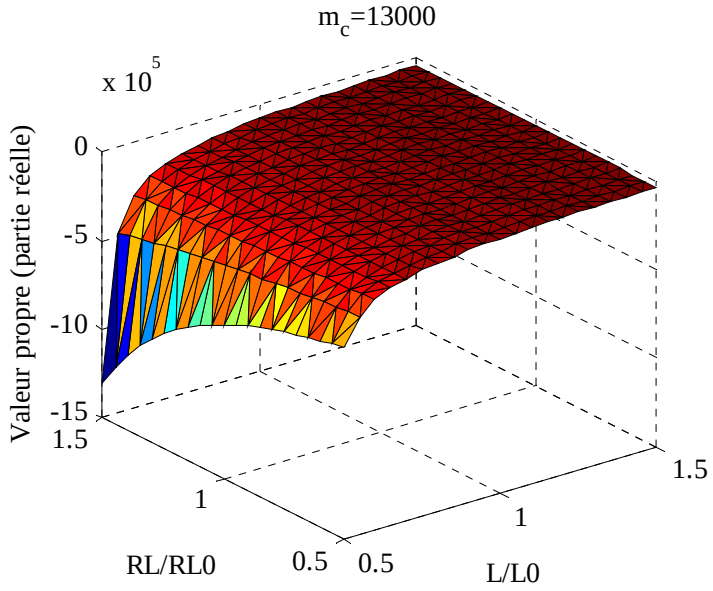


Figure 2-12 : Tracé des valeurs propres de la Jacobienne lorsque L et R_L varient.

2.3. Régulateur à top à l'amorçage, avec terme intégral

Afin d'éliminer l'erreur statique en régime permanent générée par le régulateur hybride à top d'amorçage, nous définissons un terme intégral K_i non nul.

2.3.1. Définition du modèle discret

Le modèle discret du convertisseur est toujours défini par l'application f définie par la relation (2-5).

La loi de commande du régulateur considérée est maintenant définie par :

$$s = i_{L,D} - i_{ref} + K_i \int_0^t \left(i_L - i_{ref}\right)(\tau) d\tau - m_c \left(\frac{T}{2} - D_n\, T\right) = 0 \qquad (2\text{-}34)$$

Le calcul du terme intégral pour $t = (n+1)T$ est défini ainsi :

$$K_i \int_0^{(n+1)T} \left(i_L - i_{ref}\right)(\tau) d\tau = I_{n+1} = I_n + (I_{D1} + I_{D2}) \qquad (2\text{-}35)$$

On définit :

$$I_{D1} = K_i \int_{nT}^{n\,T+D_n\,T} (i_{L1} - i_{ref})dt \tag{2-36}$$

En substituant (2-1) dans (2-36) on a :

$$I_{D1} = K_i \left(\frac{L\, i_{L,n}}{R_L} - D_n i_{ref}\, T - \frac{L\, V_e}{{R_L}^2} + \frac{D_n T\, V_e}{R_L} + e^{-\frac{D_n\, R_L\, T}{L}} \left(\frac{L\, V_e}{{R_L}^2} - \frac{L\, i_{L,n}}{R_L} \right) \right) \tag{2-37}$$

Pour la deuxième partie, on définit :

$$I_{D2} = K_i \int_{n\,T+D_n\,T}^{n\,T+T} (i_{L2} - i_{ref})dt \tag{2-38}$$

Posant (2-3) dans (2-38) on a :

$$I_{D2} = \frac{K_i}{R_L} \left(-i_{ref} R_L T + D_n i_{ref} R_L T + T(1 - D_n)(V_e - V_{out}) - \frac{\left(-1 + e^{\frac{(-1+D_n)R_L\, T}{L}}\right) L\left(i_{L,D}\, R_L + V_{out} - V_e\right)}{R_L} \right) \tag{2-39}$$

On peut ainsi définir une application g qui à $\left(i_{L,n}, I_n, D_n\right)$ associe la valeur de l'intégral à l'instant $n\,T + T$:

$$g\left(i_{L,n}, I_n, D_n\right) = I_{n+1} = I_n + (I_{D1} + I_{D2}) \tag{2-40}$$

La loi de commande permet de définir la relation implicite :

$$s = 0 = I_n - i_{ref} + \frac{i_{L,n}\, K_i\, L}{R_L} - D_n i_{ref}\, K_i\, T - \frac{m_c T}{2} + D_n\, m_c\, T + \frac{e^{-\frac{D_n\, R_L\, T}{L}}(-K_i + R_L)\left(i_{L,n} - V_e\right)}{{R_L}^2} - \frac{K_i\, L\, V_e}{{R_L}^2} + \frac{V_e}{R_L} + \frac{D_n\, K_i\, L\, V_e}{R_L} \tag{2-41}$$

On peut ainsi définir une application $Y: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$X_{n+1} = Y(X_n), \text{ avec } X_n = \left[i_{L,n}\; I_n\right]^t \tag{2-42}$$

Comportement dynamique du système

L'étude du comportement dynamique autour d'un point de fonctionnement est réalisée via l'étude des valeurs propres de la Jacobienne. Comme précédemment, on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial f}{\partial I}\, dI_n + \frac{\partial f}{\partial D_n}\, dD_n \tag{2-43}$$

De même pour le terme intégral :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial g}{\partial I}\, dI_n + \frac{\partial g}{\partial D_n}\, dD_n \tag{2-44}$$

On a :

$$\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial s}{\partial I_n}\, dI_n + \frac{\partial s}{\partial D_n}\, dD_n = 0 \tag{2-45}$$

donc :

$$dD_n = -\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial s}{\partial I_n}\, dI_n\right) \tag{2-46}$$

En substituant l'équation (2-45) dans les équations (2-43), (2-44) on obtient :

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}}\right] di_{L,n} + \left[\frac{\partial f}{\partial I_n} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n}\right] dI_n \tag{2-47}$$

$$dg = \left[\frac{\partial g}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_L}\right] di_{L,n} + \left[\frac{\partial g}{\partial I_n} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n}\right] dI_n \tag{2-48}$$

On peut déduire de cette expression la matrice Jacobienne de l'application Y :

$$J_Y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} & \frac{\partial f}{\partial I_n} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n} \\ \frac{\partial g}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial i_{L,n}} & \frac{\partial g}{\partial I_n} - \frac{\partial g}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s}{\partial D_n}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial I_n} \end{bmatrix} \tag{2-49}$$

Calcul des multiplieurs de Floquet

La Figure 2-13 représente les valeurs propres λ_1, λ_2 de l'application Y autour du point d'équilibre lorsque m_c varie. Les paramètres du système sont définis dans le Tableau 2-1, et $K_i = 5000\, rad \cdot s^{-1}$. Les valeurs propres se trouvent à l'intérieur du cercle unité et l'une d'elles tend vers le point $(-1{,}0)$ lorsque m_c tend vers $m_{c0} = 9022\, A \cdot s^{-1}$.

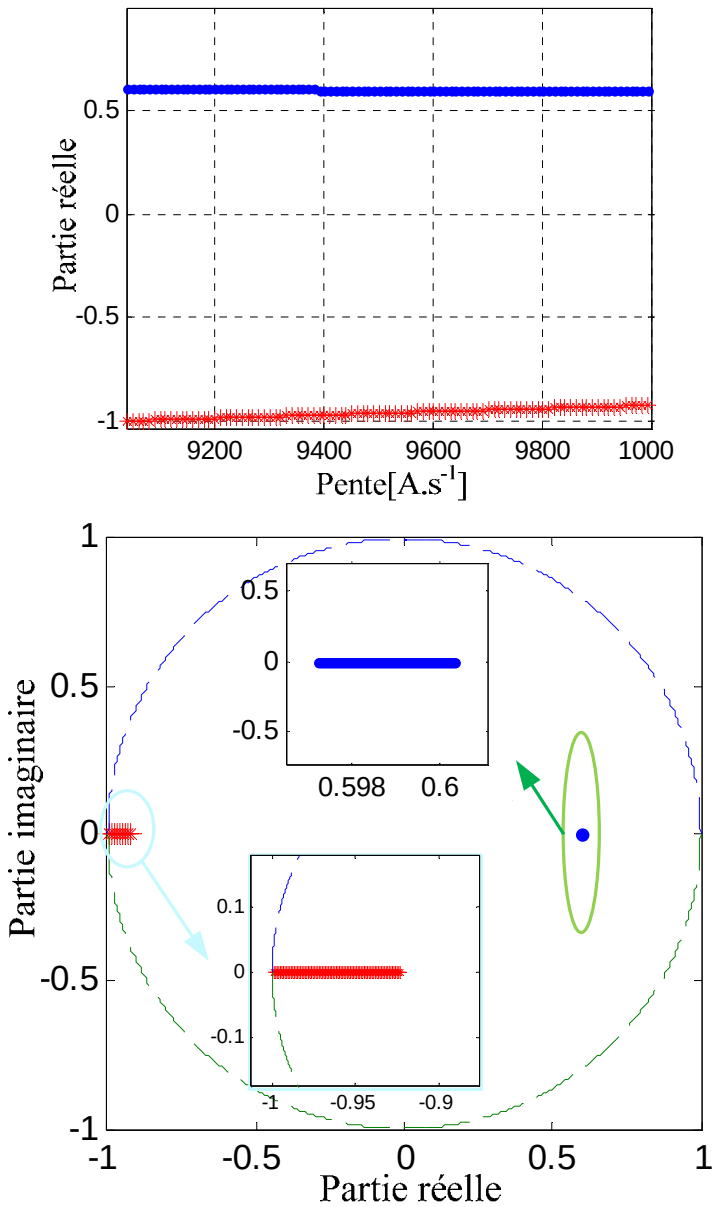


Figure 2-13 : Evolution des multiplieurs de Floquet en fonction de m_c variant de m_{c0} à $10000\ A \cdot s^{-1}$.

2.3.2. Développement du modèle moyen proposé

Comme précédemment, on suppose que la constante de temps du système est largement plus grande que la période de découpage ($\frac{L}{R_L} >> T$).

Selon la Figure 2-1, un vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^2$ est défini comme suit :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{i}_L \\ \int_0^t (\bar{i}_L - i_{ref})(\tau)d\tau \end{bmatrix} \tag{2-50}$$

où la notation $\bar{i}_L$ dénote la valeur moyenne de la variable d'état i_L calculée sur une période de découpage.
Le vecteur d'état X vérifie les équations différentielles suivantes :

$$\dot{X} = H(X,\alpha) = \begin{cases} \frac{-R_L}{L} X_1 - \frac{(1-\alpha)V_{out}}{L} + \frac{V_e}{L} \\ X_1 - i_{ref} \end{cases} \tag{2-51}$$

Pour modéliser le contrôleur de courant, nous définissons une équation implicite, associant le vecteur d'état au rapport cyclique α. Nous posons :

$$s(X,\alpha) = 0 \quad \forall (X,\alpha) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1] \tag{2-52}$$

avec :

$$s(X,\alpha) = 0 = I_P - i_{ref} + K_i \left(X_2 + \int_0^{\alpha T} (X_1 - i_{ref})(\tau) d\tau \right) - m_c \left(\frac{T}{2} - \alpha T \right) \tag{2-53}$$

L'expression I_P est déjà présentée dans l'équation (2-22). En considérant la Figure 2-14, on définit le terme intégral par la relation (2-54).

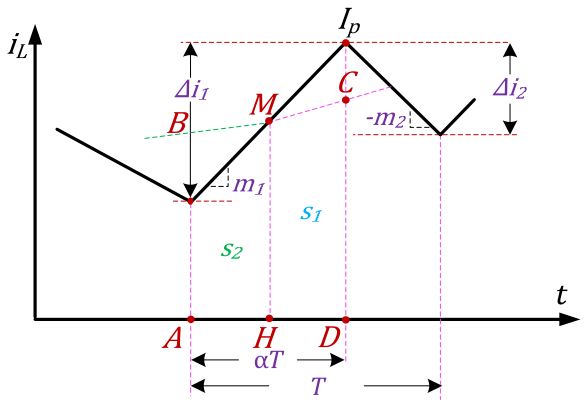


Figure 2-14 : Représentation des grandeurs en régime transitoire.

$$\begin{aligned} \left(X_2 + \int_0^{\alpha T} (X_1 - i_{ref})(\tau) d\tau \right) &= X_2 + B1 \\ &\approx X_2 + (X_1 - i_{ref})\, \alpha T + A1 \\ &\approx X_2 + s_t - i_{ref}\, \alpha T \end{aligned} \tag{2-54}$$

avec :

$$s_t = X_1 \alpha T + A1$$

En utilisant $X_1 = \overline{CD}$ et $\overline{MH} = I_P - \frac{\Delta i_1}{2}$, on peut définir l'air s_1 par :

$$s_1 = -\frac{\alpha^2 T}{8} (\Delta i_1 - \Delta i_2) + \frac{\alpha T}{2} X_1 \tag{2-55}$$

En approximant $\overline{AB} \approx X_1 - \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} (\Delta i_1 - \Delta i_2)$, on peut calculer s_2. On peut ainsi calculer l'expression de s_t :

$$s_t = s_1 + s_2 = -\frac{(1 - 2\alpha + 2\alpha^2)\, T}{4} (\Delta i_1 - \Delta i_2) + X_1\, \alpha T \tag{2-56}$$

On en déduit :

$$A1 \approx -\frac{(1-2\alpha+2\alpha^2)T^2}{4\,L}\left((-1+\alpha)V_{out} - R_L\,X_1 + V_e\right) \tag{2-57}$$

On peut ainsi calculer la valeur du terme intégral sous la forme :

$$\begin{aligned}\left(X_2 + \int_0^{\alpha\,T}(X_1 - i_{ref})(\tau)d\tau\right) \\ \approx X_2 + \left(X_1 - i_{ref}\right)\alpha\,T \\ -\frac{(1-2\alpha+2\alpha^2)T^2}{4\,L}\left((-1+\alpha)V_{out} - R_L\,X_1 + V_e\right)\end{aligned} \tag{2-58}$$

On peut récrire la relation (2-53) en utilisant (2-22) et (2-58) comme :

$$\begin{aligned}s = \frac{1}{4L}\Big(-4i_{ref}L(1+\alpha K_i\,T) + T\big(2(1-\alpha)\alpha V_{out} - (1-2\alpha+2\alpha^2)K_iT(V_e + \\ (\alpha-1)V_{out} - R_LX_1)\big) + 2L\big((2\alpha-1)m_cT + 2(X_1 + \alpha K_iTX_1 + K_iX_2)\big)\Big).\end{aligned} \tag{2-59}$$

L'association des relations (2-51) permet de définir la valeur moyenne du courant en régime établi X_{10} ainsi que la valeur du rapport cyclique α_0. On obtient :

$$X_{1_0} = i_{ref} \tag{2-60}$$

$$\alpha_0 = \frac{-V_e + V_{out} + R_L\,X_{1_0}}{V_{out}} \tag{2-61}$$

Etude des cycles

En utilisant les équations (2-30), (2-51), et (2-59) on peut comme précédemment définir la Jacobienne.

On obtient l'expression de la matrice Jacobienne $J(X) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix}$, où :

$$\begin{cases} J_{11} = \dfrac{1}{L}\left(-R_L + \dfrac{\left((1-2\alpha+2\alpha^2)K_iR_LT^2 + 4L(1+\alpha K_iT)\right)V_{out}}{A}\right) \\ J_{12} = \dfrac{4K_iV_{out}}{A} \\ J_{21} = 1 \\ J_{22} = 0 \end{cases} \tag{2-62}$$

avec

$$\begin{aligned}A = T\Big(4i_{ref}K_iL - 2V_{out}(1-2\alpha) - 4L(m_c + K_iX_1) \\ + K_iT(2V_e(2\alpha-1) + (3-8\alpha+6\alpha^2)V_{out} + 2(1-2\alpha)R_LX_1)\Big)\end{aligned}$$

Evolution des valeurs propres de la matrice Jacobienne

En utilisant les paramètres du système présentés dans le Tableau 2-1 et en fixant $K_i = 5000\, rad \cdot s^{-1}$, la Figure 2-15 montre l'évolution de la partie réelle des valeurs propres λ_1 , λ_2 quand la pente de la rampe de compensation m_c change de 0 à $10000\, A \cdot s^{-1}$. Pour des valeurs m_c supérieures que $m_{c0} = 9083\, A \cdot s^{-1}$, les valeurs propres sont à partie réelle négative, ce qui prouve la stabilité et la périodicité.

Les valeurs de m_{c0} obtenues grâce au modèle discret et au modèle moyen sont identiques (l'écart entre les deux valeurs est inférieur à 1%).

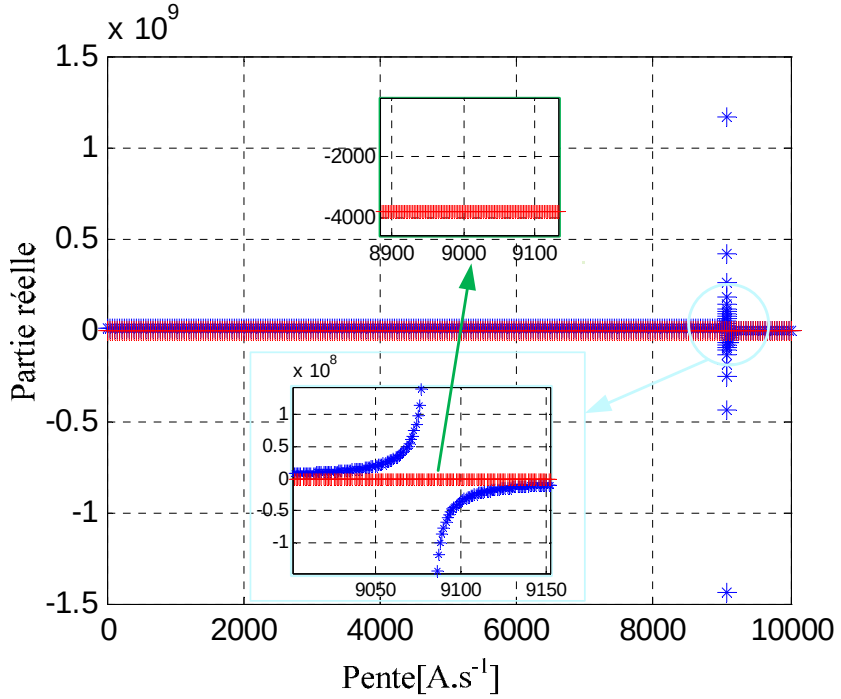


Figure 2-15 : Evolution du coefficient de Floquet lorsque m_c varie de 0 à $10000 A \cdot s^{-1}$.

Interprétation graphique du point de bifurcation

Dans cette partie, on considère $R_L = 0$.

La Figure 2-16 représente la surface s pour différentes valeurs du rapport cyclique α ainsi que la pente m_c de la rampe de compensation. Les valeurs des paramètres sont données dans le Tableau 2-1. On s'aperçoit que pour $s = 0$, on a trois solutions pour le rapport cyclique. L'intersection des solutions entre 0 et 1 permet de définir m_{c0}.

Pour calculer ce point il faut avoir $\alpha_1 = \alpha_2$ donc si on écrit s en forme de troisième degré :

$$s = a_1 \,.\, \alpha^3 + b_1 \,.\, \alpha^2 + c_1 . \alpha + e_1 \tag{2-63}$$

On propose d'écrire le discriminant et de mettre égal à zéro pour calculer m_{c0} :

$$\Delta = 18 a_1 b_1 c_1 e_1 - 4 {b_1}^3 e_1 + {b_1}^2 {c_1}^2 - 4\, a_1\, {c_1}^3 - 27 {a_1}^2 {e_1}^2 = 0 \tag{2-64}$$

On va avoir trois solutions pour m_c :

$$m_{c1} = \frac{-V_{out} + K_i\, T(-4V_e + (2 + K_i\, T) V_{out})}{8 K_i\, L\, T} \tag{2-65}$$

$$m_{c2} = m_{c3} = \frac{2V_{out}(-2V_e + V_{out}) + K_i\,T\left(2{V_e}^2 - 2V_e\,V_{out} + {V_{out}}^2\right)}{4L\,V_{out}} \tag{2-66}$$

La valeur de m_{c2} correspond au point de la bifurcation m_{c0}. Sans R_L, la valeur critique est $m_{c0} = 8095.79\ A \cdot s^{-1}$. Si toutes les deux solutions m_{c1} et m_{c2} sont négatives, le système est toujours périodique. Sinon, on a une seule solution positive pour m_c.

Pour $s = 0$, on a trois solutions pour α:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{V_e}{V_{out}} \tag{2-67}$$

$$\alpha_2, \alpha_3 = \frac{1}{2K_i\,T\,V_{out}}\left((-1 + K_i\,T)V_{out} \pm \sqrt{V_{out}\left(V_{out} + K_i\,T(8L\,m_c + 4V_e - (2 + K_i\,T)V_{out})\right)}\right) \tag{2-68}$$

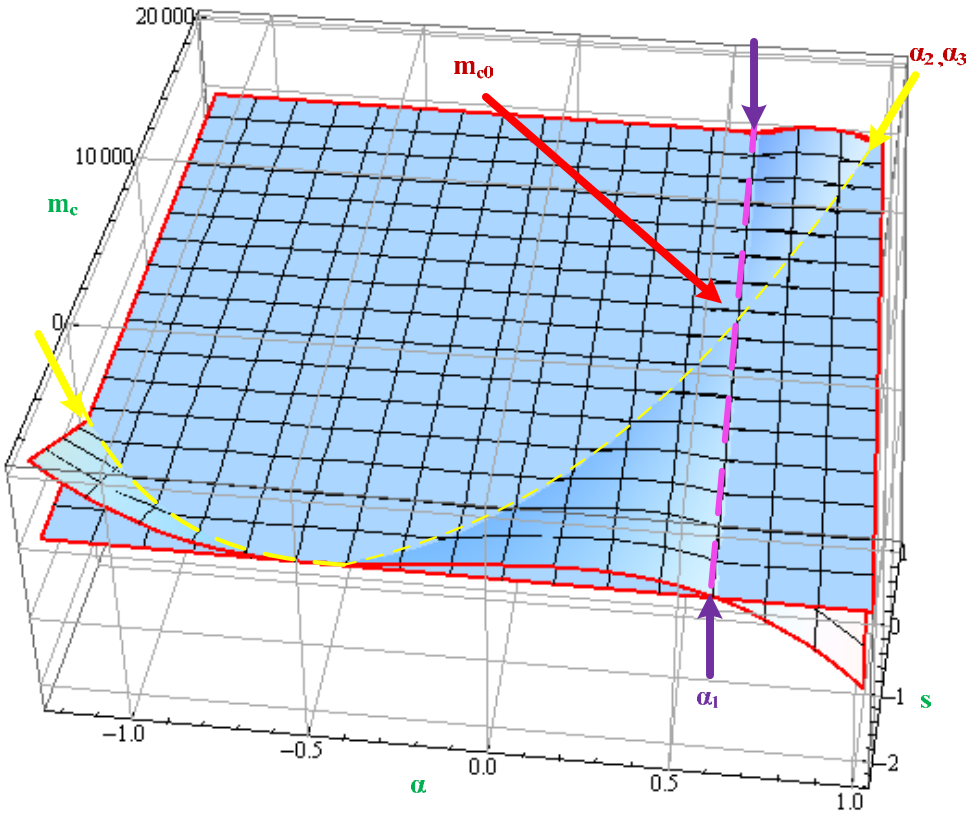


Figure 2-16 : Evolution de la surface s en fonction de α et m_c.

2.3.3. Comparaison des résultats obtenus avec le modèle discret et le modèle proposé

Les valeurs de m_{c0} obtenues avec les deux modèles pour plusieurs points d'équilibre sont présentées dans le Tableau 2-3. L'erreur entre les deux modèles est faible, ce qui nous permet de valider le modèle moyen.

V_{out} (V)	$D_n = \alpha_0$	m_{c0} $(A \cdot s^{-1})$	
		modèle continu	*modèle discret*
69,3	0,4228	–	–
76,02	0,4738	1298	1254
82,74	0,5166	3061	3014
84	0,523	3395	3347
105	0,619	9083	9022
126	0,6825	14919	14840
147	0,7279	20841	20744
168	0,7619	26815	26696
$V_e = 42\,V$, $L = 2{,}14\,mH$, $R_L = 0{,}2\Omega$, $f = 10\,kHz$, $i_{ref} = 10A$, $K_i = 5000\,rad \cdot s^{-1}$			

Tableau 2-3: Différents paramètres.

2.4. Prise en compte des éléments parasites du montage

Dans le but d'affiner le modèle moyen proposé, il est possible de prendre en compte les éléments parasites présents dans un convertisseur réel. Dans le cas général, on considère r_k et r_D les résistances dynamiques à l'état passant des interrupteurs et V_k et V_D les chutes de tension à l'état passant des interrupteurs. On obtient donc le schéma de la Figure 2-17.

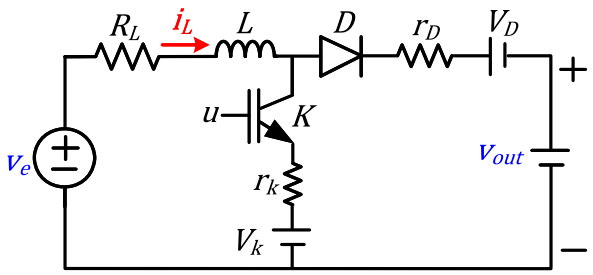


Figure 2-17 : Convertisseur avec les éléments parasites.

On peut récrire l'équation (2-16) en ajoutant les éléments parasites comme :

$$\dot{X} = \frac{1}{L}\left((\alpha - 1)(V_{out} + V_D) - (R_L + \alpha\, r_k + (1-\alpha)\, r_D)X_1 + V_e - \alpha\, V_k\right) \tag{2-69}$$

En considérant

$$m_1 = \frac{V_e - V_k - (r_k + R_L)X_1}{L}, m_2 = -\frac{V_e - V_{out} - V_D - (r_D + R_L)X_1}{L} \tag{2-70}$$

le courant I_P dans l'équation (2-22) devient :

$$I_P = \frac{1}{2\,L}\left(2\,L\,X_1 + (1-\alpha)\alpha\,T\,(V_{out} + V_D - V_k + (r_D - r_k)\,X_1)\right) \tag{2-71}$$

La présence des éléments parasites modifie la valeur critique de la pente m_{c0}. Dans le cas où le terme intégral est nul ($K_i = 0$), l'équation (2-33) devient :

$$m_{c0} = \frac{(\,V_{out} + V_D - V_k + (r_D - r_k)\,X_1)(-1 + 2\,\alpha_0)}{2\,L} \tag{2-72}$$

Pour l'équation (2-31), on obtient :

$$J_{11} = \frac{1}{L}\left((-1+\alpha)r_D - \alpha\,r_k - R_L + \frac{\left(2\,L - \alpha T(\alpha-1)(r_D - r_k)\right)\left(V_D - V_k + V_{out} + X_1(r_D - r_k)\right)}{T\left((2\alpha-1)(V_{out} + V_D - V_k + +X_1(r_D - r_k)) - 2Lm_c\right)}\right) \tag{2-73}$$

Pour K_i différent de 0, le terme intégral présenté en (2-57) s'exprime comme suit :

$$A1 \approx -\frac{(1 - 2\alpha + 2\alpha^2\,)T^2}{4\,L}\left((\alpha-1)(V_{out} + V_D) - \left(R_L + r_D + \alpha(r_k - r_D)\right)X_1 + V_e - \alpha\,V_k\right) \tag{2-74}$$

2.5. Résultats expérimentaux

Un convertisseur expérimental de type boost de faible puissance ($V_e = 12{,}85V$, $I_{smax} = 10A$, fréquence de découpage $10\,kHz$), présenté sur la Figure 2-18, a été utilisé pour tester le modèle moyen proposé pour le régulateur hybride avec ou sans terme intégral. Le banc de test est constitué d'une source DC stabilisée, une résistance de charge variable et un convertisseur statique de type boost avec une inductance de $0{,}769\,mH$ et une capacité de sortie de $C = 0{,}05\,F$.

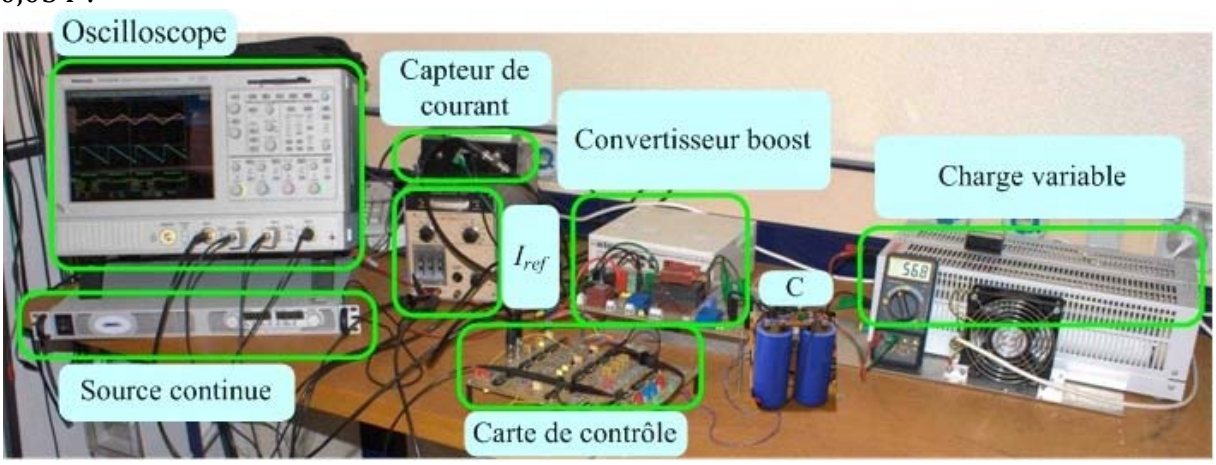


Figure 2-18 : Banc de test autour d'un convertisseur de type boost.

Différents essais ont été réalisés pour valider le modèle moyen proposé. Les deux premiers essais (essai 1 et essai 2) sont réalisés avec$K_i = 0$ et le troisième (essai 3) est réalisé avec K_i non nul. Les paramètres du banc de test sont donnés dans Tableau 2-4.

Paramètres	$Essai\ 1$	$Essai\ 2$	$Essai\ 3$
$V_{out}\ (V)$	19.5	29	29
$K_i\ (rad \cdot s^{-1})$	0	0	6746
$V_e = 12{,}85V, L = 0{,}769\ mH, R_L = 0{,}159\ \Omega, f = 10\ kHz, i_{ref} = 4{,}9A$ $V_D = 0{,}92\ V\ , V_k = 0{,}95\ V, r_D = 0{,}047\Omega, r_k = 0{,}33\ \Omega$			

Tableau 2-4 : Paramètres du banc de test.

Pour l'essai 1, les résultats expérimentaux obtenus pour $m_c = 0$ sont représentés sur la Figure 2-19. On observe bien une trajectoire T – périodique. Dans ce cas, une rampe n'est donc pas nécessaire pour garantir un comportement périodique de la boucle de courant.

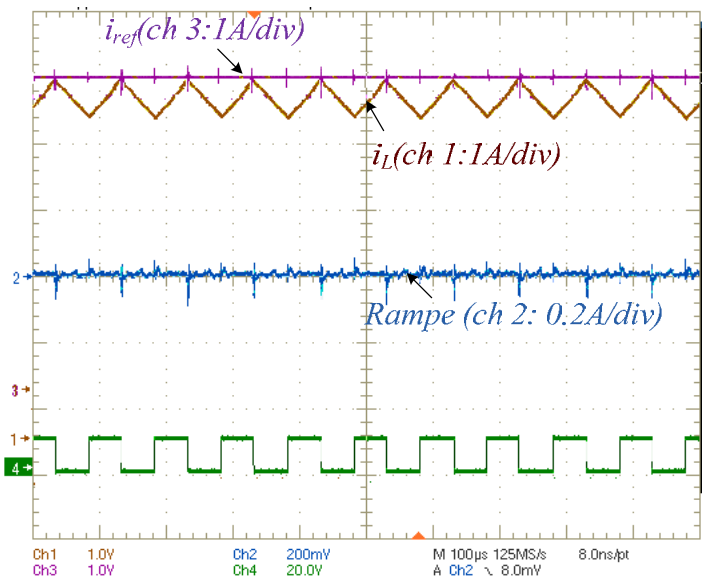


Figure 2-19 : Formes d'onde du courant, de la rampe de compensation et du signal de commande pour $m_c = 0$.

Pour l'essai 2 ($V_{out} = 29\ V$), le diagramme de bifurcation, obtenu grâce au modèle discret, est représenté sur la Figure 2-20. On observe le premier point de bifurcation pour $m_c = 5150\ A \cdot s^{-1}$.

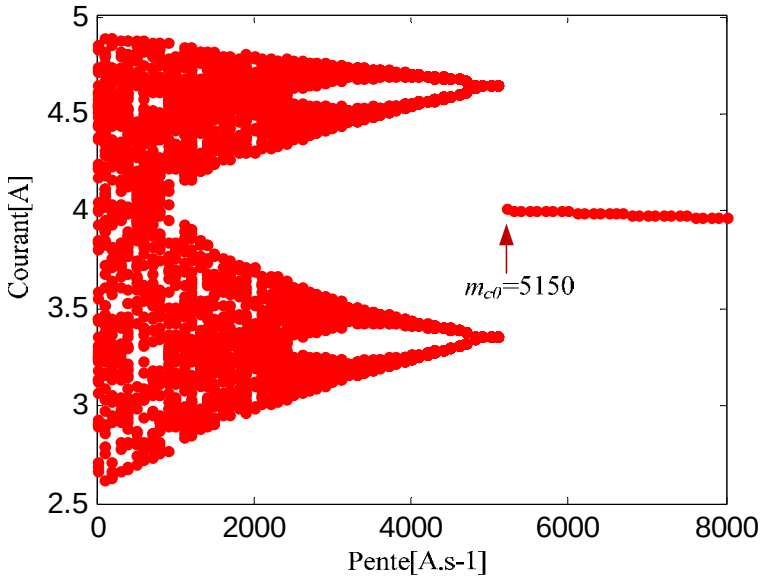


Figure 2-20 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 2.

Les valeurs propres sont représentées sur la Figure 2-21 pour m_c variant de 0 à $8000 A \cdot s^{-1}$. Les valeurs propres deviennent positives pour $m_c = 5354\, A \cdot s^{-1}$. L'erreur entre les deux modèles est inférieure à 3%. Pour cet essai, sans prendre en compte les pertes dans le convertisseur statique, on aurait obtenu une valeur de $m_c = 3060\, A \cdot s^{-1}$.

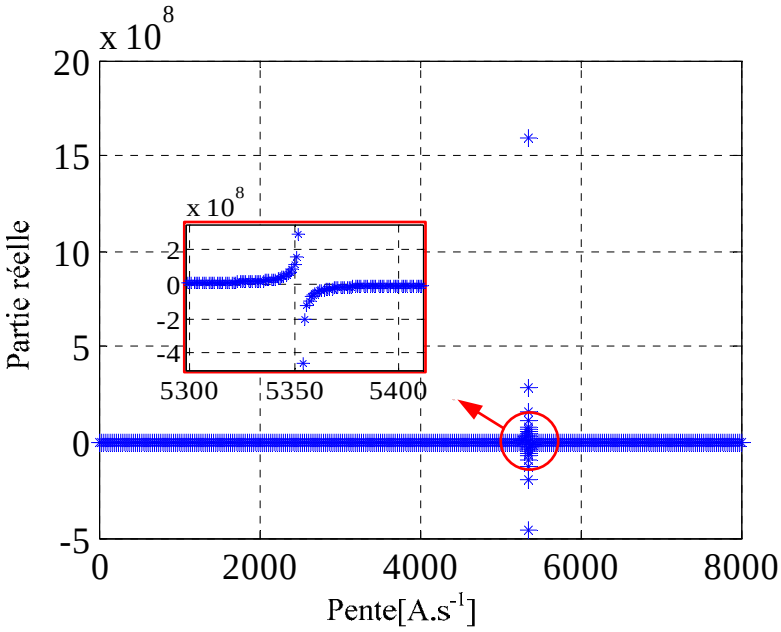


Figure 2-21 : Valeurs propres pour variation de m_c de 0 à 8000 $A \cdot s^{-1}$.

Les formes d'ondes obtenues pour le courant, la rampe de compensation et le signal de commande sont représentés sur la Figure 2-22. Pour une valeur de $m_c = 5515 A \cdot s^{-1}$ on observe bien un cycle mono-périodique (figure de gauche). Par contre, pour $m_c = 5037 A \cdot s^{-1}$, on observe un cycle double (figure de droite).

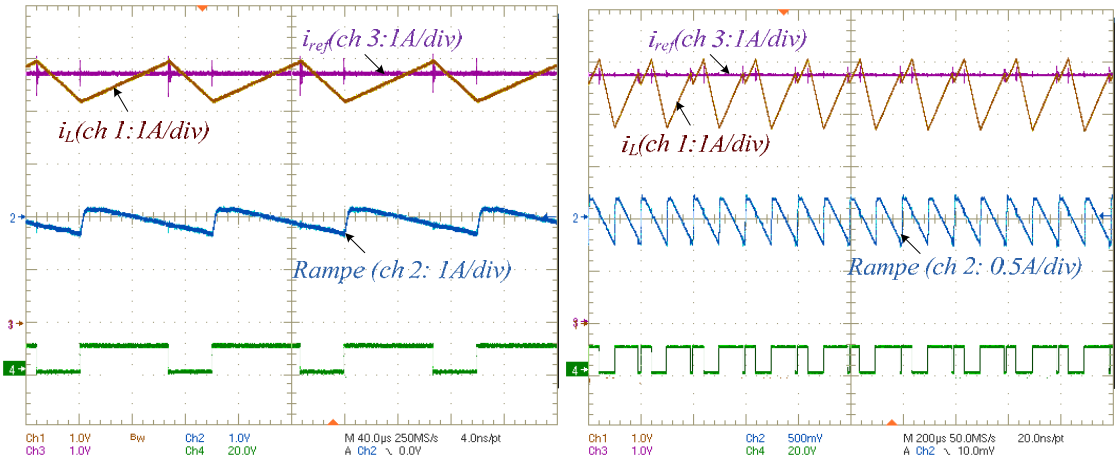


Figure 2-22 : Formes d'onde du courant, de la rampe de compensation et du signal de commande pour $m_c = 5515A \cdot s^{-1}$ (à gauche) et $m_c = 5037A \cdot s^{-1}$ (à droite).

Pour l'essai 3, on fixe $Ki = 6746\, rad \cdot s^{-1}$. Le diagramme de bifurcation obtenu par le modèle discret est représenté sur la Figure 2-23. Le point de bifurcation est obtenu pour $m_{c0} = 8700A \cdot s^{-1}$.

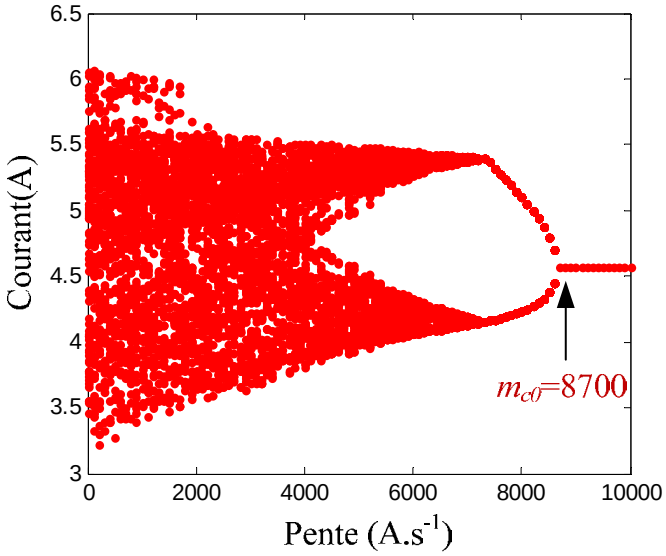


Figure 2-23 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 3.

Le modèle moyen permet de définir l'évolution des valeurs propres en fonction de m_c. L'évolution de ces grandeurs est représentée sur la Figure 2-24. Des valeurs propres positives sont obtenues pour $m_{c0} < 8928A \cdot s^{-1}$. De nouveau, l'erreur obtenue entre les deux modèles est inférieure à 3 %. Sans tenir compte des pertes, le modèle moyen définit une valeur critique de $m_{c0} = 6437\, A \cdot s^{-1}$.

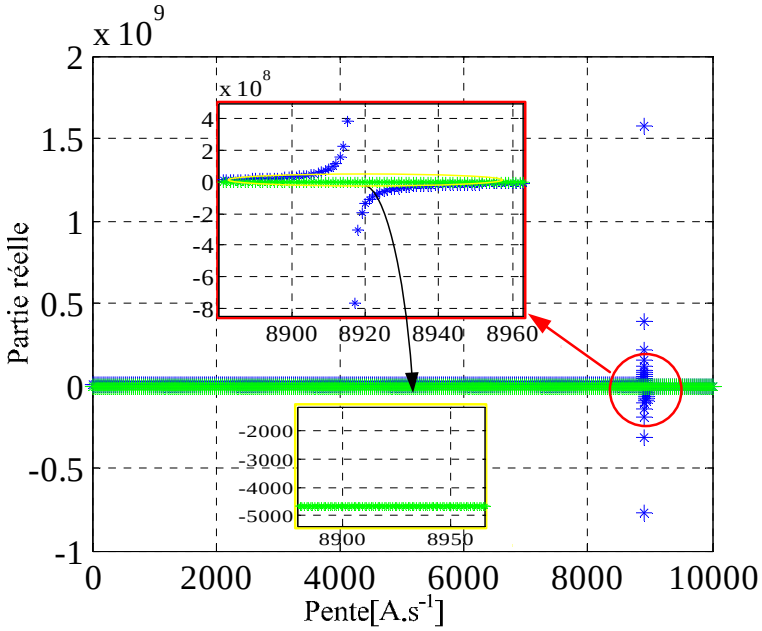


Figure 2-24 : Valeurs propres pour variation de m_c de 0 à 10000 $\mathrm{A \cdot s^{-1}}$.

Sur la Figure 2-25 sont représentées les formes d'ondes du courant, de la rampe de compensation et du signal de commande pour une valeur de $m_c = 8800\ A \cdot s^{-1}$ (figure de gauche) et pour une valeur de $m_c = 8000\ A \cdot s^{-1}$ (figure de droite). Pour $m_c = 8800 A \cdot \mathrm{s}^{-1}$, on observe bien un cycle monopériodique alors que pour $m_c = 8000\ A \cdot s^{-1}$ un cycle double apparaît.

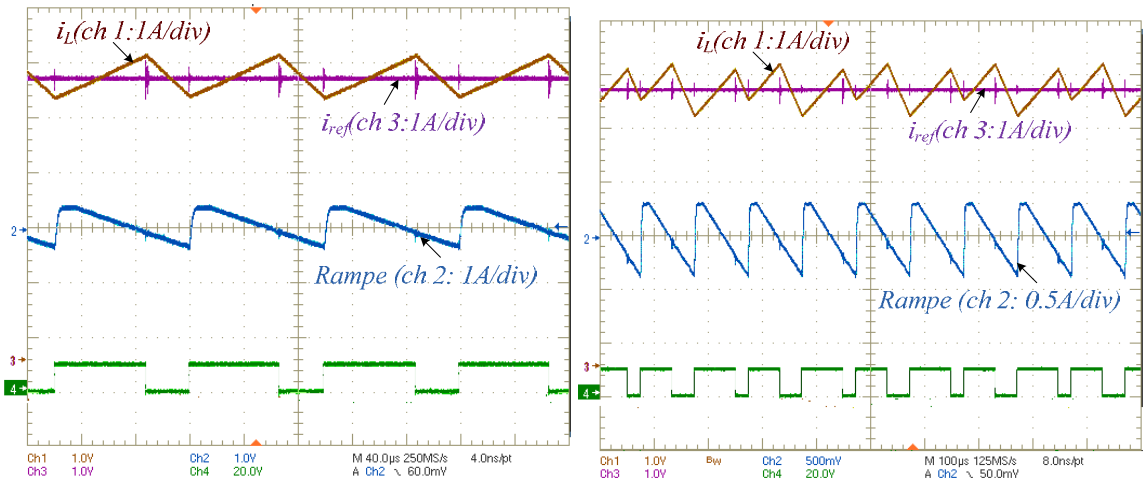


Figure 2-25: Formes d'onde du courant, de la rampe de compensation et du signal de commande pour $m_c = 8800 A \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (à gauche) et $m_c = 8000\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ (à droite).

2.6. Prise en compte de la variation de la tension de sortie

Si la tension de sortie ne peut être considérée comme constante, on peut prendre en compte de la variation de la tension de sortie du convertisseur boost (Figure 2-26) dans le modèle moyen. On considère la résistance de charge r_{ch} parallèle avec un condensateur C.

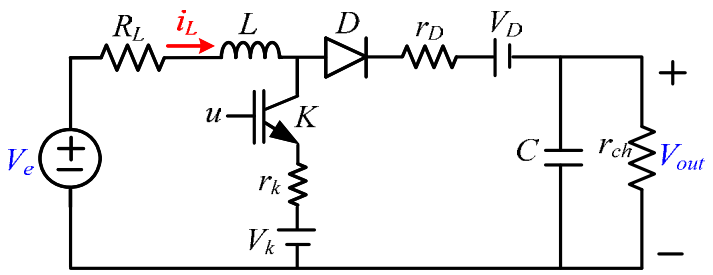


Figure 2-26 : Boost avec les éléments parasites.

L'équation (2-51) devient :

$$\dot{X} = H(X,\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{L}\left((\alpha-1)(X_3+V_D) - (R_L + \alpha\, r_k + (1-\alpha)\, r_D)X_1 + V_e - \alpha\, V_k\right) \\ X_1 - i_{ref} \\ \frac{1}{C}\left((1-\alpha)X_1 - \frac{X_3}{r_{ch}}\right) \end{cases}$$

avec

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{i_L} \\ \int_0^t (\overline{i_L} - i_{ref})(\tau)d\tau \\ V_{out} \end{bmatrix}$$

La procédure pour la définition du modèle moyen ne change pas.

Pour l'essai 3, en tenant compte de la variation de la tension de sortie, le modèle moyen définit une valeur critique $m_{c0} = 8928\, A \cdot s^{-1}$ pour $C = 60\, \mu F$ et $r_{ch} = 17\, \Omega$. Pour les mêmes paramètres, le modèle discret donne une valeur critique $m_{c0} = 9150\, A \cdot s^{-1}$.

2.7. Généralisation de la méthodologie proposée pour d'autres structures de contrôleur de courant

On va appliquer la méthodologie proposée pour trois autres contrôleurs de courant à fréquence fixe de commutation : le régulateur à top de blocage, l'hystérésis modulée et un régulateur de type PI avec une modulation MLI.

2.7.1. Régulateur hybride à top de blocage

Le régulateur hybride de courant à top de blocage est défini par le schéma bloque de la Figure 2-27. La structure est similaire au régulateur hybride à top d'amorçage, mais cette fois, c'est l'ordre de blocage qui est défini par un signal à fréquence fixe. De plus, contrairement au régulateur à top d'amorçage, une rampe de pente m_c doit être ajoutée lorsque le rapport cyclique est inférieur à 0,5.

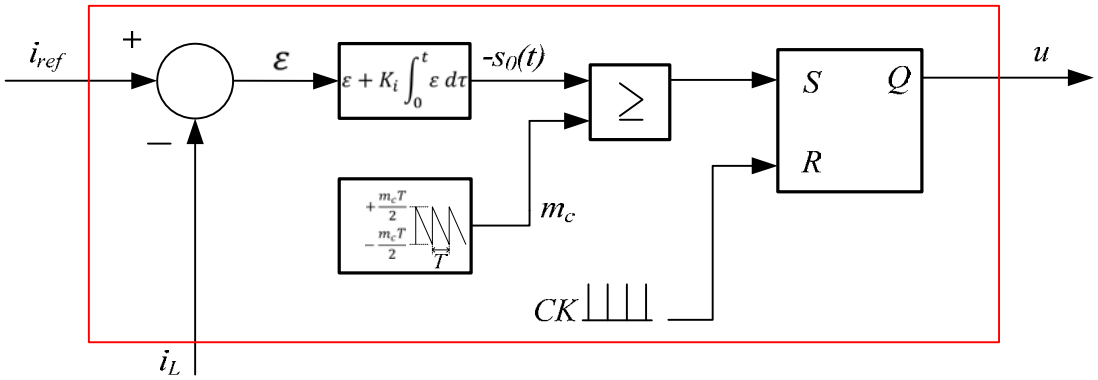


Figure 2-27 : schéma du régulateur à top de blocage.

En utilisant la même méthodologie de modélisation, l'expression du courant minimum peut être déduite de l'expression de I_p. On obtient ainsi :

$$I_{min} = \frac{1}{2\,L}\left(2\,L\,X_1 - (1-\alpha)\alpha\,T\,(V_{out} + V_D - V_k + (r_D - r_k)\,X_1)\right) \qquad (2\text{-}75)$$

La comparaison des valeurs critiques de la pente de la rampe de compensation est présentée dans le Tableau 2-5 pour différents points de fonctionnement. Les éléments semi-conducteurs sont supposés idéaux. Une faible erreur entre les valeurs obtenues par les deux modèles permet de valider le modèle moyen continu proposé.

$V_{out}\ (V)$	$D_n = \alpha_0$	$m_{c0}(A \cdot s^{-1})$	
		Modèle continu	*Modèle discret*
65,1	0,3869	3506	3410
67,2	0,4060	3008	2920
69,3	0,4240	2508	2430
71,4	0,4410	2006	1940
76,02	0,4751	901	855
80,22	0,5025	–	–
82,74	0,5177	–	–
$V_e = 42\,V$, $L = 2{,}14\,mH$, $R_L = 0{,}2\Omega$, $f = 10\,kHz$, $i_{ref} = 10A$, $K_i = 0$			

Tableau 2-5 : Comparaison de m_{c0} pour deux modèles.

2.7.2. Hystérésis modulée

Le mode de fonctionnement du régulateur hybride à hystérésis modulée a été présenté dans [Sha 07] et ses avantages et inconvénients ont été détaillés. Le point le plus intéressant hormis la large bande-passante est l'effet de symétrie permettant de doubler la fréquence apparente

des ondulations de courant dans un système triphasé. Son principe de fonctionnement est représenté sur la figure suivante.

Les paramètres de ce régulateur sont A l'amplitude du signal triangulaire et B_h la largeur de bande d'hystérésis.

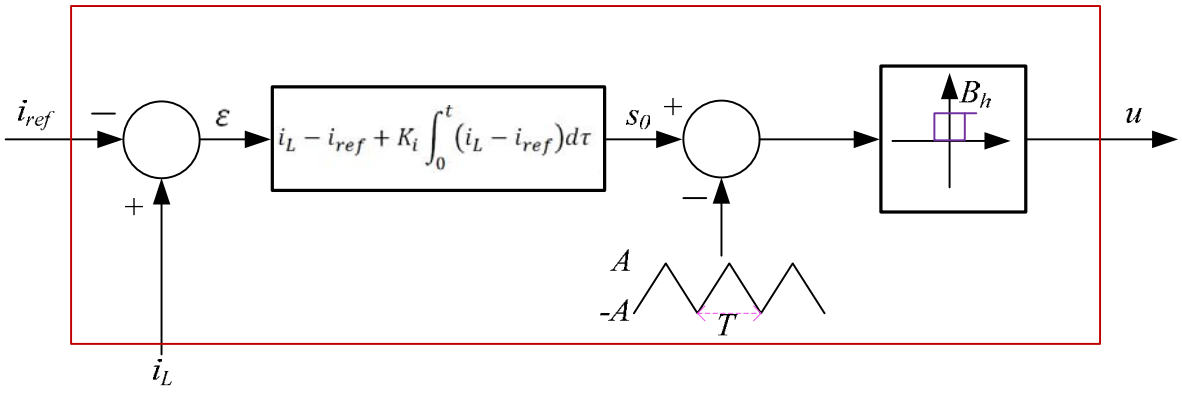


Figure 2-28 : Schéma de principe du régulateur hybride à hystérésis modulée.

Hystérésis modulée sans terme intégral

Dans un premier temps, on applique le principe de modélisation lorsque le coefficient du terme intégral est nul ($K_i = 0$).

Définition du modèle discret

Les différentes grandeurs sont représentées sur la Figure 2-29.

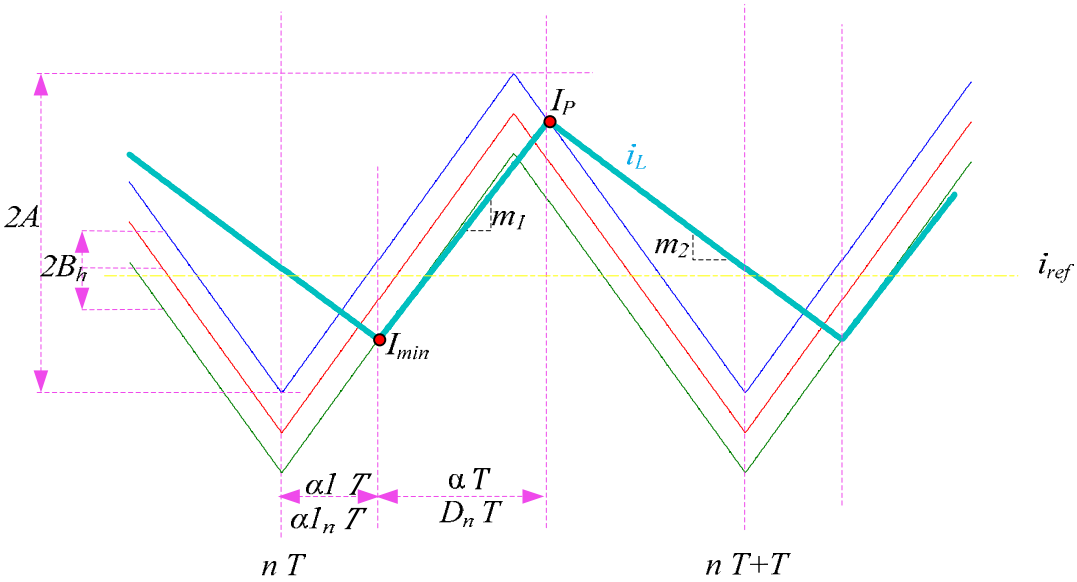


Figure 2-29 : Différentes grandeurs utilisées pour modélisation.

Selon la Figure 2-29 on peut avoir les équations différentielles pour 3 intervalles suivants :

$$t \in [n\,T, n\,T + \alpha 1_n\,T[\rightarrow L\,\frac{di_L}{dt} = V_e - V_{out} - R_L\,i_L \qquad (2\text{-}76)$$

$$t \in [n\,T + \alpha 1_n\,T, n\,T + (\alpha 1_n + D_n)T[\rightarrow L\,\frac{di_L}{dt} = V_e\ - R_L i_L \tag{2-77}$$

$$t \in [n\,T + (\alpha 1_n + D_n)\,T, (n+1)T[\rightarrow L\,\frac{di_L}{dt} = V_e - V_{out} - R_L\,i_L \tag{2-78}$$

En utilisant la première équation différentielle, on va calculer I_{min} la valeur minimale du courant à l'instant $t = n\,T + \alpha 1_n\,T$:

$$I_{min} = \frac{1}{R_L}\left(V_e - V_{out} + e^{-\frac{\alpha 1_n\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}R_L - V_e + V_{out}\right)\right) \tag{2-79}$$

où $i_{L,n}$ est la valeur du courant à l'instant $n\,T$.

En utilisant la deuxième équation différentielle on va calculer I_P la valeur maximale du courant à l'instant $t = n\,T + (\alpha 1_n + D_n)T$:

$$I_P = \frac{1}{R_L}\left(V_e + e^{-\frac{(\alpha 1_n + D_n)\,R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}\,R_L - V_e + V_{out} - e^{-\frac{\alpha 1_n\,R_L\,T}{L}}V_{out}\right)\right) \tag{2-80}$$

En utilisant le troisième intervalle, il est possible de définir une application f telle que :

$$i_{L,n+1} = f\left(i_{L,n}, \alpha 1_n, D_n\right) \tag{2-81}$$

$$= \frac{1}{R_L}e^{-\frac{R_L\,T}{L}}\left(i_{L,n}R_L + \left(-1 + e^{\frac{R_L\,T}{L}}\right)V_e - \left(-1 + e^{\frac{R_L\,T}{L}} + e^{\frac{\alpha 1_n\,R_L\,T}{L}} - e^{\frac{(\alpha 1_n + D_n)\,R_L\,T}{L}}\right)V_{out}\right)$$

On définit s_0 l'erreur entre le courant et sa référence c'est-à-dire $s_0(t) = i_L(t) - i_{ref}(t)$ D'après la Figure 2-30, S_a et S_b correspondent aux bandes supérieure et inférieure auxquelles est comparé le courant.

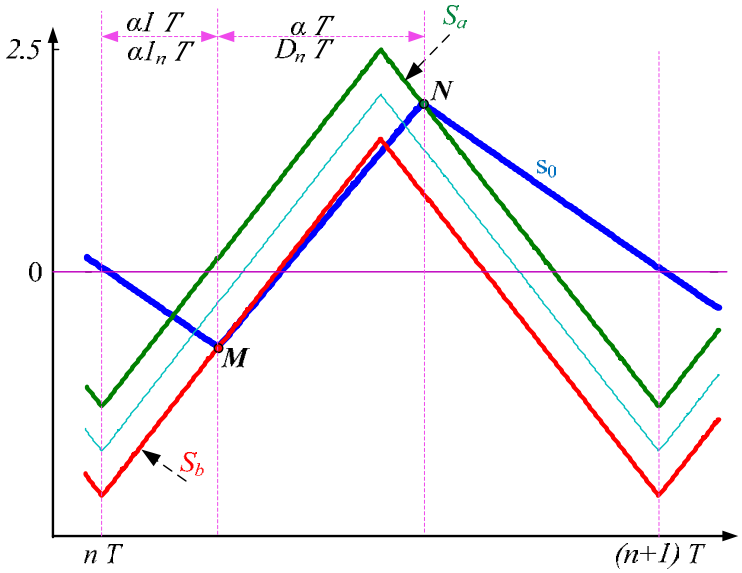


Figure 2-30 : Définition des signaux S_a et S_b.

Afin de modéliser le contrôle hybride de courant nous fixons :

$$\begin{cases} s_1(t) = \underbrace{I_{min} - i_{ref}}_{S_0|_{t=n\,T+\alpha 1_n\,T}} - S_b \\ s_2(t) = \underbrace{I_P - i_{ref}}_{S_0|_{t=n\,T+(\alpha 1_n+D_n)T}} - S_a \end{cases} \tag{2-82}$$

On définit les deux rampes $S_a(t)$ et $S_b(t)$ par leur série de Fourier. On obtient :

$$S_a(t) = \frac{-8A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega t) + B_h \tag{2-83}$$

$$S_b(t) = \frac{-8A}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^2} \cos(n\omega t) - B_h \tag{2-84}$$

On définit (pour le point M) à l'instant $t = n\,T + \alpha 1_n\,T$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \underbrace{I_{min} - i_{ref}}_{S_0} \\ &- \underbrace{\left(\frac{-8A}{\pi^2}\left(\cos(2\pi\,\alpha 1_n) + \frac{1}{9}\cos(6\pi\,\alpha 1_n) + \frac{1}{25}\cos(10\pi\,\alpha 1_n) + \cdots\right) - B_h\right)}_{S_b} \end{aligned} \tag{2-85}$$

De même pour le point N à l'instant $t = n\,T + (\alpha 1_n + D_n)T$ on a :

$$\begin{aligned} s_2 &= \underbrace{I_P - i_{ref}}_{S_0} \\ &- \underbrace{\left(\frac{-8A}{\pi^2}\left(\cos\big(2\pi\,(\alpha 1_n + D_n)\big) + \frac{1}{9}\cos\big(6\pi\,(\alpha 1_n + D_n)\big) + \cdots\right) + B_h\right)}_{S_a} \end{aligned} \tag{2-86}$$

La loi de commande associée est donc :

$$\begin{cases} s_1(i_{L,n}, \alpha 1_n) = 0 \qquad \forall(i_{L,n}, \alpha 1_n) \in \mathbb{R} \times [0,1] \\ s_2(i_{L,n}, \alpha 1_n, D_n) = 0 \qquad \forall(i_{L,n}, \alpha 1_n, D_n) \in \mathbb{R} \times [0,1] \times [0,1] \end{cases} \tag{2-87}$$

Le modèle discret est défini par l'application $Y: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ telle que

$$X_{n+1} = Y(X_n), \text{ avec } X_n = [i_{L,n}] \tag{2-88}$$

Etude des cycles

Les valeurs au point d'équilibre $\alpha 1_{n_0}$ et D_{n_0} sont les solutions des équations $s_1 = 0, s_2 = 0$.

On définit ainsi un point d'équilibre $(i_{L,n_0}, \alpha 1_{n_0}, D_{n_0})$ et une petite perturbation autour de ce point donc :

$$df = \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial f}{\partial \alpha 1_n}\, d\alpha 1_n + \frac{\partial f}{\partial D_n}\, dD_n \tag{2-89}$$

s_1 et s_2 sont définies en (2-85) et (2-86). Ces équations mènent à :

$$\frac{\partial s_1}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1_n}\, d\alpha 1_n = 0 \tag{2-90}$$

donc :

$$d\alpha 1_n = -\left(\frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1_n}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_1}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n}\right) \tag{2-91}$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1_n}\, d\alpha 1_n + \frac{\partial s_2}{\partial D_n}\, dD_n = 0 \tag{2-92}$$

donc :

$$dD_n = -\left(\frac{\partial s_2}{\partial D_n}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_2}{\partial i_{L,n}}\, di_{L,n} + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1_n}\, d\alpha 1_n\right) \tag{2-93}$$

En substituant les équations (2-90) et (2-92) dans l'équation (2-89) :

$$df = J_Y\, di_{L,n} \tag{2-94}$$

La matrice Jacobienne de l'application Y (J_Y) est donc définie par :

$$J_Y = \frac{\partial f}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial \alpha 1_n}\left(\frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1_n}\right)^{-1}\frac{\partial s_1}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial f}{\partial D_n}\left(\frac{\partial s_2}{\partial D_n}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_2}{\partial i_{L,n}} - \frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1_n}\left(\frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1_n}\right)^{-1}\frac{\partial s_1}{\partial i_{L,n}}\right) \tag{2-95}$$

On en déduit ensuite les multiplieurs de Floquet donnés dans le paragraphe suivant.

Evolution des valeurs propres de la matrice Jacobienne

En utilisant les paramètres du système dans le Tableau 2-6 et supposant $B_h = 2$, l'évolution de la partie réelle des multiplieurs de Floquet quand le paramètre de bifurcation A change, est montrée sur la Figure 2-31.

V_e	$42\ V$
V_{out}	$63\ V$
L, R_L	$0{,}53\ mH$, $0{,}01\ \Omega$
f	$10\ kHz$
i_{ref}	$10A$

Tableau 2-6 : Paramètre de simulation.

Pour des valeurs de A inférieures à $A_0 = 1{,}02$, la valeur propre est dans le cercle unité, ce qui prouve la stabilité de l'application garantissant des cycles T-périodiques. Lorsque $A < 1{,}02$ le multiplieur de Floquet quitte le cercle. Les cycles ne sont plus T-périodique.

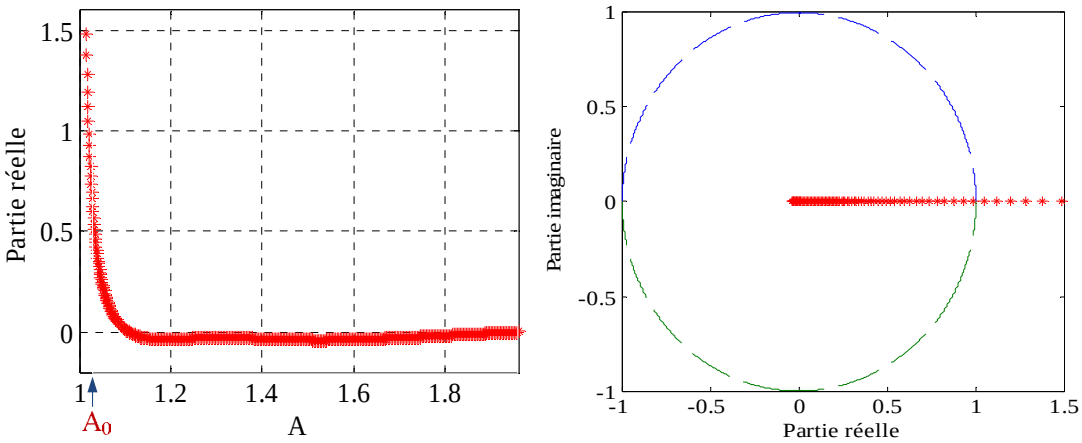


Figure 2-31 : Tracé du multiplieur de Floquet en fonction de A variant de 1 à 2 avec $B_h = 2$.

Définition du modèle moyen continu

En utilisant la même formulation que celle utilisée pour la relation (2-16), on peut définir les expressions de la valeur maximale du courant I_P et la valeur minimale du courant I_{min} en régime établi.

$$I_P = \frac{1}{2L}\Big(2L\,X_1 + T\big((2\alpha 1 + 2\alpha - 1)V_e + (\alpha - 1)(2\alpha 1 + \alpha - 1)V_{out} + (1 - 2\alpha 1 - 2\alpha)R_L X_1\big)\Big) \tag{2-96}$$

$$I_{min} = \frac{1}{2L}\Big(2L\,X_1 + T\big((2\alpha 1 - 1)V_e + (\alpha - 1)(2\alpha 1 + \alpha - 1)V_{out} + (1 - 2\alpha 1)R_L X_1\big)\Big) \tag{2-97}$$

Afin de modéliser le contrôle hybride de courant nous fixons :

$$s_i(X, \alpha 1, \alpha) = 0 \qquad \forall (X, \alpha 1, \alpha) \in \mathbb{R} \times [0,1] \times [0,1] \quad , i = 1,2 \tag{2-98}$$

On peut définir s_1 et s_2 comme dans les équations (2-85) et (2-86) en mettant $\alpha 1_n = \alpha 1$ et $D_n = \alpha$ et en utilisant les équations (2-96) et (2-97) pour I_P et I_{min}.

Etude des cycles

Le point d'équilibre de l'application est défini par $s_1 = 0$, $s_2 = 0$ et $\dot{X} = 0$. On obtient ainsi les valeurs de $\alpha 1_0$, α_0 et X_{10}. En considérant de petites variations autour de ce point d'équilibre, on peut définir :

$$\dot{X} = H(X_0 + dX, \alpha 1_0 + d\alpha 1, \alpha_0 + d\alpha) \tag{2-99}$$

Et par conséquence

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} dX + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha 1}\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} d\alpha 1 + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} d\alpha \qquad (2\text{-}100)$$

D'après la relation (2-16), l'application H ne dépend pas de $\alpha 1$. $\frac{\partial H}{\partial \alpha 1} = 0$ Donc, on obtient :

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} dX + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} d\alpha$$

Les équations (2-98) mènent à :

$$\frac{\partial s_1}{\partial X} dX + \frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1} d\alpha 1 + \frac{\partial s_1}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \qquad (2\text{-}101)$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial X} dX + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1} d\alpha 1 + \frac{\partial s_2}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \qquad (2\text{-}102)$$

On obtient ainsi :

$$d\alpha = \left(\frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1}\right)^{-1} \left(\frac{\partial s_1}{\partial X}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1}\frac{\partial s_2}{\partial X}\right) dX \qquad (2\text{-}103)$$

Posant cette équation dans (2-100) nous obtenons l'expression de la matrice Jacobienne de l'application sous la forme :

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_1}{\partial X}\frac{\partial s_2}{\partial \alpha 1} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha 1}\frac{\partial s_2}{\partial X}\right)\right)_{(X_0,\alpha 1_0,\alpha_0)} dX \qquad (2\text{-}104)$$
$$= J(X_0, \alpha 1_0, \alpha_0) \cdot dX$$

En utilisant les paramètres du système dans le Tableau 2-6 et supposant $B_h = 2$, l'évolution de la partie réelle de la valeur propre quand le paramètre de bifurcation A change, est montrée sur la Figure 2-32.

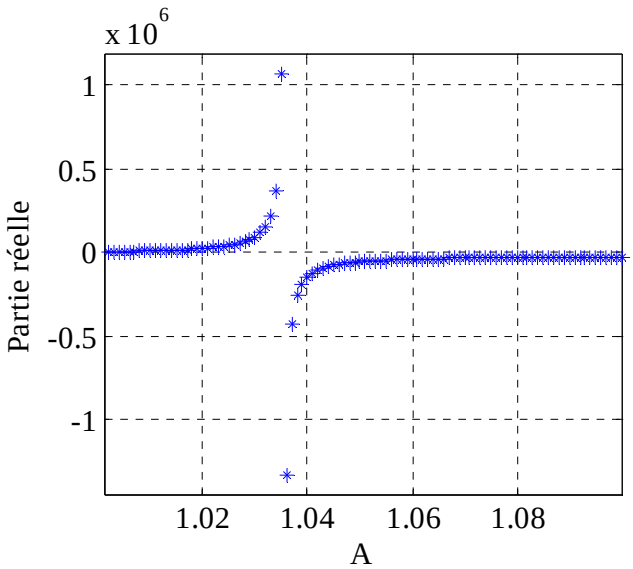


Figure 2-32 : Evolution des valeurs propres lorsque A varie avec $B_h = 2$.

Pour des valeurs $A < A_0 = 1{,}03$, la valeur propre est positive. Pour des valeurs $A > A_0$, le multiplieur de Floquet a la partie réelle négative, qui prouve la stabilité et à l'opération périodique. De nouveau, le modèle discret et le modèle moyen continu proposé donnent des résultats voisins.

Hystérésis modulée, avec terme intégral

Définition du modèle moyen

Afin d'éliminer l'erreur statique, nous ajoutons un terme intégral dans la loi de commande comme représenté précédemment.

Pour définir le modèle moyen, la procédure est la même que précédemment. Si on suppose une tension de sortie constante, le système peut se mettre sous la forme :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{i_L} \\ \int_0^t \left(\overline{i_L} - i_{ref}\right)(\tau)d\tau \end{bmatrix} \tag{2-105}$$

où X est le vecteur d'état du système ($X \in \mathbb{R}^2$).

On peut ensuite définir l'application H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\dot{X} = H(X,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{-R_L}{L}X_1 - \dfrac{(1-\alpha)V_{out}}{L} + \dfrac{V_e}{L} \\ X_1 - i_{ref} \end{cases} \tag{2-106}$$

Pour modéliser le régulateur de courant, on utilise les deux relations suivantes permettant d'obtenir $\alpha 1$ et α.

$$s_i(X,\alpha 1,\alpha) = 0 \qquad \forall (X,\alpha 1,\alpha) \in \mathbb{R} \times [0{,}1] \times [0{,}1] \quad ,i = 1{,}2 \tag{2-107}$$

avec

$$\begin{cases} s_1(t) = I_{min} - i_{ref} + K_i \int_0^t \left(X_1 - i_{ref}\right)d\tau \; - S_b \\ s_2(t) = \; I_P - \; i_{ref} + K_i \int_0^t \left(X_1 - i_{ref}\right)d\tau \; - S_a \end{cases}$$

Les expressions de I_{min} et I_P sont définies par les relations (2-96) et (2-97). Le détail pour le calcul du terme intégral est détaillé dans la section 2.3.2. De même S_a et S_b sont définis en (2-83) et (2-84).

Etude des cycles et validation du modèle moyen

Pour valider expérimentalement le modèle moyen proposé, on a utilisé le banc de test précédent. Le modèle présenté ci-dessus a été complété en considérant une tension de sortie variable et en prenant en compte les pertes dans le convertisseur. Les paramètres du système pour les deux essais considérés sont présentés dans le Tableau 2-7.

Paramètres	$Essai\ 1$	$Essai\ 2$
$V_{out}\ (V)$	54,1	70,4
$r_{ch}\ (\Omega)$	25,5	43,3
$V_e = 40\ V, L = 0{,}88\ mH, R_L = 0{,}12\ \Omega, f = 10\ kHz, i_{ref} = 3\ A, B_h = 3, C = 20\ mF$ $K_i = 1934\ rad \cdot s^{-1}, V_D = 0{,}92\ V, V_k = 0{,}95\ V, r_D = 0{,}047\ \Omega, r_k = 0{,}33\ \Omega$		

Tableau 2-7 : Paramètre du système.

Le diagramme de bifurcation obtenu par simulation numérique correspondant à l'essai 1 est donné sur la Figure 2-33 pour le paramètre A variant de 0 à 5 et celui correspondant à l'essai 2 est donné sur la Figure 2-34. Pour le premier essai, le premier point de bifurcation est obtenu pour $A = 4{,}21$. Lorsque A est supérieur à cette valeur, on obtient des cycles mono périodiques. Pour le second, le premier point de bifurcation est obtenu pour $A = 2{,}23$.

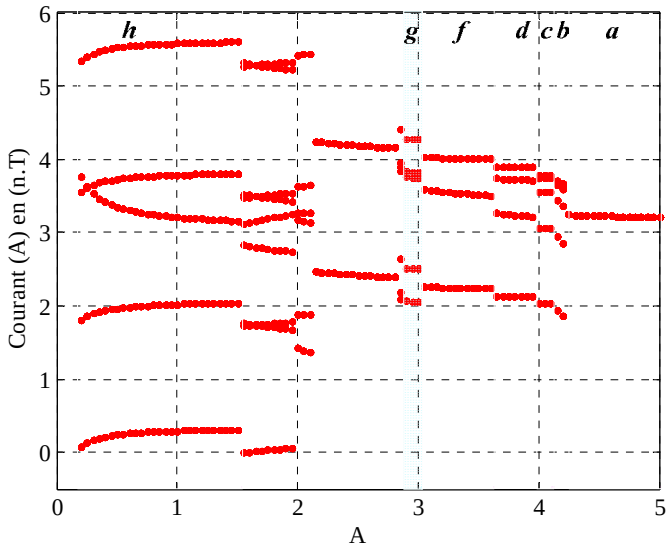


Figure 2-33 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 1.

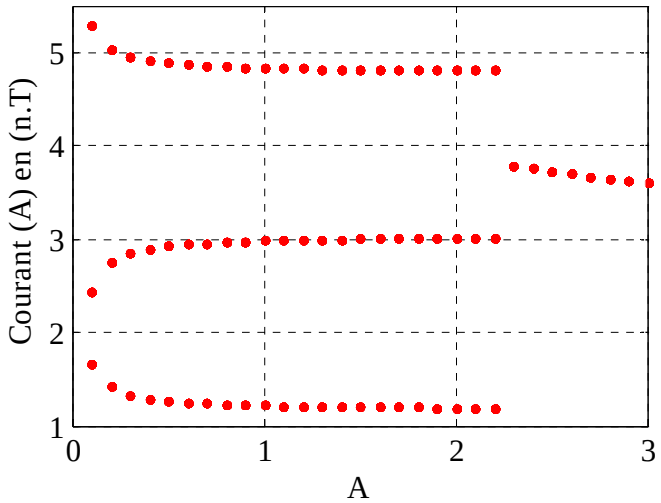


Figure 2-34 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 2.

La matrice Jacobienne J est définie autour d'un point de fonctionnement du modèle moyen du système défini par les relations (2-104), (2-106) et (2-107). L'évolution des valeurs propres de la matrice Jacobienne est représentée sur la Figure 2-35. La partie gauche correspondant à l'essai 1 et la partie droite à l'essai 2. Une discontinuité est obtenue pour l'essai 1 lorsque $A = 4{,}1$ et pour l'essai 2 lorsque $A = 2{,}21$. Ces valeurs sont identiques (3% d'erreur) à celles obtenues par le diagramme de bifurcation.

Le modèle moyen proposé permet donc de définir la valeur minimale de A permettant de garantir la stabilité de l'application et donc l'existence d'un cycle monopériodique. Il est évident que la même chose peut être obtenue en fixant la valeur de A et en faisant varier la valeur de B_h.

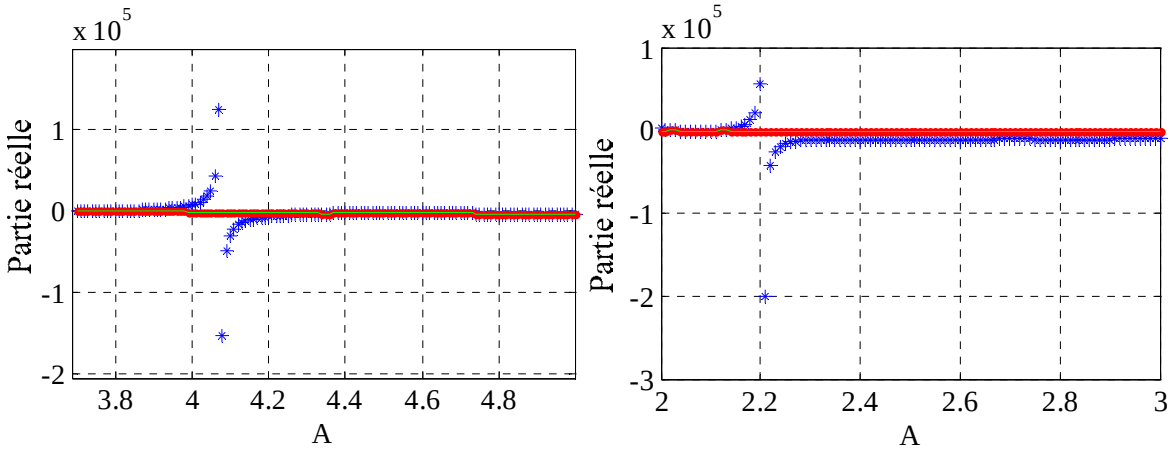


Figure 2-35 : Evolution de la partie réelle des multiplieurs de Floquet, modèle continu; pour l'essai 1 $A_0 = 4{,}1$ (à gauche) et pour l'essai 2, $A_0 = 2{,}21$ (à droite).

Les formes d'onde du courant obtenues par simulation pour deux valeurs de A sont présentées sur la Figure 2-36 pour le premier essai. Les formes d'onde du courant, du signal triangulaire et de la commande sont présentées pour deux essais 1 et 2 sur la Figure 2-37, Figure 2-38 et Figure 2-39.

Sur le diagramme de bifurcation Figure 2-33, on peut définir plusieurs comportements différents de la boucle de courant :

Pour $A > A_0$ la trajectoire d'état décrit un cycle stable mono-périodique. Ce comportement est représenté sur la Figure 2-37 *a*; Pour $A < A_0$ la trajectoire d'état définit des cycles stables multi-périodiques ou chaotiques.

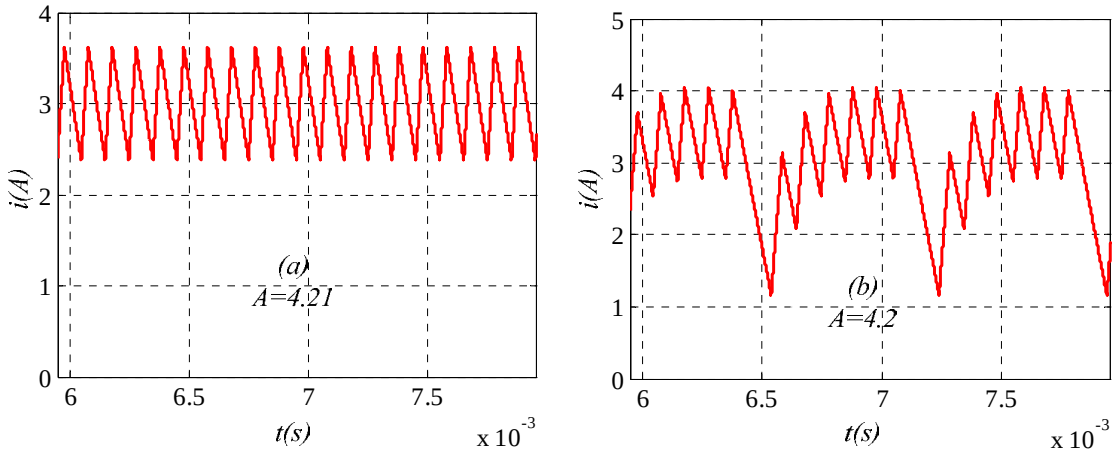
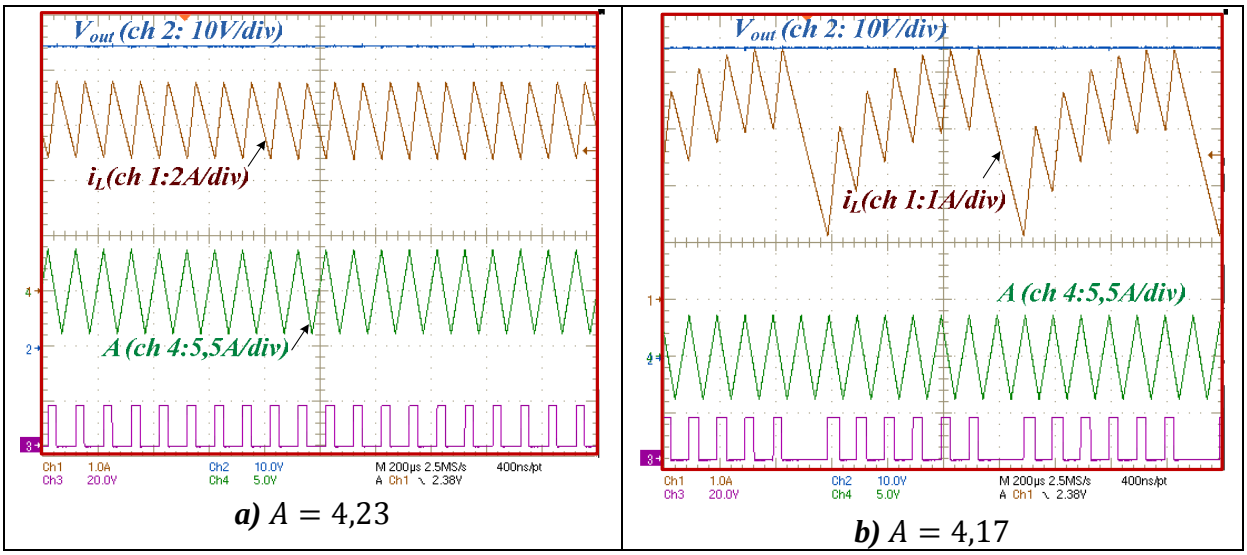


Figure 2-36 : Résultats obtenus par simulation pour l'essai 1.



a) $A = 4{,}23$ ***b)*** $A = 4{,}17$

Figure 2-37 : Résultats obtenus par expérimentation pour l'essai 1.

Sur le diagramme de bifurcation Figure 2-34, on peut définir deux comportements différents de la boucle de courant :

Pour $A > 2{,}24$ la trajectoire d'état définit un cycle stable mono-périodique. Ce comportement est représenté sur la Figure 2-38 à gauche.

Pour $A < 2{,}24$ la trajectoire d'état décrit des cycles stables 3-périodiques apparaît (Figure 2-38 à droite).

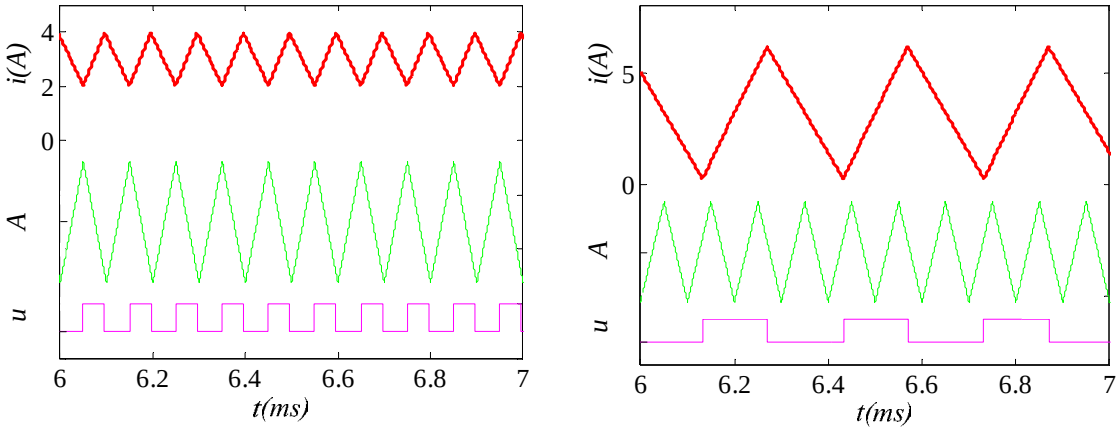


Figure 2-38 : Résultats obtenus par simulation pour l'essai 2, $A = 2{,}24$ (à gauche) et $A = 2{,}23$ (à droite).

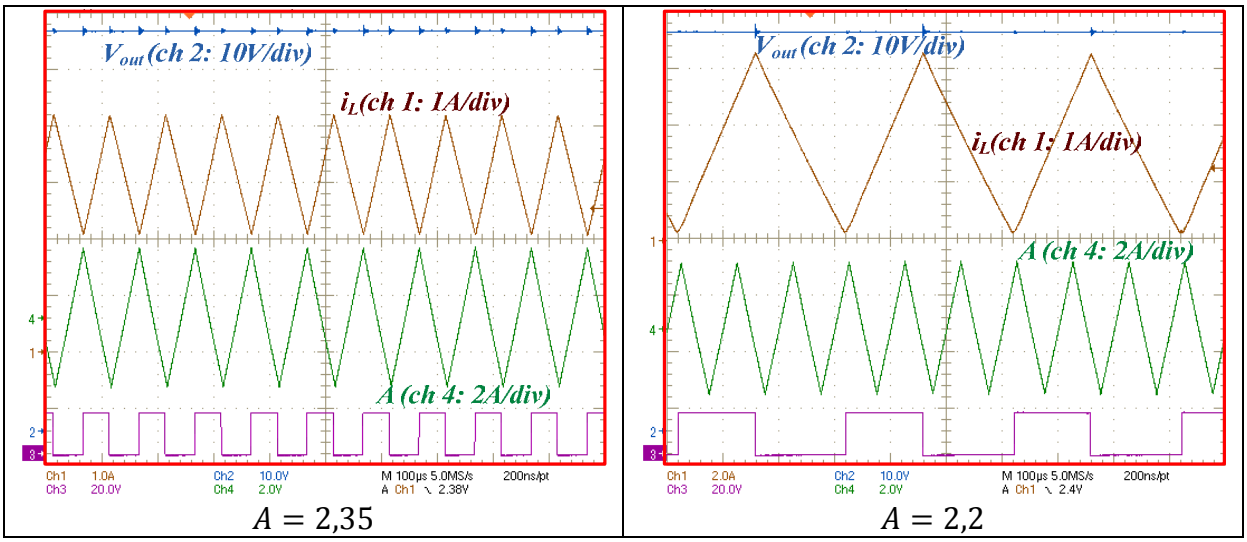


Figure 2-39 : Résultats obtenus par expérimentation $A > A_0$ (à gauche) et $A < A_0$ (à droite) pour l'essai 2.

2.7.3. Régulateur PI associé à une modulation par MLI

La modélisation proposée va maintenant être appliquée à un correcteur linéaire de type PI associée à une MLI intersective.

Principe de fonctionnement

La Figure 2-40 montre le schéma bloc d'un régulateur de type PI associé à une modulation par MLI.

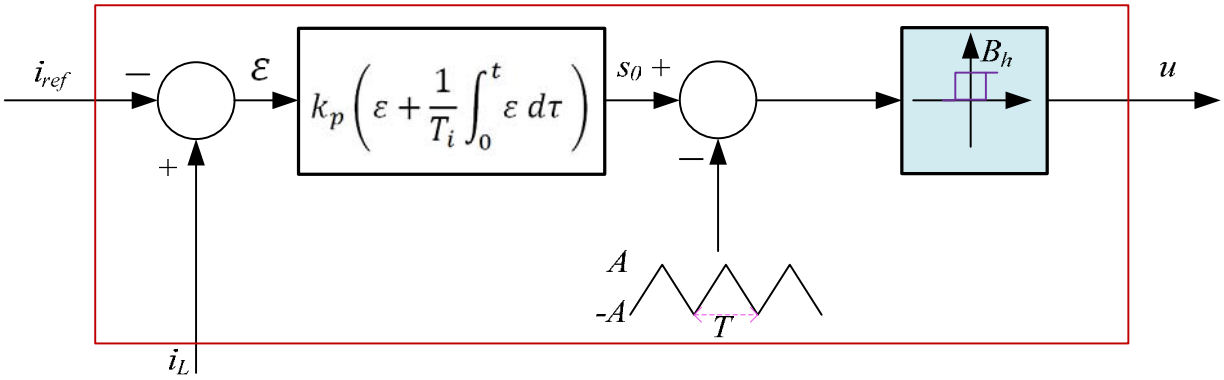


Figure 2-40 : Schéma du régulateur PI avec MLI.

Le régulateur PI de gain proportionnel k_p et de constante de temps d'intégration T_i est défini via la surface s_0.

$$s_0 = k_p\left(\varepsilon + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon\, d\tau\right).$$

La modulation par MLI est définie via le régulateur de type hystérésis modulée ayant une largeur de bande B_h et un signal triangulaire d'amplitude A. La valeur de B_h est faible voire nulle. L'amplitude de A correspond à l'amplitude de la porteuse MLI. Ainsi, le gain de la MLI peut être défini par $1/(2A)$.

Comme précédemment, pour la modélisation proposée, on suppose que la constante de temps du système est largement plus grande que la période de découpage ($\frac{L}{R_L} >> T$).

Un dimensionnement classique des coefficients du correcteur PI permet de fixer la valeur de la constante de temps d'intégration égale à la valeur de la constante de temps du convertisseur ($T_i = \tau = \frac{L}{R_L}$).

Dans cette partie, seul le paramètre k_p varie. Le paramètre de bifurcation considéré est donc le gain proportionnel.

Définition du modèle moyen

Pour définir le modèle moyen, la procédure est toujours la même. En négligeant les variations de la tension de sortie et les termes résistifs du convertisseur, le modèle est identique au modèle détaillé dans la section 2.7.2. La seule différence porte sur la définition des surfaces s_1 et s_2. Pour le régulateur proposé, ces surfaces sont définies par :

$$\begin{cases} s_1(t) \approx k_p(I_{min} - i_{ref}) + \left(\frac{k_p}{T_i}\right)\left(X_2 + (X_1 - i_{ref})\,\alpha 1\, T + A1\right) - S_b \\ s_2(t) \approx k_p(\,I_P\, - i_{ref}) \,+\, \left(\frac{k_p}{T_i}\right)\left(X_2 + (X_1 - i_{ref})\,\alpha\, T +\, A2\right) - S_a \end{cases} \tag{2-108}$$

avec :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{i_L} \\ \int_0^t (\overline{i_L} - i_{ref})(\tau)d\tau \end{bmatrix} \tag{2-109}$$

Etude des cycles

On va présenter deux essais avec les paramètres donnés sur le Tableau 2-8.

Paramètres	$Essai$ 1	$Essai$ 2
r_{ch} (Ω)	40	70
$V_e = 40, L = 0{,}88\ mH, R_L = 0{,}12\Omega\,, f = 10\ kHz, i_{ref} = 3A, A = 10, B_h = 0.5\ A$ $C = 20\ mF, V_D = 0{,}92\ V, V_k = 0{,}95\,, r_D = 0{,}047\Omega, r_k = 0{,}33\ \Omega$		

Tableau 2-8 : Paramètre du système.

Les Figure 2-41 et Figure 2-42 montrent les évolutions des valeurs propres pour l'essai 1 et l'essai 2.

Le premier essai, les valeurs propres sont à partie réelle négative pour k_p inférieur où égal à 10,19. Pour le deuxième essai, la valeur critique de k_p est 7,15.

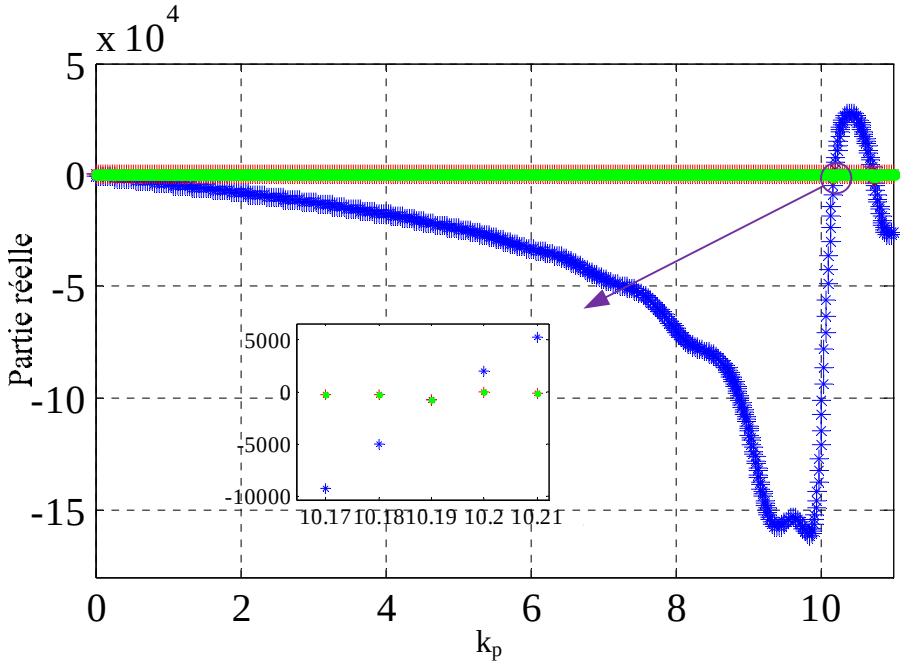


Figure 2-41 : Tracé des valeurs propres en utilisant le modèle continu pour l'essai 1.

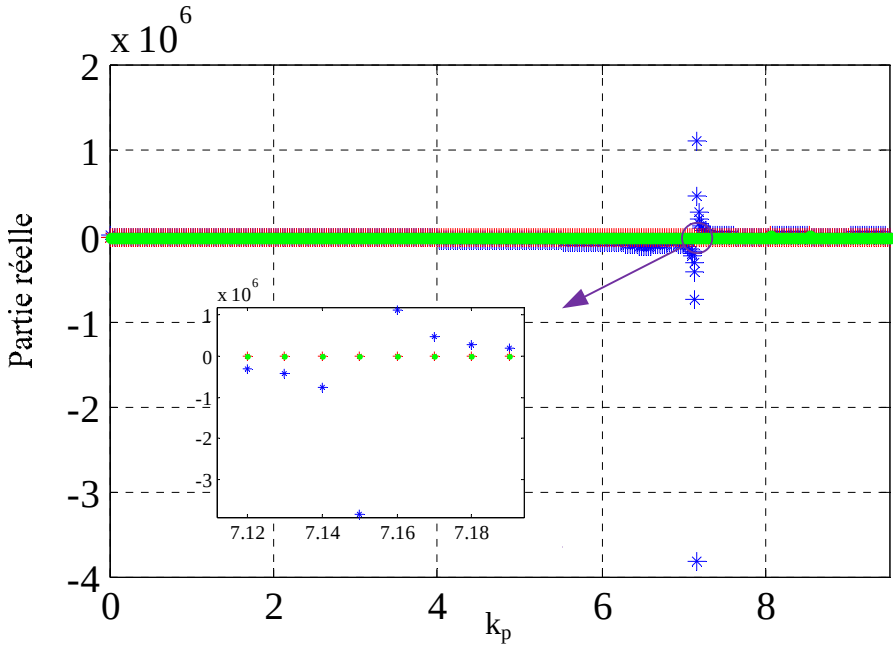


Figure 2-42 : Tracé des valeurs propres en utilisant le modèle continu pour l'essai 2.

Avec deux jeux de paramètres, on présente les diagrammes de bifurcation obtenus par simulation (Figure 2-43 et Figure 2-44).

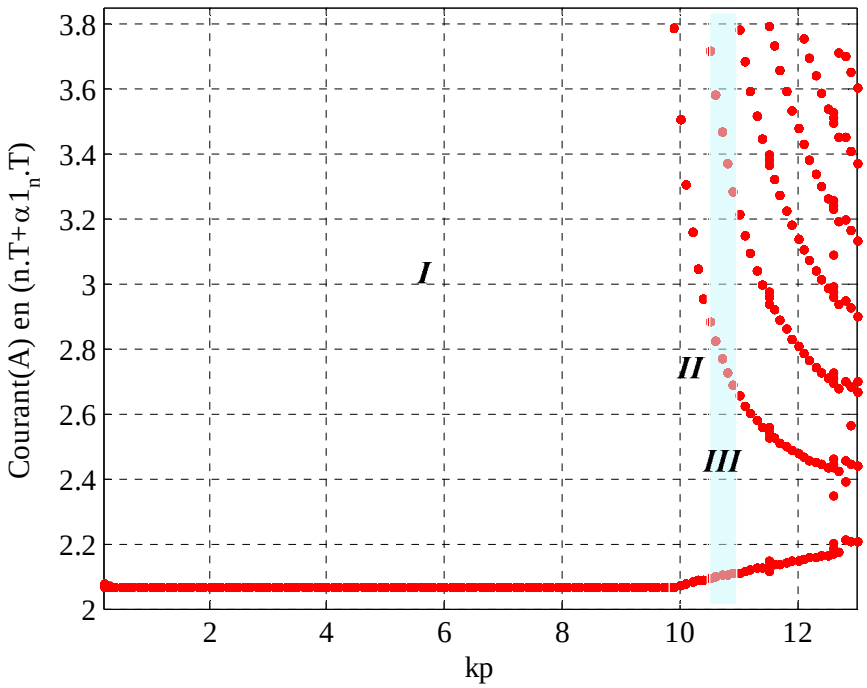


Figure 2-43 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 1.

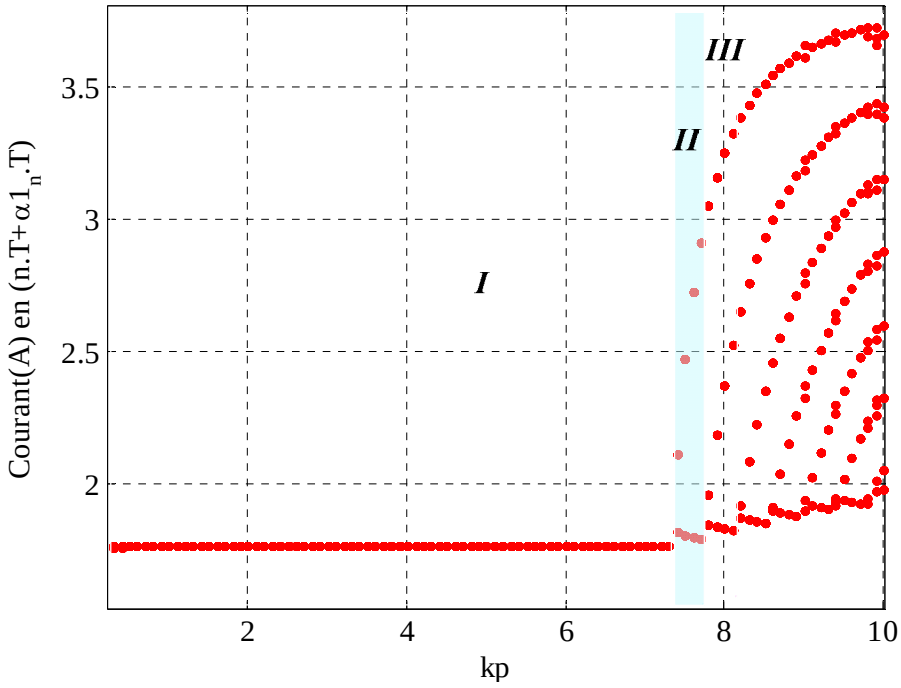
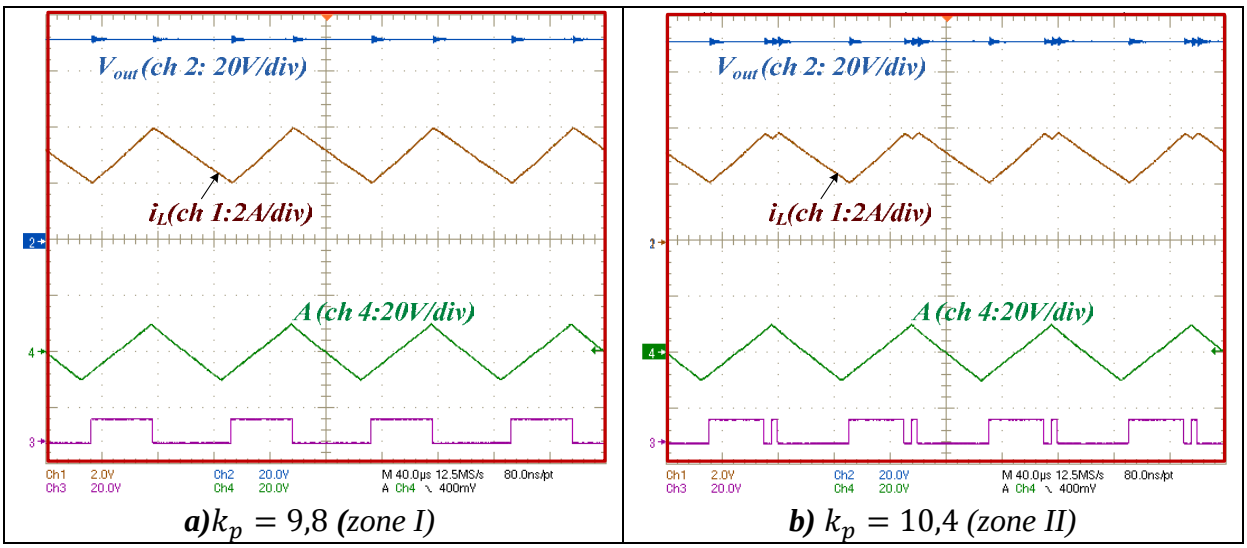


Figure 2-44 : Diagramme de bifurcation pour l'essai 2.

Les résultats prédits par les diagrammes de bifurcation sont en accord avec les résultats obtenus en utilisant le modèle continu présentés sur les Figure 2-41 et Figure 2-42. Les cycles T-périodiques ont été obtenus pour k_p critique 9,9 et 7,3 pour l'essai 1 et 2 respectivement. Ces valeurs sont plus proches à celles obtenues par le modèle continu proposé.

Validation expérimentale

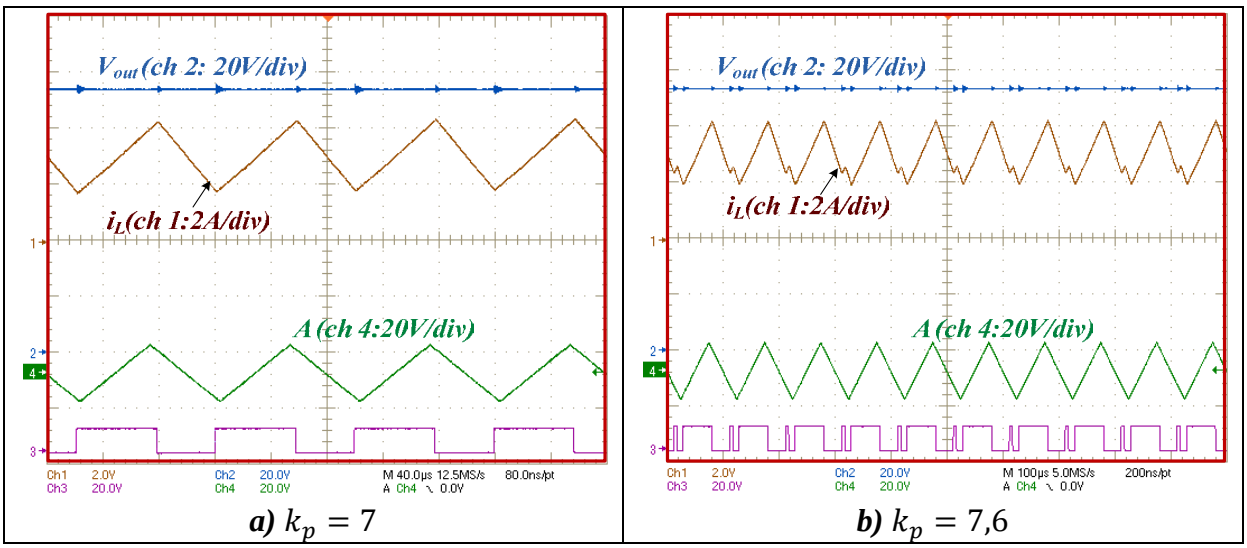
Sur la Figure 2-45 est représentée la forme d'onde du courant obtenue avec plusieurs valeurs de k_p pour le premier essai.



a) $k_p = 9{,}8$ *(zone I)* ***b)*** $k_p = 10{,}4$ *(zone II)*

Figure 2-45 : Résultats obtenus par expérimentation $k_p = 9{,}8$ (à gauche) et $k_p = 10{,}4$ (à droite) pour l'essai 1.

La Figure 2-46 représente les résultats expérimentaux obtenus pour l'essai 2. Comme prédit par le diagramme de bifurcation, pour $k_p \leq k_{p0}$ le cycle périodique apparaît.



a) $k_p = 7$ ***b)*** $k_p = 7{,}6$

Figure 2-46 : Résultats obtenus par expérimentation $k_p = 7$ (à gauche) et $k_p = 7{,}6$ (à droite) pour l'essai 2.

Etude des propriétés de robustesse paramétrique

Comme dans le paragraphe 2.2.4, nous étudions les propriétés de robustesse du système. Nous fixons la valeur du paramètre de bifurcation k_p à 5,55, ce qui correspond à environ $0{,}5 \cdot k_{p0}$ (essai 1). Les valeurs de l'inductance L , de la résistance R_L et de la capacitance varient $\pm 50\%$ autour de leurs valeurs nominales. Comme le montre la Figure 2-47 et la Figure 2-48, les valeurs propres de la Jacobienne J restent à partie réelle négative, ce qui permet de garantir la stabilité de l'application.

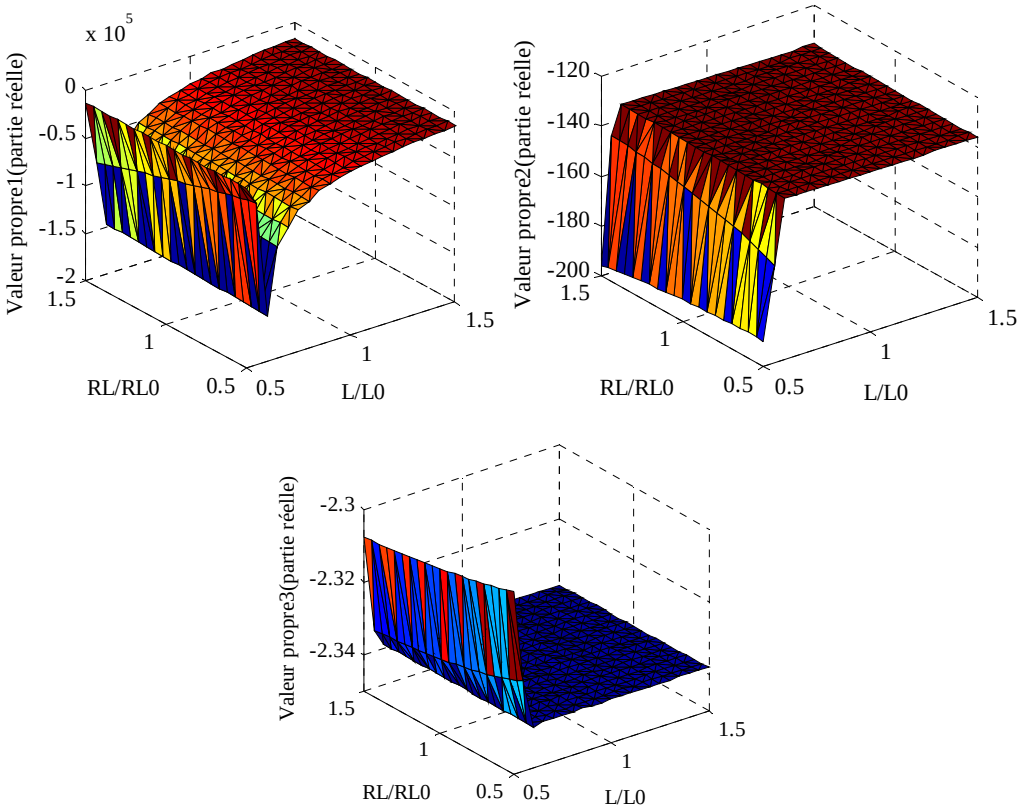


Figure 2-47 : Tracé des valeurs propres de la Jacobienne lorsque L et R_L varient pour l'essai 1.

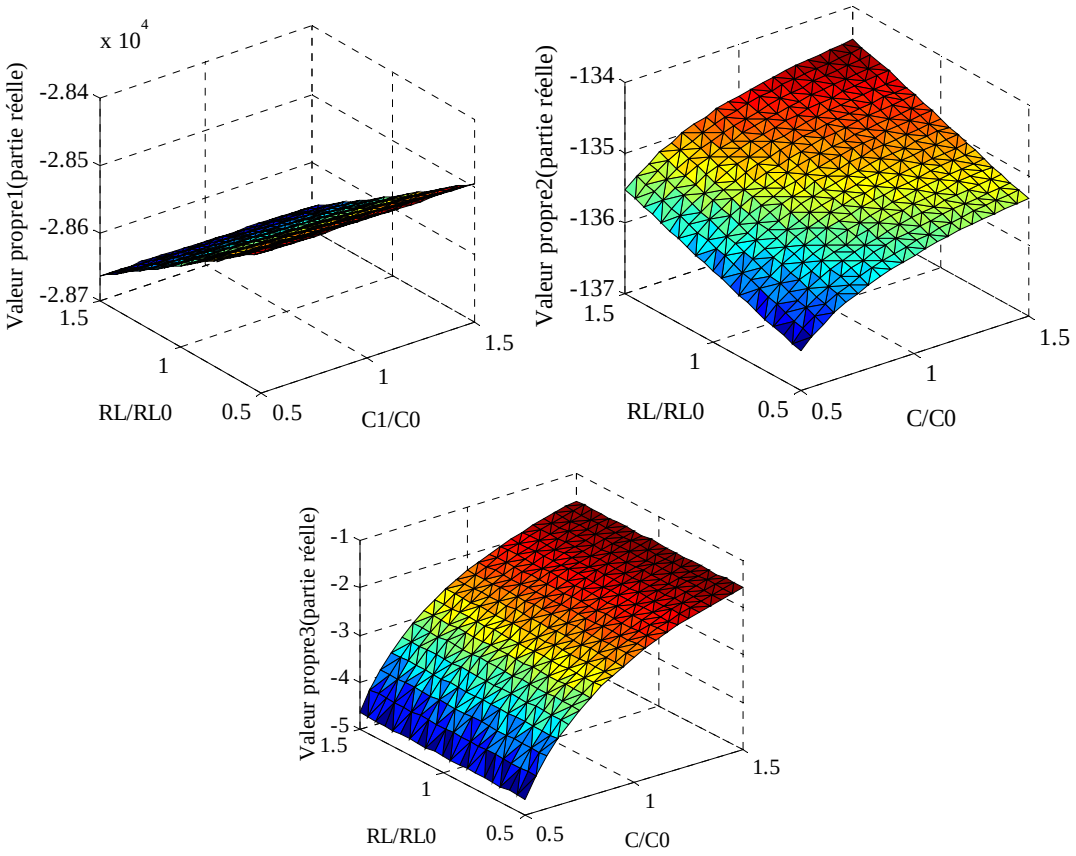


Figure 2-48 : Tracé des valeurs propres de la Jacobienne lorsque C et R_L varient pour l'essai1.

2.8. Conclusion

Généralement, les valeurs des points de bifurcation obtenus en utilisant le modèle discret et les résultats de la simulation sont similaires. Cependant, pour certains systèmes particuliers, un modèle discret ne peut être établi facilement [Sha 09].

Une nouvelle méthode pour estimer le premier point de bifurcation (flip, Hopf...) a été proposée dans ce chapitre. Elle est basée sur la définition d'une nouvelle formulation du modèle moyen et le modèle obtenu a été appliqué à plusieurs contrôleurs de courant.

Pour valider le modèle proposé, un convertisseur élévateur de type boost, en mode de conduction continu a été utilisé. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux issus d'un modèle discret et validés par simulation numérique et expérimentalement.

Les points de bifurcation obtenus par les différents modèles sont voisins. Néanmoins la méthode proposée permet de calculer la valeur d'un paramètre conduisant au point de bifurcation de façon plus simple et plus rapide.

Développée dans le cadre d'un convertisseur élévateur de type boost, la méthode proposée peut s'appliquer aisément à d'autres convertisseurs DC-DC. Cette nouvelle formulation peut être une solution alternative pour analyser les bifurcations dans les systèmes où les méthodes classiques peuvent échouer.

Chapitre 3

Application au système de filtrage actif pour les hacheurs à absorption continue de courant

3.1. Introduction

Pour les sources d'énergie basse tension, comme les systèmes Pile à Combustible (PAC), un niveau de tension plus élevé est obtenu via l'utilisation de convertisseurs statiques. Ces convertisseurs peuvent avoir une structure non-isolée, comme les convertisseurs de type boost [Wai 11], [Tho 11], ou des structures isolées [Kim 10], [Ito 10]. Le choix de la structure utilisée dépend des spécifications désirées comme par exemple la sureté de fonctionnement, le prix, le poids, le volume, etc.

Les travaux de recherche récents montrent que la durée de vie d'un système PAC ainsi que son rendement énergétique diminue avec l'augmentation de l'amplitude des ondulations de courant [Ito 10], [Cho 10], [Tho 09], [Leu 10]. Dans le but de diminuer ces ondulations de courant, de nombreuses solutions à base de systèmes passifs ou actifs peuvent être trouvées dans la littérature. La solution la plus simple est de connecter un filtre passif en parallèle avec la PAC. Cependant, l'utilisation de telle solution d'une part augmente le volume, le poids et le prix du système [Ito 10] et d'autre part peut générer des instabilités [Zan 10]. Une autre solution, proposée dans [Ost 10], est basée sur l'utilisation d'inductances couplées associées à un système actif.

Une autre structure de convertisseur statique permettant de supprimer les ondulations de courant générées par un convertisseur statique à absorption continue de courant a été développée au laboratoire [Sha 09]. Dans la suite du chapitre, ce convertisseur est appelé filtre actif. Ce système permet d'absorber un courant dont les ondulations sont en opposition avec celles générées par le convertisseur principal, ce qui permet d'obtenir un courant de source avec un taux d'ondulation très faible. Le régulateur de courant utilisé dans le filtre actif est un régulateur hybride à top d'amorçage permettant de synchroniser les signaux de commande du filtre actif avec le convertisseur principal.

Pour garantir un fonctionnement périodique de la boucle de courant du filtre actif, un dimensionnement optimal des paramètres du régulateur doit être défini. Comme rappelé dans le chapitre 1, la nature des cycles définis par les variables d'état du système peut être établie soit grâce à un diagramme de bifurcation soit grâce aux multiplieurs de Floquet obtenus par le modèle discret du convertisseur associé à sa commande. Cependant, pour certaines structures de convertisseur statique, un modèle discret ne peut être obtenu sans introduire de fortes hypothèses. Dans ce chapitre, après avoir redéfini la structure du filtre actif, nous allons appliquer le modèle moyen présenté dans le chapitre 2 pour définir le premier point de bifurcation. Les résultats obtenus par le modèle proposé seront validés par simulation numérique ainsi que par des résultats expérimentaux.

3.2. Structure du filtre actif

La structure du filtre actif proposée permet d'éliminer les ondulations de courant générées par un convertisseur statique DC/DC à absorption continue de courant, comme par exemple un convertisseur boost. L'association avec un convertisseur de filtrage actif est définie sur la Figure 3-1. Ce convertisseur comporte une inductance L_f ayant une résistance série notée R_{Lf},

deux capacités C_1 et C_2 et deux interrupteurs commandés K_{f1} et K_{f2} avec sur chaque interrupteur une diode connectée en antiparallèle.

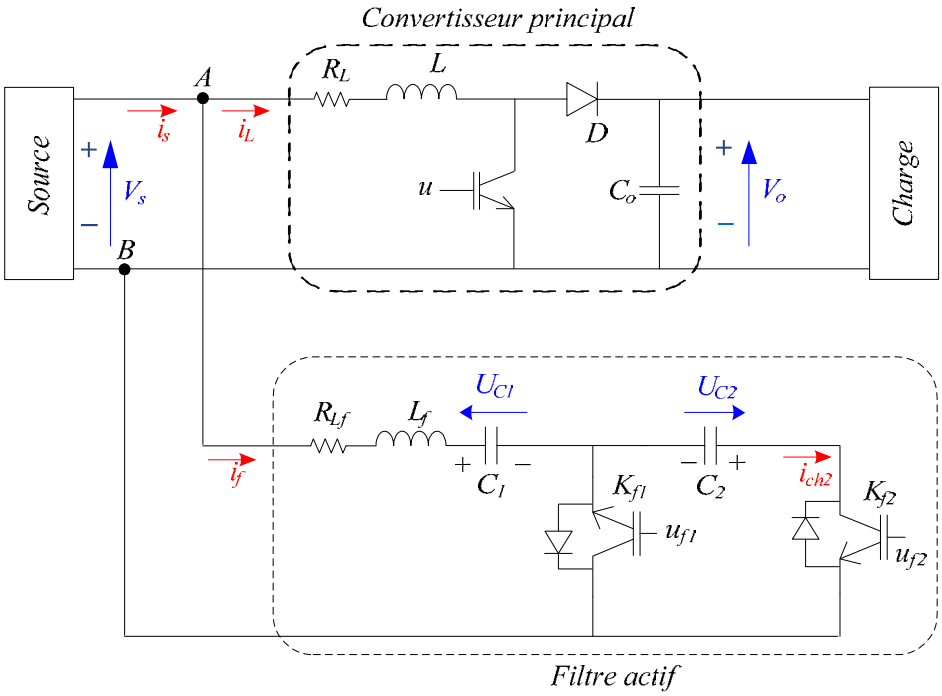


Figure 3-1 : Association du convertisseur de puissance avec le filtre actif.

Les équations différentielles décrivant le système sont données, en fonction de l'état de la commande u, dans les équations (3-1)-(3-2). Pour annuler les ondulations de courant de la source de puissance, la dérivée du courant dans les inductances L et L_f doivent être strictement opposée. En utilisant les équations (3-1) et (3-2), on peut définir la valeur des tensions U_{C1} et U_{C2} pour que les ondulations de courant de la source de puissance soient nulles (3-3).

$$\frac{di_L}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{L}(V_s - R_L i_L), & u = 1 \\ \frac{1}{L}(V_s - R_L i_L - V_O), & u = 0 \end{cases} \tag{3-1}$$

$$\frac{di_f}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{L_f}\left(V_s - R_{Lf} i_f - U_{C1}\right), & u = 1 \\ \frac{1}{L_f}\left(V_s - R_{Lf} i_f - U_{C1} + U_{C2}\right), & u = 0 \end{cases} \tag{3-2}$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{di_f}{dt} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_{C1} = \left(1 + \frac{L_f}{L}\right) V_s - \frac{L_f}{L} R_L i_L - R_{Lf} i_f \\ U_{C2} = \frac{L_f}{L}(V_O) \end{cases} \tag{3-3}$$

Pour asservir les tensions U_{C1} et U_{C2} à leur référence définie en (3-3), un grand nombre de stratégies peuvent être mise en place. En effet, les stratégies pouvant être utilisées dépendent de la structure du convertisseur, de l'utilisation ou non de convertisseurs isolés, d'organe de stockage, etc.

Deux stratégies vont être détaillées dans ce chapitre. Une stratégie consiste à asservir les tensions des deux capacités via des convertisseurs réversibles isolés et l'autre consiste à asservir la tension aux bornes de la capacité C_1 via la valeur du courant i_f et la tension aux bornes de la capacité C_2 est asservie via un convertisseur réversible isolé. Cette dernière permet de minimiser le nombre de semi-conducteurs puisqu'il est réduit à 4.

Sur la Figure 3-2, les formes d'ondes principales du convertisseur principal et du filtre actif sont représentées. u est le signal de commande du convertisseur de puissance, u_{f1} et u_{f2} sont les signaux de commande des interrupteurs K_{f1} et K_{f2} du filtre actif. Pour permettre de supprimer les ondulations de courant générées par le convertisseur de puissance, les signaux de commande u et u_{f2} doivent être parfaitement synchronisés.

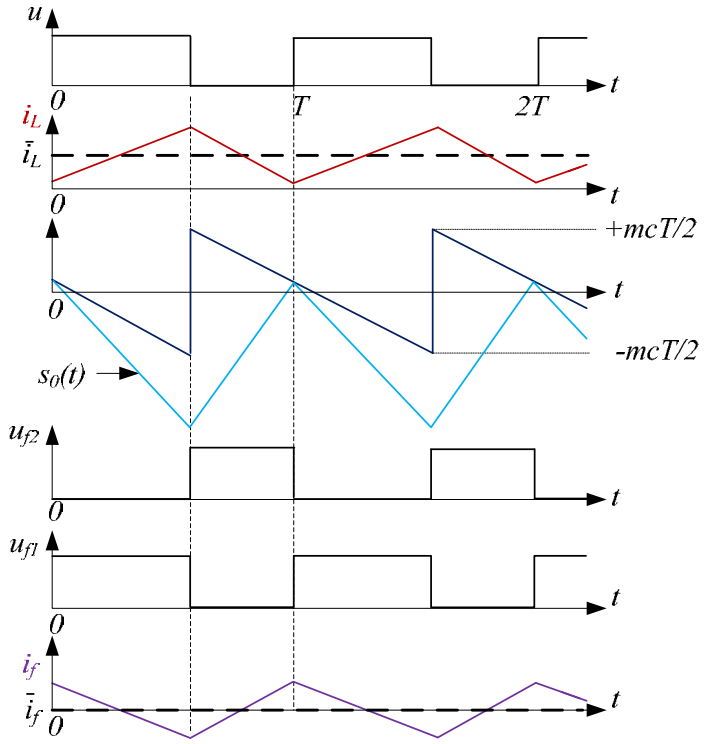


Figure 3-2 : Formes d'onde principales pour les deux convertisseurs.

Le courant i_f est asservi à sa référence i_{ref} via un régulateur de courant hybride à top d'amorçage associé au signal de commande u_{f2}. La loi de commande est définie par la relation (3-4) [Mar 02], [Lac 08]. Ce type de régulateur permet d'obtenir une dynamique élevée en asservissement et en régulation, mais il permet également de garantir une parfaite synchronisation des signaux u et u_{f2}. Le signal de commande u_{f1} est le complément du signal u_{f2}.

$$s_0(t) = (i_f - i_{ref}) + K_i \int_0^t (i_f - i_{ref}) d\tau \qquad (3\text{-}4)$$

3.2.1. Topologie utilisant deux convertisseurs isolés

Les tensions U_{C1} et U_{C2} sont régulées via deux convertisseurs indépendants. La structure du filtre actif avec des convertisseurs isolés réversibles connectés sur les deux capacités est représentée sur la Figure 3-3.

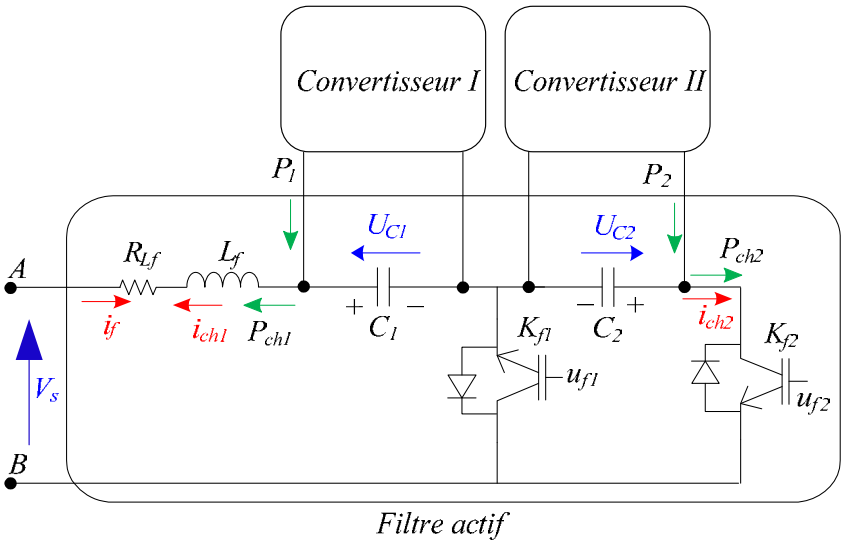


Figure 3-3 : Topologie utilisant deux convertisseurs réversible isolés pour le contrôle des tensions U_{C1} et U_{C2}.

Pour cette stratégie, on considère les énergies électrostatiques y_{C1} et y_{C2} stockées dans les capacités C_1 et C_2. On définit :

$$\begin{cases} y_{C1} = \frac{1}{2} C_1 {U_{C1}}^2 \\ y_{C2} = \frac{1}{2} C_2 {U_{C2}}^2 \end{cases} \tag{3-5}$$

La stratégie de régulation des deux tensions capacitive U_{C1} et U_{C2} est identique et est détaillée dans [Sha 11]. En définissant la puissance moyenne P_1 délivrée par le convertisseur isolé, on peut définir la variation de l'énergie électrostatique $\dot{y}_{C1}$, on obtient :

$$\dot{y}_{C1} = \frac{dy_{C1}}{dt} = P_1 - P_{ch1} \tag{3-6}$$

avec $P_{ch1} = U_{C1}\, i_{ch1}$.

D'après la Figure 3-3, la relation reliant i_{ch1} à i_f est définie par $i_{ch1} = -\, i_f$.

La régulation de puissance des convertisseurs isolés ne fait pas l'objet de cette thèse. Cependant, comme détaillé dans [Sha 11], on suppose que les puissances P_1 et P_2 délivrées par les convertisseurs isolés suivent leurs références respectives P_{1ref} et P_{2ref} à l'aide de régulateurs de puissance à large bande passante. En prenant l'exemple du premier convertisseur, la loi de commande associée au contrôle de l'énergie électrostatique y_{c1} est définie ci-après :

$$\dot{y}_{C1ref} - \dot{y}_{C1} + 2\zeta\omega_n \left(y_{C1ref} - y_{C1} \right) + {\omega_n}^2 \int_0^t \left(y_{C1ref} - y_{C1} \right)(\tau) d\tau = 0 \tag{3-7}$$

où ω_n et ζ représentent respectivement la pulsation de l'asservissement et le facteur d'amortissement du contrôleur d'énergie.

La grandeur i_{ch1_f} est la valeur filtrée du courant i_{ch1}; Il permet de connaitre sa valeur moyenne sur une période de découpage. Cette grandeur filtrée est obtenue via un filtre du premier ordre dont le modèle est représenté par la relation :

$$\frac{di_{ch1_f}}{dt} = \frac{1}{T_1}\left(i_{ch1} - i_{ch1_f}\right) \tag{3-8}$$

En utilisant (3-7) on peut récrire :

$$P_{1ref} = P_1 = \dot{y}_{C1ref} + 2\zeta\omega_n\left(y_{C1ref} - y_{C1}\right) + {\omega_n}^2 \int_0^t \left(y_{C1ref} - y_{C1}\right)dt + P_{ch1f} \tag{3-9}$$

avec $P_{ch1f} = U_{C1}\, i_{ch1_f}$.

En substituant l'équation (3-9) dans (3-6), et en considérant $\dot{y}_{C1ref} = 0$, on obtient :

$$\dot{y}_{C1} = 2\zeta\omega_n\left(y_{C1ref} - y_{C1}\right) + {\omega_n}^2 \int_0^t \left(y_{C1ref} - y_{C1}\right)dt + U_{C1}\, i_{ch1_f} + U_{C1}\, i_f \tag{3-10}$$

En considérant le premier convertisseur, le schéma de commande complet est représenté sur la Figure 3-4.

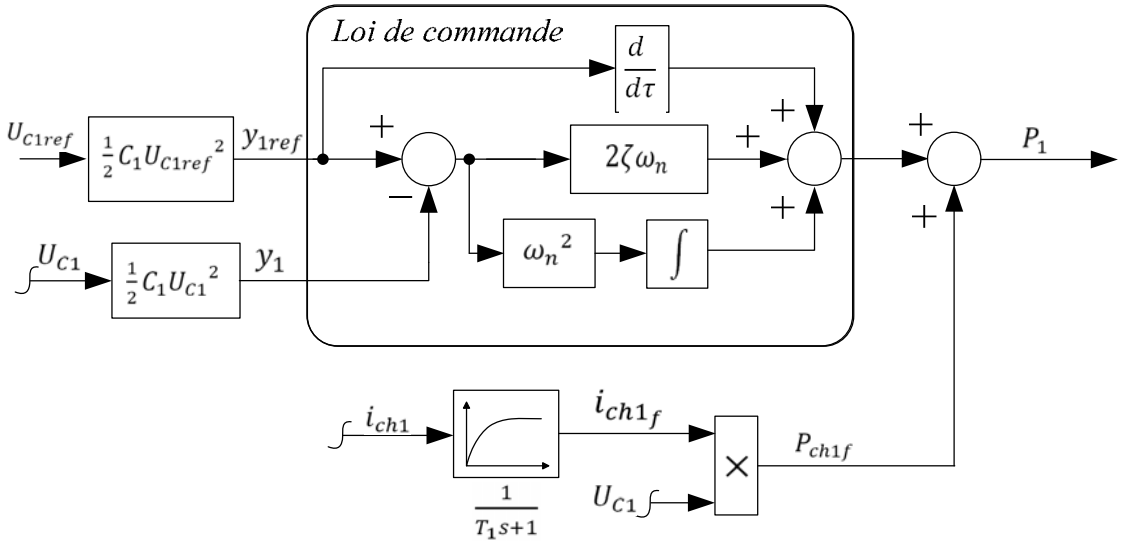


Figure 3-4 : Contrôle proposé pour la tension U_{C1} du filtre actif.

3.2.2. Topologie avec un seul convertisseur isolé

Pour réduire le nombre de composants, la tension tensions U_{C1} est asservie en modifiant la référence de courant i_{ref} alors que la tension U_{C2} reste régulée via un convertisseur. La structure du filtre actif ainsi obtenue est représentée sur la Figure 3-5.

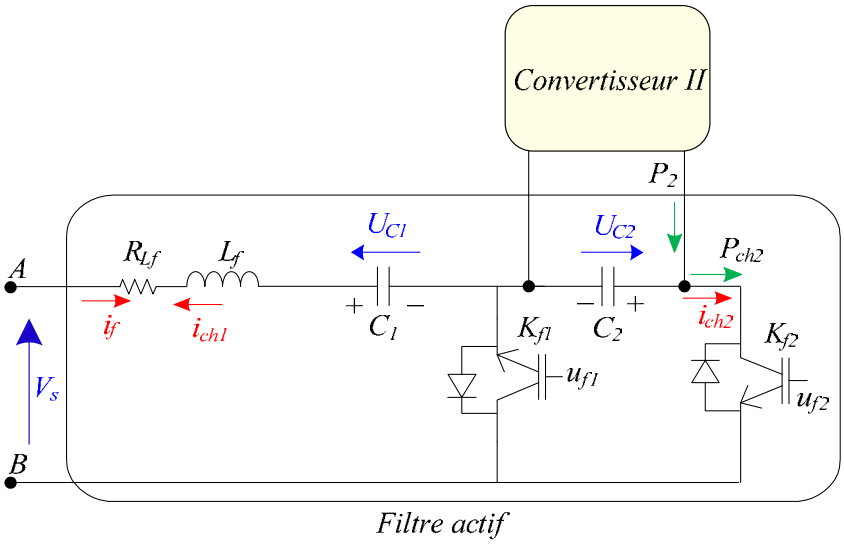


Figure 3-5 : Topologie utilisant un seul convertisseur pour le contrôle de la tension U_{C2}.

Comme détaillé dans [Sha 11], la charge q_1 de la capacité C_1 est considérée comme une variable de sortie alors que la référence de courant i_{ref} est considérée comme variable de commande. La référence de courant i_{ref} absorbée par le filtre actif est obtenue grâce à la loi de commande indiquée en (3-11).

$$\dot{q}_{1ref} - \dot{q}_1 + 2\zeta_f\omega_{nf}\left(q_{1ref} - q_1\right) + \omega_{nf}{}^2 \int_0^t \left(q_{1ref} - q_1\right)(\tau)d\tau = 0 \Rightarrow \quad (3\text{-}11)$$
$$i_{ref} = \dot{q}_1$$

où ω_{nf} est la pulsation du contrôleur, ζ_f représente le facteur d'amortissement du contrôleur et q_{1ref} est la charge de référence stockée dans la capacité C_1. Un schéma bloc du contrôleur proposé est représenté sur la Figure 3-6.

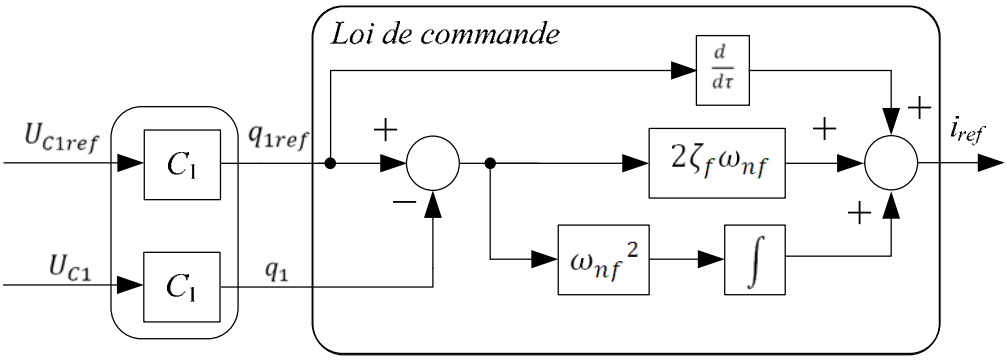


Figure 3-6 : Contrôle proposé pour la régulation de la tension U_{C1}.

3.3. Etude des cycles

Comme détaillé dans le premier chapitre, trois méthodes sont usuellement utilisées pour analyser le comportement dynamique d'un système.

Pour le système de filtrage actif proposé, un modèle discret est difficile à définir puisqu'on ne peut obtenir que des solutions implicites du système d'équations différentielles défini pour chaque séquence de fonctionnement. Cependant, un diagramme de bifurcation peut être défini

grâce aux simulations numériques. L'utilisation du modèle moyen présenté dans le chapitre 2 va être appliquée pour ce système. Les résultats obtenus par ce modèle seront validés par des résultats expérimentaux obtenus sur un banc de test réalisé au laboratoire.

3.3.1. Diagramme de bifurcation

Usuellement, le comportement du système non-linéaire est étudié à l'aide d'un diagramme de bifurcation. Comme rappelé dans le chapitre 1, on trouve dans la littérature, un grand nombre de paramètre de bifurcation tel que la tension d'entrée, l'amplitude de la référence de courant, la valeur de la capacité, de l'inductance, de la fréquence de commutation, du gain de la chaine de retour, etc.

Pour notre système de filtrage actif, le paramètre de bifurcation pris en compte est la pente du signal de compensation m_c. Le diagramme de bifurcation représenté sur la Figure 3-7 représente la valeur du courant i_f au début de chaque période de découpage pour différentes valeurs de la pente m_c. Les paramètres du système pour deux essais sont détaillés dans le Tableau 3-1. Pour ces essais, comme représenté sur la Figure 3-7, on obtient une bifurcation de type flip.

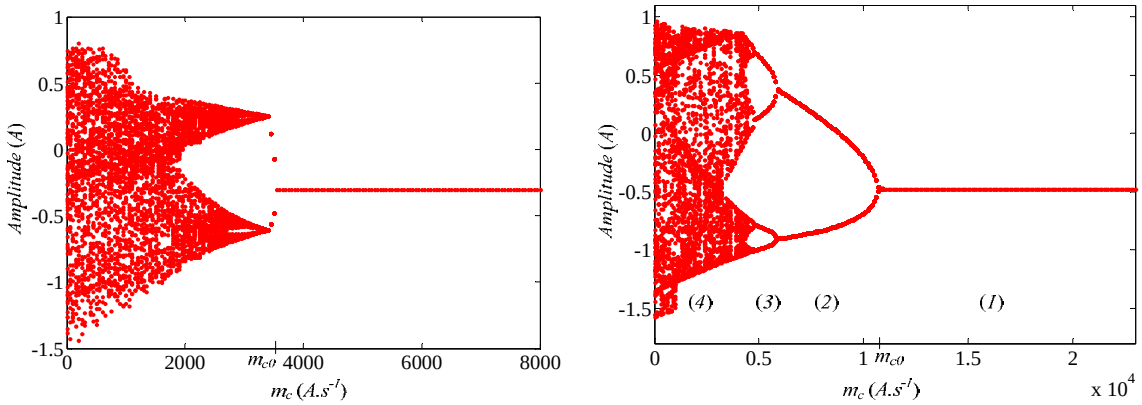


Figure 3-7 : Diagramme de bifurcation, (gauche) $K_i = 1260\, rad \cdot s^{-1}$, $U_{C1} = 43{,}2V$, $U_{C2} = 27V$, (droite) $K_i = 22500\, rad \cdot s^{-1}$, $U_{C1} = 82.7V$, $U_{C2} = 81{,}5V$.

	Paramètres du système	Valeurs	
		Test 1	Test 2
	V_s (V)	24	42
	f_s (kHz)	5	10
	$K_i(rad \cdot s^{-1})$	1260	22,500
Convertisseur boost	L (mH)	2.2	
	R_L (Ω)	0,1	
	C_0 (mF)	1	
Filtre actif	L_f (mH)	1,84	2,14
	R_{Lf} (Ω)	0,5	0,2
	$C_1, C_2(mF)$	1	1
Convertisseur Flyback	L_{Fb} (mH)	0,1	
	R_{LFb} (Ω)	0,1	
	ζ_f, $\omega_{nf}(rad \cdot s^{-1})$ Flyback :ζ, $\omega_n(rad \cdot s^{-1})$	1, 60 1,3, 45	0,7, 400 1, 3500

Tableau 3-1 : Paramètres du système.

3.3.2. Utilisation du modèle moyen proposé

A. Structure à un convertisseur isolé

Le modèle moyen proposé dans le chapitre 2 va être appliqué, dans un premier temps, sur le système de filtrage actif avec un seul convertisseur isolé. En nommant α le rapport cyclique associé à l'interrupteur K_{f2}, l'expression au sens des valeurs moyennes de la relation (3-2), peut être définie par :

$$\frac{di_f}{dt} = \frac{1}{L_f}\left(V_s - R_L i_f - U_{C1} + \alpha U_{C2}\right) \tag{3-12}$$

Comme indiqué précédemment, si on note q_1 la charge stockée dans la capacité C_1, l'expression de q_1 est de la forme suivante. La dérivée de cette grandeur correspond au courant à travers C_1 :

$$q_1 = C_1 U_{C1} \tag{3-13}$$

Par conséquent :

$$\frac{dq_1}{dt} = C_1 \frac{dU_{C1}}{dt} = i_f \tag{3-14}$$

La variation de l'énergie électrostatique dans la capacité C_2 peut s'exprimer via la puissance délivrée par le convertisseur de type Flyback P_{Fb} et la puissance de charge exprimée en fonction de U_{C2}. On obtient l'expression suivante :

$$\dot{y}_{C2} = P_{Fb} - P_{ch2} = P_{Fb} - U_{C2}\, i_{ch2} \tag{3-15}$$

avec : $P_{ch2} = U_{C2}\, i_{ch2}$

Au sens des valeurs moyennes sur une période de découpage, la relation reliant i_{ch2} à i_f est définie par la relation $i_{ch2} = \alpha\, i_f$.

La grandeur filtrée $i_{ch_{2f}}$ est obtenue via un filtre du premier ordre dont le modèle d'état est représenté par la relation :

$$\frac{di_{ch2f}}{dt} = \frac{1}{T_2}\left(i_{ch_2} - i_{ch_{2f}}\right) \tag{3-16}$$

On suppose comme précédemment que la puissance P_{Fb} suit parfaitement sa référence de puissance P_{Fbref}. Comme précédent, on peut écrire :

$$P_{Fbref} = P_{Fb} = \dot{y}_{C2ref} + 2\zeta\omega_n\left(y_{C2ref} - y_{C2}\right) + {\omega_n}^2 \int_0^t \left(y_{C2ref} - y_{C2}\right)dt + P_{ch2f} \tag{3-17}$$

avec :$P_{ch2f} = U_{C2}\, i_{ch2_f}$.

En substituant l'équation (3-17) dans (3-15) et supposant $\dot{y}_{C2ref} = 0$, on obtient :

$$\dot{y}_{C2} = -U_{C2}\,\alpha\, i_f + 2\zeta\omega_n\left(y_{C2ref} - y_{C2}\right) + {\omega_n}^2 \int_0^t \left(y_{C2ref} - y_{C2}\right)dt + U_{C2}\, i_{ch2_f} \tag{3-18}$$

En combinant les relations (3-5) et (3-13), on en déduit l'expression des tensions aux bornes des capacités C_1 et C_2 :

$$\begin{cases} U_{C1} = \dfrac{q_1}{C_1} \\ U_{C2} = \sqrt{\dfrac{2\, y_{C2}}{C_2}} \end{cases} \tag{3-19}$$

On peut ainsi définir un vecteur d'état $X \in \mathbb{R}^7$ de la forme :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_f \\ q_1 \\ \int_0^t (q_{1ref} - q_1)(\tau) d\tau \\ y_{C_2} \\ \int_0^t (y_{C_2} - y_{2ref})(\tau) d\tau \\ i_{ch_{2f}} \\ \int_0^t (i_f - i_{ref})(\tau) d\tau \end{bmatrix} \tag{3-20}$$

A partir des relations (3-4), (3-11), (3-12), (3-14), (3-16), (3-18) et (3-19), on peut définir le modèle d'état, au sens des valeurs moyennes sur une période de découpage, sous la forme :

$$\dot{X} = H(X, \alpha) = \begin{bmatrix} \dfrac{-R_{Lf}}{L_f} X_1 - \dfrac{1}{L_f} \dfrac{X_2}{C_1} + \dfrac{V_S}{L_f} + \dfrac{\alpha}{L_f} \sqrt{\dfrac{2X_4}{C_2}} \\ X_1 \\ -X_2 + q_{1ref} \\ -X_1\, \alpha \sqrt{\dfrac{2X_4}{C_2}} - 2\, \zeta\, \omega_n\, X_4 + 2\zeta \omega_n y_{2ref} - {\omega_n}^2\, X_5 + X_6 \sqrt{\dfrac{2X_4}{C_2}} \\ X_4 - y_{2ref} \\ \dfrac{\alpha\, X_1}{T_2} - \dfrac{X_6}{T_2} \\ X_1 - 2\, \zeta_f\, \omega_{nf}\, (q_{1ref} - X_2) - {\omega_{nf}}^2 X_3 \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

Comme détaillé dans les chapitres précédents, la loi de commande associée au régulateur de courant hybride à top d'amorçage est défini par :

$$s(X, \alpha) = 0 \quad \forall (X, \alpha) \in \mathbb{R}^7 \times [0,1] \tag{3-22}$$

où

$$s(X, \alpha) = I_P - i_{ref} + K_i \left(X_7 + \underbrace{\int_0^{\alpha\, T} (X_1 - i_{ref})(\tau)\, d\tau}_{B1} \right) - m_c \left(\frac{T}{2} - \alpha\, T \right)$$

L'expression de i_{ref} est définie dans la relation (3-11).

Le terme I_P, est la valeur maximale du courant dans l'inductance du filtre i_f. Comme détaillé dans le chapitre 2, en régime permanent, l'ondulation de courant au début Δi_1 et à la fin de la période de découpage Δi_2 peuvent être définies par :

$$\begin{cases} \Delta i_1 = m_1 \alpha T \,, m_1 = \dfrac{V_s - R_{Lf}\, X_1 - U_{C1} + U_{C2}}{L_f} \\ \Delta i_2 = m_2 (1-\alpha) T, m_2 = -\dfrac{V_s - U_{C1} - R_{Lf}\, X_1}{L_f} \end{cases} \tag{3-23}$$

En utilisant les équations (3-19), (3-20) et (3-23), on peut exprimer la valeur maximale du courant I_P en fonction des variables d'état du système :

$$I_P = \frac{1}{2\, L_f}\left(2\, L_f\, X_1 + (1-\alpha)\alpha\, T \sqrt{\frac{2\, X_4}{C_2}}\right) \tag{3-24}$$

Comme détaillé dans le chapitre 2, le terme $B1$ de la relation (3-22) peut être défini par la relation suivante :

$$B1 = \int_0^{\alpha\, T} \left(X_1 - i_{ref}\right) d\tau \;\approx \left(X_1 - i_{ref}\right) \alpha\, T + A1 \tag{3-25}$$

avec

$$A1 = \frac{(1 - 2\alpha + 2\alpha^2\,)T^2}{4\, L_f}\left(U_{C1} - \alpha\, U_{C2} + R_{Lf}\, X_1 - V_S\right)$$

$$= \frac{(1 - 2\alpha + 2\alpha^2\,)T^2}{4\, L_f}\left(\frac{X_2}{C_1} - \alpha\sqrt{\frac{2X_4}{C_2}} + R_{Lf} X_1 - V_S\right)$$

Le terme $A1$ est nul en régime permanent, mais essentielle pour l'étude des cycles limites.

Si on considère un point d'équilibre (X_0, α_0) et une petite perturbation autour de ce point dans l'équation (3-21), on peut obtenir :

$$\dot{X} = H(X_0 + dX, \alpha_0 + d\alpha)$$

$$\dot{X} = H(X_0, \alpha_0) + \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha_0)} dX + \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)_{(X_0,\alpha_0)} d\alpha \tag{3-26}$$

avec $H(X_0, \alpha_0) = 0$.
La relation (3-22) mène à :

$$\frac{\partial s}{\partial X}\, dX + \frac{\partial s}{\partial \alpha}\, d\alpha = 0 \rightarrow d\alpha = -\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s}{\partial X}\right)(dX) \tag{3-27}$$

avec $\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ non singulier.

En substituant (3-27) in (3-26), on obtient :

$$\dot{X} = \left(\frac{\partial H}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial X}\right)_{(X_0,\alpha_0)} dX = J(X_0,\alpha_0)dX \tag{3-28}$$

L'expression de la matrice jacobienne peut être définie par :

$$J = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial H1}{\partial X_1} - \frac{\partial H1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial X_1}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial H1}{\partial X_7} - \frac{\partial H1}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial X_7}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{\partial H7}{\partial X_1} - \frac{\partial H7}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial X}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial H7}{\partial X_7} - \frac{\partial H7}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^{-1}\frac{\partial s}{\partial X_7}\right) \end{bmatrix}_{7\times 7}$$

En utilisant les paramètres du système donnés dans le Tableau 3-1, l'évolution de la partie réelle des valeurs propres de J en fonction du paramètre m_c est représentée sur la Figure 3-8.

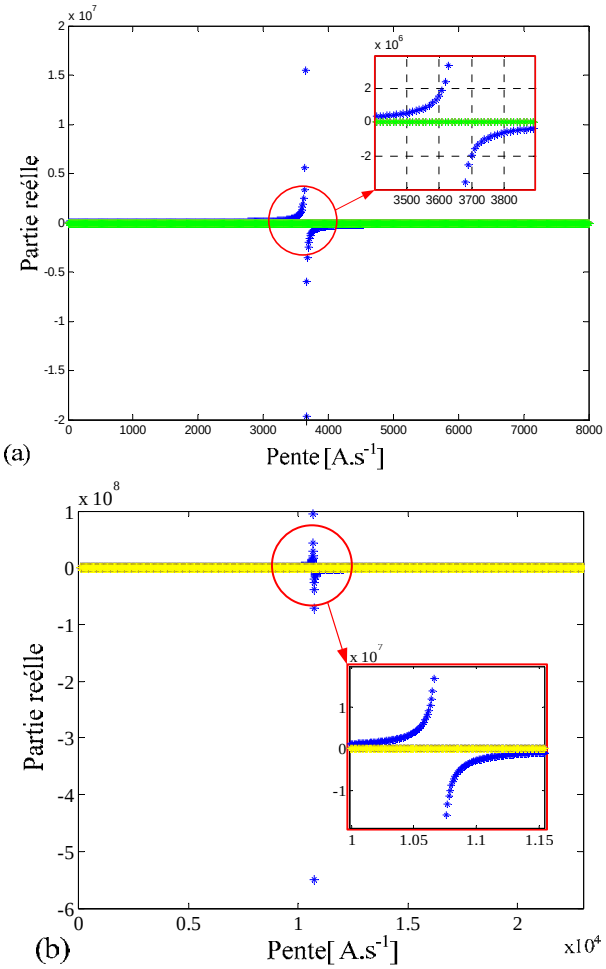


Figure 3-8 : Evolution des valeurs propres (a) $K_i = 1260\ rad \cdot s^{-1}$ lorsque m_c varie de 0 à $8000A \cdot s^{-1}$ (b) $K_i = 22500\ rad \cdot s^{-1}$ lorsque m_c varie de 0 à $23000A \cdot s^{-1}$.

Les valeurs de m_{c0} obtenue grâce au diagramme de bifurcation de la Figure 3-7 et au modèle moyen sont identiques. Ainsi, ces résultats nous permettent de valider la modélisation proposée.

Etude de la robustesse

On étudie les propriétés de robustesse du système en étudiant les valeurs propres de la matrice jacobienne lorsque les valeurs de l'inductance L_f et de la résistance R_{Lf} varient :

$$\begin{cases} L_f = L_f(1+\Delta L_f), -50\% \leq \Delta L_f \leq 50\% \\ R_{Lf} = R_{Lf}(1+\Delta R_{Lf}), -50\% \leq \Delta R_{Lf} \leq 50\% \end{cases} \quad (3\text{-}29)$$

On fixe la valeur de paramètre de bifurcation m_c à $7500A \cdot s^{-1}$. La Figure 3-9 montre que les valeurs propres restent à partie réelle négative.

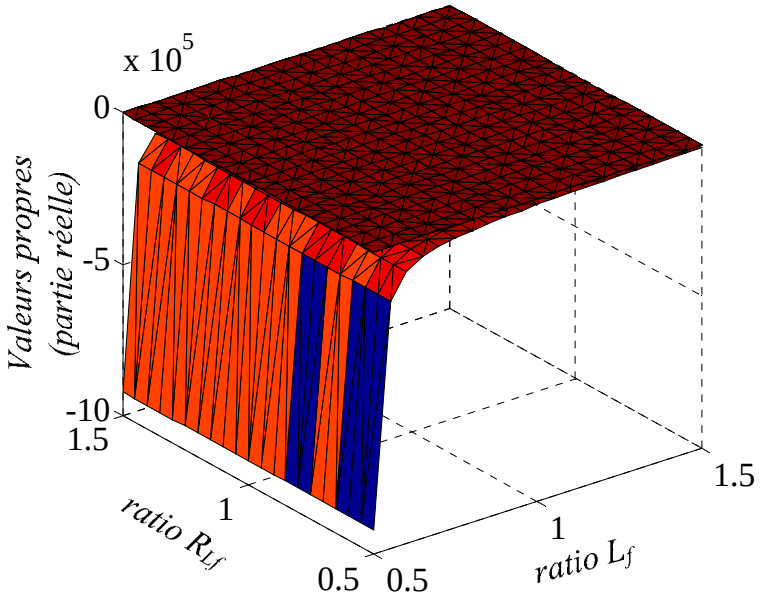


Figure 3-9 : Evolution des valeurs propres lorsque l'inductanceL_f et résistance R_{Lf} varient pour essai 1, avec $U_{C1} = 43.2V$,$U_{C2} = 27V$ et $m_c = 7500A \cdot s^{-1}$.

Maintenant, nous comparons m_{c0} obtenu par deux méthodes différentes : le diagramme de bifurcation obtenu par simulation numérique (m_{c0a}) et le modèle moyen (m_{c0b}) pour plusieurs valeurs de l'inductance (L_f).Les paramètres du système sont présentés dans le Tableau 3-2. L'erreur relative est calculée en utilisant $\left(\frac{m_{c0b}-m_{c0a}}{m_{c0a}}\right) \times 100$. L'erreur entre deux méthodes est faible, ce qui permet de valider le modèle proposé.

Descriptions		$1.2L_f$	$1.3L_f$	$1.4L_f$	$1.5L_f$	$0.5L_f$	$0.33L_f$
m_{c0} $(A \cdot s^{-1})$	m_{c0a}	2980	2750	2560	2390	6900	10300
	m_{c0b}	3082	2850	2648	2475	7100	10660
Erreur relative		3.4%	3.6%	3.4%	3.5%	2.9%	3.4%

Tableau 3-2 : Comparaison du point de bifurcation obtenu avec le diagramme de bifurcation et modèle moyen.

B. Structure à deux convertisseurs isolés

Le modèle moyen proposé va être appliqué dans le cas de la structure du système de filtrage actif utilisant deux convertisseurs isolés pour asservir les tensions des capacités à leur référence. On peut définir le vecteur d'état du système $X \in \mathbb{R}^8$ comme suit :

$$[X] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_f \\ y_{C_1} \\ \int_0^t (y_{C_1} - y_{1ref})(\tau)d\tau \\ y_{C_2} \\ \int_0^t (y_{C_2} - y_{2ref})(\tau)d\tau \\ i_{ch_{1f}} \\ i_{ch_{2f}} \\ \int_0^t (i_f - i_{ref})(\tau)d\tau \end{bmatrix} \tag{3-30}$$

Les équations différentielles peuvent être mises sous la forme :

$$\dot{X} = H(X,\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{-R_{Lf}}{L_f} X_1 - \frac{1}{L_f}\frac{X_2}{C_1} + \frac{V_S}{L_f} + \frac{\alpha}{L_f}\sqrt{\frac{2X_4}{C_2}} \\ X_1\sqrt{\frac{2X_2}{C_1}} - 2\zeta\omega_n X_2 + 2\zeta\omega_n y_{1ref} - {\omega_n}^2 X_3 + X_6\sqrt{\frac{2X_2}{C_1}} \\ X_2 - y_{1ref} \\ -X_1\,\alpha\sqrt{\frac{2X_4}{C_2}} - 2\,\zeta\omega_n\, X_4 + 2\zeta\omega_n y_{2ref} - {\omega_n}^2\, X_5 + X_7\sqrt{\frac{2X_4}{C_2}} \\ X_4 - y_{2ref} \\ -\frac{X_1}{T_1} - \frac{X_6}{T_1} \\ \frac{\alpha\, X_1}{T_2} - \frac{X_7}{T_2} \\ X_1 - i_{ref} \end{bmatrix} \tag{3-31}$$

Les équations sont calculées de la même manière que pour la stratégie précédente.

3.4. Résultats de simulation

Le filtre actif associé à un convertisseur boost a été simulé dans le cas des deux stratégies à l'aide de Matlab / Simulink. Cependant, nous ne présenterons que les résultats obtenus pour la stratégie n'utilisant qu'un convertisseur isolé.

La Figure 3-10 montre les formes d'onde des courants en régime permanent. Les ondulations du courant du filtre i_f sont inversées par rapport à celles du courant du convertisseur boost i_L. Par conséquent, le courant de source i_s est constant.

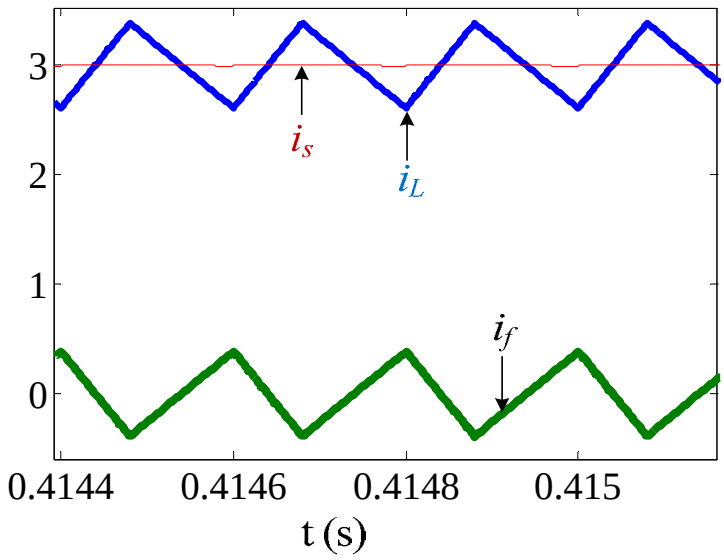


Figure 3-10 : Formes d'onde du courant du filtre i_f, du courant de source i_s et du courant de boost i_L.

Sur la Figure 3-11 est représenté le courant dans les différents éléments du système lorsque la tension de sortie du convertisseur principal varie. On observe que le filtre actif permet également de filtrer les ondulations de courant en régime transitoire.

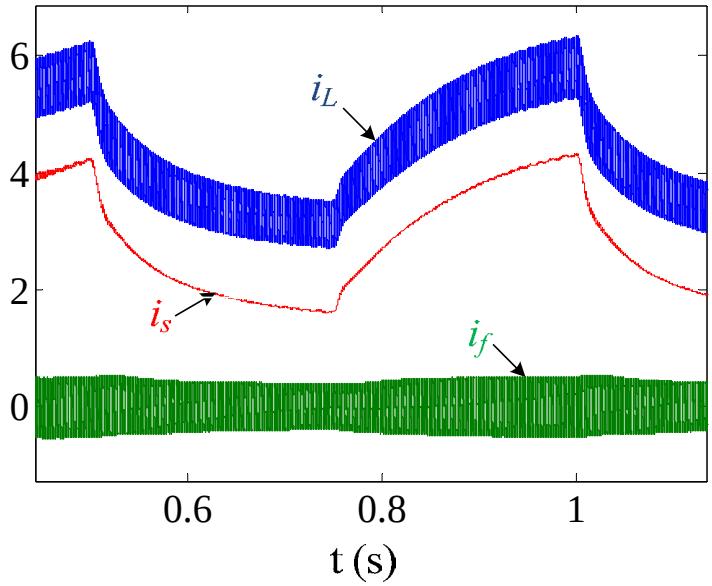


Figure 3-11 : Comportement des courants du système en régime dynamique.

Pour étudier la nature du cycle limite du système, deux essais sont réalisés. Les paramètres des deux systèmes sont détaillés dans le Tableau 3-1. Pour chaque essai, le paramètre de bifurcation m_c varie pour montrer les comportements périodique, double et chaotique de la boucle de courant. Le premier essai est illustré sur la Figure 3-12, pour $m_c = 3800\ A \cdot s^{-1}$. On observe un comportement régulier de la boucle de courant. On se trouve donc bien dans le cas d'un cycle mono-périodique de la boucle de courant. Lorsque $m_c = 3500\ A \cdot s^{-1}$, on obtient un cycle double et pour $m_c = 1500\ A \cdot s^{-1}$, on observe un cycle chaotique de la boucle de courant.

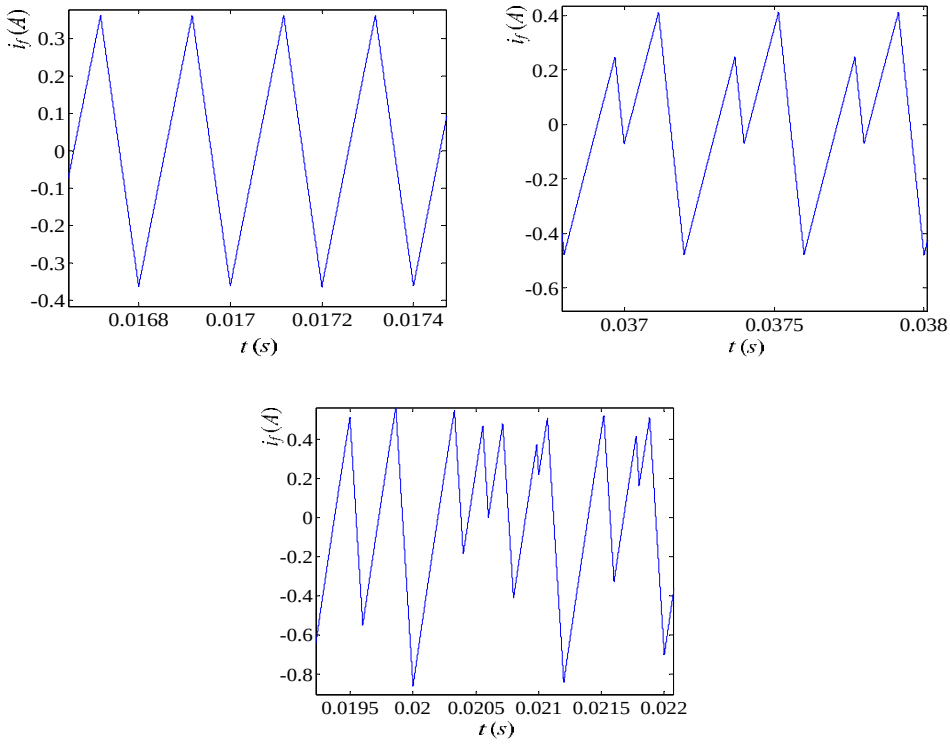


Figure 3-12: Forme d'onde du courant du filtre actif i_f avec $m_c = 3800\ A \cdot s^{-1}$, $m_c = 3500\ A \cdot s^{-1}$ et $m_c = 1500\ A \cdot s^{-1}$ pour l'essai 1.

Les comportements du système pour l'essai 2 sont présentés dans la Figure 3-13 pour m_c égale à $11000\ A \cdot s^{-1}$, $8000\ A \cdot s^{-1}$ and $4000\ A \cdot s^{-1}$, respectivement. Ces résultats correspondent aux diagrammes de bifurcation de la Figure 3-7.

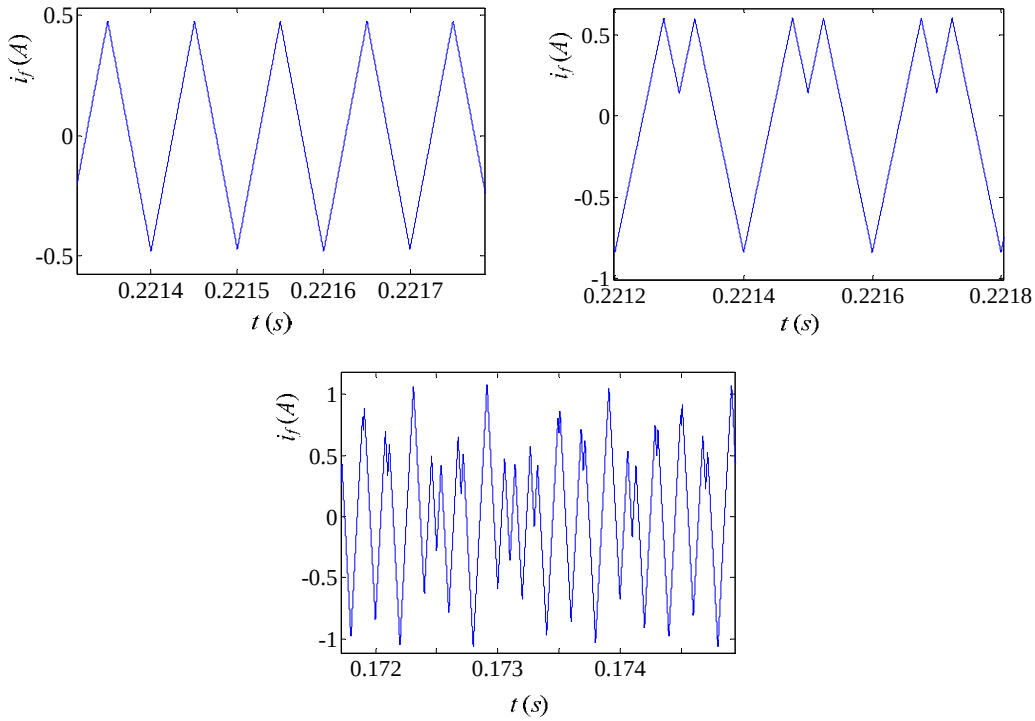


Figure 3-13 : Forme d'onde du courant du filtre actif i_f avec $m_c = 11000\ A \cdot s^{-1}$, $m_c = 8000\ A \cdot s^{-1}$ et $m_c = 4000\ A \cdot s^{-1}$ pour l'essai 2.

3.5. Résultats expérimentaux

Afin de valider le modèle moyen proposé, un banc d'essai de 1 kW a été mis en œuvre. Le banc d'essai, présenté dans la Figure 3-14, se compose de trois convertisseurs (convertisseur boost, filtre actif et Flyback), un oscilloscope numérique, un système de contrôle temps réel de chez dSPACE, deux régulateurs de courant réalisés avec des circuits analogiques. Pratiquement, les boucles de courant ont une bande passante plus élevée que celle des boucles de la tension. Le convertisseur principal est un convertisseur boost qui fonctionne en mode de conduction continu. Pour le filtre actif, les contrôles de tension de condensateur U_{C1} et U_{C2} sont construits en utilisant logiciel Matlab-RTW avec le système dSPACE 1103.

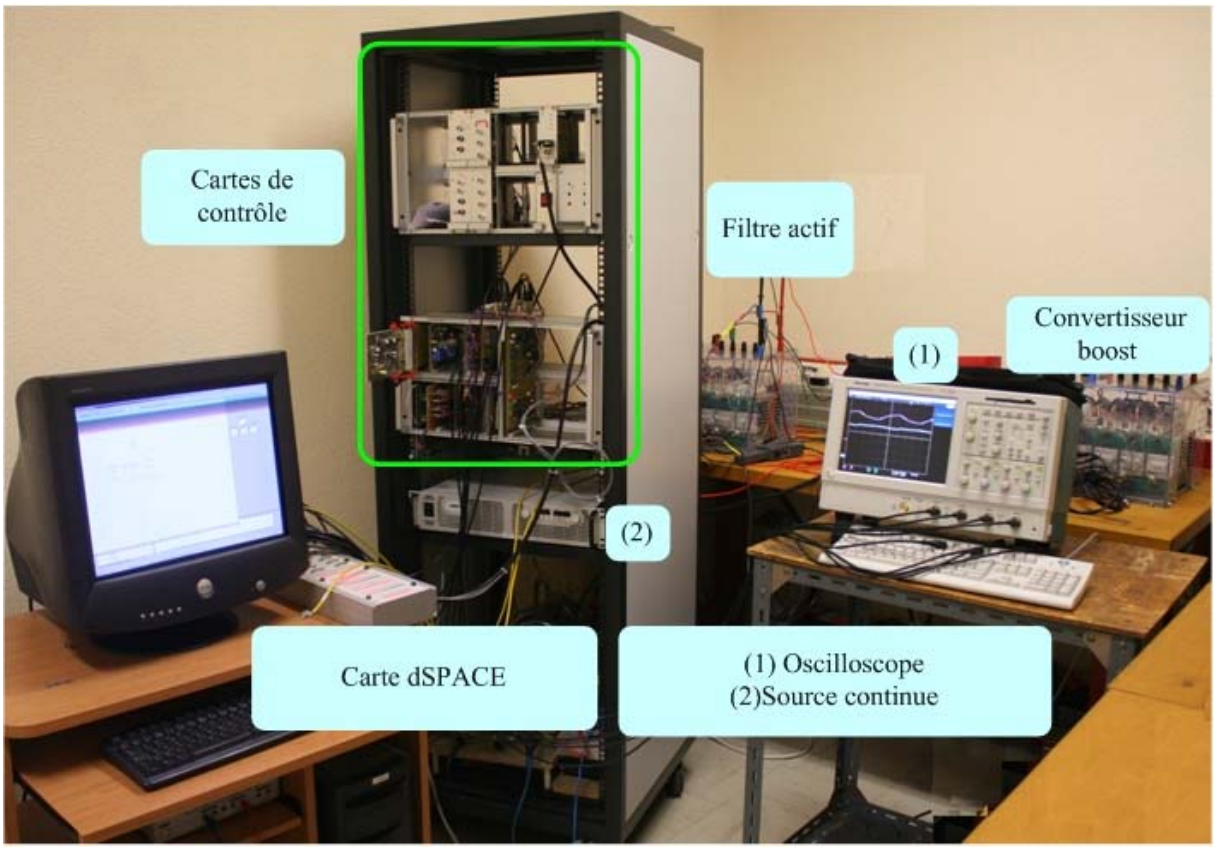


Figure 3-14 : Banc de test du convertisseur principal avec le filtre actif.

Comme précédemment, deux tests sont effectués. Les paramètres du système sont ceux donnés dans le Tableau 3-1. La Figure 3-15 montre les formes d'onde de i_L, i_f et i_s. Les courants i_L et i_f sont en opposition de phase et par conséquent, l'ondulation de courant de i_s est réduite d'environ 80% par rapport à l'ondulation de courant initiale.

Pour démontrer les comportements dynamiques de i_L, i_f, i_s, U_{C1} et U_{C2}, la tension de sortie du convertisseur boost varie. Comme le montre la Figure 3-16, deux zooms sont données pour une évolution croissante (A) et décroissante (B) de la tension de sortie.

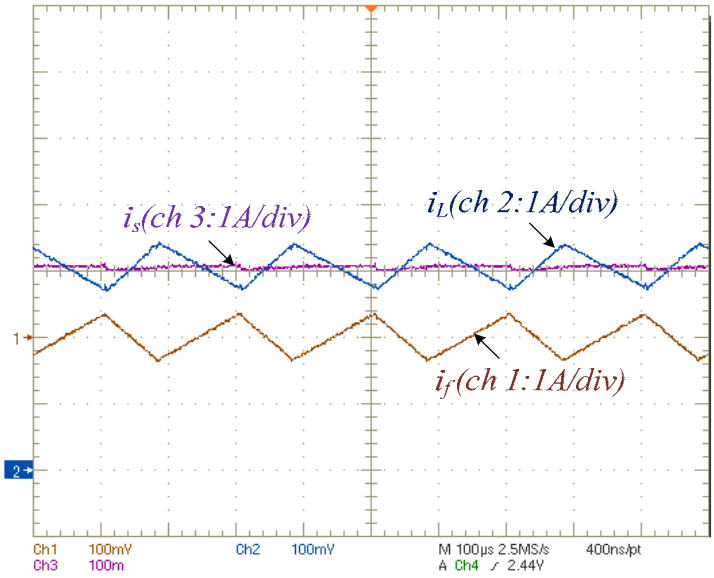


Figure 3-15 : Formes d'onde des courants i_L, i_f et i_s.

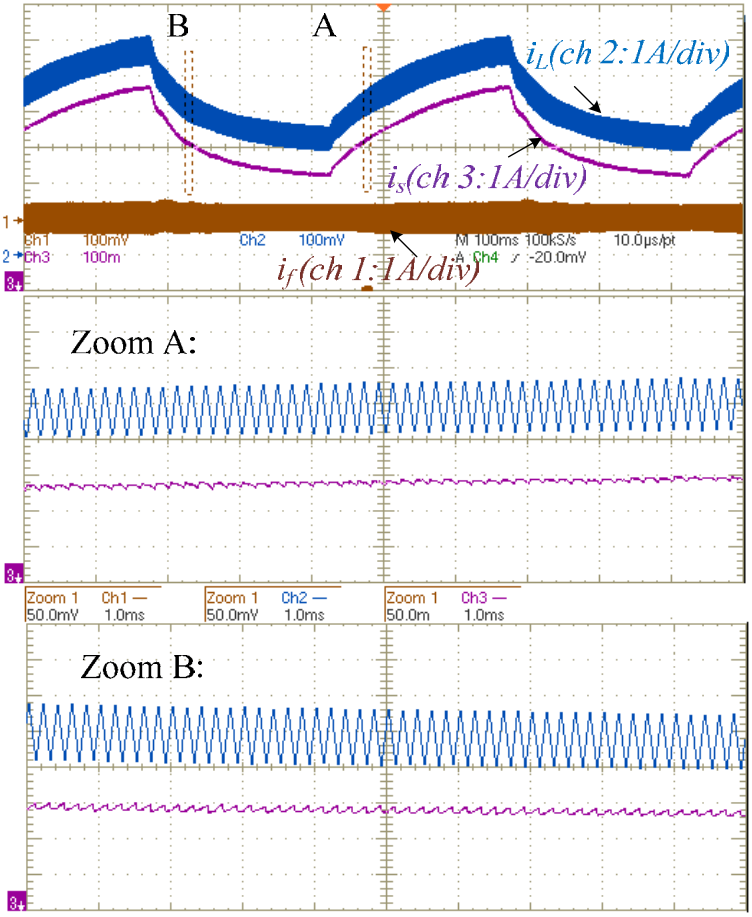


Figure 3-16 : Comportement des courants du système obtenu par expérimentation pour variation du rapport cyclique de 0,4 à 0,6.

La Figure 3-17 montre l'évolution des tensions U_{C1} et U_{C2} et leurs références lorsque la tension de sortie du convertisseur boost varie. Les deux tensions suivent bien leurs références.

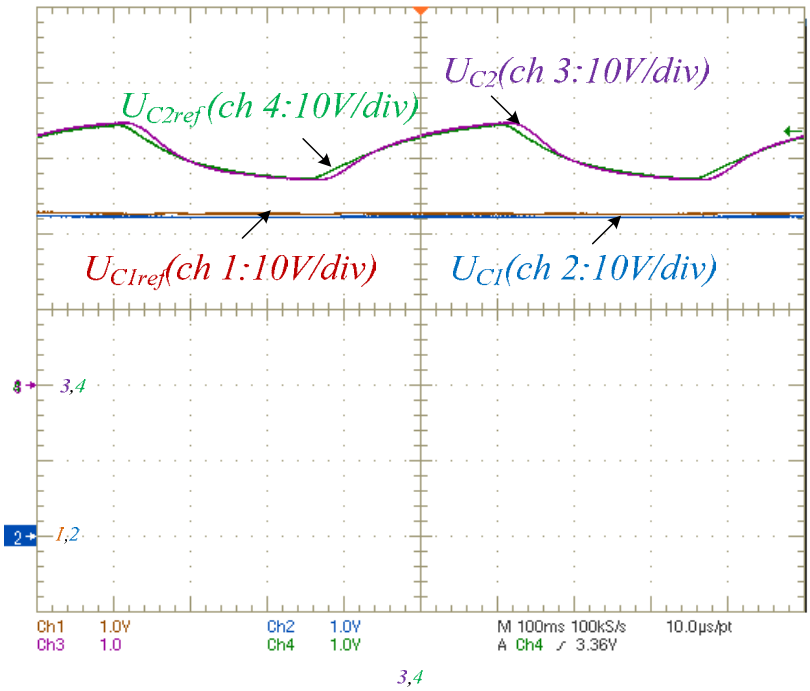


Figure 3-17 : Comportement des tensions U_{C1} et U_{C1} comparé avec leurs références en variant du rapport cyclique de 0.4 à 0.6.

Pour valider les résultats de la simulation, trois formes d'onde de courant pour les comportements périodique, double et chaotique sont données pour $m_c = 3800\ A \cdot s^{-1}$, $m_c = 3500\ A \cdot s^{-1}$ et $m_c = 1500\ A \cdot s^{-1}$ sur la Figure 3-18, Figure 3-19 et Figure 3-20, respectivement. On obtient donc un comportement identique à celui prédit par le modèle moyen ainsi que par la simulation numérique.

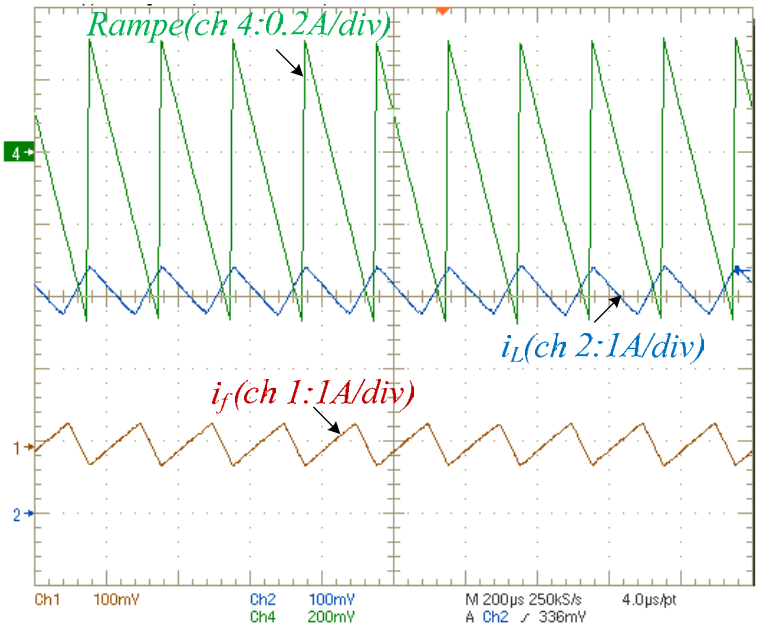


Figure 3-18 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 3800\ A \cdot s^{-1}$.

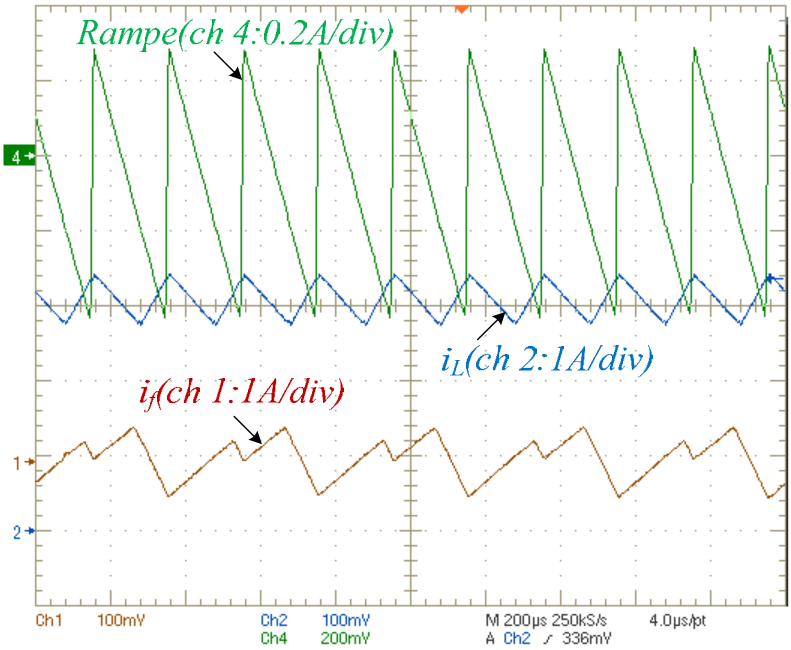


Figure 3-19 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 3500\ A \cdot s^{-1}$.

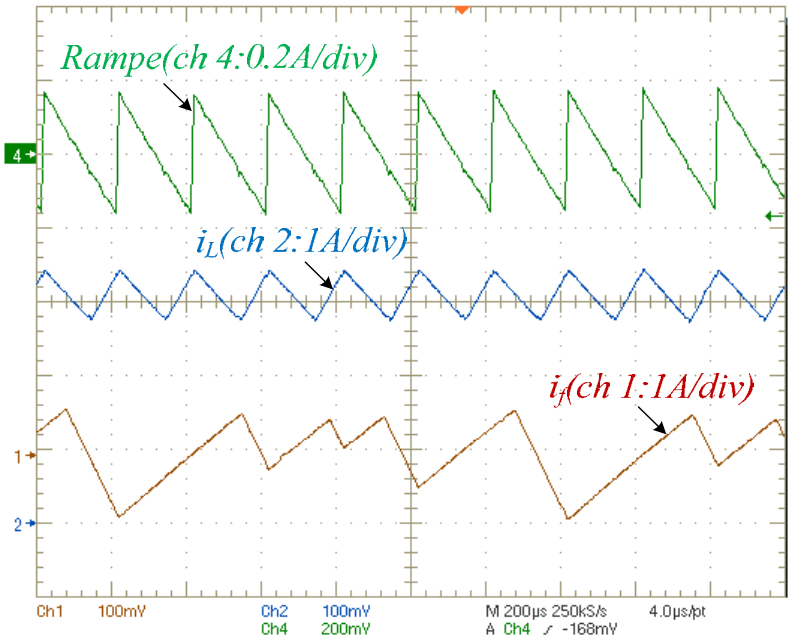


Figure 3-20 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 1500\ A \cdot s^{-1}$.

En utilisant le deuxième jeu de paramètre détaillé dans le Tableau 3-1 on obtient les formes d'onde présentées sur les figures ci-après. Comme précédemment la valeur de m_c est modifié afin de représenter le comportement de la boucle de courant pour des cycles mon-périodique, double et chaotiques. Dans ce test, nous avons constaté que ces opérations se déroulent pour $m_c = 3800\ A \cdot s^{-1}$, $m_c = 3500\ A \cdot s^{-1}$ et $m_c = 1500\ A \cdot s^{-1}$ comme le montre la Figure 3-21, Figure 3-22 et Figure 3-23, respectivement.

Les deux formes d'onde expérimentales des essais 1 et 2 données dans cette section vérifient l'étude théorique et les résultats de simulation.

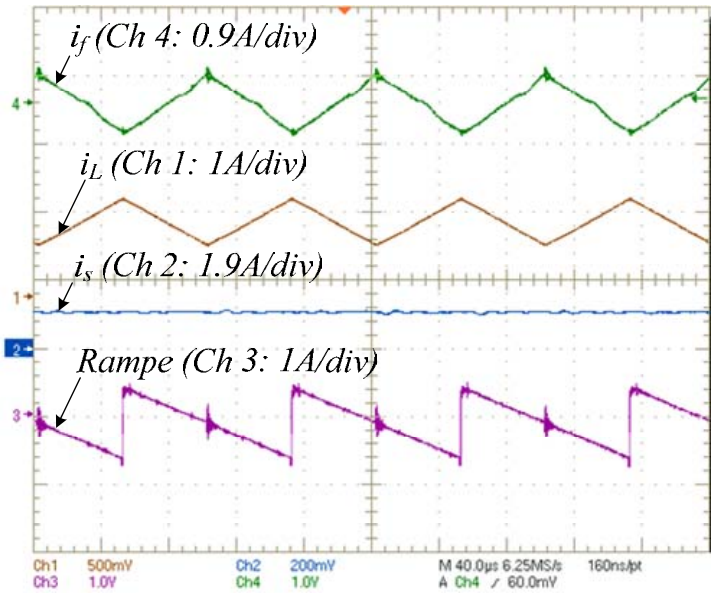


Figure 3-21 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 11000\ A \cdot s^{-1}$.

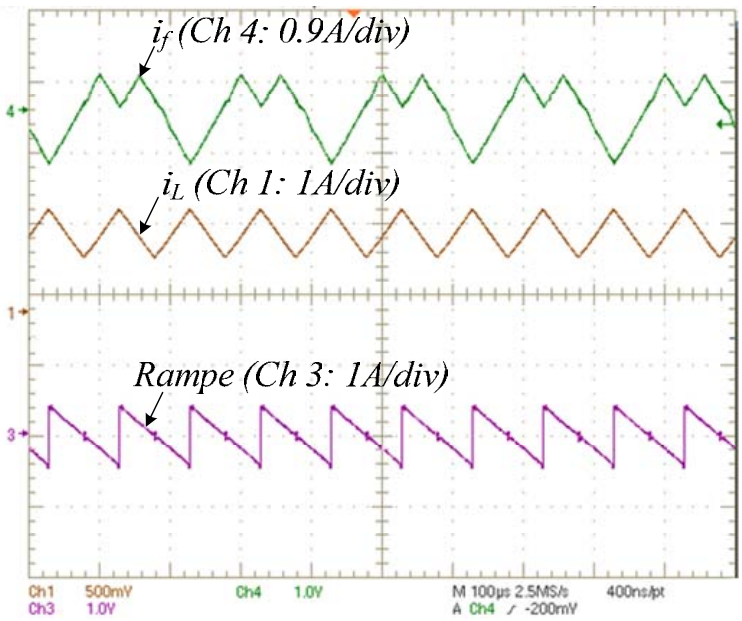


Figure 3-22 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 8000\ A \cdot s^{-1}$.

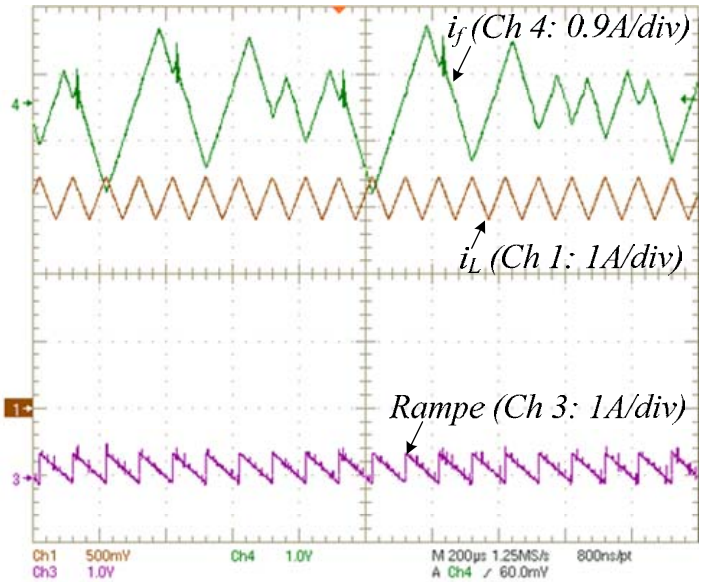


Figure 3-23 : Formes d'onde du courant i_f, i_L, et de la rampe de compensation pour $m_c = 4000\ A \cdot s^{-1}$.

3.6. Conclusion

En règle générale, les valeurs des points de bifurcation obtenus en utilisant le modèle discret et la simulation du fonctionnement séquentiel du convertisseur sont voisines. Toutefois, pour certains systèmes particuliers, le modèle discret ne peut pas être établi facilement.

C'est le cas pour le filtre actif considéré utilisant un régulateur hybride de courant, et nous avons montré que le modèle moyen proposé au chapitre 2 permettait d'estimer avec une bonne précision le premier point de bifurcation pour deux paramètres du dispositif : le terme intégral et la pente de la rampe de compensation du contrôleur de courant. Les différents résultats obtenus ont été validés par simulation et expérimentalement.

Chapitre 4
Comportement dynamique des bus DC connectés à des convertisseurs statiques

4.1. Introduction

Dans certaines applications comme dans les systèmes distribués de puissance, des filtres LC sont utilisés afin de respecter des contraintes sur les courants et les tensions du réseau DC. Pour ces applications embarquées, l'un des objectifs est de réduire le cout, le poids et le volume de ces organes de filtrage. Cela implique l'utilisation de faibles valeurs des composants passifs. La réduction des capacités de filtrage est l'une des solutions proposées. Néanmoins, une diminution de la valeur de capacité va automatiquement se traduire (à inductance constante) par une augmentation de la fréquence de coupure du filtre. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la stabilité du système en particulier lorsque la fréquence de coupure du filtre LC est proche de la fréquence apparente de commutation. Pour un tel système, les outils classiques basés sur la modélisation au sens des grandeurs moyennes [Rou 07], [Bel 95] ne peuvent plus être utilisés pour étudier ses propriétés de stabilité.

La perte de la stabilité du système correspond alors à une bifurcation qui peut être étudiée par une analyse de cycle limite. Dans ce chapitre, nous développons une modélisation analytique qui prend en compte l'effet de commutation généré par les dispositifs électroniques de puissance et permet l'étude des propriétés de stabilité du système. Les modèles développés ne consistent pas seulement dans la création de diagrammes de bifurcation, ils permettent aussi d'obtenir une expression analytique de la matrice Jacobienne du système. Il est ensuite possible d'étudier la robustesse du système vis-à-vis de variations paramétriques.

Deux types de modèles discrets vont être présentés afin d'analyser la stabilité lorsque les effets de commutation ne peuvent plus être négligés. Dans un premier temps, un modèle non-échantillonné du système est développé. Les applications modélisées ici correspondent à des systèmes électriques pour lesquels la commande est continue. Dans un deuxième temps, nous proposerons un modèle discret échantillonné correspondant aux systèmes électriques échantillonnés pour lesquels la commande n'est modifiée qu'une fois par période de découpage.

4.1.1. Nature de la charge

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux structures de puissance fonctionnant à puissance constante telles que les actionneurs ou les convertisseurs statiques régulés respectivement en couple/vitesse ou courant/tension. Ces dispositifs électriques sont supposés être alimentés par une source de tension continue.

Un schéma de principe des systèmes étudiés est présenté sur la Figure 4-1.

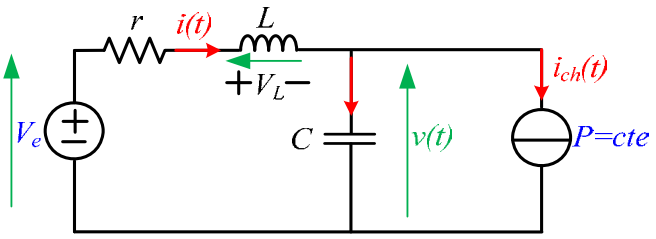


Figure 4-1 : Schéma de principe du système électrique considéré.

Ce système est composé d'une source de tension alimentant via un filtre d'ordre deux amorti, une charge fonctionnant à puissance constante.

Approche classique

Supposons que la fréquence de coupure du filtre d'entrée est bien inférieure à la fréquence apparente de découpage (fréquence du courant de charge i_{ch}), ce qui permet d'utiliser une modélisation au sens des grandeurs moyennes du système.

L'allure du courant de charge moyen et de la tension moyenne est présentée sur la Figure 4-2.

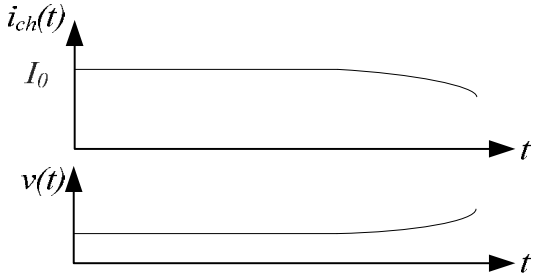


Figure 4-2 : Evolution du courant moyen et de la tension moyenne.

Une augmentation de la tension aux bornes de la capacité conduit à une diminution du courant de charge et vice versa.

Prise en compte des effets de découpage des semi-conducteurs

On considère ici que la fréquence de coupure du filtre d'entrée est voisine de la fréquence apparente de découpage. L'effet de découpage des interrupteurs n'est alors plus négligeable et il est donc nécessaire de définir une modélisation de la charge permettant d'appréhender les phénomènes liés à la stabilité du système. Dans le cadre de cette étude, le courant de charge sera supposé être discontinu et son allure générale est présentée sur la Figure 4-3.

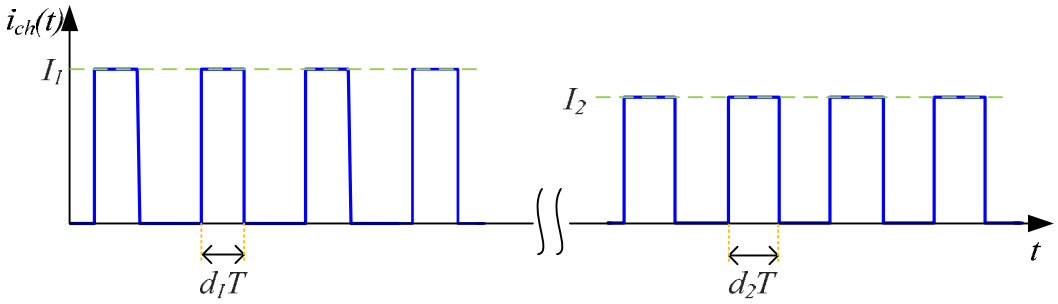


Figure 4-3 : Modélisation de la charge avec prise en compte des effets de découpage.

Afin de justifier la modélisation utilisée pour l'allure du courant de charge, nous allons maintenant présenter les formes d'onde de ce courant dans le cas de trois dispositifs électriques couramment utilisés dans les applications du génie électrique.

Exemple 1 : hacheur abaisseur sur une source de tension régulée en courant

Un schéma du convertisseur abaisseur avec son filtre d'entrée est présenté sur la Figure 4-4. On fait l'hypothèse que l'ondulation de courant i_b dans l'élément inductif du hacheur dû au

découpage de l'interrupteur K est négligeable. On suppose que le dimensionnement a été réalisé de manière à ce que le convertisseur fonctionne en mode de conduction continue. Le courant commuté est supposé constant ($I_0 = p/V_b$).

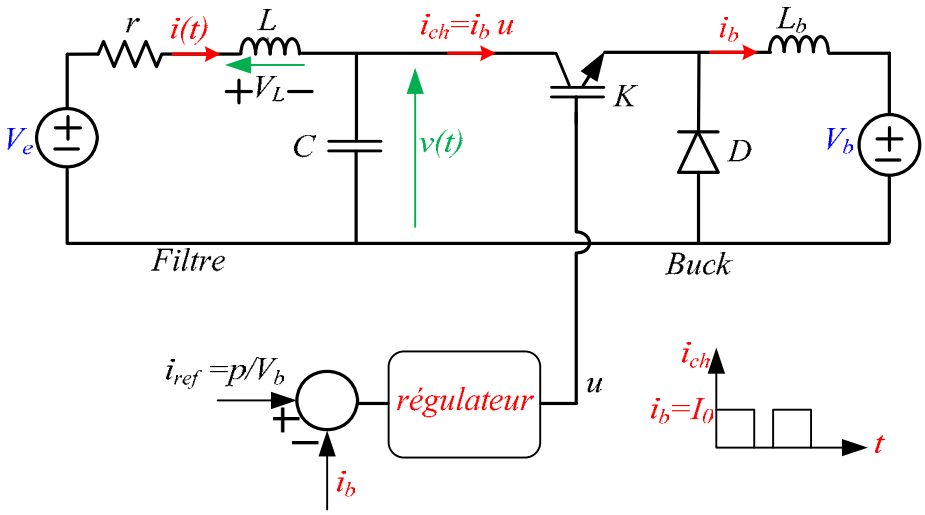


Figure 4-4 : Hacheur abaisseur sur une source de tension régulée en courant.

Pour le hacheur abaisseur, en régime établi, le rapport cyclique vérifie : $d = V_b/v(t)$. Par conséquent, vu du filtre d'entrée, toutes variations de tension d'entrée se traduisent par une variation du rapport cyclique, le niveau du courant commuté restant constant.

Si la tension d'entrée diminue, le rapport cyclique augmente pour maintenir la puissance fournie à la charge constante. Un exemple des formes d'onde pour deux niveaux de tension d'entrée, est présenté sur la Figure 4-5.

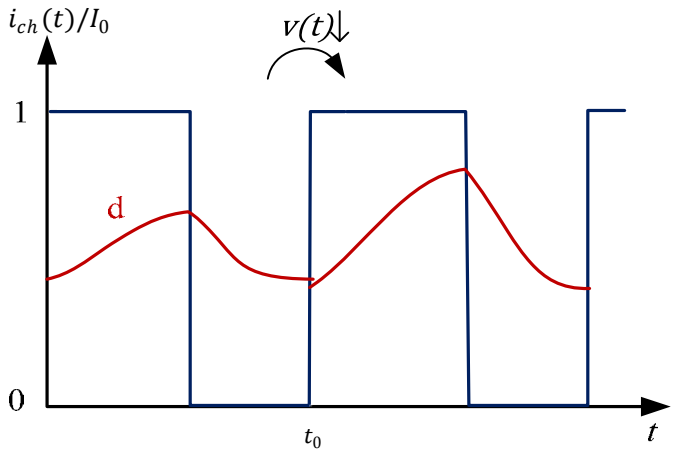


Figure 4-5 : Evolution du rapport cyclique pour deux niveaux de tension d'entrée.

Exemple 2 : cas d'un ensemble onduleur moteur contrôlé en couple

Le montage présenté dans la Figure 4-6 est constitué d'un redresseur PD3, d'un filtre d'ordre 2 et d'un actionneur à aimant (onduleur + MSAP). La source continue comprend trois étages : une source alternative, un redresseur à diodes et le filtre LC. On note v la tension du bus continu. Elle est utilisée pour alimenter l'onduleur de tension à commande par Modulation de Largeur d'Impulsions (MLI) échantillonné. L'échantillonnage est réalisé une fois par période

de découpage (synchronisation par rapport au signal MLI), tout comme la mise à jour des signaux de contrôle de l'onduleur.

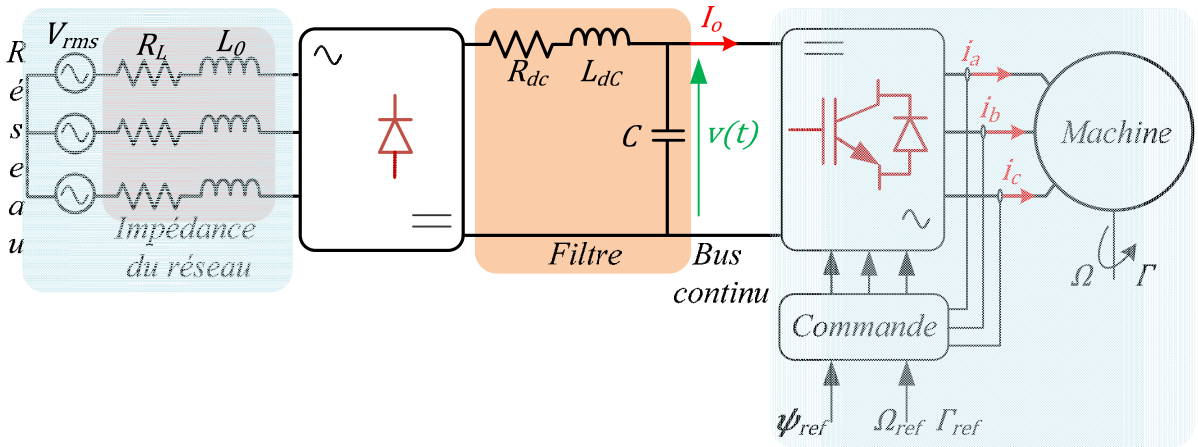


Figure 4-6 : Schéma de principe d'un actionneur électrique.

Il est à noter que les pertes dans l'onduleur sont supposées négligeables et que les entrées de commande (référence de couple, charge mécanique) sont constantes. On fait l'hypothèse que la tension du bus DC est suffisante pour assurer la contrôlabilité de l'actionneur. L'actionneur est contrôlé en couple, on suppose alors que $i_{dref} = 0$ et $i_{qref} = cte$ (où i_d et i_q sont les composantes directes et en quadrature du courant). Comme indiqué sur la Figure 4-7, le courant absorbé par l'onduleur sera modélisé par une forme d'onde discontinue, sa fréquence étant le double de la fréquence de découpage de l'onduleur. Le niveau de courant commuté est supposé constant et dépend uniquement de la puissance utile fournie par l'actionneur. Comme le montre la Figure 4-7, pour modéliser l'impact des variations de tension d'entrée sur le comportement de l'actionneur, le rapport cyclique est supposé pouvoir évoluer en début de chaque période de découpage suite à un changement de la valeur de tension d'alimentation.

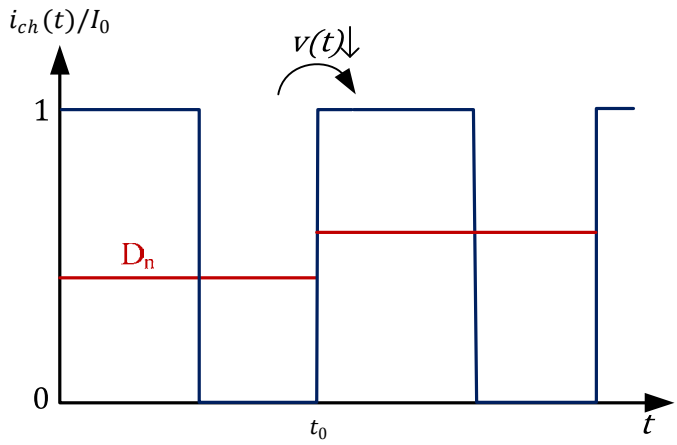


Figure 4-7 : Allure du courant absorbé par l'actionneur et valeur du rapport cyclique suite à une variation de la tension d'alimentation à $t = t_0$.

Exemple 3 : Hacheur buck/boost régulé en courant

Un convertisseur buck-boost régulé en tension avec son filtre d'entrée est présenté sur la Figure 4-8. Comme précédemment, le taux d'ondulation de courant dans l'élément inductif est supposée faible (période de découpage bien plus petite que la plus petite des constantes de

temps électrique du hacheur). On suppose de plus que le hacheur fonctionne en mode de conduction continue.

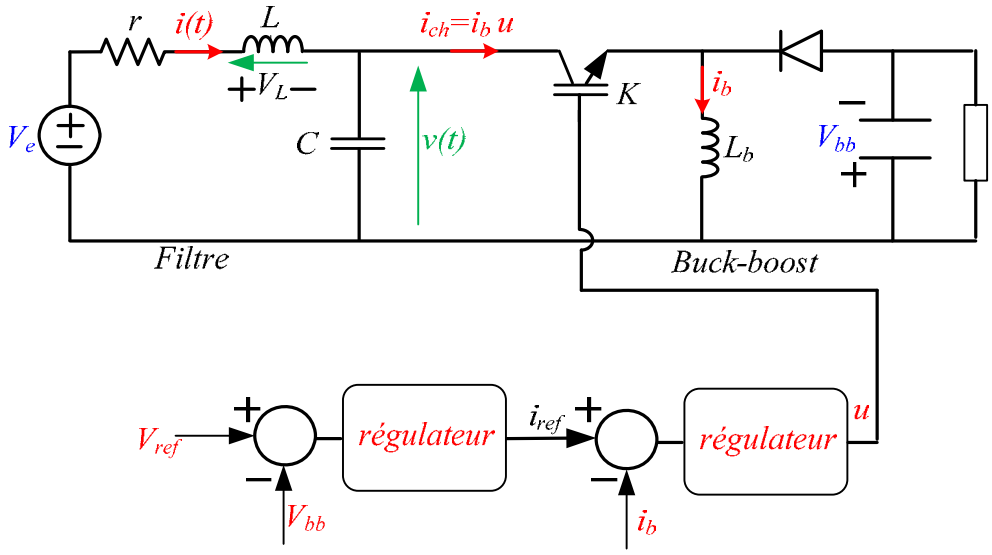


Figure 4-8 : Convertisseur de type buck-boost avec filtre d'entrée.

Pour ce système on peut écrire en régime établi : $d = V_{bb}/(v(t) + V_{bb})$. Tout changement sur le niveau de tension d'entrée se traduira alors par une variation du rapport cyclique. Hors la tension de sortie V_{bb} étant asservie à une référence V_{ref}, la puissance P fournie à la charge est constante et vérifie :

$$P = V_{ref}(1-d)i_b = V_{ref}\frac{v}{v+V_{ref}}i_b \tag{4-1}$$

On constate donc que lors d'une variation de tension d'entrée du hacheur, la durée de conduction mais aussi le niveau de courant varient ce qui correspond au cas général présenté sur la Figure 4-3. Ce type de système ne sera pas traité dans ce mémoire.

4.1.2. Présentation du système étudié et de sa modélisation

a. Présentation du système étudié

On étudie le système présenté sur la Figure 4-6. Vu du réseau DC, on peut considérer l'actionneur (ensemble onduleur-moteur) comme un dispositif absorbant une puissance constante. L'allure du courant absorbé sur l'étage continu sera d'une forme similaire à celui présenté sur la Figure 4-7.

b. Présentation de la modélisation du système pour l'analyse des cycles

Afin d'analyser la stabilité du bus continu, on décide de modéliser l'ensemble du système par le schéma électrique donné sur la Figure 4-1. On peut le considérer comme un modèle réduit du système. Un redresseur à six pulses peut être modélisé avec une bonne précision comme une source DC. Pour simplifier le modèle, l'ensemble source AC et redresseur est donc remplacé par une source DC équivalente. La tension continue V_e, l'inductance série équivalente L et la résistance r sont définies par les équations suivantes [Har 05],[Rou 07] :

$$\begin{cases} V_e = \dfrac{3\sqrt{6}}{\pi} V_{rms} \\ L = 2L_0 + L_{dc} \\ r = 2\,R_L + R_{dc} + \dfrac{3}{\pi} L_0 \omega \end{cases} \tag{4-2}$$

où le terme en $\frac{3}{\pi} L_0 \omega$ modélise le phénomène d'empiétement lors des commutations des diodes de redressement. Ce système est régi par les équations différentielles ordinaires suivantes :

$$\begin{cases} L \dfrac{di(t)}{dt} = V_e - r\,i(t) - v(t) \\ C \dfrac{dv(t)}{dt} = i(t) - \dfrac{p}{v(t)} \end{cases} \tag{4-3}$$

Modélisation de la non-réversibilité de la source

La diode est un élément très important lorsque l'on désire analyser la stabilité du système présenté sur la Figure 4-6. En effet, c'est en raison de la non-réversibilité de la source que lors de la perte de stabilité du point de fonctionnement, des cycles limites stables s'établissent. Si l'alimentation avait été réversible (batterie par exemple), la perte de stabilité du point d'équilibre se serait traduit par la divergence à l'infini des grandeurs d'états. Le comportement dynamique du système est donc fortement dépendent de la nature réversible ou non de la source. Dans le cas étudié, il est donc obligatoire d'intégrer dans la modélisation le phénomène de non réversibilité de la source due à la présence des diodes de redressement. Nous allons proposer deux méthodes pour modéliser leurs effets sur le comportement dynamique du système.

Proposition 1

On propose de modéliser leur effet par l'ajout dans le système d'une résistance non linéaire dont l'expression est donnée ci-dessous :

$$r_d = \frac{r_{max}}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - Arctan\big(dyn\,i(t)\big)\right] \tag{4-4}$$

où r_{max} représente la résistance à l'état bloqué des diodes de redressement et dyn est un paramètre de modélisation permettant de passer de manière continue de la valeur de résistance à l'état bloqué à celle à l'état passant (ici 0).

Sur la Figure 4-9 est présenté l'évolution de cette résistance en fonction du courant qui la traverse pour $r_{max} = 1000\ \Omega$ et $dyn = 100$.

En considérant cette résistance non linéaire, l'équation (4-3) devient :

$$\begin{cases} L \dfrac{di(t)}{dt} = V_e - r\,i(t) - r_d\,i(t) - v(t) \\ C \dfrac{dv(t)}{dt} = i(t) - i_{ch}(v,p) \end{cases} \tag{4-5}$$

i_{ch} est la fonction suivante, définie par morceaux:

$$i_{ch} = \begin{cases} I_0, & u = 1 \\ 0, & u = 0 \end{cases} \tag{4-6}$$

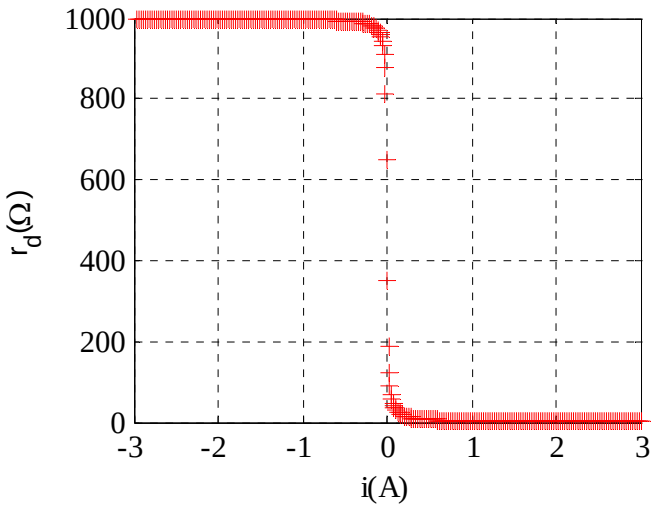


Figure 4-9 : Tracé de la résistance r_d modélisant l'effet des diodes de redressement.

Pour pouvoir étudier le comportement du système, il sera donc nécessaire dans une première étape de mettre sous forme d'état les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du système.

On présente les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L}\left(r + \frac{r_{max}}{2} - \frac{r_{max}}{\pi}\text{Arctan}\big(dyn\ i(t)\big)\right) & \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{4-7}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-I_0}{C} \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{V_e}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4-8}$$

L'équation différentielle peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = A(i)\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + M + B\,u \tag{4-9}$$

On définit $X = [i \quad v]^t$. En discrétisant chaque période de découpage T en N_p points et en posant $T_e = T/N_p$ on a :

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{T_e} = A(X_n)\,X_n + B\,u + M \tag{4-10}$$

On établit la suite récurrente qui lie les variables d'état à l'instant $n\,T + T_e$ avec celles à l'instant précédent $n\,T$. On va obtenir ainsi un processus itératif de la forme :

$$X_{n+k+1} = X_{n+k} + T_e(A\,X_{n+k} + Bu + M) = F(X_{n+k}); \forall k \in \{0, N_p - 1\}, u \in \{0,1\} \tag{4-11}$$

Proposition2

Soit r_{d1} la résistance de la diode quand elle est bloquée et r_{d2} la résistance quand elle conduit. On considère alors les matrices d'état suivantes permettant de mettre en équation le système pour les deux états des diodes de redressement :

$$A1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(r + r_{d1}) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, A2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}(r + r_{d2}) & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \tag{4-12}$$

et :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-I_0}{C} \end{bmatrix} \tag{4-13}$$

avec :

$$M1 = \begin{bmatrix} \frac{V_e - V_{0d1}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, M2 = \begin{bmatrix} \frac{V_e - V_{0d2}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} V_{0d1} = V_0 - r_{d1}\, i0 \\ V_{0d2} = V_0 - r_{d2}\, i0 \end{cases} \tag{4-14}$$

où V_0 représente la somme des tensions de seuil de deux diodes de redressement et $i0$ un paramètre de modélisation au-dessous duquel le pont de diode est considéré comme bloqué.

En définissant :

$$a(X) = \frac{1}{2}\left[1 + \tanh\big(dyn\,(i0 - i)\big)\right] \tag{4-15}$$

on peut écrire le système sous la forme :

$$\dot{X} = a\, f_1(X) + (1 - a)\, f_2(X) \tag{4-16}$$

où

$$\begin{cases} f_1(X) = A1\, X + B\, u + M1 \\ f_2(X) = A2\, X + B\, u + M2 \end{cases} \tag{4-17}$$

Comme on l'a vu pour la proposition 1 :

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{T_e} = a\, f_1(X_n) + (1 - a)\, f_2(X_n) \tag{4-18}$$

Après simplification, il vient alors :

$$X_{n+k+1} = F(X_{n+k}) \qquad \forall k \in \{0, N_p - 1\}, u \in \{0,1\} \tag{4-19}$$

Comparaison des deux propositions

Si on choisit les paramètres adéquats pour chacune des deux propositions, on peut obtenir les mêmes formes d'onde en courant et en tension.

Le nombre de points N_p nécessaire à la résolution numérique du système différentiel pour les deux propositions est sensiblement le même.

Bien que la première proposition n'utilise qu'une seule équation, la deuxième présente l'avantage de pouvoir tenir compte de la non-idéalité de la diode plus facilement.

c. Comparaison entre le modèle complet (onduleur + machine + filtre d'entrée) et le modèle réduit pour l'étude des cycles

On va comparer les formes d'onde obtenues en utilisant le modèle complet donné sur la Figure 4-6 simulé sous Matlab/simulink et le modèle réduit du système présenté sur la Figure 4-1.

Les Figure 4-10 et Figure 4-11 représentent les formes d'onde du courant et de la tension pour les différents modèles pour une puissance absorbée de $170W$. Comme le montrent ces résultats, même si la modélisation proposée n'est pas parfaite, elle permet néanmoins d'avoir une bonne image du comportement haute fréquence induit par les effets de découpage sur le bus continu.

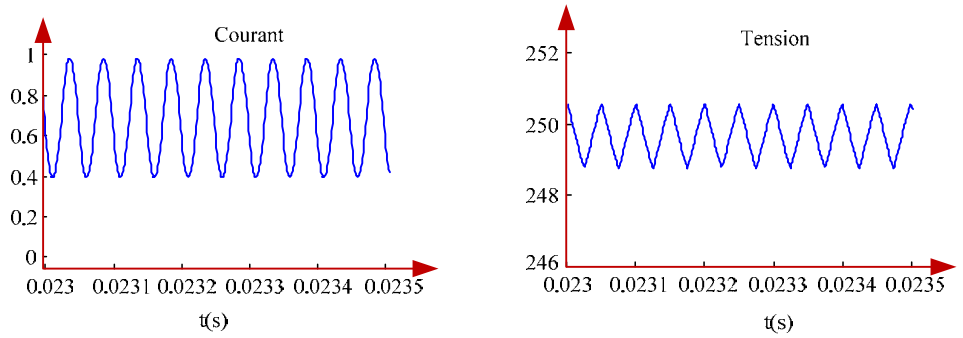


Figure 4-10 : Formes d'onde du courant (à gauche) et de la tension (à droite) obtenues en utilisant le modèle réduit, la diode étant modélisée comme détaillé dans la proposition 1.

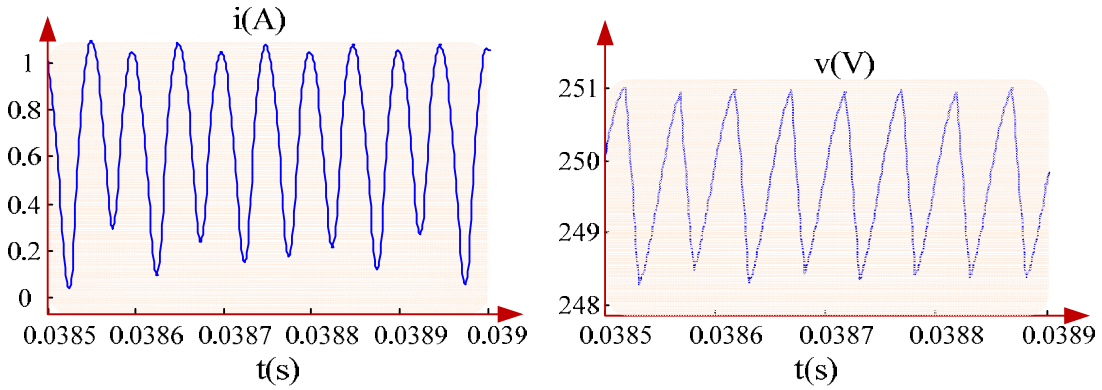


Figure 4-11 : Formes d'onde du courant (à gauche) et de la tension (à droite) obtenues à l'aide d'une simulation Matlab/Simulink de l'ensemble du système.

Un relevé expérimental a été effectué sur une maquette présente au laboratoire ayant les mêmes paramètres que ceux utilisés pour les simulations numériques (Figure 4-12). Néanmoins, afin de protéger le montage lors des essais d'instabilité, on remplace le redresseur triphasé par une source d'alimentation stabilisée continue saturée en courant (Sorensen 600V, 17A) avec une diode en série. Pour alimenter le moteur synchrone à aimant permanent d'une puissance nominale de 1kW, on utilise un onduleur comportant des modules IGBT 600V/15A. L'algorithme de contrôle est réalisé dans Matlab/Simulink à l'aide d'un système temps réel dSPACE 1005.

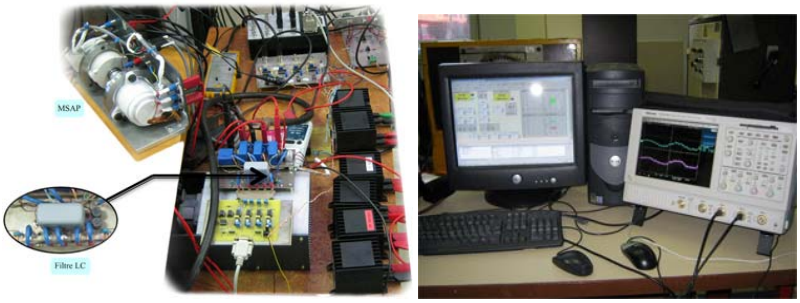


Figure 4-12 : Banc de test.

Les paramètres de la MSAP sont les suivants : $K_t = 0{,}21 Nm/A$, 4 paires de pôles, $L = 4{,}7mH$, $r = 1{,}8$, $v_b = \frac{V_e}{2}$, $I_0 = p/v_b$. Pour le filtre on a les paramètres suivants : $L = 30\ \mu H, C = 12\ \mu F, r = 0{,}5\ \Omega$ avec une tension d'entrée $V_e = 250\ V$.

Sur la Figure 4-13 sont représentées les formes d'onde du courant à travers l'inductance de filtrage et la tension aux bornes de la capacité du filtre. Des formes d'ondes semblables à celles obtenues en simulation sont obtenues. Là encore des différences existent au niveau des formes d'ondes notamment lors du passage à zéro du courant $i(t)$ et sur le contenu harmonique réel de la tension capacitive.

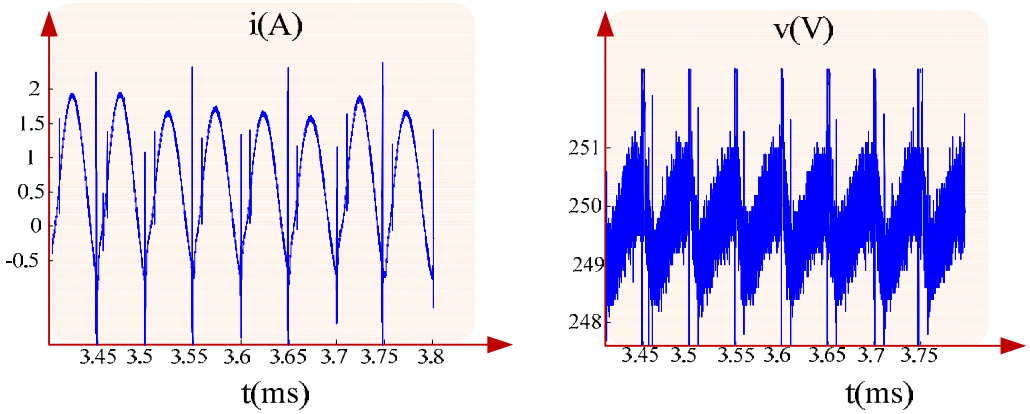


Figure 4-13 : Formes d'onde expérimentale du courant (à gauche) et de la tension (à droite).

4.2. Analyse de la stabilité

Pour analyser la stabilité du système, il va être nécessaire de définir une application F permettant d'exprimer les valeurs des variables d'état au début (X_n) et à la fin (X_{n+1}) de chaque période de découpage $(F(X_n, nT) = X_{n+1})$ sachant que dans cet intervalle de temps, la commande u passe de l'état haut à l'état bas (voir Figure 4-7) en fonction de la durée de conduction DT. Hors cette durée de conduction est directement liée à la valeur de tension capacitive qui peut évoluer de manière significative sur une période de découpage. Deux approches peuvent être envisagées pour obtenir l'application F recherchée.

4.2.1. Modèle non échantillonné

Le rapport cyclique évolue entre deux échantillons suite aux variations de la tension capacitive. Seule la puissance moyenne fournie sur une période de découpage est supposée constante. Ce modèle correspond à des systèmes dont la grandeur de commande évolue de manière continue (conception analogique par exemple).

Etablissement du modèle récurrent

On définit les variables d'état du système et on établit la suite récurrente qui lie les variables à l'instant $n\,T + T$ avec celles à l'instant précédent $n\,T$. On considère trois variables d'état : la valeur du courant i, la valeur de la tension v et le temps $k\,T_e$ (voir Figure 4-14). L'objectif est d'analyser la nature du cycle décrit par les variables d'état du système. L'étude se fait en régime permanent autour du point de fonctionnement, la diode étant modélisée par une résistance non linéaire $r_d(i)$.

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} = V_e - r\,i(t) - r_d(i)\,i(t) - v(t) \\ C\dfrac{dv(t)}{dt} = i(t) - u\,I_0 \end{cases} \tag{4-20}$$

Sur une période de discrétisation

On discrétise chaque période de découpage T en N_p points échantillonnés aux instants $kT_e = kT/N_p$ (Figure 4-14).

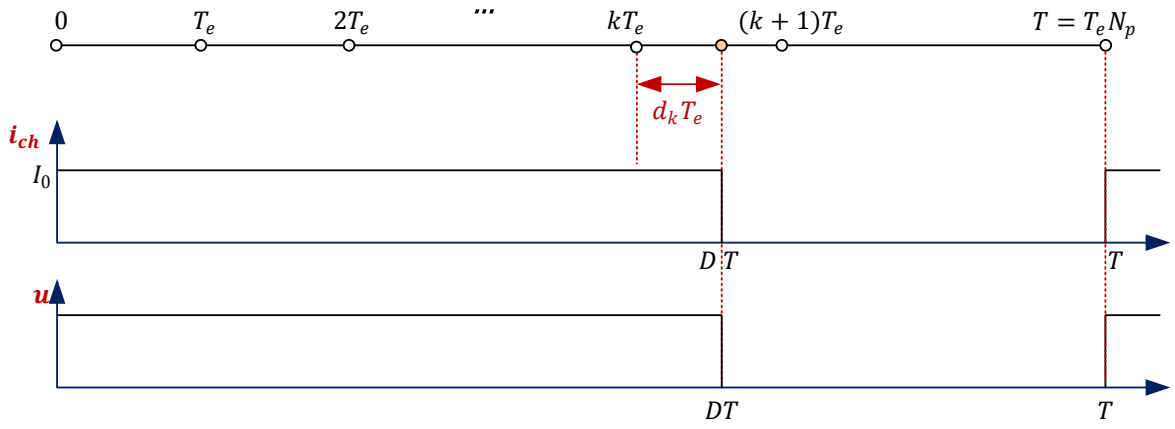


Figure 4-14 : Discrétisation d'une période de découpage.

Calcul de d_k

L'instant précis du basculement de la valeur de u de un à zéro n'est pas connu. Il est donc nécessaire de tester sur chaque période de discrétisation si la variable u change ou ne change pas d'état. On procède alors de la manière suivante :

On calcule dans un premier temps :

$$D = \frac{p}{I_0\,v_k} \tag{4-21}$$

On définit alors la grandeur ${d_k}^*$qui, dans l'intervalle où u change de valeur, correspond à la grandeur d_k présentée sur la Figure 4-14 :

$${d_k}^* = \frac{D\,T - k\,T_e}{T_e} \tag{4-22}$$

Sur chaque période de discrétisation, dans l'intervalle $[0 \quad {d_k}^* T_e]$, la commande u est unitaire, elle est nulle sur le reste de l'intervalle. Lors des études d'analyse de cycle, nous aurons besoin

d'analyser les variations de cette grandeur en fonction des variables d'état. On introduit donc une loi de commande dépendant de l'indice k et des grandeurs d'état discrétisées :

$$s_k = {d_k}^* - \frac{D\,T - k\,T_e}{T_e} \qquad \text{avec } D = \frac{p}{I_0\,v_k} \tag{4-23}$$

Il est impératif de limiter la valeur ${d_k}^*$ entre 0 et 1. Pour cela, on peut utiliser une fonction saturation. Il est important de noter que la fonction saturation standard présente des singularités qui empêchent la fonction d'être dérivable en tous points. C'est pourquoi on introduit une fonction saturation continue et dérivable en tous points de la forme :

$$sat({d_k}^*) = (1 - {d_k}^*)\left(0.5 + \frac{Arctan\big(a_0(\,{d_k}^* - 1)\big)}{\pi}\right) + ({d_k}^*)\left(0.5 + \frac{Arctan(a_0\,{d_k}^*)}{\pi}\right) \tag{4-24}$$

La courbe de saturation est présentée sur la Figure 4-15 avec $a_0 = 100$.

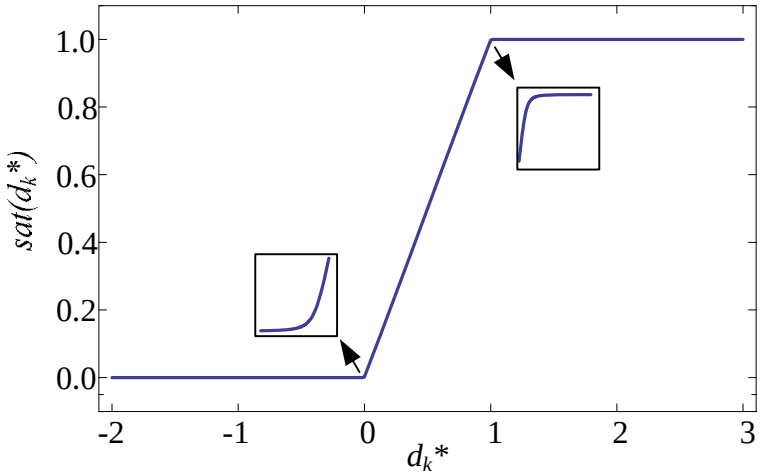


Figure 4-15 : Tracé de la fonction saturation utilisée.

La valeur de d_k satisfait donc l'équation suivante :

$$d_k = sat({d_k}^*) \tag{4-25}$$

Calcul de l'application F

Sur chaque période de discrétisation, on effectue les calculs suivants :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_k \\ v_k \\ nT + kT_e \end{bmatrix}}_{X_k} \xrightarrow{u=1} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{k+d_k} \\ v_{k+d_k} \\ (k+d_k)T_e \end{bmatrix}}_{X_{k+d_k}} \xrightarrow{u=0} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{k+1} \\ v_{k+1} \\ (k+1)T_e \end{bmatrix}}_{X_{k+1}} \tag{4-26}$$

On regroupe les deux premières variables d'état dans le vecteur x_k définit comme suit :

$$x_k = \begin{bmatrix} i_k \\ v_k \end{bmatrix} \tag{4-27}$$

Puis on divise l'intervalle $[n\,T + k\,T_e\ ,\ n\,T + (k+1)\,T_e]$ en deux, l'un ou le signal u est unitaire l'autre nul.

Il vient alors sur le premier intervalle $[n\,T + k\,T_e, n\,T + (k + d_k)\,T_e]$:

$$\frac{x[n\,T + (k + d_k)\,T_e] - x[n\,T + k\,T_e]}{d_k\,T_e} = A(x[n\,T + k\,T_e]) + B\,\underbrace{u}_{1} + M \qquad (4\text{-}28)$$

La solution est donnée par :

$$x[n\,T + (k + d_k)T_e] = (1 + d_k\,T_e A)\,x[n\,T + k\,T_e] + (B + M)\,d_k\,T_e \qquad (4\text{-}29)$$

Sur le deuxième intervalle $[n\,T + (k + d_k)\,T_e, n\,T + (k + 1)\,T_e]$, on a :

$$\frac{x[n\,T + (k + 1)T_e] - x[nT + (k + d_k)T_e]}{(1 - d_k)T_e} = A(x[nT + (k + d_k)T_e]) + B\,\underbrace{u}_{0} + M \qquad (4\text{-}30)$$

La solution est donnée par :

$$x[n\,T + (k + 1)\,T_e] = (1 + (1 - d_k)\,T_e A)\,x[nT + (k + d_k)T_e] + M\,(1 - d_k)\,T_e \qquad (4\text{-}31)$$

En utilisant les équations (4-29) et (4-31) et les notations introduites en (4-26), il est alors possible de définir une application H :

$$H(X_k, d_k) = X_{k+1} \qquad (4\text{-}32)$$

Ou la variable d_k est calculée à partir des relations (4-23) et (4-25).

Expression de la matrice Jacobienne des applications H et F

Considérons maintenant un point de fonctionnement (X_0, d_{k0}) et une petite perturbation autour de ce point :

$$dH = H(X_0 + dX, d_{k0} + dd_k) \qquad (4\text{-}33)$$

On a alors :

$$dH = \underbrace{H(X_0, d_{k0})}_{0} + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{(X_0, d_{k0})} dX + \left(\frac{\partial H}{\partial d_k}\right)_{(X_0, d_{k0})} dd_k \qquad (4\text{-}34)$$

La relation (4-23) étant supposée vérifiée même en régime perturbé, il vient :

$$\frac{\partial s_k}{\partial X}\,dX + \frac{\partial s_k}{\partial d_k}\,dd_k{}^* = 0 \qquad (4\text{-}35)$$

En utilisant l'équation précédente, la valeur de $dd_k{}^*$ peut être déduite :

$$dd_k{}^* = -\left(\frac{\partial s_k}{\partial d_k}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_k}{\partial X}\right)dX \qquad (4\text{-}36)$$

En dérivant l'équation (4-25) par rapport à $d_k{}^*$, on obtient alors :

$$dd_k = \frac{\partial sat(d_k{}^*)}{\partial d_k{}^*}\,dd_k{}^* \qquad (4\text{-}37)$$

En remplaçant (4-36) dans (4-37), on obtient :

$$dd_k = -\frac{\partial sat({d_k}^*)}{\partial {d_k}^*}\left(\frac{\partial s_k}{\partial d_k}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_k}{\partial X}\right)dX \tag{4-38}$$

Par conséquent, (4-34) se réécrit :

$$H(X_0 + dX, d_{k0} + dd_k) = \left(\frac{\partial H}{\partial X}\right)dX - \left(\frac{\partial H}{\partial d_k}\right)\frac{\partial sat({d_k}^*)}{\partial {d_k}^*}\left(\frac{\partial s_k}{\partial d_k}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_k}{\partial X}\right)dX \tag{4-39}$$

Finalement l'expression de la matrice de Jacobi s'écrit :

$$J_H = \frac{\partial H}{\partial X} - \frac{\partial H}{\partial d_k}\frac{\partial sat({d_k}^*)}{\partial {d_k}^*}\left(\frac{\partial s_k}{\partial d_k}\right)^{-1}\left(\frac{\partial s_k}{\partial X}\right) \tag{4-40}$$

Comme le montre la Figure 4-16, l'application F résulte en fait de la composition de l'application H, N_p fois.

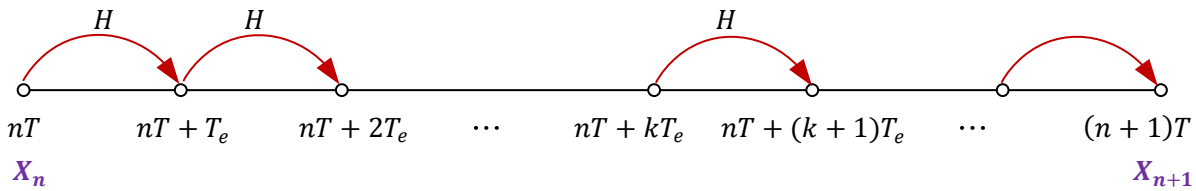


Figure 4-16 : Calcul du Jacobien pour le modèle non échantillonné.

On en déduit alors que :

$$F(X) = H^{oN_p}(X) \text{ et } J_F = {J_H}^{oN_p} = \prod_{k=0}^{N_p-1}(J_H)_{X_k} \tag{4-41}$$

L'analyse des valeurs propres de l'application F permettra alors d'investiguer les propriétés de stabilité du cycle décrit par les variables d'état du système. On peut noter que vue les variables utilisées pour décrire l'évolution du système, l'une des valeurs propres sera obligatoirement unitaire et correspond en fait à la composante temporelle incluse dans le vecteur X.

4.2.2. Modèle échantillonné

Dans la section précédente, nous avons étudié le modèle non échantillonné. Ce cas de figure se rencontre généralement lorsque la commande est réalisée de manière analogique. Nous allons à présent nous intéresser au modèle échantillonné dans lequel le rapport cyclique est fixe sur une période de découpage (cas d'une commande numérique échantillonnée), comme c'est le cas dans notre expérience. Commençons donc par établir le modèle récurrent.

Etablissement du modèle récurrent

On va reproduire la même procédure que pour le modèle non échantillonné. On considère quatre variables d'état. Les trois premières sont identiques au modèle précédent : le courant i, la tension v et le temps $k\,T_e$. On ajoute une quatrième variable d'état : v_n la tension que l'on calcule une seule fois par période de découpage.

Sur une période de discrétisation

On discrétise chaque période de découpage T comme pour le modèle précédent.

Calcul de d_k

La différence la plus importante par rapport au modèle non échantillonné est que l'on calcule le rapport cyclique D une seule fois par période de découpage. C'est-à-dire :

$$D = \frac{p}{I_0\, v_n} \tag{4-42}$$

Les définitions de ${d_k}^*$ et s_k ne changent pas.

On peut réutiliser la même fonction saturation que pour le modèle précédent.

Calcul de l'application F

De la même façon, on représente l'évolution des variables d'état sur chaque intervalle de discrétisation comme suit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_k \\ v_k \\ nT + kT_e \\ v_n \end{bmatrix}}_{X_k} \xrightarrow{u=1} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{k+{d_k}^*} \\ v_{k+{d_k}^*} \\ nT + (k + {d_k}^*)T_e \\ v_n \end{bmatrix}}_{X_{k+{d_k}^*}} \xrightarrow{u=0} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{k+1} \\ v_{k+1} \\ nT + (k+1)T_e \\ v_{n+1} \end{bmatrix}}_{X_{k+1}} \tag{4-43}$$

Pour obtenir l'application $H(X_k) = X_{k+1}$ on répète les étapes de la section précédente.

Expression de la matrice Jacobienne

On considère le nouveau point de fonctionnement (X_0, d_{k0}) et une petite perturbation autour de celui-ci. Les équations de (4-33) à (4-40) restent inchangées mais la dernière équation doit être modifiée.

A la fin de cette étape, la matrice Jacobienne de l'application H notée J_H est une matrice 4×4. Par contre la quatrième coordonnée n'est pas indépendante des trois autres. Pour lever cette ambigüité et intégrer l'effet d'échantillonnage, on propose de regrouper maintenant les trois premières variables d'état : $y = [i_k \quad v_k \quad kT_e]^t$ et de décomposer la matrice J_H à l'aide de quatre matrices n_1,n_2, n_3 et n_4 de dimension appropriée comme détaillé dans l'équation (4-44).

$$J_H = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & n1 & \square & n2 \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & n3 & \square & n4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \square \\ dy \\ \square \\ dv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square \\ n1\, dy + n2\, dv_n \\ \square \\ n3\, dy + n4\, dv_n \end{bmatrix} \tag{4-44}$$

On peut alors écrire :

$$H(X_k + dX) = n1\, dy + n2\, C\, dy \tag{4-45}$$

avec :

$$C = [0 \quad v_n/v_k \quad 0] \tag{4-46}$$

La valeur de v_n est actualisée à chaque début de période de découpage. On peut alors définir une application H (voir Figure 4-17) de R^3 dans R^3 qui comme précédemment va nous permettre d'obtenir l'expression de l'application F recherchée et de sa jacobienne. En remarquant que :

$$J_H = n1 + n2\ C \tag{4-47}$$

Il est alors possible d'obtenir :

$$F(X) = H^{oN_p}(X) \text{ et } J_F = {J_H}^{oN_p} \tag{4-48}$$

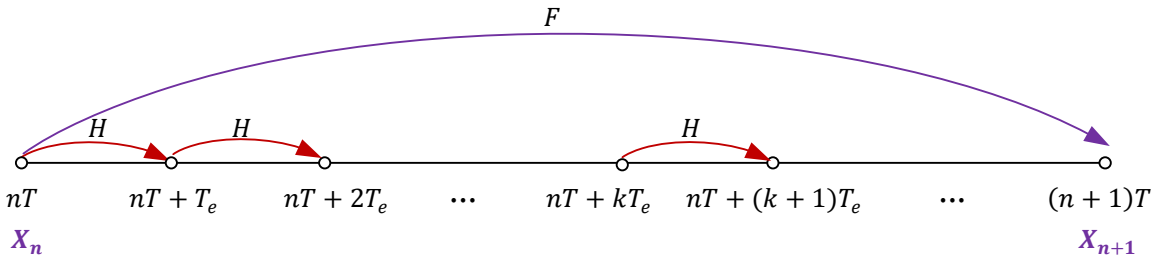


Figure 4-17 : Calcul de la matrice Jacobienne pour le modèle échantillonné.

4.2.3. Analyse des résultats

4.2.3.1. Résultats obtenus pour le modèle échantillonné

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux résultats obtenus pour le modèle échantillonné puisqu'il correspond au système étudié dans la thèse à savoir l'alimentation via un filtre d'entrée d'un actionneur à aimant. Pour chaque jeu de paramètres présenté dans le Tableau 4-1, on va présenter les diagrammes de bifurcation avec comme paramètre de bifurcation la puissance p. Il est alors possible de déduire la valeur maximale de p avant la première bifurcation. On présentera aussi les formes d'onde du courant et de la tension pour deux valeurs de puissance de charge, l'une inférieure à la puissance critique et l'autre supérieure. Chaque jeu de paramètres correspond à des fréquences de coupure du filtre d'entrée f_0 qui se rapprochent de la fréquence de découpage.

	Essai A	Essai B	Essai C
$V_e(V)$	200	250	270
$L(\mu H)$	39000	750	30
$r(\Omega)$	1.08	0.5	0.5
$C(\mu F)$	500	12	12
$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\ (kHz)$	0.036	1.67	8.38
$f(kHz)$	10		

Tableau 4-1 : 3 jeux de paramètres de simulation.

Premier jeu de paramètres (essai A du Tableau 4-1)

Deux diagrammes de bifurcation en fonction de la puissance p sont représentés sur la Figure 4-18. Celle de gauche correspond au courant i et celle de droit à la tension v. On observe que la puissance critique est voisine de $p_0 \approx 530\ W$.

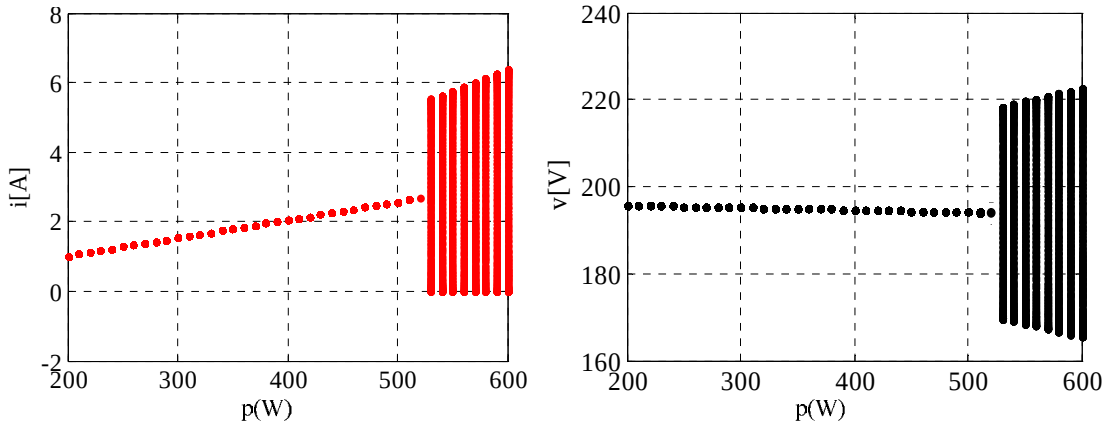


Figure 4-18 : Diagramme de bifurcation pour le premier jeu de paramètres : le courant (à gauche) et la tension (à droite) lorsque p varie de $200\ W$ à $600\ W$.

Dans un premier temps, on choisit la puissance $p = 200\ W < p_0$. La Figure 4-19 montre les formes d'onde du courant et de la tension correspondantes obtenues par simulation numérique, la charge étant modélisée par une source de puissance, le rapport cyclique D ne changeant qu'une fois par période de découpage comme indiqué sur la Figure 4-7.

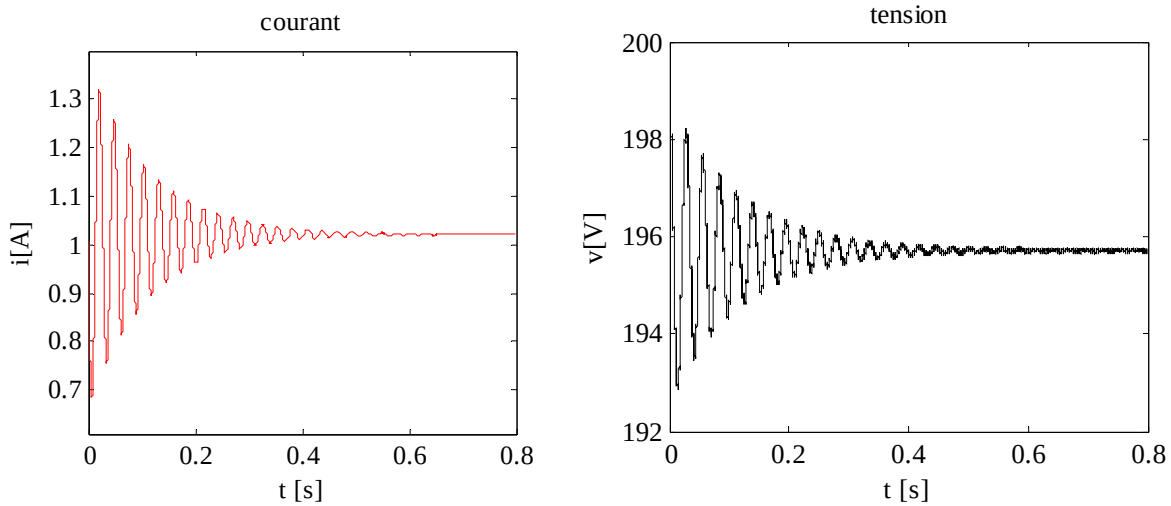


Figure 4-19 : Formes d'onde du courant (à gauche) et de la tension (à droite), $p = 200\ W$ pour le premier jeu de paramètres.

Cette allure peut être comparée à celle obtenue avec le modèle échantillonné discret ($N_p = 600$). Seules sont représentées les valeurs des grandeurs d'état à chaque début de période de découpage (ou d'échantillonnage). Comme on peut le constater sur la Figure 4-20, les points échantillonnés et les trajectoires d'état sont superposés aussi bien en régime transitoire que permanent. Comme attendu, la trajectoire obtenue avec le modèle échantillonné converge vers un point d'équilibre en régime permanent pour ce jeu de paramètres. La trajectoire d'état réelle est, quant à elle, un cycle limite périodique à la période de découpage dont l'amplitude est faible vis-à-vis des valeurs des variables d'état en régime établi pour ce jeu de paramètres.

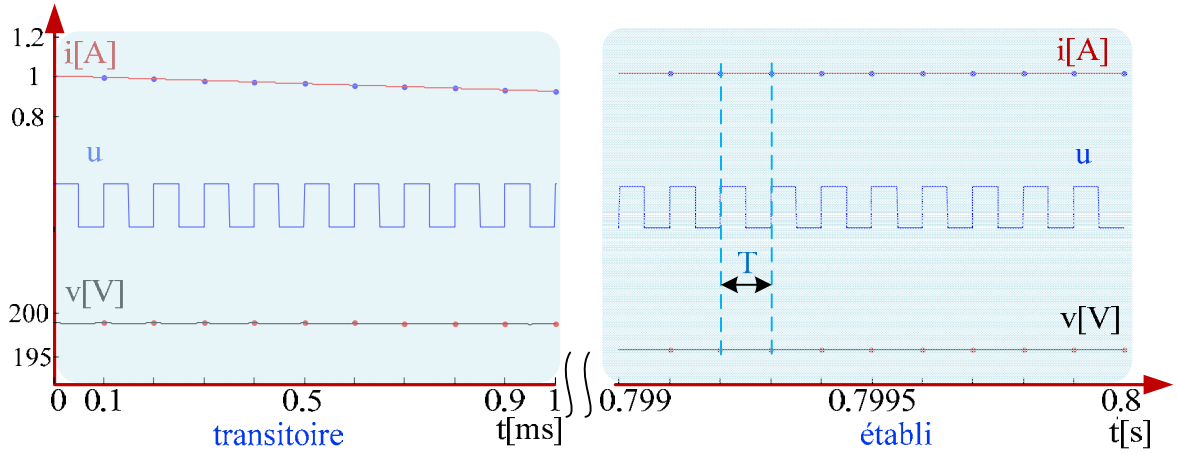


Figure 4-20 : Zoom de la forme d'onde pour le régime transitoire (à gauche) et établi (à droite) pour $p = 200\ W$.

La Figure 4-21 représente la trajectoire d'état obtenue pour $p = 200\ W$. La trajectoire converge en spirale vers le point d'équilibre.

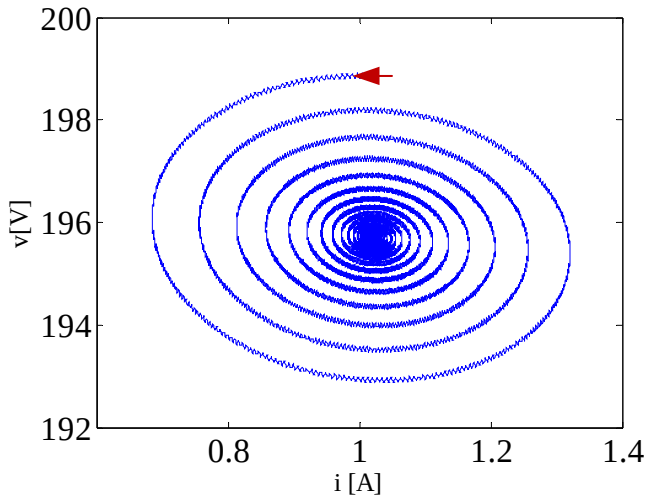


Figure 4-21 : Exemple de trajectoire en spirale vers un point stable.

L'étape suivante consiste à faire varier le paramètre de bifurcation (la puissance consommée par l'actionneur). En choisissant une valeur de la puissance p égale à $600\ W$ la trajectoire d'état ne converge plus vers un point fixe mais vers un cycle limite d'amplitude non négligeable.

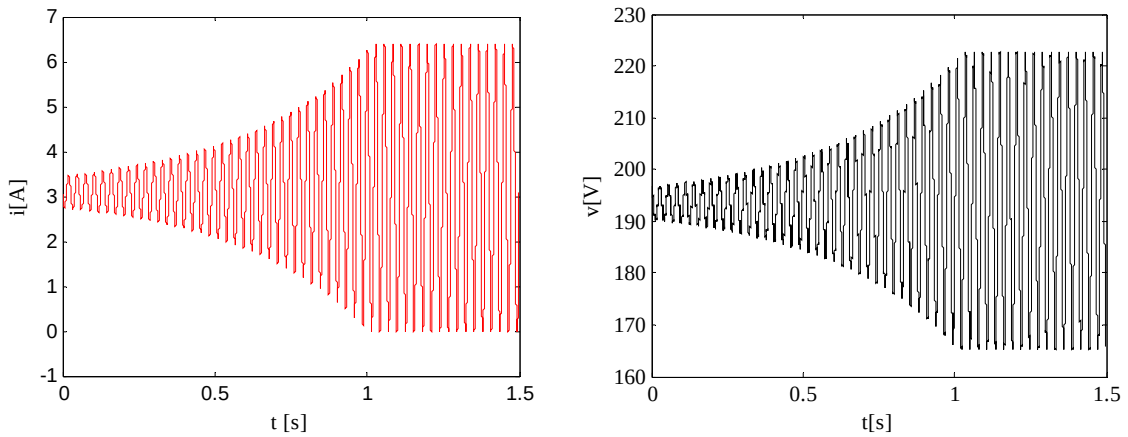


Figure 4-22 : Evolution du courant (à gauche) et de la tension (à droite), $p = 600\ W$ pour le premier jeu de paramètres.

Le cycle limite stable obtenu est visible sur le tracé dans le plan de phase présenté sur la Figure 4-23.

La bifurcation de Neimark-Sacker est une bifurcation dans laquelle un cycle limite périodique est remplacé par une solution quasi-périodique. Cette bifurcation, utilisée ici pour les systèmes à temps discrets, est la même que celle de Hopf. Ce type de bifurcation est caractérisé par une expansion soudaine d'un point fixe stable en un cycle limite stable également. On peut facilement constater que le système devient instable via la bifurcation de Neimark-Sacker puisque la spirale stable devient instable dans le voisinage du point d'équilibre.

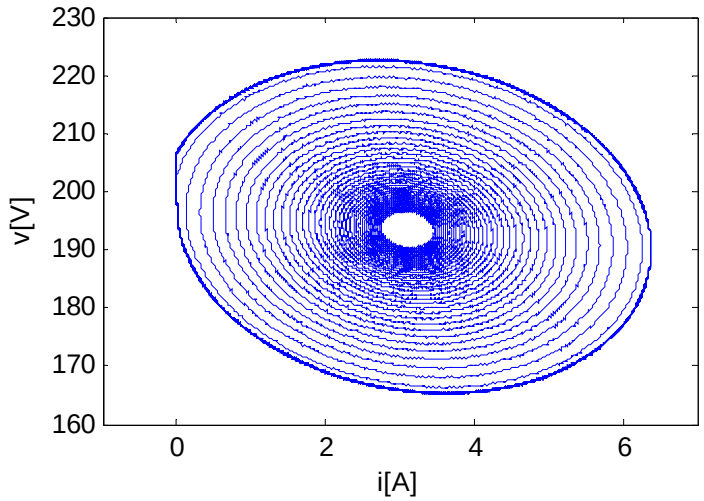


Figure 4-23 : Trajectoire d'état obtenu pour $p = 600\ W$.

Sur la Figure 4-24, on observe que pour les puissances situées entre $200\ W$ et $520\ W$ il existe un point de fonctionnement stable tandis que pour les puissances supérieures, on obtient un cycle limite dont l'amplitude devient de plus en plus grande.

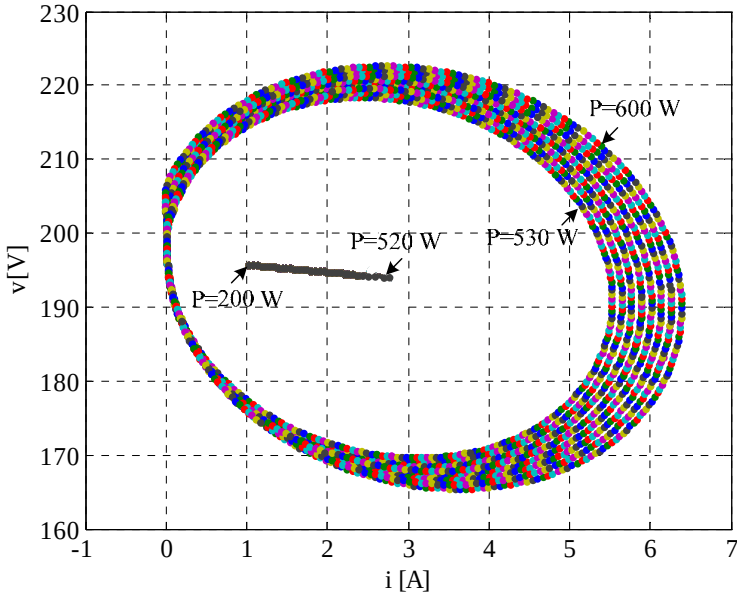


Figure 4-24 : Evolution le plan de phase en utilisant des points échantillonnés lorsque p varie de $200\ W$ à $600\ W$.

Le calcul des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système autour du point de fonctionnement (matrice jacobienne donnée en (4-48)) conduit alors à trois valeurs propres. Comme attendu, l'un des multiplieurs de Floquet qui est lié au temps est constant et égal à 1. On omet donc la valeur propre unité due à la composante temporelle sur les tracés des multiplieurs de Floquet. La Figure 4-25 représente le tracé des deux autres valeurs propres. La perte de stabilité de la solution périodique correspond à la traversée du cercle unité par une ou plusieurs valeurs propres. On voit bien que deux valeurs propres complexes conjuguées quittent le cercle unitaire simultanément à la puissance critique. Le système perd alors sa stabilité via une bifurcation de Neimark-Sacker.

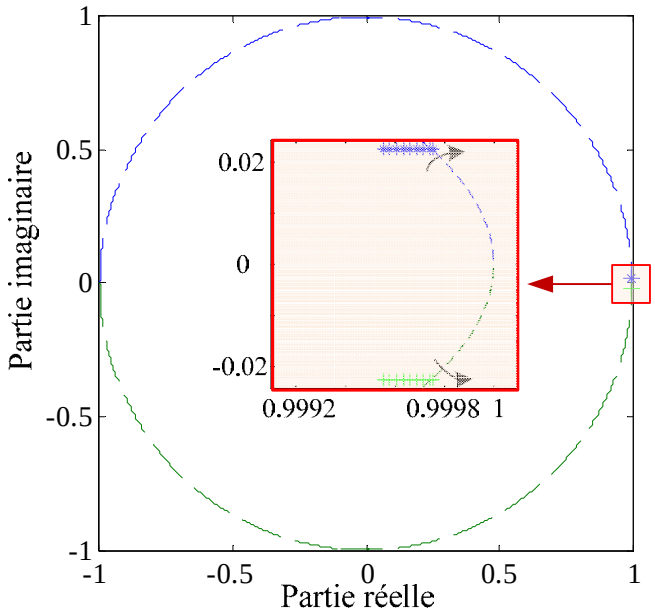


Figure 4-25 : Evolution des multiplieurs de Floquet pour une variation de la puissance p de $450\ W$ à $530\ W$.

Les modules des valeurs propres sont présentés sur la Figure 4-26. On remarque que tous les multiplieurs de Floquet se trouvent à l'intérieur du cercle unité pour $p < p_0$.

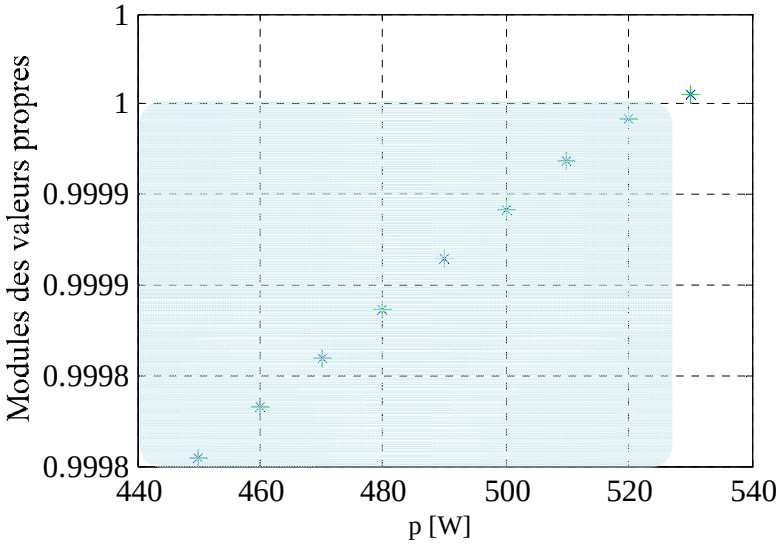


Figure 4-26 : Modules des multiplieurs de Floquet pour p variant de $450\ W$ à $530\ W$.

Ces résultats sont cohérents avec les diagrammes de bifurcation présentés sur la Figure 4-18 et permettent de valider la méthode de calcul de la matrice Jacobienne proposée pour ce jeu de paramètres.

Deuxième jeu de paramètres (essai B du Tableau 4-1)

Dans ce deuxième essai, la fréquence de coupure du filtre est augmentée.

Différents diagrammes de bifurcation en fonction de la puissance sont représentés sur la Figure 4-27 et Figure 4-28. Un zoom sur la plage de fonctionnement normal (pour p de $200\ W$ à $700\ W$) est présenté sur la Figure 4-28. Les valeurs des différents paramètres correspondent à celles du deuxième jeu.

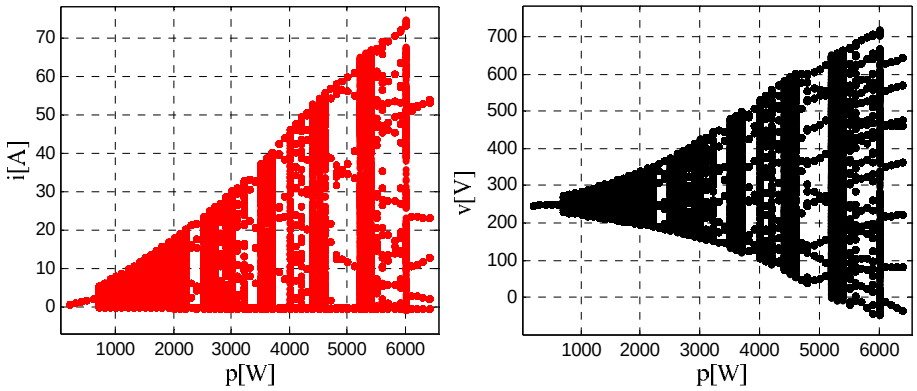


Figure 4-27 : Diagramme de bifurcation pour le deuxième jeu de paramètres, courant (à gauche) et tension (à droite) lorsque p varie de $200\ W$ à $31000\ W$.

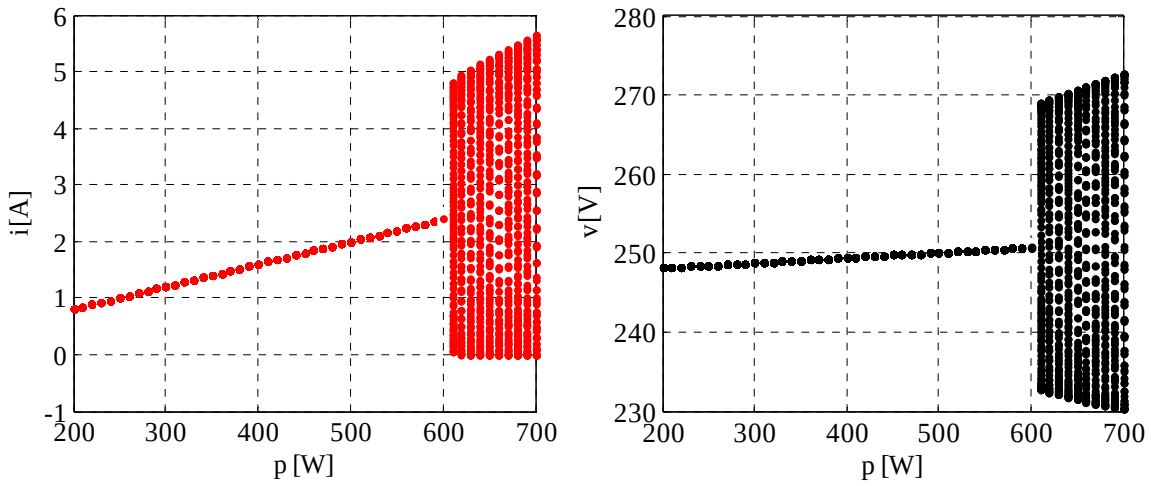


Figure 4-28 : Diagramme de bifurcation pour le deuxième jeu de paramètres, courant (à gauche) et tension (à droite) lorsque p varie de $200\ W$ à $700\ W$.

On estime la puissance critique à peu près à $p_0 = 600W$. En supposant $p = 200\ W$, on observe un cycle limite T-périodique (la Figure 4-29). Une fois encore, le modèle échantillonné et les simulations numériques donnent des résultats comparables.

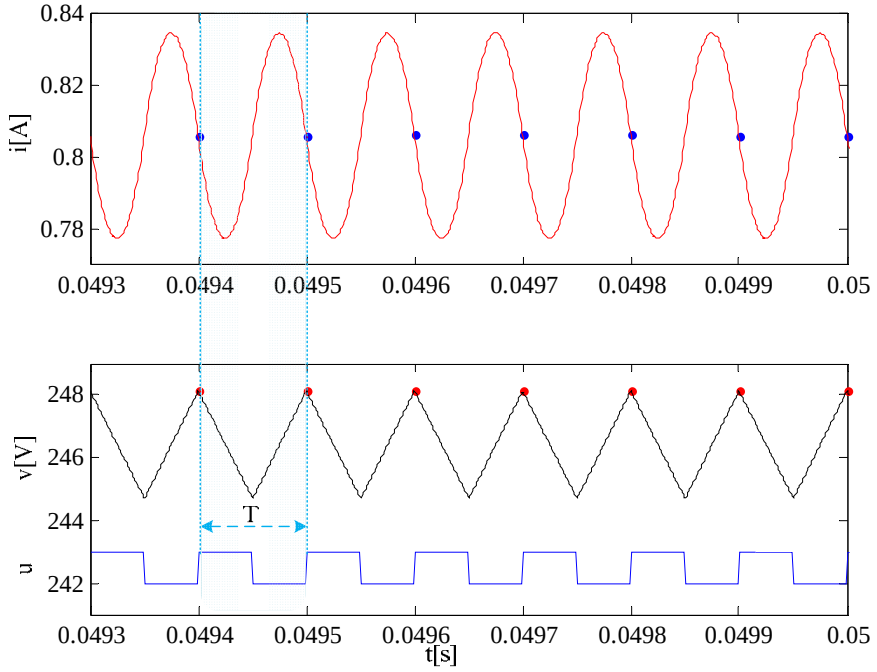


Figure 4-29 : Formes d'onde du courant, de la tension en régime établi et de la commande pour $p = 200\ W$ avec le deuxième jeu de paramètres.

Le comportement dynamique représenté dans le plan de phase (i, v) est présenté sur la Figure 4-30.

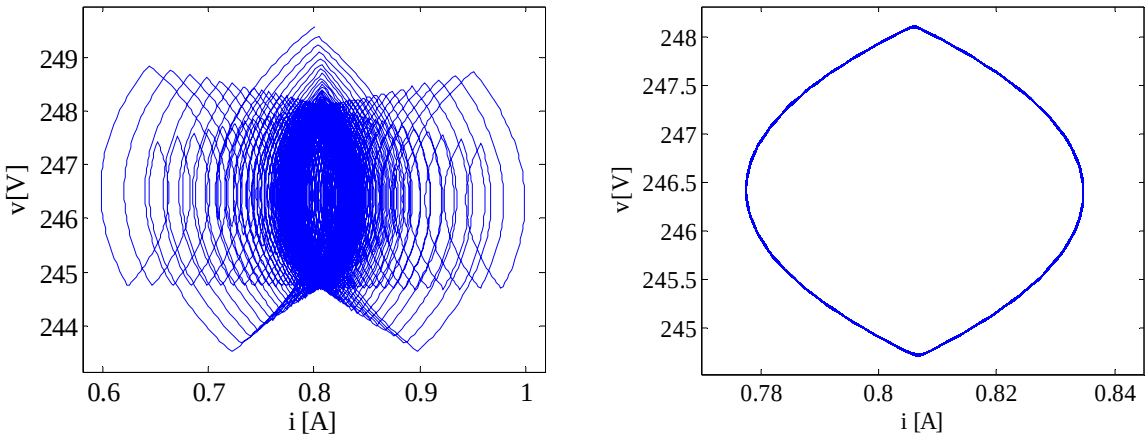


Figure 4-30 : Evolution dans le Plan de phase pour $p = 200\ W$: régime transitoire à gauche, régime établi à droite.

En utilisant les valeurs de courant et tension données par le modèle échantillonné, il est possible d'analyser leur évolution dans le plan de phase (Figure 4-31) pour $p = 200\ W$. La figure montre ce qui se passe pour $p < p_0$ à savoir une convergence en spirale à partir d'un point initial vers un point fixe correspondant au point de fonctionnement au sens des grandeurs moyennes du système.

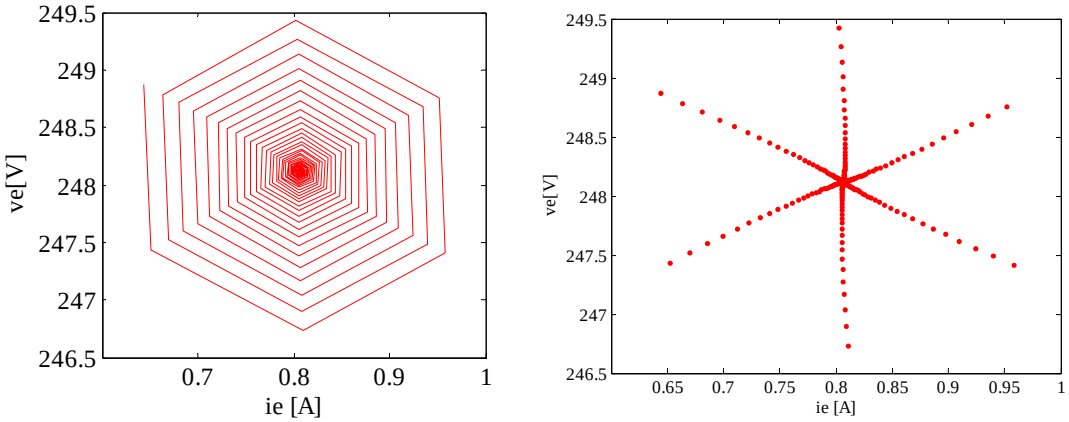


Figure 4-31 : Plan de phase tracé en utilisant les valeurs données par le modèle discret échantillonné dans le cas stable (orbite T-périodique), $p = 200\ W$.

En choisissant $= 650\ W$, les formes d'onde obtenues par simulation numérique et les valeurs obtenues par le modèle échantillonné sont présentées respectivement sur la Figure 4-32 et Figure 4-33.

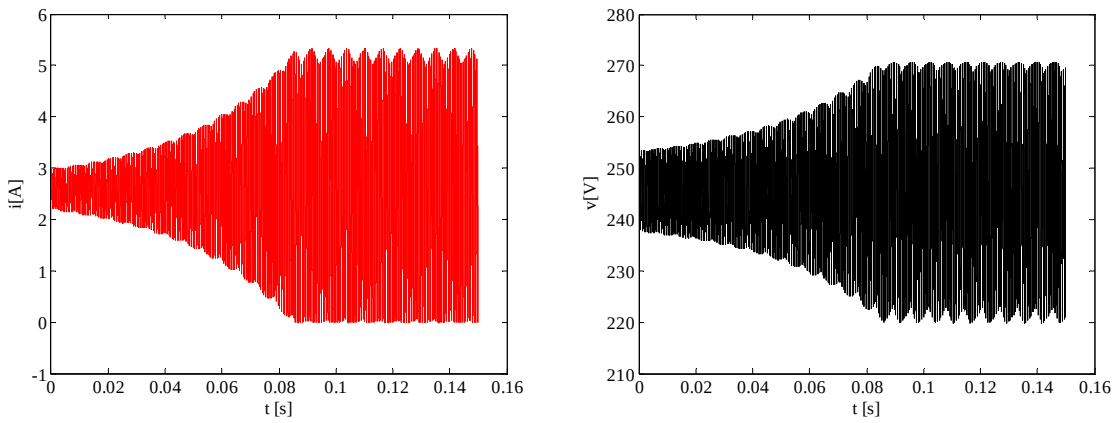


Figure 4-32 : Formes d'onde du courant et de la tension, pour $p = 650\ W$ avec le deuxième jeu de paramètres.

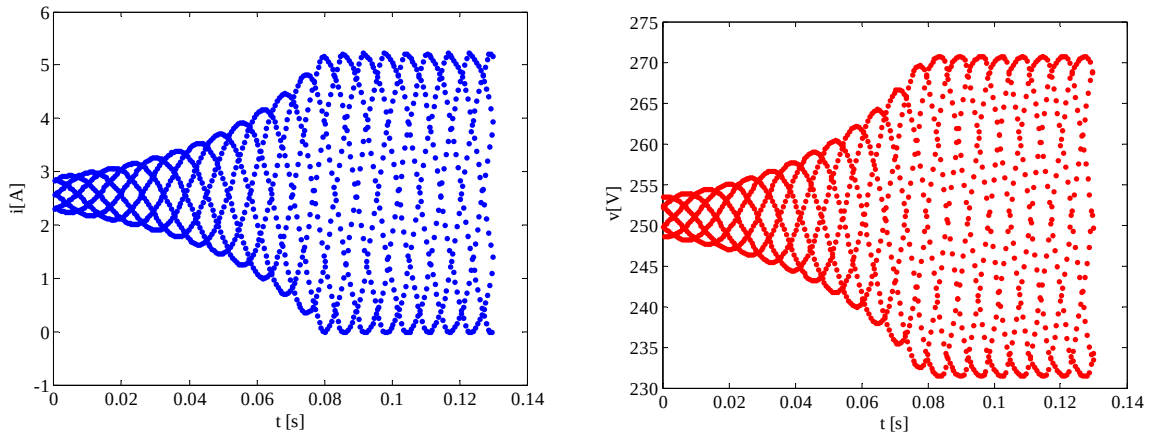


Figure 4-33 : Valeurs de courant et tension données par le modèle échantillonné pour $p = 650\ W$ et le deuxième jeu de paramètres.

Sur la Figure 4-34, on fait un zoom des formes d'ondes du courant et de la tension obtenues à partir du modèle échantillonné en régime transitoire puis en régime établi.

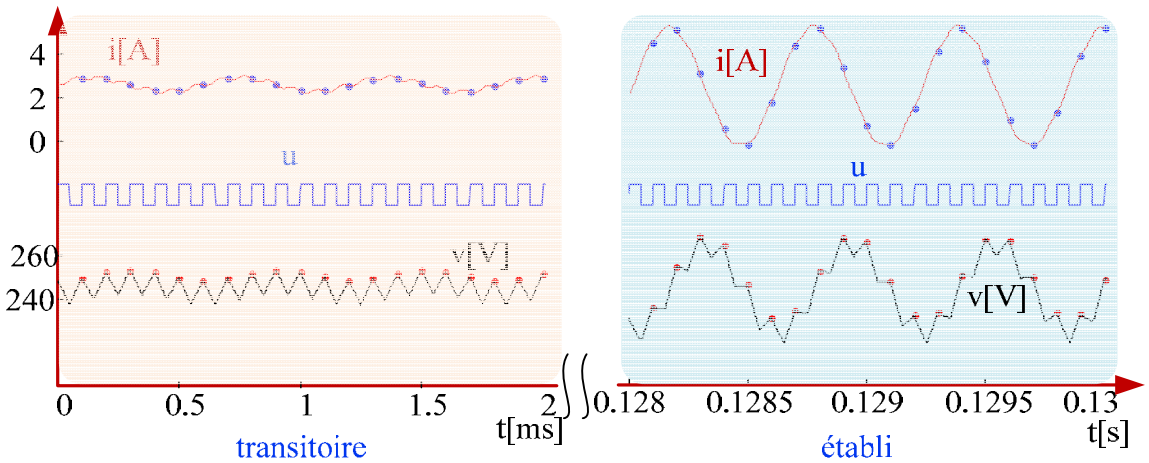


Figure 4-34 : Valeurs de courant et tension données par le modèle discret échantillonné pour $p = 650\ W$ et le deuxième jeu de paramètres.

Comme le montre la Figure 4-35, on constate bien que pour une puissance supérieure à la puissance critique p_0, l'orbite initiale T-périodique devient instable; la trajectoire d'état converge alors vers une orbite quasi-périodique stable. La trajectoire d'état évolue alors autour d'un tore.

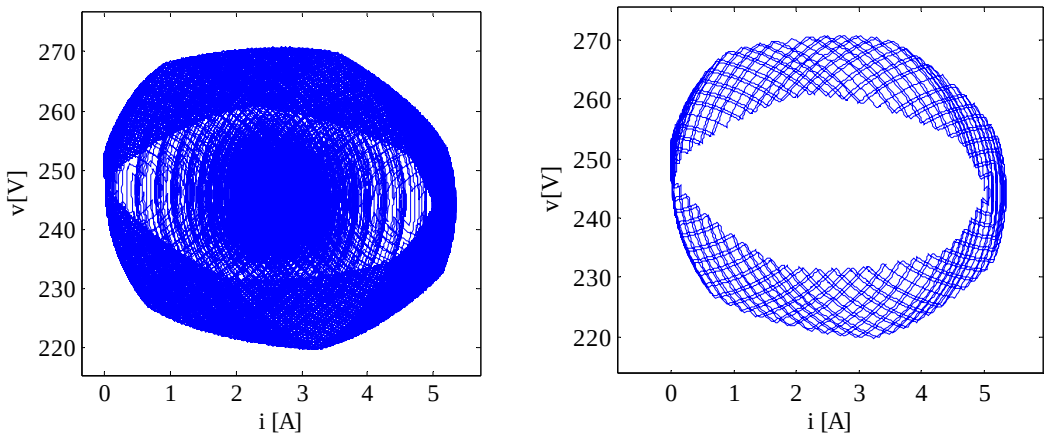


Figure 4-35 : Evolution dans le plan de phase pour $p = 650\ W$: régime transitoire à gauche, régime établi à droite.

En utilisant encore une fois les valeurs de tension et courant données par le modèle discret échantillonné, il est possible d'analyser leur évolution dans le plan de phase (Figure 4-36) pour $p = 650\ W$. Pour cette valeur de puissance, le point de fonctionnement au sens des grandeurs moyennes est instable. Ainsi, on s'en écarte en suivant une trajectoire en forme de spirale pour atteindre l'orbite quasi-périodique.

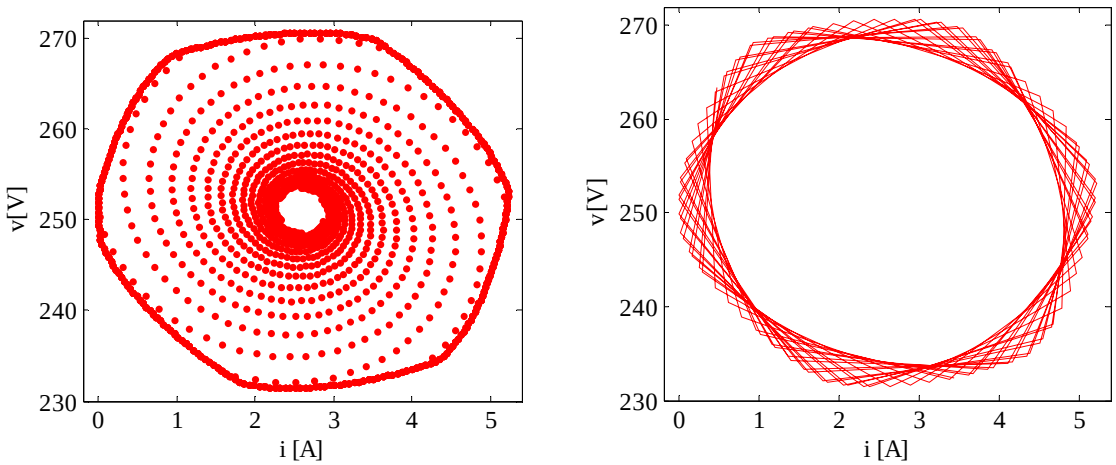


Figure 4-36 : Plan de phase tracé en utilisant les valeurs de courant et tension données par le modèle échantillonné dans le cas d'une orbite quasi-périodique $p = 650\ W$.

En augmentant encore la puissance consommée par la charge, la nature de l'orbite décrite par la trajectoire d'état change pour décrire en régime établi un cycle limite comme le montre la Figure 4-37.

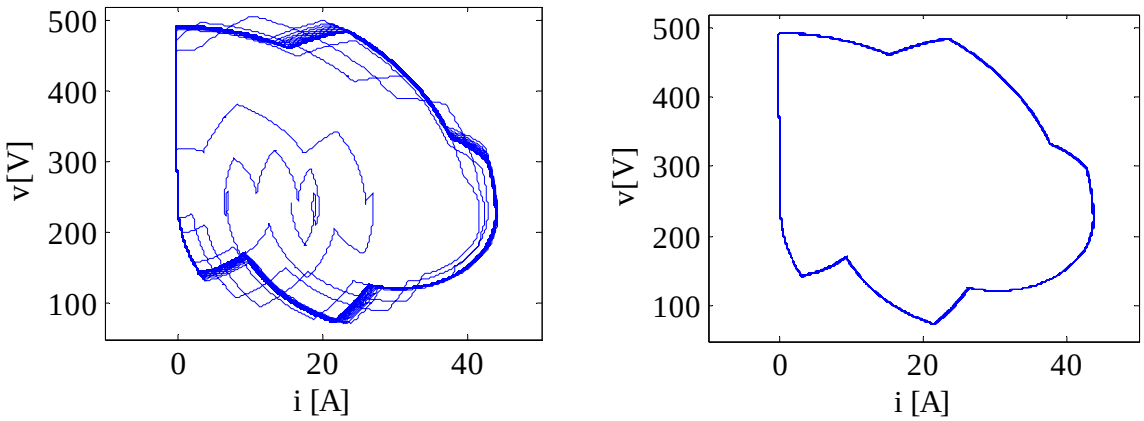


Figure 4-37 : Evolution dans le plan de phase pour $p = 3800\ W$: régime transitoire à gauche, régime établi à droite dans le cas d'un cycle limite.

La Figure 4-38 montre l'évolution dans le plan de phase des valeurs données par le modèle discret échantillonné lorsque p varie de $200\ W$ à $4100\ W$. Sur cette figure, on peut observer les trois phénomènes précédemment observés à savoir la convergence vers un point stable (ex :$p = 200\ W$), une orbite quasi-périodique (ex :$p = 700\ W$) et un cycle limite (ex :$p = 3800\ W$).

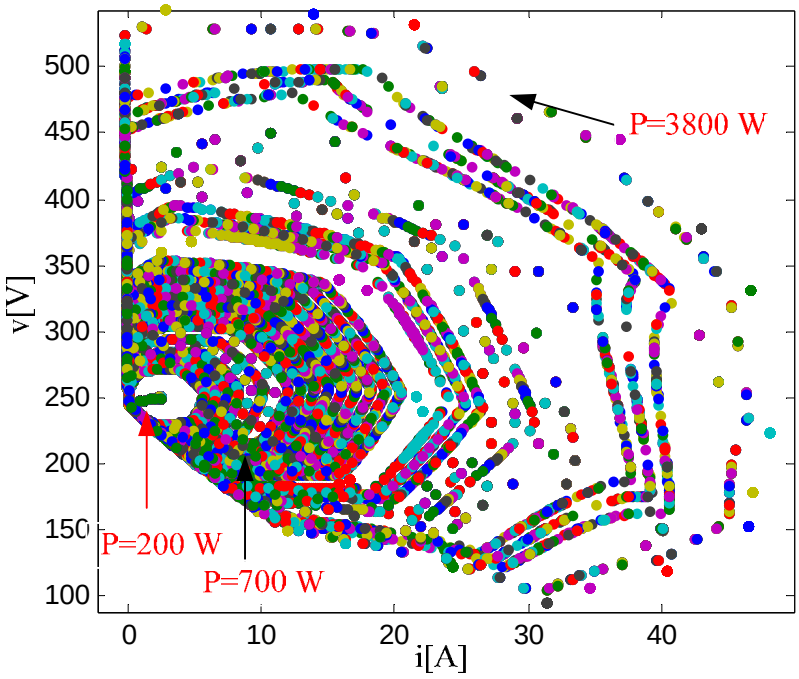


Figure 4-38 : Plan de phase en régime permanent tracé en utilisant les valeurs de courant et tension données par le modèle échantillonné lorsque p varie de $200\ W$ à $4100\ W$.

Le passage d'un point équilibre stable à une orbite quasi-périodique correspond à une bifurcation de Hopf. Comme pour les cas précédents, il est possible de valider les formulations théoriques utilisées pour calculer la matrice Jacobienne de l'applications F en calculant les multiplieurs de lorsque l'on fait varier la puissance de $200\ W$ à $610\ W$ (Figure 4-39). L'évolution des multiplieurs est cohérente avec le diagramme de bifurcation obtenu sur la Figure 4-28.

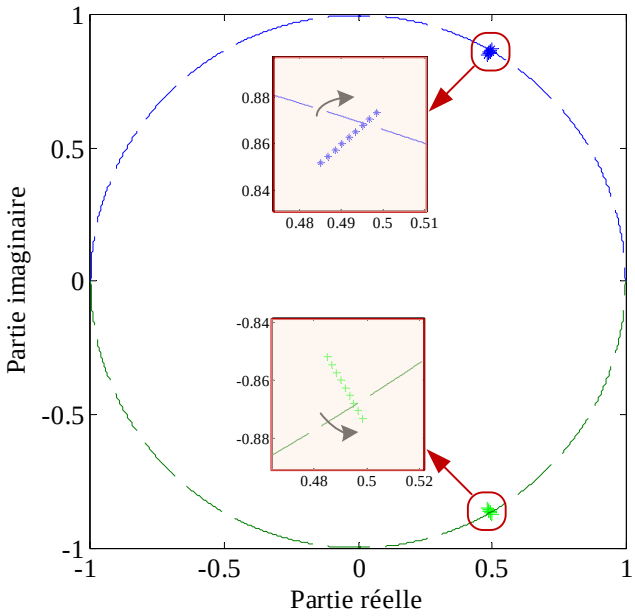


Figure 4-39 : Evolution des multiplieurs de Floquet lorsque p varie de $200W$ à $610\ W$.

Troisième jeu de paramètres (essai C du Tableau 4-1)

On augmente encore la fréquence de coupure du filtre en modifiant les paramètres L et C par rapport à l'essai précédent.

On s'aperçoit en observant les diagrammes de bifurcation présentés sur la Figure 4-40, qu'avec les valeurs numériques choisies (troisième jeu de paramètres), la nature du cycle peut changer en fonction de la valeur du paramètre de bifurcation (p). Elle montre que la puissance critique est d'environ $p_0 = 18500\ W$.

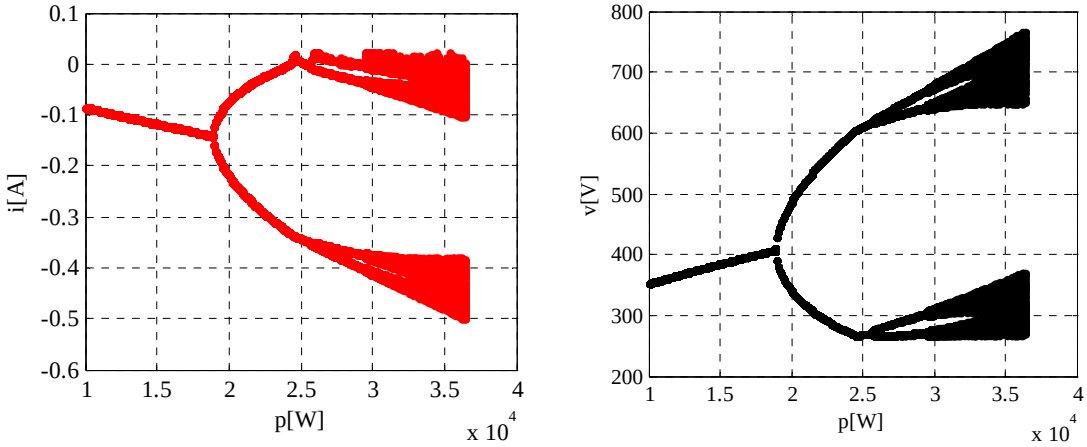


Figure 4-40 : Diagramme de bifurcation pour le troisième jeu de paramètres le courant (à gauche) et la tension (à droite) lorsque p varie de $10000\ W$ à $36400\ W$.

On fixe $p = 15000\ W$. Les formes d'onde de courant et de tension en régime établi ainsi que le signal de commande u et les valeurs de courant et tension obtenues par le modèle discret échantillonné sont présentés sur la Figure 4-41. Ces formes d'onde correspondent à la création d'une orbite T-périodique stable d'amplitude relativement importante. Ce résultat est normal pour ce jeu de paramètres puisque la fréquence de coupure du filtre est très proche de la fréquence apparente de découpage. Quant au courant et à la tension calculés à partir du modèle échantillonné, il converge vers un point fixe stable.

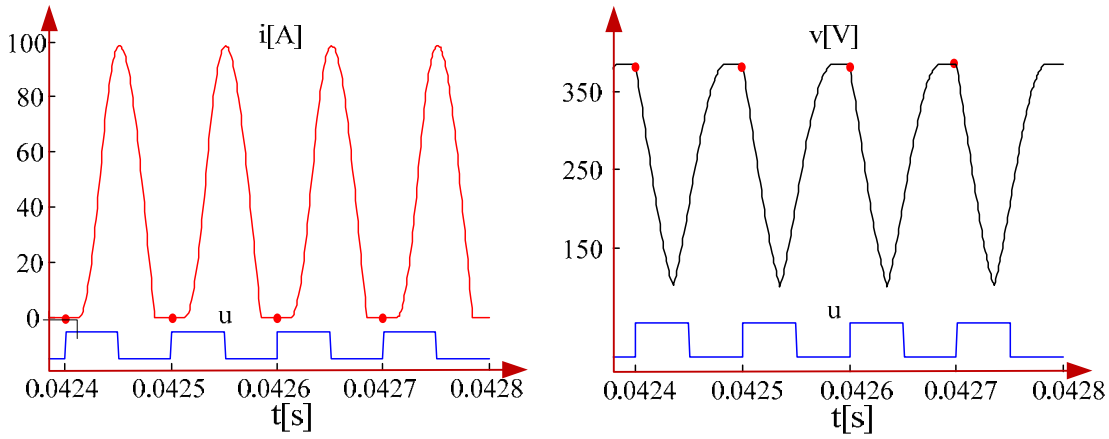


Figure 4-41 : Formes d'onde du courant (à gauche) et de la tension (à droite) en régime établi, $p = 15000\ W$ pour le troisième jeu de paramètres.

La trajectoire d'état du système dans le plan de phase est présentée sur la Figure 4-42. Ce plan de phase montre que le système admet en effet une orbite T-périodique stable. Il s'agit du mode de fonctionnement usuel et du seul mode acceptable dans la pratique pour les convertisseurs.

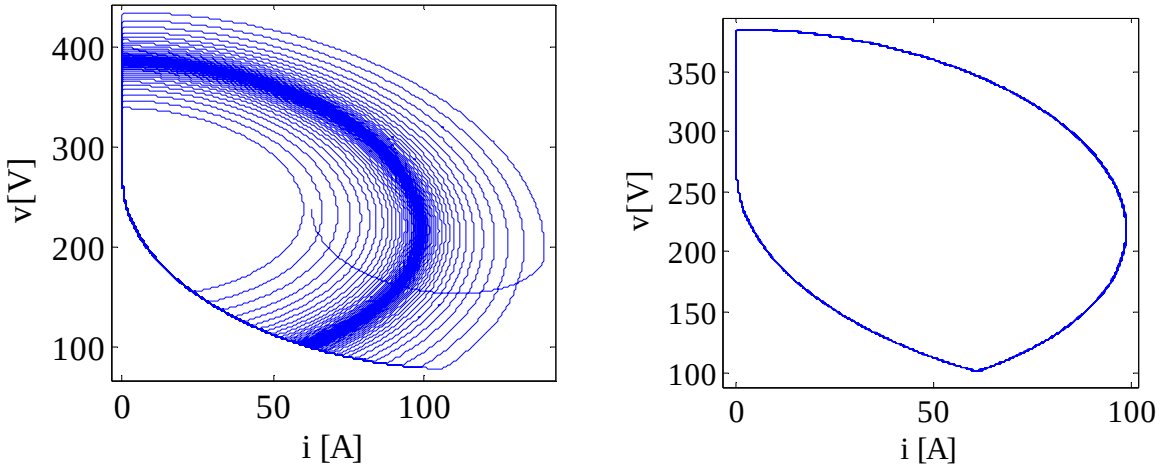


Figure 4-42 : Evolution dans le Plan de phase pour $p = 15000\ W$: régime transitoire à gauche, régime établi à droite.

On change maintenant la puissance consommée par la charge qui passe à $19000\ W$. Celle-ci est donc supérieure à la puissance critique p_0. La Figure 4-43 montre les formes d'onde du courant, de la tension ainsi que les valeurs de courant et tension données par le modèle discret échantillonné. La nature de l'orbite a changé, la trajectoire d'état décrivant maintenant un cycle double (Figure 4-44). Ce phénomène se traduit par une première bifurcation de type flip du modèle échantillonné, les grandeurs évoluant alors successivement vers deux points de fonctionnement distincts (Figure 4-45).

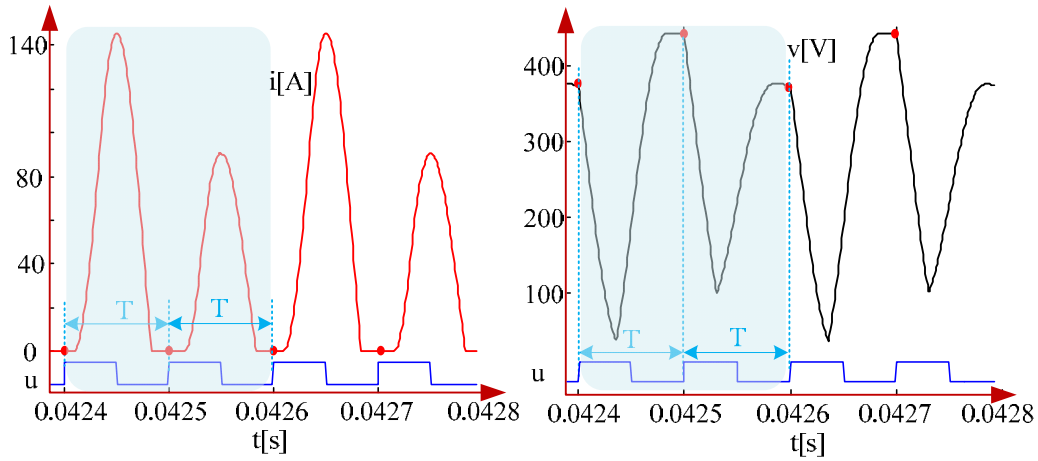


Figure 4-43 : Formes d'onde du courant (à gauche) et de la tension (à droite) en régime établi, $p = 19000\ W$ pour le troisième jeu de paramètres.

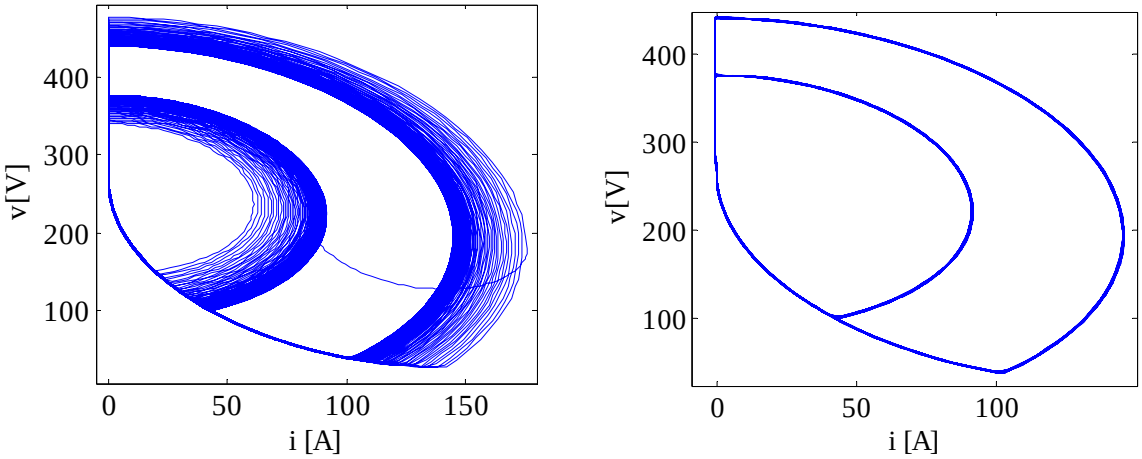


Figure 4-44 : Plan de phase $p = 19000\ W$.

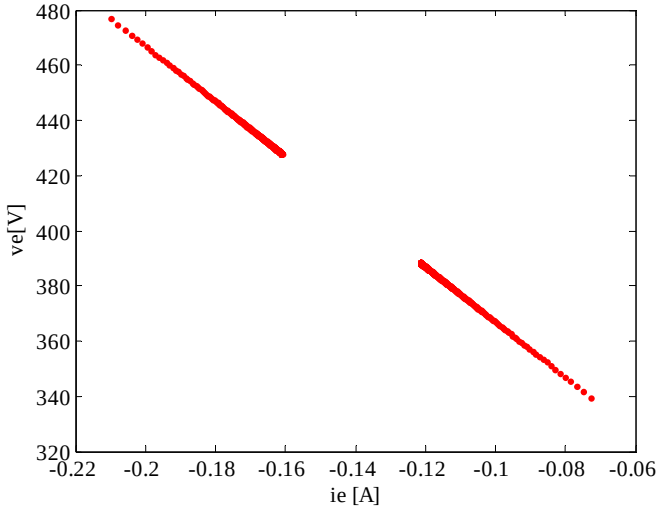


Figure 4-45 : Plan de phase tracé en régime transitoire et utilisant les valeurs de courant et tension données par le modèle échantillonné , $p = 19000\ W$.

La première bifurcation flip (doublement de période) se produit quand un des multiplieurs de Floquet passant par le point $(-1,0)$. On calcule donc les multiplieurs de Floquet pour des valeurs de p variant de 5 à 24 kW. Les résultats sont donnés dans le Tableau 4-2; l'évolution des multiplieurs de Floquet est présentée sur la Figure 4-46 et Figure 4-47.

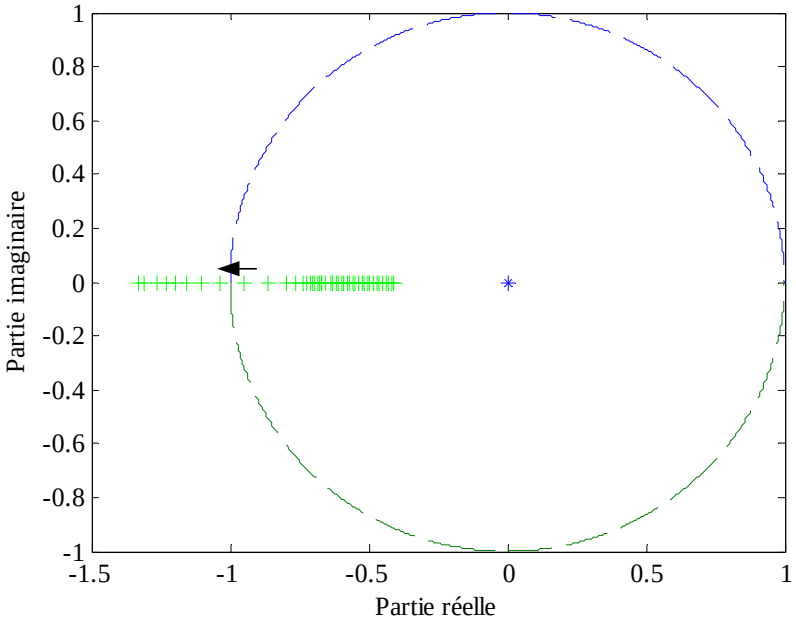


Figure 4-46 : Evolution des multiplieurs de Floquet lorsque p varie de 1000 W à 23000 W.

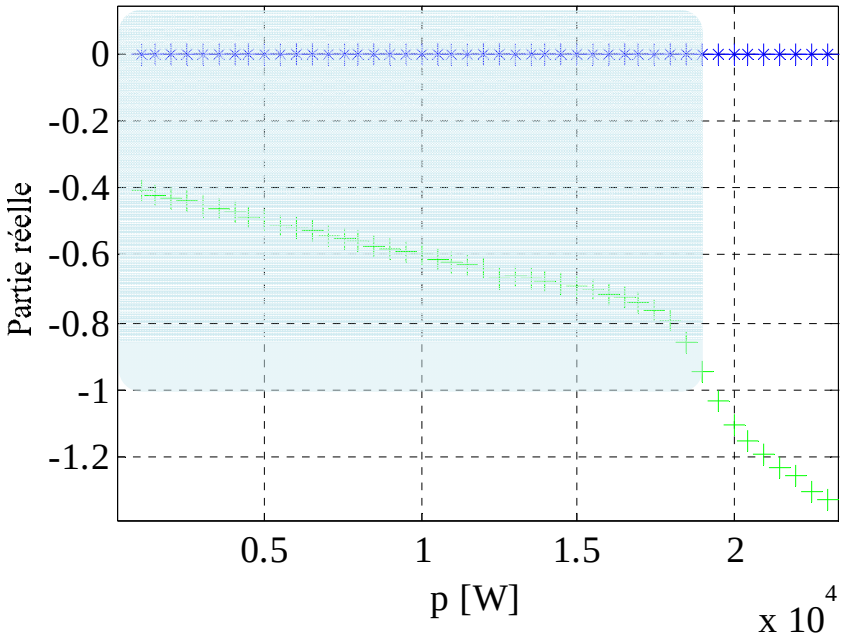


Figure 4-47 : Tracé de la partie réelle des multiplieurs de Floquet pour p variant de 1000 W à 23000 W.

Il est à noter qu'un des multiplieurs de Floquet reste quasiment toujours nul et n'a pas été affiché dans le Tableau 4-2.

L'analyse des multiplieurs de Floquet confirme donc les résultats obtenus à l'aide du diagramme de bifurcation. Pour $p < p_0$, les multiplieurs de Floquet sont à l'intérieur du cercle unité, impliquant des orbites T-période stable.

$p(W)$	multiplieur de Floquet	Orbite T-périodique stable
5000	-0.49	Orbite T-périodique stable
8000	-0.55	Orbite T-périodique stable
12000	-0.63	Orbite T-périodique stable
16000	-0.71	Orbite T-périodique stable
18000	-0.79	Orbite T-périodique stable
p_0	-1	Orbite T-périodique stable
18800	0.561	Orbite 2T-périodique stable
19000	0.542	Orbite 2T-périodique stable
19500	0.467	Orbite 2T-périodique stable
21000	0.281	Orbite 2T-périodique stable
23000	0.129	Orbite 2T-périodique stable
24000	0.079	Orbite 2T-périodique stable

Tableau 4-2 : Calcul des Multiplieurs de Floquet.

Lorsque p augmente, un des multiplieurs de Floquet se déplace vers $(-1,0)$, et à $p = p_0$, un des multiplieurs de Floquet passe par le point $(-1,0)$, impliquant un doublement de période. Pour $p > p_0$, le cycle 2T-périodique obtenu est stable. La stabilité de ce cycle peut être prouvée en calculant les multiplieurs de Floquet associés à l'application F^{o2} dont les multiplieurs de Floquet restent, comme le montre la Figure 4-48 à l'intérieur du cercle unité.

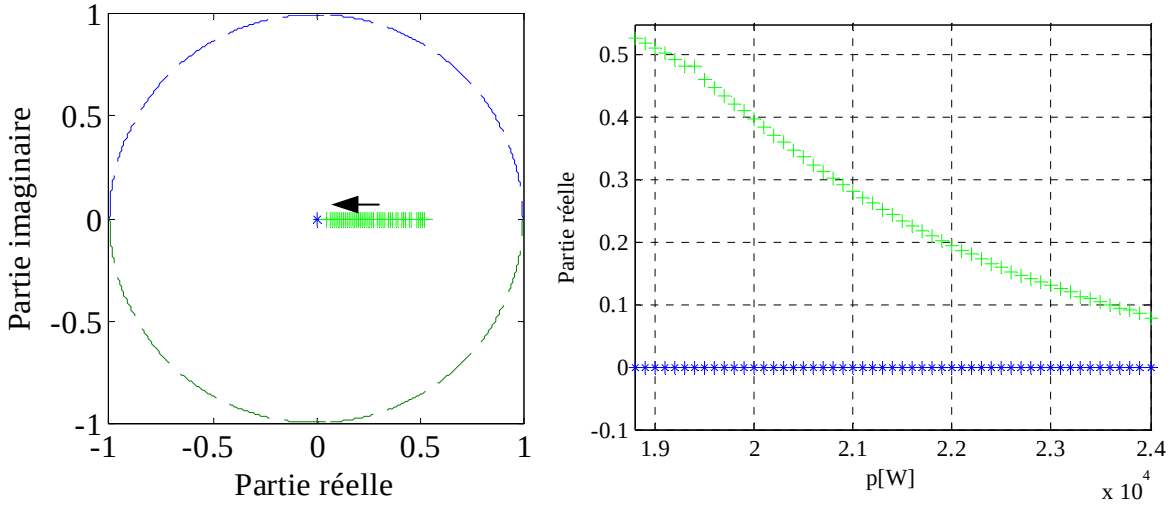


Figure 4-48 : Analyse du cycle 2T-périodique - Tracé des multiplieurs de Floquet associés à l'application F^{o2}.

Comme le montrent les divers résultats obtenus pour les trois jeux de paramètres, le modèle discret échantillonné proposé reste cohérent avec les résultats obtenus par simulation numérique. Un des avantages de disposer d'un modèle analytique du système est de pouvoir étudier la stabilité des cycles décrits par les variables d'états à l'aide des multiplieurs de Floquet et notamment de pouvoir connaitre l'influence des variations de paramètres sur la stabilité des cycles (voir paragraphe 4.4).

4.2.3.2. Résultats obtenus pour le modèle non échantillonné

Pour les simulations numériques, la charge est maintenant modélisée par une charge à puissance constante consommant un courant I constant sur une durée DT, D variant de manière continue comme indiqué sur la Figure 4-5. Revenons maintenant aux résultats

obtenus pour le ***modèle non échantillonné***. La procédure est identique au cas précédent. Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous présenterons de manière synthétique les résultats obtenus avec ce modèle.

Premier jeu de paramètres (essai A du Tableau 4-1)

Pour le premier jeu de paramètres, l'effet de l'échantillonnage est négligeable puisque les variations dues aux effets de découpage sont négligeables avec ce jeu de paramètres. Il s'ensuit que les résultats obtenus avec le modèle non échantillonné sont identiques à ceux obtenus avec le modèle échantillonné.

Deuxième jeu de paramètres (essai B du Tableau 4-1)

Les diagrammes de bifurcation obtenus avec le second jeu de paramètres sont présentés sur la Figure 4-49. La puissance critique est voisine de $460\ W$.

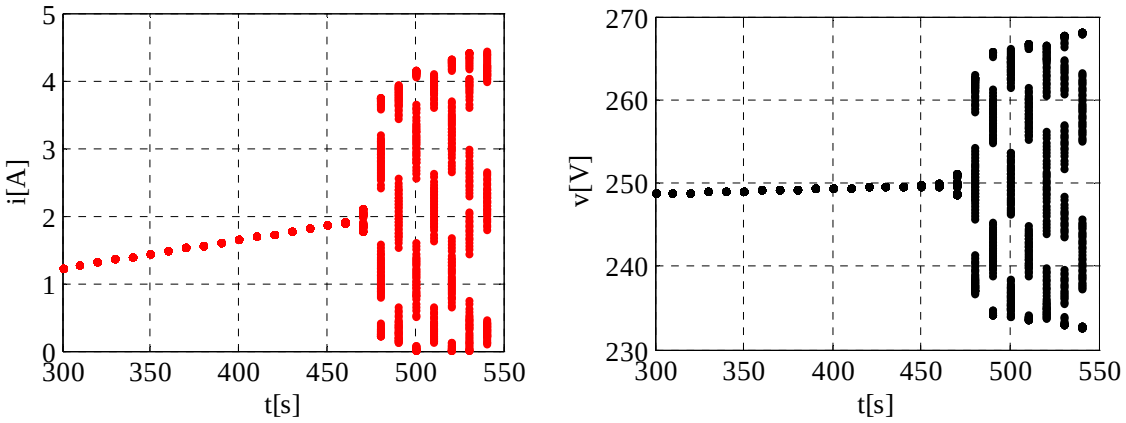


Figure 4-49 : Diagramme de bifurcation pour le deuxième jeu de paramètres, courant (à gauche) et tension (à droite) lorsque p varie de $300W$ à $540\ W$.

On fixe $p = 410\ W$, une puissance inférieure à p_0. Les formes d'onde du courant et de la tension obtenues avec le modèle discret non échantillonné sont présentées sur la Figure 4-50 et permettent de s'assurer que le système discret converge vers un point fixe.

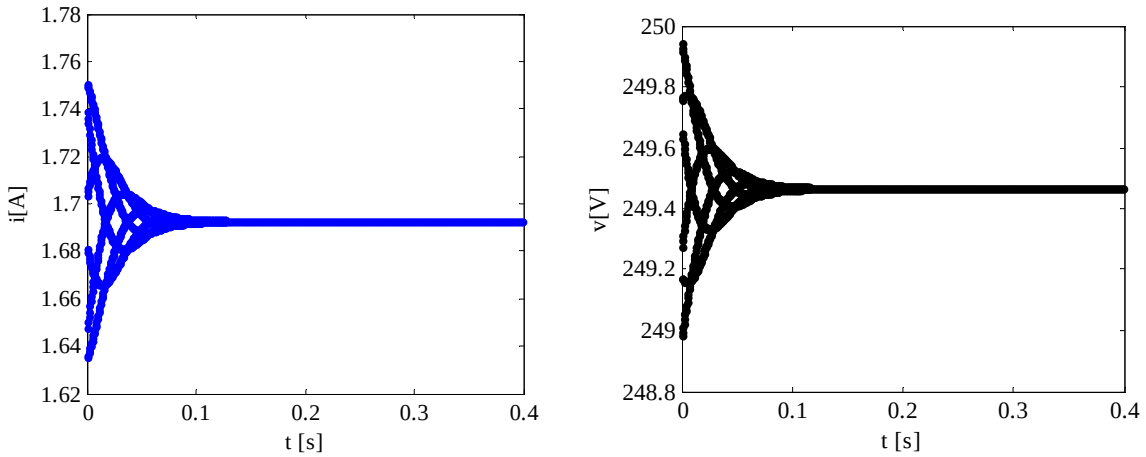


Figure 4-50 : Formes d'onde du courant et de la tension échantillonné avec $p = 410\ W$

Sur la Figure 4-51, sont représentés dans le plan de phase, les évolutions de la tension et du courant obtenues à l'aide du modèle discret non échantillonné pour deux valeurs de puissance de charge, l'une inférieure à la puissance critique, l'autre supérieure. Comme le montrent ces

courbes, le système discret converge bien vers un point fixe (cycle T-périodique décrit par les variables d'état du système) lorsque la puissance de charge est fixée à $p = 410\ W$. Par contre, pour $p = 510\ W$, on voit apparaitre 6 points fixes sur le plan de phase ce qui correspond à la création d'un cycle 6T-périodique stable pour le système.

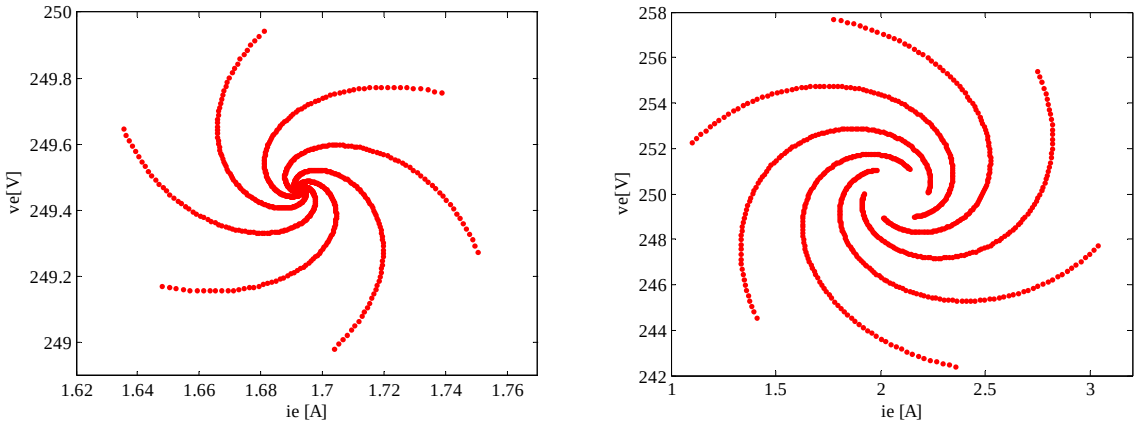


Figure 4-51 : Evolution dans le plan de phase du courant et de la tension obtenus par le modèle discret non échantillonné pour $p = 410\ W$ (à gauche) $p = 510\ W$ (à droite).

Comme précédemment, il est possible d'étudier analytiquement la stabilité des cycles via l'analyse des valeurs propres de la matrice Jacobienne de l'application F (Figure 4-52 et Figure 4-53). On constate que toutes les paires de valeurs propres se trouvent à l'intérieur du cercle unité pour les puissances inférieures à la puissance critique et sortent du cercle unité pour une puissance inférieure à $475\ W$. Ces résultats sont cohérents avec le tracé du diagramme de bifurcation et valide le calcul théorique de l'application F et de sa matrice Jacobienne (erreur relative sur la puissance critique inférieure à 3,5%).

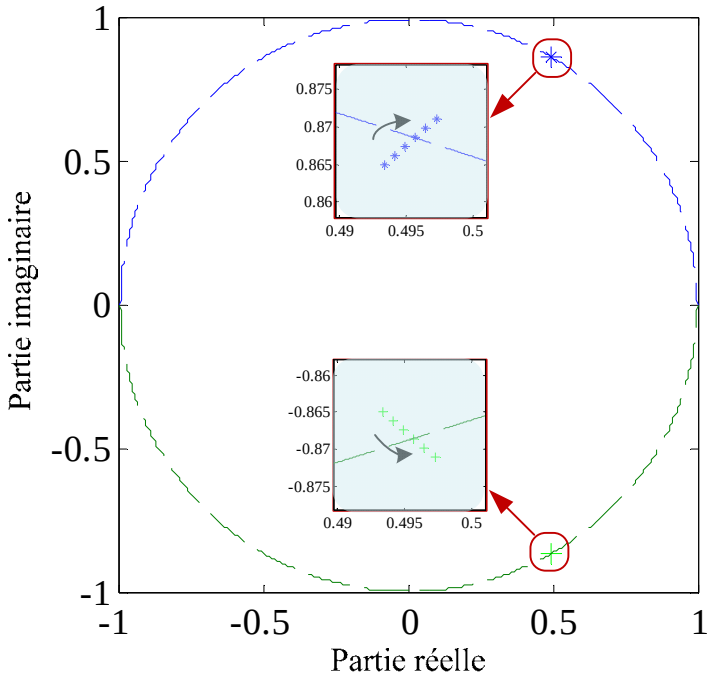


Figure 4-52 : Tracé des multiplieurs de Floquet pour p variant de $420\ W$ à $520\ W$.

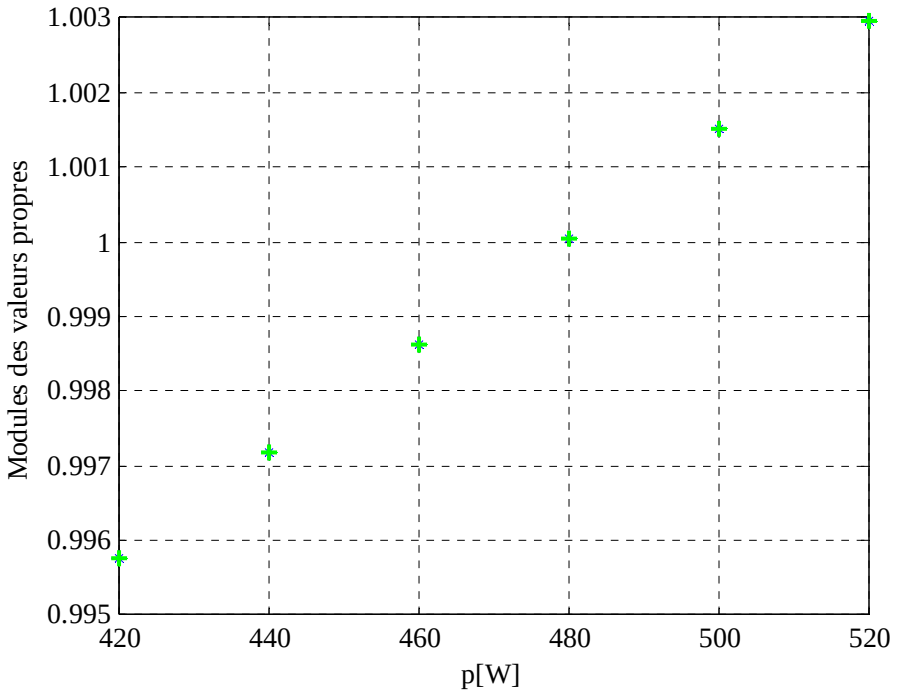


Figure 4-53 : Tracé des modules des multiplieurs de Floquet pour p variant de $420\ W$ à $520\ W$.

Troisième jeu de paramètres (essai C du Tableau 4-1)

Les diagrammes de bifurcation obtenus pour ce jeu de paramètres sont représentés sur la Figure 4-54. Ils montrent que la puissance critique est voisine de $p_0 = 29000\ W$.

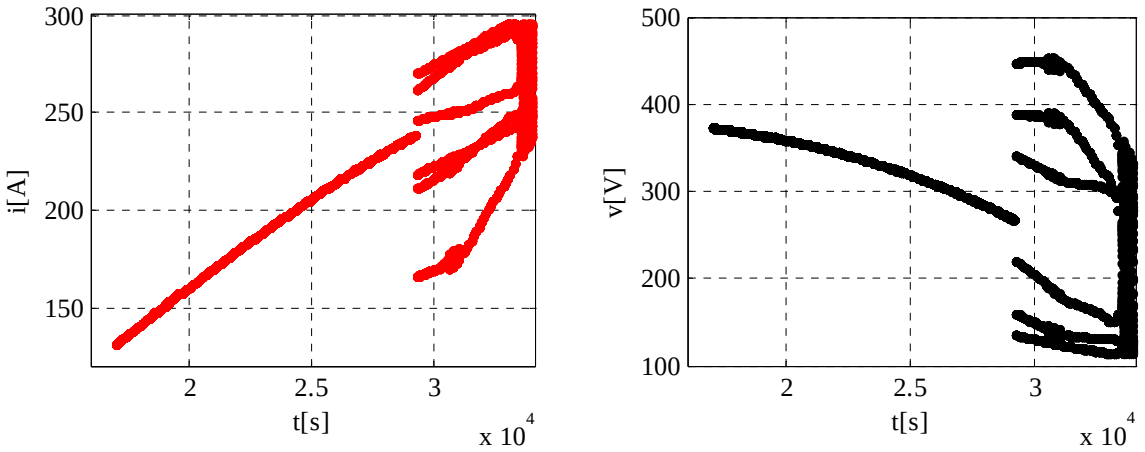


Figure 4-54 : Diagramme de bifurcation pour le troisième jeu de paramètres, courant (à gauche) et tension (à droite) lorsque p varie de $17000\ W$ à $34000\ W$.

Comme précédemment un cycle limite stable existe lorsque la puissance de charge p est inférieure à p_0. Lorsque la puissance de charge dépasse la puissance critique, la trajectoire d'état converge vers des cycles 6T-périodiques comme le montre la Figure 4-55 où sont représentées en régime permanent les formes d'onde de courant et tension ainsi que les valeurs correspondantes données par le modèle discret non échantillonné.

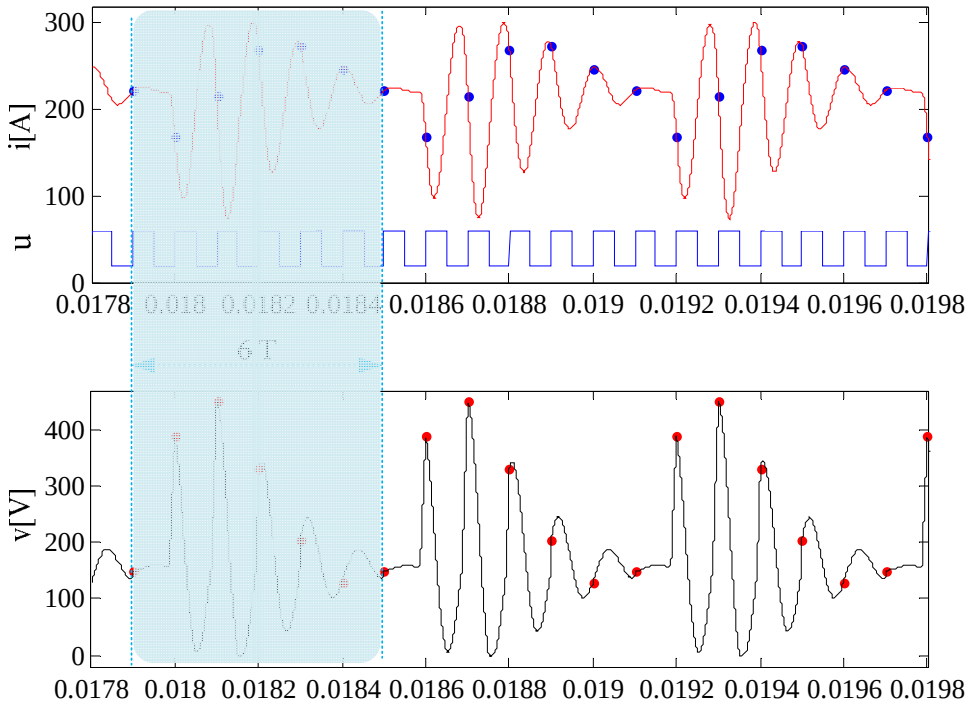


Figure 4-55 : Forme d'onde du courant (en haut) et de la tension (en bas) en régime établi $p = 30000\ W$.

Avec ce jeu de paramètres, une différence notable apparait cependant sur la nature de la bifurcation. En effet, en regardant le tracé des multiplieurs de Floquet présentés sur la Figure 4-56, on constate que les multiplieurs de Floquet n'évoluent pas de manière continue lorsqu'il se rapproche du cercle unité. Ils franchissent le cercle unité de manière discontinue comme le montre la Figure 4-57.

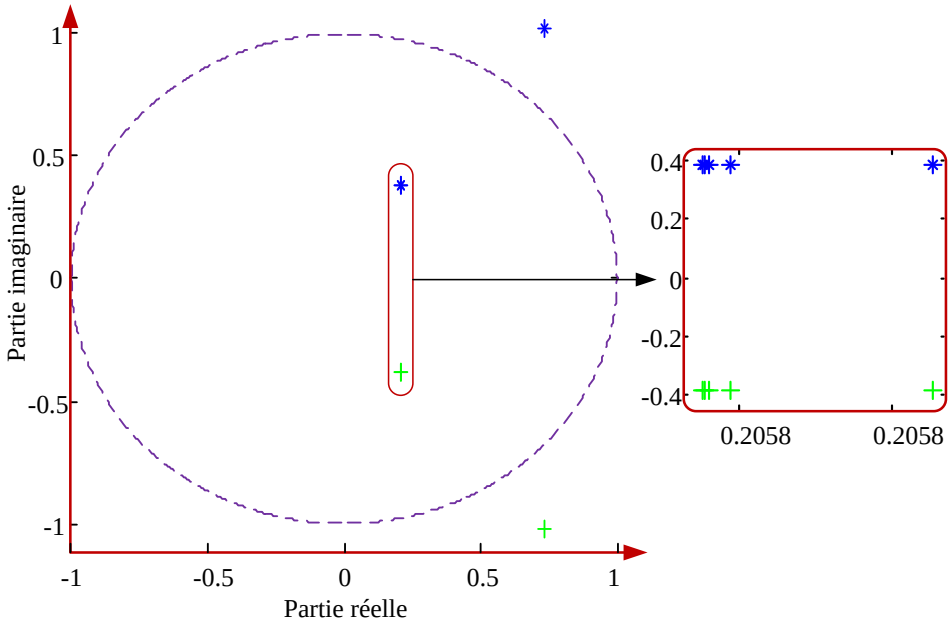


Figure 4-56 : Evolution des multiplieurs de Floquet pour p de $24000\ W$ à $30000\ W$.

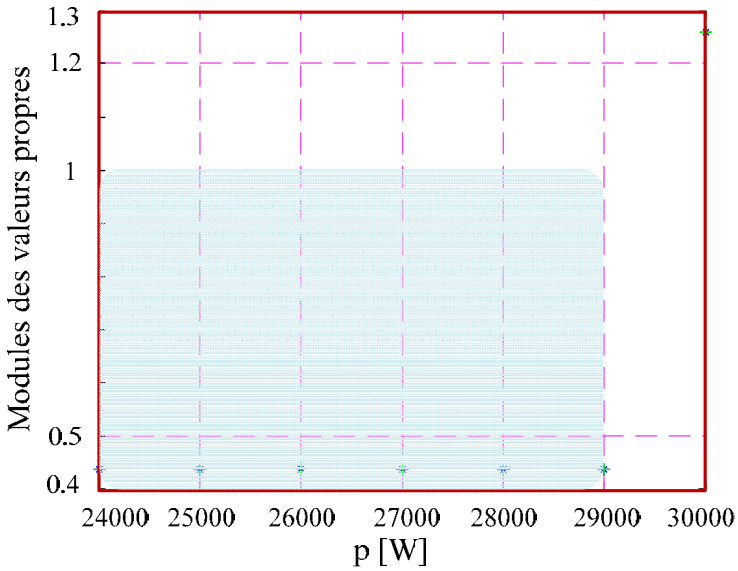


Figure 4-57 : Module des valeurs propres pour p de $24000\ W$ à $30000\ W$.

4.3. Comparaison avec les résultats donnés par les modèles moyens usuels

On va exposer dans ce paragraphe une comparaison entre les résultats obtenus précédemment et ceux donnés par les modèles moyens usuels. On rappelle les équations différentielles qui régissent le fonctionnement du système au sens des grandeurs moyennes, la diode étant négligée puisqu'on s'intéresse uniquement à la stabilité d'un point fixe avec cette approche :

$$\begin{cases} L\dfrac{di(t)}{dt} = V_e - r\,i(t) - v(t) \\ C\dfrac{dv(t)}{dt} = i(t) - \dfrac{p}{v(t)} \end{cases} \tag{4-49}$$

Au point d'équilibre, on peut écrire :

$$\begin{cases} V_e\,i = r\,i^2 + p \\ v = V_e - r\,i \end{cases} \tag{4-50}$$

En résolvant l'équation du deuxième ordre $i^2 - V_e i + p = 0$, on obtient une seule solution acceptable pour le courant inductif nominal (I_{eq}) :

$$I_{eq} = \frac{V_e}{2\,r}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{p}{p_m}}\right), p_m = \frac{{V_e}^2}{4\,r} \tag{4-51}$$

En utilisant (4-50) on a la tension nominale aux bornes du condensateur (V_{eq}) :

$$V_{eq} = V_e - r\,I_{eq} \tag{4-52}$$

L'existence de points d'équilibre est conditionnée à la condition $p < p_m$. Par conséquent, nous supposerons cette condition vérifiée ($p < \frac{{V_e}^2}{4\,r}$).

Pour faciliter l'étude, on fait un changement d'origine; on pose alors :

$$\begin{cases} X_1 = i - I_{eq} \\ X_2 = v - V_{eq} \end{cases} \tag{4-53}$$

où X_1(respectivement X_2) est la variation du courant inductif (respectivement de la tension aux bornes du condensateur) autour de sa valeur nominale.

On obtient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} L\dfrac{dX_1}{dt} = -r\,X_1 - X_2 \\ C\dfrac{dX_2}{dt} = X_1 + I_{eq} - \dfrac{p}{X_2 + V_{eq}} \end{cases} \tag{4-54}$$

En utilisant $p = I_{eq}\,V_{eq}$, le système se réécrit :

$$\begin{cases} \dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{-r}{L}\,X_1 - \dfrac{1}{L}X_2 \\ \dfrac{dX_2}{dt} = \dfrac{1}{C}\,X_1 + \dfrac{1}{C}\dfrac{X_2\,I_{eq}}{(X_2 + V_{eq})} \end{cases} \tag{4-55}$$

Pour analyser la stabilité du système, on le met sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dfrac{dX_1}{dt} \\ \dfrac{dX_2}{dt} \end{bmatrix} = f(X) = \begin{bmatrix} f1(X) \\ f2(X) \end{bmatrix} \tag{4-56}$$

La matrice Jacobienne est donnée par :

$$J_f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X=X_{eq}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f1}{\partial X_1} & \dfrac{\partial f1}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial f2}{\partial X_1} & \dfrac{\partial f2}{\partial X_2} \end{bmatrix}_{X=X_{eq}} \tag{4-57}$$

où

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{X_{eq}} = \begin{bmatrix} \dfrac{-r}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & \dfrac{I_{eq}}{C\,V_{eq}} \end{bmatrix} \tag{4-58}$$

Maintenant les valeurs propres du système peuvent être calculées en deux étapes :

1. Trouver le point de fonctionnement correspondant à différentes puissances.
2. Résoudre le polynôme caractéristique : $\det\left(\lambda I - J_f(X)\right) = 0$

On obtient alors :

$$\lambda = \frac{1}{2CLV_{eq}}\left(I_{eq}L - CrV_{eq} \pm \sqrt{-4CLV_{eq}\left(V_{eq} - I_{eq}r\right) + \left(CrV_{eq} - I_{eq}L\right)^2}\right) \quad (4\text{-}59)$$

Les Figure 4-58 à Figure 4-60 montrent l'évolution des valeurs propres lorsque la puissance p varie pour les trois jeux de paramètres précédents. Pour chaque jeu de paramètres, il existe une puissance critique p_0 au-dessous de laquelle les valeurs propres restent toujours dans le demi-plan gauche ce qui prouve la stabilité asymptotique du point d'équilibre.

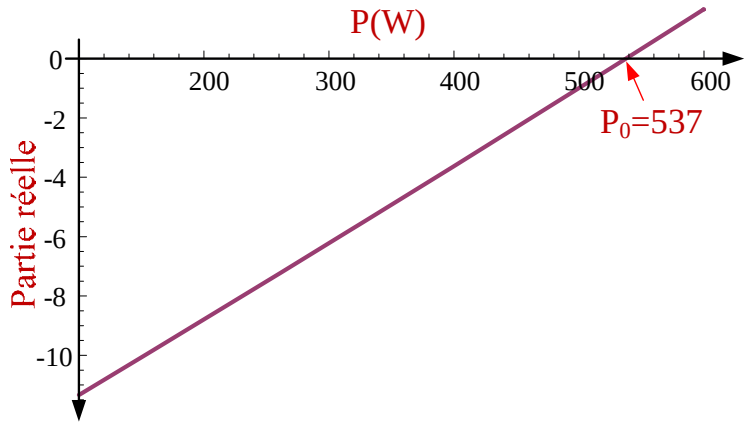


Figure 4-58 : Evolution des valeurs propres du système, lorsque la puissance p varie (pour le premier jeu de paramètres).

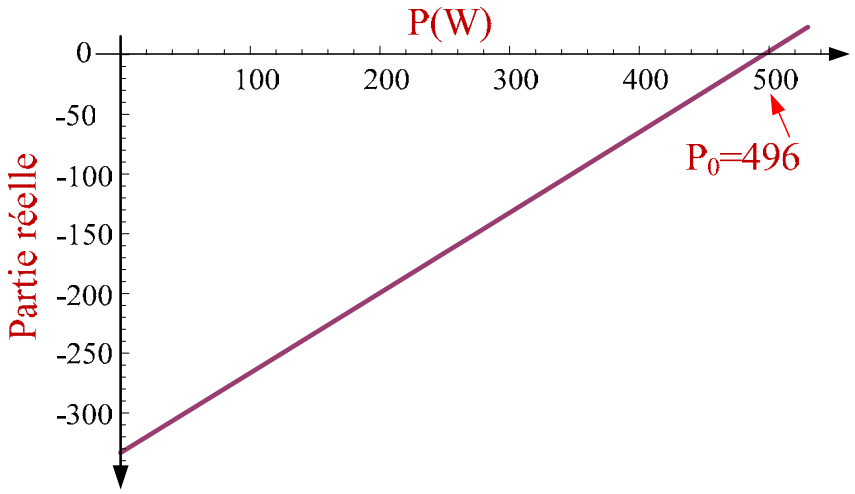


Figure 4-58 : Evolution des valeurs propres du système, lorsque la puissance p varie (pour le deuxième jeu de paramètres).

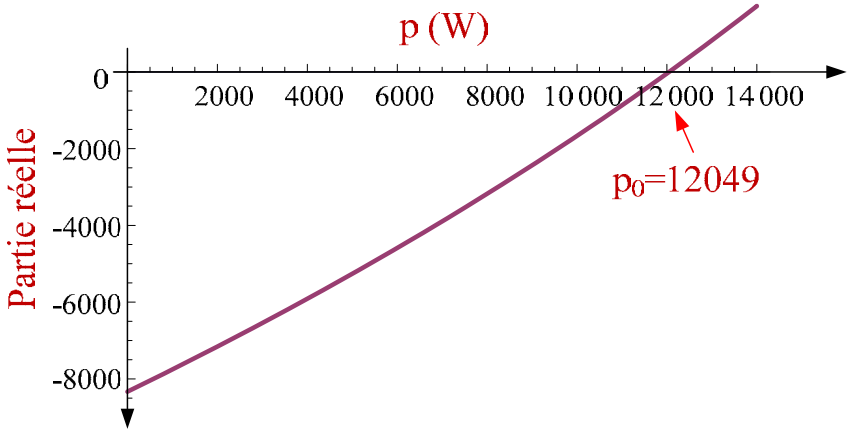


Figure 4-59 : Evolution des valeurs propres du système, lorsque la puissance p varie (pour le troisième jeu de paramètres).

Le Tableau 4-3 présente une comparaison entre les puissances critiques p_0 obtenues précédemment et celles données par le modèle moyen usuel pour les trois jeux de paramètres du système.

	Essai A	Essai B	Essai C
$f0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ (kHz)	0.036	1.67	8.38
$p_0(W)$ obtenue avec le modèle moyen	537	496	12049
$p_0(W)$ obtenue avec le modèle discret non échantillonné	530	470	29200
$p_0(W)$ obtenue avec le modèle discret échantillonné	530	600	18500

Tableau 4-3 : Comparaison des puissances critiques p_0 obtenues précédemment et celles données par le modèle moyen usuel.

On constate que les résultats obtenus par le modèle moyen sont cohérents avec ceux donnés par les deux modèles discrets pour le jeu A de paramètres. Par contre, dès que la fréquence de coupure du filtre se rapproche de la fréquence de découpage, les résultats donnés par l'approche classique utilisant une modélisation au sens des grandeurs moyennes ne sont plus valables et conduisent à des erreurs relativement importantes sur la valeur de puissance critique.

4.4. Robustesse

L'intérêt d'avoir développé une modélisation analytique incluant l'effet de découpage est de pouvoir étudier la stabilité des cycles limites décrit par les variables d'état du système lorsque les valeurs des paramètres du système varient ou sont incertaines. Pour l'analyse de robustesse, la puissance de charge p est fixée à $7600\ W$ avec le troisième jeu de paramètres.

La Figure 4-59 représente l'évolution des multiplieurs de Floquet lorsque la valeur de l'inductance et la valeur de la capacité évoluent chacune entre 50% et 150% de leur valeur nominale. Les multiplieurs de Floquet restent toujours à l'intérieur du cercle unité et ceci quelle que soit la valeur prise par l'inductance et la capacitance. Comme précédemment, le troisième multiplieur de Floquet est constant et égal à 1 car il est lié au temps. Il n'est donc pas représenté sur la figure.

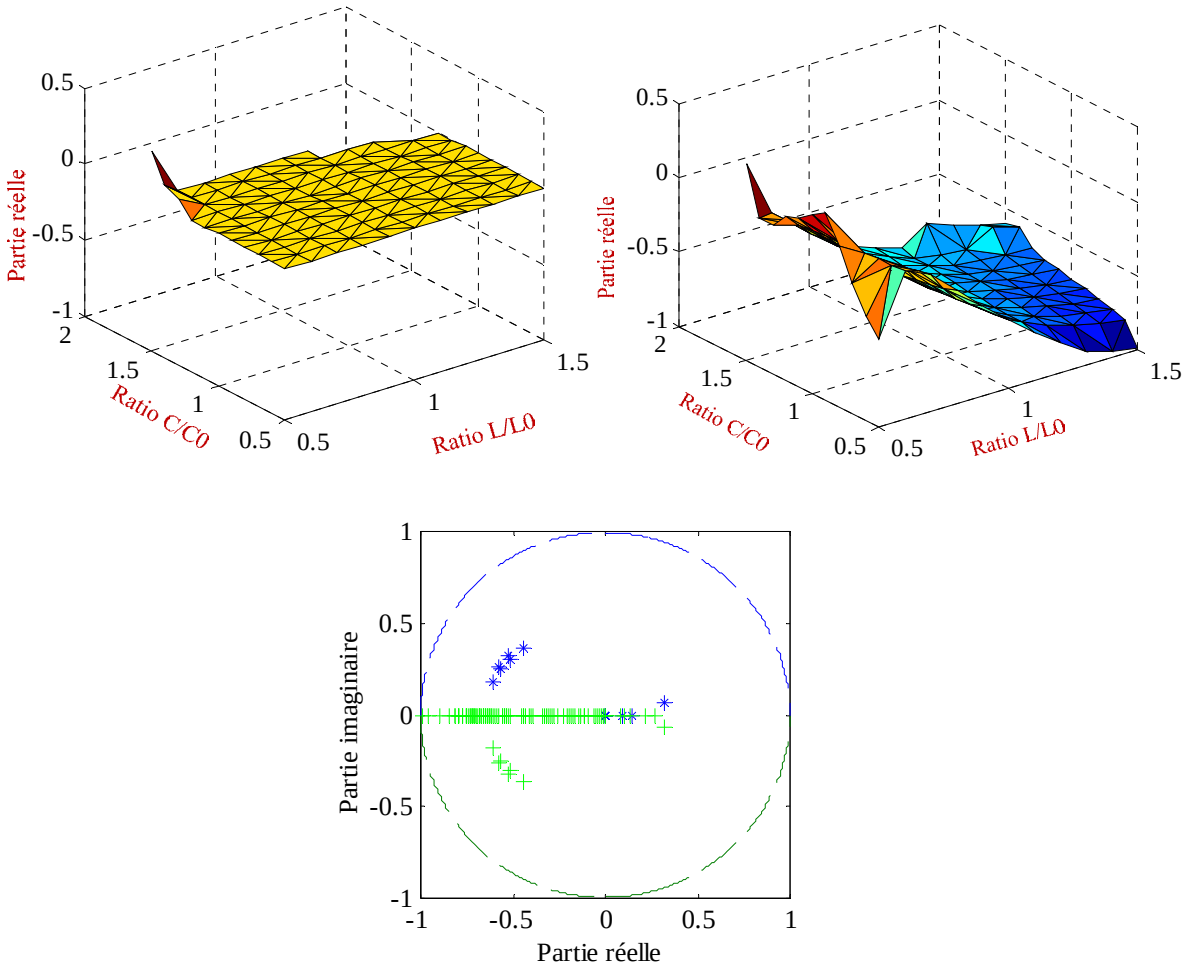


Figure 4-59 : Evolution des multiplieurs de Floquet lorsque les valeurs de l'inductance et de la capacité varient entre 50% et 150% de leur valeur nominale avec $p = 7600\ W$.

On se rapproche maintenant de la puissance critique et on fixe la puissance à $p = 18000\ W$. On doit donc diminuer l'amplitude des variations de la valeur de l'inductance et de la capacité pour que les multiplieurs de Floquet restent toujours à l'intérieur du cercle unité. Les valeurs de l'inductance varient entre 50% et 100% de la valeur nominale et les valeurs de la capacité varient entre 100% et 150%.

Comme le montre la Figure 4-60 la partie réelle des multiplieurs de Floquet évolue entre -1 et 1, la partie imaginaire étant quasi nulle. Ceci permet de garantir l'existence de cycles T-périodique stable sur cette plage de variations paramétriques.

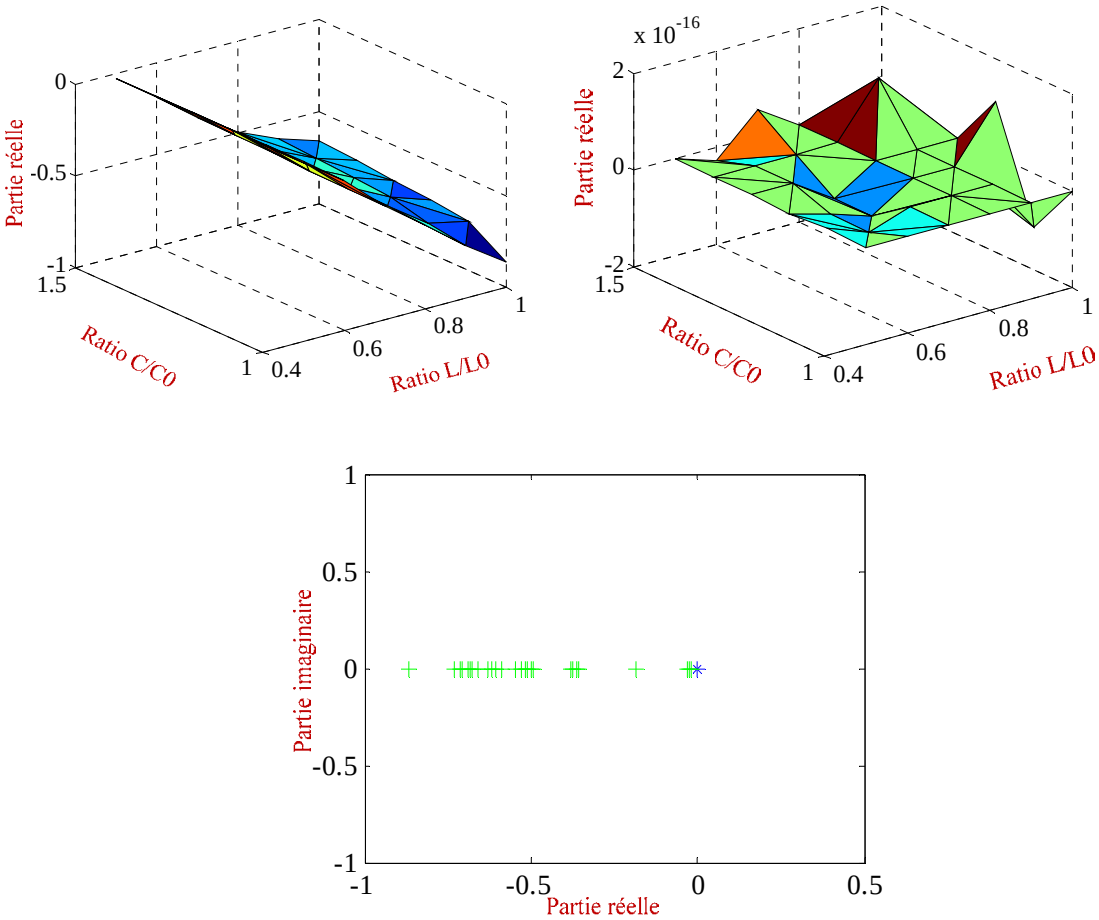


Figure 4-60 : Evolution des multiplieurs de Floquet lorsque l'inductance et la capacitance varient avec $p = 18000\ W$.

4.5. Conclusion

Ce chapitre constitue une introduction à l'analyse de la stabilité des bus continus d'alimentation lorsque les organes de filtrage sont volontairement sous dimensionnés, de manière à diminuer leur impact sur le cout, le volume ou bien le poids de l'électronique embarqué.

Les méthodes classiques d'analyse de la stabilité basées sur l'étude de la stabilité d'un point fixe ne sont alors plus applicables. Il est donc nécessaire d'introduire de nouveaux outils permettant d'appréhender la stabilité de tel système via l'étude des cycles limites décrit par les variables d'état du système.

Deux modèles discrets l'un continu, l'autre échantillonné ont été proposés. Ils permettent de prendre en compte les effets de découpage et d'analyser la stabilité du système.

Conclusion générale

Cette thèse est divisée en quatre chapitres. On a rappelé tout d'abord dans le chapitre 1 les différents phénomènes non linéaires et les différents types de bifurcation que l'on peut rencontrer dans les convertisseurs statiques ainsi que les différentes techniques de modélisation employées. Le modèle discret classique a été appliqué à un convertisseur boost. On a étudié la stabilité de ce convertisseur avec un régulateur hybride de courant en calculant des multiplieurs de Floquet. Ceci a permis d'étudier la robustesse du système vis-à-vis des variations de l'inductance du convertisseur et de sa résistance. Un dispositif expérimental a été réalisé pour valider le modèle développé (dans le but de vérifier la cohérence des résultats trouvés) pour plusieurs conditions de fonctionnement. En fin de ce chapitre, nous avons défini le modèle moyen continu petit signal et ensuite le modèle moyen discret petit signal à large bande passante. Ces modèles permettent de déterminer le temps de réponse et le dépassement du système (quantifier les propriétés dynamiques en termes de bande passante, dépassement et marge de phase).

Le deuxième chapitre a été dédié à la modélisation moyenne large signal d'un convertisseur boost permettant de définir le premier point de bifurcation. Ce modèle a permis d'obtenir une expression analytique de la matrice Jacobienne du système et une étude de la robustesse du système a ensuite été effectuée à partir des multiplieurs de Floquet. Ensuite la méthodologie proposée a été appliquée à plusieurs contrôleurs de courant à fréquence fixe de commutation : le régulateur à top de blocage, l'hystérésis modulée et un régulateur du type PI avec une modulation MLI. Les résultats obtenus avec ce modèle ont été validés via la simulation numérique et par des résultats expérimentaux. Les régulateurs de courant proposés ont été utilisés sur un montage expérimental, en considérant une tension de sortie variable et en prenant en compte les éléments parasites d'un convertisseur boost. Les résultats expérimentaux obtenus montrent l'apparition de cycles apériodiques prévus par le modèle proposé.

Ce modèle moyen a été ensuite appliqué à un filtre actif développé pour éliminer les ondulations de courant générées par un convertisseur statique continu – continu. Deux stratégies pour le contrôle des tensions aux bornes des capacités du filtre basées sur la charge et l'énergie ont été présentées. La première stratégie consiste à asservir ces tensions via des convertisseurs réversibles isolés et la seconde consiste à asservir l'une des tensions à l'aide du courant d'entrée du filtre et l'autre à l'aide d'un convertisseur réversible isolé. Les résultats obtenus sur un dispositif expérimental ont permis de valider le modèle moyen proposé.

Dans le cas des bus continus d'alimentation avec un filtre d'entrée d'un dispositif fonctionnant à puissance constante, on a montré que les méthodes classiques d'analyse de la stabilité basées sur l'étude de la stabilité d'un point fixe ne sont plus applicables lorsque la pulsation du filtre est voisine de la pulsation associée à la fréquence de découpage du convertisseur. On a analysé la stabilité de tels systèmes via deux modèles discrets : l'un continu, l'autre échantillonné. Ils permettent de prendre en compte les effets de découpage et d'analyser la stabilité du système.

Dans les perspectives, plusieurs axes d'études complémentaires peuvent être envisagés. Le premier vise à étendre la méthodologie de la modélisation proposée dans le chapitre deux à

d'autres structures de convertisseurs statiques, et/ou de contrôle. On pourra également prendre en compte l'influence d'autres paramètres de bifurcation, comme la constante d'intégration intervenant dans la commande, pour définir le premier point de bifurcation.

Ensuite, une étude complémentaire aux travaux réalisés sur la stabilité des bus continus d'alimentation est à effectuer. En effet, même si les modèles proposés permettent d'avoir une bonne image du comportement haute fréquence induit par les effets de découpage sur le bus continu, il reste des travaux à effectuer quant à l'analyse de la nature des cycles. Ces travaux pourraient, par exemple, conduire à une modification de la structure de commande pour garantir des cycles limites stables.

Bibliographie

[Ban 98] ch1 S. Banerjee, K. Chakrabarty, “Nonlinear modeling and bifurcations in the boost converter,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 13, no. 2, pp. 252-260, Mar. 1998.

[Ban 01] ch1 S. Banerjee, G. C. Verghese, Nonlinear phenomena in power electronics: Attractors, bifurcations, chaos, and nonlinear control, New York: IEEE Press, 2001.

[Bao 11] ch1 B. Bao, G. Zhou, J. Xu ,Z. Liu, “Unified classification of operation-state regions for switching converters with ramp compensation,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 26, no. 7, pp. 1968-1975, Jul. 2011.

[Bel 95] ch4 M. Belkhayat, R. Cooley, A. Witulski, “Large signal stability criteria for distributed systems with constant power loads,” IEEE, Power Electronics Specialists Conference (PESC), vol. 2, pp. 1333 - 1338, Jun. 1995.

[Ber 00] ch1 M. Bernardo, F. Vasca, “Discrete-time maps for the analysis of bifurcations and chaos in DC/DC converters,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 47, no. 2, pp. 130-143, Feb. 2000.

[Caf 06] ch1 D. Cafagna, G. Grassi, “Bifurcation analysis and chaotic behavior in boost converters: Experimental results,” Nonlinear Dynamics, vol. 44, no. 1, pp. 251-262, 2006.

[Che 08] ch1 Y. Chen, C. K. Tse, S. S. Qiu L. Lindenmuller, W. Schwarz, “Coexisting fast-scale and slow-scale instability in current-mode controlled DC/DC converters: Analysis, simulation and experimental results,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 55, no. 10, pp. 3335-3348, Nov. 2008.

[Cho 10] ch3 J. Choi, H. Cha, B. M. Han, “A three-phase interleaved DC-DC converter with active clamp for fuel cells,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 25, no. 8, pp. 2115-2123, Aug. 2010.

[Dav 07] ch1 A. Davoudi, J. Jatskevich, P. Chapman, “Computer-aided average-value modeling of fourth-order PWM DC-DC converters,” IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), pp. 793-796, 2007.

[Dea 90] ch1 J. H. Deane, D. C. Hamill, “Instability, subharmonics, and chaos in power electronic systems,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 5, no. 3, pp. 260-268, Jul.1990.

[El 10] ch1 A. El Aroudi, E. Rodríguez, R. Leyva, E. Alarcon “A design-oriented combined approach for bifurcation prediction in switched-mode power converters,” IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 57, no. 3, pp. 218-222, Mar. 2010.

[Eri 01] ch1 R. W. Erickson, D. Maksimovic, Fundamentals of Power Electronics, 2 ed.: Kluwer Academic Publishers, 2001.

[Gav 11] ch2 R. Gavagsaz-Ghoachani, M. Phattanasak, J. P. Martin, S. Pierfederici, B. Davat, “Predicting the onset of bifurcation and stability study of a hybrid current controller for a boost converter”, International Conference on Modeling and Simulation of Electric Machines, Converters and Systems (ELECTRIIMACS), Jun. 2011.

[Gia 12] ch1 D. Giaouris, S. Banerjee, O. Imrayed, K. Mandal, B. Zahawi, V. Pickert, “Complex interaction between tori and onset of three-Frequency quasi-periodicity in a current mode controlled boost converter,” IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 59, no 1, pp. 207-214, Jan. 2012.

[Guc 98] ch2 J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector field in Applied Mathematical Sciences. New York: Springer-Verlag, 1998.

[Ham 88] ch1 D. C. Hamill, D. J. Jeffries, “Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter,” IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 35, no. 8, pp. 1059-1061, Aug. 1988.

[Ham 92] ch1 D. C. Hamill, J. H. B. Deane, D. J. Jefferies, “Modeling of chaotic DC-DC converters by iterated nonlinear mappings,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 7, no. 1, pp. 25-36, Jan.1992.

[Har 05] ch4 L. Harnefors, K. Pietiläinen, “Inverter DC-link Stabilizing Control with Improved Voltage Sag Ride-Through Capability”, IEEE European Conference on Power Electronics and Applications (EPE), Sep. 2005.

[Ito 10] ch3 J. I. Itoh, F. Hayashi, “Ripple current reduction of a fuel cell for a single-phase isolated converter using a DC active filter with a center tap,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 25, no. 3, pp. 550-556, Mar. 2010.

[Iu 03] ch1 H. Iu, C. Tse, “Study of low-frequency bifurcation phenomena of a parallel-connected boost converter system via simple averaged models,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 50, no. 5, pp. 679-686, May 2003.

[Kav 08] ch1 A. Kavitha, G. Uma, “Experimental verification of Hopf bifurcation in DC-DC Luo converter,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 23, no. 6, pp. 2878-2883, Nov. 2008.

[Kaz 08] ch1 M. Kazimierczuk, Pulse-width modulated DC-DC power converters, Chichester, U.K.: Wiley, 2008.

[Kim 10] ch3 H. Kim, C. Yoon, S. Choi, “An improved current-fed ZVS isolated boost converter for fuel cell applications,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 25, no. 9, pp. 2357-2364, Sep. 2010.

[Lac 08] ch1,3 A. Lachichi, S. Pierfederici, J.P. Martin, B. Davat, “Study of a hybrid fixed frequency current controller suitable for DC-DC applications,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 23, no. 3, pp. 1437-1448, May 2008.

[Leu 10] ch3 C. S. Leu, M.H. Li, “A Novel Current-Fed Boost Converter with Ripple Reduction for High-Voltage Conversion Applications,” IEEE

Transactions on Industrial Electronics, vol. 57, no. 57, pp. 2018-2023, Jun. 2010.

[Mar 02] ch1,3 J.P. Martin, S. Pierfederici, F. Meibody-Tabar, B. Davat, “New fixed frequency AC current controller for a single phase voltage source inverter,” IEEE, Power Electronics Specialists Conference (PESC), vol. 2, pp. 909-914, 2002.

[Maz 03] ch1 S. Mazumder, A. Nayfeh, D. Boroyevich, “An investigation into the fast- and slow-scale instabilities of a single phase bidirectional boost converter,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 18, no. 4, pp. 1063-1069, Jul. 2003.

[Maz 06] ch1 S.K. Mazumder, “Stability analysis of parallel dc-dc converters,” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 42, no. 1, pp. 50-69, Jan. 2006.

[Mid 76] ch1 R. D. Middlebrook, S. Cuk, “A general unified approach to modeling switching-converter power stages,” IEEE Power Electronics Specialists Conference Record, pp. 18–34, 1976.

[Mir 09] ch1 M. Miranda, J. Alvarez, “Bifurcations and chaos produced by the modulation signal in a PWM buck converter,” Chaos, Solitons and Fractals, vol. 42, no. 4, pp. 2260-2271, 2009.

[Mon 11] ch1 E. Monmasson, Power Electronic Converters: PWM Strategies and Current Control Techniques, ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc, 11 mars 2011.

[Mor 10] ch1 V. Moreno-Font, A. El Aroudi, J. Calvente, R. Giral, L. Benadero, “Dynamics and stability issues of a single-inductor dual-switching DCDC converter,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 57, no. 2, pp. 415-426, Feb. 2010.

[Nat 09a] ch1 A. Natsheh, J. Kettleborough, N. Janson, “Experimental study of controlling chaos in a DC-DC boost converter,” Chaos, Solitons and Fractals, vol. 40, no. 5, pp. 2500-2508, 2009.

[Nat 09b] ch1 A. Natsheh, J. Kettleborough, J. Nazzal, “Analysis, simulation and experimental study of chaotic behaviour in parallel-connected DC-DC boost converters,” Chaos, Solitons and Fractals, vol. 39, no. 5, pp. 2465-2476, 2009.

[Nay 95] ch1 A. H. Nayfeh, B. Balachandran, Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods, New York: Wiley, 1995.

[Ost 10] ch3 S. Ostrožnik, P. Bajec, P. Zajec, “A study of a hybrid filter,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 57, no. 3, pp. 935-942, Mar. 2010.

[Rob 06] ch1 B. Robert, M. Feki, H. Iu, “Control of a PWM inverter using proportional plus extended time-delayed feedback,” International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 16, no. 1, pp. 113-128, 2006.

[Rou 07] ch4 N. Roux, F. Richardeau, “Stability of DC link with reduced energy storage for regenerative synchronous drive - analytical approach”, IEEE European Conference on Power Electronics and Applications (EPE) Sep. 2007.

[Sat 11] ch1 M. Sattler, C. S. Edrington, “Analysis of bifurcation behavior in power converters and the impact on the design process,” IEEE Electric Ship Technologies Symposium (ESTS), pp. 203-206, Apr. 2011.

[Sha 07] ch2 M. Shamsi-Nejad, S. Pierfederici, J.P. Martin, F. Meibody-Tabar, “Study of an hybrid current controller suitable for DC-DC or DC-AC applications,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 22, no. 6, pp. 2176-2186, Nov. 2007.

[Sha 09] ch2,3 A. Shahin, R. Gavagsaz-Ghoachani, J. P. Martin, S. Pierfederici, B. Davat, F. Meibody-Tabar, “New method to cancel HF current undulations generated by DC/DC converter,” IEEE Energy Conversion Congress and Exposition, (ECCE) pp. 2847-2853, Sep. 2009.

[Sha 11] ch2,3 A. Shahin, R. Gavagsaz-Ghoachani, J. P. Martin, S. Pierfederici, B. Davat, F. Meibody-Tabar, “New method to filter HF current ripples generated by current fed dc/dc converters,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 26, no. 12, pp. 3832-3842, Dec. 2011.

[Sho 83] ch1 D. J. Shortt, F. C. Y. Lee, “Improved switching converter model using discrete and averaging techniques,” IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 19, no. 2, pp. 190-202, Mar. 1983.

[Str 94] ch1 S. H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Reading, Mass. , Wokingham: Addison-Wesley, 1994.

[Tab 11] ch1 J. A. Taborda, F. Angulo, G. Olivar, “Smooth bifurcations in 3D-parameter space of digital-PWM switched converter,” IEEE Second Latin American Symposium on Circuits and Systems (LASCAS), Feb. 2011.

[Tan 08a] ch1 S-C. Tan, Y.M. Lai, C.K. Tse, “General Design Issues of Sliding-Mode Controllers in DC–DC Converters,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 55, no. 3, pp. 1160-1174, Mar. 2008.

[Tan 08b] ch1 S-C. Tan, Y.M. Lai, C.K. Tse, “Indirect Sliding Mode Control of Power Converters Via Double Integral Sliding Surface,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 23, no. 2, pp. 600-611, Mar. 2008.

[Tan 93] ch1 W. Tang, F.C. Lee, R. B. Ridley, “Small-signal modeling of average current-mode control,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 8, no. 2, pp. 112-119, Apr. 1993.

[Tan 95] ch1 F.D. Tan, R.D. Middlebrook, “A unified model for current-programmed converters,” IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 10, no. 4, pp. 397-408, Jul. 1995.

[Tho 86] ch1 J.M.T. Thompson, H.B. Stewart, Nonlinear Dynamics and Chaos, J. Wiley, Chichester, 1986.

[Tho 09] ch3 P. Thounthong, B. Davat, S. Raël, S. Sethakul., “Fuel cell high-power applications,” IEEE Industrial Electronics Magazine, vol. 3, no. 1, pp. 32-46, Mar. 2009.

[Tho 11] ch3 P. Thounthong, V. Chunkag, P. Sethakul, S. Sikkabut, S. Pierfederici, B. Davat, “Energy management of fuel cell/solar cell/supercapacitor hybrid power source,” Journal of Power Sources, vol. 196, no. 1, pp. 313-324, 2011.

[Tse 94] ch1 C.K. Tse, “Flip bifurcation and chaos in three-state boost switching regulators,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 41, no. 1, pp. 16-23, Jan. 1994.

[Tse 00a] ch1 C. Tse, “Recent Development in the Study of Nonlinear Phenomena in Power Electronics Circuits,” IEEE Circuits and Systems Society Newsletter, pp. 14-48, 2000.

[Tse 00b] ch1 C.K. Tse, Y.M. Lai, H. Lu, “Hopf bifurcation and chaos in a free-running current-controlled Cuk switching regulator,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 47, no. 4, pp. 448-457, Apr. 2000.

[Tse 01] ch1 C.K. Tse, Y. Lai, “Controlling bifurcation in power electronics: A conventional practice re-visited,” Latin American Applied Research, vol. 31, no. 3, pp. 177-184, 2001.

[Tse 02] ch1 C. K. Tse, M. Di Bernardo, “Complex behavior in switching power converters,” Proceedings of the IEEE, vol. 90, no. 5, pp. 768-781, May 2002.

[Tse 04] ch1 C.K. Tse, Complex Behavior of Switching Power Converters. Boca Raton, FL: CRC Press, 2004.

[Wai 11] ch3 R. J. Wai, C. Y. Lin, “Active low-frequency ripple control for clean-energy power-conditioning mechanism,” IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 57, no. 11, pp. 3780-3792, Nov. 2010.

[Wan 10] ch1 F. Wang, H. Zhang, X. Ma, “Analysis of slow-scale instability in boost PFC converter using the method of harmonic balance and Floquet theory,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 57, no. 2, pp. 405-414, 2010.

[Wil 97] ch1 C. William, Y. Chan, C.K. Tse, “Study of bifurcations in current-programmed dc/dc boost converters: from quasi-periodicity to period-doubling,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, vol. 44, no. 12, pp. 1129-1142, Dec. 1997.

[Won 08] ch1 S.C. Wong, X. Wu, C.K. Tse, “Sustained slow-scale oscillation in higher order current-mode controlled converter,” IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, vol. 55, no. 5, pp. 489-493, May 2008.

[Xie 11] ch1 F. Xie, R. Yang, B. Zhang, “Bifurcation and border collision analysis of voltage-mode-controlled flyback converter based on total ampere-turns,” IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 58, no. 9, pp. 2269-2280, 2011.

[Xu 11] ch1 C. D. Xu, K. W. E. Cheng, “Examination of bifurcation of the non-linear dynamics in buck-boost converters with input capacitor rectifier,” IET Power Electronics, vol. 4, no. 2, pp. 209-217, Feb. 2011.

[Yan 09] ch1 X. Yang, H. Zhang, X. Ma, “Modeling and stability analysis of cascade buck converters with N power stages,” Mathematics and Computers in

Simulation, vol. 80, no. 3, pp. 533-546, Nov. 2009.

[Zan 10] ch3 M.Zandi, “Contribution au pilotage des sources hybrides d’énergie électrique,” thèse de Doctorat de l’Institut National Polytechnique de Lorraine, 12 Novembre 2010.

[Zho 03] ch1 Y. Zhou, C.K. Tse, S. Qiu, F. Lau, “Applying resonant parametric perturbation to control chaos in the buck dc/dc converter with phase shift and frequency mismatch considerations,” International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, vol. 13, no. 11, pp. 3459-3471, 2003.

Comportement dynamique non-linéaire dans les convertisseurs statiques :
Régulateurs de courant et stabilité des réseaux DC

Ce mémoire s'intéresse à l'étude des comportements dynamiques dans les systèmes d'électronique de puissance. La nature des cycles définis par les variables d'état du système peut être établie soit grâce à un diagramme de bifurcation soit grâce aux multiplieurs de Floquet obtenus par le modèle discret du convertisseur. Cependant, pour certaines structures de convertisseur statique, un modèle discret ne peut être obtenu sans introduire de fortes hypothèses. Les bifurcations de type flip (à l'échelle des hautes fréquences) ne peuvent pas être prédites par le modèle moyen alors qu'elles apparaissent dans de nombreux convertisseurs statiques. Une nouvelle formulation d'un modèle moyen continu permettant d'estimer le premier point de bifurcation (flip, Hopf...) a été présentée. La méthodologie proposée a été appliquée à un convertisseur boost, en mode de conduction continu, contrôlé en courant par différents types de contrôleur à fréquence fixe de commutation. Ensuite, ce modèle moyen a été utilisé pour le dimensionnement des paramètres du régulateur de courant associé à un système de filtrage actif. Les résultats obtenus par le modèle proposé ont été validés par simulation numérique ainsi que par des résultats expérimentaux.
Les méthodes d'analyse des cycles limites ont été étendues pour étudier la stabilité des réseaux DC lorsque la fréquence de coupure du filtre LC reliant la source de tension avec le convertisseur statique est proche de la fréquence apparente de commutation des convertisseurs utilisés. Différents modèles discrets ont été développés pour pouvoir considérer ou non le caractère échantillonné de la commande des convertisseurs.

Mots clés
Cycles limites, bifurcation, chaos, stabilité, modèle moyen, modèle discret, convertisseurs DC/DC, régulateurs de courant à large bande passante.

Non-linear dynamic behavior of static converters: Current regulator and stability of DC networks

This thesis discusses the study of dynamic behavior in power electronics systems. The nature of cycles defined by the state variables of the system can be settled either by a bifurcation diagram or by Floquet multipliers obtained from the discrete model of the converter. However, for certain structures of static converters, a discrete model cannot be obtained without introducing large assumptions. The flip bifurcations (fast-scale) cannot be predicted by the averaged model whereas they appear in many statics converters. A new formulation of a continuous averaged model is presented to estimate the first bifurcation point (flip, Hopf ...). The proposed methodology is applied to a boost converter, operated in continuous conduction mode, controlled by different types of fixed frequency switching current controllers. Then, this averaged model is used for the design of the current controller parameters associated with an active filter system. The variables obtained by the proposed model have been validated by numerical simulation and experimental results. Methods of analysis of limit cycles are extended to study the stability of DC networks when the cutoff frequency of the LC filter between the voltage source and the converter is close to the switching frequency of converters. Different discrete-time models have been developed in order to consider whether to use sampled or no-sampled converter control.

Keywords: limit cycle, bifurcation, chaos, averaged model, discrete-time model, DC/DC converters, current regulators.