



**HAL**  
open science

# Modèle Vlasov-Maxwell pour l'étude des instabilités de type Weibel

Aurélie Inglebert

► **To cite this version:**

Aurélie Inglebert. Modèle Vlasov-Maxwell pour l'étude des instabilités de type Weibel. Autre [cond-mat.other]. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0149 . tel-01749345

**HAL Id: tel-01749345**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749345>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THÈSE**

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU TITRE DE

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE**

EN PHYSIQUE

ET DE **DOTTORE DI RICERCA IN FISICA APPLICATA**

**DE L'UNIVERSITÉ DE PISE**

par

**AURÉLIE INGLEBERT**

---

**MODÈLE VLASOV-MAXWELL POUR L'ÉTUDE DES  
INSTABILITÉS DE TYPE WEIBEL**

---

Soutenance publique devant la commission d'examen le 19 novembre 2012

Membres du jury :

Président de jury :

– M. Jean-Marcel Rax                      Professeur - Université de Paris XI - Laboratoire d'Optique Appliquée

Rapporteurs :

– M. Francesco Valentini              Chercheur Universitaire - Université de la Calabre - Département de Physique  
– M. Eric Sonnendrücker              Professeur - Université Technique de Munich - Institut Max Planck pour la  
Physique des Plasmas

Examineurs :

– M. Francesco Califano              Professeur - Université de Pise - Département de Physique (co-directeur de  
thèse)  
– M. Alain Ghizzo                      Professeur - Université de Lorraine - Institut Jean Lamour (directeur de thèse)

Invités :

– M. Francesco Pegoraro              Professeur - Université de Pise - Département de Physique  
– M. Thierry Réveillé                  Maître de Conférences - Université de Lorraine - Institut Jean Lamour (co-  
directeur de thèse)



## Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Francesco Valentini et Eric Sonnendrücker d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce manuscrit de thèse. Je remercie également Francesco Pegoraro d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse et Jean-Marcel Rax d'avoir présidé ce jury.

Ces trois années de thèse furent très riches tant scientifiquement qu'humainement. J'ai ainsi pu travailler au sein de l'équipe 107 du département P2M de l'Institut Jean Lamour et au sein du *Dipartimento di Fisica* de l'Université de Pise.

Un grand merci ira donc naturellement à Michel Vergnat, directeur du département P2M, pour m'avoir accueillie dans son laboratoire durant ces trois années.

Je tiens particulièrement à remercier mes trois directeurs de thèse, sans qui je n'en serais pas là à l'heure actuelle. Merci à Francesco Califano de m'avoir accueillie au *Dipartimento di Fisica* lors de mes séjours à Pise, pour toutes ses idées et discussions autour de mon travail de recherche. Un grand merci également à Alain Ghizzo d'avoir partagé son savoir, ses idées et ses précieux conseils. Je voudrais enfin remercier Thierry Réveillé pour m'avoir soutenue durant ces trois années (je pense particulièrement au moment de mon choix de thèse, à l'écriture d'un certain dossier "... " ou encore pendant cette longue période de doute qu'est la rédaction), pour sa bonne humeur et d'avoir partagé toutes ses connaissances et ses conseils. Merci à tous les trois.

J'aimerais également remercier tous les membres de l'équipe 107 dans laquelle j'ai eu la chance de travailler et dans laquelle j'ai été parfaitement accueillie. Je remercie tout particulièrement Etienne Gravier et Xavier Caron pour leur bonne humeur, leur gentillesse et notamment leur très grand soutien lors de "l'attribution" du monitorat ; Etienne pour ses précieux conseils notamment au moment où je devais choisir ma thèse ; Xavier pour m'avoir permis d'apprendre l'écriture cunéiforme grâce aux enseignements en mécanique du point, et plus sérieusement pour avoir toujours été disponible pour mes questions concernant l'enseignement et ses cours prêt-à-l'emploi. Je remercie également Daniele Del Sarto pour toutes les discussions que l'on a pu avoir sur le travail, mais également pour le soutien et toute l'aide qu'il m'a apportée lors de mes séjours à Pise. Je me souviendrai aussi de cette ballade en raquettes très amusante à Praz-sur-Arly (ah les forums ILP) ou encore de cette fameuse glace lors du séjour à Vienne, qui m'a valu une cheville en moins. Merci également à Stéphane Heuraux pour sa bonne humeur et pour m'avoir intégrée dans son équipe. Je tiens particulièrement à remercier Pierre Bertrand, sans qui la thèse ne serait pas ce qu'elle est ! Merci beaucoup pour toutes ces idées, toutes ces discussions hebdomadaires du mardi/jeudi, pour avoir su m'accorder du temps. Merci à tous.

Je remercie également les permanents d'autres équipes. Je pense en particulier à Hervé Rinnert, qui avait probablement parfois l'impression d'avoir trois thésardes, Ludovic Depouques, Jamal

Bougdira et Jean-Luc Vasseur.

Je remercie le personnel administratif et technique. Je pense en particulier à Anne-Sophie Latreille pour sa bonne humeur et sa (très) grande patience ou encore à Martine Gaulier, Cyril Noirel, Jean-Georges Mussot et Joëlle Poisson pour leur bonne humeur communicative.

Ces trois années de thèse auraient assurément été différentes sans l'ensemble des thésards du laboratoire et d'autre labo. Je remercie tout d'abord les doctorants de l'équipe, avec une pensée particulière pour mon colocataire de bureau : David Coulette. Merci pour tous ces moments de rires, de blagues, de chansons et d'avoir supporté mes légers "pétages" de plomb durant cette troisième année. Merci également à Francesco Palermo qui a partagé notre bureau pendant un temps. Je tiens aussi à remercier Thomas Drouot, pour ne pas laisser seuls mes gentils chefs trop longtemps. Et enfin merci à Natalia Kosolapova pour sa gentillesse et à Guillaume Bousselin et Jordan Cavalier.

Je remercie Christel Berthelot ("*-Dis bonsoir Kevin - Bonsoir Kevin*" "*Tu peux garder la monnaie, ça m'dérange pas*"), Sophie Mantelli et ces discussions sur notre avenir dans la recherche, Sébastien Bardin (et en particulier d'être resté jusqu'à la fin de ce fameux colloque IJL), Ouarda Legrani (pour nos grandes discussions dans nos moments de doute, et que de souvenirs avec l'écriture du mémoire de M1 avec toutes nos équations sous word !!), Simon Dap, Thomas Bieber, Guillaume Vasseur, Jennifer Weimmerskirch, Amina Neggache, Sylvain LeGall et Hanna Riahi. Hors IJL, je tiens à remercier notamment Clément Baillard et Thibaut Very : je ne dirai qu'une chose "Vent frais, vent du matin...".

Un énorme merci à mes deux drôles de dames, Emilie Steveler et Amandine Duluard. Cette thèse n'aurait vraisemblablement pas été la même sans vous. Merci pour tous ces moments qu'on a pu partager ensemble, pour toutes ces soirées, ces fous rires, ces pauses thé, ces conversations, ces pots de rentrée/thèse/Noël et j'en passe. Les filles, merci d'avoir été là.

Une pensée particulière pour mes amies italiennes, notamment Serena et Roberta qui m'ont énormément aidée lors de mes séjours pisans. Et merci également aux autres filles du "pensionnat" : Emilia, Isa, Tiziana, Bea, Genny...

Je tiens également à remercier mes amis fidèles depuis le lycée : Amanda, Tom, Mat, Ben, Croki, Fred et Didine. Je remercie également mes amis de beaucoup plus longue date (de la maternité pour certaines) Jess (ma B) et Jerem, Laetitia, Anne-Cé et Flo.

Je remercie énormément ma famille pour leur soutien, et surtout mes parents qui m'ont toujours soutenue dans mes choix et qui ont toujours su trouver les mots pour me booster dans les moments difficiles.

Et enfin, un remerciement tout particulier à Pierre. Nos thèses nous auront permis de nous rencontrer et de vivre tous ces moments ensemble. Cette dernière année n'aurait pas été la même sans toi. Merci d'avoir été là pour moi et de m'avoir toujours soutenue.

## Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>iii</b>
<b>Abréviations et symboles utilisés</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1. État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1. Instabilités et applications potentielles . . . . .	5
1.1.1. Les instabilités de type Weibel en astrophysique . . . . .	6
1.1.2. Les instabilités de type Weibel lors de l'interaction laser-plasma . . . . .	8
1.2. Comportement collectif des plasmas d'astrophysique et de fusion . . . . .	12
1.3. Le modèle Vlasov-Maxwell . . . . .	14
1.3.1. La méthode lagrangienne . . . . .	15
1.3.2. La méthode eulérienne . . . . .	17
1.3.3. La méthode semi-lagrangienne . . . . .	18
1.3.4. La méthode de conservation des flux . . . . .	20
1.3.5. Le <i>time-splitting</i> . . . . .	23
<b>2. L'instabilité de filamentation de courant</b>	<b>27</b>
2.1. La CFI à partir d'une approche fluide . . . . .	27
2.2. L'étude cinétique de la CFI . . . . .	30
2.2.1. La CFI dans un cas non relativiste . . . . .	30
2.2.2. CFI dans un cas relativiste symétrique . . . . .	44
2.3. Le comportement des ions . . . . .	51
2.3.1. Cas non relativiste . . . . .	52
2.3.2. Cas relativiste . . . . .	52
2.4. Conclusion . . . . .	55
<b>3. Modèle Vlasov-Maxwell multi-faisceaux pour l'étude des instabilités de type Weibel</b>	<b>57</b>
3.1. Le modèle Vlasov-Maxwell multi-faisceaux . . . . .	57
3.1.1. Introduction . . . . .	57
3.1.2. L'invariance du moment canonique transverse . . . . .	58
3.1.3. L'équation de Vlasov réduite . . . . .	59

3.1.4.	Système équation de Vlasov réduite - équations de Maxwell . . . . .	60
3.2.	Le modèle multi-faisceaux dans l'approximation fluide . . . . .	61
3.2.1.	Un modèle multi-fluide fermé . . . . .	61
3.2.2.	Relation de dispersion fluide . . . . .	62
3.3.	L'instabilité de filamentation de courant dans un cas non relativiste . . . . .	64
3.3.1.	L'initialisation du problème . . . . .	65
3.3.2.	La relation de dispersion non relativiste . . . . .	66
3.4.	CFI dans un cas relativiste symétrique . . . . .	66
3.4.1.	Les conditions initiales du système . . . . .	66
3.4.2.	Résultats de l'analyse fluide . . . . .	67
3.4.3.	Résultats cinétiques : Champs et espace des phases . . . . .	67
3.5.	CFI dans un cas relativiste non-symétrique . . . . .	74
3.5.1.	Les conditions initiales du système . . . . .	74
3.5.2.	Résultats de l'analyse fluide . . . . .	74
3.5.3.	Résultats cinétiques : Champs et espace des phases . . . . .	75
3.6.	Conclusion . . . . .	80
<b>4.</b>	<b>L'instabilité Weibel</b>	<b>83</b>
4.1.	L'instabilité Weibel à partir du modèle multi-faisceaux . . . . .	83
4.2.	Le modèle multi-faisceaux / <i>water-bag</i> . . . . .	87
4.2.1.	Description du modèle multi-faisceaux / <i>water-bag</i> . . . . .	87
4.2.2.	Dynamique du modèle multi-faisceaux <i>water-bag</i> . . . . .	95
4.2.3.	Validation du modèle multi-faisceaux dans le régime linéaire . . . . .	99
4.3.	Choix du nombre de faisceaux $j$ dans le modèle multi-faisceaux . . . . .	101
4.3.1.	Évolution de l'énergie magnétique . . . . .	102
4.3.2.	Taux de croissance de la WI . . . . .	104
4.4.	Étude du couplage de la WI avec la composante électrostatique . . . . .	105
4.4.1.	Résultats obtenus à partir du modèle complet . . . . .	105
4.4.2.	Dynamique détaillée à partir du modèle multi-faisceaux . . . . .	109
4.5.	Conclusion . . . . .	116
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>117</b>
	<b>A. Schéma 1D2V</b>	<b>121</b>
	<b>B. Calcul de la relation de dispersion 1D2V</b>	<b>125</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>131</b>

## Liste des figures

0.1. Classification des plasmas naturels et de laboratoire dans un diagramme logarithmique densité de charge / température . . . . .	2
1.1. Schéma représentant les différents types d'instabilités . . . . .	6
1.2. Les sursauts gamma (GRB). . . . .	7
1.3. Schéma de l'allumeur rapide [22] . . . . .	10
1.4. Étapes principales d'un code PIC. . . . .	16
1.5. Étapes pour la méthode semi-lagrangienne vers l'arrière . . . . .	19
1.6. Étapes pour la méthode de conservation de flux . . . . .	21
2.1. Taux de croissance théorique obtenu dans la référence [54] . . . . .	29
2.2. Énergie magnétique en fonction du temps (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	32
2.3. Énergie électrique longitudinale en fonction du temps (Non-relativiste, cas complet)	32
2.4. Champ magnétique (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	33
2.5. Champ électrique longitudinal (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	34
2.6. Densité électronique (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	35
2.7. Profil de densité de l'exemple. . . . .	38
2.8. Profil de densité lors du dépassement du seuil $\varepsilon > 1/2$ . . . . .	38
2.9. Espace des phases (t=10) (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	40
2.10. Espace des phases (t=100) (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	41
2.11. Espace des phases (t=110) (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	42
2.12. Espace des phases (t=140) (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	43
2.13. Énergie magnétique (Relativiste, cas complet) . . . . .	44
2.14. Champ magnétique, électrostatique et densité (Relativiste, cas complet) . . . . .	46
2.15. Densité électronique et champ magnétique dans le plan $x - t$ (Relativiste, cas complet) . . . . .	47
2.16. Espace des phases $(x, p_x)$ et énergie électrique longitudinale (Relativiste, cas complet) . . . . .	49
2.17. Espace des phases $(x, p_y)$ : invariance de $p_y$ (Relativiste, cas complet) . . . . .	50
2.18. Densité ionique (Non-relativiste, cas complet) . . . . .	53
2.19. Densité ionique (Relativiste, cas complet) . . . . .	54
3.1. Plasma divisé en N faisceaux . . . . .	59
3.2. Fonction de distribution initiale du modèle multi-faisceaux $F(x, p_x, \mathbf{p}_\perp, t)$ . . . . .	60

3.3. Fonction de distribution transverse initiale pour la CFI dans le cas du modèle multi-faisceaux. . . . .	64
3.4. Taux de croissance théorique de la CFI (cas multi-faisceaux) . . . . .	67
3.5. Énergie magnétique (échelle logarithmique, relativiste, modèle multi-faisceaux) . . . . .	68
3.6. Énergie magnétique et électrique longitudinale (relativiste, modèle multi-faisceaux) . . . . .	69
3.7. Espace des phases $(x, p_x)$ (relativiste, modèle multi-faisceaux) . . . . .	71
3.8. Espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau $j = 2$ (relativiste, modèle multi-faisceaux) . . . . .	72
3.9. Espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau $j = 2$ (relativiste, modèle multi-faisceaux) . . . . .	73
3.10. Taux de croissance théorique (relativiste, non-symétrique, modèle multi-faisceaux) . . . . .	74
3.11. Énergie magnétique (échelle logarithmique, relativiste, non-symétrique, modèle multi-faisceaux) . . . . .	75
3.12. Énergie électrique longitudinale (relativiste, non-symétrique, modèle multi-faisceaux) . . . . .	75
3.13. Énergie électrique longitudinale et densité électronique (relativiste, non-symétrique, multi-faisceaux) . . . . .	76
3.14. Espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau $j = 2$ (relativiste, non-symétrique, modèle multi-faisceaux) . . . . .	78
3.15. Espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau $j = 2$ (relativiste, non-symétrique, modèle multi-faisceaux) . . . . .	79
3.16. Champ magnétique $B_z$ dans la phase de saturation ( $t = 135$ ) . . . . .	80
4.1. Fonction de distribution transverse initiale pour la WI dans le cas du modèle multi-faisceaux, avec $N = 3$ faisceaux. . . . .	84
4.2. Représentation de la fonction de distribution longitudinale $f_j(p_x)$ de type <i>water-bag</i> simple, pour un bag $k$ d'amplitude $F_k$ , dans un cas symétrique, à l'équilibre. . . . .	88
4.3. Cas d'un plasma infini : <i>water-bag</i> simple de contours $p_{a_j}^k$ et $-p_{a_j}^k$ , d'amplitude $F_k$ à l'équilibre. Les contours ne dépendent pas de $x$ . . . . .	88
4.4. Représentation de la fonction de distribution totale à l'équilibre $F(p_x, p_y)$ , pour un faisceau $j$ (en rouge) et un bag simple $k$ (en vert). . . . .	88
4.5. <i>Water-bag</i> simple de contours $p_j^{k+}(x, t)$ et $p_j^{k-}(x, t)$ , d'amplitude $F_k$ pour le faisceau $j$ (cas symétrique et hors équilibre). . . . .	89
4.6. Fonction de distribution $f_j$ pour trois valeurs de bags $k - 1, k$ et $k + 1$ , d'amplitude respective $F_{k-1}, F_k, F_{k+1}$ , dans un cas symétrique. . . . .	90
4.7. Fonction de distribution dans l'espace des phase $(x, p_x)$ pour trois bags $k - 1, k$ et $k + 1$ de contour $p^+(x, t)$ et $p^-(x, t)$ et d'amplitude $F_k$ . . . . .	91
4.8. Fonction de distribution à l'équilibre : multi-faisceaux dans la direction transverse avec trois faisceaux $j - 1, j$ et $j + 1$ , et <i>water-bag</i> symétrique dans la direction longitudinale. . . . .	92
4.9. Fonction $g(p_x)$ pour trois valeurs de faisceaux $j - 1, j$ et $j + 1$ dans un cas symétrique. . . . .	93
4.10. Fonction de distribution $h(p_y)/n_0$ moyennée en $p_x$ . . . . .	94
4.11. Taux de croissance de l'instabilité Weibel en fonction du nombre d'onde $k$ . En ligne continue est représenté le résultat analytique. Les croix représentent les résultats numériques. . . . .	100
4.12. Évolution temporelle de l'énergie magnétique (modèle complet 1D2V, modèle multi-faisceaux 5 et 3 faisceaux) . . . . .	102
4.13. Champ magnétique en fonction de $x$ à deux instants de l'instabilité (modèle complet et modèle multi-faisceau <i>water-bag</i> ) . . . . .	103
4.14. Évolution temporelle de l'énergie magnétique (échelle logarithmique, modèle complet 1D2V, modèle multi-faisceaux 5 et 3 faisceaux) . . . . .	104

---

4.15. Évolution temporelle de l'énergie magnétique, de l'énergie électrique transverse et longitudinale respectivement à partir du modèle complet 1D2V . . . . .	107
4.16. Profil du champ magnétique en fonction de $x$ à $t = 60, 75$ et $t = 150$ obtenu à partir du modèle complet 1D2V . . . . .	108
4.17. Représentation de l'espace des phases $(x, p_y)$ dans le modèle complet. . . . .	110
4.18. Évolution temporelle des énergies magnétique, électrique transverse et électrique longitudinale, obtenue (modèle multi-faisceaux) . . . . .	111
4.19. Représentation de l'espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau $C_2$ . On y voit des vortex se former avant de fusionner. . . . .	113
4.20. Représentation de l'espace des phases $(x, p_x)$ pour le faisceau central $C_0$ . . . . .	115
4.21. Champ électrostatique $E_x$ à $t = 75$ . On y voit la formation de deux pics à $x \approx 1$ et $x \approx 4$ . . . . .	115



## Abréviations et symboles utilisés

### Abréviations

CFI	<i>Current Filamentation Instability</i> (Instabilité de Filamentation de Courant)
GRB	<i>Gamma Ray Burst</i> (Sursauts Gamma)
PIC	<i>Particle In Cell</i>
TSI	<i>Two Stream Instability</i> (Instabilité double-faisceaux)
WI	<i>Weibel Instability</i> (Instabilité Weibel)
1D1V	Une dimension spatiale $x$ et une dimension en vitesse/quantité de mouvement $p_x$
1D2V	Une dimension spatiale $x$ et deux dimensions en vitesse/quantité de mouvement $p_x, p_y$

### Symboles

$b$	paramètre d'impact entre deux particules
$d$	distance interparticulaire
$g$	facteur de grain
$\gamma = \sqrt{1 + p^2/m^2c^2}$	facteur de Lorentz
$\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T / e^2 n_0}$	longueur de Debye
$\lambda_{lpm} \approx n_0 \lambda_D^4$	libre parcours moyen
$\omega_B$	fréquence de rebond
$\omega_c = eB/m\gamma$	fréquence cyclotronique
$\omega_p = \sqrt{e^2 n_0 / m \epsilon_0}$	fréquence plasma
$v_{th} = p_{th} / m\gamma$	vitesse thermique, quantité de mouvement thermique



## Introduction générale

Il est estimé que 99.9 % de la matière visible de l'Univers existe sous forme de plasma. Dans un environnement proche de la Terre, on peut par exemple citer l'ionosphère, un milieu ionisé par le rayonnement ultraviolet du soleil, puis la magnétosphère, un plasma magnétisé alimenté en particules chargées par le vent solaire, ou encore les aurores boréales. Dans un environnement plus lointain, les milieux constitués de plasma sont les étoiles, les nébuleuses, les supernovae ou encore le vent solaire, issu des couches externes du soleil.

### Plasmas naturels et de laboratoire

Un plasma est une collection de particules chargées globalement neutre, agissant comme un système collectif et dominé par les forces électromagnétiques. Les plasmas sont souvent structurés en trois catégories et on distingue principalement :

- les plasmas industriels
- les plasmas naturels et spatiaux
- les plasmas thermonucléaires

Ils sont principalement caractérisés par leur température, leur densité ou leur taux d'ionisation défini comme le rapport de la densité des électrons  $n_e$  sur la densité totale d'électrons et d'espèces non ionisées  $n_n$  :

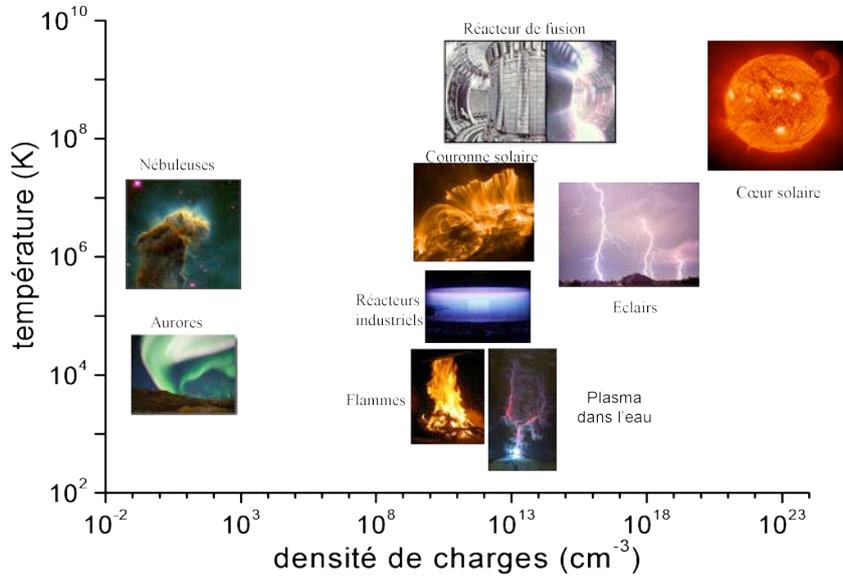
$$\alpha_i = \frac{n_e}{n_e + n_n} = \frac{Zn_i}{Zn_i + n_n}$$

où  $Z$  représente le numéro atomique et  $n_i$  la densité ionique.

On peut distinguer les plasmas dit "chauds" ou thermiques et les plasmas "froids" ou non-thermiques. Les premiers sont caractérisés par un taux d'ionisation important  $\alpha_i \approx 1$ . Les électrons et les ions thermiques ont une énergie assez proche. Pour les plasmas "froids", le taux d'ionisation est plus faible  $\alpha_i < 1$ , et la température des ions (entre 300 et 1500 K) est beaucoup plus faible que celles des électrons ( $\geq 10^4$  K). Les scientifiques parviennent à travailler avec des plasmas froids, plus "facile" à obtenir. Les plasmas non-thermiques industriels sont particulièrement répandus. On peut citer par exemple les tubes à néon ou les écrans plasma. Les plasmas chauds demandent beaucoup plus d'énergie et sont donc moins accessibles. Ils sont cependant utilisés dans le domaine spatial pour des propulseurs plasmas, ou sont également le moyen d'atteindre la fusion nucléaire dans les futurs réacteurs thermonucléaire.

La figure 0.1 représente une classification des plasmas naturels et de laboratoire en fonction de

leur densité de charges et de leur température (figure issue du site du Laboratoire de Physique des Plasmas LPP).



**FIGURE 0.1.:** Classification des plasmas naturels et de laboratoire dans un diagramme logarithmique densité de charge / température (Source : site du Laboratoire de Physique des Plasmas).

L'intérêt pour les plasmas est devenu de plus en plus important au fil des années, particulièrement depuis la naissance de vastes projets, nationaux ou internationaux, dont le but est de reproduire sur Terre une réaction thermonucléaire qui a lieu au cœur du Soleil : la fusion nucléaire. Parmi tous les projets existants, on peut notamment citer le projet européen JET (*Joint European Torus*) en Angleterre, première installation à libérer de l'énergie à partir des réactions de fusion, le projet international ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) en France, en cours de construction, tous deux basés sur un confinement magnétique du plasma ou des projets basés sur le confinement inertiel tel que le NIF (*National Ignition Facility* en Californie, ou le projet français LMJ (Laser MégaJoule). L'idée commune de ces installations est de chauffer un gaz (d'isotopes d'hydrogène : le deutérium et le tritium) de façon à former un plasma, confiner celui-ci et le chauffer à une température permettant d'atteindre la fusion nucléaire. Le plasma est cependant un milieu très instable et difficilement maîtrisable.

### Siège de phénomènes instables

Le plasma est un milieu très complexe constitué de particules chargées. Il est souvent le siège de toutes sortes d'instabilités. On peut par exemple trouver :

- les instabilités hydrodynamiques de type Rayleigh-Taylor ou Kelvin Helmholtz : elles affectent le plasma dans son ensemble et peuvent mener à des déplacements macroscopique de celui-ci.
- les instabilités paramétriques, de type Raman ou Brillouin : elles sont souvent déclenchées par une onde électromagnétique se propageant dans le plasma. Au delà d'un certain seuil, l'onde se décompose en deux ondes filles auxquelles elle cède son énergie.

- les instabilités "cinétiques", de type double-faisceaux ou de type Weibel : elles mettent en jeu l'interaction des ondes se propageant dans le plasma avec les particules résonantes de celui-ci. L'instabilité se développe dans l'espace des vitesses et peut mener à une modification importante de la fonction de distribution des particules.

Les instabilités électromagnétiques de type Weibel couvrent un large domaine allant des plasmas d'astrophysique aux plasmas de fusion inertielle. Depuis quelques décennies, un intérêt grandissant est porté à ces instabilités, notamment depuis leur possible responsabilité dans certains phénomènes astrophysiques comme les sursauts gamma et leur présence lors d'un processus utilisé pour atteindre la fusion : l'allumeur rapide.

Dans cette thèse, la problématique abordée est celle des instabilités de type Weibel dans différents cas non-relativiste ou relativiste et symétrique ou non symétrique.

### Plan et objectif de la thèse

L'objectif de cette thèse est double. Le premier est de caractériser les différentes instabilités de type Weibel, dans un régime non-relativiste et relativiste, à partir de modèles Vlasov-Maxwell. L'avantage de ces modèles est qu'ils permettent d'étudier la phase de saturation de l'instabilité où les effets cinétiques sont nécessairement à prendre en compte. Le second objectif s'est imposé à la suite des premiers résultats obtenus : mettre en place un modèle analytique et numérique, le modèle multi-faisceaux. Ce modèle uni-dimensionnel, basé sur une technique de réduction de l'hamiltonien, permet d'étudier les instabilités de type Weibel tout aussi précisément qu'un modèle complet 1D2V (une dimension spatiale et deux dimensions en vitesse), en capturant les principales caractéristiques physiques du problème, même dans la phase non-linéaire de l'instabilité et avec un petit nombre de faisceaux. Le modèle analytique est relativement simple et permet de faire un lien entre différents types d'instabilités, comme par exemple la CFI et WI. L'avantage physique de ce modèle est de pouvoir séparer la contribution de chaque "faisceau" et l'avantage numérique d'être moins coûteux qu'un modèle complet 1D2V.

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à un état de l'art, physique et numérique. Après avoir décrit quelques applications potentielles pour les instabilités de type Weibel, en astrophysique et dans le domaine de l'interaction laser-plasma, nous rappellerons les principales méthodes numériques cinétiques utilisées pour l'étude d'un plasma, comme les codes particuliers PIC, les codes semi-lagrangiens, eulériens ou les codes basés sur la conservation de flux. Le principe et les avantages et inconvénients relatifs à chacune de ces méthodes seront détaillés.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéresserons à l'instabilité de filamentation de courant, conduite par une anisotropie en vitesse, à partir d'un modèle Vlasov-Maxwell 1D2V  $(x, p_x, p_y)$ . Ses principales caractéristiques seront mises en évidence, avec notamment le piégeage magnétique des particules lors de la phase de saturation. Plusieurs simulations seront présentées dans le régime non-relativiste et dans le régime relativiste, tout en prenant en compte par la suite, la dynamique des ions.

Dans les chapitres suivants, nous utiliserons le modèle multi-faisceaux. Ce modèle, basé sur l'invariance du moment canonique transverse, va nous permettre de traiter à la fois l'instabilité de filamentation de courant et les instabilités Weibel.

Dans le chapitre 3, nous présenterons dans un premier temps le modèle Vlasov-Maxwell multi-faisceaux de manière analytique. Puis dans un second temps, après validation du modèle à partir de la relation de dispersion, ce modèle sera appliqué au cas de l'instabilité de filamentation de courant. L'un des outils principal du modèle multi-faisceaux est la séparation de la contribution des différents faisceaux. Il va en particulier nous permettre de suivre précisément la dynamique de chacune des populations d'électrons.

Le quatrième et dernier chapitre 4, l'instabilité Weibel sera étudié à partir du modèle multi-faisceaux couplé à un modèle multi-water-bag dans la direction  $p_x$ .

# 1

## État de l'art

### 1.1. Instabilités et applications potentielles

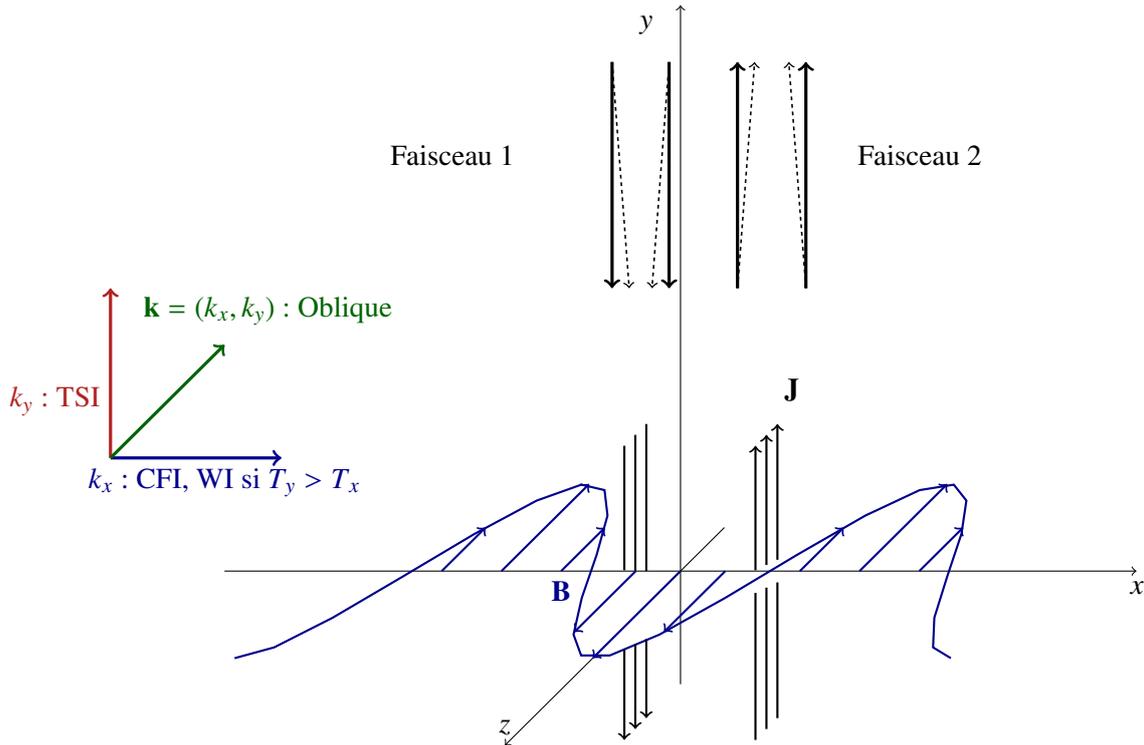
L'instabilité Weibel (*Weibel Instability* WI dans la suite) introduite pour la première fois par Weibel [1], est une instabilité cinétique conduite par une anisotropie de température. À partir de cette anisotropie, des champs magnétiques quasi-statiques sont générés à travers la redistribution de courant. Ces courants sont en effet séparés par le champ électromagnétique généré de façon auto-consistante et contribuent en retour à renforcer le champ magnétique. L'instabilité Weibel sera développée plus en détail dans le chapitre 4.

L'instabilité de filamentation de courant (*Current Filamentation Instability*, CFI dans la suite) introduite initialement par Fried [2], est conduite par une anisotropie en vitesse, suite à la création d'un faisceau peu dense d'électrons rapides. La réponse électrostatique du plasma vise à conserver la quasineutralité. Un courant très dense, formé par les électrons thermiques du plasma, est alors créé. On parle de "courant de retour". Le courant total dans la direction des faisceaux est nul, mais la configuration reste instable. En effet, toute perturbation infinitésimale transverse aux faisceaux est renforcée. Sous l'action de la force de Lorentz, la trajectoire des particules est modifiée, et une densité de courant colinéaire aux faisceaux va se former. Le courant résultant génère alors un champ magnétique, qui renforce ainsi la perturbation initiale. En fait, deux courants de sens opposé ont tendance à se repousser l'un l'autre. Leur action globale mène à des modes électromagnétiques instables pour des perturbations transverses aux faisceaux, à l'origine de la CFI.

L'instabilité de filamentation de courant et l'instabilité Weibel seront regroupées sous le nom générique d'instabilité de type Weibel. Toutes deux ont en commun une anisotropie dans l'espace des vitesses avec une même conséquence, la possibilité de générer un champ magnétique intense à partir de la redistribution des courants.

Il existe de nombreuses autres instabilités cinétiques. On peut notamment citer l'instabilité électrostatique double faisceaux (*Two-Stream Instability*, TSI dans la suite) et l'instabilité dite oblique. La TSI se développe lorsqu'une perturbation parallèle est appliquée à deux faisceaux de particules de même nature se propageant en sens opposé. L'instabilité oblique se développe lorsque le vecteur d'onde de la perturbation appliquée présente un angle (différent de 0 ou  $\pi/2$ ) par rapport à la vitesse des faisceaux [3].

On peut schématiser ces instabilités sur la figure 1.1. En bleu est représenté le cas des instabilités de type Weibel. Une perturbation transverse aux faisceaux est appliquée, ce qui a pour effet de modifier la trajectoire des électrons et ainsi créer une densité de courant accentuant la perturbation initiale, conformément à l'équation de Maxwell-Ampère.



**FIGURE 1.1.:** Les différents types d'instabilités. On traite en particulier les instabilités de type Weibel, en bleu. Lorsqu'une perturbation magnétique infinitésimale est appliquée, la trajectoire des particules de charges  $+e$  est modifiée sous l'effet de la force de Lorentz. Une densité de courant est alors créée, ce qui accentue la perturbation initiale.

Dans ce manuscrit, les instabilités de type-Weibel constituent le thème principal de l'étude. Dans les deux sous-sections à venir, ces instabilités, à l'origine de forts champs magnétiques, sont présentées brièvement pour les plasmas issus de l'astrophysique et de la fusion inertielle.

### 1.1.1. Les instabilités de type Weibel en astrophysique

#### Le champ magnétique cosmique

De nombreux champs magnétiques ont été mesurés à travers l'Univers. Certains sont très intenses, et leurs valeurs peuvent varier de moins d'1G près de la Terre à  $10^{14}G$  dans certains objets comme dans la magnétosphère des étoiles à neutrons. Il a également été démontré qu'à plus grande échelle, un champ magnétique de l'ordre du  $\mu G$  était présent dans toutes les galaxies. L'origine de ce champ magnétique reste encore incertaine, et plusieurs hypothèses ont vu le jour. Les instabilités de type Weibel, regroupant la CFI et la WI, sont depuis quelques décennies, évoquées comme une source potentielle du champ magnétique cosmique. Les récentes études analytiques de Lazar *et al.* [4] et numériques de Fujita *et al.* [5] et Medvedev *et al.* [6], ont permis de sérieusement considérer cette hypothèse, en quantifiant le champ magnétique créé par ces instabilités. Sa valeur à saturation s'approche de  $10^{-6}G$ , ce qui est en parfait accord avec les mesures effectuées.

Dans [7], Schlickeiser et Shukla montrent qu'indépendamment de la compétition entre les instabilités électromagnétiques de type Weibel et les instabilités électrostatiques de type double

faisceaux, la TSI peut se développer la première en transformant le système faisceau-plasma en un plasma anisotrope bi-maxwellien, menant ainsi aux instabilités électromagnétiques qui se développent secondairement. Les auteurs identifient ensuite le cas de deux faisceaux se propageant en sens opposé à un cas de choc cosmique. Ceci leur permet d'établir la valeur d'un champ magnétique de saturation maximum :

$$B_{sat}(G) \approx 10^{-7} \left(\frac{M}{43}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{T}{10^7 K}\right) \left(\frac{n_e}{10^{-4} cm^{-3}}\right)}$$

où  $T$  et  $n_e$  représentent la température et la densité du gaz au niveau du choc, et  $M$  le nombre de Mach du choc. En utilisant les valeurs maximales de ces paramètres, les auteurs trouvent ainsi un champ magnétique de saturation  $B_{sat} \approx 10^{-7} G$ , qui est en accord avec les valeurs mesurées à travers les galaxies. Il existe également des cas où la CFI se couple à la WI. Lazar *et al.* montrent, notamment dans [8] et [4], que le taux de croissance de l'instabilité électromagnétique peut être largement augmenté, et ainsi dominer sur la TSI. Ces deux situations (instabilité secondaire et couplage) sont deux hypothèses valables quant à l'origine du champ magnétique cosmique.

### Les sursauts gamma

Les instabilités de type Weibel peuvent également jouer un rôle important dans le développement des sursauts gamma (*gamma-ray bursts*, GRB pour la suite). Ces GRB [9] sont considérés comme les événements les plus énergétiques de l'Univers. Ils libèrent des rayonnements gamma de l'ordre de  $10^{46} J$  (ce qui correspondrait à l'énergie rayonnée par un milliard d'étoiles de type Soleil durant leur vie entière) sur une durée très brève pouvant varier de quelques secondes à plusieurs minutes. Leur origine reste encore incertaine, mais elle semble être liée à la mort d'étoiles massives. Lors de l'explosion de celles-ci, un plasma de photons, d'électrons et de positrons est expulsé à une vitesse ultra-relativiste dans le milieu interstellaire. Le choc avec ce milieu interstellaire produirait l'émission des rayons gamma ; il s'agit d'un choc "externe". À l'intérieur du plasma ont lieu des chocs relativistes non collisionnels, dits "internes", et ce en présence d'un champ magnétique.

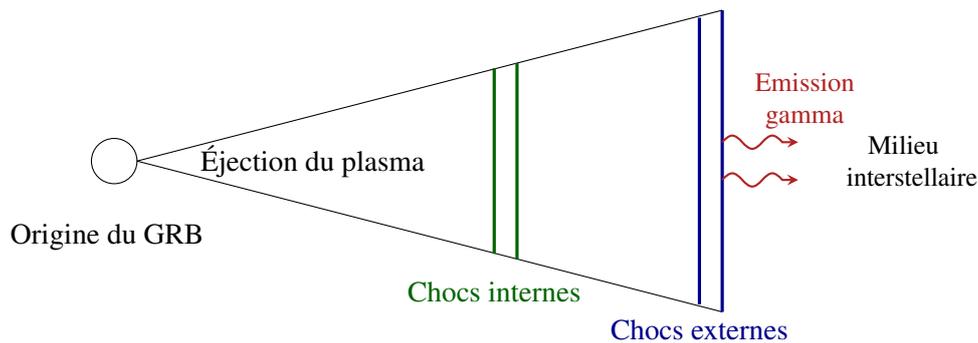


FIGURE 1.2.: Les sursauts gamma (GRB).

Les instabilités de type Weibel ont souvent été évoquées comme un mécanisme possible pour la production du champ magnétique et des particules énergétiques dans les GRB, que ce soit dans les chocs internes ou externes. En effet, dans [10], Medvedev *et al.* montrent que dans le plasma éjecté (appelé *fireball*), l'interaction de deux couches de plasma mène à un état comparable à

celui de deux faisceaux se propageant en sens opposé. Dans les chocs "externes", l'instabilité est générée par l'interaction des particules accélérées avec le milieu, ce qui produit des turbulences magnétiques qui semblent être responsables des émissions de radiation synchrotron [11, 12]. L'hypothèse de la présence de la CFI dans les chocs a été largement validée par de nombreuses simulations PIC [11–15]. Les premières simulations cinétiques, relativistes et à trois dimensions d'une collision de deux coquilles de plasma ont été réalisées par Silva *et al.* [11]. Les auteurs montrent à partir de deux simulations relativiste et semi-relativiste, que la CFI est capable de générer des champs magnétiques quasi-statiques d'une durée de vie suffisamment grande pour recouvrir la durée totale du sursaut gamma. Les instabilités de type Weibel seraient donc capables de créer des champs magnétiques au niveau des chocs des plasmas cosmiques.

### La reconnexion magnétique

La reconnexion magnétique est un processus physique ayant lieu dans les plasmas fortement conducteurs. Les lignes de champs magnétiques fusionnent entre elles et une partie de l'énergie magnétique est ainsi convertie en énergie cinétique et thermique. En particulier, cette conversion permet d'accélérer des particules. Ce phénomène se produit notamment dans la magnétosphère terrestre et dans les éruptions solaires. Il présente donc un fort intérêt pour la communauté d'astrophysiciens. L'instabilité de filamentation de courant est souvent évoquée dans les papiers relevant de la reconnexion magnétique [16–18]. On peut notamment citer Califano *et al.* [16] qui ont montré à l'aide de simulations numériques cinétiques 2D-3V (deux dimensions spatiales, trois dimensions en vitesse) que le champ magnétique dipolaire créé lors du développement de l'instabilité peut mener à la formation d'îlots magnétiques. Ces structures semblent être dues à un processus rapide de reconnexion magnétique.

Les instabilités de type Weibel sont donc largement présentes dans le domaine de l'astrophysique. La section suivante a pour but de développer les applications potentielles de ces instabilités dans un domaine différent, l'interaction laser-plasma.

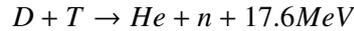
### 1.1.2. Les instabilités de type Weibel lors de l'interaction laser-plasma

#### La fusion inertielle et l'allumeur rapide

Les centrales nucléaires actuelles produisent de l'énergie par la fission nucléaire. Une des réactions mise en jeu consiste à bombarder des noyaux d'Uranium 235 par des neutrons thermiques (énergie de l'ordre du  $meV$  à température ambiante) avec la production de  $200 MeV$  par réaction. Les inconvénients et les risques bien connus de ce processus ont poussé la communauté scientifique à chercher d'autres solutions pour la production d'énergie d'origine nucléaire. En accord avec la courbe d'Aston, la fusion nucléaire est l'autre approche possible.

La fusion nucléaire est une réaction où deux noyaux légers, principalement des isotopes de l'hydrogène s'assemblent de façon à créer un noyau plus lourd. Cette fusion de noyaux dégage énormément d'énergie. Pour l'atteindre, il faut néanmoins vaincre la répulsion coulombienne entre les noyaux en fournissant une certaine quantité d'énergie à comparer à la quantité d'énergie dégagée. Il est donc nécessaire de conserver une température suffisamment élevée pour que les noyaux se rapprochent suffisamment afin que les forces d'attractions nucléaires puissent agir. La réaction la plus économique en terme d'énergie à fournir et la plus rentable en terme d'énergie produite est la réaction entre un noyau de Deutérium et un noyau de Tritium (D-T). Cette réaction

créé un noyau d'Hélium (He) et un neutron, et est accompagnée d'un dégagement d'énergie de  $17,6 \text{ MeV}$ .



La condition nécessaire pour que le mélange combustible conduise à un réacteur économiquement viable est connue sous le nom de "critère de Lawson". Ce critère lie la densité du combustible  $n$  au temps de confinement du plasma créé  $\tau_C$ . Pour un mélange D-T, et pour un facteur d'amplification  $Q = \text{Puissance des réactions de fusion} / \text{Puissance fournie} = 20$ , ce critère s'écrit :

$$n\tau_C > 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ s}$$

Deux voies se sont profilées pour atteindre l'objectif de la fusion nucléaire.

La première méthode est la fusion par confinement magnétique. Les particules du plasma, de faible densité ( $\approx 10^{20} \text{ particules/m}^3$ ), sont confinées à l'aide d'un fort champ magnétique, créé par de grosses bobines supraconductrices. Le plasma est difficilement maîtrisable et doit rester à une température suffisamment importante (100 à 200 millions de degrés Celsius) pour que les réactions de fusion nucléaire puissent avoir lieu. Le temps de confinement caractéristique pour ce genre de machine varie de 1 à 10 secondes.

La deuxième voie est la fusion par confinement inertiel. Elle consiste en la combustion d'une micro-cible très dense de D-T ( $\approx 10^{31} \text{ particules/m}^3$ ) à l'aide de puissants faisceaux lasers. Ces faisceaux doivent éclairer de façon isotrope la cible de manière à atteindre plus rapidement l'allumage de la cible en accord avec le critère de Lawson. La partie centrale du combustible de D-T, d'une longueur variant de 10 à 50  $\mu\text{m}$ , est amenée aux conditions de température et pression nécessaires à la fusion, à partir des faisceaux lasers. Une fois ce "point chaud" établi, la partie l'entourant va à son tour atteindre la température nécessaire à la fusion. Le temps de confinement est de l'ordre de  $10^{-11}$  secondes.

Le tableau suivant résume les caractéristiques principales de ces deux modes de confinement permettant de respecter le critère de Lawson.

	Densité ( $\text{part/m}^3$ )	T° (K)	Temps caractéristique (s)	Volume ( $\text{m}^3$ )
Conf. magnétique	$10^{20}$	$10^8$	1 – 10	1000
Conf. inertiel	$10^{31}$	$10^8$	$10^{-11}$	millimétrique

**TABLE 1.1.:** *Caractéristiques principales des deux modes de confinement.*

De nombreux documents relatent ces processus nucléaires. On peut notamment citer les livres récents de Benuzzi-Mounaix [19] et de Bobin [20].

L'instabilité de filamentation de courant apparaît dans la fusion inertielle à travers notamment le processus d'allumeur rapide. Ce schéma récent a été proposé pour la première fois par Tabak *et al.* en 1994 [21]. Il repose sur la dissociation de la phase de compression de celle du chauffage de la cible. Cette méthode permet de se débarrasser de la contrainte relative à la symétrie d'irradiation. Son principe, représenté sur la figure 1.3 (issue du mémoire d'HDR de Baton [22]), se présente en quatre étapes principales.

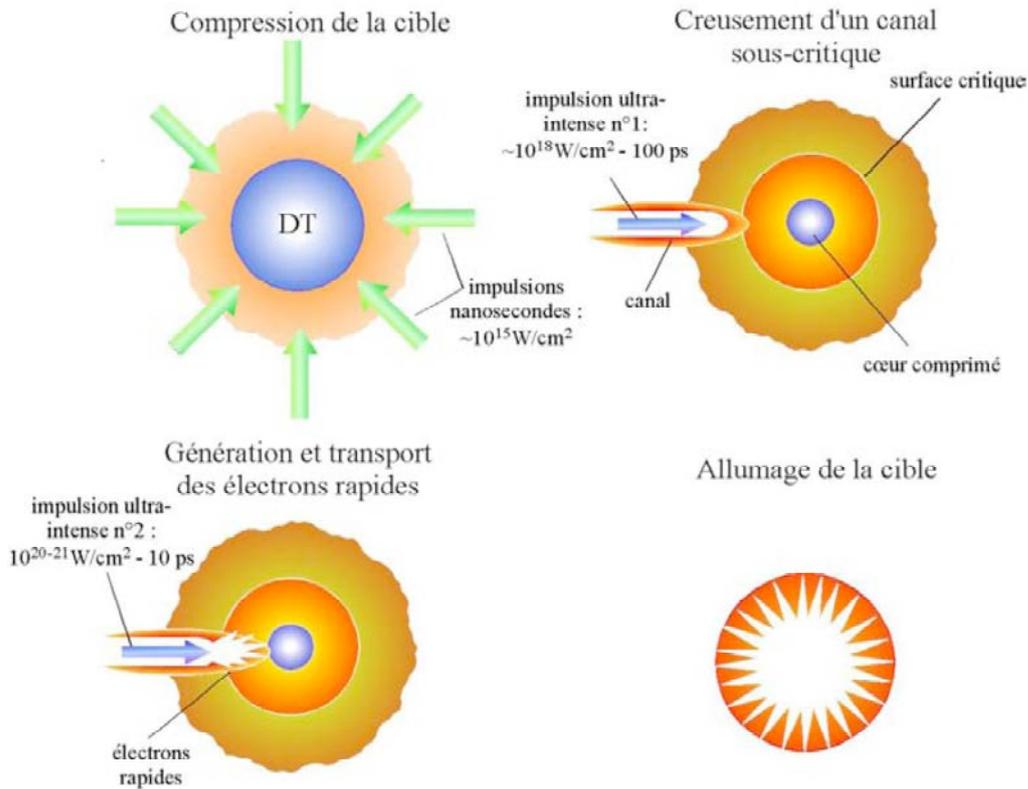


FIGURE 1.3.: L'allumeur rapide. Schéma issu du mémoire de l'HDR de Baton [22]

1. La cible est comprimée de manière "classique", comme dans le schéma direct, à l'aide de faisceaux lasers "longs" (plusieurs nanosecondes) d'intensité proche de  $10^{15} \text{ W/cm}^2$ . L'obtention du point chaud n'est pas l'objectif de cette première étape ; la cible doit être comprimée jusqu'à une densité de  $300 \text{ g/cm}^3$ .
2. Une première impulsion, courte ( $\sim 100 \text{ ps}$ ) et très intense ( $\sim 10^{18} - 10^{19} \text{ W/cm}^2$ ), est envoyée sur un côté de la cible. Ce laser va alors creuser un canal d'une longueur millimétrique dans la partie dense du plasma, au-delà de la densité critique, grâce à sa forte intensité.
3. Une seconde impulsion, plus courte ( $\sim 10 \text{ ps}$ ) et plus intense ( $\sim 10^{20} \text{ W/cm}^2$ ), est envoyée à travers ce canal. Une partie de l'énergie du faisceau sert à accélérer un faisceau d'électrons supra-thermiques qui vont se propager jusqu'à la région très dense du cœur comprimé où ils cèdent leur énergie en quelques picosecondes.
4. Cette énergie va alors permettre la création d'un point chaud, excentré, et l'amorçage des réactions de fusion.

L'allumeur rapide présente divers avantages. Les contraintes d'une compression symétrique est irrémédiablement réduite, puisque l'étape une consiste uniquement à atteindre de hautes température et pression, sans pour autant obtenir un point chaud. L'allumage, fait par un élément extérieur (faisceaux d'électrons), permet de s'affranchir de la présence simultanée du point chaud centré et du combustible froid autour, pour la propagation des réactions nucléaires. De nombreux obstacles demeurent cependant, en particulier en ce qui concerne la qualité du faisceau d'électrons produit, en termes de divergence de vitesse et de quantité d'énergie. En effet, de nombreuses

simulations numériques ont été effectuées à l'aide de différents modèles de façon à prouver que la CFI est capable de se développer dans le processus de l'allumage rapide [23–29], et ainsi affecter de façon significative le dépôt de l'énergie du faisceau d'électrons dans le coeur de la cible. Dans [27], Hill *et al.* montrent par exemple à l'aide d'un modèle fluide et d'un modèle cinétique 1D-2V, où les faisceaux d'électrons sont modélisés par une gaussienne, que les instabilités de type Weibel sont capables de se développer dans le cas de l'allumeur rapide pour un plasma avec une densité variant de la densité critique à la densité d'une cible de D-T "standard" de  $300 \text{ g/cm}^3$  et ce avec un taux de croissance non négligeable. Plus récemment, dans [28] et [29], les auteurs prouvent au moyen d'un code PIC à deux et trois dimensions que l'instabilité Weibel se développe dans des plasmas collisionnels ou non, et ce même en présence d'une grande température transverse. Ce phénomène est dû au couplage entre la TSI et la CFI caractérisé par le développement du mode oblique.

La présence des instabilités de type Weibel dans le processus de l'allumeur rapide a également été mise en évidence expérimentalement au moyen d'interaction laser-cible solide, comme un film d'aluminium devant un jet de gaz ou une "mousse" de plasma dense préionisé [30, 31]. Les faisceaux d'électrons produits ayant les mêmes caractéristiques (densité, vitesse, énergie) que dans l'allumeur rapide, ces expériences sont donc pertinentes. Il est confirmé que le couplage de la TSI et de la CFI peut être amélioré de façon significative dans les régions de basse densité.

Toutes ces références prouvent ainsi que la suppression des instabilités dans le processus de l'allumeur rapide semble difficile. L'utilisation d'un cône latéral (permettant de rapprocher la zone de production des électrons du coeur de la cible et ainsi de mieux déposer l'énergie) réduirait le taux de croissance des instabilités, sans pour autant les supprimer. Connaître et prévoir leur évolution s'avère donc nécessaire pour atteindre l'ignition

Les instabilités de type Weibel apparaissent largement dans le domaine relatif à l'interaction laser-plasma, dans le processus de l'allumeur rapide que nous venons de développer. Elles apparaissent aussi lors de l'accélération de faisceaux d'électrons par sillage laser (*laser wake-field*), ou dans le problème de divergence des faisceaux.

### L'accélération par sillage laser

Lorsqu'un faisceau laser se propage à l'intérieur d'un plasma sous dense, il perturbe la densité électronique. Sous l'effet de la force pondéromotrice, l'impulsion laser crée dans son sillage une onde de Langmuir qui va alors générer de forts champs électriques à l'arrière du laser. Cette onde déferle et permet ainsi de créer un faisceau rapide d'électrons qui vont pouvoir être accélérés jusqu'à des énergies de plusieurs *MeV* à quelques *GeV*. C'est le phénomène d'accélération par sillage laser. Ce nouveau concept présente plusieurs avantages et semble être d'un grand intérêt pour les accélérateurs de nouvelle génération. D'un part, il permet de réduire considérablement la taille de l'accélérateur. D'autre part, l'intensité des champs électriques mis en jeu est plus importante que dans certains accélérateurs "classiques".

Le faisceau d'électrons se propageant dans le plasma est alors sujet à l'instabilité de filamentation de courant. Ce phénomène a été notamment démontré très tôt par Liseikina *et al.* [32] à partir d'un code numérique particulière à 2D. Les auteurs mettent ainsi en évidence le phénomène d'oscillation de la densité électronique dans le sillage de l'impulsion laser accompagné de la formation d'un faisceau d'électrons. Ce dernier est suivi par la génération d'un fort champ magnétique. L'espace des phases confirme alors que l'origine de ce fort champ magnétique est l'instabilité de filamentation de courant. Le faisceau créé, le plasma va réagir de façon à conserver sa quasineutralité en créant un courant de retour se propageant en sens opposé. Cette configuration correspond à celle de la CFI. Récemment, Huntington *et al.* [33] ont montré expérimentalement

que le faisceau d'électrons produit par l'accélération par sillage laser est sujet à l'instabilité de filamentation de courant.

### Divergence des faisceaux et instabilité secondaire

On peut encore citer de nombreux autres domaines relatifs à l'interaction laser-plasma où les instabilités de type Weibel entrent en jeu. Par exemple, il a récemment été montré [34] que la divergence angulaire des faisceaux d'électrons générés pendant l'interaction laser-plasma est due à la diffusion des électrons dans le champ magnétique généré par la CFI.

L'instabilité de filamentation de courant est également évoquée comme une instabilité secondaire à l'origine d'un champ magnétique créé à la suite du développement de l'instabilité Raman [35].

Tous ces exemples où les instabilités de type Weibel semblent être responsables de champ magnétique important prouvent donc la nécessité de connaître les caractéristiques et le développement de ces instabilités. On peut en particulier s'intéresser à la figure 1 de la référence [3] où les auteurs, Bret *et al.*, montrent sur un graphique le nombre de citations par année reçues par les publications de Weibel [1] et Fried [2]. On remarque une augmentation importante depuis 1990, qui correspond à la naissance de nouveaux scénarios pour la fusion par confinement inertiel ou de nouvelles recherches en astrophysique, avec les GRB.

Les instabilités de type Weibel sont des instabilités de nature cinétique. Elles se développent dans l'espace des vitesses et peuvent conduire à une modification importante des fonctions de distribution des particules, ce qui nécessite une description cinétique du plasma collectif.

## 1.2. Comportement collectif des plasmas d'astrophysique et de fusion

Le plasma est un système de particules chargées très peu corrélées. L'énergie d'interaction moyenne entre particules est faible devant l'énergie thermique de celles-ci. Dans ces plasmas, les effets collectifs dominent les effets individuels. En effet une particule est principalement soumise au champ moyen créé par les autres particules. Ce phénomène collectif peut être résumé grâce à la relation suivante :

$$b \ll d \ll \lambda_D \ll \lambda_{lpm}$$

où  $b$  représente le paramètre d'impact entre deux particules,  $d$  la distance interparticulaire,  $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T / e^2 n_0}$  la longueur de Debye au delà de laquelle l'individualité des particules "disparaît" et  $\lambda_{lpm}$  le libre parcours moyen d'une particule (distance moyenne parcourue entre deux collisions).

Les paramètres  $b$  et  $\lambda_{lpm}$  sont donc des paramètres d'individualité [36] relatifs aux collisions. Lorsque le paramètre d'impact entre deux particules  $b$  est plus petit que la distance moyenne entre elles, il paraît alors évident que les collisions entre ces particules sont négligeables. Il en est de même pour un libre parcours moyen  $\lambda_{lpm}$  très grand par rapport à la longueur de Debye.

La distance interparticulaire  $d$  est inversement proportionnelle à la densité du plasma  $n_0$  :  $d \approx 1/n_0^{1/d_x}$  pour un espace à  $d_x = 1, 2, 3$  dimensions spatiales. Si les effets collectifs sont dominants, la longueur de Debye doit être supérieure à  $d$ , il s'agit du phénomène d'écrantage. Dans un plasma, l'introduction d'une charge ponctuelle attire des charges de signe opposé. Le champ dû à ces charges se superpose à celui de la charge de départ, avec une direction opposée. Le champ total est donc diminué et décroît plus rapidement avec la distance que pour une charge

ponctuelle isolée. Sa portée est donnée par  $\lambda_D$ . Un écrantage efficace équivaut à :

$$\lambda_D \gg \frac{1}{n_0^{1/d_x}} \rightarrow n_0 \lambda_D^{d_x} \gg 1 \quad (1.1)$$

Pour un espace à trois dimensions,  $n_0 \lambda_D^3 \gg 1$  implique que dans un cube d'arête  $\lambda_D$ , le nombre de particules chargées qui écrantent est grand. Cette relation nous permet d'introduire le facteur de grain  $g$  (*graininess parameter* dans la littérature anglaise) :

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^{d_x}} \quad (1.2)$$

Ce facteur de grain mesure l'importance des effets individuels comparés aux phénomènes collectifs. Plus  $g$  se rapproche de zéro, plus les effets collectifs sont dominants.

Les plasmas de fusion ont en moyenne un facteur de grain  $g$  pouvant varier de  $10^{-9}$  à  $10^{-7}$ . Les plasmas spatiaux peuvent également avoir un facteur de grain très petit de l'ordre de  $10^{-9}$ . Cette contrainte sur le facteur  $g$  doit être prise en compte dans les systèmes d'équations utilisés pour modéliser les plasmas. Un modèle cinétique valable pour un facteur de grain  $g \rightarrow 0$  est le modèle de Vlasov-Maxwell construit justement dans cette limite.

Le plasma collectif peut être modélisé par  $N$  particules interagissant dans l'espace des phases de variables dynamiques  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . On définit le volume de l'espace à un instant initial  $t_0$  comme  $dV_0 = d\mathbf{q}d\mathbf{p}$ . À un temps  $t$  ultérieur, les particules de ce volume initial ont bougé et le nouveau volume est défini comme  $dV = d\mathbf{q}d\mathbf{p}$ . Si le système est hamiltonien, c'est-à-dire décrit par les équations de Hamilton

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$$

on trouve alors que le volume de l'espace des phases se conserve :  $dV = dV_0$ . Il s'agit du théorème de Liouville. Les particules qui au temps  $t_0$  étaient dans le volume  $dV_0$ , se retrouvent toutes au temps  $t$  dans le volume  $dV$ . Rien n'est entré ni sorti de ce volume. On peut alors définir une densité de probabilité de présence des particules à une position  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$  et  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  respectivement par  $f(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t)$  et  $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Le volume et le nombre de particules se conservant, on en déduit que

$$f(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) = f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$$

ce qui implique que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

En considérant que  $d\mathbf{q}/dt = \mathbf{v}$  et  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  avec  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{F}$  les termes de vitesse et de force, on obtient l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.3)$$

qui est l'équation de Vlasov sous sa forme advective. La fréquence caractéristique de l'équation de Vlasov est la pulsation plasma  $\omega_p = \sqrt{e^2 n_0 / m \epsilon_0}$ . Cette équation (1.3) représente l'évolution de la fonction de distribution  $f$  lorsque les collisions du plasma sont négligées :

$$\frac{\nu}{\omega_p} \ll 1$$

Avec  $\nu \approx v_{th} / \lambda_{lpm}$  la fréquence de collision,  $v_{th} = \sqrt{k_B T / m}$  la vitesse thermique et le libre parcours moyen  $\lambda_{lpm} \approx n_0^{-1} (e^2 / \epsilon_0 k_B T)^{-2} \approx n_0 \lambda_D^4$ , on trouve que l'équation de Vlasov est valide

pour  $n_0 \lambda_D^3 \gg 1$ . Cette relation implique donc que l'équation de Vlasov est valide pour un facteur de grain

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} \rightarrow 0$$

Le comportement collectif des plasmas de fusion et d'astrophysique impose donc l'utilisation de l'équation de Vlasov, et plus particulièrement du modèle Vlasov-Maxwell, pour modéliser ces plasmas. Ce système d'équations est non linéaire et donc difficilement intégrable analytiquement. Le recours à des simulations numériques s'impose. La section suivante a pour but d'introduire le modèle Vlasov-Maxwell, modèle de base en physique des plasmas chauds, et les différentes méthodes utilisées pour résoudre ce système.

### 1.3. Le modèle Vlasov-Maxwell

Le modèle complet pour l'étude des phénomènes collectifs est le système formé par l'équation cinétique de Vlasov relativiste couplée aux équations électromagnétiques de Maxwell. Un tel système est non-linéaire et auto-cohérent : les champs électromagnétiques déplacent les particules et modifient ainsi leur fonction de distribution. Ces modifications vont générer des courants, qui en retour, vont modifier les champs électromagnétiques.

Dans ce modèle cinétique, chaque espèce de particule est représentée par une fonction de distribution. Cette fonction  $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  représente la densité de probabilité de présence des particules de type  $\alpha$  (électrons, ions), pour une position  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  de l'espace des phases à un instant donné.

Nous allons considérer dans un premier temps les ions fixes et formant un fond neutralisant dû à leur grande inertie. Dans la section 2.3 nous étudierons leur dynamique. Lorsque les particules agissent avec le champ moyen qu'elles génèrent, la fonction de distribution électronique  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  obéit à une équation de Vlasov relativiste à six dimensions (trois dans l'espace des positions, trois dans l'espace des vitesses) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B} \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (1.4)$$

avec  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  et  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = m\gamma\mathbf{v}$  la quantité de mouvement. Les constantes  $m$  et  $e$  représentent respectivement la masse au repos et la charge de l'électron. Le facteur de Lorentz  $\gamma$  est défini par :

$$\gamma = \sqrt{1 + \left( \frac{\mathbf{p}}{mc} \right)^2} \quad (1.5)$$

L'équation de Vlasov "générale" s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{p_y}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{p_z}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial z} + e \left( E_x + \frac{p_y B_z - p_z B_y}{m\gamma} \right) \frac{\partial f}{\partial p_x} \\ + e \left( E_y + \frac{p_z B_x - p_x B_z}{m\gamma} \right) \frac{\partial f}{\partial p_y} + e \left( E_z + \frac{p_x B_y - p_y B_x}{m\gamma} \right) \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Elle est couplée aux équations électromagnétiques de Maxwell

$$\mathbf{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{div}\mathbf{B} = 0 \quad (1.10)$$

où  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  représentent respectivement les champs électrique et magnétique. Les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  sont calculées à partir de la fonction de distribution :

$$\rho = e \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3 p - en_i \quad (1.11)$$

$$\mathbf{J} = e \int \frac{\mathbf{p}f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{m\gamma} d^3 p \quad (1.12)$$

où  $n_i$  représente la densité ionique.

L'équation de Vlasov associée aux équations de Maxwell (ou dans un cas plus simple, à l'équation de Poisson uniquement) est non-linéaire. Ce système est donc difficilement intégrable analytiquement et le recours à des simulations numériques s'impose.

Différentes méthodes numériques existent pour résoudre ce système. Quatre seront présentées :

- la méthode lagrangienne, basée sur la résolution des équations du mouvement des particules du plasma, est la méthode utilisée dans les codes particulaires (*PIC*),
- la méthode eulérienne discrétise l'espace des phases avec une grille fixe et utilise un schéma de différences finies,
- la méthode hybride semi-lagrangienne, employée dans des codes numériques de l'équipe "plasma chaud" de Nancy,
- la méthode de conservation de flux, utilisée dans le code non relativiste 2D-3V, 3D-3V de Califano de l'Université de Pise.

Chacune des méthodes numériques citées présente des avantages et des inconvénients, et sont à privilégier dans certains problèmes. Les sections suivantes ont pour but de décrire ces méthodes tout en mettant en avant les intérêts de chacune.

### 1.3.1. La méthode lagrangienne

La méthode lagrangienne a été l'une des premières méthodes à être utilisée quasi exclusivement dans les années 1980 et 1990 car elle permettait de faire des simulations de problèmes physiques réalistes avec les moyens numériques disponibles. La méthode *PIC* (*Particle In Cell*) est un exemple de méthode lagrangienne. Elle est encore très utilisée pour simuler le comportement des particules dans un plasma de laboratoire ou spatial, peu collisionnel.

#### Principe de la méthode

Elle couple une méthode sur maillage pour la résolution du système de Maxwell à une méthode particulaire pour Vlasov, où les particules numériques se déplacent indépendamment du maillage. Elle consiste à représenter la fonction de distribution  $f$  par un nombre fini  $N$  de macro-particules, ayant chacune un poids  $\omega_k$  défini à l'initialisation. Cette fonction, approchée par une somme de masses de Dirac, s'écrit :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \sum_{k=1}^N \omega_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k(t)) \quad (1.13)$$

avec  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k)$  la position de la macro-particule  $k$  dans l'espace des phases.

Dans le cas des électrons par exemple, les macro-particules, de masse  $m$  et de charge  $e$ , sont

avancées le long des caractéristiques de l'équation de Vlasov (1.4) qui sont les équations du mouvement :

$$\frac{d\mathbf{x}_k}{dt} = \mathbf{v}_k = \frac{\mathbf{p}_k}{m\gamma} \quad (1.14)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \frac{e}{m} (\mathbf{E}(\mathbf{x}_k, t) + \mathbf{v}_k \times \mathbf{B}(\mathbf{x}_k, t)) \quad (1.15)$$

Pour pouvoir résoudre ces équations, il est nécessaire de connaître la valeur du champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) agissant sur les particules. Ces valeurs sont trouvées à partir de la résolution des équations de Maxwell (1.7-1.10) sur un maillage caractéristique de la grille spatiale, avec un pas  $\Delta x$  de l'ordre de la longueur de Debye  $\lambda_D$ , afin de pouvoir traiter les effets collectifs. Ce champ auto-consistant est calculé sur un maillage de l'espace physique, en utilisant des méthodes classiques (différences finies, ...)

Pour cette méthode particulière, le calcul au pas de temps suivant se fait principalement en quatre étapes, résumées sur la figure 1.4 :

- À partir des conditions initiales, l'interpolation des densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  est effectuée sur les points de la grille spatiale.
- Les nouvelles valeurs des champs auto-consistants sur ces points de grille sont calculées à partir des équations de Maxwell, en utilisant un solveur classique sur maillage (différences finies, éléments finis...)
- Une interpolation des valeurs des champs sur les positions qu'occupent les macro-particules est ensuite effectuée.
- Pour finir, les particules sont "avancées" par la résolution des équations du mouvement (1.14) et (1.15).

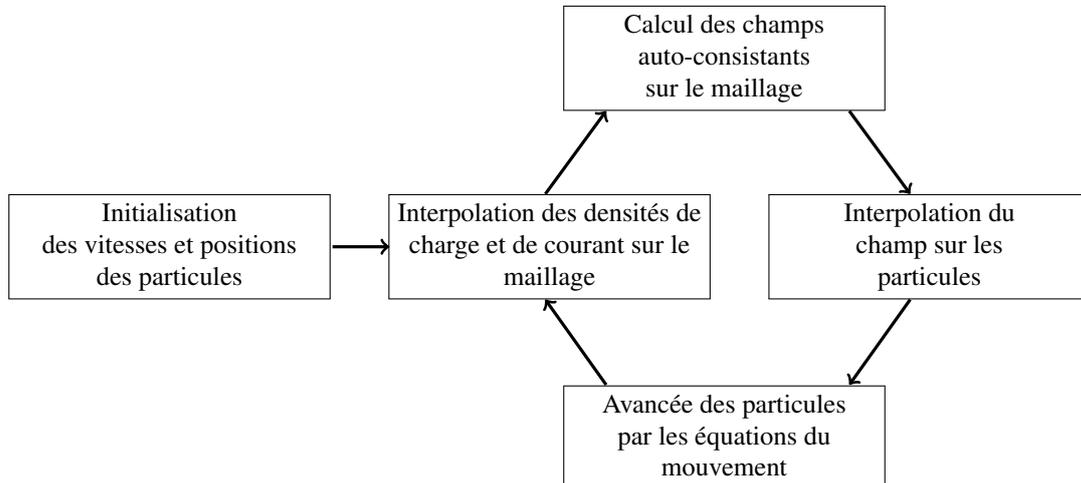


FIGURE 1.4.: Étapes principales d'un code PIC.

### Intérêts et inconvénients de la méthode lagrangienne

Plusieurs ouvrages traitent de façon plus approfondie ce type de méthode ( [37], [38]). En particulier, [37] représente une référence de base où les auteurs, Birdsall et Langdon, prouvent

l'efficacité du modèle.

Les codes particuliers utilisent un nombre de macro-particules qui ne dépend pas de la dimension du plasma. Ces codes présentent un intérêt majeur lorsque l'on souhaite passer à des dimensions élevées, typiquement  $d_x = 2, 3$ .

En revanche, un inconvénient majeur existe. Malgré l'introduction d'une grille spatiale de maille élémentaire  $\Delta x \approx \lambda_D$  permettant de décrire les effets collectifs par l'approximation du champ moyen, le modèle lagrangien réintroduit des effets individuels dus au nombre fini de macro-particules. Ces phénomènes individuels sont souvent considérés comme un bruit numérique qui peut devenir très important et pénalisant pour obtenir une description précise de la fonction de distribution. Pour certains problèmes, ce bruit ne permet pas d'obtenir la précision souhaitée. Les codes PIC offrent ainsi une mauvaise résolution dans les régions de faible densité. Le bruit numérique est lié à l'échantillonnage, et donc nécessairement au nombre fini  $N$  de macro-particules. Il décroît en  $1/\sqrt{N}$  et nécessite ainsi un grand nombre de particules pour le faire diminuer.

### 1.3.2. La méthode eulérienne

#### Principe de la méthode

La méthode eulérienne est une méthode de résolution numérique basée sur des schémas classiques de différences finies. L'équation de Vlasov et les équations électromagnétiques de Maxwell sont résolues comme des équations différentielles. Pour simplifier, considérons un exemple à une dimension. L'équation d'advection

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1.16)$$

peut par exemple se résoudre à l'aide d'un schéma type Euler implicite :

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = -v \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

où  $f$  représente la fonction de distribution des particules,  $\Delta x$  et  $\Delta t$  représentent les pas de la grille spatial et temporel, l'indice  $i$  est relatif à la position ( $x_i = i\Delta x$ ) et l'exposant  $n$  au temps ( $t^n = n\Delta t$ ).

#### Intérêts et inconvénients de la méthode eulérienne

Le couplage de l'équation de Vlasov aux équations de Maxwell s'opère sur une grille structurée fixe de l'espace de phases. L'espace des positions et l'espace des vitesses sont totalement discrétisés, pouvant ainsi offrir une bonne résolution, même dans les zones de faible densité. Cette grille fixe facilite notamment la parallélisation des codes.

L'inconvénient majeur de ce genre de modèle est l'existence des conditions C. F. L. (Courant-Friedrich-Levy) [39]. Cette condition, liant le pas de temps et la discrétisation de l'espace des phases, permet la convergence du problème :

$$\frac{v_{max}\Delta t}{\Delta x} < 1$$

ce qui implique

$$v_{max}\Delta t < \Delta x$$

avec  $v_{max}$  la vitesse maximale de l'espace des vitesses. Cette condition impose un pas de temps relativement petit. La méthode devient donc vite très coûteuse numériquement et a mené au recours à d'autres méthodes moins coûteuses comme les méthodes lagrangienne ou semi-lagrangienne.

### 1.3.3. La méthode semi-lagrangienne

La méthode semi-lagrangienne est utilisée dans des codes numériques de l'équipe de recherche "plasma chaud" de Nancy. Cette méthode est "semi-lagrangienne" car elle utilise des particularités du modèle lagrangien et du modèle eulérien. D'une part, cette méthode utilise le calcul des caractéristiques de l'équation de Vlasov définie par (1.14) et (1.15), sur lesquelles la fonction de distribution  $f$  est conservée. Il s'agit d'une particularité de la méthode lagrangienne. D'autre part, cette méthode utilise la grille fixe de la méthode eulérienne. En plus d'une grille spatiale, une grille dans l'espace des quantités de mouvement est introduite. Le calcul des grandeurs s'effectue sur cette grille fixe de l'espace des phases. On a alors une discrétisation totale de l'espace des phases, offrant une bonne résolution y compris dans les zones de faible densité. Ceci est souvent préconisé pour l'étude de l'interaction laser-plasma. À chaque pas de temps, un nouvel ensemble de particules est utilisé. Il est choisi de façon à arriver exactement sur un point de la grille fixe à la fin d'un pas de temps.

Cette méthode est également caractérisée par une absence de condition C. F. L. sur l'équation de Vlasov, condition liant le pas de temps à la maille spatiale.

La méthode semi-lagrangienne a notamment été développée dans les références [40, 41].

#### Principe de la méthode

Toute équation de type Vlasov peut s'écrire sous la forme advective suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f = 0 \quad (1.17)$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur coordonnées de l'espace des phases et  $\mathbf{U}$  le champ d'advection.

Afin d'expliquer le principe de la méthode semi-lagrangienne, rappelons que les caractéristiques de l'équation de Vlasov (1.17) s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t), t) \quad (1.18)$$

En considérant  $\mathbf{X}(t)$  solution de l'équation (1.18), on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\mathbf{X}(t), t) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{X}(t), t) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

ce qui implique que  $f$  est constante le long de ses caractéristiques, définies par (1.18).

Considérons  $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, t')$  solution de l'équation (1.18) au temps  $t$ , dont la valeur à un temps  $t'$  antérieur est  $\mathbf{x}$ .  $f$  étant constante le long de ses caractéristiques, sa valeur au temps  $t$  en  $\mathbf{X}$  est égale à celle au temps  $t'$  en  $\mathbf{x}$  :

$$f(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}, t'), t) = f(\mathbf{X}(t'; \mathbf{x}, t'), t') = f(\mathbf{x}, t') \quad (1.20)$$

Cette propriété nous permet de calculer les valeurs de la fonction de distribution sur les points de la grille de l'espace des phases  $(\mathbf{x}_j)_{j=1, \dots, N}$  (où  $N$  est le nombre total de points) à l'instant  $t_n + \Delta t$ , connaissant les valeurs de  $f$  sur la grille à l'instant  $t_n$  :

$$f(\mathbf{x}_j, t_n + \Delta t) = f(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_j, t_n + \Delta t), t_n) \quad (1.21)$$

Pour chaque point de la grille  $\mathbf{x}_j$ , la fonction de distribution est calculée en deux étapes :

1. Trouver le point de départ de la caractéristique  $\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_j, t_n + \Delta t)$ , se terminant au point  $\mathbf{x}_j$  à  $t_n + \Delta t$ ,
2. Calculer la valeur de  $f(\mathbf{X}(t_n; \mathbf{x}_j, t_n + \Delta t), t_n)$  par interpolation puisque  $f$  est connue uniquement sur les points de la grille au temps  $t_n$ .

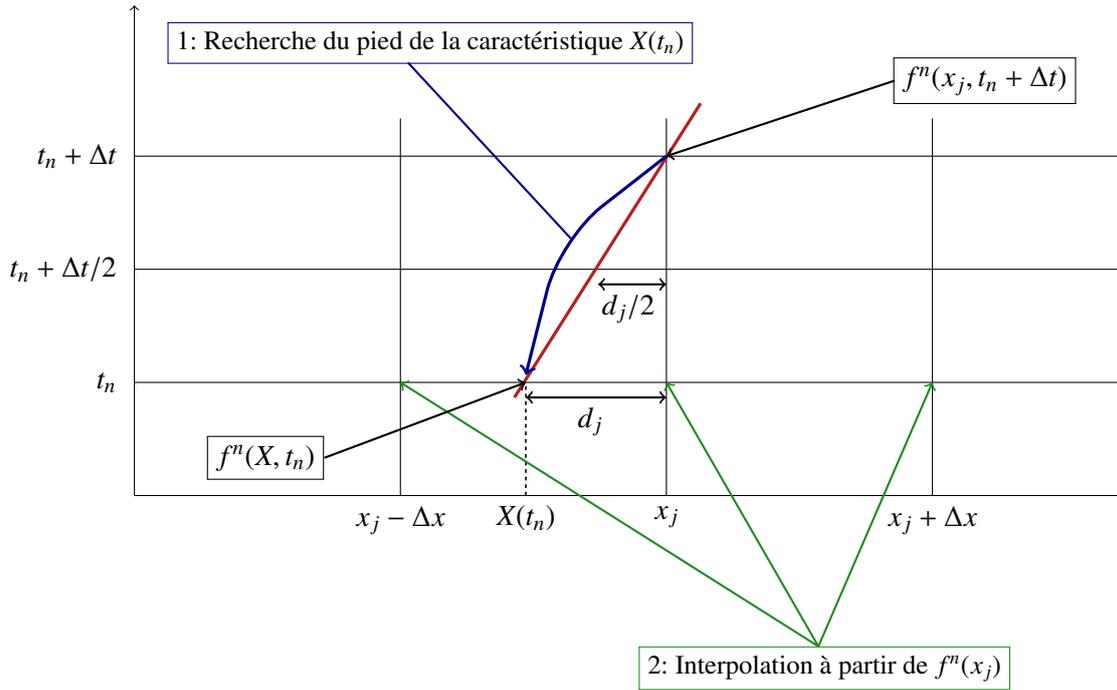


FIGURE 1.5.: Étapes du schéma d'advection permettant de trouver la valeur de  $f$  à l'instant  $t_n + \Delta t$ .

Dans le but de traiter l'étape 1, on introduit une discrétisation temporelle de (1.18), et on fait l'hypothèse que le champ d'advection  $\mathbf{U}$  est connu au milieu de l'intervalle  $\Delta t$ . Le pied de la caractéristique est obtenu par un schéma centré, correct au second ordre :

$$\frac{\mathbf{x}_j(t_n + \Delta t) - \mathbf{X}(t_n)}{\Delta t} = \mathbf{U}(\mathbf{X}(t_n + \Delta t/2), t_n + \Delta t/2) \quad (1.22)$$

Introduisons  $\mathbf{d}_j$  tel que :  $\mathbf{X}(t_n) = \mathbf{x}_j - \mathbf{d}_j$  et  $\mathbf{X}(t_n + \Delta t/2) = \mathbf{x}_j - \mathbf{d}_j/2$ . L'équation (1.22) devient :

$$\frac{\mathbf{d}_j}{\Delta t} = \mathbf{U}(\mathbf{x}_j - (\mathbf{d}_j/2), t_n + \Delta t/2) \quad (1.23)$$

Si  $\mathbf{U}$  est indépendant de la variable advectée, la solution est immédiate. En revanche, dans le cas relativiste où le champ dépend de la variable d'advection via le facteur relativiste de Lorentz, on résout cette équation de manière itérative par une méthode de Newton. Une fois  $\mathbf{d}_j$  connu, et donc

le pied de la caractéristique  $\mathbf{X}(t_n)$ , on cherche à calculer  $f(\mathbf{X}, t_n)$  par interpolation, en utilisant un produit tensoriel de B-splines cubiques [41]. Cette méthode a été pour la première fois introduite dans la référence [42] par Cheng et Knorr, qui montrent la précision de la méthode dans le cas électrostatique 1D.

De façon à simplifier l'utilisation de ce modèle, il est souvent nécessaire de décomposer l'équation de Vlasov (1.4) en deux parties par une méthode de séparation d'opérateur : la *time-splitting* (voir section 1.3.5).

### Intérêts et inconvénients de la méthode semi-lagrangienne

Les méthodes semi-lagrangiennes sont devenues classiques pour la résolution numérique de l'équation de Vlasov en raison de leur grande précision et de l'absence de bruit numérique. La discrétisation complète de l'espace des phases implique un coût numérique important, tant en temps de calcul qu'en espace mémoire requis. Lorsque le problème physique le permet, c'est-à-dire lorsque le système étudié présente un invariant, les codes Vlasov sont parfois utilisés pour des modèles "réduits". On peut notamment citer le modèle multi-faisceaux, développé dans le chapitre 3, ou encore le modèle gyrocinétique, qui est une limite champ magnétique fort du modèle de Vlasov. L'équation cinétique est moyennée sur le mouvement cyclotron ce qui permet ainsi de réduire la dimensionnalité du modèle Vlasov en un modèle défini sur les coordonnées du centre-guide. Cependant, avec le développement des machines de calcul très puissantes et la parallélisation des codes, les méthodes semi-lagrangiennes sont maintenant plus accessibles et deviennent une alternative aux méthodes particulières.

La discrétisation complète de l'espace des phases amène cependant un nouveau problème de résolution de l'équation de Vlasov, qui est la filamentation de la fonction de distribution dans l'espace des phases. En effet, l'équation de Vlasov est résolue sur un maillage. Lorsque des structures créées atteignent la taille de la maille élémentaire et deviennent plus petites que celle-ci, il n'est plus possible de suivre l'évolution exacte de la fonction de distribution  $f$  et des informations sont nécessairement perdues. La filamentation est un phénomène qui a été largement étudié. On peut notamment citer les références [43] et [44] où les auteurs montrent que, dans le cas d'un maillage "grossier", l'entropie du système Vlasov-Maxwell augmente largement et n'est donc pas conservée, ce qui implique une perte d'information. Un maillage plus fin (par exemple dans [43] :  $N_x = 512$  et  $N_v = 8192$ ) mène à une meilleure conservation de l'entropie, et les "microstructures" sont ainsi préservées. Les auteurs prouvent cependant que les structures à grandes échelles ne sont pas affectées par la perte d'information due à la filamentation.

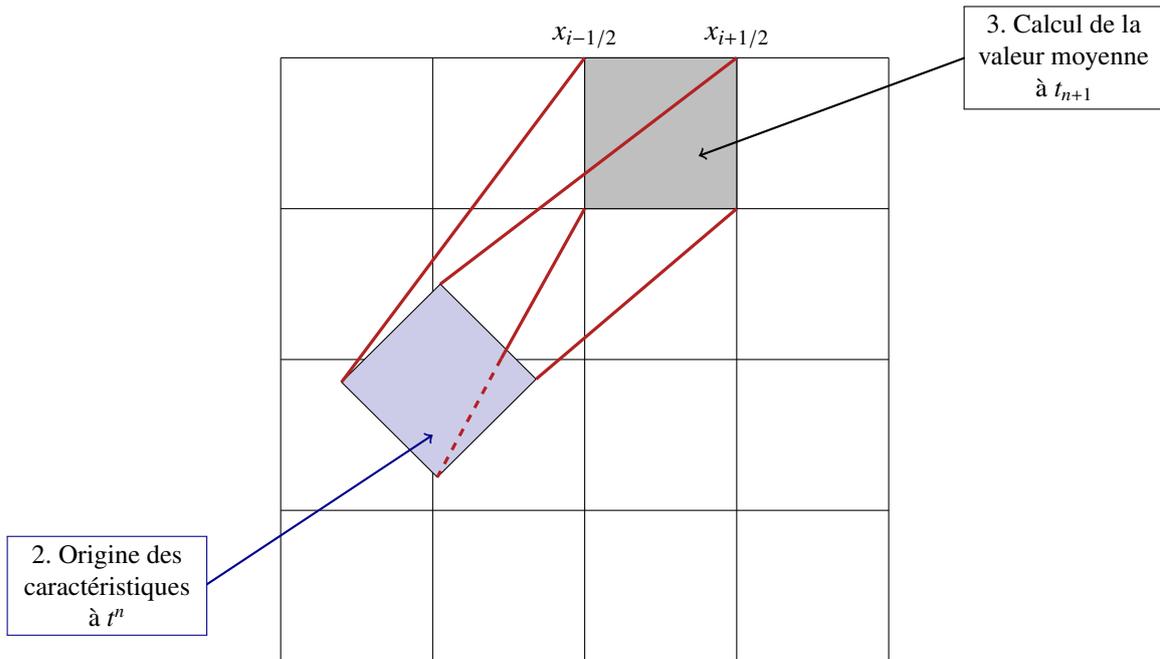
#### 1.3.4. La méthode de conservation des flux

Cette méthode est souvent appelée méthode semi-lagrangienne conservative. Elle utilise en effet l'équation de Vlasov sous sa forme conservative. Cette méthode s'apparente à une méthode de type volumes finis avec une intégration sur le volume occupé par la maille considérée, à l'instant  $t^n$ . Elle est utilisée dans le code numérique de l'équipe de Pise.

#### Principe de la méthode

Le point de départ de cette méthode est la méthode FBM (*Flux Balanced Method*) introduite pour la première fois dans [45] et reprise largement par la suite [46–50]. Elle se décompose en plusieurs étapes et est schématisée sur la figure 1.6 :

1. La fonction de distribution est approchée par un polynôme de degré souhaité à partir des valeurs moyennes de la maille et calculée par interpolation, à partir des valeurs connues de  $f^n$  sur la grille.
2. Le point de départ des caractéristiques aboutissant aux points du maillage est ensuite trouvé (comme dans le cas semi-lagrangien "classique").
3. Puis la valeur moyenne de  $f$  à  $t^{n+1}$  est calculée en utilisant la conservation de la fonction de distribution le long de ses caractéristiques.



**FIGURE 1.6.:** Étapes de la méthode de conservation de flux (semi-lagrangienne conservative) permettant de trouver la valeur de  $f$  à l'instant  $t + \Delta t$ .

L'équation de Vlasov peut s'écrire sous forme conservative (si son champ d'advection est de divergence nulle) et se réduire à plusieurs équations à une dimension (via le *time-splitting*) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_X(U(X, t)f) = 0 \quad (1.24)$$

Les caractéristiques de cette équation (1.18), solutions du système :

$$\begin{cases} X(t') = x \\ \frac{dX(t)}{dt} = U(t, X(t)) \end{cases} \quad (1.25)$$

nous permettent de définir le Jacobien

$$J(t; x, t') = \frac{\partial X(t; x, t')}{\partial x}$$

où  $X(t; x, t')$  représente la courbe caractéristique au temps  $t$  dont la valeur est  $x$  à  $t'$ .

La solution de l'équation de transport (1.24) s'écrit alors :

$$f(x, t') = f(X(t; x, t'), t)J(t; x, t') \quad (1.26)$$

et exprime la conservation du nombre de particules le long des courbes caractéristiques.

On suppose que les valeurs de la fonction de distribution sont connues à l'instant  $t^n = n\Delta t$  et seront notées  $f^n$ . À l'instant  $t^{n+1}$ , les valeurs sont retrouvées en intégrant l'équation de Vlasov sur chaque intervalle discret de la boîte.

On définit  $f_i^n$  la valeur moyenne de  $f^n$  sur la maille  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de longueur  $\Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  (avec  $i = 0, \dots, N$ )

$$f_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t^n) dx \quad (1.27)$$

La conservation des particules, c'est-à-dire l'invariance de la fonction de distribution sur les caractéristiques, nous permet d'écrire à l'instant  $t^{n+1}$  :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t^{n+1}) dx = \int_{X(t^n; t^{n+1}, x_{i-1/2})}^{X(t^n; t^{n+1}, x_{i+1/2})} f(x, t^n) dx \quad (1.28)$$

où  $X(t^n; t^{n+1}, x_{i+1/2})$  représente les caractéristiques de l'équation de Vlasov à l'instant  $t^n$  qui à  $t^{n+1}$  valent  $x_{i+1/2}$ .

On introduit les flux de matière  $\phi_{i+1/2}(t^n)$  caractérisant le "passage" de la matière de  $x_{i-1/2}$  à  $x_{i+1/2}$ , entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  :

$$\phi_{i+1/2}(t^n) = \frac{1}{\Delta x} \int_{X(t^n; t^{n+1}, x_{i+1/2})}^{x_{i+1/2}} f(x, t^n) dx \quad (1.29)$$

En s'aidant de la relation mathématique de Chasles, on obtient alors :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t^{n+1}) dx = \int_{X(t^n; t^{n+1}, x_{i-1/2})}^{x_{i-1/2}} f(x, t^n) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x, t^n) dx + \int_{x_{i+1/2}}^{X(t^n; t^{n+1}, x_{i+1/2})} f(x, t^n) dx$$

$$f_i^{n+1} = \phi_{i-1/2}(t^n) + f_i^n - \phi_{i+1/2}(t^n)$$

Cette relation garantit la conservation de la matière par un "transfert" de flux.

Il existe évidemment plusieurs façons pour interpoler la fonction de distribution (étape 1). Dans [45], Fijalkow utilise par exemple une interpolation linéaire par morceaux. Dans les références [46–48], Filbet *et al.* proposent un schéma appelé *Positive and Flux Conservative method* (PFC) utilisant une interpolation quadratique par morceaux et basé sur une reconstruction de la fonction de distribution via sa fonction primitive.

### Intérêts et inconvénients de la méthode de conservation de flux

Nous avons vu que l'un des inconvénients des méthodes lagrangienne et semi-lagrangienne "classique" est la filamentation de la fonction de distribution dans l'espace des phases. La méthode conservative PFC des références [46–48] a été mise au point de façon à notamment pouvoir gérer ce phénomène en utilisant un algorithme d'ordre élevé.

### 1.3.5. Le *time-splitting*

Nous venons de voir que toute équation de type Vlasov peut s'écrire sous la forme advective suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{X}} f = 0 \quad (1.30)$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur coordonnées de l'espace des phases et  $\mathbf{U}$  le champ d'advection. Dans le cas de l'équation de Vlasov relativiste à six dimensions (1.6), on a

$$\mathbf{X} = (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$$

et

$$\mathbf{U} = \left( \frac{p_x}{m\gamma}, \frac{p_y}{m\gamma}, \frac{p_z}{m\gamma}, e \left( E_x + \frac{p_y B_z - p_z B_y}{m\gamma} \right), e \left( E_y + \frac{p_z B_x - p_x B_z}{m\gamma} \right), e \left( E_z + \frac{p_x B_y - p_y B_x}{m\gamma} \right) \right)$$

avec les composantes des champs électrique et magnétique dépendant des variables  $x, y, z$  et  $t$ . Pour un champ d'advection  $\mathbf{U}$  de divergence nulle, l'équation (1.30) peut être réécrite sous la forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{X}} (\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) f) = 0 \quad (1.31)$$

La séparation (*splitting*) de la composante  $\mathbf{X}$  en deux sous-espaces  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{X}_1} (\mathbf{U}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) f) + \text{div}_{\mathbf{X}_2} (\mathbf{U}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) f) = 0 \quad (1.32)$$

nous permet de résoudre séparément, à chaque pas de temps

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{X}_1} (\mathbf{U}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) f) = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div}_{\mathbf{X}_2} (\mathbf{U}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) f) = 0 \quad (1.34)$$

et de garder l'approximation à l'ordre 2 en alternant la résolution de (1.33) et (1.34).

La condition sine qua non pour résoudre ces deux équations est que la divergence des champs d'advection  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  soit nulle :

$$\text{div}_{\mathbf{X}_1} \mathbf{U}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) = 0 \quad (1.35)$$

et

$$\text{div}_{\mathbf{X}_2} \mathbf{U}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, t) = 0 \quad (1.36)$$

On peut alors ramener les équations (1.33) et (1.34) à deux advections :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{X}_1} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{X}_2} f = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

permettant toujours de conserver l'approximation au second ordre en  $\Delta t$  en alternant la résolution des deux équations. Si les conditions données par (1.35) et (1.36) ne sont pas satisfaites, le *splitting* est équivalent à résoudre la forme advective des équations avec un terme de source :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_1} f = -f \operatorname{div}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{U}_1) \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{U}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{x}_2} f = -f \operatorname{div}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{U}_2) \end{cases} \quad (1.38)$$

Bien que les propriétés de la divergence nous donnent :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{U}_1) = -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{U}_2) \quad (1.39)$$

les termes de source dans (1.38) ne s'annulent pas exactement puisque dans un schéma de *time-splitting*, les équations (1.38) ne sont pas résolues au même moment. Par conséquent, résoudre (1.37) introduirait une erreur systématique à chaque pas de temps, impliquant une mauvaise conservation de la densité.

Dans le cas de l'équation de Vlasov relativiste (1.4), le premier terme d'advection vérifie la condition de divergence nulle

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{U}_1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \right) = 0$$

Le terme de force, quant à lui, dépend explicitement des variables d'advection via le facteur de Lorentz (1.5) :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{U}_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \right) \quad (1.40)$$

Cependant un calcul rapide nous permet de contourner ce problème. En effet, les champs électrique et magnétique ne dépendent que des variables spatiales et temporelle. Par conséquent :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{U}_2) = \frac{\partial}{\partial p_x} \left( \frac{p_y B_z - p_z B_y}{m\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial p_y} \left( \frac{p_z B_x - p_x B_z}{m\gamma} \right) + \frac{\partial}{\partial p_z} \left( \frac{p_x B_y - p_y B_x}{m\gamma} \right) \quad (1.41)$$

avec le facteur de Lorentz  $\gamma = \sqrt{1 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$ .

En remarquant que les termes se compensent deux à deux :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p_x} \left( \frac{p_y B_z}{m\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial p_y} \left( \frac{-p_x B_z}{m\gamma} \right) \\ \frac{\partial}{\partial p_x} \left( \frac{-p_z B_y}{m\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial p_z} \left( \frac{p_x B_y}{m\gamma} \right) \\ \frac{\partial}{\partial p_y} \left( \frac{p_z B_x}{m\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial p_z} \left( \frac{-p_y B_x}{m\gamma} \right) \end{cases} \quad (1.42)$$

on peut alors en conclure que

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{U}_2) = \operatorname{div}_{\mathbf{p}} \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \times \mathbf{B} \right) = 0 \quad (1.43)$$

Cette condition implique cependant une advection 3D dans l'espace des quantités de mouvement, mais permet de réaliser le schéma de *time-splitting* dans un cas relativiste.

Ce schéma de *time-splitting* a été présentée par Cheng et Knorr dans [42] pour une méthode semi-lagrangienne à une dimension. Dans la référence [51], les auteurs comparent les résultats obtenus à partir de deux codes, l'un où l'advection 2D ( $p_x, p_y$ ) est effectuée et l'autre non. Ils montrent explicitement que cette advection multi-dimensionnelle est nécessaire pour obtenir des solutions précises du système Vlasov-Maxwell relativiste.

Les résultats présentés dans le chapitre suivant sont issus d'un code 1D-2V utilisant la méthode semi-lagrangienne "classique" vers l'arrière et suivant les étapes de résolution du système Vlasov-Maxwell présentées dans l'annexe A.



## L'instabilité de filamentation de courant

Les applications potentielles des instabilités de type Weibel, regroupant l'instabilité de filamentation de courant (CFI) et l'instabilité Weibel (WI), couvrent donc un domaine s'étendant des plasmas issus de l'interaction laser-plasma aux plasmas astrophysiques. Ces instabilités ont pour origine une anisotropie, de température pour WI ou des quantités de mouvements des électrons pour la CFI, et partagent des caractéristiques communes, comme le développement d'un fort champ magnétique à partir de la redistribution des courants.

Nous allons dans un premier temps nous focaliser sur l'instabilité de filamentation de courant, en essayant de mettre en avant ses caractéristiques dans un régime non-relativiste et relativiste. Le modèle numérique utilisé est un modèle cinétique Vlasov-Maxwell, relativiste et périodique, qui va notamment nous permettre d'étudier la phase non-linéaire de l'instabilité.

Relativement au code numérique utilisé, mon travail a notamment été d'étudier analytiquement et numériquement les schémas d'advection pour les électrons, me permettant ainsi de mettre en évidence les caractéristiques de ces schémas et de la grille de l'espace des phases. Ceci m'a en particulier permis une mise en application directe avec l'implémentation des ions. Nous verrons par la suite que la phase de saturation de l'instabilité exige la prise en compte de la dynamique des ions.

### 2.1. La CFI à partir d'une approche fluide

Un grand nombre de papiers traitant l'instabilité de filamentation de courant à partir de modèles fluide ou cinétique et analytiques (références du chapitre 1, [3, 52–57]) a été publié durant ces dernières décennies. Les premières études théoriques et numériques effectuées sur la CFI ont été faites à partir de modèles fluides. Ces modèles présentent des problèmes de divergence numérique et analytique, notamment lors de la phase non-linéaire de l'instabilité où le phénomène de déferlement (accompagné de fonction de distribution  $f$  multivaluée) ne peut être stoppé, excepté avec une dissipation qui est non physique [53]. Le mécanisme de saturation de l'instabilité est le phénomène de piégeage des particules, non modélisable de façon fluide. Des modèles cinétiques ont ainsi été utilisés.

L'étude du régime linéaire à partir du modèle fluide permet d'établir la relation de dispersion de la CFI.

Les ions seront d'abord considérés comme fixes, et formant un fond neutralisant. La dynamique des deux populations d'électrons, l'une pour le faisceau, l'autre pour le plasma ambiant, est décrite au moyen des équations fluides. Dans l'hypothèse plasma froid, les équations fluides se limitent aux équations de continuité et du mouvement fluide :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{p}_\alpha = e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}) \quad (2.2)$$

où  $\alpha = 1, 2$  représente l'indice de la population électronique,  $n_\alpha$  et  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha / m\gamma_\alpha$  représentent respectivement la densité et la vitesse fluide du faisceau  $\alpha$ , et  $\gamma_\alpha = (1 + p_\alpha^2 / m^2 c^2)^{1/2}$  le facteur de Lorentz associé. La charge et la masse au repos de l'électron sont désignées respectivement par  $e$  et  $m$ .

Ces équations sont couplées aux équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha \mathbf{J}_\alpha \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  les champs électrique et magnétique et  $\mathbf{J}_\alpha = en_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  la densité de courant associée au faisceau  $\alpha$ .

On considère initialement un plasma homogène dans lequel se propagent, le long de l'axe  $Oy$ , deux faisceaux d'électrons uniformes. On limite notre analyse à une onde électromagnétique polarisée linéairement, avec  $(0, E_y, B_z)$ . Les ondes sont supposées planes, de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{e}_x$ . Le champ électrique plasma s'écrit quant à lui  $(E_x, 0, 0)$ .

L'analyse linéaire du modèle fluide conduit à introduire une perturbation initiale en onde plane de la forme  $\exp(i(kx - \omega t))$ . Les indices 0 et 1 représenteront respectivement les valeurs à l'équilibre et les valeurs perturbées, avec notamment  $n_\alpha = n_{0,\alpha} + n_{1,\alpha}$  et  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{0,\alpha} + \mathbf{v}_{1,\alpha}$ . À l'équilibre, le plasma est libre de tout champ. Dans le calcul de la relation de dispersion, les conventions de normalisation utilisées sont les suivantes : la fréquence  $\omega$  est normalisée par la fréquence plasma électronique  $\omega_p$ , la longueur par la longueur de peau électronique  $d_e = c/\omega_p$ , le nombre d'onde  $k$  par  $d_e^{-1}$ , la vitesse par la vitesse de la lumière  $c$ , l'énergie par  $mc^2$  et la densité par  $n_0$ .

La linéarisation et la transformée de Fourier des équations précédentes (2.1)-(2.6) nous permettent de retrouver la relation de dispersion relativiste normalisée de la CFI, détaillée dans l'annexe B [52-54] :

$$\omega^6 - \omega^4[k^2 + 2A - C] + \omega^2[k^2(A - C) + A(A - C)] + k^2[AC - B^2] = 0 \quad (2.7)$$

où

$$A = \sum_\alpha \frac{n_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}}, \quad B = \sum_\alpha \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}}{(\gamma_{0,\alpha})^2}, \quad C = \sum_\alpha \frac{n_{0,\alpha} (p_{0,\alpha})^2}{(\gamma_{0,\alpha})^3}$$

Dans la limite non relativiste  $\gamma_{0,\alpha} \approx 1$ , la relation de dispersion (2.7) se simplifie en une équation d'ordre 4 :

$$\omega^4 - \omega^2[k^2 + 1] - k^2 v_{0,1} v_{0,2} = 0. \quad (2.8)$$

Pour  $k$  réel, si l'on suppose une solution de type  $\omega = \omega_R + i\gamma$ , les solutions de l'équation (2.8) se décomposent en deux modes purement propagatifs :

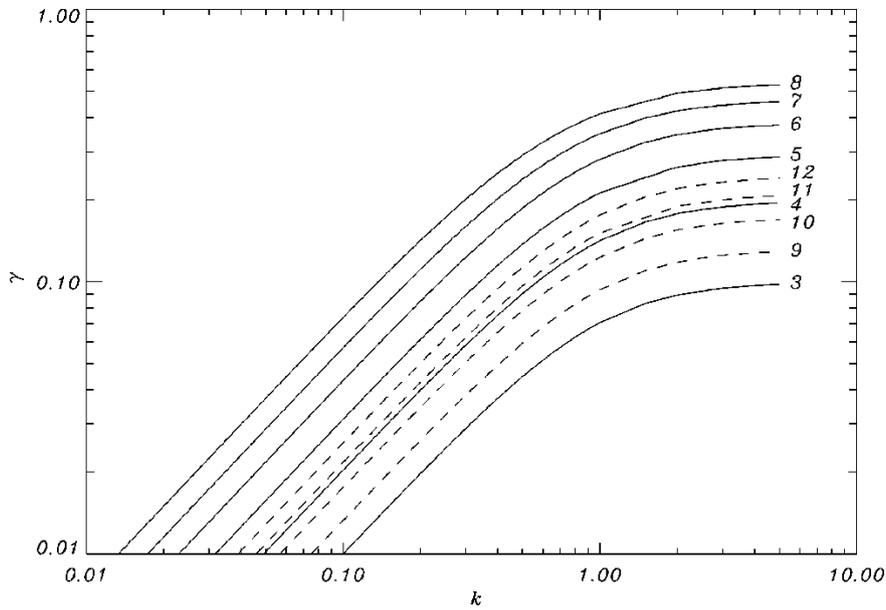
$$\omega_R^2 = \frac{(k^2 + 1)}{2} \left[ 1 + \left( 1 + \frac{4k^2}{(k^2 + 1)^2} v_{0,1} v_{0,2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.9)$$

et en deux modes quasi-statiques croissant ou amorti :

$$\gamma^2 = \frac{(k^2 + 1)}{2} \left[ -1 + \left( 1 + \frac{4k^2}{(k^2 + 1)^2} v_{0,1} v_{0,2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.10)$$

Le mode purement croissant correspond à l'instabilité de filamentation de courant. Elle est caractérisée par un champ magnétique non propagatif, puisque dans ce cas la partie réelle de  $\omega$  ( $\omega_R$ ) est nulle. Cette relation a permis à Califano *et al.* [54] de tracer le taux de croissance de l'instabilité non relativiste, en fonction du nombre d'onde  $k$  paramétré par la vitesse des faisceaux, représenté sur la figure 2.1.

Les numéros représentent différentes simulations. Les lignes solides (de 3 à 8) représentent des cas de propagation de faisceaux symétriques, les lignes pointillés (de 9 à 12) des cas asymétriques. Plus le nombre est grand, plus la vitesse initiale des faisceaux est grande. On remarque alors une tendance générale : le taux de croissance de l'instabilité augmente avec la vitesse des faisceaux. De plus, pour de petites valeurs de  $k$ , ce taux augmente linéairement avec le nombre d'onde et sature pour  $k \geq 1$ . Cette limite correspond à des longueurs d'onde de l'ordre de l'épaisseur de peau électronique non collisionnelle  $d_e = c/\omega_p$ . La CFI sature après le développement de structures de petites longueurs d'onde, typiquement inférieures à  $d_e$ .



**FIGURE 2.1.:** Taux de croissance de la CFI 1D en fonction du nombre d'onde paramétré par la vitesse initiale des faisceaux. Les lignes solides représentent des cas symétriques, les lignes pointillées des cas non-symétriques. Les numéros 3-4 et 9-10 représentent des faisceaux à très faible vitesse, 5-8 et 11-12 à faible vitesse. Obtenu par Califano *et al.* [54].

## 2.2. L'étude cinétique de la CFI

L'approche fluide permet de calculer le taux de croissance théorique de l'instabilité et de voir que des structures de plus en plus petites sont créées suite au développement de la CFI. Dans les modèles fluides, un phénomène de divergence numérique et analytique se produit puisque rien ne peut stopper la formation de ces structures et la fonction de distribution est multivaluée. Les échelles spatiales atteintes sont telles que les effets cinétiques ne peuvent plus être négligés.

Les simulations numériques effectuées pour cette partie sont des simulations utilisant un code Vlasov-Maxwell périodique, développé dans le chapitre 1, et utilisant une méthode de résolution semi-lagrangienne vers l'arrière. Dans cette partie, l'étude est restreinte à un espace des phases 1D-2V  $(x, p_x, p_y)$ . Le code numérique, mis au point par l'équipe de Nancy, utilise un schéma d'advection multiple et est donc écrit de façon à pouvoir traiter des cas relativistes. Ce schéma 1D-2V est développé dans l'annexe A.

### 2.2.1. La CFI dans un cas non relativiste

De façon à comprendre les caractéristiques fondamentales de l'instabilité de filamentation de courant et de pouvoir s'appuyer sur le résultat fluide présenté à la figure 2.1, nous traitons dans un premier temps un cas symétrique non relativiste et homogène.

Deux faisceaux d'électrons se propagent en sens opposé, avec une quantité de mouvement  $p_{01} = 0.2mc$  et  $p_{02} = -0.2mc$  et une densité  $n_{01} = n_{02} = 0.5n_0$ , en l'absence de tout champ. Initialement, chaque faisceau est supposé homogène, bi-maxwellien en vitesses avec  $T_x = T_y = 0.5keV$ . La perturbation initiale introduite dans le système est obtenue à partir des équations du modèle fluide (2.1)-(2.6). Écrite à partir du champ  $E_y = E_0 \sin(kx)$ , où  $E_0$  représente l'amplitude et vaut  $10^{-4}$ , nous avons

$$B_z(x, 0) = \frac{k}{\omega} E_y \quad (2.11)$$

$$u_{\alpha,x}(x, 0) = \frac{1}{\omega} u_{0,\alpha} B_z \quad (2.12)$$

$$u_{\alpha,y}(x, 0) = \frac{1}{k} B_z \quad (2.13)$$

$$n_{1,\alpha}(x, 0) = \frac{k}{\omega^2} u_{0,\alpha} n_{0,\alpha} B_z \quad (2.14)$$

$$E_x(x, 0) = 0 \quad (2.15)$$

Le mode fondamental  $k = 1$  est initialement excité.

La simulation est effectuée dans une boîte de longueur  $L_x = 2\pi$  avec un maillage  $N_x N_{p_x} N_{p_y} = 256^3$ . Les pas de temps et de maille d'espace des phases utilisés dans cette simulation sont  $\Delta t = 0.01$   $\Delta x \approx 0.0245$  et  $\Delta p \approx 0.0117$ .

Dans les résultats présentés par la suite, les grandeurs sont normalisées.

L'approche fluide, dans le cas non relativiste, nous a permis de trouver le taux de croissance théorique normalisé de cette instabilité (2.10). Dans le cas traité ici, celui-ci s'écrit :

$$\gamma_{th} = \sqrt{-1 + (1 + 0,2^2)^{1/2}} \approx 0.14 \quad (2.16)$$

### L'évolution des champs électromagnétiques

L'évolution temporelle des énergies magnétique et électrostatique, représentée sur les figures 2.2 et 2.3 et définies respectivement comme

$$E_{mag}(t) = 1/2L_x \int B_z^2 dx \quad \text{et} \quad E_{electro}(t) = 1/2L_x \int E_x^2 dx$$

permet de mettre en évidence plusieurs phases dans le développement de l'instabilité de filamentation de courant. Après une phase de transition nécessaire au déclenchement de la CFI, on peut remarquer une phase linéaire où les champs électromagnétiques croissent de façon exponentielle et une phase de saturation où les champs semblent se stabiliser autour d'une valeur moyenne. Les valeurs des énergies et du temps présentées sur les figures sont normalisées.

Le taux de croissance cinétique de l'instabilité est donné par la pente de la phase linéaire qui s'étend de  $t \approx 50$  à  $t \approx 100$ . On obtient, à partir de la pente de l'énergie magnétique, une valeur  $\gamma_{cin} \approx 0.13$ , ce qui est en très bon accord avec la valeur fluide théorique (2.16), et nous permet ainsi de valider notre modèle cinétique.

La croissance temporelle du champ électrique longitudinal est quant à elle proportionnelle à  $\exp(2\gamma t)$ . Cette évolution est une signature du terme de la force de Lorentz.

À  $t \approx 100$ , une nouvelle phase démarre. L'amplitude des champs magnétique et électrostatique longitudinal ne croît plus et se stabilise autour d'une valeur moyenne. L'instabilité atteint sa phase de saturation. Les effets cinétiques entrent en jeu et ne peuvent plus être négligés.

Sur les figures suivantes (2.4)-(2.6) est représentée l'évolution spatiale des champs magnétique, électrique et de la densité à différents instants du développement de l'instabilité.

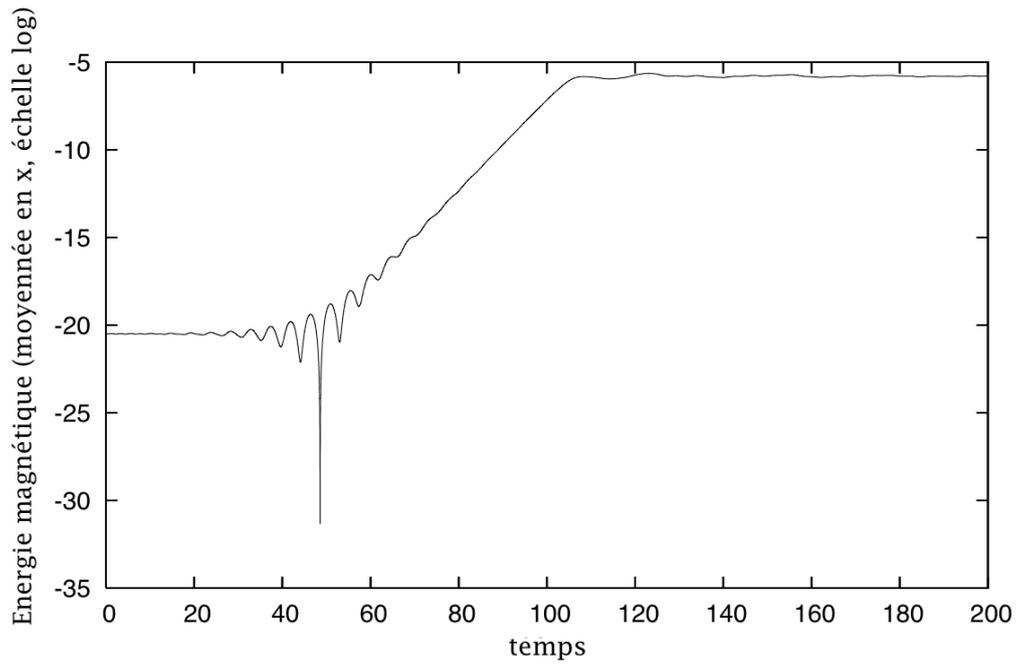


FIGURE 2.2.: Représentation en échelle logarithmique de l'énergie magnétique moyennée en x, en fonction du temps.

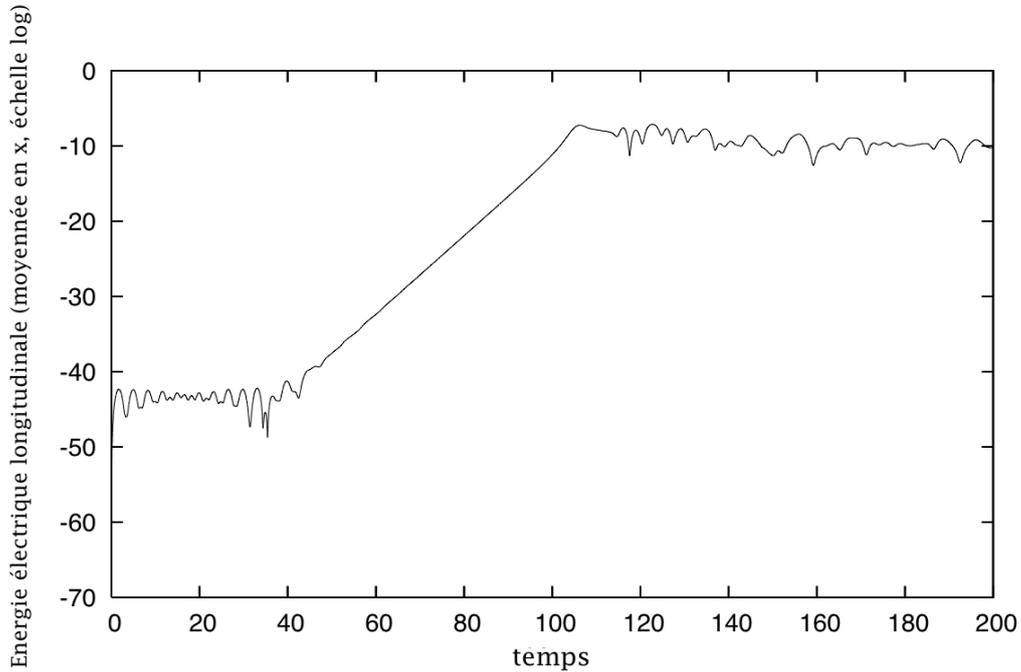
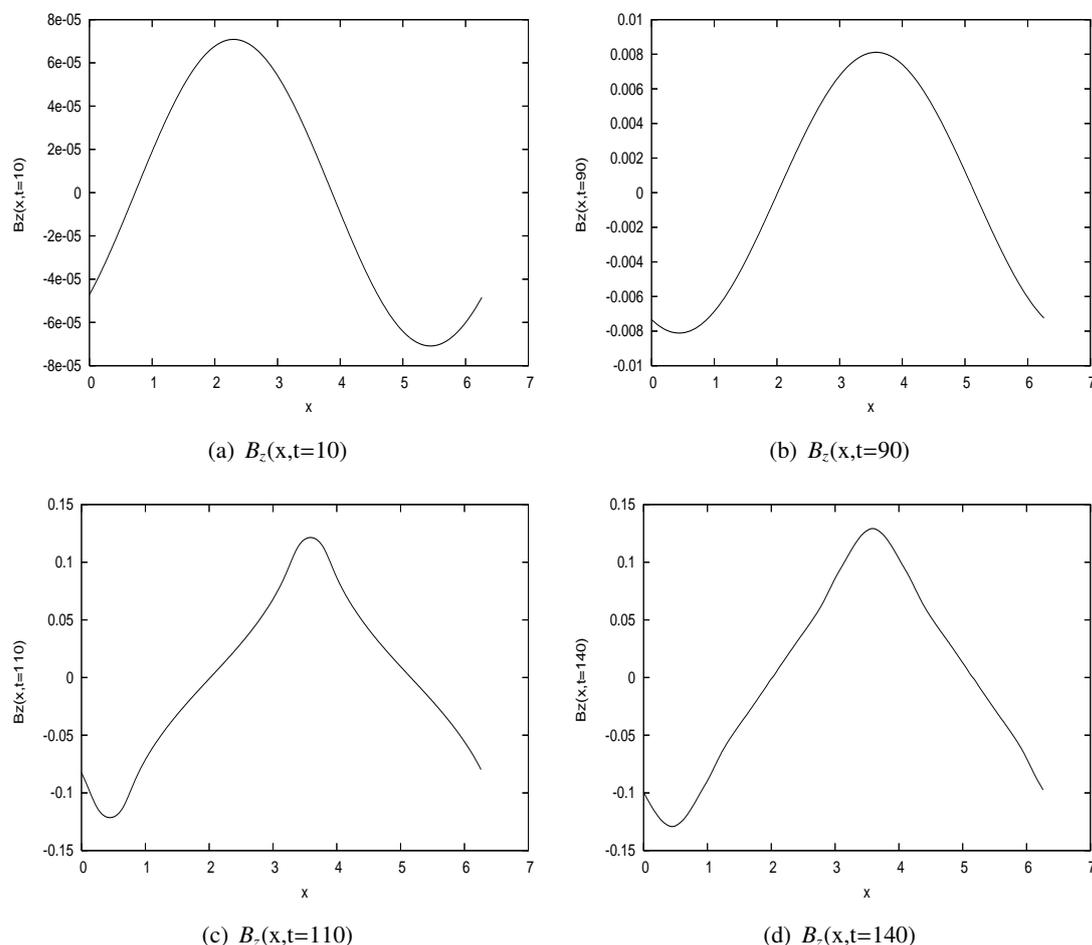


FIGURE 2.3.: Représentation en échelle logarithmique de l'énergie électrostatique longitudinale moyennée en x, en fonction du temps.

### Évolution du champ magnétique



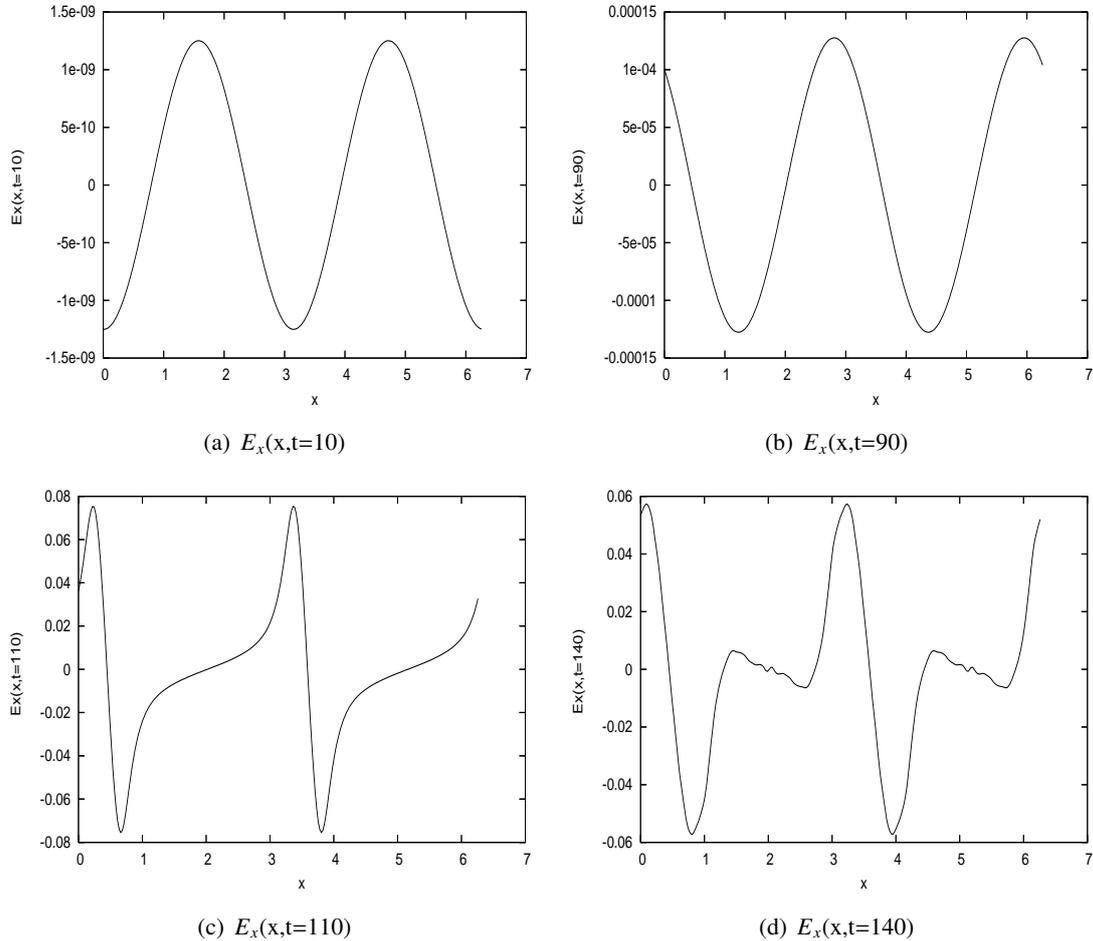
**FIGURE 2.4.:** Profil spatial du champ magnétique  $B_z$  à différents instants de la CFI  $t = 10, 90, 110$  et  $140$ . Les images (a) et (b) correspondent respectivement à un instant initial et à la phase linéaire de la CFI, (c) et (d) à la phase de saturation.

Les figures 2.4 (a)-(d) représentent l'évolution du champ magnétique en fonction de  $x$  à différents instants du développement de l'instabilité.

Initialement, le champ magnétique est sinusoïdal, de très faible amplitude : en accord avec la perturbation initiale appliquée. Pendant sa phase linéaire, c'est-à-dire jusqu'à  $t \leq 100$ , l'onde gagne deux ordres de grandeur en amplitude.

Une fois la phase de saturation atteinte, le champ magnétique se stabilise autour d'une valeur (amplitude proche de l'unité). Le mode CFI est caractérisé par un champ quasi-statique. Dans cette phase, le plasma est donc devenu fortement magnétisé. Le profil spatial du champ magnétique s'est raidi par les effets non-linéaires.

### Évolution du champ plasma



**FIGURE 2.5.:** Profil spatial du champ électrostatique  $E_x$  à différents instants de la CFI  $t = 10, 90, 110$  et  $140$ . Les images (a) et (b) correspondent à un instant initial et à la phase linéaire de la CFI, (c) et (d) à la phase de saturation.

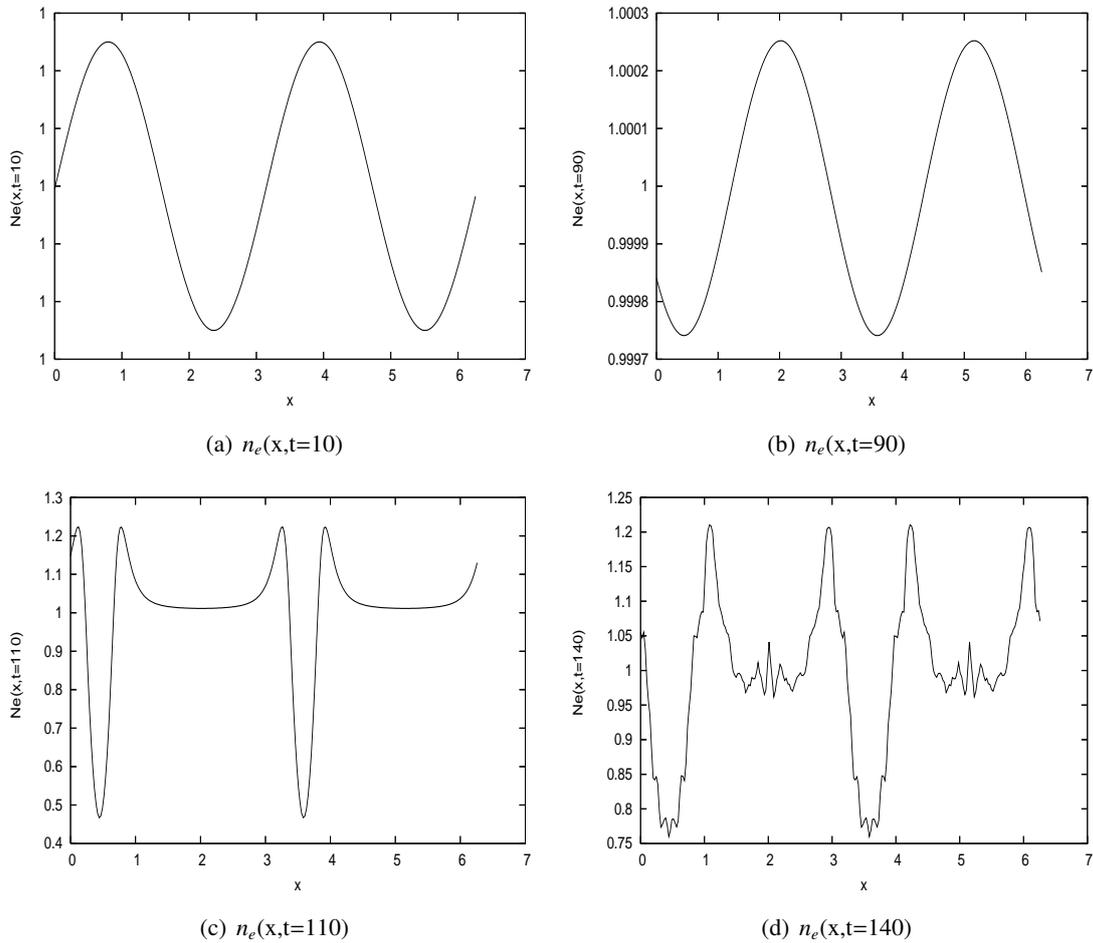
Les figures 2.5 (a)-(d) représentent l'évolution temporelle en fonction de l'espace du champ électrique plasma  $E_x$  et montrent une périodicité double de celle du champ magnétique : le mode  $k = 2$  est excité non linéairement par le mode électromagnétique initial  $k = 1$ , résultat de la contribution longitudinale du terme de force de Lorentz magnétique.

Le couplage de la CFI avec les ondes plasma est à l'origine du développement, dans la phase non linéaire, de ce fort champ électrostatique. On peut remarquer au niveau des maxima du champ magnétique (autour de  $x \approx 0.5$  et  $x \approx 3.5$ ) que le profil spatial du champ électrostatique se raidit et que de forts gradients apparaissent. Il s'agit d'un phénomène de déferlement (*wave-breaking*) de l'onde plasma. L'étude de la CFI de Califano *et al.* à partir d'un modèle fluide avec deux populations d'électrons dans [53] a montré qu'un processus de déferlement se développe dans la phase non-linéaire de l'instabilité. Dans la limite non-relativiste, ce processus est saturé par le piégeage magnétique des particules [54].

De façon à pouvoir étudier ce phénomène de *wave-breaking*, le profil de la densité électronique est utile. En effet, comme montré récemment dans la référence [58] avec un plasma non-magnétisé,

froid et homogène, le phénomène de déferlement se déclenche théoriquement pour des densités supérieures à 50% de la densité initiale.

### Évolution de la densité



**FIGURE 2.6.:** Profil spatial de la densité électronique  $n_e$  à différents instants de la CFI :  $t = 10, 90, 110$  et  $140$ . Les images (a) et (b) correspondent à un instant initial et à la phase linéaire de la CFI, (c) et (d) à la phase de saturation.

Les figures 2.6 (a)-(d) représentent l'évolution de la densité électronique totale (densité du faisceau 1 + densité du faisceau 2) en fonction de  $x$  à différents instants.

Durant toute la phase linéaire, la densité électronique reste proche de  $n_0 = 1$  : le plasma reste homogène. Au début de la phase de saturation, des pics et des creux dans la densité apparaissent. Il s'agit respectivement de zones de compression et de raréfaction pour chacun des deux faisceaux, avec la formation de deux pics pour chaque populations d'électrons. Cet aspect sera notamment confirmé par les profils d'espace des phases  $(x, p_y)$  de la fonction de distribution permettant de localiser spatialement les deux faisceaux. Les résultats analytiques et ceux issus des simulations fluides, présentés notamment dans [53] et [54], permettent de confirmer l'apparition de ces pics, caractéristiques de la CFI. Pour chacun des faisceaux, les électrons se raréfient dans la

région des maxima de champ magnétique. De part et d'autre de cette zone de raréfaction se développent deux pics de densité correspondant au phénomène de compression. Ce mécanisme de piégeage magnétique mène à la saturation de l'instabilité. On remarque qu'à  $t = 110$  (c), le profil de la densité se creuse, et une variation de 50% de la densité initiale est alors visible. Lorsque les amplitudes des champs atteignent de fortes valeurs et que des fluctuations de densité deviennent supérieures à 50% (critère de seuil), le phénomène de déferlement se produit alors. Il est intéressant de noter que le seuil de déclenchement du déferlement est atteint par chaque faisceau.

### Digression sur le déferlement (*wave-breaking*)

Pour illustrer le phénomène de déferlement, considérons un cas simple d'un seul fluide électronique.

Le phénomène de déferlement pour une population d'électrons peut être caractérisé par un modèle unidimensionnel couplant les équations fluides d'une seule population électronique à l'équation de Poisson [59] :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{e}{m} E_x \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} (n - n_0) \quad (2.19)$$

avec  $u$  la vitesse fluide,  $n$  la densité de la population électronique de masse  $m$  et de charge  $e$ .

De façon à pouvoir caractériser le phénomène, une description en variable de Lagrange  $\Psi(x, t)$  est établie en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{n_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \\ \frac{-nu}{n_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{array} \right.$$

L'équation (2.17) est automatiquement satisfaite avec ce changement de variables.

L'équation de Poisson (2.19) :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{en_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} - 1 \right)$$

devient

$$-\frac{e}{m\omega_p^2} E(x, t) = -\Psi(x, t) + x \quad (2.20)$$

L'équation (2.18) peut également se réécrire à partir de la variable de Lagrange. La vitesse moyenne  $u$  s'écrit

$$u(t, \Psi) = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{dt}$$

En remarquant que

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} u = 0$$

on en déduit que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \Psi} \frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$$

L'équation (2.18) devient alors linéaire et, en utilisant (2.20), peut se réécrire sous la forme :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_p^2 x = \omega_p^2 \Psi \quad (2.21)$$

dont la solution générale s'écrit :

$$x(\Psi, t) = \Psi + A(\Psi) \sin(\omega_p t) + B(\Psi) \cos(\omega_p t) \quad (2.22)$$

En utilisant la relation  $n/n_0 = 1/(\partial x/\partial \Psi)$ , on obtient une solution implicite de la forme :

$$\frac{n}{n_0} = \left( 1 + A'(\Psi) \sin(\omega_p t) + B'(\Psi) \cos(\omega_p t) \right)^{-1}$$

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = \omega_p (A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t))$$

La suite de la démarche consiste à inverser et résoudre par rapport à  $\Psi$  l'équation (2.22), puis de remplacer la valeur de  $\Psi$  dans  $E$ ,  $n$  et  $u$ . Cette variable "lagrangienne"  $\Psi$  représente le label d'une particule. Le jacobien de la transformation  $(\Psi, t) \rightarrow (x, t)$  s'annule pour  $\partial x/\partial \Psi = 0$  :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Psi} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial t}{\partial \Psi} & \frac{\partial t}{\partial t} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{\partial x}{\partial \Psi} = 0$$

Cette condition implique que

$$x(\Psi + d\Psi) = x(\Psi)$$

Les particules de label  $\Psi$  sont situées au même point que les particules de label  $\Psi + d\Psi$ , ce qui a pour conséquence de faire tendre la densité vers une valeur infinie  $n \rightarrow \infty$  en ce point. C'est le phénomène de déferlement (*wave-breaking*), introduit par exemple dans [60] et [61].

Pour illustrer le phénomène de wave-breaking, étudions un cas électrostatique, indépendamment de l'instabilité de filamentation de courant. À titre d'exemple, choisissons un profil de densité carré, avec des amplitudes variant de  $n_0(1 - \varepsilon)$  à  $n_0(1 + \varepsilon)$  sur une période  $L$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ . En choisissant comme condition initiale une vitesse fluide  $u(\Psi, t = 0)$  nulle, la solution générale (2.22) du système s'écrit à  $t = 0$  :

$$x = \Psi + B(\Psi) \quad (2.23)$$

Pour le premier domaine,  $0 < x < L/2$  et le second,  $L/2 < x < L$  on obtient réciproquement, en utilisant la continuité en  $x = L/2$  :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 + \varepsilon \rightarrow \Psi = (1 + \varepsilon)x + cst = (1 + \varepsilon)x$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 1 - \varepsilon \rightarrow \Psi = (1 - \varepsilon)x + cst = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon L$$

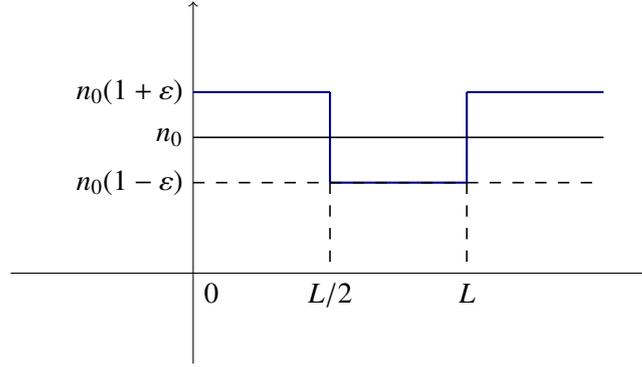


FIGURE 2.7.: Profil de densité de l'exemple.

En inversant les équations on obtient :

$$\begin{cases} B(\Psi) = \Psi \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} & \text{pour } 0 < \Psi < L/2(1+\varepsilon) \\ B(\Psi) = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\Psi - L) & \text{pour } L/2(1+\varepsilon) < \Psi < L \end{cases} \quad (2.24)$$

À partir de  $B(\Psi)$ , il est alors possible de calculer l'expression de la densité normalisée :

$$\begin{cases} \frac{n}{n_0} = \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon \sin^2(\omega_p t/2)} & \text{pour } 0 < x < x_L \\ \frac{n}{n_0} = \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon \sin^2(\omega_p t/2)} & \text{pour } x_L < x < L \end{cases} \quad (2.25)$$

avec  $x_L = L/2(1 + 2\varepsilon \sin^2(\omega_p t/2))$ .

On remarque alors que pour des valeurs de  $t$  telles que  $\sin^2(\omega_p t/2) \rightarrow 1$  et  $\varepsilon \rightarrow 1/2$ , la densité  $n$  tend vers l'infini, et  $x_L \rightarrow L$ . On peut ainsi en conclure le résultat fondamental de ces calculs : pour des fluctuations de densité dépassant un seuil de 50% ( $\varepsilon = 1/2$ ), on observe la formation d'un pic de densité "infini". Il s'agit du phénomène de déferlement (figure 2.8).

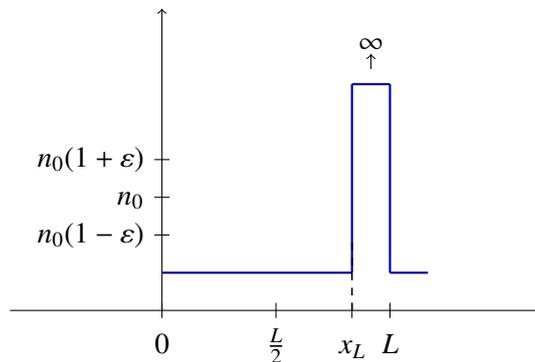


FIGURE 2.8.: Profil de densité lors du dépassement du seuil  $\varepsilon > 1/2$ .

Les pics de densité, caractéristiques de l'instabilité de filamentation de courant, peuvent donc mener à un phénomène de déferlement. Ces pics atteignent cependant des niveaux plus faibles

que ceux prédits par le déferlement [59]. Cette variation s'explique par le couplage entre la CFI et le déferlement. En effet, la CFI génère un champ électromagnétique important. Les particules sont alors soumises à une force qui atténue l'effet du *wave-breaking*. Le déferlement est un processus qui se produit sur chacune des deux populations d'électrons : les effets de l'un ont également tendance à masquer les effets de l'autre.

### Espace des phases

Le modèle cinétique va nous permettre d'étudier l'évolution de la fonction de distribution électronique dans l'espace des phases, et particulièrement dans la phase de saturation de l'instabilité. En plus de retrouver les éléments caractéristiques de la CFI obtenus à partir d'une description fluide [53] comme le phénomène de déferlement, avec les pics et les creux dans le profil de densité, on va alors pouvoir mettre en évidence l'origine de la saturation de l'instabilité : le piégeage magnétique des particules. Ce piégeage nécessite une description cinétique complète.

Sur les figures suivantes 2.9-2.12, la fonction de distribution est représentée à la moitié de la boîte de simulation ( $x = L/2$ ) dans l'espace  $(p_x, p_y)$ , et moyennée respectivement en  $p_y$  et  $p_x$  dans les espaces  $(x, p_x)$  et  $(x, p_y)$ , et ce à différents instants de l'évolution de l'instabilité :  $t = 10$  pour la phase initiale,  $t = 100$  pour la fin de la phase linéaire,  $t = 110$  pour le début de la phase de saturation et  $t = 140$  pour la phase de saturation.

Initialement (figure 2.9), les faisceaux symétriques sont maxwelliens, avec une vitesse moyenne nulle en  $p_x$ , et centrés en  $\pm 0.2$  en  $p_y$ , ce qui est en accord avec les conditions initiales appliquées dans le modèle.

À  $t = 100$  (figure 2.10) et  $t = 110$  (figure 2.11), la CFI entame sa phase de saturation. Les champs électrique et magnétique ont atteint de fortes amplitudes (figures 2.4 et 2.5) et agissent sur les particules. D'une part, sous l'effet du fort champ électrique  $E_x$  les particules sont soumises à une force d'accélération longitudinale  $qE_x$ . D'autre part, sous l'effet de la force de Lorentz, due à la composante  $B_z$  du champ magnétique ( $qv_y B_z$ ), les particules acquièrent progressivement une vitesse en  $p_x$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE_x + qv_y B_z$$

Ce chauffage dans la direction  $p_x$  est visible dans l'espace  $(x, p_x)$  où on peut remarquer un étalement progressif de la fonction de distribution dans la direction  $p_x$ , de l'ordre de  $p_y$ , et dans l'espace  $(p_x, p_y)$ , représenté en  $x = L/2$ . On y voit particulièrement l'étalement dans la direction  $p_x$ .

Les particules, concentrées autour des pics électrostatiques, commencent à tourner autour des maxima du champ magnétique. Ces structures correspondent à des structures de piégeage magnétique et mènent à la saturation de l'instabilité. Nous allons voir qu'elles seront beaucoup plus marquées dans un cas relativiste. Toutes ces caractéristiques sont en accord notamment avec les résultats non relativistes de Califano *et al.* [55].

Il est également important de noter que, malgré la dynamique complexe dans la phase de saturation de l'instabilité, les deux faisceaux semblent conserver leur forme initiale transverse en  $p_y$ . Cette conservation est visible dans l'espace  $(x, p_y)$ . Chaque faisceau conserve ainsi sa "température" initiale, ce qui est une conséquence de l'invariance du moment canonique transverse perpendiculaire :

$$P_{Cy} = p_y + eAy = \text{constant.}$$

C'est sur cette invariance que le modèle multi-faisceaux, présenté dans le chapitre 3, est construit.

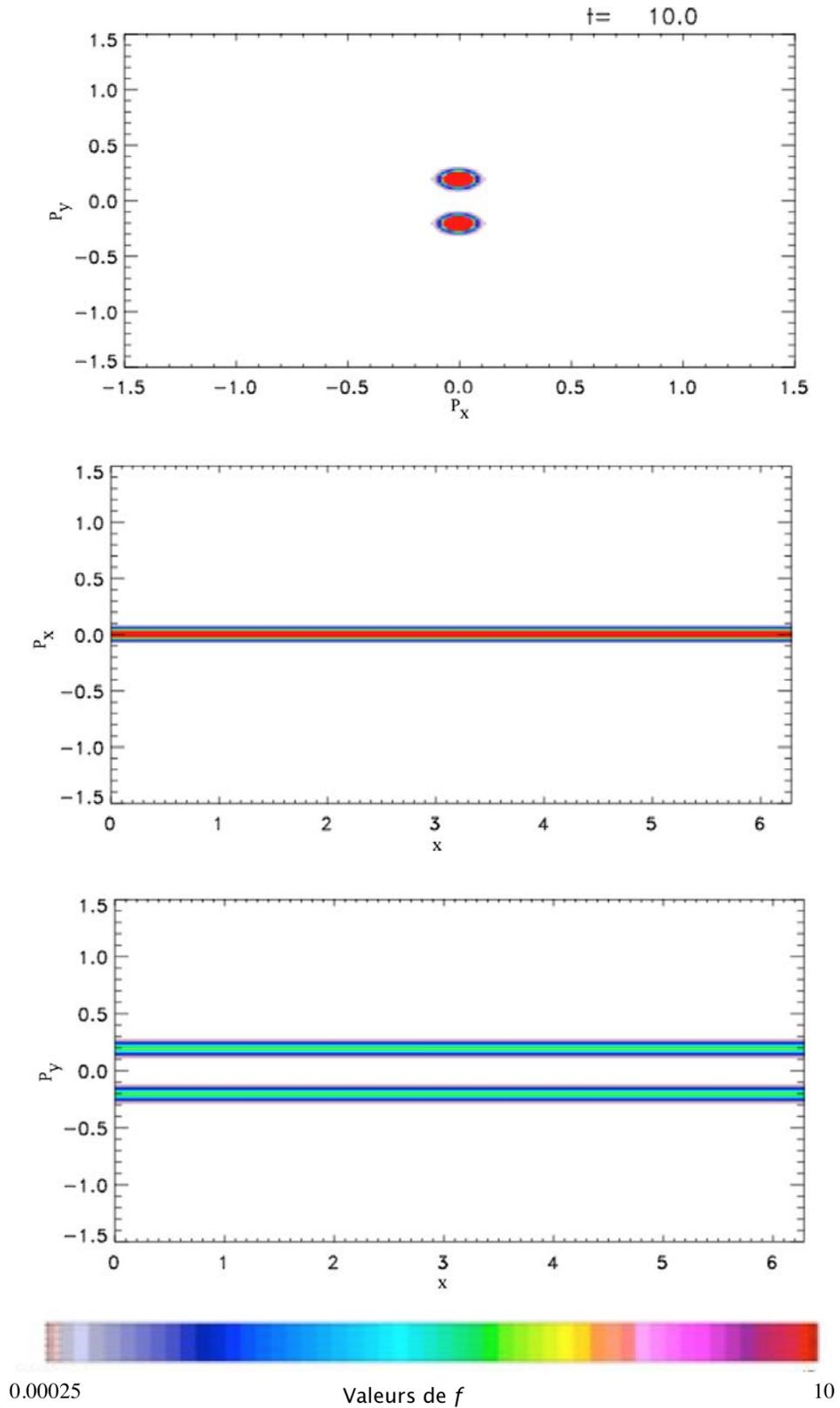


FIGURE 2.9.: Espaces des phases  $(p_x, p_y)$  en  $x=3.14$ ,  $(x, p_x)$  moyenné en  $p_y$  et  $(x, p_y)$  moyenné en  $p_x$ , à l'instant  $t = 10$ .

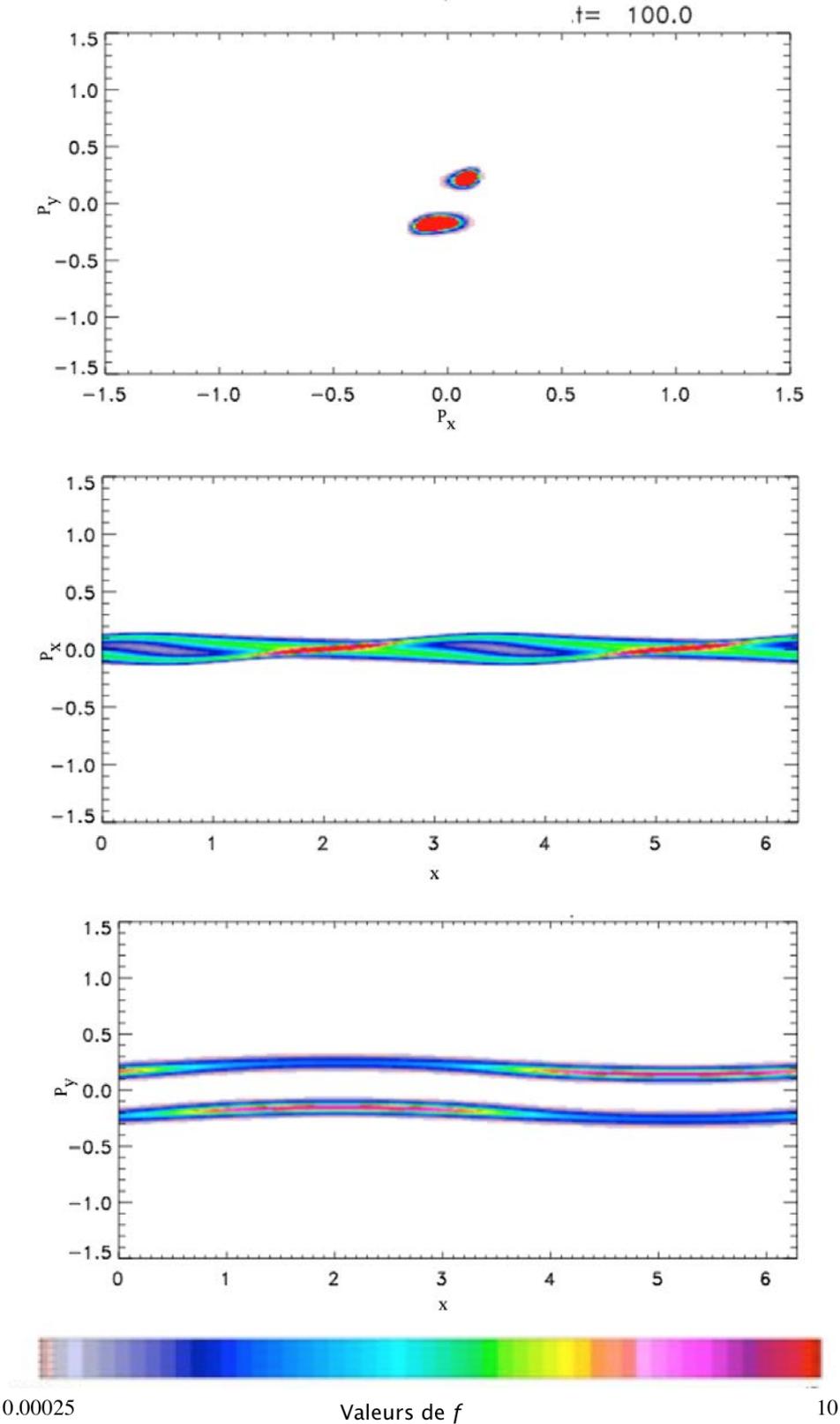


FIGURE 2.10.: Espaces des phases  $(p_x, p_y)$  en  $x=3.14$ ,  $(x, p_x)$  moyenné en  $p_y$  et  $(x, p_y)$  moyenné en  $p_x$  à l'instant  $t = 100$ .

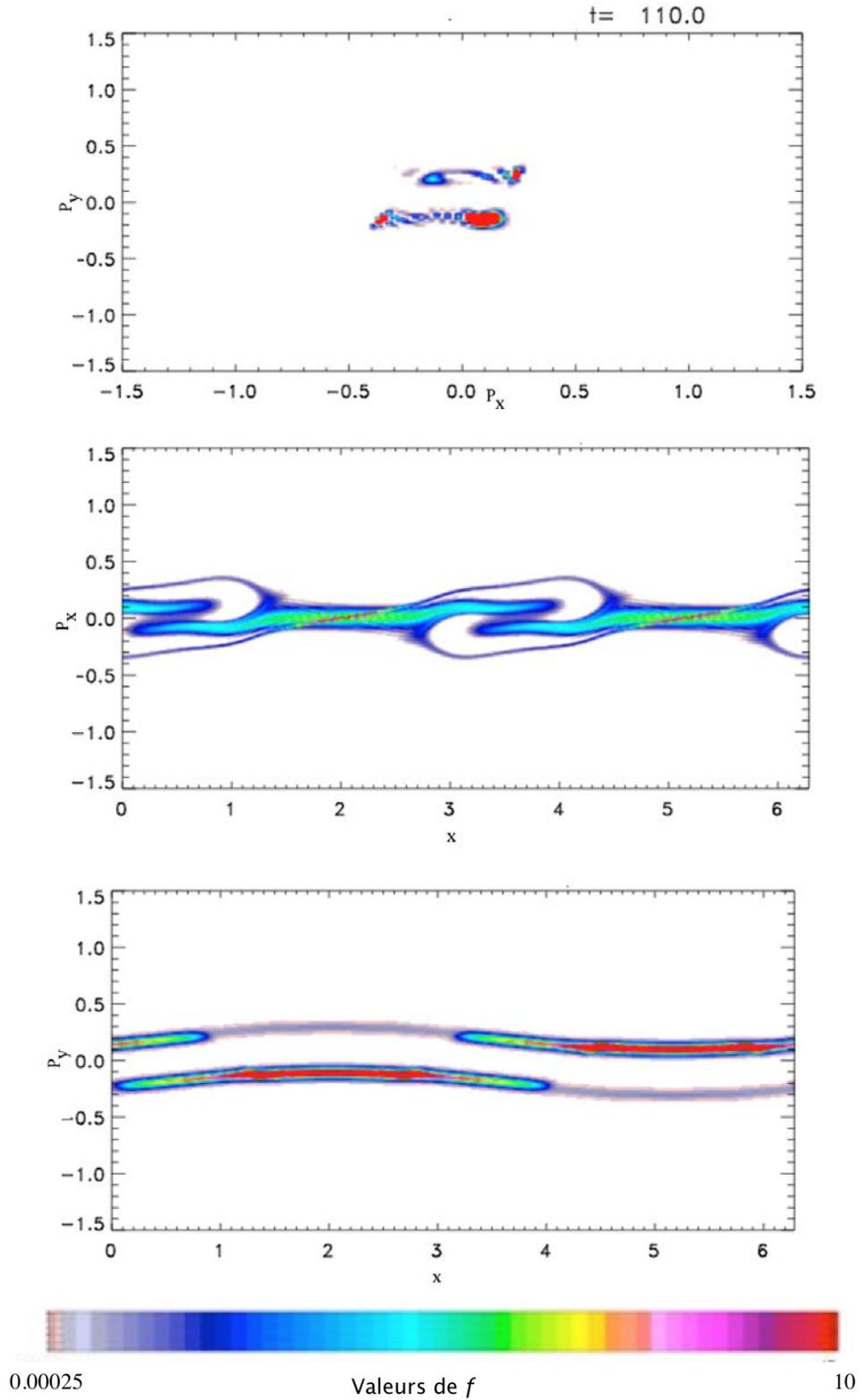


FIGURE 2.11.: Espaces des phases  $(p_x, p_y)$  en  $x=3.14$ ,  $(x, p_x)$  moyenné en  $p_y$  et  $(x, p_y)$  moyenné en  $p_x$ , à l'instant  $t = 110$ .

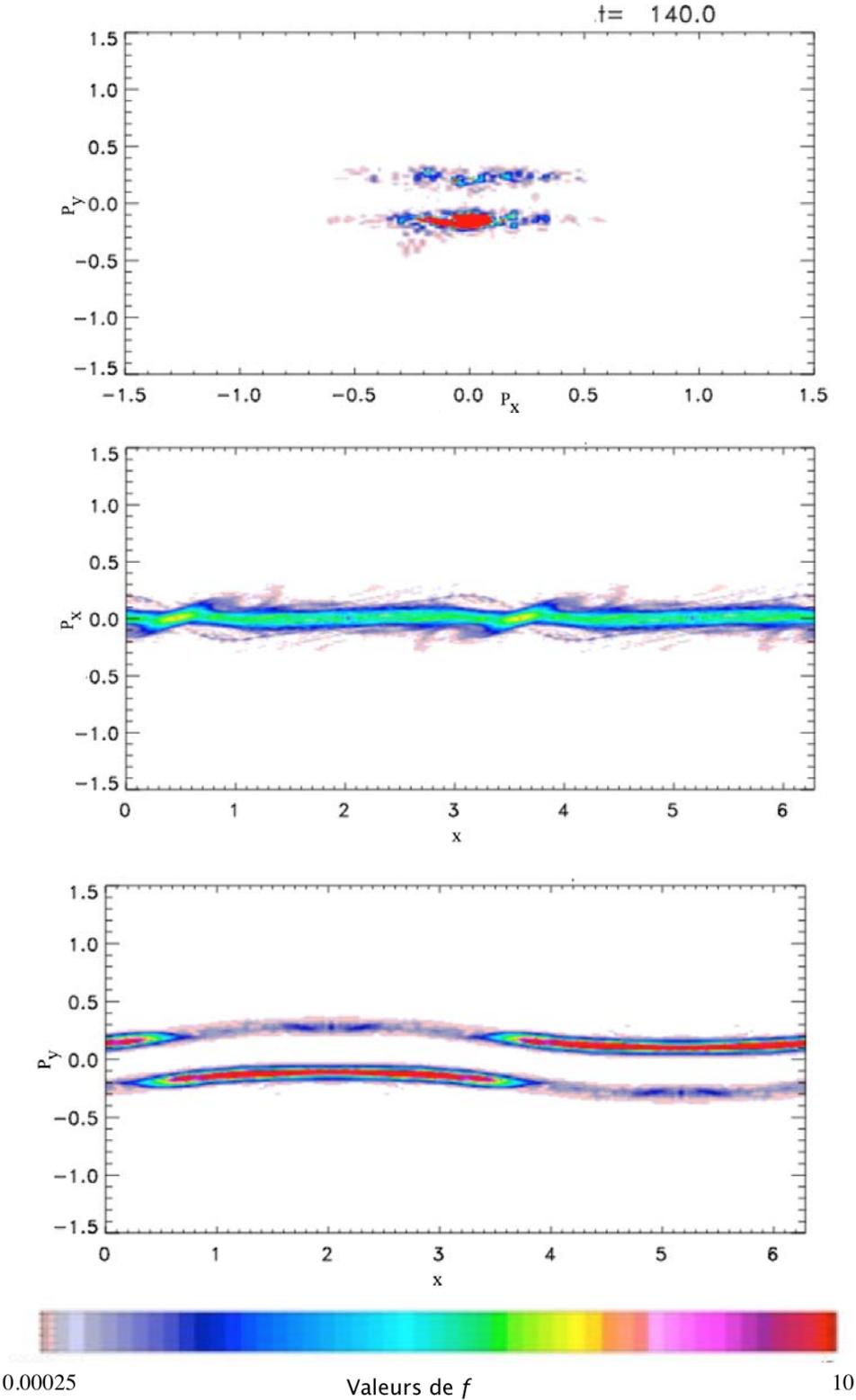


FIGURE 2.12.: Espaces des phases  $(p_x, p_y)$  en  $x=3.14$ ,  $(x, p_x)$  moyenné en  $p_y$  et  $(x, p_y)$  moyenné en  $p_x$ , à l'instant  $t = 140$ .

Nous venons de présenter le cas symétrique non relativiste de l'instabilité de filamentation de courant. Les caractéristiques non-relativistes de l'instabilité de filamentation de courant étaient déjà connus. Cette partie nous a en particulier permis de valider notre modèle, en retrouvant toutes les particularités de l'instabilité. Nous allons maintenant traiter un cas symétrique relativiste de la CFI, dont la physique est moins connue, de façon à confirmer les éléments de la physique détaillés précédemment et de voir comment ces caractéristiques (telles que l'augmentation du champ magnétique, le phénomène de déferlement et le piégeage magnétique) sont modifiées, le cas échéant. Ce type de cas relativiste est répandu notamment dans la fusion inertielle, où la vitesse des faisceaux mis en jeu peuvent atteindre des valeurs relativistes.

### 2.2.2. CFI dans un cas relativiste symétrique

Dans la perspective d'une comparaison avec le cas non-relativiste précédent, nous avons choisi un cas symétrique, avec deux faisceaux de densité  $n = 0.5$  se propageant selon l'axe  $Oy$  à une vitesse relativiste  $p_{01} = -p_{02} = -3$ . La température initiale dans les directions  $p_x$  et  $p_y$  est  $T = 2keV$ . La fonction de distribution, bimaxwellienne en vitesses à l'équilibre, est perturbée par des fluctuations magnétiques transverses  $B_z = B_0 \sin(k_0 x)$  avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = k_0 \mathbf{e}_x$ , perpendiculaire aux faisceaux d'électrons.  $B_0$  représente l'amplitude de la perturbation et vaut  $10^{-5}$ . La boîte de simulation d'une longueur  $L_x = 2\pi$  est discrétisée avec  $N_x N_{p_x} N_{p_y} = 256 * 257^2$  correspondant à  $1.69 \times 10^7$  points de grille. Le pas de temps et de maillage de l'espace des phases utilisés dans cette simulation valent  $\Delta t = 0.003$ ,  $\Delta x \sim 0.0245$  et  $\Delta p = 0.047$ .

#### Evolution des champs

La figure 2.13 représente l'évolution temporelle de l'énergie magnétique moyennée en  $x$ , en échelle logarithmique. On voit toujours très nettement deux phases principales dans le développement de l'instabilité. Durant la phase linéaire,  $10 < t < 30$ , le mode  $k = 1$  croît avec un taux de croissance de l'ordre de  $\gamma \approx 0.467$ , qui reste très proche de la valeur théorique calculée à partir de la relation de dispersion (2.7)  $\gamma_{th} \approx 0.47$ .

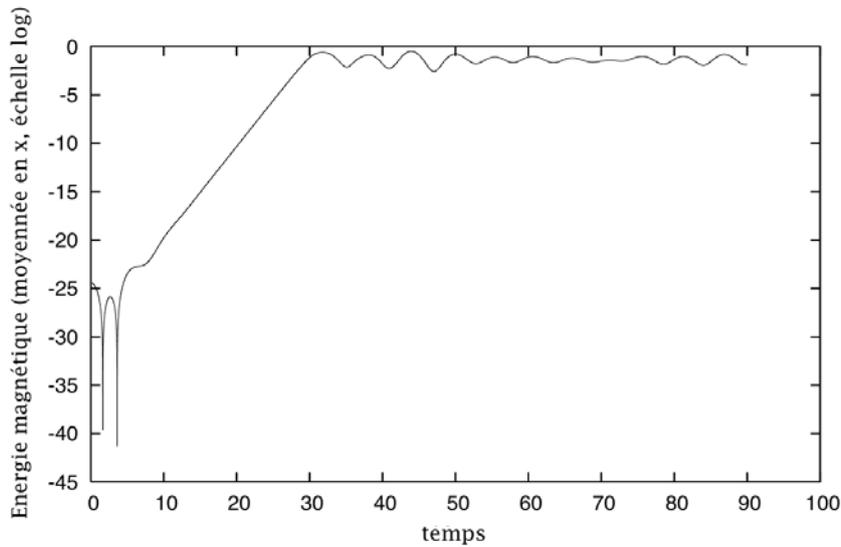


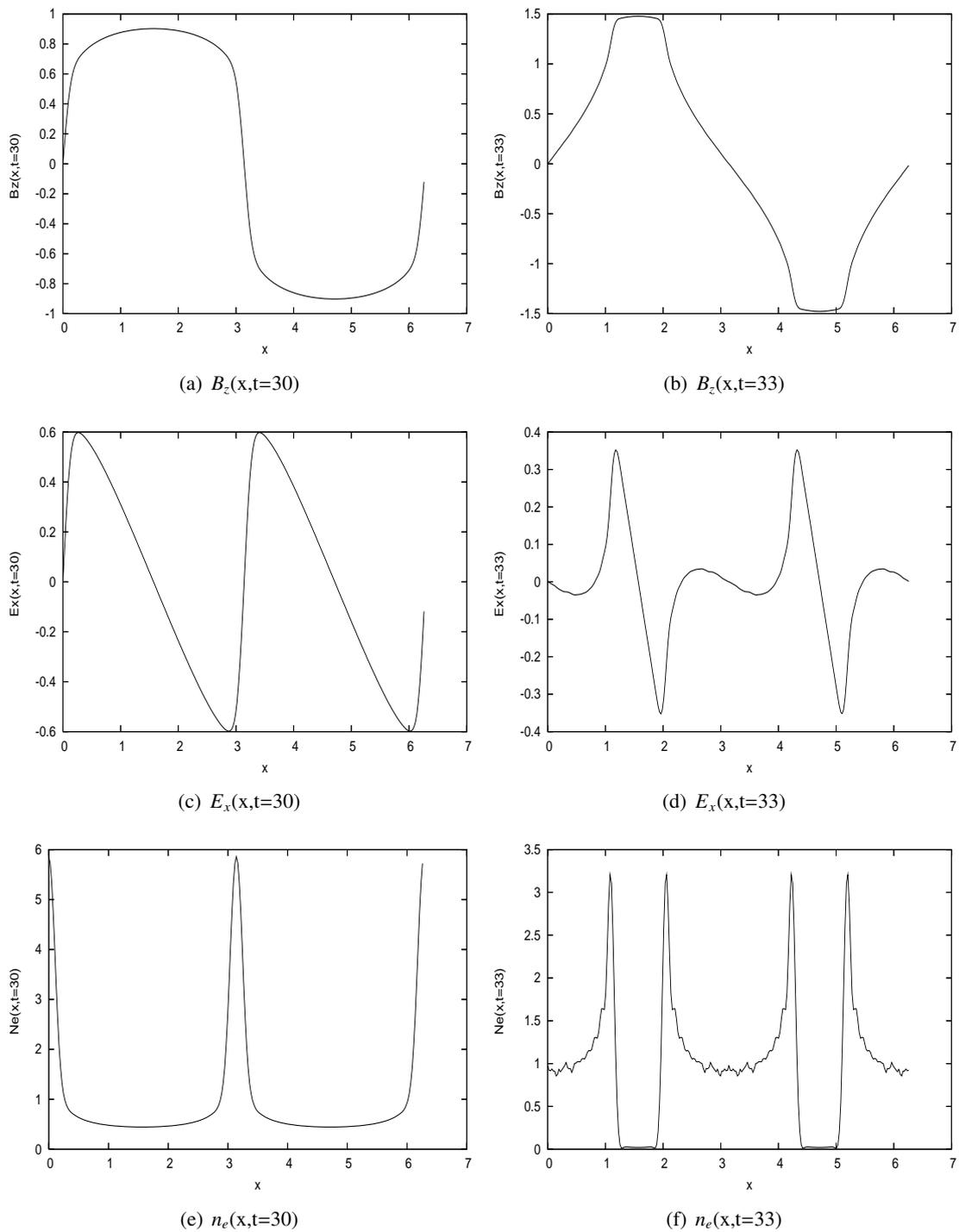
FIGURE 2.13.: Énergie magnétique moyennée en  $x$ , en fonction du temps.

La figure suivante 2.14 représente les profils spatiaux du champ magnétique  $B_z$ , du champ électrique longitudinal  $E_x$  et de la densité électronique totale  $n_e$  à  $t = 30$  (colonne de gauche) et à  $t = 33$  (colonne de droite), correspondant au début de la phase de saturation de l'instabilité. En plus des caractéristiques "standards" de la CFI comme le développement des champs électrique et magnétique, on remarque également la formation de pics dans la densité et dans le champ électrique (2 par longueur d'onde), générés non linéairement et pouvant mener au phénomène de déferlement. La densité donne lieu à un phénomène de cavitation très marqué : elle atteint des valeurs très proches de zéro, en  $x = \pi/2$  et  $x = 3\pi/2$ , au niveau des maxima du champ magnétique. La dynamique des ions semble donc nécessaire à prendre en compte.

La figure 2.15 représente la densité et le champ magnétique dans le plan  $x - t$ . Ces graphiques nous permettent de voir qu'un phénomène cyclique se produit sur ces deux quantités. À  $t = 30$ , on remarque dans la densité la présence de deux pics principaux, localisés à  $x = 0$  et  $x = \pi$ , en accord avec la figure 2.14(e). Ces pics se propagent ensuite, et mènent à la formation de deux cavités, délimitées par les pics de densités. Ceci peut également être confirmé par la figure 2.14(f), où la densité est tracée à  $t = 33$ .

En comparant avec le profil de la composante  $z$  du champ magnétique, on remarque à l'intérieur de ces cavités, la présence d'un fort champ magnétique. En accord avec les équations de Maxwell, la densité des électrons est nulle au niveau des extrema du champ magnétique, et les pics de densité apparaissent au position où le champ magnétique est nul.

Ce phénomène se produit périodiquement sur une échelle de temps de l'ordre de l'inverse de la pulsation plasma. Cette figure montre précisément que le milieu ne tend pas à un état stable, comme c'est souvent le cas dans la limite électrostatique où des particules piégées mènent à la formation de vortex dans l'espace des phases.



**FIGURE 2.14.:** Champ magnétique  $B_z$ , champ électrostatique  $E_x$  et densité électronique totale  $n_e$  en fonction de  $x$  à  $t = 30$  (colonne de gauche) et  $t = 33$  (colonne de droite). L'amplitude des champs a fortement augmenté. Le phénomène de déferlement est particulièrement observable, avec des forts gradients dans le champ plasma, et des cavitations formées dans la densité électronique.

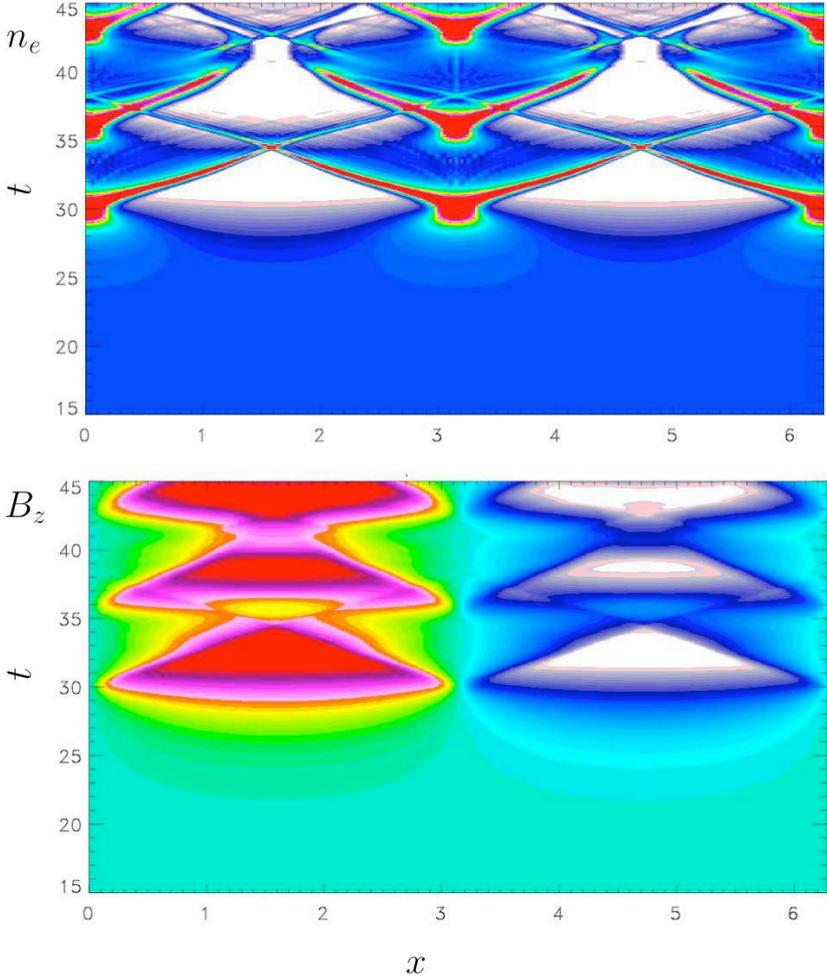


FIGURE 2.15.: Densité électronique et champ magnétique dans le plan  $x - t$ .

### Espace des phases

La CFI sature suite au processus de piégeage magnétique, le déferlement étant la signature fluide de l'effet magnétique du piégeage autocohérent des électrons. Dans [62], les auteurs montrent que l'instabilité sature lorsque le taux de croissance de l'instabilité atteint la valeur de la fréquence de rebond magnétique :

$$\gamma \approx \omega_B = \sqrt{\frac{ek vB}{m c}}$$

L'espace des phases  $(x, p_x)$  représenté dans la figure 2.16 met en évidence ce phénomène de piégeage magnétique. Le taux de croissance de l'instabilité vaut  $\gamma \approx 0.467$ . Il est alors possible de définir une valeur de période de rebond  $T_B$  :

$$T_B = \frac{2\pi}{\omega_B}$$

où  $\omega_B$  représente la fréquence de rebond. Dans le cas où cette fréquence atteint la valeur du taux de croissance 0.467, on trouve un temps de rebond de l'ordre de  $T_B \approx 13.5$ .

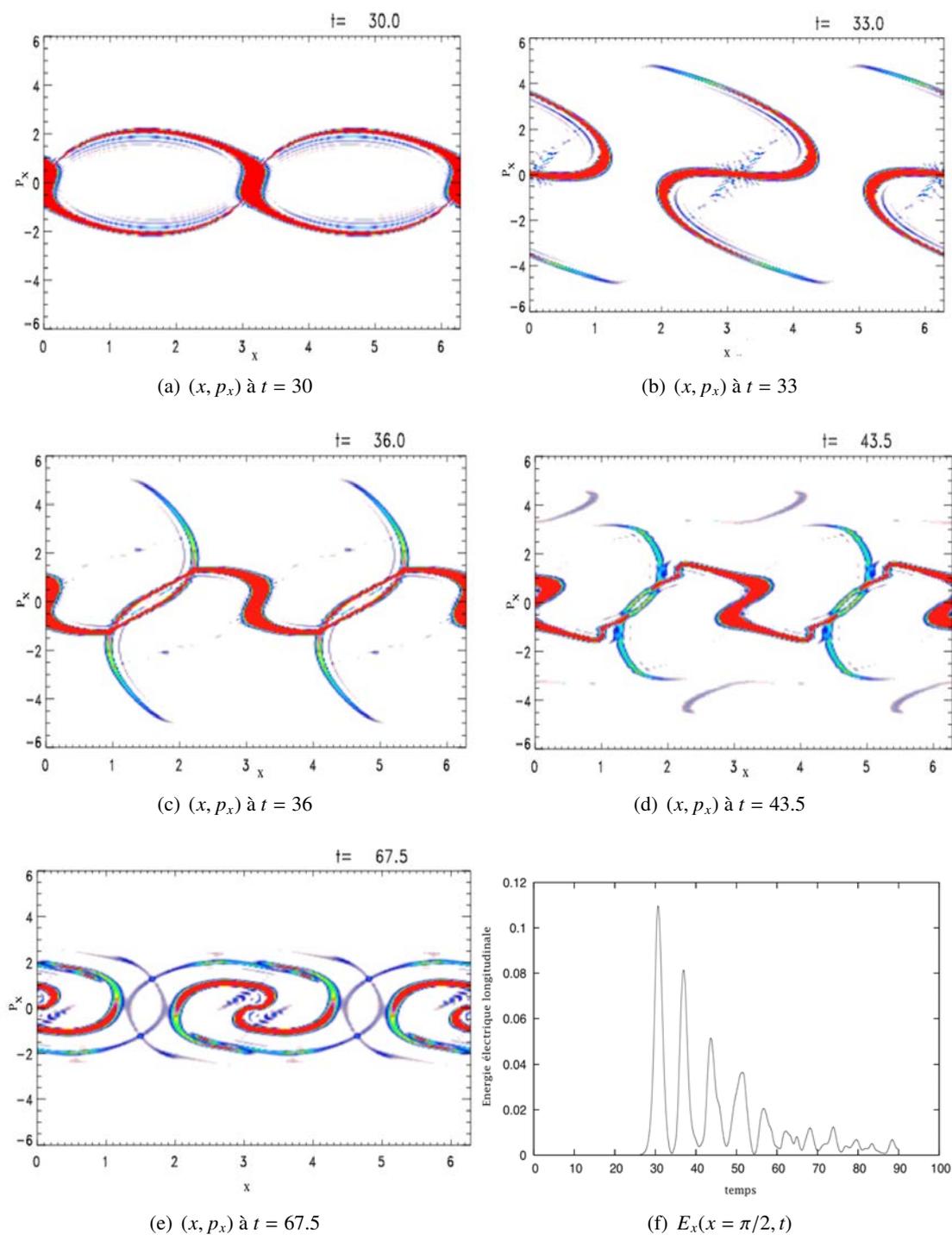
L'espace des phases représenté sur la figure 2.16 montre la période  $30 < t < 43.5$  où l'on voit une structure de vortex se former, sous l'effet du piégeage des particules. Il s'agit d'une période de rebond, ce qui est en accord avec la théorie énoncée dans [62]. La figure 2.16(e) représente l'espace des phases après trois périodes de rebond. La figure 2.16(f) met en évidence ces périodes, une période de rebond correspondant à la durée entre trois pics successifs. Le pic "intermédiaire" correspond au moment où les électrons atteignent l'espace des vitesses négatives.

On remarque également, sur les figures 2.16(c) et 2.16(d) notamment, une rupture de pente dans le filament (autour de  $x = 1, 2, 4$  et  $5$ ). Ces ruptures sont dues à la périodicité temporelle du phénomène de *wave-breaking*, qui se déroule à ces instants  $t = 36$  et  $t = 43.5$  (figure 2.15).

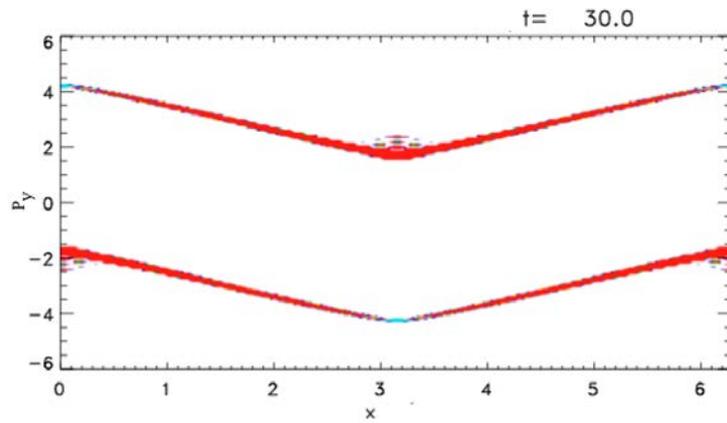
Sur des temps plus longs, il devient difficile de pouvoir distinguer la contribution de chacun des deux faisceaux, mais le modèle a conservé le système symétrique sur des temps longs, ce qui prouve son efficacité.

Il est important de noter également que, sur ces figures 2.16, le théorème de Liouville, qui interdit aux faisceaux de se croiser, reste valide. En effet, il s'agit d'une projection dans le sous-espace  $(x, p_x)$ . Un faisceau se trouve dans l'espace  $p_y > 0$  et le second en  $p_y < 0$ .

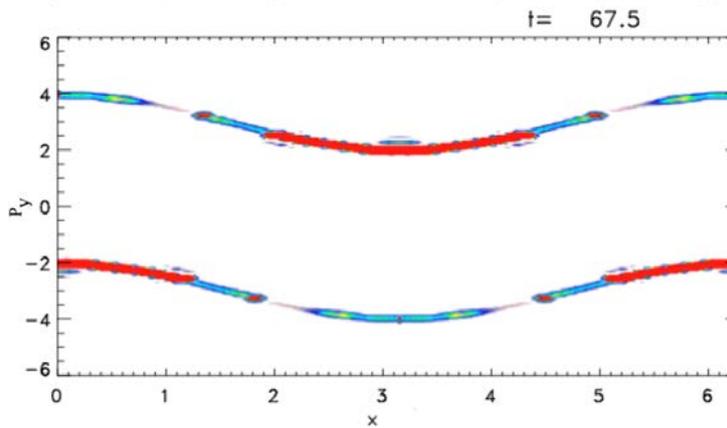
La figure 2.17 représente l'espace des phases  $(x, p_y)$  à différents instants du développement de l'instabilité. Comme dans le régime non relativiste, on remarque que la "température" du faisceau en  $p_y$  ne varie pas, et ce même dans un cas très relativiste comme présenté ici. Le moment canonique transverse  $P_{C\perp}$  reste constant. On peut également noter la séparation spatiale des faisceaux, en accord avec les résultats de [54].



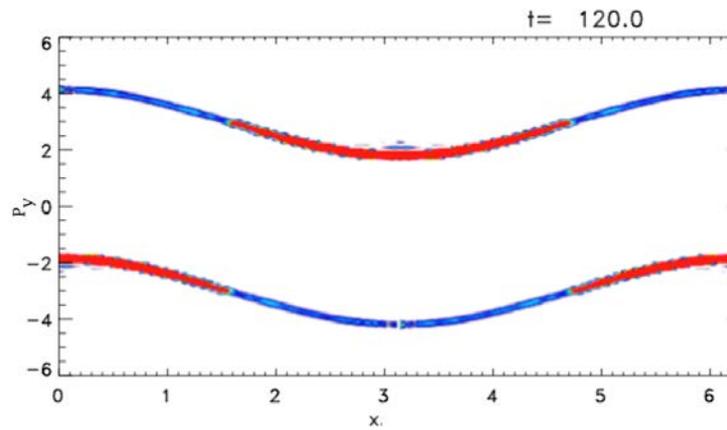
**FIGURE 2.16.:** Espace des phases  $(x, p_x)$  moyenné en  $p_y$ . Les figures (a)-(d) représentent la première période de rebond. La figure (e) représente la troisième. La figure (f) représente l'énergie électrique longitudinale en  $x = \pi/2$  en fonction du temps. Cette figure met en évidence les différentes périodes de rebond.



(a)  $(x, p_y)$  à  $t = 30$



(b)  $(x, p_y)$  à  $t = 67.5$



(c)  $(x, p_y)$  à  $t = 120$

**FIGURE 2.17.:** Espace des phases  $(x, p_y)$  moyenné en  $p_x$ . Invariance du moment transverse  $p_y$ .

## 2.3. Le comportement des ions

L'étude de la dynamique des ions sur des temps longs semble nécessaire, particulièrement dans le cas d'un régime relativiste où de fortes cavitations électroniques prennent place, avec des densités approchant une valeur nulle. Le travail numérique a consisté à créer une grille en espace et en quantité de mouvement et d'ajouter les schémas d'advection pour les ions.

La fonction de distribution ionique  $f_i$  obéit également à une équation de Vlasov relativiste définie comme :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{p_{xi}}{m_i \gamma_i} \frac{\partial f_i}{\partial x} - e \left( E_x + \frac{p_{yi} B_z}{m_i \gamma_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial p_{xi}} - e \left( E_y - \frac{p_{xi} B_z}{m_i \gamma_i} \right) \frac{\partial f_i}{\partial p_{yi}} = 0 \quad (2.26)$$

où  $m_i$  représente la masse de l'ion de charge  $-e$  ( $q = -Ze$ , le numéro atomique  $Z$  étant choisi égal à 1 pour raison de simplicité) et  $\gamma_i$  le facteur de Lorentz relatif aux ions. Cette équation de Vlasov est couplée aux équations de Maxwell. La densité et la densité de courant s'écrivent :

$$n_e = \iint f_e dp_{xe} dp_{ye} \quad (2.27)$$

$$n_i = \iint f_i dp_{xi} dp_{yi} \quad (2.28)$$

$$J_y = \iint \frac{p_{ye}}{m_e \gamma_e} f_e dp_{xe} dp_{ye} - \iint \frac{p_{yi}}{m_i \gamma_i} f_i dp_{xi} dp_{yi} \quad (2.29)$$

La fonction de distribution ionique initiale normalisée est définie comme

$$f_i(0) = \frac{1}{2\pi v_{thi_x} v_{thi_y}} \exp\left(-\frac{p_{xi}^2}{2v_{thi_x}^2}\right) \exp\left(-\frac{p_{yi}^2}{2v_{thi_y}^2}\right) \quad (2.30)$$

avec  $v_{thi}$  la vitesse thermique des ions définie à partir de la vitesse thermique électronique  $v_{the}$  et du rapport des masses et des températures :

$$v_{thi}^2 = v_{the}^2 \frac{m_e T_i}{m_i T_e} \quad (2.31)$$

Dans les simulations présentées, nous utilisons le rapport de masse physique :  $m_e/m_i = 1/1836$ . Dans la référence [55], les ions sont pris en compte dans un cas non-relativiste, avec un rapport de masse moindre  $m_e/m_i = 1/100$ .

Pour la suite, l'échelle temporelle relative aux électrons sera choisie pour la normalisation des valeurs. En effet, ils réagissent de façon plus violente et rapide, et la fréquence plasma électronique est plus faible que la fréquence plasma ionique.

### 2.3.1. Cas non relativiste

La figure 2.18 représente l'évolution de la densité ionique en fonction de  $x$  à différents instants du développement de l'instabilité dans le cas non relativiste symétrique présenté dans la section 2.2.1 :  $p_{01} = -p_{02} = -0.2mc$  et  $n = 0.5n_0$ . La température  $T_i$  des ions est égale à la température électronique  $T_i = T_e = 0.5keV$ . L'espace en vitesses des ions ( $p_{xi}, p_{yi}$ ) est discrétisé  $N_{p_{xi}}N_{p_{yi}} = 257^2$ . Le pas de temps utilisé est le même que le pas de temps électronique :  $\Delta t = 0.01$ . La saturation de l'instabilité démarre aux environs de  $t \approx 110$ .

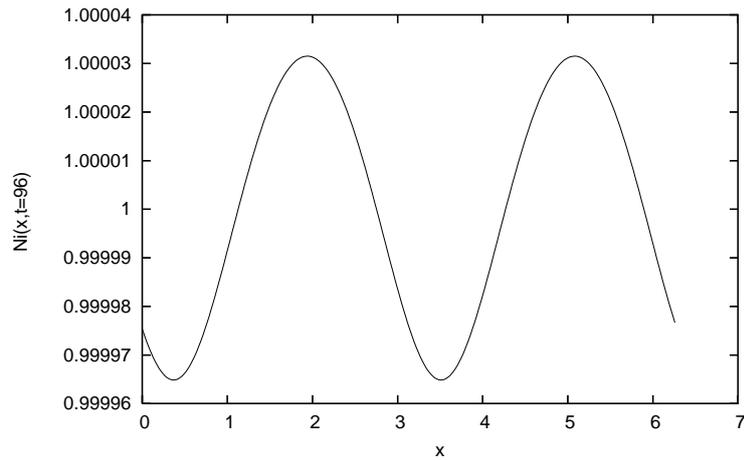
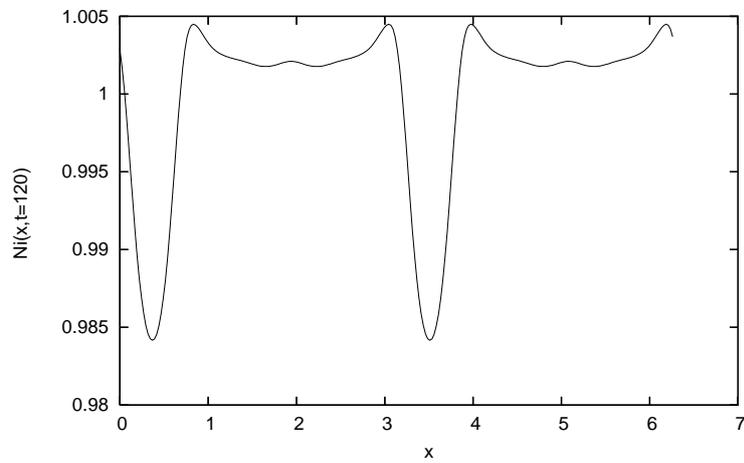
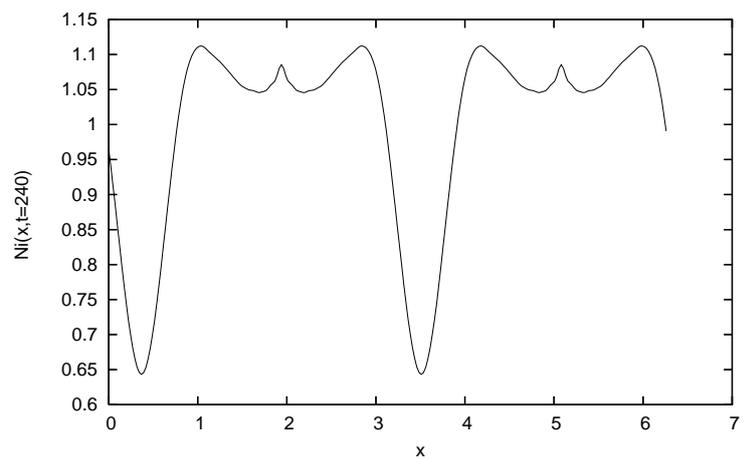
De façon générale, il est remarquable de noter que le profil de la densité ionique s'apparente de façon qualitative à celle des électrons. Pour autant, au début de la phase de saturation (figure 2.18(a)), les ions présentent des fluctuations de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5}$  comparés à  $3 \cdot 10^{-4}$  pour les électrons (figure 2.6), soit un ordre de grandeur d'écart. Ceci permet de déduire que la dynamique des ions est négligeable jusque la saturation. Cependant, pour les temps suivants, la présence des creux et pics dans la densité électronique induits pas les effets longitudinaux de l'instabilité sont mesurables à l'échelle des ions avec des dépressions dans la densité ionique de plusieurs dizaines de pourcents à  $t = 240$  (figure 2.18(c)). Cependant, ces variations demeurent bien en dessous de celles relevées pour les électrons ; par conséquent, la quasi-neutralité à saturation n'est pas réalisée par le système.

### 2.3.2. Cas relativiste

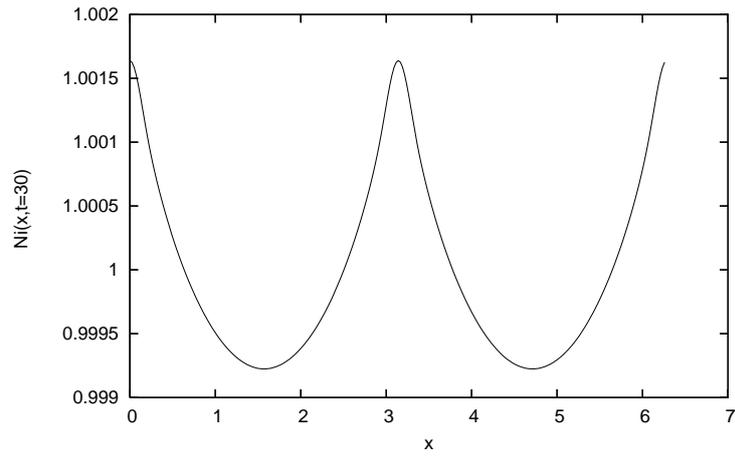
La figure 2.19 représente le profil spatial de la densité ionique dans la simulation relativiste présentée dans la section 2.2.2, dont les paramètres étaient des faisceaux symétriques initialement maxwelliens, se propageant en sens opposé à des vitesses relativistes  $p_{01} = -p_{02} = -3mc$  avec une densité  $n = 0.5n_0$ . La température ionique est choisie égale à la température électronique  $T_i = T_e = 2keV$  et cette simulation est toujours effectuée avec un rapport de masse  $m_e/m_i = 1/1836$ . La figure 2.19 montre trois instants dans le développement de la phase linéaire de la CFI :  $t = 30, 60$  et  $120$ .

La réponse des ions à la formation des cavités dans la densité électronique (figures 2.14(e) et 2.14(f)) est visible sur la figure 2.19. Pour des temps très avancés dans la phase de saturation ( $t = 60, 120$ ), les fluctuations présentent respectivement des extrema de 40% et 260%. Pour autant, la quasi-neutralité n'est toujours pas obtenue par le système. Comparés au cas non-relativiste, les effets relativistes sur la densité ionique se traduisent pas des gradients plus marqués, ceci indépendamment du retour à la quasi-neutralité.

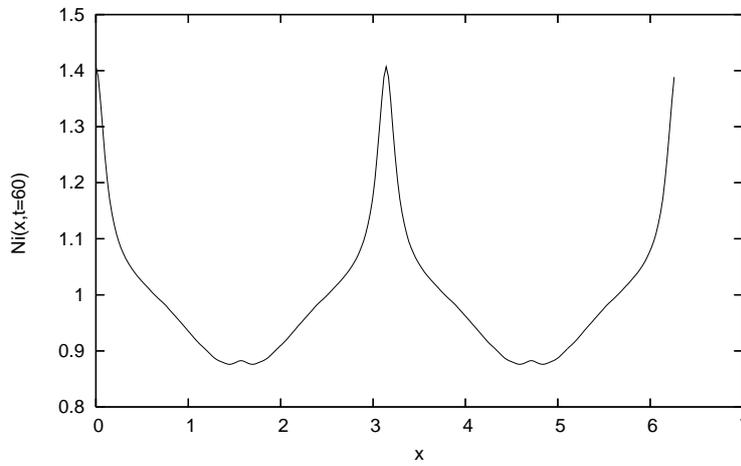
Il est cependant aussi important de noter que pour des simulations sur des temps courts, l'influence des ions n'est pas dominante.

(a)  $N_i(x,t=96)$ (b)  $N_i(x,t=120)$ (c)  $N_i(x,t=240)$ 

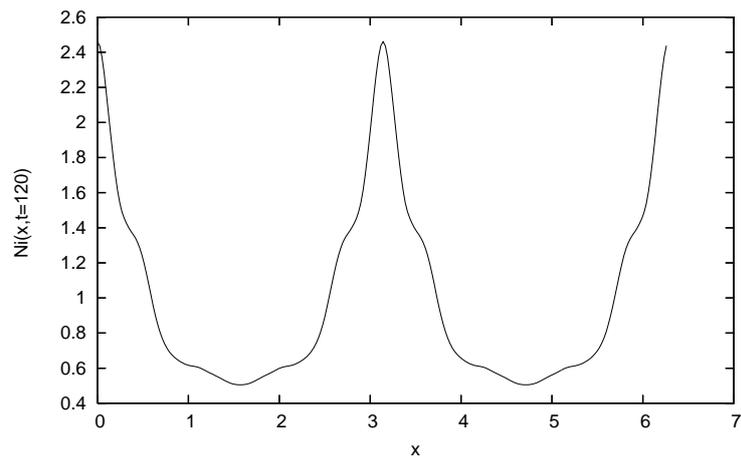
**FIGURE 2.18.:** Densité ionique en fonction de  $x$  à  $t = 96, 120$  et  $240$  dans un régime non relativiste. Les ions tendent à suivre la forme de la densité électronique, mais réagissent beaucoup trop lentement.



(a)  $N_i(x, t=30)$



(b)  $N_i(x, t=60)$



(c)  $N_i(x, t=120)$

**FIGURE 2.19.:** Densité ionique en fonction de  $x$  à  $t = 30, 60$  et  $120$  dans un régime relativiste. Les ions tendent à suivre la forme de la densité électronique. Dans le cas relativiste présenté ici, la densité atteint des pics d'environ  $n = 2.5n_0$ .

## 2.4. Conclusion

Le but de ce chapitre était de caractériser l'instabilité de filamentation de courant à l'aide d'un modèle cinétique complet 1D2V (une dimension spatiale, deux dimensions en vitesse). Cette instabilité se développe à la suite d'une anisotropie en vitesse, notamment lorsque deux faisceaux d'électrons se propagent en sens opposé et lorsqu'une perturbation infinitésimale transverse aux faisceaux est appliquée.

L'évolution de la CFI peut se décomposer en deux parties principales : la phase linéaire, définie par la croissance exponentielle des champs électrique et magnétique et la phase de saturation de l'instabilité, où les champs se stabilisent autour d'une valeur moyenne.

Dans la phase linéaire de la CFI, les champs électrique et magnétique croissent de façon exponentielle. Le taux de croissance numérique de l'instabilité est calculé à partir de la pente de la courbe du profil temporel des énergies électromagnétiques. Ceci nous permet ainsi de valider notre modèle en comparant ce taux numérique au taux de croissance théorique obtenue à partir de la résolution de la relation de dispersion fluide. Dans cette phase linéaire, les champs électrique et magnétique atteignent des valeurs conséquentes. Le plasma est alors inhomogène, en présence d'un champ magnétique ambiant. Les effets de séparation de charges ne sont plus négligeables. La phase de saturation de l'instabilité met en évidence plusieurs caractéristiques de la CFI. On peut notamment citer de façon générale l'isotropisation de la fonction de distribution relativement à ses variables de vitesses, avec les particules qui acquièrent progressivement une vitesse en  $p_x$  sous l'action de la force de Lorentz dans la direction longitudinale. Le plasma est devenu fortement inhomogène et magnétisé.

La saturation cinétique de l'instabilité est due au mécanisme de piégeage magnétique des particules, suite au développement d'un fort champ magnétique. Des structures correspondant à des vortex, visibles notamment dans l'espace des phases, sont en effet créées. Des cavités et des pics dans la densité, caractéristiques de la CFI, sont également créés non-linéairement. Ces pics peuvent atteindre des valeurs de l'ordre de trois fois la densité moyenne initiale et peuvent ainsi mener à un phénomène de déferlement. Ce processus est la signature fluide des effets de piégeage magnétique des électrons. Dans le cas relativiste présenté dans ce chapitre, le mécanisme de déferlement a lieu de façon périodique. En effet, dans le profil de densité, on remarque un très fort pic qui se propage et mène à la suite à la formation de deux cavités, délimitées par ces pics de densité. À l'intérieur, un fort champ magnétique s'est développé, et ce fort champ mène à un piégeage des particules.

L'étude du mouvement des ions a également été faite dans un cas non-relativiste, et relativiste. De manière générale, le profil de densité ionique s'apparente au profil électronique. Leur amplitude n'est cependant pas la même, et les ions n'agissent pas sur des temps de simulations courts. Pour autant, sur des temps longs, les fluctuations de densité peuvent être importantes, et la quasi-neutralité du système n'est pas assurée. Dans les simulations suivantes, nous étudions la dynamique du système sur des temps courts par rapport au mouvement des ions, et leur prise en compte n'est donc pas nécessaire.

Dans ce second chapitre, l'invariance du moment canonique transverse des faisceaux a été mise en évidence. En effet, dans les cas présentés, non-relativiste et relativiste, la "température" des faisceaux reste inchangée. Cette invariance est particulièrement visible dans le sous-espace  $(x, p_y)$  où l'on peut voir les faisceaux se déformer, mais garder leur "épaisseur". L'objectif du chapitre suivant est de diminuer en dimension le problème. Le modèle multi-faisceaux, présenté dans le chapitre 3, est basé sur l'invariance du moment canonique transverse, défini comme la somme de la quantité de mouvement transverse et du potentiel vecteur :  $P_{C\perp} = p_{\perp} + eA_{\perp}$ . Cette invariance va nous permettre de considérer cette direction  $p_y$  comme un paramètre à travers le moment canonique, et non plus une variable.



# 3

## Modèle Vlasov-Maxwell multi-faisceaux pour l'étude des instabilités de type Weibel

Le modèle cinétique présenté dans ce chapitre est basé sur une technique de réduction en dimension de l'espace des phases à partir de l'invariance du moment canonique transverse. En effet, les cas précédemment traités ont montré, notamment dans le sous espace  $(x, p_y)$ , que le moment  $P_{Cy} = eA_y + p_y$  reste constant. L'intérêt d'un tel modèle est qu'il permet de décrire de façon exacte la dynamique non-linéaire des faisceaux tout en étant un modèle analytique "simple". Il va nous permettre de résoudre  $N$  équations de Vlasov à 1D-1V, couplées aux équations de Maxwell, contrairement au modèle du chapitre précédent où nous avons à résoudre une équation de Vlasov 1D-2V. Il présente également un avantage numérique important, puisqu'il permet de "supprimer" une direction, celle-ci devenant alors un paramètre du système. Cette technique de réduction en dimension est utilisée dans divers modèles, comme par exemple dans [63] où l'auteur l'utilise dans un modèle de dérive cinétique.

Le modèle multi-faisceaux permet de traiter de façon relativiste et unifiée les instabilités de type Weibel, pour des problèmes 1D/2D.

Le code numérique présenté ici et utilisé dans les chapitres 3 et 4, utilise les mêmes caractéristiques numériques que le modèle décrit dans le chapitre 2 (méthodes d'advection et d'interpolation similaires). Relativement à ce code, mon travail a concerné plus particulièrement son exploitation ainsi que sa comparaison avec le code numérique développé dans le chapitre 2.

### 3.1. Le modèle Vlasov-Maxwell multi-faisceaux

#### 3.1.1. Introduction

Dans le cas le plus général, la fonction de distribution pour les électrons  $F(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  obéit à une équation de Vlasov à 6 dimensions : 3 dimensions en espace (3D) et 3 dimensions en vitesse (3V) :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{B}}{m\gamma} \right) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (3.1)$$

avec le facteur de Lorentz  $\gamma$  qui s'écrit :

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} \quad (3.2)$$

On considère les ions immobiles, et formant un fond neutralisant du fait de leur grande inertie. L'équation de Vlasov (3.1) est couplée de façon auto-cohérente aux équations électromagnétiques de Maxwell. Malgré une montée en puissance des moyens de calcul, notamment avec le développement des ordinateurs parallèles, résoudre une équation complète à six dimensions demande des ressources numériques importantes et des heures de calculs conséquentes. Cependant, un modèle spatial à 3D n'est pas toujours nécessaire quand l'une des dimensions est privilégiée suite, par exemple, à une anisotropie. En effet, lorsque les caractéristiques de l'équation de Vlasov possèdent un invariant exact, il est alors possible de réduire les dimensions de l'espace des phases. Le modèle 1D présenté dans ce chapitre est construit sur cette base.

Nous allons considérer pour notre analyse des ondes planes se propageant dans la direction  $Ox$ . L'hamiltonien d'une particule de masse  $m$  et de charge  $e$  dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , en régime relativiste s'écrit :

$$H = mc^2 (\gamma - 1) + e\phi(x, t) \quad (3.3)$$

où  $\phi$  représente le potentiel électrostatique. En introduisant le moment canonique  $\mathbf{P}_c$ , avec  $\mathbf{P}_c = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$ , le facteur de Lorentz (3.2) peut se réécrire sous la forme :

$$\gamma = \left[ 1 + \frac{(\mathbf{P}_c - e\mathbf{A}(x, t))^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \quad (3.4)$$

avec  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur et  $\mathbf{p}$  la quantité de mouvement.

### 3.1.2. L'invariance du moment canonique transverse

Considérons deux directions : la direction longitudinale  $Ox$ , selon laquelle se propagent les ondes planes, et la direction perpendiculaire (notée  $\perp$ ). Dans la jauge de Coulomb ( $\text{div}\mathbf{A} = 0$ ) on obtient :

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

Cette relation implique que le potentiel vecteur sera constant le long de la direction  $Ox$  (constante fixée à 0). Il n'aura alors qu'une composante selon la direction perpendiculaire :  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp(x, t)$ . Le long de la direction longitudinale, le moment canonique s'écrit donc :  $P_{cx} = p_x$ , qui est la composante cinétique standard. Dans la direction perpendiculaire, ce moment s'écrira  $\mathbf{P}_{c\perp} = \mathbf{p}_\perp + e\mathbf{A}_\perp$ .

Les équations de Hamilton

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (3.5)$$

avec les variables généralisées  $\mathbf{q} = (x, y, z) = (x, \mathbf{q}_\perp)$  et  $\mathbf{p} = (P_{Cx}, P_{Cy}, P_{Cz}) = (P_{Cx}, \mathbf{P}_{C\perp})$ , peuvent être décomposées selon les deux directions :

$$\frac{dP_{cx}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\frac{d\mathbf{P}_{c\perp}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}_\perp} = 0 \quad (3.7)$$

Puisque l'hamiltonien (3.3) ne dépend pas des coordonnées spatiales transverses, l'équation (3.7) nous permet de déduire l'invariance du moment canonique transverse, invariance sur laquelle est basé le modèle multi-faisceaux présenté dans ce chapitre :  $\mathbf{P}_{C\perp} = \text{constant}$ .

### 3.1.3. L'équation de Vlasov réduite

En considérant l'invariance du moment canonique transverse, il est alors possible de représenter l'évolution du plasma par une classe de conditions initiales invariante vis-à-vis de la dynamique du plasma.

L'invariance de  $\mathbf{P}_{C\perp}$  va nous permettre de considérer un plasma où les particules sont divisées en  $N$  "faisceaux"  $j$  (avec  $j = 1, \dots, N$ ), chacun étant caractérisé par son moment canonique perpendiculaire initial constant :  $\mathbf{P}_{C\perp} = \mathbf{C}_j = \text{constant}$  (Figure 3.1).

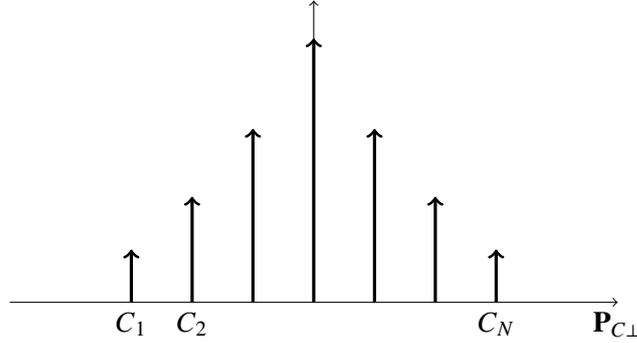


FIGURE 3.1.: Plasma divisé en  $N$  faisceaux

On définit pour une population  $j$  de particules, de moment canonique transverse initial  $\mathbf{C}_j$ , une équation de Vlasov réduite associée à la fonction de distribution longitudinale  $f_j(x, p_x, t)$ . L'hamiltonien d'une particule du faisceau  $j$  dans le régime relativiste devient :

$$H_j = mc^2 (\gamma_j - 1) + e\phi(x, t) \quad (3.8)$$

où le facteur de Lorentz s'écrit :

$$\gamma_j = \left[ 1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2} + \frac{(\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp(x, t))^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

La fonction de distribution longitudinale  $f_j(x, p_x, t)$  satisfait l'équation de Vlasov réduite, pour  $j = 1, \dots, N$  :

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{\partial f_j}{\partial x} \left( \frac{dx}{dt} \right)_j + \frac{\partial f_j}{\partial p_x} \left( \frac{dp_x}{dt} \right)_j = 0 \quad (3.10)$$

En utilisant les équations (3.5)-(3.9), on trouve

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_j = \frac{\partial H_j}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m\gamma_j} \quad (3.11)$$

$$\left( \frac{dp_x}{dt} \right)_j = -\frac{\partial H_j}{\partial x} = eE_x - \frac{1}{2m\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp)^2 \quad (3.12)$$

En insérant les équations (3.11) et (3.12) dans l'équation (3.10), on obtient l'équation de Vlasov réduite :

$$\boxed{\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma_j} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \left( eE_x - \frac{1}{2m\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp)^2 \right) \frac{\partial f_j}{\partial p_x} = 0} \quad (3.13)$$

On note que la fonction de distribution totale  $F(x, p_x, \mathbf{p}_\perp, t)$  peut s'écrire comme la somme d'une distribution de Dirac (voir la figure 3.2 où la fonction longitudinale  $f_j$  est choisie maxwellienne) :

$$F(x, p_x, \mathbf{p}_\perp, t) = \sum_{j=1}^N f_j(x, p_x, t) \delta(\mathbf{p}_\perp - (\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp(x, t))) \quad (3.14)$$

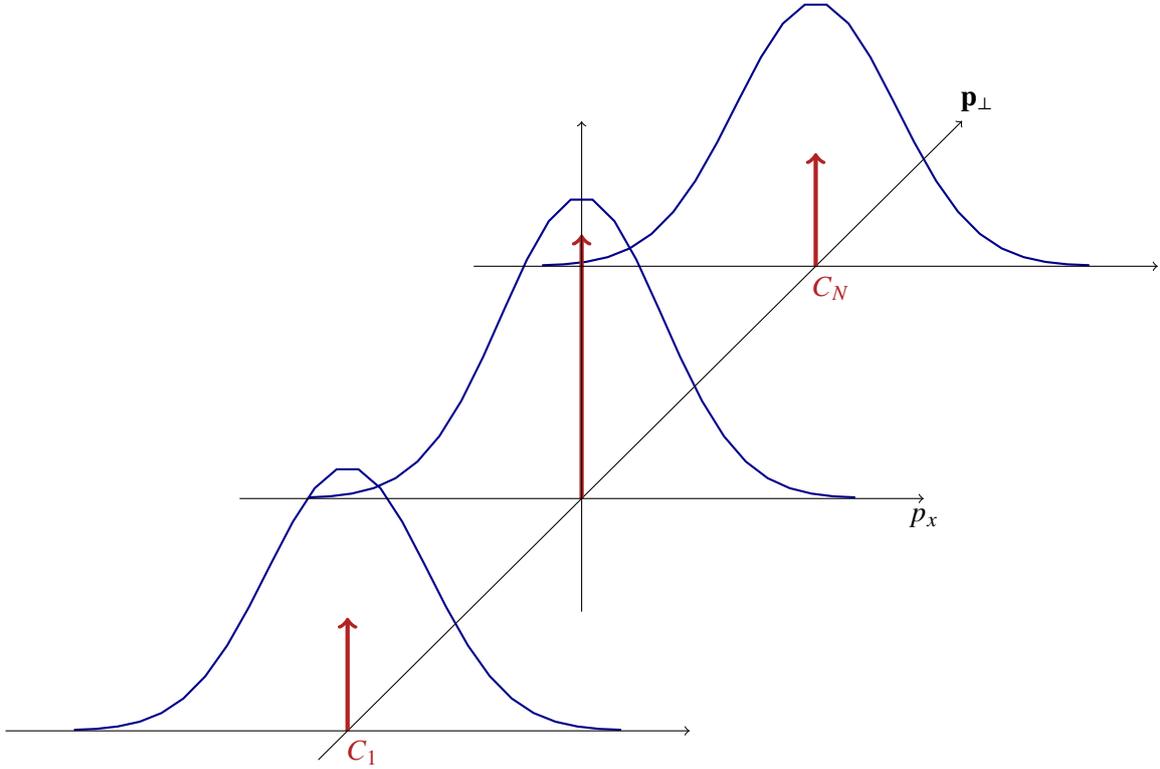


FIGURE 3.2.: Fonction de distribution initiale du modèle multi-faisceaux  $F(x, p_x, \mathbf{p}_\perp, t)$

Ce modèle Vlasov multi-faisceaux est donc constitué de  $N$  équations de Vlasov réduites (3.13) couplées de façon auto-cohérente au champ électrique longitudinal  $E_x$  et au potentiel vecteur  $A_\perp(x, t)$ , permettant ainsi de réduire l'espace des phases 1D-3V  $(x, \mathbf{p})$  à un espace 1D-1V  $(x, p_x)$  +  $N$  valeurs pour les  $C_j$  correspondants.

### 3.1.4. Système équation de Vlasov réduite - équations de Maxwell

Pour chaque population  $j$ , on peut calculer une densité  $n_j(x, t)$  et une densité de courant  $\mathbf{J}_{\perp j}$  définies respectivement comme

$$n_j(x, t) = \int f_j(x, p_x, t) dp_x$$

et

$$\mathbf{J}_{\perp j} = \frac{e}{m} (\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp) \int \frac{f_j(x, p_x, t)}{\gamma_j} dp_x = \frac{e}{m} (\mathbf{C}_j - e\mathbf{A}_\perp) \rho_j$$

avec  $\rho_j$  la densité relativiste.

L'hypothèse d'onde plane nous permet de séparer les contributions longitudinales et transverses des équations de Maxwell (2.3)-(2.6). Les champs électrique et magnétique s'écrivent respectivement en fonction des potentiels électrostatique et vecteur :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_\perp = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{e}_x - \frac{\partial\mathbf{A}_\perp}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp = \text{rot}\mathbf{A}_\perp$$

À une dimension, on peut remarquer que les contributions perpendiculaire et parallèle du champ électrique ne sont pas couplées.

L'équation de Maxwell-Gauss (2.6) se réécrit sous la forme :

$$\boxed{\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left( \sum_{j=1}^N n_j(x, t) - n_0 \right) = \frac{e}{\varepsilon_0} (n(x, t) - n_0)} \quad (3.15)$$

où  $n(x, t)$  définit la densité totale des  $N$  faisceaux et  $n_0$  la densité du plasma à l'équilibre.

L'équation de Maxwell-Ampère dans la direction perpendiculaire

$$\text{rot}\mathbf{B}_\perp = \mu_0\mathbf{J}_\perp = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\mathbf{E}_\perp}{\partial t}$$

peut être écrite en fonction du potentiel vecteur  $\mathbf{A}_\perp$  :

$$\frac{\partial^2\mathbf{A}_\perp}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2\mathbf{A}_\perp}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N \mathbf{J}_{\perp j}(x, t) \quad (3.16)$$

En remplaçant la densité de courant par son expression, l'équation (3.16) devient :

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^N \frac{e^2}{m\varepsilon_0} \rho_j \right) \mathbf{A}_\perp + \frac{e}{m\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N \mathbf{C}_j \rho_j = 0} \quad (3.17)$$

Les équations encadrées (3.13), (3.15) et (3.17) constituent les équations du modèle multi-faisceaux.

Nous allons maintenant nous focaliser sur la possibilité de trouver une relation de dispersion généralisée des instabilités de type Weibel dans l'approximation fluide, à partir des équations (3.15) et (3.17).

## 3.2. Le modèle multi-faisceaux dans l'approximation fluide

### 3.2.1. Un modèle multi-fluide fermé

On suppose dans un premier temps, une onde plane électromagnétique polarisée linéairement. Le potentiel vecteur et le moment canonique transverse vont respectivement s'écrire :

$$\mathbf{A}_\perp = A_y(x, t)\mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad \mathbf{P}_{C_\perp} = P_{C_y}\mathbf{e}_y = C_j\mathbf{e}_y$$

et

$$P_{cy} = p_y + eA_y = \text{constante}$$

On introduit pour chaque faisceau  $j$ , la quantité de mouvement longitudinale moyenne  $u_j$  ainsi que le facteur de Lorentz moyen  $\tilde{\gamma}_j$  :

$$\tilde{\gamma}_j = \left( 1 + \frac{u_j^2}{m^2 c^2} + \frac{(C_j - eA_y(x, t))^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2} \quad (3.18)$$

On suppose une fonction de distribution longitudinale froide  $f_j(x, p_x, t) = n_j(x, t)\delta(p_x - u_j(x, t))$ . En considérant les moments successifs de l'équation de Vlasov (3.13), on va pouvoir obtenir un modèle multi-fluide fermé. Pour chaque faisceau  $j$ , l'équation de continuité et l'équation d'Euler sont retrouvées :

$$\boxed{\frac{\partial n_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_j u_j}{m_e \tilde{\gamma}_j} \right) = 0} \quad (3.19)$$

$$\boxed{\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{u_j}{m_e \tilde{\gamma}_j} \frac{\partial u_j}{\partial x} = eE_x - \frac{1}{2m\tilde{\gamma}_j} \frac{\partial}{\partial x} (C_j - eA_y)^2} \quad (3.20)$$

L'ensemble des équations encadrées (3.15), (3.17), (3.19) et (3.20) constitue un système fermé (avec les valeurs  $C_j$  données) et va nous permettre d'établir la relation de dispersion fluide du modèle.

### 3.2.2. Relation de dispersion fluide

Nous allons effectuer un développement autour d'un équilibre libre de tout champ, caractérisé par une densité moyenne  $n_{0j}$  et une quantité de mouvement longitudinale moyenne  $u_{0j} = 0$ . Les termes de perturbations seront notés par un  $\delta$  :  $n_j = n_{0j} + \delta n_j$ ,  $u_j = \delta u_j$ ,  $A_y = \delta A_y$  et  $E_x = \delta E_x$ . Dans un premier temps, il faut linéariser le facteur de Lorentz (3.18). On note  $\gamma_{0j}$  la contribution du facteur de Lorentz à l'ordre zéro purement transverse,

$$\gamma_{0j} = \left( 1 + \frac{C_j^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2}$$

On obtient ainsi, à l'ordre 1 :

$$\tilde{\gamma}_j = \gamma_{0j} \left( 1 - \frac{2eC_j \delta A_y}{m^2 c^2 \gamma_{0j}^2} \right)^{1/2} \rightarrow \tilde{\gamma}_j^{-1} = \gamma_{0j}^{-1} \left( 1 - \frac{2eC_j \delta A_y}{m^2 c^2 \gamma_{0j}^2} \right)^{-1/2}$$

En effectuant un développement limité, on peut décomposer le facteur de Lorentz sous la forme :

$$\tilde{\gamma}_j^{-1} \approx \gamma_{0j}^{-1} + \frac{eC_j \delta A_y}{m^2 c^2 \gamma_{0j}^3} = \gamma_{0j}^{-1} + \delta \gamma_j \quad (3.21)$$

avec  $\delta \gamma_j$  le terme de perturbation du facteur de Lorentz.

En ayant comme conditions initiales :

$$\sum_{j=1}^N n_{0j} = n_0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N \frac{C_j n_{0j}}{\gamma_{0j}} = 0$$

la linéarisation des équations (3.15), (3.17), (3.19) et (3.20) et la double transformée de Fourier en temps ( $\partial/\partial t = -i\omega$ ) et en espace ( $\partial/\partial x = ik$ ) mènent à :

$$ik\delta E_x = \frac{e}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N \delta n_j \quad (3.22)$$

$$\left( -\omega^2 + k^2 c^2 + \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_{0j}} \right) \delta A_y - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2 C_j^2}{m^2 c^2 \gamma_{0j}^3} \delta A_y = \frac{e}{m\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{C_j \delta n_j}{\gamma_{0j}} \quad (3.23)$$

$$-i\omega \delta n_j + \frac{ik n_{0j}}{m\gamma_{0j}} \delta u_j = 0 \quad (3.24)$$

$$-i\omega \delta u_j = e\delta E_x + \frac{iek}{m\gamma_{0j}} C_j \delta A_y \quad (3.25)$$

avec  $\omega_{pj}$  la fréquence plasma relativiste d'un faisceau  $j$  :  $\omega_{pj}^2(x, t) = e^2 n_{0j}(x, t) / m\varepsilon_0$ .

Un système de deux équations couplant  $\delta A_y$  et  $\delta E_x$  peut être obtenu en substituant  $\delta n_j$  par son expression (3.24) dans l'équation (3.22) :

$$ik\delta E_x = \frac{e}{m\varepsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{k n_{0j}}{\omega \gamma_{0j}} \delta u_j \quad (3.26)$$

En insérant l'équation (3.25) dans l'équation (3.26) on obtient la première équation couplant  $\delta E_x$  et  $\delta A_y$  :

$$ik \left( 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_{0j}} \right) \delta E_x = -\frac{k^2}{\omega^2} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 C_j}{m\gamma_{0j}^2} \delta A_y \quad (3.27)$$

La deuxième équation se trouve en insérant les expressions de  $\delta n_j$  et  $\delta u_j$  dans l'équation (3.23) :

$$\left( -\omega^2 + c^2 k^2 + \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_{0j}} - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 C_j^2}{m^2 c^2 \gamma_{0j}^3} + \frac{k^2}{\omega^2} \sum_j \frac{C_j^2 \omega_{pj}^2}{m^2 \gamma_{0j}^3} \right) \delta A_y = \frac{ik}{\omega^2} \sum_j \frac{\omega_{pj}^2 C_j}{m\gamma_{0j}^2} \delta E_x \quad (3.28)$$

En calculant le déterminant de ce système qui doit être nul, on obtient la relation de dispersion des instabilités de type Weibel dans l'approximation fluide :

$$\left( 1 - \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 \gamma_{0j}} \right) \left( -\omega^2 + k^2 c^2 + \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2}{\gamma_{0j}^3} + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2 C_j^2}{\gamma_{0j}^3 m_e^2 c^2} \right) = -\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2 C_j}{\gamma_{0j}^2 m_e c} \right)^2 \quad (3.29)$$

Cette équation se décompose en trois termes.

- Le premier terme correspond aux effets longitudinaux, avec la relation de plasma froid relativiste obtenue par le modèle multi-faisceaux. Dans un cas non-relativiste, on retrouve  $\omega^2 = \omega_p^2$ .

- Le second terme du membre de gauche de (3.29) correspond à la partie transverse électromagnétique.
- Le membre de droite de l'équation (3.29) est un terme de couplage. Dans un cas général, les effets longitudinaux sont couplés aux effets transverses, via ce terme. Il est intéressant de noter que dans un cas non-relativiste, ou un cas symétrique, ce terme de couplage s'annule, et les effets longitudinaux et transverses deviennent alors indépendants.

On remarque que, pour  $N=2$ , cette équation calculée dans le cas du modèle multi-faisceaux correspond exactement à la relation de dispersion obtenue par Pegoraro et al. [52] dans le cas de l'instabilité de filamentation de courant.

### 3.3. L'instabilité de filamentation de courant dans un cas non relativiste

Nous allons dans un premier temps considérer le cas non relativiste de l'instabilité de filamentation de courant (CFI), c'est-à-dire,  $N = 2$ . Pour rappel, la CFI est une instabilité conduite par une anisotropie dans l'espace des vitesses. Dans le cas non relativiste, le facteur de Lorentz  $\gamma_{0j}$  tend vers 1. La condition de quasi-neutralité définie pour les densités de courant par l'équation  $\sum_j C_j n_{0j} = 0$  nous permet alors de simplifier la relation de dispersion pour les modes électromagnétiques sous la forme :

$$k^2 c^2 + \omega_p^2 - \omega^2 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \frac{\omega_{pj}^2 C_j^2}{m^2 c^2} = 0 \quad (3.30)$$

avec  $\omega_p$  la fréquence plasma totale,  $\omega_p^2 = \sum_j \omega_{pj}^2 = e^2 n_0 / m \epsilon_0$ . Il est à noter que, dans ce cas non relativiste, le terme de couplage dans l'équation (3.29) s'annule.

En l'absence de tout champ à l'équilibre, la fonction de distribution est initialisée dans la direction transverse, selon  $p_y$ , à l'aide de deux faisceaux, d'amplitude  $F_j$  et de quantité de mouvement  $C_j$ , avec  $j = 1, 2$  (voir figure 3.3).

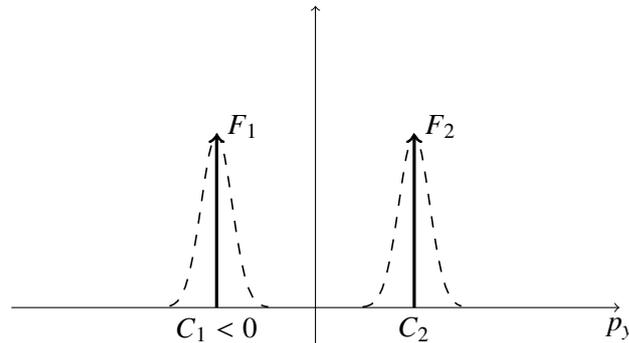


FIGURE 3.3.: Fonction de distribution transverse initiale pour la CFI dans le cas du modèle multi-faisceaux.

### 3.3.1. L'initialisation du problème

Pour initialiser le problème de façon cohérente, il est possible de trouver les valeurs de  $F_1, F_2, C_1$  et  $C_2$ . La fonction de distribution initiale du problème peut s'écrire sous la forme :

$$F(x, p_x, p_y, t = 0) = n_0 \delta(p_x) \sum_{j=1}^2 F_j \delta(p_y - C_j) \quad (3.31)$$

Dans le cas de l'instabilité de filamentation de courant, on rappelle que l'instabilité est conduite par une anisotropie en vitesse, correspondant à la propagation de deux faisceaux d'électrons en sens opposé, avec  $p_{01} < 0$  la quantité de mouvement du faisceau 1, et  $p_{02} > 0$  la quantité de mouvement du faisceau 2. Les faisceaux ont respectivement une densité  $n_{01}$  et  $n_{02}$ .

– La densité du plasma :

$$\int F(x, p_x, p_y, t) dp_x dp_y = n_0$$

nous permet de trouver la condition sur les  $F_j$  qui s'écrit alors :

$$\sum_{j=1}^2 F_j = 1 \quad (3.32)$$

Cette équation est équivalente à écrire la condition de neutralité de la charge :

$$\sum_{j=1}^2 n_{0j} = n_0 \quad (3.33)$$

et  $F_j = n_{0j}/n_0$

– La condition de quasi-neutralité du plasma impose que le courant total dans la direction des faisceaux soit nul :

$$n_{01} p_{01} + n_{02} p_{02} = 0 \quad (3.34)$$

Cette équation de conservation de courant (3.34) est équivalente à écrire :

$$\sum_{j=1}^2 F_j C_j = 0 \quad (3.35)$$

avec  $C_1 = p_{01}$  et  $C_2 = p_{02}$  les moments initiaux des faisceaux.

La combinaison des relations (3.32) et (3.35) nous permet d'obtenir les valeurs de  $F_j$  et  $C_j$  :

$$\begin{aligned} C_1 F_1 + C_2 F_2 &= 0 \\ (C_1 - C_2) F_1 + C_2 &= 0 \\ F_1 &= -\frac{C_2}{C_1 - C_2} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} F_2 &= 1 - F_1 \\ F_2 &= 1 - \frac{C_2}{C_1 - C_2} \\ F_2 &= \frac{C_1}{C_1 - C_2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

nous donnant ainsi la condition sur les densités et les quantités de mouvement des faisceaux 1 et 2 :

$$n_{01} = n_0 \frac{p_{02}}{p_{02} - p_{01}} \quad \text{et} \quad n_{02} = -n_0 \frac{p_{01}}{p_{02} - p_{01}} \quad (3.37)$$

### 3.3.2. La relation de dispersion non relativiste

Dans le régime non relativiste, où  $\gamma_{0j} \approx 1$ , la combinaison des deux équations sur la densité (3.37) nous permet de simplifier la relation de dispersion (3.30) puisque :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 C_j^2 n_{0j} &= n_{01} C_1^2 + n_{02} C_2^2 \\ &= n_0 \frac{p_{02} p_{01}^2}{p_{02} - p_{01}} - n_0 \frac{p_{01} p_{02}^2}{p_{02} - p_{01}} \\ &= -n_0 p_{01} p_{02} \end{aligned} \quad (3.38)$$

et de retrouver la relation de dispersion pour l'instabilité de filamentation de courant, dans le régime non relativiste [55] :

$$\omega^4 - (k^2 c^2 + \omega_p^2) \omega^2 + \omega_p^2 k^2 c^2 \frac{p_{01} p_{02}}{m_e^2 c^2} = 0 \quad (3.39)$$

Dans le but de montrer la capacité de ce modèle qui offre une description exacte de la dynamique du plasma, même avec un petit nombre de faisceaux, des simulations ont été effectuées dans le cas de la CFI et de l'instabilité Weibel. Ce dernier cas sera traité dans le chapitre 4.

Deux simulations vont être présentées. La première traite le cas de propagation de deux faisceaux symétriques, dans un cas relativiste ; la seconde, un cas non-symétrique. On rappelle que dans le cas du modèle multi-faisceaux, l'instabilité de filamentation de courant peut être étudiée de façon exacte à partir de  $N = 2$  faisceaux uniquement.

## 3.4. CFI dans un cas relativiste symétrique

L'objectif principal de cette partie est de pouvoir comparer qualitativement et quantitativement les résultats obtenus avec le modèle multi-faisceaux aux résultats du modèle complet 1D-2V présenté dans la section 2.2.2. Pour se faire, les mêmes paramètres de simulations seront utilisés. Le second objectif est de suivre l'évolution d'un seul faisceau, chacun des deux faisceaux satisfaisant une équation de Vlasov réduite.

Ces résultats ont été publiés dans la revue EuroPhysics Letters [64].

### 3.4.1. Les conditions initiales du système

La première simulation présentée traite le cas de deux faisceaux de quantité de mouvement  $p_{01} = C_1 = -3mc$  et  $p_{02} = C_2 = 3mc$ . On choisit une densité  $n_{01} = n_{02} = 0.5n_0$ . Les ions sont considérés fixes, ceux-ci n'agissant que sur des temps très longs (section 2.3).

La température électronique dans la direction  $p_x$  vaut  $T_e = 2keV$ . La fonction de distribution initiale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} F(x, p_x, p_y, t = 0) &= \sum_{j=1}^2 n_{0j} \delta(p_y - C_j) f_j(x, p_x, t = 0) \\ &= \sum_{j=1}^2 n_{0j} \delta(p_y - C_j) \frac{1}{\sqrt{2\pi} p_{th}} \exp\left(-\frac{p_x^2}{2p_{th}^2}\right) \end{aligned}$$

avec  $p_{th} = \sqrt{kT_e(keV)/mc^2} = \sqrt{2/mc^2}$  la quantité de mouvement thermique normalisée.

La perturbation initiale, purement transverse et polarisée linéairement, est appliquée sur la composante du champ magnétique  $B_z$  avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0 = k_0\mathbf{e}_x$ . Seul le mode fondamental  $k_0c/\omega_p = 1$  est excité. Ainsi, le champ magnétique initial s'écrit sous la forme :  $B_z = B_0\sin(k_0x)$  avec l'amplitude de perturbation  $B_0 = 10^{-4}$ .

La simulation est effectuée dans une boîte de longueur  $L_x = 2\pi$  avec un maillage  $N_xN_{px} = 513^2$ , validant les résultats obtenus avec  $N_xN_{px} = 257^2$ . Les pas de temps et de maillage utilisés sont  $\Delta t = 0.003\omega_p^{-1}$ ,  $\Delta x \approx 0.012$  et  $\Delta p \approx 0.023$ . Ces simulations ont été effectuées sous la machine vectorielle NEC SX-8 *Brodie* de l'IDRIS.

### 3.4.2. Résultats de l'analyse fluide

Dans un premier temps, nous avons résolu la relation de dispersion (3.29) pour les paramètres donnés précédemment, dans le but de trouver une estimation du taux de croissance théorique de l'instabilité attendu dans la phase linéaire. On pourra alors comparer ce résultat obtenu à partir de la relation de dispersion issue du modèle "multi-fluide" (section 3.2) au modèle cinétique multi-faisceaux, puis au modèle complet 1D-2V.

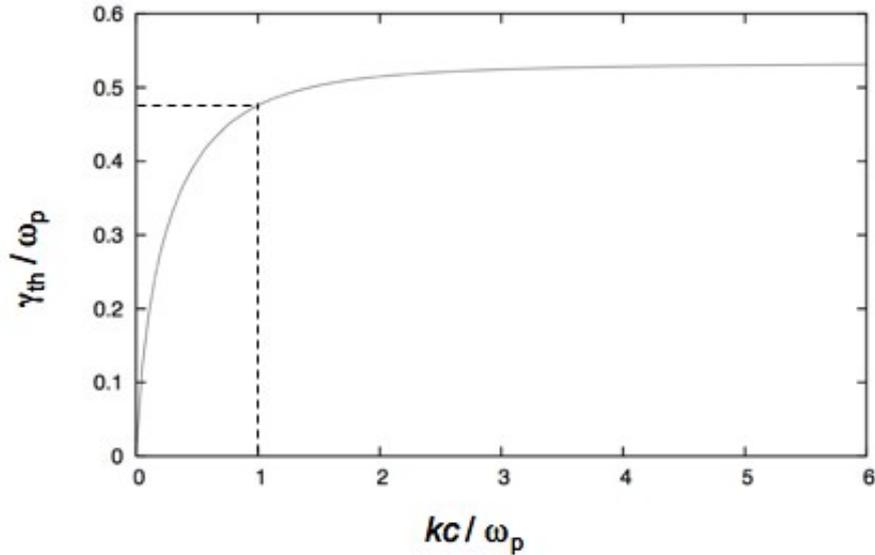


FIGURE 3.4.: Taux de croissance théorique de la CFI dans le cas multi-faisceaux.

La Figure 3.4 représente le taux de croissance théorique de l'instabilité CFI,  $\gamma_{th}/\omega_p$  (avec  $\omega = \omega_R + i\gamma_{th}$ ) tracé en fonction du vecteur d'onde  $kc/\omega_p$ . Dans le cas  $kc/\omega_p = 1$ , on trouve une valeur théorique du taux de croissance  $\gamma_{th}/\omega_p \approx 0.47$ .

### 3.4.3. Résultats cinétiques : Champs et espace des phases

L'instabilité de filamentation est à l'origine du développement d'un fort champ magnétique, à partir d'une perturbation initiale transverse. La figure 3.5 représente l'évolution de l'énergie magnétique  $E_{mag} = 1/2L_x \int B_z^2(x,t)dx$  en échelle logarithmique. Les figures 3.6(a) et 3.6(b) représentent respectivement l'évolution temporelle de l'énergie magnétique et électrostatique

$E_{elec} = 1/2L_x \int E_x^2(x, t)dx$  en fonction du temps. On rappelle que toutes les quantités représentées par la suite sont normalisées, tout comme dans le cas du code complet 1D-2V.

On retrouve les différentes étapes connues de l'instabilité : sa phase linéaire, où le champ magnétique se développe de façon exponentielle, et sa phase de saturation avec l'oscillation du champ magnétique autour d'une valeur constante. La pente de la phase linéaire (figure 3.5) nous permet de calculer la taux de croissance de l'instabilité. On trouve une valeur de  $\gamma/\omega_p \approx 0.47$ , qui correspond bien à la valeur du taux de croissance théorique obtenue à partir de la relation de dispersion (3.29). De plus, on peut remarquer que le profil de la courbe est identique à celui calculé à partir du modèle complet (figure 2.13).

Sur les figures 3.6(a) et 3.6(b), on remarque clairement une oscillation dans le comportement des énergies. L'énergie électrostatique se développe à la fin du régime linéaire de l'instabilité, et croît exponentiellement avec un taux égal à deux fois le taux de croissance ( $2 * \gamma_{th}$ ). Avec ces paramètres de simulations, la CFI est purement électromagnétique par comparaison aux effets longitudinaux de séparation de charge de CFI. À saturation, on remarque que l'énergie électrostatique atteint la même amplitude, avec un même profil que dans le cas complet présenté dans la section 2.2.2 (figure 2.16(f)).

On retrouve globalement les éléments de la physique déjà vus avec le modèle complet.

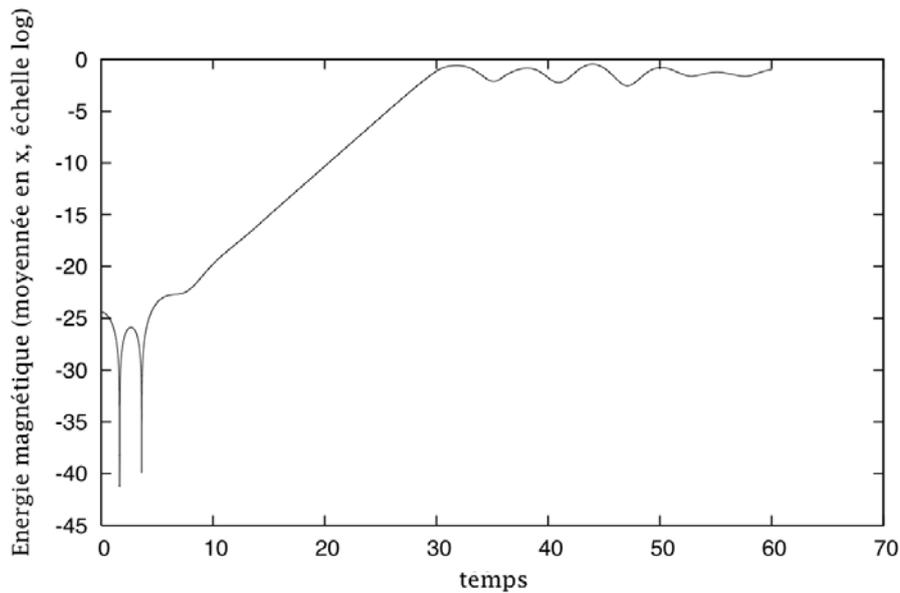
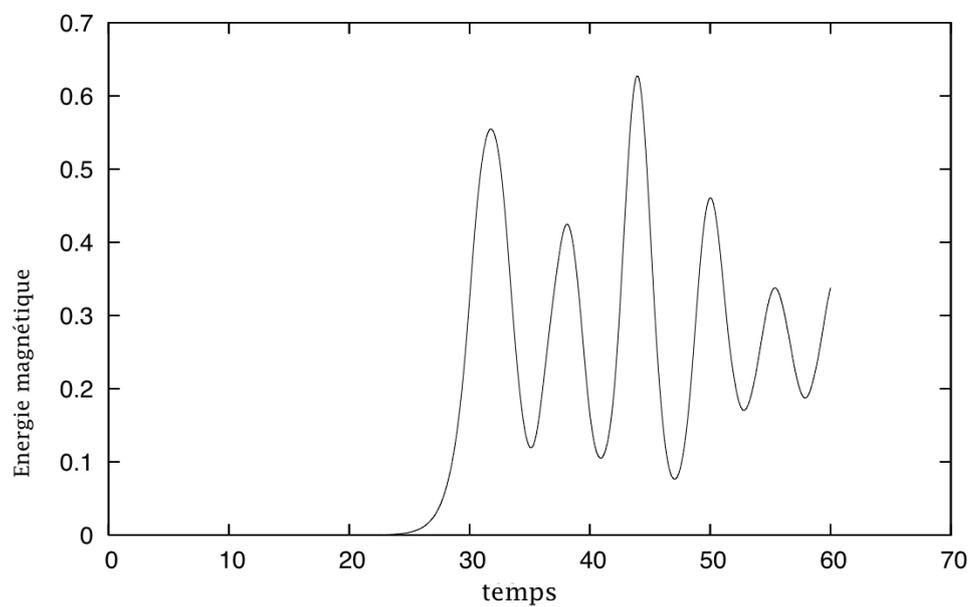
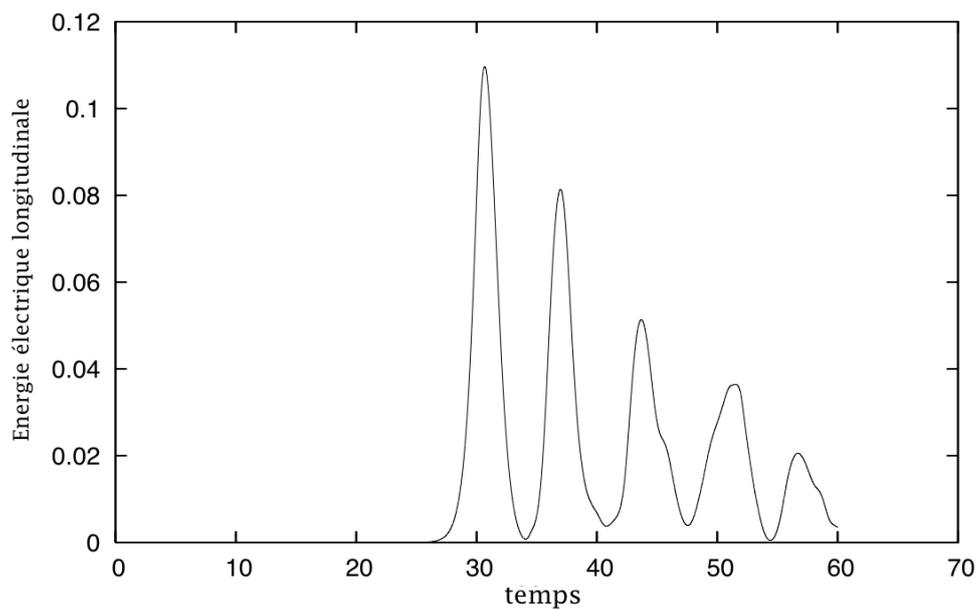


FIGURE 3.5.: Tracé temporel de l'énergie magnétique en échelle logarithmique (modèle multi-faisceaux).



(a) Tracé temporel de l'énergie magnétique.



(b) Tracé temporel de l'énergie électrique.

**FIGURE 3.6.:** Évolution temporelle de l'énergie magnétique et de l'énergie électrique, en  $x = \pi$  (modèle multi-faisceaux).

La figure 3.7 représente la dynamique de la fonction de distribution dans l'espace des phases  $(x, p_x)$  à différents instants de l'évolution de l'instabilité, à la fin de sa phase linéaire ( $t\omega_p = 30$ ) et au début de la saturation ( $t\omega_p = 33, 36$ ). Contrairement aux figures 2.9-2.12 et 2.16 du chapitre précédent où la fonction de distribution était moyennée en  $p_y$ , il s'agit cette fois de la fonction "totale" ( $\sum_j f_j$ ), représentant la somme des contributions des deux faisceaux.

On remarque que le modèle multi-faisceaux permet de représenter de façon précise la dynamique du plasma dans l'espace  $(x, p_x)$ . La comparaison avec le modèle complet 1D2V (figure 2.16) ne montre aucune différence significative.

L'un des principaux avantages du modèle multi-faisceaux est qu'il nous permet de séparer la contribution des deux faisceaux. En effet, chaque faisceau obéit à une équation de Vlasov propre. On peut ainsi se focaliser sur la dynamique d'une population et suivre son évolution, comme le montrent les figures 3.8 et 3.9. Il s'agit de l'évolution du faisceau  $j = 2$ .

Contrairement à la figure 2.16(a) du modèle complet où une confusion était possible quant à la validité du théorème de Liouville (les faisceaux se croisent, mais il s'agit d'une projection dans le sous-espace  $(x, p_x)$ ), le modèle multi-faisceaux nous permet de résoudre une seule équation de Vlasov relative à un faisceau, et ainsi de pouvoir visualiser son évolution. La figure 3.8 représente l'évolution de la fonction de distribution du faisceau  $j = 2$  dans le sous espace  $(x, p_x)$  aux mêmes instants  $t = 30, 33$  et  $t = 36$ . Les caractéristiques de la CFI sont retrouvées. En effet, on observe sur cette figure que le faisceau acquiert progressivement une quantité de mouvement  $p_x$ , comparable au moment initial  $p_y$ . Cet "étalement" en  $p_x$  est dû à la rotation des particules autour du champ magnétique généré par l'instabilité.

En calculant le moment d'ordre zéro de la fonction de distribution  $f_2(x, p_x, t)$ , il est possible de tracer la densité électronique associée au faisceau, représentée sur la figure 3.9. La première figure représente la fonction à  $t = 30$ , à la fin de la phase linéaire, la seconde à  $t = 33$  au début de la phase de saturation avec deux pics de densité, et la dernière à  $t = 36$ , avec un nouveau pic semblable au premier, ce qui est un phénomène cyclique. En comparant la densité du faisceau  $j = 2$  et la densité calculée à partir du modèle complet 2.14(e) et 2.14(f), on remarque ainsi que des pics de densité se forment dans chacune des populations. Ces pics sont une signature de la CFI et peuvent mener au déferlement de l'onde. Ils ont notamment été étudiés à partir d'un modèle analytique et fluide dans les références [53, 54]. Ce phénomène dure assez longtemps pour pouvoir accélérer les particules à de hautes énergies. Les filaments de particules créés que l'on peut voir sur les deux dernières images de la figure 3.8 sont dus au piégeage des particules par le champ magnétique. L'analyse d'un faisceau spécifique permet ainsi de montrer que le phénomène d'accélération de particules est une signature du déferlement de l'onde (wave-breaking) et que les filaments créés sont quant à eux dus au phénomène de piégeage magnétique.

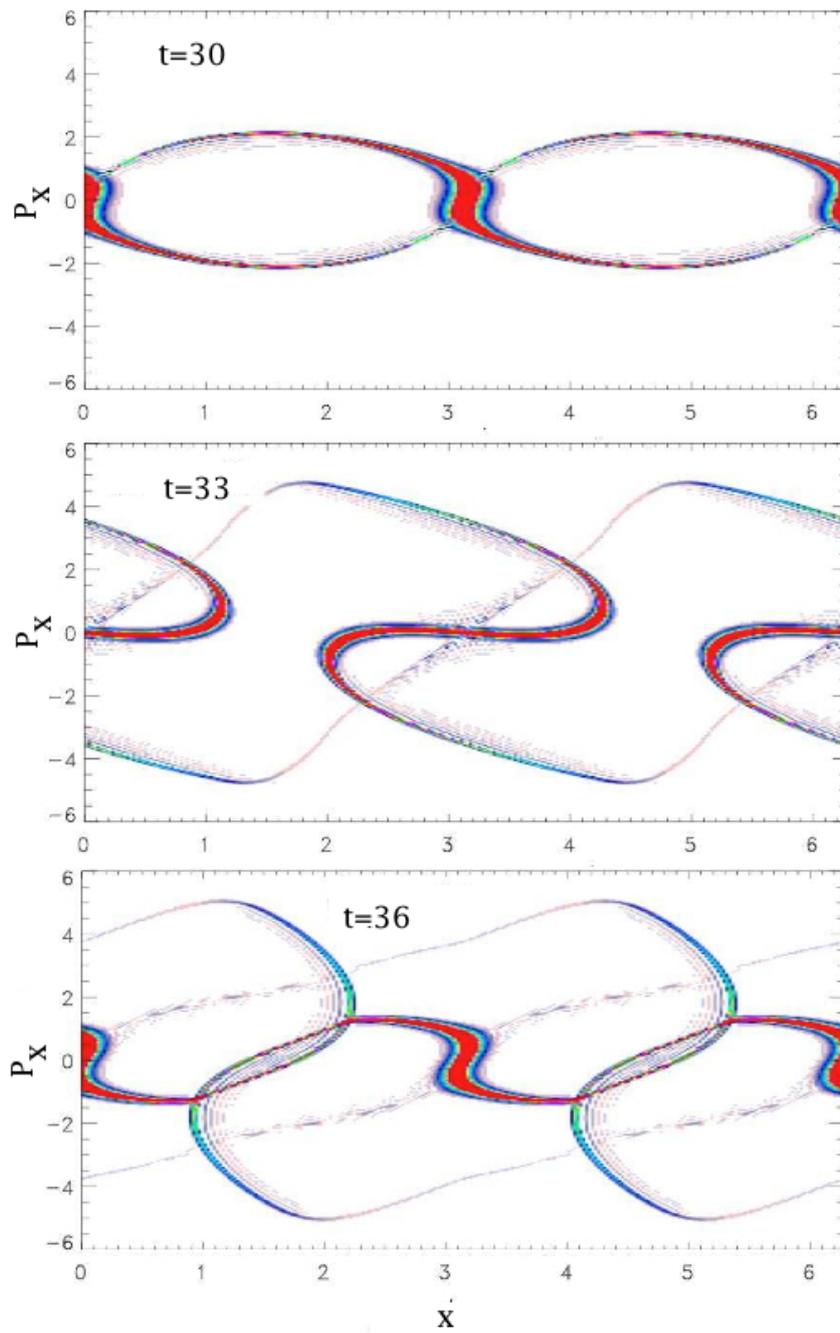


FIGURE 3.7.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  avec la somme des deux faisceaux  $\sum_j f_j$ .

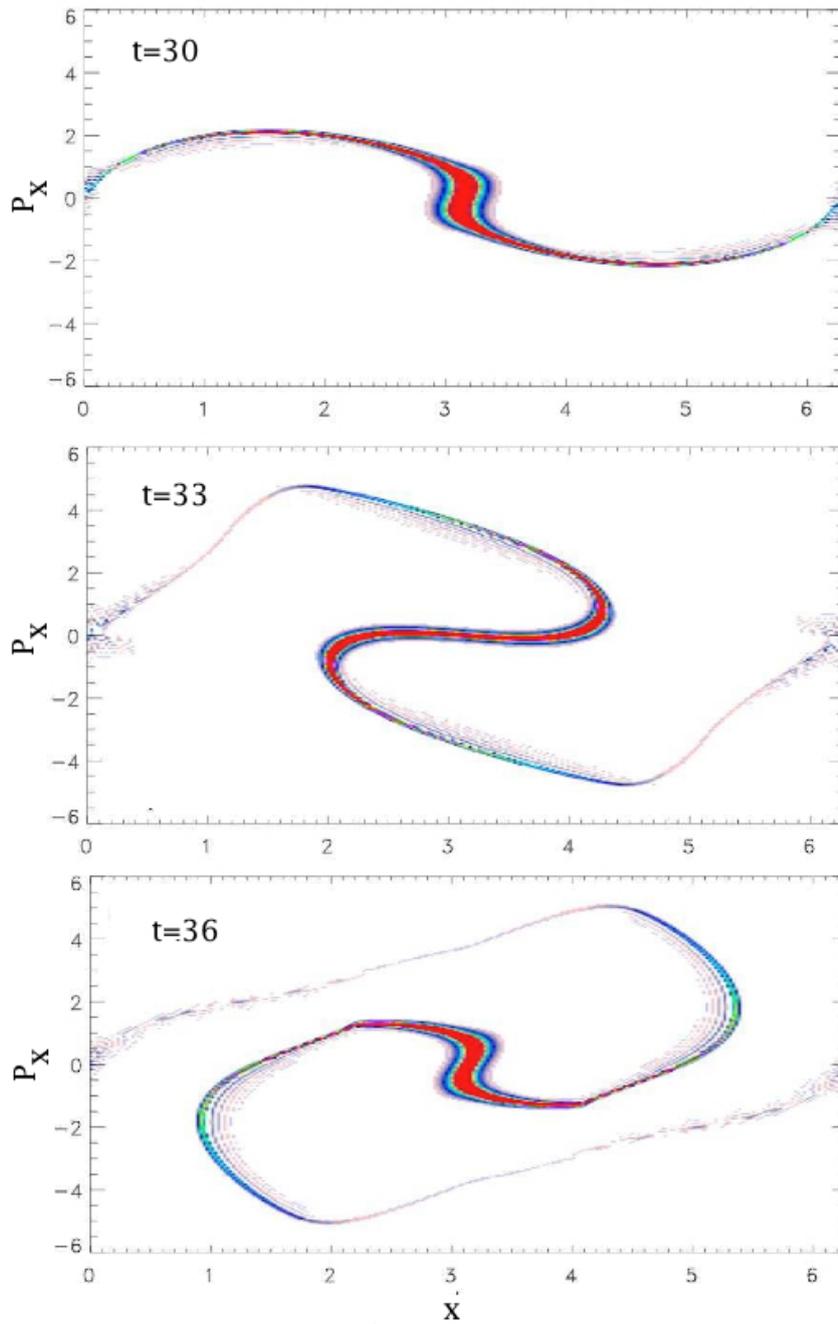


FIGURE 3.8.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau  $j = 2$ .

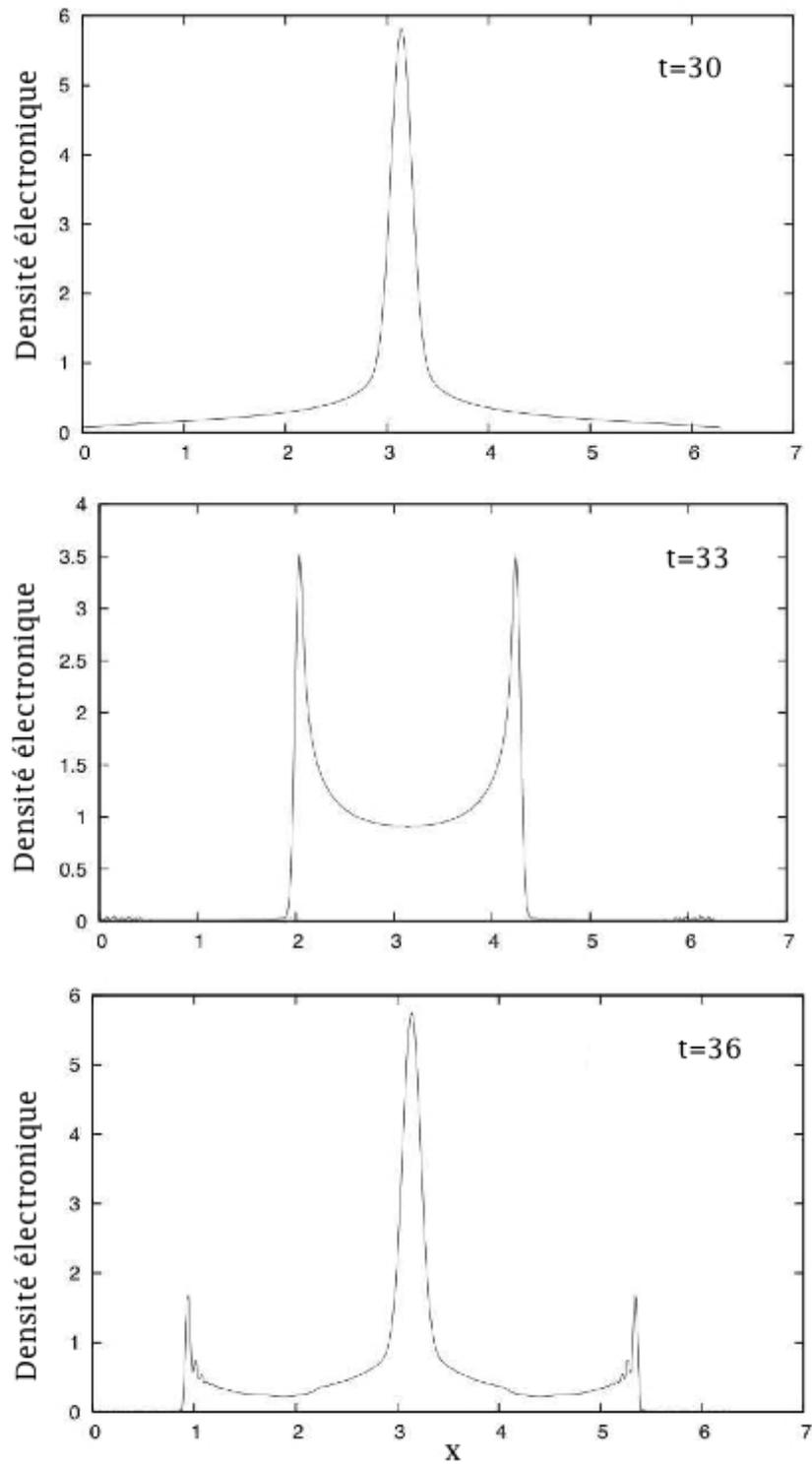


FIGURE 3.9.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau  $j = 2$ .

### 3.5. CFI dans un cas relativiste non-symétrique

La deuxième simulation présentée dans le cadre du modèle multi-faisceaux traite un cas relativiste non symétrique. La formation d'un faisceau d'électrons relativistes et du courant de retour est représentative de l'interaction laser-plasma. Lorsqu'un laser se propage dans un plasma sous-critique, il crée dans son sillage un faisceau d'électrons rapides et peu dense. De façon à conserver sa quasineutralité, celui-ci réagit en créant un faisceau d'électrons peu rapides et très dense, à partir des électrons froids du plasma. Les résultats présentés dans cette section sont publiés dans [65].

#### 3.5.1. Les conditions initiales du système

On considère un premier faisceau de quantité de mouvement  $p_{01} = C_1 = -0.85mc$  et de densité  $n_{01} = 0.6n_0$ , et un deuxième avec  $p_{02} = C_2 = 4mc$  et une densité  $n_{02} = 0.4n_0$ . Les conditions de quasineutralité sont vérifiées :  $\sum_j n_{0j} = 1$  et  $\sum_j n_{0j}v_{0j} = 0$ . La température électronique dans la direction  $p_x$  est  $T_e = 2keV$ . Comme dans le cas symétrique, la perturbation initiale transverse est appliquée sur le champ magnétique, avec une amplitude de perturbation  $B_0 = 10^{-5}$ . Seul le mode fondamental est excité  $k_0c/\omega_p = 1$ . La maillage de l'espace des phases est  $N_x N_{p_x} = 513^2$ . Les pas de temps et de maillage de l'espace des phases sont  $\Delta t = 0.0025$ ,  $\Delta x = 0.012$  et  $\Delta p = 0.023$ .

#### 3.5.2. Résultats de l'analyse fluide

La figure 3.10 représente le taux de croissance de l'instabilité  $\gamma_{th}$  calculé à partir de la relation de dispersion (3.29). Dans notre simulation, le mode  $k = 1$  est excité. Le taux de croissance théorique correspondant vaut approximativement  $\gamma_{th} \approx 0.398$ .

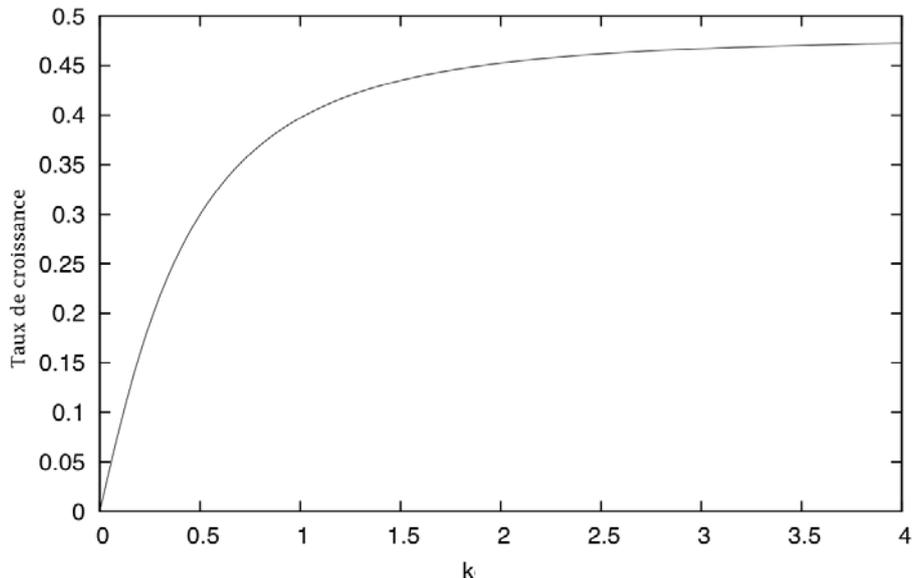


FIGURE 3.10.: Taux de croissance de l'instabilité.

### 3.5.3. Résultats cinétiques : Champs et espace des phases

La figure 3.11 représente l'évolution temporelle de l'énergie magnétique en fonction du temps, tracée en échelle logarithmique. Le taux de croissance de l'instabilité, obtenu à partir de la pente de la droite,  $\gamma \approx 0.393$ , est en très bon accord avec le taux de croissance théorique obtenu à partir de la relation de dispersion  $\gamma_{th} = 0.398$ .

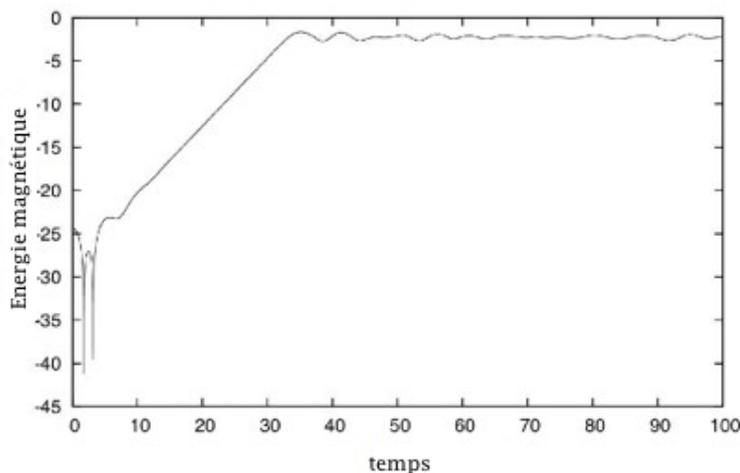


FIGURE 3.11.: Évolution en échelle logarithmique de l'énergie magnétique (modèle multi-faisceaux).

Sur la figure 3.12 est tracée l'évolution temporelle de l'énergie électrostatique calculée au milieu de notre boîte de simulation, à  $x = \pi$ . Dans la phase de saturation de l'instabilité (à partir de  $t \approx 35$ ), on remarque toujours un comportement oscillant de l'énergie électrostatique.

La comparaison avec le modèle complet 1D-2V est rapidement faite avec la figure 3.13, où l'on peut voir un parfait accord pour l'énergie électrostatique. La densité suit ce mouvement oscillant, en accord avec l'équation de Poisson.

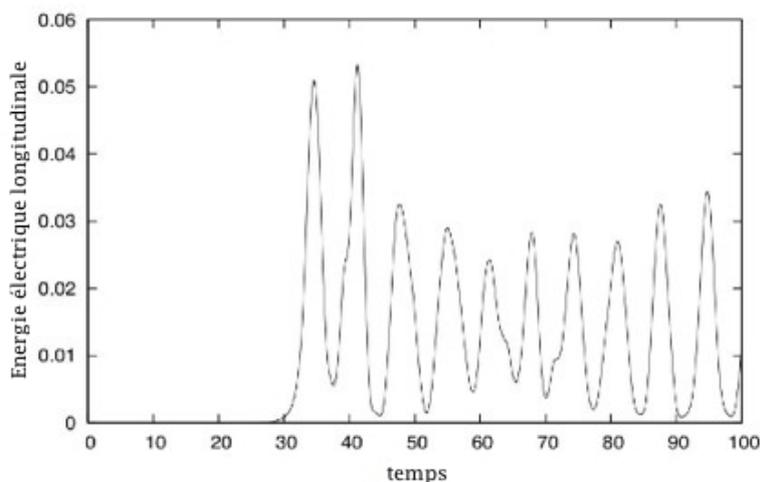
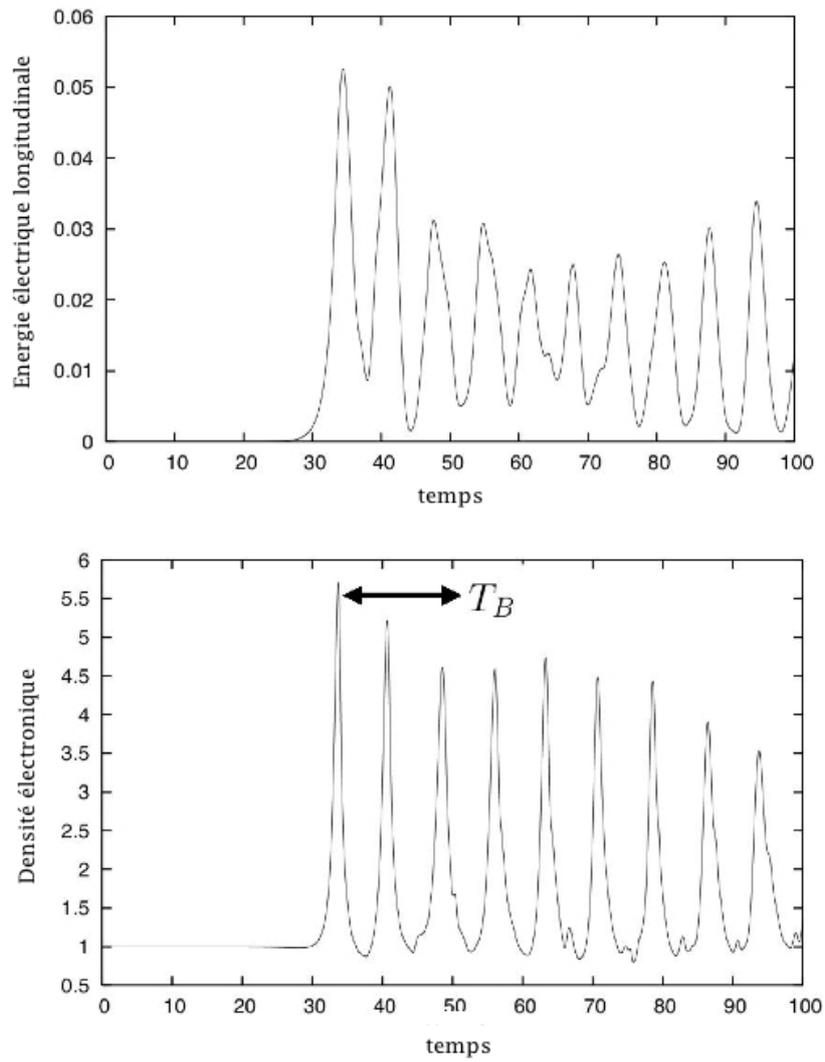


FIGURE 3.12.: Évolution temporelle de l'énergie électrique en  $x = \pi$  (modèle multi-faisceaux).



**FIGURE 3.13.:** Évolution temporelle de l'énergie électrique et de la densité (pour  $x = \pi$ ) dans le cas du code complet 1D-2V.

Les figures 3.14 et 3.15 représentent l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace  $(x, p_x)$  pour le faisceau rapide  $j = 2$  (de quantité de mouvement  $p_{02} = 4$ ) à différents instants. La croissance du champ magnétique modifie considérablement la trajectoire des électrons du faisceau rapide qui deviennent piégés. La flèche noire représente la "position" du filament autour du pic de densité. On remarque que les électrons effectuent une rotation complète entre  $t = 33.8$  et  $t = 48.8$ . En effet, le filament retrouve sa "position initiale" au bout d'une période de rebond  $T_B \approx 15$ , qui correspond à la durée de trois pics successifs sur le tracé de la densité dans la figure 3.13. En se plaçant à  $x = \pi$  sur les figures de l'espace des phases (position à laquelle a été tracé le profil de densité de la figure 3.13), on comprend que le pic "intermédiaire" de cette période (autour de  $t \approx 40$ ) correspond au moment où les électrons atteignent  $x = \pi$  dans l'espace des vitesses négatives.

On peut alors calculer une fréquence de rebond magnétique

$$\omega_B = \frac{2\pi}{T_B} \approx 0.41$$

Dans la référence [62], les auteurs montrent que l'instabilité sature lorsque la fréquence de rebond des électrons piégés par le champ magnétique généré par l'instabilité devient comparable au taux de croissance linéaire de l'instabilité  $\gamma_{th}$ . Dans ce cas, on retrouve des résultats conformes avec  $\gamma_{th} \approx \omega_B$ . Cette fréquence de rebond peut analytiquement s'écrire sous la forme (cf. [66]) :

$$\left(\frac{\omega_B}{\omega_p}\right)^2 = \frac{k_0 c}{\omega_p} \frac{p_{02}}{m\gamma_{02}} \frac{\omega_c}{\omega_p c} \quad (3.40)$$

où  $p_{02}$  et  $\gamma_{02}$  représentent respectivement la quantité de mouvement initiale et le facteur de Lorentz du faisceau rapide  $j = 2$ . Dans le cas relativiste, la fréquence cyclotronique  $\omega_c$  est définie comme

$$\omega_c = \frac{eB_{max}}{m\gamma_{02}}$$

Dans le cas de notre faisceau rapide,  $p_{02} = 4$ . Le facteur de Lorentz associé vaut donc  $\gamma_{02} = 4.123$ .

La valeur maximale du champ magnétique atteint dans la phase de saturation est d'environ  $B_{max} = 0.70$  (figure 3.16). On obtient ainsi une valeur théorique de la fréquence de rebond  $\omega_B \approx 0.406$ , très proche de la valeur numérique trouvée à partir du modèle multi-faisceaux.

La figure 3.14 et les deux premières images de la figure 3.15 représentent la première période du mouvement de rebond magnétique, allant de  $t \approx 34$  à  $t \approx 49$ . Le dernier temps tracé,  $t = 150$ , représente la structure de piégeage observée après huit périodes de rebond magnétique.

Les structures de rotation sont associées au phénomène de filamentation du faisceau. Plusieurs rotations impliquent le remplissage de l'espace des phases, comme on peut le voir sur la dernière image de la figure 3.15.

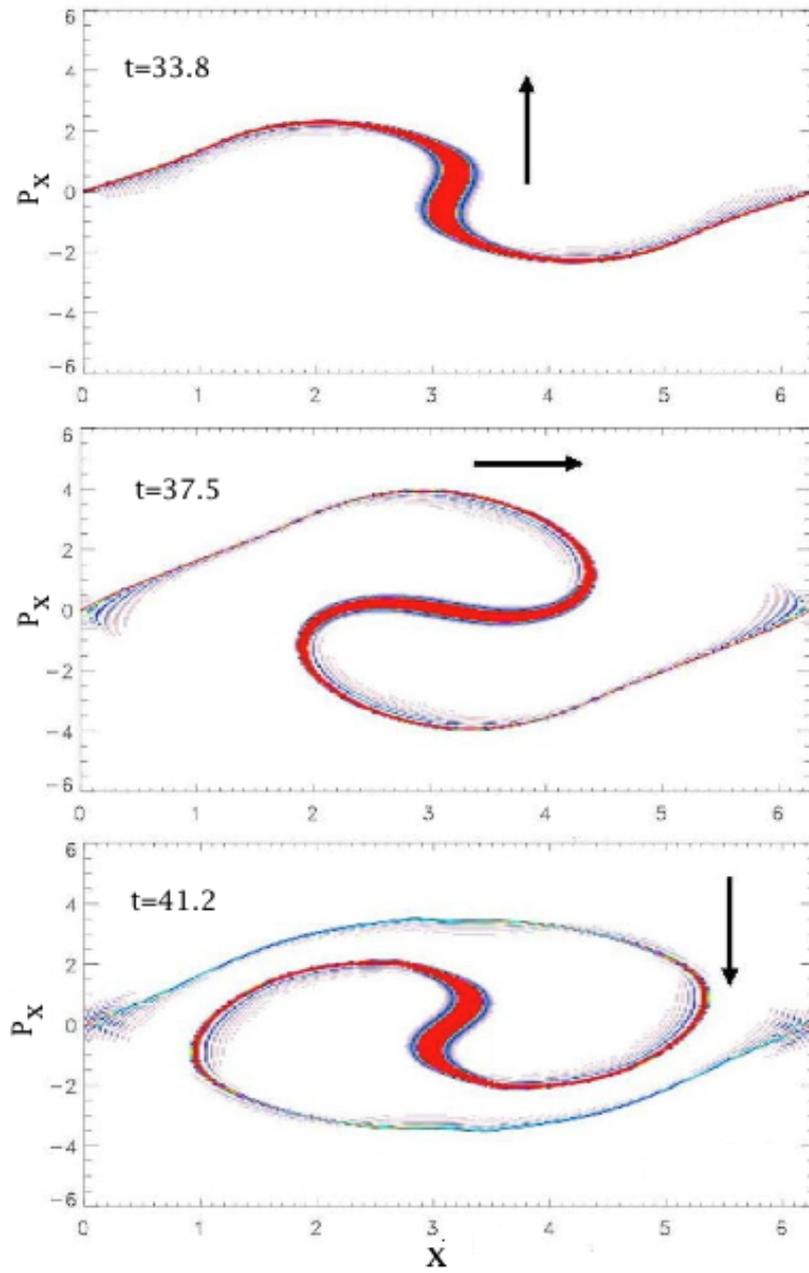
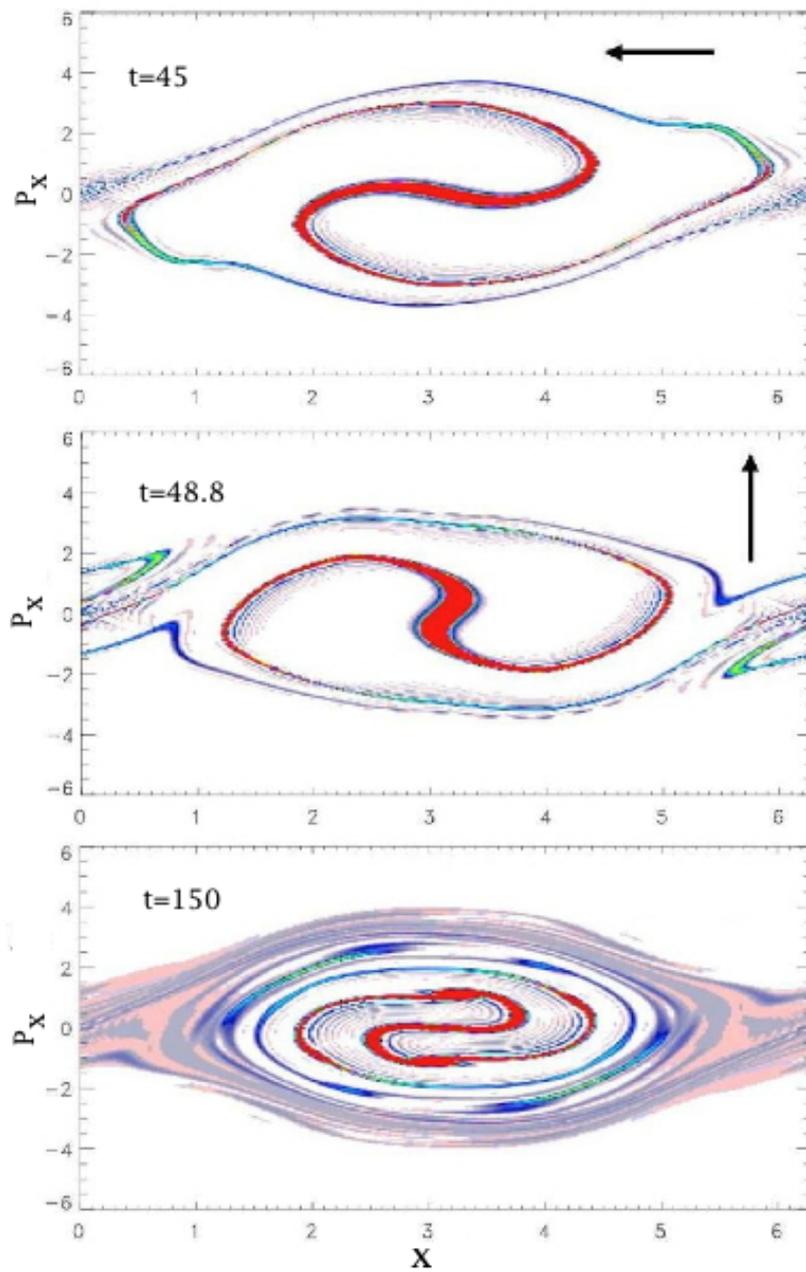


FIGURE 3.14.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau rapide  $j = 2$  dans le cas non symétrique.



**FIGURE 3.15.:** Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau rapide  $j = 2$  dans le cas non symétrique.

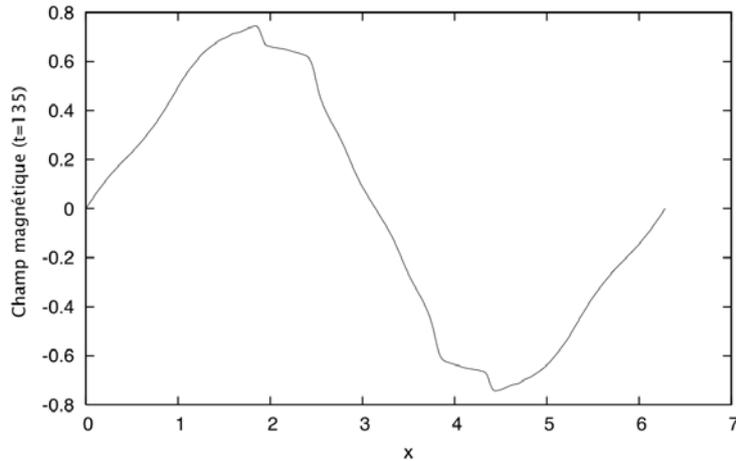


FIGURE 3.16.: Champ magnétique  $B_z$  dans la phase de saturation ( $t = 135$ ).

### 3.6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un modèle basé sur une approche multi-faisceaux, utilisant une technique de réduction exacte en dimension de l'espace des phases. L'invariance du moment canonique transverse  $P_{C\perp}$  nous permet de "supprimer" la variable perpendiculaire, qui devient alors un paramètre compris dans les différents faisceaux  $j$  (avec  $j = 1, \dots, N$ ). On réduit ainsi la dimension de l'espace, sans perdre la précision du problème. Il s'agit d'un modèle exact. Ce modèle multi-faisceaux est composé d'un ensemble d'équations de Vlasov 1D (pour chacun des faisceaux) couplé aux équations de Maxwell. C'est un modèle analytique "simple" et la formulation analytique de la relation de dispersion linéaire (3.29) comme une somme discrète sur l'ensemble des faisceaux nous donne une approche générale et exacte capable de prendre en compte toute anisotropie de la fonction de distribution, même dans le cas relativiste. Ceci permet de faire le lien entre les instabilités de type Weibel, la CFI et la WI.

Pour une description précise d'une distribution continue, une grande valeur de  $N$  semble nécessaire. Cependant, des résultats intéressants peuvent être obtenus avec des petites valeurs de  $N$ ,  $N = 1, 2$  ou  $3$ . Le cas  $N = 1$  correspond à une distribution froide (Dirac) dans la direction perpendiculaire, et ce choix a été utilisé dans les références [67, 68] pour décrire les instabilités laser-plasma comme des instabilités paramétriques de type Raman dans le régime relativiste. Les cas  $N = 2$  ou  $N = 3$  peuvent être utilisés pour décrire les instabilités de type Weibel, deux faisceaux correspondant exactement au cas de l'instabilité de filamentation de courant (CFI).

Dans ce chapitre, nous avons dans un premier temps calculé la relation de dispersion des instabilités de types Weibel à partir de ce modèle. Dans un second temps, en traitant un cas exact pour la CFI, c'est-à-dire avec deux faisceaux  $N = 2$ , nous avons pu valider le modèle à partir :

- d'une part, de la comparaison entre le modèle "multi-fluide" qui nous a donné la relation de dispersion et le modèle multi-faisceaux,
- et d'autre part, de la comparaison entre la modèle cinétique complet 1D-2V et le modèle multi-faisceaux.

La comparaison des résultats obtenus à partir du modèle cinétique complet 1D-2V et du modèle multi-faisceaux nous montre que ce dernier modèle nous permet de décrire de façon précise la physique de l'instabilité, même dans le régime de saturation de celle-ci.

On retrouve les caractéristiques de l'instabilité de filamentation de courant : dans la phase de saturation, les particules sont piégées par le champ magnétique, et un phénomène de déferlement se déroule cycliquement, avec la formation de pics et de creux dans la densité. De plus, le modèle permet de séparer la contribution des faisceaux, en résolvant uniquement une équation de Vlasov associée à un faisceau. Il offre ainsi la possibilité d'étudier plus en détail des mécanismes tels que le phénomène de piégeage pour un faisceau, et la formation de pics dans la densité. Ceci nous permet de confirmer que les pics et les creux se forment dans chacune des populations. Le modèle multi-faisceaux offre une description exacte de la dynamique du plasma, et ceci même avec un petit nombre de faisceaux.

Dans des modèles cinétiques complets, l'initialisation de la fonction de distribution pose parfois problème. En effet, dans le régime relativiste, la maxwellienne n'est plus adaptée et une fonction de type Maxwell-Boltzmann-Jüttner "modifiée" [69] peut être utilisée. Dans le modèle multi-faisceaux, aucune contrainte majeure n'est imposée sur la fonction de distribution, même dans un cas relativiste.

Une approche cinétique complète 3D-3V est aujourd'hui à la limite des capacités des ordinateurs. Ce genre de modèle "réduit" est d'un grand intérêt pour les calculs haute-performance. On peut notamment remarquer que d'un point de vue numérique, le modèle Vlasov "réduit" permet une forte réduction du temps de calculs, puisqu'un petit nombre de faisceaux est nécessaire pour représenter tout la physique de l'instabilité, contrairement à notre code 1D-2V où un grand nombre de points est essentiel dans la direction  $p_y$ . À partir de deux ou trois faisceaux, on peut générer une anisotropie et donc une instabilité de type Weibel. Pour le cas présenté ici, le code multi-faisceaux nous fait gagner un facteur  $N_{py}/N \approx 100$ , tant en temps de calculs, qu'en espace mémoire.



# 4

## L'instabilité Weibel

Le modèle multi-faisceaux présenté dans le chapitre précédent, basé sur l'invariance du moment canonique transverse, permet à la fois de traiter l'instabilité de filamentation de courant, mais aussi l'instabilité Weibel. L'étude de la WI nécessite une prise en compte d'une anisotropie de température : le nombre de faisceaux utilisé va permettre d'introduire la température. Nous allons étudier, dans ce chapitre, l'instabilité Weibel qui présente des caractéristiques communes avec l'instabilité de filamentation de courant, tels que leur développement à partir d'une anisotropie, en vitesse pour CFI et en température pour WI, et la croissance d'un fort champ magnétique. Pour cette étude, le couplage du modèle multi-faisceaux dans la direction  $p_y$  à un modèle *water-bag* dans la direction  $p_x$  sera utilisé. La question sur le nombre de faisceaux nécessaire pour décrire la direction selon  $p_y$  est également traitée. Dans ce chapitre, la direction transverse représente la direction le long de l'axe  $Oy$  et la direction longitudinale représente la direction selon  $Ox$  (direction du champ électrostatique).

### 4.1. L'instabilité Weibel à partir du modèle multi-faisceaux

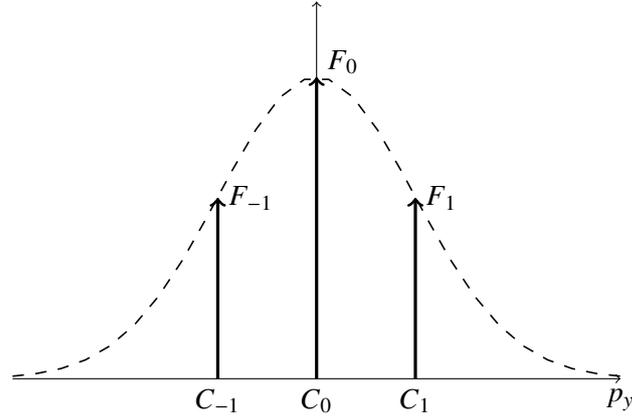
L'instabilité Weibel est conduite par une anisotropie de température [1]. De façon à pouvoir décrire cette instabilité à partir du modèle multi-faisceaux, considérons initialement un plasma avec une distribution à trois faisceaux dans la direction  $p_y$  (figure 4.1) de la forme :

$$f(p_y) = F_0\delta(p_y - C_0) + F_{-1}\delta(p_y - C_{-1}) + F_1\delta(p_y - C_1) \quad (4.1)$$

Par la suite, dans la direction  $p_x$ , la température pourra être introduite à partir d'une fonction de distribution standard, ou dans notre cas, à partir d'une distribution *water-bag* [70]. De manière à trouver les valeurs des amplitudes  $F_j$  et des moments  $C_j$ , nous allons développer une analogie au sens des moments, avec une distribution continue maxwellienne, de vitesse thermique  $v_{thy}$  selon  $p_y$ .

Calculons dans un premier temps les moments fluides de la distribution multi-faisceaux d'ordre  $n$ , définis comme :

$$M_n^{MF} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^n f(p_y) dp_y$$



**FIGURE 4.1.:** Fonction de distribution transverse initiale pour la WI dans le cas du modèle multi-faisceaux, avec  $N = 3$  faisceaux.

Dans cette configuration, six inconnues existent  $\{F_j, C_j\}_{j=-1,0,1}$ . On suppose que le faisceau central est positionné à l'origine  $C_0 = 0$ . Les cinq inconnues restantes seront alors calculées à l'aide de cinq équations des moments d'ordre  $n$  avec  $n = 0, \dots, 4$ .

On suppose maintenant que les faisceaux suivent les propriétés de symétrie suivantes :  $-C_j = C_{-j}$  d'où  $F_j = F_{-j}$ .

En s'appuyant sur une maxwellienne, les propriétés de symétrie impliquent que les moments d'ordre impair de cette fonction paire seront nuls.

Le moment d'ordre  $n = 0$  se calcule simplement et s'écrit :

$$\begin{aligned}
 M_0^{MF} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(p_y) dp_y \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (F_0 \delta(p_y - C_0) + F_{-1} \delta(p_y - C_{-1}) + F_1 \delta(p_y - C_1)) dp_y \\
 &= F_0 + F_1 + F_{-1} \\
 M_0^{MF} &= F_0 + 2F_1
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Les moments d'ordre impair s'annulent puisqu'il s'agit d'intégrales d'une fonction paire :

$$\begin{aligned}
 M_1^{MF} &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_y f(p_y) dp_y \\
 &= F_1 C_1 + F_{-1} C_{-1} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

La relation (4.3) nous permet de trouver la condition sur la densité de courant initiale nulle :  $\sum_j C_j F_j = 0$ .

$$\begin{aligned}
 M_3^{MF} &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^3 f(p_y) dp_y \\
 &= F_1 C_1^3 + F_{-1} C_{-1}^3 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient le moment d'ordre  $n=2$  :

$$\begin{aligned} M_2^{MF} &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^2 f(p_y) dp_y \\ &= 2F_1 C_1^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le moment d'ordre 4  $M_4^{MF}$  vaut :

$$M_4^{MF} = 2F_1 C_1^4 \quad (4.5)$$

On peut alors résumer le calcul de ces moments par la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_y^{2n} f(p_y) dp_y = \sum_{j=-N}^N C_j^{2n} F_j \quad (4.6)$$

L'analogie avec une distribution maxwellienne va être effectuée de façon à calculer les valeurs des  $F_j$  et  $C_j$ .

En choisissant pour la direction transverse une fonction de distribution d'équilibre maxwellienne de la forme

$$f^{mx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} p_{thy}} \exp\left(\frac{-p_y^2}{2p_{thy}^2}\right)$$

avec  $p_{thy} = mv_{thy}$  et  $v_{thy} = \sqrt{\frac{k_B T_y}{m}}$ , les moments d'ordre  $n$  de  $f^{mx}$  s'écrivent :

$$M_n^{mx} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^n f^{mx} dp_y$$

En faisant un changement de variable  $X = p_y/p_{thy}$ ,  $M_n^{mx}$  devient :

$$\begin{aligned} M_n^{mx} &= p_{thy}^n \int_{-\infty}^{+\infty} X^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) dX \\ &= p_{thy}^n I_n \end{aligned}$$

avec  $I_n$  l'intégrale liée au moment d'ordre  $n$ .

En remarquant que

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) dX = \int_{-\infty}^{+\infty} -X^{n-1} \frac{d}{dX} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) \right) dX \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (n-1) X^{n-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right) dX \\ I_n &= (n-1) I_{n-2} \end{aligned}$$

On obtient pour  $n = 0, \dots, 4$  :

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_1 = 0 \\ I_2 = I_0 = 1 \\ I_3 = 2I_1 = 0 \\ I_4 = 3I_2 = 3 \end{cases}$$

ce qui nous permet de calculer les moments

$$\begin{cases} M_0^{mx} = 1 \\ M_1^{mx} = 0 \\ M_2^{mx} = p_{thy}^2 I_2 = p_{thy}^2 \\ M_3^{mx} = p_{thy}^3 I_3 = 0 \\ M_4^{mx} = p_{thy}^4 I_4 = 3p_{thy}^4 \end{cases}$$

Les moments de la distribution continue s'écrivent donc, pour  $n$  pair :

$$M_n^{mx} = p_{thy}^n (2n - 1)!! \quad (4.7)$$

En identifiant les moments,  $M_n^{MF} = M_n^{mx}$ , on obtient :

$$F_0 + 2F_1 = \sum_j F_j = 1 \quad (4.8)$$

$$F_1 C_1 + F_{-1} C_{-1} = \sum_j F_j C_j = 0 \quad (4.9)$$

$$2F_1 C_1^2 = p_{thy}^2 = m^2 v_{thy}^2 \quad (4.10)$$

$$2F_1 C_1^4 = 3p_{thy}^4 = 3m^4 v_{thy}^4 \quad (4.11)$$

En combinant les équations (4.10) et (4.11), on trouve la condition sur les moments :

$$C_1 = \sqrt{3} m v_{thy}$$

d'où, en accord avec la distribution symétrique des faisceaux :

$$C_{-1} = -C_1 = -\sqrt{3} m v_{thy}$$

L'amplitude  $F_j$  des faisceaux  $j = -1$  et  $j = 1$  est calculée à partir des valeurs des  $C_j$  et de l'équation (4.10) ou (4.11) : on trouve  $F_1 = 1/6$  d'où  $F_{-1} = 1/6$ . L'équation (4.8) donne enfin  $F_0 = 2/3$ . La résolution de l'équation (4.9) est triviale.

Pour un grand nombre de faisceaux, de façon à faciliter la discrétisation de l'espace des vitesses, le calcul des valeurs de  $F_j$  s'effectuera à des points  $C_j = j\Delta C$  (avec par exemple  $\Delta C \sim m v_{thy}$ ). Pour un petit nombre de faisceaux (typiquement, inférieur à 5) le système linéaire formé par les équations (4.8)-(4.11) peut se résoudre directement.

La direction  $p_x$  va maintenant être décrite à partir d'un modèle *water-bag*. Ce modèle est un modèle intermédiaire entre le modèle hydrodynamique et le modèle cinétique complet permettant l'obtention d'équations algébriques, le plus souvent exploitables. Il s'agit d'un "sous-ensemble" du modèle de Vlasov, permettant d'éviter la résolution non-linéaire du système Vlasov-Maxwell.

## 4.2. Le modèle multi-faisceaux / *water-bag*

Pour décrire les effets cinétiques dans la direction longitudinale  $p_x$ , nous avons introduit une description de type *water-bag*, permettant de disposer d'une température (en l'occurrence, température choisie non nulle dans ce qui suit). Le théorème de Liouville, décrit dans le chapitre 1, prévoit que la fonction de distribution doit rester constante le long d'une trajectoire dynamique de l'espace des phases. Le mouvement d'un point est ainsi décrit par les équations caractéristiques de l'équation de Vlasov. Si dans un certain domaine fermé la fonction de distribution reste constante, alors seule la forme de ce domaine peut changer, conformément aux équations des caractéristiques. Ainsi, un point sur le contour reste sur le contour. Par conséquent, pour suivre l'évolution du système, il suffit de suivre l'évolution des points du contour selon les équations de mouvement des "frontières" de ce domaine. Le modèle *water-bag* est construit sur cette propriété de l'espace des phases.

### 4.2.1. Description du modèle multi-faisceaux / *water-bag*

On rappelle que la fonction de distribution totale dans le modèle multi-faisceaux s'écrit comme la somme d'une distribution de Dirac ; à l'équilibre, pour un plasma homogène et en l'absence de tout champ, nous avons :

$$F(p_x, p_y) = \sum_{j=-N}^N f_j(p_x) \delta(p_y - C_j)$$

avec  $f_j$  la fonction de distribution longitudinale. De façon systématique, indépendamment de décrire l'état d'équilibre, nous allons considérer dans cette sous partie cette fonction longitudinale comme une fonction de type *water-bag*. **Dans la suite, l'indice  $j$  sera relatif aux faisceaux, et l'indice  $k$  aux bags.** Considérons dans un premier temps le cas d'un seul faisceau  $j$ .

#### Cas particulier à un seul faisceau / *water-bag* simple

Une fonction de type *water-bag* simple s'écrit pour un faisceau  $j$ , dans un cas symétrique :

$$f_j(x, p_x, t) = F_k \left[ H(p_x - p_j^{k-}) - H(p_x - p_j^{k+}) \right] \quad (4.12)$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside,  $p_j^{k+}$  et  $p_j^{k-}$  représentent respectivement les contours supérieur et inférieur du *bag*  $k$ , fonctions dépendant par défaut de  $x$  et de  $t$ , et  $F_k$  l'amplitude de celui-ci.

#### 1. À l'équilibre

À l'équilibre, le plasma est homogène et libre de tout champ. Ces contours sont fixes et indépendants de  $x$ . **De façon à distinguer l'équilibre du cas hors équilibre, on notera le contour supérieur du *bag*  $k$  à l'équilibre  $p_{a_j}^k$ , alors que  $p_j^{k+}$  représentera le contour supérieur hors équilibre. Nous ne traitons ici que des cas de *bags* symétriques. Le contour inférieur, à l'équilibre, vaudra  $p_j^{k-} = -p_{a_j}^k$ .** L'équation (4.12) correspond alors à la figure 4.2.

Lorsque le plasma est considéré comme infini (cas d'un plasma périodique), le domaine dans lequel la fonction de distribution est constante se transforme en une bande de l'espace des phases délimitée par un contour supérieur  $p_{a_j}^k$  et un contour inférieur  $-p_{a_j}^k$  (figure 4.3). La fonction est constante à l'intérieur de la bande, et vaut 0 à l'extérieur de celle-ci.

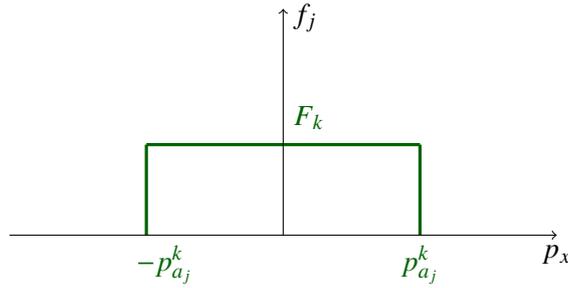


FIGURE 4.2.: Représentation de la fonction de distribution longitudinale  $f_j(p_x)$  de type water-bag simple, pour un bag  $k$  d'amplitude  $F_k$ , dans un cas symétrique, à l'équilibre.

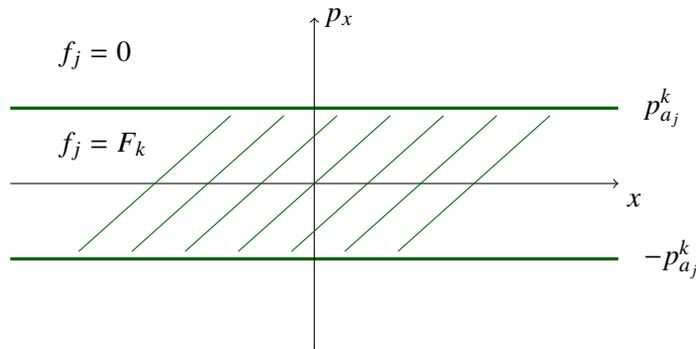


FIGURE 4.3.: Cas d'un plasma infini : water-bag simple de contours  $p_{a_j}^k$  et  $-p_{a_j}^k$ , d'amplitude  $F_k$  à l'équilibre. Les contours ne dépendent pas de  $x$ .

La fonction de distribution totale à l'équilibre (figure 4.4) s'écrit dans le cas d'un faisceau unique et d'un water-bag simple :

$$F(p_x, p_y) = F_k \left[ H(p_x + p_{a_j}^k) - H(p_x - p_{a_j}^k) \right] \delta(p_y - C_j) \quad (4.13)$$

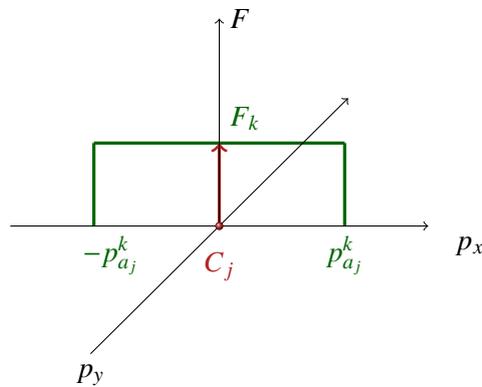
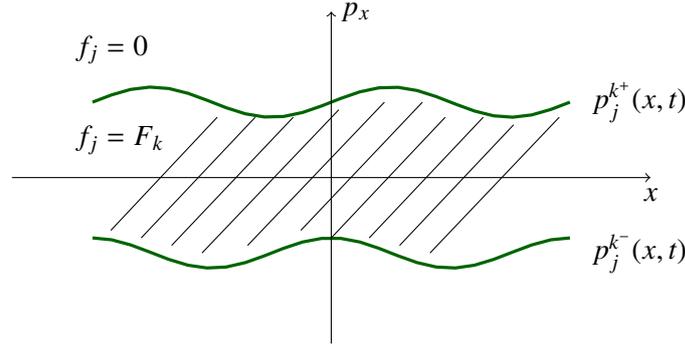


FIGURE 4.4.: Représentation de la fonction de distribution totale à l'équilibre  $F(p_x, p_y)$ , pour un faisceau  $j$  (en rouge) et un bag simple  $k$  (en vert).

## 2. Hors équilibre

Le plasma va ensuite évoluer au cours du temps. Le théorème de Liouville prévoit que, si dans un certain domaine la fonction de distribution est constante, alors seule la forme de ce domaine peut varier au cours du temps. Cette fonction est représentée sur la figure 4.5 : les contours supérieur  $p_j^{k+}$  et inférieur  $p_j^{k-}$  du *bag*  $k$  varient en fonction de la position et du temps. La fonction est constante à l'intérieur de la bande, et nulle à l'extérieur. Ceci est similaire à un sac d'eau que l'on peut déformer, tout en conservant la densité à l'intérieur de celui-ci, d'où le nom de *water-bag*.



**FIGURE 4.5.:** *Water-bag* simple de contours  $p_j^{k+}(x,t)$  et  $p_j^{k-}(x,t)$ , d'amplitude  $F_k$  pour le faisceau  $j$  (cas symétrique et hors équilibre).

Le modèle *water-bag* simple est équivalent au modèle hydrodynamique. Les contours  $p_j^{k+}(x,t)$  et  $p_j^{k-}(x,t)$  obéissent à l'équation :

$$\frac{\partial p_j^{k\pm}}{\partial t} + \frac{p_j^{k\pm}}{m\gamma} \frac{\partial p_j^{k\pm}}{\partial x} = \frac{e}{m} F_o(x,t) \quad (4.14)$$

avec  $F_o$  le terme de forces. En insérant dans l'équation (4.14) la densité  $n(x,t)$  et la vitesse fluide  $u(x,t)$  définies comme

$$n(x,t) = \int_{p_j^{k-}}^{p_j^{k+}} f_j(x, p_x) dp_x = F_k(p_j^{k+} - p_j^{k-})$$

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \int_{p_j^{k-}}^{p_j^{k+}} p_x f_j(x, p_x) dp_x = \frac{1}{2}(p_j^{k+} - p_j^{k-})$$

on retrouve les équations du modèle hydrodynamique

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) = 0 \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{F_o}{m} - \frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.16)$$

avec la condition de fermeture

$$Pn^{-3} = \frac{m}{12F_k^2} \quad (4.17)$$

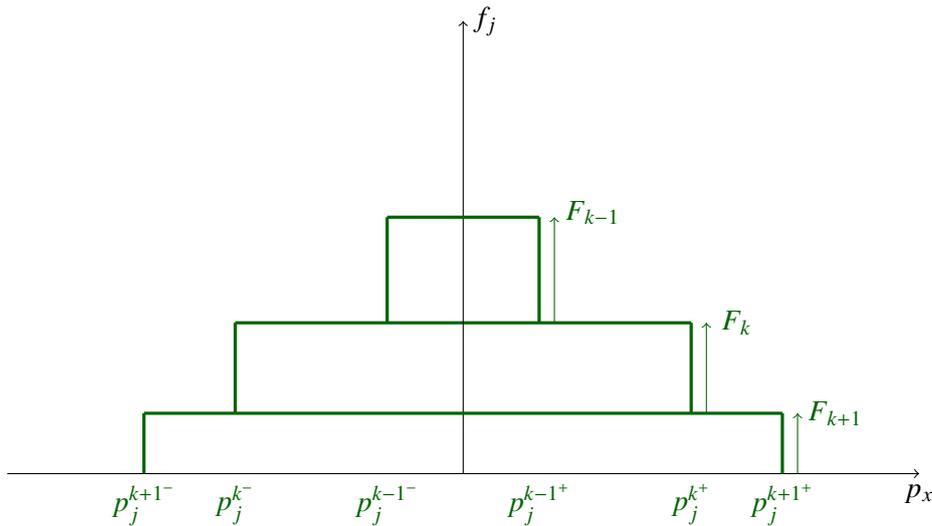
Cette description hydrodynamique du modèle *water-bag* a été introduite pour la première fois dans [71].

### Cas particulier à un seul faisceau / *multi-water-bag*

Il est possible également d'utiliser une fonction de distribution longitudinale *multi-water-bag* pour un faisceau  $j$ . Il s'agit d'une fonction où plusieurs "marches d'escalier" de hauteur respective  $F_k$  (avec  $-N \leq k \leq N$ ) se superposent. La fonction de distribution longitudinale contient plusieurs *bags* et prend alors la forme suivante :

$$f_j(x, p_x) = \sum_{k=-N}^N F_k \left[ H(p_x - p_j^{k-}) - H(p_x - p_j^{k+}) \right] \quad (4.18)$$

Sur la figure 4.6 est représentée, pour un faisceau  $j$ , une fonction de distribution *multi-water-bag* (en un point  $x$  donné) pour trois *bags*  $k-1$ ,  $k$  et  $k+1$ , d'amplitude respective  $F_{k-1}$ ,  $F_k$  et  $F_{k+1}$ . La figure 4.7 représente quant à elle la fonction de distribution *multi-water-bag* dans l'espace  $(x, p_x)$ . Les *bags* sont délimités par des contours  $p_j^{k+}$  et  $p_j^{k-}$ .

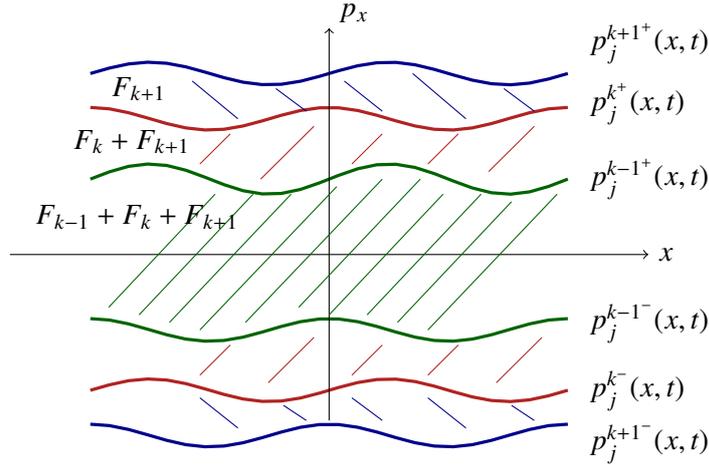


**FIGURE 4.6.:** Fonction de distribution  $f_j$  pour trois valeurs de *bags*  $k-1$ ,  $k$  et  $k+1$ , d'amplitude respective  $F_{k-1}$ ,  $F_k$ ,  $F_{k+1}$ , dans un cas symétrique.

Comme précédemment, on définit la densité  $n^k = F_k(p_j^{k+} - p_j^{k-})$  pour chaque *bag* (ici :  $k$ ,  $k+1$  et  $k-1$ ), la vitesse fluide  $u^k = (1/2)(p_j^{k+} - p_j^{k-})$  et la pression  $P^k : P^k n^{k-3} = m/12F_k^2$ . On retrouve ainsi pour chaque *bag* l'équation de continuité et l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial n^k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n^k u^k) = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} = \frac{F_o}{m} - \frac{1}{mn} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (4.20)$$



**FIGURE 4.7.:** Fonction de distribution dans l'espace des phase  $(x, p_x)$  pour trois bords  $k-1$ ,  $k$  et  $k+1$  de contour  $p^+(x, t)$  et  $p^-(x, t)$  et d'amplitude  $F_k$ .

Il s'agit ainsi d'une description multi-fluide, qui permet notamment de prendre en compte des phénomènes de corrélations comme le couplage entre les effets transverses et longitudinaux ou l'effet Landau.

### Cas multi-faisceaux / *water-bag* simple, à l'équilibre

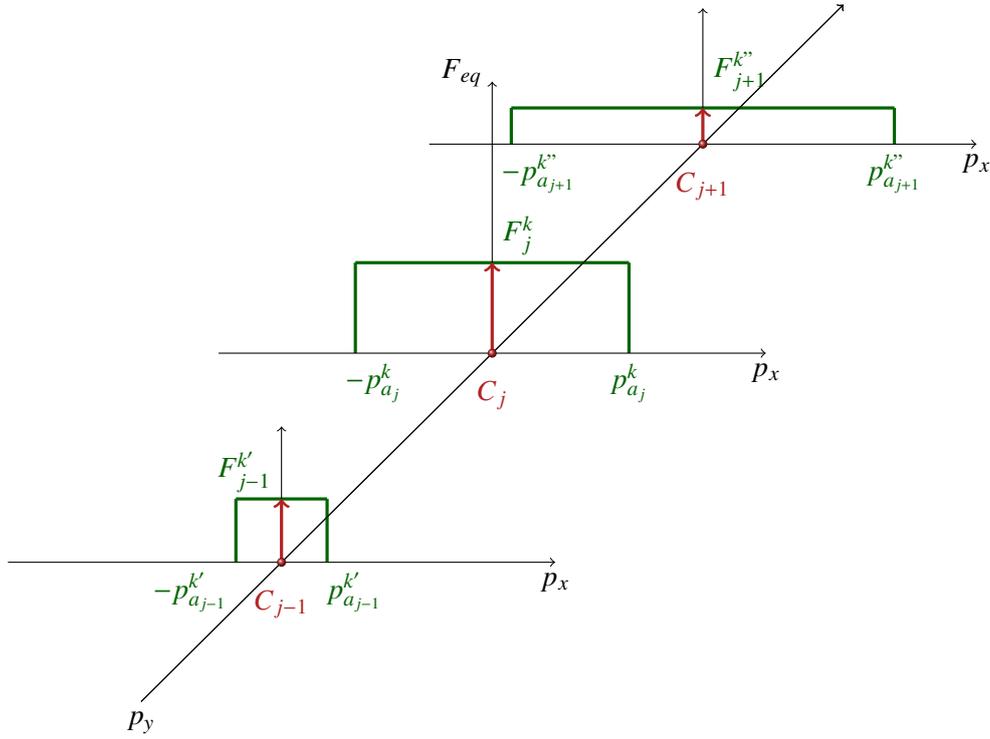
Considérons maintenant un cas à plusieurs faisceaux, couplés dans la direction longitudinale à une configuration *water-bag* simple. On considère initialement un plasma homogène, libre de tout champ. La fonction de distribution initiale à l'équilibre s'écrit :

$$F_{eq}(p_x, p_y) = \sum_{j=-N}^N F_j \left[ H(p_x - p_j^{k-}) - H(p_x - p_j^{k+}) \right] \delta(p_y - C_j) \quad (4.21)$$

Cette fonction est représentée sur la figure 4.8. En rouge, dans la direction transverse, est représentée la distribution multi-faisceaux, et en vert, dans la direction longitudinale, la configuration *water-bag* (simple et symétrique) par faisceau.

**Pour plus de visibilité, s'agissant de bords simples (un *bag* pour un faisceau), nous conservons pour la suite uniquement le label lié au faisceau ( $j$ ).**

On peut calculer les moyennes selon les directions  $p_x$  et  $p_y$ . Ces moyennes vont nous permettre de mettre en évidence les paramètres caractéristiques du modèle à l'équilibre. De façon détaillée, cela équivaudra à un ensemble de triplets, avec, en particulier, le paramètre  $\alpha_j$  qui représente le "pourcentage" du nombre de particules dans un *bag*  $j$ .



**FIGURE 4.8.:** Fonction de distribution à l'équilibre : multi-faisceaux dans la direction transverse avec trois faisceaux  $j - 1$ ,  $j$  et  $j + 1$ , et water-bag symétrique dans la direction longitudinale.

### Fonction moyennée dans la direction transverse

La fonction moyennée dans la direction transverse, que nous appellerons  $g(p_x)$ , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 g(p_x) &= \int F_{eq}(p_x, p_y) dp_y \\
 &= \sum_{j=-N}^N F_j [H(p_x + p_{a_j}) - H(p_x - p_{a_j})] \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 4.9 pour 3 valeurs de faisceaux  $j - 1$ ,  $j$  et  $j + 1$ . Dans le cas multi-faisceaux, avec un seul bag, on retrouve alors la possibilité de prendre en compte les corrélations, comme le couplage entre les effets longitudinaux et transverses.

Calculons les moments successifs de  $g(p_x)$ , notés  $M_n^g$  pour le moment d'ordre  $n$  avec

$$M_n^g = \int_{-\infty}^{\infty} p_x^n g(p_x) dp_x$$

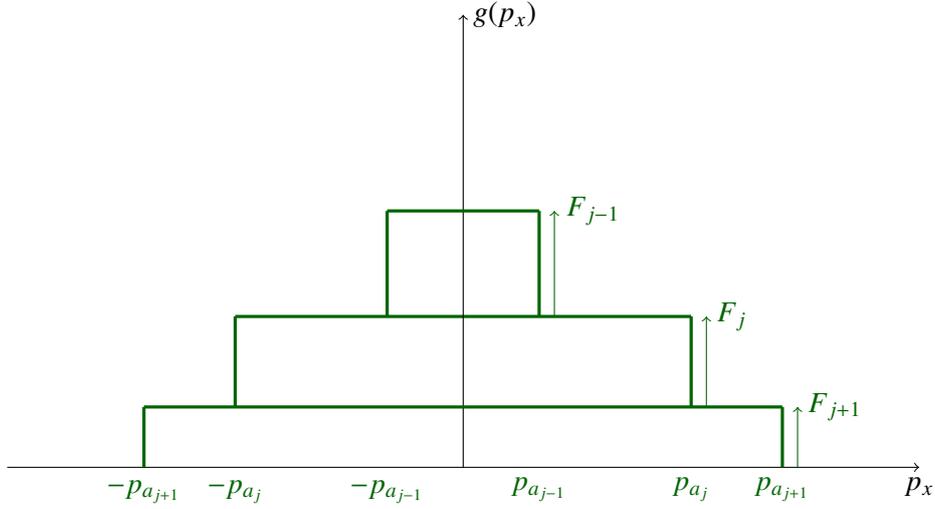


FIGURE 4.9.: Fonction  $g(p_x)$  pour trois valeurs de faisceaux  $j - 1$ ,  $j$  et  $j + 1$  dans un cas symétrique.

Pour le moment d'ordre 0, nous avons, en utilisant la condition de normalisation  $\int g(p_x) dp_x = n_0$  :

$$\begin{aligned}
 M_0^g &= \int_{-\infty}^{\infty} g(p_x) dp_x \\
 &= \sum_{j=-N}^N F_j \int_{-p_{a_j}}^{p_{a_j}} [H(p_x + p_{a_j}) - H(p_x - p_{a_j})] dp_x \\
 M_0^g &= \sum_{j=-N}^N 2F_j p_{a_j} = n_0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

En introduisant le "pourcentage" de particules du bag  $j$ ,  $\alpha_j = 2p_{a_j} F_j / n_0$ , nombre sans dimension, nous obtenons la condition de normalisation :

$$\sum_j \alpha_j = 1 \tag{4.24}$$

Le moment d'ordre 1 s'annule :

$$\begin{aligned}
 M_1^g &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x g(p_x) dp_x \\
 &= \sum_{j=-N}^N F_j \int_{-p_{a_j}}^{p_{a_j}} p_x dp_x = 0
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Le moment d'ordre 2 nous permet d'introduire la quantité de mouvement thermique longitudinale  $p_{th_x} = mv_{th_x}$ , définie en toute rigueur dans le cas classique par :

$$p_{th_x}^2 = \frac{1}{n_0} \int_{-\infty}^{+\infty} p_x^2 g(p_x) dp_x \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 M_2^g &= \int_{-\infty}^{\infty} p_x^2 g(p_x) dp_x \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{j=-N}^N \alpha_j p_{a_j}^2 n_0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Le moment thermique au carré (4.26) s'écrit alors :

$$p_{th_x}^2 = \frac{1}{n_0} M_2^g = \frac{1}{3} \sum_j \alpha_j p_{a_j}^2 \tag{4.28}$$

### Fonction moyennée dans la direction longitudinale

Calculons maintenant les moments de la fonction  $F_{eq}(p_x, p_y)$  (4.21) moyennée dans la direction  $p_x$ , que nous appellerons  $h(p_y)$  :

$$\begin{aligned}
 h(p_y) &= \int F_{eq}(p_x, p_y) dp_x \\
 &= \sum_{j=-N}^N F_j \delta(p_y - C_j) \int [H(p_x + p_{a_j}) - H(p_x - p_{a_j})] dp_x \\
 &= \sum_{j=-N}^N 2p_{a_j} F_j \delta(p_y - C_j) \\
 h(p_y) &= n_0 \sum_{j=-N}^N \alpha_j \delta(p_y - C_j)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Elle est représentée sur la figure 4.10. Cette fonction correspond à la fonction du modèle multi-faisceaux dans le cas de trois faisceaux de la figure 4.1.

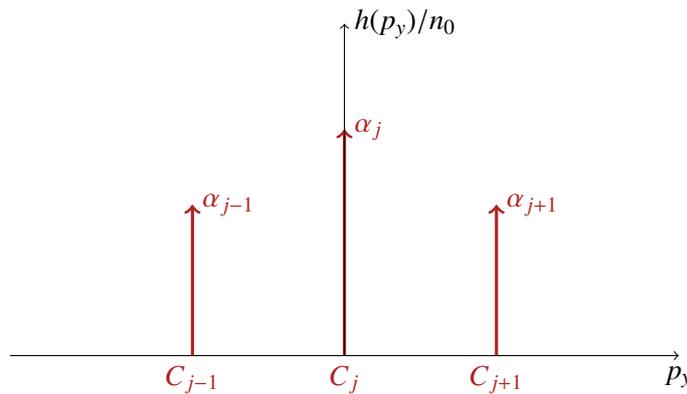


FIGURE 4.10.: Fonction de distribution  $h(p_y)/n_0$  moyennée en  $p_x$ .

Le moment d'ordre 0, avec la condition  $\int h(p_y) dp_y = n_0$ , nous permet de retrouver la condition

de normalisation  $\sum_j \alpha_j = 1$  :

$$\begin{aligned} M_0^h &= \int h(p_y) dp_y \\ &= n_0 \sum_j \alpha_j \int \delta(p_y - C_j) dp_y = n_0 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le moment d'ordre 1 nous permet de retrouver la condition de neutralité des courants, qui dans ce modèle s'écrit  $\sum_j \alpha_j C_j = 0$  :

$$\begin{aligned} M_1^h &= \int p_y h(p_y) dp_y \\ &= n_0 \sum_j \alpha_j C_j = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

La quantité de mouvement transverse "thermique" est définie à partir du moment d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} p_{th,y}^2 &= \frac{1}{n_0} \int p_y^2 h(p_y) dp_y \\ &= \sum_j \alpha_j C_j^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

La fonction d'équilibre (4.21) est ainsi caractérisée par un ensemble des triplets de paramètres  $\{\alpha_j, p_{a_j}, C_j\}$ , avec  $-N \leq j \leq N$ .

#### 4.2.2. Dynamique du modèle multi-faisceaux *water-bag*

En choisissant la fonction de distribution longitudinale de type *water-bag* simple, nous venons de montrer que seule l'évolution du contour des *bags*  $p_j^+$  et  $p_j^-$  importait. L'équation de Vlasov est ainsi remplacée par deux équations de contours (+ et -) obtenues en calculant les moments de cette équation :

$$\boxed{\frac{\partial p_j^\pm}{\partial t} + \frac{p_j^\pm}{m\gamma_j^\pm} \frac{\partial p_j^\pm}{\partial x} = eE_x - \frac{1}{2m\gamma_j^\pm} \frac{\partial}{\partial x} (C_j - eA_y)^2} \quad (4.33)$$

avec  $\gamma_j^\pm$  le facteur de Lorentz relatif au *bag* simple du faisceau  $j$  :

$$\gamma_j^\pm = \left[ 1 + \frac{p_j^{\pm 2}}{m^2 c^2} + \frac{(C_j - eA_y(x, t))^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2} \quad (4.34)$$

L'équation (4.33) est couplée aux équations de Maxwell via le champ électrique longitudinal  $E_x$  et le potentiel vecteur  $A_y$  :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon_0} \left( \sum_{j=-N}^N n_j(x, t) - n_0 \right) \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} J_y \quad (4.36)$$

### Dynamique non linéaire du modèle

L'ensemble des triplets de paramètres  $\{\alpha_j, p_{aj}, C_j\}$  reste constant dans le temps, ainsi que  $F_j$ . Il est possible d'écrire la fonction de distribution sous la forme :

$$F(x, p_x, p_y, t) = \sum_j F_j \left[ H(p_x - p_j^-(x, t)) - H(p_x - p_j^+(x, t)) \right] \delta(p_y - (C_j - eA_y)) \quad (4.37)$$

avec  $p_j^+$  et  $p_j^-$  les contours supérieur et inférieur d'un *bag*. On définit la densité "classique" comme :

$$n_j(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F dp_x dp_y = \int_{p_j^-}^{p_j^+} F_j dp_x = F_j (p_j^+ - p_j^-) \quad (4.38)$$

et la densité "relativiste" du faisceau  $j$  :

$$\tilde{n}_j(x, t) = \int \frac{F}{\gamma_j} dp_x dp_y \quad (4.39)$$

avec le facteur de Lorentz du faisceau  $j$

$$\gamma_j = \left[ 1 + \frac{p_x^2}{m^2 c^2} + \frac{(C_j - eA_y(x, t))^2}{m^2 c^2} \right]^{1/2}$$

On en déduit la densité "relativiste" totale :

$$\tilde{n}(x, t) = \sum_j \tilde{n}_j(x, t) \quad (4.40)$$

La densité de courant  $J_y$  :

$$J_y = \frac{e}{m} \sum_j (C_j - eA_y) \tilde{n}_j(x, t)$$

se réécrit :

$$J_y = -\frac{e^2}{m} \tilde{n}(x, t) A_y + \frac{e}{m} \sum_j C_j \tilde{n}_j(x, t) \quad (4.41)$$

En utilisant la fonction de distribution (4.37), les valeurs des densités classique (4.38) et "relativiste" (4.39) ainsi que la valeur de la densité de courant  $J_y$  (4.41), les équations de Maxwell (4.35) et (4.36) se réécrivent :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \left( \sum_{j=-N}^N F_j (p_j^+ - p_j^-) - n_0 \right) \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \sum_{j=-N}^N \omega_{pj}^2 A_y = \frac{1}{e} \sum_{j=-N}^N \omega_{pj}^2 C_j \quad (4.43)$$

avec  $\omega_{pj}$  la fréquence plasma associée au faisceau  $j$

$$\omega_{pj} = \left[ \frac{e^2}{m \epsilon_0} \tilde{n}_j \right]^{1/2} = \left[ \frac{e^2 F_j}{m \epsilon_0} \int_{p_j^-}^{p_j^+} \frac{1}{\gamma_j} dp_x \right]^{1/2} \quad (4.44)$$

L'ensemble des équations (4.33), (4.42) et (4.43) constitue un système fermé dans l'approximation à un *bag*.

### Dynamique classique du modèle

Nous allons maintenant nous placer dans une limite non relativiste, c'est-à-dire  $\gamma_j \approx \gamma_j^\pm \approx 1$ , et effectuer une analyse linéaire pour un faisceau  $j$  de densité moyenne  $n_{0j}$  et un contour  $\pm p_{aj}$ . On va utiliser le système fermé et développer autour d'un équilibre.

On applique une perturbation  $p_j^\pm = \pm p_{aj} + \delta p_j^\pm = \pm m a_j + \delta p_j^\pm$  et  $n_j = n_{0j} + \delta n_j$ . L'équation (4.33) devient alors, à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \delta p_j^\pm}{\partial t} \pm a_j \frac{\partial \delta p_j^\pm}{\partial x} = e \delta E_x + \frac{e C_j}{m} \frac{\partial \delta A_y}{\partial x} \quad (4.45)$$

En utilisant la condition de normalisation  $\sum_j \alpha_j = 1$ , l'équation (4.42) devient :

$$\frac{\partial \delta E_x}{\partial x} = \frac{e}{\epsilon_0} \sum_j F_j (\delta p_j^+ - \delta p_j^-) \quad (4.46)$$

De plus, en utilisant la définition de la fréquence plasma (4.44), l'équation (4.43) se réécrit, à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial^2 \delta A_y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \delta A_y}{\partial x^2} + \omega_p^2 \delta A_y = \frac{e}{m \epsilon_0} \sum_{j=-N}^N F_j C_j (\delta p_j^+ - \delta p_j^-) \quad (4.47)$$

La suite de la démarche consiste à linéariser le système d'équations précédent. On considère une solution standard de type onde plane, c'est à dire  $\delta \sim \exp i(kx - \omega t)$ .

L'équation (4.45) nous permet de calculer le terme récurrent  $(\delta p_j^+ - \delta p_j^-)$  :

$$\delta p_j^+ - \delta p_j^- = i k e \frac{2 a_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \delta E_x - k^2 \frac{e}{m} \frac{2 a_j C_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \delta A_y \quad (4.48)$$

En insérant cette relation dans les deux équations (4.46) et (4.47), celles ci-vont alors former un système :

$$\begin{cases} \left( \left( 1 - \omega_p^2 \sum_j \frac{\alpha_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \right) \delta E_x + i \omega_p^2 \sum_j \frac{k}{m} \frac{\alpha_j C_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \delta A_y \right) = 0 \\ i \omega_p^2 \sum_j \frac{k}{m} \frac{\alpha_j C_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \delta E_x - \left[ \omega^2 - (\omega_p^2 + k^2 c^2) - \frac{1}{m} k^2 \omega_p^2 \sum_j \frac{\alpha_j C_j^2}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \right] \delta A_y = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Le déterminant du système formé par les équations (4.49) doit être nul, de façon à obtenir une solution non triviale. Ce système va ainsi nous permettre de retrouver la relation de dispersion pour les instabilités Weibel :

$$\begin{aligned} & \left( \omega^2 - (\omega_p^2 + k^2 c^2) - \frac{1}{m} k^2 \omega_p^2 \sum_j \frac{\alpha_j C_j^2}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \right) \left( 1 - \omega_p^2 \sum_j \frac{\alpha_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \right) \\ & = k^2 \omega_p^4 \left( \sum_j \frac{k}{m} \frac{\alpha_j C_j}{\omega^2 - a_j^2 k^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.50)$$

**Cas particulier : un faisceau central / un bag**

Plaçons nous dans le cas particulier à un seul faisceau, c'est-à-dire  $C_j = 0$  et  $a_j = a$  pour le faisceau  $j = 0$ . En se souvenant de la condition de normalisation  $\sum_j \alpha_j = 1$ , on a :

$$\left(\omega^2 - (\omega_p^2 + k^2 c^2)\right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - a^2 k^2}\right) = 0 \quad (4.51)$$

On obtient alors deux modes indépendants.

Le premier est un mode électrostatique avec  $\delta E_x \neq 0$  et  $\delta A_y = 0$  qui obéit à la relation de dispersion Bohm-Gross qui, dans le modèle *water-bag*, s'écrit  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 a^2$ . En choisissant notamment  $a = \sqrt{3} v_{thx}$ , où  $v_{thx} = \sqrt{k_B T / m}$  est la vitesse thermique le long de  $p_x$ , on retrouve la relation connue  $\omega^2 = \omega_p^2 + 3k^2 v_{thx}^2$ .

Le second est un mode électromagnétique, avec  $\delta E_x = 0$  et  $\delta A_y \neq 0$  qui obéit à la relation de dispersion d'un plasma froid  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ .

**Cas particulier : multi-faisceaux / water-bag de même longueur a**

Plaçons nous maintenant dans un cas multi-faisceaux, avec  $a_j = a$  pour chaque faisceau  $j$ . En se souvenant de la condition de neutralité des courants  $\sum_j \alpha_j C_j = 0$ , on obtient pour la relation de dispersion :

$$\left(\omega^2 - (\omega_p^2 + k^2 c^2) - \frac{1}{m} k^2 \omega_p^2 \sum_j \frac{\alpha_j C_j^2}{\omega^2 - a^2 k^2}\right) \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - a^2 k^2}\right) = 0 \quad (4.52)$$

Dans ce cas particulier que nous utiliserons dans nos simulations, la quantité de mouvement thermique longitudinale (4.28) s'écrit :

$$p_{thx}^2 = p_{aj}^2 / 3$$

avec  $p_{aj} = m a_j$ , ce qui implique une vitesse thermique longitudinale  $v_{thx}^2 = a_j^2 / 3$ . Les modes électrostatique et électromagnétique sont de nouveau découplés.

Pour le mode électrostatique, on retrouve la relation de Bohm-Gross.

Pour le mode électromagnétique, la relation de dispersion se réécrit :

$$\omega^2 - (\omega_p^2 + k^2 c^2) - k^2 \omega_p^2 \frac{v_{thy}^2}{\omega^2 - 3k^2 v_{thx}^2} = 0 \quad (4.53)$$

Dans la limite froide,  $v_{thy} = 0$ , on retrouve la relation de dispersion électromagnétique dans un plasma froid. Dans le cas contraire,  $v_{thy} \neq 0$ , la relation de dispersion correspond à l'instabilité Weibel standard, qui peut s'écrire sous la forme d'une équation de degré 4. En normalisant la fréquence par la fréquence plasma  $\omega_p$ , la longueur d'onde par l'épaisseur de peau  $d_e = c / \omega_p$  et la vitesse par la vitesse de la lumière  $c$ , on obtient la relation de dispersion normalisée :

$$\omega^4 - (1 + k^2 + 3k^2 v_{thx}^2) \omega^2 - k^2 v_{thy}^2 + 3k^2 v_{thx}^2 (1 + k^2) = 0 \quad (4.54)$$

Cette équation possède deux racines réelles,  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$ , dont le produit vaut

$$\omega_1^2 \omega_2^2 = -k^2 v_{thy}^2 + 3k^2 v_{thx}^2 (1 + k^2)$$

Si l'une des racines est négative, on retrouve la condition pour le démarrage de l'instabilité Weibel :

$$v_{thy}^2 > 3v_{thx}^2 (1 + k^2) \quad (4.55)$$

En supposant  $v_{thx,y} \ll 1$ , on peut trouver une approximation pour les deux racines :

$$\omega_1^2 \approx 1 + k^2$$

et

$$\omega_2^2 \approx \frac{-k^2}{1+k^2} \left( v_{thy}^2 - 3(1+k^2)v_{thx}^2 \right)$$

qui nous permettent de retrouver la condition de démarrage de l'instabilité.

Nous allons maintenant valider la relation de dispersion obtenue (4.50). On va s'intéresser à la résolution de  $N$  équations de Vlasov (3.13)

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma_j} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \left( eE_x - \frac{1}{2m\gamma_j} \frac{\partial}{\partial x} (C_j - eA_\perp)^2 \right) \frac{\partial f_j}{\partial p_x} = 0$$

couplées aux équations de Maxwell, et comparer, notamment grâce au régime linéaire, les résultats analytiques obtenus à partir de la relation de dispersion (4.50) aux résultats issus du modèle multi-faisceaux.

### 4.2.3. Validation du modèle multi-faisceaux dans le régime linéaire

On considère un cas symétrique, c'est-à-dire que le set de paramètres  $\{\alpha_j, a_j, C_j\}$  vérifie  $\alpha_{-j} = \alpha_j$ ,  $C_{-j} = -C_j$  et  $a_{-j} = -a_j = -a$ . Cinq faisceaux, dont les paramètres sont définis dans le tableau 4.1, sont utilisés pour décrire l'anisotropie de température, avec  $T_y = 50keV$  et  $T_x = 2.25keV$ , correspondant à des *bags* de longueur  $2a$  avec  $a = \sqrt{3}v_{thx} \approx 0.115c$ .

On choisit des faisceaux tels que  $C_0 = 0$ ,  $C_1 = mv_{thy}$  et  $C_2 = 2mv_{thy}$ . En utilisant les conditions obtenues à partir des moments (condition de normalisation  $\sum_j \alpha_j = 1$ , condition de neutralité des courants  $\sum_j \alpha_j C_j = 0$  et conditions sur la quantité de mouvement transverse thermique  $\sum_j \alpha_j C_j^2 = p_{thy}^2$  et  $\sum_j \alpha_j C_j^4 = 3p_{thy}^4$ ) on obtient les valeurs du paramètre  $\alpha$  :  $\alpha_0 = 1/2$ ,  $\alpha_1 = 1/6$  et  $\alpha_2 = 1/12$ .

Les paramètres sont tous normalisés par les paramètres standards : vitesse de la lumière, fréquence plasma, épaisseur de peau non collisionnelle. Les champs électrique et magnétique sont normalisés respectivement par  $m\omega_p/e$  et  $m\omega_p/e$ .

La fonction de distribution est perturbée par des fluctuations magnétiques sur la composante  $B_z$  :

$$B_z = \sum_{n=1}^M B_0 \sin(n\Delta kx + \phi_n)$$

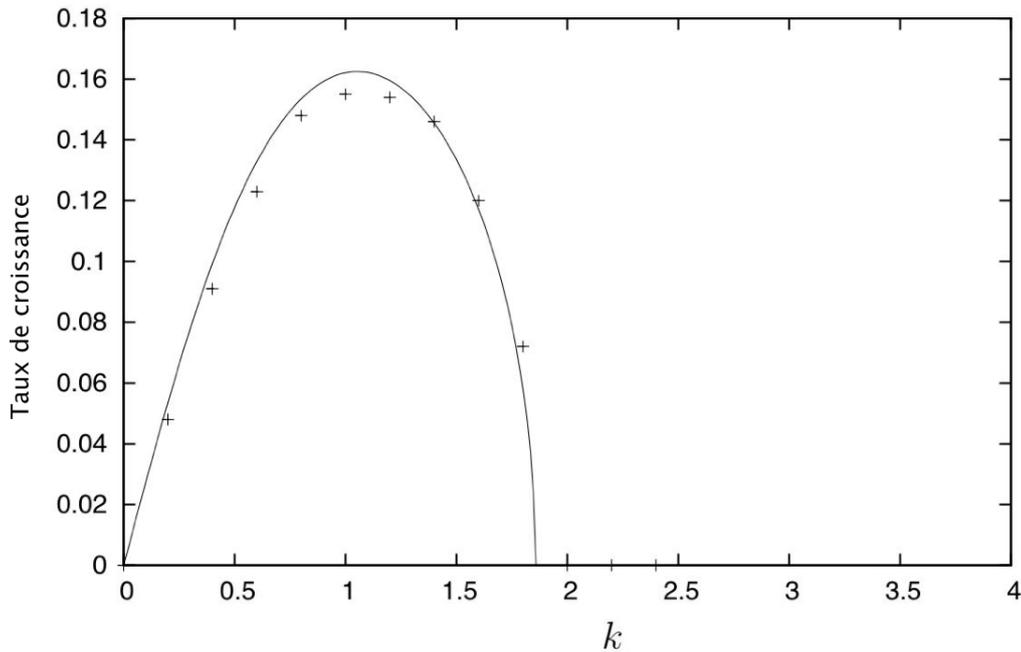
où  $\phi_n$  représente une phase aléatoire,  $\Delta k = 2\pi/L$  le vecteur d'onde fondamental,  $L = 10\pi$  la longueur de la boîte de simulation et  $B_0 = 10^{-5}$  l'amplitude de la perturbation. Dans les simulations présentées,  $\Delta k = 0.2$  et  $M = 12$  modes. L'espace des phases est échantillonné avec  $N_x N_{p_x} = 1024 * 512$  et les pas de temps et de maillage utilisés sont  $\Delta t = 0.008$ ,  $\Delta x = 0.0307$  et  $\Delta p_x = 0.0048$ .

5 faisceaux	
valeurs de $\alpha_j$	$\alpha_2 = \alpha_{-2} = 1/12$
	$\alpha_1 = \alpha_{-1} = 1/6$
	$\alpha_0 = 1/2$
valeurs de $C_j$	$C_2 = -C_{-2} = 2m_e v_{thy}$
	$C_1 = -C_{-1} = m_e v_{thy}$
	$C_0 = 0$

**TABLE 4.1.:** Paramètres physiques pour la fonction de distribution du modèle, dans le cas cinq faisceaux.

Sur la figure 4.11, le taux de croissance théorique de l'instabilité obtenue à partir de la résolution de la relation de dispersion de l'instabilité Weibel (4.54), est tracé en fonction du nombre d'onde  $k$ , en ligne continue.

Les croix de la figure 4.11 sont obtenues à partir d'une transformée de Fourier sur l'évolution temporelle des modes magnétiques issus du modèle multi-faisceaux. On peut remarquer un très bon accord entre les valeurs théoriques obtenues par la résolution de la relation de dispersion et les résultats numériques issus du modèle multi-faisceau.



**FIGURE 4.11.:** Taux de croissance de l'instabilité Weibel en fonction du nombre d'onde  $k$ . En ligne continue est représenté le résultat analytique. Les croix représentent les résultats numériques.

Nous venons donc de voir qu'avec un faible nombre de faisceaux (5 ici) le modèle génère les bons taux de croissance de l'instabilité.

De façon à choisir le nombre de faisceaux  $j$  et de pouvoir comparer à un modèle complet 1D2V, nous allons maintenant présenter deux simulations. La première aura pour but de choisir entre un modèle à trois ou cinq faisceaux, de façon à mieux décrire la dynamique du problème. La seconde simulation présentera des résultats obtenus en considérant les effets électrostatiques de l'instabilité Weibel.

### 4.3. Choix du nombre de faisceaux $j$ dans le modèle multi-faisceaux

Dans le cas de l'instabilité Weibel, nous avons vu que seuls les premiers moments de la fonction de distribution sont nécessaires pour décrire le système, ce qui implique un petit nombre de faisceaux dans le modèle multi-faisceaux. Cette partie concerne ce choix de faisceaux pour décrire au mieux la dynamique des particules. Une comparaison entre trois et cinq faisceaux va notamment être effectuée. On rappelle que la direction longitudinale est définie par la direction le long de  $p_x$ , et la direction transverse le long de  $p_y$ .

On considère maintenant une fonction de distribution initiale maxwellienne avec une température longitudinale  $T_x = 1keV$  et transverse  $T_y = 50keV$ .

Les paramètres du modèle multi-faisceaux sont définis dans le tableau 4.2 pour trois et cinq faisceaux.

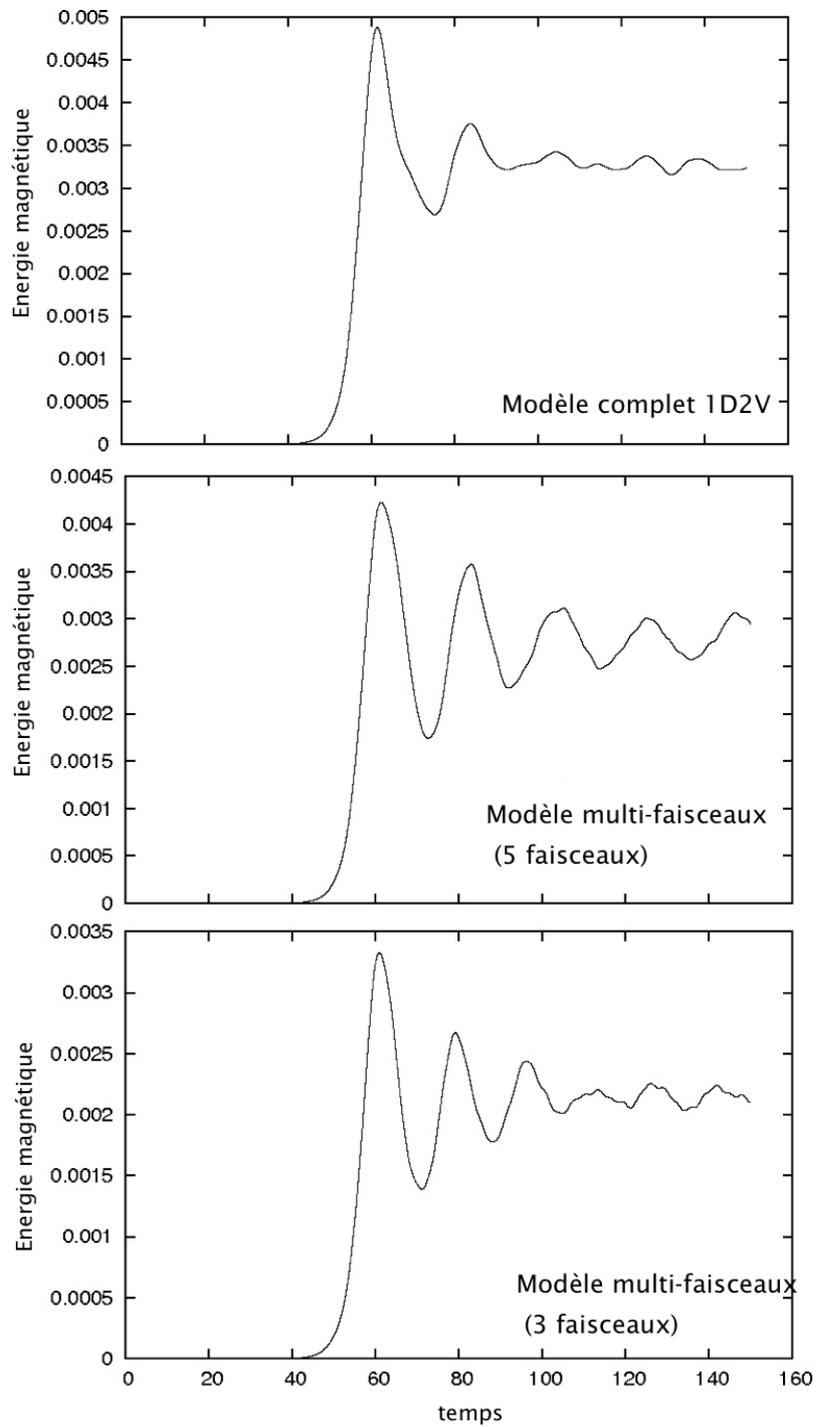
	3 faisceaux	5 faisceaux
valeurs de $F_j$	$F_1 = F_{-1} = \frac{1}{6}$ $F_0 = \frac{2}{3}$	$F_2 = F_{-2} = 1/12,$ $F_1 = F_{-1} = 1/6$ $F_0 = 1/2$
valeurs de $C_j$	$C_1 = -C_{-1} = \sqrt{3}m_e v_{thy}$ $C_0 = 0$	$C_2 = -C_{-2} = 2m_e v_{thy},$ $C_1 = -C_{-1} = m_e v_{thy}$ $C_0 = 0$

**TABLE 4.2.:** Paramètres physiques pour la fonction de distribution du modèle, dans les cas à trois et cinq faisceaux.

La fonction de distribution est perturbée par des fluctuations magnétiques sur la composante  $B_z = B_0 \sin(k_0 x)$  avec  $k_0 = 1.75$ . La boîte de simulation de longueur  $L = 2\pi/k_0$  est discrétisée avec un maillage  $N_x N_{p_x} = 1024 * 512$ . Les pas de temps et de maillage de l'espace des phases sont :  $\Delta t = 0.008$ ,  $\Delta x = 0.0035$  et  $\Delta p_x = 0.0049$ .

En plus des simulations à trois et cinq faisceaux, les résultats obtenus à partir du modèle complet 1D2V seront utilisés pour une comparaison qualitative et quantitative.

### 4.3.1. Évolution de l'énergie magnétique

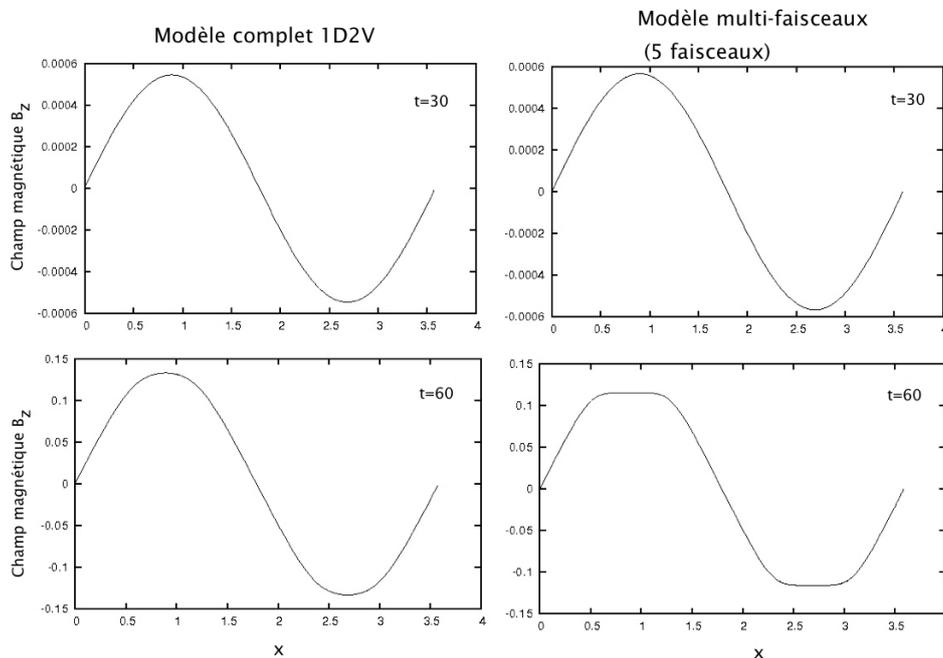


**FIGURE 4.12.:** Tracé de l'énergie magnétique pour le modèle complet 1D2V et le modèle multi-faisceaux water-bag avec 5 et 3 faisceaux. Dans la phase de saturation, on remarque une différence de comportement dans les différents modèles.

La première image de la figure 4.12 est obtenue à partir du modèle complet 1D2V, la seconde à partir du modèle multi-faisceaux avec 5 faisceaux et la dernière avec le modèle multi-faisceaux et 3 faisceaux.

Dans les trois cas présentés, l'énergie magnétique croît exponentiellement entre  $40 \leq t \leq 60$  avec le même taux de croissance, puis sature. Dans le modèle complet 1D2V, cette énergie sature autour d'une valeur moyenne de 0.0032. Avec le modèle multi-faisceaux et 3 faisceaux, la valeur à saturation de l'énergie magnétique est proche de 0.0021. Cette valeur est bien en-dessous de celle obtenue avec le modèle complet. Avec cinq faisceaux, le modèle décrit plus exactement le développement de la WI, avec une valeur moyenne de saturation proche de 0.0028. Une valeur de saturation similaire a été retrouvée avec un nombre de faisceaux plus grand.

Cette affirmation est validée par la figure suivante 4.13 qui représente le champ magnétique en fonction de  $x$  à différents instants du développement de la WI :  $t = 30$  pour la phase linéaire et  $t = 60$  pour le début de la phase de saturation. La colonne de gauche contient les profils obtenus avec le modèle complet 1D2V, et la colonne de droite ceux obtenus avec le modèle multi-faisceaux et 5 faisceaux. Dans la phase linéaire de la WI, le profil du champ magnétique reste le même dans les différents modèles. Le champ est sinusoïdal, avec une amplitude proche de 0.00055. Au début de la saturation, le champ magnétique a fortement augmenté et gagne un ordre de grandeur dans les deux situations, ce qui est caractéristique de l'instabilité Weibel. Cependant, le profil du champ est différent selon le modèle utilisé. En effet, en utilisant le modèle multi-faisceaux, on remarque que l'amplitude du champ magnétique ( $\approx 0.12$ ) est légèrement diminuée par rapport à celle obtenue à partir du modèle complet ( $\approx 0.145$ ), mais l'ordre de grandeur reste cependant le même.



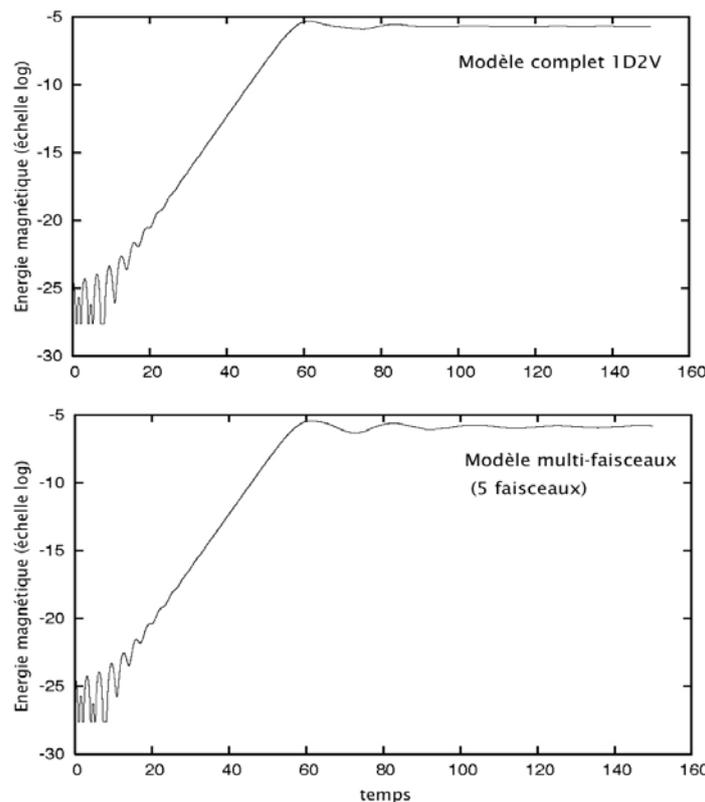
**FIGURE 4.13.:** Champ magnétique en fonction de  $x$  à deux instants de l'instabilité  $t = 30$  pour la phase linéaire et  $t = 60$  au début de la phase de saturation. La colonne de gauche est obtenue à partir du modèle complet 1D2V, la colonne de droite à partir du modèle multi-faisceaux à 5 faisceaux.

Dans cette situation, le modèle multi-faisceaux à cinq faisceaux est mieux adapté que le modèle à trois faisceaux et décrit de façon plus exacte la dynamique du problème. Il permet de retrouver les caractéristiques principales de l'instabilité, tout en ayant l'avantage de toujours pouvoir séparer la contribution de chaque faisceau de particules, ce qui va être d'un grand intérêt dans le cas de la WI.

### 4.3.2. Taux de croissance de la WI

La figure 4.14 représente en échelle logarithmique l'évolution temporelle de l'énergie magnétique dans le cas du modèle complet, et du modèle multi-faisceaux avec 5 faisceaux. On retrouve les caractéristiques principales de la WI : une phase linéaire ( $t < 60$ ) où le champ magnétique croît de façon exponentielle, avant d'atteindre un régime de saturation, en accord avec les résultats obtenus dans [72]. Le profil temporel de l'énergie magnétique dans la phase linéaire est identique dans les deux modèles. Le taux de croissance numérique obtenu à partir de la pente de la phase linéaire vaut  $\gamma \approx 0.21$ . Il est en très bon accord avec le taux théorique obtenu à partir de la relation de dispersion de l'instabilité Weibel (4.54) valant  $\gamma_{th} \approx 0.23$ .

Néanmoins, dans la phase de saturation, le niveau auquel sature l'instabilité diffère selon le modèle. Cette différence est d'autant plus visible sur la figure 4.12 où l'énergie magnétique est tracée sans échelle logarithmique.



**FIGURE 4.14.:** *Tracé en échelle logarithmique de l'énergie magnétique pour le modèle complet 1D2V et le modèle multi-faisceaux water-bag avec 5 faisceaux. Le profil temporel de l'énergie est similaire dans les deux modèles, mais le niveau de saturation diffère de peu.*

## 4.4. Étude du couplage de la WI avec la composante électrostatique

Nous allons maintenant étudier la dynamique du système à partir d'une part, du modèle complet 1D2V, et d'autre part à partir du modèle multi-faisceaux à cinq faisceaux, de façon à pouvoir comparer qualitativement et quantitativement les deux modèles, et utiliser les avantages du modèle multi-faisceaux.

La relation de dispersion (4.50) présente trois termes : le terme électromagnétique, correspondant à l'instabilité Weibel, le terme électrostatique et un terme de couplage. Comme nous l'avons dit précédemment, lors d'un cas symétrique, le terme de couplage est initialement nul. Dans cette partie, nous allons étudier l'effet de ce terme. Ce caractère électrostatique a récemment fait l'objet d'un travail [73] : les auteurs étudient le comportement électrostatique de l'instabilité Weibel, notamment dans le régime de saturation avancé.

Cinq faisceaux, dont les paramètres sont définis dans le tableau 4.2, sont utilisés pour décrire l'anisotropie de température, avec  $T_y = 50keV$  et  $T_x = 1keV$ .

Les paramètres sont tous normalisés par les paramètres standards : vitesse de la lumière, fréquence plasma, épaisseur de peau non collisionnelle. Les champs électrique et magnétique sont normalisés respectivement par  $mc\omega_p/e$  et  $m\omega_p/e$ .

La fonction de distribution est perturbée par des fluctuations magnétiques sur la composante  $B_z$  :

$$B_z = \sum_{n=1}^M B_0 \sin(n\Delta kx + \phi_n)$$

où  $\phi_n$  représente une phase aléatoire,  $\Delta k = 2\pi/L$  le vecteur d'onde fondamental,  $L = 5\pi$  la longueur de la boîte de simulation et  $B_0 = 10^{-5}$  l'amplitude de la perturbation. Dans les simulations présentées,  $\Delta k = 0.4$  et  $M = 12$  modes. Le pas de temps utilisé dans les deux modèles est  $\Delta t = 0.01$ . Dans le modèle complet 1D2V, l'espace des phases est échantillonné avec  $N_x N_{p_x} N_{p_y} = 768 * 193 * 193$  et les pas de maillage associés sont  $\Delta x = 0.0204$  et  $\Delta p_x = \Delta p_y = 0.0104$ . Dans le modèle multi-faisceaux, l'espace des phases est échantillonné avec  $N_x N_{p_x} = 1025 * 513$  et les pas de maillage associés sont  $\Delta x = 0.0153$  et  $\Delta p_x = 0.0039$ .

### 4.4.1. Résultats obtenus à partir du modèle complet

Dans un premier temps, les résultats obtenus à l'aide du modèle complet 1D-2V sont présentés.

#### Évolution temporelle des énergies magnétique et électrique

La figure 4.15 représente respectivement l'évolution temporelle de l'énergie magnétique  $E_{mag}(t) = 1/2L_x \int B_z^2/\mu_0 dx$ , de l'énergie électrique transverse  $E_{elec}(t) = 1/2L_x \int E_y^2/\epsilon_0 dx$  et de l'énergie électrique longitudinale  $E_{electro}(t) = 1/2L_x \int E_x^2/\epsilon_0 dx$ .

Le comportement de la WI présente des similarités avec la CFI. On remarque plusieurs phases dans le développement de l'instabilité : une phase de croissance exponentielle des champs  $40 \leq t \leq 60$ , une seconde phase de croissance linéaire, que l'on définit entre  $60 \leq t \leq 100$ , où l'énergie magnétique croît avec une pente plus faible, et une phase de saturation située à  $t \geq 100$ .

La première image de la figure 4.15 représente l'évolution temporelle de l'énergie magnétique moyennée en  $x$ . Dans la phase de saturation, le champ magnétique se stabilise et oscille avec une fréquence faible autour d'une valeur moyenne. La seconde image représente l'évolution de l'énergie électrique transverse. On voit que le champ croît dans la phase linéaire de la WI,

mais à une amplitude bien plus faible que le champ magnétique, et diminue fortement dans la phase de saturation. La dernière image représente l'évolution temporelle de l'énergie électrique longitudinale. On y voit une forte augmentation de l'énergie, avec un premier pic autour de  $t \approx 50$ . De plus, un comportement oscillant est également visible, avec une fréquence bien plus grande que dans le cas de l'énergie magnétique.

Dans le but de visualiser par la suite le comportement dynamique des électrons, le profil spatial du champ magnétique en fonction de  $x$ , à différents instants du développement de l'instabilité est représenté sur la figure 4.16, à  $t = 60$ ,  $t = 75$  et  $t = 150$ .

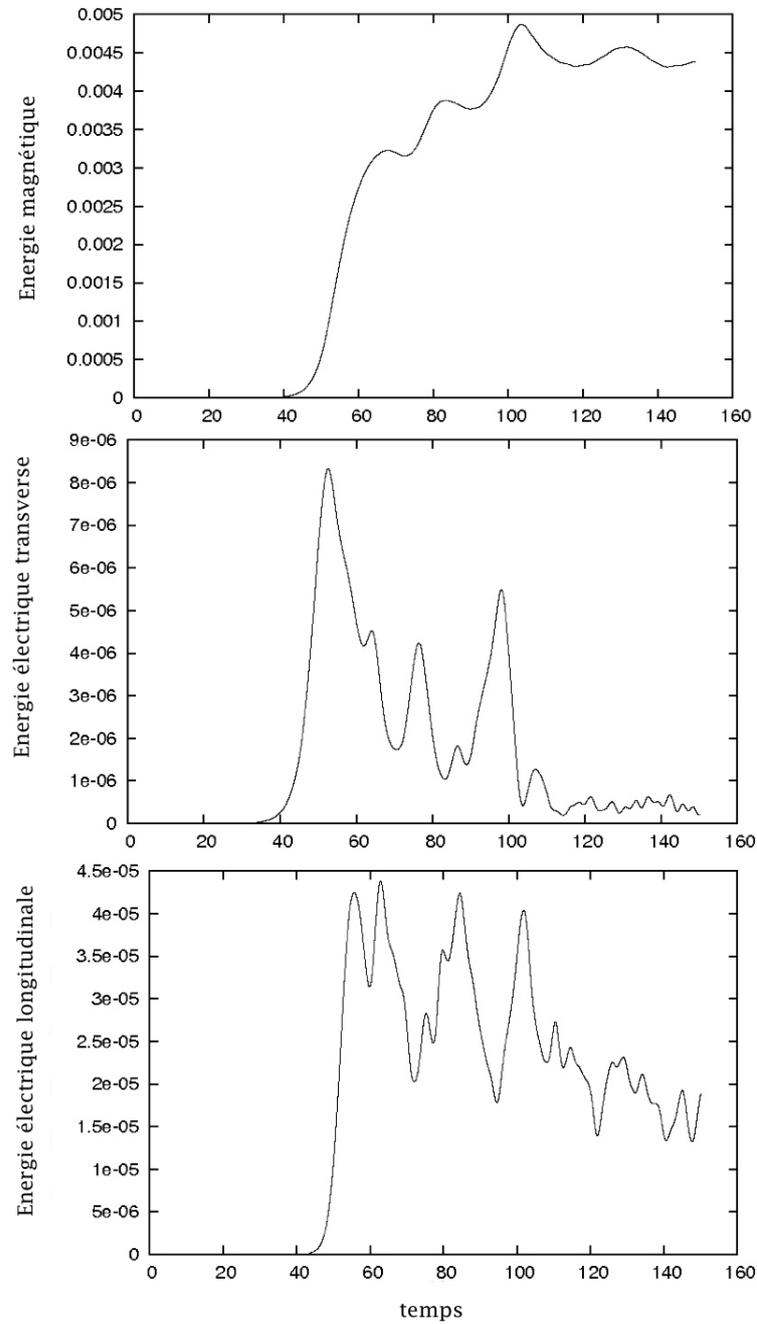
Sur la première image, au début de la phase linéaire à  $t = 60$ , une modulation du champ magnétique sur le mode  $k = 5\Delta k$  est clairement visible.

Sur la figure suivante,  $t = 75$ , on remarque cette fois 4 extrema dans le champ magnétique, correspondant ainsi à un mode  $M = 4$ .

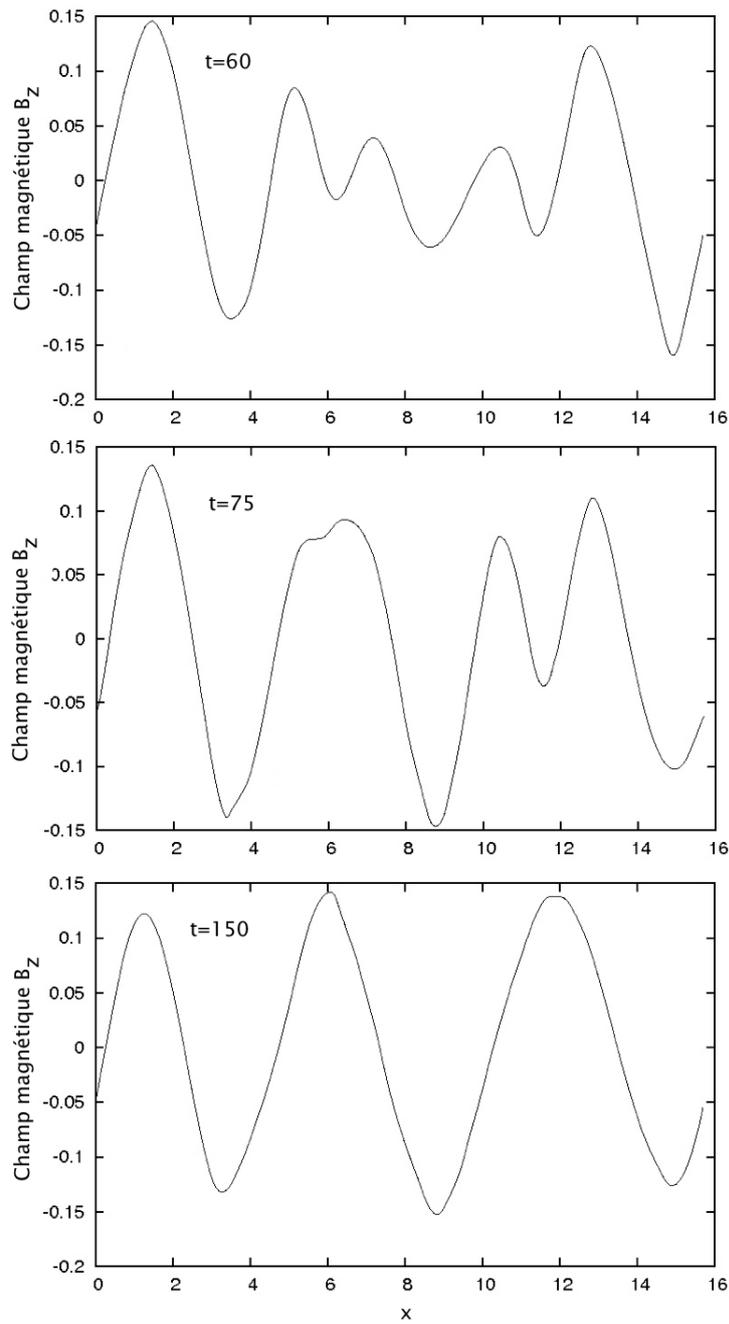
À la fin de la simulation, à  $t = 150$ , et ce à partir d'un temps  $t = 100$  non représenté ici, le champ magnétique montre un mode  $M = 3$  ( $k = 3\Delta k$ ) dominant.

Ce changement de mode dominant est à l'origine de la rupture de pente que l'on a pu remarquer dans l'évolution temporelle de l'énergie magnétique (figure 4.15).

Cette évolution dans le champ magnétique va pouvoir s'expliquer à partir de l'espace des phases représentant la dynamique des faisceaux rapides du modèle multi-faisceaux.



**FIGURE 4.15.:** *Évolution temporelle de l'énergie magnétique, de l'énergie électrique transverse et longitudinale respectivement à partir du modèle complet 1D2V*



**FIGURE 4.16.:** Profil du champ magnétique en fonction de  $x$  à  $t = 60, 75$  et  $t = 150$  obtenu à partir du modèle complet 1D2V

## Espace des phases

La figure 4.17 représente la dynamique de la fonction de distribution électronique dans le sous espace  $(x, p_y)$ , à  $t = 52.5, 60$  et  $t = 75$ . À  $t = 60$ , le champ électrique transverse  $E_y$  est devenu suffisamment important pour modifier la trajectoire des électrons. Ceux-ci sont accélérés le long de la direction  $Oy$ , ce qui mène à une structure en forme de  $Y$ , clairement visible par exemple entre  $12 < x < 15.7$ .

La dynamique de la fonction de distribution est liée à celle du champ électrique transverse mais aussi au champ magnétique, en accord avec les équations de Maxwell. En effet, sur la seconde image à  $t = 60$ , on remarque notamment une modulation sur le mode  $k = 5\Delta k$  puisque cinq structures en forme de  $Y$  apparaissent. En comparant avec le profil du champ magnétique au même moment (figure 4.16), on note au niveau des maxima du champ magnétique situé en  $x \approx 2$  et  $x \approx 12$ , une déformation de la fonction de distribution d'autant plus visible. Sur des temps plus longs  $t = 75$ , de nouvelles structures se forment. Il est possible de voir quatre structures (notamment quatre pics), ce qui reste en accord avec la figure 4.16 où un mode 4 était dominant.

Le modèle multi-faisceaux permet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, de sélectionner les faisceaux que l'on souhaite étudier et suivre leur évolution. Il va ainsi nous permettre une étude détaillée de la dynamique des particules affectées par le comportement oscillant des champs.

### 4.4.2. Dynamique détaillée à partir du modèle multi-faisceaux

Dans cette simulation, les paramètres physiques utilisés sont les mêmes que dans la simulation utilisant le modèle 1D-2V. Cinq faisceaux sont utilisés pour décrire la direction transverse.

### Évolution des énergies électromagnétiques

La figure 4.18 représente l'évolution temporelle des énergies électromagnétiques. En comparant avec la figure 4.15 qui représente les mêmes quantités, on remarque que notre modèle multi-faisceaux retrouvent les caractéristiques principales de l'instabilité, malgré une différence dans les niveaux d'amplitude. En effet, dans le profil de l'énergie magnétique une première phase de croissance exponentielle est suivie d'une seconde phase de croissance linéaire pour  $60 \leq t \leq 100$  puis d'une phase de saturation pour  $t > 100$ . Le niveau de saturation de l'énergie magnétique atteint dans ce modèle une valeur moyenne de 0.004, et reste proche du niveau obtenu à partir du modèle complet de 0.0045.

L'image centrale représente l'énergie électrique transverse. Le modèle multi-faisceaux conserve le profil, avec notamment de forts pics à  $t \approx 50$  et  $t \approx 100$ .

Dans la dernière image représentant l'énergie électrique longitudinale, on retrouve le comportement oscillant de l'énergie avec une très grande fréquence comparée à l'énergie magnétique. On peut ainsi en conclure que l'énergie électrique longitudinale jouera un rôle important dans le développement de la WI.

De façon à suivre le comportement des électrons dans la phase de saturation, nous allons séparer la contribution des faisceaux de particules en résolvant uniquement l'équation de Vlasov associée au faisceau souhaité. Nous pourrons ainsi suivre la dynamique de chaque population d'électrons dans l'espace des phases.

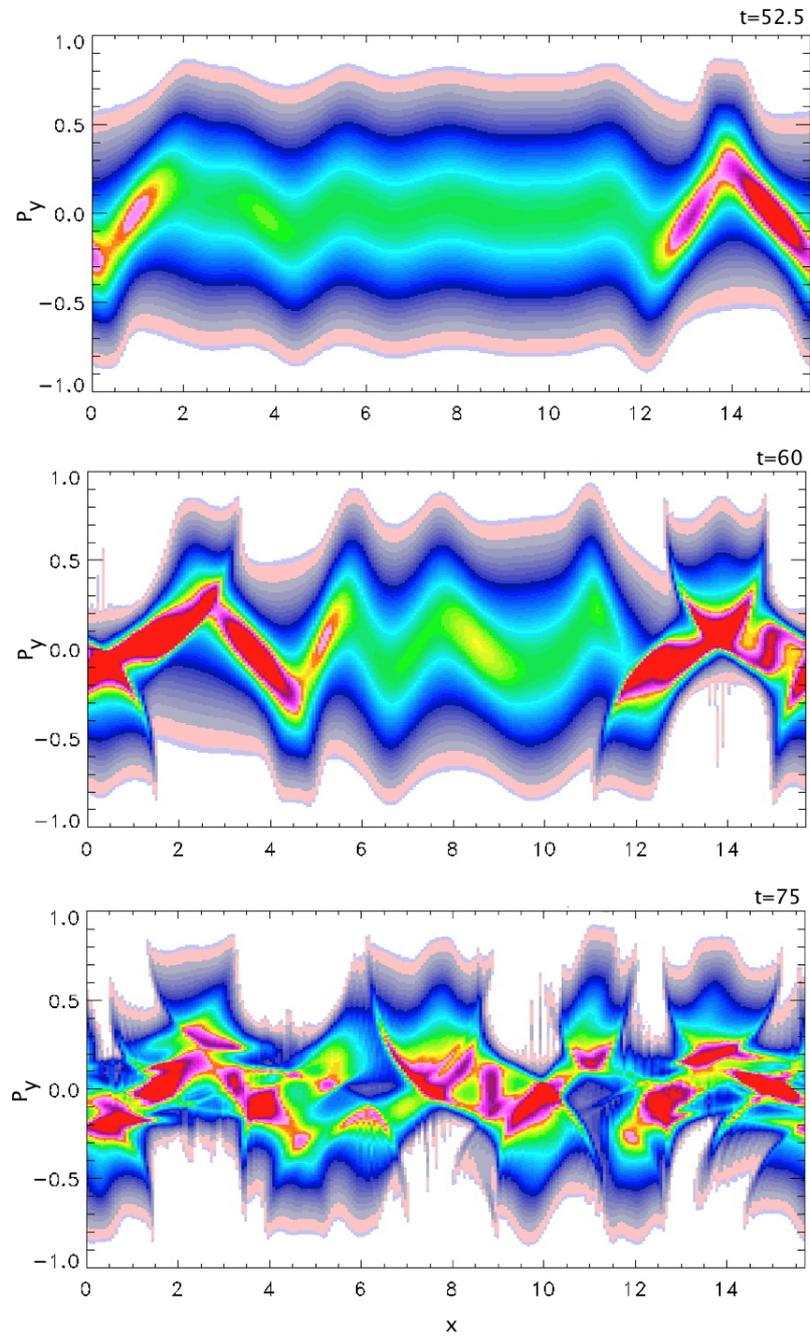
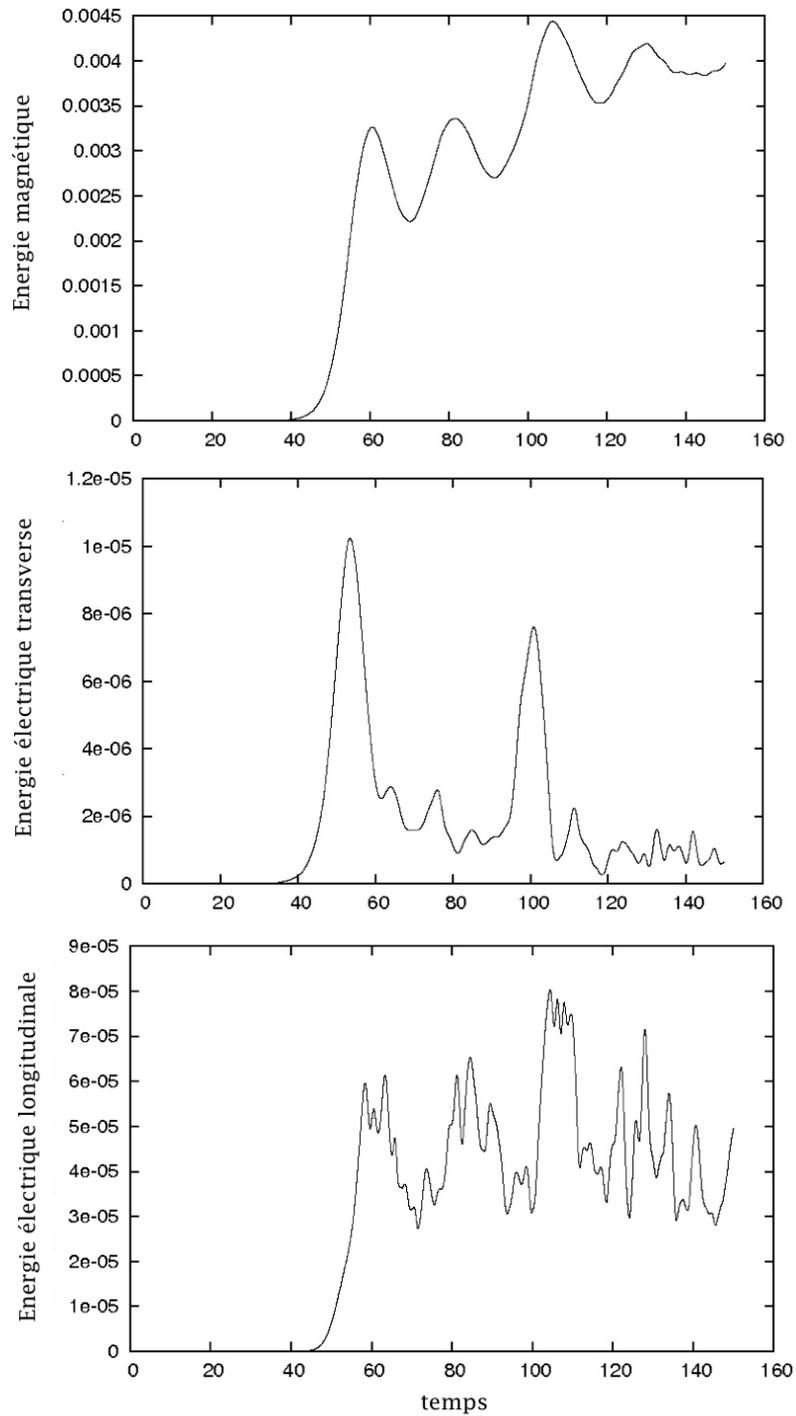


FIGURE 4.17.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_y)$  dans le modèle complet.



**FIGURE 4.18.:** Évolution temporelle des énergies magnétique, électrique transverse et électrique longitudinale, obtenue à partir du modèle multi-faisceaux.

### Espace des phases : évolution de la fonction de distribution

L'étude du faisceau ayant la quantité de mouvement la plus élevée  $C_2 = 2mv_{th_y}$  va maintenant être présentée sur la figure 4.19, où la fonction de distribution  $f_2(x, p_x, t)$  est tracée à différents instants du développement de l'instabilité. Dans la phase de croissance linéaire  $0 < t < 60$ , on remarque la formation de cinq structures de vortex. Il s'agit du phénomène de piégeage des particules par le champ magnétique  $B_z$ , modulé par un vecteur d'onde  $k = 5\Delta k$  pendant cette période (figure 4.16), phénomène qui sature la WI. À  $t = 67.5$  le système évolue en un régime complexe, comme on peut le voir dans l'espace des phases avec la fusion de plusieurs vortex. Le mode magnétique dominant devient d'une plus petite longueur d'onde, et à  $t = 150$ , on voit clairement la présence de trois vortex dans la fonction de distribution électronique, confirmant ainsi que le mode  $M = 3$  domine.

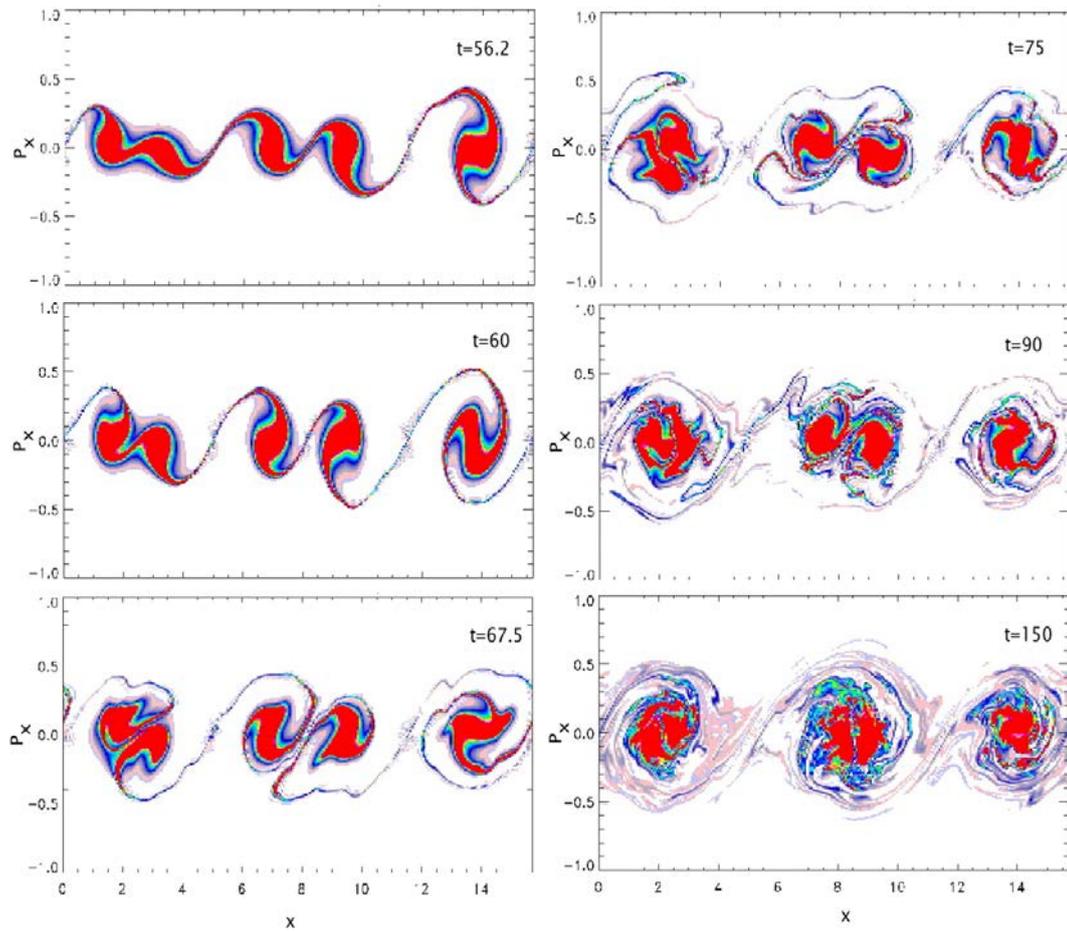
Des structures à petites échelles se sont transformées en structures grandes échelles, signature du processus de cascade inverse qui se produit dans le plasma.

La saturation de la WI liée au piégeage magnétique des particules, suivie d'un processus de fusion de vortex, se produit lorsque la fréquence de rebond devient comparable au taux de croissance de l'instabilité  $\gamma \approx 0.21$ . On en déduit que le développement de l'énergie électrostatique dans cette phase est dû au couplage entre l'instabilité Weibel et les ondes plasma présentes.

Comme nous l'avons vu dans le cas de la CFI, la fréquence de rebond  $\omega_B$  définissant le piégeage magnétique s'écrit :

$$\frac{\omega_B}{\omega_p} = \sqrt{\frac{kc}{\omega_p} \frac{p_y}{mc} \frac{\omega_c}{\omega_p}}$$

En considérant  $k \approx 3\Delta k$  (puisque le mode  $M = 3$  domine sur des temps longs),  $\langle p_y \rangle = 3/2v_{th_y} \approx 0.47$ , et  $\omega_c = 0.13$ , on obtient une fréquence de rebond  $\omega_B = 0.27$ . Entre le temps  $t = 56.2$  et  $t = 67.5$ , le vortex, situé entre  $12 < x < 16$ , effectue une rotation sur une demi période. On trouve ainsi une fréquence de rebond de  $\omega_B = \pi/11.3 \approx 0.278$ , qui est en parfait accord avec la fréquence de rebond théorique calculée, et proche du taux de croissance de l'instabilité, ce qui implique que la phase de saturation est déjà entamée.



**FIGURE 4.19.:** Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau  $C_2$ . On y voit des vortex se former avant de fusionner.

Le modèle multi-faisceaux utilisé ici offre une description plus complète et précise du comportement des particules dans l'espace des phases, notamment grâce à la possibilité d'étudier une population de particules seules. Après avoir étudié les faisceaux latéraux, on va suivre l'évolution du faisceau central  $C_0 = 0$ , dont les particules possèdent une quantité de mouvement canonique transverse nulle. La figure 4.20 représente le sous espace  $(x, p_x)$  de la fonction  $f_0(x, p_x, t)$  aux mêmes instants que ceux représentés sur la figure 4.19. La première image représente la fonction à  $t = 56.2$ . Cette dernière commence à être fortement modulée. Sur des temps plus longs, des structures apparaissent et des populations d'électrons accélérés sont clairement visibles dans l'espace des phases, avec la formation de "filaments".

Il est alors possible de faire deux remarques :

D'une part, le faisceau central ne semble pas affecté par la fusion de vortex visibles sur les autres faisceaux. En effet, cette population de particules n'est pas soumise au piégeage magnétique puisque la force de Lorentz associé est considérablement plus faible que pour les autres faisceaux, et plus faible que la force longitudinale électrostatique due à  $E_x$ .

D'autre part, en étudiant l'évolution de ce faisceau central, on remarque notamment un phénomène de trou dans l'espace des phases. En effet, sur la première image de la colonne de droite, à  $t = 75$ , on remarque entre  $0 < x < 4$ , deux cavités électroniques se former. Leur formation est conduite par la force électrostatique. Lorsque les cavités sont profondes, l'onde plasma déferle : de forts pics dans le champ électrostatique représenté sur la figure 4.21 en fonction de  $x$ , sont visibles à  $x \approx 1$  et  $x \approx 4$ . Ces valeurs correspondent en effet aux trous dans la densité visible dans l'espace des phases. Ces pics de champ électrostatique mènent à l'accélération des particules.

On peut également noter, qu'à la fin de la simulation, à  $t = 150$ , le faisceau central est dominé par un mode  $M = 6$ , mode double du mode magnétique. Il s'agit bien d'une signature du mode plasma.

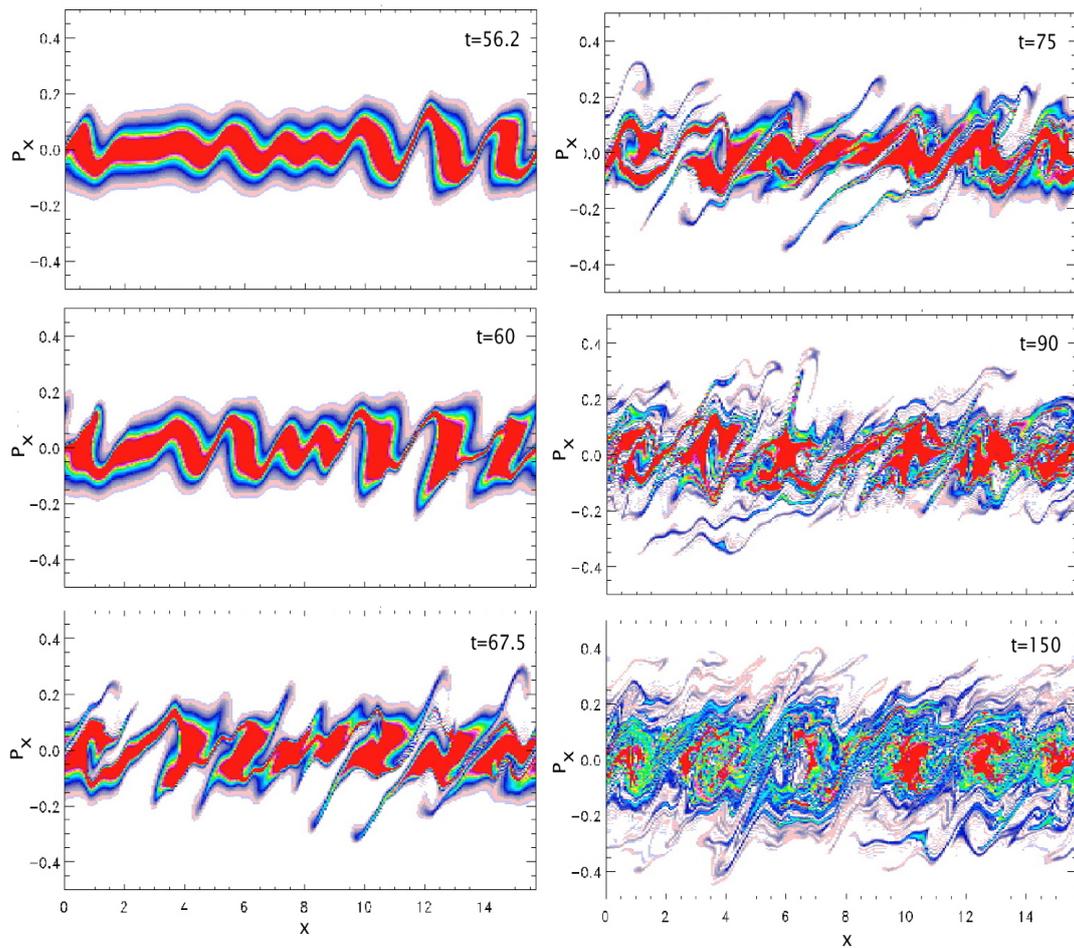


FIGURE 4.20.: Représentation de l'espace des phases  $(x, p_x)$  pour le faisceau central  $C_0$ .

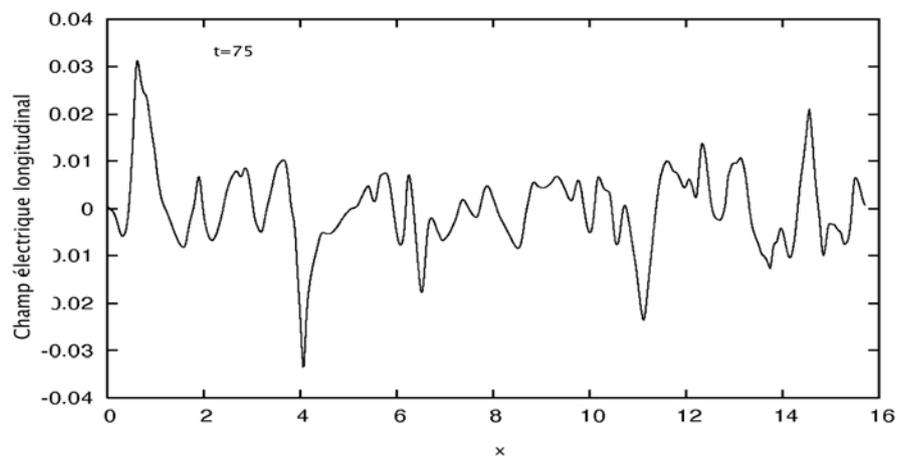


FIGURE 4.21.: Champ électrostatique  $E_x$  à  $t = 75$ . On y voit la formation de deux pics à  $x \approx 1$  et  $x \approx 4$ .

## 4.5. Conclusion

L'instabilité Weibel présente des caractéristiques communes avec l'instabilité de filamentation de courant, comme leur démarrage à partir d'une anisotropie (en vitesse pour CFI, en température pour WI), et le développement de forts champs électromagnétiques. Le modèle multi-faisceaux présenté dans le chapitre 3 est ici appliqué à l'instabilité Weibel. Il est ensuite couplé à un modèle *water-bag*, avec un cas "simple" de *bags* de même longueur. Ce modèle est intermédiaire entre le modèle hydrodynamique et le modèle cinétique complet. Il permet l'obtention d'équations algébriques, le plus souvent exploitables. Il s'agit d'un "sous-ensemble" du modèle de Vlasov, permettant d'éviter la résolution non-linéaire du système Vlasov-Maxwell par la résolution des équations du mouvement des contours du *bags*.

La relation de dispersion retrouvée dans ce modèle nous permet de le valider puisque la relation de dispersion analytique de l'instabilité Weibel est retrouvée. Le modèle *water-bag* permet ainsi de retrouver les bons taux de croissance.

La question sur le nombre de faisceaux à choisir pour décrire de façon précise le problème est traité. En comparant aux résultats obtenus à l'aide d'un modèle cinétique complet 1D2V, le modèle multi-faisceaux à 5 faisceaux semble ici le mieux adapté, puisqu'il nous permet de retrouver les caractéristiques principales de l'instabilité, en particulier le niveau d'amplitude atteint par les champs.

Le modèle multi-faisceaux permet de suivre l'évolution de la fonction de distribution de chacune des populations d'électrons. On a ainsi pu mettre en évidence la formation de structures de vortex dans l'espace des phases pour chacun des faisceaux. Pour les faisceaux avec un grand moment transverse (les particules les plus rapides), ces vortex sont créés par le piégeage magnétique. On note en effet la dominance du même mode dans le profil du champ magnétique et dans l'espace des phases. Un effet de cascade inverse se produit avec la formation de grandes structures, suite à la fusion de certains vortex. Pour le faisceau central, il est possible de conclure que l'origine des vortex est de nature différente. En effet, la force électrostatique est dominante sur la force de Lorentz, les particules sont alors piégées par l'action de cette force électrostatique. On y retrouve un mode double par rapport au mode dominant des autres faisceaux, ce qui est une signature des modes plasmas.

## Conclusion générale et perspectives

L'intérêt porté à l'instabilité de filamentation de courant (CFI) et l'instabilité Weibel (WI), regroupées sous le nom d'instabilités de type Weibel, est devenu important au fil des années, notamment depuis les années 1990 en astrophysique et avec l'apparition de nouveaux scénarios pour la fusion inertielle. Les deux principaux sujets à l'origine de cet engouement sont le processus d'allumage rapide, où l'instabilité Weibel pourrait empêcher correctement le dépôt de l'énergie au cœur de la cible, et le phénomène de sursauts gamma (GRB), où les instabilités sont présentes à travers des processus de chocs.

Ces instabilités étant au cœur de problèmes d'astrophysique et de physique de l'interaction laser-plasma, une étroite collaboration a pu se mettre en place entre l'équipe de modélisation des plasmas chauds de Nancy, et l'équipe de physique du *Dipartimento di Fisica E. Fermi* de Pise, dans le but d'approfondir les connaissances de l'instabilité, particulièrement dans le régime relativiste.

L'instabilité de filamentation de courant est conduite par une anisotropie en vitesse. Par exemple, lorsqu'un faisceau d'électrons est créé dans un plasma, celui-ci réagit de façon à conserver sa quasineutralité en créant un "courant de retour". Dans la direction des faisceaux, le courant total est nul à l'équilibre, mais la configuration est instable. Si une perturbation infinitésimale transverse aux faisceaux est appliquée, la trajectoire des particules est modifiée sous l'action de la force de Lorentz. Un courant est alors créé, impliquant un champ magnétique en accord avec les équations de Maxwell.

La croissance des champs électromagnétiques va alors influencer les particules : les électrons vont se retrouver piégés. Ce piégeage magnétique, à l'origine de la saturation de l'instabilité, est particulièrement visible dans l'espace des phases de la fonction de distribution avec la formation de structures de vortex.

Le piégeage des particules est accompagné d'un phénomène de déferlement (*wave-breaking*) de l'onde plasma. En effet, on retrouve périodiquement la formation de forts gradients dans le profil du champ électrique dans la phase de saturation de l'instabilité, correspondant à de forts pics de densité en accord avec l'équation de Poisson. Il y a alors apparition de zones de compression et de raréfaction de la densité.

L'instabilité de filamentation de courant présente un aspect cinétique fort. Elle est dite "de type Weibel" puisqu'elle présente des points communs à l'instabilité Weibel, tels que la forte activité électrostatique ou encore le développement d'un fort champ magnétique.

L'instabilité Weibel est une instabilité cinétique conduite par une anisotropie de température

ayant notamment pour conséquence de développer un fort champ magnétique à l'intérieur d'un plasma initialement non magnétisé.

Les particules soumises à la force de Lorentz sont piégées par le champ magnétique créé, menant ainsi à la saturation de l'instabilité.

Tout comme l'instabilité de filamentation de courant, l'instabilité Weibel présente une forte activité électrostatique. Cette activité joue un rôle déterminant dans la phase de saturation de l'instabilité.

L'étude de cette instabilité dans le cas relativiste présente des difficultés, notamment la description de l'anisotropie de température ou encore l'étude du régime de saturation.

L'originalité des travaux présentés dans cette thèse, menés dans le cadre d'une cotutelle avec l'Université de Pise, ont eu pour objectif principal de développer un modèle analytico-numérique, capable d'unifier l'instabilité Weibel et l'instabilité de filamentation de courant. Il s'agit du modèle *multi-faisceaux*. Basé sur une technique de réduction en dimension de l'espace des phases, il permet de prendre en compte l'invariance du moment canonique transverse.

Le modèle présente différents avantages. D'un point de vue analytique, le modèle multi-faisceaux nous permet d'obtenir dans l'approximation fluide, une relation de dispersion relativiste de forme algébrique, par conséquent très riche. Il s'agit d'une somme discrète sur l'ensemble des faisceaux. Elle nous donne une approche générale et exacte capable de prendre en compte toute anisotropie de la fonction de distribution. Elle nous permet à la fois de traiter l'instabilité Weibel et l'instabilité de filamentation de courant selon la condition initiale choisie.

D'un point de vue numérique, le modèle multi-faisceaux permet un gain de temps de calculs comparé au modèle cinétique complet, à physique identique ( $N = 1, \dots, 5, \dots$  faisceaux comparés à  $N_{p_y}$  de plusieurs centaines de points).

Le modèle multi-faisceaux permet également de résoudre une équation de Vlasov de plus faible dimensionnalité et de pouvoir ainsi suivre faisceau par faisceau la dynamique des électrons associés. Ainsi, la forte activité électrostatique de l'instabilité Weibel a par exemple été mise en évidence en étudiant la dynamique du faisceau central. Dans un cas complet, si plusieurs modes sont excités, il est difficile de pouvoir séparer la contribution de chacun des faisceaux.

L'invariance du moment canonique transverse nous permet de créer ce modèle cinétique analytico-numérique pertinent, sans réduire la physique décrite. Pour des modèles 1D, le plasma étant divisé en  $N$  faisceaux, le modèle revient à résoudre  $N$  équations de Vlasov à 1D-1V ( $x, p_x$ ) couplées aux équations de Maxwell.

Le cas  $N = 1$  correspond à une modélisation froide (de type Dirac) dans la direction perpendiculaire. Pour  $N = 2$  la physique correspond **exactement** au cas de l'instabilité de filamentation de courant, avec deux faisceaux qui se propagent en sens opposé. Les cas  $N \geq 3$  peuvent être utilisés pour décrire l'instabilité Weibel avec la description d'une anisotropie de température. L'utilisation de plusieurs faisceaux permet notamment de décrire n'importe quel type de fonction de distribution, notamment dans le cas relativiste.

Il s'agit ainsi d'un modèle de base, mais qui présente toujours certaines difficultés dans le cas relativiste, notamment pour la forme de la fonction de distribution.

Il est encore possible de simplifier le problème en couplant le modèle multi-faisceaux à un modèle *water-bag* dans la direction longitudinale.

Nous avons ainsi montré qu'avec un faible nombre de faisceaux (équivalent à un petit nombre de moments fluides), le modèle analytique multi-faisceaux est capable à la fois d'unifier les instabilités de type Weibel et de retrouver la physique et les caractéristiques principales des instabilités. Pour des problèmes nécessitant une analyse très fine, le nombre de faisceaux peut être

augmenté. Ce modèle est également moins coûteux numériquement que le cas complet 1D-2V, tant en temps de calculs qu'en espace mémoire requis, la variable  $p_y$  devenant un paramètre du modèle. Les avantages du modèle multi-faisceaux se superposent aux avantages du code Vlasov.

Le modèle multi-faisceaux utilisé dans le cas 1D exclut de fait le couplage entre l'instabilité de type Weibel à l'instabilité longitudinale double faisceaux. L'étude d'un système à deux dimensions est nécessaire. Le code 2D-2V/3V développé à l'Université de Pise sous l'impulsion de F. Califano et F. Valentini, est un outil actuellement en exploitation. Il va nous permettre l'étude de l'instabilité électromagnétique faisceau-plasma (*Electromagnetic beam-plasma instability*), mode résultant du couplage de l'instabilité de filamentation de courant avec l'instabilité électrostatique faisceau-plasma (encore appelée double-faisceaux dans le cas de deux faisceaux symétriques).

Le modèle multi-faisceaux peut être adapté à l'étude du couplage à 2D. Le cas 2D-3V (deux dimensions spatiales, et trois dimensions dans l'espace des vitesses  $(x, y, p_x, p_y, p_z)$ ) présente la possibilité d'utiliser le modèle multi-faisceaux dans la direction manquante  $z$ . Comme dans le cas 1D-2V, les propriétés de l'hamiltonien nous permettent d'utiliser l'invariance du moment canonique selon  $Oz$ . On peut ainsi étendre le problème et appliquer le modèle analytique multi-faisceaux à la direction  $p_z$ . Les problèmes 2D-2V présenteraient plus de difficultés, mais l'utilisation d'un invariant adiabatique dans la direction  $y$  pourrait être une possibilité.

Le modèle multi-faisceaux présente de nombreux avantages, et ouvre ainsi d'autres perspectives de travail. Le cas  $N = 1$  faisceau pourrait décrire à lui seul une température. En effet, en introduisant une oscillation du faisceau, celui-ci pourrait décrire une certaine température et ainsi permettre l'étude des instabilités.

L'étude de cas très relativistes dans un système 1D-3V est également possible à l'aide d'un modèle se basant sur le modèle multi-faisceaux : le modèle "multi-anneaux". En considérant une polarisation circulaire, qui permet de simplifier le calcul de la relation de dispersion, les particules sur un cercle auraient leur moment canonique transverse constant, ce qui pourrait faire l'objet d'un nouveau modèle, le modèle "multi-anneaux" faisant suite au modèle multi-faisceaux.





## Schéma 1D2V

Les résultats présentés dans ce manuscrit sont issus de code Vlasov relativiste 1D2V  $(x, p_x, p_y)$ . L'équation de Vlasov à résoudre est la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} + e \left( E_x + \frac{p_y}{m\gamma} B_z \right) \frac{\partial f}{\partial p_x} + e \left( E_y - \frac{p_x}{m\gamma} B_z \right) \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0 \quad (\text{A.1})$$

avec le facteur de Lorentz

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p_x^2 + p_y^2}{m^2 c^2}} \quad (\text{A.2})$$

liant le champ d'advection à la variable advectée.

Cette équation est couplée de façon auto-cohérente aux équations de Maxwell :

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 J_y + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{e(n(x,t) - n_0)}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A.5})$$

Nous avons démontré que le schéma de *time-splitting* est possible à condition d'effectuer une advection multi-dimensionnelle dans l'espace des quantités de mouvement. On effectue dans un premier temps une advection 1D sur  $t_n \leq t \leq t_{n+1/2}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.6})$$

L'advection dans l'espace des vitesses peut se diviser en trois étapes successives à  $t_{n+1/2}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e E_x \frac{\partial f}{\partial p_x} = 0 \quad \text{sur un demi-pas de temps (advection 1D),} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e \frac{p_y}{m\gamma} B_z \frac{\partial f}{\partial p_x} - e \frac{p_x}{m\gamma} B_z \frac{\partial f}{\partial p_y} = 0 \quad \text{sur un pas de temps (advection 2D),} \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + e E_x \frac{\partial f}{\partial p_x} = 0 \quad \text{sur un demi-pas de temps (advection 1D).} \quad (\text{A.9})$$

Pour finir, on réitère l'advection 1D sur  $t_{n+1/2} \leq t \leq t_{n+1}$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\partial f}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.10})$$

La résolution de l'équation de Vlasov peut finalement se ramener aux étapes suivantes :

$$f_1(x, p_x, p_y) = f_n \left( x - \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\Delta t}{2}, p_x, p_y \right) \quad (\text{A.11})$$

$$f_2(x, p_x, p_y) = f_1 \left( x, p_x - qE_x \frac{\Delta t}{2}, p_y \right) \quad (\text{A.12})$$

$$f_3(x, p_x, p_y) = f_2 \left( x, p_x, p_y - qE_y \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$f_4(x, p_x, p_y) = f_3 \left( x, p_x - q \frac{p_y}{m\gamma} B_z \Delta t, p_y + q \frac{p_x}{m\gamma} B_z \Delta t \right) \quad (\text{A.14})$$

$$f_5(x, p_x, p_y) = f_4 \left( x, p_x, p_y - qE_y \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$f_6(x, p_x, p_y) = f_5 \left( x, p_x - qE_x \frac{\Delta t}{2}, p_y \right) \quad (\text{A.16})$$

$$f_{n+1}(x, p_x, p_y) = f_6 \left( x - \frac{p_x}{m\gamma} \frac{\Delta t}{2}, p_x, p_y \right) \quad (\text{A.17})$$

Les paramètres connus à l'instant  $t_n$  seront notés  $x^n$ . Les valeurs connues (et donnés dans le code à  $t_n = t_0$ ) sont  $f^n$ ,  $E_x^n$ ,  $B_z^n$ , et  $E_y^{n-1/2}$  donné à un demi-pas de temps inférieur  $t_{n-1/2}$  de façon à pouvoir appliquer le schéma numérique. On rappelle que pour effectuer les schémas d'advection décrits précédemment, on doit pouvoir connaître le champ d'advection  $\mathbf{U}$  à l'instant  $t_{n+1/2}$ . Les principales étapes de résolution du système Vlasov-Maxwell 1D2V sont les suivantes :

1. Le code calcule la valeur de la densité de courant  $J_y$  et la densité  $n$  à l'instant  $t_n$  à partir de la valeur de la fonction de distribution  $f^n$  :

$$J_y^n = \frac{e}{m} \int \frac{p_y f^n(x, p_x, p_y)}{\gamma} d^2 p \quad (\text{A.18})$$

$$n^n = \int \frac{f^n(x, p_x, p_y)}{\gamma} d^2 p \quad (\text{A.19})$$

2. Le calcul de  $E_y^{n+1/2}$  se fait à partir de l'équation (A.3) par un schéma de *leap-frog* (sautemouton) centré à la fois dans le temps et l'espace :

$$E_{yj}^{n+1/2} = E_{yj}^{n-1/2} - \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x} (B_{zj+1/2}^n - B_{zj-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0} J_{yj}^n \quad (\text{A.20})$$

3. Le calcul de  $B_z^{n+1}$  se fait à partir de l'équation (A.4) et des champs  $B_z^n$  et  $E_y^{n+1/2}$  :

$$B_{zj+1/2}^{n+1} = B_{zj+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{yj+1}^{n+1/2} - E_{yj}^{n+1/2}) \quad (\text{A.21})$$

4. Le champ magnétique  $B_{zj+1/2}^{n+1}$  est utilisé pour calculer la valeur du champ à l'instant  $t_{n+1/2}$  :

$$B_z^{n+1/2} = \frac{B_z^n + B_z^{n+1}}{2}.$$

- 
5. Le *shift* (déplacement) sur  $x$  pour la fonction de distribution est effectué sur un demi-pas de temps, suivant l'équation (A.11). À partir de cette nouvelle valeur de  $f$ , la densité électronique est calculée. En utilisant l'équation de Poisson (A.5) le champ électrique  $E_x$  à l'instant  $t_{n+1/2}$  est retrouvé.
  6. On effectue ensuite le schéma d'advection définie par les équations (A.12)-(A.17) afin de trouver la valeur de  $f$  à  $t_{n+1}$ . Le vecteur d'advection est donné par :

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \left( \frac{p_x}{m\gamma}, e \left( E_x^{n+1/2} + \frac{(p_y^{n+1/2} B_z^{n+1/2})}{m\gamma} \right), e \left( E_y^{n+1/2} - \frac{(p_x^{n+1/2} B_z^{n+1/2})}{m\gamma} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$



# B

## Calcul de la relation de dispersion 1D2V

Les équations nous permettant de calculer la relation de dispersion sont les équations de continuité, du mouvement fluide et de Maxwell, s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_\alpha \mathbf{p}_\alpha}{m\gamma} \right) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\alpha}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{p}_\alpha = e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha \quad (\text{B.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha n_\alpha \quad (\text{B.6})$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  sont les champs magnétique et électrique, et  $\mathbf{j}_\alpha = en_\alpha \mathbf{v}_\alpha$  est la densité de courant associée au faisceau  $\alpha$ .

On considère initialement un plasma homogène dans lequel se propagent, le long de l'axe  $Oy$ , deux faisceaux d'électrons uniformes. On limite notre analyse à une onde électromagnétique polarisée linéairement, avec  $(0, E_y, B_z)$ . Les ondes sont supposées planes, de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k_0 \mathbf{e}_x$ . Le champ électrique plasma s'écrit quant à lui  $(E_x, 0, 0)$ .

L'analyse linéaire du modèle fluide consiste à introduire une perturbation initiale en onde plane de la forme  $\exp(i(kx - \omega t))$ . Les indices 0 et 1 représenteront respectivement les valeurs à l'équilibre et les valeurs perturbées, avec notamment  $n_\alpha = n_{0,\alpha} + n_{1,\alpha}$  et  $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_{0,\alpha} + \mathbf{v}_{1,\alpha}$ . À l'équilibre, le plasma est libre de tout champ.

À l'ordre 1, les équations (B.1)-(B.6) deviennent :

$$\frac{\partial n_{1\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{n_{0\alpha} p_{1\alpha}}{m \gamma_{0\alpha}} \right) = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{1\alpha}}{\partial t} + \mathbf{u}_{0\alpha} \cdot \nabla \mathbf{p}_{1\alpha} = e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{0\alpha} \times \mathbf{B}_1) \quad (\text{B.8})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (\text{B.9})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} + \mu_0 \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{1\alpha} \quad (\text{B.11})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\alpha} n_{1\alpha} \quad (\text{B.12})$$

La relation de dispersion se calcule à partir de l'équation de Maxwell-Faraday (B.9) et Maxwell-Ampère (B.11) :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) = \nabla \times -\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} \quad (\text{B.13})$$

avec les termes  $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{j}_1$  à calculer

### Calcul du facteur de Lorentz

Dans un premier temps, nous linéarisons le facteur de Lorentz du faisceau  $\alpha$  :

$$\gamma_{\alpha} = \sqrt{1 + \frac{p_{\alpha}^2}{m^2 c^2}}$$

avec  $\mathbf{p}_{\alpha} = \mathbf{p}_{0\alpha} + \mathbf{p}_{1\alpha}$  la quantité de mouvement du faisceau  $\alpha$ .

À l'ordre 1, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha}^2 &= 1 + \frac{p_{\alpha}^2}{m^2 c^2} = 1 + \frac{p_{0\alpha}^2}{m^2 c^2} + 2 \frac{\mathbf{p}_{0\alpha} \mathbf{p}_{1\alpha}}{m^2 c^2} \\ &= \gamma_{0\alpha}^2 \left( 1 + 2 \frac{\mathbf{p}_{0\alpha} \mathbf{p}_{1\alpha}}{m^2 c^2 \gamma_{0\alpha}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

où  $\gamma_{0\alpha}$  est la contribution à l'équilibre du facteur de Lorentz :

$$\gamma_{0\alpha} = \sqrt{1 + \frac{p_{0\alpha}^2}{m^2 c^2}}$$

En effectuant un développement limité de l'équation (B.14), on peut décomposer le facteur de Lorentz sous la forme :

$$\gamma_{\alpha}^{-1} = \frac{1}{\gamma_{0\alpha}} \left( 1 - \frac{\mathbf{p}_{0\alpha} \mathbf{p}_{1\alpha}}{m^2 c^2 \gamma_{0\alpha}^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

## Calcul de la vitesse fluide

En utilisant le facteur de Lorentz défini par l'équation (B.15), la vitesse fluide s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\alpha &= \mathbf{u}_{0\alpha} + \mathbf{u}_{1\alpha} = \frac{\mathbf{p}_{0\alpha} + \mathbf{p}_{1\alpha}}{m\gamma_\alpha} \\ &= \frac{\mathbf{p}_{0\alpha}}{m\gamma_{0\alpha}} + \frac{\mathbf{p}_{1\alpha}}{m\gamma_{0\alpha}} - \frac{\mathbf{p}_{0\alpha}\mathbf{p}_{1\alpha}}{m^3 c^2 \gamma_{0\alpha}^3} \mathbf{p}_{0\alpha}\end{aligned}$$

Cette équation nous permet d'identifier alors :

$$\mathbf{u}_{0\alpha} = \frac{\mathbf{p}_{0\alpha}}{m\gamma_{0\alpha}} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{u}_{1\alpha} = \frac{\mathbf{p}_{1\alpha}}{m\gamma_{0\alpha}} - \frac{\mathbf{p}_{0\alpha}\mathbf{p}_{1\alpha}}{m^3 c^2 \gamma_{0\alpha}^3} \mathbf{p}_{0\alpha} \quad (\text{B.17})$$

La dérivée temporelle de  $\mathbf{u}_{1,\alpha}$  s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{1\alpha}}{\partial t} = \frac{1}{m\gamma_{0\alpha}} \frac{\partial \mathbf{p}_{1\alpha}}{\partial t} - \frac{1}{m^3 c^2 \gamma_{0\alpha}^3} \mathbf{p}_{0\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{1\alpha}}{\partial t} \mathbf{p}_{0\alpha} \quad (\text{B.18})$$

L'équation du mouvement fluide linéarisée (B.8) nous permet de calculer le premier terme de l'équation (B.18) :

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{1,\alpha}}{\partial t} = -(\mathbf{u}_{0,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{p}_{1,\alpha} - e(\mathbf{E}_1 + \mathbf{u}_{0,\alpha} \times \mathbf{B}_1) \quad (\text{B.19})$$

On fait l'hypothèse que  $\mathbf{u}_{0,\alpha} \perp \nabla$  et on suppose une solution de type  $e^{-i\omega t}$ . L'équation (B.9) :

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}_1$$

nous permet de calculer le second terme du membre de droite de (B.18) :

$$\mathbf{p}_{0,\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_{1,\alpha}}{\partial t} = -e \mathbf{p}_{0,\alpha} \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{ie}{\omega} \mathbf{p}_{0,\alpha} \cdot (\mathbf{u}_{0,\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1)) \quad (\text{B.20})$$

avec le membre de droite (B.20) nul. En insérant ces résultats dans (B.18), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{1,\alpha}}{\partial t} = -\frac{1}{m\gamma_{0,\alpha}} \left[ (\mathbf{u}_{0,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{p}_{1,\alpha} + e \left( \mathbf{E}_1 - \frac{i}{\omega} \mathbf{u}_{0,\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) \right) \right]$$

Soit :

$$\boxed{\mathbf{u}_{1,\alpha} = -\frac{i}{m\gamma_{0,\alpha}\omega} \left[ (\mathbf{u}_{0,\alpha} \cdot \nabla) \mathbf{p}_{1,\alpha} + e \left( \mathbf{E}_1 - \frac{i}{\omega} \mathbf{u}_{0,\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) \right) \right]} \quad (\text{B.21})$$

## Calcul de la densité

L'équation de continuité s'écrit au premier ordre :

$$\frac{\partial n_{1\alpha}}{\partial t} = -n_{0\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} - u_{0\alpha} \cdot \nabla n_{1\alpha}$$

On a fait l'hypothèse que  $u_{0\alpha}$  est perpendiculaire à la direction  $Ox$ . On a ainsi :

$$\frac{\partial n_{1\alpha}}{\partial t} = -n_{0\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{1\alpha} \quad (\text{B.22})$$

On introduit l'expression obtenue pour la vitesse fluide (B.21) dans la relation de continuité, et :

$$\frac{\partial n_{1,\alpha}}{\partial t} = n_{0,\alpha} \frac{ie}{m\gamma_{0,\alpha}\omega} \left[ \nabla \cdot \mathbf{E}_1 + \frac{i}{\omega} \nabla \cdot (\mathbf{u}_{0,\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1)) \right]$$

$$\boxed{\frac{\partial n_{1,\alpha}}{\partial t} = n_{0,\alpha} \frac{ie}{m\gamma_{0,\alpha}\omega} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{en_{0,\alpha}u_{0,\alpha}}{m\gamma_{0,\alpha}\omega^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}} \quad (\text{B.23})$$

### Calcul de la densité de courant

La densité de courant et sa dérivée temporelle s'écrivent :

$$\mathbf{j}_1 = e \sum_{\alpha} (n_{0,\alpha} \mathbf{u}_{1,\alpha} + n_{1,\alpha} \mathbf{u}_{0,\alpha})$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = e \sum_{\alpha} \left( n_{0,\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_{1,\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial n_{1,\alpha}}{\partial t} \mathbf{u}_{0,\alpha} \right)$$

En insérant l'équation obtenue pour la vitesse fluide (B.21) et pour la densité (B.23), on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial t} = -e \sum_{\alpha} n_{0,\alpha} \left[ -\frac{e}{m\gamma_{0,\alpha}} \mathbf{E}_1 + \frac{ie}{m\gamma_{0,\alpha}\omega} (\mathbf{u}_{0,\alpha} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1)) + \frac{e}{m^3 c^2 \gamma_{0,\alpha}^3} (\mathbf{p}_{0,\alpha} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{p}_{0,\alpha} \right]$$

$$-e \sum_{\alpha} \left[ \frac{ie}{m\gamma_{0,\alpha}\omega} n_{0,\alpha} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{e}{m\gamma_{0,\alpha}\omega^2} n_{0,\alpha} u_{0,\alpha} \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \right] \mathbf{u}_{0,\alpha} \quad (\text{B.24})$$

### Calcul de la relation de dispersion

On normalise pour la suite les équations avec :

$$\hat{p} = \frac{p}{mc}; \quad \hat{n} = \frac{n}{n_0}; \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{\omega_p}; \quad \hat{k} = \frac{k}{\frac{\omega_p}{c}}$$

L'équation sur la dérivée temporelle de la densité de courant (B.24) est introduite dans l'équation initiale (B.13), puis projeter sur les trois axes. On obtient alors :

Suivant ( $Ox$ ) :

$$E_x \left( 1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}} \right) = \frac{k}{\omega^3} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}^2} E_y \quad (\text{B.25})$$

Suivant ( $Oy$ ) :

$$E_y \left( 1 - \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}^2}{\gamma_{0,\alpha}^3} - \frac{k^2}{\omega^4} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}^2}{\gamma_{0,\alpha}^3} \right) = \frac{k}{\omega^3} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}^2} E_x \quad (\text{B.26})$$

Suivant ( $Oz$ ) :

$$E_z \left( 1 - \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}} \right) = 0 \quad (\text{B.27})$$

On pose :

$$A = \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha}}{\gamma_{0,\alpha}}, \quad B = \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} p_{0,\alpha}}{(\gamma_{0,\alpha})^2}, \quad C = \sum_{\alpha} \frac{n_{0,\alpha} (p_{0,\alpha})^2}{(\gamma_{0,\alpha})^3}$$

Les équations (B.25), (B.26) et (B.27) deviennent :

Suivant ( $Ox$ ) :

$$E_x \left(1 - \frac{A}{\omega^2}\right) = \frac{k}{\omega^3} B E_y \quad (\text{B.28})$$

Suivant ( $Oy$ ) :

$$E_y \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{A}{\omega^2} + \frac{C}{\omega^2} - \frac{k^2}{\omega^4} C\right) = \frac{k}{\omega^3} B E_x \quad (\text{B.29})$$

Suivant ( $Oz$ ) :

$$E_z \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{A}{\omega^2}\right) = 0 \quad (\text{B.30})$$

En combinant (B.28) et (B.29), on trouve la relation de dispersion générale normalisée :

$$\boxed{\omega^6 - \omega^4[k^2 + 2A - C] + \omega^2[k^2(A - C) + A(A - C)] + k^2[AC - B^2] = 0} \quad (\text{B.31})$$

### Cas non relativiste

Dans l'approximation non relativiste, on note que :  $B \approx \sum_{\alpha} n_{0,\alpha} p_{0,\alpha} \approx 0$ . De plus,  $C \ll A$  puisque  $u_{0,\alpha}^2 \ll 1$ .

On obtient alors une équation non-relativiste normalisée de la forme :

$$[\omega^2 - A][\omega^4 - \omega^2[k^2 + A] - k^2 C] = 0 \quad (\text{B.32})$$

avec un découplage entre

- le mode électrostatique :  $[\omega^2 - A] = 0$
- et le mode électromagnétique :  $[\omega^4 - \omega^2[k^2 + A] - k^2 C] = 0$

En couplant nos équations sur les approximations initiales :

$$\sum_{\alpha} n_{0,\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad n_{0,1} u_{0,1} = n_{0,2} u_{0,2}$$

on obtient une relation sur les vitesses :

$$u_{0,2} = \frac{1 - n_{0,2}}{n_{0,2}} u_{0,1} \quad u_{0,1} = \frac{1 - n_{0,1}}{n_{0,1}} u_{0,2} \quad (20)$$

En substituant ces relations dans l'équation (B.32), on obtient finalement l'équation de dispersion non relativiste :

$$\boxed{\omega^4 - \omega^2[k^2 + 1] - k^2 v_{0,1} v_{0,2} = 0} \quad (21)$$



## Bibliographie

- [1] E. S. Weibel, *Spontaneously growing transverse waves in a plasma due to an anisotropic velocity distribution*, Phys. Rev. Lett., **2**, 83, 1959.
- [2] B. D. Fried, *Mechanism for instability of transverse plasma waves*, Phys. Fluids, **2**, 337, 1959.
- [3] A. Bret, L. Gremillet et M. E. Dieckmann, *Multidimensional electron beam-plasma instabilities in the relativistic regime*, Phys. Plasmas, **17**, 120501, 2010.
- [4] M. Lazar, R. Schlickeiser, R. Wielebinski et S. Poedts, *Cosmological effects of Weibel-type instabilities*, Astrophys. J., **693**, 1133, 2009.
- [5] Y. Fujita et T. N. Kato, *The generation of magnetic fields by the Weibel instability*, Astron. Nachr., **327**, 443, 2006.
- [6] M. V. Medvedev, L. O. Silva et M. Kamionkowski, *Cluster magnetic fields from large-scale-structure and galaxy-cluster shocks*, Astrophys. J., **642**, L1, 2006.
- [7] R. Schlickeiser et P. K. Schukla, *Cosmological magnetic field generation by the Weibel instability*, Astrophys. J., **599**, L57, 2003.
- [8] M. Lazar, R. Schlickeiser et P. K. Schukla, *Cumulative effect of the filamentation and Weibel instabilities in counterstreaming thermal plasmas*, Phys. Plasmas, **13**, 102107, 2006.
- [9] T. Piran, *GRBs - A puzzle being resolved*, Phys. Rep., **314**, 575, 1999.
- [10] M. V. Medvedev et A. Loeb, *Generation of magnetic fields in relativistic shock of gamma-ray burst sources*, Astrophys. J., **526**, 697, 1999.
- [11] L. O. . Silva, R. A. Fonseca, J. W. Tonge, J. M. Dawson, W. B. Mori et M. V. Medvedev, *Interpenetrating plasma shells : near-equipartition magnetic field generation and nonthermal particle acceleration*, Astrophys. J., **596**, L121, 2003.
- [12] K.-I. Nishikawa, J. Niemec, P. E. Hardee, M. V. Medvedev, H. Sol, Y. Mizuno, B. Zhang, M. Pohl, M. Oka et D. H. Hartmann, *Weibel instability and associated strong fields in a fully three-dimensional simulation of a relativistic shock*, Astrophys. J., **698**, L13, 2009.
- [13] C. H. Jaroschek, H. Lesch et R. A. Treumann, *Self-consistent diffusive lifetimes or Weibel magnetic fields in gamma-ray bursts*, Astrophys. J., **616**, 1065, 2004.
- [14] M. E. Dieckmann, P. K. Shukla et L. O. C. Drury, *The formation of a relativistic partially electromagnetic planar plasma shock*, Astrophys. J., **675**, 586, 2008.

- [15] M. V. Medvedev et O. Zakutnyanya, *Magnetic fields and cosmic rays in GRBs. A self-similar collisionless foreshock*, *Astrophys. J.*, **696**, 2269, 2009.
- [16] F. Califano, N. Attico, F. Pegoraro, G. Bertin et S. V. Bulanov, *Fast formation of magnetic islands in a plasma in the presence of counterstreaming electrons*, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 5293, 2001.
- [17] S. Zenitani et M. Hesse, *The role of the Weibel instability at the reconnection jet front in relativistic pair plasma reconnection*, *Phys. Plasmas*, **15**, 022101, 2008.
- [18] S. Lu, Q. Lu, X. Shao, P. H. Yoon et S. Wang, *Weibel instability and structures of magnetic island in anti-parallel collisionless magnetic reconnection*, *Phys. Plasmas*, **18**, 072105, 2011.
- [19] A. Benuzzi-Mounaix, *La fusion nucléaire : Un espoir pour une énergie propre et inépuisable*. Belin, (2008).
- [20] J.-L. Bobin, *La fusion thermonucléaire contrôlée*. EDP Sciences, (2011).
- [21] M. Tabak, J. Hammer, M. E. Glinsky, W. L. Kruer, S. C. Wilks, J. Woodworth, E. M. Campbell et M. D. Perry, *Ignition and high gain with ultrapowerful lasers*, *Phys. Plasmas*, **1**, 1626, 1994.
- [22] S. Baton, *Étude expérimentale du transport électronique dans le cadre de l'allumeur rapide*. Mém. d'Habilitation à Diriger des Recherches, Laboratoire pour l'Utilisation des Lasers Intenses, 2008.
- [23] A. Pukhov et J. Meyer-ter Vehn, *Laser hole boring into overdense plasma and relativistic electron currents for fast ignition of icf targets*, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 2686, 1997.
- [24] Y. Sentoku, K. Mima, S. Kojima et H. Ruhl, *Magnetic instability by the relativistic laser pulses in overdense plasmas*, *Phys. Plasmas*, **7**, 689, 2000.
- [25] Y. Sentoku, K. Mima, Z. M. Sheng, P. Kaw, K. Nishihara et K. Nishikawa, *Three-dimensional particle-in-cell simulations of energetic electron generation and transport with relativistic laser pulses in overdense plasmas*, *Phys. Rev. E*, **65**, 046408, 2002.
- [26] L. O. Silva, R. A. Fonseca, J. W. Tonge, W. B. Mori et J. M. Dawson, *On the role of the purely transverse Weibel instability in fast ignitor scenarios*, *Phys. Plasmas*, **9**, 2458, 2002.
- [27] J. M. Hill, M. H. Key, S. P. Hatchett et R. R. Freeman, *Beam-Weibel filamentation instability in near-term and fast-ignition experiments*, *Phys. Plasmas*, **12**, 082304, 2005.
- [28] A. Karmakar, N. Kumar, A. Pukhov et O. Polomarov, *Three-dimensional filamentary structures of a relativistic electron beam in fast ignition plasmas*, *Phys. Plasmas*, **15**, 120702, 2008.
- [29] A. Karmakar, N. Kumar, A. Pukhov, O. Polomarov et G. Shvets, *Detailed particle-in-cell simulations on the transport of a relativistic electron beam in plasmas*, *Phys. Rev. E*, **80**, 016401, 2009.
- [30] M. Tatarakis, F. N. Beg, E. L. Clark, A. E. Dangor, R. D. Edwards, R. G. Evans, T. J. Goldsack, K. W. D. Ledingham, P. A. Norreys, M. A. Sinclair, M.-S. Wei, M. Zepf et K. Krushelnick, *Propagation instabilities of high-intensity laser-produced electron beams*, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 175001, 2003.
- [31] R. Jung, J. Osterholz, K. Löwenbrück, S. Kiselev, G. Pretzler, A. Pukhov, O. Willi, S. Kar, M. Borghesi, W. Nazarov, S. Karsch, R. Clarke et D. Neely, *Study of electron-beam propagation through preionized dense foam plasmas*, *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 195001, 2005.
- [32] T. V. Liseikina, F. Califano, V. A. Vshivkov, F. Pegoraro et S. V. Bulanov, *Small-scale electron density and magnetic-field structures in the wake of an ultraintense laser pulse*, *Phys. Rev. E*, **60**, 5991, 1999.

- [33] C. M. Huntington, A. G. R. Thomas, C. McGuffey, T. Matsuoka, V. Chvykov, G. Kalintchenko, S. Kneip, Z. Najmudin, C. Palmer, V. Yanovsky, A. Maksimchuk, R. P. Drake, T. Katsouleas et K. Krushelnick, *Current filamentation instability in laser wakefield accelerators*, Phys. Rev. Lett., **106**, 105001, 2011.
- [34] A. Debayle, J. J. Honrubia, E. d'Humières et V. T. Tikhonchuk, *Divergence of laser-driven relativistic electron beams*, Phys. Rev. E, **82**, 036405, 2010.
- [35] P. E. Masson-Laborde, W. Rozmus, Z. Peng, D. Pesme, S. Hüller, M. Casanova, V. Y. Bychenkov, T. Chapman et P. Loiseau, *Evolution of the stimulated Raman scattering instability in two-dimensional particle-in-cell simulations*, Phys. Plasmas, **17**, 092704, 2010.
- [36] N. Rostoker et M. N. Rosenbluth, *Test particles in a completely ionized plasma*, Phys. Fluids, **3**, 1, 1960.
- [37] C. K. Birdsall et A. B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*. Institute of Physics, (1991).
- [38] R. Barthelmé, *Le problème de la conservation de la charge dans le couplage des équation de Vlasov et de Maxwell*. Thèse de doctorat, Institut de Recherche Mathématiques avancées, 2005.
- [39] R. Courant, K. Friedrichs et H. Lewy, *On the partial difference equations of mathematical physics*, IBM J., **11**, 215, 1967.
- [40] A. Staniforth et J. Côté, *Semi-lagrangian integration schemes for atmospheric models - a review*, Monthly Weather Rev., **119**, 2206, 1991.
- [41] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand et A. Ghizzo, *The semi-lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys., **149**, 201, 1999.
- [42] C. Z. Cheng et G. Knorr, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*, J. Comput. Phys., **22**, 330, 1976.
- [43] M. R. Feix, P. Bertrand et A. Ghizzo, *Eulerian codes for the Vlasov equation*, dans Advances kinetic theory and computing, 45–81, édité par B. Pertham, 1994.
- [44] G. Manfredi, *Long-time behavior of nonlinear Landau damping*, Phys. Rev. Lett., **79**, 2815, 1997.
- [45] E. Fijalkow, *A numerical solution to the Vlasov equation*, Comput. Phys. Commun., **116**, 319, 1999.
- [46] F. Filbet, E. Sonnendrücker et P. Bertrand, *Conservative numerical schemes for the Vlasov equation*, J. Comput. Phys., **172**, 166, 2001.
- [47] F. Filbet, *Contribution à l'analyse et la simulation numérique de l'équation de Vlasov*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2001.
- [48] F. Filbet et E. Sonnendrücker, *Comparison of eulerian Vlasov solvers*, Comput. Phys. Commun., **150**, 247, 2003.
- [49] A. Aissi, *La modélisation des tubes à onde progressive à hélice en domaine temporel*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2008.
- [50] A. Mangeney, F. Califano, C. Cavazzoni et P. Travnicek, *A numerical scheme for the integration of the Vlasov-Maxwell system of equations*, J. Comput. Phys., **179**, 495, 2002.
- [51] F. Huot, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker et O. Coulaud, *Instability of the time splitting scheme for the one-dimensional and relativistic Vlasov-Maxwell system*, J. Comput. Phys., **185**, 512, 2003.

- [52] F. Pegoraro, S. V. Bulanov, F. Califano et M. Lontano, *Nonlinear development of the Weibel instability and magnetic field generation in collisionless plasmas*, Phys. Scripta, **T63**, 262, 1996.
- [53] F. Califano, R. Prandi, F. Pegoraro et S. V. Bulanov, *Magnetic-field generation and wave-breaking in collisionless plasmas*, J. Plasma Phys., **60**, 331, 1998.
- [54] F. Califano, F. Pegoraro, S. V. Bulanov et A. Mangeney, *Kinetic saturation of the Weibel instability in a collisionless plasma*, Phys. Rev. E, **57**, 7048, 1998.
- [55] F. Califano, T. Cecchi et C. Chiuderi, *Nonlinear kinetic regime of the Weibel instability in an electron-ion plasma*, Phys. Plasmas, **9**, 451, 2002.
- [56] A. Bret, L. Gremillet et J. C. Bellido, *How really transverse is the filamentation instability ?*, Phys. Plasmas, **14**, 032103, 2007.
- [57] A. Bret, L. Gremillet, D. Benisti et E. Lefebvre, *Exact relativistic kinetic theory of an electron-beam-plasma system : Hierarchy of the competing modes in the system-parameter space*, Phys. Rev. Lett., **100**, 205008, 2008.
- [58] P. S. Verma, S. Sengupta et P. K. Kaw, *Nonlinear evolution of an arbitrary density perturbation in a cold homogeneous unmagnetized plasma*, Phys. Plasmas, **18**, 012301, 2011.
- [59] T. Drouot, *Modèle cinétique pour l'instabilité de filamentation de courant*, Mém. Master., Université de Lorraine, 2011.
- [60] G. Kalman, *Nonlinear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma : Part I. Initial and boundary value problems*, Ann. Phys., **10**, 1, 1960.
- [61] G. Kalman, *Nonlinear oscillations and nonstationary flow in a zero temperature plasma : Part II. General characteristics of the motion*, Ann. Phys., **10**, 29, 1960.
- [62] R. C. Davidson, D. A. Hammer, I. Haber et C. E. Wagner, *Nonlinear development of electromagnetic instabilities in anisotropic plasmas*, Phys. Fluids, **15**, 317, 1972.
- [63] H. J. de Blank, *Kinetic model of electrons in drift-Alfven current-vortices*, Phys. Plasmas, **8**, 3927, 2001.
- [64] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. D. Sarto, P. Bertrand et F. Califano, *A multi-stream Vlasov modeling unifying relativistic Weibel-type instabilities*, EuroPhys. Lett., **95**, 45002, 2011.
- [65] A. Inglebert, A. Ghizzo, T. Réveillé, D. D. Sarto, P. Bertrand et F. Califano, *Multi-stream Vlasov model for the study of relativistic Weibel-type instabilities*, Plasma Phys. Control. Fusion, **54**, 085004, 2012.
- [66] H. H. Kaang, C.-M. Ryu et P. H. Yoon, *Nonlinear saturation or relativistic Weibel instability driven by thermal anisotropy*, Phys. Plasmas, **16**, 082103, 2009.
- [67] A. Ghizzo, T. W. Johnston, T. Réveillé, P. Bertrand et M. Albrecht-Marc, *Stimulated-Raman-scatter behavior in a relativistically hot plasma slab and an electromagnetic low-order pseudocavity*, Phys. Rev. E, **74**, 046407, 2006.
- [68] A. Ghizzo, D. Del Sarto, T. Réveillé, N. Besse et R. Klein, *Self-induced transparency scenario revisited via beat-wave heating induced by Doppler shift in overdense plasma layer*, Phys. Plasmas, **14**, 062702, 2007.
- [69] R. Tautz, *A new distribution function for relativistic counterstreaming plasmas*, Astrophys. Space Sci., **330**, 69, 2010.
- [70] D. C. De Packh, *The water-bag model of a sheet electron beam*, Journal of Electronics and Control, **13**, 417, 1962.

- [71] P. Bertrand et M. R. Feix, *Non linear electron plasma oscillation : the water-bag model*, Phys. Lett. A, **28**, 68, 1968.
- [72] L. Palodhi, F. Califano et F. Pegoraro, *Non-linear kinetic development of the Weibel instability and the generation of electrostatic coherent structures*, Plasma Phys. Control. Fusion, **51**, 125006, 2009.
- [73] M. E. Innocenti, M. Lazar, S. Markidis, G. Lapenta et S. Poedts, *Electrons streams formation and secondary two stream instability onset in the post-saturation regime of the classical Weibel instability*, Phys. Plasmas, **18**, 052104, 2011.

## **Modèle Vlasov-Maxwell pour l'étude des instabilités de type Weibel**

### **Résumé**

L'origine de champs magnétiques observés dans les plasmas de laboratoire et d'astrophysique est l'un des problèmes récurrents en physique des plasmas. À cet égard, les instabilités de type Weibel sont considérées comme étant d'une grande importance. Ces instabilités ont pour origine une anisotropie de température (instabilité de Weibel) et une anisotropie des moments des électrons (instabilité de filamentation de courant). L'objectif principal de cette thèse est l'étude théorique et numérique de ces instabilités dans un plasma non collisionnel en régime relativiste. Le premier aspect de ce travail est l'étude du régime non-linéaire de ces instabilités et du rôle des effets cinétiques et relativistes sur la structure des champs électromagnétiques auto-cohérents. Dans ce cadre, un problème essentiel pour les applications et la théorie, concerne l'identification et l'analyse des structures cohérentes développées spontanément dans le régime non-linéaire sur des échelles cinétiques. Un deuxième aspect du travail est le développement de techniques analytiques et numériques pour l'étude des plasmas non collisionnels. Le modèle mathématique de référence, à la base des études des plasmas chauds, est le modèle Vlasov-Maxwell, où l'équation de Vlasov (théorie des champs moyens) est couplée aux équations de Maxwell de façon auto-cohérente. Un modèle unidimensionnel, le modèle multi-faisceaux, a également été introduit durant cette thèse. Basé sur une technique de réduction en dimension, il est à la fois un modèle analytique "simple" présentant l'avantage de pouvoir résoudre une équation de Vlasov 1D pour chaque faisceau de particules, et un modèle numérique moins coûteux qu'un modèle complet.

### **Mots-Clés :**

Physique des plasmas - Modèle de Vlasov-Maxwell - Instabilité de filamentation de courant - Instabilité Weibel - Génération de champ magnétique - Modèle multi-faisceaux

## **Vlasov-Maxwell model for the study of Weibel type instabilities**

### **Abstract**

The origin of magnetic fields observed in laboratory and astrophysical plasmas is one of the most challenging problems in plasma physics. In this respect, the Weibel type instabilities are considered of key importance. These instabilities are caused by a temperature anisotropy (Weibel instability) and electron momentum (current filamentation instability). The main objective of this thesis is the theoretical and numerical study of these instabilities in a collisionless plasma in the relativistic regime. The first aspect of this work is to study the nonlinear regime of these instabilities and the role of kinetic and relativistic effects on the structure of self-consistent electromagnetic fields. In this context, a key problem for the theory and applications, is the identification and analysis of coherent structures developed spontaneously in the nonlinear regime of kinetic scales. A second aspect of the work is the development of analytical and numerical techniques for the study of collisionless plasmas. A mathematical model of reference is the Vlasov-Maxwell model, where the Vlasov equation (mean field theory) is coupled to the Maxwell equations in a self-consistent way. A one-dimensional model, the multi-stream model, is also introduced. Based on a dimensional reduction technique, it is both an analytical model "simple" having the advantage of being able to solve a 1D Vlasov equation for each particle beam, and a numerical model less expensive than a complete model.

### **Keyword :**

Plasma physic - Vlasov-Maxwell model - Current filamentation instability - Weibel instability - Magnetic field generation - Multi-stream model