



Développement de méthodes d'estimation modale de signaux multidimensionnels. Application à la spectroscopie RMN multidimensionnelle

Souleymen Sahnoun

► To cite this version:

Souleymen Sahnoun. Développement de méthodes d'estimation modale de signaux multidimensionnels. Application à la spectroscopie RMN multidimensionnelle. Autre. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0169 . tel-01749354

HAL Id: tel-01749354

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749354>

Submitted on 29 Mar 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

présentée pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(Spécialité Automatique, Traitement du Signal et Génie Informatique)

par

Souleymen SAHNOUN

Développement de méthodes d'estimation modale
de signaux multidimensionnels.

Application à la spectroscopie RMN
multidimensionnelle.

Soutenue publiquement le 27 novembre 2012 devant la commission d'examen :

<i>Rapporteurs :</i>	Pascal LARZABAL	Professeur à l'ENS Cachan
	Corinne MAILHES	Professeur à l'INP Toulouse

<i>Examineurs :</i>	Guillaume GINOLHAC	Professeur à l'Université de Savoie
	Didier WOLF	Professeur à l'Université de Lorraine
	David BRIE	Professeur à l'Université de Lorraine
	El-Hadi DJERMOUNE	MdC à l'Université de Lorraine

Table des matières

Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Abréviations et notations	ix
Introduction générale	1
1 Estimation modale par des méthodes algébriques : un état de l’art	5
1.1 Introduction	5
1.1.1 Modèle du signal	6
1.2 Méthodes à haute résolution d’estimation 1-D	7
1.2.1 Approches fondées sur la prédiction linéaire	7
1.2.1.1 Méthode de Prony	8
1.2.1.2 Méthode Kumaresan-Tufts	9
1.2.2 Approches de sous-espaces	10
1.2.2.1 MUSIC	11
1.2.2.2 ESPRIT 1-D	12
1.3 Méthode du maximum de vraisemblance	13
1.4 Méthodes à haute résolution d’estimation 2-D	14
1.4.1 TLS-Prony 2-D	14
1.4.2 Matrix Enhancement and Matrix Pencil	15
1.4.3 Méthode ESPRIT 2-D	18
1.5 Méthodes à haute résolution d’estimation R -D	19
1.5.1 Multidimensional Damped MUSIC	19
1.5.2 Improved Multidimensional Folding (IMDF)	20
1.6 Estimation des autres paramètres	25
1.6.1 Estimation des amplitudes complexes	25
1.6.2 Estimation de l’ordre du modèle	25
1.7 Performances des méthodes HR	26
1.8 Conclusion	27

2	Une approche tensorielle pour l'estimation modale R-D	31
2.1	Introduction	31
2.2	Notations	32
2.3	Formulation du problème	33
2.4	Algorithme tensoriel d'estimation modale R -D	35
2.5	Comparaison avec les algorithmes Tensor-ESPRIT	39
2.6	Résultats de simulation	39
2.7	Conclusion	41
3	Méthodes d'approximations parcimonieuses	43
3.1	Introduction	43
3.2	Notions	43
3.3	Estimation modale et approximations parcimonieuses	45
3.4	Algorithmes gloutons	45
3.4.1	Matching Pursuit (MP)	46
3.4.2	Orthogonal Matching Pursuit (OMP)	46
3.4.3	Stagewise Orthogonal Matching Pursuit (StOMP)	48
3.4.4	Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP)	48
3.4.5	Single Best Replacement (SBR)	49
3.5	Minimisation de norme ℓ_p	53
3.5.1	Optimisation convexe	53
3.5.2	Méthodes itératives repondérées	53
3.6	Sparse Iterative Covariance-based Estimation (SPICE)	55
3.7	Conclusion	57
4	Sparse multigrid modal estimation	59
4.1	Sparse multidimensional modal analysis using a multigrid dictionary refinement	59
4.1.1	Introduction	59
4.1.2	Sparse approximations	61
4.1.2.1	Key ideas of sparse approximations	61
4.1.2.2	SBR algorithm for penalized $\ell_2 - \ell_0$ problem	62
4.1.3	Multigrid dictionary refinement	63
4.1.4	Monodimensional modal estimation using sparse approximation and multigrid	64
4.1.4.1	1-D data model	64
4.1.4.2	1-D sparse modal estimation	65
4.1.5	Multidimensional modal estimation using sparse approximation and multigrid	65
4.1.5.1	R -D data model	65
4.1.5.2	R -D sparse modal estimation	66
4.1.5.3	Multigrid approach for R -D modal estimation	67
4.1.6	Experimental results	67
4.1.6.1	1-D modal estimation results	67
4.1.6.2	2-D modal estimation results	70

4.1.7	Conclusion	72
4.2	Initial grid selection	73
4.2.1	Introduction	73
4.2.2	Selection of the initial grid	74
4.2.3	Simulation results	75
4.2.3.1	Convergence	76
4.2.3.2	Resolution	77
4.2.3.3	Detection rate	77
4.2.4	Conclusion	78
5	Méthodes multigrille pour la spectroscopie RMN	81
5.1	Introduction	81
5.2	Approximation parcimonieuse simultanée pour l'analyse modale 2-D	82
5.2.1	Modèle du signal	82
5.2.2	Estimation parcimonieuse simultanée	83
5.2.3	Couplage des modes 2-D	84
5.2.4	Résultats de simulations	85
5.3	Application aux signaux RMN	87
5.3.1	Contexte	87
5.3.2	Analyse de signaux RMN 1-D	87
5.3.3	Analyse de signaux RMN 2-D	91
5.4	Conclusion	93
	Conclusion et perspectives	99
	Bibliographie	101

Table des figures

1.1	Problèmes de modes partageant la même fréquence dans une dimension. Les modes 2 et 3 ont les mêmes coordonnées selon la première dimension.	24
1.2	Erreur-type (RMSE) des fréquences et d'amortissement en fonction du RSB (1000 réalisations), $M = 30, F = 2$	28
1.3	Erreur-type (Total RMSE) de la fréquence $f_{1,1}$ en fonction du RSB (1000 réalisations).	29
2.1	Concatenation de deux tenseurs d'ordres 3 selon la 2 ^e dimension ($\mathcal{A} \sqcup_2 \mathcal{B}$).	33
2.2	Tenseur identité d'ordre 3 (<i>Three-way</i>) de dimension $M \times M \times M$	34
2.3	(Hyper-)tranches (HT) d'un tenseur d'ordre 3.	34
2.4	Construction du tenseur d'ordre supérieur pour un signal bi-dimensionnel $\mathcal{Y}$ de dimension $M_1 \times M_2$	36
2.5	Modes simulés. ($\bullet$) positions des fréquences. ($\diamond$) facteurs d'amortissement sur chaque dimension.	40
2.6	Résultats du 1 ^{er} exemple de simulation. Erreur-type (Total RMSE) des fréquences en fonction du RSB.	41
2.7	Résultats du 2 ^e exemple de simulation. Erreur-type (Total RMSE) des fréquences en fonction du RSB.	42
3.1	Résultats d'estimation obtenus à chaque itération par la méthode MP appliquée sur le signal $\mathbf{y}$ (tableau (3.1)). Itérations 1–5.	47
3.2	Résultats d'estimation à chaque itération avec la méthode MP appliquée sur le signal $\mathbf{y}$ (tableau (3.1)). Itérations 7 et 11.	49
3.3	Résultats d'estimation obtenus à chaque itération par la méthode OMP appliquée sur le signal modale $\mathbf{y}$ (tableau (3.1)).	50
4.1	Two multigrid schemes.	64
4.2	Spectrum of $\mathbf{y}$ and its estimates by SBR, OMP, and log-barrier (top), frequencies and damping factors of estimated modes (bottom).	69
4.3	Spectrum of $\mathbf{y}$ and estimated modes by SBR and multigrid, (a) level 1; (b) level 7, SNR = 23 dB.	69
4.4	Frequency resolution of the proposed method with SNR ₁ = 7 dB. The position of simulated modes is presented by a circle.	70

4.5	Comparison between 2D-ESPRIT and the proposed method with $\text{SNR}_1 = 20$ dB. ($\circ$) Frequencies of simulated 2-D modes; ($\bullet$) Frequencies of estimated 2-D modes; ($\diamond$) The diagonals of the diamonds represent the 2-D damping factors.	71
4.6	Comparison between 2-D ESPRIT and the proposed method with $\text{SNR}_1 = 7$ dB. ($\circ$) Frequencies of simulated 2-D modes; ($\bullet$) Frequencies of estimated 2-D modes; ($\diamond$) The diagonals of the diamonds represent the 2-D damping factors.	71
4.7	Simulation results with number of estimated modes forced to be 5 and $\text{SNR}_1 = 20$ dB (on the first mode). Estimated modes are presented by red circles.	72
4.8	Rate of successful estimations with different noise levels of SNR_1	72
4.9	Schematic representation of the correlation between signal modes and a single atom.	75
4.10	FFT of y and estimated modes, $\text{SNR}_1 = 20$ dB.	76
4.11	Estimated parameters at each multigrid level : Convergence to true parameters.	77
4.12	Estimated frequencies at each level : the multigrid algorithm fails with $\rho = 0.25$	78
4.13	Estimation error of 1000 randomly generated modal signals. Mode 1 (top), mode 2 (bottom).	79
4.14	Monte Carlo trials : convergence rate to $(\alpha_1, f_1) = (0.00, 0.23)$ and $(\alpha_2, f_2) = (0.1, 0.46)$	79
5.1	Modes simulés. ($\bullet$) positions des fréquences. ($\diamond$) facteurs d'amortissement sur chaque dimension.	86
5.2	Erreur-type (RMSE) de $f_{1,1}$ en fonction du RSB pour le signal de l'exemple 1	87
5.3	Erreur-type (RMSE) de $f_{1,1}$ en fonction du RSB pour le signal de l'exemple 2	88
5.4	Spectre d'absorption du signal RMN1D-C13.	89
5.5	Spectre d'absorption du signal RMN1D-H1.	89
5.6	Signal RMN1D-C13 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[0.14, 0.143]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$	90
5.7	Signal RMN1D-C13 : fréquences et facteurs d'amortissement estimés à chaque niveau l dans la bande $[0.14, 0.143]$	91
5.8	Signal RMN1D-C13 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[0.148, 0.150]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$	92
5.9	Signal RMN1D-C13 : fréquences et facteurs d'amortissement estimés à chaque niveau l dans la bande $[0.148, 0.150]$	93
5.10	Signal RMN1D-H1 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[-0.406, -0.375]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$	94
5.11	Signal RMN1D-H1 : comparaison des résultats entre KT et l'approche multigrille dans la bande $[-0.406, -0.375]$	95
5.12	Signal 2-D : résultats de l'approche multigrille S-OMP dans la zone spectrale $[-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ avec une décomposition en sous-bandes et le nombre de modes estimés dans chaque sous-bande.	96
5.13	Signal 2-D : visualisations 3D et courbes de niveau du spectre d'amplitude de quelques sous-bandes. ($\bullet$) position des modes estimés. ($\cdots$) coordonnées des modes.	97

Liste des tableaux

3.1	Paramètres du signal modal non bruité $\mathbf{y}$	46
4.1	SBR algorithm [SIBD11]	63
4.2	Sparse multigrid algorithm	64
4.3	R -D sparse multigrid algorithm	67
4.4	First example : Simulated and estimated modes	76

Abréviations et notations

Abréviations

AIC	: Critère d'information d'Akaike
CRB	: Borne de Cramér-Rao
CRB	: Borne de Cramér-Rao
HOSVD	: Décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur
IQML	: Algorithme itératif du maximum de vraisemblance quadratique
KT	: Méthode de Kumaresan et Tufts
LS	: Moindres carrés
MDL	: Critère de description minimale
MLE	: Estimateur du maximum de vraisemblance
RMN	: Résonance magnétique nucléaire
RSB	: Rapport signal-sur-bruit
SVD	: Décomposition en valeurs singulières
TLS	: Moindres carrés totaux

Notations principales

x, X	: scalaire
$\mathbf{x}$	: vecteur
$\ \mathbf{x}\ $	: norme 2 d'un vecteur
$\mathbf{X}$	: matrice
$\tilde{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{X}}$	: version bruitée d'un scalaire, d'un vecteur ou d'une matrice
$\mathbf{X}^\dagger$	: pseudo-inverse de $\mathbf{X}$
$\text{diag}(\mathbf{x})$	: matrice diagonale dont la diagonale est le vecteur $\mathbf{x}$
$\mathbf{I}_M$	: matrice identité de dimensions $M \times M$
x^*	: conjugué
$\mathbf{x}^T, \mathbf{X}^T$	: transposé d'un vecteur ou d'une matrice
$\mathbf{x}^H, \mathbf{X}^H$	: transposé et conjugué d'un vecteur ou d'une matrice
$\text{Card}\{\cdot\}$	: cardinal

Introduction générale

Ce travail a été mené au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Université de Lorraine, CNRS. Il s'inscrit dans le cadre du projet PICS-nD (Problèmes Inverses et Compression des Signaux multidimensionnels) du groupe thématique IRIS (Identification, Restauration, Images, Signaux). L'objet du travail est de développer des algorithmes d'estimation pour l'analyse modale (analyse de signaux sinusoïdaux à amortissement exponentiel) multidimensionnelle présentant des problèmes de résolution et de complexité numérique. Bien que les domaines d'application concernés soient très variés, ils ont été plus particulièrement motivés par certains problèmes rencontrés en spectroscopie de Résonance Magnétique Nucléaire (RMN) multidimensionnelle (R -D). Ce domaine constitue donc notre support applicatif privilégié.

La transformation de Fourier constitue l'outil de référence de l'analyse spectrale grâce à sa simplicité de mise en oeuvre et sa rapidité. En outre elle s'étend de façon immédiate à l'analyse de signaux multidimensionnels. Ces avantages expliquent qu'elle est à l'origine de plusieurs méthodes d'analyse spectrale. Toutefois, elle ne manque pas d'inconvénients. En particulier, sa résolution fréquentielle, c'est-à-dire sa capacité à distinguer deux sinusoides proches et/ou d'amplitudes très différentes, est limitée. Dans le cas de signaux harmoniques, la résolution est conditionnée par la taille du signal observé et par le niveau de bruit. Ce problème devient crucial dès lors que l'on manipule des signaux de petites tailles, notamment dans des applications comme le traitement d'antenne et les communications mobiles. Le cas de l'analyse modale est plus délicat puisque la résolution est liée, comme dans le cas harmonique, à la taille du signal et au niveau de bruit, mais également au chevauchement des raies spectrales causé par l'amortissement exponentiel. Une série de méthodes qui améliorent la résolution fréquentielle a été proposée. Ces méthodes dites à *haute résolution* (HR) s'appuient dans leur développement sur le modèle paramétrique des signaux modaux. En l'absence du bruit, elles présentent une précision d'estimation et une résolution fréquentielle infinies (toutefois limitées par la précision des machines de calcul). Une autre classe de méthodes consiste à poser le problème dans le domaine fréquentiel, en termes de déconvolution impulsionnelle dans le cas harmonique [CIG01, Maz05] ou en termes de décomposition en motifs [Maz05]. Ce type d'approche offre des performances intéressantes. Leur principal inconvénient provient de leur coût de calcul qui rend délicate leur extension à des problèmes de grande dimension.

Les méthodes HR trouvent leurs origines dans les travaux de Prony [RdP95], qui a proposé d'utiliser des techniques de régression linéaire pour estimer les fréquences d'une somme d'exponentielles. De nombreuses améliorations ont été apportées ensuite par Pisarenko [Pis73], Kumaresan et Tufts [KT82], Rahman et Yu [RY87], etc. Les méthodes HR qui reposent sur la décomposition de l'espace de données en un sous-espace signal et un sous-espace bruit, ont été largement étudiées ces

dernières décennies. Comme exemples des méthode HR qui utilisent cette décomposition, les algorithmes MUSIC [Sch86] et root-MUSIC [Bar83], l'algorithme ESPRIT [RPK86] et sa variante TLS-ESPRIT [RK87], la méthode de l'espace d'état [KAR83], etc. Les méthodes dites de sous-espace sont connues pour être plus performantes que celles basées sur les techniques de prédiction linéaire. Elle consiste à déterminer le sous espace propre d'une matrice construite à partir du signal 1-D. L'extension des méthodes d'estimation de signaux 1-D au cas 2-D a également fait l'objet de nombreux développements [SSM93, Hua92, RN01]. De façon schématique, il apparaît que, peu ou prou, l'ensemble des méthodes sous-espace 1-D ont leur pendant 2-D. Cependant, la plupart de ces méthodes ne sont que des méthodes « pseudo-2D » dans le sens où l'extension 2-D formelle des méthodes sous-espace impose de déterminer le sous-espace propre d'un tenseur 4D (tableau multidimensionnel) construit à partir de la matrice de données. L'extension 2-D consiste alors à se ramener à un cas standard 1-D en procédant à un dépliage astucieux du tenseur. Les performances de ces méthodes sont tout à fait satisfaisantes. Cependant, il n'existe à notre connaissance que peu de méthodes HR dédiées à l'analyse de signaux harmoniques et modaux qui soient véritablement multidimensionnelles [HRDG08, THG09, TG09] et nous pensons qu'il y a là une véritable piste de recherche pour le développement d'algorithmes d'estimation modale multidimensionnelle.

Ces dernières années ont vu émerger les méthodes d'approximation parcimonieuses pour l'estimation harmonique [GR97, MCW05b, SBL11a]. Parmi les avantages revendiqués de ces méthodes, elles fournissent une alternative efficace aux méthodes HR, en termes d'efficacité, de simplicité de mise en oeuvre. En revanche, il apparaît que, dès que la résolution recherchée est importante, ces méthodes deviennent rapidement impossibles à implanter de façon efficace. Ce point est dû à la nécessité de créer un dictionnaire dont la taille est liée à la résolution désirée. Ceci est encore plus critique dans le cas de l'analyse modale puisque le dictionnaire doit être construit par échantillonnage d'une grille bidimensionnelle (fréquence, amortissement). Il est clair que le cas de signaux R -D rend la tâche encore plus délicate.

Ce mémoire est organisé en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, après avoir exposé le problème étudié, nous présentons un état de l'art des principales méthodes paramétriques actuellement utilisées pour l'estimation modale et harmonique 1-D et 2-D. Ces méthodes, dites « algébriques », sont fondées sur la prédiction linéaire ou sur la séparation des sous espaces signal et bruit. Ces méthodes sont finalement comparées en utilisant des simulations multiples.

Dans le cas de signaux multidimensionnels, ces méthodes n'exploitent pas réellement la structure multidimensionnelle du modèle ayant généré les données. Nous proposons alors, dans le deuxième chapitre, une méthode tensorielle reposant sur la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD : *higher-order singular value decomposition*). Celle-ci utilise le treillis multidimensionnel du tenseur du signal R -D et exploite la structure des vecteurs propres du sous-espace signal obtenus en utilisant la décomposition en valeurs propres d'ordre supérieur. Contrairement à la plupart des approches existantes, la méthode proposée permet d'éviter la phase d'appariement des coordonnées des modes dans chacune des dimensions. Egalement, elle ne requière pas l'étape de diagonalisation conjointe des méthodes tensorielles [THG09, TG09]. Cette méthode est comparée la méthode de [TG09] et ESPRIT 2-D [RN01] dans le cas de signaux 2-D simulés.

Le troisième chapitre aborde le problème de l'estimation modale du point de vue de l'approximation parcimonieuse dans laquelle le dictionnaire est obtenu par discrétisation de fonctions exponentielles complexes incluant la fréquence et le facteur d'amortissement en 1-D. Cette approche est ensuite étendue au cas R -D. On présente également les principales méthodes permettant de résoudre le problème parcimonieux. Celles-ci incluent les approches gloutons et les méthodes de minimisation ℓ_p . On souligne toutefois que pour atteindre une bonne résolution spectrale, il est nécessaire de choisir une grille très fine, ce qui conduit à la manipulation d'un dictionnaire de grande taille avec tous les problèmes calculatoires sous-jacents. Pour contrôler la taille du dictionnaire, nous avons proposé de coupler l'approximation parcimonieuse à une approche multigrille, ce qui nous amène au chapitre suivant.

Le quatrième chapitre constitue une autre contribution originale de ce mémoire. Pour atteindre une bonne résolution spectrale avec un dictionnaire de taille raisonnable, nous avons envisagé de combiner une approximation parcimonieuse et une approche multigrille sur plusieurs niveaux de résolution. Au premier niveau, le dictionnaire correspond à une grille grossière ; cette dernière est ensuite affinée de façon adaptative en fonction des atomes activés par l'approximation parcimonieuse à l'étape précédente. Cette procédure est répétée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait ; ce dernier est exprimé en termes de résolution ou d'erreur de reconstruction. Des analyses comparatives montrent l'avantage de la méthode proposée par rapport à une approche algébrique. Ensuite, nous nous intéressons à un point crucial de l'approche multigrille, à savoir le choix du dictionnaire initial. En effet, ce dernier a une influence sur la convergence ou non de la méthode. En particulier, on a établi une condition sur le facteur d'amortissement permettant d'assurer la convergence de la procédure et ceci même si le dictionnaire initial ne contient qu'un seul atome.

Le dernier chapitre est une application à l'estimation des paramètres de signaux de spectroscopie RMN 1-D et 2-D en utilisant l'approche parcimonieuse multigrille. Afin de réduire le coût de calcul dans le cas de signaux bidimensionnels de grande taille, nous proposons une approche exploitant la notion de parcimonie simultanée, pour estimer les coordonnées des modes sur chacune des dimensions. Cette approche consiste à effectuer deux approximations parcimonieuses 1-D suivies d'une méthode de reformation des paires de modes 2-D. Cette méthode de couplage, originale, peut également être utilisée avec les approches algébriques.

Le mémoire se termine par une conclusion dans laquelle les principaux résultats de l'étude sont rappelés et qui donne les perspectives ouvertes par ce travail.

Chapitre 1

Estimation modale par des méthodes algébriques : un état de l'art

1.1 Introduction

L'estimation des paramètres de signaux mono- et multidimensionnels a une variété d'applications pratiques. Les méthodes dites paramétriques, fondées sur le modèle du signal mono-dimensionnel, offrent une résolution d'estimation supérieure à celle de Fourier, et sont également connues sous le nom de « méthodes à haute résolution » (HR). Le point de départ de ces méthodes remonte aux travaux de Prony [RdP95]. De Prony est le premier à avoir eu l'idée de déterminer des fréquences en utilisant la régression linéaire. Plus récemment, de nombreuses améliorations ont été apportées à cette approche par Pisarenko [Pis73], Kumaresan et Tufts [KT82], Rahman et Yu [RY87], etc. Les méthodes HR qui reposent sur la décomposition de l'espace de données en un sous-espace signal et un sous-espace bruit, ont été largement étudiées ces dernières décennies. Comme exemples des méthodes HR qui utilisent cette décomposition, les algorithmes MUSIC [Sch86] et root-MUSIC [Bar83], l'algorithme ESPRIT [RPK86] et sa variante TLS-ESPRIT [RK87], la méthode de l'espace d'état [KAR83], etc. Ces dernières (méthodes de sous-espaces) sont connues pour être plus performantes que celles basées sur les techniques de prédiction linéaire. Cependant, bien que les méthodes HR 1-D soient efficaces pour l'estimation modale ou harmonique 1-D, l'extension aux cas R -D ($R \geq 2$) n'est pas triviale.

Le problème principal de l'estimation R -D est l'association des composantes R -D (reformation ou couplage des modes R -D). En effet, il est relativement facile d'estimer séparément les modes de chaque dimension, mais il est plus difficile de coupler les modes R -D d'une manière efficace. La méthode R -D MUSIC [LRL98] est mise en oeuvre par une recherche de pics sur une grille de dimension $2R$ (dans le cas de sinusoïdes amorties), elle n'a donc pas besoin d'une étape de couplage des modes, mais la recherche exhaustive sur la grille $2R$ -D est très compliquée. Alternativement, les méthodes d'estimation 1-D peuvent être appliquées individuellement sur chaque dimension mais il est alors nécessaire de recourir à une étape de reformation des modes R -D [SSM93, Hua92, PMB04]. En estimation modale 2-D, on peut trouver des techniques de couplages qui consistent à comparer des sommes ou des quotients des deux ensembles de modes 1-D estimés [SSM93]. Une meilleure technique de couplage fait appel aux techniques de diagonalisation conjointe. Cette technique tente

de diagonaliser simultanément R matrices dont les valeurs propres sont les estimées des modes R -D [RN01, HN98]. Cependant, ces deux types de méthodes de sous-espaces, qui nécessitent soit une étape de couplage ou une diagonalisation conjointe, engendrent souvent une augmentation considérable de la complexité numérique et des temps de calcul. Par exemple, le coût de calcul de l'étape de couplage de l'algorithme *matrix pencil and matrix enhancement* [Hua92], pour un signal 2-D de dimension $M_1 \times M_2$ qui contient F composantes, est de l'ordre de $(M_1 M_2 F^2)$. Dans le but d'avoir un coût de calcul moins élevé, des méthodes de sous-espace qui estiment les modes R -D à partir des vecteurs propres ont été proposées, comme exemple, les algorithmes *Multidimensional Folding* (MDF) [LS02] et *Improved Multidimensional Folding* (IMDF) [LL06].

Ce chapitre n'a pas vocation de présenter en détail les méthodes HR, mais plutôt à faire un état de l'art de celles qui ont pu être généralisées pour estimer les paramètres de signaux modaux R -D ($R \geq 2$). C'est pourquoi, concernant le cas de signaux 1-D, seules les méthodes Kumaresan et Tufts, MUSIC et ESPRIT sont présentées ici. Des détails sur les autres méthodes peuvent être trouvés dans [VDVDS93, DMC98]. Ce chapitre commence par la définition du modèle du signal (section 1.1.1). Puis les méthodes HR d'estimation 1-D, fondées sur la prédiction linéaire et celles basées sur la décomposition en sous-espaces, seront présentées dans le paragraphe 1.2. Le principe des méthodes du maximum de vraisemblance est présenté dans le paragraphe 1.3. Les principes des méthodes TLS-Prony 2-D, *Matrix Pencil and Matrix Enhancement* (MEMPE) et ESPRIT 2-D sont présentés dans le paragraphe 1.4. Ensuite les méthodes de sous-espaces d'estimation modale R -D ($R \geq 2$) sont présentées dans la section 1.5. Le paragraphe 1.7 est consacré à l'analyse des performances des méthodes HR. Enfin, les résultats de ce chapitre sont résumés par une conclusion.

1.1.1 Modèle du signal

Dans ce travail nous considérons les signaux modélisés par des combinaisons d'exponentielles complexes mono- ou multidimensionnelles amorties et perturbées par un bruit additif. Le modèle complexe d'un signal modal 1-D contenant F exponentielles complexes s'écrit :

$$\tilde{y}(m) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^m + e(m) \quad (1.1)$$

pour $m = 0, \dots, M-1$ où les $a_i = e^{(-\alpha_i + j2\pi f_i)}$ sont les modes. Les paramètres $\{\alpha_i \in \mathbb{R}^+\}_{i=1}^F$, $\{f_i\}_{i=1}^F$ et $\{c_i \in \mathbb{C}^*\}_{i=1}^F$ représentent respectivement les facteurs d'amortissements (facteurs d'atténuations), les fréquences (normalisées) et les amplitudes complexes; $e(m)$ est un bruit blanc complexe, Gaussien, de moyenne nulle et de variance σ^2 . Le problème traité consiste à estimer l'ensemble des paramètres $\{a_i, b_i, c_i\}_{i=1}^F$ à partir de la séquence d'observations $\tilde{y}(m)$. On désigne par $y(m)$ la version non bruitée de $\tilde{y}(m)$.

Un signal modal R -D contenant F modes multidimensionnels peut être écrit comme suit :

$$\tilde{y}(m_1, \dots, m_R) = \sum_{i=1}^F c_i \prod_{r=1}^R a_{i,r}^{m_r} + e(m_1, \dots, m_R) \quad (1.2)$$

où $m_r = 0, \dots, M_r - 1$ pour $r = 1, \dots, R$. M_r représente le nombre d'échantillons de la r^{e} dimension,

$a_{i,r} = e^{(-\alpha_{i,r} + j2\pi f_{i,r})}$ est le i^{e} mode dans la r^{e} dimension, avec $\{\alpha_{i,r} \in \mathbb{R}^+\}_{i=1,r=1}^{F,R}$ et $\{f_{i,r}\}_{i=1,r=1}^{F,R}$ représentent respectivement les taux d'amortissement et les fréquences. Les paramètres $\{c_i \in \mathbb{C}^*\}_{i=1}^F$ sont les amplitudes complexes et $e(m_1, m_2, \dots, m_R)$ est un bruit blanc complexe, Gaussien, de moyenne nulle, de variance σ^2 et de dimension R . Comme dans le cas 1-D, le problème est d'estimer l'ensemble des paramètres $\{\alpha_{i,r}, f_{i,r}\}_{i=1,r=1}^{F,R}$ et $\{c_i\}_{i=1}^F$ à partir des échantillons $\tilde{y}(m_1, \dots, m_R)$.

1.2 Méthodes à haute résolution d'estimation 1-D

On commence par présenter le principe des méthodes 1-D à haute résolution fondées sur des techniques de prédiction linéaire (section 1.2.1). On présente ensuite les méthodes de sous-espaces (section 1.2.2).

1.2.1 Approches fondées sur la prédiction linéaire

On définit le polynôme $P(a)$ de la variable complexe a , de degré F , qui a comme racines les modes $\{a_i\}_{i=1}^F$ et de coefficient dominant $p_0 = 1$

$$P(a) = \sum_{i=0}^F p_i a^{-i} = \prod_{i=1}^F (1 - a_i a^{-1}). \quad (1.3)$$

En se basant sur le modèle du signal (1.1), on peut montrer que les échantillons $y(m)$, dans le cas non bruité, satisfont l'équation de récurrence suivante [Kum83] :

$$\sum_{i=0}^F p_i y(m-i) = 0, \quad m = F, \dots, M-1. \quad (1.4)$$

De la même façon, on peut montrer que le polynôme de degré F

$$B(a) = \sum_{i=0}^F b_i a^{F-i} = \prod_{i=1}^F (1 - a_i a), \quad b_0 = 1, \quad (1.5)$$

dont les racines sont égales à $\{\frac{1}{a_i}\}_{i=1}^F$, est le polynôme caractéristique de l'équation de récurrence (prédiction arrière) suivante

$$y(m) = - \sum_{i=1}^F b_i y(m+i), \quad m = 0, \dots, M-F-1. \quad (1.6)$$

Plusieurs travaux s'inspirent du résultat précédent sur la prédiction linéaire pour donner des solutions au problème d'estimation des paramètres de sinusoïdes superposées pures et amorties. Nous présentons dans la suite la méthode de Prony [RdP95], considérée comme l'origine du développement des approches à haute résolution, et la méthode de Kumaresan et Tufts [KT82].

1.2.1.1 Méthode de Prony

La méthode de Prony [RdP95] consiste à calculer les coefficients du polynôme $B(a)$ pour pouvoir estimer les modes a_i . Il s'agit donc d'écrire un système linéaire de F équations en appliquant l'équation de récurrence (1.6) aux échantillons $y(0), \dots, y(F-1)$:

$$\begin{cases} b_1 y(1) + b_2 y(2) + \dots + b_F y(F) = -y(0) \\ b_1 y(2) + b_2 y(3) + \dots + b_F y(F+1) = -y(1) \\ \vdots + \vdots + \dots + \vdots = \vdots \\ b_1 y(F) + b_2 y(F+1) + \dots + b_F y(2F-1) = -y(F-1) \end{cases} \quad (1.7)$$

où l'on suppose que $M \geq 2F$. En posant $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_F]^T$, $\mathbf{y} = [y(0), y(1), \dots, y(F-1)]^T$ et

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \dots & y(F) \\ y(2) & y(3) & \dots & y(F+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(F) & y(F+1) & \dots & y(2F-1) \end{bmatrix},$$

le système d'équations (1.7) peut être compacté sous la forme :

$$\mathbf{Y}\mathbf{b} = -\mathbf{y} \quad (1.8)$$

Étant donné que les modes sont supposés distincts, la matrice $\mathbf{Y}$ est non singulière et en conséquence les coefficients b_i peuvent être obtenus par :

$$\mathbf{b} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{y} \quad (1.9)$$

Ainsi donc, la méthode Prony peut être résumée dans les étapes suivantes :

- Construction la matrice $\mathbf{Y}$;
- Calcul de $\mathbf{b} = -\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{y}$;
- Détermination des racines du polynôme $B(a) = \sum_{i=0}^F b_i a^{F-i}$ qui correspondent aux inverses des modes du signal, i.e. $\{\frac{1}{a_i}\}_{i=1}^F$, sous la contrainte $b_0 = 1$.

Cette méthode a été au départ proposée pour estimer les paramètres de sinusoides réelles non bruitées. Cependant, elle est très sensible au bruit quand elle est appliquée à l'estimation de sinusoides bruités. C'est pour cela que d'autre travaux sont développés pour surmonter cette limitation. Hildebrand [Hil56] a proposé de récrire, à l'aide de l'équation de récurrence, un système d'équations surdéterminé avec un nombre d'échantillons $M > 2F$ et la détermination des coefficients b_i est faite par minimisation au sens des moindres carrés. Une extension de la méthode de Prony consiste, en plus de l'utilisation d'un système d'équations surdéterminé, en la sur-paramétrisation du problème [Kay88]. L'idée ici revient à déterminer les coefficients b_i d'un polynôme d'ordre L plus grand que

le nombre réel de modes ($L > F$), tel que :

$$\begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(L) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(L+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(M-L) & y(M-L+1) & \cdots & y(M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M-L-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y}\mathbf{b} = -\mathbf{y} \quad (1.10)$$

dont la solution au sens des moindres carrés est donnée par

$$\mathbf{b} = -(\mathbf{Y}^H \mathbf{Y})^{-1} \mathbf{Y}^H \mathbf{y} \quad (1.11)$$

Cependant, ce type de modélisation ne donne des estimations satisfaisantes que lorsque le niveau du bruit est nul ou faible. Par ailleurs, cela pose aussi un problème de sélection des modes correspondant au signal puisque l'ordre de prédiction, qui est égale au nombre de racines du polynôme $B(a)$, est plus grand que le nombre réels des composantes. Pour pallier ce problème, une série de méthodes appelées « SVD tronquée » a été proposée. Parmi ces approches nous allons présenter dans la section suivante la méthode Kumaresan-Tufts [KT82] connue aussi sous le nom LS-Prony.

1.2.1.2 Méthode Kumaresan-Tufts

Dans le cas non bruité, la matrice $\mathbf{Y}$ dans l'équation (1.10) est de rang M . En présence du bruit, $\mathbf{Y}$ est remplacée par son approximation de rang M , obtenue en mettant à zéro ses plus petites valeurs singulières dues au bruit [KT82].

La décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice $\tilde{\mathbf{Y}}$ s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (1.12)$$

où $\mathbf{S}$ est une matrice diagonale de dimension $(M-L) \times L$ dont les éléments sont les valeurs singulières $\{\sigma_1, \dots, \sigma_F, \sigma_{F+1}, \dots, \sigma_L\}$ de $\tilde{\mathbf{Y}}$, rangées par ordre décroissant. La meilleure approximation de rang M , de $\mathbf{Y}$ au sens de la norme de Frobenius, s'écrit :

$$\check{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\check{\mathbf{S}}\mathbf{V}^H \quad (1.13)$$

avec

$$\check{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{S}_F & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]_{(M-L) \times L}$$

dont la matrice $\mathbf{S}_F = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_F)$. Les coefficients b_i du polynôme caractéristique $B(a)$ sont estimés par la relation :

$$\mathbf{b} = -\check{\mathbf{Y}}^\dagger \mathbf{y} \quad (1.14)$$

où $\check{\mathbf{Y}}^\dagger$ est le pseudo-inverse de rang réduit de $\check{\mathbf{Y}}$. L'utilisation de la SVD tronquée permet d'améliorer le rapport signal sur bruit (RSB) des données entraînant ainsi une meilleure estimation du vecteur $\mathbf{b}$. Une estimation des modes a_i est obtenues à partir des racines complexes de $B(a)$. Finalement,

La distinction entre les modes du signal et ceux du bruit est effectuée en se basant sur le critère du cercle unité.

La méthode KT tend à réduire l'effet du bruit uniquement dans la matrice $\mathbf{Y}$ et non dans le vecteur $\mathbf{y}$. La méthode connue par TLS-Prony (*Total Least Squares - Prony*) prend également en compte le bruit présent dans le vecteur $\mathbf{y}$ [RY87].

1.2.2 Approches de sous-espaces

L'idée des méthode de sous-espaces est d'utiliser certaines propriétés de la matrice de données

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \cdots & y(L-1) \\ y(1) & y(2) & \cdots & y(L) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(M-L) & y(M-L+1) & \cdots & y(M-1) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

pour estimer les modes $a_i, i = 1, \dots, F$. Le modèle du signal modal 1-D (1.1) peut être écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{c} \quad (1.16)$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times F}$ est la matrice de Vandermonde définie par les modes $a_i, i = 1, \dots, F$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_F \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_F^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{M-1} & a_2^{M-1} & \cdots & a_F^{M-1} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

et $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_F]^T$ est le vecteur des amplitudes. Si la matrice $\mathbf{Y}$ est construite avec les échantillons d'un signal qui vérifie l'équation (1.1), alors $\mathbf{Y}$ peut être factorisée, dans le cas non-bruité, selon :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(M-L+1)} \mathbf{\Delta}_c \mathbf{A}^{(L)T} \quad (1.18)$$

où on désigne par $\mathbf{A}^{(l)} \in \mathbb{C}^{l \times F}$ la matrice définie par les l premières lignes de $\mathbf{A}$, et $\mathbf{\Delta}_c$ est une matrice diagonale qui contient sur sa diagonale les éléments du vecteur $\mathbf{c}$, i.e. $\mathbf{\Delta}_c = \text{diag}(\mathbf{c})$. Selon l'expression (1.18) le rang de la matrice de prédiction $\mathbf{Y}$ est égale à F si et seulement si, en plus des hypothèses sur le modèle du signal 1-D (1.1), $F \leq L$ et $F \leq M - L + 1$.

La matrice de covariance définie par $\mathbf{R} = \frac{1}{L} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$ admet, selon (1.18), la factorisation suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}^{(M-L+1)} \mathbf{\Psi} \mathbf{A}^{(M-L+1)H} \quad (1.19)$$

où

$$\mathbf{\Psi} = \frac{1}{L} \mathbf{\Delta}_c \mathbf{A}^{(L)T} \mathbf{A}^{(L)*} \mathbf{\Delta}_c^H.$$

On peut montrer que $\mathbf{R}$ est une matrice symétrique définie positive et a le même rang que $\mathbf{Y}$. Prenons maintenant le cas des données bruitées. Puisque le bruit $e(m)$ est supposé blanc, Gaussien,

de moyenne nulle et de variance σ^2 , alors la matrice de covariance $\tilde{\mathbf{R}}$ vérifie

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \sigma^2 \mathbf{I}_{M-L+1} \quad (1.20)$$

La décomposition en valeurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}$ donne [Kay88] :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^F \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H + \sigma^2 \sum_{i=F+1}^{M-L+1} \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (1.21)$$

où les λ_i sont les valeurs propres et $\mathbf{v}_i$ les vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}$. Les valeurs propres sont rangées par ordre décroissant ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$). Les deux dernières équations montrent que les vecteurs propres de $\mathbf{R}$ sont aussi vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}$, et que les valeurs propres λ_i sont égales aux valeurs propres de $\mathbf{R}$ augmentées de σ^2 . Par conséquent, l'espace engendré par les F principaux vecteurs propres de $\tilde{\mathbf{R}}$ est également l'espace engendré par la matrice $\mathbf{A}^{(M-L+1)}$, appelé sous-espace signal. Le reste des composantes propres engendre un espace, appelé sous-espace bruit, orthogonal à l'espace signal. Ce résultat décrit l'idée principale des méthodes de sous-espaces, c'est-à-dire le fait de pouvoir mettre en évidence un sous-espace signal ($i = 1, \dots, F$) et un sous-espace bruit ($i = F+1, \dots, M-L+1$). Nous pouvons également estimer les sous-espaces signal et bruit en effectuant la SVD de la matrice $\tilde{\mathbf{Y}}$ (version bruitée de $\mathbf{Y}$ dans l'équation (1.15)). Dans ce cas, le sous-espace signal correspond aux F principales composantes singulières de $\tilde{\mathbf{Y}}$ et le sous-espace bruit correspond au reste des composantes. Notons ici que la connaissance du nombre de sinusoides présentes dans le signal est impérative pour pouvoir déterminer la dimension du sous-espace signal. Par conséquent, l'utilisation de ce genre de méthode exige la détermination au préalable du nombre F de sinusoides.

1.2.2.1 MUSIC

La méthode MUSIC (*MUltiple SIgnal Classification*), développée par R. O. Schmidt [Sch81], exploite le fait que les sous-espaces signal ($\mathbf{V}_F = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_F]$) et bruit ($\mathbf{V}_E = [\mathbf{v}_{F+1}, \dots, \mathbf{v}_{M-L+1}]$) de la matrice de covariance sont orthogonaux. Donc, la distance euclidienne entre chaque colonne de la matrice $\mathbf{A}$ et le sous-espace bruit est nulle. Par conséquent, les mode a_i sont les solutions unique de la l'équation :

$$\mathbf{f}^H(a) \mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H \mathbf{f}(a) = 0 \quad (1.22)$$

où $\mathbf{f}(a) = [1, a, \dots, a^{M-1}]^T$. Notons que uniquement les F modes a_i vérifient cette équation, et il ne peut y en avoir d'autres car dans le cas contraire l'espace signal serait de dimension strictement supérieure à F . La méthode root-MUSIC [Bar83] permet un calcul numérique des modes du signal. Son principe est le suivant :

- calculer et diagonaliser la matrice de covariance $\tilde{\mathbf{R}}$;
- former le sous-espace bruit ($\mathbf{V}_E = [\mathbf{v}_{F+1}, \dots, \mathbf{v}_{M-L+1}]$);
- extraire les racines de l'équation (1.22).

Cependant, l'équation (1.22) n'est pas rigoureusement vérifiée dans la pratique à cause de la présence du bruit. C'est pour cela que R. O. Schmidt [Sch86] a proposé une amélioration qui consiste à

rechercher les pics du spectre MUSIC :

$$P(a) = \frac{1}{\mathbf{f}^H(a) \mathbf{V}_E \mathbf{V}_E^H \mathbf{f}(a)}. \quad (1.23)$$

Une comparaison de MUSIC et Kumaresan et Tufts aux bornes de Cramér-Rao a été présentée dans [CTO89]. D'autres analyses de performances des algorithmes MUSIC ont été faites par Stoica [SN89, SS91]. Cette algorithmes a été appliqué à la spectroscopie RMN 1-D dans [MOMN90].

1.2.2.2 ESPRIT 1-D

La méthode ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*) exploite la propriété d'invariance par translation du sous-espace signal pour estimer les paramètres des modes 1-D. Prenons l'expression de la factorisation de la matrice $\mathbf{Y}$ (1.18). Lorsque l'on calcule la SVD de $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H$ on définit la matrice $\mathbf{U}_F \in \mathbb{C}^{(M-L+1) \times F}$ qui contient les F vecteurs singuliers gauches associés aux plus grandes valeurs singulières. Or l'espace engendré par les colonnes de la matrice $\mathbf{A}^{(M-L+1)}$ est identique à l'espace engendré par $\mathbf{U}_F$. Alors, il existe une matrice inversible $\mathbf{T}$ de dimension $F \times F$, définie comme la matrice de passage entre les deux bases, telle que :

$$\mathbf{A}^{(M-L+1)} = \mathbf{U}_F \mathbf{T} \quad (1.24)$$

Réalisons deux partitions différentes de la matrice $\mathbf{A}^{(M-L+1)}$

$$\mathbf{A}^{(M-L+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(M-L)} \\ - - - \\ (\mathbf{a}^T)^{M-L+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}^T)^0 \\ - - - \\ \bar{\mathbf{A}}^{(M-L)} \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

où $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_F]^T$ et la matrice $\bar{\mathbf{A}}^{(M-L)}$ de dimension $(M-L) \times F$ est formée par les $M-L$ dernières lignes de $\mathbf{A}$. Alors on vérifie que :

$$\bar{\mathbf{A}}^{(M-L)} = \mathbf{A}^{(M-L)} \Delta_{\mathbf{a}} \quad (1.26)$$

En appliquant ce résultat à la relation (1.24), nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \mathbf{A}^{(M-L)} = \underline{\mathbf{U}}_F \mathbf{T} \\ \mathbf{A}^{(M-L)} \Delta_{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{U}}_F \mathbf{T} \end{cases} \quad (1.27)$$

où $\underline{\mathbf{U}}_F$ est la matrice qui contient les $M-L$ premières lignes de $\mathbf{U}_F$ et $\overline{\mathbf{U}}_F$ contient les $M-L$ dernières lignes de $\mathbf{U}_F$. Cela entraîne que :

$$\overline{\mathbf{U}}_F = \underline{\mathbf{U}}_F \mathbf{D} \quad (1.28)$$

où la matrice $\mathbf{D} = \mathbf{T} \Delta_{\mathbf{a}} \mathbf{T}^{-1}$ et ses valeurs propres sont les modes $\{a_i\}_{i=1}^F$. Finalement, la méthode ESPRIT peut être résumée dans les étapes suivantes :

- construire la matrice de données $\tilde{\mathbf{Y}}$ (équation 1.15), à partir des données bruitées, et calculer

- sa SVD ;
- déterminer la base du sous-espace signal définie par les F premiers vecteurs singuliers gauches, c'est-à-dire déterminer $\mathbf{U}_F$;
- former $\underline{\mathbf{U}}_F$ et $\overline{\mathbf{U}}_F$ à partir de $\mathbf{U}_F$;
- estimer la matrice $\mathbf{D}$ (équation(1.28)) par la méthode des moindres carrés (LS-ESPRIT) [RPK86] ou par la méthode des moindres carrés totaux (TLS-ESPRIT) [RK87]
- déterminer les valeurs propres de $\mathbf{D}$ et en déduire les paramètres des modes.

Pour de faibles niveaux de bruit, l'algorithme LS-ESPRIT est biaisée alors que TLS-ESPRIT ne l'est pas [RK87]. Une méthode équivalente à ESPRIT, appelée Matrix Pencil, a été proposé par Hua [HS90]. Cette méthode fait appel aux propriétés de faisceaux de matrices. Il est montré que la méthode ESPRIT est plus performante que la méthode MUSIC [SS91].

1.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Le principe de l'estimateur du maximum de vraisemblance (MLE : *maximum likelihood estimator*) consiste à maximiser la densité de probabilité conditionnelle $p(\tilde{\mathbf{y}}|\boldsymbol{\theta})$, où $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}(0), \tilde{y}(1), \dots, \tilde{y}(M-1)]^T$ est le vecteur de données et $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur de paramètres à estimer.

Dans notre cas $\tilde{\mathbf{y}}$ peut s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (1.29)$$

et $\boldsymbol{\theta}$ contient les amplitude c_i complexes et les modes a_i :

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Comme le bruit $\mathbf{e}$ est distribué selon une loi normale $\mathcal{N}_c(0, \sigma^2 \mathbf{I}_M)$, la fonction de vraisemblance du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}$ peut donc être exprimée par :

$$L(\boldsymbol{\theta}) \propto p(\tilde{\mathbf{y}}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi^N \sigma^{2N}} e^{-\frac{1}{\sigma^2} (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{c})^H (\tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{A}\mathbf{c})}. \quad (1.31)$$

Par conséquent, le MLE de $\boldsymbol{\theta}$ s'obtient en maximisant $L(\boldsymbol{\theta})$, c'est-à-dire en minimisant la fonction :

$$J(\boldsymbol{\theta}) = J(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c})^H (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{c}). \quad (1.32)$$

Le problème de minimisation étant linéaire par rapport à $\mathbf{c}$, le MLE du vecteur des amplitudes $\mathbf{c}$ pour une matrice de Vandermonde donnée est :

$$\hat{\mathbf{c}} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \tilde{\mathbf{y}} \quad (1.33)$$

En remplaçant $\mathbf{c}$ par $\hat{\mathbf{c}}$ dans l'équation (1.32), on obtient :

$$J(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{c}}) = \mathbf{y}^H \mathbf{y} - \mathbf{y}^H \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (1.34)$$

Le MLE des modes a_i est obtenu en maximisant la fonction non linéaire :

$$J_1(\mathbf{a}) = \mathbf{y}^H \mathbf{A} (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y} \quad (1.35)$$

Il est montré que le MLE est obtenu à partir des F pics les plus grands du périodogramme mais à condition que l'espacement entre les composantes dépasse la résolution de Fourier ($1/M$) dans le cas de sinusoïdes pures [Kay88]. Mais dans le cas général, il est difficile de trouver une solution analytique à ce problème d'optimisation. On peut alors utiliser des méthodes numériques. L'une de ces méthodes est la méthode itérative IQML [BM86] qui consiste à faciliter le problème d'optimisation en utilisant l'équation de récurrence du signal pour modifier la fonction de coût. D'autres méthodes ont été développées pour obtenir le MLE [JAW94, MS95, UT96].

1.4 Méthodes à haute résolution d'estimation 2-D

De nombreuses méthodes à haute résolution ont été développées pour traiter le problème d'estimation modale bi-dimensionnelle. On peut les classer en trois catégories : méthodes fondées sur la prédiction linéaire, méthodes de sous-espaces et méthodes du maximum de vraisemblance. Dans cette partie, nous présentons l'extension de la méthode TLS-Prony 1-D dans le cas 2-D (§ 1.4.1), la méthode *Matrix Enhancement and Matrix Pencil* (§ 1.4.2) et la méthode ESPRIT 2-D (§ 1.4.3).

En réécrivant l'équation (1.2) pour $R = 2$, un signal modal 2-D s'écrit :

$$\tilde{y}(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^{m_1} b_i^{m_2} + e(m_1, m_2) \quad (1.36)$$

où l'on note ici les modes du signal a_i et b_i pour simplifier les notations.

1.4.1 TLS-Prony 2-D

Sacchini et al. [SSM93] ont proposé deux algorithmes basés sur la méthode TLS-Prony 1-D pour estimer les modes d'un signal modal 2-D. Il s'agit de décomposer le problème d'estimation 2-D en deux problèmes d'estimation 1-D. Pour ce faire, l'équation (1.36) peut être écrite sous la forme

$$y(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^F c_i b_i^{m_2} a_i^{m_1} = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{l=1}^{L_k} c_{k,l} b_{k,l}^{m_2} \right) a_k^{m_1} = \sum_{k=1}^K h_k(m_2) a_k^{m_1} \quad (1.37)$$

où

$$h_k(m_2) = \sum_{l=1}^{L_k} c_{k,l} b_{k,l}^{m_2} \quad (1.38)$$

et $F = \sum_{k=1}^K L_k$. On peut remarquer qu'avec cette reparamétrisation le modèle du signal est vu comme étant un signal 1-D qui correspondrait à de multiples expériences (*1-D multi-snapshots*), avec des amplitudes $h_k(m_2)$ différentes pour chaque expérience. La méthode TLS-Prony 1-D est donc utilisée pour estimer les modes a_i , $i = 1, \dots, F$, et les amplitudes des multiples expériences $h_k(m_2)$. Ensuite, la même méthode est appliquée à nouveau, mais sur les estimées de $h_k(m_2)$, pour extraire les $b_{k,l}$ et $c_{k,l}$.

Les estimées b_i peuvent subir une propagation d'erreurs car elles mêmes sont estimées à partir des valeurs estimées des coefficients $h_k(m_2)$. Pour réduire cette propagation d'erreurs, Sachini et *al.* [SSM93] ont proposé une deuxième méthode dans laquelle le premier algorithme est utilisé deux fois. Premièrement, l'algorithme est utilisé pour estimer les modes a_k puis les modes $b_{k,l}$. Il est appliqué une deuxième fois pour estimer les modes b_k puis $a_{k,l}$. Un algorithme de couplage est ensuite utilisé pour combiner les deux ensembles de modes et ainsi obtenir un seul ensemble.

1.4.2 Matrix Enhancement and Matrix Pencil

La méthode MEMP (*Matrix Enhancement and Matrix Pencil*) a été proposée par Hua [Hua92] pour estimer les paramètres des modes 2-D. Cette approche utilise la méthode *Matrix Pencil* (MP) [HS90] pour estimer les paramètres du modèle. Le problème est donc d'identifier un mécanisme sur lequel la méthode MP peut être appliquée. En utilisant le modèle du signal 2-D présenté dans (1.36), la matrice de données non bruitées donnée par :

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(0,0) & y(0,1) & \cdots & y(0,M_2-1) \\ y(1,0) & y(1,1) & \cdots & y(1,M_2-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(M_1-1,0) & y(M_1-1,1) & \cdots & y(M_1-1,M_2-1) \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{\Delta}_c\mathbf{B}^T \quad (1.40)$$

où $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M_1 \times F}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{M_2 \times F}$ sont les matrices de Vandermonde formées par les vecteurs de modes $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_F]^T$ et $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_F]^T$; et $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_F]^T$ est le vecteur d'amplitudes ($\mathbf{\Delta}_c = \text{diag}(\mathbf{c})$). A partir de (1.40), on constate que le rang de la matrice $\mathbf{Y}$ est inférieur ou égale à F . Grâce à la structure Vandermonde des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on a $\text{rang}(\mathbf{Y}) = F$ si seulement et seulement si les éléments de chacun des deux ensembles $\{a_i\}_{i=1}^F$ et $\{b_i\}_{i=1}^F$ sont distincts.

Il est donc important de noter que :

- si $\text{rang}(\mathbf{Y}) \leq F$ alors $\{a_i\}_{i=1}^F$ et $\{b_i\}_{i=1}^F$ ne peuvent pas être obtenus des vecteurs singuliers à gauches et à droites de $\mathbf{Y}$;
- les vecteurs singuliers principaux de $\mathbf{Y}$ ne contiennent pas suffisamment d'information pour effectuer le couplage entre les a_i et les b_i .

Pour résoudre le problème de déficience de rang, on forme une matrice $\mathbf{Y}_e$ qui contient $L_1 \times (M_1 - L_1 + 1)$ blocs de Hankel $\mathbf{Y}_{m_1}$ où chaque bloc est de taille $L_2 \times (M_2 - L_2 + 1)$:

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_{M_1-L_1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_{M_1-L_1+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Y}_{L_1-1} & \mathbf{Y}_{L_1} & \cdots & \mathbf{Y}_{M_1-1} \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

et

$$\mathbf{Y}_{m_1} = \begin{bmatrix} y(m_1, 0) & y(m_1, 0) & \cdots & y(m_1, M_2 - L_2) \\ y(m_1, 1) & y(m_1, 2) & \cdots & y(m_1, M_2 - L_2 + 1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(m_1, L_2 - 1) & y(m_1, L_2) & \cdots & y(m_1, M_2 - 1) \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

pour $m_1 = 0, \dots, M_1 - 1$. Les paramètres L_1 et L_2 sont les ordres de prédiction pour chaque dimension. La matrice $\mathbf{Y}_e$ est appelée matrice améliorée (*enhanced matrix*) parce qu'elle vérifie

$$\text{rang}(\mathbf{Y}_e) = F \geq \text{rang}(\mathbf{Y}) \quad (1.43)$$

dans un grand nombre de cas [HS90]. En utilisant (1.36) dans (1.42), $\mathbf{Y}_{m_1}$ peut être factorisée de la façon suivante :

$$\mathbf{Y}_{m_1} = \mathbf{B}_{le} \mathbf{\Delta}_c \mathbf{\Delta}_a^{m_1} \mathbf{B}_{ri}^T \quad (1.44)$$

où

$$\mathbf{B}_{le} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_F \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_F^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{L_2-1} & b_2^{L_2-1} & \cdots & b_F^{L_2-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ri} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_F \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_F^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1^{M_2-L_2} & b_2^{M_2-L_2} & \cdots & b_F^{M_2-L_2} \end{bmatrix}.$$

Alors, $\mathbf{Y}_e$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{E}_{le} \mathbf{\Delta}_c \mathbf{E}_{ri}^T \quad (1.45)$$

où les matrices $\mathbf{E}_{le}$ et $\mathbf{E}_{ri}$ sont :

$$\mathbf{E}_{le} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{le} \\ \mathbf{B}_{le} \mathbf{\Delta}_a \\ \mathbf{B}_{le} \mathbf{\Delta}_a^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{le} \mathbf{\Delta}_a^{L_1-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_{ri} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ri} \\ \mathbf{B}_{ri} \mathbf{\Delta}_a \\ \mathbf{B}_{ri} \mathbf{\Delta}_a^2 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{ri} \mathbf{\Delta}_a^{M_1-L_1} \end{bmatrix}$$

L'équation (1.45) montre que $\text{rang}(\mathbf{Y}_e) = F$ ssi $\text{rang}(\mathbf{E}_{le}) = \text{rang}(\mathbf{E}_{ri}) = F$. Il est montré dans [HS90] que $\text{rang}(\mathbf{Y}_e) = F$ si :

$$(M_1 - F + 1) \geq L_1 \geq F \quad \text{et} \quad (M_2 - F + 1) \geq L_2 \geq F. \quad (1.46)$$

L'extraction des modes peut être résumée dans les étapes suivantes :

– décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{Y}_e$:

$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{U}_F \mathbf{S}_F \mathbf{V}_F^H + \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^H \quad (1.47)$$

où $\mathbf{U}_F$, $\mathbf{S}_F$ et $\mathbf{V}_F$ contiennent les F composantes principales, et $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{S}_n$ et $\mathbf{V}_n$ contiennent

le reste des composantes ;

- estimation des modes a_i en utilisant $\underline{\mathbf{U}}_F$ et $\overline{\mathbf{U}}_F$ de la même manière que dans la méthode ESPRIT 1-D (§ 1.2.2.2) ou dans la méthode *Matrix Pencil* [HS90], où

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{U}}_F &= \mathbf{U}_F \text{ avec les } L \text{ dernières lignes supprimées} \\ \overline{\mathbf{U}}_F &= \mathbf{U}_F \text{ avec les } L \text{ premières lignes supprimées;} \end{aligned}$$

- estimation des modes b_i de la même façon que dans l'étape précédente en utilisant les matrices $\underline{\mathbf{U}}_{FP}$ et $\overline{\mathbf{U}}_{FP}$:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{U}}_{FP} &= \mathbf{P}\mathbf{U}_F \text{ avec les } K \text{ dernières lignes supprimées} \\ \overline{\mathbf{U}}_{FP} &= \mathbf{P}\mathbf{U}_F \text{ avec les } K \text{ premières lignes supprimées;} \end{aligned}$$

où $\mathbf{P}$ est une matrice de permutation définie par :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(1) \\ \mathbf{p}^T(1 + L + 2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(1 + (L_1 - 1)L_2) \\ \mathbf{p}^T(2) \\ \mathbf{p}^T(2 + L_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(2 + (L_1 - 1)L_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(L_2) \\ \mathbf{p}^T(L_2 + L_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(L_2 + (L_1 - 1)L_2) \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

avec $\mathbf{p}(i)$ est un vecteur de $L_1 L_2$ éléments avec 1 sur le i^{e} élément et 0 pour le reste des éléments ;

- les modes qu'on vient d'estimer ne sont pas nécessairement bien ordonnés. Par conséquent, une étape de reformation des paires est indispensable. Il est montré que le couplage peut être effectué par maximisation du critère suivant [Hua92] :

$$J(i, j) = \sum_{t=1}^F \|\mathbf{u}_t^H \mathbf{e}(a_i, b_j)\|^2 \quad (1.49)$$

où $\mathbf{u}_t$ est la t^e colonne de $\mathbf{U}_F$ et $\mathbf{e}(a_i, b_j)$ est défini par :

$$\mathbf{e}(a_i, b_j) = [1, a_i, \dots, a_i^{L-1}]^T \otimes [1, b_j, \dots, b_j^{K-1}]^T \quad (1.50)$$

pour $i = 1, \dots, F$. Le symbole $\otimes$ désigne le produit de Kronecker. On forme la paire (a_i, b_j) avec l'indice j qui maximise $\mathbf{e}(a_i, b_j)$.

Ce dernier critère peut produire des couples incorrects dans le cas où deux ou plusieurs fréquences dans une des dimensions ont la même valeur. En outre, tous les coefficients d'atténuation doivent être nuls. Pour éviter ces limitations, une autre méthode de reformation des paires est proposée dans [RN01] ; elle est décrite dans le paragraphe suivant.

1.4.3 Méthode ESPRIT 2-D

La méthode ESPRIT 2-D [RN01] a été proposée pour trouver des solutions aux limitations de la méthode MEMP [Hua92]. En effet, l'algorithme ESPRIT 2-D utilise une résolution analogue à celle utilisée dans la méthode ACMP [VMB94] pour obtenir les paramètres du modèle du signal 2-D. Cependant, les modes estimés par ESPRIT 2-D sont obtenues à partir des matrices $\underline{\mathbf{U}}_F^\dagger \overline{\mathbf{U}}_F$ et $\underline{\mathbf{U}}_{FP}^\dagger \overline{\mathbf{U}}_{FP}$. Cette méthode peut être résumée dans les étapes suivantes :

- décomposition en valeur singulière de la matrice $\mathbf{Y}_e$ de l'équation (1.41) et formation de la matrice $\mathbf{U}_F$ par les F premiers vecteurs singuliers gauches (équation (1.47)) ;
- calcul des matrices $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$ tel que : $\mathbf{F}_1 = \underline{\mathbf{U}}_F^\dagger \overline{\mathbf{U}}_F$ et $\mathbf{F}_2 = \underline{\mathbf{U}}_{FP}^\dagger \overline{\mathbf{U}}_{FP}$;
- calcul de la matrice de transformation $\mathbf{T}$ à partir de la décomposition en valeurs propres d'une combinaison linéaire de $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$:

$$\beta \mathbf{F}_1 + (1 - \beta) \mathbf{F}_2 = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{T} \quad (1.51)$$

où β est un paramètre utilisateur ;

- application de la transformation $\mathbf{T}$ à $\mathbf{F}_1$ et $\mathbf{F}_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta}_a = \mathbf{T} \mathbf{F}_1 \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{\Delta}_b = \mathbf{T} \mathbf{F}_2 \mathbf{T}^{-1} \end{cases} \quad (1.52)$$

- extraction des coefficients d'atténuation et des fréquences, ordonnés, à partir des diagonales principales de $\mathbf{\Delta}_a$ et $\mathbf{\Delta}_b$.

La méthode ESPRIT 2-D ne nécessite pas une étape de reformation des paires de modes. En effet, l'élément (i, i) de $\mathbf{\Delta}_a$ et l'élément (i, i) de $\mathbf{\Delta}_b$ correspondent au même mode 2-D.

1.5 Méthodes à haute résolution d'estimation R -D

1.5.1 Multidimensional Damped MUSIC

Li et *al.* [LRL98] proposent une méthode d'estimation des paramètres, pour les données RMN, basée sur les techniques des sous-espaces en exploitant la déficience de rang et les propriétés de Hankel de la matrice de prédiction. Cet algorithme est nommé DMUSIC (*Damped MUSIC*) pour refléter sa capacité à estimer les paramètres de sinusoides amorties. La méthode a été prouvée pour des signaux 1-D (1D-DMUSIC), puis pour les signaux modaux 2-D (2D-DMUSIC) et enfin elle a été généralisée pour des signaux R -D (MD-DMUSIC). En récrivant le modèle du signal (1.2) par :

$$\tilde{y}(m_1, \dots, m_R) = \sum_{i=1}^F c_i \exp \left(\sum_{r=1}^R s_{i,r} m_r \right) + e(m_1, \dots, m_R) \quad (1.53)$$

où $s_{i,r} = -\alpha_{i,r} + j2\pi f_{i,r}$, la méthode MD-DMUSIC peut être résumée par les étapes suivantes :

- construction de la matrice de prédiction $\mathbf{Y}_e \in \mathbb{C}^{(M-L+1)^R \times L^R}$

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_{L_1-1} \\ \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \cdots & \mathbf{Y}_{L_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Y}_{M_1-L_1} & \mathbf{Y}_{M_1-L_1+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{M_1-1} \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

où

$$\mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, 0} & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, 1} & \cdots & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, L_{r+1}-1} \\ \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, 1} & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, 2} & \cdots & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, L_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, M_{r+1}-L_{r+1}} & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, M_{r+1}-L_{r+1}+1} & \cdots & \mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_r, M_{r+1}-1} \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

pour $r = 1, 2, \dots, R-2$.

$$\mathbf{Y}_{m_1, \dots, m_{R-1}} = \begin{bmatrix} y(m_1, \dots, m_{R-1}, 0) & \cdots & y(m_1, \dots, m_{R-1}, L_R - 1) \\ y(m_1, \dots, m_{R-1}, 1) & \cdots & y(m_1, \dots, m_{R-1}, L_R) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(m_1, \dots, m_{R-1}, M_R - L_R) & \cdots & y(m_1, \dots, m_{R-1}, M_R - 1) \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

- décomposition en valeurs singulières la matrice $\mathbf{Y}_e$

$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H$$

- estimation du vecteur des modes $\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_r]$ en cherchant les pics du spectre M-D DMUSIC

suivant :

$$P(\mathbf{s}) = \frac{1}{\bar{\mathbf{r}}^H(\mathbf{s}) \left(\sum_{i=F+1}^{L_1 \cdots L_R} \mathbf{v}_i^* \mathbf{v}_i^T \right) \bar{\mathbf{r}}(\mathbf{s})} \quad (1.57)$$

où $\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{s}) &= [\mathbf{r}_{R-1}(\mathbf{s}), e^{s_{i,1}} \mathbf{r}_{R-1}(\mathbf{s}), \dots, e^{(L_1-1)s_{i,1}} \mathbf{r}_{R-1}(\mathbf{s})]^T \\ \mathbf{r}_r(\mathbf{s}) &= \underbrace{[\mathbf{r}_{r-1}(\mathbf{s}), e^{s_{i,R-r+1}} \mathbf{r}_{r-1}(\mathbf{s}), \dots, e^{(L_{R-l+1}-1)s_{i,R-l+1}} \mathbf{r}_{r-1}(\mathbf{s})]^T}_{\text{pour } r=2,3,\dots,R-1} \\ \mathbf{r}_1(\mathbf{s}) &= [1, e^{s_{i,R}}, \dots, e^{(L_R-1)s_{i,R}}]^T \end{aligned}$$

La méthode MD-DMUSIC est la première méthode HR qui a été développée pour traiter le problème d'estimation des paramètres de sinusoides amorties sur des signaux de dimension $R > 2$. Néanmoins, elle demande une recherche exhaustive multidimensionnelle des pics du spectre MUSIC $P(\mathbf{s})$, ce qui la rend moins pratique pour des cas réels.

1.5.2 Improved Multidimensional Folding (IMDF)

La méthode IMDF [LL06] est une amélioration de la méthode MDF [LS02]. En effet, IMDF exploite la structure du sous-espace signal, mais d'une façon différente de celle des méthodes utilisant les valeurs propres parce que les fréquences sont estimées à partir des vecteurs propres. L'avantage de la méthode IMDF est que le couplage des modes se fait automatiquement une fois une décomposition en valeur propres effectuée.

Les données du signal R -D, dont le modèle est présenté dans l'équation (1.2), sont rangées dans le vecteur $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0, 0, \dots, 0) \\ y(0, 0, \dots, 1) \\ \vdots \\ y(0, 0, \dots, M_R - 1) \\ y(0, 0, \dots, 1, 0) \\ \vdots \\ y(M_1 - 1, M_2 - 1, \dots, M_R - 1) \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

Le vecteur $\mathbf{y}$ peut s'écrire sous une forme matricielle :

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}_1 \odot \mathbf{A}_2 \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R) \mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{c} \quad (1.59)$$

où $\odot$ est le produit de Khatri-Rao et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{M_r \times F}$ une matrice de Vandermonde qui a comme

générateurs $\{a_{i,r}\}_{i=1}^F$:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_{1,r} & a_{2,r} & \cdots & a_{F,r} \\ a_{1,r}^2 & a_{2,r}^2 & \cdots & a_{F,r}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,r}^{M_r-1} & a_{2,r}^{M_r-1} & \cdots & a_{F,r}^{M_r-1} \end{bmatrix}.$$

Le lemme suivant présente un opérateur $\mathcal{S}$ que l'on utilise pour former une matrice améliorée à partir des donnée R -D. C'est en fait une généralisation de la matrice améliorée $\mathbf{Y}_e$ obtenue avec des signaux 2-D.

Lemme 1 *Etant donnés $M_r, r = 1, \dots, R$, définissons un ensemble de matrices de sélection :*

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{l_r}^{K_r} &= [\mathbf{0}_{K_r \times l_r} \quad \mathbf{I}_{K_r} \quad \mathbf{0}_{K_r \times (L_r - l_r - 1)}] && : \text{ de dimension } K_r \times M_r \\ \mathbf{J}_{l_1, l_2, \dots, l_R} &= \mathbf{J}_{l_1}^{K_1} \otimes \mathbf{J}_{l_2}^{K_2} \cdots \otimes \mathbf{J}_{l_R}^{K_R} && : \text{ de dimension } \prod_{r=1}^R K_r \times \prod_{r=1}^R M_r \end{aligned} \quad (1.60)$$

où $l_r = 0, \dots, L_r - 1$, et K_r et L_r sont des entiers positifs satisfaisant $K_r + L_r - 1 = M_r$, pour $r = 1, \dots, R$. Définissons ensuite un opérateur d'amélioration (smoothing operator) $\mathcal{S}$ pour le vecteur $\mathbf{y}$ tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{y}) &= [\mathbf{J}_{1,1,\dots,1}\mathbf{y} \quad \mathbf{J}_{1,1,\dots,2}\mathbf{y} \quad \cdots \quad \mathbf{J}_{1,1,\dots,L_R}\mathbf{y} \quad \mathbf{J}_{1,1,\dots,2,1}\mathbf{y} \\ &\quad \cdots \quad \mathbf{J}_{L_1,L_2,\dots,L_R-1}\mathbf{y} \quad \mathbf{J}_{L_1,L_2,\dots,L_R}\mathbf{y}] \end{aligned} \quad (1.61)$$

alors on montre que

$$\mathbf{Y}_S = \mathcal{S}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}\mathbf{\Delta}_c\mathbf{H}^T \quad (1.62)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{A}_1^{(K_1)} \odot \mathbf{A}_2^{(K_2)} \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R^{(K_R)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{A}_1^{(L_1)} \odot \mathbf{A}_2^{(L_2)} \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R^{(L_R)} \end{aligned} \quad (1.63)$$

■

Ce lemme est prouvé entre autres dans [LL06].

En utilisant les matrices de sélection

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= [\mathbf{I}_{M_1-1} \quad \mathbf{0}_{(M_1-1) \times 1}] \\ \mathbf{J}_2 &= [\mathbf{0}_{(M_1-1) \times 1} \quad \mathbf{I}_{M_1-1}], \end{aligned}$$

on forme $\mathbf{y}_1$ et $\mathbf{y}_2$ à partir de $\mathbf{y}$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_1 &= (\mathbf{J}_1 \otimes \mathbf{I}_{M_2} \cdots \otimes \mathbf{I}_{M_R}) \mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{A}_1^{(M_1-1)} \odot \mathbf{A}_2 \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R \right) \mathbf{c}\end{aligned}\quad (1.64)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_2 &= (\mathbf{J}_2 \otimes \mathbf{I}_{M_2} \cdots \otimes \mathbf{I}_{M_R}) \mathbf{y} \\ &= \left(\mathbf{A}_1^{(M_1-1)} \odot \mathbf{A}_2 \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R \right) \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{c}\end{aligned}\quad (1.65)$$

où $\mathbf{a}_1 = [a_{1,1}, a_{2,1}, \dots, a_{F,1}]^T$. Ensuite l'opérateur $\mathcal{S}$ est appliqué pour construire les matrices :

$$\mathbf{Y}_{1,\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\mathbf{y}_1) = \mathbf{G} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{c}} \mathbf{H}^T \quad (1.66)$$

$$\mathbf{Y}_{2,\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\mathbf{y}_2) = \mathbf{G} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{c}} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{H}^T \quad (1.67)$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \mathbf{A}_1^{(K_1)} \odot \mathbf{A}_2^{(K_2)} \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R^{(K_R)} \\ \mathbf{H} &= \mathbf{A}_1^{(L_1)} \odot \mathbf{A}_2^{(L_2)} \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R^{(L_R)}\end{aligned}$$

et K_r et L_r sont des entiers positifs vérifiant : $K_1 + L_1 = M_1$, $K_r + L_r = M_r + 1$, $r = 2, \dots, R$. Si on définit la matrice $\mathbf{Z}$ regroupant $\mathbf{Y}_{1,\mathcal{S}}$ et $\mathbf{Y}_{2,\mathcal{S}}$:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,\mathcal{S}} \\ \mathbf{Y}_{2,\mathcal{S}} \end{bmatrix}, \quad (1.68)$$

on aura

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{1,\mathcal{S}} \\ \mathbf{Y}_{2,\mathcal{S}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \end{bmatrix} \mathbf{H}^T = \mathbf{P} \mathbf{H}^T \quad (1.69)$$

où la matrice $\mathbf{Z}$ est de dimension $2 \prod_{r=1}^R K_r \times \prod_{r=1}^R L_r$, et $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}$ sont définies par

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{c}^T \odot \mathbf{G}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \end{bmatrix}. \quad (1.70)$$

Du fait que les deux matrices $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{H}$ sont des produits de Khatri-Rao des matrices de Vandermonde, et en choisissant $\prod_{r=1}^R K_r \geq F$ et $\prod_{r=1}^R L_r \geq F$, alors $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{H}$ sont de rang plein [LL06]. La décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{Z}$, en prenant les F premiers vecteurs singuliers, donne :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U}_F \mathbf{S}_F \mathbf{V}_F^H \quad (1.71)$$

Il existe une matrice non singulière $\mathbf{T}^{-1}$ telle que

$$\mathbf{U}_F = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{T}^{-1} \quad (1.72)$$

où $\mathbf{U}_F$ est divisée en deux sous matrices $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ de dimensions égales. On a alors $\mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{U}_2 = \mathbf{T} \mathbf{\Delta}_a \mathbf{T}^{-1}$. En supposant donc que les éléments de $\mathbf{a}_1$ sont distincts, $\mathbf{T}$ peut être obtenue en calculant les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{U}_2$. Ensuite, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{H}$ sont estimées à partir de la matrice $\mathbf{T}$ où les colonnes peuvent être permutées et multipliées par des scalaires :

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_F \mathbf{T} \quad (1.73)$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V}^H)^T. \quad (1.74)$$

Dans le cas de signaux non bruités, un mode $a_{i,r}$ peut être obtenu par une des équations suivantes :

$$a_{i,r} = \frac{p(k, i)}{p(k - K'_r, i)}, \quad \text{mod}(k - 1, K'_{r-1}) \geq K'_r \quad (1.75)$$

pour $i = 1, \dots, F$, où $1 \leq k \leq K'_0$, $p(k, i)$ est l'élément d'indice (k, i) de la matrice $\mathbf{P}$ et

$$K'_r = \begin{cases} \prod_{n=r+1}^R K_n, & \text{pour } 0 \leq r \leq R-1 \\ 1, & \text{pour } r = R. \end{cases} \quad (1.76)$$

Notons que les modes sont couplés automatiquement parce que les modes $(a_{i,r}, r = 1, \dots, R)$ de la même composante R -D (la i^e composante) sont obtenue à partir de la même colonne de $\mathbf{P}$.

Dans le cas de données bruitées, la structure du produit de Khatri-Rao des matrices de Vandermonde est exploitée, et une moyenne des estimées dans (1.75) est calculée pour obtenir les modes $a_{i,r}$, ainsi la variance d'estimation est réduite. En fait, $a_{i,r}$ peut être estimé par :

$$a_{i,r} = \frac{1}{\gamma_r} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ \text{mod}(k-1, K'_{r-1}) \geq K'_r}}^{2K'_0} \frac{\tilde{p}(k, i)}{\tilde{p}(k - K'_r, i)} + \sum_{\substack{l=1 \\ \text{mod}(l-1, L'_{r-1}) \geq L'_r}}^{L'_0} \frac{\tilde{h}(l, i)}{\tilde{h}(l - L'_r, i)} \right) \quad (1.77)$$

pour $r = 1, \dots, R$, où $\gamma_r = 2K'_0(K_r - 2)/(K_r - 1) + L'_0(L_r - 2)/(L_r - 1)$. Les L'_r sont définis de la même façon que les K'_r en remplaçant, dans (1.76), K_n par L_n . Finalement, l'algorithme R -D IMDF peut être résumé dans les étapes suivantes :

- former $\tilde{\mathbf{y}}_1$ et $\tilde{\mathbf{y}}_2$ en utilisant (1.64) et (1.65), et former $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ et $\tilde{\mathbf{Y}}_2$ en utilisant (1.66) et (1.67) ;
- calculer la SVD de $\tilde{\mathbf{Z}}$ et partitionner les F vecteurs principaux gauche (i.e. $\tilde{\mathbf{U}}_F$) en deux matrices de dimensions égales $\tilde{\mathbf{U}}_1$ et $\tilde{\mathbf{U}}_2$ selon (1.72) ;
- calculer l'ensemble des vecteur propres (i.e $\tilde{\mathbf{T}}$) de $\tilde{\mathbf{U}}_1^\dagger \tilde{\mathbf{U}}_2$, et estimer $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{H}}$ en utilisant (1.73) et (1.74) ;
- utiliser (1.77) pour calculer $\tilde{a}_{i,r}$.

La méthode IMDF se base sur les vecteurs propres de la matrice $\tilde{\mathbf{U}}_1^\dagger \tilde{\mathbf{U}}_2$ pour l'estimation des modes R -D et elle présente la meilleure borne d'identifiabilité. Cependant, elle échoue quand il existe des

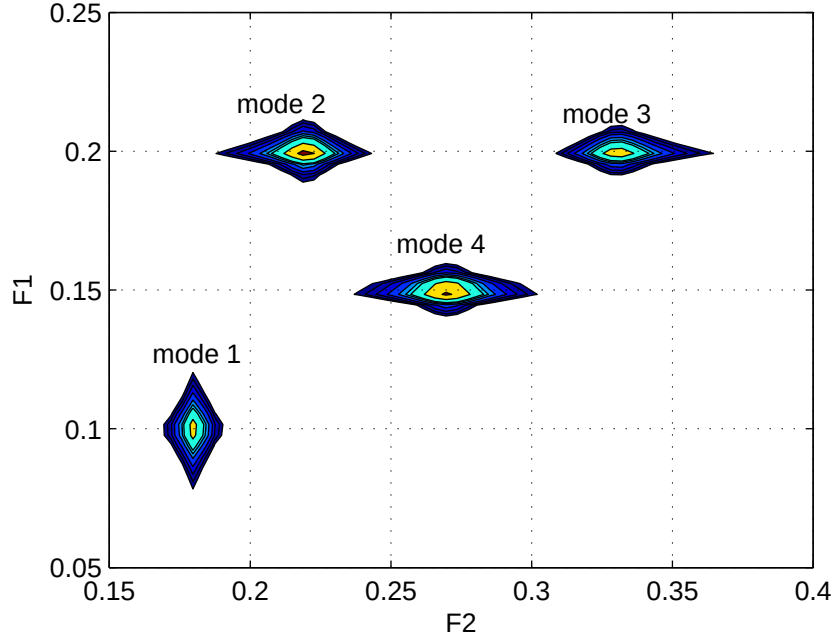


FIGURE 1.1 – Problèmes de modes partageant la même fréquence dans une dimension. Les modes 2 et 3 ont les mêmes coordonnées selon la première dimension.

modes identiques dans certaines dimensions parce que les vecteurs propres ne sont plus linéairement indépendants.

Estimation R -D en présence de modes identiques

Liu et *al.* [LLM07] ont utilisé l'idée des coefficients de pondération, présentée dans la méthode ESPRIT 2-D [RN01], pour pouvoir estimer les paramètres des modes de signaux R -D avec multiples expériences en présence de colinéarités, i.e., présence de modes identiques dans une ou plusieurs dimensions du signal R -D ($\exists i \neq i'$ tel que $a_{i,r} = a_{i',r}$ pour r donné, cf. figure 1.1). L'algorithme peut également être utilisé dans le cas d'une seule expérience.

L'algorithme consiste tout d'abord à former une matrice améliorée en utilisant l'opérateur $\mathcal{S}$ selon le lemme 1 :

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{S}} = \mathcal{S}(\mathbf{y}) = \mathbf{G}\Delta_{\mathbf{c}}\mathbf{H}^T \quad (1.78)$$

On calcule ensuite la SVD de $\mathbf{Y}_{\mathcal{S}}$ en gardant les F premiers vecteurs propres gauches

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{S}} = \mathbf{U}_F \mathbf{S}_F \mathbf{V}_F^H \quad (1.79)$$

Il existe donc une matrice non singulière $\mathbf{T}$ qui vérifie

$$\mathbf{U}_F = \mathbf{G}\mathbf{T}^{-1} \quad (1.80)$$

On forme deux matrices de dimensions égales

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_F \quad (1.81)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_F \quad (1.82)$$

où $\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_{1,1} \otimes \mathbf{J}_{1,2} \cdots \otimes \mathbf{J}_{1,R}$ et $\mathbf{J}_2 = \sum_{r=1}^R \alpha_r \ddot{\mathbf{J}}_{2,r}$ avec $\mathbf{J}_{1,r} = [\mathbf{I}_{K_r-1} \quad \mathbf{0}_{(K_r-1) \times 1}]$, $\mathbf{J}_{2,r} = [\mathbf{0}_{(K_r-1) \times 1} \quad \mathbf{I}_{K_r-1}]$ et $\ddot{\mathbf{J}}_{2,r} = (\mathbf{J}_{1,1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_{1,r}) \otimes \mathbf{J}_{2,r} \otimes (\mathbf{J}_{1,r+1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{J}_{1,R})$. Les coefficients α_r sont choisis aléatoirement. On peut montrer que :

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{P} \mathbf{T}^{-1} \quad (1.83)$$

$$\mathbf{U}_2 = \mathbf{P} \mathbf{\Delta}_\beta \mathbf{T}^{-1} \quad (1.84)$$

où $\mathbf{P} = \mathbf{A}_1^{(K_1-1)} \odot \mathbf{A}_2^{(K_2-1)} \odot \cdots \odot \mathbf{A}_R^{(K_R-1)}$ et $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_F]^T$ tel que $\beta_i = \sum_{r=1}^R \alpha_r a_{i,r}$. Donc, la matrice $\mathbf{T}$ est estimée à partir de la décomposition en valeurs propres de $\mathbf{U}_1^\dagger \mathbf{U}_2 = \mathbf{T} \mathbf{\Delta}_\beta \mathbf{T}^{-1}$. Bien évidemment, pour que $\mathbf{T}$ ait une seule (unique) définition, les α_i doivent être choisis de telle sorte que les éléments du vecteur β soient distincts même s'il existe des modes identiques dans une ou plusieurs dimensions.

Finalement, on estime la matrice $\mathbf{P} = \mathbf{U}_1 \mathbf{T}$. On note que $\mathbf{P}$ estimée peut avoir les colonnes permutées et multipliées par des scalaires. Les paramètres des modes R -D sont extraits de la même manière que dans IMDF (équation (1.77)). Le choix aléatoire des coefficients α_r peut produire des éléments égaux dans le vecteur β . Pour éviter cela, une méthode qui consiste à calculer itérativement les meilleurs coefficients α_r a été proposée dans [LLM07].

1.6 Estimation des autres paramètres

Les méthodes présentées dans les sections précédentes estiment uniquement les modes des signaux mono- (a_i) et multidimensionnels ($a_{i,r}$). On s'intéresse dans cette section à l'estimation des amplitudes complexes c_i et de l'ordre du modèle F .

1.6.1 Estimation des amplitudes complexes

Le rangement des échantillons $y(m_1, \dots, m_R)$ dans le vecteur $\mathbf{y}$ (1.58) permet de ramener l'estimation des amplitudes à un problème linéaire selon l'équation (1.59), i.e., $\mathbf{y} = \mathbf{A} \mathbf{c}$. Par conséquent, pour pouvoir estimer le vecteur des amplitudes, nous devons d'abord estimer les modes par l'une des méthodes présentées précédemment. Les amplitudes sont alors estimées au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H \mathbf{y}.$$

1.6.2 Estimation de l'ordre du modèle

La sélection de l'ordre du modèle exponentiel est un problème crucial lorsque l'on utilise les méthodes HR. En effet, celle-ci affecte directement la qualité de l'estimation lors de la troncature dans les méthodes de prédiction linéaire ou la détermination des sous-espaces signal et bruit dans les

méthodes de sous-espaces. Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour estimer le nombre de sinusoides F d'un signal 1-D dont les plus connues sont le critère AIC (*Akaike Information Criterion*) et le critère MDL (*Minimum Description Length*). Wax et Kailath [WK85] ont exprimés ces deux critères en fonction des valeurs propres de la matrice d'autocorrélation :

$$AIC(k) = -M(L - k) \ln \left(\frac{\left(\prod_{i=k+1}^L \lambda_i \right)^{\frac{1}{L-k}}}{\frac{1}{L-k} \sum_{i=k+1}^L \lambda_i} \right) + 2k(2L - k) \quad (1.85)$$

$$MDL(k) = -M(L - k) \ln \left(\frac{\left(\prod_{i=k+1}^L \lambda_i \right)^{\frac{1}{L-k}}}{\frac{1}{L-k} \sum_{i=k+1}^L \lambda_i} \right) + \frac{1}{2}k(2L - k) \ln(M) \quad (1.86)$$

pour $k = 0, \dots, L - 1$, où L est l'ordre de prédiction et λ_i sont les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation, rangées par ordre décroissant ($\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$). Il est également possible de définir ces critères en fonction des valeurs singulières σ_i , au lieu des valeurs propres λ_i , lorsque la matrice d'autocorrélation est sur-déterminée (de dimension $L' \times L$, $L' \geq L$). Il est indiqué que le critère AIC à tendance à surestimer l'ordre du modèle alors que MDL tend à le sous-estimer [DMC98]. Cela provient du terme de pénalisation du critère MDL ($\frac{1}{2}k(2L - k) \ln(M)$) qui est plus important que celui du critère AIC ($2k(2L - k)$).

A notre connaissance, la sélection de l'ordre du modèle dans le cas de signaux multidimensionnels n'a pas été traitée. Ainsi, le choix d'un ordre inférieur au nombre réel de composantes entraîne des estimations biaisés, et le choix d'un ordre supérieur augmente la variance des paramètres estimés. A cause de cela, la mise en oeuvre des méthodes de sous-espaces dans des applications pratiques, où l'ordre du modèle n'est pas connu, peut produire de mauvais résultats.

1.7 Performances des méthodes HR

Les performances d'un estimateur sont généralement quantifiées par le biais et la variance. On peut également calculer son efficacité définie par le rapport de sa variance sur la borne de Cramér-Rao. On dit alors qu'un estimateur est efficace lorsqu'il n'est pas biaisé et que son efficacité est proche ou égale à 1.

Les performances des méthodes de sous-espaces 1-D ont été abondamment étudiées dans plusieurs travaux. Le calcul analytique des expressions du biais et de la variance pour ce genre de méthodes est difficile, voir impossible, car le calcul des racines d'un polynôme de prédiction ou des valeurs propres d'une matrice conduit à une relation complexe entre les statistiques du signal et celles des estimateurs. En revanche, des résultats asymptotiques ont pu être obtenus en exploitant la théorie des perturbations. Il a été démontré que toutes les méthodes HR 1-D présentées dans ce chapitre sont asymptotiquement ($M \rightarrow \infty$ ou $\sigma^2 \rightarrow 0$) non biaisées, et les variances de quelques méthodes ont été calculées, par exemple pour Prony, Kumaresan-Tufts, MUSIC et ESPRIT, dans

[SN88, SS91, KPTV87, ESS93, HS91, DT09].

On montre dans la figure 1.2 l'erreur-type (RMSE : *root mean square error*) d'estimation des fréquences et des amortissements obtenue par l'application des méthodes Kumaresan-Tufts (KT), ESPRIT 1-D et IQML sur un signal 1-D amorti simulé. Le signal contient deux sinusoides complexes d'amplitudes égales ($c_i = 1$), de fréquences $f_1 = 0.1$ et $f_2 = 0.2$, et de facteurs d'amortissements $\alpha_1 = 0.02$ et $\alpha_2 = 0.015$. Le nombre d'échantillons est $M = 30$, et 1000 réalisations du bruit sont utilisées. Concernant la fréquence et dans des niveaux de RSB¹ supérieurs à 3 dB, la méthode ESPRIT a des performances très proches de IQML et meilleures que KT. L'effet de seuil de IQML se produit aux alentours de RSB = 3 dB alors que les effets de seuil de ESPRIT et KT se produisent avant, ce qui signifie que ces deux dernières possèdent une meilleure robustesse au bruit. Cependant, concernant l'estimation du facteur d'amortissement, la méthode IQML est meilleure que les deux autres.

Pour comparer les performances des méthodes 2-D, on présente les résultats obtenus sur un exemple de simulation. Les méthodes IMDF, ESPRIT 2-D, MEMP avec la technique de couplage des modes [RN01] et les deux algorithmes TLS-Prony 2-D sont appliquées pour estimer les modes d'un signal modal 2-D bruité qui contient 20×20 échantillons. Les amplitudes $\{c_f\}_{f=1}^F$ sont mises à (3.184, 2.846, 2.846). Les modes ont les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}(f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.10, 0.080; 0.20, 0.075), \\(f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.30, 0.075; 0.10, 0.050), \\(f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.40, 0.050; 0.25, 0.090).\end{aligned}$$

La figure 1.3 montre la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne d'estimation des algorithmes IMDF, ESPRIT 2-D, MEMP, TLS-Prony1–2 pour l'estimation de $f_{1,1}$. Les méthodes ESPRIT 2-D et MEMP ont presque la même erreur-type qui est par ailleurs proche de la borne de Cramér-Rao. Elles ont également un effet de seuil meilleur que celui des algorithmes TLS-Prony. IMDF a des performances proches de ESPRIT 2-D.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué un état de l'art des méthodes HR permettant d'estimer les paramètres des sinusoides amorties et qui ont pu être étendues aux signaux multidimensionnels. Les premières méthodes HR proposées utilisent des équations de prédiction linéaire qui caractérisent le modèle du signal. Celles-ci ont été ensuite étendues pour traiter le problème d'estimation modales 2-D. Le deuxième type de méthodes HR est celui des approches fondées sur la décomposition de l'espace des données en deux sous-espaces orthogonaux, appelés espace signal et espace bruit. Le couplage des modes R -D est le problème principal lors de l'extension des méthodes HR 1-D au cas R -D. Pour cela, diverses techniques de couplages ont été proposées, les meilleures d'entre elles réalisent soit une diagonalisation conjointe soit un couplage automatique en utilisant les vecteurs propres. De plus, un problème de colinéarité se manifeste lorsque le signal R -D contient des modes

1. La définition du RSB dans le cas de sinusoides amorties est délicate car ces signaux sont à énergie finie. Dans ce mémoire, le RSB est défini, pour chaque mode, comme le carré du rapport de l'amplitude à l'écart-type du bruit : $\text{RSB}_i = |c_i|^2 / \sigma^2$.

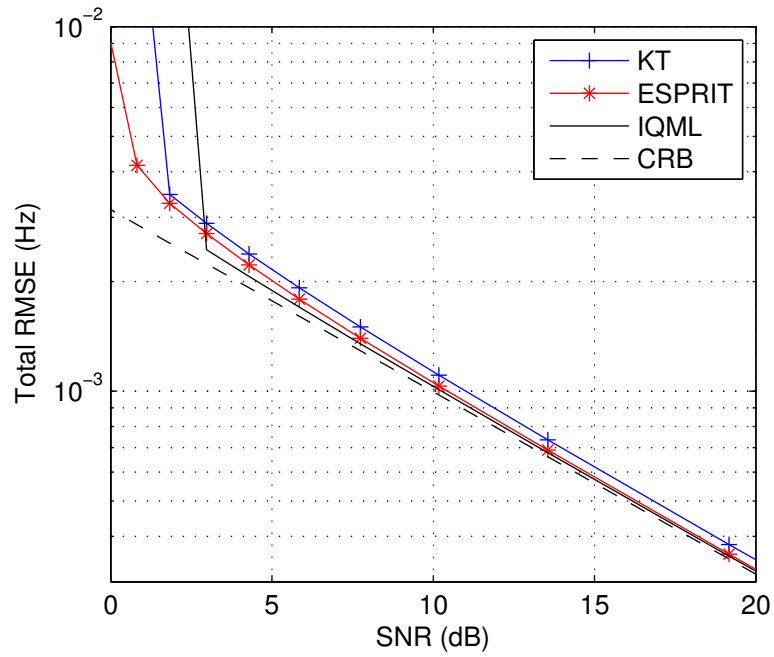
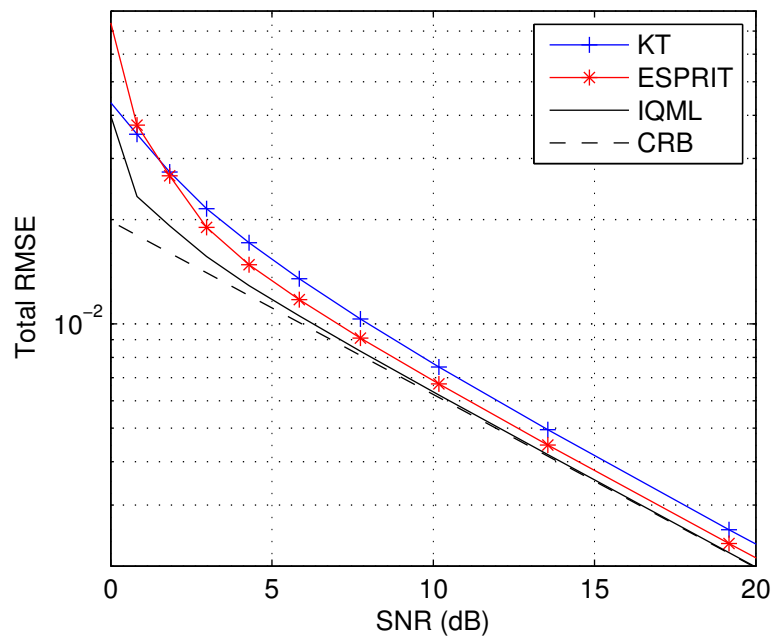
(a) erreur-type de f (b) erreur-type de α

FIGURE 1.2 – Erreur-type (RMSE) des fréquences et d'amortissement en fonction du RSB (1000 réalisations), $M = 30, F = 2$.

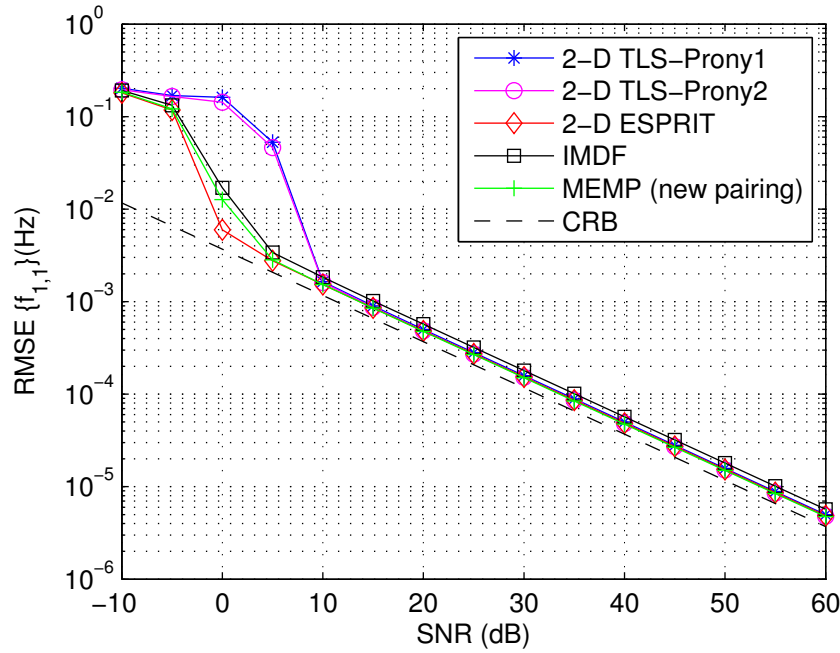


FIGURE 1.3 – Erreur-type (Total RMSE) de la fréquence $f_{1,1}$ en fonction du RSB (1000 réalisations).

identiques dans une ou plusieurs dimensions. Ceci a été résolu par l'introduction des coefficients de pondération dans l'estimation R -D ; c'est le cas par exemple dans la méthode ESPRIT 2-D. L'études des performances de ces diverses techniques d'estimation a montré que les méthodes de types ESPRIT sont les plus performantes.

Plus récemment, des méthodes d'estimation R -D utilisant les treillis multidimensionnels du signal et les outils de l'algèbre multilinéaire ont été proposées. Ces méthodes sont sensées avoir une meilleure robustesse au bruit par rapport aux méthodes classiques. Dans le prochain chapitre, nous proposons une méthode tensorielle d'estimation R -D.

Chapitre 2

Une approche tensorielle pour l'estimation modale R -D

2.1 Introduction

Plusieurs méthodes HR, qui exploitent la structure Vandermonde du modèle du signal modal, ont été proposées pour traiter le problème d'estimation des paramètres R -D. Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les plus connues d'entre elles : ESPRIT 2-D [RN01], IMDF [LL06], l'algorithme d'estimation R -D proposé dans [LLM07] et MD-MUSIC [LRL98]. On peut également citer par exemple les algorithmes *root-multiple invariance ESPRIT* (root-MI-ESPRIT) [PSBG05] et *multidimensional embedding* MDE [Sid01]. Comme les données sont multidimensionnelles, ces méthodes nécessitent des techniques de rangement des dimensions dans une seule grande matrice, appelée matrice améliorée. De ce fait, en effectuant une estimation de sous-espaces via une SVD, la structure multidimensionnelle du signal n'est pas réellement exploitée. Récemment, l'algorithme *tensor-ESPRIT* a été proposé dans [HRDG08]. Il s'agit de définir un tenseur de données et d'estimer le sous-espace signal via une décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD : *higher-order singular value decomposition*), ce qui permet d'exploiter le treillis multidimensionnel du tenseur du signal R -D. D'après les auteurs, l'algorithme obtenu possède de meilleures performances par rapport aux méthodes de type ESPRIT. L'algorithme d'estimation des fréquences de signaux 2-D [TG09], en utilisant les tenseurs, consiste à former à partir de la matrice de données 2-D deux tenseurs d'ordres augmentés. Le sous-espace signal de chacun est ensuite estimé en exploitant sa HOSVD. Cela revient à résoudre un problème de décomposition en valeurs propres pour chaque sous-espace signal estimé. Finalement, les fréquences de chaque dimension sont estimées à partir des valeurs propres en effectuant une diagonalisation conjointe pour reformer les paramètres des modes 2-D. Nous proposons ici un algorithme d'estimation des paramètres qui consiste à former, à partir des données R -D, un seul tenseur d'ordre supérieur et qui exploite la structure d'invariance par translation du sous-espace signal estimé via une HOSVD. Contrairement aux approches classiques qui utilisent les valeurs propres et qui nécessitent une étape de couplage de modes, notre méthode estime les paramètres en exploitant les vecteurs propres. Ainsi, les paramètres (facteurs d'atténuation et fréquences) correspondant à un mode R -D sont couplés automatiquement une fois la décomposition en valeurs propres effectuée.

2.2 Notations

Les scalaires sont désignés par des caractères minuscules (a, b, α), les vecteurs colonnes sont notés par des caractères minuscules gras ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$), les matrices correspondent aux caractères majuscules gras ($\mathbf{A}, \mathbf{B}$), et les tenseurs sont désignés par des caractères calligraphiques gras ($\mathcal{A}, \mathcal{B}$).

Les opérations tensorielles que nous utilisons sont consistantes avec [KB09] :

- le produit extérieur (*outer product*) de deux tenseurs $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_R}$ et $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_N}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{A} \circ \mathcal{B} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_R \times K_1 \times K_2 \times \dots \times K_N}, \text{ où} \\ c(m_1, m_2, \dots, m_R, k_1, k_2, \dots, k_N) &= a(m_1, m_2, \dots, m_R) b(k_1, k_2, \dots, k_N). \end{aligned} \quad (2.1)$$

- le produit r -mode d'un tenseur $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_R}$ et d'une matrice $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{K_r \times M_r}$ suivant le r^{e} mode (dimension) est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \mathcal{A} \times_r \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_{r-1} \times K_r \times M_{r+1} \times \dots \times M_R}, \text{ où} \\ b(m_1, m_2, \dots, m_{r-1}, k_r, m_{r+1}, \dots, m_R) &= \sum_{m_r=1}^{M_r} a(m_1, m_2, \dots, m_R) u(k_r, m_r). \end{aligned} \quad (2.2)$$

- la notation $\mathcal{A} \times_{r=1}^R \mathbf{U}_r$ représente les produits r -mode sur les modes (dimensions) 1 à R de $\mathcal{A}$ par $\{\mathbf{U}_r\}_{r=1}^R$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{A} \times_{r=1}^R \mathbf{U}_r = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \dots \times_R \mathbf{U}_R \quad (2.3)$$

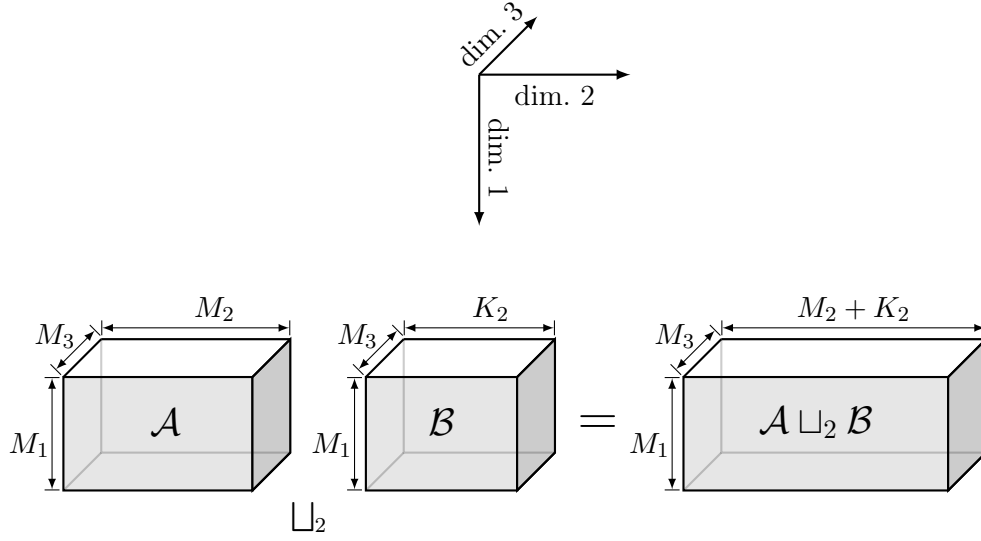
- la concaténation de deux tenseurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ le long de la r^{e} dimension est représentée par $\mathcal{A} \sqcup_r \mathcal{B}$. La figure 2.1 illustre la concaténation de tenseurs d'ordre 3 sur la 2^e dimension.

- $\mathcal{I}_{R,M} \in \mathbb{C}^{M \times M \times \dots \times M}$ est le tenseur identité d'ordre R dont les éléments $i(m_1, m_1, \dots, m_R)$ satisfont

$$i(m_1, m_1, \dots, m_r) = \begin{cases} 1, & \text{pour } m_1 = m_2 = \dots = m_R \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.4)$$

La figure 2.2 illustre le tenseur identité d'ordre 3 (*Three-way*) de dimension $M \times M \times M$

- On appelle hyper-tranches (HT) les tenseurs définis en fixant un indice dans une dimension et en faisant varier tous les indices des autres dimensions. La figure 2.3 illustre les (hyper-)tranches d'un tenseur d'ordre 3.
- la matrice $\mathbf{A}_{(r)} \in \mathbb{C}^{M_r \times (M_1 M_2 \dots M_{r-1} M_{r+1} \dots M_R)}$ représente le dépliement du tenseur $\mathcal{A}$ suivant la dimension M_r . Le concept de la *matricisation* est expliqué par l'exemple suivant. Soit le

FIGURE 2.1 – Concatenation de deux tenseurs d'ordres 3 selon la 2^e dimension ($\mathcal{A} \sqcup_2 \mathcal{B}$).

tenseurs $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{4,3,2}$ dont les (hyper-)tranches de la 3^e dimension sont données par :

$$\mathcal{A}_{::1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{::2} = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 \\ 22 & 23 & 24 \end{bmatrix}$$

Les matrices de dépliage des trois dimensions sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 5 & 6 & 16 & 17 & 18 \\ 7 & 8 & 9 & 19 & 20 & 21 \\ 10 & 11 & 12 & 22 & 23 & 24 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{(2)} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{(3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & \dots & 6 & 9 & 12 \\ 13 & 16 & 19 & 22 & 14 & \dots & 18 & 21 & 24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Formulation du problème

Dans les méthodes classiques d'estimation modale, par exemple l'approche IMDF (§ 1.5.2), les échantillons $y(m_1, \dots, m_R)$ sont rangés dans un vecteur $\mathbf{y}$ (équation (1.58)) :

$$\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (2.5)$$

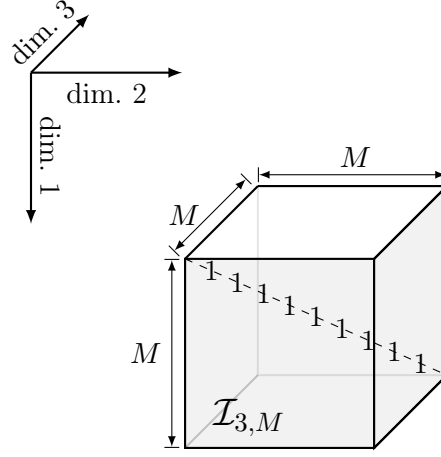
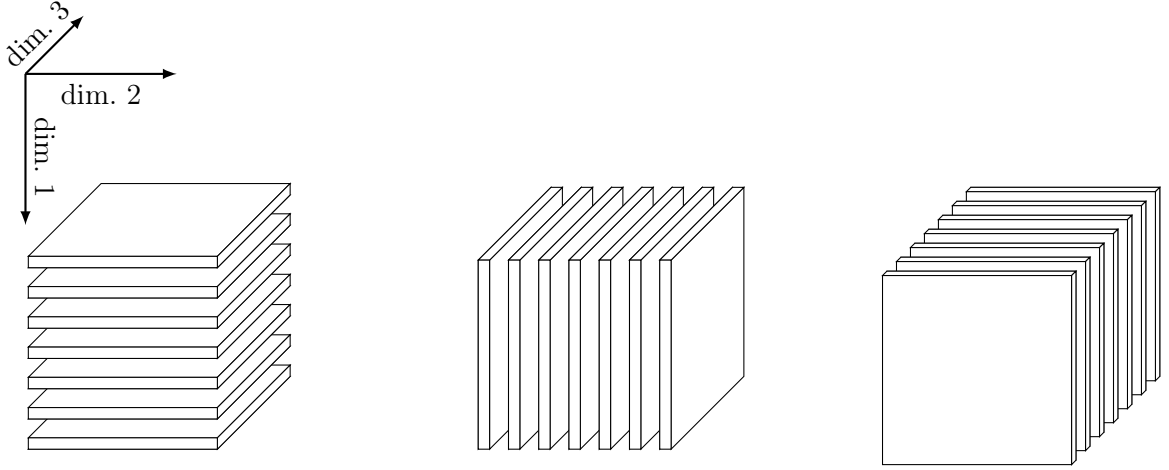
FIGURE 2.2 – Tenseur identité d'ordre 3 (*Three-way*) de dimension $M \times M \times M$.HT de dim. 1 : $\mathcal{A}_{m_1::}$ HT de dim. 2 : $\mathcal{A}_{::m_2}$ HT de dim. 3 : $\mathcal{A}_{:::m_3}$

FIGURE 2.3 – (Hyper-)tranches (HT) d'un tenseur d'ordre 3.

où $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1 \odot \mathbf{A}_2 \odot \dots \odot \mathbf{A}_R) \in \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_R \times F}$ et $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{M_r \times F}$ est une matrice de Vandermonde dont les générateurs sont $\{a_{i,r}\}_{i=1}^F$. Il est évident que la vectorisation ne tient pas compte de la structure inhérente à la grille utilisée pour échantillonner les données. Pour ce faire, on remplace le vecteur de données $\mathbf{y}$ par un tenseur $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_R}$ dont les éléments sont les échantillons du signal. En utilisant le modèle du signal R -D (équation 1.2), on obtient :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{G} \times_{R+1} \mathbf{c}^T + \mathcal{E} \quad (2.6)$$

où le tenseur $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_R \times F}$ est construit comme suit :

$$\mathcal{G} = [\mathcal{G}_1 \sqcup_{R+1} \mathcal{G}_2 \sqcup_{R+1} \dots \sqcup_{R+1} \mathcal{G}_F] \quad (2.7)$$

avec $\mathcal{G}_i \in \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_R}$ le tenseur correspondant au i^e mode du signal R -D. Il est obtenu, en utilisant le produit extérieur, par :

$$\mathcal{G}_i = \mathbf{a}_{i,1} \circ \dots \circ \mathbf{a}_{i,R}, \quad i = 1, \dots, F \quad (2.8)$$

où $\mathbf{a}_{i,r} = [1, a_{i,r}, \dots, a_{i,r}^{M_r-1}]^T$. En utilisant les équations (2.7) et (2.8), nous obtenons

$$\mathcal{Y} = \sum_{i=1}^F c_i (\mathbf{a}_{i,1} \circ \dots \circ \mathbf{a}_{i,R}) + \mathcal{E} \quad (2.9)$$

Finalement, les relations entre le modèle matriciel et tensoriel sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{G}_{(R+1)}^T \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Y}_{(R+1)}^T \end{aligned} \quad (2.10)$$

On présente dans le paragraphe suivant un algorithme qui utilise les tenseurs pour estimer les paramètres de signaux modaux R -D en exploitant la propriété de l'invariance par translation du sous-espace signal d'un tenseur d'ordre augmenté que nous allons construire. Cette approche sera ensuite comparée avec les méthodes tensorielles existantes.

2.4 Algorithme tensoriel d'estimation modale R -D

On forme un tenseur d'ordre augmenté à partir du tenseur $\mathcal{Y}$ comme décrit dans ce qui suit. On commence par former $L_1 L_2 \dots L_R$ sous-tenseurs $\mathcal{Y}_{l_1, \dots, l_R} \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R}$; $K_r = M_r - L_r - 1$, pour $r = 1 \dots, R$. Puis on forme $L_1 \dots L_{R-1}$ tenseurs $\check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_{R-1}} \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R}$ en concaténant L_R ($l_R = 0, \dots, L_R - 1$) tenseurs $\mathcal{Y}_{l_1, \dots, l_R}$ le long de la $(R+1)^e$ dimension. De la même façon, on forme $L_1 \dots L_{R-2}$ tenseurs $\check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_{R-2}} \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R \times L_{R-1}}$ par la concaténation de L_{R-1} ($l_{R-1} = 0, \dots, L_{R-1} - 1$) tenseurs $\check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_{R-1}}$ suivant la $(R+2)^e$ dimension. Nous procédons de la même façon pour former $\check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_{R-3}}, \check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_{R-4}}, \dots, \check{\mathcal{Y}}_{l_1}$. Finalement, les tenseurs $\check{\mathcal{Y}}_{l_a}$ sont concaténés le long de la $(2R)^e$ dimension pour obtenir un tenseur d'ordre supérieur $\mathcal{Y}_e \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R \times \dots \times L_1}$ d'ordre $2R$. La figure 2.4 montre la formation de $\mathcal{Y}_e$ pour un signal bi-dimensionnel. Par conséquent, le tenseur $\mathcal{Y}_e \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R \times \dots \times L_1}$ peut être définie par :

$$\mathcal{Y}_e = [\check{\mathcal{Y}}_0 \sqcup_{2R} \check{\mathcal{Y}}_1 \sqcup_{2R} \dots \sqcup_{2R} \check{\mathcal{Y}}_{L_1-1}] \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_r} &= [\check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_r, 0} \sqcup_{2R-r} \check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_r, 1} \sqcup_{2R-r} \dots \\ &\quad \sqcup_{2R-r} \check{\mathcal{Y}}_{l_1, \dots, l_r, L_{r+1}-1}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

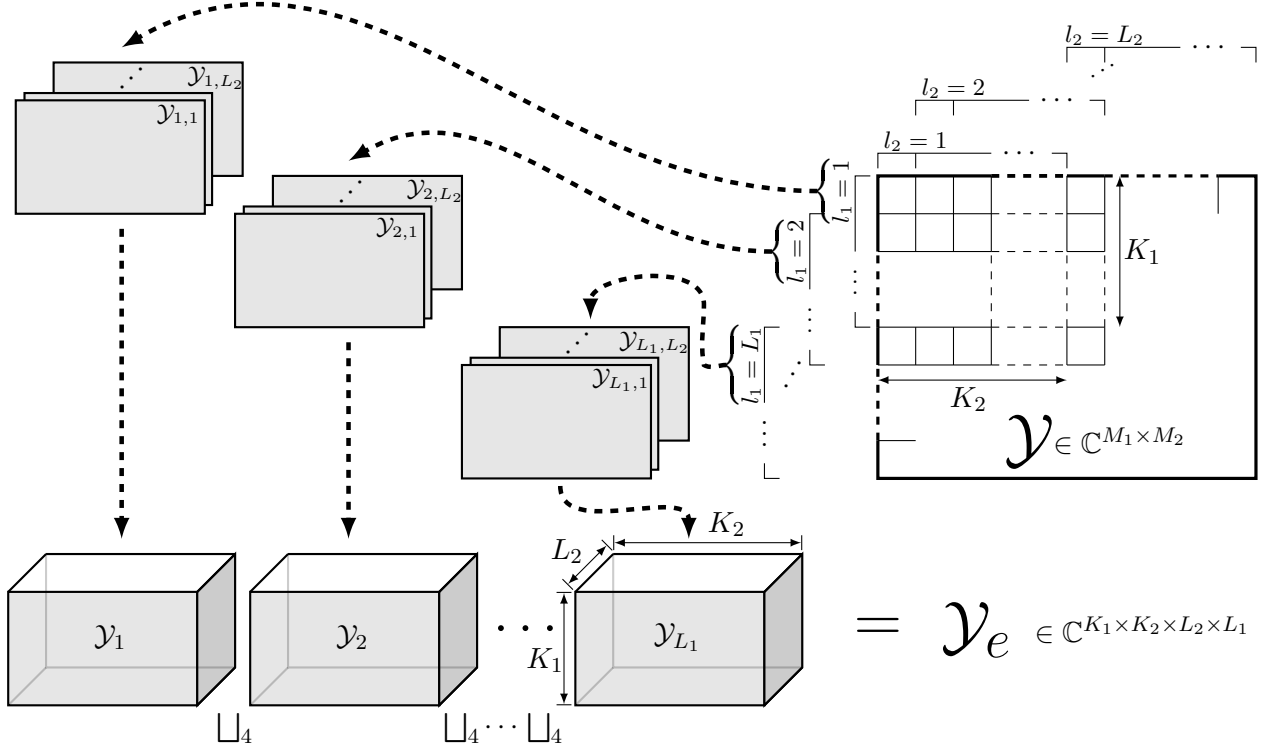


FIGURE 2.4 – Construction du tenseur d'ordre supérieur pour un signal bi-dimensionnel $\mathcal{Y}$ de dimension $M_1 \times M_2$.

pour $r = 1, \dots, R - 1$ et les sous-tenseurs $\mathcal{Y}_{l_1, \dots, l_R}$ sont donnés par :

$$\mathcal{Y}_{l_1, \dots, l_R} = \mathcal{Y} \times_{r=1}^R \mathbf{J}_{l_r}^{[K_r]} \quad (2.13)$$

où la matrice $\mathbf{J}_{l_r}^{[K_r]}$, pour $r = 1, \dots, R$ est formée à partir de $\mathbf{I}_{M_r}$ en supprimant les premières l_r et les dernières $M_r - l_r - K_r$ lignes. Ces matrices de sélection peuvent être données par :

$$\mathbf{J}_{l_r}^{[K_r]} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{K_r \times l_r} & \mathbf{I}_{K_r} & \mathbf{0}_{K_r \times (L_r - l_r - 1)} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

On peut montrer que, en l'absence de bruit,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{l_1, l_2, \dots, l_R} &= \mathcal{I}_{R+1, F} \times_{r=1}^R \left(\mathbf{J}_{l_r}^{(K_r)} \mathbf{A}_r \right) \times_{R+1} \mathbf{c}^T \\ &= \mathcal{I}_{R+1, F} \times_{r=1}^R \left(\mathbf{A}_r^{[K_r]} \Delta_{\mathbf{a}_r}^{l_r} \right) \times_{R+1} \mathbf{c}^T \end{aligned} \quad (2.15)$$

où $\mathbf{A}_r^{(K_r)}$ est formé par les K_r premières lignes de $\mathbf{A}_r$ et $\Delta_{\mathbf{a}_r} = \text{diag}(\mathbf{a}_r)$. Par conséquent, le

tenseur d'ordre augmenté s'écrit selon :

$$\mathcal{Y}_e = \mathcal{I}_{2R,F} \times_{r=1}^R \mathbf{A}_r^{(K_r)} \times_{r=R+1}^{2R-1} \mathbf{A}_{2R-r+1}^{(L_{2R-r+1})} \times_{2R} (\mathbf{A}_1^{(L_1)} \cdot \Delta_{\mathbf{c}}) \quad (2.16)$$

où $\Delta_{\mathbf{c}} = \text{diag}(\mathbf{c})$. Définissons le tenseur $\mathcal{G}_e$ tel que

$$\mathcal{G}_e = \mathcal{I}_{2R,F} \times_{r=1}^R \mathbf{A}_r^{(K_r)} \times_{r=R+1}^{2R-1} \mathbf{A}_{2R-r+1}^{(L_{2R-r+1})} \quad (2.17)$$

Donc

$$\mathcal{Y}_e = \mathcal{G}_e \times_{2R} (\mathbf{A}_1^{(L_1)} \cdot \Delta_{\mathbf{c}}). \quad (2.18)$$

La décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur (HOSVD) du tenseur $\mathcal{Y}_e$ donne

$$\mathcal{Y}_e = \mathcal{S} \times_{r=1}^{2R} \mathbf{U}_r \quad (2.19)$$

où $\mathcal{S} \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R \times \dots \times L_1}$, $\mathbf{U}_r \in \mathbb{C}^{K_r \times K_r}$, pour $r = 1, \dots, R$, sont les vecteurs singuliers gauches de la matrice $\mathbf{Y}_{e(r)}$, $\mathbf{U}_r \in \mathbb{C}^{L_{2R-r+1} \times L_{2R-r+1}}$, pour $r = R+1, \dots, 2R$, sont les vecteurs singuliers gauches de la matrice $\mathbf{Y}_{e(r)}$. Le tenseur $\mathcal{Y}_e$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$\mathcal{Y}_e = (\mathcal{S}_F \times_{r=1}^{2R} \mathbf{U}_{r,F}) + (\mathcal{S}_E \times_{r=1}^{2R} \mathbf{U}_{r,E}) \quad (2.20)$$

où $\mathcal{S}_F$ et $\mathbf{U}_{r,F}$ contiennent les F composantes principales tandis que $\mathcal{S}_E$ et $\mathbf{U}_{r,E}$ contiennent le reste des composantes (on suppose que $F \leq K_r, L_r$, pour $r = 1, \dots, R$).

Définissons le tenseur $\mathcal{U}_F \in \mathbb{C}^{K_1 \times \dots \times K_R \times L_R \times \dots \times L_2 \times F}$ tel que :

$$\mathcal{U}_F = \mathcal{S}_F \times_{r=1}^{2R-1} \mathbf{U}_{r,F} \quad (2.21)$$

Les tenseurs $\mathcal{G}_e$ et $\mathcal{U}_F$ engendrent le même sous-espace. Par conséquent, il existe une matrice non-singulière $\mathbf{D}$ de dimension $F \times F$ telle que :

$$\mathcal{G}_e = \mathcal{U}_F \times_{2R} \mathbf{D} \quad (2.22)$$

Il est clair que si l'on arrive à estimer $\mathbf{D}$, il devient alors possible d'extraire les modes $\{a_{i,r}, i = 1, \dots, F\}_{r=1}^R$ à partir de $\mathcal{G}_e$. Une estimation de $\mathbf{D}$ peut être obtenue en exploitant la propriété d'invariance par translation du tenseur $\mathcal{G}_e$:

$$\mathcal{G}_e \times_1 \mathbf{I}_{K_1} \times_{2R} \Delta_{\mathbf{a}_1} = \mathcal{G}_e \times_1 \bar{\mathbf{I}}_{K_1} \quad (2.23)$$

où $\mathbf{I}_{K_1}$ et $\bar{\mathbf{I}}_{K_1}$ représentent les matrices formées par les premières et les dernières $K_1 - 1$ lignes, respectivement, de la matrice identité de dimension $K_1 \times K_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{K_1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K_1-1} & \mathbf{0}_{(K_1-1) \times 1} \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{I}}_{K_1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(K_1-1) \times 1} & \mathbf{I}_{K_1-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de cette expression on obtient :

$$(\mathbf{U}_F \times_1 \mathbf{I}_{K_1}) \times_{2R} (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{D}) = (\mathbf{U}_F \times_1 \bar{\mathbf{I}}_{K_1}) \quad (2.24)$$

Le problème dans (2.24) peut être formulé comme un problème de minimisation au sens des moindres carrées tensoriel (*tensor-valued least-squares problem*) dont la solution est donnée par :

$$(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{\Delta}_{\mathbf{a}_1} \mathbf{D})^T = \left(\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{F(2R)}^T \right)^\dagger \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{F(2R)}^T \right) \quad (2.25)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{I}_{K_2 \dots K_R L_2 \dots L_R} \otimes \mathbf{I}_{K_1} \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{I}_{K_2 \dots K_R L_2 \dots L_R} \otimes \bar{\mathbf{I}}_{K_1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

La décomposition en valeurs propres de $\left(\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{F(2R)}^T \right)^\dagger \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{F(2R)}^T \right)$ donne $\mathbf{D}$ mais les colonnes peuvent être permutées et/ou multipliées par des scalaires. Une fois $\mathbf{D}$ obtenue, on peut utiliser l'équation (2.22) pour estimer le tenseur $\mathcal{G}_e$ à une permutation et une pondération près sur ses hyper-tranches de la $(2R)^e$ dimension. Le nombre d'hyper-tranches dans la $(2R)^e$ dimension est égale à F qui est le nombre de sinusoides amorties R -D présentes dans le signal. Nous pouvons donc utiliser chacune des F tranches pour extraire les paramètres du i^e mode R -D, $i = 1, \dots, F$. Par conséquent, les $a_{i,r}$ peuvent être obtenus par une des équations suivantes dans le cas non bruité :

$$a_{i,r} = \frac{\mathcal{G}_e(k_1, \dots, k_r, \dots, k_R, l_R, \dots, l_2, i-1)}{\mathcal{G}_e(k_1, \dots, k_r-1, \dots, k_R, l_R, \dots, l_2, i-1)}, \quad (2.27)$$

pour $k_r = 1, \dots, K_r - 1$, $\{k_n = 0, \dots, K_n - 1\}_{n \neq r}$, et $l_n = 0, \dots, L_n - 1$. En clair, pour tous les couples (k_n, l_n) , on obtient la même valeur de $a_{i,r}$. On peut également les extraire à partir des équations suivantes :

$$a_{i,r} = \frac{\mathcal{G}_e(k_1, \dots, k_R, l_R, \dots, l_r, \dots, l_2, i-1)}{\mathcal{G}_e(k_1, \dots, k_R, l_R, \dots, l_r-1, \dots, l_2, i-1)}, \quad (2.28)$$

pour $l_r = 1, \dots, L_r - 1$, $\{k_n = 0, \dots, K_n - 1\}_{n \neq r}$, et $\{l_n = 0, \dots, L_n - 1\}_{n \neq r}$.

Dans le cas de données bruitées, chacune des valeurs de $a_{i,r}$ est une estimation ponctuelle. Afin de réduire la variance, on peut effectuer une moyenne d'ensemble. En notant $\{a_{i,r}^s\}_{s=1}^S$ l'ensemble des estimées ponctuelles obtenues selon les deux équations précédentes, avec :

$$S = (K_r - 1) \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq r}}^R K_n \prod_{n=2}^R L_n + (L_r - 1) \prod_{n=1}^R K_n \prod_{\substack{n=2 \\ n \neq r}}^R L_n$$

les modes sont alors estimés par :

$$a_{i,r} = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S a_{i,r}^s. \quad (2.29)$$

Finalement l'algorithme peut être résumé dans les étapes suivantes :

- former le tenseur $\mathbf{Y}_e$ en utilisant (2.11) et calculer sa HOSVD (2.20) ;
- définir $\mathbf{U}_F$ en utilisant (2.21) ;
- calculer l'ensemble des vecteurs propres (i.e. $\mathbf{D}$) de $\left(\mathbf{K}_1 \mathbf{U}_{F(2R)}^T\right)^\dagger \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{U}_{F(2R)}^T\right)$, et estimer le tenseur $\mathbf{G}_e$ en utilisant (2.22) ;
- calculer les $a_{i,r}$ en utilisant (2.29).

2.5 Comparaison avec les algorithmes Tensor-ESPRIT

Deux algorithmes à base de tenseurs ont été proposés pour traiter le problème d'estimation de signaux d'une seule réalisation (*single snapshot*). Les deux algorithmes s'inspirent des travaux de Haardt et al. [HRDG08]. Le premier (*R-D Unitary Tensor-ESPRIT*) [THG09] traite le problème d'estimation harmonique *R-D* (sinusoïdes non amorties). Il s'agit de construire R tenseurs $\mathbf{Y}_{e,r}$ d'ordre $R+2$ (i.e. un tenseur d'ordre augmenté par dimension) et d'effectuer la HOSVD de chacun. Les décompositions obtenues sont ensuite tronquées chacune aux premiers F éléments. Les modes des dimensions sont estimés séparément à partir des R décompositions en utilisant les valeurs propres. Une étape de diagonalisation conjointe, appropriée aux signaux harmoniques et similaire à celle utilisée dans *unitary ESPRIT* [HN98], est effectuée afin de coupler les modes *R-D*. Le deuxième algorithme [TG09] a été proposé pour traiter le problème d'estimation modale 2-D. Celui-ci repose sur le même principe que la méthode précédente sauf dans l'étape de couplage où une autre technique de diagonalisation conjointe est utilisée.

L'algorithme que nous avons proposé dans le paragraphe précédent consiste à construire un seul tenseur $\mathbf{Y}_e$ d'ordre $2R$ et d'effectuer ensuite sa HOSVD puis sa troncature aux premiers F éléments. Les modes sont estimés en utilisant les vecteurs propres. Par conséquent, l'étape de couplage n'est plus nécessaire puisque les modes sont automatiquement couplés car ils apparaissent sur la même hyper-tranche.

2.6 Résultats de simulation

Afin d'analyser les performances de la méthode proposée, nous présentons ici les résultats obtenus sur deux exemples de simulation.

Dans le premier exemple, on considère un signal de taille 20×20 qui contient trois modes bien séparés dont les paramètres sont :

$$\begin{aligned} (f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.10, 0.080; 0.20, 0.075), \\ (f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.30, 0.075; 0.10, 0.050), \\ (f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.40, 0.050; 0.25, 0.090). \end{aligned}$$

avec des amplitudes unitaires ($c_f = 1, \forall f$). Les modes ainsi que le spectre du signal non bruité sont représentés en figure 2.5(a). On effectue 1000 simulations Monte-Carlo pour différents niveaux de bruit. La figure 2.6 montre la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne sur les fréquences obtenues avec la méthode proposée, la méthode ESPRIT 2-D [RN01] et la méthode Tensor-ESPRIT

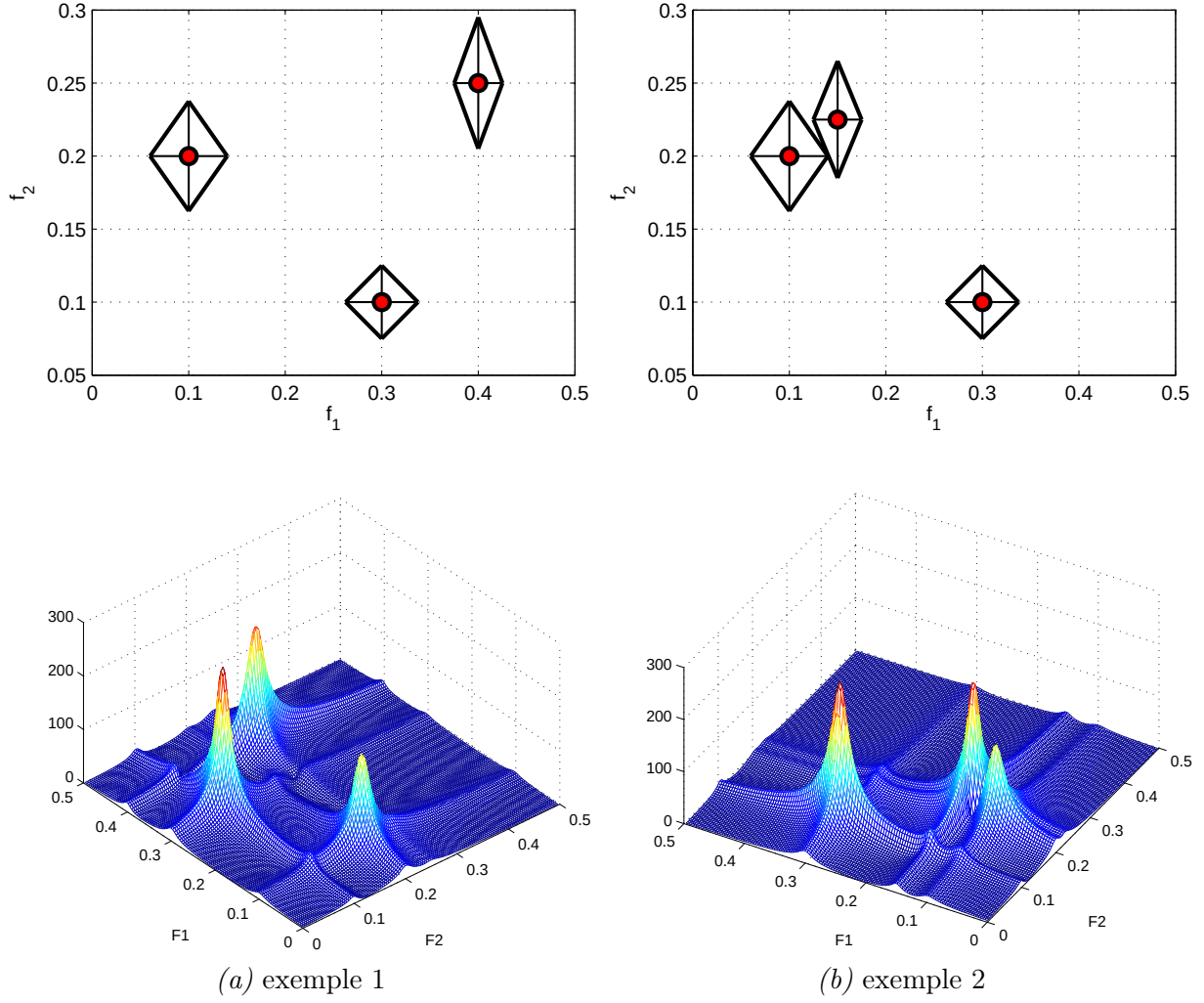


FIGURE 2.5 – Modes simulés. (●) positions des fréquences. (◇) facteurs d'amortissement sur chaque dimension.

2-D [TG09]. Comme on peut le remarquer, Tensor-ESPRIT 2-D et la méthode proposée ont presque le même RMSE pour des niveaux de RSB supérieur à 10 dB. ESPRIT 2-D a un meilleur RMSE par rapport aux algorithmes précédents. L'effet de seuil des méthodes à base de tenseurs se produit aux alentours de RSB= 10 dB et celui de ESPRIT 2-D se produit aux alentours de RSB= 5 dB.

Dans le deuxième exemple, on considère un signal ayant les mêmes caractéristiques que le précédent, mais avec deux des fréquences plus proches :

$$\begin{aligned}
 (f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.10, 0.080; 0.200, 0.075), \\
 (f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.30, 0.075; 0.100, 0.050), \\
 (f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.15, 0.050; 0.225, 0.080).
 \end{aligned}$$

Le spectre de ce signal est représenté en figure 2.5(b). Les résultats obtenus sont représentés en figure 2.7. On peut constater que la méthode proposée aboutit à un RMSE très proche de celui obtenu avec ESPRIT 2-D; la méthode Tensor-ESPRIT 2-D est moins performante. Globalement, dans le cas où les modes sont facilement séparable, la méthode ESPRIT 2-D est meilleure que

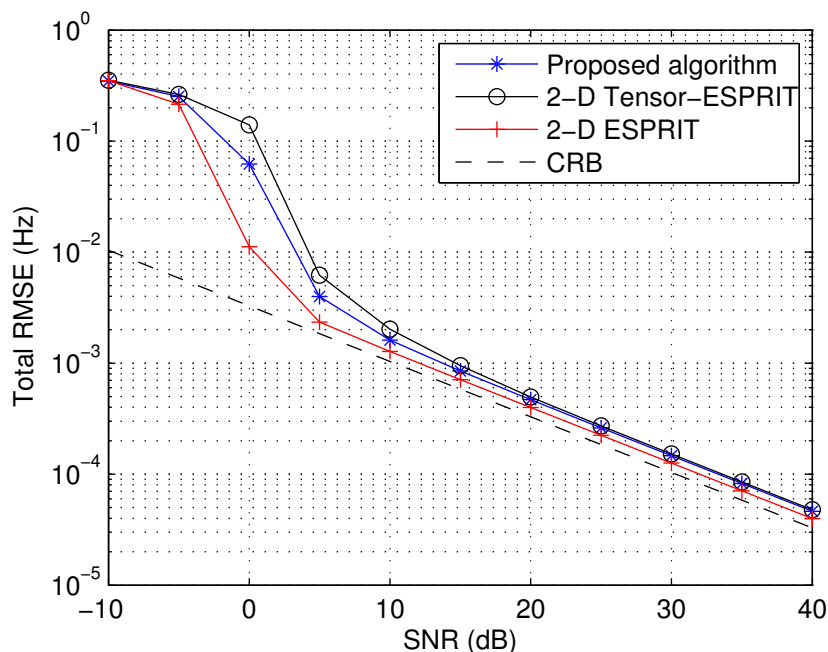


FIGURE 2.6 – Résultats du 1^{er} exemple de simulation. Erreur-type (Total RMSE) des fréquences en fonction du RSB.

celles basées sur les tenseurs. En présence d'un problème de résolution, notre méthode surpasse Tensor-ESPRIT 2-D et se rapproche de la méthode ESPRIT 2-D.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche d'estimation modale R -D basée sur les treillis multidimensionnels du signal et les outils de l'algèbre multilinéaire. La particularité de cette approche, par rapport aux méthodes tensorielles existantes, réside dans la construction d'un seul tenseur d'ordre augmenté et l'exploitation de la structure des vecteurs propres pour extraire les modes du signal. Ainsi, il n'est plus nécessaire de recourir à une étape de couplage. Des exemples de simulation ont montré que notre méthode est plus performante que les autres approches tensorielles en terme de variance. En revanche, ESPRIT 2-D (qui utilise une matrice de données dite « améliorée ») reste la méthode de référence, même si les travaux [THG09, TG09] revendiquent le contraire.

La limitation principale des approches tensorielles actuelles, y compris celle proposée, est le fait qu'elles échouent dans le cas où les signaux analysés présentent des modes identiques sur une ou plusieurs dimensions. Cela est dû au fait que, lors de la décomposition en valeurs propres des matrices résultant du dépliage du tenseur, on assiste toujours à une déficience de rang. Comme en spectroscopie RMN R -D les signaux présentent souvent des modes alignés (c'est justement ce qui est recherché par la RMN mutlidimensionnelle), la méthode présentée ici ne sera pas appliquée pour ces signaux.

L'avantage principal des méthodes HR (matricielles et tensorielles), par rapport aux méthodes non paramétriques basées sur l'analyse de Fourier, est qu'elles permettent de dépasser la limite de ré-

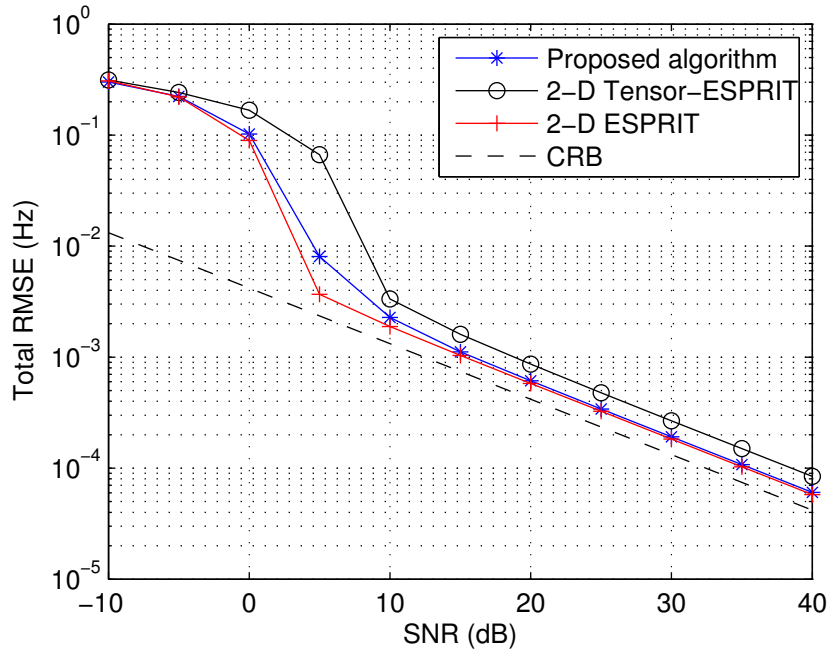


FIGURE 2.7 – Résultats du 2^e exemple de simulation. Erreur-type (Total RMSE) des fréquences en fonction du RSB.

solution spectrale de Rayleigh. Néanmoins, le nombre de composantes est un pré-requis pour que ces méthodes puissent être mises en oeuvre. Ceci n'est pas toujours possible dans plusieurs applications y compris en spectroscopie RMN. On assiste, ces dernières années, à l'émergence de nouvelles méthodes dites *parcimonieuses*. Celles-ci ont trouvé des applications dans plusieurs domaines en traitement du signal comme le débruitage, l'échantillonnage compressé, le traitement d'antennes et l'analyse spectrale. Dans les prochains chapitres, nous présentons les méthodes parcimonieuses et nous proposons des améliorations tout en essayant de répondre aux questions concernant : la résolution spectrale, la sélection *a priori* du nombre de composantes dans le signal, l'extension aux signaux R -D, etc.

Chapitre 3

Méthodes d'approximations parcimonieuses

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les problèmes d'approximation parcimonieuse. Dans de tels problèmes, on cherche une approximation d'un signal en utilisant une combinaison linéaire de signaux élémentaires tirés d'un grand ensemble de signaux. L'objectif est d'aboutir à un compromis entre l'erreur d'approximation et le nombre de signaux élémentaires que l'on souhaite faire participer dans l'approximation.

Ce chapitre commence par des définitions et les formulations basiques des problèmes d'approximation parcimonieuse. Puis nous présentons la façon de formuler le problème d'estimation modale en un problème d'approximation parcimonieuse. Nous présentons ensuite les approches parcimonieuses les plus connues qui ont été utilisées dans le domaine d'analyse spectrale. Il s'agit des algorithmes gloutons (§3.4), les méthodes parcimonieuses qui visent à minimiser une norme ℓ_p (§3.5) et la méthode récente SPICE (*SParse Iterative Covariance-based Estimation*) [SBL11a] qui exploite la matrice de covariance (§3.6). On termine le chapitre par une conclusion.

3.2 Notions

Dans un problème de parcimonie on cherche à résoudre le problème inverse

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \tag{3.1}$$

sous la contrainte de parcimonie sur le vecteur de coefficients $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ où $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ est appelé dictionnaire et $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ est un signal de données. Dans la suite, on donne la définition du dictionnaire et de la parcimonie.

Le dictionnaire : Un dictionnaire est un ensemble fini de signaux élémentaires normés noté $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$. Ces signaux sont rangés dans une matrice $\Phi = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]$. Chaque colonne de Φ est appelée *atome*. L'indice $n = 1, \dots, N$ désigne la position de l'atome dans le dictionnaire,

et N est le nombre total d'atomes dans le dictionnaire.

Si le dictionnaire engendre l'espace signal, on dit alors que le dictionnaire est complet ou total. Dans ce cas, chaque signal peut être exprimé par une combinaison linéaire d'atomes avec une erreur de reconstruction nulle. Si les atomes forment un ensemble linéairement dépendant, alors le dictionnaire est redondant. Dans ce cas, chaque signal a une infinité de représentations (ou approximations). Pour qu'un dictionnaire soit complet, il est nécessaire que $N \geq M$. Pour qu'un dictionnaire soit redondant, il suffit que $N > M$.

Parcimonie : Dans un problème d'approximation parcimonieuse, on cherche une représentation à faible coût d'un signal. Généralement, le coût de la représentation est mesuré par le nombre d'atomes qui y participe. Pour concrétiser cette idée, on a défini la parcimonie d'un vecteur par le nombre de ses éléments non nuls. La parcimonie est calculée par la pseudo-norme ℓ_0 , $\|\cdot\|_0 : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{N}$, qui renvoie le nombre d'éléments non nuls de son argument. De manière générale, pour tout nombre positif p , on définit la norme ℓ_p par :

$$\|\mathbf{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{n=1}^N |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (3.2)$$

avec la convention $\|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_n |x(n)|$. La pseudo-norme ℓ_0 peut être également déduite de l'équation (3.2) : $\|\mathbf{x}\|_0 = \lim_{p \rightarrow 0} \|\mathbf{x}\|_p^p$.

Formulations basiques du problème Il existe quatre problèmes fondamentaux d'approximation parcimonieuse qui gèrent différents compromis entre l'erreur d'approximation et le niveau de parcimonie dans le vecteur $\mathbf{x}$:

1. trouver la représentation la plus parcimonieuse pour le signal $\mathbf{y}$:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{sous contrainte} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3.3)$$

2. pour un signal $\mathbf{y}$, trouver le vecteur de coefficients $\mathbf{x}$ le plus parcimonieux qui représente une approximation avec une tolérance d'erreur ϵ :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (3.4)$$

3. parmi tous les vecteurs qui ont le niveau de parcimonie demandé, trouver celui qui donne la meilleure approximation du signal $\mathbf{y}$:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{x}\|_0 \leq s \quad (3.5)$$

4. pour un signal donné, trouver le vecteur de coefficient qui réalise le meilleur équilibre entre la parcimonie et l'erreur d'approximation :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_0. \quad (3.6)$$

3.3 Estimation modale et approximations parcimonieuses

Un signal modal complexe contenant F modes peut être écrit selon :

$$y(m) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^m + e(m) \quad (3.7)$$

pour $m = 0, \dots, M-1$, où $a_i = e^{(-\alpha_i + j2\pi f_i)}$, avec $\{\alpha_i\}_{i=1}^F$ les facteurs d'amortissement et $\{f_i\}_{i=1}^F$ les fréquences. $\{c_i\}_{i=1}^F$ sont les amplitudes complexes et $e(m)$ est un bruit additif. Le problème est d'estimer l'ensemble de paramètres $\{a_i, c_i\}_{i=1}^F$ à partir des échantillons $y(m)$. L'équation (3.7) peut être écrite sous une forme matricielle par :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (3.8)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de Vandermonde de dimensions $M \times F$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_F \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_F^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{M-1} & a_2^{M-1} & \dots & a_F^{M-1} \end{bmatrix}$$

et $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_F]^T$.

Le problème d'estimation modale est un problème inverse puisque $\mathbf{y}$ est donné et $\mathbf{A}, \mathbf{c}$, et F sont inconnus. On peut alors le formuler en un problème d'approximation parcimonieuse en définissant le dictionnaire Φ qui regroupe tous les modes possible obtenus par l'échantillonnage de α (P échantillons) et f (K échantillons) sur une grille 2-D :

$$\Phi = [\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,K}, \varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,K}, \dots, \varphi_{P,K}] \quad (3.9)$$

avec $\varphi_{p,k} = [\phi_{p,k}(0), \dots, \phi_{p,k}(M-1)]^T$, $\phi_{p,k}(m) = e^{(-\alpha_p + j2\pi f_k)m}$ et $N = PK$. Pourvu que α et f soient finement échantillonnés, $\mathbf{A}$ peut être considéré comme une sous matrice de Φ de sorte que $\mathbf{c}$ corresponde aux coefficients non nuls de $\mathbf{x}$. Alors le problème d'estimation modale peut être considéré comme une des formulations du problème d'approximation parcimonieuse présentées dans le paragraphe précédent. De la même façon on montrera dans le prochain chapitre que l'estimation modale multidimensionnelle peut être transformée en un problème d'approximation parcimonieuse. Dans la section suivante nous présentons les algorithmes gloutons que l'on peut considérer comme des méthodes de minimisation de la pseudo-norme ℓ_0 .

3.4 Algorithmes gloutons

Dans ce paragraphe, on commence par présenter les deux méthodes gloutons de référence : *matching pursuit* [MZ93] et *orthogonal matching pursuit* [PRK93]. On présente ensuite les méthodes plus récentes : *stagewise orthogonal matching pursuit* [DDTS06] , *compressive sampling matching pursuit*

[NT09] et *single best replacement* [SIBD11].

3.4.1 Matching Pursuit (MP)

L'algorithme matching pursuit (MP), introduit dans la communauté du traitement du signal dans le contexte de l'estimation harmonique par Mallat et Zhang [MZ93, Ma199], est une méthode itérative qui consiste à décomposer un signal en une combinaison linéaire de s éléments du dictionnaire $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$. A chaque itération de l'algorithme, on sélectionne l'atome le plus corrélé avec le résidu. Une fois cet atome est sélectionné, on calcule son nouveau coefficient et on soustrait sa contribution au résidu. Le fonctionnement de MP est détaillé par l'algorithme 1. Le coefficient $\mathbf{x}_k(n_k)$ est obtenu par la projection orthogonal du résidu $\mathbf{r}_{k-1}$ sur l'atome sélectionné φ_{n_k} . Le défaut principal de MP est que la soustraction de la contribution de l'atome le plus corrélé, dans le cas d'un dictionnaire Φ non orthogonal, peut augmenter la corrélation d'un autre atome activé précédemment. Ce qui peut amener à sélectionner un même atome sur plusieurs itérations. Le coût de calcul de MP est en $O(MNK)$, où K est le nombre d'itérations de MP. Pour analyser le fonctionnement de MP, on l'applique sur un exemple de simulation. On utilise le signal modal 1-D non bruité dont les paramètres sont présentés dans le tableau 3.1. La figure 3.1 présente les résultats obtenus sur les six premières itérations ainsi que l'erreur de reconstruction. La figure 3.2 montre les résultats obtenus aux itérations $k = 7$ et $k = 11$ et l'erreur de reconstruction pour toutes les itérations. On constate que la méthode commence à diverger à partir de la quatrième itération car l'erreur de reconstruction augmente. L'algorithme OMP, présenté dans le paragraphe suivant, a été proposé dans le but de résoudre les problèmes rencontrés avec MP.

TABLE 3.1 – Paramètres du signal modal non bruité $\mathbf{y}$

Modes	f_i	α_i	c_i	M
1	0.200	0.050	1	50 échantillons
2	0.300	0.025	1	
3	0.400	0.050	1	

3.4.2 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Pour garantir qu'un atome n'est sélectionné qu'une seule fois, une des solutions consiste à s'assurer que le résidu $\mathbf{r}_k$ est toujours orthogonal à tous les atomes sélectionnés précédemment. On abouti alors à la méthode OMP [PRK93] détaillé par l'algorithme 2. La figure 3.3 montre les résultats obtenus par l'application de OMP sur le signal de simulation non bruité dont les paramètres sont donnés dans tableau 3.1.

Orthogonal Matching Pursuit est inefficace lorsque le signal n'est pas très parcimonieux puisque le coût de calcul augmente quadratiquement avec le nombre s d'éléments non-nuls. Dans une telle situation, StOMP (*Stagewise Orthogonal Matching Pursuit*) [DDTS06] est un meilleur choix pour des signaux de grande taille et approximativement parcimonieux.

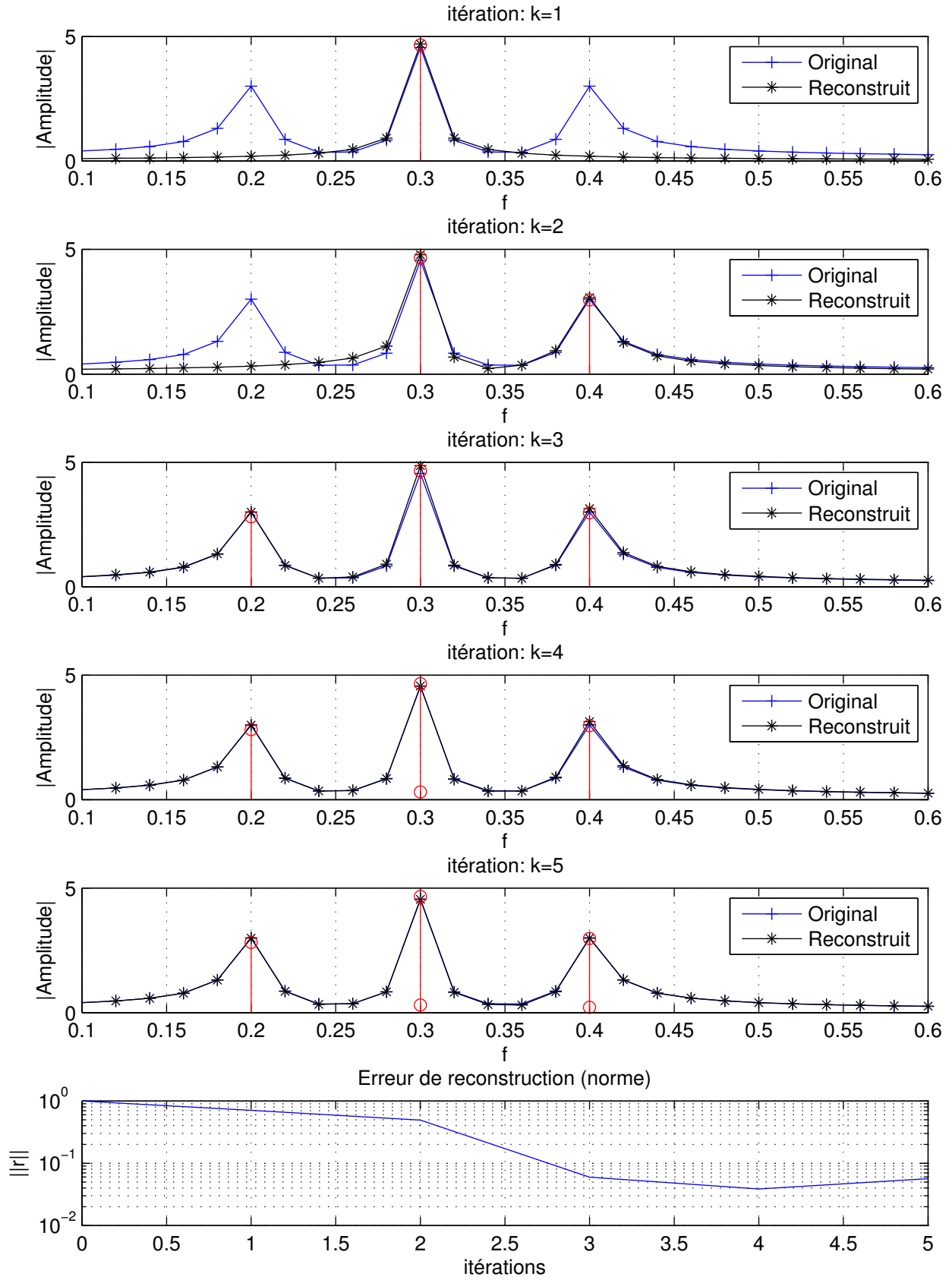


FIGURE 3.1 – Résultats d'estimation obtenus à chaque itération par la méthode MP appliquée sur le signal $\mathbf{y}$ (tableau (3.1)). Itérations 1–5.

Algorithme matching pursuit

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ (colonnes normalisées)

- **Sorties** : Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

initialisation : $\mathbf{x}_0 = [0, \dots, 0]^T, \mathbf{r}_0 = \mathbf{y}, k = 0$

faire

- 1) $k = k + 1$
- 2) $n_k \in \arg \max_n |\langle \mathbf{r}_{k-1}, \varphi_n \rangle|$ {recherche de l'indice de l'atome le plus corrélé avec le résidu}
- 3) $\mathbf{x}_k(n_k) = \mathbf{x}_{k-1}(n_k) + \langle \mathbf{r}_{k-1}, \varphi_{n_k} \rangle$ {calcul du coefficient correspondant à φ_{n_k} }
- 4) $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{k-1} - \langle \mathbf{r}_{k-1}, \varphi_{n_k} \rangle \varphi_{n_k}$ {mise à jour du résidu}

tant que le critère d'arrêt n'est pas vérifié

retour : $\mathbf{x}_k$

Algorithme 1: Matching pursuit

3.4.3 Stagewise Orthogonal Matching Pursuit (StOMP)

StOMP présente des gains considérables sur le coût de calcul par rapport aux approches d'optimisation convexe (§3.5.1) et OMP pour des problèmes d'approximation parcimonieuse à grandes échelles. L'algorithme commence par un résidu $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$ et calcule toutes les projections $\Phi^T \mathbf{r}_{k-1}$ à la k^e itération (comme dans OMP). Cependant, au lieu de sélectionner un seul atome, on utilise un paramètre de seuillage τ pour déterminer un ensemble d'atomes qui ont des corrélations supérieures à τ avec le résidu en cours. Le nouveau résidu est calculé en utilisant une estimation au sens des moindres carrés du vecteur parcimonieux obtenu par la fusion des nouveaux atomes sélectionnés et ceux sélectionnés lors des itérations précédentes.

Contrairement à OMP, le nombre d'itérations dans StOMP est choisi au préalable; $K = 10$ est recommandé dans [DDTS06]. En général, la complexité numérique de StOMP est de l'ordre $O(sN \log N)$, une amélioration significative par rapport OMP. Cependant, StOMP n'apporte pas des garanties de reconstruction, i.e., sa convergence vers un minimum global n'est garantie.

3.4.4 Compressive Sampling Matching Pursuit (CoSaMP)

Les algorithmes gloutons de poursuite (tel que MP et OMP) allègent la complexité numérique rencontrée dans les problèmes d'optimisation parcimonieuse, mais ils manquent de garantie pour la convergence. En outre, on ne sait pas si ces algorithmes gloutons sont robustes au bruit.

Récemment, il y a eu quelques travaux visant à développer des algorithmes gloutons faisant le lien entre convergence et complexité numérique, par exemple, *Regularized Orthogonal Matching Pursuit* (ROMP) [NV09, NV10], *Compressive Sampling Matching Pursuit* (CoSaMP) [NT09] et *Subspace Pursuit* [DM09]. La propriété RIP (*restricted isometry property*), développée dans le contexte de

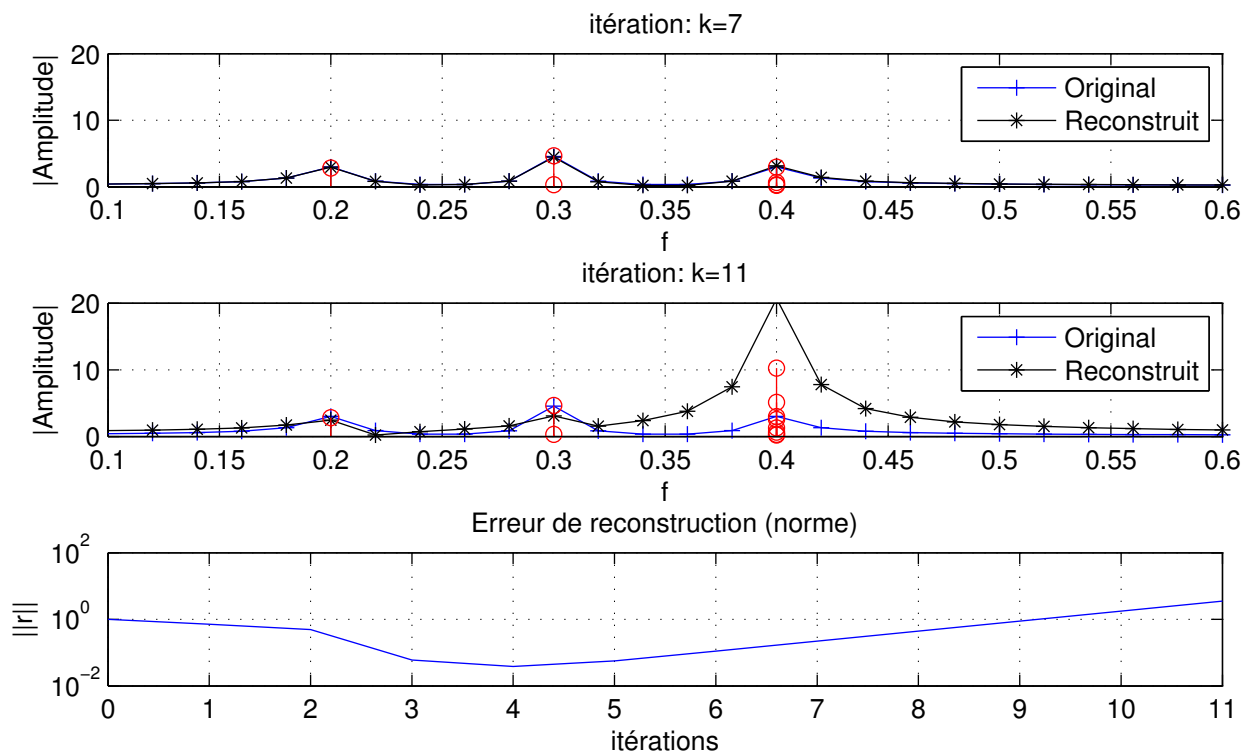


FIGURE 3.2 – Résultats d’estimation à chaque itération avec la méthode MP appliquée sur le signal y (tableau (3.1)). Itérations 7 et 11.

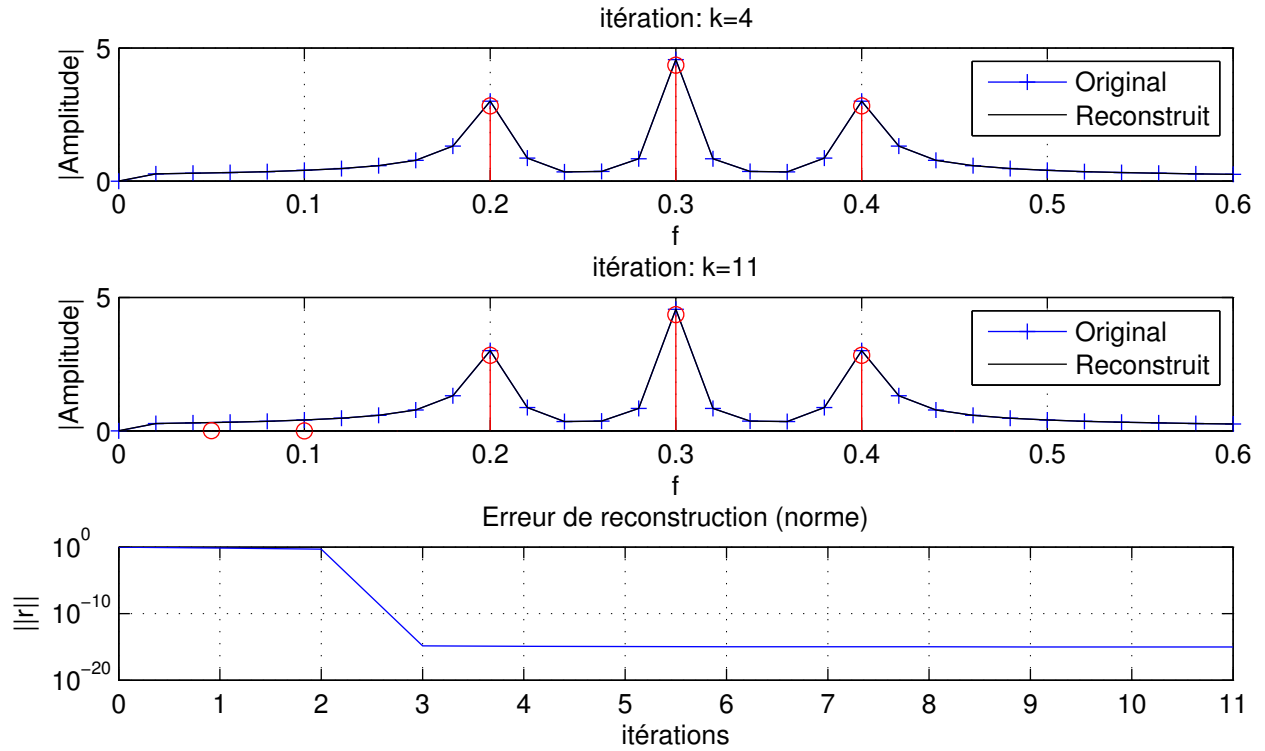
l’analyse de la minimisation ℓ_1 (§3.5.1), joue un rôle important dans de tels algorithmes. En effet, si le dictionnaire Φ satisfait la propriété RIP d’ordre s , ceci implique que chaque sous-ensemble de s atomes est approximativement orthonormal. Cette propriété est utilisée pour prouver la convergence de ces algorithmes quasi-gloutons.

CoSaMP [NT09] est l’une des méthodes qui regroupent garantie de convergence et coût de calcul moyennement faible. C’est une méthode de type *avant/arrière*, i.e., contrairement aux algorithmes MP, OMP et StOMP, on peut ajouter comme on peut supprimer des atomes à/de l’ensemble des atomes activés. En revanche, les algorithmes de poursuite glouton sont de type *avant*, i.e., une fois qu’un atome est choisi, il reste activé jusqu’à la dernière itération. Par conséquent, de tels algorithmes ne peuvent pas corriger, dans les itérations suivantes, les éventuelles erreurs dues aux mauvaises sélections d’atomes. L’algorithme 3 décrit le principe de la méthode CoSaMP.

Dans la pratique, l’algorithme CoSaMP est plus rapide et plus efficace que OMP, à l’exception peut-être dans des problèmes très parcimonieux où le nombre d’éléments non-nuls dans le vecteur de coefficients est très faible. CoSaMP est plus rapide mais souvent moins efficace par rapport aux algorithmes basés sur l’optimisation convexe [TW10].

3.4.5 Single Best Replacement (SBR)

L’algorithme SBR a été proposé dans [SIBD11] pour résoudre le problème d’approximation parcimonieuse de la formulation (3.6) que l’on appelle problème $\ell_2 - \ell_0$ pénalisé. Il s’agit alors de minimiser



Algorithme OMP : résultats				
Iter. k	Ind. n	f	α	$ x_k(n) $
1	122	0.3000	0.0250	0.658
2	163	0.4000	0.0500	0.490
3	83	0.2000	0.0500	0.490
4	221	0.5500	0.0000	0.000
5	21	0.0500	0.0000	0.000
6	27	0.0500	0.1500	0.000
7	61	0.1500	0.0000	0.000
8	361	0.9000	0.0000	0.000
9	44	0.1000	0.0750	0.000
10	181	0.4500	0.0000	0.000
11	261	0.6500	0.0000	0.000

FIGURE 3.3 – Résultats d'estimation obtenus à chaque itération par la méthode OMP appliquée sur le signal modale $\mathbf{y}$ (tableau (3.1)).

Algorithme orthogonal matching pursuit

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ (colonnes normalisées)

- **Sorties** : Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

initialisation : $\Omega_0 = \emptyset, \mathbf{x} = [0, \dots, 0]^T, \mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$

pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint **faire**

- 1) $n_k \in \arg \max_n |\langle \mathbf{r}_{k-1}, \varphi_n \rangle|$ {recherche de l'indice de l'atome le plus corrélé}
- 2) $\Omega_k = \Omega_{k-1} \cup \{n_k\}$
- 3) $\mathbf{x}_k = \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{y} - \Phi_{\Omega_k} \mathbf{u}\|_2$ {estimation des coefficients qui représentent au mieux le signal}
- 4) $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \Phi_{\Omega_k} \mathbf{x}_k$ {mise à jour du résidu}

fin pour

retour : $\mathbf{x}$ tel que : $\mathbf{x}(\Omega_k) = \mathbf{x}_k$ et $x(n) = 0$ si $n \notin \Omega_k$

Algorithme 2: Orthogonal matching pursuit

la fonction de coût $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$:

$$\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \{\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_0\} \quad (3.10)$$

pour une valeur fixe du paramètre λ ; où $\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|^2$. SBR est un algorithme de type *avant/arrière* inspiré de la méthode SMLR [KM82]. C'est un algorithme de recherche itérative qui résout le problème $\ell_2 - \ell_0$ pénalisé pour un λ fixé. On note par $\Omega \bullet n$ l'insertion ou le retrait d'un indice n dans/depuis l'ensemble Ω des indices des atomes actifs

$$\Omega \bullet n = \begin{cases} \Omega \cup \{n\} & \text{si } n \notin \Omega \\ \Omega \setminus \{n\} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

A chaque itération, les N remplacements simples $\Omega \bullet n$ ($n = 1, \dots, N$) sont testés (i.e., N problèmes de moindres carrés sont résolus pour calculer l'erreur minimale $\mathcal{E}_{\Omega \bullet n}$ pour chaque support $\Omega \bullet n$), puis on sélectionne le remplacement qui minimise la fonction de coût $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$, i.e., $\mathcal{J}_{\Omega \bullet n}(\lambda) := \mathcal{E}_{\Omega \bullet n} + \lambda \text{Card}(\Omega \bullet n)$. Dans le tableau 4, la règle du remplacement est formulée par « $n_k \in \dots$ » dans le cas où plusieurs remplacement donnent la même valeur de $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$. Cependant, ce cas particulier n'est pas susceptible de se produire lorsqu'il s'agit de données réelles. Une analyse détaillée peut être trouvée dans [SIBD11] où il est montré que SBR est particulièrement adapté aux dictionnaires dont les atomes sont fortement corrélés.

Algorithme CoSaMP

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ (colonnes normalisées), niveau de parcimonie voulu s , paramètre de réglage μ

- **Sorties** : Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

initialisation : $\mathbf{x}_0 = [0, \dots, 0]^T, \mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$

pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint **faire**

- 1) $\Omega \in \arg \min_{|T| \leq \mu s} \sum_{n \in T} |\langle \mathbf{r}_{k-1}, \varphi_n \rangle|$ {recherche de μs colonnes les plus corrélées avec le résidu}
- 2) $T = \text{supp}(\mathbf{x}_{k-1}) \cup \Omega$ {fusion des anciennes et nouvelles colonnes dans un seul ensemble}
- 3) $\mathbf{u}_k = \arg \min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{y} - \Phi_T \mathbf{u}\|_2$ {recherche des coefficients qui représentent mieux le signal}
- 4) $\mathbf{x}_k = [\mathbf{u}_k]_s$ {élaguer $\mathbf{u}_k$ en conservant ses s coefficients les plus larges}
- 5) $\mathbf{r}_k = \mathbf{y} - \Phi_{\Omega_k} \mathbf{x}_k$ {mise à jour du résidu}

fin pour

retour : $\mathbf{x}$ tel que : $\mathbf{x}(\Omega_k) = \mathbf{x}_k$ et $x(n) = 0$ si $n \notin \Omega_k$

Algorithme 3: CoSaMP

Algorithme SBR

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ (colonnes normalisées), et un scalaire λ

- **Sorties** : Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

initialisation : $\Omega_1 = \emptyset, \mathbf{x}_1 = [0, \dots, 0]^T, k = 1.$

$\mathbf{x}_0 = [0, \dots, 0]^T, \mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$

pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à ce que l'ensemble Ω_k ne soit plus mise à jour **faire**

- 1) $n_k \in \arg \min_n \{\mathcal{J}_{\Omega_k \bullet n}(\lambda) := \mathcal{E}_{\Omega_k \bullet n} + \lambda \text{Card}(\Omega \bullet n)\}$
- 2) **si** $\mathcal{J}_{\Omega_k \bullet n_k}(\lambda) < \mathcal{J}_{\Omega_k}(\lambda)$

$$\Omega_{k+1} = \Omega_k \bullet n_k \quad \{\text{mise à jour de l'ensemble des atomes actifs}\}$$

fin si

fin pour

retour : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, les amplitudes actives.

Algorithme 4: SBR

3.5 Minimisation de norme ℓ_p

3.5.1 Optimisation convexe

Un autre approche pour l'approximation parcimonieuse consiste à remplacer la fonction combinatoire ℓ_0 par la norme ℓ_1 , qui mène à un problème d'optimisation convexe. La présence de la norme ℓ_1 encourage les éléments de faible amplitude à aller vers zéros, favorisant ainsi des solutions parcimonieuses.

La relaxation convexe du problème contraint $\ell_2 - \ell_0$ (équation (3.3)) est :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{sous contrainte} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Ce problème est également applé *Basis Pursuit* (BP). La forme pénalisée de ce problème, connue sous le nom BPDN (*Basis Pursuit Denoising*) [CDS98], s'écrit :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1. \quad (3.13)$$

Cette formulation du problème d'optimisation convexe est la plus utilisée. Le problème BP a été proposé dans [CDS98] et peut se résoudre par des méthodes de programmation linéaire.

Une autre variante du problème d'optimisation convexe est le programme quadratique (QP : *Quadratic Program*) connu aussi sous le nom LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) [Tib96] :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq \tau. \quad (3.14)$$

Finalement, la formulation QCLP (*quadratically constrained linear program*) s'écrit :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 \leq \epsilon. \quad (3.15)$$

Les algorithmes de type homotopie, qui étudient le chemin de régularisation, permettent de calculer toutes les solutions possibles en fonction des paramètres des différentes formulations (λ dans (3.13), τ dans (3.14), ϵ dans (3.15)). Ils ont été proposés dans [EHJT04, MCW05a, OPT00, Tur05]. La formulation (3.14) a été traitée dans [OPT00], alors que [Tur05] aborde (3.13) et (3.14). La méthode LARS (*least angle regression*) décrite dans [EHJT04] peut être utilisée pour résoudre le problème LASSO (3.14).

3.5.2 Méthodes itératives rependérées

FOCUSS (*FOcal Undertermined System Solver*) [GR97] est un algorithme itératif d'approximation parcimonieuse qui se compose de deux parties. Il commence par trouver une estimation non parcimonieuse (intialisation), puis cette estimée est itérativement raffinée pour obtenir un vecteur parcimonieux. Le processus de raffinement est mis en oeuvre en utilisant une transformation affine (AST : *Affine Scaling Transformation*), qui applique un changement d'échelle sur les éléments de la solution en cours en utilisant les éléments des solutions précédentes. L'algorithme FOCUSS simple

Algorithme FOCUSS

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$

- **Sorties** : Un vecteur parcimonieux $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

initialisation : $\mathbf{x}_0 = \Phi^\dagger \mathbf{y}$

pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à ce que le critère d'arrêt soit atteint **faire**

1) $\mathbf{W}_k = \text{diag}(\mathbf{x}_{k-1})$

2) $\mathbf{q}_k = (\Phi \mathbf{W}_k)^\dagger \mathbf{y}$

3) $\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{q}_k$

fin pour

retour : $\mathbf{x}_k$

Algorithme 5: FOCUSS

est décrit dans l'algorithme 5. L'estimation du vecteur $\mathbf{x}$ à l'itération k est également équivalent à

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k^2 \Phi^H (\Phi \mathbf{W}_k^2 \Phi^H)^{-1} \mathbf{y}, \quad \mathbf{W}_k = \text{diag}(\mathbf{x}_{k-1}). \quad (3.16)$$

Il a été montré que l'algorithme FOCUSS simple fait partie d'une famille de méthodes dites de type FOCUSS [RKD99] qui permettent de résoudre le problème général suivant :

$$\min_{\mathbf{x}} E^{(p)}(\mathbf{x}) \quad \text{s.c.} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3.17)$$

où $E^{(p)}$ est une fonction de mesure de parcimonie, en particulier $E^{(p)}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N |x(n)|^p$, $p \leq 1$. Le principe de ce type de méthodes consiste à écrire $\nabla_{\mathbf{x}} E^{(p)}(\mathbf{x})$ sous forme factorisée $\nabla_{\mathbf{x}} E^{(p)}(\mathbf{x}) = \text{diag}(|x(n)|^{p-2}) \mathbf{x}$, puis d'utiliser les équations variationnelles pour obtenir l'algorithme itératif :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{W}_k^2 \Phi^H (\Phi \mathbf{W}_k^2 \Phi^H)^{-1} \mathbf{y}, \quad \mathbf{W}_k = \text{diag}(|x_{k-1}(n)|^{1-\frac{p}{2}}). \quad (3.18)$$

Rao et al. [REC+03] ont présenté l'algorithme FOCUSS régularisé qui est une simple adaptation de l'algorithme FOCUSS au problème de débruitage :

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_p^p. \quad (3.19)$$

IRLS (*Iterative Reweighted Least Squares*) [Gui00] est une méthode comparable à FOCUSS régularisé qui converge pour $p = 1$ mais il n'est pas assuré qu'elle converge pour $p \neq 1$. Plusieurs algorithmes d'approximation parcimonieuse qui reposent sur les techniques itératives repondérées ont été proposées récemment [CWB08, CY08, DG09, PWKDR06].

3.6 Sparse Iterative Covariance-based Estimation (SPICE)

La méthode SPICE (*SParse Iterative Covariance-based Estimation*) [SBL11a] est la première approche qui repose sur la matrice de covariance pour résoudre le problème d'estimation parcimonieuse $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{e}$. En supposant que

$$E(\mathbf{e}\mathbf{e}^H) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_M \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

et que les phases des coefficients $x(n)$ sont indépendantes et uniformément réparties dans $[0, 2\pi]$, alors la matrice de covariance de $\mathbf{y}$ a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} = E(\mathbf{y}\mathbf{y}^H) &= \sum_{n=1}^N |x(n)|^2 \boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^H + \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sigma_M \end{bmatrix} \\ &\triangleq \mathbf{Q}^H \mathbf{P} \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\mathbf{Q}^H = [\boldsymbol{\varphi}_0, \dots, \boldsymbol{\varphi}_{N-1}, \mathbf{I}] \triangleq [\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N+M-1}] \quad (3.22)$$

et

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} |x(1)|^2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & |x(2)|^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \sigma_1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_M \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} p(0) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & p(1) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & p(N) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p(N+M-1) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

La méthode SPICE consiste en la minimisation du critère suivant :

$$J = \|\mathbf{R}^{-1/2}(\mathbf{y}\mathbf{y}^H - \mathbf{R})\|_F^2 \quad (3.24)$$

où $\|\cdot\|_F$ représente la norme de Frobenius pour les matrices, et $\mathbf{R}^{-1/2}$ est la racine carrée de la matrice Hermitienne définie positive $\mathbf{R}^{-1}$. Certes, l'utilisation du critère a plus de sens dans le cas de plusieurs expériences (plusieurs mesures du vecteur $\mathbf{y}$) que dans le cas d'une seule (auquel cas la matrice de covariance est seulement $\mathbf{y}\mathbf{y}^H$, comme dans (3.24)). Malgré cela, la minimisation de J peut donner des estimations satisfaisantes pour une seule mesure de $\mathbf{y}$ [SBL11a]. Un calcul simple

Algorithme SPICE

- **Entrées** : Un signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, une matrice $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{C}^{M \times N}$

initialisation : $p_0(n) = |\mathbf{q}_n^H \mathbf{y}|^2 / \|\mathbf{q}_n\|^4$, $[\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_{N+M-1}] = [\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1} \mathbf{I}]$

pour $k = 1$; $k := k + 1$ jusqu'à que le critère d'arrêt soit atteint **faire**

1) $\mathbf{R}_k = \sum_{n=1}^{N+M} p_{k-1}(n) \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^H$ { Calcul de la matrice de covariance }

2) $\mathbf{z}_k = \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}$

3) $\sqrt{w(n)} = \|\mathbf{q}_n\| / \|\mathbf{y}\|$ ($n = 0, \dots, N + M - 1$)

4) $r_k(n) = |\mathbf{q}_n^H \mathbf{z}_k|$ ($n = 1, \dots, N + M$)

5) $\rho_k = \sum_{l=1}^{N+M} \sqrt{w(l)} p_{k-1}(l) r_k(l)$

6) $p_k(n) = p_{k-1}(n) r_k(n) / \sqrt{w(n)} \rho_k$ ($n = 0, \dots, N + M - 1$)

fin pour

retour : $\mathbf{p} = [p_k(0), p_k(1), \dots, p_k(N + M - 1)]^T$

Algorithme 6: SPICE

montre que :

$$J = -2\|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \mathbf{y}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \sum_{n=1}^{N+M} \|\mathbf{q}_n\|^2 p_n \quad (3.25)$$

Il est montré dans [SBL11a, SBL11b] que la minimisation de la fonction J peut être ramenée au problème de minimisation convexe suivant :

$$\min_{\{p(n) \geq 0\}} \mathbf{y}^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} \quad \text{tel que} \quad \sum_{n=1}^{N+M} w(n) p(n) = 1 \quad (3.26)$$

où $w(n) = \frac{\|\mathbf{q}_n\|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Les coefficients $p(n)$ sont estimés itérativement, à chaque itération $p_k(n)$ est calculé selon :

$$p_k(n) = p_{k-1}(n) \frac{|\mathbf{q}_n^H \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}|}{\sqrt{w(n)} \rho_k} \quad (3.27)$$

où $\rho_k = \sum_{l=1}^{N+M} w_l^{1/2} p_l(i) |\mathbf{q}_n^H \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}|$. La méthode SPICE est résumée dans l'algorithme 6. Les éléments $p(n)$, $n = 0, \dots, N - 1$, du vecteur $\mathbf{p}$, renvoyé par l'algorithme SPICE, ne constituent pas la solution parcimonieuse du problème ($\mathbf{y} = \mathbf{\Phi} \mathbf{x} + \mathbf{e}$). En effet, par définition $p(n) = |x(n)|^2$, $n = 0, \dots, N - 1$, ce qui nous donne les positions des éléments non nuls dans le vecteur $\mathbf{x}$ et leur module. Si l'on souhaite accéder à l'information de phase de ces coefficients, il faut refaire une autre estimation au sens des moindres carrés connaissant la position des atomes activés.

Comme on peut le constater, la méthode SPICE ne nécessite pas un choix de paramètres par l'utilisateur et elle possède des propriétés de convergence globale [SBL11a, SBL11b]. La capacité de la méthode SPICE à traiter des signaux bruités sans avoir besoin d'informations *a priori* sur la

variance du bruit est une caractéristique très utile en pratique.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème d'approximation parcimonieuse et des méthodes permettant de le résoudre. Nous avons commencé par présenter les algorithmes gloutons les plus simples MP et OMP, puis les méthodes plus récentes : SBR, StOMP et CoSaMP. Les algorithmes CoSaMP et OMP ont des performances similaires pour des signaux très parcimonieux. L'algorithme SBR présente ainsi de meilleures performances, plus précisément dans le cas où les atomes du dictionnaire sont fortement corrélés. Pour cette raison, nous avons choisi les algorithmes OMP et SBR pour les utiliser dans le chapitre suivant. Dans un deuxième temps nous avons vu les différents types de minimisation ℓ_p .

En reformulant le problème d'estimation modale en un problème d'approximation parcimonieuse, nous avons supposé que les signaux élémentaires présents dans le signal sont des atomes du dictionnaire. Dans le cas contraire, la méthode d'approximation parcimonieuse ne pourra jamais estimer les bons paramètres du signal. Pour garantir que le dictionnaire contienne tous les modes qui puissent exister dans un signal, la solution triviale est de construire le dictionnaire sur une grille très fine. Cela conduit à la manipulation d'une matrice de grande taille avec tous les problèmes calculatoires sous-jacents. Pour contrôler la taille du dictionnaire tout en ayant une résolution d'estimation satisfaisante, nous proposons, dans le chapitre suivant, une approche multigrille combinée à l'approximation parcimonieuse.

Chapitre 4

Sparse multigrid modal estimation

Le problème d'estimation modale peut être traité en utilisant le principe de l'approximation parcimonieuse. Le dictionnaire dans de tels cas est obtenu par la discrétisation de fonctions exponentielles complexes incluant la fréquence et le facteur amortissement. Pour atteindre une bonne résolution, il est nécessaire de choisir une grille de discrétisation très fine, ce qui conduit à des calculs extrêmement coûteux numériquement à cause de la grande taille des dictionnaires utilisés. Pour résoudre ce problème, nous proposons une approche multigrille combinée à l'approximation parcimonieuse permettant, à la fois, de manipuler des dictionnaires de taille raisonnable et d'atteindre une bonne résolution spectrale. L'approche consiste à affiner le dictionnaire, sur plusieurs niveaux de résolution. L'algorithme est initialisé avec un dictionnaire correspondant à une grille grossière ; cette dernière est ensuite affinée de manière adaptative en fonction des atomes actifs obtenus par la méthode d'approximation parcimonieuse. Cette approche a fait l'objet d'un papier de revue publié [SDSB12]. Le contenu du papier est intégralement reproduit (en anglais) dans ce chapitre (§ 4.1).

La sélection de la grille initiale dans l'approche multigrille est un problème critique qui a besoin de solutions satisfaisantes. Pour cela, nous proposons une stratégie de sélection d'une grille initiale grossière qui garantit la convergence de l'algorithme, même à partir d'un seul atome dans le dictionnaire. L'idée est de définir les atomes de sorte que leur corrélation avec les modes du signal est supérieure à un seuil spécifié. On présente ce travail dans le paragraphe 4.2. Celui-ci également une reproduction intégrale du papier publié dans la conférence internationale EUSIPCO'2012 [SDB12].

4.1 Sparse multidimensional modal analysis using a multigrid dictionary refinement

4.1.1 Introduction

The topic of sparse signal representation has received considerable attention in the last decades since it can find application in a variety of problems, including mono- and multidimensional deconvolution [DFS09], statistical regression [Mil02], and radar imaging [CK01]. Sparse approximation consists of finding a decomposition of a signal $\mathbf{y}$ as a linear combination of a limited number of elements from a dictionary $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$, i.e., finding a coefficient vector $\mathbf{x}$ that satisfies $\mathbf{y} \approx \Phi \mathbf{x}$, where Φ is overcomplete ($M < N$). The sparsity condition on $\mathbf{x}$ ensures that the underdetermined problem

does not have an infinite number of solutions. The dictionary Φ can be chosen according to its ability to represent the signal with a limited number of coefficients or it can be imposed by the inverse problem at hand. In the latter case, we consider dictionaries whose atoms are function of some parameters. The different atoms of the dictionary are then formed by evaluating this function over a grid which has to be very fine to achieve a certain degree of resolution. This is the case for the modal estimation problem in which the atoms are formed by discretizing the frequency and damping factor axes. In this situation, the challenge is to get a good approximation without a prohibitive computational cost due to the huge size of the dictionary.

This study addresses the modal retrieval problem. This is an important topic in various applications including nuclear magnetic resonance (NMR) spectroscopy [HS96], wireless communications, radar, and sonar [RN01]. A modal signal is modeled as a sum of damped complex sinusoids. Several methods have been developed to address the modal estimation problem such as maximum likelihood [BM86, CS94] and subspace-based methods [RN01, KT82, SN89, RK89, SSM93, LLM07]. A special case of modal estimation is the harmonic retrieval problem (null damping factor) which has been formulated as a sparse approximation in a number of contributions. In the case of 1-D harmonic retrieval problem, we can cite FOCUSS [GR97], the method of Moal and Fuchs [MF98], basis pursuit [CD98], adaptive weighted norm extrapolation [CBB02]. Some other contributions may be found in [BCI07, Fuc07]. Nevertheless, only a few methods have been applied to the damped case. For instance, [DT08] presents a sparse estimation example of 1-D NMR (modal) data by using Lasso [Tib96], LARS [EHJT04] and OMP [PRK93]. Goodwin et al. [GV99] proposed a damped sinusoidal signal decomposition for 1-D signals using Matching Pursuit [MZ93]. Similarly, regarding multigrid approaches associated with sparse approximation methods, only some studies are considering the 1-D harmonic signals [CMMB04, MCW05b]. In the case of 2-D signals, an approach combining adaptive multigrid decomposition and TLS-Prony estimation was proposed in [DKB08]. However, to authors knowledge, there is no study that deals with the problem of estimating parameters of multidimensional (R -D) damped sinusoidal signals by sparse approximation methods. This article provides a multidimensional generalization of the study presented in [SDSB11a, SDSB11b].

The goal of this article is to present an efficient approach that reduces the computational cost of sparse algorithms for R -D modal estimation problems. The main contributions of the article are as follows. (i) We propose a procedure which iteratively improves the set of atoms in the dictionary. The goal of this procedure is to improve resolution by avoiding computationally expensive operations due to the processing of large matrices; we refer to this procedure as the multigrid approach. (ii) We show how the 1-D modal retrieval problem can be addressed using sparse estimation approach by building a dictionary whose atoms are calculated by sampling the modal function over a 2-D grid (frequency and damping factor) in order to obtain all possible modes combinations. (iii) We show how to extend the sparse 1-D modal estimation problem to R -D modal problems.

The article is organized as follows. In Section 4.1.2, we provide background material and definitions for sparse signal representation. We present some known sparse methods and we recall the single best replacement (SBR) [SIBD11] algorithm and its advantages as compared to other algorithms such as OMP, OLS, and CoSaMP, to name a few. In Section 4.1.3, we present the multigrid dictionary refinement approach and we discuss its usefulness to accelerate computation and to improve resolution. In Section 4.1.4, we see how the 1-D modal retrieval problem may be addressed using

sparse approximations and how the multigrid approach can be applied. In Section 4.1.5, we extend the sparse multigrid approach to the R -D modal estimation problem. In Section 4.1.6, experimental results are presented first to compare SBR to a greedy algorithm (OMP) and a solver to the basis pursuit problem. Then, the effectiveness of the multigrid approach will be illustrated on simulated 1-D and 2-D modal signals. Conclusions are drawn in section 4.2.4.

Notations : Upper and lower bold face letters will be used for matrices and column vectors, respectively. $\mathbf{A}^T$ denotes the transpose of $\mathbf{A}$. “ $\odot$ ” will denote the Khatri-Rao product (column-wise Kronecker) and “ $\otimes$ ” will denote the Kronecker product.

4.1.2 Sparse approximations

4.1.2.1 Key ideas of sparse approximations

Consider an observation vector $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ which has to be approximated by a sum of vectors from a matrix Φ such that $\mathbf{y} \approx \Phi \mathbf{x}$, where $\Phi = [\phi_1, \dots, \phi_N] \in \mathbb{C}^{M \times N}$ and $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ contains coefficients that select and weight columns ϕ_n . We refer to Φ as a *dictionary* and to $\mathbf{x}$ as a *representation* of the signal $\mathbf{y}$ with respect to the dictionary. To find an accurate approximation for any arbitrary signal $\mathbf{y}$, the dictionary has to be overcomplete, i.e., has to contain a large number of atoms. Therefore, we have to solve an underdetermined system when $M < N$. Clearly, there is an infinite number of solutions that can be used to represent $\mathbf{y}$. This is why additional conditions have to be imposed. Let us introduce the pseudo norm ℓ_0 , $\|\cdot\|_0 : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{N}$, which counts the number of non-zero components in its arguments. We say that a vector $\mathbf{x}$ is s -sparse, when $\|\mathbf{x}\|_0 = s$. In the case for an observed signal corrupted with noise, the problem of estimating the sparsest vector $\mathbf{x}$ such as $\Phi \mathbf{x}$ approximates $\mathbf{y}$ at best can be stated as an $\ell_2 - \ell_0$ minimization problem admitting two formulations :

- the constrained $\ell_2 - \ell_0$ problem whose goal is to seek the minimal error possible at a given level of sparsity $s \geq 1$:

$$\arg \min_{\|\mathbf{x}\|_0 \leq s} \{\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|^2\} \quad (4.1)$$

- the penalized $\ell_2 - \ell_0$ problem :

$$\arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n} \{\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) + \lambda \|\mathbf{x}\|_0\}. \quad (4.2)$$

The goal is to balance between the two objectives (fitting error and sparsity). Here, the solution sparsity level is controlled by the λ parameter.

The $\ell_2 - \ell_0$ problem is known to yield an NP complete combinatorial problem which is usually handled by using suboptimal search algorithm. Restricting our attention to greedy algorithms, the main advantage of the $\ell_2 - \ell_0$ penalized form is to allow both insertion and removal of elements in $\mathbf{x}$, while the constrained form only allows the insertion when optimization is carried through a descent approach [SIBD11, HD10].

A well known greedy method for sparse approximation is orthogonal matching pursuit (OMP) [PRK93]. It minimizes iteratively the error $\mathcal{E}(\mathbf{x})$ until a stopping criterion is met. At each iteration the current estimate of the coefficient vector $\mathbf{x}$ is refined by selecting one more atom to yield a substantial improvement of the signal approximation.

There are other paradigms for solving sparse approximation problems by using $\ell_2 - \ell_p$ minimization for $p \leq 1$. One of these is basis pursuit (BP) [CDS98], which is a principle for decomposing a signal into an “optimal” superposition of dictionary elements, where optimal means having the smallest ℓ_1 norm of coefficients among all such decompositions :

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \text{ subject to } \|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\| < \epsilon. \quad (4.3)$$

This principle leads to approximation that can be sparse and this minimization problem can be solved via linear programming [CDS98]. Instead of $\ell_2 - \ell_1$ penalized problem, FOCUSS algorithm [GR97] uses a $\ell_2 - \ell_p$ penalized criterion. For $p < 1$, the cost function is nonconvex, and the convergence to global minima is not guaranteed. It is indicated in [RKD99], that the best results are obtained for p close to 1, whereas the convergence is also slowest for $p = 1$.

In this article, we will use the SBR algorithm together with the multigrid approach. This algorithm has very interesting performance particularly in the case where the dictionary elements are strongly correlated [SIBD11], this is precisely the case with modal atoms. The algorithm is briefly recalled in the following paragraph.

4.1.2.2 SBR algorithm for penalized $\ell_2 - \ell_0$ problem

The heuristic SBR algorithm (see, Table 4.1) was proposed in [SIBD11] to minimize the mixed $\ell_2 - \ell_0$ cost function $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$ defined in (4.2.2) for a fixed parameter value λ . It is a forward-backward algorithm inspired by the SMLR method [KM82]. It is an iterative search algorithm that addresses the penalized $\ell_2 - \ell_0$ problem for fixed λ . We denote by $\Omega \bullet n$ the insertion or removal of an index n into/from the active set Ω

$$\Omega \bullet n = \begin{cases} \Omega \cup \{n\} & \text{if } n \notin \Omega \\ \Omega \setminus \{n\} & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4.4)$$

At each iteration, the N possible single replacements $\Omega \bullet n$ ($n = 1, \dots, N$) are tested (i.e., N least square problems are solved to compute the minimum squared error $\mathcal{E}_{\Omega \bullet n}$ related to each support $\Omega \bullet n$), then the replacement yielding the minimal value of the cost function $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$, i.e., $\mathcal{J}_{\Omega \bullet n}(\lambda) := \mathcal{E}_{\Omega \bullet n} + \lambda \text{Card}(\Omega \bullet n)$, is selected. In Table 4.1, the replacement rule is formulated by “ $n_k \in \dots$ ” in case several replacements yield the same value of $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$. However, this special case is not likely to occur when dealing with real data. A detailed analysis and performance evaluation can be found in [SIBD11] where it is shown that SBR performs very well in the case of highly correlated dictionary atoms (which is the case here). We note that unlike many algorithms which require to fix either a maximum number of iterations to be performed or a threshold on the squared error variation (OMP and OLS for instance), the SBR algorithm does not need any stopping condition since it stops when the cost function $\mathcal{J}(\mathbf{x}, \lambda)$ does not decrease anymore. However it requires to tune the parameter λ which is done empirically.

TABLE 4.1 – SBR algorithm [SIBD11]

• Input. A signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, a matrix $\Phi \in \mathbb{C}^{M \times N}$ and a scalar λ • Output. A sparse coefficient vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.
1. Initialize. Set the index set $\Omega_1 = \emptyset$, The coefficient vector $\mathbf{x}_1 = [0, \dots, 0]^T$ and set the counter to $k = 1$. 2. Identify. Find the replacement n_k of Φ that most decreases the objective function : $n_k \in \arg \min_n \{ \mathcal{J}_{\Omega_k \bullet n}(\lambda) := \mathcal{E}_{\Omega_k \bullet n} + \lambda \text{Card}(\Omega_k \bullet n) \}$ 3. Iterate. Update the active set if $\mathcal{J}_{\Omega_k \bullet n_k}(\lambda) < \mathcal{J}_{\Omega_k}(\lambda)$: $\Omega_{k+1} = \Omega_k \bullet n_k.$ Increment k. Repeat (2)-(3) until the active set is not updated. 4. Output. Return $\mathbf{x} = \mathbf{x}_k$, the active amplitudes.

4.1.3 Multigrid dictionary refinement

As mentioned before, we restrict our attention to the case of modal dictionaries whose atoms are calculated by evaluating a function over a multidimensional grid, the grid dimension being equal to the number of unknown modal parameters. To achieve a high-resolution modal estimation, a possible way is to define a high resolution dictionary often resulting in a prohibitive computational burden. Rather than defining a highly resolved dictionary, we propose to adaptively refine a coarse one through a multigrid scheme. This results in the algorithm sketched on Table 4.2, where the key step is the adaptation of the dictionary as a function of the previous dictionary and the estimated vector $\mathbf{x}$. The algorithm amounts to insert (resp., remove) atoms in (resp., from) Φ and to re-run the sparse approximation algorithm. We propose two procedures to refine the dictionary. The first one consists in inserting new atoms in the Φ matrix in the neighborhood of active ones. In other words, we first restore the signal $\mathbf{x}_{(l)}$ related to the dictionary $\Phi_{(l)}$ by applying a sparse approximation method (SAM) at level l . Then we refine the dictionary by inserting atoms in between pairs of $\Phi_{(l)}$, in the neighborhood of each activated atom and we apply again the SAM at level $l + 1$ to restore $\mathbf{x}_{(l+1)}$ with respect to the refined dictionary $\Phi_{(l+1)}$. Thus we refine iteratively the dictionary until the maximum level $l = L - 1$ is reached. This procedure is illustrated on Figure 4.1a where the dictionary atoms depend on two parameters, f and α . The disadvantage of this procedure is that the size of the dictionary is increasing as new atoms are constantly added between two resolution levels. Hence, the computational cost will be increasing. To cope with this limitation, we propose a second procedure consisting in adding new atoms as in the first procedure and deleting remote non-active ones (Figure 4.1b). The later multigrid approach may suffer from one main shortcoming. Indeed, removing non-active atoms excludes the possibility of further having active components in

the neighborhood of already suppressed atoms. A possible way to overcome this problem consists in maintaining all the atoms from the initial dictionary in all the $\Phi_{(l)}$'s.

TABLE 4.2 – Sparse multigrid algorithm

• Input. A signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$, a matrix $\Phi_0 \in \mathbb{C}^{M \times N}$, a scalar λ and an integer L • Output. A sparse coefficient vector $\mathbf{x}_{L-1} \in \mathbb{C}^N$.
For $l = 0$ up to $l = L - 1$ $\mathbf{x}_l = \text{SAM}(\Phi_l, \mathbf{y}, \lambda)$ $\Phi_{l+1} = \text{ADAPT}(\Phi_l, \mathbf{x}_l)$, End For.

The multigrid dictionary refinement is proposed in the context of modal analysis. However, it is worth noticing that this idea can be straightforwardly extended to any dictionary obtained by sampling a continuous function over a grid.

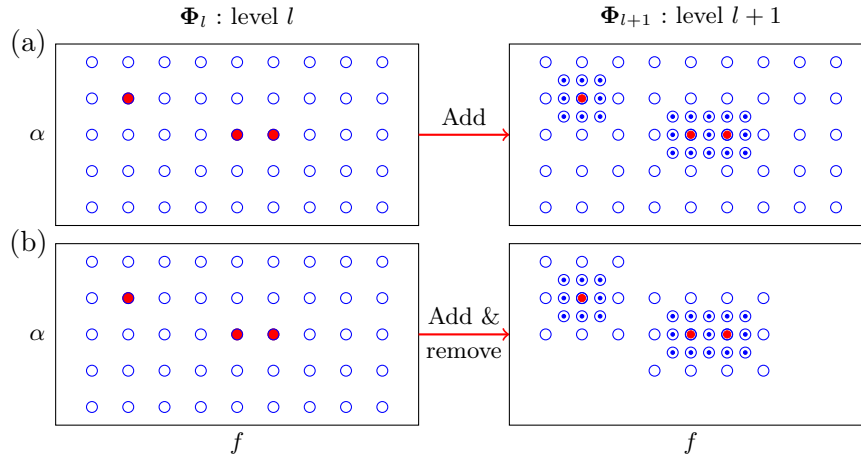


FIGURE 4.1 – Two multigrid schemes.

4.1.4 Monodimensional modal estimation using sparse approximation and multigrid

4.1.4.1 1-D data model

A 1-D complex modal signal containing F modes can be written as :

$$y(m) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^m + e(m) \quad (4.5)$$

$$\Phi = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ \phi_{1,1}(1) & \phi_{1,2}(1) & \cdots & \phi_{1,K}(1) & \phi_{2,1}(1) & \cdots & \phi_{2,K}(1) & \cdots & \phi_{P,K}(1) \\ \phi_{1,1}(2) & \phi_{1,2}(2) & \cdots & \phi_{1,K}(2) & \phi_{2,1}(2) & \cdots & \phi_{2,K}(2) & \cdots & \phi_{P,K}(2) \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \\ \phi_{1,1}(M-1) & \phi_{1,2}(M-1) & \cdots & \phi_{1,K}(M-1) & \phi_{2,1}(M-1) & \cdots & \phi_{2,K}(M-1) & \cdots & \phi_{P,K}(M-1) \end{bmatrix}}_{N=PK \text{ atoms}} \quad (4.7)$$

for $m = 0, \dots, M-1$, where $a_i = e^{(-\alpha_i + j2\pi f_i)}$, with $\{\alpha_i\}_{i=1}^F$ the damping factors and $\{f_i\}_{i=1}^F$ the frequencies. $\{c_i\}_{i=1}^F$ are complex amplitudes and $e(m)$ is an additive noise. The problem is to estimate the set of parameters $\{a_i, c_i\}_{i=1}^F$ from the observed sequence $y(m)$. Equation (4.5) can be written under a matrix form as :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (4.6)$$

where $\mathbf{A}$ is an $M \times F$ Vandermonde matrix :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_F \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_F^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{M-1} & a_2^{M-1} & \cdots & a_F^{M-1} \end{bmatrix}$$

and $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_F]^T$.

4.1.4.2 1-D sparse modal estimation

The problem of modal estimation is an inverse problem since $\mathbf{y}$ is given and $\mathbf{A}$, $\mathbf{c}$, and F are unknown. It can be formulated as a sparse signal estimation problem by defining the dictionary Φ gathering all the possible modes obtained by sampling α (P samples) and f (K samples) on a 2-D grid. Φ is expressed in (4.7) with $\phi_{p,k}(m) = e^{(-\alpha_p + j2\pi f_k)m}$ and $N = PK$. Provided that α and f are finely sampled, we can assume that $\mathbf{A}$ is a submatrix of Φ so that $\mathbf{c}$ correspond to the nonzero elements in $\mathbf{x}$. Then the modal estimation problem can be formulated as a penalized $\ell_2 - \ell_0$ sparse signal estimation problem (4.2.2). The multigrid approach presented before can be used to that end.

4.1.5 Multidimensional modal estimation using sparse approximation and multigrid

4.1.5.1 R-D data model

A multidimensional complex modal signal containing F modes can be written as :

$$y(m_1, \dots, m_R) = \sum_{i=1}^F c_i \prod_{r=1}^R a_{i,r}^{m_r} + e(m_1, \dots, m_R) \quad (4.8)$$

where $m_r = 0, \dots, M_r - 1$ for $r = 1, \dots, R$. M_r denotes the sample support of the r th dimension, $a_{i,r} = e^{(-\alpha_{i,r} + j2\pi f_{i,r})}$ is the i th mode in the r th dimension, with $\{\alpha_{i,r}\}_{i=1, r=1}^{F,R}$ the damping factors and $\{f_{i,r}\}_{i=1, r=1}^{F,R}$ the frequencies, $\{c_i\}_{i=1}^F$ the complex amplitudes, and $e(m_1, m_2, \dots, m_R)$ stands for an additive observation noise. The problem is to estimate the set of parameters $\{a_{i,r}\}_{i=1, r=1}^{F,R}$ and $\{c_i\}_{i=1}^F$ from the samples $y(m_1, \dots, m_R)$.

In order to facilitate the presentation, we rewrite the data model using the Khatri-Rao product. Given (4.8), we define the vector $\mathbf{y}$ as :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(0, 0, \dots, 0) \\ y(0, 0, \dots, 1) \\ \vdots \\ y(0, 0, \dots, M_R - 1) \\ y(0, 0, \dots, 1, 0) \\ \vdots \\ y(M_1 - 1, M_2 - 1, \dots, M_R - 1) \end{bmatrix}.$$

Then, we define R Vandermonde matrices $\mathbf{A}_r \in \mathbb{C}^{M_r \times F}$ with generators $\{a_{i,r}\}_{i=1}^F$ such that

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{1,r} & a_{2,r} & \dots & a_{F,r} \\ a_{1,r}^2 & a_{2,r}^2 & \dots & a_{F,r}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,r}^{M_r-1} & a_{2,r}^{M_r-1} & \dots & a_{F,r}^{M_r-1} \end{bmatrix},$$

with $r = 1, \dots, R$. It can be checked that

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A}_1 \odot \mathbf{A}_2 \odot \dots \odot \mathbf{A}_R) \mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (4.9)$$

where $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_F]^T$ gathers the complex amplitudes and $\mathbf{e}$ is the noise vector.

4.1.5.2 R -D sparse modal estimation

Similar to the 1-D case, the R -D modal retrieval problem can be formulated as a sparse signal estimation problem by defining a dictionary that gathers all possible combinations of 1-D modes obtained by sampling damping factors and frequencies for each dimension on 2-D grids. Let P_r be the number of damping factors $\alpha_{1,r}, \alpha_{2,r}, \dots, \alpha_{P_r,r}$ and K_r the number of frequencies $f_{1,r}, f_{2,r}, \dots, f_{K_r,r}$ resulting from the sampling of the r^{th} dimension, then the corresponding dictionary is given by

$$\Phi^{(r)} = [\phi_{1,1}^{(r)}, \dots, \phi_{1,K_r}^{(r)}, \phi_{2,1}^{(r)}, \dots, \phi_{2,K_r}^{(r)}, \dots, \phi_{P_r,K_r}^{(r)}],$$

where $\phi_{p,k}^{(r)} = [\phi_{p,k}^{(r)}(0), \dots, \phi_{p,k}^{(r)}(M_r - 1)]^T$ and $\phi_{p,k}^{(r)}(m_r) = e^{(-\alpha_{p,r} + j2\pi f_{k,r})m_r}$ for $p = 1, \dots, P_r$ and $k = 1, \dots, K_r$. Finally, the dictionary involved in the R -D sparse modal approximation is defined

by :

$$\Phi = \Phi^{(1)} \otimes \Phi^{(2)} \otimes \dots \Phi^{(R)}, \quad (4.10)$$

where the number of atoms is $N = \prod_{r=1}^R N_r$, with $N_r = P_r K_r$. Note that the dictionary Φ can be seen as a $2R$ -dimensional sampling of the R -dimensional modal function. Then the R -D modal retrieval problem can be formulated as a penalized $\ell_2 - \ell_0$ sparse signal estimation problem (4.2.2).

4.1.5.3 Multigrid approach for R -D modal estimation

According to (4.10), the dictionary is obtained by doing the Kronecker product of R 1-D modal dictionaries. Thus, we can still use the multigrid approach presented in section 4.1.3 to adapt each 1-D dictionary to form the R -D dictionary. This results in the algorithm sketched in Table 4.3.

TABLE 4.3 – R -D sparse multigrid algorithm

• Input. A signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M_1 M_2 \dots M_R}$, R matrices $\Phi_0^{(r)} \in \mathbb{C}^{M_r \times N_r}$, a scalar λ and an integer L • Output. A sparse coefficient vector $\mathbf{x}_{L-1} \in \mathbb{C}^N$.
<pre> For $l = 0$ up to $l = L - 1$ $\Phi_l = \Phi_l^{(1)} \otimes \Phi_l^{(2)} \otimes \dots \otimes \Phi_l^{(R)}$ $\mathbf{x}_l = \text{SAM}(\Phi_l, \mathbf{y}, \lambda)$ For $r = 1$ up to $r = R$ $\Phi_{l+1}^{(r)} = \text{ADAPT}(\Phi_l^{(r)}, \mathbf{x}_l)$ End For End For.</pre>

4.1.6 Experimental results

In this section, we present some experimental results for the multigrid sparse modal estimation. First, we present two examples on 1-D simulated modal signals. Next, we present and discuss results on a 2-D simulated signal and we compare them with those obtained by the subspace method “2-D ESPRIT” [RN01]. We chose the 2-D ESPRIT method because a comparative performance study [SDB10] has shown that among different subspace-based high resolution modal estimation techniques, it was the one which was giving the best results.

4.1.6.1 1-D modal estimation results

First, we compare the results achieved by SBR, OMP, and the primal-dual logarithmic barrier (log-barrier) algorithm for solving the BP problem [CD98]. Here we used the SparseLab¹ imple-

1. <http://sparselab.stanford.edu>

mentations of OMP and BP (`SolveOMP` and `SolveBP`). Then, we present the results achieved using the multigrid SBR approach.

The first dataset is a noise-free 1-D modal signal $\mathbf{y}$ composed of $M = 30$ samples and made up of three 1-D superimposed damped complex sinusoids having the same amplitude. The 1-D modes are :

$$\begin{aligned}(f_1, \alpha_1) &= (0.2, 0.050); \\ (f_2, \alpha_2) &= (0.3, 0.025); \\ (f_3, \alpha_3) &= (0.9, 0.050).\end{aligned}$$

The dictionary is constructed using 20 equally spaced frequency points in the interval $[0 \ 1]$, where each frequency point is coupled with 20 points of damping factors in $[0 \ 0.5]$ and each atom represents a 1-D complex sinusoid of M samples. Thus, the dictionary Φ is of size 30×400 . We notice that the simulated 1-D modes belong to the dictionary. Thus, in the noise free case, it is possible to have an exact representation of the signal.

We estimate the parameters of $\mathbf{y}$ using SBR, OMP, and log-barrier; the results are shown in Figure 4.2. The representation given at the bottom of Figure 4.2 plots the active modes in the frequency-magnitude plane : the vertical lines are located at the frequencies of the active set Ω and their heights represent the corresponding estimated magnitudes $|\mathbf{x}_\Omega|$. The horizontal segments represent the damping factors. Clearly, the results obtained by SBR and OMP are more sparse than those achieved by the BP solver because BP detects much more than three modes. This is due to the fact that BP is an $\ell_2 - \ell_1$ solver and thus tends to detect many atoms having low amplitudes, while OMP and SBR do not impose any ℓ_1 penalty on the amplitudes allowing for the detection of a small number of atoms possibly having large amplitudes. SBR exactly yields the three modes (exact recovery) whereas OMP gives the true frequencies but leads to a wrong α_2 . The Fourier transform of signal $\mathbf{y}$ and its estimates obtained by SBR, OMP and log-barrier algorithms are given on Figure 4.2 (top). We observe that unlike OMP and log-barrier, SBR correctly estimates the modal parameters of $\mathbf{y}$. Although log-barrier algorithm estimates correctly the frequencies for harmonic signals, it does not estimate correctly the parameters of 1-D modal signals and the solution is less sparse than the solutions provided by SBR and OMP.

In the second example, SBR algorithm coupled to multigrid approach is applied to estimate the 1-D modes from a simulated 1-D modal signal expressed in (4.5) with 30 samples embedded in additive Gaussian white noise such that the SNR is 23 dB. We start restoration using the same dictionary described in the first example, then we refined it with the multigrid approach. The simulated modes are :

$$\begin{aligned}(f_1, \alpha_1) &= (0.19, 0.025), \\ (f_2, \alpha_2) &= (0.23, 0.050).\end{aligned}$$

These modes are chosen in such a way that they cannot be separated by the Fourier transform (Figure 4.3) and they are not initially in the dictionary Φ . Figure 4.3a shows the spectrum of each sinusoid activated in the first level. Using the second multigrid procedure presented before, we

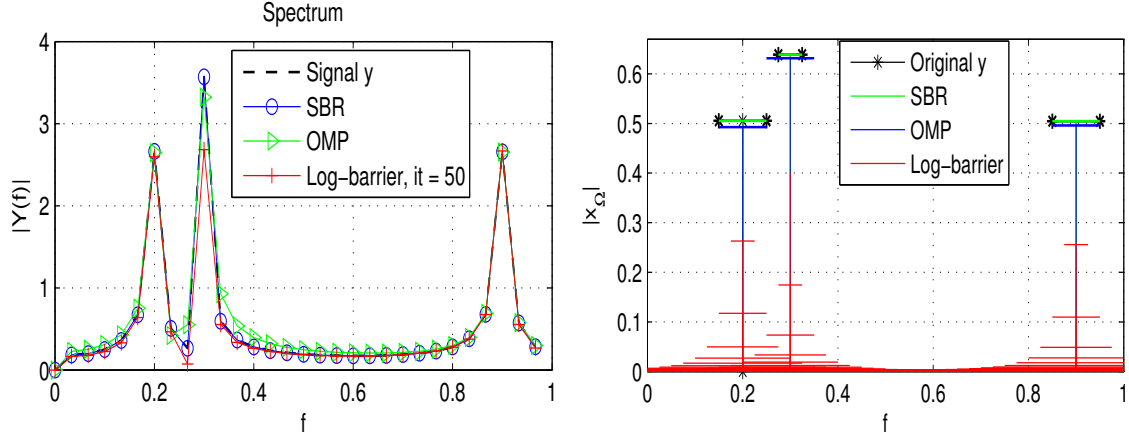
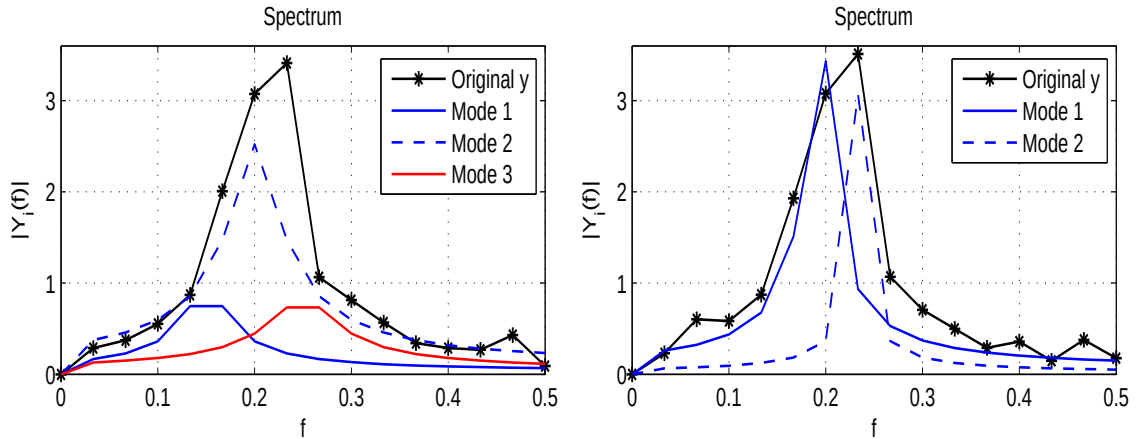


FIGURE 4.2 – Spectrum of $\mathbf{y}$ and its estimates by SBR, OMP, and log-barrier (top), frequencies and damping factors of estimated modes (bottom).

see on Figure 4.3b that the two 1-D modes have been well separated in level 7, which proves the effectiveness of the approach. To give some figures about the efficiency of the multigrid approach, it is interesting to compare the size of the dictionary at the 7th degree of resolution to the uniform dictionary allowing the same resolution. For our example, $\Phi_{(7)}$ is of dimension 30×520 while the uniform one achieving the same resolution would require a dictionary of size 30×6553600 . This dramatic increase in the number of atoms is due to the bidimensional nature of the dictionary. Obviously, this complexity becomes huge for bi- and multidimensional modal signals.



(a) Level 1 : $f_i = 0.15, 0.2, 0.25$ and (b) Level 7 : $f_i = 0.1917, 0.2302$ and $\alpha_i = 0.125, 0.15, 0.225$ resp. $\alpha_i = 0.05, 0.025$ resp.

FIGURE 4.3 – Spectrum of $\mathbf{y}$ and estimated modes by SBR and multigrid, (a) level 1; (b) level 7, SNR = 23 dB.

4.1.6.2 2-D modal estimation results

First, SBR is used in combination with the multigrid approach to estimate parameters of a 2-D simulated signal ($\mathbf{y}_{sim}$) of dimensions 20×20 which contain three modes with parameters :

$$\begin{aligned} (f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.100, 0.00; 0.2, 0.0), \\ (f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.125, 0.00; 0.2, 0.0), \\ (f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.125, 0.05; 0.3, 0.1). \end{aligned}$$

Note that the first two modes are not separated by 2-D Fourier transform. Amplitudes are $(c_1, c_2, c_3) = (1, 1, 3)$ and the additive white noise variance is such that the SNR of the first mode is 7 dB ($\text{SNR}_1 = 7$). In the following simulations we use this simulated 2-D signal ($\mathbf{y}_{sim}$) with the same modes and amplitudes, we only change the SNR value. The spectrum of the simulated signal is represented by contour lines in Figure 4.4a where it is verified that the first two peaks are not separable by Fourier transform. The SBR method coupled with the proposed multigrid approach detects well the three components at the third resolution level. Their respective spectras are shown in Figure 4.4b. To give an idea about the gain in computational cost, the size of the dictionary at the third level is equal to 400×3136 . The size of the uniform dictionary achieving the same resolution is 400×409600 ; the gain in term of size is a multiplicative factor 130.

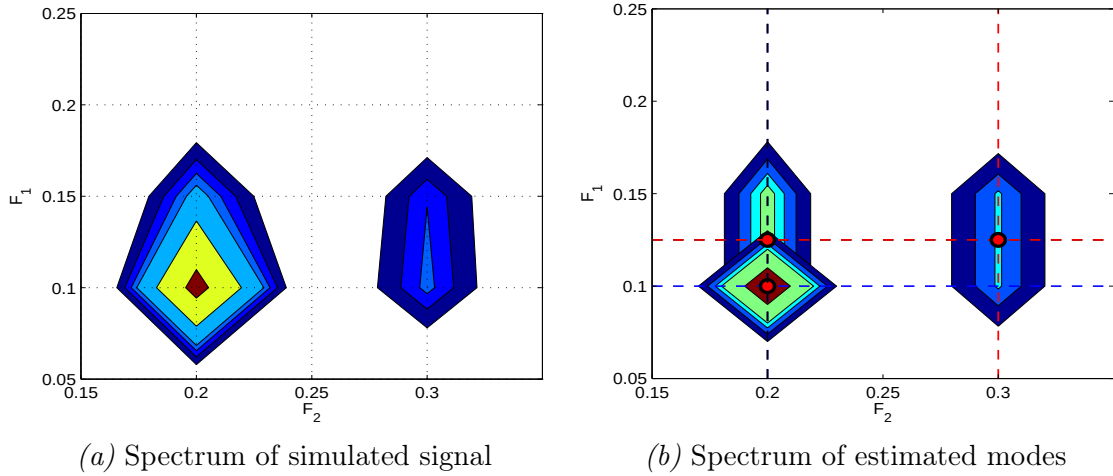


FIGURE 4.4 – Frequency resolution of the proposed method with $\text{SNR}_1 = 7$ dB. The position of simulated modes is presented by a circle.

In Figure 4.5, we compare the estimated modes obtained by the 2-D ESPRIT [RN01] and our proposed technique. We use the 2-D simulated signal ($\mathbf{y}_{sim}$) with the SNR set to 20 dB. Both our technique and 2-D ESPRIT are able to separate the three modes, whereas there is a slight error made by 2-D ESPRIT on the first and second modes. In Figure 4.6, we decrease the SNR to 7 dB, and only the proposed algorithm is still able to estimate the three modes with an accuracy similar to what was obtained when the SNR equals 20 dB. In that case, the 2-D ESPRIT performance decreases and the modal parameters are biased.

In Figure 4.7, we test the sensitivity of our technique to the correct determination of the number

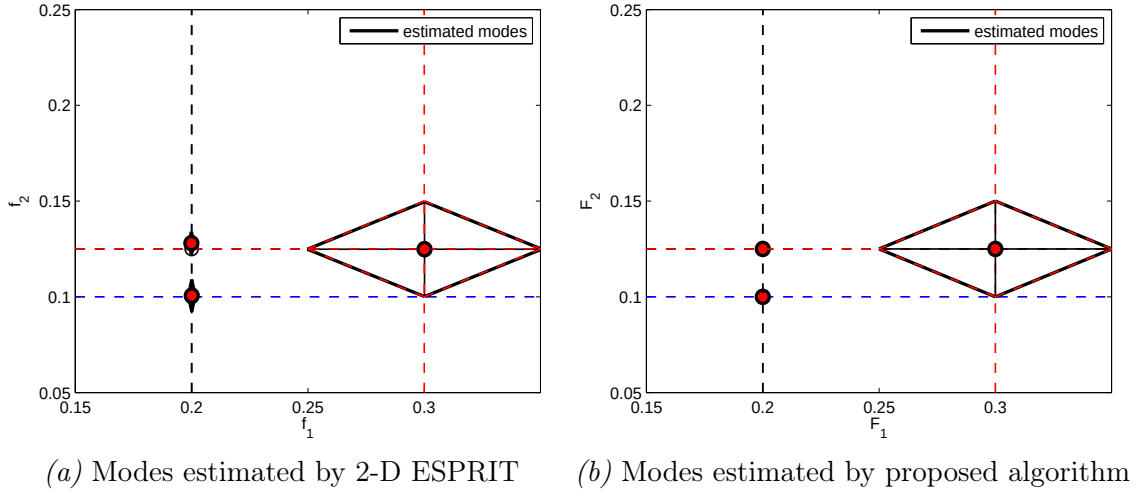


FIGURE 4.5 – Comparison between 2D-ESPRIT and the proposed method with $\text{SNR}_1 = 20$ dB. ($\circ$) Frequencies of simulated 2-D modes; ($\bullet$) Frequencies of estimated 2-D modes; ($\diamond$) The diagonals of the diamonds represent the 2-D damping factors.

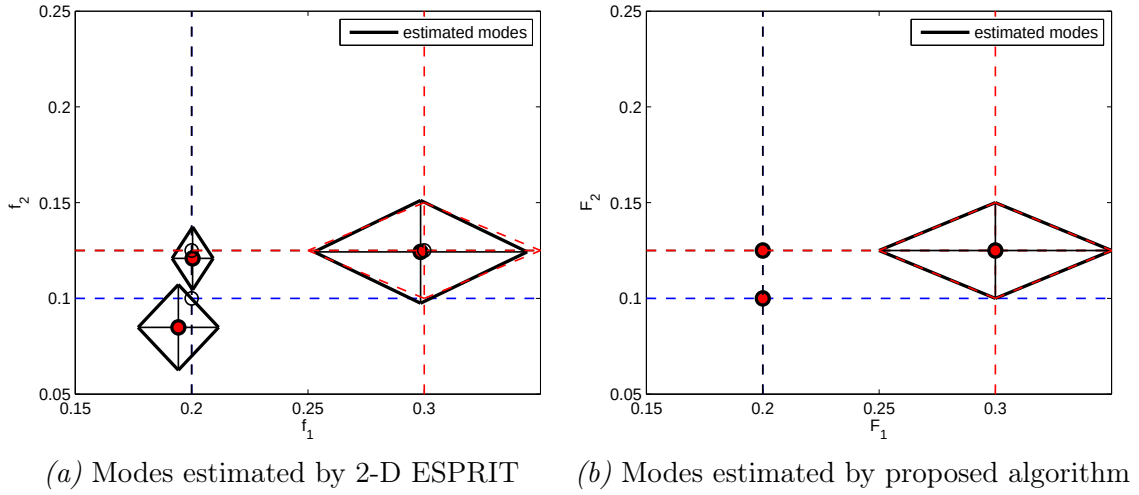


FIGURE 4.6 – Comparison between 2-D ESPRIT and the proposed method with $\text{SNR}_1 = 7$ dB. ($\circ$) Frequencies of simulated 2-D modes; ($\bullet$) Frequencies of estimated 2-D modes; ($\diamond$) The diagonals of the diamonds represent the 2-D damping factors.

of modes in the signal. In the previous examples, the parameter λ of the penalized cost function in SBR algorithm was fixed to 0.01 and we did not give any constraint on the number of modes to be estimated. However, in the example presented in Figure 4.7, we use the 2-D simulated signal with SNR equal to 20 dB, and we force 2-D ESPRIT and the proposed algorithm to estimate 5 modes (while the actual number of modes is 3). We observe that the proposed algorithm is not very sensitive to the correct determination of the number of existing modes in the sense that the true modes are activated and the other active atoms lies in the neighborhood of the true modes. On the contrary, the 2-D ESPRIT yields spurious modes located very far from the true ones.

In Figure 4.8, we analyze the sensitivity of the multigrid algorithm to noise power. We use the same signal $\mathbf{y}_{\text{sim}}$ with different noise levels SNR_1 . For each noise level we do 20 Monte Carlo trials and

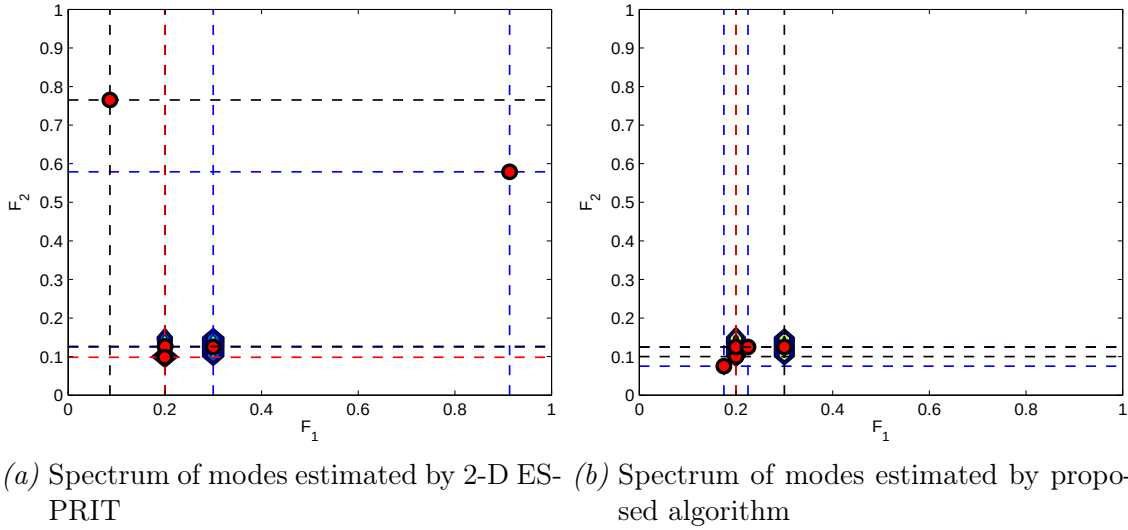


FIGURE 4.7 – Simulation results with number of estimated modes forced to be 5 and $\text{SNR}_1 = 20$ dB (on the first mode). Estimated modes are presented by red circles.

then we calculate the percentage of successful estimations obtained after three multigrid levels. We can see that the proposed algorithm reconstruct exactly the signal with a rate upper than 80% for an SNR_1 more than 6 dB ; and the rate of success is 100% with an SNR_1 upper than 15 dB.

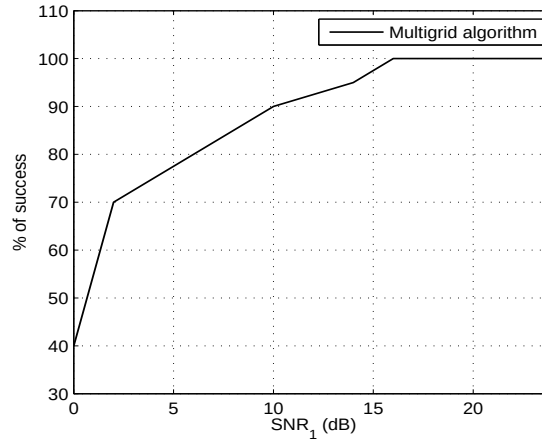


FIGURE 4.8 – Rate of successful estimations with different noise levels of SNR_1 .

4.1.7 Conclusion

We presented a multigrid technique that adaptively refines ordered dictionaries for sparse approximation. The algorithm may be associated with any sparse method, but clearly the accuracy of the final results will depend on the accuracy of the sparse approximation. Then sparse approximation associated to multigrid are used to tackle mono- and multidimensional modal (damped sinusoids) estimation problem. Thus, we applied the SBR algorithm which is shown, using simulation results, to perform better than OMP and Basis Pursuit for modal approximation. Finally, we examined performances of our proposed algorithm over existing R -modal estimation algorithms. It allows one

to separate modes that the Fourier transform cannot resolve without a huge increase in the computational cost, improves robustness to noise and does not require initialization. As perspectives, we will study possible improvements for the sparse multigrid approach in the case of multidimensional modal signals. In particular, we can envisage to use multiple 1-D modal estimation to get a low dimension initial dictionary for R -D modal estimation. We also are planning to study the convergence properties of the multigrid approach and we will apply the method to the modal estimation of real NMR signals.

4.2 Initial grid selection

4.2.1 Introduction

Consider the modal retrieval problem in which the main aim is to estimate parameters of superimposed damped sinusoids. This topic has versatile applications in engineering, e.g., nuclear magnetic resonance (NMR) spectroscopy, wireless communications, sonar and radar. We will use the following complex modal signal model :

$$y(m) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^m + e(m) \quad (4.11)$$

for $m = 0, \dots, M-1$, where $a_i = e^{(-\alpha_i + j2\pi f_i)}$, with $\{\alpha_i\}_{i=1}^F$ the damping factors and $\{f_i\}_{i=1}^F$ the frequencies. $\{c_i\}_{i=1}^F$ are complex amplitudes and $e(m)$ is a white Gaussian noise with variance σ^2 . The problem is to estimate the set of parameters $\{a_i, c_i\}_{i=1}^F$ from the observed sequence $y(m)$. This can be done by using three classes of possible approaches. The first class, parametric approaches, such as sub-space based methods [RK89, KT82], whose use requires the choice of the number of components (model order) F before they can be applied to the data vector. The second class, nonparametric approaches, such as the periodograms, which do not require knowledge of F but they suffer from a limited spectral resolution. The third class is that of sparse approximation methods [DT08, GR97, MCW05b] which may be considered as semi-parametric. These later methods, as compared to the previous ones, can greatly enhance the estimation accuracy for noisy signals and their use does not necessarily require a priori knowledge of the model order F [SB12, SDSB12]. This is why spectral analysis using sparse estimation methods has received considerable interest in the recent years.

Sparse approximation consists in finding a decomposition of a signal $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^M$ as a linear combination of a limited number of elements from a dictionary $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, i.e., finding a coefficient vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ that satisfies $\mathbf{y} \approx \mathbf{Q}\mathbf{x}$, where $\mathbf{Q}$ is overcomplete ($M < N$). The sparsity condition on $\mathbf{x}$ ensures that the underdetermined problem does not have an infinite number of solutions. The dictionary $\mathbf{Q}$ can be chosen according to its ability to represent the signal with a limited number of coefficients or it can be imposed by the inverse problem at hand. In the present paper, we consider dictionaries whose atoms are function of some parameters. The different atoms of the dictionary are then formed by evaluating this function over a grid which has to be very fine to achieve a certain degree of resolution. This is the case for the modal estimation problem in which the atoms are formed by discretizing the frequency and damping factor axes. In this situation, the challenge is to get a good approximation without a prohibitive computational cost due to the huge size of the

dictionary. To deal with this problem we proposed a multigrid approach [SDSB11b, SDSB12] which iteratively enhances the set of atoms in the dictionary. The goal of the multigrid algorithm is to improve resolution by avoiding computationally intractable operations. The estimation begins with a coarse dictionary which is then enhanced over several resolution levels according to the activated atoms at each level. However, different numerical simulations suggest that the construction of the initial dictionary (at the first level) should be done carefully in order to ensure convergence of the multigrid algorithm towards the signal modes $\{a_i\}_{i=1}^F$. In a recent work on grid selection problems, Stoica et al. [SB12] proposed to use a very fine grid to estimate the parameters of harmonic signals. As a result, the minimum number of atoms in the dictionary have to be greater than a threshold which is generally high. Alternatively, in this paper we propose to investigate the approach which consists of starting with a very coarse dictionary containing only a single atom and we derive the condition that ensures convergence to the true modes thanks to the multigrid approach.

The paper is organized as follows. In section 2, we see how the modal retrieval problem may be addressed using sparse approximations. In section 3 we recall the principles of multigrid dictionary refinement. In section 4 we discuss different possible ways and conditions to construct the initial dictionary, then we present an efficient strategy to define the initial grid. In section 5 we present some simulation results to show the effectiveness of the proposed strategy and the convergence of the multigrid algorithm on randomly generated modal signals. Conclusions are drawn in section 6.

4.2.2 Selection of the initial grid

The initial dictionary in the multigrid scheme is of great importance since a bad definition of it may cause completely wrong estimation. Therefore, it should respond to at least two conditions. First, in order to ensure convergence to the true modes, it is necessary that each signal mode has a non negligible correlation with at least one atom $\mathbf{q}_n$ from $\mathbf{Q}$. Second, to reduce numerical complexity, the dictionary should contain only a few atoms defined from a coarse sampling of the variables (α, f) . These conditions may be fulfilled by defining broadband atoms in the initial dictionary, viz. whatever the number of atoms were included in the dictionary, the spectrum of the atoms have to cover all the spectral range $[0, 1[$ in order to ensure a certain correlation with the signal modes. To clarify this idea, let us consider a rather elementary dictionary containing only one atom $\mathbf{q}(\alpha_0, f_0) \in \mathbb{C}^M$ formed from the signal :

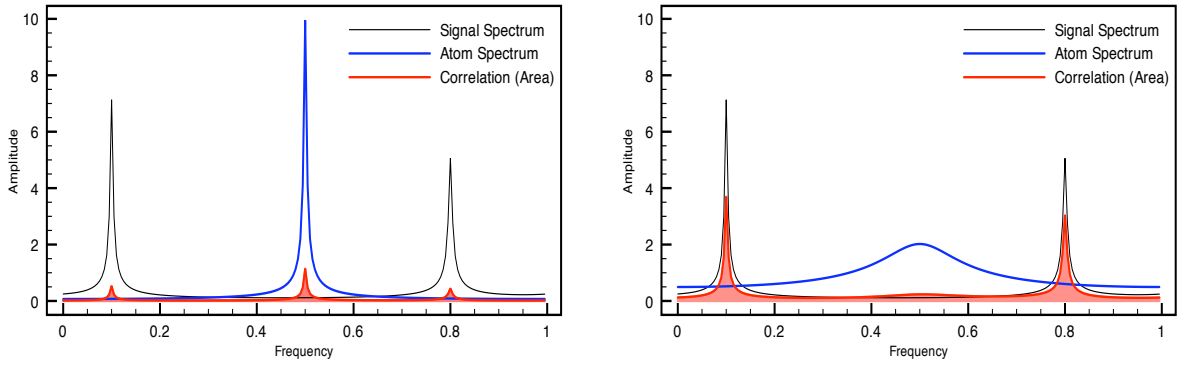
$$q(m) = \beta_0 e^{(-\alpha_0 + j2\pi f_0)m}$$

where $\beta_0 = 1/\|\mathbf{a}(\alpha_0, f_0)\|_2$ is a normalization constant. The spectrum of this damped atom is :

$$\begin{aligned} Q(f) &= \sum_{m=0}^{M-1} q(m) e^{-j2\pi f m} \\ &= \beta_0 \frac{1 - e^{(-\alpha_0 + j2\pi(f_0 - f))M}}{1 - e^{(-\alpha_0 + j2\pi(f_0 - f))}} \end{aligned}$$

It can be shown that the maximum of $|Q(f)|$ is

$$\max_f |Q(f)| = Q(f_0) = \beta_0 \frac{1 - e^{-\alpha_0 M}}{1 - e^{-\alpha_0}}$$



(a) A single narrowband atom

(b) A single broadband atom

FIGURE 4.9 – Schematic representation of the correlation between signal modes and a single atom.

and the minimum is

$$\min_f |Q(f)| = Q(f_0 \pm \frac{1}{2}) = \beta_0 \frac{1 - (-e^{-\alpha_0})^M}{1 + e^{-\alpha_0}}$$

Now, we want $Q(f)$ to cover all the spectral range in the way that it has some correlation with any possible peaks existing in the signal, as illustrated in figure 4.9. Hence, given a signal $y(m)$ with spectrum $Y(f)$, we want to maximize the correlation $|\int Q^*(f)Y(f)df|$ irrespective of modes position in $y(m)$. This can be done by keeping the minimum $\min_f |Q(f)|$ greater than zero. More precisely, the minimum correlation ρ may be controlled using the inequality :

$$\frac{\min_f |Q(f)|}{\max_f |Q(f)|} \geq \rho \quad (4.12)$$

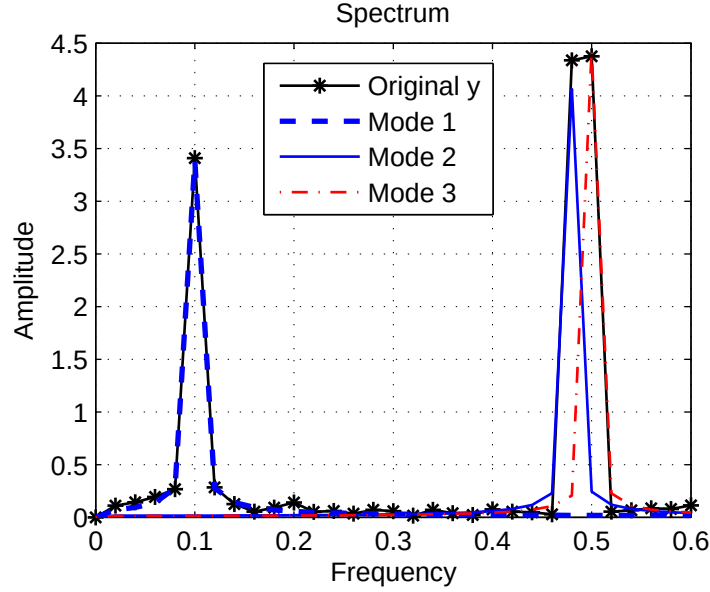
where $0 < \rho < 1$. It can be verified that the solution of this inequality is given by :

$$\alpha_0 \geq \ln(1 + \rho) - \ln(1 - \rho) \quad (4.13)$$

This result will be used in the next section to show the convergence of the multigrid algorithm even starting with a single atom. Note that, by doing so, the limits of the frequency ($f_{\min} = 0, f_{\max} = 1$) and the damping factor ($\alpha_{\min} = 0, \alpha_{\max} = \alpha_0$) are utilized to calculate the position of the new atoms in the second level of the multigrid scheme.

4.2.3 Simulation results

In this section, we present results of computer simulations to illustrate the usefulness of the proposed strategy for the construction of the initial dictionary. First, we present obtained results on a simulated noisy modal signal to prove convergence to true modes. Then we analyze the convergence by estimating parameters of random generated modal signals. Finally, we analyze convergence to true modes with different noise levels.

FIGURE 4.10 – FFT of y and estimated modes, $\text{SNR}_1 = 20$ dB.

4.2.3.1 Convergence

In the first example, the modal signal y is composed of $M = 50$ samples and made up of three modes (superimposed damped sinusoids) having the same amplitudes $c_i = 1$. The variance of the additive Gaussian noise is fixed such that the SNR of mode 1 is $\text{SNR}_1 = 20$ dB. Table 4.4 shows the parameters of the three simulated modes and their estimates using the multigrid algorithm.

TABLE 4.4 – First example : Simulated and estimated modes

Modes	True		Estimates	
	f	α	f	α
1	0.100	0.010	0.100	0.010
2	0.480	0.000	0.480	0.006
3	0.500	0.000	0.501	0.000

The initial grid is defined using the result of the previous section. We choose $\rho = 0.635$, which gives $\alpha_0 = 1.5$, and we put $f_0 = 0.48$ (recall that f_0 can take any value in $[0, 1]$). For the sparse approximation we use the single best replacement (SBR) method [SIBD11] because its good performances for modal retrieval [SDSB11b]. We apply the multigrid algorithm over 50 levels; the algorithm converges before reaching this maximum level but the objective here is to see its behavior with extra levels after convergence. These settings will be used for all remaining simulations. In figure 4.10 we present the spectrum of the simulated noisy modal signal and the spectrum of each estimated component. Figures 4.11(a)–(b) present the estimated frequencies and damping factors at each level. It can be seen that the algorithm converges towards the true frequencies. Concerning the damping factors, two of them are very well estimated (α_1 and α_3); the third is slightly biased ($\hat{\alpha}_2 = 0.006$ versus $\alpha_2 = 0$). Finally, the algorithm converges at level $L = 40$.

In order to show the importance of the definition of the initial dictionary, let us consider the case $\rho = 0.25$ corresponding to $\alpha_0 = 0.51$. For the same settings as before, the results are shown in figure

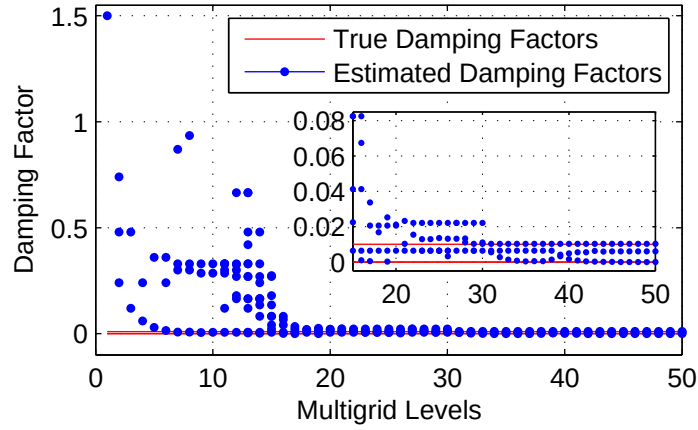
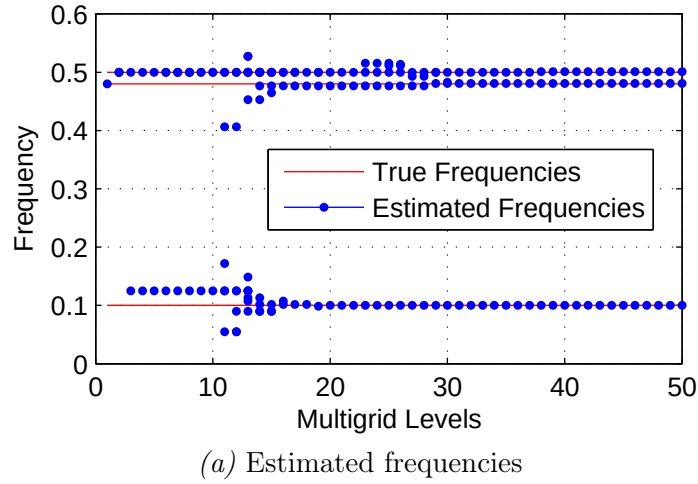


FIGURE 4.11 – Estimated parameters at each multigrid level : Convergence to true parameters.

(4.12). We see clearly that the multigrid algorithm does not converge and fails to detect the first mode.

4.2.3.2 Resolution

Here we simulate 1000 noise-free signals of 30 samples, each one contains two harmonic sinusoids whose frequencies are generated randomly. The distance between frequencies in the same signal is forced to be greater than or equal to Fourier resolution. Figure 4.13 presents the estimation error for the two modes in each trial. The standard deviation of the estimation error for the two modes has an order of magnitude of 10^{-4} . The mean squared error (MSE) is equal to 8.603×10^{-8} and 9.758×10^{-8} for mode 1 and mode 2, respectively. We can conclude that whatever the position of the signal frequencies, the proposed strategy converges to the true modes.

4.2.3.3 Detection rate

In this simulation, the signal $\mathbf{y}$ contains two modes at $a_1 = e^{j2\pi 0.23}$ and $a_2 = e^{-0.1+j2\pi 0.46}$ with $(c_1, c_2) = (1, 1)$. The number of samples is $M = 30$. The parameters of the signal are estimated by

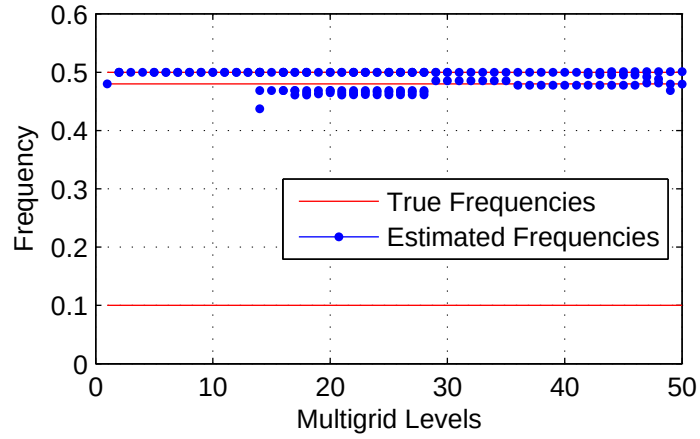


FIGURE 4.12 – Estimated frequencies at each level : the multigrid algorithm fails with $\rho = 0.25$.

the multigrid algorithm at different noise powers. We emphasize here that the mode a_2 as compared to a_1 vanishes rapidly because of its damping factor. We do 100 Monte Carlo trials for each noise level. Then we compute the rate of successful estimations (convergence rate) at each level. The obtained results are presented in figure 4.14. We can see that, thanks to the proposed strategy, the algorithm converges to true modes with a rate upper than 80% for an SNR_1 more than 9 dB ; and the rate of convergence is almost equal to 100% with an SNR_1 upper than 18 dB.

4.2.4 Conclusion

We proposed an efficient strategy to select the initial grid in the sparse multigrid modal estimation approach. The proposed solutions consist in starting estimation with a dictionary only containing one atom. Then, it was shown, through simulations, that this strategy provides accurate estimations, guarantees convergence to true damped sinusoids parameters and ensures to have a modal dictionary still be coarse. As future work, we are planing to theoretically study the convergence of the multigrid approach.

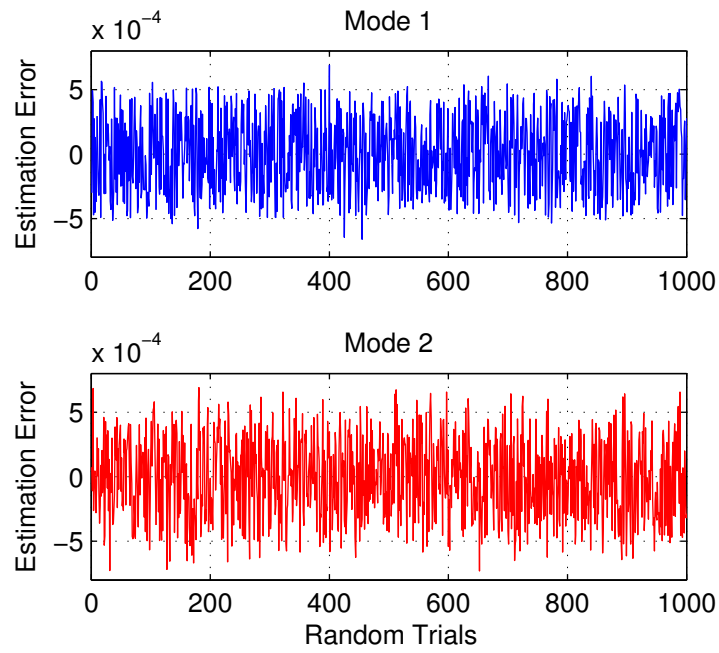


FIGURE 4.13 – Estimation error of 1000 randomly generated modal signals. Mode 1 (top), mode 2 (bottom).

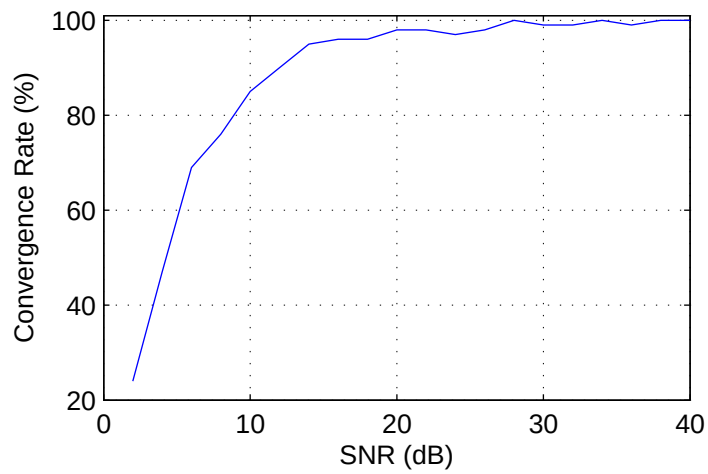


FIGURE 4.14 – Monte Carlo trials : convergence rate to $(\alpha_1, f_1) = (0.00, 0.23)$ and $(\alpha_2, f_2) = (0.1, 0.46)$.

Chapitre 5

Méthodes multigrille pour la spectroscopie RMN

5.1 Introduction

Les signaux de spectroscopie RMN sont souvent de grande taille. Pour fixer les idées, dans une expérience monodimensionnelle, les signaux ont des tailles pouvant aller de mille à plusieurs centaines de milliers d'échantillons. En RMN 2-D, les matrices de données ont des tailles typiques de l'ordre de cent mille échantillons. Par exemple, le signal 2-D qui sera traité dans ce chapitre a une dimension de 64×2048 . Afin de réduire la complexité des traitements, il est possible d'effectuer une décomposition en sous-bandes par un processus de filtrage-décimation. Ceci permet d'analyser plusieurs signaux de plus faibles dimensions correspondant à des zones spectrales réduites. Outre le gain en temps de calcul, il a été montré que cette décomposition permet d'améliorer les performances des méthodes d'estimation [DTM04, SSSL04, DTB12]. Sur des signaux 1-D, la mise en oeuvre de l'approche multigrille associée à une décomposition en sous-bandes ne pose pas de difficultés. En revanche, dans le cas de signaux 2-D ou R -D, l'approche s'avère rapidement inutilisable dès lors que l'on cherche à atteindre des niveaux de résolution très fins. Ceci s'explique, d'une part, par la taille du dictionnaire qui augmente au fur et à mesure que l'on raffine la grille. D'autre part, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode SBR peut également être important. Pour palier ces difficultés, nous nous sommes intéressés au développement d'une nouvelle approche particulièrement adaptée aux signaux de grande taille.

Dans le cas de signaux bidimensionnels, l'estimation des modes 2-D peut être réalisée en estimant séparément, selon chacune des dimensions, les modes 1-D qui sont ensuite recombinaés par une procédure de couplage des modes. Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter ce problème. On peut citer la méthode TLS-Prony 2-D qui consiste à estimer les modes de la 1^{re} dimension pour ensuite estimer les modes de la 2^e dimension liés à chacun des modes estimés précédemment. La principale difficulté de cette approche réside dans le fait que le nombre de modes liés à chaque mode dans la première dimension doit être connu [SSM93]. Ce point peut être particulièrement délicat, notamment en spectroscopie RMN. La méthode *matrix enhancement and matrix pencil* [Hua92] estime séparément les modes de chaque dimension et utilise ensuite un algorithme de couplage. Ce dernier peut échouer dans la reformation des paires de modes 2-D dans le cas où l'une des

deux dimensions contient des modes identiques. Le couplage des modes dans la méthode ESPRIT 2-D [RN01] se fait en diagonalisant conjointement deux matrices et en introduisant un paramètre aléatoire β (équation (1.51)). La méthode ESPRIT 2-D peut estimer les paramètres des modes même en présence de modes identiques dans l'une ou l'autre des dimensions. Ceci est vrai tant que le paramètre β est bien choisi, or ce n'est pas toujours le cas puisque ce paramètre est défini aléatoirement. Pour palier ce problème, une approche itérative pour choisir β a été proposée dans [LLM07]. On note néanmoins que toutes ces méthodes exigent la connaissance préalable du nombre de modes bidimensionnels pour qu'elles puissent être mises en oeuvre.

Dans ce chapitre, nous proposons de reformuler le problème d'estimation modale en un problème d'approximation parcimonieuse *simultanée* effectué sur chacune des dimensions du signal 2-D. Le couplage des modes est alors formulé comme un problème d'approximation parcimonieuse où le dictionnaire, de faible dimensions, est obtenu à partir des modes 1-D estimés. En procédant ainsi, on réduit considérablement la complexité numérique de l'approche multigrille dans le cas 2-D, ce qui permet d'envisager son application aux signaux de spectroscopie.

La suite du chapitre est consacrée à l'application des méthodes parcimonieuses proposées à l'analyse de signaux de spectroscopie RMN 1-D et 2-D.

5.2 Approximation parcimonieuse simultanée pour l'analyse modale 2-D

5.2.1 Modèle du signal

Le modèle du signal 2-D s'écrit :

$$\tilde{y}(m_1, m_2) = \sum_{i=1}^F c_i a_i^{m_1} b_i^{m_2} + e(m_1, m_2) \quad (5.1)$$

Soit $\mathbf{Y}$ la matrice de données non bruitées contenant les échantillons $y(m_1, m_2)$. La matrice $\mathbf{Y}$ peut être écrite sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{M_2-1}] \\ &= \left[\sum_{i=1}^F c_i \mathbf{a}_i \quad \sum_{i=1}^F c_i b_i \mathbf{a}_i \quad \dots \quad \sum_{i=1}^F c_i b_i^{M_2-1} \mathbf{a}_i \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

où $\mathbf{a}_i$ est donné par $\mathbf{a}_i = [1, a_i, \dots, a_i^{M_1-1}]^T$. En posant $c'_i(m_2) = c_i b_i^{m_2-1}$, les colonnes de $\mathbf{Y}$ peuvent être considérées comme des expériences du même signal généré par les modes $a_i, i = 1, \dots, F$, mais avec des amplitudes complexes différentes pour chaque expérience. La matrice $\mathbf{Y}$ s'écrit alors :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{H} + \mathbf{E} \quad (5.3)$$

où $\mathbf{A}$ est la matrice de Vandemonde définie par les modes a_i et les éléments de $\mathbf{H}$ sont donnés par $h(i, m_2) = c'_i(m_2)$.

La troncature de la SVD de $\tilde{\mathbf{Y}}$ aux F premiers éléments donne :

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \Rightarrow \check{\mathbf{Y}} = \mathbf{U}_F\mathbf{S}_F\mathbf{V}_F^H \quad (5.4)$$

où $\mathbf{U}_F \in \mathbb{C}^{M_1 \times F}$ contient les F premières colonnes de $\mathbf{U}$, $\mathbf{S}_F \in \mathbb{C}^{F \times F}$ est la matrice diagonale qui contient les F valeurs singulières les plus grandes et $\mathbf{V}_F \in \mathbb{C}^{M_2 \times F}$ est définie par les F premières colonnes de $\mathbf{V}$. Cette opération est classique [MCW05b] ; elle peut s'interpréter comme un débruitage des données qui a pour effet de réduire la variance d'estimation.

5.2.2 Estimation parcimonieuse simultanée

Les modes de la première dimension peuvent être estimés, en utilisant le principe d'approximation parcimonieuse, de n'importe quelle colonne de la matrice $\mathbf{Y}$. Pour affiner la résolution d'estimation, nous allons utiliser plusieurs colonnes. La formulation du problème d'estimation modale de chaque colonne peut être donnée, comme dans le chapitre précédent, par :

$$\mathbf{x}_{m_2} = \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{y}_{m_2} - \mathbf{Q}\mathbf{x}\|_2^2 \leq \epsilon \quad (5.5)$$

pour $m_2 = 0, \dots, M_2 - 1$, où $\mathbf{Q}$ est le dictionnaire modal relatif à une seule dimension et $\mathbf{x}$ représente le vecteur parcimonieux. Le fait que tous les vecteurs $\mathbf{y}_{m_2}$ représente des signaux 1-D générés par les mêmes modes mais avec des amplitudes différentes implique que les positions des éléments non nuls sont les mêmes pour tous les vecteurs parcimonieux $\mathbf{x}_{m_2}$. Soit la matrice $\mathbf{X}$ définie par

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{M_2-1}], \quad (5.6)$$

alors la parcimonie de $\mathbf{X}$ peut être mesurée en calculant la norme euclidienne de chaque ligne ; celles qui donnent des distances non nulles définissent les positions des modes a_i dans le dictionnaire $\mathbf{Q}$. Par conséquent, on se retrouve avec un problème d'approximation parcimonieuse simultanée :

$$\min_{\mathbf{X}} \|\mathbf{X}\|_{2,0} \quad \text{sous contrainte} \quad \|\mathbf{Y} - \mathbf{Q}\mathbf{X}\|_f^2 \leq \epsilon \quad (5.7)$$

où la norme de Frobenius est définie par $\|\mathbf{Y} - \mathbf{Q}\mathbf{X}\|_f^2 = \|\text{vec}(\mathbf{Y} - \mathbf{Q}\mathbf{X})\|_2^2$ et

$$\|\mathbf{X}\|_{2,0} = \left\| \begin{bmatrix} \|\mathbf{X}[0, :]\|_2 & \|\mathbf{X}[1, :]\|_2 & \dots & \|\mathbf{X}[N-1, :]\|_2 \end{bmatrix}^T \right\|_0 \quad (5.8)$$

avec $\mathbf{X}[n, :]$ représente la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne de $\mathbf{X}$. Plusieurs travaux ont été présentés pour résoudre le problème d'approximation parcimonieuse simultanée de plusieurs signaux. Un panorama de ces algorithmes est présenté dans [Rak11]. Nous utilisons la méthode S-OMP (*Simultaneous Orthogonal Matching Pursuit*) [TGS06] pour l'estimation parcimonieuse simultanée. Son fonctionnement détaillé est présenté dans l'algorithme 7.

L'estimation des modes des deux dimensions peut être résumée dans les étapes suivantes :

1. calculer la SVD de $\tilde{\mathbf{Y}}$ et prendre son approximation $\check{\mathbf{Y}}$ définie dans l'équation (5.4) ;

Algorithme orthogonal matching pursuit d'estimation simultanée (S-OMP)

- **Entrées** : Une matrice $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}$, une matrice $\Phi \in \mathbb{C}^{M_1 \times N}$ (colonnes normalisées)

- **Sorties** : Un ensemble Ω d'indices des atomes activés. Une matrice de vecteur parcimonieux $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times M_2}$

initialisation : $\Omega_0 = \emptyset$, $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ (matrice nulle de dimension $N \times M_2$), $\mathbf{R}_0 = \mathbf{Y}$

pour $k = 1; k := k + 1$ jusqu'à que le critère d'arrêt soit atteint **faire**

1) $n_k \in \arg \max_{\sum_{m_2=1}^{M_2}} |\langle \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{j}_{m_2}, \varphi_n \rangle|$ {recherche de l'indice de l'atome le plus corrélé avec les colonnes de $\mathbf{Y}$, on note par $\mathbf{j}_{m_2}$ le $m_2^{\text{ième}}$ vecteur de la base canonique dans $\mathbb{C}^{M_2}$ }

2) $\Omega_k = \Omega_{k-1} \cup \{n_k\}$

3) $\mathbf{X}_k = (\Phi_{\Omega_k}^H \Phi_{\Omega_k})^{-1} \Phi_{\Omega_k}^H \mathbf{Y}$ {estimation des coefficients qui représentent mieux le signal}

4) $\mathbf{R}_k = \mathbf{Y} - \Phi_{\Omega_k} \mathbf{X}_k$ {mise à jour du résidu}

fin pour

retour : $\Omega = \Omega_k$

Algorithme 7: Algorithme S-OMP

2. appliquer l'algorithme multigrille couplé à la méthode S-OMP sur la matrice $\check{\mathbf{Y}}$ pour obtenir les modes a_i de la première dimension ;
3. refaire les étapes 1 et 2 sur la matrice $\tilde{\mathbf{Y}}^T$ pour obtenir les modes b_i de la deuxième dimension.

5.2.3 Couplage des modes 2-D

Le modèle du signal 2-D (équation 5.1) peut être écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})\mathbf{c} + \mathbf{e} \quad (5.9)$$

où les échantillons $\tilde{y}(m_1, m_2)$ sont rangés dans $\tilde{\mathbf{y}}$ comme suit :

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}(0, 0), \tilde{y}(0, 1), \dots, \tilde{y}(0, M_2 - 1), \tilde{y}(1, 0), \dots, \tilde{y}(M_1 - 1, M_2 - 1)]^T. \quad (5.10)$$

La méthode de couplage des modes 2-D proposée ici consiste à utiliser le même principe d'approximation parcimonieuse présentée dans le chapitre précédent où le dictionnaire multidimensionnel est remplacé par un dictionnaire défini uniquement par les modes estimés des deux dimensions (on désigne par K_e et L_e le nombre de modes a_i et b_i estimés, respectivement). On définit les dictionnaires Φ_a et Φ_b tels que :

$$\Phi_a = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{K_e}] \quad (5.11)$$

$$\Phi_b = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{a}_{L_e}] \quad (5.12)$$

où $\mathbf{a}_i = [1, a_i, a_i^2, \dots, a_i^{M_1-1}]^T$ pour $i = 1, \dots, K_e$ et $\mathbf{b}_i = [1, b_i, b_i^2, \dots, b_i^{M_2-1}]^T$ pour $i = 1, \dots, L_e$. On forme ensuite le dictionnaire Φ définie par :

$$\Phi = \Phi_a \otimes \Phi_b \quad (5.13)$$

Pour sélectionner les couples de modes 2-D présent dans le signal $\tilde{\mathbf{y}}$, on résout le problème parcimonieux

$$\min_x \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.c.} \quad \|\tilde{\mathbf{y}} - \Phi \mathbf{x}\|^2 \leq \epsilon. \quad (5.14)$$

Chacun des atomes sélectionnés représente un mode 2-D tel que :

$$(a_i, b_i) = \left(\frac{\phi(M_2 + 1, n)}{\phi(1, n)}, \frac{\phi(2, n)}{\phi(1, n)} \right), \quad n \in \Omega \quad (5.15)$$

On note que cette méthode de couplage est efficace même en présence de modes identiques dans l'une ou l'autre des deux dimensions.

5.2.4 Résultats de simulations

Le but de ce paragraphe est de comparer les performances de la méthode proposée avec ESPRIT 2-D qui, selon notre expérience, est la méthode de référence en estimation modale 2-D. Pour cela, on considère deux cas. Dans le premier, on utilise un signal synthétique dont les modes sont choisis de telle sorte que leurs fréquences appartiennent aux atomes du dictionnaire. Dans le deuxième exemple, les fréquences du signal ne sont pas incluses dans le dictionnaire de départ.

Les paramètres des modes du premier signal sont les suivants :

$$\begin{aligned} (f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.10, 0.080; 0.20, 0.075), \\ (f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.30, 0.075; 0.10, 0.050), \\ (f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.40, 0.050; 0.25, 0.090). \end{aligned}$$

Le signal simulé est de taille 30×30 échantillons et les amplitudes sont unitaires. Le RSB varie entre -10 et 30 dB. Le spectre du signal non bruité est représenté sur la figure 5.1(a). La grille initiale utilisée pour construire le dictionnaire est la même pour les deux dimensions ; elle contient 40 points en fréquence, répartis uniformément sur l'intervalle $]0, 1]$, et $\alpha = [0, 0.025, 0.05, 1]$. Les limites des grilles des étages suivants sont : $[0, 1]$ pour la fréquence et $[0, 1.5]$ pour le facteur d'amortissement. La méthode d'approximation parcimonieuse simultanée utilisée est S-OMP. On effectue 30 étages de résolution pour chaque estimation. L'erreur-type d'estimation de la fréquence $f_{1,1}$ est représentée en figure 5.2. L'approche proposée semble fournir des estimées qui dépassent la borne de Cramér-Rao. Ceci n'est bien sûr pas le cas ; ce phénomène est simplement dû au fait que la fréquence recherchée se trouve sur la grille des fréquences discrètes du dictionnaire.

Le deuxième exemple traite justement du cas où les fréquences recherchées ne sont pas sur la grille.

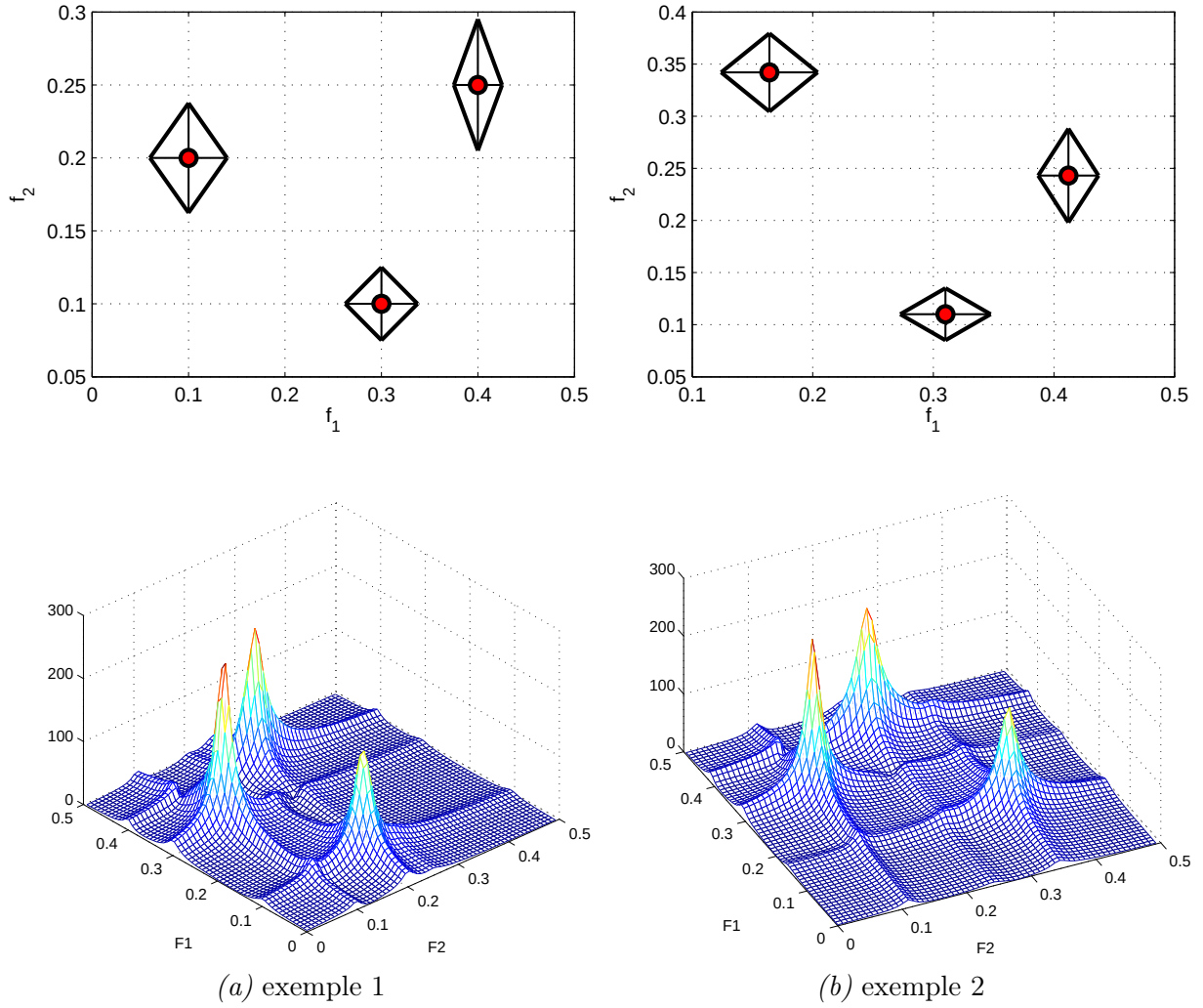


FIGURE 5.1 – Modes simulés. (●) positions des fréquences. (◇) facteurs d'amortissement sur chaque dimension.

Les modes sont les suivants :

$$\begin{aligned}
 (f_{1,1}, \alpha_{1,1}; f_{1,2}, \alpha_{1,2}) &= (0.164, 0.080; 0.342, 0.075), \\
 (f_{2,1}, \alpha_{2,1}; f_{2,2}, \alpha_{2,2}) &= (0.310, 0.075; 0.110, 0.050), \\
 (f_{3,1}, \alpha_{3,1}; f_{3,2}, \alpha_{3,2}) &= (0.412, 0.050; 0.090, 0.243).
 \end{aligned}$$

Les autres paramètres sont les mêmes que ceux de l'exemple précédent ainsi que les conditions de construction du dictionnaire initial. Le spectre du signal est donné en figure 5.1(b) et les résultats de l'estimation en figure 5.3. On constate que l'approche proposée donne des résultats très satisfaisants puisqu'elle atteint des performances comparables à celles de la méthode ESPRIT 2-D. Cette méthode possède en outre l'avantage de ne pas avoir à fixer le nombre de composantes dans le signal.

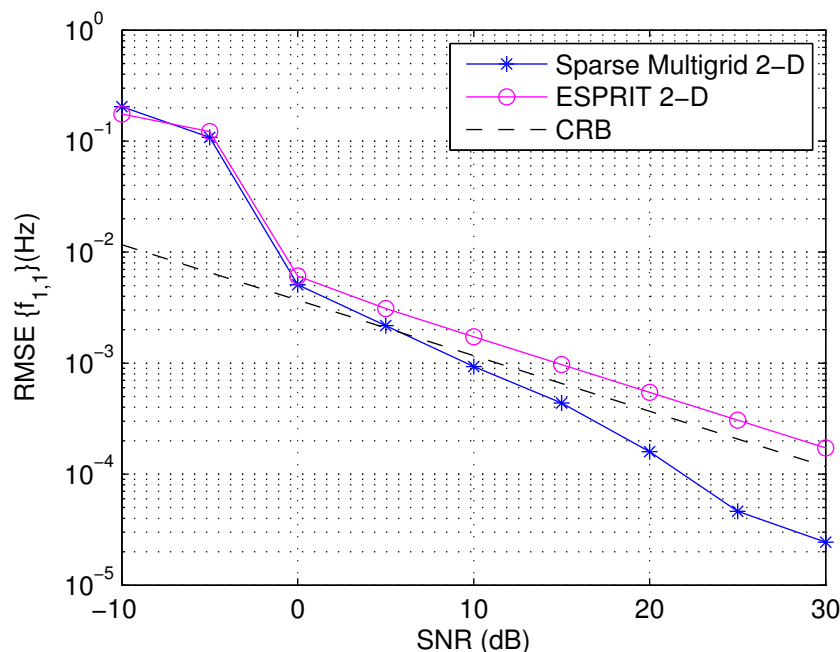


FIGURE 5.2 – Erreur-type (RMSE) de $f_{1,1}$ en fonction du RSB pour le signal de l'exemple 1

5.3 Application aux signaux RMN

5.3.1 Contexte

Les travaux menés par l'équipe « Signal » du CRAN dans le domaine de la RMN remontent aux années 90. Ces travaux ont fait l'objet de deux thèses [Hen97, Dje03] et à plusieurs stages de Master. Ils ont été menés en collaboration avec des chimistes et spécialiste de la spectroscopie RMN (Laboratoire de Méthodologie RMN, Université de Lorraine). L'ensemble de ces travaux a donné lieu au développement d'un logiciel d'analyse de données RMN (appelé Spencer) librement téléchargeable à l'adresse www.iris.cran.uhp-nancy.fr/spencer. La spécificité de ce logiciel est de coupler les approches d'estimation modale à une décomposition en sous-bandes, éventuellement adaptative, qui permet de réduire la complexité numérique et d'améliorer la résolution des méthodes d'estimation. L'objectif est de compléter ce logiciel par de nouvelles méthodes d'estimation 1-D et d'y intégrer l'analyse des signaux multidimensionnels.

Nous présentons ici quelques résultats obtenus avec les approches parcimonieuses multigrilles présentées dans ce travail.

5.3.2 Analyse de signaux RMN 1-D

Nous présentons ici les résultats obtenus sur deux signaux RMN différents. Le premier est un signal de spectroscopie du carbone-13 (RMN1D-C13). Il est composé de 131072 échantillons et a été enregistré par un spectromètre Bruker AM400. Il provient d'une expérience quantitative sur un mélange de synthèse de dix-neuf composés dans du chloroforme (CDCl_3), avec du tétraméthylsilane (TMS) comme référence interne. Son spectre d'absorption est représenté sur la figure 5.4. L'intérêt de procéder à l'analyse de ce signal réside dans le fait que sa composition spectrale est parfaitement

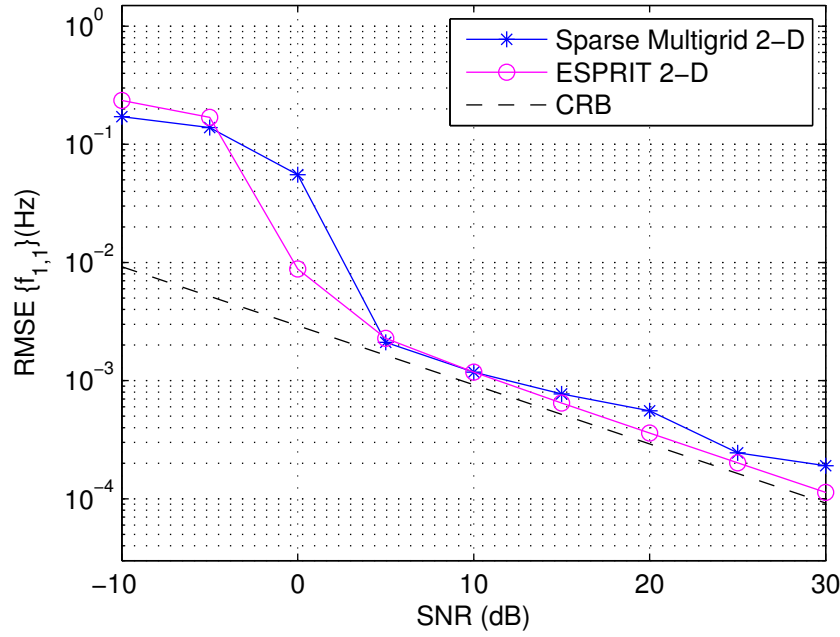


FIGURE 5.3 – Erreur-type (RMSE) de $f_{1,1}$ en fonction du RSB pour le signal de l'exemple 2

maîtrisée. Le deuxième signal (RMN1D-H1), de taille 8192, correspond au spectre RMN du proton d'une substance naturelle dont la composition est inconnue. L'intérêt de ce signal est sa complexité (nombre de composantes, enchevêtrement de modes, résolution dynamique). Son spectre d'absorption est représenté sur la figure 5.5. Pour contourner les problèmes de calcul et d'allocation mémoire liés à la grande taille des signaux RMN, nous utilisons une technique de décomposition en sous-bandes. Seuls les résultats relatifs à quelques sous-bandes d'intérêt sont présentés. Dans tous les cas, le dictionnaire initial de l'approche multigrille a été défini sur une grille qui contient 40 points en fréquence, réparti uniformément sur l'intervalle $[0, 1]$, et $\alpha = [0, 0.025, 0.05, 1]$. Les limites des grilles des étages suivants sont : $[0, 1]$ pour la fréquence et $[0, 1.5]$ pour le facteur d'amortissement. La figure 5.10 montre les résultats obtenus sur la bande de fréquences $[0.140, 0.143]$ du signal RMN1D-C13, pour les niveaux de multigrille $l \in \{1, 2, 35\}$. Les fréquences et les amortissements obtenus dans chaque étage sont représentés en figure 5.7. Pour ce signal, qui ne présente pas de difficulté majeure, on remarque que l'approche a convergé très vite (à partir du niveau $l \approx 10$). Les résultats obtenus par la suite sont relativement stables et les valeurs estimées correspondent aux valeurs attendues. La figure 5.8 montre les résultats obtenus dans la bande de fréquences $[0.148, 0.150]$ du même signal pour les niveaux $l \in \{1, 2, 35\}$. La figure 5.9 présente les fréquences et les facteurs d'amortissement estimés dans chaque niveau. On remarque que l'approche a convergé au bout de 17 niveaux de résolution et elle a pu séparer deux modes très proches dont les fréquences sont 0.14863 et 0.14865. L'estimation reste stable pour le reste des étages (de 18 à 35), sauf pour deux facteurs d'amortissement qui sont légèrement modifiés au 34^e niveau. Encore une fois, les paramètres estimés correspondent à la composition théorique du signal.

Concernant le signal RMN1D-H1, nous présentons les résultats correspondant à la bande de fréquences $[-0.406, -0.375]$. Cette bande contient un grand nombre de modes enchevêtrés. Les estimations fournies par l'approche multigrille sur quelques niveaux de résolution sont données sur

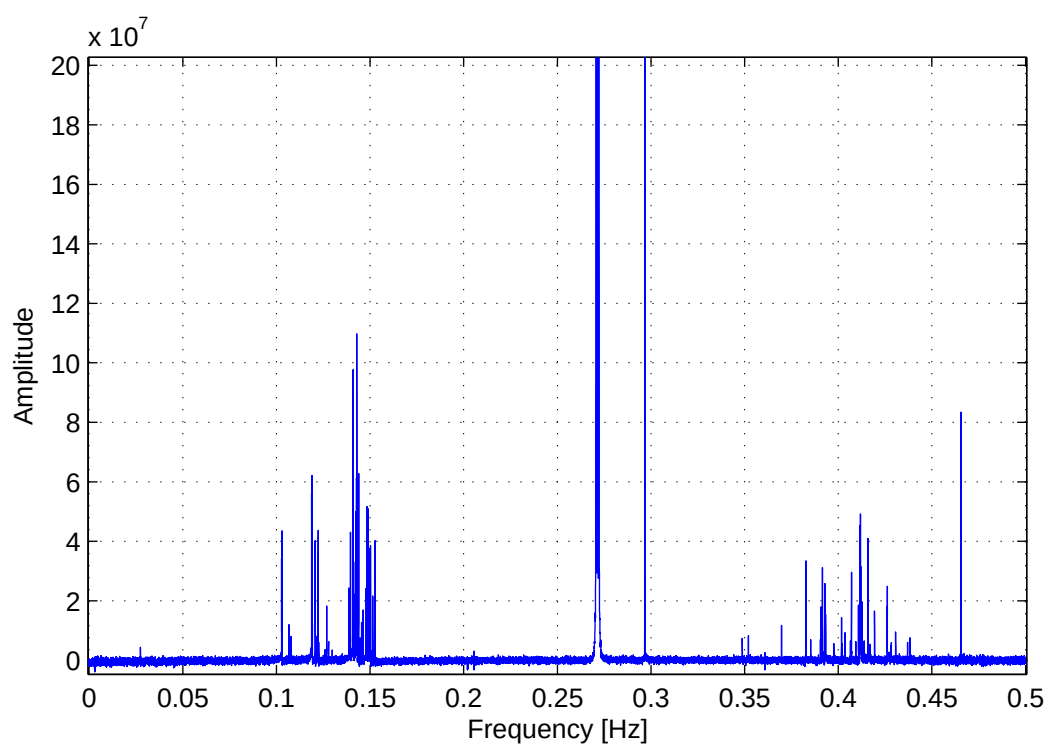


FIGURE 5.4 – Spectre d'absorption du signal RMN1D-C13.

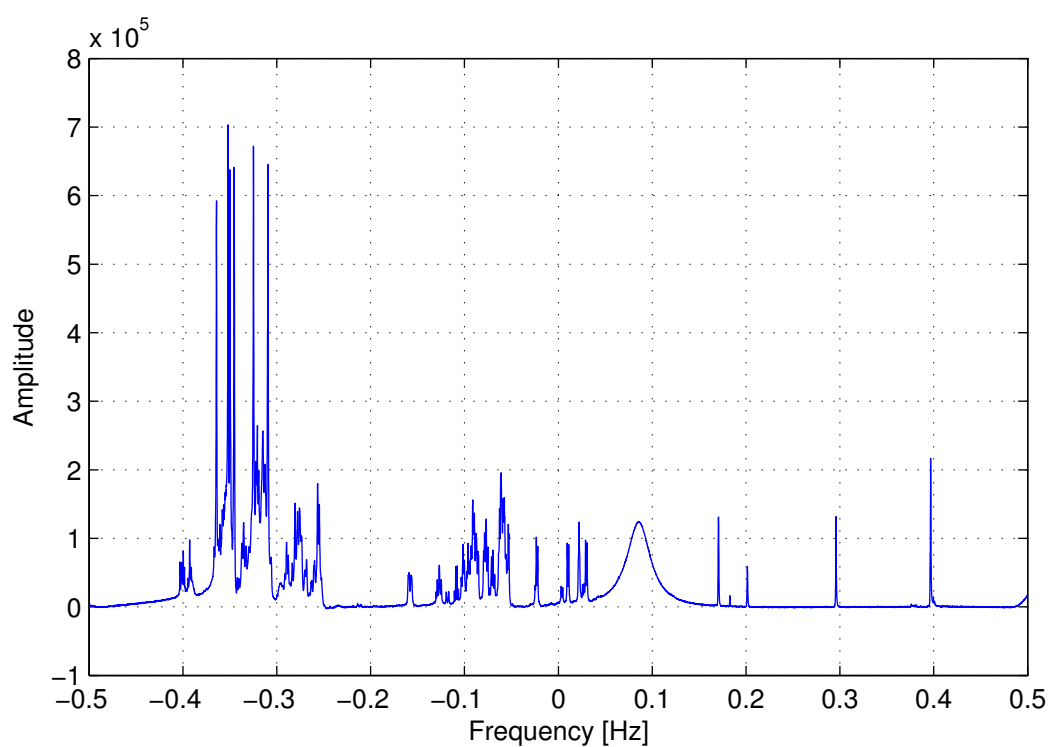


FIGURE 5.5 – Spectre d'absorption du signal RMN1D-H1.

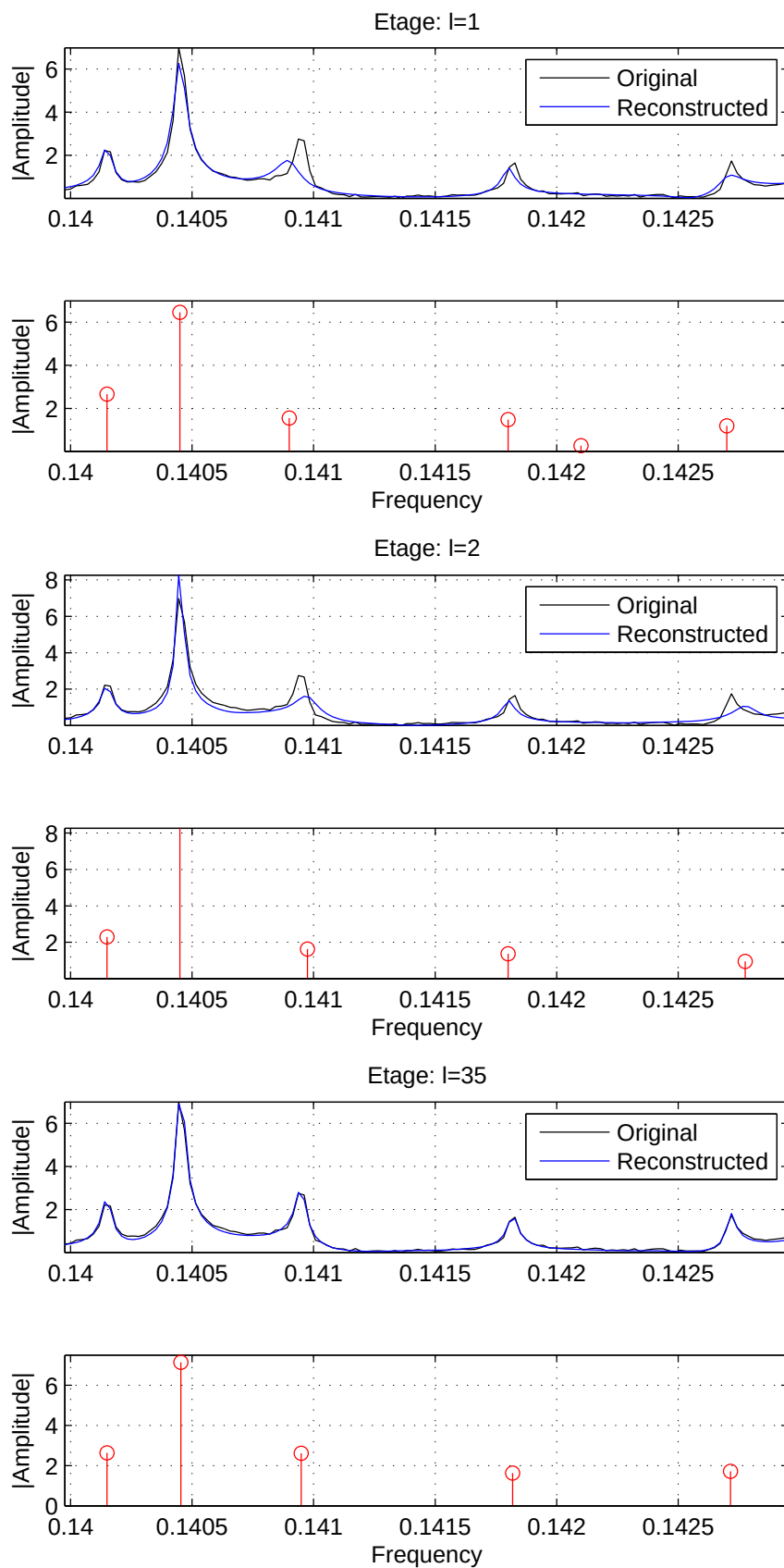


FIGURE 5.6 – Signal RMN1D-C13 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[0.14, 0.143]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$.

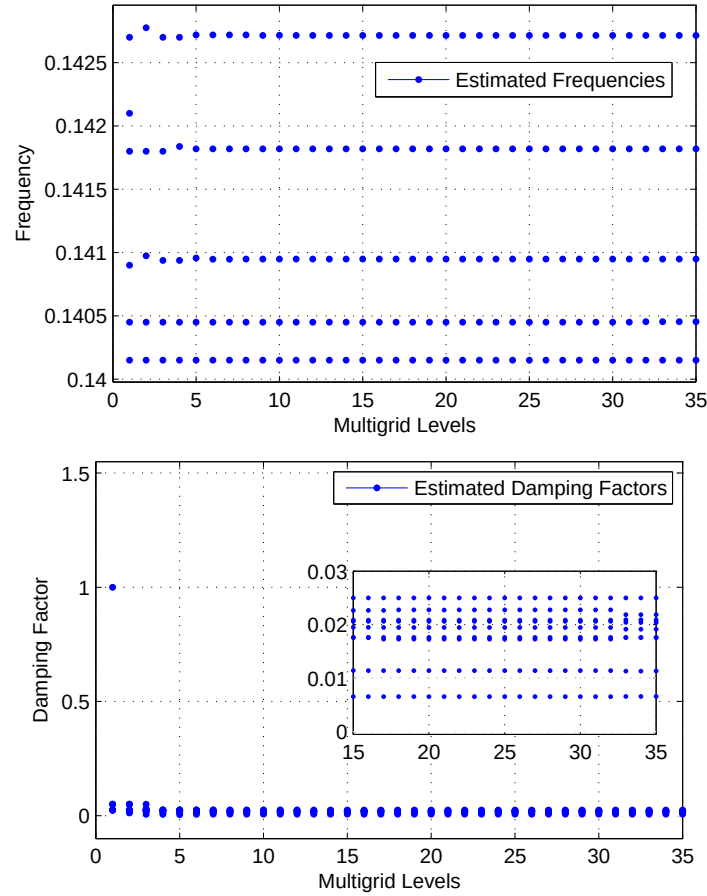


FIGURE 5.7 – Signal RMN1D-C13 : fréquences et facteurs d’amortissement estimés à chaque niveau l dans la bande $[0.14, 0.143]$.

la figure 5.10. On constate une reconstruction de plus en plus précise du spectre en augmentant le niveau de résolution. A titre de comparaison, les résultats obtenus avec de Kumaresan et Tufts (KT), avec une estimation du nombre de composantes suivant le critère MDL, sont représentés en figure 5.11. La méthode développée détecte plus de modes et aboutit à une reconstruction plus précise du spectre correspondant à la bande analysée.

5.3.3 Analyse de signaux RMN 2-D

Le signal RMN 2-D utilisé est de taille 64×2024 . Avant d’appliquer l’approche multigrille combinée à l’algorithme S-OMP, on décompose le signal en sous-bandes selon la démarche présentée dans [DKB08]. On utilise la même grille initiale pour les deux dimensions qui est, par ailleurs, la même que celle présentée dans le cas 1-D. Le nombre d’étages de résolution est fixé à 30. La figure 5.12 montre la décomposition finale en sous-bandes du signal RMN 2-D sur la plage spectrale $[-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ ainsi que le nombre de modes estimés dans chaque sous-bande par l’approche multigrille. Les résultats obtenus dans certaines sous-bandes sont représentés sur la figure 5.13 où les positions des modes estimés sont indiquées par des cercles. Sur une signal 2-D de grande complexité (nombre de modes), l’approche proposée s’avère compétitive par rapport à l’approche TLS-Prony 2-D [DBT09, DTB12]. Le temps de calcul nécessaire à l’analyse de toutes les bandes est

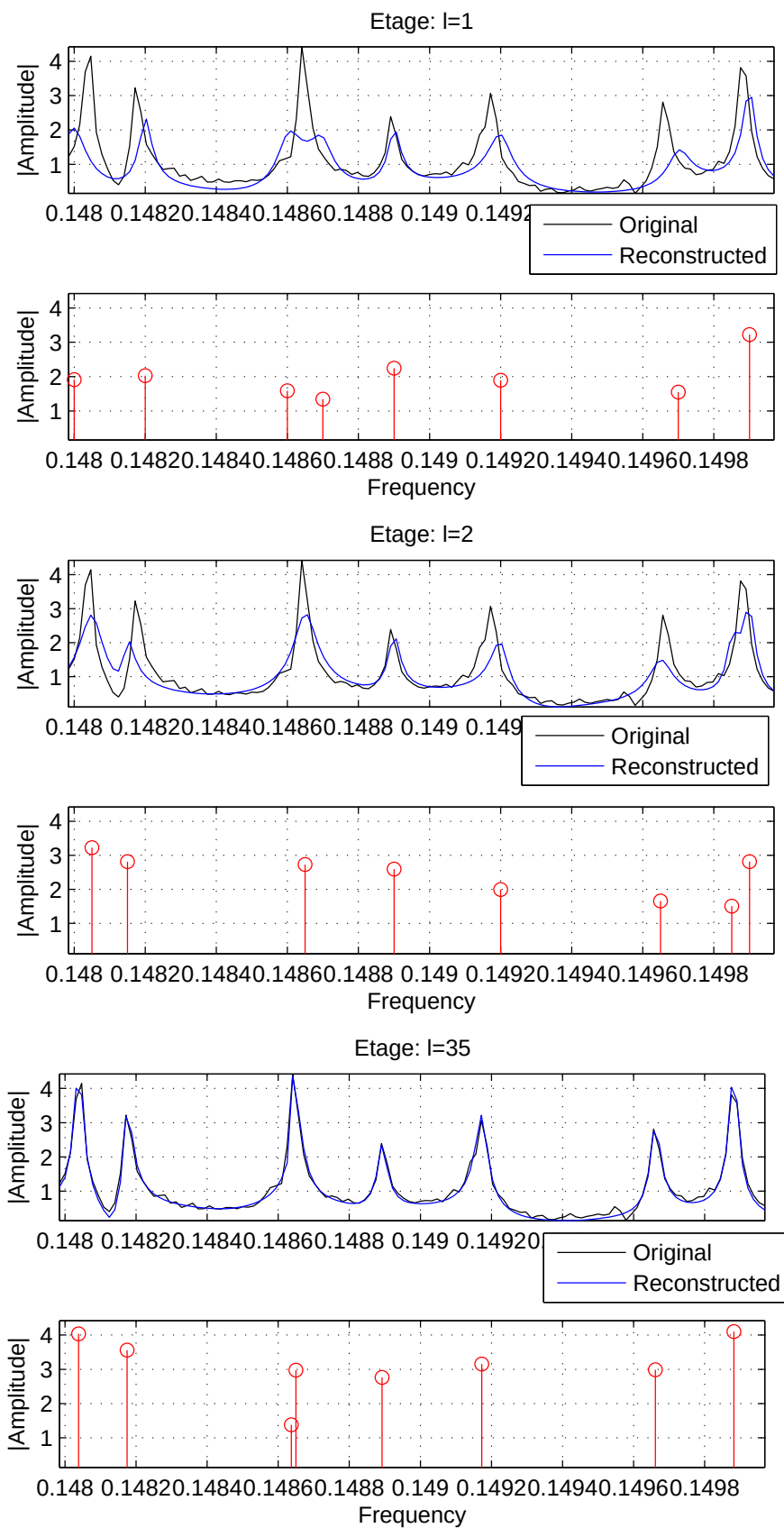


FIGURE 5.8 – Signal RMN1D-C13 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[0.148, 0.150]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$.

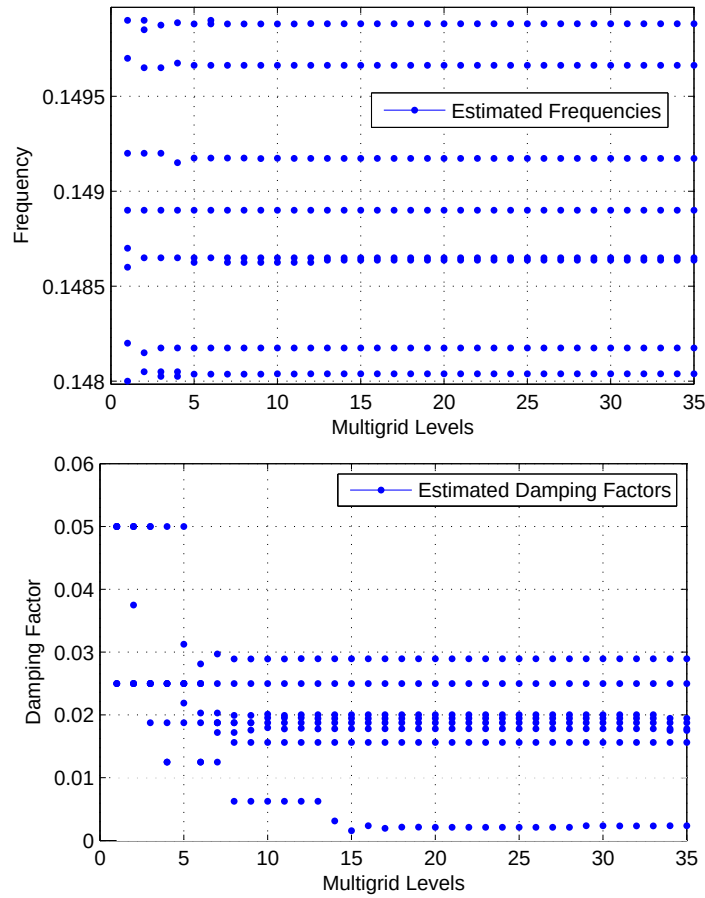


FIGURE 5.9 – Signal RMN1D-C13 : fréquences et facteurs d’amortissement estimés à chaque niveau l dans la bande $[0.148, 0.150]$.

de l’ordre de 5 minutes.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons proposé une méthode multigrille d’estimation modale 2-D adaptée au cas des signaux de grande taille. L’idée consiste à exploiter le principe de parcimonie simultanée pour séparer ce problème d’estimation conjoint en deux problèmes 1-D. Les modes sont ensuite couplés par une nouvelle méthode, également basée sur la minimisation d’un critère parcimonieux. Enfin, les tests effectués en utilisant des signaux RMN 1-D et 2-D ont montré le potentiel des méthodes parcimonieuses multigrille.

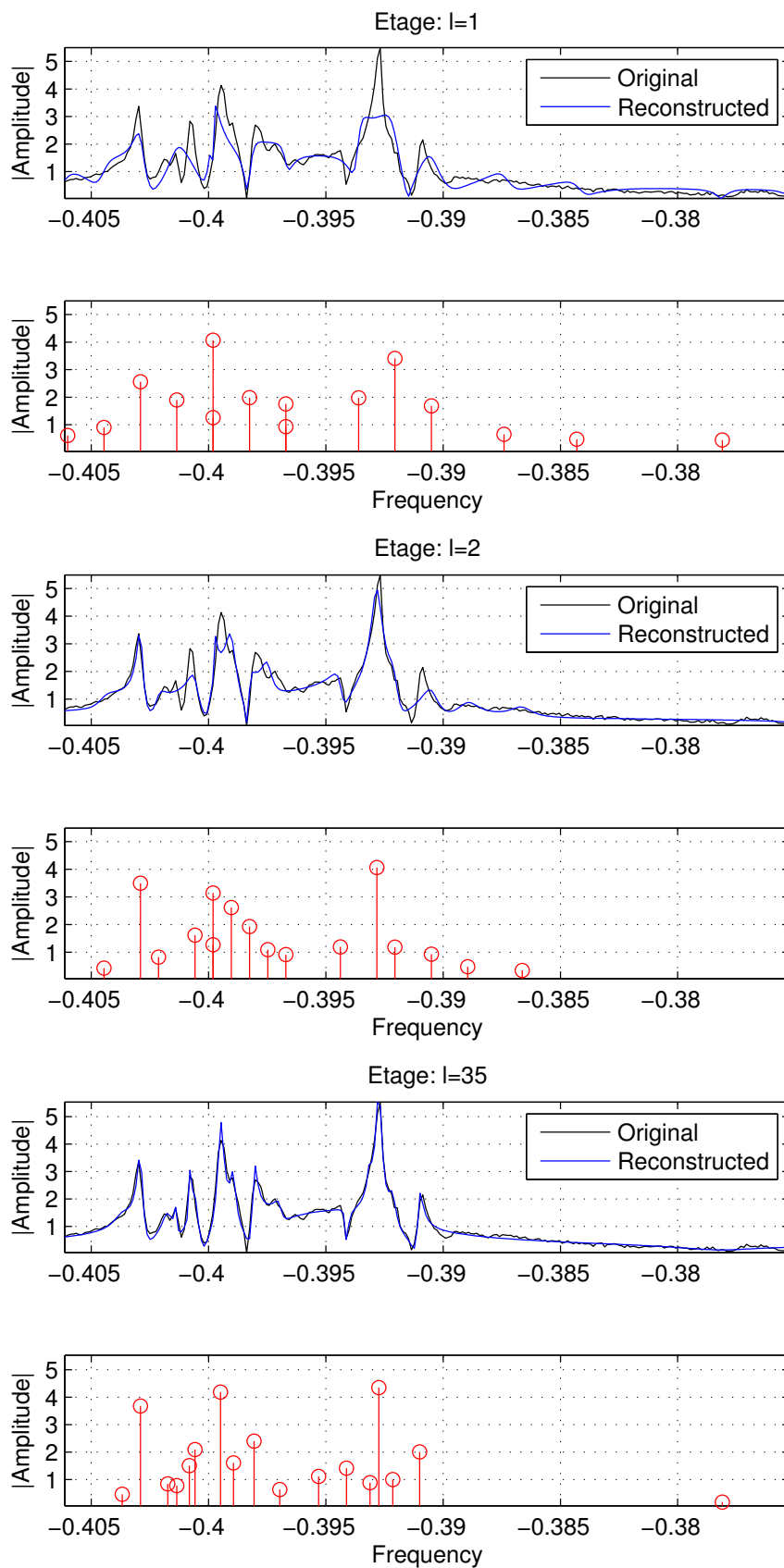
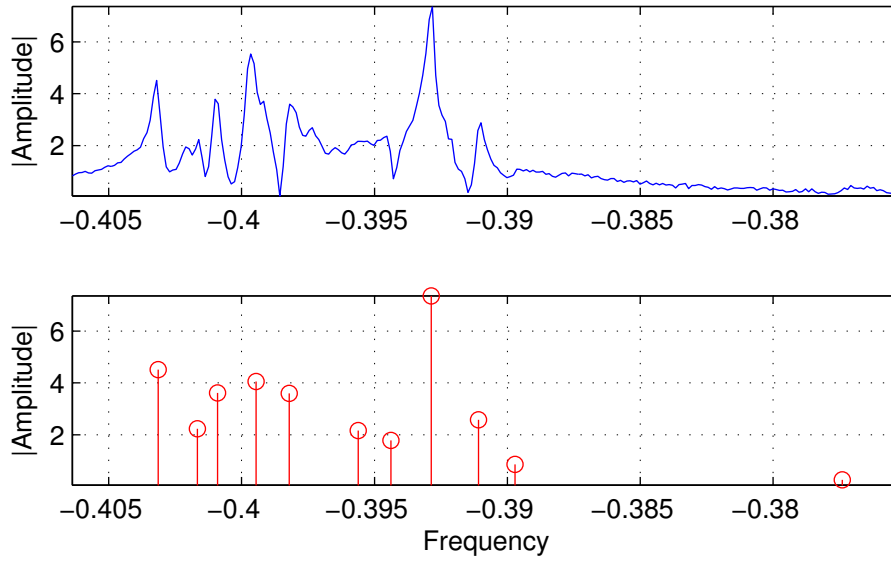
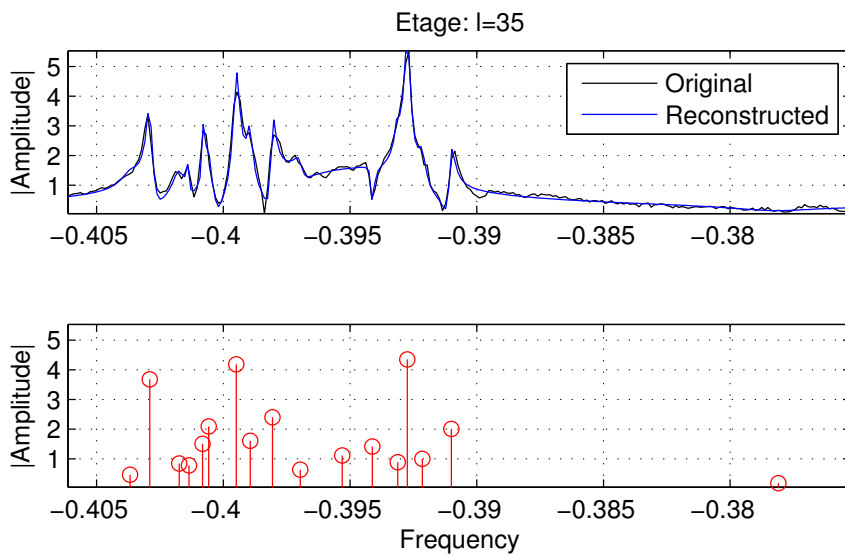


FIGURE 5.10 – Signal RMN1D-H1 : résultats d'estimation dans la bande de fréquences $[-0.406, -0.375]$ pour $l \in \{1, 2, 35\}$.



(a) méthode KT



(b) méthode multigrille

FIGURE 5.11 – Signal RMN1D-H1 : comparaison des résultats entre KT et l'approche multigrille dans la bande $[-0.406, -0.375]$.

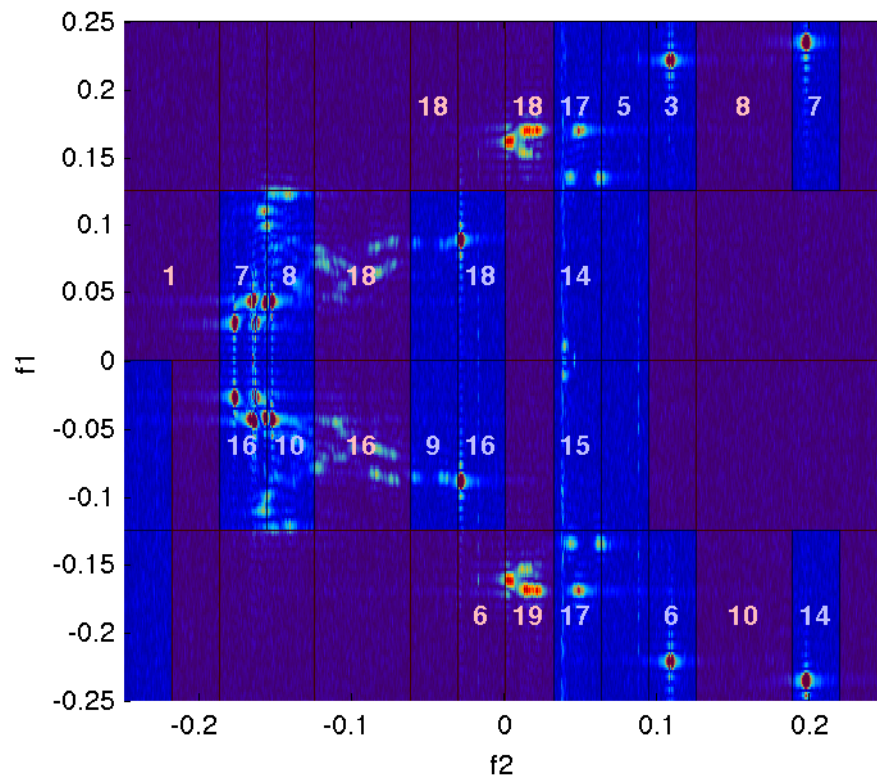
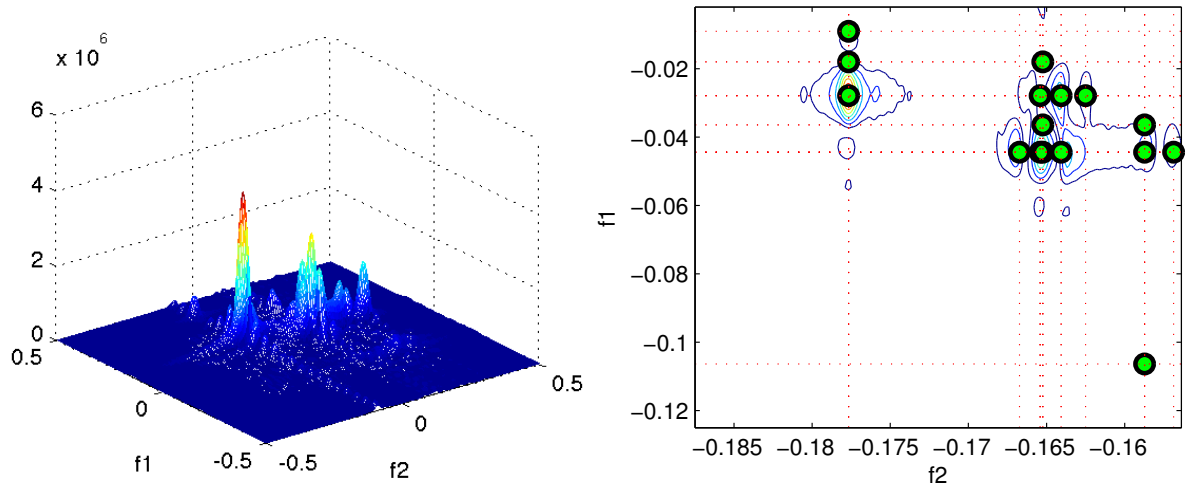
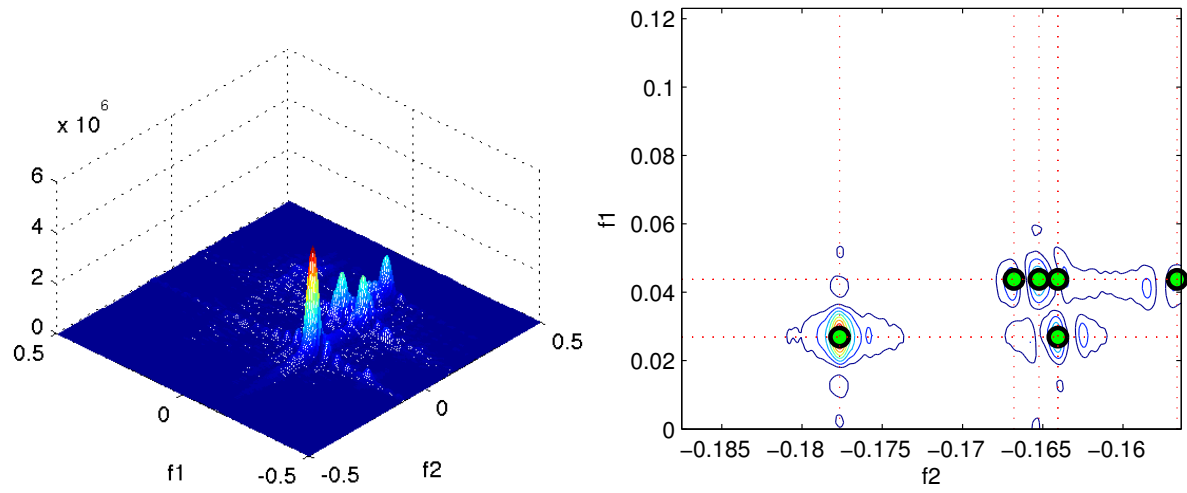


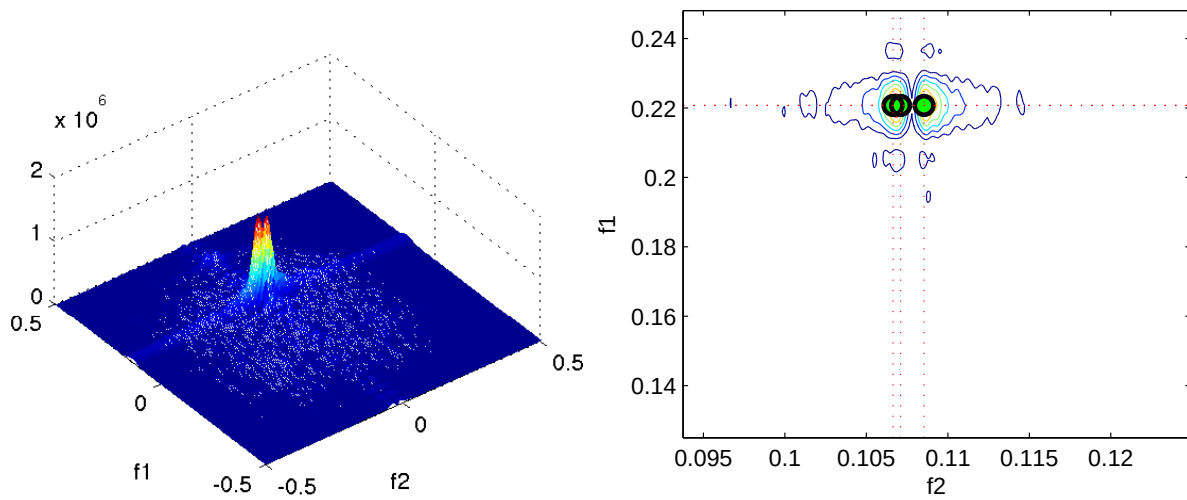
FIGURE 5.12 – Signal 2-D : résultats de l’approche multigrille S-OMP dans la zone spectrale $[-0.25, 0.25] \times [-0.25, 0.25]$ avec une décomposition en sous-bandes et le nombre de modes estimés dans chaque sous-bande.



(a) Sous-bande $(-0.12, 0.0) \times (-0.175, 0.155)$



(b) Sous-bande $(0.0, 0.12) \times (-0.175, 0.155)$



(c) Sous-bande $(0.12, 0.24) \times (0.095, 0.12)$

FIGURE 5.13 – Signal 2-D : visualisations 3D et courbes de niveau du spectre d'amplitude de quelques sous-bandes. (•) position des modes estimés. (···) coordonnées des modes.

Conclusion et perspectives

Le travail présenté dans ce mémoire avait comme objectif de développer des méthodes d'estimation modale de signaux multidimensionnels.

Bilan

L'étude des méthodes à haute-résolution effectuée au premier chapitre a permis de faire ressortir que, dans le cas bidimensionnel, la méthode ESPRIT 2-D développée par Rouquette et Najim [RN01] offrait les meilleures performances du point de vue de la qualité de l'estimation. En outre, c'est l'une des seules approches qui n'est pas mise en échec dans le cas de signaux présentant des modes alignés dans une dimension donnée. C'est un aspect particulièrement important pour l'analyse de signaux RMN 2-D. En revanche, ces méthodes ne prennent pas en compte la structure multidimensionnelle des signaux R -D ($R \geq 2$).

Nous nous sommes ensuite intéressés au développement d'une approche tensorielle qui exploite explicitement la structure multidimensionnelle des données ainsi que les outils de l'algèbre multilinéaire. Le développement de cette approche fait appel à des concepts intéressants. Cependant, il n'a pas été possible de mettre en évidence des performances supérieures à celles de la méthode ESPRIT 2-D. En outre, elle ne permet pas l'estimation de modes alignés.

La suite du travail est consacré au développement de méthodes d'estimation modale reposant sur les algorithmes d'approximation parcimonieuse. Dans ce cadre, nos contributions principales sont les suivantes. Nous avons montré que le problème d'estimation modale multidimensionnelle pouvait être formulé comme un problème d'approximation parcimonieuse. Un point clé au développement de méthodes dépassant la résolution de Fourier est l'utilisation d'un dictionnaire de très grande dimension, ce qui conduit à problème d'implantation et de temps de calcul. Pour palier ce problème, nous avons proposé au chapitre 4 une approche multigrille qui consiste à adapter itérativement le dictionnaire en affinant au fur et à mesure la résolution. Les performances de cette approches sont tout à fait comparables et parfois supérieures à celles d'ESPRIT 2-D. Enfin, une étude de l'influence du choix du dictionnaire initial sur la convergence de la procédure multigrille a également été menée. En particulier, nous avons établi une condition sur le facteur d'amortissement permettant d'assurer la convergence de la procédure et ceci même si le dictionnaire initial ne contient qu'un seul atome.

Dans le cas de signaux multidimensionnels de grande taille, comme c'est le cas en spectroscopie RMN, la méthode multigrille précédente peut conduire à des temps de calcul prohibitifs. Une autre contribution de cette thèse consiste donc, dans le cas 2-D, à exploiter le concept de parcimonie simultanée. Cela permet de découpler le problème d'estimation modale 2-D en deux problèmes

d'estimation 1-D suivies d'une phase de couplage des modes, également formulée comme un problème parcimonieuse sur un dictionnaire de taille très réduite. Des simulations ont montré l'intérêt de l'approche par rapport à ESPRIT 2-D. L'application des méthodes d'approximation parcimonieuse multigrille aux signaux 1-D et 2-D fournit des résultats tout à fait satisfaisants.

Perspectives

En terme de perspectives, il serait tout d'abord intéressant d'étudier plus en détail les méthodes basées sur les tenseurs, d'une part, pour améliorer leurs performances en terme de variance et, d'autre part, pour qu'elles soient applicables dans le cas de modes alignés dans une des dimensions. On envisage une autre manière de construire le tenseur d'ordre augmenté afin d'améliorer le rang des matrices résultant du dépliage lors du calcul de la HOSVD. En effet, les outils de l'algèbre multilinéaire utilisés actuellement ne permettent pas de manipuler les tenseurs d'ordre supérieur sans avoir recours à leur dépliage.

Nous envisageons également une étude théorique des conditions de convergence de l'approche multigrille. En effet, la convergence est fortement liée aux performances de la méthode parcimonieuse utilisée. L'idée est de partir d'un certain nombre d'hypothèses sur la qualité de reconstruction parcimonieuse pour ensuite focaliser l'étude sur l'approche multigrille seule (politique d'ajout et/ou de retrait d'atomes). Par ailleurs, pour atteindre une bonne résolution, il est nécessaire d'avoir une grille très fine autour des modes du signal. Il est évident qu'au delà d'une certaine finesse de la grille, la corrélation entre les atomes devient importante, ce qui peut nuire à la qualité de l'estimation. Par conséquent, une étude sur la limite de résolution que l'on peut atteindre par l'approche multigrille sera menée dans nos prochaines recherches.

Enfin, nous allons étudier la possibilité d'extension de la méthode d'estimation modale 2-D basée sur la parcimonie simultanée aux signaux R -D en utilisant l'algèbre multilinéaire. L'ensemble des contributions de cette thèse sera également intégré dans le logiciel Spencer développé au sein du laboratoire pour l'analyse modale.

Bibliographie

- [Bar83] A. BARABELL : Improving the resolution performance of eigenstructure-based direction-finding algorithms. *In IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'83)*, volume 8, pages 336–339. IEEE, 1983.
- [BCI07] S. BOURGUIGNON, H. CARFANTAN et J. IDIER : A sparsity-based method for the estimation of spectral lines from irregularly sampled data. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 1(4):575–585, 2007.
- [BM86] Y. BRESLER et A. MAKOVSKI : Exact maximum likelihood parameter estimation of superimposed exponential in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 35(5):1081–1089, 1986.
- [CBB02] S.D. CABRERA, T. BOONSRI et A. E. BRITO : Principal component separation in sparse signal recovery for harmonic retrieval. *In SAM Workshop Proc.*, pages 249–253. IEEE, 2002.
- [CD98] S. S. CHEN et D. L. DONOHO : Application of basis pursuit in spectrum estimation. *In Proc. ICASSP*, volume 3, pages 1865–1868, Seattle, WA, USA,, 1998. IEEE.
- [CDS98] Scott Shaobing CHEN, David DONOHO et Michael SAUNDERS : Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on SIAM J. Sci. Comput.*, 20(1):33–61, 1998.
- [CIG01] P. CIUCIU, J. IDIER et J.F. GIOVANNELLI : Regularized estimation of mixed spectra using a circular gibbs-markov model. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(10):2202–2213, 2001.
- [CK01] M. CETIN et W.C. KARL : Feature-enhanced synthetic aperture radar image formation based on nonquadratic regularization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(4):623–631, 2001.
- [CMMB04] S.D. CABRERA, S. MALLADI, R. Mulpuri et A.E. BRITO : Adaptive refinement in maximally sparse harmonic signal retrieval. *In Digital Signal Processing Workshop*, pages 231–235. IEEE, 2004.
- [CS94] M. P. CLARK et L. L. SCHARF : Two-dimensional modal anlysis based on maximum likelihood. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6):1443–1451, 1994.

- [CTO89] H. CLERGEOT, S. TRESSENS et A. OUAMRI : Performance of high resolution frequencies estimation methods compared to the cramer-rao bounds. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(11):1703–1720, 1989.
- [CWB08] E.J. CANDÈS, M.B. WAKIN et S.P. BOYD : Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 14(5):877–905, 2008.
- [CY08] R. CHARTRAND et W. YIN : Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing. *In Acoustics, Speech and Signal Processing, 2008. ICASSP 2008. IEEE International Conference on*, pages 3869–3872. IEEE, 2008.
- [DBT09] E.H. DJERMOUNE, D. BRIE et M. TOMCZAK : A subband algorithm for estimating the parameters of two-dimensional exponential signals. *In 17th European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2009*, 2009.
- [DDTS06] D.L. DONOHO, I. DRORI, Y. TSAIG et J.L. STARCK : Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit (stomp). Rapport technique 2006-02, Stanford University, Department of Statistics, March 2006.
- [DFS09] François-Xavier DUPÉ, Jalal M. FADILI et Jean-Luc STARCK : A proximal iteration for deconvolving poisson noisy images using sparse representations. *IEEE Transactions on Image Processing*, 18(2):310–321, February 2009.
- [DG09] M.E. DAVIES et R. GRIBONVAL : Restricted isometry constants where ℓ_p sparse recovery can fail for $0 < p \leq 1$. *IEEE Transactions on Information Theory*, 55(5):2203–2214, 2009.
- [Dje03] E.H. DJERMOUNE : *Estimation des paramètres de sinusoides amorties par décomposition en sous-bandes adaptative. Application à la spectroscopie RMN*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1, 2003.
- [DKB08] E.-H. DJERMOUNE, G. KASALICA et D. BRIE : Estimation of the parameters of two-dimensional NMR spectroscopy signals using an adapted subband decomposition. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-2008)*, pages 3641 – 3644, Las Vegas, USA, 2008. IEEE.
- [DM09] W. DAI et O. MILENKOVIC : Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 55(5):2230–2249, 2009.
- [DMC98] A. DUCASSE, C. MAILHES et F. CASTANIÉ : Estimation de fréquences : panorama des méthodes paramétriques. *TS. Traitement du signal*, 15(2):149–162, 1998.
- [DT08] D. L. DONOHO et Y. TSAIG : Fast solution of ℓ_1 -norm minimization problems when the solution may be sparse. *IEEE Transactions on Information Theory*, 54(11):4789–4812, November 2008.

- [DT09] E.H. DJERMOUNE et M. TOMCZAK : Perturbation analysis of subspace-based methods in estimating a damped complex exponential. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 57(11):4558–4563, 2009.
- [DTB12] E.H. DJERMOUNE, M. TOMCZAK et D. BRIE : NMR data analysis : A time-domain parametric approach using adaptive subband decomposition. *Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP Energies Nouvelles*, page (à paraître), 2012.
- [DTM04] E.H. DJERMOUNE, M. TOMCZAK et P. MUTZENHARDT : An adaptive subband decomposition approach for automatic analysis of NMR data. *Journal of Magnetic Resonance*, 169(1):73–84, 2004.
- [EHJT04] B. EFRON, T. HASTIE, I. JOHNSTONE et R. TIBSHIRANI : Least angle regression. *Ann. Statist.*, 32(2):407–499, 2004.
- [ESS93] A. ERIKSSON, P. STOICA et T. SODERSTROM : Second-order properties of music and esprit estimates of sinusoidal frequencies in high snr scenarios. In *IEE Proceedings on Radar and Signal Processing*, volume 140, pages 266–272. IET, 1993.
- [Fuc07] J.J. FUCHS : Convergence of a sparse representations algorithm applicable to real or complex data. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 1(4):598–605, 2007.
- [GR97] I. F. GORODNITSKY et B. D. RAO : Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS : a re-weighted minimum norm algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 45(3):600–616, 1997.
- [Gui00] A. GUITTON : Huber solver versus irls algorithm for quasi l1 inversion. *Stanford Exploration Project, Report*, 103:205–266, 2000.
- [GV99] M.M. GOODWIN et M. VETTERLI : Matching pursuit and atomic signal models based on recursive filter banks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(7):1890–1902, 1999.
- [HD10] C. HERZET et A. DRÉMEAU : Bayesian pursuit algorithms. In *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2010)*, pages 1474–1478, Aalborg, Denmark, August 2010.
- [Hen97] N. HENZEL : *Développement d’un nouvel outil d’analyse spectrale et d’estimation des paramètres de signaux RMN ¹³C*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré Nancy 1, 1997.
- [Hil56] F. B. HILDEBRAND : *Spectral analysis and its applications*. Holden-Day, 1956.
- [HN98] Martin HAARDT et Josef NOSSEK : Simultaneous schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(1):161–169, Janvier 1998.

- [HRDG08] M. HAARDT, F. ROEMER et G. DEL GALDO : Higher-order svd-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(7):3198–3213, 2008.
- [HS90] Y. HUA et T. K. SARKAR : Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38:814–824, 1990.
- [HS91] Y. HUA et T.K. SARKAR : On svd for estimating generalized eigenvalues of singular matrix pencil in noise. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(4):892–900, 1991.
- [HS96] J. C. HOCH et A. STERN : *NMR data processing*. Wiley-Liss, NY, 1996.
- [Hua92] Y. HUA : Estimating two-dimensional frequencies by matrix enhancement and matrix pencil. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(9):2267–2280, 1992.
- [JAW94] B. JAMES, B.D.O. ANDERSON et R.C. WILLIAMSON : Conditional mean and maximum likelihood approaches to multiharmonic frequency estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(6):1366–1375, 1994.
- [KAR83] S. Y. KUNG, K. S. ARUN et R. D. V. RAO : State-space and singular-value decomposition-based approximation methods for the harmonic retrieval problem. *J. Opt. Soc. Am.*, 73:1799–1811, 1983.
- [Kay88] KAY : *Modern spectral estimation : Theory and application*. Prentice Hall, 1988.
- [KB09] T.G. KOLDA et B.W. BADER : Tensor decompositions and applications. *SIAM review*, 51(3):455–500, 2009.
- [KM82] J. KORMYLO et J. MENDEL : Maximum likelihood detection and estimation of Bernoulli-Gaussian processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(3):482–488, 1982.
- [KPTV87] A. KOT, S. PARTHASARATHY, D. TUFTS et R. VACCARO : The statistical performance of state-variable balancing and prony’s method in parameter estimation. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, (ICASSP’87)*, volume 12, pages 1549–1552. IEEE, 1987.
- [KT82] R. KUMARESAN et D. W. TUFTS : Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids and pole-zero modeling in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 30:833–840, 1982.
- [Kum83] R. KUMARESAN : On the zeros of the linear prediction-error filter for deterministic signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 31(1):217–220, 1983.
- [LL06] Jun LIU et Xianqian LIU : An eigenvector-based approach for multidimensional frequency estimation with improved identifiability. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54(12):4543–4556, decembre 2006.

- [LLM07] J. LIU, X. LIU et X. MA : Multidimensional frequency estimation with finite snapshots in the presence of identical frequencies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 55:5179–5194, 2007.
- [LRL98] Ye. LI, Javad RAZAVILAR et K. J. Ray LIU : A high-resolution technique for multidimensional nmr spectroscopy. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 45(1):78–86, 1998.
- [LS02] X. LIU et N. SIDIROPOULOS : On constant modulus multidimensional harmonic retrieval. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-2002)*, volume 3, pages 2977–2980, May 2002.
- [Mal99] S.G. MALLAT : *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [Maz05] V. MAZET : *Développement de méthodes de traitement de signaux spectroscopiques : estimation de la ligne de base et du spectre de raies*. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2005.
- [MCW05a] D. MALIOUTOV, M. CETIN et A. WILLSKY : Homotopy continuation for sparse signal representation. In IEEE, éditeur : *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP-2005)*, volume 5, pages 733–736, Philadelphia, 2005.
- [MCW05b] D. MALIOUTOV, M. CETIN et A. S. WILLSKY : A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 53(8):3010–3022, 2005.
- [MF98] N. MOAL et J.J. FUCHS : Sinusoids in white noise : A quadratic programming approach. In *Proc. ICASSP*, volume 4, pages 2221–2224, Seattle, WA , USA., 1998. IEEE.
- [Mil02] A. J. MILLER : *Subset Selection in Regression*. Chapman and Hall, London, UK, 2 édition, avril 2002.
- [MOMN90] SA MEYER, DL ORTH, MA MORGENSTERN et DW NOID : Music analysis applied to nmr. *Journal of magnetic resonance*, 86(2):406–409, 1990.
- [MS95] L.T. MCWHORTER et L.L. SCHARF : Nonlinear maximum likelihood estimation of autoregressive time series. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(12):2909–2919, 1995.
- [MZ93] S. G. MALLAT et Zhifeng ZHANG : Matching pursuits with time-frequency dictionaries. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(12):3397–3415, December 1993.
- [NT09] D. NEEDELL et J.A. TROPP : Cosamp : Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 26(3):301–321, 2009.

- [NV09] D. NEEDELL et R. VERSHYNIN : Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit. *Foundations of computational mathematics*, 9(3):317–334, 2009.
- [NV10] D. NEEDELL et R. VERSHYNIN : Signal recovery from incomplete and inaccurate measurements via regularized orthogonal matching pursuit. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 4(2):310–316, 2010.
- [OPT00] M. R. OSBORNE, B. PRESNELL et B. A. TURLACH : A new approach to variable selection in least squares problems. *IMA J Numer Anal*, 20(3):389–403, 2000.
- [Pis73] V.F. PISARENKO : The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 33(3):347–366, 1973.
- [PMB04] M. PESAVENTO, C.F. MECKLENBRÄUKER et J.F. BÖHME : Multidimensional rank reduction estimator for parametric MIMO channel models. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2004:1354–1363, 2004.
- [PRK93] Y. C. PATI, R. REZAIEFAR et P. S. KRISHNAPRASAD : Orthogonal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In *Signals, Systems and Computers, 1993. 1993 Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on*, volume 1, pages 40–44, Pacific Grove, CA , USA, 1993.
- [PSBG05] M. PESAVENTO, S. SHAHBAZPANAHI, J.F. BOHME et A.B. GERSHMAN : Exploiting multiple shift invariances in multidimensional harmonic retrieval of damped exponentials. In *Proceedings.(ICASSP'05).*, volume 4. IEEE, 2005.
- [PWKDR06] J. PALMER, D. WIPF, K. KREUTZ-DELGADO et B. RAO : Variational em algorithms for non-gaussian latent variable models. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 18:1059, 2006.
- [Rak11] A. RAKOTOMAMONJY : Surveying and comparing simultaneous sparse approximation (or group-lasso) algorithms. *Signal processing*, 91(7):1505–1526, 2011.
- [RdP95] G. M. Riche de PRONY : Essai expérimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l’eau et de la vapeur de l’alcool à différentes températures. *Journal de l’Ecole Polytechnique*, 1(2):24 :76, 1795.
- [REC⁺03] B.D. RAO, K. ENGAN, S.F. COTTER, J. PALMER et K. KREUTZ-DELGADO : Subset selection in noise based on diversity measure minimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 51(3):760–770, 2003.
- [RK87] R. ROY et T. KAILATH : Esprit and total least squares. In *Proceedings of the Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers and Computers*, 1987.

- [RK89] R. ROY et T. KAILATH : ESPRIT : Estimation of signal parameters via rotational invariance. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(7):984–995, 1989.
- [RKD99] B.D. RAO et K. KREUTZ-DELGADO : An affine scaling methodology for best basis selection. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(1):187–200, 1999.
- [RN01] S. ROUQUETTE et M. NAJIM : Estimation of frequencies and damping factors by two-dimensional ESPRIT type methods. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 49(1):237–245, 2001.
- [RPK86] R. ROY, A. PAULRAJ et T. KAILATH : Esprit-a subspace rotation approach to estimation of parameters of cisoids in noise. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 34(5):1340–1342, 1986.
- [RY87] Md. Anisur RAHMAN et Kai-bor YU : Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, ASSP-35(10):1440–1454, Octobre 1987.
- [SB12] P. STOICA et P. BABU : Sparse estimation of spectral lines : grid selection problems and their solutions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(2):962 – 967, 2012.
- [SBL11a] P. STOICA, P. BABU et J. LI : New method of sparse parameter estimation in separable models and its use for spectral analysis of irregularly sampled data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(1):35–47, 2011.
- [SBL11b] P. STOICA, P. BABU et J. LI : Spice : A sparse covariance-based estimation method for array processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 59(2):629–638, 2011.
- [Sch81] R.O. SCHMIDT : A signal subspace approach to multiple emitter location spectral estimation. *Ph. D. Thesis, Stanford University*, November 1981.
- [Sch86] R. SCHMIDT : Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 34(3):276–280, 1986.
- [SDB10] S. SAHNOUN, E.-H. DJERMOUNE et D. BRIE : A comparative study of subspace-based methods for 2-D Nuclear Magnetic Resonance spectroscopy signals. Rapport technique, CRAN, 2010.
- [SDB12] S. SAHNOUN, E.-H. DJERMOUNE et D. BRIE : Sparse multigrid modal estimation : Initial grid selection. In *Proceedings of the European Signal Processing Conference (EUSIPCO-2012)*, pages 450–454, 2012.
- [SDSB11a] S. SAHNOUN, E.-H. DJERMOUNE, C. SOUSSEN et D. BRIE : Analyse modale bidimensionnelle par approximation parcimonieuse et multirésolution. In *GRETSI*, Bordeaux, France, 2011.

- [SDSB11b] S. SAHNOUN, E.-H. DJERMOUNE, C. SOUSSEN et D. BRIE : Sparse multiresolution modal estimation. *In Proceedings of the IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP-2011)*, pages 309–312, France, 2011.
- [SDSB12] S. SAHNOUN, E.-H. DJERMOUNE, C. SOUSSEN et D. BRIE : Sparse multidimensional modal analysis using a multigrid dictionary refinement. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, March 2012.
- [SIBD11] C. SOUSSEN, J. IDIER, D. BRIE et J. DUAN : From Bernoulli-Gaussian deconvolution to sparse signal restoration. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(10):4572–4584, 2011.
- [Sid01] N. D. SIDIROPOULOS : A new 2-D harmonic retrieval algorithm. *In Proc. 39th Allerton Conf. Comm. Control Computing*, Urbana-Champaign, October 2001.
- [SN88] P. STOICA et A. NEHORAI : Study of the statistical performance of the pisarenko harmonic decomposition method. *IEE Proceedings Radar and Signal Processing*, 135(2):161–168, 1988.
- [SN89] Petre STOICA et Arye NEHORAI : MUSIC, maximum likelihood, and cramer-rao bound. *IEEE Transaction on Acoustic, Speech and Signal Processing*, 37(5):720–741, Mai 1989.
- [SS91] P. STOICA et T. SODERSTROM : Statistical analysis of music and subspace rotation estimates of sinusoidal frequencies. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(8):1836–1847, 1991.
- [SSM93] J. J. SACCHINI, W. M. STEEDLY et R. L. MOSES : Two-dimensional Prony modeling and parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 41(11):3127–3137, 1993.
- [SSSL04] N. SANDGREN, Y. SELÉN, P. STOICA et J. LI : Parametric methods for frequency-selective mr spectroscopy-a review. *Journal of Magnetic Resonance*, 168(2):259, 2004.
- [TG09] A. THAKRE et K. GIRIDHAR : 2-d normalized frequency estimation using 4-way tensor processing. *In 2009 IEEE 20th International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, pages 2817–2821. IEEE, 2009.
- [TGS06] J.A. TROPP, A.C. GILBERT et M.J. STRAUSS : Algorithms for simultaneous sparse approximation. part i : Greedy pursuit. *Signal Processing*, 86(3):572–588, 2006.
- [THG09] A. THAKRE, M. HAARDT et K. GIRIDHAR : Single snapshot rd unitary tensor-esprit using an augmentation of the tensor order. *In Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP), 2009 3rd IEEE International Workshop on*, pages 81–84. IEEE, 2009.
- [Tib96] R. TIBSHIRANI : Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 58(1):267–288, 1996.

- [Tur05] B.A. TURLACH : On algorithms for solving least squares problems under an l1 penalty or an l1 constraint. In *Proceedings of the American Statistical Association, Statistical Computing Section*, pages 2572–2577, Alexandria, 2005.
- [TW10] J.A. TROPP et S.J. WRIGHT : Computational methods for sparse solution of linear inverse problems. *Proceedings of the IEEE*, 98(6):948–958, 2010.
- [UT96] S. UMESH et D.W. TUFTS : Estimation of parameters of exponentially damped sinusoids using fast maximum likelihood estimation with application to nmr spectroscopy data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 44(9):2245–2259, 1996.
- [VDVDS93] A.J. VAN DER VEEN, E.D.F. DEPRETTERE et A.L. SWINDLEHURST : Subspace-based signal analysis using singular value decomposition. *Proceedings of the IEEE*, 81(9):1277–1308, 1993.
- [VMB94] F. VANPOUCKE, M. MOONEN et Y. BERTHOUMIEU : An efficient subspace algorithm for 2-d harmonic retrieval. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1994. ICASSP-94.*, volume 4, pages IV–461. IEEE, 1994.
- [WK85] M. WAX et T. KAILATH : Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33(2):387–392, 1985.

Résumé

La thèse porte sur le développement d'algorithmes d'estimation rapides pour l'analyse modale de signaux multidimensionnels (R -D) présentant des problèmes de résolution et de complexité numérique. Un signal multidimensionnel de dimension R est la superposition de produits de R sinusoides. L'application visée est la spectroscopie RMN.

Dans un premier temps, après un état de l'art des méthodes d'estimation dites « algébriques », nous proposons une méthode paramétrique basée sur les tenseurs. Celle-ci utilise le treillis multidimensionnel du tenseur du signal R -D et exploite la structure des vecteurs propres du sous-espace signal obtenus en utilisant la décomposition en valeurs singulières d'ordre supérieur. Contrairement à la plupart des approches tensorielles, la méthode proposée permet d'éviter la phase d'appariement des coordonnées des modes dans chacune des dimensions ou d'une diagonalisation conjointe.

Dans un deuxième temps, le problème d'estimation modale multidimensionnelle est présenté comme un problème d'approximation parcimonieuse dans lequel le dictionnaire est obtenu par la discrétisation de fonctions exponentielles complexes. Afin d'atteindre une bonne résolution spectrale, il est nécessaire de choisir une grille très fine, ce qui conduit à la manipulation d'un dictionnaire de grande taille avec tous les problèmes calculatoires sous-jacents. Nous proposons alors une méthode originale qui consiste à combiner une approximation parcimonieuse et une approche multigrille sur plusieurs niveaux de résolution. L'approche est validée au travers de plusieurs exemples 1-D et 2-D. En outre, une étude sur l'influence du choix du dictionnaire initial sur la convergence est également menée.

Les méthodes développées sont ensuite appliquées à l'estimation des paramètres de signaux de spectroscopie RMN 1-D et 2-D. Afin de réduire le coût de calcul dans le cas de signaux bidimensionnels de grande taille, nous proposons également une approche exploitant la notion de parcimonie simultanée, pour estimer les coordonnées des modes sur chacune des dimensions. La procédure consiste à effectuer deux approximations parcimonieuses 1-D suivies d'une phase de reformation des paires de modes 2-D.

Mots clés : Estimation modale multidimensionnelle, approximation parcimonieuse, multigrille, spectroscopie RMN, sinusoides amorties, méthode de sous-espaces, méthodes tensorielles.

Summary

This thesis deals with the development of modal analysis algorithms for multidimensional signals (R -D) with resolution problems and computational complexity. A multidimensional signal of dimension R is the superimposition of products of R monodimensional sinusoids. The intended application is the NMR spectroscopy.

firstly, after a state of the art of estimating methods called « algebraic », we propose a parametric method based on tensors. It uses the multidimensional tensor lattice of the R -D modal signal and we exploit the eigenvectors structure of the signal subspace obtained using a higher-order singular value decomposition (HOSVD). Unlike most tensor-based eigenvalue approaches, the proposed method avoids the pairing step of modes in each one of the dimensions or a joint diagonalization.

Secondly, the multidimensional modal estimation problem is presented as a sparse approximation problem in which the dictionary is obtained by the discretization of complex exponential functions. To achieve good spectral resolution, it is necessary to choose a very fine grid, which leads to handling a large dictionary with all the underlying computational problems. We propose a novel method that consists in combining a sparse approximation and a multigrid approach on several levels of resolution. The approach is validated through several examples 1-D and 2-D. In addition, a study on the influence of the choice of the initial dictionary on the convergence is also conducted.

The developed methods are then applied to estimate the 1-D and 2-D NMR spectroscopy signals parameters. To reduce the computation cost in the case of large bidimensional signals, we also propose an approach exploiting the simultaneous sparsity notion to estimate the coordinates of the modes on each dimension. The procedure involves two 1-D sparse approximations followed by a 2-D modes pairing step.