



HAL
open science

Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien

Santiago Nicolas Lopez Carranza

► **To cite this version:**

Santiago Nicolas Lopez Carranza. Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0118 . tel-01749302

HAL Id: tel-01749302

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749302>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

UNIVERSITÉ DE LORRAINE
ÉCOLE DOCTORALE EMMA
ÉNERGIE - MÉCANIQUE - MATÉRIAUX

Thèse de Doctorat

Discipline : Mécanique

Présentée et soutenue par

Santiago Nicolás LÓPEZ CARRANZA

Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique pour un fluide non Newtonien

préparée au LEMTA , Groupe DYNAMIQUE DES FLUIDES

soutenue le 19 Octobre 2012

Jury :

<i>Rapporteurs :</i>	Álvaro MESEGUER	-	Professeur, Universitat Politècnica de Catalonia
	Jan DUŠEK	-	Professeur, Université Luis Pasteur, (Strasbourg)
<i>Directeurs :</i>	Chérif NOUAR	-	Directeur de Recherche, CNRS
	Mathieu JENNY	-	Maitre de Conférences, Université de Lorraine
<i>Examineurs :</i>	Alessandro BOTTARO	-	Professeur, Università di Genova
	Emmanuel PLAUT	-	Professeur, Université de Lorraine
<i>Invité :</i>	Alain LEFÈVRE	-	Maître des Conférences Université de Lorraine

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA) UMR 7563 CNRS Université de Lorraine sous la direction de Chérif Nouar, Directeur de Recherche au CNRS et Mathieu Jenny, maître de conférences à l'École des Mines de Nancy.

Tout d'abord j'aimerais remercier Chérif Nouar, de m'avoir proposé un sujet intéressant et qui avait déjà éveillé mon attention lors de mes études d'ingénieur. Merci à lui de m'avoir donné un exemple de chercheur infatigable, d'une passion absolue pour la recherche, et faisant preuve d'une disponibilité à toute épreuve lorsque j'avais des questions.

Je voudrais aussi remercier Mathieu Jenny pour avoir permis d'apporter une dynamique de travail d'une nouvelle ampleur lors de son incorporation dans l'encadrement de ma thèse, dynamique qui s'est traduite par de longues discussions concernant le développement numérique et les aspects physiques liés à mon sujet.

Je voudrais aussi remercier profondément Alain Lefèvre, maître de conférences à l'ENSEM, de m'avoir familiarisé avec le monde de la mécanique des fluides expérimentale et d'avoir partagé ses expériences de vie avec moi.

Chacun d'eux a été un pilier fondamental de ce travail de recherche.

J'adresse mes respectueux remerciements à Jan Dusěk, professeur de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, pour m'avoir fait l'honneur de rapporter mon travail. De même, j'exprime ma plus profonde gratitude envers Álvaro Meseguer, professeur à l'Universitat Politècnica de Catalunya, à Barcelone, pour avoir également rapporté mon travail.

J'adresse ma reconnaissance à Emmanuel Plaut, professeur à l'École des Mines de Nancy pour ces observations toujours très pertinentes et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je voudrais aussi remercier Alessandro Bottaro, professeur à l'Université de Gênes, pour avoir également bien voulu intégrer ce jury.

Je tiens à remercier Fabrice Lemoine, directeur du LEMTA, de m'avoir accueilli ces trois années. Je remercie les secrétaires pour leur gentillesse et leur disponibilité ainsi que Ludovic Buhler pour m'avoir aidé en ce qui concerne les aspects informatiques.

Je n'oublie pas non plus tous les moments de bonheur au travail avec les doctorants qui ont passé par le laboratoire : Nicolas, Pierre, Bamdad, Lionel, Mohamed, Cédric, Clément, Christophe, Jean-Paul, Vincent, Youssef, ainsi que Guillaume et Alex.

Ma vie à Nancy n'aurait pas non plus pu être si riche sans mes amis : Lorraine, les Frères Grignard, Horacio, Jose, Bamdad, Roberto, Bertrand, Sophie, Ozo, Romain, Marine, Ranya, Rebecca, Sandra. Que mes remerciements leur soient adressés.

Un grand merci à Pol, Martha, Alejandro et Sinhué. Vous êtes un beau souvenir de ces cinq années passées en Europe. Je vous souhaite bon courage pour vos thèses respectives.

Enfin et surtout, mes remerciements les plus sincères se tournent vers ma famille qui m'a accompagné de loin physiquement mais de près dans le coeur.

Muchas Gracias!!!

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Expérience de Reynolds : Nombre de Reynolds critique	2
1.2	Amplitude critique de la perturbation	3
1.3	Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence : <i>puffs</i> et <i>slugs</i>	4
1.4	Scénarios de transition vers la turbulence	6
1.5	Résultats relatifs aux fluides non Newtoniens	7
1.6	Organisation du manuscrit	14
2	Équations et approche numérique	17
2.1	Équations dimensionnelles gouvernant le problème	18
2.2	Choix d'un modèle de fluide rhéofluidifiant	19
2.3	Équations adimensionnelles	21
2.4	Écoulements de base	22
2.4.1	Écoulement de base pour λ fixé et n_c variable	23
2.4.2	Écoulement de base pour n_c fixé et λ variable	23
2.5	Équations aux perturbations	23
2.6	Méthode numérique	26
2.6.1	Fonctions de base et fonctions test	26
2.6.2	Mise en oeuvre numérique	28
2.6.3	Intégration temporelle	32
3	Analyse linéaire de stabilité	35
3.1	Équations aux perturbations linéarisées	36
3.2	Problème aux valeurs initiales	38
3.3	Problème aux valeurs propres	39
3.3.1	Perturbation unidimensionnelle ($n = 0, k_0 = 0$)	40
3.3.2	Perturbation axisymétrique ($n = 0, k_0 \neq 0$)	40
3.3.3	Perturbation homogène dans la direction axiale ($n \neq 0, k_0 = 0$)	42

3.3.4	Perturbation oblique ($n \neq 0, k_0 \neq 0$)	46
3.4	Croissance transitoire	50
3.5	Perturbation Optimale	51
3.6	Conclusions	54
4	Étude non linéaire bidimensionnelle	57
4.1	Équations gouvernant le problème	58
4.2	Conditions initiales	59
4.3	Validation et convergence	61
4.3.1	Validation	61
4.3.2	Convergence	64
4.4	Résultats et discussion	65
4.4.1	Évolution temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation	65
4.4.2	Structure de l'écoulement et profils de viscosité	68
4.4.3	Équation de l'énergie	72
4.4.4	Échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation	73
4.4.5	Termes de dissipation visqueuse	74
4.4.6	Transfert modal d'énergie	77
4.5	Conclusion	82
5	Analyse linéaire de stabilité des stries	85
5.1	Description de l'écoulement de base	86
5.2	Analyse linéaire de stabilité	88
5.2.1	Équations gouvernant le problème	88
5.2.2	Décomposition en modes normaux	91
5.3	Résolution numérique	94
5.4	Résultats	95
5.4.1	Courbes de dispersion	95
5.4.2	Spectre de valeurs propres	98
5.4.3	Propriétés des modes critiques	98
5.4.4	Conditions critiques	100
5.4.5	Équation de l'énergie	102
5.4.6	Amplitude critique de la perturbation initiale : Analyse asymptotique	110
5.5	Conclusions	112

6	Simulation numérique de la stabilité des stries vis-à vis d'une perturbation tridimensionnelle	115
6.1	Équations gouvernant le problème	116
6.1.1	Conditions initiales	116
6.2	Résultats	117
6.2.1	Cas Newtonien	118
6.2.2	Cas non Newtonien	119
6.3	Conclusion	121
7	Conclusion et perspectives	133
A	Équations aux perturbations	137
A.1	Équations sous forme développée	137
B	Méthode numérique	139
B.1	Fonctions de base et fonctions test	139
B.2	Dérivation numérique	141
B.3	Méthode de sommation partielle	143
B.4	Intégration numérique	143
	Bibliographie	145

Introduction

Sommaire

1.1	Expérience de Reynolds : Nombre de Reynolds critique	2
1.2	Amplitude critique de la perturbation	3
1.3	Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence : <i>puffs</i> et <i>slugs</i>	4
1.4	Scénarios de transition vers la turbulence	6
1.5	Résultats relatifs aux fluides non Newtoniens	7
1.6	Organisation du manuscrit	14

Le présent chapitre est consacré à une étude bibliographique sur la transition vers la turbulence en conduite cylindrique. Il est structuré en deux parties. La première est relative au cas Newtonien. On rappelle les résultats expérimentaux et théoriques qui nous semblent les plus fondamentaux. La deuxième partie concerne le cas non-Newtonien et plus spécifiquement les fluides rhéofluidifiants purement visqueux. Les résultats expérimentaux obtenus au laboratoire qui sont décrits dans cette partie, nous conduisent à définir la problématique scientifique de l'étude que nous avons développée dans ce mémoire.

1.1 Expérience de Reynolds : Nombre de Reynolds critique

La transition vers la turbulence dans une conduite cylindrique reste un défi scientifique important malgré les nombreux travaux effectués depuis les premières expériences de Reynolds [Reynolds 1883]. Reynolds a visualisé l'écoulement d'un fluide Newtonien dans un tube cylindrique en injectant un colorant à l'entrée du tube. En augmentant progressivement le débit du fluide, il a observé une transition spontanée entre un état où le filet coloré reste rectiligne : l'écoulement est laminaire et un état où le filet coloré se met à osciller et diffuse dans toute la section de la conduite : début de la transition où les régimes laminaire et turbulent coexistent. Les expériences ont été répétées pour différents diamètres de la conduite et différentes viscosités. Pour quantifier les résultats des observations expérimentales, Reynolds a introduit un paramètre adimensionnel : nombre de Reynolds, défini par

$$Re = \frac{W_d D}{\nu}, \quad (1.1)$$

où W_d est la vitesse débitante, D le diamètre de la conduite et ν la viscosité cinématique du fluide. Les différents essais expérimentaux ont conduit Reynolds à introduire une borne supérieure de Re à partir de laquelle, l'écoulement laminaire ne peut pas être maintenu et une borne inférieure en dessous de laquelle, la turbulence ne peut pas être observée.

Pour ce qui est de la limite supérieure, Reynolds, en prenant suffisamment de précautions, a pu maintenir le régime laminaire jusqu'à $Re = 13000$. Cette limite a été repoussée jusqu'à $Re = 10^5$ par [Pfenninger 1961]. Ces résultats indiquent d'une part que l'amplitude de la perturbation doit dépasser un seuil pour que la transition puisse avoir lieu, et d'autre part que ce seuil décroît lorsque le nombre de Re augmente. Depuis, des études numériques ont montré que l'écoulement de Hagen-Poiseuille d'un fluide Newtonien est linéairement stable. Récemment [Meseguer & Trefethen 2001a] ont vérifié numériquement cette stabilité linéaire jusqu'à $Re = 10^7$. Concernant la valeur critique du nombre de Reynolds en dessous de laquelle, la turbulence ne peut pas être observée quelle que soit l'amplitude de la perturbation, [Reynolds 1883] suggéra une valeur $Re \approx 2000$. Récemment, [Peixinho & Mullin 2006] trouvent à partir d'expériences de "trempe" une valeur limite de 1750.

1.2 Amplitude critique de la perturbation

[Darbyshire & Mullin 1995] ont déterminé expérimentalement l'amplitude critique de la perturbation pour déclencher la transition en fonction du nombre de Reynolds. L'écoulement du fluide se fait à débit constant à l'aide d'un piston. Les perturbations sont créées en injectant du fluide à 70 diamètres de la section d'entrée. Les auteurs ont fait varier, le débit massique des jets, le nombre d'injecteurs (six maximum) et la fréquence d'injection. En utilisant un dispositif expérimental similaire, [Hof *et al.* 2003] montrent que l'amplitude varie en Re^{-1} sur une large gamme de Re . Récemment, [Peixinho & Mullin 2007] ont revisité cette expérience, en utilisant des perturbations sous forme de paires de jets entrants et sortants, de façon à ce que le débit injecté soit nul. Selon l'orientation des jets par rapport à l'écoulement dans la conduite, l'exposant du nombre de Reynolds varie entre -1 et -1.5 . Lorsque les jets sont orientés suivant la direction azimutale, l'amplitude varie en Re^{-1} . Si les jets sont orientés dans le sens de l'écoulement (on crée des stries haute et basse vitesse) un comportement en $Re^{-1.3}$ est observé. Enfin, si les jets font un angle de 45° par rapport à l'écoulement une variation en $Re^{-1.5}$ est obtenue. Ces résultats signifient que la transition vers la turbulence peut être plus facilement amorcée en utilisant des paires de jets obliques que des jets orientés dans le sens azimutal. Ceci est peut être une conséquence de la croissance transitoire de l'énergie de la perturbation. [Mellibovsky & Meseguer 2008] ont reproduit numériquement les expériences de [Hof *et al.* 2003] et trouvent un comportement en Re^{-1} . Ce type de comportement a été aussi retrouvé mais dans un autre contexte par [Gavarini *et al.* 1984]. Il s'agit cette fois-ci de l'amplitude de la perturbation de l'écoulement de Hagen-Poiseuille (défaut minimum) qui le rendrait linéairement instable. Dans d'autres systèmes d'écoulements ouverts, [Chapman 2002] montre, moyennant une analyse asymptotique, que l'amplitude critique de la perturbation varie en $Re^{-5/4}$ en Poiseuille plan et en Re^{-1} en Couette plan. Nous avons reporté dans tableau 1.1 les différents résultats de la littérature relatifs à la dépendance de l'amplitude critique en fonction du nombre de Reynolds.

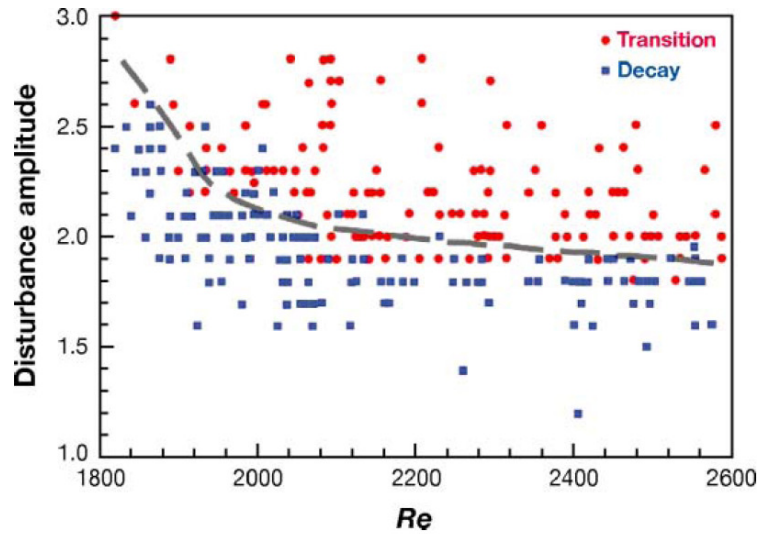


FIGURE 1.1: Amplitude critique de la perturbation en fonction du nombre de Reynolds selon [Darbyshire & Mullin 1995]. Les points rouges représentent les cas où la transition a été observée et les points bleus montrent la relaminarisation de l'écoulement.

1.3 Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence : *puffs* et *slugs*

[Wyganski & Champagne 1973] ont été les premiers à identifier expérimentalement, à partir de l'analyse du signal de vitesse axiale, deux types de structure lors de la transition naturelle vers la turbulence en conduite cylindrique : les *puffs* et les *slugs*.

Les *puffs* ou *bouffées turbulentes* sont observées pour des nombres de Reynolds $2000 \leq Re \leq 2700$. Elles sont générées par de fortes perturbations à l'entrée de la conduite. Il s'agit de structures localisées de longueur ≈ 20 diamètres et qui se déplacent à une vitesse approximativement égale à $0.9W_d$. Ces structures présentent un front en pointe et une sortie aplatie. La figure 1.2 montre la visualisation d'un *puff* comparée au contour d'iso-vorticité axiale obtenu par simulation numérique [Willis *et al.* 2008].

Les *slugs* ou *bouchons turbulents* sont observés pour $Re > 2700$. Ils sont générés par l'instabilité de la couche limite à l'entrée de la conduite. Contrairement aux *puffs*, les *slugs* ont une interface laminaire-turbulent nette en amont et en aval de la structure. En plus,

1.3. Structure de l'écoulement lors de la transition vers la turbulence : *puffs* et *slugs*

5

Autour	Écoulement	Méthode	γ
[A. Draad and & Nieuwstadt 1998]	Pipe	expérimental	-1
[Reddy <i>et al.</i> 1998]	Poiseuille plan	numérique	-1.6
[Reddy <i>et al.</i> 1998]	Couette plan	numérique	-1
[Chapman 2002]	Poiseuille plan	analytique	-3/2
[Chapman 2002]	Couette plan	analytique	-1
[Darbyshire & Mullin 1995]	Pipe	expérimental	-3/2
[Meseguer 2003]	Pipe	numérique	-3/2
[Hof <i>et al.</i> 2003]	Pipe	expérimental	-1
[Gavarini <i>et al.</i> 1984]	Pipe	numérique	-1
[Peixinho & Mullin 2007]	Pipe	expérimental	-1.3 ~ -1.5
[Mellibovsky & Meseguer 2008]	Pipe	numérique	-1.35 ~ -1.5

TABLE 1.1: Le seuil d'une perturbation d'amplitude finie nécessaire pour provoquer la transition varie comme $O(Re^\gamma)$. Valeurs de γ reportées dans la littérature.

les bouchons turbulents s'étendent en longueur tout en étant transporté par l'écoulement moyen.

Ces deux types de structure ont été par la suite confirmées expérimentalement par [Wyganski *et al.* 1975] et [Darbyshire & Mullin 1995], où cette fois la perturbation est introduite loin de l'entrée, dans la zone où l'écoulement est développé.

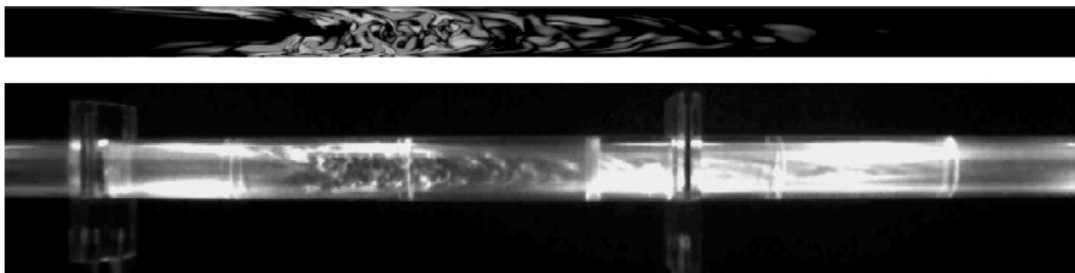


FIGURE 1.2: (bas) Visualisation expérimentale d'un *puff*. (haut) Contour d'iso-vorticité axiale dans un puff calculé numériquement. La figure a été extraite de [Willis *et al.* 2008].

1.4 Scénarios de transition vers la turbulence

A la fin des années 80, les études de stabilité en conduite cylindrique (et en canal plan) se sont focalisées sur la croissance transitoire linéaire et la détermination de la perturbation optimale, i.e., la perturbation dont l’amplification d’énergie est maximale. La croissance transitoire est une conséquence de la non normalité de l’opérateur associé aux équations de Navier-Stokes linéarisées. La perturbation optimale est formée de deux tourbillons contra-rotatifs [Schmid & Henningson 1994]. Ces tourbillons vont redistribuer l’écoulement et générer des stries (jets haute et basse vitesse). L’écoulement résultant présente des points selle qui le rendent instable vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles. Cette instabilité, étudiée par une simulation numérique non linéaire est appelée scénario “streak breakdown”. L’objectif principal de cette approche consiste à déterminer l’amplitude minimale de la perturbation pour induire une transition vers la turbulence. Cette approche a été utilisée en particulier par [Zikanov 1996] et [Meseguer 2003] en conduite cylindrique et [Reddy *et al.* 1998] et [Krasnov *et al.* 2008] en canal plan.

Durant ces deux dernières décennies, une nouvelle approche a émergé dans l’analyse de la transition brusque vers la turbulence dans les écoulements ouverts. Cette approche consiste à chercher des solutions des équations de Navier-Stokes qui seraient déconnectées de l’état laminaire. Ces solutions sous forme d’ondes non linéaires ont été obtenues par [Nagata 1990], [Cherhabili & Ehrenstein 1997] et [Waleffe 1997] en canal plan et plus récemment par [Faisst & Eckhardt 2003] et [Wedin & Kerswell 2004] en conduite cylindrique. La pertinence de ces solutions a été confirmée expérimentalement par [Hof *et al.* 2004]. Ces solutions utilisent fondamentalement les mêmes ingrédients que le Self-Sustaining-Process (SSP), procédé d’auto entretien de la turbulence, proposé par [Waleffe 1995] : (i) les rouleaux longitudinaux forment des stries qui développent des instabilités linéaires inflexionnelles, qui elles-mêmes par évolution non linéaire vont régénérer les rouleaux, bouclant ainsi la boucle de la figure 1.3. Les solutions des équations de Navier-Stokes ainsi obtenues sont appelées solutions cohérentes. Elles sont obtenues par continuation. Les rouleaux longitudinaux sont générés en introduisant une force centrifuge [Nagata 1990] ou une force volumique *ad hoc* [Waleffe 1997]. La solution est ensuite déterminée par continuation en réduisant progressivement la force imposée pour créer les rouleaux. Des ondes non linéaires avec un nombre d’onde azimutal fondamental $n = 3$ et

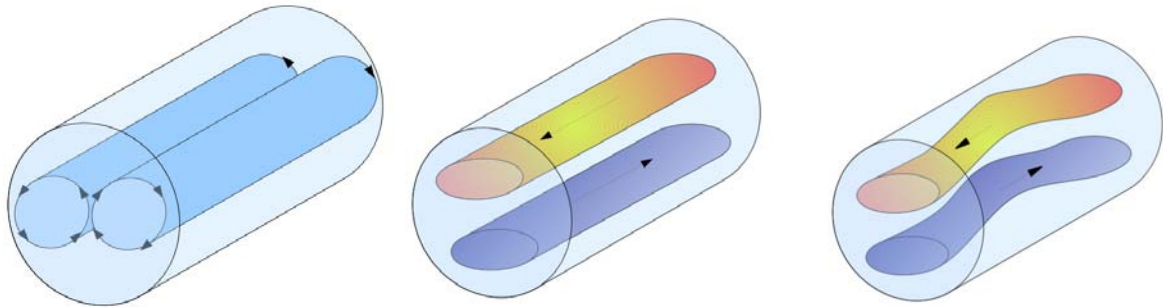


FIGURE 1.3: Processus d'auto-entretien de la turbulence : (a) Paire de rouleaux générant une réorganisation de l'écoulement moyen (b) Jets lent et rapide formés près de la paroi grâce aux rouleaux (c) Modulation des jets en forme d'onde qui est couplée aux rouleaux grâce aux interactions non linéaires

2 en particulier ont été trouvées respectivement à $Re = 1250$ et 2500 . La structure de ces solutions est en accord avec les observations expérimentales [Hof *et al.* 2004].

1.5 Résultats relatifs aux fluides non Newtoniens

Des nombreux procédés industriels font intervenir des écoulements de fluides non Newtoniens en conduite cylindrique. Il s'agit en général de solutions de polymères ou de suspensions de particules solides. En 1949, [Toms 1949] montre que le rajout d'une faible quantité de polymères (quelques parties par millions) peut conduire à une forte réduction du frottement à la paroi en régime turbulent et donc à une forte réduction de la puissance de pompage. Ce phénomène trouve de nombreuses applications en particulier dans le domaine pétrolier pour réduire les pertes de charges dans les pipelines. Depuis 1949, de nombreux travaux ont été consacrés à ce phénomène. Il n'existe pas encore de modèle universellement accepté pour expliquer le mécanisme de réduction de frottement. Une revue bibliographique récente sur l'état de l'art relatif à ce problème est donné par [White & Mungal 2008]. Pour de plus grandes concentrations en polymères, les non linéarités élastiques peuvent induire un comportement chaotique à très bas nombre de Reynolds [Groisman & Steinberg 2000] dans les écoulements courbes.

Excepté ces deux résultats spectaculaires, la littérature concernant la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour des fluides non Newtoniens est très limitée comparativement au cas Newtonien. Ceci est probablement dû d'une

part aux difficultés expérimentales dans la mesure où la majorité des fluides complexes sont opaques et d'autre part aux difficultés numériques liées à la non linéarité de la loi rhéologique. Néanmoins, la littérature existante révèle deux effets importants : Le premier concerne un retard à l'apparition des *puffs*. Le deuxième est relatif à l'asymétrie des profils de vitesse axiale moyennée temporellement, observée dans une certaine gamme de Reynolds [Escudier & Presti 1996], [Peixinho *et al.* 2005], [Escudier *et al.* 2005], [Esmael & Nouar 2008], [Escudier *et al.* 2009], [Guzel *et al.* 2009]. En régime laminaire et turbulent les profils de vitesse axiale sont parfaitement axisymétriques. À titre indicatif, nous avons reporté sur la figure 1.4 les profils de vitesse axiale mesurés par [Esmael 2008], pour une solution de Carbopol à 0.2% en masse. Une asymétrie croissante avec Re_w est observée pour $1800 \leq Re_w \leq 4870$. Dans cette figure 1.4, le nombre de Reynolds est défini avec le diamètre de la conduite \hat{D} , la vitesse débitante \hat{W}_d et la viscosité évaluée en utilisant le cisaillement pariétal $\hat{\mu}_w$:

$$Re_w^{exp} = \frac{\hat{\rho} \hat{W}_d \hat{D}}{\hat{\mu}_w} \quad (1.2)$$

Dans le cas Newtonien, les profils de vitesse axiale restent axisymétriques dans toute la phase de transition. Dans [Escudier *et al.* 2005], il est expliqué que cette asymétrie est la conséquence d'un mécanisme de la dynamique des fluides plutôt qu'un artefact expérimental (Coriolis, courbure de la conduite, effet de gravité, *etc* ...). Ce mécanisme doit être lié au comportement rhéologique du fluide. Les fluides utilisés par les différents auteurs ont deux propriétés rhéologiques communes : la viscoélasticité et la rhéofluidification. Les essais expérimentaux effectués par [Escudier *et al.* 2009] indiquent que l'asymétrie des profils de vitesse axiale est liée au caractère rhéofluidifiant du fluide. En effet, des fluides ayant des propriétés viscoélastiques très différentes et des comportements rhéofluidifiants très proches, conduisent pratiquement au même degré d'asymétrie. Cette conclusion est en accord avec les résultats numériques de [Rudman *et al.* 2004] qui montrent pour un fluide rhéofluidifiant purement visqueux décrit par le modèle d'Ostwald ($\mu = K\dot{\gamma}^{n-1}$) une asymétrie dans la répartition des stries.

Pour quantifier le degré d'asymétrie, [Esmael & Nouar 2008] écrivent le profil de vitesse axiale $\hat{W}(r, \theta, z)$ comme la superposition d'un profil symétrique \hat{W}_{sym} définie par :

$$\hat{W}_{sym}(r) = \frac{\hat{W}(r, \theta) + \hat{W}(r, \theta + \pi)}{2}, \quad (1.3)$$

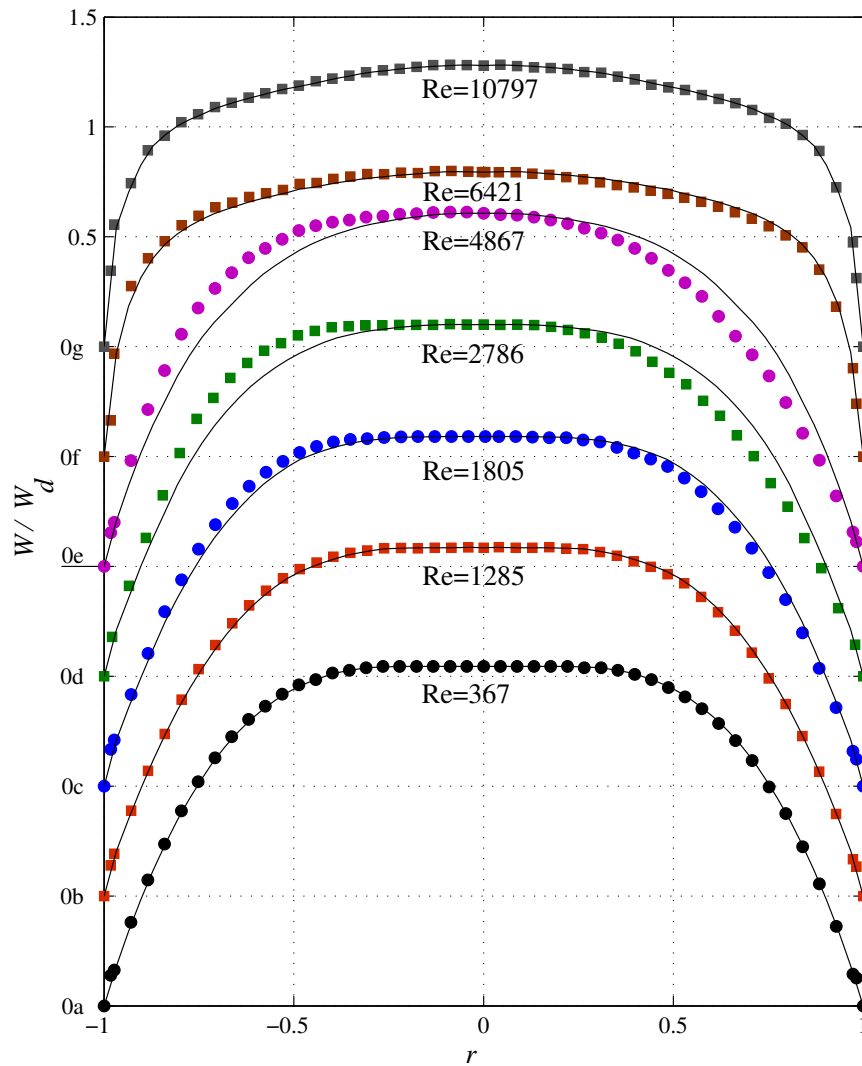


FIGURE 1.4: Profils de vitesse axiale pour différentes valeurs du nombre de Reynolds de paroi allant du régime laminaire au régime turbulent pour une solution de Carbopol à 0.2%. Les mesures ont été effectuées le long d'un diamètre vertical à une position axiale $\hat{z} = 122\hat{D}$ prise à partir de l'entrée de la conduite. Les symboles sont les mesures expérimentales et les traits continus représentent le profil symétrique obtenu en prenant la moyenne arithmétique des données expérimentales de part et d'autre de l'axe. Figure obtenue de [Esmael & Nouar 2008].

qui représente plus ou moins une moyenne dans la direction azimutale et un jet, $\hat{W}_s(r, \theta, z)$, telle que

$$\hat{W}(r, \theta, z) = W_{sym} + \hat{W}_s(r, \theta, z). \quad (1.4)$$

La figure 1.5 montre les contours d'iso-valeurs de \hat{W}_s que j'ai mesurés dans une section droite de la conduite à deux positions axiales $\hat{z} = 120\hat{D}$ et $\hat{z} = 263\hat{D}$. Les résultats ont été obtenus pour une solution de Carbopol 0.1% à $Re_w = 3400$. La couleur rouge représente la zone où l'écoulement est accéléré et la couleur bleue celle où l'écoulement est décéléré. Il est important de noter que cette structure de l'écoulement est reproductible et persiste durant plusieurs semaines d'expérience.

La figure 1.6 montre des profils de vitesse axiale que j'ai mesuré à différentes positions axiales et à $Re_w = 3400$. Le fluide utilisé est une solution de Carbopol à 0.1% en masse. L'asymétrie augmente progressivement le long de la conduite. Le degré d'asymétrie de l'écoulement est défini par la quantité :

$$A_{exp} = \max_{r, \theta} \left(\frac{|\hat{W}_s(r, \theta)|}{\hat{W}_{max}} \right), \quad (1.5)$$

où \hat{W}_{max} est la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille du fluide considéré. L'équation (1.5) définit aussi une amplitude des stries. La figure 1.7 montre l'évolution de A_{exp} en fonction de \hat{z} et confirme l'augmentation de l'asymétrie avec la position axiale. Ces résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une structure cohérente caractérisée par deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Ce point de vue a amené [Roland 2010] à appliquer la même procédure que [Faisst & Eckhardt 2003] et [Wedin & Kerswell 2004] à ce problème en utilisant un forçage avec un nombre d'onde azimutal $n = 1$. La recherche de solution sous forme d'onde non linéaire avec $n = 1$ est restée sans succès. La forçage monomode avec $n = 1$ ne conduit qu'à des bifurcations surcritiques.

Généralement, le début et la fin de la transition vers la turbulence sont déterminés par l'intensité de turbulence I_t définie par :

$$I_t = \langle \hat{w} \rangle / \hat{W}_d, \quad (1.6)$$

où $\langle \hat{w} \rangle$ est la rms de la vitesse axiale et \hat{W}_d est la vitesse débitante de l'écoulement. La figure 1.8 montre l'évolution de I_t en fonction du nombre de Reynolds à différentes positions radiales. En régime laminaire, I_t reste pratiquement constant pour une position

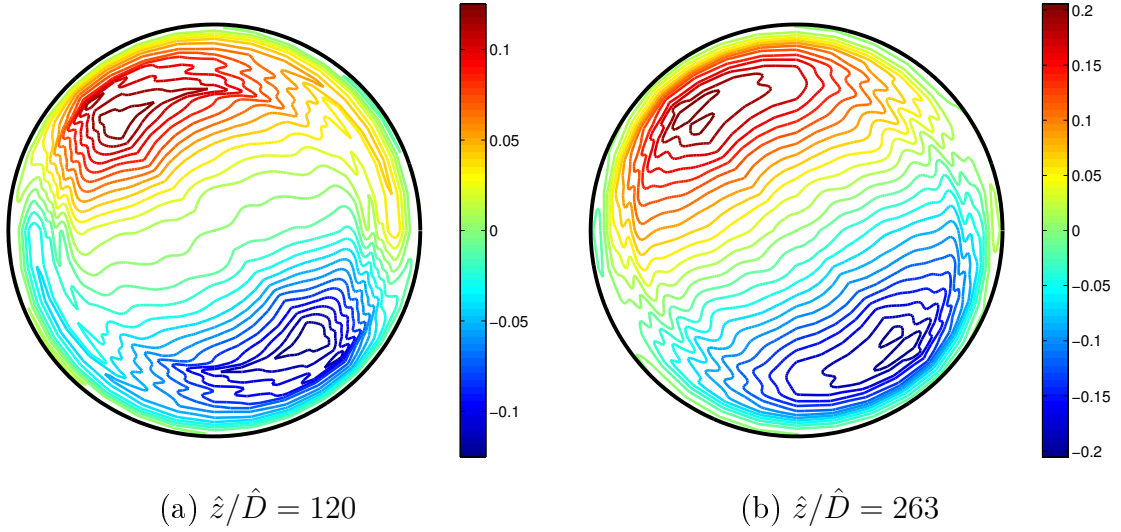


FIGURE 1.5: Structure de l'asymétrie à $Re_w = 3400$ pour une solution de Carbopol correspondant à une loi de Carreau-Yasuda avec $\hat{\lambda} = 0.8$ et $n_c = 0.6$. Ces contours représentent l'écart de vitesse axiale par rapport à la moyenne arithmétique de la vitesse d'une part et d'autre de l'axe.

axiale donnée. À $Re_w = Re_{c1} \simeq 2000$, l'écoulement laminaire cesse d'être un attracteur global. Le système bifurque vers un autre état non laminaire, où on observe une augmentation progressive de I_t avec Re_w , jusqu'à un plateau à $Re_w \simeq 3000$ suivi d'une légère décroissance. À $Re_w = Re_{c2}$ (ici $Re_{c2} \simeq 4000$), une augmentation brutale de I_t est observée. Elle correspond à l'apparition des *puffs*. I_t atteint un maximum à Re_{c3} et relaxe vers le régime turbulent.

Dans ces mesures expérimentales, la transition vers la turbulence est caractérisée par deux phases. La première $Re_{c1} \leq Re_w \leq Re_{c2}$ n'existe pas dans le cas Newtonien et la seconde correspond à l'apparition classique des *puffs*. C'est justement dans la première phase que l'asymétrie des profils de vitesse axiale se développe.

Il est aussi intéressant de noter que les *puffs* apparaissent à un nombre de Reynolds plus élevé que dans le cas Newtonien.

La modification du scénario de transition par rapport au cas Newtonien semble être due exclusivement à la non linéarité de la viscosité indépendamment de l'élasticité souvent non nulle pour les fluides utilisés dans les expériences. Le présent mémoire est une contribution à la compréhension des mécanismes à l'origine de l'émergence et du maintien d'une structure

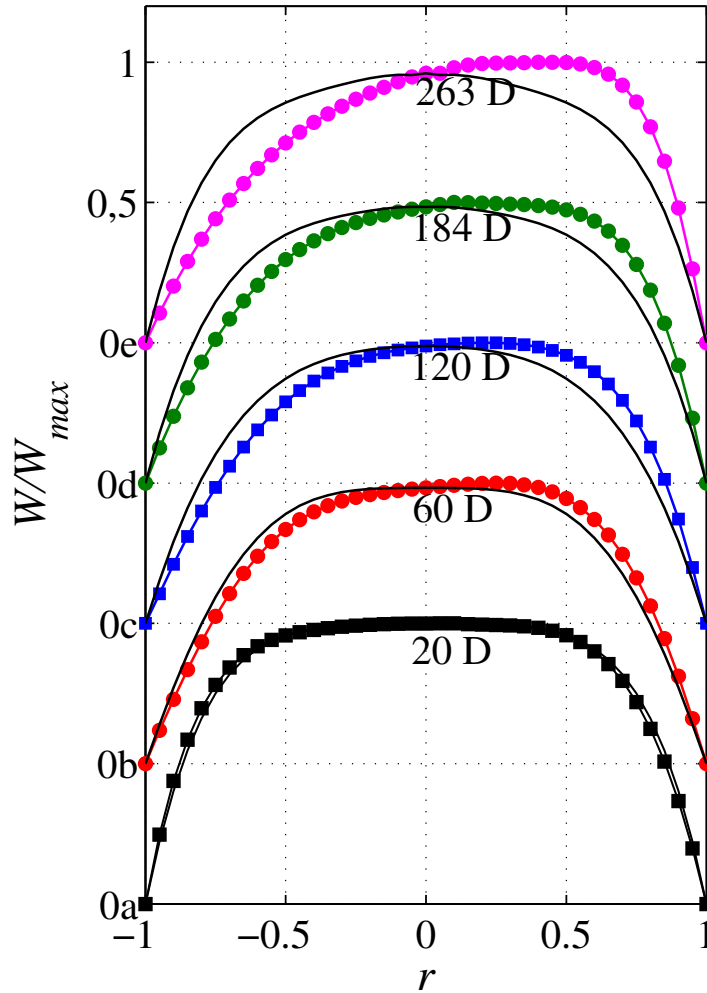


FIGURE 1.6: Profils de vitesse axiale pour une solution de Carbopol 0.1% en masse correspondant à une loi de Carreau-Yasuda avec $\hat{\lambda} = 0.8$ et $n_c = 0.6$ à $Re_w = 3400$. Mesures effectués à différentes positions axiales z à partir de l'entrée de la conduite et à une position azimutale $\theta = -\pi/4$: θ est orienté dans le sens contraire des aiguilles d'une montre où $\theta = 0$ est l'horizontal.

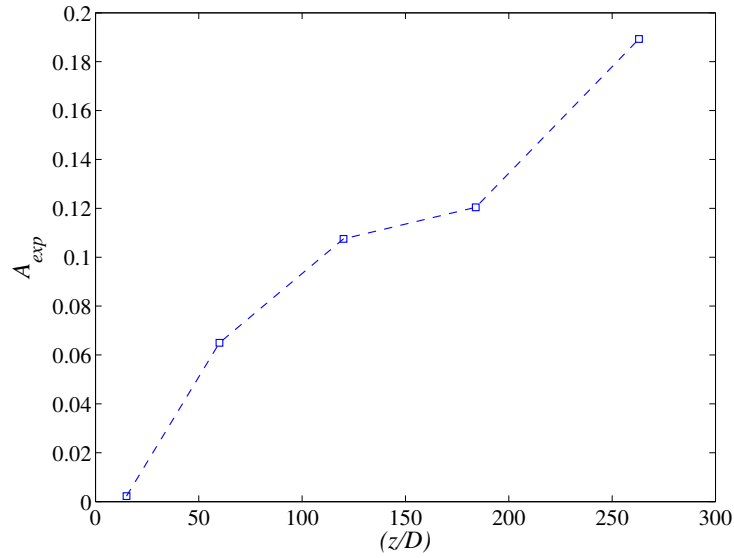


FIGURE 1.7: Variation de l'asymétrie en fonction de la coordonnée axiale de la conduite z/D pour une solution de Carbopol modélisée par une loi de Carreau-Yasuda avec $\hat{\lambda} = 0.8$ et $n_c = 0.6$ pour un Reynolds de paroi $Re_w = 3400$.

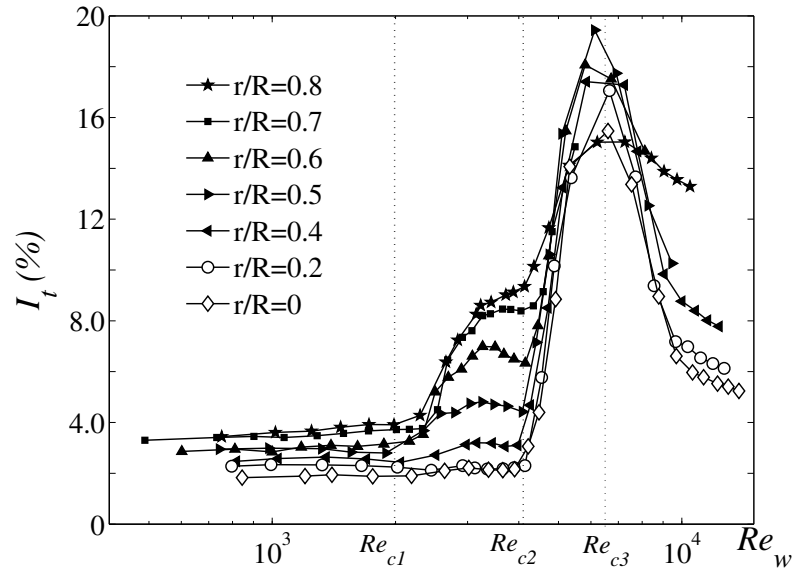


FIGURE 1.8: Variation de l'intensité de tourbillons $I_t = \langle w \rangle / W_b$ en fonction du Nombre de Reynolds de paroi pour une solution de Carbopol à 0.2%. I_t est mesurée à différentes positions radiales et à une position azimutale $\theta = \pi/4$ par rapport à la verticale. Obtenue de [Esmael 2008].

cohérente avec un nombre d'onde azimutal $n = 1$ sur une longueur de conduite supérieur à $100\hat{D}$.

Nous avons opté pour une approche numérique où un modèle de fluide purement visqueux peut être imposé.

1.6 Organisation du manuscrit

Les équations gouvernantes le problème sont établies dans le chapitre 2. Le comportement rhéologique du fluide sera décrit par un modèle purement visqueux rhéofluidifiant. Nous décrivons dans ce chapitre la méthode numérique utilisée qui est directement inspirée de celle donnée dans [Meseguer 2003].

De manière classique, on commence par une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique. Cette étude n'a pas été effectuée auparavant dans la littérature. Comme dans le cas Newtonien, les résultats obtenus permettent de conjecturer que l'écoulement laminaire d'un fluide rhéofluidifiant est linéairement stable. L'approche non modale montre pour la gamme des paramètres rhéologiques considérés que la perturbation optimale est formée de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs (similaires au cas Newtonien [Meseguer & Trefethen 2001a]).

Les mesures expérimentales [Esmael & Nouar 2008] suggèrent l'existence de structure cohérente ($n = 1$) qui persiste sur une longueur de plus de 100 diamètres. Ceci nous a amené à effectuer une simulation numérique bidimensionnelle de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique en imposant une perturbation initiale sous forme de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. C'est l'objectif du chapitre 4. Les résultats obtenus montrent en particulier que les termes non linéaires visqueux ne permettent pas d'entretenir les stries. Leur contribution dans le bilan global de l'énergie de la perturbation est mise en évidence à travers l'équation de Reynolds-Orr. Le dernier paragraphe de ce chapitre est consacré à l'analyse de l'échange d'énergie entre modes via les différentes non linéarités. Une tentative d'analyse de l'émergence du mode $n = 1$ est proposée.

D'après [Waleffe 1995] une perturbation tridimensionnelle est nécessaire au maintien des stries. Dans le chapitre 5, nous effectuons une analyse linéaire de stabilité des stries (calculés dans le chapitre 4) vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle. Les conditions critiques et la nature des modes sont déterminées en fonction des paramètres rhéologiques.

L'étude de stabilité secondaire effectuée dans le chapitre 5 ne permet pas de conclure quant à la subsistance des stries. Pour cela, il faut tenir compte des effets non linéaires en situation tridimensionnelle. Dans le chapitre 6, des calculs exploratoires utilisant un seul mode suivant l'axe de l'écoulement permettent de reproduire les résultats obtenus par [Meseguer 2003] en fluide Newtonien. Des résultats similaires sont aussi obtenus en non Newtonien mais à des nombres de Reynolds plus élevés. De plus, les résultats numériques montrent que le champ de vitesse axiale moyenné en temps et dans la direction de l'écoulement présente une asymétrie marquée contrairement au cas Newtonien.

Enfin, dans la conclusion générale, nous donnons des pistes de travaux à réaliser, notamment en ce qui concerne l'étude faiblement non linéaire de la stabilité des jets vis-à-vis d'une perturbation modulée suivant l'axe. Cette étude permettrait de qualifier le type de bifurcation ainsi que le rôle des termes non linéaires dominants dans le maintien des stries de l'écoulement perturbé.

Pour résumer :

- Chapitre 1 : Présenter la problématique scientifique dans le contexte de la littérature existante.
- Chapitre 2 : Présenter les équations gouvernant le problème et la méthode numérique utilisée.
- Chapitre 3 : Étudier la stabilité linéaire d'un écoulement rhéofluidifiant en conduite cylindrique avec les approches modale et non modale.
- Chapitre 4 : Étudier, avec une simulation numérique directe, le développement des stries lors d'une perturbation bidimensionnelle sous forme de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs.
- Chapitre 5 : Étudier la stabilité linéaire des stries générés par les rouleaux contra-rotatifs.
- Chapitre 6 : Étudier la stabilité des stries vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles d'amplitude finie avec un nombre d'onde axiale $k_0 \neq 0$, à l'aide des simulations numériques directes.
- Chapitre 7 : Donner les conclusions et perspectives de ce travail de thèse.

Équations gouvernant le problème et approche numérique

Sommaire

2.1	Équations dimensionnelles gouvernant le problème	18
2.2	Choix d'un modèle de fluide rhéofluidifiant	19
2.3	Équations adimensionnelles	21
2.4	Écoulements de base	22
2.4.1	Écoulement de base pour λ fixé et n_c variable	23
2.4.2	Écoulement de base pour n_c fixé et λ variable	23
2.5	Équations aux perturbations	23
2.6	Méthode numérique	26
2.6.1	Fonctions de base et fonctions test	26
2.6.2	Mise en oeuvre numérique	28
2.6.3	Intégration temporelle	32

Ce chapitre est consacré à la présentation des équations gouvernant le problème et la méthode numérique pour sa résolution. Le chapitre est structuré en quatre paragraphes. Dans le premier, on donne les équations gouvernant le problème et on fait ressortir les différents paramètres adimensionnels qui interviennent dans le problème. Dans le deuxième paragraphe, on décrit l'écoulement de base. Il s'agit de l'écoulement unidirectionnel stationnaire d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique. On analyse l'influence des paramètres rhéologiques sur la structure de l'écoulement de base. Dans le troisième paragraphe, on donne les équations aux perturbations en faisant ressortir en particulier les termes qui font intervenir la perturbation de la viscosité. Le dernier paragraphe est consacré à la description de la méthode numérique utilisée : il s'agit globalement d'une approche pseudo spectrale du type Petrov-Galerkin.

2.1 Équations dimensionnelles gouvernant le problème

Pour un fluide incompressible, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sous forme dimensionnelle sont données par :

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{U}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\hat{\rho} \left[\partial_t \hat{\mathbf{U}} + (\hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\nabla}) \hat{\mathbf{U}} \right] = -\hat{\nabla} \hat{P} + \hat{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}. \quad (2.2)$$

La notation $(\hat{\quad})$ signifie qu'il s'agit d'une quantité dimensionnelle. Le vecteur vitesse $\hat{\mathbf{U}}$ s'écrit sous la forme $\hat{\mathbf{U}} = \hat{U} \mathbf{e}_r + \hat{V} \mathbf{e}_\theta + \hat{W} \mathbf{e}_z$ où \hat{U} , \hat{V} et \hat{W} sont les composantes de $\hat{\mathbf{U}}$ suivant les directions radiale azimutale et axiale définies par les vecteurs unitaires \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_z respectivement. Au système d'équations (2.1 - 2.2) il faut rajouter la condition d'adhérence à la paroi ainsi que la condition initiale, soit :

$$\hat{\mathbf{U}} = 0 \quad \text{à} \quad \hat{r} = \hat{R}, \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}_0 \quad \text{à} \quad \hat{t} = 0, \quad (2.4)$$

La présente étude concerne le cas des fluides non Newtoniens rhéofluidifiants purement visqueux, c'est-à-dire, des fluides pour lesquels, la relation entre le déviateur du tenseur des contraintes $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ et le tenseur des taux de déformation $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ est donnée par :

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \hat{\mu}(\hat{\gamma}_{II}) \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (2.5)$$

où $\hat{\mu}(\hat{\gamma}_{II})$, la viscosité du fluide est une fonction du second invariant de tenseur $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$:

$$\hat{\gamma}_{II} = \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\hat{\gamma}_{ij} \hat{\gamma}_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

Le tenseur des taux de déformation est défini par ses composantes $\hat{\gamma}_{ij} = (\hat{U}_{i,j} + \hat{U}_{j,i})$.

2.2 Choix d'un modèle de fluide rhéofluidifiant

Les fluides rhéofluidifiants sont des fluides pour lesquels la viscosité diminue lorsque le cisaillement augmente. D'une manière générale le comportement rhéofluidifiant traduit une modification de la structure interne du fluide lorsque le cisaillement augmente, de manière à réduire la dissipation visqueuse et faciliter l'écoulement. Dans le cas des solutions des polymères, le comportement rhéofluidifiant est associé à la rupture des liaisons d'hydrogène dans les agrégats de macromolécules [Phillips & Williams 2000]. Dans le cas d'une suspension de particules, le mécanisme physique décrivant le comportement rhéofluidifiant a été décrit par [Quemada 1978]. Globalement, la diminution de viscosité est liée à la destruction d'agrégats de particules par les forces hydrodynamiques. Plusieurs modèles rhéologiques ont été proposés dans la littérature pour décrire le comportement rhéofluidifiant d'un fluide non Newtonien. Le modèle d'Ostwald ou loi puissance $\hat{\mu}(\dot{\gamma}_{II}) = \hat{K} \cdot \dot{\gamma}_{II}^{n-1}$ est probablement le plus populaire. Dans ce modèle, \hat{K} représente l'indice de consistance et n ($n < 1$) est un nombre sans dimension nommé indice d'écoulement. Cependant, ce modèle présente deux inconvénients : d'une part la viscosité tend vers l'infini quand le cisaillement tend vers zéro, et d'autre part, la viscosité tend vers zéro lorsque le taux de cisaillement tend vers l'infini. Dans la présente étude nous avons adopté le modèle de Carreau [Carreau 1972]. Ce modèle a été choisi, car il a des bases théoriques et a été adopté par plusieurs auteurs pour l'étude d'écoulements de fluides rhéofluidifiants :

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_{\infty}}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_{\infty}} = \left[1 + \left(\hat{\lambda} \cdot \dot{\gamma}_{II} \right)^2 \right]^{\frac{n_c - 1}{2}}, \quad (2.7)$$

$\hat{\mu}_0$ est la viscosité pour un cisaillement nul, $\hat{\mu}_{\infty}$ est la viscosité pour un cisaillement infini, $\hat{\lambda}$ est une constante de temps telle que $1/\hat{\lambda}$ détermine un cisaillement critique à partir duquel la viscosité diminue fortement avec le taux de déformation et n_c est l'indice de rhéofluidification du fluide. D'autres variantes du modèle de Carreau sont proposées dans la littérature [Bird *et al.* 1987]. On cite le modèle de Cross :

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_{\infty}}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_{\infty}} = \frac{1}{\left[1 + \left(\hat{\lambda} \cdot \dot{\gamma}_{II} \right) \right]^m}, \quad (2.8)$$

et le modèle de Carreau-Yasuda :

$$\frac{\hat{\mu} - \hat{\mu}_{\infty}}{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_{\infty}} = \left[1 + \left(\hat{\lambda} \cdot \dot{\gamma}_{II} \right)^a \right]^{\frac{n_c - 1}{a}}, \quad (2.9)$$

où le paramètre a permet de généraliser les modèles de Cross et Carreau ($a = 1$ et $a = 2$ respectivement). Ce dernier modèle à cinq paramètres permet de décrire le comportement rhéologique d'un grand nombre de solutions des polymères.

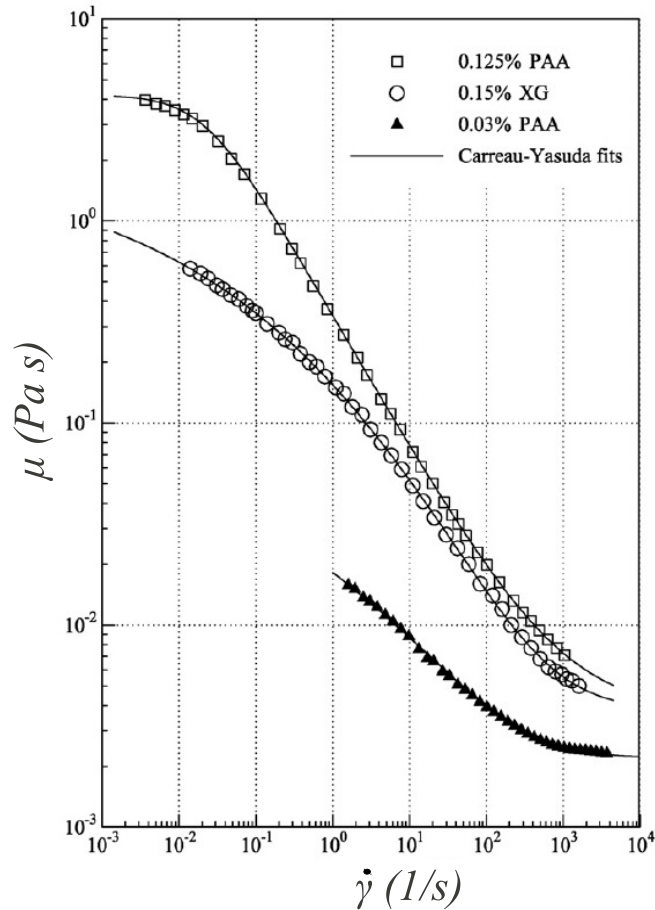


FIGURE 2.1: Variation de la viscosité en fonction du cisaillement pour des solutions aqueuses de polyacrilamide à 0.03%, 0.125% en masse, et de Xanthan gum à 0.15% en masse. Les points expérimentaux sont interpolés par le modèle de Carreau-Yasuda. Les paramètres rhéologiques sont donnés dans le tableau 2.1. Figure obtenue de [Escudier *et al.* 2009].

Le tableau 2.1 montre des valeurs typiques des paramètres du modèle de Carreau-

Yasuda pour des solutions aqueuses de Polyacrilamide (polymère flexible) à 0.03%, 0.125% et 0.2% en masse, de Xanthan gum à 0.15% en masse, et de Carbopol 940 à 0.1% en masse. Le Carbopol 940 à 0.1% en masse est connu dans la littérature comme étant un fluide à seuil. Cependant, les expériences en conduite cylindrique montrent que la zone bouchon générée par ce seuil est inexistante, car le cisaillement reste élevé même au centre de la conduite à cause de la triaxialité. Ainsi, on peut utiliser le modèle de Carreau-Yasuda pour le Carbopol 940 dans ce type d'écoulement.

Fluide	$\hat{\mu}_0(Pa s)$	$\hat{\mu}_\infty(Pa s)$	$\hat{\lambda}(s)$	n_c	a
0.03% PAA	0.115	0.00221	10^{-6}	3.90	0.173
0.125% PAA	4.22	0.00372	45.8	0.660	1.25
0.2% PAA	2.94	0.00355	11.1	0.66	2
0.15% XG	1.95	0.00382	0.0161	1.38	0.198
0.1% Carbopol	3.181	0.02063	0.82	0.7	2

TABLE 2.1: Paramètres typiques du Modèle de Carreau Yasuda donnés par [Escudier *et al.* 2005], [Escudier *et al.* 2009] et pendant ce travail.

2.3 Équations adimensionnelles

Les équations de conservation (2.1 - 2.2) ainsi que l'équation constitutive (2.5) combinée avec (2.7) sont mises sous forme adimensionnelle en utilisant la vitesse maximale \hat{W}_c de l'écoulement laminaire établi, le rayon \hat{R} du tuyau, et la quantité $\hat{\rho}\hat{W}_c^2$, comme échelles de vitesse, longueur et pression/contrainte respectivement. On utilise aussi une viscosité de référence $\hat{\mu}_{ref}$.

$$\tau_{ij} = \frac{\hat{\tau}_{ij}}{\hat{\rho}\hat{W}_c^2} \quad ; \quad p = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}\hat{W}_c^2} \quad ; \quad U_i = \frac{\hat{U}_i}{\hat{W}_c} \quad ; \quad r = \frac{\hat{r}}{\hat{R}} \quad ; \quad z = \frac{\hat{z}}{\hat{R}} \quad ,$$

$$\mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_{ref}} \quad ; \quad t = \frac{\hat{t}\hat{W}_c}{\hat{R}} \quad ; \quad \nabla = \hat{R}\hat{\nabla} . \quad (2.10)$$

En utilisant cette adimensionalisation les équations gouvernant le problème deviennent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \\ \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'équation constitutive sous forme adimensionnelle est :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{Re} \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_{ref}} \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_{ref}} \cdot [1 + (\lambda \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{II})^2]^{\frac{n_c-1}{2}} + \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_{ref}} \right) \hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad (2.12)$$

où $\lambda = \hat{\lambda} \frac{\hat{W}_c}{\hat{R}}$. Le nombre de Reynolds est :

$$Re = \frac{\hat{\rho} \hat{W}_c \hat{R}}{\hat{\mu}_{ref}} \quad (2.13)$$

La viscosité de référence est choisie, dans un premier temps, comme la viscosité à cisaillement nul, soit $\hat{\mu}_{ref} = \hat{\mu}_0$. La viscosité de l'écoulement moyen vaut alors $\mu_b = 1$ au centre du tuyau. La condition de frontière adimensionnelle devient :

$$\mathbf{U} = \mathbf{0} \text{ pour } r = 1, \quad (2.14)$$

2.4 Écoulements de base

Nous considérons le cas d'un écoulement de base unidirectionnel stationnaire $\mathbf{U}_b = (0, 0, W_b)$ induit par un gradient de pression constant. Dans ce cas particulier, la seule composante non nulle du déviateur du tenseur de contraintes est $\tau_{rz} = \tau_{zr}$. La vitesse axiale $W_b(r)$ satisfait l'équation suivante :

$$-Re \partial_z P_b + \frac{1}{r} \partial_r (r \mu_b \partial_r W_b) = 0, \quad (2.15)$$

avec

$$\mu_b = \mu_\infty + (1 - \mu_\infty) \left[1 + \left(\lambda \frac{\partial W_b}{\partial r} \right)^2 \right]^{\frac{n_c-1}{2}} \quad (2.16)$$

En intégrant l'eq. (2.15) avec la condition $\tau_{rz}(0) = 0$ nous obtenons :

$$C \cdot r = \left((1 - \hat{\mu}_\infty) \cdot [1 + (\lambda \cdot \partial_r W_b)^2]^{\frac{n_c-1}{2}} + \hat{\mu}_\infty \right) \cdot (\partial_r W_b), \quad (2.17)$$

où C est une constante proportionnelle au nombre de Reynolds et au gradient de pression. L'équation (2.17) est intégrée par une méthode de Petrov-Galerkin, combinée avec un processus itératif. Les détails sur la méthode de Petrov-Galerkin utilisée sont donnés dans l'annexe A. Comme la vitesse au centre est imposée égale à 1, $W_b(0) = 1$, un gradient de pression spécifique doit être appliqué pour satisfaire cette condition. L'écoulement de base dépend de trois paramètres rhéologiques λ , n_c et μ_∞ . La dépendance en Re n'est pas explicite. Généralement μ_∞ est 10^3 à 10^4 plus petite que μ_0 . Dans la présente étude, $\frac{\mu_\infty}{\mu_0}$ est fixé à 2.10^{-3} . Une valeur plus faible ou légèrement plus grande, ne modifie pas les conclusions de notre étude. Dans ce qui suit, nous examinons les modifications de l'écoulement de base en augmentant le caractère rhéofluidifiant, c'est à dire, en diminuant n_c ou en augmentant λ .

2.4.1 Écoulement de base pour λ fixé et n_c variable

La figure 2.2(a) montre des profils de vitesse axiale obtenus pour $\lambda = 30$ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification n_c . En augmentant le caractère rhéofluidifiant, les profils de vitesse axiale s'aplatissent et le gradient pariétal de vitesse augmente. Les profils de viscosité associés sont donnés par la figure 2.2(b). La diminution de n_c s'accompagne d'une plus grande stratification de la viscosité et d'une décroissance de la viscosité pariétale.

2.4.2 Écoulement de base pour n_c fixé et λ variable

La figure 2.3(a) montre des profils de vitesse axiale obtenus pour $n_c = 0.5$ et différents valeurs de λ . Lorsque λ augmente, le profile de vitesse axiale tend vers celui que l'on obtient pour celui en loi de puissance. En augmentant λ , la stratification de la viscosité devient plus marquée, particulièrement au voisinage de l'axe.

2.5 Équations aux perturbations

Nous étudions l'évolution temporelle d'une perturbation $((u, v, w), p)$ superposée à l'écoulement de base $((0, 0, W_b), P_b)$ décrit dans le paragraphe 2.4. Les équations aux perturbations sont obtenues en retranchant aux équations de conservation écrites pour l'écoulement perturbé $(u, v, W_b + w, P_b + p)$, celles satisfaites par l'écoulement de base, soit :

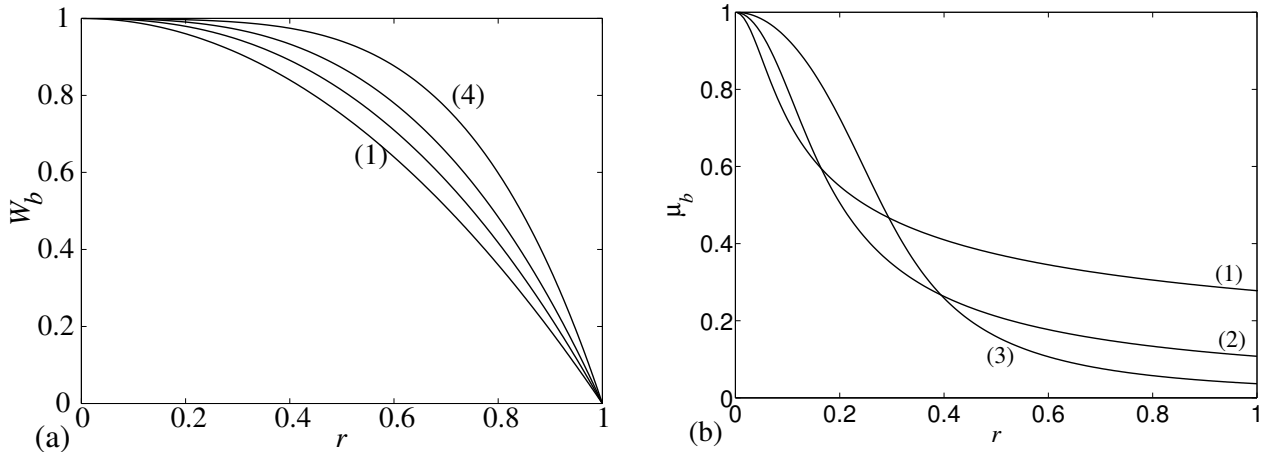


FIGURE 2.2: Écoulements de base (a) et profils de viscosité (b) pour $\mu_\infty = 2 \times 10^{-3}$, $\lambda = 30$ et différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification (1) Cas newtonien, (2) $n_c = 0.7$, (3) $n_c = 0.5$ et (4) $n_c = 0.3$.

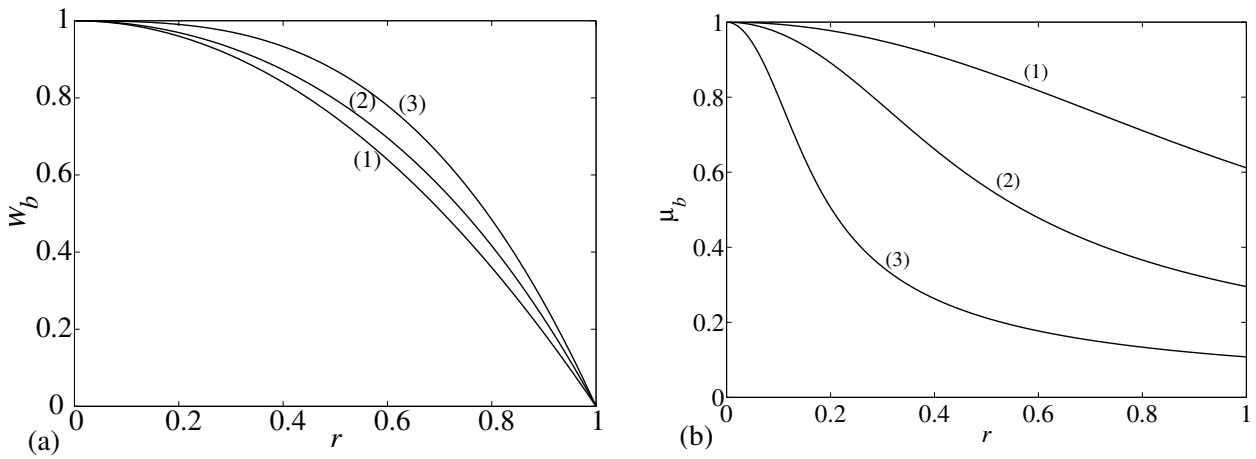


FIGURE 2.3: Écoulements de base (a) et profils de viscosité (b) pour $\mu_\infty = 2 \times 10^{-3}$, $\lambda = 30$ et différentes valeurs de la constante adimensionnelle λ : (1) $\lambda = 1$, (2) $\lambda = 4$ et (3) $\lambda = 30$.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & -(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p \\ & + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Avec la condition d'adhérence à la paroi. Les déviateurs du tenseur de contraintes de l'écoulement de base $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b)$ et de l'écoulement perturbé $\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$ sont donnés par :

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b) = \frac{1}{Re} \mu(\mathbf{U}_b) \cdot \bar{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(\mathbf{U}_b), \quad (2.20)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \cdot \bar{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}). \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

La viscosité de l'écoulement perturbé $\mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$, peut être écrite sous la forme d'une somme de la viscosité de l'écoulement de base $\mu(\mathbf{U}_b) = \mu_b$ et une perturbation μ' :

$$\mu = \mu_b + \mu'. \quad (2.23)$$

En tenant en compte des équations (2.20 - 2.23), le système (2.18 - 2.19) devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ & - \nabla p + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) + \mu_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})], \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Le système (2.18 - 2.19) peut être écrit formellement sous la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{N}_{visq}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_{inertie}(\mathbf{u}) + \mathbf{L}(\mathbf{u}) - \nabla p, \quad (2.28)$$

$$(2.29)$$

où les opérateurs linéaire \mathbf{L} et non linéaires d'inertie $\mathbf{N}_{inertie}$ et visqueux \mathbf{N}_{visq} sont définis par :

$$\mathbf{N}_{visq}(\mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu' \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})], \quad (2.30)$$

$$\mathbf{N}_{inertie}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla \cdot [\mu_b \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})]. \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Ces équations sont résolues numériquement par une méthode pseudo-spectrale décrite dans la section suivante.

2.6 Méthode numérique

Dans ce qui suit, la perturbation sera supposée périodique dans la direction azimutale et axiale, avec une période 2π et Q respectivement. Comme la perturbation est périodique dans les directions axiale et azimutale, il est naturel de chercher une solution sous la forme d'une série de Fourier en θ et en z . Dans la direction radiale, une décomposition en série construite à partir des polynômes Chebychev sera adoptée.

Globalement, en suivant [Meseguer & Trefethen 2001b], une approximation spectrale de la solution \mathbf{u}_s d'ordre L en z , N en θ , et M en r est donnée par :

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}(t) \Phi_{mnl}(r, \theta, z) \quad (2.34)$$

où

$$\Phi_{mnl} = \tilde{\Phi}_{mln}(r) e^{i(n\theta + lk_0 z)} \quad (2.35)$$

où le nombre d'onde fondamental dans la direction axiale est $k_0 = 2\pi/Q$.

2.6.1 Fonctions de base et fonctions test

Nous considérons la décomposition spectrale des champs de vitesse \mathbf{u}_s , suivant des fonctions de base notées $\Phi_{mnl}(r, \theta, z)$. Les indices m , n , l se rapportent aux décompositions dans les directions radiale, azimutale, axiale respectivement. Ces fonctions de base considérées ont été proposées initialement par [Leonard & Wray 1982] et adoptées par [Meseguer & Trefethen 2001b]. Elles sont périodiques, à divergence nulle, et s'annulent à la paroi, et vérifient les conditions de régularité sur l'axe de la conduite :

- $\nabla \cdot \Phi(r, \theta, z) = 0$
- $\Phi(1, \theta, z) = 0$
- $\Phi(r, \theta, z) = \Phi(r, \theta + 2\pi, z)$ et $\Phi(r, \theta, z) = \Phi(r, \theta, z + Q)$
- $\Phi(r, \theta, z)$ et $\frac{1}{r} \Phi(r, \theta, z)$ ne présentent pas de singularité.

Il y a plusieurs façons de déterminer des fonctions de base à divergence nulle. L'équation de continuité introduit une dépendance linéaire entre les trois composantes de Φ_{mnl} , conduisant à un système à deux degrés de liberté. Ainsi, nous avons :

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(1)}(t) \Phi_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + a_{mnl}^{(2)}(t) \Phi_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \quad (2.36)$$

avec

$$\Phi_{mnl}^{(1,2)}(r, \theta, z) = e^{i(k_0 l z + n \theta)} \tilde{\Phi}_{mnl}^{(1,2)}(r), \quad k_0 = \frac{2\pi}{Q}. \quad (2.37)$$

Les fonctions $\tilde{\Phi}_{mnl}^{(1,2)}(r)$ sont donnés en annexe. Pour déterminer les coefficients $a_{mnl}^{(1,2)}$, une méthode pseudospectrale du type Petrov-Galerkin est utilisée. Dans cette approche, le résidu doit être orthogonal à l'ensemble des fonctions tests, au sens du produit scalaire :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^* d\Omega. \quad (2.38)$$

Les fonctions de base font intervenir des polynômes de Chebychev. L'intégration sur r est effectuée avec la méthode de Gauss-Lobatto. Le domaine d'intégration naturel pour cette méthode est $[-1,1]$, or le domaine d'intégration en r est $[0,1]$. Les fonctions test et fonctions de base sont choisies de telle sorte d'avoir un intégrande $g(r)$ toujours paire, puisque :

$$\int_0^1 g(r) dr = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(r) dr, \quad \text{si } g(r) \text{ est paire.} \quad (2.39)$$

Comme pour les fonctions de base, les fonctions test considérées sont à divergence nulle, s'annulent à la paroi, satisfont les conditions de périodicité et la condition de régularité sur l'axe :

- $\nabla \cdot \Psi(r, \theta, z) = 0$
- $\Psi(1, \theta, z) = 0$
- $\Psi(r, \theta, z) = \Psi(r, \theta + 2\pi, z)$ et $\Psi(r, \theta, z) = \Psi(r, \theta, z + Q)$
- $\Psi(r, \theta, z)$ ne présentent pas de singularité.

Une description détaillée des fonctions de base et des fonctions test est donnée en annexe.

2.6.2 Mise en oeuvre numérique

En substituant l'expression (2.36) dans (2.28) et en faisant la projection sur l'ensemble des fonctions test on obtient :

$$(\partial_t \mathbf{u}_s, \Psi) = (\mathbf{L}, \Psi) - (\mathbf{N}_{inertie}, \Psi) + (\mathbf{N}_{visq}, \Psi). \quad (2.40)$$

Nous n'avons pas reporté le terme relatif au gradient de pression, car il s'annule par projection sur des fonctions à divergence nulle.

2.6.2.1 Calcul des termes linéaires

Lors de la projection des termes linéaires de l'équation (2.40), nous pouvons utiliser la propriété d'orthogonalité de la décomposition en modes de Fourier,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-n')\theta} d\theta = 2\pi\delta_{n'n} \text{ et } \int_0^Q e^{i(l-l')k_0 z} dz = Q\delta_{l'l} \quad (2.41)$$

où δ_{ij} est la fonction de Kronecker. De cette manière, les termes linéaires conduisent à un système de $(2N + 1) \times (2L + 1)$ problèmes aux valeurs initiales découplés, pour chaque mode azimutal n et axial l (avec $k_0 = \frac{2\pi}{Q}$), du type :

$$\begin{bmatrix} (\tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Psi}^{(1)}) & (\tilde{\Phi}^{(2)}, \tilde{\Psi}^{(1)}) \\ (\tilde{\Phi}^{(1)}, \tilde{\Psi}^{(2)}) & (\tilde{\Phi}^{(2)}, \tilde{\Psi}^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}}^{(1)} \\ \dot{\mathbf{a}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(1)}), \tilde{\Psi}^{(1)}) & (\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(2)}), \tilde{\Psi}^{(1)}) \\ (\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(1)}), \tilde{\Psi}^{(2)}) & (\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(2)}), \tilde{\Psi}^{(2)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où chaque sous-matrice $(\tilde{\Phi}^{(i)}, \tilde{\Psi}^{*(j)})$ de taille $(M + 1) \times (M + 1)$ est donnée par :

$$(\tilde{\Phi}^{(i)}, \tilde{\Psi}^{*(j)}) = \begin{bmatrix} \int_0^1 \tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)} \tilde{\Psi}_{Mnl}^{*(j)} r dr \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

avec $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$. De manière analogue, la sous-matrice $(\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(i)}), \tilde{\Psi}^{*(j)})$ de taille $(M + 1) \times (M + 1)$ est donnée par :

$$(\mathbb{L}(\tilde{\Phi}^{(i)}), \tilde{\Psi}^{(j)}) = \begin{bmatrix} \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{0nl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{0nl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{Mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(j)} r dr & \dots & \int_0^1 \mathbb{L}(\tilde{\Phi}_{Mnl}^{(i)}) \tilde{\Psi}_{Mnl}^{*(j)} r dr \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$. Le système 2.42 peut être exprimée en forme matricielle compacte :

$$\mathbf{A}_{nl} \dot{\mathbf{a}}(t) = \mathbf{B}_{nl} \mathbf{a}(t), \text{ pour } n, l \text{ donnés} \quad (2.45)$$

où \mathbf{A} est la matrice générée par (\mathbf{u}_s, Ψ) et \mathbf{B} est une matrice générée à partir de $(\mathbb{L}(\mathbf{u}_s), \Psi)$. Elle dépend du nombre de Re . Le vecteur colonne \mathbf{a} a les coefficients $a_{mnl}^{(1,2)}$ de l'équation (2.36) pour une paire (n, l) donnée :

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} a_{0nl}^{(1)}(t) \\ \vdots \\ a_{Mnl}^{(1)}(t) \\ a_{0nl}^{(2)}(t) \\ \vdots \\ a_{Mnl}^{(2)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

La taille du vecteur \mathbf{a}_{nl} est de $(2M + 2)$. La dimension des matrices carrées \mathbf{A} et \mathbf{B} dans l'équation (2.45) est de $(2M + 2)$, étant M le nombre des modes radiaux.

2.6.2.2 Termes non linéaires

Les contributions non linéaires sont calculées dans l'espace physique avec une méthode pseudospectrale. Une fois calculés, ses termes sont projetés dans l'espace de Fourier-Chebyshev via une FFT. De cette façon, le problème non linéaire aux valeurs initiales donné par l'équation (2.40) devient :

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{a}}_{nl}(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{a}_{nl}(t) + \mathbf{b}_{nl}(t), \quad (2.47)$$

où les contributions non linéaires sont regroupés dans le vecteur $\mathbf{b}_{nl}(t)$:

$$\mathbf{b}_{nl}(t) = \begin{pmatrix} b_{0nl}^{(1)} \\ \vdots \\ b_{Mnl}^{(1)} \\ b_{0nl}^{(2)} \\ \vdots \\ b_{Mnl}^{(2)} \end{pmatrix} (t) \quad (2.48)$$

où chaque coefficient b_{mnl} est donné par :

$$b_{mnl}^{(1,2)} = (\mathbf{N}_{inertie}, \Psi_{nml}^{(1,2)}) + (\mathbf{N}_{visq}, \Psi_{mnl}^{(1,2)}) \quad (2.49)$$

La figure 2.4 montre le chemin de calcul dans l'espace physique des termes non linéaires d'inertie et les termes non linéaires visqueux. Ceci se déroule en trois étapes décrites dans ce qui suit.

(I) Construction de la vitesse dans l'espace physique

Pour la reconstruction de la vitesse dans l'espace physique nous utilisons l'équation 2.34 :

$$\mathbf{u}_{ijk}(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(1)}(t) \Phi_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(2)}(t) \Phi_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \quad (2.50)$$

dans une grille tridimensionnelle aux points de Gauss-Lobatto dans la direction radiale et également distribuée dans les directions azimutale et axiale :

$$(r_k, \theta_j, z_i) = \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2M_d}\right), \frac{2\pi}{N_d} j, \frac{Q}{L_d} i \right), \quad (2.51)$$

pour $k = 0, \dots, M_d - 1$, $j = 0, \dots, N_d - 1$, $i = 0, \dots, L_d - 1$. Où M_d , N_d , L_d sont les nombres de points, radiaux, axiaux, longitudinaux dans l'espace physique respectivement. Nous pouvons aussi calculer la valeur de la dérivée radiale de la vitesse dans l'espace physique :

$$\partial_r \mathbf{u}_{ijk}(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(1)}(t) D_r \Phi_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M a_{mnl}^{(2)}(t) \Phi_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \quad (2.52)$$

où D_r est la matrice de dérivation de Chebyshev en r donnée dans l'annexe. Pour éviter l'erreur d'aliasing (repliement spectral), nous avons respecté la loi d'Orzag [Boyd 1999] :

$$L_d \geq \frac{3}{2}(2L + 1), \quad N_d \geq \frac{3}{2}(2N + 1), \quad M_d \geq 3M, \quad (2.53)$$

Pour passer de l'espace physique à l'espace spectral nous avons utilisé la technique des sommations partielles pour évaluer la transformé de Fourier discrète.

(II) Calcul des termes non linéaires dans l'espace physique

Pour obtenir la valeur de la dérivée azimutale ou axiale il suffit d'utiliser les matrices de dérivation données dans l'annexe. De cette manière nous avons tous les champs nécessaires pour le calcul des termes non linéaires :

$$[\partial_\theta u]_{ijk} = [D_\theta]_{ii'} [u]_{i'jk}, \quad [\partial_\theta v]_{ijk} = [D_\theta]_{ii'} [v]_{i'jk}, \quad [\partial_\theta w]_{ijk} = [D_\theta]_{ii'} [w]_{i'jk},$$

$$[\partial_z u]_{ijk} = [D_z]_{jj'} [u]_{ij'k}, \quad [\partial_z v]_{ijk} = [D_z]_{jj'} [v]_{ij'k}, \quad [\partial_z w]_{ijk} = [D_z]_{jj'} [w]_{ij'k},$$

où D_θ et D_z sont des matrices de dérivation spectrale données dans l'annexe. Finalement les termes convectifs sont calculés en chaque point de la grille :

$$[\mathbf{N}_{inertie}]_{ijk} = [(\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s] = \begin{bmatrix} [u]_{ijk} [\partial_r u]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [v]_{ijk} [\partial_\theta u]_{ijk} + [w]_{ijk} [\partial_z u]_{ijk} - \frac{1}{r_k} [v]_{ijk}^2 \\ [u]_{ijk} [\partial_r v]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [v]_{ijk} [\partial_\theta v]_{ijk} + [w]_{ijk} [\partial_z v]_{ijk} - \frac{1}{r_k} [v]_{ijk} [u]_{ijk} \\ [u]_{ijk} [\partial_r w]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [v]_{ijk} [\partial_\theta w]_{ijk} + [w]_{ijk} [\partial_z w]_{ijk} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Et le tenseur $\dot{\gamma}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$ est calculé dans l'espace physique comme :

$$[\dot{\gamma}]_{ijk} = \begin{bmatrix} 2[\partial_r u]_{ijk} & ([r_k \partial_r v / r_k]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [\partial_\theta u]_{ijk}) & ([\partial_r W_b]_k + [\partial_r w]_{ijk} + [\partial_z u]_{ijk}) \\ ([r_k \partial_r v / r_k]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [\partial_\theta u]_{ijk}) & \frac{2}{r_k} [\partial_\theta v]_{ijk} + \frac{[u]_{ijk}}{r_k} & ([r_k \partial_z v]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [\partial_\theta w]_{ijk}) \\ ([\partial_r W_b]_k + [\partial_r w]_{ijk} + [\partial_z u]_{ijk}) & ([r_k \partial_z v]_{ijk} + \frac{1}{r_k} [\partial_\theta w]_{ijk}) & 2[\partial_z w]_{ijk} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

En suite, pour calculer le second invariant au carré du tenseur $\dot{\gamma}$, nommée $\dot{\gamma}_{II}^2$, on utilise la relation :

$$[\dot{\gamma}_{II}]_{ijk}^2 = \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^3 ([\dot{\gamma}_{st}]_{ijk} [\dot{\gamma}_{ts}]_{ijk}). \quad (2.56)$$

La viscosité dans l'espace physique est donnée par :

$$[\mu]_{ijk} = \left(1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \cdot \left[1 + \lambda^2 \cdot [\dot{\gamma}_{II}]_{ijk}^2 \right]^{\frac{n_c-1}{2}} + \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right), \quad (2.57)$$

La viscosité de base μ_b dans l'espace physique est donnée par :

$$[\mu_b]_{ijk} = \left(1 - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \cdot \left[1 + \lambda^2 \cdot [\partial_r W_b]_k^2 \right]^{\frac{n_c-1}{2}} + \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right), \quad (2.58)$$

La perturbation de la viscosité $[\mu']_{ijk} = [\mu]_{ijk} - [\mu_b]_k$, permet de calculer les termes visqueux \mathbf{N}_{visq} de l'équation 2.30 :

$$[\mathbf{N}_{visq}]_{ijk} = \frac{1}{Re} \nabla \cdot ([\mu']_{ijk} [\dot{\gamma}]_{ijk}) \quad (2.59)$$

Pour calculer cette divergence nous allons utiliser le théorème de Green lors de la projection de \mathbf{N}_{visq} dans l'espace spectrale.

(III) Projection des termes non linéaires dans l'espace de Fourier Chebyshev

Les coefficients b_{mnl} dans l'équation 2.47 provenant des termes non linéaires sont calculés par une projection sur l'espace spectrale sous la forme :

$$b_{mnl}^{(1,2)} = (\mathbf{N}_{inertie}, \Psi_{mnl}^{(1,2)}) + (\mathbf{N}_{visq}^{(1,2)}, \Psi_{mnl}) \quad (2.60)$$

$$b_{mnl}^{(1,2)} = \int_0^Q \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{N}_{inertie} \Psi_{mnl}^{*(1,2)} r dr d\theta dz + \int_0^Q \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{N}_{visq} \Psi_{mnl}^{*(1,2)} r dr d\theta dz \quad (2.61)$$

La version discrete de (2.61) est :

$$b_{mnl}^{(1,2)} = \sum_{i=0}^{L_d-1} \sum_{j=0}^{N_d-1} \sum_{k=0}^{M_d-1} e^{-i(n\theta_j + 2\pi l z_i / Q)} \tilde{\Psi}_{mnl}^{*(1,2)}(r_k) [\mathbf{N}_{visq} + \mathbf{N}_{inertie}]_{ijk} r_k, \quad (2.62)$$

où les fonctions test $\tilde{\Psi}_{mnl}(r_k)$ incluent les coefficients w_k de la quadrature de Gauss-Lobatto pour l'intégration radiale. Pour calculer (2.62), nous avons utilisé la technique des sommes partielles décrite dans l'annexe. Une analyse plus détaillée de cette procédure peut être trouvée dans [Boyd 1999] ou dans [Meseguer & Trefethen 2001b].

2.6.3 Intégration temporelle

Pour l'intégration numérique du problème aux valeurs initiales (2.47), nous avons utilisé la méthode de *Adams Bashforth / Backward Differences* d'ordre 4 AB_4BD_4

$$\begin{aligned} (25\mathbf{A} - 2\Delta t\mathbf{B})\mathbf{a}^{(t+1)} &= \mathbf{A}(48\mathbf{a}^{(t)} - 36\mathbf{a}^{(t-1)} + 16\mathbf{a}^{(t-2)} - 3\mathbf{a}^{(t-3)}) \\ &\quad - \Delta t(48\mathbf{b}^{(t-1)} - 72\mathbf{b}^{(t-1)} + 48\mathbf{b}^{(t-2)} - 12\mathbf{b}^{(t-3)}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

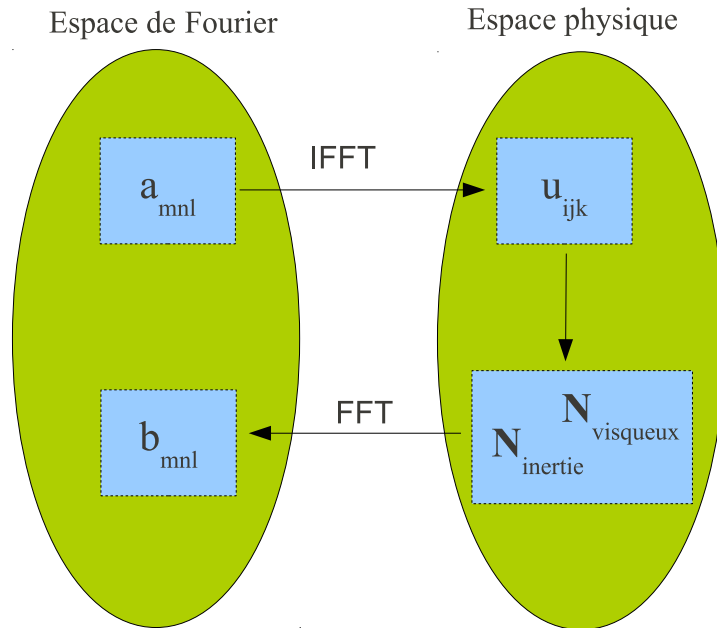


FIGURE 2.4: Chemin de calcul pour les termes non linéaires. FFT signifie *Fast Fourier Transform*. Cette méthode est basée sur [Meseguer & Trefethen 2001b].

pour $t \geq 3$. La condition initiale est donnée sous la forme des coefficients spectraux $\mathbf{a}_{mnl}^{(0)}$.

La procédure d'intégration a besoin des coefficients $\mathbf{a}^{(t)}$ pour les 4 derniers pas des temps. Donc on démarre avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les quatre premiers pas des temps.

Analyse linéaire de stabilité

Sommaire

3.1	Équations aux perturbations linéarisées	36
3.2	Problème aux valeurs initiales	38
3.3	Problème aux valeurs propres	39
3.3.1	Perturbation unidimensionnelle ($n = 0, k_0 = 0$)	40
3.3.2	Perturbation axisymétrique ($n = 0, k_0 \neq 0$)	40
3.3.3	Perturbation homogène dans la direction axiale ($n \neq 0, k_0 = 0$)	42
3.3.4	Perturbation oblique ($n \neq 0, k_0 \neq 0$)	46
3.4	Croissance transitoire	50
3.5	Perturbation Optimale	51
3.6	Conclusions	54

Dans ce chapitre, nous étudions la stabilité de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant purement visqueux dans une conduite cylindrique, vis-à-vis d'une perturbation infinitésimale. Les approches modale et non modale seront utilisées. A notre connaissance, une telle étude n'a pas été effectuée dans la littérature pour des fluides rhéofluidifiants pour un modèle de Carreau. Ce chapitre est organisé comme suit : dans le paragraphe 3.1 nous donnons les équations aux perturbations linéarisées pour tout fluide purement visqueux non Newtonien. La recherche de solutions sous forme d'une superposition de modes de Fourier complexes, conduit à un problème aux valeurs initiales décrit dans le paragraphe 3.2. Ce problème est transformé en un problème aux valeurs propres dans le paragraphe 3.3. Les résultats sont ensuite analysés selon les valeurs de nombre d'onde azimutal n et axial k_0 . La non normalité de l'opérateur linéaire nous a amené à analyser la croissance transitoire d'une perturbation et à déterminer la structure de la perturbation optimale en

fonction des paramètres rhéologiques dans les paragraphes 3.4 et 3.5. La conclusion dans le paragraphe 3.6 rappelle l'essentiel des résultats obtenus dans ce chapitre.

3.1 Équations aux perturbations linéarisées

Quand la perturbation est supposée infinitésimale, le terme non linéaire d'inertie $\mathbf{N}_{inertie}$ de l'équation (2.28) est négligé et la quantité $\mathbf{N}_{visq} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b))$ est linéarisée autour de l'écoulement de base (\mathbf{U}_b, P_b) :

$$\boldsymbol{\tau}' = [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)]_\ell = \mu(\mathbf{U}_b)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) + \mu'_\ell \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{U}_b), \quad (3.1)$$

L'indice ℓ signifie linéarisation autour de l'écoulement de base. La perturbation de la viscosité, μ'_ℓ , est obtenue à partir d'un développement au premier ordre :

$$\mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \approx \mu_b + \frac{\partial \mu_b}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \cdot \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}), \quad (3.2)$$

avec $\mu_b = \mu(\mathbf{U}_b)$. Nous pouvons définir μ'_ℓ comme :

$$\mu'_\ell = \left. \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} \right|_b \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}). \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique, $\mathbf{U}_b = W_b(r)\mathbf{e}_z$ et $\dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b) = \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{U}_b) = \partial_r W_b$. Ainsi :

$$\mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \approx \mu_b + \frac{\partial \mu_b}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \cdot \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}). \quad (3.4)$$

En utilisant l'équation (3.1), le déviateur du tenseur de contraintes linéarisé devient :

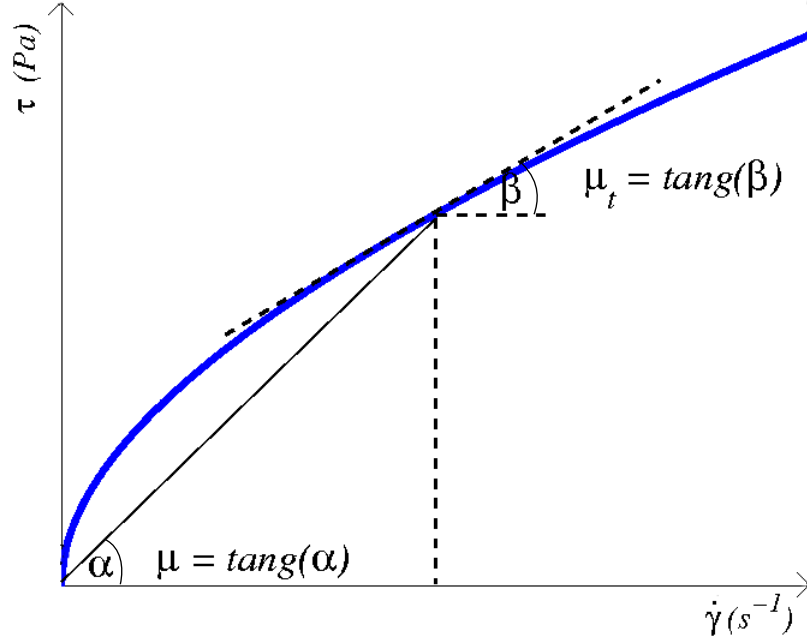
$$\tau'_{ij} = \mu_b \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{si } ij \neq rz, zr \quad (3.5)$$

$$\tau'_{ij} = \mu_t \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{si } ij = rz, zr, \quad (3.6)$$

Dans l'équation précédente, nous avons introduit la viscosité tangente μ_t définie par :

$$\mu_t(\mathbf{U}_b) = \mu_b + \frac{\partial \mu_b}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{U}_b) = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \dot{\gamma}_{rz}}. \quad (3.7)$$

Une représentation graphique de la viscosité tangente μ_t est donnée dans la figure 3.1. Il est intéressant de noter que le déviateur de tenseur de contraintes $\boldsymbol{\tau}'$ lié à la perturbation

FIGURE 3.1: Représentation graphique de la viscosité tangente μ_t .

est anisotrope. Ceci est une conséquence de la variation non linéaire de μ en fonction du cisaillement et de l'anisotropie de l'écoulement de base. L'équation (2.28) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = [\mathbf{N}_{visq}]_{\ell}(\mathbf{u}) - \mathbf{L}(\mathbf{u}) - \nabla p \quad (3.8)$$

Ce problème a été étudié par [Nouar *et al.* 2007a] dans un canal et par [Esmael 2008] pour un fluide à seuil (modèle de Herschel-Bulkley) dans une conduite. Sous forme développée, l'équation (3.8) s'écrit :

$$\partial_t u = -\partial_r p - W_b \partial_z u + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\Delta u - \frac{2}{r^2} \partial_{\theta} v - \frac{u}{r^2} \right] + (\partial_r \mu_b) \dot{\gamma}_{rr} + [\mu_t - \mu_b] \partial_z \dot{\gamma}_{rz} \right) \quad (3.9)$$

$$\partial_t v = -\frac{1}{r} \partial_{\theta} p - W_b \partial_z v + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\Delta v + \frac{2}{r^2} \partial_{\theta} u - \frac{v}{r^2} \right] + (\partial_r \mu_b) \dot{\gamma}_{r\theta} \right) \quad (3.10)$$

$$\partial_t w = -\partial_z p - W_b \partial_z w - u \partial_r W_b + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \Delta w + (\partial_r \mu_b) \dot{\gamma}_{rz} + \frac{1}{r} \partial_r [r (\mu_t - \mu_b) \dot{\gamma}_{rz}] \right) \quad (3.11)$$

$$\partial_r u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \partial_{\theta} v + \partial_z w = 0 \quad (3.12)$$

avec,

$$\Delta = \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \partial_{zz}^2 \quad (3.13)$$

Dans les équations précédentes, nous avons écrit les termes visqueux sous la forme des trois termes : (i) Un terme "du type" Newtonien en facteur de μ_b ; (ii) un terme qui dépend de la stratification de la viscosité, en facteur de $\partial_r \mu_b$ et (iii) un troisième terme lié à l'anisotropie de $\boldsymbol{\tau}'$, en facteur de $(\mu_t - \mu_b)$. Aux équations précédentes, il faut rajouter les conditions de non glissement à la paroi :

$$\mathbf{u}(r = 1) = \mathbf{0}. \quad (3.14)$$

3.2 Problème aux valeurs initiales

Les équations aux perturbations linéarisées (3.9)-(3.12) sont invariantes dans les directions azimutale θ et axiale z . Il s'ensuit que la solution peut être écrite sous la forme d'une superposition de modes de Fourier complexes :

$$(u, v, w) = [\tilde{u}(r, t), \tilde{v}(r, t), \tilde{w}(r, t)] e^{i(k_0 z + n\theta)}, \quad (3.15)$$

où $k_0 \in \Re$ est le nombre d'onde axial et $n \in \mathbb{Z}$ est le nombre d'onde azimutal. Lorsque nous remplaçons (u, v, w) par leur expression (3.15) dans (3.9)-(3.12), nous arrivons au problème aux valeurs initiales suivant :

$$\partial_t \tilde{u} = -D\tilde{p} - ik_0 W_b \tilde{u} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\mathcal{L}\tilde{u} - \frac{2in}{r^2} \tilde{v} - \frac{\tilde{u}}{r^2} \right] + 2D\mu D\tilde{u} + ik_0 [\mu_t - \mu_b] (D\tilde{w} + ik_0 \tilde{u}) \right), \quad (3.16)$$

$$\partial_t \tilde{v} = -in\tilde{p} - ik_0 W_b \tilde{v} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\mathcal{L}\tilde{v} + \frac{2in}{r^2} \tilde{u} - \frac{\tilde{v}}{r^2} \right] + D\mu_b \left(D\tilde{v} + \frac{in}{r} \tilde{u} - \frac{\tilde{v}}{r} \right) \right), \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{w} = & -ik_0 \tilde{p} - ik_0 W_b \tilde{w} - DW_b \tilde{u} + \frac{1}{Re} (\mu_b \mathcal{L}\tilde{w} + D\mu_b (D\tilde{w} + ik_0 \tilde{u})) \\ & + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} D [r (\mu_t - \mu_b) (D\tilde{w} + ik_0 \tilde{u})] \right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$D(r\tilde{u}) + i[n\tilde{v} + k_0 r\tilde{w}] = 0, \quad (3.19)$$

où

$$D = \partial_r, \quad \mathcal{L} = D^2 + \frac{1}{r} D - \frac{n^2}{r^2} - k_0^2 \quad \text{et} \quad (3.20)$$

$$\mu_b = \mu(\mathbf{U}_b) = \left[1 - \mu_\infty \cdot \left[1 + (\lambda \cdot |\partial_r W_b|)^2 \right]^{\frac{n_c - 1}{2}} + \frac{\hat{\mu}_\infty}{\hat{\mu}_0} \right]. \quad (3.21)$$

Ce système d'équations aux dérivées partielles peut être écrit sous la forme :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}(\tilde{\mathbf{u}}) - \nabla \tilde{p}, \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.23)$$

où $\mathbb{L}(\tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{u}}) + [\mathbf{N}_{visq}(\tilde{\mathbf{u}})]_\ell$ est un opérateur linéaire qui regroupe l'opérateur linéaire d'inertie et l'opérateur linéaire visqueux. La formulation faible de ce système est :

$$(\partial_t \tilde{\mathbf{u}}, \Psi) = (\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{u}}), \Psi) \quad (3.24)$$

où Ψ est une fonction test à divergence nulle, qui s'annule à la paroi (Voir section 2.6).

3.3 Problème aux valeurs propres

Le comportement aux temps longs de la perturbation est obtenu en cherchant une solution du problème (3.16-3.19) sous la forme :

$$(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})^T = [(\check{\mathbf{u}}(r), p)^T] e^{\sigma t}, \quad (3.25)$$

où $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. La partie réelle σ_r est le taux d'amplification ou d'amortissement de la perturbation. La partie imaginaire σ_i est reliée à la vitesse de phase c par la relation $c = -\sigma_i/k_0$. En remplaçant $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})^T$ par l'expression (3.25) dans l'équation (3.22), on obtient :

$$\sigma \check{\mathbf{u}} = \mathbf{L}(\check{\mathbf{u}}) - \nabla \check{p}, \quad (3.26)$$

$$\nabla \cdot \check{\mathbf{u}} = 0, \quad (3.27)$$

L'application de la méthode de Petrov-Galerkin conduit à un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\sigma \mathbf{A}_{n,k_0} \mathbf{a} = \mathbf{B}_{n,k_0} \cdot \mathbf{a}. \quad (3.28)$$

Les expressions pour \mathbf{A}_{n,k_0} et \mathbf{B}_{n,k_0} sont calculées avec la méthode décrite dans le paragraphe 2.6.2.1. La principale conséquence d'avoir introduit une solution en série de Fourier (3.15) est le découplage du système pour chaque mode axial, k_0 et azimutal, n . Nous allons présenter les résultats selon 4 cas particuliers pour la perturbation :

- Perturbation unidimensionnelle ($n = 0$ et $k_0 = 0$)

- Perturbation axisymétrique ($n = 0$ et $k_0 \neq 0$)
- Perturbation homogène dans la direction axiale ($n \neq 0$ et $k_0 = 0$)
- Perturbation oblique ($n \neq 0$ et $k_0 \neq 0$)

3.3.1 Perturbation unidimensionnelle ($n = 0, k_0 = 0$)

L'équation de continuité (3.19) est réduite à $\partial_r(r\check{u}) = 0$, soit $\check{u} = \frac{A}{r}$. Comme $\check{u}(1) = 0$, on a alors $A = 0$. Pour une perturbation unidimensionnelle, la vitesse radiale est nulle. Les équations suivant θ et z se réduisent respectivement à :

$$\sigma\check{v} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\mu_b\partial_r\left(\frac{\check{v}}{r}\right)\right) \quad (3.29)$$

$$\sigma\check{w} = \frac{1}{r}\partial_r(r\mu_t\partial_r\check{w}) \quad (3.30)$$

En multipliant les deux équations ci-dessus respectivement par les complexes conjugués \check{v}^* et \check{w}^* et en intégrant suivant r entre 0 et 1, on obtient :

$$\sigma \int_0^1 \|\check{v}\|^2 r dr = - \int_0^1 \mu_b \left\| \partial_r \left(\frac{\check{v}}{r} \right) \right\|^2 r dr \quad (3.31)$$

$$\sigma \int_0^1 \|\check{w}\|^2 r dr = - \int_0^1 \mu_t \|\partial_r \check{w}\|^2 r dr \quad (3.32)$$

Il est évident que les valeurs propres sont réelles et négatives¹. Ainsi, les écoulements des fluides purement visqueux sont linéairement stables vis-à-vis d'une perturbation unidirectionnelle. A titre indicatif, nous avons représenté dans la figure 3.2, le spectre des valeurs propres dans le cas Newtonien et pour un fluide de Carreau. La fonction propre associée au mode le moins stable est représentée dans la figure 3.3.

3.3.2 Perturbation axisymétrique ($n = 0, k_0 \neq 0$)

Dans le cas d'une perturbation axisymétrique, le système (3.26) devient :

1. Généralement, pour les fluides purement visqueux non Newtoniens, la viscosité tangente est positive ($\mu_t > 0$), sauf cas exceptionnel où la viscosité décroît plus vite que l'augmentation du cisaillement.

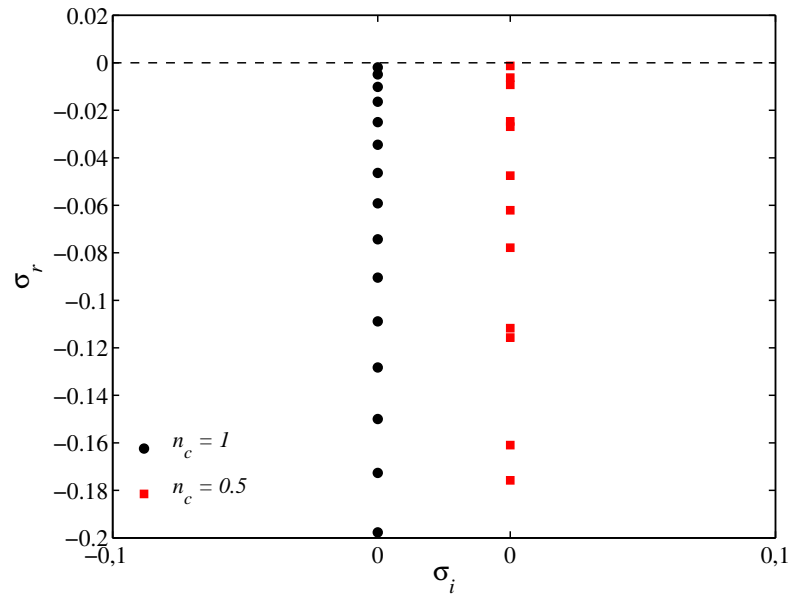


FIGURE 3.2: Spectre des valeurs propres dans le cas d'une perturbation unidimensionnelle ($n = 0, k_0 = 0$) à $Re_w = 3000$. (cercles) Cas Newtonien. (carrés) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30, n_c = 0.5$. Calcul fait avec $M = 60$ modes dans la direction radiale.

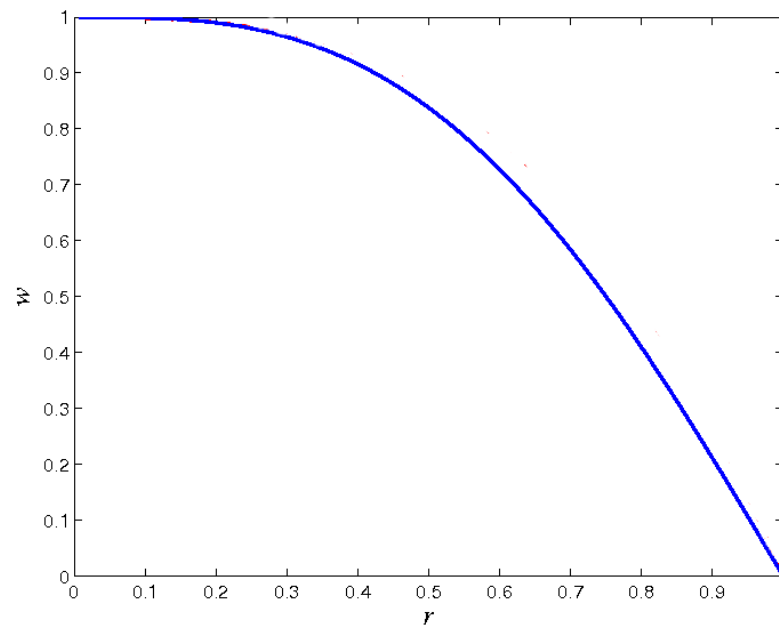


FIGURE 3.3: Forme de la perturbation la moins stable pour $n = 0, k_0 = 0$ à $Re = 3000$. La seule composante non nulle est $w(r)$.

$$\sigma \ddot{u} = -D\ddot{p} - ik_0 W_b \ddot{u} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\mathcal{L}\ddot{u} - \frac{\ddot{u}}{r^2} \right] + 2D\mu_b D\ddot{u} + ik_0 [\mu_t - \mu_b] (D\dot{w} + ik_0 \dot{u}) \right) \quad (3.33)$$

$$\sigma \ddot{v} = -ik_0 W_b \ddot{v} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\mathcal{L}\ddot{v} - \frac{\ddot{v}}{r^2} \right] \right) + D\mu_b \left(D\dot{v} - \frac{\dot{v}}{r} \right) \quad (3.34)$$

$$\sigma \ddot{w} = -ik_0 \ddot{p} - ik_0 W_b \ddot{w} - DW_b \ddot{u} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \mathcal{L}\ddot{w} + D\mu_b (D\dot{w} + ik_0 \dot{u}) + \frac{1}{r} D [r (\mu_t - \mu_b) (D\dot{w} + ik_0 \dot{u})] \right) \quad (3.35)$$

L'équation en \ddot{v} est découplée des équations en \ddot{u} et \ddot{w} et peut être traité séparément. En multipliant l'équation (3.34) par \dot{v}^* et en intégrant suivant r entre 0 et 1, on arrive à :

$$\sigma \int_0^1 \|\dot{v}\|^2 r dr = -\frac{1}{Re} \int_0^1 \mu_b \left[k_0^2 \|\dot{v}\|^2 + \left\| D\dot{v} - \frac{\dot{v}}{r} \right\|^2 \right] r dr \quad (3.36)$$

Les modes propres associés à l'équation en \ddot{v} sont amorties au cours du temps. La résolution numérique des équations (3.33, 3.35) conduit à des spectres des valeurs propres de forme classique avec les trois branches A , P et S [Mack 1976], dont un exemple est représenté dans la figure 3.4 pour un fluide Newtonien et un fluide rhéofluidifiant à un nombre de Reynolds évalué avec la viscosité à la paroi, $Re_w = 3000$. Des calculs effectués pour une large gamme de Re_w montrent, comme dans le cas Newtonien, que σ_r se comporte asymptotiquement en $Re_w^{-\frac{1}{3}}$ pour les modes pariétaux (Branche A) et en $Re_w^{-\frac{1}{2}}$ pour les modes centraux (Branche P).

3.3.3 Perturbation homogène dans la direction axiale

$$(n \neq 0, k_0 = 0)$$

Dans le cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale, les modes propres ont une fréquence angulaire nulle ($\sigma_i = 0$) et sont amortis au cours du temps. En utilisant la conservation de la masse dans 3.19, nous arrivons à une formulation (\ddot{u}, \ddot{w}) .

$$\partial_t \ddot{u} = -\partial_r \ddot{p} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \left[\mathcal{L}\ddot{u} - \frac{2}{r^2} (r\dot{u}) - \frac{\ddot{u}}{r^2} \right] + 2D\mu_b D\ddot{u} \right) \quad (3.37)$$

$$\partial_t \ddot{w} = DW_b \ddot{u} + \frac{1}{Re} \left(\mu_b \mathcal{L}\ddot{w} + D\mu_b D\ddot{w} + \frac{1}{r} D [r (\mu_t - \mu_b) D\dot{w}] \right) \quad (3.38)$$

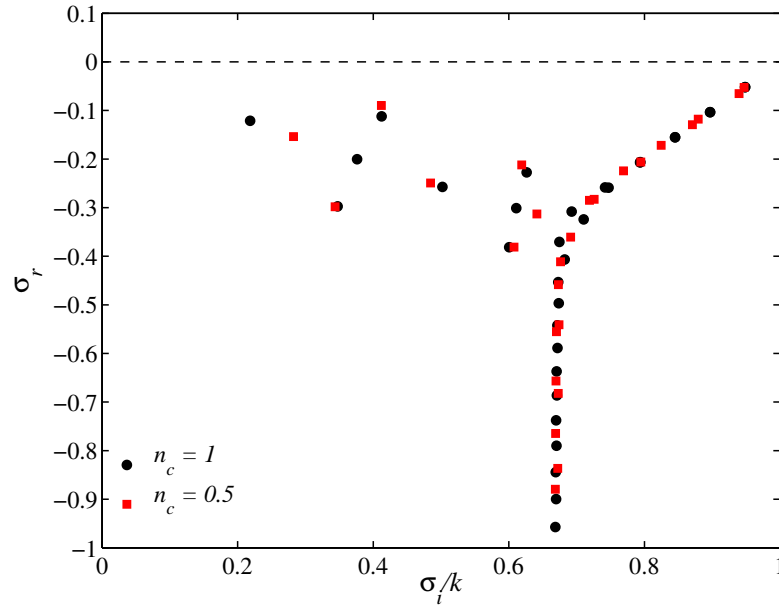


FIGURE 3.4: Spectre des valeurs propres dans le cas d'une perturbation axisymétrique ($n = 0$, $k_0 = 1$) à $Re_w = 3000$. (cercles) Cas d'un fluide Newtonien. (carrés) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 1$. Le nombre de modes radiaux utilisé est $M = 80$.

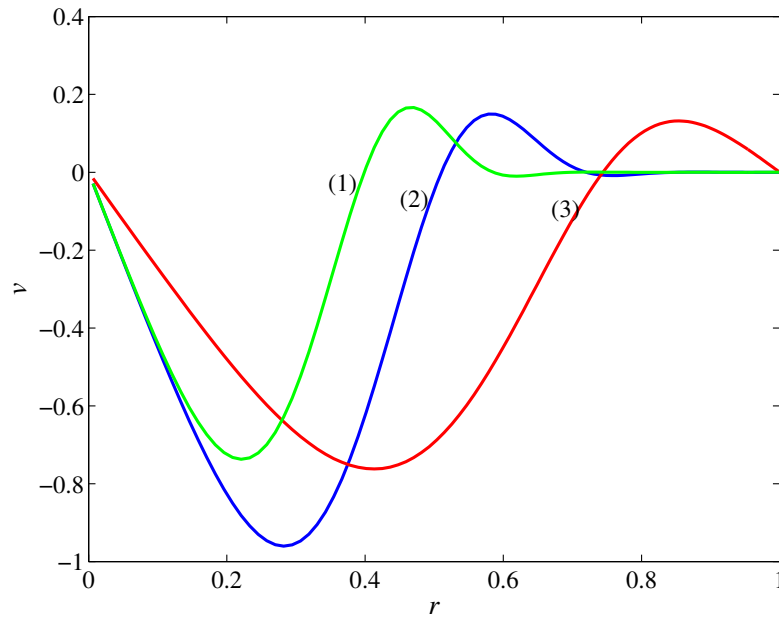


FIGURE 3.5: Forme de la perturbation la moins stable dans le cas d'une perturbation axisymétrique, avec $n = 0$, (1) $k_0 = 0.1$, (2) $k_0 = 1$ et (3) $k_0 = 3$ à $Re_w = 3000$. La seule composante non nulle est $w(r)$. Écoulement d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.5$.

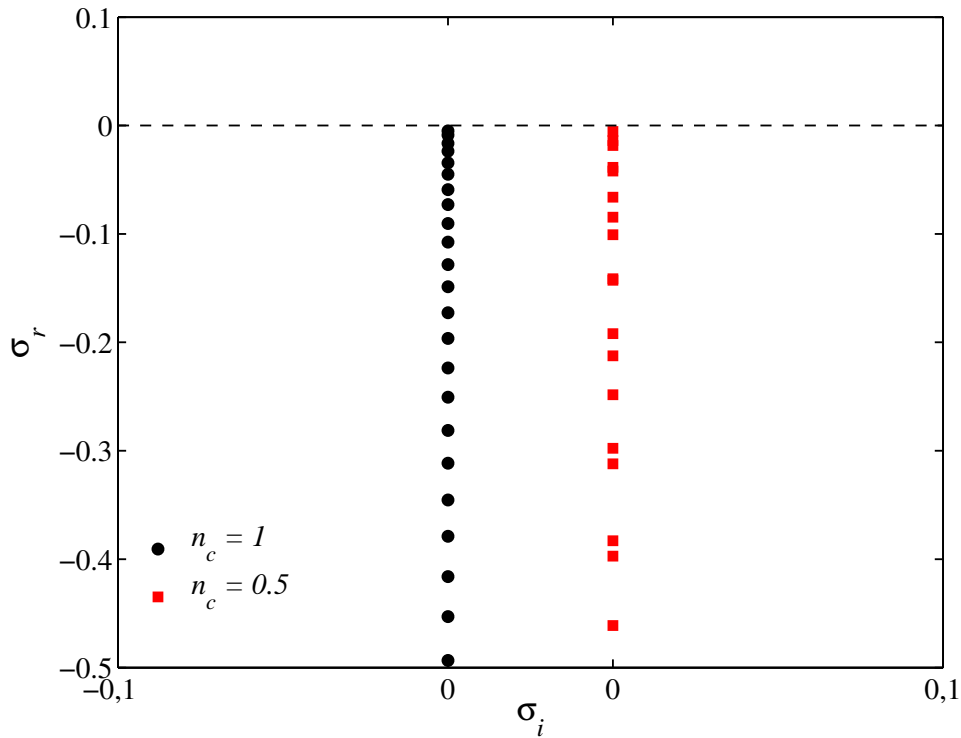


FIGURE 3.6: Spectre des valeurs propres dans le cas d'une perturbation unidimensionnelle ($n = 1, k_0 = 0$) à $Re_w = 3000$. (cercles) Cas d'un fluide Newtonien. (carrés) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30, n_c = 1$. Le nombre de modes radiaux utilisé est $M = 80$. Pour faciliter la lecture l'axe $\sigma_i = 0$ est représenté deux fois.

Le spectre des valeurs propres à $Re_w = 3000$ pour un fluide Newtonien et de Carreau avec $\lambda = 30$ et $n_c = 0.5$ est représenté dans la figure 3.6. Les mode propres ont une fréquence angulaire nulle ($\sigma_i = 0$) et sont amortis au cours du temps, jusqu'à $Re_w = 10^7$. La figure 3.7 montre la structure du mode le moins stable pour $n = 1$. Globalement, la perturbation consiste en une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Les résultats numériques montrent qu'en augmentant le nombre de Reynolds, les valeurs propres s'accroissent au voisinage de l'origine. La figure 3.8 montre qu'en utilisant un nombre de Reynolds basé sur la viscosité pariétale, la valeur propre la moins stable décroît en Re_w^{-1} comme dans le cas newtonien [Meseguer & Trefethen 2001a]. On peut noter que pour un Re_w donné, σ_r décroît lorsque n_c diminue. En d'autres termes, le caractère rhéofluidifiant augmente la stabilité.

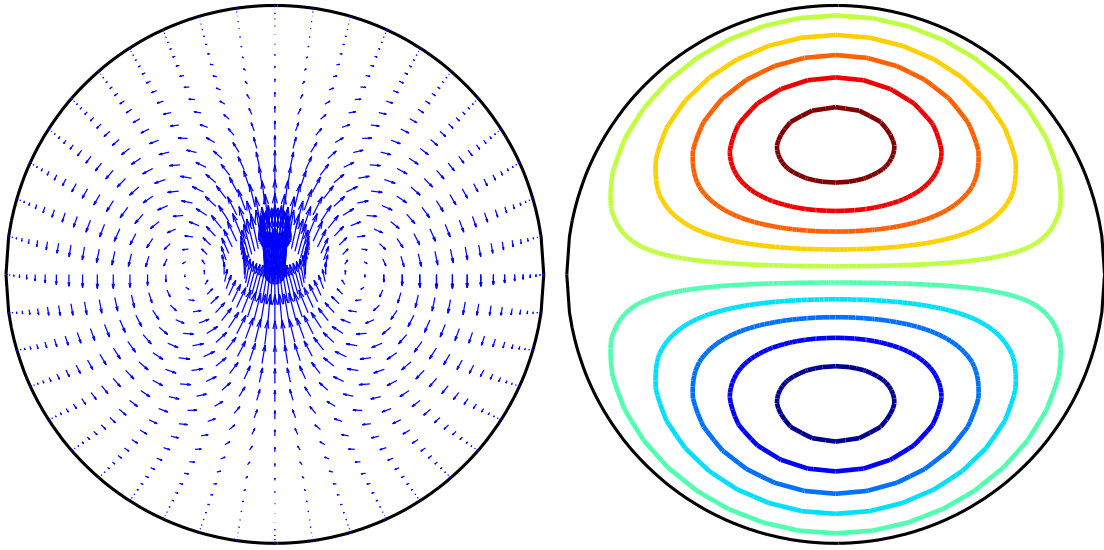


FIGURE 3.7: Structure de l'écoulement associée au mode le moins instable dans le cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale ($n = 1$, $k_0 = 0$) à $Re_w = 3000$. Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.5$. (gauche) Champ de vitesse $u e_r + v e_\theta$. (droite) Contour d'iso-valeurs de vitesse axiale à $z = 0$.

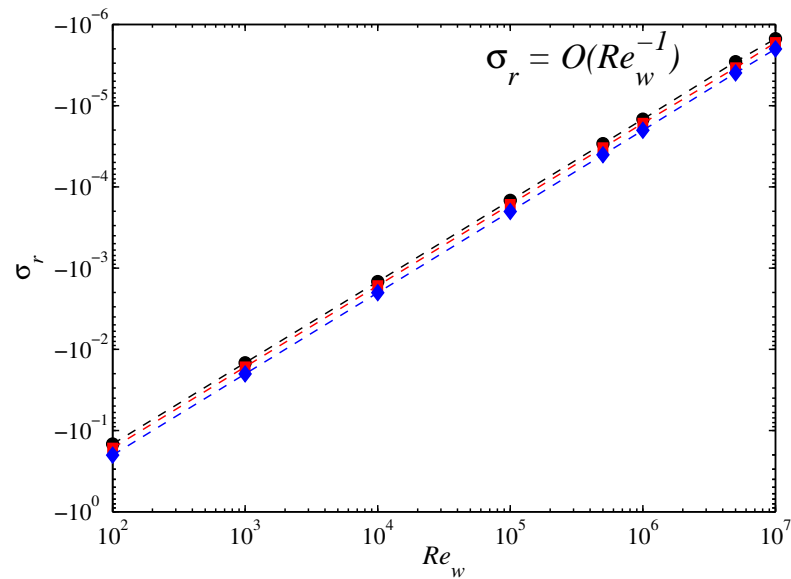


FIGURE 3.8: Partie réelle de la valeur propre la moins stable en fonction de Re_w dans le cas d'une perturbation homogène dans la direction axiale ($n = 1$, $k_0 = 0$). (cercles) Cas Newtonien (carrés) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 1$ (diamants) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.3$.

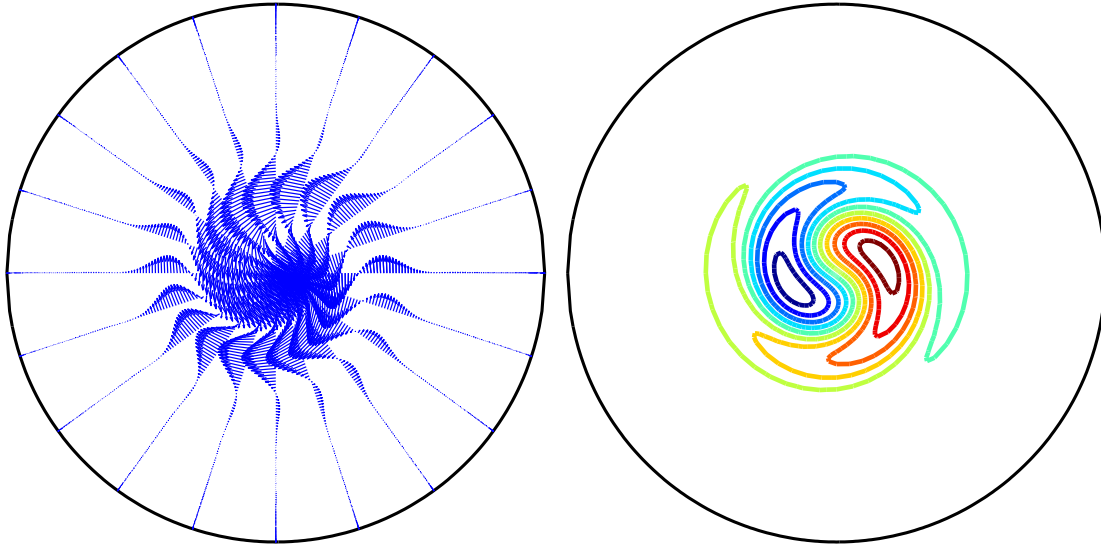


FIGURE 3.9: Structure de l'écoulement associée au mode central le moins stable, $\sigma = -0.04165 - 0.91298i$, avec $n = 1$ et $k_0 = 1$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.5$ à $Re_w = 3000$. (Gauche) Champ de vitesse $ue_r + ve_\theta$ (Droite) Contours d'iso-valeurs de vitesse axiale à $z = 0$.

3.3.4 Perturbation oblique ($n \neq 0$, $k_0 \neq 0$)

Lorsque $n \neq 0$ et $k_0 \neq 0$, la perturbation est tridimensionnelle. La figure 3.10 montre des spectres de valeurs propres obtenus pour $n = 1$ et trois valeurs différentes du nombre d'onde axiale $k_0 = 0.1, 1$ et 3 . Globalement les spectres sont très similaires à ceux qu'on obtiendrait pour un fluide Newtonien. On observe deux branches clairement définies. Ces branches ont des vitesses de phase différentes. Les modes de paroi avec une vitesse de phase faible se développent près de la paroi, et les modes centraux, ont une vitesse de phase élevée. Ces branches ont été étudiées pour le cas Newtonien. Lorsque la rhéofluidification entre en jeu il n'y a pas des changements importants et le comportement asymptotique du taux d'amplification de la perturbation avec Re_w reste le même que dans le cas Newtonien, c'est à dire que σ_r se comporte en $O(Re_w^{-1/3})$ pour les modes de paroi et en $O(Re_w^{-1/2})$ pour les modes centraux. Les figures 3.9, 3.11, 3.12 montrent la structure de la perturbation associée à un mode de la branche A , P et S respectivement.

En résumé, pour l'ensemble des paramètres rhéologiques considérés dans cette étude $0.3 \leq n \leq 1$ et $0 \leq \lambda \leq 30$, et en faisant varier le nombre de Reynolds jusqu'à 10^7 , nous n'avons trouvé aucune instabilité. On peut donc conjecturer que l'écoulement d'un fluide

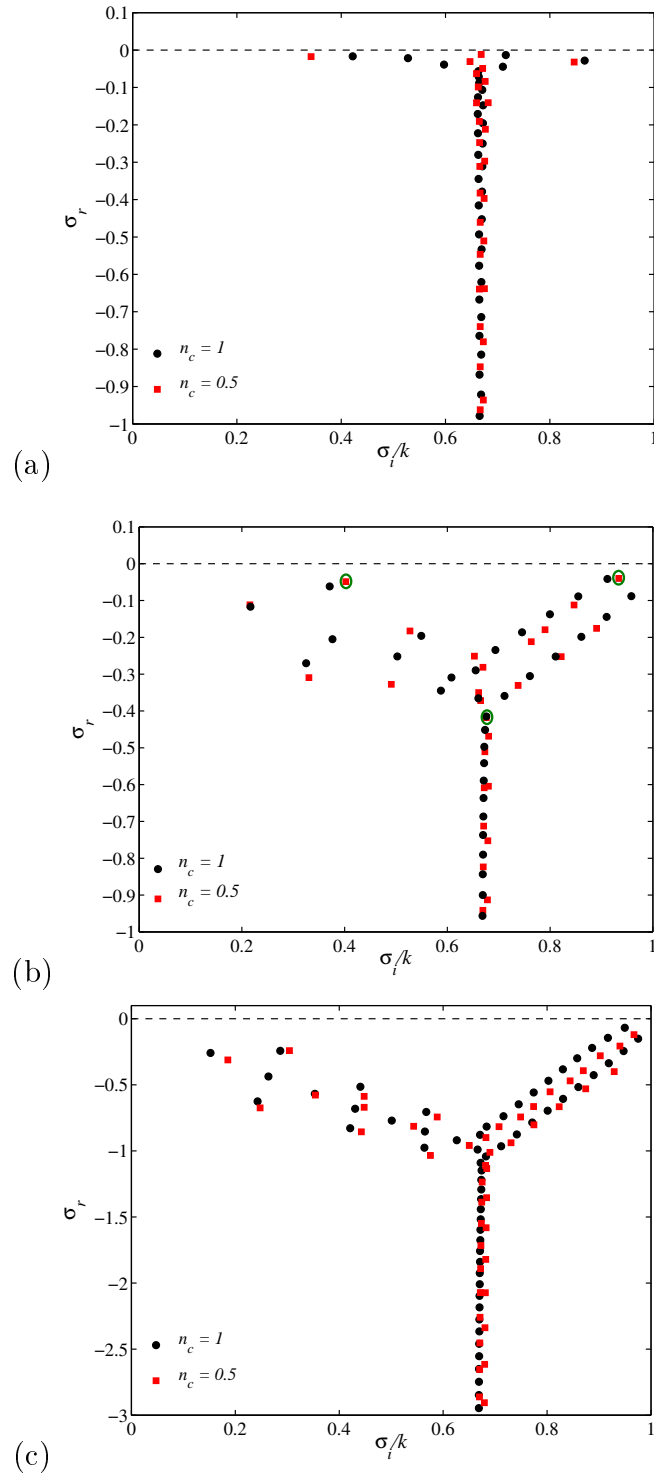


FIGURE 3.10: Spectre des valeurs propres dans le cas d'une perturbation oblique pour $n = 1$ et (a) $k_0 = 0.1$, (b) $k_0 = 1$ et (c) $k_0 = 3$ à $Re_w = 3000$. (cercles) Cas Newtonien. (carrés) Cas d'un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$ et $n_c = 0.5$. Pour le cas (b) les modes propres marqués en vert sont représentés par les figure 3.9, 3.11 et 3.12. Le calcul a été fait avec $M = 80$ modes radiaux.

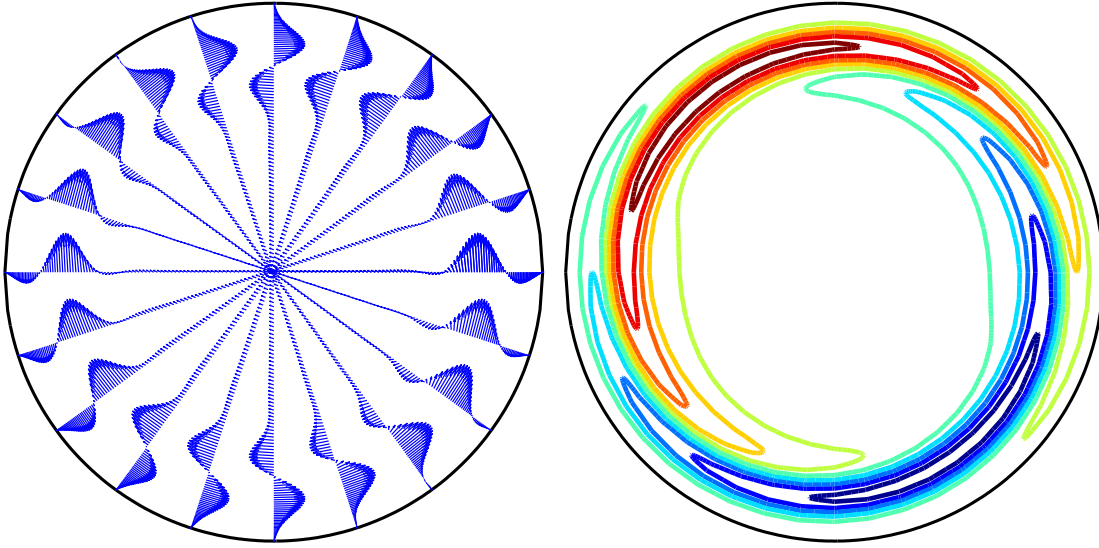


FIGURE 3.11: Structure de l'écoulement associée au mode de paroi le moins stable, $\sigma = -0.045297 - i0.39789$, avec $n = 1$ et $k_0 = 1$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.5$ à $Re_w = 3000$. (Gauche) Champ de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ (Droite) Contours d'iso-valeurs de vitesse axiale à $z = 0$.

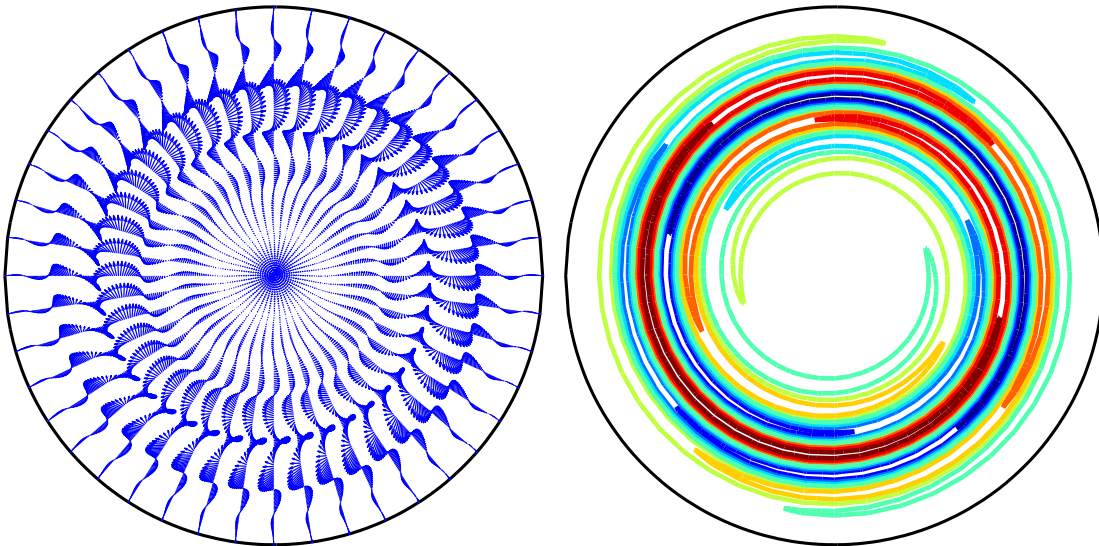


FIGURE 3.12: Structure de l'écoulement associée au mode de la branche central le moins stable, $\sigma = -0.04171 - i0.67572$, avec $n = 1$, $k_0 = 1$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$, $n_c = 0.5$ à $Re_w = 3000$. (Gauche) Champ de vitesse $u\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\theta$ (Droite) Contours d'iso-valeurs de vitesse axiale à $z = 0$.

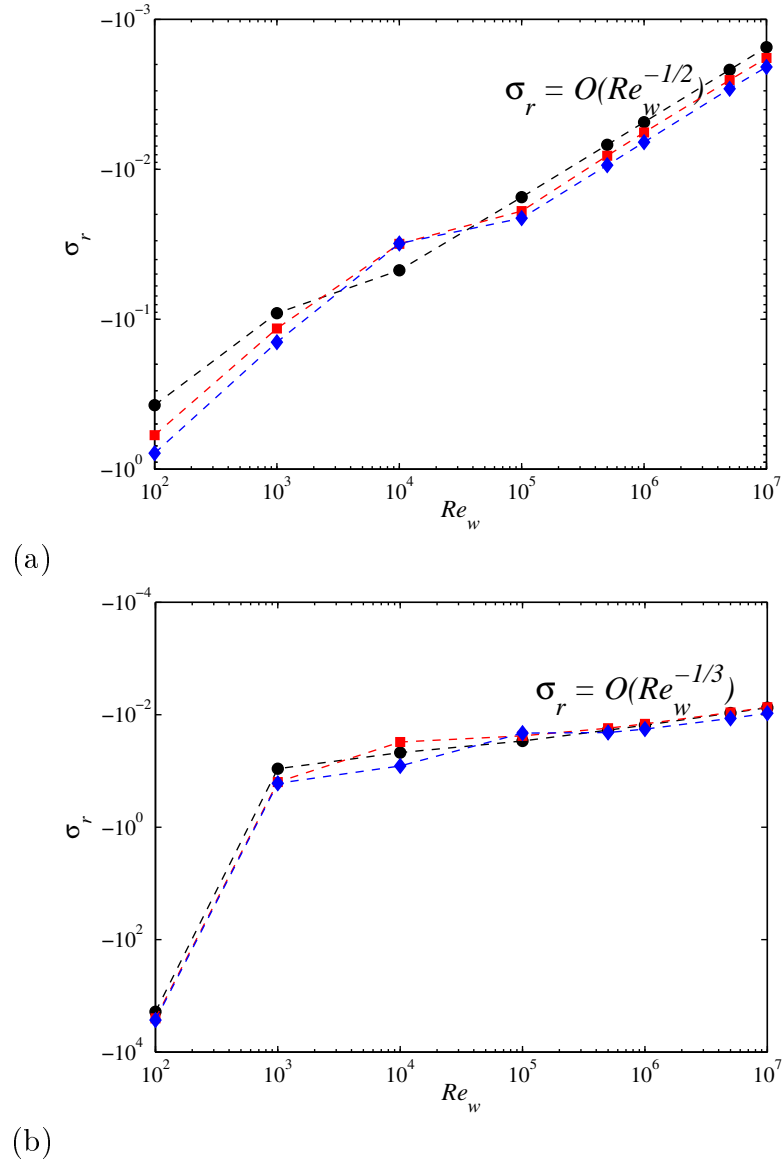


FIGURE 3.13: Partie réelle de la valeur propre du mode le moins stable (a) mode central (b) mode pariétale en fonction de Re_w pour $n = 1$ $k_0 = 1$ pour différents n_c avec $\lambda = 30$, $n_c = 1$ (cercles), $n_c = 0.5$ (carres) et $n_c = 0.3$ (diamants).

rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique est linéairement stable.

3.4 Croissance transitoire

Dans la section précédente, nous avons montré que l'écoulement d'un fluide non Newtonien purement visqueux est linéairement stable. Un aspect important de l'opérateur linéaire de Navier Stokes est sa non normalité, c'est à dire que ses vecteurs propres ne sont pas orthogonaux par rapport au produit scalaire $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}^* d\Omega$, défini dans L^2 . Cette non orthogonalité des vecteurs propres conduit à une interférence positive entre les ondes et génère une croissance transitoire d'énergie cinétique [Trefethen *et al.* 1993]. Celle-ci peut devenir suffisamment importante pour amorcer les termes non linéaires et donc la transition à la turbulence. Le calcul de la croissance transitoire suit la méthode décrite par [Schmid & Henningson 2001] et [Meseguer & Trefethen 2001a].

Si la matrice \mathbf{A} dans l'équation 2.45 n'est pas singulière alors on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}, \quad (3.39)$$

où $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Soit \mathbf{q} une perturbation admissible du système. Elle peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des $(2M + 2)$ vecteurs propres de la matrice \mathbf{C} .

$$\mathbf{q} = \sum_{j=1}^{2M+2} k_j(t) \hat{\mathbf{q}}_j, \quad (3.40)$$

où

$$\hat{\mathbf{q}}_j = \left[a_0^{(1)j}, \dots, a_M^{(1)j}, a_0^{(2)j}, \dots, a_M^{(2)j} \right]^T \quad (3.41)$$

On pose

$$\mathbf{Q} = [\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{2M+2}] \quad (3.42)$$

et

$$\boldsymbol{\kappa} = [k_1, k_2, \dots, k_{2M+2}], \quad (3.43)$$

soit

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\kappa}. \quad (3.44)$$

En revenant à l'équation (3.39), on obtient

$$\frac{d\boldsymbol{\kappa}}{dt} = \Lambda \boldsymbol{\kappa} \quad (3.45)$$

où

$$\Lambda = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \quad (3.46)$$

La solution de (3.45) est :

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \boldsymbol{\kappa}_0 e^{\Lambda t} = \mathbb{P} \boldsymbol{\kappa}_0. \quad (3.47)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ représente les coordonnées de la perturbation dans la base des fonctions propres et Λ représente la matrice diagonale des valeurs propres. \mathbb{P} est le propagateur temporel de la perturbation initiale. Soit ε l'énergie cinétique de la perturbation définie par :

$$\varepsilon = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \int_0^1 \mathbf{u}^* \mathbf{u} r dr \quad (3.48)$$

L'énergie peut être exprimée matriciellement [Schmid & Henningson 2001] :

$$\varepsilon = [\boldsymbol{\kappa}^H] [\nu^H \mathcal{M} \nu] [\boldsymbol{\kappa}], \quad (3.49)$$

ν est une matrice dont les vecteurs colonne sont les $\hat{\mathbf{q}}_i$, et :

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{bmatrix} (\tilde{\Phi}_i^{(1)}, \tilde{\Phi}_j^{(1)}) & (\tilde{\Phi}_i^{(2)}, \tilde{\Phi}_j^{(1)}) \\ (\tilde{\Phi}_i^{(1)}, \tilde{\Phi}_j^{(2)}) & (\tilde{\Phi}_i^{(2)}, \tilde{\Phi}_j^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

où $\mathcal{M} = \nu^H \mathcal{M} \nu$ est une matrice définie positive. Elle admet donc une décomposition de la forme :

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}^H \mathbf{F}. \quad (3.51)$$

L'énergie cinétique de la perturbation peut être calculée en évaluant la norme 2 :

$$\varepsilon(t) = \boldsymbol{\kappa}^H \mathbf{F}^H \mathbf{F} \boldsymbol{\kappa} = \|\mathbf{F} \boldsymbol{\kappa}\|^2 \quad (3.52)$$

Le facteur d'amplification $g(t)$ est :

$$g(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(0)} = \frac{\|\mathbf{F} \boldsymbol{\kappa}(t)\|^2}{\|\mathbf{F} \boldsymbol{\kappa}(0)\|^2} = \frac{\|\mathbf{F} e^{\Lambda t} \boldsymbol{\kappa}(0)\|^2}{\|\mathbf{F} \boldsymbol{\kappa}(0)\|^2} \quad (3.53)$$

3.5 Perturbation Optimale

Une question que nous pouvons nous poser celle de la structure de la perturbation qui permet une amplification maximale d'énergie cinétique. Pour n , k_0 et des paramètres

rhéofluidifiants fixés, il existe une combinaison linéaire de fonctions propres qui fournit le maximum d'amplification $G(t)$ à un instant t fixé :

$$G(n, k_0, t) = \frac{\sup}{\|\mathbf{q}(0)\|_\varepsilon^2} g(t), \quad (3.54)$$

$G(n, k_0, t)$ est optimisé pour l'ensemble des conditions initiales possibles. Pour calculer la perturbation optimale, nous utilisons la méthode de la décomposition en valeurs singulières (SVD). Pour comprendre comment elle marche, il faut penser notre problème linéaire 3.39 comme une solution exponentielle. Pour simplifier, imaginons qu'il faille maximiser la norme 2 et pas la norme énergie. D'après l'équation (3.39), la solution au temps t , exprimée dans la base canonique, pour une condition initiale donnée est :

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = e^{Lt} \boldsymbol{\kappa}(0) \quad (3.55)$$

Nous supposons que la condition initiale est normalisée, $\|\boldsymbol{\kappa}(0)\| = 1$. Nous pouvons normaliser $\boldsymbol{\kappa}(t)$, avec $\bar{\boldsymbol{\kappa}}(t) = \frac{\boldsymbol{\kappa}(t)}{\|e^{Lt}\|}$. L'équation dévient :

$$\underbrace{e^{Lt}}_{\text{propagateur}} \cdot \underbrace{\bar{\boldsymbol{\kappa}}(0)}_{\text{entrée}} = \underbrace{\|e^{Lt}\|}_{\text{amplification}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{\kappa}(t)}_{\text{sortie}} \quad (3.56)$$

La décomposition en valeurs singulières d'une matrice A est donnée par :

$$A \cdot V = U \cdot \Sigma \quad (3.57)$$

Où

- Les colonnes de la matrice V sont un ensemble de vecteurs de base orthonormés pour A , dits \acute{n} d'entrée \acute{z} .
- Les colonnes de la matrice U sont un ensemble de vecteurs de base orthonormés pour A , dits \acute{n} de sortie \acute{z}
- La diagonale de Σ contient les valeurs singulières de A , ordonnées en ordre descendant. La plus grande valeur singulier est $\sigma_1 = \|A\|$.

La figure 3.14 montre qu'une décomposition en valeurs singuliers $SVD(e^{Lt^*})$ donne la plus grande amplification σ_1 , avec v_1 la condition optimale \acute{n} d'entrée \acute{z} et u_1 la perturbation optimale \acute{n} de sortie \acute{z} au temps $t = t^*$.

Ainsi, le plus grand facteur d'amplification d'énergie $g(t)$ à un instant t donné par l'équation (3.54) peut être calculé par une SVD :

$$G(t) = \frac{\sup_{\|\mathbf{q}(0)\|_\varepsilon^2 \neq 0} g(t)}{\|\mathbf{q}(0)\|_\varepsilon^2 \neq 0} = \frac{\sup_{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_\varepsilon^2 \neq 0} g(t)}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|_\varepsilon^2 \neq 0} = \frac{\|\mathbf{F}e^{\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|^2}{\|\mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}(0)\|^2} = \|\mathbf{F}e^{\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}\|^2 = \sigma_1^2 \quad (3.58)$$

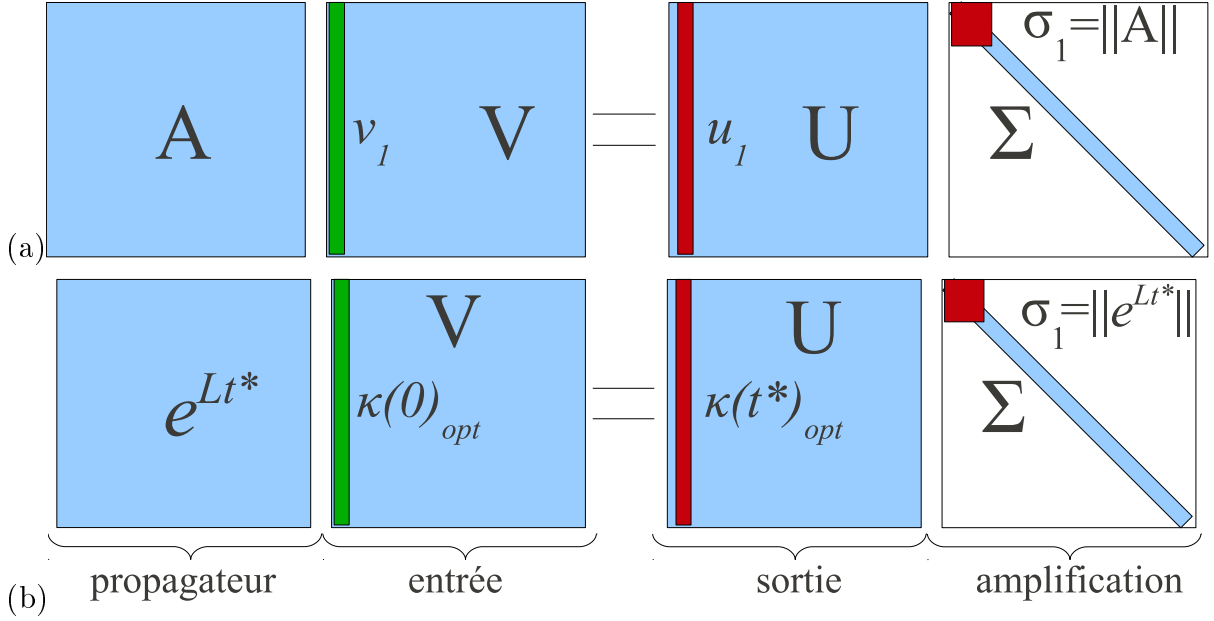


FIGURE 3.14: Chemin de la SVD avec son interprétation pour calculer la perturbation optimale.

Où σ_1 est la première valeur singulière de la matrice $\mathbf{F}e^{\Lambda t}\mathbf{F}^{-1}$ et la perturbation associée est donnée par les vecteur singulier correspondant. Nous pouvons définir l'amplification maximale comme :

$$G_{max}(t, n, k_0) = \sup_{t > 0} G(t), \quad (3.59)$$

Finalement le maximum de G_{max} pour toutes les valeurs de $(n, k_0) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{R}$ est donné par :

$$\mathcal{G}_{opt} = \sup_{t > 0} G_{max}(t, n, k_0), \quad (3.60)$$

Pour toute la gamme de paramètres rhéologiques et dynamiques considérés dans ce travail ($0 < \lambda < 30$ et $0.3 < n_c < 1$), la perturbation optimale \mathcal{G}_{opt} est atteinte pour une paire de rouleaux contra rotatifs indépendants de la dimension axiale z ($k_0 = 0$), avec un nombre d'onde azimutal $n = 1$ comme dans le cas newtonien. Les caractéristiques principales de la perturbation optimale pour $0 < \lambda < 30$ et $0.3 < n_c < 1$ sont :

- La perturbation optimale est 2D, c'est-à-dire elle ne varie pas avec la coordonnée axiale. Ceci veut dire qu'elle est donnée pour un nombre d'onde axial nul.
- L'énergie de la perturbation se concentre à environ 67% dans la composante azimutale

et 32% dans la composante radiale. La composante axiale de la perturbation optimale est très faible par rapport aux composantes transversales.

- Le temps optimal diminue avec la rhéofluidification ainsi que la plus grande amplification G_{max}

Cependant, si on impose un nombre d'onde axial non nul, l'amplification maximale de l'énergie cinétique de la perturbation est atteinte pour des nombres d'onde azimutales plus élevés comme le montre la figure 3.15(a) pour $n_c = 0.5, \lambda = 30$ et $Re_w = 4000$. L'amplification de l'énergie cinétique pour $Re_w = 4000, n = 1, l = 0, \lambda = 30$ et différentes valeurs d'index de rhéofluidification sont montrés dans la figure 3.15(b). Le caractère rhéofluidifiant diminue fortement l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation. Il diminue aussi le temps où la plus grande amplification est atteinte, dit temps optimal. Ces résultats peuvent être anticipés de ceux obtenus dans [Nouar *et al.* 2007b]. Les résultats numériques montrent par exemple, pour $\lambda = 30$, une variation de type $\mathcal{G}_{n_c \neq 1}^{opt} \propto n_c^{1.66} \times \mathcal{G}_{n_c=1}^{opt}$ et $t_{n_c \neq 1}^{opt} \propto n_c^{0.67} \times t_{n_c=1}^{opt}$.

Pour n_c et λ donnés, la dépendance entre \mathcal{G}^{opt} et t^{opt} avec Re_w a été étudié. Il existe une augmentation de \mathcal{G}^{opt} en Re_w^2 . De manière similaire $t^{opt} \propto Re_w$. Encore une fois, l'utilisation de Re_w comme Re caractéristique du problème permet de retrouver le comportement obtenu dans le cas Newtonien. La structure de la perturbation initiale qui donne l'amplification maximale d'énergie cinétique est représentée dans la figure 3.16. Elle est constituée de deux vortex contra-rotatifs le long de la direction axiale. La composante axiale de la perturbation a une faible énergie. Par exemple, pour $n_c = 0.5$ et $\lambda = 30$, 67.87% de l'énergie est dans la composant azimutale et 32.06% dans la composante radiale de vitesse. Ces vortex permettent un transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la composante axiale de vitesse via le mécanisme de *lift up* en créant deux jets de haut et basse vitesse. La forme de ces jets est montrée dans la figure. 3.16(b). Le maximum de vitesse axiale se rapproche de la paroi lorsque les effets rhéofluidifiants augmentent.

3.6 Conclusions

Les principales conclusions obtenues dans ce chapitre sont les suivantes :

- L'écoulement de base d'un fluide rhéofluidifiant est linéairement stable pour des Re_w jusqu'à 10^7

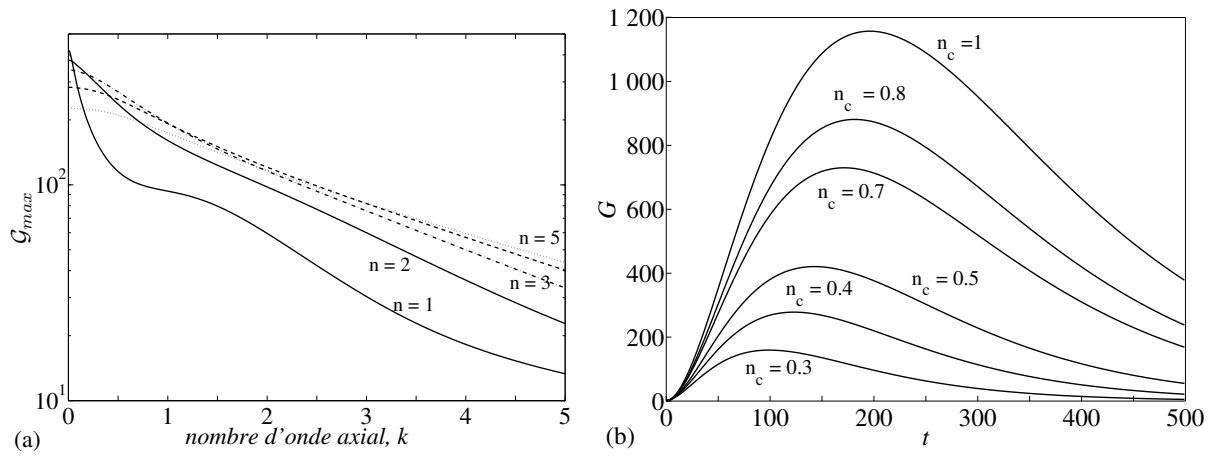


FIGURE 3.15: **(a)** Amplification maximale de l'énergie cinétique de la perturbation comme fonction du nombre d'onde axial k_0 pour différents nombres d'ondes azimutales n à $Re_w = 4000$, $\lambda = 30$ and $n_c = 0.5$. **(b)** Amplification de l'énergie cinétique de la perturbation optimale pour $Re_w = 4000$, $\lambda = 30$ et différents valeurs de l'index de rhéofluidification, n_c .

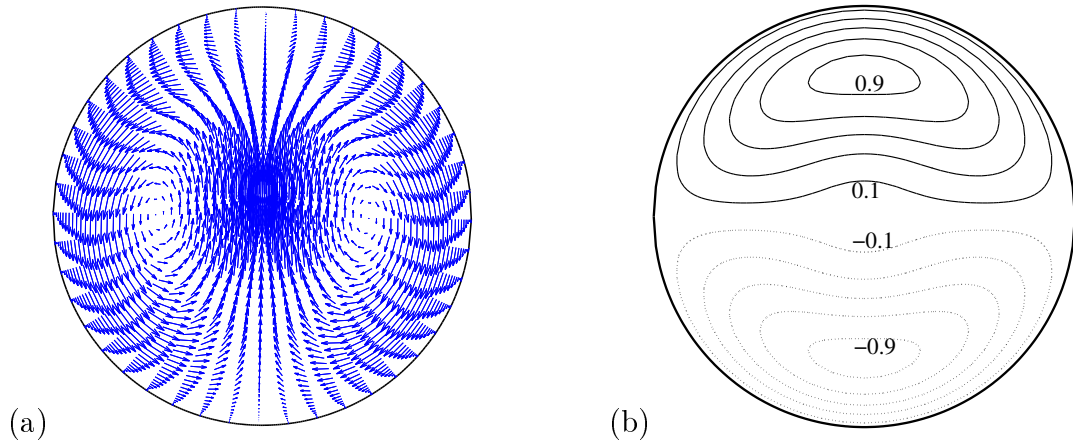


FIGURE 3.16: **(a)** Perturbation optimale pour $t = 0$ dans une section (r, θ) , pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ et $Re_w = 4000$. Les flèches représentent les vecteurs $ue_r + ve_\theta$. **(b)** Perturbation optimale à $t_{opt} = 150$: Iso-valeurs de la vitesse axiale w . Les lignes continues représentent des valeurs positifs de w : 0.1 près de la paroi avec is de 0.2 jusqu'au 0.9. Les lignes discontinues correspondent aux valeurs négatifs de w : -0.1 près de la paroi et avec un pas de -0.2 jusqu'au -0.9 .

- Les spectres des valeurs propres et les vecteurs propres sont très similaires au cas Newtonien pour un même Reynolds de paroi Re_w .
- Le comportement asymptotique du taux d'amplification de la perturbation avec Re_w reste le même que dans le cas Newtonien. Pour $k_0 = 0$, la valeur propre la moins stable varie avec Re_w^{-1} . Pour $k \neq 0$, la partie réelle de la valeur propre la moins stable varie en $O(Re_w^{-1/3})$ pour les modes de paroi et en $O(Re_w^{-1/2})$ pour les modes centraux.
- Pour tout l'intervalle de paramètres rhéologiques et dynamiques considéré dans ce travail ($0 \leq \lambda \leq 30$ et $0.3 \leq n_c \leq 1$), la perturbation optimale G_{opt} est atteinte pour une paire de rouleaux contra-rotatifs indépendants de la dimension axiale z ($k_0 = 0$), avec un nombre d'onde azimutal $n = 1$ comme dans le cas Newtonien.

Pour une étude plus approfondie de la stabilité des fluides non Newtoniens en conduite cylindrique, il est essentiel d'inclure les termes non linéaires d'inertie et visqueux. Ceci est analysé dans le chapitre suivant.

Étude non linéaire bidimensionnelle de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite

Sommaire

4.1	Équations gouvernant le problème	58
4.2	Conditions initiales	59
4.3	Validation et convergence	61
4.3.1	Validation	61
4.3.2	Convergence	64
4.4	Résultats et discussion	65
4.4.1	Évolution temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation	65
4.4.2	Structure de l'écoulement et profils de viscosité	68
4.4.3	Équation de l'énergie	72
4.4.4	Échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation	73
4.4.5	Termes de dissipation visqueuse	74
4.4.6	Transfert modal d'énergie	77
4.5	Conclusion	82

Dans l'introduction générale, nous avons indiqué que les mesures expérimentales mettaient en évidence l'existence de stries avec un nombre d'onde azimutal $n = 1$. Ces stries apparaissent à partir de 20 diamètres (\hat{D}) de la section d'entrée et se développent sur toute la longueur de la conduite. Des mesures récentes effectuées pendant ce travail montrent que ces structures persistent sur une longueur d'au moins $260\hat{D}$. Comme il a été encore indiqué, ces stries suggèrent l'existence d'une structure cohérente non linéaire formée de deux

rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Vu la longueur caractéristique de ces structures, il nous a semblé pertinent d'étudier l'évolution non linéaire d'une perturbation bidimensionnelle formée de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs que l'on superpose à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Carreau. C'est l'objectif général de ce chapitre. De manière plus précise l'objectif de ce chapitre est d'une part d'étudier la modification du champ de viscosité induite par une perturbation d'amplitude finie et ses conséquences sur la dissipation visqueuse et d'autre part d'explorer les échanges d'énergie entre modes induits par les non linéarités existantes dans les termes visqueux. Ce chapitre est organisé comme suit : Les équations aux perturbations sont rappelées dans le paragraphe 4.1. Dans le paragraphe 4.2, nous rappelons très brièvement la méthode numérique, en insistant sur les aspects validation et convergence temporelle et spatiale. Les résultats numériques sont discutés dans le paragraphe 4.3. Le paragraphe qui suit est une tentative d'interprétation de l'émergence du mode azimutal $n = 1$, observée expérimentalement. Finalement, un rappel de l'essentiel des résultats est donné en conclusion.

4.1 Équations gouvernant le problème

Les équations gouvernant le problème, développées dans le paragraphe (2.5), sont rappelées ici :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & -(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p \\ & + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Le système d'équations est fermé avec la condition d'adhérence à la paroi. Les composantes du déviateur du tenseur des contraintes sont données par :

$$\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \cdot \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}). \quad (4.3)$$

Étant donné qu'on se restreint au cas où la structure de l'écoulement ne varie pas suivant z , l'équation (4.2) sous forme développée se réduit à :

$$\partial_t u + u \partial_r u + \frac{v}{r} \partial_\theta u - \frac{v^2}{r} = -\partial_r p + \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \quad (4.4)$$

$$\partial_t v + u \partial_r v + \frac{v}{r} \partial_\theta v + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta\theta} \quad (4.5)$$

$$\partial_t w + u \partial_r W_b + u \partial_r w + \frac{v}{r} \partial_\theta w = \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}) - \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}(W_b)) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta z} \quad (4.6)$$

$$\partial_r u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v = 0. \quad (4.7)$$

L'énergie cinétique de la perturbation \mathbf{u} à un instant t est définie par :

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} r dr d\theta \quad (4.8)$$

De manière similaire, on définit l'énergie cinétique de l'écoulement de base par :

$$E(\mathbf{U}_b) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W_b^2(r) r dr d\theta \quad (4.9)$$

Dans le cas de l'écoulement de Hagen-Poiseuille (Newtonien), on peut calculer analytiquement l'énergie :

$$E(\mathbf{U}_b) = E_{HP} = \frac{\pi}{6}. \quad (4.10)$$

Le rapport entre l'énergie cinétique de la perturbation et celle de l'écoulement de base est noté ε :

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{E(\mathbf{u})}{E(\mathbf{U}_b)} \quad (4.11)$$

A l'instant initial, ce rapport sera noté $\varepsilon_0 = \varepsilon(t = 0)$.

4.2 Conditions initiales

A l'instant $t = 0$, une perturbation d'amplitude finie sous forme de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs est superposée à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide de Carreau. Cette condition initiale est obtenue en imposant aux coefficients spectraux de l'équation 2.34 la relation suivante :

$$a_{mnl}^{(k)} = \begin{cases} A_0 & \text{si } n = 1, l = 0, m = 0, (k) = (1), \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.12)$$

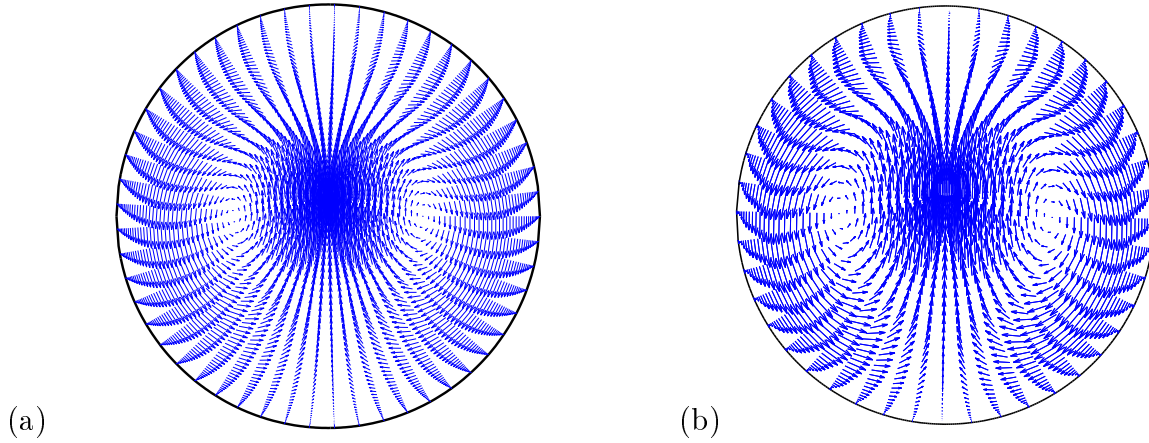


FIGURE 4.1: Vecteurs $ue_r + ve_\theta$ dans la section (r, θ) . (a) Perturbation initiale constituée d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. (b) Perturbation optimale pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$.

Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} u_0 = 2A_0(1 - r^2)^2 \sin\theta \\ v_0 = 2A_0 \frac{d}{dr} (r(1 - r^2)^2) \cos\theta \\ w_0 = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

La constante réelle A_0 est calculée en imposant l'énergie cinétique initiale ε_0 de la perturbation.

$$A_0 = \sqrt{\frac{5}{16} \varepsilon_0} \quad (4.14)$$

La figure 4.1(a) montre les vecteurs vitesse $ue_r + ve_\theta$ associés à la perturbation initiale dans une section (r, θ) . Cette structure est très proche de la perturbation optimale calculée dans le chapitre 3. Elle est représentée dans la figure 4.1(b). L'expression (4.12) conduit d'ailleurs au même taux d'amplification de l'énergie que la perturbation optimale. Il convient aussi de noter que pour la perturbation optimale, la composante axiale de la vitesse est non nulle mais très faible. L'énergie cinétique associée ne représente que 2% de l'énergie de la perturbation.

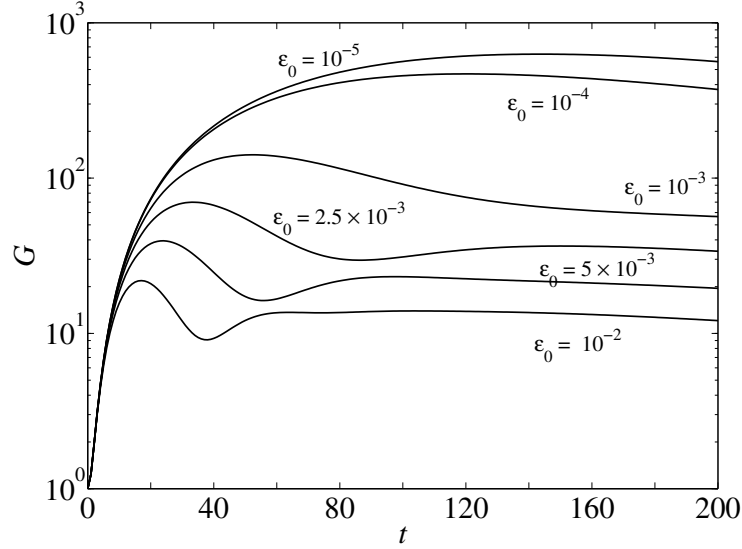


FIGURE 4.2: Facteur d'amplification de l'énergie $G(t)$ pour une perturbation sous la forme d'une paire de rouleaux pour un fluide Newtonien à $Re = 3000$, ($n = 1, k_0 = 0$). Les courbes sont paramétrées en fonction de l'énergie initiale de la perturbation ε_0 . Ces résultats ont été obtenus en utilisant $M = 6$ modes radiaux, $N = 9$ modes azimutaux et $\Delta t = 0.01$.

4.3 Validation et convergence

4.3.1 Validation

Afin de valider notre code de calcul, nous avons reproduit les résultats obtenus avec un fluide Newtonien par [Zikanov 1996]. Ceux-ci montrent l'amplification de l'énergie cinétique d'une perturbation bidimensionnelle formée d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs (nombre d'onde azimutal $n = 1$). La figure 4.2 donne l'évolution temporelle de $G(t) = \varepsilon(t)/\varepsilon_0$ pour différentes valeurs de l'énergie initiale de la perturbation ε_0 . Les résultats sont en bon accord avec [Zikanov 1996] et [Meseguer & Trefethen 2001b]. Nous avons aussi reproduit les résultats pour un fluide Newtonien publiés dans [Meseguer & Mellibovsky 2007]. La Figure 4.3 montre l'évolution d'énergie cinétique pour la perturbation et les profils de vitesse axiale $W_b + w$ à différents instants $t = 10, 20, 30, 35, 40, 50, 70$ et 150 . Les profils de vitesse axiale montrent clairement la modulation de l'écoulement grâce aux termes non linéaires d'inertie. La figure 4.4 reproduit ces résultats avec notre code de calcul.

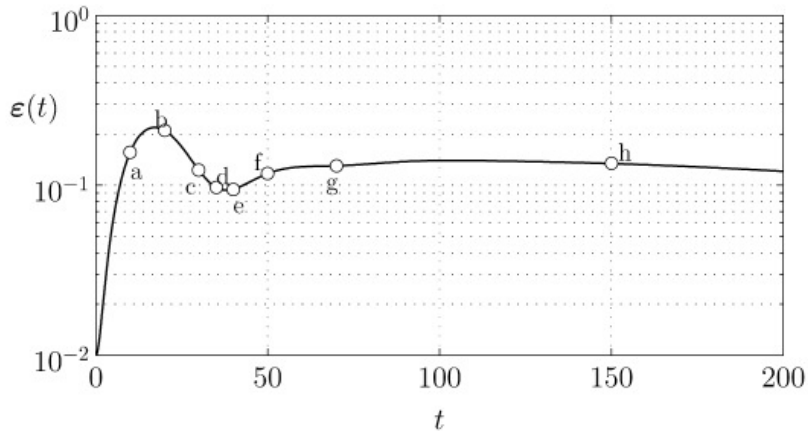


Fig. 6. Typical evolution of the energy of a two-dimensional streamwise perturbation.

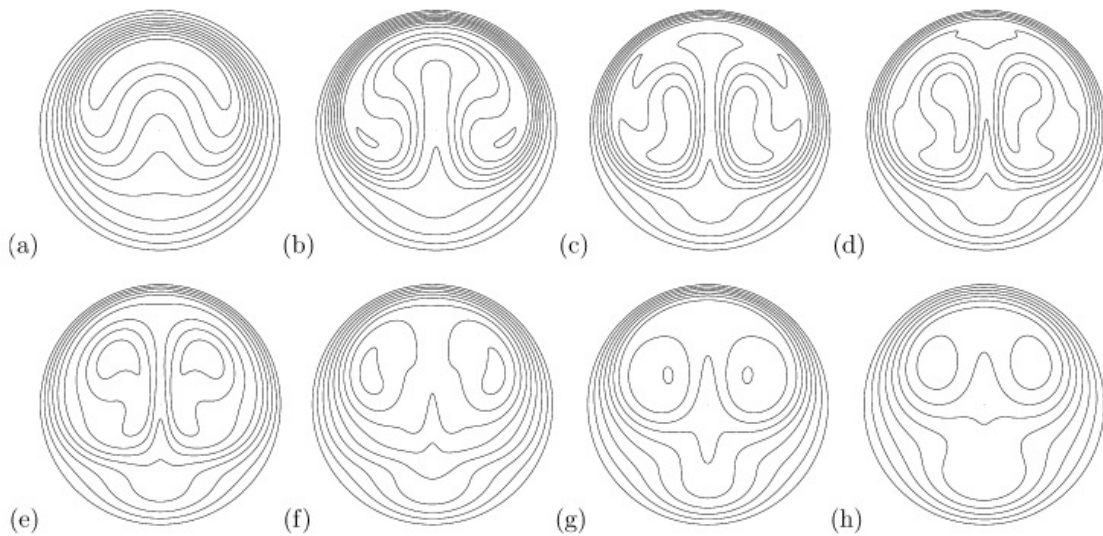


Fig. 7. Modulated axial speed $(u_s + v_b)_z$ contours corresponding to the time integration plotted in Fig. 6.

FIGURE 4.3: Figures extraites de [Meseguer & Mellibovsky 2007]. (haut) : Évolution de l'énergie $\varepsilon(t)$ pour une perturbation sous la forme d'une paire de rouleaux. Cas d'un fluide Newtonien à $Re = 3000$ et $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. (bas) : Contours d'iso-valeurs de la vitesse axiale aux instants indiqués en haut.

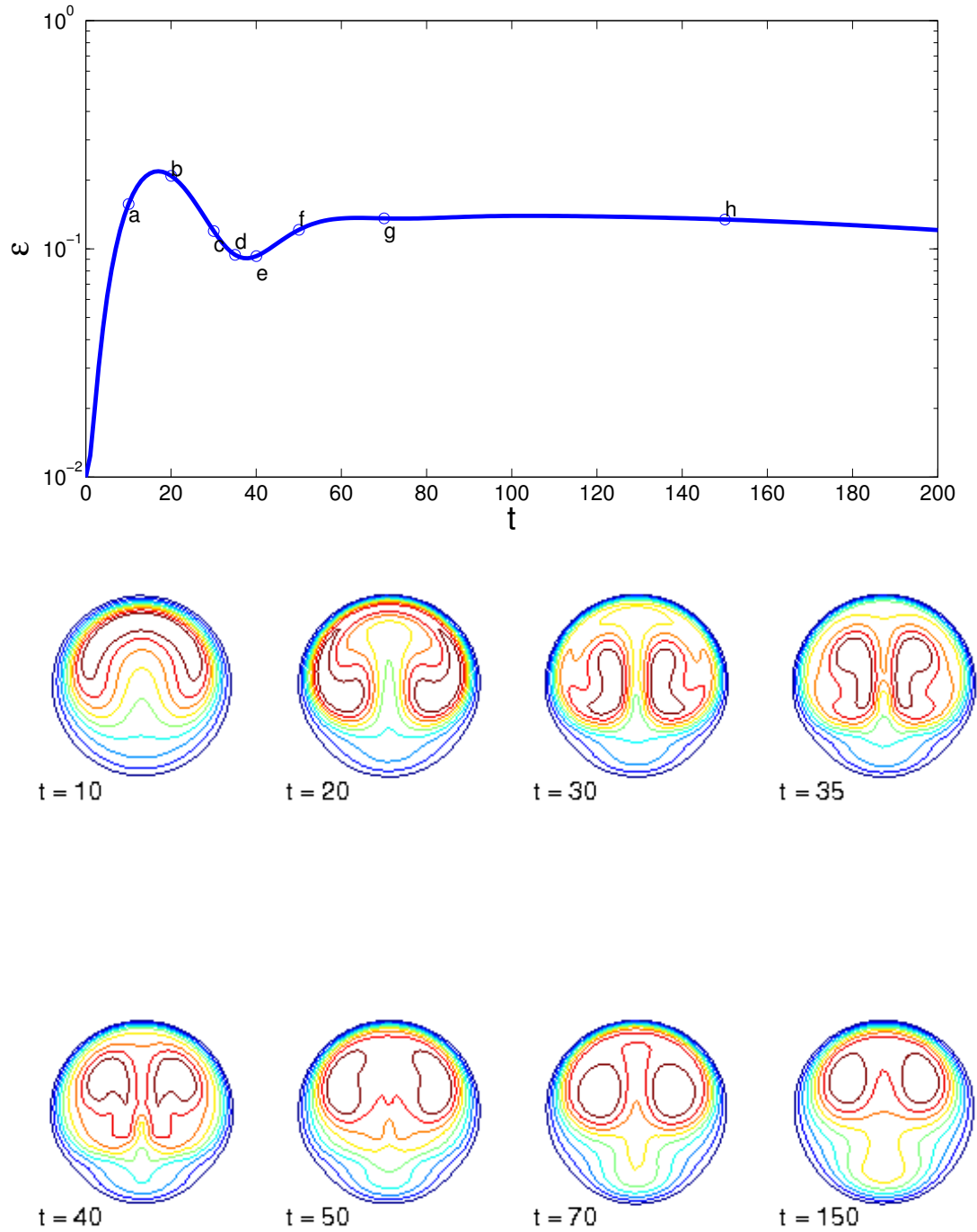


FIGURE 4.4: Reproduction avec notre code des résultats de [Meseguer & Mellibovsky 2007]. (haut) : Évolution de l'énergie $\varepsilon(t)$ pour une perturbation sous la forme d'une paire de rouleaux, ($n = 1, k_0 = 0$) pour un fluide Newtonien à $Re = 3000$, $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. (bas) : Contours d'iso-valeurs de la vitesse axiale pour les points indiqués en haut. Ces résultats ont été obtenus en utilisant $M = 6$ modes radiaux, $N = 9$ modes azimutaux et $\Delta t = 0.01$.

4.3.2 Convergence

- **Convergence spatiale** : Afin de tester la convergence spatiale de la solution, des calculs ont été effectués, pour une condition initiale donnée, et différents niveaux de troncature (M_i, N_i) . La variation relative de G par rapport au plus haut niveau de résolution (M_h, N_h) considéré est défini par :

$$\Delta G(t)_{M_i, N_i} = \frac{|G_{M_i, N_i} - G_{M_h, N_h}|}{G_{M_h, N_h}}. \quad (4.15)$$

L'erreur de troncature est estimée par le maximum de $\Delta G(t)$ sur tout l'intervalle de temps considéré, typiquement $0 \leq t \leq 1000$. Par exemple, pour une condition initiale sous forme d'une paire de rouleaux, avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ et $Re_w = 4000$, des calculs ont été effectués avec $(M, N) = (6, 9)$, $(12, 12)$ et $(12, 16)$. La figure 4.5(a) montre la variation de ΔG en fonction de temps. Pour $(M, N) = (6, 9)$, l'erreur de troncature maximale est de 18% et elle est obtenue à $t = 54$. Cette erreur maximale se réduit à 0.07% à $t = 87$ avec $(M, N) = (12, 12)$. Pour des niveaux de troncature plus importants ($M \geq 12, N \geq 12$), nous n'avons pas observé un gain significatif en précision de la solution. Finalement, au temps intermédiaire $t \approx 70$, où ΔG est maximale, la convergence spectrale de la solution a été vérifiée. Ceci est illustré par la figure 4.5(b) où la distribution modale G_n de l'énergie cinétique à $t \approx 70$ est représentée pour les trois résolutions considérées. Le rapport G_n entre l'énergie cinétique associée au mode n et l'énergie initiale de la perturbation est :

$$G_n = \frac{1}{\|\mathbf{u}(t=0)\|_e} \sum_{k=1,2} \sum_{m=0}^M \left[a_{mn0}^{(k)*} a_{mn0}^{(k)} \int_0^1 \left(\tilde{\phi}_{mn0}^{(k)*}(r) \cdot \tilde{\phi}_{mn0}^{(k)}(r) r dr \right) \right] \quad (4.16)$$

La figure 4.5(b) montre que la convergence spectrale est assurée pour $M \geq 12$ et $N \geq 12$, avec $G_n \propto \exp(-n)$. Le test de convergence spatiale décrit ci-dessus a été réalisé pour l'ensemble des paramètres rhéologiques et dynamiques considérés. Le même type de test de convergence a été effectué pour une condition initiale sous forme de trois paires des rouleaux. Dans ce cas, La convergence numérique est atteinte lorsque ($M \geq 16, N \geq 19$) pour $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ et $Re_w = 4000$.

- **Convergence temporelle** : La sensibilité des résultats vis-à-vis du pas de temps utilisé dans la discrétisation temporelle est examinée en comparant les solutions utilisant deux pas de temps différents Δt et $\Delta t/2$. Le critère de convergence est basé sur le maximum

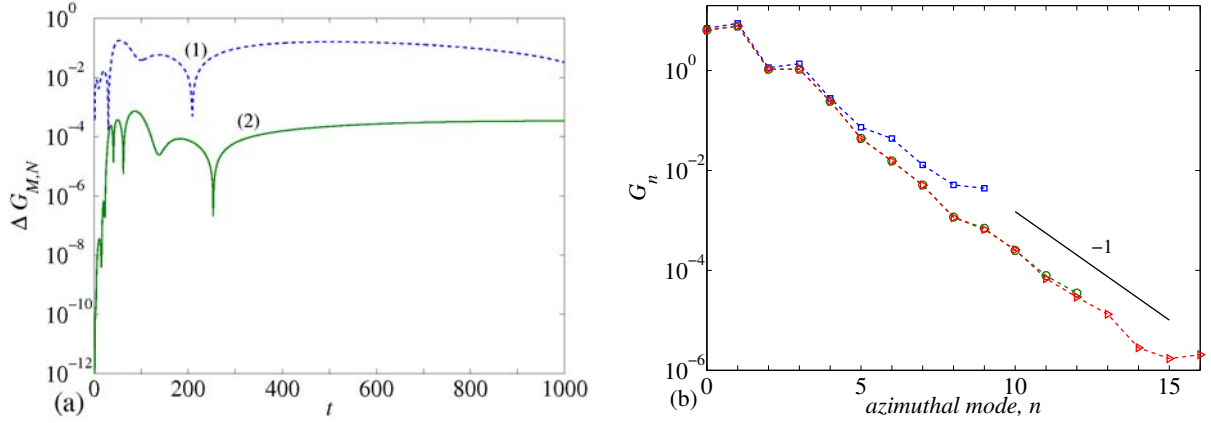


FIGURE 4.5: Test de convergence spatiale pour un fluide de Carreau $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$. La perturbation initiale est sous forme de deux tourbillons longitudinaux contra-rotatifs avec une énergie initiale $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. **(a)** Erreur de troncature pour deux résolutions différentes : (1) ($M_1 = 6, N_1 = 9$) et (2) ($M_1 = 12, N_1 = 12$), avec ($M_h = 12, N_h = 12$). **(b)** Spectre d'énergie par rapport aux différents modes azimutaux à $t \approx 70$ et pour trois troncatures différentes : (\square) ($M = 6, N = 9$); (\circ) ($M = 12, N = 12$) et (\triangleright) ($M = 12, N = 16$).

de la variation relative $|G(\Delta t) - G(\Delta t/2)|/G(\Delta t/2)$, pour laquelle on exige d'être inférieure à 0.5%. A titre d'exemple, en prenant une condition initiale sous forme d'une paire de rouleaux longitudinaux, avec un fluide de Carreau ($n_c = 0.5, \lambda = 30$) à $Re_w = 4000$, et en fixant $M = 12, N = 12$, la convergence temporelle est assurée à $\Delta t = 10^{-2}$. Cependant, pour une condition initiale de trois paires de rouleaux qui nécessite une troncature d'ordre supérieure ($M = 16, N = 19$), Δt est 10^{-3} .

4.4 Résultats et discussion

4.4.1 Évolution temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation

L'évolution temporelle du facteur d'amplification $G(t)$ pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ est montrée dans la figure 4.6. L'énergie initiale $E_0 = E(t=0, \mathbf{u})$ varie entre 10^{-5} et 10^{-2} par rapport à celle de l'écoulement de base. Pour des faibles valeurs de ε_0

(10^{-5}), la contribution des termes non linéaires peut être négligée et nous retrouvons la croissance transitoire due à la non normalité de l'opérateur linéaire. Ceci est clairement mis en évidence par la figure 4.6 où l'amplification $G(t)$ calculée par la théorie linéaire, représentée en trait discontinu, coïncide avec le calcul non linéaire pour $\varepsilon_0 = 10^{-5}$. On trouve en particulier une amplification maximale $G_{max}(t) = \mathcal{G}_{opt} = 420.7$ atteint à $t = t_{opt} = 144$.

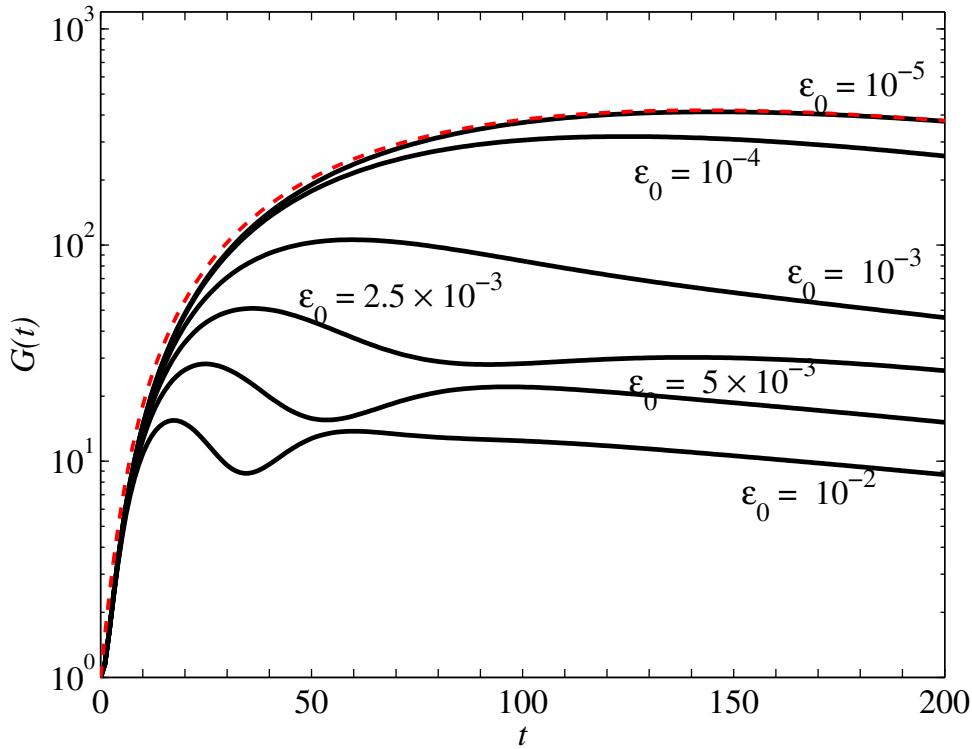


FIGURE 4.6: Facteur d'amplification d'énergie cinétique de la perturbation $G(t)$ pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$ et différentes valeurs d'énergie initiale ε_0 . La courbe en traits discontinus montre la croissance optimale linéaire $G_{max}(t)$.

Pour $\varepsilon_0 > 2.5 \times 10^{-3}$, deux étapes peuvent être distinguées dans l'évolution d'une perturbation d'amplitude finie. Dans la première étape, à faible t , la courbe non linéaire suit la courbe linéaire. L'amplification de l'énergie résulte principalement d'une croissance "pseudolinéaire", comme cela a été indiqué par [Zikanov 1996]. Les résultats numériques montrent que l'amplification maximale est atteinte au bout d'un temps de l'ordre de $\varepsilon_0^{-1/2}$. Ce temps pourrait correspondre à celui que met la particule fluide pour aller du centre

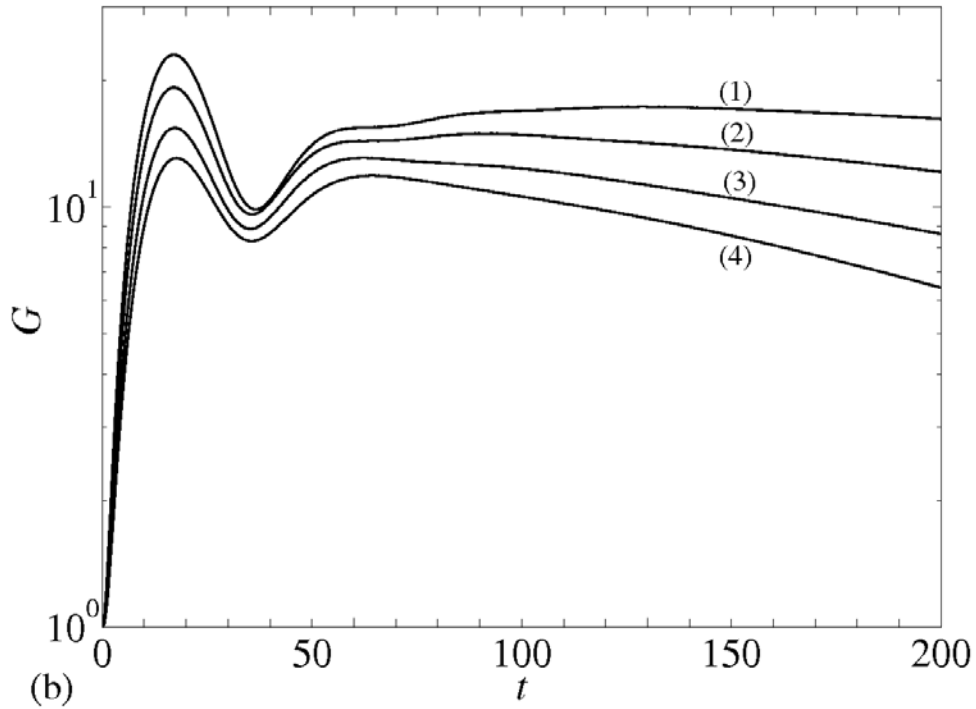


FIGURE 4.7: Effet de rhéofluidification sur le facteur d'amplification $G(t)$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$. Dans tous le cas, la perturbation initiale est sous la forme d'une paire de rouleaux avec une énergie initiale $\varepsilon_0 = 10^{-2}$: (1) Cas Newtonien ; (2) $n_c = 0.7$; (3) $n_c = 0.5$ et (4) $n_c = 0.4$.

à la périphérie. D'après [Waleffe 1995], les termes non linéaires amorcés par la croissance transitoire de l'énergie de la perturbation vont modifier l'écoulement de base et réduisent la non normalité. Ceci conduit à une réduction du facteur d'amplification G lorsque ε_0 augmente. Étant donné que la perturbation est supposée indépendante de z , les rouleaux longitudinaux n'ont pas de source d'énergie et l'écoulement se relaminarise inéluctablement aux temps longs. Qualitativement, l'évolution $G(t)$ est similaire à celle d'un fluide Newtonien (Figure 4.2). Cependant, il convient de noter que pour un Re_w donné, le facteur d'amplification décroît lorsque le caractère rhéofluidifiant devient plus marqué (n_c diminue), comme le montre la figure (4.7). La réduction du facteur d'amplification est encore plus significative lorsque la perturbation de la viscosité μ' n'est pas pris en compte. Ceci est illustré par la figure 4.8(a) où $G(t)$ est représenté selon que l'on tienne en compte ou pas de μ' . Nous allons donc parler d'écoulement «complet», où le tenseur de contraintes

est calculé à chaque pas de temps avec la viscosité et sa perturbation :

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = [\mu_b + \mu'(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t))] \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t), \quad (4.17)$$

et un écoulement «*stratifié pur*», où le tenseur de contraintes est calculé sans tenir compte de la perturbation de la viscosité :

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mu_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \quad (4.18)$$

La figure 4.8(b) montre que la variation relative de $G(t)$ entre les cas *stratifié* et *complet* augmente avec le caractère rhéofluidifiant du fluide. Ces résultats peuvent être discutés en termes d'un bilan énergétique pour la perturbation. Cette analyse est reportée à une section ultérieure après avoir décrit l'évolution temporelle de la structure de l'écoulement et la modification des profils de viscosité.

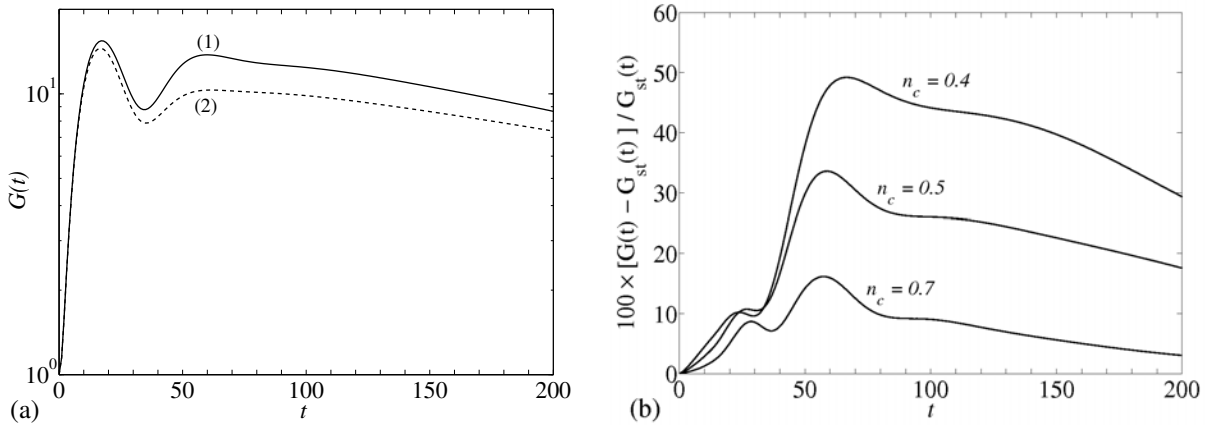


FIGURE 4.8: **(a)** Facteur d'amplification $G(t)$ d'une perturbation sous la forme d'une paire de rouleaux pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ à $Re_w = 4000$: (1) la perturbation de la viscosité μ' est prise en compte, (2) la perturbation de la viscosité μ' n'est pas prise en compte. **(b)** Variation relative entre $G(t)$ calculé avec et sans μ' . Ce dernier cas est appelé *stratifié pur* et est indiqué avec l'indice *st*.

4.4.2 Structure de l'écoulement et profils de viscosité

Afin de faire ressortir clairement l'influence des termes non linéaires sur la réorganisation de l'écoulement et la modification des profils de viscosité, il est nécessaire que

l'amplitude initiale de la perturbation soit suffisamment importante. Les résultats présentés dans ce paragraphe ont été obtenus pour une perturbation ayant une énergie initiale $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. Dans la figure 4.9, nous avons représenté l'évolution temporelle de l'énergie cinétique associée à chacune des trois composantes u , v et w de la vitesse. Initialement l'énergie cinétique de la perturbation est essentiellement répartie entre les composantes radiale u et azimutale v de la perturbation. Cependant, très rapidement au cours du temps, la composante axiale w devient dominante. En effet, le mouvement de convection induit par les deux rouleaux contra-rotatifs déplace les particules fluides de basse vitesse vers le centre et les particules fluides de grande vitesse vers la paroi. Ce mécanisme, dit mécanisme de *lift-up* conduit à l'apparition des points d'inflexion dans le profil azimutal de la composante axiale de la vitesse. Ceci est clairement illustré par les figures (4.10)(a-c) où nous avons représenté les contours d'iso-valeurs de $(W_b + w)$ à trois instants différents : $t = 5$ (zone de croissance pseudo linéaire de $G(t)$), $t = 15$ (amplification maximale de $G(t)$) et $t = 150$ (zone du développement non linéaire de $G(t)$). Les contours de $(W_b + w)$ sont analogues à ceux obtenus pour un fluide Newtonien, excepté le fait qu'ils sont plus serrés dans la partie supérieure de la section transversale où la viscosité est faible. La déformation des profils de la vitesse axiale par rapport à l'écoulement de base est montrée dans la figure (4.11), pour deux positions azimutales $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. Ici, la position azimutale θ est orientée dans le sens contraire de rotation des aiguilles d'une montre, avec $\theta = \pi/2$ correspondant à la verticale, qui est aussi l'axe de symétrie de la perturbation initiale (Fig. 3.16)(a). Étant donné que l'écoulement se fait à gradient de pression imposé, le débit a tendance à diminuer. Ceci est une conséquence naturelle du transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers la perturbation. La distorsion des profils de vitesse axiale se traduit aussi par une modification importante du cisaillement et donc sur le profil de viscosité comme cela est illustré par la figure 4.12. On note, pour des temps courts, une forte chute de viscosité dans la zone centrale de la conduite. Ceci doit être relié à la forte sensibilité de la viscosité au cisaillement. Au cours du temps, la variation de la viscosité devient plus complexe, mais reste corrélée à la forme des profils de vitesse axiale. Il est clair que cette forte modification des profils de viscosité affecte de manière significative la dissipation visqueuse.

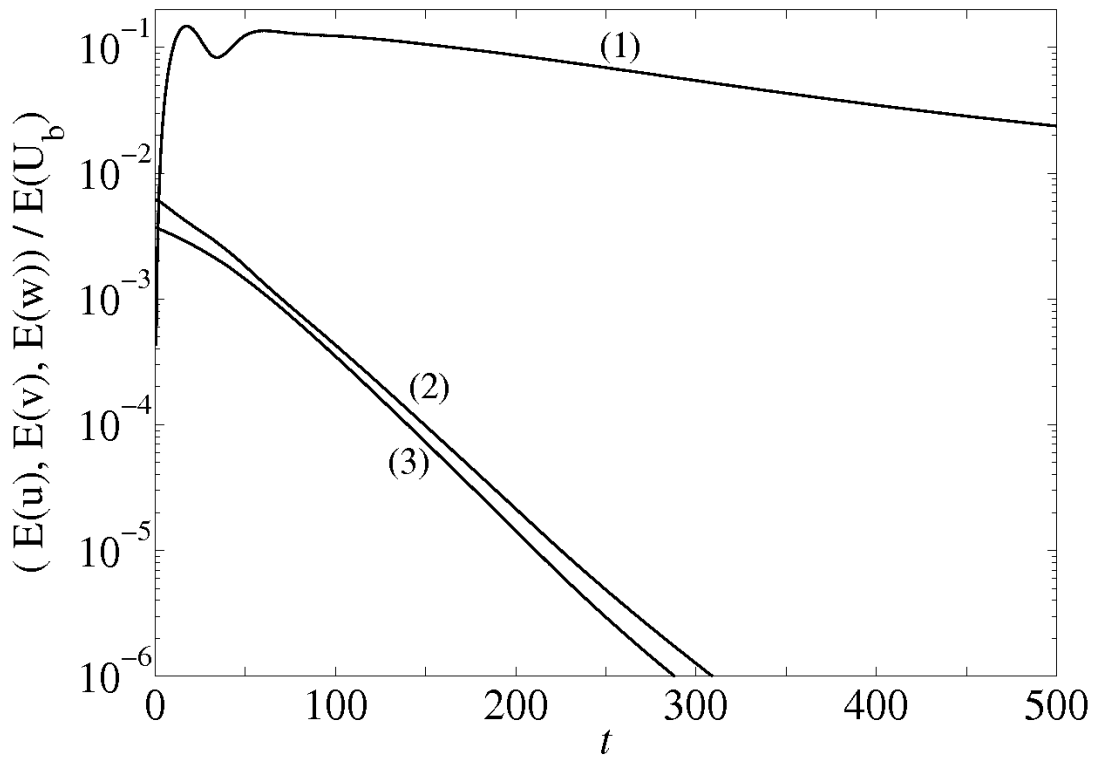


FIGURE 4.9: Évolution de l'énergie cinétique associée aux trois composantes u , v et w de la perturbation pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ et $Re_w = 4000$: (1) axiale $E(w)$, (2) azimutale $E(v)$ et (3) radiale $E(u)$.

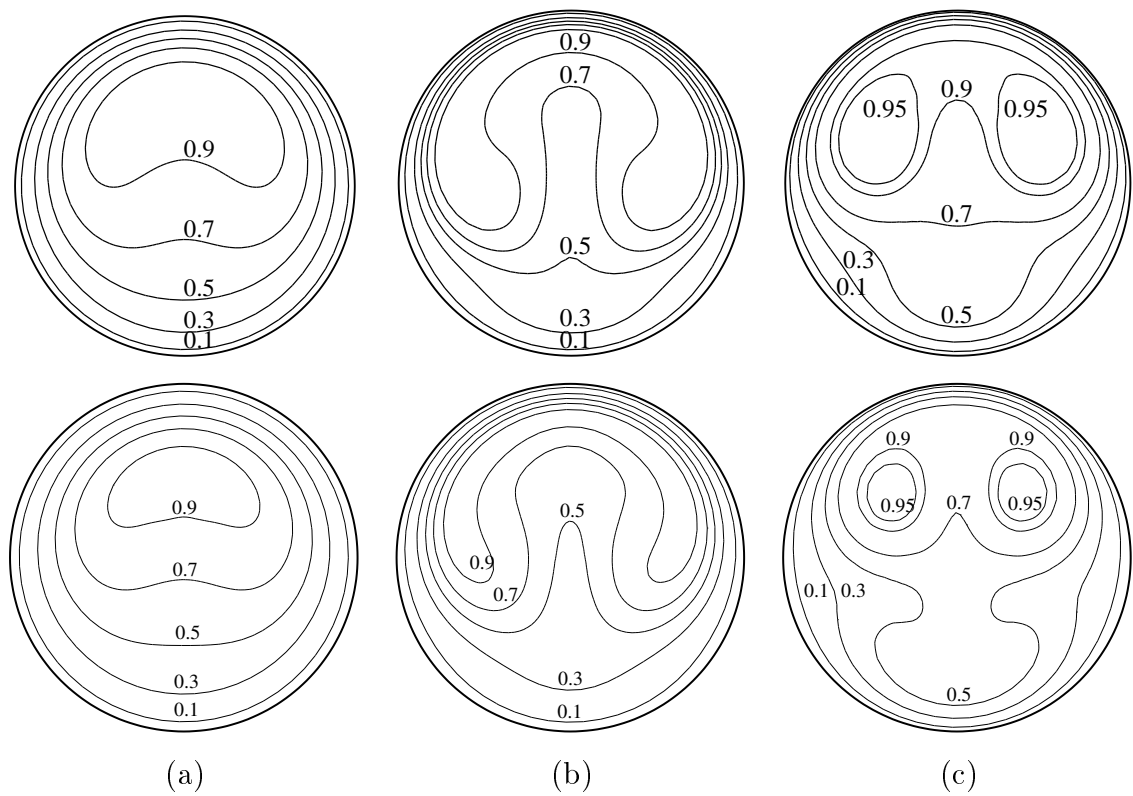


FIGURE 4.10: Contours d'iso-valeurs de vitesse axiale $W_b(r) + w(r, \theta, t)$ de l'écoulement perturbé à $Re_w = 4000$ et $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. **(a)** $t = 5$; **(b)** $t = 15$ et **(c)** $t = 150$. (En haut) Cas d'un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$. (En bas) Cas Newtonien.

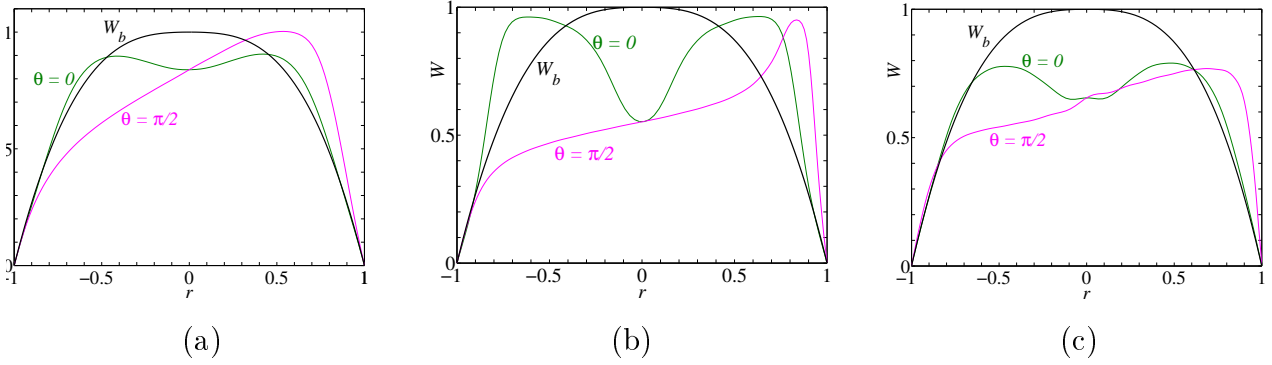


FIGURE 4.11: Profils de vitesse axiale $W_b(r) + w(r, \theta, t)$ de l'écoulement perturbé à deux positions azimutales (horizontale $\theta = 0$ et verticale $\theta = \pi/2$). Cas d'un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ à $Re_w = 4000$. (a) $t = 5$, (b) $t = 15$ et (c) $t = 150$.

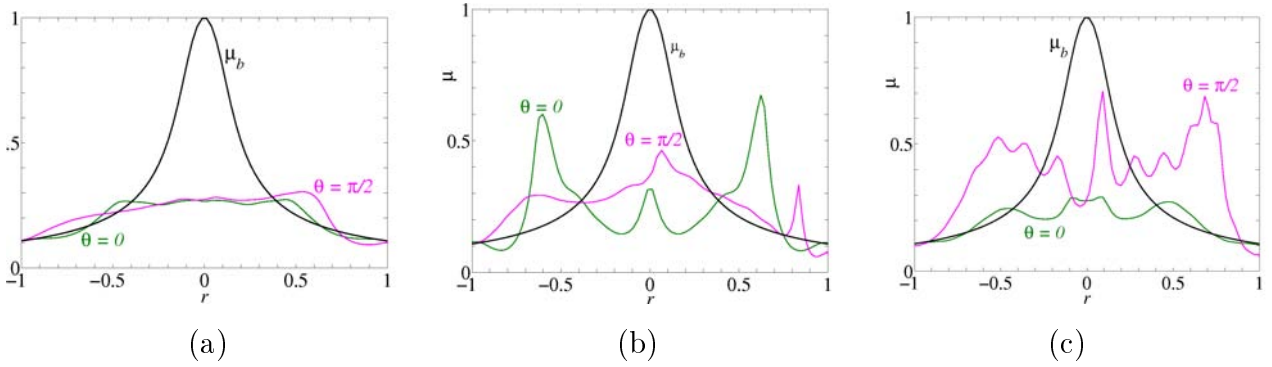


FIGURE 4.12: Profils de viscosité $\mu(r, \theta, t)$ de l'écoulement perturbé à deux positions azimutales (horizontale $\theta = 0$ et verticale $\theta = \pi/2$). Cas d'un fluide de Carreau à $Re_w = 4000$ et $n_c = 0.5$. (a) $t = 5$, (b) $t = 15$ et (c) $t = 150$.

4.4.3 Équation de l'énergie

L'évolution temporelle de l'énergie cinétique de la perturbation peut être analysée en considérant l'équation de Reynolds-Orr. Celle-ci est obtenue en multipliant l'équation (4.2) par \mathbf{u} et en intégrant sur la section :

$$\frac{dE}{dt} = - \int_0^1 \int_0^{2\pi} uw \frac{dW_b}{dr} r dr d\theta - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \tau_{ij}(\mathbf{U}_b)] \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) r dr d\theta. \quad (4.19)$$

Les termes non linéaires d'inertie n'interviennent pas dans l'énergie globale de la perturbation. Ils sont conservatifs. Ce résultat est classique dans la littérature. L'équation (4.19) peut être écrite sous la forme :

$$\frac{dE}{dt} = J + D. \quad (4.20)$$

Le premier terme J du membre droite de l'équation (4.20) est le taux de production d'énergie cinétique de la perturbation provenant de l'interaction des contraintes de Reynolds uw avec le gradient de vitesse associé à l'écoulement de base dW_b/dr . La quantité J peut être positive ou négative selon que l'énergie est transférée de l'écoulement de base vers la perturbation ou l'inverse. Le deuxième terme D , est le taux de dissipation visqueuse. Dans ce qui suit, nous analysons les évolutions temporelles de J et D . Lorsque $J > D$ nous sommes en présence d'une augmentation de l'énergie cinétique de la perturbation. Si $J < D$ il y aura une diminution de l'énergie cinétique de la perturbation jusqu'à la relaminarisation de l'écoulement. Dans le cas des simulations bidimensionnelles, pendant la croissance transitoire $J > D$ mais au bout d'un certain temps, D devient plus grand que J et l'énergie cinétique de la perturbation tend vers zéro. Les figures 4.13(a) et 4.14(a) montrent l'évolution de $\frac{J(t)}{E_0}$ et $\left\| \frac{D(t)}{E_0} \right\|$ respectivement pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ et $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$. La perturbation initiale consiste en une paire de rouleaux ($n = 1$) et $\varepsilon_0 = 10^{-2}$.

4.4.4 Échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation

L'évolution temporelle de la production d'énergie cinétique via l'interaction des contraintes des Reynolds avec l'écoulement de base (terme J de (4.20)), est décrite par la figure (4.13) pour différentes valeurs de n_c . Nous avons représenté J/E_0 et $G_J = \langle J \rangle_t / E_0$, où $\langle (\cdot) \rangle_t = \int_0^t (\cdot) dt$. Le transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation a lieu essentiellement lors de la première étape dite de croissance pseudolinéaire. Ce transfert décroît en augmentant les effets rhéofluidifiants. Finalement, nous avons noté que le gain d'énergie J ne change pas de manière significative que l'on tienne compte ou pas de la perturbation de la viscosité. Ce résultat n'est pas étonnant dans la mesure où l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation a lieu essentiellement aux temps

courts de croissance pseudolinéaire. La figure 4.13(b) montre que G_J ne présente pas de différences entre le cas *stratifié pur* ($\mu' = 0$) et le *complet* ($\mu = \mu_b + \mu'$).

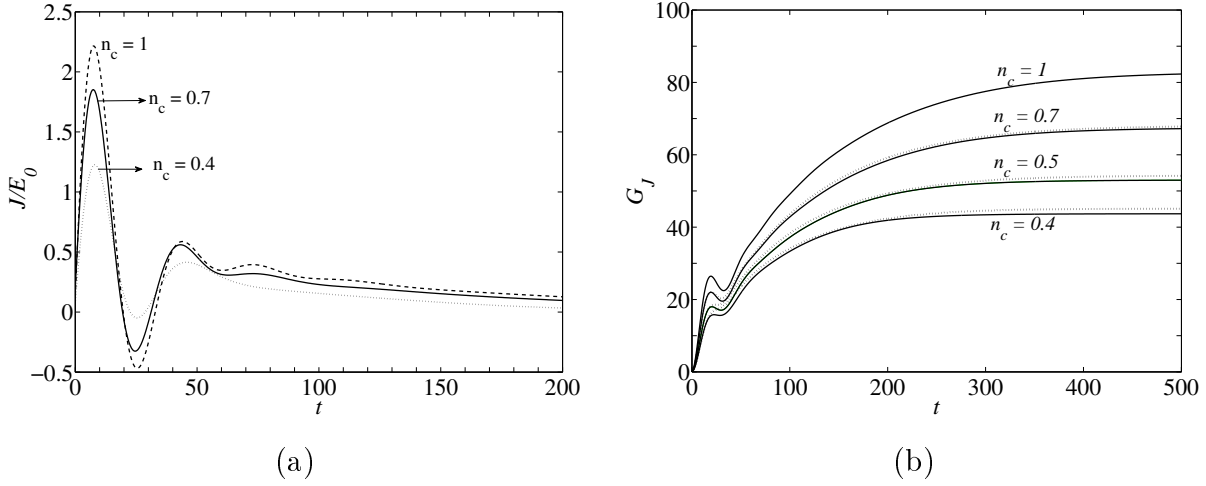


FIGURE 4.13: Effet de la rhéofluidification dans la production d'énergie de la perturbation par interaction des contraintes de Reynolds avec l'écoulement de base. (a) Évolution temporelle du taux de production d'énergie J/E_0 . (b) Évolution temporelle de $\langle J \rangle_t / E_0$: (traits discontinus) cas *stratifié pur*, (ligne continue) cas *complet*.

4.4.5 Termes de dissipation visqueuse

La figure 4.14 montre le taux de dissipation visqueuse $D/E_0 = (D_1 + D_2 + D_3)/E_0$ ainsi que $G_D = \langle D/E_0 \rangle_t$ pour différentes valeurs du n_c . Une réduction de la dissipation visqueuse avec le caractère rhéofluidifiant est observée. En introduisant la perturbation de la viscosité $\mu' = \mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \mu(\mathbf{U}_b)$, le terme de dissipation visqueuse D , dans l'équation (4.20) peut être écrit sous la somme de trois termes :

$$D = D_1 + D_2 + D_3, \quad (4.21)$$

avec

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{1}{Re} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mu_b (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{u})) r dr d\theta \\ D_2 &= -\frac{1}{Re} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mu' (\dot{\gamma}(\mathbf{u}) : \dot{\gamma}(\mathbf{u})) r dr d\theta \\ D_3 &= -\frac{1}{Re} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mu' \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) \frac{dW_b}{dr} r dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.22)$$

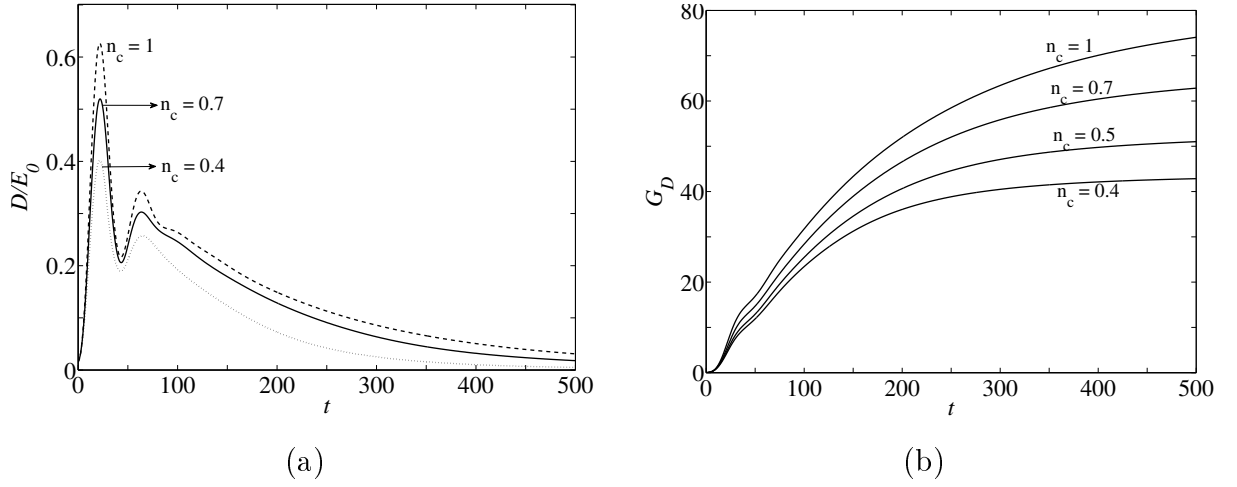


FIGURE 4.14: Effet du caractère rhéofluidifiant sur la réduction de dissipation visqueuse. **(a)** Évolution temporelle du taux de dissipation visqueuse $|D|/E_0$. **(b)** Évolution temporelle de $G_D = \langle |D|/E_0 \rangle_t$ pour différentes valeurs de n_c .

D_1 est le taux de dissipation visqueuse dans le cas dit *stratifié pur*. D_2 et D_3 sont les modifications du taux de dissipation visqueuse provenant de la perturbation de la viscosité μ' . Ces deux termes sont nuls dans le cas Newtonien ou *stratifié pur*.

La figure (4.15) montre l'évolution temporelle des termes dissipatifs D_2 et D_3 :

- Aux temps courts, D_2 est important et positif à cause de la forte modification de la viscosité expliquée précédemment.
- Au cours du temps, D_2 devient négatif et tend vers zéro.
- D_3 est toujours positif. Ce terme est l'intégrale du produit des "contraintes de Reynolds non Newtoniennes" avec le gradient de vitesse de l'écoulement moyen. Ce produit noté d_3 est presque tout le temps positif. En effet, en utilisant une approximation au premier ordre de μ' (issue d'un développement de Taylor au premier ordre de $\mu(\mathbf{U}_b + \mathbf{u})$ autour de l'écoulement de base), nous pouvons montrer que :

$$d_3 = -\mu' \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) dW_b/dr \approx -\dot{\gamma}_{rz}^2(\mathbf{u}) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \right)_b \frac{dW_b}{dr} \quad (4.23)$$

est positif pour des fluides rhéofluidifiants. Ceci a été confirmé par les simulations numériques. Dans la figure 4.16, la distribution de d_3 est montrée dans une section (r, θ) pour trois temps différents. Les valeurs maximales de d_3 sont atteints près de la paroi de la conduite, où le gradient de vitesse axiale $\frac{d}{dr}(W_b + w)$ est maximale.

- La somme des ces deux termes provenant de la perturbation de la viscosité est positive. Sa valeur augmente avec le caractère rhéofluidifiant.

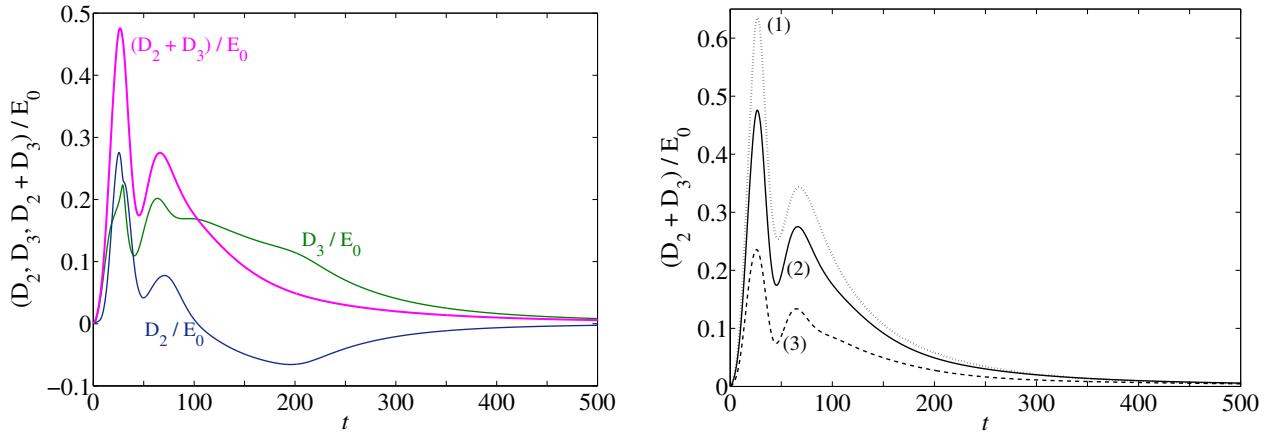


FIGURE 4.15: **(a)** Évolution temporelle des termes D_2 et D_3 de l'équation de Reynolds-Orr, provenant de la perturbation de la viscosité μ' . Les paramètres de la simulation sont $n_c = 0.5$ et $Re_w = 4000$. **(b)** Influence de la rhéofluidification sous $(D_2 + D_3)/E_0$: (1) $n_c = 0.4$, (2) $n_c = 0.5$ et (3) $n_c = 0.7$.

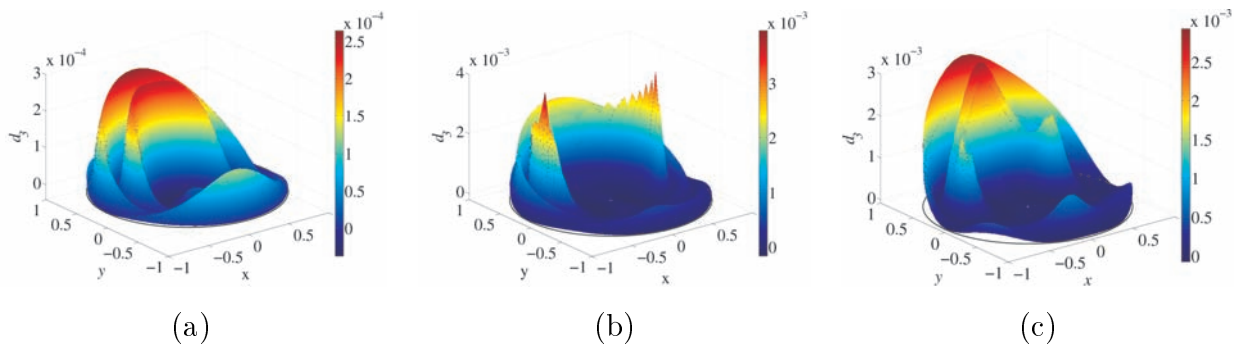


FIGURE 4.16: Distribution dans la section (r, θ) des "contraintes des Reynolds non Newtoniennes" à trois instants différents **(a)** $t = 5$; **(b)** $t = 15$ et **(c)** $t = 150$. Les calculs ont été effectués pour $Re_w = 4000$ et $n_c = 0.5$.

L'importance des termes provenant de la perturbation de la viscosité, D_2 et D_3 , peut

être étudiée avec la quantité Rd_{st} définie par :

$$Rd_{st} = \frac{\int_0^t [D_1(t') + D_2(t') + D_3(t') - D_{1st}(t')] dt'}{-\int_0^t D_{1st}(t') dt'} \quad (4.24)$$

qui représente la réduction de dissipation visqueuse par rapport au cas *stratifié pur*. La figure 4.17 montre Rd_{st} en fonction du temps pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidification n_c . Rd_{st} augmente rapidement et atteint un maximum pour finalement décroître de manière asymptotique vers zéro. Rd_{st} augmente avec le caractère rhéofluidifiant. Cette réduction de la dissipation visqueuse par rapport au cas *stratifié pur* peut être vue comme une source d'énergie pour la perturbation qui explique la différence entre les courbes (1) et (2) dans la figure 4.8(a).

Remarque

La Figure 4.13 montre que le taux de production de l'énergie via l'interaction entre les contraintes des Reynolds et l'écoulement moyen, décroît en augmentant les effets rhéofluidifiants. Ce mécanisme est à l'origine de la réduction du facteur d'amplification $G(t)$ montré par la figure 4.6. La contribution du terme linéaire d'inertie G_J est très similaire à celle obtenue pour le cas *stratifié pur*, comme le montre la figure 4.13(b). Ce résultat peut être considéré comme une extension de celui obtenu par [Govindarajan 2002] et [Nouar *et al.* 2007a] dans le cadre d'une analyse linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan d'un fluide de Carreau. Les auteurs avaient alors montré que les effets stabilisants observés par un fluide rhéofluidifiant sont dus à une réduction de l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation.

4.4.6 Transfert modal d'énergie

L'émergence d'une structure cohérente avec un mode azimutal $n = 1$, nous a amené à nous intéresser aux échanges d'énergie entre différents modes via les non linéarités des termes d'inertie et des termes visqueux. Nous n'avons pas fait d'étude systématique mais nous avons exploré quelques pistes. Commençons alors par considérer le cas simple où seul le mode $n = 1$ est excité initialement avec une énergie ε_0 . Par interactions non linéaires, le mode $n = 1$ va générer des harmoniques et le mode zéro qui va modifier l'écoulement de base.

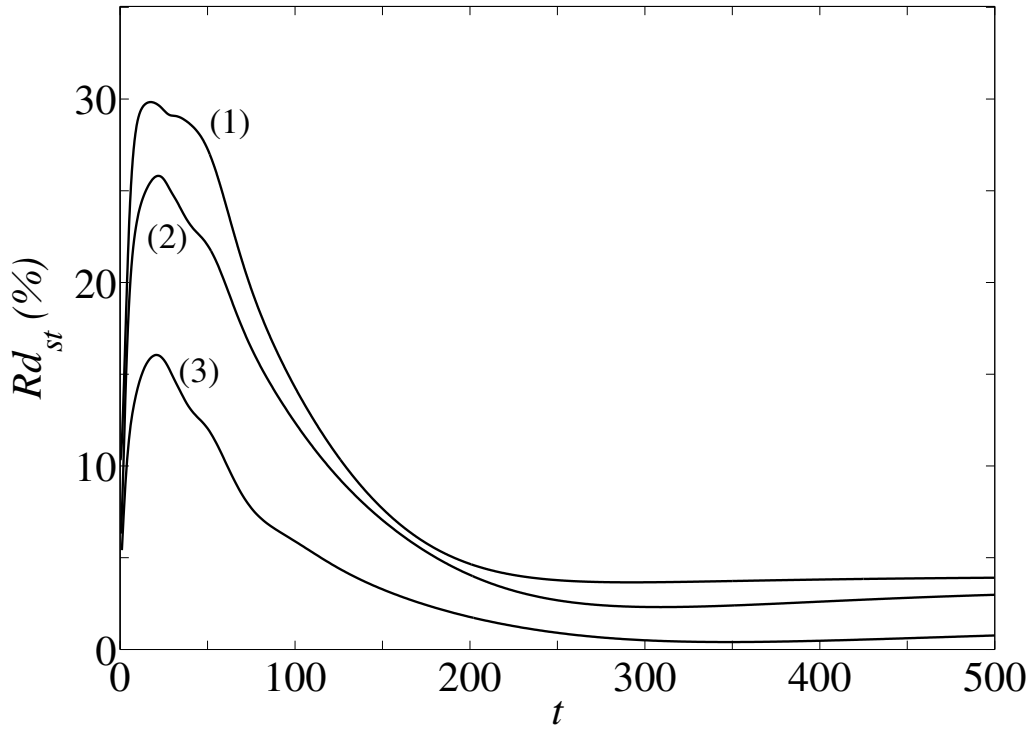


FIGURE 4.17: Réduction de la dissipation visqueuse par rapport au cas *stratifié pur* : (1) $n_c = 0.4$; (2) $n_c = 0.5$ et (3) $n_c = 0.7$.

Pour faire ressortir séparément les rôles de la non linéarité des termes d'inertie et celle des termes visqueux, nous avons annulé pour le premier cas la perturbation de viscosité (stratification pure) et dans le deuxième cas le terme $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$. La figure 4.18 correspond à la situation où on pose $\mu' = 0$. Elle donne l'évolution temporelle de l'énergie du mode $n = 1$ et de ses harmoniques et du mode zéro. Lorsque seul le terme d'inertie assure le couplage entre les différents modes, le gain d'énergie du mode $n = 1$, initialement excité sature rapidement à $t = 12.52$ avec un gain maximal $G_1^{max} = 6.51$. On note aussi que le mode zéro, qui représente la modification de l'écoulement de base, devient rapidement le mode dominant. L'équation d'énergie associée à chaque mode n , peut être écrite formellement sous la forme :

$$\frac{dE_n}{dt} = L_n + N_I^{0,n} + \sum_{p+q=n} N_I^{p,q} \quad (4.25)$$

L_n est la contribution des termes linéaires, c'est-à-dire des termes qui font intervenir l'écou-

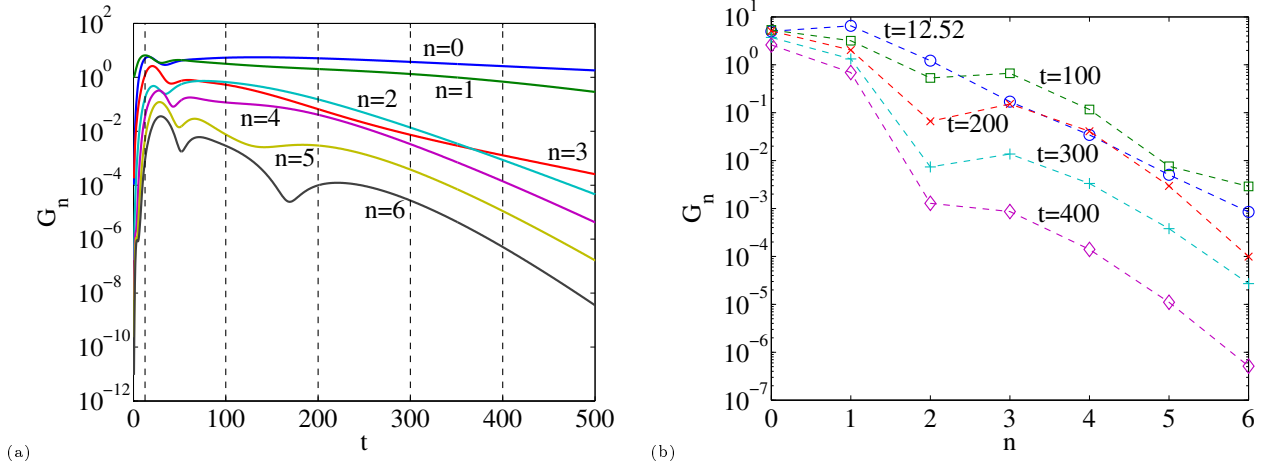


FIGURE 4.18: Cas stratifié ($\mu' = 0$) avec une perturbation initiale sous la forme d'une paire de rouleaux contra-rotatifs d'énergie $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ et à $Re_w = 4000$. (a) : Évolution du gain d'énergie des modes $0 \leq n \leq 6$. Les lignes verticales en pointillés représentent les instants utilisés pour le spectre d'énergie. (b) : Spectre d'énergie à différents instants.

lement laminaire et la dissipation visqueuse.

$$L_n = - \int_0^1 u_1 w_1 \frac{dW_b}{dr} r dr - \frac{1}{Re} \int_0^1 \mu_b \dot{\gamma}^2(\mathbf{u}_1) r dr \quad (4.26)$$

$N_I^{0,n}$ est la contribution provenant de l'interaction non linéaire entre le mode zéro et le mode n .

$$N_I^{0,n} = - \int_0^1 u_1 w_1 \frac{dw_0}{dr} r dr \quad (4.27)$$

$\sum_{p+q=n} N_I^{p,q}$ est la contribution à l'énergie du mode n provenant des interactions non linéaires via les termes $\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$. La croissance du mode $n = 1$ est due aux termes linéaires $-\int_0^1 u_1 w_1 \frac{dW_b}{dr} r dr$ qui assurent l'échange d'énergie entre l'écoulement laminaire et le mode $n = 1$.

La saturation en énergie du mode $n = 1$ provient probablement du terme $N_I^{0,1}$, interaction entre les modes zéro et 1. Le mode zéro se traduit par un freinage de l'écoulement.

La figure 4.19 correspond à la situation où les termes non linéaires d'inertie ($\mathbf{u}\nabla\mathbf{u}$) sont annulés artificiellement. L'amplification maximale de l'énergie du mode $n = 1$ est $G_1^{max} = 765.4$ atteinte à $t = 234.5$. Cette amplification est plus importante que celle

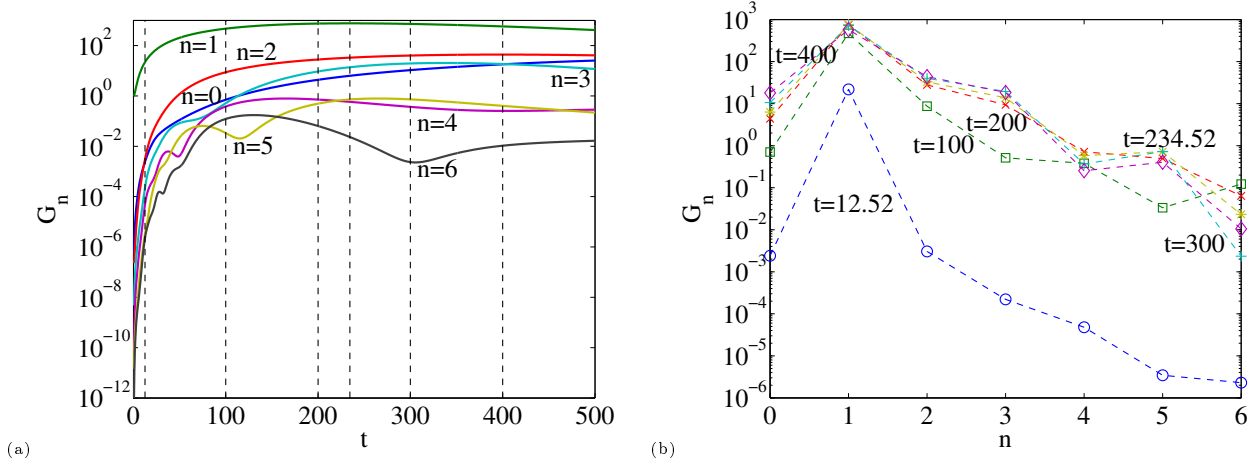


FIGURE 4.19: Cas non inertiel ($(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = 0$) avec une perturbation initiale sous la forme d'une paire de rouleaux contra-rotatifs d'énergie $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ et à $Re_w = 4000$. (a) : Évolution du gain d'énergie des modes $0 \leq n \leq 6$. Les lignes verticales en pointillés représentent les instants utilisés pour le spectre d'énergie. (b) : Spectre d'énergie à différents instants.

obtenue pour la perturbation optimale, comme le montre la figure 4.20 où on a représenté G_1 en fonction du temps pour les différentes situations considérées. L'amplification de l'énergie du mode 1 provient bien sûr des termes linéaires d'inertie $-\int_0^1 u_1 w_1 \frac{dW_b}{dr} r dr$ et des termes linéaires visqueux $-\int_0^1 \mu'_1 \frac{dW_b}{dr} \frac{\partial w_1}{\partial r} r dr$. Si on se restreint au premier ordre dans le développement de la perturbation de la viscosité $\mu'_1 = \frac{d\mu_b}{d\Gamma} \frac{dW_b}{dr} \frac{\partial w_1}{\partial r}$, avec $\Gamma = dW_b/dr$. La contribution des termes visqueux se réduit à

$$-\int_0^1 \frac{d\mu_b}{d\Gamma} \left(\frac{dW_b}{dr} \right)^2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial r} \right)^2 \quad (4.28)$$

qui est positive pour un fluide rhéofluidifiant.

La contribution de l'interaction non linéaire entre les modes zéro et 1 est de la forme

$$-\int_0^1 \mu'_0 \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}_1) \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}_1) r dr \quad (4.29)$$

μ'_0 représente le mode zéro de la perturbation de la viscosité. Les calculs montrent que μ'_0 est négatif ($\mu'_0 \sim \frac{d\mu_b}{d\Gamma} \frac{dW_b}{dr} \frac{\partial w_0}{\partial r} < 0$). Ceci se traduit par une accélération de l'écoulement. Des résultats similaires peuvent être obtenus si un mode autre que $n = 1$ est excité initialement.

Cependant, en pratique, il n'y a aucune raison que le mode $n = 1$ domine les perturbations initiales de l'expérience. Or d'après les observations expérimentales des stries, le mode

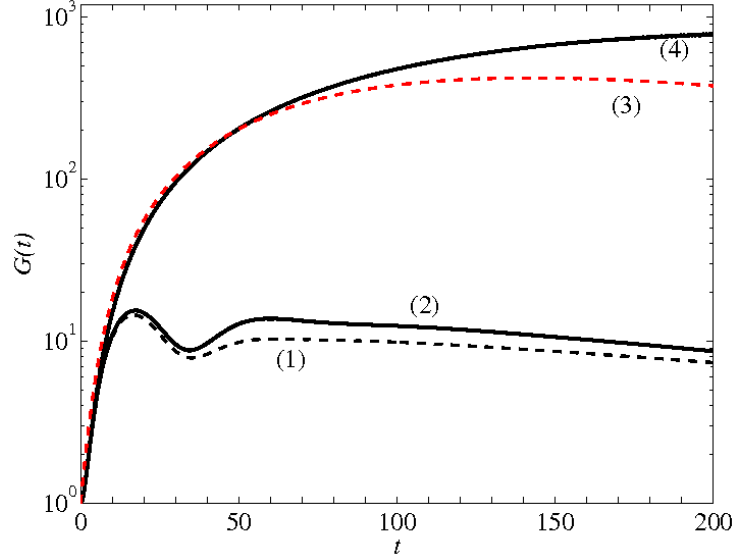


FIGURE 4.20: Facteur d'amplification $G(t)$ d'une perturbation sous la forme d'une paire de rouleaux pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ à $Re_w = 4000$: (1) Cas *stratifié pur* ($\mu = \mu_b$), (2) Cas *complet* ($\mu = \mu_b + \mu'$), (3) Perturbation optimale linéaire (4) Cas où les termes non linéaires d'inertie sont annulés.

azimutal $n = 1$ émerge tout de même du spectre de l'écoulement perturbé. Il faut donc envisager un mécanisme d'échange d'énergie, favorable au mode $n = 1$, à partir des autres modes azimutaux via les termes non linéaires visqueux. Afin de vérifier si le mode azimutal $n = 1$ peut recevoir de l'énergie plus efficacement d'un mode azimutal d'ordre plus élevé grâce aux termes non linéaires visqueux, on étudie le cas d'une perturbation dont l'énergie est répartie essentiellement dans un mode $n > 1$. Pour assurer la convergence spectrale de nos simulations sans utiliser trop de modes azimutaux, on choisit de perturber le mode $n = 3$ avec une énergie ε_0 . Le mode $n = 1$ est excité avec une énergie initiale $\varepsilon_0^1 \ll \varepsilon_0$ mais non nulle. Il est important de noter que l'interaction entre les modes $n = 1$ et $n = 3$ ne génère pas directement le mode $n = 1$ via les termes non linéaires.

La figure 4.21 montre le résultat de la simulation numérique lorsque $\varepsilon_0^1 = 10^{-12}\varepsilon_0$. Nous avons représenté l'évolution temporelle de l'énergie du mode $n = 3$, de son premier harmonique ainsi que du mode $n = 1$. Les cas où la viscosité est prise en compte et celle où on force $\mu' = 0$ sont représentés respectivement en trait continu et discontinu.

Lorsque $\mu' = 0$, l'énergie du mode 1 reste très faible (environ $10^{-11}\varepsilon_0$). Par contre,

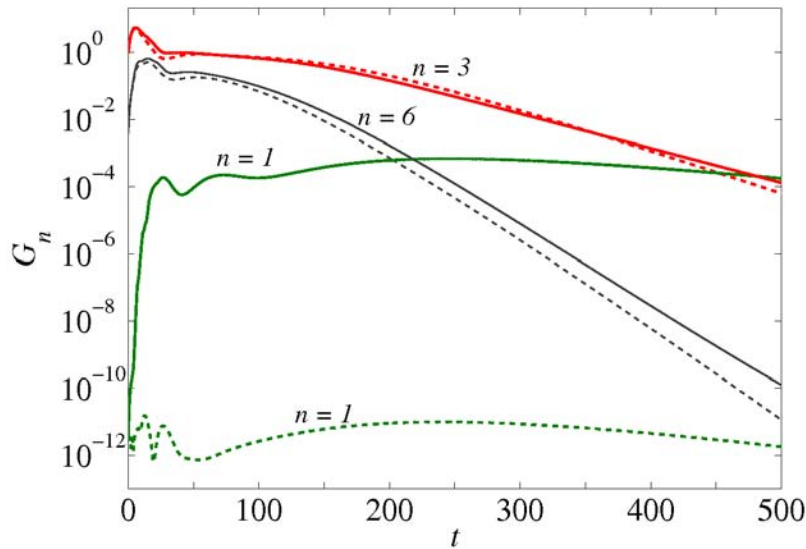


FIGURE 4.21: Évolution de l'énergie de la perturbation pour les modes $n = 1$, $n = 3$ et $n = 6$ pour : $n_c = 0.5$, $\lambda = 30$ à $Re_w = 4000$. Comparaison entre le cas *stratifié pur* (trait discontinu) et le cas *complet* (trait continu).

lorsque la perturbation de la viscosité et donc la non linéarité de $\mu(\dot{\gamma})$ est prise en compte, l'énergie du mode 1 augmente très fortement.

Ce résultat, à priori très encourageant, est à prendre avec précaution. En effet, l'énergie du mode $n = 1$, même si elle a beaucoup augmentée, elle reste au demeurant faible et ne domine qu'à partir de $t \sim 500$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une simulation numérique bidimensionnelle de l'écoulement d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique en imposant comme condition initiale une perturbation d'amplitude finie sous forme d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Les fortes modifications du champ de viscosité sont décrites et mises en relation avec le champ de vitesse. Comme dans le cas Newtonien, aux temps longs, l'écoulement relaminarise. Aux temps courts, l'amplification de l'énergie est plus faible que dans le cas Newtonien. Ceci provient de la réduction de l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation. Cette réduction est encore plus marquée

lorsqu'on ne tient pas compte de la perturbation de la viscosité. Finalement, l'étude de l'équation d'énergie a permis de quantifier la réduction de la dissipation visqueuse.

Une analyse des échanges d'énergie entre modes est ensuite proposée. Pour ressortir l'effet de la non linéarité $\mu(\dot{\gamma})$, on a annulé artificiellement le terme non linéaire $(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$. Dans ce cas, l'amplification est plus importante que celle que l'on aurait s'il n'y avait que les termes linéaires.

Analyse linéaire de stabilité des stries

Sommaire

5.1	Description de l'écoulement de base	86
5.2	Analyse linéaire de stabilité	88
5.2.1	Équations gouvernant le problème	88
5.2.2	Décomposition en modes normaux	91
5.3	Résolution numérique	94
5.4	Résultats	95
5.4.1	Courbes de dispersion	95
5.4.2	Spectre de valeurs propres	98
5.4.3	Propriétés des modes critiques	98
5.4.4	Conditions critiques	100
5.4.5	Équation de l'énergie	102
5.4.6	Amplitude critique de la perturbation initiale : Analyse asymptotique	110
5.5	Conclusions	112

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé la stabilité de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide rhéofluidifiant dans une conduite cylindrique vis-à-vis d'une perturbation d'amplitude finie. Comme le suggéraient les résultats expérimentaux, la perturbation initiale est sous forme d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. La composante radiale de la vitesse modifie l'organisation de l'écoulement axial et conduit à la formation de stries de basse et haute vitesse. Ce nouvel écoulement de base peut devenir instable vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle en particulier du fait de l'existence de points d'inflexion dans les profils de vitesse axiale. L'objectif de ce chapitre est double : (i) étudier la stabilité linéaire de ce nouvel écoulement de base et (ii) déterminer l'amplitude de la perturbation initiale en fonction du nombre de Reynolds pour avoir une stabilité neutre.

L'analyse linéaire de stabilité d'un écoulement en présence des stries a fait l'objet de plusieurs articles en Couette plan et Poiseuille plan [Reddy *et al.* 1998], [Park *et al.* 2011] et surtout en couche limite [Andersson *et al.* 2001], [Cossu & Brandt 2004]. A notre connaissance, cette étude n'a pas été effectuée dans la littérature en conduite cylindrique et encore moins pour un fluide non Newtonien. Le chapitre est structuré comme suit : Le premier paragraphe est consacré à la description de l'écoulement de base. En se basant sur les résultats du chapitre 4, les composantes radiale et azimutale de l'écoulement de base peuvent être négligées et le vecteur vitesse se réduit uniquement à sa composante axiale \tilde{W}_b . Après avoir défini l'amplitude des stries, les contours de \tilde{W}_b , $\partial\tilde{W}_b/\partial r$, $(1/r)\partial\tilde{W}_b/\partial\theta$ ainsi que ceux de la viscosité sont donnés. Dans le deuxième paragraphe, nous présentons la formulation théorique de l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de base bidimensionnelle \tilde{W}_b . Le troisième paragraphe est dédié à la résolution numérique du problème aux valeurs propres qui en résulte. Les résultats sont présentés et discutés au quatrième paragraphe. La variation des conditions critiques en fonction de l'indice de rhéofluidification est déterminée. Les propriétés des modes instables sont examinées en utilisant l'équation de l'énergie. Finalement, l'amplitude minimale des rouleaux contra-rotatifs nécessaire à la transition est déterminée. Un comportement asymptotique en Re^γ est recherché. Le dernier paragraphe est une conclusion où nous rappelons l'essentiel des résultats.

5.1 Description de l'écoulement de base

Comme il a été indiqué en introduction, les résultats expérimentaux nous ont amené à étudier l'évolution non linéaire de l'écoulement obtenu en superposant à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide rhéofluidifiant une perturbation sous forme de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Il s'avère que cette perturbation est la perturbation optimale [Carranza *et al.* 2012], *i. e.* la perturbation qui permet d'avoir la plus grande amplification de l'énergie avant de décroître et tendre vers zéro aux temps longs. Par le mécanisme de *lift-up* décrit par [Landahl 1975], les rouleaux contra rotatifs d'amplitude $\sqrt{\varepsilon_0}$ génèrent deux stries de haute et basse vitesse, d'amplitude $O(\sqrt{\varepsilon_0}Re_w)$ sur un temps $O(Re_w)$. Comme cela a déjà été expliqué dans le chapitre 4, lorsque l'amplitude de la perturbation initiale est suffisamment importante, les termes non linéaires d'inertie, ne peuvent plus être négligés. Le profil de vitesse axiale s'aplatit par l'action des contraintes de Reynolds, ce qui conduit à une saturation de l'énergie des stries [Waleffe 1995]. L'amplitude des stries

peut être définie soit par son énergie cinétique $\varepsilon(t)$ soit par l'amplitude des stries $A(t)$ [Andersson *et al.* 2001] :

$$A(t) = \frac{1}{2} \left[\max_{r,\theta} \left(\tilde{W}_b(t, r, \theta) - W_b(r) \right) - \min_{r,\theta} \left(\tilde{W}_b(t, r, \theta) - W_b(r) \right) \right], \quad (5.1)$$

où $W_b(r)$ est l'écoulement laminaire de Poiseuille et $\tilde{W}_b(t, r, \theta)$ est la vitesse axiale de l'écoulement au temps t en présence des stries. Dans ce qui suit l'amplitude des stries sera exprimée en pourcentage par rapport à la vitesse maximale de l'écoulement laminaire de Poiseuille. La figure 5.1(a) montre l'influence de l'indices de rhéofluidification n_c , de l'énergie de la perturbation initiale ε_0 et du nombre de Reynolds sur l'évolution de l'amplitude des stries. La rhéofluidification fait diminuer la croissance transitoire comme cela a été indiqué dans le chapitre 3. Le temps t_{max} au bout duquel l'amplitude des stries A est maximale, diminue faiblement avec la rhéofluidification. Comme on pouvait s'y attendre, $\varepsilon(t)$ et $A(t)$ augmentent avec Re_w . On peut encore noter que $A(t)$ atteint son maximum un peu avant $\varepsilon(t)$. Lorsque $\varepsilon(t)$ atteint son maximum, $A(t)$ a commencé à décroître. Par la suite, nous utiliserons $A(t)$ pour quantifier la taille de la perturbation primaire. En effet, c'est l'amplitude des stries qui est à l'origine des instabilités secondaires.

Les écoulements de base considérés pour l'analyse de stabilité secondaire sont extraits des simulations numériques directes à l'instant $t = t_{max}$, où l'amplitude des stries est maximale. La figure 5.2 montre les contours d'iso-vitesse axiale à $t = t_{max}$ dans une section (r, θ) , ainsi que les contours d'iso-viscosité associés pour un fluide Newtonien et deux fluides de Carreau ($n_c = 0.5$ et $n_c = 0.3$). Les résultats obtenus confirment la réduction de l'amplitude des stries en augmentant les effets rhéofluidifiants. Il convient de noter la symétrie de l'écoulement de base par rapport à l'axe vertical représenté en pointillés. Cet axe sépare les deux rouleaux contrarotatifs de la perturbation, introduite à $t = 0$. La figure 5.3 rend compte de l'influence de ε_0 sur la réorganisation de l'écoulement à $Re_w = 2000$, et pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$. Comme les mécanismes d'instabilité sont liés aux gradients radial et azimutal de la vitesse axiale, nous avons alors représenté les contours de $\left| \partial \tilde{W}_b / \partial r \right|$ et $\left[(1/r) \partial \tilde{W}_b / \partial \theta \right]$ pour un fluide Newtonien et un fluide de Carreau à ε_0 et Re_w fixés respectivement 10^{-3} et 2000. Le cisaillement radial est maximal à la paroi dans la zone de haute vitesse. Il augmente de manière significative avec la rhéofluidification. Le cisaillement azimutal est maximal dans la zone décélérée de part et d'autre de l'axe de symétrie de l'écoulement de base. On peut noter que $\left| \partial \tilde{W}_b / \partial r \right| > \left[(1/r) \partial \tilde{W}_b / \partial \theta \right]$. La modification de la viscosité dans les figures 5.2 et 5.3 est due essentiellement au cisaillement

radial.

5.2 Analyse linéaire de stabilité

5.2.1 Équations gouvernant le problème

L'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de base décrit dans le paragraphe précédent est effectuée moyennant un ensemble d'hypothèses proposées par [Reddy *et al.* 1998] : (i) Les composantes radiale et azimutale de la vitesse sont négligeables par rapport à la composante axiale de la vitesse. (ii) Le profil de vitesse axiale est figé dans le temps et ne dépend pas de z . (iii) Le temps caractéristique de décroissance des stries est beaucoup plus important que le temps caractéristique associé à l'instabilité des stries.

En conséquence des points (i) et (iii), la vitesse de l'écoulement de base est donnée par $\tilde{\mathbf{U}}_b = (0, 0, \tilde{W}_b(r, \theta))$. De manière classique, une perturbation infinitésimale (\mathbf{u}, p) , est superposée à $(\tilde{\mathbf{U}}_b, \tilde{P}_b)$. Le terme non linéaire d'inertie $\mathbf{N}_{inertie}$ de l'équation (2.28) est négligé et la quantité $\mathbf{N}_{visq} = \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b(r, \theta) + \mathbf{u}(t, r, \theta, z)) - \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b(r, \theta))$ est linéarisée autour de l'écoulement de base $(\tilde{\mathbf{U}}_b(r, \theta), P_b(r, \theta))$:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= - \left(\tilde{\mathbf{U}}_b \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{U}}_b - \nabla p + \nabla \cdot \left[\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b) \right]_{\ell}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où l'indice "ℓ" signifie linéarisée. Ces équations sont complétées par la condition d'adhérence à la paroi. La linéarisation du déviateur du tenseur des contraintes $[\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b)]$ est similaire à celle effectuée dans le cas 1D. Elle commence pour un développement au premier ordre de la viscosité $\mu(\tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{u})$ autour de $\tilde{\mu}_b = \mu(\tilde{\mathbf{U}}_b)$:

$$\mu(\tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{u}) \approx \tilde{\mu}_b + \frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{U}}_b)}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \cdot \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{U}}_b)}{\partial \dot{\gamma}_{\theta z}} \cdot \dot{\gamma}_{\theta z}(\mathbf{u}). \quad (5.3)$$

Nous définissons la perturbation linéarisée de la viscosité μ' par :

$$\mu' = \frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{U}}_b)}{\partial \dot{\gamma}_{rz}} \cdot \dot{\gamma}_{rz}(\mathbf{u}) + \frac{\partial \mu(\tilde{\mathbf{U}}_b)}{\partial \dot{\gamma}_{\theta z}} \cdot \dot{\gamma}_{\theta z}(\mathbf{u}). \quad (5.4)$$

Ainsi,

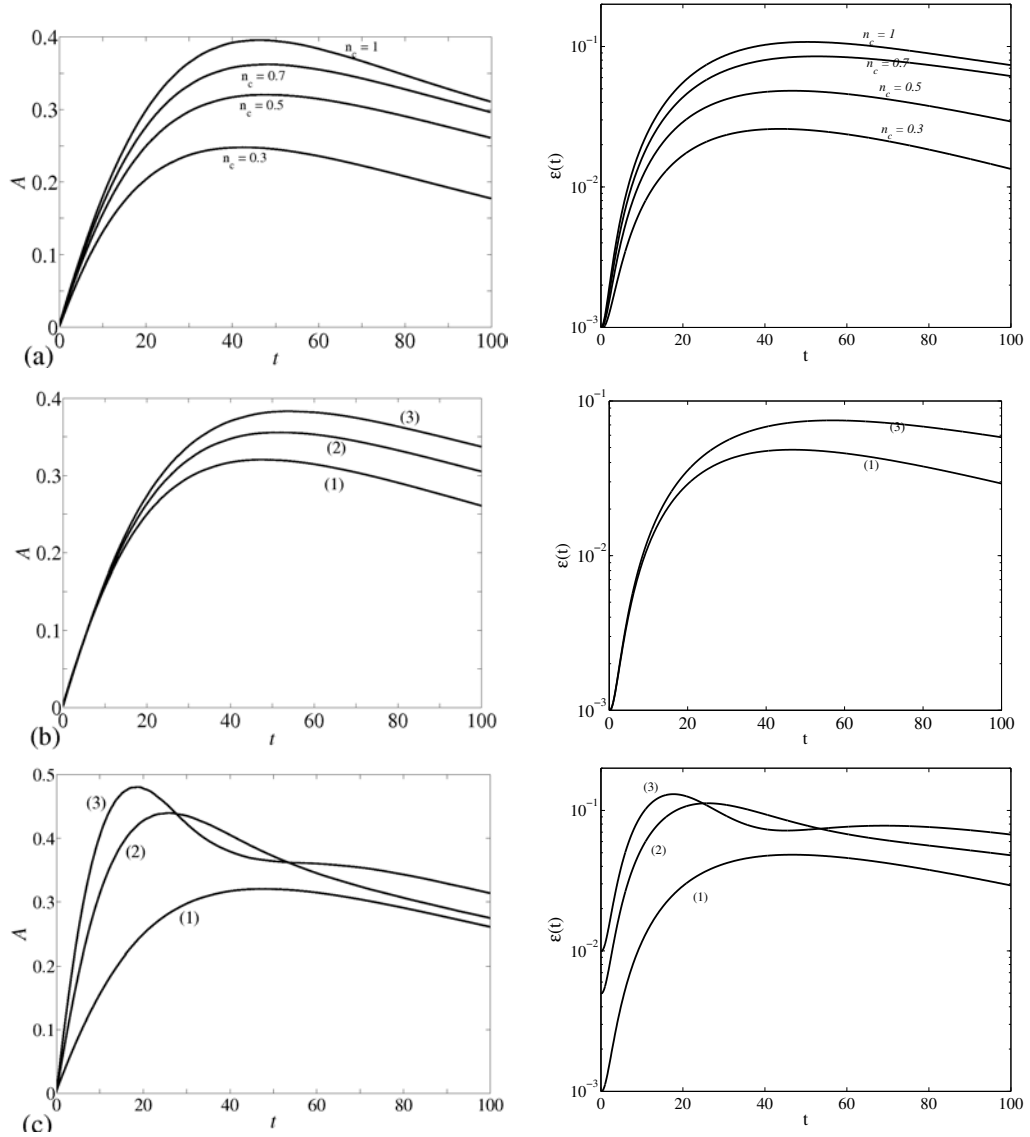


FIGURE 5.1: (gauche) Amplitude des stries $A(t)$ et (droite) énergie cinétique de la perturbation en fonction du temps. **(a)** Effet de la rhéofluidification à $Re_w = 2000$ et $\varepsilon_0 = 10^{-3}$. **(b)** Effet du nombre de Reynolds pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ pour (1) $Re_w = 2000$, (2) $Re_w = 2500$ et (3) $Re_w = 3000$. **(c)** Effet de l'énergie initiale des rouleaux, ε_0 , pour $Re_w = 2000$ et $n_c = 0.5$: (1) $\varepsilon_0 = 10^{-3}$; (2) $\varepsilon_0 = 5 \times 10^{-3}$ et (3) $\varepsilon_0 = 10^{-2}$.

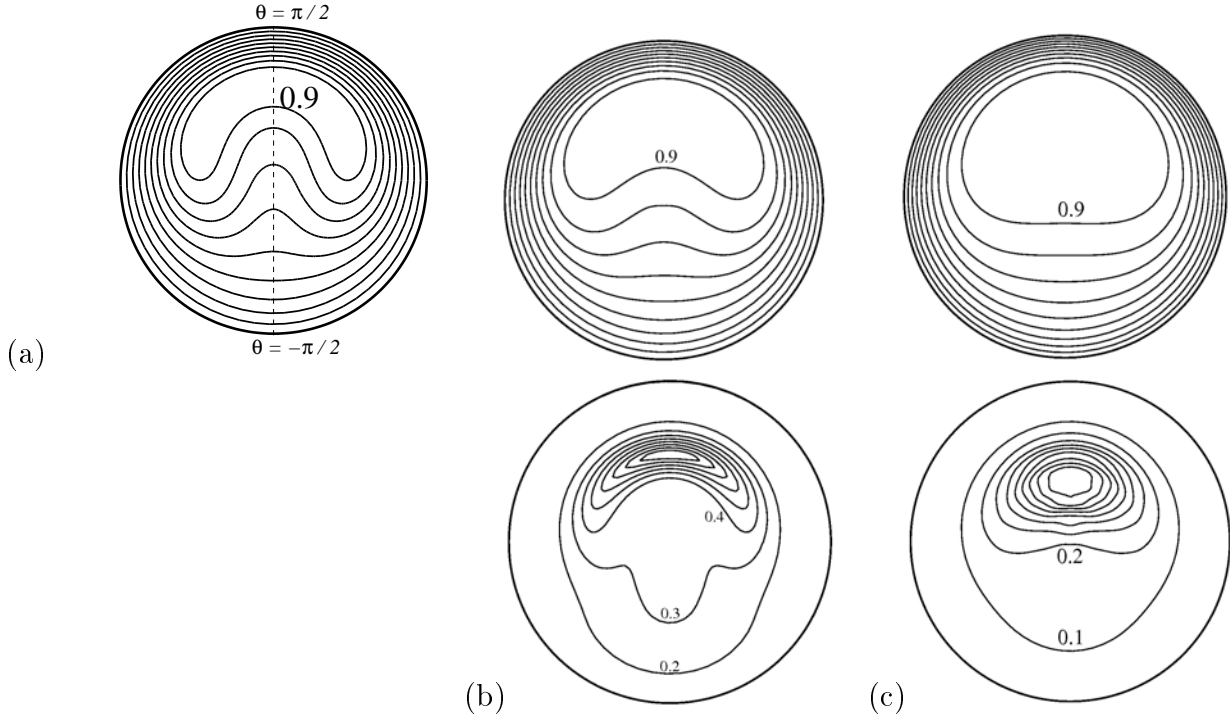


FIGURE 5.2: Iso-contours de vitesse axiale normalisée (haut) $\tilde{W}_b(r, \theta)/\tilde{W}_{b,max}$ et de viscosité (bas) $\tilde{\mu}(r, \theta)$ dans la section (r, θ) , extraits d'une simulation numérique directe à $t = t_{max}$ et $Re_w = 2000$ avec $\varepsilon_0 = 10^{-3}$. Le pas entre iso-contours est 0.1. **(a)** Cas Newtonien, $A_{max} = 36.6\%$, $\tilde{W}_{b,max} = 0.902$. **(b)** Cas d'un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$, $A_{max} = 32.05\%$, et $\tilde{W}_{b,max} = 0.9688$. **(c)** Cas d'un fluide de Carreau avec $n_c = 0.3$, $A_{max} = 24.8\%$ et $\tilde{W}_{b,max} = 0.9943$.

$$\boldsymbol{\tau}' = [\boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\tilde{\mathbf{U}}_b)]_\ell = \frac{1}{Re} (\tilde{\mu}_b + \mu') (\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\mathbf{U}}_b) + \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})) - \mu_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\mathbf{U}}_b). \quad (5.5)$$

La perturbation linéarisée du déviateur du tenseur des contraintes est alors :

$$\boldsymbol{\tau}' = \frac{1}{Re} \left(\tilde{\mu}_b \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) + \mu' \dot{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{\mathbf{U}}_b) \right). \quad (5.6)$$

Soit :

$$\tau'_{ij} = \frac{1}{Re} \tilde{\mu}_b \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) \quad \text{si } ij \neq rz, zr, \theta z, z\theta \quad (5.7)$$

$$\tau'_{ij} = \frac{1}{Re} \left(\tilde{\mu}_b \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{u}) + \mu' \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{U}}_b) \right) \quad \text{si } ij = rz, zr, \theta z, z\theta \quad (5.8)$$

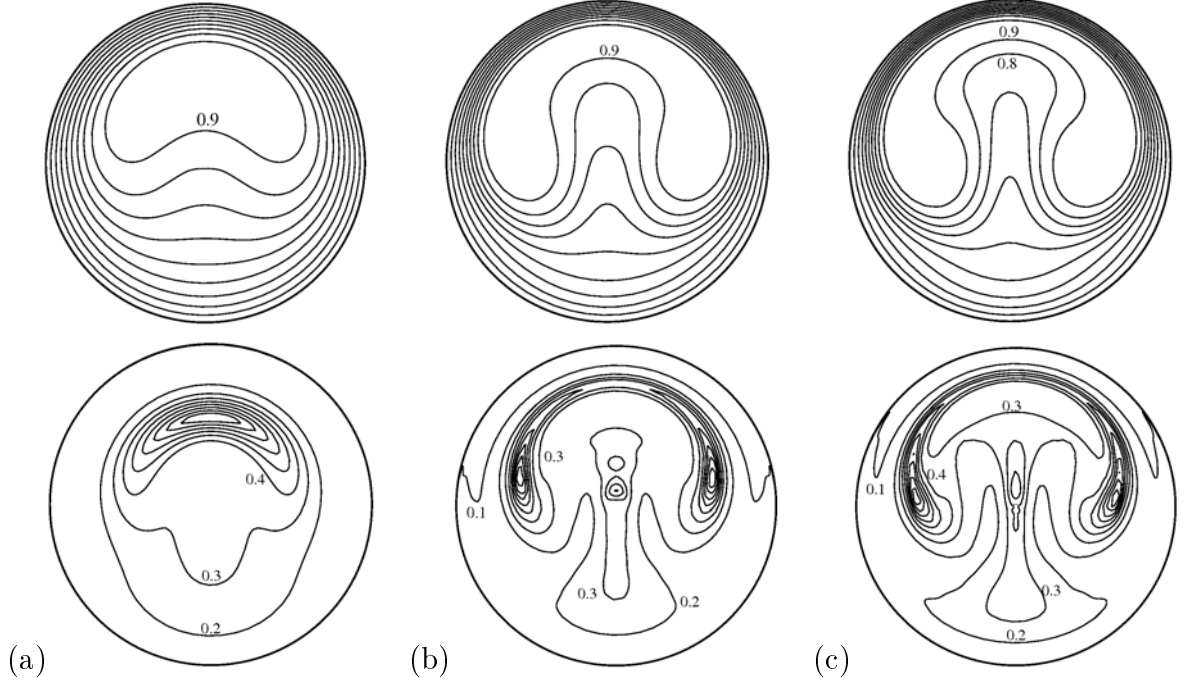


FIGURE 5.3: Iso-contours de vitesse axiale normalisée (haut) $\tilde{W}_b(r, \theta)/\tilde{W}_{b,max}$ et de viscosité (bas) $\tilde{\mu}(r, \theta)$ dans la section (r, θ) extraits d'une simulation numérique directe à $t = t_{max}$ et à $Re_w = 2000$ pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$: Effet de la taille de la perturbation initiale ε_0 . Le pas entre iso-contours est de 0.1. **(a)** $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, $A_{max} = 32.05\%$ et $\tilde{W}_{b,max} = 0.9688$. **(b)** $\varepsilon_0 = 5 \times 10^{-3}$, $A_{max} = 43.96\%$ et $\tilde{W}_{b,max} = 0.9294$ **(c)** $\varepsilon_0 = 10^{-2}$, $A_{max} = 48.5\%$, $\tilde{W}_{b,max} = 0.9391$. (bas) Iso-contours de viscosité associés.

5.2.2 Décomposition en modes normaux

Nous considérons des perturbations sous forme d'ondes qui se propagent dans la direction axiale :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = \tilde{\mathbf{u}}(r, \theta)e^{(ikz + \sigma t)} + \text{c. c.} \quad (5.9)$$

$$p(r, \theta, z, t) = \tilde{p}(r, \theta)e^{(ikz + \sigma t)} + \text{c. c.} \quad (5.10)$$

$$(5.11)$$

où k réel, est le nombre d'onde axial et $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. La partie réelle σ_r est le taux d'amplification ou d'amortissement temporelle de la perturbation. La partie imaginaire σ_i est liée à la vitesse de phase c par la relation $c = -\sigma_i/k$.

En remplaçant \mathbf{u} et p par leurs expressions (5.9) et (5.10) dans (5.2 - 5.3), on obtient :

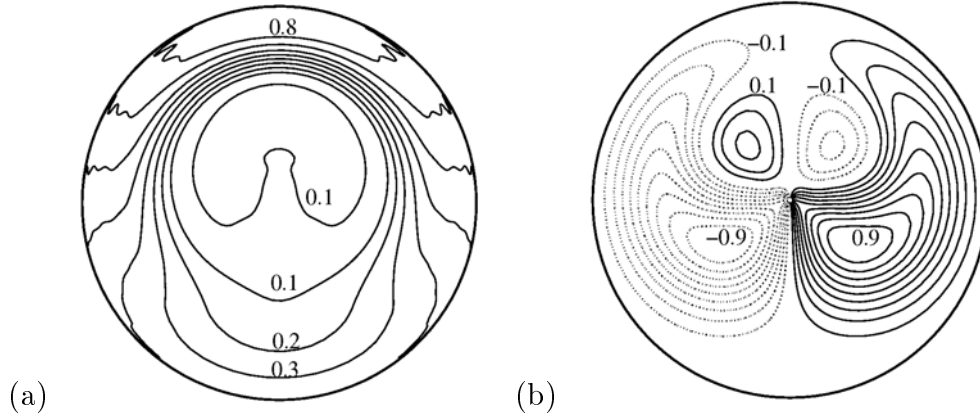


FIGURE 5.4: Iso-contours du taux de cisaillement pour un fluide Newtonien à $Re = 2000$ et $\varepsilon_0 = 10^{-3}$: **(a)** Contours de $\left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right| / \left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right|_{max}$, avec $\left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right|_{max} = 4.05$. **(b)** Contours de $\left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right] / \left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right]_{max}$, avec $\left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right]_{max} = 0.737$.

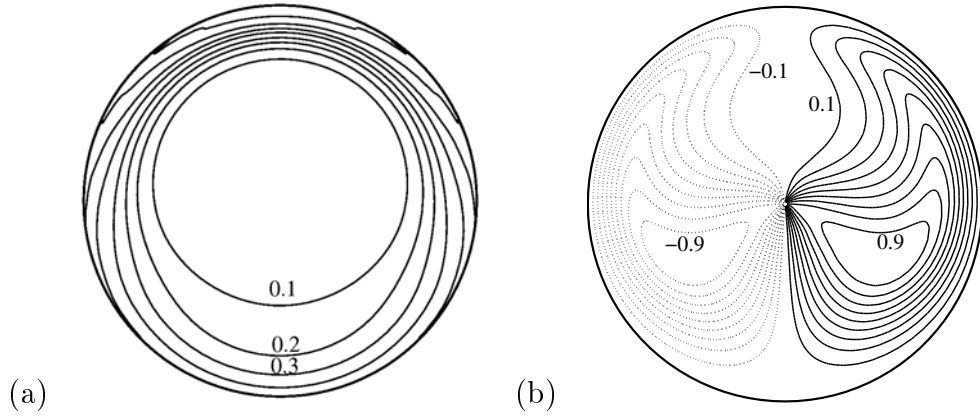


FIGURE 5.5: Iso-contours du taux de cisaillement pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.3$ et $Re_w = 2000$ et $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. **(a)** Contours de $\left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right| / \left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right|_{max}$ avec $\left| \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right|_{max} = 6.77$. **(b)** Contours de $\left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right] / \left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right]_{max}$ avec $\left[\frac{(1/r) \partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right]_{max} = 0.377$.

$$\sigma \tilde{u} = -\partial_r \tilde{p} - ik \tilde{W}_b \tilde{u} + \frac{1}{r} \partial_r (r \tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{\tau}_{\theta r} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} + ik \tilde{\tau}_{rz} \quad (5.12)$$

$$\sigma \tilde{v} = -\frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{p} - ik \tilde{W}_b \tilde{v} + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tilde{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{\tau}_{\theta\theta} + ik \tilde{\tau}_{\theta z} \quad (5.13)$$

$$\sigma \tilde{w} = -ik \tilde{p} - \tilde{u} \partial_r \tilde{W}_b - ik \tilde{W}_b \tilde{w} + \frac{1}{r} \partial_r (r \tilde{\tau}_{rz}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{\tau}_{\theta z} + ik \tilde{\tau}_{zz} \quad (5.14)$$

$$\partial_r \tilde{u} + \frac{\tilde{u}}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta \tilde{v} + ik \tilde{w} = 0, \quad (5.15)$$

où

$$\tilde{\tau}_{ij} = \frac{1}{Re} \tilde{\mu}_b \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \text{si } ij \neq rz, zr, \theta z, z\theta \quad (5.16)$$

$$\tilde{\tau}_{ij} = \frac{1}{Re} \left(\tilde{\mu}_b \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{U}}_b) \right) \quad \text{si } ij = rz, zr, \theta z, z\theta \quad (5.17)$$

où μ' est donnée par l'équation (5.4). Le système (5.12 - 5.14) peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma \tilde{\mathbf{u}} = \mathbb{L}_{2D}(\tilde{\mathbf{u}}). \quad (5.18)$$

Le système (5.12 - 5.14) constitue un problème aux valeurs propres où σ est la valeur propre et $\tilde{\mathbf{u}}(r, \theta)$ et $\tilde{p}(r, \theta)$ sont les fonctions propres. Celles ci sont décomposées en séries de Fourier suivant la direction azimutale, θ .

$$\tilde{\mathbf{u}}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_n(r) e^{in\theta}, \quad (5.19)$$

$$\tilde{p}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(r) e^{in\theta}. \quad (5.20)$$

De la même façon $\tilde{\mathbf{U}}_b(r, \theta)$ et $\tilde{\mu}_b(r, \theta)$ sont décomposées en séries de Fourier suivant θ :

$$\tilde{\mathbf{U}}_b(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_{b,n}(r) e^{in\theta} \quad (5.21)$$

$$\tilde{\mu}_b(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}_{b,n}(r) e^{in\theta} \quad (5.22)$$

En utilisant les expressions (5.19 - 5.22) dans le problème aux valeurs propres (5.12 - 5.15), on obtient un système infini d'équations couplées. En regroupant les termes en $\exp(in\theta)$, le système devient :

$$\sigma \tilde{u}_n = -\partial_r \tilde{p}_n - i k \left[\tilde{W}_b \otimes \tilde{u} \right]_n + \frac{1}{r} \partial_r (r [\tilde{\tau}_{rr}]_n) + \frac{1}{r} i n [\tilde{\tau}_{\theta r}]_n - \frac{[\tilde{\tau}_{\theta\theta}]_n}{r} + i k [\tilde{\tau}_{rz}]_n \quad (5.23)$$

$$\sigma \tilde{v}_n = -\frac{i n}{r} \tilde{p}_n - i k \left[\tilde{W}_b \otimes \tilde{v} \right]_n + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 [\tilde{\tau}_{r\theta}]_n) + \frac{i n}{r} [\tilde{\tau}_{\theta\theta}]_n + i k [\tilde{\tau}_{\theta z}]_n \quad (5.24)$$

$$\sigma \tilde{w}_n = -i k \tilde{p}_n - \left[\tilde{u} \otimes \partial_r \tilde{W}_b \right]_n - i k \left[\tilde{W}_b \otimes \tilde{w} \right]_n + \frac{1}{r} \partial_r (r [\tilde{\tau}_{rz}]_n) + \frac{1}{r} i n [\tilde{\tau}_{\theta z}]_n + i k [\tilde{\tau}_{zz}]_n \quad (5.25)$$

$$\partial_r \tilde{u}_n + \frac{\tilde{u}_n}{r} + \frac{i n}{r} \tilde{v}_n + i k \tilde{w} = 0, \quad (5.26)$$

avec les produits de convolution du type :

$$\left[\tilde{W}_b \otimes \tilde{u} \right]_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{W}_{bj} \cdot u_{n-j} \quad (5.27)$$

$$\left[\tilde{\tau}_{ij} \right]_n = \left[\tilde{\mu}_b \otimes \tilde{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \right]_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{\mu}_{bj} \dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}_{n-j}) \quad (5.28)$$

$$(5.29)$$

5.3 Résolution numérique

Pour la résolution numérique, la série de Fourier est tronquée à l'ordre N et la perturbation \mathbf{u} est décomposée sur la base des fonctions $\Phi_{mn1}(r)$ données en annexe.

$$\mathbf{u}_n(r) = \sum_{s=1}^2 \sum_{m=0}^M a_{mn1}^{(s)} \Phi_{mn1}^{(s)}(r), \quad (5.30)$$

En utilisant la méthode de Petrov-Galerkin on arrive à un problème aux valeurs propres généralisé, pour chaque nombre d'onde k de la forme :

$$\sigma \mathbf{B} \mathbf{a} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad (5.31)$$

où le vecteur \mathbf{a} de dimension $(2N+1)(2M+2)$ est constitué par les éléments \mathbf{a}_m associés à chaque mode azimutal n :

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_{-N}, \dots, \mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_N]^T, \quad (5.32)$$

avec

$$\mathbf{a}_n = [a_{0n}^{(1)}, \dots, a_{Mn}^{(1)}, a_{0n}^{(2)}, \dots, a_{0n}^{(2)}]^T \quad (5.33)$$

\mathbf{B} est une matrice de $(2N+1)(2M+2) \times (2N+1)(2M+2)$ qui dépend de k . Elle est composée par $(2N+1)$ sous-matrices B_{nn} suivant la diagonale.

$$\begin{bmatrix} B_{-N-N} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & B_{00} & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & B_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

Les sous-matrices B_{nn} sont données par :

$$B_{nn} = \begin{bmatrix} (\tilde{\Phi}_n^{(1)}, \tilde{\Psi}_n^{(1)}) & (\tilde{\Phi}_n^{(2)}, \tilde{\Psi}_n^{(1)}) \\ (\tilde{\Phi}_n^{(1)}, \tilde{\Psi}_n^{(2)}) & (\tilde{\Phi}_n^{(2)}, \tilde{\Psi}_n^{(2)}) \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

\mathbf{A} est une matrice de $(2N + 1)(2M + 2) \times (2N + 1)(2M + 2)$. Elle est composée par $(2N + 1) \times (2N + 1)$ sous matrices A_{nn_1} .

$$\begin{bmatrix} A_{-N-N} & \dots & A_{-Nn_1} & \dots & A_{-NN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{n-N} & \vdots & A_{nn_1} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N-N} & \dots & \dots & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

$$(5.37)$$

Où A_{nn_1} est donné par

$$A_{nn_1} = \begin{bmatrix} (\mathbb{L}_{2D}(\tilde{\Phi}_{n_1}^{(1)}, \tilde{\mathbf{U}}_{bn_2}^{(1)}, \tilde{\Psi}_n^{(1)}) & (\mathbb{L}_{2D}(\tilde{\Phi}_{n_1}^{(2)}, \tilde{\mathbf{U}}_{bn_2}^{(2)}, \tilde{\Psi}_n^{(1)}) \\ (\mathbb{L}_{2D}(\tilde{\Phi}_{n_1}^{(1)}, \tilde{\mathbf{U}}_{bn_2}^{(1)}, \tilde{\Psi}_n^{(2)}) & (\mathbb{L}_{2D}(\tilde{\Phi}_{n_1}^{(2)}, \tilde{\mathbf{U}}_{bn_2}^{(2)}, \tilde{\Psi}_n^{(2)}) \end{bmatrix} \quad \text{si } |n_2| \leq N \quad (5.38)$$

$$A_{nn_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \text{si } |n_2| > N \quad (5.39)$$

avec n_1, n_2 tels que $n_2 = n - n_1$. La structure des matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} est donnée par la figure 5.6.

La résolution du problème aux valeurs propres (5.31) est effectué avec la fonction "eig" de MATLAB. Les valeurs propres sont considérées comme ayant convergé lorsqu'en augmentant la troncature (M, N) , par exemple, de (M, N) à $(M + 3, N + 3)$, la variation relative est inférieure à 0.5% pour les dix premières valeurs propres classées suivant leur partie réelle. Les valeurs de (M, N) utilisées dans les calculs sont indiqués dans les tableaux 5.1 et 5.2.

5.4 Résultats

5.4.1 Courbes de dispersion

La figure 5.7(a) représente le taux de croissance temporelle du mode le moins stable, $\sigma_{r,max}$, en fonction du nombre d'onde k pour différentes valeurs de l'indice de rhéofluidifi-

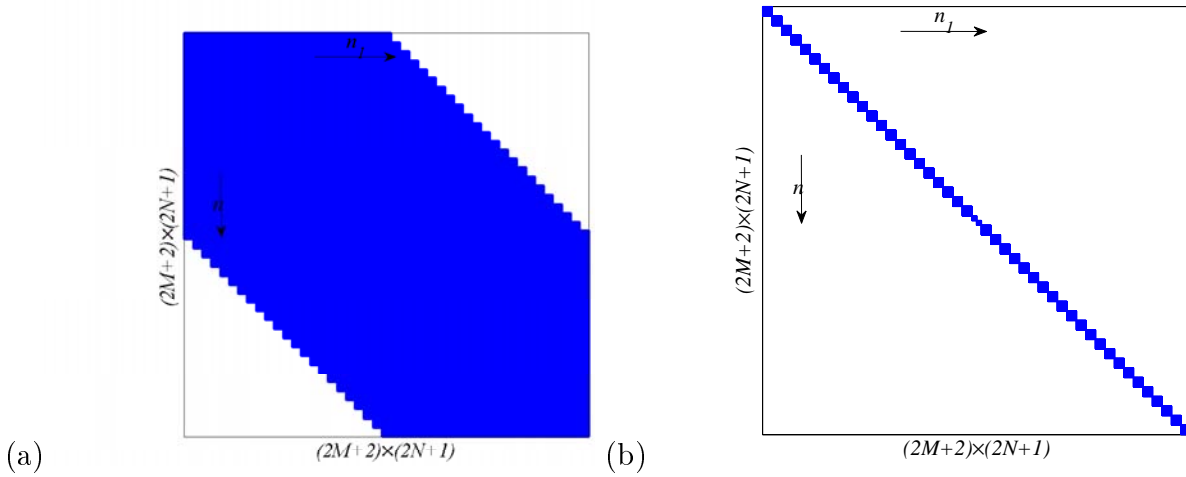


FIGURE 5.6: Forme des matrices pour l'analyse de la stabilité secondaire dans le cas d'un fluide de Carreau avec un nombre d'onde axial non nul. (a) matrice **A** (b) matrice **B**.

cation, n_c . Le nombre de Reynolds et ε_0 étant fixés. La décroissance de $\sigma_{r,max}$ signifie que la rhéofluidification stabilise l'écoulement. Ceci doit être relié à la diminution de l'amplitude des stries lorsque les effets rhéofluidifiants deviennent plus importants (figure 5.1(a)). La figure 5.7(b) montre qu'une augmentation de l'amplitude ε_0 de la perturbation initiale et donc de l'amplitude des stries s'accompagne d'un accroissement de $\sigma_{r,max}$. Nous pouvons aussi noter que le maximum se déplace vers des valeurs plus élevées de k et que l'instabilité est observée sur un plus grand intervalle du nombre d'onde axiale. De la même façon, l'augmentation du nombre de Reynolds, et donc de l'amplitude des stries (figure 5.1) s'accompagne d'un accroissement de $\sigma_{r,max}$, comme cela est illustré par la figure 5.8(a) pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$. Pour $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ (figure 5.8(a)), l'écoulement devient instable ($\sigma_r > 0$) lorsque le nombre de Reynolds devient supérieur à la valeur critique $Re_{w,c} = 2144$ avec $k_c = 2.21$, ce qui correspond à une amplitude critique des stries $A_c = 33.1\%$. Pour $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ (figure 5.8(b)), l'écoulement devient instable lorsque le nombre de Reynolds devient supérieur à la valeur critique $Re_w = 1168$ avec $k_c = 2.19$, ce qui correspond à une amplitude critique des stries $A_c = 41.5\%$. Les discontinuités de $\partial\sigma_{r,max}/\partial k$ observées dans les figures 5.7 et 5.8 correspondent à un changement dans la nature du mode dominant. Ceci est clairement illustré par la figure 5.9 où les vitesses de phases associées aux σ_r de la figure 5.8(b) sont représentées en fonction du nombre d'onde axial k . Globalement, deux types de modes sont identifiés. Le premier est une onde qui se

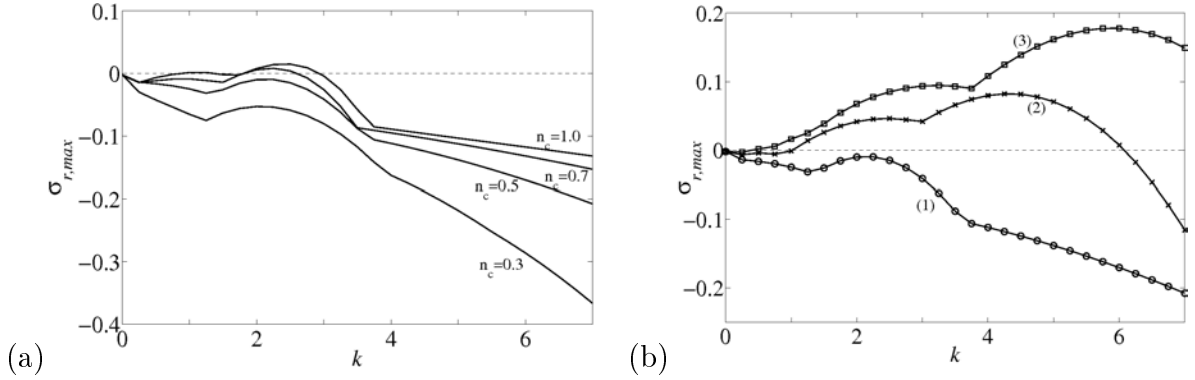


FIGURE 5.7: Taux de croissance temporelle du mode le moins stable, $\sigma_{r,max}$, en fonction du nombre d'onde k à $Re_w = 2000$. **(a)** Influence de la rhéofluidification à ε_0 fixé à 10^{-3} : (1) $n_c = 1$, $A = 39.5\%$; (2) $n_c = 0.7$, $A = 36.2\%$; (3) $n_c = 0.5$, $A = 32\%$ et (4) $n_c = 0.3$, $A = 24.5\%$. **(b)** Influence de l'amplitude de la perturbation initiale pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$: (1) $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, (2) $\varepsilon_0 = 5 \times 10^{-3}$, (3) $\varepsilon_0 = 10^{-2}$.

propage avec une vitesse de phase comprise entre 0.4 et 0.5, et le deuxième a une vitesse de phase comprise entre 0.8 et 0.9. Dans ce qui suit, une description approfondie de ces modes est proposée.

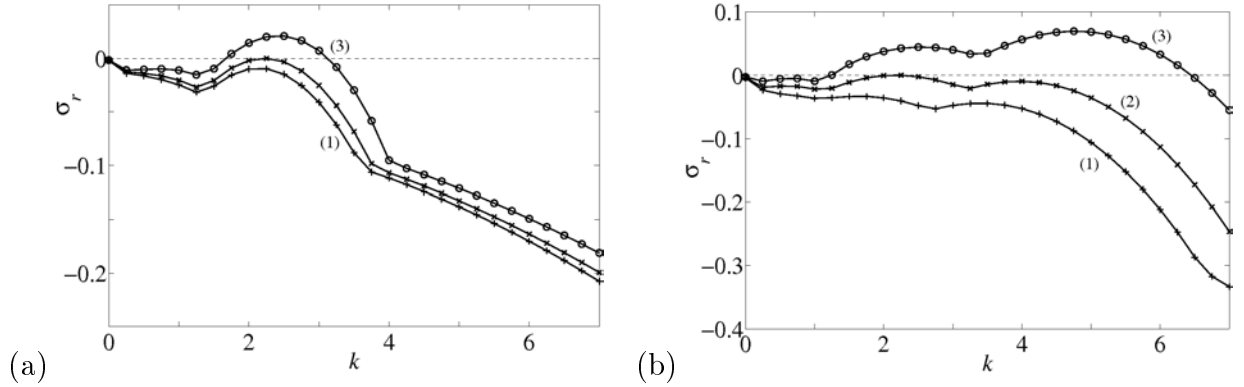


FIGURE 5.8: Taux de croissance temporelle σ_r en fonction du nombre d'onde axiale k pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$: Effet du nombre de Reynolds. **(a)** $\varepsilon_0 = 10^{-3}$: (1) $Re_w = 2000$, $A = 32\%$; (2) $Re_w = 2144$, $A = 33.1\%$ et (3) $Re = 2500$, $A = 35.5\%$. **(b)** $\varepsilon_0 = 10^{-2}$: (1) $Re_w = 1000$, $A = 39.4\%$; (2) $Re_w = 1176$, $A = 41.7\%$ et (3) $Re_w = 1500$, $A = 43.8\%$.

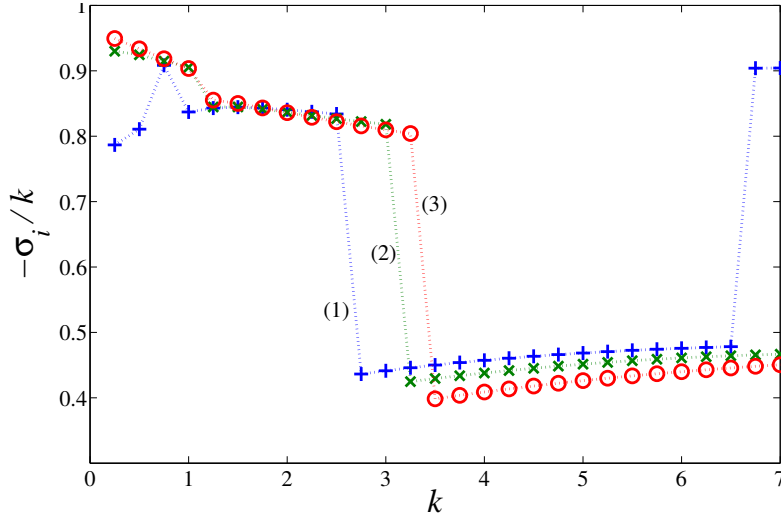


FIGURE 5.9: Vitesses de phase associées à la figure 5.8(b) : (1) $Re_w = 1000$, $A = 39.4\%$; (2) $Re_w = 1176$, $A = 41.7\%$ et (3) $Re_w = 1500$, $A = 43.8\%$.

5.4.2 Spectre de valeurs propres

Le spectre de valeurs propres aux conditions critiques est présenté dans la figure 5.10 pour un fluide Newtonien et pour un fluide de Carreau avec différents valeurs de l'indice de rhéofluidification. L'énergie de la perturbation initiale est fixée à $\varepsilon_0 = 10^{-2}$. On note une diminution significative des modes "dangereux" lorsque les effets rhéofluidifiants deviennent plus importants. Dans le cas Newtonien, le mode critique a une vitesse de phase $-\sigma_i/k = 0.78$ plus grande que la vitesse moyenne de l'écoulement de base $\langle \tilde{W}_b \rangle_{r,\theta}$. Lorsque le caractère rhéofluidifiant devient suffisamment marqué, ici $n_c = 0.39$, le mode critique a une vitesse de phase $-\sigma_i/k = 0.4 \ll \langle \tilde{W}_b \rangle_{r,\theta}$. La notation $\langle \cdot \rangle_{r\theta}$ signifie $1/\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cdot) r dr d\theta$.

5.4.3 Propriétés des modes critiques

Les modes critiques présentés dans le paragraphe précédent peuvent être caractérisés en représentant la distribution de l'énergie cinétique dans une section (r, θ) , moyennée sur une longueur d'onde axiale :

$$E_c = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 dz = \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{u}}|^2 = \frac{1}{2} [|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2 + |\tilde{w}|^2]. \quad (5.40)$$

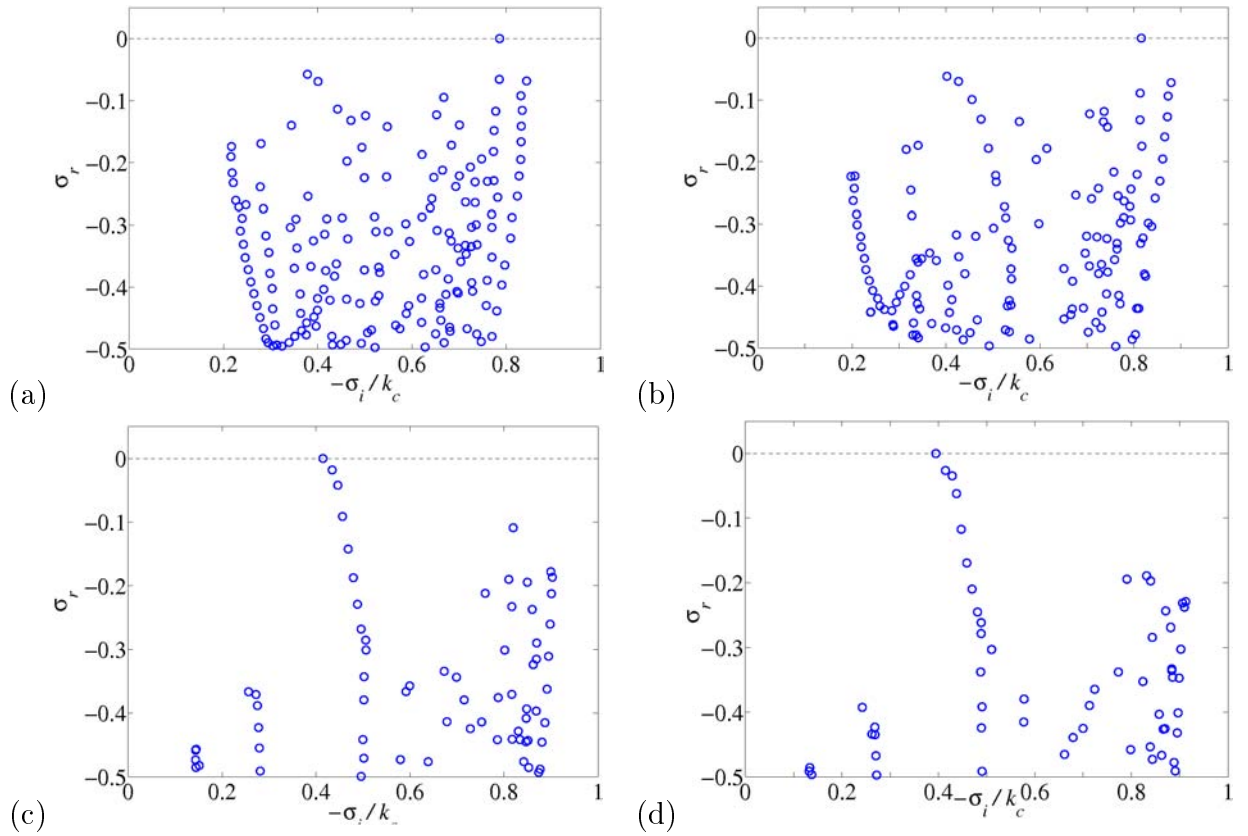


FIGURE 5.10: Spectres des valeurs propres en conditions critiques pour différents indices de rhéofluidification : **(a)** $n_c = 1$, (cas Newtonien), $Re = 965.3$, $k = 1.65$, $A_c = 45.4\%$; **(b)** $n_c = 0.7$, $Re_w = 994.4$, $k = 1.9$, $A_c = 42.98\%$; **(c)** $n_c = 0.39$, $Re_w = 1436$, $k = 4.49$, $A_c = 41.43\%$; **(d)** $n_c = 0.3$, $Re_w = 1730.8$, $k = 5.0$, $A_c = 32.73\%$.

La figure 5.11 montre les contours de E_c dans une section (r, θ) . Dans tous les cas, la distribution de l'énergie cinétique est symétrique par rapport à l'écoulement de base.

- Dans le cas Newtonien ou faiblement rhéofluidifiant, l'énergie cinétique de la perturbation est concentrée dans la région où l'écoulement est accéléré, plus ou moins proche du centre de la conduite. Le maximum se situe de part et d'autre de l'axe de symétrie. Ce mode sera appelé "mode central" par abus de langage.
- Dans le cas d'un fluide fortement rhéofluidifiant (ici $n_c \leq 0.39$), l'énergie cinétique de la perturbation est concentrée dans la partie de la section où l'écoulement est accéléré et dans une zone très proche de la paroi où le gradient radial de vitesse $\partial \tilde{W}_b / \partial r$ est le plus intense. Ce mode sera appelé "mode pariétal".

Des informations supplémentaires sur le mode critique sont obtenues en représentant les contours des différentes composantes $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$ de la fonction propre associée. Il s'avère que pour un mode dit *central* \tilde{u} et \tilde{w} sont antisymétriques et \tilde{v} est symétrique par rapport à l'écoulement de base, alors que pour un mode *pariétal*, \tilde{u} et \tilde{w} sont symétriques et \tilde{v} antisymétrique. En fait comme l'écoulement de base est symétrique par rapport à l'axe $[-\pi/2, \pi/2]$ (figure 5.2(a)), deux types de fonctions propres ressortent naturellement selon qu'elle soit paire ou impaire par rapport à l'écoulement de base. Dans ce qui suit le mode sera dit *impair* si \tilde{w} est impair par rapport à l'écoulement de base et *pair* dans le cas contraire. La figure 5.12 montre les contours de l'amplitude de \tilde{w} associée à un mode *central* (*impair*) pour un fluide Newtonien et à un mode *pariétal* (*pair*) pour un fluide de Carreau fortement rhéofluidifiant. Finalement, les résultats numériques montrent que pratiquement 75% de l'énergie cinétique de la perturbation provient de la composante axiale de la fonction propre.

5.4.4 Conditions critiques

Dans le paragraphe précédent, nous avons constaté, que pour une énergie des rouleaux longitudinaux ε_0 donnée, le mode critique passe d'un mode *central* et impair à un mode *pariétal* et pair lorsque les effets rhéofluidifiants deviennent suffisamment marqués. Ce résultat est clairement illustré par la discontinuité dans la courbe, vitesse de phase en fonction de l'indice de rhéofluidification n_c de la figure 5.13(a). Cette discontinuité est aussi observée dans l'évolution du nombre d'onde critique en fonction de n_c (Fig.5.13(b)), où le nombre d'onde critique augmente brusquement lors du passage d'un mode *central* à un

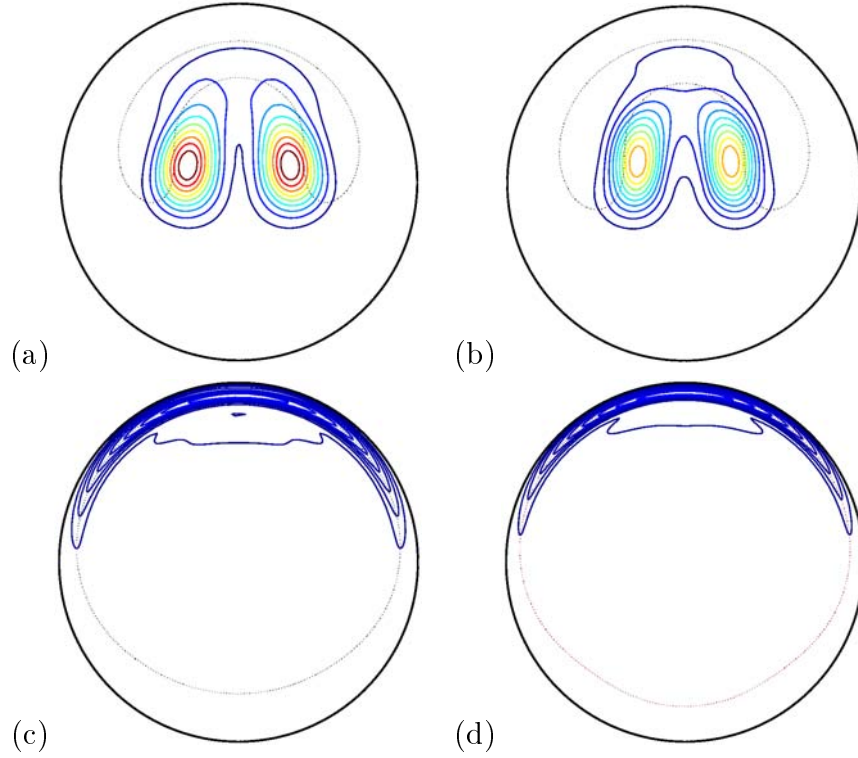


FIGURE 5.11: Contours d'énergie du mode le plus instable de la figure 5.10. Les traits discontinus représentent la ligne où la vitesse de l'écoulement de base est égale à la vitesse de phase de l'onde, $\tilde{W}_b = -\sigma_i/k$. **(a)** $n_c = 1$, cas Newtonien, $Re = 1476$, $k = 3.62$, $A_c = 34.63\%$; **(b)** $n_c = 0.7$, $Re_w = 1842$, $k = 3.41$, $A_c = 34.86\%$; **(c)** $n_c = 0.5$, $Re_w = 2478$, $k = 2.22$, $A_c = 35.44\%$ et **(d)** $n_c = 0.3$, $Re_w = 3467$, $k = 2.96$, $A_c = 32.73\%$.

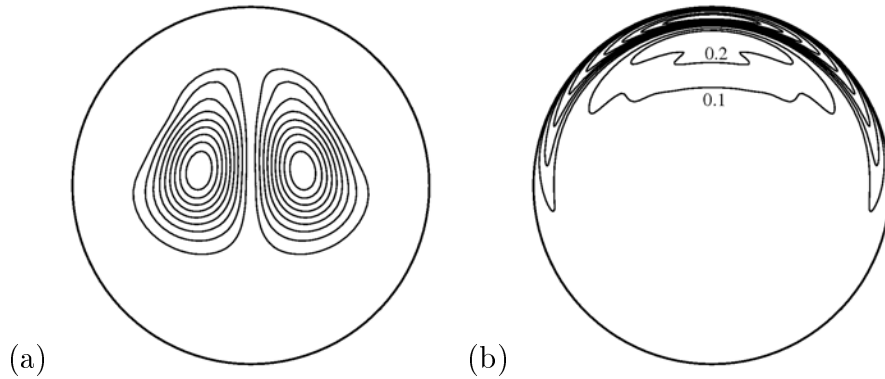


FIGURE 5.12: Contours de l'amplitude $\sqrt{|\tilde{w}|^2}$ de la composante axiale de la fonction propre, associé au mode le moins stable de la figure 5.10. **(a)** mode *impair*, $n_c = 1$ (cas Newtonien), $Re = 965.3$, $k = 1.65$; **(b)** mode *pair*, $n_c = 0.3$, $Re_w = 1730.8$, $k = 5.0$.

mode *pariétal*. L'augmentation du Reynolds critique lorsque n_c diminue, mise en évidence par la figure 5.13(c) montre que la rhéofluidification a un effet stabilisant. Finalement, il est intéressant de noter (dans la figure 5.13(d)) que l'amplitude critique des stries A_c diminue lorsque les effets de rhéofluidifiants sont plus marqués. Les tableaux 5.1 et 5.2 donnent les valeurs critiques pour $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ respectivement.

Sur la figure 5.14 nous avons reporté l'amplitude critique des stries en fonction du nombre de Reynolds critique pour l'ensemble des calculs effectués, où nous avons fait varier ε_0 entre 10^{-4} et 10^{-2} et n_c entre 0.3 et 1. Deux symboles différents sont utilisés pour distinguer les modes *pariétaux* et les modes *centraux*. La figure 5.14 montre que l'instabilité des stries est induite par les modes pariétaux ou centraux selon que A_c est inférieur ou supérieur à $\approx 41.5\%$ respectivement. Un nombre de Reynolds $Re_w \approx 940$ semble la limite inférieure pour avoir une stabilité intrinsèque. Ceci semble être valide pour l'ensemble des paramètres rhéologiques testés.

5.4.5 Équation de l'énergie

L'instabilité secondaire décrite dans le paragraphe précédent peut être analysée en termes d'échanges d'énergie entre l'écoulement de base primaire $\tilde{\mathbf{U}}_b$ et l'instabilité secondaire. Pour cela, nous utilisons l'équation de l'énergie cinétique de la perturbation. Celle-ci est obtenue à partir du produit scalaire des équations de conservation de la quantité de mouvement linéarisées (5.12 - 5.14) par le complexe conjugué $\tilde{\mathbf{u}}^*$ et par intégration sur

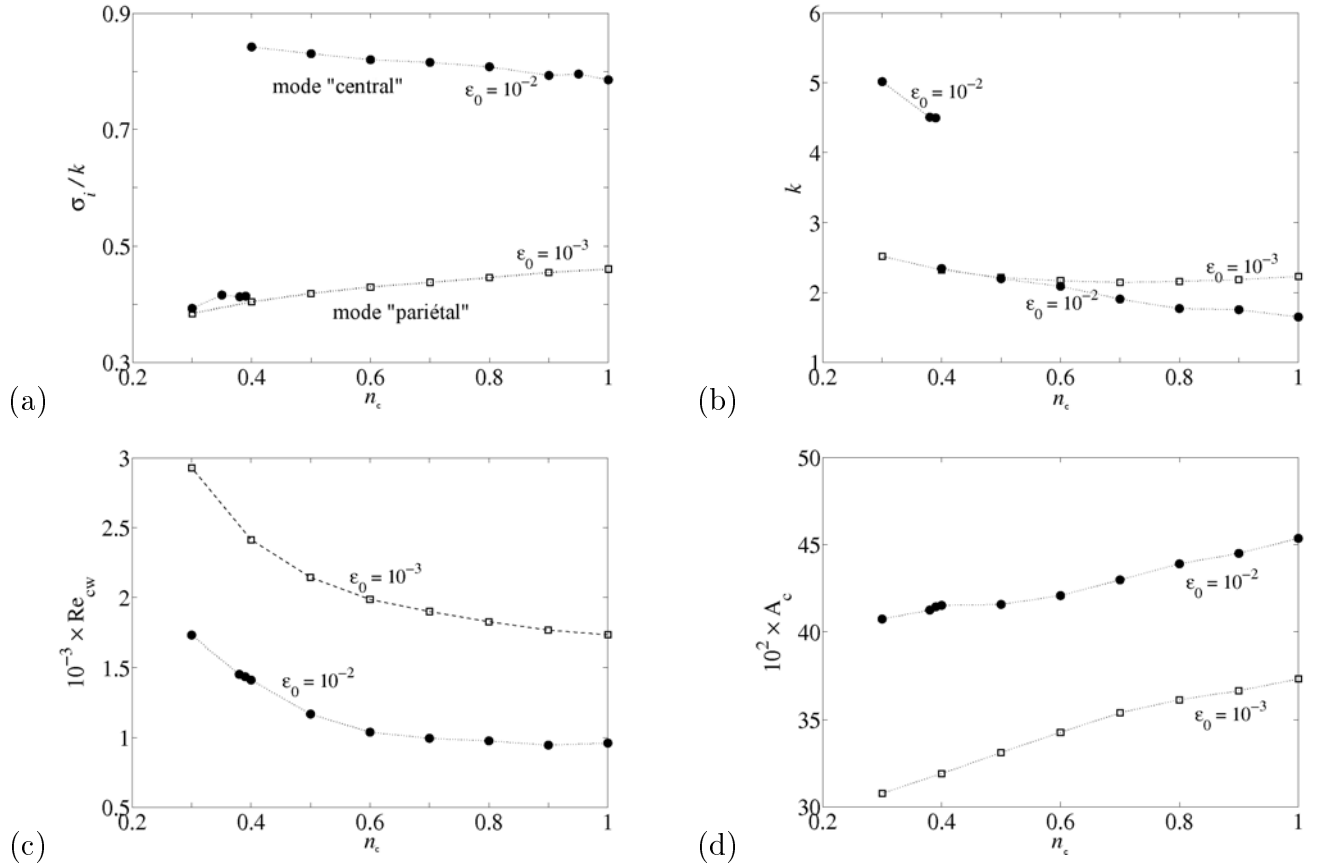


FIGURE 5.13: Effet de la rhéofluidification n_c sur les conditions critiques pour $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0 = 10^{-3}$. **(a)** Vitesse de phase; **(b)** nombre d'onde axial critique; **(c)** nombre de Reynolds critique et **(d)** Intensité critique de la perturbation primaire.

n_c	λ	ε_0	Re_c	k_c	σ_r	σ_i	$c = -\sigma_i/k_c$	A_c	M	N	Δt
1	0	10^{-2}	1004.8	1.5719	2.82×10^{-7}	-1.2458	0.79254	0.4594	16	16	1.00×10^{-3}
1	0	10^{-2}	986.7	1.6064	-4.12×10^{-6}	-1.2685	0.78965	0.4578	18	18	1.00×10^{-3}
1	0	10^{-2}	975	1.6279	-8.19×10^{-7}	-1.2823	0.78770	0.4558	20	20	5×10^{-4}
1	0	10^{-2}	965.3	1.6458	6.08×10^{-7}	-1.2937	0.78606	0.4544	22	22	2.50×10^{-4}
0.95	30	10^{-2}	986.1	1.6255	8.64×10^{-7}	-1.293	0.79544	0.4539	18	18	1.00×10^{-3}
0.9	30	10^{-2}	948.9	1.7523	5.14×10^{-7}	-1.3914	0.794042	0.4457	16	16	1.00×10^{-3}
0.9	30	10^{-2}	945.8	1.7514	-5.59×10^{-7}	-1.3899	0.793593	0.445	18	18	1.00×10^{-3}
0.8	30	10^{-2}	976.2	1.7715	-2.94×10^{-6}	-1.4312	0.80790	0.439	18	18	1.00×10^{-3}
0.7	30	10^{-2}	994.4	1.9062	-3.89×10^{-6}	-1.5546	0.815549	0.4298	18	18	1.00×10^{-3}
0.6	30	10^{-2}	1038.4	2.0902	-1.40×10^{-4}	-1.7142	0.820112	0.4208	18	18	1.00×10^{-3}
0.5	30	10^{-2}	1175.7	2.1569	5.81×10^{-5}	-1.7978	0.83351	0.4173	18	18	1.00×10^{-3}
0.5	30	10^{-2}	1168.3	2.1989	-2.77×10^{-6}	-1.8261	0.830460	0.4157	20	20	5.00×10^{-4}
0.4	30	10^{-2}	1412.4	2.3449	-9.38×10^{-6}	-1.9756	0.842509	0.4152	20	20	5.00×10^{-4}
0.39	30	10^{-2}	1436	4.4948	-1.02×10^{-4}	-1.8634	0.41456	0.4143	20	20	5.00×10^{-4}
0.38	30	10^{-2}	1453.1	4.5054	3.45×10^{-5}	-1.8629	0.41348	0.4125	20	20	5.00×10^{-4}
0.35	30	10^{-2}	1438.5	4.3193	-3.02×10^{-4}	-1.7997	0.41666	0.4007	20	20	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-2}	1545.7	4.8726	9.40×10^{-6}	-1.9789	0.40612	0.392	16	16	1.00×10^{-3}
0.3	30	10^{-2}	1650.7	5.0894	-1.50×10^{-5}	-2.0231	0.397519	0.3999	18	18	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-2}	1742.3	5.0152	4.88×10^{-5}	-1.9738	0.39356	0.4073	20	20	2.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-2}	1771.2	5.045	-1.12×10^{-5}	-1.992	0.39484	0.4099	22	22	2.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-2}	1730.8	5.0016	1.15×10^{-5}	-1.9879	0.39745	0.406	24	24	1.00×10^{-4}

TABLE 5.1: Résultats numériques et paramètres utilisés pour le calcul de la condition critique de l'analyse linéaire de stabilité. L'énergie initiale des rouleaux longitudinaux est $\varepsilon_0 = 10^{-2}$.

n_c	λ	ε_0	$Re_{w,c}$	k_c	σ_r	σ_i	$c = -\sigma_i/k_c$	A_c	M	N	Δt
1	0	10^{-3}	1748	2.2377	3.47×10^{-5}	-1.0299	0.46024	0.3747	16	16	10^{-3}
1	0	10^{-3}	1748	2.2379	2.69×10^{-6}	-1.03	0.46025	0.3746	16	16	2.50×10^{-3}
1	0	10^{-3}	1752.6	2.2639	5.62×10^{-6}	-1.0423	0.46040	0.3743	18	18	5.00×10^{-4}
1	0	10^{-3}	1742.4	2.2384	-1.17×10^{-7}	-1.0319	0.46099	0.3734	20	20	5.00×10^{-4}
1	0	10^{-3}	1731.9	2.2291	1.30×10^{-6}	-1.0307	0.46238	0.3719	22	22	2.50×10^{-4}
0.9	30	10^{-3}	1765.8	2.1844	3.40×10^{-6}	-0.9938	0.45495	0.3666	18	18	10^{-3}
0.8	30	10^{-3}	1826	2.1599	1.05×10^{-7}	-0.9643	0.44645	0.3614	18	18	10^{-3}
0.7	30	10^{-3}	1898.9	2.1455	3.33×10^{-5}	-0.9393	0.43780	0.3539	18	18	10^{-3}
0.6	30	10^{-3}	1986	2.1695	1.32×10^{-5}	-0.9327	0.42991	0.3427	18	18	5.00×10^{-4}
0.5	30	10^{-3}	2143.8	2.2143	4.89×10^{-7}	-0.9275	0.41886	0.3311	18	18	5.00×10^{-4}
0.4	30	10^{-3}	2414.1	2.3232	1.78×10^{-7}	-0.9391	0.40422	0.319	20	20	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-3}	2943.4	2.7057	-6.79×10^{-5}	-1.0236	0.37831	0.3089	16	16	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-3}	3162.4	2.4972	-5.69×10^{-7}	-0.9376	0.37546	0.3196	18	18	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-3}	3072.1	2.4412	-1.12×10^{-5}	-0.9309	0.38132	0.315	20	20	5.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-3}	2930.8	2.5214	1.13×10^{-7}	-0.9691	0.38434	0.3078	22	22	2.00×10^{-4}
0.3	30	10^{-3}	3000.9	2.5441	-2.90×10^{-7}	-0.9704	0.381431	0.3116	24	24	2.00×10^{-4}

TABLE 5.2: Résultats numériques et paramètres utilisés pour le calcul de la condition critique de l'analyse linéaire de stabilité. L'énergie initiale des rouleaux longitudinaux est $\varepsilon_0 = 10^{-3}$.

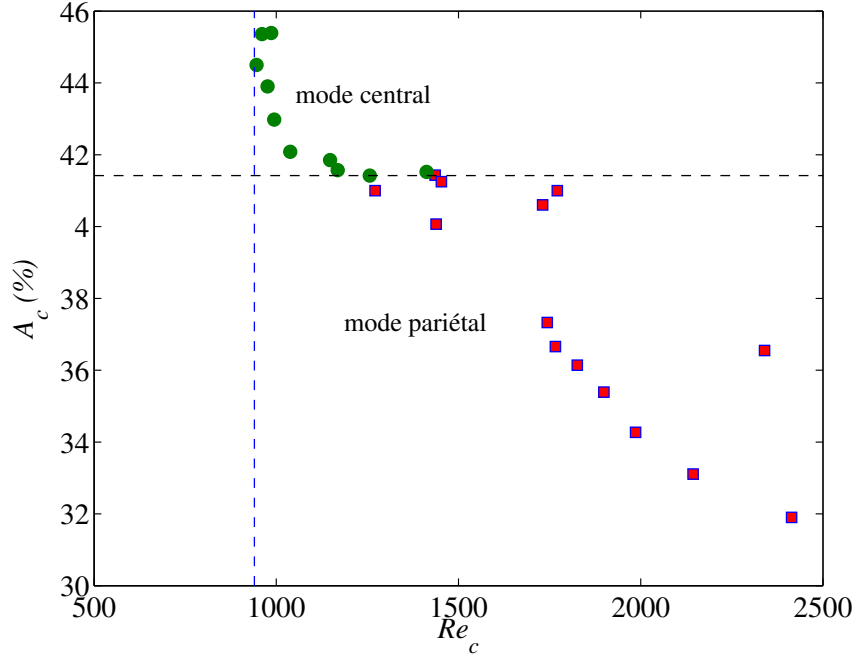


FIGURE 5.14: Amplitude critique des stries (A_c), en fonction du nombre de Reynolds critique pour l'ensemble des calculs effectués. Nous avons fait varier ε_0 entre 10^{-4} et 10^{-2} et n_c entre 0.3 et 1. Les modes centraux sont représentés en vert et les modes pariétaux en rouge.

section de la conduite. Avec la notation $\langle \cdot \rangle$ pour l'opération d'intégration nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_r \langle |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \rangle &= -\mathcal{R}e \left\langle \tilde{u}\tilde{w}^* \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right\rangle - \mathcal{R}e \left\langle \tilde{v}\tilde{w}^* \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right\rangle - \frac{1}{Re_w} \left\langle \frac{1}{2} \tilde{\mu}_b |\dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 \right\rangle \quad (5.41) \\ &- \mathcal{R}e \left\langle \frac{1}{Re_w} \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}}^*) \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right\rangle - \mathcal{R}e \left\langle \frac{1}{Re_w} \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{\theta z}(\tilde{\mathbf{u}}^*) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right\rangle. \end{aligned}$$

En comparaison avec le cas Newtonien, il y a deux termes additionnels, induits par la perturbation de la viscosité. Ces termes vont modifier la dissipation visqueuse. Ils peuvent être vus comme des "Contraintes de Reynolds non Newtoniennes" $(1/Re_w) \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}}^*)$ et $(1/Re_w) \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{r\theta}(\tilde{\mathbf{u}}^*)$ en interaction avec le cisaillement radial $(\partial \tilde{W}_b / \partial r)$ et le cisaillement azimutal $(1/r) (\partial \tilde{W}_b / \partial \theta)$ respectivement.

L'équation de l'énergie (5.41) peut être écrite de façon symbolique sous la forme :

$$\sigma_r = \frac{\mathcal{I}_{uw}}{E} + \frac{\mathcal{I}_{vw}}{E} + \frac{\mathcal{D}}{E}, \quad (5.42)$$

où $E = \langle |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \rangle_{r\theta}$ est l'énergie cinétique de la perturbation \mathbf{u} intégrée sur une section de la conduite et moyennée sur une longueur d'onde axiale. \mathcal{I}_{uw} représente l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation provenant du travail des contraintes de Reynolds " $-uw$ " sur le cisaillement radial ($\partial\tilde{W}_b/\partial r$) et \mathcal{I}_{vw} est associé au travail des contraintes des Reynolds " $-vw$ " sur le cisaillement azimutal ($(1/r)\partial\tilde{W}_b/\partial\theta$). Le dernier terme \mathcal{D} représente le taux de dissipation visqueuse. Il peut être écrit sous la forme d'une somme de quatre contributions : $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{D}_3 + \mathcal{D}_4$, avec

$$D_1 = -\frac{1}{Re_w} \left\langle \frac{1}{2} \tilde{\mu}_b |\dot{\gamma}_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})|^2 \right\rangle \quad (5.43)$$

$$D_2 = -\frac{1}{Re_w} \frac{\partial\tilde{\mu}_b}{\partial\tilde{\Gamma}_b} \left[\frac{\partial\tilde{W}_b}{\partial r} \right]^2 |\dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}})|^2, \quad (5.44)$$

$$D_3 = -\frac{1}{Re_w} \frac{\partial\tilde{\mu}_b}{\partial\tilde{\Gamma}_b} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{W}_b}{\partial\theta} \right]^2 |\dot{\gamma}_{\theta z}(\tilde{\mathbf{u}})|^2, \quad (5.45)$$

$$D_4 = -\frac{2}{Re_w} \frac{\partial\tilde{\mu}_b}{\partial\tilde{\Gamma}_b} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\tilde{W}_b}{\partial\theta} \frac{\partial\tilde{W}_b}{\partial r} \right] \mathcal{R}_e(\dot{\gamma}_{\theta z}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}}^*)), \quad (5.46)$$

où, $\tilde{\Gamma}_b = \dot{\gamma}^2(\tilde{W}_b)$ Le terme de dissipation visqueuse "Newtonienne" D_1 est négatif. Pour des fluides rhéofluidifiants, $\partial\mu_b/\partial\tilde{\Gamma}_b$ est négatif, par conséquent, D_2 et D_3 sont définis positifs. Ces termes réduisent la dissipation visqueuse. Ils peuvent aussi être considérés comme des termes source d'énergie pour la perturbation. Pour ce qui est D_4 , les résultats numériques indiquent qu'il est positif pour les cas considérés ici. Comme on pouvait s'y attendre, les résultats numériques montrent que la contribution de D_2 , D_3 et D_4 est d'autant plus significative que le fluide est rhéofluidifiant.

Remarque

De manière similaire à (5.41) nous pouvons écrire une équation pour la partie imaginaire (σ_i), et donc, pour la vitesse de phase :

$$\begin{aligned}
-\frac{\sigma_i}{k} \langle |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \rangle &= \langle \tilde{W}_b |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \rangle + \frac{1}{k} \mathcal{I}m \left\langle \tilde{u} \tilde{w}^* \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{k} \mathcal{I}m \left\langle \tilde{v} \tilde{w}^* \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right\rangle \\
&+ \frac{1}{k} \mathcal{I}m \left\langle \frac{1}{Re_w} \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}}^*) \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial r} \right\rangle + \frac{1}{k} \mathcal{I}m \left\langle \frac{1}{Re_w} \mu'(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\gamma}_{\theta z}(\tilde{\mathbf{u}}^*) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{W}_b}{\partial \theta} \right\rangle
\end{aligned} \tag{5.47}$$

Nous avons reporté les valeurs du coefficient d'amplification temporelle σ_r , de la vitesse de phase $-\sigma_i/k$ ainsi que les valeurs des intégrales \mathcal{I}_{uw}/E , \mathcal{I}_{vw}/E et \mathcal{D}/E dans les tableaux 5.3 et 5.4, pour $\varepsilon_0 = 10^{-2}$ et 10^{-3} respectivement. Les intégrales sont calculées par la méthode des trapèzes. Les résultats sont donnés aux conditions critiques ($Re_w = Re_{w,c}$). Il convient de noter : (i) σ_r évalué à partir de la partie droite de l'équation (5.41) coïncide avec celui obtenu à partir du problème aux valeurs propres. Ce résultat s'applique aussi à la vitesse de phase et l'équation (5.47). (ii) Le travail des contraintes de Reynolds ($-uw$) sur le cisaillement radial a un rôle dominant dans l'instabilité des stries. Des propriétés plus spécifiques pour le mode *pariétal* et le mode *central* sont données ci-dessous :

- Mode pariétal (pair) : La contrainte de Reynolds $-(uw)$ est négative et symétrique par rapport à l'écoulement de base. Elle est localisée au voisinage de la paroi, dans la partie supérieure où l'écoulement est accéléré, où $|\partial \tilde{W}_b / \partial r|$ est maximal. La contrainte de Reynolds $-(vw)$ est antisymétrique par rapport à l'écoulement de base. Elle est localisée dans la partie où l'écoulement est accéléré et au voisinage de paroi, où le cisaillement azimutal est faible. Il n'est pas alors surprenant de constater que le terme de production \mathcal{I}_{uw} soit pratiquement un ordre de grandeur supérieur à \mathcal{I}_{vw} . La dissipation visqueuse est localisée dans une très fine couche de fluide adjacente à la paroi où $|\partial \tilde{W}_b / \partial r|$ est maximal. D_3 et D_4 sont pratiquement négligeables ($\approx 10^{-5} \times E$). La contribution de D_2 est significative. Elle représente 70% à 75% de \mathcal{I}_{uw} pour $n_c = 0.3$.
- Mode central (impair) : La contrainte de Reynolds $-(uw)$ est positive et symétrique par rapport à l'écoulement de base. Elle est localisée au voisinage du centre de la conduite, où $|\partial \tilde{W}_b / \partial r|$ a un maximum local, ce qui correspond à un point d'inflexion. L'instabilité est donc d'origine inflexionale. La contrainte de Reynolds $-(vw)$ est antisymétrique et localisée dans des régions qui ne sont pas superposées avec celles de grand cisaillement azimutal ($1/r |\partial \tilde{W}_b / \partial \theta|$). La dissipation visqueuse a lieu dans la même zone que la contrainte de Reynolds $-(uv)$. D_2 reste dominant mais D_3 et D_4 ne sont pas négligeables. Encore une fois, la contribution $D_2 + D_3 + D_4$ peut être

n_c	$Re_{w,c}$	$\sigma_r \times 10^5$	$-\sigma_i/k$	\mathcal{I}_{uw}/E	\mathcal{I}_{vw}/E	\mathcal{D}/E	mode
1	960	0.06	0.786	0.0569	-0.0012	0.0556	central (impair)
0.7	994	-0.39	0.815	0.0625	0.0070	0.0694	central (impair)
0.6	1038	13	0.82	0.0666	0.012	0.0784	central (impair)
0.5	1168	-0.27	0.83	0.0675	0.018	0.085	central (impair)
0.4	1412	0.86	0.84	0.0682	0.0259	0.0939	central (impair)
0.3	1730	-1.116	0.40	0.2358	0.0235	0.2624	pariétal (pair)

TABLE 5.3: Taux de croissance temporel σ_r aux conditions critiques ($Re_{w,c}$), production d'énergie normalisée \mathcal{I}_{uw}/E , \mathcal{I}_{vw}/E , et termes de dissipation visqueuse \mathcal{D}/E . L'énergie initiale de la perturbation primaire est $\varepsilon_0 = 10^{-2}$.

n_c	$Re_{w,c}$	$\sigma_r \times 10^5$	$-\sigma_i/k$	\mathcal{I}_{uw}/E	\mathcal{I}_{vw}/E	\mathcal{D}/E	mode
1	1732	-0.059	0.46	0.0924	0.0081	0.1008	pariétal (pair)
0.7	1899	3.3	0.437	0.0941	0.00652	0.101	pariétal (pair)
0.6	1986	1.32	0.430	0.097	0.0043	0.101	pariétal (pair)
0.5	2144	0.05	0.418	0.096	0.0048	0.101	pariétal (pair)
0.4	2414	0.018	0.404	0.0879	0.0165	0.105	pariétal (pair)
0.3	2930	-0.029	0.385	0.089	0.015	0.105	pariétal (pair)

TABLE 5.4: Taux de croissance temporel σ_r aux conditions critiques ($Re_{w,c}$), production d'énergie normalisée \mathcal{I}_{uw}/E , \mathcal{I}_{vw}/E , et termes de dissipation visqueuse \mathcal{D}/E . L'énergie initiale de la perturbation primaire est $\varepsilon_0 = 10^{-3}$.

significative. Par exemple à $n_c = 0.4$, $(D_2 + D_3 + D_4) \approx 0.6 \mathcal{I}_{uw}$

Remarque

Certaines valeurs propres du système linéaire obtenu en annulant la viscosité, ont une partie réelle positive que l'on prenne un écoulement de base conduisant à un mode central ou pariétal. Ceci confirme l'origine inflexionnelle de l'instabilité, que ce soit avec un mode central ou un mode pariétal.

En général, pour des fortes perturbations ($\varepsilon_0 = 10^{-2}$), le mode critique est central, alors que pour des faibles perturbations $\varepsilon_0 = 10^{-3}$, le mode critique est pariétal.

5.4.6 Amplitude critique de la perturbation initiale : Analyse asymptotique

Dans les paragraphes précédents, nous avons déterminé les conditions d'instabilité des stries en fonction du caractère rhéofluidifiant du fluide, du nombre de Reynolds et de l'énergie initiale ε_0 de la perturbation primaire. Ces conditions d'instabilité peuvent être considérées comme des conditions nécessaires à la transition, mais elles ne sont pas suffisantes [Reddy *et al.* 1998]. En effet, le coefficient d'amplification temporelle σ_r doit être suffisamment élevé pour que le temps caractéristique d'amplification de l'instabilité soit plus court que le temps caractéristique de décroissance des stries. Dans la littérature, les conditions de transition sont exprimées en termes d'amplitude critique de la perturbation initiale en fonction du nombre de Reynolds. Un comportement asymptotique en Re^γ , avec $\gamma \leq -1$ est proposé dans la littérature (voir tableau 1.1 en introduction). Nous avons représenté dans la figure 5.15(a) les courbes de stabilité neutre des stries (conditions nécessaires à la transition) pour un fluide Newtonien et un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$. Comme on pouvait s'y attendre, ε_0 (nécessaire à la transition) diminue lorsque Re_w augmente. Pour des Reynolds suffisamment élevés $\varepsilon_0 \propto Re_w^\gamma$. Pour être conforme à la littérature, on prend $\sqrt{\varepsilon_0}$ comme taille caractéristique pour la perturbation. Dans ce cas on obtient $\sqrt{\varepsilon_0} \propto Re_w^{-1.21}$ pour les cas Newtonien et rhéofluidifiant. Cet exposant est en accord avec les valeurs reportées dans la littérature. On peut noter le retard à la transition pour les fluides rhéofluidifiants : pour un ε_0 donné, le nombre de Reynolds critique est plus élevé pour un fluide rhéofluidifiant que pour un fluide Newtonien.

La figure 5.15(b) montre la dépendance du nombre d'onde axial critique k_c avec ε_0 . La discontinuité dans la courbe pour des valeurs élevées de ε_0 signale le passage d'un mode pariétal vers un mode central, comme cela a été indiqué précédemment. Dans le cas Newtonien, le nombre d'onde critique atteint une valeur maximale $k_c = 2.74$ pour $\varepsilon_0 = 10^{-3}$. Dans le cas d'un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ cette valeur est plus élevée ($k_c = 3.76$ pour $\varepsilon_0 = 9 \times 10^{-3}$). Dans tous les cas, les nombres d'onde axiaux qui déstabilisent les stries restent modérés. Lorsque ε_0 diminue, k_c tend vers zéro. Ce résultat est confirmé par l'analyse linéaire non modale, effectuée dans le chapitre 3.

La figure 5.16 montre l'évolution du coefficient d'amplification temporelle (pour un mode pariétal) σ_r en fonction de l'amplitude des stries pour un fluide de Carreau, à $Re_w = 1500$. En reprenant la même démarche que celle de proposée par [Reddy *et al.* 1998] en

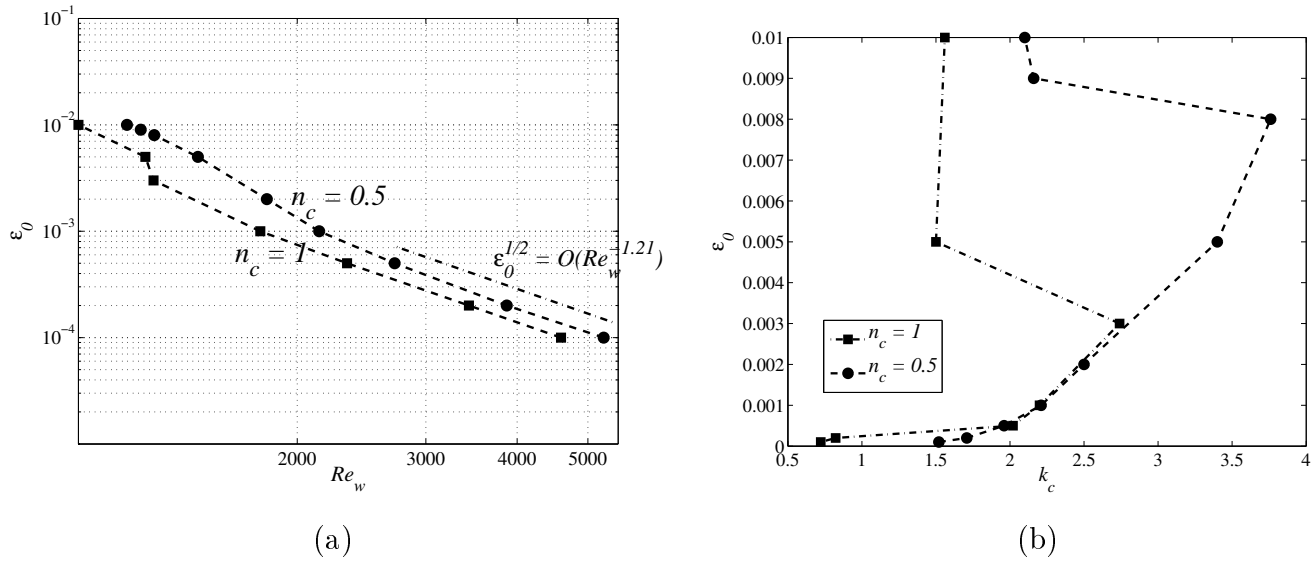


FIGURE 5.15: (a) Courbe de stabilité marginale des stries pour un fluide Newtonien et un fluide de Carreau ($n_c = 0.5$). Le comportement asymptotique $\sqrt{\varepsilon_0} \propto Re_w^{-1.21}$ est indiqué par un trait discontinu. (b) Nombre d'onde critique, k_c versus ε_0

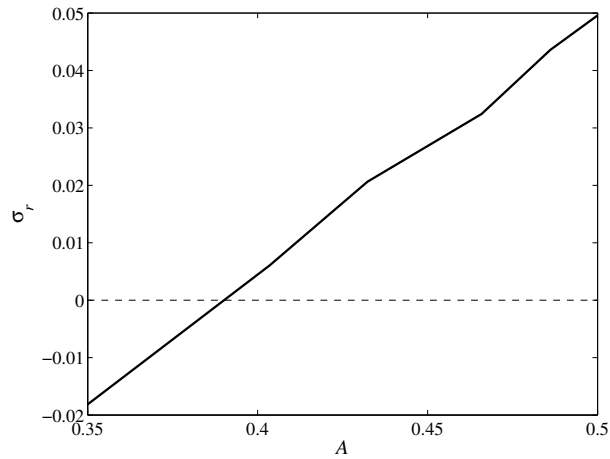


FIGURE 5.16: Coefficient d'amplification temporelle pour le mode de paroi le moins stable en fonction de l'amplitude des stries A , pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.5$ à $Re_w = 1500$.

Poiseuille plan et Couette plan, le coefficient d'amplification temporelle est écrit sous la forme :

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + c \times A \quad (5.48)$$

où c est une constante positive. Pour des valeurs de Re_w assez élevées et de faibles ε_0 , les résultats de l'analyse linéaire de stabilité non modale indiquent que :

$$A \propto \sqrt{\varepsilon_0} \times Re_w \times n_c^{-0.83} \quad (5.49)$$

donc

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + c \times \sqrt{\varepsilon_0} \times Re_w \times n_c^{0.83} \quad (5.50)$$

σ_{r0} est le coefficient d'amplification temporelle pour un mode pariétal à $\varepsilon_0 = 0$. L'analyse linéaire de stabilité modale du chapitre 3, a montré que $\sigma_{r0} \propto Re_w^{-1/3}$. Sur la courbe de stabilité neutre ($\sigma_r = 0$). Soit alors :

$$\sqrt{\varepsilon_0} \propto Re_{w,c}^{-4/3} \times n_c^{-0.83} \quad (5.51)$$

Cette valeur de $\gamma = -1.33$ est compatible avec $\gamma = -1.21$ obtenu lors des simulations. Autre caractéristique de cette analyse est que la rhéofluidification produit un retard à la transition puisque $n_c^{-0.83} > 1$. Cependant, le comportement asymptotique en Re_w semble être indépendant de n_c .

5.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons effectué une analyse linéaire de stabilité des stries issues de l'évolution non linéaire d'une perturbation sous forme d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs d'énergie ε_0 . Les mécanismes physiques à l'origine du développement des stries sont les mêmes qu'il s'agisse d'un fluide Newtonien ou d'un fluide de Carreau. Cependant, pour une énergie ε_0 donnée et Re_w fixé, l'amplification des stries est d'autant plus réduite que le caractère rhéofluidifiant du fluide est important.

Les effets rhéofluidifiants se manifestent aussi au niveau des spectres de valeurs propres, par une forte réduction du nombre de modes "dangereux". Les résultats numériques montrent que l'instabilité des stries peut être induite par deux types des modes. Le premier est un mode dit *pariétal* dont l'énergie cinétique est concentrée au voisinage

de la paroi où le gradient radial de la vitesse axiale $(\partial\tilde{W}_b/\partial r)$ est le plus important. Ce mode a une vitesse de phase comprise entre 0.35 et 0.45. Les composantes axiale et radiale de la fonction propre ont la même symétrie que celle de l'écoulement de base. La composante azimutale est antisymétrique. Le deuxième mode est dit *central*. Son énergie cinétique est concentrée dans la zone où l'écoulement est accéléré et proche du centre. Ce mode a une vitesse de phase comprise entre 0.85 et 0.95. Les propriétés de symétrie de la fonction propre sont opposées à celles du mode pariétal. Les résultats numériques indiquent qu'une déstabilisation par un mode central nécessite une amplitude critique des stries A_c supérieure à 41%.

Pour une énergie ε_0 donnée, lorsque les effets rhéofluidifiants augmentent, le nombre de Reynolds critique augmente (effet de stabilisation), par contre l'amplitude critique des stries diminue.

L'utilisation de l'équation d'énergie a permis de montrer : (i) pour les deux modes, l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation provient essentiellement, de l'interaction entre la contrainte de Reynolds $-(uw)$ et le gradient radial $\partial\tilde{W}_b/\partial r$. (ii) Les contraintes de Reynolds non Newtoniennes, provenant de la perturbation de la viscosité ont une contribution positive.

Finalement, une étude de la condition de stabilité neutre a été faite. L'amplitude minimale des tourbillons longitudinaux contra-rotatifs pour déstabiliser les stries varie asymptotiquement comme $\sqrt{\varepsilon_0} \propto Re^\gamma$, avec $\gamma = -1.21$. Cet exposant est en accord avec des résultats expérimentaux et numériques de la littérature (voir tableau 1.1).

Dans les essais expérimentaux, l'amplitude des stries augmente progressivement le long de la conduite pour atteindre une valeur approximativement égale à 20% à $\hat{z}/\hat{D} = 263$ et $Re_w = 3400$ (figure 1.7 de l'introduction). L'intensité de turbulence est maximale au voisinage de la paroi où $|\partial\tilde{W}_b/\partial r|$ est maximale [Esmael *et al.* 2010], [Escudier *et al.* 2009]. Au vue de ces résultats expérimentaux et par analogie avec les résultats numériques de ce chapitre, on pourrait conjecturer qu'au niveau expérimental, la déstabilisation des stries est assurée par un mode pariétal. Pour ce qui est du maintien des stries et du rôle du caractère rhéofluidifiant, on pourrait revenir à l'approche SSP (Self Sustaining Process) proposée par [Waleffe 1995]. Les ingrédients de cette approche sont obtenus à partir d'une analyse faiblement non linéaire autour des conditions critiques. Nous avons alors amorcé une analyse faiblement non linéaire de stabilité des stries dans le but de faire ressortir des

éléments relatifs au rôle de la perturbation de la viscosité. Nous nous sommes particulièrement intéressés par les termes issus de l'interaction du fondamental $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) \exp(ikz + \sigma t)$ avec son complexe conjugué via les non linéarités dans $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ et dans $\mu(\dot{\gamma})$. La modification de l'écoulement de base $\tilde{W}_b(r, \theta)$ est obtenue à partir de l'équation du mouvement axial moyennée sur une longueur d'onde. Après un calcul algébrique plus au moins direct, il apparaît que la modification de l'écoulement de base dépend des contraintes de Reynolds du type $\langle \partial(uw)/\partial r \rangle_z$ comme dans le cas Newtonien, mais aussi des termes supplémentaires du type $\frac{1}{Re} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \Gamma} \right]_b \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} |\dot{\gamma}_{rz}(\tilde{\mathbf{u}})|^2$. Ces termes réduisent la contrainte pariétale et favorisent l'accélération de l'écoulement dans la zone haute vitesse. La dernière partie de cette conclusion est spéculative, néanmoins elle fournit des indications sur le rôle des termes qui proviennent de la perturbation de la viscosité.

Simulation numérique de la stabilité des stries vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle

Sommaire

6.1	Équations gouvernant le problème	116
6.1.1	Conditions initiales	116
6.2	Résultats	117
6.2.1	Cas Newtonien	118
6.2.2	Cas non Newtonien	119
6.3	Conclusion	121

Dans le chapitre précédent, nous avons effectué une analyse linéaire de stabilité des stries issues de l'évolution non linéaire d'une perturbation constituée de deux tourbillons longitudinaux contra-rotatifs. Cette étude supposait que l'écoulement de base (écoulement de poiseuille + stries) est figé dans le temps. En outre, la perturbation tridimensionnelle, supposée infinitésimale, est introduite à l'instant où l'amplitude des stries est maximale. Cette étude a permis en particulier de déterminer les conditions nécessaires à la transition. Cependant, l'analyse linéaire de stabilité ne donne aucune indication au delà de la stabilité marginale.

Le présent chapitre est une étude numérique de la stabilité des stries vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle de très faible amplitude mais finie. Pour cela, à l'instant $t = 0$, on superpose à l'écoulement de poiseuille une perturbation bidimensionnelle sous forme de deux rouleaux longitudinaux contra-rotatifs d'énergie cinétique ε_0^{2D} ainsi qu'une perturbation tridimensionnelle de très faible énergie mais finie $\varepsilon_0^{3D} \ll \varepsilon_0^{2D}$. Elle est supposée périodique, de période $2\pi/k_0$.

L'objectif est de déterminer (i) pour un nombre de Reynolds donné les énergies ε_0^{2D} et ε_0^{3D} nécessaires pour la déstabilisation des stries et (ii) de faire ressortir le rôle des termes non linéaires visqueux. Ce chapitre est structuré comme suit : Les équations gouvernant le problème ainsi que les conditions initiales sont rappelées au premier paragraphe. Le deuxième paragraphe est consacré à la présentation des résultats issus de la simulation numérique. Nous commencerons d'abord par la cas Newtonien. Une comparaison avec la littérature existante [Meseguer 2003] est faite, en guise de validation des calculs numériques effectués. Nous aborderons ensuite le cas d'un fluide de Carreau. L'accent sera mis d'une part sur le retard à la transition et d'autre part sur le rôle de la non linéarité de la viscosité dans la réorganisation de l'écoulement. Le quatrième paragraphe est une conclusion.

6.1 Équations gouvernant le problème

Les équations gouvernant le problème ont été données dans le chapitre 2. On considère un fluide non newtonien incompressible avec une viscosité gouvernée par la loi de Carreau. Le fluide est mis en mouvement par un gradient de pression parallèle à l'axe de la conduite. Les équations aux perturbations adimensionnelles (2.18 - 2.19) sont rappelées ci-dessous :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)], \tag{6.2}$$

$$\mathbf{u}_{paroi} = 0, \tag{6.3}$$

$$\tau_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) = \frac{1}{Re} \mu (\dot{\gamma}_{ij}^B + \dot{\gamma}_{ij}) \cdot \dot{\gamma}_{ij}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) \tag{6.4}$$

Le système d'équations est fermé avec la condition de adhérence à la paroi de la conduite. Sous forme développée, ces équations se trouvent en annexe (A.3 - A.6). La méthode numérique pour résoudre ces équations est décrite dans le paragraphe 2.6.

6.1.1 Conditions initiales

Comme il a été indiqué en préambule, à l'instant $t = 0$, on superpose à l'écoulement de Poiseuille une perturbation 2D sous forme d'une paire des rouleaux longitudinaux contra rotatifs, ainsi qu'une perturbation tridimensionnelle de période $2\pi/k_0$.

$$\mathbf{u}_{total}^0 = \mathbf{u}_{2D}^0 + \mathbf{u}_{3D}^0 \quad (6.5)$$

Comme dans le chapitre 4, le champ de vitesse associé à une paire de tourbillons longitudinaux contrarotatifs est donné par :

$$\mathbf{u}_{2D}^0 = A_0 \Phi_{010}^{(1)} + \text{c.c.} \quad (6.6)$$

où A_0 est une constante réelle. Sous forme développée :

$$\mathbf{u}_{2D}^0 = A_0 e^{i\theta} \begin{pmatrix} -i(1-r^2)^2 \\ D[r(1-r^2)^2] \\ 0 \end{pmatrix} + \text{c.c.} \quad (6.7)$$

La perturbation tridimensionnelle est donné par :

$$\mathbf{u}_{3D}^0 = A_1 (\Phi_{001}^{(1)} + \Phi_{011}^{(1)} + \Phi_{01-1}^{(1)}) + \text{c.c.} \quad (6.8)$$

sous forme développée :

$$\mathbf{u}_{3D}^0 = A_1 \left[e^{ikz} \begin{pmatrix} 0 \\ r(1-r^2) \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(\theta+kz)} \begin{pmatrix} -i(1-r^2)^2 \\ D[r(1-r^2)^2] \\ 0 \end{pmatrix} + e^{i(\theta-kz)} \begin{pmatrix} -i(1-r^2)^2 \\ D[r(1-r^2)^2] \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \text{c.c.} \quad (6.9)$$

Les constantes A_0 et A_1 sont réelles. Elles sont déterminées selon l'énergie cinétique relative ε_0^{2D} et ε_0^{3D} que l'on impose respectivement aux perturbations $2D$ et $3D$:

$$\varepsilon_0(\mathbf{u}_{2D}^0) = \varepsilon_0^{2D} \quad \text{et} \quad \varepsilon_0(\mathbf{u}_{3D}^0) = \varepsilon_0^{3D} \quad (6.10)$$

6.2 Résultats

La figure 6.1 montre un exemple typique de résultats que l'on peut obtenir.

A l'instant $t = 0$, une perturbation bidimensionnelle (tourbillons contra rotatifs) d'énergie relative ε_0^{2D} est introduite, avec une faible perturbation tridimensionnelle. En trait gras, nous avons représenté l'énergie des stries générées. L'amplification aux temps courts est assuré par la croissance transitoire. En trait fin, l'énergie de la perturbation $3D$ croit exponentiellement du fait de l'instabilité des stries étudié dans le chapitre précédent. Lorsque

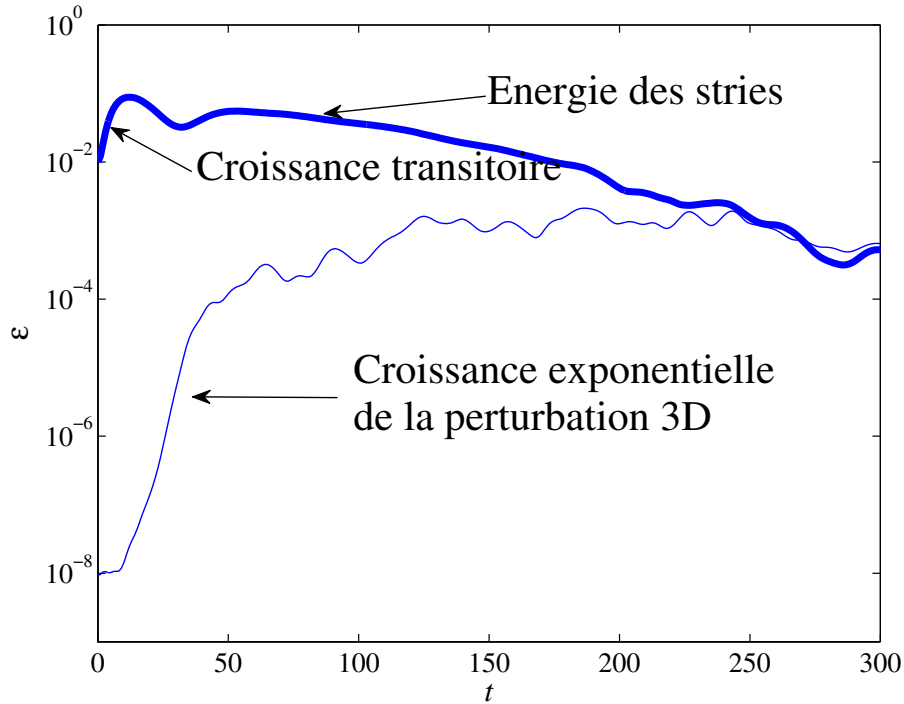


FIGURE 6.1: Évolution de l'énergie des stries et l'énergie de la perturbation 3D pour le mécanisme de *streak breakdown*

l'énergie 3D atteint des valeurs importantes, il existe des interactions via les termes non linéaires qui génèrent une évolution chaotique de l'énergie cinétique. Lorsque l'énergie 3D dépasse l'énergie des stries le phénomène de *streak breakdown* a lieu. Cette évolution chaotique peut éventuellement décroître et produire une relaminarisation de l'écoulement. C'est pour cela que le temps d'intégration est important pour décider si nous sommes en présence d'une transition ou pas. Il devient difficile décider si l'écoulement est laminaire ou turbulent. La même limitation est présente dans les expériences lorsqu'un *puff* turbulent abandonne la conduite et on ne peut pas décider si l'écoulement est laminaire ou pas.

6.2.1 Cas Newtonien

Pour valider nos calculs, nous avons reproduit (figure 6.2) les résultats obtenus par [Meseguer 2003] dans le cas Newtonien.

Les simulations numériques ont été effectuées en utilisant les mêmes paramètres $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ et pour trois nombres de Reynolds $Re = 1000, Re = 2000$ et

$Re = 3000$. Le nombre d'onde axiale utilisé est $k_0 = 2$.

A $Re = 1000$, les résultats numériques montrent que l'énergie des stries ε^{2D} suit pratiquement la même évolution que celle calculée dans le chapitre 4 (situation bidimensionnelle). Une perturbation d'énergie assez importante $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-4}$ ne déstabilise pas les stries.

A $Re = 2000$, la déstabilisation des stries est observé à $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-4}$. Cette déstabilisation est par contre, transitoire. A partir de $t \approx 300$, l'écoulement se relaminarise.

A $Re = 3000$, la déstabilisation des stries est déjà observée pour la plus faible énergie de la perturbation tridimensionnelle ($\varepsilon_0^{3D} = 10^{-8}$) considérée. Un régime chaotique est obtenu avec une durée de vie allant au moins jusqu'à $t = 600$.

Si on adopte le principe , qu'il y a une transition vers la turbulence lorsque le régime chaotique est maintenu jusqu'à $t = 600$, alors le nombre de Reynolds critique serait compris entre 2000 et 3000, pour $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$. La valeur critique du nombre de Reynolds est bien sûr sensible à la valeur de ε_0^{2D} [Meseguer 2003].

La figure 6.3 montre des contours d'iso-vitesse axiale de la perturbation à différents instants et à $Re = 3000$. L'énergie initiale des tourbillons contra-rotatifs est $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$. La perturbation tridimensionnelle a une énergie initiale $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-6}$. L'écoulement moyenné sur une longueur d'onde axiale est fortement décéléré dans la zone centrale. La vitesse au centre est de 0.4 à $t = 600$. Cette décélération est une conséquence naturelle de transfert d'énergie de l'écoulement de base vers la perturbation. L'évolution temporelle de la vitesse axiale $w(t)$ devient chaotique, comme le montre la figure 6.4, qui représente la vitesse au centre de la conduite $(W_b + w(t))(r = 0, \theta = 0, z = 0, t)$ en fonction du temps. Dans toutes les figures on note la forte décélération de l'écoulement moyen.

6.2.2 Cas non Newtonien

6.2.2.1 Retard à la transition

Ayant validé nos calculs en Newtonien par comparaison avec [Meseguer 2003], il nous a paru dans un premier temps, plus pertinent de reprendre les mêmes paramètres d'étude, pour un fluide rhéofluidifiant (ε_0^{2D} , ε_0^{3D} et k). Il s'agit alors de déterminer le nombre de Reynolds critique à partir duquel un régime chaotique peut être obtenu, en fonction des paramètres rhéologiques n_c et λ . La figure 6.5 montre pour un fluide rhéofluidifiant avec $n_c = 0.7$ et $\lambda = 10$, l'évolution temporelle de l'énergie des stries $\varepsilon^{2D}(t)$ et de la perturbation tridimensionnelle $\varepsilon^{3D}(t)$ pour différents valeurs de Reynolds. ε_0^{2D} et ε_0^{3D} sont fixés

respectivement à 10^{-2} et 10^{-6} .

À $Re_w = 2000$ l'énergie des stries est pratiquement identique à celle calculée dans le chapitre 4 avec une perturbation purement bidimensionnelle.

À $Re_w = 3000$, la déstabilisation est transitoire. A $t \approx 200$ l'écoulement se relaminarise.

À $Re_w = 4000$ le régime chaotique se maintient jusqu'à $t \approx 400$, ensuite l'écoulement relaminarise.

À $Re_w = 5000$ le régime chaotique est entretenu jusqu'à $t = 500$.

Comparativement au cas Newtonien (figure 6.5), ces résultats mettent clairement en évidence un retard à la transition. Ceci est encore illustré par la figure 6.7, où nous avons représenté l'évolution temporelle des énergies ε^{2D} et ε^{3D} à $Re_w = 3000$ en augmentant progressivement le caractère rhéofluidifiant (n_c diminue de 1 à 0.7). Pour des questions de convergence du code, nous n'avons pas pu descendre plus bas que $n_c = 0.7$ où le Re_w nécessaire pour entretenir la turbulence est supérieur à 5000. Cependant, les paramètres utilisés ($n_c = 0.7$, $\lambda = 10$) sont similaires à ceux provenant d'un fluide réel (Voir chapitre 1). Le même effet de retard peut être trouvé avec n_c fixé et différentes valeurs de λ , dans la figure 6.8.

La figure 6.9 représente l'évolution temporelle de la vitesse axiale au centre de la conduite pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ pour deux $Re_w = 2000$ et $Re_w = 5000$. Par rapport au cas laminaire ($Re_w = 2000$), l'écoulement turbulent à $Re_w = 5000$ est plus chaotique. Dans les deux cas, il y a une forte décélération de l'écoulement moyen.

6.2.2.2 Asymétrie de l'écoulement

Les expériences des écoulements rhéofluidifiants en conduite cylindrique présentent une asymétrie lors de la transition vers la turbulence. Cette asymétrie est affichée clairement dans les figures 1.4, 1.5 et 1.6 dans ce manuscrit. Les contours de la figure 1.5 représentent l'écart de vitesse axiale par rapport à la moyenne arithmétique de la vitesse d'une part et d'autre de l'axe. Les mesures expérimentales ont été relevées à l'aide de la technique de LDV (Vélocimétrie Laser Doppler). La technique de LVD est basée sur une moyenne d'environ dix mille points de mesure. Ceci veut dire que la vitesse donnée par le dispositif LDV est le produit d'une intégration temporelle de la vitesse dans l'écoulement pendant le temps d'acquisition. Nous pouvons agir de la même façon numériquement et intégrer le champs

de vitesse en fonction du temps :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{t_{max} - t_{min}} \int_{t_{min}}^{t_{max}} \mathbf{u}(t) dt \quad (6.11)$$

Nous avons déterminé t_{min} comme l'instant où l'énergie de la perturbation tridimensionnelle $\varepsilon_0^{3D}(t)$ atteint $\varepsilon_0^{2D}(t)$. Les iso-contours de vitesse intégrés $W_b + \langle w(t) \rangle$ sont donnés dans la figure 6.10 pour le cas Newtonien à $Re = 3000$, et dans la figure 6.11 pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ à $Re_w = 5000$.

Dans les deux figures nous présentons les résultats sous deux formes différentes. À gauche, l'écoulement intégré auquel on rajoute l'écoulement de base $W_b + \langle w(t) \rangle$ et à droite, nous avons enlevé tout ce qui est axisymétrique, c'est-à-dire, l'écoulement de base W_b et le mode azimutale $n = 0$ de la perturbation. Les résultats montrent une tendance à l'asymétrie pour les fluides rhéofluidifiants plus prononcée qu'avec des fluides Newtoniens. Ceci a été vérifié pour plusieurs paramètres rhéologiques, et tous ont donné un certain degré d'asymétrie. Nous remarquons que nos calculs ne correspondent pas à une simulation numérique directe bien résolue dans l'espace parce que nous n'utilisons qu'un seul mode dans la direction axiale ($L = 1$). Cependant, ce type de structure auto entretenue dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant peut nous donner des pistes sur ce qui se passe dans l'expérience.

Pour voir l'effet de la non linéarité de la viscosité, nous avons réalisé des calculs sans tenir compte de la perturbation de viscosité ($\mu' = 0$). Ce cas est appelé cas *stratifié pur*, comme dans le chapitre 4. Il semble que la perturbation de la viscosité n'a pas un effet important lorsqu'on regarde le retard à la transition. La figure 6.12 montre l'évolution temporelle de l'énergie des rouleaux $\varepsilon_0^{2D}(t)$, dans le cas *complet* et *stratifié pur* pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.7$, $\lambda = 10$, à $Re_w = 3000$. Les deux cas suivent des évolutions similaires. Lorsqu'on regarde la structure de l'écoulement pour le cas *stratifié pur* dans la figure 6.13, on découvre que l'asymétrie est faible, voir nulle. On peut donc penser que l'asymétrie observée expérimentalement est produit de la non linéarité de la viscosité.

6.3 Conclusion

Nous avons étudié l'instabilité des stries vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle avec un mode fondamental $k_0 \approx 2$, qui est la longueur d'onde qui déstabilise l'écoulement avec une plus grande efficacité lors d'une analyse de stabilité secondaire. Nous avons

constaté que le caractère rhéofluidifiant est accompagné par un retard à l'apparition des structures turbulentes entretenues. Ce retard est dû à la stratification de l'écoulement de base. Il ne dépend pas des termes non linéaires visqueux. Si on intègre les profils de vitesse axiale au cours du temps, nous pouvons observer une tendance à l'asymétrie de l'écoulement lorsque l'on tient en compte les termes non linéaires visqueux. Même si on utilise un seul mode dans la direction axiale, les résultats sont en accord avec le processus de *streak breakdown* décrit dans la littérature.

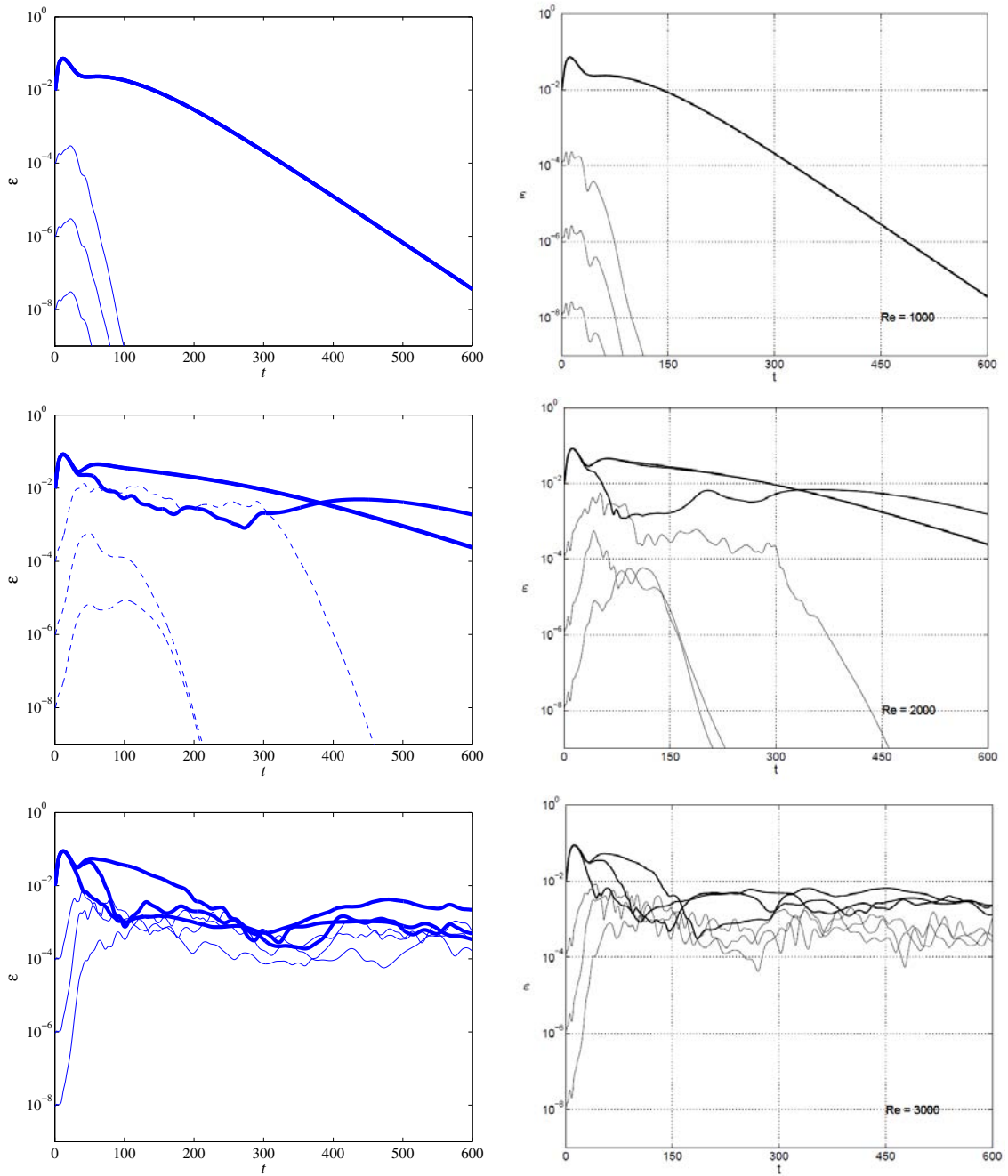


FIGURE 6.2: Évolution temporelle de l'énergie des stries ($\varepsilon^{2D}(t)$, traits épais) et l'énergie 3D ($\varepsilon^{3D}(t)$, traits fins) pour un fluide Newtonien pour $Re = 1000, 2000, 3000$ (du haut vers le bas). Les calculs ont été faits avec $M = 14, N = 9$ et $L = 1$. Comparaison avec les résultats des simulations publiés par [Meseguer 2003] (colonne de droite).

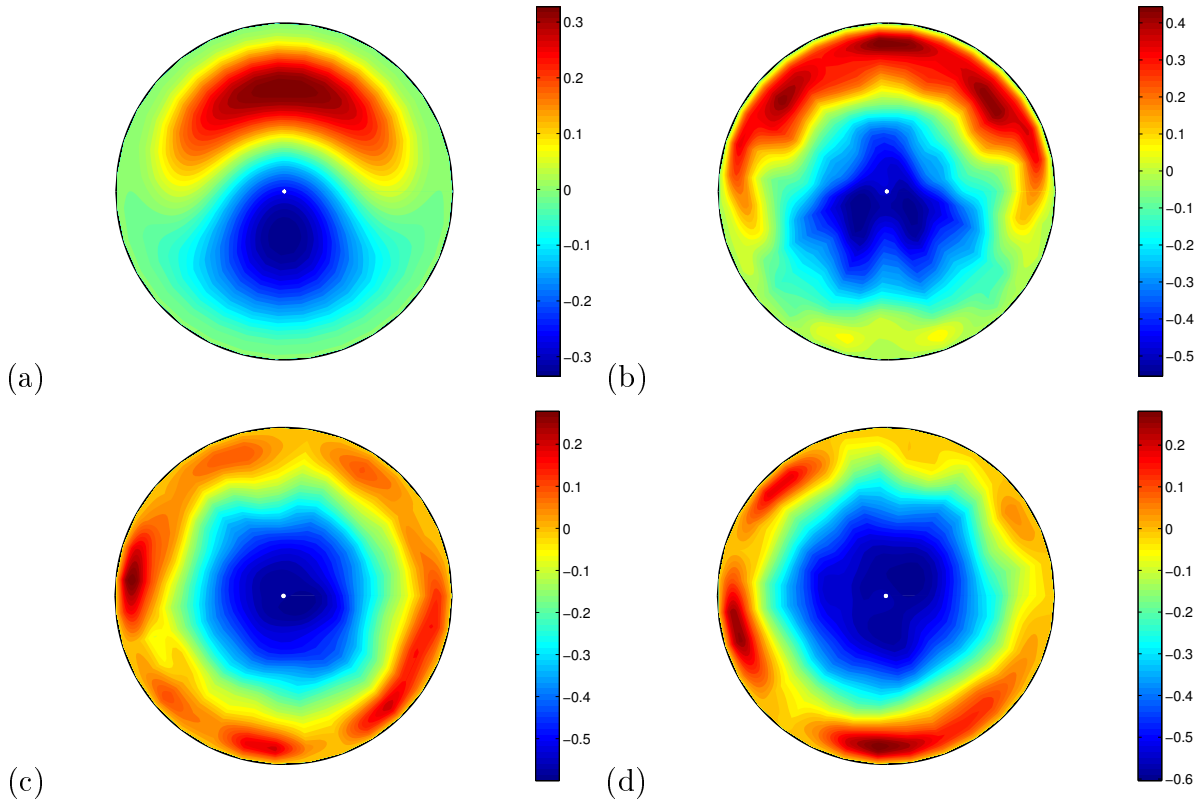


FIGURE 6.3: Iso-valeurs de vitesse axiale de la perturbation moyennée en z pour un fluide Newtonien à $Re = 3000$ à différents instants. (a) $t = 5$ (b) $t = 50$ (c) $t = 100$ (d) $t = 150$. Les énergies initiales des perturbations bidimensionnelle et tridimensionnelle sont égales à $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-6}$.

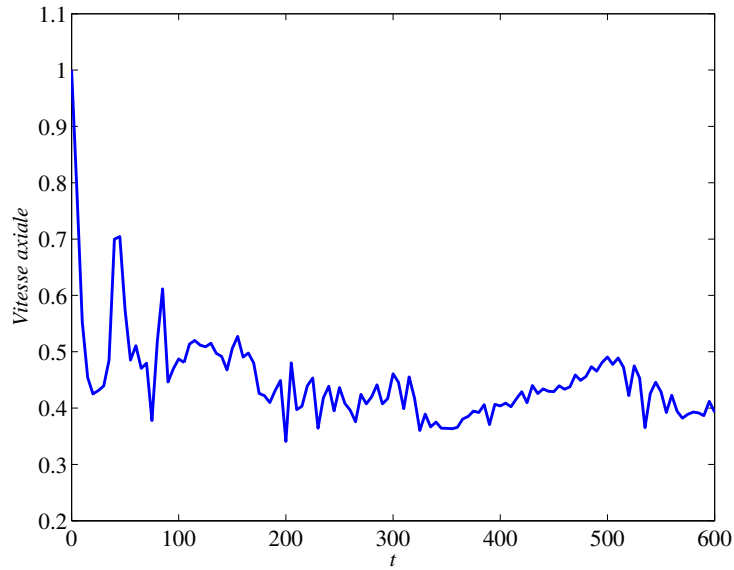


FIGURE 6.4: Évolution temporelle de la vitesse axiale au centre de la conduite pour un fluide Newtonien à $Re = 3000$ avec $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0^{3D} = 1 \cdot 10^{-6}$. Les calculs ont été faits avec $M = 14$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$.

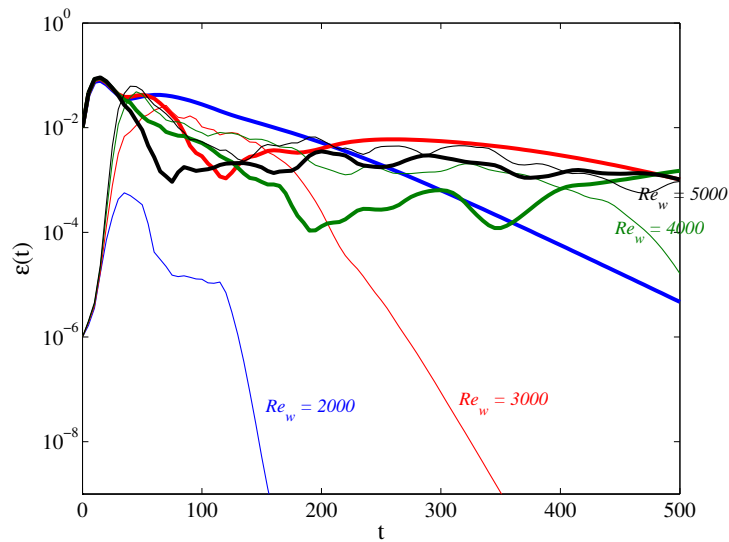


FIGURE 6.5: Évolution temporelle de l'énergie des stries (traits épais) et l'énergie 3D (traits fins) pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ pour différents Re_w . Les calculs ont été faits avec $M = 14$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$.

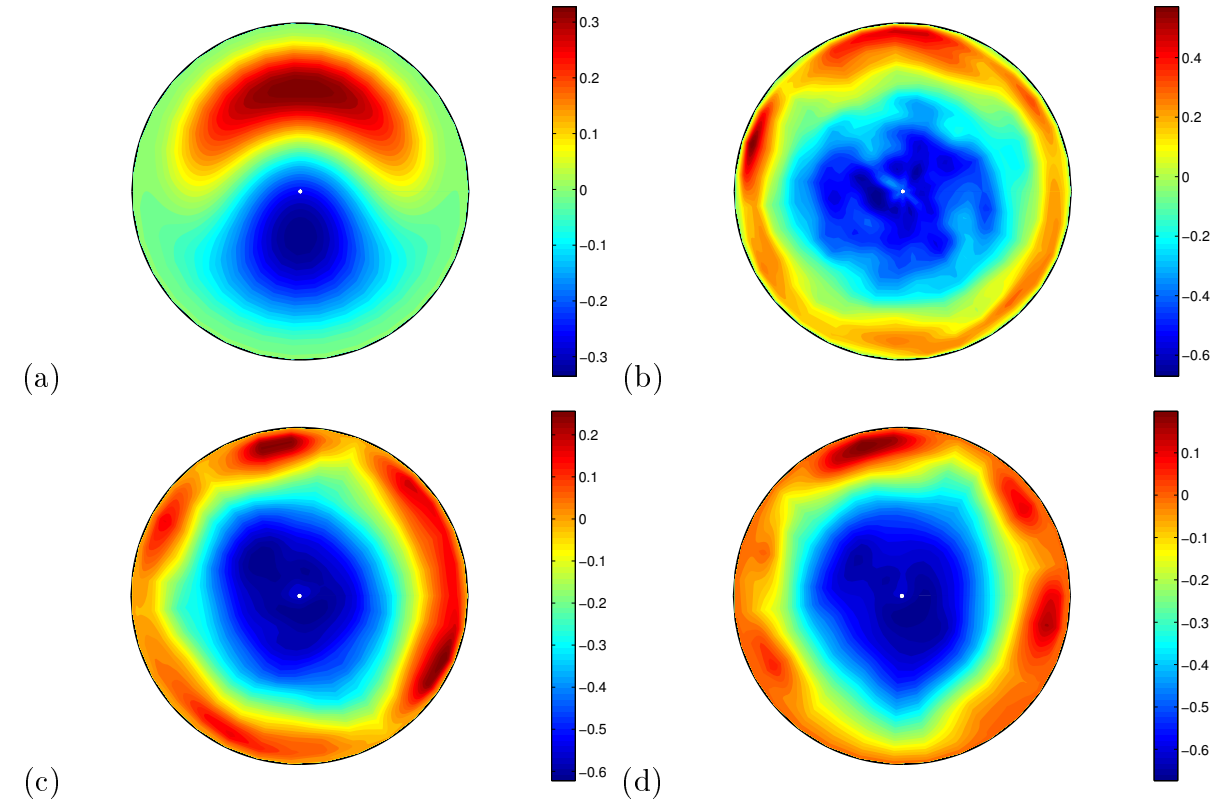


FIGURE 6.6: Iso-valeurs de vitesse axiale de la perturbation moyennée en z pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$, $n_c = 0.7$, $Re_w = 5000$ à différents instants. (a) $t = 5$ (b) $t = 50$ (c) $t = 100$ (d) $t = 150$. Les énergies initiales des perturbations bidimensionnelle et tridimensionnelle sont égales à $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0^{3D} = 10^{-6}$.

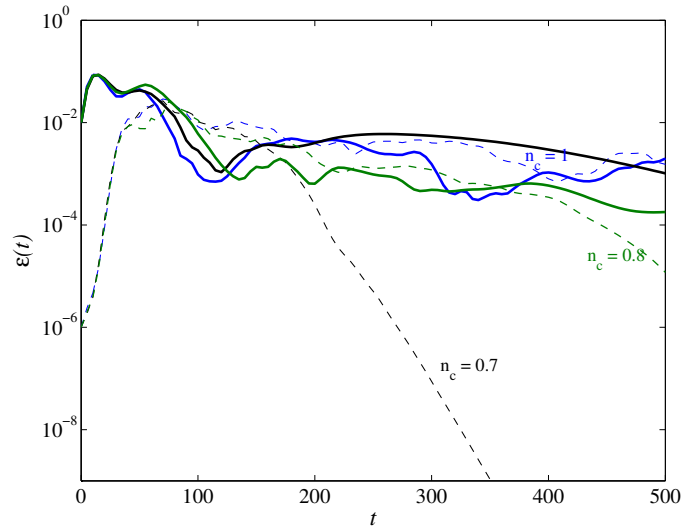


FIGURE 6.7: Évolution temporelle de l'énergie des stries (traits épais) et l'énergie 3D (traits fins) pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ pour différents valeurs d'indice de rhéofluidification n_c , à $Re_w = 3000$. Les calculs ont été faits avec $M = 14$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$.

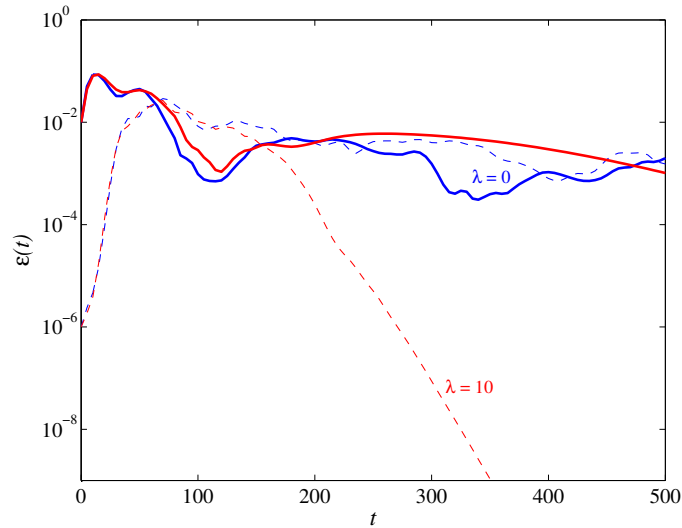


FIGURE 6.8: Évolution temporelle de l'énergie des stries (traits épais) et l'énergie 3D (traits discontinus) pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.7$ pour différents valeurs de λ , à $Re_w = 3000$. Les calculs ont été faits avec $M = 14$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$.

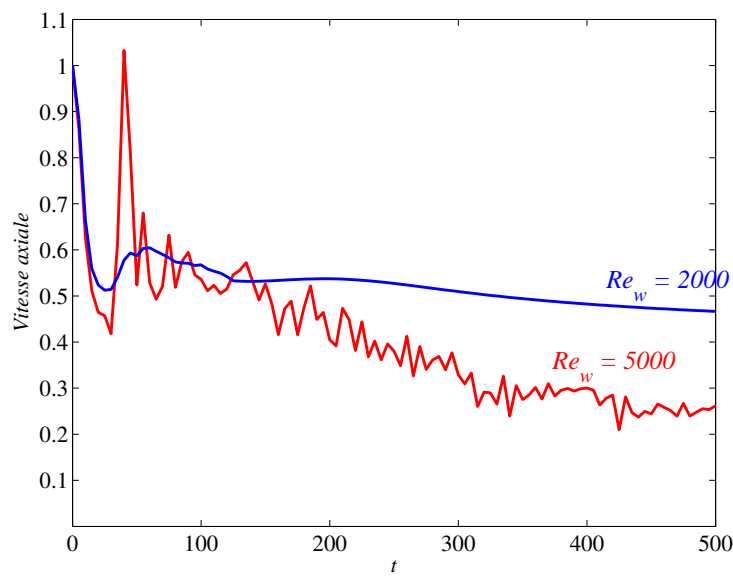


FIGURE 6.9: Évolution temporelle de la vitesse axiale au centre de la conduite pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ pour un cas laminaire ($Re_w = 2000$) et turbulent ($Re_w = 5000$) avec $\varepsilon_0^{2D} = 10^{-2}$ et $\varepsilon_0^{3D} = 1 \cdot 10^{-6}$. Les calculs ont été faits avec $M = 18$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$

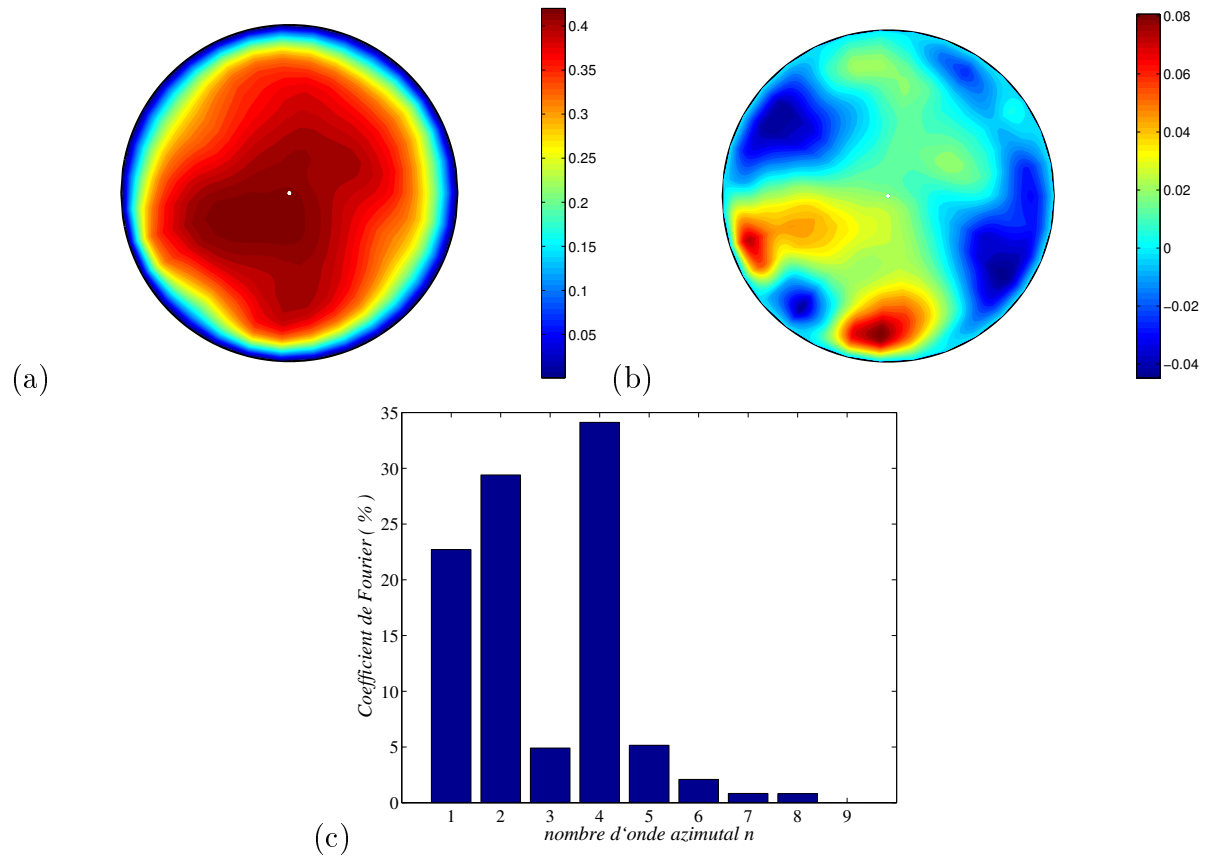


FIGURE 6.10: Iso-contours de vitesse axiale intégrés entre $t_{min} = 140$ et $t_{max} = 500$ pour un fluide Newtonien à $Re = 3000$ (a) Perturbation axiale plus écoulement de base ($W_b + w$) (b) Le mode $n = 0$ de la perturbation et l'écoulement de base ont été enlevés ($w - w_{n=0}$) (c) Spectre de Fourier de la figure (b).

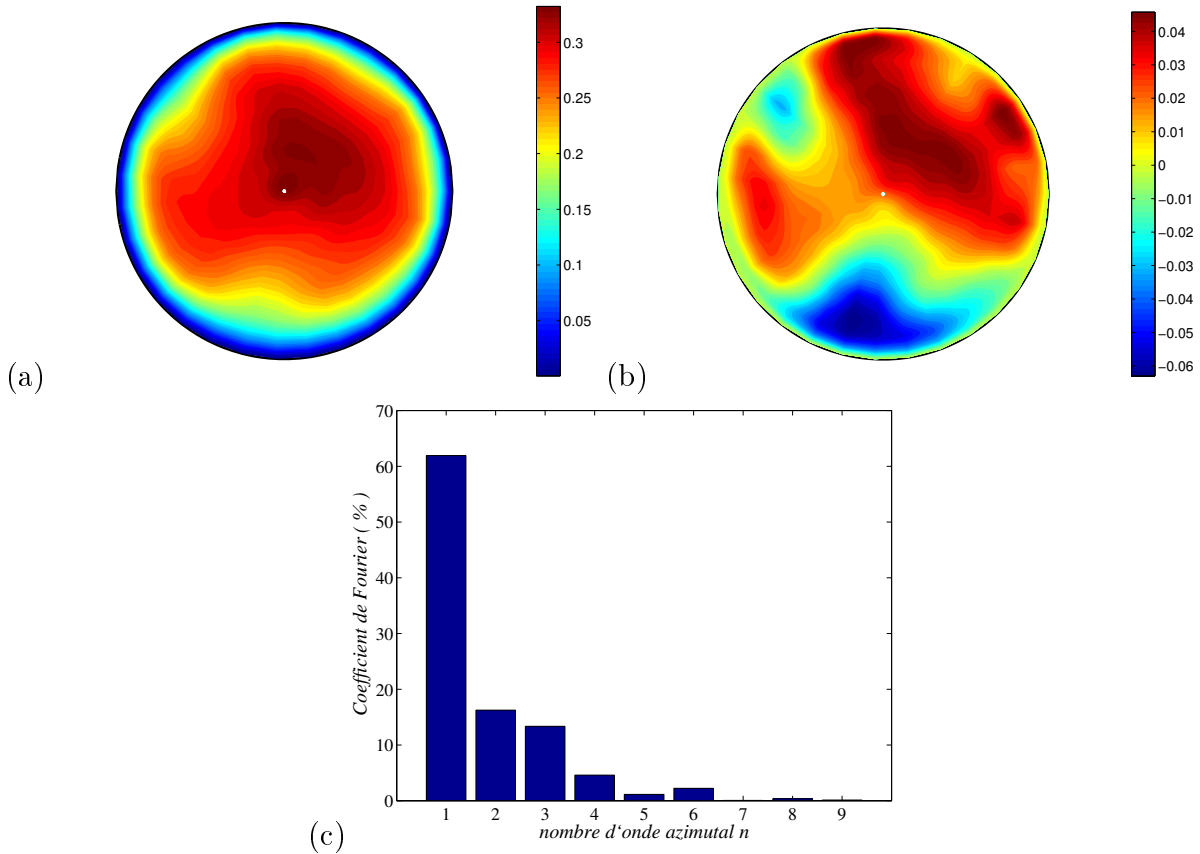


FIGURE 6.11: Iso-contours de vitesse axiale intégrés entre $t_{min} = 140$ et $t_{max} = 500$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ à $Re_w = 5000$. (a) Perturbation axiale plus écoulement de base ($W_b + w$) (b) Le mode $n = 0$ de la perturbation et l'écoulement de base ont été enlevés ($w - w_{n=0}$) (c) Spectre de Fourier de la figure (b).

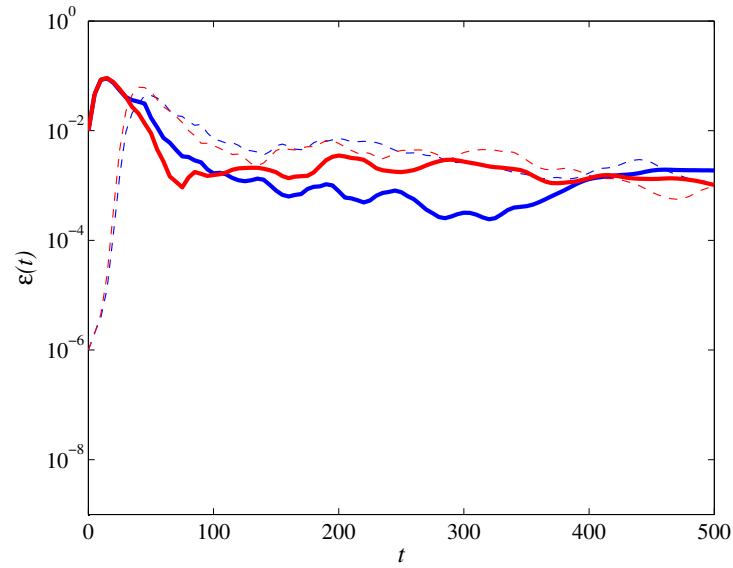


FIGURE 6.12: Évolution temporelle de l'énergie des stries (traits épais) et l'énergie 3D (traits discontinus) pour un fluide de Carreau avec $n_c = 0.7$, $\lambda = 10$, à $Re_w = 5000$. (rouge) Cas *complet* (Bleu) Cas *stratifié pur*, où la perturbation de la viscosité n'est pas tenue en compte ($\mu' = 0$). Les calculs ont été faits avec $M = 14$, $N = 9$ et $L = 1$. Le pas de temps est $\Delta t = 0.001$.

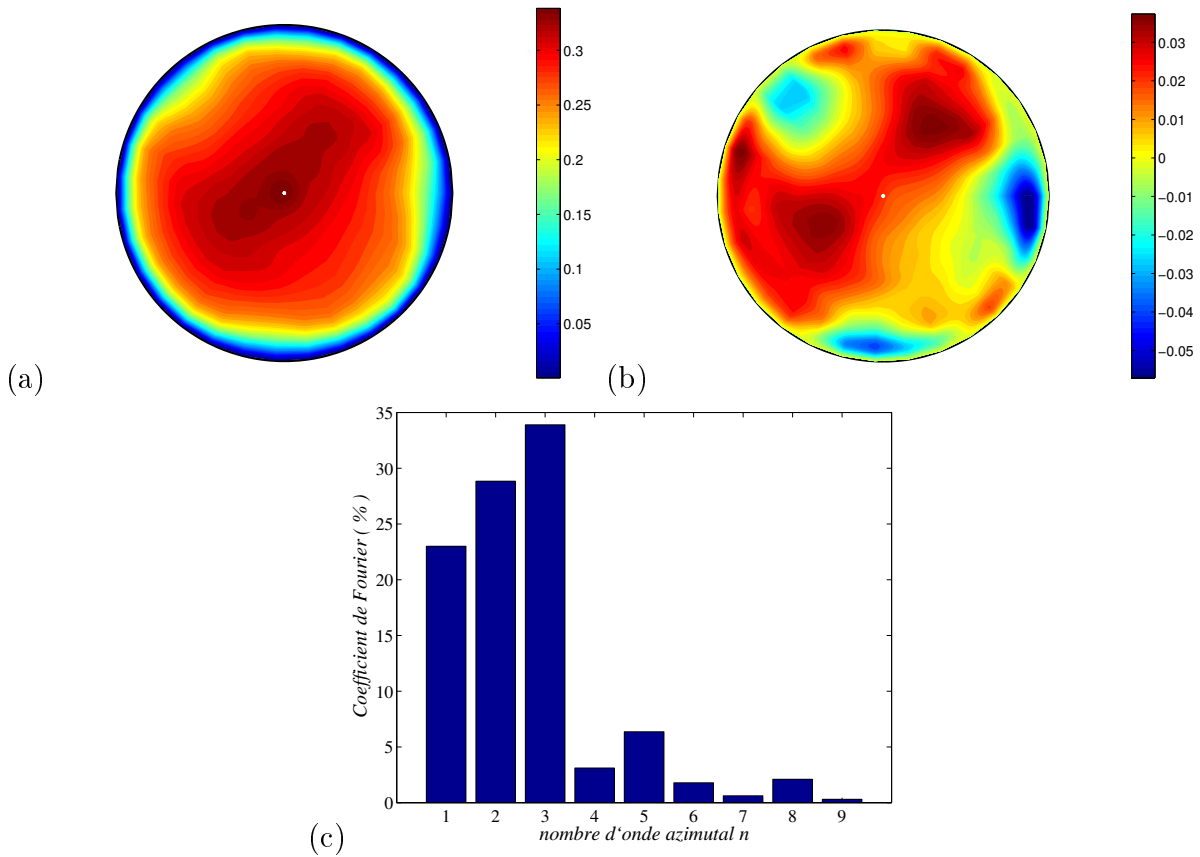


FIGURE 6.13: Iso-contours de vitesse axiale intégrés entre $t_{min} = 140$ et $t_{max} = 500$ pour un fluide de Carreau avec $\lambda = 10$ et $n_c = 0.7$ à $Re_w = 5000$. La perturbation de la viscosité n'est pas prise en compte ($\mu' = 0$) (a) Perturbation axiale plus écoulement de base ($W_b + w$) (b) Le mode $n = 0$ et écoulement de base ont été enlevés ($w - w_{n=0}$) (c) Spectre de Fourier de la figure (b).

Conclusion et perspectives

Nous nous sommes intéressés au problème de la transition vers la turbulence en conduite cylindrique pour des fluides rhéofluidifiants. La première partie de la thèse a été consacrée à la vérification des résultats expérimentaux de [Peixinho 2004] et [Esmael 2008], sur une conduite plus longue ($L = 163D$). Les résultats expérimentaux suggèrent d'une part, un retard à la transition vers la turbulence, et, d'autre part, une asymétrie du profil moyen de vitesse lors de la transition. Nous avons vu que cette asymétrie augmente avec la longueur de la conduite (Figure 1.7). La structure observée en régime de transition suggère l'existence de deux jets, un jet rapide et un jet lent, qui produisent une asymétrie du profil moyen de vitesse axiale (Figure 1.5). Il est possible que cette asymétrie soit due à l'apparition de deux rouleaux contra rotatifs qui convectent le fluide à grande vitesse du centre vers la paroi de la conduite, mais ceci n'a pas été vérifié expérimentalement. Nous avons essayé d'observer expérimentalement les composantes transversales de vitesse mais les simulations numériques prédisent que ces composantes sont de l'ordre de 1% de la vitesse axiale ce qui rend très difficile leur mesure. Ensuite, nous nous sommes intéressés à la stabilité de cette structure observée expérimentalement. Pour étudier cette structure il a fallu développer, en partant du code linéaire Newtonien publié par [Meseguer & Trefethen 2001a], un code DNS non Newtonien.

Une première partie numérique de la thèse a été dédiée à l'étude linéaire modale et non modale d'un écoulement d'un fluide rhéofluidifiant modélisé par la loi de Carreau en conduite cylindrique. Nous avons constaté que pour des paramètres rhéologiques compris entre $0.3 \leq n_c \leq 1$ et $0 \leq \lambda \leq 30$, ce type d'écoulement est linéairement stable, et que la perturbation qui donne la plus grande amplification est constituée d'une paire de rouleaux contra rotatifs ($k = 0, n = 1$), comme dans le cas Newtonien.

Dans le chapitre 4, nous avons fait l'étude non linéaire bidimensionnelle de l'écoulement, utilisant une condition initiale constituée d'une paire de rouleaux longitudinaux contra-rotatifs. Les principaux résultats sont (i) l'écoulement bidimensionnelle est stable,

i.e. l'énergie de la perturbation tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infinie (ii) la saturation de la croissance transitoire de la perturbation et la modification de l'écoulement grâce aux termes non linéaires, qui génèrent des points d'inflexion dans l'écoulement, potentiellement instables, et (iii) la réduction de l'échange d'énergie entre la perturbation et l'écoulement de base grâce à la stratification de la viscosité qui rentre en concurrence avec la diminution de la dissipation visqueuse due à la variation non linéaire de la viscosité.

Dans le chapitre 5 nous avons analysé la stabilité linéaire des stries vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles. L'analyse a été faite en étudiant les spectres des valeurs propres du système linéaire. Lorsque l'énergie de la perturbation primaire ε_0 est grande ($\varepsilon_0 \geq 3 \cdot 10^{-3}$), pour une forte rhéofluidification, le mode le moins stable en conditions critiques, s'avère être un mode de paroi, alors que pour des fluides moins rhéofluidifiants, le mode instable est un mode central. Pour $0 < \varepsilon_0 < 3 \cdot 10^{-3}$ le mode critique est un mode de paroi pour tous les paramètres rhéologiques étudiés. La courbe de stabilité neutre (figure 5.15) nous a permis déterminer le comportement asymptotique de l'énergie de perturbation nécessaire pour déstabiliser les stries suivant la loi de puissance $\sqrt{\varepsilon_0} = Re^\gamma$. Nous avons déterminé que $\gamma = -1.21$, cette valeur étant indépendante de l'indice de rhéofluidification. Pour la gamme de paramètres rhéologiques analysés, les valeurs du nombre d'onde critiques k_c pour $\varepsilon_0 \leq 10^{-2}$ se trouvent entre $0 \leq k_c \leq 5$. Lorsque ε_0 diminue, k_c tends vers zéro ce qui est confirmé par l'analyse non modal de stabilité linéaire.

Une analyse non linéaire de stabilité des rouleaux vis-à-vis d'une perturbation tridimensionnelle avec un seul mode axial, de nombre d'onde $k = 2$, a été réalisée dans le chapitre 6. Cette valeur de k est une valeur probable pour la déstabilisation des stries. Nous avons constaté, d'une part un retard à la transition vers la turbulence et d'autre part, une tendance à l'asymétrie pour les fluides rhéofluidifiants lorsque les profils de vitesse axiale sont intégrés dans le temps et tout au long de la conduite. Les calculs faits en annulant la perturbation de la viscosité restent symétriques, ce qui permet de relier l'asymétrie aux termes non linéaires visqueux. Cependant, les calculs tridimensionnelles ont été faits avec une résolution spectrale grossière. Il faudrait augmenter la résolution spectrale pour confirmer cette tendance.

Comme perspectives, expérimentalement, il est intéressant de caractériser les composantes transversales de la vitesse en régime pre-turbulent pour mieux caractériser les rouleaux longitudinaux qui sont censés entretenir cette asymétrie. Ceci peut être fait à l'aide des techniques comme la PIV (Particle Image Velocimetry). D'un point de vue numérique,

on peut injecter les modes de paroi et modes centraux obtenus lors de l'analyse de stabilité secondaire dans un code DNS avec une plus grande résolution spectrale, pour voir quelle est l'évolution non linéaire de ces modes, et comment elle est affectée par les termes non linéaires visqueux. Une analyse non linéaire de ce type nous permettrait de fermer le cercle de la SSP.

Équations aux perturbations

A.1 Équations sous forme développée

Les équations aux perturbations sont obtenues en retranchant aux équations de conservation écrites pour l'écoulement perturbé $(u, v, W_b + w, P_b + p)$, celles satisfaites par l'écoulement de base, soit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = & -(\mathbf{U}_b \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U}_b - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p \\ & + \nabla \cdot [\boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b + \mathbf{u}) - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{U}_b)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les équations (A.1-A.2) sous forme développée sont les suivantes :

$$\partial_t u + u \partial_r u + w \partial_z u + \frac{v}{r} \partial_\theta u - \frac{v^2}{r} + W_b \partial_z u = -\partial_r p + \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta r} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \partial_z \tau_{rz} - \partial_z \tau_{rz}(W_b) \quad (\text{A.3})$$

$$\partial_t v + u \partial_r v + w \partial_z v + \frac{v}{r} \partial_\theta u + \frac{uv}{r} + W_b \partial_z v = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta\theta} + \partial_z \tau_{\theta z} \quad (\text{A.4})$$

$$\partial_t w + u \partial_r W_b + u \partial_r w + w \partial_z w + \frac{v}{r} \partial_\theta w + W_b \partial_z w = -\partial_z p + \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}) - \frac{1}{r} \partial_r (r \tau_{rz}(W_b)) + \frac{1}{r} \partial_\theta \tau_{\theta z} + \partial_z \tau_{zz} \quad (\text{A.5})$$

$$\partial_r u + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta v + \partial_z w = 0, \quad (\text{A.6})$$

où $\tau_{ij} = \mu(u, v, w + W_b) \cdot \dot{\gamma}_{ij}(u, v, w + W_b)$ et $\tau_{rz}(W_b) = \mu(W_b) \cdot \dot{\gamma}_{rz}(W_b)$.

Nous rappelons ici le tenseur de déformation en coordonnées cylindriques :

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \begin{pmatrix} 2\partial_r u & (r\partial_r(v/r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u) & (\partial_r w + \partial_z u) \\ (r\partial_r(v/r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u) & \frac{2}{r}(\partial_\theta v + \frac{u}{r}) & (r\partial_z v + \frac{1}{r}\partial_\theta w) \\ (\partial_r w + \partial_z u) & (r\partial_z v + \frac{1}{r}\partial_\theta w) & 2\partial_z w \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Méthode numérique

B.1 Fonctions de base et fonctions test

La méthode numérique est basée sur les fonctions de bases proposées par [Leonnard & Wray 1982] et utilisés par [Meseguer & Trefethen 2001b]. La perturbation \mathbf{u} est discretisé par une approximation spectrale \mathbf{u}_s d'ordre L en z , N en θ , et M en r :

$$\mathbf{u}_s(r, \theta, z, t) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N \sum_{m=0}^M \left(\mathbf{a}_{mnl}^{(1)} \Phi_{mnl}^{(1)}(r, \theta, z) + \mathbf{a}_{mnl}^{(2)} \Phi_{mnl}^{(2)}(r, \theta, z) \right), \quad (\text{B.1})$$

où les $\Phi_{mnl}^{(1,2)}$ sont des champs vectorielles à divergence nulle de la forme suivante :

$$\Phi_{mnl}^{(1,2)} = \tilde{\Phi}_{mnl}^{(1,2)}(r) e^{i(n\theta + k_0 lz)}, \quad (\text{B.2})$$

Nous définissons,

$$h_m(r) = (1 - r^2)T_{2m}(r), \quad g_m(r) = (1 - r^2)^2 T_{2m}(r) \quad (\text{B.3})$$

avec $T_{2m}(r)$ le polynôme de Chebyshev de degré $2m$. Les fonctions de base sont présentées dans [Leonnard & Wray 1982] et [Meseguer & Trefethen 2001b]. Elles sont traitées dans 4 cas différents selon les valeurs de n et l :

– $n=0$

$$\tilde{\Phi}_{m,l,n}^{(1)}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ rh_m(r) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\Phi}_{m,l,n}^{(2)}(r) = \begin{pmatrix} -ik_0 l r g_m(r) \\ 0 \\ \begin{cases} D_+[r g_m(r)] & \text{if } l \neq 0, \\ h_m(r) & \text{if } l = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

– $n \neq 0$

$$\tilde{\Phi}_{m,l,n}^{(1)}(r) = \begin{pmatrix} -inr^{\sigma-1}g_m(r) \\ D[r^\sigma g_m(r)] \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{\Phi}_{m,l,n}^{(2)}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ -ik_0lr^{\sigma+1}h_m(r) \\ inr^\sigma h_m(r) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

avec,

$$\sigma = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ paire} \\ 1 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Nous pouvons vérifier les propriétés de symétrie des fonctions de base. Si l, n sont négatives, chaque fonction de base est remplacée par sa complexe conjugué.

$$\Phi_{m,n,l}^{(1,2)}(r, \theta, z) = [\Phi_{m,-n,-l}^{(1,2)}(r, \theta, z)]^* \quad (\text{B.7})$$

La propriété de divergence nulle est aussi vérifiée dans toutes les fonctions de base :

$$\nabla \cdot \Phi_{m,n,l}^{(1,2)}(r, \theta, z) = 0 \quad (\text{B.8})$$

La projection de Petrov Galerkin consiste à projeter la approximation spectrale \mathbf{u}_s dans B.1 dans un espace de fonctions tests. Les fonctions test $\Psi_{m,l,n}(r, \theta, z)$ sont choisies de la forme suivante :

$$\Psi_{m,n,l}^{(1,2)}(r, \theta, z) = \tilde{\Psi}_{m,n,l}^{(1,2)}(r) e^{i(k_0lz+n\theta)} \quad (\text{B.9})$$

avec,

– Pour $n = 0$,

$$\tilde{\Psi}_{m,0,l}^{(1)}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_m(r) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{\Psi}_{m,0,l}^{(2)}(r) = \begin{pmatrix} -ik_0lr^2g_m(r) \\ 0 \\ \begin{cases} D_+[r^2g_m(r)] + r^3h_m(r) & \text{si } l \neq 0, \\ rh_m(r) & \text{si } l = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (\text{B.11})$$

– Pour $n \neq 0$,

$$\tilde{\Psi}_{m,n,l}^{(1)}(r) = \begin{pmatrix} -inr^\beta g_m(r) \\ D[r^{\beta+1}g_m(r)] + r^{\beta+2}h_m(r) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (\text{B.12})$$

$$\tilde{\Psi}_{m,n,l}^{(2)}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ ik_0 l r^{\beta+2} h_m(r) \\ \begin{cases} -inr^{\beta+1} h_m(r) & \text{si } l \neq 0 \\ r^{1-\beta} h_m(r) & \text{si } l = 0 \end{cases} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \quad (\text{B.13})$$

Where,

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ paire} \\ 1 & \text{si } n \text{ impaire} \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

Le facteur $1/\sqrt{1-r^2}$ permet le calcul exact de l'intégrale en r du produit d'une fonction de base avec une fonction test avec la quadrature de Gauss-Lobatto. Une chose importante d'utiliser des fonction tests périodiques et à divergence nulle est l'élimination des termes de pression comme est décrit dans le chapitre 2.

B.2 Dérivation numérique

Nous avons utilisé des matrices de dérivation spectrales pour dériver par rapport à r , θ et z . Ces matrices sont détaillées dans [Trefethen 2000] et [Meseguer & Trefethen 2001b]. Pour la composante radiale, on considère les points de Gauss-Lobatto :

$$r_k = -\cos\left(\frac{\pi k}{N_r}\right), \quad k = 0, \dots, N \quad (\text{B.15})$$

avec N_r impaire ;

$$\mathbb{D}_{rij} = \begin{cases} (1 + 2N_r^2)/6 & i = j = 0 \\ -(1 + 2N_r^2)/6 & i = j = N_r \\ \frac{r_i}{2(1-r_i^2)} & i = j \\ (-1)^{i+j} \frac{c_j}{c_i(r_j-r_i)} & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

où $c_j = 1$ pour $0 < j < N_r$ et $c_0 = c_{N_r} = 2$. Voir [Gottlieb *et al.* 1984]. Les fonctions de base $\Phi_{mnl}^{(1,2)}$ sont des fonctions paires ou impaires de r . On considère donc, les points de

Gauss-Lobatto dans l'intervalle $[0,1]$ [Trefethen 2000]. Pour une fonction quelconque paire, f_p ou impaire f_i on peut construire les matrices de dérivation \mathbb{D}_r^e et \mathbb{D}_r^o .

$$(\mathbb{D}_r^e)_{ij} = (\mathbb{D}_r)_{ij} + (\mathbb{D}_r^e)_{iN_r-j} \quad (\mathbb{D}_r^o)_{ij} = (\mathbb{D}_r)_{ij} - (\mathbb{D}_r^e)_{iN_r-j} \quad i, j = \frac{N_r+1}{2}, \dots, N_r \quad (\text{B.17})$$

La dérivée radiale d'un élément s'écrit,

$$\frac{d}{dr} \tilde{\Phi}_{mnl} = \mathbb{D}_r \otimes \tilde{\Phi}_{mnl} \quad (\text{B.18})$$

où

$$\mathbb{D}_r \otimes = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_r^o & & \\ & \mathbb{D}_r^o & \\ & & \mathbb{D}_r^e \end{pmatrix}, (n \text{ pair}) \quad (\text{B.19})$$

$$\mathbb{D}_r \otimes = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_r^e & & \\ & \mathbb{D}_r^e & \\ & & \mathbb{D}_r^o \end{pmatrix}, (n \text{ impair}) \quad (\text{B.20})$$

Pour le maillage azimutal

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N_\theta} j, \quad j = 0, \dots, N_\theta - 1, \quad (\text{B.21})$$

on utilise la matrice de dérivation périodique standard

$$(\mathbb{D}_\theta)_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_\theta}} & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

avec N_θ impair [Fornberg 1996] et pour la coordonnée axiale

$$z_j = \frac{2\pi}{N_z} j, \quad j = 0, \dots, N_z - 1, \quad (\text{B.23})$$

on utilise la matrice de dérivation périodique standard

$$(\mathbb{D}_z)_{ij} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2 \sin \frac{(i-j)\pi}{N_z}} & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

B.3 Méthode de sommation partielle

Pour le calculs du champs de vitesse dans l'espace physique nous avons utilisé la transformée de Fourier implémenté par la méthode de sommations partielles [Boyd 1999]. Cette méthode consiste a séparer les étapes de calculs :

(i) Évaluation sur la grille radiale r_i

$$\mathbf{u}_k(\theta, z) = \mathbf{u}(r_k, \theta, z) = \sum_{l=-L}^L \sum_{n=-N}^N e^{i(n\theta+2\pi lz/Q)} \underbrace{a_{mnl} \tilde{\Phi}_{mnl}(r_k)}_{\alpha_{ln}^{(k)}} \quad (\text{B.25})$$

(ii) Évaluation sur les plans radial-azimutal

$$\mathbf{u}_{jk}(z) = \mathbf{u}(r_k, \theta_j, z) = \sum_{l=-L}^L e^{i(2\pi lz/Q)} \underbrace{\sum_{n=-N}^N e^{i(n\theta)} \alpha_{ln}^{(k)}}_{\beta_l^{(jk)}} \quad (\text{B.26})$$

(iii) Évaluation sur la grille (r_k, θ_j, z_i)

$$\mathbf{u}_{ijk} = \mathbf{u}(r_k, \theta_j, z_i) = \sum_{l=-L}^L e^{i(2\pi lz/Q)} \beta_l^{(jk)} \quad (\text{B.27})$$

Le cout de cette méthode est $O(LNM(L + N + M))$, pendant que la somme directe est $O(M^2N^2L^2)$.

B.4 Intégration numérique

Pour l'intégration numérique du problème aux valeurs initiales, nous avons utilisé la méthode de *Adham Bashford Backward Differences* d'ordre 4 AB_4BD_4

$$\begin{aligned} (25\mathbf{A} - 2\Delta t\mathbf{B}) &= \mathbf{A}(48\mathbf{a}^{(k)} - 36\mathbf{a}^{(k-1)} + 16\mathbf{a}^{(k-2)} - 3\mathbf{a}^{(k-3)}) \\ &\quad - \Delta t(48\mathbf{b}^{(k-1)} - 72\mathbf{b}^{(k-1)} + 48\mathbf{b}^{(k-2)} - 12\mathbf{b}^{(k-3)}) \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

pour $k \geq 3$. La condition initiale est donnée sous la forme des coefficients spectraux $\mathbf{a}_{mnl}^{(0)}$.

La procédure d'intégration a besoin des coefficients $\mathbf{a}^{(t)}$ pour les 4 derniers pas des temps. Donc, on démarre avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour les quatre premiers pas des temps.

Bibliographie

- [A. Draad and & Nieuwstadt 1998] G. D. C. Kuiken A. Draad and et F. T. M. Nieuwstadt. *Laminar turbulent transition in pipe flow for Newtonian and non-Newtonian fluids*. J. Fluid Mech., vol. 377, pages 267–312, 1998. (Cité en page 5.)
- [Andersson *et al.* 2001] P. Andersson, L. Brandt, A. Bottaro et D. Henningson. *On the breakdown of the boundary layers streaks*. J. Fluid Mech., vol. 428, 2001. (Cité en pages 86 et 87.)
- [Bird *et al.* 1987] R. Bird, R. Armstrong et O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids*. Wiley - Interscience, New York, 1987. (Cité en page 19.)
- [Boyd 1999] J. P. Boyd. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover, 1999. (Cité en pages 31, 32 et 143.)
- [Carranza *et al.* 2012] S. N. Lopez Carranza, M. Jenny et C. Nouar. *Pipe flow of shear-thinning fluids*. C. R. Mech., vol. 340, pages 602–618, 2012. (Cité en page 86.)
- [Carreau 1972] J. P. Carreau. *Rheological equations from molecular network theories*. J. Rheol., vol. 16, pages 99–127, 1972. (Cité en page 19.)
- [Chapman 2002] S. J. Chapman. *Subcritical transition in channel flows*. J. Fluid Mech., vol. 35, page 451, 2002. (Cité en pages 3 et 5.)
- [Cherhabili & Ehrenstein 1997] A. Cherhabili et U. Ehrenstein. *Finite amplitude equilibrium states in plane Couette flow*. J. Fluid Mech., vol. 342, pages 159–177, 1997. (Cité en page 6.)
- [Cossu & Brandt 2004] C. Cossu et L. Brandt. *On Tollmien-Schlichting waves in streaky boundary layers*. Eur J. Mech. B, vol. 23, pages 815–833, 2004. (Cité en page 86.)
- [Darbyshire & Mullin 1995] A.G. Darbyshire et T. Mullin. *Transition to turbulence in constant-mass-flux pipe flow*. J. Fluid Mech., vol. 289, pages 83–114, 1995. (Cité en pages 3, 4 et 5.)
- [Escudier & Presti 1996] M. P. Escudier et F. Presti. *Pipe flow of thixotropic liquid*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 62, pages 221–306, 1996. (Cité en page 8.)
- [Escudier *et al.* 2005] M. P. Escudier, R. J. Poole, F. Presti, C. Dales, C. Nouar, L. Graham et L. Pullum. *Observations of asymmetrical flow behaviour in transitional pipe flow*

- of yield-stress and other shear thinning liquids.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 127, pages 143–155, 2005. (Cité en pages 8 et 21.)
- [Escudier *et al.* 2009] M. P. Escudier, S. Rosa et R. J. Poole. *Asymmetry in transitional pipe flow of drag-reducing polymer solutions.* J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 161, pages 19–29, 2009. (Cité en pages 8, 20, 21 et 113.)
- [Esmael & Nouar 2008] A. Esmael et C. Nouar. *Transitional flow of a yield-stress fluid in a pipe : Evidence of a robust coherent structure.* Phys. Rev. E., vol. 77, 2008. (Cité en pages 8, 9 et 14.)
- [Esmael *et al.* 2010] A. Esmael, C. Nouar et A. Lefèvre. *Transitional flow of a non-Newtonian fluid in a pipe : Experimental evidence of weak turbulence induced by shear-thinning behavior.* Physics of Fluids, vol. 22, page 057302, 2010. (Cité en page 113.)
- [Esmael 2008] A. Esmael. *Transition vers la turbulence pour un fluide a seuil en écoulement dans une conduite cylindrique.* PhD thesis, INPL, Nancy, 2008. (Cité en pages 8, 13, 37 et 133.)
- [Faisst & Eckhardt 2003] H. Faisst et B. Eckhardt. *Traveling waves in pipe flow.* Phys. Rev. Lett., vol. 91, page 224502, 2003. (Cité en pages 6 et 10.)
- [Fornberg 1996] B. Fornberg. *A practical guide for pseudospectral Methods.* Cambridge University Press, 1996. (Cité en page 142.)
- [Gavarini *et al.* 1984] M.I. Gavarini, A. Bottaro et F.T.M. Nieuwstadt. *The initial stage of transition in pipe flow : Role of optimal base flow distortions.* J. Fluid Mech., vol. 517, pages 131 – 165, 1984. (Cité en pages 3 et 5.)
- [Gottlieb *et al.* 1984] D. Gottlieb, M.Y.Hussaini et S.A. Orzag. *Introduction : Theory and Applications of spectral Methods.* SIAM, Philadelphia, 1984. (Cité en page 141.)
- [Govindarajan 2002] R. Govindarajan. *Surprising effects of minor viscosity gradients.* J. Indian Inst. Sci., vol. 82, pages 121–127, 2002. (Cité en page 77.)
- [Groisman & Steinberg 2000] A. Groisman et V. Steinberg. *Elastic turbulence in a polymer solution flow.* Nature, vol. 405, pages 53–55, 2000. (Cité en page 7.)
- [Guzel *et al.* 2009] B. Guzel, I. Frigaard et M. Martinez. *Predicting laminar-turbulent transition in Poiseuille pipe flow for non-Newtonian fluids.* Chem. Eng. Sci., vol. 64, pages 254–264, 2009. (Cité en page 8.)

- [Hof *et al.* 2003] B. Hof, A. Juel et T. Mullin. *Scaling of the turbulence transition threshold in a pipe*. Phys Rev. Letters, vol. 91, pages 244–502, 2003. (Cité en pages 3 et 5.)
- [Hof *et al.* 2004] Björn Hof, Casimir W. H. van Doorne, Jerry Westerweel, Frans T. M. Nieuwstadt, Holger Faisst, Bruno Eckhardt, Hakan Wedin, Richard R. Kerswell et Fabian Waleffe. *Experimental Observation of Nonlinear Traveling Waves in Turbulent Pipe Flow*. Science, vol. 305, no. 5690, pages 1594–1598, 2004. (Cité en pages 6 et 7.)
- [Krasnov *et al.* 2008] D. Krasnov, M. Rossi, O. Zikanov et T. Boeck. *Optimal growth and transition to turbulence in channel flow with spanwise magnetic field*. J. Fluid Mech., vol. 596, pages 73–101, 2008. (Cité en page 6.)
- [Landahl 1975] M. T. Landahl. *Wave breakdown and turbulence*. SIAM. J. Appl. Maths., vol. 28, pages 735–756, 1975. (Cité en page 86.)
- [Leonnard & Wray 1982] A. Leonnard et A. Wray. *A new numerical method for the simulation of three dimensional flow in a pipe*. In Berlin Springer-Verlag, editeur, Proceedings, 8th Int. Conf on numerical methods in fluid dynamics, pages 335–342. 1982. (Cité en pages 26 et 139.)
- [Mack 1976] L. M. Mack. *A Numerical study of the temporal eigenvalue spectrum of the blasious boundary layer*. J. Fluid Mech., vol. 73, pages 497–520, 1976. (Cité en page 42.)
- [Mellibovsky & Meseguer 2008] F. Mellibovsky et A. Meseguer. *Critical threshold in pipe flow transition*. Phil. Trans. R. Soc. A, 2008. (Cité en pages 3 et 5.)
- [Meseguer & Mellibovsky 2007] A. Meseguer et F. Mellibovsky. *On a solenoidal Fourier - Chebyshev spectral method for stability analysis of the Hagen-Poiseuille flow*. Appl. Numer. Math., vol. 57, pages 920–938, 2007. (Cité en pages 61, 62 et 63.)
- [Meseguer & Trefethen 2001a] A. Meseguer et L. N. Trefethen. *Linearized pipe flow to 10^7* . Journal of Computational Physics., vol. 186, pages 178–197, 2001. (Cité en pages 2, 14, 44, 50 et 133.)
- [Meseguer & Trefethen 2001b] A. Meseguer et L. N. Trefethen. *A spectral Petrov-Galerkin formulation for pipe flow (II) : Nonlinear transitional stages*. Rapport technique 01/19, Oxford University, Numerical Analysis Group, 2001. (Cité en pages 26, 32, 33, 61, 139 et 141.)

- [Meseguer 2003] A. Meseguer. *Streak breakdown instability in pipe Poiseuille flow*. *Physis of Fluids.*, vol. 15, pages 1203–1213, 2003. (Cité en pages 5, 6, 14, 15, 116, 118, 119 et 123.)
- [Nagata 1990] M. Nagata. *Three dimensional finite amplitude solutions in plane Couette flow*. *A.I. ChE. Journal.*, vol. 217, pages 519–527, 1990. (Cité en page 6.)
- [Nouar *et al.* 2007a] C. Nouar, A. Bottaro et J. P. Brancher. *Delaying transition to turbulence in channel flow : revisiting the stability of shear-thinning fluids*. *J. Fluid. Mech.*, vol. 592, pages 177–194, 2007. (Cité en pages 37 et 77.)
- [Nouar *et al.* 2007b] C. Nouar, N. Kabouya, J. Dusek et M. Mamou. *Modal and non-modal linear stability of the plane-Bingham-Poiseuille flow*. *J. Fluid Mech.*, vol. 577, pages 211–239, 2007. (Cité en page 54.)
- [Park *et al.* 2011] J. Park, Y. Wang et C. Cossu. *On the stability of large-scale streaks in turbulent Couette and Poiseuille flows*. *Compt. Rend. Mech.*, vol. 339, pages 1–5, 2011. (Cité en page 86.)
- [Peixinho & Mullin 2006] J. Peixinho et T. Mullin. *Decay of turbulence in pipe flow*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 128, pages 172–184, 2006. (Cité en page 2.)
- [Peixinho & Mullin 2007] J. Peixinho et T. Mullin. *Finite-amplitude thresholds for transition in pipe flow*. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 582, 2007. (Cité en pages 3 et 5.)
- [Peixinho *et al.* 2005] J. Peixinho, C. Nouar, C. Desaubry et B. Théron. *Laminar transitional and turbulent flow of yield stress fluid in a pipe*. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 128, pages 172–184, 2005. (Cité en page 8.)
- [Peixinho 2004] J. Peixinho. *Contribution expérimentale a la convection thermique en regime laminaire, transitoire et turbulent pour un fluide a seuil en ecoulement dans une conduite*. PhD thesis, INPL, Nancy, 2004. (Cité en page 133.)
- [Pfenninger 1961] W. Pfenninger. *Boundary layer suction experiments with laminar flow at high Reynolds numbers in the inlet length of a tube by various suction methods*. In *Boundary layer and flow control*. Pergamon - Oxford, 1961. (Cité en page 2.)
- [Phillips & Williams 2000] G. O. Phillips et P.A. Williams. *Handbook of hydrocolloids*. Whoodhead Publishing, Cambridge, 2000. (Cité en page 19.)
- [Quemada 1978] D. Quemada. *Rheology of concentrated disperse system. A model for non Newtonian shear viscosity in steady flows*. *Rheol. Acta*, vol. 17, pages 633–642, 1978. (Cité en page 19.)

- [Reddy *et al.* 1998] S. C. Reddy, J. P. Schmid, J. S. Baggett et D. S. Henningson. *On stability of streamwise streaks and transition thresholds in plane channel flows*. J. Fluid Mech., vol. 365, pages 269–303, 1998. (Cité en pages 5, 6, 86, 88 et 110.)
- [Reynolds 1883] O. Reynolds. *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water in parallel channels shall be direct or sinuous and of the law of resistance in parallel channels*. Philos. Trans. R. Soc., vol. 174, pages 935–982, 1883. (Cité en page 2.)
- [Roland 2010] N. Roland. *Modélisation de la transition vers la turbulence d'écoulements en tuyeau des fluides rhéofluidifiants par calcul numérique d'ondes non linéaires*. PhD thesis, INPL, Nancy, 2010. (Cité en page 10.)
- [Rudman *et al.* 2004] M. Rudman, H. M. Blackburn, L.J.W. Graham et L. Pullum. *Turbulent pipe flow of shear-thinning fluids*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 118, pages 33–48, 2004. (Cité en page 8.)
- [Schmid & Henningson 1994] J. P. Schmid et D. S. Henningson. *Optimal energy density growth in Hagen-Poiseuille flow*. J. Fluid Mech., vol. 277, pages 197–255, 1994. (Cité en page 6.)
- [Schmid & Henningson 2001] P. J. Schmid et D. S. Henningson. *Stability and transition in shear flows*. Springer - Verlag, 2001. (Cité en pages 50 et 51.)
- [Toms 1949] B. A. Toms. *Proc int Cong. Rheology*. North-Holland, Amsterdam, 1949. (Cité en page 7.)
- [Trefethen *et al.* 1993] Lloyd N. Trefethen, Anne E. Trefethen, Satish C. Reddy et Tobin A. Driscoll. *Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues*. Science, vol. 261, pages 578–584, 1993. (Cité en page 50.)
- [Trefethen 2000] L. N. Trefethen. *Spectral Methods in Matlab*. SIAM, Philadelphia, vol. 00/17, 2000. (Cité en pages 141 et 142.)
- [Waleffe 1995] F. Waleffe. *Hydrodynamic stability and turbulence : Beyond transients to a self-sustaining process*. Stud. Appl. Math., vol. 95, pages 319–343, 1995. (Cité en pages 6, 14, 67, 86 et 113.)
- [Waleffe 1997] F. Waleffe. *On a self-sustaining process in shear flows*. Phys. Fluids, vol. 9, pages 883–900, 1997. (Cité en page 6.)

- [Wedin & Kerswell 2004] H. Wedin et R. Kerswell. *On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug*. J. Fluid. Mech., vol. 508, pages 333–371, 2004. (Cité en pages 6 et 10.)
- [White & Mungal 2008] C. M. White et M. G. Mungal. *Mechanics and prediction of turbulent drag reduction with polymer additives*. Annual Rev. Fluid Mech., vol. 40, pages 235–256, 2008. (Cité en page 7.)
- [Willis *et al.* 2008] A. P. Willis, J. Peixinho, R. R. Kerswell et T. Mullin. *Experimental and theoretical progress in pipe flow transition*. Phil. Trans. R. Soc. A, 2008. (Cité en pages 4 et 5.)
- [Wygnanski & Champagne 1973] I. J. Wygnanski et F.H. Champagne. *On transition in a pipe. Part 1. The origin off puffs and slugs and the flow in a turbulent slug*. J. Fluid. Mech., vol. 59, pages 281–351, 1973. (Cité en page 4.)
- [Wygnanski *et al.* 1975] I. J. Wygnanski, M. Sokolov et D. Friedman. *On transition in a pipe. Part 2. The equilibrium puff*. J. Fluid. Mech., vol. 69, pages 283–304, 1975. (Cité en page 5.)
- [Zikanov 1996] O. Y. Zikanov. *On the instability of pipe Poiseuille flow*. Phys. Fluids, vol. 8, pages 2923–2932, 1996. (Cité en pages 6, 61 et 66.)

Transition laminaire-turbulent en conduite cylindrique d'un fluide non Newtonien

Résumé : L'objectif de cette thèse est de fournir une analyse de la transition vers la turbulence d'un fluide rhéofluidifiant (fluide de Carreau) dans une conduite cylindrique. Pour cela, un code pseudo-spectral de type Petrov-Galerkin a été développé. Une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement laminaire est effectuée, montrant que cet écoulement est linéairement stable. Ensuite, des perturbations sous la forme des rouleaux longitudinaux contra-rotatifs sont utilisées comme condition initiale. Les termes non linéaires d'inertie et visqueux créent un écoulement secondaire avec des points d'inflexion, linéairement instable vis-à-vis de perturbations 3D. Une analyse linéaire de stabilité de ce nouvel écoulement de base bidimensionnelle est réalisée. La forme des vecteurs propres critiques est analysé. Enfin, une analyse non linéaire de stabilité de rouleaux vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles de faible amplitude est effectuée, obtenant un retard pour la transition vers la turbulence des fluides rhéofluidifiants par rapport au cas Newtonien et une tendance à l'asymétrie du profil de vitesse axiale.

Mots clés : transition ver la turbulence, écoulement dans une conduite, fluide rhéofluidifiant, modèle de Carreau

Transition to turbulence of non Newtonian pipe flow

Abstract : The main objective of this thesis is to provide a description of the transition to turbulence of a shear thinning fluid in pipe flow. A linear stability analysis of the base flow is done. Results show that the flow is linearly stable and the optimal perturbation is given by a pair of counter rotating vortex. This kind of perturbation is used as an initial condition of a computational code which integrates the governing equations. Inertial and viscous non linear terms generate a secondary base flow with inflection points, which is linearly unstable to 3D perturbations. A secondary instability analysis is done, regarding the shape of unstable eigenvectors. Depending the rheological parameters and the size of the primary perturbation, the unstable mode might be near the wall or the center of the pipe. Finally, a non linear stability analysis of the streaks to 3D perturbations of weak amplitude, obtaining a delay in the transition to turbulence due to shear thinning.

Keywords : transition to turbulence, pipe flow, shear thinning fluid, Carreau model
