



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

Présentée par

**AZOTI Wiyao Leleng**

Pour l'obtention du grade de :

**Docteur de l'Université de Lorraine**

Spécialité : Sciences des Matériaux

**Conception et amélioration des propriétés amortissantes des composites  
auxétiques basées sur l'utilisation des outils de la micromécanique**

**Design, concepts and methods for high damping/dynamic properties of  
auxetic reinforced multifunctional materials**

Soutenue le 25 Septembre 2012 à 14h (Auditorium, ENIM) devant le jury composé de :

Pr. Paul LIPINSKI	ENIM, Metz	Directeur de thèse
Dr. MCF. Napo BONFOH	ENIM, Metz	Co-directeur de thèse
Dr. Yao KOUTSAWA	CRP Henri Tudor, Luxembourg	Co-directeur de thèse
Pr. Jean Claude GRANDIDIER	ENSMA, Poitiers	Rapporteur
Pr. Antonio FERREIRA	Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Portugal	Rapporteur
Pr. Djimedo KONDO	UPMC, Paris	Examineur
Pr. Issam DOGHRI	UCL, Belgique	Examineur
Dr. HDR. Salim BELOUETTAR	CRP Henri Tudor, Luxembourg	Examineur

# Remerciements

---

Les travaux de cette thèse ont été conjointement menés entre le Centre de Recherche Public Henri Tudor (CRP Henri Tudor) au Luxembourg et le Laboratoire de Mécanique Biomécanique Polymères Structures (LaBPS) de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz sous le financement du Fonds National de la Recherche Luxembourg (FNR-Luxembourg).

Je tiens à remercier Monsieur Paul LIPINSKI, mon directeur de thèse pour avoir dirigé ce travail de thèse avec un grand sens de rigueur scientifique et pédagogique. Ses qualités d'humaniste ont toujours contribué à l'avancement des travaux;

J'adresse également mes remerciements à Monsieur Napo BONFOH, mon co-directeur de thèse pour sa contribution remarquable dans ce travail. Sa simplicité d'être m'a toujours ouvert les portes de son bureau;

Un remerciement particulier est adressé à Monsieur Yao KOUTSAWA pour la confiance placée en ma personne en me confiant ce sujet de thèse. Grace à lui, j'ai fait mes premiers pas dans la mécanique numérique.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur Salim BELOUETTAR, Chef de l'Unité Modélisation et Simulation (MODSI) du CRP Henri Tudor, pour la confiance placée en ma personne et m'avoir accueilli au sein de son équipe ;

Je tiens à exprimer ma gratitude à Messieurs les Professeurs, Antonio FERREIRA, Jean-Claude GRANDIDIER, KONDO Djimedo, Issam DOGHRI pour avoir accepté rapporter et examiner cette thèse ;

J'adresse un profond remerciement à Monsieur Sonnou TIEM, par qui mon troisième cycle universitaire en France a commencé. Qu'il trouve ici, l'expression de ma sincère gratitude;

Enfin, je ne saurais oublier mes camarades de laboratoire du CPR Henri Tudor à l'instar de Christelle TCHALLA, Marco MONTEMURRO, Anita CATAPANO, Vanessa GEORGES, Duc TUE, Daniella CRISAFULLI, Stan ATTIPOU. A Metz, je pense particulièrement à Olivier Wiyao KPOBIE, Jérôme OLHAGARAY, Florian GHERING et Sana Ben KHLIFA.

# Dédicaces

---

Dédicaces

A la mémoire de mon père,

A ma mère,

A mes sœurs.

# Table des matières

---

## Tables des matières

Dédicaces .....	ii
Liste des Figures .....	vii
Liste des tableaux.....	x
Liste des symboles et abréviations .....	xi
Introduction générale .....	1

## Chapitre 1: Etude bibliographique

Introduction .....	6
1.1. Les matériaux auxétiques : Echelle de longueur et origine .....	6
1.1.1. Matériaux d'origine naturelle .....	6
1.1.2. Matériaux d'origine manufacturée et synthétisée .....	7
1.2. Microstructure et comportement auxétique .....	9
1.2.1. La microstructure ré-entrante .....	9
1.2.2. La microstructure chirale.....	10
1.3. Méthodes d'homogénéisation et comportement auxétique.....	12
1.3.1. Homogénéisation asymptotique discrète (HAD) .....	13
1.3.2. Homogénéisation numérique .....	17
1.3.3. Homogénéisation par la théorie de champs moyens .....	21
1.4. Propriétés et applications des matériaux auxétiques.....	22
1.4.1. Propriétés .....	22
1.4.2. Applications.....	27

Conclusion .....	28
------------------	----

## Chapitre 2: Modélisation micromécanique

2.1. Motivation et objectifs .....	30
2.1.1. Motivations .....	30
2.1.2. Objectifs .....	30
2.2. Introduction aux méthodes d'homogénéisation par champs moyens .....	31
2.2.1. Localisation des champs macroscopiques .....	31
2.2.2. Technique de la moyenne .....	33
2.3. Détermination des déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}$ : Equation cinématique intégrale .....	34
2.4. Modélisation micromécanique utilisant le concept d'une inclusion ellipsoïdale .....	36
2.4.1. Modèle de deux inclusions ellipsoïdales .....	37
2.4.2. Inclusion ellipsoïdale multi-enrobée .....	42
2.5. Conclusion .....	47

## Chapitre 3: Investigation analytique et applications micromécaniques

Introduction .....	49
3.1. Objectifs .....	49
3.2. Modélisation analytique du comportement auxétique .....	50
3.3. Le modèle de l'hétérogénéité multi-enrobée .....	55
3.4. Simulations par éléments finis du modèle multi-enrobé .....	58
3.4.1. Définition des fractions volumiques .....	59
3.4.2. Relation entre les fractions volumiques et les dimensions des différentes phases ...	59
3.4.3. Propriétés des phases .....	60
3.5. Modèle constitué d'un cluster de renforts « réentrant » .....	66

3.6. Approche éléments finis de la microstructure « réentrante » .....	74
Conclusion .....	80

## Chapitre 4: Effet du renfort auxétique sur les propriétés d'une matrice viscoélastique

Motivations.....	83
4.1. Introduction.....	83
Objectif .....	85
4.2. Principes de viscoélasticité dans le domaine temps / fréquence .....	86
4.3. Propriétés effectives d'un composite viscoélastique .....	87
4.3.1. Equation cinématique intégrale viscoélastique.....	87
4.3.2. Estimation des propriétés viscoélastiques d'un composite à matrice .....	92
4.4. Applications numériques et discussions .....	96
4.4.1. Propriétés mécaniques des constituants .....	97
4.4.2. Comparaison des modèles micromécaniques.....	100
4.4.3. Composite impliquant des phases viscoélastiques.....	103
4.4.4. Composite impliquant des phases élastiques et viscoélastiques.....	105
4.4.5. Réponse en fréquence du composite .....	112
4.5. Conclusion.....	115

## Chapitre 5: Comportement dynamique des structures sandwichs à couches auxétiques

5.1. Introduction.....	117
Objectifs.....	118
5.2. Formulation cinématique du champ de déplacement .....	118
5.3. Mise en équation du problème dynamique .....	120

5.3.1. Principe des travaux virtuels.....	120
5.3.2. Solution du problème dynamique .....	122
5.4. Modélisation éléments finis: Technique du « Modal Strain Energy »(MSE) .....	125
5.5. Applications numériques et discussions .....	127
5.5.1. Influence du coefficient de Poisson.....	128
5.5.2. Influences d'autres paramètres du modèle .....	132
5.6. Conclusion.....	135
Conclusion générale .....	136
Annexes .....	140
Références bibliographiques.....	153

# Liste des Figures

## Liste des Figures

Figure. 1.1: Structure brique de graphite dans le cœur des réacteurs nucléaires Magnox [16].....	8
Figure. 1.2: Illustration de la microstructure hexagonale .....	10
Figure 1.3: Illustration de la microstructure chirale .....	11
Figure 1.4: Cellule unitaire hexagonale « ré-entrante » (gauche) et hexachirale (droit) .	14
Figure 1.5: Cellule « ré-entrante »:.....	16
Figure 1.6: Cellule hexachirale: .....	16
Figure. 1.7. Différentes microstructures chirales étudiées.....	18
Figure 1.8. Différentes microstructures tétrachirales étudiées .....	20
Figure 1.9. Variantes de microstructures trichirales étudiées .....	21
Figure 1.10: Mousses en chargement et mode de rupture: .....	25
Figure 1.11: Tests statiques: contrainte-déformation .....	26
Figure 1.12: Dégradation de rigidité en fonction du nombre de cycles [52] .....	26
Figure 1.13: Dissipation d'énergie par unité de volume en fonction du nombre de cycles: .....	27
Figure 2.1: Illustration du VER .....	32
Figure 2.2 :Décomposition du tenseur des propriétés élastiques $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ .....	35
Figure 2.3 : Microstructure de la paire d'inclusions plongée dans $\mathbf{C}^0$ .....	37
Figure 2.4 : Illustration de l'interaction d'une paire d'inclusions .....	40
Figure 2.5 : Topologie du modèle multi-enrobé .....	42

Figure 3.1. Frontières du domaine auxétique en fonction de la fraction volumique $f$ pour $\gamma = 2$ .....	54
Figure 3.2. Frontières du domaine auxétique en fonction du rapport $\gamma$ pour $f = 0.3$ .....	54
Figure 3.3: Microstructure multi-enrobée décrite dans les travaux de Stagni .....	56
Figure 3.4 : Evolution du coefficient de Poisson $\nu_{12}^{GSC}$ en fonction de la porosité .....	57
Figure 3.5 : Topologie Eléments Finis de la microstructure multi-enrobée.....	58
Figure 3.6: Maillage de la microstructure multi-enrobée .....	61
Figure 3.7: Contours Plots du champ de déformation issus du calcul EF sur Abaqus 6.10 .....	65
Figure 3.8: Evolution de $\nu_{12}$ versus la porosité: EF, micromécanique, Stagni .....	65
Figure 3.9: Approche micromécanique de l'architecture « ré-entrante » .....	67
Figure 3.10: Prise en compte de l'Interaction des inclusions .....	68
Figure 3.11. (a) Configuration contrainte plane, (b) configuration déformation plane.	69
Figure 3.12. Coefficient de Poisson $\nu$ versus $f_T$ pour différentes valeurs de $T$ and $\alpha = 0.4$ .....	71
Figure 3.13. Coefficient de Poisson versus $f_T$ pour différentes valeurs de $r$ , $\alpha = 0.4$ , $T = 10$ .....	73
Figure 3.14: Modèle EF de la microstructure « réentrante » pour $f_T = 0.9$ .....	75
Figure 3.15: Contours Plots de déformation de la microstructure réentrante pour $f_T = 0.9$ .....	76
Figure 3.16 : Evolution du coefficient de Poisson versus la fraction volumique: FE et solutions micromécaniques pour $\alpha = 0.4$ , $T = 10$ , $r = 0.1$ .....	77
Figure 3.17: Déformation 3-D du RVE sous sollicitation en traction.....	78
Figure 3.18:MEF, déformation plane 2-D, inclusions interconnectées .....	79
Figure 3.19. MEF inclusions interconnectées: .....	79

Figure 4.1 : Représentation schématique du VER viscoélastique.....	92
Figure 4.2 : Propriétés viscoélastiques du PVB et des matériaux $A$ et $B$ .....	98
Figure 4.3: Encadrements micromécaniques pour $E_C = 658\text{MPa}$ et $\nu = 0.3$ .....	101
Figure 4.4 : Propriétés viscoélastiques normalisées issues de phases viscoélastiques ...	104
Figure 4.5: Propriétés viscoélastiques normalisées issues de phases viscoélastiques et élastiques pour $Q = 10^0$ .....	107
Figure 4.6: Influence du coefficient de Poisson $\nu$ pour $Q = 10^{+1}$ .....	109
Figure 4.7: Influence du rapport de rigidité $Q$ pour $\nu = -0.7$ .....	111
Figure 4.8: Propriétés viscoélastiques versus Fréquence pour $Q = 10$ , $f_I = 0.7$ .....	115
Figure. 5.1: Illustration de la structure multicouche étudiée.....	120
Figure. 5.2: Conditions aux limites du problème dynamique.....	126
Figure. 5.3: Maillage de la structure.....	127
Figure. 5.4: Facteur de perte normalisé versus le coefficient de Poisson.....	130
Figure. 5.5: Premier mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques ....	131
Figure. 5.6: Deuxième mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques.	131
Figure. 5.7: Troisième mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques.	132

# Liste des tableaux

---

## Liste des tableaux

Tableau 3.1 : Propriétés des phases .....	70
Tableau 5.1: Propriétés mécaniques et physiques .....	128
Tableau 5.2: fréquences propres et facteur de perte normalisé pour $H_v/H_e = 1$ , $L/H_t = 50$ .....	129
Tableau 5.3: Influence du rapport de longueur pour $H_v/H_e = 1$ .	133
Tableau 5.4: Influence du rapport d'épaisseur pour $L/H_t = 50$ , .	134
Tableau E.1: Séries de Prony pour les matériaux $A$ et $B$ .....	149

# Liste des symboles et abréviations

---

## Liste des symboles et abréviations

### Symboles latins

$L, t$ :	Paramètres géométriques d'une cellule
$r$ :	Rayon du cylindre dans le réseau hexachiral
$d$ :	Largeur des segments et du cylindre dans le réseau hexachiral
$D$ :	Diamètre des ligaments circulaires dans le réseau rotachiral
$Y_1, Y_2$ :	Vecteurs de translation périodique en Homogénéisation asymptotique
$E_s$ :	Module de Young de la poutre utilisée en Homogénéisation asymptotique
$V_i$	Vecteurs de périodicité en Homogénéisation numérique
$E$ :	Déformation imposée
$V$ :	Volume du domaine étudié
$u$ :	Champ de déplacement lié aux conditions aux limites en homogénéisation numérique
$v$ :	Fluctuation périodique en Homogénéisation numérique
$t, n$ :	Vecteur traction et vecteur normal
$c, s$ :	Tenseur des constantes et souplesses élastiques
$E_d$ :	Dissipation d'énergie par unité de volume
$d, l, L$ :	Longueurs d'échelle du VER
$d_0$	Limite de validité des lois de la MMC
$U^d$ :	Déplacement imposé sur les frontières du VER
$x$ :	Vecteur définissant un point du VER
$A, B$ :	Tenseurs de localisation en déformation et en contrainte

## Liste des symboles et abréviations

$C^r$ :	Milieu de référence
$\delta c$ :	Fluctuations des propriétés élastiques
$G$ :	Tenseur de Green
$E^r$ :	Déformation macroscopique liée au milieu de référence
$T^{ij}$ :	Tenseur d'interaction en multi-site
$P$ :	Opérateur interfacial
$h$ :	Matrice de Christoffel
$J, K$ :	Tenseurs idempotents
$I$ :	Tenseur identité d'ordre 4
$f$ :	Fraction volumique d'inclusions dans le VER
$k$ :	Epaisseur relative d'enrobage
$e$ :	Ouverture des renforts horizontaux et adjacents
$T$ :	Epaisseur de la cellule unitaire
$a^l$ :	Tenseur de localisation relatif au milieu de référence
$R, J$ :	Fonction de relaxation et de retard
$t$ :	Variable temporelle
$\square$ :	Transformée de Carlson-Laplace
$\hat{L}$ :	Tenseur des propriétés viscoélastiques
$\hat{A}$ :	Tenseur de localisation en déformation viscoélastique
$\hat{u}$ :	Champ de déplacement viscoélastique
$\hat{T}^{ij}$ :	Tenseur d'interaction viscoélastique
$r_s$ :	Facteur de proportionnalité défini au schéma incrémental
$s$ :	Etape courante d'injection au schéma incrémental
$S$ :	Nombre total d'étapes d'injection au schéma incrémental

## Liste des symboles et abréviations

$Q$ :	Rapport de rigidité des phases
$H_e, H_v$ :	Epaisseurs des couches élastiques et viscoélastiques
$H_t$ :	Epaisseur totale
$\vec{U}(x, z, t)$ :	Cinématique définissant les couches dans le sandwich
$f(z)$ :	Fonction de cisaillement
$u^0(x, t)$ :	Déplacement longitudinal du plan moyen
$P_{acc}(\bullet)$ :	Puissance des forces d'inertie
$P_{int}(\bullet)$ :	Puissance des forces internes
$P_{ext}(\bullet)$ :	Puissance des forces extérieures
$S_k$ :	Surface d'intégration de la couche $k$
$\mathbf{j}$ :	Variable complexe
$w(z, t)$ :	Déplacement transversal de la structure
$f_0$ :	fréquence propre
$U_v^n$ :	Energie de déformation dans la couche viscoélastique
$U_T^n$ :	Energie de déformation dans toute la structure

## Symboles grecs

$\nu$ :	Coefficient de Poisson
$\theta$ :	Paramètre angulaire caractérisant l'auxétisme d'une cellule
$\beta$ :	Paramètre angulaire définissant l'orientation du segment hexachiral

## Liste des symboles et abréviations

$\eta$ :	Rapport de finesse en Homogénéisation asymptotique
$\Sigma$ :	Contrainte imposée
$\nu^{eff}, \mu^{eff}$ :	Coefficient de Poisson effectif, Module de cisaillement effectif
$\sigma, \varepsilon$ :	Tenseurs des contraintes et déformations à l'échelle locale
$\Gamma$ :	Tenseur de Green modifié
$\theta^i$ :	Fonction indicatrice
$\varphi^i$ :	Fraction volumique du constituant $i$ dans l'inclusion composite
$\tau$ :	Tenseur de polarisation
$\alpha^i$ :	Tenseur de localisation de la phase $i$ dans l'inclusion composite
$\mathcal{G}$ :	Saut moyen de déformation d'une phase à l'autre dans l'inclusion composite
$\mu^{MT}, \kappa^{MT}$ :	Modules de cisaillement et de compressibilité de Mori-Tanaka
$\hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}$ :	Tenseurs des contraintes et déformations viscoélastiques
$\mu, \eta$ :	Module de stockage, facteur de perte
$\beta(x, t)$ :	Rotation additionnelle
$\rho_k$ :	Masse volumique de la couche $k$
$\Omega$ :	Pulsation complexe
$\omega_0$ :	Pulsation propre

## Abréviations

<i>PVB</i> :	Poly Vinyle de Butyral
<i>IVOL</i> :	Volume des points d'intégration de Gauss

## Liste des symboles et abréviations

*SENER* : Densité d'énergie de déformation par unité de volume

*CLT* : classical laminate theories

*FSDT* : first order-shear deformation theories

*HSDT* : high-order shear deformation theories

## Notations

$\delta \bullet$  : Quantité virtuelle

$\bullet_{,x} = \frac{\partial \bullet}{\partial x}$  : Dérivée spatiale

$\bullet_{,t} = \frac{\partial \bullet}{\partial t}$  : Dérivée temporelle

$\Re$  : Partie réelle

$\Im$  : Partie imaginaire

# Introduction générale

---

## Introduction générale

### Contexte général

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est l'une des deux propriétés mécaniques utilisées dans la description du comportement élastique et isotrope des matériaux solides suivant l'approximation des petites déformations [1]. Dans le cas des tests mécaniques de traction/compression,  $\nu$  est défini par le rapport négatif de la déformation transverse sur la déformation axiale. Son effet relève d'une importance fondamentale dans le comportement des matériaux si bien qu'une variation de sa valeur conduit à des modifications significatives des performances mécaniques. Dans le cas des matériaux isotropes, la valeur de  $\nu$  est définie suivant les restrictions thermodynamiques telles que  $-1 \leq \nu \leq 1/2$ . La plupart des matériaux possèdent un  $\nu$  positif. Par conséquent, ces derniers se déforment par une section transversale contractée ou amincie lorsqu'ils sont sollicités longitudinalement.

La possibilité que le coefficient de Poisson  $\nu$  soit négatif est admise et demeure une conséquence de la théorie classique de l'élasticité [2]. Ceci implique que les matériaux « auxétiques », (terme désignant dans la littérature les matériaux à coefficient de Poisson négatif) se comportent par un gonflement ou une dilatation de leur section transversale sous sollicitation longitudinale en traction et une contraction sous l'effet d'un chargement en compression.

Observée dans la pyrite de fer par Voigt, au début du siècle précédent, et reportée par Love [2], cette propriété fut considérée comme anormale à cette époque. Depuis, des matériaux auxétiques synthétiques ont été produits incluant les mousses, les nids d'abeilles, les polymères microporeux et des fibres renforts de composites [3-6].

Dans la plus part des cas, les matériaux auxétiques résultent d'une altération de la microstructure interne de matériaux conventionnels. De là, la question de la microstructure d'un tel matériau surgit de la part de certains auteurs comme Lakes [3] et Gaspar et al. [7] par exemple. Ces derniers affirment que ce type de comportement résulte d'une microstructure

spécifique. La microstructure dite de nid d'abeille inversée ou « ré-entrante » peut être évoquée comme exemple. Par ailleurs, en analysant le mécanisme de déformation aboutissant au comportement auxétique, surviennent des interrogations quant à la nature de cette dernière. Ce comportement macroscopique résulte-t-il d'un effet « structure » ou d'un effet « matériau » ? L'effet « structure » décrit un comportement lié à un réseau de renforts architecturés ou périodiques tandis que l'effet « matériau » fait référence ici, à un comportement équivalent issu de renforts hétérogènes dans une matrice. En effet, peu de travaux dans la littérature se confrontent à ce dernier point. Dans cette thèse, nous essayerons de comprendre le mécanisme gouvernant la microstructure d'un matériau auxétique d'un point de vue micromécanique.

### **Objectifs**

Du fait de la présence d'un  $\nu < 0$ , la possibilité d'amélioration de propriétés acoustiques, vibratoires et mécaniques [8] est confirmée. Aussi, est-il bien connu que l'insertion d'inclusions améliore les propriétés du composite [9]. En effet, les travaux de Scarpa et al. [10], basés sur une configuration géométrique particulière (renforts « ré-entrants » noyés dans une matrice) de la microstructure, ont montré une augmentation des propriétés viscoélastiques des composites auxétiques telles que leur module de stockage. Aussi, des mousses cellulaires auxétiques affichent une amélioration significative de leur résistance aux chargements statique et cyclique de tension en fatigue [11] comparée aux mousses conventionnelles. D'autres travaux font cas d'une augmentation de l'énergie de dissipation par un facteur 15 [6] au niveau des mousses auxétiques en chargement cyclique de fatigue de compression. Récemment, des polymères auxétiques ont été combinés à des céramiques ferroélectriques dans le but d'obtenir des propriétés multifonctionnelles contrôlées en terme de réponses hydrostatiques piézoélectriques du composite [12]. Ces intéressantes propriétés donnent ainsi lieu à une multitude d'applications potentielles dans différents domaines technologiques (aérospatiale, défense, construction) [13].

Prenant en compte la large palette d'avantages et d'applications potentielles des matériaux composites à renforts auxétiques, leurs contributions respectives dans l'amortissement, les vibrations libres, la résistance à la fatigue etc. doivent être préalablement bien comprises. L'objectif principal de cette thèse, est de contribuer au développement d'un modèle multi-échelle afin d'explorer les aspects microstructuraux de tels matériaux d'une part et de

concevoir des matériaux composites à hautes propriétés multifonctionnelles à base de renforts auxétiques d'autre part.

### **Organisation de la thèse**

Le plan de la thèse sera le suivant:

Le chapitre 1 constitue une étude bibliographique dressant l'état de l'art sur les matériaux auxétiques. Le comportement auxétique est présenté sous différentes origines, naturelle comme élaborée ou manufacturée. Les différentes microstructures conduisant à un tel comportement sont étudiées à travers diverses techniques d'homogénéisation aboutissant à un coefficient de Poisson négatif. Un accent particulier sera mis sur la technique d'homogénéisation par la théorie des champs moyens, domaine dans lequel, peu de travaux sur le comportement auxétique sont recensés. Ceci donnera lieu à diverses interrogations quant à la prise en compte d'un tel comportement par une approche multi-échelle telle que la micromécanique.

Le chapitre 2 est consacré à la mise en œuvre de réflexions théoriques quant à l'obtention du comportement auxétique d'un point de vue « effet matériau ». Ici, le terme « effet matériau » fait référence à la forme, les orientations et les différentes propriétés des phases constitutives. Dans ce chapitre, nous poserons les équations mises en œuvre dans le traitement de la microstructure multi-enrobée à travers le modèle développé par Lipinski et al. [14]. Les prémices d'homogénéisation de la microstructure dite « ré-entrante » seront analysées dans le cas du problème du matériau hétérogène à travers le problème de la paire d'inclusions hétérogènes. Ceci permettra la prise en compte de l'interaction des inclusions à travers un milieu dit de « référence ».

Dans le chapitre 3, l'applicabilité micromécanique du comportement auxétique d'un point de vue « effet matériau » est examinée par le biais du formalisme micromécanique introduit au chapitre 2. Ainsi, les microstructures recensées au chapitre 2, en l'occurrence la microstructure à géométrie sphérique du vide multi-enrobée [15] et celle dite « ré-entrante » seront étudiées. Les résultats de ce chapitre, qui se prédestine à une meilleure compréhension de la prise en compte des outils micromécaniques dans la description du comportement auxétique, seront confrontés à des modélisations Eléments Finis.

Le chapitre 4 vise à analyser le comportement amortissant de matériaux composites viscoélastiques linéaires renforcés par des hétérogénéités élastiques et auxétiques aux moyens d'outils de la micromécanique. A cet effet, la dépendance temporelle des problèmes viscoélastiques linéaires, grâce à l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson (C-LT), est étudiée au travers d'un problème associé d'élasticité. Le formalisme micromécanique, basé sur l'équation cinématique intégrale introduite dans les chapitres précédents, conduira à la détermination du module de stockage effectif et de son facteur de perte associé, dans le domaine quasi-statique. La possibilité d'accroître les propriétés viscoélastiques (VE) d'un matériau polymérique, comme le PVB, sera donc examinée par plusieurs configurations de mélange.

Dans le chapitre 5, l'influence de couches viscoélastiques présentant un comportement auxétique est analysée dans les structures composites sandwichs à travers une formulation analytique et une simulation numérique sous la version 6.10 d'Abaqus de Dassault Systèmes. La formulation analytique est introduite par la spécification du champ cinématique gouvernant le déplacement dans chaque couche. En l'occurrence, des théories cinématiques simples et représentatives comme CLT (Classical Laminate Theory) et HSDT (Higher Order Shear Deformation Theory) d'ordre supérieur en termes de déformation de cisaillement seront considérées. Ceci permettra donc la définition d'un problème dynamique pour une structure sandwich à 5 couches par le biais du principe des travaux virtuels. Des quantités modales telles que la fréquence propre et le facteur de perte seront extraites par l'analyse du déplacement transversal. Pour sortir les mêmes grandeurs à partir des simulations par la méthode des éléments finis, la méthode des énergies modales MSE (Modal Strain Energy) sera employée. L'impact du coefficient de Poisson négatif sur la réponse modale sera déterminé, discuté et une confrontation des résultats analytiques et numériques sera présentée.

# Chapitre 1: Etude bibliographique

---

Introduction .....	6
1.1. Les matériaux auxétiques : Echelle de longueur et origine .....	6
1.1.1. Matériaux d'origine naturelle .....	6
1.1.2. Matériaux d'origine manufacturée et synthétisée .....	7
1.2. Microstructure et comportement auxétique .....	9
1.2.1. La microstructure ré-entrante .....	9
1.2.2. La microstructure chirale .....	10
1.3. Méthodes d'homogénéisation et comportement auxétique .....	12
1.3.1. Homogénéisation asymptotique discrète (HAD) .....	13
1.3.2. Homogénéisation numérique .....	17
1.3.3. Homogénéisation par la théorie de champs moyens .....	21
1.4. Propriétés et applications des matériaux auxétiques .....	22
1.4.1. Propriétés .....	22
1.4.2. Applications .....	27
Conclusion .....	28

---

## Introduction

Le terme « auxétique » désigne tout comportement mécanique dû à l'effet du coefficient de Poisson  $\nu$  négatif. La théorie de l'élasticité isotrope définissant les bornes thermodynamiques de  $\nu$  entre les valeurs de l'intervalle  $-1 < \nu < 0.5$ , les matériaux auxétiques peuvent se retrouver sous trois formes :

- des cristaux qui manifestent des propriétés auxétiques à l'échelle microscopique ;
- des mousses suite à un traitement mécanique et thermique approprié ;
- des fibres utilisées dans les matériaux composites.

De part la définition de  $\nu$ , qui traduit l'effet de la déformation transversale d'un matériau par rapport à sa déformation dans la direction de chargement, le coefficient de Poisson positif conduit à une diminution de section, et par voie de conséquence à la striction du matériau. Le  $\nu$  négatif produit un effet inverse. En effet, le matériau auxétique tend à augmenter de volume sous l'effet d'une sollicitation en traction et se contracte sous l'effet d'une sollicitation en compression.

### 1.1. Les matériaux auxétiques : Echelle de longueur et origine

La théorie de l'élasticité est indépendante de l'échelle, de ce fait la structure qui se déforme peut l'être à une échelle macroscopique ou microstructurale, ou encore moléculaire ou mésoscopique [16]. Par voie de conséquence, une grande variété de matériaux et structures auxétiques a été découverte, fabriquée ou synthétisée de l'échelle macroscopique à celle de l'atome. Ils sont généralement qualifiés en fonctions de leurs origines naturelles ou artificielles.

#### 1.1.1. Matériaux d'origine naturelle

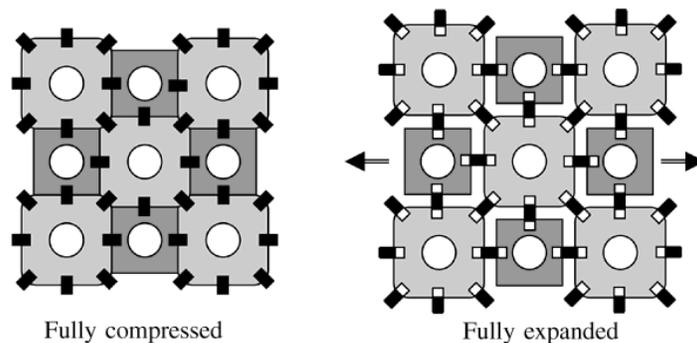
L'existence de  $\nu$  négatif dans la pyrite de fer fut observée dès le début du siècle précédent par Love [2] bien que ce fut une propriété considérée anormale à cette époque. Depuis, le comportement auxétique fut successivement observé à l'état naturel dans des monocristaux à l'instar de l'arsenic [17] et du cadmium [18]. Selon Baughman et al. [19], 69% des métaux

cubiques simples et quelques solides cubiques à faces centrées (cfc) deviennent auxétiques sous une sollicitation suivant la direction cristallographique (110). En effet, ils montrent que l'effet auxétique présente une corrélation avec la fonction de travail du métal et propose l'utilisation des métaux auxétiques comme des électrodes dans des applications piézoélectriques. Récemment, Yeganeh-Haeri [20] a mis en évidence la nature auxétique de la molécule de l' $\alpha$ -cristobalite polymorphe. Dans ses travaux, il démontre que le mécanisme responsable de l'auxétisme résulte de la rotation autour des axes tétraonaux de la structure cristalline de cette dernière.

Par ailleurs, le comportement auxétique a été découvert dans le domaine des biomatériaux et tissus biologiques, malgré l'existence de difficultés majeures dans la détermination de leurs propriétés élastiques à l'état naturel [16]. Il s'agit essentiellement des peaux de trayons de vaches [21] et des peaux de chats [22] à cause de leur microstructure fibrillaire. Aussi, est-il reporté dans les travaux de Williams et al. [23] sur l'étude théorique et expérimentale des articulations que l'os spongieux de part sa microstructure cellulaire présente également des dispositions à être auxétique.

### **1.1.2. Matériaux d'origine manufacturée et synthétisée**

A ce niveau, l'effet de  $\nu$  négatif demeure le produit de la conception. De ce fait, il est utilisé dans l'objectif de l'adaptation des propriétés mécaniques d'une structure à donner des performances améliorées. Evans et al. [16] mettent en évidence la structure brique de graphite dans le cœur des réacteurs nucléaires Magnox. En effet, la structure requiert une haute résistance à la déformation en cisaillement dans le plan horizontal et une faible résistance à la variation de volume. De ce fait, un comportement auxétique est introduit au niveau du mouvement radial des colonnes autoportantes de briques de graphite par l'intermédiaire des touches (segments) coulissant en vrac (ombrage sombre) dans les rainures reliant les colonnes adjacentes (Figure 1.1). Par conséquent, la structure s'accroît dans toutes les directions radiales quand elle est soumise à une charge de traction dans le plan horizontal et, en outre, conserve le réseau carré lors de la déformation. Ainsi cette structure est auxétique avec  $\nu = -1$  dans le plan horizontal [16] et de part sa morphologie isotrope transverse conduit à l'obtention d'un module de cisaillement élevé.



**Figure. 1.1:** Structure brique de graphite dans le cœur des réacteurs nucléaires Magnox [16]

A cela, s'ajoutent les matériaux cellulaires dont les structures nid d'abeilles sont un exemple principal. Les structures macroscopiques, dans ce domaine, furent réalisées en 1982 en 2D en utilisant l'architecture dite « ré-entrante » dont le mécanisme résulte de la flexion des nervures (brins) de la structure [24, 25]. Divers procédés de fabrication, dont le « laser ablation », furent utilisés pour élaborer des cellules à base de polymères de dimension  $\square 1mm$  [26]. Récemment, des structures bidimensionnelles auxétiques de dimension cellulaire  $\square 50\mu m$  [27] et des structures tridimensionnelles basées sur l'architecture 2D « ré-entrante » ont été conçues et réalisées sur des substrats cylindriques [28] pour des applications en micro et nanotechnologies (micro positionneurs).

Par ailleurs, les mousses restent le domaine de prédilection des matériaux auxétiques. L'intérêt actuel pour ces derniers fut venu avec le développement en 1987 de mousses cellulaires isotropes par Rodéric Lakes [3]. Ainsi, des mousses thermoplastiques (polyester, uréthane), thermodurcissables (caoutchouc, silicone), et métalliques (cuivre) ont été rapportées par Friis et al. [29]. Il est constaté que, dans tous les cas, la valeur du coefficient de Poisson varie avec la déformation, et des valeurs approchant la limite de  $\nu = -1$  pour les matériaux isotropes ont été rapportées au niveau des mousses polymères ( $\nu = -0.7$ ) [3] et métalliques ( $\nu = -0.8$ ) [30]. Par analogie aux structures nid d'abeilles bidimensionnelles, l'effet auxétique, dans les mousses, est réalisé par inversion des cellules polyédriques convexes. Dans le cas de mousses thermoplastiques, la transformation de la forme conventionnelle en celle auxétique est obtenue

par compression triaxiale suivie d'un chauffage de la mousse compressée au-dessus de son point de ramollissement.

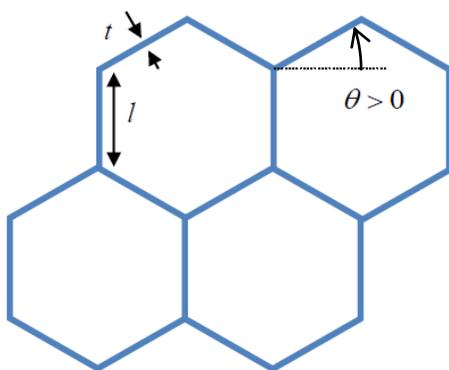
Suite aux travaux sur les mousses auxétiques, des chercheurs ont travaillé à concevoir et fabriquer des matériaux plus rigides pour une plus large gamme d'applications. En 1989, Brian Caddock et Ken Evans ont découvert qu'une forme élargie du polytétrafluoroéthylène (PTFE) microporeux présentait un comportement auxétique [31] fortement anisotrope et dépendant de la déformation si bien qu'un  $\nu$  aussi bas que  $\nu = -12$  a été observée dans une direction. En effet, à ce niveau, des études morphologiques et analytiques [32] indiquent que la propriété auxétique du PTFE résultait de la microstructure plutôt qu'une propriété intrinsèque au PTFE.

## 1.2. Microstructure et comportement auxétique

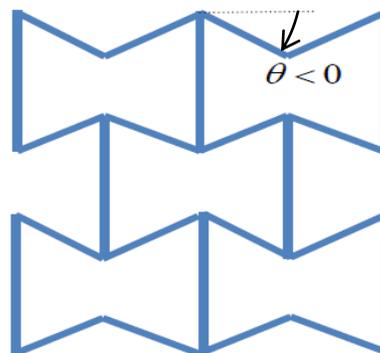
Plusieurs architectures ont été étudiées dans le cadre de l'analyse du comportement auxétique. Dans ce document, nous présentons deux classes d'architectures que sont les structures « ré-entrantes » et chirales.

### 1.2.1. La microstructure « ré-entrante »

C'est la microstructure la plus répandue dans la littérature. Réalisée pour la première fois en 1982 par Gibson et Ashby [24] en un modèle bidimensionnel, cette architecture a été l'objet de plusieurs études à toutes les échelles de longueur. Elle se base sur la géométrie hexagonale d'une structure nid d'abeille conventionnelle (Figure. 1.2). En définissant un paramètre angulaire  $\theta$ , il est possible d'inverser l'orientation des arêtes ou brins de la géométrie et ainsi définir la géométrie « ré-entrante ».



(a)  $\theta > 0$  Hexagone conventionnel



(b)  $\theta < 0$  Hexagone « ré-entrant »

**Figure. 1.2: Illustration de la microstructure hexagonale**

Outre le paramètre angulaire, des paramètres géométriques comme la longueur  $L$  et l'épaisseur  $t$  permettent de définir les solutions en terme de moment de flexion des arêtes (poutres) et par voie de conséquence les contraintes et déformations. Cette microstructure a été utilisée par Wei [33] dans une modélisation moléculaire en alternant des segments de polymères rigides et mous pour former un réseau macromoléculaire.

### 1.2.2. La microstructure chirale

Elle se compose d'un cylindre ou encore un nœud sur lequel se raccordent des segments ou brins (Figure. 1.3). Suivant les variantes on peut distinguer plusieurs types de ces architectures.

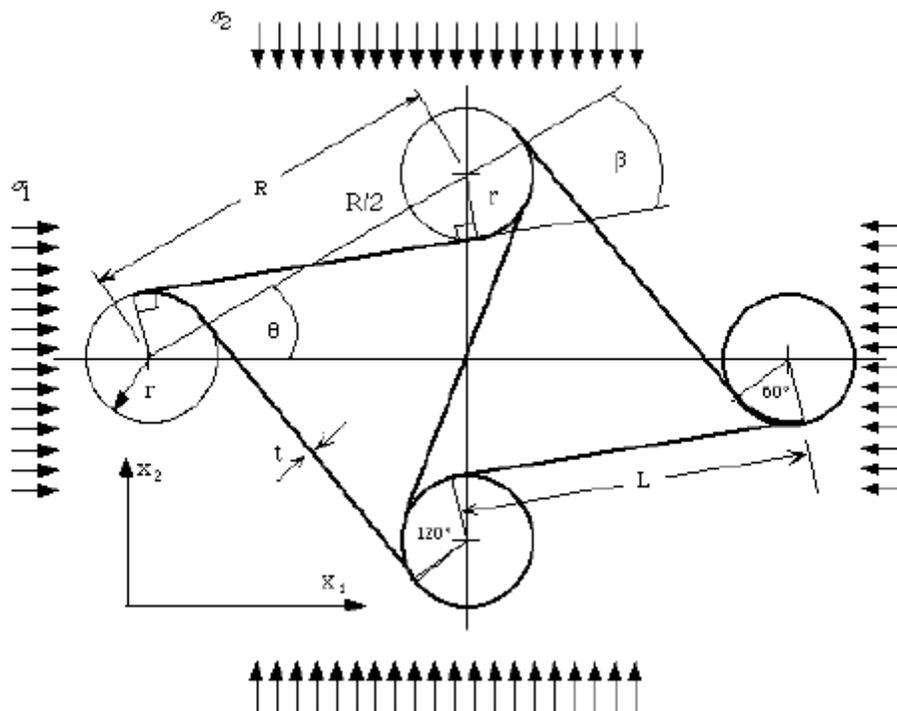


Figure 1.3: Illustration de la microstructure chirale

#### 1.2.2.1. La microstructure hexachirale

Proposé par Lakes [34], cette microstructure a été étudiée et fabriquée par Prall et Lakes [35] et récemment par Alderson et al. [36]. Elle se distingue par un cylindre de rayon  $r$  sur lequel sont raccordés 6 segments ou brins de longueur  $L$  (Figure 1.7.a). Le cylindre et les segments ont tous la même épaisseur  $t$  et une largeur  $d$ . Dans les travaux développés par Dirrenberger et al. [37], le paramètre  $d$  est considéré infini en tenant compte de la périodicité des conditions aux limites. A ces paramètres géométriques s'ajoute un paramètre angulaire  $\beta$  définissant l'orientation du segment reliant tangentiellement deux cylindres par rapport à l'axe passant par les centres de la circonférence de ces derniers.

#### 1.2.2.2. La microstructure tétrachirale

Etudiée par Alderson et al. [36], cette microstructure (Figure 1.8) se présente comme celle de l'hexachirale à l'exception qu'elle comporte quatre segments reliés tangentiellement aux cylindres.

### 1.2.2.3. La microstructure tétra antichirale

Elle est l'homologue de la microstructure tétrachirale avec un angle  $\beta = \pi/2$  (Figure 1.7.b).

### 1.2.2.4. La microstructure rota chirale

C'est une microstructure proposée par Dirrenberger et al. [37]. Elle est similaire à l'hexachirale à l'exception que les segments sont remplacés par des ligaments circulaires de diamètre  $D$  (Figure 1.7.c). Elle a été élaborée dans le but d'étudier l'impact de la géométrie du ligament sur la réponse auxétique de la microstructure chirale.

## 1.3. Méthodes d'homogénéisation et comportement auxétique

Le terme « homogénéisation » désigne dans sa globalité toute technique de substitution utilisée en vue de l'obtention du comportement continu et macroscopique (global) d'un matériau hétérogène ou d'une structure. En effet, on peut distinguer les méthodes de substitution par un milieu continu suivant certaines hypothèses dont :

- La présupposition a priori de la forme du milieu continu que l'on nomme « méthodes par milieu continu équivalent » ;
- La non-présupposition du milieu continu équivalent.

Par ailleurs, les méthodes de substitution basées sur l'hypothèse de la non-présupposition du milieu continu équivalent concernent plus les milieux discrets pendant que la présupposition du milieu continu équivalent concerne les milieux continus hétérogènes.

### 1.3.1. Homogénéisation asymptotique discrète (HAD)

La méthode HAD est une technique mathématique pour calculer le comportement équivalent correspondant au milieu continu d'une structure périodique discrète construite sur la répétition d'une cellule élémentaire de base. Cette technique est inspirée de l'homogénéisation des milieux périodiques développés par Sanchez-Palencia [38], Bakhvalov et Panasenko [39], et plus récemment appliquée par Warren et Byskhov [40] et Mourad et al. [41]. Les principales hypothèses à ce niveau sont :

- la nature quasi périodique du réseau;
- et la petite dimension de la période par rapport à la taille du domaine macroscopique.

La méthode consiste en des développements en série de Taylor (asymptotique) à la fois sur les déplacements nodaux, les tensions et les forces externes en tant que puissances successives d'un petit paramètre noté  $\varepsilon$  défini comme le rapport d'une longueur caractéristique de la cellule unitaire sur la longueur caractéristique de la structure. Ensuite, ces développements en série sont insérés dans l'équation d'équilibre convenablement exprimée sous une forme faible. L'équation de l'équilibre des nœuds, la relation force-déplacement et les relations moment-rotation des poutres sont alors développées en utilisant la méthode des différences finies. Les sommes discrètes sont alors transformées en intégrale de Riemann pour les densités de poutres continues rendant possible la détermination des contraintes et déformations continues. Les calculs ont été développés pour d'assez différentes formes de treillis et les résultats donnent une approximation générale des propriétés élastiques dans le cadre du comportement linéaire. Pour plus de détails sur l'aspect technique et mathématique de cette formulation, on peut se référer à la liste non exhaustive des publications récentes consacrées à ce sujet [42, 43][44]

Dans le cadre de cette revue, nous considérons deux réseaux d'architectures donnant apparition au comportement auxétique (Figure. 1.4). En termes de topologie, il est considéré les vecteurs translations  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2$  utilisés dans la génération périodique de toute la structure dans le plan.

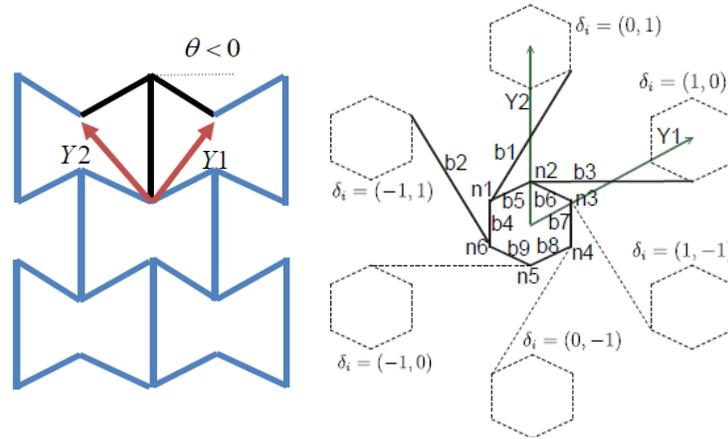


Figure 1.4: Cellule unitaire hexagonale « ré-entrante » (gauche) et hexachirale (droit)

Une approximation des propriétés effectives de ces deux réseaux est donnée dans les travaux de Dos Reis et Ganghoffer [42] en fonction du rapport de finesse  $h = t/L$  (rapport de l'épaisseur de la poutre  $t$  sur sa longueur  $L$ ) et du module de Young de la poutre utilisée  $E_s$  :

- **La cellule « ré-entrante »:** Elle est anisotrope avec des propriétés effectives, en termes de module de Young et de coefficient de Poisson, données en fonction de l'angle  $\theta$  et du rapport de finesse  $\eta$  par [45]:

$$\begin{cases} E_{11}^{\text{Hom}} = E_s \frac{\eta^3 \cos\theta}{(1 + \sin\theta)(\eta^2 \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1)}; \\ E_{22}^{\text{Hom}} = -E_s \frac{\eta^3 (\sin\theta + 1)}{\cos\theta (-\cos^2\theta + \eta^2 \cos^2\theta - 3\eta^2)} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \nu_{12}^{\text{Hom}} = \frac{(\eta^2 - 1) \sin\theta (\sin\theta - 1)}{(\eta^2 \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1)}; \\ \nu_{21}^{\text{Hom}} = \frac{(\eta^2 - 1) \sin\theta (\sin\theta - 1)}{(-\cos^2\theta + \eta^2 \cos^2\theta - 3\eta^2)} \end{cases} \quad (2)$$

- **La cellule hexachirale:** Elle est isotrope, son module de Young et son coefficient de Poisson sont donnés par [45]:

$$E = \frac{96}{47} \frac{(139\sqrt{3} - 71)(-575 - 564\eta^2 + 44\sqrt{3}\eta^3)E_s}{-19729 - 224148\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\eta^4 + 2973\sqrt{3}}. \quad (3)$$

$$\nu = \frac{1}{647} \frac{(74\sqrt{3} - 617)(-20689 + 76300\eta^2 + 11932\sqrt{3}\eta^3 - 62112\eta^4 + 1257\sqrt{3})}{-19729 - 224148\eta^2 + 16908\sqrt{3}\eta^2 - 54048\eta^4 + 2973\sqrt{3}} \quad (4)$$

Pour les deux architectures considérées, un comportement auxétique est observé (Figures. 1.5-1.6). La cellule « ré-entrante » montre un  $\nu$  négatif pour des valeurs d'angles négatives. La valeur maximale de  $\nu = -8$  a été observée pour  $\theta = -5^\circ$  après laquelle le coefficient de Poisson décroît asymptotiquement quand l'angle diminue.

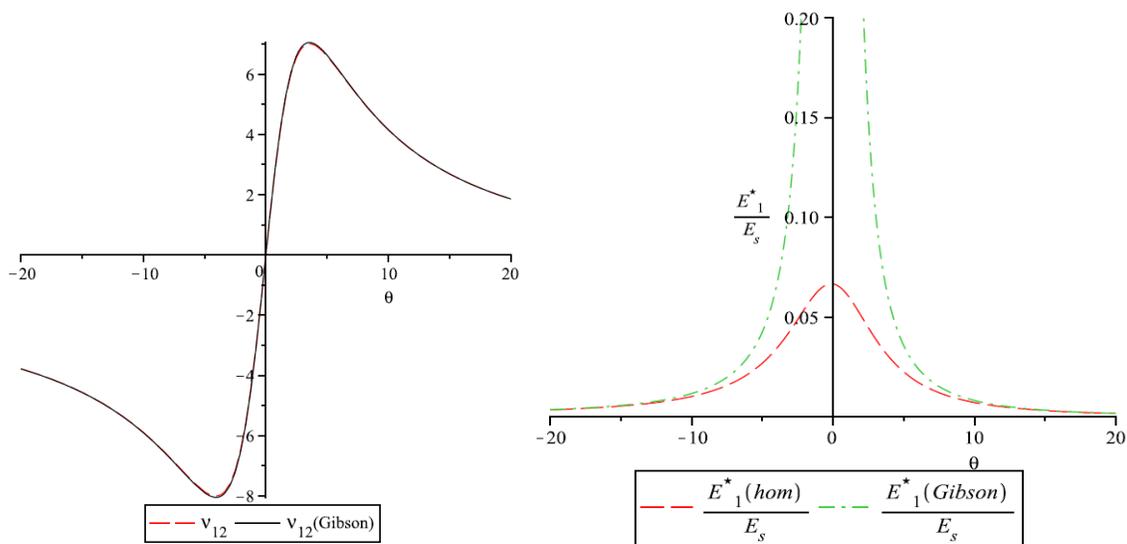


Figure 1.5: Cellule « ré-entrante »:

Coefficient de Poisson et Module de Young en fonction de  $\theta$  [45].

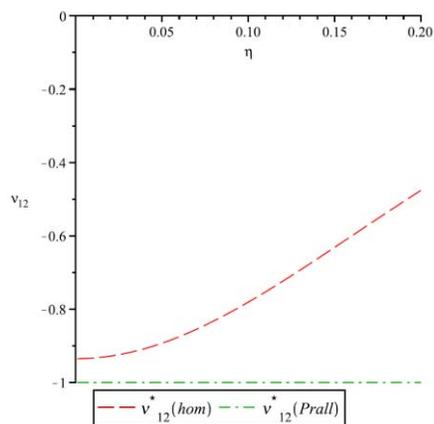


Figure 1.6: Cellule hexachirale:

Coefficient de Poisson versus le rapport de finesse  $\eta$  [45]

Le comportement auxétique reste néanmoins moins marqué pour la cellule hexachirale. Le coefficient de Poisson ne descend pas en dessous d'une valeur  $\nu = -1$  (Figure 1.6). Il augmente de façon monotone par rapport à l'évolution du paramètre d'élanement ou de finesse  $h = t/L$ .

### 1.3.2. Homogénéisation numérique

L'homogénéisation numérique consiste à déterminer les propriétés effectives sur une cellule unitaire (définie par les vecteurs de périodicité  $V_i$ ,  $i=1, 2, 3$ ) à travers des conditions aux limites périodiques via la méthode des éléments finis. Une telle approche reste populaire en mécanique des matériaux composites mais demeure rare dans la recherche du comportement auxétique [37].

Les grandeurs macroscopiques en termes de déformation  $E$  et contrainte  $\Sigma$  sont définies à travers la relation de la moyenne sur le volume  $V$  :

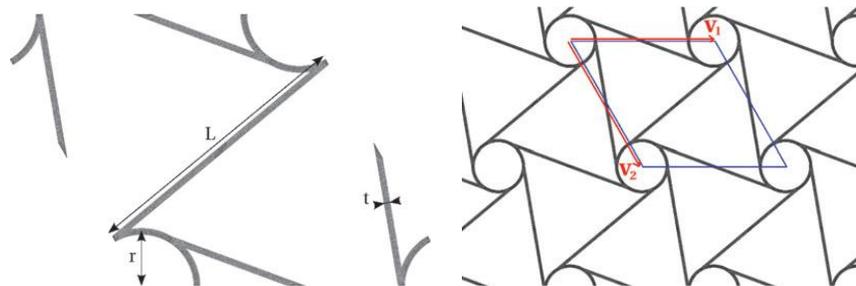
$$E = \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV \quad (5)$$

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (6)$$

Les conditions aux limites périodiques sur la cellule unitaire sont appliquées en termes de champs de déplacement  $u$  telles que :

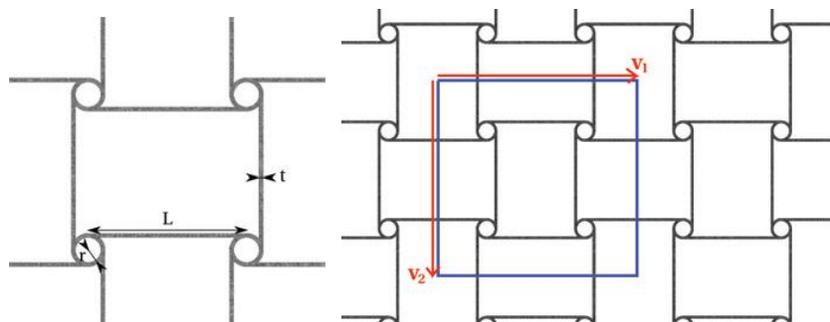
$$u = E \cdot x + v, \quad \forall x \in V \quad (7)$$

où  $v$  est définie comme étant une fluctuation périodique.



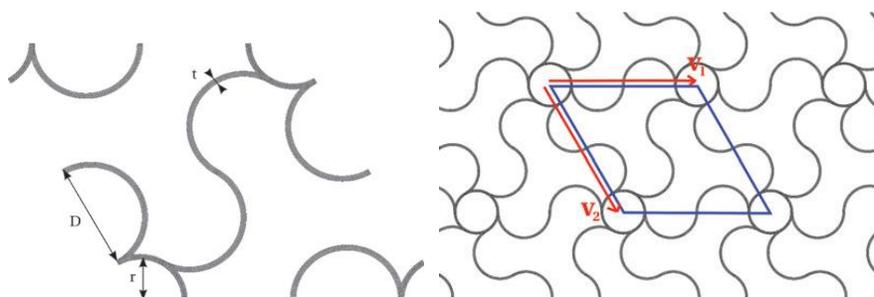
(a) Cellule unitaire hexachirale :

Génération périodique du treillis hexachiral [37].



(b) Cellule unitaire tétra-antichirale :

Génération périodique du treillis tétra-antichiral [37].



(c) Cellule unitaire rota-chirale :

Génération périodique du treillis rota-chiral [37].

**Figure. 1.7. Différentes microstructures chirales étudiées**

Sur le volume  $V$ , le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  prend la même valeur pour deux points homologues situés sur des faces opposées. Dans la même configuration, le vecteur traction  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  prend une valeur opposée. Par application, soit d'une contrainte macroscopique ou d'une déformation macroscopique, les tenseurs des modules effectifs et des souplesses du matériau se calculent par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \\ \mathbf{E} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\Sigma} \end{cases} \quad (8)$$

Dans le cadre de cette revue, nous considérons les microstructures étudiées par Dirrenberger et al [37] à savoir la microstructure hexachirale (Figure 1.7.a), tétra-antichirale (Figure 1.7.b), et rota-chirale (Figure 1.7.c). Dans leur travail, l'homogénéisation de la microstructure auxétique a été élaborée en vue de son utilisation dans une structure sandwich. Les modules élastiques sont alors

calculés pour une fraction volumique de matériau auxétique de  $V_V \square 0.06-0.07$ . Ainsi, un matériau isotrope avec un module de Young de  $E_0 = 210000MPa$  et un coefficient de Poisson

de  $\nu_0 = 0.3$  est utilisé. Les propriétés effectives telles que le coefficient de Poisson  $\nu^{eff}$ , le

module de Young normalisé  $E = \frac{E^{eff}}{E_0 \times V_V}$  et le module de cisaillement normalisé

$\mu = \frac{\mu^{eff}}{\mu_0 \times V_V}$  sont alors exprimées en fonction des angles  $\theta$  et  $\phi$  caractérisant l'anisotropie. Il

ressort de leur analyse un comportement isotrope transverse par rapport à la troisième direction pour les microstructures étudiées.

$$[C] = \begin{bmatrix} 231 & -193 & 114 & 0 & 0 & 0 \\ -193 & 231 & 114 & 0 & 0 & 0 \\ 114 & 114 & 15731 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2271 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2271 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 212 \end{bmatrix} \quad (9)$$

#### Microstructure hexachirale en MPa

$$[C] = \begin{bmatrix} 11 & -2.45 & 2.56 & 0 & 0 & 0 \\ -2.45 & 11 & 2.56 & 0 & 0 & 0 \\ 2.56 & 2.56 & 16173 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1757 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1757 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.72 \end{bmatrix} \quad (10)$$

#### Microstructure tetra antichirale en MPa

$$[C] = \begin{bmatrix} 1365 & -1329 & 10.9 & 0 & 0 & 0 \\ -1329 & 1365 & 10.9 & 0 & 0 & 0 \\ 10.9 & 10.9 & 12613 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1978 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1978 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.01 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### Microstructure rota chirale en MPa

Outre cette étude, Alderson et al. [36] ont récemment développé une analyse générale bidimensionnelle dont un modèle élément fini traitant de la microstructure chirale. En effet, la géométrie se compose de cylindres interconnectés par des ligaments. Ainsi, des cylindres possédant trois (trichiral et anti trichiral), quatre (tétrachiral et anti tétrachiral), et six (hexachiral) ligaments sont considérés. Les conditions aux limites sur la cellule élémentaire tétrachirale s'appliquent sur un ligament saillie à mi-parcours et contraint de se déplacer le long d'une ligne passant par le centre du nœud circulaire et le ligament opposé à mi-parcours (Figure 1.8.a). Par ce fait, on contraint la déformation au milieu du ligament à suivre celle de la ligne.

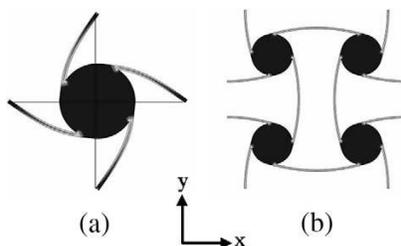


Figure 1.8. Différentes microstructures tétrachirales étudiées

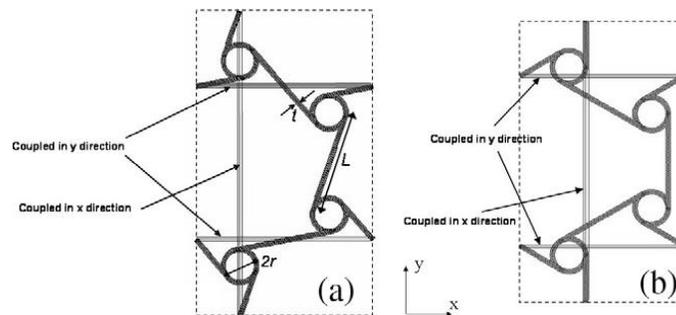


Figure 1.9. Variantes de microstructures trichirales étudiées

Les conditions aux limites dans le cas de la microstructure trichirale sont définies de façon à ce que les bords de la cellule élémentaire passent par le milieu des segments (Figure 1.9.a). Ainsi, les points milieux des segments interceptant les bords verticaux de la cellule élémentaire sont contraints à conserver le même déplacement dans la direction  $y$ . Aussi, les points milieux des segments interceptant les bords horizontaux de la cellule élémentaire sont contraints à conserver le même déplacement dans la direction  $x$ . Ceci a pour but de contraindre la déformation d'une paire de points milieux à se déplacer suivant la ligne reliant ces derniers.

Les résultats de cette analyse montrent essentiellement que contrairement aux systèmes hexachiral et tétrachiral qui sont auxétiques, le système trichiral possède un coefficient de Poisson positif dans le plan d'étude. Le système anti trichiral est auxétique pour de faibles longueurs de segments tandis qu'il devient non auxétique pour de longs segments.

### 1.3.3. Homogénéisation par la théorie de champs moyens

Les travaux à ce niveau demeurent peu nombreux quant à l'investigation du comportement auxétique. Les travaux développés étaient destinés à l'utilisation des matériaux auxétiques comme inclusions dans des composites en vue de l'amélioration de certaines propriétés mécaniques à l'instar du module de Young. A cet effet, Wei et al. [46] présentent à travers une étude théorique que ces matières composites deviennent auxétiques lorsque la fraction volumique d'inclusions dépasse une valeur critique et le rapport du Module de Young de l'inclusion à celui de la matrice tombe dans un intervalle défini. Dans leur étude, ils considèrent des inclusions sphériques et isotropes statistiquement désordonnées dans une matrice isotrope. Les propriétés effectives sont alors obtenues à travers une équation de type loi de mélange [46]. En plus de l'utilisation de la règle de mélange inhérente à la théorie des champs moyens, un formalisme introduisant des fonctions de corrélation à  $N$  points [47] caractérisant la

microstructure est couplé. Plus tard, à travers la même procédure, l'analyse des inclusions de forme ellipsoïdale ou elliptique [48] et de forme en disque et en aiguille [49] dans une matrice incompressible a été faite pour des inclusions conventionnelles et auxétiques.

## 1.4. Propriétés et applications des matériaux auxétiques

### 1.4.1. Propriétés

De la littérature, il ressort que les matériaux à propriétés auxétiques se retrouvent dans les domaines où des fortes performances en termes de cisaillement, de rupture en déformation plane [50] sont recherchées. Aussi, des propriétés comme la résistance à l'indentation se trouvent améliorées avec un  $\nu$  négatif. Evans et al. [16] décrivent ces propriétés en terme de dépendance par rapport aux facteurs  $(1-\nu^2)$  et  $(1+\nu)$ . En effet, dans le cas des matériaux isotropes, le module de cisaillement se définit par :

$$G = \frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad (12)$$

Tandis que la résistance à l'indentation reste proportionnelle à :

$$H \propto \left[ \frac{1-\nu^2}{E} \right]^{-x} \quad (13)$$

avec  $\begin{cases} x = 1, & \text{distribution uniforme de pression} \\ x = 2/3, & \text{indentation de type Hertzien} \end{cases}$

Il ressort des équations (12) et (13) qu'une valeur du coefficient de Poisson tendant vers  $\nu = -1$  et pour des valeurs données des modules de Young  $E$  et de compressibilité  $K$  conduisent à l'amélioration de ces propriétés. La résistance à l'indentation dans les mousses de cuivre étudiées par interférométrie holographique montre que la cellule « ré-entrante » présente une contrainte de rupture  $\sigma_y$  supérieure à celle de la mousse conventionnelle. La résistance à l'indentation de

l'UHMWPE microporeux auxétique est une propriété dépendante de la déformation et sa dureté a été améliorée par un facteur 2 par rapport au matériau conventionnel.

Bien qu'il soit théoriquement montré que le comportement auxétique améliore la résistance à la rupture en mécanique, cette propriété reste peu étudiée. Comparés aux matériaux conventionnels, les matériaux auxétiques améliorent la résistance à la rupture. Cette propriété a été étudiée expérimentalement comme une fonction du taux de compression volumétrique permanent [51] qui est une variable de conception. Dans le cas des mousses polymères en polyuréthane, les travaux de Choi et Lakes [30] montrent des valeurs de résistance à la rupture et du taux de compression volumétrique des mousses auxétiques améliorées par un facteur 1.7, 2.1, 2.3, 2.6 et 3.2 et par un facteur de 2.0, 2.6, 3.2, 3.7, et 4.2, respectivement. Les matériaux auxétiques présentent également une très grande résistance à la fissuration.

Quant à l'amélioration des propriétés viscoélastiques, Scarpa et al. [10] montrent à travers une modélisation éléments finis d'un composite biphase que le module de stockage a été significativement amélioré par la microstructure « ré-entrante ». En effet, le composite biphase utilisé dans cette étude se compose d'un renfort « ré-entrant » issu d'un polymère VITON40 à 20°C tandis que la matrice est un polymère viscoélastique ISD112 à la même température. Le facteur de perte a montré une sensibilité significative par rapport à la fraction volumique et la microstructure considérée. Il convient de rappeler à ce niveau que dépendant d'un angle  $\theta$  la microstructure hexagonale conventionnelle ou « ré-entrante » du renfort peut être obtenue. Ensuite, par une application du composite biphase aux structures sandwichs à cœur cellulaire à travers l'analyse des vibrations libres il a été démontré la possibilité d'améliorer simultanément la rigidité par unité de masse et le facteur de perte en utilisant un biphase cellulaire à microstructure « ré-entrante ».

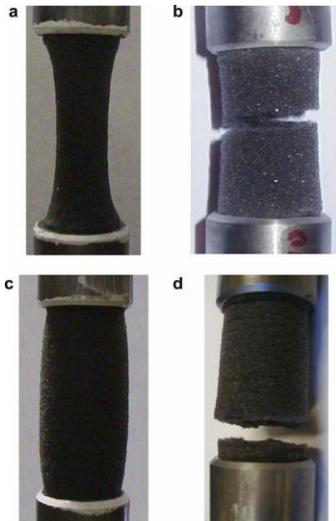
Les mousses polyuréthanes PU sont utilisées dans divers domaines technologiques et constituent une des catégories les plus importantes de plastiques à cause de leur versatilité. Aussi, les mousses cellulaires PU ont été largement utilisées dans le prototypage des mousses auxétiques compte tenu de la transformation facile et applications aux procédés de fabrication liés au matériau auxétique.

En effet, Scarpa et al. [4] suggèrent, par le biais de tests dynamiques sur une mousse cellulaire en polyuréthane, l'utilisation de mousses auxétiques pour combattre le syndrome « hand-arm vibration syndrome » dans les applications vibratoires. Ils montrent aussi que la capacité d'amortissement des mousses auxétiques a augmenté d'un facteur 10 par rapport aux mousses conventionnelles et la dégradation de la rigidité est stabilisée après quelques dizaines de cycles de chargement.

Plus tard, des études statique et dynamique en fatigue ont été conduites par Bezazi et Scarpa [52] sur deux catégories de mousses thermoplastiques PU via des sollicitations de type tension. Ces études ont été conduites à l'aide d'une machine d'essai de type MTS 858 servo-hydraulique avec un chargement à la fatigue évalué à 10 kN pour une fréquence maximale de 30 Hz. Les tests statiques ont été effectués sur des échantillons ayant des longueurs différentes avec une vitesse de déformation constante de 0,1 mm / s.

Les essais de fatigue ont été réalisés en contrôlant le déplacement pour tous les types de mousses suivant une onde sinusoïdale avec 3 Hz de pulsation. Les échantillons ont été préchargés à 70% du déplacement maximal obtenu lors des essais statiques, puis soumis à une série d'amplitudes différentes, conduisant à différents niveaux de chargement  $r$  (0,725, 0,75, 0,80, 0,85, 0,90 et 0,95) tels que  $r = \frac{U_{\max}}{U_r}$ , où  $U_{\max}$  représente le déplacement maximal pour un niveau de chargement spécifique et  $U_r$  le déplacement maximal conduisant à la rupture.

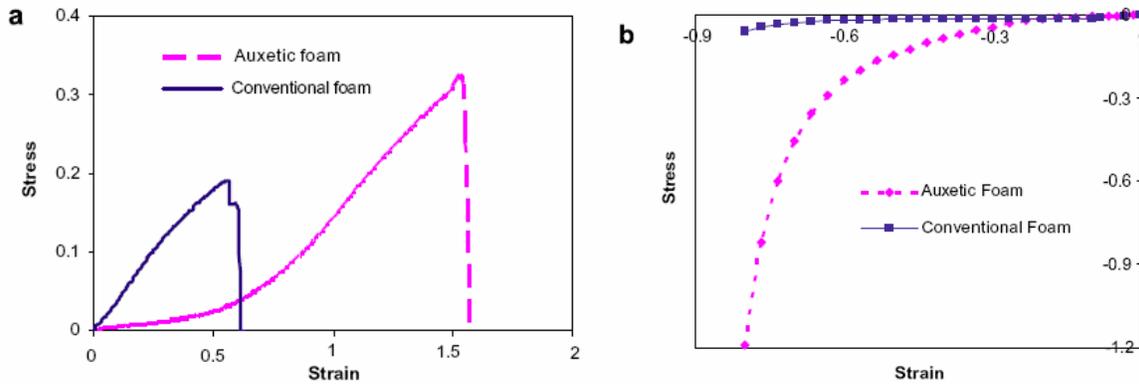
La première catégorie concerne des mousses PU conventionnelles (Figures 1.10.a et 1.10.b) alors que la deuxième catégorie s'intéresse aux mousses PU auxétiques (Figures 1.10.c et 1.10.d) obtenues par un procédé de fabrication impliquant quatre étapes : (i) la compression, (ii) le chauffage, (iii) le coulage et enfin (iv) la relaxation.



**Figure 1.10: Mousses en chargement et mode de rupture:**  
**(a) conventionnelle en tension; (b) conventionnelle en rupture;**  
**(c) auxétique en tension; (d) auxétique en rupture, [52]**

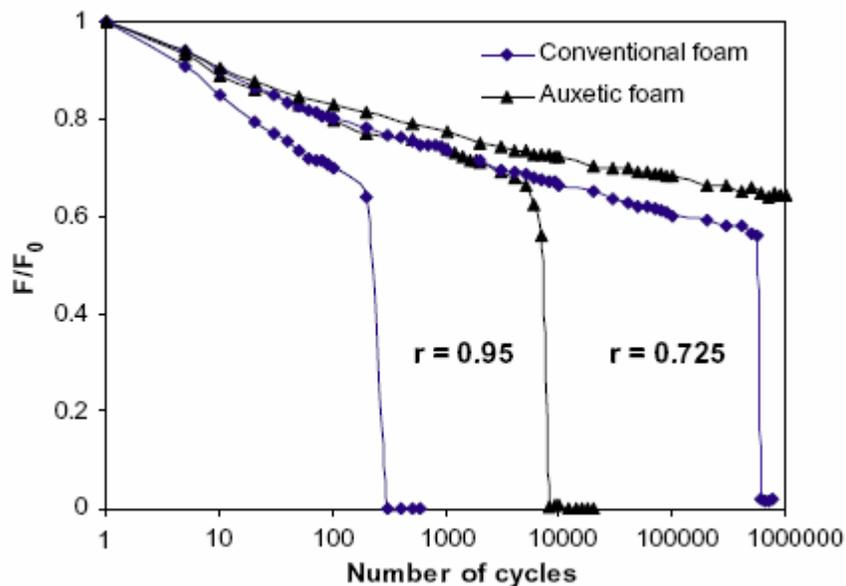
En statique et à travers des tests de traction (Figure 1.11.a), Bezazi et Scarpa montrent un comportement bilinéaire de la courbe contrainte-déformation de la mousse auxétique avec une augmentation de la contrainte de rupture d'un facteur 1.7 comparé à la mousse conventionnelle. Ils expliquent ces résultats par le fait que les cellules unitaires en mousse se déforment en flambage au moment du procédé de fabrication, occasionnant une sorte de rotation charnière à l'intersection des brins. Cependant, après une certaine déformation à la traction, les brins des cellules tendent à s'aligner, fournissant donc une résistance au chargement externe en raison de la rigidité axiale des brins.

Le comportement en compression (Figure 1.11.b) pour les deux types de matériaux reste substantiellement différent. D'une part, la mousse conventionnelle montre un plateau quasi linéaire de densification avec une contrainte de 0.019 MPa pour une densification aux alentours de 50% de la déformation, puis atteint une contrainte maximale de 0.07 MPa à 80% de déformation. D'autre part, la mousse auxétique montre un comportement exponentiel de la courbe contrainte-déformation tout en atteignant un maximum de 1 MPa à 80% de déformation.

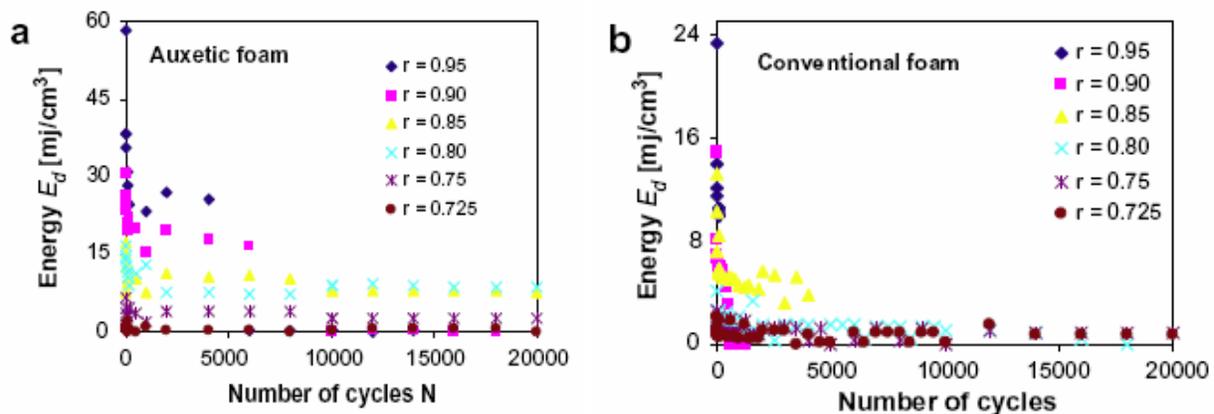


**Figure 1.11: Tests statiques: contrainte-déformation**  
**(a) tension et (b) compression [52]**

Dans le cas des tests de fatigue réalisés sur les mêmes échantillons et dépendant du niveau de chargement  $r$ , Bezazi et Scarpa montrent que la mousse auxétique présente une meilleure résistance à la dégradation de rigidité en fonction du nombre de cycles de chargement pour  $r = 0.95$  (Figure 1.12).



**Figure 1.12: Dégradation de rigidité en fonction du nombre de cycles [52]**



**Figure 1.13: Dissipation d'énergie par unité de volume en fonction du nombre de cycles: (a) auxétique; (b) conventionnelle [52]**

En terme de dissipation d'énergie par unité de volume définie par  $E_d = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\varepsilon_{\max}} \sigma d\varepsilon$ , la Figure 1.13 présente la variation de  $E_d$  en fonction du nombre de cycles pour différents niveaux de chargement et ceci tant pour la mousse auxétique que conventionnelle. La variation de l'énergie de dissipation évolue en deux étapes. La première se présente en une brute décroissance aux environs de 2000 cycles pour la mousse auxétique et 800 cycles pour la mousse conventionnelle. La deuxième étape est liée à une faible décroissance suivie d'une évolution quasi constante en plateau. A ce niveau, Bezazi et Scarpa [52] notent que le comportement en fatigue montre une variation significative durant la phase initiale du cycle de vie à cause de la dissipation d'énergie et ceci pour les deux types de mousses et concluent que l'analyse des résultats obtenus confirment l'aptitude de la mousse auxétique à dissiper plus d'énergie par unité de volume comparée à la mousse conventionnelle pour le même niveau de chargement.

### 1.4.2. Applications

L'applicabilité des matériaux auxétiques s'adresse aux domaines dans lesquels l'absorption au choc est requise. En effet, ces matériaux donnent une réponse assez robuste en termes d'absorption de choc, d'isolation phonique, de filtres d'air, d'attache de sécurité dans les voitures et avions et électrodes dans les capteurs piézoélectriques [19, 53]. L'utilisation des matériaux

cellulaires auxétiques dans la conception des « press-fit » de fixation a été étudiée. En effet, l'insertion des fixations reste facilitée par la contraction latérale des matériaux auxétiques sous sollicitation en compression tandis que l'arrachement ou l'enlèvement reste résistant compte tenu de l'augmentation latérale du matériau sous sollicitation en tension [54]

Récemment, l'utilisation des matériaux auxétiques a été mise en évidence dans des applications de filtration intelligente. En effet, les mousses auxétiques ont montré une augmentation de la variation de la perméabilité suivant l'application d'un chargement par rapport aux mousses conventionnelles. Ceci conduit à une variation très sensible dans la chute de pression des particules et de l'encrassement des filtres en mousse par rapport au chargement.

## Conclusion

Ce premier chapitre constitue une revue de la littérature quant à l'existence des matériaux auxétiques d'un point de vue origine. Aussi, de façon générale, les matériaux auxétiques élaborés à nos jours résultent d'un comportement de matériau initialement non auxétique (conventionnel) dont l'obtention suit un procédé de fabrication alliant sollicitation en compression au chauffage, coulage et relaxation du matériau. De nombreux avantages en termes de propriétés mécaniques et acoustiques sont élucidés et des applications innovantes sont confirmées dans des domaines technologiques. Aussi, ce chapitre met en exergue le lien entre la microstructure spécifique conduisant au comportement auxétique d'un point de vue macroscopique et les diverses techniques d'homogénéisation. A ce niveau, plusieurs travaux ont été réalisés sur des motifs périodiques par le biais de l'homogénéisation périodique, asymptotique ou numérique. Par rapport aux techniques d'homogénéisation mentionnées plus haut, peu de travaux sur les matériaux auxétiques restent consacrés aux méthodes d'homogénéisation utilisant la théorie des champs moyens (mean-field theories). C'est cette méthode que nous envisageons d'employer dans notre travail. Le rappel de bases théoriques de cette approche est présenté dans le chapitre suivant de cette thèse.

## Chapitre 2 : La modélisation micromécanique

---

2.1. Motivation et objectifs .....	30
2.1.1. Motivations .....	30
2.1.2. Objectifs .....	30
2.2. Introduction aux méthodes d'homogénéisation par champs moyens .....	31
2.2.1. Localisation des champs macroscopiques .....	31
2.2.2. Technique de la moyenne .....	33
2.3. Détermination des déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}$ : Equation cinématique intégrale .....	34
2.4. Modélisation micromécanique utilisant le concept d'une inclusion ellipsoïdale .....	36
2.4.1. Modèle de deux inclusions ellipsoïdales .....	37
2.4.2. Inclusion ellipsoïdale multi-enrobée .....	42
2.5. Conclusion .....	47

---

## 2.1. Motivation et objectifs

### 2.1.1. Motivations

Des études liées aux applications technologiques, comme celles de Stavroulakis [55] et de Gaspar et al. [7], mettent l'accent sur le fait que le comportement auxétique et sa dépendance de la microstructure du matériau peuvent être étudiés par les outils de l'homogénéisation. Il ressort de la dernière partie du Chapitre 1 consacrée à la bibliographie, que l'idée de concevoir un matériau auxétique par le biais des théories des champs moyens reste peu explorée. Aussi, est-il observé que le comportement auxétique reste essentiellement relié à la micro- ou nano-architecture interne des matériaux [3, 7][56]. De ce fait, la mise en évidence du comportement auxétique nécessite une étude approfondie de cette microstructure.

Les motivations de cette étude résident dans la mise en œuvre de réflexions théoriques quant à la conception du comportement auxétique d'un point de vue « effet matériau ». Ici, ce terme « effet matériau » désigne le rôle des différentes propriétés des phases, de leurs formes, orientations et positions relatives dans la description du comportement global ou homogénéisé d'un matériau hétérogène.

Les progrès liés à l'emploi des matériaux hétérogènes relèvent d'études mécaniques et physiques se situant à l'échelle des hétérogénéités, c'est-à-dire à une échelle où les théories continues sont encore applicables [57]. Bien que les premiers travaux dans ce domaine aient réussi à relier les grandeurs macroscopiques à celles locales (Voigt, Reuss, Hill), ces derniers constituent des estimations moins précises des propriétés effectives des matériaux composites. Avec les travaux d'Eshelby [58] sur l'hétérogénéité ellipsoïdale, des progrès considérables ont été notés dans ce domaine. Ainsi, des modèles plus précis peuvent être considérés dans l'amélioration de la description de matériaux micro-hétérogènes par la prise en compte de leurs textures morphologique et topologique.

### 2.1.2. Objectifs

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases de la micromécanique des matériaux hétérogènes pour la modélisation approfondie des propriétés effectives des microstructures

recensées de la littérature. Il s'agit des microstructures multi-enrobées [14, 59] et celle dite « ré-entrante ». Ces deux microstructures dont le formalisme micromécanique (théorie) est présenté ici, feront l'objet d'application dans le chapitre 3. Suivant les travaux de Fassi-Fehri [57], la prise en compte des interactions entre les hétérogénéités, à travers le milieu environnant, a une incidence sur les propriétés effectives prédites. Dans ce chapitre, nous poserons les équations mises en œuvre dans le traitement de la microstructure multi-enrobée à travers le modèle développé par Lipinski et al.[14]. La microstructure « ré-entrante » sera analysée dans le cas du problème du matériau hétérogène à travers le modèle de la paire d'inclusions. Une telle approche permet la prise en compte des interactions entre les inclusions au travers d'un milieu continu infini. De ce fait, le calcul du tenseur d'interaction à plusieurs sites, s'appuyant sur les différentes textures du matériau et décrivant de ce fait, l'anisotropie de ce dernier, sera déterminé.

## 2.2. Introduction aux méthodes d'homogénéisation par champs moyens

Les méthodes d'homogénéisation par la théorie des champs moyens (mean-field theories) sont celles qui utilisent la relation de la moyenne pour exprimer les propriétés d'un matériau ou d'une structure.

La transition d'échelle se compose d'une étape de localisation des grandeurs macroscopiques telles que les champs de contraintes  $\Sigma$  ou de déformation  $E$  et d'une étape d'application de la technique de la moyenne sur les champs locaux.

Sous l'hypothèse d'un comportement élastique, la loi de Hooke à l'échelle macroscopique s'écrit :

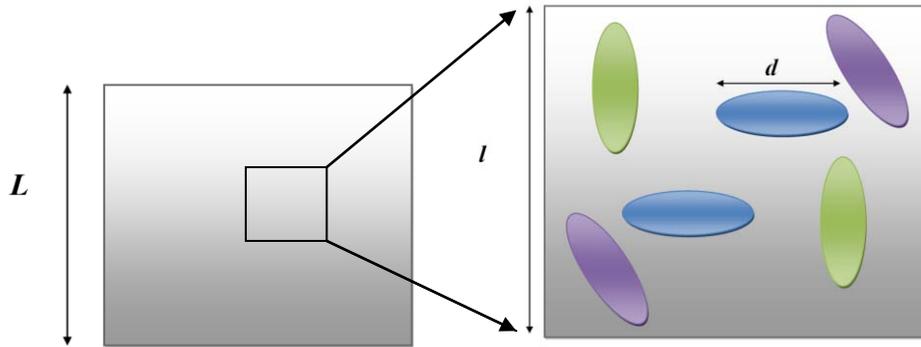
$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{eff} E_{kl} \quad (14)$$

où  $C^{eff}$ , tenseur des constantes élastiques globales, résulte de l'emploi de cette technique.

### 2.2.1. Localisation des champs macroscopiques

Introduisons à ce niveau, la notion de Volume Élémentaire Représentatif (VER). Dans ce cadre, le matériau considéré est supposé micro-hétérogène et macro-homogène. La notion du VER (Figure 2.1) impose la définition de trois grandeurs en termes de longueur d'échelle  $d$ ,  $l$  et  $L$  telles que les conditions suivantes soient vérifiées :

$$d \ll l \ll L \quad (15)$$



**Figure 2.1: Illustration du VER**

Les grandeurs  $d$ ,  $l$  et  $L$  représentent la longueur caractéristique des hétérogénéités, du VER et d'une structure ou construction, respectivement. Aussi, à la condition (15) s'ajoute celle relative à la limite de validité  $d_0$  des lois de la mécanique des milieux continus telle que :

$$d_0 \ll d \quad (16)$$

Sur le VER ainsi défini, s'appliquent des conditions aux limites cinématiquement ou statiquement admissibles en termes de déplacements ou contraintes, respectivement. En élasticité linéaire et sous l'hypothèse des petites déformations, nous supposons qu'un champ de déplacement  $U^d$  est appliqué sur les frontières du VER. Si  $E$  est le tenseur de déformation macroscopique imposée résultant de ce chargement et  $x$  un vecteur définissant un point de la frontière, on peut écrire :

$$U_i^d = E_{ij} x_j \quad (17)$$

Localement en tout point du VER, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij}(x) = c_{ijkl}(x) \varepsilon_{kl}(x) \quad (18)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{c}$  représentent respectivement les tenseurs de contrainte, déformation et des propriétés élastiques locales dans le VER. En l'absence des forces volumiques, la condition d'équilibre statique s'exprime alors :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (19)$$

et la compatibilité du champ de déformation dérivant des déplacements locaux  $\boldsymbol{u}$  permet d'écrire:

$$\varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(x) + u_{j,i}(x)] \quad (20)$$

Une fois, la déformation locale dans le VER exprimée, la localisation permet de relier les grandeurs locales (microscopiques) aux grandeurs globales (macroscopiques) en postulant l'existence d'un tenseur de localisation, par exemple en déformation  $\boldsymbol{A}$  tel que :

$$\varepsilon_{ij}(x) = A_{ijkl}(x) E_{kl} \quad (21)$$

La relation duale en termes de contraintes s'écrit:

$$\sigma_{ij}(x) = B_{ijkl}(x) \Sigma_{kl} \quad (22)$$

où  $\boldsymbol{B}$  est le tenseur de localisation en contraintes. Les équations (21) et (22) représentent l'étape de localisation des grandeurs macroscopiques.

### 2.2.2. Technique de la moyenne

Pour tout champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  statiquement admissible ( $div(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0}$  dans le VER et satisfaisant aux conditions aux limites  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{n}$  sur la frontière) et pour tout champ de déplacements  $\boldsymbol{u}$  cinématiquement admissible ( $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{x}$  sur la frontière et  $\boldsymbol{\varepsilon}$  compatible dérivant de  $\boldsymbol{u}$ ), la technique de la moyenne permet de calculer les grandeurs globales (macroscopiques) à partir des grandeurs locales des équations (21) et (22). Elle s'écrit :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(x) dV \quad (23)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(x) dV \quad (24)$$

Les relations (18), (21) et (23) permettent d'exprimer les propriétés élastiques effectives du matériau macro-homogène, sous la forme:

$$C_{ijkl}^{eff} = \frac{1}{V} \int_V c_{ijmn}(\mathbf{x}) A_{mnkl}(\mathbf{x}) dV \quad (25)$$

La relation duale de l'équation(25) en termes de souplesses élastiques donne :

$$S_{ijkl}^{eff} = \frac{1}{V} \int_V s_{ijmn}(\mathbf{x}) B_{mnkl}(\mathbf{x}) dV \quad (26)$$

Dans les équations (25) et (26), subsistent des inconnues qui sont les tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ . Ils sont fonctions de la microstructure du matériau et leur détermination peut se faire à partir d'une équation intégrale reliant le champ de déplacement local, et par voie de conséquence la déformation locale, dans le VER aux conditions aux limites sur la frontière de ce dernier [60]. Dans les sections suivantes, nous traiterons de la détermination du champ de déformation local  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . La connaissance de cette dernière c'est-à-dire  $\boldsymbol{\varepsilon}$  permet le calcul du tenseur localisation en déformation  $\mathbf{A}$ . Ainsi, une relation simple permet de retrouver son expression duale en contrainte  $\mathbf{B}$  donnée par :

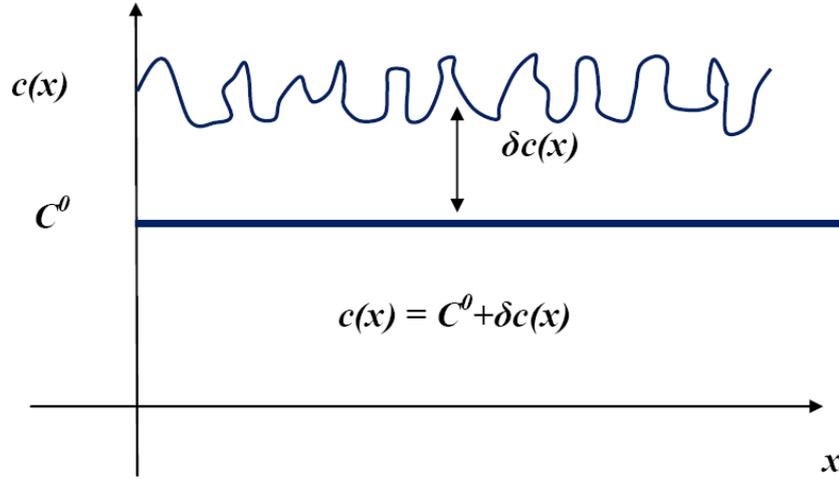
$$B_{ijkl}(\mathbf{x}) = c_{ijmn}(\mathbf{x}) A_{mnpq}(\mathbf{x}) (C_{pqkl}^{eff})^{-1} \quad (27)$$

### 2.3. Détermination des déformations locales $\boldsymbol{\varepsilon}$ : Equation cinématique intégrale

Le tenseur de localisation  $\mathbf{A}$  représente le paramètre inconnu du problème hétérogène et contient, de ce fait, toutes les informations microstructurales. Sa détermination nécessite la connaissance du champ de déformations locales à l'intérieur du VER. A ce niveau, il est avantageux d'introduire un milieu homogène continu et infini de propriétés élastiques  $\mathbf{C}^r$  (Figure 2.2) tel que les propriétés locales du VER peuvent s'exprimer:

$$c_{ijkl}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^r + \delta c_{ijkl}(\mathbf{x}) \quad (28)$$

Le tenseur  $\delta c$  représente la partie fluctuante des propriétés élastiques (figure 2)



**Figure 2.2 : Décomposition du tenseur des propriétés élastiques  $c(\mathbf{x})$**

En substituant l'équation (28) dans l'équation (18) et en utilisant les propriétés de symétrie de la contrainte  $\sigma$  dans l'équation (19), nous obtenons une équation aux dérivées partielles de type Navier:

$$C_{ijkl}^r u_{k,lj} + (\delta c_{ijkl}(\mathbf{x}) u_{k,l})_{,j} = 0 \quad (29)$$

La solution en termes de champ de déplacement de l'équation (29) est proposée par Dederichs et Zeller [61] à travers une approche utilisant l'opérateur de Green :

$$u_m(\mathbf{x}) = U_m^r(\mathbf{x}) + \int_V G_{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (\delta c_{ijkl}(\mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}'))_{,j'} dV' \quad (30)$$

où  $\mathbf{G}$  représente le tenseur de Green [57] et  $\mathbf{U}$  le champ de déplacement dans le milieu continu infini.

La détermination du champ de déformation locale se fait par le calcul du gradient  $u_{m,n}$  du champ de déplacements exprimé par l'équation (30) et l'utilisation de la relation de compatibilité (20):

$$\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}) = E_{mn}^r + \int_V \frac{1}{2} [G_{mi,n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G_{ni,m}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] [(\delta c_{ijkl}(\mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}'))]_{,j'} dV' \quad (31)$$

avec

$$E_{mn}^r = \frac{1}{2} (U_{m,n}^r + U_{n,m}^r) \quad (32)$$

L'application du théorème de Green à l'équation (31) et des conditions aux limites sur  $\mathbf{G}$  aux bords du VER, i.e.

$$G_{mi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (33)$$

conduit à l'expression de la déformation locale suivante:

$$\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}) = E_{mn}^r - \int_V \frac{1}{2} [G_{mi,nj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G_{ni,mj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \delta c_{ijkl}(\mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dV' \quad (34)$$

Prenant en compte les propriétés du tenseur de Green (Voir Ref. [57], pour plus de détails):

$$G_{mi,j'} \equiv \frac{\partial G_{mi}}{\partial x'_j} = -G_{mi,j} \equiv \frac{\partial G_{mi}}{\partial x_j} \quad (35)$$

et substituant l'équation (35) dans l'équation (34), nous obtenons une expression finale du champ de déformation locale telle que:

$$\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}) = E_{mn}^r - \int_V \Gamma_{mnij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta c_{ijkl}(\mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dV' \quad (36)$$

où  $\Gamma$  désigne le tenseur de Green modifié:

$$\Gamma_{mnij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{2} [G_{mi,nj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + G_{ni,mj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')] \quad (37)$$

Les expressions (30) et (36) constituent la solution formelle du problème hétérogène (25) en termes de déplacements et de déformations. Elles permettent alors la détermination du tenseur de localisation en déformation  $\mathbf{A}$ .

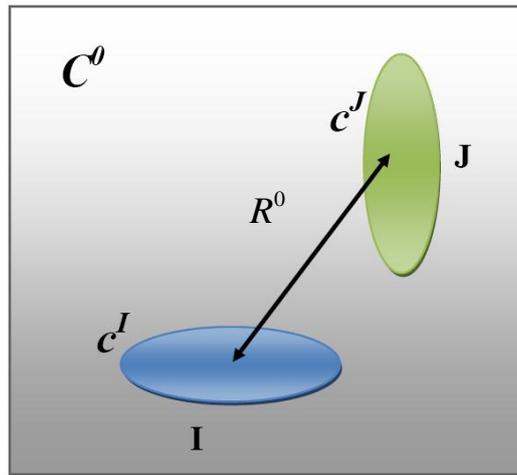
## 2.4. Modélisation micromécanique utilisant le concept d'une inclusion ellipsoïdale

Dans la littérature relative au comportement auxétique il est fait mention de la microstructure multi-enrobée [15] soupçonnée induire cette caractéristique auxétique. D'autre part, l'architecture nid d'abeille « réentrant » suggère que la prise en compte des positions relatives de renforts pourrait également conduire à cet effet auxétique. Par conséquent, nous

présentons dans ce paragraphe deux modèles micromécaniques traduisant ces deux aspects par le biais des inclusions ellipsoïdales. Les applications de ces deux modèles sont abordées dans le chapitre 3 de cette thèse.

### 2.4.1. Modèle de deux inclusions ellipsoïdales

Le problème de la paire d'inclusions ellipsoïdales  $I$  et  $J$  (Figure 2.3) est considéré dans cette section. Le terme « paire d'inclusions » désigne deux milieux distincts de propriétés élastiques différentes de celle du milieu continu supposé infini  $C^0$ . Par une application du formalisme basé sur le principe de l'inclusion d'Eshelby, nous utiliserons l'équation intégrale pour résoudre ce type de problème en termes de champ de déformation.



**Figure 2.3 : Microstructure de la paire d'inclusions plongée dans  $C^0$**

Considérons l'équation (36) adaptée à notre problème ( $C^r = C^0$ ), c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{mn}(\mathbf{x}) = E_{mn}^0 - \int_V \Gamma_{mnij}(x - \mathbf{x}') \delta c_{ijkl}(\mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dV' \quad (38)$$

L'utilisation de la notion du concept de l'inclusion ellipsoïdale d'Eshelby reste un moyen efficace dans la résolution du problème (38). En effet, Eshelby [58], a établi que sous un chargement uniforme, le champ de déformation dans une inclusion ellipsoïdale reste uniforme. Considérons un milieu infini constitué de deux inclusions noyées dans un milieu de propriétés  $C^0$ . A ce niveau, il reste intéressant d'introduire une fonction caractéristique  $\theta$  définie par :

$$\theta^I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in V^I \\ 0 & \forall \mathbf{x} \notin V^I \end{cases} \quad (39)$$

où  $V^I$  désigne le volume de l'inclusion  $I$ . Dans le cas de deux inclusions  $I$  et  $J$ , la partie fluctuante du tenseur des propriétés élastiques  $\delta\mathbf{c}(\mathbf{x})$  se décompose de la façon suivante :

$$\delta\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{c}^I\theta^I(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{c}^J\theta^J(\mathbf{x}) \quad (40)$$

avec  $\Delta\mathbf{c}^I = \mathbf{c}^I - \mathbf{C}^0$  et  $\Delta\mathbf{c}^J = \mathbf{c}^J - \mathbf{C}^0$ . En considérant l'équation exprimant le champ de déformation moyen dans une inclusion  $I$  par exemple, c'est à dire  $\boldsymbol{\varepsilon}^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV$ , nous pouvons obtenir l'expression suivante de la déformation dans l'inclusion  $I$  :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{E}^0 - \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^I \theta^I(\mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}') dV' dV \\ - \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^J \theta^J(\mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}') dV' dV \end{aligned} \quad (41)$$

La formulation duale au niveau de l'inclusion  $J$  nous donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^J = \mathbf{E}^0 - \frac{1}{V^J} \int_{V^J} \int_{V^J} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^J \theta^J(\mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}') dV' dV \\ - \frac{1}{V^J} \int_{V^J} \int_{V^J} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^I \theta^I(\mathbf{x}') : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}') dV' dV \end{aligned} \quad (42)$$

La solution exacte des équations (41) et (42) reste complexe, ceci nous conduit alors à l'utilisation d'une solution approchée en considérant que la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}')$  dans ces diverses équations est égale à sa valeur moyenne  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^J$  dans les inclusions  $I$  et  $J$  [57]. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{E}^0 - \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^I : \boldsymbol{\varepsilon}^I dV' dV \\ - \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \Delta\mathbf{c}^J : \boldsymbol{\varepsilon}^J dV' dV \end{aligned} \quad (43)$$

En posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}^{II} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV dV' \\ \mathbf{T}^{JJ} = \frac{1}{V^J} \int_{V^J} \int_{V^J} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV dV' \\ \mathbf{T}^{IJ} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV dV' \\ \mathbf{T}^{JI} = \frac{1}{V^J} \int_{V^J} \int_{V^I} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV dV' \end{array} \right. \quad (44)$$

Nous avons pour le problème de la paire d'inclusions le système d'équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{E}^r - \mathbf{T}^{II} : \Delta \mathbf{c}^I : \boldsymbol{\varepsilon}^I - \mathbf{T}^{IJ} : \Delta \mathbf{c}^J : \boldsymbol{\varepsilon}^J \\ \boldsymbol{\varepsilon}^J = \mathbf{E}^r - \mathbf{T}^{JJ} : \Delta \mathbf{c}^J : \boldsymbol{\varepsilon}^J - \mathbf{T}^{JI} : \Delta \mathbf{c}^I : \boldsymbol{\varepsilon}^I \end{array} \right. \quad (45)$$

A travers le système d'équation (44), nous pouvons montrer la relation suivante :

$$V^I \mathbf{T}^{IJ} = V^J \mathbf{T}^{JI} \quad (46)$$

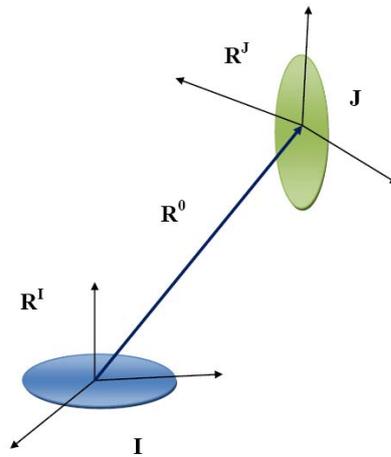
Par conséquent, la résolution du système (45) passe par le calcul des tenseurs  $\mathbf{T}^{II}$ ,  $\mathbf{T}^{JJ}$  et  $\mathbf{T}^{IJ}$ . Le calcul des tenseurs  $\mathbf{T}^{II}$ ,  $\mathbf{T}^{JJ}$  reste relativement simple d'accès et peut être obtenu analytiquement à partir du tenseur d'Eshelby pour des géométries particulières. En revanche, les équations mises en œuvre dans le calcul du tenseur  $\mathbf{T}^{IJ}$  pour une géométrie ellipsoïdale nécessitent l'emploi des méthodes numériques dont le détail est donné dans la section suivante.

#### 2.4.1.1. Evaluation du tenseur d'interaction $\mathbf{T}^{IJ}$

Compte tenu de sa dépendance du tenseur de Green qui apparaît complexe à évaluer pour les milieux anisotropes, le calcul du tenseur d'interaction  $\mathbf{T}^{IJ}$  reste difficile à évaluer dans la configuration adoptée dans cette étude. Une méthode basée sur la transformée inverse de Fourier a été proposée pour le problème de l'hétérogénéité ellipsoïdale par Fassi-Fehri [57]. A cause de la complexité des intégrales à évaluer, cette approche est peu utilisée dans la littérature. Dans cette section, nous proposons un calcul numérique de ce tenseur.

En effet, le calcul du tenseur d'interaction  $\mathbf{T}^{IJ}$  se fait dans le système de coordonnées de l'inclusion, par exemple  $I$ ,  $\mathbf{R}^I$  (ou  $J$ ,  $\mathbf{R}^J$ ) (Figure 2.4). Dans ce repère, on peut définir :

- $(a_I, b_I, c_I)$  les dimensions de l'inclusion  $I$  avec son origine  $O_I$  ;
- $(a_J, b_J, c_J)$  les dimensions de l'inclusion  $J$  avec son origine  $O_J$  ;
- $\vec{R}^0$  un vecteur tel que  $\vec{R}^0 = \overrightarrow{O_I O_J}$  ;
- $P_{ij}$  les composantes de la matrice de passage de l'orientation de l'hétérogénéité  $J$  à celle de  $I$  par rapport aux angles d'Euler.



**Figure 2.4 : Illustration de l'interaction d'une paire d'inclusions**

L'expression du tenseur d'interaction  $T^{IJ}$  est donnée par:

$$T_{klmj}^{IJ} = \frac{1}{2} (t_{klmj}^{IJ} + t_{lkmj}^{IJ}) \quad (47)$$

Dans le cas présent, l'expression du tenseur  $t^{IJ}$  est donnée par [57, 62]:

$$t_{klmj}^{IJ} = \frac{9}{8\pi^3} V_J \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \chi_l \chi_j \kappa^2 G_{km}(\mathbf{k}) \sin(\theta) F(\theta, \varphi) d\varphi d\theta \quad (48)$$

Dans l'équation précédente, les composantes du vecteur  $\vec{\chi}$  sont exprimées par:

$$\chi_i = \begin{cases} \chi_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \chi_3 = \cos \theta \end{cases} \quad (49)$$

La fonction  $F(\theta, \varphi)$  est définie telle que:

$$F(\theta, \varphi) = \frac{\pi}{48} \left\{ \frac{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}{(ab)^3} \right\} \quad (50)$$

où les fonctions  $f_1, f_2, f_3, f_4$  sont données par:

$$\begin{cases} f_1 = |\alpha| [-\alpha^2 + 3(a+b)\alpha - 6ab] \\ f_2 = |\beta| [\beta^2 + 3(a-b)\beta - 6ab] \\ f_3 = |\gamma| [\gamma^2 - 3(a-b)\gamma - 6ab] \\ f_4 = |\delta| [-\delta^2 + 3(a+b)\delta - 6ab] \end{cases} \quad (51)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = a + b - c \\ \beta = -a + b + c \\ \gamma = a - b + c \\ \delta = a + b + c \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} a = (a_1^2 \chi_1^2 + b_1^2 \chi_2^2 + c_1^2 \chi_3^2)^{\frac{1}{2}} \\ b = [a_2^2 (\mathbf{P}_{1j} \chi_j)^2 + b_2^2 (\mathbf{P}_{2j} \chi_j)^2 + c_2^2 (\mathbf{P}_{3j} \chi_j)^2]^{\frac{1}{2}} \\ c = \chi_1 R_1^0 + \chi_2 R_2^0 + \chi_3 R_3^0 \end{cases} \quad (52)$$

#### 2.4.1.2. Procédure d'implémentation du tenseur d'interaction $t^{IJ}$ dans l'équation (48)

Le calcul numérique des tenseurs d'interaction  $t^{IJ}$  nécessite l'estimation des intégrales (48) par le biais de variables trigonométriques  $(\theta, \varphi)$ . A cet effet, le recourt aux séries de Fourier dans le cas de fonctions périodiques permet une approximation numérique de ces intégrales [63]:

$$\begin{cases} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\varphi d\theta \approx \frac{2\pi^2}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(\theta_i, \varphi_j) \\ \theta_i = \frac{\pi}{N}(i-1) \quad ; \quad \varphi_j = \frac{2\pi}{M}(j-1) \end{cases} \quad (53)$$

Dans l'équation (53), les constantes  $M$  et  $N$  correspondent à la discrétisation des domaines d'intégration pour les variables  $(\theta, \varphi)$  respectivement. Nous présentons en annexe A l'algorithme d'implémentation du tenseur  $\mathbf{T}^{IJ}$ .

### 2.4.2. Inclusion ellipsoïdale multi-enrobée

La topologie du problème de l'inclusion multi-enrobée (Figure 2.5) consiste en un noyau occupant un volume  $V_1$  dont les propriétés élastiques sont représentées par le tenseur  $\mathbf{c}^1$ . Ce noyau est enrobé par  $N - 1$  couches, de volume  $V_i$ , dont les propriétés élastiques sont décrites par  $\mathbf{c}^i$  avec  $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ . L'inclusion composite ainsi formée est supposée entourée par un milieu continu infini dont les propriétés élastiques sont décrites par  $\mathbf{C}^0$ . L'objectif est de déterminer les déformations moyennes dans chaque constituant, ainsi que dans l'inclusion composite, en fonction de la déformation  $\mathbf{E}^0$  supposée appliquée à l'infini.

Plusieurs travaux ont été consacrés aux problèmes de l'inclusion enrobée : Christensen and Lo [64], Hervé et Zaoui [65, 66]. Ces travaux se sont focalisés essentiellement sur des inclusions sphériques ou cylindriques et un comportement élastique isotrope. De récents travaux ont tenté de généraliser cette approche aux inclusions ellipsoïdales et anisotropes.

En effet, le présent formalisme se base sur les travaux développés par Lipinski et al.[14] relatifs à la modélisation micromécanique des inclusions ellipsoïdales multi-enrobées. On peut alors construire différents schémas micromécaniques dont l'auto cohérent généralisé par exemple, à partir d'une telle modélisation, en considérant le milieu de référence comme étant le matériau homogène équivalent dont les propriétés effectives restent à déterminer, Bardhadi [67].

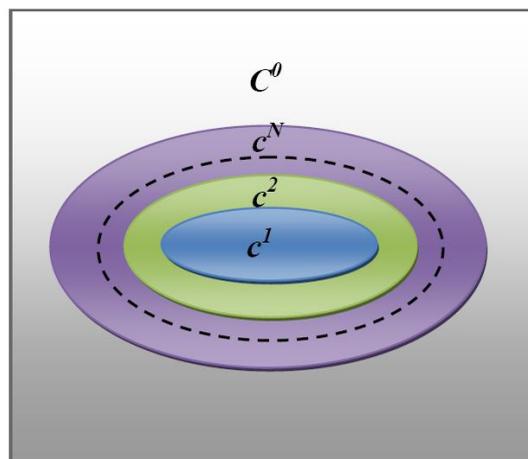


Figure 2.5 : Topologie du modèle multi-enrobé

### 2.4.2. 1. Etape de localisation

Soit  $\varphi^i$  la fraction volumique du constituant  $i$  par rapport au volume de l'inclusion composite  $I$ :

$$\varphi^i = \frac{V_i}{V_I}$$

et

$$\delta \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^0$$

Nous introduisons le tenseur de polarisation  $\boldsymbol{\tau}$  défini par :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (54)$$

Une réécriture de l'équation (36) conduit à:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 - \int_{V'} \Gamma(\mathbf{x} - \mathbf{x}') : \boldsymbol{\tau}^I(\mathbf{x}') dV' \quad (55)$$

L'opération de moyenne volumique du tenseur de polarisation combinée à la fonction caractéristique  $\theta$  donne:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^I &= \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \delta \mathbf{c}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \sum_{j=1}^N (\Delta \mathbf{c}^j \theta^j(\mathbf{x})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV = \\ & \sum_{j=1}^N \varphi_j \Delta \mathbf{c}^j : \boldsymbol{\varepsilon}^j \end{aligned} \quad (56)$$

avec  $\Delta \mathbf{c}^j = \mathbf{c}^j - \mathbf{C}^0$ . Par une substitution de l'expression (56) dans (55), nous obtenons l'expression du tenseur de localisation défini par:

$$\mathbf{A}^I = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^I(\mathbf{C}^0) : \left( \sum_{k=1}^N \varphi_k \Delta \mathbf{c}^k : \boldsymbol{\alpha}^k \right) \right] \quad (57)$$

avec  $N$  nouveaux tenseurs de localisation  $\boldsymbol{\alpha}^k$  tels que  $\boldsymbol{\varepsilon}^k = \boldsymbol{\alpha}^k : \boldsymbol{\varepsilon}^I$  ont été introduits,

En tout, trois familles de tenseurs de localisation de déformation sont introduits dans cette analyse:

- $\mathbf{A}^I$  le tenseur de localisation induit par l'inclusion composite  $I$  par rapport à la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  et défini par :  $\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{A}^I : \mathbf{E}$ ,
- $\mathbf{A}^j$  ( $j=1,2,\dots,N$ ) le tenseur de localisation de l'enrobage  $j$  par rapport à la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  :  $\boldsymbol{\varepsilon}^j = \mathbf{A}^j : \mathbf{E}$  ;
- $\boldsymbol{\alpha}^j$  représente le tenseur de localisation de l'enrobage  $j$  par rapport à la déformation de l'inclusion composite  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  :  $\boldsymbol{\varepsilon}^j = \boldsymbol{\alpha}^j : \boldsymbol{\varepsilon}^I$ .

On peut alors démontrer les relations suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^k = \boldsymbol{\alpha}^k : \mathbf{A}^I \\ \mathbf{A}^I = \langle \mathbf{A}^k \rangle = \sum_{k=1}^N \varphi_k \mathbf{A}^k \\ \langle \boldsymbol{\alpha}^k \rangle = \sum_{k=1}^N \varphi_k \boldsymbol{\alpha}^k = \mathbf{I} \end{cases} \quad (58)$$

Le système d'équations (58) donne la solution du problème de l'inclusion multi-enrobée. Cette solution s'exprime en termes des  $N$  tenseurs de localisation  $\boldsymbol{\alpha}^k$  inconnus. Ces derniers peuvent être calculés en fonction des conditions aux limites macroscopiques et des conditions de continuités des vecteurs déplacements et des vecteurs contraintes aux différentes interfaces [68]. A cet effet, les opérateurs interfaciaux [69] demeurent un outil mathématique efficient pour l'estimation du saut de contrainte et déformation à travers l'interface du matériau.

En effet, le saut de déformation à travers une interface séparant deux milieux  $k$  et  $k+1$  est donné par la relation suivante:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{k+1}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^k(\mathbf{x}) = P_{ijmn}^{k+1} \Delta c_{mnpq}^{(k/k+1)} \boldsymbol{\varepsilon}_{pq}^k(\mathbf{x}) \quad (59)$$

dans laquelle s'écrit :

$$\Delta \mathbf{c}^{(k/k+1)} = \mathbf{c}^k - \mathbf{c}^{k+1} \quad (60)$$

et  $P_{ijmn}^{k+1}$  représentant les composantes de l'opérateur interfacial  $\mathbf{P}$  défini par:

$$\mathbf{P}_{ijmm}^{k+1} = \frac{1}{2} \left[ \left( h^{k+1} \right)_{im}^{-1} N_j N_n + \left( h^{k+1} \right)_{jm}^{-1} N_i N_n \right] \quad (61)$$

Dans l'équation (61), le terme  $h_{ip}^{k+1}$  dénote les composantes de la matrice de Christoffel et  $N_i$  les composantes du vecteur normal  $N$ . Le terme  $h_{ip}^{k+1}$  est défini par:

$$h_{ip}^{k+1} = c_{ijpq}^{k+1} N_j N_q \quad (62)$$

Dans la suite, nous introduisons de nouvelles notations telles que:

$$\begin{cases} \Omega_j = \bigcup_{k=1}^j V_k \\ \Delta \mathbf{c}^{(p/q)} = \mathbf{c}^p - \mathbf{c}^q \end{cases} \quad (63)$$

En substituant  $\boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x})$  de l'équation (59) par sa valeur moyenne  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\Omega_k}$  sur le volume  $\Omega_k$ , et en considérant la moyenne  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\Omega_{k+1}}$  de  $\boldsymbol{\varepsilon}^{k+1}(\mathbf{x})$  sur le volume  $\Omega_{k+1}$ , l'équation (59) devient:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Omega_{k+1}} = \left[ \mathbf{I} + \mathbf{T}^{k+1}(\mathbf{c}^{k+1}) : \Delta \mathbf{c}^{(k/k+1)} \right] : \boldsymbol{\varepsilon}^{\Omega_k} \quad (64)$$

où:

$$\mathbf{T}^{k+1}(\mathbf{c}^{k+1}) = \frac{1}{V_{k+1}} \int_{V_{k+1}} \mathbf{P}^{k+1} dV \quad (65)$$

et

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\Omega_k} = \sum_{i=1}^k \frac{V_i}{\Omega_k} \boldsymbol{\varepsilon}^i = \frac{\sum_{i=1}^k \varphi_i \boldsymbol{\varepsilon}^i}{\sum_{i=1}^k \varphi_i} \quad (66)$$

Suivant les travaux de Cherkaoui [70], nous pouvons établir que:

$$\mathbf{T}^{k+1}(\mathbf{c}^{k+1}) = \mathbf{T}^{\Omega_k}(\mathbf{c}^{k+1}) - \frac{\sum_{i=1}^k \varphi_i}{\varphi_{k+1}} \left[ \mathbf{T}^{\Omega_{k+1}}(\mathbf{c}^{k+1}) - \mathbf{T}^{\Omega_k}(\mathbf{c}^{k+1}) \right] \quad (67)$$

avec  $\mathbf{T}^{\Omega_k}(\mathbf{c}^k)$  représentant le tenseur des interactions dans sa version mono-site.

Par une substitution de l'équation (67) dans l'équation (64), nous établissons une relation exprimant le tenseur de localisation de la couche  $k$  en fonction de celle du noyau 1 :

$$\boldsymbol{\alpha}^k = \boldsymbol{\Pi}^k : \boldsymbol{\alpha}^1 \quad (68)$$

$\boldsymbol{\Pi}^k$  est définie par la relation de récurrence suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Pi}^1 = \mathbf{I} ; \boldsymbol{\Pi}^2 = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(1/2)} \\ \boldsymbol{\Pi}^k = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} (\varphi_j \boldsymbol{\mathcal{G}}^{(j/k)} : \boldsymbol{\Pi}^j)}{\sum_{j=1}^{k-1} \varphi_j} \end{array} \right. \quad (69)$$

où  $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(j/k)}$  représente le saut moyen de déformation entre la couche  $j$  et la couche  $k$ . Il est défini par :

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(j/k)} = \mathbf{I} + \left( \mathbf{T}^{\Omega_{k-1}}(\mathbf{c}^k) - \frac{\sum_{n=1}^{k-1} \varphi_n}{\varphi_k} \left[ \mathbf{T}^{\Omega_k}(\mathbf{c}^k) - \mathbf{T}^{\Omega_{k-1}}(\mathbf{c}^k) \right] \right) : \Delta \mathbf{c}^{(j/k)} \quad (70)$$

Par ailleurs, la troisième relation de l'équation (58) donne finalement:

$$\boldsymbol{\alpha}^1 = \left( \sum_{k=1}^N \varphi_k \boldsymbol{\Pi}^k \right)^{-1} \quad (71)$$

Ainsi, la procédure de localisation est complète une fois, le tenseur  $\boldsymbol{\alpha}^1$  déterminé.

### 2.4.2. 2. Synthèse de l'étape de localisation

L'objectif principal de la section précédente consiste en l'implémentation du tenseur de localisation  $\mathbf{A}^k$  défini dans l'équation (58). Les étapes suivantes résument la procédure décrite ci-dessus :

- Détermination du  $\mathbf{T}^k(\mathbf{c}^k)$  à partir de l'équation (67) et en fonction des propriétés élastiques  $\mathbf{c}^k$  de chaque phase;
- Evaluation des tenseurs  $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{(j/k)}$  par le biais de l'équation (70);

- Détermination des tenseurs  $\Pi^k$  de l'équation (69);
- Calcul du tenseur  $\alpha^l$  à partir de l'équation (71) et déduction des tenseurs  $\alpha^k$  à partir de l'équation (68);
- Calcul du tenseur  $A^l$  à l'aide de la relation (57) et finalement, le tenseur  $A^k$  à partir de l'équation(58).

Une validation de cette modélisation à travers la solution exacte d'Hervé et Zaoui [65] est présentée dans l'annexe B.

La procédure de localisation ainsi décrite, peut être implémentée dans un schéma d'homogénéisation pour l'estimation des propriétés effectives d'un composite. Ceci fera l'objet du chapitre 3.

### 2.5. Conclusion

Les formalismes micromécaniques développés dans ce chapitre constituent le cadre théorique sur lequel se fondera l'investigation du comportement auxétique dans le prochain chapitre. Ils permettent la détermination des propriétés effectives (globales) basées sur l'équation intégrale de Dederichs et Zeller [61] comme solution du problème hétérogène. Dans la compréhension du comportement auxétique, la prise en compte de l'interaction des inclusions les unes par rapport aux autres apparait intéressante comme voie d'investigation. Elle permettra donc le développement de modèle prenant en compte une topologie particulière des renforts, comme par exemple la structure réentrante. Aussi, le modèle de l'inclusion multi-enrobé a été rappelé en utilisant le formalisme développé par Lipinski [14]. Dans la suite, les résultats de ces développements seront appliqués dans divers cas de figures en vue de la modélisation du comportement auxétique des composites.

# Chapitre 3 : Investigation analytique et applications micromécaniques

---

Introduction .....	49
3.1. Objectifs.....	49
3.2. Modélisation analytique du comportement auxétique .....	50
3.3. Le modèle de l'hétérogénéité multi-enrobée .....	55
3.4. Simulations par éléments finis du modèle multi-enrobé .....	58
3.4.1. Définition des fractions volumiques .....	59
3.4.2. Relation entre les fractions volumiques et les dimensions des différentes phases ...	59
3.4.3. Propriétés des phases .....	60
3.5. Modèle constitué d'un cluster de renforts « réentrant » .....	66
3.6. Approche éléments finis de la microstructure « réentrante » .....	74
Conclusion .....	80

---

## Introduction

Dans ce chapitre, nous traiterons l'analyse micromécanique du comportement auxétique d'un point de vue « effet matériau ». Peu de travaux dans la littérature ont été consacrés à une telle approche. Il s'agira dans cette étude d'utiliser le formalisme micromécanique développé dans le chapitre précédent et basé sur l'utilisation de l'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller [60, 61] dans la description du comportement auxétique. Les matériaux auxétiques existent à différentes échelles de longueur [16]. Différentes technologies ont permis d'en élaborer à travers des mousses polyester [3] et polytetrafluoroéthylène (PTFE) [71] à partir de matériaux initialement non auxétiques, c'est-à-dire à coefficient de Poisson positif, et ceci à partir des nano, micro ou macro structures. Le comportement global d'un tel matériau dépend intrinsèquement de ses textures morphologique et topologique [7]. Alors surviennent des questions quant à l'utilisation d'une approche micromécanique dans la description d'un comportement auxétique à une échelle macroscopique. Quel pourra donc être l'apport de la microstructure dans la description d'un tel comportement ? Nous essayerons dans ce chapitre de donner des tentatives de réponses en vue de mieux comprendre le positionnement des approches micromécaniques par rapport au comportement auxétique.

### 3.1. Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont relatifs aux questions suivantes:

- Est-il possible de concevoir des matériaux auxétiques à partir de phases non auxétiques ?
- Quelle peut être la réponse des modèles micromécaniques dérivés de l'équation cinématique intégrale dans la description du comportement auxétique ?
- Quel peut être l'impact de la prise en compte de l'interaction des renforts (inclusions) dans cette description ?

Des tentatives de réponses à ces différentes questions seront données par l'exploitation des formalismes micromécaniques développés dans le chapitre précédent.

Pour introduire ces développements, nous commençons ce chapitre avec une modélisation analytique basée sur le schéma micromécanique de Mori-Tanaka. Cette dernière a été

développée dans le cas d'inclusions sphériques et isotropes noyées dans une matrice isotrope et infinie. L'objectif d'une telle modélisation est de prédire d'un point de vue théorique le domaine, en termes de combinaison d'hétérogénéités, du comportement et de textures microscopiques pouvant conduire à un comportement auxétique du composite équivalent.

Plus tard, deux autres types de microstructures seront explorés, principalement la microstructure multi-enrobée [14, 59] et la microstructure construite d'un cluster de renforts « ré-entrants ».

Dans le cas de la microstructure multi-enrobée, l'hétérogénéité est enrobée d'une couche de matrice et l'inclusion composite résultant est plongée dans le milieu équivalent dont les propriétés sont inconnues. Ce modèle, communément appelé le modèle « auto-cohérent généralisé », fut étudié par Christensen et Lo [64], Hervé et Zaoui [65, 72], Cherkaoui et al. [70] et Nemat-Nasser et Hori [73]. Les résultats issus de ce modèle seront discutés par rapport à ceux obtenus par Stagni [15] et ceci en vue d'analyser l'impact de l'utilisation de l'équation cinématique intégrale sur la description du comportement auxétique.

La microstructure « ré-entrante » a été analysée suivant le concept de paire d'inclusions d'Eshelby noyée dans une matrice infinie [57]. En se basant sur les développements de Fassi-Fehri et al. [62], la notion du tenseur d'interactions (chapitre 2) entre des inclusions a été introduite pour une meilleure description de cette microstructure particulière. Ceci permettra alors la construction d'une version multi-site de l'équation de localisation. Ici, la prise en compte de l'anisotropie du matériau se fait d'une part à travers la texture morphologique qui décrit la forme et l'orientation des renforts et d'autre part à travers la texture topologique qui prend en compte leurs positions relatives. La version multi-site, du schéma micromécanique de Mori-Tanaka [74], est alors développée pour estimer les propriétés équivalentes du matériau.

Pour chaque microstructure, des simulations par éléments finis (EF) correspondantes sont mises en œuvre afin de valider les résultats micromécaniques.

### 3.2. Modélisation analytique du comportement auxétique

Dans le cadre de la modélisation analytique, l'expression du tenseur d'interaction est connue pour la microstructure examinée ici : des inclusions sphériques et isotropes noyées dans une

matrice isotrope et infinie. A travers cette microstructure, le domaine de validité du comportement auxétique est étudié par le biais du modèle de Mori-Tanaka en mono-site.

D'après les travaux de Fassi-Fehri [57], le tenseur d'interaction dans le cas mono-site s'exprime:

$$\mathbf{T}^H(\mathbf{c}^R) = \left( \frac{1}{3\kappa_R + 4\mu_R} \right) \mathbf{J} + \left( \frac{3(\kappa_R + 2\mu_R)}{5\mu_R(3\kappa_R + 4\mu_R)} \right) \mathbf{K} \quad (72)$$

où  $\kappa_R$  et  $\mu_R$  sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement du milieu de référence de propriétés élastiques  $\mathbf{c}^R$ .  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{K}$  représentent les tenseurs idempotents donnés par  $J_{ijkl} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl}$ .  $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$  est le tenseur identité d'ordre quatre et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Pour chaque phase, le tenseur des propriétés élastiques s'exprime en fonction de ces tenseurs idempotents:

$$\begin{cases} \mathbf{c}^I = 3\kappa_I \mathbf{J} + 2\mu_I \mathbf{K} \\ \mathbf{c}^0 = 3\kappa_0 \mathbf{J} + 2\mu_0 \mathbf{K} \\ \Delta \mathbf{c}^I = 3(\kappa_I - \kappa_0) \mathbf{J} + 2(\mu_I - \mu_0) \mathbf{K} \end{cases} \quad (73)$$

Dans l'équation (73),  $\kappa_I$  et  $\mu_I$  représentent respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement de l'inclusion  $I$  alors que  $\kappa_0$  et  $\mu_0$  concernent la matrice. Suivant la formulation du modèle de « Mori-Tanaka », les propriétés effectives du matériau équivalent en termes des modules de compressibilité et de cisaillement sont données par :

$$\kappa^{MT} = \kappa_0 + \frac{f(\kappa_1 - \kappa_0)(3\kappa_0 + 4\mu_0)}{3\kappa_0 + 4\mu_0 + 3(1-f)(\kappa_1 - \kappa_0)} \quad (74)$$

$$\mu^{MT} = \mu_0 + \frac{5f\mu_0(\mu_1 - \mu_0)(3\kappa_0 + 4\mu_0)}{5\mu_0(3\kappa_0 + 4\mu_0) + 6(1-f)(\mu_1 - \mu_0)(\kappa_0 + 2\mu_0)} \quad (75)$$

où  $f$  est la fraction volumique des inclusions dans le VER. Pour des raisons de convenance par rapport à l'analyse présentée plus loin, nous introduisons le paramètre de rigidité  $\gamma = \frac{\mu_1}{\mu_0}$  et

les coefficients de Poisson de la matrice et de l'inclusion  $\nu_0$  et  $\nu_1$ , respectivement. La

normalisation des propriétés effectives (74) et (75) par rapport à celles de la matrice  $\kappa_0$  et  $\mu_0$  conduit à:

$$\bar{\kappa}^{MT} = \frac{\kappa^{MT}}{\kappa_0} = 1 + \frac{f}{(1+\nu_0)} \frac{3[\gamma(1+\nu_1)(1-2\nu_0) - (1+\nu_0)(1-2\nu_1)](1-\nu_0)}{3(1-2\nu_1)(1-\nu_0) + (1-f)[\gamma(1+\nu_1)(1-2\nu_0) - (1+\nu_0)(1-2\nu_1)]} \quad (76)$$

$$\bar{\mu}^{MT} = \frac{\mu^{MT}}{\mu_0} = 1 + f \frac{45(\gamma-1)(1-\nu_0)(1-2\nu_0)}{45(1-2\nu_0)(1-\nu_0) + 8(1-f)(\gamma-1)(4-5\nu_0)} \quad (77)$$

Nous observons que le module de cisaillement effectif  $\bar{\mu}^{MT}$  ne dépend pas du coefficient de Poisson de l'inclusion  $\nu_1$ . Le coefficient de Poisson effectif peut être déduit des relations précédentes par la relation:

$$\nu^{MT} = \frac{3\kappa^{MT} - 2\mu^{MT}}{2(3\kappa^{MT} + \mu^{MT})} \quad (78)$$

Pour des valeurs positives des modules effectifs de compressibilité et de cisaillement, un coefficient de Poisson effectif négatif peut être obtenu si et seulement si  $3\kappa^{MT} - 2\mu^{MT} < 0$ . La frontière des valeurs de coefficient de Poisson  $\nu^{MT} = 0$  sépare alors le domaine de variation de  $\nu_0$  et  $\nu_1$  en deux sous-domaines de coefficient de Poisson négatif et positif. Cette frontière est définie par l'équation:

$$3\bar{\kappa} = 2\bar{\mu} \frac{\mu_0}{\kappa_0} = 3\bar{\mu} \frac{1-2\nu_0}{1+\nu_0} \quad (79)$$

avec  $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_0}$  et  $\bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}$ .

La substitution des expressions (76) et (77) dans l'équation ci-dessus conduit à:

$$\frac{[\gamma(1+\nu_1)(1-2\nu_0) - (1+\nu_0)(1-2\nu_1)]}{3(1-2\nu_1)(1-\nu_0) + (1-f)[\gamma(1+\nu_1)(1-2\nu_0) - (1+\nu_0)(1-2\nu_1)]} = \frac{15(\gamma-1)(1-2\nu_0)(1-2\nu_0)}{8(1-f)(\gamma-1)(4-5\nu_0) + 45(1-2\nu_0)(1-\nu_0)} - \frac{\nu_0}{f(1-\nu_0)} \quad (80)$$

La résolution de l'équation (80) par rapport à  $\nu_1$  donne:

$$\nu_1 = \frac{N(\nu_0, f, \gamma)}{D(\nu_0, f, \gamma)} \quad (81)$$

où:

$$N(\nu_0, f, \gamma) = (1-f) \left\{ f(5\nu_0 - 3)(\gamma - 1)(1 + \nu_0 - \gamma + 2\gamma\nu_0) - \nu_0(\gamma + 2)[5\nu_0(1 + 2\gamma) - 7 - 8\gamma] \right\}$$

$$D(\nu_0, f, \gamma) = f^2(5\nu_0 - 3)[2\nu_0(\gamma - 1) - \gamma - 2](\gamma - 1) + \nu_0(\gamma - 4)[5\nu_0(1 + 2\gamma) - 7 - 8\gamma] + f \left\{ 10(\nu_0)^2(1 + \gamma - 2\gamma^2) - 3[\gamma(\gamma + 16) - 2] + \nu_0[\gamma(19\gamma + 58) - 32] \right\}$$

Il apparaît alors que, pour toute valeur de fraction volumique  $0 \leq f \leq 1$  et du rapport de rigidité  $\gamma \geq 0$ , l'obtention d'un composite auxétique à partir d'une matrice non auxétique ( $\nu_0 \geq 0$ ) n'est possible que pour une valeur négative du coefficient de Poisson de l'inclusion. En effet, pour une valeur de coefficient de Poisson de la matrice  $\nu_0 = 0$  l'expression de  $\nu_1$  devient:

$$\nu_1|_{\nu_0=0} = \frac{3f(f-1)(1-\gamma)(\gamma-1)}{3f^2(\gamma+2)(\gamma-1) - 3f[\gamma(16+\gamma) - 2]} \leq 0 \quad (82)$$

Une conclusion similaire peut être tirée dans le cas où le coefficient de Poisson de l'inclusion tend vers zéro. L'expression correspondante de  $\nu_0$  prend la forme suivante :

$$\nu_0|_{\nu_1=0} = \frac{f(1-\gamma)(2-11\gamma) - \gamma(23+8\gamma) - 14}{10[f(\gamma-1) - \gamma - 2](1+2\gamma)} + \frac{\sqrt{f^2(1-\gamma)^2(8+\gamma)^2 + (2+\gamma)^2(7+8\gamma)^2 + 2f(1-\gamma)(2+\gamma)[16+7\gamma(13+4\gamma)]}}{10[f(\gamma-1) - \gamma - 2](1+2\gamma)} \leq 0 \quad (83)$$

Cette dernière inégalité indique le coefficient de Poisson effectif négatif est obtenu dans le cas d'une inclusion non auxétique si et seulement si la matrice est initialement auxétique. Les conclusions ci-dessus sont illustrées par les Figures 3.1 et 3.2. Ces figures décrivent l'évolution du domaine auxétique effectif en fonction de la fraction volumique d'inclusion  $f$  et du rapport de rigidité  $\gamma$ .

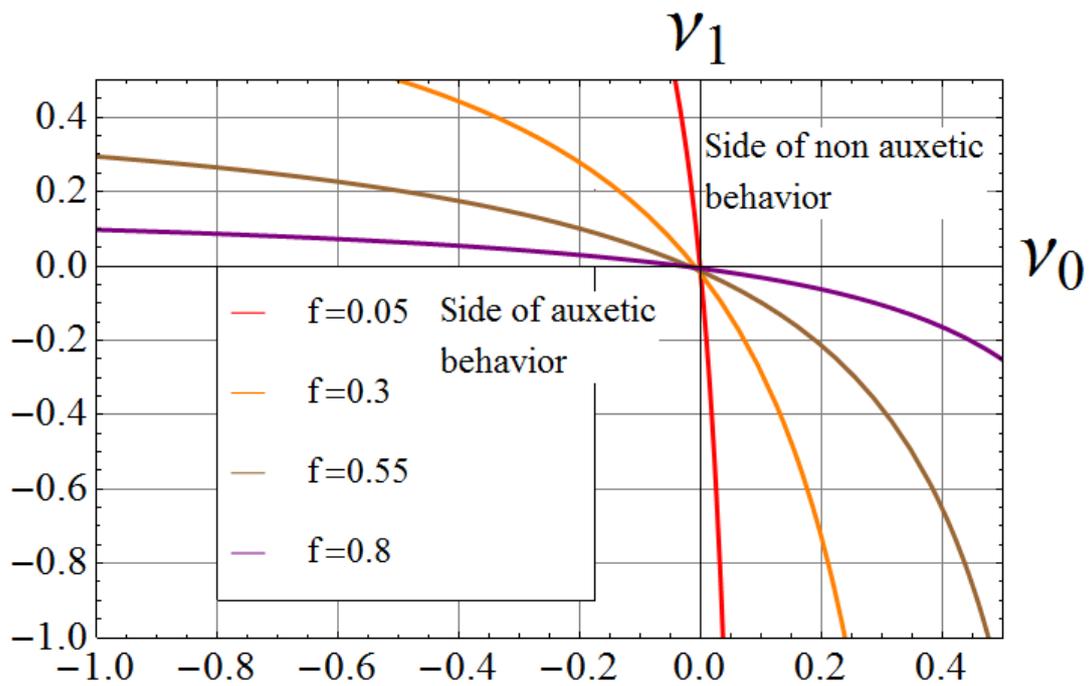


Figure 3.1. Frontières du domaine auxétique en fonction de la fraction volumique  $f$  pour  $\gamma = 2$

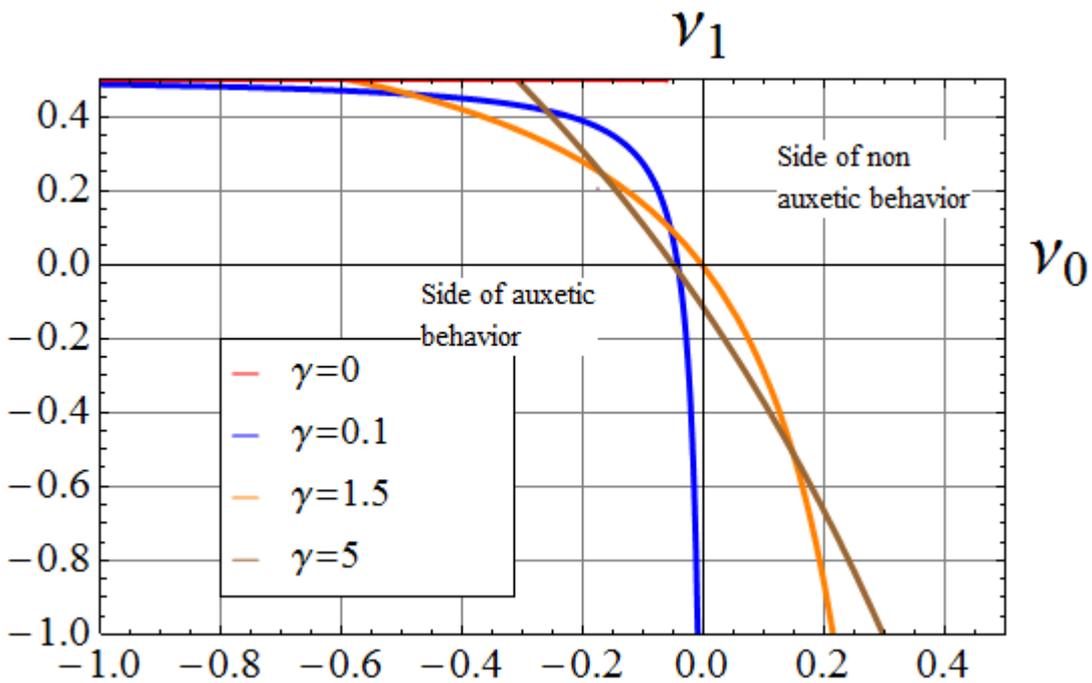


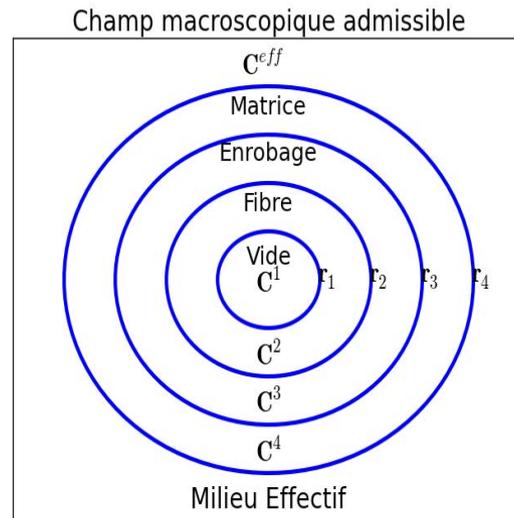
Figure 3.2. Frontières du domaine auxétique en fonction du rapport  $\gamma$  pour  $f = 0.3$

Les résultats de cette approche analytique montrent qu'il semble impossible d'obtenir, à travers une formulation micromécanique mono-site, un comportement auxétique du composite constitué de phases non auxétiques.

Dans la suite, des approches micromécaniques plus complexes seront utilisées pour analyser ce problème. En premier lieu, la microstructure étudiée par Stagni [15] est analysée. Pour cela, le modèle de l'hétérogénéité multi-enrobée est utilisé pour identifier son impact sur la description du comportement auxétiq. Pour cette microstructure, une comparaison des résultats issus de l'analyse micromécanique et des simulations par éléments finis sera effectuée avec les résultats proposés par Stagni [15].

### 3.3. Le modèle de l'hétérogénéité multi-enrobée

Comme traité dans [15], nous considérons un composite contenant des renforts multi-enrobés de 3 couches concentriques (Figure 3.3). Le renfort est constitué d'une fibre creuse suivie d'un enrobage. L'inclusion composite ainsi constituée est entourée d'une matrice supposée infinie. Il est alors possible d'introduire l'épaisseur relative de l'enrobage  $k = (\rho_3 - \rho_2) / \rho_2$  et la fraction volumique de la fibre enrobée (vide+fibre+enrobage)  $f_l = \rho_3^2 / \rho_4^2$ . Des paramètres définissant la rigidité des phases sont introduits tels que  $\gamma_m = \mu_2 / \mu_4$ ,  $\gamma_c = \mu_2 / \mu_3$ . Le paramètre  $\rho_i$  désigne le rayon relatif de la phase  $i$ , défini par  $\rho_i = r_i / r_0$ . Ici, l'indice 1 désigne le vide alors que les indices 2, 3, et 4 font référence respectivement au renfort, à l'enrobage et à la matrice. L'inclusion composite ainsi formée par cet assemblage est supposée noyée dans le milieu effectif dont les propriétés restent inconnues (modèle auto-cohérent généralisé).



**Figure 3.3: Microstructure multi-enrobée décrite dans les travaux de Stagni [15]**

Nous avons mis en œuvre ce modèle et comparé les résultats obtenus avec ceux obtenus par Stagni. Le modèle proposé par Stagni [15] a été développé en introduisant des déformations libres de chargement (eigenstrains) dans le modèle du vide multi-enrobé. Sa microstructure est alors soumise à un chargement arbitraire uniforme dans lequel les champs élastiques dans chaque phase sont exprimés à travers des fonctions potentielles complexes de « Kolosov » définies dans [75]. L'analyse faite par Stagni [15] est basée sur le schéma auto-cohérent généralisé et la solution du problème est établie dans le cas de l'élasticité plane (déformations planes).

La Figure 3.4 illustre l'évolution du coefficient de Poisson effectif en fonction de la porosité du matériau. Les données suivantes ont été considérées :

$$k = 0.025 \quad , \quad f_I = 0.7, \quad \nu_2 = \nu_4 = 0.3, \quad \nu_3 = 0.4$$

Comme nous le constatons sur cette figure, le modèle de Stagni prédit un comportement auxétique au delà d'une certaine valeur de porosité pour les paramètres suivants :  $\gamma_m = 0.5$  ,  $\gamma_c = 0.1$  et  $\gamma_c = 10$

Le modèle développé dans la présente étude est basé sur l'équation cinématique intégrale comme solution formelle du problème hétérogène tout en s'appuyant sur le concept de l'inclusion d'Eshelby [58]. Afin de reproduire la configuration en élasticité plane (comme dans le cas du modèle de Stagni), des inclusions concentriques multi-enrobées suffisamment

allongées ont été considérées: Les dimensions géométriques  $(a_1, a_2, a_3)$  des inclusions sont spécifiées comme suit :

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ \frac{a_3}{a_1} = 1000 \end{cases} \quad (84)$$

où  $(a_1, a_2, a_3)$  représentent les trois demi-axes de l'inclusion considérée ellipsoïdale. Les résultats déduits du présent modèle tels que représentés sur la Figure 3.4, montrent une légère décroissance du coefficient de Poisson effectif en fonction de la porosité du matériau. Mais, contrairement aux résultats obtenus par Stagni, pour les mêmes valeurs de paramètres et sur le même domaine de porosité, notre modèle ne prédit pas de valeur négative du coefficient de Poisson effectif : le matériau homogène équivalent n'est donc pas auxétique.

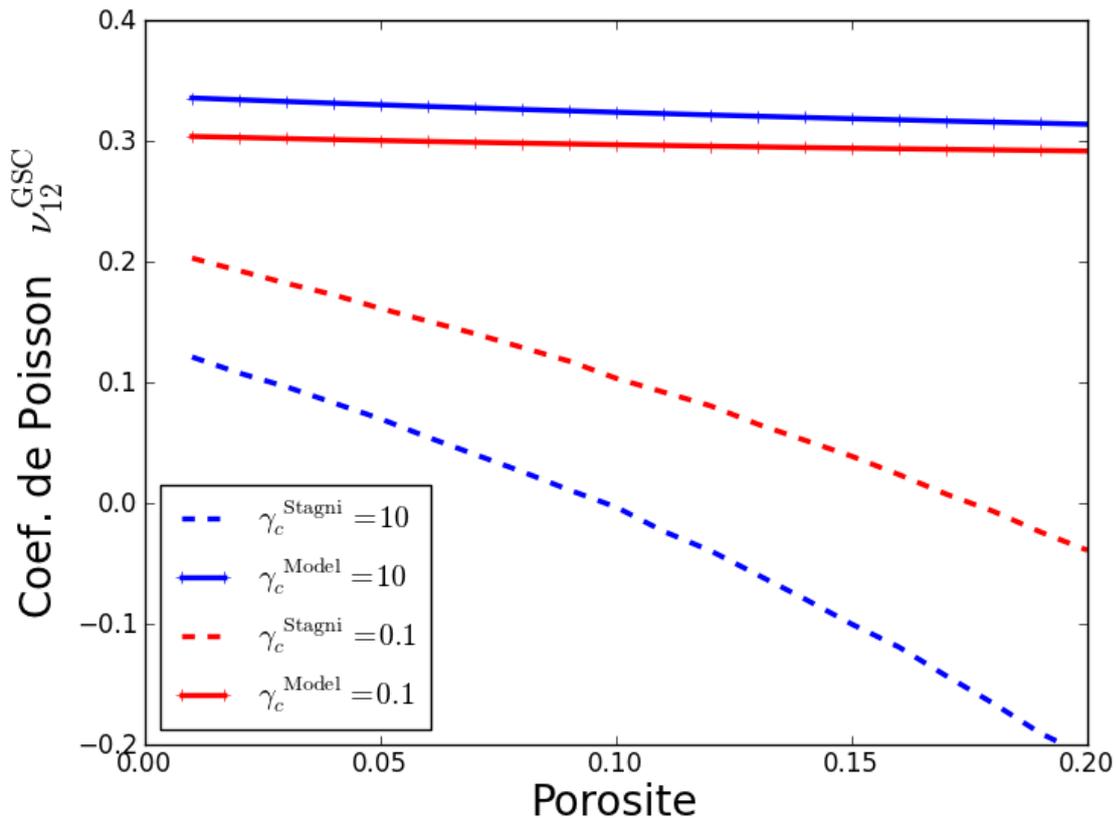


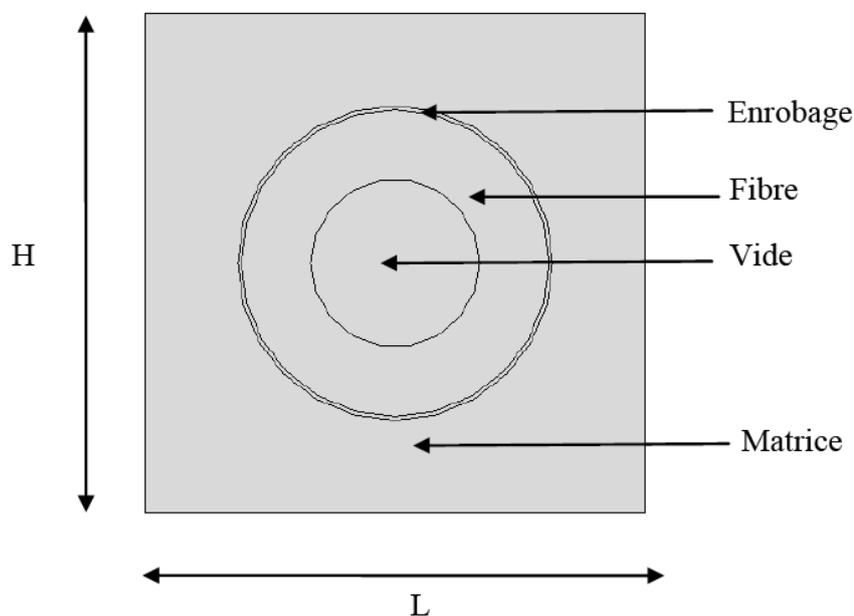
Figure 3.4 : Evolution du coefficient de Poisson  $\nu_{12}^{GSC}$  en fonction de la porosité

Les résultats de cette première approche micromécanique semblent contredire les suggestions de Stagni quant à la possibilité d'induire un comportement effectif de type auxétique à partir de la topologie de l'inclusion multi-enrobée. Afin de confirmer cette tendance, une analyse par éléments finis de la même microstructure a ensuite été mise en œuvre.

### 3.4. Simulations par éléments finis du modèle multi-enrobé

Une simulation EF a été conduite dans cette section afin de confirmer ou infirmer les résultats de l'étude micromécanique, obtenus précédemment. La topologie de la microstructure se constitue d'une fibre creuse et d'un enrobage. Cet ensemble qui constitue l'inclusion composite est ensuite noyé dans une matrice comme schématisé sur la Figure 3.5.

Compte tenu des faibles valeurs de la porosité, les écarts de prédictions de ce modèle par rapport à d'autres schémas d'homogénéisation devraient être acceptables.



**Figure 3.5 : Topologie Eléments Finis de la microstructure multi-enrobée**

Conformément à l'étude analytique, une fraction volumique de fibre enrobée (vide+fibre+enrobage)  $f_t = 0.7$  a été considérée. Un paramètre  $K$  lié à l'épaisseur de

l'enrobage est introduit tel que  $K = (1+k)^2 - 1$  avec  $k = 0.025$ . Dans l'objectif de comparer les résultats de cette approche par EF avec ceux issus de l'étude micromécanique, certaines similitudes en termes de valeurs de paramètres doivent être vérifiées.

### 3.4.1. Définition des fractions volumiques

Soit  $\varphi_1$  la fraction volumique du vide dans l'inclusion composite. Cette fraction volumique fera l'objet d'une variation et reste le paramètre d'étude. Elle est reliée aux autres fractions volumiques par :

$$\varphi_2 = \frac{f_I}{1+K} - \varphi_1 \quad (85)$$

$$\varphi_3 = \frac{f_I \cdot K}{1+K} \quad (86)$$

$$\varphi_4 = 1 - f_I \quad (87)$$

où  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  représentent la fraction volumique de la fibre, de l'enrobage et de la matrice, respectivement.

### 3.4.2. Relation entre les fractions volumiques et les dimensions des différentes phases

Une fois les valeurs de fractions volumiques connues, la seconde étape est celle qui consiste à relier les fractions volumiques  $\varphi$  aux volumes c'est-à-dire aux dimensions de chacune des phases dans le modèle éléments finis. Ceci permet alors de paramétrer l'évolution de la fraction volumique du vide en fonction des dimensions des phases. Les différentes fractions volumiques se réécrivent alors :

$$\varphi_1 = \frac{V_1}{V_4} = \frac{\pi r_1^2}{LH} \quad (88)$$

$$\varphi_2 = \frac{V_2 - V_1}{V_4} = \frac{\pi(r_2^2 - r_1^2)}{LH} \quad (89)$$

$$\varphi_3 = \frac{V_3 - V_2}{V_4} = \frac{\pi(r_3^2 - r_2^2)}{LH} \quad (90)$$

$$\varphi_4 = \frac{V_4 - V_3}{V_4} = 1 - \frac{V_3}{V_4} = 1 - f_i \quad (91)$$

avec  $r_i$  désignant le rayon de la phase  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  et  $L, H$  les dimensions de la matrice telle que schématisée par la Figure 3.5.

### 3.4.3. Propriétés des phases

Toutes les phases considérées dans cette section sont supposées isotropes et élastiques linéaires. Leur comportement mécanique est alors caractérisé par le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Les propriétés des phases étant interdépendantes les unes des autres, le paramétrage des propriétés élastiques peut se faire en fonction de celles de la matrice  $\mu_4$ .

En effet, en considérant les valeurs de rapport de rigidité entre les phases  $\gamma_m$  et  $\gamma_c$  telles que

$$\gamma_m = \frac{\mu_2}{\mu_4} ; \quad \gamma_c = \frac{\mu_3}{\mu_4} \quad \text{ou} \quad \mu_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad \text{nous pouvons alors déterminer les modules de}$$

cisaillement :

$$\begin{cases} \mu_2 = \gamma_m \mu_4 \\ \mu_3 = \frac{\gamma_m}{\gamma_c} \mu_4 \end{cases} \quad (92)$$

Les différentes propriétés des phases s'écrivent comme suit :

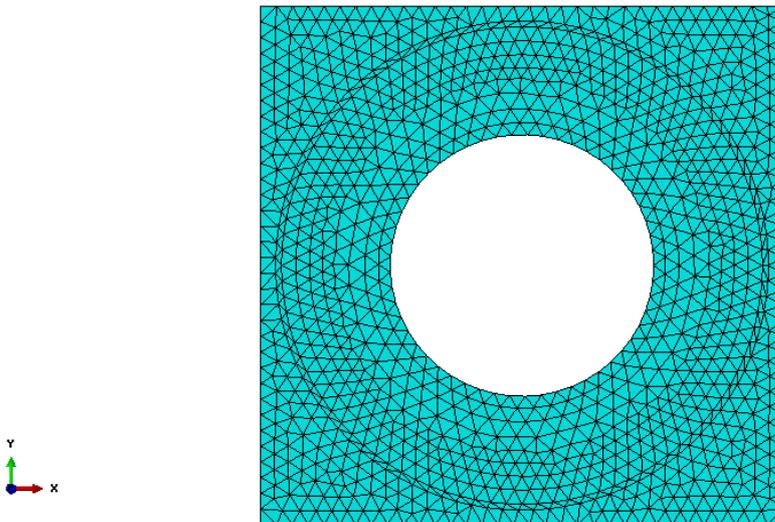
- Vide :  $E_1 = 0, \nu_1 = 0$
- Fibre :  $E_2 = 2\mu_2(1+\nu_2), \nu_2 = 0.3,$
- Enrobage :  $E_3 = 2\mu_3(1+\nu_3), \nu_3 = 0.4,$

- Matrice :  $E_4 = 2\mu_4(1 + \nu_4)$ ,  $\nu_4 = 0.3$ ,

Une première simulation 2D de cette microstructure a été réalisée à l'aide du logiciel Abaqus 6.10 de Dassault Systems. Le VER correspondant a été maillé en utilisant des éléments plans CPS3 (contraintes planes), CPE3 (déformations planes) et des conditions aux limites périodiques sont appliquées sur ses frontières. La Figure 3.6 illustre un maillage du VER en contraintes planes avec 2137 éléments.

Un chargement en traction uni-axiale est appliqué dans la direction  $X$ . De ce fait, les valeurs de déformations (Figure 3.7) dans les divers cas d'études (contraintes planes et déformations planes) peuvent être déterminées sur tout le VER permettant ainsi le calcul de la valeur du coefficient de Poisson. Dans le cas présent, le coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  est défini par :

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (93)$$



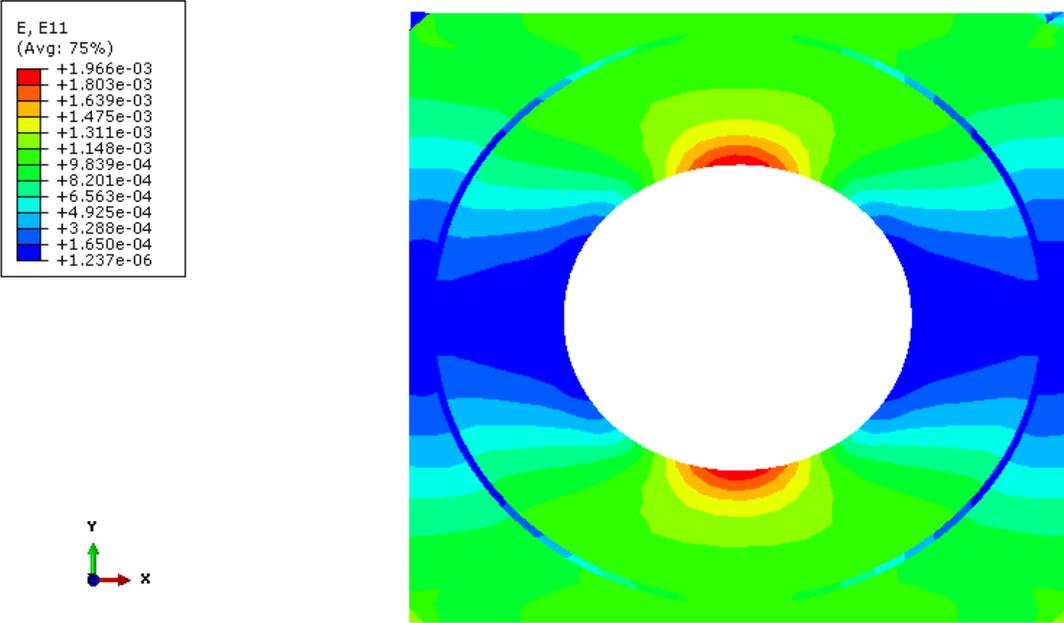
**Figure 3.6: Maillage de la microstructure multi-enrobée**

La Figure 3.7 montre un exemple de champs de déformation  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{22}$  dans le cas de  $\gamma_m = 0.5$  et  $\gamma_c = 0.1$  et ceci pour une analyse en contraintes et déformations planes. L'estimation du coefficient de Poisson conduit à une valeur de  $\nu_{12} = 0.247$  dans le cas d'une

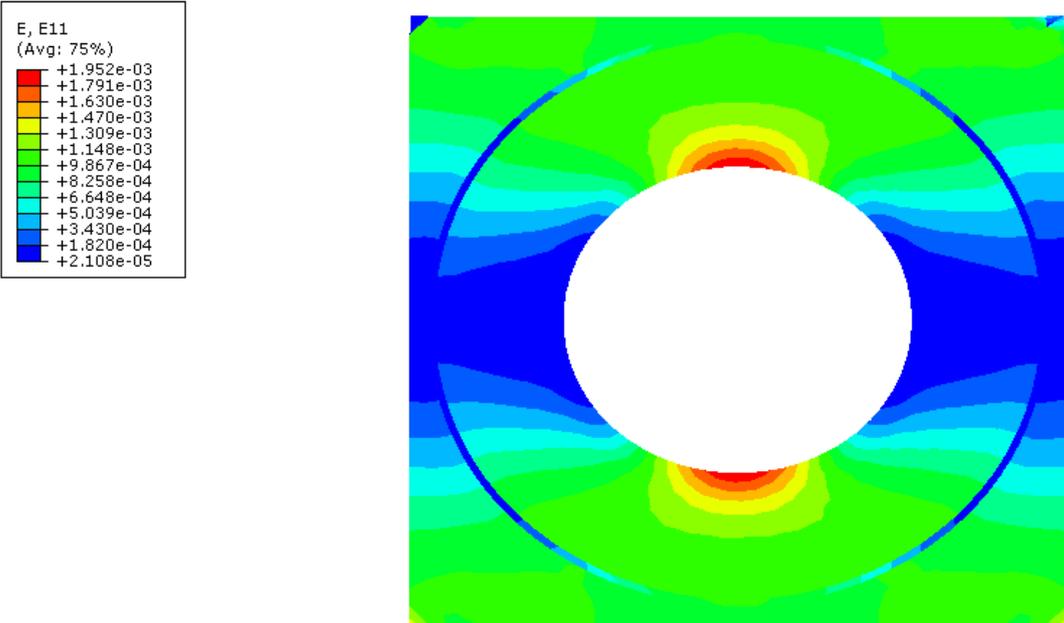
analyse en contraintes planes pour 20% de vide. Pour une analyse en déformations planes pour les mêmes données de porosité, nous obtenons une valeur de  $\nu_{12} = 0.32$

Les résultats issus de ce calcul EF sont ensuite confrontés aux résultats de l'approche micromécanique développée plus-haut.

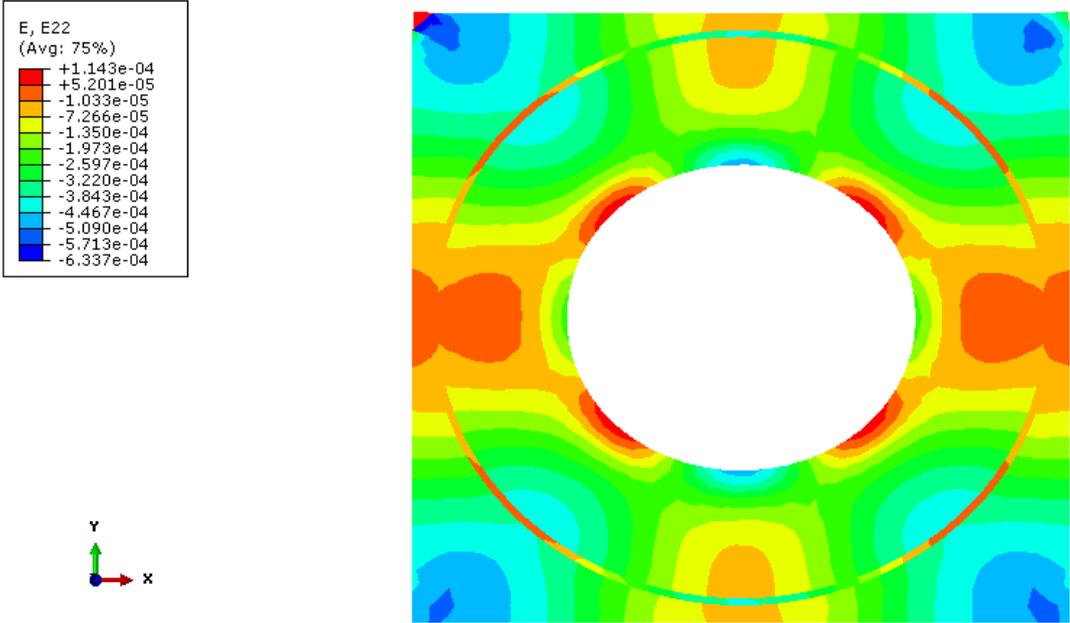
L'analyse des courbes de la Figure 3.8 indique une légère décroissance du coefficient de Poisson, issu du calcul EF, en fonction de la porosité. Ces valeurs restent néanmoins positives. La répartition des déformations, dans le présent cas, reste très hétérogène dans le VER. Ceci explique la différence entre les résultats issus du calcul micromécanique où les champs élastiques sont supposés homogènes dans les phases inclusions et les résultats issus du calcul Eléments Finis. Même s'il ne s'agit que d'un modèle numérique en 2D, ces résultats confirment les tendances micromécaniques. Cette analyse par EF peut être considérée comme une validation du modèle micromécanique en ce qui concerne les conclusions sur la description du comportement auxétique.



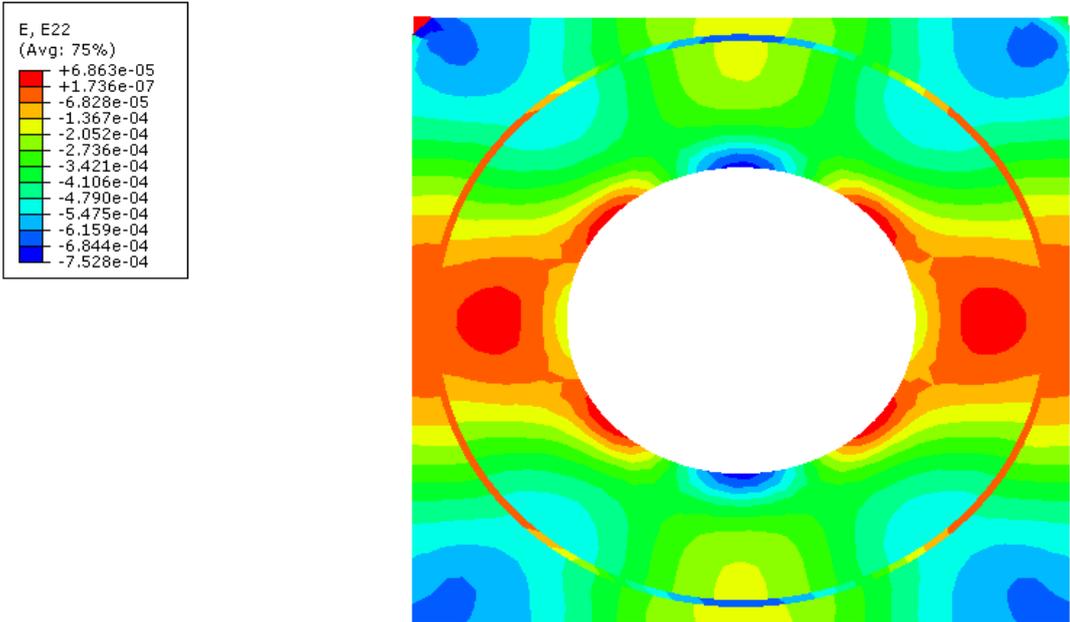
(a) Contours plots  $E_{11}$  en contraintes planes



(b) Contours plots  $E_{11}$  en déformations planes



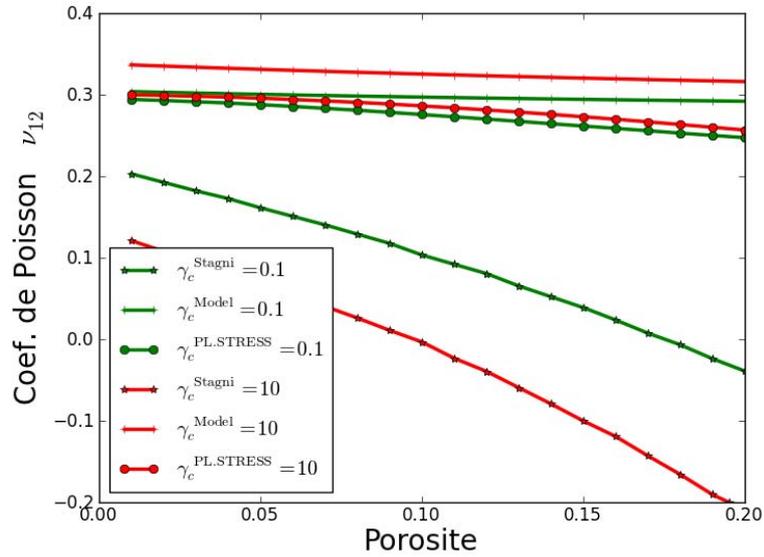
(c) Contours plots  $E_{22}$  en contraintes planes



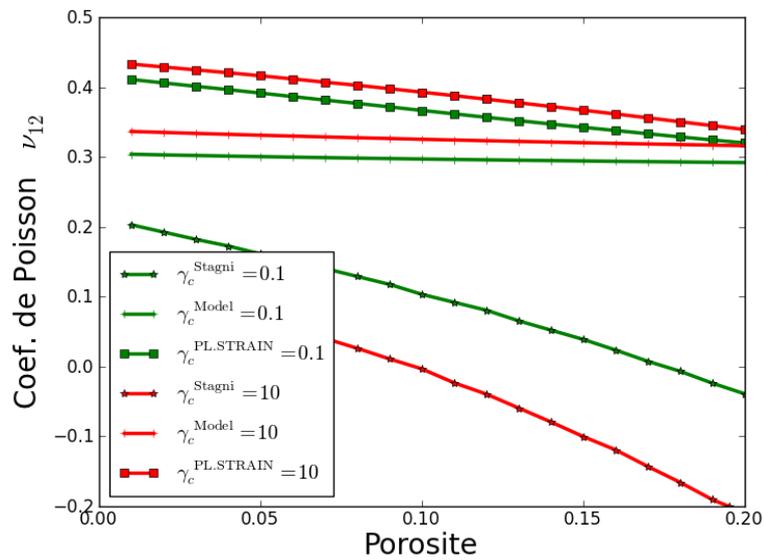
(d) Contours plots  $E_{22}$  en déformations planes

$\gamma_c = 0.1$ , Porosité = 20%

Figure 3.7: Contours Plots du champ de déformation issus du calcul EF sur Abaqus 6.10



(a) Contraintes planes



(b) Déformations planes

Figure 3.8: Evolution de  $\nu_{12}$  versus la porosité: EF, micromécanique, Stagni

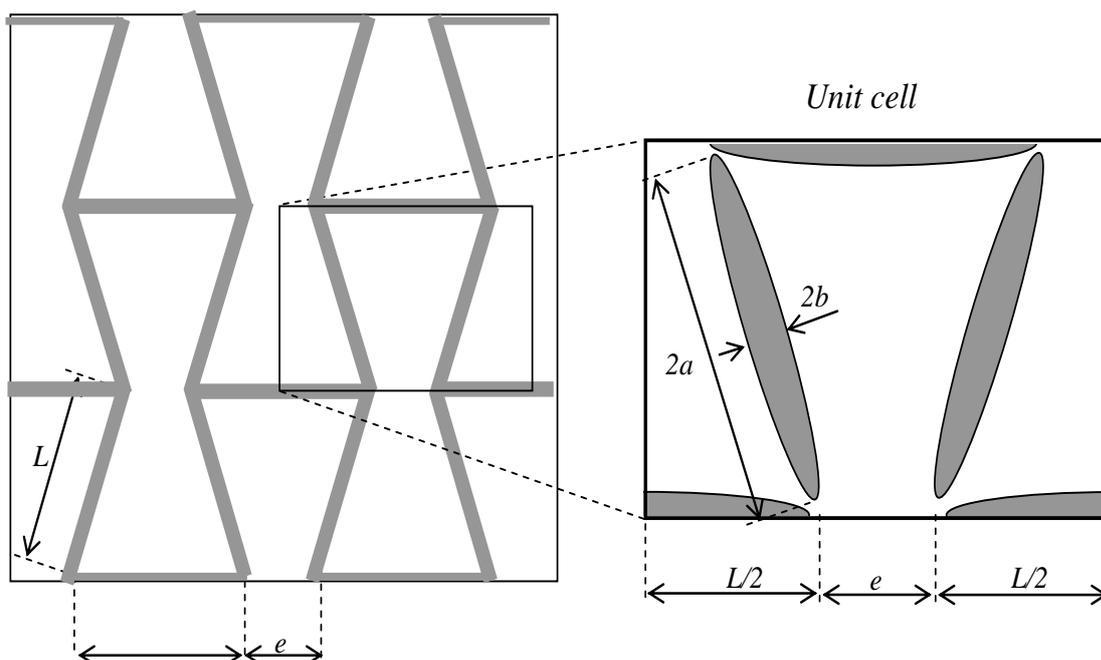
Dans la littérature relative au comportement auxétique des matériaux [16, 33, 51, 56], la microstructure dite « ré-entrante » est généralement considérée comme pouvant induire un comportement de type auxétique à l'échelle macroscopique. La première partie de cette étude ayant établi l'incapacité d'une microstructure classique à réaliser notre objectif d'un comportement auxétique du matériau homogène équivalent, l'étude suivante a donc été consacrée à l'analyse de la microstructure « réentrante ».

### 3.5. Modèle constitué d'un cluster de renforts « ré-entrant »

Le réseau constitué de renforts, tel qu'illustré par la Figure 3.9a, est considéré dans ce travail. Ce réseau est défini par deux paramètres : la longueur des renforts  $L$  et l'ouverture  $e$  entre deux renforts horizontaux et adjacents. Il est intéressant de noter que trois microstructures typiques peuvent être générées par le changement de la valeur du paramètre  $e$  :

- $e = 2L$  , correspond à l'architecture nid d'abeille,
- $e = L$  , une grille rectangulaire est générée,
- $e = 0$  , une cellule équilatérale est construite.

Le choix du paramètre  $e$  tel que  $0 < e < L$  conduit à la microstructure « réentrante ».



(a)

(b)

**Figure 3.9: Approche micromécanique de l'architecture « ré-entrante »**

Introduisons le paramètre  $r$  tel que  $r = \frac{e}{L}$  qui, suivant les remarques ci-dessus, définit le type de microstructure. Notons  $T$  l'épaisseur de la cellule considérée. Par des considérations géométriques simples, le volume de la cellule unitaire indiquée par la Figure 3.9b est donné par:

$$V_{cell} = \frac{\sqrt{3L^2 + 2eL - e^2}}{2} (L + e)T = \frac{TL^2}{2} (1 + r) \sqrt{3 + 2r - r^2} \quad (94)$$

La modélisation micromécanique de la dite cellule, par le biais d'inclusions ellipsoïdales, est schématisée par la Figure 3.9 b. Les propriétés élastiques des inclusions sont spécifiées par le tenseur  $\mathbf{c}^I$  tandis que celles de la matrice sont notées  $\mathbf{c}^0$ . L'épaisseur de la cellule reste liée au troisième demi-axe de l'ellipsoïde par la relation  $T = 2c$ .

Dans le but de prendre en compte l'évolution de la fraction volumique des inclusions, deux paramètres géométriques additionnels  $\alpha$  et  $\beta$  sont introduits. Ces derniers sont définis en fonction de la longueur des inclusions  $L$  tels que les deux premiers demi-axes de l'ellipsoïde s'expriment :

$$\begin{cases} a = \alpha L \\ b = \beta L \end{cases} \quad (95)$$

En conséquence, le volume des inclusions dans la cellule élémentaire est donné par:

$$V_T = 4\pi abc = 2\pi\alpha\beta L^2 T \quad (96)$$

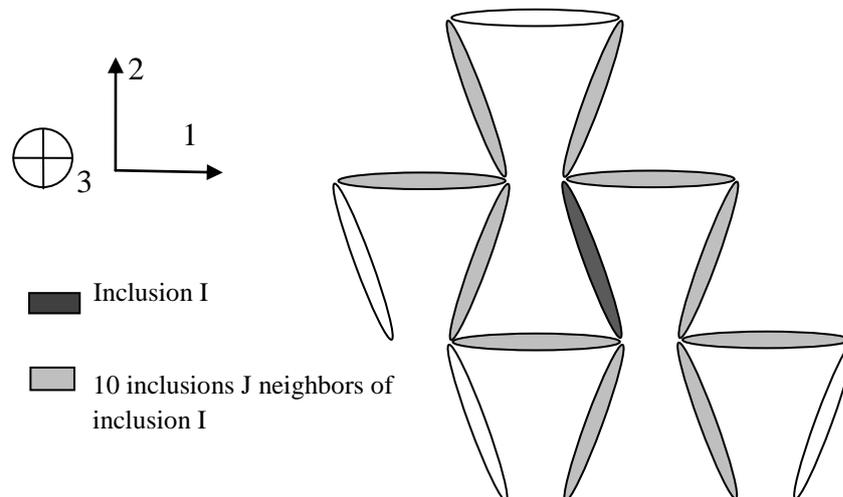
Et la fraction volumique totale de ces inclusions est alors exprimée comme:

$$f_T = 3f_I = \frac{V_T}{V_{cell}} = \frac{4\pi\alpha\beta}{(1+r)\sqrt{3+2r-r^2}} \quad (97)$$

où  $f_I$  représente la fraction volumique d'une inclusion. Dans le cadre de cette analyse, le paramètre  $\alpha$  est supposé constant tandis que le paramètre  $\beta$  varie avec la fraction volumique

$f_T$ . Ceci implique une mise à jour de la dimension  $b$  par le paramètre  $\beta$  quand la fraction volumique  $f_T$  change.

Afin de permettre la prise en compte de l'interaction entre les inclusions voisines, une version multi-site du schéma micromécanique de Mori-Tanaka a été implémentée pour la détermination des propriétés effectives. Ainsi, le tenseur de localisation en déformation  $A^I$  est calculé pour une inclusion  $I$  en prenant en compte l'influence des ses dix (10) premières voisines (Figure 3.10).



**Figure 3.10: Prise en compte de l'Interaction des inclusions**

Aussi, convient-il de rappeler que dans le présent schéma micromécanique, le tenseur de localisation en déformation reste implicite (non linéaire). Pour des raisons de stabilité numérique, la première approximation  $(a^I)_0$  du tenseur de localisation  $a^I$  est prise comme étant celle dans le cas d'une approximation mono-site:

$$(\mathbf{a}^I)_0 = [\mathbf{I} + \mathbf{T}^H(\mathbf{c}^0) : \Delta \mathbf{c}^I]^{-1} \quad (98)$$

Par conséquent, le calcul des propriétés effectives de Mori-Tanaka  $\mathbf{C}^{MT}$  est implémenté par la formule suivante [74]:

$$\mathbf{C}^{MT} = \left( f_0 \mathbf{c}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \mathbf{c}^I \mathbf{a}^I \right) : \mathbf{A}^0 \quad (99)$$

Dans l'Eq.(99), le tenseur  $\mathbf{A}^0$  représente la localisation en déformation de la matrice par rapport à la déformation macroscopique imposée  $\mathbf{E}$ . Il s'écrit:

$$\mathbf{A}^0 = \left( f_0 \mathbf{I} + \sum_{I=1}^N f_I \mathbf{a}^I \right)^{-1} \quad (100)$$

Un algorithme détaillant la procédure d'implémentation des propriétés effectives  $\mathbf{C}^{MT}$  est présenté dans les annexes C et D.

- Etude de l'influence du paramètre  $T$

L'influence de l'épaisseur de la cellule est étudiée par une variation du paramètre  $T$  pour deux valeurs. La première valeur  $T = 0.1$  correspond à une configuration en contrainte plane (Figure 3.11 a) tandis que la deuxième correspond à une configuration en déformation plane avec  $T = 10$  (Figure 11 b).

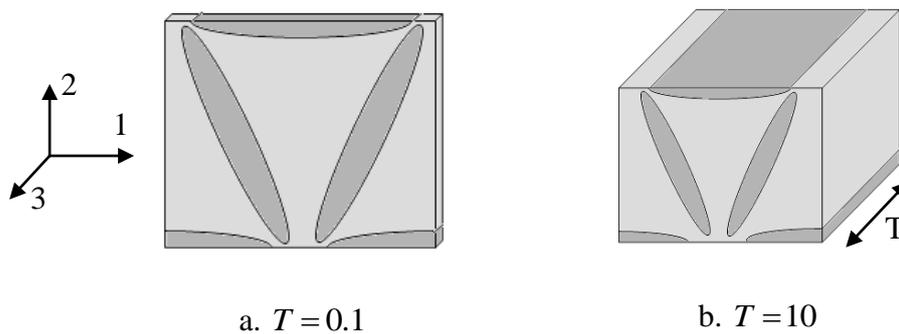
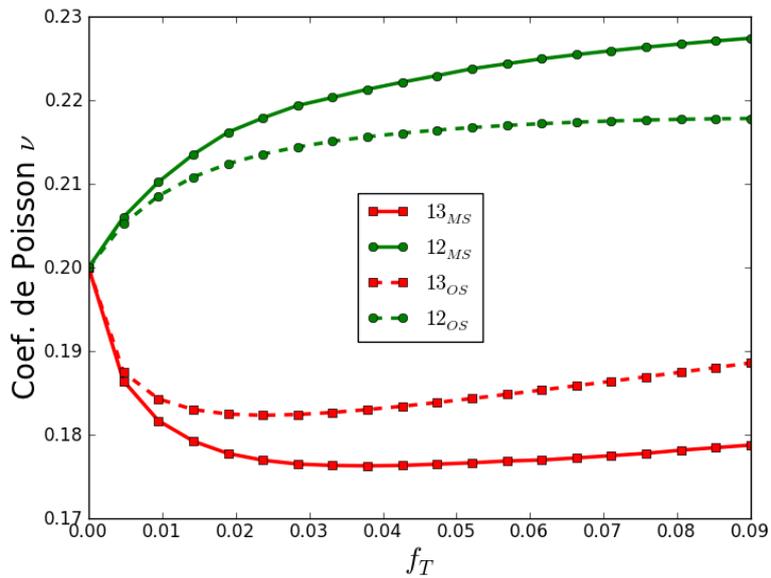


Figure 3.11. (a) Configuration contrainte plane, (b) configuration déformation plane.

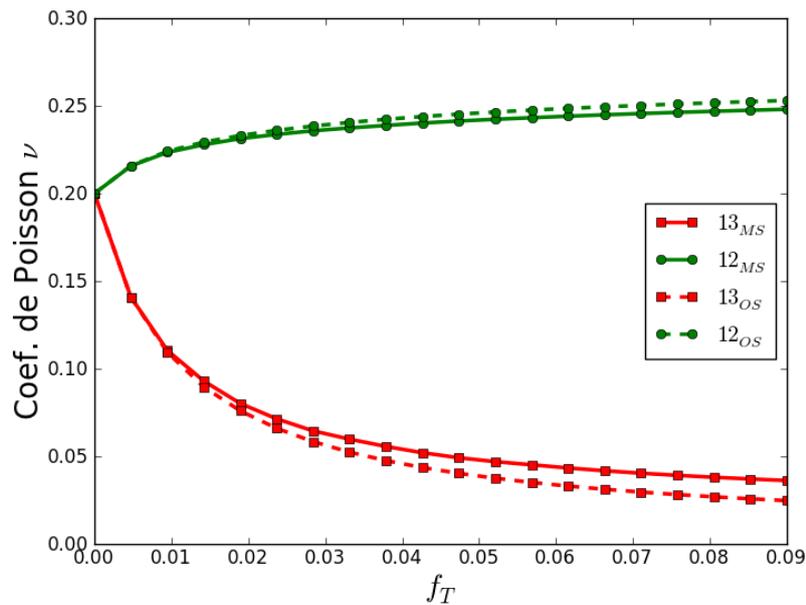
La figure 3.12 montre l'évolution du coefficient de Poisson effectif  $\nu$  en fonction de la fraction volumique  $f_T$  pour  $r=0.1$  et pour les valeurs de  $T$  considérées. Les prédictions du modèle multi-site (MS) sont alors comparées aux résultats en mono-site (OS) pour des propriétés matériaux présentés dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1 : Propriétés des phases

Inclusion		Matrice	
Module de cisaillement $\mu$	Coef de Poisson $\nu$	Module de cisaillement $\mu$	Coef de Poisson $\nu$
<b>238.095 GPa</b>	0.05	2.083 GPa	0.2



a.  $T = 0.1$



b.  $T = 10$

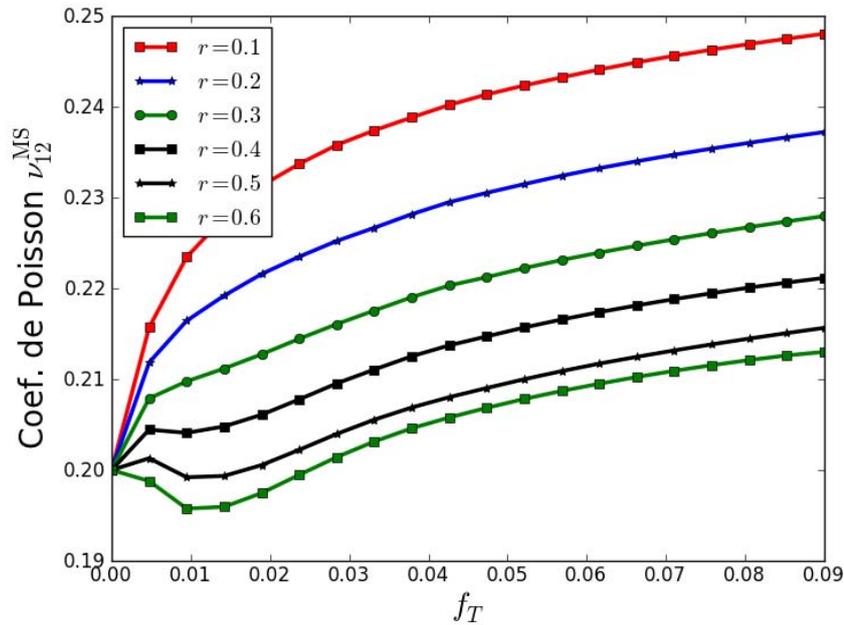
**Figure 3.12. Coefficient de Poisson  $\nu$  versus  $f_T$  pour différentes valeurs de  $T$  and  $\alpha = 0.4$**

Le paramètre  $T$  a un impact significatif sur le coefficient de Poisson effectif. En effet, les valeurs de coefficient de Poisson  $\nu_{12}^{MS}$  augmentent avec la fraction volumique  $f_T$  alors que la valeur  $\nu_{13}^{MS}$  décroît, dans la configuration simulant la déformation plane, de façon asymptotique par rapport au coefficient de Poisson de l'inclusion. Il convient d'observer que toutes ces valeurs de coefficients de Poisson demeurent positives donc non auxétiques.

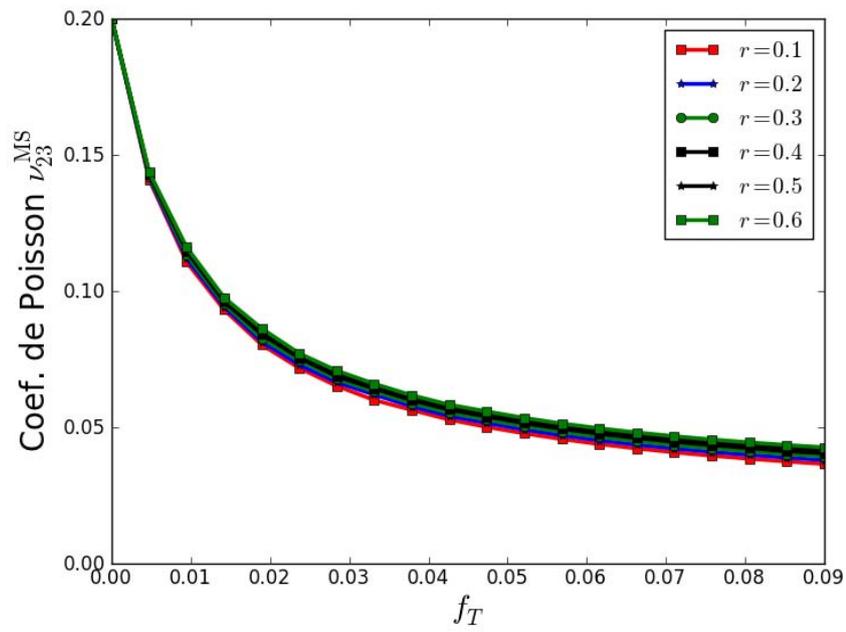
Aussi, il peut être observé que les solutions obtenues par la modélisation multi-site restent proches de celles obtenues en mono-site dans le cas de la configuration en déformations planes (Figure 3.12 b). Dans le cas de la configuration en contraintes planes, l'impact de l'interaction au niveau multi-site se fait ressentir par l'écart obtenu de ces résultats par rapport aux résultats mono-site. Cependant, toutes les valeurs de coefficient de Poisson restent positives. Ainsi, l'auxétisme n'est pas atteint y compris à travers une modélisation de la microstructure dite « réentrante » par la prise en compte des interactions entre les inclusions et suivant la variation de l'épaisseur  $T$ .

- Etude de l'influence du paramètre  $r$

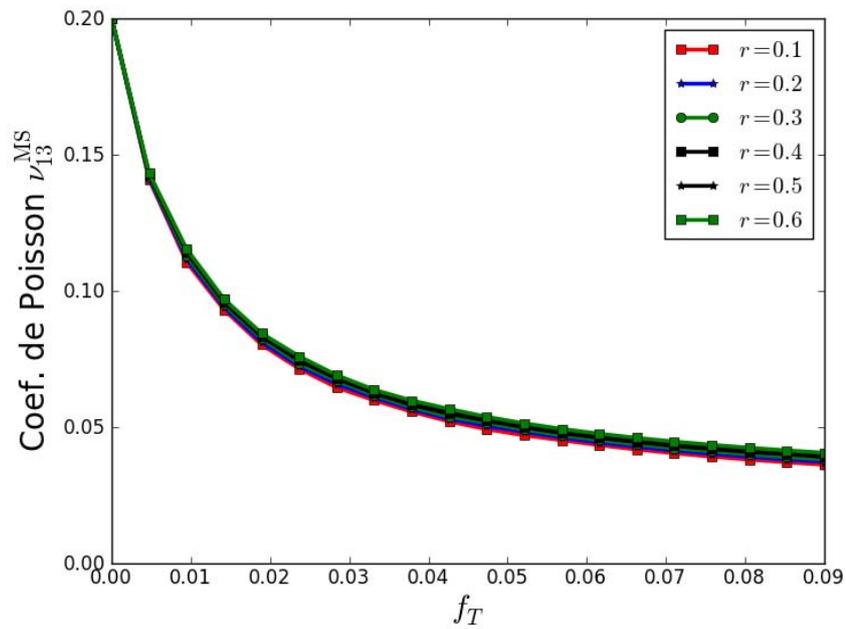
L'influence du paramètre  $r$ , définissant le type de microstructure suivant l'ouverture des renforts, a été étudiée pour l'intervalle  $0 < e < L$  correspondant à une cellule « réentrante » et pour  $T = 10$ . Les propriétés de phases mises en œuvre sont présentées dans le tableau 3.1. La Figure 3.13a montre l'évolution du coefficient de Poisson  $\nu_{12}^{MS}$  pour différentes valeurs du paramètre  $r$ . On observe une croissance de  $\nu_{12}^{MS}$  en fonction de la fraction volumique  $f_T$ . Pour des valeurs du paramètre  $r$  telles que,  $r \geq 0.3$  une décroissance locale est notée pour une fraction volumique  $f_T \leq 0.01$ . Aussi, le coefficient de Poisson  $\nu_{12}^{MS}$  montre une décroissance avec l'augmentation du paramètre  $r$  qui est liée à l'ouverture de la cellule unitaire.



a.  $\nu_{12}^{MS}$  versus  $f_T$



b.  $\nu_{23}^{MS}$  versus  $f_T$



c.  $\nu_{13}^{MS}$  versus  $f_T$

Figure 3.13. Coefficient de Poisson versus  $f_T$  pour différentes valeurs de  $r$ ,  $\alpha = 0.4, T = 10$

Concernant l'évolution du coefficient de Poisson  $\nu_{23}^{MS} = \nu_{13}^{MS}$  (Figures 3.13b, 3.13c), on note une influence marginale du paramètre  $r$  sur sa variation. En effet, pour différentes valeurs de  $r$ , ces valeurs restent très proches et semblent évoluer de manière asymptotique vers la valeur de coefficient de Poisson de l'inclusion. Aussi, toutes les valeurs de coefficient de Poisson obtenues restent positives. Ainsi, l'auxétisme n'est pas atteint à travers une modélisation de la microstructure dite « ré-entrante » par la prise en compte des interactions entre les inclusions et suivant la variation du paramètre  $r$ .

Les résultats numériques ci-dessus indiquent que la conception de matériaux composites auxétiques à partir de phases non auxétiques demeure difficile d'accès. Dans la suite de cette section, une approche Eléments Finis est développée.

### 3.6. Approche éléments finis de la microstructure « réentrante »

La topologie de la cellule unitaire considérée dans cette étude est modélisée par un cube dans lequel sont noyées des renforts de section elliptique (Figure. 3.14-a). Compte tenu de la symétrie du problème, seul le quart du VER est modélisé pour l'analyse. Des conditions aux limites symétriques sont alors appliquées sur les trois faces  $[x^-, y^-, z^-]$ . Au regard de la fraction volumique des inclusions définie dans l'équation (97), les dimensions en termes de demi-axes des inclusions sont reliées à cette dernière par :

$$\begin{cases} a = \alpha L \\ b = \beta L \text{ où } \beta = \frac{f_r}{4\pi\alpha} (1+r) \sqrt{3+2r-r^2} \\ c = \frac{T}{2} \end{cases} \quad (101)$$

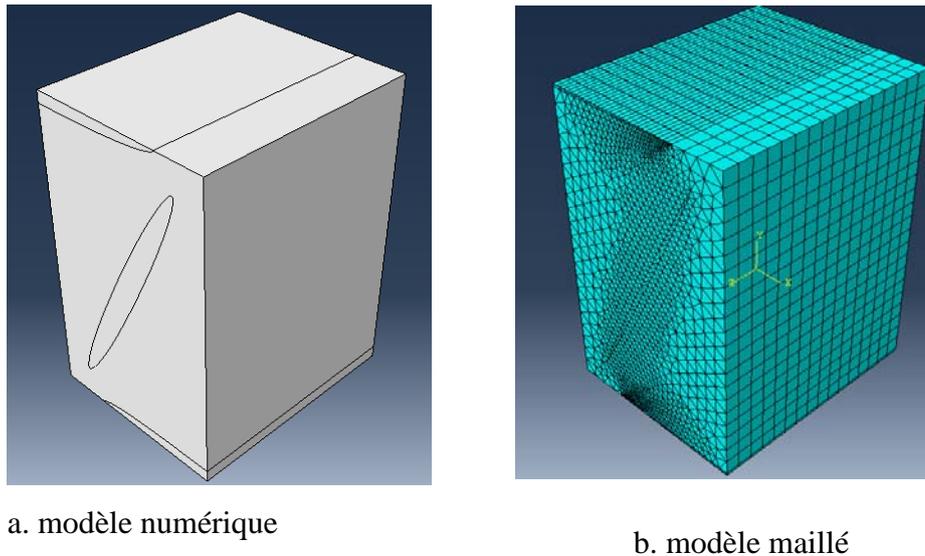
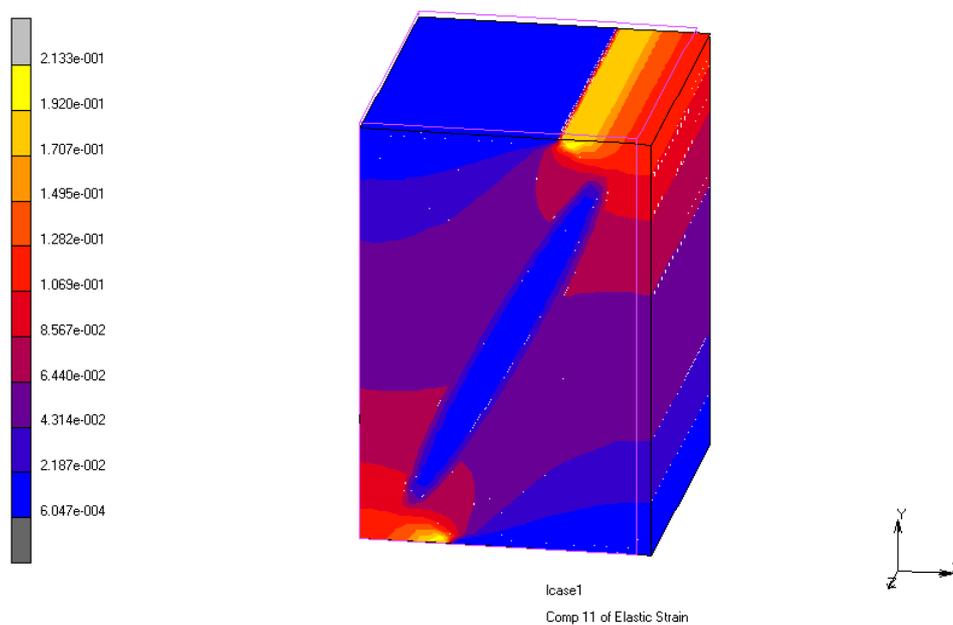


Figure 3.14: Modèle EF de la microstructure « réentrante » pour  $f_T = 0.9$

Sur les faces  $[y^+, z^+]$  du VER, sont appliqués deux conditions de périodicité. Le modèle est alors maillé en utilisant le logiciel HyperMesh 10 (Altair, Troy, Michigan, USA). Le modèle est composé de 35 808 éléments de classe PENTA(6) (Figure. 3.14-b). Tous ces éléments ont un « aspect ratio » inférieur à 3.25 et l'angle maximum de 37.63. Le RVE est alors soumis à un chargement axial sur la face  $x^+$ .



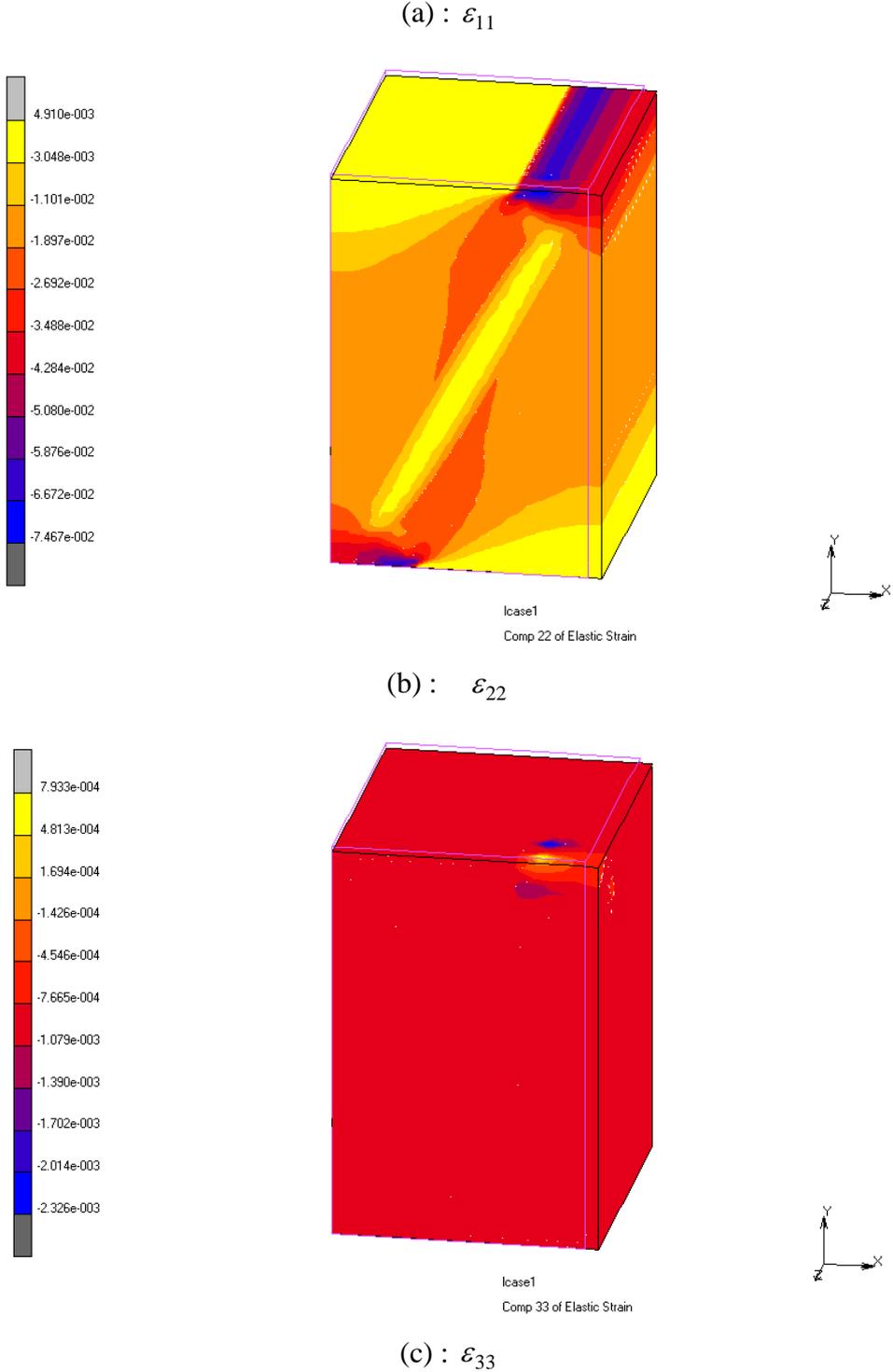


Figure 3.15: Contours Plots de déformation de la microstructure réentrante pour  $f_T = 0.9$

Les résultats de la Figure 3.15 ont été obtenus à travers une simulation réalisée à l'aide du logiciel de Calcul Eléments Finis MSC/MARC 2005 software package (MSC Software, Santa

Ana, California, USA). A partir des valeurs moyennes des déformations ainsi obtenues, il est possible de déduire le coefficient de Poisson  $\nu_{ij}$  par la relation:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_{jj}}{\varepsilon_{ii}} \quad (102)$$

Dans l'équation (102), il n'y a pas de sommation sur les indices répétés. Les contours des déformations selon la direction sont présentés à la Figure 3.17 pour le plan (XY). Ils indiquent que le VER s'est déformé de façon conventionnelle. La Figure 3.16 montre l'évolution du coefficient de Poisson résultant en fonction de la fraction volumique des inclusions. Sur ce graphique, les résultats issus du modèle EF sont comparés à ceux obtenus par la micromécanique.

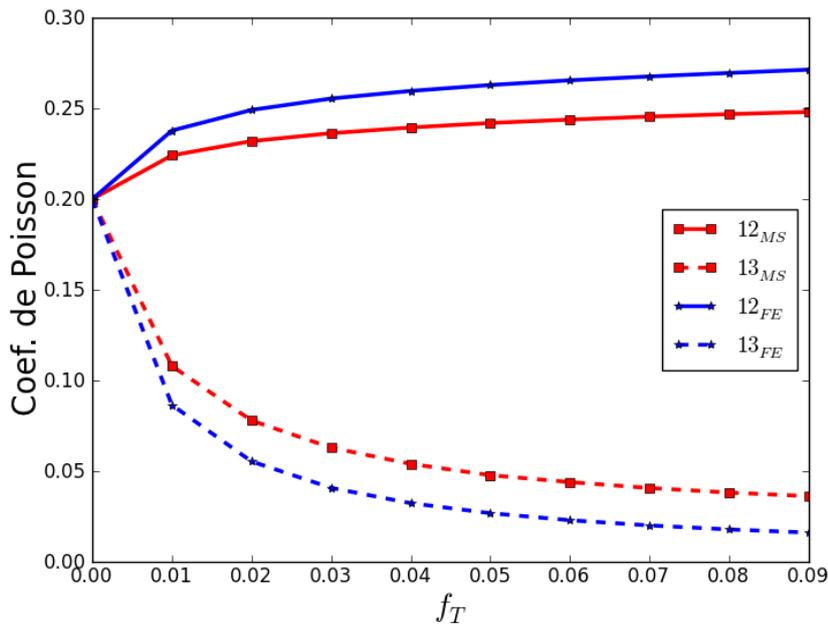


Figure 3.16 : Evolution du coefficient de Poisson versus la fraction volumique: FE et solutions micromécaniques pour  $\alpha = 0.4$ ,  $T = 10$ ,  $r = 0.1$

Les prédictions des deux approches sont assez similaires. Les résultats numériques confirment la conclusion précédente selon laquelle pour cette microstructure spécifique, le VER est définitivement non auxétique.

Cependant, il est bien connu que cette microstructure conduit au comportement auxétique. En conséquence, nous examinons le cas d'un mécanisme d'inclusions interconnectées dans la microstructure « réentrante ».

A travers une modélisation en déformation plane, le comportement auxétique peut être obtenu pour une microstructure « réentrante » avec des inclusions interconnectées comme le montre la Figure 3.18. Le déplacement du VER est positif aussi bien dans la direction de traction que dans la direction transverse. Cette observation est illustrée par le graphe 3.19 qui montre une décroissance du coefficient de Poisson  $\nu_{12}$  avec l'augmentation du rapport de rigidité  $\frac{E_i}{E_m}$  entre l'inclusion et la matrice. Pour les valeurs de paramètres sélectionnés, un coefficient de Poisson négatif est ainsi observé pour  $\nu_{12}$ .

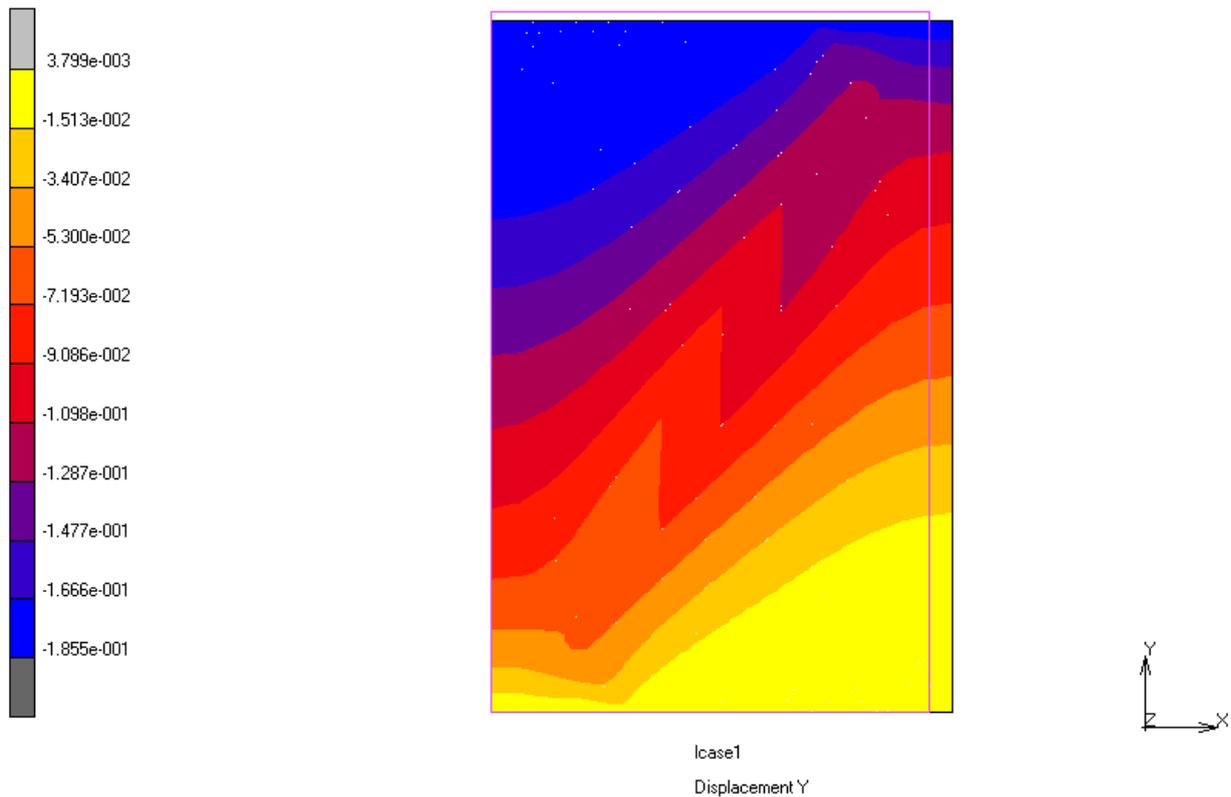


Figure 3.17: Déformation 3-D du RVE sous sollicitation en traction

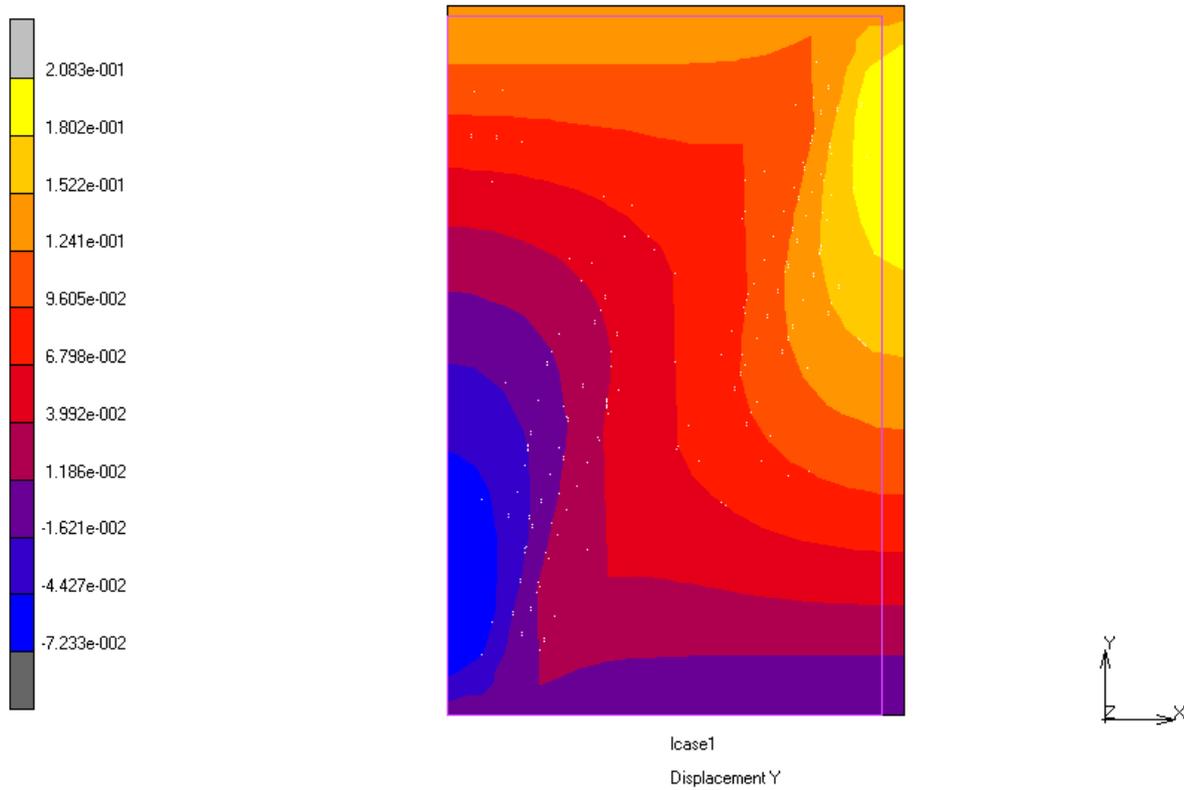


Figure 3.18:MEF, déformation plane 2-D, inclusions interconnectées

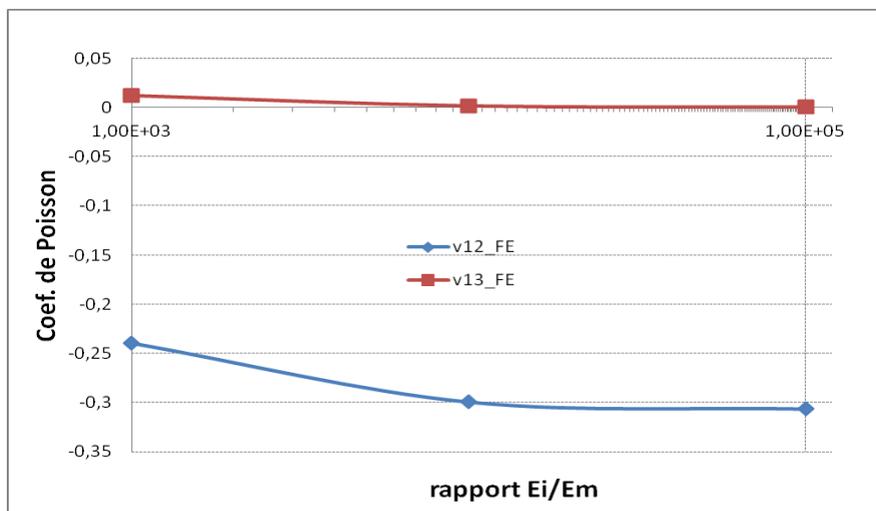


Figure 3.19. MEF inclusions interconnectées:

Coefficient. de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{13}$  versus le rapport de rigidité  $\frac{E_{inclusion}}{E_{matrice}}$

## Conclusion

Dans ce chapitre, il a été démontré l'inadéquation du formalisme micromécanique basé sur l'équation intégrale dans la description du comportement auxétique dans les matériaux composites. Principalement trois sortes de microstructure ont été analysées dans l'investigation du comportement auxétique par des modèles multi-échelles basés sur la micromécanique.

Des microstructures complexes ont été explorées. En effet, la microstructure multi-enrobée suggérée par Stagni a été analysée suivant le modèle multi-enrobé développé par Lipinski [14]. Il apparaît qu'une telle microstructure ne peut conduire à un comportement auxétique.

Ensuite, la microstructure dite « réentrante » a été reproduite par un cluster d'inclusions ellipsoïdales dans une matrice. La version multi-site des tenseurs d'interactions a été implémentée dans le but de prendre en compte la texture morphologique et topologique de cette microstructure. Comme dans les précédentes applications, les valeurs effectives de coefficient de Poisson résultant de cette analyse restent positives pour des phases non auxétiques. Ces résultats micromécaniques ont été confirmés par des simulations EF.

Antérieurement à l'analyse de ces microstructures complexes, des développements analytiques d'un composite biphasé constitué d'inclusions sphériques et isotropes ont été conduits. L'objectif à ce niveau était d'analyser le domaine potentiel d'existence des composites auxétiques d'un point de vue admissible par les restrictions thermodynamiques des matériaux élastiques. Les résultats de cette étude montrent clairement que le comportement auxétique est atteint si et seulement si, une des phases du composite est auxétique. Ces résultats rejoignent de près les travaux de Wei [46, 48, 49] dans lesquels des inclusions auxétiques ont été directement introduites dans une matrice. Ceci a conduit à un comportement macroscopique auxétique au delà d'une gamme de fraction volumique donnée.

Par ailleurs, il a été montré dans ce chapitre à travers une analyse EF, qu'il n'est possible d'obtenir un comportement macroscopique auxétique qu'en considérant une microstructure « réentrante » avec des inclusions interconnectées. Malheureusement, des modèles micromécaniques prenant en compte une telle liaison entre les inclusions ne sont pas disponibles à ce jour.

Dans la suite de cette thèse, des matériaux auxétiques seront mis à contribution dans des composites en vue de l'amélioration de certaines propriétés mécaniques en viscoélasticité et en vibration libres.

# Chapitre 4: Effet du renfort auxétique sur les propriétés d'une matrice viscoélastique

---

Motivations .....	83
4.1. Introduction .....	83
Objectif.....	85
4.2. Principes de viscoélasticité dans le domaine temps / fréquence.....	86
4.3. Propriétés effectives d'un composite viscoélastique.....	87
4.3.1. Equation cinématique intégrale viscoélastique .....	87
4.3.2. Estimation des propriétés viscoélastiques d'un composite à matrice .....	92
4.4. Applications numériques et discussions.....	96
4.4.1. Propriétés mécaniques des constituants.....	97
4.4.2. Comparaison des modèles micromécaniques .....	100
4.4.3. Composite impliquant des phases viscoélastiques .....	103
4.4.4. Composite impliquant des phases élastiques et viscoélastiques .....	105
4.4.5. Réponse en fréquence du composite .....	112
4.5. Conclusion .....	115

---

## Motivations

L'amortissement est l'une des caractéristiques les plus importantes quand une grande capacité d'absorption d'énergies acoustiques et/ou vibratoires est requise pour un matériau. Ainsi, dans les industries aéronautiques ou automobiles, des matériaux avec une grande capacité d'amortissement sont souvent recherchés [76]. En général, les matériaux viscoélastiques (VE) sont considérés comme ayant une bonne aptitude à l'amortissement [77]. Le comportement viscoélastique est important en raison de la dissipation intrinsèque de l'énergie de déformation dynamique dans un matériau par sa conversion en chaleur [77].

Ce chapitre vise à analyser le comportement amortissant de matériaux composites viscoélastiques renforcés par des hétérogénéités élastiques et auxétiques aux moyens d'outils prédictifs de la micromécanique. A cet effet, la dépendance temporelle des problèmes viscoélastiques permet l'utilisation de la transformée de Laplace-Carson (C-LT) afin de transformer le problème viscoélastique linéaire en un problème associé en élasticité. Le facteur de perte est pris en compte par l'introduction de tenseurs à valeurs complexes au niveau des propriétés viscoélastiques. Ces dernières dépendent de la fréquence de sollicitation. Le formalisme micromécanique, basé sur l'équation cinématique intégrale introduite dans les chapitres précédents, conduit à la détermination du module de stockage effectif et de son facteur de perte associé, dans le domaine quasi-statique. De ce fait, la possibilité d'accroître les propriétés viscoélastiques (VE) d'un matériau polymérique comme le PVB est examinée au travers de plusieurs configurations de mélange. Ainsi, l'utilisation des hétérogénéités élastiques et surtout auxétiques est analysée par rapport à celles élastiques et viscoélastiques.

### 4.1. Introduction

De nos jours, l'utilisation de matériaux composites à matrice polymérique comme le butyrate de vinyle (PVB), a augmenté de façon constante [77]. Aussi, a-t-il été observé que la meilleure

approche pour modéliser le comportement macroscopique des matériaux complexes est celle qui tient compte de leur structure multi-échelle [78]. Par conséquent, dans la conception et l'amélioration des matériaux composites viscoélastiques, la micromécanique apparaît un outil puissant et précieux.

En effet, la micromécanique permet de décrire la relation entre les propriétés globales et continues d'un matériau et ses constituants ou micro hétérogénéités constituant sa microstructure. La transition d'échelle micro-macro est faite au travers du VER tel qu'introduit par Kroner [79, 80]. D'après les travaux de Jarzynski [81], il est établi que l'introduction de certaines hétérogénéités, en optimisant la microstructure d'un matériau, pouvait améliorer les capacités amortissantes de ce dernier.

Dans ce sens, plusieurs travaux ont concerné l'utilisation des outils micromécaniques comme technique d'homogénéisation dans la description du comportement viscoélastique des matériaux. Récemment, Haberman [78] a utilisé le modèle auto-cohérent proposé par Cherkaoui [70] pour déterminer les propriétés effectives d'un matériau viscoélastique contenant des inclusions enrobées à géométrie sphérique. En effet, dans son analyse, le facteur de perte est pris en compte par l'introduction d'un module de cisaillement dépendant de la fréquence au niveau de la matrice viscoélastique et la conservation de mode qui apparaît à travers le tenseur de localisation qui gouverne le comportement micromécanique aux alentours de l'inclusion. Basé sur le modèle multi-enrobé de Lipinski et al. [14] pour les milieux anisotropes, Koutsawa [82] a étudié dans le domaine quasi-statique, les propriétés viscoélastiques d'un matériau composite dans lequel des phases viscoélastiques multi-enrobées sont noyées. Par ailleurs, il montre qu'à travers un choix judicieux des propriétés des phases, on peut concevoir un composite alliant une bonne rigidité et un bon amortissement pour toutes les gammes de fréquence.

Aussi, Koutsawa a observé que la rigidité négative, un comportement inhabituel qui a été premièrement discuté par Lakes [83], conduisait à d'intéressantes améliorations de la capacité d'amortissement dans les matériaux viscoélastiques. Ici, il convient de distinguer la rigidité négative du coefficient de Poisson négatif. Ce dernier caractérise les matériaux auxétiques, qui restent cependant stables d'un point de vue thermodynamique.

Depuis les premiers développements de mousses syntactiques auxétiques par Lakes[3], beaucoup d'intérêt fut prêté à ces matériaux compte tenu de leurs applications technologiques dans la conception de structures innovantes[55]. Plusieurs types de matériaux auxétiques sont reportés dans la littérature. Des mousses polyesters développées par Lakes [3] et polytetrafluoroéthylènes (PTFE) expansibles, reportées par Evans [71] peuvent être citées. Prenant en compte les qualités viscoélastiques et de déformation des matériaux auxétiques [51], ces derniers sont utilisés dans l'amélioration des propriétés macroscopiques des structures. En effet, à l'échelle de la structure, Scarpa et al. [10] ont montré, à travers des études statiques et de vibrations libres sur des poutres sandwich avec différents matériaux cœurs cellulaires, qu'il était possible d'obtenir simultanément une rigidité accrue par unité de masse et un facteur de perte modal élevé en utilisant un biphasé cellulaire avec l'architecture réentrante (Ref. [4] pour plus de précision). En effet, la possibilité d'obtenir une rigidité élevée et un faible facteur de perte, ou l'inverse est bien connue [9, 76]. Ceci est le cas du PolyVinyle Butyrate (PVB). Compte tenu de son facteur de perte élevé dans les fréquences acoustiques, le PVB est utilisé dans des applications technologiques à l'instar des pare-brises. Dans le même temps, le PVB reste très inapte en termes de rigidité. Ainsi, cette faiblesse limite son applicabilité dans d'autres domaines technologiques où une combinaison d'une grande rigidité couplée à un important facteur de perte est requise.

### **Objectif**

L'objectif principal de ce chapitre est d'examiner l'effet de l'insertion de renforts auxétiques dans une matrice polymérique sur l'amélioration des propriétés viscoélastiques de matériaux composites. Ce travail constitue un support théorique dans l'investigation de l'utilisation de matériaux auxétiques en tant que renforts de composites. Le PVB est retenu à cet effet. Le principe de correspondance est d'abord rappelé pour exprimer les propriétés viscoélastiques des phases dans le domaine de Carlson-Laplace (temps / fréquence). Les approches micromécaniques utilisées ici restent basées sur le formalisme de l'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller [60]. Par ce formalisme, divers tenseurs de localisation des grandeurs macroscopiques peuvent être obtenus. Ceci conduit à plusieurs schémas micromécaniques testés afin d'estimer les propriétés effectives du composite constitué de la

matrice PVB et de renforts auxétiques. Enfin, l'analyse systématique de différents paramètres microscopiques et globaux sur les propriétés viscoélastiques est présentée.

## 4.2. Principes de viscoélasticité dans le domaine temps / fréquence

En général, les solutions des problèmes viscoélastiques linéaires sont déduites du principe de la correspondance élastique viscoélastique. En outre, dans le domaine temporel, la transformée de Laplace-Carson (T-CL) est appliquée afin de substituer la variable temporelle  $t$  inhérente aux problèmes viscoélastiques par une variable associée  $p$ . Le problème viscoélastique est alors converti en un problème élastique linéaire. Cette approche a été largement utilisée pour traiter divers problèmes viscoélastiques [84].

La forme la plus générale de la loi de comportement viscoélastique linéaire est donnée par Christensen [84]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t \mathbf{R}(t - \tau, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau, \mathbf{x}) d\tau \\ \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^t \mathbf{J}(t - \tau, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\tau, \mathbf{x}) d\tau \end{cases}, \quad (103)$$

où  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$ ,  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t}(t, \mathbf{x})$ . Les fonctions  $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{J}(t, \mathbf{x})$  sont appelées fonctions de relaxation et de retard respectivement tandis que  $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{x})$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})$  correspondent aux tenseurs de déformation et de contrainte à l'échelle locale et  $\mathbf{x}$  un vecteur position. Utilisant la T-CL définie par:

$$\square (\mathbf{f}(t, \mathbf{x})) = \hat{\mathbf{f}}(p, \mathbf{x}) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) dt, \quad (104)$$

on peut démontrer que les expressions précédentes des relations constitutives viscoélastiques (103) deviennent:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(p, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{R}}(p, \mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(p, \mathbf{x}) \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(p, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{J}}(p, \mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}(p, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (105)$$

$\hat{\mathbf{R}}(p, \mathbf{x})$  et  $\hat{\mathbf{J}}(p, \mathbf{x})$  désignent les T-CL des fonctions de relaxation et de retard respectivement. Dans le domaine fréquentiel, la fonction de relaxation  $\hat{\mathbf{R}}(p, \mathbf{x})$  peut être remplacée par un module complexe  $\hat{\mathbf{L}}(\mathbf{i}\omega, \mathbf{x})$  tel que [85, 86]:

$$\hat{\mathbf{L}}_{klmn} = \hat{\mathbf{R}}_{klmn}(p, \mathbf{x}) \Big|_{p=\mathbf{i}\omega} = \mathbf{i}\omega \int_0^{\infty} \hat{\mathbf{R}}_{klmn}(t, \mathbf{x}) \exp(-\mathbf{i}\omega t) dt = \mathbf{i}\omega \mathcal{F}(\mathbf{R}_{klmn}(t, \mathbf{x})) \quad (106)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne la transformée de Fourier. Par conséquent, la relation constitutive contrainte-déformation peut être réécrite dans ce domaine fréquentiel comme suit:

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{kl}(\mathbf{i}\omega, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{L}}_{klmn}(\mathbf{i}\omega, \mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{mn}(\mathbf{i}\omega, \mathbf{x}). \quad (107)$$

### 4.3. Propriétés effectives d'un composite viscoélastique

Dans les sections suivantes, les développements théoriques sont effectués dans l'espace de Carson-Laplace en tenant compte du principe de correspondance ci-dessus. Dans un souci de clarté, la notation suivante est adoptée dans la suite de ce chapitre:

$$\hat{\zeta}(p, \mathbf{x}) = \hat{\zeta}(\mathbf{x}). \quad (108)$$

#### 4.3.1. Equation cinématique intégrale viscoélastique

Considérons un VER d'un matériau viscoélastique micro-hétérogène et supposé macro-homogène. L'objectif de l'homogénéisation ou des techniques multi-échelles est de déterminer les équations constitutives globales de ce VER. La transition d'échelle consiste premièrement en une étape de localisation du tenseur de déformation globale en termes d'un tenseur d'ordre 4 de localisation en déformation viscoélastique  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ . La seconde étape est celle de l'homogénéisation

qui utilise les techniques de la moyenne pour déterminer les propriétés viscoélastiques effectives inconnues du VER. Il est aussi supposé que tous les constituants sont parfaitement délimités et que le VER est en équilibre en l'absence de forces de volume ; la compatibilité du champ de déformations globales étant vérifiée. Suivant ces hypothèses, les propriétés viscoélastiques effectives  $\hat{\mathbf{L}}$  du VER peuvent être exprimées sous la forme:

$$\hat{L}_{ijkl} = \frac{1}{V} \int_V \hat{l}_{ijmn}(\mathbf{x}) \hat{A}_{mnkl}(\mathbf{x}) dV \quad (109)$$

avec  $\hat{\mathbf{l}}(\mathbf{x})$  et  $V$  le tenseur des constantes viscoélastiques et le volume total du VER, respectivement. Par analogie aux développements introduits dans les chapitres précédents, le tenseur de localisation viscoélastique  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$  demeure la variable inconnue du problème et dépend de la microstructure du matériau considéré. En général, l'expression exacte de ce tenseur reste lourde d'implémentation. En fonction des hypothèses choisies, des formes approchées peuvent néanmoins être obtenues. Parmi ces estimations, les limites d'ordre zéro supérieure et inférieure correspondent aux approximations de Voigt et Reuss. La première approximation i.e. celle de Voigt se fonde sur l'hypothèse selon la quelle la déformation viscoélastique locale est égale à la déformation viscoélastique macroscopique imposée sur le VER, i.e  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{E}}$ . Ceci conduit au résultat suivant :

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad (110)$$

dans lequel  $\mathbf{I}$  représente l'identité d'ordre 4. La substitution de l'équation (110) dans l'équation (109) permet l'évaluation des propriétés viscoélastiques globales de Voigt telles que :

$$\hat{\mathbf{L}}^{Voigt} = \frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{l}}(\mathbf{x}) dV \quad (111)$$

Dans un second cas, l'hypothèse selon laquelle le champ de contrainte viscoélastique local reste égal au champ viscoélastique macroscopique, i.e.  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}$  conduit à l'approximation de Reuss

dans laquelle le tenseur de localisation en contrainte équivaut à  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$ . Dans ce cas, le tenseur de localisation en déformation s'écrit :

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \hat{\mathbf{l}}^{-1}(\mathbf{x}) : \left( \int_V \hat{\mathbf{l}}^{-1}(\mathbf{x}) dV \right)^{-1} \quad (112)$$

et par voie de conséquence, les propriétés viscoélastiques globales de Reuss sont données par

$$\hat{\mathbf{L}}^{Reuss} = \left( \frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{l}}^{-1}(\mathbf{x}) dV \right)^{-1} \quad (113)$$

Excepté le cas de microstructures particulières, ces deux approches représentent des estimations grossières des propriétés effectives. Des approches plus précises peuvent être introduites pour améliorer la description des matériaux micro-hétérogènes en tenant compte, par exemple des textures morphologique et topologique de ces derniers. Certaines de ces approches sont formulées à partir de la solution des problèmes aux conditions aux limites cinématiques ou statiques sur le VER. Dans ce chapitre, nous traiterons du problème aux conditions aux limites cinématiques conduisant à l'équation cinématique intégrale viscoélastique.

Pour exploiter la technique de la fonction de Green, un milieu viscoélastique homogène de référence  $\hat{\mathbf{L}}^R$  est introduit tel que:

$$\hat{l}_{ijkl}(\mathbf{x}) = \hat{L}_{ijkl}^R + \delta \hat{l}_{ijkl}(\mathbf{x}). \quad (114)$$

Le tenseur  $\delta \hat{\mathbf{l}}$  représente la partie fluctuante du tenseur des propriétés viscoélastiques. En remplaçant l'équation (114) dans la condition d'équilibre viscoélastique locale  $\hat{\sigma}_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0$ , on aboutit à l'équation de type Navier :

$$\hat{L}_{ijkl}^R \hat{u}_{k,lj} + \left( \delta \hat{l}_{ijkl}(\mathbf{x}) \hat{u}_{k,l} \right)_{,j} = 0 \quad (115)$$

Habituellement, la solution formelle de l'équation (115) est donnée en termes de champ de déplacement ou de déformations dans le cas de l'élasticité par Dederichs et Zeller [60, 74]. Une analogie dans le cas viscoélastique nous conduit à :

$$\hat{u}_m(\mathbf{x}) = \hat{U}_m^R(\mathbf{x}) + \int_V \hat{G}_{mi,j}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta l_{ijkl}(\mathbf{x}') \hat{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}') dV', \quad (116)$$

et

$$\hat{\varepsilon}_{mm}(\mathbf{x}) = \hat{E}_{mm}^R - \int_V \hat{\Gamma}_{mmij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta l_{ijkl}(\mathbf{x}') \hat{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{x}') dV' \quad (117)$$

$\hat{G}$  représente le tenseur de Green viscoélastique,  $\hat{E}^R$  et  $\hat{U}^R$  sont respectivement les champs de déformation et de déplacement du milieu de référence viscoélastique supposé homogène et  $\hat{\Gamma}$  désignant le tenseur de Green viscoélastique modifié exprimé par :

$$\hat{\Gamma}_{mmij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = -\frac{1}{2} \left[ \hat{G}_{mi,nj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \hat{G}_{ni,mj'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right] \quad (118)$$

La détermination du tenseur de localisation viscoélastique  $\hat{A}(\mathbf{x})$  de l'équation (117) passe par l'expression de la déformation viscoélastique locale  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x})$  en fonction de la déformation viscoélastique globale  $\hat{E}$  (or  $\hat{E}^R$ ). Ce processus devient un calcul complexe dans le cas d'une inclusion avec une géométrie arbitraire. Diverses approximations peuvent être déduites de l'équation (117) en utilisant le concept d'inclusion d'Eshelby [58]. Nous supposons que le VER contient des inclusions ellipsoïdales comme décrit dans les chapitres précédents. De plus, les propriétés viscoélastiques sont supposées uniformes à l'intérieur des inclusions. Ainsi, une expression du tenseur de localisation viscoélastique  $\hat{A}^I$  peut être déterminée de relations proposées par Vieville et al. [74].

Le tenseur de localisation viscoélastique s'écrit alors:

$$\begin{cases} \hat{\varepsilon}^I = \hat{A}^I : \hat{E} \\ \hat{A}^I = \hat{a}^I : \langle \hat{a}^I \rangle^{-1}, \\ \langle \hat{A}^I \rangle = I \end{cases} \quad (119)$$

$\hat{a}^I$  est le tenseur de localisation viscoélastique par rapport au milieu de référence tel que:

$$\hat{\varepsilon}^I = \hat{a}^I : \hat{E}^R, \quad (120)$$

Dans l'équation (120) la déformation viscoélastique locale  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I$  à l'intérieur de l'inclusion ellipsoïdale  $I$  est définie par :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I \theta^I(\mathbf{x}) \quad (121)$$

où  $\theta^I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in V_I \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin V_I \end{cases}$  et  $V_I$  le volume de l'inclusion  $I$ .

Dans une approche multi-site, le tenseur de localisation viscoélastique  $\hat{\boldsymbol{a}}^I$  est obtenu par le biais du processus itératif déjà évoqué dans le chapitre 2. Il est défini par [74]:

$$\begin{cases} (\hat{\boldsymbol{a}}^I)_0 = \mathbf{I} \\ (\hat{\boldsymbol{a}}^I)_{i+1} = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}^{II}(\mathbf{L}^R) : \Delta \hat{\boldsymbol{l}}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=0 \\ J \neq I}}^N \hat{\mathbf{T}}^{IJ}(\mathbf{L}^R) : \Delta \hat{\boldsymbol{l}}^J : (\hat{\boldsymbol{a}}^J)_i \right] \\ I = 0, 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (122)$$

avec  $\hat{\mathbf{T}}^{IJ}$  dénotant le tenseur d'interaction viscoélastique défini en fonction du tenseur viscoélastique de Green modifié par :

$$\hat{\mathbf{T}}^{IJ} = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_J} \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') dV dV' \quad (123)$$

L'équation (122) constitue la solution générale du problème viscoélastique hétérogène en prenant en compte l'interaction des inclusions les unes par rapport aux autres. Une fois que le tenseur  $\hat{\boldsymbol{a}}^I$  est déterminé, les propriétés effectives viscoélastiques sont déterminées en fonction de la fraction volumique  $f_I$  par :

$$\hat{\mathbf{L}}^{eff} = \sum_{I=0}^N f_I \hat{\boldsymbol{l}}^I \hat{\mathbf{A}}^I.$$

Divers modèles viscoélastiques, correspondant à des approximations bien connues de l'élasticité, peuvent être tirées des équations précédentes. On peut évoquer par exemple le modèle auto-cohérente appliqué par Dinzart et Lipinski [87], l'auto-cohérent généralisé développé dans [82], le Mori-Tanaka mono- ou multi-site etc ...

### 4.3.2. Estimation des propriétés viscoélastiques d'un composite à matrice

Comme illustré par la Figure 4.1, la matrice (phase 0) de propriétés viscoélastiques  $\hat{l}^0$ , est le constituant principal renfermant tous les renforts. Par conséquent, sa forme reste complexe et ne peut être représentée par un ellipsoïde.

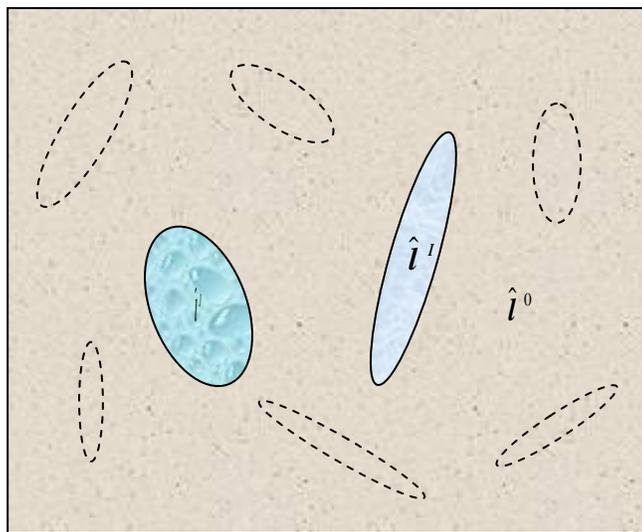


Figure 4.1 : Représentation schématique du VER viscoélastique

Dans le cadre de l'approximation multi-site, l'expression des tenseurs de localisation résulte de diverses hypothèses relatives au choix du milieu de référence. Un bon « review » des ces méthodes dans le cas de l'élasticité est proposé dans [74]. Dans ce chapitre, des approches comme celle de Mori-Tanaka généralisée, de l'auto-cohérent généralisé et du schéma incrémental sont développés dans le cas de la viscoélasticité.

#### 4.3.2.1. Schéma de Mori-Tanaka (MT) en viscoélasticité

Cette approche reste identique à celle décrite dans le chapitre 2, par une analogie au cas de l'élasticité. Le milieu de référence viscoélastique est supposé équivalent à la matrice

viscoélastique  $\hat{\mathbf{L}}^R = \hat{\mathbf{l}}^0$ . Utilisant l'expression du tenseur  $\hat{\mathbf{T}}^{IJ}$  définie par l'équation (122), la forme discrète de la déformation viscoélastique locale est déduite de l'équation (117):

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^I = \hat{\mathbf{E}}^0 - \sum_{J=1}^N \hat{\mathbf{T}}^{IJ} : \Delta \hat{\mathbf{l}}^J : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^J \\ I = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (124)$$

Il peut être observé que la relation ci-dessus ne dépend pas de  $\hat{\mathbf{T}}^{00}$  qui est relié à la microstructure de la matrice. Le tenseur de localisation viscoélastique  $\hat{\mathbf{a}}^I$  peut se déduire de l'expression (124) selon le processus itératif suivant :

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{a}}^I)_{i+1} = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}^{II} (\mathbf{L}^R) : \Delta \hat{\mathbf{l}}^I \right]^{-1} : \left[ \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \hat{\mathbf{T}}^{IJ} (\mathbf{L}^R) : \Delta \hat{\mathbf{l}}^J : (\hat{\mathbf{a}}^J)_i \right] \\ I = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (125)$$

En considérant que:

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \approx \hat{\mathbf{E}}^0 \quad (126)$$

Le résultat suivant peut être déduit:

$$\hat{\mathbf{a}}^0 = \mathbf{I} . \quad (127)$$

En conséquence, le tenseur de localisation viscoélastique dans la matrice est exprimé :

$$\hat{\mathbf{A}}^0 = \hat{\mathbf{a}}^0 : \langle \hat{\mathbf{a}}^I \rangle^{-1} = \left( f_0 \mathbf{I} + \sum_{I=1}^N f_i \hat{\mathbf{a}}^I \right)^{-1} . \quad (128)$$

et ce tenseur pour les autres constituants est donné par:

$$\hat{\mathbf{A}}^I = \hat{\mathbf{a}}^I : \langle \hat{\mathbf{a}}^I \rangle^{-1} = \hat{\mathbf{a}}^I : \hat{\mathbf{A}}^0 . \quad (129)$$

Finalement, utilisant l'expression (128) , les propriétés effectives viscoélastiques selon le schéma de Mori-Tanaka sont exprimées par:

$$\hat{\mathbf{L}}^{MT} = \sum_{I=0}^N f_I \hat{\mathbf{l}}^I \hat{\mathbf{A}}^I = \left( f_0 \hat{\mathbf{l}}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \hat{\mathbf{l}}^I \hat{\mathbf{a}}^I \right) : \hat{\mathbf{A}}^0. \quad (130)$$

Dans le cas d'une approximation mono-site, l'expression du tenseur de localisation  $\hat{\mathbf{a}}^I$  Eq.(125) se réduit à :

$$\hat{\mathbf{a}}^I = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}^H \left( \hat{\mathbf{L}}^R \right) : \Delta \hat{\mathbf{l}}^I \right]^{-1}. \quad (131)$$

#### 4.3.2.2. Schéma incrémental viscoélastique (IS)

Le schéma incrémental (IS : incremental scheme) est basé sur l'idée du schéma différentiel dans lequel les propriétés effectives sont construites par une addition graduelle de quantité infinitésimale de renforts. Initialement développé par Viéville et Lipinski [88, 89], l'IS est utile dans le cas de fraction volumique élevée de renforts avec un fort contraste entre les propriétés de la matrice et celles des renforts [68]

Considérons  $N$  le nombre de familles de renforts ou d'inclusions. La fraction volumique totale des renforts est donnée par :

$$f = \sum_{J=1}^N f_J. \quad (132)$$

$f_J$  représente la fraction volumique de la famille d'inclusions  $J$ . Notons également  $S$  le nombre d'étapes d'injection dans la construction du composite. Dans cette procédure d'homogénéisation étape par étape, la quantité de renforts augmente par une valeur constante  $\Delta f_J = f_J/S$ . A chaque étape  $s$ , une fraction volumique du matériau homogénéisé est remplacée par la même fraction volumique de renforts  $\Delta f_J^s$  telle que :

$$\Delta f_J^s = r_s f_J, \quad (133)$$

où  $r_s$  est un facteur de proportionnalité défini par :

$$r_s = \frac{1}{S - (s-1)f} . \quad (134)$$

Il est évident que pour  $s=1$  que  $\Delta f_j^1 = f_j/S$  et cette fraction augmente de façon monotone pour atteindre à la dernière étape ( $s=S$ ) la valeur  $\Delta f_j^S = \frac{f_j}{S - (S-1)f}$ . Finalement, on peut implémenter les propriétés viscoélastiques du composite à travers une approche incrémentale résumée par les expressions suivantes:

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{L}}^{IS})_0 = \hat{\mathbf{i}}^0 \\ (\Delta \hat{\mathbf{L}}^I)_s = \hat{\mathbf{i}}^I - (\hat{\mathbf{L}}^{IS})_s \\ (\hat{\mathbf{L}}^{IS})_{s+1} = (\hat{\mathbf{L}}^{IS})_s + r_s \sum_{I=1}^N f_j (\Delta \hat{\mathbf{L}}^I)_s : (\hat{\mathbf{A}}^I)_s \end{cases} . \quad (135)$$

Comme pour chaque étape d'homogénéisation, la fraction volumique de renforts est faible pour un nombre raisonnablement grand d'étapes  $S$  (milieu dilué), le tenseur de localisation viscoélastique en déformation peut être calculé en utilisant l'un des modèles micromécaniques disponibles tels que le Mori-Tanaka ou l'auto-cohérent. Dans cette étude, le tenseur de localisation viscoélastique est déterminé en utilisant une expression modifiée (125) dans laquelle le milieu de référence est remplacé par les propriétés homogénéisées de l'étape précédente :

$$\begin{cases} (\hat{\mathbf{A}}^I)_{i+1} = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}^{II} (\mathbf{L}^{IS})_s : \Delta \hat{\mathbf{L}}^I_s \right]^{-1} : \left[ \mathbf{I} - \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^N \hat{\mathbf{T}}^{IJ} (\mathbf{L}^{IS})_s : \Delta \hat{\mathbf{L}}^J_s : (\hat{\mathbf{A}}^J)_i \right] \\ I = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (136)$$

Dans le cas d'une approximation mono-site, l'interaction entre l'inclusion  $I$  et ses voisines  $J$  est négligée c'est-à-dire que tous les tenseurs  $\hat{\mathbf{T}}^{IJ}$  sont nuls. Le tenseur de localisation devient :

$$\hat{\mathbf{A}}^I = \left[ \mathbf{I} + \hat{\mathbf{T}}^{II} (\hat{\mathbf{L}}^{IS})_s : \Delta \hat{\mathbf{L}}^I_s \right]^{-1} \quad (137)$$

Les applications suivantes traiteront de matériaux composites viscoélastiques qui consistent en une matrice isotrope aux propriétés élastiques ou viscoélastiques renfermant des inclusions sphériques isotropes élastiques ou viscoélastiques. L'objectif principal est de déterminer les propriétés viscoélastiques du matériau composite équivalent. Particulièrement, ses propriétés amortissantes, décrites par le facteur de perte et le module de stockage, seront extraites et analysées par rapport à des paramètres de conception tels que le rapport de rigidité des phases et la valeur initiale de leurs coefficients de Poisson. A cet effet, les schémas micromécaniques de MT, IS seront utilisés dans leur version mono-site. Les résultats de ces différents modèles seront comparés aux résultats du schéma auto cohérent généralisé (ACG) proposé par Hervé et Zaoui [72], (Christensen et Lo, 1979) [64]. Les équations importantes de ce dernier modèle, réécrites dans le cas de la viscoélasticité sont rappelées dans l'annexe E.

#### 4.4. Applications numériques et discussions

Compte tenu de la spécificité de la microstructure considérée (renforts isotropes, géométrie sphérique, modélisation mono-site), les propriétés effectives du composite restent isotropes. Il est alors possible de réécrire le tenseur des propriétés effectives comme suit :

$$\hat{\mathbf{L}}^{MM} = 2\hat{\mu}^{MM} \mathbf{K} + 3\hat{k}^{MM} \mathbf{J} \quad (138)$$

où  $J_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} / 3$ ,  $K_{ijkl} = I_{ijkl} - J_{ijkl}$ ,  $I_{ijkl} = (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) / 2$  le tenseur symétrique identité d'ordre 4 et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. L'indice  $MM$  fait référence au Modèle Micromécanique considéré.

Une fois les propriétés effectives ( $\hat{\mu}^{MM}$ ,  $\hat{k}^{MM}$ ) déterminées, le module de stockage  $\mu^{MM}$  et le facteur de perte  $\eta^{MM}$  peuvent être déduits:

$$\begin{cases} \mu^{MM} = \Re[\hat{\mu}^{MM}] \\ \eta^{MM} = \Im[\hat{\mu}^{MM}] / \Re[\hat{\mu}^{MM}] \end{cases} \quad (139)$$

Les Symboles  $\Re$  et  $\Im$  dénotent respectivement les parties réelle et imaginaire d'une variable complexe.

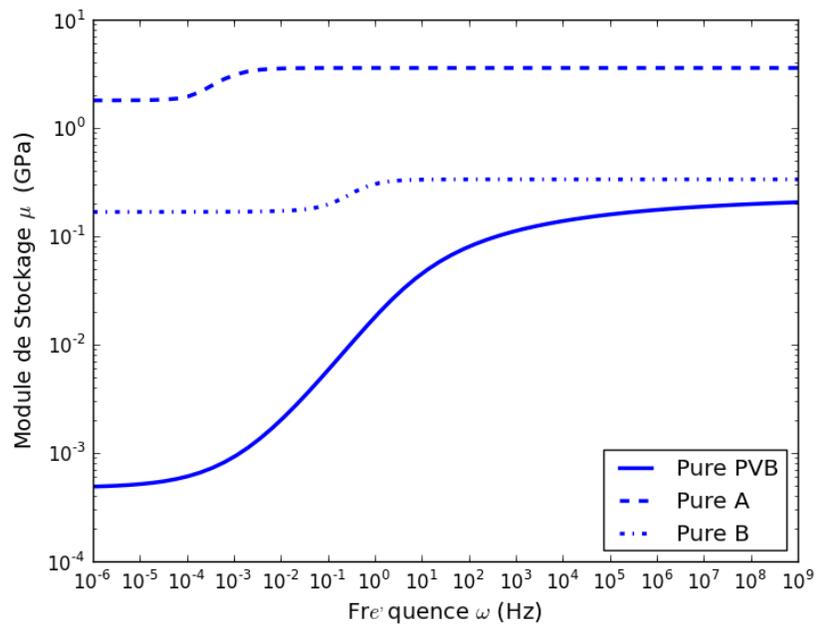
#### 4.4.1. Propriétés mécaniques des constituants

L'objectif pratique de ce chapitre est d'analyser des règles de mélanges spécifiques pour la conception de matériaux composites pour des applications amortissantes. En particulier, l'exploitation du PVB est considérée. Les propriétés viscoélastiques de ce matériau ont été analysées dans plusieurs études dont Haberman [78]. A température ambiante, son module de cisaillement et son coefficient de Poisson sont donnés en fonction de la fréquence de chargement  $\omega$  par [78] :

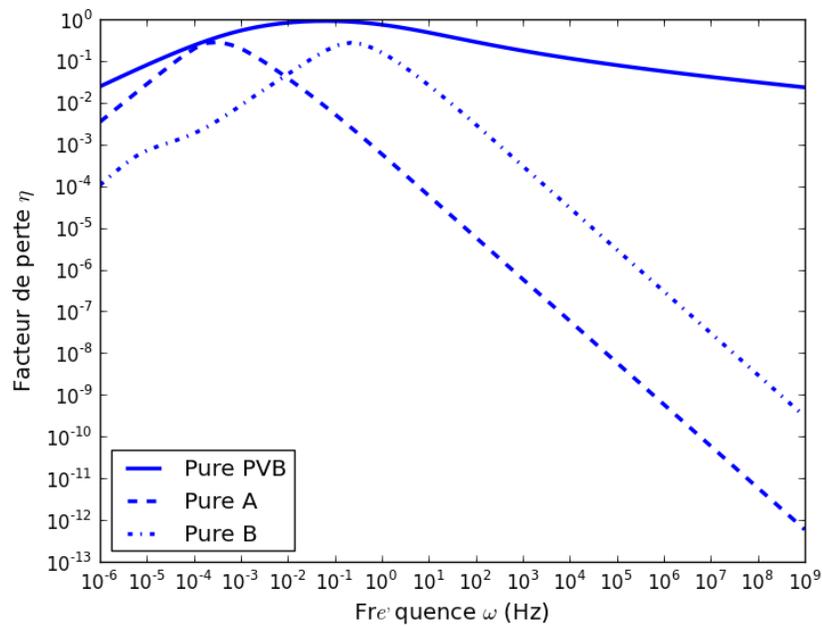
$$\begin{cases} \hat{\mu}_{PVB}(\omega) = \mu_{PVB}^{\infty} + (\mu_{PVB}^0 - \mu_{PVB}^{\infty}) \left[ 1 + (i\omega\tau_{PVB})^{1-\alpha} \right]^{-\beta}, \\ \nu_{PVB} = 0.4 \end{cases}, \quad (140)$$

avec  $\mu_{PVB}^{\infty} = 2.35 \times 10^8$  Pa,  $\mu_{PVB}^0 = 4.79 \times 10^5$  Pa,  $\alpha = 0.46$ ,  $\beta = 0.1946$ ,  $\tau_{PVB} = 0.3979$  s.

La Figure 4.2 montre l'évolution du module de stockage et du facteur de perte pour un large domaine de fréquence de sollicitation ( $10^{-6} \leq \omega \leq 10^9$  Hz). Cette figure illustre également le fort pouvoir amortissant du PVB pour la gamme de fréquences considérées. Cependant, son module de stockage reste très faible, ce dernier ne dépasse pas  $0.235$  GPa. Ceci représente le principal défaut du PVB, le limitant ainsi pour certaines applications structurelles. En conséquence, ce matériau doit être renforcé par des hétérogénéités rigides élastiques ou viscoélastiques. Le composite ainsi formé est appelé à préserver autant que possible les performances amortissantes du PVB.



(a) Module de stockage  $\mu$  versus Fréquence  $\omega$



(b) Facteur de perte  $\eta$  versus Fréquence  $\omega$

Figure 4.2 : Propriétés viscoélastiques du PVB et des matériaux A et B

Dans les applications numériques présentées ici, deux autres matériaux renforts sont considérés : un matériau hypothétique viscoélastique et isotrope  $A$  ou  $B$  défini dans [90, 91] et un matériau élastique isotrope  $C$ .

Les propriétés viscoélastiques des matériaux  $A$  ou  $B$  sont spécifiées sous forme de séries de Prony telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu}_\alpha(\omega) = \mu_\alpha^0 + \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{i}\omega \mu_\alpha^j}{\frac{1}{\tau_\alpha^j} + \mathbf{i}\omega} \\ \hat{\kappa}_\alpha(\omega) = \kappa_\alpha^0 + \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{i}\omega \kappa_\alpha^j}{\frac{1}{\tau_\alpha^j} + \mathbf{i}\omega} \end{array} \right. \quad \alpha = A, B \quad (141)$$

Le tableau E.1 de l'annexe E précise les constantes de l'équation (141) pour les deux types de matériaux viscoélastiques  $A$  et  $B$ .

Les évolutions du module de stockage et le facteur de perte de ces matériaux en fonction de la fréquence, sont également représentées à la Figure 4.2 et comparées aux propriétés correspondantes du PVB.

Aux basses fréquences, les matériaux  $A$  and  $B$  sont de 3 à 4 fois plus rigides que le PVB. Par contre, aux hautes fréquences, le matériau  $B$  montre un module de stockage comparable à celui du PVB. Le matériau  $A$  reste plus d'un ordre de grandeur plus rigide. Les valeurs maximales de facteur de perte, respectivement pour le PVB et les matériaux  $A$  et  $B$ , sont situées aux fréquences  $6 \cdot 10^{-2}$ ,  $3 \cdot 10^{-4}$  and  $21 \cdot 10^{-2}$  Hz et atteignent des valeurs de  $\eta_{max}^{PVB} = 0.91$ ,  $\eta_{max}^A = 0.28$  and  $\eta_{max}^B = 0.27$ .

Aussi, une autre classe de matériau isotrope et élastique est désignée par le matériau  $C$ . Les propriétés élastiques de ce dernier, en termes de module de Young  $E_C$  et de coefficient de Poisson  $\nu$  sont sélectionnées dans un intervalle de valeurs définies par les inégalités suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} 10^{-2} \leq \frac{E_C}{E_{PVB}^\infty} \leq 10^2 \\ -1 \leq \nu < 0.5 \end{array} \right. \quad (142)$$

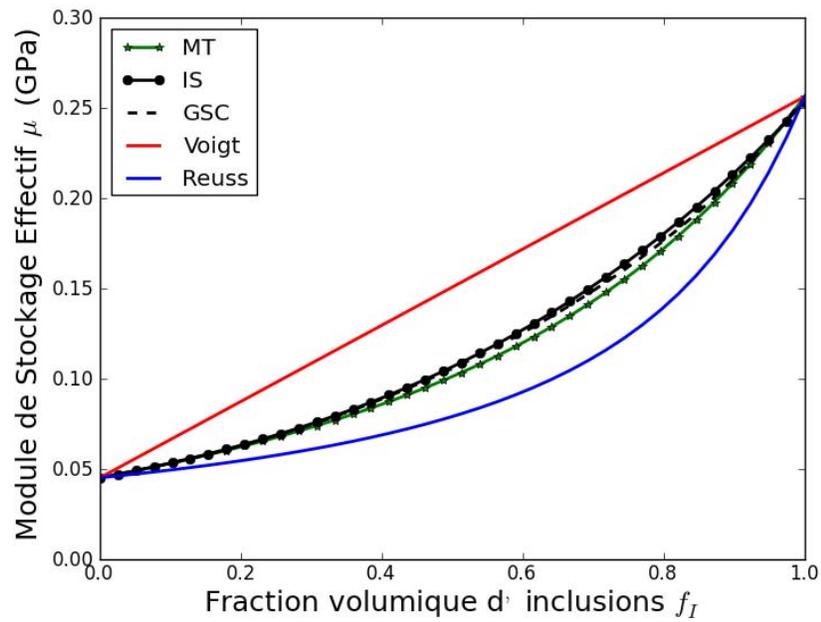
Le cas des matériaux auxétiques sera d'un intérêt particulier dans la suite. Ainsi, plusieurs configurations de renforts sont considérées. Dans le paragraphe suivant, une comparaison des prédictions des différents modèles micromécaniques introduits plus haut et dans l'annexe E est abordée.

#### 4.4.2. Comparaison des modèles micromécaniques

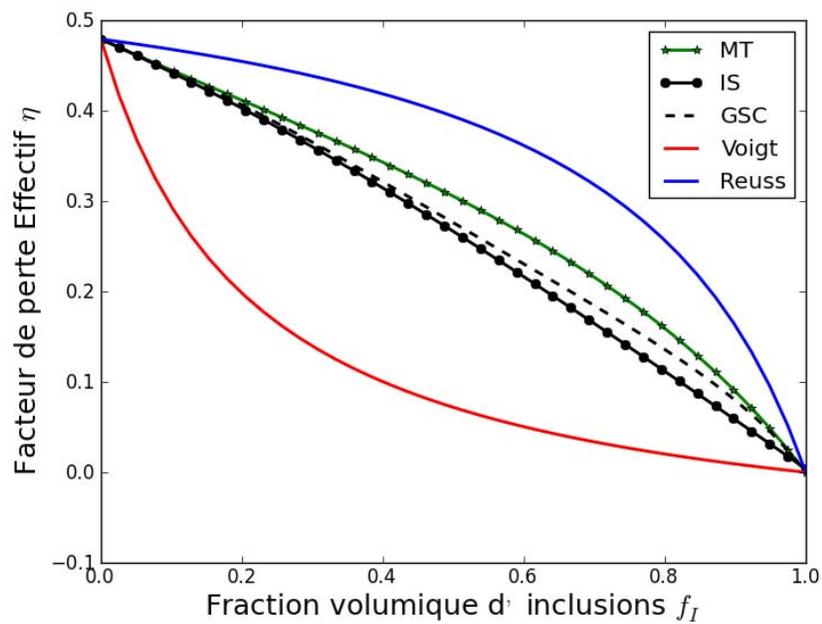
Dans le but de comparer les performances des modèles micromécaniques introduits dans les sections précédentes, un matériau composite constitué d'une matrice en PVB est considéré. Cette matrice est renforcée de particules sphériques de matériau  $C$  (coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ ) avec un module de Young équivalent à  $E_C = E_{PVB}^\infty = 2\mu_{PVB}^\infty (1 + \nu_{PVB}) = 658 \text{ MPa}$ . Les modèles micromécaniques présentés à la section 4.3 et dans l'annexe E sont maintenant comparés aux bornes inférieure et supérieure de Reuss et Voigt. Le composite est alors sollicité à une fréquence de chargement de  $\omega = 10 \text{ Hz}$ .

La Figure 4.3 montre l'évolution du module de stockage et du facteur de perte tels que prédits par les différents modèles pour toute la gamme de fraction volumique  $0 \leq f_l \leq 1$ .

On peut observer que les trois modèles restent bien à l'intérieur des bornes de Reuss et Voigt. Cependant, compte tenu du choix du milieu de référence, certaines différences peuvent être notées quant à ce qui concerne les propriétés viscoélastiques obtenues.



(a) Module de Stockage effectif  $\mu$  versus Fraction volumique d'inclusions,  $f_I$



(b) Facteur de perte effectif  $\eta$  versus Fraction volumique d'inclusions,  $f_I$

Figure 4.3: Encadrements micromécaniques pour  $E_C = 658\text{MPa}$  et  $\nu = 0.3$

Pour les deux types de propriétés viscoélastiques analysées, et pour toute la gamme de fraction volumique, les modèles GSC et l'IS conduisent à des réponses similaires. Cependant, les résultats donnés par le MT sont significativement différents. A ce niveau, introduisons le paramètre  $er_{\beta}$  relatif à l'écart relatif entre les prédictions du GSC et de l'IS. Ce paramètre est défini pour toute propriété viscoélastique  $\beta$  telle que :

$$er_{\beta} = \frac{|\beta_{GSC} - \beta_{IS}|}{|\beta_{GSC}|} \times 100 \quad (143)$$

En effet, une faible différence relative peut être observée pour le module de stockage prédit par ces modèles. Cette différence n'excède pas  $er_{\mu} = 0.2\%$  pour toute la gamme de fraction volumique étudiée. D'autre part, le facteur de perte prédit par ces 5 modèles reste significativement différent. Dans un premier temps, il est intéressant de noter que l'approximation de Voigt présente une évolution concave pour le facteur de perte en opposition aux autres modèles. En termes de facteur de perte, à 20% de fraction volumique, la différence relative entre le GSC et l'IS est estimée à  $er_{\eta} = 0.9\%$  alors que cette différence entre le GSC et le MT est de l'ordre de  $er_{\eta} = 1.36\%$ . Entre le GSC et le IS, la différence relative augmente faiblement avec la fraction volumique et atteint  $er_{\eta} \approx 6.6\%$  pour  $f = 0.6$ . En élasticité, il est bien connu que le MT reste inadéquat pour des composites à forte fraction volumique. Aussi, le GSC conduit-il à des équations tensorielles non linéaires dans la détermination des propriétés globales. En effet, pour une telle approche, on est souvent confronté à des difficultés de convergence liées à la non linéarité du problème. D'une part, comme cela fut détaillé dans la section 3.2.2, l'IS traite d'une addition graduelle d'une quantité infinitésimale de renforts dans la matrice. D'autre part, il est établi que les prédictions de ce modèle concordent bien avec les données expérimentales même pour les matériaux poreux [92].

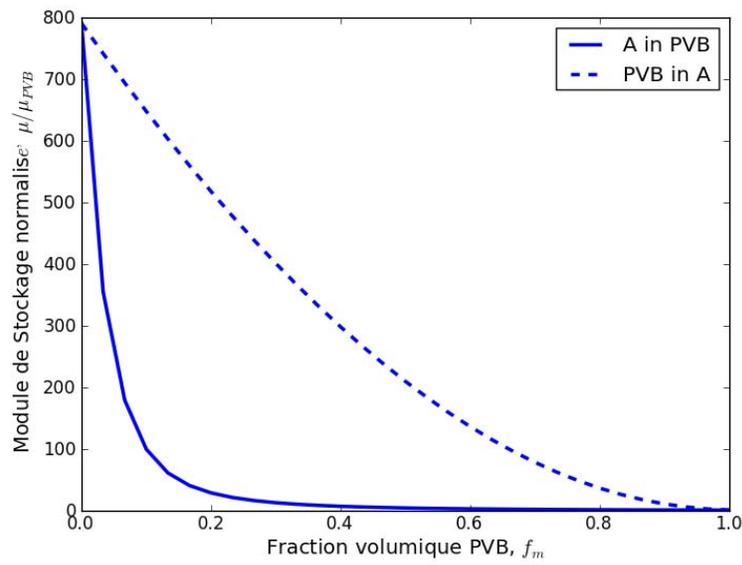
Dans la suite de ce chapitre, le schéma IS sera donc retenu pour déterminer les propriétés globales. Aussi, il est supposé que les phases dont les propriétés découlent des matériaux  $A$  ou  $B$  et  $C$  sont de géométries sphériques. La possibilité de l'amélioration des propriétés viscoélastiques du PVB est examinée dans la suite par diverses configurations de mélange.

### 4.4.3. Composite impliquant des phases viscoélastiques

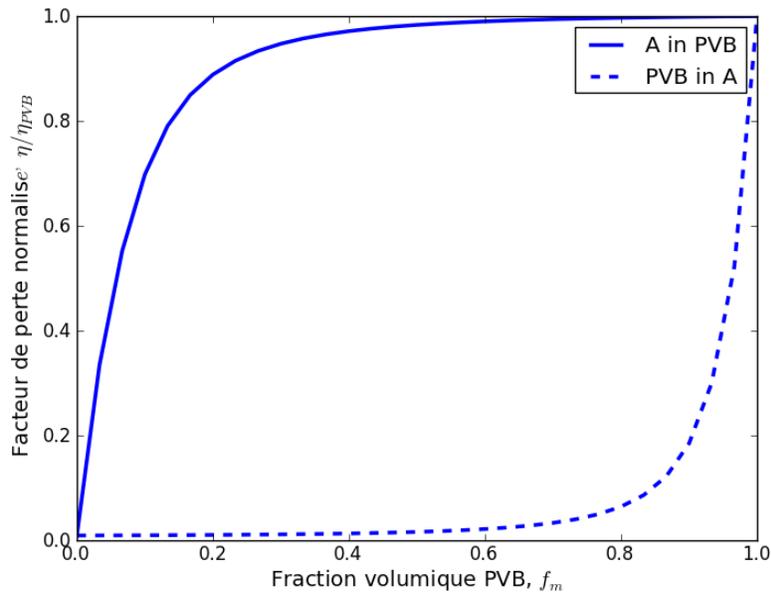
Dans le but d'analyser les propriétés viscoélastiques d'un tel composite, deux configurations de matériaux hétérogènes sont considérées. La première configuration est relative au matériau viscoélastique  $A$  regardé comme inclusions dans une matrice PVB ( $A$  in PVB) alors que la seconde considère le PVB comme étant la phase inclusion dans la matrice  $A$  (PVB in  $A$ ). Pour ces deux matériaux, la fréquence de sollicitation considérée est  $\omega = 6.10^{-2} Hz$ , correspondant à  $\eta_{max}^{PVB} = 0.91$ . Les propriétés viscoélastiques sont déterminées en fonction de la fraction volumique  $f_m$  de PVB dans chaque configuration.

La Figure 4.4 montre l'évolution du module de stockage normalisé et du facteur de perte en fonction de la fraction volumique  $f_m$ . Il apparaît que la configuration utilisant le PVB comme inclusion améliore la rigidité du composite en terme du module de stockage et ceci pour un large domaine de fraction volumique ( $f_m \leq 0.5$ ). Cependant, pour la même gamme de fraction volumique, cette configuration conduit à une amélioration marginale du facteur de perte (Fig. 4b). Cette dernière propriété est hautement améliorée quand le PVB est utilisé comme une matrice renforcée par des inclusions du matériau  $A$ .

Ce comportement reste bien connu dans le domaine de la conception des matériaux composites viscoélastiques. Les prédictions de la Figure 4.4 confirment la possibilité d'atteindre une grande rigidité et une faible dégradation du facteur de perte et vis versa comme spécifié dans les travaux [9, 76]. En conséquence, la conception de composite possédant une bonne rigidité et un bon facteur de perte semble délicate pour ces constituants.



(a) Module de Stockage normalisé  $\mu/\mu_{PVB}$  versus Fraction volumique de PVB  $f_m$

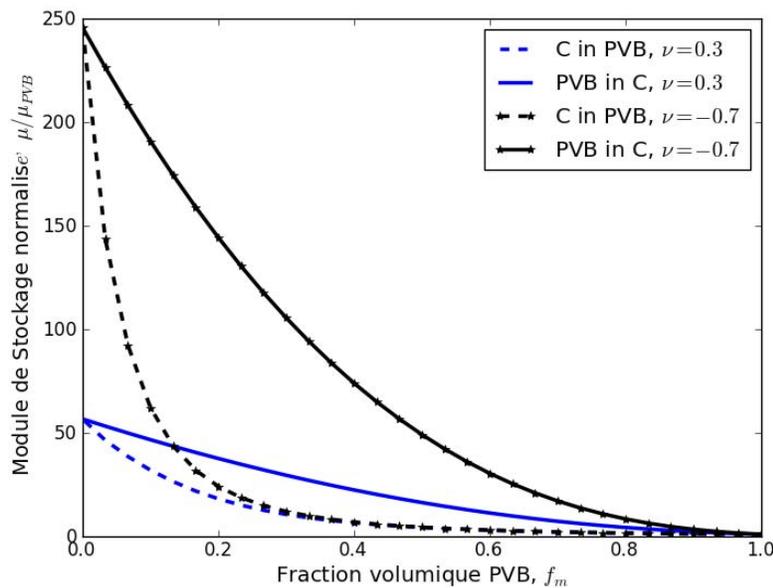


(b) Facteur de perte normalisé  $\eta/\eta_{PVB}$  versus Fraction volumique de PVB  $f_m$

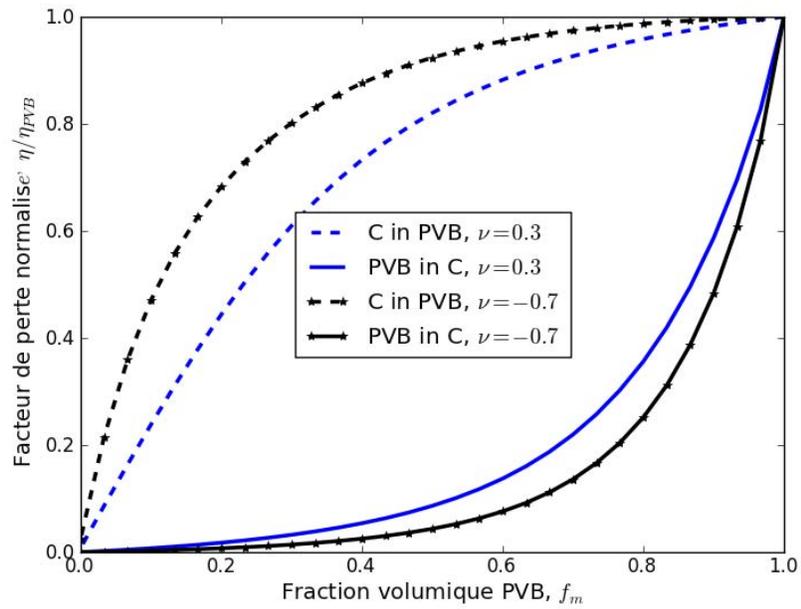
Figure 4.4 : Propriétés viscoélastiques normalisées issues de phases viscoélastiques

#### 4.4.4. Composite impliquant des phases élastiques et viscoélastiques

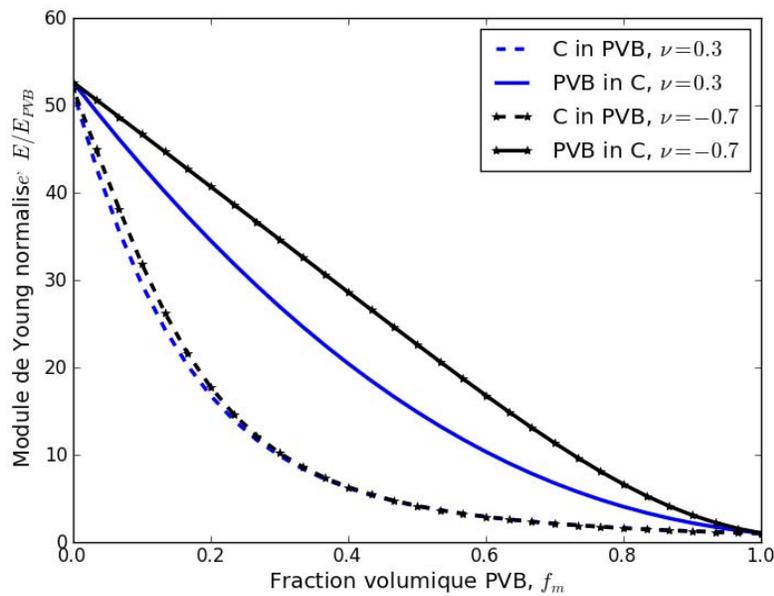
La seconde étape de cette analyse consiste à combiner des phases élastiques et viscoélastiques. A cet effet, le PVB et le matériau  $C$  sont considérés. De façon analogue à la section précédente, deux configurations de mélange sont prises en compte. La première consiste en un composite renfermant le matériau  $C$  dans une matrice PVB ( $C$  in PVB) tandis que la seconde traite de la configuration inverse c'est-à-dire des inclusions PVB dans une matrice  $C$  (PVB in  $C$ ). Un rapport de rigidité entre les phases  $Q = E_C / E_{PVB}^\infty$  est introduit et l'analyse est faite en fonction du coefficient de Poisson  $\nu$  du matériau  $C$ . La fréquence de sollicitation considérée est  $\omega = 6.10^{-2} Hz$ . Deux cas sont considérés en ce qui concerne le matériau élastique: un matériau conventionnel avec un coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et un matériau élastique auxétique avec  $\nu = -0.7$ . Une valeur de  $Q = 1$  est considérée.



(a) Module de Stockage normalisé  $\mu / \mu_{PVB}$  versus Fraction volumique de PVB  $f_m$



(b) Facteur de perte normalisé  $\eta/\eta_{PVB}$  versus Fraction volumique de PVB  $f_m$



(c) Module de Young normalisé  $E/E_{PVB}$  versus Fraction volumique de PVB  $f_m$

**Figure 4.5: Propriétés viscoélastiques normalisées issues de phases viscoélastiques et élastiques pour  $Q=10^0$**

- Module de stockage

Le module de stockage en cisaillement et traction ainsi que le facteur de perte sont représentés par les Figures 4.5a-c en fonction de la fraction volumique  $f_m$ . Comme précédemment, le composite "PVB in C" montre une amélioration significative de la rigidité par rapport au composite "C in PVB".

L'influence du coefficient de Poisson  $\nu$  peut être analysée en comparant les Figures 4.5b et 4.5c. En effet, on remarque que le changement de la valeur du coefficient de Poisson du constituant élastique d'une valeur positive à celle négative, et sans altération de son module de Young, améliore de façon significative le module de stockage en cisaillement.

- Facteur de perte

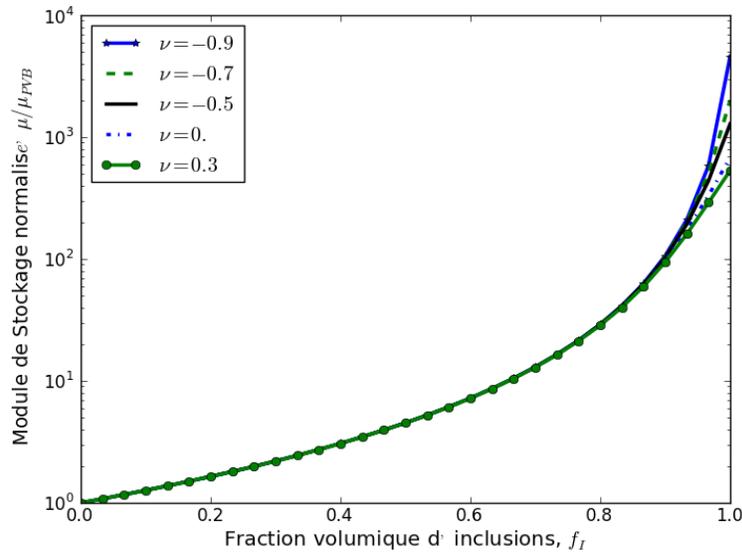
Concernant le facteur de perte et dépendant de la fraction volumique  $f_m$ , les grandes valeurs sont obtenues pour le composite "C in PVB". L'impact du coefficient de Poisson négatif est significatif pour un tel composite comme l'illustre la Figure 4.5b. En effet, l'auxétisme améliore la réponse en termes de facteur de perte. Cependant, un comportement inverse est observé pour le composite "PVB in C" où le facteur de perte reste faible pour une fraction volumique  $f_m \leq 0.8$ .

En résumé, une amélioration significative en termes des propriétés viscoélastiques est notée pour le composite "C in PVB" avec un  $\nu = -0.7$ . D'un autre côté, l'utilisation d'une matrice à coefficient de Poisson négatif apparaît inadéquate en ce qui concerne l'amélioration du facteur de perte.

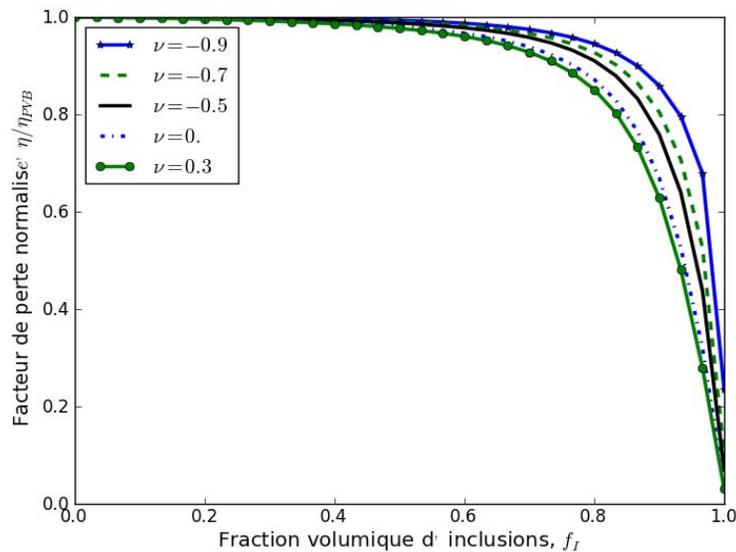
En conséquence, dans les sections suivantes, seul le composite constitué de la matrice PVB est considéré. L'influence des deux paramètres de conception que sont le coefficient de Poisson  $\nu$  et le rapport de rigidité  $Q$  des phases est alors analysée.

#### **4.4.4.1. Influence du coefficient de Poisson**

L'impact du coefficient de Poisson sur les propriétés effectives viscoélastiques d'un composite a été étudié pour un rapport de rigidité de  $Q=10$ . Le composite est sollicité à une fréquence  $\omega = 6.10^{-2} Hz$ . Des coefficients de Poisson conventionnels et auxétiques sont considérés à cet effet. La Figure 4.6 illustre les résultats obtenus en termes de module de stockage et de facteur de perte.



(a) Module de Stockage normalisé  $\mu/\mu_{PVB}$  versus Fraction volumique d'inclusions  $f_I$



(b) Facteur de perte normalisé  $\eta/\eta_{PVB}$  versus Fraction volumique d'inclusions  $f_I$

**Figure 4.6: Influence du coefficient de Poisson  $\nu$  pour  $Q = 10^{+1}$**

- Module de stockage

La Figure 4.6a montre l'évolution du module de stockage en fonction de la fraction volumique des renforts pour diverses valeurs du coefficient de Poisson  $\nu$  de l'inclusion. Le module de stockage augmente avec la fraction volumique  $f_I$  du matériau  $C$  considéré comme inclusions. Aussi, est il constaté, un effet très limité de la valeur du coefficient de Poisson sur les propriétés viscoélastiques pour des fractions volumiques telles que  $f_I \leq 0.8$ . En revanche, pour des fractions volumiques très élevées ( $f_I \approx 0.9$ ) le coefficient de Poisson négatif montre un effet significatif sur cette propriété macroscopique.

- Facteur de perte

L'utilisation de renforts auxétiques induit une nette amélioration du facteur de perte pour toute la gamme de fraction volumique étudiée. Ceci est illustré par la Figure 4.6b où l'impact de l'auxétisme des renforts reste important pour de grandes fractions volumiques ( $f_I \geq 0.5$ ). Particulièrement, pour  $f_I \geq 0.8$ , le facteur de perte du composite renforcé d'inclusions auxétiques pour  $\nu = -0.9$  apparaît au moins 20% supérieur à celui du composite renforcé d'inclusions élastiques conventionnelles ( $\nu = 0.3$ ).

A la lumière de cette analyse, il apparaît que le coefficient de Poisson négatif présente une influence significative dans l'amélioration du facteur de perte et du module de stockage pour des fractions volumiques d'inclusions élevées. Par une comparaison des Figures 4.5 et 4.6, il ressort que le rapport de rigidité  $Q$  a également une influence non négligeable sur la réponse viscoélastique globale.

#### **4.4.4.2. Influence du rapport de rigidité $Q$**

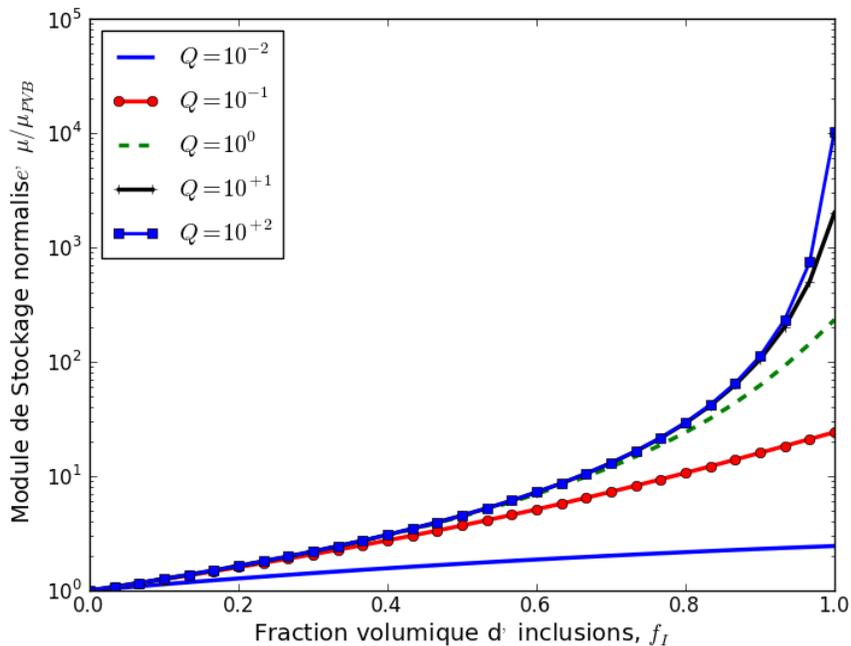
Afin de séparer l'effet du coefficient de Poisson de celui du rapport de rigidité  $Q$ , un composite de matrice PVB renforcée par des inclusions du matériau  $C$  avec  $\nu = -0.7$  est analysé pour des

valeurs du rapport de rigidité tel que  $10^{-2} \leq Q \leq 10^{+2}$ . La fréquence de sollicitation est maintenue à  $\omega = 6.10^{-2} \text{ Hz}$ . Les résultats correspondants sont représentés sur la Figure 4.7

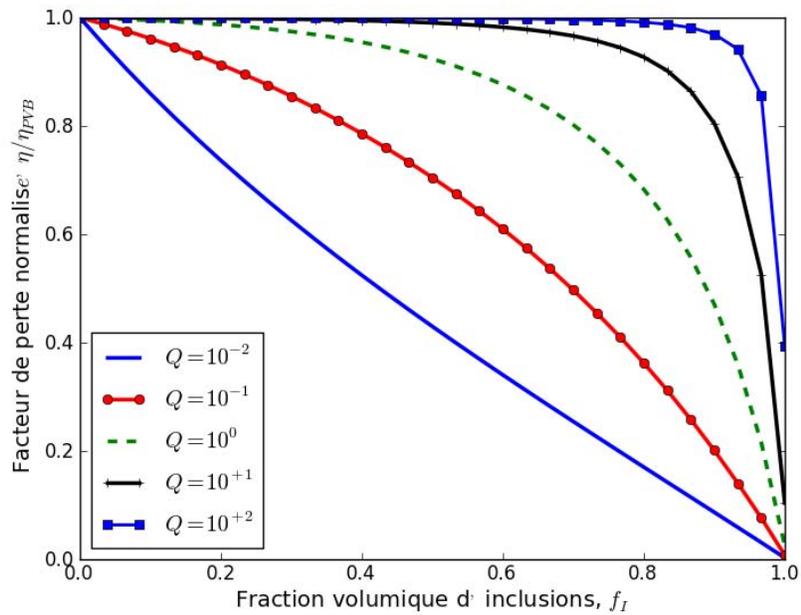
▪ Module de stockage

Les graphes semi-logarithmiques des Figures 4.7a et 4.7b montrent l'évolution du module de stockage respectivement en cisaillement et en traction. Il est observé (Figure 4.7a) que l'augmentation du rapport de rigidité  $Q$  améliore le module de stockage en cisaillement pour toute la gamme de fraction volumique considérée.

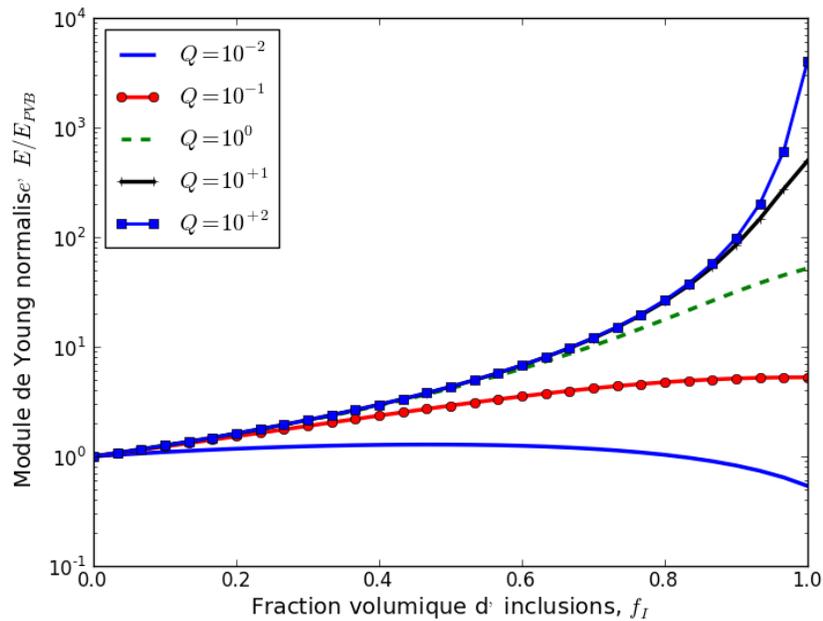
Sur la Figure 4.7c, une observation similaire peut être faite quant à ce qui concerne le module de stockage en traction. Cependant, une évolution inattendue et non-monotone est notée pour  $Q = 10^{-2}$ . La valeur maximale de ce module est obtenue pour une fraction volumique  $f_I \approx 0.5$



(a) Module de Stockage normalisé  $\mu/\mu_{PVB}$  versus Fraction volumique d'inclusions  $f_I$



(b) Facteur de perte normalisé  $\eta/\eta_{PVB}$  versus Fraction volumique d'inclusions  $f_I$



(c) Module de Young normalisé  $E/E_{PVB}$  versus Fraction volumique d'inclusions  $f_I$

Figure 4.7: Influence du rapport de rigidité  $Q$  pour  $\nu = -0.7$

- Facteur de perte

La Figure 4.7b induit d'intéressantes remarques quant à l'évolution du facteur de perte. La première concerne l'amélioration du facteur de perte par l'augmentation du rapport de rigidité  $Q$ . La seconde révèle un facteur de perte dans une évolution asymptotique, proche de celle de la matrice, qui est atteint pour de forte valeur du rapport  $Q$  et pour pratiquement toutes les valeurs de fractions volumiques. Aussi, on note que la courbe du facteur de perte en fonction de la fraction volumique  $f_I$  reste convexe pour toutes les valeurs de  $Q$  testées sauf pour  $Q = 10^{-2}$ . Une évolution linéaire est obtenue quand le module de Young du PVB (pour  $\omega = 6.10^{-2}$  Hz) est égal à celui du matériau C. En effet, le module de Young du PVB est fonction de la fréquence et pour  $f = 6.10^{-2}$  Hz il vaut  $E = \Re \left[ E_{PVB} \left( 6.10^{-2} \right) \right] \approx 12.65 \text{ MPa}$ . Ceci correspond à  $Q = \frac{12.65}{658} = 0.019$ , valeur qui situe le facteur de perte entre les courbes bleue ( $Q = 0.01$ ) et rouge ( $Q = 0.1$ ). En conséquence, le module de Young résultant du matériau composite est indépendant de la fraction volumique pour cette valeur du rapport de rigidité  $Q$ . Ceci est confirmé par les courbes de la Figure 4.7c

En définitive, l'ajout d'inclusions dans une matrice PVB apparaît comme un moyen d'améliorer le module de stockage de ce dernier. Afin de préserver un facteur de perte élevé pour le matériau composite résultant, les matériaux auxétiques apparaissent comme une solution compétitive en termes de renforts pour des rapports de rigidité  $Q \geq 1$ . Dans la prochaine section de ce chapitre, une réponse mécanique d'un tel composite est analysée à travers une large gamme de fréquence de sollicitation.

#### 4.4.5. Réponse en fréquence du composite (C in PVB)

Le comportement viscoélastique d'un composite constitué d'une matrice PVB renforcée par des inclusions auxétiques de matériau C est examiné ici pour des applications structurelles. Une fraction volumique fixe d'inclusions  $f_I = 0.7$  est étudiée. Un rapport de rigidité  $Q = 10$  est considéré conduisant à une rigidité relative et un facteur de perte important. L'amélioration de

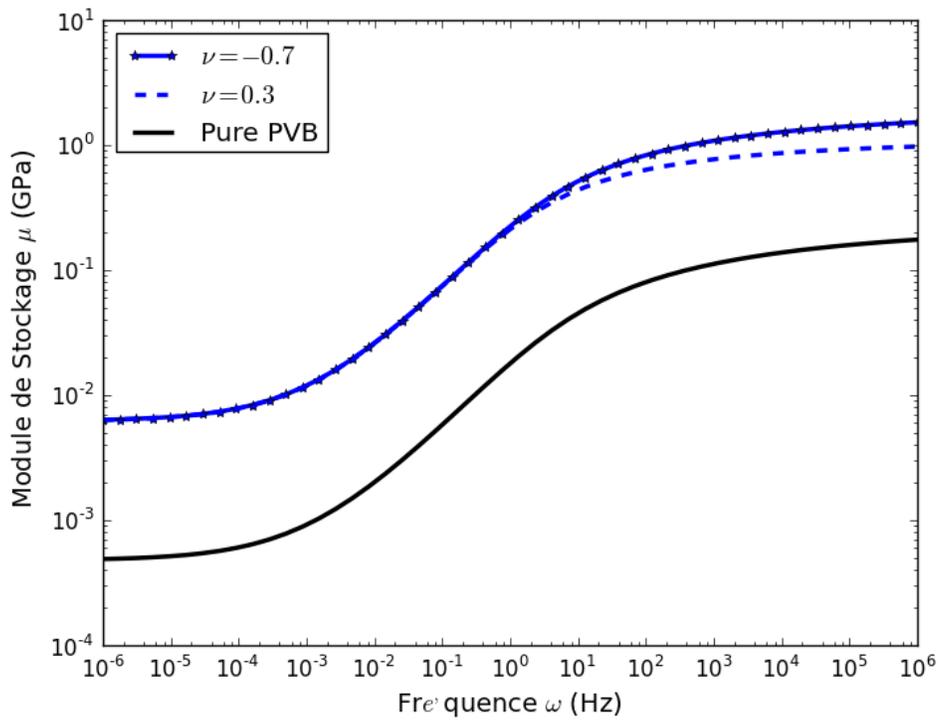
ces propriétés viscoélastiques par le coefficient de Poisson négatif est ici indexée par une comparaison des résultats obtenus pour  $\nu = 0.3$  et  $\nu = -0.7$ .

Les résultats de cette analyse sont présentés par la Figure 4.8a-b. Ils comparent les prédictions obtenues pour ces deux valeurs de coefficient de Poisson à celles du PVB pur sur une large gamme de fréquences allant de  $10^{-6}$  à  $10^6$  Hz.

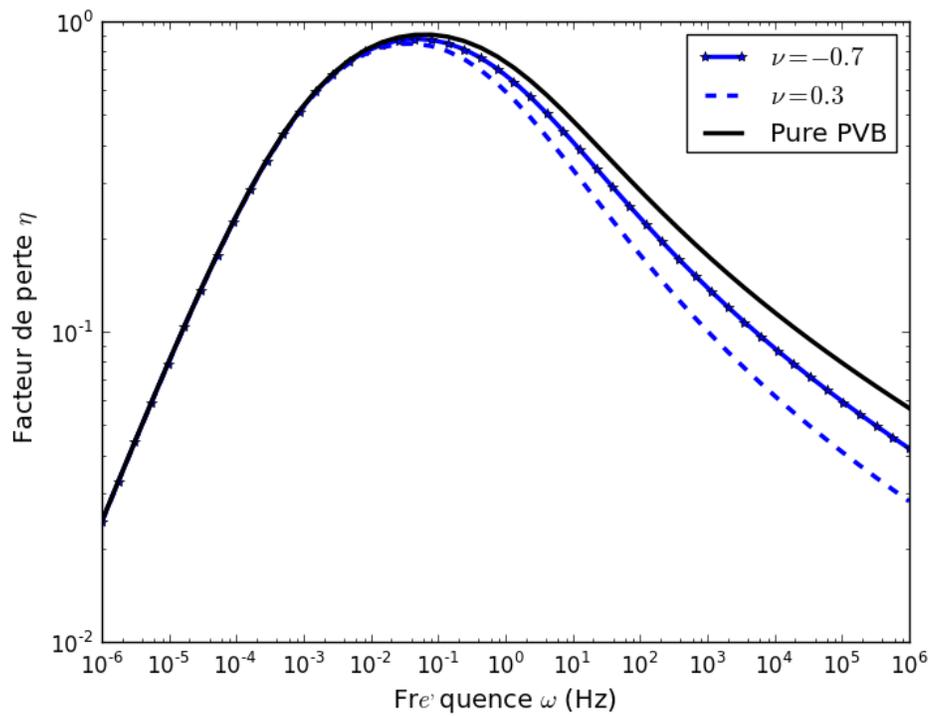
La rigidité à travers le module de stockage du composite a été hautement améliorée par rapport à celui du PVB pur. Une observation principale relative à l'influence de la fréquence peut être faite quant à l'auxétisme de l'inclusion. Aux basses fréquences ( $\omega \leq 10^{-2}$  Hz), le facteur de perte du matériau composite est équivalent à celui du PVB pur. Approchant les fréquences moyennes et hautes ( $\omega \geq 1$  Hz), le facteur de perte apparaît dégradé spécialement pour les renforts élastiques classiques ( $\nu \geq 0.3$ ). L'utilisation d'un coefficient de Poisson négatif conduit donc à une amélioration simultanée du module de stockage et du facteur de perte du composite. Les valeurs de le tableau 4.2 indiquent les propriétés viscoélastiques effectives pour  $\omega = 1, 100$  et  $10000$  Hz.

Tableau 4.2: Propriétés viscoélastiques à  $\omega = 1, 100$  et  $10000$  Hz pour  $\nu = 0.3$  et  $\nu = -0.7$

$\omega$	Module de stockage $\mu$ (GPa)			Facteur de perte $\eta$		
	1(Hz)	10(Hz)	$10^4$ (Hz)	1(Hz)	10(Hz)	$10^4$ (Hz)
$\nu = 0.3$	0.2127	0.4381	0.86328	0.5954	0.3332	0.0620
$\nu = -0.7$	0.2243	0.5154	1.2740	0.6719	0.4094	0.0884
Pure PVB	0.0179	0.0452	0.1382	0.7408	0.4790	0.1152



(a) Module de Stockage  $\mu$  versus Fréquence  $\omega$



(b) Facteur de perte  $\eta$  versus Fréquence  $\omega$

**Figure 4.8: Propriétés viscoélastiques versus Fréquence pour  $Q=10$ ,  $f_I = 0.7$**

## 4.5. Conclusion

Dans ce chapitre, la possibilité d'améliorer la rigidité du PVB, en préservant son facteur de perte, par l'ajout de renforts élastiques ou viscoélastiques a été analysée. Grâce aux outils micromécaniques développés, le module de stockage et le facteur de perte d'un composite à matrice PVB renforcée par des inclusions ont été estimés. Une attention particulière a été alors portée sur le cas d'inclusions élastiques auxétiques. Dès lors, l'influence des paramètres de conception en l'occurrence le rapport de rigidité  $Q$  entre les phases du composite et le coefficient de Poisson  $\nu$  des inclusions ont été étudiés en fonction de la fraction volumique des phases et la dépendance fréquentielle du PVB. Il ressort que pour des applications structurelles, le composite constitué d'une matrice en PVB restait le meilleur choix pour conserver le facteur de perte, i.e. son amortissement. Pour un tel composite, dans lequel le module de stockage de la matrice reste excessivement faible, le rapport de rigidité  $Q$  qui joue un rôle important combiné au coefficient de Poisson négatif, améliore de façon très significative son module de stockage et préserve son facteur de perte. Par rapport à la dépendance fréquentielle, les propriétés viscoélastiques du composite restent performantes pour les moyennes et hautes fréquences en présence d'inclusions auxétiques.

# Chapitre 5: Comportement dynamique des structures sandwichs à couches auxétiques

---

5.1. Introduction .....	117
Objectifs .....	118
5.2. Formulation cinématique du champ de déplacement .....	118
5.3. Mise en équation du problème dynamique.....	120
5.3.1. Principe des travaux virtuels .....	120
5.3.2. Solution du problème dynamique .....	122
5.4. Modélisation éléments finis: Technique du « Modal Strain Energy »(MSE) .....	125
5.5. Applications numériques et discussions.....	127
5.5.1. Influence du coefficient de Poisson .....	128
5.5.2. Influences d'autres paramètres du modèle.....	132
5.6. Conclusion .....	135

---

## 5.1. Introduction

L'utilisation des matériaux composites auxétiques a été entreprise dans les applications technologiques depuis les premiers travaux développés par Lakes [3] dans ce domaine. L'auxétisme est maintenant identifié dans une large gamme de matériaux d'origine manufacturée incluant les mousses, les polymères cristallins liquides et des structures polymères multi-échelles [31, 93-95]. Grâce à leurs propriétés viscoélastiques et de déformation spécifiques, les matériaux auxétiques tendent à être utilisés dans l'amélioration des réponses macroscopiques des structures (Confère [4, 10] pour plus de détails).

De nos jours, la diminution des vibrations dans les structures mécaniques constitue un problème en sciences de l'ingénieur qui occupe beaucoup de chercheurs [96]. Les structures amortissantes sont celles renfermant au moins une couche viscoélastique prise en sandwich entre deux couches élastiques. Aussi, est il bien établi qu'une méthode efficiente d'augmentation de l'amortissement passif est l'utilisation alternée de couches élastique et viscoélastique dans la construction du matériau sandwich [96]. Pour de telles structures, les propriétés globales en termes d'amortissement, telles que la fréquence propre et le facteur de perte, sont requises dans le cas d'une analyse dynamique depuis les travaux précurseurs de Ross et al. [97] sur des structures sandwichs constituées de peaux isotropes et d'un cœur viscoélastique. Une synthèse exhaustive traitant de l'analyse dynamique des composites sandwichs est présentée dans [98]. La solution de tels problèmes passent généralement par une définition adéquate du modèle cinématique de la structure, non seulement pour obtenir un coût raisonnable d'implémentation mais aussi une prise en compte bien rigoureuse du cisaillement dans les couches viscoélastiques [99]. Il est bien connu que l'amortissement est intrinsèquement relié au cisaillement transverse dans la couche viscoélastique. En effet, Rao et al.[98] ont établis que le mécanisme déterminant l'amortissement reste le cisaillement induit entre la couche viscoélastique et celles élastiques contraintes. Ainsi, l'une des façons d'obtenir un fort pouvoir amortissant consiste à avoir un module de cisaillement élevé. A cet effet, les matériaux auxétiques restent un meilleur choix compte tenu de la dépendance en  $(1 + \nu)^{-1}$  du module de cisaillement assurant une augmentation de cette propriété quand le coefficient de Poisson tend vers  $-1$ .

Dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle des composites sandwichs, plusieurs travaux de

la littérature proposent différents types de cinématiques pour les structures plaques, poutres et coques. Pour obtenir une continuité de la contrainte de cisaillement à travers les épaisseurs avec une contrainte nulle sur les bords du sandwich, des modèles comme le "classical laminate theories" (CLT), "first order-shear deformation theories" (FSDTs) ou "high-order shear deformation theories" (HSDTs) peuvent être formulées par la considération d'un développement du déplacement en puissance de fonctions polynomiales ou trigonométriques d'ordre linéaire, quadratique ou supérieur de la coordonnée liée à l'épaisseur. Une bonne documentation traitant des modèles cinématiques pourra être trouvée dans [96, 99-101].

### Objectifs

Dans ce chapitre, nous tirerons profit des matériaux auxétiques viscoélastiques dans l'analyse de la réponse macroscopique d'une structure sandwich à travers une étude en vibrations libres. Cette analyse traitera essentiellement, à travers une formulation analytique, de la réponse dynamique d'une structure à 5 couches constituée de strates viscoélastiques auxétiques contraintes par des couches élastiques. A cet effet, une cinématique simple est supposée dans chaque couche de la structure d'une part, et ainsi par l'application du principe des travaux virtuels, la réponse modale en termes de fréquences propres et de facteurs de perte est déterminée. D'autre part, une simulation par la méthode des éléments finis à travers la technique du « modal strain energy » MSE a permis de valider ces résultats analytiques.

## 5.2. Formulation cinématique du champ de déplacement

La topologie de la structure (Figure 5.1) est composée de 5 couches : 2 couches viscoélastiques auxétiques contraintes par les 3 trois couches élastiques restantes. La structure est analysée suivant une modélisation bidimensionnelle.

Notons,  $x$  et  $z$  les coordonnées longitudinale et transversale. Les épaisseurs des couches élastiques et viscoélastiques sont notées respectivement  $H_e$  et  $H_v$ . La longueur de la poutre et

son épaisseur totale sont respectivement  $L$  et  $H_t$ . Le champ de déplacement  $\vec{U}(x, z, t)$  dans chaque couche de la structure se décompose en déplacement longitudinal  $u(x, z, t)$  et transversal  $w(x, z, t)$  et est s'écrit comme suit :

$$\vec{U}(x, z, t) = \begin{cases} u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + f(z) \beta(x, t) \\ w(x, z, t) = w(x, t) \end{cases} \quad (144)$$

où  $f(z)$  et  $\beta(x, t)$  sont une fonction de cisaillement et la rotation additionnelle de la normale au plan moyen, respectivement. Le terme  $u_0(x, t)$  représente le déplacement longitudinal du plan moyen.

Suivant les expressions de la fonction de cisaillement  $f(z)$ , différents types de modèles peuvent être formulés tels que [99]:

- Modèle 1 de Kirchhoff-Love:  $f(z) = 0$  de type CLT;
- Modèle 2 de Mindlin-Timoshenko:  $f(z) = z$ ,
- Modèle 3 de Reddy:  $f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3H_t^2} \right)$  de type HSDT;
- Modèle 4 de Touratier:  $f(z) = \frac{H_t}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{H_t} \right)$  de type HSDT.

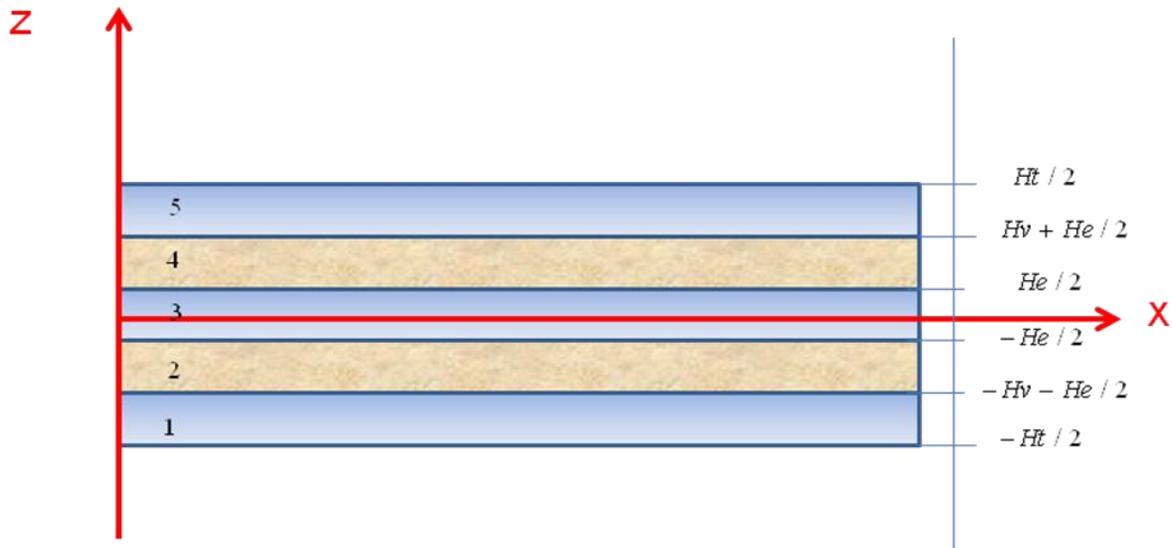


Figure. 5.1: Illustration de la structure multicouche étudiée

### 5.3. Mise en équation du problème dynamique

#### 5.3.1. Principe des travaux virtuels

La réponse dynamique de la structure est déterminée en utilisant le principe des travaux virtuels tel que:

$$P_{acc}(\delta u) = P_{int}(\delta u) + P_{ext}(\delta u). \quad (145)$$

avec  $P_{acc}(\delta u)$ ,  $P_{int}(\delta u)$  et  $P_{ext}(\delta u)$  représentant respectivement les puissances virtuelles des forces d'inertie, des forces internes et forces externes. Le problème dynamique que nous voulons traiter ici est obtenu en adaptant les conditions suivantes:

$$\begin{cases} P_{acc}(\delta u) = \int_0^L \left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \\ P_{ext}(\delta u) = 0 \end{cases} \quad (146)$$

où  $\rho_k$  et  $S_k$  définissent respectivement la masse volumique et la surface d'intégration de la couche  $k$ .

Le travail des forces internes pour un tel problème s'écrit:

$$P_{\text{int}}(\delta u) = - \int_{\Omega_t} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega_t = - \sum_{k=1}^5 \left( \int_{\Omega_k} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega_k \right), \quad (147)$$

Dans l'équation (147)  $\Omega_t$  représente le volume total de la poutre sandwich et  $\Omega_k$  le volume de la couche k. Considérant que la contrainte normale transversale est nulle, c'est à dire  $\sigma_{zz} = 0$ , l'équation (147) peut être réécrite de la façon suivante:

$$P_{\text{int}}(\delta u) = - \sum_{k=1}^5 \left[ \int_{\Omega_k} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz}) d\Omega_k \right]. \quad (148)$$

Selon le champ cinématique défini plus haut, le champ de déformation dans les couches de la structure s'écrit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{,x} = -zw_{,xx} + f(z)\beta_{,x} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(u_{,z} + w_{,x}) = \frac{1}{2}f_{,z}\beta \end{cases} \quad (149)$$

L'introduction de l'équation (149) dans (148) conduit à:

$$P_{\text{int}}(\delta u) = - \sum_{k=1}^5 \left[ \int_{\Omega_k} (-\sigma_{xx} z \delta w_{,xx} + \sigma_{xx} f(z) \delta \beta_{,x} + \sigma_{xz} f_{,z} \delta \beta) d\Omega_k \right] \quad (150)$$

Dans un souci de simplicité et de clarté, de nouvelles variables sont adoptées dans la suite de ce chapitre telles que :

$$\begin{cases} M_t = \int_{S_t} -z \sigma_{xx} dS_t; \\ Ma = \int_{S_t} f(z) \sigma_{xx} dS_t; \\ Q = \int_{S_t} f_{,z} \sigma_{xz} dS_t. \end{cases} \quad (151)$$

où  $S_t$  représente la surface de la section totale de la poutre sandwich. Par conséquent, le principe des travaux virtuels introduit par l'équation (145) prend sa forme particulière correspondant à notre problème:

$$\int_0^L (M_t \delta w_{,xx} + M_a \delta \beta_{,x} + Q \delta \beta) dx = - \int_0^L \left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dx \quad (152)$$

### 5.3.2. Solution du problème dynamique

Les matériaux élastiques et viscoélastiques utilisés sont supposés linéaires, homogènes et isotropes. La loi de Hooke pour une couche donnée s'écrit :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (153)$$

où  $\mu = E/2(1+\nu)$  et  $\lambda = Ev/(1+\nu)(1-2\nu)$ .  $E$  représente le module de Young de la couche et  $\nu$  son coefficient de Poisson.

La solution du problème viscoélastique relatif aux couches viscoélastiques peut être formulée grâce au principe de correspondance élastique-viscoélastique introduit au chapitre 4. Par la suite, dans le domaine temporel, une transformation de Laplace-Carlson est appliquée dans le but de transformer la variable temporelle  $t$  en  $p$ . Ceci permet de convertir le problème viscoélastique en un problème élastique homologue. Cette procédure a été largement utilisée dans la résolution de problèmes viscoélastiques [84]. Aussi, dans le domaine fréquentiel, on traite plus de l'état d'équilibre oscillatoire des systèmes forcés [102]. Ainsi, le module de Young viscoélastique est défini par :

$$\begin{cases} E^*(\mathbf{j}\omega) = \hat{E}(p) \\ p = \mathbf{j}\omega \end{cases}, \quad (154)$$

où  $\omega$  est la fréquence d'excitation, conduisant au module de Young complexe tel que:

$$E^*(\mathbf{j}\omega) = E(\omega) [1 + \mathbf{j}\eta(\omega)]. \quad (155)$$

Dans l'équation (155),  $E(\omega)$  et  $\eta(\omega)$  représentent le module de stockage et le facteur de perte respectivement. La loi de Hooke ci-dessus, reste valide dans le cas du présent développement.

Par une intégration par partie de l'équation (152), nous obtenons l'équations de base du problème dynamique sous la forme:

$$\begin{aligned} & \left[ M_t \delta w_{,x} \right]_0^L - \left[ M_{t,x} \delta w \right]_0^L + \left[ M_a \delta \beta \right]_0^L + \int_0^L (Q - M_{a,x}) \delta \beta dx + \\ & \int_0^L \left[ M_{t,xx} + \left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \delta w dx = 0 \end{aligned} \quad (156)$$

L'équation (156) peut être transformée comme suit:

$$\begin{cases} Q - M_{a,x} = 0 \\ M_{t,xx} + \left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (157)$$

avec les conditions aux limites associées:

$$\left[ M_t \delta w_{,x} \right]_0^L - \left[ M_{t,x} \delta w \right]_0^L + \left[ M_a \delta \beta \right]_0^L = 0 \quad (158)$$

La prise en compte des propriétés des différentes couches permet d'exprimer l'équation (151) sous la forme:

$$\begin{cases} M_t = \int_{S_t} -z \sigma_{xx} dS_t = \int_{S_t} \left[ (2\mu + \lambda) (z^2 w_{,xx} - z f(z) \beta_{,x}) \right] dS_t \\ M_a = \int_{S_t} f(z) \sigma_{xx} dS_t = \int_{S_t} \left[ (2\mu + \lambda) (-z f(z) w_{,xx} + f^2(z) \beta_{,x}) \right] dS_t \\ Q = \int_{S_t} f_{,z} \sigma_{xz} dS_t = \int_{S_t} (f_{,z}^2 \beta \mu) dS_t \end{cases} \quad (159)$$

La substitution de l'équation.(159) dans l'équation.(157) conduit à un système d'équations différentielles pour  $w$  et  $\beta$  tel que:

$$\begin{cases} A_1 w_{,xxx} + A_2 \beta - A_3 \beta_{,xx} = 0 \\ A_0 w_{,xxx} - A_1 \beta_{,xxx} + \left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (160)$$

avec  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  des constantes définies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = \int_{S_t} [z^2 (2\mu + \lambda)] dS_t = \sum_{k=1}^5 \int_{S_k} [z^2 (2\mu_k + \lambda_k)] dS_k \\ A_1 = \int_{S_t} [zf(z)(2\mu + \lambda)] dS_t = \sum_{k=1}^5 \int_{S_k} [zf(z)(2\mu_k + \lambda_k)] dS_k \\ A_2 = \int_{S_t} [f_{,z}^2 \mu] dS_t = \sum_{k=1}^5 \int_{S_k} [f_{,z}^2 \mu_k] dS_k \\ A_3 = \int_{S_t} [f(z)^2 (2\mu + \lambda)] dS_t = \sum_{k=1}^5 \int_{S_k} [f(z)^2 (2\mu_k + \lambda_k)] dS_k \end{array} \right. \quad (161)$$

Une solution du système d'équations différentielles (160) est proposée en fonction du déplacement transverse  $w$  dans les travaux de Hu et al [99] sous la forme:

$$w(x, t) = A e^{i\Omega t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (162)$$

où  $n$  représente le mode de vibration et  $\Omega$  la pulsation complexe. En insérant l'équation (162) dans le système (160), nous obtenons la solution du problème dynamique à travers la valeur de la pulsation complexe donnée par:

$$\Omega^2 = \Omega_{m1}^2 \left[ 1 - \frac{A_1^2 \kappa^2}{A_0 (A_2 + A_3 \kappa^2)} \right] \quad (163)$$

Dans la solution (163), le terme  $\Omega_{m1}^2$  correspond à la pulsation complexe du modèle 1. Elle s'exprime sous la forme :

$$\Omega_{m1}^2 = \frac{A_0 \kappa^4}{\left( \sum_{k=1}^5 \rho_k S_k \right)} \quad (164)$$

où le paramètre  $\kappa$  est défini par:

$$\kappa = \frac{n\pi}{L} \quad (165)$$

Une fois, la solution du problème dynamique obtenue, nous pouvons alors déterminer la pulsation propre et le facteur de perte à l'aide des relations suivantes:

$$\begin{cases} \Omega^2 = \omega_0^2 (1 + \mathbf{j}\eta), \\ \eta = \frac{\Im(\Omega^2)}{\Re(\Omega^2)} \end{cases} \quad (166)$$

La fréquence propre s'exprime alors :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (167)$$

L'implémentation des formules ci-dessus, conduisant à la détermination de la fréquence propre et du facteur de perte, a été faite via le logiciel de programmation Python en accord avec les conditions aux limites définies à la Figure 5.2.

#### 5.4. Modélisation éléments finis: Technique du « Modal Strain Energy »(MSE)

Un modèle bidimensionnel sous la version Abaqus 6.10 de Dassault Systems est considéré pour réaliser des simulations numériques. Des géométries de type « Shell » avec de sections solides et homogènes sont utilisées pour la construction des poutres. Des éléments de type « CPS4R » sont utilisés dans le maillage de la structure (Figure 5.3). Les conditions aux limites en appui simple sont spécifiées conformément à la Figure 5.2.

En effet, le coin inférieur gauche de la poutre est en appui double ( $u_x = 0, u_z = 0, \theta_y \neq 0$ ) tandis que le coin inférieur droit est libre de se déplacer dans la direction  $x$  ( $u_x \neq 0, u_z = 0, \theta_y \neq 0$ ). Aussi, l'analyse modale est introduite par la définition d'un « step » en perturbation linéaire. Ceci aboutit à l'extraction des fréquences propres. Le problème aux valeurs propres associé à ce type d'analyse est résolu à travers l'algorithme « Lanczos eigensolver » de Abaqus.

La détermination du facteur de perte de la structure est faite par le biais d'un post-traitement du fichier ODB généré par Abaqus en utilisant le logiciel de programmation Python. Afin d'obtenir

la valeur du facteur de perte, la méthode du « modal strain energy » est appliquée. Cette technique a été récemment utilisée par le Maout et al. [103] pour l'optimisation de la conception d'une plaque sandwich hybride élastomère/composite. En effet, la technique de la MSE est utilisée conjointement dans une analyse impliquant la structure sans amortissement afin de déterminer son énergie de déformation [104]. Le facteur de perte de la structure pour le  $n^{ieme}$  mode de vibration est dans ce cas donné par:

$$\eta_s^n = \eta_v \frac{U_v^n}{U_T^n} \quad (168)$$

où  $\eta_v$ ,  $U_v^n$  and  $U_T^n$  représentent l'amortissement du matériau viscoélastique, l'énergie de déformation stockée dans la couche viscoélastique pour le  $n^{ieme}$  mode de vibration et l'énergie de déformation totale stockée dans toute la structure pour le  $n^{ieme}$  mode de vibration, respectivement.

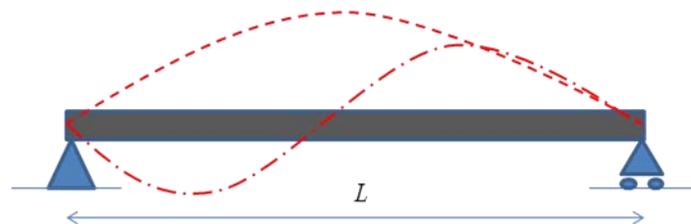


Figure. 5.2: Conditions aux limites du problème dynamique

L'évaluation de l'énergie de déformation  $U^n$  nécessite la définition de deux « steps » dans le script d'Abaqus. Le premier définit une analyse statique. Cette analyse statique consiste à récupérer des données géométriques telles que le volume des points d'intégration de Gauss *IVOL* non accessibles dans l'analyse modale. Ensuite, un second « step » traitant de l'analyse modale (linear perturbation analysis) permet d'obtenir la densité d'énergie de déformation par

unité de volume  $SENER$ . Par conséquent, l'énergie de déformation  $U^n$  est calculée dans la couche considérée par la relation:

$$U^n = \sum_{i=1}^N IVOL[i] \times SENER[i] \quad (169)$$

où  $N$  représente le nombre total de points d'intégration de Gauss dans cette couche. Des détails relatifs à la procédure d'implémentation (code Python) de l'énergie de déformation sont fournis dans l'annexe F.

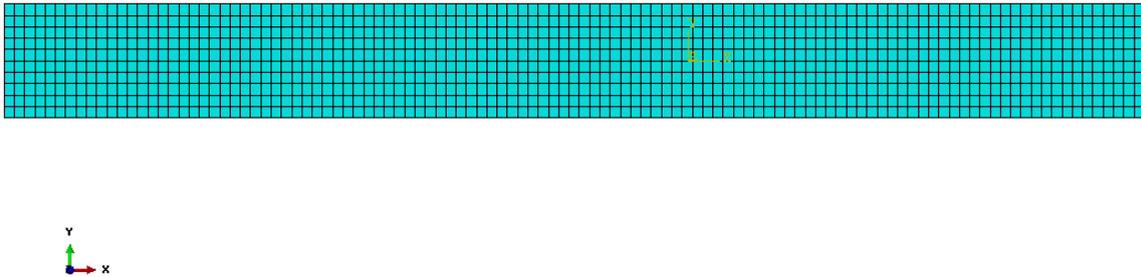


Figure. 5.3: Maillage de la structure

## 5.5. Applications numériques et discussions

Les matériaux élastiques et isotopes sont d'une part, considérés et leurs propriétés mécaniques données à travers leurs module de Young  $E_e$  et coefficient de Poisson  $\nu_e$ . Afin de réduire le cout de calcul lié à la non linéarité du problème par sa dépendance fréquentielle, le matériau viscoélastique est donné pour une fréquence de sollicitation spécifique. Ainsi, les propriétés linéaires viscoélastiques sont spécifiées en termes de module de Young  $E_v^*$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  tels que :

$$E_v^* = E_v (1 + \mathbf{j}\eta_v) \quad (170)$$

Rappelons que  $\nu$  demeure le paramètre de conception en termes d'auxétisme du matériau viscoélastique. Comme discuté par Hu et al [99], le rapport de rigidité  $E_v/E_e$  entre la couche viscoélastique et élastique joue un rôle prépondérant dans la réponse dynamique de la structure sandwich. A cet effet, il apparait que les modèles cinématiques comme le CLT et HSDT peuvent être utilisés dans le cas de couches viscoélastiques relativement rigides pour une prédiction précise du facteur de perte global de la structure.

Dans la présente analyse, et pour les modèles cinématiques considérés, il est admis que le module de stockage du matériau viscoélastique reste égal au module de Young du matériau élastique ( $E_v/E_e = 1$ ). Les propriétés mécaniques et géométriques des couches considérées pour les applications numériques sont résumées dans le tableau 5.1

Tableau 5.1: Propriétés mécaniques et physiques

$E_e$	$\rho_v$	$\rho_e$	$H_t$	$\nu_e$	$\eta_v$
69E+9 Pa	968kg/m <sup>3</sup>	2770kg/m <sup>3</sup>	0.01m	0.3	0.3

Au delà du coefficient de Poisson du matériau  $\nu$  viscoélastique qui est le paramètre de conception, d'autres paramètres tels que le rapport d'épaisseur des couches  $H_v/H_e$  et le rapport de longueur de la poutre  $L/H_t$  sont étudiés dans la réponse globale de la structure.

### 5.5.1. Influence du coefficient de Poisson

L'influence du coefficient de Poisson de la couche viscoélastique sur les performances amortissantes de la structure est étudiée pour deux valeurs  $\nu = 0.3$  et  $\nu = -0.7$  correspondant respectivement à un matériau conventionnel et à un matériau auxétique. La réponse de la structure est déterminée suivant les trois premiers modes de vibration (Figures. 5.5-5.6-5.7) en termes de fréquences propres de vibration et de facteur de perte. Il est particulièrement observé (Tableau 5.2) une augmentation de ces propriétés avec le coefficient de Poisson négatif.

La Figure 5.4 montre l'évolution du facteur de perte normalisé au premier mode de vibration en fonction du coefficient de Poisson pour les deux types d'analyse : la formulation analytique et la simulation EF par la technique du « MSE ». Ces deux méthodes conduisent à des résultats parfaitement identiques. Les plus grandes valeurs du facteur de perte sont obtenues pour des valeurs de coefficient de Poisson comprises entre  $-0.9 \leq \nu \leq -0.7$ .

Malgré la différence relative à la fonction de cisaillement dans les différents modèles cinématiques, il est observé des résultats très similaires d'un modèle à l'autre. En effet, la fonction de cisaillement  $f(z)$  a montré une faible influence sur les réponses modales. La même observation est rapportée dans [99] où l'analyse a été conduite sur une structure à 3 couches et dont les propriétés restent identiques à celles du tableau 5.1. Aussi, pour les différents modes de vibration étudiés, il est observé que le modèle 1 donne des valeurs constantes du facteur de perte. Ceci peut s'expliquer par le fait que la déformation due au cisaillement transverse est négligée à travers la fonction de cisaillement. Il découle alors que la normale au plan moyen reste droite et toujours perpendiculaire à la surface moyenne après déformation. Hormis le modèle 1, le facteur de perte croît légèrement pour les modes de vibration élevés. Cette conclusion est validée par les résultats obtenus par la simulation numérique.

Tableau 5.2: fréquences propres et facteur de perte normalisé pour  $H_v/H_e = 1$ ,  $L/H_t = 50$

	Modélisation analytique								FEM	
	Modèle-1		Modèle-2		Modèle-3		Modèle-4		$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$
	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$
$f^{1st}$	122.114	131.341	122.044	131.304	122.031	131.302	122.031	131.302	121.28	130.38
$\eta^{1st}/\eta_\nu$	0.208	0.31536	0.20821	0.31560	0.20833	0.31561	0.20831	0.31560	0.20631115	0.3125281548
$f^{2nd}$	488.459	525.367	487.342	524.777	487.124	524.738	487.126	524.733	482.37	518.81
$\eta^{2nd}/\eta_\nu$	0.208	0.31536	0.20887	0.31630	0.20932	0.31635	0.20925	0.31633	0.20706174	0.3116238872

$f^{3rd}$	1099.03	1182.07	1093.40	1179.09	1092.31	1178.90	1092.31	1178.87 317926	1073.1	1155.3
$\eta^{3rd}/\eta_v$	0.208	0.31536	0.20994	0.31746	0.21095	0.31757	0.21081	0.31752	0.20854406	0.3101294762

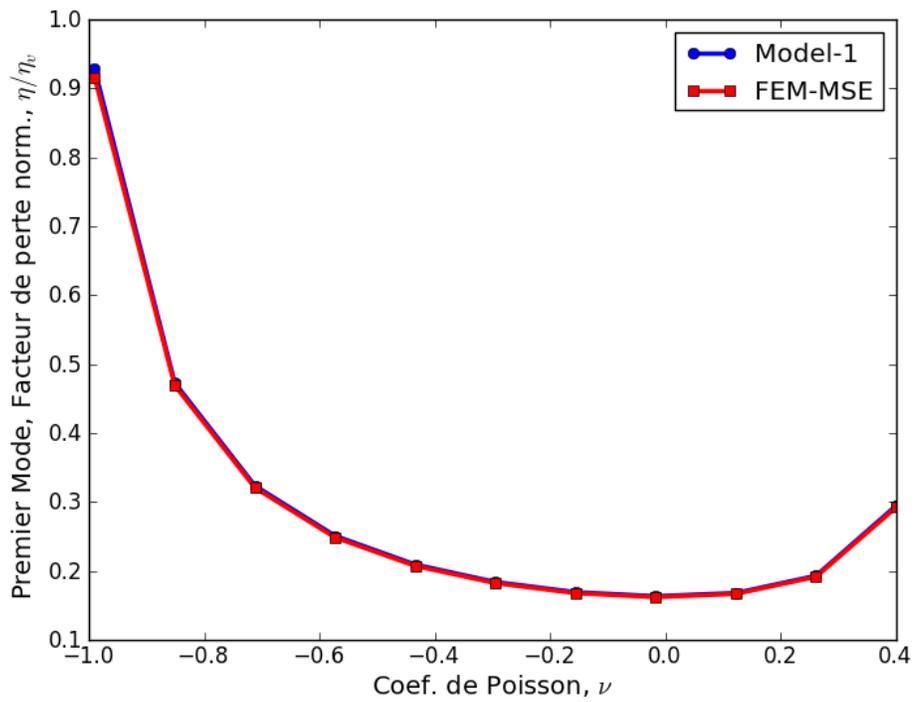


Figure. 5.4: Facteur de perte normalisé versus le coefficient de Poisson

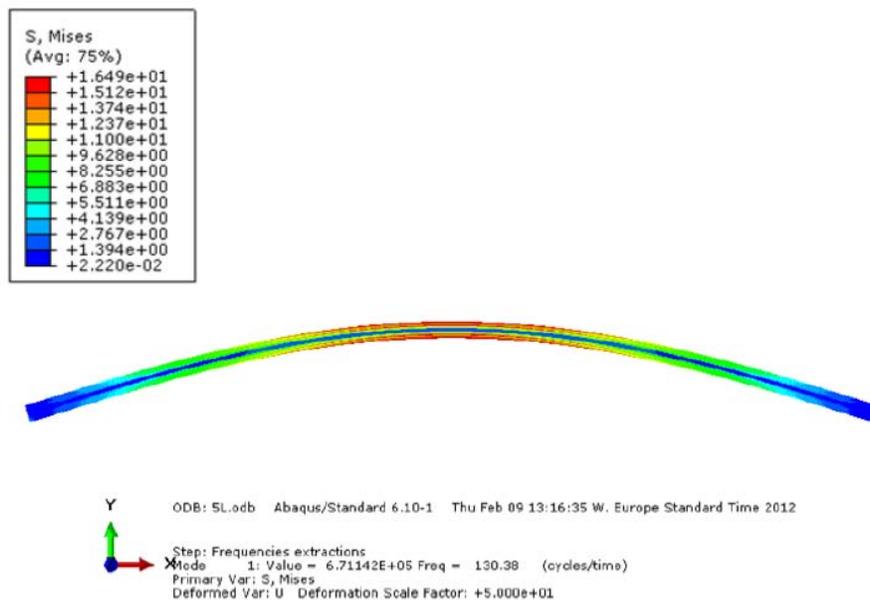


Figure. 5.5: Premier mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques

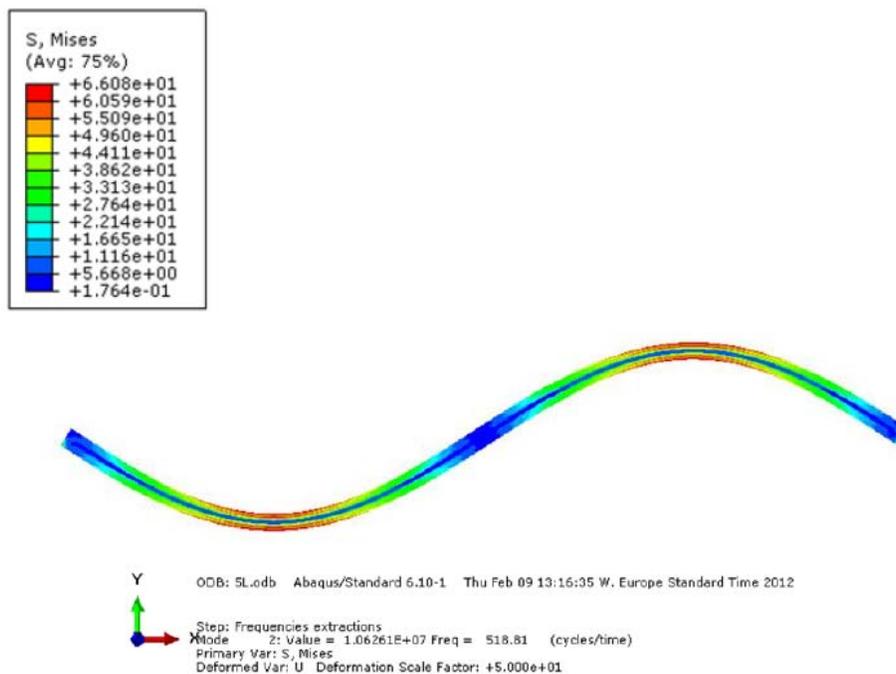


Figure. 5.6: Deuxième mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques

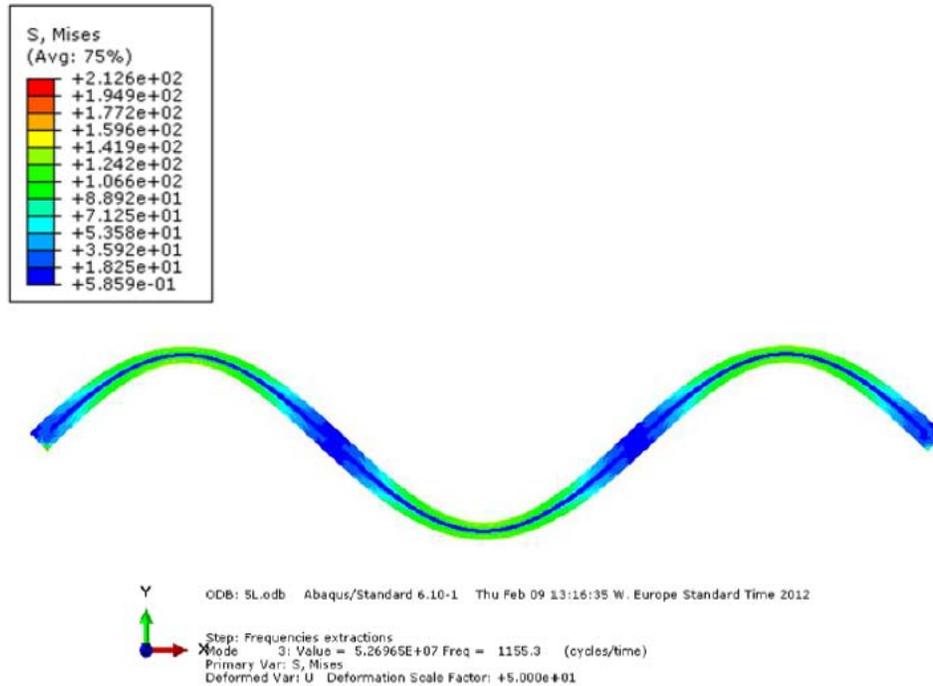


Figure. 5.7: Troisième mode de vibration du sandwich avec des couches auxétiques

### 5.5.2. Influences d'autres paramètres du modèle

Les impacts d'autres paramètres de conception tels que le rapport de longueur  $L/H_t$  et celui des épaisseurs des couches viscoélastiques et élastiques  $H_v/H_e$  sont étudiés en fonction des paramètres dynamiques du premier mode et ce pour les valeurs de coefficient de Poisson étudiées précédemment.

- *Influence du rapport de longueur  $L/H_t$*

Le tableau 5.3 présente les résultats issus de cette analyse pour une valeur constante du rapport de longueur  $H_v/H_e = 1$ . Le coefficient de Poisson négatif maintient élevés les paramètres modaux par rapport au coefficient de Poisson conventionnel. Aussi, il est constaté que la fréquence propre à ce premier mode de vibration décroît quand la longueur de la poutre devient plus grande.

Exceptées les valeurs constantes données par le modèle 1, une légère décroissance du facteur de perte est notée en fonction de l'augmentation de la longueur pour les autres modèles. Cette

observation est validée par les résultats issus de la simulation numérique. Pour de faibles rapport de longueur tels que  $L/H_t = 10$ , l'écart relatif en termes de fréquence propre entre la méthode analytique et la simulation numérique n'excède pas 7.5% et ceci pour les deux valeurs de coefficient de Poisson analysées (conventionnel et auxétique.)

Tableau 5.3: Influence du rapport de longueur pour  $H_v/H_e = 1$ .

$L/H_t$		Modélisation analytique								FEM	
		Modèle-1		Modèle-2		Modèle-3		Modèle-4		$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$
		$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$		
$L/H_t = 10$	$f^{1st}$	3052.87	3283.544	3009.994	3260.715	3001.827	3259.215	3001.886	3259.009	2843.1	3072.3
	$\eta^{1st}/\eta_\nu$	0.208	0.315367	0.213318	0.321152	0.216040	0.321438	0.215646	0.321308	0.2103318	0.2985052
$L/H_t = 40$	$f^{1st}$	190.804	205.2215	190.6338	205.1314	190.6004	205.1254	190.6006	205.1246	189.29	203.52
	$\eta^{1st}/\eta_\nu$	0.208	0.315367	0.208341	0.315733	0.208518	0.315752	0.208493	0.315744	0.2064473	0.3123371
$L/H_t = 100$	$f^{1st}$	30.5287	32.83544	30.52436	32.83313	30.52351	32.83298	30.52351	32.83296	30.363	32.638
	$\eta^{1st}/\eta_\nu$	0.208	0.315367	0.208054	0.315426	0.208083	0.315429	0.208079	0.315428	0.2061245	0.3127572

▪ *Influence du rapport d'épaisseur  $H_v/H_e$*

Les résultats du tableau 5.4 concernent l'influence du rapport d'épaisseur entre la couche viscoélastique et élastique. Ici, nous observons que la fréquence propre et le facteur de perte augmentent avec l'accroissement de la valeur du rapport d'épaisseur. Pour tous les modèles étudiés, la solution au problème dynamique reste proche de la solution obtenue par le « MSE ». A ce niveau aussi, l'effet bénéfique du coefficient de Poisson négatif peut être ressorti.

Tableau 5.4: Influence du rapport d'épaisseur pour  $L/H_t = 50$ ,

$H_v/H_e$	Modélisation analytique								FEM		
	Modèle-1		Modèle-2		Modèle-3		Modèle-4		$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	
	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$	$\nu = 0.3$	$\nu = -0.7$			$\nu = 0.3$
$H_v/H_e = 10$	$f^{1st}$	159.37	199.939	159.283	199.893	159.265	199.88	159.26	199.884	158.54	198.87
	$\eta^{1st}/\eta_v$	0.7610	0.84818	0.76119	0.84824	0.76119	0.8482	0.7611	0.84823	0.75969	0.846907
$H_v/H_e = 1$	$f^{1st}$	122.11	131.341	122.044	131.304	122.031	131.30	122.03	131.302	121.28	130.38
	$\eta^{1st}/\eta_v$	0.208	0.31536	0.20821	0.31560	0.20833	0.3156	0.2083	0.31560	0.20631	0.312528
$H_v/H_e = 0.1$	$f^{1st}$	107.23	108.128	107.172	108.076	107.160	108.07	107.16	108.070	106.49	107.39
	$\eta^{1st}/\eta_v$	0.0222	0.03832	0.02226	0.03850	0.02229	0.0385	0.0222	0.03859	0.02246	0.038572

## 5.6. Conclusion

Afin de mieux appréhender les incidences de la prise en compte de l'effet auxétique dans les composites sandwichs, une structure à 5 couches dans laquelle des couches viscoélastiques et auxétiques sont contraintes par des couches élastiques, a été étudiée dans ce chapitre. La solution dynamique d'un tel problème a été construite par le biais du principe des travaux virtuels. Ceci a permis l'implémentation des paramètres modaux tels que la fréquence propre et le facteur de perte. A travers l'introduction de la fonction de cisaillement  $f(z)$ , différentes théories relatives aux sandwichs laminés sont formulées par le biais de 4 modèles. Par ailleurs, par l'utilisation de la technique du « Modal Strain Energy (MSE) », une simulation par éléments finis est réalisée afin de confronter les résultats analytiques.

Pour tous les modèles, il est observé un faible effet de la fonction de cisaillement sur la réponse globale de la structure. Les résultats présentés dans ce chapitre, montrent aussi une amélioration des réponses dynamiques par la prise en compte de l'auxétisme des couches. La même observation est faite pour les différents modèles étudiés.

En général, un bon accord est noté entre les résultats analytiques et numériques. Par conséquent, la diversification de ce type de composite peut être envisagée tenant compte des besoins technologiques en termes de fréquences de vibration et de facteur de perte.

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale

### **Bilan**

L'objectif premier de ce travail de thèse est la conception et l'amélioration des propriétés amortissantes des matériaux composites renforcés par d'autres matériaux non conventionnels appelés « matériaux auxétiques ». L'analyse d'un tel composite passe d'abord par la compréhension, en lui-même du mécanisme régissant la déformation au niveau des matériaux auxétiques. Une analyse de la littérature nous révèle que dans la plus part des cas, le comportement auxétique, d'un point de vue procédé d'élaboration, résulte d'une altération de la microstructure de matériaux initialement conventionnels (ayant un coefficient de poisson positif). Aussi, une large gamme d'études du comportement auxétique par le biais des outils d'homogénéisation numérique, asymptotique ou périodique est notée dans les cas où le comportement auxétique apparaissant d'un effet « structure ». La cellule d'étude à ce niveau restant un élément de volume (ou de surface) périodique.

Par ailleurs, les objectifs du chapitre premier de cette thèse consistent à mettre un accent particulier sur le nombre limité de travaux disponibles sur le comportement auxétique d'un point de vue « matériau » c'est-à-dire l'étude du comportement alliant la forme, les orientations et les différentes propriétés des phases constitutives.

Ainsi, pour mieux comprendre, une telle approche, nous avons posé dans le chapitre 2, les bases théoriques prenant en compte les outils de la micromécanique des matériaux hétérogènes. Eu égard aux principales microstructures recensées dans la littérature à savoir la microstructure multi-enrobée du vide et celle de la structure nid d'abeille inversée dite « réentrante », le formalisme micromécanique du modèle de l'inclusion multi-enrobée développé par Lipinski et al. [14] a été rappelé d'une part. D'autre part, le problème de la paire d'inclusions hétérogènes dans un milieu continu et infini a été introduit. Ceci a permis, grâce aux conditions aux limites sur le VER défini et par les équations d'équilibre sur ce dernier, l'obtention d'une équation aux dérivées partielles de type Navier. L'introduction à ce niveau d'un milieu dit de « référence » permet la décomposition du champ local des propriétés élastiques en une partie fluctuante ajoutée à ce milieu. La détermination du champ de déplacement, solution de l'équation aux dérivées partielles, passe par l'utilisation du

formalisme du tenseur de Green. Cette solution connue sous le nom d'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller a donc permis le calcul de la déformation à l'intérieur de chaque inclusion. En effet, c'est une déformation qui s'obtient par une équation implicite mettant en exergue une forme généralisée du tenseur d'interaction entre les inclusions  $\mathbf{T}^{IJ}$ . Ce tenseur d'interaction dépend principalement de la géométrie des inclusions mises en œuvre et du milieu de référence. Dans le cas d'une modélisation à travers des inclusions ellipsoïdales, la technique de l'inclusion ellipsoïdale d'Eshelby appliquée à l'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller nous a conduit à une forme plus élaborée des champs de déformations dans la paire d'inclusions, et par voie de conséquence, des relations permettant le calcul du tenseur d'interaction. Dans sa version mono-site, le tenseur d'interaction  $\mathbf{T}^{II}$  reste relativement simple d'accès et peut être obtenu analytiquement à partir du tenseur d'Eshelby pour des géométries particulières. En revanche compte tenu de sa dépendance du tenseur de Green qui apparaît complexe à évaluer pour les milieux anisotropes, le calcul du tenseur d'interaction dans sa version multi-site  $\mathbf{T}^{IJ}$  reste difficile à évaluer dans la configuration adoptée dans cette étude. Dans ce chapitre, nous avons proposé un calcul numérique de ce tenseur.

Afin d'atteindre l'objectif concernant la compréhension en lui-même du mécanisme régissant la déformation au niveau des matériaux auxétiques, nous avons appliqué dans le chapitre 3, les formalismes micromécaniques développés à la microstructure multi enrobée du vide d'une part et à celle dite « réentrante » d'autre part. Les résultats analytiques issus des calculs micromécaniques indiquent clairement que le comportement auxétique ne saurait être décrit par l'équation cinématique intégrale comme solution au problème du matériau hétérogène. D'une part, les résultats obtenus concernant la microstructure multi enrobée du vide restent du moins en désaccord avec ceux proposés par Stagni où le comportement auxétique a été observé au delà d'une fraction volumique de porosité. Supportés par une modélisation Eléments Finis, les résultats indiquent que la microstructure multi enrobée ne peut donner naissance à un tel comportement. Antérieurement, une étude analytique sur un composite biphasé à inclusions sphériques a permis de définir le domaine de validité des matériaux auxétiques. Il ressort de là que l'auxétisme ne peut être obtenu si et seulement si une des phases constitutives est initialement auxétique. D'autre part, au niveau de la microstructure « ré-entrante », les résultats analytiques et numériques indiquent clairement une faible prise en compte de l'interaction des inclusions les unes par rapport aux autres. Une étude Eléments Finis nous a permis de constater à ce niveau que le comportement auxétique ne peut résulter

que d'inclusions inter-connectées. Ce chapitre a donc montré qu'il faut des conditions cinématiques supplémentaires à l'équation intégrale de Dederichs et Zeller.

Les cas d'inclusions auxétiques ont été évoqués dans la littérature en l'occurrence dans les travaux de Wei et al. En effet, l'utilisation de ce genre d'inclusions dans le cas d'une matrice viscoélastique, en termes de réponses d'amortissement, a été étudiée dans le chapitre 4. Une fois, le principe de correspondance élastique-viscoélastique rappelé dans le domaine de Carson Laplace, des propriétés amortissantes, telles que le module de stockage et le facteur de perte, ont été analysées pour une matrice PVB renforcée d'inclusions sphériques, élastiques et auxétiques. Les résultats issus du schéma incrémental comme technique d'homogénéisation, montrent à ce niveau l'impact significatif des paramètres de conception tels que le rapport de rigidité  $Q$  des phases et le coefficient de Poisson  $\nu$  des inclusions. Il ressort de cette analyse que pour des applications structurelles, le composite constitué d'une matrice PVB restait le meilleur choix pour conserver le facteur de perte, c'est à dire l'amortissement. Pour un tel composite, dans lequel le module de stockage reste excessivement faible, le rapport de rigidité  $Q$  joue un rôle important. Ce dernier, combiné au coefficient de Poisson négatif, améliore de façon très significative le module de stockage et le facteur de perte du composite.

Enfin, au niveau des composites à structures tels que les sandwichs, l'effet de l'utilisation des couches viscoélastiques et auxétiques sur les propriétés vibratoires a été étudiée dans le chapitre 5. Pour ce faire, une structure sandwich à 5 couches, comportant deux couches viscoélastiques et auxétiques contraintes entre les 3 couches élastiques, a été considérée. La réponse dynamique de cette structure, en termes de fréquence propre et de facteur de perte, a été proposée par le biais d'une cinématique intégrant le déplacement longitudinale du plan moyen, la fonction de cisaillement caractérisant l'amortissement dans les couches et une rotation additionnelle de la normale au plan moyen. L'application du principe des travaux virtuels nous a donc permis de prendre en compte l'effet du coefficient de Poisson négatif des couches viscoélastiques dans la réponse en fréquence propre et facteur de perte. Il ressort que ces deux paramètres restent significativement améliorés par l'auxétisme des couches viscoélastiques. Afin de valider ces résultats analytiques, une modélisation Eléments finis basée sur la méthode des énergies de déformations a été conduite. Les résultats analytiques et numériques restent en bonne concordance.

## **Perspectives**

Diverses pistes d'approfondissement de ce travail de thèse restent ouvertes. Il s'agira essentiellement de :

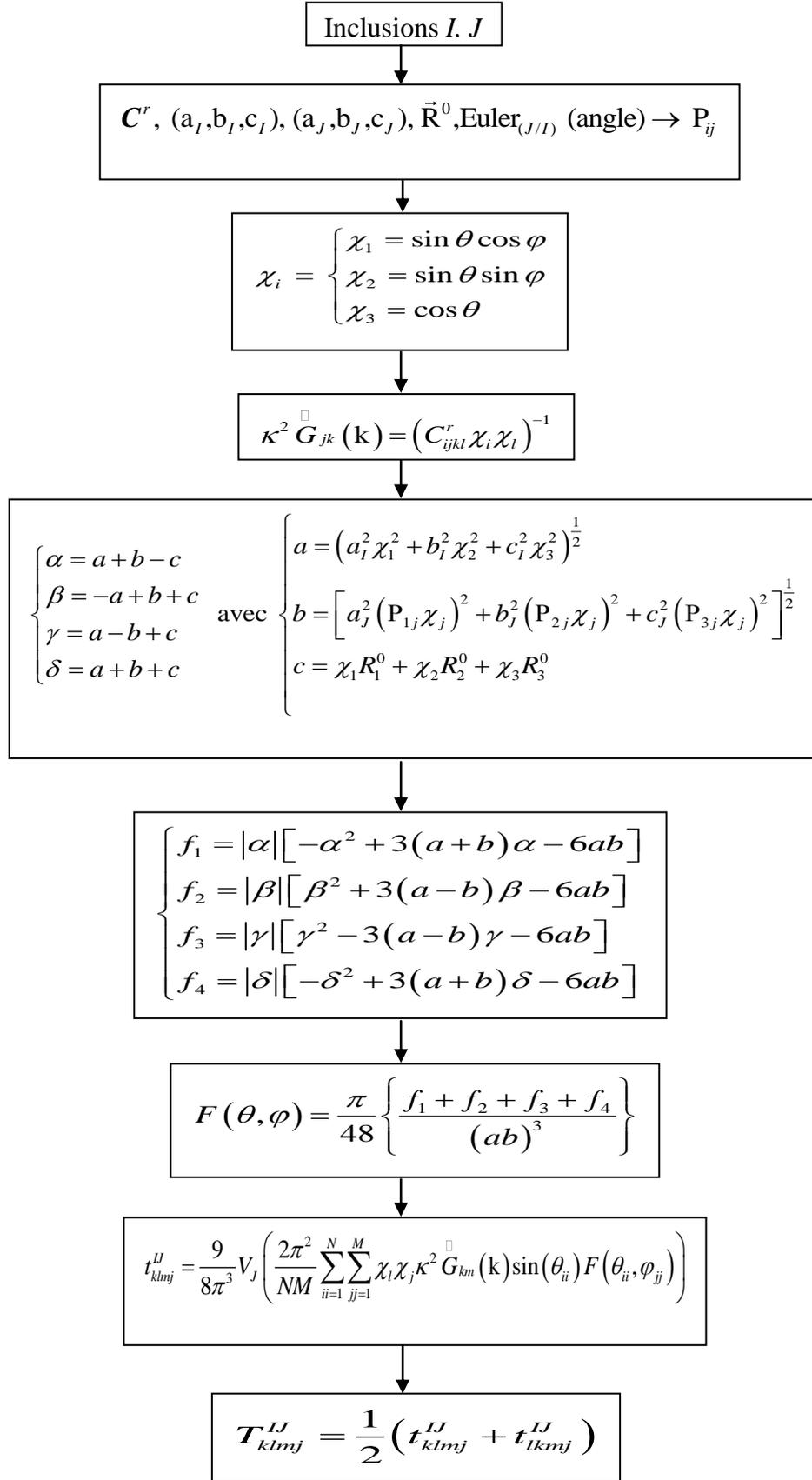
- L'Intégration des conditions cinématiques supplémentaires devant prendre en compte l'unicité du déplacement aux extrémités de deux inclusions dans l'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller. L'utilisation de théories prenant en compte en tout point du matériau une rotation supplémentaire ajoutée aux degrés de liberté de translations, comme celle des milieux de Cosserat, peuvent être envisagées;
- L'élargissement des travaux à l'étude des propriétés acoustiques au niveau des structures sandwichs telles que la perte de la transmission de bruit (sound transmission loss, STL). Des études à ce niveau sont en cours actuellement.

# Annexes

---

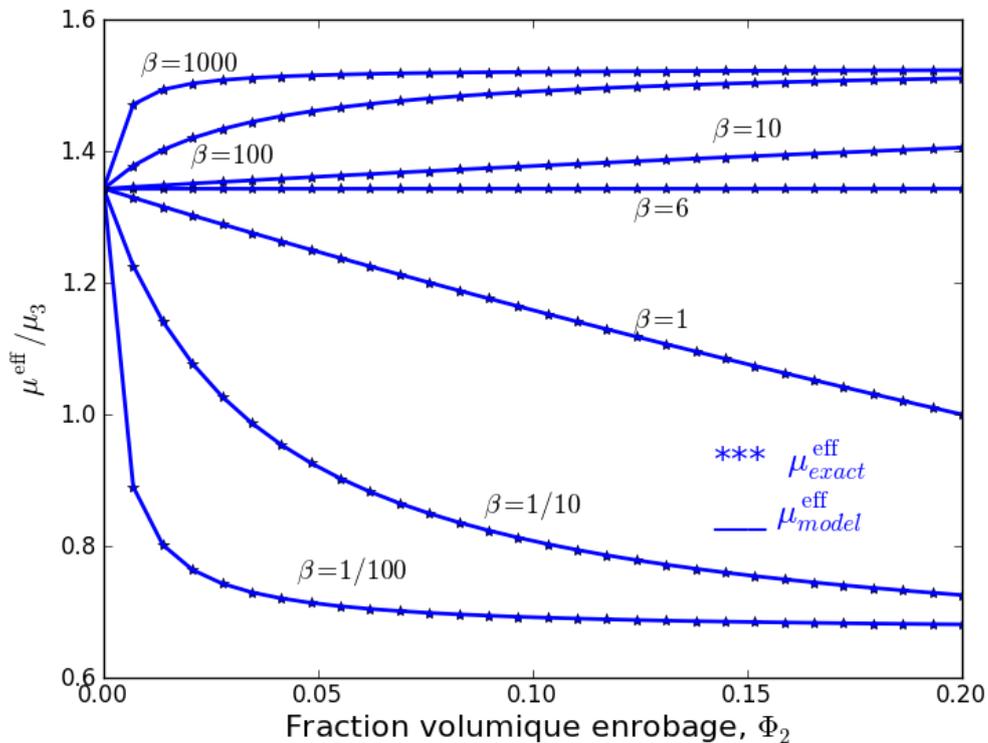
Annexes

## Annexe A : Algorithme d'implémentation du tenseur d'interaction $T^{IJ}$

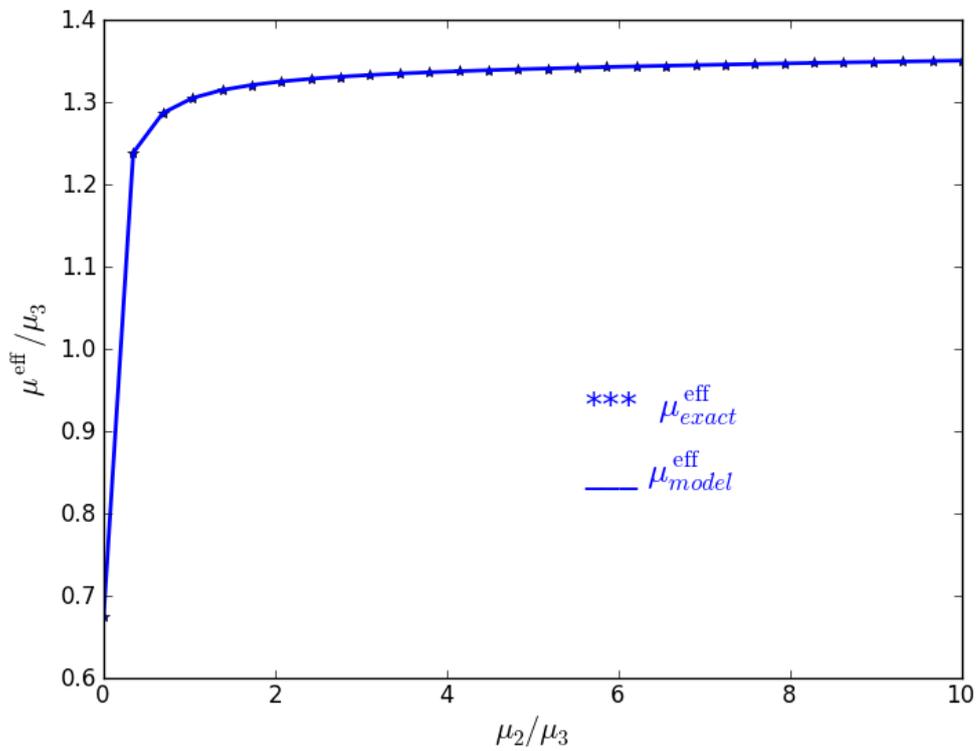


## Annexe B : Validation de la solution exacte de Hervé et Zaoui [65].

Considérons un composite multicouche constitué de couches d'enrobage et de matrice sphériques sur une inclusion de même géométrie. Introduisons les paramètres matériaux suivants tels que  $\beta = \mu_2 / \mu_3$  et  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ ,  $\mu_1 / \mu_3 = 6$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0.2$ . L'indice 1 représente l'inclusion tandis que les indices 2 et 3 correspondent à l'enrobage et la matrice respectivement. L'ensemble étant maintenant plongé dans le milieu effectif dont les propriétés sont recherchés. La figure B.1 montre l'évolution du module de cisaillement effectif normalisé à la matrice  $\mu^{\text{eff}} / \mu_3$  en fonction de la fraction volumique de l'enrobage  $\varphi_2$  d'une part, et en fonction du module de cisaillement de l'enrobage normalisé à la matrice  $\mu_2 / \mu_3$  d'autre part. Les résultats montrent un bon agreement entre la présente modélisation micromécanique et les solutions proposées par Hervé and Zaoui [65]



(a)



(b)

Figure. B.1 (a) Module de cisailment effectif normalisé  $\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu_3}$  versus la fraction volumique

d'enrobage  $\varphi_2$  pour  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ ,  $\mu_1 / \mu_3 = 6$ ,  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0.2$ ,

(b) Module de cisailment effectif normalisé  $\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu_3}$  versus le module de cisailment normalisé

de l'enrobage  $\frac{\mu_2}{\mu_3}$  pour  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ ,  $\mu_1 / \mu_3 = 6$ ,  $\varphi_1 = 0.18$ ,  $\varphi_2 = 0.02$

## Annexe C : Détails de la procédure d'implémentation des centres et orientations des inclusions dans la version multi-site

Soient  $X$  tel que  $X = \frac{l \cos \alpha + e}{2}$  et  $Y$  tel que  $Y = \frac{l \sin \alpha}{2}$

- Définition des centres de coordonnées des inclusions

$$\left\{ \begin{array}{l} I1 = (X, Y, 0) \\ I2 = (-X, Y, 0) \\ I3 = (0, 0, 0) \\ I4 = (2X, 2Y, 0) \\ I5 = (X, 3Y, 0) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} I6 = (-X, 3Y, 0) \\ I7 = (-2X, 2Y, 0) \\ I8 = (-3X, Y, 0) \\ I9 = (-l - e, 0, 0) \\ I10 = (-3X, -Y, 0) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} I11 = (-X, -Y, 0) \\ I12 = (X, -Y, 0) \\ I13 = (3X, -Y, 0) \\ I14 = (l + e, 0, 0) \\ I15 = (3X, Y, 0) \end{array} \right.$$

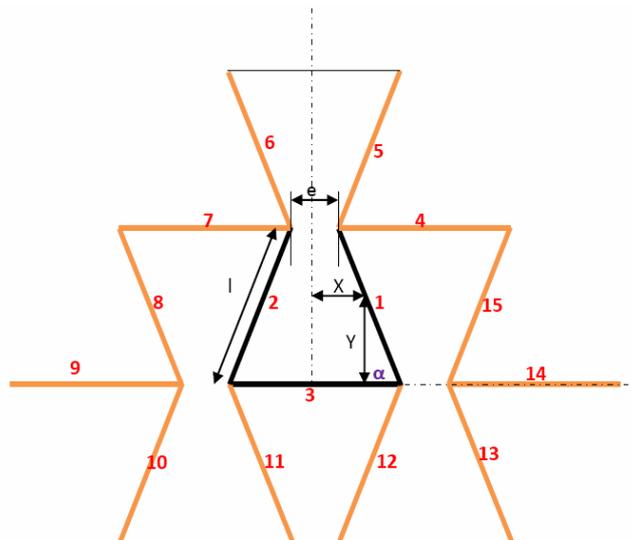


Figure C.1 : Définition des coordonnées, orientations et voisins en calcul multi-site

- Définition des orientations des inclusions

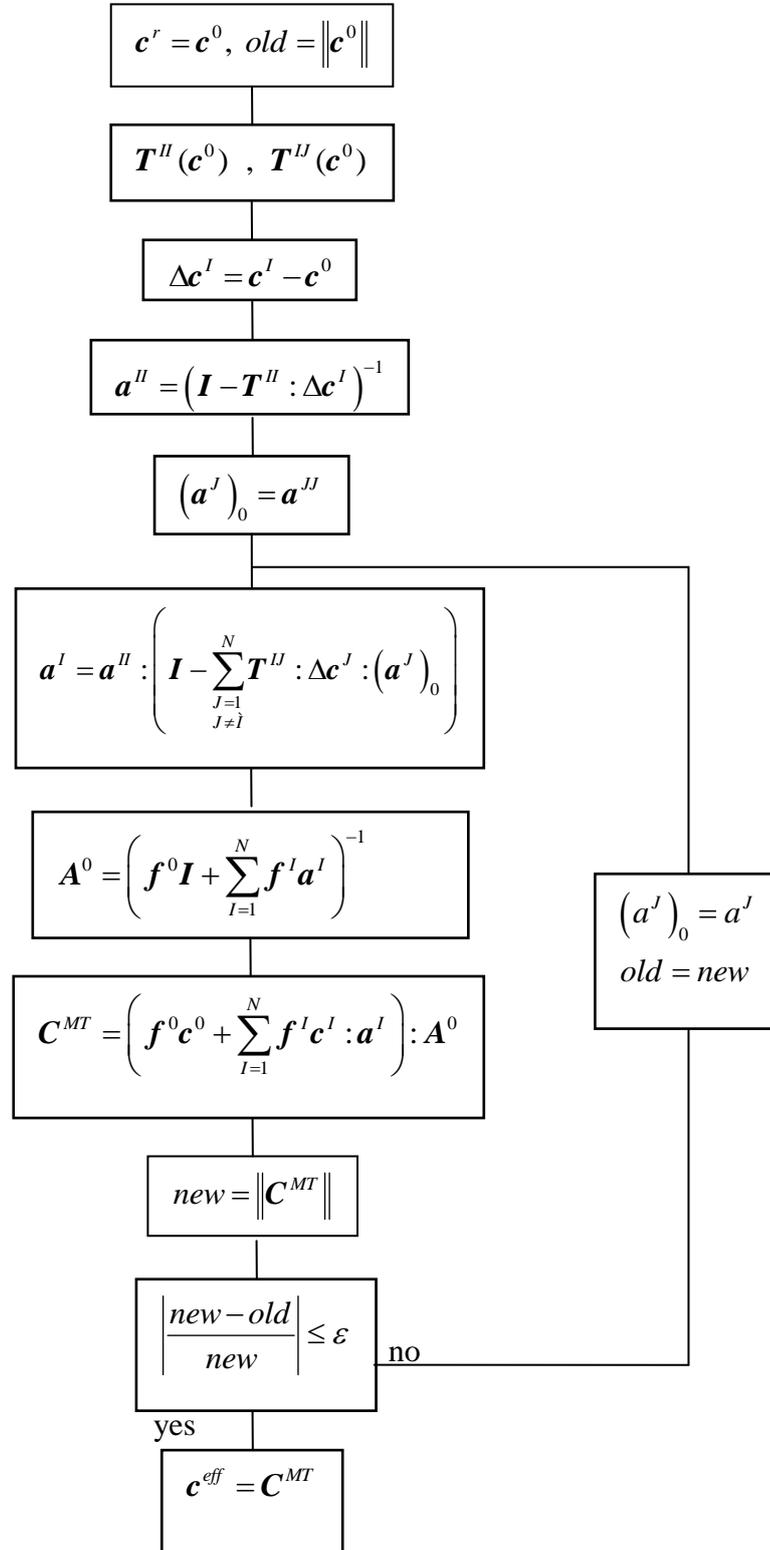
Les orientations sont définies suivant les angles d'Euler.

$$\left\{ \begin{array}{l} O1 = (-\alpha, 0, 0) \\ O2 = (\pi + \alpha, 0, 0) \\ O3 = (0, 0, 0) \end{array} \right.$$

- L'orientation des inclusions voisines de ces trois principales inclusions se déduisent de l'orientation de ces dernières. Ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} O4 = O3 \\ O5 = O2 \\ O6 = O1 \\ O7 = O3 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} O8 = O1 \\ O9 = O3 \\ O10 = O2 \\ O11 = O1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{l} O12 = O2 \\ O13 = O1 \\ O14 = O3 \\ O15 = O2 \end{array} \right\}$$

## Annexe D: Algorithme de programmation du schéma Mori-Tanaka en multi-site



## Annexe E: Schéma auto cohérent généralisé viscoélastique (Generalized Self-Consistent scheme, GSC)

Le formalisme du GSC traite de la notion d'inclusion composite constituée de plusieurs phases. La matrice est ici représentée par une couche d'enrobage. L'inclusion composite constituée du noyau (l'inclusion) et de son enrobage (matrice) est alors noyée dans le milieu homogène équivalent dont les propriétés demeurent à déterminer. Une telle approche conduit alors à des équations implicites compte tenu du fait que  $\hat{\mathbf{L}}^R = \hat{\mathbf{L}}^{GSC}$ . Ce concept a été utilisé dans [77] pour prédire les propriétés viscoélastiques d'hétérogénéités multi-enrobées et récemment par Azoti et al. [105] pour l'analyse de l'aptitude des modèles micromécaniques à prédire le comportement auxétiqne dans les composites.

Le formalisme du GSC, adopté ici est basé sur les développements de Hervé et Zaoui [72] à travers le modèle à trois phases proposé initialement par Christensen et Lo [64].

Dans la suite, les indices 1 et 2 sont relatifs à la matrice et à l'inclusion respectivement. La solution élastique de deux problèmes basiques de pure dilatation sous une pression hydrostatique et d'un cisaillement pur à l'infini [72], peut être généralisée au cas viscoélastique. Ceci conduit à l'expression suivante du module de compressibilité  $\hat{\kappa}^{GSC}$  :

$$\hat{\kappa}^{GSC} = \hat{\kappa}_1 + \frac{f(\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)}{1 + (1-f)(\hat{\kappa}_2 - \hat{\kappa}_1)/[\hat{\kappa}_1 + (4/3)\hat{\mu}_1]} \quad (D.1)$$

Le module de cisaillement viscoélastique  $\hat{\mu}^{GSC}$  est la racine positive de l'équation de second ordre suivant :

$$A \left( \frac{\hat{\mu}^{GSC}}{\hat{\mu}_1} \right)^2 + 2B \left( \frac{\hat{\mu}^{GSC}}{\hat{\mu}_1} \right) + C = 0 \quad (D.2)$$

Dans (A1),  $f$  désigne la fraction volumique des inclusions. L'introduction d'une nouvelle variable  $X = \hat{\mu}^{GSC}/\hat{\mu}_1$  permet la réécriture de (D.2) comme suit:

$$(AX - C)(X - 1) = 525X\alpha(1 - \hat{\nu}_1)^2 f \chi_2 \quad (D.3)$$

avec les constantes  $A$ ,  $C$ ,  $\alpha$  and  $\chi_2$  telles que:

$$\begin{aligned} A &= -4[\chi_3 - 2\alpha(4 - 5\hat{v}_1)f][\chi_1 f^{7/3} - \chi_2(7 - 10\hat{v}_1)] - 126\alpha\chi_2 f(1 - f^{2/3})^2 \\ C &= -[\chi_3 + \alpha(7 - 5\hat{v}_1)f][4\chi_1 f^{7/3} + \chi_2(7 + 5\hat{v}_1)] - 126\alpha\chi_2 f(1 - f^{2/3})^2 \\ \alpha &= \frac{\hat{\mu}_2}{\hat{\mu}_1} - 1 \\ \chi_2 &= (7 + 5\hat{v}_2)(1 + \alpha) + 4(7 - 10\hat{v}_2) \end{aligned} \tag{D.4}$$

Les constantes  $\chi_1$  et  $\chi_3$  sont alors spécifiées par:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= (49 - 50\hat{v}_1\hat{v}_2)\alpha + 35(1 + \alpha)(\hat{v}_2 - 2\hat{v}_1) + 35(2\hat{v}_2 - \hat{v}_1) \\ \chi_3 &= 2(1 + \alpha)(4 - 5\hat{v}_1) + 7 - 5\hat{v}_1 \end{aligned} \tag{D.5}$$

Tableau E.1: Séries de Prony pour les matériaux *A* et *B*

Stiff (A)				Soft (B)			
Shear		Bulk		Shear		Bulk	
$\tau_i$	$\mu_i$	$\tau_i$	$\kappa_i$	$\tau_i$	$\mu_i$	$\tau_i$	$\kappa_i$
3	3.162	10	40	0.032	2.512	0.1	3
10	17.783			0.100	10.	0.316	0.1
32	100			0.316	56.234		
100	316.228			1	316.228		
316	1,000			3.162	1000		
1,000	5,623.413			10	199.526		
3,162	10,000			31.623	50.119		
10,000	562.341			100	19.953		
31,623	141.254			316.228	12.589		
100,000	56.234			1000	2.512		
316,228	17.783			3,162.278	1.698		
1,000,000	5.623			10,000	1.202		
3,162,278	3.162			31,622.777	1.148		
10,000,000	1.778			100,000	1.096		

$$\mu_A^0 = 17948.761 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \kappa_A^0 = 48000 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu_B^0 = 1677.979 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \kappa_B^0 = 3300 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu_A^\infty = 100 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \kappa_A^\infty = 8000 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu_B^\infty = 3.162 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \kappa_B^\infty = 200 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

## Annexe F: Implémentation de la méthode des énergies de déformation (Modal Strain Energy) via un script Python utilisé dans Abaqus 6.10.

---

```
10 #-----
11 #!/usr/bin/env python
12
13 import Numeric
14 from Numeric import array
15 from time import time, strftime, localtime
16
17
18 def Odb_2D_5LAYERS(odb, stepName, stepName2, eta):
19     """
20     Strain Energy Method for 2D 5-layered sandwich composite
21     -----
22     Inputs
23     -----
24     odb : odb file resulting of the analysis
25     stepName : Name of the eigenfrequencies analysis step
26     stepName2 : Name of static step
27     eta: loss factor of the viscoelastic layer
28     -----
29     outputs
30     -----
31     ETA_LISTE : Liste of modal loss factor of the structure
32     """
33
34     VISC01 = odb.rootAssembly.instances['PART-3-1'].elementSets['SET-2']
35     VISC02 = odb.rootAssembly.instances['PART-3-1'].elementSets['SET-4']
36     ALLSTRUCT = odb.rootAssembly.instances['PART-3-1'].elementSets['SET-6']
37
38     NumberModes = len(odb.steps[stepName].frames)
```

```
• 38 NumberModes = len(odf.steps[stepName].frames)
• 39
• 40 Frame2 = odf.steps[stepName2].frames[-1]
• 41
• 42 IVOL = Frame2.fieldOutputs['IVOL']
• 43 IVOL_VISCO1 =IVOL.getSubset(region = VISCO1)
• 44 IVOL_VISCO2 =IVOL.getSubset(region = VISCO2)
• 45 IVOL_ALLSTRUCT =IVOL.getSubset(region = ALLSTRUCT)
• 46
• 47 ETA_LISTE = []
• 48
• 49 for i in xrange(1, NumberModes):
• 50     print(i)
• 51     Frame = odf.steps[stepName].frames[i]
• 52     ENER = Frame.fieldOutputs['SENER']
• 53
• 54
• 55     ENER_VISCO1 = ENER.getSubset(region = VISCO1)
• 56     ENER_VISCO2 = ENER.getSubset(region = VISCO2)
• 57     ENER_ALLSTRUCT = ENER.getSubset(region = ALLSTRUCT)
• 58
• 59     GAUSS_VISCO1 = len(ENER_VISCO1.values)
• 60     GAUSS_VISCO2 = len(ENER_VISCO2.values)
• 61     GAUSS_ALLSTRUCT = len(ENER_ALLSTRUCT.values)
• 62
• 63
• 64     VOL_TOTAL_ALLSTRUCT = 0.0
• 65     VOL_TOTAL_VISCO1 = 0.0
• 66     VOL_TOTAL_VISCO2 = 0.0
• 67
• 68     AVE_ENER_VISCO1 = 0.0
• 69     AVE_ENER_VISCO2 = 0.0
• 70     AVE_ENER_ALLSTRUCT = 0.0
```

```
• 68     AVE_ENER_VISCO1 = 0.0
• 69     AVE_ENER_VISCO2 = 0.0
• 70     AVE_ENER_ALLSTRUCT = 0.0
71
• 72     for i in xrange(GAUSS_VISCO1):
• 73         volume_i = IVOL_VISCO1.values[i].data
• 74         VOL_TOTAL_VISCO1 += volume_i
• 75         AVE_ENER_VISCO1 = AVE_ENER_VISCO1 + volume_i*ENER_VISCO1.values[i].data
76
• 77     for i in xrange(GAUSS_VISCO2):
• 78         volume_i = IVOL_VISCO2.values[i].data
• 79         VOL_TOTAL_VISCO2 += volume_i
• 80         AVE_ENER_VISCO2 = AVE_ENER_VISCO2 + volume_i*ENER_VISCO2.values[i].data
81
• 82     for i in xrange(GAUSS_ALLSTRUCT):
• 83         volume_i = IVOL_ALLSTRUCT.values[i].data
• 84         VOL_TOTAL_ALLSTRUCT += volume_i
• 85         AVE_ENER_ALLSTRUCT = AVE_ENER_ALLSTRUCT + volume_i*ENER_ALLSTRUCT.values[i].data
86
87
• 88     AVE_ENER_VISCO = AVE_ENER_VISCO1 + AVE_ENER_VISCO2
• 89     AVE_ENER_MACRO = AVE_ENER_ALLSTRUCT
90
91
• 92     ETA_EFF = eta*(AVE_ENER_VISCO)/(AVE_ENER_MACRO) # MSE application
• 93     ETA_LISTE.append(ETA_EFF)
94
• 95     return ETA_LISTE
```

## Références bibliographiques

- [1] R. Goldstein, V. Gorodtsov, and D. Lisovenko. About negativity of the poisson's ratio for anisotropic materials. *Doklady Physics*, 54(12):546–548, December 2009.
- [2] A. E. H. Love. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4th edition, Dover, New York, 1944.
- [3] R. S. Lakes. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1040, 1987.
- [4] F. Scarpa, J. A. Giacomin, A. Bezazi, and W. A. Bullough. Dynamic behavior and damping capacity of auxetic foam pads. Proceedings- spie the international society for optical engineering, 2006, VOL 6169, pages 61690T 2006.
- [5] F. Scarpa, P. Pastorino, A. Garelli, S. Patsias, and M. Ruzzene. Auxetic compliant flexible pu foams: static and dynamic properties. *physica status solidi (b)*, 242(3):681–694, 2005.
- [6] Matteo Bianchi, Fabrizio Scarpa, and Christopher Smith. Stiffness and energy dissipation in polyurethane auxetic foams. *Journal of Materials Science*, 43:5851–5860, 2008. 10.1007/s10853-008-2841-5.
- [7] N. Gaspar, C.W. Smith, and K.E. Evans. Auxetic behaviour and anisotropic heterogeneity. *Acta Materialia*, 57(3):875 – 880, 2009.
- [8] K. E. Evans, M. A. Nkansah, I. J. Hutchinson, and S. C. Rogers. Molecular network design. *Nature*, 353(6340):124–124, September 1991.
- [9] L. V. Gibiansky and R. Lakes. Bounds on the complex bulk and shear moduli of a two-dimensional two-phase viscoelastic composite. *Mechanics of Materials*, 25(2):79 – 95, 1997.
- [10] F. Scarpa, C. Remillat, P. F. Landi, and G. Tomlinson. Damping modelization of auxetic foams, 2000. Proc. SPIE 3989, 336 (2000); doi:10.1117/12.384574.

- [11] Abderrezak Bezazi and Fabrizio Scarpa. Mechanical behaviour of conventional and negative poisson's ratio thermoplastic polyurethane foams under compressive cyclic loading. *International Journal of Fatigue*, 29(5):922 – 930, 2007.
- [12] V. Y. Topolov and C. R. Bowen. Characteristics of 1-3-type ferroelectric ceramic/auxetic polymer composites. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 16, 2008.
- [13] [www.auxetic.com](http://www.auxetic.com).
- [14] P. Lipinski, E.H. Barhdadi, and M. Cherkaoui. Micromechanical modeling of an arbitrary ellipsoidal multi-coated inclusion. *Philosophical Magazine*, 86(10):1305–1326, 2006.
- [15] L. Stagni. Effective transverse elastic moduli of a composite reinforced with multilayered hollow-cored fibers. *Composites Science and Technology*, 61(12):1729 – 1734, 2001.
- [16] K. E. Evans and A. Alderson. Auxetic materials: Functional materials and structures from lateral thinking! *Advanced Materials*, 12(9):617–628, 2000.
- [17] D. J. Gunton and G. A. Saunders. The young's modulus and poisson's ratio of arsenic, antimony and bismuth. *Journal of Materials Science*, 7:1061–1068, 1972. 10.1007/BF00550070.
- [18] Y. Li and D. Y. Chung. The anisotropic behavior of poisson's ratio, young's modulus, and shear modulus in crystals with different symmetries. *physica status solidi (a)*, 46(2):603–610, 1978.
- [19] Ray H. Baughman, Justin M. Shacklette, Anvar A. Zakhidov, and Sven Stafstrom. Negative poisson's ratios as a common feature of cubic metals. *Nature*, 392(6674):362–365, March 1998.
- [20] A. Yeganeh-Haeri, D.J. Weidner, and J.B. Parise. Elasticity of agr-cristobalite: A silicon dioxide with a negative poisson's ratio. *Science*, 257(5070):650–2, 1992 Jul 31.
- [21] C. Lees, JF Vincent, and JE Hillerton. Poisson's ratio in skin. *Biomed Mater Eng*, 1(1):19–23, 1991.

- [22] D.R. Veronda and R.A. Westmann. Mechanical characterization of skin-finite deformations. *Journal of Biomechanics*, 3(1):111 – 124, 1970.
- [23] J. L. Williams and J. L. Lewis. Properties and an anisotropic model of cancellous bone from the proximal tibial epiphysis. *J Biomech Eng*, 104(1):50–6, 1982.
- [24] L. J. Gibson and M. F. Ashby. The mechanics of three-dimensional cellular materials. *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 382 no. 1782:43–59, 1982.
- [25] L.J. Gibson and M.F. Ashby. *Cellular Solids: Structure and Prop.* Pergamon, 1988.
- [26] Andrew Alderson, John Rasburn, Simon Ameer-Beg, Peter G. Mullarkey, Walter Perrie, and Kenneth E. Evans. An auxetic filter: A tuneable filter displaying enhanced size selectivity or defouling properties. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 39(3):654–665, 2000.
- [27] U.D. Larsen, O. Sigmund, and S. Bouwstra. Design and fabrication of compliant micromechanisms and structures with negative poisson’s ratio. *Journal of microelectromechanical systems*, 1997. vol. 6, no2, pp. 99-106.
- [28] R.J. Jackman, S.T. Brittain, A. Adams, M.G. Prentiss, and G.M. Whitesides. Design and fabrication of topologically complex, three-dimensional microstructures. *Science*, 280(5372):2089–91, 1998.
- [29] E. A. Friis, R. S. Lakes, and J. B. Park. Negative poisson’s ratio polymeric and metallic foams. *Journal of Materials Science*, 23:4406–4414, 1988. 10.1007/BF00551939.
- [30] J B Choi and R S Lakes. Non-linear properties of metallic cellular materials with a negative poisson s ratio. *Journal of Materials Science*, 27(19):5375–5381, 1992.
- [31] B.D. Caddock and K.E. Evans. Microporous materials with negative poisson’s ratios. i. microstructure and mechanical properties. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Volume 22:1877, 1989.
- [32] K E Evans and B D Caddock. Microporous materials with negative poisson’s ratios. ii. mechanisms and interpretation. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 22(12):1883, 1989.
- [33] Wei Gaoyuan. Design of auxetic polymer self-assemblies. *physica status solidi (b)*, 242(3):742–748, 2005.

- [34] R. Lakes. Deformation mechanisms in negative poisson's ratio materials: structural aspects. *Journal of Materials Science*, 26:2287–2292, 1991. 10.1007/BF01130170.
- [35] D. Prall and R.S. Lakes. Properties of a chiral honeycomb with a poisson's ratio of  $-1$ . *International Journal of Mechanical Sciences*, 39(3):305 – 314, 1997.
- [36] A. Alderson, K.L. Alderson, D. Attard, K.E. Evans, R. Gatt, J.N. Grima, W. Miller, N. Ravirala, C.W. Smith, and K. Zied. Elastic constants of 3-, 4- and 6-connected chiral and anti-chiral honeycombs subject to uniaxial in-plane loading. *Composites Science and Technology*, 70(7):1042 – 1048, 2010.
- [37] J. Dirrenberger, S. Forest, D. Jeulin, and C. Colin. Homogenization of periodic auxetic materials. *Procedia Engineering*, 10(0):1847 – 1852, 2011.
- [38] E. Sanchez-Palencia. Non-homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, 127, 1980.
- [39] N. Bakhvalov and G. Panasenko. Averaging processes in period media. mathematic problem in mechanics of composite materials. *Dortrecht, Kluwer Academic Publishers*, 1989.
- [40] W.E. Warren and E. Byskov. Three-fold symmetry restrictions on two-dimensional micropolar material. *European Journal of Mechanics A/Solid*, 21:779–792, 2002.
- [41] M. Mourad, D. Caillerie, and A. Raoult. In computational fluid and solid mechanics. *Klaus-Jürgen Bathe. Proceeding*, 2:1779–1781, 2003.
- [42] F. Dos Reis and J.F. Ganghoffer. Equivalent mechanical properties of auxetic lattices from discrete homogenization. *Computational Materials Science*, 51(1):314 – 321, 2012.
- [43] F. Dos Reis and J-F.Ganghoffer. Discrete homogenization of architected materials: Implementation of the method in a simulation tool for the systematic prediction of their effective elastic properties. *Technische Mechanik*, 30:85–109, 2010.
- [44] M. Assidi, F. Dos Reis, and J.-F. Ganghoffer. Equivalent mechanical properties of biological membranes from lattice homogenization. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, In Press, Corrected Proof:–, 2011.

- [45] Mohamed Assidi and Jean-François Ganghoffer. Composites with auxetic inclusions showing both an auxetic behavior and enhancement of their mechanical properties. *Composite Structures*, (0):–, 2012.
- [46] G. Wei and S. F. Edwards. Auxeticity windows for composites. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 258(1-2):5 – 10, 1998.
- [47] S. Torquato. Effective stiffness tensor of composite media - i. exact series expansions. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45 (9):1421–1444, 1997.
- [48] G. Wei and S. F. Edwards. Effective elastic properties of composites of ellipsoids (i). nearly spherical inclusions. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 264(3-4):388 – 403, 1999.
- [49] G. Wei and S. F. Edwards. Effective elastic properties of composites of ellipsoids (ii). nearly disk- and needle-like inclusions. *Physica A: Statistical and Theoretical Physics*, 264(3-4):404 – 423, 1999.
- [50] A.W. Lipsett. and Beltzer A.I. Reexamination of dynamic problems of elasticity for negative poisson’s ratio, 1988.
- [51] Fuqian Yang. Size-dependent effective modulus of elastic composite materials: Spherical nanocavities at dilute concentrations. *J. Appl. Phys*, 95:3516, 2004.
- [52] Abderrezak Bezazi and Fabrizio Scarpa. Tensile fatigue of conventional and negative poisson’s ratio open cell pu foams. *International Journal of Fatigue*, 31(3):488 – 494, 2009.
- [53] A. Aksay, Groves T., Gruner. M., Lee Y., Prud’homme K., W. Shin, Torquato, and Whitesides M. Smart materials systems through mesoscale patterning, 1996.
- [54] B. J. Choi and S. R. Lakes. Design of a fastener based on negative poisson’s ratio foam, 1991.
- [55] G. E. Stavroulakis. Auxetic behaviour: appearance and engineering applications. *physica status solidi (b)*, 242(3):710–720, 2005.
- [56] N. Gaspar, X.J. Ren, C.W. Smith, J.N. Grima, and K.E. Evans. Novel honeycombs with auxetic behaviour. *Acta Materialia*, 53(8):2439 – 2445, 2005.

- [57] O. Fassi-Fehri. *Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope : Application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité*. PhD thesis, Université de Metz, 1985.
- [58] J. D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 241(1226):376–396, Aug. 20, 1957.
- [59] Y. Koutsawa, M. Cherkaoui, and E.M. Daya. Multi-coating Inhomogeneities Problem For Effective Viscoelastic Properties of Particulate Composite Materials. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 131(2):021012.1–021012.11, 2009.
- [60] P. H. Dederichs and R. Zeller. Variational treatment of the elastic constants of disordered materials. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, Volume 259, Number 2, 103-116, DOI: 10.1007/BF01392841, 1973.
- [61] R. Zeller and P.H. Dederichs. Elastic constants of polycrystals. *Physica Status Solidi B*, 55:831–842, 1973.
- [62] O. Fassi-Fehri, A. Hihi, and M. Berveiller. Multiple site self consistent scheme. *International Journal of Engineering Science*, 27(5):495 – 502, 1989.
- [63] P. Zattarin. *Etude de l'intégration d'un modèle polycristallin dans un code d'éléments finis en élastoplasticité*. PhD thesis, Université de Metz, 2000.
- [64] R. M. Christensen and K. H. Lo. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4):315 – 330, 1979.
- [65] E. Hervé and A. Zaoui. n-layered inclusion-based micromechanical modelling. *International Journal of Engineering Science*, 31(1):1 – 10, 1993.
- [66] E. Hervé and A. Zaoui. Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites. *International Journal of Engineering Science*, 33(10):1419 – 1433, 1995.
- [67] El Hassane Barhdadi. *Modélisation micromécanique des matériaux composites à renforts ellipsoïdaux multienrobés et applications*. PhD thesis, Université de Metz, 2005.

- [68] Y. Koutsawa, F. Biscani, S. Belouettar, H. Nasser, and E. Carrera. Multi-coating inhomogeneities approach for the effective thermo-electro-elastic properties of piezoelectric composite materials. *Composite Structures*, 92(4):964 – 972, 2010.
- [69] L.J. Walpole. Elastic behavior of composite materials: Theoretical foundations. volume 21 of *Advances in Applied Mechanics*, pages 169 – 242. Elsevier, 1981.
- [70] M. Cherkaoui, H. Sabar, and M. Berveiller. Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials. *Journal of engineering materials and technology*, 1994. vol. 116, no 3 (11 ref.), pp. 274-278.
- [71] K. E. Evans. Auxetic polymers. *Membrane Technology*, 2001(137):9 – 9, 2001.
- [72] E. Hervé and A. Zaoui. Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 9, n°6:505–515, 1990.
- [73] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*. 1993.
- [74] P. Vieville, A. S. Bonnet, and P. Lipinski. Modelling effective properties of composite materials using the inclusion concept. general considerations. *Arch. Mech.*, 58(3):207–239, 2006.
- [75] Luigi Stagni. Elastic analysis of a multilayered cylindrical fiber with eigenstrains. *International Journal of Engineering Science*, 39(6):641 – 653, 2001.
- [76] Y. C. Wang, M. Ludwigson, and R. S. Lakes. Deformation of extreme viscoelastic metals and composites. *Materials Science and Engineering A*, 370(1-2):41 – 49, 2004. 13th International Conference on Internal Friction and Ultrasonic Attenuation in Solids.
- [77] Y. Koutsawa, M. Cherkaoui, and E. M. Daya. Multi-coating inhomogeneities problem for effective viscoelastic properties of particulate composite materials. *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 131:021012/1–021012/11, 2009.
- [78] M. R. Haberman. *Design of high loss viscoelastic composites through micromechanical modeling and decision based materials design*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2007.

- [79] E. Kröner. Effective moduli of random elastic media-unified calculation of bounds and self-consistent values. *Mechanics Research Communications*, 4(6):389 – 393, 1977.
- [80] E. Kröner. Bounds for effective elastic moduli of disordered materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(2):137 – 155, 1977.
- [81] J. Jarzynski. A review of the mechanisms of sound attenuation in materials. *Sound and Vibration Damping With Polymers*, Vol. 424, R. D. Corsaro and L. H. Sperling, eds., American Chemical Society, Washington, DC:pp. 116–207, 1990.
- [82] Y. Koutsawa. *Modélisation et conception multi-échelles des matériaux : de la description atomique discrète aux modèles du continu. Application aux propriétés amortissantes des pare-brises*. PhD thesis, Université Paul Verlaine de Metz, 2008.
- [83] R. S. Lakes. Extreme damping in compliant composites with a negative-stiffness phase. *Philosophical Magazine Letters*, Vol. 8, N°2:95–100, 2001.
- [84] R. M. Christensen. *Mechanics of Composite Materials*. A Wiley-Interscience Publication, 1979.
- [85] R. M. Christensen. Viscoelastic properties of heterogeneous media. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17(1):23 – 41, 1969.
- [86] Zvi Hashin. Complex moduli of viscoelastic composites–i. general theory and application to particulate composites. *International Journal of Solids and Structures*, 6(5):539 – 552, 1970.
- [87] F. Dinzart and P. Lipinski. Self-consistent approach of the constitutive law of a two-phase viscoelastic material described by fractional derivative models. *Arch. Mech.*, 62, 2:135–156, 2010.
- [88] P. Vieville. *Influence des paramètres architecturaux sur les caractéristiques viscoélastiques du bois à ses différentes échelles d'hétérogénéités*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, 1992.
- [89] P. Vieville and P. Lipinski. Application du schéma autocohérent par étapes à la modélisation des propriétés viscoélastiques des composites. *J.N.C*, 9:545–554, 1994.

- [90] C. Friebel, I. Doghri, and V. Legat. General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 43(9):2513 – 2541, 2006.
- [91] L.C. Brinson and W.S. Lin. Comparison of micromechanics methods for effective properties of multiphase viscoelastic composites. *Composite Structures*, 41(3-4):353 – 367, 1998.
- [92] A. Broohm, P. Zattarin, and P. Lipinski. Prediction of mechanical behaviour of inhomogeneous and anisotropic materials using an incremental scheme. *Arch. Mech.*, 52, no6:pp. 949 – 967, 2000.
- [93] K.L. Alderson, A. Alderson, G. Smart, V.R. Simkins, and P.J. Davies. Auxetic polypropylene fibres: Part 1 - manufacture and characterization. *Plastics, Rubber and Composites*, Volume 31, Number 8:344–349(6), October 2002.
- [94] K.L. Alderson and K.E. Evans. The fabrication of microporous polyethylene having a negative poisson's ratio. *Polymer*, 33(20):4435 – 4438, 1992.
- [95] J.N. Grima, D. Attard, R.N. Cassar, L. Farrugia, L. Trapani, and R. Gatt. On the mechanical properties and auxetic potential of various organic networked polymers. *Molecular Simulation*, 34:1149 – 1158, 2008.
- [96] H. Boudaoud, E.M. Daya, S. Belouettar, L. Duigou, and M. Potier-Ferry. Damping analysis of beams submitted to passive and active control. *Engineering Structures*, 31(2):322 – 331, 2009.
- [97] D. Ross, E. Ungar, and E.M. Kerwin. Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae. *Structural Damping*, ASME, New York, Sec. III:48–88, 1959.
- [98] Mohan D. Rao, Raghu Echempati, and Satish Nadella. Dynamic analysis and damping of composite structures embedded with viscoelastic layers. *Composites Part B: Engineering*, 28(5-6):547 – 554, 1997.
- [99] Heng Hu, Salim Belouettar, Michel Potier-Ferry, and El Mostafa Daya. Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites. *Composite Structures*, 84(3):282 – 292, 2008.

- [100] E. Carrera. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 9:87–140, 2002. 10.1007/BF02736649.
- [101] Erasmo Carrera. Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 10:215–296, 2003. 10.1007/BF02736224.
- [102] C.M.A. Vasques, R.A.S. Moreira, and J. Dias Rodrigues. Viscoelastic damping technologies—part i: Modeling and finite element implementation. *Journal of Advanced Research in Mechanical Engineering*, Vol.1:76–95, 2012.
- [103] N. Le Maout, E. Verron, and J. Begue. Simultaneous geometrical and material optimal design of hybrid elastomer/composite sandwich plates. *Composite Structures*, 93(3):1153 – 1157, 2011.
- [104] Paul J. Macioce. Design for damping: Performance of laminated metals can be modeled. *Metals & Metalforming*, 23, February 2002.
- [105] W.L. Azoti, Y. Koutsawa, N. Bonfoh, P. Lipinski, and S. Belouettar. On the capability of micromechanics models to capture the auxetic behavior of fibers/particles reinforced composite materials. *Composite Structures*, 94(1):156 – 165, 2011.

## Résumé

La conception de matériaux composites à particules, fibres ou structures sandwichs, faits de renforts auxétiques en vue de l'amélioration des propriétés amortissantes, est analysée dans cette thèse. Pour une telle analyse, le comportement auxétique décrivant un coefficient de Poisson négatif nécessite d'être compris tant d'un point de vue « effet structure » que « effet matériau ». Ce dernier point c'est-à-dire l'« effet matériau », faisant référence à la forme, aux orientations et différentes propriétés des phases constitutives du matériau, reste peu documenté dans la littérature scientifique. Ainsi partant d'un formalisme micromécanique basé sur l'équation cinématique intégrale de Dederichs et Zeller, nous explorons dans un premier temps et analytiquement le domaine de validité du matériau composite auxétique par le schéma monosite de Mori-Tanaka. Ensuite des microstructures plus complexes, à l'instar de la microstructure du vide multi-enrobé et celle d'un cluster réentrant d'inclusions ellipsoïdales prenant en compte les interactions de ces dernières, sont étudiées et validées par des simulations Eléments Finis. Les résultats de ces analyses nous indiquent, par ailleurs dans le cas des matériaux isotropes que le comportement auxétique n'est atteint que si et seulement si une des phases du composite est initialement auxétique. Aussi, la nécessité d'introduire des liaisons ou inter-connections au niveau des inclusions ellipsoïdales est montrée comme étant la méthode conduisant à un effet auxétique au niveau de la microstructure du cluster réentrant. Outre cette analyse préliminaire sur le domaine de validité du comportement auxétique dans les composites, l'effet de l'introduction d'inclusions auxétiques dans une matrice viscoélastique en l'occurrence le PolyVinyle de Butyral (PVB) d'une part et l'utilisation de couches viscoélastiques et auxétiques dans les structures sandwichs d'autre part, ont été étudiés. Les réponses de ces matériaux en termes de propriétés amortissantes, telles que le module de stockage et le facteur de perte, sont alors déterminées et discutées par rapport aux composites à renforts non auxétiques (conventionnels).

Mots clés : Coefficient de Poisson négatif, micromécanique, viscoélasticité, principe des travaux virtuels, module de stockage, facteur de perte.

## Abstract

The design of composite (particles/fibers or structures) materials, consisting of auxetic reinforcements, with enhanced damping properties is studied herein. For such analysis, the auxetic behavior describing a negative Poisson's ratio needs to be understood as "structure effect" point of view than "material effect". Indeed, the "material effect" which treats of the topological and morphological textures of the composite constituents remains poorly documented in the literature. Based on the kinematic integral equation of Dederichs and Zeller, the design space of auxetic composite materials is explored initially through an analytical one-site formulation of the Mori-Tanaka micromechanics scheme. Then, more complex microstructures are investigated from micromechanics formalism as well as Finite Element Method (FEM) simulations. One can cite the multilayered hollow-cored microstructure and the microstructure describing a cluster of re-entrant ellipsoidal inclusions in which the interaction among them (inclusions) is taken into account. The results provided by these investigations show us for instance in the case of isotropic materials that auxeticity is achieved if and only if one of the material's constituents (inclusion or matrix) is initially auxetic. Also, it is noticed in the case of ellipsoidal inclusions describing the re-entrant cluster that auxetic behavior can be recovered by introducing joints between inclusions. Otherwise, favorable issues are only expected with auxetic components. In addition to this preliminary analysis concerning the validity domain of auxetic behavior in composites, the effect of inserting auxetic reinforcements within a viscoelastic matrix for instance PolyVinylButyral (PVB) on the one hand, and the use of auxetic and viscoelastic layers in sandwich structures on the other hand, are studied. The response of these materials in terms of damping properties, such as the storage

modulus and the loss factor are then identified and discussed versus non-auxetic (conventional) composite reinforcements.

Key words: Negative Poisson's ratio, micromechanics, viscoelasticity, virtual works principle, storage modulus, loss factor.