



**HAL**  
open science

# Développement d'une méthode sans maillage basée sur les approximations de Taylor

Yendoubouam Tampango

► **To cite this version:**

Yendoubouam Tampango. Développement d'une méthode sans maillage basée sur les approximations de Taylor. Autre. Université de Lorraine, 2012. Français. NNT : 2012LORR0322 . tel-01749401

**HAL Id: tel-01749401**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01749401>**

Submitted on 29 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Développement d'une méthode sans maillage utilisant les approximations de Taylor

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 16 novembre 2012

pour l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Lorraine**

**Spécialité : Mécanique**

par

**Yendoubouam TAMPANGO**

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr Pierre VILLON	Université de Technologie de Compiègne, France
	Pr Julien YVONNET	Université Paris-Est, France
<i>Examineurs :</i>	Pr Hachmi BEN DHIA	Ecole Centrale Paris, France
	Pr Hassane SADOK	Université du Littoral côte d'Opale, France
	Pr Sonnou TIEM	Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Lomé, Togo
	Dr Yao KOUTSAWA	CRP Henri Tudor, Luxembourg
	Dr Salim BELOUETTAR	CRP Henri Tudor, Luxembourg
<i>Directeur de thèse :</i>	Pr Michel POTIER-FERRY	Université de Lorraine, France



## Remerciements

Je souhaite remercier en premier lieu mon directeur de thèse, le professeur Michel POTIER-FERRY pour m'avoir accueilli au sein de son équipe. Je lui suis également reconnaissant pour le temps conséquent qu'il m'a accordé, ses qualités pédagogiques et scientifiques, sa franchise et sa sympathie. J'ai beaucoup appris à ses côtés et je lui adresse ma gratitude pour tout cela.

J'adresse de chaleureux remerciements à mon co-encadrant de thèse, M. Yao KOUT-SAWA pour son attention de tout instant sur mes travaux, pour ses conseils avisés et son écoute qui ont été prépondérants pour la bonne réussite de cette thèse. Son énergie et sa confiance ont été des éléments moteurs pour moi. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

Un grand merci à M. Salim BELOUETTAR pour son implication dans le projet, notamment tous ses conseils sur le plan scientifique et administratif.

Je voudrais remercier les rapporteurs de cette thèse, le professeur Julien YVONNET et le professeur Pierre VILLON, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'associe à ces remerciements Pr Hachmi BEN DHIA, Pr Hassane SADOK et Pr Sonnou TIEM pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à remercier M. Sylvain ZEZE pour avoir posée les prémisses de ce travail.

Je remercie les stagiaires M. Eric TARO et M. Ludovic HAJDRYCH, qui ont contribué, par leur travail à l'avancée de cette thèse.

J'ai trouvé au sein du laboratoire et de l'équipe de recherche une atmosphère stimulante et conviviale qui me fut précieuse et je voudrais remercier tout le personnel de LEM3 notamment les secrétaires et mes collègues doctorants pour les services rendus et pour le cadre du travail. En particulier Norman MATHIEU, Guillaume ROBIN, Daniel LAMPOH, Yvan SHASHKOV, Yu CONG, Abdellah SALAHOUELHADJ, Mohamed JRAD, Vincent DEMANGE.

Je voulais remercier mes amis Ossan, Emile, Mila, Joseph, Vetea, Cynthia et toute la communauté togolaise de Metz. Un grand merci à Nelly pour ses relectures et remarques.

Enfin un remerciement particulier pour ma famille qui m'a toujours soutenu dans tous mes projets.

Pour tous ceux que j'oublie un grand merci.



*Dédie cette thèse à ma mère et à mon Père,  
à tous mes frères et sœurs.*



# Table des matières

<b>Liste des tableaux</b>	<b>xvii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Etude bibliographique et positionnement du sujet</b>	<b>7</b>
1.1 Etat de l'art . . . . .	8
1.1.1 Les méthodes basées sur des maillages . . . . .	8
1.1.2 Les méthodes sans maillages . . . . .	10
1.2 La Taylor Meshless Method (TMM) . . . . .	14
1.2.1 Calcul des fonctions de forme . . . . .	14
1.2.2 Application des conditions aux limites . . . . .	19
1.3 Quelques applications de la TMM . . . . .	22
1.4 Résolution des problèmes d'élasticité linéaire. . . . .	28
1.5 Coût de calcul de la TMM . . . . .	34
1.6 Bilan et positionnement de la thèse . . . . .	36
<b>Chapitre 2 Techniques de raccord de polynômes de degrés élevés : vers une résolution multizone</b>	<b>39</b>
2.1 Introduction . . . . .	39
2.2 Géométrie du domaine et p-convergence . . . . .	41
2.2.1 Equation de Poisson sur une couronne . . . . .	41

2.2.2	Equation de Poisson sur un secteur . . . . .	45
2.3	Position du problème multizone . . . . .	48
2.4	Raccord par la méthode des moindres carrés . . . . .	50
2.4.1	Principe de résolution multizone . . . . .	50
2.4.2	Evaluation de la technique de raccord par moindres carrés . . . . .	53
2.5	Méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	58
2.5.1	Principe de la résolution multizone . . . . .	58
2.5.2	Validation de la technique de raccord avec les multiplicateurs de Lagrange . . . . .	60
2.6	Méthode Arlequin . . . . .	68
2.6.1	Formulation de la méthode Arlequin . . . . .	70
2.6.2	Adaptation à la Taylor Meshless Method . . . . .	72
2.6.3	Validation . . . . .	77
2.7	Coût de calcul dans la résolution multizone . . . . .	82
2.8	Conclusion . . . . .	83
<b>Chapitre 3 Analyse des séries et accélération de convergence de la TMM</b>		<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	87
3.2	Etude de la robustesse de la TMM . . . . .	88
3.3	Détection de la position et de l'ordre de singularité . . . . .	92
3.3.1	Domb Sykes plot . . . . .	93
3.3.2	Critère de Darboux . . . . .	97
3.4	Accélération de convergence de la TMM . . . . .	101
3.4.1	Approximants de Padé . . . . .	101
3.4.2	Taylor multipoint en 1D . . . . .	109
3.5	Conclusion . . . . .	114
<b>Chapitre 4 Problèmes non linéaires</b>		<b>117</b>
4.1	Résolution de problèmes non linéaires en 1D . . . . .	119
4.1.1	Problème étudié . . . . .	119
4.1.2	Linéarisation du problème par la méthode de Newton . . . . .	119
4.1.3	Couplage avec la TMM . . . . .	121

---

4.1.4	Résultats numériques . . . . .	126
4.2	Résolution des problèmes non linéaires en 2D . . . . .	129
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	129
4.2.2	Linéarisation du problème avec la méthode de Newton . . . . .	132
4.2.3	Résolution du problème linéaire . . . . .	134
4.3	Produit de deux séries de Taylor en 2D . . . . .	135
4.4	Résultats numériques . . . . .	139
4.5	Automatisation de la TMM : introduction de la différentiation automatique	150
4.5.1	Un problème quasi-linéaire en 1D . . . . .	150
4.5.2	Différentiation Automatique d'ordre élevé [1] . . . . .	151
4.5.3	Application à l'équation différentielle (4.53) . . . . .	153
4.6	Conclusion . . . . .	154
<b>Conclusion générale et bilan</b>		<b>155</b>
<b>Annexe A Effet des opérateurs différentiels sur la forme approchée de la TMM</b>		<b>159</b>
A.0.1	Dérivée partielle . . . . .	159
A.0.2	Décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ en polynômes homogènes .	161
A.0.3	Gradient d'une fonction scalaire . . . . .	163
A.0.4	Divergence d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ . . . . .	163
A.0.5	Le laplacien . . . . .	164
<b>Annexe B Résolution de l'équation de Navier</b>		<b>167</b>
<b>Annexe C Résolution du problème d'élasticité non linéaire</b>		<b>171</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>179</b>



# Table des figures

1.1	<i>Discrétisation du domaine pour trois différentes méthodes : (a) la méthode des éléments finis, (b) les méthodes sans maillages (pour les méthodes de type Galerkin, il faut aussi un maillage pour l'intégration) et (c) la Taylor meshless method. . . . .</i>	15
1.2	<i>Discrétisation de l'EDP : pour un opérateur différentiel d'ordre 2 on annule les dérivées du résidu en un point jusqu'à l'ordre <math>p - 2</math> (<math>0 \leq m + n \leq p - 2</math>). . . . .</i>	18
1.3	<i>L'EDP est considérée comme une équation différentielle ordinaire en <math>y</math>. Après résolution du problème discret, les données <math>u(x, y_0)</math> et <math>\partial u / \partial y(x, y_0)</math> constituent, les variables actives sur lesquelles on appliquera les conditions aux limites. . . . .</i>	19
1.4	<i>Problème de Dirichlet : équation de Laplace sur un disque (1.12). Discrétisation de la frontière. . . . .</i>	25

1.5	<i>Problème de Dirichlet : équation de Laplace sur un disque (1.12) avec deux cas, selon la position de la singularité <math>x_0 = [x_0, y_0]</math>. On observe la <math>p</math>-convergence comme dans la <math>p</math>-version des éléments finis. La qualité de la convergence dépend aussi de la position de la singularité. . . . .</i>	26
1.6	<i>Problème de Dirichlet : équation d'Helmholtz (1.18) dans un rectangle, degré <math>p = 20</math>, <math>l = 30</math>. Solution sur l'axe des abscisses (<math>y = 0</math>). Présence de couches limites pour la structure allongée. . . . .</i>	27
1.7	<i>Problème de Dirichlet en élasticité linéaire (1.20). A gauche, la solution analytique est un polynôme et à droite, c'est une fonction rationnelle. On remarque que la TMM arrive à approcher de manière quasi exacte le polynôme à partir du degré <math>p = 5</math>. Il y a <math>p</math>-convergence comme dans le cas du problème de Laplace. Pour la solution rationnelle, la qualité de la convergence dépend de la position du pôle de la fonction rationnelle. 30</i>	30
1.8	<i>Distribution de l'erreur dans le domaine pour le problème d'Elasticité linéaire avec une singularité en <math>[1, 1]</math>. L'erreur est presque uniforme dans le domaine sauf à proximité de la singularité où elle augmente. . .</i>	31
1.9	<i>Problème de Dirichlet en élasticité linéaire (1.20), solution rationnelle. Influence du point de développement sur la qualité de la convergence. La méthode est stable par rapport au point de développement. . . . .</i>	31
1.10	<i>Poutre chargée à l'extrémité. . . . .</i>	33
1.11	<i>Problème de la poutre chargée à l'extrémité : solution approchée (<math>p = 10</math>) et solution exacte sur la surface supérieure (<math>y = c</math>). Elle coïncide bien avec la solution exacte. . . . .</i>	33
1.12	<i>Problème de la poutre chargée à l'extrémité : évolution de l'erreur en fonction du degré d'approximation. . . . .</i>	34

---

2.1	<i>Discrétisation de la couronne en monozone. Les points de collocations ne sont choisis que sur la frontière. . . . .</i>	42
2.2	<i>Problème de Dirichlet, équation de Poisson sur une couronne (2.1). La résolution avec une seule zone diverge, degré <math>p = 10</math>. Gauche : point de développement en <math>[-1,0]</math>. Droite : point de développement en <math>[1,0]</math> .</i>	43
2.3	<i>Représentation du domaine de convergence suivant le point de développement de la série solution. Ce domaine a pour centre le point de développement et pour rayon la distance entre le point de développement et la singularité la plus proche. . . . .</i>	44
2.4	<i>Equation de Poisson sur une couronne. Absence de P-convergence en monozone. . . . .</i>	44
2.5	<i>Discrétisation d'une partie de la couronne. . . . .</i>	46
2.6	<i>Représentation du domaine continu de l'EDP et de la discrétisation du bord pour la résolution en deux zones. Le domaine est divisé en deux sous domaines <math>\Omega^1</math> et <math>\Omega^2</math>. La discrétisation introduit deux types de points : des points de collocations sur les bords <math>\Gamma^1</math>, <math>\Gamma^2</math> sur lesquels on applique les conditions aux limites et des points de collocations sur l'interface <math>\Gamma^r</math> où on applique les conditions de transmission. . . . .</i>	49
2.7	<i>Représentation du domaine pour le problème de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Le domaine est discrétisé en deux zones. Dans chaque zone, la solution est approchée par une série de Taylor de degré <math>p</math>. Après résolution directe dans les sous domaines, on a <math>2p + 1</math> inconnues dans chaque sous domaine, à déterminer avec les conditions aux limites et les conditions de transmission. . . . .</i>	54

2.8	<i>Problème de Dirichlet. Equation de Laplace sur un disque (2.15). Solutions approchée et exacte pour une résolution en deux zones avec <math>p_1 = p_2 = 10</math>. On observe une discontinuité de la solution approchée au niveau de l'interface. . . . .</i>	55
2.9	<i>Probleme de Laplace sur un disque (2.15). Solution exacte et approchée obtenues avec la fonctionnelle de raccord (2.16). A droite <math>\alpha = 10</math>, à gauche <math>\alpha = 100</math> . . . . .</i>	57
2.10	<i>Problème de Laplace sur un disque (2.15). Solutions et erreur sur le cercle de rayon 0.8, pour une résolution en deux zones avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On remarque une bonne continuité aux interfaces (<math>\theta = \pi/2</math> et <math>\theta = 3\pi/2</math>). . . . .</i>	62
2.11	<i>Problème de Laplace sur un disque avec une singularité en <math>[1.5, 0]</math> . . . .</i>	64
2.12	<i>Discrétisation de la couronne pour une résolution multizone. . . . .</i>	67
2.13	<i>Problème de Poisson (2.1). Influence du nombre de zones sur la convergence <math>p = 10</math>. . . . .</i>	67
2.14	<i>Problème de Poisson (2.1). P convergence pour 6 zones . . . . .</i>	68
2.15	<i>Discrétisation de la zone de raccord. La zone de raccord est une surface qui couvre les deux sous domaines. Sa discrétisation introduit deux types de points : les points de collocation et les points associés aux multiplicateurs de Lagrange. . . . .</i>	73
2.16	<i>Discrétisation du disque en 2 zones dans la méthode Arlequin. . . . .</i>	78
2.17	<i>Problème de Poisson (2.1). Influence du nombre de sous domaines sur la convergence. Degré <math>p = 12</math>. . . . .</i>	82
2.18	<i>P-convergence du problème de Poisson (2.1) pour 6 zones. . . . .</i>	83

---

3.1	<i>Les diagrammes de Domb Sykes pour le problème de Laplace (1.12). Excepté dans la direction de la singularité, le rapport de Domb Sykes diverge. Dans la direction de la singularité, il converge vers l'inverse de la singularité. . . . .</i>	94
3.2	<i>Les diagrammes de Domb Sykes pour le problème d'Helmholtz. Le rapport de Domb Sykes diverge quelle que soit la direction. . . . .</i>	96
3.3	<i>Les diagrammes de Domb Sykes de la sous série paire du problème d'Helmholtz. Contrairement à ceux de la série complète, les rapports de Domb Sykes convergent vers la valeur 0, ce qui indique une singularité à l'infini. On a fait converger les diagrammes de Domb Sykes en considérant la sous série paire. . . . .</i>	97
3.4	<i>Diagramme de Domb Sykes pour le problème de Poisson sur une couronne (2.1). La comparaison avec le diagramme de la série de Taylor de la solution exacte montre que le diagramme de la série de la TMM diverge. . . . .</i>	98
3.5	<i>Diagramme de Domb Sykes pour le problème de Poisson sur un secteur (2.1). Le rapport de Domb Sykes est stable pour de faibles degrés et il donne l'inverse de la position de la singularité. Néanmoins pour de hauts degrés le rapport diverge. . . . .</i>	99
3.6	<i>Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Laplace sur un disque (1.12). Elle détecte bien la singularité dans la direction où elle se trouve. Dans les autres directions le rapport de Darboux diverge. . . . .</i>	100

Table des figures

---

3.7	<i>Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème d'Helmholtz sur un rectangle (1.18). Le rapport de Darboux diverge quelle que soit la direction choisie. . . . .</i>	101
3.8	<i>Rapport de Darboux pour la sous série paire obtenue en résolvant le problème d'Helmholtz. Elle détecte l'absence de singularité et ceci quelle que soit la direction d'étude. . . . .</i>	102
3.9	<i>Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Poisson sur une couronne. Le rapport de Darboux diverge quelle que soit la direction d'étude. . . . .</i>	103
3.10	<i>Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Poisson sur un secteur. Le rapport de Darboux détecte la singularité. . . . .</i>	104
3.11	<i>Domaine de convergence d'une série de Taylor développée en deux points <math>z_1</math> et <math>z_2</math> : (a) si <math>4r &lt;  z_1 - z_2 ^2</math>, (b) si <math>4r =  z_1 - z_2 ^2</math>, (c) si <math>4r &gt;  z_1 - z_2 ^2</math> . . . . .</i>	111
3.12	<i>Solution du problème (3.18) pour un degré <math>p = 5</math>. Comparaison de l'approximation de Taylor développée en un point et de l'approximation de Taylor développée en 2 points. Le développement en 2 points donne de meilleurs résultats et fait disparaître l'effet des couches limites (domaine de convergence plus large) . . . . .</i>	113
4.1	<i>Problème non linéaire 1D (4.1). Evolution du résidu tronqué au cours des itérations : convergence de la méthode de Newton pour <math>p = 10</math>. . .</i>	128
4.2	<i>Problème non linéaire 1D (4.1). Répartition du résidu global dans le domaine : convergence de la TMM. <math>L = 1</math> et critère d'arrêt de la méthode de Newton : résidu tronqué = <math>10^{-8}</math>. . . . .</i>	129

---

4.3	<i>Problème mixte (4.47) : comparaison des solutions approchées avec la solution exacte dans la direction (<math>y = 2</math> et <math>x \in [0, 2]</math>) pour <math>p = 1, p = 2</math> et <math>p = 3</math>.</i>	141
4.4	<i>Problème mixte (4.47) : comparaison des erreurs sur le segment (<math>y = 2</math> et <math>x \in [0, 2]</math>) pour <math>p = 1, p = 2</math>, et <math>p = 3</math>.</i>	142
4.5	<i>Problème de Dirichlet (4.48) : convergence de la méthode de Newton.</i>	144
4.6	<i>Problème de Dirichlet (4.48) : évolution de l'erreur maximale au cours des itérations.</i>	145
4.7	<i>Problème de Dirichlet (4.48) : solutions approchées et exacte sur le segment (<math>x = \frac{3}{7}</math> et <math>y \in [0, 1]</math>) pour <math>p = 5, p = 8</math> et <math>p = 12</math>.</i>	147
4.8	<i>Problème de Dirichlet (4.48) : degré <math>p = 12</math>, erreur sur tout le carré.</i>	148
4.9	<i>Problème de Dirichlet (4.48) : relation entre le résidu global maximal et l'erreur maximale.</i>	149

*Table des figures*

---

# Liste des tableaux

1.1	<i>Tableau de synthèse des différentes méthodes décrites dans cette revue bibliographique. . . . .</i>	21
1.2	<i>Logarithme de l'erreur maximale pour le problème d'Helmholtz (1.18) en fonction du degré <math>p</math>. . . . .</i>	27
1.3	<i>Comparaison de la TMM et de la MEF avec des éléments triangulaires (T) ou quadrangulaires (Q) et des interpolations linéaires et quadratiques. Le tableau présente le nombre de degrés de liberté nécessaires pour obtenir une erreur relative de <math>10^{-2}</math> ou <math>10^{-4}</math>. Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs réellement obtenues. . . . .</i>	35
2.1	<i>Problème mixte, équation de Poisson sur un secteur (2.3). On obtient une meilleure convergence lorsque l'ouverture <math>\beta</math> du secteur décroît. <math>M_1</math> est le nombre de points de collocation de type Dirichlet et <math>M_2</math> est le nombre de points de collocation de type Neumann. . . . .</i>	47
2.2	<i>Influence du nombre de multiplicateurs de Lagrange <math>N_\lambda</math>. . . . .</i>	63
2.3	<i>Raccord de deux polynômes différents par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. . . . .</i>	65

2.4	<i>Problème de Laplace (2.15). Influence de la largeur de la zone interface.</i>	79
2.5	<i>Problème de Laplace (2.15). Comparaison des différentes méthodes étudiées . . . . .</i>	79
2.6	<i>Problème de Laplace (2.15). Raccord de deux polynômes différents par la méthode Arlequin. . . . .</i>	80
3.1	<i>Coefficients de la série radiale (<math>\theta = 0</math>) calculée par la TMM pour le problème de Laplace (1.12) avec singularité en <math>[1.2, 0.3]</math>. On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que la TMM approche bien la série de Taylor de la solution exacte. . . . .</i>	90
3.2	<i>Précision des coefficients de la série radiale (<math>u(x, 1.5)</math>), calculée par la TMM pour le problème d'Helmholtz (1.18) avec <math>l = 5</math> et <math>h = 4</math>. Le tableau montre que la TMM approche bien la série de Taylor de la solution exacte. Les coefficients impairs sont nuls. . . . .</i>	91
3.3	<i>Coefficients de la série radiale (<math>\theta = 0</math>) calculée par la TMM pour le problème de Poisson (2.1) sur la couronne. On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que l'on n'approche pas les coefficients de la série exacte et que les coefficients approchés calculés sont instables par rapport au degré. Ce tableau vient confirmer les résultats obtenus au chapitre 2. . . . .</i>	91

---

3.4	<i>Coefficients de la série radiale (<math>\theta = 0</math>) calculée par la TMM pour le problème de Poisson (2.1) sur un secteur (<math>\alpha = 0, \beta = \pi/8</math>). On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que l'on approche bien les coefficients de la série exacte et on retrouve la stabilité des coefficients approchés. Stabilité perdue en faisant la résolution sur toute la couronne. . . . .</i>	92
3.5	<i>Position et ordre de singularité dans la direction de la singularité pour le problème de Laplace avec singularité en <math>[2, 0.3]</math>. On approche bien la singularité avec le critère de Darboux et de Domb Sykes. Et ceci mieux qu'avec le critère d'Hadamard. . . . .</i>	105
3.6	<i>Les pôles des approximants de Padé pour le problème de Laplace (1.12) avec singularité en <math>[1.2, 0.3]</math>. Quelle que soit la direction d'étude, la singularité apparait parmi les pôles . . . . .</i>	107
3.7	<i>Problème de Laplace avec singularité en <math>[1.2, 0.3]</math> (1.12). Comparaison de l'erreur de la TMM et de celle obtenue en appliquant les approximants de Padé (logarithme de l'erreur). On remarque que les approximants de Padé améliorent l'approximation. . . . .</i>	107
3.8	<i>Problème d'Helmholtz (1.18). Comparaison de l'erreur de la TMM et de celle obtenue en appliquant les approximants de Padé (logarithme de l'erreur). Contrairement au cas précédent avec présence de singularité, les approximants de Padé n'agissent pas sur la qualité de l'approximation.</i>	108
3.9	<i>Comparaison des méthodes d'approximation de Taylor développés en 1 point et en 2 points. <math>p</math>-convergence. <math>L = 10, x_0 = 0, x_1 = -x_2 = L/2</math> .</i>	114
4.1	<i>Problème de Dirichlet : Étude de la <math>p</math>-convergence. . . . .</i>	146



# Introduction générale

Les phénomènes physiques et mécaniques sont souvent décrits par des modèles mathématiques sous formes d'équations aux dérivées partielles (EDP). La résolution de ces équations permet de prédire les phénomènes en question et ainsi d'éviter la mise en place d'expériences très coûteuses. Une résolution exacte de ces EDP est souvent impossible à cause de la complexité des équations ou du domaine de résolution. On a alors recours aux méthodes numériques pour construire des solutions approchées de ces modèles mathématiques. Les avancées en informatique et le développement de logiciels sophistiqués font de ces méthodes numériques des outils très fiables avec une mise en place relativement simple.

Actuellement les méthodes les plus utilisées sont la Méthode des Eléments Finis (MEF) en mécanique des solides et la méthode des différences finis en mécanique des fluides. Dans la MEF, le domaine est divisé en plusieurs sous domaines appelés éléments et une interpolation polynomiale de bas degré est faite sur chaque élément [2]. La notion d'éléments est très importante dans cette méthode ; elle définit une connectivité fixe entre les noeuds. Cette méthode a l'avantage d'avoir une base mathématique très solide. Depuis son premier développement, d'innombrables travaux ont été effectués pour la rendre plus robuste et plus efficace. Ce qui fait de la MEF une méthode flexible,

bien établie, robuste et très utilisée dans la communauté des mécaniciens. Néanmoins la connectivité nodale fixe entre les éléments engendre parfois des difficultés à générer un bon maillage satisfaisant toutes les propriétés topologiques requises. D'autre part l'interpolation polynomiale de bas degré impose un grand nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire un maillage relativement fin pour avoir une bonne convergence. Ce qui engendre de grands coûts de calculs. Une intéressante variante de la MEF est la  $p$ -version où les fonctions de forme sont des polynômes de degré  $p$  quelconque. Dans la  $p$ -version, la convergence peut être améliorée en augmentant l'ordre  $p$  des fonctions de forme et ceci sans avoir besoin de raffiner le maillage [3]. On retrouve plusieurs applications de cette méthode dans la littérature sur des problèmes simples, parfois plus complexes avec des singularités. Les résultats ont montré une très bonne précision de cette méthode. Néanmoins la  $p$ -version engendre de grands coûts de calcul à cause des intégrations et ceci plus que dans la MEF.

Depuis quelques décennies, beaucoup de travaux de recherches sont consacrés aux méthodes dites "méthodes sans maillages". Dans ces méthodes, la notion d'éléments est éliminée. La discrétisation du domaine est formée d'un ensemble de points répartis dans le domaine et la solution approchée est construite complètement en utilisant ces points. Par conséquent la connectivité nodale dans les méthodes sans maillages est plus flexible voire inexistante. Ainsi leur mise en place semble plus simple que celle de la MEF. En effet l'adaptabilité de la discrétisation pour les méthodes sans maillages se fait simplement en augmentant ou en supprimant des points dans le domaine, contrairement au remaillage dans la MEF qui peut être parfois complexe (par exemple en 3D). De part leur formulation, les méthodes sans maillages peuvent être classées en deux catégories :

- Les méthodes sans maillage de type Galerkin [4–6] : cette classe regroupe les méthodes sans maillages utilisant la formulation faible de l'EDP, donc l'intégration

---

numérique. C'est une évolution naturelle de la méthode des éléments finis. Dans ces méthodes, les fonctions de formes sont construites en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles ("*Moving Least Square*"). Les méthodes sans maillage de type Galerkin héritent de la stabilité et de l'efficacité de la MEF, toutefois l'intégration numérique engendre de grands coûts de calcul et à ce jour ces méthodes n'ont pas totalement convaincu les utilisateurs.

- Les méthodes sans maillages de type collocation : cette classe regroupe toutes les méthodes sans maillage utilisant la formulation forte de l'EDP. Cependant ces méthodes ne nécessitent pas l'utilisation de l'intégration numérique. L'utilisation de la formulation forte a été introduite pour la première fois en 1977 par Liszka et Orkisz [7]. Mais le grand progrès dans ce domaine est la méthode de Kansa en 1990 [8, 9]. Dans ces méthodes, différents types d'interpolations sont utilisés pour la construction des fonctions de formes (fonctions radiales, polynômes, ...). L'avantage de ces méthodes réside dans le fait qu'elles n'utilisent pas de maillage et évitent l'intégration numérique, ce qui réduit considérablement le coût de calcul. Toutefois elles ne bénéficient pas d'une base mathématique très solide. Par conséquent, elles sont moins stables et moins robustes. Elles ont du mal à traiter des conditions aux limites faisant intervenir des dérivées (type Neumann). Il y a une vaste littérature sur ces méthodes, mais peu d'études de problèmes physiques un peu complexes ont été faites, sauf pour la méthode SPH [10–12].

Deux autres catégories de méthodes n'utilisent que la discrétisation du bord pour résoudre les problèmes où une famille de solutions fondamentales est connue analytiquement : la méthode des équations intégrales [13, 14] et la Méthode de la Solution Fondamentale (MSF) [15, 16]. Dans la première, l'EDP est transformée en une équation intégrale de frontière qui est résolue, soit sous sa forme faible, soit sous sa forme forte.

Quant à la MSF, elle cherche la solution du problème aux limites comme une combinaison de solutions fondamentales avec des points sources situés hors du domaine. Il est toutefois plus compliqué de résoudre des problèmes non homogènes, des problèmes d'EDP à coefficients variables ou des problèmes non linéaires. Dans ces cas, on doit alors discrétiser le domaine, en général sans maillage et à l'aide des fonctions radiales. Ce n'est donc plus des méthodes "*boundary only*" et, en général, le problème de bord et le problème intérieur sont couplés, ce qui tend à diminuer l'intérêt de ces méthodes.

Malgré tous ces travaux et avancées sur les méthodes sans maillages, elles font toujours l'objet de plusieurs travaux de recherches. Elles n'ont pas encore atteint le degré de maturité et la robustesse de la MEF. Les méthodes sans maillage sont actuellement un grand domaine d'intérêt en mécanique numérique. Dans ce contexte, S. Zeze [17] a proposé une nouvelle méthode sans maillage utilisant les approximations de Taylor. A défaut de nom donné à cette méthode, nous la baptisons dans cette thèse "Taylor Meshless Method" (TMM).

La TMM appartient à la classe des méthodes sans maillages de type collocation, mais elle a été aussi inspirée de la méthode des équations intégrales. En effet dans cette méthode, l'EDP est résolue sous sa forme forte et seule la discrétisation de la frontière du domaine est nécessaire. Les fonctions de forme sont construites en faisant une approximation de Taylor développée en un point du domaine. Les conditions aux limites sont ensuite appliquées en utilisant un ensemble de points choisis sur la frontière. Ce qui fait de cette méthode une vraie méthode "*Boundary only*". Par rapport à la MFS, cette méthode a l'avantage de construire elle même ses fonctions de forme (sortes de solutions fondamentales dans la MFS), ce qui lui confère un plus large domaine d'application et lui permet de rester une vraie méthode "*boundary only*", même pour la résolution des problèmes à coefficients variables.

---

Les travaux effectués par S. Zeze [17, 18] ont montré une très bonne convergence de la TMM. C'est une méthode très précise avec une mise en place très simple basée uniquement sur des calculs de coefficients de Taylor. Tout comme la p-version, la qualité de la solution est améliorée en augmentant l'ordre de troncature de la fonction approchée. Avec cette méthode, on peut s'attendre à une méthode sans maillage très fiable et facile d'implémentation avec un gain significatif en flexibilité et en coût de calcul. Néanmoins à son niveau actuel, cette technique n'a été appliquée qu'à des problèmes linéaires et aucune analyse de convergence n'a été effectuée.

Le travail de cette thèse consiste à poursuivre ce développement, afin de faire de la TMM une méthode robuste et très efficace. Les différentes techniques présentées dans cette thèse étant originales, nous nous cantonnerons à des exemples d'application permettant de mettre en évidence la qualité des résultats et l'adéquation de notre approche. Les principaux objectifs du travail présenté dans ce mémoire s'articulent en trois points à savoir.

- L'élaboration d'une analyse mathématique de la TMM. Etant donné que les séries ont un domaine de validité au-delà duquel elles divergent, cette analyse mathématique se fera par une analyse de convergence des séries calculées par la TMM. La connaissance du domaine de convergence des séries calculées, renforcera la technique de résolution, dans le sens où, elle permettra de prédire si une résolution en multizone est nécessaire ou pas. Un de nos objectifs a donc été de définir un critère fiable d'approximation du domaine de convergence à partir de la solution approchée. Des techniques d'accélération de convergence seront aussi explorées.
- La mise en place d'une technique de raccord de polynômes de haut degré. La résolution de certains problèmes par la TMM nécessite de subdiviser le domaine en plusieurs sous domaines et d'appliquer la TMM sur chaque sous domaine (résolu-

tion multizone). Cependant il faudra assurer la continuité des séries aux interfaces entre les sous domaines. Notre travail a été de proposer une technique permettant d'assurer cette continuité.

- Application aux problèmes non linéaires. Nous avons couplé la TMM à la méthode de Newton pour résoudre des problèmes d'élasticité non linéaire. Ces travaux ont été réalisés en vue d'élargir le domaine d'application de la TMM. De plus la différentiation automatique sera introduite dans les codes afin de faciliter le calcul des coefficients de Taylor.

Nous organisons la présentation de la manière suivante.

Le premier chapitre est consacré à l'étude bibliographique et au positionnement de nos travaux. Il consiste à présenter et à discuter la méthode TMM, ses principales caractéristiques ainsi que les problèmes déjà résolus avec la TMM. Le domaine d'application sera étendu à l'élasticité linéaire. Dans le chapitre 2, nous proposons une technique de raccord des séries de Taylor. Le chapitre 3 sera consacré à l'analyse mathématique de la TMM et le chapitre 4 à la résolution des problèmes non linéaires.

# CHAPITRE 1

## **Etude bibliographique et positionnement du sujet**

Les méthodes numériques sont des outils indispensables pour la simulation des problèmes physiques et mécaniques. Ces méthodes permettent de faire une approximation des EDPs gouvernant ces problèmes. Une bonne méthode numérique doit être précise, robuste et facile d'utilisation avec un large domaine d'application. Actuellement en mécanique des solides, la méthode qui vérifie le mieux ces caractéristiques est la méthode des éléments finis (MEF). Cette méthode nécessite un maillage du domaine et une approximation est faite sur chaque élément. Cette méthode a fait ses preuves et de très nombreuses applications ont montré sa précision et sa robustesse.

Par ailleurs, d'autres méthodes connues sous le nom de "méthodes sans maillages" ont été développées. Contrairement à la MEF, ces méthodes construisent la solution approchée d'une EDP, en utilisant seulement un ensemble de points répartis dans le domaine et ceci sans la nécessité d'un maillage. Jusqu'à présent, aucune de ces méthodes n'a atteint la maturité de la MEF. Récemment dans [17], S. Zeze a proposé une nouvelle méthode sans maillage (la TMM), en utilisant des approximations en séries de

Taylor. Par rapport à la plupart des méthodes sans maillages déjà existantes, la TMM a l'avantage d'être une vraie méthode "Boundary only", c'est-à-dire ne nécessitant que la discrétisation de la frontière. De même, des applications faites ont montré qu'elle est très précise avec un coût de calcul relativement faible [17, 18]. Cependant, elle est limitée pour la résolution de certains problèmes et l'étude de sa robustesse n'a pas encore été explorée.

Dans ce premier chapitre, on verra une revue rapide des principales méthodes numériques, une étude bibliographique plus détaillée peut être trouvée par exemple dans les ouvrages suivants : [2, 19]. Ensuite, la TMM sera présentée en développant quelques applications nouvelles. Ces applications nous permettront de relever les insuffisances actuelles de la TMM et ainsi donc de présenter les motivations de nos travaux de thèse.

## **1.1 Etat de l'art**

### **1.1.1 Les méthodes basées sur des maillages**

La MEF est la plus utilisée en mécanique numérique. Plusieurs travaux ont prouvé son efficacité et sa robustesse. Dans cette méthode, l'EDP est résolue en divisant le domaine en de nombreux sous domaines appelés éléments. Il existe des règles de connectivité fixées entre ces éléments et chaque élément doit vérifier des propriétés bien définies [20–22]. Sur chaque élément, la solution est approchée sous forme de combinaison linéaire de polynômes de faibles degrés appelés fonctions de forme. Bien que cette méthode bénéficie d'une base mathématique très solide, sa mise en place semble parfois complexe et coûteuse. En effet pour des problèmes où la géométrie du domaine varie fortement, il faut refaire le maillage à chaque pas de calcul. Cette opération appelée remaillage est parfois difficile à maîtriser pour des problèmes tridimensionnels de grandes

déformations ou de propagation de fissure. D'autre part, du fait que l'interpolation polynomiale est de bas degré, il faut un maillage relativement fin pour obtenir une bonne convergence. Par conséquent, les opérations d'inversion de matrices et d'intégration sur tous les éléments engendrent de très grands coûts de calcul.

Une variante intéressante de la MEF est la méthode de la p-version où les fonctions de forme sont des polynômes de degré  $p$  quelconque. Elle a été proposée pour la première fois par Zienkiewicz et al [3] en 1970. Mais il a fallu attendre 1981 pour que Babuska et Szabo [23] écrivent une formulation mathématique rigoureuse de cette technique. Dans cette méthode, au lieu de remailler, le maillage initial est conservé et des noeuds sont ajoutés dans les zones d'intérêts. Dans ces zones, on effectue des interpolations polynomiales de haut degré. Cette technique est aussi utilisée pour éviter les maillages très fins. Ainsi, on peut avoir une bonne convergence avec des maillages relativement grossiers. Beaucoup de travaux de recherches se sont intéressés à cette méthode, même dans cette dernière décennie [24]. Ces travaux ont montré que la p-version est très précise et que la qualité de la convergence est améliorée en augmentant le degré d'interpolation (p-convergence). L'avantage principal de cette technique est le faible coût de maillage (on obtient une bonne convergence avec un maillage grossier). Néanmoins ce faible coût nécessite l'utilisation de polynômes d'interpolation de haut degré et donc un grand nombre de points de Gauss pour l'évaluation des intégrales sur chaque élément. Au final, cette méthode engendre un très grand coût de calcul et ceci même plus que dans la MEF et elle reste assez peu utilisée en pratique.

Une autre classe de méthodes a été proposée dans le but de réduire le coût de calcul lié à l'intégration. Ces méthodes proposent de n'utiliser la forme variationnelle (donc l'intégration) que sur la frontière. Ces méthodes sont appelées méthodes des équations intégrales ou "*Boundary Elements Methods*" (BEM) [13, 14]. Comme leur nom l'in-

dique, ces méthodes ne nécessitent que la discrétisation de la frontière. Ainsi, l'EDP est écrite sous forme intégrale sur la frontière et elle est vérifiée sous sa forme forte dans le domaine. Dans le domaine, la solution est écrite sous forme de combinaison linéaire de fonctions appelées "solutions fondamentales". Pour un problème donné, la connaissance des solutions fondamentales est une condition nécessaire pour sa résolution. Cette méthode a connu un très grand succès pour la résolution des problèmes homogènes tel que, le problème de Laplace ou en acoustique [25, 26]. Toutefois, elle semble limitée en présence de certains problèmes où les solutions fondamentales ne sont pas connues. C'est le cas des problèmes hétérogènes et non linéaires. Des travaux ont été effectués pour permettre la résolution de ces types de problèmes. Dans ces cas, la solution est la somme d'une solution particulière et d'une solution homogène. La solution homogène est calculée par la méthode BEM et la solution particulière sous forme d'une interpolation polynomiale ou de fonctions radiales faite dans le domaine. Des études ont montré que cette méthode n'est pas très efficace pour la résolution des problèmes non linéaires parcequ'il faut alors introduire des degrés de liberté à l'intérieur du domaine.

### **1.1.2 Les méthodes sans maillages**

La première méthode sans maillage fut introduite en 1977 avec la méthode Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) [10]. A l'origine, elle était destinée à la simulation des phénomènes astrophysiques non bornés tels que l'explosion des étoiles ou encore le mouvement des nuages de poussières. Le nombre de publications concernant cette méthode fut alors modeste et seules quelques améliorations furent apportées à cette période [11, 12], sans réelles études concernant la qualité de la solution obtenue pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

Par la suite plusieurs travaux de recherches se sont intéressés aux développements

de méthodes sans maillages. Ces méthodes diffèrent les unes des autres par l'interpolation effectuée pour la construction des fonctions de formes, la technique de résolution de l'EDP (formulation faible ou forte) ou la discrétisation du domaine. Ces méthodes peuvent donc être classées en plusieurs catégories. Dans cette section, nous nous intéressons à la forme de résolution de l'EDP. Ainsi nous distinguerons deux classes de méthodes sans maillages : les méthodes de type Galerkin (utilisant la forme faible de l'EDP) et les méthodes de type collocation (utilisant la forme forte de l'EDP).

### 1.1.2.1 Les méthodes sans maillages de type Galerkin

Ces méthodes sont une sorte d'évolution naturelle de la MEF. En effet, elles utilisent la formulation faible de l'EDP et très souvent elles nécessitent une partition du domaine (ceci sans une connectivité fixe entre les sous domaines). La première méthode sans maillage utilisant la formulation de Galerkin fut la "Méthode des éléments Diffus" introduite par Nayroles et al [4] en 1992. Dans cette méthode les fonctions de forme sont construites en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles. Bien qu'un maillage explicite ne soit pas nécessaire dans cette méthode, une subdivision du domaine est utilisée pour calculer numériquement les intégrales introduites par la formulation de Galerkin [27]. Toujours en utilisant la méthode des moindres carrés mobiles, Belytschko et al [5] ont proposé en 1994 "l'Elément Free Galerkin Method" (EFG) qui est une amélioration de la méthode des éléments diffus. Cette méthode utilise aussi un maillage implicite pour l'évaluation des intégrales numériques. Toutefois le coût de mise en place de ce maillage est négligeable. En effet ce maillage doit juste couvrir le domaine et n'est pas contraint de décrire la frontière de ce dernier. L'EFG a été beaucoup utilisée en mécanique des solides et plusieurs travaux ont prouvé sa précision [27–29]. Néanmoins la DEM et l'EFG engendrent un grand coût de calcul à travers l'évaluation des intégrales

numériques et l'évaluation des interpolations de type Shephard [30]. En s'inspirant de la "smoothed particles method" (SPH), Liu et al [31] ont développé en 1995 une autre classe de méthodes sans maillage de type Galerkin appelée la "Reproducing Kernel Particle Method". Contrairement à la DEM et à l'EFG, cette méthode construit les fonctions de forme sur tout le domaine, ce qui évite une décomposition du domaine pour l'évaluation des intégrales [32,33]. Par la suite d'autres méthodes sans maillage de type Galerkin ont été proposées. On peut citer la "Partition of Unity Finite Element Method" de Babuska et Melenk [6], la "Meshless Local Petrov-Galerkin method" de Atluri et Zhu [34], la méthode des éléments naturels (NEM) [35], la C-NEM [36] etc.

Bien que les méthodes sans maillage de type Galerkin utilisent des maillages implicites, il est à noter que, dans ces méthodes, seuls les noeuds sont considérés aux dépens des éléments. Ce qui leur permet de traiter des problèmes mal posés pour la MEF tels que les problèmes de grandes déformations et les problèmes de propagation de fissures. Néanmoins dans ces méthodes, l'intégration engendre des coûts de calcul importants. D'autre part, vu que le maillage implicite utilisé ne décrit pas correctement le domaine, ces méthodes nécessitent un grand nombre de points de Gauss pour avoir une bonne convergence. Ce qui est aussi une source de coût de calcul.

### 1.1.2.2 Les méthodes sans maillages de type collocation

Contrairement aux méthodes de type Galerkin, ces méthodes utilisent la forme forte de l'EDP. Ainsi aucune intégration numérique ne se présente dans leur formulation et par conséquent il n'y a pas besoin de maillage implicite. Leurs adeptes parlent parfois de "vraie méthode sans maillage" (*true meshless*).

En 1977 Liszka et Orkisz [7] furent les premiers à utiliser la formulation forte. Mais il a fallu attendre 1990 pour avoir une méthode robuste proposée par Kansa [8,9]. Dans

les méthodes sans maillages de type collocation, la recherche des fonctions de formes se fait avec des interpolations polynomiales ou des fonctions radiales.

Il existe une autre classe de méthodes de type collocation inspirées des BEM [37]. La première fut la méthode de la solution fondamentale (MFS) [15, 16]. L'efficacité de cette méthode a été prouvée à travers son application à des problèmes linéaires tels que l'équation de Laplace, l'équation d'Helmholtz, l'équation de Poisson, etc. [38–42]. L'application de cette méthode a été étendue aux problèmes non linéaires, en la couplant avec des méthodes itératives comme la méthode de Newton Raphson [43–45], ou à la méthode asymptotique numérique [46, 47]. Tout comme les méthodes BEM, la MFS n'utilise que des points sur la frontière du domaine. Cependant, elle nécessite la connaissance des solutions fondamentales. Au cours de cette dernière décennie, des variantes de la MFS ont été proposées pour résoudre les problèmes dont les solutions fondamentales sont inconnues. L'une de ces techniques est la "Analog Equation Method" (AEM) [43, 48–50]. L'idée de cette méthode est d'introduire des fonctions de forme qui sont solutions d'une équation (appelée équation analogue), extraite de l'équation à résoudre.

Les méthodes sans maillages de type collocation ont l'avantage d'être rapides et simples d'implémentation. Généralement elles ont du mal à approcher des conditions aux limites de type Neumann. Plusieurs techniques ont été développées pour rendre possible cette application. Par exemple l'utilisation des noeuds fictifs, les interpolations de type Hermite. Les méthodes de type collocation sont en général instables et peu robustes. A tort ou à raison, ceux qui s'intéressent à des problèmes industriels complexes utilisent rarement ce type de méthode. Il y a quelques exceptions, voir par exemple [51].

## 1.2 La Taylor Meshless Method (TMM)

La TMM appartient à la classe des méthodes sans maillages de type collocation. Dans le domaine, l'EDP est satisfaite de manière exacte ou quasi-exacte sous sa forme forte en utilisant des approximations polynomiales de haut degré comme dans la méthode de la p-version des éléments finis. Le but de cette opération est d'allier la précision de la méthode de la p-version à la facilité d'utilisation des méthodes sans maillages. La TMM est aussi inspirée des méthodes des équations intégrales dans le sens où elle ne nécessite que la discrétisation de la frontière. Contrairement à ces méthodes, dans la TMM les fonctions de formes sont construites directement à partir de l'EDP. Par conséquent, le calcul des fonctions de formes est possible pour tous les types de problèmes et ceci même dans le cas des problèmes non homogènes. Tous ces facteurs font de la TMM une vraie méthode "boundary only". Les conditions aux limites à la frontière sont assurées en utilisant des techniques de collocation, dans le but d'éviter les coûts de calcul liés à l'intégration.

Dans cette section, une brève présentation de la TMM sera faite. La description complète pourrait être vue dans [17]. La TMM est complètement établie en deux étapes : la construction des fonctions de forme et l'application des conditions aux limites.

### 1.2.1 Calcul des fonctions de forme

L'idée principale de la TMM est d'utiliser des fonctions de forme polynomiales de haut degré comme dans la p-version. Pour cela l'EDP est résolue sous sa forme forte en faisant une approximation en série de Taylor. Pour illustrer la technique, considérons le

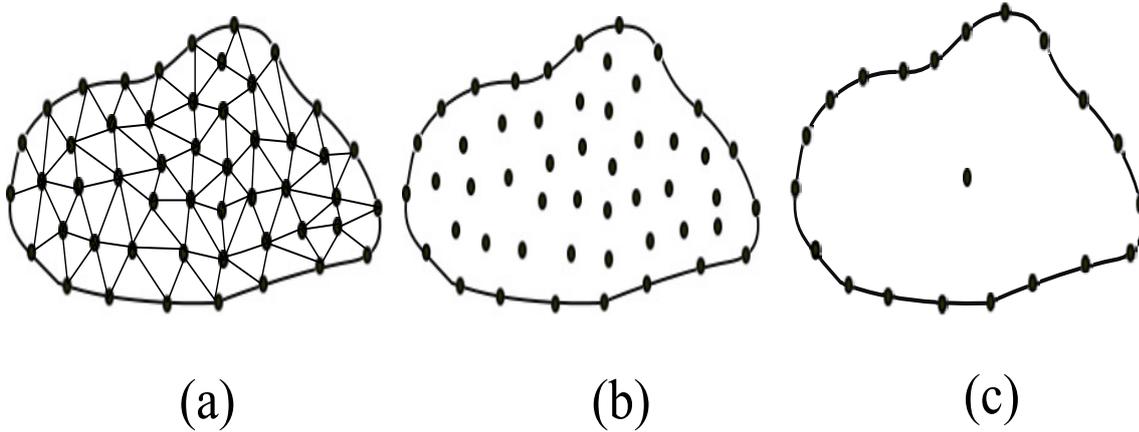


FIG. 1.1 – Discretisation du domaine pour trois différentes méthodes : (a) la méthode des éléments finis, (b) les méthodes sans maillages (pour les méthodes de type Galerkin, il faut aussi un maillage pour l'intégration) et (c) la Taylor meshless method.

problème 2D suivant (dans cette thèse nous ne traiterons que des cas 2D) :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = u^d & \text{sur } \Gamma_u \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_n \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  et de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_n$  et  $L$  est un opérateur différentiel. Les conditions aux limites peuvent être de type Dirichlet, Neumann ou mixte.

La solution  $u$  est approchée par une série de Taylor tronquée à un ordre  $p$  :

$$u^h(x, y) = \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^n u_{n-i,i} x^{n-i} y^i = \sum_{k=1}^p \langle X^k \rangle \{u_k\} \quad (1.2)$$

où la base polynomiale est construite à partir du triangle de Pascal :

$$\begin{aligned} \langle X^i \rangle &= \langle x^i, x^{i-1}y, \dots, xy^{i-1}, y^i \rangle \quad \text{et} \\ \{u_i\}^T &= \langle u_{i,0}, u_{i-1,1}, \dots, u_{1,i-1}, u_{0,i} \rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

Chaque vecteur  $\{u_i\}$  contient les coefficients associés au monôme  $\langle X^i \rangle$ . Tous ces vecteurs constituent l'ensemble des inconnues du problème. Pour  $i$  fixé, le vecteur  $\{u_i\}$  est composé de  $i + 1$  éléments. Ainsi pour un degré de troncature  $p$ , le nombre total d'inconnues est  $N_{inc} = (p + 1)(p + 2)/2$ .

Pour plus de clarté, supposons que l'opérateur différentiel est d'ordre 2 à coefficients constants. Son action sur la forme approchée (1.2) conduit à un polynôme de type (1.2), mais de degré  $p - 2$ . Ainsi on peut écrire :

$$Lu^h(x, y) = \sum_{k=0}^{p-2} \langle X^k \rangle [L^k] \{u_{k+2}\} \quad (1.4)$$

$[L^k]$  est la matrice obtenue par l'action de l'opérateur différentiel  $L$  sur le monôme  $\langle X^k \rangle$  (voir thèse de S. Zeze [17] ou annexe A). D'autre part la fonction  $f$  de l'EDP (1.1) étant une fonction connue, nous pouvons calculer son approximation en série de Taylor :

$$f \cong \sum_{k=0}^{p-2} \langle X^k \rangle \{f_k\} \quad (1.5)$$

La résolution du problème (1.1) revient donc à la résolution du problème discret suivant :

$$\sum_{k=0}^{p-2} \langle X^k \rangle [L^k] \{u_{k+2}\} = \sum_{k=0}^{p-2} \langle X^k \rangle \{f_k\} \quad (1.6)$$

Une identification suivant l'ordre des monômes  $\langle X^k \rangle$  conduit à la famille d'équations suivante :

$$[L^k]\{u_{k+2}\} - \{f_k\} = 0 \quad \forall k; 1 \leq k \leq p-2 \quad (1.7)$$

Pour chaque  $k$  fixé, la relation (1.7) est un système linéaire de  $k+1$  équations pour  $k+3$  inconnues (les éléments du vecteur  $\{u_{k+2}\}$ ). On peut donc déterminer  $k+1$  éléments du vecteur  $\{u_{k+2}\}$  en fonction des deux autres. Pour définir ces deux coefficients, la TMM s'inspire du théorème de Cauchy qui stipule que : "l'équation  $\partial^2 u / \partial y^2 = -f - \partial^2 u / \partial x^2$  a une solution unique si on connaît  $u(x, 0)$  et  $\partial u / \partial y(x, 0)$ ". L'idée est de considérer notre EDP à résoudre comme une EDO en  $y$ . Dans le cas d'une approximation de la forme (1.2), les fonctions  $u(x, 0)$  et  $\partial u / \partial y(x, 0)$  sont données par leur coefficients de Taylor  $u_{k0}$  et  $u_{k-1,1}$  respectivement, qui sont les deux premiers éléments du vecteur  $\{u_k\}$ . Le principe est donc d'exprimer la forme approchée (1.2) en fonction de ces deux variables, qu'on appellera dans la suite "variable principale" :

$$\{v^k\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{k0} \\ u_{k-1,1} \end{array} \right\}. \quad (1.8)$$

A partir du système (1.7), on peut ainsi écrire :

$$\{u_{k+2}\} = [\alpha_{k+2}]\{v^{k+2}\} + \{\beta_{k+2}\} \quad \forall k; 1 \leq k \leq p-2 \quad (1.9)$$

En remplaçant (1.9) dans (1.2) on obtient :

$$u^h(x, y) = \sum_{k=1}^p \langle X^k \rangle ([\alpha_k]\{v^k\} + \{\beta_k\}) = \sum_{i=1}^p P_i(x, y)\{v^i\} + P^0(x, y) \quad (1.10)$$

Les polynômes  $(P_i)_{1 \leq i \leq p}$  et  $P^0$  forment une base de l'ensemble des solutions de l'EDP (1.1). Ainsi la solution approchée écrite sous la forme (1.10) vérifie l'EDP (1.1) partout dans le domaine  $\Omega$  et même à l'extérieur. Mais elle ne vérifie pas forcément les conditions aux limites. L'application des conditions aux limites permettra de déterminer les vecteurs  $\{v^i\}$  correspondants au problème (1.1) et ainsi donc assurer l'unicité de la solution.

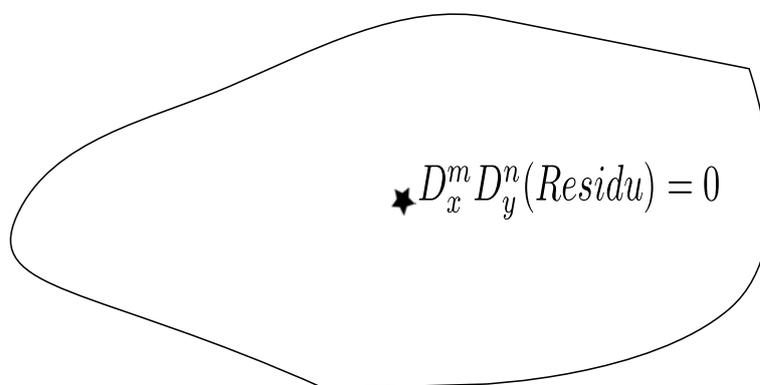


FIG. 1.2 – *Discrétisation de l'EDP : pour un opérateur différentiel d'ordre 2 on annule les dérivées du résidu en un point jusqu'à l'ordre  $p - 2$  ( $0 \leq m + n \leq p - 2$ ).*

La méthodologie de résolution est la même dans le cas des EDP à coefficients variables. La résolution de l'EDP sous sa forme forte par une approximation de Taylor équivaut à l'annulation des coefficients de Taylor du résidu  $(Lu - f)$  en un point donné du domaine (fig 1.2), jusqu'à l'ordre  $p - l$ , où  $l$  est l'ordre de l'opérateur différentiel. Tout comme dans le cas des EDP à coefficients constants, l'annulation des coefficients du résidu pour les EDP à coefficients variables conduit à un système d'équations de la forme (1.7). Les variables actives ou variables principales sont définies en utilisant le théorème de Cauchy énoncé plus haut (fig 1.3).

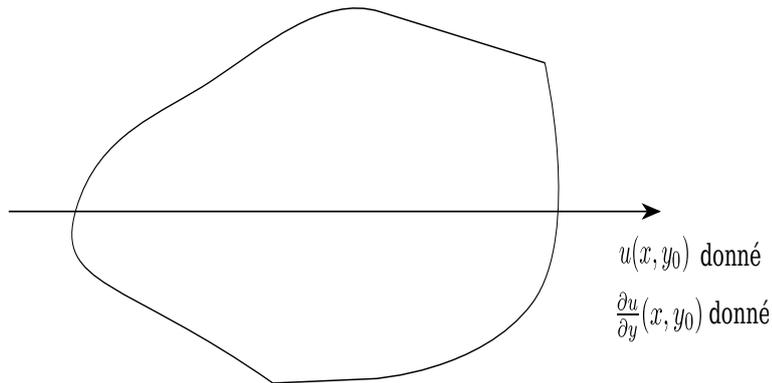


FIG. 1.3 – L'EDP est considérée comme une équation différentielle ordinaire en  $y$ . Après résolution du problème discret, les données  $u(x, y_0)$  et  $\partial u / \partial y(x, y_0)$  constituent, les variables actives sur lesquelles on appliquera les conditions aux limites.

### 1.2.2 Application des conditions aux limites

Pour éviter les intégrations numériques, dans la TMM les méthodes de collocation ont été préférées aux méthodes de Galerkin. On choisit un ensemble de points sur la frontière et l'idée est de minimiser l'erreur entre la solution approchée et les données aux limites en ces points. Dans un premier temps, la technique de collocation par points a été utilisée. L'inconvénient de cette technique est qu'elle impose que le nombre de points de collocations choisis sur la frontière soit exactement égal au nombre de variables principales (l'ensemble des vecteurs  $\{v^i\}$ ). Parfois les informations apportées par ces points sont insuffisantes pour décrire correctement les conditions aux limites. Les travaux de S. Zeze [18] ont montré que la technique de collocation par point conduit parfois à des matrices mal conditionnées et l'algorithme est très souvent divergent.

Pour surmonter cette difficulté, il a été décidé d'appliquer les conditions aux limites en moyenne. Le but est d'avoir la liberté dans le choix des points de collocations à la frontière, et ceci indépendamment du nombre de variables principales. Pour cela, la technique des moindres carrés a été utilisée [52]. On choisit un ensemble de points sur

la frontière et il s'agit de minimiser la fonction :

$$J(v) = \frac{1}{2} \left( \sum_{\underline{x}_j \in \Gamma_u} \|u^h(\underline{x}_j) - u^d(\underline{x}_j)\|^2 + \sum_{\underline{x}_j \in \Gamma_n} \left\| \frac{\partial u^h}{\partial n}(\underline{x}_j) - g(\underline{x}_j) \right\|^2 \right). \quad (1.11)$$

Cette minimisation conduit à un système linéaire  $KV = F$ , où  $K$  est une matrice inversible symétrique. La résolution de ce système donne le vecteur  $V$  et par conséquent, la solution du problème (1.1).

Il faut évidemment que le nombre de points choisis à la frontière soit supérieur au nombre de variables principales, sinon la méthode des moindres carrés sera sans effet et les résultats seront similaires à ceux obtenus avec la méthode de collocation simple.

TAB. 1.1 – Tableau de synthèse des différentes méthodes décrites dans cette revue bibliographique.

Méthodes	Maillages	Intégration numérique	Fonctions de formes	Avantages	Inconvénients
MEF classique	Oui, nécessite un maillage fin pour une bonne convergence	Oui.	Polynômes de bas degré.	Flexible. Très bien établie. Robuste.	Nombre de degrés de liberté très grand. Maillage et remaillage compliqués.
p-version des EF	Oui, maillage plus grossier.	Oui, beaucoup plus qu'en EF.	Polynômes de haut degré.	Très précis. p-convergence.	Coût de l'intégration si $p$ grand.
Equations Intégrales (BEM)	Oui sur la frontière. Points dans le domaine.	Oui sur la frontière.	Polynômes de bas degré. Fonctions radiales.	Discretise uniquement le bord. Peu de ddl.	Domaines d'application particuliers.
Meshless Galerkin	Non, points.	Oui.	MLS, Fonctions radiales...	Pas de maillage.	Coût de l'intégration.
Meshless collocation	Non, points.	Non.	Solutions fondamentales, fonctions radiales, MLS, ...	Pas de maillage.	Moins robuste. Peu d'applications réelles.
TMM	Non, points.	Non.	Polynômes calculés directement de l'EDP.	A discuter.	A discuter.

### 1.3 Quelques applications de la TMM

De part sa formulation, la TMM est une méthode facile à implémenter. En effet elle se réduit à des calculs de coefficients de Taylor. Comme la plupart des méthodes sans maillages de type collocation, la TMM évite l'intégration numérique et donc engendre des coûts de calcul faible. La précision de cette méthode a été montrée dans [17] à travers son application aux problèmes de Laplace et d'Helmholtz. Il a été remarqué qu'elle conduit à de très bonnes convergences et que la convergence est améliorée en augmentant le degré comme dans la p-version des éléments finis.

Toutefois la robustesse de cette technique n'a pas encore été bien établie. Dans cette partie, nous reprenons les problèmes de Laplace et d'Helmholtz, mais nous nous intéressons à la stabilité de la TMM par rapport à la géométrie du domaine d'étude ou par rapport à la présence d'une singularité. Pour finir ce chapitre, nous présenterons des applications de cette méthode aux problèmes d'Elasticité linéaire.

#### *Problème de Laplace*

Considérons l'équation de Laplace sur le disque unité avec des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega = \{(x, y) / x^2 + y^2 = 1\} \\ u(\underline{x}) = u_o(\underline{x}) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

La solution exacte de ce problème est  $u_o(\underline{x})$ . Cette solution admet une singularité en  $\underline{x}_0 = [x_0, y_0]$ . Nous nous intéressons à l'influence de la position du point de singularité sur la vitesse de convergence. La convergence est évaluée par l'erreur relative définie par :

$$E_p(\underline{x}) = \frac{|u(\underline{x}) - u^h(\underline{x})|}{|u(\underline{x})|} = \frac{|u(\underline{x}) - \sum_{i=0}^p \langle X^i \rangle \{u_i\}|}{|u(\underline{x})|}$$

Résoudre ce problème par la TMM revient à annuler les coefficients de Taylor du résidu  $R(x, y) = \Delta u$ .

**Exemple pour un ordre d'approximation  $p = 3$ .**

Pour  $p = 3$ , en développant en  $[0, 0]$ , l'inconnue du problème s'écrit :

$$u(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \quad (1.13)$$

Le résidu de l'équation de Laplace s'écrit donc :

$$R(x, y) = 2(a_{20} + a_{02}) + 2(3a_{30} + a_{12})x + 2(a_{21} + 3a_{03})y \quad (1.14)$$

Annuler les coefficients de Taylor du résidu, revient à écrire :

$$\begin{cases} R(0, 0) = a_{20} + a_{02} = 0 \\ R'(0, 0) = 3a_{30} + a_{12} = 0 \\ R''(0, 0) = a_{21} + 3a_{03} = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

La prise en compte des trois équations (1.15) permet de réduire le nombre de fonctions de forme de 10 à 7 :

$$u(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}(x^2 - y^2) + a_{11}xy + a_{30}(x^3 - 3xy^2) + a_{21}(x^2y - \frac{1}{3}y^3) \quad (1.16)$$

Sous forme vectorielle on a :

$$u(x, y) = a_{00} + \langle x, y \rangle \begin{Bmatrix} a_{10} \\ a_{01} \end{Bmatrix} + \langle x^2 - y^2, xy \rangle \begin{Bmatrix} a_{20} \\ a_{11} \end{Bmatrix} + \langle x^3 - 3xy^2, x^2y - \frac{1}{3}y^3 \rangle \begin{Bmatrix} a_{30} \\ a_{21} \end{Bmatrix} \quad (1.17)$$

Cette dernière écriture fait apparaître les vecteurs  $\{v^i\}$  ainsi que les fonctions de forme. Une fois ces fonctions de forme connues, les vecteurs  $\{v^i\}$  sont déterminés en appliquant les conditions aux limites. Pour cela des points sont choisis sur la frontière du disque comme sur la figure 1.4. Des tests ont montré que l'on obtient une meilleure convergence en choisissant ces points de manière régulière. D'autres tests ont montré qu'il existe un nombre minimal de points de collocation au delà duquel la convergence est stable (voir [17]). Dans nos travaux, nous partons sur cette base en choisissant des points de manière régulière et le nombre minimal de points qui correspond pour un ordre  $p$  à  $M = 4 * p$ .

La figure 1.5 présente l'évolution de l'erreur en fonction du degré pour deux problèmes différents : dans un premier cas où la singularité  $\underline{x}_0 = [1.2, 0.3]$  est proche du bord du domaine et dans un autre où elle est plus éloignée  $\underline{x}_0 = [2, 0.3]$ . Dans les deux cas, on voit qu'il y a une convergence exponentielle avec le degré (p-convergence), comme pour la p-version des éléments finis [23]. Néanmoins la convergence est beaucoup plus lente si la singularité est proche du domaine, avec une erreur de l'ordre de  $10^{-2}$  dans ce cas pour un degré  $p = 30$ , alors qu'elle est de l'ordre de  $10^{-10}$  avec une singularité en  $\underline{x}_0 = [2, 0.3]$ . Ces résultats montrent clairement qu'il y a une influence de la position de singularité sur la qualité de la TMM. Cette influence se manifeste beaucoup plus lorsque la singularité est très proche du bord. On peut donc prédire que la méthode proposée aura du mal à résoudre les problèmes avec des coins ou des pro-

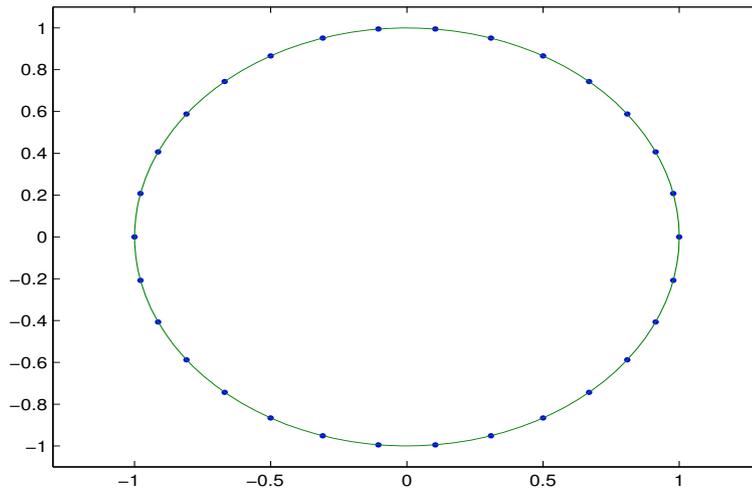


FIG. 1.4 – Problème de Dirichlet : équation de Laplace sur un disque (1.12). Discretisation de la frontière.

blèmes avec des singularités dans le domaine (tels que les problèmes de fissures). Un but de nos travaux sera de détecter ces singularités et de renforcer la TMM de manière à pouvoir résoudre correctement ces problèmes.

### ***Problème d’Helmholtz***

Considérons le problème d’Helmholtz sur un rectangle :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{dans } \Omega = \{(x, y) / -l \leq x \leq l \text{ et } 0 \leq y \leq h\} \\ u(x, 0) = u(x, h) = 0 \\ u(\pm l, y) = \sin\left(\frac{\pi}{h}y\right) \end{cases} \quad (1.18)$$

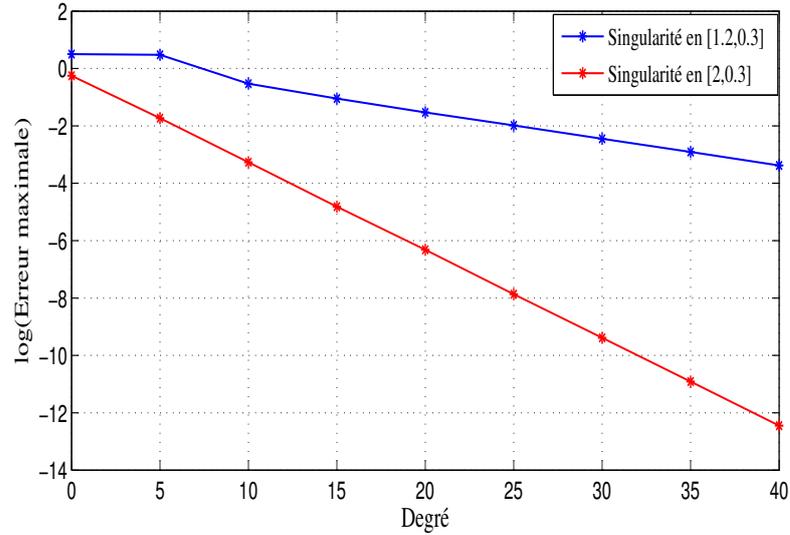


FIG. 1.5 – Problème de Dirichlet : équation de Laplace sur un disque (1.12) avec deux cas, selon la position de la singularité  $\underline{x}_0 = [x_0, y_0]$ . On observe la  $p$ -convergence comme dans la  $p$ -version des éléments finis. La qualité de la convergence dépend aussi de la position de la singularité.

La solution exacte de ce problème est :

$$u(x, y) = \frac{\cosh\left(x\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{h^2}}\right)}{\cosh\left(l\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{h^2}}\right)} \sin\left(\frac{\pi}{h}y\right) \quad (1.19)$$

Ici nous nous intéressons à l'influence de la longueur du rectangle sur la convergence de la TMM, dans le cas d'une largeur  $h = 4$ . Dans le tableau 1.2, on présente le logarithme de l'erreur pour deux longueurs de structures différentes. On remarque que, comme dans le cas du problème de Laplace, on a  $p$ -convergence. Mais la convergence est moins bonne lorsque la structure est plus longue, car dans ce cas les couches limites sont plus marquées.

Sur la figure 1.6, les solutions exacte et approchée sont représentées pour la longueur  $l = 30$  et un degré  $p = 20$ . La convergence est bonne à l'intérieur du domaine et devient

TAB. 1.2 – Logarithme de l'erreur maximale pour le problème d'Helmholtz (1.18) en fonction du degré  $p$ .

$p$	5	10	15	25	35	45	60
$l=5$	-0.6042	-1.6735	-3.6802	-6.8653	-5.3546	-5.7254	-5.8298
$l=30$	-0.2418	-0.3195	-0.4843	-0.8174	-1.2566	-2.0848	-4.1788

mauvaise lors qu'on s'approche du bord. Ceci fait penser à l'existence d'un domaine de convergence au delà duquel la solution est mal approchée par les séries de Taylor. Une manière de mieux approcher cette solution serait de résoudre le problème par sous domaines, ce qui sera discuté au chapitre 2. D'après le tableau 1.2, on notera néanmoins qu'on peut obtenir une solution très précise si on choisit un degré très élevé ( $p = 60$ ).

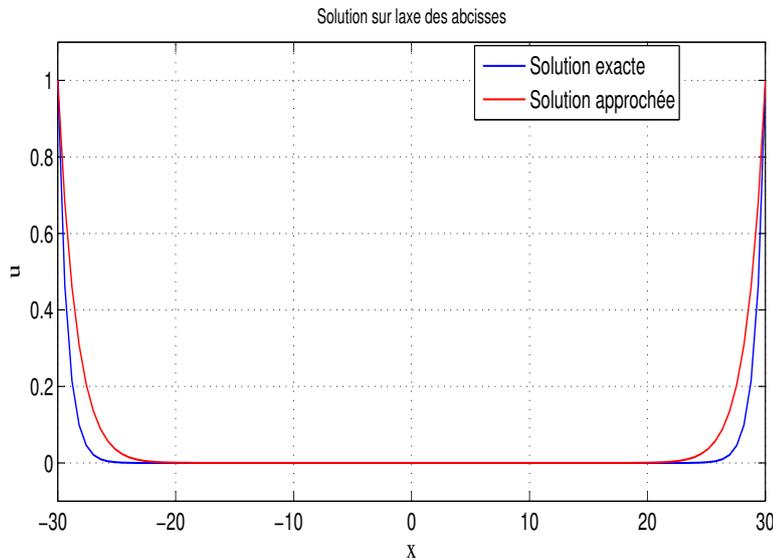


FIG. 1.6 – Problème de Dirichlet : équation d'Helmholtz (1.18) dans un rectangle, degré  $p = 20$ ,  $l = 30$ . Solution sur l'axe des abscisses ( $y = 0$ ). Présence de couches limites pour la structure allongée.

## 1.4 Résolution des problèmes d'élasticité linéaire.

Considérons un matériau élastique linéaire isotrope non homogène occupant un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . En l'absence de forces volumiques, les équations d'équilibre se ramènent aux équations de Navier :

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)\text{grad}(\text{div}(\underline{u})) + \mu\Delta\underline{u} = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases} \quad (1.20)$$

où  $\underline{u}$  est le vecteur déplacement et  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes élastiques. La solution générale de ce problème est donnée par Muskhelishvili [53] :

$$2\mu\underline{u} = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (1.21)$$

où  $\phi(z)$  et  $\psi(z)$  sont deux fonctions holomorphes appelées fonctions potentiel complexe de la variable  $z = x + iy$  et  $\kappa$  s'exprime en fonction du coefficient de Poisson ( $\kappa = 3 - 4\nu$  en déformation plane).

Pour résoudre ce problème par la TMM, l'inconnue  $\underline{u}$  est approchée sous forme de série de Taylor :

$$\underline{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=0}^p \langle X^k \rangle \{u_x^k\} \\ \sum_{k=0}^p \langle X^k \rangle \{u_y^k\} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^p [X_2^k] \{u^k\} \quad (1.22)$$

avec

$$\{u^k\} = \begin{Bmatrix} \{u_x^k\} \\ \{u_y^k\} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad [X_2^k] = \begin{bmatrix} \langle X^k \rangle & 0 \\ 0 & \langle X^k \rangle \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

La résolution directe de l'équation de Navier avec cette forme approchée conduit à des fonctions de formes polynomiales. Et ces fonctions de formes forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation (1.20). Ensuite les conditions aux limites sont appliquées pour déterminer la solution du problème. Une résolution détaillée de cette équation par la TMM est présentée dans l'annexe B.

### Exemple1

Pour valider la TMM en élasticité linéaire, une comparaison est faite entre la solution analytique et la solution exacte. Dans cet exemple, les conditions aux limites considérées sont de type Dirichlet. Elles sont telles que la solution analytique est de la forme(1.21). Nous étudions deux problèmes : la solution analytique du premier est polynomiale avec  $\psi(z) = z^5 + z$  et la deuxième rationnelle avec  $\psi(z) = 1/(z - z_0)$ , et  $\phi(z) = 0$ . Cette dernière présente une singularité en  $z_0$ . Pour ces deux problèmes, le domaine est le disque de rayon 1.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 1.7 et 1.8. La figure 1.7 montre l'erreur maximale sur le cercle intérieur de rayon  $r = 0.9$  pour les deux problèmes. On remarque que comme dans le cas du problème d'Helmholtz et de Laplace, la convergence s'améliore avec le degré. Cependant pour la solution de type polynomiale, la meilleure convergence possible est atteinte dès le degré 5, ce qui représente le degré de la solution analytique. Ce résultat n'est pas étonnant car en effet nous faisons une approximation de type polynomiale. Par conséquent pour le degré de troncature  $p = 5$ , on tombe exactement sur la solution analytique. Au delà de ce degré on a le même poly-

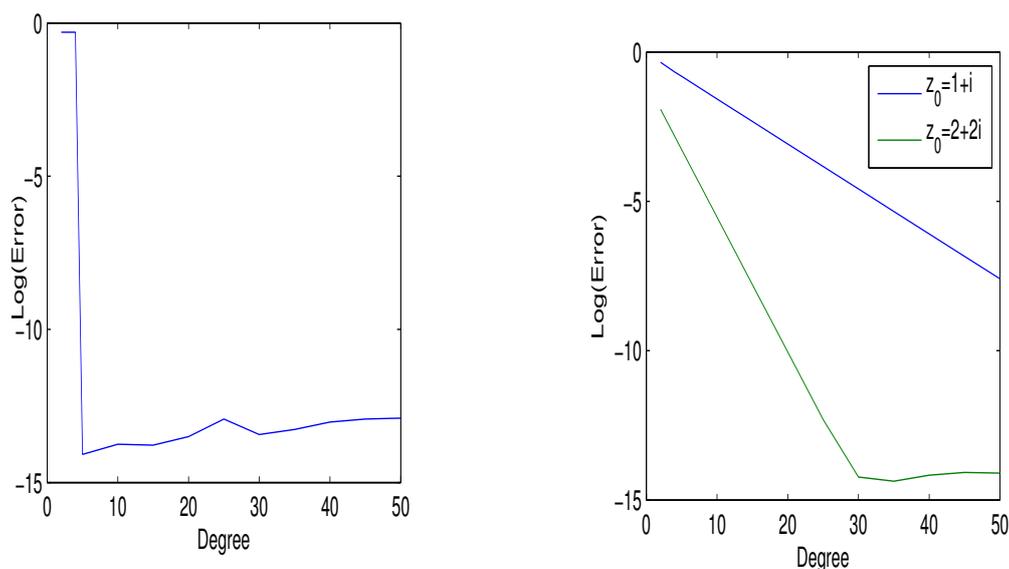


FIG. 1.7 – Problème de Dirichlet en élasticité linéaire (1.20). A gauche, la solution analytique est un polynôme et à droite, c'est une fonction rationnelle. On remarque que la TMM arrive à approcher de manière quasi exacte le polynôme à partir du degré  $p = 5$ . Il y a  $p$ -convergence comme dans le cas du problème de Laplace. Pour la solution rationnelle, la qualité de la convergence dépend de la position du pôle de la fonction rationnelle.

nôme avec de toutes petites erreurs qui s'y ajoutent. Pour la solution de type rationnel, le test a été effectué pour deux singularités différentes. Comme dans le cas du problème de Laplace, on remarque que la convergence dépend de la position de la singularité. On a une meilleure convergence lorsque la singularité est éloignée de la frontière du domaine.

Sur la figure (1.8), on présente la répartition de l'erreur dans le domaine pour la solution de type rationnel. Elle a été représentée pour la singularité en  $z_0 = 1 + i$ . Cette figure vient confirmer les remarques précédentes. On remarque que l'erreur est presque uniforme dans tout le domaine sauf à proximité de la singularité où elle augmente.

La figure 1.9 présente l'influence du point de développement sur la qualité de la

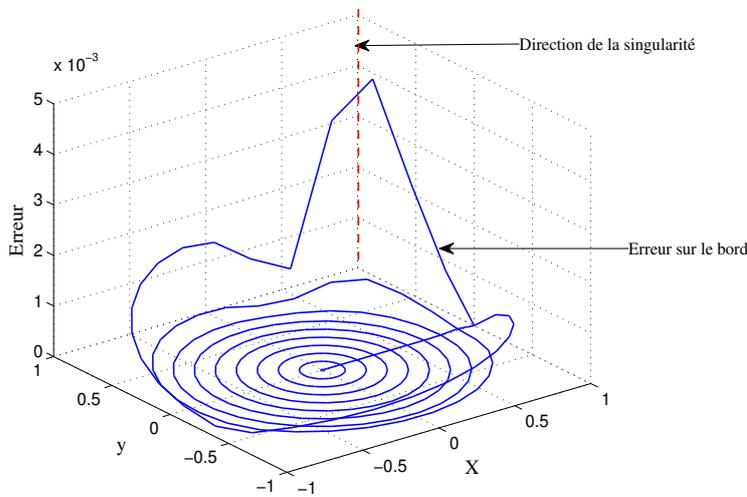


FIG. 1.8 – Distribution de l'erreur dans le domaine pour le problème d'Elasticité linéaire avec une singularité en  $[1, 1]$ . L'erreur est presque uniforme dans le domaine sauf à proximité de la singularité où elle augmente.

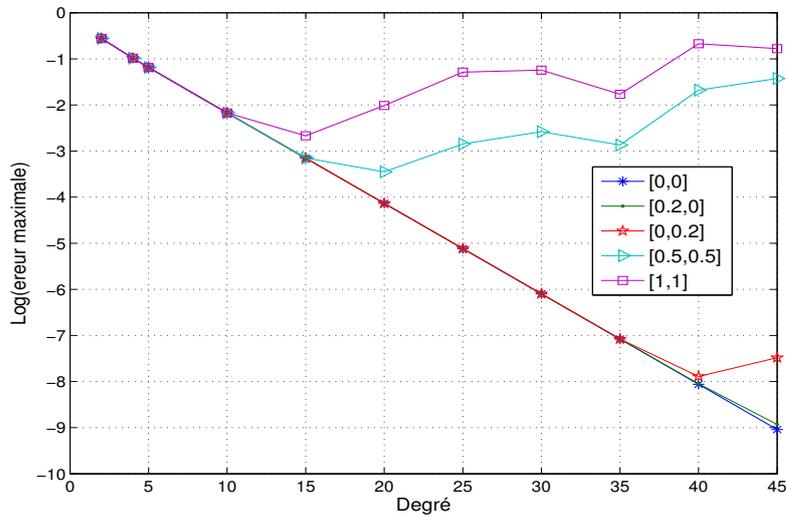


FIG. 1.9 – Problème de Dirichlet en élasticité linéaire (1.20), solution rationnelle. Influence du point de développement sur la qualité de la convergence. La méthode est stable par rapport au point de développement.

convergence. On remarque que la méthode est stable par rapport à la position du point de développement de la série approchée. En effet une petite variation de ce point influe peu sur la convergence. Cependant, cette influence est plus marquée lorsque le point de développement s'éloigne du centre du domaine. Nous verrons dans le chapitre 3, que ceci est dû au domaine de convergence, qui est limité par la première singularité.

**Exemple2 : étude d'une poutre chargée à l'extrémité**

A présent nous étudions le problème d'une poutre chargée à l'extrémité (fig 1.10). Les conditions aux limites de ce problème sont mixtes. Sur la partie  $\Gamma_u$  les conditions aux limites sont de type Dirichlet et sur  $\Gamma_n$  elles sont de type Neumann. La solution analytique de ce problème est bien connue et est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P(L-x)y}{I} \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2I}[c^2 - y^2] \end{aligned} \quad (1.24)$$

et

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{Py}{6EI}[3x(2L-x) + (2+\nu)(y^2 - c^2)] \\ u_y &= \frac{P}{6EI}[x^2(3L-x) + 3\nu(L-x)y^2 + (4+5\nu)c^2x] \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le moment est donné par  $I = 2c^3/3$ . Nous avons résolu ce problème avec la TMM et les résultats ont été comparés avec la solution analytique pour :  $P = 1$ ,  $E = 1000$ ,  $c = 1$ ,  $L = 12$  et  $\nu = 0,3$ .

Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 1.11 et 1.12. On observe une très bonne convergence. L'erreur est de l'ordre de  $10^{-3}$  à l'ordre  $p = 5$ . On a de la p-convergence comme pour le cas de Laplace. Cet exemple vient valider la capacité de

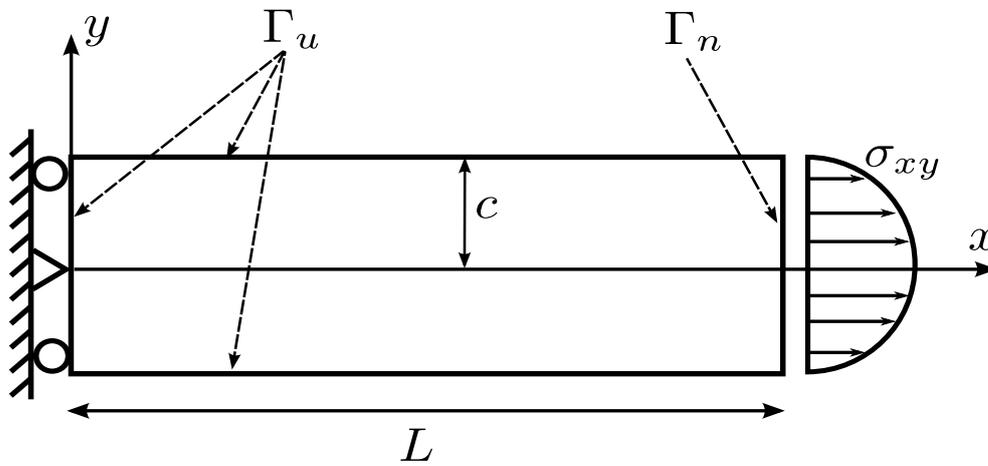


FIG. 1.10 – Poutre chargée à l'extrémité.

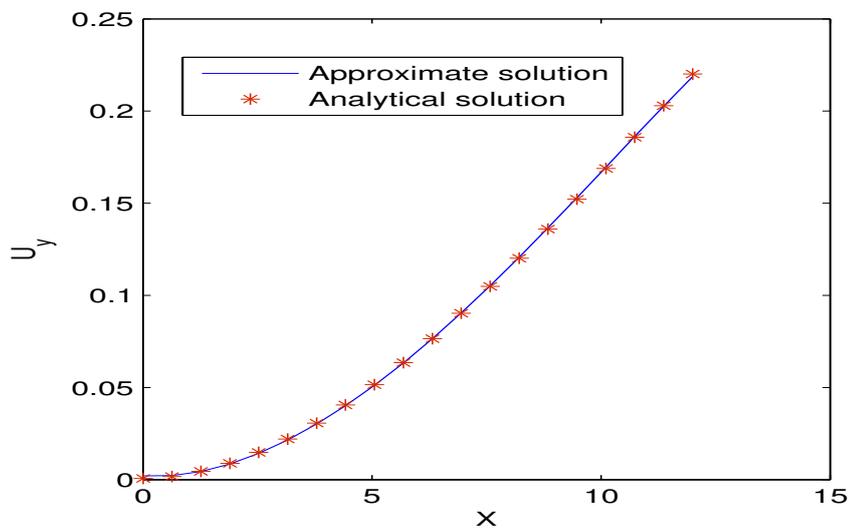


FIG. 1.11 – Problème de la poutre chargée à l'extrémité : solution approchée ( $p = 10$ ) et solution exacte sur la surface supérieure ( $y = c$ ). Elle coïncide bien avec la solution exacte.

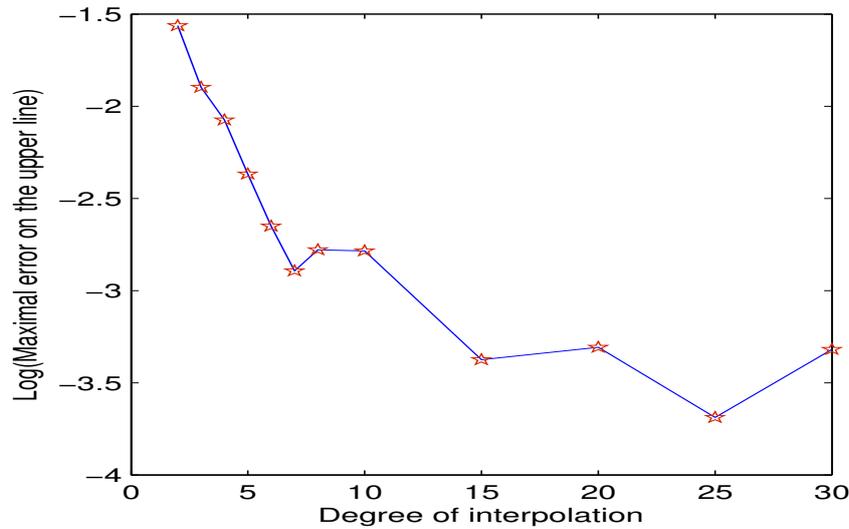


FIG. 1.12 – Problème de la poutre chargée à l’extrémité : évolution de l’erreur en fonction du degré d’approximation.

la TMM à résoudre des problèmes avec des conditions aux limites mixtes.

Les résultats obtenus dans cette section montrent que la TMM est une technique précise. Bien qu’elle n’ait pas encore été appliquée à de nombreux problèmes mécaniques, les tests effectués pour le moment font d’elle une méthode prometteuse.

## 1.5 Coût de calcul de la TMM

Dans cette section, nous faisons une comparaison de la TMM avec la MEF classique. Quatre types d’éléments seront considérés : triangulaires et quadrangulaires avec des interpolations linéaires et quadratiques. Le problème considéré est le problème de Laplace avec une singularité (1.12).

Généralement dans les méthodes de calcul, les tâches les plus coûteuses sont le calcul d’intégrales numériques et l’inversion de matrices. Comme toutes les méthodes meshless collocation, la TMM évite l’intégration numérique, donc a un temps de calcul

faible. Dans [17] (page 33), une comparaison du temps de calcul de la TMM et de la p-version a été faite en 1D. Les résultats ont montré que la TMM est plus rapide que la p-version et que le temps de calcul augmente à peu près linéairement avec le degré.

Dans la TMM, la matrice principale à inverser est la matrice  $K$  obtenue après application des conditions aux limites. Il est bien connu qu'il existe une relation entre le nombre de degrés de liberté ( $N_{ddl}$ ), la largeur de bande de la matrice  $N_{bande}$  et le temps CPU. Avec les solveurs classiques comme Choleski ou la factorisation LU, le temps CPU est  $O(NN_{bande}^2)$  pour une matrice creuse comme c'est le cas dans la MEF. Néanmoins ce temps est réduit avec les nouveaux solveurs [54, 55], il dépend de la numérotation des noeuds. Ainsi une comparaison directe du temps CPU semble vraiment complexe à mettre en oeuvre et à interpréter.

Dans cette section, nous faisons une comparaison de la TMM avec la MEF en terme de nombre de degrés de liberté. Nous nous limitons à des maillages réguliers.

TAB. 1.3 – Comparaison de la TMM et de la MEF avec des éléments triangulaires (T) ou quadrangulaires (Q) et des interpolations linéaires et quadratiques. Le tableau présente le nombre de degrés de liberté nécessaires pour obtenir une erreur relative de  $10^{-2}$  ou  $10^{-4}$ . Les valeurs entre parenthèses sont les erreurs réellement obtenues.

Type d'elements		Singularité à [2,0.3]		Singularité à [1.2,0.3]	
		Nddl : $10^{-2}$	Nddl : $10^{-4}$	Nddl : $10^{-2}$	Nddl : $10^{-4}$
MEF	T1	57 (-2.108)	14009 (-3.999)	617 (-2.037)	42009 (-3.855)
	T2	57 (-2.235)	801 (-4.053)	801 (-2.348)	10921 (-4.007)
	Q1	57 (-2.040)	5897 (-4.000)	617 (-2.039)	42009 (-3.809)
	Q2	57 (-2.382)	457 (-4.150)	801 (-2.460)	4881 (-4.015)
TMM		13 (-2.354)	25 (-4.175)	49 (-2.056)	91 (-4.037)

Les résultats sont présentés dans le tableau 1.3. Dans ce tableau, on fixe une erreur donnée ( $10^{-2}$  ou  $10^{-4}$ ) et on regarde le nombre de degrés de liberté nécessaires pour avoir une telle précision. Excepté le premier cas ( $X_0 = [2, 0.3]$ , erreur =  $10^{-2}$ ),

la TMM nécessite beaucoup moins de ddl que la MEF classique et ceci même pour la meilleure convergence obtenue avec les éléments quadrangulaires et une interpolation quadratique, le rapport se situant entre 20 et 50. Ces résultats ne sont pas très surprenants car la TMM ne discrétise que le bord et permet une convergence exponentielle avec le degré.

## **1.6 Bilan et positionnement de la thèse**

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les méthodes numériques déjà existantes et avons présenté la TMM. Les méthodes sans maillages sont depuis toujours vues comme une alternative prometteuse pour surmonter les difficultés que rencontrent la méthode des éléments finis. Toutefois à leur stade de développement actuel, elles ne semblent pas très convaincantes pour les utilisateurs de la MEF. En effet bien qu'elles soient faciles d'utilisation, elles ne sont pas assez robustes et celles qui le sont ont un domaine d'application limité ou ne sont pas très précises ou un coût de calcul trop important.

La TMM est une méthode sans maillage proposée il y a 3 ans par S. Zeze dans sa thèse [17]. Les résultats présentés dans ce chapitre ont montré qu'elle permet une résolution très précise des EDP et offre une réduction conséquente du temps de calcul (nombre de degrés de liberté). Dans ce chapitre nous nous sommes limités à des domaines simples notamment un disque et un rectangle, mais il faut noter que la TMM est très précise même pour des domaines quelconques (exemple du problème de la page 77 de [17]). Toutefois plusieurs limitations se présentent pour une application généralisée de cette méthode.

- Les résultats précédents ont montré que la présence d'une éventuelle singularité influe sur la qualité de l'approximation. La connaissance de cette singularité et sa

prise en compte dans la formulation de la méthode pourrait permettre d'améliorer l'approximation.

- La méthode a du mal à résoudre des problèmes avec des domaines très larges. Il est nécessaire de développer une technique pour raccorder plusieurs approximations polynomiales de haut degré sans perdre la propriété de convergence exponentielle. S. Zeze dans sa thèse a proposé une technique. Mais on verra qu'elle n'est pas très fiable et ne permet pas d'obtenir une convergence exponentielle.

Les travaux de thèse présentés dans ce mémoire s'inscrivent dans la continuité des travaux entrepris dans [17]. Le but de nos travaux est de rendre plus stable et plus robuste la TMM. Nos travaux porteront sur les points suivants :

- Mise en place d'une technique permettant de résoudre des problèmes avec des domaines larges ou complexes. Dans ces cas, on subdivisera le domaine en plusieurs sous domaines et une résolution par la TMM sera faite sur chaque sous domaine. La technique développée aura pour rôle d'assurer une certaine continuité du déplacement et du flux à l'interface.
- La mise en place d'une technique permettant la détection de singularités à partir des coefficients de Taylor calculés. La connaissance de cette singularité permettra de proposer des techniques d'accélération de convergence.
- Elargir le domaine d'application de la TMM à travers son application à des problèmes d'élasticité non linéaire.



# CHAPITRE 2

## **Techniques de raccord de polynômes de degrés élevés : vers une résolution multizone**

### **2.1 Introduction**

Les résultats obtenus au chapitre précédent ont montré que la convergence de la TMM dépend du problème étudié et aussi de la nature de la solution analytique. Il a été remarqué que pour certains problèmes, la convergence ne peut être obtenue que si on subdivise le domaine en plusieurs sous domaines en faisant une approximation en série de Taylor sur chaque sous domaine. C'est le cas de l'équation d'Helmholtz résolue sur un rectangle. Le problème diverge lorsque la longueur du rectangle devient très grande, ceci à cause de la présence de couches limites.

Cette divergence peut être aussi rencontrée lors de la résolution des problèmes avec des caractéristiques mécaniques variables d'une zone à une autre. Comme exemple on peut citer le problème des sols avec différentes inclusions, l'étude micro mécanique des

composites etc.

Pour résoudre ces problèmes avec la méthode proposée dans cette thèse, il faudra subdiviser le domaine en plusieurs sous domaines et faire une approximation de Taylor sur chaque sous domaine. Cette manipulation n'est possible qu'en couplant la méthode avec une technique de raccordement qui permettra d'assurer la continuité des solutions ainsi que de leurs premières dérivées aux interfaces entre les sous domaines.

Les problèmes d'interface sont souvent rencontrés en méthode des éléments finis lors de la résolution des problèmes multi-modèles et multi-échelles. Le domaine est découpé en plusieurs sous domaines et un maillage est établi sur chaque sous domaine. Ainsi on distingue deux types de raccord : les raccords conformes appliqués dans les cas où les lignes de maillages sont continues au passage d'une frontière entre deux blocs et les noeuds de leurs interfaces respectives coïncident, et les méthodes de raccords non conformes où il y a une discontinuité entre les maillages. Parmi les méthodes conformes, on peut citer la méthode de décomposition de domaine FETI [56] et, parmi les méthodes non conformes, la méthode des joints-mortier (Mortar en anglais) [57,58] ou la méthode Arlequin [59, 60]. On notera que toutes ces méthodes introduisent des multiplicateurs de Lagrange.

L'objectif de ce chapitre est de proposer des techniques de raccord adaptées à la TMM. Ces techniques doivent être robustes et efficaces. Ainsi plusieurs techniques de raccord ont été explorées afin de trouver les mieux adaptées. L'originalité de ce travail réside dans le couplage des méthodes de raccord avec une méthode sans maillage de type "boundary only" basée sur la formulation forte de l'EDP et ceci en utilisant des points de collocation et non la méthode de Galerkin. Dans un premier temps, on applique notre méthode sans maillage au problème de Poisson sur une couronne. L'intérêt de cette étude est de montrer que la méthode proposée diverge dans certain cas et qu'une

résolution en multizone est inévitable. Enfin, plusieurs techniques de raccord ont été explorées afin de trouver la plus robuste et la plus efficace.

## 2.2 Géométrie du domaine et $p$ -convergence

### 2.2.1 Equation de Poisson sur une couronne

Nous nous proposons de résoudre par la TMM l'équation de Poisson sur une couronne de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$  :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\frac{4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{dans } \Omega = \{(x, y) / r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2\} \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

La solution exacte de ce problème est :

$$u(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad (2.2)$$

Cette solution présente une singularité en  $X_0 = [0, 0]$  (singularité située au centre de la couronne, mais hors du domaine étudié). Les conditions aux limites considérées sont de type Dirichlet.

Pour résoudre ce problème par la TMM, on approche l'inconnue par une série de Taylor développée en  $c_0$  et tronquée à un ordre  $p$ . La résolution se fait de manière directe dans le domaine et on applique les conditions aux limites par une technique des moindres carrés (*voir mise en place de la technique dans le chapitre précédent*). Pour cela on choisit des points de collocation de manière régulière sur la couronne (voir fig 2.1).

On s'intéresse à l'erreur relative sur le cercle moyen (cercle de rayon  $(r_1 + r_2)/2$ ).

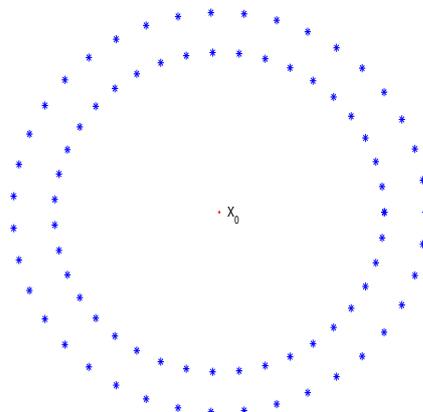


FIG. 2.1 – *Discrétisation de la couronne en monozone. Les points de collocations ne sont choisis que sur la frontière.*

Dans nos tests, nous avons considéré  $r_1 = 0.8$ ,  $r_2 = 1$ .

Dans ce chapitre, pour la représentation des solutions, on utilise les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ . Ainsi la plupart de nos courbes seront tracées en fonction de  $\theta$  (avec  $r$  fixé).

La figure 2.2 présente les erreurs pour deux points de développement différents : à gauche  $c_0 = [-1, 0]$  et à droite  $c_0 = [1, 0]$ . Elles ont été obtenues avec un degré de troncature  $p = 10$ . On remarque que, quel que soit le point de développement choisi, la TMM diverge. Cependant on remarque qu'elle diverge fortement à des endroits précis. Dans le cas du point de développement en  $[1, 0]$  la méthode diverge fortement au voisinage de  $\theta = \pi$  et pour le point de développement en  $[-1, 0]$  elle diverge fortement au voisinage de  $\theta = 0$  ou  $2\pi$ . Ces endroits correspondent aux points diamétralement opposés aux points de développement respectifs. Ces résultats ne sont pas très étonnants dans la mesure où les séries ont un domaine de convergence au delà duquel elles divergent. Dans la littérature, les rayons de convergence sont généralement approchés par la première singularité. En suivant cette logique, le domaine de convergence pour

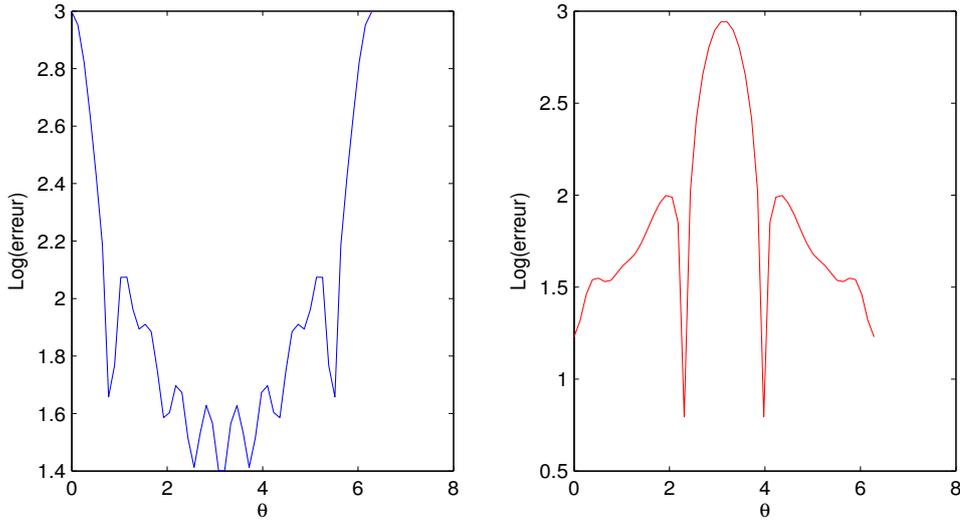


FIG. 2.2 – Problème de Dirichlet, équation de Poisson sur une couronne (2.1). La résolution avec une seule zone diverge, degré  $p = 10$ . Gauche : point de développement en  $[-1,0]$ . Droite : point de développement en  $[1,0]$

chaque point de développement peut être représenté comme sur la figure 2.3. Cette théorie vient confirmer nos résultats dans le sens où, bien que la méthode diverge, elle donne de meilleurs résultats au voisinage du point de développement et ceci jusqu'à un rayon de convergence donné.

Maintenant on s'intéresse à l'influence de l'ordre de la série approchée sur la qualité de la solution. Rappelons que dans les cas traités dans le chapitre précédent, la solution converge mieux lorsqu'on augmente le degré ( $p$ -convergence). Sur la figure 2.4, on trace le logarithme de l'erreur maximale obtenue sur le cercle moyen. Le point de développement a été choisi en  $c_0 = [1, 0]$ . Contrairement aux attentes, la qualité de la solution ne s'améliore pas avec l'ordre de troncature. Les tests ont été effectués pour plusieurs points de développement et aucun ne permet de faire converger la méthode. Ce qui est logique en suivant la théorie des singularités et du domaine de convergence. En effet avec la singularité en  $[0, 0]$ , il n'existe aucun point de développement qui per-

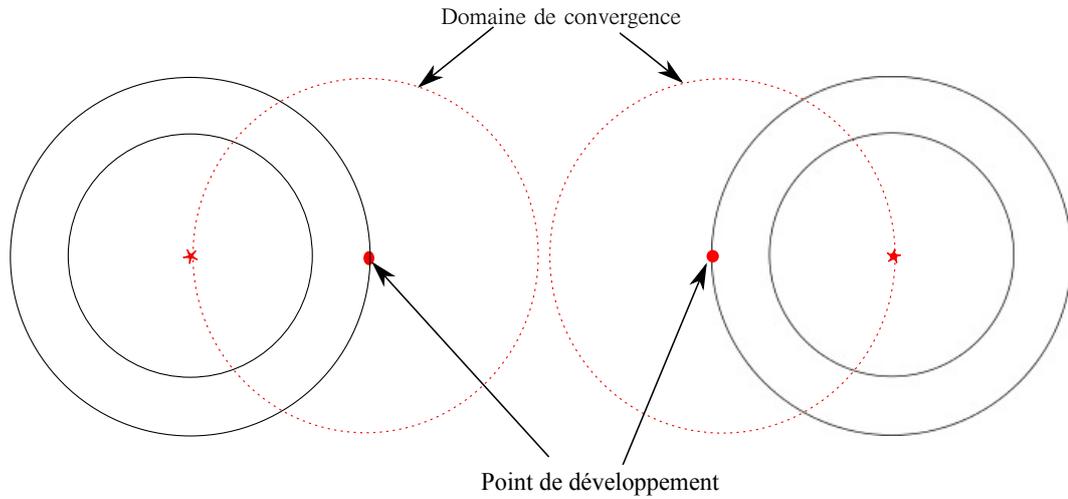


FIG. 2.3 – Représentation du domaine de convergence suivant le point de développement de la série solution. Ce domaine a pour centre le point de développement et pour rayon la distance entre le point de développement et la singularité la plus proche.

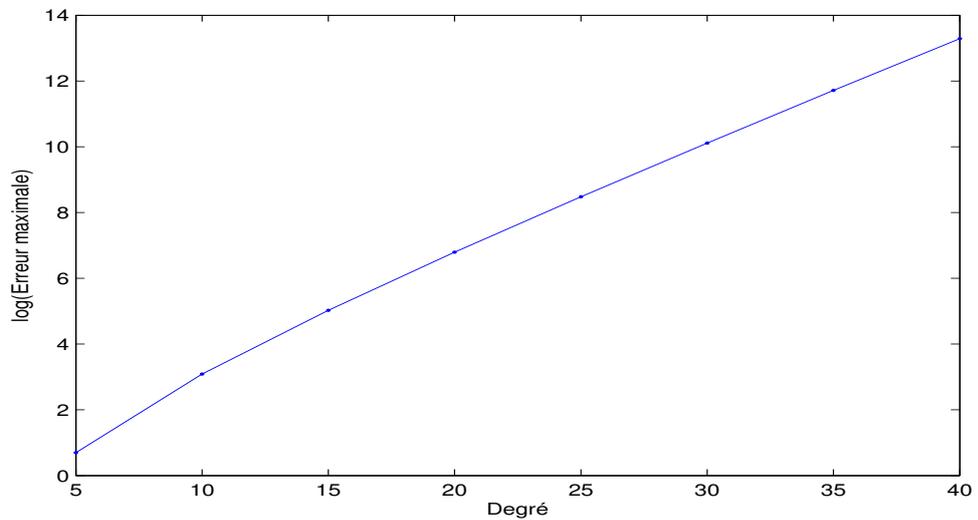


FIG. 2.4 – Equation de Poisson sur une couronne. Absence de  $P$ -convergence en monozone.

mette d'obtenir un domaine de convergence couvrant tout le domaine.

Toutefois on remarque que chaque point de développement choisi donne un domaine de convergence qui couvre un secteur bien donné du domaine. On peut alors espérer construire des solutions convergentes par morceaux en subdivisant le domaine en plusieurs sous domaines et en faisant la résolution sur chaque sous domaine.

### 2.2.2 Equation de Poisson sur un secteur

On considère une partie de la couronne et on se propose de résoudre l'équation de Poisson (2.1) sur cette partie. Le domaine est donc le secteur  $\Omega$  repéré par l'angle  $\alpha$  et par l'ouverture  $\beta$  (fig 2.5). Le problème à résoudre devient :

$$\begin{cases} -\Delta u = -\frac{4}{(x^2 + y^2)^2} & \text{dans } \Omega \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } S_d = S_d^1 \cup S_d^2 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\underline{x}) = 0 & \text{sur } S_n = S_n^1 \cup S_n^2 \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution analytique de ce problème est la même que celle de la couronne (2.2). Cette fois ci, on a deux types de conditions aux limites : les conditions aux limites de type Dirichet sur les arcs extérieurs ( $S_d$ ) et les conditions aux limites de type Neumann sur les segments aux bords ( $S_n$ ). On applique la TMM avec des points de collocation choisis comme sur la figure 2.5. On choisit deux types de points de collocation à la frontière : sur les arcs on choisit  $M_1$  points de collocation sur lesquels on applique des conditions aux limites de type Dirichlet et sur les segments on choisit  $M_2$  points de collocation sur lesquels on applique des conditions aux limites de type Neumann (pour l'application des conditions aux limites mixtes voir chapitre précédent).

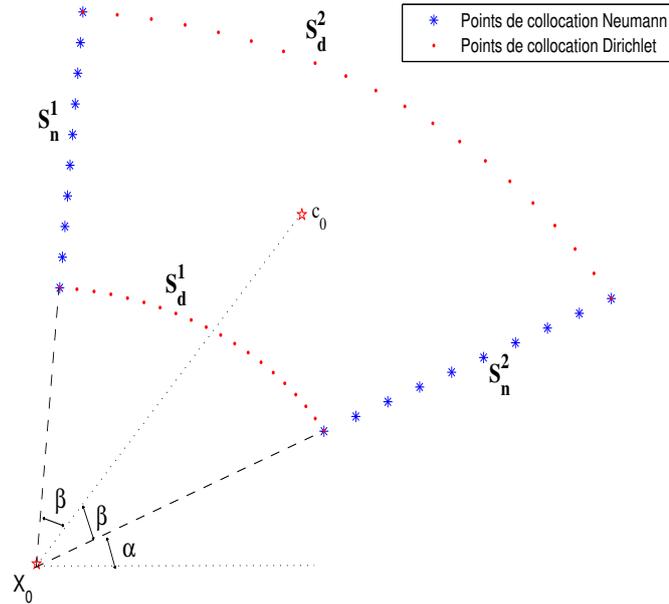


FIG. 2.5 – *Discretisation d'une partie de la couronne.*

Dans le tableau 2.1, on présente le logarithme de l'erreur relative maximale pour différentes valeurs de  $\beta$  et de l'ordre  $p$ . Ces résultats ont été obtenus pour  $\alpha = 0$  et le point de développement est choisi au milieu du secteur ( $c_0$  sur fig 2.5). Ce tableau montre que lorsqu'on diminue la valeur de  $\beta$ , on améliore la qualité de la solution. Ceci confirme la théorie sur le rayon de convergence. Rappelons que  $\beta$  est l'ouverture du secteur, ainsi plus la valeur de  $\beta$  diminue, plus le secteur est petit et donc le domaine de convergence des séries calculées couvre mieux le secteur. On remarque aussi que lorsqu'on augmente l'ordre  $p$  d'approximation, la solution approchée converge exponentiellement vers la solution analytique (on a p-convergence).

On déduit alors qu'on peut résoudre le problème (2.1) par la TMM en divisant la couronne en au moins 4 zones et en faisant une résolution sur chaque sous domaine. Cependant une question se pose : comment assurer la continuité des séries solutions aux

TAB. 2.1 – Problème mixte, équation de Poisson sur un secteur (2.3). On obtient une meilleure convergence lorsque l'ouverture  $\beta$  du secteur décroît.  $M_1$  est le nombre de points de collocation de type Dirichlet et  $M_2$  est le nombre de points de collocation de type Neumann.

$\beta$	Degré	$M_1 - M_2$	log(Erreur maximale)
$\pi$ (Monozone)	5	20 – 10	2.0228
	10	40 – 20	3.8028
$\pi/2$	5	20 – 10	0.5758
	10	40 – 20	0.8691
	20	80 – 40	2.3435
	35	140 – 70	4.3193
$\pi/4$	5	20 – 10	-1.5800
	10	40 – 20	-2.1389
	20	80 – 40	-3.0064
	35	140 – 70	-3.3186
$\pi/6$	5	20 – 10	-1.9526
	10	40 – 20	-3.6026
	20	80 – 40	-6.5307
	35	140 – 70	-6.7232
$\pi/8$	5	20 – 10	-2.4435
	10	40 – 20	-4.6345
	20	80 – 40	-9.3923
	35	140 – 70	-9.2048

interfaces entre les sous domaines ?

## 2.3 Position du problème multizone

Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  et de frontière  $\partial\Omega$ . On veut résoudre un problème d'équations aux dérivées partielles elliptique du second ordre :

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{dans } \Omega \\ u(\underline{x}) &= u^d(\underline{x}) && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.4}$$

où  $L$  est un opérateur différentiel continu (par exemple le laplacien). Supposons que le domaine  $\Omega$  est la réunion de  $K$  sous domaines  $\{\Omega^k\}_{1 \leq k \leq K}$ .

Ce cas de figure peut apparaître naturellement lorsqu'on étudie des problèmes qui font appel à différents matériaux. C'est le cas des problèmes avec inclusions, le cas de l'analyse micro mécanique des composites où les fibres et les matrices sont traitées séparément...

Cette idée de sous domaines peut être couplée à la TMM pour résoudre des problèmes à géométrie complexe ou lorsqu'une partie du domaine à étudier présente un intérêt particulier (par exemple des fissures). Dans ces cas, on introduit des interfaces virtuelles de telle manière qu'on résolve le problème séparément dans la zone d'intérêt et dans le reste de la zone.

Pour des raisons de simplicité, on va supposer que le domaine  $\Omega$  est la réunion de deux sous domaines  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  tels que  $\Omega^1 \cap \Omega^2 \neq \emptyset$  (voir fig 2.6). Ceci étant, la technique qui sera proposée peut être étendue à un nombre de sous domaines  $K$  quelconque. De même on peut utiliser des conditions aux limites de type Neumann ou mixte. Résoudre

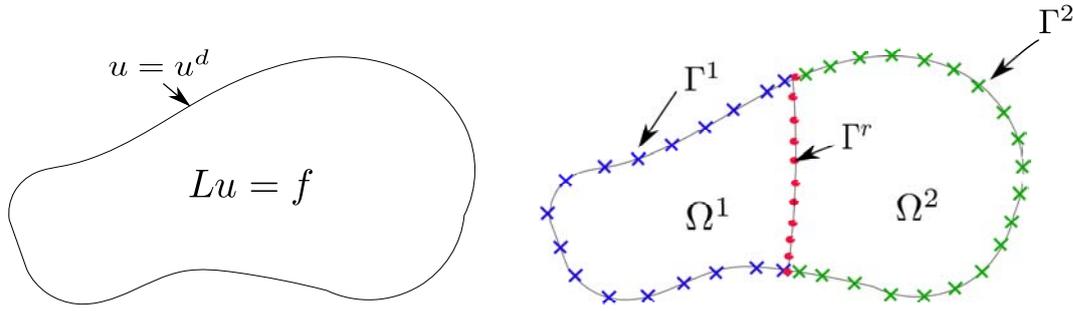


FIG. 2.6 – Représentation du domaine continu de l'EDP et de la discrétisation du bord pour la résolution en deux zones. Le domaine est divisé en deux sous domaines  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$ . La discrétisation introduit deux types de points : des points de collocations sur les bords  $\Gamma^1$ ,  $\Gamma^2$  sur lesquels on applique les conditions aux limites et des points de collocations sur l'interface  $\Gamma^r$  où on applique les conditions de transmission.

le problème (2.4) revient à résoudre les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} Lu^1 = f & \text{dans } \Omega^1 \\ u^1(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma^1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} Lu^2 = f & \text{dans } \Omega^2 \\ u^2(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } \Gamma^2 \end{cases} \quad (2.5)$$

avec les conditions de continuité aux interfaces :

$$u^1(\underline{x}) = u^2(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}) = \frac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}) \quad \text{sur } \Gamma^r \quad (2.6)$$

où  $\Gamma^1 = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega$ ,  $\Gamma^2 = \partial\Omega^2 \cap \partial\Omega$  et  $\Gamma^r = \partial\Omega^1 \cap \partial\Omega^2$ .

Par la formulation actuelle de la TMM, nous savons résoudre dans chaque sous domaine les équations (2.5). En effet en faisant une approximation en série de Taylor pour  $u^1$  et  $u^2$ , on obtient par condensation deux familles de fonctions de forme  $P_k^1(\underline{x})$  et  $P_k^2(\underline{x})$  telles que :

$$u^1(\underline{x}) = P_0^1 + \sum_k P_k^1(\underline{x})v_k^1 \quad \text{et} \quad u^2(\underline{x}) = P_0^2 + \sum_k P_k^2(\underline{x})v_k^2 \quad (2.7)$$

Les variables  $\{v^1\}$  et  $\{v^2\}$  sont à déterminer par les conditions aux limites. Toutefois dans le cas présent, en plus des conditions aux limites, les solutions doivent vérifier les conditions à l'interface (2.6).

La discrétisation des bords des domaines  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  fait donc apparaître deux types de points (fig 2.6) :

- Les points sur les bords  $\partial\Omega \cap \partial\Omega^1$  et  $\partial\Omega \cap \partial\Omega^2$  où l'on applique les conditions aux limites par la méthode des moindres carrés.
- Les points sur l'interface  $\Gamma_{12}$  où l'on applique les conditions de transmission en utilisant une technique de raccord.

## 2.4 Raccord par la méthode des moindres carrés

### 2.4.1 Principe de résolution multizone

Dans sa thèse [17], S. Zeze a proposé d'assurer les conditions à l'interface de la même manière que les conditions aux limites, c'est-à-dire en utilisant la méthode des moindres carrés. Pour illustrer cette technique, considérons le problème en deux zones (2.5)(2.6). En appliquant la TMM à chacune des équations de (2.5), on fait une résolution directe de l'EDP dans les sous domaines  $\Omega^i$ . Cette résolution directe permet de construire des fonctions de formes et fait intervenir des inconnues  $\{v^1\}$  et  $\{v^2\}$ . Pour déterminer ces inconnues, on doit appliquer les conditions de continuité et les conditions aux limites. La technique présentée dans cette section propose d'appliquer toutes ces conditions en utilisant la technique des moindres carrés. Pour cela, la discrétisation du domaine se fait comme suit :

- On choisit  $M_1$  points de collocation sur la frontière  $\Gamma^1$ . Sur ces points seront appliquées les conditions aux limites associées au sous domaine  $\Omega_1$ .

- On choisit  $M_2$  points de collocation sur la frontière  $\Gamma^2$ . Sur ces points seront appliquées les conditions aux limites associées au sous domaine  $\Omega_2$ .
- On choisit  $M_r$  points de collocation sur la frontière  $\Gamma^r$ . Sur ces points, on exprime la condition de continuité entre  $u^1$  et  $u^2$  ainsi que de leur première dérivée normale.

Les fonctionnelles des conditions aux limites s' écrivent alors :

$$\begin{aligned}
 J_1(v^1) &= \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{M_1} \left| P_0^1(\underline{x}_{j_1}) + \sum_{i=1}^{2p_1+1} P_i^1(\underline{x}_{j_1}) v_i^1 - u^d(\underline{x}_{j_1}) \right|^2 \\
 J_2(v^2) &= \frac{1}{2} \sum_{j_2=1}^{M_2} \left| P_0^2(\underline{x}_{j_2}) + \sum_{i=1}^{2p_2+1} P_i^2(\underline{x}_{j_2}) v_i^2 - u^d(\underline{x}_{j_2}) \right|^2
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

La fonctionnelle de raccord au sens moindres carrés s' écrit :

$$c(v^1, v^2) = \frac{1}{2} \sum_{j_r=1}^{M_r} \left[ |u^1(\underline{x}_{j_r}) - u^2(\underline{x}_{j_r})|^2 + \left| \frac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}_{j_r}) - \frac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}_{j_r}) \right|^2 \right] \tag{2.9}$$

La fonction  $J$  à minimiser pour résoudre le problème complet (2.4) doit contenir toutes les données de Dirichlet sur les 2 zones et les données de raccord à l'interface :

$$J(v^1, v^2) = J_1(v^1) + J_2(v^2) + c(v^1, v^2) \tag{2.10}$$

La minimisation de la fonctionnelle  $J$  conduit à un système :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \tag{2.11}$$

avec :

$$K_{11} = K_{a11} + K_{b11} + K_{c11} \quad , \quad K_{12} = K_{a12} + K_{b12}$$

$$K_{22} = K_{a22} + K_{b22} + K_{c22} \quad , \quad K_{21} = K_{12}^T$$

où

$$\begin{aligned} [K_{a11}] &= \sum_{j=1}^{M_1} [Q^j] \quad \text{avec } Q_{ik}^j = P_i^1(\underline{x}_j)P_k^1(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^1 \\ [K_{b11}] &= \sum_{t=1}^{M_r} [D^t] \quad \text{avec } D_{ik}^t = P_i^1(\underline{x}_t)P_k^1(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \\ [K_{c11}] &= \sum_{t=1}^{M_r} [G^t] \quad \text{avec } G_{ik}^t = \frac{\partial P_i^1}{\partial n}(\underline{x}_t) \frac{\partial P_k^1}{\partial n}(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} [K_{a22}] &= \sum_{r=1}^{M_2} [Q^r] \quad \text{avec } Q_{ik}^r = P_i^2(\underline{x}_r)P_k^2(\underline{x}_r), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^2 \\ [K_{b22}] &= \sum_{t=1}^{M_r} [H^t] \quad \text{avec } H_{ik}^t = P_i^2(\underline{x}_t)P_k^2(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \\ [K_{c22}] &= \sum_{t=1}^{M_r} [W^t] \quad \text{avec } W_{ik}^t = \frac{\partial P_i^2}{\partial n}(\underline{x}_t) \frac{\partial P_k^2}{\partial n}(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \\ [K_{a12}] &= - \sum_{t=1}^{M_r} [S^t] \quad \text{avec } S_{ik}^t = P_i^1(\underline{x}_t)P_k^2(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \\ [K_{b12}] &= - \sum_{t=1}^{M_r} [S2^t] \quad \text{avec } S2_{ik}^t = \frac{\partial P_i^1}{\partial n}(\underline{x}_t) \frac{\partial P_k^2}{\partial n}(\underline{x}_t), \quad \underline{x}_t \in \Gamma^r \end{aligned} \quad (2.13)$$

et

$$\begin{aligned} \{b_1\} &= \sum_{j=1}^{M_1} \{b^j\} + \sum_{t=1}^{M_r} \{b^t\} + \sum_{r=1}^{M_r} \{b^r\} \\ \{b_2\} &= \sum_{k=1}^{M_2} \{b^k\} + \sum_{l=1}^{M_r} \{b^l\} + \sum_{q=1}^{M_r} \{b^q\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned} \{b_i^j\} &= (u^d(\underline{x}_j) - P_0^1(\underline{x}_j)) P_i^1(\underline{x}_j) \\ \{b_i^t\} &= (P_0^2(\underline{x}_t) - P_0^1(\underline{x}_t)) P_i^1(\underline{x}_t) \\ \{b_i^r\} &= \left( \frac{\partial P_0^2}{\partial n}(\underline{x}_r) - \frac{\partial P_0^1}{\partial n}(\underline{x}_r) \right) \frac{\partial P_i^1}{\partial n}(\underline{x}_r) \\ \{b_i^k\} &= (u^d(\underline{x}_k) - P_0^2(\underline{x}_k)) P_i^2(\underline{x}_k) \\ \{b_i^l\} &= (P_0^1(\underline{x}_l) - P_0^2(\underline{x}_l)) P_i^2(\underline{x}_l) \\ \{b_i^q\} &= \left( \frac{\partial P_0^1}{\partial n}(\underline{x}_q) - \frac{\partial P_0^2}{\partial n}(\underline{x}_q) \right) \frac{\partial P_i^2}{\partial n}(\underline{x}_q) \end{aligned}$$

### 2.4.2 Evaluation de la technique de raccord par moindres carrés

Pour évaluer la technique de raccord avec les moindres carrés, on se propose de résoudre le Laplacien sur un disque de rayon unité (2.15) :

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\} \\ u(\underline{x}) = u^d(\underline{x}) & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.15)$$

La solution exacte de ce problème est :  $u^d(x, y) = (x - 1) / ((x - 1)^2 + (y - 1)^2)$ . Elle présente une singularité en  $X_0 = [1, 1]$ .

Dans le chapitre précédent, ce problème a été résolu en une seule zone. Les résultats

obtenus ont montré une bonne convergence ainsi que de la  $p$ -convergence. L'erreur relative maximale dans le domaine est de  $10^{-3}$  pour un degré de troncature de  $p = 10$  et avec 42 points de collocations sur toute la frontière (voir fig 1.5).

Dans cette partie, nous nous proposons de résoudre ce problème en subdivisant le domaine en plusieurs sous domaines et en faisant la résolution par sous domaine en utilisant la technique présentée ci-dessus. Le but de cette opération est d'abord de s'assurer que le raccord n'introduit pas d'erreur dans la résolution et ensuite de voir si elle permet d'accélérer la convergence de la TMM.

Nous introduisons une interface virtuelle en divisant le disque en deux (fig 2.7) et une résolution du problème de Laplace a été faite sur chaque demi disque.

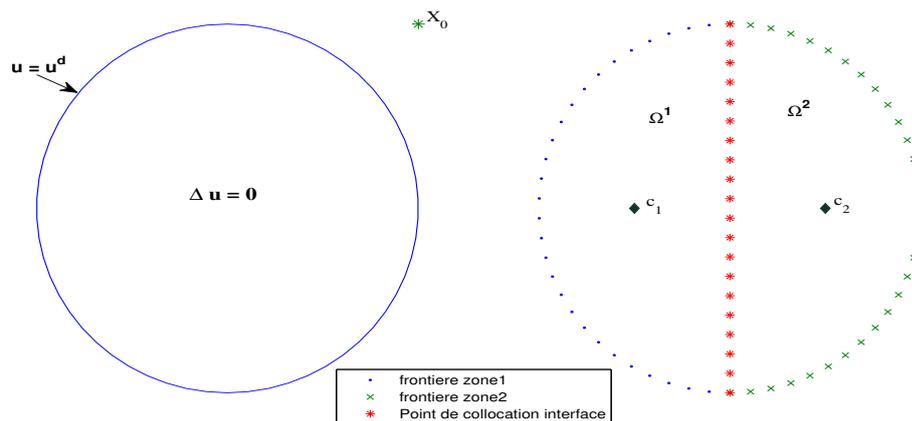


FIG. 2.7 – Représentation du domaine pour le problème de Laplace avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Le domaine est discrétisé en deux zones. Dans chaque zone, la solution est approchée par une série de Taylor de degré  $p$ . Après résolution directe dans les sous domaines, on a  $2p + 1$  inconnues dans chaque sous domaine, à déterminer avec les conditions aux limites et les conditions de transmission.

La première série de résultats n'a pas été très concluante. En effet, le raccord n'est pas parfaitement pris en compte. Sur le «path» que nous avons tracé, au moment du passage d'une zone à l'autre, on constate que la solution approchée s'éloigne fortement

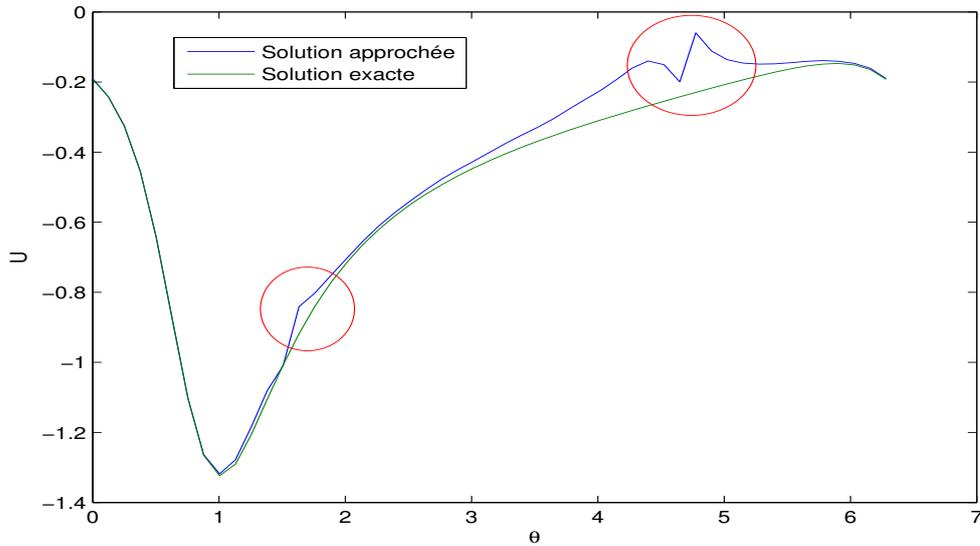


FIG. 2.8 – Problème de Dirichlet. Equation de Laplace sur un disque (2.15). Solutions approchée et exacte pour une résolution en deux zones avec  $p_1 = p_2 = 10$ . On observe une discontinuité de la solution approchée au niveau de l'interface.

de la solution analytique. Sur la figure 2.8, on présente la solution sur le cercle de rayon  $r = 0.8$  et ceci pour la résolution faite en 2 zones. Ces courbes ont été obtenues avec  $p_1 = 10$ ,  $p_2 = 10$ ,  $M_1 = 40$ ,  $M_2 = 40$  et  $M_r = 10$ . Le point de développement de chaque zone a été pris en son centre géométrique. Les courbes sont représentées en fonction de  $\theta$ . On rencontre donc l'interface en deux endroits :  $\theta = \pi/2$  et  $\theta = 3\pi/2$ . Or, c'est justement à ces abscisses que l'on remarque des discontinuités de la solution approchée (fig 2.8). Sur cet exemple, on remarque toutefois que la dérivée de la fonction semble continue.

Afin de prendre mieux en compte le raccord entre les zones, l'idée suivante a été d'ajouter un coefficient dans la fonctionnelle précédente pour ainsi résoudre le problème au sens des moindres carrés pondérés. Comme vu précédemment, le raccord n'est pas

bien pris en compte. La solution approchée présente une discontinuité alors que sa dérivée semble, elle, bien continue. Afin de pouvoir obtenir un raccord plus « propre », il semble qu'il faille accorder un poids plus important au terme représentant la continuité de la fonction au niveau de la fonctionnelle.

La nouvelle fonctionnelle de raccord s'écrit alors de la manière suivante :

$$c(v_1, v_2) = \frac{1}{2} \sum_{j_r=1}^{M_r} [\alpha |u^1(\underline{x}_{j_r}) - u^2(\underline{x}_{j_r})|^2 + \beta \left| \frac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}_{j_r}) - \frac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}_{j_r}) \right|^2] \quad (2.16)$$

Différents essais ont été effectués à partir de cette fonctionnelle. Sur la figure 2.9 on présente les résultats pour  $\alpha = 10$  et  $\alpha = 100$ . La discontinuité observée précédemment semble être un peu corrigée pour  $\alpha = 10$ , mais toutefois la convergence n'est pas acquise comme dans la résolution en monozone. Le réflexe a été d'augmenter la valeur de  $\alpha$  pour améliorer la qualité de la solution. Mais les solutions obtenues ont montré que la méthode diverge complètement. L'erreur est même plus grande que précédemment, le cas précédent revenant à considérer la valeur  $\alpha = 1$ .

Plus généralement, outre ce cas particulier, 3 cas de figure se sont présentés à nous durant les différents essais effectués :

- soit la fonction elle-même présente une discontinuité,
- soit la dérivée de la fonction présente une discontinuité,
- soit la fonction et sa dérivée sont continues, mais la solution approchée est très éloignée de la solution exacte sur la quasi-totalité du domaine.

L'approximation est alors totalement erronée. Visiblement, ce qui semblait être une piste à explorer n'est pas la bonne démarche à adopter. Même en procédant « pas à pas », à aucun moment, nous n'avons pas réussi à obtenir un résultat acceptable. Quand bien

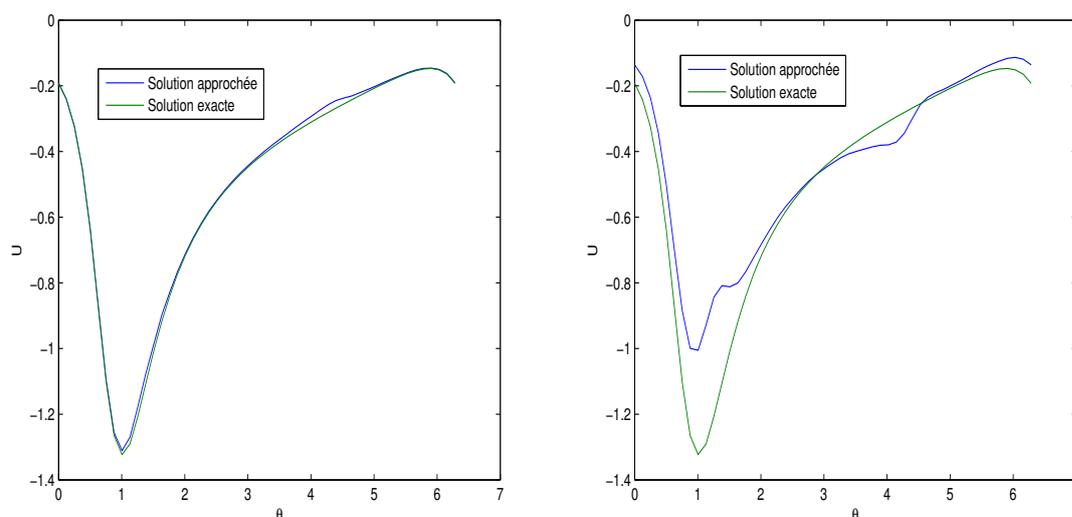


FIG. 2.9 – *Probleme de Laplace sur un disque (2.15). Solution exacte et approchée obtenues avec la fonctionnelle de raccord (2.16). A droite  $\alpha = 10$ , à gauche  $\alpha = 100$*

même nous serions parvenus à la suite de plusieurs essais à une bonne estimation, cette méthode n’aurait pu être validée.

En effet, une méthode de résolution ne peut être acceptable que si elle présente une certaine robustesse quant à son utilisation. Une méthode est dite robuste si elle permet d’obtenir à coup sûr un résultat convergent au bout de quelques itérations, même en faisant varier de manière importante les différents paramètres en entrée (nombre de points de collocation, de points de raccord...). De plus, les itérations ne doivent pas être effectuées de manière «aléatoire», c’est-à-dire qu’elles ne doivent pas dépendre trop fortement du point de vue de l’utilisateur. Cette méthode ne peut donc en aucun cas être qualifiée de robuste.

Ainsi il n’est pas nécessaire d’insister sur cette méthode en introduisant par exemple un deuxième coefficient qui permettrait de donner deux poids différents au raccord de la fonction d’une part et de la dérivée d’autre part. Ceci rendrait la méthode encore moins robuste. Il faut donc s’orienter vers une nouvelle méthode.

## 2.5 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

### 2.5.1 Principe de la résolution multizone

L' idée de cette technique est de traiter les conditions de raccord comme des conditions supplémentaires que doivent vérifier les solutions obtenues sur chaque sous domaine. Ainsi on traite les conditions aux limites par la méthode des moindres carrés et on ajoute des contraintes que sont les conditions de continuité aux interfaces : on fait de la minimisation sous contrainte. Le problème à étudier devient donc :

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } L(v^1, v^2) = J_1(v^1) + J_2(v^2) \\ & \text{avec } \begin{cases} \psi_j^1(v^1, v^2) = u^1(\underline{x}_j) - u^2(\underline{x}_j) = 0 \\ \psi_j^2(v^1, v^2) = \frac{\partial u^1}{\partial n}(\underline{x}_j) - \frac{\partial u^2}{\partial n}(\underline{x}_j) = 0 \end{cases} \quad \forall \underline{x}_j \in \Gamma^r \end{aligned} \quad (2.17)$$

La technique de résolution d'un tel problème est connu sous le nom de "*méthode des multiplicateurs de Lagrange*". D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange,  $(v^1, v^2)$  est solution du problème (2.17) si et seulement s'il existe un couple de vecteurs  $(\lambda^1, \lambda^2)$  tel que le 4-uplet  $(v^1, v^2, \lambda^1, \lambda^2)$  rend stationnaire la fonction :

$$J(v^1, v^2, \lambda^1, \lambda^2) = J_1(v^1) + J_2(v^2) + c(v^1, v^2, \lambda^1, \lambda^2) \quad (2.18)$$

avec :

$$c(v^1, v^2, \lambda^1, \lambda^2) = \sum_{j=1}^{M_r} [\lambda_j^1 \psi_j^1(v^1, v^2) + \lambda_j^2 \psi_j^2(v^1, v^2)] \quad (2.19)$$

En posant  $\Lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ , la minimisation de la fonctionnelle  $L$  conduit à un

système linéaire :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & K_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

avec :

$$[K_1] = \sum_{j=1}^{M_1} [Q^j] \quad \text{avec } Q_{ik}^j = P_i^1(\underline{x}_j) P_k^1(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^1$$

$$[K_2] = \sum_{j=1}^{M_2} [Q^j] \quad \text{avec } Q_{ik}^j = P_i^2(\underline{x}_j) P_k^2(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^2$$

$$C_1^T = [C_{11} \quad C_{12}] :$$

$$[C_{11}] = [C] \quad \text{avec } C_{ik} = P_k^1(\underline{x}_i), \quad \underline{x}_i \in \Gamma^r$$

$$[C_{12}] = [C] \quad \text{avec } C_{ik} = \nabla P_k^1(\underline{x}_i), \quad \underline{x}_i \in \Gamma^r$$

$$C_2^T = [C_{21} \quad C_{22}] :$$

$$[C_{21}] = [C] \quad \text{avec } C_{ik} = P_k^2(\underline{x}_i), \quad \underline{x}_i \in \Gamma^r$$

$$[C_{22}] = [C^r] \quad \text{avec } C_{ik} = \nabla P_k^2(\underline{x}_i), \quad \underline{x}_i \in \Gamma^r$$

et

$$\begin{aligned}
 F_i^1 &= \sum_{j=1}^{M_1} (u^d(\underline{x}_j) - P_{10}(\underline{x}_j)) P_{1i}(\underline{x}_j) & 1 \leq i \leq 2N_1 + 1 \\
 F_i^2 &= \sum_{k=1}^{M_2} (u^d(\underline{x}_k) - P_{20}(\underline{x}_k)) P_{2i}(\underline{x}_k) & 1 \leq i \leq 2N_2 + 1 \\
 F_3^T &= [b^1 \quad b^2] : \\
 b_i^1 &= (P_{20}(\underline{x}_i) - P_{10}(\underline{x}_i)) & 1 \leq i \leq M_r \\
 b_i^2 &= \left( \frac{\partial P_{20}}{\partial n}(\underline{x}_i) - \frac{\partial P_{10}}{\partial n}(\underline{x}_r) \right) & 1 \leq i \leq M_r
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Dans l'expression de la fonction  $J$ , on remarque que le nombre de points de collocation choisis sur l'interface est exactement égal à celui des multiplicateurs de Lagrange associés à chaque fonction  $\psi^i$ . Ceci étant, en minimisant cette fonction, on obtient  $M_r$  équations de continuité pour  $u^1$  et  $u^2$  et le même nombre pour assurer la continuité de leur première dérivée normale. Au total, on a  $2M_r$  équations de raccord. Le nombre total de multiplicateurs de Lagrange est donc  $N_\lambda = 2M_r$ .

Pour un opérateur différentiel d'ordre 2, le nombre de fonctions de formes est de  $2p + 1$ . Ce qui fait qu'on a  $2p_i + 1$  inconnues dans chaque zone. Pour que le problème (2.20) ne soit pas mal posé, il faut que la condition  $N_\lambda \leq 2(p_1 + p_2 + 1)$  soit vérifiée.

## 2.5.2 Validation de la technique de raccord avec les multiplicateurs de Lagrange

### 2.5.2.1 Problème de Laplace

On considère l'équation de Laplace sur un disque (2.15), avec une singularité en  $[1, 1]$ . Ce problème a été résolu en deux zones dans la section § 2.4.2 en utilisant la

technique des moindres carrés pour le raccord à l'interface.

Ici nous nous proposons de résoudre le même problème en utilisant le couplage "TMM - Méthode des multiplicateurs de Lagrange" comme présenté ci dessus. La discrétisation du bord du domaine se fait de la même manière que dans la méthode des moindres carrés fig (2.7). Chaque point ( $x_j$ ) de l'interface entre les zones, est associé à deux multiplicateurs de Lagrange ( $\lambda_j^1$  et  $\lambda_j^2$ ). Les paramètres de résolution du problème sont :

- L'ordre de troncature des séries dans chaque zone ( $p_1$  et  $p_2$ ).
- Le nombre de points de collocation sur le bord de chaque sous domaine ( $M_1$  et  $M_2$ ).
- Le nombre de points de collocation sur l'interface entre les sous domaines ( $M_r$ ).

On s'intéresse à l'erreur relative sur le cercle intérieur de rayon  $r = 0.8$ . Ce cercle traverse les deux zones et coupe l'interface en  $\theta = \pi/2$  et  $\theta = 3\pi/2$ , ce qui permet d'analyser la solution approchée sur chaque zone ainsi qu'à l'interface (même découpage que sur la figure 2.7). Sur la figure 2.10, on présente la solution approchée et la solution exacte pour des degrés de troncature  $p_1 = p_2 = 10$  et pour  $M_r = 10$ , c'est à dire 20 multiplicateurs de Lagrange. La courbe de l'erreur montre une très bonne précision en  $\theta = \pi/2$  et en  $\theta = 3\pi/2$ . On a donc bien assuré la continuité de la fonction ainsi que de sa première dérivée. Par conséquent la méthode des multiplicateurs de Lagrange a permis d'assurer de manière efficace les conditions de raccord. On remarque aussi que le raccord n'a pas introduit d'erreur considérable dans les sous domaines. Ainsi on a une erreur maximale de l'ordre de  $3.10^{-3}$ .

Maintenant on s'intéresse à l'influence du nombre de points de raccord sur la qualité de la solution. Cette étude est très importante, car ce nombre influe fortement dans la résolution du problème :

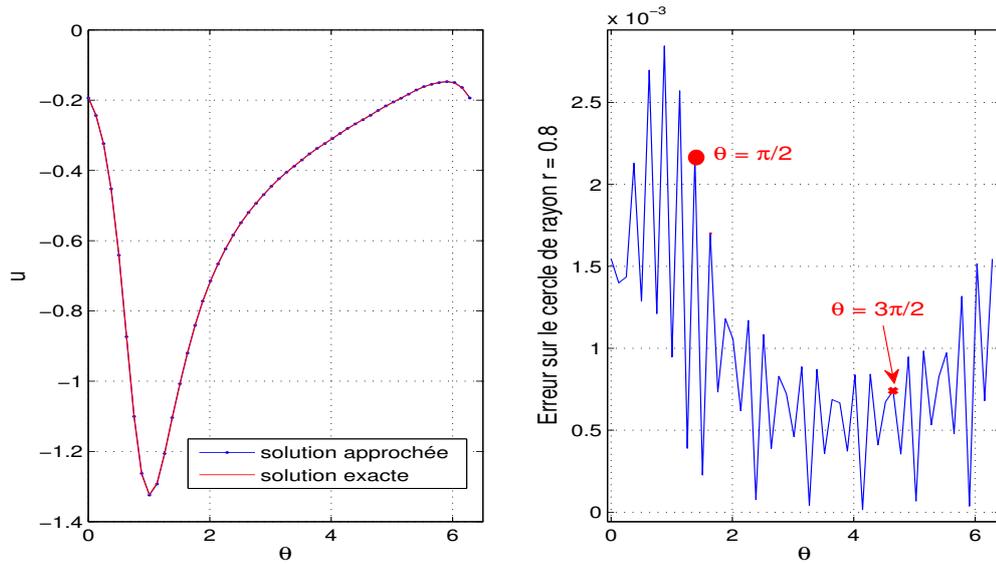


FIG. 2.10 – Problème de Laplace sur un disque (2.15). Solutions et erreur sur le cercle de rayon 0.8, pour une résolution en deux zones avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On remarque une bonne continuité aux interfaces ( $\theta = \pi/2$  et  $\theta = 3\pi/2$ ).

- il définit la qualité des informations transmises à l’interface. Plus le nombre de points de collocation choisis à l’interface est grand, plus on écrit d’équations de continuité à l’interface (2.17).
- D’autre part, ce nombre est directement lié au nombre de multiplicateurs de Lagrange. D’après le théorème de Lagrange pour avoir un problème bien posé, le nombre de multiplicateurs de Lagrange doit être inférieur au nombre d’inconnues. Ainsi si le nombre de points de raccord est très grand, la matrice  $K$  du système linéaire (2.20) sera mal conditionnée et on tendra vers des solutions moins bonnes.

Le couplage effectué nous impose donc de choisir un nombre important de points sur l’interface tout en faisant attention au degré de troncature choisi. Dans le tableau 2.2, on présente l’erreur pour plusieurs valeurs de l’ordre d’approximation et aussi différentes valeurs du nombre de multiplicateurs de Lagrange  $N_\lambda$ . Les résultats viennent confirmer

nos analyses. En effet dans le cas où le nombre de multiplicateurs de Lagrange est très petit, on peut obtenir une assez mauvaise convergence. Néanmoins les résultats obtenus ne nous permettent pas de définir exactement un nombre optimum de multiplicateurs pour obtenir une bonne convergence. Toutefois on remarque que pour tous les degrés, on obtient une convergence raisonnable pour  $N_\lambda = 2p$ . De plus l'approximation reste correcte lorsque  $N_\lambda$  varie autour de  $2p$ , ce qui montre la robustesse de la méthode. Les résultats obtenus montre aussi une dépendance de la qualité de la solution en fonction du degré de troncature des séries solutions. On obtient une très bonne convergence en augmentant l'ordre comme dans le cas de la résolution de ce problème en monozone.

TAB. 2.2 – Influence du nombre de multiplicateurs de Lagrange  $N_\lambda$ .

Degré	$M_1 - M_r - M_2$	$N_\lambda$	log(Erreur maximale)
$p = 4$	10-2-10	4	-0.1592
	10-4-10	8	-1.1002
	10-6-10	12	-0.9847
$p = 10$	20-6-20	12	-1.7369
	20-8-20	16	-2.4695
	20-10-20	20	-2.6641
	20-12-20	24	-2.5460
	20-14-20	28	-2.5460
	20-20-20	40	-2.5460
$p = 20$	40-12-40	24	-2.9640
	20-16-20	32	-4.4692
	20-18-20	36	-5.2678
	40-20-40	40	-5.1621
	40-22-40	44	-5.1009
	40-24-40	48	-5.1008
	20-30-20	60	-5.0993

### 2.5.2.2 Raccord de deux polynômes de degrés différents

Nous nous intéressons maintenant au comportement de la technique de raccord proposée dans le cas de deux polynômes différents de part et d'autre de l'interface.

On considère le problème de Laplace (2.15) avec une singularité en  $X_0 = [1.5, 0]$ . L'erreur est calculée sur le cercle intérieur de rayon 0.8. Le domaine est divisé en deux, comme sur la figure 2.7. Les points de développement sont  $c_1 = [-0.5, 0]$  pour la zone à gauche et  $c_2 = [0, 0]$  pour la zone à droite (voir fig 2.11). Le deuxième point de développement a été choisi de manière à être éloigné de la singularité.

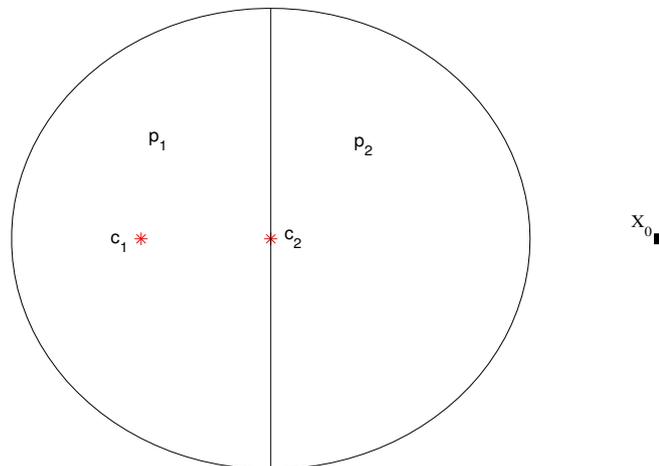


FIG. 2.11 – Problème de Laplace sur un disque avec une singularité en  $[1.5, 0]$

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.3. Ce tableau montre qu'on arrive à assurer la continuité à l'interface, même dans les cas où les degrés des polynômes raccordés sont très différents de part et d'autre de l'interface. Une comparaison avec la convergence obtenue en monozone montre que la résolution multizone permet d'accélérer la convergence. En plus la résolution multizone permet de faire des développements de Taylor différents dans les zones. L'erreur obtenue en monozone avec un

degré 15 est obtenue en multizone en faisant une approximation d'ordre 5 loin de la singularité et une approximation d'ordre 15 près de la singularité. La méthode de résolution en multizone sera donc très bénéfique pour la résolution des problèmes à zones d'intérêt tels que les problèmes de fissures. En effet pour ces problèmes au lieu de faire une approximation de très haut degré dans tout le domaine, on peut se contenter d'une approximation de très haut degré dans les zones d'intérêt et d'une approximation de bas degré dans le reste du domaine.

TAB. 2.3 – Raccord de deux polynômes différents par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

$p_1$	$p_2$	$N_\lambda$	$M_r$	log(Erreur maximale)
5	15	12	6	-2.17
7	15	16	8	-3.47
8	15	16	8	-3.29
9	15	16	8	-2.88
		20	10	-3.79
		24	12	-3.67
12	15	24	12	-4.55
		28	14	-4.32
15	15	28	14	-4.42
		32	16	-4.18
Monozone $p = 15$				-2.70

Cependant, il faut remarquer que dans le cas des approximations multizone, il faut mettre le prix en terme de degrés de liberté. Rappelons qu'en monozone, pour un degré  $p$  fixé, le nombre de degrés de liberté est  $2p + 1$ . Pour une résolution multizone, il y a d'abord  $2p_i + 1$  degrés de liberté dans chaque sous domaine (degrés de liberté de la méthode TMM), en plus il y a les degrés de liberté introduits par la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui est le nombre de multiplicateurs de Lagrange (nombre d'équations de transmission écrites à l'interface).

D'autre part, ce tableau vient confirmer les résultats du tableau 2.2 où l'on a remarqué que pour avoir une bonne convergence, il faut approximativement  $2p$  multiplicateurs de Lagrange, c'est-à-dire  $p$  points de collocation sur l'interface. Dans le cas de deux degrés différents  $p_1 < p_2$ , il faudra prendre en compte le degré le plus faible ( $N_\lambda \approx 2p_1$ ). On remarque aussi qu'à partir de ce nombre optimal, la convergence est stable : la méthode de raccord des multiplicateurs de Lagrange est robuste par rapport au nombre de multiplicateurs de Lagrange.

### 2.5.2.3 Problème de Poisson

Pour s'assurer de l'intérêt de la résolution en multizone, nous nous intéressons maintenant au problème de Poisson sur une couronne ( $0.8 \leq r \leq 1$ ) (2.1) en utilisant la TMM couplée avec la technique des multiplicateurs de Lagrange. Pour faire converger le problème, on subdivise la couronne en plusieurs secteurs (fig 2.12) et une résolution de l'équation de Poisson est faite sur chaque secteur. Dans chaque zone, le point de développement de chaque série de Taylor a été choisi au milieu de l'arc extérieur.

La figure 2.13 présente le logarithme de l'erreur maximale pour différents nombres de zones. Sur chaque interface, nous avons choisi  $p/2$  points de collocation. Ce qui correspond à  $p$  multiplicateurs de Lagrange et donc  $p$  équations de raccord. Les résultats montrent qu'on arrive à faire converger le problème en subdivisant le domaine en plusieurs sous domaines. On a une erreur de l'ordre de  $10^{-2}$  pour 4 zones et cette erreur passe à  $10^{-7}$  pour 10 zones. Ces résultats viennent confirmer les théories sur le domaine de convergence des séries de Taylor. En effet ce domaine de convergence est limité par la première singularité qui est ici  $[0, 0]$ .

Pour étudier la stabilité du couplage par rapport au degré, nous avons fixé le nombre de zones à 6 et nous avons fait varier le degré d'approximation. Les résultats obtenus

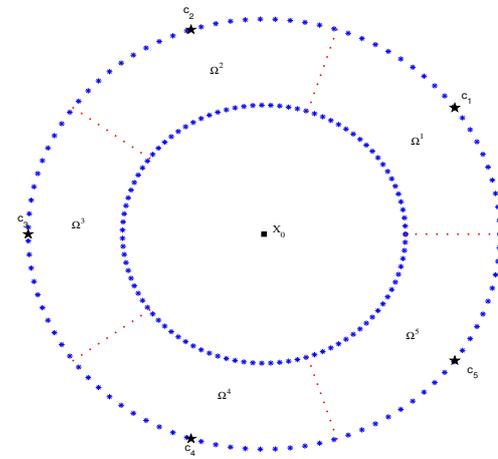


FIG. 2.12 – *Discrétisation de la couronne pour une résolution multizone.*

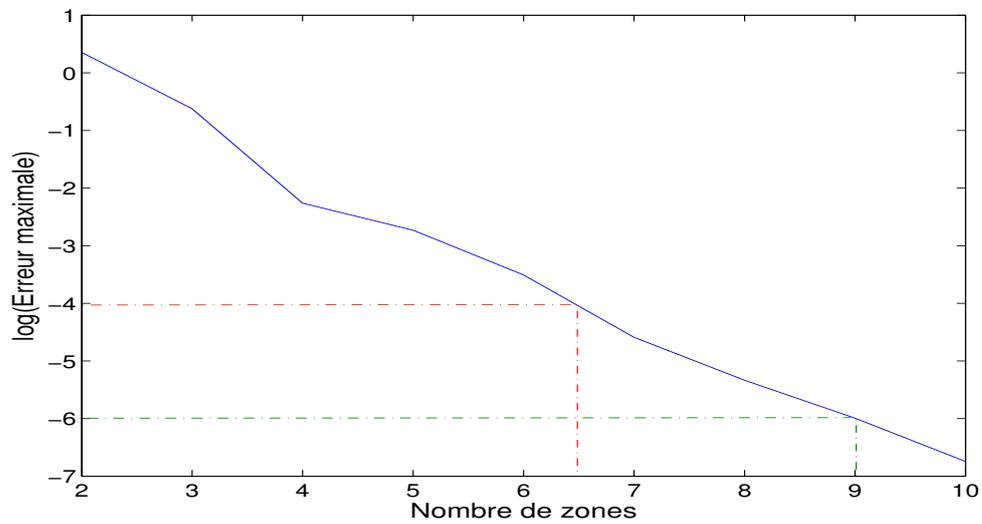


FIG. 2.13 – *Problème de Poisson (2.1). Influence du nombre de zones sur la convergence  $p = 10$ .*

sont présentés sur la figure 2.14. On remarque que la solution s'améliore avec le degré avant d'être stabilisée avec un très haut niveau de précision au degré 30.

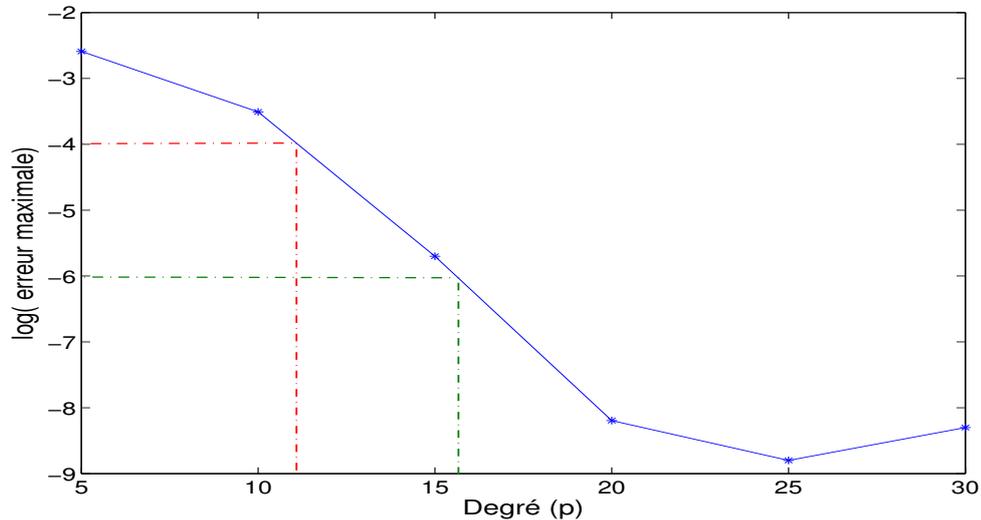


FIG. 2.14 – Problème de Poisson (2.1).  $P$  convergence pour 6 zones

On vient donc d'établir une méthode de raccord entre séries de Taylor de degré élevé, qui conserve la propriété de convergence exponentielle. Le dernier exemple montre que cette décomposition en sous domaines a permis de faire converger un problème où la TMM divergeait. Cette technique de raccord est donc un résultat fondamental pour le développement de la TMM.

## 2.6 Méthode Arlequin

Les résultats de la section précédente ont montré que la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'assurer de manière efficace les conditions de continuité aux interfaces et qu'elle donne une  $p$ -convergence comme en monozone. Toutefois cette technique n'est pas flexible dans le choix du nombre de points de collocations à l'inter-

face. En effet ce nombre est exactement égal à la moitié du nombre de multiplicateurs de Lagrange qui est exactement le nombre d'équations de continuité écrites sur l'interface. Ce dernier doit être inférieur ou égal au nombre d'inconnues de chaque sous domaine pour que le problème soit bien défini.

Cette contrainte nous rappelle les difficultés rencontrées dans [17] lors de l'application des conditions aux limites par la technique de collocation pure. En effet dans cette technique le nombre de points de collocation choisis à la frontière doit être exactement égal au nombre d'inconnues dans le domaine. Il a été remarqué que cette technique conduisait parfois à des matrices mal conditionnées et que d'autres fois elle avait du mal à assurer les conditions aux limites à cause d'une insuffisance d'informations sur la frontière (insuffisance due à un nombre de points de collocations insuffisant). Pour surmonter ce problème, la méthode des moindres carrés a été utilisée. L'avantage de cette technique réside dans le fait qu'elle laisse une liberté dans le choix du nombre de points de collocations sur la frontière, et les conditions aux limites sont assurées en moyenne. Pour rendre plus robuste la technique de raccord proposée, nous avons pensé à rendre indépendant le nombre de multiplicateurs de Lagrange et le nombre de points de collocation choisis dans la zone de raccord. Le seul moyen d'y aboutir est d'assurer les conditions de continuité en moyenne.

Cette réflexion nous a conduit à la méthode Arlequin [59, 60]. Cette technique non seulement permet d'assurer les conditions de continuité aux interfaces en moyenne, mais aussi ces conditions sont assurées sur une zone et non sur une courbe. Ainsi on pourra résoudre des problèmes avec des sous domaines dont les interfaces ne sont pas forcément compatibles. Pour rester dans l'optique de la TMM qui est d'éviter l'intégration numérique, nous sommes restés sur des approximations discrètes, alors que la méthode Arlequin définit le raccord au travers d'une fonctionnelle, qui est une sorte

d'énergie distribuée dans la région de raccord.

### **2.6.1 Formulation de la méthode Arlequin**

La méthode Arlequin est une technique de calcul multi-échelle permettant de raccorder, par une technique de superposition des modèles numériques de nature différente. Elle a été proposée pour la première fois par Ben Dhia [59] en 1998. Depuis, plusieurs travaux ont été effectués sur cette méthode pour prouver son efficacité [60–63]. Qia et al [64] ont travaillé sur l'implémentation de cette méthode dans le logiciel commercial Abaqus.

La méthode Arlequin est souvent couplée avec la méthode des éléments finis pour traiter les interfaces des problèmes dont le domaine est divisé en plusieurs zones nécessitant des niveaux d'analyses différentes. Ceci étant, elle se présente comme un outil idéal pour traiter les difficultés rencontrées aux interfaces lors de la résolution en multizone par la TMM.

Toutefois dans sa formulation d'origine, la méthode Arlequin utilise la forme faible de l'EDP, ce qui fait intervenir des intégrations numériques. Pour rester dans la logique de la TMM (qui est d'éviter le coût de calcul lié à l'intégration), il nous faut adapter la méthode Arlequin à une formulation discrète. Dans un premier temps, nous présentons la formulation Arlequin et ensuite nous montrons comment elle a été reformulée pour être couplée à notre méthode sans maillage.

La méthode Arlequin peut être appliquée à des problèmes complexes, mais ici pour raison de simplicité, nous considérons un domaine  $\Omega$  subdivisé en deux zones  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (fig 2.6). On suppose que ces deux zones ont une intersection non vide  $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ . La méthode Arlequin étant une méthode multi-échelle, on suppose que les deux zones

sont discrétisées de manière différente. Nous l'illustrons sur un problème de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = u^d & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.22)$$

Soit  $W_i$  l'espace des champs cinématiquement admissibles sur le sous domaine  $\Omega_i$ .

La formulation variationnelle sur chaque sous domaine conduit au système :

$$\int_{\Omega_i} \nabla u_i \cdot \nabla v_i d\Omega_i = \int_{\Omega_i} f \cdot v_i d\Omega_i, \quad \forall v_i \in W_i \quad (2.23)$$

Pour assurer la liaison entre les systèmes (continuité entre les deux zones), la méthode Arlequin introduit une forme bilinéaire  $c(\lambda, v)$  sur la zone de raccord  $S$  :

$$c(\lambda, \mu) = \int_S (\lambda \cdot \mu + l^2 \nabla \lambda \cdot \nabla \mu) d\Omega, \quad \forall (\lambda, \mu) \in M^2 \quad (2.24)$$

où  $M$  est un espace admissible défini sur  $S$  et  $l$  est une longueur caractéristique. L'opérateur de couplage ainsi défini est appelée opérateur  $H^1$ . Il existe d'autre manière de définir cet opérateur, entre autre on peut citer l'opérateur de type  $L^2$ . Bauman et al. [65] ont présenté un exposé détaillé sur les propriétés mathématiques de la méthode en utilisant les stratégies de couplage basées sur la norme  $H^1$  et la norme  $L^2$ . Guidault et Belytschko [66] ont présenté une discussion sur les opérateurs de couplage  $H^1$  et  $L^2$ .

Pour assurer la répartition de l'énergie entre les différents modèles, on introduit des champs de pondérations  $\alpha_i$  :

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1, & \text{dans } S \\ \alpha_i &= 1, & \text{dans } \Omega_i \setminus S \end{aligned} \quad (2.25)$$

A l'aide de la formulation variationnelle (2.23) on définit la formulation de la méthode Arlequin par :

$$\begin{aligned}
 \text{Trouver}(u_1, u_2, \lambda) &\in W_1 \times W_2 \times M; \\
 \int_{\Omega_1} \alpha_1 \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega_1 + c(\lambda, v_1) &= \int_{\Omega_1} \alpha_1 f \cdot v_1 d\Omega_1, \quad \forall v_1 \in W_1 \\
 \int_{\Omega_2} \alpha_2 \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega_2 - c(\lambda, v_2) &= \int_{\Omega_2} \alpha_2 f \cdot v_2 d\Omega_2, \quad \forall v_2 \in W_2 \\
 c(\mu, u_1 - u_2) &= 0 \quad \forall \mu \in M
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

La discrétisation de ce système variationnel par la méthode des éléments finis conduit au système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & K_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

où  $K_1$  et  $K_2$  sont les matrices de rigidités pondérées,  $C_1$  et  $C_2$  les matrices de couplage et  $F_1, F_2$  les forces généralisées pondérées.

### 2.6.2 Adaptation à la Taylor Meshless Method

Dans la TMM, l'équation aux dérivées partielles est résolue sous sa forme forte. Pour l'application des conditions aux limites, les méthodes de collocation ont été préférées aux méthodes de Galerkin. Ceci dans le but de réduire les coûts de calcul qu'introduisent les intégrations numériques et pour garder la flexibilité des méthodes sans maillage. Pour rester dans cette logique, il a fallu réécrire le terme de couplage de la méthode Arlequin.

La zone de raccord, qui était une courbe dans le cas de la méthode des multiplika-

teurs de Lagrange, a été remplacée par une surface qui recouvre les deux sous domaines (fig 2.15). On choisit  $M_r$  points de collocation dans la zone de raccord et la fonctionnelle de raccord discrète s'écrit :

$$c_1(\lambda, u) = \sum_{i=1}^{M_r} (\lambda(\underline{x}_i)u(\underline{x}_i) + l^2 \nabla \lambda(\underline{x}_i) \nabla u(\underline{x}_i)) \quad (2.28)$$

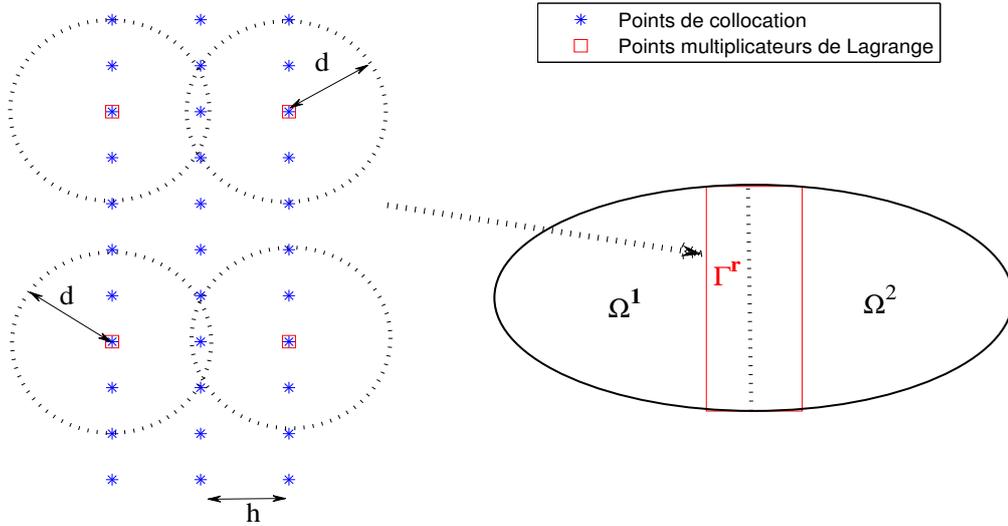


FIG. 2.15 – *Discrétisation de la zone de raccord. La zone de raccord est une surface qui couvre les deux sous domaines. Sa discrétisation introduit deux types de points : les points de collocation et les points associés aux multiplicateurs de Lagrange.*

La fonction  $\lambda(\underline{x})$  est définie par une fonction d'interpolation faisant intervenir des multiplicateurs de Lagrange discrets notés  $\lambda_i$  :

$$\lambda(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \Phi_i^1(\underline{x}) = \langle \Phi^1(\underline{x}) \rangle \{\Lambda\}$$

$$\text{avec } \Phi_i^1(\underline{x}) = \exp\left(\frac{-|\underline{x} - \underline{x}_i|^2}{d^2}\right)$$

$$\langle \Phi^1(\underline{x}) \rangle = \langle \Phi_1^1(\underline{x}), \dots, \Phi_{N_\lambda}^1(\underline{x}) \rangle \quad \text{et} \quad \{\Lambda\}^T = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_{N_\lambda} \rangle$$

et  $d$  est la taille du support des fonctions de forme  $\Phi_i$ .

La fonctionnelle de raccord devient donc :

$$c_1(\Lambda, u) = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \sum_{j=1}^{M_r} (\Phi_i^1(\underline{x}_j)u(\underline{x}_j) + l^2 \nabla \Phi_i^1(\underline{x}_j) \nabla u(\underline{x}_j)) \quad (2.29)$$

En couplant cette fonctionnelle avec la fonctionnelle des moindres carrés pour les conditions aux limites, on obtient un système de même forme que (2.27). Les premiers tests ont montré un bon raccord de  $u$ , mais pas de sa première dérivée. Pour corriger cette discontinuité on a introduit une nouvelle fonctionnelle de raccord, qui est de la même forme que la précédente, mais on remplace la fonction  $\Phi_i^1$  par  $\Phi_i^2$  tel que :

$$c_2(\Lambda, u) = \sum_{\lambda_i \in \Lambda} \lambda_i \sum_{j=1}^{M_r} (\Phi_i^2(\underline{x}_j)u(\underline{x}_j) + l^2 \nabla \Phi_i^2(\underline{x}_j) \nabla u(\underline{x}_j)) \quad (2.30)$$

avec  $\Phi_i^2(\underline{x}) = (\underline{x} - \underline{x}_i) \cdot \underline{n} \cdot \exp\left(-\frac{|\underline{x} - \underline{x}_i|^2}{d^2}\right)$

où  $\underline{n}$  est une normale de l'interface. La fonctionnelle de raccord totale s'écrit donc :

$$c(\Lambda^1, \Lambda^2, u) = c_1(\Lambda^1, u) + c_2(\Lambda^2, u) \quad (2.31)$$

Ainsi à l'interface il y a deux types de points (voir fig 2.15) :

- $M_r$  points de collocation sur lesquels on assure les conditions de continuité.
- $N_\lambda$  points de collocation qui sont liés aux multiplicateurs de Lagrange. Autour de chacun de ces points, on assure la continuité en moyenne sur tous les points qui sont compris dans le disque de rayon  $d$ . La valeur de  $d$  est définie par l'utilisateur suivant la largeur de la zone de raccord et de la valeur de  $M_r$ .

La résolution du problème dans le domaine  $\Omega$  revient donc à :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (v^1, v^2, \Lambda^1, \Lambda^2) \text{ qui rend stationnaire la fonction :} \\ & L(v^1, v^2, \Lambda^1, \Lambda^2) = J_1(v^1) + J_2(v^2) + c(\Lambda^1, \Lambda^2, u_1 - u_2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

où  $u_i(\underline{x})$  est la solution approchée dans la zone  $\Omega_i$  et  $J$  est la fonctionnelle des moindres carrés pour l'application des conditions aux limites :

$$J_i(v^i) = \frac{1}{2} \sum_{\underline{x}_j \in \partial\Omega_i} \left| P_0^i(\underline{x}_j) + \sum_{k=1}^{2p_i+1} P_k^i(\underline{x}_j) v_k^i - u^d(\underline{x}_j) \right|^2 \quad (2.33)$$

En posant  $\Lambda = \langle \Lambda_1, \Lambda_2 \rangle$ , la minimisation de la fonctionnelle  $L$  conduit à un système linéaire de la même forme que celle de la méthode Arlequin (2.27) :

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & K_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \Lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

avec :

$$[K_1] = \sum_{j=1}^{M_1} [Q^j] \quad \text{avec } Q_{ik}^j = P_i^1(\underline{x}_j)P_k^1(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^1$$

$$[K_2] = \sum_{j=1}^{M_2} [Q^j] \quad \text{avec } Q_{ik}^j = P_i^2(\underline{x}_j)P_k^2(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^2$$

$$C_1^T = [C_{11} \quad C_{12}] :$$

$$[C_{11}] = \sum_{r=1}^{M_3} [C^r] \quad \text{avec } C_{ik}^r = \Phi_i^1(\underline{x}_r)P_k^1(\underline{x}_r) + l^2 \nabla \Phi_i^1(\underline{x}_r) \nabla P_k^1(\underline{x}_r), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

$$[C_{12}] = \sum_{r=1}^{M_3} [C^r] \quad \text{avec } C_{ik}^r = \Phi_i^2(\underline{x}_r)P_k^1(\underline{x}_r) + l^2 \nabla \Phi_i^2(\underline{x}_r) \nabla P_k^1(\underline{x}_r), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

$$C_2^T = [C_{21} \quad C_{22}] :$$

$$[C_{21}] = \sum_{r=1}^{M_3} [C^r] \quad \text{avec } C_{ik}^r = \Phi_i^1(\underline{x}_r)P_k^2(\underline{x}_r) + l^2 \nabla \Phi_i^1(\underline{x}_r) \nabla P_k^2(\underline{x}_r), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

$$[C_{22}] = \sum_{r=1}^{M_3} [C^r] \quad \text{avec } C_{ik}^r = \Phi_i^2(\underline{x}_r)P_k^2(\underline{x}_r) + l^2 \nabla \Phi_i^2(\underline{x}_r) \nabla P_k^2(\underline{x}_r), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

et

$$F_{1i} = \sum_{j=1}^{M_1} (u^d(\underline{x}_j) - P_0^1(\underline{x}_j)) P_i^1(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^1$$

$$F_{2i} = \sum_{j=1}^{M_2} (u^d(\underline{x}_j) - P_0^2(\underline{x}_j)) P_i^2(\underline{x}_j), \quad \underline{x}_j \in \Gamma^2$$

$$F_3^T = [b_1 \quad b_2] :$$

$$b_{1i} = \sum_{r=1}^{M_3} \Phi_i^1(\underline{x}_r) (P_0^2(\underline{x}_r) - P_0^1(\underline{x}_r)) + l^2 \nabla \Phi_i^1(\underline{x}_r) (\nabla P_0^2(\underline{x}_r) - \nabla P_0^1(\underline{x}_r)), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

$$b_{2i} = \sum_{r=1}^{M_3} \Phi_i^2(\underline{x}_r) (P_0^2(\underline{x}_r) - P_0^1(\underline{x}_r)) + l^2 \nabla \Phi_i^2(\underline{x}_r) (\nabla P_0^2(\underline{x}_r) - \nabla P_0^1(\underline{x}_r)), \quad \underline{x}_r \in \Gamma^r$$

### 2.6.3 Validation

#### 2.6.3.1 Application au problème de Laplace sur un disque

Considérons le problème de Laplace (2.15). On veut résoudre ce problème en multi-zone en utilisant la technique couplée TMM - Arlequin. Le domaine est divisé en deux zones séparées par la droite d'équation  $x = 0$ . Pour rester dans la logique de la méthode Arlequin, on considère autour de l'interface une zone sur laquelle nous allons raccorder. Cette zone est un rectangle de longueur  $2R$  et de largeur  $2h$  (fig 2.16). Le paramètre  $h$  est défini par l'utilisateur et représente la demi largeur de la bande de raccord. Dans chaque sous domaine on fait une approximation en série de Taylor. Des points sont choisis sur les bords afin d'appliquer des conditions aux limites par la méthode des moindres carrés. Dans la zone de raccord, on choisit des points de collocation et des points associés aux multiplicateurs de Lagrange (fig 2.16). Autour de chaque point multiplicateur de Lagrange, on applique les conditions de raccord en moyenne sur tous les points appartenant au disque de rayon  $d$  centré sur le point multiplicateur de Lagrange en question. Le paramètre  $d$  est fixé par l'utilisateur.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à l'influence de la demi largeur de bande  $h$  sur la qualité de la solution. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.4. Ces résultats sont obtenus avec  $p_1 = p_2 = p$ ,  $M_1 = M_2 = 4p$ ,  $M_r = 4p$  et  $N_\lambda = p$ . On remarque que la méthode converge bien. On a une erreur de  $10^{-3}$  au degré 10. En plus on remarque que le paramètre  $h$  n'influe pas sur la qualité de la solution. Ce résultat n'est pas très étonnant, car les EDP résolues de part et d'autre de l'interface sont les mêmes. Il suffit donc de raccorder sur une ligne. Cette étude nous permet d'éliminer le paramètre  $h$  dans la formulation du raccord.

Dans la suite, nous travaillerons donc avec  $h = 0$ . D'autre part on remarque que le

paramètre  $d$  influe peu sur la qualité de la solution. Si  $d$  est grand, le nombre de points sur lesquels on raccorde autour d'un point de multiplicateur de Lagrange est grand. Cependant on apporte beaucoup d'informations de continuité.

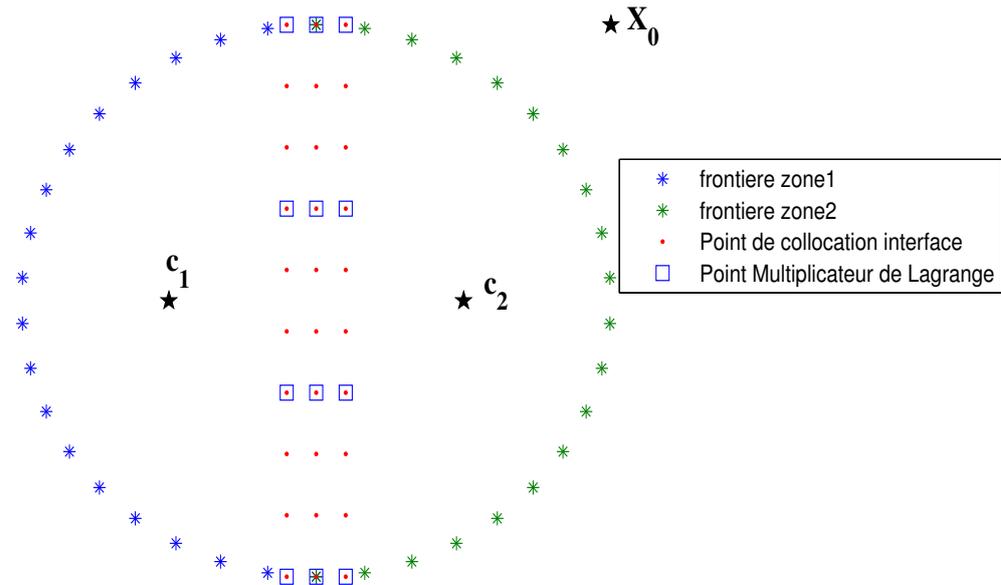


FIG. 2.16 – Discretisation du disque en 2 zones dans la méthode Arlequin.

Dans le tableau 2.5, on compare la solution obtenue avec cette nouvelle technique à celle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et celle obtenue en faisant une résolution en monozone. Les résultats montrent que la méthode Arlequin vient corriger les petites erreurs introduites par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Rappelons que la méthode des multiplicateurs de Lagrange est un cas particulier de la méthode Arlequin avec  $d = 0$ ,  $h = 0$  et  $M_r = N_\lambda$ . Le fait de retrouver les mêmes erreurs que dans la résolution en monozone est satisfaisant.

TAB. 2.4 – Problème de Laplace (2.15). Influence de la largeur de la zone interface.

$h$	$d$	$\log(E_{max})_{p=10}$	$\log(E_{max})_{p=20}$
0.3	0.5	-2.8173	-4.7552
	0.4	-2.8339	-4.9001
	0.2	-2.7004	-4.7628
	0.1	-2.6117	-4.7522
0.2	0.5	-2.8173	-4.7552
	0.4	-2.8339	-4.9001
	0.2	-2.7004	-4.7628
	0.1	-2.6117	-4.7522
0	0.5	-2.8173	-4.7552
	0.4	-2.8339	-4.9001
	0.2	-2.7004	-4.7628
	0.1	-2.6117	-4.7522

TAB. 2.5 – Problème de Laplace (2.15). Comparaison des différentes méthodes étudiées

	Monozone	Multiplicateurs de Lagrange		Méthode Arlequin	
		2 zones	3 zones	2 zones	3 zones
$p = 10$	-2.6167	-2.5752	-2.6380	-2.6236	-2.6231
$p = 15$	-3.8720	-3.9894	-3.8805	-3.8880	-3.8692
$p = 20$	-4.5437	-5.4012	-5.1080	-4.7146	-5.1202

### 2.6.3.2 Raccord de deux polynômes de degrés différents par la méthode Arlequin

Nous considérons le problème de Laplace avec une singularité en  $[1.5, 0]$ , comme à la section (2.5.2.2). Ce problème est résolu avec la méthode proposée ci-dessus en faisant une approximation de degré différent dans chaque sous domaine. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 2.6. Contrairement à la méthode des multiplicateurs de Lagrange, dans la méthode Arlequin, le nombre de multiplicateurs de Lagrange est indépendant du nombre de points de collocation à la frontière.

TAB. 2.6 – Problème de Laplace (2.15). Raccord de deux polynômes différents par la méthode Arlequin.

$p_1$	$p_2$	$N_\lambda$	$M_r$	$\log(\text{Erreur maximale})$
3	15	6	10	-1.76
4	15	6	10	-1.95
5	15	6	10	-2.13
6	15	6	10	-2.22
7	15	6	10	-2.20
		7	15	-2.45
8	15	7	15	-2.35
		8	15	-2.32
9	15	7	15	-2.10
		9	15	-3.63
10	15	10	18	-3.97
12	15	12	20	-3.42
15	15	15	15	-4.37
		15	20	-4.37
		15	30	-4.37
Monozone $p = 15$				-2.70

Les résultats obtenus avec la méthode Arlequin sont semblables à ceux obtenus avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On obtient à peu près la précision du monozone de degré 15, en faisant une approximation de degré 15 près de la singularité et un degré 5 dans le reste du domaine. On remarque aussi que la résolution en deux zones

permet d'accélérer la convergence. On gagne deux ordres de convergence en faisant une approximation de degré 15 dans les deux sous domaines.

Une comparaison des tableaux 2.3 et 2.6, montre qu'on obtient presque la même précision avec la méthode Arlequin qu'avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour des degrés fixes. Cependant on remarque que la méthode Arlequin nécessite moins de multiplicateurs de Lagrange. Le fait de raccorder en moyenne dans la méthode Arlequin, permet d'écrire moins d'équations de continuité tout en impliquant la condition de transmission en plus de points de collocation. La taille de la matrice  $K$  dans la méthode Arlequin est donc plus petite que celle de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On peut donc s'attendre à une méthode plus rapide. En utilisant la méthode Arlequin, on atteint un gain significatif en flexibilité, en généralité et en efficacité.

### 2.6.3.3 Application au problème de Poisson

A présent nous nous intéressons au problème de Poisson (2.1). La résolution de ce problème en multizone est d'une grande importance. En effet elle permettra de faire converger ce problème qui, rappelons-le, diverge en monozone.

Sur la figure 2.17, on présente l'erreur obtenue pour différents nombres de sous domaines. Comme prédit dans la section (2.2.2), on remarque que l'erreur diminue avec le nombre de sous domaines. On remarque aussi que ce problème qui divergeait en monozone converge à partir de 4 sous domaines. Ces résultats sont donc très satisfaisants.

Sur la figure 2.18 on présente l'erreur en fonction du degré pour 6 sous domaines. On a p- convergence comme dans la résolution du problème de Laplace en monozone. La présente méthode est prometteuse et robuste. En effet le nombre d'équations de raccord sur l'interface est indépendant du nombre de points de collocations choisis.

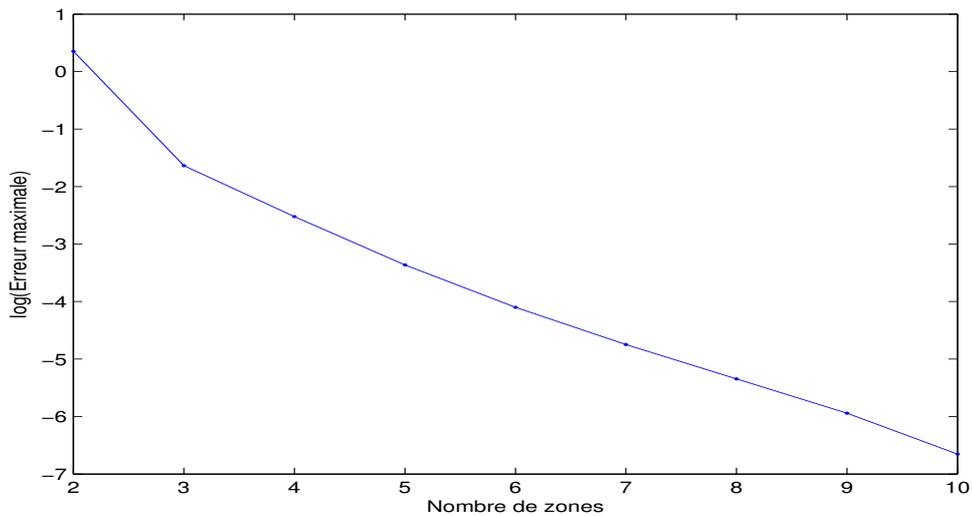


FIG. 2.17 – Problème de Poisson (2.1). Influence du nombre de sous domaines sur la convergence. Degré  $p = 12$ .

## 2.7 Coût de calcul dans la résolution multizone

Dans les deux types de résolution, monozone et multizone, afin de déterminer les variables principales on doit inverser une matrice de dimension  $k * k$ . Dans le cas de la résolution multizone, on constate que la taille de la matrice de rigidité  $K$  est directement liée au nombre de zones, au degré d'interpolation et également au nombre de points de raccord pris sur chaque frontière. Ainsi, cette matrice carrée voit sa taille augmenter rapidement lorsque l'on subdivise le domaine en plusieurs zones. Voici un aperçu de la taille de la matrice de rigidité pour 1, 2, 3 et 4 zones ; on suppose alors que  $p = 10$  et que l'on prend  $N_\lambda = 2p = 20$ , c'est-à-dire 10 points de raccord sur chaque frontière :

- 1 zone : pas de raccord,  $2p + 1$  inconnues  $\dim(K) = 21 \times 21$ ,
- 2 zones : 1 raccord donc  $N_\lambda$  inconnues (multiplicateurs de Lagrange) et  $2 \times (2p + 1)$  inconnues de déplacement implique  $\dim(K) = 62 \times 62$ ,

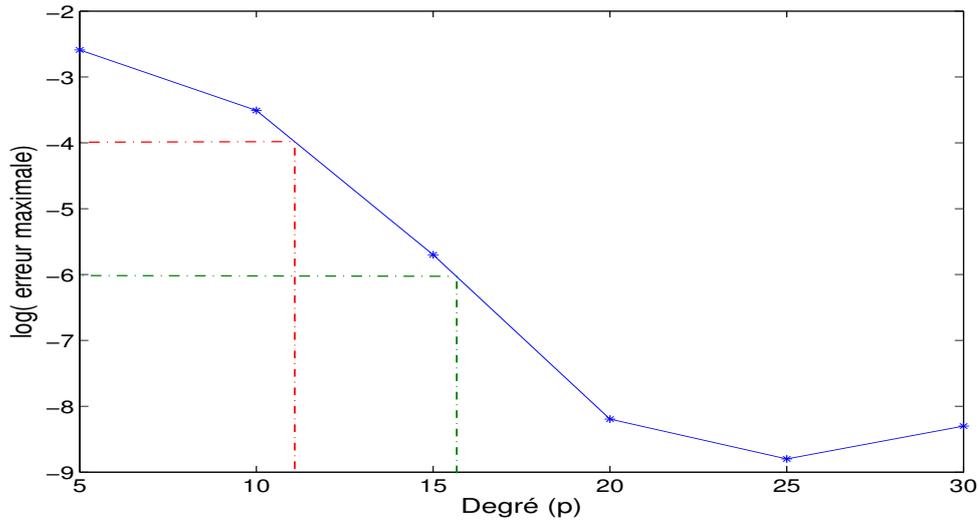


FIG. 2.18 – *P*-convergence du problème de Poisson (2.1) pour 6 zones.

- 3 zones : 3 raccords donc  $3 \times N_\lambda$  inconnues (multiplicateurs de Lagrange) et  $3 \times (2p + 1)$  inconnues de déplacement implique dimension  $123 \times 123$ .

Au-delà de 3 zones, on a une augmentation linéaire de la taille de la matrice de rigidité (ou du nombre d'inconnues) avec le nombre de zones considérées :

$$\dim = (\text{nombre de zones}) * (2p + 1) + (\text{nombre d'Interfaces}) * (N_\lambda) \quad (2.35)$$

Il faut noter que dans le cas de la méthode Arlequin, on n'a pas besoin d'aller jusqu'à  $2p$  multiplicateurs de Lagrange pour avoir une bonne convergence.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des techniques pour raccorder des séries de Taylor. Le raccord revient à assurer la continuité des séries ainsi que de leurs premières

dérivées. Les tests effectués nous ont conduit d'une technique peu stable et moins robuste à une technique stable et robuste. Cette dernière est inspirée de la technique Arlequin qui a été adaptée en discrétisant la condition de transmission par collocation. Cette adaptation est établie dans l'optique de la méthode proposée dans le but d'éviter l'intégration numérique qui augmenterait le coût de calcul.

La technique proposée dans ce chapitre a été appliquée au problème de Poisson sur une couronne. Ce problème a convergé en multizone alors qu'il diverge en monozone. Cette divergence s'explique par la position de la singularité qui empêche de trouver un point de développement tel que tout le domaine soit visible à partir de celui là. Les résultats obtenus en multizone ont confirmé la théorie sur les domaines de convergence des séries de Taylor. En effet le rayon de convergence est lié à la première singularité. En tous cas, il est remarquable que les diverses méthodes proposées (multiplicateurs de Lagrange, méthode Arlequin), permettent de retrouver la convergence exponentielle qu'on avait obtenue avec une seule zone dans certains cas ; cela montre que ces méthodes de raccord ne dégradent pas les excellentes propriétés de convergence de la TMM. On peut maintenant étendre cette convergence exponentielle, dans les cas où une seule série de Taylor ne suffit pas. De plus cette méthode semble très robuste par rapport aux divers paramètres de la méthode (degré, nombre de points de contrôle, nombre de multiplicateurs, ...).

Ce chapitre vient renforcer la méthode sans maillage proposée dans cette thèse. Il est d'une grande importance dans le sens où la plupart des problèmes mécaniques sont à géométries complexes. Ce qui veut dire que cela nécessitera une résolution en multizones. Ce chapitre a établi un outil important pour affronter ce genre de problèmes.

Néanmoins une question se pose : comment connaître la position de la première singularité pour des problèmes dont on connaît pas la solution analytique ? Cette ques-

tion est cruciale, car c'est la position de la singularité qui permet de fixer le nombre de sous domaines nécessaires pour une bonne convergence. Dans la littérature il existe des techniques pour localiser ces singularités à partir des coefficients de Taylor [67–70]. Ce problème sera traité dans le chapitre suivant.



# CHAPITRE 3

## Analyse des séries et accélération de convergence de la TMM

### 3.1 Introduction

Les séries obtenues en faisant des approximations en série entière contiennent des informations sur la fonction approchée. Cependant ces informations ne sont pas directement accessibles. Une information très intéressante est la position de la première singularité qui représente la limite du domaine de convergence de la série calculée. Plusieurs techniques ont été développées pour détecter la position et l'ordre de cette première singularité à partir des coefficients de la série calculée. D'autres techniques permettent à partir de la connaissance de cette information d'améliorer l'approximation faite au départ.

La TMM étant une méthode d'approximation en série de Taylor, il est donc important d'explorer les coefficients des séries calculées afin d'évaluer le domaine de convergence des séries. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à cette étude. Dans un premier temps il s'agit d'analyser les coefficients afin de comprendre la structure analy-

tique de la solution de l'EDP résolue. Des techniques comme les diagrammes de Domb Sykes et le critère de Darboux ont été utilisées. Ces techniques permettent d'estimer l'ordre et la position de la première singularité à partir d'un nombre fini de coefficients. Couplées à la TMM, ces techniques vont permettre de définir un critère de détection des singularités de la solution analytique à partir des coefficients calculés.

Dans la deuxième partie, il s'agira de proposer des techniques d'accélération de convergence pour rendre la TMM plus robuste et plus précise. Nous introduirons la méthode des approximants de Padé et les approximations de Taylor multipoint. Ces techniques vont permettre d'améliorer la convergence de la solution obtenue par la TMM.

## **3.2 Etude de la robustesse de la TMM**

L'idée principale de la TMM est de faire une approximation en série de Taylor. Néanmoins, rien ne garantit que la série construite après application des conditions aux limites soit proche de la série représentant la solution exacte. En effet l'application des conditions aux limites étant faite de manière approchée, elle peut introduire des erreurs de manière à agir sur le comportement des coefficients de Taylor calculés. Ceci peut se traduire par une forte variation de la valeur d'un même coefficient en passant d'un degré à un autre. Pour s'assurer de la stabilité des coefficients par rapport au degré d'approximation, nous avons comparé les valeurs des coefficients des séries obtenues par la TMM pour deux degrés différents. Nous profitons de cette étude pour comparer aussi les valeurs approchées aux valeurs des coefficients de l'approximation de Taylor de la solution exacte.

Le but de cette étude est de s'assurer que les techniques d'analyse de séries de perturbation [71] peuvent être appliquées à la TMM. Ces techniques permettent de prédire la nature de la solution analytique à partir des coefficients de la série analysée. Cependant

la plupart de ces techniques sont développées en 1D. Afin d'appliquer ces techniques à la TMM, nous ramenons la solution approchée en 1D en fixant l'une des variables. Ce passage en 1D se fait suivant la nature du domaine d'étude. En effet si le domaine d'étude est circulaire, nous nous ramenons en coordonnées polaires, puis nous fixons la variable  $\theta$ . Ainsi nous travaillons sur des lignes radiales. Pour les autres types de domaines, nous restons en coordonnées cartésiennes et nous fixons l'ordonnée  $y$  afin de travailler sur des droites  $y = y_0$ . Ainsi dans la suite, nos solutions approchées seront de la forme :

$$u(r, \theta_0) = \sum_{i=0}^N c_i(\theta_0) r^i \quad \text{avec } \theta_0 \text{ fixé}$$

ou

$$u(x, y_0) = \sum_{i=0}^N c_i(y_0) x^i \quad \text{avec } y_0 \text{ fixé}$$
(3.1)

L'analyse numérique des coefficients est faite pour les problèmes de Laplace, d'Helmholtz et de Poisson étudiés dans les chapitres précédents (1.12), (1.18) et (2.1). Chacun de ces problèmes a une particularité. En effet la solution analytique du problème de Laplace admet une singularité finie située à l'extérieur du domaine, celle du problème d'Helmholtz n'admet pas de singularité et celle du problème de Poisson admet une singularité située au centre du domaine. Rappelons que la TMM appliquée au problème de Laplace et d'Helmholtz converge, mais appliquée au problème de Poisson sur une couronne, elle diverge, il a fallu considérer une portion du domaine pour faire converger la TMM.

Les tableaux 3.1 et 3.2 présentent les coefficients pour le problème de Laplace avec une singularité en  $X_0 = [1.2, 0.3]$  et respectivement pour le problème d'Helmholtz avec une longueur  $l = 5$ . On remarque que les coefficients obtenus par la TMM sont plus ou

moins stables, ceci jusqu' à un ordre  $10^{-3}$ . Les coefficients gardent la même valeur quel que soit le degré d'approximation. En plus les valeurs obtenues sont très proches de celle de la solution analytique. Et on approche mieux les valeurs exactes des coefficients en augmentant l'ordre d'approximation. Ces résultats viennent confirmer la p-convergence obtenue dans les chapitres précédents.

TAB. 3.1 – Coefficients de la série radiale ( $\theta = 0$ ) calculée par la TMM pour le problème de Laplace (1.12) avec singularité en  $[1.2, 0.3]$ . On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que la TMM approche bien la série de Taylor de la solution exacte.

	TMM $p = 10$	TMM $p = 20$	Série de la solution exacte
$c_0$	-0,784266	-0,7843137	-0,784313
$c_1$	-0,576596	-0,5767012	-0,576701
$c_2$	-0,391874	-0,392006	-0,392006
$c_3$	-0,237809	-0,237982	-0,237982
$c_9$	0,092167	0,091851	0,0918517
$c_{10}$	0,087152	0,086959	0,086959

Dans le tableau 3.3, les coefficients présentés sont ceux du problème de Poisson sur la couronne entière. Dans ce cas on remarque que l'on a une mauvaise approximation des coefficients analytiques et que ces coefficients varient fortement en passant d'un degré à un autre. Ce qui explique la divergence de l'approximation. La stabilité des coefficients est rétablie en faisant une résolution sur un secteur de la couronne (tableau 3.4). Dans ce cas on approche à nouveau les valeurs des coefficients de la série de Taylor de la solution exacte et ceci indépendamment de l'ordre d'approximation. Ceci étant cette approximation est de plus en plus précise en augmentant le degré.

TAB. 3.2 – Précision des coefficients de la série radiale ( $u(x, 1.5)$ ), calculée par la TMM pour le problème d'Helmholtz (1.18) avec  $l = 5$  et  $h = 4$ . Le tableau montre que la TMM approche bien la série de Taylor de la solution exacte. Les coefficients impairs sont nuls.

	TMM $p = 10$	TMM $p = 20$	Série de la solution exacte
$c_0$	3,082e-03	3,202e-03	3,202e-03
$c_1$	1,231e-14	-3,819e-13	0
$c_2$	2,574e-03	2,589e-03	2,589e-03
$c_3$	-3,967e-15	3,573e-13	0
$c_9$	5,299e-20	-7,304e-16	0
$c_{10}$	7,391e-10	9,748e-09	9.751e-09

TAB. 3.3 – Coefficients de la série radiale ( $\theta = 0$ ) calculée par la TMM pour le problème de Poisson (2.1) sur la couronne. On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que l'on n'approche pas les coefficients de la série exacte et que les coefficients approchés calculés sont instables par rapport au degré. Ce tableau vient confirmer les résultats obtenus au chapitre 2.

	TMM $p = 10$	TMM $p = 20$	Série de la solution exacte
$c_0$	86	86246	1
$c_1$	551	308912	-2
$c_2$	-1003	-1898429	3
$c_3$	-1045	-5439988	-4
$c_9$	-49	-27552178	-10
$c_{10}$	4	-7840746	11

TAB. 3.4 – Coefficients de la série radiale ( $\theta = 0$ ) calculée par la TMM pour le problème de Poisson (2.1) sur un secteur ( $\alpha = 0, \beta = \pi/8$ ). On compare avec les coefficients de Taylor de la solution exacte du problème. Le tableau montre que l'on approche bien les coefficients de la série exacte et on retrouve la stabilité des coefficients approchés. Stabilité perdue en faisant la résolution sur toute la couronne.

	TMM $p = 10$	TMM $p = 20$	Série de la solution exacte
$c_0$	1,0000012	0,999999996	1
$c_1$	-1,999963	-2,000000163	-2
$c_2$	3,000491	2,9999959	3
$c_3$	-3,99567	-4,000064	-4
$c_9$	-6,471	-17,32	-10
$c_{10}$	14,41	-17,01	11

### 3.3 Détection de la position et de l'ordre de singularité

Dans cette section nous exploitons les coefficients calculés par la TMM, pour avoir des informations sur la nature du problème étudié (solution analytique). En mathématique, plusieurs théorèmes permettent de calculer le rayon de convergence d'une série à partir du comportement à l'infini des coefficients. Toutefois dans la TMM, on ne calcule qu'un nombre fini de coefficients. Afin d'estimer le domaine de convergence des séries calculées, il nous faut donc faire appel à des techniques d'approximation de rayon de convergence. Dans ces techniques, le rayon de convergence est souvent approché par la première singularité [71]. Dans cette section les techniques utilisées sont le diagramme de Domb Sykes et le critère de Darboux. Une comparaison des résultats sera faite avec le critère d'Hadamard.

### 3.3.1 Domb Sykes plot

Cette technique est inspirée du critère de D'Alembert qui stipule que "le rayon de convergence d'une série  $\sum_n c_n x^n$  est donné par la relation :

$$R = \lim \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} \right| \quad (3.2)$$

L'estimation de cette limite semble impossible dans le cas d'un nombre fini de coefficients. Domb et Sykes [69] ont remarqué qu'il est plus intéressant de calculer le rapport inverse  $c_n/c_{n-1}$ . En effet pour  $n$  suffisamment grand, ce nouveau ratio commence par s'aligner suivant une droite.

#### Lemme

Soit  $S(x) = \sum_n c_n x^n$  la série de la fonction singulière :

$$f(x) \equiv \text{const} * \begin{cases} (x_0 \pm x)^\nu, & \nu \neq 0, 1, 2, \dots \\ (x_0 \pm x)^\nu \log(x_0 \pm x), & \nu = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

Les coefficients de cette fonction vérifient :

$$D_s(i) = \frac{c_i}{c_{i-1}} = \pm \frac{1}{x_0} \left( 1 - \frac{1 + \nu}{i} \right). \quad (3.4)$$

Ce lemme est connu sous le nom de diagramme de Domb Sykes. Dans les développements asymptotiques, les séries obtenues sont plus complexes que la forme (3.3). Toutefois souvent la première singularité peut avoir un terme dominant de type  $(x_0 \pm x)^\nu$ . Cochelin et al [70] ont montré que les coefficients obtenus par un développement asymptotique vérifient aussi la relation (3.4) pour  $n$  suffisamment grand.

Nous appliquons ce critère aux coefficients analysés dans la section précédente. Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5. Les rapports de Domb Sykes sont calculés en utilisant les coefficients comme présentés dans la section précédente (i.e. en fixant une variable).

Pour le problème de Laplace sur un disque avec une singularité en  $[1.2, 0.3]$ , on fixe le paramètre  $\theta$  en coordonnées polaires, puis on travaille sur des lignes radiales. La figure 3.1 représente les diagrammes de Domb Sykes dans deux directions différentes. On remarque que dans la direction autre que celle de la singularité, les diagrammes de Domb Sykes oscillent fortement et ceci sans devenir linéaire même pour des degrés très élevés. Les tests ont été effectués dans plusieurs directions et on remarque que le rapport de Domb Sykes ne converge que dans la direction de la singularité. Dans cette direction, la valeur du ratio est constante et elle approche bien l'inverse de la distance séparant le point de développement et la première singularité ( $1/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ).

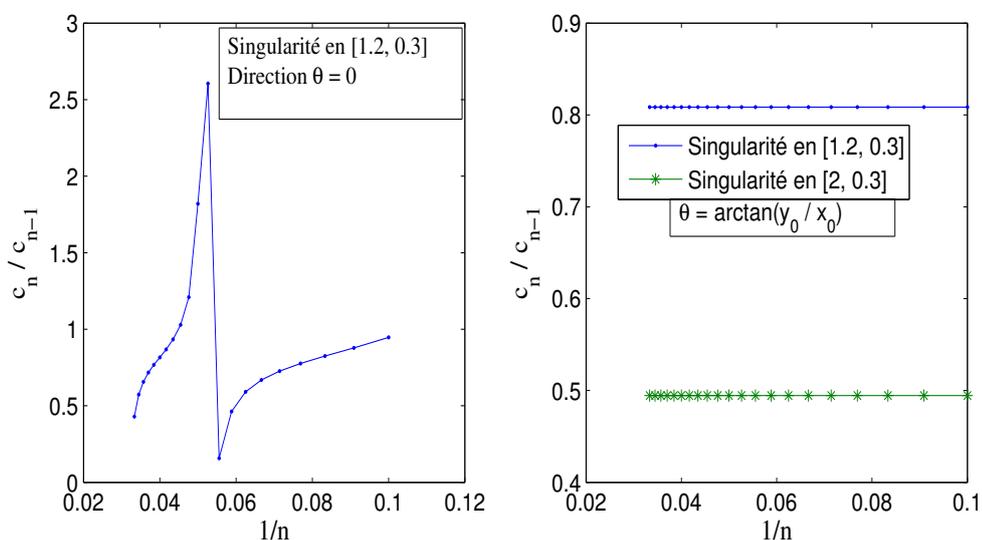


FIG. 3.1 – Les diagrammes de Domb Sykes pour le problème de Laplace (1.12). Excepté dans la direction de la singularité, le rapport de Domb Sykes diverge. Dans la direction de la singularité, il converge vers l'inverse de la singularité.

### 3.3. Détection de la position et de l'ordre de singularité

---

Ensuite on s'intéresse au problème d'Helmholtz. Pour ce problème la solution exacte n'admet pas de singularité, on s'attend à un rayon de convergence infini et donc à un rapport de Domb Sykes qui converge vers 0. Sur la figure 3.2, on présente les diagrammes de Domb Sykes pour le problème d'Helmholtz sur deux lignes  $y = 1.5$  et  $y = 0$ . Contrairement au cas du problème de Laplace on remarque que le rapport diverge quelle que soit la direction choisie (valeur de  $y$ ). En effet il varie très fortement en passant d'un degré à un autre. Ce résultat n'est pas très étonnant en se référant à l'analyse des coefficients faites dans la section précédente (tableau 3.2). En effet le tableau 3.2 montre que les coefficients impairs de la série approchée sont quasiment nuls. Il est donc évident que le rapport de Domb Sykes sera nul pour des degrés impairs et relativement très grand pour les degrés pairs. Ce qui se traduit par une forte oscillation du diagramme sur la figure. Pour faire converger le rapport de Domb Sykes et ainsi détecter l'absence de singularité, nous avons étudié la sous série paire extraite de la série calculée. Cette technique a été proposée par Domb Sykes dans [69] pour les cas où le diagramme de Domb Sykes oscille fortement.

Les diagrammes de Domb Sykes obtenus pour la sous série paire sont présentés sur la figure 3.3. Dans ce cas, on remarque que le rapport donne des valeurs très faibles et ceci dès de petits degrés. Nous rappelons que le rapport de Domb Sykes donne l'inverse du rayon de convergence, ainsi la valeur 0 correspond à un rayon de convergence infini qui correspond bien au rayon de convergence du problème d'Helmholtz (absence de singularité).

La même application a été faite sur le problème de Poisson dans une couronne. La solution analytique de ce problème présente une singularité en  $[0, 0]$ . La résolution analytique de ce problème en monozone diverge et il a été montré dans le chapitre précédent qu'on pouvait faire converger la TMM en divisant en plusieurs sous domaines.

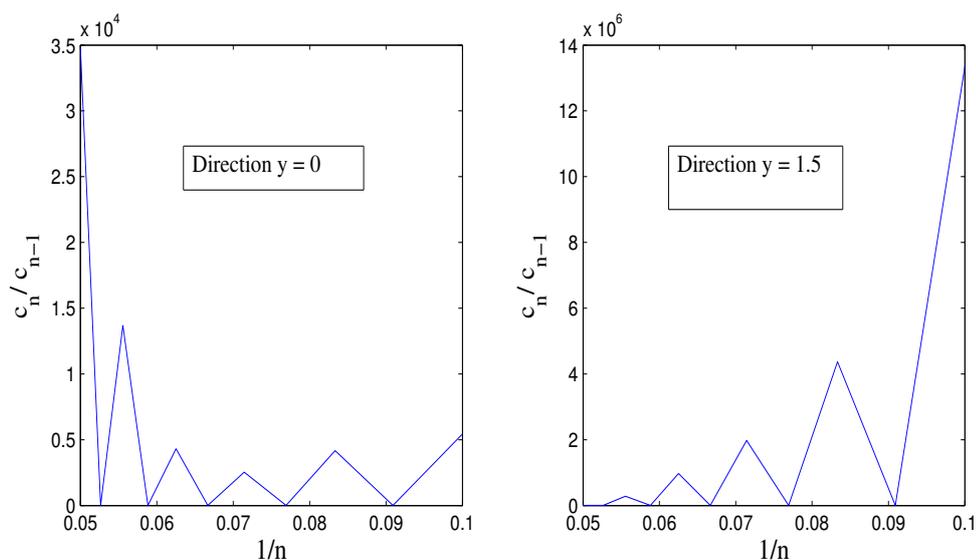


FIG. 3.2 – Les diagrammes de Domb Sykes pour le problème d’Helmholtz. Le rapport de Domb Sykes diverge quelle que soit la direction.

Sur la figure 3.4, nous présentons les résultats obtenus par les coefficients de la TMM sur toute la couronne (en monozone). On remarque que le diagramme de Domb Sykes diverge et ceci même dans la direction de la singularité. Ces résultats montrent qu’il est difficile d’exploiter les coefficients d’une série divergente (irrégulière).

Contrairement au cas précédent, en prenant la série convergente obtenue sur un secteur, on arrive à détecter la singularité en  $-1$ . En effet sur la figure 3.5, on présente le diagramme de Domb Sykes dans la direction  $\theta = 0$  avec un point de développement en  $[1, 0]$ . Par rapport à ce point de développement et dans la direction  $\theta = 0$ , la singularité se positionne donc en  $r = -1$ . La figure 3.5 montre que l’on approche bien cette singularité. Toutefois le rapport de Domb Sykes approche la singularité que pour de faibles degrés. En augmentant le degré le rapport oscille fortement. Cette oscillation est due au fait que l’on a du mal à approcher les coefficients de hauts degrés par la TMM.

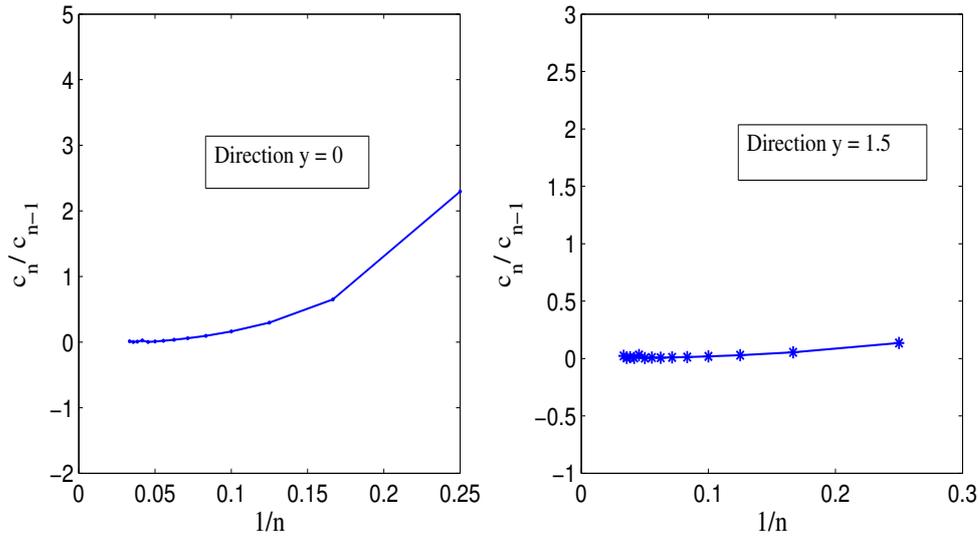


FIG. 3.3 – Les diagrammes de Domb Sykes de la sous série paire du problème d’Helmholtz. Contrairement à ceux de la série complète, les rapports de Domb Sykes convergent vers la valeur 0, ce qui indique une singularité à l’infini. On a fait converger les diagrammes de Domb Sykes en considérant la sous série paire.

### 3.3.2 Critère de Darboux

Ce critère permet aussi d’estimer le rayon de convergence d’une série tronquée. Il utilise les trois derniers coefficients au lieu des deux derniers comme dans le cas des diagrammes de Domb Sykes. Ce critère a été présenté pour la première fois par Hunter et Guerrieri [67] en utilisant un théorème de Darboux :

#### Théorème

Les coefficients de Taylor  $c_i$  d’une fonction  $f$  admettant une singularité de type  $(x - x_0)^{-\nu}$  en  $x_0$  satisfont à :

$$c_i x_0 - \frac{i + \nu - 1}{i} c_{i-1} = O(i^{\nu-3}). \quad (3.5)$$

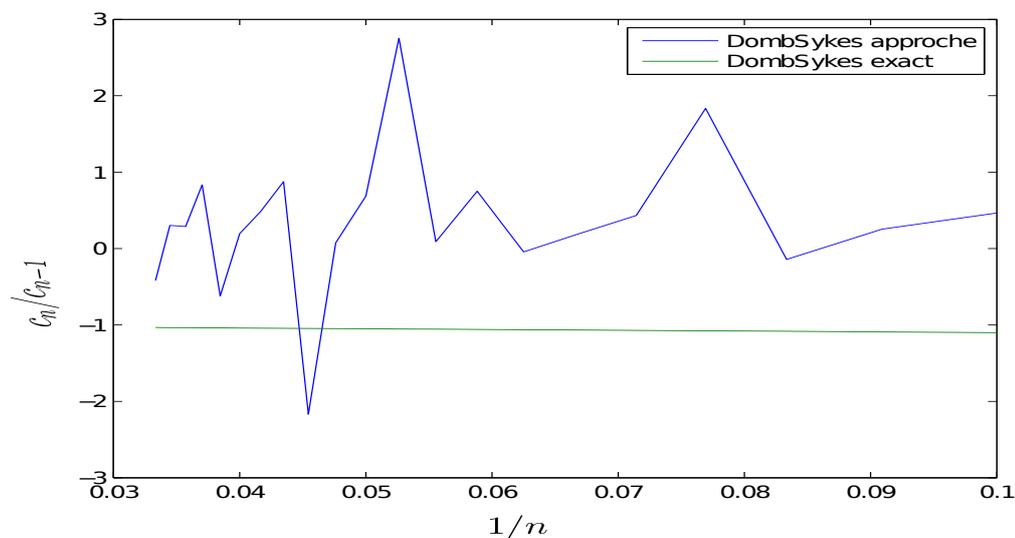


FIG. 3.4 – Diagramme de Domb Sykes pour le problème de Poisson sur une couronne (2.1). La comparaison avec le diagramme de la série de Taylor de la solution exacte montre que le diagramme de la série de la TMM diverge.

Hunter et Guerrieri ont montré dans [67] qu'à partir de ce théorème, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_0} &= i \frac{c_i}{c_{i-1}} - (i-1) \frac{c_{i-1}}{c_{i-2}} = D_d(i) \\ \nu &= i \frac{c_i}{c_{i-1}} x_0 - i + 1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Cette dernière relation donne l'ordre et la position de la singularité. Gervais dans [72] a montré que les séries obtenues par la méthode asymptotique numérique vérifient aussi la relation (3.6) et permettent ainsi de calculer des rayons de convergence.

Cette technique a été appliquée aux séries calculées par la TMM afin d'estimer leur rayon de convergence.

Les résultats obtenus sont présentés sur les figures 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, et 3.10. On fait les mêmes remarques que dans le cas des diagrammes de Domb Sykes. Le critère de Darboux détecte la singularité lorsque nous sommes dans la direction de la singula-

### 3.3. Détection de la position et de l'ordre de singularité

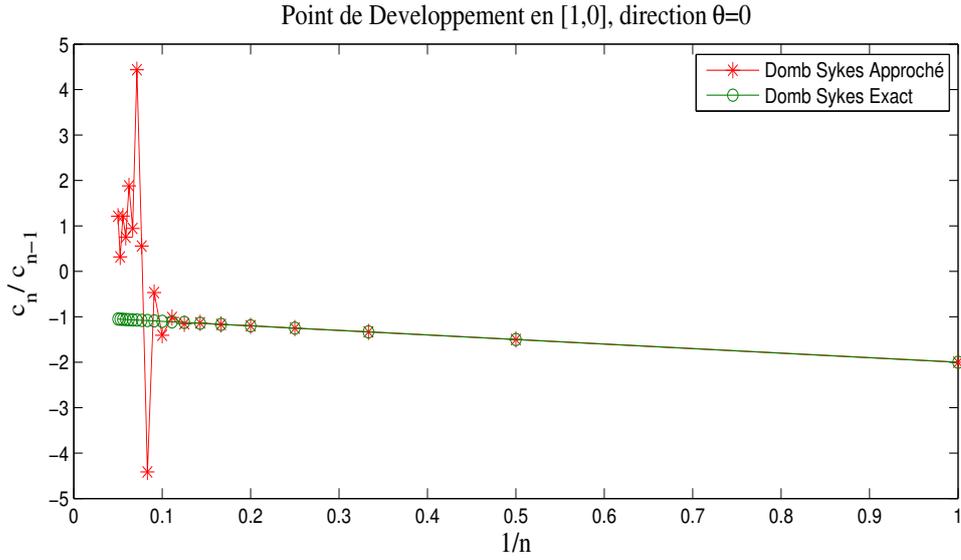


FIG. 3.5 – Diagramme de Domb Sykes pour le problème de Poisson sur un secteur (2.1). Le rapport de Domb Sykes est stable pour de faibles degrés et il donne l'inverse de la position de la singularité. Néanmoins pour de hauts degrés le rapport diverge.

rité et elle diverge sinon. D'autre part on remarque aussi que l'on ne peut tirer aucune information des coefficients de Taylor obtenus lorsque la TMM diverge.

En dernière partie, on présente dans le tableau 3.5 les valeurs obtenues par le ratio de Domb Sykes et Darboux ainsi qu'une approximation de l'ordre de singularité. Une comparaison de l'ordre est faite avec le critère d'Hadamard qui stipule que : "le rayon de convergence d'une série de la forme  $\sum c_n x^n$  est  $R = 1/L$  avec  $L = \limsup \|c_n\|^{1/n}$ ".

Ce tableau vient confirmer les résultats précédents, mais ce qui est intéressant à remarquer, c'est que l'on arrive à approcher aussi l'ordre de singularité. Cet ordre pourra être utilisé dans les techniques d'accélération de convergence pour améliorer les résultats obtenus par la TMM.

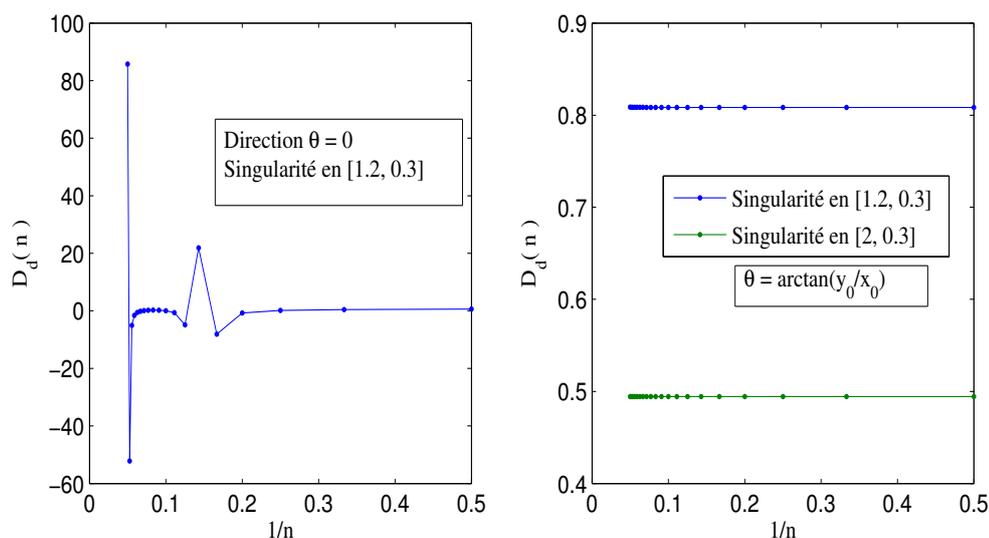


FIG. 3.6 – Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Laplace sur un disque (1.12). Elle détecte bien la singularité dans la direction où elle se trouve. Dans les autres directions le rapport de Darboux diverge.

## Conclusion

Les critères de Darboux et de Domb Sykes permettent de détecter la position de la première singularité, mais ceci seulement dans les cas où la singularité est réelle. Toutefois dans la TMM nous sommes confrontés à la présence de singularités complexes. Ainsi les critères étudiés ne pourront détecter ces singularités que si l'on se place dans la bonne direction afin qu'elles soient vues comme des singularités réelles. Un critère fiable de détection de singularité à partir des coefficients calculés pas la TMM sera donc établi en deux temps :

- dans un premier temps détecter la direction de la singularité. Cette direction est la direction dans laquelle le rapport de Domb Sykes ou de Darboux converge, c'est à dire pour  $\epsilon$  très petit donné on a :

$$\|D(N) - D(N - 1)\| \leq \epsilon \quad (3.7)$$

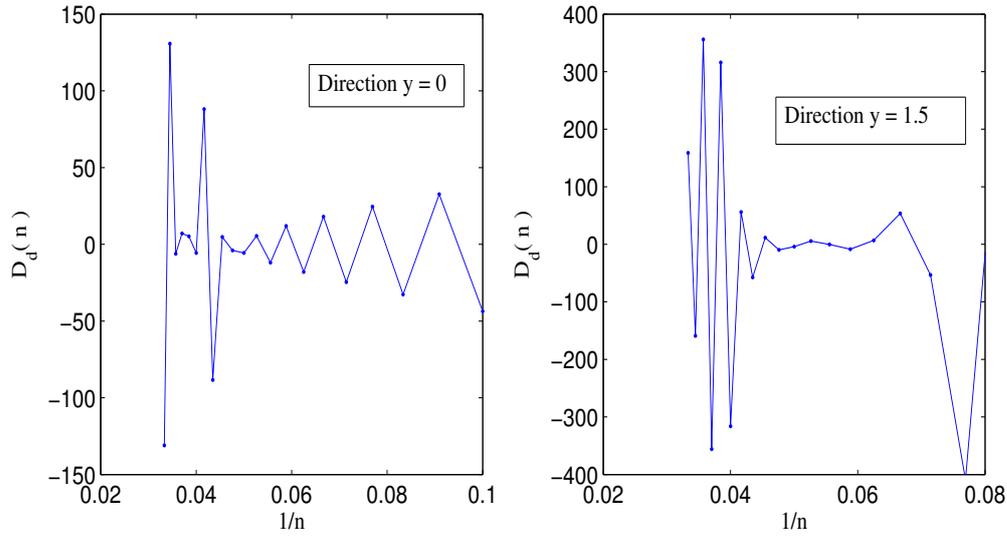


FIG. 3.7 – Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème d’Helmholtz sur un rectangle (1.18). Le rapport de Darboux diverge quelle que soit la direction choisie.

- A partir de la direction, on peut déterminer la position de la singularité ainsi que son ordre, en utilisant le critère de Darboux ou de Domb Sykes.

## 3.4 Accélération de convergence de la TMM

### 3.4.1 Approximants de Padé

Cette technique est l’une des plus utilisées pour l’amélioration des séries. Elle consiste à remplacer une série scalaire par une fonction rationnelle qui approche mieux la fonction approchée par la série [68]. Un autre intérêt de cette technique est que la fonction rationnelle décrit les singularités présentes dans la solution analytique [73].

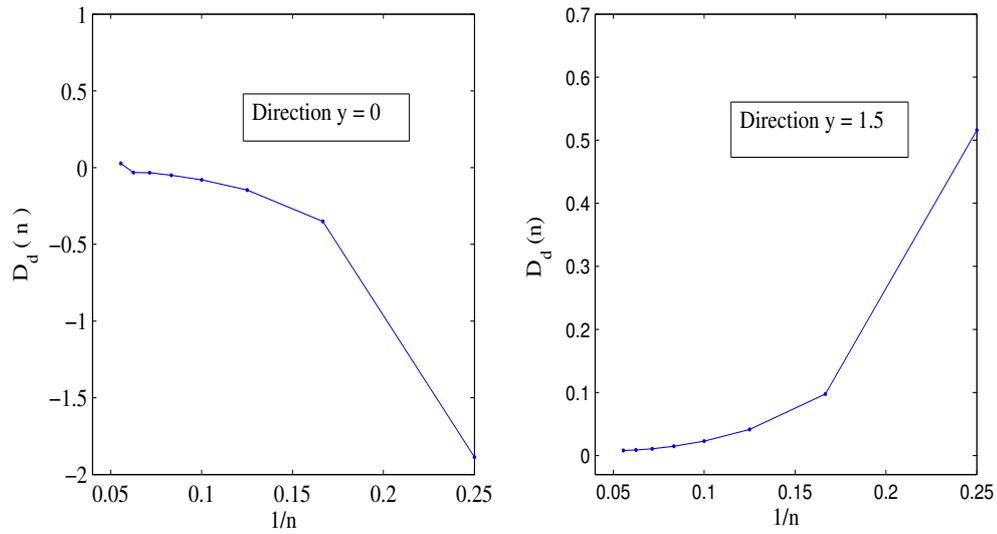


FIG. 3.8 – Rapport de Darboux pour la sous série paire obtenue en résolvant le problème d’Helmholtz. Elle détecte l’absence de singularité et ceci quelle que soit la direction d’étude.

### 3.4.1.1 Formulation des approximants de Padé

Soit  $f$  une fonction approchée par une série entière :

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i \quad (3.8)$$

L’approximant de Padé d’indices  $L$  et  $M$  de la fonction  $f$  est la fonction rationnelle de la forme :

$$f([L/M])(z) = \frac{\sum_{i=0}^L a_i z^i}{\sum_{i=0}^M b_i z^i} \quad (3.9)$$

telle qu’elle admette le même développement de Taylor que la fonction  $f(z)$ , jusqu’à

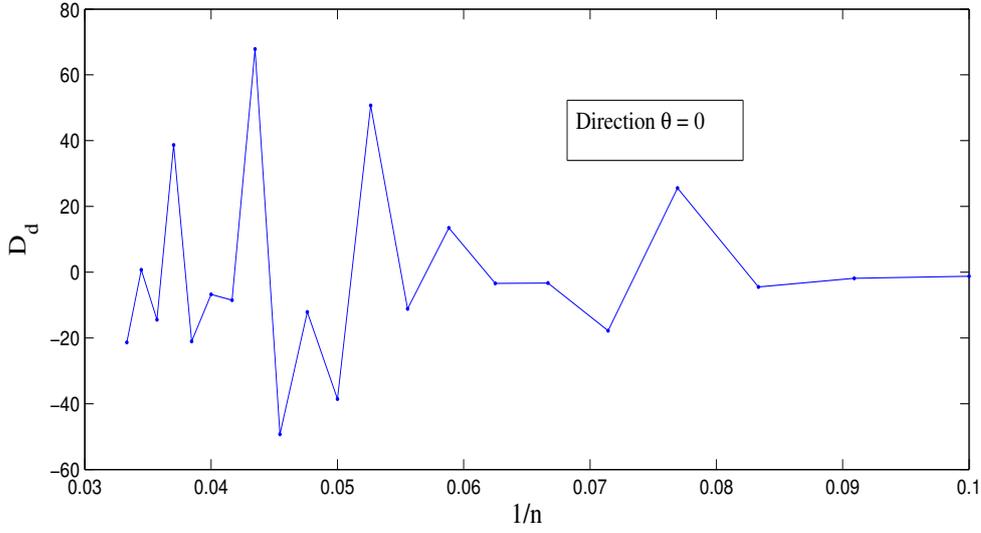


FIG. 3.9 – Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Poisson sur une couronne. Le rapport de Darboux diverge quelle que soit la direction d'étude.

l'ordre  $L + M$ . Ainsi l'on peut écrire :

$$(b_0 + b_1 z + \dots + b_M z^M)(c_0 + c_1 z + \dots) = a_0 + a_1 z + \dots + a_L z^L + O(z^{L+M+1}) \quad (3.10)$$

Une identification suivant les monômes  $z^{L+1}, z^{L+2}, \dots, z^{L+M}$  donne les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \dots + b_0 c_{L+1} &= 0 \\ b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \dots + b_0 c_{L+2} &= 0 \\ \vdots & \\ b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \dots + b_0 c_{L+M} &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

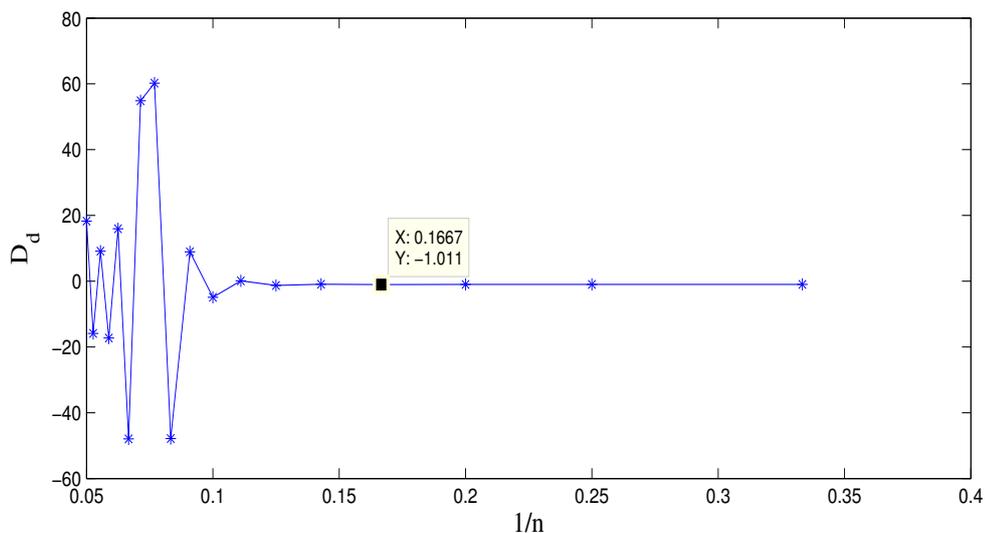


FIG. 3.10 – Détection de la position de la première singularité avec le critère de Darboux : problème de Poisson sur un secteur. Le rapport de Darboux détecte la singularité.

Pour plus de consistance, on suppose que  $c_j = 0$  pour  $j < 0$  et on pose  $b_0 = 1$ . Ainsi la relation (3.11) conduit à un système de  $M$  équations linéaires avec les  $M$  coefficients du dénominateur de Padé comme inconnues :

$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La résolution de ce système donne les coefficients  $b_j$  du dénominateur du Padé de la fonction  $f$ . Les coefficients du numérateur sont ensuite déterminés en considérant à nouveau la relation (3.10) et en faisant une identification suivant les monômes  $1, z, z^2, \dots, z^L$ .

TAB. 3.5 – Position et ordre de singularité dans la direction de la singularité pour le problème de Laplace avec singularité en  $[2, 0.3]$ . On approche bien la singularité avec le critère de Darboux et de Domb Sykes. Et ceci mieux qu’avec le critère d’Hadamard.

Degre (p)	Singularité Domb Sykes	Singularité Darboux	Critère d’ Hadamard	$\nu$ Darboux
5	2,0226918	2,0236504	2,3335566	1,0023696
10	2,0223745	2,022372	2,17235589	0,9999903
20	2,0223748	2,022374	2,09602433	1,0000000
30	2,0223748	2,022376	2,07118121	1,00002140
40	2,0223493	2,0230042	2,0588686	1,01295290

Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
 a_0 &= c_0, \\
 a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\
 a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\
 &\vdots \\
 a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} b_i c_{L-i}.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Les relations (3.12) et (3.13) permettent de calculer tous les coefficients de Padé de la fonction  $f$ . Ces relations sont appelées les *équations de Padé*. La méthode des approximants de Padé est généralement utilisée pour l’accélération de convergence, mais elle est aussi utilisée pour la détection des singularités [68, 73].

#### **Détection de singularités à partir des pôles de Padé**

Considérons le problème de Laplace étudié dans la section précédente. Nous calculons des approximants de Padé de la série obtenue par la TMM et nous analysons les pôles de l’approximant. Dans le tableau 3.6, nous présentons les pôles pour diffé-

rents ordres de Padé et dans différentes directions. Ces résultats sont présentés pour une singularité en  $X_0 = [1.2, 0.3]$  et un degré d'approximation  $p = 12$ .

Excepté le Padé  $[N-1/1]$  qui est proche de la série, la singularité apparaît dans les pôles quel que soit l'ordre du Padé mais aussi quelle que soit la direction dans laquelle on évalue le Padé. Contrairement aux diagrammes de Domb Sykes et au critère de Darboux, les approximants de Padé permettent de déterminer des singularités complexes. Ainsi dans le tableau pour  $\theta = 0$ , on tombe sur la même singularité en  $1.2 + 0.3i$  et dans le cas de  $\theta = \pi/2$  on tombe sur la singularité en  $0.3 + 1.2i$ . Cependant on remarque la présence d'autres pôles. A priori la première singularité devrait être le pôle de plus petit module mais nous observons la présence d'autres pôles de module, plus faible et qui sont incohérents par rapport au problème étudié.

On serait tenté de dire que "la première singularité est le pôle qui reste stable par rapport au degré de l'approximant de Padé et par rapport à la direction d'étude". Cependant, cette hypothèse reste à être confirmée et les pôles des approximants de Padé sont à traiter avec une grande attention. Une étude bibliographique sur ce sujet a montré que l'apparition des pôles inexplicables est fréquente dans les approximants de Padé [68]. Ces pôles sont appelés "défauts" par les spécialistes de Padé.

Pour ne pas rentrer dans des études complexes et incertaines, nous avons laissé la piste des approximants de Padé comme "technique de détection de singularité" et nous nous contenterons du critère établi dans la section précédente en utilisant le diagramme de Domb Sykes et le critère de Darboux.

### ***Approximants de Padé pour accélération de convergence***

Dans cette partie nous utilisons les approximants de Padé pour améliorer la convergence obtenue par la TMM. Pour cela dans un premier temps, nous résolvons un problème par la TMM, puis nous calculons l'approximant de Padé de la série obtenue. Nous

TAB. 3.6 – Les pôles des approximants de Padé pour le problème de Laplace (1.12) avec singularité en  $[1.2, 0.3]$ . Quelle que soit la direction d'étude, la singularité apparait parmi les pôles

Pade[L/M]	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = \arctan(y_0/x_0)$
Pade[11/1]	1.2109	- 0.2462	1.2346
Pade[10/2]	$1.2 \pm 0.29i$	$0.3 \pm 1.2i$	1.2369 ; 0.808
Pade[6/6]	$1.2 \pm 0.3i$	$0.3 \pm 1.2i$	1.2369 ; 0.808
	$0.78 \pm 0.19i$	$0.2 \pm 0.78i$	$-0.04 \pm 1.15i$
	$-0.82 \pm 0.85i$	$-0.73 \pm 0.33i$	$-0.9 \pm 0.62i$

comparons ensuite les erreurs de ces deux techniques.

### Problème de Laplace

Considérons le problème de Laplace sur un disque avec une singularité en  $X_0 = [1.2, 0.3]$ . Dans le tableau nous présentons les erreurs obtenues en utilisant la TMM et en appliquant ensuite les approximants de Padé. Ces erreurs sont calculées dans différentes directions et pour différents ordres de Padé. Pour un  $\theta$  fixe, on calcule l'erreur sur toute la ligne radiale ( $-1 \leq r \leq 1$ ), puis on présente l'erreur maximale sur cette ligne dans le tableau.

TAB. 3.7 – Problème de Laplace avec singularité en  $[1.2, 0.3]$  (1.12). Comparaison de l'erreur de la TMM et de celle obtenue en appliquant les approximants de Padé (logarithme de l'erreur). On remarque que les approximants de Padé améliorent l'approximation.

Directions	TMM	Padé	Padé	Padé	Padé
	( $p = 12$ )	[11/1]	[10/2]	[9/3]	[6/6]
$\theta = 0$	-1.048	-0.676	-2.417	-2.415	-4.188
$\theta = \pi/2$	-1.561	-1.2025	-4.313	-4.333	-4.568
$\theta = -2\pi/3$	-1.547	-0.459	-3.484	-2.798	-4.408
$\theta = \arctan(y_0/x_0)$	-0.591	-2.255	-2.776	-2.776	-2.776

On remarque que les approximants de Padé permettent d'améliorer la convergence et

la meilleure convergence est obtenue pour l'ordre  $[(p/2)/(p/2)]$ . Avec les approximants de Padé, on gagne deux ordres de convergence. Ces résultats sont très intéressants dans le sens où les approximants de Padé peuvent éviter de faire des approximations de très haut degré et donc réduire le nombre de degrés de liberté. Par exemple pour ce problème il a fallu un degré  $p = 30$  pour avoir une erreur de l'ordre de  $10^{-3}$  avec la TMM, alors qu'avec les approximants de Padé, on obtient presque cette erreur à l'ordre  $p = 12$ .

### Problème d' Helmholtz

On fait la même étude pour le problème d'Helmholtz sur un rectangle (1.18). Contrairement au cas précédent, la solution analytique de ce problème n'admet pas de singularité. Donc la série calculée par la TMM a un rayon de convergence infini. Le but de cette étude est d'analyser le comportement des approximants de Padé sur une série de rayon de convergence infini.

TAB. 3.8 – *Problème d'Helmholtz (1.18). Comparaison de l'erreur de la TMM et de celle obtenue en appliquant les approximants de Padé (logarithme de l'erreur). Contrairement au cas précédent avec présence de singularité, les approximants de Padé n'agissent pas sur la qualité de l'approximation.*

Directions	series (degree=12)	Padé [11/1]	Padé [10/2]	Padé [9/3]	Padé [6/6]
$y = 0$	-4.683	-3.337	-3.902	-3.021	-3.656
$y = 2$	-3.04795	-3.0587	-3.04797	0.7461	-1.208
$y = 4$	-2.7376	-2.807	-2.7377	-0.9327	-1.666

Les résultats sont présentes dans le tableau 3.8. Contrairement au problème de Laplace, on remarque que les approximants de Padé n'améliorent pas vraiment la convergence. Ces résultats peuvent s'expliquer par le fait qu'en absence de singularité, aucun facteur extérieur au domaine n'agit sur la solution approchée de la TMM et par conséquent on obtient la meilleure approximation possible sous forme de polynômes.

La méthode des approximants de Padé est donc intéressante en présence de singularités.

### 3.4.2 Taylor multipoint en 1D

La TMM dans sa formulation actuelle construit les fonctions de formes en faisant une approximation en série entière. Les problèmes traités jusqu'à présent ont montré une très bonne convergence, mais cependant un problème de domaine de convergence se pose dans certains cas. Dans le chapitre précédent, des techniques ont été mises en place pour surmonter cette difficulté. Toutefois dans le but de rendre plus flexible la méthode TMM, nous pensons qu'il serait plus intéressant de construire les fonctions de forme en faisant une approximation de Taylor multipoint.

Les travaux de J. L. Lopez et M. Temme [74, 75] d'une part et de F. Costabile et A. Napoli [76] d'autre part ont montré que les séries de Taylor multipoint sont plus précises et ont un domaine de convergence plus large que les séries de Taylor développées en un seul point.

Le but de cette section est de construire les fonctions de formes de la TMM en utilisant ces approximations de Taylor multipoint. Au cours de cette thèse nous n'avons pas eu assez de temps pour approfondir les recherches sur ce sujet. Cependant nos travaux ont été effectués en 1D et ceci pour un développement de Taylor en deux points.

La définition du développement en deux points en série de Taylor d'une fonction  $f$  a été donné par Lopez et Temme dans [74] par :

**Théorème** Soit  $f$  une fonction  $N - 1$  fois différentiables sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Soit  $z_1$  et  $z_2$  deux points de  $\Omega$  telque  $z_1 \neq z_2$ . Alors  $f$  admet le développement de Taylor aux

points  $z_1$  et  $z_2$  de degré  $2n - 1$  suivant :

$$f(z) \equiv P_N(z_1, z_2, z) = \sum_{k=0}^{N-1} [a_k(z_1, z_2)(z - z_1) + a_k(z_2, z_1)(z - z_2)](z - z_1)^k (z - z_2)^k \quad (3.14)$$

où les coefficients  $a_k(z_1, z_2)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} a_0(z_1, z_2) &= \frac{z_2}{z_2 - z_1} \\ a_n(z_1, z_2) &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{n+1} n f^{n-k}(z_2) + (-1)^k k f^{n-k}(z_1)}{n!(z_1 - z_2)^{n+k+1}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le domaine de convergence du polynôme défini par la relation (3.14) est un ovale de Cassini (voir fig 3.11) :

$$\mathbb{D}_{z_1, z_2} = \{z \in \Omega / |(z - z_1)(z - z_2)| < r\} \quad (3.16)$$

où

$$r = \inf_{w \in \mathbb{C} \setminus \Omega} \{|(w - z_1)(w - z_2)|\} \quad (3.17)$$

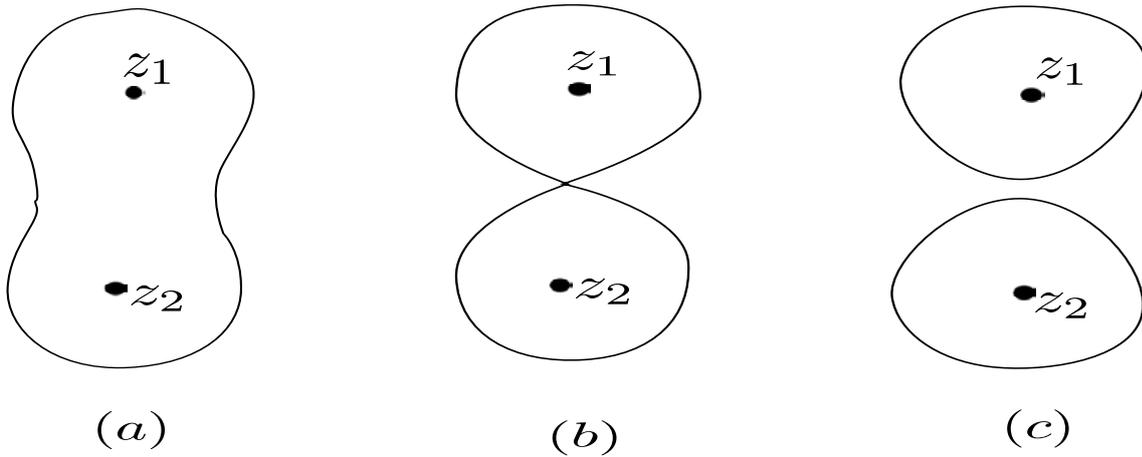


FIG. 3.11 – *Domaine de convergence d'une série de Taylor développée en deux points  $z_1$  et  $z_2$  : (a) si  $4r < |z_1 - z_2|^2$ , (b) si  $4r = |z_1 - z_2|^2$ , (c) si  $4r > |z_1 - z_2|^2$*

### 3.4.2.1 Formulation de la méthode

Considérons l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + f(x)u(x) = g(x) \\ u(\pm L) = 0, \quad -L \leq x \leq +L \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $f(x)$  et  $g(x)$  sont des fonctions données et  $u(x)$  est l'inconnue du problème.

Dans la TMM classique ce problème sera résolu en faisant une approximation de la forme :

$$u(x) = \sum_{k=0}^N a_k (x - x_0)^k \quad (3.19)$$

Ici nous proposons de plutôt faire une approximation en 2 points dans ce domaine.

Nous cherchons donc la solution approchée sous la forme :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N-1} [a_k(x - x_1) + b_k(x - x_2)](x - x_1)^k(x - x_2)^k \quad (3.20)$$

où  $x_1, x_2$  sont des points appartenant à  $[-L, L]$ .

Pour simplifier les calculs nous supposons que  $x_2 = -x_1 = c$ . Ainsi la solution approchée se réécrit sous la forme :

$$u(x) = \sum_{k=0}^N (a_k + b_k x)(x^2 - c^2)^k \quad (3.21)$$

La dérivée seconde de  $u$  est :

$$u''(x) = \sum_{k=0}^{N-2} 2(k+1)[((2k+1)a_{k+1} + 2(k+2)a_{k+2}) + ((2k+3)b_{k+1} + 2(k+2)b_{k+2})x](x^2 - c^2)^k \quad (3.22)$$

Les fonctions  $f$  et  $g$  étant connues, on sait calculer leurs coefficients de Taylor 2 points en utilisant les relations (3.14) et (3.15) :

### 3.4.2.2 Application numérique

On résoud le problème (3.18) (avec  $f = g = 1$ ) par les trois techniques suivantes.

- On utilise la TMM classique en monozone, c'est à dire on approche la solution par un développement de Taylor en un point  $x_0$ .
- On utilise la TMM classique en multizone. Le domaine est divisé en deux seg-

ments  $[-L, 0]$  et  $[0, L]$ , une approximation en série de Taylor en  $-x_d$  et  $x_d$  respectivement est faite sur chaque segment, puis on assure la continuité de la fonction et de sa dérivée en  $x = 0$ .

- Dans un dernier temps, on applique la technique présentée dans le paragraphe précédent, c'est à dire qu'on fait un développement de Taylor en deux points ( $-x_d$  et  $x_d$ ).

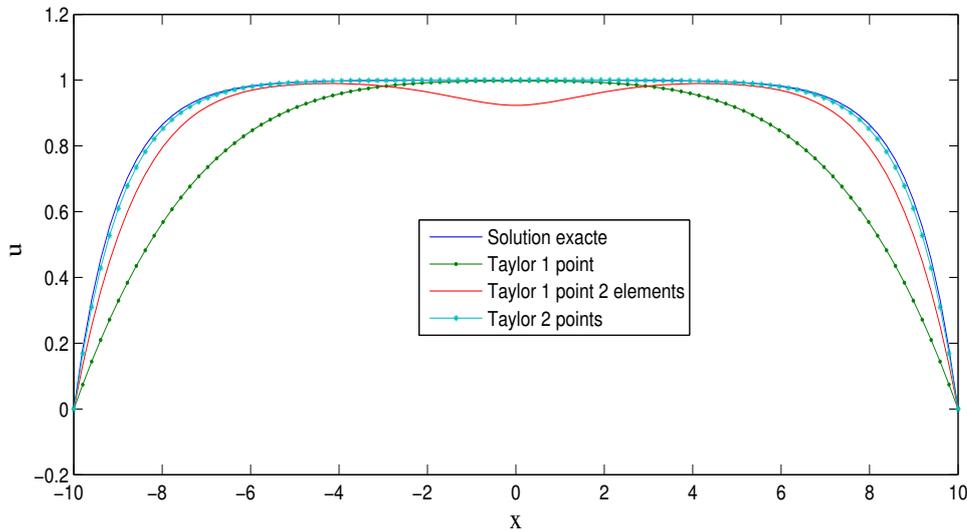


FIG. 3.12 – Solution du problème (3.18) pour un degré  $p = 5$ . Comparaison de l'approximation de Taylor développée en un point et de l'approximation de Taylor développée en 2 points. Le développement en 2 points donne de meilleurs résultats et fait disparaître l'effet des couches limites (domaine de convergence plus large)

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.12 et dans le tableau 3.9. Sur la figure, on remarque que la série de Taylor approche mieux la solution exacte et même mieux que si l'on subdivise le domaine en deux éléments.

TAB. 3.9 – Comparaison des méthodes d’approximation de Taylor développés en 1 point et en 2 points.  $p$ -convergence.  $L = 10$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -x_2 = L/2$

Degré $p$	$\log_{10}$ (Erreur maximale)		
	Taylor 1 point	Taylor 1 point 2 éléments	Taylor 2 points
5	-0.4922	-0.9736	-1.5691
10	-1.1769	-2.1645	-4.6858
15	-1.8738	-4.0941	-9.6957
20	-3.5330	-6.7985	-9.4308

### 3.5 Conclusion

Dans le but de rendre plus robuste la TMM, nous nous sommes proposés dans ce chapitre de faire une analyse mathématique de cette méthode. La TMM dans sa formulation actuelle construit la solution d’une EDP en faisant une approximation en série entière. Les séries calculées admettent un domaine de convergence qui est un disque de rayon  $R$ .

**Si**  $R = \infty$ , l’approximation faite par la TMM converge en tout point du domaine d’étude et elle est très précise (quoique parfois elle nécessite de très hauts degrés pour avoir une bonne approximation).

**Si**  $R = 0$  **ou**  $R < \infty$ , la présence de singularité influe sur la qualité de l’approximation et la TMM diverge dans certains cas (exemple du problème de Poisson). Toutefois les séries calculées par la TMM contiennent des informations utiles sur la solution exacte du problème étudié. Cependant ces informations ne sont pas directement accessibles. Dans ce chapitre, nous avons proposé une technique pour estimer la position de la singularité à partir des coefficients calculés par la TMM. Le critère proposé se base sur les diagrammes de Domb Sykes et le critère de Darboux.

Des techniques d'accélération de convergence ont été discutées dans une deuxième partie. La méthode des approximants de Padé permettent d'améliorer l'approximation de la TMM dans le cas des problèmes admettant une singularité finie. Une autre idée a été de construire les fonctions de forme de la TMM en faisant une approximation de Taylor multipoint. Ceci pourrait résoudre les problèmes de domaine de convergence et ainsi évitera des résolutions multizones pour certains problèmes. Au cours de cette thèse nous n'avons pas pu approfondir les recherches sur ce sujet, cependant l'application faite en 1D a donné des résultats très précis par rapport au développement de Taylor classique utilisé actuellement dans la TMM. Il resterait à montrer comment cette connaissance approfondie de la fonction cherchée pourrait être utilisée pour améliorer les algorithmes et estimer les erreurs : un vaste chantier qui n'a pas été abordé ici.

Il se trouve que les méthodes d'accélération de convergence n'ont pas été prioritaires dans cette thèse. Néanmoins les quelques tests que nous avons effectués ont montré qu'il y a des possibilités très importantes d'amélioration de l'efficacité de la TMM, en particulier les approximations de Taylor multipoints et les approximants de Padé, mais il resterait à mettre au point des procédures robustes et efficaces.



# CHAPITRE 4

## Problèmes non linéaires

Jusqu'à présent, la Taylor Meshless Method (TMM) a été appliquée à des problèmes linéaires à coefficients constants [18, 77, 78]. Si ces travaux ont permis de mettre en évidence les potentialités de la méthode et de fiabiliser l'algorithme, ils n'amèneront pas forcément d'améliorations très importantes pour la résolution numérique de ces problèmes, en tout cas pour des problèmes où une famille générale de solutions fondamentales est connue. En effet, lorsqu'on se limite à des problèmes homogènes, la méthode de la solution fondamentale (MFS) et la méthode des éléments frontières (BEM) sont également des techniques qui demandent seulement la discrétisation de la frontière et leur efficacité devrait être assez comparable à la TMM, cette dernière permettant néanmoins d'obtenir une très grande précision en augmentant le degré. En revanche, la TMM pourrait apporter une rupture dans le cas de problèmes plus génériques où il n'existe pas de solutions fondamentales connues, en particulier les problèmes linéaires à coefficients variables et surtout les problèmes non linéaires. L'objet de ce chapitre est de mettre en place une méthodologie pour appliquer la TMM à des équations elliptiques non linéaires et de l'évaluer.

Notons que le principe de superposition des fonctions de forme, conséquence de

la linéarité de l'équation, a joué un rôle déterminant dans les chapitres précédents. Il serait possible de construire toutes les solutions approchées d'une équation aux dérivées partielles non linéaire par des développements de Taylor, mais cela dépendrait non linéairement des variables principales ( $\{v_i\}$ ), ce qui compliquerait la prise en compte des conditions aux limites. Or la plupart des méthodes de résolution des systèmes non linéaires sont des algorithmes où chaque étape est un problème linéaire (Méthode itérative de Newton ou de Newton-Raphson, Méthode Asymptotique Numérique, etc). Dans la méthode proposée, on appliquera donc en premier lieu une telle technique de linéarisation, puis, à chaque étape, on résoudra l'équation linéaire obtenue par la TMM, exactement comme aux chapitres précédents. Par mesure de simplicité, la technique de résolution non linéaire appliquée dans ce chapitre sera la méthode de Newton.

En résumé, on se propose d'appliquer la méthode de Newton pour transformer l'EDP non linéaire en une suite d'EDP linéaires, puis d'utiliser la TMM à chaque étape du processus itératif. On appliquera cette procédure d'abord à une équation différentielle simple, puis à une équation elliptique du second ordre, qui peut correspondre à un modèle d'élasticité non linéaire en cisaillement anti-plan. La mise en oeuvre de ce programme nous confrontera à deux difficultés : premièrement, on devra redéfinir la méthode de résolution analytique de l'EDP par développement de Taylor ; deuxièmement, il faut associer un critère d'arrêt à l'algorithme de Newton, ce qui nous amènera à revisiter la notion de résidu. Enfin, à la fin de ce chapitre, on esquissera une réflexion sur l'utilisation de la Différentiation Automatique en vue de traiter des équations quelconques sans recourir à chaque fois à des calculs analytiques compliqués.

## 4.1 Résolution de problèmes non linéaires en 1D

Dans cette section, nous illustrons la résolution des problèmes non linéaires par la TMM en 1D. Cette résolution nous permettra par la suite de mieux appréhender les problèmes 2D.

### 4.1.1 Problème étudié

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + h(u(x)) = s(x) & -L \leq x \leq +L \\ u(\pm L) = u^d \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $h(u(x))$  est une fonction non linéaire de  $u(x)$  et  $s(x)$  une fonction quelconque de  $x$  supposée donnée. Pour résoudre ce problème, on couple la TMM avec la méthode de Newton.

### 4.1.2 Linéarisation du problème par la méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode numérique itérative de résolution des équations non linéaires. L'idée principale est de linéariser le problème non linéaire en faisant un développement limité d'ordre 1 à chaque itération. Une autre technique sera nécessaire pour résoudre les problèmes linéaires obtenus.

Nous appliquons la méthode de Newton au problème (4.1). A l'itération  $i$ , il s'agit de trouver un incrément  $\delta u(x)$  tel que  $v(x) + \delta u(x)$  soit solution de (4.1), où  $v(x)$  est la solution obtenue à l'itération précédente. Au début de l'algorithme, on se donne une

solution de départ  $v_0$  appelée "solution d'essai". Un développement limité à l'ordre 1 de  $h(u)$  au voisinage de  $v$  conduit à :

$$-\frac{d^2[\delta u](x)}{dx^2} + h'(v)\delta u(x) + R(v(x)) = 0, \quad (4.2)$$

où  $h'(\cdot)$  est la dérivée de la fonction  $h(u)$  par rapport à  $u$  et  $R(v(x))$  le résidu du problème non linéaire (4.1), défini par :

$$R(v(x)) = -\frac{d^2v(x)}{dx^2} + h(v(x)) - s(x). \quad (4.3)$$

Dans la suite nous considérons  $h(v) = v^3$  et  $s(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ . Le problème (4.1) se réécrit sous la forme (4.4) suivante :

$$\begin{cases} R(u) = -\frac{d^2u(x)}{dx^2} + u(x)^3 - \lambda = 0 & -L \leq x \leq +L \\ u(\pm L) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La solution à l'itération  $i + 1$  est  $u_{i+1}(x) = v(x) + \delta u(x)$ , où  $\delta u(x)$  est solution de l'équation (4.2). Il s'agit donc de chercher  $\delta u(x)$  solution de :

$$-\frac{d^2[\delta u](x)}{dx^2} + 3u_i(x)^2\delta u(x) + R(u_i(x)) = 0. \quad (4.5)$$

La résolution du problème non linéaire (4.4) revient ainsi à la résolution d'une suite de problèmes linéaires (4.5). Il reste donc à résoudre ces problèmes linéaires en utilisant la TMM.

### 4.1.3 Couplage avec la TMM

#### 4.1.3.1 Approximation d'ordre 4

La TMM propose de résoudre les problèmes linéaires en faisant une approximation polynomiale de l'inconnue. Ici nous présentons la démarche pour un ordre de troncature  $p = 4$ . A chaque itération il s'agit de résoudre des problèmes linéaires de la forme suivante, où  $v(x)$  est une fonction connue :

$$-\delta u'' + 3v^2 \delta u + R(v) = 0. \quad (4.6)$$

On suppose que  $v$  est calculé à l'itération précédente ou est donnée par la solution d'essai  $v_0$ . On approche l'inconnue  $\delta u$  par une série entière d'ordre 4 développée en  $x = 0$  :

$$\delta u(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 + \delta_4 x^4.$$

Les inconnues du problème sont donc les cinq coefficients  $\delta_i$ . Appliquer la TMM revient à annuler les coefficients de Taylor du résidu du problème linéaire (4.6) jusqu'à l'ordre 2. Les coefficients de Taylor du résidu sont calculés à partir de ceux de l'inconnue  $\delta u$  et des fonctions connues  $v$  et  $R(v)$ .

Les fonctions  $v$  et  $R(v)$  étant connues, on sait calculer leur approximation de Taylor :

$$\begin{aligned} v^2(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \\ R(v(x)) &= r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + r_3 x^3 + r_4 x^4 \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi calculer le produit  $v(x)^2 \delta u(x)$ . En remplaçant toutes ces formes polynomiales dans (4.6), on obtient l'approximation de Taylor d'ordre 2 du résidu du

problème linéaire. Annuler les coefficients de ce résidu s'écrit :

$$\begin{cases} R(0) = -2\delta_2 + 3a_0\delta_0 + r_0 = 0 \\ R'(0) = -6\delta_3 + 3(a_1\delta_0 + a_0\delta_1) + r_1 = 0 \\ R''(0) = -12\delta_4 + 3(a_2\delta_0 + a_1\delta_1 + a_0\delta_2) + 2r_2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi on a :

$$\begin{cases} \delta_2 = \frac{3}{2}a_0\delta_0 + \frac{r_0}{2} \\ \delta_3 = \frac{1}{2}(a_1\delta_0 + a_0\delta_1) + \frac{r_1}{6} \\ \delta_4 = \frac{1}{4}(a_2\delta_0 + a_1\delta_1 + \frac{3}{2}a_0^2\delta_0 + \frac{a_0r_0}{2}) + \frac{r_2}{6} \end{cases}$$

La résolution approchée de l'équation par la méthode des développements de Taylor a fourni 3 équations :  $R(x=0) = 0$ ,  $R'(x=0) = 0$ ,  $R''(x=0) = 0$  qui ont permis d'écrire  $\delta u(x)$  en fonction des deux premiers coefficients  $\delta_0$  et  $\delta_1$  seulement :

$$\delta u(x) = \left(\frac{r_0}{2}x^2 + \frac{r_1}{6}x^3 + \left(\frac{a_0r_0}{8} + \frac{r_2}{6}\right)x^4\right) + \left(1 + \frac{3}{2}a_0x^2 + \frac{1}{2}a_1x^3 + \left(\frac{3}{8}a_0^2 + \frac{r_2}{12}\right)x^4\right)\delta_0 + \left(x + \frac{a_0}{2}x^3 + \frac{a_1}{4}x^4\right)\delta_1 \quad (4.7)$$

Les coefficients  $\delta_0$  et  $\delta_1$  seront déterminés avec les conditions aux limites.

### Example

Soit  $u_0 = 0$  la solution d'essai. On a :

#### Première itération.

Avec  $u_0 = 0$ , la relation (4.4) donne  $R(u_0) = -\lambda$ . Par conséquent :  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  et  $r_0 = -\lambda$ ;  $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0$ . Ainsi avec la relation (4.7) on a :

$$\delta u(x) = \left(\frac{-\lambda}{2}x^2\right) + \delta_0 + \delta_1x$$

Les conditions aux limites  $u(\pm L) = 0$  donnent :  $\delta_1 = 0$  et  $\delta_0 = \frac{\lambda}{2}L^2$ .

La solution approchée après la première itération est donc :

$$u_1(x) = u_0(x) + \delta u(x) = \frac{\lambda}{2}(L^2 - x^2) \quad (4.8)$$

Deuxième itération.

Avec  $u_1$  calculé précédemment, on a d'après la relation (4.4) :  $R(u_1) = \frac{\lambda^3}{8}(L^2 - x^2)^3$ .

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\lambda^2}{4}L^4; a_2 = -\frac{\lambda^2}{2}L^2; a_4 = \frac{\lambda^2}{4}; a_1 = a_3 = 0 \\ r_0 &= \frac{\lambda^3}{8}L^6; r_2 = -3\frac{\lambda^3}{8}L^4; r_4 = 3\frac{\lambda^3}{8}L^2; r_1 = r_3 = 0 \end{aligned}$$

La relation (4.7) donne :

$$\delta u(x) = \left(\frac{r_0}{2}x^2 + \left(\frac{a_0 r_0}{8} + \frac{r_2}{6}\right)x^4\right) + \left(1 + \frac{3}{2}a_0x^2 + \left(\frac{3}{8}a_0^2 + \frac{r_2}{12}\right)x^4\right)\delta_0 + \left(x + \frac{a_0}{2}x^3\right)\delta_1$$

En posant :

$$P_s(x) = \frac{r_0}{2}x^2 + \left(\frac{a_0 r_0}{8} + \frac{r_2}{6}\right)x^4; P_0(x) = 1 + \frac{3}{2}a_0x^2 + \left(\frac{3}{8}a_0^2 + \frac{r_2}{12}\right)x^4; P_1(x) = x + \frac{a_0}{2}x^3,$$

on a :

$$\delta u(x) = P_s(x) + P_0(x)\delta_0 + P_1(x)\delta_1$$

En résumé, on a utilisé l'équation (4.5) aux deux premiers ordres  $O(1)$ ,  $O(x)$ , pour écrire l'inconnue  $\delta u(x)$  en fonction de deux coefficients inconnus au lieu de quatre.

### 4.1.3.2 Généralisation : approximation par un polynôme de degré $p$ quelconque

On généralise le calcul précédent pour un degré de troncature  $p$  quelconque :

$$\begin{cases} \delta u(x) = \sum_{i=0}^p \delta_i x^i \\ v^2(x) = \sum_{i=0}^{p-2} a_i x^i + O(x^{p-1}) \\ R(v(x)) = \sum_{i=0}^{p-2} r_i x^i + O(x^{p-1}) \end{cases}$$

On a alors :

$$\frac{d^2 \delta u(x)}{dx} = \sum_{n=0}^{p-2} (n+2)(n+1) \delta_{n+2} x^n \quad (4.9)$$

Et le produit  $v^2(x)\delta u(x)$  tronqué à l'ordre  $p-2$  s'écrit :

$$v^2(x)\delta u(x) = \sum_{n=0}^{p-2} \left( \sum_{i=0}^n a_{n-i} \delta_i \right) x^n + O(x^{p-1}) \quad (4.10)$$

En injectant les relations (4.9) et (4.10) dans (4.5), on obtient une relation de récurrence sur les coefficients  $\delta_i$  donnée par :

$$-(i+2)(i+1)\delta_{i+2} + 3 \sum_{j=0}^i a_{i-j} \delta_j + r_i = 0 \quad \forall i, 0 \leq i \leq p-2 \quad (4.11)$$

Comme dans le cas  $p=4$ , on remarque que tous les coefficients  $\delta_i$  ( $2 \leq i \leq N$ ) peuvent s'exprimer uniquement en fonction de  $\delta_0$  et  $\delta_1$ .

Posons :

$$\delta_n = \gamma_n + \alpha_n \delta_0 + \beta_n \delta_1 \quad 0 \leq n \leq p$$

En injectant cette relation dans la relation de récurrence (4.11), on déduit les coefficients  $\gamma_n, \alpha_n$  et  $\beta_n$  donnés par les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0 \\ \alpha_i = \frac{3}{i(i-1)} \sum_{j=0}^{i-2} a_{i-j-2} \alpha_j \quad \forall i, 2 \leq i \leq p \\ \\ \beta_0 = 0, \beta_1 = 1 \\ \beta_i = \frac{3}{i(i-1)} \sum_{j=0}^{i-2} a_{i-j-2} \beta_j \quad \forall i, 2 \leq i \leq p \\ \\ \gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0 \\ \gamma_i = \frac{1}{i(i-1)} \left( -r_{i-2} + 3 \sum_{j=0}^{i-2} a_{i-j-2} \gamma_j \right) \quad \forall i, 2 \leq i \leq p \end{array} \right.$$

Ainsi l'inconnue  $\delta u(x)$  prend la forme :

$$\delta u(x) = \sum_{i=2}^p \gamma_i x^i + \left( 1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x^i \right) \delta_0 + \left( x + \sum_{i=2}^p \beta_i x^i \right) \delta_1 \quad (4.12)$$

Posons :

$$\begin{aligned} P_s(x) &= \sum_{i=2}^p \gamma_i x^i \\ P_0(x) &= \left( 1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i x^i \right) \\ P_1(x) &= \left( x + \sum_{i=2}^p \beta_i x^i \right) \end{aligned}$$

La solution  $P_s(x)$  provient du second membre, c'est donc une solution particulière

du problème (4.5). Comme dans le cas  $p = 4$ , on a exprimé l'inconnue du problème uniquement en fonction des variables  $\delta_0$  et  $\delta_1$  :

$$\delta u(x) = P_s(x) + P_0(x)\delta_0 + P_1(x)\delta_1 \quad (4.13)$$

Les inconnues  $\delta_0$  et  $\delta_1$  seront déterminées par application des conditions aux limites.

#### 4.1.4 Résultats numériques

Nous présentons les résultats obtenus pour le problème (4.4) avec  $\lambda = 0,3$ . La solution analytique de ce problème étant inconnue, nous évaluons la qualité de notre résolution en utilisant le résidu. Classiquement le résidu d'une équation différentielle est une fonction  $x \rightarrow R(v(x))$  qu'on peut représenter graphiquement dans le domaine. Si on veut quantifier ce résidu, on peut soit considérer le maximum ou tout autre norme de cette fonction résidu, soit choisir un nuage de points de contrôle  $x_i$  et définir le résidu comme une norme du vecteur  $\{R(v(x_i))\}$ .

Dans le cas de la TMM, comme dans la plupart des méthodes numériques, ce résidu global mesure à la fois les erreurs de discrétisation et les erreurs dues à l'approximation faite lors des linéarisations du problème non linéaire. C'est pourquoi, avec la méthode des éléments finis, on définit un vecteur résidu discret [79], qui est une projection de la fonction résidu sur un sous espace de dimension finie.

Dans le cadre de la TMM, on cherche à calculer des coefficients de Taylor de la fonction résidu :

$$R(v(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} R_i x^i. \quad (4.14)$$

Dans la TMM, on annule donc les coefficients de Taylor du résidu jusqu'au degré  $p - 2$ .

Bien entendu, le développement de Taylor du résidu contient une infinité de termes, dans le cas de l'équation (4.4),  $3p + 1$  termes. Cependant dans le calcul de ce dernier on néglige les coefficients de Taylor d'ordre  $p$  et  $p - 1$  de l'opérateur différentiel d'ordre 2 apparaissant dans l'équation. Ainsi l'on peut définir un deuxième résidu en tronquant le premier à l'ordre  $p - 2$ .

Nous disposons ainsi de deux notions de résidu : la fonction résidu de l'équation non linéaire, que nous appelons "résidu global" et la fonction résidu d'ordre  $p - 2$  que nous appelons "résidu tronqué". Le résidu global mesure l'ensemble des erreurs de l'algorithme numérique (discrétisation et linéarisation) et le résidu tronqué mesure seulement les erreurs dues à la linéarisation.

Notons que lorsque l'algorithme de Newton a convergé, le résidu tronqué est petit et le résidu global ne représente plus que les erreurs dues à la troncature des séries, c'est-à-dire les erreurs de discrétisation :

$$R(v(x)) \cong \sum_{i=p-1}^{\infty} R_i x^i. \quad (4.15)$$

Les figures 4.1 et 4.2 présentent les deux résidus. On choisit un ensemble de points de contrôle dans le domaine et on présente sur la figure 4.1, le maximum du résidu tronqué en ces points en fonction du nombre d'itérations. Cette étude a été faite pour trois valeurs différentes de  $L$  ( $L = 1$ ,  $L = 2$  et  $L = 4$ ) et pour un degré d'approximation  $p = 10$ . On remarque que le résidu tronqué décroît avec le nombre d'itérations. En plus une fois qu'il converge, il gagne 2 ordres de convergence à chaque itération. Ce comportement rappelle celui de la convergence de la méthode de Newton. Le résidu tronqué peut donc être défini comme un bon estimateur de la convergence de la méthode de Newton. En d'autres termes, il peut être considéré comme un "critère d'arrêt" de cette méthode itérative. D'autre part on remarque que la convergence de la méthode de New-

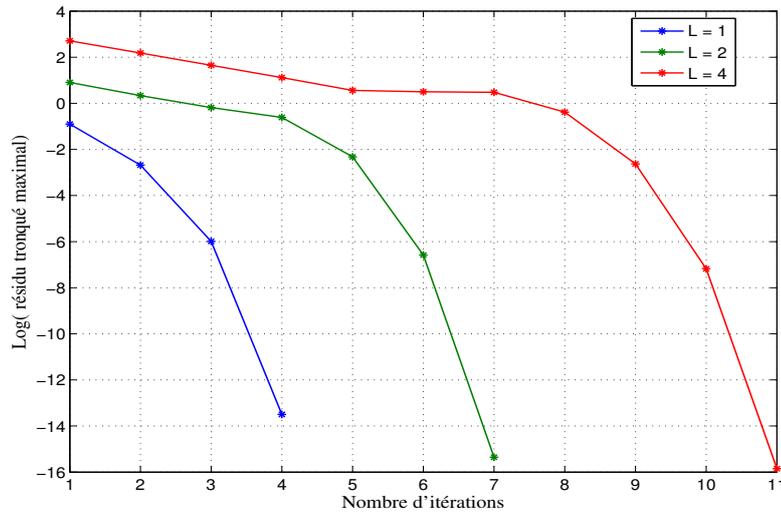


FIG. 4.1 – Problème non linéaire 1D (4.1). Evolution du résidu tronqué au cours des itérations : convergence de la méthode de Newton pour  $p = 10$ .

ton est plus lente lorsque la longueur du domaine augmente. Ceci peut s'expliquer par la présence de couches limites, il faut des degrés plus élevés pour obtenir une meilleure convergence de la méthode de Newton.

Sur la figure 4.2, on présente le résidu global dans tout le domaine lorsque le résidu tronqué a une valeur  $10^{-8}$ . La valeur du résidu global est très petite dans le domaine et elle augmente lorsqu'on s'approche du bord. Ces résultats ne sont pas très étonnants car, dans le domaine, on fait une résolution quasi-exacte de l'équation. Cette figure montre que le résidu global diminue lorsque l'on augmente le degré. On a donc  $p$ -convergence comme dans les cas linéaires. Le résidu global décrit donc la convergence de la TMM. Au même titre que l'erreur, le résidu global peut être défini comme un estimateur d'erreur, mais il ne demande pas la connaissance d'une solution exacte.

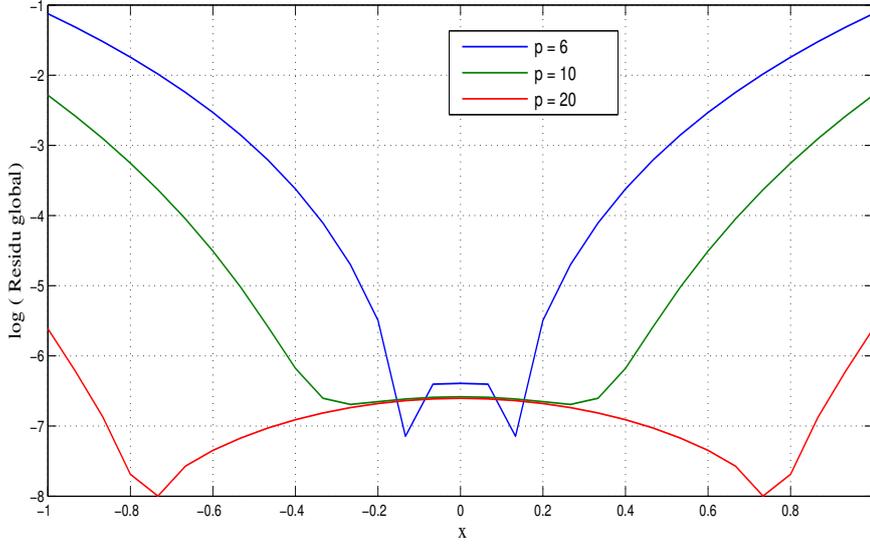


FIG. 4.2 – Problème non linéaire 1D (4.1). Répartition du résidu global dans le domaine : convergence de la TMM.  $L = 1$  et critère d'arrêt de la méthode de Newton : résidu tronque =  $10^{-8}$ .

## 4.2 Résolution des problèmes non linéaires en 2D

Les résultats de la section précédente ont montré que la TMM couplée à la méthode de Newton, permet de résoudre de manière très précise des problèmes non linéaires en 1D. Dans cette section nous étendons cette application en 2D. Pour cela nous considérons un problème d'élasticité non linéaire en cisaillement anti-plan.

### 4.2.1 Formulation du problème

On se propose d'étudier un système en équilibre soumis à une force volumique extérieure  $f = -\phi$ . Soient  $\Omega_o$  la configuration initiale du système dont on souhaite étudier l'équilibre et  $\underline{X} \in \Omega_o$ . Pour simplifier, nous considérons un problème anti-plan

autrement dit, nous cherchons le champ de déplacement  $\mathbf{U}$  sous la forme :

$$\underline{x} = \underline{X} + \mathbf{U} \text{ avec } \mathbf{U} \text{ défini par : } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ W(x, y) \end{pmatrix}.$$

où  $\underline{x}$  est la variable eulérienne et  $\underline{X}$  est la variable lagrangienne.

Dans les problèmes *anti-plan*, les contraintes et les déformations sont des fonctions de deux variables d'espace  $(x, y)$  et certaines de leurs composantes sont nulles. Ces problèmes sont caractérisés par le fait que seule la composante suivant  $OZ$  du déplacement est non nulle.

Dans le cas de glissement anti-plan, seules les composantes  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  du tenseur de déformation sont non nulles, et dans l'hypothèse d'un comportement isotrope du matériau, seules les composantes de cisaillement anti-plan du tenseur des contraintes sont non nulles. On retrouve ces types de problèmes très fréquemment, par exemple le problème de torsion d'un arbre cylindrique se ramène à un problème anti-plan [80].

Le tenseur gradient de transformation d'un problème anti-plan s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial W}{\partial X} & \frac{\partial W}{\partial Y} & 1 \end{pmatrix}$$

On suppose le milieu isotrope, l'énergie qui est une fonction de  $\mathbf{F}$  devient une fonction de  $\|\nabla W\|^2$ . L'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\pi = \int_{\Omega_0} e(\|\nabla W\|^2) d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \phi W d\Omega_0 \quad (4.16)$$

En posant  $g = \|\nabla W\|^2$ , la minimisation de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\delta\pi = \int_{\Omega_0} \frac{\partial e}{\partial g} 2\nabla W : \nabla \delta W d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \phi \delta W d\Omega_0 = 0 \quad (4.17)$$

En posant  $h(\|\nabla W\|^2) = 2\partial e/\partial g(\|\nabla W\|^2)$ , cette dernière relation est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(q) = \phi \\ q = h(\|\nabla W\|^2)\nabla W \end{cases} \quad (4.18)$$

La première équation de ce système est linéaire par rapport à la variable  $q$ , par contre la seconde équation est une équation non linéaire par rapport à la variable  $W$ , ce qui fait du système (4.18) un système non linéaire. Le système (4.18) peut se ramener à une EDP à une inconnue  $W$ , toujours non linéaire :

$$\operatorname{div}(h(\|\nabla W\|^2)\nabla W) = \phi. \quad (4.19)$$

Cette dernière relation représente l'équation caractérisant les problèmes d'élasticité non linéaire anti plane.

En résumé on veut résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h(\|\nabla W\|^2)\nabla W) = \phi & \text{dans } \Omega \\ W = W^d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial W}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_n \end{cases} \quad (4.20)$$

où  $\partial\Omega = \Gamma_d \cup \Gamma_n$  et  $h$  est une fonction non linéaire de  $W$ . Pour résoudre ce problème, comme en 1D, on couple la TMM à la méthode de Newton.

### 4.2.2 Linéarisation du problème avec la méthode de Newton

Le résidu du problème non linéaire (4.20) s'écrit :

$$\mathbf{R}(W(x, y)) = \text{div}(h(\|\nabla W\|^2)\nabla W) - \phi \quad (4.21)$$

Nous appliquons la méthode de Newton à ce résidu non linéaire. Ceci consiste à annuler son développement limité d'ordre 1. On part d'une solution d'essai  $W_0$  donné, et à chaque itération la solution est  $W + \delta W$ , où  $W$  est la solution à l'itération précédente et  $\delta W$  vérifie le problème linéaire suivant :

$$R'(v)(\delta W) = -R(v) \quad (4.22)$$

Ainsi à chaque itération, il s'agit de chercher  $\delta W$ , solution du problème suivant :

$$\text{div}(h(\|\nabla v\|^2)\nabla \delta w + 2h'(\|\nabla v\|^2) \cdot \langle \nabla v, \nabla \delta w \rangle \nabla v) = -\text{div}(h(\|\nabla v\|^2)\nabla v) + \phi \quad (4.23)$$

On a :

$$\nabla v \langle \nabla v, \nabla \delta w \rangle = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta w}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

$$(4.23) \iff \mathbf{div}(\mathbf{K}\nabla \delta w) = -\mathbf{R}(v) \quad (4.24)$$

Où  $\mathbf{K}$  est défini par :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} h(\|\nabla v\|^2) + 2h'(\|\nabla v\|^2)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 & 2h'(\|\nabla v\|^2)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 2h'(\|\nabla v\|^2)\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} & h(\|\nabla v\|^2) + 2h'(\|\nabla v\|^2)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Pour plus de simplicité dans la suite, nous désignerons les composantes de la matrice  $\mathbf{K}$  par  $K_1$ ,  $K_{12}$  et  $K_2$ , de manière à écrire :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_1 & K_{12} \\ K_{12} & K_2 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Ainsi l'équation (4.23) est équivalente à :

$$\operatorname{div}(K\nabla\delta w) = K_1\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + K_2\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} + 2K_{12}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_{12}}{\partial y}\right)\frac{\partial\delta w}{\partial x} + \left(\frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_{12}}{\partial x}\right)\frac{\partial\delta w}{\partial y} \quad (4.27)$$

Posons :

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{\partial K_{12}}{\partial y} \\ f_2 &= \frac{\partial K_2}{\partial y} + \frac{\partial K_{12}}{\partial x}, \end{aligned}$$

Les formules (4.27) et (4.24) conduisent à :

$$K_1\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2} + K_2\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} + K_{12}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y} + f_1\frac{\partial\delta w}{\partial x} + f_2\frac{\partial\delta w}{\partial y} = -R(v). \quad (4.28)$$

Résoudre le problème non linéaire (4.20) revient à résoudre le problème linéaire (4.28) à chaque itération en partant d'une solution d'essai  $W_0$ .

### 4.2.3 Résolution du problème linéaire

La deuxième étape de notre algorithme consiste à résoudre ce problème linéaire par la TMM. Ceci revient à annuler les coefficients de Taylor du résidu de ce problème (notons qu'il s'agit du résidu linéaire cette fois ci et non du résidu non linéaire comme dans la section précédente). Le calcul de ces coefficients passe par la connaissance des coefficients de Taylor de toutes les fonctions apparaissant dans l'EDP. L'inconnue étant approchée sous la forme suivante :

$$\delta w(x, y) = \sum_{k=0}^N \langle X^k \rangle \{ \delta w^k \} \quad (4.29)$$

où  $\{ \delta w^k \}$  sont les coefficients de Taylor inconnues. D'une part, les fonctions  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_{12}$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant connues, on sait calculer leur approximation de Taylor. D'autre part, de part les travaux de S. Zeze [17], nous savons calculer les coefficients de Taylor de n'importe quel opérateur différentiel agissant sur la forme approchée (C.1). Cependant dans notre EDP actuelle (4.28), il apparait des produits (par exemple  $K_1 \partial^2 \delta w / \partial x^2$ , ). Jusqu'à présent le calcul des coefficients de Taylor du produit de deux fonctions n'a pas encore été mis en place. Il nous faut donc évaluer cela avant de passer à la suite de la résolution.

Une fois le calcul des coefficients de Taylor du produit de deux fonctions maîtrisé, nous pouvons calculer les coefficients du résidu du problème linéaire (4.28). Ensuite la résolution par la TMM, se fait de la même manière que dans le cas du problème linéaire à coefficients constants présenté au chapitre 1 (section ). Un calcul détaillé des fonctions de formes du problème linéaire est présenté en annexe.

## 4.3 Produit de deux séries de Taylor en 2D

Soient  $a(x, y)$  et  $b(x, y)$  deux fonctions développées en série de Taylor et tronquées aux ordres  $N_a$  et  $N_b$  respectivement :

$$a(x, y) = \sum_{i=0}^{N_a} \langle X^i \rangle \{a^i\} \quad (4.30)$$

$$b(x, y) = \sum_{i=0}^{N_b} \langle X^i \rangle \{b^i\} \quad (4.31)$$

Le but de cette section est de calculer les vecteurs  $\{c^i\}$  de telle manière qu'on puisse écrire le produit des deux fonctions  $a$  et  $b$  sous forme :

$$c(x, y) = a(x, y) * b(x, y) = \sum_{i=0}^{N_c} \langle X^i \rangle \{c^i\}$$

**Etape 1 :** Décomposition du polynôme produit selon le degré  $k$

Le produit  $ab$  est de degré  $N_c = N_a + N_b$  et ses coefficients de Taylor s'expriment en fonction des coefficients de  $a(x, y)$  et de  $b(x, y)$  :

$$c(x, y) = \sum_{k=0}^{N_a+N_b} \langle X^k \rangle \{c^k\} = \sum_{i=0}^{N_a} \sum_{j=0}^{N_b} \langle X^i \rangle \{a^i\} \langle X^j \rangle \{b^j\} \quad (4.32)$$

Pour un  $k$  fixé,  $k \leq N$ , on a :

$$\langle X^k \rangle \{c^k\} = \sum_{n=n_1}^{n_2} \langle X^n \rangle \{a^n\} \langle X^{k-n} \rangle \{b^{k-n}\} \quad (4.33)$$

avec les conditions suivantes à vérifier par les bornes :

$$\begin{cases} 0 \leq n \leq N_a \\ 0 \leq k - n \leq N_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq n \leq N_a \\ k - N_b \leq n \leq k \end{cases} \Rightarrow \max(0, k - N_b) \leq n \leq \min(k, N_a)$$

De ce qui précède, on déduit les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$  :

$$\begin{cases} n_1 = \max(0, k - N_b) \\ n_2 = \min(k, N_a) \end{cases}$$

On obtient alors le terme de degré  $k$  du polynôme  $c$  :

$$\langle X^k \rangle \{c^k\} = \sum_{n=\max(0, k-N_b)}^{\min(k, N_a)} \langle X^n \rangle \{a^n\} \langle X^{k-n} \rangle \{b^{k-n}\} \quad (4.34)$$

**Etape 2 :** Calcul des coefficients  $c_{ij}$  du produit en fonction des coefficients des deux polynômes  $a$  et  $b$ .

L'équation (4.34) se réécrit sous la forme suivante :

$$\sum_{l=0}^k x^l y^{k-l} c_{l, k-l} = \sum_{n=\max(0, k-N_b)}^{\min(k, N_a)} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{k-n} x^{i+j} y^{k-i-j} a_{i, n-i} b_{j, k-n-j} \quad (4.35)$$

Pour  $l$  fixé, en posant  $i + j = l$  et en posant  $\begin{cases} i = m \\ j = l - m \end{cases}$ , on arrive à :

$$x^l y^{k-l} c_{l, k-l} = \sum_{n=\max(0, k-N_b)}^{\min(k, N_a)} \sum_{m=m_1}^{m_2} x^l y^{k-l} a_{m, n-m} b_{l-m, k-n-l+m} \quad (4.36)$$

Comme dans la relation (4.33), l'indice  $m$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 0 \leq m \leq n \\ 0 \leq l - m \leq k - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq n \\ n + l - k \leq m \leq l \end{cases} \Rightarrow \max(0, n+l-k) \leq m \leq \min(n, l)$$

Ce qui nous donne le coefficient  $c_{l,k-l}$  :

$$c_{l,k-l} = \sum_{n=\max(0, k-N_b)}^{\min(k, N_a)} \sum_{m=\max(0, n+l-k)}^{\min(n, l)} a_{m, n-m} b_{l-m, k-n-l+m} \quad (4.37)$$

En se limitant aux fonctions de même degré  $N$ , c'est-à-dire  $N_a = N_b = N$  et en tronquant le produit  $c(x, y)$  à  $N$ , la relation (4.37) devient :

$$c_{l,k-l} = \sum_{n=0}^k \sum_{m=\max(0, n+l-k)}^{\min(n, l)} a_{m, n-m} b_{l-m, k-n-l+m}, \quad (4.38)$$

en effet,  $\max(0, k - N_b) = 0$  et  $\min(k, N_a) = k$  Dans l'équation (4.38), effectuons un changement de variable en posant  $k - l = i$  ce qui conduit donc à :

$$c_{k-i, i} = \sum_{n=0}^k \sum_{m=\max(0, n+i)}^{\min(n, k-i)} a_{m, n-m} b_{k-i-m, k-n-(k-i-m)} \quad (4.39)$$

**Etape 3 :** On réécrit l'algorithme sous forme matricielle

Une fois les coefficients  $c_{ij}$  calculés, nous les regroupons pour former les vecteurs  $\{c^i\}$  en fonction des vecteurs  $\{a^k\}$  et  $\{b^k\}$ . Pour cela nous cherchons d'abord à faire apparaître ces vecteurs dans l'écriture des  $c_{ij}$ .

Un nouveau changement de variable dans (4.39) en posant  $r = k - i - m$  conduit

à :

$$c_{l,k-l} = \sum_{n=0}^k \sum_{r=\max(0,k-i-n)}^{\min(k-n,k-i)} a_{k-i-r,n-(k-i-r)} b_{r,(k-n)-r} \quad (4.40)$$

Un dernier changement de variable en posant  $p = k - n - r$  dans (4.40) donne finalement :

$$c_{l,k-l} = \sum_{n=0}^k \sum_{r=\max(0,n-i)}^{\min(k-n,i)} \underbrace{a_{n-(i-p),(i-p)}}_{\{a^n\}} \underbrace{b_{(k-n)-p,p}}_{\{b^{k-n}\}} \quad (4.41)$$

Les coefficients  $\{c^k\}$  du produit sont définis par :

$$\{c^k\} = \sum_{n=0}^k [C_{kn}] \{b^{(k-n)}\} \quad (4.42)$$

Où la matrice  $[C_{kn}]$  est définie par :

$$[C_{kn}] = \begin{bmatrix} C_{kn00} & \cdots C_{kn0i} & \cdots C_{kn0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{knj0} & \cdots C_{knji} & \cdots C_{knjn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{knk0} & \cdots C_{knki} & \cdots C_{knkn} \end{bmatrix} \cdot \quad (4.43)$$

avec

$$C_{knip} = \begin{cases} a_{n-i+p, i-p} & \text{si } \max\{0, i-n\} \leq p \leq \min\{k-n, i\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.44)$$

## 4.4 Résultats numériques

Dans cette section, la méthodologie de calcul proposée est validée et testée. Nous considérons des problèmes d'élasticité non linéaire en cisaillement anti plan de la forme (4.20), avec des conditions aux limites de Dirichlet ou mixte. La loi de comportement, est donnée par la fonction  $h$ , sous la forme suivante :

$$h(\|\nabla w\|^2) = G [1 + C\|\nabla w\|^2] \quad (4.45)$$

où  $G$  et  $C$  sont des réels.

### Choix d'indicateurs d'erreur

Les problèmes traités ont une solution analytique connue. La qualité de notre algorithme sera évaluée par l'erreur relative définie par :

$$erreur(x, y) = \frac{\|w_{exacte}(x, y) - w_{approche}(x, y)\|}{\max(\|w_{exacte}(x, y)\|)} \quad (4.46)$$

Comme en  $1D$ , nous définissons aussi des estimateurs d'erreur à partir du résidu. Il s'agit toujours du résidu tronqué et du résidu global définis à la section 4.1.4. Les solutions analytiques étant connues cette fois ci, nous pouvons comparer le résidu global à l'erreur, afin de valider l'hypothèse émise dans la section 4.1.4, qui stipule que "le résidu global peut être considéré comme un estimateur d'erreur de l'algorithme proposé".

Nous rappelons que pour un degré d'approximation  $p$  par la TMM, le résidu tronqué est le résidu tronqué à l'ordre  $p-2$  et le résidu global est le même résidu étendu à l'ordre  $p$ . Ce dernier contient donc l'erreur d'approximation faite par la TMM.

### Exemple 1 : Problème mixte

Soit  $\Omega$  un carré de longueur  $L$  ( $[0, L] \times [0, L]$ ). On considère le problème (4.20) sur ce carré, avec des conditions aux limites mixtes et défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(h(\|\nabla w\|^2)\nabla w) \\ \frac{\partial w}{\partial y}(x, y) \\ w(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [0, L] \\ \lambda & \text{si } (x, y) \in \{L\} \times [0, L] \end{cases} \end{array} \right. = \begin{array}{l} 0 \text{ dans } ]0, L[ \times ]0, L[ \\ 0 \quad \forall (x, y) \in [0, L] \times \{0\} \cup [0, L] \times \{L\} \end{array} \quad (4.47)$$

La solution exacte de ce problème est donnée par :

$$w(x, y) = \frac{\lambda x}{L}$$

Cette solution est un polynôme de degré 1. La méthode proposée étant une méthode d'approximation polynomiale, on doit pouvoir avoir une bonne approximation dès le degré  $p = 1$ . Ici nous nous intéresserons aussi à la robustesse de l'algorithme proposé, par rapport au degré d'approximation. Les résultats présentés dans la suite sont obtenus

avec les paramètres suivants :  $L = 2$ ,  $\lambda = 3$ , point de développement (ptdev) pris en  $[0, 0]$ ,  $h(g) = 1 + g$ ,  $G = C = 1$  et  $M = 40$  points de collocation sur les bords. Ces points de collocation sont répartis de manière régulière sur le carré, à raison de 11 points par côté.

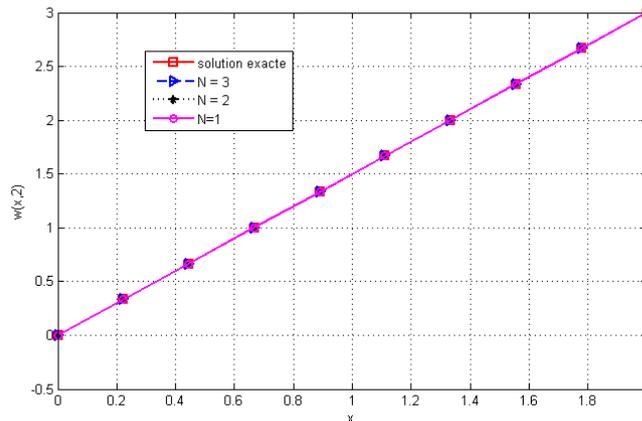


FIG. 4.3 – Problème mixte (4.47) : comparaison des solutions approchées avec la solution exacte dans la direction ( $y = 2$  et  $x \in [0, 2]$ ) pour  $p = 1$ ,  $p = 2$  et  $p = 3$ .

La figure 4.3, présente la solution dans le domaine pour différents degrés d'approximation ( $p = 1$ ,  $p = 2$  et  $p = 3$ ). Ces résultats ont été obtenus avec un critère d'arrêt de la méthode de Newton défini par le résidu tronqué (résidu tronqué  $< 10^{-3}$ ). Comme attendu, on obtient une très bonne approximation pour le degré  $p = 1$ . En plus cette convergence est obtenue dès la première itération, en partant d'une solution d'essai nulle. L'erreur est de l'ordre de  $10^{-16}$ , ce qui n'est pas étonnant, car avec l'approximation d'ordre 1, on tombe quasiment sur la solution exacte.

Cette figure montre aussi que l'on garde une bonne convergence en augmentant l'ordre d'approximation. Cependant un zoom sur l'erreur dans le domaine (fig 4.4), montre que l'on introduit de petites erreurs en augmentant l'ordre d'approximation. Notons que l'erreur introduite en augmentant le degré est très faible : la méthode proposée

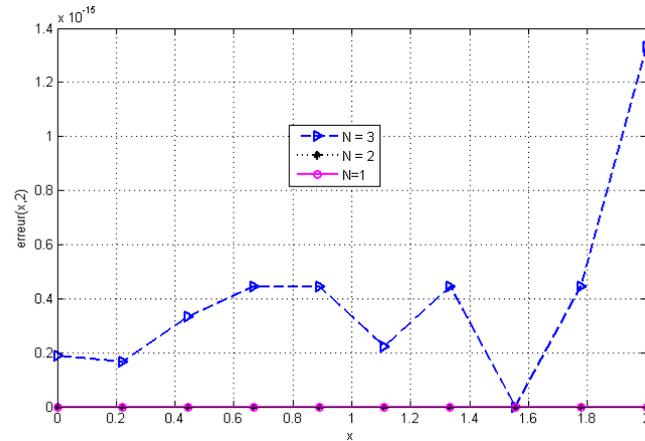


FIG. 4.4 – *Problème mixte (4.47) : comparaison des erreurs sur le segment ( $y = 2$  et  $x \in [0, 2]$ ) pour  $p = 1, p = 2$ , et  $p = 3$ .*

est robuste par rapport au degré d'approximation.

### Exemple2 : Problème de Dirichlet

Dans l'exemple précédent, notre algorithme a convergé dès la première itération. Considérons maintenant un problème plus complexe, avec une solution sinusoïdale. Ce problème ne convergera pas dès la première itération, ainsi l'on pourra étudier la convergence de la méthode de Newton, en utilisant le résidu. On considère le problème (4.18) défini sur le carré de longueur  $L$  et la fonction  $h$  définie par :  $h(g) = G(1 + Cg)$  avec  $G, C \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(h(\|\nabla w\|^2)\nabla w) = f \text{ dans } ]0, L[ \times ]0, L[ \\ w(x, y) = 0 \text{ sur le bord} \end{cases} \quad (4.48)$$

avec  $f = 2G \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \left[2C \left(\frac{\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right)^2 - 2C \left(\frac{\pi}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\right)^2 - 1\right]$

La solution exacte de ce problème est donnée par :

$$w(x, y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right). \quad (4.49)$$

Tous les résultats ont été obtenus avec les paramètres suivants :  $ptdv = [0.5, 0.5]$ ,  $L = G = C = 1$ ,  $h(g) = 1 + g$  et  $w_o(x, y) = 0$  la solution d'essai. On choisit un ensemble de points dans le domaine et on évalue l'erreur et les deux résidus en ces points.

### Critère d'arrêt

Avant toute étude, nous devons définir un critère d'arrêt de la méthode de Newton. Le critère idéal serait de fixer une erreur maximale et d'itérer l'algorithme de Newton jusqu'à l'obtention d'une erreur inférieure à cette valeur maximale. Cependant cette opération est impossible dans les cas où la solution analytique du problème étudié est inconnue. Il nous faut donc définir un critère générique. Comme en 1D, nous pensons utiliser le résidu tronqué pour définir ce critère. En effet le calcul de ce résidu ne nécessite que la connaissance des coefficients de Taylor calculés par la méthode proposée. Sur la figure 4.5, on trace le résidu tronqué maximal en fonction de l'erreur maximale. La figure 4.6, représente l'évolution de l'erreur maximale au cours des itérations. Cette figure montre que l'erreur maximale diminue au cours des itérations.

D'autre part, la figure 4.5 montre que le résidu tronqué maximal diminue en même temps que l'erreur maximale. On peut donc considérer ce résidu tronqué comme un critère d'arrêt de la méthode de Newton. En effet on sait à partir de ces deux figures que plus le résidu tronqué est faible, plus la méthode converge.

### Convergence de la méthode couplée TMM-Newton

Une fois le critère d'arrêt établi, nous nous fixons un résidu tronqué maximal (=

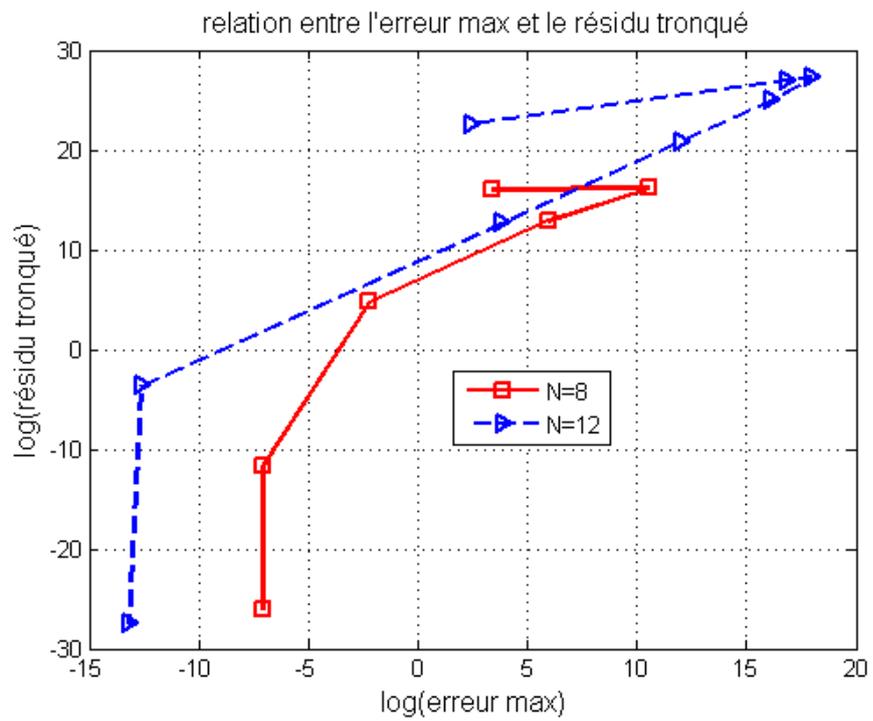


FIG. 4.5 – Problème de Dirichlet (4.48) : convergence de la méthode de Newton.

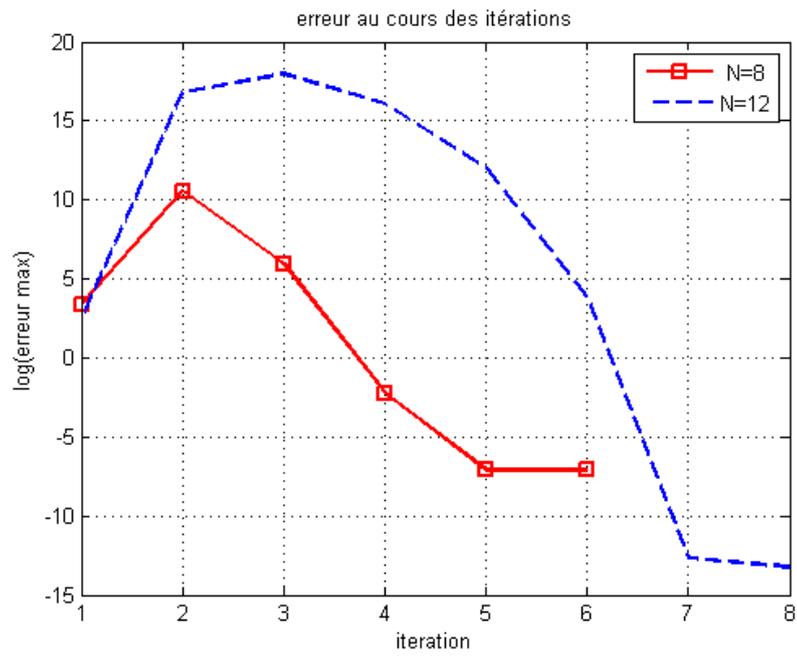


FIG. 4.6 – Problème de Dirichlet (4.48) : évolution de l'erreur maximale au cours des itérations.

$10^{-8}$ ) et nous itérons l'algorithme de Newton, jusqu'à ce que la valeur du résidu tronqué soit inférieure à cette valeur maximale. On calcule ensuite l'erreur dans le domaine, à partir de la solution obtenue après la dernière itération. Dans le tableau (4.1), on présente le logarithme de l'erreur maximale en fonction des ordres de troncature. Le nombre de points de collocation choisis sur le bord est  $M = 4p$ . Ce tableau montre que l'erreur maximale diminue lorsqu'on augmente le degré : on a de la  $p$ -convergence comme dans les cas linéaires.

Degré $p$	$M$	$\log_{10}(\text{Erreur max})$
<b>3</b>	12	-0.2112
<b>6</b>	24	-4.4465
<b>8</b>	32	-7.0963
<b>10</b>	40	-10.0172
<b>12</b>	48	-13.2014

TAB. 4.1 – *Problème de Dirichlet : Étude de la  $p$ -convergence.*

Sur la figure (4.7), on a représenté les solutions obtenues à l'intérieur du domaine par la technique de perturbation couplée à la méthode de Newton aux ordres  $p = 5$ ,  $p = 8$  et  $p = 12$  en comparaison avec la solution exacte sur le segment  $x = \frac{3}{7}$ . Cette courbe vient confirmer les résultats du tableau précédent. On remarque que l'on améliore la qualité de la résolution du problème en augmentant le degré. Ce qui est intéressant, c'est de remarquer que cette amélioration passe principalement par une meilleure approximation de l'EDP dans le domaine. En effet, sur cette figure, on remarque qu'en augmentant le degré, on approche mieux la solution dans le domaine.

La figure (4.8), présente la répartition de l'erreur dans tout le domaine, pour un degré  $p = 12$ . On remarque que la convergence est très bonne à l'intérieur du domaine et que l'erreur augmente en s'approchant du bord. Le même résultat avait été obtenu dans le cas linéaire et dans le cas  $1D$  présenté dans ce chapitre. Cette répartition est

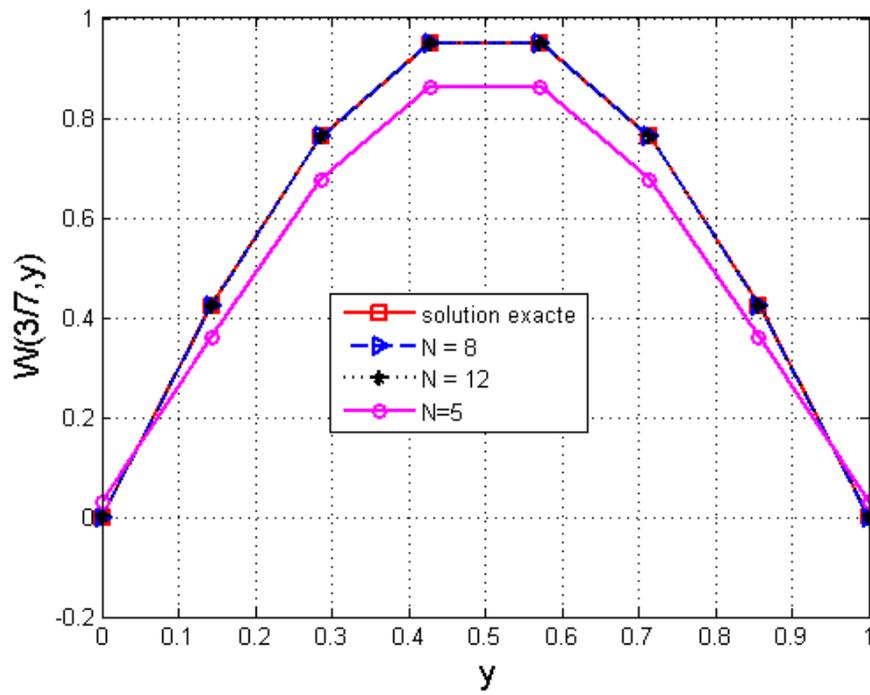


FIG. 4.7 – Problème de Dirichlet (4.48) : solutions approchées et exacte sur le segment ( $x = \frac{3}{7}$  et  $y \in [0, 1]$ ) pour  $p = 5$ ,  $p = 8$  et  $p = 12$ .

due au fait qu'on fait une résolution exacte du problème dans le domaine, l'application des conditions aux limites étant faite de manière approchée, on introduit des erreurs au bord. Pour rendre plus robuste la méthode, une meilleure manière pourrait être d'utiliser la méthode de Galerkin pour l'application des conditions aux limites, au dépend de la méthode des moindres carrés utilisée actuellement. Mais cette technique générera de l'intégration numérique et donc un coût de calcul plus élevé.

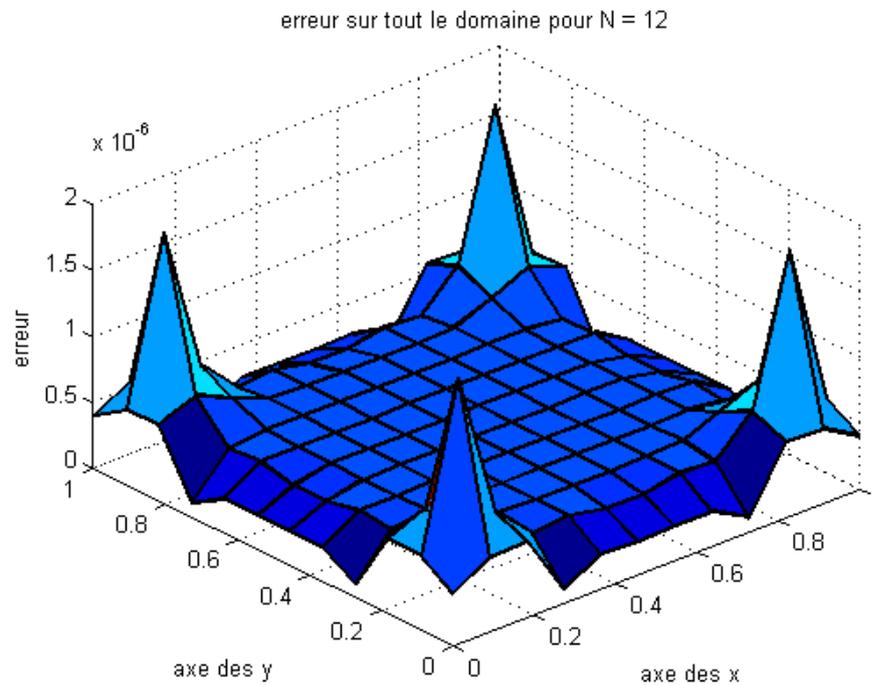


FIG. 4.8 – *Problème de Dirichlet (4.48) : degré  $p = 12$ , erreur sur tout le carré.*

### Estimateur d'erreur

Les résultats précédents ont montré une très bonne convergence de la méthode proposée. On a aussi réussi à définir un critère d'arrêt générique de la méthode de Newton en utilisant le résidu. Ici nous cherchons à définir un estimateur d'erreur qui pourra être utile dans les cas où la solution analytique du problème étudié est inconnue. Pour cela

nous nous inspirons des résultats obtenus en  $1D$  et ainsi nous utilisons le résidu global. La figure (4.9) présente le résidu global maximal en fonction de l'erreur maximale. Cette courbe, assimilable à une droite linéaire, montre que le résidu global diminue quand l'erreur maximale devient aussi petite. Tout comme l'erreur maximale, le résidu global maximal décroît avec le degré. Cette figure montre une bonne corrélation entre

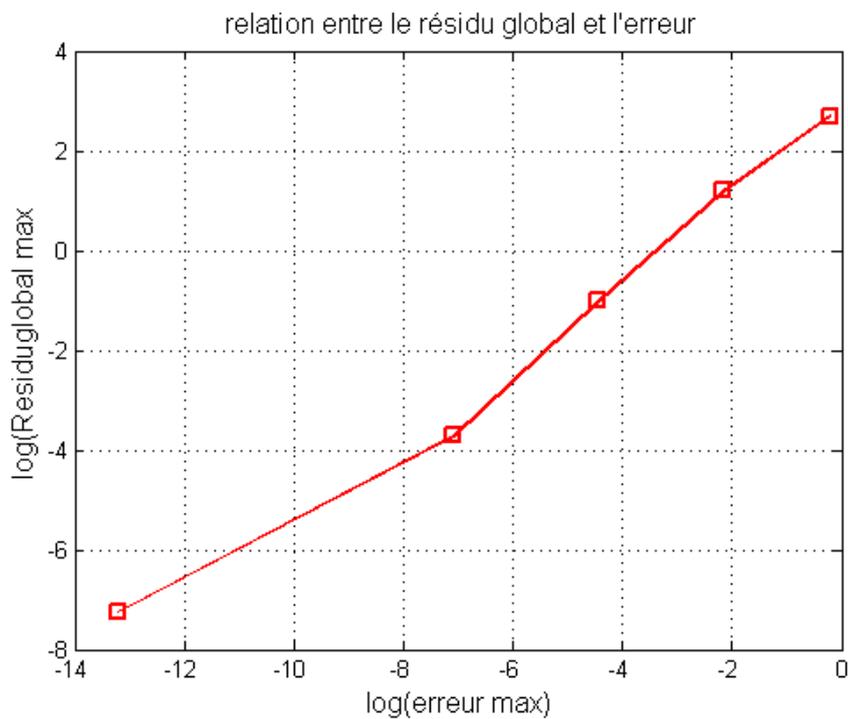


FIG. 4.9 – Problème de Dirichlet (4.48) : relation entre le résidu global maximal et l'erreur maximale.

l'erreur et le résidu global. Le résidu global peut donc être considéré comme un bon indicateur pour la précision de la méthode proposée.

## 4.5 Automatisation de la TMM : introduction de la différentiation automatique

La TMM dans sa formulation principale permet de résoudre les EDP en annulant les coefficients de Taylor du résidu de ce dernier. Cependant jusqu'à présent pour calculer ces coefficients, il faut effectuer analytiquement des calculs de dérivées d'ordres élevés. Ce calcul devient plus complexe dans le cas des problèmes non linéaires où, à chaque itération, on a un nouveau problème linéaire à résoudre. Pour faciliter ces calculs, nous avons pensé à utiliser la différentiation automatique. Dans la littérature, on retrouve plusieurs techniques de différentiation automatique [1, 81, 82] qui sont codées en C++, Fortran ou Matlab, toutefois aucune de ces techniques n'est totalement adaptée à la TMM. Il a fallu donc adapter ces techniques à la TMM. Avec les codes existant actuellement, on sait calculer les coefficients de Taylor d'une fonction connue donnée. Cependant dans la TMM pour calculer les fonctions de forme, l'inconnue est approchée par une série de Taylor dont les coefficients sont inconnus. Dans cette section, nous présentons la technique d'automatisation adaptée à la TMM.

### 4.5.1 Un problème quasi-linéaire en 1D

Considérons le problème quasi linéaire suivant :

$$R(x, u) = -[q(u')] + \phi(x) = 0 \tag{4.50}$$

En appliquant la méthode de Newton, résoudre cette équation revient à résoudre à chaque itération le problème linéaire suivant :

$$-[k(u')v']' + r(x, u) = 0 \quad (4.51)$$

où

$$k(u') = \frac{\partial q}{\partial u}(u') \quad (4.52)$$

et où  $u$  est la solution à l'itération précédente et  $v$  est tel que  $u + v$  est la solution à l'itération actuelle. Résoudre le problème linéaire (4.51) par la TMM, revient à chercher les coefficients de Taylor  $v_k$  de  $v$  pour  $k$  compris entre 0 et  $p$ , où  $p$  est un ordre de troncature fixé par l'utilisateur. Cette équation est équivalente à :

$$\begin{cases} -q' + r(x, u) = 0 \\ q = k(u')g \\ g = v' \end{cases} \quad (4.53)$$

## 4.5.2 Différentiation Automatique d'ordre élevé [1]

La différentiation Automatique est une technique permettant de calculer des dérivées "automatiquement", c'est à dire sans avoir à effectuer des calculs de dérivées analytiquement, ni a fortiori les programmer. La DA a été utilisée récemment pour calculer des dérivées d'ordre élevés dans le cadre de la Méthode Asymptotique Numérique [1, 83]. Pour fixer les idées, considérons une fonction "quelconque" :  $z = f(y)$ . La variable  $y$  est supposée être une fonction analytique d'une variable réelle  $x$  et on la représentera

par une série de Taylor autour de  $x_0$  :

$$\begin{cases} y(x) = \sum_{n=0}^p y_n (x - x_0)^n + O(x - x_0)^{p+1} \\ y_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n y}{\partial x^n}(x_0) \end{cases} \quad (4.54)$$

Donc dans le cadre des séries de Taylor tronquées à l'ordre  $p$ , la donnée de la fonction  $y(x)$  équivaut à se donner les variables discrètes  $\{y_0, y_1, \dots, y_p\}$ . Si  $f$  est une fonction analytique, alors  $z$  sera aussi une fonction analytique de  $x$ , qui sera discrétisé par ses coefficients de Taylor  $\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$ . Dans le cadre de la TMM, on aura à écrire  $\{z_0, z_1, \dots, z_p\}$  en fonction de  $\{y_0, y_1, \dots, y_p\}$ . Pour comprendre le principe de la DA, prenons l'exemple suivant [84] :  $f(y) = y^2 + \exp(3y)$ . Cette fonction peut être décomposée en opérateurs élémentaires (somme, produit, exponentielle, ...) :

$$\begin{cases} u = y * y \\ w = 3 * y \\ e = \exp(w) \\ z = u + e \end{cases} \quad (4.55)$$

Les formules de récurrences donnant les dérivées de chaque opération élémentaire sont connues et programmées (exemple :  $z_k = u_k + e_k$ ). En pratique,  $y(x)$  est une inconnue et il est commode de faire apparaître sa dérivée d'ordre le plus élevé  $y_n$  dans le calcul de :

$$z_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [f(y(x))] |_{(x=x_0)} \quad (4.56)$$

Or on sait (voir par exemple [83]), que cette dépendance est affine, ce qui conduit à la formule :

$$\begin{cases} z_n = f'(y_0)y_n + f_n^{kl} \\ f_n^{kl} = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [f(y(x))] |_{y_0, y_1, \dots, y_n=0} \end{cases} \quad (4.57)$$

Ainsi la formule de récurrence (4.57) fait intervenir la première dérivée  $f'(y_0)$  et un reste, qui s'interprète comme une dérivée d'ordre  $k$ , mais lorsque  $y_k$  est mis arbitrairement à la valeur 0. Autrement dit, si on sait calculer les dérivées d'ordre  $k$  de  $z$ , on saura aussi calculer la tangente  $f'(y_0)$  et le terme résiduel  $f_k^{nl}$ .

### 4.5.3 Application à l'équation différentielle (4.53)

On suppose que  $u(x)$  est une fonction connue, et qu'elle est représentée par ses coefficients de Taylor  $\{u_0, u_1, \dots, u_p\}$ . Tout bon code de DA sait alors calculer les dérivées de la fonction  $x \rightarrow k(u'(x))$  et du résidu  $x \rightarrow r(x, u(x), u'(x))$ . On applique alors la règle de calcul (4.57) à l'équation différentielle (4.53), en notant que le calcul des dérivées  $q'$  et  $v'$  est évident :

$$\begin{cases} -nq_n + r_{n-1} = 0 \\ q_n = k_0 g_n + (kg)_n^{nl} \\ (n+1)v_{n+1} = q_n \end{cases} \quad (4.58)$$

Ainsi l'application de la formule de récurrence (4.58) permet de calculer la dérivée d'ordre  $n+1$  de  $v$  en fonction des dérivées d'ordre inférieur (se rappeler que  $(kg)_n^{nl}$  ne contient pas de dérivée d'ordre  $n$  de  $g$ ) et en fonction des dérivées des fonctions connues  $k(x)$ ,  $r(x)$ . En appliquant successivement (4.58) pour  $n = 1, 2, \dots, p-1$ ,

on peut construire numériquement toutes les dérivées de  $v(x)$  en fonction de  $v_0$  et  $v_1$ , quelles que soient les fonctions  $x \rightarrow q(u')$  et  $x \rightarrow \phi(x)$ .

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme de résolution des problèmes non linéaires en couplant la TMM à la méthode de Newton. La méthode de Newton permet de linéariser l'EDP non linéaire et les problèmes linéaires obtenus sont ensuite résolus par la TMM. Une validation a été faite en 1D, puis en 2D sur un problème d'élasticité non linéaire en cisaillement anti-plan. Deux fonctions ont été définies à partir du résidu afin d'évaluer la convergence de la méthode de Newton et la convergence de l'algorithme global. Les résultats obtenus ont montré une très bonne convergence. Dans ce chapitre nous avons utilisé la méthode de Newton, mais toutes les autres techniques de linéarisation peuvent être aussi utilisées (MAN, méthode de Newton-Raphson ...).

A la fin du chapitre, nous avons introduit de la Différentiation Automatique, dans le but d'automatiser le calcul des fonctions de forme. Jusqu'à présent ce calcul nécessitait de calculer analytiquement des dérivées. Les techniques de DA permettent de calculer les coefficients de Taylor sans avoir à faire de calculs analytiques.

# Conclusion générale et bilan

Cette thèse vient renforcer et élargir le champ d'application de la "*Taylor Meshless Method*" (TMM), une méthode sans maillage proposée au laboratoire LEM3 [17]. La TMM construit la solution d'une EDP en faisant une approximation en série entière tronquée à un ordre fixé. Le chapitre 1 de cette thèse a été dédié à l'état de l'art sur les méthodes sans maillages en général et sur la TMM en particulier. Cette étude bibliographique a montré que la TMM est une méthode très précise avec un nombre de degrés de liberté relativement faible (donc un coût de calcul réduit). Toutefois, la qualité de la convergence dépend de la géométrie du problème ou de la nature de la solution analytique. Cette dépendance est liée au domaine de convergence des séries calculées. Dans cette thèse, il a été question d'élargir le champ d'application de la TMM tout en la rendant plus robuste et plus efficace. Les apports de cette thèse peuvent être résumés comme ci dessous. Une partie a fait l'objet des publications [77, 78].

## **Bilan**

Les travaux menés au cours de cette thèse sont principalement regroupés en trois chapitres. Au chapitre 2, il a été proposé et validé des techniques qui, couplées à la TMM, permettent de résoudre les problèmes présentant des singularités. L'idée est de subdiviser le domaine en quelques sous domaines et de faire une résolution par la TMM

sur chaque sous domaine. Ainsi sur chaque sous domaine, une série convergente est obtenue en approchant au mieux la solution exacte. Les techniques proposées assurent la continuité des séries obtenues et de leur première dérivée aux interfaces entre les sous domaines. Plusieurs techniques ont été explorées. Les plus robustes et efficaces sont la méthode des multiplicateurs de Lagrange et une technique inspirée de la méthode Arlequin.

Le chapitre 3 est consacré à l'analyse mathématique de la TMM. Le but de cette étude est d'estimer le rayon de convergence des séries construites par la TMM. Dans ce chapitre, un algorithme a été proposé pour détecter l'ordre et la position de la première singularité du problème étudié. Cet algorithme utilise les coefficients des séries calculées. La position de la première singularité représente la limite du domaine de convergence. En outre, des techniques d'accélération de convergence ont été proposées. La méthode des approximants de Padé améliore la convergence de la TMM dans le cas des problèmes présentant une singularité finie. Une autre idée d'accélération de convergence a été d'utiliser une approximation de Taylor multipoint, à la place de l'approximation en un point proposée dans la formulation actuelle de la TMM. Au cours de cette thèse, nous n'avons pas eu le temps d'approfondir les recherches dans ce sens. Par contre, l'application faite en  $1D$  et avec un développement de Taylor en 2 points a conduit à de très bons résultats. La convergence obtenue est meilleure que quand on divise le domaine en deux sous domaines.

Au chapitre 4, nous avons étendu l'application de la TMM aux problèmes non linéaires. A cet effet, on a couplé la TMM à la méthode de Newton qui permet de linéariser l'équation. Cependant, d'autres techniques de linéarisation pouvaient être utilisées notamment la méthode asymptotique numérique. Un estimateur de convergence de la méthode de Newton a été défini ainsi qu'un estimateur de convergence de la TMM.

---

L'estimateur de convergence de la méthode de Newton définit un critère d'arrêt de la méthode. Dans les cas où la solution exacte du problème est inconnue, l'estimateur d'erreur de la TMM évalue la qualité de l'approximation de la TMM. L'algorithme de résolution des problèmes non linéaires a été entièrement automatisé en élaborant un code Matlab qui permet de calculer automatiquement les coefficients de Taylor d'une fonction donnée.

### **Perspectives**

Jusqu'à présent, la TMM a été appliquée à des problèmes académiques. Le présent travail ouvre de multiples perspectives et travaux futurs qui peuvent être résumés dans les points suivants.

- Passer à la résolution de problèmes mécaniques avec des challenges plus industriels.
- Etendre la méthode en  $3D$  et comparer le temps de calcul avec des méthodes existantes.
- Coupler avec la MEF (très souple pour aller chercher des solutions pas trop régulières avec des singularités, fissures, forces concentrés...).
- Résoudre des problèmes dépendant du temps.
- Mettre au point des algorithmes d'accélération de convergence en approfondissant les recherches sur le Taylor Multipoint, par exemple. Ce qui pourrait être une belle alternative à la résolution multizone.
- Approfondir les techniques de calcul des polynômes de Taylor (différentiation automatique...), pour rendre la méthode plus générale et plus automatique.

Nous pensons que les travaux effectués dans cette thèse constituent des outils efficaces pour résoudre ces problèmes.



# ANNEXE A

## Effet des opérateurs différentiels sur la forme approchée de la TMM

Dans la TMM la solution est cherchée sous la forme suivante :

$$u^h(x, y) = \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^n u_{n-i,i} x^{n-i} y^i = \sum_{k=1}^p \langle X^k \rangle \{u_k\} \quad (\text{A.1})$$

Pour résoudre l'EDP sous sa forme forte, on doit calculer l'action des opérateurs différentiels sur cette forme approchée. On peut remarquer que l'effet de tout opérateur différentiel  $L$  sur cette forme approchée, peut être identifié à des matrices  $[L^k]$  telles que :

$$Lu^h(x, y) = \sum_{k=0}^{p-2} \langle X^k \rangle [L^k] \{u_{k+2}\} + O(\|x\|^{p-1}) \quad (\text{A.2})$$

### A.0.1 Dérivée partielle

Considérons un polynôme  $u(x, y)$  de degré 3 soit :

$$u(x, y) = 1 * \{u_0\} + \langle x, y \rangle * \{u_1\} + \langle x^2, xy, y^2 \rangle * \{u_2\} + \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle * \{u_3\}$$

On dérive ce polynôme par rapport à la variable  $x$  d'abord :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \langle 1, 0 \rangle * \{u_1\} + \langle 2x, y, 0 \rangle * \{u_2\} + \langle 3x^2, 2xy, y^2, 0 \rangle * \{u_3\}$$

On réécrit ensuite cette dérivée en fonction des polynômes de base  $\langle X^0 \rangle, \langle X^1 \rangle, \langle X^2 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle 1, 0 \rangle &= 1 * \langle 1, 0 \rangle = \langle X^0 \rangle \langle 1, 0 \rangle = \langle X^0 \rangle [G_x^1] \\ \langle 2x, y, 0 \rangle &= \langle x, y \rangle * \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle X^1 \rangle [G_x^2] \\ \langle 3x^2, 2xy, y^2, 0 \rangle &= \langle x^2, xy, y^2 \rangle * \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \langle X^2 \rangle [G_x^3] \end{aligned}$$

Ces formules se généralisent aisément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \langle X^k \rangle &= \langle X^{k-1} \rangle [G_x^k] \text{ où } [G_x^k] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial}{\partial y} \langle X^k \rangle &= \langle X^{k-1} \rangle [G_y^k] \text{ où } [G_y^k] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$[G_x^k]$  et  $[G_y^k]$  sont les deux matrices, à  $k$  lignes et  $k + 1$  colonnes, définissant les opéra-

---

tions de dérivées partielles sur les polynômes de degré  $k$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^h}{\partial x} &= \sum_{k=0}^{p-1} \langle X^k \rangle [G_x^{k+1}] \{u_{k+1}\} \\ \frac{\partial u^h}{\partial y} &= \sum_{k=0}^{p-1} \langle X^k \rangle [G_y^{k+1}] \{u_{k+1}\}\end{aligned}\tag{A.4}$$

### A.0.2 Décomposition d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$ en polynômes homogènes

Soit un champ de vecteur :

$$\{v(x, y)\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Les coefficients d'un polynôme homogène de degré  $k$  sont dans ce cas représentés par un vecteur à  $2k + 2$  composantes

$$\{v^k\} = \begin{Bmatrix} \{v_x^k\} \\ \{v_y^k\} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^{2k+2}\tag{A.5}$$

Dans le cas d'un vecteur, la décomposition d'un polynôme de degré  $N$  en polynômes homogènes s'écrit

$$\{v\} = \sum_{k=0}^N [X_{(2)}^k] \{v^k\}\tag{A.6}$$

où

$$[X_{(2)}^k] = \begin{bmatrix} \langle X^k \rangle & 0 \\ 0 & \langle X^k \rangle \end{bmatrix}$$

Plus généralement, si  $v \in \mathbb{R}^m$ , on définit

$$[X_{(m)}^k] = \begin{bmatrix} \langle X^k \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle X^k \rangle & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \langle X^k \rangle \end{bmatrix} \quad \text{matrice à } m \text{ lignes et } m(k+1) \text{ colonnes}$$

$$\{v^k\} = \begin{Bmatrix} \{v_1^k\} \\ \{v_2^k\} \\ \vdots \\ \{v_m^k\} \end{Bmatrix} \quad m(k+1) \text{ lignes et } 1 \text{ colonne}$$

(A.7)

La décomposition en polynômes homogènes s'écrit alors

$$\{v\} = \sum_{k=0}^N [X_{(m)}^k] \{v^k\} \quad \text{(A.8)}$$

---

### A.0.3 Gradient d'une fonction scalaire

Soit  $f(x, y)$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$ , alors le gradient de  $f$  s'écrit :

$$\{\nabla f\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (\text{A.9})$$

Et d'après la relation (A.4), on déduit le vecteur coefficient du gradient de  $f$  en fonction des coefficients de  $f$  :

$$\{(\nabla f)^{k-1}\} = [G^k] \{f^k\} \quad (\text{A.10})$$

Où la matrice  $[G^k]$  est définie par :

$$[G^k] = \begin{bmatrix} [G_x^k] \\ [G_y^k] \end{bmatrix} \quad \text{matrice à } 2k \text{ lignes et } k+1 \text{ colonnes} \quad (\text{A.11})$$

### A.0.4 Divergence d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$

La divergence du vecteur  $v$  s'écrit :

$$\text{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (\text{A.12})$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 \{(divv)^k\} &= \left\{ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^k \right\} + \left\{ \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^k \right\} \\
 &= [G_x^{k+1}] \{v_x^{k+1}\} + [G_y^{k+1}] \{v_y^{k+1}\} \\
 &= \underbrace{[G_x^{k+1}, G_y^{k+1}]}_{[Div^{k+1}]} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_x^{k+1} \\ v_y^{k+1} \end{Bmatrix}}_{\{v^{k+1}\}}
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit} \quad (divv)^k = [Div^{k+1}] \{v^{k+1}\} \quad (\text{A.13})$$

### A.0.5 Le laplacien

Le laplacien d'une fonction est défini par  $\Delta u = div(\nabla u)$ . Cette relation nous permet de déterminer la relation entre les coefficients du laplacien d'une fonction  $u$  et les coefficients de la fonction  $u$ .

$$\begin{aligned}
 \Delta u_k &= (div(\nabla u))^k = [Div^{k+1}] \{(\nabla u)^{k+1}\} \\
 &= [Div^{k+1}] [G^{k+2}] \{u_{k+2}\}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\Delta u_k) = [Div^{k+1}] [G^{k+2}] \{u_{k+2}\} \quad (\text{A.14})$$

Des formules telles que (A.14) permettent de construire les polynômes qui sont des solutions particulières polynomiales d'une EDP linéaire. Ainsi si on applique (A.14) à l'équation  $-\Delta u + u = f$ , on obtient un ensemble de relations linéaires satisfaites par

---

les coefficients des polynômes.

$$- [Div^{k+1}] [G^{k+2}] \{u_{k+2}\} + \{u_k\} = \{f^k\} \quad (\text{A.15})$$



# ANNEXE B

## Résolution de l'équation de Navier

$$(\lambda + \mu)grad(div(\underline{u})) + \mu\Delta\underline{u} = 0 \quad (B.1)$$

Pour résoudre ce problème par la TMM, l'inconnue  $\underline{u}$  est approchée sous forme de série de Taylor :

$$\underline{u}(x, y) = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=0}^p \langle X^k \rangle \{u_x^k\} \\ \sum_{k=0}^p \langle X^k \rangle \{u_y^k\} \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^p [X_2^k] \{u_k\} \quad (B.2)$$

avec

$$\{u_k\} = \begin{Bmatrix} \{u_x^k\} \\ \{u_y^k\} \end{Bmatrix} \quad et \quad [X_2^k] = \begin{bmatrix} \langle X^k \rangle & 0 \\ 0 & \langle X^k \rangle \end{bmatrix} \quad (B.3)$$

Posons :

$$[\Delta_2^k] = \begin{bmatrix} [\Delta^k] & 0 \\ 0 & [\Delta^k] \end{bmatrix}, \quad [G_2^k] = \begin{bmatrix} [G^k] & 0 \\ 0 & [G^k] \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad [Div_2^k] = \begin{bmatrix} [Div^k] & 0 \\ 0 & [Div^k] \end{bmatrix}$$

Annuler les coefficients de Taylor du résidu de l'équation de Navier revient donc à écrire :

$$((\lambda + \mu) [G^{k+1}] [Div^{k+2}] + \mu [\Delta_2^k]) \{u_{k+2}\} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Cette dernière relation est un système de  $2(k+1)$  équations pour  $2(k+3)$  inconnues (les coefficients du vecteur  $\{u_{k+2}\}$ ). On peut donc déterminer une partie de ces coefficients en fonction des autres. Le choix des coefficients actifs (principales) se fait comme suggéré dans la section 1.3. On pose alors :

$$\begin{cases} \{u_0\} = \{v^0\} \\ \{u_1\} = \{v^1\} \\ \{u_k\} = [S_2^{1k}]\{v^k\} + [S_2^{2k}]\{w^k\} \quad \forall k \geq 2 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où  $[S_2^{1k}]$  et  $[S_2^{2k}]$  sont des matrices de décomposition. La relation (B.4) devient donc :

$$[A^{k+2}] \{w^{k+2}\} = - [B^{k+2}] \{v^{k+2}\} \quad (\text{B.6})$$

avec

$$\begin{aligned} [A^{k+2}] &= ((\lambda + \mu) [G^{k+1}] [Div^{k+2}] + \mu [\Delta_2^k])[S_2^{2k+2}] \\ [B^{k+2}] &= ((\lambda + \mu) [G^{k+1}] [Div^{k+2}] + \mu [\Delta_2^k])[S_1^{2k+2}] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

---

Par conséquent on détermine les vecteurs  $\{w^k\}$  en fonction des vecteurs  $\{v^k\}$

$$\{w^k\} = [R^k] \{v^k\} \quad (\text{B.8})$$

avec

$$\begin{aligned} [R^0] &= [R^1] = 0 \\ [R^k] &= -[A^{k+2}]^{-1} [B^{k+2}] \quad \forall k \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Ainsi l'inconnue  $u$  devient :

$$\underline{u}(x, y) = \sum_{k=0}^p [X_2^k] ([S_2^{1k}] + [S_2^{2k}] [R^k]) \{v^k\} \quad (\text{B.10})$$

Les vecteur  $\{v^k\}$  seront ensuite déterminés en appliquant les conditions aux limites.



## Résolution du problème d'élasticité non linéaire

Une fois le produit de deux séries de Taylor mis en place, nous pouvons résoudre le problème linéaire (4.28) par la TMM. Pour cela nous cherchons l'inconnue  $\delta w$ , sous la forme suivante :

$$\delta w(x, y) = \sum_{k=0}^N \langle X^k \rangle \{ \delta w^k \} \quad (\text{C.1})$$

On substitue (C.1) dans (4.28) et on fait une identification suivant l'ordre des monômes  $\langle X^k \rangle$ . Le but est d'annuler les coefficients de Taylor du résidu  $\text{div}(K \nabla \delta w) - \phi$ .

Le produit de deux séries de Taylor effectué dans la section précédente permet d'exprimer les  $k^{\text{èmes}}$  coefficients de Taylor des produits  $K_1 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}$ ,  $K_2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}$ ,  $f_1 \frac{\partial \delta w}{\partial x}$ ,  $f_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y}$  et

$K_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y}$  sous la forme suivante :

$$\left\{ \left( K_1 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^k \right\} = \sum_{n=0}^k [C_1^{kn}] [A_x^n] \{ \delta w^{n+2} \} \quad (\text{C.2})$$

$$\left\{ \left( K_2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^k \right\} = \sum_{n=0}^k [C_2^{kn}] [A_y^n] \{ \delta w^{n+2} \} \quad (\text{C.3})$$

$$\left\{ \left( f_1 \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^k \right\} = \sum_{n=0}^k [C_3^{kn}] [G_x^{n+1}] \{ \delta w^{n+1} \} \quad (\text{C.4})$$

$$\left\{ \left( f_2 \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^k \right\} = \sum_{n=0}^k [C_4^{kn}] [G_y^{n+1}] \{ \delta w^{n+1} \} \quad (\text{C.5})$$

$$\left\{ \left( K_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^k \right\} = \sum_{n=0}^k [C_5^{kn}] [G_x^{n+1}] [G_y^{n+2}] \{ \delta w^{n+2} \} \quad (\text{C.6})$$

où  $[C_1^{kn}]$ ,  $[C_2^{kn}]$ ,  $[C_3^{kn}]$ ,  $[C_4^{kn}]$ , et  $[C_5^{kn}]$  dépendent respectivement des coefficients de Taylor de  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $f_1$ ,  $f_2$  et  $K_{12}$ , qui sont des fonctions connues .

Notons :

$$[D^{kn}] = [C_1^{kn}] [A_x^n] + [C_2^{kn}] [A_y^n] + 2[C_5^{kn}] [G_x^{n+1}] [G_y^{n+2}]$$

et

$$[E^{kn}] = [C_4^{kn}] [G_y^{n+1}] + [C_3^{kn}] [G_x^{n+1}] \quad (\text{C.7})$$

On déduit que :

---


$$\left\{ (div(K\nabla\delta w))^k \right\} = \sum_{n=0}^k [D^{kn}] \{\delta w^{n+2}\} + \sum_{n=0}^k [E^{kn}] \{\delta w^{n+1}\} \quad (C.8)$$

A chaque itération, le problème linéaire à résoudre (4.28), devient alors :

$$\sum_{n=0}^k [D^{kn}] \{\delta w^{n+2}\} + \sum_{n=0}^k [E^{kn}] \{\delta w^{n+1}\} = \{R^k\} \quad (C.9)$$

Décomposition du vecteur  $\{\delta w^k\}$  en variables principale et secondaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\delta w^0\} = \{v^0\} \\ \{\delta w^1\} = \{v^1\} \\ \{\delta w^k\} = [S^{1k}]\{v^k\} + [S^{2k}]\{w^k\} \quad \forall k \geq 2 \end{array} \right. \quad (C.10)$$

En injectant (C.10) dans (C.9) on aboutit finalement à :

$$\sum_{n=0}^k [F^{kn}] \{v^{n+2}\} + \sum_{n=0}^k [P^{kn}] \{v^{n+1}\} + \sum_{n=0}^k [Q^{kn}] \{w^{n+2}\} + \sum_{n=0}^k [L^{kn}] \{w^{n+1}\} = \{R^k\} \quad (C.11)$$

avec

$$[F^{kn}] = [D^{kn}][S^{1n+2}] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, 2) \quad (\text{C.12})$$

$$[Q^{kn}] = [D^{kn}][S^{2n+2}] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, n+1) \quad (\text{C.13})$$

$$[P^{kn}] = [E^{kn}][S^{1n+1}] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, 2) \quad (\text{C.14})$$

$$[L^{kn}] = [E^{kn}][S^{1n+1}] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, n) \quad (\text{C.15})$$

L'égalité (C.11) est équivalent à :

$$\sum_{n=2}^{k+2} [F^{kn-2}]\{v^n\} + \sum_{n=1}^{k+1} [P^{kn-1}]\{v^n\} + \sum_{n=2}^{k+2} [Q^{kn-2}]\{w^n\} + \sum_{n=1}^{k+1} [L^{kn-1}]\{w^n\} = \{R^k\} \quad (\text{C.16})$$

Posons :

---


$$[Z^{kn}] = [Q^{kk}]^{-1} [[Q^{kn-2}] + [L^{kn-1}]] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, n-1) \quad (\text{C.17})$$

$$[H^{kn}] = [Q^{kk}]^{-1} [[F^{kn-2}] + [P^{kn-1}]] \quad \text{matrice de dimension } (k+1, 2) \quad (\text{C.18})$$

De cette dernière équation (C.16), on déduit  $\{w^{k+2}\}$  en fonction de  $\{w^n\}$  et  $\{v^n\}$  ( $n \leq k+1$ ):

$$\{w^{k+2}\} = -[Q^{kk}]^{-1}\{v^{k+2}\} - [Q^{kk}]^{-1}\{v^1\} + [Q^{kk}]^{-1}\{R^k\} - \sum_{n=2}^{k+1} [Z^{kn}]\{w^n\} - \sum_{n=2}^{k+1} [H^{kn}]\{v^n\} \quad (\text{C.19})$$

L'équation (C.19) est une relation de récurrence obtenue sur les  $\{w^k\}$ , Nous allons tenter de chercher  $\{w^k\}$  sous la forme :

$$\{w^k\} = \sum_{i=1}^k [B^{ki}]\{v^i\} + \{\Gamma^k\} \quad (\text{C.20})$$

En injectant cette dernière équation dans (C.19) et puisque  $\{w^0\} = 0$  et  $\{w^1\} = 0$ , on déduit par identification les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [B^{k+2k+2}] = -[Q^{kk}]^{-1}[F^{kk}] \quad \forall k \geq 0 \\ [B^{k+21}] = -[Q^{kk}]^{-1}[P^0] - \sum_{n=2}^{k+1}[Z^{kn}][B^{n1}] \quad \forall k \geq 1 \\ [B^{k+2n}] = -[H^{kn}] - \sum_{i=n}^{k+1}[Z^{ki}][B^{in}] \quad \forall k \geq 1; \forall n \geq 2 \\ [\Gamma^{k+2}] = [Q^{kk}]^{-1}\{R^k\} - \sum_{n=2}^{k+1}[Z^{kn}]\{\Gamma^n\} \quad \forall k \geq 1 \end{array} \right. \quad (\text{C.21})$$

Dans cette formule (C.21), il manque les éléments  $\{\Gamma^2\}, [B^{22}], [B^{21}]$  pour un bon démarrage des calculs ; pour cette raison, nous allons revenir sur les équations (C.16) et (C.20) en fixant  $k = 0$

Étant donné que  $\{w^0\} = 0, \{w^1\} = 0$ , on a :

$$(C.16) \implies \{R^0\} = [Q^{00}][F^{00}]\{v^2\} + [Q^{00}]^{-1}[P^{00}]\{v^1\} + \{w^2\} \quad (\text{C.22a})$$

$$(C.20) \implies \{w^2\} = [B^{21}]\{v^1\} + [B^{22}]\{v^2\} + \{\Gamma^2\} \quad (\text{C.22b})$$

et on obtient par identification

---


$$\left\{ \begin{array}{l} \{\Gamma^2\} = [Q^{00}]^{-1}\{R^0\} \\ [B^{22}] = -[Q^{00}]^{-1}[F^{00}] \\ [B^{21}] = -[Q^{00}]^{-1}[P^{00}] \end{array} \right. \quad (\text{C.23})$$

A présent, on remplace les variables secondaires par leur expression dans l'inconnue

$\delta w(x, y)$ , ce qui donne :

$$\delta w(x, y) = \sum_{k=0}^N \langle X^k \rangle [S^{1k}] \{v^k\} + \sum_{k=0}^N \langle X^k \rangle [S^{2k}] \{w^k\}$$

$$\delta w(x, y) = \{v^0\} + \sum_{k=1}^N \langle X^k \rangle [S^{1k}] \{v^k\} + \sum_{k=2}^N \sum_{r=1}^k \langle X^k \rangle [S^{2k}] [B^{kr}] \{v^k\} + \sum_{k=2}^N \langle X^k \rangle [S^{2k}] \{\Gamma^k\}$$

### Posons

$$[D^k] = \sum_{n=\max\{2,k\}}^N \langle X^n \rangle [S^{2nk}] [B^{nk}]$$

$$P_s(x, y) = \sum_{k=2}^N \langle X^k \rangle [S^{2k}] \{\Gamma^k\}$$

$$P_0(x, y) = 1$$

$$P_k(x, y) = \sum_{k=1}^N [\langle X^k \rangle [S^{1k}] + [D^k]] \quad \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta w(x, y) = P_s(x, y) + P_0(x, y)\{v^0\} + P_k(x, y)\{v^k\}} \quad (\text{C.24})$$

On déduit que puisque  $w(x, y) = v(x, y) + \delta u(x, y)$  :

$$\boxed{w(x, y) = P_s(x, y) + P_0(x, y)\{v^0\} + \langle P_k(x, y) \rangle \{v^k\} + v(x, y)} \quad (\text{C.25})$$

Les polynômes  $P_i(x, y)$  et  $P_s(x, y)$  constituent donc les fonctions de forme obtenue par la méthode de perturbation. Le polynôme  $P_s(x, y)$  provient du second membre, c'est donc une solution particulière du problème. L'équation (C.25) est la solution en déplacement du problème initial (4.20).

En résumé, on est arrivé à partir de l'équation (4.42) à écrire l'inconnue  $\delta w(x, y)$  en fonction de  $2N + 1$  coefficients inconnus au lieu de  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$ .

# Bibliographie

- [1] A. Griewank. Evaluating derivatives : principles and techniques of algorithmic differentiation frontiers in applied mathematics. *SIAM, Philadelphia*, 19, 2000.
- [2] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. *Méthode des éléments finis*. Hermes, 2005.
- [3] O. C. Zienkiewicz, B. M. Irons, F. C. Scott, and J. S. Campbell. Three-dimensional stress analysis. *Proc IUTAM Symp. High Speed Computing of Elastic Structure, Liège*, pages 413–431, 1970.
- [4] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method : diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10 :307–318, 1992.
- [5] T. Belytschko, Y. Y. Lu, and L. Gu. Element free Galerkin Methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37 :229–256, 1994.
- [6] J. M. Melenk and I. Babuska. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314, 1996.
- [7] T. Liszka and J. Orkisz. The finite difference method at arbitrary irregular grids

- and its application in applied mechanics. *Computers & Structures*, 11 :83 – 95, 1980.
- [8] E. J. Kansa. Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates. *Computers Mathematics with Applications*, 19 :127 – 145, 1990.
- [9] E. J. Kansa. Multiquadrics - A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers Mathematics with Applications*, 19 :147 – 161, 1990.
- [10] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of fusion process. *The Astrophysical Journal*, 88 :1013–1024, 1977.
- [11] J. J. Monaghan. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*, 48 :89 – 96, 1988.
- [12] R. A. Gingold and J. J. Monaghan. Kernel estimates as a basis for general particle methods in hydrodynamics. *Computer Physics Communications*, 46 :429–453, 1982.
- [13] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley, Chichester, 1999.
- [14] C. A. Brebbia. *The Boundary Element Method for Engineers*. Pentech Press., 1978.
- [15] M. A. Golberg and C. S. Chen. The method of fundamental solutions for potential, Helmholtz and diffusion problems. *Boundary Integral Methods- Numerical and mathematical Aspects, Computational Mechanics Publications*, pages 103–176, 1998.

- 
- [16] M. A. Golberg, C. S. Chen, and H. Bowman. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 23 :285 – 296, 1999.
- [17] D. S. Zézé. *Calcul de fonctions de formes de haut degré par une technique de perturbation*. PhD thesis, Université Paul Verlaine Metz, 2009.
- [18] D.S. Zézé, M. Potier-Ferry, and N. Damil. A boundary meshless method with shape functions computed from the PDE. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 :747 – 754, 2010.
- [19] T. Belyshko, Y. Kronganz, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39 :3–47, 1996.
- [20] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor. *The finite element method, basic formulations and linear problems*. Mc-Graw Hill, 1989.
- [21] K. J. Bathe. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, 1996.
- [22] J. L. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis : Solides élastiques*. Hermès, 1990.
- [23] I. Babuska, B. A. Szabo, and L. N. Katz. The p-version of finite element method. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 18 :515–545, 1981.
- [24] C. Schwab and M. Suri. The p and hp versions of the finite element method for problem with boundary layers. *Mathematics of Computation*, 65 :1403–1429, 1996.
- [25] S. T. Raveendra. An efficient indirect boundary element technique for multi-frequency acoustic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44 :59–76, 1999.

- [26] S. Li. An efficient technique for multi-frequency acoustic analysis by boundary element method. *Journal of Sound Vibration*, pages 971–980, 2005.
- [27] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2) :295 – 315, 1995.
- [28] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, and M. Tabbara. Element-free galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 32 :2547–2570, 1995.
- [29] J. Pamin, H. Askes, and R. Borst. Two gradient plasticity theories discretized with the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :2377–2403, 2003.
- [30] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. *ACM National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [31] W. K. Liu, S. Jun, and Y. F. Zhang. Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 :1081–1106, 1995.
- [32] W. K. Liu, W. Han, H. Lu, S. Li, and J. Cao. Reproducing kernel element method. Part I : Theoretical formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 :933 – 951, 2004.
- [33] E. Barbieri and M. Meo. Evaluation of the integral terms in reproducing kernel methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :2485 – 2507, 2009.
- [34] S. N. Atluri and T. Zhu. A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22 :117–127, 1998.
- [35] N. Sukumar, B. Moran, and T. Belytschko. The natural element method in solid mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43 :839–887, 1998.

- 
- [36] J. Yvonnet, F. Chinesta, Ph. Lorong, and D. Ryckelynck. The constrained natural element method (C-NEM) for treating thermal models involving moving interfaces. *International Journal of Thermal Sciences*, 44 :559 – 569, 2005.
- [37] D. P. N. Kontoni, P. W. Partridge, and C. A. Brebbia. The dual reciprocity boundary element method for the eigenvalue analysis of Helmholtz problems. *Advances in Engineering Software and Workstations*, 13 :2–16, 1991.
- [38] M. A. Golberg. The method of fundamental solutions for Poisson’s equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 16 :205 – 213, 1995.
- [39] C. S. Chen. The method of fundamental solution for nonlinear thermal explosion. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 1 :675–681, 1995.
- [40] M. A. Golberg, C. S. Chen, and S. R. Karur. Improved multiquadric approximation for partial differential equations. *Engineering analysis with boundary elements*, 18 :9–17, 1996.
- [41] J. Li, Y. C. Hon, and C. S. Chen. Numerical comparisons of two meshless methods using radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 26 :205 – 225, 2002.
- [42] G. Fairweather, A. Karageorghis, and P. A. Martin. The method of fundamental solutions for scattering and radiation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27 :759 – 769, 2003.
- [43] H. Wang and Q. H. Qin. A meshless method for generalized linear or nonlinear Poisson-type problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30 :515 – 521, 2006.
- [44] M. A. Golberg and C. S. Chen. An efficient meshfree method for non linear reaction-diffusion equations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2 :87–95, 2001.

- [45] K. Balakrishnan and P. A. Ramachandran. Osculatory Interpolation in the Method of Fundamental Solution for Nonlinear Poisson Problems. *Journal of Computational Physics*, 172 :1 – 18, 2001.
- [46] A. Tri, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. Perturbation technique and method of fundamental solution to solve nonlinear Poisson problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35 :273 – 278, 2011.
- [47] A. Tri, H. Zahrouni, and M. Potier-Ferry. High order continuation algorithm and meshless procedures to solve nonlinear Poisson problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 :1705 – 1714, 2012.
- [48] K. Shanazari and M. Fallahi. A quasi-linear technique applied to the method of fundamental solution. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34 :388 – 392, 2010.
- [49] J.T. Katsikadelis and C.B. Kandilas. Solving the plane elastostatic problem by the analog equation method. *Computers & Structures*, 64 :305 – 312, 1997.
- [50] S. P. Hu, C. M. Fan, and D. L. Young. The meshless analog equation method for solving heat transfer to molten polymer flow in tubes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53 :2240 – 2247, 2010.
- [51] R. Vertnik, M. Založnik, and B. Sarler. Solution of transient direct-chill aluminium billet casting problem with simultaneous material and interphase moving boundaries by a meshless method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30 :847 – 855, 2006.
- [52] X. Zhang, X. H. Liu, K. Z. Song, and M. W. Lu. Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51 :1089–1100, 2001.

- 
- [53] M. Muskhelishvili. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. *Noordhoff, Groningen*, pages 113–115, 1958.
- [54] P. R. Amestoy, I. S. Duff, J. Y. L'Excellent, and J. Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23 :15–41, 2001.
- [55] Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver (MUMPS). Available from : <http://graal.enslyon.fr/MUMPS/index.html>.
- [56] D. Stefanica. Parallel feti algorithms for mortars. *Applied Numerical Mathematics*, 54(2) :266 – 279, 2005.
- [57] C. Farhat and F. X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32 :1205–1227, 1991.
- [58] C. Bernardi, Y. Maday, and A. T. Patera. A new nonconforming approach to domain decomposition : the mortar element method, in *Nonlinear "Partial Differential Equations and Their Applications"*. H. Brezis & J.-L. Lions eds., Pitman, pages 13–51, 1994.
- [59] H. Ben-Dhia. Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326 :899 – 904, 1998.
- [60] H. Ben-Dhia and G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332 :649 – 654, 2001.
- [61] H. Ben-Dhia and O. Jamond. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 :1403 – 1414, 2010.

- [62] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E. M. Daya. Multi-scale modelling of sandwich structures using the Arlequin method Part I : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45 :37 – 51, 2008.
- [63] S. Prudhomme, H. Ben-Dhia, P. T. Bauman, N. Elkhodja, and J. T. Oden. Computational analysis of modeling error for the coupling of particle and continuum models by the Arlequin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :3399 – 3409, 2008.
- [64] H. Qiao, Q. D. Yang, W. Q. Chen, and C. Z. Zhang. Implementation of the Arlequin method into ABAQUS : Basic formulations and applications. *Advances in Engineering Software*, 42 :197 – 207, 2011.
- [65] P. Bauman, H. Ben-Dhia, N. Elkhodja, J. Oden, and S. Prudhomme. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Computational Mechanics*, 42 :511–530, 2008.
- [66] P. A. Guidault and T. Belytschko. Bridging domain methods for coupled atomistic-continuum models with  $L^2$  or  $H^1$  couplings. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77 :1566–1592, 2009.
- [67] C. Hunter and B. Guerrieri. Deducing the Properties of Singularities of Functions From Their Taylor Series Coefficients. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 39(2) :248–263, 1980.
- [68] G. A. Baker and P. Graves-Morris. *Padé Approximants*. Cambridge University Press, 1996.
- [69] C. Domb and M. F. Sykes. Use of Series Expansions for the Ising Model Susceptibility and excluded volume problem. *Journal of Mathematical Physics*, 2 :63–67, 1961.

- 
- [70] D. Garajeu, B. Cochelin, and M. Medale. Analyse et amélioration des séries. Technical report, Laboratoire de Mécanique et d' Acoustique, 2010.
- [71] M. Van Dyke. Analysis and improvement of perturbation series. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 27 :423–450, 1974.
- [72] J. J. Gervais and H. Sadiky. A new steplength control for continuation with the asymptotic numerical method. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22 :207–229, 2002.
- [73] B. Cochelin, N. Damil, and M. Potier-Ferry. *Méthode asymptotique numérique*. Hermes, 2007.
- [74] J. L. Lopez and E. P. Sinusia. Two-point taylor expansions in the asymptotic approximation of double integrals. application to the second and fourth appell functions. *J. Math. Anal. Appl*, 339 :530–541, 2008.
- [75] J. L. Lopez, E. P. Sinusia, and N. M. Temme. Multi-point taylor approximations in one-dimensional linear boundary value problems. *Applied Mathematics and Computation*, 207 :519–527, 2009.
- [76] F. Costabile and A. Napoli. Solving bvps using two-point taylor formula by a symbolic software. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 210 :136–148, 2007.
- [77] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, and S. Belouettar. Convergence analysis and detection of singularities within a boundary meshless method based on Taylor series. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36 :1465 – 1472, 2012.
- [78] Y. Tampango, M. Potier-Ferry, Y. Koutsawa, and S. Belouettar. A new meshless method using taylor series to solve elasticity problems. *European Journal of Computational Mechanics (à paraître)*, 2012.

- [79] I. Babuska and W. C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12 :1597–1615, 1978.
- [80] J. Salençon. *Mécanique des Milieux Continus*. Editions de l’Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2001.
- [81] H. M. Buecker, G. Corliss, P. Hovland, U. Naumann, and B. Norris. Automatic differentiation : Applications, theory, and tools. *Computational Science and Engineering*, 2005.
- [82] R. Steiger, C. H. Bischof, B. Lang, and W. Thiel. Using automatic differentiation to compute derivatives for a quantum-chemical computer program. *Future Generation Computer Systems*, 21 :1324 – 1332, 2005.
- [83] I. Charpentier and M. Potier-Ferry. Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l’approche Diamant. *Comptes Rendus Mécanique*, 336 :336 – 340, 2008.
- [84] A. Lejeune, H. Boudaoud, M. Potier-Ferry, I. Charpentier, and H. Zahrouni. Automatic solver for non-linear partial differential equations with implicit local laws. Application to unilateral contact. *Soumis à International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2012.

## Résumé

Ces dernières décennies, de nouvelles méthodes numériques connues sous le nom de « méthodes sans maillage » ont été développées. Contrairement à la MEF, ces méthodes n'utilisent qu'un ensemble de noeuds répartis dans le domaine sans demander un maillage de celui-ci. Jusqu'à présent, aucune de ces méthodes n'est parvenue à satisfaire les utilisateurs de la MEF. Dans cette thèse, nous proposons une méthode sans maillage, utilisant les approximations de Taylor. Cette méthode a l'avantage de n'utiliser que des points sur la frontière. En effet, l'EDP est résolue sous sa forme forte dans le domaine et les conditions aux limites sont appliquées par la méthode des moindres carrés. Cette méthode a été introduite, il y a 3 ans par S. Zeze dans sa thèse. Les tests académiques effectués en linéaire ont montré que cette méthode est très précise et que la convergence est améliorée en augmentant le degré, comme dans la p-version des EF. Nos travaux de thèse sont une suite des travaux de S. Zeze et ils visent à rendre plus robuste la méthode et aussi à élargir son champ d'application. Dans un premier temps, nous faisons une analyse mathématique de la méthode. Cette analyse passe par l'analyse des séries calculées. Le but de cette analyse est d'évaluer le domaine de convergence de la solution. Les résultats obtenus ont montré que pour certains problèmes, il faut subdiviser le domaine en quelques sous-domaines et faire une résolution par sous-domaine. La suite de nos travaux a donc été d'établir une technique de raccordement qui permettra d'assurer les conditions de transmission aux interfaces, dans le cas d'une résolution par sous-domaine. En dernière partie, nous étendons l'application de la méthode aux problèmes non linéaires, en la couplant à une méthode de linéarisation.

**Mots-clés:** Méthodes sans maillages, série de Taylor, méthode de raccord, analyse de convergence, diagrammes de Domb Sykes, approximation de Padé, élasticité non linéaire, méthodes de collocations, méthode "boundary only".

## Abstract

In these last decades, new numerical methods known as « meshless methods » have been developed. Contrary to the FEM, these methods use only a set of nodes in the domain, without need of any mesh. Until now, any of these methods has not convinced users of FEM. In this paper, we present a new meshless method using Taylor series expansion. In this method, the PDE is solved quasi exactly in the domain and the boundary conditions are applied by using a least square method. Then only the boundary discretisation is needed so the proposed method is a « true boundary meshless method ». This technique has been proposed for the first time by S. Zeze in his PhD thesis. The study of some linear problems has shown that this technique leads to a very good accuracy and that the convergence can be improved by increasing approximation degree. Our work is a continuation of S. Zeze work, and it consists to make the proposed method more robust and to extend its range of application. For that, we first make an analysis of the series computed by the method. The aim of this analysis was to evaluate the domain of validity of these series. This analysis showed that, for some problems, an accuracy cannot be obtained without splitting the domain in subdomains and making a resolution by subdomains. Therefore the second part of our work was to define a technique which will ensure the continuity at the interface between subdomains, in the case of a resolution by subdomains. The last part of our work was dedicated to non-linear problems. We establish an algorithm to show how the proposed method can deal with non linear-problems.

**Keywords:** Meshless method, Taylor series expansion, junction method, convergence analysis of series, Domb Sykes plot, Padé approximants, non linear elasticity, collocation methods, "boundary only".